

**ADVERTIMENT.** La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX ([www.tesisenxarxa.net](http://www.tesisenxarxa.net)) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

**ADVERTENCIA.** La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR ([www.tesisenred.net](http://www.tesisenred.net)) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

**WARNING.** On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX ([www.tesisenxarxa.net](http://www.tesisenxarxa.net)) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author



Departament de Matemàtica  
Aplicada IV

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

# UNA FORMALITZACIÓ DE LES CONSTRUCCIONS GEOMÈTRIQUES

E. Tramuns

DIRECTOR DE LA TESI  
J. Guàrdia

PROGRAMA DE DOCTORAT  
Matemàtica Aplicada

Barcelona, juliol de 2012



Facultat de Matemàtiques  
i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA



*Al Ramon, al Bernat i a l'Oriol.*



# Agraïments

Aquest treball és el resultat final d'un gran i llarg esforç. En primer lloc, vull agrair al meu director de tesi, Jordi Guàrdia, la seva dedicació i el seu suport. Vull expressar també el meu agraïment al Joan-Carles Lario perquè si no fos per ell potser no hagués arribat fins aquí. També dono les gràcies a l'Oriol Serra pel seu vot de confiança i la seva intervenció en moments claus d'aquest recorregut. Al Simeon Ball, li agraeixo el seu suport i la seva ajuda, fruit de la seva gran capacitat d'anàlisi. Vull agrair a la Montse Vela i al Clemens Huemer la lectura de la memòria i els seus encertats suggeriments. El meu agraïment també al Pau Fernández, per ser un gran científic i per encomanar-me el seu entusiasme. Agraeixo a la Susana López la seva ajuda mitjançant el seu rigor i els seus recursos com a matemàtica, i també la seva companyia i suport. A l'Alícia Miralles, a la Cristina Padilla, al Miquel Rius i a la Sara Arias de Reyna vull agrair-los el seu suport, els bons consells, i la bona companyia al llarg d'aquest camí. El meu agraïment també a la Cristina Dalfó, a la Sonia Perez i a la Rosa Maria Ros pel seu suport i la seva ajuda. Agraeixo al Roger Agustín que m'hagi ensenyat a fer blogs. Dono les gràcies al servei de correcció lingüística de la Universitat Politècnica de Catalunya per la revisió del contingut de la memòria.

Vull agrair a la Begoña i a la Pilar el seu suport, perquè de ben segur que sense elles no hagués pogut acabar aquest projecte. A la Sonia, al Xavi i a la Brigitte també els agraeixo la seva ajuda.

Faig extensiu el meu agraïment també a les meves amigues de l'ànima Carol, Isabel, Alícia, i Sònia per fer-me costat i per la força i els ànims que m'han transmès.

Expresso la meva gratitud profunda a la meva família: al Ramon, al Bernat i a l'Oriol. Ells m'han donat força i suport i m'han facilitat l'espai necessari per poder concloure aquest projecte.

Vull agrair a la meva mare el seu suport, la seva paciència i confiança. I al meu pare, el seu suport, la seva confiança i la seva disponibilitat.

Finalment, gràcies als meus avis; i gràcies a la Maria, a l'Ignasi i a l'Ona, per ser-hi.

Barcelona, juny de 2012



# Índex

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducció</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 Axiomes, construccions, eines i mapes</b>                | <b>9</b>  |
| 1.1 Els objectes geomètrics bàsics . . . . .                  | 9         |
| 1.2 Els objectes aritmètics bàsics . . . . .                  | 10        |
| 1.3 Axiomes . . . . .   | 10        |
| 1.4 Algebraicitat i irreductibilitat dels axiomes . . . . .   | 11        |
| 1.5 Catàleg d'axiomes . . . . .                               | 13        |
| 1.5.1 Axiomes bàsics de construcció . . . . .                 | 13        |
| 1.5.2 Axiomes bàsics d'intersecció . . . . .                  | 15        |
| 1.5.3 Comentaris sobre alguns axiomes . . . . .               | 16        |
| 1.5.4 Ordenació dels elements generats pels axiomes . . . . . | 16        |
| 1.6 eines . . . . .   | 19        |
| 1.7 Un exemple de formalització: el regle marcat . . . . .    | 20        |
| 1.8 Subeina. Unió d'eines . . . . .                           | 21        |
| 1.9 Construccions . . . . .                                   | 22        |
| 1.10 Construccions i eines generalitzades . . . . .           | 25        |
| 1.11 Mapes . . . . .  | 26        |
| <b>2 Catàleg d'eines</b>                                      | <b>29</b> |
| 2.1 eines clàssiques . . . . .                                | 29        |
| 2.1.1 Regle . . . . .   | 29        |
| 2.1.2 Compàs . . . . .  | 30        |
| 2.1.3 Regle i compàs . . . . .                                | 30        |
| 2.1.4 Compàs euclidià . . . . .                               | 30        |
| 2.1.5 Regle i compàs euclidià . . . . .                       | 31        |
| 2.1.6 Compàs fix . . . . .                                    | 31        |
| 2.1.7 Regle i compàs fix . . . . .                            | 31        |
| 2.1.8 Regle i compàs de punta seca . . . . .                  | 31        |
| 2.1.9 Regle marcat . . . . .                                  | 32        |
| 2.1.10 Escaire . . . . .                                      | 32        |
| 2.1.11 Angle . . . . .  | 32        |
| 2.2 eines modernes . . . . .                                  | 32        |



|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.2.1    | Origami . . . . .  | 33        |
| 2.2.2    | Origami thalià . . . . .                                     | 33        |
| 2.2.3    | Origami pitagòric . . . . .                                  | 33        |
| 2.2.4    | Origami angular . . . . .                                    | 33        |
| 2.2.5    | Regle i el·lipses . . . . .                                  | 34        |
| 2.2.6    | Còniques . . . . .   | 34        |
| 2.2.7    | Regle marcat i compàs . . . . .                              | 35        |
| <b>3</b> | <b>Classificació de les eines</b>                            | <b>37</b> |
| 3.1      | Classificació geomètrica de les eines . . . . .              | 37        |
| 3.2      | Teoremes sobre compassos . . . . .                           | 39        |
| 3.3      | Teoremes sobre regles . . . . .                              | 44        |
| 3.4      | Origami versus compàs . . . . .                              | 48        |
| 3.5      | Subeines minimalis . . . . .                                 | 48        |
| <b>4</b> | <b>Mapes</b>   | <b>51</b> |
| 4.1      | Propietats dels mapes . . . . .                              | 51        |
| 4.2      | Classificació aritmètica de les eines . . . . .              | 52        |
| 4.3      | Aplicacions de la signatura . . . . .                        | 56        |
| 4.4      | Estudi asimptòtic dels mapes . . . . .                       | 60        |
| <b>5</b> | <b>Mesures</b>   | <b>65</b> |
| 5.1      | Mesures associades a eines . . . . .                         | 65        |
| 5.2      | Mesures intrínseques de les construccions . . . . .          | 69        |
| 5.3      | Construccions simples . . . . .                              | 71        |
| 5.4      | Relació amb la <i>simplicitat</i> de Lemoine . . . . .       | 74        |
| 5.5      | Anàlisi i optimització d'un construcció . . . . .            | 75        |
| 5.6      | Mesures de punts i corbes d'un mapa . . . . .                | 77        |
| 5.7      | Mesures de les construccions algebraiques bàsiques . . . . . | 81        |
| <b>6</b> | <b>El mapa del compàs fix</b>                                | <b>83</b> |
| 6.1      | Elecció del conjunt inicial . . . . .                        | 83        |
| 6.2      | Descripció dels punts construïbles . . . . .                 | 84        |
| 6.3      | Invariants dels punts . . . . .                              | 87        |
| 6.4      | Dos corollaris geomètrics . . . . .                          | 88        |
|          | <b>Annexos</b>   | <b>89</b> |
| <b>A</b> | <b>El verging</b>  | <b>91</b> |
| A.1      | Verging amb regle marcat . . . . .                           | 91        |
| A.2      | Verging amb angle . . . . .                                  | 95        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>B</b> | <b>Conjunts construïbles</b>                               | <b>97</b>  |
| B.1      | L'anell dels enters d'Eisenstein . . . . .                 | 97         |
| B.2      | El cos dels nombres euclidians . . . . .                   | 97         |
| B.3      | El cos dels nombres pitagòrics . . . . .                   | 98         |
| B.4      | El cos dels nombres de Viète . . . . .                     | 98         |
| <b>C</b> | <b>Atles de mapes</b>                                      | <b>99</b>  |
| C.1      | Mapes d'eines clàssiques . . . . .                         | 99         |
| C.1.1    | Regle . . . . .  | 99         |
| C.1.2    | Compàs . . . . .   | 100        |
| C.1.3    | Regle i compàs . . . . .                                   | 100        |
| C.1.4    | Compàs euclidià . . . . .                                  | 100        |
| C.1.5    | Regle i compàs euclidià . . . . .                          | 101        |
| C.1.6    | Compàs fix . . . . .                                       | 101        |
| C.1.7    | Regle i compàs fix . . . . .                               | 101        |
| C.1.8    | Regle i compàs de punta seca . . . . .                     | 102        |
| C.1.9    | Regle marcat . . . . .                                     | 102        |
| C.1.10   | Regle i circumferència . . . . .                           | 103        |
| C.2      | Mapes d'eines modernes . . . . .                           | 103        |
| C.2.1    | Escaire . . . . .  | 103        |
| C.2.2    | Angle . . . . .  | 104        |
| C.2.3    | Origami . . . . .  | 104        |
| C.2.4    | Origami thalià . . . . .                                   | 105        |
| C.2.5    | Origami Pitagòric . . . . .                                | 105        |
| C.2.6    | Origami ciclotòmic . . . . .                               | 106        |
| C.2.7    | Regle i el·lipses . . . . .                                | 106        |
| C.2.8    | Regle marcat i compàs . . . . .                            | 106        |
| C.2.9    | Còniques . . . . .   | 107        |
| C.2.10   | Còniques per cinc punts . . . . .                          | 108        |
| <b>D</b> | <b>Catàleg de construccions</b>                            | <b>111</b> |
| D.1      | Construccions geomètriques bàsiques . . . . .              | 111        |
| D.1.1    | Triangle equilàter . . . . .                               | 112        |
| D.1.2    | Transport de distància . . . . .                           | 112        |
| D.1.3    | Punt doble . . . . .                                       | 113        |
| D.1.4    | Punt doble partint d'un triangle . . . . .                 | 115        |
| D.1.5    | Inversió d'un punt respecte d'una circumferència . . . . . | 115        |
| D.1.6    | Circumcentre d'un triangle . . . . .                       | 117        |
| D.1.7    | Simetria axial . . . . .                                   | 118        |
| D.1.8    | Mediatriu d'un segment . . . . .                           | 119        |
| D.1.9    | Punt mitjà . . . . .                                       | 120        |
| D.1.10   | Punt mitjà partint d'un trapezi . . . . .                  | 122        |
| D.1.11   | Peu de la perpendicular . . . . .                          | 122        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| D.1.12   | Bisecció d'un arc de circumferència . . . . .              | 123        |
| D.1.13   | Quadrat inscrit . . . . .                                  | 125        |
| D.1.14   | Recta paral·lela . . . . .                                 | 126        |
| D.1.15   | Recta perpendicular . . . . .                              | 130        |
| D.1.16   | Paral·lelogram . . . . .                                   | 131        |
| D.1.17   | Eix radical . . . . .                                      | 133        |
| D.1.18   | Rombe . . . . .  | 135        |
| D.1.19   | Triangle rectangle isòsceles . . . . .                     | 136        |
| D.1.20   | Bisecció d'un angle . . . . .                              | 137        |
| D.1.21   | Duplicació d'un angle . . . . .                            | 138        |
| D.1.22   | Punts de tall d'una recta amb una circumferència . . . . . | 139        |
| D.1.23   | Punts de tall de dues rectes . . . . .                     | 141        |
| D.1.24   | Projecció d'una distància sobre una recta . . . . .        | 141        |
| D.1.25   | Rotació . . . . .  | 142        |
| D.2      | Construccions aritmètiques . . . . .                       | 144        |
| D.2.1    | Suma . . . . .   | 144        |
| D.2.2    | Resta . . . . .  | 146        |
| D.2.3    | Producte de dues distàncies . . . . .                      | 148        |
| D.2.4    | Divisió de dues distàncies . . . . .                       | 150        |
| D.2.5    | Producte de dos nombres complexos . . . . .                | 152        |
| D.2.6    | Divisió de dos nombres complexos . . . . .                 | 155        |
| D.3      | Construccions algebraïques . . . . .                       | 157        |
| D.3.1    | Arrel quadrada d'una distància . . . . .                   | 157        |
| D.3.2    | Arrels quadrades de nombres complexos . . . . .            | 160        |
| D.3.3    | Arrel cúbica real d'una distància . . . . .                | 163        |
| D.3.4    | Trisecció d'un angle . . . . .                             | 167        |
| D.3.5    | Trisecció d'un angle (Arquimedes) . . . . .                | 169        |
| D.3.6    | Arrels cúbiques de nombres complexos . . . . .             | 170        |
| <b>E</b> | <b>Taules</b>  | <b>175</b> |
| E.1      | Taules d'axiomes . . . . .                                 | 175        |
| E.1.1    | Axiomes bàsics de construcció . . . . .                    | 175        |
| E.1.2    | Axiomes bàsics d'intersecció . . . . .                     | 176        |
| E.2      | Axiomes de les eines . . . . .                             | 178        |
| E.3      | Relacions entre eines . . . . .                            | 179        |
| E.4      | Conjunts de punts construïbles dels mapes . . . . .        | 180        |
| E.5      | Relacions entre mapes . . . . .                            | 181        |
|          | <b>Resum/Summary</b>                                       | <b>182</b> |

# Introducció

L'estudi de les construccions geomètriques és un tema clàssic que ha estat abordat per matemàtics de tots els temps, des de la Grècia antiga fins a l'actualitat. Entre les inquietuds geomètriques que neixen als temps antics destaca una curiositat principal: l'estudi de les construccions possibles amb regle i compàs. En aquest àmbit, Euclides explora una gran quantitat de construccions, i deixa un important llegat amb el seu tractat *Els Elements*.

Malgrat l'extensió del treball d'Euclides, queden problemes per resoldre, alguns dels quals captiven l'atenció dels matemàtics d'aquella època. Podem destacar-ne quatre de ben coneguts: la constructibilitat de polígons regulars, la trisecció de l'angle, la duplicació del cub i la quadratura del cercle.

El primer problema, la construcció de polígons regulars, planteja quins polígons regulars es poden construir amb un instrument determinat. La solució a aquesta pregunta, quan els instruments utilitzats són un regle i un compàs, la dona Gauss a finals del segle XVIII (cf. [16]). Posteriorment, trobem el treball de Pierpont, que generalitza el resultat de Gauss i caracteritza els polígons regulars construïbles amb l'ús de còniques (cf. [45]).

El segon problema, la trisecció de l'angle, consisteix en construir una recta que trisequi l'angle format per dues rectes donades. Malgrat que Gauss va anunciar la irresolubilitat d'aquest problema amb regle i compàs, no en va donar cap prova, i va ser Wantzel qui ho va demostrar (cf. [51]). Tot i que l'atenció es va centrar principalment en l'estudi d'aquest problema amb regle i compàs, també es va estudiar la possibilitat d'utilitzar altres tipus d'instruments. Un exemple el trobem en l'instrument anomenat regle marcat, un regle amb dues marques, que permet fer un procés de *verging*, (cf. [41]). Aquest tipus de procés fou usat per Pappus (cf. [41]), per Arquimedes (cf. [7]) i per Hipòcrates (cf. [44]) en la resolució de la trisecció de l'angle.

El tercer problema, la duplicació del cub, consisteix en construir un cub amb volum el doble del d'un cub construït inicialment. Wantzel (cf. [51]) va demostrar també la impossibilitat de resoldre aquest problema, quan els instruments permesos són un regle i un compàs.

Un altre enfoc utilitzat per tal d'estudiar la duplicació del cub, és el que admet una corba dibuixada inicialment. És a dir, es planteja si es pot resoldre la duplicació del cub amb un determinat instrument, però tenint una corba dibuixada. Una solució a aquest problema la tenim quan la corba inicialment dibuixada és la conoide de Nicomedes:

una vegada dibuixada, es pot construir l'arrel cúbica d'una distància, amb un regle i un compàs, o amb qualsevol instrument que ens permeti fer rectes perpendiculars (cf. [19]). Una altra solució equivalent a aquesta és la que planteja Baragar (cf. [7]): encara que no tinguem la concoide dibuixada, si disposem d'un regle marcat i d'un compàs, podem construir els punts de tall d'una concoide amb una recta o una circumferència, i d'aquesta manera obtenim una solució del problema de la duplicació del cub.

El quart problema, la quadratura del cercle, planteja la possibilitat de construir un quadrat amb àrea la mateixa que la d'un cercle donat. Amb la prova de la transcendència de  $\pi$ , demostrada per Lindemann l'any 1882, la impossibilitat de resoldre aquest problema amb regle i compàs queda provada.

Estretament lligada a aquests problemes clàssics trobem una altra qüestió important: la determinació dels conjunts de punts construïbles amb un instrument determinat. Més concretament, el que es pretén és caracteritzar el conjunt de tots els punts construïbles, partint d'un conjunt de punts i de corbes inicialment construït, en anar repetint de manera iterativa totes les operacions possibles que es poden dur a terme amb aquell instrument. Aquest problema té relació amb els anteriors, i la seva resolució implica, en cert sentit, la resolució dels altres.

Entre els resultats que destaquem sobre caracterització, tenim la del conjunt de punts construïbles amb regle i compàs [13]: un nombre és construïble amb regle i compàs si i només si es troba en una extensió de Galois de  $\mathbb{Q}$ , amb grau una potència de 2. Aquesta descripció permet deduir que no podem resoldre ni la trisecció de l'angle, ni la duplicació del cub ni la quadratura del cercle amb regle i compàs. Els polígons construïbles amb un regle i un compàs són els descrits per Gauss.

També en aquest mateix sentit, a les darreres dècades, un dels instruments més estudiat és l'origami. Tot i la primera descripció de les construccions possibles amb origami de Auckly i Cleveland (cf. [6]), no es demostra que es té una descripció exhaustiva de les operacions possibles fins l'any 2009 amb el treball d'Alperin i Lang [4]. La caracterització completa del conjunt de punts construïbles amb origami la conformen els treballs de Geretshlager (cf. [17]) i Alperin (cf. [2], [3]). Aquest conjunt el descriu Cox ([14]), utilitzant la teoria de Galois: un nombre és construïble amb origami si i només si es troba en una extensió de Galois de  $\mathbb{Q}$ , amb grau  $2^u 3^v$ , amb  $u, v \in \mathbb{Z}^+$ . Podem, doncs, resoldre la trisecció de l'angle i la duplicació del cub amb origami, però no la quadratura del cercle. Els polígons construïbles són els descrits per Pierpont, i són els mateixos que els construïbles amb còniques. Un resultat que cal destacar, amb origami, és la possibilitat de construir arrels d'equacions polinòmiques de grau qualsevol. Això s'aconsegueix en admetre dos o més plecs simultanis, operació habitual en origami (cf. [4]). Un exemple que il·lustra aquest fet el trobem en la quintisecció, descrita a [36].

L'ús de còniques com a instrument de construcció també ha donat lloc a resultats. D'entre els treballs relacionats amb el tema, cal destacar el de Videla [50], que estudia la constructibilitat amb còniques i en caracteritza el conjunt de punts construïbles. Amb còniques podem construir exactament els mateixos punts que amb origami i, per tant, resoldre els mateixos problemes, sempre que volguem construir només punts.

Podem destacar, en la informació que hem presentat, diversos aspectes importants. Hi ha conceptes que han estat utilitzats al llarg del temps, de manera natural, sense la necessitat d'una definició formal. Hem vist com s'utilitzen les paraules *problema*, *solució*, *instrument*, *construcció*, *constructibilitat*, sense haver-les definit prèviament.

Aquesta absència de formalització ha portat a una certa confusió en alguns aspectes que descrivim a continuació.

Encara que històricament no s'hi ha fet gaire èmfasi, totes les construccions fan servir un determinat conjunt inicial per començar a operar, ja sigui un conjunt de punts, o un conjunt de punts i de corbes. Aquest conjunt inicial és de cabdal importància: pot ser decisiu alhora de dictaminar la possibilitat o la impossibilitat de realitzar una construcció. Una observació d'aquest fet la trobem a [8], on Baston i Bostock descriuen quan es pot construir el punt mig d'un segment amb un regle, problema que en molts contextes es dona per irresoluble. Cal ser doncs molt precís a l'hora de descriure quin problema es vol estudiar, de quin conjunt inicial construït es parteix, i a quin conjunt es vol arribar.

A banda d'estudiar construccions concretes, hem vist també, que s'ha caracteritzat el conjunt de punts construïbles amb un instrument donat. S'ha parlat sempre de punts construïbles i mai de corbes construïbles. Aquest fet deixa incompleta la caracterització del que es pot construir amb un instrument donat, sobretot tenint en compte que les construccions de corbes no estan definides.

En la literatura s'observen diferents criteris respecte a la possibilitat d'utilitzar punts i corbes aleatoris en les construccions. Acceptar aquest tipus de construcció pot portar a modificar els conjunts de punts construïbles amb un instrument determinat. És necessària, doncs, una definició rigorosa de les operacions que es consideren vàlides amb un instrument i les que no.

Un altre aspecte que cal tenir en compte és que en la literatura trobem diferents definicions de *nombre construïble* amb un instrument: en algunes fonts els nombres construïbles són nombres complexos i s'identifiquen amb punts construïbles i en d'altres es considera que un nombre és construïble si és una distància entre punts construïbles, i, per tant, només es tenen en compte nombres reals. És important establir un criteri que eviti confusions.

Alguns autors han detectat certs aspectes dels que hem destacat, però amb algun instrument concret. Beeson [9] proposa una axiomatització de les construccions amb regle i compàs, i en fa una anàlisi des de l'òptica de la lògica formal, aspecte que no considerarem en aquesta memòria. Baston i Bostock [8] proposen una formalització de les construccions amb regle i compàs que s'apropa molt als nostres conceptes de construcció i de mapa, i fan èmfasi en la diferència entre admetre o no la construcció de punts aleatoris en les construccions.

Per altra banda, en tots els problemes que hem esmentat i que s'han abordat al llarg del temps, els estudis s'han centrat en determinar la possibilitat o impossibilitat de dur a terme una construcció amb un instrument físic donat, sense mirar les diferències entre les possibles construccions. Aquesta anàlisi dicotòmica amaga diferències estructurals, tan a nivell geomètric com aritmètic, dels processos pels quals es construeix

un punt o una corba. Sembla que només existeix un treball que caracteritza diferències entre les construccions amb regla i compàs, que és el de Émile Lemoine (cf. [39]), que defineix una mesura per comparar construccions, que anomena *geometrografia*. Aquesta mesura ha estat posteriorment utilitzada, en treballs de Mackay (cf. [40]) i, en el cas de la construcció de polígons regulars, per De Temple (cf. [15]).

## Continguts de la memòria

En aquest treball proposem un llenguatge nou que permet un tractament unificat de les construccions geomètriques i els instruments amb què es realitzen. Els conceptes geomètrics usuals en aquest camp tenen definicions formals naturals en el nostre llenguatge, que proporciona així un marc global per a l'estudi de les construccions. Introduïm classificacions geomètriques i aritmètiques dels instruments i proposem mesures de les construccions que permeten comparar-les des d'òptiques diverses.

El punt de partida del treball són les qüestions següents:

Què és un instrument? I una construcció? Què vol dir que un punt o una corba sigui construïble? Quin tipus de relació hi ha entre els instruments? Com afecta el conjunt inicial a l'anàlisi de les construccions possibles? Podem comparar les diferents construccions d'un mateix punt o d'una corba? Què és un problema? Que n'és una solució?

Els conceptes principals d'aquest treball són *axioma*, *construcció*, *eina* i *mapa*. Un axioma representa un procés geomètric elemental, que es pot fer amb una sola utilització d'un instrument geomètric. Una construcció és una successió finita d'axiomes que conté tota la informació necessària per descriure un procés geomètric complex. Els axiomes tenen un *grau*, que intuïtivament és el nombre màxim d'objectes que generen, però el grau es pot caracteritzar de forma rigorosa com el grau d'una certa varietat algebraica associada a l'axioma. Aquesta formalització converteix el grau en un invariant molt pràctic per a la classificació dels instruments geomètrics.

Una eina és un concepte abstracte que permet simbolitzar un instrument geomètric: una eina és una col·lecció d'axiomes, amb els quals podem resoldre determinats problemes, entenent un *problema* com una classe de construccions segons una certa relació d'equivalència. Els problemes resolubles amb una eina ens permeten classificar-la geomètricament.

El mapa és un objecte geomètric i aritmètic que està format per una eina i per un conjunt inicial finit de punts i de corbes. Els mapes tenen associades capes, compostes i generades iterativament per conjunts de punts i de corbes. La complexitat dels mapes i de les seves capes fa que la informació que se'n pot donar sigui sovint escassa. Donem, per a alguns mapes determinats, el creixement asimptòtic del cardinal del nombre de punts i de corbes de cada capa. En el cas del mapa del compàs fix, però, caracteritzem exactament els conjunts de punts i de corbes de cada capa del mapa. Introduïm una classificació dels mapes, que agrupa aquells que tenen el mateix conjunt de punts construïbles. A partir de la classificació dels mapes, introduïm una tercera

classificació de les eines, que anomenem equivalència aritmètica.

Un segon nivell del nostre llenguatge permet detallar i analitzar l'estructura de les construccions, així com donar-ne diverses mesures. Els conceptes de *nivell*, *llargada*, *ordre*, *rang* i *filtració* són bàsics per dur a terme aquesta anàlisi, i ens permeten donar criteris de minimalitat i optimalitat de construccions. Calculem aquestes mesures per a les construccions aritmètiques i algebraiques bàsiques i en deduïm relacions entre diferents capes dels mapes del regle i el compàs, l'origami i les còniques.

Al llarg del treball, il·lustrem els nostres conceptes amb nombrosos exemples d'eines, construccions i mapes. Per facilitar la lectura de la memòria, però, hem agrupat la major part dels exemples en catàlegs: un catàleg d'axiomes, un catàleg d'eines, un catàleg de mapes i un catàleg de construccions. Aquests catàlegs no poden pas ser exhaustius, però pretenen recollir els exemples més significatius dels diversos aspectes de la memòria.

La memòria es complementa amb un *blog* que conté animacions interactives de les construccions principals que apareixen a la tesi, i algunes demostracions purament calculístiques dutes a terme amb l'ordinador.

Aquest treball és una primera aportació a un repte de gran magnitud: formalitzar l'univers de les construccions geomètriques. Hem proposat un llenguatge nou, n'hem donat la gramàtica i el vocabulari bàsic i hem escrit algunes pàgines. Deixem les portes obertes a qui vulgui utilitzar-lo: podrà des de traduir tractats clàssics sobre polígons regulars fins a descriure instruments com l'espírograf.

## Contingut detallat dels capítols

Al primer capítol trobem les definicions formals bàsiques que s'utilitzen al llarg de tot el treball. El primer concepte que definim és el d'*axioma*. Separem els axiomes en dos tipus, els axiomes de construcció i els d'intersecció. Els axiomes de construcció descriuen les operacions elementals que es poden fer amb un instrument i generen conjunts finits ordenats de corbes, a partir de conjunts finits i ordenats de punts i de corbes. Els axiomes d'intersecció, en canvi, generen conjunts finits ordenats de punts, a partir de conjunts finits i ordenats de punts i de corbes. Per a cada axioma, proposem una ordenació dels objectes que genera. Aquesta ordenació es dedueix estrictament de la geometria del conjunt de punts i de corbes del qual parteix cada axioma. Tot i que els axiomes que descrivim estan vinculats a instruments coneguts, tal i com en plantejem la formalització, es poden introduir nous axiomes, sense necessitat de vincular-los a objectes físics. Cada axioma té un cert grau, entès com el nombre d'objectes que es generen quan s'aplica a objectes en posició general. Per definir rigorosament aquest grau, associem a cada axioma una varietat algebraica, el grau de la qual ens dóna el grau de l'axioma, i ens proporciona a més un criteri d'irreductibilitat.

Una vegada definit un axioma, formalitzem un instrument geomètric sota el concepte abstracte d'*eina*, definit com una parella de conjunts finits d'axiomes de construcció i d'intersecció. Introduïm la *signatura* d'una eina com el conjunt ordenat dels



graus dels seus axiomes.

Definim una construcció com una successió on cada terme descriu un procés determinat a partir d'un axioma. És a dir, cada terme conté un conjunt de punts i de corbes al qual s'aplica un axioma, l'axioma en concret, i el conjunt de punts i de corbes que s'obté en aplicar aquest axioma. Tenim, doncs, una descripció detallada de tots els passos que conformen una construcció geomètrica. Sabem de quin conjunt inicial de punts i de corbes partim, a quin conjunt volem arribar, els passos que hem de fer, i els punts i les corbes que intervenen en tot el procés. A més, aquesta definició té l'avantatge que admet tant la construcció de punts com la construcció de corbes. Cal aclarir, però, que processos amb un nombre de passos variable no són, per nosaltres, construccions. Aquest tipus de processos surten de manera natural en el context dels mapes. Tampoc considerarem com a construccions els processos pels quals s'obtenen punts o corbes que aproximem una solució desitjada. Aquest tipus de processos no formen part de la teoria axiomàtica de les construccions geomètriques, sinó de la pràctica. Per exemple, el mètode d'aproximació de nombres racionals de Fujimoto (cf. [27]) no admet una traducció com a construcció en el nostre llenguatge.

Alhora d'analitzar totes les construccions possibles amb una eina partint d'un conjunt fixat inicialment, i determinar, tant el conjunt de punts construïbles com el conjunt de corbes construïbles, definim el concepte de *mapa*. El mapa consta d'una eina amb un conjunt inicial. Deixa de ser un concepte purament geomètric, com és el cas de l'eina, i permet fer ús de l'aritmètica i de l'àlgebra.

Al segon capítol presentem la formalització com a eina dels principals instruments geomètrics considerats al llarg de la història. Per a cada eina donem una llista de les principals construccions que permet fer. Totes aquestes construccions es detallen a l'annex D.

Al tercer capítol definim els dos tipus de classificacions geomètriques de les eines, segons el tipus de construccions que es poden fer amb ella, l'*equivalència geomètrica* i l'*equivalència virtual*. La primera, l'equivalència geomètrica, agrupa les eines amb les quals es poden resoldre exactament els mateixos problemes. La segona, l'equivalència virtual, és similar a l'anterior, però es limita a les construccions de punts amb punts, és a dir, construccions en les quals tant el conjunt inicial com el conjunt final només contenen punts. No té en compte les corbes que es poden construir amb l'eina. Entre d'altres relacions, demostrem l'equivalència geomètrica del compàs i del compàs euclidià. Dins del context de les eines, podem donar una versió feble del teorema de Mohr-Mascheroni (cf. [42]) i del teorema de Poncelet-Steiner (cf. [12]). Presentem nous resultats, com per exemple, la no equivalència geomètrica de l'origami thalià i de l'origami, o la no equivalència virtual del regle marcat i del regle i el compàs fix.

Al quart capítol ens centrem en els aspectes aritmètics i algebraics dels mapes, i els classifiquem des del punt de vista aritmètic. Definim una relació d'equivalència entre aquests mapes, que agrupa aquells que tenen conjunts de punts construïbles iguals. Amb l'ús dels mapes definim un tercer tipus de relació d'equivalència entre eines que anomenem equivalència aritmètica de les eines. Donem demostracions en el nostre llenguatge dels teoremes de Mohr-Mascheroni i de Poncelet-Steiner. Amb l'ús de sig-

natura d'una eina, i del *grau* d'un objecte, conceptes algebraics, donem nous resultats sobre no-equivalència aritmètica d'eines.

Per a alguns mapes concrets presentem el creixement asimptòtic dels cardinals dels conjunts de punts i de corbes de les capes. Exposem també la relació entre l'estudi de les capes dels mapes i els problemes de geometria computacional.

Al cinquè capítol fem una anàlisi de les construccions i de la seva estructura. Al haver definit la noció de mapa i de capa d'un mapa, podem ordenar els objectes que formen part d'una construcció, i definir mesures extrínseques d'aquesta construcció. Definim el  $\mathcal{E}$ -nivell, el  $\mathcal{E}$ -nivell virtual, en relació a l'eina  $\mathcal{E}$  amb la que es fa la construcció, el nivell i nivell virtual d'una construcció. Per altra banda, la pròpia construcció té la seva estructura, independent de l'eina amb la qual s'hagi dut a terme. En aquest sentit definim la filtració d'una construcció i mesures intrínseques de la construcció: la llargada, l'ordre, l'amplada i el rang. Totes les mesures definides ajuden a comparar les construccions i poder definir les nocions de construcció  $\mathcal{E}$ -minimal i  $\mathcal{E}$ -optimal, que il·lustrem amb diversos exemples. La introducció de mesures en aquest context fa que es puguin associar mesures directament als punts i a les corbes construïbles. Definim el nivell i ordre d'un objecte construïble i provem resultats que relacionen el nivell d'un punt amb l'ordre d'unes construccions determinades.

Al final d'aquest capítol deduïm informació sobre el comportament de certs mapes, amb un estudi de les construccions algebraiques i aritmètiques bàsiques.

Al sisè capítol descrivim amb detall el mapa del compàs fix, en caracteritzem el conjunt de punts construïbles, l'ordre en el qual es van construïnt els punts i les corbes i els invariants dels punts.

Al final de la memòria, presentem cinc annexos. A l'annex A descrivim els processos de verging i les corbes clàssiques relacionades. A l'annex B recollim les principals estructures algebraiques que apareixen com a conjunts de punts construïbles amb els mapes presentats al treball. L'annex C és un catàleg de mapes, on descrivim els mapes vinculats a les eines presentades al capítol 2. L'annex D recopila una setantena de construccions geomètriques clàssiques, descrivint-les amb el nostre llenguatge. Per a cadascuna d'elles, detallem el problema que resolen, la demostració de la seva validesa (o bé en donem una referència a) i la filtració corresponent i les seves mesures. Finalment, a l'annex E presentem un recull de taules, esquemes i diagrames on sintetitzem les informacions referents als axiomes, les eines i els mapes.

La memòria es complementa amb un *blog* que conté informació diversa. La majoria de les construccions que apareixen al llarg en la tesi tenen una versió interactiva en el blog (accessible directament des de la versió digital de la tesi). El software *Geogebra* [26] ha estat imprescindible per a l'elaboració d'aquestes animacions. En el blog també hi ha construccions interactives de certes corbes que juguen un paper important en les construccions, com ara la concoide o el caragol de Pascal. Les demostracions de la irreductibilitat dels axiomes, que consisteixen en llargs càlculs fets amb el programa *Magma* [10], es troben també en el blog. Finalment, hi hem inclòs també les referències bibliogràfiques que contenen la base teòrica per a la comprensió del nostre llenguatge. L'adreça és <http://www.geometricconstructions.blogspot.com>.



# Capítol 1

## Axiomes, construccions, eines i mapes

En aquest capítol establim un nou llenguatge formal en el camp de les construccions geomètriques planes. En l'àmbit teòric, el concepte central és *eina*, que modelitza els instruments geomètrics. En l'àmbit de la pràctica, les eines s'apliquen a punts i corbes donats inicialment, cosa que dóna lloc al que anomenarem *mapes*. Les eines són objectes purament geomètrics, mentre que els mapes tenen característiques algebraiques i aritmètiques.

### 1.1 Els objectes geomètrics bàsics

En aquesta memòria estudiarem construccions geomètriques planes: processos geomètrics que a partir d'uns objectes inicials generaran nous objectes. Els objectes geomètrics que considerarem seran punts o corbes del pla afí.

En general, en descriure una construcció suposarem que els objectes a la que s'aplica són genèrics i, si cal, es descriuran per equacions cartesianes amb coeficients indeterminats. Així, un punt vindrà donat per dues equacions  $X - A = Y - B = 0$ , amb  $X - A, Y - B \in \mathbb{Q}(A, B)[X, Y]$  dos polinomis en  $X, Y$  amb coeficients en el cos  $\mathbb{Q}(A, B)$  de funcions racionals en dues variables  $A, B$ . Una recta vindrà donada per un polinomi  $CX + DY + E \in \mathbb{Q}(C, D, E)[X, Y]$  amb coeficients en el cos  $\mathbb{Q}(C, D, E)$  de funcions racionals en tres variables  $C, D, E$ . En general, per cada tipus de corba usarem una equació cartesiana determinada, triada en base a l'origen geomètric de la corba. Per exemple, la circumferència amb el centre i un punt donats, la suposarem descrita per una equació  $F(X, Y) := (X - A_1)^2 + (Y - A_2)^2 - (A_1 - B_1)^2 - (A_2 - B_2)^2$  amb  $F \in \mathbb{Q}(A_1, A_2, B_1, B_2)[X, Y]$ . Totes aquestes equacions amb coeficients indeterminats donaran lloc, per especialització de les indeterminades, a punts i corbes concrets del pla. Suposarem que tots aquests objectes són algebraics, és a dir, que estan definits sobre  $\mathbb{Q}$ .

## 1.2 Els objectes aritmètics bàsics

Els problemes de constructibilitat geomètrica porten intrínsecament associades qüestions aritmètiques: les distàncies entre els punts construïts solen ser nombres aritmèticament interessants. De fet, alguns problemes de constructibilitat neixen directament de qüestions aritmètiques: la duplicació del cub, per exemple, és essencialment la construcció de  $\sqrt[3]{2}$ .

La darrera frase és un exemple d'un abús de llenguatge molt freqüent: els nombres no es construeixen, sinó que apareixen com a distàncies entre objectes. Estrictament, doncs, les construccions geomètriques només generen nombres reals i positius. Ara bé, històricament s'han identificat els punts del pla  $\mathbb{R}^2$  amb els nombres complexos i s'ha parlat de la constructibilitat dels nombres: es diu que el nombre complex  $z = a + bi$  és construïble si el punt  $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  és construïble. Cal tenir clar, però, la diferència entre construir una distància (un nombre real i positiu) i construir un nombre complex. En la memòria hem triat la segona opció.

Si bé alguns problemes concrets de constructibilitat clàssics han estat l'esperó de la recerca en aquest àmbit, les solucions més satisfactòries són sempre les que permeten descriure algebraicament tots els nombres que es poden construir amb un instrument donat. En molts casos aquests nombres formaran una estructura algebraica, com ara un anell o un cos. Les estructures que trobarem més freqüentment són:

- L'anell  $\mathbb{Z}$  dels nombres enters.
- El cos  $\mathbb{Q}$  dels nombres racionals.
- L'anell  $\mathbb{Z}[\omega]$  dels enters d'Eisenstein.
- El cos  $\mathbb{E}$  dels nombres euclidians.
- El cos  $\mathbb{P}$  dels nombres pitagòrics.
- El cos  $\mathbb{V}$  dels nombres de Viète.

En l'annex B donem una descripció més detallada d'aquests anells i cossos.

## 1.3 Axiomes

El primer pas per definir les eines és la formalització dels processos geomètrics elementals que aquestes poden desenvolupar. Anomenarem genèricament axiomes<sup>1</sup> a aquests processos; en distingirem de dos tipus:

---

<sup>1</sup>A la literatura (cf. [2], [17] i [3]) s'ha estès l'ús del terme *axioma* en aquest sentit, per bé que aquest no és l'usual en Matemàtiques: alguns axiomes poden expressar-se en termes d'altres. Malgrat això, en el treball usarem el terme *axioma* per ser coherents amb la literatura.

**Definició 1.3.1.** Un axioma de construcció **C** és un procés geomètric elemental que genera un conjunt finit ordenat de corbes a partir d'un conjunt no buit, finit i ordenat de punts i de corbes.

Un axioma d'intersecció **I** és un procés geomètric elemental que genera un conjunt finit ordenat de punts a partir d'un conjunt no buit, finit i ordenat de corbes i de punts.

**Exemples d'axiomes de construcció:**

- **Line:** Genera la recta que passa per dos punts.
- **Circle:** Genera una circumferència a partir del seu centre i un dels seus punts.
- **CommonTangent:** Genera les rectes tangents comunes a dues paràboles, a partir de les seves directrius i focus.

**Exemples d'axiomes d'intersecció:**

- **LineIntersect:** Genera el punt d'intersecció de dues rectes donades.
- **LineCircleIntersect:** Genera els punts d'intersecció d'una recta amb una circumferència.

Encara que intuïtivament podria semblar que un axioma d'intersecció hauria de ser un procés pel qual s'obtenen conjunts finits de punts a partir de conjunts finits de corbes, trobarem axiomes d'intersecció que generen punts a partir de punts i corbes.

**Definició 1.3.2.** El grau d'un axioma és el nombre d'objectes generats quan s'aplica a objectes en posició general.

Per exemple, el grau de l'axioma **LineIntersect** és 1, i el grau de l'axioma **CommonTangent** és 3.

## 1.4 Algebraicitat i irreductibilitat dels axiomes

Considerem un axioma **A** que a partir dels objectes  $U_1, \dots, U_m$  genera els objectes  $O_1, \dots, O_n$ . En endavant denotarem aquesta relació per  $O_1, \dots, O_n = \mathbf{A}(U_1, \dots, U_m)$ . Assumim que tots aquests objectes són genèrics, és a dir, que els coeficients de les seves equacions són indeterminats. Denotem per  $A_1, \dots, A_s$  els coeficients de les equacions definidores<sup>2</sup> dels  $U_j$ , i per  $B_1, \dots, B_t$  els coeficients de les equacions dels  $O_k$ . Amb això, els  $U_j$  i els  $O_k$  estan tots ells definits sobre el cos de funcions racionals  $\mathbb{Q}(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_t)$ .

<sup>2</sup>El terme *coeficient* el prendrem en sentit lax, en funció de la forma en què prenguem l'equació definidora de cada objecte. En el cas de la circumferència de centre i punt donats especificada en la secció 1.1, prendrem com a coeficients de la seva equació les indeterminades  $A_1, A_2, B_1, B_2$ . En general, la natura geomètrica de cada objecte dictarà quina és la tria natural de la seva equació definidora i els coeficients indeterminats que la componen. Val a dir que, en tot cas, una tria diferent d'aquests *coeficients* no alterarà les propietats bàsiques que es dedueixen de l'equació.

**Definició 1.4.1.** Direm que l'axioma **A** és **algebraic** si  $\mathbb{Q}(B_1, \dots, B_t)$  és una extensió finita de  $\mathbb{Q}(A_1, \dots, A_s)$ .

L'algebraicitat d'**A** ens diu que existeixen certs polinomis homogenis

$$H_1, \dots, H_d \in \mathbb{Q}[A_1, \dots, A_s][X_0, \dots, X_t]$$

tals que  $H_k(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_t) = 0$ .

**Definició 1.4.2.** Diem que un axioma algebraic **A** és **irreductible** si la varietat algebraica  $V_A := V(H_1, \dots, H_d) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}(A_1, \dots, A_s)}^t$  és irreductible, és a dir, si l'ideal  $(H_1, \dots, H_d) \subset \mathbb{Q}(A_1, \dots, A_s)[X_0, \dots, X_t]$  és un ideal primer.

Recordem que el grau  $\text{gr } V$  d'una varietat algebraica  $V \subset \mathbb{P}^n$  de dimensió  $d$  es defineix com el nombre de punts d'intersecció de la varietat amb un subespai lineal genèric de  $\mathbb{P}^n$  de codimensió  $d$ . És clar doncs, que

**Proposició 1.1.** El grau d'un axioma algebraic irreductible **A** coincideix amb el grau de la varietat  $V_A$ .

En [4], Alperin i Lang introdueixen la noció de *complexitat* d'un axioma d'origami. El resultat anterior mostra que és un cas particular del grau que hem introduït.

L'algebraicitat i la irreductibilitat són propietats naturals per als axiomes geomètrics. Per això ens limitarem a considerar els axiomes que les satisfan:

**Proposició 1.2.** Tots els axiomes que apareixen a la memòria són algebraics i irreductibles.

La demostració d'aquesta proposició és computacional, i es fa considerant cada axioma en particular. El lector podrà trobar els detalls de cada cas concret en el blog de la tesi ([29]). Ens limitem a donar aquí un exemple senzill.

**Exemple:** Considerem l'axioma **LineCircleIntersect**, que genera els punts de tall d'una recta  $A_1X + A_2Y + A_3 = 0$  i una circumferència  $(X - A_4)^2 + (Y - A_5)^2 = A_6^2$ . Eliminem la variable  $Y$  del sistema donat per aquestes dues equacions i obtenim que les coordenades  $(B_1, B_2)$  dels punts d'intersecció satisfan les equacions:

$$H_1 := B_1^2 (A_1^2 + A_2^2) + (-2A_4A_2^2 + 2A_1A_5A_2 + 2A_1A_3) B_1 + A_4^2A_2^2 + A_5^2A_2^2 + 2A_5A_2A_3 - A_2^2A_6^2 + A_3^2 = 0,$$

$$H_2 := A_1B_1 + A_2B_2 + A_3 = 0.$$

És clar que la varietat  $V(H_1, H_2) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}(A_1, \dots, A_6)}^1$  té grau 2 i és irreductible, ja que el polinomi quadràtic  $H_1$  és irreductible. En general, però, és necessari l'ús d'un manipulador algebraic per poder determinar el grau i la irreductibilitat d'un axioma.

## 1.5 Catàleg d'axiomes

Des del compàs euclidià a l'origami, històricament s'han considerat instruments molt diversos, que permeten construccions prou diferents. Un angle es pot bisecar amb un sol plec de paper, però costa una mica més si només podem usar un compàs. La bisecció d'angles, doncs, és o no és un procés geomètric *elemental*? Cal que tinguem un criteri per respondre aquestes qüestions.

Nosaltres hem considerat com a axioma qualsevol procés geomètric que es pot dur a terme en un sol pas amb algun instrument físic. Aquest criteri, però, no exclou la possibilitat que certs processos no elementals es puguin considerar també axiomes, a fi que el nostre llenguatge es pugui estendre fàcilment.

Tot seguit enumerem els principals axiomes que emprarem al llarg d'aquest treball. No podem pas pretendre donar una llista exhaustiva dels axiomes que apareixen a la literatura: pensem, per exemple, en els 489 axiomes d'origami introduïts en [4]. Aquest mateix article, a més, ens fa veure que hem d'estar preparats per admetre *nous axiomes* en qualsevol moment.

Tots els axiomes inclosos en les taules següents són algebraics i irreductibles. La comprovació d'aquestes propietats s'ha dut a terme amb l'ajut del programari *Magma*. Els fitxers corresponents poden trobar-se en el blog de la tesi ([29]).

**Notació 1.5.1.** *En aquestes taules, les lletres majúscules  $A, B, \dots$  sempre indiquen punts; les rectes són indicades per  $\ell, \ell', \dots$  i les altres lletres minúscules  $c, c' \dots$  representen corbes d'altres tipus.*

### 1.5.1 Axiomes bàsics de construcció

| Axioma  | Descripció  |
|---|---|
| $\ell = \mathbf{Line}(A, B)$                      | Recta que passa per $A$ i $B$ .                   |
| $c = \mathbf{Circle}(A, B)$                       | Circumferència amb centre $A$ que passa per $B$ . |
| $c = \mathbf{UnitCircle}(P)$                      | Circumferència amb centre $P$ i radi 1.           |
| $c = \mathbf{RadiusCircle}(A, B, C)$              | Circumferència amb centre $A$ i radi $d(B, C)$ .  |
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{Bisector}(\ell, \ell')$ | Bisectrius de $\ell$ i $\ell'$ .                  |
| $\ell = \mathbf{PerpendicularBisector}(A, B)$     | Mediatriu del segment $AB$ .                      |
| $\ell' = \mathbf{Perpendicular}(\ell, P)$         | Recta perpendicular a $\ell$ que passa per $P$ .  |
| $\ell = \mathbf{PointPerpendicular}(A, B, C)$     | Recta perpendicular a $AB$ que passa per $C$ .    |



| Axioma  | Descripció   |
|---|--|
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{AngleLine}_\alpha(\ell, P)$                           | Rectes per $P$ que formen un angle $\alpha$ amb $\ell$ .   |
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{PointAngleLine}_\alpha(A, B, C)$                      | Rectes per $C$ que formen un angle $\alpha$ amb $AB$ .   |
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{Tangent}(\ell, F, A)$                                 | Tangents per $A$ a la paràbola de directriu $\ell$ i focus $F$ .   |
| $\ell_1, \ell_2, \ell_3 = \mathbf{CommonTangent}(\ell, F, \ell', F')$           | Tangents comunes a la paràbola de directriu $\ell$ i focus $F$ i a la paràbola de directriu $\ell'$ i focus $F'$ . |
| $\ell = \mathbf{PerpendicularTangent}(\ell_1, F, \ell_2)$                       | Recta tangent a la paràbola de directriu $\ell_1$ i focus $F$ , perpendicular a $\ell_2$ .                         |
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{PointLineVerging}(P, \ell)$                           | Rectes per $P$ que tallen $\ell$ en punts a distància 1 de $P$ .   |
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{PointCircleVerging}(P, c)$                            | Rectes per $P$ que tallen $c$ en punts a distància 1 de $P$ .  |
| $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 = \mathbf{LineLineVerging}(P, \ell, \ell')$     | Rectes per $P$ que tallen $\ell, \ell'$ en punts separats per una distància 1.                                     |
| $\ell_1, \dots, \ell_6 = \mathbf{LineCircleVerging}(P, \ell, c)$                | Rectes per $P$ que tallen $\ell, c$ en punts separats per una distància 1.   |
| $\ell_1, \dots, \ell_6 = \mathbf{CircleCircleVerging}(P, c, c')$                | Rectes per $P$ que tallen $c, c'$ en punts separats per una distància 1.   |
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{LineSquadVerging}(\ell, A, B)$                        | Rectes per $A$ i per $B$ que formen un angle recte quan tallen $\ell$ .  |
| $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 = \mathbf{LineAngleVerging}_\alpha(\ell, A, B)$ | Rectes per $A$ i per $B$ que formen un angle $\alpha$ quan tallen $\ell$ .   |
| $c = \mathbf{Conic}(\ell, F, A, B)$   | Cònica amb directriu $\ell$ , focus $F$ i excentricitat la distància entre $A$ i $B$ .                             |
| $c = \mathbf{Ellipse}(F, F', C)$  | El·lipse amb focus $F$ i $F'$ i que passa per $C$ .  |
| $c = \mathbf{FivePointConic}(A, B, C, D, E)$                                    | Cònica que passa pels punts $A, B, C, D$ i $E$ .   |

Taula 1.1: Axiomes de construcció

## 1.5.2 Axiomes bàsics d'intersecció

| Axioma   | Descripció   |
|--|--|
| $P = \mathbf{LineIntersect}(\ell, \ell')$                          | Punt de tall de les rectes $\ell$ i $\ell'$ .  |
| $P_1, P_2 = \mathbf{CircleIntersect}(c, c')$                       | Punts de tall de les circumferències $c, c'$ .   |
| $P_1, P_2 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell, c)$                 | Punts de tall de $\ell$ amb la circumferència $c$ .  |
| $P_1, P_2 = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell, A)$             | Punts de tall de la recta $\ell$ i la circumferència amb radi 1 i centre $A$ .                       |
| $P_1, P_2 = \mathbf{CircleUnitCircleIntersect}(c, A)$              | Punts de tall de la circumferència $c$ i la circumferència de centre $A$ i radi 1.                   |
| $P_1, P_2 = \mathbf{LineRadiusCircleIntersect}(\ell, A, B, C)$     | Punts de tall de la recta $\ell$ i la circumferència amb centre $A \in \ell$ , i radi $BC$ .         |
| $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{ConicIntersect}(c, c')$                 | Punts de tall de les còniques $c$ i $c'$ .   |
| $P_1, P_2 = \mathbf{LineConicIntersect}(\ell, c)$                  | Punts de tall de $\ell$ amb la cònica $c$ .  |
| $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{CircleConicIntersect}(c, c')$           | Punts de tall de la circumferència $c$ amb la cònica $c'$ .  |
| $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{LineConchoidIntersect}(\ell, \ell', P)$ | Punts de tall de $\ell$ amb la concoide de pol $P$ i directriu la recta $\ell'$ .                    |
| $P_1, \dots, P_6 = \mathbf{CircleConchoidIntersect}(c, \ell, P)$   | Punts de tall de la circumferència $c$ amb la concoide de pol $P$ i directriu la recta $\ell$ .      |
| $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{LineLimaçonIntersect}(\ell, F, c)$      | Punts de tall de la recta $\ell$ amb el caragol de Pascal de focus $F$ i circumferència $c$ .        |
| $P_1, \dots, P_6 = \mathbf{CircleLimaçonIntersect}(c, F, c')$      | Punts de tall de la circumferència $c$ amb el caragol de Pascal de focus $F$ i circumferència $c'$ . |
| $P_1, P_2 = \mathbf{LineDiameterCircleIntersect}(\ell, A, B)$      | Punts de tall de la recta $\ell$ amb la circumferència de diàmetre $AB$ .                            |
| $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{LineArcIntersect}_\alpha(\ell, A, B)$   | Punts de tall de la recta $\ell$ amb l'arc capaç d'angle $\alpha$ del segment $AB$ .                 |

Taula 1.2: Axiomes d'intersecció

### 1.5.3 Comentaris sobre alguns axiomes

Com ja hem comentat, els axiomes que hem inclòs a les taules tenen un instrument físic associat, que permet dur-los a terme. En alguns casos, aclarim l'operació física que es realitza.

El funcionament de l'axioma **CommonTangent**, originari de l'origami, és el següent: donats dos punts  $F$  i  $F'$ , i dues rectes  $\ell$  i  $\ell'$ , fem un dels plecs que porta el punt  $F$  a la recta  $\ell$  i, simultàniament, el punt  $F'$  a la recta  $\ell'$ . Aquesta operació és equivalent a construir una de les tangents comunes a la paràbola de focus  $F$  i directriu  $\ell$  amb la paràbola de focus  $F'$  i directriu  $\ell'$ .

L'axioma **AngleLine** $_{\alpha}$  prové de l'eina *Angle*, que està formada per dues semirectes que formen un angle  $\alpha$  en el seu origen comú. L'axioma consisteix en, donat un punt  $P$  i una recta  $\ell$ , recolzar un dels costats de l'instrument adjacent de l'angle  $\alpha$  sobre la recta  $\ell$ , de manera que l'altre costat adjacent passi pel punt  $P$ .

Els darrers axiomes d'intersecció que apareixen a la taula E.2 sorgeixen de la tècnica d'*inclinació*<sup>3</sup> associada a instruments com el regle marcat o l'escaire. Consisteix en fer lliscar l'instrument per fer-ne coincidir certs elements amb punts o corbes prèviament dibuixats. Aquesta tècnica s'explicarà amb més detall a l'annex A.

### 1.5.4 Ordenació dels elements generats pels axiomes

A les taules anteriors apareixen axiomes que generen més d'un objecte geomètric. La posició relativa d'aquests resultats respecte dels objectes *input* de l'axioma sol ser simètrica, però pot no ser-ho respecte d'altres objectes que hàgim construït prèviament. En alguns casos en què vulguem combinar l'*output* de diversos axiomes, és necessari disposar d'un criteri geomètric per establir-ne clarament la posició relativa, perquè no sempre tots els resultats dels axiomes implicats són útils.

Sigui quin sigui el criteri que decidim emprar, per força serà necessari partir d'alguna referència. L'elecció d'un sistema de coordenades resoldria completament el problema, però aniria molt més enllà de les necessitats del llenguatge en aquest punt, i portaria implícita una elecció aritmètica essencial, com explicarem en la secció 1.11. La referència que escollim és al més senzilla possible: un punt fixat  $O$  i un sentit de gir, que suposarem que és el que és donat per l'orientació anti-horària dels angles.

En [9] es proposen criteris per als axiomes d'intersecció entre rectes i circumferències. En geometria computacional s'utilitza sovint la tècnica de l'*escombratge radial*. Atesa la diversitat de situacions que cobreix el nostre llenguatge, nosaltres combinarem les dues idees. Com a regla general, quan és possible, establim una ordenació *ad hoc* dels objectes múltiples generats per un sol axioma, i emprem l'escombratge radial quan no hi hagi una ordenació natural intrínseca.

---

<sup>3</sup>En endavant usarem la versió anglesa del terme, *verging*, per ser l'habitual a la literatura. És freqüent també l'ús del terme grec *neusis*.

## Escombratge radial

L'escombratge radial que té centre  $P$  i semirecta  $\ell$  amb origen en  $P$  consisteix a fer girar  $\ell$  en sentit positiu; els objectes s'ordenen en l'ordre que són *escombrats*. Si dos objectes són escombrats simultàniament, s'ordenen segons la distància al punt  $P$ .

## Ordenació de punts en rectes

Sigui  $\ell = \mathbf{Line}(A, B)$  una recta construïda a partir dels punts  $A, B$ . Ordenem els punts de la recta segons el sentit del vector  $\vec{AB}$ : l'ordre d'un punt  $P$  ve donat per l'escalar  $\lambda$  tal que  $\vec{AP} = \lambda\vec{AB}$ .

## Ordenació dels punts d'intersecció de dues còniques

Siguin  $c, c'$  dues circumferències amb el centres  $C, C'$  respectivament. Ordenem els punts  $P_1, P_2 = \mathbf{CircleIntersect}(c, c')$  mitjançant l'escombratge radial amb centre  $C$  i semirecta  $CC'$ . Utilitzem el mateix criteri per ordenar els punts que s'obtenen amb l'axioma  $\mathbf{CircleUnitCircleIntersect}$  i els punts  $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{ConicIntersect}(c, c')$  de tall de les dues còniques  $c$  i  $c'$ . (Entenem que el centre d'una el·lipse o d'una hipèrbola és el punt mitjà dels seus focus, i com a centre d'una paràbola prendrem el seu focus). Ordenem anàlogament els punts  $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{CircleConicIntersect}(c, c')$ .

## Ordenació dels punts d'intersecció d'una recta i una cònica

Siguin  $\ell$  una recta i  $c$  una circumferència amb centre  $C$ . Si  $\ell$  no és un diàmetre de  $c$ , ordenem els punts  $P_1, P_2 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell, c)$  de manera que l'angle  $P_2CP_1$  sigui positiu. Si la recta és un diàmetre, ordenem  $P_1, P_2$  simplement com a punts de la recta  $\ell$ , utilitzant un escombratge radial amb centre  $C$  i semirecta  $CO$  si la recta no s'ha obtingut amb l'axioma  $\mathbf{Line}$ . Ordenem de manera anàloga els punts  $P_1, P_2$  que s'obtenen amb els axiomes  $\mathbf{LineUnitCircleIntersect}$ ,  $\mathbf{LineConicIntersect}$ ,  $\mathbf{LineDiameterCircleIntersect}$  i  $\mathbf{LineArcIntersect}_\alpha$ .

## Ordenació dels punts de tall d'una recta i una concoide

Els punts  $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{LineConchoidIntersect}(\ell, \ell', P)$  s'ordenen segons l'escombratge radial amb centre el pol  $P$  de la concoide i semirecta  $PO$ .

## Ordenació dels punts de tall d'una circumferència i una concoide

Els punts  $P_1, \dots, P_6 = \mathbf{CircleConchoidIntersect}(c, \ell, P)$  d'intersecció de la circumferència  $c$  amb centre  $C$  i la concoide que té pol  $P$  i directriu  $\ell$  s'ordenen seguint l'escombratge radial amb centre  $C$  semirecta  $CP$ .

### Ordenació dels punts de tall d'una recta i un caragol

Els punts  $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{LineLimaçonIntersect}(\ell, F, c)$  s'ordenen segons l'escombratge radial amb centre  $C$  i semirecta  $CF$ , on  $C$  és el centre de la circumferència  $c$ .

### Ordenació dels punts de tall d'una circumferència i un caragol

Ordenem els punts  $P_1, \dots, P_6 = \mathbf{CircleLimaçonIntersect}(c, F, c')$  de tall de la circumferència  $c$  amb centre  $C$  i del caragol de Pascal que té focus  $F$  i circumferència  $c'$  segons l'escombratge radial amb centre  $C$  i semirecta  $CP$ .

### Ordenació de les bisectrius d'un angle

Siguin  $\ell, \ell'$  dues rectes. Ordenem les dues rectes  $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{Bisector}(\ell, \ell')$  de manera que  $\ell_1$  bisequi l'angle orientat  $\widehat{\ell\ell'}$  i  $\ell_2$  bisequi l'angle orientat  $\widehat{\ell'\ell}$ .

### Ordenació de les rectes amb angle arbitrari

Siguin  $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{AngleLine}_\alpha(\ell, P)$  les dues rectes que formen un angle  $\alpha$  amb una recta donada  $\ell$ , i que passen per un punt donat  $P$ . Sigui  $P_1$  i  $P_2$  els punts de tall respectius de  $\ell$  amb  $\ell_1$  i  $\ell_2$ . Si són iguals, és a dir, si  $P \in \ell$ , aleshores ordenem  $\ell_1$  i  $\ell_2$  de manera que  $\ell$  bisequi l'angle orientat  $\widehat{\ell_1\ell_2}$ . Si  $P_1$  i  $P_2$  són diferents, ordenem les rectes d'acord amb l'ordenació dels punts  $P, P_1, P_2$  tals que l'angle  $P_1PP_2$  sigui positiu. Ordenem de manera anàloga les rectes que s'obtenen amb l'axioma  $\mathbf{PointAngleLine}_\alpha$ .

### Tangents a una paràbola

Les dues rectes  $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{Tangent}(\ell, F, A)$  tangents pel punt  $A$  a la paràbola amb directriu  $\ell$  i focus  $F$  s'ordenen segons l'escombratge radial amb centre  $A$  i semirecta  $AF$ .

### Tangents comunes a dues paràboles

Siguin  $\ell_1, \ell_2, \ell_3 = \mathbf{CommonTangent}(\ell, F, \ell', F')$  les tangents comunes a les dues paràboles amb directrius i focus donats. Sigui  $P_1, P_2, P_3$  els respectius punts de contacte amb la primera paràbola, és a dir, amb la paràbola que té focus  $F$  i directriu  $\ell$ . Ordenem les rectes d'acord amb l'ordenació dels punts  $P_1, P_2, P_3$  segons l'escombratge radial amb centre  $F$  i semirecta  $FF'$ .

### Ordenació de rectes d'axiomes de verging

Les rectes  $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{PointLineVerging}(P, \ell)$  s'ordenen segons un escombratge radial centre  $P$  i semirecta  $CO$ . Sigui  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 = \mathbf{LineLineVerging}(P, \ell, \ell')$  les rectes per  $P$  que tallen  $\ell, \ell'$  en punts separats per una distància 1. Sigui  $P'$  el punt de tall de les rectes  $\ell$  i  $\ell'$ . Ordenem les rectes  $\ell_1, \dots, \ell_4$  segons l'escombratge radial amb centre  $P$

i semirecta  $PP'$ . Si les rectes  $\ell$  i  $\ell'$  són paral·leles, ordenem les rectes  $\ell_1, \dots, \ell_4$  segons l'escombratge radial amb centre  $P$  i semirecta  $PO$ .

Les rectes que s'obtenen amb els axiomes **PointCircleVerging**, **LineCircleVerging**, **CircleCircleVerging** s'ordenen fent un escombratge radial amb centre  $P$  i semirecta  $PC$ , on  $C$  és el centre de la circumferència  $c$ .

Ordenem les rectes  $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{LineSquadVerging}(\ell, A, B)$  considerant que  $A \in \ell_1$  i  $B \in \ell_2$ . De les quatre rectes  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 = \mathbf{LineAngleVerging}_\alpha(\ell, A, B)$ , considerem que  $\ell_1$  i  $\ell_2$  passen per  $A$  i  $\ell_3$  i  $\ell_4$  passen per  $B$ . Ordenem  $\ell_1$  i  $\ell_2$  segons l'escombratge radial amb centre  $A$  i semirecta  $AB$  i les rectes  $\ell_3$  i  $\ell_4$  segons l'escombratge radial amb centre  $B$  i semirecta  $BA$ .

## 1.6 Eines

El concepte central del nostre llenguatge formal és:

**Definició 1.6.1.** Una eina  $\mathcal{E}$  és una parella  $\langle C, I \rangle$ , on  $C$  és un conjunt finit, no buit, d'axiomes de construcció i  $I$  és un conjunt finit, no buit, d'axiomes d'intersecció.

**Exemples:**

- El regle:

$$\mathcal{R} := \langle \{\mathbf{Line}\}, \{\mathbf{LineIntersect}\} \rangle$$

- El compàs:

$$\mathcal{C} := \langle \{\mathbf{Circle}, \mathbf{RadiusCircle}\}, \{\mathbf{CircleIntersect}\} \rangle$$

- El regle i el compàs:

$$\mathcal{RC} := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{Circle}, \mathbf{RadiusCircle}\}, \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{CircleIntersect}, \mathbf{LineCircleIntersect}\} \rangle.$$

**Definició 1.6.2.** La signatura  $\sigma(\mathcal{E})$  d'una eina  $\mathcal{E}$  és el conjunt ordenat dels graus dels seus axiomes.

La signatura de les eines és un invariant de caire algebraic. Veurem en el capítol 4 que la signatura ens dona criteris aritmètics de constructibilitat i ens permetrà diferenciar les eines des del punt de vista aritmètic.

La definició donada d'eina dóna llibertat absoluta per escollir els axiomes que conformen una eina; una elecció arbitrària pot portar, però, a eines poc consistentes geomètricament parlant. Llevat de casos excepcionals, totes les eines que apareixen en aquest treball satisfan les condicions següents:

### Hipòtesi de completesa:

- i) Les corbes que apareixen explícitament en un axioma són construïbles.
- ii) Els punts d'intersecció de dues corbes construïbles són construïbles mitjançant un axioma d'intersecció.

**Exemple:** L'eina  $\mathcal{RC}$  satisfà la hipòtesi ja que en els seus axiomes només apareixen explícitament rectes i circumferències, que són les úniques corbes construïbles, i els seus punts d'intersecció també són construïbles.

## 1.7 Un exemple de formalització: el regle marcat

Entendrem per *regle marcat* un instrument físic ideal que ens permet dibuixar segments rectes arbitràriament llargs, i marcar sobre ells una distància fixada, que suposarem que és 1. Naturalment, prendrem com a model físic d'aquest instrument un regle en el qual hi ha dues marques a distància 1.

Per formalitzar aquest instrument, hem d'identificar els processos elementals que permet fer, és a dir, quins axiomes compondran l'eina que li associarem. D'entrada, si tenim dos punts el regle marcat ens permet dibuixar la recta que els uneix, així que haurem d'incloure l'axioma **Line**, i consegüentment, ja que volem que l'eina sigui completa, també haurem d'incloure l'axioma **LineIntersect**.

La característica principal del regle marcat és la possibilitat de fer coincidir les seves marques amb altres objectes. En fer-ho, podem generar o bé dos punts o bé la recta que els uneix. Això fa que per formalitzar cadascun aquests processos de *verging* definim dos axiomes, segons si volem generar punts o rectes.

Els diferents processos de *verging* que podem fer amb el regle marcat són:

- Donats un punt  $O$  i una recta  $\ell$ , podem encaixar una de les marques del regle sobre el punt, i fer coincidir l'altra amb la recta. Aquest procés el formalitzem amb els axiomes **LineUnitCircleIntersection** i **PointLineVerging**. El primer ens dóna els dos punts de  $\ell$  que estan a distància 1 de  $O$ , mentre que el segon ens dóna les rectes que uneixen  $O$  amb aquests dos punts.
- Donats un punt  $O$  i dues rectes  $\ell, \ell'$ , recolzem el regle en  $O$  i l'inclinem fins que les dues marques s'encaixen sobre les dues rectes. Això dóna lloc a quatre parelles de punts i a les corresponents quatre rectes, totes elles passant per  $O$ . L'axioma que ens dóna les quatre rectes és **LineLineVerging**. Com no tenim axiomes que ens donin parelles de punts com a tals, considerarem per separat els punts de cada parella que cauen sobre cadascuna de les dues rectes inicials  $\ell, \ell'$ , i definirem l'axioma  $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{LineConchoidIntersect}(\ell, \ell', O)$ , que ens donarà la quaterna de punts  $P_1, \dots, P_4$  que cauen sobre la recta  $\ell$ , que coincideixen

amb els punts de tall d'aquesta recta amb la concoide de pol  $O$  i directriu  $\ell'$ . En l'annex A donem una explicació més detallada d'aquest axioma.

Així doncs, la formalització d'aquesta eina és:

$$\mathcal{RM} := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{PointLineVerging}, \mathbf{LineLineVerging}\}, \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{LineUnitCircleIntersect}, \mathbf{LineConchoidIntersect}\} \rangle.$$

És una eina completa. La seva signatura és:

$$\sigma(\mathcal{RM}) = \{1, 2, 4\},$$

ja que

$$\begin{aligned} \text{gr } \mathbf{PointLineVerging} &= \text{gr } \mathbf{LineUnitCircleIntersect} = 2, \\ \text{gr } \mathbf{LineLineVerging} &= \text{gr } \mathbf{LineConchoidIntersect} = 4. \end{aligned}$$

## 1.8 Subeina. Unió d'eines

És una pràctica habitual considerar la utilització de més d'un instrument alhora. El cas més conegut és la utilització d'un regle i un compàs. Seria raonable dir que les eines  $\mathcal{R}$  (regle) i  $\mathcal{C}$  (compàs) són subeines de l'eina  $\mathcal{RC}$  (regle i compàs), i que aquesta darrera és la unió de les anteriors. La definició del concepte de subeina és trivial:

**Definició 1.8.1.** *Diem que l'eina  $\mathcal{E} = \langle C, I \rangle$  és una subeina de l'eina  $\mathcal{E}' = \langle C', I' \rangle$  si  $C \subseteq C'$  i  $I \subseteq I'$ .*

La definició de la unió de dues eines és una mica més delicada, perquè pot donar lloc a combinacions de corbes o de punts que no pot generar cadascuna de les eines per separat. Per exemple, en unir un regle i un compàs hem d'incloure l'axioma **Line-CircleIntersect**. Hi ha, però, situacions més subtils, que ens porten a les definicions següents:

**Definició 1.8.2.** *Diem que una corba és construïble amb una eina  $\mathcal{E}$  si es pot generar amb un axioma de construcció d' $\mathcal{E}$ .*

*Diem que una corba és intersecable amb  $\mathcal{E}$  si hi ha un axioma específic d'intersecció a  $\mathcal{E}$  que ens dóna els punts de tall de la corba amb una corba construïble amb  $\mathcal{E}$ .*

*Diem que un punt és marcable amb  $\mathcal{E}$  si, combinat amb altres punts construïbles, determina una corba per a la qual hi ha un axioma específic de construcció a  $\mathcal{E}$ .*

Els conceptes de corba intersecable i punt marcable són conceptes duals, que tenen el seu origen en els processos de verging, per bé que podrien aparèixer en altres contextos.

**Exemple:** Les corbes construïbles amb  $\mathcal{RM}$  són rectes, però les corbes intersecables són circumferències de radi 1 i concoïdes, i originen els axiomes **LineUnitCircleIntersect** i **LineConchoidIntersect**. Els punts marcables són punts a distància 1 que



están sobre corbes construïbles; originen els axiomes **PointLineVerging** i **LineLineVerging**.

La definició de la unió d'eines ha de tenir en compte l'aparició de corbes interseccables i de punts marcables:

**Definició 1.8.3.** *Siguin  $\mathcal{E} = \langle C, \mathcal{I} \rangle$  i  $\mathcal{E}' = \langle C', \mathcal{I}' \rangle$  dues eines. L'eina unió de  $\mathcal{E}$  i  $\mathcal{E}'$  és l'eina  $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}' = \langle \tilde{C}, \tilde{\mathcal{I}} \rangle$  que té els axiomes següents:*

- $\tilde{C} = C \cup C' \cup C^+$ , on  $C^+$  és el conjunt d'axiomes de construcció donats pels punts marcables.
- $\tilde{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \cup \mathcal{I}' \cup \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^*$ , on
  - $\mathcal{I}^+$  és el conjunt d'axiomes d'intersecció entre corbes construïbles amb  $\mathcal{E}$  o  $\mathcal{E}'$ ;
  - $\mathcal{I}^*$  és el conjunt d'axiomes d'intersecció entre corbes construïbles amb  $\mathcal{E}$  o  $\mathcal{E}'$  i corbes interseccables amb  $\mathcal{E}$  o  $\mathcal{E}'$ .

Amb aquesta definició és clar que  $\mathcal{RC} = \mathcal{R} \cup C$ .

## 1.9 Construccions

Un cop formalitzats els instruments geomètrics hem de formalitzar els processos geomètrics complexos que combinen diversos axiomes. Això ens porta al concepte de *construcció*.

En la literatura es proposen algunes definicions per a casos particulars. Per exemple, per a les construccions amb regla i compàs o les construccions amb còniques, Baragar ([7]) proposa les definicions següents:

**Definició 1.9.1** (Baragar). *Una construcció plana  $C$  és un conjunt finit de punts  $C = \{O, P, A_1, \dots, A_n\}$  tal que  $A_{k+1}$  és un punt d'intersecció de rectes i/o circumferències construïdes a partir dels punts de la subconstrucció  $C_k = \{O, P, A_1, \dots, A_k\}$ .*

**Definició 1.9.2** (Baragar). *Una construcció sòlida  $C$  és un conjunt finit de punts  $C = \{O, P, A_1, \dots, A_n\}$  tal que  $A_{k+1}$  és un punt d'intersecció de rectes, circumferències o còniques construïdes a partir dels punts de  $C_k$ .*

Aquestes definicions inclouen, dins de la successió, els punts que intervenen en el procés, però les corbes i els processos per aconseguir aquests punts i corbes no queden explícits. Exclouen doncs la possibilitat de construir corbes i, construccions elementals, com ara la bisecció d'un angle, no es poden formalitzar.

A continuació proposem una definició alternativa de *construcció*, emprant el llenguatge *axiomàtic* que hem introduït, i que evita els inconvenients esmentats.

**Definició 1.9.3.** Una construcció d'un conjunt  $V$  de punts i rectes a partir de  $U_0$  és una successió finita

$$C(U_0; V) = \{O_1 = A_1(U_1), \dots, O_n = A_n(U_n)\},$$

on

- $U_0$  és un conjunt inicial ordenat de punts i corbes;
- $A_1, \dots, A_n$  són axiomes;
- Cada  $U_k$  és un subconjunt de  $U_0 \cup \dots \cup U_{k-1} \cup O_1 \cup \dots \cup O_{k-1}$ ;
- $V \subseteq O_1 \cup \dots \cup O_n$ , però  $V \not\subseteq O_1 \cup \dots \cup O_{n-1}$ .

Direm que  $C(U_0; V)$  és una construcció de  $V$  a partir de  $U_0$ . Si  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{C} \cup \mathcal{I}$ , direm que  $C(U_0; V)$  és una construcció de  $V$  amb l'eina  $\mathcal{E} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{I} \rangle$ , i ho denotarem per  $C(U_0; V) \in \mathcal{E}$ .

**Notació 1.9.1.** Per no complicar innecessàriament la notació, descriurem els conjunts  $U_0$  i  $V$  enumerant-ne els elements, però sense incloure'ls entre claus; el punt i coma ";" marca la separació entre els dos conjunts.

**Observació:** Els objectes del conjunt inicial d'una construcció poden ser punts i corbes concrets, però en general suposarem que són objectes genèrics. En particular, suposarem que satisfan sempre totes les condicions que garanteixen la viabilitat de la construcció.

**Observació:** Les construccions tenen un nombre fix de passos: els processos iteratius que impliquen un nombre variable de passos no els admetem com a construccions. Aquests processos iteratius s'encaixaran en el context dels *mapes*, que introduïrem en la secció 1.11.

**Exemples:**

- Qualsevol axioma  $V = A(U_0)$  es pot identificar de manera natural amb una construcció elemental  $A(U_0; V)$ . La notació ens permetrà discernir en cada cas si considerem l'axioma com a tal ( $V = A(U_0)$ ) o bé com a construcció ( $A(U_0; V)$ ).
- Construcció de la recta paral·lela a una recta  $\ell$  per un punt  $P$  exterior a aquesta:

$$\mathbf{Parallel}(P, \ell; \ell') = \{\ell_1 = \mathbf{Perpendicular}(\ell, P), \\ \ell' = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, P)\}.$$

- Construcció d'un paral·lelogram  $ABCD$  a partir dels punts  $A, B, i C$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Parallelogram}(A, B, C; D) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(A, C), \\ & \ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, C), \\ & \ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_3, C), \\ & \ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_2, B), \\ & \ell_6 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_5, B), \\ & D = \mathbf{LineIntersect}(\ell_4, \ell_6)\}. \end{aligned}$$

Les construccions són solucions de problemes geomètrics, i és obvi que un mateix problema pot admetre solucions molt variades. Per això ens convé introduir la terminologia següent:

**Definició 1.9.4.** *Direm que dues construccions  $C(U_0; V)$  i  $C'(U'_0; V')$  són equivalents si  $U_0 = U'_0$  i els lligams geomètrics entre  $V$  i  $U_0$  són els mateixos que entre  $V'$  i  $U'_0$ . Un problema  $P(U_0; V)$  és una classe d'equivalència de construccions segons aquesta relació. Una solució del problema  $P(U_0; V)$  és qualsevol representant de la classe d'equivalència, és a dir, qualsevol construcció  $C(U_0; V)$  de  $V$  a partir de  $U_0$ . Un problema es pot resoldre amb l'eina  $\mathcal{E}$  si té una solució  $C(U_0; V) \in \mathcal{E}$ .*

**Exemple:** El segon problema dels *Elements* d'Euclides és:

**Transport de distància:** Donats tres punts  $A, B, C$ , determineu un punt  $D$  tal que  $d(A, D) = d(B, C)$ .

El problema admet moltes solucions, i no totes elles porten al mateix punt solució, però totes són equivalents en el sentit esmentat abans. Per exemple, tenim les construccions següents:

$$\begin{aligned} \mathbf{DistanceTransport}(A, B, C; D) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(B, A), \\ & E, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & \ell_1 = \mathbf{Line}(B, E), \\ & c_3 = \mathbf{Circle}(B, C), \\ & G, H = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_3), \\ & c_4 = \mathbf{Circle}(E, H), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(E, A) \\ & D, I = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_4)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{CompassDistanceTransport}(A, B, C; D) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(B, A), \\ & E, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & c_3 = \mathbf{Circle}(E, C), \\ & c_4 = \mathbf{Circle}(F, C), \\ & C, D = \mathbf{CircleIntersect}(c_3, c_4)\}. \end{aligned}$$

La primera d'aquestes construccions es pot realitzar amb regla i compàs, mentre que la segona requereix només el compàs. Els punts solució no coincidiran en general, però òbviament tindran el mateix lligam geomètric amb els punts  $A, B, C$  donats.

A l'annex D hem inclòs la formalització en aquest llenguatge de les construccions clàssiques més habituals. En endavant usarem lliurement totes les construccions que s'hi esmenten, amb el nom que hi reben.

## 1.10 Construccions i eines generalitzades

En descriure en llenguatge natural una construcció geomètrica, és habitual i molt còmode referir-se a altres construccions elementals descrites prèviament. Això facilita la comprensió de la construcció i n'abreuja la descripció. Ens convé incorporar aquesta flexibilitat al nostre llenguatge.

**Definició 1.10.1.** *Una construcció generalitzada d'un conjunt  $V$  de punts i rectes a partir de  $U_0$  és una successió finita*

$$C(U_0; V) = \{C_1(U_1; O_1), \dots, C_n(U_n; O_n)\},$$

on

- $U_0$  és un conjunt inicial de punts i corbes;
- $C_1(U_1; O_1), \dots, C_n(U_n; O_n)$  són construccions;
- Cada  $U_k$  és un subconjunt de  $U_0 \cup \dots \cup U_{k-1} \cup O_1 \cup \dots \cup O_{k-1}$ .
- $V \subset O_1 \cup \dots \cup O_n$ , però  $V \not\subset O_1 \cup \dots \cup O_{n-1}$ .

Naturalment, les construccions són també construccions generalitzades, tenint en compte la identificació dels axiomes amb construccions elementals. És obvi, també, que tota construcció generalitzada es pot descriure com una construcció en sentit estricte, i en l'àmbit pràctic, les tractarem com a tals. Així, per exemple, direm que una certa construcció generalitzada  $C(U_0; V)$  resol el problema  $P(U_0; V)$  si la construcció associada el resol.

De manera natural, les construccions generalitzades porten a donar també una versió generalitzada del concepte d'eina:

**Definició 1.10.2.** *Una eina generalitzada és un conjunt finit de construccions o construccions generalitzades.*

**Observació:** Per tenir una analogia més clara amb la definició d'eina, podríem distingir entre construccions de corbes, que correspondrien als axiomes de construcció, i construccions de punts, que generalitzarien els axiomes d'intersecció. No entrarem, però, en aquestes consideracions.

Usarem també per a les eines generalitzades totes les notacions introduïdes per a les eines, quan segueixin tenint sentit.

D'ara en endavant, sempre i quan no es digui el contrari, ens referirem indistintament a eina o a eina generalitzada.

**Exemple:** Suposem que dissenyem un instrument capaç de construir un quadrat a partir de la seva diagonal. Podríem formalitzar aquesta eina com la construcció **Square**( $A, C; B, D$ ) que, donats els extrems  $A, C$  de la diagonal, determina els dos punts  $B, D$  de tal manera que  $A, B, C, D$  són els vèrtexs del quadrat, recorreguts en sentit anti-horari.

Amb aquesta construcció definim l'eina generalitzada:

$$\Sigma = \langle \mathbf{Line}, \mathbf{Square}, \mathbf{LineIntersect} \rangle.$$

Amb aquesta eina generalitzada podem trobar el punt mitjà d'un segment:

$$\mathbf{MidPoint}_{\Sigma}(A, B; C) = \{ \mathbf{Square}(A, B; D, E), \\ \mathbf{Square}(A, D; F, C) \}.$$

## 1.11 Mapes

Històricament, les construccions geomètriques han tingut un clar interès aritmètic. El problema clàssic de determinar quins punts i corbes són construïbles amb una eina arrenca a la Grècia clàssica i arriba als nostres dies. La formulació rigorosa del problema requereix, però, fixar els punts que suposem que estan donats inicialment. És obvi que obtindrem resultats molt diferents aritmèticament parlant si partim dels punts  $0, 1$  o dels punts  $0, \sqrt[3]{2}$ .

A l'hora de fixar quins punts suposem que han estat donats per una eina concreta, se'ns plantegen dues qüestions bàsiques, una de caire geomètric i l'altra de natura algebraica:

- 1) Quins conjunts inicials de punts i corbes permeten construir infinits punts?
- 2) Quins problemes volem resoldre?

Sembla natural centrar el nostre interès en les configuracions inicials que ens permetin generar infinits punts o corbes, per la qual cosa ens cal saber respondre la primera qüestió, per bé que la resposta pot no ser única. La segona qüestió sembla òbvia, però adquireix una rellevància especial en un context aritmètic: pressuposar l'existència de certes dades inicials pot alterar essencialment els punts construïbles amb una eina determinada.

Aquestes consideracions ens porten al concepte de *mapa*, que combina una eina amb un conjunt de punts i de corbes inicials, que produeix una configuració geomètrica i aritmètica concretes.

**Definició 1.11.1.** Un mapa és una parella  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  formada per una eina  $\mathcal{E}$  i un conjunt no buit i finit  $\mathcal{U}_0$  de punts i de corbes.

**Observació:** Els conjunts inicials dels mapes estaran formats per punts i corbes concrets, i no pas genèrics, contràriament al cas de les construccions.

**Notació 1.11.1.** Donat un conjunt  $U$  de punts i corbes, escriurem  $U = [C, P]$  per distingir el subconjunt  $C$  de les corbes de  $U$  del subconjunt  $P$  dels punts de  $U$ . Recíprocament, donats un conjunt  $C$  de corbes i un conjunt  $P$  de punts, n'indicarem la unió mitjançant  $[C, P]$ .

**Definició 1.11.2.** Sigui  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  un mapa amb  $\mathcal{E} = \langle C, I \rangle$ . La successió de capes  $\mathcal{U}_n = \{[\mathcal{C}_n, \mathfrak{P}_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  és la successió definida per:

i)  $\mathcal{U}_0 = [\mathcal{C}_0, \mathfrak{P}_0]$

ii)  $\mathcal{C}_n$  és la unió de  $\mathcal{C}_{n-1}$  amb el conjunt de corbes que s'obté aplicant tots els axiomes de construcció de  $C$  de totes les maneres possibles als elements de  $\mathcal{U}_{n-1}$ .

iii)  $\mathfrak{P}_n$  és la unió de  $\mathfrak{P}_{n-1}$  amb el conjunt de punts que s'obté aplicant tots els axiomes d'intersecció de  $I$  de totes les maneres possibles als elements de  $[\mathcal{C}_n, \mathfrak{P}_{n-1}]$ .

Denotarem per  $\mathcal{U}^M = [\mathcal{C}^M, \mathfrak{P}^M] := \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n$  el conjunt de corbes i punts construïbles amb  $M$ .

Direm que un mapa és finit si  $|\mathcal{U}^M| < +\infty$  i infinit en cas contrari.

**Exemple:** Considerem el mapa  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  donat per:

$$\mathcal{E} = \langle \{\mathbf{PerpendicularBisector}\}, \{\mathbf{LineIntersect}\} \rangle,$$

$$\mathcal{U}_0 = \{0, 1, Y = 0\}.$$

Les capes de  $M$  són  $\mathcal{U}_j = [\mathcal{C}_j, \mathfrak{P}_j]$  amb:

$$\mathcal{C}_j = \{Y = 0\} \cup \left\{ X = \frac{m}{2^j} : 1 \leq m \leq 2^{j-1} \right\}, \quad \mathfrak{P}_j = \left\{ \frac{m}{2^j} : 0 \leq m \leq 2^j \right\}.$$

Noteu que  $\mathfrak{P}^M$  és un subconjunt dens de l'interval  $[0, 1]$ .

**Exemple:** Sigui  $C : Y^2 = X^3 + aX + b$  una corba el·líptica amb rang 1 sobre  $\mathbb{Q}$ . Sigui  $P_1$  un generador de  $C(\mathbb{Q})$ , i  $P_2 = 2P_1$ . Considerem el mapa

$$EC := (\langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{Perpendicular}\}, \{\mathbf{LineCubicIntersect}\} \rangle, \mathcal{U}_0),$$

amb conjunt inicial:  $\mathcal{U}_0 = \{C, Y = 0, P_1, P_2\}$ . L'axioma d'intersecció **LineCubicIntersect** ens dóna els tres punts de tall d'una recta amb una corba cúbica. Notem que l'eina associada a aquest mapa no satisfà la hipòtesi de completesa. Es comprova fàcilment que el conjunt de punts construïbles d'aquest mapa és  $\mathfrak{P}^{EC} = C(\mathbb{Q})$ .

Per bé que, com mostren aquests exemples, és interessant considerar mapes amb tota generalitat, centrarem el nostre estudi en els mapes associats de manera natural a les eines clàssiques. En general, per definir aquests mapes *geomètrics* només ens caldrà assignar un conjunt inicial *natural* a l'eina que vulguem estudiar.

**Exemple:** Un compàs euclidià és un compàs que es tanca en aixecar-lo del paper. A diferència dels compassos que utilitzem actualment, el compàs euclidià no permet transportar distàncies.

El mapa que es pot associar de manera natural al compàs euclidià és:

$$CE := (\langle \{\mathbf{Circle}\}, \{\mathbf{CircleIntersect}\} \rangle, \{0, 1\}).$$

Mostrem les tres primeres capes de aquest mapa a la figura següent:

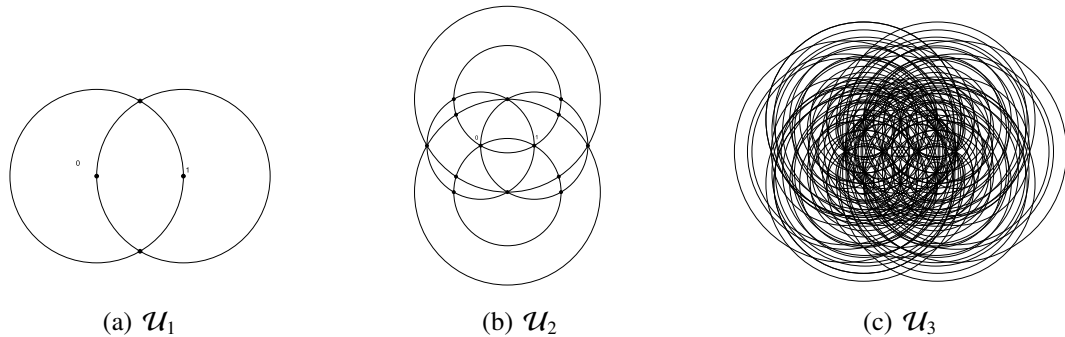


Figura 1.1: Les 3 primeres capes de CE

**Exemple:** El mapa RM associat al regle marcat és:

$$RM := (\mathcal{RM}, \{0, 1, i\}).$$

Els processos de verging associats a l'eina  $\mathcal{RM}$  confereixen a aquest mapa una estructura molt especial:

**Proposició 1.3.** Denotem per  $\mathbb{V}$  el cos dels nombres de Viète<sup>4</sup>. El conjunt de punts construïbles del mapa RM és:

$$\mathfrak{P}^{RM} = \mathbb{V}(i).$$

*Demostració.* [41, Cap. 9]. □

<sup>4</sup>Aquest cos és la menor extensió de  $\mathbb{Q}$  tancada per arrels cúbiques reals i per trisecció, és a dir, la menor extensió  $\mathbb{V}$  de  $\mathbb{Q}$  que satisfà:

- $x \in \mathbb{V} \implies \sqrt[3]{x} \in \mathbb{V}$ ;
- $\cos(x) \in \mathbb{V} \implies \cos(x/3) \in \mathbb{V}$ .

# Capítol 2

## Catàleg d'eines

En aquest capítol presentem la formalització com a eines dels instruments geomètrics més coneguts. La selecció no pot ser pas exhaustiva, però pretén ser prou il·lustrativa perquè el lector copsi les idees bàsiques i pugui formalitzar ell mateix altres instruments.

Cada subsecció d'aquest capítol està dedicada a presentar una eina que formalitza un *instrument geomètric* (en sentit lax). A banda de la llista d'axiomes involucrats, hem inclòs una llista de les construccions més destacades que es poden fer amb l'eina. Totes les construccions esmentades estan detallades al *Catàleg de construccions*, de l'annex D.

Per disposar d'una referència ràpida en la lectura dels capítols posteriors de la memòria, hem sintetitzat la descripció de les eines presentades a la taula E.3 de l'annex E.

### 2.1 Eines clàssiques

Incloem en aquest epígraf les eines que han estat estudiades des de l'antiguitat fins al segle XX, els resultats sobre les quals són ben coneguts, en molts casos fins i tot pels no especialistes.

#### 2.1.1 Regle

Aquesta eina és la formalització de qualsevol instrument físic ideal que ens permeti dibuixar segments arbitràriament llargs, com ara un regle infinit sense marques, que clàssicament s'ha anomenat *regle*.

$$\mathcal{R} := \langle \{\mathbf{Line}\}, \{\mathbf{LineIntersect}\} \rangle.$$

Construccions: *Midpoint* <sub>$\mathcal{R}$</sub> .



## 2.1.2 Compàs

Aquesta eina simbolitza qualsevol instrument ideal que permeti dibuixar circumferències de radi arbitràriament gran. Un model físic habitual d'aquest instrument és el compàs clàssic; un model ideal seria un cordill infinit amb un punxó a l'extrem i un llapis que es pot situar sobre el fil a qualsevol distància del punxó.

$$C := \langle \{\mathbf{Circle}, \mathbf{RadiusCircle}\}, \{\mathbf{CircleIntersect}\} \rangle.$$

Construccions: *EquilateralTriangle*, *CompassDistanceTransport*, *DoublePoint*, *CircleInversion*, *Circumcenter*, *Reflect*, *MidPointCompass*, *PerpendicularFoot*, *ArcBisect*, *Square*, *Parallelogram<sub>C</sub>*.

## 2.1.3 Regle i compàs

Anomenem així l'eina  $\mathcal{R} \cup C$ .

$$\mathcal{RC} := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{Circle}, \mathbf{RadiusCircle}\}, \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{CircleIntersect}, \mathbf{LineCircleIntersect}\} \rangle.$$

Construccions: *EquilateralTriangle*, *DistanceTransport*, *CompassDistanceTransport*, *DoublePoint*, *CircleInversion*, *Circumcenter*, *Reflect*, *PerpendicularBisection*, *MidPointCompass*, *Midpoint<sub>RCE</sub>*, *Midpoint<sub>R</sub>*, *PerpendicularFoot*, *ArcBisect*, *Square*, *Parallel<sub>RC</sub>*, *Parallelogram<sub>C</sub>*, *Bisection*, *DistanceProjection<sub>RCE</sub>*.

## 2.1.4 Compàs euclidià

Aquesta eina formalitza un instrument ideal que permet dibuixar circumferències de radi arbitràriament gran, però no permet transportar distàncies. El model físic més usual és el *compàs euclidià* ideal, que és un compàs que es tanca en aixecar-lo del paper<sup>1</sup>.

$$CE := \langle \{\mathbf{Circle}\}, \{\mathbf{CircleIntersect}\} \rangle.$$

Construccions: *EquilateralTriangle*, *CompassDistanceTransport*, *DoublePoint*, *CircleInversion*, *Circumcenter*, *Reflect*, *MidPointCompass*, *PerpendicularFoot*, *ArcBisect*, *Square*.

---

<sup>1</sup>Històricament, els primers compassos que es van construir eren d'aquesta mena.

## 2.1.5 Regle i compàs euclidià

La unió de les eines  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{CE}$  és:

$$\mathcal{RCE} := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{Circle}\}, \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{CircleIntersect}, \mathbf{LineCircleIntersect}\} \rangle.$$

Construccions: *EquilateralTriangle*, *DistanceTransport*, *CompassDistanceTransport*, *DoublePoint*, *CircleInversion*, *Circumcenter*, *Reflect*, *PerpendicularBisection*, *MidPointCompass*, *Midpoint* <sub>$\mathcal{RCE}$</sub> , *Midpoint* <sub>$\mathcal{R}$</sub> , *PerpendicularFoot*, *ArcBisect*, *Square*, *Bisection*, *DistanceProjection* <sub>$\mathcal{RCE}$</sub> .

## 2.1.6 Compàs fix

Aquesta eina formalitza qualsevol instrument físic que permeti dibuixar circumferències d'un cert radi fixat, que per defecte suposarem que és igual a 1.

$$\mathcal{CF} := \langle \{\mathbf{UnitCircle}\}, \{\mathbf{CircleIntersect}\} \rangle.$$

Construccions: *Rhombus*.

## 2.1.7 Regle i compàs fix

És l'eina  $\mathcal{R} \cup \mathcal{CF}$ :

$$\mathcal{RCF} := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{UnitCircle}\}, \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{CircleIntersect}, \mathbf{LineCircleIntersect}\} \rangle.$$

Construccions: *Midpoint* <sub>$\mathcal{R}$</sub> , *Bisection* <sub>$\mathcal{RCF}$</sub>  i *Rhombus*.

## 2.1.8 Regle i compàs de punta seca

Entendrem per *compàs de punta seca* un instrument que permet transportar distàncies arbitràriament grans. Una modelització d'aquest instrument és un compàs amb dues puntes (sense llapis). Juntament amb un regle, aquest instrument admet la formalització següent com a eina:

$$\mathcal{RCP} := \langle \{\mathbf{Line}\}, \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{LineRadiusCircleIntersect}\} \rangle.$$

Aquesta eina no satisfà la hipòtesi de completesa.

Construccions: *Midpoint* <sub>$\mathcal{R}$</sub>  i *Doublepoint* <sub>$\mathcal{RCP}$</sub> .

### 2.1.9 Regle marcat

Com ja hem vist al capítol 1, aquesta eina formalitza l'instrument *regle marcat*, que consisteix en un regle ideal arbitràriament llarg amb dues marques que, per simplificar, se suposen a distància 1 l'una de l'altra. A l'annex A justifiarem que la formalització del regle marcat és:

$$\mathcal{RM} := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{PointLineVerging}, \mathbf{LineLineVerging}\}, \\ \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{LineUnitCircleIntersect}, \mathbf{LineConchoidIntersect}\} \rangle.$$

Construccions: *Midpoint* <sub>$\mathcal{R}$</sub> , *Parallel* <sub>$\mathcal{RM}$</sub> , *Perpendicular* <sub>$\mathcal{RM}$</sub> , *RadicalAxis* <sub>$\mathcal{RM}$</sub>  i *LineCircleIntersection* <sub>$\mathcal{RM}$</sub> .

### 2.1.10 Escaire

Entenem per escaire un instrument ideal que permet dibuixar dues rectes arbitràriament llargues que formen un angle recte<sup>2</sup>. El formalitzem amb l'eina:

$$\mathcal{ES} := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{Perpendicular}, \mathbf{PointPerpendicular}, \mathbf{LineSquadVerging}\}, \\ \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{LineDiameterCircleIntersect}\} \rangle.$$

Les corbes intersecables amb aquesta eina són circumferències donades per un diàmetre.

Construccions: *DoublePoint* <sub>$\mathcal{ES}$</sub> , *Midpoint* <sub>$\mathcal{R}$</sub> , *Parallel* <sub>$\mathcal{ES}$</sub>  i *Parallelogram*.

### 2.1.11 Angle

Aquest instrument permet dibuixar dues semirectes arbitràriament llargues que formen un angle donat  $\alpha$  (cf. [52]). La formalització d'aquest instrument com a eina és:

$$\mathcal{A}_\alpha := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{AngleLine}_\alpha, \mathbf{PointAngleLine}_\alpha, \mathbf{LineAngleVerging}_\alpha\}, \\ \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{LineArcIntersect}_\alpha\} \rangle.$$

Construccions: *Midpoint* <sub>$\mathcal{R}$</sub>  i *Parallel* <sub>$\mathcal{A}_\alpha$</sub> .

## 2.2 Eines modernes

En les darreres dècades, hi ha hagut un interès creixent per les construccions geomètriques; més enllà dels interessos purament matemàtics, les aplicacions industrials de l'origami o la geometria computacional, entre d'altres coses, han aportat noves perspectives. En aquest apartat incloem les eines que s'han estudiat més recentment.

---

<sup>2</sup>Els escaires habituals són models aproximats d'aquesta eina, ja que només permeten dibuixar semirectes.

## 2.2.1 Origami

Aquesta eina formalitza les construccions geomètriques que es poden dur a terme marcant plects sobre un full de paper, que suposarem arbitràriament gran. Malgrat que disposem del terme *papiroflèxia* per anomenar aquesta eina, emprarem el terme japonès *origami*, que és el més estès en la literatura.

Els axiomes de construcció corresponen als anomenats *axiomes de Huzita-Justin*, descrits a [35]. Aquests axiomes són el resultat de treballs de Huzita (cf. [28]), Hatori (cf. [22]) i Justin (cf. [32]).<sup>3</sup> Formalment:

$$O := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{PerpendicularBisector}, \mathbf{Bisector}, \mathbf{Perpendicular}, \mathbf{Tangent}, \mathbf{CommonTangent}, \mathbf{PerpendicularTangent}\}, \{\mathbf{LineIntersect}\} \rangle.$$

Construccions: *Doublepoint*<sub>ES</sub>, *Reflect*<sub>O</sub>, *Midpoint*<sub>O</sub>, *Midpoint*<sub>R</sub>, *Parallel*<sub>ES</sub>, *LineCircleIntersectOrigami*, *Parallelogram*<sub>O</sub>, *IsoscelesRectangleTriangle*, *AngleDuplication*, *LineCircleIntersectOrigami*, *DistanceProjection*<sub>O</sub>, *Rotation*.

## 2.2.2 Origami thalià

En aquest tipus d'origami, introduït per Alperin ([2]) només s'admeten tres dels axiomes bàsics de Huzita-Justin: la recta per dos punts, la mediatriu d'un segment i la intersecció de rectes.

$$OT := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{PerpendicularBisector}\}, \{\mathbf{LineIntersect}\} \rangle.$$

Construccions: *Midpoint*<sub>O</sub> i *Midpoint*<sub>R</sub>.

## 2.2.3 Origami pitagòric

Afegint la bisecció d'angles a l'eina anterior, tenim:

$$OP := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{PerpendicularBisector}, \mathbf{Bisector}\}, \{\mathbf{LineIntersect}\} \rangle.$$

Construccions: *Midpoint*<sub>R</sub> i *Midpoint*<sub>O</sub>.

## 2.2.4 Origami angular

Seguint la nomenclatura utilitzada a [30], anomenem *origami angular* a la subeina de  $\mathcal{A}_\alpha$  següent:

$$O\mathcal{A}_\alpha := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{PointAngleLine}_\alpha\}, \{\mathbf{LineIntersect}\} \rangle.$$

Construccions: *Midpoint*<sub>R</sub> i *Midpoint*<sub>O</sub>.

---

<sup>3</sup>Alperin i Lang [4] demostren que aquests axiomes permeten fer qualsevol construcció amb origami, sempre que s'exclouï la possibilitat de fer més d'un plec simultàniament. Si s'admet aquesta opció, s'obtenen altres eines més potents ([4]).

### 2.2.5 Regle i el·lipses

Aquesta eina formalitza un conjunt d'instruments format per un regle ideal arbitràriament llarg i fil i tres agulles ( cf. [18]). El mètode per dibuixar el·lipses a partir de fil i agulles és ben conegut. La formalització és:

$$\mathcal{RE} := \langle \{\text{Line, Circle, RadiusCircle, Ellipse}\}, \{\text{LineIntersect, CircleIntersect, LineCircleIntersect, ConicLineIntersect, ConicCircleIntersect, ConicIntersect}\} \rangle.$$

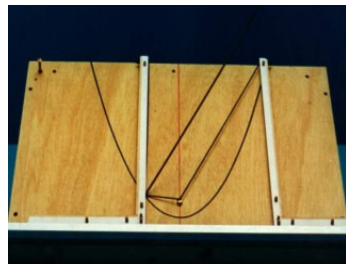
Construccions: *EquilateralTriangle, DistanceTransport, CompassDistanceTransport, DoublePoint, CircleInversion, Circumcenter, Reflect, PerpendicularBisection, MidPointCompass, Midpoint<sub>R</sub>, PerpendicularFoot, ArcBisect, Square, Parallel<sub>RC</sub>, Parallelogram<sub>C</sub>, Bisection, DistanceProjection<sub>RCE</sub>*.

### 2.2.6 Còniques

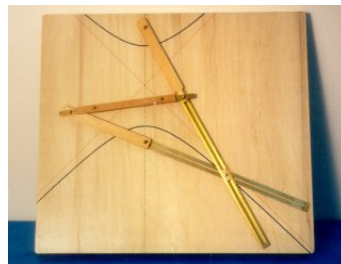
Videla ([50]) planteja quines construccions són possibles utilitzant còniques, definides a partir de les seves directrius, focus i excentricitats <sup>4</sup>. Té sentit, doncs, formalitzar aquests processos sota el nom genèric de *còniques*.

$$\mathcal{CO} := \langle \{\text{Line, Circle, RadiusCircle, Conic}\}, \{\text{LineIntersect, CircleIntersect, LineCircleIntersect, ConicLineIntersect, ConicCircleIntersect, ConicIntersect}\} \rangle.$$

Construccions: *EquilateralTriangle, DistanceTransport, CompassDistanceTransport, DoublePoint, CircleInversion, Circumcenter, Reflect, PerpendicularBisection, MidPointCompass, Midpoint<sub>RCE</sub>, Midpoint<sub>R</sub>, PerpendicularFoot, ArcBisect, Square, Parallel<sub>RC</sub>, Parallelogram<sub>C</sub>, Bisection, DistanceProjection<sub>RCE</sub>*.



(a) Parablògraf



(b) Hiperbològraf

Figura 2.1: Mecanismes per construir paràboles i hipèrboles

<sup>4</sup>Existeixen aparells mecànics per construir còniques (cf. [48])

## 2.2.7 Regle marcat i compàs

És l'eina  $\mathcal{RM} \cup C$ :

$\mathcal{RMC} := \langle \{ \text{Line, Circle, RadiusCircle, PointLineVerging, PointCircleVerging, LineLineVerging, LineCircleVerging, CircleCircleVerging} \}$   
 $\{ \text{LineIntersect, CircleIntersect, LineCircleIntersect, LineUnitCircleIntersect, CircleUnitCircleIntersect, LineConchoidIntersect, CircleConchoidIntersect, LineLimaconIntersect, CircleLimaconIntersect} \} \rangle$ .

Construccions: *EquilateralTriangle, DistanceTransport, CompassDistanceTransport, DoublePoint, CircleInversion, Circumcenter, Reflect, PerpendicularBisection, MidPointCompass, Midpoint<sub>RC</sub>, Midpoint<sub>R</sub>, PerpendicularFoot, ArcBisect, Square, Parallel<sub>RM</sub>, Parallel<sub>RC</sub>, Perpendicular<sub>RM</sub>, Parallelogram<sub>C</sub>, RadicalAxis<sub>RM</sub>, Bisection, LineCircleIntersection<sub>RM</sub> i DistanceProjection<sub>RC</sub>*.



# Capítol 3

## Classificació de les eines

### 3.1 Classificació geomètrica de les eines

Les relacions entre eines introduïdes al capítol 1 són essencialment formals, i permeten descriure les relacions més o menys evidents entre les eines. Però la comparació més natural entre eines és la que té en compte les seves *capacitats geomètriques*.

**Notació 3.1.1.** *Escrivem  $C(U_0, V) \varepsilon \mathcal{E}$  per dir que la construcció  $C(U_0, V)$  és equivalent a una construcció de l'eina  $\mathcal{E}$ , és a dir, que el problema resolt per  $C(U_0, V)$  també es pot resoldre amb l'eina  $\mathcal{E}$ .*

**Definició 3.1.1.** *Direm que l'eina  $\mathcal{E}$  genera l'eina  $\mathcal{E}'$ , i ho denotarem per  $\mathcal{E} \circ - \mathcal{E}'$ , si qualsevol problema que es pot resoldre amb  $\mathcal{E}'$  també es pot resoldre amb  $\mathcal{E}$ . En termes de construccions:*

$$\mathcal{E} \circ - \mathcal{E}' \iff \forall C(U_0, V) \in \mathcal{E}' \quad C(U_0, V) \varepsilon \mathcal{E}.$$

*Direm que  $\mathcal{E}$  i  $\mathcal{E}'$  són equivalents geomètricament, i ho denotarem per  $\mathcal{E} \circ \circ \mathcal{E}'$  si resolen els mateixos problemes.*

Tenim una caracterització evident d'aquesta relació entre eines:

**Lema 3.1.** *Siguin  $\mathcal{E}$  i  $\mathcal{E}' = \langle C', I' \rangle$  dues eines.*

$$\mathcal{E} \circ - \mathcal{E}' \iff \forall A \in C' \cup I' \quad A \varepsilon \mathcal{E}.$$

A la literatura trobem nombroses demostracions de l'equivalència d'eines, que segueixen el guió marcat per aquest lema. Cal entendre'l, doncs, com un mètode sistemàtic per establir equivalències entre eines. A més, el lema il·lustra com, donades dues eines geomètricament equivalents  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ , podem *traduir* les construccions fetes amb  $\mathcal{E}$  a construccions realitzades amb  $\mathcal{E}'$ : només cal substituir cada axioma d' $\mathcal{E}$  per la seva construcció amb  $\mathcal{E}'$ .



**Lema 3.2.** *Siguin  $\mathcal{E}$  i  $\mathcal{E}'$  dues eines.*

- *Si  $\mathcal{E}'$  és una subeina de  $\mathcal{E}$ , aleshores  $\mathcal{E} \circlearrowleft \mathcal{E}'$ .*
- *$\mathcal{E} \cup \mathcal{E}' \circlearrowleft \mathcal{E}$ .*
- *Si  $\mathcal{E}$  genera  $\mathcal{E}'$ , aleshores  $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}' = \mathcal{E}$ .*

**Exemples:**

Com a conseqüència directa del lema 3.2, tenim les relacions següents:

$$CO \circlearrowleft RC \circlearrowleft RCE \circlearrowleft \mathcal{R};$$

$$O \circlearrowleft OP \circlearrowleft OT \circlearrowleft \mathcal{R};$$

$$RMC \circlearrowleft RM \circlearrowleft \mathcal{R}.$$

Es pot provar que una eina en genera una altra a força de trobar construccions explícites dels axiomes corresponents. Però per provar que una eina no és generada per una altra calen, en general, d'altres tècniques. La signatura esdevindrà un invariant molt útil en aquest sentit.

Per bé que l'equivalència geomètrica és una classificació natural de les eines, a la pràctica és molt restrictiva. Una de les principals limitacions la trobem en els axiomes de construcció: si les corbes construïbles de les eines són diferents, l'equivalència no es pot donar.

Per tant, és convenient tenir un criteri més flexible per classificar les eines.

**Definició 3.1.2.** *Una construcció amb punts és una construcció  $CP(U_0; V)$  en la qual el conjunt inicial  $U_0$  està format exclusivament per punts. Una construcció de punts amb punts és una construcció amb punts  $CPP(U_0; V)$  tal que el conjunt de sortida només conté punts.*

**Observació:** Malgrat que no hem pressuposat res sobre aquesta qüestió, la majoria de les corbes que intervenen normalment en les construccions geomètriques es poden descriure a partir de certs punts destacats. Per exemple, la mediatriu d'un segment queda determinada pels extrems del segment, o una circumferència es pot descriure amb el seu centre i un dels seus punts. La definició de les CPP no és, doncs, gens restrictiva, sinó més aviat al contrari: deixa oberta la possibilitat d'intersecar corbes sense requerir-ne la seva construcció explícita.

**Definició 3.1.3.** *Diem que l'eina  $\mathcal{E}$  genera virtualment l'eina  $\mathcal{E}'$ , i ho denotem per  $\mathcal{E} :- \mathcal{E}'$ , si qualsevol construcció CPP amb l'eina  $\mathcal{E}'$  és equivalent a una construcció amb  $\mathcal{E}$ . Diem que  $\mathcal{E}$  i  $\mathcal{E}'$  són virtualment equivalents, i ho denotem per  $\mathcal{E} :-: \mathcal{E}'$  si  $\mathcal{E} :- \mathcal{E}'$  i  $\mathcal{E}' :- \mathcal{E}$ .*

Les propietats següents són evidents:

- $\mathcal{E} \circ \mathcal{E}' \implies \mathcal{E} :- \mathcal{E}'$ .
- Si  $\mathcal{E}'$  és una subeina de  $\mathcal{E}$ , aleshores  $\mathcal{E} :- \mathcal{E}'$ .
- $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}' :- \mathcal{E}$ .

**Observació:** Els criteris d'equivalència i equivalència virtual d'eines s'estenen de manera natural a eines generalitzades.

**Teorema 3.3.** *Si la restricció de cada axioma d'intersecció de l'eina  $\mathcal{E}'$  a corbes donades per construccions amb punts és equivalent a una construcció per punts amb l'eina  $\mathcal{E}$ , llavors  $\mathcal{E}$  genera virtualment  $\mathcal{E}'$ .*

*Demostració.* La condició és clarament necessària. Sigui  $CPP(U_0; V) \in \mathcal{E}'$  una construcció de punts amb punts amb l'eina  $\mathcal{E}'$ . Totes les corbes que apareixen a la construcció s'han de poder determinar a partir de punts. Els punts de  $V$  s'obtenen aplicant axiomes d'intersecció a aquestes corbes, i per tant, s'obtenen també a partir de construccions equivalents amb l'eina  $\mathcal{E}$ .  $\square$

**Corol·lari 3.4.** *Siguin  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  dues eines, amb  $\mathcal{E} :- \mathcal{E}'$ .*

- La intersecció de dues corbes donades per construccions amb punts amb  $\mathcal{E}'$  es pot resoldre amb  $\mathcal{E}$ .*
- La intersecció d'una corba intersecable donada per una construcció amb punts amb una construïble per punts amb  $\mathcal{E}'$  es pot resoldre amb  $\mathcal{E}$ .*

**Observació:** És pertinent plantejar-se si quan  $\mathcal{E}$  genera virtualment  $\mathcal{E}'$ , la unió  $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$  coincideix amb  $\mathcal{E}$ . En les properes seccions veurem que  $\mathcal{RM} :- \mathcal{RC}$  (teorema 3.14). Però és clar que  $\mathcal{RM} \cup \mathcal{RC} \neq \mathcal{RM}$ .

## 3.2 Teoremes sobre compassos

**Teorema 3.5** (Euclides I.1 i I.2). *L'eina  $\mathcal{RC}\mathcal{E}$  genera l'eina  $\mathcal{RC}$ :*

$$\mathcal{RC}\mathcal{E} \circ \mathcal{RC}.$$

*Demostració.* Basta veure que **RadiusCircle**  $\varepsilon$   $\mathcal{RC}$ , és a dir, que tenim una construcció de la circumferència de centre  $A$  i radi  $BC$  amb l'eina  $\mathcal{RC}\mathcal{E}$ . Aquesta construcció és trivial a partir de la construcció següent que, donats tres punts  $A, B, C$  troba un punt

$D$  tal que  $d(A, D) = d(B, C)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{DistanceTransport}(A, B, C; D) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(B, A), \\ & E, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & c_3 = \mathbf{Circle}(B, C), \\ & \ell_1 = \mathbf{Line}(B, E), \\ & G, H = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_3), \\ & c_4 = \mathbf{Circle}(G, F), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(E, A) \\ & D, E = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_4)\}. \end{aligned}$$

□

**Corollari 3.6.** *Les eines  $\mathcal{RC}$  i  $\mathcal{RCE}$  són equivalents.*

**Teorema 3.7** (Euclides I.3). *Les eines  $\mathcal{C}$  i  $\mathcal{CE}$  són equivalents.*

*Demostració.* Seguim el mateix raonament del teorema 3.5, substituint la construcció **DistanceTransport** per una construcció equivalent que no utilitza el regle:

$$\begin{aligned} \mathbf{CompassDistanceTransport}(A, B, C; D) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(B, A), \\ & E, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & c_3 = \mathbf{Circle}(E, C), \\ & c_4 = \mathbf{Circle}(F, C), \\ & C, D = \mathbf{CircleIntersect}(c_3, c_4)\}. \end{aligned}$$

□

**Observació:** Si Euclides no proposa aquesta construcció al principi dels seus *Elements* és, segurament, perquè la prova de la seva validesa requereix molts resultats previs, a diferència de la construcció **DistanceTransport**. Naturalment, el teorema 3.5 és un corollari immediat del resultat anterior.

A continuació, fem un abús de llenguatge en descriure les eines generalitzades: utilitzem determinats axiomes per definir-les quan, en realitat, es defineixen per construccions de punts amb punts, equivalents a aquests axiomes. Pressuposem, en aquestes construccions de punts amb punts, que les circumferències es determinen pel seu centre i un punt per on passen i les rectes es determinen per dos dels seus punts.

**Teorema 3.8** (Mohr-Mascheroni, versió feble). *Denotem per **CircleInversion**( $A, B, P; P'$ ) una construcció del punt invers de  $P$  respecte de la circumferència de centre  $A$  que passa per  $B$ <sup>1</sup>.*

---

<sup>1</sup>Existeixen mecanismes físics que permeten dur a terme aquesta construcció, com ara l'*aparell de Peaucellier* ([23])

Considerem les eines generalitzades:

$$\begin{aligned} CI &:= \{\mathbf{CircleIntersect}, \mathbf{CircleInversion}\}, \\ C\mathcal{L} &:= \{\mathbf{CircleIntersect}, \mathbf{LineIntersect}\}, \\ \mathcal{L}I &:= \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{LineCircleIntersect}\}. \end{aligned}$$

Se satisfan les equivalències virtuals:

$$\mathcal{RC} :-: CI :-: C\mathcal{L} :-: \mathcal{L}I.$$

*Demostració.* Provarem que  $C\mathcal{L} :-: \mathcal{RC}$ ,  $\mathcal{RC} :-: CI$  i  $\mathcal{L}I :-: C\mathcal{L}$ . Quant a la primera equivalència basta veure que existeix una construcció de punts amb punts amb  $C\mathcal{L}$  equivalent a **LineCircleIntersect**. Donats els punts  $A, B, C$  i  $D$ , la construcció **LineCircleIntersection** troba els punts de tall  $M, N$  de la recta pels punts  $A, B$  amb la circumferència amb centre  $C$  que passa per  $D$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{LineCircleIntersection}(A, B, C, D; M, N) = \{ &\mathbf{Reflect}(A, B, C; C'), \\ &\mathbf{Reflect}(A, B, D; D'), \\ &c_1 = \mathbf{Circle}(C, D), \\ &c_2 = \mathbf{Circle}(C', D'), \\ &M, N = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2)\}. \end{aligned}$$

L'adaptació d'aquesta construcció a una construcció de punts amb punts es pot fer amb  $C\mathcal{L}$ .

Quant a la segona equivalència, és clar que  $\mathcal{RC} \circ- CI$ , perquè la inversió d'un punt respecte d'una circumferència és un problema resoluble amb  $\mathcal{RC}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{CircleInversion}_{\mathcal{RC}}(A, B, P; P') = \{ &\ell_1 = \mathbf{Line}(A, P), \\ &c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ &C, D = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1), \\ &\ell_2 = \mathbf{Line}(B, P), \\ &B, E = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_1) \\ &\ell_3 = \mathbf{Line}(B, D), \\ &\ell_4 = \mathbf{Line}(C, E), \\ &\ell_5 = \mathbf{Line}(D, E), \\ &\ell_6 = \mathbf{Line}(B, C), \\ &F = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4), \\ &G = \mathbf{LineIntersect}(\ell_5, \ell_6), \\ &\ell_7 = \mathbf{Line}(F, G), \\ &P' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_7)\}. \end{aligned}$$

Per veure que  $CI :-: \mathcal{RC}$ , hem de provar que la restricció a corbes donades per punts de **LineCircleIntersect** i **LineIntersect** es poden construir amb  $CI$ . La construcció

**LineCircleIntersection** que hem vist abans utilitza únicament l'axioma **CircleIntersect** i demostra la primera part. Quant a la intersecció de rectes, ens la donen les construccions següents, quan les adaptem a construccions de punts amb punts:

$$\mathit{MidPoint}_{CI}(A, B; M) = \{\mathit{DoublePoint}(A, B; N), \\ \mathit{CircleInversion}(A, B, N; M)\}.$$

$$\mathit{Circumcentre}(P, Q, R; O) = \{\mathit{CircleInversion}(P, Q, R; R'), \\ c_1 = \mathit{Circle}(Q, P), \\ c_2 = \mathit{Circle}(R', P), \\ O', P = \mathit{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ \mathit{CircleInversion}(P, Q, O'; O)\}.$$

$$\mathit{LineIntersection}(A, B, C, D; O) = \{\mathit{MidPoint}_{CI}(A, B; E), \\ \mathit{CircleInversion}(E, A, B; B'), \\ \mathit{Circumcentre}(A, E, B'; O_1), \\ \mathit{CircleInversion}(E, A, D; D'), \\ \mathit{Circumcentre}(A, E, D'; O_2), \\ c_1 = \mathit{Circle}(O_1, A), \\ c_2 = \mathit{Circle}(O_2, C), \\ F, E = \mathit{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ \mathit{CircleInversion}(E, A, F; M)\}.$$

És clar que  $CL := LI$  per la construcció **LineCircleIntersection** descrita abans. Per veure que  $LI := CL$  basta veure que existeix una construcció de punts amb punts amb  $LI$  equivalent a **CircleIntersect**.

Els punts de tall de dues circumferències es poden trobar com a punts de tall del seu eix radical amb una de les circumferències. Atès que tenim l'axioma **LineCircleIntersect**, només cal que vegem una construcció de l'eix radical amb  $LI$ .

Aquesta construcció s'obté adaptant a una construcció de punts amb punts la construcció següent:

$$\begin{aligned}
\mathbf{RadicalAxis}_{\mathcal{CL}}(O, A, O', K; \ell) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(O, A), \\
& \ell_2 = \mathbf{Line}(O, O'), \\
& \mathbf{Parallel}_{\mathcal{CL}}(A, O, O'; \ell_3), \\
& A', B' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_3, \mathbf{Circle}(O', K)), \\
& A, B = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, \mathbf{Circle}(O, A)), \\
& \ell_4 = \mathbf{Line}(A, A'), \\
& S = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_4), \\
& \ell_5 = \mathbf{Line}(S, A), \\
& \ell_6 = \mathbf{Line}(S, B), \\
& A, C = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_5, \mathbf{Circle}(O, A)), \\
& B, D = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_6, \mathbf{Circle}(O', K)), \\
& A', C' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_5, \mathbf{Circle}(O, A)), \\
& B', D' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_6, \mathbf{Circle}(O', K)), \\
& \ell_7 = \mathbf{Line}(A, D), \\
& \ell_8 = \mathbf{Line}(B', C'), \\
& X = \mathbf{LineIntersect}(\ell_7, \ell_8), \\
& \ell_9 = \mathbf{Line}(B, C), \\
& \ell_{10} = \mathbf{Line}(A', D'), \\
& Y = \mathbf{LineIntersect}(\ell_9, \ell_{10}), \\
& \ell = \mathbf{Line}(X, Y)\}.
\end{aligned}$$

La construcció  $\mathbf{Parallel}_{\mathcal{CL}}$  que intervé en la construcció anterior és la següent:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Parallel}_{\mathcal{CL}}(A, B, F; \ell) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\
& A, C = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, \mathbf{Circle}(B, A)), \\
& \ell_2 = \mathbf{Line}(A, F), \\
& A, S = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, \mathbf{Circle}(F, A)), \\
& \ell_3 = \mathbf{Line}(S, B), \\
& \ell_4 = \mathbf{Line}(S, C), \\
& \ell_5 = \mathbf{Line}(F, C), \\
& R = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5), \\
& \ell_6 = \mathbf{Line}(A, R), \\
& D = \mathbf{LineIntersect}(\ell_5, \ell_6), \\
& \ell = \mathbf{Line}(F, D)\}.
\end{aligned}$$

□

**Observació:** Es coneixen diverses construccions de la inversió respecte d'una circumferència en què s'utilitza exclusivament el compàs. Malauradament, totes requereixen certes hipòtesis sobre la posició relativa dels punts implicats (en podeu trobar alguna a l'annex D). Per bé que, tenint en compte les propietats de la inversió, hom pot cenyir-se

sempre al cas en què se satisfacin les hipòtesis. Aquestes reduccions no són construccions: poden exigir un nombre arbitràriament gran de passos. Aquesta limitació ens impedeix afirmar que l'eina generalitzada **{CircleIntersect}** genera virtualment  $\mathcal{RC}$ , és a dir, el teorema de Mohr-Mascheroni en termes d'eines. Tanmateix, aquesta és una qüestió oberta.

**Qüestió:**  $\{Inversion\} \in \{CircleIntersect\}$ ?

Una resposta afirmativa ens permetria afirmar que **{CircleIntersect}**  $:- \mathcal{RC}$ .

### 3.3 Teoremes sobre regles

En general, és difícil provar que no hi ha relacions entre dues eines. En alguns casos, però, és possible:

**Proposició 3.9.** *L'eina  $\mathcal{R}$  no genera  $\mathcal{CE}$ .*

*Demostració.* Si fos  $\mathcal{R} \circ- \mathcal{CE}$ , també tindriem  $\mathcal{R} :- \mathcal{CE}$ , i per tant podríem construir el circumcentre d'un triangle a partir dels seus vèrtexs amb  $\mathcal{R}$ . Però amb  $\mathcal{R}$  només podem construir els costats del triangle.  $\square$

**Proposició 3.10.** *L'eina  $\mathcal{OT}$  no genera l'eina  $\mathcal{O}$ .*

*Demostració.* Veurem que l'eina  $\mathcal{OT}$  no genera virtualment l'eina  $\mathcal{OP}$ . Atès que  $\mathcal{OP}$  és subeina de  $\mathcal{O}$ , això implica que  $\mathcal{OT}$  no genera virtualment l'eina  $\mathcal{O}$ .

Suposem que tenim dues rectes perpendiculars construïdes. Amb l'eina  $\mathcal{OP}$  i l'ús de l'axioma **Bisector** construïm les dues bisectrius d'aquest parell de rectes.

En canvi, amb l'eina  $\mathcal{OT}$  només podem construir, si les rectes estan donades per dos punts, una xarxa rectangular.

$\square$

**Proposició 3.11.** *L'eina  $\mathcal{RM}$  no genera virtualment l'eina  $\mathcal{RCF}$ .*

*Demostració.* L'axioma **CircleIntersect** de l'eina  $\mathcal{RCF}$  restringit a construccions de punts amb punts només permet obtenir els punts de tall de circumferències de radi unitari. Donats dos punts  $A, B$  a distància inferior a 1, amb  $\mathcal{RM}$  només podem construir punts sobre la recta per  $A$  i  $B$ . Els punts de tall de les circumferències amb centres  $A$  i  $B$  i radi unitari no es poden construir.  $\square$

**Proposició 3.12.** *L'eina  $\mathcal{RCF}$  no genera virtualment l'eina  $\mathcal{RM}$ .*

*Demostració.* Amb  $\mathcal{RCF}$  només podem construir rectes i circumferències de radi unitari i, per tant, construccions quadràtiques. L'axioma **LineConchoidIntersect** i la seva restricció a corbes determinades per punts  $n$  involucra de cúbiques i no es pot construir amb  $\mathcal{RCF}$ .  $\square$

**Proposició 3.13.** *L'eina  $\mathcal{RM}$  no genera virtualment l'eina  $\mathcal{O}$ .*

*Demostració.* Donats dos punts  $A, B$ , amb  $O$  podem construir punts sobre la mediatriu del segment que determinen. En canvi, amb  $\mathcal{RM}$  no podem construir punts que no estiguin sobre la recta  $AB$ .  $\square$

**Teorema 3.14.** *L'eina  $\mathcal{RM}$  genera virtualment  $\mathcal{RC}$ .*

*Demostració.* Pel teorema 3.8, només ens cal mostrar les construccions per punts dels axiomes **LineCircleIntersect** i **CircleIntersect** amb l'eina  $\mathcal{RM}$ . Aquestes construccions requereixen la construcció de perpendiculars i paral·leles. La recta paral·lela a la recta  $AB$  per un punt  $C$  es pot construir seguint els passos següents:

$$\begin{aligned} \mathit{Parallel}_{\mathcal{RM}}(A, B, C; \ell) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\ & D, D' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_1, A), \\ & E, A = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_1, D), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(A, C), \\ & \ell_3 = \mathbf{Line}(C, E), \\ & F, F' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_2, C), \\ & \ell_4 = \mathbf{Line}(F, D), \\ & \ell_5 = \mathbf{Line}(E, F), \\ & R = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4), \\ & \ell_6 = \mathbf{Line}(A, R), \\ & G = \mathbf{LineIntersect}(\ell_5, \ell_6), \\ & \ell = \mathbf{Line}(C, G)\}. \end{aligned}$$

La recta perpendicular a la recta  $AB$  per un punt  $C$  es pot construir de la manera següent:

$$\begin{aligned} \mathit{Perpendicular}_{\mathcal{RM}}(A, B, C; \ell) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\ & D, D' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_1, A), \\ & E, A = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_1, D), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(A, C), \\ & \ell_3 = \mathbf{Line}(D, C), \\ & F, A = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_2, D), \\ & G, G' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_3, D), \\ & \ell_4 = \mathbf{Line}(A, G), \\ & \ell_5 = \mathbf{Line}(E, F), \\ & H = \mathbf{LineIntersect}(\ell_4, \ell_5), \\ & \ell_6 = \mathbf{Line}(E, G), \\ & K = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_6), \\ & \mathit{Parallel}_{\mathcal{RM}}(K, H, C; \ell)\}. \end{aligned}$$

Ara ja podem descriure la intersecció de la recta determinada pels punts  $B, C$  i la



circumferència de centre  $O$  que passa per  $A$  (cf. [52]):

$$\begin{aligned}
\mathbf{LineCircleIntersection}_{\mathcal{RM}}(O, A, B, C; X, Y) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(B, C), \\
& \mathbf{Perpendicular}_{\mathcal{RM}}(B, C, O; \ell_2), \\
& \ell_3 = \mathbf{Line}(O, A), \\
& A', A'' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_3, O), \\
& D = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_1), \\
& \ell_4 = \mathbf{Line}(A, D), \\
& \mathbf{Parallel}_{\mathcal{RM}}(A, D, A'; \ell_5), \\
& D' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5), \\
& \mathbf{Parallel}_{\mathcal{RM}}(B, C, D'; \ell_6), \\
& X', Y' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_6, D'), \\
& \ell_7 = \mathbf{Line}(O, X'), \\
& \ell_8 = \mathbf{Line}(O, Y'), \\
& X = \mathbf{LineIntersect}(\ell_7, \ell_1), \\
& Y = \mathbf{LineIntersect}(\ell_8, \ell_1)\}.
\end{aligned}$$

La intersecció de dues circumferències es redueix a la intersecció d'una recta i una circumferència, mitjançant la construcció de l'eix radical de les dues circumferències, és a dir, de la seva corda comú. Si tenim una circumferència de centre  $O$  que passa pel punt  $A$  i una altra circumferència de centre  $O'$  passant pel punt  $K$ , el seu eix radical  $\ell$  es pot construir de la forma següent amb regle marcat (cf. [52]):

$$\begin{aligned}
\mathbf{RadicalAxis}_{\mathcal{RM}}(O, A, O', K; \ell) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(O, A), \\
& \mathbf{Parallel}_{\mathcal{RM}}(A, O, O'; \ell_2), \\
& M', N' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_2, O'), \\
& \mathbf{LineCircleIntersection}_{\mathcal{RM}}(O', K, M', N'; A', B'), \\
& E, E' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_1, O), \\
& \mathbf{Perpendicular}_{\mathcal{RM}}(B, C, O; \ell_3), \\
& \ell_4 = \mathbf{Line}(E, O'), \\
& H = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4), \\
& \mathbf{Parallel}_{\mathcal{RM}}(E, H, A; \ell_5), \\
& K = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5), \\
& \ell_6 = \mathbf{Line}(E', H), \\
& \mathbf{Parallel}_{\mathcal{RM}}(E', H, K; \ell_6), \\
& B = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_6), \\
& \ell_7 = \mathbf{Line}(A, A'), \\
& \ell_8 = \mathbf{Line}(O, O'), \\
& S = \mathbf{LineIntersect}(\ell_7, \ell_8), \\
& \mathbf{LineCircleIntersection}_{\mathcal{RM}}(O, A, A', S; C), \\
& \mathbf{LineCircleIntersection}_{\mathcal{RM}}(O, K, A', S; C'), \\
& \ell_9 = \mathbf{Line}(B, B'), \\
& \mathbf{LineCircleIntersection}_{\mathcal{RM}}(O, A, B', S; D), \\
& \mathbf{LineCircleIntersection}_{\mathcal{RM}}(O, K, B', S; D'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_{10} &= \mathbf{Line}(A, D), \\
\ell_{11} &= \mathbf{Line}(B', C'), \\
X &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_{10}, \ell_{11}), \\
\ell_{12} &= \mathbf{Line}(B, C), \\
\ell_{13} &= \mathbf{Line}(A', D'), \\
Y &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_{12}, \ell_{13}), \\
\ell &= \mathbf{Line}(X, Y).
\end{aligned}$$

□

Un dels resultats clàssics sobre construccions amb eines és el teorema Poncelet-Steiner. En el nostre llenguatge, aquest és un resultat sobre mapes, que veurem en el capítol 4. En el context d'eines només podem donar-ne una versió afeblida:

**Teorema 3.15** (Poncelet-Steiner versió feble). *Les eines  $\mathcal{RCF}$  i  $\mathcal{RC}$  són virtualment equivalents.*

*Demostració.* Encara que les eines  $\mathcal{RCF}$  i  $\mathcal{RC}$  tenen els mateixos axiomes d'intersecció, les circumferències construïbles amb el compàs fix es determinen únicament a partir del seu centre. Provem primer que  $\mathcal{RC} :- \mathcal{RCF}$ . Per trobar els punts de tall de dues circumferències de radi unitari donades pel seu centre, fem la recta que passa per aquests dos punts. Els punts de tall d'aquesta recta amb les circumferències ens permeten tenir descrites les circumferències a partir del seu centre i un punt per on passen. Quant a l'axioma **LineCircleIntersect**, podem fer el mateix procés. Si suposem que la recta ve donada per dos punts, fem la recta que passa per un d'aquests punts i el centre de la circumferència. Els punts de tall d'aquesta recta amb la circumferència ens permeten tenir-la descrita a partir del seu centre i un punt per on passa.

Per provar que  $\mathcal{RCF} :- \mathcal{RC}$  basta donar construccions de la intersecció d'una circumferència amb una recta o amb una altra circumferència. Per tallar dues circumferències amb  $\mathcal{RCF}$ , dibuixem primer el seu eix radical mitjançant la construcció **RadicalAxis** <sub>$\mathcal{RM}$</sub>  que hem vist en la demostració del teorema 3.14; repassant-la es comprova que tant en ella com en les construccions auxiliars que requereix només s'utilitzen axiomes que ja té l'eina  $\mathcal{RCF}$ . Amb això, ja només resta donar una construcció de la intersecció d'una recta i una circumferència amb  $\mathcal{RCF}$ , però novament podem aprofitar la construcció amb  $\mathcal{RM}$  que hem donat en el teorema 3.14. □

**Teorema 3.16.** *Les eines  $\mathcal{RC}$  i  $\mathcal{CI}$  generen virtualment l'eina  $\mathcal{ES}$ .*

*Demostració.* Pel teorema 3.8, només cal veure que  $\mathcal{RC} :- \mathcal{ES}$ . Hem de donar construccions CPP amb  $\mathcal{RC}$  dels axiomes **Perpendicular**, **PointPerpendicular**, **LineSquadVerging** i **LineDiameterCircleIntersect**. Les tres primeres són elementals. Per fer la darrera, hem de resoldre amb  $\mathcal{RC}$  el problema següent: donats quatre punts  $A, B, C, D$ , determinar els punts d'intersecció de la circumferència de diàmetre  $AB$  amb la recta  $CD$ .

Donat un diàmetre  $AB$  d'una circumferència, amb  $\mathcal{RC}$  podem construir el centre amb la construcció **MidPointCompass** $_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}$ . Els punts d'intersecció de la circumferència, ara descrita pel seu centre i un punt per on passa, es troben amb la construcció **LineCircleIntersection** descrita a la prova del teorema 3.8.  $\square$

### 3.4 Origami versus compàs

**Teorema 3.17** (Geretschlager, [17]). *L'eina  $\mathcal{O}$  genera virtualment  $\mathcal{RC}\mathcal{E}$ .*

*Demostració.* Com en les demostracions anteriors, ens basta donar construccions de la intersecció d'una recta amb un circumferència i de la intersecció de dues circumferències amb  $\mathcal{O}$ .

L'axioma **LineCircleIntersect** admet la construcció amb  $\mathcal{O}$  següent, que donats quatre punts  $A, B, C, D$ , retorna els punts d'intersecció de la recta per  $A$  i  $B$  amb la circumferència de centre  $C$  que passa per  $D$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{LineCircleIntersectOrigami}(A, B, C, D; E, F) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\ & \ell_2, \ell_3 = \mathbf{Tangent}(\ell_1, D, C), \\ & \ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_2, D), \\ & \ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_3, D), \\ & E = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_4), \\ & F = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_5)\}. \end{aligned}$$

Com sempre, la intersecció de dues circumferències es redueix a aquesta construcció un cop s'ha construït l'eix radical. Aquesta construcció és molt llarga, així que referim al lector a [17], on en trobarà una descripció acurada.  $\square$

### 3.5 Subeines minimalis

Algunes eines tenen axiomes clarament redundants. Un exemple evident és el regle marcat  $\mathcal{RM}$ . L'axioma **LineConchoidIntersect** es pot expressar com a construcció utilitzant els axiomes **LineLineVerging** i **LineIntersect**:

$$\begin{aligned} \mathbf{LineConchoidIntersection}(\ell, \ell', P; P_1, P_2, P_3, P_4) = \{ & \\ & \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 = \mathbf{LineLineVerging}(P, \ell, \ell'), \\ & P_1 = \mathbf{LineIntersect}(\ell, \ell_1), \\ & P_2 = \mathbf{LineIntersect}(\ell, \ell_2), \\ & P_3 = \mathbf{LineIntersect}(\ell, \ell_3), \\ & P_4 = \mathbf{LineIntersect}(\ell, \ell_4)\}. \end{aligned}$$

Situacions com aquesta es donen amb una certa freqüència amb la formalització estricta dels instruments físics. Però per poder fer un tractament computacional de les eines no és una situació desitjable. Per això introduïm el concepte de *subeina minimal*.

**Definició 3.5.1.** Sigui  $\mathcal{E}$  una eina i  $\mathcal{E}'$  una subeina de  $\mathcal{E}$ . Direm que  $\mathcal{E}'$  és una subeina minimal de  $\mathcal{E}$  si  $\mathcal{E}' \circ - \mathcal{E}$  i cap subeina d' $\mathcal{E}'$  genera  $\mathcal{E}$ .

**Proposició 3.18.** Les eines

$$\mathcal{RM}_1 := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{LineLineVerging}\}, \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{LineUnitCircleIntersect}\} \rangle,$$

$$\mathcal{RM}_2 := \langle \{\mathbf{Line}\}, \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{LineUnitCircleIntersect}, \mathbf{LineConchoidIntersect}\} \rangle$$

són subeines minimal de  $\mathcal{RM}$ .

*Demostració.* Ja hem vist que  $\mathbf{LineConchoidIntersect} \varepsilon \mathcal{RM}_1$ . La construcció següent:

$$\begin{aligned} \mathbf{PointLineVerging}(\ell, P; \ell_1, \ell_2) = \{ & P_1, P_2 = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell, P), \\ & \ell_1 = \mathbf{Line}(P, P_1), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(P, P_2) \} \end{aligned}$$

ens mostra que  $\mathbf{LineConchoidIntersect} \varepsilon \mathcal{RM}_1$ . Els axiomes de  $\mathcal{RM}_1$  tenen conjunts inicials diferents, per la qual cosa no podem eliminar-ne cap d'ells sense perdre construccions. La minimalitat de  $\mathcal{RM}_2$  es prova anàlogament.  $\square$

El problema de determinar una subeina minimal és anàleg a la classificació d'eines, i en molts casos calen tècniques que s'escapen de la geometria. En el capítol següent (corollari 4.18) provarem, utilitzant la signatura, que les úniques subeines minimal de l'origami  $\mathcal{O}$  són

$$\mathcal{O}_1 := \langle \{\mathbf{PerpendicularBisector}, \mathbf{Bisector}, \mathbf{Perpendicular}, \mathbf{CommonTangent}\}, \{\mathbf{LineIntersect}\} \rangle;$$

$$\mathcal{O}_2 := \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{Bisector}, \mathbf{Perpendicular}, \mathbf{CommonTangent}\}, \{\mathbf{LineIntersect}\} \rangle.$$



# Capítol 4

## Mapes

Aquest capítol se centra en l'estudi dels mapes. L'objectiu principal és la classificació dels mapes segons els seus conjunts construïbles. Aquesta classificació és basada en dos aspectes bàsics: l'estructura algebraica intrínseca i les equacions resolubles en el mapa. En la part final del capítol, estudiem el comportament asimptòtic dels conjunts construïbles dels mapes.

La definició de tots els mapes que apareixen al capítol està detallada en l'annex C.

### 4.1 Propietats dels mapes

**Definició 4.1.1.** *Un mapa  $M(\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  és:*

- **algèbric** si el conjunt  $\mathfrak{P}^M$  dels seus punts és un anell.
- **geomètricament algèbric** si  $0, 1 \in \mathcal{U}_0$  i la suma, la resta i el producte de dos nombres són problemes resolubles amb l'eina subjacent al mapa, és a dir, si existeixen  $\mathcal{E}$ -construccions:

$$\mathbf{Sum}_{\mathcal{E}}(0, z, z'), \quad \mathbf{Difference}_{\mathcal{E}}(0, z, z'), \quad \mathbf{Product}_{\mathcal{E}}(0, 1, z, z'),$$

*que generen la suma, la resta i el producte de dos nombres  $z, z'$  respectivament.*

- **aritmètic** si el conjunt  $\mathfrak{P}^M$  dels seus punts és un cos.
- **geomètricament aritmètic** si és geomètricament algèbric i el quocient de dos nombres és un problema resoluble amb l'eina subjacent al mapa, és a dir, si  $0, 1 \in \mathcal{U}_0$  i existeixen  $\mathcal{E}$ -construccions:

$$\mathbf{Sum}_{\mathcal{E}}(0, z, z'), \quad \mathbf{Difference}_{\mathcal{E}}(0, z, z'), \\ \mathbf{Product}_{\mathcal{E}}(0, 1, z, z'), \quad \mathbf{Division}_{\mathcal{E}}(0, 1, z, z').$$

En el capítol 1 ja hem vist (proposició 1.3) que el mapa  $\mathbf{RM}$  és aritmètic. Veiem a continuació altres exemples d'aquestes propietats.

**Proposició 4.1.** *El mapa  $\mathcal{R}$  és aritmètic, però no geomètricament aritmètic. El seu conjunt de punts construïbles és  $\mathfrak{P}^{\mathcal{R}} = \mathbb{Q}(i)$ .*

*Demostració.* És clar que a partir dels tres punts  $0, 1, z$  amb un regle només podem construir el triangle que determinen, i per tant, per a punts en posició general serà impossible construir la seva suma. Per generar punts nous amb una construcció amb  $\mathcal{R}$  calen, com a mínim, quatre punts inicials que formen un quadrilàter que no sigui paral·lelogram. Els punts del conjunt inicial del mapa  $\mathcal{R}$  satisfan aquesta condició, i poden usar-se per donar construccions de les operacions aritmètiques bàsiques amb conjunts inicials estesos. Els detalls poden trobar-se a [41, Cap. 4]. La demostració que  $\mathfrak{P}^{\mathcal{R}} = \mathbb{Q}(i)$  és el corollari 4.14.  $\square$

**Proposició 4.2.** *El mapa  $\mathcal{RC}$  és geomètricament aritmètic i, per tant, aritmètic. El seu conjunt de punts construïbles és  $\mathfrak{P}^{\mathcal{RC}} = \mathbb{E}$ , el cos dels nombres euclidiàns.*

*Demostració.* La demostració es pot trobar en qualsevol text que tracti les demostracions amb regle i compàs. Val a dir, però, que en general no es donen construccions genèriques de cada operació, sinó que es fa una reducció de casos a hipòtesis particulars. Per això, en el catàleg de l'annex D hem inclòs les construccions **Sum<sub>C</sub>** (D.2.1), **Difference<sub>C</sub>** (D.2.2), **Product<sub>RC</sub>**, (D.2.5) i **Division<sub>RC</sub>**, (D.2.6) que implementen les operacions corresponents.  $\square$

**Proposició 4.3.** *El mapa  $\mathcal{O}$  és geomètricament aritmètic, i per tant és aritmètic. El seu conjunt de punts construïbles és  $\mathfrak{P}^{\mathcal{O}} = \mathbb{V}(i)$ .*

*Demostració.* El resultat també és conegut, per bé que no és tan habitual trobar-lo en els textos d'àlgebra bàsics. El lector podrà trobar a l'annex D les construccions **Sum<sub>O</sub>** (D.2.1), **Difference<sub>O</sub>** (D.2.2), **Product<sub>O</sub>**, (D.2.5) i **Division<sub>O</sub>**, (D.2.6) que implementen les operacions corresponents. La determinació del conjunt  $\mathfrak{P}^{\mathcal{O}}$  es troba en [2].  $\square$

**Proposició 4.4.** *El mapa  $\mathcal{CF}$  és algèbric però no geomètricament algèbric. El seu conjunt de punts construïbles és  $\mathfrak{P}^{\mathcal{CF}} = \mathbb{Z}[\omega]$ , l'anell dels enters d'Eisenstein.*

*Demostració.* El resultat quedarà provat en el capítol 6, com a conseqüència dels teoremes 6.10 i 6.11.  $\square$

## 4.2 Classificació aritmètica de les eines

**Definició 4.2.1.** *Donats dos mapes  $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ , direm que  $\mathcal{M}$  és submapa de  $\mathcal{M}'$  si  $\mathfrak{P}^{\mathcal{M}} \subset \mathfrak{P}^{\mathcal{M}'}$ . Direm que  $\mathcal{M}$  i  $\mathcal{M}'$  són equivalents si  $\mathfrak{P}^{\mathcal{M}} = \mathfrak{P}^{\mathcal{M}'}$ .*

És clar que:

**Proposició 4.5.** *Siguin  $\mathcal{M} = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0), \mathcal{M}' = (\mathcal{E}', \mathcal{U}'_0)$  dos mapes.*

*i) Si  $\mathcal{E}$  genera virtualment  $\mathcal{E}'$  i  $\mathcal{U}'_0 \subset \mathfrak{P}^{\mathcal{M}}$ , llavors  $\mathcal{M}'$  és un submapa de  $\mathcal{M}$ .*

ii) Si  $\mathcal{E}$  i  $\mathcal{E}'$  són virtualment equivalents,  $\mathcal{U}_0 \subset \mathfrak{B}^M$  i  $\mathcal{U}_0 \subset \mathfrak{B}^{M'}$ , llavors  $M$  i  $M'$  són equivalents.

Observem que l'equivalència de mapes no implica necessàriament l'equivalència geomètrica o virtual de les eines subjacents. Per exemple, els mapes  $\mathcal{RM}$  i  $\mathcal{O}$  són equivalents, però la proposició 3.13 mostra que les eines  $\mathcal{RM}$  i  $\mathcal{O}$  no són virtualment equivalents. La classificació dels mapes és, de fet, la classificació de les eines des del punt de vista aritmètic. En aquest sentit introduïm la definició següent:

**Definició 4.2.2.** Direm que dues eines  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  són **aritmèticament equivalents**, i ho denotarem per  $\mathcal{E} \xleftrightarrow{\text{ar}} \mathcal{E}'$ , si existeixen conjunts finits de punts  $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}'_0$  tals que:

- i) Els mapes  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  i  $M' = (\mathcal{E}', \mathcal{U}'_0)$  són infinits.
- ii) La construcció del conjunt  $\mathcal{U}^M$  (resp.  $\mathcal{U}^{M'}$ ) requereix l'aplicació de tots els axiomes d' $\mathcal{E}$  (resp. d' $\mathcal{E}'$ ).
- iii) Els mapes  $M$  i  $M'$  són equivalents, és a dir,  $\mathfrak{B}^M = \mathfrak{B}^{M'}$ .

La classificació aritmètica de les eines pot realitzar-se des de dos enfocos essencialment diferents: podem aprofitar el coneixement geomètric de l'eina o bé centrar-nos en el coneixement aritmètic de mapes associats a les eines. Els dos teoremes següents il·lustren aquests dos punts de vista. Ambdós són resultats clàssics, però n'incloem una demostració expressada en el nostre llenguatge.

**Teorema 4.6** (Mohr-Mascheroni). *Les eines  $\mathcal{C}$  i  $\mathcal{RC}$  són aritmèticament equivalents.*

*Demostració.* En el teorema 3.8 hem vist l'equivalència virtual:

$$\mathcal{RC} :-: \mathcal{CI},$$

on

$$\mathcal{CI} := \{\mathbf{CircleIntersect}, \mathbf{CircleInversion}\}.$$

Aquesta relació ens diu que els mapes  $\mathcal{RC} = (\mathcal{RC}, \{0, 1\})$  i  $\mathcal{CI} = (\mathcal{CI}, \{0, 1\})$  són equivalents. Ens basta veure l'equivalència dels mapes  $\mathcal{CI}$  i  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \{0, 1\})$ . Cal provar que qualsevol punt que s'obtingui per inversió d'un punt respecte d'una circumferència es pot construir usant el compàs en un nombre finit, possiblement arbitràriament gran, de passos. La construcció:

$$\begin{aligned} \mathbf{CircleInversion}(C, D, P; P') = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(C, D), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(P, C), \\ & M, N = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & c_3 = \mathbf{Circle}(M, C), \\ & c_4 = \mathbf{Circle}(N, C), \\ & P', C = \mathbf{CircleIntersect}(c_3, c_4)\} \end{aligned}$$



genera el punt  $P'$  invers del punt  $P$  respecte de la circumferència de centre  $C$  que passa pel punt  $D$ , sempre que  $d(C, P) > \frac{1}{2}d(C, D)$ . Aquesta hipòtesi no es pot garantir d'entrada, però podem doblar la distància  $CP$  mitjançant la construcció

$$\begin{aligned} \mathbf{DoublePoint}(A, B; Q) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(B, A), \\ & D, E = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & c_3 = \mathbf{Circle}(D, B), \\ & A, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_3), \\ & c_4 = \mathbf{Circle}(F, B), \\ & D, Q = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_4)\}. \end{aligned}$$

Aplicant aquesta construcció un nombre  $n$  suficientment gran de vegades aconseguirem un punt  $Q$  en el mapa  $C$  alineat amb  $C$  i  $P$  tal que  $CQ = 2^n CP > \frac{1}{2}d(C, D)$ . Les propietats bàsiques de la inversió respecte un cercle ens diuen que l'invers  $Q'$  del punt  $Q$  respecte la circumferència fixada també està alineat amb  $C$  i  $P$  i satisfà  $AP' = 2^n AQ'$ . Trobarem el punt  $P'$  en el mapa  $C$  un cop haguem aplicat  $n$  cops la construcció:

$$\mathbf{MidPointCompass}(X, Y; Z) = \{\mathbf{DoublePoint}(X, Y; U), \mathbf{CircleInversion}(X, Y, U; Z)\}.$$

Aquesta construcció ens dona el punt mig  $Z$  del segment  $XY$ ; és vàlida sempre perquè el punt intermedi  $U$  satisfà clarament la hipòtesi  $d(X, U) > \frac{1}{2}d(X, Y)$  necessària per al bon funcionament de **CircleInversion**.  $\square$

#### Corol·lari 4.7.

- a) El conjunt de punts construïbles del mapa  $C$  és  $\mathfrak{B}^C = \mathbb{E}$ .
- b) El conjunt de punts construïbles del mapa  $CE$  és  $\mathfrak{B}^{CE} = \mathbb{E}$ .
- c) El conjunt de punts construïbles del mapa  $RCE$  és  $\mathfrak{B}^{RCE} = \mathbb{E}$ .

*Demostració.* Els resultats s'obtenen en combinar la proposició 4.5 amb el teorema de Mohr-Mascheroni, el corol·lari 3.6 i el teorema 3.7 respectivament.  $\square$

Per a la classificació aritmètica de les eines és important restringir l'elecció dels conjunts inicials a conjunts de punts; és ben sabut que les *capacitats aritmètiques* de les eines augmenten significativament si s'admet l'existència de certes corbes. Un exemple que ens il·lustra aquesta situació ens el donen les eines  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{RC}$ .

**Teorema 4.8** (Poncelet-Steiner). *Els mapes  $\mathcal{RC}$  i*

$$\mathcal{RP} := (\langle\{\mathbf{Line}\}, \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{LineUnitCircleIntersect}\}\rangle, \mathcal{U}_0 = \{0, 2, 2i, X^2 + Y^2 = 1\}).$$

*són equivalents.*

*Demostració.* Per bé que és possible fer una demostració geomètrica del resultat ([21, pàgs. 192–194]), usarem el llenguatge dels mapes per donar una demostració aritmètica, aprofitant tot el que sabem dels mapes implicats (cf. Taula E.4 de l'annex C). És obvi que  $1, i \in \mathfrak{P}^{\mathbb{R}^P}$ , i per tant  $\mathbb{Q}(i) = \mathfrak{P}^{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{P}^{\mathbb{R}^P} \subset \mathfrak{P}^{\mathbb{R}^C} = \mathbb{E}$ . Com que  $\mathbb{E}$  és la menor extensió de  $\mathbb{Q}$  tancada per arrels quadrades, basta veure que  $\mathfrak{P}^{\mathbb{R}^P}$  és tancat per arrels quadrades. La construcció de l'arrel quadrada d'un nombre complex es redueix a la construcció de la bisectriu de dues rectes per l'origen i a la construcció de l'arrel quadrada d'un nombre real positiu.

Si tenim donats punts  $A, B \in \mathfrak{P}^{\mathbb{R}^P}$  sobre la circumferència unitat, l'angle  $AOB$  és el doble de l'angle  $OCB$ , on  $C$  és el segon punt de tall de la recta  $OA$  amb la circumferència unitat. La igualtat

$$\sqrt{r} = \left(\frac{r+1}{2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2}$$

mostra que només ens cal donar la construcció de l'arrel quadrada de nombres de la forma  $1 - c^2$  amb  $c \in (-1, 1)$ , i això és un exercici elemental de trigonometria.  $\square$

Per bé que el teorema de Poncelet-Steiner és el més conegut, hi ha altres resultats en la mateixa direcció: es pot substituir la circumferència unitat per dues rectes paral·leles ([34]) o per una cònica amb els seus focus ([11]). En [46] es poden trobar més detalls al respecte. En la mateixa línia, Hartshorne [21, pag. 264] afirma que el mapa  $\mathcal{RM}$  és equivalent a un mapa donat per un regle  $\mathcal{R}$  que tingui una concoide qualsevol en el conjunt inicial.

Com a conseqüència del teorema de Poncelet-Steiner, podem determinar el conjunt de punts construïbles del mapa escaire  $\mathcal{ES}$ .

**Teorema 4.9.** *El conjunt de punts construïbles del mapa  $\mathcal{ES}$  és*

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{ES}} = \mathbb{E}.$$

*Demostració.* El conjunt inicial d'aquest mapa és  $U_0 = \{0, 1, i\}$ . Mitjançant la construcció **DoublePoint** $_{\mathcal{ES}}$  obtenim els punts  $-1, 2, 2i$ . Amb l'axioma **LineDiameterCircleIntersect** podrem determinar la intersecció de qualsevol recta que construïm amb la circumferència de centre a l'origen i radi 1. Així doncs, podrem construir tots els punts del mapa  $\mathcal{RP}$ , és a dir,  $\mathbb{E} \subset \mathfrak{P}^{\mathcal{ES}}$ . Per altra banda, pel teorema 3.16 l'eina  $\mathcal{RC}$  genera virtualment l'eina  $\mathcal{ES}$ , i per tant, per la proposició 4.5 tenim  $\mathfrak{P}^{\mathcal{ES}} \subset \mathfrak{P}^{\mathcal{RC}} = \mathbb{E}$ .  $\square$

El coneixement aritmètic dels mapes és una tècnica molt eficaç per a la classificació de les eines. Tenint en compte la taula E.4, podem establir totes les relacions següents:

**Teorema 4.10.** *Classificació aritmètica d'eines:*

$$i) \quad C \xleftrightarrow{\text{ar}} \mathcal{RC} \xleftrightarrow{\text{ar}} \mathcal{CE} \xleftrightarrow{\text{ar}} \mathcal{RCE} \xleftrightarrow{\text{ar}} \mathcal{RCF} \xleftrightarrow{\text{ar}} \mathcal{ES}.$$

$$ii) \quad \mathcal{RM} \xleftrightarrow{\text{ar}} \mathcal{O} \xleftrightarrow{\text{ar}} \mathcal{CO} \xleftrightarrow{\text{ar}} \mathcal{RE}.$$

iii)  $\mathcal{RCP} \xleftrightarrow{\text{ar}} \mathcal{OP}$ .

En la secció següent veurem com podem obtenir criteris generals per a la classificació aritmètica de les eines, que no impliquin el coneixement dels conjunts construïbles dels mapes.

### 4.3 Aplicacions de la signatura

Els mapes pressuposen l'existència d'una referència fixada, a partir de la qual tots els punts obtinguts amb els axiomes d'intersecció corresponen a nombres complexos, i totes les corbes generades pels axiomes de construcció tenen una equació algebraica.

**Definició 4.3.1.** *Sigui  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  un mapa. El cos base de  $M$  és el cos  $K_M$  de definició del conjunt inicial  $\mathcal{U}_0$ . La signatura  $\sigma(M)$  de  $M$  és la signatura  $\sigma(\mathcal{E})$  de l'eina associada.*

*L'  $M$ -grau  $\text{gr}_M(v)$  d'un objecte  $v$  és el grau de l'extensió  $K_M(v)/K_M$ , essent  $K_M(v)$  el cos de definició de  $v$  sobre  $K_M$ .*

La propietat d'algebraicitat dels axiomes ens garanteix que els objectes  $v \in \mathcal{U}^M$  construïbles amb el mapa tenen  $\text{gr}_M(v)$  finit.

**Lema 4.11.** *Sigui  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  un mapa aritmètic.*

- a) *Si  $z \in \mathbb{C}$  és un punt amb  $\text{gr}_M(z) = 1$  llavors  $z \in \mathfrak{F}^M$ .*
- b) *Si **Line**  $\in \mathcal{E}$  i  $\ell$  és una recta amb  $\text{gr}_M(\ell) = 1$  llavors  $\ell \in \mathfrak{C}^M$ .*
- c) *Si **Circle**  $\in \mathcal{E}$  o **RadiusCircle**  $\in \mathcal{E}$  i  $c$  és una circumferència amb  $\text{gr}_M(c) = 1$  llavors  $c \in \mathfrak{C}^M$ .*

*Demostració.* Per hipòtesi,  $\mathfrak{F}^M$  és un cos, i per tant conté necessàriament  $K_M$ . Amb els punts de  $K_M$  podem generar totes les rectes definides sobre  $K_M$  sempre que tingui l'axioma **Line** en l'eina  $\mathcal{E}$ . Anàlogament, amb parelles de punts i l'axioma **Circle** o tripletes de punts i l'axioma **RadiusCircle** podem generar totes les circumferències definides sobre  $K_M$ . □

**Lema 4.12.** *Sigui  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  un mapa aritmètic, i sigui  $O_1, \dots, O_n = A(V_1, \dots, V_n)$  un axioma de l'eina associada. Si els  $V_1, \dots, V_n$  són punts, rectes o circumferències, llavors existeix un objecte  $v \in \mathcal{U}^M$  amb  $\text{gr}_M(v) = \text{gr } A$ .*

*Demostració.* Denotem per  $A_1, \dots, A_s$  i  $B_1, \dots, B_t$  els coeficients (indeterminats) dels  $V_i$  i els  $O_j$  respectivament. En el capítol 1 hem vist que l'axioma comporta unes equacions polinòmiques  $H_k(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_t) = 0$  amb

$$H_1, \dots, H_d \in \mathbb{Q}[A_1, \dots, A_s][X_1, \dots, X_t].$$

El teorema d'irreductibilitat de Hilbert ([38]) ens diu que podem especialitzar les variables  $A_1, \dots, A_s$  a certs valors racionals  $a_1, \dots, a_s$  de manera que la varietat  $V \subset K_M^t$  de zeros dels polinomis  $H_j(a_1, \dots, a_s, B_1, \dots, B_t) \in \mathbb{Q}[B_1, \dots, B_t]$  és irreductible sobre  $K_M$ . Aquests valors  $a_1, \dots, a_s$  determinen certs objectes  $v_1, \dots, v_m$ .

Per la hipòtesi de completesa de les eines, si entre els  $v_i$  hi ha rectes (resp. circumferències), cal que **Line**  $\in \mathcal{E}$  (resp. **Circle**  $\in \mathcal{E}$  o **RadiusCircle**  $\in \mathcal{E}$ ). Tots aquests objectes estan definits sobre  $K_M$  i pel lema anterior, són del conjunt  $\mathcal{U}^M$ . En aplicar-los l'axioma **A** generen nous objectes  $o_1, \dots, o_n \in \mathcal{U}^M$ . Els coeficients d'aquests objectes són justament les solucions de les equacions  $H_j(a_1, \dots, a_s, B_1, \dots, B_t) = 0$ , de manera que  $n = \text{gr } \mathbf{A} = \text{gr } V$ . La irreductibilitat de  $V$  ens dóna la igualtat  $[K_M(o_j) : K_M] = \text{gr } V = n$ .  $\square$

**Observació:** De fet, el teorema d'irreductibilitat de Hilbert ens garanteix l'existència d'infinits objectes amb el grau de l'axioma.

**Lema 4.13.** *Sigui  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  un mapa, i siguin  $o_1, \dots, o_n, v_1, \dots, v_m$  objectes relacionats per un axioma  $\mathbf{A} \in \mathcal{E}$ , és a dir,  $o_1, \dots, o_m = \mathbf{A}(v_1, \dots, v_m)$ . Se satisfà*

$$[K_M(o_i) : K_M(v_1, \dots, v_m)] \leq \text{gr } \mathbf{A}.$$

*Demostració.* Les equacions que lliguen  $o_1, \dots, o_n$  amb els  $v_1, \dots, v_m$  són les equacions associades a l'axioma; els graus dels seus factors irreductibles afiten el grau de l'extensió esmentada, i alhora són menors o iguals que el grau de l'axioma.  $\square$

Aquest lema té aplicacions en diverses direccions. Tenim en primer lloc una aplicació pràctica concreta:

**Corol·lari 4.14.** *El conjunt de punts construïbles del mapa  $R$  és  $\mathfrak{B}^R = \mathbb{Q}(i)$ .*

*Demostració.* Aquesta és la darrera part de l'enunciat de la proposició 4.1. En el seu moment hem vist que  $\mathbb{Q}(i) \subset \mathfrak{B}^R$ . L'altra inclusió surt del lema anterior, ja que la signatura del mapa  $R$  és  $\{1\}$ .  $\square$

Una segona aplicació pràctica més general del lema 4.13 ens permetrà reconèixer eines no equivalents a partir de la seva signatura:

**Teorema 4.15.** *Sigui  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  un mapa de signatura  $\{n_1, \dots, n_r\}$  i sigui  $v$  un punt o una corba. Si  $\text{gr}_M(v)$  és divisible per un nombre primer  $p > n_r$ , llavors  $v \notin \mathcal{U}^M$ .*

*Demostració.* Pel lema anterior, si  $v \in \mathcal{U}^M$ , caldria que  $[K_M(v) : K_M]$  només tingués factors primers menors o iguals que els  $n_i$ .  $\square$

**Corol·lari 4.16.** *Les eines  $R$  i  $C$  no són aritmèticament equivalents.*

*Demostració.* La signatura del mapa  $C$  és  $\{2\}$ , així que pel lema 4.12, en  $\mathcal{U}^C$  tenim objectes definits sobre una extensió quadràtica de  $\mathbb{Q}$ ; aquests objectes no són de  $\mathcal{U}^R$  pel teorema anterior.  $\square$

Anàlogament es demostra:

**Corollari 4.17.** *Les parelles següents d'eines no són aritmèticament equivalents:*

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \overset{\text{ar}}{\leftrightarrow} \mathcal{RM}, \quad \mathcal{R} \overset{\text{ar}}{\leftrightarrow} \mathcal{O} \\ \mathcal{C} \overset{\text{ar}}{\leftrightarrow} \mathcal{RM}, \quad \mathcal{C} \overset{\text{ar}}{\leftrightarrow} \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Hom pot plantejar-se si la signatura d'una eina pot determinar-ne completament la seva classe aritmètica. Fins i tot en grau 2 això ja no és cert: els mapes RC i RCP tenen tots dos signatura  $\{1, 2\}$ , però en canvi  $\mathfrak{P}^{\text{RC}} = \mathbb{E}$  i  $\mathfrak{P}^{\text{RCP}} = \mathbb{P}(i)$ . Aquest exemple és molt significatiu, perquè ens mostra que, si bé l'estructura galoisiana de les equacions associades als axiomes és un factor important en la constructibilitat de nombres algebraics, hi ha altres factors subtils que hi juguen el seu paper.

La signatura també és important en la determinació de subeines minimalis:

**Corollari 4.18.** *Les eines*

$$O_1 := \langle \{\text{PerpendicularBisector}, \text{Bisector}, \text{Perpendicular}, \text{CommonTangent}\}, \{\text{LineIntersect}\} \rangle;$$

$$O_2 := \langle \{\text{Line}, \text{Bisector}, \text{Perpendicular}, \text{CommonTangent}\}, \{\text{LineIntersect}\} \rangle.$$

*són les úniques subeines minimalis de l'eina  $O$ .*

*Demostració.* Analitzarem un a un els axiomes de l'origami, veient quins són equivalents a construccions fetes a partir d'altres.

- Axioma **Line**: La construcció:

$$C_1(A, B; \ell) = \{ \ell_1 = \text{PerpendicularBisector}(A, B), \\ \ell = \text{Perpendicular}(\ell_1, A) \}.$$

genera la recta  $\ell$  que passa pels dos punts  $A, B$ , i ens permet prescindir de l'axioma **Line**( $A, B$ ), sempre que mantinguem els axiomes **PerpendicularBisector** i **Perpendicular**.

- Axioma **PerpendicularBisector**: La construcció

$$C_2(A, B; \ell) = \{ \ell_1 = \text{Line}(A, B), \\ \ell_2 = \text{Perpendicular}(\ell_1, A), \\ \ell_3 = \text{Perpendicular}(\ell_1, B), \\ \ell_4, \ell'_4 = \text{Bisector}(\ell_1, \ell_2), \\ \ell_5, \ell'_5 = \text{Bisector}(\ell_1, \ell_3), \\ P = \text{LineIntersect}(\ell_4, \ell_5), \\ \ell = \text{Perpendicular}(\ell_1, P) \}.$$

genera la mediatriu  $\ell$  al segment d'extremes  $A, B$ , i ens permet prescindir de l'axioma **PerpendicularBisector**( $A, B$ ), si mantenim els axiomes **Line**, **Perpendicular** i **Bisector**.

- Axioma **Perpendicular**: No hi ha cap axioma d'origami, llevat d'aquest, que es pugui aplicar només a un punt i una recta. No podem prescindir doncs d'aquest axioma.
- Axioma **Bisector**: Ens trobem en la mateixa situació que per l'axioma anterior. No hi ha cap axioma d'origami, llevat d'aquest, que es pugui aplicar només a dues rectes. És un axioma del qual no podem prescindir.
- Axioma **Tangent**: Trobar la tangent a una paràbola amb directriu  $\ell$  i focus  $F$  pel punt  $A$  és equivalent a trobar la recta tangent comuna a dues paràboles simètriques respecte la simetria central respecte el punt  $A$ . La construcció que descriu aquest procés és la següent:

$$\begin{aligned}
C_3(\ell, F, A; \ell') = \{ & \mathbf{DoublePoint}_{\mathcal{ES}}(F, A; F'), \\
& \ell_1 = \mathbf{Line}(A, F), \\
& P = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell), \\
& \mathbf{DoublePoint}_{\mathcal{ES}}(P, A; P'), \\
& \mathbf{Parallel}_{\mathcal{ES}}(P', \ell; \ell_3), \\
& \ell', \ell'', \ell''' = \mathbf{CommonTangent}(\ell_1, F, \ell_3, F') \}.
\end{aligned}$$

i és equivalent a **Tangent**( $\ell, F, A$ ). Es pot fer sempre que es mantinguin els axiomes **Line** o **PerpendicularBisector**, **Perpendicular**, **CommonTangent** i **LineIntersect**.

- Axioma **PerpendicularTangent**: Trobar la recta tangent a una paràbola, perpendicular a una recta donada, és equivalent a trobar la tangent comú a dues paràboles: la inicial i la simètrica a aquesta respecte la recta donada. La construcció:

$$\begin{aligned}
C_4(\ell_1, F, \ell_2; \ell') = \{ & \mathbf{Reflect}_O(F, \ell_1; F'), \\
& \ell_3 = \mathbf{Line}(F, F'), \\
& P = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_3), \\
& Q = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_2), \\
& \mathbf{AngleDuplication}(F, P, Q; R), \\
& \ell_4 = \mathbf{Line}(F, R), \\
& \ell', \ell'', \ell''' = \mathbf{CommonTangent}(\ell, F, \ell_4, F') \}.
\end{aligned}$$

és equivalent a **PerpendicularTangent**( $\ell_1, F, \ell_2$ ). Es pot fer sempre que mantinguem els axiomes **Line** o **PerpendicularBisector**, **Bisector**, **Perpendicular**, **CommonTangent** i **LineIntersect**.

- Axioma **CommonTangent**: Aquest és l'únic axioma d'origami de grau 3, i no es pot generar amb els altres pel teorema 4.15.

□

Acabem aquesta secció amb una aplicació de caire més teòric del lema 4.13.

**Teorema 4.19.** *Existeixen axiomes (irreductibles) de qualsevol grau.*

*Demostració.* En [4, Theorem 1] es prova que qualsevol polinomi de grau  $n$  amb totes les arrels reals es pot resoldre amb origami, mitjançant  $n - 2$  plecs simultanis. Com per cada grau tenim polinomis irreductibles amb totes les seves arrels reals, per força l'axioma corresponent als  $n - 2$  plecs simultanis ha de ser irreductible.  $\square$

## 4.4 Estudi asimptòtic dels mapes

La majoria de resultats clàssics sobre mapes fan referència a la caracterització aritmètica dels seus conjunts globals de punts. Per a les aplicacions geomètriques, però, és interessant considerar també les capes dels mapes per se, com a successions de punts i corbes. Les capes dels mapes, per exemple, ens permeten obtenir construccions minimal de punts i corbes del pla. L'estudi d'aquests conjunts està estretament relacionat amb certs problemes d'incidència en Geometria Computacional.

D'entrada, els conjunts de punts dels mapes aritmètics són molt grans:

**Lema 4.20.** *Si  $M$  és un mapa aritmètic, llavors  $\mathfrak{P}^M \cap \mathbb{R}$  és dens en  $\mathbb{R}$ .*

*Demostració.* L'additivitat ens diu que  $\mathbb{Z}[i] \subset \mathfrak{P}^M$ , i en conseqüència, per la divisibilitat, tenim que  $\mathbb{Q}(i) \subset \mathfrak{P}^M$ .  $\square$

La taula següent recull els cardinals de les capes inicials d'alguns mapes:

Taula 4.1: Mapa  $i$  ( $|S_k|, |T_k|$ ) per  $k = 0, 1, 2, 3$

| Mapa | $( C_0 ,  P_0 )$ | $( C_1 ,  P_1 )$ | $( C_2 ,  P_2 )$ | $( C_3 ,  P_3 )$                                |
|------|------------------|------------------|------------------|---|
| CF   | (0, 2)           | (2, 4)           | (4, 8)           | (8, 14)   |
| RC   | (0, 2)           | (3, 6)           | (34, 391)        | $(\sim 3 \cdot 10^6, \leq 10,5 \cdot 10^9)$     |
| CO   | (0, 2)           | (3, 6)           | (42, 1033)       | $(\leq 1,3 \cdot 10^9, \leq 1,7 \cdot 10^{12})$ |
| O    | (0, 2)           | (2, 3)           | (12, 35)         | $(\sim 2 \cdot 10^4, \leq 10^8)$                |

Aquests valors s'han obtingut construint explícitament els conjunts corresponents, fins on els recursos computacionals disponibles han permès. La taula deixa clar que donar una descripció explícita d'aquests conjunts pot ser molt complicat. En canvi, és possible donar fites dels seus cardinals mitjançant tècniques geomètriques bàsiques.

Les taules 4.4 i 4.4 recullen, respectivament el nombre màxim d'objectes que es poden generar amb cada axioma de construcció partir de  $M$  rectes i  $N$  punts donats, i el nombre màxim de punts que es poden obtenir els axiomes d'intersecció a les quantitats de corbes especificades. A partir d'aquestes taules, podem deduir fites del creixement de les successions de punts i corbes dels mapes estudiats.

| <b>Axioma</b>                | <b>Nombre màxim de corbes</b> |
|------------------------------|-------------------------------|
| <b>Line</b>                  | $\binom{N}{2}$                |
| <b>Circle</b>                | $N(N - 1)$                    |
| <b>RadiusCircle</b>          | $N\binom{N}{2}$               |
| <b>PerpendicularBisector</b> | $\binom{N}{2}$                |
| <b>Conic</b>                 | $\binom{N}{2}MN(\dagger)$     |
| <b>Bisector</b>              | $2\binom{M}{2}$               |
| <b>Perpendicular</b>         | $MN$                          |
| <b>Tangent</b>               | $2M\binom{N}{2}$              |
| <b>CommonTangent</b>         | $3\binom{N}{2}\binom{M}{2}$   |
| <b>PerpendicularTangent</b>  | $N\binom{M}{2}$               |

(†) Hi ha  $\binom{N}{2}$  excentricitats possibles,  $M$  directrius i  $N$  focus.

Taula 4.2: *Capacitat dels axiomes de construcció*



| Axioma                      | Corbes construïdes                  | Nombre màxim de punts d'intersecció |
|-----------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <b>LineIntersect</b>        | $n$ rectes                          | $\binom{n-2}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ |
| <b>CircleIntersect</b>      | $n$ circumferències                 | $n(n-1)$                            |
| <b>ConicIntersect</b>       | $n$ còniques                        | $2n(n-1)$                           |
| <b>LineCircleIntersect</b>  | $m$ rectes<br>$n$ circumferències   | $2mn$                               |
| <b>LineConicIntersect</b>   | $m$ rectes<br>$n$ còniques          | $2mn$                               |
| <b>CircleConicIntersect</b> | $m$ circumferències<br>$n$ còniques | $4mn$                               |

Taula 4.3: Capacitat dels axiomes d'intersecció

**Teorema 4.21.** *Els cardinals de les capes de punts i corbes del mapa  $\mathcal{O}$  satisfan:*

$$\begin{aligned} |\mathfrak{P}_{n+1}| &= O(|\mathfrak{P}_n|^{12}), \\ |\mathfrak{C}_{n+1}| &= O(|\mathfrak{P}_n|^6). \end{aligned}$$

*Demostració.* Siguin  $a_n = |\mathfrak{P}_n|$ ,  $b_n = |\mathfrak{C}_n|$ . Els axiomes **Line** i **PerpendicularBisector** contribueixen cadascun a la fita en  $\binom{a_n}{2}$  rectes. L'axioma **Bisector** contribueix en  $2\binom{b_n}{2}$  rectes. L'axioma **Perpendicular** afegeix  $a_n b_n$  rectes. L'axioma **Tangent** contribueix en  $2b_n \binom{a_n}{2}$ , el **CommonTangent** en  $3\binom{a_n}{2}\binom{b_n}{2}$  i el **PerpendicularTangent** en  $a_n \binom{b_n}{2}$ . Així doncs:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &\leq \binom{a_n}{2} + \binom{a_n}{2} + 2\binom{b_n}{2} + a_n b_n + 2b_n \binom{a_n}{2} + 3\binom{a_n}{2}\binom{b_n}{2} + a_n \binom{b_n}{2} = \\ &= 1/4(-4b_n + 4b_n^2 - 4a_n + a_n b_n - b_n^2 n + 4a_n^2 + b_n a_n^2 + 3a_n^2 b_n^2) = O(a_n^2 b_n^2). \end{aligned}$$

D'altra banda,  $b_n \leq \binom{a_n}{2}$ , per la qual cosa:

$$b_{n+1} \leq 1/16(-1 + a_n)a_n(8 - 2a_n + 7a_n^2 - 4a_n^3 + 3a_n^4) = O(a_n^6).$$

Totes aquestes rectes donen com a molt  $\binom{O(a_n^6)}{2} = O(a_n^{12})$  punts d'intersecció.  $\square$

**Teorema 4.22.** *Els cardinals de les capes de punts i corbes del mapa RC satisfan:*

$$\begin{aligned} |\mathfrak{P}_{n+1}| &= O(|\mathfrak{P}_n|^6), \\ |\mathfrak{C}_{n+1}| &= O(|\mathfrak{P}_n|^3). \end{aligned}$$

*Demostració.* Siguin  $a_n = |\mathfrak{P}_n|, b_n = |\mathfrak{C}_n|$ . Sumem les fites dels axiomes **Line**, **Circle**, **RadiusCircle** per a la construcció de corbes, i obtenim:

$$b_{n+1} \leq \binom{a_n}{2} + a_n(a_n - 1) + a_n \binom{a_n}{2} = 1/2a_n(-3 + 2a_n + a_n^2) = O(a_n^3).$$

Tenint en compte l'ordre màxim del nombre de corbes i els axiomes **LineIntersect**, **CircleIntersect** i **LineCircleIntersect** per la intersecció de punts, obtenim:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq \binom{\binom{a_n}{2}}{2} + (a_n(a_n - 1) + n \binom{a_n}{2})(a_n(a_n - 1) + a_n \binom{a_n}{2} - 1) + 2 \binom{a_n}{2}(a_n(a_n - 1) + a_n \binom{a_n}{2}) \\ &= 1/8(-1 + a_n)a_n(-10 - 21a_n + 5a_n^2 + 10a_n^3 + 2a_n^4) = O(a_n^6). \quad \square \end{aligned}$$

**Teorema 4.23.** *Els cardinals de les capes de punts i corbes del mapa  $\mathbb{C}\mathbb{O}$  satisfan:*

$$\begin{aligned} |\mathfrak{P}_{n+1}| &= O(|\mathfrak{P}_n|^{10}), \\ |\mathfrak{C}_{n+1}| &= O(|\mathfrak{P}_n|^5). \end{aligned}$$

*Demostració.* Siguin  $a_n = |\mathfrak{P}_n|, b_n = |\mathfrak{C}_n|$ . Podem partir dels valors obtinguts per a l'eina  $RC$ , i afegir els objectes generats pels axiomes **Conic**, **ConicIntersect**, **ConicLineIntersect** i **ConicCircleIntersect**. Obtenim:

$$b_{n+1} \leq 1/2a_n(-3 + 2a_n + a_n^2) + \binom{a_n}{2}b_n a_n = 1/2(-1 + a_n)a_n(3 + a_n + b_n a_n) = O(a_n^3 b_n).$$

Ara utilitzem que  $b_n \leq \binom{n}{2}$  per arribar a:

$$b_{n+1} \leq 1/4a_n(-6 + 4a_n + 3a_n^2 - 2a_n^3 + a_n^4) = O(a_n^5).$$

El nombre màxim de còniques que es construeixen és  $\binom{a_n}{2}b_n a_n$ . L'axioma **ConicIntersect** donarà com a molt  $2 \binom{a_n}{2}a_n b_n \binom{a_n}{2}a_n b_n - 1$  punts de tall. L'axioma **ConicLineIntersect** en donarà com a molt  $2b_n \binom{a_n}{2}a_n b_n$  i l'axioma **ConicCircleIntersect** en donarà com a molt  $4(a_n(a_n - 1) + a_n \binom{a_n}{2}) \binom{a_n}{2}a_n b_n$ . D'on

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq 1/8(-1 + a_n)a_n(-10 - 21a_n + 5a_n^2 + 10a_n^3 + 2a_n^4) + 2 \binom{a_n}{2}a_n b_n \binom{a_n}{2}a_n b_n - 1 + \\ &\quad + 2b_n \binom{a_n}{2}a_n b_n + 4(a_n(a_n - 1) + a_n \binom{a_n}{2}) \binom{a_n}{2}a_n b_n = \\ &= 1/8(-1 + a_n)a_n(-10 - 21a_n - 8a_n b_n + 8b_n^2 a_n + 5a_n^2 - 16b_n a_n^2 + 10a_n^3 + \\ &\quad 8b_n a_n^3 - 4b_n^2 a_n^3 + 2a_n^4 + 8b_n a_n^4 + 4b_n^2 a_n^4) = O(b_n^2 a_n^6). \end{aligned}$$

Ara usem la desigualtat  $b_n \leq \binom{a_n}{2}$  i obtenim la fita:

$$a_{n+1} \leq 1/8a_n(10 + 11a_n - 30a_n^2 - 7a_n^3 + 30a_n^4 - 15a_n^5 - 6a_n^6 + 10a_n^7 - 4a_n^8 + a_n^9) = O(a_n^{10}). \quad \square$$

L'obtenció de fites inferiors dels cardinals de les capes dels mapes està estretament relacionada amb problemes de geometria computacional. Per exemple, el mínim nombre de circumferències que es poden generar amb l'axioma **RadiusCircle** a partir d'un conjunt de  $M$  punts del pla és equivalent a estudiar el mínim nombre de distàncies diferents que hi ha entre  $M$  punts del pla. La determinació d'aquest nombre és un problema proposat per Erdős, i resolt recentment per Guth [20]. Es té que el nombre mínim de distàncies de  $M$  punts del pla és com a mínim  $cM/\log M$ , per a una certa constant  $c$ .

Aquest resultat no té només conseqüències per a circumferències. L'axioma **Conic** genera còniques a partir de les seves directrius, focus i excentricitats, on aquesta ve donada per la distància entre dos punts. Amb la utilització d'aquest axioma, partint d'un conjunt de  $M$  punts, tenim un mínim de  $cM/\log M$  excentricitats possibles.

Els problemes d'incidències en geometria computacional tenen també relació amb l'estudi dels cardinals de les capes dels mapes. Per exemple, Aronov ([5]) demostra que donades  $m$  punts i  $n$  circumferències, el nombre màxim d'incidències punts-circumferències és  $O(n^{2/3}m^{2/3})$ . Aquest nombre és una fita superior del nombre de punts que genera l'aplicació de l'axioma **CircleIntersect** en una capa.

Per altra banda, en les nostres estimacions no hem tingut en compte que els conjunts  $C_n$  i  $\mathfrak{F}_n$  tenen nombroses simetries, per la qual cosa les fites utilitzades en les demostracions dels teoremes anteriors són poc fines. A més, en construir capes successives d'un mapa solen reaparèixer molt objectes ja construïts en nivells anteriors. Aquest fenomen és l'anomenada *Degeneracy*, cf. [47]. Una millor comprensió d'aquestes situacions permetria millorar les fites donades.

# Capítol 5

## Mesures

Moltes construccions geomètriques es dedueixen i s'expressen més còmodament a partir de construccions generalitzades que mitjançant axiomes. Això ajuda a seguir el procés geomètric de la construcció, però pot donar lloc a passos redundants o innecessaris. És un problema difícil decidir si una construcció es pot optimitzar en algun sentit. Els tractats de geometrografia de Lemoine [39], revisats posteriorment per Mackay ([40]) són el primer treball que s'ocupa del tema, però només per a les construccions amb regla i compàs.

Més recentment, Lang fa servir el *rank*, que defineix com el nombre de plecs que es fan per dur a terme una construcció amb origami. Utilitza aquesta mesura per diferenciar les construccions, en el seu programa ReferenceFinder, cf. [37].

En [49], fem una primera definició de mesures de construccions, utilitzant un llenguatge equivalent al dels mapes.

En aquest capítol introduïrem una estructura intrínseca de les construccions, que ens permetrà definir diversos invariants, inclosa la generalització del rank definit per Lang. Tot plegat ens permetrà comparar construccions fetes amb eines diferents i donar criteris de simplicitat i minimalitat per a les construccions. Les mesures definides ens apropiaran també a un millor coneixement de certs mapes.

### 5.1 Mesures associades a eines

**Definició 5.1.1.** *Sigui  $C = C(U_0, V) = \{O_1 = A_1(U_1), \dots, O_k = A_k(U_k)\}$  una construcció feta amb una eina  $\mathcal{E}$ . El conjunt d'objectes de  $C$  és:*

$$O_C := U_0 \cup O_1 \cup \dots \cup O_k.$$

*Les  $\mathcal{E}$ -capes de la construcció  $C$  són els conjunts*

$$\mathcal{S}_0^{\mathcal{E}} = U_0, \quad \mathcal{S}_j^{\mathcal{E}} = O_C \cap \tilde{\mathcal{U}}_j \setminus \mathcal{S}_{j-1}^{\mathcal{E}},$$

on  $\{\tilde{\mathcal{U}}_j = [\mathcal{C}_j, \mathfrak{P}_j]\}_{j \geq 0}$  denota la successió de punts i corbes del mapa associat a la construcció  $M_{C,\mathcal{E}} := (\mathcal{E}, U_0)$ . El  $\mathcal{E}$ -nivell de la construcció és l'enter:

$$nv_{\mathcal{E}}(C) = \max\{j \geq 0 : \mathcal{S}_j^{\mathcal{E}} \neq \emptyset\}.$$

El  $\mathcal{E}$ -nivell virtual de la construcció és l'enter:

$$nvv_{\mathcal{E}}(C) = \max\{j \geq 0 : \mathcal{S}_j^{\mathcal{E}} \cap V \neq \emptyset\}.$$

El  $\mathcal{E}$ -nivell d'un objecte  $X \in O_C$  és

$$nv_{\mathcal{E}}(X) = \min\{j \geq 0 : X \in \mathcal{S}_j^{\mathcal{E}}\}.$$

Les capes  $\{\mathcal{S}_j\}_j$ , el nivell  $nv(C)$ , el nivell virtual  $nvv(C)$  de la construcció i el  $C$ -nivell  $nv_C(X)$  d'un objecte  $X \in O_C$  són respectivament les  $\mathcal{E}_C$ -capes, el  $\mathcal{E}_C$ -nivell, el  $\mathcal{E}_C$ -nivell virtual i el  $\mathcal{E}$ -nivell de l'objecte donats per l'eina  $\mathcal{E}_C = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$ :

$$\mathcal{S}_j := \mathcal{S}_j^{\mathcal{E}_C}, \quad nv(C) := nv_{\mathcal{E}_C}(C), \quad nvv(C) := nvv_{\mathcal{E}_C}(C).$$

És obvi que  $nvv(C) \leq nv(C)$ .

**Proposició 5.1.** Sigui  $C$  una construcció feta amb l'eina  $\mathcal{E}$ , que és una subeina de  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Llavors:

- i)  $\forall j \geq 0 \quad \mathcal{S}_j^{\tilde{\mathcal{E}}} \subset \mathcal{S}_j^{\mathcal{E}}$ ;
- ii)  $nv_{\tilde{\mathcal{E}}}(C) \leq nv_{\mathcal{E}}(C)$ ;
- iii)  $nvv_{\tilde{\mathcal{E}}}(C) \leq nvv_{\mathcal{E}}(C)$ .

En particular:

$$\mathcal{S}_j^{\tilde{\mathcal{E}}} \subset \mathcal{S}_j, \quad nv_{\tilde{\mathcal{E}}}(C) \leq nv(C), \quad nvv_{\tilde{\mathcal{E}}}(C) \leq nvv(C).$$

**Exemple:** Considerem la construcció:

$$\begin{aligned} \text{CompassDistanceTransport}(A, B, C; D) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(B, A), \\ & E, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & c_3 = \mathbf{Circle}(E, C), \\ & c_4 = \mathbf{Circle}(F, C), \\ & C, D = \mathbf{CircleIntersect}(c_3, c_4)\}. \end{aligned}$$

L'eina associada a la construcció és  $\mathcal{E}_{\text{DistanceTransport}} = C\mathcal{E}$ . Les capes de la construcció són:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \{A, B, C\}, \\ \mathcal{S}_1 &= \{c_1, c_2, E, F\}, \\ \mathcal{S}_2 &= \{c_3, c_4, D\}. \end{aligned}$$

Per tant el nivell i el nivell virtual de la construcció són 2. Però si pensem que la construcció ha estat feta amb l'eina compàs  $C$  tenim que

$$\begin{aligned} S_0^C &= \{A, B, C\}, \\ S_1^C &= \{c_1, c_2, E, F, D\}, \\ S_2^C &= \{c_3, c_4\}. \end{aligned}$$

Ara el  $C$ -nivell és 2, però el  $C$ -nivell virtual és 1, la qual cosa ens indica que la construcció del punt  $D$  es pot fer de manera més curta amb l'eina compàs. Això s'aconsegueix fent la intersecció de la circumferència **RadiusCircle**( $A, B, C$ ) amb la circumferència **RadiusCircle**( $B, A, C$ ).

Les capes ens donen una ordenació de la construcció, que té en compte construccions subjacents que no necessàriament estan explícites a la construcció, i que justifiquen els valors dels nivells. Per poder descriure l'estructura de la construcció definim les nocions següents:

**Definició 5.1.2.** Sigui  $C = C(U_0, V) = \{O_1 = A_1(U_1), \dots, O_k = A_k(U_k)\}$  una construcció. Direm que  $X, Y \in O_C$  són **simultanis** si pertanyen a un mateix conjunt  $O_j = A_j(U_j)$ , és a dir, si s'obtenen simultàniament al llarg de la construcció. Direm que  $X \in O_C$  és **antecessor** de  $Y \in O_C$  si  $\text{nv}_C(X) \leq \text{nv}_C(Y)$  i hi ha una subconstrucció  $\{O_{i_1} = A_{i_1}(U_{i_1}), \dots, O_{i_n} = A_{i_n}(U_{i_n})\}$  de  $C$  amb  $X \in O_{i_1}$  i  $Y \in O_{i_n}$ . En aquesta mateixa situació direm també que  $Y$  és un **successor** de  $X$ .

**Notació 5.1.1.** Denotarem per  $\text{Pre}_C(X)$  el conjunt d'antecessors de  $X$  en la construcció  $C$ , i per  $\text{Suc}_C(X)$  el conjunt dels seus successors en  $C$ . Més generalment, per a un conjunt  $O$  qualsevol escriurem:

$$\text{Pre}_C(O) := \bigcup_{X \in O} \text{Pre}_C(X), \quad \text{Suc}_C(O) := \bigcup_{X \in O} \text{Suc}_C(X).$$

**Observació:** Els successors d'un objecte poden pertànyer a una mateixa capa d'una construcció: recordem que en cada capa d'un mapa apareixen alhora corbes i les seves possibles interseccions.

**Exemple:** Considerem la construcció següent feta amb l'eina compàs  $C$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Flower}(O, V_1; c_1, \dots, c_7) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(O, V_1), \\
 & c_2 = \mathbf{Circle}(V_1, O), \\
 & V_2, V_6 = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_1), \\
 & c_3 = \mathbf{Circle}(V_2, V_1), \\
 & V_3, V_1 = \mathbf{CircleIntersect}(c_3, c_1), \\
 & c_4 = \mathbf{Circle}(V_3, V_2), \\
 & V_4, V_2 = \mathbf{CircleIntersect}(c_4, c_1), \\
 & c_5 = \mathbf{Circle}(V_4, V_3), \\
 & V_5, V_3 = \mathbf{CircleIntersect}(c_5, c_1), \\
 & c_6 = \mathbf{Circle}(V_5, V_4), \\
 & c_7 = \mathbf{Circle}(V_6, V_5) \}.
 \end{aligned}$$

Tenim

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_0 &= \tilde{U}_0 = \{O, V_1\}, \\
 \mathcal{S}_1 &= \{c_1, c_2, V_2, V_6\}, \\
 \mathcal{S}_2 &= \{c_3, c_7, V_3, V_5\}, \\
 \mathcal{S}_3 &= \{c_4, c_6, V_4\}, \\
 \mathcal{S}_4 &= \{c_5\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(O) &= \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(V_1) = \{O_{\mathbf{Flower}}\}, \\
 \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(c_1) &= \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(c_2) = \{c_3, \dots, c_7, V_2, \dots, V_6\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(V_2) &= \{c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, V_3, V_4, V_5\}, \\
 \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(V_3) &= \{c_4, c_5, c_6, c_7, V_4, V_5\}, \\
 \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(V_4) &= \{c_5, c_6\}, \\
 \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(V_5) &= \{c_6, c_7\}, \\
 \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(V_6) &= \{c_7\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(c_3) &= \{c_4, c_5, c_6, c_7, V_3, V_4, V_5\}, \\
 \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(c_4) &= \{c_5, c_6, V_4\}, \\
 \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(c_5) &= \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(c_6) = \mathbf{Suc}_{\mathbf{Flower}}(c_7) = \emptyset,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Prec}_{\mathbf{Flower}}(V_2) &= \{c_1, c_2, O, V_1\}, \\
 \mathbf{Prec}_{\mathbf{Flower}}(V_3) &= \{c_1, c_2, c_3, O, V_1, V_2\}, \\
 \mathbf{Prec}_{\mathbf{Flower}}(V_4) &= \{c_1, c_2, c_3, c_4, O, V_1, V_2, V_3, V_4\}, \\
 \mathbf{Prec}_{\mathbf{Flower}}(V_5) &= \{c_1, c_2, c_3, O, V_1, V_2, V_3\}, \\
 \mathbf{Prec}_{\mathbf{Flower}}(V_6) &= \{c_1, c_2, O, V_1\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Prec}_{\text{Flower}}(c_1) &= \text{Prec}_{\text{Flower}}(c_2) = \{O, V_1\}, \\
\text{Prec}_{\text{Flower}}(c_3) &= \{c_1, c_2, O, V_1, V_2\}, \\
\text{Prec}_{\text{Flower}}(c_4) &= \{c_1, c_2, c_3, O, V_1, V_2, V_3\}, \\
\text{Prec}_{\text{Flower}}(c_5) &= \{c_1, c_2, c_3, c_4, O, V_1, V_2, V_3, V_4\}, \\
\text{Prec}_{\text{Flower}}(c_6) &= \{c_1, c_2, c_3, c_4, O, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}, \\
\text{Prec}_{\text{Flower}}(c_7) &= \{c_1, c_2, c_3, O, V_1, V_2, V_3, V_5, V_6\},
\end{aligned}$$

$$\text{nv}(\text{Flower}) = 4.$$

Posteriorment, el punt  $V_4$  es pot construir tallant les circumferències  $c_1, c_4$  o bé les circumferències  $c_1, c_6$ . Però seguint la construcció triada tenim que  $V_4 \in \text{Suc}(V_2)$  però  $V_4 \notin \text{Suc}(V_6)$ . De manera anàloga,  $c_5 \in \text{Suc}(c_4)$  però  $c_5 \notin \text{Suc}(c_6)$ .

## 5.2 Mesures intrínseques de les construccions

A la pràctica saber el  $\mathcal{E}$ -nivell d'una construcció es converteix en un problema que sembla difícil de resoldre. Només cal veure com són de complexes les primeres capes del mapes (vegeu l'annex C). Per calcular el  $\mathcal{E}$ -nivell és necessari saber els nivells de tots els objectes que componen la construcció respecte al mapa de la construcció. En aquesta secció veiem com, només a partir de l'estructura i dels elements d'una construcció, i sense haver de tenir en compte elements del mapa que no intervenen en la construcció, podem obtenir informació que és útil per a l'estudi dels mapes. Definim mesures que són independents de l'eina amb la qual està feta una construcció, i que tenen relació amb el nivell descrit a la secció anterior.

**Definició 5.2.1.** *Sigui  $C = C(U_0; V)$  una construcció. Direm que  $X \in O_C$  és **prescindible** si  $X \notin V$  i  $\text{Suc}_C(X) \cap V = \emptyset$ . La **part prescindible** i la **part necessària** de  $C$  són els conjunts*

$$\begin{aligned}
O_C^{pr} &:= \{X \in O_C \mid X \text{ prescindible}\}, \\
\hat{O}_C &= O_C \setminus O_C^{pr}.
\end{aligned}$$

Cal tenir en compte que els objectes prescindibles poden ser simultanis a d'altres objectes no prescindibles.

**Definició 5.2.2.** *La filtració d'una construcció  $C = C(U_0; V)$  és la successió  $\Phi(C) := \{\Phi_j\}_j$  definida per:*

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_0 &= U_0, \\
\mathfrak{M}_j &= (\mathcal{E}_C, \tilde{U}_{j-1}), & j \geq 1, \\
\tilde{U}_j &= \mathcal{U}_1^{M_j} \cap \hat{O}_C, & j \geq 1, \\
\Phi_j &= \tilde{U}_{j+1} \setminus \tilde{U}_j, & j \geq 0.
\end{aligned}$$



La llargada, l'ordre, l'amplada i el rang de  $C$  són els enters

$$\begin{aligned} \lg(C) &= \max\{j \geq 0 \mid \Phi_j \neq \emptyset\}, \\ \text{ord}(C) &= |\hat{O}_C|, \\ \text{am}(C) &= \max_{j \geq 0} |\Phi_j|, \\ \text{rg}(C) &= |\hat{\mathcal{C}}_C|, \text{ on } \hat{O}_C = [\hat{\mathcal{C}}_C, \hat{\mathfrak{F}}_C]. \end{aligned}$$

La llargada, l'ordre, l'amplada i el rang mesuren la complexitat de la construcció. Des d'un punt de vista computacional, la llargada va lligada al temps necessari per dur a terme la construcció, mentre que l'ordre en determina la memòria que caldrà per fer-la de manera eficient (és a dir, un cop eliminats els objectes prescindibles). L'amplada d'una construcció és una mesura una mica més grollera que les anteriors, però és interessant perquè permet establir certes fites de manera elemental. Per exemple:

$$\text{ord}(C) \leq \text{am}(C) \lg(C).$$

El rang, finalment, és un invariant a mig camí entre l'ordre i el rang: si suposem que els punts d'una construcció s'obtenen generalment com a intersecció de corbes, és clar que la part realment costosa de la construcció és la generació de les corbes que hi intervenen.

**Exemple:** Considerem la construcció **Hexagon**( $O, V_1; V_2, \dots, V_6$ ), que és idèntica a la construcció **Flower** de l'exemple 5.1 llevat que el conjunt construït ara és el format pels vèrtexs  $V_1, \dots, V_6$  de l'hexàgon inscrit en la circumferència de centre  $O$  que passa per  $V_1$ . En aquesta construcció tenim:

$$\Phi(\text{Hexagon}) = \{\{0, V_1\}, \{c_1, c_2, V_2, V_6\}, \{c_3, c_7, V_3, V_5\}, \{c_4, V_4\}\}.$$

$$\begin{aligned} O_{\text{Hexagon}}^{pr} &= \{c_5, c_6\}, \\ S_0 = \tilde{U}_0 &= \{O, V_1\}, \\ S_1 &= \{c_1, c_2, V_2, V_6\}, \\ S_2 &= \{c_3, c_7, V_3, V_5\}, \\ S_3 &= \{c_4, V_4\}, \\ S_4 &= \emptyset; \\ \lg(\text{Hexagon}) &= \text{nv}(\text{Hexagon}) = 3 < 4 = \text{nv}(\text{Hexagon}), \\ \text{ord}(\text{Hexagon}) &= 12, \\ \text{am}(\text{Hexagon}) &= 4, \\ \text{rg}(\text{Hexagon}) &= 5. \end{aligned}$$

L'exemple anterior il·lustra com la filtració d'una construcció ens permet simplificar-la, eliminant-ne les parts innecessàries. Malauradament, la filtració no permet eliminar parts redundants d'una construcció, com mostra l'exemple següent:

**Exemple:** Considerem la construcció següent del punt  $P = \frac{7}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  a partir del conjunt

$U_0 = \{0, 1\}$ :

$$\begin{aligned}
C(0, 1; P) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(0, 1), \\
& c_2 = \mathbf{Circle}(1, 0), \\
& \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
& \omega, \bar{\omega} = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\
& 0, 2 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_2), \\
& \ell_2 = \mathbf{Line}(2, \bar{\omega}), \\
& c_3 = \mathbf{Circle}(2, \bar{\omega}), \\
& P, \bar{\omega} = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_3) \\
& -1, 1 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1), \\
& c_4 = \mathbf{RadiusCircle}(\omega, -1, 2), \\
& P, \bar{\omega} = \mathbf{CircleIntersect}(c_3, c_4), \\
& P, P' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_4) \}.
\end{aligned}$$

Tenim:

$$\Phi(C) = \{\{0, 1\}, \{c_1, c_2, \ell_1, \omega, \bar{\omega}, 2, -1\}, \{\ell_2, c_3, c_4, P, P'\}\}$$

$$\begin{aligned}
O_C^{pr} &= \{P'\}, \\
S_0 &= \Phi_0 = \{0, 1\}, \\
S_1 &= \Phi_1 = \{c_1, c_2, \ell_1, -1, 2, \omega, \bar{\omega}\}, \\
S_2 &= \{\ell_2, c_3, c_4, P, P'\}, \\
\Phi_2 &= \{\ell_2, c_3, c_4, P\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{nv}(C) &= \text{nv}(C) = 2, \\
\text{ord}(C) &= 14, \\
\text{rg}(C) &= 6, \\
\text{am}(C) &= 7.
\end{aligned}$$

### 5.3 Construccions simples

La construcció de l'exemple anterior és certament ineficient: és clar que assoleix el seu objectiu per dues vies diferents, sense que això aportí cap benefici. Naturalment, són preferibles les construccions que eviten aquesta situació.

**Definició 5.3.1.** Donada una construcció  $C = C(U_0; V) = \{O_1 = A_1(U_1), \dots, O_k = A_k(U_k)\}$ , entendrem per **subconstrucció** qualsevol subsuccessió  $C' = C'(U'_0; V) = \{O_{i_1} = A_{i_1}(U_{i_1}), \dots, O_{i_k} = A_{i_k}(U_{i_k})\}$  que sigui una construcció per ella mateixa. Direm que  $C'$  és **maximal** si  $U'_0 \subset U_0$  i  $\text{Suc}_{C'}(U'_0) = V$ .

**Definició 5.3.2.** Una construcció  $C(U_0; V) = \{O_1 = A_1(U_1), \dots, O_k = A_k(U_k)\}$  és **simple** si no conté cap subconstrucció  $C'(U'_0; V) = \{O_{i_1} = A_{i_1}(U'_{i_1}), \dots, O_{i_k} = A_{i_k}(U_{i_k})\}$  maximal.

Malgrat l'aparent senzillesa de la definició anterior, la simplicitat no és una propietat que es pugui comprovar fàcilment en general. Sovint les construccions més elaborades es descriuen com a construccions generalitzades, i un cop descrites només amb axiomes poden arribar a ser molt complexes i involucrar un gran nombre d'objectes.

La noció de simplicitat d'una construcció és intrínseca a la construcció, però no ens garanteix pas que els objectes construïts no puguin obtenir-se de manera més eficient amb la mateixa eina. Els mapes ens permetran resoldre aquesta qüestió.

**Definició 5.3.3.** *Sigui  $\mathcal{E}$  una eina. Una construcció  $C = C(U_0; V) \in \mathcal{E}$  és*

- **$\mathcal{E}$ -minimal** si  $\forall C' = C'(U_0; V) \in \mathcal{E} \quad \text{nv}_{\mathcal{E}}(C') \geq \text{nv}_{\mathcal{E}}(C)$ .
- **$\mathcal{E}$ -optimal** si  $\forall C' = C'(U_0; V) \in \mathcal{E} \quad \text{ord}(C') \geq \text{ord}(C)$ .

Les construccions optimals són simples, però les minimal no tenen per què ser-ho, com veurem a l'exemple 5.5.

**Exemple:** Veiem com hem de construir el punt  $P = 7/2 + i\sqrt{3}/2$  a partir de  $V = \{0, 1\}$  amb l'eina  $\mathcal{RC}$ . Les úniques corbes de la primera capa del mapa  $\mathcal{RC} = (\mathcal{RC}, V)$  són:

- la recta  $\ell_1$  que passa per 0 i 1;
- la circumferència  $c_1$  de centre 0 i radi 1;
- la circumferència  $c_2$  de centre 0 i radi 1.

Els punts de la primera capa del mapa són, doncs,  $-1, 0, 1, 2, \omega, \bar{\omega}$ . A més,  $\ell_1, c_1, c_2$  no passen per  $P$ , així que necessitarem com a mínim dues corbes més per construir  $P$ .

De totes les rectes de la segona capa del mapa, només la recta  $\ell_2$  que passa pels punts  $2, \bar{\omega}$  passa pel punt  $P$ . Per veure si alguna circumferència de la segona capa passa per  $P$  calculem les distàncies de  $P$  als punts de la primera capa:

$$\begin{aligned} d(P, -1) &= \sqrt{21}, & d(P, 0) &= \sqrt{13}, & d(P, 1) &= \sqrt{7}, \\ d(P, 2) &= \sqrt{3}, & d(P, \omega) &= 3, & d(P, \bar{\omega}) &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

De totes aquestes distàncies, només dues també són distàncies entre punts de la primera capa:

$$d(P, 2) = d(2, \bar{\omega}) = \sqrt{3}, \quad d(P, \omega) = d(-1, 2) = 3,$$

Per tant, a la segona capa trobem exactament dues circumferències que passen per  $P$ :

- la circumferència de centre 2 que passa per  $\bar{\omega}$ ;
- la circumferència de centre  $\omega$  i radi  $d(-1, 2) = 3$ .

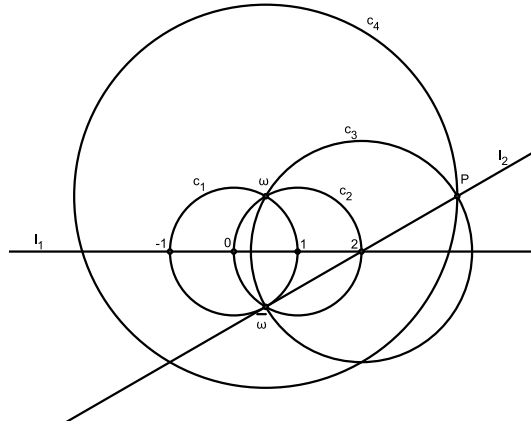


Figura 5.1: Elements que intervenen en les construccions de  $7/2 + i\sqrt{3}/2$

Així doncs, tenim exactament tres construccions de nivell 2 de  $P$ :

$$\begin{aligned}
 C_1(0, 1; P) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(0, 1), \\
 & c_2 = \mathbf{Circle}(1, 0), \\
 & \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
 & \omega, \bar{\omega} = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\
 & 0, 2 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_2), \\
 & \ell_2 = \mathbf{Line}(2, \bar{\omega}), \\
 & c_3 = \mathbf{Circle}(2, \bar{\omega}), \\
 & P, \bar{\omega} = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_3)\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2(0, 1; P) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(0, 1), \\
 & c_2 = \mathbf{Circle}(1, 0), \\
 & \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
 & \omega, \bar{\omega} = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\
 & -1, 1 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1), \\
 & 0, 2 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_2), \\
 & c_3 = \mathbf{Circle}(2, \omega), \\
 & c_4 = \mathbf{RadiusCircle}(\omega, -1, 2), \\
 & P, \omega = \mathbf{LineCircleIntersect}(c_3, c_4)\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3(0, 1; P) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(0, 1), \\
& c_2 = \mathbf{Circle}(1, 0), \\
& \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
& -1, 1 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1), \\
& \omega, \bar{\omega} = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\
& 0, 2 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_2), \\
& \ell_2 = \mathbf{Line}(2, \bar{\omega}), \\
& c_4 = \mathbf{RadiusCircle}(\omega, -1, 2), \\
& P, P' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_4)\}.
\end{aligned}$$

Les filtracions i mesures d'aquestes construccions són:

$$\begin{aligned}
\Phi(C_1) &= \{U_0, \{c_1, c_2, \ell_1, \bar{\omega}, 2\}, \{\ell_2, c_3, P\}\}, \\
\lg(C_1) &= 2, \quad \text{ord}(C_1) = 10, \quad \text{rg}(C_1) = 5, \quad \text{am}(C_1) = 5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(C_2) &= \{U_0, \{c_1, c_2, \ell_1, \omega, -1, 2\}, \{c_3, c_4, P\}\}, \\
\text{nv}(C_2) &= 2, \quad \text{ord}(C_2) = 11, \quad \text{rg}(C_2) = 5, \quad \text{am}(C_2) = 6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(C_3) &= \{U_0, \{c_1, c_2, \ell_1, \omega, \bar{\omega}, -1, 2\}, \{\ell_2, c_4, P\}\}, \\
\text{nv}(C_3) &= 2, \quad \text{ord}(C_3) = 12, \quad \text{rg}(C_3) = 5, \quad \text{am}(C_3) = 7.
\end{aligned}$$

Les tres construccions són simples i  $\mathcal{RC}$ -minimals, però només  $C_1$  és  $\mathcal{RC}$ -optimal.

## 5.4 Relació amb la *simplicitat* de Lemoine

En el treball [39], Lemoine introdueix una mesura de les construccions amb regle i compàs, basant-se en les operacions geomètriques elementals que poden fer-se amb aquests dos instruments. Concretament, Lemoine considera les cinc operacions següents:

$R_1$ : situar l'eix del regle en un punt donat,

$R_2$ : dibuixar una recta,

$C_1$ : situar una punta del compàs en un punt donat,

$C_2$ : situar una punta del compàs en un punt indeterminat d'una recta,

$C_3$ : dibuixar una circumferència.

La *simplicitat* de Lemoine d'una construcció amb regle i compàs és la quantitat total d'operacions d'aquests tipus que es fan per dur a terme la construcció. Lemoine la denota per

$$m_1 R_1 + m_2 R_2 + n_1 C_1 + n_2 C_2 + n_3 C_3,$$

per posar de manifest quantes operacions es fan de cada tipus. Així mateix, Lemoine defineix l'*exactitud* de la construcció com el nombre  $m_1 + n_1 + n_2$ .

És ben clar que aquests invariants són molt propers a l'ordre i el rang que hem definit en la secció 5.2.

## 5.5 Anàlisi i optimització d'un construcció

En aquesta secció veurem com els conceptes introduïts al llarg del capítol ens permeten estudiar i millorar, si és possible, una construcció.

La construcció següent genera la suma de dos nombres complexos  $z, z'$  de mòdul diferent i no alineats amb l'origen:

$$\begin{aligned} \mathbf{Sum}_O(0, z, z'; z + z') = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(0, z), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(0, z'), \\ & \ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, z'), \\ & \ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_2, z), \\ & \ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_3, z'), \\ & \ell_6 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_4, z), \\ & z + z' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_5, \ell_6)\}. \end{aligned}$$

Aquesta construcció és factible, per exemple, amb l'eina origami  $O$ . Però l'eina associada a la construcció és

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathbf{Sum}_O} = \langle \{\mathbf{Line}, \mathbf{Perpendicular}\}, \{\mathbf{LineIntersect}\} \rangle.$$

En la primera capa del mapa associat  $M_{\mathbf{Sum}_O, \mathcal{E}}$ , hi tenim únicament les rectes que uneixen els tres punts donats. En la segona capa hi ha les perpendiculars a aquestes tres rectes per a cadascun dels tres punts donats, i les interseccions d'aquestes dotze rectes entre elles. En condicions genèriques no hi haurà coincidències entre aquests objectes. Les capes de la construcció i la filtració són doncs:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \{0, z, z'\}, \\ \mathcal{S}_1 &= \{\ell_1, \ell_2\}, \\ \mathcal{S}_2 &= \{\ell_3, \ell_4\}, \\ \mathcal{S}_3 &= \{\ell_5, \ell_6, z + z'\}, \\ \Phi(\mathbf{Sum}_O) &= \{\{0, z, z'\}, \{\ell_1, \ell_2\}, \{\ell_3, \ell_4\}, \{\ell_5, \ell_6, z + z'\}\}. \end{aligned}$$

Per tant, les mesures intrínseques de la construcció són:

$$\lg(\mathbf{Sum}_O) = 3, \quad \text{ord}(\mathbf{Sum}_O) = 10, \quad \text{rg}(\mathbf{Sum}_O) = 6, \quad \text{am}(\mathbf{Sum}_O) = 3.$$

Ara bé, les  $O$ -capes de construcció són:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0^O &= \{0, z, z'\}, \\ \mathcal{S}_1^O &= \{\ell_1, \ell_2\}, \\ \mathcal{S}_2^O &= \{\ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, z + z'\}. \end{aligned}$$

Les rectes  $\ell_5, \ell_6$  apareixen ara a la segona capa, perquè en la primera capa del mapa  $M_{Sum,O} = (O, \{0, z, z'\})$  ja hi tenim les mediatris del triangle  $0zz'$ . La construcció és  $O$ -minimal, perquè en les hipòtesis fixades  $z + z'$  no serà el circumcentre del triangle i, per tant, no pot aparèixer en la primera capa del mapa  $M_{Sum,O}$ . Quant a l'optimalitat, les  $O$ -capes ens indiquen que no cal construir les rectes  $\ell_3, \ell_4$  per arribar a obtenir les rectes  $\ell_5, \ell_6$ , cosa que ens orienta cap a una construcció optimitzada:

$$\begin{aligned} \mathbf{OrigamiSum}(0, z, z'; z + z') = \{ & r_1 = \mathbf{PerpendicularBisector}(0, z'), \\ & r_2 = \mathbf{PerpendicularBisector}(0, z), \\ & \ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(r_1, z), \\ & \ell_6 = \mathbf{Perpendicular}(r_2, z'), \\ & z + z' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_5, \ell_6)\}. \end{aligned}$$

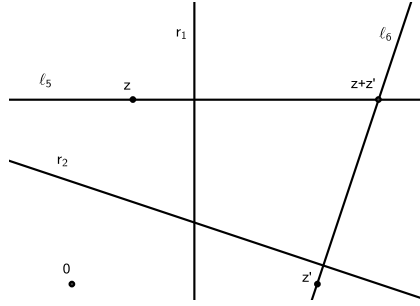


Figura 5.2: Construcció de la suma amb origami

**Proposició 5.2.** *La construcció **OrigamiSum** és l'única construcció  $O$ -minimal i  $O$ -optimal de la suma de dos nombres complexos.*

*Demostració.* La filtració de la construcció és:

$$\Phi(\mathbf{OrigamiSum}) = \{\{0, z, z'\}, \{r_1, r_2\}, \{\ell_5, \ell_6, z + z'\}\},$$

i per tant les mesures intrínseques són:

$$\text{lg}(\mathbf{OrigamiSum}) = 2, \quad \text{ord}(\mathbf{OrigamiSum}) = 8,$$

$$\text{rg}(\mathbf{OrigamiSum}) = 4, \quad \text{am}(\mathbf{OrigamiSum}) = 3.$$

La  $O$ -minimalitat surt del fet que aquesta construcció té el mateix nivell que la construcció  $\mathbf{Sum}_O$ , que ja hem vist que és  $O$ -minimal. Veiem que les  $O$ -construccions de  $z + z'$  tenen ordre un 8 com a mínim. Qualsevol d'aquestes construccions implicarà com a mínim dues rectes. Comptant els tres punts inicials i el punt  $z + z'$  això ens porta a ordre 6 com a mínim. Si només empréssim els punts inicials, amb els axiomes de l'eina  $O$  només podríem generar els costats del triangle  $0zz'$  i les seves mediatris, i cap d'aquestes rectes conté el punt  $z + z'$ . Ens cal generar com a mínim un altre punt

i una recta o bé dues rectes més, cosa que ja dóna una construcció d'ordre 8 com a mínim.

Una altra construcció de la suma implica com a mínim els tres punts  $0, z, z'$  (en la capa zero) i el punt  $z + z'$  i dues rectes  $r, s$  que s'hi tallin. Com que ni els costats ni les mediatris del triangle  $0zz'$  passen per  $z + z'$ , aquestes rectes apareixeran per força a la segona capa. Si volem una construcció d'ordre 8, només podem tenir dos objectes més a la primera capa, que no poden ser dos punts. Si un d'aquests dos objectes és un punt, aquest haurà de ser el punt de tall d'una de les rectes  $r, s$  amb una recta  $t$  de la primera capa, i alhora punt de tall de  $t$  amb alguna altra recta de la primera capa, però amb això ja tindríem 9 objectes. Així doncs, els dos objectes de la primera capa han de ser dues rectes  $t, u$  generades sense punts addicionals, és a dir, han de ser resultat d'aplicar l'axioma *Line* o l'axioma *PerpendicularBisector*. Les rectes  $r, s$  de la segona capa sortiran d'aplicar *Bisector* o *Perpendicular* a  $t, u$ . L'única combinació possible d'aquests axiomes que ens porta a la solució que interessa és justament la de la construcció *OrigamiSum*.  $\square$

**Observació:** La construcció de la diferència de dos nombres complexos és anàloga a la de la suma, però intercanviant el paper del 0 i un dels nombres en la construcció anterior, tal com es veu a la figura 5.3. Les mesures d'aquesta construcció són les mateixes

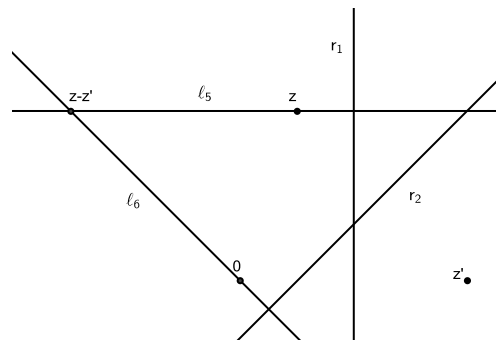


Figura 5.3: Construcció de la resta amb origami

que les de la construcció de la suma, i tenim un resultat anàleg a la proposició 5.2.

## 5.6 Mesures de punts i corbes d'un mapa

Les mesures introduïdes fins ara ens permeten comparar construccions fetes amb diverses eines. És pertinent preguntar-se quina eina és millor per construir un objecte donat. Naturalment, aquesta qüestió depèn dels objectes de partida, per la qual cosa cal plantejar-la en el context dels mapes. En aquesta secció introduïrem mesures de punts i corbes associades a mapes.



**Definició 5.6.1.** Sigui  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  un mapa. El nivell d'un objecte  $X \in \mathcal{U}^M$  és l'enter:

$$\text{nv}^M(X) := \min\{j \mid X \in \mathcal{U}_j\}.$$

**Proposició 5.3.** Siguin  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  un mapa i  $U_0 \subset \mathcal{U}^M$  un conjunt tal que el nivell màxim dels seus elements és  $k$ . Sigui  $C = C(U_0; X)$  una construcció de llargada  $n$  d'un objecte  $X \in \mathcal{U}^M$ . Aleshores:

$$\text{nv}^M(X) \leq k + n.$$

*Demostració.* Sigui  $\Phi(C) = \{\Phi_j\}_j$  la filtració de la construcció. És clar que els termes  $\Phi_j$  satisfan  $\Phi_j \subset \mathcal{U}_{j+k}$ .  $\square$

És òbvia la relació del nivell dels objectes amb les construccions minimal.

**Lema 5.4.** Sigui  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  un mapa i  $X \in \mathcal{U}^M$ . Si  $\text{nv}_M(X) = n$ , hi ha una construcció  $C(\mathcal{U}_0; X)$  de nivell  $n$  que és  $\mathcal{E}$ -minimal.

Pot passar, però, que una construcció minimal d'un objecte no sigui optimal. Per això definim:

**Definició 5.6.2.** Sigui  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  un mapa i  $X \in \mathcal{U}^M$ . L'ordre de  $X$  és l'ordre d'una construcció  $\mathcal{E}$ -optimal  $X$  amb conjunt inicial  $\mathcal{U}_0$ .

Per conveni, les mesures dels objectes del conjunt inicial d'un mapa són totes nul·les.

**Exemple:** En el mapa CF, considerem el punt  $z = 3 + i\sqrt{3}$ . Veurem en el capítol 6 que  $\text{nv}_{\text{CF}}(z) = 4$ . Una cerca exhaustiva mostra que les construccions de llargada 4 de  $z$  tenen un ordre major o igual que 20, però en canvi la construcció  $C$  determinada per la filtració:

$$\Phi(C) = \{\{0, 1, \omega\}, \{c_1, c_\omega, 1 + \omega\}, \{c_{1+\omega}, 2\omega\}, \{c_{2\omega}, 1 + 2\omega\}, \{c_{1+2\omega}, 2 + \omega\}, c_{2+\omega}, 2 + 2\omega\}\}$$

té una llargada de 5, té un ordre de 18 i és  $\mathcal{CF}$ -optimal, com veurem al capítol 6.

Cal esperar que els punts de nivell baix tinguin un ordre baix i a l'inrevés. Això es concreta en els resultats que presentarem tot seguit. Per simplificar, assumirem que les eines implicades satisfan la propietat següent:

**Definició 5.6.3.** Una eina  $\mathcal{E}$  és fortament completa quan els punts obtinguts per axiomes d'intersecció de  $\mathcal{E}$  s'obtenen com a intersecció de dues corbes construïbles.

**Observació:** Recordem que hem suposat que totes les eines satisfan la hipòtesi de completesa, que garanteix que els punts d'intersecció de dues corbes construïbles qualssevol són construïbles. La propietat de completesa forta complementa aquesta hipòtesi, i ens permet assegurar que un punt és construïble si, i només si, és intersecció de dues corbes construïbles. La majoria d'eines són fortament completes, llevat de les que inclouen axiomes de *verging*, com ara  $\mathcal{RM}$ ,  $\mathcal{RMC}$  i  $\mathcal{A}_\alpha$ .

**Proposició 5.5.** Sigui  $M = (\mathcal{E}, \mathcal{U}_0)$  un mapa amb  $\mathcal{E}$  fortament completa, i suposem que les corbes construïbles amb  $\mathcal{E}$  es generen, com a màxim, a partir de  $k \geq 1$  punts. Per a qualsevol punt  $P \in \mathfrak{P}^M$  se satisfan les desigualtats:

$$|\mathcal{U}_0| + 2 \operatorname{nv}_M(P) \leq \operatorname{ord}(C) \leq |\mathcal{U}_0| + \frac{3((2k)^{\operatorname{nv}_M(P)} - 1)}{2k - 1},$$

on  $C = C(\mathcal{U}_0; P)$  és una construcció de  $P$  de nivell  $n := \operatorname{nv}_M(P)$ .

*Demostració.* Sigui  $\Phi(C) = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$  la filtració de  $C$ , amb  $\Phi_i = [\tilde{C}_i, \tilde{P}_i]$ . La fita inferior és trivial, perquè en cada terme de la filtració hi ha almenys un punt i una corba. Per establir les fites superiors, fitarem per separat els cardinals dels conjunts  $\tilde{C}_{n-j}, \tilde{P}_{n-j}$  i sumarem les fites obtingudes per a cada valor de  $j$ . Veurem que:

$$|\tilde{C}_{n-j}| \leq 2 \cdot (2k)^j, \quad |\tilde{P}_{n-j}| \leq (2k)^j, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (5.1)$$

Amb això tindrem que

$$\operatorname{ord}(C) = \sum_{j=0}^n |\tilde{C}_{n-j}| + |\tilde{P}_{n-j}| \leq |\mathcal{U}_0| + 3 \sum_{i=1}^{n-1} (2k)^i = |\mathcal{U}_0| + \frac{3((2k)^n - 1)}{2k - 1}.$$

Provarem les desigualtats 5.1 per inducció. Per a  $j = 0$ , ja sabem que  $\tilde{P}_n = \{P\}$ . Com que l'eina és fortament completa, el punt  $P$  s'ha d'obtenir, o bé com a punt de tall d'una corba de  $\tilde{C}_n$  amb una corba d'un terme anterior, o bé com a punt de tall de dues corbes de  $\tilde{C}_n$ , de manera que  $1 \leq |\tilde{C}_n| \leq 2$ . Suposem que l'afirmació és certa per a un valor  $j$  i veiem que llavors també és certa per a  $j + 1$ . Cada corba de  $C_{n-j}$  prové de  $k$  punts com a màxim, que poden ser, tots, de  $P_{n-j-1}$  o haver-n'hi algun en un terme anterior de la filtració, així que:

$$|\tilde{P}_{n-j-1}| \leq k \cdot |\tilde{C}_{n-j}| \leq (2k)^{j+1}.$$

Ara bé, cada punt de  $\tilde{P}_{n-j-1}$  pot obtenir-se com a punt de tall, o bé de dues corbes de  $\tilde{C}_{n-j-1}$ , o bé d'una corba de  $\tilde{C}_{n-j-1}$  amb una corba d'un terme anterior. Per tant:

$$|\tilde{C}_{n-j-1}| \leq 2 \cdot |\tilde{P}_{n-j-1}| \leq 2 \cdot (2k)^{j+1}.$$

□

**Corol·lari 5.6.** Sigui  $M$  un dels mapes  $R, C, CE, RC, RCE, RCF$ . Els punts  $P \in \mathcal{U}^M$  satisfan:

$$|\mathcal{U}_0| + 2 \operatorname{nv}_M(P) \leq \operatorname{ord}(C) \leq 4^{\operatorname{nv}_M(P)} - 1 + |\mathcal{U}_0|,$$

on  $C = C(0, 1; P)$  una construcció de  $P$  de nivell  $\operatorname{nv}_M(P)$ .

Hi ha nombroses eines que no satisfan les hipòtesis de les proposicions anteriors. En aquests casos, és possible fer un estudi particular per obtenir resultats anàlegs als anteriors. Veiem el cas de l'origami.

**Proposició 5.7.** Sigui  $P \in \mathfrak{B}^\circ$  un punt del mapa  $\mathcal{O}$ . Se satisfan les desigualtats:

$$\text{nv}_\mathcal{O}(P) + 3 \leq \text{ord}(C) \leq 16/5(6^{\text{nv}_\mathcal{O}(P)-1} - 1) + 5,$$

on  $C = C(0, 1; P)$  una construcció de  $P$  de nivell  $\text{nv}_\mathcal{O}(P)$ .

*Demostració.* Sigui  $n := \text{nv}_\mathcal{O}(P)$  i sigui  $\Phi(C) = \{\Phi_i\}_i$  la filtració de  $C$ , amb  $\Phi_i = [\tilde{C}_i, \tilde{P}_i]$ . Les  $\mathcal{O}$ -construccions poden tenir termes de la filtració sense punts, perquè alguns axiomes de construcció d'origami només involucren rectes, així que ara només podem assegurar que  $|\Phi_i| \geq 1$  si  $1 \leq i \leq n-1$ . Ara bé,  $|\Phi_n| \geq 2$ , perquè el punt  $P$  s'ha d'obtenir com a intersecció de dues rectes i una d'aquestes ha d'estar al darrer terme de la filtració, o altrament el nivell de  $P$  seria inferior. Per tant,  $\text{ord}(C) \geq n + 1 + |\mathcal{U}_0| = n + 3$ .

La fita superior es demostra de manera anàloga a la proposició 5.5, a partir de les desigualtats

$$|\tilde{C}_{n-j}| \leq 2 \cdot 6^j, \quad |\tilde{P}_{n-j}| \leq 4 \cdot 6^{j-1}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (5.2)$$

que es proven també per inducció sobre  $j$ . A l'últim terme de la filtració podem tenir, o bé el punt  $P$  i una recta, o bé el punt  $P$  i dues rectes. Suposem que ens trobem en el segon cas. Considerem l'axioma que més rectes i punts necessita: el **CommonTangent**. Suposem que totes les corbes es construeixen a partir d'aquest axioma.

Aleshores, en  $\Phi_{n-1}$  tenim com a molt quatre punts i quatre rectes, necessaris per construir les dues rectes d'  $\Phi_n$ , per la qual cosa

$$|\tilde{P}_{n-1}| \leq 4.$$

Ara bé, els quatre possibles punts de  $\Phi_{n-1}$  poden provenir de rectes diferents de les que intervenen per construir les dues rectes de la capa final. Per construir aquests punts hi haurà vuit rectes com a molt a  $\Phi_{n-1}$ . Sumant el nombre màxim de rectes possibles, que són aquestes vuit més les quatre que han intervingut per construir les de la capa final, tenim

$$|\tilde{C}_{n-1}| \leq 12.$$

Suposem ara que les desigualts 5.2 són certes per a un valor  $j$  i provem-les per a  $j+1$ . Les rectes de  $\tilde{C}_{n-j}$  poden provenir, per l'ús de l'axioma **CommonTangent**, com a màxim de  $2 \cdot |\tilde{C}_{n-j}|$  punts, de manera que:

$$|\tilde{P}_{n-j-1}| \leq 2 \cdot |\tilde{C}_{n-j}| \leq 2 \cdot 2 \cdot 6^j = 4 \cdot 6^j.$$

Ara bé, les rectes de  $\tilde{C}_{n-j-1}$  són les que intervenen en l'axioma **CommonTangent** més les que donen els punts de  $\tilde{P}_{n-j-1}$ . Per tant:

$$|\tilde{C}_{n-j-1}| \leq 4 \cdot 6^j + 2 \cdot 4 \cdot 6^j = 2 \cdot 6^{j+1}.$$

□

## 5.7 Mesures de les construccions algebraiques bàsiques

L'anàlisi de la construcció de la suma amb origami que hem dut a terme esdevé molt complex si la volem reproduir amb les construccions de les operacions aritmètiques bàsiques i l'extracció d'arrels quadrades i cúbiques fetes amb regla i compàs, origami i còniques. Si bé la complexitat del problema no ens ha permès obtenir resultats tan satisfactoris com la proposició 5.2, hem aconseguit millorar les construccions habituals. Les construccions millorades es troben a les seccions D.2 i D.3 de l'annex D. Ens limitem aquí a donar les mesures intrínseques d'aquestes construccions.

Recordem que, com que  $\mathcal{RC}$  és una subeina generadora de  $\mathcal{CO}$ , les construccions amb  $\mathcal{RC}$  són també vàlides amb  $\mathcal{CO}$ . Suposarem que utilitzem les mateixes i que, per tant, els correspondran les mateixes mesures intrínseques.

| Construcció  | Ordre | Rang | Llargada | Amplada |
|--|-------|------|----------|---------|
| $\mathbf{Sum}_{\mathcal{C}}(0, z, z'; z + z')$         | 6     | 2    | 1        | 3       |
| $\mathbf{Product}_{\mathcal{RC}}(0, 1, z, z'; zz')$    | 20    | 9    | 4        | 6       |
| $\mathbf{Division}_{\mathcal{RC}}(0, 1, z, z'; z/z')$  | 21    | 10   | 4        | 7       |
| $\mathbf{SquareRoot}_{\mathcal{RC}}(0, 1, z; z^{1/2})$ | 24    | 12   | 6        | 5       |
| $\mathbf{RealSum}_{\mathcal{O}}(0, z, z'; z + z')$     | 10    | 5    | 4        | 2       |
| $\mathbf{OrigamiSum}(0, z, z'; z + z')$                | 8     | 4    | 2        | 3       |
| $\mathbf{Product}_{\mathcal{O}}(0, 1, z, z'; zz')$     | 24    | 15   | 7        | 5       |
| $\mathbf{Division}_{\mathcal{O}}(0, 1, z, z'; z/z')$   | 25    | 15   | 8        | 4       |
| $\mathbf{SquareRoot}_{\mathcal{O}}(0, 1, z; z^{1/2})$  | 29    | 17   | 9        | 6       |
| $\mathbf{ThirdRoot}_{\mathcal{O}}(0, 1, z; z^{1/3})$   | 27    | 18   | 8        | 8       |
| $\mathbf{ThirdRoot}_{\mathcal{CO}}(0, 1, z; z^{1/3})$  | 60    | 30   | 10       | 12      |

Taula 5.1: Mesures de les construccions de tipus algebraic

Cal tenir en compte que les mesures d'aquesta taula són mesures de construccions genèriques. Tal com veiem a l'annex D, les construccions en les quals la disposició dels punts i de les corbes és especial, tenen valors de la llargada menors, excepte en el cas de l'origami amb la construcció  $\mathbf{RealSum}_{\mathcal{O}}$ , en què el valor de la llargada és superior al de la construcció genèrica  $\mathbf{OrigamiSum}$ .

Com a conseqüència d'aquest fet i de la proposició 5.3 obtenim els resultats següents:

**Teorema 5.8.** *Considerem les capes del mapa  $\mathcal{RC}$ . Se satisfà:*

- $\mathfrak{P}_n \pm \mathfrak{P}_n \subset \mathfrak{P}_{n+1}$ .
- $\mathfrak{P}_n \cdot \mathfrak{P}_n^{\pm 1} \subset \mathfrak{P}_{n+4}$ .
- $\sqrt{\mathfrak{P}_n} \subset \mathfrak{P}_{n+6}$ .

**Teorema 5.9.** *Considerem les capes del mapa  $\mathcal{O}$ . Se satisfà:*

$$a) \mathfrak{P}_n \pm \mathfrak{P}_n \subset \mathfrak{P}_{n+4}.$$

$$b) \mathfrak{P}_n \cdot \mathfrak{P}_n^{\pm 1} \subset \mathfrak{P}_{n+8}.$$

$$c) \sqrt{\mathfrak{P}_n} \cup \sqrt[3]{\mathfrak{P}_n} \subset \mathfrak{P}_{n+9}.$$

**Teorema 5.10.** *Considerem les capes del mapa  $\mathbb{C}\mathbb{O}$ . Se satisfà:*

$$a) \mathfrak{P}_n \pm \mathfrak{P}_n \subset \mathfrak{P}_{n+1}.$$

$$b) \mathfrak{P}_n \cdot \mathfrak{P}_n^{\pm 1} \subset \mathfrak{P}_{n+4}.$$

$$c) \sqrt{\mathfrak{P}_n} \cup \sqrt[3]{\mathfrak{P}_n} \subset \mathfrak{P}_{n+10}.$$

# Capítol 6

## El mapa del compàs fix

En aquest capítol duem a terme l'estudi complet del mapa associat a l'eina compàs fix  $\mathcal{CF}$ . La naturalesa relativament senzilla d'aquesta eina permet portar aquest estudi molt més enllà que en altres casos.

### 6.1 Elecció del conjunt inicial

A partir d'una eina podem construir molts mapes diferents, en funció del conjunt inicial que fixem. En principi, ens interessen conjunts inicials que donin lloc a mapes infinits. Per coherència amb la definició de les capes, és raonable demanar que tots els punts d'intersecció de les corbes del conjunt inicial també siguin del conjunt inicial. Hom pot pensar que un conjunt inicial minimal que satisfaci aquestes dues condicions és la millor tria en general, però aquesta elecció pot amagar algunes simetries del mapa, complicant-ne la descripció. Així doncs, sovint convé ampliar a posteriori el conjunt inicial amb alguns punts de capes posteriors.

Aquesta és la situació que es dona en el cas de l'eina compàs fix  $\mathcal{CF}$ . El conjunt inicial  $\mathcal{U}_0 = \{0, 1\}$  origina un mapa infinit, i òbviament és minimal. En dibuixar les primeres capes del mapa, però, observem algunes simetries evidents: el conjunt de punts del mapa és simètric respecte de l'origen de coordenades i respecte de l'eix d'abscisses, i és invariant per la rotació d'angle  $\pi/3$ . Sembla natural, doncs, considerar un conjunt inicial que ja tingui aquestes simetries. Això justifica la definició següent:

**Definició 6.1.1.** *El mapa compàs fix és el mapa:*

$$\mathcal{CF} := (\mathcal{CF}, \mathcal{U}_0^{\mathcal{CF}} = \{0, 1, \omega, \omega - 1, -1, -\omega, 1 - \omega\}), \quad \omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

**Notació 6.1.1.** *Com en aquest capítol només treballarem el mapa  $\mathcal{CF}$ , denotarem els objectes i invariants del mapa sense especificar-lo explícitament, a fi de simplificar la notació. Així, per exemple, denotarem el nivell  $\text{nv}_{\mathcal{CF}}(z)$  d'un punt del mapa simplement per  $\text{nv}(z)$ .*

Amb aquesta definició tenim:

**Lema 6.1.** Si  $z \in \mathcal{U}^{\text{CF}}$ , llavors  $\bar{z}, \omega z \in \mathcal{U}^{\text{CF}}$ , i a més  $\text{nv}(\bar{z}) = \text{nv}(\omega z) = \text{nv}(z)$ .

*Demostració.* Per als punts de nivell 0 el resultat és conseqüència de la tria del conjunt inicial  $\mathcal{U}_0$ . Per als punts de nivell superior demostrem el resultat per inducció. Si  $\text{nv}(z) = k + 1$ , el punt  $z$  s'obté com a intersecció de dues circumferències unitàries amb centres  $z_1, z_2$  de nivells  $k_1 = k, k_2 \leq k$ . Per hipòtesi d'inducció les parelles de punts  $\bar{z}_1, \bar{z}_2$  i  $\omega z_1, \omega z_2$  i  $-z_1, -z_2$  tenen els mateixos nivells; els punts de tall de les circumferències centrades en aquests punts, que inclouen  $\bar{z}, \omega z$ , són nous punts del mapa, de nivell  $k + 1$ .  $\square$

## 6.2 Descripció dels punts construïbles

**Notació 6.2.1.** Donat un conjunt  $M \subset \mathbb{Z}[\omega]$ , denotem

$$W(M) := \{\omega^k z \mid z \in M, 0 \leq k \leq 5\},$$

$$T(M) := \{b + a\omega \mid a + b\omega \in M\}.$$

**Teorema 6.2.** El conjunt  $N_n = \mathfrak{F}_n \setminus \mathfrak{F}_{n-1}$  de punts de nivell  $n \geq 1$  del mapa CF ve donat per  $N_n = W(N_n^+ \cup T(N_n^+))$ , on:

$$N_n^+ = \left\{ a + (n + 2 - 2a)\omega \mid a \in \mathbb{N}, \frac{n + 2}{3} \leq a \leq \left\lfloor \frac{n + 2}{2} \right\rfloor \right\}.$$

*Demostració.* Demostrem el resultat per inducció. Per als primers valors de  $n$  tenim:

$$N_1 = \{\pm(1 + \omega), \pm(2\omega - 1), \pm(\omega - 2)\} = W(\{1 + \omega\}),$$

$$N_2 = \{\pm 2, \pm 2\omega, \pm(2\omega - 2)\} = W(\{2\}),$$

$$N_3 = \{\pm(\omega + 2), \pm(2\omega + 1), \pm(3\omega - 1), \pm(3\omega - 2), \pm(2\omega - 3), \pm(\omega - 3)\}$$

$$= W(\{\omega + 2, 2\omega + 1\}),$$

$$N_4 = \{\pm 3, \pm 3\omega, \pm 3(\omega - 1), \pm 2(\omega + 1), \pm 2(1 - 2\omega), \pm 2(2 - \omega)\} = W(\{2\omega + 2, 3\}),$$

$$N_5 = \{\pm(3 + \omega), \pm(1 + 3\omega), \pm(1 - 4\omega), \pm(3 - 4\omega), \pm(4 - 3\omega), \pm(4 - \omega)\}$$

$$= W(\{3 + \omega, 3\omega + 1\}),$$

$$N_6 = \{\pm 4, \pm 4\omega, \pm 4(1 - \omega), \pm(2\omega + 3), \pm(3 + 2\omega), \pm(2 - 5\omega),$$

$$\pm(3 - 5\omega), \pm(5 - 2\omega), \pm(5 - 3\omega)\} = W(\{4, 3 + 2\omega, 2 + 3\omega\}).$$

Provem el resultat per a  $n + 1$ , suposant-lo cert per a  $1, 2, \dots, n$ . Notem en primer lloc que una circumferència  $C$  centrada en un punt de nivell  $n - 2$  no pot donar lloc a un punt de nivell  $n + 1$ : un punt tal hauria de ser intersecció de  $C$  i una circumferència

$C'$  de la capa  $n + 1$ . Pel lema 6.1, podem suposar que el centre de  $C$  és un punt  $z = a + (n - 2a)\omega \in N_{n-2}^+$ . Les possibles interseccions de  $C$  amb  $C'$  són els sis punts:

$$\begin{aligned} z + 1 &= a + 1 + (n + 2 - 2(a + 1))\omega \in N_n^+, \\ z - 1 &= a - 1 + (n - 2 - 2(a - 1))\omega \in N_{n-4}^+, \\ z + \omega &= a + (n + 1 - 2a)\omega \in \mathfrak{C}_n, \\ z - \omega &= a + (n - 1 - 2a)\omega \in \mathfrak{C}_n, \\ z - 1 + \omega &= a - 1 + (n - 1 - 2(a - 1))\omega \in N_{n-3}^+, \\ z + 1 - \omega &= a + 1 + (n + 1 - 2(a + 1))\omega \in N_{n-1}^+. \end{aligned}$$

Tots pertanyen a la capa  $\mathfrak{C}_n$ , per hipòtesi d'inducció. Deduïm d'aquí també que les circumferències centrades en punts de nivell inferior a  $n - 2$  tampoc donaran punts de nivell  $n + 1$ . Així doncs, els punts de  $N_{n+1}$  s'obtenen intersecant dues circumferències de la capa  $n + 1$  o bé una de la capa  $n + 1$  amb una de la capa  $n$ .

Primerament analitzarem el cas en el qual les dues circumferències són de la capa  $n + 1$ . Pel lema 6.1, podem suposar que els dos centres  $z, z'$  d'aquestes circumferències cauen al conjunt  $N_n^+ \cup T(N_n^+)$ . Vegem quines parelles de punts d'aquest conjunt estan a distància menor o igual que 2:

- Si  $z = a + (n + 2 - 2a)\omega, z' = a' + (n + 2 - 2a')\omega$ , llavors

$$|z - z'|^2 = 3(a - a')^2 \leq 4 \iff a' = a \pm 1.$$

En aquest cas, tenim la parella  $\{z = a + (n + 2 - 2a)\omega, z' = z + 1 - 2\omega\}$  i les circumferències unitàries amb aquests centres s'intersequen en els punts  $z + \omega - 1 \in \mathfrak{C}_{n-1}$  i  $z + \omega = a + (n + 3 - 2a)\omega \in N_{n+1}^+$ .

- Si  $z = a + (n + 2 - 2a)\omega, z' = n + 2 - 2a' + a'\omega$ , llavors:

$$|z - z'|^2 = (n + 2)^2 + 3(a + a')^2 - 3(a + a')(n + 2) - 3aa'.$$

Quan estudiem l'expressió obtinguda com a funció de dues variables en les variables  $a$  i  $a'$ , veiem que té un mínim relatiu en el punt  $((n + 2)/3, (n + 2)/3)$ . Atès que treballem amb nombres enters, el possible mínim s'assolirà al punt  $(\lceil (n + 2)/3 \rceil, \lceil (n + 2)/3 \rceil)$ .

Posem  $n = 3m + r$ .

- Si  $r = 0$ , el mínim valor de  $|z - z'|^2$  és 1 i s'assoleix al punt  $((n + 3)/3, (n + 3)/3)$ . Els punts de tall que s'obtenen són els punts  $z - 1 \in N_{n-1}^+$  i  $z + \omega \in N_{n+1}^+$ .
- Si  $r = 1$ , el mínim valor de  $|z - z'|^2$  no nul és 3 i s'assoleix als punts  $((n + 2)/3, (n + 5)/3)$  i  $((n + 5)/3, (n + 2)/3)$ . El punt de tall que s'obté és  $z - 1 + \omega \in N_{n-1}^+$ .
- Si  $r = 2$ , el mínim valor de  $|z - z'|^2$  és 4 i s'assoleix al punt  $((n + 4)/3, (n + 4)/3)$ . El punt de tall que s'obté és  $z - 1 + \omega \in N_{n-1}^+$ .



Per a cada cas dels vistos, es comprova que pels altres valors possibles de  $a$  i  $a'$  es satisfà que  $|z - z'|^2 > 4$ .

Ara analitzem el cas en el qual intersequem una circumferència de la capa  $n+1$  i una circumferència de la capa  $n$ . Podem suposar que el centre de la primera circumferència és  $z = a + (n + 2 - 2a)\omega \in N_n^+$ , i també que el centre de la segona circumferència és  $z' = a' + (n + 1 - 2a')\omega \in N_{n-1}^+$ . Llavors

$$|z - z'|^2 = 3(a - a')^2 + 3(a' - a) + 1 \leq 4 \iff a' = a \text{ o bé } a' = a - 1.$$

Tenim les dues parelles  $\{z = a + (n + 2 - 2a)\omega, z' = a + (n + 1 - 2a)\omega\}$  i  $\{z = a + (n + 2 - 2a)\omega, z' = (a - 1) + (n + 1 - 2(a - 1))\omega\}$ . Les circumferències centrades en els punts de la primera parella es tallen en els punts  $z - 1 = a - 1 + (n + 2 - 2a)\omega \in \mathfrak{C}_{n-1}$  i  $z + 1 - \omega = a + 1 + (n + 1 - 2a)\omega \in N_{n+1}^+$ . Les circumferències centrades en els punts de la segona parella s'intersequen en els punts  $z - 1 \in \mathfrak{C}_{n-1}$  i  $z + \omega = a + (n + 3 - 2a)\omega \in N_{n+1}^+$ .

Quan  $a$  va prenent tots els valors possibles que donen lloc a punts de  $N_n^+$ , els nous punts de tall vistos recorren  $N_{n+1}^+$ . □

**Corollari 6.3.** *El conjunt de punts del mapa compàs fix és*

$$\mathfrak{P}^{\text{CF}} = \mathbb{Z}[\omega].$$

**Lema 6.4.** *Sigui  $n = 6k + \epsilon \geq 1$ ,  $0 \leq \epsilon < 6$ .*

$$|N_n| = \begin{cases} 12k + 6 & \text{si } \epsilon \in \{0, 1, 2\}, \\ 12(k + 1) & \text{si } \epsilon \in \{3, 4, 5\}, \end{cases}$$

*Demostració.* Pel teorema  $N_n = \bigcup_{k=0}^5 \omega^k(N_n^+ \cup T(N_n^+))$ . Només cal comptar el cardinal del conjunt  $N_n^+$  i descomptar 1 si  $n$  és parell, ja que en aquest cas els punts  $z = (n + 2)/2$  i  $T(z)$  es compten dos cops en cada còpia de  $N_n^+ \cup T(N_n^+)$ , i si  $n$  és congru a 1 mòdul 3, ja que en aquest cas el punt  $z = (n + 2)\omega/3$  es compta dos cops en  $N_n^+ \cup T(N_n^+)$ . □

**Corollari 6.5.** *Siguin  $k, \epsilon \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \epsilon < 6$ , i sigui  $n = 6k + \epsilon$ . Se satisfà:*

$$|\mathfrak{P}_n| = |\mathfrak{C}_{n+1}| = n^2 + 5n - \epsilon^2 + \epsilon + 6 + (2n - 2\epsilon - 12) \max(0, \epsilon - 2).$$

*Demostració.*

$$\begin{aligned} |\mathfrak{C}_{n+1}| &= \sum_{j=0}^{k-1} (3|N_{6j}| + 3|N_{6j+3}|) + |N_{6k}| + \dots + |N_{6k+\epsilon}| = \\ &= 36k(k - 1) + 54k + |N_{6k}| + \dots + |N_{6k+\epsilon}| = \\ &= n^2 + \epsilon^2 - 2\epsilon n + 3n - 3\epsilon + |N_{6k}| + \dots + |N_{6k+\epsilon}| = \\ &= n^2 + \epsilon^2 - 2\epsilon n + 3n - 3\epsilon + (1 + \epsilon)(12k + 6) + \max(0, \epsilon - 2)12(k + 1). \end{aligned}$$

□

### 6.3 Invariants dels punts

Les simetries naturals del mapa ens permeten relacionar de manera immediata els invariants d'un punt qualsevol amb els d'un punt de la forma  $a + b\omega$  amb  $a \geq b$ .

**Lema 6.6.** *Siguin  $a, r \geq 0$ .*

$$\begin{aligned} \text{nv}(-a - r\omega) &= \text{nv}(a + r\omega), \\ \text{nv}(a - r\omega) &= \text{nv}(a - r + r\omega), & a \geq r, \\ \text{nv}(a - (a + r)\omega) &= \text{nv}(r + a\omega), \\ \text{nv}(-a + r\omega) &= \text{nv}(a - r + r\omega), & a \geq r, \\ \text{nv}(-a + (a + r)\omega) &= \text{nv}(r + a\omega), \\ \text{nv}(\pm r \pm a\omega) &= \text{nv}(\pm a \pm r\omega). \end{aligned}$$

*Se satisfan les mateixes fórmules per a l'ordre i l'amplada dels punts.*

Amb això podem donar fórmules tancades dels invariants dels punts.

**Proposició 6.7.** *Donats  $a, b \in \mathbb{Z}$ , se satisfà:*

$$\text{nv}(a + b\omega) = \begin{cases} |a| + |b| + \max(|a|, |b|) - 2 & \text{si } ab \geq 0, \\ \max(|a|, |b|) + \max(|a + b|, \min(|a|, |b|)) - 2 & \text{si } ab < 0. \end{cases}$$

*Demostració.* Com que  $\text{nv}(a + b\omega) = \text{nv}(b + a\omega) = \text{nv}(-a - b\omega)$ , podem suposar que  $a \geq 0$  i que  $a \geq |b|$ . Si és  $b > 0$ , llavors pel teorema 6.2 sabem que  $\text{nv}(a + |b|\omega)$  és  $n = |b| + 2a - 2$ . En el cas que  $b < 0$  ens reduïm al cas anterior considerant que  $\text{nv}(a + b\omega) = \text{nv}(-b + (a + b)\omega)$ .  $\square$

**Proposició 6.8.** *Siguin  $a, b \in \mathbb{N}$ . Se satisfà:*

$$\text{ord}(a + b\omega) = 4a + 4b + 2, \quad \text{rg}(a + b\omega) = 2a + 2b - 2 \text{ si } \max(a, b) \geq 3.$$

*Demostració.* És clar que  $\text{ord}(a + b\omega) = \text{ord}(b + a\omega)$  i  $\text{rg}(a + b\omega) = \text{rg}(b + a\omega)$ , així que podem suposar que  $a \geq b$ . Es prova fàcilment per inducció que:

$$\text{ord}(a) = 4a + 4, \quad \text{rg}(a) = 2a - 1, \text{ si } a \geq 3,$$

$$\text{ord}(a + \omega) = 4a + 6, \quad \text{rg}(a + \omega) = 2a, \text{ si } a \geq 3,$$

$$\text{ord}(a + a\omega) = 8(a - 1) + 10, \quad \text{rg}(a + a\omega) = 4(a - 1) + 2.$$

Per inducció sobre  $b$  es demostra que

$$\text{ord}(a + (b + 1)\omega) = \text{ord}(a + b\omega) + 4, \quad \text{rg}(a + (b + 1)\omega) = \text{rg}(a + b\omega) + 2 \text{ si } b \geq 1.$$

i, per tant, podem concloure que

$$\text{ord}(a + b\omega) = \text{ord}(a + \omega) + 4(b - 1) = 4a + 4b + 2.$$

$\square$

**Lema 6.9.**

$$\begin{aligned}\max \left\{ |z|^2 : z \in N_n^+ \right\} &= 3 \left\lceil \frac{k+2}{3} \right\rceil^2 - 3(k+2) \left\lceil \frac{k+2}{3} \right\rceil + (k+2)^2, \\ \min \left\{ |z|^2 : z \in N_n^+ \right\} &= 3 \left\lfloor \frac{k+2}{2} \right\rfloor^2 - 3(k+2) \left\lfloor \frac{k+2}{2} \right\rfloor + (k+2)^2.\end{aligned}$$

## 6.4 Dos corol·laris geomètrics

La caracterització completa del conjunt de punts del mapa CF ens regala dos resultats de caire geomètric:

**Teorema 6.10.** *No hi ha cap construcció amb compàs fix que permeti dividir dos nombres complexos genèrics.*

*Demostració.* Si existís una construcció tal, el conjunt  $\mathfrak{P}^{\text{CF}}$  hauria de ser un cos, però el corol·lari 6.3 deixa clar que no ho és.  $\square$

**Teorema 6.11.** *El mapa CF és algèbric però no geomètricament algèbric. En particular, no hi ha cap construcció amb compàs fix que permeti construir la suma o el producte de dos nombres complexos genèrics.*

*Demostració.* Suposem que existeixi una construcció que doni la suma de dos nombres complexos qualssevol, i denotem per  $m \geq 1$  el nombre de cops que aplica l'axioma **CircleIntersect**. Això ens diria que el nivell del punt  $z = 2m = m + m$  és menor o igual que  $nv(m) + m = 3m - 2$ . Però la proposició 6.7 ens diu que  $nv(2m) = 4m - 2$ . Anàlogament es prova la no-existència d'una construcció que doni la multiplicació de dos nombres complexos qualssevol.  $\square$

# **Annexos**



# Annex A

## El *verging*

El *verging* o *νεῦσις* és una tècnica clàssica de construcció geomètrica, coneguda ja pels grecs<sup>1</sup>, però certament menystinguda pels geòmetres més puristes.

El *verging* consisteix genèricament en fer lliscar un instrument en una construcció geomètrica fins que certs elements destacats de l'objecte coincideixin amb elements donats de la construcció. Aquest lliscament amplia significativament les capacitats geomètriques de l'instrument. El cas més conegut és, sens dubte, el *verging* amb un regle marcat, que permet trisecar un angle qualsevol o determinar arrels cúbiques. Hi ha altres instruments, però, amb els quals podem fer un procés de *verging*, com ara l'escaire o, més generalment, un angle qualsevol.

Els diversos tipus de *verging* poden interpretar-se com interseccions de certes corbes, donades com a llocs geomètrics: quan fem el *verging* amb un instrument, podem traçar el recorregut d'algun dels elements destacats de l'instrument en desplaçar-lo sota certes restriccions. S'obtenen així corbes com la *concoide de Nicomedes* o el *caragol de Pascal*.

És important remarcar, però, que malgrat que el *verging* pugui descriure's com intersecció de certes corbes, la seva realització pràctica no requereix pas la construcció explícita d'aquestes corbes. Aquest és un dels motius que ens ha portat a definir l'equivalència virtual d'eines (cf. secció 3.1).

Tot seguit descriurem amb més detall els *vergings* possibles amb el regle marcat i amb l'angle. En el blog de la tesi es poden veure construccions interactives de les corbes que intervenen en aquests processos.

### A.1 *Verging* amb regle marcat

Els processos de *verging* amb un regle marcat consisteixen en recolzar el regle en un punt  $P$  donat, i inclinar-lo fins que les dues marques del regle coincideixin amb dos

---

<sup>1</sup>Apoloni li dedicà un dels seus tractats, per bé que es va perdre i només se n'han trobat molt recentment [25] referències indirectes a través dels tractats àrabs del segle X.

objectes donats. En la figura A.1 veiem el verging sobre el punt  $P$  entre les corbes  $c_1, c_2$ .

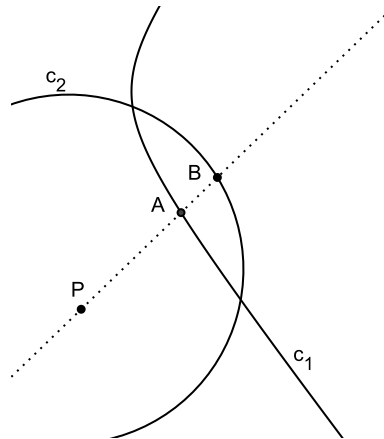


Figura A.1: Procés de verging

### A.1.1 Intersecció amb circumferències de radi unitat

En el cas més senzill de verging, fem coincidir una de les marques amb el propi punt de recolzament  $P$ , i encaixem l'altra marca en una corba donada. Això ens donarà, quan ho fem de totes les maneres possibles, els punts de tall de la corba donada amb la circumferència de centre  $P$  i radi 1.

En la memòria hem considerat només els casos en els quals la corba donada és una recta o una circumferència, i hem definit els axiomes **PointLineVerging**, **PointCircleVerging** i **LineUnitIntersect**. El darrer d'ells dóna els punts de talls descrits abans, mentre que els dos primers donen les rectes que uneixen aquests punts de tall amb el punt de recolzament  $P$ . És clar que el grau de tots aquests axiomes és 2.

### A.1.2 El verging sobre un punt i dues rectes. La concoide de Nicomedes

Un altre cas de verging consisteix en recolzar el regle marcat en un punt de recolzament  $O$  i encaixar les dues marques en dues rectes donades  $\ell, \ell'$ . Amb això obtenim parelles de punts  $(R_i, S_i)$  amb  $R_i \in \ell, S_i \in \ell'$  i  $d(R_i, S_i) = 1$ . Aquesta operació es pot descriure molt succintament tenint en compte la concoide de Nicòmedes. La concoide de Nicomedes de directiu  $\ell$ , pol  $O$  i distància 1 és el lloc geomètric dels punts  $M$  i  $M'$  sobre una recta variable per  $O$  a distància 1 del punt de tall d'aquesta recta amb la directriu  $\ell$ . En el blog de la tesi es pot trobar una construcció interactiva d'aquesta corba. En el nostre cas, els punts  $S_i$  que obtenim sobre la recta  $\ell'$  són justament els punts de tall de  $\ell$  amb aquesta concoide, la qual cosa ens permet analitzar fàcilment quants d'aquests punts trobarem.

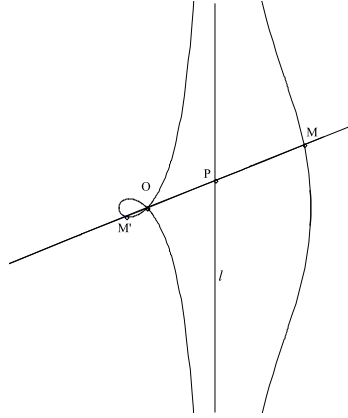


Figura A.2: Concoide de Nicomedes amb pol  $O$ , distància  $d = PM$  i recta.  $\ell$

Si situem el pol  $O$  a l'origen de coordenades i prenem com a directriu la recta  $X = a$ , l'equació cartesiana de la concoide de Nicomedes és

$$(x - a)^2(x^2 + y^2) = d^2 x^2. \quad (\text{A.1})$$

A la vista de l'equació A.1, està clar que una recta general tallarà la concoide en quatre punts, per la qual cosa aquest verging tindrà quatre solucions, és a dir, ens donarà quatre parelles de punts  $(R_1, S_1), \dots, (R_4, S_4)$ .

Per formalitzar aquest procés definim dos axiomes **LineConchoidIntersect** $(\ell, \ell', O)$  i **LineLineVerging** $(O, \ell, \ell')$ . El primer ens dona, com ja hem vist, els punts de cada parella que estan sobre la recta  $\ell$ ; aplicant-lo amb les rectes intercanviades obtindrem la resta de punts. L'axioma **LineLineVerging** ens dona les quatre rectes que uneixen els punts de cada parella (que passen totes per  $O$ ). Per obtenir cadascuna de les parelles a partir d'aquest axioma, haurem d'aplicar l'axioma **LineIntersect** a les rectes  $\ell, \ell'$  amb cadascuna de les rectes obtingudes.

Ja hem dit que

$$\text{gr } \mathbf{LineConchoidIntersect} = 4,$$

però aprofitarem aquest exemple per mostrar com podem determinar rigorosament el grau d'un axioma emprant la varietat geomètrica que li hem associat en el capítol 1. En general, això implica càlculs llargs i complexos, així que ho farem, a tall de mostra, usant el programa *Magma* ([10]).

Podem suposar, per simplificar els càlculs, que el punt  $O$  de recolzament del verging és l'origen. Les dues rectes sobre les que marcarem els punts tenen equacions  $A_1X + B_1Y + C_1 = 0, A_2X + B_2Y + C_2 = 0$ , i els punts marcats seran  $P_1 = (X_1, Y_1), P_2 = (X_2, Y_2)$ . Els lligams entre aquests objectes són:

$$\begin{aligned} A_1X_1 + B_1Y_1 + C_1 &= 0, \\ A_2X_2 + B_2Y_2 + C_2 &= 0, \\ (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 &= 0, \\ X_1Y_2 - X_2Y_1 &= 0 \end{aligned}$$



Per determinar el grau de l'axioma, hauríem de trobar una base de Gröbner de l'ideal generat pels polinomis de l'esquerra de les equacions anteriors, però *Magma* ja té una comanda pròpia per calcular-lo. Les instruccions concretes que hem d'emprar són:

```
k<A1,B1,C1,A2,B2,C2> := FunctionField(Rationals(),6);
P<X1,Y1,X2,Y2> := AffineSpace(k,4);
eq1 := A1*X1 + B1*Y1 + C1;
eq2 := A2*X2 + B2*Y2 + C2;
eq3 := (X1 - X2)^2 + (Y1 - Y2)^2 - 1;
eq4 := X1*Y2 - X2*Y1;
C := Scheme(P, [eq1, eq2, eq3, eq4]);
Degree(C);
4
```

De manera anàloga, una cònica general tallarà la conoide en vuit punts, però la circumferència té un comportament particular.

### Proposició A.1.

gr **CircleConchoidIntersect** = 6.

*Demostració.* Sense cap pèrdua de generalitat suposem que  $d = 1$ . Pel teorema de Bézout, a  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ , una circumferència i una conoide es tallen en vuit punts de l'espai projectiu; dos d'aquests punts, però, cauen sempre en la recta de l'infinit. Per trobar el punts de tall desenvolupem l'equació  $(x - b)^2 + (y - c)^2 = s^2$  de la circumferència de centre  $(a, b)$  i radi  $s$ , escrivint-la com  $x^2 + y^2 = s^2 + 2bx + 2cy - b^2 - c^2$ . Substituïm aquesta expressió en l'equació A.1 i obtenim:

$$(x - a)^2(s^2 + 2bx + 2cy - b^2 - c^2) = x^2.$$

Com que es tracta d'una equació de tercer grau en  $x$ , obtenim, com a molt, sis punts de tall reals entre les dues corbes.  $\square$

### A.1.3 El verging sobre un punt i dues circumferències. El caragol de Pascal

En fer un procés de verging amb un punt i dues circumferències ens trobem amb una situació similar a la del cas anterior: el procés equival essencialment a tallar una de les circumferències amb un caragol de Pascal. El caragol de Pascal de circumferència  $c$ , pol  $O$  (sobre  $c$ ) i distància  $d$  és el lloc geomètric dels punts  $M$  i  $M'$  sobre una recta variable per  $O$  a distància  $d$  del punt de tall d'aquesta recta amb la circumferència  $c$ . Podeu trobar una construcció interactiva d'aquesta corba en el blog de la tesi.

Si suposem que el focus  $O$  està a l'origen i que el centre de la circumferència està sobre l'eix horitzontal  $y = 0$ , l'equació cartesiana del caragol serà:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = (x^2 + y^2).$$

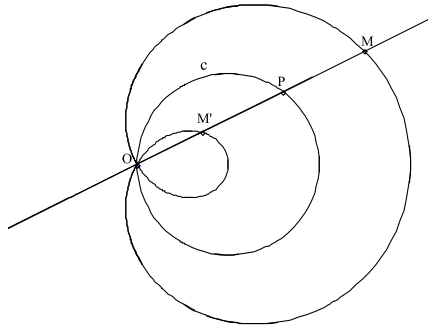


Figura A.3: Caragol de Pascal amb focus  $O$ , circumferència  $c$  i distància  $d = PM$

El verging sobre el punt  $O$  entre les dues circumferències  $c, c'$  ens donarà parelles de punts  $(R_i, S_i)$ , amb  $R_i \in c, S_i \in c'$  i  $d(R_i, S_i) = 1$ . Els punts que cauen sobre la circumferència  $c'$  coincideixen amb els punts de tall d'aquesta circumferència amb el caragol de circumferència  $c$  i pol  $O$  (i recíprocament).

Per formalitzar aquest procés de verging definim també dos axiomes: **CircleLimaçonIntersect** $(c, O, c')$  i **CircleCircleVerging** $(O, c, c')$ . El primer ens dona els punts obtinguts sobre la circumferència  $c$  i el segon les rectes que uneixen aquests punts amb  $O$ . Un càlcul senzill a mà o a màquina ens mostra que:

$$\text{gr CircleLimaçonIntersect} = 6.$$

#### A.1.4 El verging sobre un punt una recta i una circumferència

Finalment, amb el regle marcat també podem fer un procés de verging recolzant el regle en un punt  $O$  i encaixant les marques en una recta  $\ell$  i una circumferència  $c$  donades. Pel que hem vist en les subseccions anteriors, els punts que obtindrem sobre la circumferència coincidiran amb els punts de tall de  $c$  amb la concoide de directriu  $\ell$  i focus  $O$ , mentre que els punts que s'obtenen sobre la recta  $\ell$  són els punts de tall de  $\ell$  amb el caragol de Pascal de circumferència  $c$  i pol  $O$ . Formalitzarem aquest procés amb els axiomes **CircleConchoidIntersect**, **LineLimaçonIntersect** i **LineCircleVerging**. Tots aquests axiomes tenen grau 6.

## A.2 Verging amb angle

L'eina angle  $\mathcal{A}_\alpha$  formalitza un instrument físic que ens permet dibuixar dues semirectes que formen un angle  $\alpha$  en el seu vèrtex. El cas particular  $\alpha = \pi/2$  correspon a un escaire. Aquests instruments ens permeten dur a terme un altre tipus de verging, que en certa manera és el procés dual del verging amb regle marcat (cf. [52]). Donats dos

punts  $A, B$  i una recta  $\ell$ , podem aconseguir que els costats de l'angle passin pels punts donats, i que el vèrtex estigui sobre la recta  $\ell$ . Aquest procés de verging genera, doncs, punts sobre  $\ell$  i les parelles de rectes que uneixen aquests punts amb els punts donats  $A, B$ .

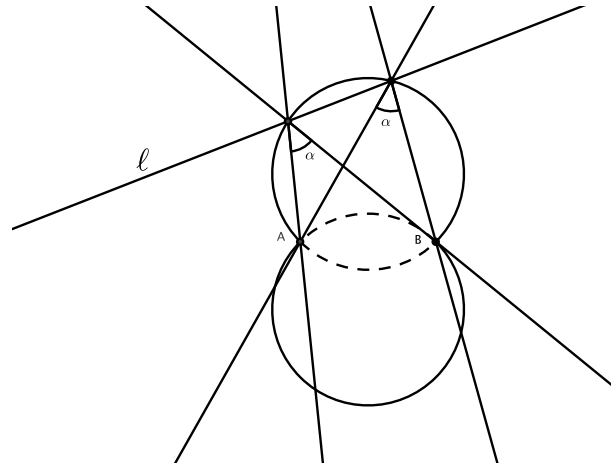


Figura A.4: Procés de verging amb un angle

Els punts obtinguts poden descriure's de manera senzilla com la intersecció de la recta  $\ell$  amb l'*angle capaç* del segment  $AB$ , és a dir, el lloc geomètric dels punts des dels quals el segment es veu sota l'angle  $\alpha$ . Això ens porta a formalitzar aquest procés de verging amb els axiomes **LineArcIntersect** $_{\alpha}(\ell, A, B)$  i **LineAngleVerging** $_{\alpha}(\ell, A, B)$  en el cas general i **LineDiameterCircleIntersect** i **LineSquadVerging** en el cas particular de l'escaire. Els graus d'aquests axiomes són:

$$\begin{aligned} \text{gr LineArcIntersect}_{\alpha} &= 4, \\ \text{gr LineAngleVerging}_{\alpha} &= 4, \\ \text{gr LineDiameterCircleIntersect} &= 2, \\ \text{gr LineSquadVerging} &= 2. \end{aligned}$$

# Annex B

## Conjunts construïbles

En aquest annex recordem les propietats bàsiques dels principals anells i cossos construïbles amb els mapes presentats a la memòria. Hem seguit les notacions del treball [3]. Es poden trobar més detalls sobre les relacions entre aquests cossos en *loc. cit.* i [13].

### B.1 L'anell dels enters d'Eisenstein

L'anell dels enters d'Eisenstein és l'anell  $\mathbb{Z}[\omega]$ , essent  $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ . És l'anell d'enters del cos quadràtic  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ . És un anell euclidià.

Els elements de  $\mathbb{Z}[\omega]$  són els nombres construïbles amb el compàs fix:

$$\mathfrak{P}^{\text{CF}} = \mathbb{Z}[\omega].$$

### B.2 El cos dels nombres euclidians

El cos  $\mathbb{E}$  dels nombres euclidians<sup>1</sup> és la menor extensió de  $\mathbb{Q}$  tancada per arrels quadrades:

$$z \in \mathbb{E} \implies \sqrt{z} \in \mathbb{E}.$$

Els nombres euclidians determinen extensions quadràtiques iterades: per cada  $\alpha \in \mathbb{E}$  hi ha una torre d'extensions quadràtiques:

$$\mathbb{Q} \subset K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha_1}) \subset K_2 = K_1(\sqrt{\alpha_2}) \subset \cdots \subset K_n = K_{n-1}(\sqrt{\alpha_n}) = \mathbb{Q}(\alpha).$$

En particular  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^n$ .

Els elements de  $\mathbb{E}$  són els nombres construïbles amb regla i compàs:

$$\mathfrak{P}^{\text{RC}} = \mathbb{E}.$$

---

<sup>1</sup>Aquesta és la definició usual. En [41] es defineix un altre cos  $\mathbb{E}'$  de nombres euclidians, que és totalment real. En aquest cas, Martin no identifica els nombres complexos amb els seus afixos. La relació entre els dos cossos és  $\mathbb{E} = \mathbb{E}'(i)$ .

Tenim també que  $\mathfrak{B}^C = \mathfrak{B}^{\text{RP}} = \mathbb{E}$  pels teoremes de Mohr-Mascheroni (4.6) i de Poncelet-Steiner (4.8).

### B.3 El cos dels nombres pitagòrics

El cos  $\mathbb{P}$  dels nombres pitagòrics és la menor extensió de  $\mathbb{Q}$  tancada per hipotenuses:

$$a, b \in \mathbb{P} \implies \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{P}.$$

Equivalentment,  $\mathbb{P}$  és el menor cos en el qual qualsevol suma de quadrats és un quadrat. És un cos totalment real. De fet, és la màxima subextensió totalment real del cos  $\mathbb{E}$ .

Els nombres pitagòrics són els nombres construïbles amb l'origami pitagòric:

$$\mathfrak{B}^{\text{OP}} = \mathbb{P}(i).$$

### B.4 El cos dels nombres de Viète

El cos  $\mathbb{V}$  dels nombres de Viète és la menor extensió de  $\mathbb{Q}$  tancada per arrels cúbiques reals i per trisecció, és a dir, la menor extensió  $\mathbb{V}$  de  $\mathbb{Q}$  que satisfà:

- $x \in \mathbb{V} \implies \sqrt[3]{x} \in \mathbb{V}$ ;
- $\cos(x) \in \mathbb{V} \implies \cos(x/3) \in \mathbb{V}$ .

Els nombres de Viète determinen torres d'extensions quadràtiques i cúbiques: per cada  $\alpha \in \mathbb{E}$  hi ha una torre d'extensions quadràtiques o cúbiques:

$$\mathbb{Q} \subset K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[2]{\alpha_1}) \subset K_2 = K_1(\sqrt[3]{\alpha_2}) \subset \dots \subset K_n = K_{n-1}(\sqrt[2]{\alpha_n}) = \mathbb{Q}(\alpha),$$

amb els  $e_j \in \{2, 3\}$ . En particular  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^a 3^b$ .

Quant a la seva constructibilitat, tenim que

$$\mathfrak{B}^{\text{RM}} = \mathfrak{B}^{\text{O}} = \mathfrak{B}^{\text{CO}} = \mathbb{V}(i).$$

# Annex C

## Atles de mapes

Incloem en aquest annex els mapes associats a les eines més comunes. L'elecció dels conjunts inicials s'ha fet d'acord amb la literatura existent, llevat del mapa FPC que proposem nosaltres.

### C.1 Mapes d'eines clàssiques

#### C.1.1 Regle

Per associar un mapa infinit a l'eina  $\mathcal{R}$  cal prendre un conjunt inicial que contingui, com a mínim, quatre punts o rectes en posició general (és a dir, que no formin un paral·lelogram). A la literatura, cf. [41], es pren com a conjunt inicial natural  $\mathcal{U}_0 = \{1, 2, i, 2i\}$ . El mapa donat per aquestes dades és:

$$\mathcal{R} := (\mathcal{R}, \mathcal{U}_0).$$

El conjunt de punts construïbles d'aquest mapa és (cf. [41, pàg.79]):

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{R}} = \mathbb{Q}(i).$$

A la Figura C.1 veiem la representació gràfica de les rectes i punts de la segona capa de  $\mathcal{R}$ .

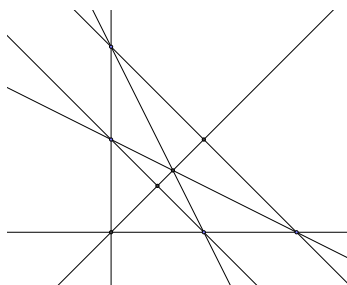


Figura C.1:  $\mathcal{U}_2^{\mathcal{R}}$

## C.1.2 Compàs

Per obtenir un mapa infinit amb l'eina  $C$  són necessaris dos punts. La tria natural és:

$$C := (C, \{0, 1\}).$$

El teorema de Mohr-Mascheroni ens diu que el conjunt de punts construïbles d'aquest mapa coincideix amb els punts construïbles amb regla i compàs i per tant (prop. 4.2).

$$U^C = \mathbb{E}.$$

## C.1.3 Regle i compàs

El mapa associat a l'eina  $\mathcal{RC}$ , és:

$$\mathcal{RC} := (\mathcal{RC}, \{0, 1\}).$$

El conjunt de punts construïbles amb aquest mapa és el cos dels nombres euclidiàns (prop. 4.2):

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{RC}} = \mathbb{E}.$$

A la Figura C.2 veiem les corbes i punts de la segona capa de  $\mathcal{RC}$ .

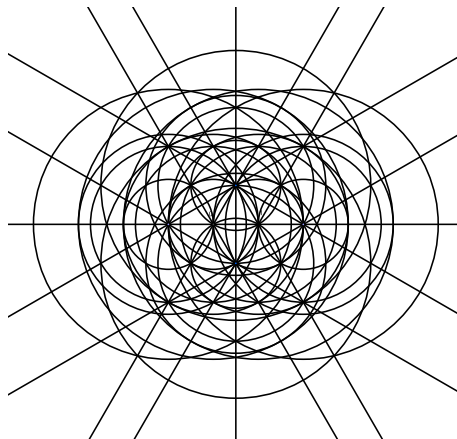


Figura C.2:  $U_2^{\mathcal{RC}}$

## C.1.4 Compàs euclidià

El mapa associat a l'eina  $\mathcal{CE}$  és:

$$\mathcal{CE} := (\mathcal{CE}, \{0, 1\}).$$

L'equivalència clàssica entre les eines  $C$  i  $\mathcal{CE}$  (teorema 3.6) ens diu que el conjunt de punts construïbles d'aquest mapa és

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{CE}} = \mathbb{E}.$$

### C.1.5 Regle i compàs euclidià

El mapa associat a l'eina  $\mathcal{RCE}$  és

$$\mathcal{RCE} := (\mathcal{RCE}, \{0, 1\}).$$

Les relacions  $\mathcal{CE} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{RCE}$  ens diuen que els corresponents conjunts de punts construïbles satisfan relacions anàlogues i per tant:

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{RCE}} = \mathbb{E}.$$

### C.1.6 Compàs fix

El mapa associat a l'eina  $\mathcal{CF}$  és:

$$\mathcal{CF} := (\mathcal{CF}, \{0, 1\}).$$

El conjunt de punts construïbles d'aquest mapa és, pel corollari 6.3, l'anell dels enters d'Eisenstein:

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{CF}} = \mathbb{Z}[\omega].$$

A la Figura C.3 veiem la setena capa de  $\mathcal{CF}$ .

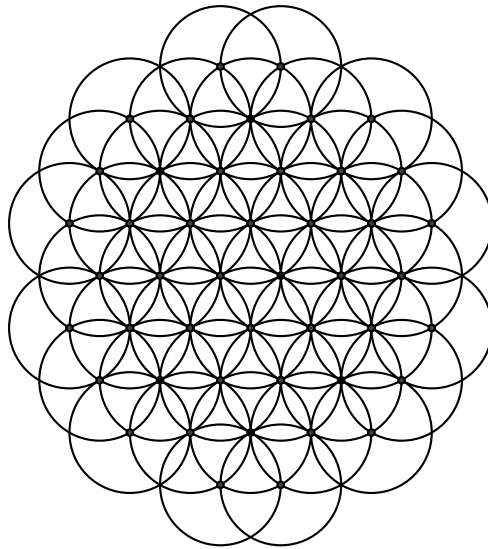


Figura C.3:  $\mathcal{U}_7^{\mathcal{CF}}$

### C.1.7 Regle i compàs fix

El mapa associat a l'eina  $\mathcal{RCF}$  és

$$\mathcal{RCF} := (\mathcal{RCF}, \{0, 1\}).$$



El conjunt de punts construïbles d'aquest mapa és (cf. [41, pàg. 108]):

$$\mathfrak{P}^{\text{RCF}} = \mathbb{E}.$$

### C.1.8 Regle i compàs de punta seca

Per generar un mapa infinit amb l'eina  $\mathcal{RCP}$  cal partir de quatre punts en posició general. Prendrem el mateix conjunt inicial que en el mapa R:

$$\text{RCP} := (\mathcal{RCP}, \{1, 2, i, 2i\}).$$

El conjunt de punts construïbles d'aquest mapa és (cf. [24], [41, cap. 5]):

$$\mathfrak{P}^{\text{RCP}} = \mathbb{P}(i),$$

essent  $\mathbb{P}$  el cos dels nombres pitagòrics.

### C.1.9 Regle marcat

Basten tres punts no alineats per generar un mapa infinit amb l'eina  $\mathcal{RM}$ . El mapa RM associat és:

$$\text{RM} := (\mathcal{RM}, \{0, 1, i\}).$$

Ja ha quedat descrit en l'exemple 1.11 que el seu conjunt de punts construïbles ve donat pel cos dels nombres de Viète:

$$\mathfrak{P}^{\text{RM}} = \mathbb{V}(i).$$

La Figura C.4 mostra la segona capa d'aquest mapa:

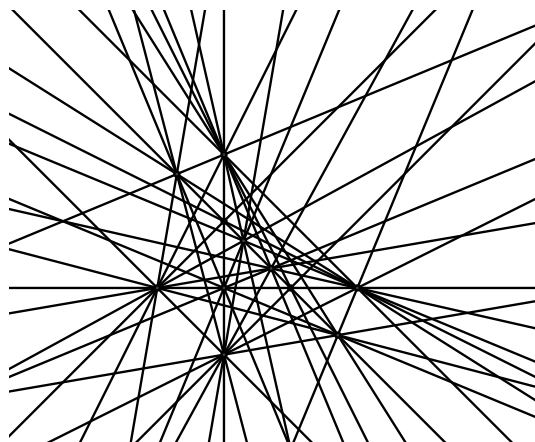


Figura C.4:  $\mathcal{U}_2^{\text{RM}}$

### C.1.10 Regle i circumferència

Un dels resultats més coneguts referents a les construccions geomètriques és el teorema de Poncelet-Steiner, conjecturat per Poncelet el 1822 i demostrat per Steiner l'any 1833, (cf. [12]). L'enunciat clàssic del teorema es formula en termes d'eines i construccions, però en el nostre llenguatge admet una formulació natural en el context dels mapes, ja que considera les construccions que es poden fer amb un compàs si es disposa a priori d'una circumferència, és a dir, els objectes construïbles amb el mapa:

$$\mathcal{RP} := (\langle \{\mathbf{Line}\}, \{\mathbf{LineIntersect}, \mathbf{LineCircleIntersect}\} \rangle, \{0, 2, 2i, X^2 + Y^2 = 1\}).$$

Anomenarem aquest mapa *regle i circumferència*. Notem que l'eina subjacent al mapa no és exactament el regle  $\mathcal{R}$ , ja que necessitem l'axioma **LineCircleIntersect**. El teorema de Poncelet-Steiner (teorema 4.8) ens diu que

$$\mathfrak{B}^{\mathcal{RP}} = \mathfrak{B}^{\mathcal{RC}} = \mathbb{E}.$$

## C.2 Mapes d'eines modernes

### C.2.1 Escaire

La diferència essencial de l'escaire  $\mathcal{E}$  amb el regle  $\mathcal{R}$  és l'axioma **LineDiameterCircleIntersect**, que s'aplica a dos punts  $A, B$  i una recta  $\ell$  i determina els punts de tall de la recta amb la circumferència de diàmetre  $AB$ . Per tal d'obtenir un mapa infinit amb l'escaire calen al menys tres objectes. Si només tenim dos punts només podrem construir la recta que els uneix i les perpendiculars a ella pels punts. Això ens porta a definir el mapa associat a l'eina  $\mathcal{ES}$  com:

$$\mathcal{ES} := (\mathcal{ES}, \{0, 1, i\}).$$

Aquest mapa és clarament infinit, perquè en la primera capa ja trobem els punts  $1 + i$  i  $(1 + i)/2$ , que ens permetran construir els punts  $1/2$  i  $i/2$  en la segona capa. Amb això passem en dos nivells del conjunt inicial  $\{0, 1, i\}$  al conjunt  $\{0, 1/2, i/2\}$  i està clar que iterant aquest procés podrem construir tots els punts  $i/2^n, 1/2^n$ .

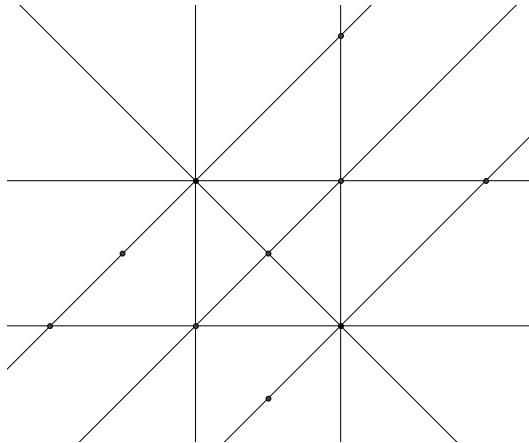


Figura C.5:  $\mathcal{U}_1^{\text{ES}}$

El conjunt de punts construïbles del mapa ES és (teorema 4.9):

$$\mathfrak{P}^{\text{ES}} = \mathbb{E}.$$

## C.2.2 Angle

L'eina  $\mathcal{A}_\alpha$  és una generalització de l'eina  $\mathcal{ES}$ . Per tal d'associar-li un mapa infinit podríem considerar un conjunt inicial de dos punts, sempre i quan  $\alpha \neq \pi/2$ . Per garantir que sigui infinit per a qualsevol valor de  $\alpha$ , agafem un conjunt inicial de tres punts. Posem:

$$A_\alpha := (\mathcal{A}_\alpha, \{0, 1, i\}).$$

**Proposició C.1.** *El mapa  $A_\alpha$  és infinit.*

*Demostració.* Sabem que amb l'eina  $\mathcal{A}_\alpha$  podem fer la construcció **Parallel** $_{\mathcal{A}_\alpha}$  i construir el punt d'intersecció de les diagonals d'un quadrat. Partint de  $\{0, 1, i\}$ , podem obtenir les rectes  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $X = 1$ , i  $Y = 1$  i els punts  $1 + i$  i  $1/2 + 1/2i$ . Iterant aquest procés anem construint els punts de la forma  $1/2^n + 1/2^n i$ .

□

## C.2.3 Origami

El mapa associat a l'eina és

$$\mathcal{O} := (\mathcal{O}, \{0, 1\}).$$

El conjunt de punts construïbles d'aquest mapa és (proposició 4.3):

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{O}} = \mathbb{V}(i).$$

La Figura C.6 mostra la segona capa del mapa.

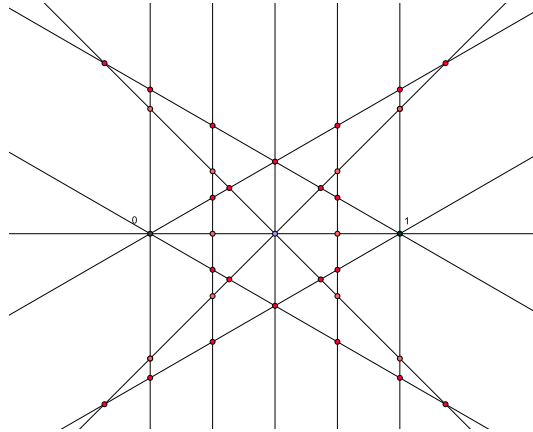


Figura C.6:  $\mathcal{U}_2^{\mathcal{O}}$

### C.2.4 Origami thalià

En [2], Alperin introdueix l'eina  $\mathcal{OT}$  i discuteix quines construccions són possibles amb ella. En realitat, Alperin considera un mapa genèric

$$\mathcal{OT}_z := (\mathcal{OT}, \{0, 1, z\}),$$

on  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  és un nombre complex no real. En el treball esmentat es prova que

$$\mathfrak{B}^{\mathcal{OT}_z} = \begin{cases} \mathbb{Q}(z, \bar{z}, i), & \text{si } b \in \mathbb{Q}(a, b^2) \\ \mathbb{Q}(z, \bar{z}), & \text{altrament.} \end{cases}$$

### C.2.5 Origami Pitagòric

El mapa que s'associa a l'eina  $\mathcal{OP}$  és

$$\mathcal{OP} := (\mathcal{OP}, \{0, 1\}).$$

En [2, Theorem 3.3] es prova que:

$$\mathfrak{B}^{\mathcal{OP}} = \mathbb{F}(i).$$

En la figura C.7 es veuen els punts de nivell 3 d'aquest mapa.

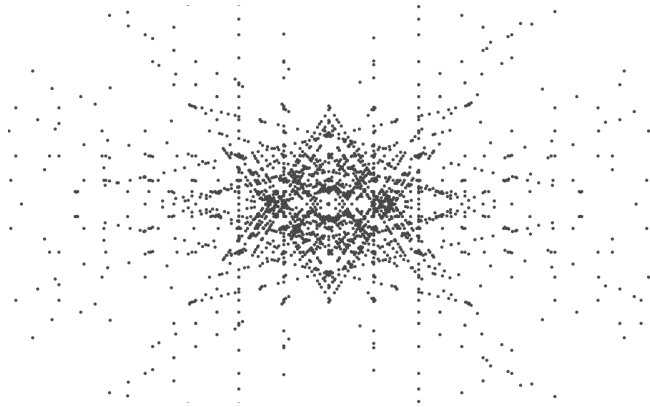


Figura C.7:  $\mathfrak{P}_3^{\text{OP}}$

### C.2.6 Origami ciclotòmic

L'eina  $\mathcal{OA}_\alpha$  és una subeina de  $\mathcal{A}_\alpha$  i per tant, en tenim prou amb un conjunt inicial de dos punts per construir un mapa infinit. En [30] s'estudia el cas en el qual  $\alpha = 2\pi/n$ , amb  $n \in \mathbb{N}$ . Definim el mapa  $n$ -ciclotòmic com

$$\mathcal{OA}_n := (\mathcal{OA}_{2\pi/n}, \{0, 1\}).$$

En [30, Theorem 2] es demostra que per a  $n \geq 3$  :

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{OA}_n} = \begin{cases} \mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}] & \text{si } n \text{ és primer;} \\ \mathbb{Z}[\frac{1}{n}, e^{2\pi i/n}] & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

### C.2.7 Regle i el·lipses

En [18] es considera el mapa:

$$\mathcal{RE} := (\mathcal{RE}, \{0, 1\}),$$

associat a l'eina  $\mathcal{RE}$  i es demostra que:

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{RE}} = \mathbb{V}(i).$$

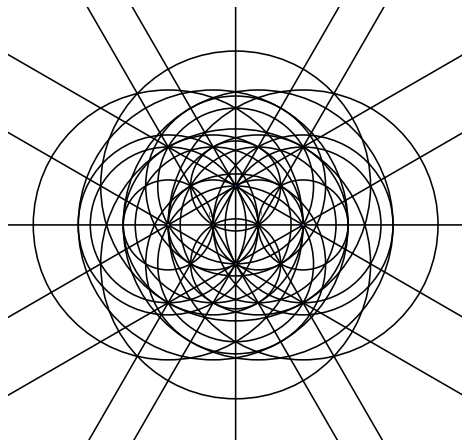
### C.2.8 Regle marcat i compàs

En [7] s'estudia el mapa

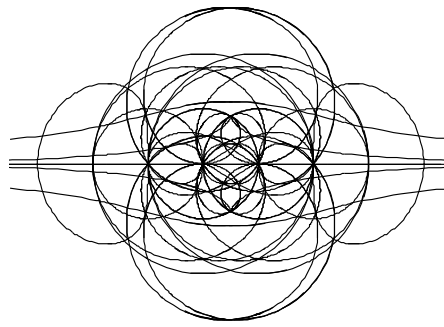
$$\mathcal{RMC} := (\mathcal{RMC}, \{0, 1\}).$$

La determinació del conjunt de punts  $\mathfrak{P}^{\mathcal{RMC}}$  d'aquest mapa és un problema obert. Se sap que conté estrictament  $\mathbb{V}(i)$ , i que té elements que no pertanyen a  $\mathbb{V}(i)$ .

La Figura C.2.8 mostra la representació gràfica de les corbes de la segona capa del mapa  $RMC$  i les primeres concoïdes i caragols de Pascal que intervenen en els axiomes de construcció a la primera capa.



(a)  $C_2$  amb  $RMC$



(b) Concoïdes i caragols de Pascal que intervenen a la primera capa de  $RMC$

### C.2.9 Còniques

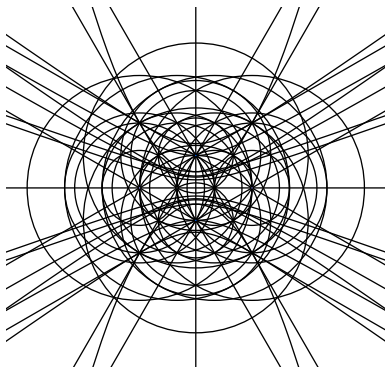
El mapa associat a l'eina  $CO$  és:

$$CO ::= (CO, \{0, 1\}).$$

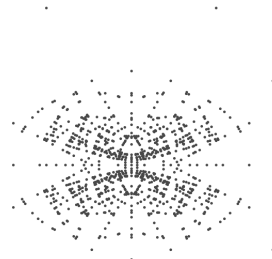
En [50] és prova que:

$$\mathfrak{P}^{CO} = \mathbb{V}(i).$$

A la Figura C.2.9 veiem la representació gràfica de les corbes i els punts de la segona capa de  $CO$ .



(c)  $\mathfrak{C}_2^{CO}$



(d)  $\mathfrak{p}_2^{CO}$

## C.2.10 Còniques per cinc punts

Tradicionalment, als estudis de construccions amb còniques, aquestes es troben definides a partir de la seva directriu, focus i excentricitat. Aquí presentem un mapa on les còniques estan definides per cinc punts per on passen. Per tal de poder obtenir més d'una capa, necessitem un conjunt inicial que contingui com a mínim sis punts. Proposem un conjunt inicial més gran, que garanteix unes determinades propietats del mapa, i permet caracteritzar-ne els punts construïbles.

Considerem el mapa següent:

$$\text{FPC} := (\langle \text{FivePointsConic}, \text{ConicIntersect} \rangle, \{0, 1, i, i+1, 2, -1, -i, -i+1\}).$$

L'axioma **FivePointsConic** permet construir l'única cònica per cinc punts que es trobin o bé en posició lineal general, o bé que exactament tres d'ells estiguin alineats. En el cas que tres dels punts estiguin alineats, la cònica serà degenerada: serà un parell de rectes (paral·leles o incidents).

**Teorema C.2.** *El mapa FPC és aritmètic. El seu conjunt de punts construïbles conté el cos  $\mathbb{Q}(i)$ .*

*Demostració.* La idea és relacionar aquest mapa amb el mapa R associat al regle. D'entrada, en el conjunt inicial del nostre mapa hi ha tots els punts del conjunt inicial de R llevat de  $2i$ . Per construir-lo en FPC considerem les còniques per  $\{0, 1, 2, -i, 1-i\}$  i  $\{0, 1-i, i, 1+i, 2\}$ . El seu punt d'intersecció és el  $2-i$ . El punt  $2i$  s'obté com a intersecció de les còniques per  $\{1, i, 2-i, 2, 1+i\}$  i  $\{0, i, -1, 1, 2\}$ .

Si tenim dos punts  $z, z' \in \mathfrak{B}^{\text{FPC}}$ , la recta que els uneix és construïble: forma part de la cònica degenerada que passa pels punts per  $\{z, z', -i, 0, i\}$  si  $z, z'$  no tenen part real nul·la; en cas contrari es combinen amb altres tres punts alineats del conjunt inicial. Si tenim dues rectes  $\ell, \ell' \in \mathcal{C}^{\text{FPC}}$ , el seu punt de tall és construïble: només hem d'interseccionar les dues còniques degenerades pels parells de rectes  $\{\ell, X=0\}$  i  $\{\ell', Y=0\}$ . Naturalment caldria considerar a part els casos en els quals alguna de les rectes coincideix amb els eixos, però es resolen trivialment utilitzant altres rectes formades amb els punts del conjunt inicial. Aquestes consideracions ens porten a veure que R és un submapa de FPC i, per tant,  $\mathbb{Q}(i) = \mathfrak{B}^{\text{RM}} \subset \mathfrak{B}^{\text{FPC}}$ . Però també ens diuen que totes les construccions possibles amb el regle també ho són amb FPC, i per tant  $\mathfrak{B}^{\text{FPC}}$  és un cos.  $\square$

**Lema C.3.** *Si  $z \in \mathfrak{B}^{\text{FPC}}$ , aleshores  $\text{Re}(z), \text{Im}(z)i, |z|^2 \in \mathfrak{B}^{\text{FPC}}$ .*

*Demostració.* Notem que el conjunt  $\mathfrak{B}^{\text{FPC}}$  és simètric respecte l'eix real, i per tant,  $\bar{z} \in \mathfrak{B}^{\text{FPC}}$ . Com el mapa és aritmètic, tenim que  $-z, -\bar{z} \in \mathfrak{B}^{\text{FPC}}$ . En la demostració del teorema C.2 hem vist que les rectes que uneixen aquests punts són construïbles, i per tant també ho són els seus punts de tall amb els eixos. Com que  $|z|^2 = \text{Re}(z)^2 - (i \text{Im}(z))^2$  i el mapa és aritmètic, tenim també que  $|z| \in \mathfrak{B}^{\text{FPC}}$ .  $\square$

**Teorema C.4.** *El cos  $\mathfrak{F}^{\text{FPC}}$  és tancat per conjugació complexa, arrels quadrades i arrels cúbiques.*

*Demostració.* Ja hem vist abans que  $z \in \mathfrak{F}^{\text{FPC}} \implies \bar{z} \in \mathfrak{F}^{\text{FPC}}$ . Veiem primer que podem construir les arrels quadrades d'un nombre complex  $z$ . Pel lema anterior,  $|z|^2$  és construïble i per tant també  $\pm|z|^2 + i \in \mathfrak{F}^{\text{FPC}}$ . Així doncs, la recta  $x = |z|^2$  és construïble. Tallant-la amb la paràbola construïble  $x = y^2$  construïm el punt  $|z|^2 + i|z|$ , i a partir d'ell obtenim el punt  $|z|$ . Un argument anàleg ens permetrà construir el punt  $\sqrt{|z|}$ . Per construir  $\sqrt[3]{z}$  només ens falta poder biseccar l'angle  $\arg(z)$ , i això es fa construint la diagonal del paral·lelogram construïble de vèrtexs  $0, z, |z|, (z + |z|)/2$ .

Ara construïm les arrels cúbiques de  $z$ . Si  $z = a + bi$ , a partir dels punts  $0, a + ai, a - ai, 4a + 2ai, 4a - 2ai$  podem construir la paràbola  $x = y^2/|z|$ , i en tallar aquesta amb la paràbola construïble  $y = x^2$  obtenim el punt  $|z|^{1/3}$ . Per trisecar l'angle  $\arg(z)$ , usem la construcció clàssica de Pappus: ens cal construir la recta  $0z$ , la circumferència de radi 2 centrada l'origen (amb els cinc punts construïbles  $2, -2, 2i, i$  i la hipèrbola d'equació  $(x - 2)^2 + y^2 = \frac{4}{a^2 + b^2}(ax + by)^2$ , de la qual en tenim sis punts construïbles (els punts de tall amb  $y = 0, x = 0, i x = 2$ ). □





# Annex D

## Catàleg de construccions

Aquest annex conté les nombroses construccions geomètriques que han aparegut al llarg de la tesi, juntament amb altres que, pel seu valor històric o estètic, no poden ésser excloses de cap *antologia* geomètrica. L'annex s'estructura en tres nivells: blocs, problemes i construccions. Hem destriat els processos que volem descriure segons la seva natura: hem agrupat en un primer bloc els problemes exclusivament geomètrics, i hem deixat en el segon bloc els problemes de naturalesa *aritmètica*, lligats a les operacions algebraiques elementals.

Quan les construccions que donem tenen una estructura complicada fem una descripció prèvia com a construcció generalitzada, que ens permet copsar millor el procés geomètric que duem a terme. Per cada construcció, donem la llista d'eines que permeten dur-la a terme, i les corresponents filtracions. Observem, però, que hi pot haver altres solucions del problema en qüestió que impliquin altres eines. Finalment, incloem també una referència en què el lector pot comprovar la validesa de la demostració.

Per tal que el lector pugui analitzar amb més cura aquestes construccions, hem preparat animacions interactives de moltes d'elles. Aquestes animacions estan allotjades al blog de la tesi<sup>1</sup>.

### D.1 Construccions geomètriques bàsiques

Els problemes que presentem en aquest bloc són de tipus geomètric. L'ordre triat per presentar-los segueix el fil històric: comencem per les construccions que apareixen en els *Elements* d'Euclides (n'esmentem la seva ubicació en l'obra), i seguim per ordre cronològic.

---

<sup>1</sup>El fitxer PDF del treball conté hiperenllaços directes sobre els quals podem clicar per accedir directament a cada construcció.

### D.1.1 Triangle equilàter

**Problema (Euclides I.1):** Donats dos punts  $A, B$ , dibuixeu els dos punts  $C, D$  que determinen dos triangles equilàters amb  $A$  i  $B$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned} \mathit{EquilateralTriangle}(A, B; C, D) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(B, A), \\ & C, D = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Observacions:** Els punts  $C$  i  $D$  s'obtenen ordenats de manera que els angles  $BAC$  i  $ABD$  són positius.

**Eines:**  $\mathcal{CE}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{EquilateralTriangle}) = \{\{A, B\}, \{c_1, c_2, C, D\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathit{EquilateralTriangle}) &= 1, & \text{ord}(\mathit{EquilateralTriangle}) &= 6 \\ \text{rg}(\mathit{EquilateralTriangle}) &= 2, & \text{am}(\mathit{EquilateralTriangle}) &= 4. \end{aligned}$$

### D.1.2 Transport de distància

**Problema (Euclides I.2):** Donats tres punts  $A, B, C$ , dibuixeu un punt  $D$  tal que els segments  $AD$  i  $BC$  siguin congrus.

**Solució amb  $\mathcal{RCE}$ :**

$$\begin{aligned} \mathit{DistanceTransport}(A, B, C; D) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(B, A), \\ & E, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & \ell_1 = \mathbf{Line}(B, E), \\ & c_3 = \mathbf{Circle}(B, C), \\ & G, H = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_3), \\ & c_4 = \mathbf{Circle}(E, H), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(E, A) \\ & D, I = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_4)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Eines:**  $\mathcal{RCE}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{DistanceTransport}) = \{\{A, B, C\}, \{c_1, c_2, E, F\}, \{\ell_1, \ell_2, c_3, H\}, \{c_4, D\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathit{DistanceTransport}) &= 3, & \text{ord}(\mathit{DistanceTransport}) &= 13 \\ \text{rg}(\mathit{DistanceTransport}) &= 6, & \text{am}(\mathit{DistanceTransport}) &= 4. \end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{CE}$ :**

$$\begin{aligned} \mathit{CompassDistanceTransport}(A, B, C; D) &= \{c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(B, A), \\ & E, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & c_3 = \mathbf{Circle}(E, C), \\ & c_4 = \mathbf{Circle}(F, C), \\ & C, D = \mathbf{CircleIntersect}(c_3, c_4)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [41].

**Eines:**  $\mathcal{CE}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{CompassDistanceTransport}) = \{\{A, B, C\}, \{c_1, c_2, E, F\}, \{c_3, c_4, D\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathit{CompassDistanceTransport}) &= 2, & \text{ord}(\mathit{CompassDistanceTransport}) &= 10 \\ \text{rg}(\mathit{CompassDistanceTransport}) &= 4, & \text{am}(\mathit{CompassDistanceTransport}) &= 4. \end{aligned}$$

### D.1.3 Punt doble

**Problema:** Donats dos punts  $A, B$ , dibuixeu el punt  $C$  tal que  $\vec{AC} = 2\vec{AB}$ .

**Solució amb  $\mathcal{CE}$ :**

$$\begin{aligned} \mathit{DoublePoint}(A, B; C) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(B, A), \\ & D, E = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & c_3 = \mathbf{Circle}(D, B), \\ & A, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_3), \\ & c_4 = \mathbf{Circle}(F, B), \\ & D, C = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_4)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Eines:**  $\mathcal{CE}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{DoublePoint}) = \{\{A, B\}, \{c_1, c_2, D\}, \{c_3, A, F\}, \{c_4, C\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathit{DoublePoint}) &= 3, & \text{ord}(\mathit{DoublePoint}) &= 10 \\ \text{rg}(\mathit{DoublePoint}) &= 4, & \text{am}(\mathit{DoublePoint}) &= 3. \end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{RCP}$ :**

$$\begin{aligned} \mathit{DoublePoint}_{\mathcal{RCP}}(A, B; D) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\ & D, C = \mathbf{LineRadiusCircleIntersect}(\ell_1, A, A, B)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** És clar, pel fet de poder transportar distàncies amb  $\mathcal{RCP}$ .

**Eines:**  $\mathcal{RCP}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{DoublePoint}_{\mathcal{RCP}}) = \{\{A, B\}, \{\ell_1, D\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathit{DoublePoint}_{\mathcal{RCP}}) &= 1, & \text{ord}(\mathit{DoublePoint}_{\mathcal{RCP}}) &= 4 \\ \text{rg}(\mathit{DoublePoint}_{\mathcal{RCP}}) &= 1, & \text{am}(\mathit{DoublePoint}_{\mathcal{RCP}}) &= 2. \end{aligned}$$

### D.1.4 Punt doble partint d'un triangle

**Problema:** Donats tres punts  $A, B, C$ , tals que el triangle  $ABC$  és rectangle en  $B$ , dibuixeu el punt  $D$  tal que  $\vec{AD} = 2\vec{AB}$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned} \text{DoublePoint}_{\mathcal{ES}}(A, B, C; D) = \{ & \ell_1 = \text{Line}(A, B), \\ & \ell_2 = \text{Line}(B, C), \\ & \ell_3 = \text{Perpendicular}(\ell_1, A), \\ & \ell_4 = \text{Perpendicular}(\ell_2, C), \\ & E = \text{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4), \\ & \ell_5 = \text{Line}(B, E), \\ & \ell_6 = \text{Perpendicular}(\ell_5, C), \\ & \ell_7 = \text{Perpendicular}(\ell_6, C), \\ & D = \text{LineIntersect}(\ell_1, \ell_7)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** Donat que  $ABCE$  és un rectangle  $\vec{AB} = \vec{EC}$ . Fent la recta paral·lela a  $EB$  per  $C$ , construïm el paral·lelogram  $BDCE$ , d'on  $\vec{EC} = \vec{BD}$ .

**Eines:**  $\mathcal{ES}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\text{DoublePoint}_{\mathcal{ES}}) = \{\{A, B, C\}, \{\ell_1, \ell_2\}, \{\ell_3, \ell_4, E\}, \{\ell_5, \ell_6, \ell_7, D\}\};$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \text{lg}(\text{DoublePoint}_{\mathcal{ES}}) &= 3, & \text{ord}(\text{DoublePoint}_{\mathcal{ES}}) &= 12 \\ \text{rg}(\text{DoublePoint}_{\mathcal{ES}}) &= 7, & \text{am}(\text{DoublePoint}_{\mathcal{ES}}) &= 4. \end{aligned}$$

### D.1.5 Inversió d'un punt respecte d'una circumferència

**Problema:** Donats tres punts  $A, B, P$ , dibuixeu el punt  $P'$  invers de  $P$  respecte de la circumferència amb centre  $A$  que passa per  $B$ .

**Solució amb  $\mathcal{CE}$ :**

$$\begin{aligned} \text{CircleInversion}(A, B, P; P') = \{ & c_1 = \text{Circle}(A, B), \\ & c_2 = \text{Circle}(P, A), \\ & C, D = \text{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & c_3 = \text{Circle}(C, A), \\ & c_4 = \text{Circle}(D, A), \\ & P', A = \text{CircleIntersect}(c_3, c_4)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [33].

**Comentaris:** La construcció només és vàlida si  $d(A, P) > \frac{1}{2}d(A, B)$ . Si no se satisfà aquesta condició, es calcula primer un punt  $Q \in AP$  tal que  $AQ = 2^n AP > \frac{1}{2}d(A, B)$ , es troba el seu invers  $Q'$  i finalment l'invers  $P'$  és el punt que satisfà  $AP' = 2^n AQ'$ .

**Eines:**  $\mathcal{CE}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{CircleInversion}) = \{\{A, B, P\}, \{c_1, c_2, C, D\}, \{c_3, c_4, P'\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathit{CircleInversion}) &= 2, & \text{ord}(\mathit{CircleInversion}) &= 10 \\ \text{rg}(\mathit{CircleInversion}) &= 4, & \text{am}(\mathit{CircleInversion}) &= 4. \end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{RCE}$ :**

$$\begin{aligned} \mathit{CircleInversion}_{\mathcal{RCE}}(A, B, P; P') &= \{\ell_1 = \mathbf{Line}(A, P), \\ & c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ & C, D = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(B, P), \\ & B, E = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_1) \\ & \ell_3 = \mathbf{Line}(B, D), \\ & \ell_4 = \mathbf{Line}(C, E), \\ & \ell_5 = \mathbf{Line}(D, E), \\ & \ell_6 = \mathbf{Line}(B, C), \\ & F = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4), \\ & G = \mathbf{LineIntersect}(\ell_5, \ell_6), \\ & \ell_7 = \mathbf{Line}(F, G), \\ & P' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_7)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Comentaris:** La construcció només és vàlida si  $d(A, P) > \frac{1}{2}d(A, B)$ . Si no se satisfà aquesta condició, es calcula primer un punt  $Q \in AP$  tal que  $AQ = 2^n AP > \frac{1}{2}d(A, B)$ , es troba el seu invers  $Q'$  i finalment l'invers  $P'$  és el punt que satisfà  $AP' = 2^n AQ'$ .

**Eines:**  $\mathcal{RCE}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{CircleInversion}_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}) = \{\{A, B, P\}, \{\ell_1, \ell_2, c_1, C, D, E\}, \{\ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, F, G\}, \{\ell_7, P'\}\};$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{CircleInversion}_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}) &= 3, & \text{ord}(\mathbf{CircleInversion}_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}) &= 17 \\ \text{rg}(\mathbf{CircleInversion}_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}) &= 8, & \text{am}(\mathbf{CircleInversion}_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}) &= 6. \end{aligned}$$

### D.1.6 Circumcentre d'un triangle

**Problema:** Donats tres punts  $P, Q, R$ , trobeu el centre  $O$  del cercle circumscrit al triangle  $ABC$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned} \mathbf{Circumcentre}(P, Q, R; O) &= \{\mathbf{CircleInversion}(P, Q, R; R'), \\ & \quad c_1 = \mathbf{Circle}(Q, P), \\ & \quad c_2 = \mathbf{Circle}(R', P), \\ & \quad O', P = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & \quad \mathbf{CircleInversion}(P, Q, O'; O)\} \\ &= \{\mathbf{Circle}(P, Q), \\ & \quad c_2 = \mathbf{Circle}(R, P), \\ & \quad C, D = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & \quad c_3 = \mathbf{Circle}(C, P), \\ & \quad c_4 = \mathbf{Circle}(D, P), \\ & \quad R', P = \mathbf{CircleIntersect}(c_3, c_4), \\ & \quad c_5 = \mathbf{Circle}(Q, P), \\ & \quad c_6 = \mathbf{Circle}(R', P), \\ & \quad O', P = \mathbf{CircleIntersect}(c_5, c_6), \\ & \quad c_7 = \mathbf{Circle}(P, Q), \\ & \quad c_8 = \mathbf{Circle}(O', P), \\ & \quad E, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_7, c_8), \\ & \quad c_9 = \mathbf{Circle}(E, P), \\ & \quad c_{10} = \mathbf{Circle}(F, P), \\ & \quad O, P = \mathbf{CircleIntersect}(c_9, c_{10})\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Eines:**  $\mathcal{CE}$  i totes les generades per aquesta.



**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{Circumcenter}) = \{\{P, Q, R\}, \{c_1, c_2, c_5, c_7, C, D\}, \{c_3, c_4, R'\}, \{c_6, O'\}, \{c_8, E, F\}, \{c_9, c_{10}, O\}\};$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{Circumcenter}) &= 5, & \text{ord}(\mathbf{Circumcenter}) &= 20 \\ \text{rg}(\mathbf{Circumcenter}) &= 10, & \text{am}(\mathbf{Circumcenter}) &= 6. \end{aligned}$$

### D.1.7 Simetria axial

**Problema:** Donats tres punts  $A, B, C$ , dibuixeu el punt  $D$  simètric de  $C$  respecte de la recta  $AB$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned} \mathbf{Reflect}(A, B, C; D) &= \{c_1 = \mathbf{Circle}(A, C), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(B, C), \\ & D, C = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Eines:**  $C\mathcal{E}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{Reflect}) = \{\{A, B, C\}, \{c_1, c_2, D, C\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{Reflect}) &= 1, & \text{ord}(\mathbf{Reflect}) &= 7 \\ \text{rg}(\mathbf{Reflect}) &= 2, & \text{am}(\mathbf{Reflect}) &= 4. \end{aligned}$$

**Problema:** Donats un punt  $A$  i una recta  $\ell$ , dibuixeu el punt  $B$  simètric de  $A$  respecte la recta  $\ell$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned} \mathbf{Reflect}_O(A, \ell; B) &= \{\ell_1 = \mathbf{Perpendicular}(\ell, A), \\ & \ell_2 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, A), \\ & \ell_3, \ell'_3 = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell), \\ & C = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_3), \\ & \ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_2, C), \\ & D = \mathbf{LineIntersect}(\ell_4, \ell'_3), \\ & \ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_4, D), \\ & B = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_5)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** Per ser  $\ell_3$  la bisectriu de les rectes  $\ell_1$  i  $\ell$ , la distància  $AC$  és igual a la distància de  $A$  a la recta  $\ell$ . Repetint aquest procés, trobem el punt  $B$ .

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{Reflect}_O) = \{\{A, \ell\}, \{\ell_1\}, \{\ell_2, \ell_3, \ell'_3, C\}, \{\ell_4, D\}, \{\ell_5, B\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{Reflect}_O) &= 4, & \text{ord}(\mathbf{Reflect}_O) &= 11 \\ \text{rg}(\mathbf{Reflect}_O) &= 7, & \text{am}(\mathbf{Reflect}_O) &= 4. \end{aligned}$$

### D.1.8 Mediatriu d'un segment

**Problema:** Donats dos punts  $A$  i  $B$ , dibuixeu la mediatriu del segment  $AB$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned} \mathbf{PerpendicularBisection}(A, B; \ell) &= \{c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(B, A), \\ & C, D = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & \ell = \mathbf{Line}(C, D)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Eines:**  $\mathcal{RC}\mathcal{E}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{PerpendicularBisection}) = \{\{A, B\}, \{c_1, c_2, C, D\}, \{\ell\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{PerpendicularBisection}) &= 2, & \text{ord}(\mathbf{PerpendicularBisection}) &= 7 \\ \text{rg}(\mathbf{PerpendicularBisection}) &= 3, & \text{am}(\mathbf{PerpendicularBisection}) &= 4. \end{aligned}$$

## D.1.9 Punt mitjà

**Problema (Euclides I.10):** Donats dos punts  $A, B$ , dibuixeu el punt  $C$  tal que  $\vec{AB} = 2\vec{AC}$ .

**Solució amb  $\mathcal{CE}$ :**

$$\begin{aligned} \mathit{MidPointCompass}(A, B; C) &= \{\mathit{DoublePoint}(A, B; D), \\ &\quad \mathit{CircleInversion}(A, B, D; C)\} \\ &= \{c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ &\quad c_2 = \mathbf{Circle}(B, A), \\ &\quad E, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ &\quad c_3 = \mathbf{Circle}(E, B), \\ &\quad A, G = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_3), \\ &\quad c_4 = \mathbf{Circle}(G, B), \\ &\quad D, E = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_4), \\ &\quad c_5 = \mathbf{Circle}(D, A), \\ &\quad H, I = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_5), \\ &\quad c_6 = \mathbf{Circle}(H, A), \\ &\quad c_7 = \mathbf{Circle}(I, A), \\ &\quad C, A = \mathbf{CircleIntersect}(c_6, c_7)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Eines:**  $\mathcal{CE}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{MidPointCompass}) = \{\{A, B\}, \{c_1, c_2, E\}, \{c_3, A, G\}, \{c_4, D, E\}, \{c_5, H, I\}, \{c_6, c_7, C\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathit{MidPointCompass}) &= 5, & \text{ord}(\mathit{MidPointCompass}) &= 17 \\ \text{rg}(\mathit{MidPointCompass}) &= 7, & \text{am}(\mathit{MidPointCompass}) &= 3. \end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{OT}$ :**

$$\begin{aligned} \mathit{Midpoint}_O(A, B; E) &= \{\ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\ &\quad \ell_2 = \mathbf{PerpendicularBisector}(A, B), \\ &\quad E = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_2)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** El punt mitjà és el punt de tall de la mediatriu amb la recta pels punts  $A, B$ .

**Eines:**  $OT$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{Midpoint}_O) = \{\{A, B\}, \{\ell_1, \ell_2, E\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathit{Midpoint}_O) &= 1, & \text{ord}(\mathit{Midpoint}_O) &= 5 \\ \text{rg}(\mathit{Midpoint}_O) &= 2, & \text{am}(\mathit{Midpoint}_O) &= 3. \end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{RCE}$ :**

$$\begin{aligned} \mathit{Midpoint}_{\mathcal{RCE}}(A, B; E) &= \{\ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\ &\quad \mathbf{PerpendicularBisection}(A, B; \ell_2), \\ &\quad E = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_2)\} \\ &= \{\ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\ &\quad c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ &\quad c_2 = \mathbf{Circle}(B, A), \\ &\quad C, D = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ &\quad \ell_2 = \mathbf{Line}(C, D), \\ &\quad E = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_2)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** El punt mitjà és el punt de tall de la mediatriu amb la recta pels punts  $A, B$ .

**Eines:**  $\mathcal{RCE}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{Midpoint}_{\mathcal{RCE}}) = \{\{A, B\}, \{\ell_1, c_1, c_2, C, D\}, \{\ell_2, E\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathit{Midpoint}_{\mathcal{RCE}}) &= 2, & \text{ord}(\mathit{Midpoint}_{\mathcal{RCE}}) &= 9 \\ \text{rg}(\mathit{Midpoint}_{\mathcal{RCE}}) &= 4, & \text{am}(\mathit{Midpoint}_{\mathcal{RCE}}) &= 5. \end{aligned}$$

### D.1.10 Punt mitjà partint d'un trapezi

**Problema:** Donats quatre punts  $A, B, C$  i  $D$  tals que la recta per  $AB$  és paral·lela a la recta per  $CD$ , dibuixeu el punt  $G$  tal que  $\vec{AB} = 2\vec{AG}$ .

**Solució amb  $\mathcal{R}$ :**

$$\begin{aligned} \mathit{Midpoint}_{\mathcal{R}}(A, B, C, D; G) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(A, D), \\ & \ell_3 = \mathbf{Line}(B, C), \\ & E = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_3), \\ & \ell_4 = \mathbf{Line}(A, C), \\ & \ell_5 = \mathbf{Line}(B, D), \\ & F = \mathbf{LineIntersect}(\ell_4, \ell_5), \\ & \ell_6 = \mathbf{Line}(E, F), \\ & G = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_6)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [41].

**Eines:**  $\mathcal{R}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{Midpoint}_{\mathcal{R}}) = \{\{A, B, C, D\}, \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, E, F\}, \{\ell_6, G\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathit{Midpoint}_{\mathcal{R}}) &= 2, & \text{ord}(\mathit{Midpoint}_{\mathcal{R}}) &= 13 \\ \text{rg}(\mathit{Midpoint}_{\mathcal{R}}) &= 6, & \text{am}(\mathit{Midpoint}_{\mathcal{R}}) &= 7. \end{aligned}$$

### D.1.11 Peu de la perpendicular

**Problema:** Donats tres punts  $A, B, C$ , dibuixeu el peu  $D$  de la recta perpendicular per  $C$  a la recta  $AB$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned} \text{PerpendicularFoot}(A, B, C; D) &= \{\text{Reflect}(A, B, C; E), \\ &\quad \text{MidpointCompass}(C, E; D)\} \\ &= \{c_1 = \text{Circle}(A, C), \\ &\quad c_2 = \text{Circle}(B, C), \\ &\quad E, C = \text{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ &\quad c_3 = \text{Circle}(C, E), \\ &\quad c_4 = \text{Circle}(E, C), \\ &\quad F, G = \text{CircleIntersect}(c_3, c_4), \\ &\quad c_5 = \text{Circle}(F, E), \\ &\quad C, H = \text{CircleIntersect}(c_4, c_5), \\ &\quad c_6 = \text{Circle}(H, E), \\ &\quad I, F = \text{CircleIntersect}(c_4, c_6), \\ &\quad c_7 = \text{Circle}(I, C), \\ &\quad J, K = \text{CircleIntersect}(c_3, c_7), \\ &\quad c_8 = \text{Circle}(J, C), \\ &\quad c_9 = \text{Circle}(K, C), \\ &\quad D, C = \text{CircleIntersect}(c_8, c_9)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Eines:**  $CE$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\text{PerpendicularFoot}) = \{\{A, B, C\}, \{c_1, c_2, E, C\}, \{c_3, c_4, F, G\}, \{c_5, H\}, \{c_6, I, F\}, \\ \{c_7, J, K\}, \{c_8, c_9, D\}\};$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \text{lg}(\text{PerpendicularFoot}) &= 6, & \text{ord}(\text{PerpendicularFoot}) &= 22 \\ \text{rg}(\text{PerpendicularFoot}) &= 9, & \text{am}(\text{PerpendicularFoot}) &= 4. \end{aligned}$$

### D.1.12 Bisecció d'un arc de circumferència

**Problema:** Donats tres punts  $O, A, B$ , amb  $d(O, A) = d(O, B)$  dibuixeu els punts  $P, Q$  que bisequen l'arc  $AB$  de la circumferència de centre  $O$  que passa per  $A$  i  $B$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned}
\text{ArcBisect}(O, A, B; P, Q) = & \{ \text{CompassDistanceTransport}(O, A, B; U), \\
& c_1 = \text{Circle}(O, U), \\
& c_2 = \text{Circle}(A, O), \\
& c_3 = \text{Circle}(B, O), \\
& C, U = \text{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\
& D', D = \text{CircleIntersect}(c_1, c_3), \\
& c_4 = \text{Circle}(C, B), \\
& c_5 = \text{Circle}(D, A), \\
& E, F = \text{CircleIntersect}(c_4, c_5), \\
& \text{CompassDistanceTransport}(C, O, E; G), \\
& c_6 = \text{Circle}(C, G), \\
& \text{CompassDistanceTransport}(D, O, E; H), \\
& c_7 = \text{Circle}(D, H), \\
& P, Q = \text{CircleIntersect}(c_6, c_7) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \{ c'_1 = \text{Circle}(O, A), \\
& c_2 = \text{Circle}(A, O), \\
& E', F' = \text{CircleIntersect}(c'_1, c_2), \\
& c'_3 = \text{Circle}(E', B), \\
& c'_4 = \text{Circle}(F', B), \\
& B, U = \text{CircleIntersect}(c'_3, c'_4), \\
& c_1 = \text{Circle}(O, U), \\
& c_3 = \text{Circle}(B, O), \\
& C, B = \text{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\
& A, D = \text{CircleIntersect}(c_1, c_3), \\
& c_4 = \text{Circle}(C, B), \\
& c_5 = \text{Circle}(D, A), \\
& E, F = \text{CircleIntersect}(c_4, c_5), \\
& c''_1 = \text{Circle}(C, O), \\
& c''_2 = \text{Circle}(O, C), \\
& E'', F'' = \text{CircleIntersect}(c''_1, c''_2), \\
& c''_3 = \text{Circle}(E'', E), \\
& c''_4 = \text{Circle}(F'', E), \\
& E, G = \text{CircleIntersect}(c''_3, c''_4), \\
& c_6 = \text{Circle}(C, G), \\
& c'''_1 = \text{Circle}(D, O), \\
& c'''_2 = \text{Circle}(O, D), \\
& E''', F''' = \text{CircleIntersect}(c'''_1, c'''_2), \\
& c'''_3 = \text{Circle}(E''', E), \\
& c'''_4 = \text{Circle}(F''', E), \\
& E, H = \text{CircleIntersect}(c'''_3, c'''_4), \\
& c_7 = \text{Circle}(D, H), \\
& P, Q = \text{CircleIntersect}(c_6, c_7) \}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Eines:**  $\mathcal{CE}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{ArcBisect}) = \{\{O, A, B\}, \{c'_1, c_2, c_3, E', F'\}, \{c'_3, c'_4, U\}, \{c_1, C, D\}, \\ \{c_4, c_5, c''_1, c''_2, c'''_1, c'''_2, E, F, E'', F'', E''', F'''\}, \{c''_3, c''_4, c'''_3, c'''_4, E, G, H\}, \\ \{c_6, c_7, P, Q\}\};$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathit{ArcBisect}) &= 6, & \text{ord}(\mathit{ArcBisect}) &= 37 \\ \text{rg}(\mathit{ArcBisect}) &= 18, & \text{am}(\mathit{ArcBisect}) &= 12. \end{aligned}$$

### D.1.13 Quadrat inscrit

**Problema (Euclides IV.6):** Donats dos punts  $O, P$ , trobeu els punts  $Q, R, S$  tals que  $PQRS$  és un quadrat inscrit en la circumferència de centre  $O$  que passa per  $P$ .

**Solució:**

$$\mathit{Square}(O, P; Q, R, S) = \{\mathit{DoublePoint}(P, O; R), \\ \mathit{ArcBisect}(O, P, R; Q, S)\}$$

$$\begin{aligned} &= \{c'_1 = \mathbf{Circle}(O, P), \\ & \quad c'_2 = \mathbf{Circle}(P, O), \\ & \quad D', E' = \mathbf{CircleIntersect}(c'_1, c'_2), \\ & \quad c'_3 = \mathbf{Circle}(D', O), \\ & \quad P, F = \mathbf{CircleIntersect}(c'_1, c'_3), \\ & \quad c'_4 = \mathbf{Circle}(F, O), \\ & \quad D', R = \mathbf{CircleIntersect}(c'_1, c'_4), \\ & \quad c'_5 = \mathbf{Circle}(D', R), \\ & \quad c'_6 = \mathbf{Circle}(E', R), \\ & \quad R, U = \mathbf{CircleIntersect}(c'_5, c'_6), \\ & \quad c_1 = \mathbf{Circle}(O, U), \\ & \quad c_3 = \mathbf{Circle}(R, O), \\ & \quad C, R = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c'_2), \\ & \quad P, D = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_3), \\ & \quad c_4 = \mathbf{Circle}(C, R), \\ & \quad c_5 = \mathbf{Circle}(D, P), \\ & \quad E, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_4, c_5), \\ & \quad c''_1 = \mathbf{Circle}(C, O), \\ & \quad c''_2 = \mathbf{Circle}(O, C), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
E'', F'' &= \mathbf{CircleIntersect}(c_1'', c_2''), \\
c_3'' &= \mathbf{Circle}(E'', E), \\
c_4'' &= \mathbf{Circle}(F'', E), \\
E, G &= \mathbf{CircleIntersect}(c_3'', c_4''), \\
c_6 &= \mathbf{Circle}(C, G), \\
c_1''' &= \mathbf{Circle}(D, O), \\
c_2''' &= \mathbf{Circle}(O, D), \\
E''', F''' &= \mathbf{CircleIntersect}(c_1''', c_2'''), \\
c_3''' &= \mathbf{Circle}(E''', E), \\
c_4''' &= \mathbf{Circle}(F''', E), \\
E, H &= \mathbf{CircleIntersect}(c_3''', c_4'''), \\
c_7 &= \mathbf{Circle}(D, H), \\
Q, S &= \mathbf{CircleIntersect}(c_6, c_7)}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Eines:**  $\mathcal{CE}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{Square}) = \{ & \{O, P\}, \{c_1', c_2', D', E'\}, \{c_3', P, F\}, \{c_4', R'\}, \{c_5', c_6', R, U\}, \{c_1, c_3, C, P, D\}, \\
& \{c_4, c_5, c_1'', c_2'', c_1''', c_2''', E, F, E'', F'', E''', F'''\}, \{c_3'', c_4'', c_3''', c_4''', G, H\}, \\
& \{c_6, c_7, Q, S\};
\end{aligned}$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathbf{Square}) &= 8, & \text{ord}(\mathbf{Square}) &= 42 \\
\text{rg}(\mathbf{Square}) &= 20, & \text{am}(\mathbf{Square}) &= 12.
\end{aligned}$$

### D.1.14 Recta paral·lela

**Problema:** Donats una recta  $\ell$  i un punt  $P$  que no pertany a  $\ell$ , dibuixeu la recta paral·lela a  $\ell$  que passa per  $P$ .

**Solució amb  $\mathcal{ES}$ :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{Parallel}_{\mathcal{ES}}(P, \ell; \ell_2) &= \{\ell_1 = \mathbf{Perpendicular}(\ell, P), \\
& \ell_2 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, P)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** La recta  $\ell_1$  és perpendicular a la recta  $\ell$  i la recta  $\ell_2$  és perpendicular a la recta  $\ell_1$ . D'aquí  $\ell_2$  és paral·lela a  $\ell$ .

**Eines:**  $\mathcal{ES}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{Parallel}_{\mathcal{ES}}) = \{\{P, \ell\}, \ell_1, \ell_2\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{Parallel}_{\mathcal{ES}}) &= 3, & \text{ord}(\mathbf{Parallel}_{\mathcal{ES}}) &= 4 \\ \text{rg}(\mathbf{Parallel}_{\mathcal{ES}}) &= 3, & \text{am}(\mathbf{Parallel}_{\mathcal{ES}}) &= 2. \end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{A}_\alpha$ :**

$$\mathbf{Parallel}_{\mathcal{A}(P, \ell; \ell_2)} = \{\ell_1, \ell_2 = \mathbf{AngleLine}_\alpha(\ell, P), \\ \ell_3, \ell_4 = \mathbf{AngleLine}_\alpha(\ell_1, P)\}.$$

**Demostració:** [52].

**Eines:**  $\mathcal{A}_\alpha$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{Parallel}_{\mathcal{A}_\alpha}) = \{\{P, \ell\}, \ell_1, \ell_3\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{Parallel}_{\mathcal{A}_\alpha}) &= 3, & \text{ord}(\mathbf{Parallel}_{\mathcal{A}_\alpha}) &= 4 \\ \text{rg}(\mathbf{Parallel}_{\mathcal{A}_\alpha}) &= 3, & \text{am}(\mathbf{Parallel}_{\mathcal{A}_\alpha}) &= 2. \end{aligned}$$

**Problema:** Donats tres punts  $A, B, C$ , dibuixeu la recta paral·lela a la determinada per  $A$  i  $B$  que passa per  $C$ .

**Solució amb  $\mathcal{RM}$ :**

$$\begin{aligned}
\mathit{Parallel}_{\mathcal{RM}}(A, B, C; \ell) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\
& D, D' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_1, A), \\
& E, A = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_1, D), \\
& \ell_2 = \mathbf{Line}(A, C), \\
& \ell_3 = \mathbf{Line}(C, E), \\
& F, F' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_2, C), \\
& \ell_4 = \mathbf{Line}(F, D), \\
& \ell_5 = \mathbf{Line}(E, F), \\
& R = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4), \\
& \ell_6 = \mathbf{Line}(A, R), \\
& G = \mathbf{LineIntersect}(\ell_5, \ell_6), \\
& \ell = \mathbf{Line}(C, G)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** [52].

**Eines:**  $\mathcal{RM}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{Parallel}_{\mathcal{RM}}) = \{\{A, B, C\}, \{\ell_1, \ell_2, D\}, E, \{\ell_3, F\}, \{\ell_4, \ell_5, R\}, \{\ell_6, G\}, \ell\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathit{Parallel}_{\mathcal{RM}}) &= 6, & \text{ord}(\mathit{Parallel}_{\mathcal{RM}}) &= 15 \\
\text{rg}(\mathit{Parallel}_{\mathcal{RM}}) &= 7, & \text{am}(\mathit{Parallel}_{\mathcal{RM}}) &= 3.
\end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{CL}$ :**

$$\begin{aligned}
\mathit{Parallel}_{\mathcal{CL}}(A, B, F; \ell) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\
& A, C = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, \mathbf{Circle}(B, A)), \\
& \ell_2 = \mathbf{Line}(A, F), \\
& A, S = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, \mathbf{Circle}(F, A)), \\
& \ell_3 = \mathbf{Line}(S, B), \\
& \ell_4 = \mathbf{Line}(S, C), \\
& \ell_5 = \mathbf{Line}(F, C), \\
& R = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5), \\
& \ell_6 = \mathbf{Line}(A, R), \\
& D = \mathbf{LineIntersect}(\ell_5, \ell_6), \\
& \ell = \mathbf{Line}(F, D)\}.
\end{aligned}$$

**Problema:** Donats una recta  $\ell_1$  i dos punts  $A, B$ , tals que  $B$  no pertany a  $\ell_1$ , dibuixeu la recta paral·lela a  $\ell_1$  que passa per  $B$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned} \text{Parallel}_{\mathcal{RC}}(A, B, \ell_1; \ell_2) = \{ & c_1 = \text{Circle}(B, A), \\ & C, D = \text{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1), \\ & c_2 = \text{Circle}(C, B), \\ & c_3 = \text{RadiusCircle}(B, C, D), \\ & E, F = \text{CircleIntersect}(c_2, c_3), \\ & \ell_2 = \text{Line}(B, E)\}. \end{aligned}$$

**Observació:** Per poder fer aquesta construcció cal que la distància  $AB$  sigui superior a la distància entre  $B$  i la recta  $\ell_1$ .

**Demostració:**

La figura D.1 mostra els punts i les rectes que intervenen a la construcció.

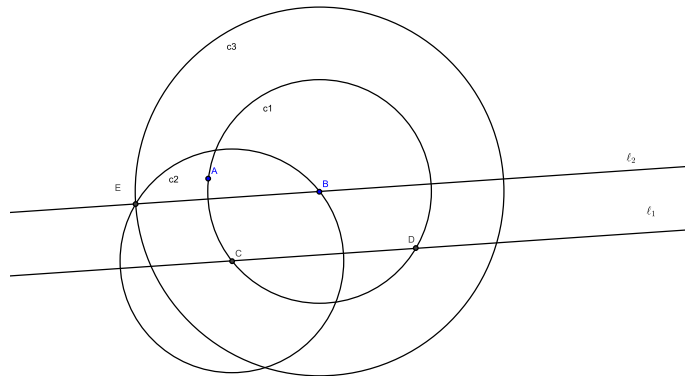


Figura D.1: Recta paral·lela amb axiomes de regle i compàs

Fent la circumferència de centre  $B$  que passa per  $A$ , obtenim dos punts de tall amb la recta  $\ell_1$ , que són el  $C$  i el  $D$ . El triangle  $CBD$  és, doncs, isòsceles. Tal com construïm les altres circumferències, es té  $CD = EB$  i  $EC = BD$ . Per tant, el quadrilàter  $BECD$  és un paral·lelogram.

**Eines:**  $\mathcal{RC}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\text{Parallel}_{\mathcal{RC}}) = \{\{A, B, \ell_1\}, \{c_1, C, D\}, \{c_2, c_3, E\}, \{\ell_2\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \text{lg}(\text{Parallel}_{RC}) &= 3, & \text{ord}(\text{Parallel}_{RC}) &= 10 \\ \text{rg}(\text{Parallel}_{RC}) &= 5, & \text{am}(\text{Parallel}_{RC}) &= 3. \end{aligned}$$

### D.1.15 Recta perpendicular

**Problema:** Donats tres punts  $A, B, C$  en posició general, dibuixeu la recta que passa per  $C$  i és perpendicular a la recta que passa per  $A$  i  $B$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned} \text{Perpendicular}_{\mathcal{RM}}(A, B, C; \ell) &= \{ \ell_1 = \text{Line}(A, B), \\ & D, D' = \text{LineUnitCircleIntersect}(\ell_1, A), \\ & E, A = \text{LineUnitCircleIntersect}(\ell_1, D), \\ & \ell_2 = \text{Line}(A, C), \\ & \ell_3 = \text{Line}(D, C), \\ & F, A = \text{LineUnitCircleIntersect}(\ell_2, D), \\ & G, G' = \text{LineUnitCircleIntersect}(\ell_3, D), \\ & \ell_4 = \text{Line}(A, G), \\ & \ell_5 = \text{Line}(E, F), \\ & H = \text{LineIntersect}(\ell_4, \ell_5), \\ & \ell_6 = \text{Line}(E, G), \\ & K = \text{LineIntersect}(\ell_2, \ell_6), \\ & \text{Parallel}_{\mathcal{RM}}(K, H, C; \ell) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{ \ell_1 = \text{Line}(A, B), \\ & D, D' = \text{LineUnitCircleIntersect}(\ell_1, A), \\ & E, A = \text{LineUnitCircleIntersect}(\ell_1, D), \\ & \ell_2 = \text{Line}(A, C), \\ & \ell_3 = \text{Line}(D, C), \\ & F, A = \text{LineUnitCircleIntersect}(\ell_2, D), \\ & G, G' = \text{LineUnitCircleIntersect}(\ell_3, D), \\ & \ell_4 = \text{Line}(A, G), \\ & \ell_5 = \text{Line}(E, F), \\ & H = \text{LineIntersect}(\ell_4, \ell_5), \\ & \ell_6 = \text{Line}(E, G), \\ & K = \text{LineIntersect}(\ell_2, \ell_6), \\ & \ell_7 = \text{Line}(K, H), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L, L' &= \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_7, K), \\
M, K &= \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_7, L), \\
\ell_8 &= \mathbf{Line}(K, C), \\
\ell_9 &= \mathbf{Line}(C, M), \\
N, N' &= \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_8, C), \\
\ell_{10} &= \mathbf{Line}(N, L), \\
\ell_{11} &= \mathbf{Line}(M, N), \\
O &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_9, \ell_{10}), \\
\ell_{12} &= \mathbf{Line}(K, O), \\
P &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_{11}, \ell_{12}), \\
\ell &= \mathbf{Line}(C, P).
\end{aligned}$$

**Demostració:** [52].

**Eines:**  $\mathcal{RM}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{Perpendicular}_{\mathcal{RM}}) = \{\{A, B, C\}, \{\ell_1, \ell_2, D\}, \{\ell_3, E, F, G\}, \{\ell_4, \ell_5, \ell_6, H, K\}, \{\ell_7, \ell_8, L, M, N\}, \\
\{\ell_9, \ell_{10}, \ell_{11}, O\}, \{\ell_{12}, P\}, \ell\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathbf{Perpendicular}_{\mathcal{RM}}) &= 7, & \text{ord}(\mathbf{Perpendicular}_{\mathcal{RM}}) &= 27 \\
\text{rg}(\mathbf{Perpendicular}_{\mathcal{RM}}) &= 13, & \text{am}(\mathbf{Perpendicular}_{\mathcal{RM}}) &= 5.
\end{aligned}$$

### D.1.16 Parallelogram

**Problema:** Donats tres punts  $A, B, C$  en posició general, dibuixeu el punt  $D$  tal que  $ABCD$  és un paral·lelogram.

**Solució amb  $C$ :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{Parallelogram}_C(A, B, C; D, E) &= \{c_1 = \mathbf{RadiusCircle}(A, B, C), \\
& c_2 = \mathbf{RadiusCircle}(C, A, B), \\
& D, E = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Eines:**  $C$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{Parallelogram}_C) = \{\{A, B, C\}, \{c_1, c_2, D\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathit{Parallelogram}_C) &= 1, & \text{ord}(\mathit{Parallelogram}_C) &= 6 \\ \text{rg}(\mathit{Parallelogram}_C) &= 2, & \text{am}(\mathit{Parallelogram}_C) &= 3. \end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{ES}$ :**

$$\begin{aligned} \mathit{Parallelogram}(A, B, C; D) &= \{\ell_1 = \mathbf{Line}(B, A), \\ &\ell_2 = \mathbf{Line}(B, C), \\ &\mathit{Parallel}_{\mathcal{ES}}(C, \ell_1; \ell_3), \\ &\mathit{Parallel}_{\mathcal{ES}}(A, \ell_2; \ell_4), \\ &D = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4)\} \\ &= \{\ell_1 = \mathbf{Line}(B, A), \\ &\ell_2 = \mathbf{Line}(B, C), \\ &\ell'_1 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, C), \\ &\ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(\ell'_1, C), \\ &\ell'_2 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_2, A), \\ &\ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(\ell'_2, A), \\ &D = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** Un paral·lelogram es defineix com un quadrilàter amb costats paral·lels dos a dos. Donat que tenim tres vèrtexs construïts del paral·lelogram, queden fixats dos dels costats. El quart vèrtex s'obté com a punt de tall de les rectes paral·leles als costats  $AB$  i  $BC$ .

**Eines:**  $\mathcal{ES}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{Parallelogram}) = \{\{A, B, C\}, \{\ell_1, \ell_2\}, \{\ell'_1, \ell'_2\}, \{\ell_3, \ell_4, D\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathit{Parallelogram}) &= 3, & \text{ord}(\mathit{Parallelogram}) &= 10 \\ \text{rg}(\mathit{Parallelogram}) &= 6, & \text{am}(\mathit{Parallelogram}) &= 3. \end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{O}$ :**

$$\begin{aligned}
\text{Parallelogram}_O(A, B, C; D) = \{ & \ell_1 = \text{PerpendicularBisector}(A, B), \\
& \ell_2 = \text{PerpendicularBisector}(B, C), \\
& \ell_3 = \text{Perpendicular}(\ell_1, C), \\
& \ell_4 = \text{Perpendicular}(\ell_2, A), \\
& D = \text{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** És el mateix raonament que a la construcció anterior, però, en aquest cas, enlloc de construir els costats  $AB$  i  $BC$  del paral·lelogram, construïm les mediatris dels segments  $AB$  i  $BC$  i rectes perpendiculars a aquestes.

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\text{Parallelogram}_O) = \{\{A, B, C\}, \{\ell_1, \ell_2\}, \{\ell_3, \ell_4, D\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\text{lg}(\text{Parallelogram}_O) &= 2, & \text{ord}(\text{Parallelogram}_O) &= 8 \\
\text{rg}(\text{Parallelogram}_O) &= 4, & \text{am}(\text{Parallelogram}_O) &= 3.
\end{aligned}$$

### D.1.17 Eix radical

**Problema:** Donats quatre punts  $O, O', A$  i  $A'$ , dibuixeu l'eix radical de la circumferència amb centre  $O$  que passa per  $A$  i de la circumferència amb centre  $O'$  que passa per  $A'$ .

**Solució amb  $\mathcal{RM}$ :**



$$\begin{aligned}
\mathbf{RadicalAxis}_{\mathcal{RM}}(O, A, O', K; \ell) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(O, A), \\
& \mathbf{Parallel}_{\mathcal{RM}}(A, O, O'; \ell_2), \\
& M', N' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_2, O'), \\
& \mathbf{LineCircleIntersection}_{\mathcal{RM}}(O', K, M', N'; A', B'), \\
& E, E' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_1, O), \\
& \mathbf{Perpendicular}_{\mathcal{RM}}(B, C, O; \ell_3), \\
& \ell_4 = \mathbf{Line}(E, O'), \\
& H = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4), \\
& \mathbf{Parallel}_{\mathcal{RM}}(E, H, A; \ell_5), \\
& K = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5), \\
& \ell_6 = \mathbf{Line}(E', H), \\
& \mathbf{Parallel}_{\mathcal{RM}}(E', H, K; \ell_6), \\
& B = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_6), \\
& \ell_7 = \mathbf{Line}(A, A'), \\
& \ell_8 = \mathbf{Line}(O, O'), \\
& S = \mathbf{LineIntersect}(\ell_7, \ell_8), \\
& \mathbf{LineCircleIntersection}_{\mathcal{RM}}(O, A, A', S; C), \\
& \mathbf{LineCircleIntersection}_{\mathcal{RM}}(O, K, A', S; C'), \\
& \ell_9 = \mathbf{Line}(B, B'), \\
& \mathbf{LineCircleIntersection}_{\mathcal{RM}}(O, A, B', S; D), \\
& \mathbf{LineCircleIntersection}_{\mathcal{RM}}(O, K, B', S; D'), \\
& \ell_{10} = \mathbf{Line}(A, D), \\
& \ell_{11} = \mathbf{Line}(B', C'), \\
& X = \mathbf{LineIntersect}(\ell_{10}, \ell_{11}), \\
& \ell_{12} = \mathbf{Line}(B, C), \\
& \ell_{13} = \mathbf{Line}(A', D'), \\
& Y = \mathbf{LineIntersect}(\ell_{12}, \ell_{13}), \\
& \ell = \mathbf{Line}(X, Y) \}.
\end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{CL}$ :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{RadicalAxis}_{C\mathcal{L}}(O, A, O', K; \ell) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(O, A), \\
& \ell_2 = \mathbf{Line}(O, O'), \\
& \mathbf{Parallel}_{C\mathcal{L}}(A, O, O'; \ell_3), \\
& A', B' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_3, \mathbf{Circle}(O', K)), \\
& A, B = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, \mathbf{Circle}(O, A)), \\
& \ell_4 = \mathbf{Line}(A, A'), \\
& S = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_4), \\
& \ell_5 = \mathbf{Line}(S, A), \\
& \ell_6 = \mathbf{Line}(S, B), \\
& A, C = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_5, \mathbf{Circle}(O, A)), \\
& B, D = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_6, \mathbf{Circle}(O', K)), \\
& A', C' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_5, \mathbf{Circle}(O, A)), \\
& B', D' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_6, \mathbf{Circle}(O', K)), \\
& \ell_7 = \mathbf{Line}(A, D), \\
& \ell_8 = \mathbf{Line}(B', C'), \\
& X = \mathbf{LineIntersect}(\ell_7, \ell_8), \\
& \ell_9 = \mathbf{Line}(B, C), \\
& \ell_{10} = \mathbf{Line}(A', D'), \\
& Y = \mathbf{LineIntersect}(\ell_9, \ell_{10}), \\
& \ell = \mathbf{Line}(X, Y)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** Adaptació a l'eina  $C\mathcal{L}$  de la construcció descrita a [52].

### D.1.18 Rombe

**Problema:** Donades dues rectes  $\ell_1$  i  $\ell_2$ , amb punt d'intersecció  $A$ , tals que formen un angle inferior a  $\pi/3$ , dibuixeu els dos rombes unitaris amb vèrtex comú  $A$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{Rhombus}(A, \ell_1, \ell_2; B, C, D, E, F, G) = \{ & c_1 = \mathbf{UnitCircle}(A), \\
& B, C = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1), \\
& D, E = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_1), \\
& c_2 = \mathbf{UnitCircle}(B), \\
& c_3 = \mathbf{UnitCircle}(D), \\
& c_4 = \mathbf{UnitCircle}(C), \\
& c_5 = \mathbf{UnitCircle}(E), \\
& A, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_5), \\
& A, G = \mathbf{CircleIntersect}(c_3, c_4)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** Un rombe és un quadrilàter amb els costats d'igual longitud. En aquest cas, tots els punts de tall es troben intersecant circumferències de radi 1. Per tant  $AB = AC = AD = AE = BF = EF = DG = DC = 1$ .

**Eines:**  $\mathcal{CF}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{Rhombus}) = \{\{A, \ell_1, \ell_2\}, \{c_1, B, C, D, E\}, \{c_2, c_3, c_4, c_5, F, G\}\}.$$

**Mesures:**

$$\lg(\mathbf{Rhombus}) = 2, \quad \text{ord}(\mathbf{Rhombus}) = 14$$

$$\text{rg}(\mathbf{Rhombus}) = 7, \quad \text{am}(\mathbf{Rhombus}) = 6.$$

### D.1.19 Triangle rectangle isòsceles

**Problema:** Donats dos punts  $A$  i  $B$ , dibuixeu els punts  $C$  i  $D$ , de manera que els triangles  $ABC$  i  $ABD$  siguin triangles rectangles isòsceles, amb angle recte en  $A$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned} \mathbf{IsoscelesRectangleTriangle}(A, B; C, D) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\ & \ell_2 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, A), \\ & \ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, B), \\ & \ell_4, \ell_5 = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_3), \\ & C = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_4), \\ & D = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_5)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** Per ser  $\ell_4$  i  $\ell_5$  bisectrius de l'angle format per les rectes  $\ell_1$  i  $\ell_3$ , el punt  $C$  és equidistant de la recta  $\ell_3$  i de la recta  $\ell_1$ , i els angles en  $B$  i  $C$  són de  $\pi/4$ . Per tant  $AB = AC$  i el triangle  $ABC$  és rectangle en  $A$ . El mateix raonament s'aplica al punt  $D$ .

**Eines:**  $\mathcal{O}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{IsoscelesRectangleTriangle}) = \{\{A, B\}, \{\ell_1\}, \{\ell_2, \ell_3\}, \{C, D\}\}.$$

**Mesures:**

$$\lg(\mathbf{IsoscelesRectangleTriangle}) = 3, \quad \text{ord}(\mathbf{IsoscelesRectangleTriangle}) = 7$$

$$\text{rg}(\mathbf{IsoscelesRectangleTriangle}) = 3, \quad \text{am}(\mathbf{IsoscelesRectangleTriangle}) = 2.$$

### D.1.20 Bisecció d'un angle

**Problema:** Donades dues rectes  $\ell_1$  i  $\ell_2$ , el seu punt d'intersecció  $A$ , i un punt  $B$  de  $\ell_1$ , dibuixeu les rectes que bisequen l'angle  $\ell_1\ell_2$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned} \mathbf{Bisection}(A, B, \ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(A, B), \\ & C, D = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_1), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(B, C), \\ & c_3 = \mathbf{Circle}(C, B), \\ & E, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_3), \\ & c_4 = \mathbf{Circle}(B, D), \\ & c_5 = \mathbf{Circle}(D, B), \\ & G, H = \mathbf{CircleIntersect}(c_4, c_5), \\ & \ell_3 = \mathbf{Line}(A, E), \\ & \ell_4 = \mathbf{Line}(A, G)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Eines:**  $\mathcal{RCE}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{Bisection}) = \{\{A, B, \ell_1, \ell_2\}, \{c_1, C, D\}, \{c_2, c_3, c_4, c_5, E, F, G, H\}, \{\ell_3, \ell_4\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{Bisection}) &= 3, & \text{ord}(\mathbf{Bisection}) &= 17 \\ \text{rg}(\mathbf{Bisection}) &= 9, & \text{am}(\mathbf{Bisection}) &= 8. \end{aligned}$$

**Problema:** Donades dues rectes  $\ell_1$  i  $\ell_2$ , amb punt de tall  $A$  i tals que formen un angle inferior a  $\pi/3$ , dibuixeu la recta que biseca aquest angle.

**Solució:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{Bisection}_{RCF}(A, \ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell'_3) = \{ & c_1 = \mathbf{UnitCircle}(A), \\
& B, C = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1), \\
& D, E = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_1), \\
& c_2 = \mathbf{UnitCircle}(B), \\
& c_3 = \mathbf{UnitCircle}(D), \\
& A, F = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_3), \\
& c_4 = \mathbf{UnitCircle}(C), \\
& A, G = \mathbf{CircleIntersect}(c_3, c_4), \\
& \ell_3 = \mathbf{Line}(A, F), \\
& \ell'_3 = \mathbf{Line}(A, G)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** [31].

**Eines:**  $RCF$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{Bisection}_{RCF}) = \{\{A, \ell_1, \ell_2\}, \{c_1, B, D\}, \{c_2, c_3, c_4, F, G\}, \{\ell_3, \ell'_3\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathbf{Bisection}_{RCF}) &= 3, & \text{ord}(\mathbf{Bisection}_{RCF}) &= 13 \\
\text{rg}(\mathbf{Bisection}_{RCF}) &= 8, & \text{am}(\mathbf{Bisection}_{RCF}) &= 5.
\end{aligned}$$

### D.1.21 Duplicació d'un angle

**Problema:** Donats tres punts  $A, B, C$ , dibuixeu el punt  $D$  tal que l'angle orientat  $BAD$  és el doble de l'angle  $BAC$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned}
\text{AngleDuplication}(A, B, C; D) &= \{\ell_1 = \mathbf{Line}(A, C), \\
&\quad \mathbf{Reflect}_O(B, \ell_1; D)\} \\
&= \{\ell_1 = \mathbf{Line}(A, C), \\
&\quad \ell_2 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, B), \\
&\quad \ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_2, B), \\
&\quad \ell_4, \ell'_4 = \mathbf{Bisector}(\ell_2, \ell_1), \\
&\quad C = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4), \\
&\quad \ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_3, C), \\
&\quad E = \mathbf{LineIntersect}(\ell_5, \ell'_4), \\
&\quad \ell_6 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_5, E), \\
&\quad D = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_6)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** Donat que el punt  $D$  és imatge del punt  $B$  per la simetria axial d'eix  $\ell_1$ , l'angle  $CAD$  és igual a l'angle  $BAC$ .

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\text{AngleDuplication}) = \{\{A, B, C\}, \ell_1, \{\ell_2, \ell_3\}, \{\ell_4, \ell'_4, C\}, \{\ell_5, E\}, \{\ell_6, D\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\text{AngleDuplication}) &= 5, & \text{ord}(\text{AngleDuplication}) &= 13 \\
\text{rg}(\text{AngleDuplication}) &= 7, & \text{am}(\text{AngleDuplication}) &= 3.
\end{aligned}$$

### D.1.22 Punts de tall d'una recta amb una circumferència

**Problema:** Donats quatre punts  $A, B, C, D$ , dibuixeu els punts de tall de la recta per  $A$  i  $B$  amb la circumferència de centre  $C$  que passa per  $D$ .

**Solució amb  $C\mathcal{E}$ :**

$$\begin{aligned}
\text{LineCircleIntersection}(A, B, C, D; M, N) &= \{\mathbf{Reflect}(A, B, C; C'), \\
&\quad \mathbf{Reflect}(A, B, D; D'), \\
&\quad c_1 = \mathbf{Circle}(C, D), \\
&\quad c_2 = \mathbf{Circle}(C', D'), \\
&\quad M, N = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2)\}.
\end{aligned}$$

**Solució amb  $O$ :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{LineCircleIntersectOrigami}(A, B, C, D; E, F) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(A, B), \\
& \ell_2, \ell_3 = \mathbf{Tangent}(\ell_1, D, C), \\
& \ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_2, D), \\
& \ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_3, D), \\
& E = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_4), \\
& F = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_5)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** [17].

**Observació:** Al treball de Geretschlager falta completar la construcció amb els últims passos.

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{LineCircleIntersectOrigami}) = \{\{A, B, C, D\}, \ell_1, \{\ell_2, \ell_3\}, \{\ell_4, \ell_5, E, F\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathbf{LineCircleIntersectOrigami}) &= 3, & \text{ord}(\mathbf{LineCircleIntersectOrigami}) &= 11 \\
\text{rg}(\mathbf{LineCircleIntersectOrigami}) &= 5, & \text{am}(\mathbf{LineCircleIntersectOrigami}) &= 4.
\end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{RM}$ :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{LineCircleIntersection}_{\mathcal{RM}}(O, A, B, C; X, Y) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(B, C), \\
& \mathbf{Perpendicular}_{\mathcal{RM}}(B, C, O; \ell_2), \\
& \ell_3 = \mathbf{Line}(O, A), \\
& A', A'' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_3, O), \\
& D = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_1), \\
& \ell_4 = \mathbf{Line}(A, D), \\
& \mathbf{Parallel}_{\mathcal{RM}}(A, D, A'; \ell_5), \\
& D' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5), \\
& \mathbf{Parallel}_{\mathcal{RM}}(B, C, D'; \ell_6), \\
& X', Y' = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell_6, D'), \\
& \ell_7 = \mathbf{Line}(O, X'), \\
& \ell_8 = \mathbf{Line}(O, Y'), \\
& X = \mathbf{LineIntersect}(\ell_7, \ell_1), \\
& Y = \mathbf{LineIntersect}(\ell_8, \ell_1)\}.
\end{aligned}$$

### D.1.23 Punts de tall de dues rectes

**Problema:** Donats quatre punts  $A, B, C, D$ , dibuixeu els punts de tall de la recta per  $A$  i  $B$  amb la recta per  $C$  i  $D$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned} \text{LineIntersection}(A, B, C, D; O) = \{ & \text{MidPointCompass}(A, B; E), \\ & \text{CircleInversion}(E, A, B; B'), \\ & \text{Circumcentre}(A, E, B'; O_1), \\ & \text{CircleInversion}(E, A, D; D'), \\ & \text{Circumcentre}(A, E, D'; O_2), \\ & c_1 = \text{Circle}(O_1, A), \\ & c_2 = \text{Circle}(O_2, C), \\ & F, E = \text{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ & \text{CircleInversion}(E, A, F; M) \}. \end{aligned}$$

**Demostració:** [52].

**Comentaris:** La construcció només és vàlida quan es poden fer totes les inversions.

### D.1.24 Projectió d'una distància sobre una recta

**Problema:** Donats un punt  $B$ , una recta  $\ell_1$ , i un punt  $A$  de  $\ell_1$ , dibuixeu la projecció de  $AB$  sobre la recta  $\ell_1$ .

**Solució amb  $\mathcal{RC}\mathcal{E}$ :**

$$\begin{aligned} \text{DistanceProjection}_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}(A, B, \ell_1; C, D) = \{ & c_1 = \text{Circle}(A, B), \\ & C, D = \text{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1) \}. \end{aligned}$$

**Demostració:** Es veu clarament que  $AB = AD$ .

**Eines:**  $\mathcal{RC}\mathcal{E}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\text{DistanceProjection}_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}) = \{\{A, B, \ell_1\}, \{c_1, C, D\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \text{lg}(\text{DistanceProjection}_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}) &= 1, & \text{ord}(\text{DistanceProjection}_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}) &= 6 \\ \text{rg}(\text{DistanceProjection}_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}) &= 2, & \text{am}(\text{DistanceProjection}_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}) &= 3. \end{aligned}$$



**Solució amb  $O$ :**

$$\begin{aligned} \text{DistanceProjection}_O(A, B, \ell_1; C, D) = \{ & \ell_2 = \mathbf{Line}(A, B), \\ & \ell_3, \ell'_3 = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_2), \\ & \ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(B, \ell_3), \\ & \ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(B, \ell'_3), \\ & C = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_4), \\ & D = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_5)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:**

La figura D.2 mostra els punts i les rectes que intervenen a la construcció.

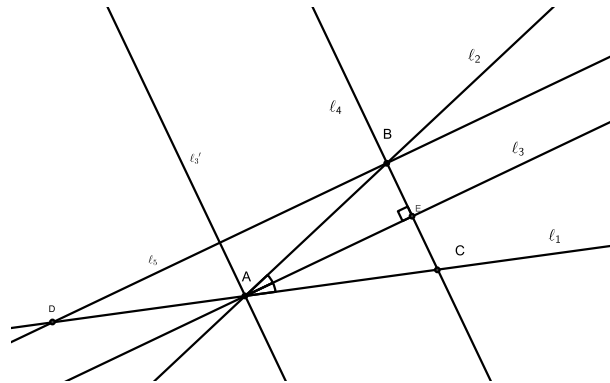


Figura D.2: Projectió d'una distància amb origami

Atès que  $\ell_3$  és la bisectriu de  $\ell_1$  i  $\ell_2$ ,  $\widehat{BAE} = \widehat{EAC}$ . La recta  $\ell_4$  és perpendicular a la recta  $\ell_3$ . Els triangles  $ABE$  i  $ACE$  són, doncs, semblants i tenen un costat comú. Per tant,  $AB = AC$ . Amb la mateixa argumentació tenim  $AB = AD$ .

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\text{DistanceProjection}_O) = \{\{A, B, \ell_1\}, \ell_2, \{\ell_3, \ell'_3\}, \{\ell_4, \ell_5, C, D\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \text{lg}(\text{DistanceProjection}_O) &= 3, & \text{ord}(\text{DistanceProjection}_O) &= 10 \\ \text{rg}(\text{DistanceProjection}_O) &= 6, & \text{am}(\text{DistanceProjection}_O) &= 4. \end{aligned}$$

### D.1.25 Rotació

**Problema:** Donades tres rectes  $\ell_1, \ell_2, i \ell_3$  concurrents en l'origen  $O$ , i un punt  $A$  de  $\ell_2$  dibuixeu la recta  $\ell$  imatge de la recta  $\ell_2$  per la rotació d'angle  $\ell_1\ell_3$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned}
\text{Rotation}(O, A, \ell_1, \ell_2, \ell_3; \ell) = \{ & \ell_4, \ell'_4 = \mathbf{Bisector}(\ell_2, \ell_3), \\
& \ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(A, \ell_4) \\
& B = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5), \\
& \ell_6 = \mathbf{Perpendicular}(B, \ell_1), \\
& D = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_6), \\
& E = \mathbf{LineIntersect}(\ell_4, \ell_6), \\
& \ell_7 = \mathbf{Line}(A, E), \\
& \ell = \mathbf{Perpendicular}(O, \ell_7)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:**

La figura D.3 mostra els punts i les rectes que intervenen a la construcció.

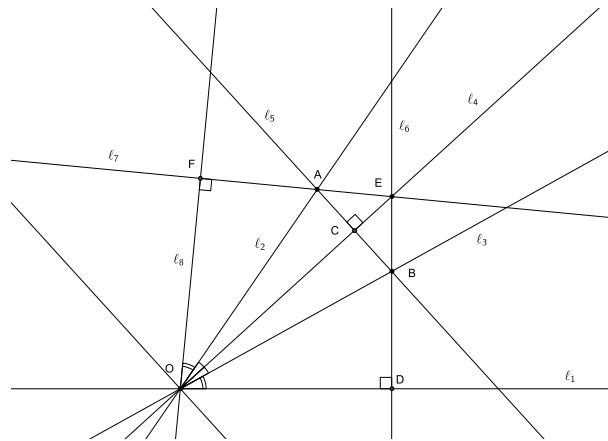


Figura D.3: Reflexió d'una recta respecte d'una altra

Atès que el punt  $B$  és la projecció de la distància  $OA$  sobre la recta  $\ell_3$ , els triangles  $OCA$  i  $OCB$  són semblants. A més, com que la recta  $\ell_4$  és la bisectriu de  $\ell_2$  i  $\ell_3$  i  $E$  es troba sobre aquesta recta, els triangles  $ECA$  i  $ECB$  també són semblants.

Els triangles  $EOD$  i  $FOE$  tenen un costat comú i dos angles iguals. En efecte, per construcció tenim els angles rectes  $\widehat{ODE}$  i  $\widehat{OFE}$ , i ja hem vist que els triangles  $ECA$  i  $ECB$  són semblants, d'on  $\widehat{DOE} = \widehat{EOF}$ .

Per tant, els triangles  $EOD$  i  $FOD$  són semblants i  $\widehat{DOE} = \widehat{EOF}$ . D'on obtenim que  $\widehat{DOB} = \widehat{AOF}$ .

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\text{Rotation}) = \{\{O, A, \ell_1, \ell_2, \ell_3\}, \{\ell_4\}, \{\ell_5, B\}, \{\ell_6, D, E\}, \ell_7, \ell\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{Rotation}) &= 5, & \text{ord}(\mathbf{Rotation}) &= 13 \\ \text{rg}(\mathbf{Rotation}) &= 8, & \text{am}(\mathbf{Rotation}) &= 3. \end{aligned}$$

## D.2 Construccions aritmètiques

Els problemes que presentem en aquest bloc són de tipus aritmètic. A diferència del primer bloc, totes les construccions aquí incloses parteixen d'un conjunt inicial que conté nombres complexos concrets. Concretament, mostrem les construccions de la suma, resta, producte i divisió de dos nombres complexos.

### D.2.1 Suma

**Problema:** Donats l'origen  $O$  i dos nombres complexos diferents,  $z$  i  $z'$ , no alineats amb  $O$ , dibuixeu  $z + z'$ .

**Solució amb  $C$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{Sum}_C(0, z, z'; z + z') &= \{c_1 = \mathbf{RadiusCircle}(z, 0, z'), \\ & \quad c_2 = \mathbf{RadiusCircle}(z', 0, z), \\ & \quad z + z', P = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** Representa la construcció del vèrtex del paral·lelogram vista al primer bloc de construccions geomètriques bàsiques D.1.

**Eines:**  $C$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{Sum}_C) = \{\{0, z, z'\}, \{c_1, c_2, z + z'\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{Sum}_C) &= 1, & \text{ord}(\mathbf{Sum}_C) &= 6 \\ \text{rg}(\mathbf{Sum}_C) &= 2, & \text{am}(\mathbf{Sum}_C) &= 3. \end{aligned}$$

**Solució amb  $O$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{OrigamiSum}(0, z, z'; z + z') &= \{\ell_1 = \mathbf{PerpendicularBisector}(0, z'), \\ & \quad \ell_2 = \mathbf{PerpendicularBisector}(0, z), \\ & \quad \ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, z), \\ & \quad \ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_2, z'), \\ & \quad z + z' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** Aquesta construcció coincideix amb la del paral·lelogram ja vista al primer bloc de construccions geomètriques bàsiques D.1.

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{OrigamiSum}) = \{\{0, z, z'\}, \{\ell_1, \ell_2\}, \{\ell_3, \ell_4, z + z'\}\}.$$

**Mesures:**

$$\lg(\mathbf{OrigamiSum}) = 2, \quad \text{ord}(\mathbf{OrigamiSum}) = 8$$

$$\text{rg}(\mathbf{OrigamiSum}) = 4, \quad \text{am}(\mathbf{OrigamiSum}) = 3.$$

**Problema:** Suposem ara que  $z, z'$  estan alineats amb l'origen, i no són necessàriament diferents. Dibuixeu  $z + z'$ .

**Solució amb  $\mathcal{RC}$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{RealSum}_{\mathcal{RC}}(0, z, z'; z + z') = \{ & \ell = \mathbf{Line}(0, z), \\ & c = \mathbf{RadiusCircle}(z', 0, z), \\ & z' - z, z + z' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell, c)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** Usant el transport de distància, afegim a  $z'$  el mòdul de  $z$  preservant l'argument.

**Eines:**  $\mathcal{RC}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{RealSum}_{\mathcal{RC}}) = \{\{0, z, z'\}, \{\ell, c, z + z'\}\}.$$

**Mesures:**

$$\lg(\mathbf{RealSum}_{\mathcal{RC}}) = 1, \quad \text{ord}(\mathbf{RealSum}_{\mathcal{RC}}) = 6$$

$$\text{rg}(\mathbf{RealSum}_{\mathcal{RC}}) = 2, \quad \text{am}(\mathbf{RealSum}_{\mathcal{RC}}) = 3.$$

**Solució amb  $O$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{RealSum}_O(0, z, z'; z + z') = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(0, z), \\ & \ell_2 = \mathbf{PerpendicularBisector}(z, z'), \\ & \ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, 0), \\ & \ell_4, \ell'_4 = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_3), \\ & P = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_4), \\ & \ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_4, P), \\ & z + z' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_5)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** La imatge de l'origen per la simetria d'eix  $x = (z + z')/2$  és el nombre  $z + z'$ .

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{RealSum}_O) = \{\{0, z, z'\}, \{\ell_1, \ell_2\}, \ell_3, \{\ell_4, P\}, \{\ell_5, z + z'\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{RealSum}_O) &= 4, & \text{ord}(\mathbf{RealSum}_O) &= 10 \\ \text{rg}(\mathbf{RealSum}_O) &= 5, & \text{am}(\mathbf{RealSum}_O) &= 2. \end{aligned}$$

## D.2.2 Resta

**Problema:** Donats l'origen  $O$  i dos nombres complexos diferents,  $z$  i  $z'$ , no alineats amb  $O$ , dibuixeu  $z - z'$ .

**Solució amb  $C$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{Difference}_C(0, z, z'; z - z') &= \{c_1 = \mathbf{RadiusCircle}(0, z, z'), \\ & \quad c_2 = \mathbf{RadiusCircle}(z, 0, z'), \\ & \quad z - z', P = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** La construcció és equivalent a la de la suma.

**Eines:**  $C$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{Difference}_C) = \{\{0, z, z'\}, \{c_1, c_2, z - z'\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{Difference}_C) &= 1, & \text{ord}(\mathbf{Difference}_C) &= 6 \\ \text{rg}(\mathbf{Difference}_C) &= 2, & \text{am}(\mathbf{Difference}_C) &= 3. \end{aligned}$$

**Solució amb  $O$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{OrigamiDifference}(0, z, z'; z - z') = \{ & \ell_1 = \mathbf{PerpendicularBisector}(0, z'), \\ & \ell_2 = \mathbf{PerpendicularBisector}(z, z'), \\ & \ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, z), \\ & \ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_2, 0), \\ & z - z' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** La construcció és equivalent a la de la suma.

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{OrigamiDifference}) = \{\{0, z, z'\}, \{\ell_1, \ell_2\}, \{\ell_3, \ell_4, z - z'\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{OrigamiDifference}) &= 1, & \text{ord}(\mathbf{OrigamiDifference}) &= 6 \\ \text{rg}(\mathbf{OrigamiDifference}) &= 4, & \text{am}(\mathbf{OrigamiDifference}) &= 3. \end{aligned}$$

**Problema:** Suposem ara que  $z, z'$  estan alineats amb l'origen, i no són necessàriament diferents. Dibuixeu  $z - z'$ .

**Solució amb  $\mathcal{RC}$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{RealDifference}_{\mathcal{RC}}(0, z, z'; z - z') = \{ & \ell = \mathbf{Line}(0, z), \\ & c = \mathbf{RadiusCircle}(z, 0, z'), \\ & z - z', z + z' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell, c)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** Usant el transport de distància, restem a  $z$  el mòdul de  $z'$  preservant l'argument.

**Eines:**  $\mathcal{RC}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{RealDifference}_{\mathcal{RC}}) = \{\{0, z, z'\}, \{\ell, c, z - z'\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{RealDifference}_{\mathcal{RC}}) &= 1, & \text{ord}(\mathbf{RealDifference}_{\mathcal{RC}}) &= 6 \\ \text{rg}(\mathbf{RealDifference}_{\mathcal{RC}}) &= 2, & \text{am}(\mathbf{RealDifference}_{\mathcal{RC}}) &= 3. \end{aligned}$$

**Solució amb  $O$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{RealDifference}_O(0, z, z'; z - z') = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(0, z), \\ & \ell_2 = \mathbf{PerpendicularBisector}(0, z), \\ & \ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, z'), \\ & \ell_4, \ell'_4 = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_3), \\ & P = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_4), \\ & \ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_4, P), \\ & z - z' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_5)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** La imatge de  $z'$  per la simetria d'eix  $x = z/2$  és el nombre  $-z + z'$ .

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{RealDifference}_O) = \{\{0, z, z'\}, \{\ell_1, \ell_2\}, \ell_3, \{\ell_4, P\}, \{\ell_5, z - z'\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{RealDifference}_O) &= 4, & \text{ord}(\mathbf{RealDifference}_O) &= 10 \\ \text{rg}(\mathbf{RealDifference}_O) &= 5, & \text{am}(\mathbf{RealDifference}_O) &= 2. \end{aligned}$$

### D.2.3 Producte de dues distàncies

**Problema:** Donats l'origen i l'1 i dos nombres complexos,  $z$  i  $z'$  de mòduls respectius  $r$  i  $r'$ , dibuixeu un punt amb mòdul  $rr'$ .

A la figura D.4 veiem una de les possibles configuracions que permeten obtenir un segment de longitud  $rr'$ , a partir de dos segments de longituds  $r$  i  $r'$ , i un de longitud 1.

Anomenarem **DistanceProduct** a aquesta configuració de triangles semblants.

Les construccions que descrivim reproduïxen aquesta configuració.

Posem  $z = re^{i\alpha}$ .

**Solució amb  $\mathcal{RC}$ :**

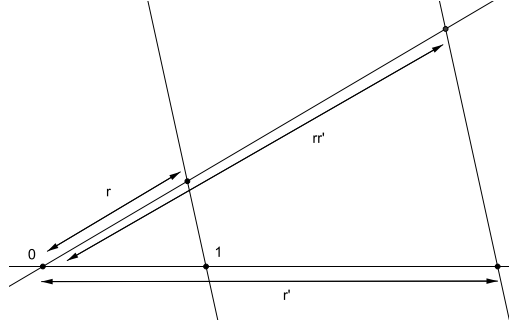


Figura D.4: Producte de dues distàncies

$$\begin{aligned}
 \mathbf{RealProduct}_{\mathcal{RC}}(0, 1, z, z'; rr' e^{i\alpha' + \pi}) &= \{c_1 = \mathbf{Circle}(0, r), \\
 &\quad \ell_2 = \mathbf{Line}(0, z'), \\
 &\quad \mathbf{DistanceProjection}(0, z, \ell_1; -r, r), \\
 &\quad \mathbf{Sum}_{\mathcal{RC}}(0, -r; Q), \\
 &\quad \ell_3 = \mathbf{Line}(-r, Q), \\
 &\quad rr' e^{i(\alpha' + \pi)} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_3)\} \\
 &= \{c_1 = \mathbf{Circle}(0, r), \\
 &\quad \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
 &\quad \ell_2 = \mathbf{Line}(0, z'), \\
 &\quad -r, r = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_1), \\
 &\quad c_2 = \mathbf{RadiusCircle}(-r, 1, z'), \\
 &\quad c_3 = \mathbf{RadiusCircle}(z', 1, -r), \\
 &\quad Q', Q = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_3), \\
 &\quad \ell_3 = \mathbf{Line}(-r, Q), \\
 &\quad rr' e^{i(\alpha' + \pi)} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_3)\}.
 \end{aligned}$$

**Demostració:** Es basa en la reproducció de la configuració *DistanceProduct* descrita.

**Eines:**  $\mathcal{RC}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{RealProduct}_{\mathcal{RC}}) = \{\{0, 1, z, z'\}, \{c_1, \ell_1, \ell_2, -r\}, \{c_2, c_3, Q\}, \{\ell_3, rr' e^{i\alpha' + \pi}\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
 \lg(\mathbf{RealProduct}_{\mathcal{RC}}) &= 3, & \text{ord}(\mathbf{RealProduct}_{\mathcal{RC}}) &= 13 \\
 \text{rg}(\mathbf{RealProduct}_{\mathcal{RC}}) &= 6, & \text{am}(\mathbf{RealProduct}_{\mathcal{RC}}) &= 4.
 \end{aligned}$$



**Solució amb  $\mathcal{O}$ :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{RealProduct}_{\mathcal{O}}(0, 1, z, z'; rr' e^{i\alpha}) &= \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
&\ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\
&\ell_3 = \mathbf{Line}(0, z'), \\
&\ell_4 = \mathbf{Line}(1, z), \\
&\mathbf{DistanceProjection}_{\mathcal{O}}(0, z', \ell_1; r'), \\
&\mathbf{Parallel}_{\mathcal{O}}(r', \ell_4; \ell_8), \\
&rr' e^{i\alpha} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_8, \ell_2) \} \\
&= \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
&\ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\
&\ell_3 = \mathbf{Line}(0, z'), \\
&\ell_4 = \mathbf{Line}(1, z), \\
&\ell_5, \ell'_5 = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_3), \\
&\ell_6 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_4, 1), \\
&\ell_7 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_5, z'), \\
&r' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_7), \\
&\ell_8 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_6, r'), \\
&rr' e^{i\alpha} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_8, \ell_2) \}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** Es basa en la reproducció de la configuració *DistanceProduct* descrita.

**Eines:**  $\mathcal{O}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{RealProduct}_{\mathcal{O}}) = \{ \{0, 1, z, z'\}, \{ \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, P \}, \{ \ell_5, \ell_6, \ell_7, r' \}, \{ \ell_8, rr' e^{i\alpha} \} \}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathbf{RealProduct}_{\mathcal{O}}) &= 3, & \text{ord}(\mathbf{RealProduct}_{\mathcal{O}}) &= 15 \\
\text{rg}(\mathbf{RealProduct}_{\mathcal{O}}) &= 8, & \text{am}(\mathbf{RealProduct}_{\mathcal{O}}) &= 5.
\end{aligned}$$

## D.2.4 Divisió de dues distàncies

Donats l'origen i l'1 i dos nombres complexos,  $z$  i  $z'$  de mòduls respectius  $r$  i  $r'$ , dibuixeu  $r/r'$ .

**Solució amb  $\mathcal{RC}$ :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{RealDivision}_{\mathcal{RC}}(0, 1, z, z'; r/r' e^{i(\alpha+\pi)}) &= \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
&\ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\
&\mathbf{DistanceProjection}_{\mathcal{RC}}(0, 1, \ell_1; -1, 1), \\
&\mathbf{DistanceProjection}_{\mathcal{RC}}(0, z', \ell_1; -r', r'), \\
&\mathbf{Parallelogram}_{\mathcal{RC}}(r', z, -1; L), \\
&\ell_3 = \mathbf{Line}(-1, L), \\
&r/r' e^{i(\alpha+\pi)} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_3) \} \\
&= \{ c_1 = \mathbf{Circle}(0, 1), \\
&c_2 = \mathbf{Circle}(0, z'), \\
&\ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
&\ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\
&-1, 1 = \mathbf{LineCircleIntersect}(c_1, \ell_1), \\
&-r', r' = \mathbf{LineCircleIntersect}(c_2, \ell_1), \\
&c_3 = \mathbf{RadiusCircle}(r', -1, z), \\
&c_4 = \mathbf{RadiusCircle}(-1, z, r'), \\
&\bar{L}, L = \mathbf{CircleIntersect}(c_3, c_4), \\
&\ell_3 = \mathbf{Line}(-1, L), \\
&r/r' e^{i(\alpha+\pi)} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_3) \}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** Es basa en la reproducció de la configuració *DistanceProduct* descrita.

**Eines:**  $\mathcal{RC}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{RealDivision}_{\mathcal{RC}}) = \{ \{0, 1, z, z'\}, \{c_1, c_2, \ell_1, \ell_2, -1, r'\}, \{c_3, c_4, L\}, \{\ell_3, r/r' e^{i(\alpha+\pi)}\} \}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathbf{RealDivision}_{\mathcal{RC}}) &= 3, & \text{ord}(\mathbf{RealDivision}_{\mathcal{RC}}) &= 15 \\
\text{rg}(\mathbf{RealDivision}_{\mathcal{RC}}) &= 7, & \text{am}(\mathbf{RealDivision}_{\mathcal{RC}}) &= 6.
\end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{O}$ :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{RealDivision}_{\mathcal{O}}(0, 1, z, z'; r/r') &= \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
&\ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\
&\mathbf{DistanceProjection}_{\mathcal{O}}(0, z', \ell_2; P), \\
&\ell_6 = \mathbf{Line}(P, 1), \\
&\mathbf{Parallel}_{\mathcal{O}}(z, \ell_6; \ell_8), \\
&r/r' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_8, \ell_1) \} \\
&= \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
&\ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\
&\ell_3 = \mathbf{Line}(0, z'), \\
&\ell_4 = \mathbf{Bisector}(\ell_2, \ell_3), \\
&\ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_4, z'), \\
&P = \mathbf{LineIntersect}(\ell_5, \ell_2), \\
&\ell_6 = \mathbf{Line}(P, 1), \\
&\ell_7 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_6, 1), \\
&\ell_8 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_7, z), \\
&r/r' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_8, \ell_1) \}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** Es basa en la reproducció de la configuració *DistanceProduct* descrita.

**Eines:**  $\mathcal{O}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{RealDivision}_{\mathcal{O}}) = \{ \{0, 1, z, z'\}, \{ \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \}, \{ \ell_5, P \}, \ell_6, \ell_7, \{ \ell_8, r/r' \} \}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathbf{RealDivision}_{\mathcal{O}}) &= 5, & \text{ord}(\mathbf{RealDivision}_{\mathcal{O}}) &= 14 \\
\text{rg}(\mathbf{RealDivision}_{\mathcal{O}}) &= 8, & \text{am}(\mathbf{RealDivision}_{\mathcal{O}}) &= 4.
\end{aligned}$$

## D.2.5 Producte de dos nombres complexos

**Problema:** Donats l'origen, l'1 i dos nombres complexos,  $z$  i  $z'$ , dibuixeu  $zz'$ .

**Solució amb  $\mathcal{RC}$ :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{Product}_{\mathcal{RC}}(0, 1, z, z'; zz') &= \{c_1 = \mathbf{Circle}(0, r), \\
&\ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
&\ell_2 = \mathbf{Line}(0, z'), \\
&-r, r = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1), \\
&P = re^{i\alpha'}, -P = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_1), \\
&c_2 = \mathbf{RadiusCircle}(P, z, r), \\
&re^{i(\alpha+\alpha')}, re^{i(\alpha'-\alpha)} = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\
&\ell_4 = \mathbf{Line}(0, re^{i(\alpha+\alpha')}), \\
&\mathbf{RealProduct}_{\mathcal{RC}}(0, 1, z, z'; rr'e^{i(\alpha'+\pi)}), \\
&c_5 = \mathbf{Circle}(0, rr'e^{i(\alpha'+\pi)}), \\
&zz', -zz' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_4, c_5)\} \\
&= \{c_1 = \mathbf{Circle}(0, r), \\
&\ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
&\ell_2 = \mathbf{Line}(0, z'), \\
&-r, r = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1), \\
&P = re^{i\alpha'}, -P = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_1), \\
&c_2 = \mathbf{RadiusCircle}(P, z, r), \\
&c_3 = \mathbf{RadiusCircle}(-r, 1, z'), \\
&c_4 = \mathbf{RadiusCircle}(z', 1, -r), \\
&Q, Q' = \mathbf{CircleIntersect}(c_3, c_4), \\
&re^{i(\alpha+\alpha')}, re^{i(\alpha'-\alpha)} = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\
&\ell_3 = \mathbf{Line}(-r, Q), \\
&\ell_4 = \mathbf{Line}(0, re^{i(\alpha+\alpha')}), \\
&rr'e^{i(\alpha'+\pi)} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_3), \\
&c_5 = \mathbf{Circle}(0, rr'e^{i(\alpha'+\pi)}), \\
&zz', -zz' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_4, c_5)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:**  $zz'$  s'obté projectant el punt  $rr'e^{i(\alpha'+\pi)}$  sobre la recta  $\ell_4$  que té pendent  $\alpha + \alpha'$ .

**Eines:**  $\mathcal{RC}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{Product}_{\mathcal{RC}}) &= \{\{0, 1, z, z'\}, \{c_1, \ell_1, \ell_2, r, -r, P\}, \{c_2, c_3, c_4, Q, re^{i(\alpha+\alpha')}\}, \\
&\{\ell_3, \ell_4, rr'e^{-i\alpha'}\}, \{c_5, zz'\}\};
\end{aligned}$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathbf{Product}_{\mathcal{RC}}) &= 4, & \text{ord}(\mathbf{Product}_{\mathcal{RC}}) &= 20 \\
\text{rg}(\mathbf{Product}_{\mathcal{RC}}) &= 9, & \text{am}(\mathbf{Product}_{\mathcal{RC}}) &= 5.
\end{aligned}$$

**Solució amb  $O$ :**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Product}_O(0, 1, z, z'; zz') = & \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1) \\
 & \ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\
 & \ell_3 = \mathbf{Line}(0, z'), \\
 & \ell_5, \ell'_5 = \mathbf{Bisector}(\ell_2, \ell_3), \\
 & \ell_{10} = \mathbf{Perpendicular}(\ell_5, z'), \\
 & r' e^{i\alpha} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_{10}) \\
 & \mathbf{RealProduct}_O(0, 1, z, z'; r' e^{i\alpha}), \\
 & \mathbf{Rotation}_O(0, r' e^{i\alpha}, \ell_1, \ell_2, \ell_3; \ell_{13}), \\
 & \mathbf{DistanceProjection}_O(0, r' e^{i\alpha}, \ell_{13}; zz', -zz') \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1) \\
 & \ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\
 & \ell_3 = \mathbf{Line}(0, z'), \\
 & \ell_4 = \mathbf{Line}(1, z), \\
 & \ell_5, \ell'_5 = \mathbf{Bisector}(\ell_2, \ell_3), \\
 & \ell_6, \ell'_6 = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_3), \\
 & \ell_7 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_4, 1), \\
 & \ell_8 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, z'), \\
 & P = \mathbf{LineIntersect}(\ell_5, \ell_8), \\
 & \ell_9 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_6, z'), \\
 & \ell_{10} = \mathbf{Perpendicular}(\ell_5, z'), \\
 & r' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_9), \\
 & r' e^{i\alpha} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_{10}) \\
 & \ell_{11} = \mathbf{Perpendicular}(\ell_7, r'), \\
 & \ell_{12} = \mathbf{Line}(P, r' e^{i\alpha}), \\
 & r' e^{i\alpha} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_{11}, \ell_2), \\
 & \ell_{13} = \mathbf{Perpendicular}(\ell_{12}, 0), \\
 & \ell_{14}, \ell'_{14} = \mathbf{Bisector}(\ell_2, \ell_{13}), \\
 & \ell_{15} = \mathbf{Perpendicular}(\ell_{14}, r' e^{i\alpha}), \\
 & zz' = \mathbf{LineIntersect}(\ell_{13}, \ell_{15}) \}.
 \end{aligned}$$

**Demostració:** El punt  $zz'$  s'obté projectant el punt  $r' e^{i\alpha}$  sobre la recta  $\ell_{13}$ .

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{Product}_O) = & \{ \{0, 1, z, z'\}, \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}, \{\ell_5, \ell_6, \ell_7, \ell_8, P\}, \{\ell_9, \ell_{10}, r', r' e^{i\alpha}\}, \\
 & \{\ell_{11}, \ell_{12}, r' e^{i\alpha}\}, \ell_{13}, \ell_{14}, \{\ell_{15}, zz'\} \};
 \end{aligned}$$

Mesures:

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{Product}_O) &= 7, & \text{ord}(\mathbf{Product}_O) &= 24 \\ \text{rg}(\mathbf{Product}_O) &= 15, & \text{am}(\mathbf{Product}_O) &= 5. \end{aligned}$$

## D.2.6 Divisió de dos nombres complexos

**Problema:** Donats l'origen, l'1 i dos nombres complexos,  $z$  i  $z' \neq 0$ , dibuixeu  $z/z'$ .

**Solució amb  $\mathcal{RC}$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{Division}_{\mathcal{RC}}(0, 1, z, z'; z/z') &= \{c_1 = \mathbf{Circle}(0, 1), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(0, z'), \\ & \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\ & -1, 1 = \mathbf{LineCircleIntersect}(c_1, \ell_1), \\ & r' e^{i\alpha}, -r' e^{i\alpha} = \mathbf{LineCircleIntersect}(c_2, \ell_2), \\ & c_3 = \mathbf{RadiusCircle}(r' e^{i\alpha}, z, -1), \\ & r' e^{i(\alpha-\alpha')}, r' e^{i(\alpha+\alpha')} = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_3), \\ & \ell_3 = \mathbf{Line}(r' e^{i(\alpha-\alpha')}, 0), \\ & \mathbf{RealDivision}_{\mathcal{RC}}(0, 1, z, z'; P), \\ & \mathbf{DistanceProjection}_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}(0, P, \ell_3; z/z', -z/z')\} \\ &= \{c_1 = \mathbf{Circle}(0, 1), \\ & c_2 = \mathbf{Circle}(0, z'), \\ & \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\ & -1, 1 = \mathbf{LineCircleIntersect}(c_1, \ell_1), \\ & r', -r' = \mathbf{LineCircleIntersect}(c_2, \ell_1), \\ & r' e^{i\alpha}, -r' e^{i\alpha} = \mathbf{LineCircleIntersect}(c_2, \ell_2), \\ & c_3 = \mathbf{RadiusCircle}(r' e^{i\alpha}, z, -1), \\ & c_4 = \mathbf{RadiusCircle}(r', z', r'), \\ & c_5 = \mathbf{RadiusCircle}(-1, z, r'), \\ & r' e^{i(\alpha-\alpha')}, r' e^{i(\alpha+\alpha')} = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_3), \\ & L, L' = \mathbf{CircleIntersect}(c_4, c_5), \\ & \ell_3 = \mathbf{Line}(r' e^{i(\alpha-\alpha')}, 0), \\ & \ell_4 = \mathbf{Line}(-1, L), \\ & P = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_4), \\ & c_6 = \mathbf{Circle}(0, r/r'), \\ & z/z', -z/z' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_3, c_6)\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** El punt  $z/z'$  s'obté projectant el punt  $r/r'$  sobre la recta  $\ell_3$ , que té pendent  $\alpha - \alpha'$ .

**Eines:**  $\mathcal{RC}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{Division}_{\mathcal{RC}}) = \{\{0, 1, z, z'\}, \{c_1, c_2, \ell_1, \ell_2, -1, r', r'e^{i\alpha}\}, \{c_3, c_4, c_5, r'e^{i(\alpha-\alpha')}, L\}, \{\ell_3, \ell_4, P\}, \{c_6, z/z'\}\};$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{Division}_{\mathcal{RC}}) &= 4, & \text{ord}(\mathbf{Division}_{\mathcal{RC}}) &= 21 \\ \text{rg}(\mathbf{Division}_{\mathcal{RC}}) &= 10, & \text{am}(\mathbf{Division}_{\mathcal{RC}}) &= 7. \end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{O}$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{Division}_{\mathcal{O}}(0, 1, z, z'; z/z') &= \{\ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1) \\ &\ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\ &\mathbf{DistanceProjection}_{\mathcal{O}}(0, z', \ell_2; P_1), \\ &\ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_2, z'), \\ &\ell_7 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_5, z'), \\ &\ell_8, \ell'_8 = \mathbf{Tangent}(\ell_7, z', P_1), \\ &P_3 = \mathbf{LineIntersect}(\ell_8, \ell_2), \\ &\ell_{11} = \mathbf{Perpendicular}(\ell_8, P_3), \\ &r'e^{i(\alpha-\alpha')} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_{11}, \ell_5), \\ &\ell_{13} = \mathbf{Line}(0, r'e^{i(\alpha-\alpha')}), \\ &\mathbf{RealDivision}(0, 1, z, z'; r/r'), \\ &\mathbf{DistanceProjection}_{\mathcal{O}}(0, r/r', \ell_{13}; z/z')\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{\ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\ &\ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\ &\ell_3 = \mathbf{Line}(0, z'), \\ &P_1 = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_5), \\ &\ell_4, \ell'_4 = \mathbf{Bisector}(\ell_2, \ell_3), \\ &\ell_5 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_2, z'), \\ &\ell_6 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_4, z'), \\ &\ell_7 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_5, z'), \\ &P_2 = \mathbf{LineIntersect}(\ell_6, \ell_2), \\ &\ell_8, \ell'_8 = \mathbf{Tangent}(\ell_7, z', P_1), \\ &\ell_9 = \mathbf{Line}(P_2, 1), \\ &P_3 = \mathbf{LineIntersect}(\ell_8, \ell_2), \\ &\ell_{10} = \mathbf{Perpendicular}(\ell_9, 1), \\ &\ell_{11} = \mathbf{Perpendicular}(\ell_8, P_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r'e^{i(\alpha-\alpha')} &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_{11}, \ell_5), \\
\ell_{12} &= \mathbf{Perpendicular}(\ell_{10}, z), \\
\ell_{13} &= \mathbf{Line}(0, r'e^{i(\alpha-\alpha')}), \\
\ell_{14}, \ell'_{14} &= \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_{13}), \\
r/r' &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_{12}, \ell_1), \\
\ell_{15} &= \mathbf{Perpendicular}(\ell_{14}, r/r'), \\
z/z' &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_{13}, \ell_{15}).
\end{aligned}$$

**Demostració:** El punt  $z/z'$  s'obté projectant el punt  $r/r'$  sobre la recta  $\ell_{13}$ , que té pendent  $\alpha - \alpha'$ .

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{Division}_O) &= \{\{0, 1, z, z'\}, \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, P_1\}, \{\ell_4, \ell_5\}, \{\ell_6, \ell_7, P_2\}, \{\ell_8, \ell_9, P_3\}, \\
&\quad \{\ell_{10}, \ell_{11}, r'e^{i(\alpha-\alpha')}\}, \{\ell_{12}, \ell_{13}\}, \{\ell_{14}, r/r'\}, \{\ell_{15}, z/z'\}\};
\end{aligned}$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathbf{Division}_O) &= 8, & \text{ord}(\mathbf{Division}_O) &= 25 \\
\text{rg}(\mathbf{Division}_O) &= 15, & \text{am}(\mathbf{Division}_O) &= 4.
\end{aligned}$$

## D.3 Construccions algebraiques

Els problemes que presentem en aquest bloc són de tipus algebraic. Concretament, mostrem les construccions d'arrels quadrades i cúbiques de dos nombres complexos, i de les subconstruccions que les conformen.

### D.3.1 Arrel quadrada d'una distància

**Problema:** Donats l'origen, l'1 i un nombre complex  $z = re^{i\alpha}$ , dibuixeu un punt amb ordenada  $\sqrt{r}$ .

A la figura D.5 veiem com es pot obtenir un segment de longitud  $\sqrt{r}$ , a partir d'un segment de longitud  $r$  i un de longitud 1, (cf. [41]). Les construccions que descriurem es basen en la construcció d'aquesta configuració.

Anomenarem *SquareRoot* a aquesta configuració.



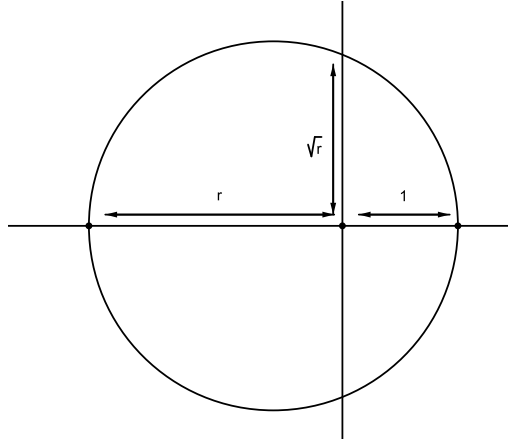


Figura D.5: Arrel quadrada d'una distància

**Solució amb  $\mathcal{RC}$ :**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{RealSquareRoot}_{\mathcal{RC}}(0, 1, z; r + i\sqrt{r}) &= \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
 &\quad \mathbf{DistanceProjection}_{\mathcal{RC}}(0, z, \ell_1; r), \\
 &\quad c_2 = \mathbf{RadiusCircle}(r, 0, 1), \\
 &\quad r - 1, r + 1 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_2), \\
 &\quad \mathbf{Midpoint}_{\mathcal{RC}\mathcal{E}}(0, r + 1; \frac{r+1}{2}), \\
 &\quad c_5 = \mathbf{RadiusCircle}(r - 1, r + 1, \frac{r+1}{2}), \\
 &\quad c_6 = \mathbf{Circle}(r + 1, \frac{r+1}{2}), \\
 &\quad r + i\sqrt{r}, r - i\sqrt{r} = \mathbf{CircleIntersect}(c_5, c_6) \} \\
 \\
 &= \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
 &\quad c_1 = \mathbf{Circle}(0, z), \\
 &\quad -r, r = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1), \\
 &\quad c_2 = \mathbf{RadiusCircle}(r, 0, 1), \\
 &\quad r - 1, r + 1 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_2), \\
 &\quad c_3 = \mathbf{Circle}(0, r + 1), \\
 &\quad c_4 = \mathbf{Circle}(r + 1, 0), \\
 &\quad Q, R = \mathbf{CircleIntersect}(c_3, c_4), \\
 &\quad \ell_2 = \mathbf{Line}(Q, R), \\
 &\quad \frac{r+1}{2} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_2), \\
 &\quad c_5 = \mathbf{RadiusCircle}(r - 1, r + 1, \frac{r+1}{2}), \\
 &\quad c_6 = \mathbf{Circle}(r + 1, \frac{r+1}{2}), \\
 &\quad r + i\sqrt{r}, r - i\sqrt{r} = \mathbf{CircleIntersect}(c_5, c_6) \}.
 \end{aligned}$$

**Demostració:** La construcció reproduïx la configuració *SquareRoot* vista.

**Eines:**  $\mathcal{RC}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{RealSquareRoot}_{\mathcal{RC}}) = \{\{0, 1, z\}, \{\ell_1, c_1, r\}, \{c_2, r+1, r-1\}, \{c_3, c_4, Q, R\}, \{\ell_2, \frac{r+1}{2}\}, \{c_5, c_6, r+i\sqrt{r}\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{RealSquareRoot}_{\mathcal{RC}}) &= 5, & \text{ord}(\mathbf{RealSquareRoot}_{\mathcal{RC}}) &= 18 \\ \text{rg}(\mathbf{RealSquareRoot}_{\mathcal{RC}}) &= 8, & \text{am}(\mathbf{RealSquareRoot}_{\mathcal{RC}}) &= 4. \end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{O}$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{RealSquareRoot}_{\mathcal{O}}(0, 1, z; r+i\sqrt{r}) &= \{\ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\ &\ell_2 = \mathbf{Perpendicular}(0, \ell_1), \\ &\mathbf{DistanceProjection}_{\mathcal{O}}(0, z, \ell_1; -r, r), \\ &\ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(r, \ell_1), \\ &\mathbf{Midpoint}_{\mathcal{O}}(0, 1; 1/2), \\ &\mathbf{Midpoint}_{\mathcal{O}}(0, 1/2; 1/4), \\ &\mathbf{IsoscelesRectangleTriangle}(0, 1/4; i/4, -i/4), \\ &\mathbf{IsoscelesRectangleTriangle}(0, i/4; -1/4, 1/4), \\ &\ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(-1/4, \ell_1), \\ &\ell_5, \ell'_5 = \mathbf{Tangent}(\ell_4, 1/4, -r), \\ &r+i\sqrt{r} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{\ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\ &\ell_2 = \mathbf{Perpendicular}(0, \ell_1), \\ &\ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(r, \ell_1), \\ &\ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(-1/4, \ell_1), \\ &\ell_5, \ell'_5 = \mathbf{Tangent}(\ell_4, 1/4, -r), \\ &\ell_7 = \mathbf{Line}(0, z), \\ &\ell_8, \ell_9 = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_7), \\ &-r = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_8), \\ &r = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_9), \\ &\ell_{10} = \mathbf{Perpendicular}(z, \ell_8), \\ &\ell_{11} = \mathbf{Perpendicular}(z, \ell_9), \\ &\ell_{12} = \mathbf{PerpendicularBisector}(0, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1/2 &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{12}), \\
\ell_{13} &= \mathbf{PerpendicularBisector}(0, 1/2), \\
1/4 &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{13}), \\
\ell_{14}, \ell'_{14} &= \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_{13}), \\
i/4 &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_{14}), \\
\ell_{15} &= \mathbf{Perpendicular}(i/4, \ell_{14}), \\
-1/4 &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{15}), \\
r + i\sqrt{r} &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5) \}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** La construcció reproduïx la configuració *SquareRoot* vista.

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{RealSquareRoot}_O) = \{\{0, 1, z\}, \{\ell_1, \ell_7, \ell_{12}, 1/2\}, \{\ell_2, \ell_8, \ell_9, \ell_{13}, 1/4\}, \{\ell_{10}, \ell_{11}, \ell_{14}, r, -r, i/4\}, \{\ell_3, \ell_{15}, -1/4\}, \ell_4, \{\ell_5, r + i\sqrt{r}\}\};$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathbf{RealSquareRoot}_O) &= 6, & \text{ord}(\mathbf{RealSquareRoot}_O) &= 24 \\
\text{rg}(\mathbf{RealSquareRoot}_O) &= 14, & \text{am}(\mathbf{RealSquareRoot}_O) &= 6.
\end{aligned}$$

### D.3.2 Arrels quadrades de nombres complexos

**Problema:** Donats l'origen, l'1 i un nombre complex  $z = re^{i\alpha}$ , dibuixeu una de les arrels quadrades de  $z$ .

**Solució amb  $\mathcal{RC}$ :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{SquareRoot}_{\mathcal{RC}}(0, 1, z; z^{1/2}) = & \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
& c_1 = \mathbf{Circle}(0, z), \\
& -r, r = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1), \\
& \mathbf{PerpendicularBisection}(z, r; \ell_3), \\
& \mathbf{SquareRoot}_{\mathcal{RC}}(0, 1, z; r + i\sqrt{r}, r - i\sqrt{r}), \\
& c_9 = \mathbf{RadiusCircle}(0, r, r + i\sqrt{r}), \\
& z^{1/2}, -z^{1/2} = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_3, c_9) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
& c_1 = \mathbf{Circle}(0, z), \\
& c_2 = \mathbf{Circle}(z, 0), \\
& -r, r = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_1), \\
& c_3 = \mathbf{Circle}(r, 0), \\
& c_4 = \mathbf{RadiusCircle}(r, 0, 1), \\
& c_5 = \mathbf{Circle}(0, r + 1), \\
& c_6 = \mathbf{Circle}(r + 1, 0), \\
& c_7 = \mathbf{RadiusCircle}(r - 1, r + 1, \frac{r+1}{2}), \\
& c_8 = \mathbf{Circle}(r + 1, \frac{r+1}{2}), \\
& P, 0 = \mathbf{CircleIntersect}(c_2, c_3), \\
& r + 1, r - 1 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_4), \\
& Q, R = \mathbf{CircleIntersect}(c_5, c_6), \\
& \ell_2 = \mathbf{Line}(O, P), \\
& \ell_3 = \mathbf{Line}(Q, R), \\
& \frac{r+1}{2} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_3), \\
& r + i\sqrt{r}, r - i\sqrt{r} = \mathbf{CircleIntersect}(c_7, c_8), \\
& c_9 = \mathbf{RadiusCircle}(0, r, r + i\sqrt{r}), \\
& z^{1/2}, -z^{1/2} = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_3, c_9) \}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** El punt  $z^{1/2}$  s'obté a partir del punt  $r + i\sqrt{r}$ , que té per ordenada  $\sqrt{r}$ , i projectant aquesta distància sobre la recta  $\ell_3$ , que biseca l'argument de  $z$ .

**Eines:**  $\mathcal{RC}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{SquareRoot}_{\mathcal{RC}}) = & \{ \{0, 1, z\}, \{ \ell_1, c_1, c_2, r, P \}, \{ \ell_2, c_3, c_4, r + 1, r - 1 \}, \{ c_5, c_6, Q, R \}, \\
& \{ \ell_3, \frac{r+1}{2} \}, \{ c_7, c_8, r + i\sqrt{r} \}, \{ c_9, z^{1/2} \} \};
\end{aligned}$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{SquareRoot}_{\mathcal{RC}}) &= 6, & \text{ord}(\mathbf{SquareRoot}_{\mathcal{RC}}) &= 24 \\ \text{rg}(\mathbf{SquareRoot}_{\mathcal{RC}}) &= 12, & \text{am}(\mathbf{SquareRoot}_{\mathcal{RC}}) &= 5. \end{aligned}$$

**Solució amb  $\mathcal{O}$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{SquareRoot}_{\mathcal{O}}(0, 1, z; z^{1/2}) &= \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1) \\ &\ell_2 = \mathbf{Perpendicular}(0, \ell_1), \\ &\ell_7 = \mathbf{Line}(0, z), \\ &\ell_8, \ell_9 = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_7), \\ &\mathbf{SquareRoot}_{\mathcal{O}}(0, 1, z; r + i\sqrt{r}), \\ &\ell_6 = \mathbf{Perpendicular}(r + i\sqrt{r}, \ell_2), \\ &i\sqrt{r} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_6), \\ &\ell_{16}, \ell'_{16} = \mathbf{Bisector}(\ell_2, \ell_8), \\ &\ell_{17} = \mathbf{Perpendicular}(i\sqrt{r}, \ell_{16}), \\ &z^{1/2} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_8, \ell_{17}) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \{ &\ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\ &\ell_2 = \mathbf{Perpendicular}(0, \ell_1), \\ &\ell_7 = \mathbf{Line}(0, z), \\ &\ell_8, \ell_9 = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_7), \\ &\ell_{10} = \mathbf{Perpendicular}(z, \ell_8), \\ &\ell_{11} = \mathbf{Perpendicular}(z, \ell_9), \\ &\ell_{12} = \mathbf{PerpendicularBisector}(0, 1), \\ &1/2 = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{12}), \\ &\ell_{13} = \mathbf{PerpendicularBisector}(0, 1/2), \\ &1/4 = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{13}), \\ &\ell_{14}, \ell'_{14} = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_{13}), \\ &r = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{10}), \\ &-r = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_5), \\ &i/4 = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_{14}), \\ &\ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(r, \ell_1), \\ &\ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(-1/4, \ell_1), \\ &\ell_{15} = \mathbf{Perpendicular}(i/4, \ell_{14}), \\ &\ell_5, \ell'_5 = \mathbf{Tangent}(\ell_4, 1/4, -r), \\ &r + i\sqrt{r} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5), \\ &\ell_6 = \mathbf{Perpendicular}(r + i\sqrt{r}, \ell_2), \\ &i\sqrt{r} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_2, \ell_6), \\ &\ell_{16}, \ell'_{16} = \mathbf{Bisector}(\ell_2, \ell_8), \\ &\ell_{17} = \mathbf{Perpendicular}(i\sqrt{r}, \ell_{16}), \\ &z^{1/2} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_8, \ell_{17}) \}. \end{aligned}$$

**Demostració:** El punt  $z^{1/2}$  s'obté a partir del punt  $i\sqrt{r}$ , projectant la distància  $\sqrt{r}$  sobre la recta  $\ell_8$ , que biseca l'argument de  $z$ .

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{SquareRoot}_O) = \{\{0, 1, z\}, \{\ell_1, \ell_7, \ell_{12}, 1/2\}, \{\ell_2, \ell_8, \ell_9, \ell_{13}, 1/4\}, \{\ell_{10}, \ell_{11}, \ell_{14}, r, -r, i/4\}, \{\ell_3, \ell_{15}, -1/4\}, \ell_4, \{\ell_5, r + i\sqrt{r}\}, \{\ell_6, i\sqrt{r}\}, \ell_{16}, \{\ell_{17}, z^{1/2}\}\};$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{SquareRoot}_O) &= 9, & \text{ord}(\mathbf{SquareRoot}_O) &= 29 \\ \text{rg}(\mathbf{SquareRoot}_O) &= 17, & \text{am}(\mathbf{SquareRoot}_O) &= 6. \end{aligned}$$

### D.3.3 Arrel cúbica real d'una distància

**Problema:** Donats l'origen, l'1 i un nombre complex  $z = re^{i\alpha}$ , dibuixeu un punt amb ordenada  $r^{1/3}$ .

**Solució amb  $CO$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{CubicRoot}_{CO}(0, 1, z; |z|^{1/3}) &= \{\ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\ & c_{10} = \mathbf{Circle}(0, z), \\ & \mathbf{DistanceProjection}_{RC}(0, z, \ell_1; r), \\ & \ell_4 = \mathbf{Line}(P_3, P_4), \\ & \mathbf{Midpoint}_{RC}(0, 1; 1/2), \\ & c_{11} = \mathbf{Circle}(r, 0), \\ & P_{10}, P_{11} = \mathbf{CircleIntersect}(c_{10}, c_{11}), \\ & c_5 = \mathbf{Circle}(0, 1/2), \\ & c_6 = \mathbf{Circle}(1/2, 0), \\ & \ell_{10} = \mathbf{Line}(P_{10}, P_{11}), \\ & c'_3 = \mathbf{Conic}(\ell_4, 0, 0, 1), \\ & \mathbf{Midpoint}_{RC}(0, r; r/2), \end{aligned}$$

$P_5, P_6 = \mathbf{CircleIntersect}(c_5, c_6),$   
 $P_7, P_8 = \mathbf{ConicCircleIntersect}(c'_3, c_5),$   
 $\ell_5 = \mathbf{Line}(P_7, P_8),$   
 $\ell_6 = \mathbf{Line}(P_5, P_6),$   
 $c_{12} = \mathbf{Circle}(0, r/2),$   
 $c_{13} = \mathbf{Circle}(r/2, 0),$   
 $\mathbf{Midpoint}_{RC}(0, 1/2; 1/4),$   
 $P_{12}, P_{13} = \mathbf{CircleIntersect}(c_{12}, c_{13}),$   
 $c_7 = \mathbf{Circle}(0, 1/4),$   
 $c_8 = \mathbf{Circle}(1/4, 0),$   
 $\ell_{11} = \mathbf{Line}(P_{12}, P_{13}),$   
 $c_{14} = \mathbf{Circle}(P_{12}, 0),$   
 $-i/4, i/4 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_5, c_7),$   
 $P_9 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_6, c_8),$   
 $\mathbf{Midpoint}_{RC}(0, r/2; r/4),$   
 $P_{14} = \mathbf{CircleIntersect}(c_{12}, c_{14}),$   
 $\ell_7 = \mathbf{Line}(-i/4, P_9),$   
 $c_{15} = \mathbf{Circle}(0, r/4),$   
 $-r/4 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_{15}),$   
 $\ell_8 = \mathbf{Line}(-r/4, P_{14}),$   
 $c'_1 = \mathbf{Conic}(\ell_7, i/4, 0, 1),$   
 $c'_2 = \mathbf{Conic}(\ell_8, r/4, 0, 1),$   
 $r^{1/3} + ir^{2/3}, r^{1/3} - ir^{2/3} = \mathbf{ConicIntersect}(c'_1, c'_2),$   
 $\ell_9 = \mathbf{Line}(r^{1/3} + ir^{2/3}, r^{1/3} - ir^{2/3}),$   
 $r^{1/3} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_9)\}.$

$$\begin{aligned}
\mathbf{CubicRoot}_{CO}(0, 1, z; |z|^{1/3}) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
& c_1 = \mathbf{Circle}(0, 1), \\
& c_2 = \mathbf{Circle}(1, 0), \\
& P_3, P_4 = \mathbf{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\
& c_{10} = \mathbf{Circle}(0, z), \\
& -r, r = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_{10}), \\
& \ell_4 = \mathbf{Line}(P_3, P_4), \\
& 1/2 = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_4), \\
& c_{11} = \mathbf{Circle}(r, 0), \\
& P_{10}, P_{11} = \mathbf{CircleIntersect}(c_{10}, c_{11}), \\
& c_5 = \mathbf{Circle}(0, 1/2), \\
& c_6 = \mathbf{Circle}(1/2, 0), \\
& \ell_{10} = \mathbf{Line}(P_{10}, P_{11}), \\
& c'_3 = \mathbf{Conic}(0, \ell_4, 0, 1), \\
& r/2 = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{10}), \\
& P_5, P_6 = \mathbf{CircleIntersect}(c_5, c_6), \\
& P_7, P_8 = \mathbf{ConicCircleIntersect}(c'_3, c_5), \\
& \ell_5 = \mathbf{Line}(P_7, P_8), \\
& \ell_6 = \mathbf{Line}(P_5, P_6), \\
& c_{12} = \mathbf{Circle}(0, r/2), \\
& c_{13} = \mathbf{Circle}(r/2, 0), \\
& 1/4 = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_6), \\
& P_{12}, P_{13} = \mathbf{CircleIntersect}(c_{12}, c_{13}), \\
& c_7 = \mathbf{Circle}(0, 1/4), \\
& c_8 = \mathbf{Circle}(1/4, 0), \\
& \ell_{11} = \mathbf{Line}(P_{12}, P_{13}), \\
& c_{14} = \mathbf{Circle}(P_{12}, 0), \\
& i/4, -i/4 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_5, c_7), \\
& P_9, P'_9 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_6, c_8), \\
& r/4 = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{11}), \\
& P_{14}, P'_{14} = \mathbf{CircleIntersect}(c_{12}, c_{14}), \\
& \ell_7 = \mathbf{Line}(-i/4, P_9), \\
& c_{15} = \mathbf{Circle}(0, r/4), \\
& -r/4, r/4 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_{15}), \\
& \ell_8 = \mathbf{Line}(-r/4, P_{14}), \\
& c'_1 = \mathbf{Conic}(\ell_7, i/4, 0, 1), \\
& c'_2 = \mathbf{Conic}(\ell_8, r/4, 0, 1), \\
& \{r^{1/3} + ir^{2/3}, r^{1/3} - ir^{2/3}\} = \mathbf{ConicIntersect}(c'_1, c'_2), \\
& \ell_9 = \mathbf{Line}(r^{1/3} + ir^{2/3}, r^{1/3} - ir^{2/3}), \\
& r^{1/3} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_9)\}.
\end{aligned}$$



**Demostració:** És la construcció de Videla, completant tots els passos quan es parteix del conjunt inicial  $0, 1, z$  ([50]).

**Eines:**  $CO$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{CubicRoot}_{CO}) = \{ & \{0, 1, z\}, \{\ell_1, c_1, c_2, c_{10}, P_3, P_4, r\}, \{\ell_4, c_{11}, 1/2, P_{10}, P_{11}\}, \\ & \{c_5, c_6, c'_3, \ell_{10}, P_5, P_6, P_7, P_8, r/2\}, \{\ell_5, \ell_6, c_{12}, c_{13}, 1/4, P_{12}, P_{13}\}, \\ & \{c_7, c_8, \ell_{11}, c_{14}, P_9, i/4, -i/4, r/4, P_{14}\}, \{\ell_7, c_{15}, -r/4\}, \{\ell_8, c'_1\}, \\ & \{c'_2, r^{1/3} + ir^{2/3}, r^{1/3} - ir^{2/3}\}, \{\ell_9, r^{1/3}\} \}. \end{aligned}$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{CubicRoot}_{CO}) &= 9, & \text{ord}(\mathbf{CubicRoot}_{CO}) &= 50 \\ \text{rg}(\mathbf{CubicRoot}_{CO}) &= 24, & \text{am}(\mathbf{CubicRoot}_{CO}) &= 9. \end{aligned}$$

**Solució amb  $O$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{CubicRoot}_O(0, 1, z; |z|^{1/3}) &= \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\ & \mathbf{DistanceProjection}_O(0, z, \ell_1; -r, r), \\ & \ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, 0), \\ & \mathbf{IsoscelesRectangleTriangle}(0, 1; -i, i), \\ & \ell_{11} = \mathbf{Perpendicular}(\ell_3, -i), \\ & \ell_{12} = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, r), \\ & \ell_{13} = \mathbf{CommonTangent}(\ell_{12}, -r, \ell_{11}, i) \\ & r^{1/3} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{13}) \} \\ &= \{ \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_3 &= \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, 0), \\
\ell_4 &= \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, 1), \\
\ell_5, \ell_8 &= \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_4), \\
i &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5), \\
-i &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_8), \\
\ell_6, \ell_7 &= \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_2), \\
\ell_9 &= \mathbf{Perpendicular}(\ell_6, z), \\
\ell_{10} &= \mathbf{Perpendicular}(\ell_7, z), \\
\ell_{11} &= \mathbf{Perpendicular}(\ell_3, -i), \\
r &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_9), \\
\ell_{12} &= \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, r), \\
-r &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{10}), \\
\ell_{13} &= \mathbf{CommonTangent}(\ell_{12}, -r, \ell_{11}, i), \\
r^{1/3} &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{13}).
\end{aligned}$$

**Demostració:** [43].

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{CubicRoot}_O) = \{\{0, 1, z\}, \{\ell_1, \ell_2\}, \{\ell_3, \ell_4, \ell_6, \ell_7\}, \{\ell_5, \ell_8, \ell_9, \ell_{10}, i, -i, r, -r\}, \\
\{\ell_{11}, \ell_{12}\}, \{\ell_{13}, r^{1/3}\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathbf{CubicRoot}_O) &= 5, & \text{ord}(\mathbf{CubicRoot}_O) &= 21 \\
\text{rg}(\mathbf{CubicRoot}_O) &= 13, & \text{am}(\mathbf{CubicRoot}_O) &= 8.
\end{aligned}$$

### D.3.4 Trisecció d'un angle

**Problema:** Donats l'origen, l'1 i un nombre complex  $z$ , dibuixeu una recta que triseca l'argument de  $z$ .

**Solució amb  $CO$ :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{Trisection}_{CO}(0, 1, z; \ell_3) &= \{c_1 = \mathbf{Circle}(0, 1), \\
&\ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\
&\mathbf{RealSum}_{RC}(0, 1, 1; 2), \\
&c_3 = \mathbf{Conic}(\ell_2, 1, 0, 2), \\
&P_1, P'_1, P''_1, P'''_1 = \mathbf{ConicCircleIntersect}(c_3, c_1), \\
&\mathbf{PerpendicularBisection}(1, P; \ell_3)\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathit{Trisection}_{CO}(0, 1, z; \ell_3) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(0, 1), \\
& c_2 = \mathbf{Circle}(1, 0), \\
& \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
& \ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\
& 0, 2 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_2), \\
& c_3 = \mathbf{Conic}(\ell_2, 1, 0, 2), \\
& P_1, P'_1, P''_1, P'''_1 = \mathbf{ConicCircleIntersect}(c_3, c_1), \\
& c_4 = \mathbf{Circle}(1, P_1), \\
& c_5 = \mathbf{Circle}(P_1, 1), \\
& P_2, P'_2 = \mathbf{CircleIntersect}(c_4, c_5), \\
& \ell_3 = \mathbf{Line}(0, P_2)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** [50].

**Eines:**  $CO$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{Trisection}_{CO}) = \{\{0, 1, z\}, \{c_1, c_2, \ell_1, \ell_2, 2\}, \{c_3, P_1\}, \{c_4, c_5, P_2\}, \ell_3\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathit{Trisection}_{CO}) &= 4, & \text{ord}(\mathit{Trisection}_{CO}) &= 14 \\
\text{rg}(\mathit{Trisection}_{CO}) &= 8, & \text{am}(\mathit{Trisection}_{CO}) &= 5.
\end{aligned}$$

**Solució amb  $O$ :**

$$\begin{aligned}
\mathit{Trisection}_O(0, 1, z; \ell_5) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
& \ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\
& \mathit{IsoscelesRectangleTriangle}(0, 1; -i, i), \\
& \ell_6 = \mathbf{PerpendicularBisector}(0, i), \\
& \ell_7, \ell'_7, \ell''_7 = \mathbf{CommonTangent}(\ell_2, 0, \ell_6, i), \\
& \ell_8 = \mathbf{Perpendicular}(0, \ell_7)\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathit{Trisection}_O(0, 1, z; \ell_8) = \{ & \ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\
& \ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\
& \ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, 0), \\
& \ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, 1), \\
& \ell_5, \ell'_5 = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_4), \\
& i = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5), \\
& \ell_6 = \mathbf{PerpendicularBisector}(0, i), \\
& \ell_7, \ell'_7, \ell''_7 = \mathbf{CommonTangent}(\ell_2, 0, \ell_6, i), \\
& \ell_8 = \mathbf{Perpendicular}(0, \ell_7)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** [1].

**Eines:**  $O$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathit{Trisection}_O) = \{\{0, 1, z\}, \{\ell_1, \ell_2\}, \{\ell_3, \ell_4\}, \{\ell_5, i\}, \{\ell_6, \ell_7\}, \ell_8\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned}
\lg(\mathit{Trisection}_O) &= 5, & \text{ord}(\mathit{Trisection}_O) &= 12 \\
\text{rg}(\mathit{Trisection}_O) &= 8, & \text{am}(\mathit{Trisection}_O) &= 2.
\end{aligned}$$

### D.3.5 Trisecció d'un angle (Arquimedes)

**Problema:** Donades dues rectes  $\ell_1$  i  $\ell_2$  que es tallen en l'origen, dibuixeu la recta que triseca l'angle orientat  $\ell_1\ell_2$ .

**Solució:**

$$\begin{aligned}
\mathit{ArchimedesTrisection}(0, 1, \ell_1, \ell_2; \ell_3) = \{ & c_1 = \mathbf{Circle}(0, 1), \\
& B, B' = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_2, c_1), \\
& Q, Q', Q'', Q''' = \mathbf{LineLimaconIntersect}(\ell_1, B, c_1), \\
& \ell_3 = \mathbf{Line}(B, Q)\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** [7].

**Eines:**  $\mathcal{RMC}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\textit{ArchimedesTrisection}) = \{\{0, 1, \ell_1, \ell_2\}, \{c_1, B, B'\}, \{Q\}, \{\ell_3\}\}.$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\textit{ArchimedesTrisection}) &= 3, & \text{ord}(\textit{ArchimedesTrisection}) &= 9 \\ \text{rg}(\textit{ArchimedesTrisection}) &= 4, & \text{am}(\textit{ArchimedesTrisection}) &= 3. \end{aligned}$$

### D.3.6 Arrels cúbiques de nombres complexos

**Problema:** Donats l'origen, l'1 i un nombre complex  $z$ , dibuixeu una arrel de les arrels cúbiques de  $z$ .

**Solució amb CO:**

$$\begin{aligned} \textit{ThirdRoot}_{CO}(0, 1, z; z^{1/3}) &= \{\textit{Trisection}_{CO}(0, 1, z; \ell_3), \\ &\quad \textit{CubicRoot}_{CO}(0, 1, z; r^{1/3}), \\ &\quad \textit{DistanceProjection}_{RCE}(r^{1/3}, \ell_3)\}. \\ &= \{ \ell_1 = \textit{Line}(0, 1), \\ &\quad c_1 = \textit{Circle}(0, 1), \\ &\quad c_2 = \textit{Circle}(1, 0), \\ &\quad P_3, P_4 = \textit{CircleIntersect}(c_1, c_2), \\ &\quad c_{10} = \textit{Circle}(0, z), \\ &\quad -r, r = \textit{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_{10}), \\ &\quad \ell_4 = \textit{Line}(P_3, P_4), \\ &\quad 1/2 = \textit{LineIntersect}(\ell_1, \ell_4), \\ &\quad c_{11} = \textit{Circle}(r, 0), \\ &\quad P_{10}, P_{11} = \textit{CircleIntersect}(c_{10}, c_{11}), \\ &\quad c_5 = \textit{Circle}(0, 1/2), \\ &\quad c_6 = \textit{Circle}(1/2, 0), \\ &\quad \ell_{10} = \textit{Line}(P_{10}, P_{11}), \\ &\quad c'_3 = \textit{Conic}(0, \ell_4, 0, 1), \\ &\quad r/2 = \textit{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{10}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_5, P_6 &= \mathbf{CircleIntersect}(c_5, c_6), \\
P_7, P_8 &= \mathbf{ConicCircleIntersect}(c'_3, c_5), \\
\ell_5 &= \mathbf{Line}(P_7, P_8), \\
\ell_6 &= \mathbf{Line}(P_5, P_6), \\
c_{12} &= \mathbf{Circle}(0, r/2), \\
c_{13} &= \mathbf{Circle}(r/2, 0), \\
1/4 &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_6), \\
P_{12}, P_{13} &= \mathbf{CircleIntersect}(c_{12}, c_{13}), \\
c_7 &= \mathbf{Circle}(0, 1/4), \\
c_8 &= \mathbf{Circle}(1/4, 0), \\
\ell_{11} &= \mathbf{Line}(P_{12}, P_{13}), \\
c_{14} &= \mathbf{Circle}(P_{12}, 0), \\
i/4, -i/4 &= \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_5, c_7), \\
P_9, P'_9 &= \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_6, c_8), \\
r/4 &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{11}), \\
P_{14}, P'_{14} &= \mathbf{CircleIntersect}(c_{12}, c_{14}), \\
\ell_7 &= \mathbf{Line}(-i/4, P_9), \\
c_{15} &= \mathbf{Circle}(0, r/4), \\
-r/4, r/4 &= \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_{15}), \\
\ell_8 &= \mathbf{Line}(-r/4, P_{14}), \\
c'_1 &= \mathbf{Conic}(\ell_7, i/4, 0, 1), \\
c'_2 &= \mathbf{Conic}(\ell_8, r/4, 0, 1), \\
\{r^{1/3} + ir^{2/3}, r^{1/3} - ir^{2/3}\} &= \mathbf{ConicIntersect}(c'_1, c'_2), \\
\ell_9 &= \mathbf{Line}(r^{1/3} + ir^{2/3}, r^{1/3} - ir^{2/3}), \\
r^{1/3} &= \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_9), \\
\ell_2 &= \mathbf{Line}(0, z), \\
0, 2 &= \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_1, c_2), \\
c_3 &= \mathbf{Conic}(\ell_2, 1, 0, 2), \\
P_1, P'_1, P''_1, P'''_1 &= \mathbf{ConicCircleIntersect}(c_3, c_1), \\
c_4 &= \mathbf{Circle}(1, P_1), \\
c_9 &= \mathbf{Circle}(P_1, 1), \\
P_2, P'_2 &= \mathbf{CircleIntersect}(c_4, c_9), \\
\ell_3 &= \mathbf{Line}(0, P_2), \\
c_{16} &= \mathbf{Circle}(0, r^{1/3}), \\
z^{1/3}, -z^{1/3} &= \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell_3, c_{16})\}.
\end{aligned}$$

**Demostració:** El punt  $z^{1/3}$  s'obté projectant el punt  $r^{1/3}$  sobre la recta  $\ell_3$ , que triseca l'argument de  $z$ .

**Eines:**  $CO$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{ThirdRoot}_{CO}) = & \{\{0, 1, z\}, \{\ell_1, \ell_2, c_1, c_2, c_{10}, P_3, P_4, r, 2\}, \{\ell_4, c'_4, c_{11}, 1/2, P_1, P_{10}, P_{11}\}, \\ & \{c_3, c_4, c_5, c_6, c'_3, c_9, \ell_{10}, P_2, P_5, P_6, P_7, P_8, r/2\}, \\ & \{\ell_3, \ell_5, \ell_6, c_{12}, c_{13}, 1/4, P_{12}, P_{13}\}, \\ & \{c_7, c_8, \ell_{11}, c_{14}, P_9, i/4, -i/4, r/4, P_{14}\}, \{\ell_7, c_{15}, -r/4\}, \{\ell_8, c'_1\}, \\ & \{c'_2, r^{1/3} + ir^{2/3}, r^{1/3} - ir^{2/3}\}, \{\ell_9, r^{1/3}\}, \{c_{16}, r^{1/3} e^{i\alpha/3}\}\}. \end{aligned}$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{ThirdRoot}_{CO}) &= 10, & \text{ord}(\mathbf{ThirdRoot}_{CO}) &= 61 \\ \text{rg}(\mathbf{ThirdRoot}_{CO}) &= 31, & \text{am}(\mathbf{ThirdRoot}_{CO}) &= 13. \end{aligned}$$

**Solució amb  $O$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{ThirdRoot}_O(0, 1, z; z^{1/3}) = & \{\ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\ & \mathbf{Trisection}_O(0, 1, z; \ell_8), \\ & \mathbf{CubicRoot}_O(0, 1, z; r^{1/3}), \\ & \mathbf{DistanceProjection}_O(r^{1/3}, \ell_8; z^{1/3})\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{ThirdRoot}_O(0, 1, z; z^{1/3}) = & \{\ell_1 = \mathbf{Line}(0, 1), \\ & \ell_2 = \mathbf{Line}(0, z), \\ & \ell_3 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, 0), \\ & \ell_4 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, 1), \\ & \ell_5, \ell_{12} = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_4), \\ & i = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5), \\ & \ell_6 = \mathbf{PerpendicularBisector}(0, i), \\ & \ell_7, \ell'_7, \ell''_7 = \mathbf{CommonTangent}(\ell_2, 0, \ell_6, i), \\ & \ell_8 = \mathbf{Perpendicular}(0, \ell_7), \\ & \ell_{10}, \ell_{11} = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_2), \\ & \ell_{13} = \mathbf{Perpendicular}(z, \ell_{10}), \\ & \ell_{14} = \mathbf{Perpendicular}(z, \ell_{11}), \\ & r = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{13}), \\ & \ell_9 = \mathbf{Perpendicular}(\ell_1, r), \\ & -r = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{14}), \\ & i = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_5), \\ & -i = \mathbf{LineIntersect}(\ell_3, \ell_{12}), \\ & \ell_{15} = \mathbf{Perpendicular}(-i, \ell_3), \\ & \ell_{16} = \mathbf{CommonTangent}(\ell_9, -r, \ell_{15}, i), \\ & r^{1/3} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_1, \ell_{16}), \\ & \ell_{17}, \ell'_{17} = \mathbf{Bisector}(\ell_1, \ell_8), \\ & \ell_{18} = \mathbf{Perpendicular}(r^{1/3}, \ell_{17}), \\ & z^{1/3} = \mathbf{LineIntersect}(\ell_8, \ell_{18})\}. \end{aligned}$$

**Demostració:** El punt  $z^{1/3}$  s'obté projectant el punt  $r^{1/3}$  sobre la recta  $\ell_8$ , que triseca l'argument de  $z$ .

**Eines:**  $\mathcal{O}$  i totes les generades per aquesta.

**Filtració:**

$$\Phi(\mathbf{ThirdRoot}_{\mathcal{O}}) = \{\{0, 1, z\}, \{\ell_1, \ell_2\}, \{\ell_3, \ell_4, \ell_{10}, \ell_{11}\}, \{\ell_5, \ell_{12}, \ell_{13}, \ell_{14}, i, -i, r, -r\}, \\ \{\ell_6, \ell_9, \ell_{15}\}, \{\ell_7, \ell_{16}, r^{1/3}\}, \ell_8, \ell_{17}, \{\ell_{18}, z^{1/3}\}\};$$

**Mesures:**

$$\begin{aligned} \lg(\mathbf{ThirdRoot}_{\mathcal{O}}) &= 8, & \text{ord}(\mathbf{ThirdRoot}_{\mathcal{O}}) &= 27 \\ \text{rg}(\mathbf{ThirdRoot}_{\mathcal{O}}) &= 18, & \text{am}(\mathbf{ThirdRoot}_{\mathcal{O}}) &= 8. \end{aligned}$$





# Annex E

## Taules

En aquest annex incloem algunes taules que sintetitzem les informacions bàsiques referents als axiomes, les de les eines i els mapes.

### E.1 Taules d'axiomes

Per facilitar la seva localització, repetim les taules d'axiomes incloses en el capítol 1.

**Notació E.1.1.** *En aquestes taules, les lletres majúscules  $A, B, \dots$  sempre indiquen punts; les rectes són indicades per  $\ell, \ell', \dots$  i les altres lletres minúscules  $c, c' \dots$  representen corbes d'altres tipus.*

#### E.1.1 Axiomes bàsics de construcció

| Axioma  | Grau | Descripció   |
|---|------|--|
| $\ell = \mathbf{Line}(A, B)$  | 1    | Recta que passa per $A$ i $B$ .  |
| $c = \mathbf{Circle}(A, B)$   | 1    | Circumferència amb centre $A$ que passa per $B$ .  |
| $c = \mathbf{UnitCircle}(P)$  | 1    | Circumferència amb centre $P$ i radi 1.  |
| $c = \mathbf{RadiusCircle}(A, B, C)$                                  | 1    | Circumferència amb centre $A$ i radi $d(B, C)$ .   |
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{Bisector}(\ell, \ell')$                     | 2    | Bisectriu de $\ell$ i $\ell'$ .  |
| $\ell = \mathbf{PerpendicularBisector}(A, B)$                         | 1    | Mediatriu del segment $AB$ .   |
| $\ell' = \mathbf{Perpendicular}(\ell, P)$                             | 1    | Recta perpendicular a $\ell$ que passa per $P$ .   |
| $\ell = \mathbf{PointPerpendicular}(A, B, C)$                         | 1    | Recta perpendicular a $AB$ que passa per $C$ .   |
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{AngleLine}_\alpha(\ell, P)$                 | 2    | Rectes per $P$ que formen un angle $\alpha$ amb $\ell$ .   |
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{PointAngleLine}_\alpha(A, B, C)$            | 2    | Rectes per $C$ que formen un angle $\alpha$ amb $AB$ .   |
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{Tangent}(\ell, F, A)$                       | 2    | Tangents per $A$ a la paràbola de directriu $\ell$ i focus $F$ .   |
| $\ell_1, \ell_2, \ell_3 = \mathbf{CommonTangent}(\ell, F, \ell', F')$ | 3    | Tangents comunes a la paràbola de directriu $\ell$ i focus $F$ i a la paràbola de directriu $\ell'$ i focus $F'$ . |

| Axioma  | Grau | Descripció   |
|---|------|--|
| $\ell = \mathbf{PerpendicularTangent}(\ell_1, F, \ell_2)$                       | 1    | Recta tangent a la paràbola de directriu $\ell_1$ i focus $F$ , perpendicular a $\ell_2$ . |
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{PointLineVerging}(P, \ell)$                           | 2    | Rectes per $P$ que tallen $\ell$ en punts a distància 1 de $P$ .                           |
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{PointCircleVerging}(P, c)$                            | 2    | Rectes per $P$ que tallen $c$ en punts a distància 1 de $P$ .                              |
| $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 = \mathbf{LineLineVerging}(P, \ell, \ell')$     | 4    | Rectes per $P$ que tallen $\ell, \ell'$ en punts separats per una distància 1.             |
| $\ell_1, \dots, \ell_6 = \mathbf{LineCircleVerging}(P, \ell, c)$                | 6    | Rectes per $P$ que tallen $\ell, c$ en punts separats per una distància 1.                 |
| $\ell_1, \dots, \ell_6 = \mathbf{CircleCircleVerging}(P, c, c')$                | 6    | Rectes per $P$ que tallen $c, c'$ en punts separats per una distància 1.                   |
| $\ell_1, \ell_2 = \mathbf{LineSquadVerging}(\ell, A, B)$                        | 2    | Rectes per $A$ i per $B$ que formen un angle recte quan tallen $\ell$ .                    |
| $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 = \mathbf{LineAngleVerging}_\alpha(\ell, A, B)$ | 4    | Rectes per $A$ i per $B$ que formen un angle $\alpha$ quan tallen $\ell$ .                 |
| $c = \mathbf{Conic}(\ell, F, A, B)$   | 1    | Cònica amb directriu $\ell$ , focus $F$ i excentricitat la distància entre $A$ i $B$ .     |
| $c = \mathbf{Ellipse}(F, F', C)$  | 1    | El·lipse amb focus $F$ i $F'$ i que passa per $C$ .  |
| $c = \mathbf{FivePointConic}(A, B, C, D, E)$                                    | 1    | Cònica que passa pels punts $A, B, C, D$ i $E$ .   |

Taula E.1: Axiomes de construcció

## E.1.2 Axiomes bàsics d'intersecció

| Axioma   | Grau | Descripció   |
|--|------|--|
| $P = \mathbf{LineIntersect}(\ell, \ell')$                      | 1    | Punt de tall de les rectes $\ell$ i $\ell'$ .  |
| $P_1, P_2 = \mathbf{CircleIntersect}(c, c')$                   | 2    | Punts de tall de les circumferències $c, c'$ .   |
| $P_1, P_2 = \mathbf{LineCircleIntersect}(\ell, c)$             | 2    | Punts de tall de $\ell$ amb la circumferència $c$ .  |
| $P_1, P_2 = \mathbf{LineUnitCircleIntersect}(\ell, A)$         | 2    | Punts de tall de la recta $\ell$ i la circumferència amb radi 1 i centre $A$ .               |
| $P_1, P_2 = \mathbf{CircleUnitCircleIntersect}(c, A)$          | 2    | Punts de tall de la circumferència $c$ i la circumferència de centre $A$ i radi 1.           |
| $P_1, P_2 = \mathbf{LineRadiusCircleIntersect}(\ell, A, B, C)$ | 2    | Punts de tall de la recta $\ell$ i la circumferència amb centre $A \in \ell$ , i radi $BC$ . |
| $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{ConicIntersect}(c, c')$             | 4    | Punts de tall de les còniques $c$ i $c'$ .   |
| $P_1, P_2 = \mathbf{LineConicIntersect}(\ell, c)$              | 2    | Punts de tall de $\ell$ amb la cònica $c$ .  |
| $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{CircleConicIntersect}(c, c')$       | 4    | Punts de tall de la circumferència $c$ amb la cònica $c'$ .                                  |

|  |   |  |
|--|---|--|
| $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{LineConchoidIntersect}(\ell, \ell', P)$ | 4 | Punts de tall de $\ell$ amb la concoide de pol $P$ i directriu la recta $\ell'$ .                    |
| $P_1, \dots, P_6 = \mathbf{CircleConchoidIntersect}(c, \ell, P)$   | 6 | Punts de tall de la circumferència $c$ amb la concoide de pol $P$ i directriu la recta $\ell$ .      |
| $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{LineLimaçonIntersect}(\ell, F, c)$      | 4 | Punts de tall de la recta $\ell$ amb el caragol de Pascal de focus $F$ i circumferència $c$ .        |
| $P_1, \dots, P_6 = \mathbf{CircleLimaçonIntersect}(c, F, c')$      | 6 | Punts de tall de la circumferència $c$ amb el caragol de Pascal de focus $F$ i circumferència $c'$ . |
| $P_1, P_2 = \mathbf{LineDiameterCircleIntersect}(\ell, A, B)$      | 2 | Punts de tall de la recta $\ell$ amb la circumferència de diàmetre $AB$ .                            |
| $P_1, \dots, P_4 = \mathbf{LineArcIntersect}_\alpha(\ell, A, B)$   | 4 | Punts de tall de la recta $\ell$ amb l'arc capaç d'angle $\alpha$ del segment $AB$ .                 |

Taula E.2: Axiomes d'intersecció

## E.2 Axiomes de les eines

|                                     | Regle | Compàs | Regle i compàs | Compàs euclidià | Regle i compàs euclidià | Compàs fix | Regle i compàs fix | Regle i compàs de p. s. | Regle marcat | Escaire | Angle | Origami | Origami thalià | Origami pitagòric | Còniques | El·lipses | Regle marcat i compàs |
|-------------------------------------|-------|--------|----------------|-----------------|-------------------------|------------|--------------------|-------------------------|--------------|---------|-------|---------|----------------|-------------------|----------|-----------|-----------------------|
| <b>Line</b>                         | •     |        | •              | •               | •                       |            | •                  | •                       | •            | •       | •     | •       | •              | •                 | •        | •         | •                     |
| <b>Circle</b>                       |       | •      | •              | •               | •                       |            | •                  |                         |              |         |       |         |                |                   | •        | •         | •                     |
| <b>UnitCircle</b>                   |       |        |                |                 |                         | •          | •                  |                         |              |         |       |         |                |                   |          |           |                       |
| <b>RadiusCircle</b>                 |       | •      | •              |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       |         |                |                   | •        | •         | •                     |
| <b>Bisector</b>                     |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       | •       |                | •                 |          |           |                       |
| <b>PerpendicularBisector</b>        |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       | •       | •              | •                 |          |           |                       |
| <b>Perpendicular</b>                |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              | •       |       | •       |                | •                 |          |           |                       |
| <b>PointPerpendicular</b>           |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              | •       |       | •       |                | •                 |          |           |                       |
| <b>AngleLine<sub>α</sub></b>        |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         | •     |         |                |                   |          |           |                       |
| <b>PointAngleLine<sub>α</sub></b>   |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         | •     |         |                |                   |          |           |                       |
| <b>Tangent</b>                      |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       | •       |                |                   |          |           |                       |
| <b>CommonTangent</b>                |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       | •       |                |                   |          |           |                       |
| <b>PerpendicularTangent</b>         |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       | •       |                |                   |          |           |                       |
| <b>PointLineVerging</b>             |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         | •            |         |       |         |                |                   |          |           |                       |
| <b>PointCircleVerging</b>           |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       |         |                |                   |          |           | •                     |
| <b>LineLineVerging</b>              |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         | •            |         |       |         |                |                   |          |           | •                     |
| <b>LineCircleVerging</b>            |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       |         |                |                   |          |           | •                     |
| <b>CircleCircleVerging</b>          |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       |         |                |                   |          |           | •                     |
| <b>LineSquadVerging</b>             |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         | •            |         |       |         |                |                   |          |           |                       |
| <b>LineAngleVerging<sub>α</sub></b> |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         | •     |         |                |                   |          |           |                       |
| <b>Conic</b>                        |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       |         |                |                   | •        |           |                       |
| <b>Ellipse</b>                      |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       |         |                |                   |          | •         |                       |
| <b>LineI</b>                        | •     |        | •              | •               | •                       |            | •                  | •                       | •            | •       | •     | •       | •              | •                 | •        | •         | •                     |
| <b>CircleI</b>                      |       | •      | •              | •               | •                       | •          | •                  |                         |              |         |       |         |                |                   | •        | •         | •                     |
| <b>LineCircleI</b>                  |       |        | •              | •               | •                       | •          | •                  |                         |              |         |       |         |                |                   | •        | •         | •                     |
| <b>LineUnitCircleI</b>              |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         | •            |         |       |         |                |                   |          |           |                       |
| <b>CircleUnitCircleI</b>            |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       |         |                |                   |          |           | •                     |
| <b>LineRadiusCircleI</b>            |       |        |                |                 |                         |            |                    | •                       |              |         |       |         |                |                   |          |           |                       |
| <b>ConicI</b>                       |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       |         |                |                   | •        | •         |                       |
| <b>LineConicI</b>                   |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       |         |                |                   | •        | •         |                       |
| <b>CircleConicI</b>                 |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       |         |                |                   | •        | •         |                       |
| <b>LineConchoidI</b>                |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         | •            |         |       |         |                |                   |          |           | •                     |
| <b>CircleConchoidI</b>              |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       |         |                |                   |          |           | •                     |
| <b>LineLimaçonI</b>                 |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       |         |                |                   |          |           | •                     |
| <b>CircleLimaçonI</b>               |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         |       |         |                |                   |          |           | •                     |
| <b>LineDiameterCircleI</b>          |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              | •       |       |         |                |                   |          |           | •                     |
| <b>LineArcI<sub>α</sub></b>         |       |        |                |                 |                         |            |                    |                         |              |         | •     |         |                |                   |          |           | •                     |

Taula E.3: Axiomes de les eines

### E.3 Relacions entre eines

A continuació presentem un esquema visual de les eines descrites i de les seves relacions:

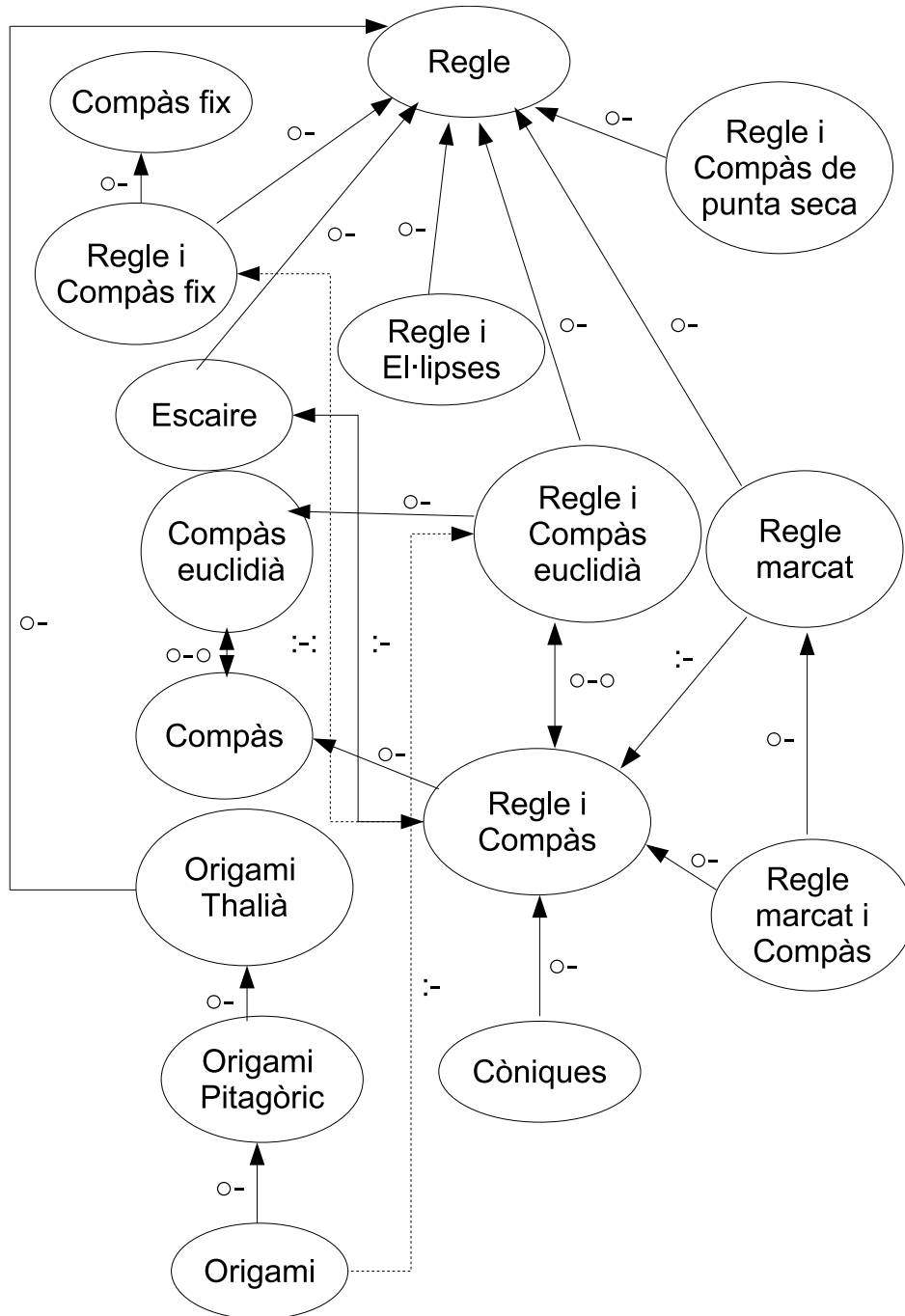


Figura E.1: Eines i relacions

## E.4 Conjunts de punts construïbles dels mapes

| Conjunt construïble        | $\mathbb{Z}[\omega]$ | $\mathbb{Q}(i)$ | E | $\mathbb{V}(i)$ | $\mathbb{P}(i)$ |
|----------------------------|----------------------|-----------------|---|-----------------|-----------------|
| Regle                      |                      | •               |   |                 |                 |
| Compàs                     |                      |                 | • |                 |                 |
| Regle compàs               |                      |                 | • |                 |                 |
| Compàs euclidià            |                      |                 | • |                 |                 |
| Regle compàs euclidià      |                      |                 | • |                 |                 |
| Compàs fix                 | •                    |                 |   |                 |                 |
| Regle compàs fix           |                      |                 | • |                 |                 |
| Regle compàs de punta seca |                      |                 |   |                 | •               |
| Regle marcat               |                      |                 |   | •               |                 |
| Escaire                    |                      |                 | • |                 |                 |
| Regle i circumferència     |                      |                 | • |                 |                 |
| Origami                    |                      |                 |   | •               |                 |
| Origami Pitagòric          |                      |                 |   |                 | •               |
| Regle i el·lipses          |                      |                 |   | •               |                 |
| Còniques                   |                      |                 |   | •               |                 |

Taula E.4: Conjunts de punts construïbles dels mapes

## E.5 Relacions entre mapes

Mostrem, a la Figura E.5, un diagrama dels conjunts de punts dels mapes descrits.

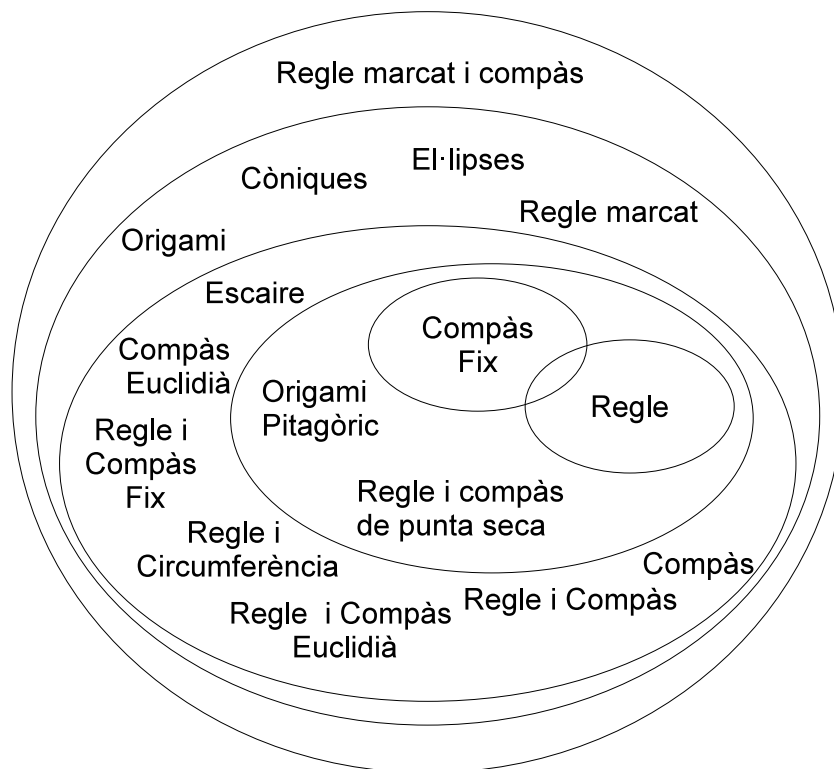


Figura E.2: Diagrama dels conjunts de punts construïbles





# Resum/Summary

## Resum

L'estudi de les construccions geomètriques és un tema que ha ocupat matemàtics des de la Grècia antiga fins l'actualitat. Tot i que els principals protagonistes han estat el regle i el compàs, en les darreres dècades l'interès pel tema ha revifat, incloent d'altres instruments com ara l'origami. Una anàlisi global dels instruments i dels resultats principals sobre ells ens ha portat a introduir un llenguatge formal que ens permet un tractament unificat dels instruments, les seves construccions i els teoremes relacionats. Els conceptes principals d'aquest llenguatge són els d'axioma, eina i mapa. Les eines formalitzen els instruments geomètrics. Tota eina té associats uns axiomes, que són els processos bàsics que permet fer l'instrument. Definim formalment les construccions com a successions d'axiomes, que inclouen tota la informació necessària per descriure el procés que es du a terme. El llenguatge que presentem pretén ésser sistemàtic, però alhora és flexible i obert, per tal que s'hi puguin incorporar, si s'escau, nous instruments i construccions.

Una vegada definits els conceptes d'eina i de construcció, proposem una classificació de les eines segons dues relacions d'equivalència: l'equivalència geomètrica i l'equivalència virtual. Aquestes classificacions permeten reformular resultats coneguts, com ara el teorema de Mohr-Mascheroni, i provar noves relacions entre eines.

El mapa és un objecte geomètric i aritmètic que està format per una eina i un conjunt inicial de punts i de corbes. Els mapes tenen associades capes, compostes i generades iterativament per punts i corbes. La complexitat dels mapes i de les seves capes fa que la informació que se'n pot donar sigui sovint escassa. El seu estudi té una relació estreta amb certs problemes de geometria computacional. Donem, per a alguns mapes determinats, el creixement asimptòtic del cardinal del nombre de punts i de corbes de cada capa. En el cas del mapa del compàs fix caracteritzem exactament els conjunts de punts i de corbes de cada capa del mapa. Introduïm una classificació dels mapes, que agrupa aquells que tenen el mateix conjunt de punts construïbles. El teorema de Poncelet-Steiner es formula de manera molt natural en el llenguatge dels mapes, que ens permet establir noves relacions entre eines. A partir de la classificació dels mapes, introduïm una classificació aritmètica de les eines i donem nous resultats d'equivalència aritmètica, utilitzant els conceptes algebraics de grau d'un axioma i signatura d'una eina.

En una altra direcció, estudiem l'estructura de les construccions, a les quals associem dos tipus de mesures. Un primer tipus de mesures extrínseques són el nivell i el nivell virtual. Els nivells fan ús de les capes de mapes associats a la construcció. Les mesures intrínseques d'una construcció, són la llargada, l'amplada, l'ordre i el rang. La introducció de totes aquestes mesures permet donar criteris de minimalitat i optimalitat d'una construcció. Calculem aquestes mesures per a les construccions aritmètiques i algebraiques bàsiques i deduïm relacions entre diferents capes dels mapes del regle i el compàs, l'origami i les còniques.

Al llarg del treball, il·lustrem la nostra formalització amb diversos catàlegs: un catàleg d'axiomes, que conté els axiomes dels instruments més coneguts; un catàleg d'eines, on fem un recull de les principals eines conegudes i les construccions principals que es poden fer amb elles; i un catàleg de mapes, que recopila resultats de constructibilitat, i incorpora algun mapa vinculat a eines noves, amb la caracterització del seu conjunt de punts construïbles. Finalment, presentem un catàleg de construccions, que consta d'una setantena de construccions, descrites amb el nou llenguatge que hem introduït, les seves mesures i la demostració de la seva validesa. La versió digital de la tesi incorpora enllaços a animacions interactives on es poden reproduir els passos de les construccions.

## Summary

Geometric constructions have been studied by mathematicians from ancient Greece until now. Although most attention has been given to the ruler and compass, during the last decades interest in this subject has revived, and includes now other instruments such as origami. A global analysis of instruments and the main results about them has led us to introduce a formal language that allows a unified treatment of instruments and their constructions and related theorems. The main concepts of this language are axioms, tools and maps. Tools formalize geometric instruments. A tool has associated axioms, which are the basic processes that can be done with the instrument. We give a formal definition of a construction as a sequence of axioms, which includes all the information that is needed to describe the process that takes place. The language we introduce needs to be systematic, but also flexible and open, so that new instruments and constructions can be included.

Once concepts of a tool and a construction are defined, we establish a classification of tools following two different equivalence relations: geometric equivalence and virtual equivalence. These classifications allow the reformulation of not only known results, like the Mohr-Mascheroni theorem, but also a proof of new relations between tools.

A map is a geometric and arithmetic object which is a tool plus an initial set of points and curves. Maps have associated layers, where points and curves are created iteratively. Because of the complexity of maps and their layers, we can often say little about them. Their study is related to some problems in computational geometry.

For some maps, we are able to study the asymptotic growth of the cardinality of the number of points and curves on each layer. We make a complete characterization of the map of the rusty compass, and give details of points and curves in each layer. We also introduce a classification of the maps, that relates those that have the same set of constructible points. The Poncelet-Steiner theorem can be explained in a very natural way using maps. The language of maps allows us to establish new relations between tools. The classification of maps gives an arithmetic classification of tools. We present new results on arithmetic equivalence, using algebraic concepts such as the degree of an axiom and the signature of a tool.

On the other hand, we study the structure of constructions, and associate them with two types of measures. As the first type of extrinsic measures, we define the level and the virtual level. Levels come from the use of layers of maps associated with the constructions. Intrinsic measures of a construction are length, weight, order, and rank. These measures allow us to give a criteria of minimality and optimality of a construction. We calculate these measures for the basic arithmetic and algebraic constructions and deduce relations between different layers from the maps of the ruler and compass, origami and conics.

Throughout the thesis, we illustrate our formalization with several catalogs: a catalog of axioms, which contains the axioms of the most famous instruments, a catalog of tools, where we present the main tools known and the constructions one can do with them, and a catalog of maps, which compiles the results of constructibility, and incorporates some maps associated with new tools, and the corresponding sets of constructible points. Finally, we present a catalog of constructions, consisting of around seventy constructions described by the new language that we have introduced, its measures and the proof of their correctness. The digital version of the thesis includes links to interactive animations that can reproduce the steps of the constructions.

# Índex alfabètic

- Angle capaç, 96
- Axioma
  - d'intersecció, 11
  - de construcció, 11
  - algebraic, 12
  - irreductible, 12
- Caragol de Pascal, 94
- Concoide de Nicomedes, 92
- Construcció, 23
  - $\mathcal{E}$ -nivell d'un objecte, 66
  - $\mathcal{E}$ -nivell virtual, 66
  - Amplada d'una, 70
  - Capes d'una, 65
  - Conjunt d'objectes, 65
  - de punts amb punts, 38
  - equivalent, 37
  - Filtració d'una, 69
  - generalitzada, 25
  - Llargada d'una, 70
  - Nivell d'una, 66
  - Objecte prescindible d'una, 69
  - Ordre d'una, 70
  - Rang d'una, 70
- Construcció  $\mathcal{E}$ -minimal, 72
- Construcció  $\mathcal{E}$ -optimal, 72
- Construcció simple, 71
- Construccions equivalents, 24
- Corba
  - construïble amb una eina, 21
  - intersecable, 21
- Eina, 19
  - angle, 32
  - compàs, 30
  - compàs euclidià, 30
  - compàs fix, 31
  - coniques, 34
  - escaire, 32
  - generadora, 37
  - generalitzada, 25
  - origami, 33
  - origami angular, 33
  - origami pitagòric, 33
  - origami thalià, 33
  - regle, 29
  - regle i compàs, 30
  - regle i compàs de punta seca, 31
  - regle i compàs euclidià, 31
  - regle i compàs fix, 31
  - regle i el·lipses, 34
  - regle marcat, 32
  - regle marcat i compàs, 35
  - signatura, 19
  - subeina d'una, 21
  - unió, 22
- Eina fortament completa, 78
- Eines
  - aritmèticament equivalents, 53
  - equivalència geomètrica, 37
  - Equivalència virtual, 38
  - generació virtual, 38
- Grau d'un axioma, 11
- Hipòtesi de completesa, 20
- Inclinació, 16
- Invariants
  - Compàs fix, 87
- Mapa, 27

angle, 104  
 aritmètic, 51  
 aritmètic , 51  
 còniques, 107  
 còniques per cinc punts, 108  
 Capes del mapa del compàs fix, 84  
 compàs, 100  
 compàs euclidià, 100  
 Compàs fix, 83  
 compàs fix, 83, 101  
 conjunt de corbes i punts construïbles,  
     27  
 escaire, 103  
 geomètricament aritmètic, 51  
 geomètricament aritmètic , 51  
 infinit, 27  
 origami, 104  
 origami ciclotòmic, 106  
 origami pitagòric, 105  
 origami thalià, 105  
 regle, 99  
 regle i circumferència, 103  
 regle i compàs, 100  
 regle i compàs de punta seca, 102  
 regle i compàs euclidià, 101  
 regle i compàs fix, 101  
 regle i el·lipses, 106  
 regle marcat, 102  
 regle marcat i compàs, 106  
 successió de capes, 27  
 Mapes equivalents, 52  
 Mesures, 65  
  
 Neusis, 16  
 Nivell d'un objecte, 78  
  
 Ordre d'un objecte, 78  
  
 Problema, 24  
     solució, 24  
 Punt  
     marcable, 21  
  
 Subeina minimal, 49  
  
 Teorema  
     Mohr-Mascheroni feble, 40  
     Poncelet-Steiner, 54  
  
 Verging, 16



# Bibliografia

- [1] Hisashi Abe. Described in *British Origami*. *New York Journal of Mathematics*, 6(108):9, 1984.
- [2] Roger C. Alperin. A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers. *New York Journal of Mathematics*, 6:119–133, 2000.
- [3] Roger C. Alperin. Trisections and totally real origami. *American Mathematical Monthly*, 112(3):200–211, 2005.
- [4] Roger C. Alperin and Robert J. Lang. One, Two, and Multi-Fold Origami Axioms. In *Origami<sup>4</sup>*, pages 371–394. A K Peters, 2006.
- [5] Boris Aronov and Micha Sharir. Cutting circles into pseudo-segments and improved bounds for incidences. *Geom*, 28:475–490, 2010.
- [6] David Auckly and John Cleveland. Totally real origami and impossible paper folding. *American Mathematical Monthly*, 102(3):215–226, 1995.
- [7] Arthur Baragar. Constructions using a Compass and Twice-Notched Straightedge. *The American Mathematical Monthly*, 109:151–164, 2002.
- [8] V. J. Baston and F. A. Bostock. On the impossibility of ruler-only constructions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 110(4):1017–1025, 1990.
- [9] Michael Beeson. *The Parallel Postulate in Constructive Geometry*, 2009.
- [10] Wieb Bosma, John Cannon, and Catherine Playoust. The Magma algebra system. I. The user language. *J. Symbolic Comput.*, 24(3-4):235–265, 1997. Computational algebra and number theory (London, 1993).
- [11] Michel Chasles. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. M. Hayez, Bruxelles, 1837.
- [12] Richard Courant and Herbert Robbins. *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford University Press, 1996.
- [13] David A. Cox. *Galois Theory*. Wiley, New Jersey, 2004.



- [14] David A. Cox and Jerry Shurman. Geometry and Number Theory on Clovers. *The American Mathematical Monthly*, 112:682–704, 2005.
- [15] Duane W. DeTemple. Carlyle Circles and the Lemoine Simplicity of Polygon Constructions. *The American Mathematical Monthly*, 98(2):97–108, 1991.
- [16] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones arithmeticae*. Societat Catalana de Matemàtiques, Barcelona, 1968.
- [17] Robert Geretschläger. Euclidean Constructions and the Geometry of Origami. *Mathematics Magazine*, 68(5):357–371, 1995.
- [18] Aliska Gibbins and Lawrence Smolinsky. Geometric Constructions with Ellipses. *The Mathematical Intelligencer*, 31(1):57–62, 2009.
- [19] Francisco Gomes. *Tratado de las curvas especiales notables*. Imprenta de la Gaceta de Madrid, Madrid, 1905.
- [20] Larry Guth and Nets Hawk Katz. On the Erdős distinct distance problem in the plane. *arXiv:1011.4105v3*, 2010.
- [21] Robert Hartshorne. *Geometry: Euclid and beyond*. Springer V., New York, 2000.
- [22] Koshiro Hatori. <http://origami.ousaan.com/library/conste.html>, 2011.
- [23] David W. Henderson and Daina Taimina. Mathematical Tutorial of the Peaucellier-Lipkin Linkage. <http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/11/>, 2006.
- [24] David Hilbert. *The Foundations of Geometry*. The Open Court Publishing Company, Illinois, 1950.
- [25] Jan P. Hogendijk. Arabic traces of lost works of apollonius. *Archive for History of Exact Sciences*, 35:187–253, 1986.
- [26] Markus Hohenwarter. Geogebra. [http://wiki.geogebra.org/en/Release\\_Notes\\_GeoGebra\\_4.0](http://wiki.geogebra.org/en/Release_Notes_GeoGebra_4.0), May 2012.
- [27] Thomas Hull. *Project Origami*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 2006. Activities for Exploring Mathematics.
- [28] Humiaki Huzita and Benedetto Scimemi. *The Algebra of Paper-Folding (Origami)*. Commune di Ferra and Centro Origami Duffusion, 1989. Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology.
- [29] Jordi Guàrdia i Eulàlia Tramuns. Geometric Constructions. <http://geometricconstructions.blogspot.com>, 2012.

- [30] Warwick de Launey Joe Buhler, Steve Butler and Ron Graham. Origami rings. *arXiv:1011.2769v1*, 2010.
- [31] David E. Joyce. Euclid's Elements. <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>, 1997.
- [32] Jacques Justin. Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques. In *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, pages 251–261. Humiaki Huzita, 1989.
- [33] A. N. Kostovskii. *Geometrical constructions using compass only*. Blaisdell Publishing, Barcelona, 1961.
- [34] Johann H. Lambert. *Freye Perspective - oder Anweisung, jeden perspektivischen Aufzug von freyen Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen*. Kessinger Legacy Reprints, Zürich, 1759.
- [35] Robert J. Lang. Huzita Justin axioms. <http://www.langorigami.com/science/hha/hha.php4>, 2011.
- [36] Robert J. Lang. Quintisection. <http://www.langorigami.com/science/math/quintisection/quintisection.php>, 2011.
- [37] Robert J. Lang. Referencefinder. <http://www.langorigami.com/science/reffinder/reffinder.php4>, 2011.
- [38] Serge Lang. *Fundamentals of diophantine geometry*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [39] Émile Lemoine. *Géométopgraphie ou Art des constructions géométriques*. Scientia, Paris, 1902.
- [40] John S. Mackay. The geometrography of Euclid's problem. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 12:2–16, 1893.
- [41] George E. Martin. *Geometric constructions*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [42] Lorenzo Mascheroni. *La Geometria del Compasso*. Era Nova, Palermo, 1901.
- [43] Peter Messer. Problem 1054. *Crux Mathematicorum*, 12(10):284–285, 1986.
- [44] John O'Connor and Edmund F. Robertson. Trisecting an angle. [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Trisecting\\_an\\_angle.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Trisecting_an_angle.html), 1999.
- [45] James Pierpont. On an undemonstrated theorem of the Disquisitiones Arithmeticae. *American Mathematical Monthly Bulletin*, 2:77–83, 1895-1896.

- [46] Stefan Porubsky. Poncelet-Steiner Theorem. <http://www.cs.cas.cz/portal/AlgoMath/Geometry/PlaneGeometry/GeometricConstructions/PonceletSteinerTheorem.htm>, 2006.
- [47] Tomohiro Tachi and Erik D. Demaine. Degenerative coordinates in  $22.5^\circ$  grid system. In *Origami<sup>5</sup>*, pages 489–497. A K Peters, July 2010.
- [48] Daina Taimina. <http://kmoddl.library.cornell.edu/linkages/>, 2011.
- [49] Eulàlia Tramuns. The speed of origami versus other construction tools. In *Origami<sup>5</sup>*, pages 531–542. A K Peters, July 2010.
- [50] Carlos Videla. On points Constructible from Conics. *The Mathematical Intelligencer*, 19(2):53–57, 1997.
- [51] Pierre Wantzel. Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1(2):366–372, 1837.
- [52] Robert C. Yates. The Angle Ruler, the Marked Ruler and the Carpenter’s Square. *National Mathematics Magazine*, 15(2):61–73, 1940.