



# Contribuciones a la dependencia y dimensionalidad en cópulas

Walter Díaz

**ADVERTIMENT.** La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX ([www.tdx.cat](http://www.tdx.cat)) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

**ADVERTENCIA.** La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR ([www.tdx.cat](http://www.tdx.cat)) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

**WARNING.** On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX ([www.tdx.cat](http://www.tdx.cat)) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.



CONTRIBUCIONES A LA DEPENDENCIA Y DIMENSIONALIDAD  
EN CÓPULAS

MEMORIA PRESENTADA POR:

Walter Díaz

PARA OPTAR AL TÍTULO DE DOCTOR POR LA  
UNIVERSIDAD DE BARCELONA

DOCTORANDO:

Walter Díaz

DIRECTOR:

Dr. Carles M. Cuadras Avellana

Universidad de Barcelona  
Facultad de Biología  
Programa de Doctorado en Estadística  
Departamento de Estadística  
Barcelona, Octubre 2012



# Agradecimientos

Quiero agradecer muy especialmente a mi director de tesis, el Dr. Carles M. Cuadras Avellana al que admiro en el ámbito profesional y personal. Gracias por guiarme en el mundo de la teoría de cópulas. Ha sido todo un honor compartir con él desde los primeros encuentros hasta las últimas correcciones de los capítulos.

A Sergio Restrepo, por ser la persona que siempre ha creído en mi, por haberme animado a realizar este doctorado y por brindarme su apoyo incondicional en cada momento que lo he necesitado. Al Dr. Jordi Ocaña por sus enseñanzas en los temas de simulación y programación en R, además de ser la persona que me abrió las puertas para adelantar este doctorado. Al Dr. Josep M. Oller por sus enseñanzas y disposición constante a escucharme y ayudarme en el desarrollo de mi memoria en sus campos de conocimiento.

A los profesores Toni Monleón G., Carlos Crespo y Martín Ríos A., por animarme y apoyarme a salir adelante con la tesis. A mis compañeras del doctorado, Pilar Sánchez y Carolina Barroeta, por compartir los buenos y no tan buenos momentos en el transcurso del doctorado.

Agradezco con el corazón a Ana M. Ruiz C., por su amor, apoyo y sacrificio que me han permitido culminar este sueño. A mi familia, muy especialmente a mi madre, a quién le dedico esta memoria, cuyo apoyo incondicional, perseverante, constante y afectuoso, me han dado las fuerzas necesarias para continuar adelante. A mi tía Gloria, que aunque nos hemos visto poco, en los escasos minutos que estuve en el aeropuerto, siempre estaba allí para darme sus ánimos y cariño, igual que cuando era pequeño.

Por último, agradezco a todas las personas que no he mencionado, pero que me han acompañado en este duro y lento caminar hacia la culminación de mi doctorado.



# Resumen

El concepto de dependencia aparece por todas partes en nuestra tierra y sus habitantes de manera profunda. Son innumerables los ejemplos de fenómenos interdependientes en la naturaleza, así como en aspectos médicos, sociales, políticos, económicos, entre otros. Más aún, la dependencia es obviamente no determinística, sino de naturaleza estocástica. Es por lo anterior que resulta sorprendente que conceptos y medidas de dependencia no hayan recibido suficiente atención en la literatura estadística. Al menos hasta 1966, cuando el trabajo pionero de E.L. Lehmann probó el lema de Hoeffding. Desde entonces, se han publicado algunas generalizaciones de este. Nosotros hemos obtenido una generalización multivariante para funciones de variación acotada que agrupa a las planteadas anteriormente, al establecer la relación entre los planteamiento presentados por Quesada-Molina (1992) y Cuadras (2002b) y extendiendo este último al caso multivariante.

Uno de los conceptos importante en la interpretación estadística esta relacionada con la dimensión. Es por eso que hemos definido la dimensionalidad geométrica de una distribución conjunta  $H$  en función del cardinal del conjunto de correlaciones canónicas de  $H$ , si  $H$  se puede representar mediante una expansión diagonal. La dimensionalidad geométrica ha sido obtenida para algunas de las familias de cópulas más conocidas. Para determinar la dimensionalidad de algunas de las copulas, se utilizaron métodos numéricos. De acuerdo con la dimensionalidad, hemos clasificado a las cópulas en cuatro grupos: las de dimensión cero, finita, numerable o continua. En la mayoría de las cópulas se encontro que poseen dimensión numerable.

Con el uso de dos funciones que satisfacen ciertas condiciones de regularidad, se ha obtenido una extensión generalizada para la cópula Gumbel-Barnett, a la que hemos deducido sus principales propiedades y medidas de dependencia para algunas funciones

en particular.

La cópula FGM es una de las cópulas con más aplicabilidad en campos como el análisis financiero, y a la que se le han obtenido un gran número de generalizaciones para el caso simétrico. Nosotros hemos obtenido dos nuevas generalizaciones. La primera fue obtenida al adicionar dos distribuciones auxiliares y la segunda generalización es para el caso asimétrico. En esta última caben algunas de las generalizaciones existentes. Para ambos casos se han deducido los rangos admisibles de los parámetros de asociación, las principales propiedades y las medidas de dependencia.

Demostramos que si se conocen las funciones canónicas de una función de distribución, es posible aproximarla a otra función de distribución a través de combinaciones lineales de las funciones canónicas. Como ejemplo, consideramos la cópula FGM en dos dimensiones, en el sentido geométrico, debido a que se conocen sus funciones canónicas, y hemos comprobado numéricamente que su aproximación a otras cópulas con dimensión numerable es aceptablemente bueno.

## SUMMARY

The concept of dependency is everywhere in our land and its inhabitants in a profound way. There are countless examples of interdependent phenomena in nature, or related to medical, social, political and economic aspects. Moreover, dependence is obviously non deterministic, but stochastic in nature. For this reason, it is surprising that concepts and measures of dependence have not been paid enough attention in the statistical literature; at least until 1966 when the pioneering work of E.L. Lehmann proved Hoeffding's lemma, some generalizations of this have been released since then. We have obtained a multivariate generalization for functions of bounded variation that groups the above mentioned generalizations, by ascertaining the relation between the approaches presented by Quesada-Molina (1992) and Cuadras (2002b) and extending the latter to the multivariate case.

One of the important concepts in statistical interpretation deals with dimensionality, which is why we have defined the geometric dimensionality of a joint distribution  $H$  as a function of the cardinal of the set of canonical correlations of  $H$ , if  $H$  can be represented by a diagonal expansion. The geometrical dimensionality has been obtained for some of the best known families of copulas. To determine the dimensionality of some copulas,

numerical methods were used. According to the dimensionality, we have classified the copulas into four groups: the zero-, finite-, countable- or continuous-dimensional. Most of the copulas were found to possess countable dimension.

With the use of two functions that satisfy certain regularity conditions, we have obtained a generalized extension of the Gumbel-Barnett copula, for which we have derived its main properties and measures of dependence, particularly for some functions.

The FGM copula is one of the copulas with more applicability in fields such as financial analysis, and for which a large number of generalizations for the symmetric case have been obtained. We have obtained two new generalizations: the first was obtained by adding two auxiliary distributions and the second generalization is to the asymmetric case, in the latter some existing generalizations do fit. For both cases, the allowable ranges of association parameters, as well as the main properties and dependence measures have been deducted.

We show that if the canonical functions of a distribution function are known, it is possible to approximate it to another distribution function through linear combinations of canonical functions. As an example, consider the two-dimensional FGM copula, in the geometric sense, because their canonical functions are known and we have numerically found that their approximation to other copulas with countable dimension is acceptably good.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Teoría de cópulas</b>	<b>5</b>
2.1. Definición de cópula . . . . .	6
2.2. Teorema de Sklar . . . . .	8
2.3. Cópulas y variables aleatorias . . . . .	10
2.4. Las cotas de Fréchet-Hoeffding . . . . .	12
2.5. Medidas de concordancia . . . . .	13
2.5.1. La tau de Kendall . . . . .	17
2.5.2. La rho de Spearman . . . . .	18
2.5.3. El índice de Gini . . . . .	18
2.5.4. La medida de Blomqvist . . . . .	19
2.6. Familias de cópulas de uso más frecuente . . . . .	20
2.6.1. Cópulas elípticas . . . . .	20
2.6.2. Cópulas arquimedianas . . . . .	25
2.6.3. Cópulas de valores extremos . . . . .	32
<b>3. Lema de Hoeffding y extensiones</b>	<b>35</b>
3.1. Lema de Hoeffding . . . . .	36
3.2. Generalización del Lema de Hoeffding . . . . .	38
3.3. Aplicaciones . . . . .	44
<b>4. Dimensionalidad en cópula</b>	<b>49</b>
4.1. Descomposición propia de un núcleo . . . . .	50
4.2. Expansión diagonal . . . . .	53

4.3.	Dimensionalidad geométrica . . . . .	58
4.4.	Ejemplo . . . . .	60
4.4.1.	Fréchet . . . . .	60
4.4.2.	FGM . . . . .	62
4.4.3.	FGM generalizada . . . . .	63
4.4.4.	Cuadras Augé . . . . .	66
4.4.5.	AMH . . . . .	67
4.4.6.	Gumbel-Barnett . . . . .	69
4.4.7.	Clayton-Oakes . . . . .	71
4.4.8.	Joe . . . . .	72
4.4.9.	Nelsen . . . . .	73
<b>5.</b>	<b>La cópula Gumbel-Barnett extendida</b>	<b>75</b>
5.1.	Definición y propiedades básicas . . . . .	76
5.2.	Medidas de asociación . . . . .	81
5.3.	Dependencia . . . . .	84
5.3.1.	Dependencia en el cuadrante positivo y negativo . . . . .	84
5.3.2.	Monotonicidad en las colas . . . . .	85
5.3.3.	Dependencia en las colas . . . . .	88
5.4.	Ejemplos adicionales . . . . .	89
<b>6.</b>	<b>Generalización de la cópula FGM</b>	<b>95</b>
6.1.	La familia de cópulas FGM extendida . . . . .	97
6.2.	Sub-familia FGM . . . . .	107
6.3.	Propiedades de la sub-familia FGM . . . . .	109
<b>7.</b>	<b>Extensión de la FGM a dos dimensiones</b>	<b>115</b>
7.1.	La FGM a dos dimensiones . . . . .	116
7.2.	Aproximación de una distribución bivalente a otra de dimensión finita .	123
7.3.	Ejemplos . . . . .	124
7.3.1.	Cópula Ali-Mikhail-Haq (AMH) . . . . .	124
7.3.2.	Cópula Clayton-Oakes . . . . .	127
7.3.3.	Cópula Gumbel-Barnett (GB) . . . . .	128

<b>8. Aplicación de la teoría de cópulas al análisis financiero</b>	<b>129</b>
8.1. Descripción de datos . . . . .	131
8.2. Estimación . . . . .	132
8.3. Aproximación bi-dimensional a la cópula FGM . . . . .	142
<b>9. Conclusiones</b>	<b>145</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>149</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Las cópulas han sido estudiadas bajo diferentes nombres, como por ejemplo, funciones de dependencia o la representación uniforme de una distribución. En la teoría de probabilidad, las funciones llamadas cópulas son en sí funciones de distribución que representan las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias. Los trabajos de Hoeffding (1940, 1948) fueron los primeros en caracterizar la estructura de dependencia entre diferentes variables aleatorias. Más tarde Sklar (1959), en su conocido teorema, demuestra que una función de distribución multivariante se puede descomponer en dos componentes: la estructura de dependencia y el comportamiento univariante. La primera componente es la función cópula y la segunda se relaciona con las funciones de distribución marginales. Sklar fue el primero en emplear en un sentido matemático y estadístico la palabra cópula.

En algunas ciencias, como por ejemplo en la actuarial, las cópulas se utilizan para simular la dependencia entre la mortalidad y las pérdidas (Frees *et al.*, 1996; Frees y Valdez, 1998; Frees y Wang, 2005). En las finanzas, se utilizan en la asignación de activos, la calificación del riesgo de crédito que se deriva de la fijación de precios y la gestión de riesgos (Bouyé *et al.*, 2000; Embrechts *et al.*, 2003; Cherubini *et al.*, 2004). En estudios biomédicos, se emplean para modelar la correlación entre los tiempos de ocurrencia y los riesgos competitivos (Wang y Wells, 2000; Escarela y Carriere, 2003). En ingeniería, se utilizan en procesos de control multivariantes y en los modelos hidrológicos (Yan, 2006; Genest y Favre, 2007).

Una de las ventajas de utilizar las cópulas es que estas presentan el concepto de dependencia como una estructura que describe completamente la relación entre las variables, en vez de resumirla en un solo valor, como es el caso del coeficiente de correlación, y otra es que la estructura de dependencia en una cópula es invariante ante transformaciones monótonas crecientes de sus distribuciones marginales (McNeil *et al.*, 2005). Para una introducción más amplia a la teoría de cópulas se pueden consultar los textos de Joe (1997) y Nelsen (2006).

Debido a las múltiples limitaciones del coeficiente de Pearson, existen otras medidas de dependencia que son útiles que se pueden obtener a partir de la cópula. Una clase importante son los coeficientes de rango (véase la sección 2.5) y otra los de dependencia en las colas (véase la sección 5.3.3). Entre las medidas de correlación de rango encontramos el coeficiente de correlación de Spearman ( $\rho_S$ ) que mide la correlación lineal entre las variables aleatorias transformadas por sus funciones de distribución y el coeficiente de correlación de Kendall ( $\tau$ ) entendido como la diferencia entre la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia, es decir, cambios positivos (negativos) de una variable están asociados a cambios positivos (negativos) de la otra.

## Objetivos y Resultados

En esta memoria se tienen cuatro objetivos. El primero es obtener una generalización multivariante del Lema de Hoeffding para la clase de funciones de variación acotada. El segundo, determinar la dimensionalidad geométrica de algunas cópulas simétricas. El tercero, obtener una nueva familia de cópulas a partir de la cópula de Gumbel-Barnett y de la cópula FGM y por último, ajustar la cópula FGM bidimensional a un conjunto de datos reales a fin de evaluar su aplicabilidad.

La memoria se compone de los siguientes siete capítulos, en los que se exponen los diferentes métodos y resultados, y un último capítulo dedicado a las conclusiones más relevantes. La estructura es la siguiente:

En el capítulo 2, se establecerá la definición formal de una función cópula, sus propiedades, el teorema de Sklar como el teorema fundamental de la teoría de cópulas y las medidas de concordancia más relevantes, como son: la tau de Kendall, la rho de Spearman, el índice de Gini y el coeficiente de Blomqvist, y las familias de cópulas más utilizadas como las cópulas elípticas, arquimedianas y de valor extremo.

En el capítulo 3, se presentará una generalización del Lema de Hoeffding al caso multivariante de funciones de variación acotada. Además se establecerá la relación entre el Lema de Hoeffding para funciones quasi-monótonas propuesto por Quesada-Molina (1992) y el Lema de Hoeffding para funciones de variación acotada propuesto por Cuadras (2002b).

En el capítulo 4, obtendremos la dimensionalidad geométrica de algunas de las funciones cópulas simétricas más conocidas en función de la expansión diagonal de una función de distribución. La dimensionalidad es un concepto importante en el análisis multivariante en el contexto de la representación de los datos, entendiendo el término dimensionalidad para la cópula como el cardinal del conjunto de correlaciones canónicas.

En el capítulo 5, se generalizará la familia de cópula Gumbel-Barnett, al caso de funciones continuas, acotadas y cuya primera derivada es no nula al evaluarla en uno. Se obtendrán sus propiedades y sus medidas de asociación, además se estudiarán otras formas de dependencia que se encuentran entre los extremos de la independencia y la dependencia funcional monótona, para la familia de cópulas Gumbel-Barnett extendida.

En el capítulo 6, obtendremos dos nuevas generalizaciones de la familia de cópulas FGM, con la ayuda de dos funciones de distribución adicionales. Se estudiarán sus propiedades más importantes.

En el capítulo 7, extendemos la cópula FGM al caso de dos dimensiones en el sentido geométrico, para luego aproximarla a otras familias de cópulas como la AMH y la Clayton-Oakes.

En el capítulo 8, como una aplicación, se analizarán los retornos logarítmicos diarios de los índices financieros DAX e Ibex 35, a fin de obtener la cópula que mejor se ajuste, para luego ajustar la cópula FGM a dos dimensiones como una alternativa de ajuste.

Esta memoria finaliza con un último capítulo, en el que se resumen las conclusiones más importantes, así como las cuestiones que puedan considerarse como puntos de partida para futuras investigaciones.



# Capítulo 2

## Teoría de cópulas

Las funciones llamadas cópulas permiten representar las funciones de distribución conjunta, así como distinguir el comportamiento de las marginales a partir del patrón de dependencia capturado por la cópula misma, por lo que se han convertido en una popular herramienta de modelado multivariante en muchos campos donde el análisis de dependencia es de interés y la usual normalidad multivariante es cuestionada. Esencialmente, las cópulas nos proporcionan una manera relativamente sencilla de entender algunos modelos, que partían de la hipótesis de normalidad conjunta, a situaciones más generales incluyendo aquellas en las que se supone normalidad únicamente en las marginales.

En la sección 2.1, encontramos la definición de cópula. En la sección 2.2, mostramos el teorema más importante de la teoría de cópulas conocido como teorema de Sklar y sus propiedades más importantes. En la sección 2.3, introducimos la definición de variables aleatorias y su relación con el concepto de cópula. En la sección 2.4, definimos las cotas de Fréchet-Hoeffding para funciones de distribución conjunta en términos de cópulas. En la sección 2.5, definimos las medidas de dependencia tau de Kendall, rho de Spearman, el índice de Gini y la medida de Blomqvist. En la sección 2.6, presentamos las familias de cópulas elípticas, arquimedianas y de valor extremo que son de uso muy frecuente en el estudio de las relaciones de dependencia.

## 2.1. Definición de cópula

**Definición 2.1.** Una cópula es una función de distribución multivariante  $C : [0, 1]^n \mapsto [0, 1]$ , cuyas distribuciones marginales (individuales) son uniformes estándar  $U_i \sim U(0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . La cópula posee las siguientes propiedades para todo  $u_i \in [0, 1]$ ;  $i = 1, \dots, n$ :

1.  $C(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) = 0$ ;
2.  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ ;
3.  $\partial_{u_1, \dots, u_n} C$  es una medida positiva en el sentido de la distribución de Schwartz. Esto significa concretamente que para cualquier hipérbulo  $H = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset [0, 1]^n$  tenemos

$$P[(U_1, \dots, U_n) \in H] \geq 0.$$

Una función que cumpla estas tres condiciones se puede ver como la función de distribución conjunta de un vector de variables uniformes en el intervalo  $[0, 1]$ , y por tanto una cópula.

En la literatura existen cópulas que tienen una estructura simple y que pertenecen a la familia de cópulas caracterizadas por un parámetro. Algunas de las cópulas bivariantes más conocidas se presentan en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Familias de cópulas de un parámetro

Cópula	Fórmula	Parámetro $\theta$
Clayton	$[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta}$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1})$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
AMH	$uv/[1 - \theta(1 - u)(1 - v)]$	$[-1, 1]$
FGM	$uv[1 + \theta(1 - u)(1 - v)]$	$[-1, 1]$
Cuadras-Augé	$(\min\{u, v\})^\theta (uv)^{1-\theta}$	$[0, 1]$
Gumbel-Hougaard	$\exp\{-[(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha]^{1/\alpha}\}$	$[1, \infty)$
Gumbel-Barnett	$uv \exp(-\theta \ln u \ln v)$	$(0, 1]$
Joe	$1 - [(1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta - (1 - u)^\theta (1 - v)^\theta]^{1/\theta}$	$[1, \infty)$

El teorema que presentaremos a continuación establece la continuidad de las cópulas via la condición de Lipschitz:

**Teorema 2.1.** *Sea  $C$  una cópula. Entonces para todo  $(u_1, \dots, u_n)$  y  $(v_1, \dots, v_n) \in [0, 1]^n$ :*

$$|C(v_1, \dots, v_n) - C(u_1, \dots, u_n)| \leq \sum_{k=1}^n |v_k - u_k|.$$

*De modo que toda cópula  $C$  es uniformemente continua en  $[0, 1]^n$ .*

Para una prueba del teorema 2.1, véase Nelsen (2006) pág. 11.

Otra propiedad importante de las cópulas se refiere a las derivadas parciales de una cópula con respecto a sus variables, como veremos en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.** *Sea  $C$  una cópula. Para todo  $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ , la derivada parcial  $\partial C / \partial u_i$  existe para casi todo  $u_i \in [0, 1]$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$  y además*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u_i} C(u_1, \dots, u_n) \leq 1. \quad (2.1)$$

La demostración del teorema 2.2 se puede ver en Nelsen (2006) pág. 13.

Para ilustrar este teorema, consideremos la derivada parcial de la familia de cópula de Gumbel-Hougaard (Hutchison y Lai, 1990) con respecto a  $u$ ,

$$\begin{aligned} C_{\alpha,u}(v) &= \frac{\partial}{\partial u} C_{\alpha}(u, v) \\ &= \exp\{-[(-\ln u)^{\alpha} + (-\ln v)^{\alpha}]^{1/\alpha}\} \times \\ &\quad [(-\ln u)^{\alpha} + (-\ln v)^{\alpha}]^{1/\alpha-1} \frac{(-\ln u)^{\alpha-1}}{u}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Obsérvese que para  $u \in (0, 1)$  y para todo  $\alpha > 1$ , se verifica que  $C_{\alpha,u}$  es una función de  $v$  estrictamente creciente. Por tanto la función inversa  $C_{\alpha,u}^{-1}$  está bien definida. Como  $C_{\alpha}$  es simétrica en  $u$  y  $v$ , la derivada parcial de  $C_{\alpha}$  con respecto a  $v$  muestra un comportamiento idéntico para el mismo conjunto de parámetros.

## 2.2. Teorema de Sklar

Sklar (1959) demostró que es posible comprender la estructura de dependencia de un vector aleatorio a través de la cópula a partir de dos facetas: la primera, que toda función de distribución multivariante de variables aleatorias continuas tiene una cópula asociada y la segunda, que la función de distribución multivariante puede ser generada a partir de la cópula y las funciones de distribución marginales. Enunciaremos el teorema central en la teoría de cópulas.

**Teorema 2.3** (Teorema de Sklar). *Sea  $H$  una distribución conjunta de las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  con marginales  $F_1, \dots, F_n$ . Entonces existe una cópula  $C$  tal que*

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \text{ para todo } x_1, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{R}}^1. \quad (2.3)$$

*Si  $F_1, \dots, F_n$  son continuas, entonces  $C$  es única. De otra forma,  $C$  está definida únicamente en el  $\text{Rango} F_1 \times \dots \times \text{Rango} F_n$ . Por otro lado, si  $C$  es una cópula y  $F_1, \dots, F_n$  son funciones de distribución, entonces la función  $H$  es una función de distribución conjunta con marginales  $F_1, \dots, F_n$ .*

*Demostración.* Para la demostración del teorema es necesario tener presentes varias características de las funciones de distribución. La primera de ellas se relaciona con el hecho de que si la variable aleatoria  $X_i$  tiene una función de distribución  $F_i$  continua, entonces se tiene que:

$$F_i(X_i) \sim U(0, 1). \quad (2.4)$$

Análogamente, si  $U \sim U(0, 1)$  entonces  $F_i^{-1}(U) \sim F_i$ , donde  $F_i^{-1}$  es la función inversa de  $F_i$ , la cual viene definida como

$$F_i^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in R | F_i(x) \geq \alpha\}.$$

A partir de (2.4) es posible demostrar la existencia y unicidad de la cópula para el caso de variables aleatorias continuas.

---

<sup>1</sup> $\overline{\mathbb{R}}$  denota la recta real extendida  $[-\infty, \infty]$

Expresando (2.3) en términos de  $X_i = F_i^{-1}(U_i)$  para  $i = 1, \dots, n$  se obtiene:

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)). \quad (2.5)$$

La expresión (2.5) implica que una cópula  $C$  puede ser representada en términos de la función de distribución multivariante  $H$  y sus distribuciones marginales  $F_1, \dots, F_n$ . Por otro lado, partiendo de  $H, F_1, \dots, F_n$  y  $u_i = F_i(x_i)$  para  $i = 1, \dots, n$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} H(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= P(F_1^{-1}(X_1) \leq F_1^{-1}(x_1), \dots, F_n^{-1}(X_n) \leq F_n^{-1}(x_n)) \quad (2.6) \\ &= P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) \\ &= C(u_1, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la definición (2.5) implica que la cópula  $C$  asociada a la distribución multivariante  $H$  existe, mientras el resultado (2.6) implica que esta cópula es única, véase McNeil *et al.* (2005).

Las ecuaciones (2.3) y (2.6) muestran la relación entre la cópula y la función de distribución conjunta. El teorema de Sklar indica, por un lado, que la función de distribución conjunta puede ser entendida como la combinación de distribuciones marginales a través de la cópula; mientras que por otro (2.6) muestra cómo se puede expresar la cópula de la función de distribución multivariante.

Tal como lo indican Embrechts *et al.* (1999), el teorema 2.3, también se puede interpretar como la descomposición de la función de distribución multivariante en dos componentes, la estructura de dependencia y el comportamiento univariante. El primer componente corresponde a la cópula, mientras que el segundo está asociado a las funciones de distribución marginales.

La demostración completa del teorema 2.3, se puede ver en Nelsen (2006).  $\square$

## 2.3. Cópulas y variables aleatorias

**Definición 2.2.** Sea  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria  $X$  es una función medible de  $(\Omega, \mathfrak{F})$  en  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ , donde  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel.

**Definición 2.3.** La función de distribución de una variable aleatoria  $X_i$  es una función  $F_i$  que asigna a todos los  $x_i \in \overline{\mathbb{R}}$  una probabilidad  $F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i)$ . Además, la función de distribución conjunta de las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  es una función  $H$  que asigna a todos los  $x_1, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$  una probabilidad  $H(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$ . Por tanto la ecuación del teorema de Sklar la podemos escribir como

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n).$$

**Proposición 2.1.** Diremos que las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$ , definidas en el espacio  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  son independientes si y solo si el producto de sus funciones de distribución  $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$  es igual a su función de distribución conjunta  $H(x_1, \dots, x_n)$ ,

$$H(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \times \dots \times F_n(x_n), \text{ para todo } x_1, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

**Teorema 2.4.** Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias con funciones de distribución continuas  $F_1, \dots, F_n$  y función de distribución conjunta  $H$ . Del teorema de Sklar se sabe que existe una única cópula  $C$  con

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Entonces  $X_1, \dots, X_n$  son independientes si y solo si

$$C = \Pi^n,$$

donde  $\Pi^n = u_1 \times \dots \times u_n$ .

*Demostración.* Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias con funciones de distribución continuas  $F_1, \dots, F_n$ . Decimos que  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias independientes si y

solo si la función de distribución conjunta

$$H(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \times \dots \times F_n(x_n).$$

Luego, del teorema 2.3, se tiene que

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) &= H(x_1, \dots, x_n) \\ &= F_1(x_1) \times \dots \times F_n(x_n) = \Pi^n. \end{aligned}$$

□

Terminaremos esta sección con una afirmación sobre el comportamiento de las cópulas bajo transformaciones estrictamente monótonas de las variables aleatorias.

**Teorema 2.5.** *Sea  $(X_1, \dots, X_n)^T$  un vector de variables aleatorias continuas y con cópula  $C$ . Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son funciones estrictamente crecientes con Rango  $X_1, \dots, X_n$ , respectivamente, entonces  $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n))^T$  tienen cópula  $C$ . En otras palabras:  $C$  es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes de  $X_1, \dots, X_n$ .*

*Demostración.* Sean  $F_1, \dots, F_n$  las funciones de distribución de  $X_1, \dots, X_n$  y sean  $G_1, \dots, G_n$  las funciones de distribución de  $\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)$  respectivamente. Sea  $(X_1, \dots, X_n)^T$  con cópula  $C$ , y sea  $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n))^T$  con cópula  $C_\alpha$ . Dado que  $\alpha_k$  es estrictamente creciente para toda  $k$ ,  $G_k(x) = P(\alpha_k(X_k) \leq x) = P(X_k \leq \alpha_k^{-1}(x)) = F_k(\alpha_k^{-1}(x))$  para algún  $x \in \overline{\mathbb{R}}$ , así

$$\begin{aligned} C_\alpha(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)) &= P(\alpha_1(X_1) \leq x_1, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n) \\ &= P(X_1 \leq \alpha_1^{-1}(x_1), \dots, X_n \leq \alpha_n^{-1}(x_n)) \\ &= C(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), \dots, F_n(\alpha_n^{-1}(x_n))) \\ &= C(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)). \end{aligned}$$

Dado que  $X_1, \dots, X_n$  son continuas,  $\text{Rango}G_1 = \dots = \text{Rango}G_n = [0, 1]$ . Por tanto se tiene que  $C_\alpha = C$  en  $[0, 1]^n$ . □

## 2.4. Las cotas de Fréchet-Hoeffding

**Definición 2.4.** Consideremos las funciones  $M^n$ ,  $\Pi^n$  y  $W^n$  definidas en el intervalo  $[0, 1]^n$  como sigue:

$$M^n(u_1, \dots, u_n) = \text{mín}(u_1, \dots, u_n), \quad (2.7)$$

$$\Pi^n(u_1, \dots, u_n) = u_1 \times \dots \times u_n, \quad (2.8)$$

$$W^n(u_1, \dots, u_n) = \text{máx}(u_1 + \dots + u_n - 1, 0). \quad (2.9)$$

Las funciones  $M^n$  y  $W^n$  se llaman las cotas superior e inferior de Fréchet-Hoeffding respectivamente y  $\Pi^n$  descrita anteriormente se llama la cópula producto. Cabe anotar que  $M^n$  y  $\Pi^n$  son  $n$ -cópula para  $n \geq 2$  mientras que  $W^n$  no es una cópula para algún  $n \geq 3$ , véase Nelsen (2006) pág. 47.

**Teorema 2.6.** Si  $C$  es una  $n$ -cópula para todo  $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ , entonces

$$W^n(u_1, \dots, u_n) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq M^n(u_1, \dots, u_n). \quad (2.10)$$

La prueba de este teorema se encuentra en Nelsen (2006), pág. 47.

Como consecuencia del teorema de Sklar, si  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias con función de distribución conjunta  $H$  y marginales  $F_1, \dots, F_n$  respectivamente, entonces se cumple la siguiente desigualdad

$$\text{máx}(F_1(x_1) + \dots + F_n(x_n) - 1, 0) \leq H(x_1, \dots, x_n) \leq \text{mín}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

La existencia de cotas superior e inferior sugiere la posibilidad de establecer un orden entre las cópulas.

**Definición 2.5.** Sean  $C$  y  $\tilde{C}$  cópulas, diremos que  $C$  es menor que  $\tilde{C}$  (o  $C$  es mayor que  $\tilde{C}$ ) y lo denotamos como

$$C \prec \tilde{C} \quad (C \succ \tilde{C}),$$

si

$$C(u_1, \dots, u_n) \leq \tilde{C}(u_1, \dots, u_n) \quad (C(u_1, \dots, u_n) \geq \tilde{C}(u_1, \dots, u_n)),$$

para todo  $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ . Este orden se denomina orden de concordancia.

## 2.5. Medidas de concordancia

Sea  $(x, y)$  y  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  dos observaciones de un vector  $(X, Y)$  de variables aleatorias continuas. Entonces  $(x, y)$  y  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  se dice que son concordantes si  $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) > 0$  y discordantes si  $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) < 0$ . El siguiente teorema se encuentra en Nelsen (2006), pág. 159. Muchos de los resultados en esta sección son consecuencia directa de este teorema.

**Teorema 2.7.** *Sea  $(X, Y)$  y  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  vectores independientes de variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta  $H$  y  $\tilde{H}$  respectivamente, con marginales comunes  $F$  (de  $X$  y  $\tilde{X}$ ) y  $G$  (de  $Y$  y  $\tilde{Y}$ ). Sea  $C$  y  $\tilde{C}$  las cópulas de  $(X, Y)$  y  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  respectivamente, así que  $H(x, y) = C(F(x), G(y))$  y  $\tilde{H}(x, y) = \tilde{C}(F(x), G(y))$ . Sea  $Q$  la diferencia entre la probabilidad de concordancia y discordancia de  $(X, Y)$  y  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ , es decir, sea*

$$Q = P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\} - P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0\}.$$

Entonces

$$Q = Q(C, \tilde{C}) = 4 \int \int_{[0,1]^2} \tilde{C}(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (2.11)$$

*Demostración.* Dado que las variables aleatorias son continuas

$$P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0\} = 1 - P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\}.$$

De aquí que

$$Q = 2P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\} - 1. \quad (2.12)$$

Pero

$$P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\} = P\{X > \tilde{X}, Y > \tilde{Y}\} + P\{X < \tilde{X}, Y < \tilde{Y}\}.$$

Estas probabilidades pueden ser evaluadas por integración sobre la distribución de uno de los vectores  $(X, Y)$  o  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ .

Así

$$\begin{aligned}
 P\{X > \tilde{X}, Y > \tilde{Y}\} &= P\{\tilde{X} < X, \tilde{Y} < Y\} \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P\{\tilde{X} < x, \tilde{Y} < y\} dC(F(x)G(y)) \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{C}(F(x), G(y)) dC(F(x)G(y)).
 \end{aligned}$$

Empleando la transformación  $u = F(x)$  y  $v = G(y)$  en probabilidad

$$P\{X > \tilde{X}, Y > \tilde{Y}\} = \int \int_{[0,1]^2} \tilde{C}(u, v) dC(u, v).$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned}
 P\{X < \tilde{X}, Y < \tilde{Y}\} &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P\{\tilde{X} > x, \tilde{Y} > y\} dC(F(x)G(y)) \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \{1 - F(x) - G(y) + \tilde{C}(F(x), G(y))\} dC(F(x)G(y)) \\
 &= \int \int_{[0,1]^2} \{1 - u - v + \tilde{C}(u, v)\} dC(u, v).
 \end{aligned}$$

Dado que  $C$  es la función de distribución conjunta de un vector  $(U, V)$  de variables aleatorias uniformes  $U(0, 1)$ , se tiene que  $E(U) = E(V) = 1/2$ , luego

$$\begin{aligned}
 P\{X < \tilde{X}, Y < \tilde{Y}\} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int \int_{[0,1]^2} \tilde{C}(u, v) dC(u, v) \\
 &= \int \int_{[0,1]^2} \tilde{C}(u, v) dC(u, v).
 \end{aligned}$$

Así

$$P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\} = 2 \int \int_{[0,1]^2} \tilde{C}(u, v) dC(u, v).$$

Al reemplazar en (2.12) obtenemos (2.11). □

**Corolario 2.8.** Sean  $C, \tilde{C}$  y  $Q$  dados en el teorema 2.7. Entonces

1.  $Q$  es simétrica en sus argumentos:  $Q(C, \tilde{C}) = Q(\tilde{C}, C)$ .
2.  $Q$  es no decreciente en cada argumento: Si  $C \prec C'$ , entonces

$$Q(C, \tilde{C}) \leq Q(C', \tilde{C}).$$

3. La cópula  $C$ , se puede reemplazar por la función  $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$ , denominada cópula de supervivencia, entonces

$$Q(C, \tilde{C}) = Q(\hat{C}, \hat{\tilde{C}}).$$

La siguiente definición se encuentra en Scarsini (1984).

**Definición 2.6.** Una medida de dependencia de valor real  $\kappa$  entre dos variables aleatorias continuas  $X$  e  $Y$  cuya cópula es  $C$ , es una medida de concordancia que satisface las siguientes propiedades:

1.  $\kappa$  está definida para todo par de variables aleatorias continuas  $X, Y$ .
2.  $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1$ ,  $\kappa_{X,X} = 1$  y  $\kappa_{X,-X} = -1$ .
3.  $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$ .
4. Si  $X$  e  $Y$  son independientes, entonces  $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\Pi} = 0$ .
5.  $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$ .
6. Si  $C$  y  $\tilde{C}$  son cópulas tales que  $C \prec \tilde{C}$ , entonces  $\kappa_C \leq \kappa_{\tilde{C}}$ .
7. Si  $\{(X_n, Y_n)\}$  es una sucesión de variables aleatorias continuas con cópulas  $C_n$ , y si  $\{C_n\}$  converge a  $C$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$ .

Como una consecuencia de la definición 2.6, si  $Y$  es una función monótona creciente de  $X$ , entonces  $\kappa_{X,Y} = \kappa_M = 1$  (Comonotonicidad), y si  $Y$  es una función monótona decreciente de  $X$ , entonces  $\kappa_{X,Y} = \kappa_W = -1$  (Contramonotonicidad). Sin embargo, si  $\alpha$  y  $\beta$  son funciones estrictamente monótonas crecientes en el  $\text{Rango}(X)$  y  $\text{Rango}(Y)$  respectivamente, entonces  $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$ .

Una de las expresiones más utilizadas para analizar las relaciones de dependencia es el coeficiente de correlación de Pearson, el cual mide la relación lineal existente entre un vector de variables aleatorias. Para la pareja de variables aleatorias  $(X, Y)$  el coeficiente de correlación de Pearson  $\rho_{XY}$ , viene definido por:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}.$$

El coeficiente de correlación de Pearson tiene diferentes ventajas que lo han acreditado como una medida de dependencia de amplia aceptación en muchos contextos, principalmente porque es fácil de calcular, ya que sólo se necesita estimar los dos primeros momentos de los datos observados. Una de las grandes ventajas que tiene el coeficiente de correlación de Pearson es su relación con la función de distribución normal multivariante, en donde la correlación resume toda la relación de dependencia existente entre las variables aleatorias. Sin embargo, es necesario ser cauteloso cuando se utiliza el coeficiente de correlación como medida de dependencia, ya que puede presentar ciertos inconvenientes (véase Embrechts *et al.*, 1999).

Algunos de estos inconvenientes son:

- Que el coeficiente de correlación sea cero implica independencia. Para el caso normal multivariante, esta afirmación es cierta. Para cualquier otro tipo de función de distribución multivariante, la correlación cero no necesariamente implica independencia.
- El coeficiente de correlación únicamente se encuentra definido para parejas de variables aleatorias que tengan varianzas finitas. Esta desventaja es de especial importancia, cuando se trata de analizar variables que tengan funciones de distribución con colas pesadas, ya que en estos casos la varianza puede no existir.
- La correlación no es una medida invariante bajo transformaciones estrictamente monótonas (la cópula sí lo es).

Teniendo en cuenta los problemas de la correlación de Pearson, es útil definir otras medidas de dependencia que no tengan algunas de estas limitaciones. Una clase importante de estas medidas son las de correlación basada en rangos y los coeficientes de dependencia

en las colas, las cuales pueden ser expresadas en términos de cópulas. En esta sección, presentaremos las medidas de dependencia o concordancia conocidas como la tau de Kendall, la rho de Spearman, el índice de Gini y la medida de Blomqvist. Estas medidas son una buena alternativa como coeficiente de correlación lineal para distribuciones no elípticas. Las distribuciones normal y t multivariantes son conocidas como distribuciones elípticas, véase Fang *et al.* (1987) y Cambanis *et al.* (1981). Para más detalles acerca de la tau de Kendall y la rho de Spearman y sus estimadores (versión muestral), véase Kendall y Stuart (1979); Kruskal (1958); Lehmann y D'Abrera (1975); Capéreaa y Genest (1993). Para otras medidas de dependencia véase Schweizer y Wolff (1981).

### 2.5.1. La tau de Kendall

**Definición 2.7.** *La tau de Kendall para el vector aleatorio  $(X, Y)$  se define como*

$$\tau(X, Y) = P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\} - P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0\},$$

donde  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  es una réplica independiente de  $(X, Y)$ .

Aquí la tau de Kendall para las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  es simplemente la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia.

**Teorema 2.9.** *Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio continuo con cópula  $C$ . Entonces la tau de Kendall esta dada por*

$$\tau_C = Q(C, C) = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (2.13)$$

Obsérvese que la integral es el valor esperado de la variable aleatoria  $C(U, V)$ , donde  $U, V \sim \mathbf{U}(0, 1)$  con funciones de distribución conjunta  $C$ , es decir  $\tau_C = 4E[C(U, V)] - 1$ .

Para probar el teorema 2.9, basta con reemplazar  $\tilde{C}$  por  $C$  en la ecuación (2.11).

### 2.5.2. La rho de Spearman

**Definición 2.8.** La rho de Spearman para el vector aleatorio  $(X, Y)$  es definida como

$$\rho(X, Y) = 3(P\{(X - \tilde{X})(Y - Y') > 0\} - P\{(X - \tilde{X})(Y - Y') < 0\}),$$

donde  $(X, Y)$ ,  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  y  $(X', Y')$  son independientes.

Obsérvese que  $\tilde{X}$  e  $Y'$  son independientes.

**Teorema 2.10.** Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio continuo con cópula  $C$ . Entonces la rho de Spearman para  $(X, Y)$  viene dada por

$$\rho_C = 3Q(C, \Pi) = 12 \int \int_{[0,1]^2} uv dC(u, v) - 3 \quad (2.14)$$

$$= 12 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dudv - 3. \quad (2.15)$$

Aquí, si  $X \sim F$  y  $Y \sim G$ , y sea  $U = F(X)$  y  $V = G(Y)$ , entonces

$$\rho_C = 12 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dudv - 3 = 12E(UV) - 3 \quad (2.16)$$

$$= \frac{E(UV) - 1/4}{1/12} = \frac{Cov(U, V)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(V)}} \quad (2.17)$$

$$= \rho(F(X), G(Y)). \quad (2.18)$$

Para probar el teorema 2.10, basta con reemplazar  $\tilde{C}$  por  $\Pi = UV$  en la ecuación (2.11).

### 2.5.3. El índice de Gini

El índice de Gini es un coeficiente utilizada en economía para medir el grado de concentración de la riqueza. Este índice es un número entre 0 y 1, en donde 0 se corresponde con la perfecta igualdad y 1 con la perfecta desigualdad. Se calcula como el doble del área que se encuentra entre la curva de Lorenz y la diagonal que va desde  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .

En términos de cópulas se define de la siguiente forma

$$\gamma_C = 2 \int \int_{I^2} (|u + v - 1| - |u - v|) dC(u, v). \quad (2.19)$$

Esta medida fue propuesta por Gini (1912).

Debido a que el índice depende de la cópula  $C$  sólo a través de su diagonal y la sección diagonal secundaria, también podemos calcularlo mediante la siguiente expresión

$$\gamma_C = 4 \left[ \int_0^1 C(u, 1 - u) du - \int_0^1 [u - C(u, u)] du \right]. \quad (2.20)$$

Obsérvese que la segunda integral es el área entre la sección diagonal  $M(u, u) = u$  de la cota superior de Fréchet-Hoeffding y la cópula  $C(u, u)$ ; y la primera integral es el área entre la sección diagonal secundaria  $C(u, 1 - u)$  de  $C$  y la cota inferior de Fréchet-Hoeffding  $W(u, 1 - u)$ .

#### 2.5.4. La medida de Blomqvist

**Definición 2.9.** *La medida de Blomqvist (1950), frecuentemente llamada coeficiente de correlación medial, viene definida como*

$$\beta_{XY} = P[(X - \tilde{x})(Y - \tilde{y}) > 0] - P[(X - \tilde{x})(Y - \tilde{y}) < 0], \quad (2.21)$$

donde  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  denotan las medianas de  $X$  e  $Y$  respectivamente.

Cuando  $H$  denota la función de distribución conjunta de  $X$  e  $Y$ , se deduce fácilmente que

$$\beta_{XY} = 4H(\tilde{x}, \tilde{y}) - 1.$$

Como  $H(\tilde{x}, \tilde{y}) = C(F(\tilde{x}), G(\tilde{y})) = C(1/2, 1/2)$ , se tiene que

$$\beta_{XY} = \beta_C = 4C(1/2, 1/2) - 1. \quad (2.22)$$

Esta medida puede tomar valores en el intervalo  $[-1, 1]$  y depende solo del valor que tome la cópula en el centro de  $[0, 1]^2$ .

## 2.6. Familias de cópulas de uso más frecuente

### 2.6.1. Cópulas elípticas

**Definición 2.10.** Si  $X$  es vector aleatorio  $n$ -dimensional, para algún  $\mu \in \mathbb{R}^n$  y una matrix  $\Sigma$  de dimensión  $n \times n$ , simétrica y definida no negativa, decimos que  $X$  tiene una distribución elíptica de parámetros  $\mu$ ,  $\Sigma$  y  $\phi$ , si la función característica  $\varphi_{X-\mu}(t)$  de  $X - \mu$  es una función de la forma cuadrática  $t^T \Sigma t$ , esto es

$$\varphi_{X-\mu}(t) = \phi(t^T \Sigma t).$$

Denotamos  $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$  y  $\phi$  recibe el nombre de generador característico.

Cuando  $n = 1$ , la clase de distribuciones elípticas coincide con la clase de distribuciones simétricas univariante.

**Teorema 2.11.**  $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$  con  $\text{rango}(\Sigma) = k$  si y solo si existe una variable aleatoria  $R \geq 0$  independiente de  $U$ , un vector aleatorio que se distribuye uniformemente en la hiperesfera unitaria  $\{z \in \mathbb{R}^k | z^T z = 1\}$ , y una matrix  $A$ ,  $n \times k$  con  $AA^T = \Sigma$ , tales que

$$X =_d \mu + RAU.$$

La prueba de este teorema y la relación entre  $R$  y  $\phi$  se encuentra en Fang *et al.* (1987) y Cambanis *et al.* (1981).

**Ejemplo 2.1.** Sea  $X \sim N_n(0, I_n)$ . Consideremos  $X_i \sim N(0, 1)$ , para todo  $i = 1, \dots, n$  e independientes, la función característica de  $X_i$  es de la forma  $\exp(-t_i^2/2)$ , así la función característica de  $X$  será

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(t_1^2 + \dots + t_n^2)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}t^T t\right\}.$$

Del teorema 2.11 se tiene que  $X \sim E_n(0, I_n, \phi)$ , donde  $\phi(u) = \exp(-u/2)$ .

Si  $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ , donde  $\Sigma$  es una matrix diagonal, entonces  $X$  tiene componentes incorrelacionadas (si  $0 < \text{Var}(X_i) < \infty$ ). En tal caso  $X \sim N_n(\mu, \Sigma)$ . Obsérvese que la distribución normal multivariante es la única entre las distribuciones elípticas en la que

componentes incorrelacionadas implica componentes independientes.

Un vector aleatorio  $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$  no necesariamente tiene densidad. Si  $X$  tiene densidad esta puede ser de la forma  $|\Sigma|^{-1/2}g((X - \mu)^T \Sigma^{-1}(X - \mu))$  para alguna función  $g$  no negativa de una variable escalar. Por tanto el contorno con igual densidad forman elipsoides en  $\mathbb{R}^n$ . Dada la distribución de  $X$ , la representación  $E_n(\mu, \Sigma, \phi)$  no es única, únicamente determinamos  $\mu$  pero  $\Sigma$  y  $\phi$  sólo están determinadas incluso por una constante positiva. Más precisamente, si  $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$  y  $X \sim E_n(\mu^*, \Sigma^*, \phi^*)$ , entonces

$$\mu^* = \mu, \quad \Sigma^* = c\Sigma, \quad \phi^*(\cdot) = \phi(\cdot/c),$$

para alguna constante  $c > 0$ .

Con el fin de encontrar una representación tal que  $\text{Cov}(X) = \Sigma$ , usamos el teorema 2.10 para obtener

$$\text{Cov}(X) = \text{Cov}(\mu + RAU) = AE(R^2)\text{Cov}(U)A^T,$$

siempre que  $E(R^2) < \infty$ . Sea  $Y \sim N_n(0, I_n)$ . Entonces  $Y =_d \|Y\|U$ , donde  $\|Y\|$  es independiente de  $U$ . Sin embargo  $\|Y\|^2 \sim \chi_n^2$ , así  $E(\|Y\|^2) = n$ . Dado que  $\text{Cov}(Y) = I_n$  vemos que si  $U$  se distribuye uniformemente en una hipersfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\text{Cov}(U) = I_n/n$ . Así  $\text{Cov}(X) = AA^T E(R^2)/n$ . Al elegir el generador característico  $\phi^*(s) = \phi(s/c)$ , donde  $c = E(R^2)/n$ , tenemos que  $\text{Cov}(X) = \Sigma$ . Por lo tanto, una distribución elíptica está descrita completamente por  $\mu$ ,  $\Sigma$  y  $\phi$ , donde  $\phi$  se elige de manera que  $\text{Cov}(X) = \Sigma$  (si  $\text{Cov}(X)$  está definida). Si  $\text{Cov}(X)$  se obtiene como indicamos antes, la distribución de  $X$  está únicamente determinada por  $E(X)$ ,  $\text{Cov}(X)$  y el tipo de sus marginales univariantes, por ejemplo, normal o  $t_4$ .

**Teorema 2.12.** *Sea  $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ ,  $B$  una matrix  $q \times n$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^q$ . Entonces*

$$\mathbf{b} + BX \sim E_q(\mathbf{b} + B\mu, B\Sigma B^T, \phi). \quad (2.23)$$

*Demostración.* Por el teorema 2.11,  $\mathbf{b} + BX$  tiene una representación estocástica

$$\mathbf{b} + BX =_d \mathbf{b} + BX + RBAU.$$

Al particionar  $X$ ,  $\mu$  y  $\Sigma$  de la sigue forma

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

donde  $X_1$  y  $\mu_1$  son vectores  $r \times 1$  y  $\Sigma_{11}$  es una matriz  $r \times r$ . □

**Corolario 2.13.** *Sea  $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ . Entonces*

$$X_1 \sim E_r(\mu_1, \Sigma_{11}, \phi), \quad X_2 \sim E_{n-r}(\mu_2, \Sigma_{22}, \phi). \quad (2.24)$$

Por lo tanto las distribuciones marginales de distribuciones elípticas son elípticas y del mismo tipo (con el mismo generador característico). El siguiente resultado prueba que la distribución condicional de  $X_1$  dado el valor de  $X_2$  es también elíptica. pero en general no es del mismo tipo que  $X_1$ .

**Teorema 2.14.** *Sea  $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$  con  $\Sigma$  estrictamente definida positiva. Entonces*

$$X_1|X_2 = x \sim E_r(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\phi}).$$

donde  $\tilde{\mu} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x - \mu_2)$  y  $\tilde{\Sigma} = \Sigma_{11}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ . sin embargo  $\tilde{\phi} = \phi$  si solo si  $X \sim N_n(\mu, \Sigma)$ .

Para la prueba y detalles de  $\tilde{\phi}$ , véase Fang *et al.* (1987). Para el caso en que el rango( $X$ )  $< n$ , véase Cambanis *et al.* (1981).

El siguiente lema, establece que la combinación lineal de distribuciones de vectores aleatorios elípticos, independientes y con la misma matriz de dispersion  $\Sigma$ , (salvo una constante positiva) sigue siendo elíptica.

**Lema 2.14.1.** *Sea  $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$  y  $\tilde{X} \sim E_n(\tilde{\mu}, c\Sigma, \tilde{\phi})$  con  $c > 0$ , variables independientes. Entonces para  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $aX + b\tilde{X} \sim E_n(a\mu + b\tilde{\mu}, \Sigma, \phi^*)$  con  $\phi^*(u) = \phi(au^2)\tilde{\phi}(b^2cu)$ .*

*Demostración.* Por la Definición 2.10, es suficiente mostrar que para todo  $t \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\varphi_{aX+b\tilde{X}-a\mu-b\tilde{\mu}}(t) &= \varphi_{a(X-\mu)}(t)\varphi_{b(\tilde{X}-\mu)}(t) \\ &= \phi((at)^T \Sigma (at)) \tilde{\phi}((bt)^T (c\Sigma)(bt)) \\ &= \phi(a^2 t^T \Sigma t) \tilde{\phi}(b^2 ct^T \Sigma t).\end{aligned}$$

□

De nuevo, sea  $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ , cuando  $0 < \text{Var}(X_i), \text{Var}(X_j) < \infty$ ,

$$\rho(X_i, X_j) = \text{Cov}(X_i, X_j) / \sqrt{\text{Var}(X_i)\text{Var}(X_j)} = \Sigma_{ij} / \sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}.$$

Esto explica la razón por la cual la correlación lineal es una medida natural de dependencia entre variables aleatorias con distribución conjunta elíptica no degeneradas ( $\Sigma_{ii} > 0$  para todo  $i$ ). A lo largo de esta sección denotamos a la matriz  $R$ , con  $R_{ij} = \Sigma_{ij} / \sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$ , la matriz de correlación lineal de  $X$ . Obsérvese que esta definición es más general que la habitual y en esta situación (distribuciones elípticas) tiene más sentido. Dado que la distribución elíptica está únicamente determinada por  $\mu$ ,  $\Sigma$  y  $\phi$ , la cópula de una variable aleatoria que se distribuye elípticamente no degenerada está únicamente determinada por  $R$  y  $\phi$ . Las dos cópulas más importantes en esta familia son la cópula normal (o gaussiana) y la cópula  $t$  de Student, las cuales presentaremos a continuación.

### Cópulas gaussianas

La cópula con distribución normal  $n$ -variante con matriz de correlación lineal  $R$  viene dada por

$$C_R^{Ga}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R^n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

donde  $\Phi_R^n$  denota la función de distribución conjunta de las  $n$ -variables, que se distribuyen según una normal estándar con matriz de correlación lineal  $R$ , y  $\Phi^{-1}$  denota la inversa de la función de distribución de la distribución normal estándar univariante. Las cópulas con esta forma son llamadas cópulas gaussianas. La expresión de la cópula para

el caso bivalente es de la forma

$$C_R^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{2(1-R_{12}^2)}\right\} ds dt.$$

Obsérvese que  $R_{12}$  es simplemente el coeficiente de correlación lineal de la correspondiente distribución normal bivalente.

Para generar cópulas gaussianas es suficiente considerar que la matriz  $R$  sea estrictamente definida positiva. Escribiendo  $R = AA^T$  para alguna matriz  $A$  de orden  $n \times n$ , y si  $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$  e independientes, entonces

$$\mu + AZ \sim N_n(\mu, R).$$

Una elección natural de la matriz  $A$  es la descomposición de Cholesky de  $R$ . La descomposición de Cholesky de  $R$  es la única matriz triangular inferior  $L$  con  $LL^T = R$ .

### Cópula t de student

Si  $X$  tiene la representación

$$X =_d \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} Z,$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}^n$ ,  $S \sim \chi_\nu^2$  y  $Z \sim N_n(0, \Sigma)$  son independientes, entonces  $X$  tiene una distribución  $t_\nu$ ,  $n$ -variante con media  $\mu$  (para  $\nu > 1$ ) y matriz de covarianza  $\frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$  (para  $\nu > 2$ ). Si  $\nu \leq 2$  entonces  $\text{Cov}(X)$  no está definida. En este caso interpretamos  $\Sigma$  como el parámetro de forma de la distribución de  $X$ .

La cópula de  $X$  dada por (2.6.1) puede ser escrita como

$$C_{\nu, R}^t(u_1, \dots, u_n) = t_{\nu, R}^n(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n)),$$

donde  $R_{ij} = \Sigma_{ij} / \sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$  para  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  y donde  $t_{\nu, R}^n$  denota la función de distribución de  $\sqrt{\nu}\mathbf{Y}/\sqrt{S}$ , donde  $S \sim \chi_\nu^2$  y  $\mathbf{Y} \sim N_n(0, R)$  son independientes. Aquí  $t_\nu$  denota las marginales (iguales) de  $t_{\nu, R}^n$ , es decir, la función de distribución de  $\sqrt{\nu}\mathbf{Y}_1/\sqrt{S}$ .

La expresión de la cópula para el caso bivalente es de la forma

$$C_{\nu,R}^t(u,v) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{\nu(1-R_{12}^2)} \right\}^{-(\nu+2)/2} ds dt.$$

Obsérvese que  $R_{12}$  es simplemente el coeficiente de correlación lineal de la correspondiente distribución  $t_{\nu}$  bivalente si  $\nu > 2$ .

Si  $(X_1, X_2)$  tienen una distribución estándar bivalente  $t$  con  $\nu$  grados de libertad y matriz de correlación lineal  $R$ , entonces  $X_2|X_1 = x$  se distribuye según una  $t$  con  $\nu + 1$  grados de libertad y

$$E(X_2|X_1 = x) = R_{12}x, \quad \text{Var}(X_2|X_1 = x) = \left( \frac{\nu + x^2}{\nu + 1} \right) (1 - R_{12}^2),$$

también puede usarse para demostrar que la  $t$ -cópula tiene coeficiente de dependencia en la cola superior (y debido a la simetría radial también el de la cola inferior) dado por:

$$\lambda_U = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} P(X_2 > x_2 | X_1 = x) = 2\bar{t}_{\nu+1}(\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-R_{12}}/\sqrt{1+R_{12}}).$$

Este coeficiente es creciente en  $R_{12}$  y decreciente en  $\nu$ , como era de esperar. Es más, tiende a cero cuando  $\nu \rightarrow \infty$  para  $R_{12} < 1$ , e implica extremos asintóticamente dependientes para  $R_{12} = -1$ .

### 2.6.2. Cópulas arquimedianas

**Definición 2.11.** Sea  $\varphi$  una función continua y estrictamente decreciente de  $[0, 1]$  a  $[0, \infty]$  tal que  $\varphi(1) = 0$ . La pseudo inversa de  $\varphi$  es la función  $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0 & \text{si } \varphi(0) < t \leq \infty. \end{cases} \quad (2.25)$$

Nótese que  $\varphi^{[-1]}$  es continua y decreciente en  $[0, \infty]$ , y es estrictamente decreciente en

$[0, \varphi(0)]$ . Sin embargo,  $\varphi^{[-1]}(\varphi(\mu)) = \mu$  en  $[0, 1]$ , y

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0) & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (2.26)$$

Finalmente, si  $\varphi(0) = \infty$ , entonces  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ .

**Teorema 2.15.** *Sea  $\varphi$  una función continua y estrictamente decreciente de  $[0, 1]$  a  $[0, \infty]$  tal que  $\varphi(1) = 0$ , y sea  $\varphi^{[-1]}$  la pseudo inversa de  $\varphi$ . Sea  $C$  una función de  $[0, 1]^n$  a  $[0, 1]$  dada por*

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)). \quad (2.27)$$

Entonces  $C$  es una cópula si y solo si  $\varphi$  es convexa.

Para una prueba, véase Nelsen (2006), pág. 111.

Las cópulas de la forma (2.27) son llamadas cópulas arquimedianas. La función  $\varphi$  es el generador de la cópula. Si  $\varphi(0) = \infty$ , decimos que  $\varphi$  es un generador estricto. En este caso,  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$  y  $C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n))$  es decir es una cópula arquimediana estricta.

**Ejemplo 2.2.** *Sea  $\varphi(t) = (-\ln t)^\alpha$ , donde  $\alpha \geq 1$ . Claramente  $\varphi(t)$  es continua y  $\varphi(1) = 0$ .  $\varphi'(t) = -\alpha(-\ln t)^{\alpha-1}/t$ , o sea  $\varphi$  es estrictamente una función decreciente de  $[0, 1]$  a  $[0, \infty]$ .  $\varphi''(t) \geq 0$  en  $[0, 1]$ , luego  $\varphi$  es convexa. Sin embargo  $\varphi(0) = \infty$ , de manera que  $\varphi$  es un generador estricto. De (2.27) tenemos para  $\alpha \geq 1$*

$$C_\alpha(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) = \exp(-[(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha]^{1/\alpha}).$$

Además  $C_1 = \Pi$  y  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} C_\alpha = M$ . Recordemos que esta cópula es la llamada familia de Gumbel-Hougaard (véase la tabla 2.1).

**Ejemplo 2.3.** *Sea  $\varphi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$ , donde  $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ , genera la familia Clayton (véase Clayton (1978)).*

$$C_\theta(u, v) = \max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0).$$

Para  $\theta > 0$  la cópula es estricta y se reduce a

$$C_\theta(u, v) = [u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}.$$

La familia Clayton tiene cota inferior dependiente para  $\theta > 0$ , y  $C_{-1} = W$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta = \Pi$  y  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta = M$ .

**Ejemplo 2.4.** Sea  $\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$ , donde  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , es el generador de la familia Frank

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right).$$

La familia de cópulas de Frank son arquimedianas estrictas. Además  $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} C_\theta = W$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta = \Pi$  y  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta = M$ . Los miembros de la familia Frank son las únicas cópulas arquimedianas que satisfacen la ecuación  $C(u, v) = \hat{C}(u, v)$  que llamaremos simétrica radial, véase Frank (1979) para más detalles.

**Ejemplo 2.5.** Sea  $\varphi(t) = 1 - t$ , para  $t$  en  $[0, 1]$  y 0 para  $t > 1$ . Entonces  $\varphi^{[-1]}(t) = 1 - t$ , para  $t$  en  $[0, 1]$ ; es decir,  $\varphi^{[-1]}(t) = \max(1 - t, 0)$ . Dado  $C(u, v) = \max(u + v - 1, 0) = W(u, v)$ , vemos que la cota inferior de Fréchet-Hoeffding  $W$  es arquimediana.

### Propiedades de las Cópulas arquimedianas

Los resultados del siguiente teorema nos permitirán formular extensiones multivariantes de las cópulas arquimedianas.

**Teorema 2.16.** Sea  $C$  una cópula arquimediana con generador  $\varphi$ . Entonces

1.  $C$  es simétrica, es decir  $C(u, v) = C(v, u)$  para todo  $u, v$  en  $[0, 1]$ .
2.  $C$  es asociativa, es decir  $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$  para todo  $u, v, w \in [0, 1]$ .

*Demostración.* 1.

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(u)) \\ &= C(u, v). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(C(u, v)) + \varphi(w)) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w))) \\
&= \varphi^{[-1]}((\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w)))) \\
&= C(u, C(v, w)).
\end{aligned}$$

□

La propiedad asociativa de las cópulas arquimedianas no es compartida en general como se mostrara en el siguiente ejemplo

**Ejemplo 2.6.** *Consideremos un miembro de la familia de cópulas FGM*

$$C_\theta = uv[1 + \theta(1 - u)(1 - v)], \quad \theta \in [-1, 1] \setminus \{0\}.$$

Esta familia fue discutida por Farlie (1960), Gumbel (1960) y Morgenstern (1956). Es fácil verificar que

$$C_\theta \left( \frac{1}{4}, C_\theta \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) \right) \neq C_\theta \left( C_\theta \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right), \frac{1}{3} \right).$$

Luego la propiedad asociativa no es compartida en general, el único miembro de la familia de cópulas FGM que es arquimediana es la cópula producto  $\Pi$ .

**Teorema 2.17.** *Sea  $C$  una cópulas arquimedianas generada por  $\varphi$  y sea  $K_C$  la  $C$ -medida<sup>2</sup> del conjunto  $\{(u, v) \in [0, 1]^2 / C(u, v) \leq t\}$ . Entonces para algún  $t$  en  $[0, 1]$ .*

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}. \quad (2.28)$$

Para la demostración, véase Nelsen (2006), pág. 127.

**Corolario 2.18.** *Si  $(U, V)$  tiene función de distribución  $C$ , donde  $C$  es una cópula arquimediana generada por  $\varphi$ , entonces la función  $K_C$  dada por (2.28) es la función de distribución de la variable aleatoria  $C(U, V)$ .*

<sup>2</sup>La  $C$ -medida de un conjunto  $B = [a, b] = ([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n])$ , denotada por  $V_C(B)$ , es la diferencia de orden  $n$ -ésima de  $C$  en  $B$ , en notación  $V_C(B) = \Delta_a^b C(t) = \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} C(t)$ .

El siguiente teorema proporcionará las bases de un algoritmo general para la generación de variables aleatorias con cópulas arquimedianas. Al derivar la ecuación (2.27) se tiene

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &= \varphi'(C(u, v)) \frac{\partial}{\partial u} C(u, v), \\ \varphi'(v) &= \varphi'(C(u, v)) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v), \\ 0 &= \varphi''(C(u, v)) \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) + \varphi'(C(u, v)) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v),\end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = - \frac{\varphi''(C(u, v)) \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v)}{\varphi'(C(u, v))} = - \frac{\varphi''(C(u, v)) \varphi'(u) \varphi'(v)}{[\varphi'(C(u, v))]^3}.$$

Así, siendo  $C$  absolutamente continua, su densidad viene dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = - \frac{\varphi''(C(u, v)) \varphi'(u) \varphi'(v)}{[\varphi'(C(u, v))]^3}. \quad (2.29)$$

**Teorema 2.19.** *Bajo la hipótesis del Corolario 2.18, la función de distribución conjunta  $H(s, t)$  de la variable aleatoria  $S = \varphi(U)/[\varphi(U) + \varphi(V)]$  y  $T = C(U, V)$ , está dada por  $H(s, t) = sK_C(t)$  para todo  $(s, t) \in [0, 1]^2$ . Por tanto  $S$  y  $T$  son independientes y  $S$  es uniforme en  $[0, 1]$ .*

*Demostración.* Consideremos el caso en que  $C$  es absolutamente continua. Dado que la densidad conjunta  $h(s, t)$  de  $S$  y  $T$  viene dada por

$$h(s, t) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right|,$$

donde  $\partial^2 C(u, v)/\partial u \partial v$  se calcula según (2.29) y  $\partial(u, v)/\partial(s, t)$  denota el Jacobiano de la transformación  $\varphi(u) = s\varphi(t)$ ,  $\varphi(v) = (1 - s)\varphi(t)$ .

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\varphi'(u)\varphi'(v)}.$$

Luego

$$h(s, t) = \left( -\frac{\varphi''(t)\varphi'(u)\varphi'(v)}{[\varphi'(t)]^3} \right) \left( -\frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\varphi'(u)\varphi'(v)} \right) = \frac{\varphi''(t)\varphi(t)}{[\varphi'(t)]^2}.$$

Así

$$H(s, t) = \int_0^s \int_0^t \frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{[\varphi'(y)]^2} dy dx = s \left[ y - \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)} \right]_0^t = sK_C(t).$$

Por tanto  $S$  y  $T$  son independientes y  $S$  es uniforme en  $[0, 1]$ .  $\square$

La prueba para el caso general se encuentra en Genest y Rivest (1993).

**Ejemplo 2.7.** Consideremos la familia de cópulas arquimedianas dada por

$$C_\theta(u, v) = (1 + [(u^{-1} - 1)^\theta + (v^{-1} - 1)^\theta]^{1/\theta})^{-1},$$

generada por  $\varphi_\theta(t) = (t^{-1} - 1)^\theta$  para  $\theta \geq 1$ . Para generar las variables aleatorias  $(U, V)$  con función de distribución conjunta  $C_\theta$ , generamos dos v.a. uniformes  $(0, 1)$  e independientes que denotaremos por  $s$  y  $t$ , luego denotamos por  $w = K_{C_\theta}^{-1}(t) = \frac{\theta+1}{2} - \sqrt{(\frac{\theta+1}{2})^2 - \theta s}$ , donde  $K_C$  está dado por la ecuación (2.28) y por último basta tomar  $u = \varphi^{[-1]}(s\varphi_\theta(w))$  y  $v = \varphi^{[-1]}((1-s)\varphi_\theta(w))$ , con  $\varphi_\theta(t) = (t^{-1} - 1)^\theta$  y  $\varphi^{[-1]}(t) = (t^{1/\theta} + 1)^{-1}$ .

### Tau de Kendall Revisado

La tau de Kendall para el caso de una cópula arquimediana se puede expresar como una integral del generador y su derivada, como se muestra en el siguiente teorema de Genest y MacKay (1986).

**Teorema 2.20.** Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias con cópula arquimediana  $C$  generada por  $\varphi$ . La tau de Kendall de  $X$  e  $Y$  viene dada por

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \quad (2.30)$$

*Demostración.* Sean  $U$  y  $V$  variables aleatorias que se distribuyen  $\mathbf{U}(0, 1)$  con distribución conjunta  $C$ , y sea  $K_C$  la función de distribución de  $C(U, V)$ . Entonces del teorema

2.9 tenemos

$$\begin{aligned}\tau_C &= 4E[C(U, V)] - 1 = 4 \int_0^1 t dK_C(t) - 1 \\ &= 4 \left( [tK_C(t)]_0^1 - \int_0^1 K_C(t) dt \right) - 1 = 3 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Del teorema 2.17 y del corolario 2.18, se tiene que

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}.$$

Dado que  $\varphi$  es convexa,  $\varphi'(t^+)$  y  $\varphi'(t^-)$  existen para todo  $t$  en  $(0, 1)$  y el conjunto  $\{t \in (0, 1) | \varphi'(t^+) \neq \varphi'(t^-)\}$  que es en general un conteo (es decir, tiene medida de Lebesgue cero).

Así

$$\tau_C = 3 - 4 \int_0^1 \left( t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} \right) dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

□

**Ejemplo 2.8.** Consideremos la familia Gumbel con generador  $\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$ , para  $\theta \geq 1$ . Entonces  $\varphi(t)/\varphi'(t) = (t \ln t)/\theta$ . Usando el teorema 2.20 podemos calcular la tau de Kendall

$$\tau_\theta = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt = 1 - \frac{1}{\theta}.$$

**Ejemplo 2.9.** Sea la familia de Clayton, generada por  $\varphi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$ ,  $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ . Entonces  $\varphi(t)/\varphi'(t) = (t^{\theta+1} - t)/\theta$ . Usando el teorema 2.20 calculamos la tau de Kendall

$$\tau_\theta = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt = \frac{\theta}{\theta + 2}.$$

**Ejemplo 2.10.** La familia de Frank es generada por  $\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$ , para  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Usando el teorema 2.20 se puede demostrar (Genest, 1987) que la tau de Kendall esta dada por

$$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta}(1 - D_1(\theta)),$$

donde  $D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt$ .

### 2.6.3. Cópulas de valores extremos

**Definición 2.12.** Una cópula  $C_*$  es de valor extremo si existe una cópula  $C$  tal que

$$C_*(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} C^n(u^{1/n}, v^{1/n}), \quad (2.32)$$

para toda  $u, v$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

Si nos preguntamos por la relación existente entre las cópulas de valores extremos y la teoría de extremos multivariantes, la respuesta es la siguiente:

Sea  $X_{n,m}^+ = \max(X_{n,1}, \dots, X_{n,k}, \dots, X_{n,m})$  con  $\{X_{n,k}\}$   $k$  variables aleatorias independientes. Sea  $G_n$  la distribución marginal del extremo univariante  $X_{n,m}^+$ . Entonces, la distribución límite  $G$  de  $(X_{n,1}^+, \dots, X_{n,k}^+, \dots, X_{n,m}^+)$  es tal que

$$G(X_1^+, \dots, X_k^+, \dots, X_m^+) = C(G(X_1^+), \dots, G(X_k^+), \dots, G(X_m^+)),$$

con  $C$  una cópula de valor extremo y  $G_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  una distribución de valores extremos univariante no degenerada.

**Definición 2.13.** Una cópula  $C$  es máx-estable si para cada número real positivo  $r$  y para todo  $u$  y  $v$  en  $[0, 1]$ ,

$$C(u, v) = C^r(u^{1/r}, v^{1/r}).$$

**Teorema 2.21.** Una cópula es máx-estable si y solo si es una cópula de valores extremos

*Demostración.* Evidentemente toda cópula máx-estable es una cópula de valor extremo. En el otro sentido, si suponemos que  $C_*$  es una cópula de valor extremo, entonces  $C_*$  satisface (2.32) para alguna cópula  $C$ , luego para un real positivo  $r$

$$C_*^r(u^{1/r}, v^{1/r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} C^{rn}(u^{1/rn}, v^{1/rn}) = C_*(u, v).$$

Por tanto  $C_*$  es máx-estable. □

Se puede demostrar que las cópulas de valor extremo se pueden representar de la forma

$$C(u, v) = \exp \left\{ \ln(uv) A \left( \frac{\ln v}{\ln(uv)} \right) \right\}, \quad (2.33)$$

con  $A : [0, 1] \rightarrow [1/2, 1]$  una función convexa tal que satisface las siguientes condiciones:  $A(0) = A(1) = 1$ ,  $\max\{t, 1 - t\} \leq A(t) \leq 1$  para  $t \in [0, 1]$ , esta función es la llamada función de dependencia de la cópula de valor extrema  $C$ . Para más detalles véase Joe (1997).

**Ejemplo 2.11.** *la cópula de la familia de Gumbel (2.1) es de valor extremo, veamos*

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \exp\{-[(-\ln u^{r/r})^\alpha + (-\ln v^{r/r})^\alpha]^{1/\alpha}\} \\ &= \exp\{-[r^\alpha((-\ln u^{1/r})^\alpha + (-\ln v^{1/r})^\alpha)]^{1/\alpha}\} \\ &= [\exp\{-[(-\ln u^{1/r})^\alpha + (-\ln v^{1/r})^\alpha]^{1/\alpha}\}]^r \\ &= C^r(u^{1/r}, v^{1/r}). \end{aligned}$$

Para tener una representación de la cópula en la forma (2.33) es suficiente con tomar  $A(t) = (t^\alpha + (1 - t)^\alpha)^{1/\alpha}$ .



# Capítulo 3

## Lema de Hoeffding y extensiones

El lema presentado por Hoeffding (1940) demuestra que la covarianza entre dos variables aleatorias se puede obtener en función de su distribución conjunta y sus marginales. Este lema se utilizó para probar que la correlación  $\rho$  entre dos variables aleatorias  $X, Y$  con diferentes funciones de distribución  $F, G$  respectivamente, no siempre está acotada entre los valores  $-1$  y  $1$ , pero sí se puede garantizar que  $\rho$  está acotada por dos correlaciones, denominadas mínima  $\rho^-$  y máxima  $\rho^+$  o también llamadas correlaciones Hoeffding, que están fuertemente relacionadas con las cotas de Fréchet.

Lehmann (1966) probó el Lema de Hoeffding y lo utilizó en algunos conceptos de dependencia. Jogdeo (1968) presenta la versión multivariante. Block y Fang (1988) usa el concepto de cumulante de una variable aleatoria  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  para generalizar la covarianza con más de dos variables aleatorias. Mardia (1967) y Mardia y Thompson (1972) obtiene la covarianza para  $X^r, Y^s$ . Yu (1993) obtiene una generalización para funciones absolutamente continuas de las componentes de un vector aleatorio. Cuadras (2002b) proporciona la covarianza para un par de funciones de variación acotada. Quesada-Molina (1992) obtiene la covarianza para funciones quasi-monótonas y más recientemente Prakasa Rao (1998) extiende la identidad de Quesada-Molina (1992) y de Yu (1993) al caso multivariante.

En este capítulo proponemos una generalización de covarianza para funciones de variación acotada para el caso multivariante, al igual que una extensión multivariante de la

identidad propuesta por Cuadras (2002b). También establecemos la relación entre las identidades de Cuadras (2002b) y la de Quesada-Molina (1992). Por último obtenemos una desigualdad para las covarianzas entre funciones en los casos donde las variables son dependientes de cuadrante positivo.

### 3.1. Lema de Hoeffding

Sean  $X, Y$  dos variables aleatorias con función de distribución conjunta  $H(x, y)$  y sus funciones de distribuciones marginales  $F(x), G(y)$ . Hoeffding (1940) demostró que la covarianza en términos de la función de distribución acumulada viene dada por

$$\text{Cov}(X, Y) = \int_{\mathbb{R}^2} [H(x, y) - F(x)G(y)] dx dy. \quad (3.1)$$

Block y Fang (1988) generalizan este resultado para el caso de más de dos variables aleatorias proporcionando una representación integral de la cumulante conjunta <sup>1</sup>. Mardia (1967) y Mardia y Thompson (1972) prueban que

$$\text{Cov}(X^r, Y^s) = \int_{\mathbb{R}^2} [H(x, y) - F(x)G(y)] r x^{r-1} s y^{s-1} dx dy. \quad (3.2)$$

Si  $\alpha(\cdot)$  y  $\beta(\cdot)$  son funciones de variación acotada y los valores esperados existen, Cuadras (2002b) probó

$$E[\alpha(X)\beta(Y)] - E[\alpha(X)]E[\beta(Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} [H(x, y) - F(x)G(y)] d\alpha(x) d\beta(y). \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) fue inicialmente tratada por Sen (1994), cuando  $\alpha, \beta$  son funciones monótonas. La ecuación (3.3) nos proporciona la covarianza  $\text{Cov}(\alpha(x), \beta(y))$  y se reduce

<sup>1</sup>La  $n$ -ésima cumulante conjunta de  $(X_1, \dots, X_n)$  viene definida por

$$\sum (-1)^{p-1} (p-1)! \left( E \prod_{j \in \nu_1} X_j \right) \cdots \left( E \prod_{j \in \nu_p} X_j \right),$$

donde la sumatoria se extiende sobre todas las particiones  $(\nu_1, \dots, \nu_p)$ ,  $p = 1, 2, \dots, n$ , de  $\{1, \dots, n\}$ .

a la identidad de Hoeffding al tomar  $\alpha(x) = x, \beta(y) = y$  y a la identidad de Mardia y Thompson (1972) si tomamos  $\alpha(x) = x^r, \beta(y) = y^s$ .

Quesada-Molina (1992) probó que si  $K(x, y)$  es una función real quasi-monótona y continua a la derecha en el sentido de que

$$\Delta_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} K(x, y) = K(x_1, y_1) - K(x_2, y_1) - K(x_1, y_2) + K(x_2, y_2) \geq 0, \quad (3.4)$$

para toda  $x_1 \leq x_2$  y  $y_1 \leq y_2$ , la función de distribución de  $X, Y$  es  $H$  y la función de distribución de  $X^*, Y^*$  es  $H^* = F \times G$ , entonces

$$E[K(X, Y)] - E[K(X^*, Y^*)] = \int_{\mathbb{R}^2} [H(x, y) - F(x)G(y)] dK(x, y). \quad (3.5)$$

En particular si  $K(X, Y) = XY$ , la ecuación (3.5) se reduce a la identidad de Hoeffding (3.1).

**Definición 3.1.** (Vitali) Una función  $\phi(x, y)$  es de variación acotada en el rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$ , si para todos los puntos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ ,  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ , la suma

$$\sum_{i=1, j=1}^{m, n} \Delta_{(x_{i-1}, y_{j-1})}^{(x_i, y_j)} \phi, \quad (3.6)$$

está acotada.

En el siguiente ejemplo, mostramos que no toda función de variación acotada es quasi-monótona, como afirma Dewan y Rao (2005) al considerar la ecuación (3.3) como un caso particular de la ecuación (3.5).

**Ejemplo 3.1.** Sea la función  $\phi(x, y) = (x - 1/2)^2(y - 1/2)^2$  definida en  $[0, 1]^2$ . Consideremos la función  $\alpha(x) = (x - 1/2)^2$  en  $[0, 1]$  de variación acotada por ser diferenciable con derivada acotada, además el producto  $\phi(x, y) = \alpha(x)\alpha(y)$  es de variación acotada. Veamos ahora que  $\phi$  no es una función quasi-monótona, es decir, que no se satisface la desigualdad (3.4). Consideremos la región rectangular  $[1/2, 1] \times [0, 1/2]$  contenida en el

dominio de  $\phi$ . Entonces

$$\begin{aligned}\Delta_{(1,1/2)}^{(0,1/2)}\phi &= \phi(1, 1/2) - \phi(1/2, 1/2) - \phi(1, 0) + \phi(1/2, 0) \\ &= -\phi(1, 0) = -1/16.\end{aligned}$$

## 3.2. Generalización del Lema de Hoeffding

En el siguiente teorema, extendemos el resultado de Quesada-Molina a la clase de funciones de variación acotada de dos variables en el rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$ , de forma que se establece una relación con el resultado dado por Cuadras (2002b).

**Teorema 3.1.** Sean  $X, Y$  variables aleatorias con soporte en los intervalos  $[a, b], [c, d]$ , con función de distribución conjunta  $H(x, y)$  y funciones de distribución marginales  $F(x), G(y)$  respectivamente, y sea  $X^*, Y^*$  variables aleatorias con función de distribución conjunta  $H^* = FG$ . Suponemos que  $\phi(x, y)$  es una función de variación acotada en el rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$  y que  $E[\phi(X, Y)]$  y  $E[\phi(X^*, Y^*)]$  existen y son finitos, entonces

$$E[\phi(X, Y)] - E[\phi(X^*, Y^*)] = \int_a^b \int_c^d [H(x, y) - F(x)G(y)] d\phi(x, y). \quad (3.7)$$

*Demostración.* Consideremos la función

$$\Delta_{(a,c)}^{(\zeta,\eta)}\phi(x, y) = \phi(\zeta, \eta) - \phi(a, \eta) - \phi(\zeta, c) + \phi(a, c),$$

donde  $a \leq \zeta \leq b, c \leq \eta \leq d$ . Así

$$\Delta_{(a,c)}^{(b,d)}\phi(x, y) = \sum \Delta_{(a,\zeta)}^{(c,\eta)}\phi(x, y).$$

Si la suma  $\sum |\Delta_{(a,c)}^{(\zeta,\eta)}\phi(x, y)|$  es menor que algún número positivo fijo y además  $\phi(x, y)$  es para cada valor de  $x$ , una función de variación acotada respecto a  $y$ , y para cada valor de  $y$ , una función de variación acotada respecto a  $x$ , entonces  $\phi$  es una función de variación acotada en el rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$ .

Sea  $V_{(a,c)}^{(b,d)}\phi(x, y)$  la cota superior de la suma  $\sum |\Delta_{(a,c)}^{(\zeta,\eta)}\phi(x, y)|$ . Si la  $\sum$  es dividida en dos

partes  $\sum_1$  y  $\sum_2$ , donde  $\sum_1$  denota la suma de todos aquellos términos para el cual  $\Delta$  es positiva y  $\sum_2$  denota la suma de todos aquellos términos para el cual  $\Delta$  es negativa, vemos que  $\sum_1 \Delta\phi$  y  $-\sum_2 \Delta\phi$  tienen cotas superiores finitas que denotamos por  $P_{(a,c)}^{(b,d)}\phi$  y  $N_{(a,c)}^{(b,d)}\phi$  respectivamente.

Las funciones

$$P(x, y) = P_{(a,c)}^{(x,y)}\phi \text{ y } N(x, y) = N_{(a,c)}^{(x,y)}\phi.$$

son funciones monótonas en el sentido que si  $x \leq x', y \leq y'$ , entonces  $P(x, y) \leq P(x', y')$  y  $N(x, y) \leq N(x', y')$

Luego

$$\phi(x, y) = \phi(a, y) + \phi(x, c) - \phi(a, c) + P(x, y) - N(x, y).$$

Si  $\phi$  es una función de  $x$ , de variación acotada para toda  $x \in (a, b)$ , ésta es igual a  $p(x) - n(x)$ , donde  $p(x), n(x)$  son funciones monótonas crecientes de  $x$ . Similarmente, si  $\phi$  es una función de  $y$ , de variación acotada para toda  $y \in (c, d)$ , se puede representar como la diferencia  $p'(y) - n'(y)$  de dos funciones monótonas crecientes de  $y$ .

Indicamos

$$\bar{P}(x, y) = P(x, y) + p(x, c) + p'(a, y)$$

y

$$\bar{N}(x, y) = N(x, y) + n(x, c) + n'(a, y).$$

Entonces

$$\phi(x, y) = \bar{P}(x, y) - \bar{N}(x, y) - \phi(a, c), \quad (3.8)$$

donde  $\bar{P}, \bar{N}$  son funciones quasi-monótonas, por ser la suma de una función monótona de dos variables y de funciones monótonas crecientes de variable separable (Véase Hobson 1927, pág. 347). Esto muestra que una función  $\phi$  de variación acotada en el rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$ , se puede expresar como la diferencia de dos funciones quasi-monótonas.

De la definición de Quesada-Molina (1992) para cada una de las funciones quasi-monótonas  $\bar{P}, \bar{N}$  en el rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$ , tenemos

$$E[\bar{P}(X, Y)] - E[\bar{P}(X^*, Y^*)] = \int_a^b \int_c^d [H(x, y) - F(x)G(y)] d\bar{P}(x, y), \quad (3.9)$$

y

$$E[\bar{N}(X, Y)] - E[\bar{N}(X^*, Y^*)] = \int_a^b \int_c^d [H(x, y) - F(x)G(y)] d\bar{N}(x, y). \quad (3.10)$$

Al combinar las ecuaciones (3.9) y (3.10) con (3.8) y en virtud de la linealidad de las integrales de Lebesgue inducida en el rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$  por la función de variación acotada  $\phi$ , se tiene

$$E[\phi(X, Y)] - E[\phi(X^*, Y^*)] = \int_a^b \int_c^d [H(x, y) - F(x)G(y)] d\phi(x, y).$$

□

De forma similar a la prueba de este teorema, se puede obtener una extensión al caso multivariante de dimensión par ( $2d$ ), que enunciaremos en el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.** *Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{2d})$  un vector aleatorio con función de distribución conjunta  $H$  y funciones de distribución marginales  $F_i(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq 2d$ , definidas en los intervalos  $[a_i, b_i]$ ,  $1 \leq i \leq 2d$ . Sea  $\mathbf{X}^* = (X_1^*, \dots, X_{2d}^*)$  un vector aleatorio con función de distribución conjunta  $H^* = \prod_{i=1}^{2d} F_i(x_i)$ . Sea  $\phi(x_1, \dots, x_{2d})$  una función de variación acotada en la semialgebra de los rectángulos en  $\mathbb{R}^{2d}$ . Si  $\mathcal{A}$  son todos los subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, 2d\}$  incluido el conjunto vacío, supondremos que  $E[\phi(X_1, \dots, X_{2d})]$  y  $E[\phi(X_{i \in \mathcal{A}}^*; X_{i \notin \mathcal{A}})]$  existen y son finitos, entonces*

$$\begin{aligned} & 2E[\phi(X_1, \dots, X_{2d})] + \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E[\phi(X_{i \in \mathcal{A}}^*; X_{i \notin \mathcal{A}})] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E[\prod_{i \in \mathcal{A}} I(u_i, x_i)] E[\prod_{i \notin \mathcal{A}} I(u_i, x_i)] d\phi(x_1, \dots, x_{2d}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde el  $\text{card}(\mathcal{A})$  denota la cardinalidad de  $\mathcal{A}$  y  $I(u, x) = 1$ , si  $u \leq x$  y 0 en otro caso.

*Demostración.* Toda función de variación acotada  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  en la semialgebra de los rectángulos en  $\mathbb{R}^n$ , se puede expresar como diferencia de dos funciones  $K_1$  y  $K_2$ , que tienen diferencias no-negativas de orden  $n$ , a esta clase de funciones se les llama funciones  $n$ -positivas, es decir

$$\Delta_{(x_1, \dots, x_n)}^{(x'_1, \dots, x'_n)} K_j \geq 0; \quad j = 1, 2$$

para todo  $x_i \leq x'_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . En particular, las funciones 1-positivas, son las funciones

monótonas crecientes, a las funciones 2–positivas se les conoce con el nombre de funciones quasi-monótonas o funciones 2–crecientes.

Siguiendo los mismos desarrollos de la prueba del teorema anterior en un espacio de dimensión par  $(2d)$ , se tiene

$$\phi(x_1, \dots, x_{2d}) \equiv K_1(x_1, \dots, x_{2d}) - K_2(x_1, \dots, x_{2d}). \quad (3.12)$$

De Prakasa Rao (1998), que extiende la identidad de Quesada-Molina (1992) al caso multivariante, basándonos en este resultado, para cada función  $n$ –positiva  $K_j; j = 1, 2$

$$\begin{aligned} & 2E[K_j(X_1, \dots, X_{2d})] + \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E[K_j(X_{i \in \mathcal{A}}^*; X_{i \notin \mathcal{A}})] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E[\prod_{i \in \mathcal{A}} I(u_i, x_i)] E[\prod_{i \notin \mathcal{A}} I(u_i, x_i)] dK_j(x_1, \dots, x_{2d}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $\sum$  se evalúa sobre todos los subconjuntos propios no vacíos  $\mathcal{A}$  de  $\{1, 2, \dots, 2d\}$  y  $\{X_{i \in \mathcal{A}}^*\}$  distribuye idénticamente que  $\{X_{i \in \mathcal{A}}\}$  e independiente de  $\{X_{i \notin \mathcal{A}}\}$ .

Al combinar (3.13) con (3.12) se tiene

$$\begin{aligned} & 2E[\phi(X_1, \dots, X_{2d})] + \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E[\phi(X_{i \in \mathcal{A}}^*; X_{i \notin \mathcal{A}})] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E[\prod_{i \in \mathcal{A}} I(u_i, x_i)] E[\prod_{i \notin \mathcal{A}} I(u_i, x_i)] d\phi(x_1, \dots, x_{2d}). \end{aligned}$$

□

Como caso particular cuando  $\phi$  es una función de variables separables, es decir  $\phi(x_1, \dots, x_{2d}) = \prod_{i=1}^{2d} \alpha_i(x_i)$ , se obtiene la generalización de la identidad de Cuadras (2002b), al caso multivariante de dimensión par  $(2d)$ .

**Corolario 3.3.** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_{2d}$ , variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidos,  $H$  la función de distribución conjunta y  $F_i(X_i), 1 \leq i \leq 2d$ , las funciones de distribución marginales. Sean  $\alpha_i(x_i), 1 \leq i \leq 2d$  funciones de variación acotada.

Supongamos que  $E[\prod_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i(X_i)]$  y  $E[\prod_{i \notin \mathcal{A}} \alpha_i(X_i)]$  existen y son finitos, entonces

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E[\prod_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i(X_i)] E[\prod_{i \notin \mathcal{A}} \alpha_i(X_i)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E[\prod_{i \in \mathcal{A}} I(u_i, X_i)] E[\prod_{i \notin \mathcal{A}} I(u_i, X_i)] d \prod_{i=1}^{2d} \alpha_i(u_i). \end{aligned} \quad (3.14)$$

*Demostración.* Sea  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{2d})$  un vector aleatorio y  $\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_{2d}^*)$  una copia independiente de  $\mathbf{X}$ . Consideremos la función no decreciente

$$I(u, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \leq x, \\ 0 & \text{si } u > x. \end{cases}$$

Por ser  $\alpha_i$  funciones de variación acotada,  $d\alpha_i(x_i)$  es integrable, según Lebesgue (1904), luego

$$\begin{aligned} \alpha_i(X_i) - \alpha_i(X_i^*) &= \int_{X_i^*}^{X_i} d\alpha_i(u_i) \\ &= \int_{\mathbb{R}} [I(u_i, X_i) - I(u_i, X_i^*)] d\alpha_i(u_i). \end{aligned}$$

Extendiendo al producto

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{2d} (\alpha_i(X_i) - \alpha_i(X_i^*)) &= \prod_{i=1}^{2d} \left\{ \int_{\mathbb{R}} [I(u_i, X_i) - I(u_i, X_i^*)] d\alpha_i(u_i) \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \prod_{i=1}^{2d} [I(u_i, X_i) - I(u_i, X_i^*)] d \prod_{i=1}^{2d} \alpha_i(u_i). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Los términos de la productoria se pueden expresar en forma de una sumatoria, como sigue

$$\prod_{i=1}^{2d} (\alpha_i(X_i) - \alpha_i(X_i^*)) = \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} \prod_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i(X_i) \prod_{i \notin \mathcal{A}} \alpha_i(X_i^*), \quad (3.16)$$

y

$$\prod_{i=1}^{2d} [I(u_i, X_i) - I(u_i, X_i^*)] = \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} \prod_{i \in \mathcal{A}} I(u_i, X_i) \prod_{i \notin \mathcal{A}} I(u_i, X_i^*), \quad (3.17)$$

donde la suma se toma sobre todos los subconjuntos  $\mathcal{A} \subset \{1, 2, \dots, 2d\}$  incluido el conjunto vacío y el  $\text{card}(\mathcal{A})$  denota la cardinalidad de  $\mathcal{A}$ . Al reemplazar (3.16), (3.17) en (3.15), se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} \prod_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i(X_i) \prod_{i \notin \mathcal{A}} \alpha_i(X_i^*) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left\{ \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} \prod_{i \in \mathcal{A}} I(u_i, X_i) \prod_{i \notin \mathcal{A}} I(u_i, X_i^*) \right\} d \prod_{i=1}^{2d} \alpha_i(u_i). \end{aligned}$$

Suponiendo que  $E[\prod_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i(X_i)]$  y  $E[\prod_{i \notin \mathcal{A}} \alpha_i(X_i^*)]$  existen y que los vectores  $\mathbf{X}, \mathbf{X}^*$  son independientes, al aplicar el teorema de Fubini, se tiene

$$\begin{aligned} & E \left[ \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} \prod_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i(X_i) \prod_{i \notin \mathcal{A}} \alpha_i(X_i^*) \right] \\ &= \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E \left[ \prod_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i(X_i) \right] E \left[ \prod_{i \notin \mathcal{A}} \alpha_i(X_i^*) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E \left[ \prod_{i \in \mathcal{A}} I(u_i, X_i) \right] E \left[ \prod_{i \notin \mathcal{A}} I(u_i, X_i^*) \right] d \prod_{i=1}^{2d} \alpha_i(u_i). \end{aligned}$$

Dado que  $\mathbf{X}, \mathbf{X}^*$  distribuyen idénticamente,

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E \left[ \prod_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i(X_i) \right] E \left[ \prod_{i \notin \mathcal{A}} \alpha_i(X_i) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E \left[ \prod_{i \in \mathcal{A}} I(u_i, X_i) \right] E \left[ \prod_{i \notin \mathcal{A}} I(u_i, X_i) \right] d \alpha_i(u_i). \end{aligned}$$

□

Para entender el corolario anterior, consideremos el caso  $d = 1$ , luego  $\mathcal{A}$  son todos los

subconjuntos de  $\{1, 2\}$ , así

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i(X_i)\right] E\left[\prod_{i \notin \mathcal{A}} \alpha_i(X_i)\right] \\
&= 2(E[\alpha_1(X_1)\alpha_2(X_2)] - E[\alpha_1(X_1)]E[\alpha_2(X_2)]) \\
&= 2\text{Cov}(\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)) \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^2} \text{Cov}[I(u_1, X_1), I(u_2, X_2)] d\alpha_1(u_1) d\alpha_2(u_2) \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^2} \{P(X_1 \leq u_1, X_2 \leq u_2) - P(X_1 \leq u_1)P(X_2 \leq u_2)\} d\alpha_1(u_1) d\alpha_2(u_2) \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^2} \{H(u_1, u_2) - F_1(u_1)F_2(u_2)\} d\alpha_1(u_1) d\alpha_2(u_2).
\end{aligned}$$

Este resultado coincide con el obtenido por Cuadras (2002b).

**Ejemplo 3.2.** Consideremos el caso discreto, donde  $\alpha(x) = \text{sgn}(x)$  y  $\beta(y) = \text{sgn}(y)$ , donde  $\text{sgn}(x) = 1$ , si  $x > 0$ , 0 si  $x = 0$  y  $-1$  si  $x < 0$ , el diferencial de  $\text{sgn}(x)$ , es  $d\text{sgn}(x) = 2$ , si  $x = 0$  y 0 en otro caso. Entonces para algún  $x_0$  y  $y_0$

$$\text{Cov}(\text{sgn}(X - x_0), \text{sgn}(Y - y_0)) = 4(H(x_0, y_0) - F(x_0)G(y_0)).$$

### 3.3. Aplicaciones

En esta sección obtenemos una desigualdad para la covarianza de funciones multidimensionales de variación acotada de variables aleatorias PQD .

**Teorema 3.4.** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_{2d}$  variables aleatorias dependientes de cuadrante positivo y con varianza finita, sean  $\alpha_i(x_i)$  funciones de variación acotada en  $\mathbb{R}$  cuya derivada  $\alpha'_i(x_i)$  existe y está acotada. Entonces

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i(X_i)\right] E\left[\prod_{i \notin \mathcal{A}} \alpha_i(X_i)\right] \\
& \leq \prod_{i=1}^{2d} |\text{máx}\{\alpha'_i(x_i)\}| \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{i \in \mathcal{A}} X_i\right] E\left[\prod_{i \notin \mathcal{A}} X_i\right]. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

*Demostración.* Si  $X_1, X_2, \dots, X_{2d}$  son variables aleatorias dependientes de cuadrante positivo y con varianza positiva, entonces cada  $I(u_i, X_i); 1 \leq i \leq 2d$  es no decreciente en  $x_i$  para cada  $u_i$  fijo, así

$$\sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{i \in \mathcal{A}} I(u_i, X_i)\right] E\left[\prod_{i \notin \mathcal{A}} I(u_i, X_i)\right] \geq 0. \quad (3.19)$$

Reemplazando (3.19) en (3.14), se tiene

$$\sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i(X_i)\right] E\left[\prod_{i \notin \mathcal{A}} \alpha_i(X_i)\right] \geq 0. \quad (3.20)$$

Bajo el supuesto que las  $\alpha_i(x_i); 1 \leq i \leq 2d$ , son funciones de variación acotada en  $\mathbb{R}$  cuya derivada  $\alpha'_i(x_i)$  existe y esta acotada, se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i(X_i)\right] E\left[\prod_{i \notin \mathcal{A}} \alpha_i(X_i)\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \prod_{i=1}^{2d} \alpha'_i(u_i) \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{i \in \mathcal{A}} I(u_i, X_i)\right] E\left[\prod_{i \notin \mathcal{A}} I(u_i, X_i)\right] du_1 \dots du_{2d} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} \prod_{i=1}^{2d} |\text{máx}\{\alpha'_i(u_i)\}| \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{i \in \mathcal{A}} I(u_i, X_i)\right] E\left[\prod_{i \notin \mathcal{A}} I(u_i, X_i)\right] du_1 \dots du_{2d} \\ &\leq \prod_{i=1}^{2d} |\text{máx}\{\alpha'_i(X_i)\}| \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{i \in \mathcal{A}} I(u_i, X_i)\right] E\left[\prod_{i \notin \mathcal{A}} I(u_i, X_i)\right] du_1 \dots du_{2d} \\ &= \prod_{i=1}^{2d} |\text{máx}\{\alpha'_i(X_i)\}| \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{i \in \mathcal{A}} X_i\right] E\left[\prod_{i \notin \mathcal{A}} X_i\right]. \end{aligned}$$

□

El caso  $d = 1$ , será

$$\text{Cov}(\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)) \leq |\text{máx}\{\alpha'_1(X_1)\} \text{máx}\{\alpha'_2(X_2)\}| \text{Cov}(X_1, X_2). \quad (3.21)$$

**Ejemplo 3.3.** Sea  $X, Y \sim U(0, 1)$  variables aleatorias PQD con función de distribución conjunta  $H(x, y) = \min(x, y)^\theta (xy)^{1-\theta}$ ;  $\theta \in [0, 1]$ . Consideremos las funciones de variación acotada  $\alpha(x) = (x - 1/2)^2$ ,  $\beta(y) = (y - 1/2)^2$  con derivadas  $\alpha'(x) = 2(x - 1/2)$ ,  $\beta'(y) = 2(y - 1/2)$ , luego

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \int_{I^2} (H(x, y) - F(x)G(y)) dx dy \\ &= \int_{I^2} [\min(x, y)^\theta (xy)^{1-\theta} - xy] dx dy = \frac{\theta}{4(4-\theta)}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

y

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\alpha(X), \beta(Y)) &= \int_{I^2} (H(x, y) - F(x)G(y)) d\alpha d\beta \\ &= 4 \int_{I^2} [\min(u, v)^\theta (uv)^{1-\theta} - uv] (x - 1/2)(y - 1/2) dx dy \\ &= \frac{8}{3(6-\theta)} + \frac{1}{(4-\theta)} - \frac{10}{3(5-\theta)} - \frac{1}{36}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Puesto que  $\max\{\alpha'(x)\} = \max\{\beta'(y)\} = 1$ , entonces al reemplazar (3.22) y (3.23) en (3.21), tenemos

$$\frac{8}{3(6-\theta)} + \frac{1}{(4-\theta)} - \frac{10}{3(5-\theta)} - \frac{1}{36} \leq \frac{\theta}{4(4-\theta)}.$$

Al simplificar, se obtiene la siguiente desigualdad

$$-\frac{2\theta(8-\theta)}{9(6-\theta)(5-\theta)} \leq 0.$$

la cual es válida para todo  $\theta \in [0, 1]$ .

**Lema 3.4.1.** Sea  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{2d})$  y  $\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_{2d}^*)$  dos vectores aleatorios dependientes de cuadrante positivo y con varianza finita, independientes e idénticamente distribuidos, entonces

$$E\left\{\prod_{j=1}^{2d} (e^{it_j X_j} - e^{it_j X_j^*})\right\} \leq \left|\prod_{j=1}^{2d} t_j\right| E\left\{\prod_{j=1}^{2d} (X_j - X_j^*)\right\}. \quad (3.24)$$

*Demostración.* Sea  $\alpha_j(x_j) = e^{it_j x_j}$ ,  $1 \leq j \leq 2d$  la función exponencial compleja o también llamada función característica, la derivada  $\alpha'_j(x_j) = it_j e^{it_j x_j}$  existe. De (3.18) se tiene

$$\begin{aligned}
& E\left\{\prod_{j=1}^{2d} (e^{it_j X_j} - e^{it_j X_j^*})\right\} \\
&= \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{j \in \mathcal{A}} e^{it_j x_j}\right] E\left[\prod_{j \notin \mathcal{A}} e^{it_j x_j}\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \prod_{j=1}^{2d} \{it_j e^{it_j u_j}\} \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{j \in \mathcal{A}} I(u_j, X_j)\right] E\left[\prod_{j \notin \mathcal{A}} I(u_j, X_j)\right] du_1 \dots du_{2d} \\
&\leq \prod_{j=1}^{2d} |t_j| \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{j \in \mathcal{A}} I(u_j, X_j)\right] E\left[\prod_{j \notin \mathcal{A}} I(u_j, X_j)\right] du_1 \dots du_{2d} \\
&\leq \left|\prod_{j=1}^{2d} t_j\right| \sum_{\mathcal{A}} (-1)^{\text{card}(\mathcal{A})} E\left[\prod_{j \in \mathcal{A}} X_j\right] E\left[\prod_{i \notin \mathcal{A}} X_i\right] = \prod_{j=1}^{2d} |t_j| E\left\{\prod_{j=1}^{2d} (X_j - X_j^*)\right\}.
\end{aligned}$$

□

En particular, al tomar  $d = 1$  en (3.24), tenemos

$$\begin{aligned}
E\left\{\prod_{j=1}^2 (e^{it_j X_j} - e^{it_j X_j^*})\right\} &= E[(e^{it_1 X_1} - e^{it_1 X_1^*})(e^{it_2 X_2} - e^{it_2 X_2^*})] \\
&= 2\{E[e^{i(t_1 X_1 + t_2 X_2)}] - E[e^{it_1 X_1}]E[e^{it_2 X_2}]\} \\
&= 2\text{Cov}(e^{it_1 X_1}, e^{it_2 X_2}) \leq 2|t_1||t_2|E\{(X_1 - X_1^*)(X_1 - X_1^*)\} \\
&= 2|t_1 t_2|\{E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]\} = 2|t_1 t_2|\text{Cov}(X_1, X_2).
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\text{Cov}(e^{it_1 X_1}, e^{it_2 X_2}) \leq |t_1 t_2| \text{Cov}(X_1, X_2).$$



## Capítulo 4

# Dimensionalidad en cópula

El estudio de las dimensiones significativas es un tema presente en la ciencia y siempre ha despertado interés. C. R. Rao demostró que si conocemos la distribución de  $k$  combinaciones lineales de  $p$  variables independientes, siendo  $k(k-1)/2 < p < k(k+1)/2$ ; entonces la distribución de cada una de las  $p$  variables queda determinada (salvo la media o parámetro de localización). Por ejemplo, si tenemos  $p = 210$  variables independientes bastaría conocer la distribución de  $k = 20$  combinaciones lineales adecuadas para determinar la distribución de las 210 variables. Este resultado proporciona una cierta justificación teórica acerca del hecho que la información multivariante posee una dimensionalidad latente mucho más pequeña.

Uno de los propósitos es reducir la alta dimensionalidad de los datos a dos o tres dimensiones con el propósito de obtener una representación gráfica a fin de poder observar los datos, como por ejemplo, la detección de conglomerados, datos atípicos y otras estructuras en los datos que sean objeto de investigación. Algunas de las técnicas desarrolladas son el análisis biplot (Gabriel, 1971; Gower, 1992; Greenacre, 1993), el escalamiento multidimensional (Kruskal y Wish, 1978), el análisis de correspondencias (Benzécri, 1992; Greenacre, 1984, 2008; Lancaster, 1969; Cuadras, 2002a), el análisis de componentes principales (Rao, 1964), el análisis factorial (Jöreskog, 1967; Johnson y Wichern, 2002), entre otras.

En el caso de las distribuciones bivariantes, el número de distintas correlaciones canónicas

determinan la dimensión de una función de una distribución conjunta  $H(x, y)$  del par de variables aleatorias  $X$  e  $Y$  con marginales  $F(x)$  y  $G(y)$ , es decir la dimensión de  $H$  es el número de correlaciones canónicas  $(\rho_n)$ . En general, esta dimensión es finita o numerable, pero puede ser continua.

En este capítulo, empezamos estudiando en la sección 4.1, el núcleo de covarianza relacionado con la distribución conjunta simétrica  $H(x, y)$  que denotamos por  $K$ , este núcleo puede expandirse como la suma del producto de funciones y valores propios unitarios de  $K$ , el cardinal del conjunto no nulo de valores propio determinan la dimensión de  $H$ . En la sección 4.2, presentamos la expansión diagonal de  $H$  en términos de las correlaciones canónicas, en relación con el análisis de correspondencias. En la sección 4.3, se define la dimensionalidad geométrica en función del cardinal del conjunto de correlaciones canónicas de la expansión diagonal de  $H$  y por último en la sección 4.4, obtendremos la dimensionalidad para algunas de las cópulas simétricas más conocidas.

## 4.1. Descomposición propia de un núcleo

Sea  $H(x, y)$  la función de distribución conjunta de un par de variables aleatorias  $X$  e  $Y$  definidas en  $[a, b]$  y  $[c, d]$  respectivamente, con funciones de distribución marginales  $F(x)$  y  $G(y)$ . Consideremos el núcleo

$$K(s, t) = H(s, t) - F(s)G(t).$$

Tenemos  $K(s, t) = \text{Cov}(X_s, Y_t)$ , la función de covarianza entre los procesos estocásticos de Bernoulli  $\mathbf{X} = \{X_s, s \in [a, b]\}$ ,  $\mathbf{Y} = \{Y_t, t \in [c, d]\}$ , donde  $X_s, Y_t$  son los indicadores de  $[X > s], [Y > t]$ , respectivamente.

Supongamos que  $H(x, y)$  es simétrica y dependiente de cuadrante positivo (PQD), es decir,  $H(x, y) = H(y, x)$  y  $H(x, y) \geq F(x)G(y)$  para todo  $x, y$ . Si la traza  $V(K) = \int_a^b K(t, t)dt$  es finita, el núcleo simétrico  $K$  puede expandirse como

$$K(s, t) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n \psi_n(s) \psi_n(t), \quad (4.1)$$

donde  $\psi_n, \lambda_n \geq 0, n \geq 1$ , son las funciones unitarias y los valores propios relacionados con el operador integral definido por  $K$ . Suponemos que los valores propios están organizados en orden descendente y todas las funciones propias son absolutamente continuas.

En particular, si suponemos que  $X \equiv Y$ , entonces  $H(x, y) = F^+(x, y)$ , donde  $F^+(x, y) = \min\{F(x), F(y)\}$  es la cota superior de Fréchet-Hoeffding,  $K(s, t) = F^+(s, t) - F(s)F(t)$  y escribiendo  $V(K) = V(F)$ , se prueba que

$$V(F) = \int_a^b F(t)(1 - F(t))dt = 1/2E|X - X'|,$$

donde  $X, X'$  son independientes e idénticamente distribuidas.

En general  $K$  es la diferencia entre la función de distribución conjunta  $H$  bivalente y la función de distribución conjunta de independencia  $FG$ , por lo que han aparecido una serie de propuestas para medir la dependencia basándose en el núcleo  $K$ .

Cuadras (2002b) proporcionó una extensión del lema de Hoeffding al caso de funciones de variación acotada  $\alpha(x)$  y  $\beta(y)$ , de la siguiente forma

$$\text{Cov}(\alpha(x), \beta(y)) = \int_c^d \int_a^b [H(x, y) - F(x)G(y)]d\alpha(x)d\beta(y). \quad (4.2)$$

Suponiendo que  $H(x, y)$  es  $H^+(x, y) = \min\{F(x), G(y)\}$ , la cota inferior de Fréchet-Hoeffding (véase Joe (1997) y Cuadras (2006)), entonces  $K(x, y) = \min\{F(x), G(y)\} - F(x)G(y)$ , así el coeficiente de correlación

$$\rho^+ = \int_c^d \int_a^b K(x, y)dx dy / \sigma_X \sigma_Y,$$

es la máxima correlación de Hoeffding entre  $X$  e  $Y$ .

Consideremos la integral

$$h_n(x) = \int_a^x \psi_n(t)dt.$$

Al combinar (4.1) y (4.2)

$$\text{Cov}(h_m(X), h_n(Y)) = \sum_{j \geq 1} \lambda_j \int_a^b \psi_j(s) \psi_m(s) ds \int_a^b \psi_j(t) \psi_n(t) dt,$$

donde  $\int_a^b \psi_j(s) \psi_m(s) ds = \delta_{jm}$  (delta de Kronecker). Sea  $\phi \in L^2(I)$  tal que  $\phi'$  exista. Para probar que  $\{h_n\}$  es completo, supongamos que  $\text{Cov}(\phi(X), h_n(X)) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Puesto que  $\{\psi_n\}$  es un sistema completo  $\phi' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n$ , luego  $\phi = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n h_n$ . Pero  $\text{Cov}(\phi(X), h_n(X)) = c_n \lambda_n = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , así  $\phi$  debe ser constante.

En particular, si  $H(x, y) = H^+(x, y)$ , entonces  $\text{Var}(h_n(X)) = \lambda_n$  y  $\{h_n\}$ , con el producto interno  $\langle h_1, h_2 \rangle = \text{Cov}(h_1(X), h_2(Y))$ , constituye un sistema ortogonal completo para el conjunto de las funciones absolutamente continuas de  $L^2(I)$ .

Claramente  $h_1$  es creciente y positiva. Sin embargo,  $\text{tr}(K)$  es finita si  $\text{Var}(X)$  existe y cualquier  $h_n$  está acotada incluso para  $b = \infty$ .

Ejemplos de componentes principales  $h_n(x)$  y sus correspondiente  $\psi_n$  y  $\lambda_n$  (véase Cuadras y Fortiana, 1995; Cuadras y Lahlou, 2000 y Cuadras, 2002a) son:

1. Si  $X$  es uniforme  $(0, 1)$ ,  $h_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{n\pi}(1 - \cos n\pi x)$ ,  $\psi_n = \sqrt{2}\text{sen}(n\pi x)$  y  $\lambda_n = 1/(n\pi)^2$ .
2. Si  $X$  es exponencial negativa con distribución  $F(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$ ;  $x > 0$ ,  $h_n(x) = 2(\sqrt{\alpha}\xi_n J_0(\xi_n))^{-1}(J_0(\xi_n \exp(-\alpha x/2)) - J_0(\xi_n))$ ,  $\lambda_n = 4/(\alpha\xi_n^2)$  y  $\psi_n = \sqrt{\alpha} \exp(-\alpha x/2)(J_0(\xi_n))^{-1} J_1(\xi_n \exp(-\alpha x/2))$  donde  $J_0$  y  $J_1$  son las funciones de Bessel de primera clase de orden 0 y 1 y  $\xi_n$  es la  $n$ -ésima raíz positiva de  $J_1$ .
3. Si  $X$  es la estándar Logística,  $h_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)}}[P_n(2F(x) - 1) - (-1)^n]$ ,  $\psi_n = 2\sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)}}P'_n(2F(x) - 1)f(x)$  y  $\lambda_n = 1/(n(n+1))$ , donde  $P_n$  es el polinomio de Legendre de grado  $n$ .
4. Si  $X$  es Pareto con  $F(x) = 1 - x^{-3}$ ;  $x > 1$ ,  $f_n(x) = c_n[x \text{sen}(\xi_n/x) - \text{sen}(\xi_n)]$ ,  $\psi_n = c_n[\text{sen}(\xi_n/x) - (\xi_n/x) \cos(\xi_n/x)]$  y  $\lambda_n = 3/\xi_n^2$ , donde  $c_n = 2\xi_n^{-1/2}(2\xi_n - \text{sen}(2\xi_n))^{-1/2}$  y  $\xi_n$  es la  $n$ -ésima raíz positiva de  $J_{3/2}$ .

Las componentes principales  $h_n(x)$  también se pueden interpretar como las dimensiones principales en un escalamiento métrico continuo de la distancia  $\delta(x, x') = (|x - x'|)^{1/2}$ .

## 4.2. Expansión diagonal

Consideremos la expansión diagonal de  $H$  en términos de las correlaciones canónicas  $\rho_n$  y las variables canónicas  $a_n, b_n$ :

$$dH(x, y) - dF(x)dG(y) = \sum_{n \geq 1} \rho_n a_n(x) b_n(y) dF(x) dG(y). \quad (4.3)$$

Esta expansión existe siempre que

$$\int_c^d \int_a^b \frac{(dH(x, y))^2}{dF(x)dG(y)} < \infty.$$

Cuadras (2002a) probó la siguiente expansión en términos de la función de distribución conjunta

$$H(x, y) - F(x)G(y) = \sum_{n \geq 1} \rho_n \int_a^b L(x, s) da_n(s) \int_a^b M(t, y) db_n(t), \quad (4.4)$$

donde  $L(x, s) = \min\{F(x), F(s)\} - F(x)F(s)$ ,  $M(t, y) = \min\{G(t), G(y)\} - G(t)G(y)$ . En general, no hay relación entre las expansiones (4.1) y (4.4). Pero se pueden dar algunos ejemplos donde esta relación existe, como veremos más adelante con la familia FGM generalizada.

Cuando las densidades existen, la ecuación (4.3) se puede expresar como

$$h(x, y) - f(x)g(y) = \sum_{n \geq 1} \rho_n a_n(x) b_n(y) f(x) g(y), \quad (4.5)$$

donde  $a_n(x) = f(x)^{-1/2} u_n(x)$  y  $b_n(y) = g(y)^{-1/2} v_n(y)$  son las funciones canónicas,  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  y  $\{v_n\}_{n \geq 1}$  son conjuntos ortonormales completos de funciones en  $L^2([a, b])$  y  $L^2([c, d])$  respectivamente y  $\{\rho_n\}_{n \geq 1}$  la sucesión de las correlaciones canónicas.

Dado que  $\{a_n(x)f(x)^{1/2}, b_n(y)g(y)^{1/2}\}$  es un conjunto ortogonal completo sobre  $X$  e  $Y$ , se

cumple

$$\int_a^b a_n(x)a_m(x)f(x)dx = \int_c^d b_n(y)b_m(y)g(y)dy \quad (4.6)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases}$$

**Proposición 4.1.**

$$a_n(x) = \rho_n^{-1} f^{-1}(x) \int_c^d [h(x, y) - f(x)g(y)]b_n(y)dy.$$

*Demostración.*

$$f^{-1}(x) \int_c^d [h(x, y) - f(x)g(y)]b_n dy = f^{-1}(x) \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m a_m f(x) \int_c^d g(y)b_m b_n dy.$$

De (4.6)

$$f^{-1}(x) \int_c^d [h(x, y) - f(x)g(y)]b_n(y)dy = \rho_n a_n.$$

□

Las variables canónicas  $a_n(X), b_n(Y)$  con  $n \in \mathbb{N}$ , forman un conjunto de variables aleatorias incorrelacionadas y centradas.

### Propiedades de las variables canónicas

Sean las variables canónicas son  $a_n(X), b_n(Y)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

1.  $E(a_n(X)) = E(b_n(Y)) = 0$ .
2.  $\text{Var}(a_n(X)) = \text{Var}(b_n(Y)) = 1$ .
3.  $\text{Cov}(a_n(X), a_m(X)) = \text{Cov}(b_n(Y), b_m(Y)) = 0$ , si  $n \neq m$ .
4.  $\text{Cov}(a_n(X), b_n(Y)) = \rho_n$ .

*Demostración.* 1.

$$\begin{aligned} E(a_n(X)) &= \int_a^b a_n(x)f(x)dx \\ &= \rho_n^{-1} \int_a^b f(x)f^{-1}(x) \int_c^d [h(x,y) - f(x)g(y)]b_n dy dx \\ &= \rho_n^{-1} \int_c^d [g(y) - g(y)]b_n dy = 0. \end{aligned}$$

2. Es consecuencia inmediata de 3.

3.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(a_n(X), a_m(X)) &= E(a_n(X), a_m(X)) \\ &= \int_a^b a_n(x)a_m(x)f(x)dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(a_n(X), b_n(Y)) &= \int_a^b \int_c^d [h(x,y) - f(x)g(y)]a_n b_n dy dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m \int_a^b f(x)a_m a_n dx \int_c^d g(y)b_m b_n dy \\ &= \rho_n. \end{aligned}$$

□

La sucesión de coeficientes de correlación  $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots$  son llamadas las correlaciones canónicas

**Teorema 4.1.** *La primera correlación  $\rho_1$  es la correlación maximal y el coeficiente de contingencia de Pearson es*

$$\phi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2. \quad (4.7)$$

*Demostración.* Los conjuntos  $\{a_n(X)\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_m(Y)\}_{m \in \mathbb{N}}$  son ortonormales completos (con respecto a la medida  $dF$  y  $dG$  respectivamente). Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos funciones, tales que

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n(x), \quad \beta(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m b_m(y),$$

con la restricción

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 = 1.$$

Entonces  $\text{Var}(\alpha(X)) = \text{Var}(\beta(Y)) = 1$  y

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\alpha(X), \beta(Y)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n \beta_m \text{Cov}(a_n(x), b_m(y)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \alpha_n \beta_n. \end{aligned}$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n \right)^2 \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \right).$$

Por lo tanto, si  $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \alpha_n \beta_n \leq \rho_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n \leq \rho_1.$$

$\rho_1$  es la primera correlación canónica, que se alcanza en  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\beta = \beta_1$ , es decir, para  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 1$ . (Nótese que  $\alpha, \beta$  son funciones y que  $\alpha_n, \beta_n$  son coeficientes escalares.)

Ahora se prueba la segunda parte

$$\begin{aligned}
\phi^2 &= \int_a^b \int_c^d \frac{[h(x, y) - f(x)g(y)]^2}{f(x)g(y)} dx dy \\
&= \int_a^b \int_c^d f^{-1}(x)g^{-1}(y) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n a_n b_n f(x)g(y) \right]^2 dx dy \\
&= \int_a^b \int_c^d f^{-1}(x)g^{-1}(y) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2 a_n^2 b_n^2 f(x)g(y) + \sum_{n \neq m} \rho_n \rho_m a_n a_m b_n b_m f(x)g(y) \right] f(x)g(y) dx dy \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2 \int_a^b f(x) a_n^2 dx \int_c^d g(y) b_n^2 dy + \sum_{n \neq m} \rho_n \rho_m \int_a^b f(x) a_n a_m dx \int_c^d g(y) b_n b_m dy \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2.
\end{aligned}$$

□

La sucesión de correlaciones canónicas capturan la dependencia total entre  $X$  e  $Y$  y  $\phi^2$  es una medida global de dependencia, frecuentemente presentada como la razón

$$\frac{\phi^2}{1 + \phi^2}.$$

El conjunto de las coordenadas principales  $\{A_n(x)\}_{n \geq 1}$  son

$$A_n(x) = \rho_n a_n(x),$$

que satisface

$$\begin{aligned}
\delta^2(x, x') &= \sum_{n \geq 1} (A_n(x) - A_n(x'))^2 \\
&= \sum_{n \geq 1} \rho_n^2 (a_n(x) - a_n(x'))^2.
\end{aligned}$$

La variabilidad geométrica, también llamada inercia es

$$V_{\delta}(X) = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b \delta^2(x, x') dF(x) dF(x') = \phi^2,$$

el coeficiente de correlación de Pearson.

De acuerdo con Sklar (1959), podemos escribir  $H(x, y)$  como una cópula  $C(u, v)$ . Entonces  $F(x) = u, G(y) = v$  son las variables marginales uniformes en  $[0, 1]$ . La expansión (4.1) se puede expresar como

$$C(u, v) - uv = \sum_{n \geq 1} \lambda_n \varphi(u) \varphi(v),$$

donde  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un conjunto ortonormal (en  $L^2([0, 1])$ ). Al integrar con respecto a  $\varphi(u)$ , se tiene

$$\int_0^1 (C(u, v) - uv) d\varphi(u) = \lambda_n \varphi(v).$$

### 4.3. Dimensionalidad geométrica

Si  $\varphi(x)$  es una función medible, tal que  $\text{Var}(\varphi(x))$  existe. Supongamos que  $H(x, y)$  es simétrica, esto es  $F \equiv G$ . Entonces  $\varphi(x)$  es una función propia de

$$K(x, y) = H(x, y) - F(x)G(y),$$

con respecto

$$H^+(x, y) = \min \{F(x), G(y)\} - F(x)G(y),$$

si

$$\frac{\int K(x, y) \varphi(x) dx}{\int H^+(x, y) \varphi(x) dx} = \lambda.$$

Claramente

$$\lambda = \text{Corr}(\varphi(X), \varphi(Y)). \quad (4.8)$$

En particular si  $C(u, v)$  es una cópula simétrica

$$\frac{\int (C(u, v) - uv) d\varphi(u)}{\int (\text{mín}\{u, v\} - uv) d\varphi(u)} = \lambda. \quad (4.9)$$

Se buscan las funciones propias que proporcionen la correlación maximal para varias familias de cópulas.

En general las integrales de (4.9) no se pueden evaluar, debido a que en algunos casos se desconoce  $\varphi$ . Para resolver este problema, discretizamos las matrices de orden  $n$  simétricas y definidas positivas  $K = (K_{ij})$  y  $L = (L_{ij})$  con  $K_{ij} = C(u_i, u_j) - u_i u_j$ ,  $L_{ij} = \text{mín}\{u_i, u_j\} - u_i u_j$  y  $u_i = i/(n+1); i = 1, \dots, n$ .

De manera que los valores propios generalizados de  $K$  con respecto a  $L$ , se obtienen al resolver el siguiente sistema matricial

$$K\varphi = \lambda L\varphi. \quad (4.10)$$

Los valores de  $\lambda$  son reales y satisfacen el cociente

$$\frac{\varphi_i^t K \varphi_i}{\varphi_i^t L \varphi_i} = \lambda_i, \quad (4.11)$$

donde  $\varphi_i$  es un vector propio generalizado de  $K$  respecto a  $L$  asociado al valor propio generalizado  $\lambda_i$ . Al ordenar los valores propios  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , se tiene que  $\lambda_1$  es la correlación maximal y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2$  es el coeficiente de Pearson. El porcentaje de variabilidad explicada por las  $q$  primeras dimensiones ( $q < n$ ) es de la forma

$$P_q = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^q \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}. \quad (4.12)$$

**Definición 4.1.** *La dimensión geométrica de una función de distribución conjunta  $H(x, y)$  de un par de variables aleatorias  $X$  e  $Y$ , con funciones de distribución marginales  $F(x)$  y  $G(y)$ , tal que la expansión canónica (4.3) exista, es el cardinal del conjunto  $(\rho_n)$ .*

La dimensión de una función cópula es proporcionada por el número de correlaciones

canónicas  $\rho_n$  distintas, de acuerdo con esto podemos clasificar la dimensión de una cópula en cuatro clases:

1. Dimensión cero (0), para los casos de independencia estocástica.
2. Dimensión finita, cuando el número de correlaciones canónicas es finitamente numerable.
3. Dimensión numerable ( $\aleph_0$ ), si el número de correlaciones canónicas es infinitamente numerable.
4. Dimensión continua ( $\aleph_1$ ), si las correlaciones canónicas se expresan como un conjunto no numerable de funciones continuas.

En la siguiente sección, obtendremos la dimensionalidad de algunas de las cópulas simétricas más conocidas, como son la familia de cópulas Fréchet, FGM, AHM, Clayton, Gumbel-Barnett, Cuadras-Auge, Joe y Nelsen. En algunas de las cópulas, se recurre al análisis numérico para determinar la dimensionalidad, debido a la dificultad de obtener las correlaciones canónicas de forma analítica.

## 4.4. Ejemplo

### 4.4.1. Fréchet

La familia de cópulas Fréchet son de la forma

$$C(u, v) = \theta \min\{u, v\} + (1 - \theta)uv; \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

El núcleo es

$$\begin{aligned} K(u, v) &= C(u, v) - uv \\ &= \theta(\min\{u, v\} - 1). \end{aligned}$$

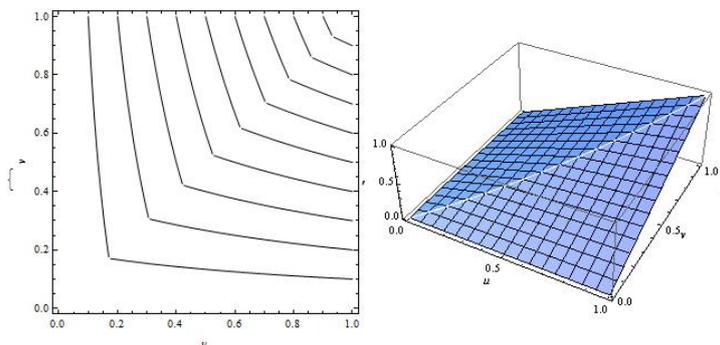


Figura 4.1: Contorno y distribución para la cópula Fréchet con  $\theta = 0,5$

Luego

$$\frac{\int (C(u, v) - uv) d\varphi(u)}{\int (\min\{u, v\} - uv) d\varphi(u)} = \frac{\int \theta(\min\{u, v\} - 1) d\varphi(u)}{\int (\min\{u, v\} - uv) d\varphi(u)} = \theta,$$

para cualquier función  $\varphi(u)$ .

La correlación de Spearman es

$$\rho_S = \theta.$$

Las correlaciones canónicas son de la forma

$$\rho_1 = \dots = \rho_n = \dots = \theta.$$

El coeficiente de Pearson

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \int_0^1 \int_0^1 (c(u, v) - 1)^2 dudv \\ &= \int_0^1 \theta^2 dx = \theta^2. \end{aligned}$$

Por tanto, decimos que la familia de copulas Fréchet es de dimensión 1 y multiplicidad infinita.

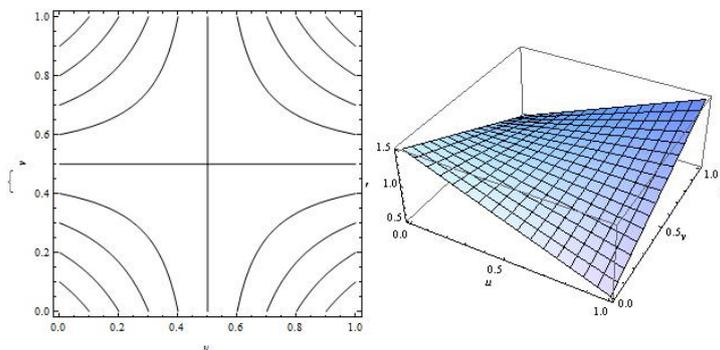


Figura 4.2: Contorno y densidad para la cópula FGM con  $\theta = 0,5$

#### 4.4.2. FGM

La familia Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) de distribuciones es

$$H = F(x)G(y)[1 + \theta(1 - F(x))(1 - G(y))], \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

La correspondiente cópula es

$$C(u, v) = uv(1 + \theta(1 - u)(1 - v)), \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

De acuerdo con (4.2) se tiene

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\alpha(X), \beta(Y)) &= \theta \int_0^1 \int_0^1 uv(1 - u)(1 - v) d\alpha(u) d\beta(v) \\ &= \theta \int_0^1 u(1 - u) d\alpha(u) \int_0^1 v(1 - v) d\beta(v) \\ &= \theta I_\alpha I_\beta, \end{aligned}$$

donde

$$I_\alpha = \int_0^1 u(1 - u) d\alpha(u), \quad I_\beta = \int_0^1 v(1 - v) d\beta(v).$$

El coeficiente de correlación de Spearman es

$$\rho_s = \frac{\theta}{3},$$

y la correlación máxima

$$\rho_1 = \frac{|\theta|}{3}.$$

El coeficiente de Pearson

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \int_0^1 \int_0^1 (c(u, v) - 1)^2 dudv \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\theta}{3}\right)^2 dx = \frac{\theta^2}{9}. \end{aligned}$$

El núcleo de covarianza  $K(u, v) = C(u, v) - uv$  es

$$K(u, v) = \theta u(1 - u)v(1 - v),$$

es decir,  $K(u, v)$  puede ser escrita como el productos de funciones de  $u$  y de funciones de  $v$ , así la cópula FGM tiene dimensión uno.

### 4.4.3. FGM generalizada

Cuadras *et al.* (1998), proponen la siguiente generalización de la familia FGM

$$h(x, y) = f(x)g(y)\left[1 + \sum_{k \geq 1} \gamma_k L_k(F(x))L_k(G(y))\right], \quad (4.13)$$

donde  $L_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$ ,  $L_2(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$ ,  $L_3(x) = \sqrt{7}(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1)$ ,  $\dots$  son los polinomios Legendre desplazados en el intervalo  $[0, 1]$  (Hutchison y Lai, 1990). Esta generalización se obtiene al considerar que las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  tienen una distribución logística, es decir,  $F(x) = 1/(1 + \exp\{-x\})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , de modo que la  $n$ -ésima componente principal estandarizada para  $X$  obtenida en la ecuación (4.13) es de la forma

$$L_n(x) = \sqrt{2n + 1}P_n(2x - 1), \quad (4.14)$$

donde  $P_n$  son los polinomios de Legendre de grado  $n$ , que corresponde con los polinomios Legendre desplazados en  $[0, 1]$ .

Al comparar (4.13) con (4.5) obtenemos las funciones ortonormales

$$\begin{aligned} u_k(x) &= f^{1/2}(x)L_k(F(x)), \\ v_k(y) &= g^{1/2}(y)L_k(G(y)). \end{aligned}$$

La distribución es de la forma

$$H(x, y) = F(x)G(y) + \sum_{k \geq 1} \gamma_k L_k^*(F(x))L_k^*(G(y)), \quad (4.15)$$

donde

$$\begin{aligned} L_k^*(u) &= \int_0^u L_k(t)dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \left[ \frac{L_{k+1}(u)}{\sqrt{2k+3}} - \frac{L_{k-1}(u)}{\sqrt{2k-1}} \right]. \end{aligned}$$

Observe que

$$\int_a^b f(x)L_k(x)dx = \int_0^1 L_k(u)du = 0,$$

para  $f(x)$  definida en el intervalo  $[a, b]$ , de modo similar para  $Y$ .

La correspondiente familia de cópula generalizadas de FGM es de la forma

$$C(u, v) = uv + \sum_{k \geq 1} \gamma_k L_k^*(u)L_k^*(v). \quad (4.16)$$

La densidad de la cópula (4.16) es

$$c(u, v) = 1 + \sum_{k \geq 1} \gamma_k L_k(u)L_k(v). \quad (4.17)$$

Para garantizar que  $c(u, v)$  es una densidad, es decir  $c(u, v) \geq 0$ , es necesario que

$$\sup\left[-\sum_{k \geq 1} \gamma_k L_k(u) L_k(v)\right] \leq 1. \quad (4.18)$$

Al tomar  $v = 1$  en (4.18) y de (4.14) se obtiene una condición necesaria para obtener las correlaciones canónicas

$$-\sum_{k \geq 1} \gamma_k \sqrt{2k+1} L_k(u) \leq 1. \quad (4.19)$$

Cada  $\gamma_k$  es el coeficiente de correlación entre las  $k$ -ésimas componente principal de  $L_k(u)$  y  $L_k(v)$ , esto es

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \text{Corr}(L_k(u), L_k(v)) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 r(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) L_k(u) L_k(v) dudv, \end{aligned}$$

donde  $r(x, y) = h(x, y) / f(x)g(y)$ , para  $X$  con distribución logística,  $F^{-1}(u) = \log(\frac{u}{1-u})$ .

Una representación de la cópula (4.16) para los primeros tres términos de la sumatoria es de la forma

$$\begin{aligned} C(u, v) &= uv + \theta_1 u(1-u)v(1-v) \\ &\quad + \theta_2 u(2u^2 - 3u + 1)v(2v^2 - 3v + 1) \\ &\quad + \theta_3 u(5u^3 - 10u^2 + 6u - 1)v(5v^3 - 10v^2 + 6v - 1), \end{aligned} \quad (4.20)$$

para cada  $\theta_i \in [-1, 1]; i = 1, 2, 3$ .

El coeficiente de correlación de Spearman es

$$\begin{aligned} \rho_S &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \{ \theta_1 u(1-u)v(1-v) \\ &\quad + \theta_2 u(2u^2 - 3u + 1)v(2v^2 - 3v + 1) \\ &\quad + \theta_3 u(5u^3 - 10u^2 + 6u - 1)v(5v^3 - 10v^2 + 6v - 1) \} dudv \\ &= \frac{\theta_1}{3}. \end{aligned}$$

Los coeficiente de correlación canónica son de la forma

$$\gamma_1 = \frac{\theta_1}{3}, \gamma_2 = \frac{\theta_2}{5}, \gamma_3 = \frac{\theta_3}{7}.$$

El coeficiente de Pearson es

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^3 \gamma_i^2 = \frac{\theta_1^2}{9} + \frac{\theta_2^2}{25} + \frac{\theta_3^2}{49}.$$

La dimensión para la cópula (4.20) es 3 y en general para la cópula de la forma (4.16) la dimensión es  $n$  si consideramos los primeros  $n$  términos en (4.16).

#### 4.4.4. Cuadras Augé

La cópula es

$$C(u, v) = \min\{u, v\}^\theta (uv)^{1-\theta}, \quad \theta \in [0, 1].$$

El coeficiente de correlación de Spearman es

$$\begin{aligned} \rho_S &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \min\{u, v\}^\theta (uv)^{1-\theta} dudv - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \left[ \int_0^v uv^{1-\theta} du + \int_v^1 vu^{1-\theta} du \right] dv - 3 \\ &= \frac{12}{4-\theta} - 3 = \frac{3\theta}{4-\theta}. \end{aligned}$$

La correlaciones canónicas Cuadras (2005) son de la forma

$$\rho_x = \theta x^{1-\theta}. \quad (4.21)$$

De (4.21) se obtiene la correlación maximal

$$\rho_1 = \theta.$$

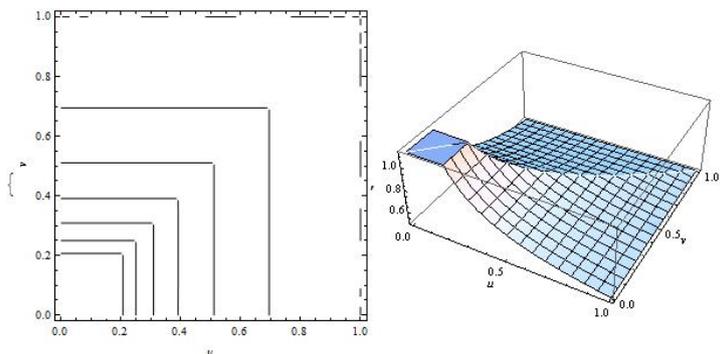


Figura 4.3: Contorno y densidad para la cópula Cuadras-Auge con  $\theta = 0,5$

El coeficiente de Pearson es

$$\phi^2 = \int_0^1 \theta x^{1-\theta} dx = \frac{\theta}{2-\theta}.$$

La dimensión para la cópula Cuadras-Auge tiene la potencia del continuo ( $\varkappa_1$ ) de acuerdo con la ecuación (4.21).

#### 4.4.5. AMH

La familia Ali-Mikhail-Haq (AMH) de distribuciones es

$$H = F(x)G(y)/[1 - \theta(1 - F(x))(1 - G(y))], \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

La correspondiente cópula es de la forma

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}, \quad -1 \leq \theta \leq 1. \quad (4.22)$$

Esta cópula se puede expandir en forma de serie

$$C(u, v) = uv \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n (1 - u)^n (1 - v)^n \right], \quad -1 \leq \theta \leq 1. \quad (4.23)$$

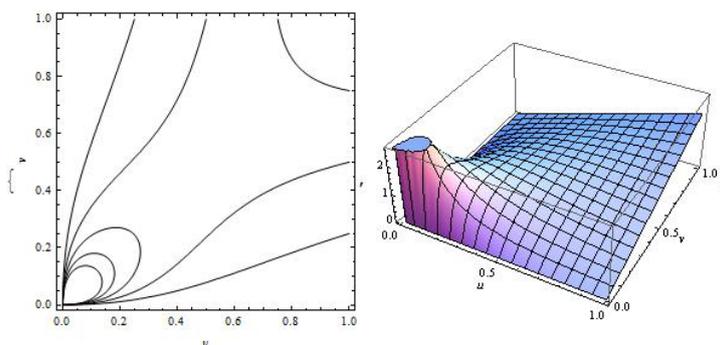


Figura 4.4: Contorno y densidad para la cópula AMH con  $\theta = 1$

Tabla 4.1: Porcentaje de variación explicada en las 3 primeras dimensiones y correlaciones para la cópula AMH

$\theta$	$\rho_1$	Dimensión			$\phi^2$	$\rho_S$
		1	2	3		
1.0	0.6942	61.20	89.60	97.94	0.7874	0.4784
0.8	0.3708	94.63	99.83	99.99	0.1453	0.3451
0.1	0.0342	99.98	100.00	100.00	0.0012	0.0342
-0.1	0.0005	99.98	100.00	100.00	0.0011	-0.0325
-0.8	0.0200	99.23	100.00	100.00	0.0524	-0.2248
-1.0	0.0286	98.94	99.99	100.00	0.0773	-0.2711

Los primeros términos de esta expansión es la cópula FGM.

El coeficiente de correlación de Spearman es

$$\begin{aligned}
 \rho_S &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n (1-u)^n (1-v)^n \right] dudv - 3 \\
 &= 12 \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n \int_0^1 \int_0^1 u(1-u)^n v(1-v)^n dudv \\
 &= 12 \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n \left( \int_0^1 u(1-u)^n du \right)^2 \\
 &= 12 \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n B(2, n+1)^2,
 \end{aligned}$$

donde  $B(\cdot, \cdot)$  es la función beta.

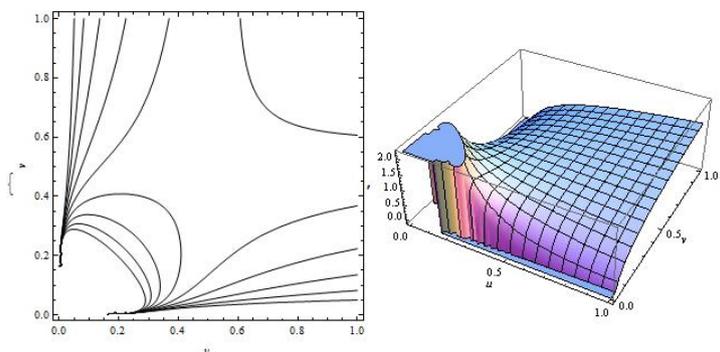


Figura 4.5: Contorno y densidad para la cópula Gumbel-Barnett con  $\theta = 0,5$

El coeficiente de Pearson es

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \int_0^1 \int_0^1 (c(u, v) - 1)^2 dudv \\ &= \frac{\theta - 2}{15} - \frac{2(\theta^2 - \theta + 1) \ln(1 - \theta)}{15\theta}. \end{aligned}$$

Para determinar la dimensión de la cópula AMH, utilizamos las ecuaciones (4.10), (4.11) y (4.12), con las que obtenemos la correlación maximal  $\rho_1 = \lambda_1$  y los porcentajes de variabilidad explicada para cada una de las 3 primeras dimensiones. Los resultados obtenidos se presenta en la tabla 4.1, de donde podemos concluir que si  $\theta = 1$ , en las dos primeras dimensiones explicamos el 86,6% de la variabilidad total y para  $\theta < 1$  con la primera dimensión se explica al menos el 94%. En general podemos decir, que la cópula AMH es de dimensión numerable ( $\varkappa_0$ ).

#### 4.4.6. Gumbel-Barnett

La familia de cópulas de Gumbel-Barnett es de la forma

$$C(u, v) = uv \exp\{-\theta \ln u \ln v\}, \quad \theta \in (0, 1].$$

La representación en serie es de la forma

$$C(u, v) = uv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^k}{k!} (\ln u)^k (\ln v)^k.$$

El coeficiente de Spearman es

$$\begin{aligned} \rho_S &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv \exp\{-\theta \ln u \ln v\} dudv - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \frac{u}{1 - \theta \ln u} du - 3. \end{aligned}$$

El coeficiente de Pearson es

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \int_0^1 \int_0^1 (c(u, v) - 1)^2 dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [\exp\{-\theta \ln u \ln v\} ((1 - \theta \ln u)(1 - \theta \ln v) - \theta) - 1]^2 dudv. \end{aligned}$$

Tabla 4.2: Porcentaje de variación explicada en las 3 primeras dimensiones y correlaciones para la cópula Gumbel-Barnett

$\theta$	$\rho_1$	Dimensión			$\phi^2$	$\rho_S$
		1	2	3		
1.0	0.1927	86.79	98.34	99.81	0.3216	-0.5239
0.8	0.1528	88.61	98.75	99.87	0.2302	-0.4437
0.6	0.1116	90.77	99.17	99.93	0.1483	-0.3542
0.4	0.0695	93.41	99.57	99.98	0.0784	-0.2531
0.2	0.0281	96.73	99.89	100.00	0.0250	-0.1369
0.1	0.0100	98.64	99.98	100.00	0.0075	-0.0715

La tabla 4.2 se obtiene mediante la ecuación (4.10) para cada uno de los valores de  $\theta$ . Observamos que para  $\theta = 1$ , en la primera dimensión se explica el 86,79 % de variabilidad. La dimensión para la cópula Gumbel-Barnett es numerable ( $\aleph_0$ ).

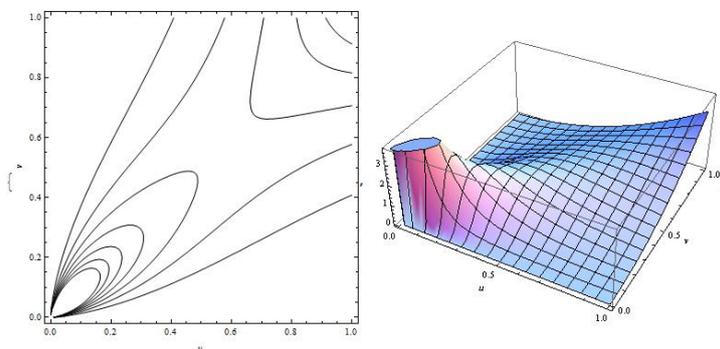


Figura 4.6: Contorno y densidad para la cópula Clayton-Oakes con  $\theta = 2$

#### 4.4.7. Clayton-Oakes

Es de la forma

$$C(u, v) = [\max\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0\}]^{-1/\theta}, \quad \theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}.$$

El coeficiente de Spearman es

$$\begin{aligned} \rho_S &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \max\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0\}^{-1/\theta} dudv - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \frac{uv}{(u^\theta(1-v^\theta) + v^\theta)^{1/\theta}} dudv - 3. \end{aligned}$$

Tabla 4.3: Porcentaje de variación explicada en las 3 primeras dimensiones y correlaciones para la cópula Clayton-Oakes

$\theta$	$\rho_1$	Dimensión			$\phi^2$	$\rho_S$
		1	2	3		
-0.5	0.3330	42.78	61.76	72.37	0.5843	-0.4667
1	0.6942	61.20	89.60	97.94	0.7874	0.4784
5	0.9725	20.82	39.81	56.09	4.5432	0.8846
9	0.9900	12.85	25.24	36.90	7.6257	0.9507
11	0.9929	10.90	21.52	31.67	9.0430	0.9642
15	0.9959	8.47	16.81	24.92	11.7050	0.9786
20	0.9975	6.73	13.39	19.93	14.7868	0.9871

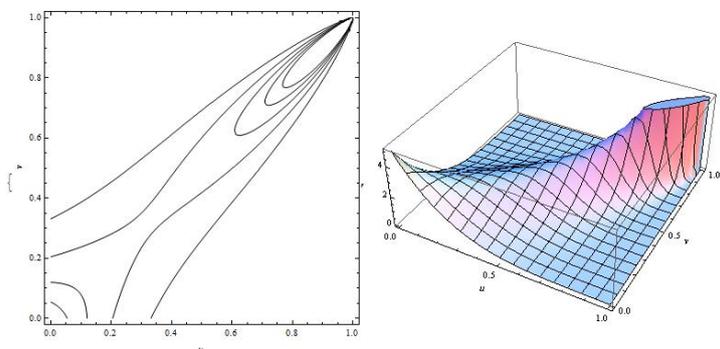


Figura 4.7: Contorno y densidad para la cópula Joe con  $\theta = 5$

De acuerdo con los resultados en la tabla 4.3, con valores de  $\theta$  cercanos a 1, con dos dimensiones se explica al menos el 89,60% de variabilidad; a valores altos de  $\theta$  se requiere un número mayor de dimensiones. La dimensión para la cópula Clayton-Oakes es numerable ( $\aleph_0$ ).

#### 4.4.8. Joe

La familia de cópulas Joe es de la forma

$$C(u, v) = 1 - [(1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta - (1 - u)^\theta(1 - v)^\theta]^{1/\theta}, \quad \theta \in [1, \infty).$$

No existe una forma analítica del coeficiente de Spearman ( $\rho_S$ ) para la cópula de Joe, pero se puede obtener un valor aproximado, al resolver numéricamente la integral

$$12 \int_0^1 \int_0^1 1 - [(1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta - (1 - u)^\theta(1 - v)^\theta]^{1/\theta} dudv - 3,$$

para diferentes valores de  $\theta \geq 1$ .

De lo observado en la tabla 4.4, podemos concluir que disminuyendo el valor de  $\theta$  mejor explica un número bajo de dimensiones, por ejemplo, si  $\theta = 2$ , con dos dimensiones se explica el 84,06% de variabilidad. La dimensión para la cópula Joe es numerable ( $\aleph_0$ ).

Tabla 4.4: Porcentaje de variación explicada en las 3 primeras dimensiones y correlaciones para la cópula Joe

$\theta$	$\rho_1$	Dimensión			$\phi^2$	$\rho_S$
		1	2	3		
1	0.0000	26.06	51.22	54.84	0.0000	0.0000
2	0.7641	54.89	84.06	95.25	1.0635	0.5042
3	0.8990	37.99	66.18	83.49	2.1277	0.7000
4	0.9439	28.97	53.30	71.44	3.0751	0.7982
5	0.9641	23.49	44.40	61.57	3.9566	0.8546
10	0.9905	12.49	24.56	35.94	7.8524	0.9525
15	0.9955	8.80	17.44	25.83	11.2648	0.9767
20	0.9973	6.92	13.76	20.47	14.3807	0.9862

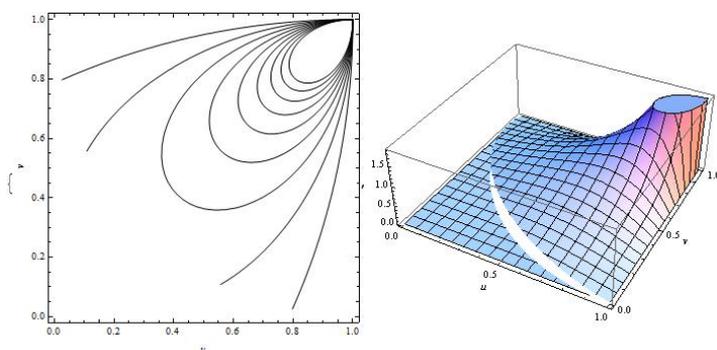


Figura 4.8: Contorno y densidad para la cópula Nelsen con  $\theta = 2$

#### 4.4.9. Nelsen

La forma de la cópula es

$$C(u, v) = \max\{1 - [(1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta]^{1/\theta}, 0\}, \quad \theta \in [1, \infty).$$

Igual que en la familia de Joe no existe una forma analítica para obtener el coeficiente de Spearman y de Pearson.

Tabla 4.5: Porcentaje de variación explicada en las 3 primeras dimensiones y correlaciones para la cópula de Nelsen

$\theta$	$\rho_1$	Dimensión			$\phi^2$	$\rho_S$
		1	2	3		
2	0.7881	1.66	2.98	4.29	37.4528	0.1416
5	0.9641	6.68	12.62	17.52	13.9230	0.8006
10	0.9905	7.98	15.68	22.94	12.3001	0.9429
15	0.9955	7.08	14.04	20.80	13.9901	0.9734
20	0.9973	6.10	12.14	18.06	16.2997	0.9847

En la table 4.5, se observa que la dimensión para la cópula Nelsen es mayor que tres, clasificando esta en el conjunto de copulas de dimensión numerable ( $\mathcal{C}_0$ ).

## Capítulo 5

# La cópula Gumbel-Barnett extendida

La familia de cópulas

$$C_\theta(u, v) = uv \exp\{-\theta \ln u \ln v\}, \quad (5.1)$$

para toda  $\theta \in I = [0, 1]$  y  $(u, v) \in I^2$ , se conoce como Gumbel-Barnett (véase Hutchison y Lai (1990), pág. 94). Las funciones de esta clase son las cópulas de supervivencia asociadas a la distribución exponencial bivalente de Gumbel, cuya importancia en la teoría de la fiabilidad es bien conocida, véase Gumbel (1960) y Kotz *et al.* (2004) para el estudio de las propiedades de esta familia de distribuciones. Barnett (1980) es el primero que considera esta clase de funciones como una familia de cópulas. Charpentier (2003) demostró que la cópula condicional de una cópula Gumbel-Barnett sigue siendo una cópula Gumbel-Barnett. También dedujo sus propiedades y su importancia en las aplicaciones.

En este capítulo, presentamos una extensión de la familia de cópulas de Gumbel-Barnett, donde el exponente de la función exponencial es el producto de dos funciones  $A(u)$  y  $B(v)$  que no son completamente arbitrarias pues deben tener acotados los coeficientes de las primeras diferenciales con respecto a sus argumentos y las derivadas  $A'(u)$  y  $B'(v)$  sean no nulas cuando  $u, v \rightarrow 1$ .

## 5.1. Definición y propiedades básicas

La familia semiparamétrica de funciones en  $I^2$  de la forma

$$C_\theta(u, v) = uv \exp\{\theta A(u)B(v)\}, \quad (5.2)$$

donde  $A(u)$  y  $B(v)$  son funciones continuamente diferenciables en  $I$  y que satisfacen ciertas condiciones de regularidad para asegurar que la función (5.2) sea una cópula. Las funciones de la forma (5.2) son una extensión de la cópula Gumbel-Barnett (5.1). Obsérvese que si  $A$  ó  $B$  son la función nula en  $(0, 1)$  ó  $\theta = 0$ , entonces  $C_\theta = \Pi$ , la cópula independencia.

Según el teorema de Sklar (1959), una función de distribución conjunta  $H(x, y)$  con distribuciones marginales  $F(x)$  y  $G(y)$ , se puede escribir en la forma  $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ , donde  $C$  es una cópula. Este resultado, justifica el uso de las cópulas en la construcción de distribuciones conjuntas. Consideremos en este capítulo, la función de distribución conjunta  $H(x, y)$ , con marginales  $F(x)$  y  $G(y)$ , relacionada con la cópula (5.2), de la forma

$$H(x, y) = F(x)G(y) \exp\{\theta A(F(x))B(G(y))\}. \quad (5.3)$$

Suponiendo que (5.3) es una función de distribución, se cumple

$$\begin{aligned} \lim_{x, y \rightarrow \infty} H(x, y) &= F(\infty)G(\infty) \exp\{\theta A(1)B(1)\} \\ &= \exp\{\theta A(1)B(1)\} = 1. \end{aligned}$$

Las funciones  $A(F(x))$  y  $B(G(y))$  tienden a cero cuando  $F(x)$  y  $G(y)$  tiende a 1, es decir,  $A(1)$  y  $B(1)$  son ambos iguales a cero. Dada esta condición, podemos probar que las marginales son iguales a  $F(x)$  y  $G(y)$ , como sigue

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} H(x, y) &= F(\infty)G(y) \exp\{\theta A(1)B(G(y))\} \\ &= G(y). \end{aligned}$$

De modo similar

$$\lim_{y \rightarrow \infty} H(x, y) = F(x),$$

puesto que  $A(1) = 0$  y  $B(1) = 0$ .

Además

$$\begin{aligned} \lim_{x, y \rightarrow -\infty} H(x, y) &= F(-\infty)G(-\infty) \exp\{\theta A(0)B(0)\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que  $A(F(x))$  y  $B(G(y))$  toma valores finitos cuando  $F(x)$  y  $G(y)$  tiende a 0.

Nos queda por probar que (5.3) es una función monótona creciente de  $x, y$ , es decir que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y} &= F'(x)G'(y) \exp\{\theta A(F)B(G)\} \\ &\times [(1 + \theta F(x)A'(F)B(G))(1 + \theta G(y)A(F)B'(G)) + \theta F(x)G(y)A'(F)B'(G)] \geq 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

$F(x)$  y  $G(y)$  son funciones de distribución, luego  $F'(x)$  y  $G'(y)$  son sus funciones de densidad. Además la función exponencial es no negativa, por tanto para que se cumpla (5.4), debemos encontrar los valores de  $\theta$  que satisfagan la desigualdad

$$[(1 + \theta F(x)A'(F)B(G))(1 + \theta G(y)A(F)B'(G)) + \theta F(x)G(y)A'(F)B'(G)] \geq 0. \quad (5.5)$$

Una solución trivial para resolver la ecuación (5.5) es tomar  $\theta = 0$ , esto nos indica que un intervalo para  $\theta$  pasa por el origen. Otra solución trivial es tomar  $A'(F(x)) = 0$  y  $B'(G(y)) = 0$  pero esta condición, evidentemente nos impide determinar un intervalo para  $\theta$ . Imponiendo en particular la condición  $A'(1) \neq 0$  y  $B'(1) \neq 0$  a la ecuación (5.5), obtenemos un sistema de desigualdades más simple

$$\theta A'(1)[B(G(y)) + G(y)B'(G(y))] \geq -1 \text{ si } F(x) \rightarrow 1, \quad (5.6)$$

$$\theta B'(1)[A(F(x)) + F(x)A'(F(x))] \geq -1 \text{ si } G(y) \rightarrow 1. \quad (5.7)$$

Dado que  $G(y)B(G(y))$  es una función continua de  $G(y)$  y que es igual a cero en ambos extremos del intervalo  $(0, 1)$ , suponiendo que  $G(y)B(G(y)) \neq 0$ , la derivada  $d(G(y)B(G(y)))/dG(y) = B(G(y)) + G(y)B'(G(y))$ , toma tanto valores positivos como negativos. Lo mismo ocurre con  $d(F(x)A(F(x)))/dF(x) = A(F(x)) + F(x)A'(F(x))$ , asegurando que los términos de la izquierda de las desigualdades (5.6) y (5.7) estén acotados de la siguiente forma

$$-M_1 \leq A'(1)[B(G(y)) + G(y)B'(G(y))] \leq M_2, \quad (5.8)$$

$$-M_3 \leq B'(1)[A(F(x)) + F(x)A'(F(x))] \leq M_4, \quad (5.9)$$

donde

$$\begin{aligned} -M_1 &= \inf\{A'(1)[B(G(y)) + GB'(G(y))]\}, \quad M_2 = \sup\{A'(1)[B(G(y)) + GB'(G(y))]\}, \\ -M_3 &= \inf\{B'(1)[A(F(x)) + FA'(F(x))]\}, \quad M_4 = \sup\{B'(1)[A(F(x)) + FA'(F(x))]\}. \end{aligned}$$

Al combinar las desigualdades (5.8) y (5.9) con las desigualdades (5.6) y (5.7), se deduce el intervalo para  $\theta$  que satisface la desigualdad (5.5) en la forma

$$\frac{-1}{\max\{M_2, M_4\}} \leq \theta \leq \frac{1}{\max\{M_1, M_3\}}. \quad (5.10)$$

Lo anterior se resume en el siguiente teorema, donde se dan las condiciones que deben cumplir las funciones de  $A$  y  $B$  para asegurar que la función  $C_\theta$  definida en (5.2) sea una cópula.

**Teorema 5.1.** *Sean  $A(u)$  y  $B(v)$  dos funciones continuamente diferenciables en  $I$ , tales que  $A(1) = 0, B(1) = 0$  y  $A'(1) \neq 0, B'(1) \neq 0$ . La función  $C_\theta$  dada por (5.2) es una cópula si y solo si  $-1/\max\{M_2, M_4\} \leq \theta \leq 1/\max\{M_1, M_3\}$ .*

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del teorema 5.1.

**Corolario 5.2.** *Sea  $A(u)$  una función continuamente diferenciables en  $I$ , tales que  $A(1) = 0$  y  $A'(1) \neq 0$ . La función*

$$C_\theta(u, v) = uv \exp\{\theta A(u)A(v)\}, \quad (5.11)$$

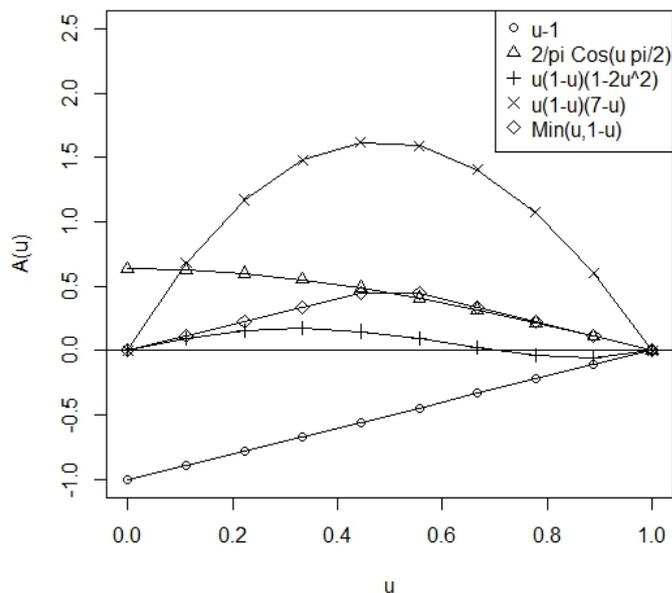


Figura 5.1: Funciones que generan cópulas Gumbel-Barnett extendidas

es una cópula si y solo si

$$-1/\sup\{A'(1)(A + uA')\} \leq \theta \leq 1/\inf\{A'(1)(A + uA')\}.$$

**Ejemplo 5.1.** La cópula Gumbel-Barnett definida por (5.1) es de la forma (5.11), basta con tomar  $A(u) = \ln(u)$ . Así el intervalo para  $\theta$  queda determinado por el supremo y el ínfimo de la función  $\ln(u) + u$ , por tanto la función (5.1) es una cópula si y solo si

$$-1 \leq \theta \leq 0.$$

Las funciones  $A(u)$  y  $B(v)$  nos permiten obtener extensiones de la cópula de Gumbel-Barnett. Cada cópula (5.2) está completamente descrita por  $A(u)$  y  $B(v)$  y el parámetro  $\theta$ . Algunos ejemplos de funciones que cumplen las condiciones de frontera  $A(1) = 0$  y  $A'(1) \neq 0$ , descritos en el teorema 5.1, pueden verse en la figura 5.1.

La cópula (5.2) puede expandirse en series de potencia de la forma

$$C_\theta(u, v) = uv \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} A^k(u) B^k(v) \right]. \quad (5.12)$$

Un caso particular de representación en series, fue propuesto por Farlie (1960), Al considerar las funciones  $A(u) = 1 - u$  y  $B(v) = 1 - v$ , esta representación se transformó luego en la familia de cópulas Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM), lo que nos lleva a pensar que nuestra representación en series de potencias es un caso que generaliza un conjunto de familias de cópulas, es decir, nuestra cópula de Gumbel-Barnett extendida, es una generalización de la familia de cópulas FGM en la forma

$$C_\alpha(u, v) = uv \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} (1 - u)^k (1 - v)^k \right], \quad \alpha \in [-1, 1]. \quad (5.13)$$

Para obtener los momentos conjuntos y la covarianza para la clase de cópulas de la forma (5.2), hacemos uso de la representación en series. Los resultados obtenidos son presentados en la siguiente proposición.

**Proposición 5.1.** *Sea  $(U, V)$  un par de v.a. uniformes en  $I$ , con cópula  $C_\theta(u, v)$  dada por (5.2). Entonces*

$$E(U^i V^j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \int_0^1 u^i [A^k + k u A^{k-1} A'] du \int_0^1 v^j [B^k + k v B^{k-1} B'] dv, \quad (5.14)$$

y la covarianza del par  $(U, V)$  está dado por

$$\text{Cov}(U, V) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \int_0^1 u A^k du \int_0^1 v B^k dv. \quad (5.15)$$

*Demostración.* Por definición

$$E(U^i V^j) = \int_0^1 \int_0^1 u^i v^j c(u, v) du dv, \quad (5.16)$$

donde  $c$  es la densidad de  $C_\theta(u, v)$ . El desarrollo en series es

$$c(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} [A^k + kuA^{k-1}A'] [B^k + kvB^{k-1}B']. \quad (5.17)$$

Al reemplazar (5.17) en (5.16), se tiene

$$\begin{aligned} E[U^i V^j] &= \int_0^1 \int_0^1 u^i v^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} [A^k + kuA^{k-1}A'] [B^k + kvB^{k-1}B'] dudv \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \int_0^1 u^i [A^k + kuA^{k-1}A'] du \int_0^1 v^j [B^k + kvB^{k-1}B'] dv. \end{aligned}$$

De la fórmula de Hoeffding (véase Lehmann, 1966):

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U, V) &= \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 uv (\exp\{\theta AB\} - 1) dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 uv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} A^k B^k dudv \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \int_0^1 \int_0^1 uv A^k B^k dudv \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \int_0^1 u A^k du \int_0^1 v B^k dv. \end{aligned}$$

□

## 5.2. Medidas de asociación

Las cópulas juegan un papel importante en el estudio de la dependencia entre las variables. En la sección 2.5 definimos la rho de Spearman, la tau de Kendall, y el coeficiente de correlación medial de Blomqvist, como las medidas de asociación utilizadas para cuantificar la dependencia en términos de la cópula. En el siguiente teorema presentaremos

las formas generales de estas medidas para una cópula de la forma (5.2).

**Teorema 5.3.** *Sea  $(U, V)$  un par de v.a. uniformes en  $I$ , con cópula  $C_\theta$  dada por (5.2).*

*Entonces*

1. *La rho de Spearman es*

$$\rho_S = 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \int_0^1 u A^k du \int_0^1 v B^k dv. \quad (5.18)$$

2. *La tau de Kendall es*

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k 2^{k+2}}{k!} \int_0^1 \int_0^1 uv (AB)^k \\ &\quad \times [(1 + \theta u A' B)(1 + \theta v A B') + \theta uv A' B'] dudv - 1. \end{aligned} \quad (5.19)$$

3. *El coeficiente de correlación medial de Blomqvist es*

$$B_C = \exp\{\theta A(1/2)B(1/2)\} - 1. \quad (5.20)$$

*Demostración.* Dada la ecuación (5.15), la rho de Spearman es

$$\begin{aligned} \rho_S &= 12 \text{Cov}(U, V) \\ &= 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \int_0^1 u A^k du \int_0^1 v B^k dv. \end{aligned}$$

De la definición 2.7, la tau de Kendall es

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (5.21)$$

Derivando con respecto a  $u$  y  $v$  la ecuación (5.2), se tiene

$$dC(u, v) = \exp\{\theta AB\} [(1 + \theta u A' B)(1 + \theta u A' B) + \theta uv A' B'] dudv. \quad (5.22)$$

Al reemplazar (5.2) y (5.22) en (5.21), se tiene

$$\begin{aligned}
 \tau &= 4 \int_0^1 \int_0^1 uv[(1 + \theta uA'B)(1 + \theta vAB') + \theta uvA'B'] \\
 &\quad \times \exp\{2\theta AB\} dudv - 1 \\
 &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\theta)^k}{k!} \int_0^1 \int_0^1 uv(AB)^k \\
 &\quad \times [(1 + \theta uA'B)(1 + \theta vAB') + \theta uvA'B'] dudv - 1.
 \end{aligned}$$

El coeficiente de correlación medial de Blomqvist es por definición

$$\begin{aligned}
 B_C &= 4C_\theta(1/2, 1/2) - 1 \\
 &= 4 \frac{1}{4} \exp\{\theta A(1/2)B(1/2)\} - 1 \\
 &= \exp\{\theta A(1/2)B(1/2)\} - 1.
 \end{aligned}$$

□

Al considerar el caso simétrico (5.11), la rho de Spearman y el coeficiente de Blomqvist se pueden representar de una forma más simple en comparación al caso general, como se ve en el siguiente corolario.

**Corolario 5.4.** *Dada la cópula  $C_\theta$  definida por (5.11), entonces*

1. *La rho de Spearman es*

$$\rho_S = 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \left( \int_0^1 uA^k(u) du \right)^2. \quad (5.23)$$

2. *El coeficiente de correlación medial de Blomqvist es*

$$B_C = \exp\{\theta A(1/2)^2\} - 1. \quad (5.24)$$

## 5.3. Dependencia

Aunque la noción de independencia entre  $X$  e  $Y$  se caracteriza claramente por  $H(x, y) = F(x)G(y)$ , el concepto de dependencia puede definirse de diferentes maneras, como por ejemplo, el concepto de dependencia positiva, que nos sirve para describir como los valores grandes (o pequeños) de una variable aleatoria aparecen con valores grandes (o pequeños) de la otra. En la teoría de cópulas, uno de los conceptos de dependencia importantes, es la propiedad de dependencia en el cuadrante. Véase Lehmann (1966).

### 5.3.1. Dependencia en el cuadrante positivo y negativo

**Definición 5.1.** Sean  $X$  y  $Y$  dos v.a., decimos que son dependientes de cuadrante positivo (Positively Quadrant Dependent (PQD)) si

$$P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x]P[Y \leq y], \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.25)$$

En términos de las cópulas se define como

$$C(u, v) \geq uv. \quad (5.26)$$

El concepto de dependencia de cuadrante negativo (Negative Quadrant Dependent (NQD)) se define por analogía al invertir el sentido de las desigualdades en (5.25) y (5.26).

**Teorema 5.5.** La cópula  $C_\theta$  dada por (5.2) es PQD si y solo si para todo  $(u, v) \in I^2$ , se cumple

$$\theta A(u)B(v) \geq 0, \quad (5.27)$$

y es NQD si y solo si para todo  $(u, v) \in I^2$

$$\theta A(u)B(v) \leq 0. \quad (5.28)$$

*Demostración.* Supongamos que  $C_\theta$  es PQD, luego

$$uv \exp\{\theta A(u)B(v)\} \geq uv,$$

es decir,

$$\exp\{\theta A(u)B(v)\} \geq 1.$$

Al tomar logaritmos a ambos lados de la desigualdad se tiene

$$\theta A(u)B(v) \geq 0.$$

De modo similar se prueba cuando  $C_\theta$  es NQD □

**Ejemplo 5.2.** Sea la cópula de Gumbel-Barnett

$$C_\theta(u, v) = uv \exp\{\theta \ln u \ln v\},$$

para  $(u, v) \in I^2$  y  $\theta \in [-1, 0]$ . Puesto que  $\ln u \leq 0, \forall u \in [0, 1]$  y  $\theta \leq 0$ , se cumple la desigualdad (5.28), es decir la cópula (5.1) es NQD.

### 5.3.2. Monotonidad en las colas

Otro concepto de dependencia, es la monotonidad en las colas, de importante uso en aplicaciones para la evaluación de riesgos y análisis fiabilidad (véase Psarrakos y Politis, 2009). Decimos que dos v.a. continuas  $X, Y$  son de:

- Cola izquierda decreciente (Left Tail Decreasing (LTD)) si  $P[Y \leq y | X \leq x]$  es decreciente en  $x$  para todo  $y$  o equivalentemente en términos de la cópula  $C(u, v)$ , si para algún  $v \in I$ ,  $\partial C(u, v)/\partial u \leq C(u, v)/u$  para toda  $u \in I$ .
- Cola derecha creciente (Right Tail increasing (RTI)) si  $P[Y > y | X > x]$  es creciente en  $x$  para todo  $y$  o equivalentemente en términos de la cópula  $C(u, v)$ , si para algún  $v \in I$ ,  $\partial C(u, v)/\partial u \geq (v - C(u, v))/(1 - u)$  para toda  $u \in I$ .
- Esquina izquierda decreciente (Left Corner Set Decreasing (LCSD)) si  $P[X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y']$  es decreciente en  $x'$  y  $y'$  para todo  $X, Y$ , o equivalentemente

mente, la cópula  $C(u, v)$  es una función totalmente positiva de orden 2, es decir, para todo  $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in I^4$ , tales que  $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$  se tiene

$$C(u_1, v_1)C(u_2, v_2) \geq C(u_1, v_2)C(u_2, v_1).$$

- Esquina derecha decreciente (Right Corner Set Increasing (RCSI)) si  $P[X > x, Y > y | X > x', Y > y']$  es creciente en  $x'$  y  $y'$  para todo  $X, Y$ , o equivalentemente, la cópula de supervivencia  $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$  asociada a  $C$  es una función totalmente positiva de orden 2, es decir, para todo  $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in I^4$ , tales que  $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$  se tiene

$$\hat{C}(u_1, v_1)\hat{C}(u_2, v_2) \geq \hat{C}(u_1, v_2)\hat{C}(u_2, v_1).$$

Intuitivamente,  $LTD(Y|X)$  significa que es más probable que  $Y$  tome un valor pequeño cuando  $X$  decrece. Análogamente,  $RTI(Y|X)$  significa que es más probable que  $Y$  tome un valor grande cuando  $X$  crece. Si  $X, Y$  son  $LTD$  y  $RTI$ , entonces  $X, Y$  son  $PQD$ .

En el siguiente teorema se presentaran las caracterizaciones de monotonicidad en las colas para una cópula de Gumbel-Barnett extendida.

**Teorema 5.6.** Sean  $X, Y$  v.a. con distribución bivariante, la cópula  $C_\theta$  dada por (5.2).  $X, Y$  son:

- (i)  $LTD$  si y solo si, para algún  $v \in I$ ,

$$\theta A'B \leq 0, \forall u \in I.$$

- (ii)  $RTI$  si y solo si, para algún  $v \in I$ ,

$$\theta A'B \geq \frac{\exp\{-\theta AB\} - 1}{u(1 - u)}, \forall u \in I.$$

- (iii)  $LCSD$  si y solo si  $[A(u_2) - A(u_1)][B(v_2) - B(v_1)] \geq 0$ , equivalentemente  $A(u)$  y  $B(v)$  son funciones monótonas crecientes o decrecientes simultáneamente.

*Demostración.* Por definición LTD( $Y|X$ ) si y solo si para algún  $v \in I$ ,  $\partial C(u, v)/\partial u \leq C(u, v)/u$  para toda  $u \in I$ , al calcular las derivadas y simplificar, se tiene

$$u\theta A'B \leq 0.$$

Puesto que  $u$  es un valor en el intervalo  $I$ , implica necesariamente que  $\theta A'B \leq 0$ .  $X, Y$  son RTI( $Y|X$ ) si y solo si para algún  $v \in I$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} &\geq \frac{v - C(u, v)}{1 - u}, \\ v \exp\{\theta AB\}(1 + u\theta A'B) &\geq \frac{v - uv \exp\{\theta AB\}}{1 - u}, \\ \theta u A'B &\geq \frac{\exp\{-\theta AB\} - u}{1 - u} - 1, \\ \theta A'B &\geq \frac{\exp\{-\theta AB\} - 1}{u(1 - u)}. \end{aligned}$$

Decimos que  $X, Y$  son LCSD( $Y|X$ ) si para todo  $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in I^4$ , tales que  $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$  se tiene

$$\begin{aligned} C(u_1, v_1)C(u_2, v_2) &\geq C(u_1, v_2)C(u_2, v_1), \\ \exp\{\theta[A(u_1)B(v_1) + A(u_2)B(v_2)]\} &\geq \exp\{\theta[A(u_1)B(v_2) + A(u_2)B(v_1)]\}, \\ A(u_1)B(v_1) + A(u_2)B(v_2) &\geq A(u_1)B(v_2) + A(u_2)B(v_1), \end{aligned}$$

ósea

$$A(u_1)B(v_1) + A(u_2)B(v_2) - A(u_1)B(v_2) + A(u_2)B(v_1) \geq 0.$$

Al factorizar

$$[A(u_2) - A(u_1)][B(v_2) - B(v_1)] \geq 0.$$

Lo anterior se cumple cuando  $A(u)$  y  $B(v)$  son funciones monótonas crecientes o decrecientes simultáneamente para todo  $(u, v) \in I^2$ .  $\square$

### 5.3.3. Dependencia en las colas

El concepto de dependencia en la cola resulta relevante para el estudio de la dependencia de valores extremos, de especial utilidad en la determinación de medidas de riesgo, tales como el valor en riesgo (VaR), que se concentran en el comportamiento de sucesos extremos. En la práctica, el concepto de dependencia en la cola representa el estándar actual para describir la cantidad de dependencia de los fenómenos extremos (dependencia extremales). La dependencia en las colas entre dos v.a. continuas  $X, Y$  en términos de cópulas (véase Joe, 1997; Schmidt y Stadtmüller, 2006) nos sirve para medir la dependencia en el cuadrante superior-derecho e inferior-izquierdo de  $I^2$ . Esta medida de dependencia se plantea como una propiedad de la cópula y no de sus distribuciones marginales, por lo que su cuantificación es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes de  $X, Y$ .

Una definición que evidencia que el concepto de dependencia en la cola es una propiedad de la cópula, es la siguiente

**Definición 5.2.** *Sea  $C$  una cópula de  $X, Y$ . Si los límites*

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(t, t)}{1 - t},$$

y

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t},$$

*existen, entonces  $C$  tiene dependencia en la cola superior si  $\lambda_U \in (0, 1]$  y en la inferior si  $\lambda_L \in (0, 1]$ .  $C$  es independiente en la cola superior si  $\lambda_U = 0$  y en la inferior si  $\lambda_L = 0$ .*

En nuestro caso la cópula  $C_\theta$  dada por (5.2) no tiene dependencia en las colas superior ni en la inferior, como se ve en el siguiente resultado.

**Teorema 5.7.** *Sean  $X, Y$  v.a. con cópula  $C_\theta$  dada por (5.2). Entonces*

$$\lambda_U = \lambda_L = 0.$$

*Es decir, la cópula  $C_\theta$  es independiente en el cuadrante superior-derecho e inferior-izquierdo de  $I^2$ .*

*Demostración.* De la definición

$$\begin{aligned}\lambda_U &= 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(t, t)}{1 - t} \\ &= 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - t^2 \exp\{\theta A(t)B(t)\}}{1 - t}.\end{aligned}\tag{5.29}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} [2t + \theta t^2(A(t)B(t))'] \exp\{\theta A(t)B(t)\}.$$

Dada la condición de frontera  $A(1) = B(1) = 0$ , se tiene por tanto que  $\lambda_U = 0$ . De modo similar obtenemos el límite

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 \exp\{\theta A(t)B(t)\}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t \exp\{\theta A(t)B(t)\} = 0.\end{aligned}\tag{5.30}$$

□

## 5.4. Ejemplos adicionales

En esta sección presentaremos algunos casos particulares de cópulas de la forma (5.2) y sus correspondientes medidas de asociación y dependencia

**Ejemplo 5.3.** Sean las funciones  $A(u) = u^r(1 - u^m)$  y  $B(v) = v^s(1 - v^n)$ , para toda  $(u, v) \in I^2$ . Entonces la cópula asociada  $C_\theta$  viene dada por

$$C_\theta(u, v) = uv \exp\{\theta u^r v^s (1 - u^m)(1 - v^n)\},\tag{5.31}$$

para  $r, s \geq 0$  y  $m, n \geq 1$ .

Un caso particular de esta cópula fue presentado por Cuadras (2009) de la forma

$$C(u, v) = uv \exp\{\theta(1-u)(1-v)\}. \quad (5.32)$$

Mediante un sencillo cálculo, se puede probar que se cumplen la condición  $A(u) \rightarrow 0$ ,  $B(v) \rightarrow 0$  cuando  $u \rightarrow 1$ ,  $v \rightarrow 1$  y  $A'(u) = -m$ ,  $B'(v) = -n$  para  $m, n \geq 1$ . Para encontrar los posibles valores de  $\theta$  que garantizan que (5.31) es una cópula, consideraremos la siguiente función

$$A'(1)(B + vB') = -mv^s[(s+1) - (s+n+1)v^n]. \quad (5.33)$$

Los valores extremos de (5.33) se alcanzan cuando

$$v = 1 \text{ y } v = \left[ \frac{s(s+1)}{(s+n+1)(s+n)} \right]^{1/n}.$$

Al reemplazar estos valores en (5.33) se tiene

$$mn \leq A'(1)(B + vB') \leq \frac{mn(s+1)}{(s+n)} \left[ \frac{s(s+1)}{(s+n+1)(s+n)} \right]^{s/n}. \quad (5.34)$$

De igual forma podemos obtener los valores extremos para  $B'(1)(A + uA')$ , donde

$$mn \leq B'(1)(A + uA') \leq \frac{mn(r+1)}{(r+m)} \left[ \frac{r(r+1)}{(r+m+1)(r+m)} \right]^{r/m}. \quad (5.35)$$

Al reemplazar los valores extremos de las desigualdades (5.34) y (5.35), en la desigualdad (5.10), obtenemos el intervalo para  $\theta$  que garantiza que (5.31) es una cópula.

$$\frac{-1}{mn} \leq \theta \leq \frac{1}{mn \max\left\{ \frac{(r+1)}{(r+m)} \left[ \frac{r(r+1)}{(r+m+1)(r+m)} \right]^{r/m}, \frac{(s+1)}{(s+n)} \left[ \frac{s(s+1)}{(s+n+1)(s+n)} \right]^{s/n} \right\}}, \quad (5.36)$$

o equivalentemente

$$\frac{-1}{mn} \leq \theta \leq \frac{1}{mn} \min\left\{ \frac{(r+m)}{(r+1)} \left[ \frac{(r+m+1)(r+m)}{r(r+1)} \right]^{r/m}, \frac{(s+n)}{(s+1)} \left[ \frac{(s+n+1)(s+n)}{s(s+1)} \right]^{s/n} \right\}. \quad (5.37)$$

En el caso de simetría, es decir  $r = s$  y  $m = n$ , el intervalo (5.37) es de la forma

$$-\frac{1}{m^2} \leq \theta \leq \frac{1}{m^2} \frac{(r+m)}{(r+1)} \left[ \frac{(r+m+1)(r+m)}{r(r+1)} \right]^{r/m}. \quad (5.38)$$

En particular para la cópula (5.32), el intervalo de  $\theta$  es de la forma

$$-1 \leq \theta \leq 1.$$

Obsérvese que en la cópula (5.1) es  $0 \leq \theta \leq 1$ , por lo que (5.32) abarca más rango de dependencia.

Del teorema 5.3, se obtienen los siguientes resultados:

La rho de Spearman es

$$\begin{aligned} \rho_s &= 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \int_0^1 u A^k du \int_0^1 v B^k dv \\ &= 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \int_0^1 u^{rk+1} (1-u^m)^k du \int_0^1 v^{sk+1} (1-v^n)^k dv \\ &= \frac{12}{mn} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} B\left(\frac{rk+2}{m}, k+1\right) B\left(\frac{sk+2}{n}, k+1\right). \end{aligned}$$

La tau de Kendall es

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\theta)^k}{k!} \int_0^1 \int_0^1 uv (AB)^k [(1+\theta uA'B)(1+\theta vAB') + \theta uvA'B'] dudv - 1 \\ &= \frac{4}{mn} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\theta)^k}{k!} [B\left(\frac{rk+2}{m}, k+1\right) B\left(\frac{sk+2}{n}, k+1\right) \\ &\quad - \frac{6mn(k+1)\theta}{[(r+m)(k+1)+2][(s+n)(k+1)+2]} \\ &\quad \times B\left(\frac{r(k+1)+2}{m}, k+1\right) B\left(\frac{s(k+1)+2}{n}, k+1\right) \\ &\quad + \frac{[(r^2-m^2)(k+2)+2r][(s^2-n^2)(k+2)+2s]}{[(r+m)(k+1)+2][(s+n)(k+1)+2]} \\ &\quad \times B\left(\frac{r(k+2)+2}{m}, k+2\right) B\left(\frac{s(k+2)+2}{n}, k+2\right)] - 1. \end{aligned}$$

El coeficiente de correlación medial de Blomqvist es

$$B_C = \exp \left\{ \theta \left( \frac{1}{2} \right)^{r+s} \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^m \right) \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right) \right\} - 1.$$

Dado que  $A(u)$  y  $B(v)$  son funciones no negativas y de acuerdo con el teorema 5.5, concluimos que la cópula (5.31) es NQD si  $\theta$  es negativa, esto es,  $\theta \in [-1/mn, 0)$  y es PQD si  $\theta$  es positiva.

La monotonicidad en las colas de la cópula (5.31) no es posible determinarla puesto que las derivadas de  $A$  y  $B$  pueden tomar tanto valores positivos como negativos, dependiendo de los parámetros  $r, s, m, n$ . En el caso de la cópula (5.32), donde  $A' = -1$ , concluimos por el teorema 5.6, que es de monotonicidad LTD y RTI, cuando  $\theta > 0$  y es LCSD, para todo  $\theta \in [-1, 1]$ , puesto que  $A, B$  son funciones monótonas decrecientes. En las figuras 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5, se presentan los gráficos de las funciones de densidad y de contorno para algunos casos particulares de la cópula con la forma (5.31).

**Ejemplo 5.4.** Sean  $A(u) = 2/\pi \cos(\pi u/2)$ ,  $B(v) = 2/\pi \cos(\pi v/2)$ , luego la cópula dada por la función (5.2) es de la forma

$$C_\theta(u, v) = uv \exp\{4\theta/\pi^2 \cos(\pi u/2) \cos(\pi v/2)\}.$$

Se verifica fácilmente que  $A(1) = B(1) = 0$  y  $A'(1) = B'(1) = -1$ . Además se cumplen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} -\pi/2 &\leq A'(1)(B(v) + vB'(v)) \leq 1. \\ -\pi/2 &\leq B'(1)(A(u) + uA'(u)) \leq 1. \end{aligned}$$

De acuerdo con la desigualdad (5.10), el intervalo para  $\theta$  será

$$-1 \leq \theta \leq 2/\pi.$$

Como medida de dependencia tenemos el coeficiente de correlación medial de Blomqvist, el cual es de la forma

$$B_C = \exp\{\theta/2\} - 1.$$

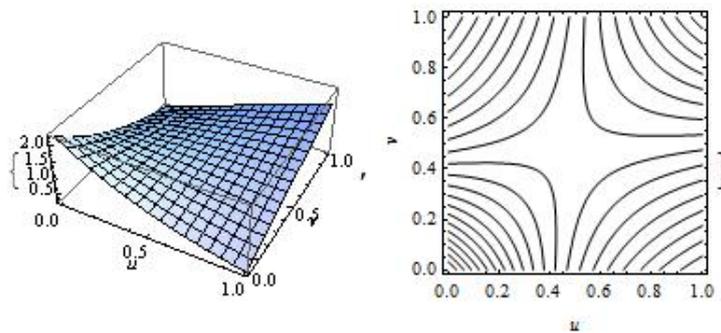


Figura 5.2: Densidad y contorno de la cópula  $C(u, v) = uv \exp\{0,8(1-u)(1-v)\}$

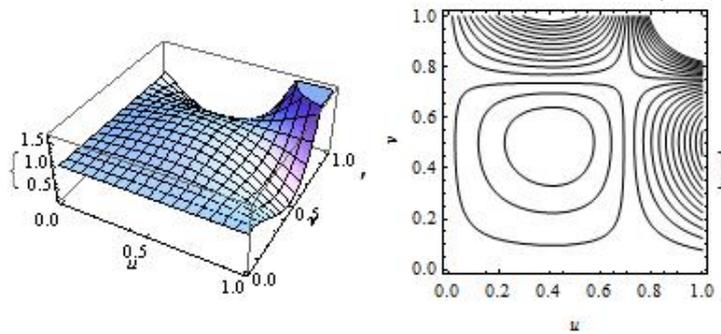


Figura 5.3: Densidad y contorno de la cópula  $C(u, v) = uv \exp\{1,5u(1-u^2)v^2(1-v)\}$

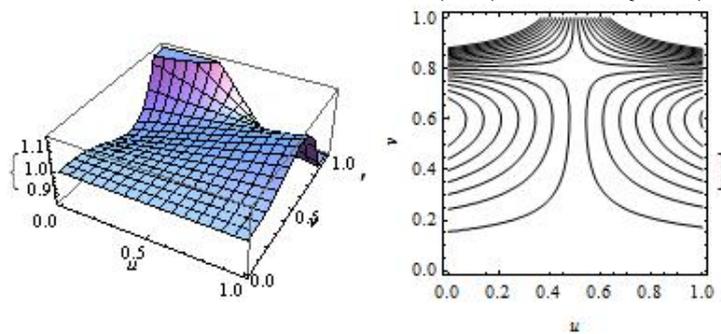


Figura 5.4: Densidad y contorno de la cópula  $C(u, v) = uv \exp\{-0,5(1-u)v^3(1-v)\}$

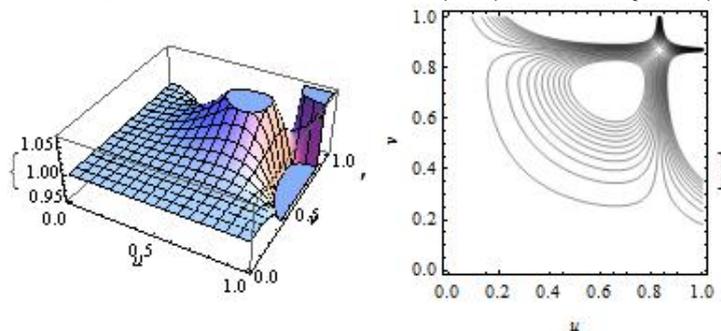


Figura 5.5: Densidad y contorno de la cópula  $C(u, v) = uv \exp\{0,2u^3(1-u^3)v^4(1-v^5)\}$

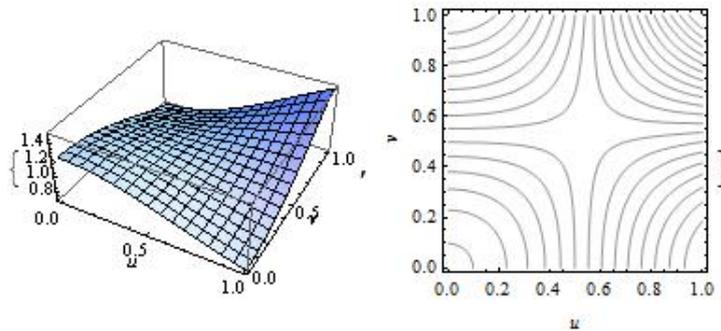


Figura 5.6: Densidad y contorno de la cópula  $C(u, v) = uv \exp\left\{\frac{2}{\pi^2} \cos(\pi u/2) \cos(\pi v/2)\right\}$

Las funciones  $A(u)$  y  $B(v)$  son monótonas decrecientes y no negativas, y son PQD si  $\theta$  es positiva y NQD si es negativa, además poseen monotonicidad en cola del tipo LCSD por ser funciones monótonas. En el caso  $\theta \geq 0$  la monotonicidad es tanto del tipo LTD como del RTI. Una representación gráfica de esta clase de funciones cuando  $\theta = 1/2$  puede verse en la figura 5.6.

## Capítulo 6

# Generalización de la cópula FGM

Una de las familias de cópulas más conocidas es la familia Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) o familia B10 en Joe (1997) definida como

$$C_{\theta}(u, v) = uv[1 + \theta(1 - u)(1 - v)], \quad \theta \in [-1, 1]. \quad (6.1)$$

Esta cópula fue inicialmente propuesta por Morgenstern (1956) para marginales Cauchy, luego Gumbel (1960) estudió la misma estructura para marginales exponenciales, hasta que Farlie (1960) sugirió una generalización bivalente estudiada por Morgenstern y Gumbel de la forma

$$C(u, v) = uv[1 + \lambda A(u)B(v)], \quad (6.2)$$

donde  $A(u)$  y  $B(v)$  son funciones diferenciables en el intervalo  $[0, 1]$ , tales que  $A(u) \rightarrow 0$  y  $B(v) \rightarrow 0$  cuando  $u, v \rightarrow 1$ . El rango admisible de  $\lambda$  depende de las funciones  $A$  y  $B$ , véase Bairamov y Kotz (2002).

Johnson y Kotz (1975, 1977) estudiaron el caso multivariante y acuñó el término con el nombre de distribución FGM. Otros estudios fueron realizados por Schucany *et al.* (1978); Huang y Kotz (1984), que tratan la distribución Farlie-Gumbel-Morgenstern “iterada”. Shaked (1975), investiga la relación entre la distribución FGM y las llamadas distribuciones de “dependencia positiva”, Tolley y Norman (1979) en problemas de riesgo competitivo, Johnson (1980) utiliza la familia FGM para modelar datos censurados,

D'este (1981) analiza la estructura de la distribución FGM con marginales gamma. Lin (1987) analizan varias parametrizaciones de la distribución FGM. Nelsen (1994) caracteriza la familia FGM en términos de la rho de Spearman. De La Horra y Fernandez (1995) proponen la familia la FGM como una clase de distribuciones robusta a priori. Recientemente Rodríguez-Lallena y Úbeda-Flores (2004) plantea otra generalizada de la cópula FGM, la cual había sido inicialmente introducida por Sarmanov (1966) de la forma.

$$C(u, v) = uv + \lambda f(u)g(v), \quad -1/\max\{\alpha\gamma, \beta\delta\} \leq \lambda \leq -1/\min\{\alpha\delta, \beta\gamma\}, \quad (6.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \inf\{f'(u) : u \in \bar{A}\} < 0, & \beta &= \sup\{f'(u) : u \in \bar{A}\} > 0, \\ \gamma &= \inf\{g'(v) : v \in \bar{B}\} < 0, & \delta &= \sup\{g'(v) : v \in \bar{B}\} > 0, \end{aligned}$$

con

$$\bar{A} = \{u \in [0, 1] : f'(u) \text{ si existe}\} \text{ y } \bar{B} = \{v \in [0, 1] : g'(v) \text{ si existe}\}.$$

Algunas extensiones de este modelo pueden verse en Kim y Sungur (2004). Lai y Xie (2000) consideran el caso simétrico  $f(u) = u^b(1-u)^p = g(u)$ ;  $b, p \geq 1$  y prueba que cumple la propiedad  $C(u, v) \geq uv$ , conocida con el nombre de dependencia de cuadrante positivo (PQD).

En este capítulo, obtendremos dos nuevas generalizaciones de la familia de cópulas FGM, la primera se relaciona con la cópula (6.2), pero a diferencia de ésta, vamos a suponer que las funciones  $A(u), B(v)$  son diferencia de dos distribuciones auxiliares y la segunda, se relaciona con la cópula (6.3), pero este caso lo extendemos al caso asimétrico donde  $f(u) = u^r(1-u^m)^p, g(v) = v^s(1-v^n)^q$ ; con  $r, s, m, n, p, q \geq 1$ . Las dos extensiones propuestas se relacionan, si en el caso asimétrico tomamos  $r, p, s$  y  $q$  igual a 1. Obtendremos para cada una de las dos generalizaciones, los rangos admisibles de  $\lambda$  que garantizan que  $C$  es una cópula y algunas de sus propiedades más relevantes.

## 6.1. La familia de cópulas FGM extendida

La correspondiente función de distribución asociada a la cópula (6.2) es de la forma

$$H(x, y) = F(x)G(y) + \lambda A(x)B(y), \quad (6.4)$$

donde  $F(x), G(y)$  son funciones de distribución marginales de  $H(x, y)$  y  $A(x), B(y)$  son funciones reales.  $F(x), A(x)$  son funciones con soporte en el intervalo  $[a, b]$  y  $G(y), B(y)$  son funciones con soporte en el intervalo  $[c, d]$ . Supongamos que  $A(x) = F(x) - \Phi(x)$  y  $B(y) = G(y) - \Psi(y)$ , tales que  $\Phi(x), \Psi(y)$  son funciones de distribución con soporte en  $[a, b], [c, d]$  respectivamente. Al reemplazar en (6.4) obtenemos una función de distribución de la forma

$$H(x, y) = F(x)G(y) + \lambda[(F(x) - \Phi(x))(G(y) - \Psi(y))], \quad (6.5)$$

con función de densidad

$$h(x, y) = f(x)g(y)[1 + \lambda(1 - \varphi(x)f^{-1}(x))(1 - \psi(y)g^{-1}(y))], \quad (6.6)$$

donde  $f(x), \varphi(x)$  son funciones de densidad con soporte en el intervalo  $[a, b]$  y  $g(y), \psi(y)$  son densidades con soporte en el intervalo  $[c, d]$ .

Si  $f(x) = \varphi(x)$  ó  $g(y) = \psi(y)$  en (6.6), podemos decir que  $(X, Y)$  son estocásticamente independientes.

**Teorema 6.1.** Sean  $F(x), \Phi(x)$  funciones de distribución en el intervalo  $[a, b]$  y  $G(y), \Psi(y)$  funciones de distribución en el intervalo  $[c, d]$ , con funciones de densidad  $f(x), \varphi(x), g(y), \psi(y)$  respectivamente. La función

$$H(x, y) = F(x)G(y) + \lambda[(F(x) - \Phi(x))(G(y) - \Psi(y))],$$

es una función de distribución si  $\lambda \in [-\min\{\frac{1}{(M-1)(N-1)}, 1\}, \min\{\frac{1}{M-1}, \frac{1}{N-1}\}]$ , donde  $\varphi(x)f^{-1}(x) \leq M$  y  $\psi(y)g^{-1}(y) \leq N$  para algún  $M, N \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Se verifica fácilmente que

$$\lim_{x, y \rightarrow -\infty} H(x, y) = 0 \text{ y } \lim_{x, y \rightarrow \infty} H(x, y) = 1.$$

Para determinar el intervalo de  $\lambda$ , que nos garantice que (6.5) es una función diferenciable monótona creciente, debemos probar que  $\frac{\partial H^2(x,y)}{\partial x \partial y} = h(x,y) \geq 0$ . Por ser funciones de densidad  $f(x) \geq 0$  y  $\varphi(x) \geq 0$ , luego  $\varphi(x)f^{-1}(x) \geq 0$ , además supondremos que  $\varphi(x)f^{-1}(x) \leq M$ , para algún  $M \in \mathbb{R}$ .

Luego

$$0 \leq \varphi(x)f^{-1}(x) \leq M, \quad M \in \mathbb{R}. \quad (6.7)$$

De igual forma supondremos

$$0 \leq \psi(y)g^{-1}(y) \leq N, \quad N \in \mathbb{R}. \quad (6.8)$$

A partir de (6.7) y (6.8), se obtienen las siguientes desigualdades

$$1 - M \leq 1 - \varphi(x)f^{-1}(x) \leq 1.$$

$$1 - N \leq 1 - \psi(y)g^{-1}(y) \leq 1.$$

El producto está acotado

$$\begin{aligned} -\max\{M-1, N-1\} &\leq (1 - \varphi(x)f^{-1}(x))(1 - \psi(y)g^{-1}(y)) \\ &\leq \max\{(M-1)(N-1), 1\}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Para que  $h(x,y) \geq 0$  y puesto que  $f(x) \geq 0$ ,  $g(y) \geq 0$  en (6.6), es necesario que cumplan la siguiente desigualdad

$$1 + \lambda(1 - \varphi(x)f^{-1}(x))(1 - \psi(y)g^{-1}(y)) \geq 0,$$

o equivalentemente

$$\lambda(1 - \varphi(x)f^{-1}(x))(1 - \psi(y)g^{-1}(y)) \geq -1. \quad (6.10)$$

Reemplazando (6.9) en (6.10) se tiene

$$\frac{-1}{\text{máx}\{(M-1)(N-1), 1\}} \leq \lambda \leq \frac{1}{\text{máx}\{M-1, N-1\}}. \quad (6.11)$$

$$-\text{mín}\left\{\frac{1}{(M-1)(N-1)}, 1\right\} \leq \lambda \leq \text{mín}\left\{\frac{1}{M-1}, \frac{1}{N-1}\right\}. \quad (6.12)$$

Los valores de  $M$  y  $N$  son de la forma

$$M = \sup \left\{ \frac{\varphi(x)}{f(x)} \right\} \quad \text{y} \quad N = \sup \left\{ \frac{\psi(y)}{g(y)} \right\}.$$

□

**Proposición 6.1.** Sean las funciones

$$\alpha = \int_a^b \frac{\varphi^2(x)}{f(x)} dx, \quad \beta = \int_c^d \frac{\psi^2(y)}{g(y)} dy.$$

Entonces

$$\alpha \geq 1 \quad \text{y} \quad \beta \geq 1. \quad (6.13)$$

*Demostración.* Mediante la desigualdad de Cauchy-Schwartz se verifica que

$$\left( \int_a^b \varphi(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b \frac{\varphi^2(x)}{f(x)} dx \right) \left( \int_a^b f(x) dx \right).$$

Dado que  $f$  y  $\varphi$  son dos funciones de densidad con soporte el intervalo  $[a, b]$ , se tiene

$$\alpha = \int_a^b \frac{\varphi^2(x)}{f(x)} dx \geq 1.$$

De modo similar se prueba  $\beta \geq 1$ . □

Denotando  $a_1(x) = 1 - \varphi(x)f^{-1}(x)$  y  $b_1(y) = 1 - \psi(y)g^{-1}(y)$  en (6.6) podemos expresar

$$h(x, y) = f(x)g(y) + \lambda f(x)g(y)a_1(x)b_1(y). \quad (6.14)$$

**Proposición 6.2.** *Sea  $a_1(x) = 1 - \varphi(x)f^{-1}(x)$  y  $b_1(y) = 1 - \psi(y)g^{-1}(y)$  dos funciones de las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  respectivamente. Entonces*

$$\begin{aligned} E(a_1(X)) &= 0, \quad \text{Var}(a_1(X)) = \alpha - 1, \\ E(b_1(Y)) &= 0, \quad \text{Var}(b_1(Y)) = \beta - 1. \end{aligned}$$

*Demostración.* El valor esperado es

$$\begin{aligned} E(a_1(X)) &= \int_a^b a_1(x)dF(x) = \int_a^b (1 - \varphi(x)f^{-1}(x))dF(x) \\ &= \int_a^b dF(x) - \int_a^b \varphi(x)dx = 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

La varianza es

$$\begin{aligned} \text{Var}(a_1(X)) &= \int_a^b a_1^2(x)dF(x) = \int_a^b (1 - \varphi(x)f^{-1}(x))^2dF(x) \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\varphi^2(x)}{f^2(x)} - 2\frac{\varphi(x)}{f(x)} + 1 \right] dF(x) \\ &= \int_a^b \frac{\varphi^2(x)}{f(x)}dx - 2 + 1 \\ &= \alpha - 1. \end{aligned}$$

De igual forma se prueba  $E(b_1(Y)) = 0$  y  $\text{Var}(b_1(Y)) = \beta - 1$ . □

**Proposición 6.3.** *Sea la función de densidad (6.14), el coeficiente de asociación de Pearson es*

$$\phi^2 = \lambda^2(\alpha - 1)(\beta - 1). \tag{6.15}$$

*Demostración.* Por definición

$$\begin{aligned}
\phi^2 &= \int_a^b \int_c^d \frac{(h(x, y) - f(x)g(y))^2}{f(x)g(y)} dx dy \\
&= \int_a^b \int_c^d \frac{\lambda^2 (f(x) - \varphi(x))^2 (g(y) - \psi(y))^2}{f(x)g(y)} dx dy \\
&= \lambda^2 \int_a^b \frac{(f(x) - \varphi(x))^2}{f(x)} dx \int_c^d \frac{(g(y) - \psi(y))^2}{g(y)} dy \\
&= \lambda^2 (\alpha - 1)(\beta - 1).
\end{aligned}$$

□

**Proposición 6.4.** *La primera correlación canónica es*

$$\rho_1 = \lambda \sqrt{(\alpha - 1)(\beta - 1)}.$$

*Demostración.* Dado que (6.15) existe y es finito, entonces existe la expansión diagonal (Lancaster, 1958).

$$f^{-\frac{1}{2}}(x)[h(x, y) - f(x)g(y)]g^{-\frac{1}{2}}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n u_n f^{\frac{1}{2}}(x) v_n g^{\frac{1}{2}}(y),$$

o equivalentemente

$$h(x, y) - f(x)g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n f(x) u_n g(y) v_n, \quad (6.16)$$

donde  $\{u_n f^{\frac{1}{2}}(x), v_n g^{\frac{1}{2}}(y)\}$  es un conjunto ortogonal completo. Al expandir la ecuación (6.16) se tiene

$$h(x, y) = f(x)g(y) + \rho_1 f(x) u_1 g(y) v_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \rho_n f(x) u_n g(y) v_n. \quad (6.17)$$

Tomando

$$u_1 = \frac{a_1}{\sqrt{(\alpha - 1)}} \text{ y } v_1 = \frac{b_1}{\sqrt{(\beta - 1)}},$$

y considerando la proposición 6.2, se prueba fácilmente que  $E(u_1) = E(v_1) = 0$ ,  $\text{Var}(u_1) = \text{Var}(v_1) = 1$  y  $\text{Cov}(u_1, v_1) = E(u_1 v_1) = 0$ , luego  $u_1$  y  $v_1$  son variables canónicas.

Así al comparar las ecuaciones (6.17) y (6.14) se tiene

$$\rho_1 f(x)u_1 g(y)v_1 = \lambda \sqrt{(\alpha - 1)(\beta - 1)} f(x) \frac{a_1}{\sqrt{(\alpha - 1)}} g(y) \frac{b_1}{\sqrt{(\beta - 1)}}. \quad (6.18)$$

Por tanto la primera correlación canónica es de la forma

$$\rho_1 = \lambda \sqrt{(\alpha - 1)(\beta - 1)}.$$

□

Dependiendo de la forma de la función  $\Phi(x)$  y  $\Psi(y)$  en la ecuación (6.5) se obtiene una familia de cópulas FGM. Por ejemplo si  $\Phi(x) = F^{m+1}(x)$  y  $\Psi(y) = G^{n+1}(y)$  con  $m, n \geq 1$  se tiene

$$H(x, y) = F(x)G(y)[1 + \lambda(1 - F^m(x))(1 - G^n(y))], \quad m, n \geq 1.$$

La correspondiente cópula

$$C(u, v) = uv[1 + \lambda(1 - u^m)(1 - v^n)], \quad m, n \geq 1. \quad (6.19)$$

El caso  $m = n$  fue estudiado por Huang y Kotz (1999) y en particular cuando  $m = n = 1$  esta familia se reduce a la FGM. Obsérvese que si  $\lambda$  es nulo entonces  $C = uv$  se convierte en la cópula producto o independencia, denotada también por  $\Pi$ .

En el siguiente teorema se darán las condiciones para las cuales la función (6.19) es una cópula.

**Teorema 6.2.** *Sea  $u, v \in I$ , la función  $C(u, v)$  definida por la ecuación (6.19) con  $\lambda \in [-\min\{\frac{1}{mn}, 1\}, \min\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\}]$  es una cópula y posee la propiedad PQD para  $\lambda \in [0, \min\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\}]$ .*

*Demostración.* Es claro que  $C(u, 0) = 0 = C(0, v)$  y  $C(u, 1) = u$  y  $C(1, v) = v$ .

Para probar que  $C(u, v)$  sea una función monótona creciente de  $u$  y  $v$ , consideremos

$0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$  y  $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$ , en este caso  $\Delta(u_1, u_2, v_1, v_2)$  la escribimos como

$$\begin{aligned} \Delta(u_1, u_2, v_1, v_2) &= (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \\ &+ \lambda[(u_2 - u_1) - (u_2^{m+1} - u_1^{m+1})][(v_2 - v_1) - (v_2^{n+1} - v_1^{n+1})]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Por tanto para que  $\Delta(u_1, u_2, v_1, v_2) \geq 0$  implica

$$\lambda \frac{[(u_2 - u_1) - (u_2^{m+1} - u_1^{m+1})]}{(u_2 - u_1)} \frac{[(v_2 - v_1) - (v_2^{n+1} - v_1^{n+1})]}{(v_2 - v_1)} \geq -1.$$

Con  $u_1 \rightarrow u_2^-$  y  $v_1 \rightarrow v_2^-$  en la desigualdad anterior, se tiene

$$\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \geq 0,$$

o equivalentemente

$$\lambda(1 - (m+1)u^m)(1 - (n+1)v^n) \geq -1. \quad (6.21)$$

Para garantizar la condición (6.21) debemos determinar el rango de variación de  $\lambda$  que satisfaga dicha desigualdad. Así dado que  $u, v \in I$  y  $m, n \geq 1$ , se verifica

$$-m \leq 1 - (m+1)u^m \leq 1, \quad m \geq 1.$$

$$-n \leq 1 - (n+1)v^n \leq 1, \quad n \geq 1.$$

El producto de estas desigualdades está acotada por

$$-\max\{m, n\} \leq (1 - (m+1)u^m)(1 - (n+1)v^n) \leq \max\{mn, 1\}.$$

Por tanto la desigualdad (6.21) es acotada de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\max\{mn, 1\}} \leq \lambda \leq \frac{1}{\max\{m, n\}}; \quad m, n \geq 1, \\ -\min\left\{\frac{1}{mn}, 1\right\} \leq \lambda \leq \min\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right\}; \quad m, n \geq 1. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Para determinar el intervalo de  $\lambda$  que garantice que  $C$  es PQD, debemos buscar los valores de  $\lambda$  que satisfagan la desigualdad

$$\lambda(u - u^{m+1})(v - v^{n+1}) \geq 0. \quad (6.23)$$

Puesto que

$$0 \leq (u - u^{m+1}) \leq 1 \text{ y } 0 \leq (v - v^{n+1}) \leq 1.$$

Luego las cotas para el producto serán

$$0 \leq (u - u^{m+1})(v - v^{n+1}) \leq 1,$$

equivalente a

$$0 \leq \lambda(u - u^{m+1})(v - v^{n+1}) \leq \lambda.$$

Considerando (6.22), se tiene

$$0 \leq \lambda \leq \min\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right\}. \quad (6.24)$$

□

### Propiedades de la familia de cópulas (6.19)

Sea  $C$  la cópula definida por la ecuación (6.19), la densidad  $c$  viene dada por

$$c(u, v) = 1 + \lambda(1 - (m + 1)u^m)(1 - (n + 1)v^n); \quad m \geq 1, n \geq 1.$$

Los siguientes resultados son inmediatos.

**Teorema 6.3.** *Sea  $u, v \in I$  variables aleatorias uniformes con función de distribución conjunta  $C$  definida por (6.19), entonces*

$$E(U^i V^j) = \frac{1}{(i + 1)(j + 1)} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{im}{m + i + 1} \right) \left( \frac{jn}{n + j + 1} \right) \right]; \quad m, n \geq 1, \quad (6.25)$$

y

$$\text{Cov}(U, V) = \frac{\lambda}{4} \left( \frac{m}{m+2} \right) \left( \frac{n}{n+2} \right); \quad m, n \geq 1. \quad (6.26)$$

*Demostración.* Por definición

$$\begin{aligned} E(U^i V^j) &= \int_0^1 \int_0^1 u^i v^j c(u, v) du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 u^i v^j [1 + \lambda(1 - (m+1)u^m)(1 - (n+1)v^n)] du dv \\ &= \int_0^1 u^i du \int_0^1 v^j dv + \lambda \int_0^1 (u^i - (m+1)u^{m+i}) du \int_0^1 (v^j - (n+1)v^{n+j}) dv \\ &= \frac{1}{(i+1)(j+1)} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{mi}{m+i+1} \right) \left( \frac{nj}{n+j+1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de Hoeffding (véase Lehmann, 1966),

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U, V) &= \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \lambda uv(1 - u^m)(1 - v^n) du dv \\ &= \frac{\lambda}{4} \left( \frac{m}{m+2} \right) \left( \frac{n}{n+2} \right). \end{aligned}$$

□

Algunas de las medidas de asociación no paramétricas entre las componentes de un par aleatorio  $(U, V)$  son la tau de Kendall, la rho de Spearman, el coeficiente de Gini y la medida de Blomqvist. Estas medidas dependen solo de la cópula  $C(u, v)$ . En el siguiente teorema proporcionamos las expresiones de estas medidas para la cópula  $C$ .

**Teorema 6.4.** *Sea  $(U, V)$  un par aleatorio con cópula  $C$  definida por (6.19). Entonces la rho de Spearman es*

$$\rho_S = 3\lambda \frac{mn}{(m+2)(n+2)}. \quad (6.27)$$

La tau de Kendall es

$$\tau = \frac{\rho_S}{3} - 1. \quad (6.28)$$

El coeficiente de Gini es

$$\gamma_C = 2\lambda \left[ \frac{m(n+1)(m+n+5)}{(m+2)(n+3)(m+n+3)} + B(m+2, n+2) - B(2, n+2) \right], \quad (6.29)$$

donde  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$  es la función beta.

La medida de Blomqvist es

$$B_C = \lambda \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \right) \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right). \quad (6.30)$$

*Demostración.* Por definición de la rho de Spearman

$$\begin{aligned} \rho_S &= 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \lambda(u - u^{m+1})(v - v^{n+1}) dudv \\ &= 3\lambda \frac{mn}{(m+2)(n+2)}. \end{aligned}$$

Al utilizar las ecuaciones (6.22) y (6.27) se obtiene un intervalo para el valor de  $\rho_S$ :

$$-\frac{3mn}{(m+2)(n+2)} \min\left\{\frac{1}{mn}, 1\right\} \leq \rho_S \leq \frac{3mn}{(m+2)(n+2)} \min\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right\}.$$

La tau de Kendall es

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dC(u, v) - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 \lambda(u - u^{m+1})(v - v^{n+1})(1 + \lambda(1 - (m+1)u^m)(1 - (n+1)v^n)) dudv - 1 \\ &= \lambda \frac{mn}{(m+2)(n+2)} - 1 = \frac{\rho_S}{3} - 1. \end{aligned}$$

El coeficiente de Gini es

$$\begin{aligned}
\gamma_C &= 4 \int_0^1 [C(u, u) + C(u, 1 - u)] du - 2 \\
&= 4 \int_0^1 \{u + \lambda[u - u^{n+2} - u^{m-1} + u^{m+n+2} + (u^{m+1} - u)(1 - u)^{n+1}]\} du - 2 \\
&= 4\lambda \int_0^1 [u - u^{n+2} - u^{m-1} + u^{m+n+2} + (u^{m+1} - u)(1 - u)^{n+1}] du \\
&= 4\lambda \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+n+3} + B(m+2, n+2) - B(2, n+2) \right] \\
&= 2\lambda \left[ \frac{m(n+1)(m+n+5)}{(m+2)(n+3)(m+n+3)} + B(m+2, n+2) - B(2, n+2) \right].
\end{aligned}$$

La medida de Blomqvist es

$$\begin{aligned}
B_C &= 4C(1/2, 1/2) - 1 \\
&= 4 \left[ \frac{1}{4} + \lambda \left( \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \right) \left( \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) \right] - 1 \\
&= \lambda \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \right) \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right).
\end{aligned}$$

□

## 6.2. Sub-familia FGM

De acuerdo con la forma de las funciones de  $A(u)$  y  $B(v)$  en la cópula (6.2) es posible obtener algunas sub-familias de cópulas FGM asimétricas, en particular si tomamos  $A(u) = u^{r-1}(1 - u^m)^p$  y  $B(v) = v^{s-1}(1 - v^n)^q$ , para todo  $r, s, m, n, p, q \geq 1$ , de modo que tendríamos una función de la forma

$$C(u, v) = uv[1 + \gamma u^{r-1}(1 - u^m)^p v^{s-1}(1 - v^n)^q]; \quad r, s, m, n, p, q \geq 1. \quad (6.31)$$

En el siguiente teorema se presentan los posibles valores que debe tomar  $\gamma$  para garantizar que la función (6.31) es una cópula.

**Teorema 6.5.** *La función  $C$  definida por (6.31) es una cópula si*

$$\gamma \in \left[-\min\left\{\frac{1}{pmqn}, \frac{1}{rs}\right\}, \min\left\{\frac{1}{pms}, \frac{1}{qnr}\right\}\right].$$

*Demostración.* Al derivar la función (6.31) se obtiene la función  $c$

$$\begin{aligned} c(u, v) &= 1 + \gamma[u^{r-1}(1-u^m)^{p-1}(r - (r+pm)u^m)] \\ &\quad \times [v^{s-1}(1-v^n)^{q-1}(s - (s+qn)v^n)]. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Para todo  $u, v \in [0, 1]$ , las siguientes desigualdades se verifican fácilmente

$$\begin{aligned} 0 &\leq u^{r-1} \leq 1, \quad r \geq 1, \\ 0 &\leq v^{s-1} \leq 1, \quad s \geq 1, \\ 0 &\leq (1-u^m)^{p-1} \leq 1, \quad m, p \geq 1, \\ 0 &\leq (1-v^n)^{q-1} \leq 1, \quad n, q \geq 1, \\ -pm &\leq r - (r+pm)u^m \leq r, \quad m, p, r \geq 1, \\ -qn &\leq s - (s+qn)v^n \leq s, \quad n, q, s \geq 1. \end{aligned}$$

Los siguientes productos están acotados

$$\begin{aligned} -pm &\leq u^{r-1}(1-u^m)^{p-1}(r - (r+pm)u^m) \leq r, \\ -qn &\leq v^{s-1}(1-v^n)^{q-1}(s - (s+qn)v^n) \leq s. \end{aligned}$$

El producto de estas últimas desigualdades está acotado como sigue

$$\begin{aligned} -\max\{pms, qnr\} &\leq [u^{r-1}(1-u^m)^{p-1}(r - (r+pm)u^m)] \\ &\quad \times [v^{s-1}(1-v^n)^{q-1}(s - (s+qn)v^n)] \\ &\leq \max\{pmqn, rs\}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Para que  $C(u, v)$  sea una función monótona creciente, es necesario que  $c(u, v) \geq 0$ .

Tomando (6.32) se tiene

$$\gamma[u^{r-1}(1-u^m)^{p-1}(r-(r+pm)u^m)][v^{s-1}(1-v^n)^{q-1}(s-(s+qn)v^n)] \geq 1. \quad (6.34)$$

Al reemplazar (6.33) en (6.34) se tiene la desigualdad

$$\frac{-1}{\text{máx}\{pmqn, rs\}} \leq \gamma \leq \frac{1}{\text{máx}\{pms, qnr\}}.$$

Equivalente a

$$-\text{mín}\left\{\frac{1}{pmqn}, \frac{1}{rs}\right\} \leq \gamma \leq \text{mín}\left\{\frac{1}{pms}, \frac{1}{qnr}\right\}. \quad (6.35)$$

□

### 6.3. Propiedades de la sub-familia FGM

Consideremos la cópula (6.31) cuya función de densidad  $c$  es descrita por la ecuación (6.32). Esta densidad es útil para obtener los siguientes resultados.

**Teorema 6.6.** *Sean  $U, V$  variables aleatorias uniformes, con cópula  $C$  definida por (6.31), entonces*

$$\begin{aligned} E[U^i V^j] &= \frac{1}{(i+1)(j+1)} + \frac{\gamma}{mn} \left[ r - \frac{(r+pm)(i+r)}{i+r+pm} \right] \left[ s - \frac{(s+qn)(j+s)}{j+s+qn} \right] \\ &\quad \times B\left(\frac{i+r}{m}, p\right) B\left(\frac{j+s}{n}, q\right); \quad m, n, p, q \geq 1, \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\text{Cov}(U, V) = \frac{\gamma}{mn} B\left(\frac{r+1}{m}, p+1\right) B\left(\frac{s+1}{n}, q+1\right). \quad (6.37)$$

donde  $B(x, y)$  es la función beta.

*Demostración.* El valor esperado es

$$\begin{aligned}
E[U^i V^j] &= \int_0^1 \int_0^1 u^i v^j c(u, v) du dv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 u^i v^j du dv + \gamma \int_0^1 u^{i+r-1} [(1-u^m)^{p-1} (r - (r+pm)u^m)] du \\
&\quad \times \int_0^1 v^{j+s-1} [(1-v^n)^{q-1} (s - (s+qn)v^n)] dv \\
&= \int_0^1 u^i du \int_0^1 v^j dv \\
&\quad + \gamma [r \int_0^1 u^{i+r-1} (1-u^m)^{p-1} du - (r+pm) \int_0^1 u^{i+r+m-1} (1-u^m)^{p-1} du] \\
&\quad \times [s \int_0^1 v^{j+s-1} (1-v^n)^{q-1} dv - (s+qn) \int_0^1 v^{j+s+n-1} (1-v^n)^{q-1} dv] \\
&= \frac{1}{(i+1)(j+1)} \\
&\quad + \frac{\gamma}{mn} [r \int_0^1 u^{\frac{i+r}{m}-1} (1-u)^{p-1} du - (r+pm) \int_0^1 u^{\frac{i+r}{m}} (1-u)^{p-1} du] \\
&\quad \times [s \int_0^1 v^{\frac{j+s}{n}-1} (1-v)^{q-1} dv - (s+qn) \int_0^1 v^{\frac{j+s}{n}} (1-v)^{q-1} dv] \\
&= \frac{1}{(i+1)(j+1)} + \frac{\gamma}{mn} [r B(\frac{i+r}{m}, p) - \frac{(r+pm)(i+r)}{i+r+pm} B(\frac{i+r}{m}, p)] \\
&\quad \times [s B(\frac{j+s}{n}, q) - \frac{(s+qn)(j+s)}{j+s+qn} B(\frac{j+s}{n}, q)] \\
&= \frac{1}{(i+1)(j+1)} + \frac{\gamma}{mn} (r - \frac{(r+pm)(i+r)}{i+r+pm}) (s - \frac{(s+qn)(j+s)}{j+s+qn}) \\
&\quad \times B(\frac{i+r}{m}, p) B(\frac{j+s}{n}, q).
\end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de Hoeffding

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(U, V) &= \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv \\
&= \gamma \int_0^1 u^r (1 - u^m)^p v^s (1 - v^n)^q dudv \\
&= \frac{\gamma}{mn} \int_0^1 u^{\frac{r+1}{m}-1} (1 - u)^p du \int_0^1 v^{\frac{s+1}{n}-1} (1 - v)^q dv \\
&= \frac{\gamma}{mn} B\left(\frac{r+1}{m}, p+1\right) B\left(\frac{s+1}{n}, q+1\right).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 6.7.** *Sea  $(U, V)$  un par aleatorio, con cópula  $C$  definida por (6.31). Entonces la rho de Spearman es*

$$\rho_S = 12 \frac{\gamma}{mn} B\left(\frac{r+1}{m}, p+1\right) B\left(\frac{s+1}{n}, q+1\right). \quad (6.38)$$

La tau de Kendall es

$$\tau = \frac{\rho_S}{3} - 1. \quad (6.39)$$

El coeficiente de Gini es

$$\gamma_C = 4\gamma \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^p (-1)^{i+j} \left[ \frac{1}{ni + mj + r + s + 1} + B(mj + r + 1, ni + s + 1) \right]. \quad (6.40)$$

La medida de Blomqvist es

$$B_C = \gamma \left(\frac{1}{2}\right)^{r+s-2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right)^p \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^q. \quad (6.41)$$

*Demostración.* Por definición la rho de Spearman es

$$\begin{aligned}\rho_S &= 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv \\ &= 12 \text{Cov}(u, v) \\ &= 12 \frac{\gamma}{mn} B\left(\frac{r+1}{m}, p+1\right) B\left(\frac{s+1}{n}, q+1\right).\end{aligned}$$

De acuerdo con (6.35) y (6.38), un intervalo de confianza para  $\rho_S$  será:

$$\begin{aligned}-\frac{12}{mn} B\left(\frac{r+1}{m}, p+1\right) B\left(\frac{s+1}{n}, q+1\right) \min\left\{\frac{1}{pmqn}, \frac{1}{rs}\right\} &\leq \gamma \\ &\leq \frac{12}{mn} B\left(\frac{2}{m}, p+1\right) B\left(\frac{2}{n}, q+1\right) \min\left\{\frac{1}{pms}, \frac{1}{qnr}\right\}.\end{aligned}\quad (6.42)$$

La tau de Kendall es

$$\begin{aligned}\tau &= 4 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dC(u, v) - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 (\gamma u^r (1 - u^m)^p v^s (1 - v^n)^q) dC(u, v) - 1 \\ &= 4\gamma \int_0^1 u^r (1 - u^m)^p du \int_0^1 v^s (1 - v^n)^q dv - 1 \\ &+ 4\gamma^2 \int_0^1 [ru^{2r-1} (1 - u^m)^{2p-1} - (r + pm)u^{2r+m-1} (1 - u^m)^{2p-1}] du \\ &\times \int_0^1 [sv^{2s-1} (1 - v^n)^{2q-1} - (s + qn)v^{2s+n-1} (1 - v^n)^{2q-1}] dv - 1 \\ &= 4 \frac{\gamma}{mn} B\left(\frac{r+1}{m}, p+1\right) B\left(\frac{s+1}{n}, q+1\right) \\ &+ 4 \frac{\gamma^2}{mn} [rB\left(\frac{2r}{m}, 2p\right) - (r + pm)B\left(\frac{2r}{m} + 1, 2p\right)] \\ &\times [sB\left(\frac{2s}{n}, 2q\right) - (s + qn)B\left(\frac{2s}{n} + 1, 2q\right)] - 1.\end{aligned}$$

Como  $B\left(\frac{2r}{m} + 1, 2p\right) = \frac{r}{r+pm} B\left(\frac{2}{m}, 2p\right)$  y  $B\left(\frac{2s}{n} + 1, 2q\right) = \frac{s}{s+qn} B\left(\frac{2}{n}, 2q\right)$ , se tiene

$$\tau = 4 \frac{\gamma}{mn} B\left(\frac{r+1}{m}, p+1\right) B\left(\frac{s+1}{n}, q+1\right) - 1.$$

El coeficiente de Gini es

$$\begin{aligned}
\gamma_C &= 4 \int_0^1 [C(u, u) + C(u, 1 - u)] du - 2 \\
&= 4\gamma \int_0^1 u^{r+s} (1 - u^m)^p (1 - u^n)^q du \\
&+ 4\gamma \int_0^1 u^r (1 - u)^s (1 - u^m)^p (1 - (1 - u)^n)^q du \\
&= 4\gamma \int_0^1 \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^p \binom{q}{i} \binom{p}{j} (-1)^{i+j} u^{ni+mj+r+s} du \\
&+ 4\gamma \int_0^1 \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^p \binom{q}{i} \binom{p}{j} (-1)^{i+j} u^{mj+r} (1 - u)^{ni+s} du, \\
&= 4\gamma \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^p \binom{q}{i} \binom{p}{j} (-1)^{i+j} \int_0^1 (u^{ni+mj+r+s} + u^{mj+r} (1 - u)^{ni+s}) du \\
&= 4\gamma \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^p (-1)^{i+j} \left[ \frac{1}{ni + mj + r + s + 1} + B(mj + r + 1, ni + s + 1) \right].
\end{aligned}$$

La medida de Blomqvist es

$$\begin{aligned}
B_C &= 4C(1/2, 1/2) - 1 \\
&= 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[ 1 + \gamma \left(\frac{1}{2}\right)^{r+s-2} \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \right)^p \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)^q \right] - 1 \\
&= \gamma \left(\frac{1}{2}\right)^{r+s-2} \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \right)^p \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)^q.
\end{aligned}$$

□



# Capítulo 7

## Extensión de la FGM a dos dimensiones

Si se conocen las funciones canónicas de una distribución  $H_a$ , es posible aproximarla a otra distribución  $H_t$ , mediante combinaciones lineales de las funciones canónicas. En particular, en este capítulo, estamos interesados en aproximar la distribución FGM extendida en dos dimensiones en el sentido geométrico (véase la sección 4.3) a algunas distribuciones conocidas como son la AMH, la Clayton Oakles y la Gumbel-Barnett. En el capítulo 4, probamos que estas distribuciones son de dimensión numerable ( $\aleph_0$ ), aunque tomando sólo dos dimensiones, la proporción de dependencia es  $P_2 \simeq 0,99$ .

En la sección 7.1, definiremos la función FGM a dos dimensiones, en la sección 7.2, se obtendrá la aproximación de una distribución bivalente a otra de dimensión finita y en la sección 7.3, como ejemplo, aproximaremos la distribución FGM de dos dimensiones a las distribuciones AMH, Clayton Oakles y Gumbel-Barnett. Para evaluar la aproximación, utilizaremos dos medidas de ajuste basadas en distancia.

## 7.1. La FGM a dos dimensiones

La función de distribución FGM descrita por la ecuación (6.5) se puede extender al caso de dos dimensiones en el sentido geométrico definido en la sección 4.3.

$$H(x, y) = F(x)G(y) + \lambda_1[F(x) - \Phi(x)][G(y) - \Psi(y)] + \lambda_2[\frac{1}{2}F^2(x) + (F_\Phi - \frac{1}{2})F(x) - F_\Phi(x)][\frac{1}{2}G^2(y) + (G_\Psi - \frac{1}{2})G(y) - G_\Psi(y)], \quad (7.1)$$

donde  $F_\Phi(x) = \int_a^x \Phi(t)dF(t)$ ,  $G_\Psi(y) = \int_c^y \Psi(t)dG(t)$ ,  $F_\Phi = F_\Phi(b)$ ,  $G_\Psi = G_\Psi(b)$ .

La función de densidad (respecto a la medida de Lebesgue) es

$$h = fg + \lambda_1 f(1 - \varphi f^{-1})g(1 - \psi g^{-1}) + \lambda_2 f(F - \Phi - \gamma)g(G - \Psi - \delta), \quad (7.2)$$

donde  $\gamma = \int_a^b (F - \Phi)dF = 1/2 - F_\Phi$ ,  $\delta = \int_c^d (G - \Psi)dG = 1/2 - G_\Psi$ .

En particular, la ecuación (7.1) se reduce a la FGM si se toma  $\Phi = F^2$ ,  $\Psi = G^2$  y  $\lambda_2 = 0$ .

**Proposición 7.1.** Sean las funciones  $a_1 = 1 - \frac{d\Phi}{dF}$ ,  $b_1 = 1 - \frac{d\Psi}{dG}$ ,  $a_2 = F - \Phi - \gamma$  y  $b_2 = G - \Psi - \delta$ . Entonces

$$E(a_1) = 0, \quad \text{Var}(a_1) = \alpha - 1, \quad (7.3)$$

$$E(a_2) = 0, \quad \text{Var}(a_2) = 1/3 + F_{\Phi^2} - \gamma^2 - 2 \int_a^b F\Phi dF, \quad (7.4)$$

$$E(b_1) = 0, \quad \text{Var}(b_1) = \beta - 1, \quad (7.5)$$

$$E(b_2) = 0, \quad \text{Var}(b_2) = 1/3 + G_{\Psi^2} - \delta^2 - 2 \int_c^d G\Psi dG, \quad (7.6)$$

donde  $\alpha = \int_a^b \left(\frac{d\Phi}{dF}\right)^2 dF$  y  $\beta = \int_c^d \left(\frac{d\Psi}{dG}\right)^2 dG$ .

*Demostración.* Por definición del valor esperado

$$\begin{aligned} E(a_1) &= \int_a^b \left(1 - \frac{d\Phi}{dF}\right) dF \\ &= \int_a^b dF - \int_a^b d\Phi = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 E(a_2) &= \int_a^b (F - \Phi - \gamma) dF \\
 &= \int_a^b (F - \Phi) dF - \gamma \int_a^b dF \\
 &= \gamma - \gamma = 0.
 \end{aligned}$$

La varianza es

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(a_1) &= \int_a^b a_1^2 dF \\
 &= \int_a^b \left[ 1 - 2 \frac{d\Phi}{dF} + \left( \frac{d\Phi}{dF} \right)^2 \right] dF \\
 &= 1 - 2 + \int_a^b \left( \frac{d\Phi}{dF} \right)^2 dF = \alpha - 1.
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(a_2) &= \int_a^b a_2^2 dF \\
 &= \int_a^b (F - \Phi)^2 dF - 2\gamma \int_a^b (F - \Phi) dF + \gamma^2 \int_a^b dF \\
 &= \int_a^b (F^2 + \Phi^2 - 2F\Phi) dF - \gamma^2 \\
 &= 1/3 + F_{\Phi^2} - \gamma^2 - 2 \int_a^b F\Phi dF.
 \end{aligned}$$

De forma similar se prueba

$$\begin{aligned}
 E(b_1) &= 0, \text{Var}(b_1) = \beta - 1, \\
 E(b_2) &= 0, \text{Var}(b_2) = 1/3 + G_{\Psi^2} - \delta^2 - 2 \int_c^d G\Psi dG.
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 7.2.** *Las covarianzas son*

$$\text{Cov}(a_1, b_1) = \lambda_1(\alpha - 1)(\beta - 1), \quad (7.7)$$

$$\text{Cov}(a_1, b_2) = 0, \quad (7.8)$$

$$\text{Cov}(a_2, b_1) = 0, \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(a_2, b_2) = & \lambda_2[1/3 + F_{\Phi^2} - \gamma^2 - 2 \int_a^b F\Phi dF] \\ & \times [1/3 + G_{\Psi^2} - \delta^2 - 2 \int_c^d G\Psi dG]. \end{aligned} \quad (7.10)$$

*Demostración.* Por definición

$$\text{Cov}(a_1, b_1) = \int_a^b \int_c^d a_1 b_1 (dH - dF dG).$$

Al Escribir (7.1) como

$$dH = dF dG + \lambda_1 a_1 dF b_1 dG + \lambda_2 a_2 dF b_2 dG. \quad (7.11)$$

Luego

$$\text{Cov}(a_1, b_1) = \lambda_1 \int_a^b a_1^2 dF \int_c^d b_1^2 dG + \lambda_2 \int_a^b a_1 a_2 dF \int_c^d b_1 b_2 dG.$$

Dado que

$$\begin{aligned} E(a_1 a_2) &= \int_a^b a_1 a_2 dF \\ &= \int_a^b (F - \Phi) d(F - \Phi) - \gamma \int_a^b d(F - \Phi) \\ &= \frac{1}{2} (F - \Phi)|_a^b - \gamma (F - \Phi)|_a^b = 0, \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} E(b_1 b_2) &= \int_c^d b_1 b_2 dG \\ &= \int_c^d (G - \Psi) d(G - \Psi) - \delta \int_c^d d(G - \Psi) \\ &= \frac{1}{2} (G - \Psi)|_c^d - \delta (G - \Psi)|_c^d = 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

y

$$\int_a^b a_1^2 dF = \text{Var}(a_1) = \alpha - 1, \quad (7.14)$$

$$\int_c^d b_1^2 dG = \text{Var}(b_1) = \beta - 1. \quad (7.15)$$

Luego

$$\text{Cov}(a_1, b_1) = \lambda_1(\alpha - 1)(\beta - 1).$$

De nuevo de la definición

$$\text{Cov}(a_1, b_2) = \int_a^b \int_c^d a_1 b_2 (dH - dF dG).$$

De (7.11)

$$\text{Cov}(a_1, b_2) = \lambda_1 \int_a^b a_1^2 dF \int_c^d b_1 b_2 dG + \lambda_2 \int_a^b a_1 a_2 dF \int_c^d b_2^2 dG.$$

Al considerar (7.12) y (7.13), se tiene  $\text{Cov}(a_1, b_2) = 0$ , de igual forma se prueba que  $\text{Cov}(a_2, b_1) = 0$

Por último

$$\text{Cov}(a_2, b_2) = \lambda_1 \int_a^b a_1 a_2 dF \int_c^d b_1 b_2 dG + \lambda_2 \int_a^b a_2^2 dF \int_c^d b_2^2 dG.$$

De (7.12) y (7.13)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(a_2, b_2) &= \lambda_2 \int_a^b a_2^2 dF \int_c^d b_2^2 dG = \lambda_2 \text{Var}(a_2) \text{Var}(b_2) \\ &= \lambda_2 [1/3 + F_{\Phi^2} - \gamma^2 - 2 \int_a^b F \Phi dF] \\ &\quad \times [1/3 + G_{\Psi^2} - \delta^2 - 2 \int_c^d G \Psi dG]. \end{aligned}$$

□

**Proposición 7.3.** *Sea  $H$  definida por (7.1). El coeficiente de asociación de Pearson  $\phi^2$  es*

$$\begin{aligned} \phi^2 = & \lambda_1^2(\alpha - 1)(\beta - 1) + \lambda_2^2[1/3 + F_{\Phi^2} - \gamma^2 - 2 \int_a^b F\Phi dF] \\ & \times [1/3 + G_{\Psi^2} - \delta^2 - 2 \int_c^d G\Psi dG]. \end{aligned} \quad (7.16)$$

*Demostración.* El coeficiente de asociación de Pearson  $\phi^2$  se define como

$$\phi^2 = \int_a^b \int_c^d \left( \frac{dH}{dFdG} - 1 \right)^2 dFdG.$$

Al aplicar a la distribución (7.1) se tiene

$$\begin{aligned} \phi^2 = & \int_a^b \int_c^d (\lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2)^2 dFdG \\ = & \lambda_1^2 \int_a^b a_1^2 dF \int_c^d b_1^2 dG + \lambda_2^2 \int_a^b a_2^2 dF \int_c^d b_2^2 dG \\ & + 2\lambda_1 \lambda_2 \int_a^b a_1 a_2 dF \int_c^d b_1 b_2 dG. \end{aligned}$$

De (7.12), (7.13), (7.14) y (7.15) se obtiene

$$\begin{aligned} \phi^2 = & \lambda_1^2(\alpha - 1)(\beta - 1) + \lambda_2^2[1/3 + F_{\Phi^2} - \gamma^2 - 2 \int_a^b F\Phi dF] \\ & \times [1/3 + G_{\Psi^2} - \delta^2 - 2 \int_c^d G\Psi dG]. \end{aligned}$$

□

**Proposición 7.4.** *Sea  $H$  dada por la ecuación (7.1). Entonces las dos primeras correlaciones canónicas son:*

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \lambda_1 \sqrt{(\alpha - 1)(\beta - 1)}, \\ \rho_2 &= \lambda_2 \sqrt{[1/3 + F_{\Phi^2} - \gamma^2 - 2 \int_a^b F\Phi dF][1/3 + G_{\Psi^2} - \delta^2 - 2 \int_c^d G\Psi dG]}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Consideremos la función de distribución  $H$  definida por la ecuación (7.1).

Dado que (7.16) existe, entonces existe la expansión diagonal de la forma (véase Lancaster, 1958)

$$dH = dFdG + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n A_n dF B_n dG, \quad (7.17)$$

donde  $A_n, B_n$  son funciones unitarias en  $L^2([a, b])$  y  $L^2([c, d])$  para  $F$  y  $G$  respectivamente, en el sentido de que  $E(A_n(X)) = E(B_n(Y)) = 0$  y  $E(A_n^2(X)) = E(B_n^2(Y)) = 1$ . las funciones  $A_n(X)$  y  $B_n(Y)$  son las variables canónicas.

Si tomamos

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a_1}{\sqrt{\alpha - 1}}, B_1 = \frac{b_1}{\sqrt{\beta - 1}}, \\ A_2 &= \frac{a_2}{\sqrt{1/3 + F_{\Phi^2} - \gamma^2 - 2 \int_a^b F \Phi dF}}, \\ B_2 &= \frac{b_2}{\sqrt{1/3 + G_{\Psi^2} - \delta^2 - 2 \int_c^d G \Psi dG}}. \end{aligned}$$

Con las proposiciones 7.1 y 7.2, se puede probar fácilmente que las variables  $A_1, A_2, B_1, B_2$  son canónicas, esto es

$$\begin{aligned} E[A_1] &= E[B_1] = E[A_2] = E[B_2] = 0, \\ \text{Var}(A_1) &= \text{Var}(A_2) = \text{Var}(B_1) = \text{Var}(B_2) = 1, \\ \text{Cov}(A_1, B_1) &= \text{Cov}(A_2, B_1) = \text{Cov}(A_2, B_2) = 0. \end{aligned}$$

La expansión (7.17), se puede expresar como

$$dH = dFdG + \rho_1 A_1 dF B_1 dG + \rho_2 A_2 dF B_2 dG + \sum_{n=3}^{\infty} \rho_n A_n dF B_n dG. \quad (7.18)$$

Al comparar las ecuaciones (7.1) con (7.18) se tiene

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \lambda_1 \sqrt{(\alpha - 1)(\beta - 1)}, \\ \rho_2 &= \lambda_2 \sqrt{[1/3 + F_{\Phi^2} - \gamma^2 - 2 \int_a^b F \Phi dF][1/3 + G_{\Psi^2} - \delta^2 - 2 \int_c^d G \Psi dG]}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

□

La función de distribución  $H$  definida por la ecuación (6.5) es un caso particular de la ecuación (7.1), basta con tomar  $\lambda_2 = 0$ .

Sean  $Q = \Phi \circ F^{-1}$  y  $R = \Psi \circ G^{-1}$  dos funciones de distribución definidas en  $[0, 1]$ .

Dado que  $F_\Phi = \int_a^b \Phi dF = \int_0^1 Q(t)dt = 1 - \mu_Q$ , donde  $\mu_Q$  es la media de la variable con distribución  $Q$ , y similarmente  $\mu_R$ . La correspondiente función cópula de (7.1) es

$$C(u, v) = uv + \lambda_1[u - Q(u)][v - R(v)] + \lambda_2\left[\frac{1}{2}u^2 + \left(\frac{1}{2} - \mu_Q\right)u - \int_0^u Q(t)dt\right]\left[\frac{1}{2}v^2 + \left(\frac{1}{2} - \mu_R\right)v - \int_0^v R(t)dt\right]. \quad (7.20)$$

Para  $\Phi = F^{m+1}$ ;  $m \geq 1$ ,  $\Psi = G^{n+1}$ ;  $n \geq 1$ , la familia (7.1) tiene la cópula

$$C(u, v) = uv + \lambda_1 u(1 - u^m)v(1 - v^n) + \lambda_2 \left[ \frac{u^2}{2} - \frac{mu}{2(m+2)} - \frac{u^{m+2}}{m+2} \right] \left[ \frac{v^2}{2} - \frac{nv}{2(n+2)} - \frac{v^{n+2}}{n+2} \right], \quad m, n \geq 1. \quad (7.21)$$

**Proposición 7.5.** *Sea  $C$  la cópula definida por (7.21), El coeficiente de correlación de Spearman es*

$$\rho_S = \frac{mn}{(m+2)(n+2)} \left[ 3\lambda_1 + \frac{\lambda_2(m-1)(n-1)}{12(m+3)(n+3)} \right], \quad m, n \geq 1.$$

La tau de Kendall es

$$\tau_C = \frac{mn}{18(m+2)(n+2)} \left[ 36\lambda_1 + \lambda_2 \frac{(m-1)(n-1)}{(m+3)(n+3)} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{mn(2m^2 + 5m + 5)(2n^2 + 5n + 5)}{(m+2)(m+3)(2m+3)(n+2)(n+3)(2n+3)} \right], \quad m, n \geq 1. \quad (7.22)$$

En particular, para  $\Phi = F^2$ ,  $\Psi = G^2$ , la cópula (7.21) es

$$C(u, v) = uv \left[ 1 + (1 - u)(1 - v) (\lambda_1 + \bar{\lambda}_2(1 - 2u)(1 - 2v)) \right], \quad (7.23)$$

donde  $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2/36$ ,

La rho de Spearman es  $\rho_S = \lambda_1/3$  y la tau de Kendall  $2\lambda_1(9\bar{\lambda}_2 + 225)/2025$

Nelsen *et al.* (1997) y Nelsen (2006) han estudiado la cópula (7.23) como un miembro de la familia de cópulas simétricas con secciones cúbicas en ambas variables  $U$  y  $V$ . Consideran  $\bar{\lambda}_2 \in [-1, 2]$ ,  $|\lambda_1| \leq \bar{\lambda}_2 + 1$  para  $\bar{\lambda}_2 \in [-1, 1/2]$  y  $|\lambda_1| \leq \sqrt{(6\bar{\lambda}_2 - 3\bar{\lambda}_2^2)}$  para  $\bar{\lambda}_2 \in [1/2, 2]$ , que garantiza que (7.23) es una cópula, también proporcionan la rho de Spearman y la tau de Kendall, además de ciertas propiedades de dependence y demuestran que la cópula (7.23) es una aproximación de Maclaurin de segundo orden a la familia de cópulas de Frank y Plackett.

## 7.2. Aproximación de una distribución bivalente a otra de dimensión finita

Supongamos que  $H_t$  es la verdadera función de distribución de dos variables aleatorias  $(X, Y)$ . Consideremos una distribución  $H_a$  y supongamos que la expansión diagonal  $dH_a = dFdG + \sum_{n \geq 1} \rho_n A_n dF B_n dG$  existe, donde  $A_n, B_n$  son funciones canónicas unitarias. Estamos interesados en aproximar  $H_t$  por medio de una combinación lineal finita de funciones canónicas obtenidas de  $H_a$ :

$$dH_t \simeq dFdG + \sum_{i=1}^k \lambda_i A_i dF B_i dG.$$

De una manera más precisa, se busca la aproximación

$$\frac{dH_t}{dFdG} \simeq 1 + \sum_{i=1}^k \lambda_i A_i B_i,$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  son los coeficientes reales tales que minimizan

$$\int_a^b \int_c^d \left( \frac{dH_t}{dFdG} - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_i B_i \right)^2 dFdG. \quad (7.24)$$

Si las densidades  $h_t, f, g$  existen (medida de Lebesgue), entonces  $h_t$  es aproximada por  $\widehat{h}_t$  donde

$$\widehat{h}_t = fg(1 + \sum_{i=1}^k \lambda_i A_i B_i).$$

El resultado de minimizar la ecuación (7.24), se presenta en el siguiente teorema.

**Teorema 7.1.** *Supongamos  $(X, Y) \sim H_t \in \mathcal{F}(F, G)$ . Al minimizar (7.24) los coeficientes son  $\lambda_i = \rho_i$ , donde*

$$\rho_i = \text{corr}(A_i(X), B_i(Y)), \quad i = 1, \dots, k.$$

*Demostración.* Sea  $z = (dH_t - dFdG)/dFdG$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d (z - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_i B_i)^2 dFdG &= \phi_t^2 + \int_a^b \int_c^d \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 A_i^2 B_i^2 dFdG \\ &\quad - 2 \int_a^b \int_c^d (\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i B_i) (dH_t - dFdG) \\ &\quad + \sum_{i \neq j=1}^k \lambda_i \lambda_j \int_a^b A_i dF \int_c^d B_j dG \\ &= \phi_t^2 + \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 - 2 \sum_{i=1}^k \lambda_i \rho_i, \end{aligned}$$

donde  $\phi_t^2$  es el coeficiente de asociación de Pearson. Al derivar con respecto a  $\lambda_i$  e igualar a cero, se obtiene  $\lambda_i = \rho_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .  $\square$

Cada  $\rho_i$  es la correlación entre las variables canónicas  $A_i, B_i$  obtenidas de  $H_a$ , pero la correlación es tomada con respecto a la “verdadera” función de distribución  $H_t$ . Es decir, los datos observados son utilizados para obtener  $\rho_i$  provienen de  $(X, Y) \sim H_t$ . Este resultado es útil cuando se conocen las funciones canónicas de  $H_a$ , como ocurre en la FGM generalizada (7.23).

## 7.3. Ejemplos

### 7.3.1. Cópula Ali-Mikhail-Haq (AMH)

Primero estudiamos la aproximación de la cópula Ali-Mikhail-Haq (AMH)

$$C_t = \frac{uv}{[1 - \theta(1-u)(1-v)]}, \quad -1 \leq \theta \leq 1,$$

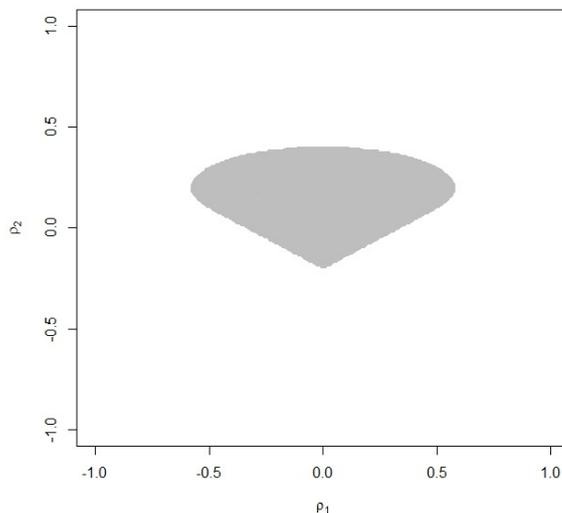


Figura 7.1: Región de las correlaciones (parámetros) para el cual  $c$  es una densidad.

a la cópula (7.23). La densidad para esta cópula FGM generalizada es

$$c = 1 + \frac{\lambda_1}{3} \sqrt{3}(1-2u)\sqrt{3}(1-2v) + \frac{\lambda_2}{180} \sqrt{5}(6u^2-6u+1)\sqrt{5}(6v^2-6v+1).$$

Las funciones canónicas son  $A_1 = \sqrt{3}(1-2u)$ ,  $A_2 = \sqrt{5}(6u^2-6u+1)$  y similarmente  $B_1, B_2$ . Para asegurar que  $c$  es una densidad, las correlaciones canónicas deben pertenecer a la región  $\mathcal{R} = \{(\rho_1, \rho_2) | c \geq 0\}$ , véase la Figure 7.1.

Podemos calcular las correlaciones  $\rho_1 = \text{corr}(U, V)$ ,  $\rho_2 = \text{corr}(U^2 - U, V^2 - V)$ , donde  $(U, V) \sim C$ .

Utilizando la siguiente fórmula (Cuadras, 2002b)

$$\text{Cov}(\nu(U), \xi(V)) = \int_{I^2} (C(u, v) - uv) d\nu(u) d\xi(v),$$

que proporciona la covarianza entre dos funciones de  $U$  y  $V$ . De manera que

$$\rho_1 = 12 \int_{I^2} C(u, v) dudv - 3, \quad (7.25)$$

$$\rho_2 = 180 \int_{I^2} C(u, v)(4uv - 2u - 2v + 1)dudv - 5. \quad (7.26)$$

Obsérvese que  $\rho_1$  es el coeficiente de correlación de Spearman.

Expandiendo la cópula AMH  $C_t$ , que desempeña el papel de la “verdadera” cópula,

$$\frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)} = uv \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \theta^i (1 - u)^i (1 - v)^i \right],$$

obtenemos

$$\rho_1 = 12 \sum_{i=1}^{\infty} \theta^i B(2, i + 1)^2,$$

y

$$\rho_2 = 180 \sum_{i=1}^{\infty} \theta^i [4B(3, i + 1)^2 - 4B(2, i + 1)B(3, i + 1) + B(2, i + 1)^2],$$

donde  $B(\cdot, \cdot)$  es la función beta. Todos los pares  $(\rho_1, \rho_2)$  pertenecen a  $\mathcal{R}$  y la cópula AMH se puede aproximar por

$$C_2 = uv \{ 1 + (1 - u)(1 - v)[3\rho_1 + 5\rho_2(1 - 2u)(1 - 2v)] \}. \quad (7.27)$$

La tau de Kendall (2.13) para  $C_2$  es

$$\tau(C_2) = \frac{2}{3}\rho_1 + \frac{2}{15}\rho_1\rho_2. \quad (7.28)$$

Dos medidas de ajuste de  $C_t$  a  $C_2$  son

$$\eta_1 = \max_{u, v \in I} |C_t(u, v) - C_2(u, v)|, \quad (7.29)$$

$$\eta_2 = D(C_t, C_2)/D(M, W), \quad (7.30)$$

donde  $M = \min\{u, v\}$  y  $W = \max\{u + v - 1, 0\}$  son las cotas superior e inferior de

Tabla 7.1: Correlaciones canónicas y ajustes para la cópula AMH.

$\theta$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\rho_S(AMH)$	$\tau(AMH)$	$\tau(C_2)$
-1	-0.2711	0.0217	0.0055	0.0002	-0.2710	-0.1817	-0.1815
-.5	-0.1489	0.0080	0.0017	0.0000	-0.1489	-0.0995	-0.0995
.5	0.1924	0.0223	0.0032	0.0001	0.1924	0.1288	0.1286
1	0.4783	0.2323	0.0261	0.0029	0.4784	0.3333	0.3335

Fréchet-Hoeffding y

$$D(C_t, C_2) = \int_{I^2} (C_t - C_2)^2 dudv.$$

Dado que

$$\begin{aligned} D(M, W) &= \int_{I^2} (\min\{u, v\} - \max\{u + v - 1, 0\})^2 dudv \\ &= \frac{1}{4} \int_{I^2} (1 - |u - v| - |u + v - 1|)^2 dudv = \frac{1}{24}, \end{aligned}$$

se cumple la desigualdad  $D(C_t, C_2) < D(M, W) = 1/24$ . Así  $0 < \eta_i < 1$ ,  $i = 1, 2$ .

La tau de Kendall y la rho de Spearman para la familia AMH pueden verse en Nelsen (2006). La tabla 7.1 contiene un ejemplo numérico, que muestra que el ajuste es bueno, preservando los valores de la tau de Kendall y la rho de Spearman. Nótese que  $\rho_1$  es  $\rho_S(C_2)$ .

### 7.3.2. Cópula Clayton-Oakes

Consideremos la cópula Clayton-Oakes definida por

$$C_t = [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta}, \quad -1 \leq \theta < \infty.$$

El cálculo de las correlaciones  $\rho_1$  y  $\rho_2$  se han obtenido numéricamente. Sin embargo, ahora los resultados pueden proporcionar aproximaciones FGM que no son cópulas, es decir, la densidad  $c(u, v)$  es negativa para algunos valores de  $u, v$ . Entonces tomamos  $(\rho_1^*, \rho_2^*) \in \mathcal{R}$  con la menor distancia euclídea para  $(\rho_1, \rho_2)$ . Así la cópula Clayton-Oakes se puede aproximar por

$$C_2 = uv \{1 + (1 - u)(1 - v)[3\rho_1^* + 5\rho_2^*(1 - 2u)(1 - 2v)]\}.$$

Tabla 7.2: Correlaciones Canónicas y ajustes para la cópula Clayton-Oakes.

$\theta$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_1^*$	$\rho_2^*$	$\eta_1$	$\eta_2$
-1	-1	1	-0.5085	0.2950	0.0625	0.0060
0.5	-0.4667	0.1997	-0.4665	0.1995	0.0263	0.0036
0.5	0.2950	0.1150	0.2950	0.1150	0.0162	0.0014
1	0.4784	0.2337	0.4785	0.2335	0.0261	0.0029
2	0.6822	0.4104	0.5495	0.2620	0.0349	0.0035
5	0.8846	0.6809	0.5190	0.2875	0.0385	0.0030
10	0.9582	0.8470	0.5190	0.2875	0.0387	0.0037

El ajuste es aceptablemente bueno para valores (positivos) intermedios del parámetro  $\theta$ , véase la tabla 7.2.

### 7.3.3. Cópula Gumbel-Barnett (GB)

Aproximación de la cópula Gumbel-Barnett

$$C_t = uv \exp\{-\theta \ln(u) \ln(v)\}, \quad 0 < \theta \leq 1,$$

a la cópula (7.23).

Los cálculos de las correlaciones  $\rho_1$  y  $\rho_2$  se han obtenido numéricamente utilizando las ecuaciones (7.25) y (7.26). La tau de Kendall para la Gumbel-Barnett se obtiene numéricamente con la ecuación (2.13) y para la FGM de dos dimensiones con la ecuación (7.28). Las medidas de ajuste  $\eta_1$  y  $\eta_2$  se calculan con las ecuaciones (7.29) y (7.30) respectivamente. Los resultados de estos cálculos son presentados en la tabla 7.3, en donde se muestra que el ajuste es bastante bueno, preservando bien el valor de la tau de Kendall.

Tabla 7.3: Correlaciones canónicas y ajustes para la cópula Gumbel-Barnett (GB)

$\theta$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\tau(GB)$	$\tau(C_2)$
0.1	-0.0715	-0.0059	0.0030	8.1E-05	-0.0477	-0.0476
0.2	-0.1369	0.0000	0.0052	2.3E-04	-0.0916	-0.0913
0.4	-0.2531	0.0315	0.0076	4.9E-04	-0.1704	-0.1698
0.6	-0.3542	0.0753	0.0084	5.5E-04	-0.2404	-0.2397
0.8	-0.4437	0.1229	0.0076	4.5E-04	-0.3035	-0.3030
1.0	-0.5239	0.1701	0.0057	2.8E-04	-0.3613	-0.3611

## Capítulo 8

# Aplicación de la teoría de cópulas al análisis financiero

El reciente interés en la modelización basada en cópulas se justifica por el potencial de esta herramienta para representar estructuras de dependencia entre variables, y para generar distribuciones conjuntas mediante la combinación de distribuciones marginales prefijadas. La simulación constituye un poderoso instrumento en finanzas para replicar escenarios de fronteras eficientes, valores extremos, en la valoración de activos o en la estimación de riesgos conjuntos. Mediante el uso de cópulas resulta asequible construir y simular datos generados por distribuciones multivariantes a partir de casi cualquier clase de distribuciones marginales y casi cualquier tipo de estructuras de dependencia.

En finanzas, el coeficiente de correlación de Pearson se ha utilizado para medir la dependencia, en modelos clásicos de asignación de cartera de valores como por ejemplo el modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), y el APT (Arbitrage Pricing Theory). Sin embargo esta medida no es apropiada bajo ciertos supuestos sobre la función de distribución multivariante de los retornos. Embrechts *et al.* (1999) demostraron que el coeficiente de Pearson solo es apropiado si la función de distribución es elíptica y Bouyé *et al.* (2000) si la distribución es normal multivariante.

A partir de las cópulas es posible construir otras medidas de dependencia, tales como los coeficientes de correlación de rango y el coeficiente de dependencia en las colas.

Entre las medidas de correlación de rango encontramos el coeficiente de correlación de Spearman ( $\rho_S$ ) y el coeficiente de correlación de Kendall ( $\tau$ ). La principal ventaja de los coeficientes basados en rangos, sobre la correlación de Pearson, es que son invariantes bajo transformaciones monótonas crecientes y que son capaces de identificar la dependencia perfecta entre las variables. En cambio el coeficiente de dependencia en las colas es útil para identificar los patrones de dependencia que existen entre los valores extremos de las variables aleatorias. En temas como la medición de riesgo financiero y administración de carteras son utilizados, por ejemplo para el estudio de las relaciones de dependencia de retornos extremos de diferentes factores de riesgo. Al igual que las medidas de rango, también son invariantes bajo transformaciones monótonas crecientes y se pueden expresar en términos de la cópula.

En este capítulo estudiaremos la estructura de dependencia entre los retornos diarios de los índices bursátiles del DAX e IBEX 35, durante el período comprendido entre el 6 de junio de 2006 y el 24 de febrero de 2012. Como primer paso, procedemos a ajustar un modelo ARCH/GARCH para hacer frente a la existencia de heteroscedasticidad condicional de las variables y la persistente variabilidad en el rendimiento de las acciones. Luego ajustamos la distribución de Pareto generalizada a los residuos de los retornos ajustados con el fin de determinar la distribución marginal de serie univariada en las colas. Posteriormente, se ajustan diferentes cópulas para modelar la dependencia multivariante entre los rendimientos de los mercados de valores eligiendo la que mejor se ajuste a los residuos de los retornos, para por último ajustar una cópula FGM bidimensional a la cópula estimada. En la sección 8.1 se estudiarán las propiedades estocásticas y las características de distribución de los retornos. En la sección 8.2 seleccionamos el modelo bidimensional de cópula que mejor se ajusta a la serie bivariante de residuos filtrados mediante los procesos tipo ARCH/GARCH y los ajustes de la distribución de Pareto a las colas de las series marginales. En la sección 8.3 aproximaremos la cópula FGM bidimensional a la cópula estimada.

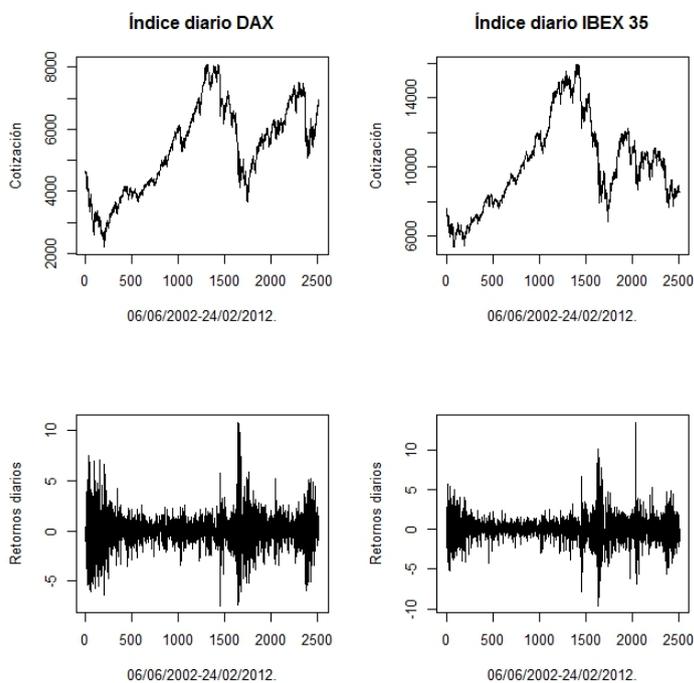


Figura 8.1: Precios diarios al cierre y los negativos de los retornos logarítmicos (pérdidas) de los índices bursátiles DAX y IBEX 35

## 8.1. Descripción de datos

La cartera de valores que vamos a analizar está compuesta por los índices bursátiles DAX y IBEX 35. La base de datos contiene 2512 precios de cierre diarios, del 6 de junio de 2006 al 24 de febrero de 2012. Los retornos son calculados al tomar la diferencia de los logaritmos de los precios de las acciones en dos días consecutivos de cotización.

En la figura 8.1, se puede identificar la volatilidad de los retornos, puesto que éstos muestran patrones irregulares en el tiempo, sugiriendo la presencia de conglomerados de volatilidad. Además también la presencia de valores atípicos, comunes en el estudio de activos financieros. Estos comportamientos son indicio de que las distribuciones de los retornos de cada uno de los activos esta descrita por una distribución de cola pesada (Engle, 1982). La figura 8.2 (Q-Q plot Normal) enfrenta los cuantiles empíricos con los de una normal, en el que se pueden apreciar que ambas colas de la distribución empírica son más pesadas que las que corresponderían a una distribución normal.

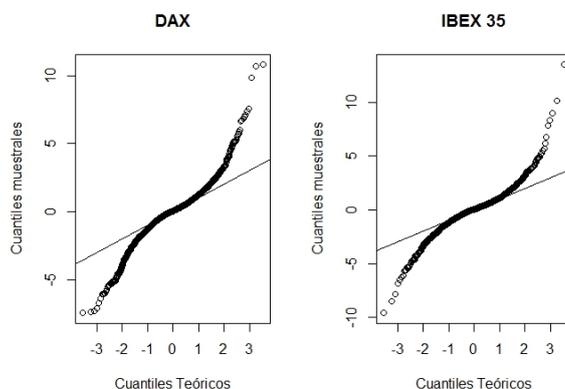


Figura 8.2: Q-Q Plot

Tabla 8.1: Estadísticas descriptivas para los retornos diarios

	DAX	IBEX 35
Min	-7.43300	-9.586000
Max	10.80000	13.480000
Media	0.01544	0.004703
Desv. Est.	1.644065	1.531477
Curtosis	7.625258	9.769199
Coef. Asimetría	0.062809	0.164989
Jarque Bera	2240.789*	4807.453*
Shapiro-Wilk	0.9337*	0.9284*

En la tabla 8.1 tanto el test de Jarque-Bera como el de Shapiro Wilk rechazan la hipótesis nula de normalidad al nivel del 1% para los retornos diarios de DAX y IBEX 35 respectivamente.

## 8.2. Estimación

Con los estadísticos de Jarque-Bera y Shapiro-Wilk hemos constatado la no normalidad de los retornos y al observar la figura 8.3, que corresponde a las funciones de autocorrelación de los retornos en nivel y al cuadrado de los índices, estos nos dan indicios de la existencia de heteroscedasticidad condicional autorregresiva (ARCH) en ambas series, al mostrar valores significativamente altos. Para validar la presencia del efecto ARCH, se

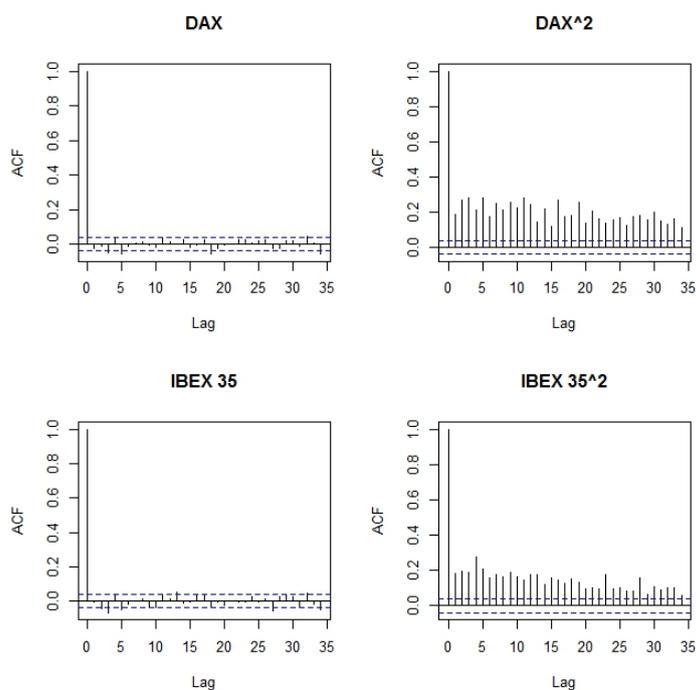


Figura 8.3: Funciones de autocorrelación de los retornos del DAX y el IBEX 35 en nivel y al cuadrado

Tabla 8.2: Contraste LM de la presencia de efecto ARCH de orden 5

Retorno	LM(5)	p-valor
DAX	42.5271	0.000
IBEX 35	28.4969	0.005

utiliza el estadístico LM, en nuestro caso de los retornos diarios, hemos calculados los valores del estadísticos LM con rezagos de orden 5, los resultados son presentados en la tabla 8.2.

Debido a que la forma funcional de la cópula y sus parámetros no dependen del tiempo, pero la distribución de los retornos describen cierto tipo de dependencia temporal, en el primer y segundo momento de las series, se sugiere el uso de modelos dinámicos multivariantes basados en cópulas (SCOMDY) o también llamados modelos de cópulas dinámicas (véase Cherubini *et al.*, 2011). Estos modelos fueron propuestos originariamente por Chen y Fan (2006), quienes encontraron las propiedades asintóticas de los

estimadores utilizados en este tipo de modelos; otros autores como Poon *et al.* (2001); Patton (2001) y Chollete y Heinen (2006) ya habían utilizado estos modelos, pero ninguno de ellos había desarrollado las propiedades de los estimadores de los modelos. La estimación según Chen y Fan (2006) de las cópulas dinámicas se realiza en dos etapas, en la primera se estima un modelo tipo ARMA(m,n)+APARCH(p,q) para cada una de las series de retornos ( $r_t$ ) para estimar el comportamiento del primer y segundo momento condicional de  $r_t$ . En la segunda etapa se estiman los parámetros de la cópula sobre los residuales de la primera etapa.

Tanto en la elección del modelo APARCH como de la cópula se utilizan algunos criterios de información, como son el de Akaike (AIC), Bayesiano (BIC), Schwarz (SIC) y Hannan Quinn (HQ).

Un modelo ARMA(m,n)+APARCH(p,q) para una serie  $x_t$  es de la forma

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + \sum_{i=1}^m a_i x_{t-i} + \sum_{j=1}^n b_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= z_t \sigma_t; \quad z_t \sim D_{\vartheta}(0, 1), \\ \sigma_t^{\delta} &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^{\delta} + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^{\delta}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

donde  $\mu$  es la media,  $\sigma_t^2$  la varianza,  $a_i$  es el coeficiente autorregresivo,  $b_j$  el coeficiente de media móvil,  $\varepsilon_t$  el residuo de la serie,  $z_t$  es un proceso de ruido blanco incorrelacionado, que puede ser modelado con una distribución normal estándar, una  $t$ -Student o una de error generalizado (GED) con  $\vartheta$  grados de libertad,  $\omega > 0$ ,  $\delta > 0$  y  $-1 < \gamma_i < 1$ . Bollerslev (1986), Hsieh (1989), Bollerslev *et al.* (1992), Palm (1996) y Pagan (1996) muestran que la distribución  $t$  de Student es la que mejor captura la curtosis en serie de tiempo empíricas de los retornos logarítmicos.

Los modelos ARCH fueron introducidos por Engle (1982) para modelar la varianza de la tasa de inflación en el Reino Unido. Más tarde Bollerslev (1986) los generaliza y los llama GARCH. Ding *et al.* (1993) generalizan los modelos GARCH en una clase más extensa llamada los modelos APARCH, el cual incluye los modelos ARCH de Engle (1982) cuando  $\delta = 2$ ,  $\gamma_i = 0$  y  $\beta_j = 0$  y los modelos GARCH de Bollerslev (1986) cuando  $\delta = 2$  y  $\gamma_i = 0$  y otros casos especiales como los modelos TS-GARCH de Taylor (2008)

Tabla 8.3: Criterios de Información de Modelos ARMA-APARCH ajustados a los rendimientos del DAX

Modelo	AIC	BIC	SIC	HQ
<b>ARCH(1)</b>	3.576582	3.585864	3.576577	3.579951
<b>GARCH(1,1)</b>	3.353878	3.365480	3.353870	3.358089
<b>ARMA(1,1)+GARCH(1,1)</b>	3.352040	3.368282	3.352024	3.357935
<b>TS-GARCH(1,1)</b>	3.358144	3.369746	3.358137	3.362355
<b>GJR-GARCH(1,1)</b>	3.322922	3.336844	3.322911	3.327975
<b>T-ARCH(1,1)</b>	3.317375	3.331298	3.317364	3.322429
<b>N-ARCH(1)</b>	3.577361	3.588963	3.577353	3.581572
<b>APARCH(1,1)</b>	3.318039	3.334282	3.318024	3.323935

Tabla 8.4: Criterios de Información de Modelos ARMA-APARCH ajustados a los rendimientos del IBEX 35

Modelo	AIC	BIC	SIC	HQ
<b>ARCH(1)</b>	3.431155	3.440437	3.431150	3.434524
<b>GARCH(1,1)</b>	3.219703	3.231305	3.219695	3.223914
<b>ARMA(1,1)+GARCH(1,1)</b>	3.218036	3.234279	3.218020	3.223931
<b>TS-GARCH(1,1)</b>	3.220006	3.231608	3.219998	3.224217
<b>GJR-GARCH(1,1)</b>	3.187619	3.201541	3.187607	3.192672
<b>T-ARCH(1,1)</b>	3.181424	3.195346	3.181412	3.186477
<b>N-ARCH(1)</b>	3.430761	3.442363	3.430754	3.434972
<b>APARCH(1,1)</b>	3.181642	3.197885	3.181627	3.187537

y Schwert (1990) cuando  $\delta = 1$  y  $\gamma_i = 0$ , los modelos GJR-GARCH de Glosten *et al.* (1993) cuando  $\delta = 2$ , los modelos T-ARCH de Zakoian (1994) cuando  $\delta = 1$ , los modelos N-ARCH de Higgins y Bera (1992) cuando  $\gamma_i = 0$  y  $\beta_j = 0$  y los modelos log-ARCH de Geweke (1986) y Pentula (1986) cuando  $\delta \rightarrow 0$ .

En las tablas 8.3 y 8.4 se presentan los modelos ARMA-APARCH que mejor se ajustan a las series de retornos del DAX y IBEX 35 con sus respectivos criterios de información (IC). Para cada modelo hemos supuesto que los residuos siguen una distribución  $t$  de Student. De acuerdo con estos resultados, los modelos que mejor se ajustan son los tipo T-ARCH(1), ya que éstos poseen los valores más bajos en cada uno de los (IC). Los parámetros estimados para cada modelo T-ARCH(1) ajustado a los datos, se presentan en las tabla 8.5 y 8.6 . Una de las conclusiones que se obtienen de las estimaciones, es que la volatilidad es más sensible a las innovaciones negativas que a las positivas ( $\alpha < \gamma$ ).

Tabla 8.5: Estimaciones de los parámetros para el modelo T-ARCH de los retornos logarítmicos del DAX

Parámetro	Estimado	Error Std.	<i>t</i> -valor	Pr( $T >  t $ )
$\mu$	0.055667	0.019571	2.844	0.00445
$\omega$	0.020944	0.003910	5.357	8.48e-08
$\alpha$	0.068095	0.006562	10.377	<2e-16
$\gamma$	1.000000	0.011913	83.941	<2e-16
$\beta$	0.931073	0.006746	138.027	<2e-16
$\vartheta$	10.000000	1.796396	5.567	2.60e-08

Tabla 8.6: Estimaciones de los parámetros para el modelo T-ARCH de los retornos logarítmicos del IBEX 35

Parámetro	Estimado	Error Std.	<i>t</i> -valor	Pr( $T >  t $ )
$\mu$	0.043785	0.017792	2.461	0.0139
$\omega$	0.018539	0.003599	5.150	2.60e-07
$\alpha$	0.067576	0.009846	6.863	6.74e-12
$\gamma$	0.997663	0.143837	6.936	4.03e-12
$\beta$	0.932237	0.008771	106.286	<2e-16
$\vartheta$	9.240593	1.575428	5.865	4.48e-09

De las figuras 8.4 y 8.5, se observa que los residuos estandarizados son aproximadamente i.i.d. Esto indica que no existen indicios de autocorrelación, ni de efectos ARCH remanentes. En este punto extraemos las series de residuos para cada log-retorno con el modelo T-ARCH(1) estimado y construimos la marginal de cada serie.

Debido a la presencia de colas pesadas en los extremos, como se observa en los gráficos QQ plot de las figuras 8.4 y 8.5, es necesario estimar las funciones de las distribuciones marginales de los residuos estandarizados siguiendo el enfoque de Carmona (2004), utilizando un estimador semi-paramétrico que involucra la teoría del valor extremo (EVT). En esta metodología las colas de las distribuciones marginales son modeladas usando la distribución generalizada de Pareto (GPD), la cual es de la forma

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp(-x/\beta) & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Luego de modelar las colas con la GPD, el centro de la distribución es modelado con la

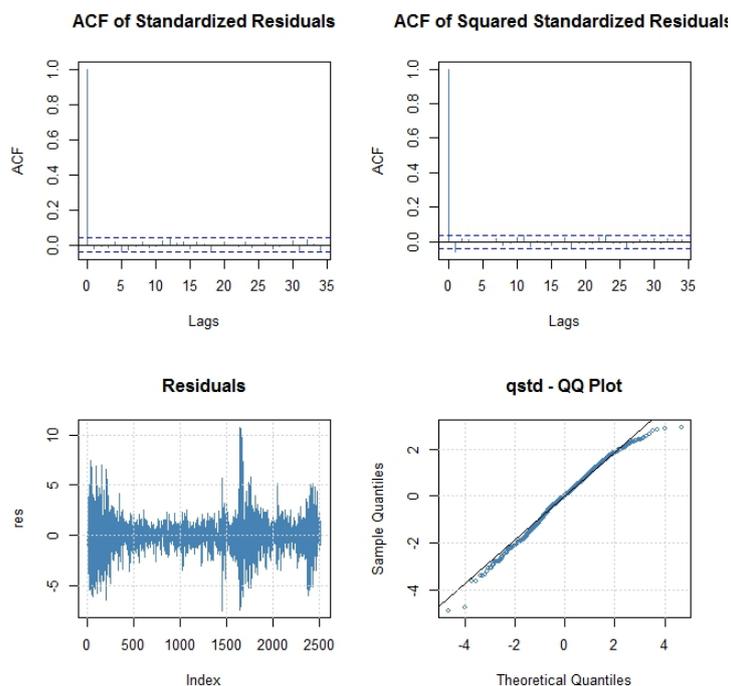


Figura 8.4: Análisis de los residuos del modelo T-ARCH(1) para los log-retornos DAX

Tabla 8.7: Resultados de la estimación GPD para las colas

Parámetro	DAX		IBEX 35	
	Superior	Inferior	Superior	Inferior
$\beta$	0.60544	0.82789	0.62945	0.74941
$\xi$	0.18682	-0.04307	0.15250	0.02721
Umbral	1.02431	-1.09411	1.03206	-1.0910

función de distribución empírica (Zivot y Wang, 2006). Esta aproximación se justifica por dos razones. La primera porque se evita realizar supuestos sobre la forma funcional de las distribuciones marginales y la segunda porque la información disponible a partir del uso de las distribuciones empíricas resulta insuficiente en el análisis de la probabilidad de ocurrencia de valores extremos.

Ajustamos la GPD a los residuos estandarizados especificando un umbral inferior y superior, seleccionamos como valores de umbral tales que el 10% de los residuos es reservado para la cola superior e inferior. En nuestro caso hemos reservado 252 observaciones en cada una de las colas. En las figuras 8.6 y 8.7, se presentan las colas estimadas de los

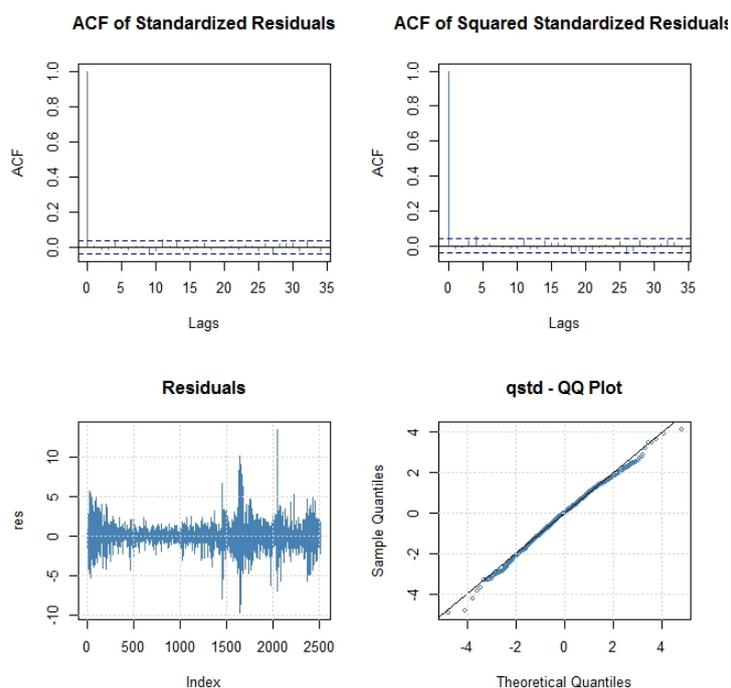


Figura 8.5: Análisis de los residuos del modelo T-ARCH(1) para los log-retornos IBEX35

modelos GPD ajustados a los excesos de las colas superiores e inferiores. La aproximación lineal de los gráficos son un buen indicio de que los modelos GPD están bien ajustados. En la tabla 8.7 se presentan los parámetros estimados de los modelos GPD ajustados a las colas y en la figura 8.8 del QQ plot se observa el buen ajuste de los modelos GPD del DAX e IBEX 35 a la normal.

Un supuesto importante para la estimación de la cópula, es que los valores de las pseudo muestras sigan una distribución uniforme estándar, para validar que la aproximación semiparamétrica de la función de distribución marginal para cada una de las series de los residuos, obtenida con el método de Carmona (2004) es apropiada, utilizamos la prueba de Kolmogorov-Smirnov, con la que no rechazamos la hipótesis nula de que los datos se ajustan a una distribución estándar. Con el gráfico QQ se comparan los cuantiles de la función de distribución estimada con respecto a los de una v.a. uniforme  $(0,1)$ , véase la figura 8.9 en donde se valida este supuesto.

Denotamos por  $U$  y  $V$  a las serie de residuos del DAX y del IBEX respectivamente.

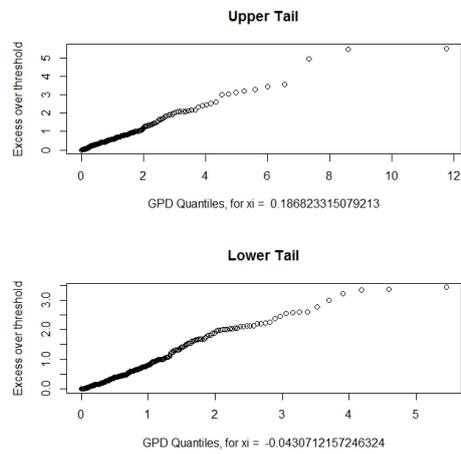


Figura 8.6: Modelo GPD ajustado a los exceso de cola para los residuos log-retornos del DAX

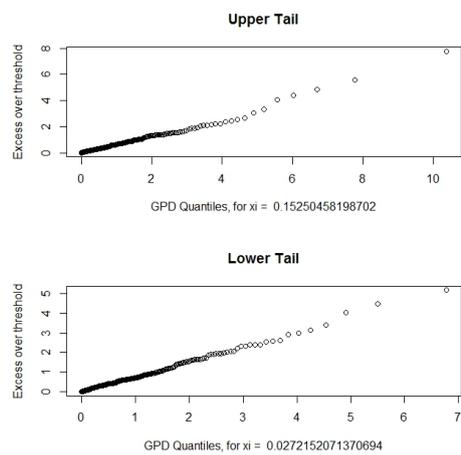


Figura 8.7: Modelo GPD ajustado a los exceso de cola para los residuos log-retornos del IBEX 35

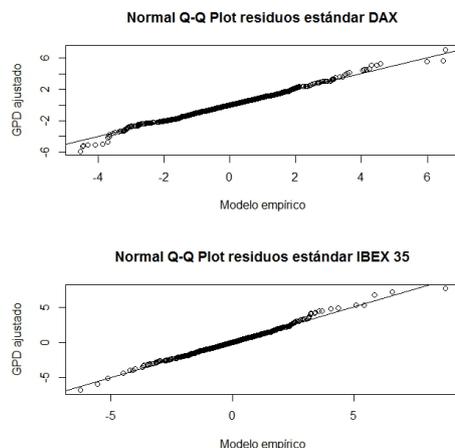


Figura 8.8: Q-Q plot Modelo GPD ajustado vs los modelos empíricos de los residuos estándar del DAX e IBEX 35.

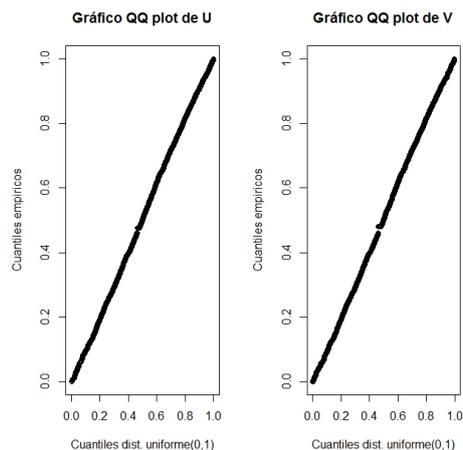


Figura 8.9: Gráfico QQ de las pseudo muestras

Luego de validar el supuesto de que  $U$  y  $V$  son v.a. uniformes  $(0,1)$ , procedemos a la estimación de la cópula que mejor se ajuste, mediante los criterios log-verosimilitud, el criterio de información AIC propuesto por Joe (1997), el criterio de información BIC propuesto por Zivot y Wang (2006) y el criterio Cramér-von Mises (CvM) de bondad de ajuste propuesto por Genest *et al.* (1995). Este último criterio fue validado por Genest *et al.* (2009) utilizando el bootstrap y luego por Kojadinovic *et al.* (2011) utilizando el teorema del limite central multiplicativo. Las cópulas que según los criterios, mejor se

Tabla 8.8: Criterios de selección de la cópula

Cópula	Log (verosimilitud)	AIC	BIC	CvM $p$ -valor
Clayton Generalizada	1571.941	-3139.882	-3128.228	0.42
Gumbel	1471.935	-2941.870	-2936.041	0
Frank	1422.706	-2843.412	-2837.583	0
Normal	1431.558	-2861.115	-2855.287	0

ajustan son cuatro, tres de ellas son cópulas arquimedianas, la Clayton Generalizada (BB1), la Gumbel y la Frank y una elíptica, la normal. Los resultados de la estimación se presentan en la tabla 8.8, en donde claramente la cópula Clayton Generalizada es la que presenta mejores resultados.

La cópula BB1 pertenece al grupo de las cópulas arquimedianas (2.6.2) con la particularidad de ser de dos parámetros. La forma de la cópula BB1 es

$$C(u, v) = \{1 + [(u^{-\theta} - 1)^\delta + (v^{-\theta} - 1)^\delta]^{1/\delta}\}^{-1/\theta}; \theta > 0, \delta \geq 1. \quad (8.2)$$

El generador de la cópula (8.2) es de la forma

$$\varphi(t) = \theta^{-\delta}(t^{-\theta} - 1)^\delta.$$

Las estimaciones de los parámetros de la cópula BB1, se realizaron mediante el método de la máxima verosimilitud, dando como resultado los valores  $\theta = 0,6225745$  y  $\delta = 2,087563$ . Una de las particularidades interesantes de la cópula BB1, es que muestra dependencia en ambos extremos, como podemos observar en el gráfico de dispersión 8.10, y de intensidades diferentes, es decir, las cópulas (8.2) poseen coeficientes de dependencia en cola (5.3.3) superior e inferior distintos, que podemos calcular mediante las siguientes ecuaciones (véase McNeil *et al.*, 2005)

$$\lambda_L = 2^{-\frac{1}{\delta\theta}} = 0,5867 \text{ y } \lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\delta}} = 0,6062.$$

Para nuestros datos, esto significa que un crash de mercado del rendimiento de IBEX 35 afecta con una probabilidad de 58,67% un crash de mercado del rendimiento del DAX, en contrapartida, si los precios se disparan, afecta con una probabilidad de 60,62%.

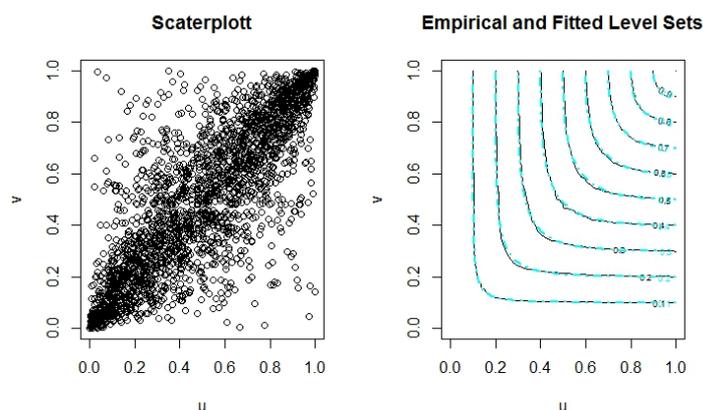


Figura 8.10: Gráfico de dispersión de una muestra que sigue la cópula Clayton Generalizada y curvas de nivel de la cópula empírica y la estimada

La tau de Kendall para la cópula (8.2) es

$$\frac{(2 + \theta)\delta - 2}{(2 + \theta)\delta} = 0,6347.$$

La rho de Spearman para la cópula BB1 no tiene una forma cerrada y se debe calcular numéricamente mediante la ecuación (2.14), dando como resultado

$$\rho_S = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3 = 0,819646.$$

En la siguiente sección aproximaremos la cópula estimada BB1 a la cópula FGM en dos dimensiones obtenida en la sección 7.2

### 8.3. Aproximación bi-dimensional a la cópula FGM

En esta sección aproximaremos la cópula (8.2) estimada para los datos del DAX e IBEX 35, a la cópula (7.27). Calculamos los dos primeros coeficientes de correlación de la cópula BB1, mediante las ecuaciones (7.25) y (7.26), donde claramente  $\rho_1 = 0,819646$  es la rho

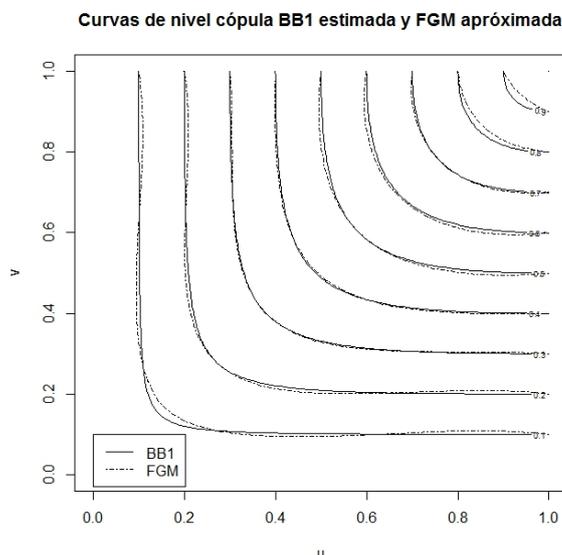


Figura 8.11: Curvas de nivel de la cópula BB1 estimada y FGM aproximada

de Spearman para la cópula BB1 y

$$\rho_2 = 180 \int_{I^2} C(u, v)(4uv - 2u - 2v + 1)dudv - 5 = 0,675615.$$

Reemplazando estos resultados en la cópula (7.27), se tiene

$$C_{aprox}(u, v) = uv \{1 + (1 - u)(1 - v)[2,458938 + 3,378075(1 - 2u)(1 - 2v)]\}.$$

La tau para  $C_{aprox}$  viene dada por la ecuación (7.28), dando  $\tau = 0,6207$  con un error de 0,014 respecto al valor de la cópula BB1 estimada. Ahora calculamos las dos medidas de ajuste (7.29) y (7.30), cuyos valores son  $\eta_1 = 0,0190838$  y  $\eta_2 = 0,000648851$  respectivamente. Lo que nos indica que existe un buen ajuste de la cópula FGM en dos dimensiones a la cópula BB1. En los extremos derecho superior e izquierdo inferior de la gráfica 8.11, es donde se visualiza las mayores diferencias entre las cópulas. Como se indicó con las medidas de ajuste, estas diferencias son pequeñas, lo que demuestra que la cópula de aproximación FGM a dos dimensiones es una buena alternativa de ajuste para el análisis de dependencia.



# Capítulo 9

## Conclusiones

Las cópulas y el teorema de Sklar han ayudado al estudio de la dependencia de variables aleatorias, particularmente las continuas, ampliando considerablemente el catálogo de distribuciones multivariantes. Esto ha tenido una consecuencia importante en la estadística ya que permite trabajar, por un lado, la estimación de la cópula subyacente, y por otro, la estimación de las distribuciones marginales, para finalmente obtener una estimación de la distribución conjunta por medio del teorema de Sklar. También resultan ser una herramienta útil en la discusión sobre las propiedades deseables de una medida de dependencia ya que, en el caso de variables aleatorias continuas, determinan de manera única la distribución conjunta, y por ello, contienen la información relevante sobre la estructura de dependencia. En el capítulo 2, hemos conectado las cópulas con la noción de variable aleatoria. Los conceptos, propiedades y resultados establecidos en él constituyen el marco teórico de partida para el desarrollo del resto de cuestiones.

El concepto de dependencia aparece por todas partes, en nuestra Tierra y en sus habitantes de manera profunda. Son innumerables los ejemplos de fenómenos meteorológicos interdependientes en la naturaleza, o de interdependencia en aspectos médicos, sociales, políticos y económicos de nuestra existencia. Más aún, la dependencia es obviamente no determinística, sino de naturaleza estocástica. Es por lo anterior que resulta sorprendente que conceptos y medidas de dependencia no hayan recibido suficiente atención en la literatura estadística, al menos hasta 1966 cuando el trabajo pionero de E.L. Lehmann, probó el Lema de Hoeffding, desde entonces se han publicado algunas generalizaciones

de éste. Nosotros hemos obtenido una generalización multivariante para funciones de variación acotada que agrupa a las obtenidas anteriormente, al establecer la relación entre los planteamientos presentados por Quesada-Molina (1992) y Cuadras (2002b) y extendiendo este último al caso multivariante.

Hemos definido la dimensionalidad geométrica de una distribución conjunta  $H$  en función del cardinal del conjunto de correlaciones canónicas de  $H$ , si  $H$  se puede representar mediante una expansión diagonal. La dimensionalidad geométrica ha sido obtenida para algunas de las familias de cópulas más conocidas, en ocasiones utilizando métodos numéricos. Se espera obtener la dimensionalidad para un número más amplio de cópulas. De acuerdo con la dimensionalidad hemos clasificado a las cópulas en cuatro grupos, las de dimensión cero, finita, numerable ( $\aleph_0$ ) y continua ( $\aleph_1$ ), encontrando que en su mayoría las cópulas son de dimensión numerable.

Con el uso de dos funciones que satisfacen ciertas condiciones de regularidad, se ha obtenido una extensión generalizada de la cópula Gumbel-Barnett, de la que hemos deducido sus principales propiedades y medidas de dependencia, para algunas funciones en particular. Esperamos ajustar una cópula Gumbel-Barnett extendida a un conjunto de datos reales, para justificar su aplicabilidad.

La cópula FGM, es una de las cópulas con más aplicabilidad en campos como el análisis financiero, y a la que se han obtenido un gran número de generalizaciones para el caso simétrico. Nosotros hemos obtenido dos nuevas generalizaciones, la primera se obtuvo al adicionar dos distribuciones auxiliares y la segunda es una generalización para el caso asimétrico, en esta última caben algunas de las generalizaciones existentes. Para ambos casos se han deducido los rangos admisibles de los parámetros de asociación, sus principales propiedades y sus medidas de dependencia.

Demostramos que si se conocen las funciones canónicas de una función de distribución es posible aproximarla a otra función de distribución, a través de combinaciones lineales de las funciones canónicas. Como ejemplo, consideramos la cópula FGM en dos dimensiones, en el sentido geométrico, debido a que se conocen sus funciones canónicas y hemos comprobado numéricamente que su aproximación a otras cópulas con dimensión numerable, es aceptablemente bueno.

Uno de los campos donde tiene gran aceptación y aplicabilidad es en las finanzas, en donde se ha demostrado que las cópulas son una poderosa herramienta para el análisis de dependencia entre las múltiples variables que existen. Nosotros a modo de aplicación, hemos ajustado una FGM en dos dimensiones, a un par de valores de cartera, pasando por todas y cada una de las etapas necesarias de análisis para el ajuste de una función cópula. Con ello se pretende mostrar los pasos necesarios que deben realizarse para ajustar una función cópula. Incluyendo en este proceso los test de normalidad, el ajuste de modelos teóricos como los modelos GARCH, ARCH y APARCH y el ajuste de distribuciones Pareto a los valores extremos, por la gran volatilidad que presenta en general este tipo de información, para luego estimar la cópula que mejor se ajusta a los datos y por último ajustar una FGM en dos dimensiones a la cópula ajustada, a fin de justificar en un caso real la aplicabilidad de la aproximación de una función de distribución, a través de combinaciones lineales de las funciones canónicas de otra distribución.

Para finalizar, señalar que para la realización de los diferentes procedimientos empleados a lo largo de los desarrollos se ha utilizado el software estadístico R, en su versión 2.14.1, en particular los paquetes `copula`, `fGarch`, `Rsafd` y `CDVine`, entre otros y el software Mathematica, en su versión 7.0, para el análisis numérico y gráfico de algunos procesos.



# Bibliografía

- Bairamov, I. y Kotz, S. (2002). Dependence structure and symmetry of Huang-Kotz FGM distributions and their extensions. *Metrika*, **56(1)**, pp. 55–72.
- Barnett, V. (1980). Some bivariate uniform distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **9(4)**, pp. 453–461.
- Benzécri, J.P. (1992). *Correspondence Analysis Handbook*. Statistics, textbooks and monographs. Marcel Dekker.
- Block, H.W. y Fang, Z. (1988). A multivariate extension of Hoeffding's lemma. *The Annals of Probability*, **16(4)**, pp. 1803–1820.
- Blomqvist, N. (1950). On a measure of dependence between two random variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, **21(4)**, pp. 593–600.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, **31(3)**, pp. 307–327.
- Bollerslev, T., Chou, R.Y. y Kroner, K.F. (1992). ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of econometrics*, **52(1)**, pp. 5–59.
- Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G. y Roncalli, T. (2000). Copulas for finance: A reading guide and some applications. *Manuscript, Financial Econometrics Research Center*.
- Cambanis, S., Huang, S. y Simons, G. (1981). On the theory of elliptically contoured distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **11(3)**, pp. 368–385.
- Capéreaa, P. y Genest, C. (1993). Spearman's  $\rho$  is larger than Kendall's  $\tau$  for positively dependent random variables. *Journal of Nonparametric Statistics*, **2(2)**, pp. 183–194.
- Carmona, R. (2004). *Statistical analysis of financial data in S-Plus*. Springer Verlag.
- Charpentier, A. (2003). Tail distribution and dependence measures. In: *Proceedings of the 34th ASTIN Conference*, Berlin.

- Chen, X. y Fan, Y. (2006). Estimation and model selection of semiparametric copula-based multivariate dynamic models under copula misspecification. *Journal of Econometrics*, **135**(1), pp. 125–154.
- Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W. y ebrary, Inc (2004). *Copula methods in finance*. John Wiley and Sons.
- Cherubini, U., Mulinacci, S., Gobbi, F. y Romagnoli, S. (2011). *Dynamic Copula Methods in Finance*. The Wiley Finance Series. Wiley.
- Chollete, L. y Heinen, A. (2006). Frequent turbulence? A dynamic copula approach. *NHH Dept. of Finance & Management Science Discussion Paper No. 2006/10*.
- Clayton, D.G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its applications in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, **65**(1), p. 141.
- Cuadras, C.M. (2002a). Correspondence analysis and diagonal expansions in terms of distribution functions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **103**(1-2), pp. 137–150.
- Cuadras, C.M. (2002b). On the covariance between functions. *Journal of Multivariate Analysis*, **81**(1), pp. 19–27.
- Cuadras, C.M. (2005). Continuous canonical correlation analysis. *Research Letters in Information and Mathematical Sciences*, **8**, pp. 97–103.
- Cuadras, C.M. (2006). The importance of being the upper bound in the bivariate family. *SORT: Statistics and Operations Research Transactions*, **30**(1), pp. 55–84.
- Cuadras, C.M. (2009). Constructing copula functions with weighted geometric means. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**(11), pp. 3766–3772.
- Cuadras, C.M. y Fortiana, J. (1995). A continuous metric scaling solution for a random variable. *Journal of Multivariate Analysis*, **52**(1), pp. 1–14.
- Cuadras, C.M., Fortiana, J. y Greenacre, M.J. (1998). Continuous extensions of matrix formulations in correspondence analysis, with applications to the FGM family of distributions. In: *Advances in Econometrics*, Kluwer, Citeseer.
- Cuadras, C.M. y Lahlou, Y. (2000). Some orthogonal expansions for the logistic distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **29**(12), pp. 2643–2663.
- De La Horra, J. y Fernandez, C. (1995). Sensitivity to prior independence via Farlie-Gumbel-Morgenstern model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **24**(4), pp. 987–996.
- D'este, G.M. (1981). A Morgenstern-type bivariate gamma distribution. *Biometrika*, **68**(1), p. 339.

- Dewan, I. y Rao, B.L.S. (2005). Wilcoxon-signed rank test for associated sequences. *Statistics & probability letters*, **71(2)**, pp. 131–142.
- Ding, Z., Granger, C.W.J. y Engle, R.F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of empirical finance*, **1(1)**, pp. 83–106.
- Embrechts, P., Lindskog, F. y McNeil, A. (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. *Handbook of heavy tailed distributions in finance*, **8(329-384)**, p. 1.
- Embrechts, P., McNeil, A. y Straumann, D. (1999). Correlation: pitfalls and alternatives. *Risk Magazine*, **12**, pp. 69–71.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 987–1007.
- Escarela, G. y Carriere, J.F. (2003). Fitting competing risks with an assumed copula. *Statistical Methods in Medical Research*, **12(4)**, p. 333.
- Fang, K.T., Kotz, S. y Ng, K.W. (1987). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman & Hall, London.
- Farlie, D.J.G. (1960). The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution. *Biometrika*, **47(3/4)**, pp. 307–323.
- Frank, M.J. (1979). On the simultaneous associativity of  $F(x, y)$  and  $x+y-F(x, y)$ . *Aequationes Mathematicae*, **19(1)**, pp. 194–226.
- Frees, E.W., Carriere, J. y Valdez, E. (1996). Annuity valuation with dependent mortality. *The Journal of Risk and Insurance*, **63(2)**, pp. 229–261.
- Frees, E.W. y Valdez, E.A. (1998). Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal*, **2**, pp. 1–25.
- Frees, E.W. y Wang, P. (2005). Credibility using copulas. *North American Actuarial Journal*, **9(2)**, pp. 31–48.
- Gabriel, K.R. (1971). The biplot graphic display of matrices with application to principal component analysis. *Biometrika*, **58(3)**, pp. 453–467.
- Genest, C. (1987). Frank's family of bivariate distributions. *Biometrika*, **74(3)**, p. 549.
- Genest, C. y Favre, A.C. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, **12**, p. 347.
- Genest, C., Ghoudi, K. y Rivest, L.P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, **82(3)**, pp. 543–552.

- Genest, C. y MacKay, J. (1986). The joy of copulas: bivariate distributions with uniform marginals. *The American Statistician*, **40**(4), pp. 280–283.
- Genest, C., Rémillard, B. y Beaudoin, D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study. *Insurance: Mathematics and Economics*, **44**(2), pp. 199–213.
- Genest, C. y Rivest, L.P. (1993). Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, **88**(423), pp. 1034–1043.
- Geweke, J. (1986). Modelling the persistence of conditional variances: A Comment. *Econometric reviews*, **5**(1), pp. 57–61.
- Gini, C.W. (1912). Variabilità e mutabilità, Studi Economico-Giuridici della R. Università di Cagliari, **3**, pp. 3–159.
- Glosten, L.R., Jagannathan, R. y Runkle, D.E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of finance*, pp. 1779–1801.
- Gower, J.C. (1992). Generalized biplots. *Biometrika*, **79**(3), pp. 475–493.
- Greenacre, M. (2008). *La práctica del análisis de correspondencias*. Fundación BBVA.
- Greenacre, M.J. (1984). *Theory and applications of correspondence analysis*. Academic Press.
- Greenacre, M.J. (1993). Biplots in correspondence analysis. *Journal of Applied Statistics*, **20**(2), pp. 251–269.
- Gumbel, E.J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, **55**(292), pp. 698–707.
- Higgins, M.L. y Bera, A.K. (1992). A class of nonlinear ARCH models. *International Economic Review*, pp. 137–158.
- Hobson, E. W. (1927). *The Theory Of Functions Of A Real Variable*. volumen 1. Cambridge.
- Hoeffding, W. (1940). Masstabinvariante Korrelationtheorie. *Schriften Math. Inst. Univ. Berlin*, **5**, pp. 179–233.
- Hoeffding, W. (1948). A class of statistics with asymptotically normal distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, **19**(3), pp. 293–325.
- Hsieh, D.A. (1989). Modeling heteroscedasticity in daily foreign-exchange rates. *Journal of Business & Economic Statistics*, pp. 307–317.
- Huang, J.S. y Kotz, S. (1984). Correlation structure in iterated Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions. *Biometrika*, **71**(3), p. 633.

- Huang, JS y Kotz, S. (1999). Modifications of the Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions. A tough hill to climb. *Metrika*, **49(2)**, pp. 135–145.
- Hutchison, T.P. y Lai, C.D. (1990). *Continuous Bivariate Distributions, Emphasizing Applications*. Rumsby Scientific Publishing, Adelaide.
- Joe, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*. Chapman & Hall, London.
- Jogdeo, K. (1968). Characterizations of independence in certain families of bivariate and multivariate distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, **39(2)**, pp. 433–441.
- Johnson, N.L. (1980). Extreme sample censoring problems with multivariate data: Indirect censoring and the Farlie-Gumbel-Morgenstern distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, **10(3)**, pp. 351–362.
- Johnson, N.L. y Kotz, S. (1975). On some generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **4(5)**, pp. 415–427.
- Johnson, N.L. y Kotz, S. (1977). On some generalized farlie-gumbel-morgenstern distributions-II regression, correlation and further generalizations. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **6(6)**, pp. 485–496.
- Johnson, R.A. y Wichern, D.W. (2002). *Applied multivariate statistical analysis*. volumen 4. Prentice hall Upper Saddle River, NJ.
- Jöreskog, K.G. (1967). Some contributions to maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, **32(4)**, pp. 443–482.
- Kendall, M. y Stuart, A. (1979). *Handbook of Statistics*. Griffin, London.
- Kim, J.M. y Sungur, E.A. (2004). New class of bivariate copulas. In: *Proceedings for the Spring Conference*, pp. 207–212.
- Kojadinovic, I., Yan, J. y Holmes, M. (2011). Fast large-sample goodness-of-fit tests for copulas. *Statistica Sinica*, **21(2)**, p. 841.
- Kotz, S., Balakrishnan, N. y Johnson, N.L. (2004). *Continuous multivariate distributions, Models and applications*. Wiley-Interscience.
- Kruskal, J.B. y Wish, M. (1978). *Multidimensional Scaling*. Sage university papers series: Quantitative applications in the social sciences. Sage.
- Kruskal, W.H. (1958). Ordinal measures of association. *Journal of the American Statistical Association*, **53(284)**, pp. 814–861.
- Lai, CD y Xie, M. (2000). A new family of positive quadrant dependent bivariate distributions. *Statistics & probability letters*, **46(4)**, pp. 359–364.

- Lancaster, HO (1958). The structure of bivariate distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, **29(3)**, pp. 719–736.
- Lancaster, H.O. (1969). *Chi-Square Distribution*. Wiley, New York.
- Lebesgue, H.L. (1904). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris, Gauthier-Villars.
- Lehmann, E.L. (1966). Some concepts of dependence. *The Annals of Mathematical Statistics*, **37(5)**, pp. 1137–1153.
- Lehmann, E.L. y D'Abbrera, H.J.M. (1975). *Nonparametrics: statistical methods based on ranks*. volumen 351. Holden-Day San Francisco.
- Lin, G.D. (1987). Relationships between two extensions of Farlie-Gumbel-Morgenstern distribution. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **39(1)**, pp. 129–140.
- Mardia, K.V. (1967). Some contributions to contingency-type bivariate distributions. *Biometrika*, **54(1-2)**, pp. 235–249.
- Mardia, K.V. y Thompson, J.W. (1972). Unified treatment of moment-formulae. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, **34(2)**, pp. 121–132.
- McNeil, A.J., Frey, R. y Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*. Princeton University Press.
- Morgenstern, D. (1956). Einfache beispiele zweidimensionaler verteilungen. *Mitt. Math. Statist*, **8**, pp. 234–235.
- Nelsen, R.B. (1994). A characterization of Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions via Spearman's rho and chi-square divergence. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, **56(3)**, pp. 476–479.
- Nelsen, R.B. (2006). *An introduction to copulas*. Second edition. Springer Verlag.
- Nelsen, RB, Quesada-Molina, JJ y Rodríguez-Lallena, JA (1997). Bivariate copulas with cubic sections. *Journal of Nonparametric Statistics*, **7(3)**, pp. 205–220.
- Pagan, A. (1996). The econometrics of financial markets. *Journal of empirical finance*, **3(1)**, pp. 15–102.
- Palm, F.C. (1996). 7 GARCH models of volatility. *Handbook of statistics*, **14**, pp. 209–240.
- Patton, A.J. (2001). *Modelling time-varying exchange rate dependence using the conditional copula*. University of California, San Diego.
- Pentula, S. (1986). Modelling the persistence of conditional variances: A Comment. *Econometric reviews*, **5(1)**, pp. 71–74.

- Poon, S. H., Rockinger, G. M. y Tawn, J. (2001). New extreme-value dependence measures and finance applications. *CEPR Discussion Papers*.
- Prakasa Rao, B. L. S. (1998). Hoeffding identity, multivariate and multicorrelation. *A Journal of theoretical and applied statistics*, **32(1)**, pp. 13–29.
- Psarrakos, G. y Politis, K. (2009). Monotonicity properties and the deficit at ruin in the Sparre Andersen model. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2009(2)**, pp. 104–118.
- Quesada-Molina, J.J. (1992). A generalization of an identity of Hoeffding and some applications. *Statistical Methods and Applications*, **1(3)**, pp. 405–411.
- Rao, C.R. (1964). The use and interpretation of principal component analysis in applied research. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, pp. 329–358.
- Rodríguez-Lallena, J.A. y Úbeda-Flores, M. (2004). A new class of bivariate copulas. *Statistics probability letters*, **66(3)**, pp. 315–325.
- Sarmanov, O.V. (1966). Generalized normal correlation and two-dimensional Frechet classes. In: *Soviet Mathematics - Doklady*, volumen 7, pp. 596–599.
- Scarsini, M. (1984). On measures of concordance. *Stochastica*, **8(3)**, pp. 201–218.
- Schmidt, R. y Stadtmüller, U. (2006). Non-parametric Estimation of Tail Dependence. *Scandinavian Journal of Statistics*, **33(2)**, pp. 307–335.
- Schucany, W.R., Parr, W.C. y Boyer, J.E. (1978). Correlation structure in Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions. *Biometrika*, **65(3)**, p. 650.
- Schweizer, B. y Wolff, E.F. (1981). On nonparametric measures of dependence for random variables. *The Annals of Statistics*, **9(4)**, pp. 879–885.
- Schwert, G.W. (1990). Stock Volatility and the Crash of '87. *Review of financial Studies*, **3(1)**, pp. 77–102.
- Sen, P.K. (1994). The impact of Wassily Hoeffding's research on nonparametrics. *The Collected Works of Wassily Hoeffding*, pp. 29–55.
- Shaked, M. (1975). On the distribution of the minimum and of the maximum of a random number of iid random variables. *Statistical distributions in scientific work*, **1**, pp. 363–380.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, **8**, pp. 229–231.
- Taylor, S.J. (2008). *Modelling financial time series*. World Scientific Pub Co Inc.
- Tolley, H.D. y Norman, J.E. (1979). Time on trial estimates with bivariate risks. *Biometrika*, **66(2)**, p. 285.

- Wang, W. y Wells, M.T. (2000). Model Selection and Semiparametric Inference for Bivariate Failure-Time Data. *Journal of the American Statistical Association*, **95**(449), pp. 62–72.
- Yan, J. (2006). Multivariate modeling with copulas and engineering applications. In: *Springer Handbook in Engineering Statistics*, pp. 973–990. Springer Verlag.
- Yu, H. (1993). A Glivenko-Cantelli lemma and weak convergence for empirical processes of associated sequences. *Probability theory and related fields*, **95**(3), pp. 357–370.
- Zakoian, J.M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and control*, **18**(5), pp. 931–955.
- Zivot, E. y Wang, J. (2006). *Modeling financial time series with S-PLUS*. volumen 13. Springer Verlag.