



**Memoria de Tesis Doctoral**

**Contribución a la Síntesis Dimensional de Mecanismos  
Planos para Generación de Trayectoria**

**Francisco T. Sánchez Marín**

Dirigida por:

**Prof. Dr. Antonio Pérez González**

Castellón, Julio de 2000

Departamento de Tecnología

Universitat Jaume I



*A mis **padres** y a Lola*



## *Agradecimientos*

*Resulta curioso que durante las incontables horas que uno ha dedicado a la realización de esta tesis doctoral raramente es consciente del número de personas que, de una u otra forma, han influido en ella. Pero aún tras la reflexión que sigue a la finalización, este recuento se hace complicado por la enorme cifra que resulta.*

*Me parece realmente difícil expresar brevemente mi agradecimiento a todas estas personas no solo por el elevado número, sino también por lo inmensa que es mi gratitud.*

*En primer lugar quisiera hacer público mi más sincero agradecimiento a mi director de tesis, Antonio Pérez, el cual ha proporcionado un soporte de conocimientos, comprensión y orientación imprescindible para la finalización de este trabajo. Igualmente expreso mi agradecimiento a Sundar Krishnamurty que me orientó y me animó a la realización del trabajo en los albores de éste. También me gustaría agradecer a mis compañeros de área, Ximo y Manolo, por descargarme de algunas tareas docentes dándome la oportunidad de maximizar mi dedicación a esta tesis. Finalmente al resto de mis compañeros en el Departamento de Tecnología, que son muchos y que me han reconfortado con su apoyo de las formas más diversas.*

*En el plano más personal, quisiera manifestar mi agradecimiento a mis Padres por su infinita generosidad en todos los aspectos, a mis hermanos por su interés y apoyo y, de una forma especial, a Lola que ha supuesto un soporte emocional fundamental para mi.*

*Al resto, que son muchos y no menos importantes, les estoy también sinceramente agradecido.*



## *Índice*

<u>Capítulo 1. Introducción</u> .....	1
1.1. El diseño de mecanismos .....	1
1.2. Subdivisión del problema de síntesis de mecanismos .....	4
1.3. Objetivos .....	13
1.4. Plan de trabajo .....	15
<u>Capítulo 2. Antecedentes</u> .....	17
2.1. Introducción .....	17
2.2. Síntesis dimensional para generación de trayectoria .....	21
2.3. Discusión .....	36
2.3.1. Las variables de diseño y el espacio de diseño .....	40
2.3.2. La función objetivo .....	43
2.3.3. El algoritmo de optimización .....	46
2.3.4. Las restricciones .....	50
2.4. Conclusiones .....	54
<u>Capítulo 3. Comparación de curvas planas cerradas</u> .....	57
3.1. Introducción .....	57
3.2. Requisitos de los métodos de comparación de curvas .....	59
3.3. Descripción de una curva plana cerrada y sus propiedades .....	62
3.4. Métodos existentes de comparación de curvas .....	69
3.4.1. Método de mínimos cuadrados optimizando posición y orientación, o método LSOP (Least Squares Optimizing Position) .....	71
3.4.2. Método minimizando el error perpendicular o método MPE (Minimizing the Perpendicular Error) .....	75
3.4.3. Método de conversión en B-Spline o método BSC (B-Spline Conversion) .....	77
3.5. Propuesta de nuevos métodos de comparación de curvas .....	86

3.5.1. Método de las diferencias poligonales o método PD (Polygon Differences).....	87
3.5.2. Métodos de las diferencias poligonales incluyendo propiedades de la curva o métodos PDCP (Polygon Differences with Curve Properties) .....	98
3.5.3. Método de la curvatura de las curvas o método CC (Curvature of Curves) .....	104
3.5.4. Método del área entre las curvas o método ABC (Area Between Curves).....	107
3.6. Mejora de los métodos existentes .....	116
3.6.1. Método LSOP .....	118
3.6.2. Método MPE .....	122
3.6.3. Método BSC .....	123
3.7. Ensayo de los métodos .....	130
3.7.1. Definición de la curva requerida.....	131
3.7.2. Ensayo de conmutabilidad .....	132
3.7.3. Ensayo de comportamiento frente a cambio de tamaño de la curva.....	135
3.7.4. Ensayo de comportamiento frente a cambio de posición y orientación de la curva.....	138
3.7.5. Ensayo 1º de comportamiento frente a deformación progresiva de la curva .....	140
3.7.6. Ensayo 2º de comportamiento frente a deformación progresiva de la curva .....	147
3.7.7. Ensayo 3º de comportamiento frente a deformación progresiva de la curva .....	153
3.7.8. Ensayo de estabilidad .....	157
3.7.9. Evaluación del coste computacional .....	160
3.8. Análisis de resultados y conclusiones .....	163
<u>Capítulo 4. Comparación de curvas planas abiertas.....</u>	169
4.1. Introducción .....	169
4.2. Requisitos de los métodos de comparación de curvas abiertas .....	173
4.3. Propuesta de nuevos métodos de comparación de curvas abiertas .....	174
4.3.1. Métodos de superposición con 2 variables .....	175
4.3.2. Métodos de superposición con 1 variable.....	181
4.4. Ensayo de los métodos de adaptación .....	189

---

4.4.1. Ensayo 1 .....	191
4.4.2. Ensayo 2 .....	198
4.4.3. Ensayo 3 .....	202
4.4.4. Ensayo 4 .....	207
4.4.5. Ensayo 5 .....	210
4.5. Consideraciones de simetría y de sentido de la adaptación en las curvas .....	214
4.6. Análisis de resultados .....	217
4.6.1. Identificación .....	217
4.6.2. Rango útil .....	217
4.6.3. Óptimo logrado.....	219
4.6.4. Coste computacional.....	221
4.7. Conclusiones.....	221
<u>Capítulo 5. El espacio de diseño y la optimización</u> .....	225
5.1. Introducción.....	225
5.2. Análisis del espacio de diseño .....	227
5.2.1. Primera reducción del espacio de diseño .....	229
5.2.2. Segunda reducción del espacio de diseño .....	235
5.3. Análisis de la función objetivo en el espacio de diseño .....	247
5.3.1. Análisis preliminar bidimensional de la función objetivo.....	250
5.3.2. Análisis de la función objetivo en el caso $n$ -dimensional .....	254
5.4. Estrategias de optimización .....	265
5.5. Conclusiones.....	280
<u>Capítulo 6. Aplicación práctica</u> .....	283
6.1. Introducción.....	283
6.2. Aplicación a la sustitución del mecanismo de una amasadera.....	284
6.3. Aplicación al diseño de un mecanismo con pausa .....	293

6.4. Aplicación a la generación de una trayectoria con puntos dobles .....	311
6.5. Conclusiones .....	316
<u>Capítulo 7. Conclusiones</u> .....	319
7.1. Introducción .....	319
7.2. Conclusiones .....	320
7.2.1. Función objetivo .....	320
7.2.2. Espacio de diseño .....	322
7.2.3. Estrategia de optimización .....	323
7.3. Desarrollos futuros .....	324
<u>Bibliografía</u> .....	327
<u>Apéndice A. Definiciones relacionadas con la síntesis de mecanismos</u> .....	339
<u>Apéndice B. Formulación de definición de curvas B-Splines</u> .....	343
B.1. Definición de una B-Spline abierta.....	343
B.2. Definición de una B-Spline cerrada .....	344
B.3. Derivadas de la ecuación paramétrica de la B-Spline .....	345

## *Índice de abreviaturas*

ABC	Area Between Curves (método del área entre las curvas).
BSC	B-Spline Conversion (método de la conversión en B-Spline).
CC	Curvature of Curves (método de la curvatura de las curvas).
CET	Curva de Evolución de la Tangente.
DM	Diseño de Mecanismos.
ED	Espacio de Diseño.
EDA	Espacio de Diseño Acotado.
LSOP	Least Squares Optimizing Position (método de mínimos cuadrados optimizando la posición).
MCC	Método(s) de Comparación de Curvas.
MPE	Minimizing the Perpendicular Error (método de minimización del error perpendicular).
PD	Polygon Differences (método de las diferencias poligonales)
PDCP	Polygon Differences with Curve Properties (método de las diferencias poligonales incluyendo propiedades de las curvas).
SM	Síntesis de Mecanismos.
TE	Tangent Evolution (método de evolución de la tangente).
TMM	Teoría de Máquinas y Mecanismos



# Capítulo 1

## Introducción

---

### 1.1. El diseño de mecanismos.

---

El *diseño de mecanismos* (DM) es una disciplina cuyo objetivo es idear o seleccionar el mecanismo ideal para cumplir unos requisitos teniendo en cuenta unas consideraciones de diseño. Como en cualquier otro problema de diseño, estos requisitos pueden ser de naturaleza muy diversa, desde estéticos hasta funcionales, constituyendo un problema global. Un subproblema englobado por el DM pero mucho más acotado es el llamado *síntesis de mecanismos* (SM). El objetivo de la SM es el mismo que el del DM pero contemplando exclusivamente requisitos y consideraciones funcionales mecánicas. Así, la SM persigue idear o seleccionar el mecanismo ideal para lograr el cumplimiento de unos determinados requisitos de funcionalidad, normalmente relacionados con su movimiento, resistencia, rigidez, fiabilidad, etc.

Dado que los requisitos de diseño pueden ser de muy diversa índole, en general el DM es un problema que será resuelto por un equipo de profesionales entre los que se pueden encontrar ingenieros mecánicos, ingenieros de fabricación, diseñadores, expertos en calidad, etc. Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos el problema de DM se reduce a un problema de SM que puede ser resuelto utilizando criterios puramente mecánicos. En este trabajo se considera exclusivamente el DM desde este punto de vista mecánico, es decir, se considera el subproblema SM dentro del problema DM.

La SM constituye una parte básica de la *Teoría de Máquinas y Mecanismos*. Sin embargo, al contrario que otros pilares de otras disciplinas, *“la SM no es una doctrina con un cuerpo suficientemente elaborado”* (Nieto, 1978). Los motivos a los que se puede achacar esta falta de desarrollo son variados y han sido estudiados por diferentes investigadores a lo largo de la historia. F. Freudenstein (Freudenstein, 1973) apuntó que *“la diversidad de mecanismos realizados denota un atractivo universal, pero al mismo tiempo enmascara la complejidad de su diseño. El diseño de mecanismos no es una ciencia homogénea, la gran variedad de*

*dispositivos mecánicos y componentes produce un sinnúmero de combinaciones y funciones*". Con esto, Freudenstein dejaba patente que la SM es un problema tan general y puede manifestarse según tantas posibilidades diferentes que es difícilmente abordable de una forma global. Posteriormente, en la misma referencia, Freudenstein explica: *"cuanto menos homogénea es la ciencia, más retardado es su desarrollo"*. De esta forma atribuye la falta de evolución de la SM como parte de la Teoría de Máquinas y Mecanismos (TMM) a la diversidad de su naturaleza como problema.

Es generalizado (y muchos autores lo han manifestado) que la ciencia de los mecanismos tiene un atractivo especial. S. Kota escribió (Erdman, 1993) que *"los mecanismos han fascinado al hombre desde los días Bíblicos porque poseen un encanto intuitivo"*. En efecto, resulta fascinante observar el modo de funcionamiento de muchos mecanismos y mucho más pensar en cómo estos han podido ser ideados. Más adelante, Kota escribe *"La fascinación proviene del hecho de que comprender el movimiento de los mecanismos es sencillo, pero es mucho más difícil entender cómo se origina y por qué fue diseñado de la forma particular en la que se manifiesta"*. Así, interpretando lo escrito por Kota, los mecanismos resultan científicamente atractivos porque pueden realizar movimientos de una gran utilidad y así se observa durante su funcionamiento. Sin embargo, con frecuencia resulta sumamente complejo idear un mecanismo de semejante utilidad partiendo de su inexistencia.

Todas estas lecturas que son comunes en la literatura referente a la SM reflejan la inquietud de los estudiosos de la TMM por esta parte de esta ciencia que no ha sido fruto de una evolución y desarrollo paralelos a otras ciencias. La mayoría de los investigadores sobre TMM son conocedores de las dificultades que presenta la SM y tienen ideas propias sobre el porqué de esta dificultad que supone una auténtica traba en su desarrollo. Grandes han sido los esfuerzos que se han realizado para impulsar la tecnología destinada a la SM y grandes han sido también los problemas que han surgido en tales intentos. Tanto ha sido así que la SM se ha rodeado de cierto misticismo, y a lo largo de la historia se han llegado a considerar magos o genios a los que diseñaron mecanismos de una utilidad excepcional. Esto, en realidad, se puede considerar beneficioso para la SM pues ha supuesto un auténtico reto intelectual que ha incentivado la creación de nuevos y muy variados mecanismos de gran utilidad.

Por otro lado, el escaso desarrollo de la SM representa un grave perjuicio para el desarrollo tecnológico de la TMM. Los mecanismos como partes elementales de máquinas son los ladrillos con los que se construyen aquellas. Pero el diseño de un nuevo mecanismo está rodeado de grandes dificultades y, lógicamente, esto influye negativamente en el desarrollo del diseño de máquinas como disciplina. En la práctica esto supone que muchos mecanismos se están utilizando más como "la mejor solución encontrada" (no siendo, en muchos casos, ni

quiera una buena solución) que como “la mejor solución posible”. Por ejemplo, piénsese en el mecanismo biela-manivela que ha sido masivamente utilizado en motores de combustión de vehículos automóviles. Este mecanismo que transforma un movimiento rectilíneo en otro circular posee características desfavorables en su funcionamiento. En efecto, el pistón constituye una masa que se ve sometida a grandes cambios de velocidad, lo que implica grandes aceleraciones y, consecuentemente, grandes fuerzas de inercia. Estas fuerzas de inercia provocan, por un lado, una gran irregularidad en el movimiento y, por otro, grandes fuerzas internas entre los eslabones de los mecanismos que tendrán que ser transmitidas por los pares cinemáticos<sup>1</sup>. Para limitar la irregularidad del movimiento se han de incluir volantes de inercia pero esto aumenta todavía más la inercia del conjunto y supone un aspecto negativo cuando se pretende potenciar la capacidad de aceleración/deceleración del motor. Por otro lado, las fuerzas internas obligan a realizar un diseño robusto de los elementos del mecanismo (manivela, biela, pasadores de articulaciones, etc.), lo cual aumenta su masa e influye en la inercia y en la irregularidad del movimiento. Además, la velocidad media de funcionamiento impuesta al mecanismo se ve limitada por las fuerzas máximas que los elementos podrán resistir, quedando limitadas las prestaciones del motor.

Sin embargo, pese a los problemas descritos, este mecanismo es utilizado en millones de vehículos y, dada su extensión, utilidad y necesidad, cualquier nuevo mecanismo que mejorara el mecanismo biela-manivela supondría un enorme beneficio a nivel mundial.

Lo anterior es tan solo un ejemplo de que la SM es un pilar fundamental sobre el que se asienta la TMM, que su desarrollo influye enormemente en el de la TMM y que, por tanto, influye en el desarrollo industrial.

El estudio de la SM revela la procedencia de su complejidad. Se ha puesto de manifiesto anteriormente la falta de homogeneidad de la SM, pero ésta agrava el problema debido a que se manifiesta en diferentes aspectos relacionados con el mismo.

En primer lugar existe una gran falta de uniformidad en las soluciones posibles para un mismo problema de SM (existen numerosas tipologías de mecanismos y muchas no guardan ninguna relación entre sí). La solución casi siempre depende del planteamiento y las soluciones posibles pueden ser muy dispares.

En segundo lugar, las aplicaciones de los mecanismos son muy numerosas y cada una de ellas presenta unos requisitos concretos no extrapolables a otras aplicaciones. Esto supone que no es posible crear pautas de diseño generales ya que pueden cambiar según el caso.

En tercer lugar, toda esta falta de homogeneidad ha dado lugar a la creación de numerosos métodos (muy diferentes) para resolver problemas de síntesis enfocados hacia una

---

<sup>1</sup> Véase definición en el apéndice A.

determinada solución o aplicación, lo que implica falta de homogeneidad en el método de resolución. Esta situación exige un gran esfuerzo al diseñador, que ha de conocer muchos métodos (cada uno aplicable a unos pocos casos) y estar en continua alerta frente a la aparición de métodos nuevos que puedan mejorar sus diseños.

En definitiva, al enfrentarse a un problema de SM es posible utilizar multitud de tipos de mecanismos diferentes y cada uno de ellos se puede sintetizar planteando el problema de diferentes maneras y utilizando varios métodos. Esta elevada dispersión provoca que sea difícil certificar el logro de la solución óptima, ya que ésta depende del camino de resolución recorrido y este se ramifica una y otra vez.

La enorme heterogeneidad del problema de SM ha impedido que, hasta la fecha —es decir, con la tecnología disponible hasta el momento—, éste pueda ser abordado de una forma global. Por este motivo, desde los primeros momentos, el problema ha sido dividido una y otra vez con el fin de lograr subproblemas menores, más homogéneos, concretos y, en definitiva, abordables. Esta división ha proporcionado toda una familia de subproblemas de SM.

Además, cada uno de estos subproblemas se puede plantear de diferentes maneras, utilizando distintas estrategias. Algunos de estos planteamientos cuentan ya con una serie de métodos de resolución que proporcionan una amplia gama de soluciones de entre las que habrá que seleccionar la adecuada. Otros planteamientos aún no han sido estudiados y resueltos o apenas se ha comenzado a resolverlos.

Por otra parte, los métodos de resolución han cambiado mucho a lo largo de la corta historia de la SM. En la actualidad, la creciente potencia de cálculo de los ordenadores digitales inclina la balanza de los métodos de resolución hacia el lado numérico. De esta forma, la posibilidad de abordar los subproblemas de una forma cada vez más global depende en gran medida de la capacidad de cálculo actual y de cómo ésta evolucione con el tiempo. Dado que hasta la fecha el crecimiento de la capacidad de cálculo con respecto al tiempo es muy superior a un crecimiento lineal, es previsible que en un futuro próximo los métodos de resolución aplicados a la SM sean capaces de resolver problemas cada vez más globales, aportando soluciones mejores y eliminando los problemas que genera la falta de homogeneidad.

## **1.2. Subdivisión del problema de síntesis de mecanismos.**

---

La estrategia de la subdivisión se ha utilizado desde los primeros tiempos como única alternativa para enfrentarse al la resolución de problemas de SM. La subdivisión ha dado lugar a una jerarquización de los problemas, existiendo una gran diversidad de tipos. En consecuencia, es posible encontrar en la literatura diferentes formas de clasificar y agrupar los problemas, atendiendo a diversos criterios.

En la figura 1.1 se observa una típica clasificación de los subproblemas en los que se ha dividido la SM. En primera instancia se divide el problema en dos grandes categorías: síntesis de *mecanismos planos*<sup>2</sup> y síntesis de *mecanismos espaciales*<sup>2</sup>. La inclusión de una nueva dimensión al pasar de mecanismos planos a mecanismos espaciales complica considerablemente el problema de síntesis. Tanto es así que hasta hace relativamente poco tiempo solamente existían soluciones para síntesis de mecanismos planos, siendo muy recientes los trabajos orientados al diseño de mecanismos espaciales. Así, J. Nieto (Nieto, 1978) afirmó en 1978 que “*aún estaba por escribir el primer libro dedicado a la síntesis de mecanismos espaciales*”. De hecho en la actualidad el problema de síntesis tridimensional todavía no ha sido abordado de una forma extensiva, únicamente se ha trabajado en la síntesis de determinados mecanismos espaciales con una utilidad muy concreta. Solamente existen métodos de síntesis de mecanismos espaciales para algunos casos, muy pocos en relación a las numerosas posibilidades con las que se pueden diseñar estos mecanismos.

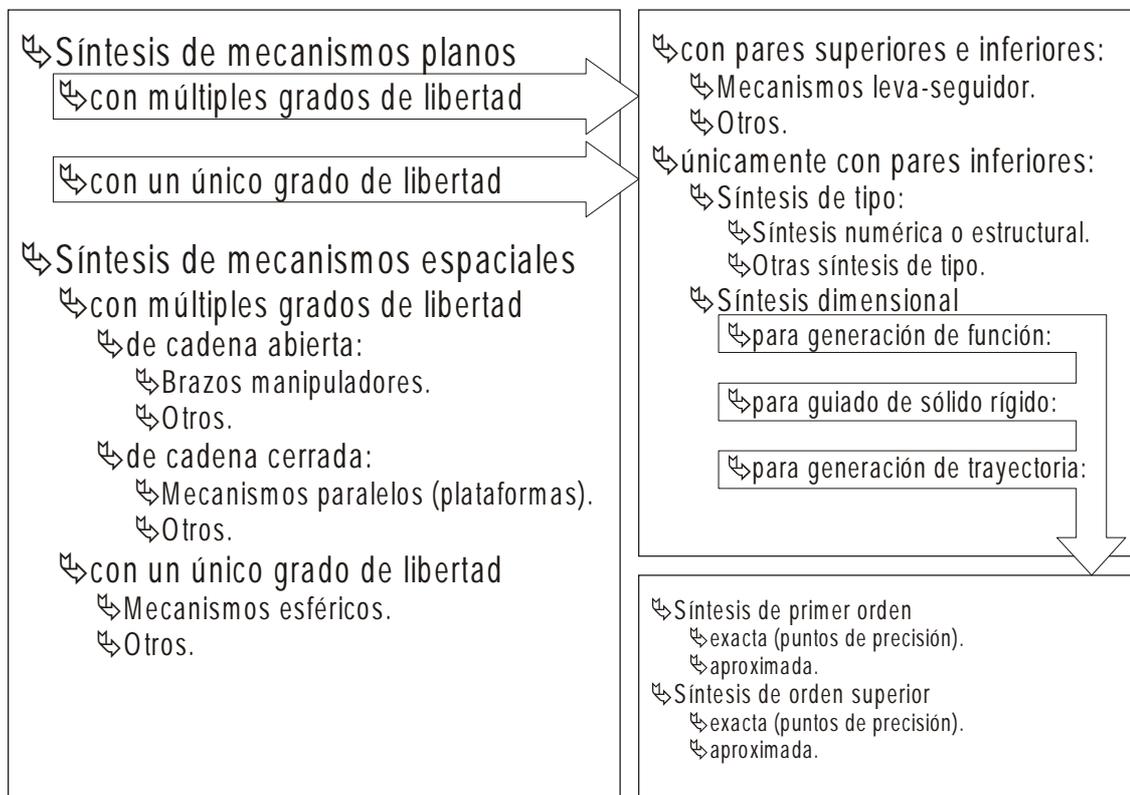


Figura 1.1. Clasificación de los tipos de síntesis de mecanismos.

<sup>2</sup> Véase definición en el apéndice A.

El problema de síntesis de mecanismos espaciales puede subdividirse en dos grupos atendiendo al número de grados de libertad —que puede ser uno o varios— del mecanismo que se va a diseñar. Dentro de los mecanismos espaciales con múltiples grados de libertad, se ha trabajado especialmente en dos casos: *brazos manipuladores* y *mecanismos paralelos*.

Los primeros son mecanismos de cadena abierta (también conocidos como *robots manipuladores*) y están constituidos por una serie de barras dispuestas en serie y conectadas mediante pares que, en conjunto, proporcionan una gran movilidad<sup>3</sup> a un actuador final. Este tipo de mecanismos se ha extendido mucho en aplicaciones industriales durante los últimos tiempos debido a su gran versatilidad y movilidad<sup>4</sup>, teniendo como principal inconveniente el hecho de que debido a su configuración —eslabones dispuestos en serie y cadena cinemática<sup>5</sup> abierta— acumulan el error de posicionamiento de los diferentes pares cinemáticos desde la base hasta el actuador final, creciendo este error con la fuerza aplicada en dicho actuador. La síntesis de este tipo de mecanismos se centra en la elección de los pares y la determinación de la longitud de las barras de forma que se obtengan una movilidad y precisión óptimas.

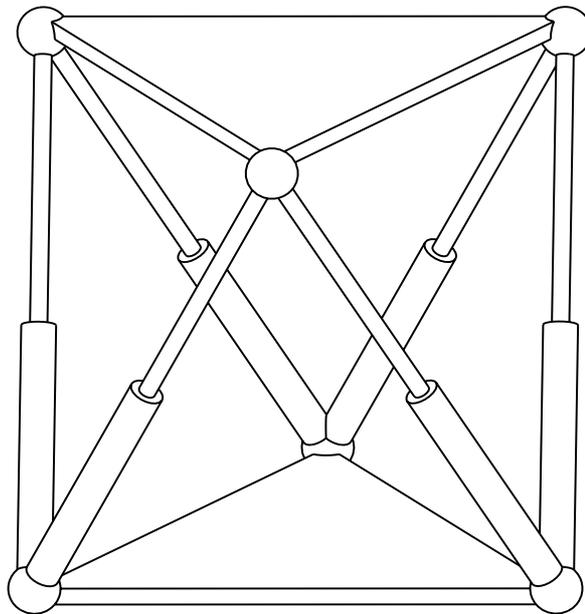


Figura 1.2. Plataforma de Stewart.

---

<sup>3</sup> Entendida aquí como *capacidad de movimiento*.

<sup>4</sup> No solo pueden alcanzar a cualquier punto dentro de su espacio accesible, sino que además pueden acceder a cada punto según un amplio rango de direcciones.

<sup>5</sup> Véase definición en el apéndice A.

Por su parte, los *mecanismos paralelos* son mecanismos en los cuales los eslabones y pares forman parte de dos o más cadenas cinemáticas (que están dispuestas para funcionar en paralelo). Existen muchas posibles configuraciones de mecanismos de este tipo, siendo la más conocida la Plataforma de Stewart (figura 1.2) que fue introducida como base para un simulador de vuelo por Stewart en 1965 (Stewart, 1965). Este mecanismo consta de una plataforma superior que hace el papel de actuador final movida por diferentes cilindros hidráulicos formando cadenas cinemáticas paralelas. Sus seis grados de libertad le proporcionan una gran movilidad a la vez que una precisión considerablemente mayor que los *brazos manipuladores*. En efecto, la disposición de los eslabones formando cadenas cerradas disminuye sustancialmente el error de posicionamiento ya que evita su acumulación. Esta mayor precisión es una de las características que les permite competir con los *brazos manipuladores* en aplicaciones en las que se pueden utilizar ambos mecanismos. Otra característica es la mayor fuerza que pueden realizar o mejor relación fuerza/precisión.

La síntesis de *mecanismos paralelos* se centra, fundamentalmente, en la búsqueda de nuevas configuraciones (síntesis de tipo) y en el dimensionamiento de los eslabones para el cumplimiento de una serie de requisitos de movilidad.

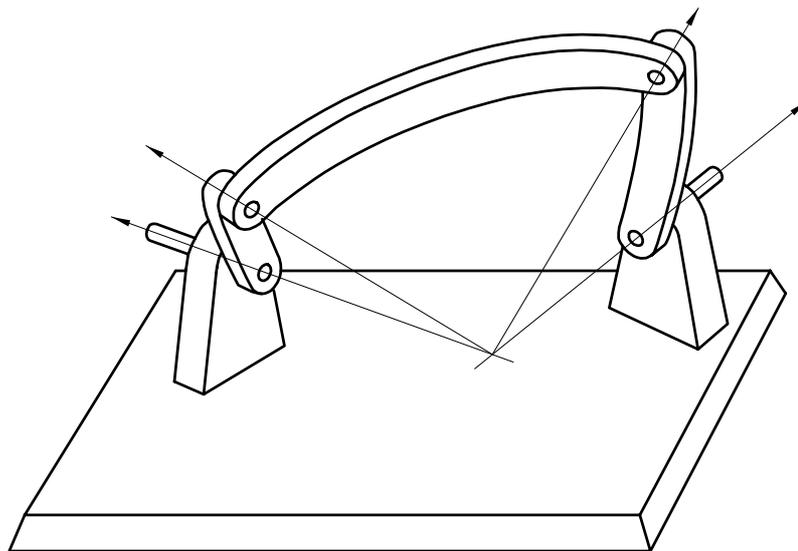


Figura 1.3. Mecanismo de 4 barras esférico.

Por otro lado, dentro de la categoría de *síntesis de mecanismos espaciales con un único grado de libertad*<sup>6</sup> destacan los esfuerzos realizados para lograr métodos de diseño de *mecanismos esféricos* (figura 1.3). Estos mecanismos se caracterizan porque generalmente poseen únicamente pares inferiores<sup>6</sup> y estos pares se mueven dentro de superficies esféricas.

---

<sup>6</sup> Véase definición en el apéndice A.

Muchos mecanismos planos de pares inferiores tienen su mecanismo esférico equivalente en el espacio. Esta equivalencia llega incluso a los problemas de síntesis, de tal forma que la *síntesis de mecanismos esféricos* tiene características similares a la *síntesis de mecanismos planos con pares inferiores* en lo referente a tipología, objetivos y requisitos.

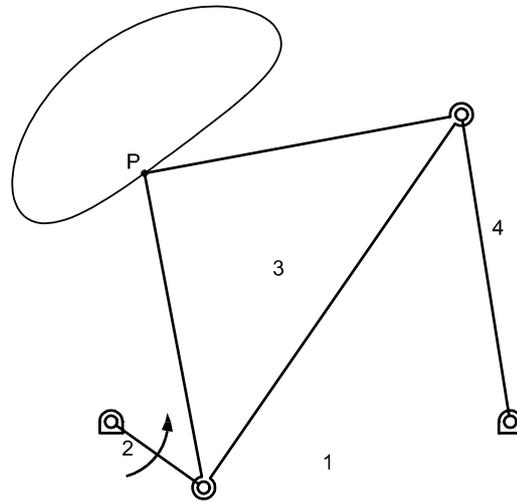


Figura 1.4. Curva de puntos alcanzables por un punto de un mecanismo plano con un grado de libertad.

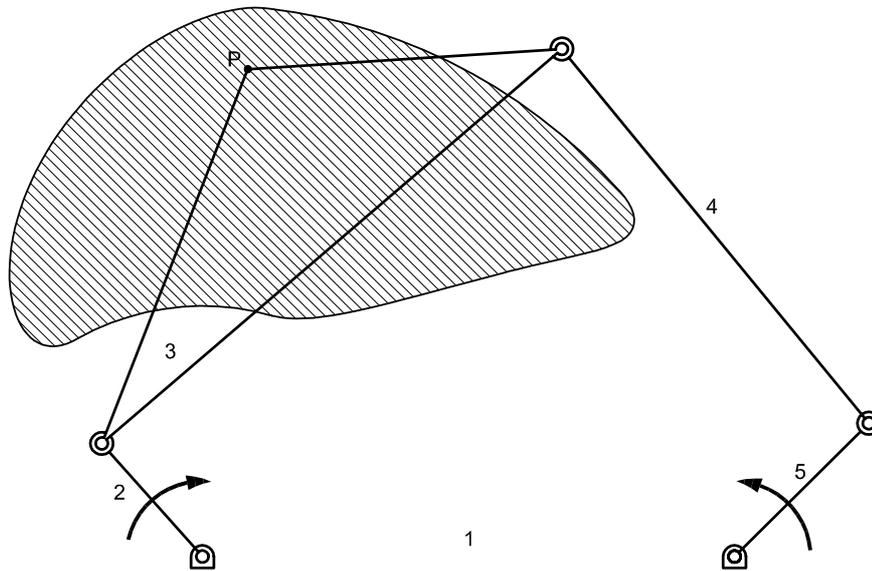


Figura 1.5. Área alcanzable por un punto de un mecanismo plano con dos grados de libertad.

En el subgrupo de *síntesis de mecanismos planos* se encuentran todos los problemas de síntesis relacionados con mecanismos en los que todos los puntos describen trayectorias

planas durante el movimiento. Este subgrupo fue el primero en ser investigado allá en los albores de la SM, aportando soluciones a los casos más sencillos.

En primera instancia, el *problema de síntesis de mecanismos planos* se puede dividir en aquellos problemas que atañen a *mecanismos con múltiples grados de libertad* y *mecanismos con un único grado de libertad (desmodrómicos)*. Los primeros son mecanismos que, en el plano tienen una gran movilidad (por ejemplo, un mecanismo plano con dos grados de libertad puede alcanzar cualquier punto de su área de trabajo. Véase figura 1.5). Por el contrario, los *mecanismos desmodrómicos* (figura 1.4) poseen una movilidad restringida y solamente pueden alcanzar los puntos de un lugar geométrico unidimensional (como una curva plana). Sin embargo y pese a su menor movilidad, los segundos han sido y son más utilizados que los primeros en aplicaciones industriales. Los motivos son varios y entre ellos destaca el hecho de que los *mecanismos desmodrómicos* son mucho más precisos y fiables, no necesitan más que un accionamiento y con ello evitan los problemas derivados de la coordinación de varios accionamientos, son robustos y duraderos y, consecuentemente, su mantenimiento es casi nulo. En definitiva, resulta siempre aconsejable utilizar mecanismos desmodrómicos (frente a mecanismos con múltiples grados de libertad) allí donde es posible.

Cada uno de los dos subgrupos anteriores puede, a su vez subdividirse de forma similar —como se observa en la figura 1.1— en *mecanismos con pares superiores<sup>7</sup> e inferiores* y *mecanismos únicamente con pares inferiores*. Dentro de los primeros existe una muy amplia variedad de tipologías, entre las que destacan los mecanismos con pares tipo leva-seguidor. Estos mecanismos se caracterizan por presentar un diseño muy flexible, pudiendo conseguir un muy elevado abanico de posibilidades de movimiento. Por el contrario, son mecanismos caros y sufren de desgaste, necesitando unas condiciones de trabajo óptimas (lubricación, mantenimiento, etc.) para su buen funcionamiento.

Una vez más, en estos *mecanismos con pares superiores e inferiores*, la elevada diversidad de soluciones ha ocasionado que el problema de síntesis no sea abordado de una forma global, sino que se hayan creado métodos muy específicos para dar solución a casos concretos.

El segundo subgrupo —*mecanismos que cuentan únicamente con pares inferiores*, también llamados *mecanismos de barras (linkages)*— incluye los primeros mecanismos que fueron analizados de forma extensiva. Dentro de estos mecanismos clásicos se encuentra *el mecanismo de cuatro barras* y *el mecanismo biela-manivela* que son, probablemente, los mecanismos más utilizados en aplicaciones industriales.

---

<sup>7</sup> Véase definición en el apéndice A.

Los mecanismos de barras constituyeron el objeto de trabajo de la SM clásica. En efecto, los primeros trabajos de síntesis fueron realizados sobre mecanismos planos con pares inferiores, siendo ésta la parte de la SM más desarrollada.

El problema de *síntesis de mecanismos de barras* ha sido subdividido tradicionalmente en dos subgrupos atendiendo al objetivo de la síntesis (figura 1.1). El primero de ellos, llamado *síntesis de tipo* persigue encontrar el tipo de mecanismo ideal —es decir, la configuración ideal de barras y pares cinemáticos— para cumplir los requisitos de diseño. Dentro de este subgrupo de problemas de SM destaca el llamado *síntesis numérica o estructural*, cuyo objetivo es relacionar número de barras y número y tipo de pares cinemáticos con el grado de movilidad de la configuración resultante. Otros problemas de síntesis tratan sencillamente de estudiar todas las configuraciones posibles con un grupo de barras y pares cinemáticos con el fin de obtener información útil para el diseño, o de obtener la mejor configuración para reproducir un movimiento de unas características concretas en base a pautas de comportamiento conocidas.

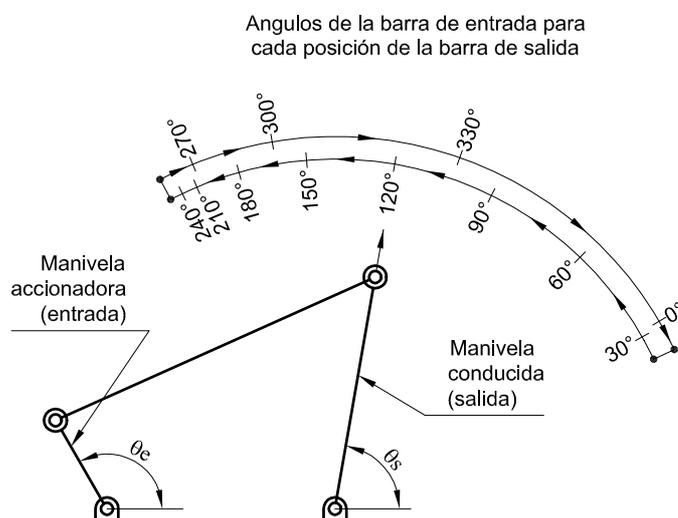


Figura 1.6. Relación entre el ángulo de entrada y el de salida en un mecanismo de 4 barras.

El segundo subgrupo de la síntesis de mecanismos de barras es el constituido por los problemas de *síntesis dimensional*. En este caso, se parte de un mecanismo de un tipo concreto (conocido de antemano) y el objetivo es determinar las dimensiones ideales del mecanismo para cumplir los requisitos de movimiento. Atendiendo al tipo de requisitos exigido en el problema de *síntesis dimensional*, éste ha sido tradicionalmente subdividido en tres tipos de síntesis: *síntesis dimensional para generación de función*, *síntesis dimensional para guiado de sólido rígido* y *síntesis dimensional para generación de trayectorias*.

En *síntesis dimensional para generación de función* el objetivo es coordinar las barras de entrada y salida del mecanismo, por lo que los requisitos vendrán expresados en términos de esta coordinación. Generalmente se pretende coordinar una variación angular (de entrada)

con otra variación angular (de salida) o una variación angular con la variación de una distancia. Utilizando como ejemplo el mecanismo de 4 barras (figura 1.6), los requisitos para generación de función relacionan ángulos de la barra de entrada (manivela accionadora) con los ángulos de la barra de salida (manivela conducida).

En el caso de *síntesis dimensional para guiado de sólido rígido* el objetivo es obtener las dimensiones de un mecanismo tal que sea capaz de mover un sólido rígido cumpliendo unos requisitos. Dado que un sólido rígido en el plano tiene tres grados de libertad, los requisitos serán de posición del sólido rígido y también de orientación del mismo. En el mecanismo de cuatro barras (figura 1.7), las dos manivelas poseen movimientos de rotación pura, siendo la biela la que sufre un movimiento de rotación y traslación. Consecuentemente, cuando se utiliza este mecanismo para guiar un sólido rígido, es la biela la barra que realiza el guiado y el objetivo de la síntesis es encontrar las dimensiones necesarias para que el movimiento descrito por la biela se ajuste a los requisitos del problema.

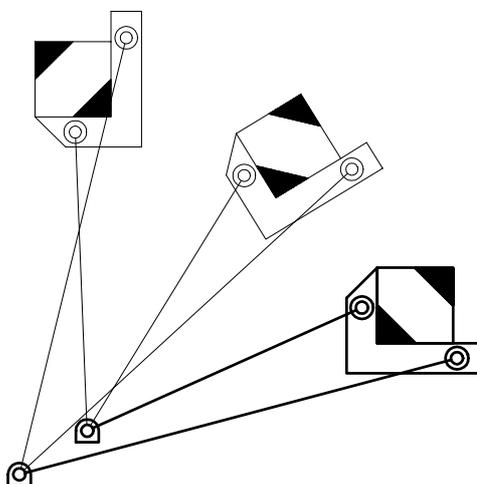


Figura 1.7. Mecanismo de 4 barras para guiado de sólido rígido.

Finalmente, en el caso de *síntesis dimensional para generación de trayectoria* (o *síntesis de trayectoria*) el objetivo es conseguir las dimensiones de un tipo de mecanismo tal que un punto de una de sus barras (o eslabones) trace una trayectoria que cumpla los requisitos del problema. Volviendo al ejemplo del cuatro barras, todos los puntos de las dos manivelas trazan circunferencias perfectas (ya que ambas realizan movimientos de rotación pura), siendo la biela la única que realiza un movimiento compuesto de rotación y traslación. Esta barra tiene asociado un plano local (que se mueve con la misma) y cada uno de los puntos en dicho plano traza una trayectoria diferente (figura 1.8). Así pues, la *síntesis de trayectoria* persigue encontrar las dimensiones de todas las barras del mecanismo y las coordenadas del punto trazador de la biela dentro de su plano local tales que la trayectoria trazada cumpla de forma ideal los requisitos impuestos.

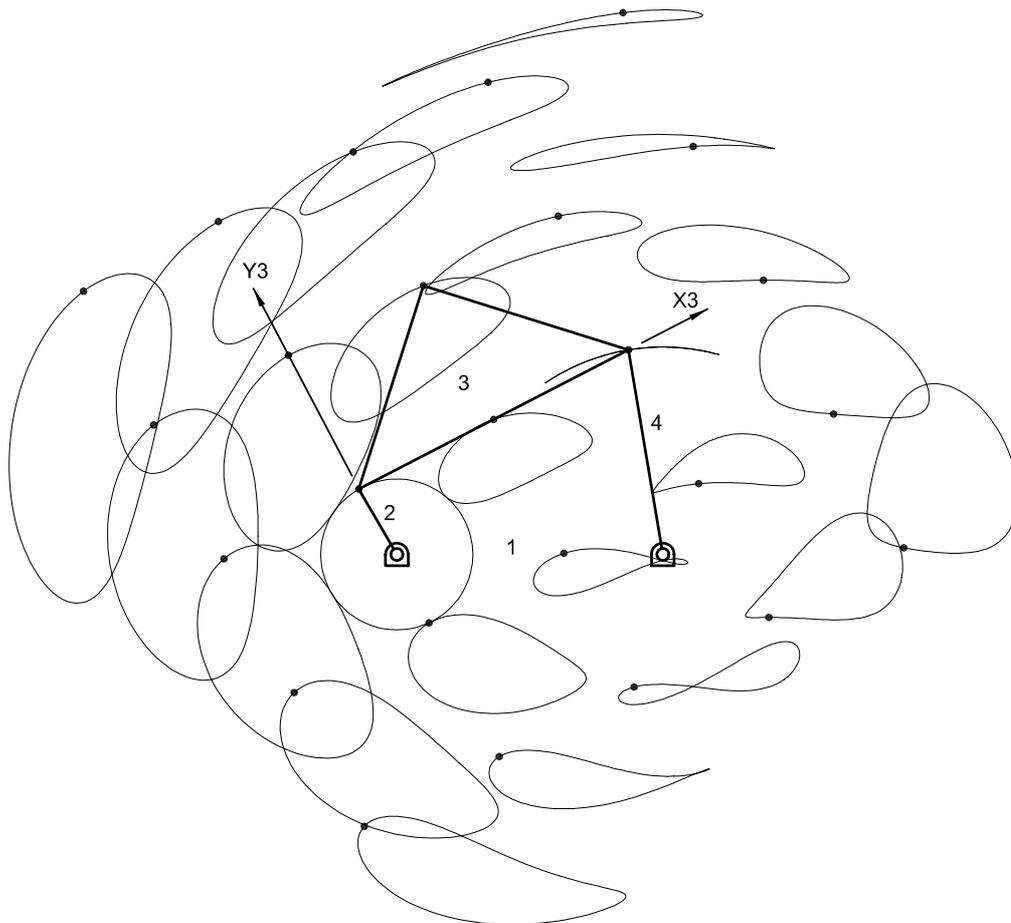


Figura 1.8. Curvas trazadas por diferentes puntos del acoplador de un mecanismo de 4 barras.

En los tres casos de síntesis dimensional expuestos, los requisitos pueden venir especificados con prescripción de tiempo o sin prescripción de tiempo. En el primer caso, los requisitos atañen no solo a la posición sino también al tiempo que el mecanismo emplea para adoptar esa posición. De esta forma, en la síntesis se está condicionando la velocidad del mecanismo que es la derivada temporal del espacio (lineal o angular) recorrido. Por este motivo a este tipo de síntesis se le da el nombre de *síntesis de orden superior*. En contrapartida, si los requisitos especifican parámetros relacionados con la posición, independientemente del tiempo que el mecanismo emplea para llegar a esa posición, el problema de síntesis es llamado *síntesis de primer orden*.

Es lógico pensar que los problemas de síntesis son más complejos cuando los requisitos incluyen el factor tiempo que cuando no, por lo que los métodos de solución de tales problemas aportan soluciones menos óptimas.

Tradicionalmente, los requisitos de los problemas de síntesis dimensional de mecanismos planos han sido especificados de forma discreta en determinadas posiciones conocidas como *puntos de precisión*. Así, el mecanismo sintetizado debía cumplir los requisitos pasando por todos los puntos —o posiciones— de precisión. Sin embargo, las incógnitas del problema de síntesis son las dimensiones del mecanismo y éstas son limitadas en número. Por este motivo, existe un máximo en el número de puntos de precisión que un mecanismo puede satisfacer de forma exacta. Si se requiere un número de puntos de precisión mayor que este máximo no será posible, en general<sup>8</sup>, que el mecanismo pase por todos los puntos de forma exacta. En tal caso y sabiendo por adelantado que resulta imposible cumplir todos los requisitos con total precisión, puede interesar conocer las dimensiones del mecanismo que mejor cumple los requisitos —que pasa lo más cerca posible de todos los puntos de precisión—, es decir, interesa conocer las dimensiones óptimas del mecanismo según esos requisitos. En tal caso el problema de síntesis se convierte en un problema de optimización y recibe el nombre de *síntesis aproximada*.

En los problemas de *síntesis aproximada* puede ocurrir que, como se ha comentado, los requisitos vengan especificados en forma de puntos de precisión excediendo en número el límite del tipo de mecanismo sintetizado. Pero es posible que, sencillamente los requisitos sean de otra índole, expresados de forma continua o incluso expresando condicionantes de diseño que nada tienen que ver con la posición o el tiempo. Así pues, la *síntesis dimensional aproximada de mecanismos planos* da solución a un problema más general —en tanto en cuanto admite requisitos de cualquier tipo— que la *síntesis exacta en punto de precisión*.

Por otro lado los problemas de optimización —excepto en los casos más simples— han logrado ser resueltos gracias a la elevada potencia de cálculo de los ordenadores digitales y, consecuentemente, los primeros métodos de solución de problemas de *síntesis aproximada* aparecieron mucho después que los *métodos de síntesis exacta*. A medida que la potencia de cálculo de los ordenadores aumente, será posible resolver problemas de síntesis cada vez más globales, incluyendo requisitos más variados y complejos y asegurando cada vez más la obtención del óptimo global.

### 1.3. Objetivos.

---

El objetivo último de esta tesis es enunciado como “*la mejora de los recursos metodológicos existentes en síntesis dimensional aproximada de mecanismos planos para generación de trayectoria sin prescripción de tiempo*”. Para ello se persigue el diseño de una

---

<sup>8</sup> Salvo que los puntos cumplan una serie de condiciones, de la misma forma en la que solo es posible trazar una circunferencia que pasa por cuatro puntos si uno de ellos cumple la ecuación de la circunferencia que pasa por los otros tres; no siendo éste el caso más general.

estrategia numérica que permita, en la medida de lo posible, obtener las dimensiones óptimas del mecanismo para la generación aproximada de una trayectoria requerida.

Un parámetro importante en la obtención del óptimo global es el coste computacional implicado, por lo que un segundo objetivo consiste en probar la viabilidad práctica de la estrategia planteada mediante la implementación del método en un programa informático capaz de resolver casos prácticos de síntesis.

La consecución de estos dos objetivos principales se plantea mediante la consecución de los siguientes objetivos estratégicos intermedios:

- La reducción del espacio de diseño. El espacio de diseño de los mecanismos desmodrómicos planos es extraordinariamente vasto incluso para los mecanismos más sencillos (cuenta con 8 dimensiones para los casos más simples). Para conseguir la posición del óptimo global se propone el uso de técnicas de reducción del mismo. Cualquier reducción del espacio de diseño supondrá un incremento en la probabilidad de lograr el óptimo global, por lo que el cumplimiento de este objetivo contribuirá al logro de los objetivos generales.
- La formulación de una función objetivo<sup>9</sup> computacionalmente económica. Dado que la función objetivo se encarga de evaluar los puntos del espacio de diseño y en la resolución de un problema de síntesis óptima será necesario evaluar enormes cantidades de puntos, resulta fundamental la minimización del tiempo invertido en la evaluación de cada punto —tiempo de operación de la función objetivo—. En efecto, debido a este elevado número de evaluaciones, cualquier mínima disminución del coste de la función objetivo tendrá repercusiones significativas en el tiempo de todo el proceso de optimización. Por este motivo, se plantea el objetivo de diseñar una función objetivo computacionalmente económica a la vez que compatible con la reducción máxima del espacio de diseño.
- La utilización de una estrategia robusta que permita asegurar el logro del óptimo global. En base al objetivo último de la tesis, se plantea como objetivo el planteamiento de una estrategia que permita asegurar el logro del óptimo global si se emplea el tiempo de computación suficiente, aparte de minimizar este coste. Este objetivo tiene como finalidad estimar el coste computacional asociado a la consecución del óptimo global y las vías según las cuales éste puede ser disminuido.
- El análisis de diferencias entre síntesis de trayectorias abiertas y cerradas. Aparte de los objetivos anteriores, también se establece como objetivo el estudio de las diferencias de

---

<sup>9</sup> Función que se pretende minimizar en la optimización de las dimensiones del mecanismo. En síntesis dimensional de trayectoria, esta función compara, de una forma u otra, la curva generada por el mecanismo con la curva requerida.

planteamiento entre los problemas de síntesis en los que se requiere la generación de una trayectoria abierta y los problemas de síntesis para generación de trayectorias cerradas. Esto incluye estudiar la posibilidad de proposición de estrategias de resolución comunes para ambos tipos de síntesis de trayectoria.

## 1.4. Plan de trabajo.

---

Para la consecución de los objetivos de la tesis, se propone el siguiente plan de trabajo:

- a) Revisión bibliográfica de los métodos de síntesis dimensional de mecanismos planos; con especial énfasis en la síntesis para generación de trayectoria y, dentro de ésta, en los métodos de síntesis óptima —síntesis mediante optimización—.
- b) Detección de los problemas inherentes a la síntesis óptima y detección de las limitaciones de los métodos existentes.
- c) Estudio por separado de las diferentes partes que constituyen el problema de síntesis óptima de trayectoria:
  - Función objetivo.
    - Estudio de los requisitos de la función objetivo en síntesis óptima de trayectoria.
    - Estudio de las similitudes y diferencias entre la síntesis de trayectorias abiertas y la síntesis de trayectorias cerradas.
    - Estudio detallado de las principales funciones objetivo propuestas por otros investigadores. Determinación de sus limitaciones y mejora de las mismas.
    - Propuesta de nuevas funciones objetivo en base a las mejoras de las existentes, contemplando los requisitos establecidos y con especial énfasis en la economía de cálculo.
    - Elaboración de un conjunto de ensayos en función de las características requeridas y contrastación de las funciones objetivo nuevas y existentes.
  - Espacio de diseño.
    - Estudio dimensional del espacio de diseño para el cuadrilátero articulado: su tamaño, la relación entre sus puntos.
    - Estudio de posibles reducciones del espacio de diseño que conduzcan a un aumento en las probabilidades de obtención del óptimo global.

- Estudio de la función objetivo en el espacio de diseño: su evolución, su número de mínimos y la probabilidad de obtención del óptimo global.
- Algoritmo de optimización.
  - Estudio de las estrategias planteadas hasta el momento para la síntesis óptima de trayectoria. Análisis de sus limitaciones.
  - Estudio de los algoritmos de optimización existentes con especial atención a sus limitaciones y el coste computacional.
  - Estudio de la posibilidad de planteamiento de una estrategia de optimización para la consecución del óptimo global en síntesis óptima de trayectoria.
- d) Implementación de la estrategia de optimización seleccionada constituyendo una herramienta informática para la síntesis óptima de trayectoria.
- e) Selección de casos prácticos de síntesis de trayectoria y obtención de resultados. Análisis de los resultados atendiendo a los criterios mecánicos habituales de evaluación de mecanismos.
- f) Extracción de conclusiones y planteamiento de posibles vías de continuación. Estudio de la posible extensión del método a otros casos de síntesis dimensional.

# Capítulo 2

## Antecedentes

---

### Introducción

---

La síntesis de mecanismos planos es una disciplina englobada por la ingeniería mecánica que se encarga de proporcionar métodos para obtener mecanismos planos capaces de cumplir tareas específicas representadas por medio de unos requisitos de diseño.

Esta materia empezó a ser estudiada sistemáticamente a finales del siglo XIX —cabe citar los trabajos de Burmester (Burmester, 1888), Müller (Müller, 1892), Allievi (Allievi, 1895) y Somov (Somov, 1899), entre otros— y desde entonces el número de investigadores que han realizado trabajos relacionados con ésta ha crecido notablemente.

Según Nieto (Nieto, 1978), la historia de la síntesis dimensional puede dividirse en tres etapas claramente diferenciadas. La primera etapa comprende desde la construcción de las primeras máquinas en los tiempos antiguos hasta la década de 1870 (aprox.). Esta etapa se caracteriza por una carencia de estudio disciplinado y, consecuentemente, por un crecimiento aleatorio del conocimiento relacionado con el diseño de máquinas bajo la presión de la necesidad. Pese a la no sistematización y la falta de disciplina en la investigación, cabe destacar los trabajos de algunos eruditos del período tales como Leonardo Da Vinci (1452-1519), que fue creador de varias máquinas y escribió varios libros de rico contenido mecánico; J. Watt (1736-1783) que fue el primero en realizar trabajos orientados a la síntesis de movimiento; Ampère (1775-1836) que introdujo el concepto de *cinemática*<sup>10</sup> o Reuleaux (1829-1905) que sentó las bases de la cinemática moderna en su libro "*Cinemática*".

La segunda etapa, que comprende desde algún momento de la década de 1870 hasta fin de la primera mitad del siglo XX, se caracterizó por la existencia de varias escuelas —francesa, alemana, inglesa y rusa, principalmente— que trabajaron fundamentalmente en dos enfoques del problema de síntesis dimensional: el desarrollo de métodos gráficos y el desarrollo de métodos analíticos. El primero fue trabajado sobre todo por la escuela alemana,

---

<sup>10</sup> Derivada de la palabra griega que da nombre al movimiento.

cuyos miembros utilizaron herramientas gráficas como única vía de solución de los problemas de síntesis dimensional (en ausencia de máquinas de cálculo). Los primeros casos fueron planteados en términos de puntos de precisión (*síntesis exacta*<sup>11</sup>) y se crearon métodos para dar solución a problemas con un número creciente de ellos, creando una teoría de curvatura considerable para tal fin. Por otro lado la escuela rusa propuso alternativas analíticas para los mismos casos de síntesis.

Publicaciones clásicas de este período son monografías tales como "*Lehrbuch der Kinematik*<sup>12</sup>" (Tratado de cinemática), debida a Burmester (Burmester, 1888) o "Cinemática della biella plana" (Allievi, 1895) y numerosas publicaciones científicas.

Al final de este segundo período, la síntesis de mecanismos estaba totalmente consolidada como parte de la ciencia, se estudiaba el acoplador de los mecanismos como la barra más fecunda, se habían creado numerosos métodos de síntesis para otros tantos casos e incluso se habían elaborado trabajos iniciales relacionados con el análisis y la síntesis de mecanismos espaciales.

La tercera etapa comprende desde mediados del siglo XX hasta la actualidad. Esta etapa se caracteriza por la introducción de las rápidas máquinas de cálculo en la síntesis dimensional, llegando a adaptarse ésta última a la filosofía de trabajo de las primeras para permitir que los problemas sean abordados de una forma eficiente. Si la segunda etapa era la *etapa gráfica y analítica*, esta tercera puede llamarse la *etapa numérica*.

También es patente la influencia del progreso mundial, que ha permitido la existencia de un incontable número de investigadores dedicados al desarrollo del diseño de máquinas. Esto ha proporcionado un creciente número de los trabajos publicados y una enorme dispersión de los métodos propuestos. En la actualidad se han publicado numerosos libros relacionados con la síntesis de mecanismos y existen diferentes revistas de investigación relacionadas con esta disciplina. Esto facilita la difusión de las investigaciones realizadas entre los científicos de la materia y asegura el desarrollo de la misma.

Sin embargo, y pese a todos los avances en la metodología científica nombrados anteriormente, se observa que la síntesis dimensional de mecanismos sigue siendo un terreno en continua exploración ya que periódicamente se publican diferentes propuestas de nuevos métodos para resolver el problema.

La mayoría de los trabajos de investigación recientes pueden clasificarse dentro de una de las siguientes categorías:

---

<sup>11</sup> Véase definición en el apéndice A.

<sup>12</sup> Obra maestra que introdujo de forma extensiva numerosos métodos gráficos para síntesis con puntos de precisión finita e infinitesimal. Constituye un clásico de la materia que aún hoy es referenciada por numerosos investigadores.

- Trabajos relacionados con la síntesis de tipo. En los últimos años ha tenido cierto auge la investigación sobre la generación de cadenas cinemáticas y la selección del tipo adecuado para la realización de unas determinadas tareas. La mayor parte de los trabajos recientemente publicados están relacionados con la generación de cadenas cinemáticas contemplando ciertas características requeridas y las posteriores técnicas de detección de cadenas isomórficas<sup>13</sup>, degeneradas, simétricas, etc (Vucina y Freudenstein, 1991) (Yan, 1992) (Dijksman y Timmermans, 1994) (Yadav *et al.*, 1995) (Liu y Yu, 1995) (Tuttle, 1996) (Nageswara y Rao, 1996) (Rao, 1997a) (Rao, 1997b). También existen otros trabajos con aplicaciones más específicas como, por ejemplo, el método geométrico para la generación de pantógrafos de 5 barras, presentado por Lu y Hwang (Lu y Hwang, 1996).
- Trabajos relacionados con la síntesis dimensional. Como se ha visto, la síntesis dimensional tiene una gran carga histórica. Sin embargo, en los últimos años aún se siguen desarrollando nuevos métodos de síntesis que intentan aprovechar al máximo la creceinte potencia de los ordenadores de cálculo. No obstante, también se publica un número considerable de trabajos de desarrollo de la síntesis más tradicional. De una forma no rigurosa, todos estos trabajos que tienen relación con la síntesis dimensional pueden ser clasificados en los siguientes subgrupos:
  - Trabajos de desarrollo de la cinemática clásica y de los métodos clásicos de síntesis. Dentro de este grupo se encuentran trabajos variados. Algunos de ellos son modernos desarrollos de las teorías de Burmester (Prentis, 1991a) (Prentis, 1991b) (Wu y Wu, 1998). Otros estudian y aplican nuevos algoritmos para la obtención de las curvas clásicas —curva de punto central (Murray y McCarthy, 1996) (Murray y McCarthy, 1997), curva de transición (Gibson *et al.*, 1996) (Pennestrí, 1998), curva de polos (Brady y Peterson, 1995), etc.—, existiendo también otros trabajos dignos de consideración (Hall, 1992).
  - Trabajos de síntesis de mecanismos espaciales. La síntesis de estos mecanismos con movimiento tridimensional ha tenido un desarrollo creciente ne los últimos años. La mayoría de los trabajos proponen nuevos métodos de síntesis (Chiang *et al.*, 1994) (Liang, 1995) (McCarthy, 1995) (Jiménez *et al.*, 1997), aunque existen otros trabajos aislados pero significativos, como el trabajo de Parikian (Parikian, 1997) que intentan relacionar diferentes mecanismos espaciales cognados<sup>13</sup> o el trabajo de Shi (Shi, 1997) que introduce un modelo probabilístico de error mecánico en la síntesis de mecanismos espaciales. Aun así, el problema tridimensional es sensiblemente más complejo que el

---

<sup>13</sup> Véase definición en el apéndice A.

bidimensional y, por ello, esta parte de la síntesis lleva un gran retraso en su desarrollo en comparación con la síntesis de mecanismos planos.

- Trabajos de síntesis específicos de mecanismos de cadena abierta. También han tenido cierto auge los trabajos de investigación relacionados con mecanismos manipuladores (robots) de cadena abierta debido a sus enormes aplicaciones industriales. El diseño de estos productos engloba disciplinas muy diferentes, entre las que se cuentan la Ingeniería Mecánica, el control y regulación de máquinas y la electrónica. Por ello, son numerosas las publicaciones correspondientes a otros tantos aspectos relacionados con la fabricación y el funcionamiento de este tipo de mecanismos controlados. Dentro de las que tienen una mayor relación con la síntesis de mecanismos de barras pueden citarse la debidas a Raghavan y Roth (Raghavan y Roth, 1995), Cecarelli (Cecarelli, 1995), Fanghella y Galletti (Fanghella y Galletti, 1995) y Chirikjian (Chirikjian, 1995).
- Trabajos de síntesis de mecanismos con aplicaciones concretas o con condicionantes especiales. En los últimos años se ha propuesto una gran multitud de métodos para la síntesis de mecanismos especiales o con unos requisitos muy determinados (para aplicaciones muy concretas). Comparados con los trabajos que proponen métodos globales aplicables a todos los diferentes tipos de síntesis, los primeros constan en un número muy superior. Esto es una prueba de la creciente desintegración metodológica de la síntesis de mecanismos. En efecto, en comparación, son muy pocos los trabajos destinados a la elaboración de métodos potentes capaces de resolver problemas de síntesis en un sentido cada vez más amplio, englobando más tipos de mecanismos y más requisitos de diseño diferentes.

Algunos de los trabajos de esta categoría tienen que ver con el funcionamiento en un espacio reducido (Stoilov, 1997), con el diseño robusto de mecanismos (Da Lio, 1997), con la síntesis de tipos concretos de mecanismos (Chung y Chiang, 1990) (Wang y Sodhi, 1996) (Bawab *et al.*, 1996) (Waldron y Sreenivasan, 1996), con la síntesis de mecanismos con elementos flexibles (Yu, 1995) (Meng *et al.*, 1996), con la síntesis de trayectorias especiales —rectilíneas, circulares, etc.— (Dijksman y Smals, 1996), con el diseño de mecanismos libres de interferencia o defecto de circuito (Mirth y Chase, 1995) (Ling y Chase, 1996), etc.

- Trabajos de síntesis dimensional general. Dentro de este apartado pueden englobarse el resto de trabajos que tratan, de una forma general, la síntesis dimensional de mecanismos planos. Se pueden diferenciar dos vertientes: los trabajos que proponen método generales para todos los tipos de síntesis

dimensional —generación de función, generación de trayectoria y generación de movimiento (o guiado de sólido rígido)— y los que plantean una metodología específica para uno de los tipos de síntesis.

Dentro de los primeros se encuentran trabajos recientes notables como los debidos a Avilés *et al.* (Avilés *et al.*, 1985), Cossalter *et al.* (Cossalter *et al.*, 1992), Krishnamurty y Turcic (Krishnamurty y Turcic, 1992), Vallejo *et al.* (Vallejo *et al.*, 1995), Kunjur y Krishnamurty (Kunjur y Krishnamurty, 1997), entre otros.

Por otro lado, son numerosos los métodos propuestos para tipos de síntesis dimensional específicos. Así, en relación a la síntesis para la generación de de función pueden citarse los siguientes trabajos: (Mahyuddin *et al.*, 1989) (Akçali y Dittrich, 1989a) (Naik y Amarnath, 1989) (Lin y Chiang, 1992) (Nageswara y Rao, 1996) (Chung y Chiang, 1990). Por su parte, también son cuantiosas las publicaciones que proponen métodos específicos para generación de función, pudiendo citar (entre otras) las siguientes: (Zhang *et al.*, 1984) (Angels *et al.*, 1988) (Akçali y Dittrich, 1989b) (Watanabe, 1992) (Unruh y Krishnaswami, 1995) (Ullah y Kota, 1996). Finalmente, existen algunos trabajos específicos relativos a la síntesis de mecanismos para generación de movimiento, tales como los debidos a Park (Park, 1995), Wang y Sodhi (Wang y Sodhi, 1996), Bawab *et al.* (Bawab *et al.*, 1996), Luck y Modler (Luck y Modler, 1997). Todos ellos tienen elementos comunes y en su estudio histórico se observa una tendencia clara hacia la vertiente numérica para la resolución de problemas de análisis y síntesis de mecanismos.

De todos ellos, esta tesis se centra particularmente en el estudio de la *síntesis óptima general de mecanismos planos*.

## **Síntesis dimensional para generación de trayectoria.**

---

Desde hace más de un siglo —podría decirse que desde los trabajos de Burmester (Burmester, 1888)— se ha venido estudiando de forma sistemática el problema de encontrar las dimensiones de un mecanismo de forma que, en su movimiento, un punto de uno de sus miembros dibuje una determinada trayectoria, o bien pase secuencialmente por una serie de puntos. La importante aplicación práctica en la construcción de máquinas y en la automatización de procesos industriales ha supuesto la investigación detallada de posibles métodos para obtener el mecanismo partiendo de características impuestas en la trayectoria que debe generar.

Inicialmente el problema fue enfocado de manera discreta, en la que la trayectoria generada debía pasar sobre una serie de puntos (requeridos) conocidos como *puntos de precisión*<sup>14</sup>. Varios métodos fueron ideados para resolver el problema de la obtención de las dimensiones del mecanismo (cuyo tipo era prefijado por adelantado) capaz de trazar una trayectoria que pasara por un número de puntos cada vez mayor. Sin embargo, pronto se detectó la limitación fundamental de esta técnica: *dado un tipo de mecanismo existe un límite (asociado a ese tipo) en el número de puntos de precisión que se puede exigir*. Por encima de este límite, no es posible encontrar las dimensiones del mecanismo de forma que la trayectoria generada pase por todos los puntos.

Esta limitación cambió el enfoque del problema debido a dos motivos fundamentales: por un lado, desde el punto de vista mecánico, interesaba encontrar las dimensiones del mecanismo capaz de generar una trayectoria que pasara lo más cerca posible de todas las posiciones prescritas; por otro lado, obstinarse en la exactitud de los puntos de precisión no tenía un sentido práctico debido a que las tolerancias de fabricación, la holgura en los pares cinemáticos y la deformación de los eslabones durante el funcionamiento provocaban la pérdida de la exactitud alcanzada teóricamente. Al plantear el problema según este nuevo enfoque, éste se transformó en un problema de optimización y fue llamado *síntesis aproximada*<sup>14</sup> o *síntesis óptima*.

La aparición de los ordenadores dio luz a la posibilidad de resolución de complejos problemas de optimización. Previamente a la existencia de máquinas con gran capacidad de cálculo, solamente eran viables los enfoques geométricos o analíticos para resolver problemas de síntesis de trayectoria. Pero con estos planteamientos sólo era posible dar solución a problemas de resolución directa (*síntesis exacta*<sup>14</sup>) y a problemas de optimización triviales, ya que el planteamiento asociado a la optimización en un problema con tantas variables únicamente puede ser resuelto utilizando la variante numérica. Además, el número de iteraciones necesario en un problema habitual es tan elevado que resulta inabordable de forma manual.

Así, desde mediados del siglo XX, los planteamientos gráfico y analítico dieron paso al planteamiento numérico. Son numerosas las publicaciones que se encuentran de esa época tratando el tema de síntesis aproximada de mecanismos planos para generación de trayectoria. Pero el planteamiento numérico, junto con la posibilidad de resolución de los problemas de optimización, también introdujo nuevas dificultades asociadas a los algoritmos de optimización.

Si se estudia la literatura relacionada con el tema, se observa que tras la primera explosión, las mejoras en los métodos de síntesis no han seguido una progresión paralela a la creciente capacidad de cálculo de los ordenadores digitales. Desde entonces hasta ahora se

---

<sup>14</sup> Véase definición en el apéndice A.

han propuesto diferentes formas de plantear el problema de síntesis aproximada pero continúa sin existir una estrategia apta para solucionar todos los casos.

Para la comprensión del problema en toda su magnitud, se considera fundamental la evolución de las soluciones aportadas a lo largo de la historia. Esto permitirá realizar una evaluación del progreso de las técnicas utilizadas y permitirá observar la tendencia seguida y el futuro probable de la síntesis de mecanismos. Por este motivo se realiza a continuación una revisión de los antecedentes siguiendo un orden cronológico. En esta revisión se han incluido las publicaciones fundamentales, existiendo otras que, aunque tal vez sean menos relevantes, también podrían ser dignas de consideración.

Los primeros métodos de diseño óptimo de mecanismos aparecieron en la década de 1960. Roth y Freudenstein (Roth y Freudenstein, 1963) publicaron un trabajo en el que adaptaban un método algebraico a la síntesis aproximada de mecanismos planos para generación de trayectoria. Como base para el estudio utilizaron un mecanismo de 5 barras con engranajes (figura 2.1) para el trazado de una trayectoria prescrita mediante 9 puntos de precisión. Pese a que para el problema planteado existe una solución exacta, los autores pusieron de manifiesto la dificultad para proponer métodos algebraicos directos para su resolución debido a la gran complejidad del mecanismo y al elevado número de puntos de precisión.

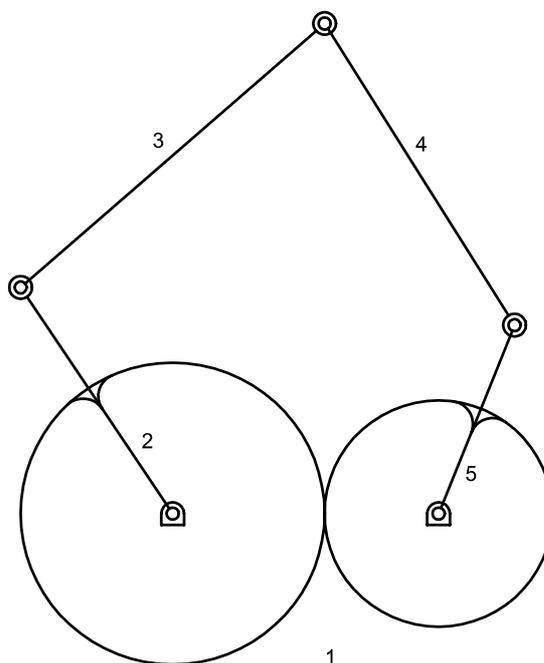


Figura 2.1. Mecanismo de 5 barras con engranajes.

La estrategia planteada por Roth y Freudenstein consistió en lo siguiente: partiendo del planteamiento algebraico del problema (Freudenstein y Sandor, 1959), transformaron las *ecuaciones algebraicas de bucle* (formuladas utilizando números complejos) eliminando los parámetros *no deseados* llegando a una única ecuación no lineal por cada condición de precisión. Luego desarrollaron métodos matemáticos para lograr la convergencia de las iteraciones numéricas utilizadas en la resolución de las ecuaciones.

Los autores repararon en la dificultad que entraña la obtención del óptimo global (en este caso, la solución exacta), siendo sencillo que la optimización terminara en un mínimo local que dependería de la primera estimación —o punto de partida de la optimización—. Para ello dotaron al método de optimización de un procedimiento (que ellos llamaron “*bootstrap*”) según el cual de la primera estimación no se resolvían las ecuaciones para buscar la solución final, sino solamente para buscar una solución intermedia más cercana a la primera que a la final. Luego esta solución intermedia servía de primera estimación para la siguiente iteración del proceso. De esta forma, en cada iteración no solo cambiaba la solución intermedia, sino también los coeficientes de las ecuaciones que daban solución a la siguiente estimación.

Además resolvieron problemas de singularidad en la convergencia por medio de una técnica de *intercambio de posición*. Cuando el sistema degeneraba en una singularidad, el punto de precisión que sirve de referencia era cambiado y se obtenía un nuevo planteamiento de las ecuaciones, esta vez no singular, que permitía continuar la iteración. Finalmente, dado que el problema no tiene una solución única, introdujeron un índice de calidad de la solución — que involucraba la relación máxima de longitudes de barras<sup>15</sup>, el ángulo de transmisión, etc.— para controlar la convergencia hacia un óptimo que fuera favorable desde otros puntos de vista ajenos a la forma de la trayectoria.

El trabajo realizado por Roth y Freudenstein pasa por ser uno de los primeros —si no el primero— en utilizar el concepto de *optimización* para resolver problemas de síntesis de trayectoria. En él ya se describen los problemas asociados con este planteamiento, como por ejemplo el hecho de que si se opta por métodos de optimización basados en el gradiente<sup>16</sup>, la solución encontrada será en general un mínimo local y dependerá de la posición de partida. La particularidad de este trabajo estriba en que se ha utilizado un método de optimización para resolver un problema que tiene una solución exacta, por lo que ha sido posible utilizar técnicas de apoyo para conducir al programa hacia esta solución. Sin embargo, cuando el problema no tiene una solución exacta, no es posible reconducir el planteamiento de Roth y Freudenstein para la obtención del óptimo global.

---

<sup>15</sup> Ya que si el cociente entre la longitud máxima y la longitud mínima de las barras no es un valor moderado, el mecanismo es excesivamente deformable y presenta varios problemas prácticos entre los que figuran el problema de fuerzas internas elevadas y pérdida de precisión.

<sup>16</sup> En la actualidad existen otras técnicas de optimización, como son los métodos aleatorios o los modernos métodos evolutivos, pero no solo son posteriores (especialmente los métodos evolutivos) sino que presentan otros problemas.

Cuatro años más tarde, Fox y Willmert (Fox y Willmert, 1967) publicaron uno de los primeros trabajos en los que el problema de síntesis dimensional aproximada de mecanismos es tratado como un problema de optimización global con restricciones. Plantearon el problema de síntesis como un problema de programación matemática en el que se parte de un número de variables (que forman un vector) y se ha de encontrar su valor de forma que haga mínima una función —*la función objetivo*— considerando dos tipos de restricciones aplicables al vector de variables: de igualdad y de desigualdad.

Este trabajo posee varios aspectos destacables. En primer lugar, los autores propusieron como función objetivo para la generación de trayectoria el área entre la curva generada con la estimación intermedia y la curva requerida<sup>17</sup>, sin embargo, debido a lo complejo de su determinación vieron la imposibilidad de abordar el problema utilizando este indicador como función objetivo y recurrieron a la utilización de *puntos de aproximación*<sup>18</sup>. Pero la utilización de puntos de aproximación es, en sí mismo, un hecho relevante ya que se separa de la idea de utilización de puntos de precisión en la resolución de problemas de síntesis dimensional.

Las restricciones impuestas por Fox y Willmert limitaban el espacio de diseño alegando la necesidad de que las dimensiones del mecanismo fueran positivas y menores que un valor *razonable* a elección del diseñador. Otra restricción importante fue introducida (mediante la ecuación de Grashof) para asegurar la rotabilidad completa de la barra accionadora.

Para resolver el problema de optimización con restricciones, adaptaron las técnicas de Fiacco y McCormick (Fiacco y McCormick, 1963) para minimizar una función con restricciones. Posteriormente utilizaron el método iterativo de Fletcher y Powell (Fletcher y Powell, 1963) para llegar al óptimo dentro del espacio de diseño, no siendo necesaria la evaluación de las derivadas de la función objetivo.

El planteamiento realizado del problema es de una globalidad importante. Sin embargo, el avance tecnológico solamente se produce en cuanto a la optimización fina de las dimensiones del mecanismo debido a que, en los ejemplos resueltos, el punto de partida es un mecanismo considerablemente bueno —es decir, que está cerca del mecanismo óptimo— en relación a los objetivos. Además, el método de Fletcher y Powell está basado en el gradiente de la función objetivo y lleva a una solución que es función de la posición de partida, siendo un mínimo local en la mayoría de los casos. Este problema de la posición de partida fue ignorado por los autores aún cuando puede constituir un problema mayor que el problema de optimización resuelto.

---

<sup>17</sup> Otros autores (Thompson, 1975) (Akçali y Dittich, 1989b) también han destacado que el área encerrada entre las curvas planas es el mejor indicador de su diferencia.

<sup>18</sup> Véase definición en el apéndice A.

En el mismo año, Lewis y Gyory (Lewis y Gyory, 1967) propusieron el uso de la técnica de *mínimos cuadrados amortiguados* para resolver el problema de síntesis cinemática de curvas planas. Reflexionaron sobre la existencia de *ciertos tipos de curvas* que pueden ser generadas por un mecanismo de 4 barras, indicando implícitamente la existencia de otras curvas que no son *reproducibles* (con un mínimo de exactitud). Este es un aspecto clave en la síntesis de mecanismos para generación de trayectoria y pone de manifiesto el hecho de que un mecanismo de 4 barras no puede generar cualquier trayectoria, aún cuando sus dimensiones pueden variar de forma continua existiendo infinitos valores para cada una de ellas. Por lo tanto, la viabilidad de la aproximación en el problema de síntesis dependerá de que la trayectoria requerida sea *generable* por el mecanismo. Si no se da esta circunstancia, el óptimo encontrado no será una solución suficientemente buena —es decir, la trayectoria generada no se parecerá a la trayectoria requerida— y, consecuentemente, carecerá de utilidad práctica.

En lo referente a la función objetivo, Lewis y Gyory manifestaron que una curva plana puede ser especificada por medio de una serie de puntos y en el caso de curvas generadas por mecanismos, destacaron su carácter paramétrico<sup>19</sup>. Con ello estaban expresando la necesidad de incluir los parámetros en la comparación de puntos de diferentes curvas paramétricas, lo que complica la optimización. En efecto, al hacerlo así, durante la optimización no solamente se tendrían que modificar las variables de diseño del mecanismo, sino también el parámetro asociado a cada uno de los puntos de aproximación.

Lewis y Gyory resolvieron el problema de optimización transformándolo en un problema de resolución de ecuaciones no lineales, que resolvieron de forma iterativa utilizando el método de Levenberg (Levenberg, 1944), el cual propuso la inclusión de un coeficiente amortiguador.

Al aplicar el método propuesto a la síntesis del mecanismo de 4 barras y en la evaluación de una curva generada mediante la función objetivo, los autores observaron la necesidad de escalar, rotar y desplazar la curva generada por el mecanismo para que esta pasara lo más cerca posible de los puntos de aproximación requeridos. Para ello utilizaron el máximo diámetro<sup>20</sup> de ambas curvas. Sin embargo, intuitivamente se puede adivinar que resultará siempre mucho más adecuado realizar una superposición acorde con la mínima suma de los cuadrados de las distancias de  $n$  puntos elegidos en ambas curvas, aunque la elección de ésta plantea otros problemas adicionales.

Un año más tarde, Lewis y Falkenhagen (Lewis y Falkenhagen, 1968) extendieron la formulación propuesta en el trabajo anterior de forma que en la síntesis se pudiera contemplar no solo desplazamientos sino también velocidades (síntesis de segundo orden).

---

<sup>19</sup> Siendo el parámetro de la curva la dimensión (angular o lineal) variable de la barra de entrada.

<sup>20</sup> El mayor segmento entre dos puntos de la curva.

Tomás (Tomás, 1968) realizó una importante reflexión sobre la síntesis de mecanismos considerada como un problema de programación no lineal. Aunque su trabajo no estaba directamente aplicado a la síntesis de trayectoria, Tomás obtuvo conclusiones importantes en relación al planteamiento iterativo del problema de síntesis. Afirmó que la mayoría de los casos de síntesis de mecanismos podían ser formulados como un problema de programación no lineal (optimización). Destacó, asimismo, una de las ventajas fundamentales de este planteamiento: no es necesario establecer expresiones matemáticas complejas ni resolver complejos sistemas de ecuaciones; en oposición a los resultantes de los métodos algebraicos. Finalmente, concluyó que el tiempo de computación era, en muchos casos, inferior al necesario en métodos algebraicos.

Tomás formuló el problema con rigor y propuso la limitación del espacio de diseño mediante ecuaciones de restricción. Añadió nuevas restricciones para asegurar unas buenas características en el mecanismo —rotabilidad, rango de ángulo de transmisión permitido, rango de fluctuación de la velocidad, etc.—. Posteriormente reparó en la dependencia entre el resultado obtenido en la optimización y el punto de partida, algo inherente a las características de los métodos de optimización. Sin embargo, explicó que los algoritmos para la determinación de una buena posición inicial —es decir, que pudiera conducir a un buen óptimo (si no al óptimo global)— no estaban suficientemente desarrollados. En la mayoría de los casos, la tarea de elección del punto de partida exigía experiencia y una iteración en el análisis preliminar de las restricciones en relación con las propiedades físicas del problema.

En oposición al creciente uso de los métodos de optimización basados en el gradiente, Garrett y Hall (Garrett y Hall, 1968) formularon el problema de síntesis óptima haciendo uso de un método aleatorio para generar mecanismos que, de acuerdo con la evaluación por parte de la función objetivo, podían conducir a una óptima solución del problema. Justificaron el uso de este método destacando las desventajas de los métodos de optimización basados en el gradiente: problemas de precisión, coste computacional, flexibilidad y, fundamentalmente, el hecho de que estos métodos conducen en la mayoría de los casos a óptimos locales<sup>21</sup>. El algoritmo aleatorio propuesto por Garrett y Hall consta de dos etapas. En una primera etapa se generan mecanismos en los que las longitudes de las barras siguen una distribución normal y varían de forma aleatoria entre la quinta parte de la longitud de la barra fija<sup>22</sup> y cinco veces dicha longitud<sup>23</sup>. En una segunda etapa consiste en un refinamiento de los mejores

---

<sup>21</sup> Aunque la probabilidad de que esto ocurra depende de la forma de la función objetivo.

<sup>22</sup> El tamaño del mecanismo es normalizado en relación a la longitud de la barra fija.

<sup>23</sup> Los autores llamaron la atención sobre la inutilidad práctica de mecanismos con una desproporción mayor que la propuesta por ellos, por problemas que ya se han comentado con anterioridad.

mecanismos obtenidos de la primera. Para ello se utiliza el mismo tipo de generación aleatoria, pero la amplitud de los valores generados se va reduciendo paulatinamente en torno al mejor mecanismo obtenido y, de esta forma, se converge hacia el óptimo.

Es de considerable importancia la reflexión de Garrett y Hall sobre la propensión de los investigadores de este área hacia el planteamiento de métodos de resolución con una formulación clásica. Citando textualmente, estos autores alegaron que *“en muchas situaciones, la impresionante velocidad de los ordenadores no está siendo completamente utilizada debido a la tendencia de los diseñadores hacia métodos de resolución más clásicos”*. Se está de acuerdo en que, aunque en la actualidad esa tendencia ha cambiado mucho, continua siendo necesario realizar un esfuerzo mayor por comprender las nuevas tecnologías y formular los problemas de acuerdo con las nuevas posibilidades de resolución.

Garrett y Hall también hicieron alusión al hecho de que los diseñadores de máquinas y mecanismos, en la práctica, están sujetos a necesidades en constante cambio. Para poder resolver sus problemas necesitan no solo métodos para obtener mecanismos practicables, sino que necesitan comprender todo el proceso para ser capaces de adaptarlo a las peculiaridades de cada problema.

Nolle y Hunt (Nolle y Hunt, 1971) heredaron los trabajos anteriores y replantearon el problema modificando la función objetivo. En su trabajo consideraron la descripción de la curva requerida mediante puntos de aproximación pero formularon una función objetivo que no solamente involucraba el error estructural<sup>24</sup> sino también la relajación necesaria de la ecuación de bucle del mecanismo para reproducir la curva requerida. El equilibrado de ambos términos fue llevado a cabo mediante la inclusión de sendos coeficientes de peso y se razonó el significado de estos coeficientes de acuerdo con el sentido físico del problema. Finalmente, para la determinación del óptimo de la función objetivo, los autores derivaron la función objetivo con respecto a las variables de diseño e igualaron el resultado a cero. De esta forma transformaron el problema de optimización en un problema de resolución de un sistema de ecuaciones no lineales.

En su trabajo, Nolle y Hunt denunciaron el hecho de que, a pesar del aparentemente gran interés en la síntesis de curvas del acoplador, eran muy pocos los trabajos importantes relativos a la efectividad práctica de algunas de las técnicas que se habían propuesto. Incluso hoy en día se trabaja más en la proposición de nuevas técnicas (o en la adaptación de las existentes a casos muy particulares) que en el estudio de las ya propuestas para consensuar cuales son las mejores y potenciar su asentamiento en la comunidad de científicos, incluyendo su posterior transferencia a los ingenieros que tratan con problemas reales. En su reclamo, Nolle y Hunt mencionaron la necesidad de estudios comparativos sobre la velocidad de

---

<sup>24</sup> Distancia entre la curva generada y la requerida.

convergencia, el error de la solución, la estabilidad de la iteración y la economía computacional. Casi treinta años más tarde, siguen faltando esos estudios.

Posteriormente se realizaron diversos trabajos relacionados con la síntesis óptima de mecanismos, entre los que cabe destacar la combinación de un método de relajación y un método basado en el gradiente para la síntesis óptima del mecanismo de 4 barras (Nechi, 1971), y el estudio de los diferentes planteamientos del problema en función de si se consideran o no restricciones y de los métodos de optimización posibles (Fox y Gupta, 1973).

En 1975, Kramer y Sandor (Kramer y Sandor, 1975) publicaron un nuevo método resultante de los trabajos realizados para el doctorado del primero. Este método, llamado *Selective Precision Synthesis* (o SPS), estaba orientado a la síntesis dimensional de *mecanismos diádicos*<sup>25</sup> planos en sus tres variantes: generación de función, generación de trayectoria y guiado de sólido rígido. En el caso de generación de trayectoria, la diferencia de éste método con las tendencias de la época estriban en que se utilizan áreas de precisión en torno a los puntos requeridos de diseño (figura 2.2), en contraste con las técnicas basadas en los puntos de precisión —en las que la trayectoria ha de pasar necesariamente por los puntos exigidos— o las basadas en mínimos cuadrados —en las que se minimiza la distancia entre los puntos generados y los puntos requeridos—.

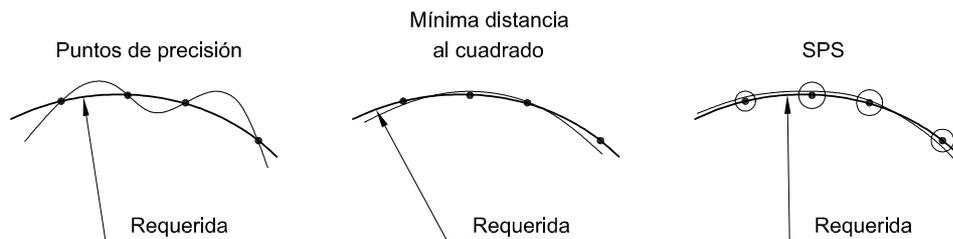


Figura 2.2. Comparación del planteamiento SPS con otros planteamientos anteriores

Las bases del funcionamiento son la construcción diádica de mecanismos y la utilización de dos algoritmos durante la optimización. En primer lugar se realiza una búsqueda según el método de Hooke y Jeeves (Siddall, 1972) para posteriormente realizar una optimización restringida (Fiacco y McCormick, 1963) a partir de los mejores puntos obtenidos en el primero.

La principal novedad de este método es que permite al diseñador especificar la precisión *requerida* en cada punto seleccionado, logrando una gran adaptabilidad del método a muchas situaciones reales. Además, puesto que en general si existe una solución, existirán varias, el método determina un conjunto de mecanismos solución que son, posteriormente

<sup>25</sup> Véase definición en el apéndice A.

evaluables por el diseñador en base a otros criterios (tales como ángulo de transmisión, ratio de deformación del mecanismo, etc.).

Poco después y casi simultáneamente se publicaron dos trabajos relacionados con la síntesis aproximada para generación de trayectoria. El primero fue debido a Bagci y Lee (Bagci y Lee, 1975) y en él se propuso una técnica de superposición lineal para la síntesis óptima, siendo esta la única novedad respecto de los métodos anteriormente propuestos. El segundo (Bakthavachalam y Kimbrell, 1975) propuso un método de síntesis óptima con restricciones en el que la función objetivo contemplaba el efecto de tolerancias dimensionales y holguras en los pares. Se sugirió el uso de un atlas de curvas del acoplador para obtener un buen punto de partida en la optimización y se utilizó la técnica de Fiacco y McCormick (Fiacco y McCormick, 1963) para la optimización de la función objetivo dentro del espacio de diseño.

En el mismo año, Thompson (Thompson, 1975) realizó una recapitulación de las diferentes técnicas disponibles para síntesis de trayectoria. En su trabajo recorrió la mayoría de los planteamientos propuestos hasta el momento y criticó los métodos basados en puntos de precisión alegando que el error estructural entre las curvas generada y requerida en posiciones intermedias de los puntos de precisión puede ser (y, en el caso más general es) grande en comparación con los resultados obtenidos con planteamientos aproximados (de optimización).

Thompson describió el problema de la dependencia existente entre el óptimo al que conducen los métodos de optimización y la posición (mecanismo) de partida dentro del espacio de diseño. Relató los diferentes intentos para evitar este problema pero afirmó que los trabajos realizados no llevaban a ningún resultado concluyente.

Sin embargo, mucho más importante fue su reflexión sobre la técnica de especificar la curva requerida mediante una serie de coordenadas (puntos). En tal caso, se necesita asociar cada punto especificado con un ángulo de la manivela accionadora y, con ello, se involucra implícitamente el tiempo. De esta forma se impone una restricción innecesaria porque el punto trazador ha de pasar lo más cerca posible de los puntos requeridos en los tiempos especificados. Thompson concluyó con la idea de que *la función objetivo más realista es aquella que cuantifica el área existente entre las curvas generada y requerida.*

A partir de este punto, a pesar del avance de las ciencia que soportan la síntesis de mecanismos y, sobre todo, del notable incremento de la capacidad de cálculo de los ordenadores, no se produjo un avance paralelo en los métodos de síntesis. Por el contrario, se detecta la repetición de las mismas técnicas con sencillas variaciones.

Un ejemplo de esto es el trabajo de Zhang *et al.* (Zhang *et al.*, 1984), los cuales desarrollaron una técnica de síntesis aplicada al mecanismo de 5 barras con engranajes en la que se proponía la formación de un atlas de curvas del acoplador para seleccionar el punto de partida de la optimización —Hrones y Nelson (Hrones y Nelson, 1951) ya habían constituido una técnicas similar elaborando un atlas de curvas para el mecanismo de 4 barras—. Posteriormente propusieron la utilización del algoritmo de Powell (Powell, 1964) para la optimización del punto seleccionado. El razonamiento alegado para la utilización de un atlas de curvas del acoplador tiene que ver con la imposibilidad de utilizar otros métodos para encontrar un buen punto de partida que conduzca al óptimo global. Según Zhang *et al.*, la principal dificultad en la síntesis óptima de trayectoria es que la función objetivo posee generalmente numerosos mínimos locales y cuando se intenta solucionar el problema de síntesis se llega a un mínimo local en la inmensa mayoría de los casos. El logro de un diseño mejor depende de cuan bueno sea el diseño de partida. De acuerdo con ellos, incluso en técnicas de búsqueda aleatoria un buen punto de partida ayuda a la consecución de un buen óptimo. Por ello, proponen el uso de un atlas de curvas como la mejor opción para obtener un punto de partida que lleve a una solución satisfactoria.

Por otro lado, Zhang *et al.* repararon en la complejidad superior de diseño del mecanismo de 5 barras con engranajes (en comparación con el mecanismo de 4 barras), aunque esto ya había sido notablemente estudiado por Freudenstein y Primorose (Freudenstein y Primorose, 1963) y, posteriormente, por Hain (Hain, 1964).

Un trabajo notable es el realizado por Avilés *et al.* (Avilés *et al.*, 1985), en el que se realizó un intento importante de globalización del proceso de síntesis dimensional óptima. La formulación fue planteada con el objetivo de que el método fuera lo más generalista posible, contemplando cualquier tipo de síntesis dimensional, cualquier tipo de mecanismo y cualesquiera número y tipo de restricciones. Se consideró una función objetivo igual a la suma ponderada (mediante coeficientes) de los cuadrados de la diferencia entre las características requeridas y las generadas. Pero los autores fueron más allá y propusieron una única función objetivo basada en el *concepto de distancia*<sup>26</sup> válida para los diferentes tipos de síntesis dimensional y también para diferentes tipos de mecanismos.

Como se ha comentado, este trabajo aporta una solución general al problema de síntesis dimensional pero en una fase del proceso de diseño muy cercana al final. En efecto, en algunos de los ejemplos mostrados en este trabajo, la optimización parte de un mecanismo que

---

<sup>26</sup> El mecanismo es definido por  $n$  condiciones de distancia constante entre  $N$  puntos básicos. La función objetivo fue formulada considerando la suma de cuadrados de las diferencias entre distancias de los puntos básicos y distancias del mecanismo propuesto.

está cerca de cumplir los requisitos impuestos. Sin embargo, llegar a este mecanismo no es una tarea trivial, sino que puede llegar a ser más compleja que el proceso de optimización final que se sugiere. Consecuentemente, el trabajo propuesto, aunque es notable, solamente aporta una solución a una etapa muy pequeña de todo el proceso de diseño.

Posteriormente, Angeles *et al.* (Angeles *et al.*, 1988) propusieron un nuevo método de optimización del mecanismo de 4 barras sin considerar restricciones. Los autores replantearon la ecuación de bucle en términos de las coordenadas de los pares, explicando que si se toma las longitudes de las barras como variables de diseño, es necesario introducir restricciones de desigualdad que incluyen dificultades computacionales y discontinuidades en la solución.

En su planteamiento, tuvieron en consideración el ángulo de entrada correspondiente a cada punto de precisión, por lo que el problema fue tratado como un problema de *síntesis con prescripción de tiempo*<sup>27</sup>.

Finalmente, solucionaron la optimización igualando a cero las derivadas parciales de la función objetivo respecto de las variables de diseño. De esta forma obtuvieron un sistema de ecuaciones no lineales que resolvieron por el método Newton-Raphson, el cual fue complementado con un método de *continuación* para acelerar su convergencia.

En el año siguiente, Akçali y Dittrich (Akçali y Dittrich, 1989b) destacaron que en muchos problemas de diseño de maquinaria industrial y agrícola se requiere que algunos puntos de elementos flotantes —barras acopladoras— de mecanismos tracen una porción de curva de forma muy aproximada. Explicaron que los métodos propuestos hasta el momento (los aquí explicados anteriormente) tenían ciertas limitaciones que no les hacían idóneos para muchos casos de síntesis. Como alternativa propusieron la aplicación de la técnica de subdominio (Crandall, 1956) para la síntesis de trayectoria de mecanismos planos. Las principales innovaciones de este trabajo son dos. Por un lado las trayectorias requerida y generada son consideradas de forma continua, en contra de la clásica descripción de la misma mediante puntos discretos. Por otro lado, por primera vez se plantea la síntesis de mecanismos para la generación de un tramo abierto de trayectoria como un problema con entidad propia, diferenciándolo de la generación de trayectorias cerradas.

En base a las afirmaciones de Thompson (Thompson, 1975) Akçali y Dittrich propusieron un método directo basado en la integración por tramos de la curva requerida. En efecto, si se desea generar una cierta trayectoria (curva abierta) mediante un mecanismo con  $n$  variables de diseño, se puede dividir la curva requerida en  $n$  tramos e integrar por tramos la diferencia entre las curvas requerida y generada. De esta forma se obtiene un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas (las variables de diseño del mecanismo), que puede ser resuelto

---

<sup>27</sup> Véase definición en el apéndice A.

obteniendo los valores de las incógnitas. El problema del método de subdominio es que el hecho de que la integral de dos curvas en un mismo intervalo sea cero no significa que ambas curvas sean iguales, pudiendo el error estructural ser grande<sup>28</sup>. Además, la calidad de los resultados obtenidos presenta una gran dependencia de la forma de la curva requerida.

Más tarde se replanteó el problema de síntesis de trayectoria con un nuevo enfoque basado en las coordenadas naturales de una curva. En su trabajo, Watanabe<sup>29</sup> (Watanabe, 1992) demostró preocupación por la posibilidad de encontrar el óptimo global dentro del espacio de diseño. Por otro lado, estudió la evolución de las coordenadas naturales de las curvas planas a lo largo de su longitud y luego desarrolló un procedimiento que permite especificar la curva requerida mediante su curvatura en determinados puntos, cuya continuidad es asegurada por medio de un método de interpolación polinómica. Detectó las dificultades que surgen en la comparación de curvas y dió solución a los problemas de tamaño, posición y orientación de las curva comparadas. Incluso resolvió el problema de la dependencia entre los puntos de aproximación y el parámetro de la curva mediante la distribución uniforme de los puntos a lo largo de la longitud de la misma. Propuso dos alternativas diferentes para comparar las curvas, sin embargo, la elección del indicador de la comparación (máxima distancia entre puntos de las curvas y máximo error perpendicular, respectivamente) es claramente deficiente ya que no es representativo de la globalidad de la diferencia entre las curvas.

En el mismo año, Cossalter *et al.* (Cossalter *et al.*, 1992) complementaron el método de optimización tradicional<sup>30</sup> (propuesto numerosas veces con pequeñas variantes) de forma que la función de penalización contemplara no solo el error estructural sino también un criterio de ensamblaje. Si el mecanismo propuesto por el algoritmo de optimización no puede ser ensamblado, la función de penalización es incrementada cambiando la búsqueda hacia otra dirección.

Simultáneamente, Krishnamurty y Turcic (Krishnamurty y Turcic, 1992) propusieron una ampliación del método de optimización (como problema de programación no lineal) de forma que se pudieran considerar múltiples objetivos. Estos autores sugirieron la utilización del método de búsqueda de Hooke-Jeeves (Wilde y Beightler, 1967). Sin embargo, su trabajo sigue adoleciendo de los problemas habituales de los métodos propuestos, como por ejemplo, la finalización de la iteración en un mínimo local.

---

<sup>28</sup> En realidad, lo único que significa es que el área bajo las curvas comparadas en el tramo considerado es la misma. Pero la forma de las curvas puede ser diferente dentro de una infinidad de posibilidades sin que varíe el área por debajo de ella.

<sup>29</sup> Un estudio pormenorizado de este método puede observarse en el capítulo siguiente.

<sup>30</sup> Basado en puntos de aproximación y minimización de la distancia al cuadrado entre el conjunto de puntos requeridos y el conjunto de puntos generados.

Más tarde, un nuevo método basado en la idea de deformación (o relajación del mecanismo) fue propuesto por Vallejo *et al.* (Vallejo *et al.*, 1995). El método es útil con cualquier tipo de mecanismo de barras y para cualquier tipo de síntesis dimensional. La idea básica de su funcionamiento es medir la deformación necesaria en cada mecanismo evaluado para que éste cumpla los requisitos de síntesis y optimizar hacia el mecanismo que menos deformación necesita. Como resultado se obtienen las dimensiones del mecanismo que reproducen los requisitos de diseño lo más fielmente posible.

Los autores pusieron un gran interés en la aceleración del proceso de optimización (minimizando el número de iteraciones), para lo cual realizaron un desarrollo riguroso de la función objetivo y de sus derivadas primera y segunda. Esta formulación les permitió la utilización de métodos de rápida convergencia. Por otra parte, utilizaron algoritmos de optimización basados en el gradiente, con lo que existe dependencia entre la solución final (óptimo) y el punto de partida. Por el contrario, en este trabajo no se profundizó en la obtención de un buen mecanismo de partida para la iteración, y en los ejemplos expuestos el mecanismo inicial es un mecanismo potencialmente factible para los requisitos que se imponen, con lo que la convergencia está asegurada.

El mismo año, Unruh y Krishnaswami<sup>31</sup> (Unruh y Krishnaswami, 1995) denunciaron la inexistencia de esquemas de solución asistidos por ordenador satisfactorios para la resolución de problemas de síntesis de curvas del acoplador considerando infinitos puntos de precisión<sup>32</sup>. Este trabajo se considera de especial importancia porque rompió bruscamente con la tendencia existente hacia el planteamiento de soluciones al problema de síntesis de trayectoria. En él los autores pusieron de manifiesto varios aspectos de especial relevancia que no habían sido estudiados anteriormente. En primer lugar, la poca clara eficiencia de comparar curvas utilizando puntos de aproximación (técnica clásica poco contrastada y, sin embargo, poco cuestionada). En segundo lugar la necesidad de plantear métodos globales, capaces de dar solución al problema de diseño de mecanismos en toda su extensión, y no solamente en la etapa final de optimización, tal como se venía planteando.

El método planteado por Unruh y Krishnaswami tiene un trasfondo científico considerable, aunque la técnica está poco depurada y se han detectado varios problemas que sería necesario subsanar. Los autores fueron innovadores al plantearse la síntesis con infinitos puntos de precisión (también llamada síntesis continua), en la cual no se consideran solo unos puntos de la curva requerida sino que se intenta considerar todos ellos. Para ello, los autores discretizaron una curva requerida —cerrada y continua— mediante un ingenioso método de

---

<sup>31</sup> El método propuesto por Unruh y Krishnaswami es estudiado detalladamente en el capítulo siguiente.

<sup>32</sup> Otros autores han promulgado afirmaciones similares con la intención de llamar la atención de la comunidad científica sobre este aspecto e incentivar el estudio convergente de las técnicas propuestas, aunque hasta la fecha no se ha conseguido semejante objetivo. Así, en 1993 Erdman (Erdman, 1993) afirmó que no existe un único método de optimización que sea idóneo para resolver de forma eficiente todos los problemas de síntesis para generación de trayectoria.

transformación en B-Spline<sup>33</sup>, y luego utilizaron el polígono de control para compararla con otras curvas. La idea de utilizar el polígono de control como representante de la forma de la curva tiene buenas características ya que cualquier pequeña variación del polígono deriva en una variación en la forma de la B-Spline asociada. Por lo tanto, sus vértices pueden ser considerados muy representativos de la forma global (con sus infinitos puntos) de la curva.

Sin embargo, existen algunos problemas (que Unruh y Krishnaswami no detectaron), siendo el fundamental el hecho de que dada una curva plana cerrada y continua existen infinitos polígonos de control que tienen asociadas B-Splines iguales a la curva inicial. Es decir, el polígono de control que se puede obtener de la curva inicial no es único, por lo que la comparación queda perjudicada notablemente. Además, como se verá en el capítulo 3, el método propuesto tiene problemas de dependencia del parámetro de la curva (definida en forma paramétrica), problemas de coste computacional, deficiencias en el método de comparación de los polígonos de control, etc.

Otra propuesta innovadora fue la realizada por Ullah y Kota (Ullah y Kota, 1996) en la que la innovación se produjo en diferentes aspectos. Por un lado utilizaron descriptores de Fourier<sup>34</sup> como magnitudes discretas representativas de la forma global de las curvas, proponiendo una estrategia de comparación de las curvas basadas en estos números. Por otro lado, reflexionan sobre la probabilidad de llegar al óptimo global del espacio de diseño utilizando las diferentes técnicas de optimización. Definitivamente utilizan una combinación de los métodos de recocido simulado (*simulated annealing*) (Romeijn y Smith, 1992) y de Powell (Powell, 1964) como una de las posibilidades que más probabilidades proporciona de encontrar el óptimo global.

En su trabajo destaca la utilización de los descriptores de Fourier por ser independientes de posición, rotación y tamaño de las curvas, lo que permite reducir el espacio de diseño (aunque Ullah y Kota no advirtieron en ello). En contra figura el hecho de que se basan en el ángulo de la tangente —cuya evolución es representada por los descriptores de Fourier—, pero su calidad como característica representativa de la forma de la curva durante la comparación discreta de curvas no ha sido contrastada.

Como alternativa a los algoritmos de optimización anteriores, Kunjur y Krishnamurty (Kunjur y Krishnamurty, 1997) aplicaron métodos evolutivos —o genéticos— de optimización a

---

<sup>33</sup> Esta transformación incluye, en si misma, un proceso de optimización, según el cual partiendo del polígono de control estimado, se optimiza la posición de los puntos de dicho polígono para que la B-Spline asociada se parezca lo más posible a la curva inicial.

<sup>34</sup> Introducidos a principios de la década de 1960 como un conjunto de números que representan la forma de una curva cerrada. Han sido utilizados con éxito en el campo del reconocimiento de patrones (Zahn y Roskies, 1972). Su valor corresponde a las primeras amplitudes armónicas de la serie de Fourier en la que se descompone la función ángulo de la recta tangente a la curva (que depende del parámetro de la curva y es periódica).

la síntesis dimensional de mecanismos planos para generación de trayectoria. Estos métodos se caracterizan porque, al contrario que en los métodos basados en el gradiente, la solución obtenida no depende del punto de partida y, consecuentemente, existe una probabilidad no nula de llegar al óptimo global incluso en los casos en los que la función objetivo consta de numerosos mínimos locales.

Como conclusión, desde que la síntesis de trayectoria fue abordada como un problema de optimización se han propuesto diferentes alternativas para resolver el problema. Los primeros métodos eran rudimentarios y fueron formulados como una adaptación de los métodos algebraicos para problemas en los que el número de puntos de precisión exigido superaba el máximo realizable por el mecanismo. Posteriormente se formuló el problema de optimización con rigor matemático, incluyendo restricciones. Algunos trabajos siguientes supusieron variaciones de los primeros proponiendo diferentes funciones objetivo y diferentes algoritmos de optimización. En muchos casos, los nuevos trabajos pusieron de manifiesto la existencia de problemas que no tenían solución, tales como la búsqueda del óptimo global dentro del espacio de diseño. Con la aparición de otros métodos de optimización distintos de aquellos basados en el gradiente se han podido ensayar nuevas estrategias con la intención de obtener resultados mejores dentro del espacio de diseño.

Asimismo, se detecta que la síntesis dimensional de mecanismos planos para generación de trayectoria no es una ciencia con unas bases asentadas y reconocidas, sino que presenta una evolución vacilante e incierta, en la que se han propuesto numerosos métodos sin apenas contrastación de los resultados. Como consecuencia, todavía en la actualidad esta parte de la ingeniería mecánica no consta de una metodología bien asentada y reconocida.

## Discusión.

---

El proceso de diseño de mecanismos puede ser diferenciado en varias etapas que han sido investigadas desigualmente. La primera etapa es la de *detección de la necesidad*, de la cual se extraen los requisitos cuyo cumplimiento será después el objetivo de la síntesis. Posteriormente y una vez conocidos los requisitos se ha de seleccionar el tipo de mecanismo (*síntesis de tipo*) que se va a utilizar para el cumplimiento de los requisitos. La tercera etapa es la síntesis dimensional y consiste en la obtención de las dimensiones adecuadas del mecanismo seleccionado para un óptimo cumplimiento —o, en su caso, para un perfecto cumplimiento— de los requisitos.

La primera etapa es diferente en cada caso de diseño y será siempre tarea del diseñador, siendo escasa la posible automatización del proceso. La etapa de *síntesis de tipo*

constituye un problema que ya ha sido estudiado aunque no existen métodos definitivos y concluyentes. No obstante, el diseñador cuenta con numerosas herramientas que le pueden asistir en la tarea de la búsqueda del tipo de mecanismo ideal de acuerdo con los requisitos de diseño.

Finalmente, la etapa de *síntesis dimensional* es la más estudiada, existiendo numerosos métodos para su resolución. Sin embargo y pese a que varios han sido los planteamientos del problema, ninguno ha sido concluyente porque todos presentan inconvenientes fundamentales. Existen tres tendencias fundamentales mostradas en la tabla 2.1.

El primer planteamiento de resolución fue el *basado en puntos de precisión*. Los métodos englobados por esta categoría exigen el cumplimiento de los requisitos (puntos de precisión) con total exactitud. Sin embargo este tipo de exigencia es más académica que práctica ya que en la realidad no es posible reproducir dicha exactitud debido a numerosos factores, entre los que se pueden destacar la existencia de tolerancias de fabricación, holguras en los pares cinemáticos y deformaciones de los elementos del mecanismo durante su funcionamiento.

Otra desventaja fundamental de los métodos exactos es el hecho de que el número de puntos de precisión es limitado y depende del tipo de mecanismo utilizado. Cuanto más cercano al límite sea el número de puntos de precisión considerado, menos serán las soluciones posibles, con lo que la posibilidad de encontrar un mecanismo que sea viable de acuerdo con otras consideraciones posteriores se reduce. Así, estos métodos proporcionan con frecuencia soluciones no viables en la práctica debido a problemas de *defecto de circuito*<sup>35</sup>, de *interferencia*<sup>35</sup> o de ensamblaje.

En la actualidad los métodos exactos quedan relegados a la resolución de problemas con propósito docente o, en la práctica, a la resolución de casos muy sencillos.

Los *métodos empíricos de síntesis* (tabla 2.1) —propuestos como alternativa a los métodos exactos—, están basados en catálogos de curvas del acoplador en los que se busca la curva ideal de acuerdo con los requisitos considerados. Estos métodos exigen la disponibilidad de diferentes catálogos para diferentes tipos de mecanismos y además, la búsqueda es tediosa y se realiza de una forma más cualitativa que cuantitativa, siendo difícil encontrar la *mejor* curva de acuerdo con los requisitos (en su lugar, la búsqueda deriva en una solución *suficientemente buena*). Fueron métodos de resolución aproximada recomendables cuando no existía la posibilidad de resolución utilizando métodos de optimización. En la actualidad, pese a que estos métodos pueden considerarse obsoletos, aún se utilizan (e incluso son propuestos en publicaciones relativamente recientes) en ocasiones para buscar el

---

<sup>35</sup> Véase definición en el apéndice A.

mecanismo de partida para métodos de optimización, lo cual está vinculado con la obtención del óptimo global.

<b>MÉTODOS BASADOS EN PUNTOS DE PRECISIÓN</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Requieren el cumplimiento exacto de los requisitos (puntos de precisión).</li> <li>▪ El número de puntos de precisión es limitado y depende del tipo de mecanismo.</li> <li>▪ Suelen aportar soluciones con problemas de interferencia o defecto de circuito.</li> <li>▪ El error estructural entre puntos de precisión puede ser considerable.</li> <li>▪ Requerir una precisión total no es útil porque no se puede reproducir en la práctica.</li> </ul>
Gráficos	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Fueron los primeros en aparecer.</li> <li>▪ Son muy poco precisos.</li> <li>▪ En la actualidad no se utilizan salvo para propósitos docentes.</li> </ul>
Algebraicos	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Solucionan el problema de precisión de los métodos gráficos.</li> <li>▪ Suelen derivar en expresiones matemáticas complejas.</li> </ul>
<b>MÉTODOS EMPÍRICOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Consisten en el empleo de atlas de curvas del acoplador para la selección de la curva adecuada de acuerdo con los requisitos.</li> <li>▪ Involucran numerosos intentos y son tediosos, a la vez que no aseguran la obtención del óptimo global.</li> <li>▪ La calidad del mecanismo sintetizado (de acuerdo con los requisitos es más cuantitativa que cualitativa).</li> <li>▪ Debido a las limitaciones anteriores, estos métodos se han utilizado con frecuencia para buscar el punto de partida de un posterior método de optimización.</li> </ul>
<b>MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Persiguen obtener una solución aproximada (óptima).</li> <li>▪ No necesitan una formulación tan compleja como los métodos basados en puntos de precisión.</li> </ul>
No iterativos (o directos)	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ La solución aportada es, casi siempre, un mínimo local.</li> <li>▪ Solamente proporcionan una solución que puede no ser adecuada de acuerdo con otras consideraciones posteriores.</li> </ul>
Iterativos	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ En la mayoría de los casos la solución final suele ser función del punto de partida. Aunque esta subordinación depende del algoritmo de optimización utilizado.</li> <li>▪ No es posible asegurar la consecución del óptimo global.</li> <li>▪ Pueden aportar varias soluciones ordenándolas según su calidad de acuerdo con los requisitos.</li> </ul>
<b>OTROS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Existen otros tipos de métodos que no son clasificables dentro de las categorías anteriores, aunque ninguno de ellos es concluyente.</li> </ul>

Tabla 2.1. Clasificación de los métodos de síntesis dimensional.

Las últimas tendencias en métodos de síntesis dimensional están relacionadas con la optimización de las dimensiones del mecanismo con arreglo a los requisitos impuestos y bajo la posible imposición de restricciones. Sin embargo, se observa que el método científico global de

la comunidad de investigadores ha sido deficiente. En efecto, la evolución en el planteamiento del problema ha sido errática y divergente. El desarrollo no ha permitido lograr una teoría uniforme y unificada para la síntesis óptima de mecanismos, sino más bien al contrario. Desde la década de 1960 en la que comenzó a plantearse el problema de optimización se han propuesto diferentes enfoques con numerosas variantes de cada uno de ellos. Se ha experimentado poco y el contraste de resultados es prácticamente inexistente.

La razón de todo esto puede encontrarse en que desde los primeros tiempos, la complejidad del problema de síntesis dimensional ha provocado la división del mismo en subproblemas como única vía para la obtención de resultados. Este fenómeno que aún heredamos en nuestro tiempo, provoca que los intentos de globalizar el problema sean tímidos y, por el contrario, se proponen múltiples métodos de resolución particulares aplicables a casos muy específicos, con lo que la desintegración de las técnicas de resolución es enorme.

No obstante y pese a la complejidad del problema, no resulta imposible realizar un estudio exhaustivo que lleve a un entendimiento global y que posibilite la obtención de las directrices fundamentales en las que se basarán las mejoras del método. Al revisar los trabajos anteriores se observa que este estudio ha sido omitido en la mayoría de los casos y que se han propuesto métodos de una forma improvisada.

La síntesis aproximada de mecanismos planos involucra diferentes aspectos que han sido desigualmente tratados en la bibliografía. El estudio separado de cada uno de estos aspectos resulta fundamental para el desarrollo de la técnica y el planteamiento de métodos eficientes que aporten soluciones viables.

Desde el punto de vista matemático, la optimización constituye un problema de programación no lineal y consta de unas *variables de diseño*<sup>36</sup> que pertenecen a un *espacio de diseño*<sup>37</sup>, una *función objetivo*<sup>38</sup> relacionada con los requisitos del problema, un *algoritmo de optimización*<sup>39</sup> y, opcionalmente, unas *restricciones*<sup>40</sup> impuestas a las variables de diseño. Si las restricciones existen, el problema es llamado de *optimización restringida* y, en tal caso, no todos los puntos del espacio de diseño pueden ser considerados en la optimización.

---

<sup>36</sup> Cuyos valores son los que se pretende determinar y son modificados durante la optimización.

<sup>37</sup> Dentro del cual se han de encontrar las variables de diseño óptimas. Es, por tanto, un espacio  $n$ -dimensional (siendo  $n$  es el número de variables de diseño).

<sup>38</sup> Que evalúa cada punto del espacio de diseño y cuantifica su calidad de acuerdo con los requisitos del problema.

<sup>39</sup> Algoritmo matemático que hace uso de la función objetivo para evaluar las variables de diseño y modifica sus valores hacia un punto del espacio de diseño en el que la función objetivo sea mínima.

<sup>40</sup> Que limitan las posibles soluciones dentro del espacio de diseño. Estas restricciones son de dos tipos: de desigualdad y de igualdad.

A continuación se realiza un análisis y una discusión sobre el estudio de cada uno de estos aspectos.

### ***Las variables de diseño y el espacio de diseño.***

El estudio del espacio de diseño ha sido omitido en prácticamente todos los trabajos existentes (tabla 2.2). Sin embargo, la minimización de este espacio resulta fundamental para aumentar la eficiencia del método. Si se tiene en cuenta que el óptimo debe encontrarse dentro de éste, cuanto menor sea su tamaño, más sencillo será encontrarlo y, en caso de que existan múltiples óptimos en él, más probabilidad existirá de encontrar el óptimo global.

En algunos casos se ha limitado el espacio de diseño mediante ecuaciones de restricción (tabla 2.2). Sin embargo, esto incrementa notablemente la complejidad computacional del problema a la vez que implica que la solución pueda no ser función continua de los datos del problema<sup>41</sup>. Además, si la hipersuperficie que constituye la función objetivo (que de una forma u otra compara las curvas requerida y generada por el mecanismo candidato) contara con varios mínimos locales, sería poco probable que partiendo de un punto del espacio de diseño dentro de las restricciones, un algoritmo de optimización basado en el gradiente terminara en un punto del espacio de diseño externo a las restricciones. Y en tal caso no sería necesaria la imposición de las restricciones durante la optimización.

Por lo tanto, si se considera un espacio de diseño acotado en el que cada dimensión no puede variar desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ , sino que solamente puede variar dentro de un intervalo acotado de valores útiles, tomando como partida un punto dentro del espacio de diseño acotado<sup>42</sup> es probable que el óptimo al que conduzca el algoritmo de optimización esté dentro de ese espacio de diseño acotado. Y así se elimina la necesidad de imponer restricciones para todas las dimensiones del espacio de diseño. Por otro lado, la acotación del espacio de diseño es necesaria y viene provocada por el hecho de que una elevada desproporción entre las longitudes de las barras de un mecanismo hacen que este tenga una escasa utilidad práctica por diferentes motivos comentados anteriormente (véase nota 15).

La reducción del espacio es un aspecto fundamental en la mejora del método y puede realizarse en base a que determinadas dimensiones de los mecanismos no necesitan ser incluidas en la optimización ya que pueden calcularse posteriormente. Así, por ejemplo, el mecanismo de 4 barras generador de trayectorias tiene 9 dimensiones por lo que el espacio de

---

<sup>41</sup> Esta no continuidad implica que si de unos datos de partida se obtiene una solución determinada, de otros datos de partida ligeramente diferentes no se obtendrá necesariamente una solución ligeramente diferente de la anterior, sino que se puede obtener una solución muy distante de la primera.

<sup>42</sup> En el que las variables de diseño solo pueden tomar valores dentro de su intervalos correspondientes.

diseño será de dimensión 9. Sin embargo, 3 de estas 9 dimensiones no modifican la forma de la curva generada, sino que solamente determinan su posición y orientación en el plano. Consecuentemente, pueden ser eliminadas de la optimización utilizando funciones objetivo en las que su resultado no sea dependiente de la posición ni orientación de las curvas comparadas.

Por otro lado, si se tiene en cuenta que mecanismos homotéticos<sup>43</sup> generan siempre curvas homotéticas, entonces se pueden diseñar funciones objetivo cuyos resultados no dependen del tamaño de las curvas comparadas. En tal caso los mecanismos se pueden normalizar (dividiendo todas sus dimensiones por una de ellas, que sirve como norma) y, de esta forma, se elimina una nueva dimensión del espacio de diseño (la que ha servido de norma).

De la misma forma, otras mejoras de este tipo que proporcionen reducciones notables del espacio de diseño pueden ser realizadas.

Sin embargo, pese a la sencillez del planteamiento y el enorme beneficio que implica la reducción del espacio de diseño, éste ha sido mayoritariamente ignorado y las técnicas descritas para la reducción de sus dimensiones apenas han sido utilizadas en los métodos propuestos (tabla 2.2).

Por otro lado, es claro que las curvas generadas por un punto del acoplador de un mecanismo desmodrómico son curvas paramétricas (dependientes de un único parámetro). Si se involucra el parámetro en el cálculo realizado por la función objetivo, se estará añadiendo una dimensión más al espacio de diseño a la vez que se complica el problema al involucrar el tiempo que transcurre entre los diferentes puntos de comparación. Pero la forma global de la curva generada no depende del parámetro, por lo que en una síntesis de trayectoria sin prescripción de tiempo no es necesario —y sí que complica notablemente el problema— considerar el parámetro dentro de la optimización. Pese a todo, en la tabla 2.2 se observa que mayoría de los métodos propuestos han incluido el parámetro aún cuando se realiza una síntesis sin prescripción de tiempo.

---

<sup>43</sup> Aquellos que guardan una misma relación de longitudes de barras homónimas, es decir, aquellos en los que uno se puede obtener a partir del otro multiplicando las longitudes de todas sus barras por un mismo escalar.

Referencia	ESPACIO DE DISEÑO (ED)			
	Ángulo de entrada es involucrado en la optimización.	Análisis del ED.	Inclusión de restricciones.	Función objetivo independiente de posición (P), orientación (O) y/o escala (E) de las curvas.
Roth y Freudenstein (1963)	No	No	No	No
Fox y Wilmert (1967)	Si	No	Si	No
Lewis y Gyory (1967)	Si	No	No	No
Lewis y Falkenhagen (1968)	Si	No	No	No
Tomás (1968)	No	No	Si	P,O
Nolle y Hunt (1971)	Si	No	No	No
Kramer y Sandor (1975)	N/A <sup>♦</sup>	No	No	No
Bakthavachalam y Kimbrell (1975)	Si	No	Si	No
Bagci y Lee (1975)	Si	No	No	No
Thompson (1975)	N/A <sup>♦</sup>	No	N/A <sup>♦</sup>	No
Zhang <i>et al.</i> (1984)	Si	No	No	No
Avilés <i>et al.</i> (1985)	Si*	No	No	No
Angeles <i>et al.</i> (1988)	Si	No	No	No
Akçali y Dittrich (1989)	No	No	No	No
Watanabe (1992)	No	No	No	P,O,E
Cossalter <i>et al.</i> (1992)	Si	No	N/A <sup>♦</sup>	No
Krishnamurty (1992)	Si	No	No	No
Vallejo <i>et al.</i> (1995)		No	Si	No
Unruh y Krishnaswami (1995)	Si	No	No	P,O,E
Ullah y Kota (1996)	No	No	No	P,O,E
Kunjur y Krishnamurty (1997)	Si*	No	No	No

\* Intencionadamente.

♦ No aplicable.

Tabla 2.2. Estudio del espacio de diseño por parte de los métodos propuestos.

En definitiva, el análisis detallado del espacio de diseño en el problema de síntesis dimensional aproximada de mecanismos planos ha sido escasa hasta el momento, aunque intuitivamente es calor que de este estudio se pueden obtener muchas ventajas que pueden facilitar considerablemente el proceso de búsqueda del mecanismos óptimos.

## ***La función objetivo.***

La *función objetivo*<sup>44</sup> está definida de  $\mathfrak{R}^n$  en  $\mathfrak{X}$  (siendo  $n$  el número de variables de diseño, igual al número de dimensiones del espacio de diseño) y es utilizada para evaluar los puntos del espacio de diseño. Así, esta función califica cada punto de acuerdo con su calidad para el cumplimiento de los requisitos de diseño. Suponiendo que la calificación se realiza de forma que el mejor punto en el cumplimiento de los requisitos obtiene un valor bajo, el método global de optimización persigue encontrar el mínimo de esta función dentro del espacio de diseño. Pero esta función que constituye una hipersuperficie en  $\mathfrak{R}^n$  puede tener —y en general tendrá— varios mínimos, siendo uno de ellos —o, en el caso de igualdad, varios— el mínimo global y siendo el resto mínimos locales.

En síntesis dimensional de mecanismos planos para generar trayectorias, la función objetivo evalúa un mecanismo con referencia a su aptitud para generar una determinada trayectoria. Es decir, evalúa el parecido entre la trayectoria que genera el mecanismo y la trayectoria requerida. En definitiva esta función constituye un método de comparación de curvas y su valor representa la diferencia entre las curvas comparadas. Sin embargo, las curvas son conjuntos continuos de puntos y para ser comparados se pueden utilizar magnitudes continuas o discretas, siendo estas últimas las más extendidas por tener un planteamiento más sencillo y un menor coste computacional. Cuando se utilizan magnitudes discretas, lo que se obtiene en realidad es una *estimación* de la diferencia entre las curvas, por lo que será necesario estudiar las diferentes alternativas posibles para evaluar cual de ellas constituye el estimador más realista.

Es necesario destacar la importancia de la función objetivo en el proceso de optimización. Dependiendo de cómo sea formulada esta función objetivo, la hipersuperficie que representa puede tener mayor o menor número de mínimos locales, siendo respectivamente más o menos complicado lograr el óptimo global. Además, puesto que cuando se utiliza la alternativa discreta, la función objetivo no es un comparador real, sino estimado; es posible que bajo determinadas circunstancias el estimador tenga un comportamiento deficiente. En este caso, es de especial importancia estudiar la conducta de la función objetivo cuando se está cerca del óptimo ya que un comportamiento anómalo<sup>45</sup> en estas condiciones supone que el algoritmo de optimización conduzca a un punto del espacio de diseño que no es el óptimo real.

Como se ha observado, en los trabajos de síntesis de trayectoria realizados hasta la fecha, la forma de comparar curvas más utilizada es la técnica de la mínima distancia entre puntos al cuadrado. Consiste en la obtención de una serie de puntos de cada una de las curvas

---

<sup>44</sup> También llamada *función de penalización*.

<sup>45</sup> En el sentido de poco realista.

que se van a comparar y en la estimación de su diferencia mediante la suma de los cuadrados de las distancias entre puntos homólogos de ambas curvas.

Otros autores han generalizado la expresión de mínimos cuadrados y han propuesto una función objetivo general igual a la suma de cuadrados de diferencias entre características de las curvas generada y requerida.

Por otro lado, utilizando el argumento de que las curvas planas son conjuntos continuos, varios autores han sugerido que el mejor indicador de la diferencia entre dos curvas planas es el área encerrada entre ellas, ya que ésta es también una magnitud continua. Sin embargo, la evaluación de este área presenta complicaciones algorítmicas y es computacionalmente costosa. Por un lado, el valor del área es muy sensible a cómo se superponen las curvas comparadas, siendo altamente dependiente de su posición, orientación y tamaño. Así, este problema de superposición no tiene una solución óptima y, con frecuencia, depende de cómo se plantee. Además, la determinación del área entre las curvas cuando éstas son muy diferentes no presenta una única posibilidad, sino varias. Por estos motivos el área entre las curvas no ha sido utilizado como indicador de la diferencia entre las curvas en los métodos de síntesis propuestos.

Finalmente, se han propuesto otras alternativas innovadoras, como la técnica propuesta por Unruh y Krishnaswami (Unruh y Krishnaswami, 1995) basada en la transformación de las curvas en B-Splines y la comparación de sus polígonos de control, o la de Ullah y Kota (Ullah y Kota, 1996) basada en descriptores de Fourier.

Una buena parte de los trabajos de la bibliografía incluye implícita o explícitamente el ángulo de la barra de entrada del mecanismo en la evaluación de la función objetivo. Como se ha comentado, esta inclusión involucra la variable tiempo en la comparación, lo cual complica el problema y puede ser interesante cuando así se requiere, pero no en gran parte de los casos en los que se requiere una simple síntesis de trayectoria. Sin embargo, para lograr excluir el ángulo de entrada es preciso plantear adecuadamente la función objetivo. Este tipo de alternativas son escasas en la bibliografía.

En resumen, la revisión de antecedentes demuestra una progresión irregular y errática en la proposición de nuevos métodos de comparación de curvas destinados a constituir la función objetivo del problema de síntesis óptima de mecanismos para generación de trayectoria. Además, también demuestra la inexistencia de estudios comparativos que realicen una contrastación de las diferentes alternativas con el fin de fomentar el debate científico y facilitar la consolidación de la mejor alternativa.

En el diseño de una nueva función objetivo para síntesis óptima de trayectoria es necesario tener en consideración diferentes aspectos. Por un lado, se ha visto en §0 que una adecuada formulación permite reducir considerablemente el espacio de diseño. Esta reducción

tiene que ver con la eliminación de las variables de diseño que no influyen en la forma de la curva. Pero, aparte del beneficio obtenido con la reducción del espacio de diseño, en la comparación de las curvas, es adecuado tener en cuenta exclusivamente su *forma intrínseca*<sup>46</sup>, ya que el resto de variables geométricas relacionadas con la posición, orientación y tamaño, no son descriptivas de la forma de la curva. Por lo tanto, esta consideración resulta beneficiosa tanto en lo relativo al espacio de diseño como en lo que respecta a la función objetivo. Sin embargo, el diseño de funciones objetivo independientes de las variables de diseño que no influyen en su forma intrínseca ha sido escasamente considerado en los trabajos estudiados de la bibliografía (tabla 2.2).

Por otro lado, otro aspecto importante (con frecuencia olvidado) de la función objetivo es su coste computacional. Sabiendo que el problema de optimización va a ser implementado en —y resuelto por— un ordenador, es necesario plantear el problema de forma eficiente desde el punto de vista computacional. Piénsese que en la resolución de un problema de optimización la función objetivo es llamada miles (e incluso millones) de veces por el algoritmo de optimización en la evaluación de puntos del espacio de diseño. Si se dispone de una función objetivo computacionalmente costosa, no será posible resolver, en un tiempo razonable, problemas que exijan un gran número de evaluaciones. Por el contrario, si la función objetivo es computacionalmente económica, se podrá ser más ambicioso en la resolución de problemas y, en extremo, será posible plantear métodos de búsqueda exhaustiva con el fin de encontrar el óptimo global.

De los casos estudiados, solamente la técnica de subdominio propuesta por Akçali y Dittrich (Akçali y Dittrich, 1989b) hace distinción entre la síntesis de mecanismos para generar curvas abiertas y la síntesis para generar curvas cerradas. No obstante, si se examina en detalle, son dos problemas que exigen planteamientos diferentes. En síntesis de trayectoria para generar curvas cerradas, la función objetivo debe comparar las curvas requerida y generada —ambas cerradas— sin tener en cuenta ningún punto de comienzo ni finalización. Sin embargo, en síntesis de curvas abiertas se ha de comparar un tramo abierto de una curva (la requerida) con la curva generada que puede ser abierta o cerrada (según el mecanismo se bloquee antes de cerrar la trayectoria o no). En cualquier caso (y en ausencia de prescripción de tiempo en la síntesis), en la optimización se han de incluir los puntos inicial y final (correspondientes a las posiciones inicial y final de la barra accionadora) sobre la curva generada. Es decir, la comparación de un tramo abierto de curva con otra curva —abierta o cerrada— implica la complicada tarea de averiguar a partir de qué punto de esta última, y con que tamaño, posición y orientación de la primera la superposición de ambas refleja una mayor concordancia de sus trazados.

---

<sup>46</sup> Entendida como la esencia de la forma de la curva, sin tener en cuenta su posición, orientación o tamaño.

Resulta evidente que la comparación de curvas abiertas es mucho más compleja que la de curvas cerradas ya que la función objetivo (que representa el método de comparación) para el caso abierto tiene más variables y una mayor no-linealidad que el caso cerrado, lo que dificultará considerablemente la síntesis.

### ***El algoritmo de optimización.***

El algoritmo de optimización es la secuencia de operaciones que se han de realizar para llegar a la posición dentro del espacio de diseño en la que la función objetivo tiene un valor mínimo (o máximo), es decir, al óptimo. La optimización es un problema matemático de programación no lineal que viene siendo estudiado desde hace décadas. En la actualidad existen varias soluciones con numerosas variantes.

En general, encontrar el óptimo global en un espacio de diseño cuando la función objetivo presenta varios mínimos locales es una tarea considerablemente complicada. Ninguno de los algoritmos existentes asegura la consecución del óptimo global. Sin embargo, algunas estrategias de búsqueda presentan una mayor probabilidad de encontrarlo.

En muchos casos no se persigue encontrar el óptimo global, sino solamente encontrar un óptimo *razonable* atendiendo a las consideraciones de diseño. Hay que hacer notar que lo ideal es siempre encontrar el óptimo global (ya que, evidentemente, es la mejor opción dentro del espacio de diseño) sin embargo, el coste de la búsqueda puede ser muy elevado y, pese a todo, no se asegura su obtención. Por otro lado, en muchos problemas es suficiente con encontrar un mínimo local adecuado. El planteamiento algorítmico del problema depende de qué opción se desea de entre esas dos posibles.

En la actualidad, los algoritmos de optimización se pueden clasificar en tres categorías generales atendiendo a la naturaleza de su funcionamiento.

En primer lugar los *algoritmos de optimización basados en el gradiente* parten de una determinada posición inicial y se dirigen pendiente abajo (según el gradiente de la hipersuperficie) en busca del óptimo. A su vez, estos algoritmos pueden ser subdivididos en dos subgrupos: los que utilizan derivadas de la función objetivo y los que no utilizan dichas derivadas. Los primeros presentan una convergencia más rápida hacia el óptimo, pero existen muchos casos en los que la expresión de las derivadas de la función objetivo respecto a cada una de las variables de diseño no se conoce explícitamente. En tal caso puede ser estimada mediante técnicas de diferencias finitas<sup>47</sup> (Press *et al.*, 1991) o, en última instancia, pueden utilizarse los segundos métodos.

---

<sup>47</sup> Estos métodos numéricos de estimación de la derivada de una función tienen limitaciones de tipo computacional y, en muchos casos, se tiene una mejor convergencia si se utilizan métodos sin evaluación de las derivadas.

Hay que decir que los algoritmos basados en el gradiente son métodos deterministas y el óptimo al que conducen es función directa del punto de partida. Por lo tanto, la probabilidad de encontrar el óptimo global es igual a la probabilidad de proporcionar un buen punto de partida. Sin embargo, como se muestra en la tabla 2.3, estos métodos han sido y son los más utilizados en la resolución de problemas de síntesis óptima de mecanismos.

En segundo lugar figuran los *algoritmos de optimización aleatorios*. Estos métodos proponen como solución puntos del espacio de diseño extraídos aleatoriamente. Posteriormente, tras la evaluación mediante la función objetivo, son clasificados de acuerdo con su valor asociado. Consecuentemente, cuantos más puntos del espacio de diseño se extraigan mayor probabilidad existirá de encontrar el óptimo global. Algunos autores (Garrett y Hall, 1968) han utilizado métodos aleatorios con la intención de obtener el óptimo global. Para ello han ido reduciendo progresivamente el intervalo de extracción aleatoria alrededor de los puntos mejores de acuerdo con la función objetivo.

Finalmente, en tercer lugar, se encuentran los modernos métodos evolutivos o genéticos (Kunjur y Krishnamurty, 1997). Estos métodos están basados en las teorías de evolución natural de una población que se fundamentan en el concepto de mejora evolutiva. No son métodos deterministas y, por lo tanto, existe una probabilidad no nula de lograr el óptimo global partiendo de cualquier población de puntos.

En el caso particular de la síntesis óptima de mecanismos para generación de trayectoria, la función objetivo contiene un gran número de óptimos locales dentro del espacio de diseño. Un algoritmo de optimización local (basado en el gradiente) que parte de un punto aleatorio converge al mínimo local más cercano pendiente abajo, el cual puede ser insatisfactorio. Este problema es, en general, resuelto especificando un punto de partida que por sí mismo suponga una solución aceptable. Sin embargo el logro de este punto de partida *adecuado* no es en absoluto un problema trivial. Las soluciones clásicas para conseguirlo son, por un lado, haciendo uso de una gran experiencia por parte del diseñador o, por otro lado, mediante la búsqueda en un catálogo de curvas del acoplador. La primera no es una opción para diseñadores no expertos en mecanismos y la segunda es tediosa. Además ninguna de las dos conduce necesariamente al óptimo global.

El análisis de trabajos previos revela que, inicialmente, el problema de optimización era resuelto de una manera directa (en la que no se necesitan iteraciones) igualando a cero las diferentes derivadas de la función objetivo respecto de las variables de diseño. Así se obtiene un sistema de ecuaciones no lineales que, en los casos más simples, puede ser resuelto analíticamente obteniendo el valor del óptimo. Sin embargo, en los casos en los que lo anterior no es posible, el sistema de ecuaciones no puede ser resuelto salvo por la vía numérica. En tal caso el problema de optimización es transformado en otro problema de resolución de un

sistema de ecuaciones no lineal, el cual ha sido tradicionalmente resuelto mediante técnicas numéricas clásicas, como el método de Newton-Raphson. Sin embargo, esta técnica ya necesita de un punto de partida y generalmente termina en una solución intermedia, es decir, en un mínimo local que dependerá de la posición de partida. Además, exige el manejo de ecuaciones de una complejidad considerable.

Finalmente, las últimas tendencias van en la línea de plantear el problema de optimización en base a la función objetivo y utilizar métodos iterativos para encontrar el óptimo, con o sin necesidad de hacer uso de las derivadas.

Pese a que muchos investigadores han sido conscientes del problema, muy pocos han intentado proponer soluciones para la búsqueda del óptimo global. Esta búsqueda puede ser planteada mediante dos etapas. Una primera (*búsqueda gruesa*) consistente en una evaluación indiscriminada (uniforme, aleatoria o evolutiva) del espacio de diseño en la búsqueda de buenos puntos de partida y, posteriormente, una segunda (*refinamiento u optimización fina*) consistente en la optimización de los mejores puntos obtenidos en la primera.

Sin embargo, en la bibliografía se observa que en la gran mayoría de los trabajos publicados solamente se plantean la etapa de refinamiento (tabla 2.3), ignorando la búsqueda del punto de partida adecuado. Tanto es así que en los ejemplos mostrados figura con frecuencia un punto de partida que supone una opción considerablemente buena dentro de los infinitos puntos existentes en el espacio de diseño. Pero la optimización partiendo de un punto *ventajoso* del espacio de diseño consiste exclusivamente en la aplicación del algoritmo de optimización oportuno. Por el contrario, la tarea de sistematizar la búsqueda de buenos puntos de partida apenas ha sido estudiada, siendo muy pocos los trabajos que hacen alusión a este tema.

Por el contrario, algunos autores (tabla 2.3) sí han advertido la necesidad de proporcionar métodos de optimización en dos etapas y han sugerido métodos diferentes para cada una de ellas. Estos autores se han inclinado mayoritariamente por utilizar algoritmos aleatorios en la etapa de búsqueda gruesa y, posteriormente, algoritmos basados en el gradiente en la etapa de refinamiento. Ciertamente, la utilización de algoritmos basados en el gradiente en la primera etapa no parece conveniente dado que necesitan una posición de partida y el resultado es dependiente de la seleccionada. Por otro lado, los algoritmos aleatorios son buenos generadores de puntos de partida con una distribución específica dentro del espacio de diseño. Sin embargo, en la segunda etapa las características idóneas se invierten. Tras la ejecución de la búsqueda gruesa, los mejores puntos obtenidos de forma aleatoria estarán probablemente cerca del óptimo asociado a cada uno de ellos, por lo que es recomendable utilizar un algoritmo que se dirija directamente a ese óptimo. Debido a esto, los autores han planteado algoritmos basados en el gradiente para la etapa de refinamiento.

Referencia	ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN			
	Método de optimización	Base del algoritmo de optimización de refinamiento	Utilización de derivadas de la función objetivo	Inclusión de algoritmos de búsqueda de puntos de partida adecuados (búsqueda gruesa).
Roth y Freudenstein (1963)	Iterativo	Gradiente	Si	Si*
Fox y Wilmert (1967)	Iterativo	Gradiente	No	No
Lewis y Gyory (1967)	Iterativo	Gradiente	Si	No
Lewis y Falkenhagen (1968)	Iterativo	Gradiente	Si	No
Tomás (1968)	Iterativo	Gradiente	No	No
Garrett y Hall (1968)	Iterativo	Aleatorio	No	Aleatorio
Nolle y Hunt (1971)	Iterativo	Gradiente	Si	No
Kramer y Sandor (1975)	Iterativo	Gradiente	No	No
Bakthavachalam y Kimbrell (1975)	Iterativo	Gradiente	No	No
Bagci y Lee (1975)	Directo	N/A <sup>♦</sup>	No	No
Thompson (1975)	N/A <sup>♦</sup>	N/A <sup>♦</sup>	N/A <sup>♦</sup>	N/A <sup>♦</sup>
Zhang <i>et al.</i> (1984)	Iterativo	Aleatorio	No	Atlas
Avilés <i>et al.</i> (1985)	Iterativo	Gradiente	Si	No
Angeles <i>et al.</i> (1988)	Iterativo	Gradiente	Si	No
Akçali y Dittrich (1989)	Directo	N/A <sup>♦</sup>	No	No
Watanabe (1992)	Iterativo	Gradiente	No	Aleatorio
Cossalter <i>et al.</i> (1992)	Iterativo	Gradiente	No	No
Krishnamurty (1992)	Iterativo	Gradiente	No	Aleatorio
Vallejo <i>et al.</i> (1995)	Iterativo	Gradiente	Si	No
Unruh y Krishnaswami (1995)	Iterativo	Heurístico	No	No
Ullah y Kota (1996)	Iterativo	Gradiente	No	Hide y Seek
Kunjur y Krishnamurty (1997)	Iterativo	N/A <sup>♦</sup>	No	Genético

\* El problema planteado tiene solución exacta que es buscada mediante optimización.

♦ No aplicable.

Tabla 2.3. Estudio del algoritmo de optimización por parte de los métodos propuestos.

La resolución de problemas de síntesis óptima está asociada a un tiempo de computación que, para que el método sea utilizable —y competitivo— en la práctica, debe ser moderado. Así, debido a la creciente potencia de los ordenadores cada vez es posible abordar los problemas de optimización de una forma más ambiciosa. Además, si se tiene en cuenta que en cada iteración el tiempo de computación es consumido en su mayor parte por la función objetivo (en la evaluación de candidatos del espacio de diseño), el diseño de una función objetivo computacionalmente económica puede favorecer el planteamiento de la optimización global.

## ***Las restricciones.***

Las restricciones en el problema de optimización limitan las posibles soluciones reduciendo el espacio de diseño durante la optimización. Los problemas de optimización con restricciones son característicos del empleo de algoritmos de optimización basados en el gradiente. Existen diversos métodos de optimización restringida, siendo uno de los más empleados el algoritmo de Fiacco y McCormick (Fiacco y McCormick, 1963).

Por otra parte, hay dos tipos de restricciones aplicables a los problemas de optimización: de igualdad y de desigualdad. Las primeras establecen relaciones que las variables de diseño deben cumplir, no siendo aptos los puntos del espacio de diseño que no cumplan esta relación. Las segundas eliminan todos aquellos puntos del espacio de diseño que no cumplan la desigualdad.

Con aplicación al problema de síntesis dimensional óptima, se puede realizar una síntesis considerando restricciones o sin considerar restricciones (tabla 2.4). En el caso de que existan restricciones, estas pueden ser clasificadas de una forma generalista dentro de tres tipos diferentes.

En primer lugar están las *restricciones de acotación del espacio de diseño*. Si se tiene en cuenta que de un espacio de diseño  $n$ -dimensional no todos los valores de todas las dimensiones son viables en la práctica, resulta necesario limitar estos valores mediante ecuaciones de restricción. Por ejemplo, en mecanismos, las longitudes de los eslabones no pueden ser menores que cero ni tampoco es práctico que superen un cierto valor máximo. Por lo tanto es posible acotar las dimensiones del espacio de diseño mediante ecuaciones de restricción.

En segundo lugar, se pueden incluir *restricciones de funcionamiento* con el fin de asegurar que el funcionamiento de la solución obtenida cumpla ciertas condiciones. En síntesis dimensional, estas restricciones están relacionadas con y/o limitan la relación de longitudes de las barras del mecanismo (para impedir que se obtengan mecanismos deformes), la rotabilidad de ciertas barras, el ángulo de transmisión, etc.

Finalmente, se pueden incluir *otras restricciones* atendiendo a otro tipo de consideraciones.

En la bibliografía se pueden encontrar opiniones contrapuestas en relación con el beneficio que supone la inclusión de restricciones. No obstante, parece demostrado que la inclusión de restricciones de cualquier tipo implica una cierta complicación del problema matemático de la optimización (Nolle y Hunt, 1971). Esto tiene sentido pues, cuando existen restricciones, los algoritmos de optimización, no pueden conducirse con total libertad por el espacio de diseño en busca del óptimo. En efecto, la inclusión de restricciones supone una

limitación brusca del espacio de diseño que no se ve reflejada en el gradiente de la función objetivo, por lo que el algoritmo no obtiene ningún indicador que señale cuando está cerca de no cumplir los requisitos. Como consecuencia, con frecuencia se obtienen óptimos de peor consideración que en el caso no restringido y habitualmente el número de iteraciones necesario es mayor.

Por otro lado, la inclusión de restricciones provoca discontinuidades en la solución (Angeles *et al.*, 1988). Esto implica que puede no existir una relación directa entre el punto de partida y la solución obtenida tras el proceso de optimización, lo cual perjudica el uso de la sensibilidad del diseñador en la mejora de sus diseños.

Algunos de los trabajos existentes proponen el uso de restricciones, mientras que otros no. En la tabla 2.4 se muestra un resumen de este uso en algunos de los trabajos estudiados y en ella se observa una mayoría de autores que proponen métodos sin el uso de restricciones. En general resulta patente (y es comúnmente aceptado) que el uso de restricciones perjudica sensiblemente el proceso de optimización e incrementa su coste computacional.

Como se ha mencionado, la acotación del espacio de diseño es necesaria debido a la imposibilidad práctica de fabricar mecanismos de cualquier tamaño. Además, tampoco resultan útiles aquellos mecanismos con una gran desproporción entre sus barras. Sin embargo, es muy probable que la función objetivo en los problemas de síntesis óptima de trayectoria sea una hipersuperficie con varios mínimos locales dentro del hiperespacio<sup>48</sup> acotado en el que se encuentran las dimensiones útiles del mecanismo. Si así fuera, esto supondría que aunque no se utilizaran restricciones —partiendo de un punto dentro de ese hiperespacio acotado— sería poco probable que un algoritmo de optimización basado en el gradiente condujera a un óptimo fuera del mismo. Pero aunque así fuera, sería posible descartar la solución posteriormente y continuar con el proceso de optimización en base a otro punto. En tal caso, sería innecesario la inclusión de este tipo de restricciones a la vez que su eliminación favorecería el proceso global de optimización.

En cuanto a las restricciones de funcionamiento, resulta evidente que su utilización en el problema de optimización redundará en la obtención de soluciones no solamente óptimas desde el punto de vista de la función objetivo sino también válidas atendiendo a otros criterios. Una alternativa es la optimización no restringida de varios puntos del espacio de diseño, la cual aportará diferentes mínimos locales. Posteriormente se puede realizar un filtrado de los mínimos mediante la aplicación de las restricciones. Con ello se gana en sencillez del planteamiento y en rapidez de resolución, pero muy probablemente la solución que se obtenga

---

<sup>48</sup> Es decir, un volumen en un espacio  $n$ -dimensional.

sea menos óptima que la que pudiera obtenerse contemplando las restricciones en la optimización.

Referencia	RESTRICCIONES			
	Optimización con restricciones	Inclusión de restricciones de acotación del espacio de diseño	Inclusión de restricciones de funcionamiento	Inclusión de otras restricciones
Roth y Freudenstein (1963)	No	No	No	No
Fox y Willmert (1967)	Si	Si	Si	No
Lewis y Gyory (1967)	No	No	No	No
Lewis y Falkenhagen (1968)	No	No	No	No
Tomás (1968)	Si	Si	Si	No
Garrett y Hall (1968)	No	No	No	No
Nolle y Hunt (1971)	No	No	No	No
Kramer y Sandor (1975)	Si	No	No	Si
Bakthavachalam y Kimbrell (1975)	Si	No	Si	Si
Bagci y Lee (1975)	No	No	No	No
Thompson (1975)	N/A*	N/A*	N/A*	N/A*
Zhang <i>et al.</i> (1984)	No	No	No	No
Avilés <i>et al.</i> (1985)	No	No	No	No
Angeles <i>et al.</i> (1988)	No	No	No	No
Akçali y Dittrich (1989)	No	No	No	No
Watanabe (1992)	N/A*	N/A*	N/A*	N/A*
Cossalter <i>et al.</i> (1992)	No	No	No	No
Krishnamurty (1992)	No	No	No	No
Vallejo <i>et al.</i> (1995)	Si	Si	No	No
Unruh y Krishnaswami (1995)	No	No	No	No
Ullah y Kota (1996)	No	No	No	No
Kunjur y Krishnamurty (1997)	No	No	No	No

\* No aplicable.

Tabla 2.4. Estudio del uso de restricciones por parte de los métodos propuestos.

La utilización de restricciones es llevada al extremo en el planteamiento realizado por Fox y Willmert (Fox y Willmert, 1967). En él se contemplan todas las dimensiones  $d_1$  a  $d_9$  mostradas en la figura 2.3 (variables de diseño del mecanismo de 4 barras) pero además, también se involucran las variables  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  y  $\theta_i$  correspondientes a cada uno de los puntos requeridos  $P_i(x_i, y_i)$ . Pero como no es posible combinar cualesquiera ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\theta$  con cualesquiera dimensiones  $d_1$ ,  $d_2$ , ...,  $d_9$ , los autores imponen ecuaciones de restricción de igualdad —que son sencillamente las ecuaciones de bucle— para relacionar ambos grupos de

variables. De esta forma involucran en el proceso global de optimización para síntesis el miniproceso de optimización requerido para resolver las ecuaciones de bucle correspondientes al análisis.

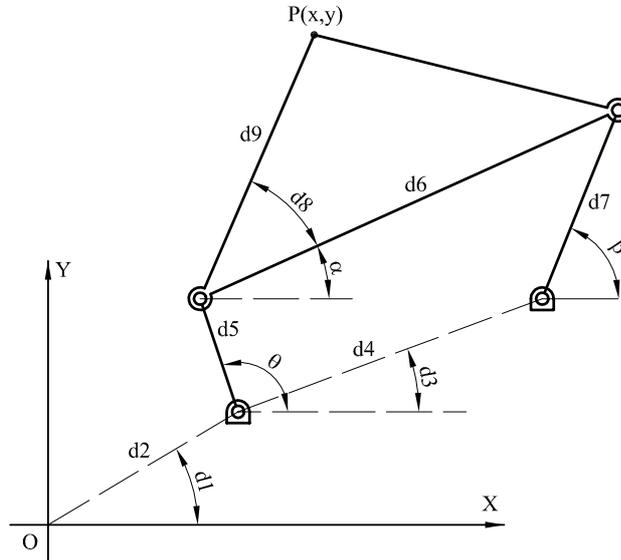


Figura 2.3. Variables del mecanismo de 4 barras.

Con esto Fox y Willmert consiguen una atractiva formulación clásica del problema pero éste queda perjudicado para su optimización no obteniéndose con ello ningún beneficio. En efecto, se ha aumentado considerablemente el espacio de diseño (añadiendo varias dimensiones), lo que dificulta enormemente la búsqueda del óptimo. Por otro lado, resulta sencillo (y el resto de los autores así lo han hecho) involucrar las ecuaciones de bucle del mecanismo en la función objetivo en lugar de agregarlas como ecuaciones de restricción de igualdad.

Consecuentemente, del método de optimización se pueden obtener mejores resultados y en mucho menos tiempo si se separa el análisis de la síntesis de mecanismos que si se intenta resolver el problema conjunto.

En definitiva, la inclusión de restricciones en la síntesis dimensional óptima de mecanismos planos es un aspecto que debe estudiarse cuidadosamente ya que complica considerablemente el problema de optimización. Sin embargo, en base a lo argumentado, parece lógico pensar que la inclusión de las restricciones de acotación del espacio de diseño puede eliminarse (corriendo únicamente el riesgo de obtener alguna solución fuera del espacio de diseño frente a varias dentro). En cuanto al resto de restricciones (funcionamiento), pueden

ser incluidas o no dependiendo de la importancia relativa (en el problema que se pretende resolver) de los condicionantes físicos que representan.

## Conclusiones.

---

Como se ha visto, la síntesis dimensional de mecanismos como parte de la Ingeniería Mecánica está aún hoy relativamente poco desarrollada. A raíz de los trabajos publicados se observa una evolución vacilante e incierta —en ocasiones divergente— en el progreso de esta materia. Una prueba de ello es la continua aparición de métodos con aplicación muy específica.

Se han detectado una falta de progreso en el planteamiento del problema. En efecto, existe una tendencia fuertemente arraigada hacia la proposición de planteamientos con una formulación clásica (Garrett y Hall, 1968). En este sentido, se observa una escasa inclinación a tener en cuenta en el planteamiento las herramientas de cálculo (ordenadores digitales y herramientas informáticas) que posteriormente serán utilizadas para la resolución de los problemas. Así, en pocas ocasiones se ha buscado la simplificación del problema para su implementación en programas informáticos. Tampoco se ha dado importancia al coste computacional de las operaciones realizadas, con el fin de minimizar el proceso de cálculo. En definitiva, se detecta una falta de formulación vanguardista orientada a la resolución de los problemas de síntesis dimensional aproximada con herramientas informáticas de cálculo. Este necesario replanteamiento obliga a cambiar el esquema de importancia relativa de los diferentes aspectos relacionados con el proceso de elaboración de nuevos métodos de síntesis.

Aparte de la escasa orientación del problema hacia el cálculo, se observa también una tendencia hacia el planteamiento generalista de síntesis de trayectoria sin distinción entre trayectorias abiertas y cerradas. Sin embargo, ambos problemas demuestran ser muy diferentes (véanse los capítulos 3 y 4) y puede obtenerse un gran beneficio (que repercute en los tiempos de resolución del problema de optimización y en la calidad de las soluciones obtenidas) al realizar planteamientos diferentes para cada uno de los dos casos. Para ello es posible estudiar las diferencias entre ambos problemas y la aportación de soluciones específicas que se adapten a las particularidades de cada uno.

Por otro lado y como se ha visto, el problema de síntesis dimensional aproximada constituye un problema de optimización que, por su complejidad, casi siempre debe ser resuelto por la vía numérica. La formulación de este problema matemático exige la definición de varios aspectos que atañen al mismo: el espacio de diseño, la función objetivo, el algoritmo de optimización y, opcionalmente, las restricciones. Así, el objetivo último de la síntesis como

problema de programación no lineal es “la minimización de la función objetivo dentro del espacio de diseño considerando las restricciones si las hubiera” para lo cual se utiliza el algoritmo de optimización. En el estudio de la forma de encontrar el mejor mecanismo (óptimo global de la función objetivo dentro del espacio de diseño) capaz de cumplir los requisitos de síntesis, varios han sido los autores que han pronosticado la existencia de múltiples mínimos locales dentro del espacio de diseño, lo que complica el problema dado que los algoritmos basados en el gradiente (que son los algoritmos clásicamente utilizados) únicamente conducen al óptimo más cercano pendiente abajo. Por ello, se ha sugerido por parte de algunos autores la necesidad de separar la parte algorítmica de optimización en dos etapas: una búsqueda gruesa y una optimización fina. Sin embargo, se observa que la mayor parte de los trabajos publicados intentan dar solución exclusivamente a la segunda parte —optimización fina— olvidando proponer fórmulas para encontrar buenos puntos de partida que conduzcan al óptimo global o, como mínimo, a un buen mínimo local. En ocasiones se ha intentado paliar esta deficiencia proponiendo la búsqueda de buenos puntos de partida en atlas de curvas del acoplador. Sin embargo, esta técnica puede considerarse obsoleta dada la capacidad de los actuales ordenadores digitales para tratar la información. Otros autores han ignorado esta necesidad, pudiendo afirmarse que existe una gran escasez en la propuesta de técnicas alternativas para la búsqueda gruesa de mecanismos factibles para los requisitos de síntesis.

Al mismo tiempo, en los métodos de síntesis propuestos se observa una falta de ambición hacia la consecución del óptimo global (el mejor mecanismo posible, de un tipo determinado, para el cumplimiento de los requisitos de síntesis). En la mayoría de los casos los métodos propuestos tienen como fin la consecución de un buen mínimo de la función objetivo, pero raramente se hace mención a la posibilidad de que este mínimo sea el óptimo global dentro del espacio de diseño. Los investigadores de esta materia parecen estar contagiados de la imposibilidad práctica de encontrar el óptimo global debido a que hasta hace pocos años no se disponía de recursos —herramientas de cálculo— con capacidad para abordar la búsqueda de dicho óptimo global. Pero los ordenadores digitales han crecido en prestaciones con el tiempo muy por encima de la linealidad, siendo necesario (en esta como en tantas otras materias) el esfuerzo de la comunidad de investigadores por imaginar e idear nuevos métodos que aprovechen al máximo las capacidades de las nuevas herramientas de cálculo.

Por otro lado, los diferentes componentes del problema de optimización han sido estudiados y mejorados de forma desigual por los investigadores.

Escasos o nulos son los estudios del espacio de diseño con el fin de reducir su tamaño. La búsqueda de relaciones entre las curvas generadas por diferentes puntos del mismo; la detección de repeticiones de puntos y la eliminación de dimensiones superfluas puede permitir una reducción considerable del espacio de diseño. Incluso es posible establecer ciertos requisitos para la elaboración de funciones objetivo que potencien la reducción mencionada.

Con todo, puede conseguirse minimizar el espacio de puntos de diseño y lograr una mejora sustancial del proceso de optimización. Sin embargo, este proceso ha sido ignorado en la mayoría de los métodos propuestos hasta el momento.

Tampoco existen estudios de las funciones objetivo orientados a establecer las características recomendables de éstas que facilitan la consecución del óptimo. Estudios de la variación del valor de la función objetivo a medida que las variables de diseño se separan de sus valores ideales (estudio de evolución de la función objetivo ante deformación progresiva del mecanismo) son fundamentales cuando el fin último es la optimización. Así, es factible la proposición de funciones objetivo cuya evolución no corresponda a la realidad<sup>49</sup>, obteniendo un resultado *falso* al aplicar un algoritmo de optimización. Por ello, se considera de especial importancia verificar la *progresividad* de la función objetivo propuesta mediante ensayos específicos.

Asimismo, en el caso de síntesis de trayectoria, se detecta una falta de diseño de funciones objetivo considerando la comparación de la forma intrínseca de las trayectorias (generada y requerida), con independencia de factores externos a la misma (como son su posición, orientación, escala, simetría, etc.). En efecto, una misma curva —definida por sus ecuaciones matemáticas— puede, mediante transformaciones geométricas, convertirse en otra. Pero las características del problema de síntesis y su objetivo permiten que, si una curva generada por un mecanismo cumple los requisitos de trayectoria en el problema de síntesis independientemente de su posición, orientación, tamaño y simetría, resulta sencillo (y automatizable), mediante transformaciones geométricas, obtener el mecanismo que cumplirá los requisitos teniendo en cuenta esos factores geométricos. Pese a que este razonamiento es evidente, los métodos de solución siguen planteándose en ocasiones con funciones objetivo que juzgan la diferencia de las curvas no únicamente comparando sus formas intrínsecas.

Los motivos anteriormente expuestos justifican el estudio en profundidad de los diferentes aspectos que atañen al planteamiento del problema de *síntesis dimensional aproximada de mecanismos planos para generación de trayectoria* con dos objetivos primordiales: dotar al planteamiento de una orientación hacia la resolución mediante herramientas informáticas y plantear estrategias de búsqueda del óptimo global dentro del espacio de diseño.

---

<sup>49</sup> La función objetivo depende, en este caso, de las dimensiones del mecanismo. En generación de trayectoria, si se parte de unas dimensiones en las cuales el cumplimiento de los requisitos de síntesis es máximo y se cambian sus valores, el valor de la función objetivo debe incrementarse debido a que las características generadas se separan de las características requeridas. Es posible proponer una función objetivo cuya evolución no se corresponda con la diferencia "real" entre características generadas y requeridas. Incluso que a medida que la diferencia real entre características generadas y requeridas aumente, la función objetivo disminuya. En tal caso la optimización de la función objetivo no se corresponderá con la optimización de las características generadas hacia las requeridas.

# Capítulo 3

## Comparación de curvas planas cerradas

---

### 3.1. Introducción.

---

Cuando se desea realizar una síntesis dimensional de un mecanismo plano con un único grado de libertad para generar una trayectoria continua —es decir, cuando se pretenden calcular las dimensiones del mecanismo y la posición de un punto perteneciente a uno de los eslabones tal que el punto genere una determinada trayectoria, moviéndose el mecanismo a lo largo de un ciclo cinemático— no existe una solución exacta en la inmensa mayoría de los casos. Esto es debido a que, en el caso más desfavorable, será necesario imponer infinitas condiciones al mecanismo para trazar la curva requerida. Como el número de condiciones que éste puede contemplar de forma exacta nunca es superior a su número de variables de diseño, el mecanismo debería tener infinitas variables de diseño para poder reproducir de forma exacta cualquier curva requerida.

Consecuentemente, si para generar la trayectoria se utiliza un mecanismo que posea un número finito de variables de diseño, éste no será capaz de trazar cualquier trayectoria aún cuando este punto podrá trazar infinitas trayectorias al ser modificadas las variables de diseño.

De todo lo anterior se deduce que la *síntesis dimensional de mecanismos para generación de trayectorias cerradas* es un problema para el que no tiene sentido intentar conseguir una solución exacta. Por contra, si se desea obtener una solución, interesa encontrar la mejor posible, convirtiéndose el problema en un problema de optimización que puede llamarse *síntesis dimensional aproximada de mecanismos planos para generación de trayectorias*. Una vez encontrada la solución óptima, si ésta es suficientemente buena se podrá utilizar el mecanismo para reproducir la trayectoria requerida de una forma aproximada y si no lo es, esto será un indicio de que el tipo de mecanismo seleccionado no es apto para la generación de la trayectoria requerida.

Para que el problema de optimización esté permanentemente definido, será necesario especificar el *espacio de diseño* (dentro del cual se buscará el óptimo), el *método de optimización* (que se encargará de buscar el óptimo evaluando puntos del espacio de diseño),

la *función objetivo* (que evalúa los puntos del espacio de diseño) y, si fuera necesario, las *restricciones del problema* (que impondrán limitaciones a la solución aportada). El objetivo de este capítulo es el estudio de la *función objetivo* del problema mediante el análisis de diferentes alternativas existentes y otras nuevas propuestas.

Teniendo en cuenta que la optimización se llevará a cabo para obtener el mecanismo capaz de reproducir una trayectoria plana y cerrada lo más parecida posible a la trayectoria que se requiere (*curva requerida*), la *función objetivo* destinada a este problema ha de ser capaz de comparar curvas planas cerradas, cuantificando la similitud o diferencia entre éstas. El *método de optimización* utilizará esta función objetivo para evaluar puntos del espacio de diseño (cada uno de los cuales lleva asociado una *curva propuesta*) y, en base al resultado, será capaz de converger hacia el óptimo.

Los mecanismos planos cíclicos reproducen lugares geométricos planos. Cuando se especifica un valor de las coordenadas generalizadas independientes (correspondientes a los grados de libertad) se obtiene una posición del mecanismo y, por lo tanto, una posición del punto trazador (o generador). A medida que se van variando las coordenadas generalizadas para obligar al mecanismo a realizar un ciclo cinemático se van obteniendo puntos del lugar geométrico que genera el punto trazador del mecanismo. Consecuentemente, cada punto (descrito por sus coordenadas  $x$  e  $y$ ) de este lugar geométrico está asociado a unos valores concretos de las coordenadas generalizadas independientes del mecanismo. Debido a esto, los lugares geométricos descritos por puntos de los mecanismos pueden expresarse de forma paramétrica, siendo las coordenadas generalizadas del mecanismo los parámetros de la curva.

Sin embargo, si un mecanismo tiene más de un grado de libertad, y no se impone ninguna relación entre las coordenadas generalizadas del mecanismo (en número igual grado de movilidad del mismo), al tomar valores dichas coordenadas generalizadas dentro de sus intervalos de variación, el lugar geométrico de los puntos sobre los que puede pasar el punto trazador no es una curva sino una región plana. Por ello, los mecanismos trazadores de curvas serán o bien mecanismos de un único grado de libertad o bien mecanismos de más de un grado de libertad existiendo una relación matemática entre los diferentes grados de libertad de forma que solamente uno de ellos sea independiente. Así, se puede asegurar —y en adelante así se considera— que los mecanismos que trazan curvas cerradas planas son *mecanismos cíclicos de un grado de libertad* y, por lo tanto, las curvas generadas por estos mecanismos son *curvas paramétricas dependientes de un único parámetro*.

Una curva paramétrica viene definida por sus expresiones paramétricas (una por cada coordenada) y por un intervalo de variación del parámetro. Para que la curva sea cerrada se ha de cumplir que las coordenadas del punto correspondiente al valor inicial del parámetro han de ser necesariamente las mismas que las del punto correspondiente al valor final del parámetro. Además, si se requiere que la conexión en los puntos inicial y final sea *suave* las derivadas

primera y segunda de las coordenadas con respecto al parámetro también tendrán que ser las mismas en tales puntos de la curva.

En las curvas generadas por los mecanismos, el parámetro corresponde a la coordenada generalizada independiente y el intervalo dentro del cual varía dicho parámetro corresponderá al rango de variación de la coordenada generalizada. Por ejemplo, en un mecanismo de cuatro barras de tipo manivela-balancín, la manivela (eslabón de entrada) realiza giros completos y el ángulo de esta barra con el eje  $X$  de un sistema de referencia será la coordenada generalizada independiente. A medida que se dan valores a este ángulo  $\theta$  dentro del intervalo  $[0, 2\pi[$  se obtendrán los diferentes puntos de la curva, siendo  $\theta$  el parámetro de la curva generada. La inmensa mayoría de las trayectorias generadas por mecanismos de barras son curvas derivables hasta el segundo orden o más. En efecto, las ocasiones en las que la trayectoria generada tiene cúspides (no existiendo la derivada de la curva en ese punto) son muy escasas. Debido a esto, este capítulo se centra en el estudio de *métodos de comparación de curvas*<sup>50</sup> cerradas derivables hasta el segundo orden, considerando excepciones las trayectorias que no cumplen este requisito.

## 3.2. Requisitos de los métodos de comparación de curvas (MCC) cerradas.

---

Como se ha visto, un MCC aplicado a curvas planas cerradas tiene como objetivo cuantificar la diferencia entre dos curvas de ese tipo. La dificultad para cuantificar esta diferencia estriba en que las dos curvas pueden ser diferentes (o parecidas) de muchas formas distintas, atendiendo a criterios muy diferentes. Por ejemplo, dos curvas iguales en cuanto a forma, posición y orientación pero de tamaños diferentes —es decir, dos curvas homotéticas— pueden ser consideradas diferentes cuando se utilice un criterio que pretenda destacar el tamaño de la curva. En tal caso, las curvas puede que sean morfológicamente iguales, pero de una forma estricta son diferentes debido a que su trazado no coincide en todos los puntos de ambas curvas. Asimismo, dos curvas morfológicamente iguales y del mismo tamaño pero en diferente posición y/o con diferente orientación son, desde un punto de vista matemático, diferentes ya que sus trazados tampoco coinciden (y las ecuaciones paramétricas que las definen también son diferentes). Finalmente, dos curvas pueden ser diferentes debido a que su diferencia morfológica hace que sus trazados no coincidan, aparte de que sus tamaños, posiciones y/u orientaciones puedan ser diferentes.

---

<sup>50</sup> Procedimiento para cuantificar mediante uno o más parámetros objetivos, calculados matemáticamente, la semejanza entre dos curvas

Así pues, es necesario decidir qué criterios se van a adoptar al comparar las curvas, concretando lo que se desea destacar y lo que no de esta comparación, para el fin que se está estudiando.

Como se ha puesto de manifiesto en capítulos anteriores, en la comparación de las curvas cerradas trazadas por mecanismos planos resulta interesante no tener en cuenta las diferencias de las curvas debido a la posición, orientación y escala de las mismas porque si, al buscar un mecanismo para trazar una determinada curva requerida, se encuentra otro mecanismo que traza la misma curva (con la misma morfología) pero con diferente posición, orientación y/o escala, es posible determinar a partir de éste (con sencillas transformaciones geométricas) las dimensiones y la posición del mecanismo que reproducirá exactamente la curva requerida (un ejemplo de esto puede observarse en la figura 3.1). Otra consideración similar es el problema de simetría. Si un mecanismo genera una curva que es simétrica de la curva requerida también es posible obtener otro mecanismo a partir de éste (realizando una simetría del mismo) que genere la misma trayectoria que la requerida (figura 3.1).

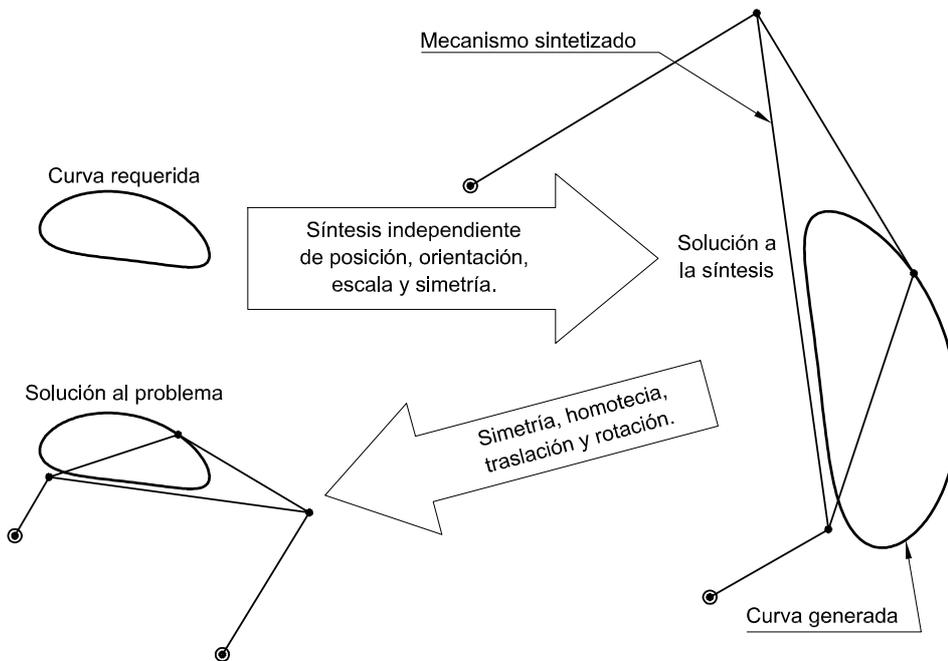


Figura 3.1. Procedimiento de síntesis.

Por otro lado, existen ciertos requisitos que, por lógica, se deben imponer a todo *MCC*, tales como que el método debe ser sensible a la diferencia entre las curvas, indicando que ambas curvas son menos parecidas a medida que aumente su diferencia real e indicando que su diferencia es nula cuando las curvas sean realmente iguales.

Teniendo todo lo anterior en cuenta, los requisitos recomendables de todo MCC con el fin de ser utilizado en síntesis de mecanismos se enuncian a continuación:

- a) Requisito de identificación. El primer requisito y fundamental es que *“el MCC debe indicar que las dos curvas comparadas son iguales cuando realmente no exista ninguna diferencia entre ellas”*. Es decir, en ningún caso debe indicar diferencia alguna cuando las curvas sean iguales.
- b) Requisito de progresividad. De la misma forma, *“el MCC debe expresar una mayor diferencia entre las curvas comparadas a medida que, en la realidad, éstas pierdan similitud”*. Si el método incumple este requisito será ineficaz porque al ser utilizado para decidir cual de dos curvas se parece más a una tercera, éste podría indicar erróneamente que la más parecida es la que en realidad es la menos parecida.
- c) Requisito de conmutabilidad. Otro requisito exigible por simple coherencia es que *“el MCC aplicado a dos curvas A y B debe arrojar el mismo resultado cuando se compara la curva A con la B que cuando se compara la curva B con la A”*, es decir, que el orden de comparación no afecte al resultado de la misma.
- d) Requisito de independencia de posición. Como se ha puesto de manifiesto, para su utilización en síntesis de mecanismos para generación de trayectorias continuas planas, *“el MCC debe ser independiente de la posición de las curvas comparadas”*, lo que significa que si dos curvas son morfológicamente iguales pero están en posiciones diferentes del plano, el método no debe reflejar diferencia alguna entre las curvas.
- e) Requisito de independencia de orientación. Por el mismo motivo que en el requisito anterior, *“el MCC debe ser independiente de la orientación de las curvas comparadas”*.
- f) Requisito de independencia de tamaño. Similar a los anteriores, *“el MCC debe ser independiente del tamaño (escala) de las curvas comparadas”* y no debe apreciar diferencia alguna entre dos curvas homotéticas.
- g) Requisito de independencia de simetrías. Por otro lado, *“el MCC debe ser independiente de posibles simetrías de las curvas”*, indicando la misma diferencia al comparar dos curvas que al comparar una de ellas con la simétrica de la otra, cualesquiera que sean las curvas.
- h) Requisito de independencia de parametrización. En el caso de síntesis dimensional de mecanismos sin tener en cuenta la velocidad, si las curvas vienen expresadas de forma paramétrica, *“el MCC debe ser independiente de la variación del parámetro dentro de las curvas”*. Esto implica que el MCC debe indicar que, por ejemplo, las dos curvas paramétricas expresadas mediante las ecuaciones (3.5) y (3.6) correspondientes a una misma curva (cuya representación puede observarse en la figura 3.2) son iguales.

La imposición del *requisito de independencia de tamaño* tiene otra justificación diferente de la anteriormente expuesta cuando el método se aplica a la búsqueda de las dimensiones de un mecanismo capaz de trazar una determinada curva requerida. En efecto, si el método es insensible a la escala, no encontrará diferencia alguna entre las curvas trazadas por dos mecanismos homotéticos (en el que uno se puede obtener multiplicando todas las dimensiones del otro por un mismo escalar). Por lo tanto, se hace innecesario explorar los mecanismos que se obtienen variando todas las dimensiones del mecanismo inicial en la búsqueda del mejor mecanismo para reproducir la trayectoria requerida. Ya que, si así se hiciera, se estaría incluyendo en el espacio de diseño todos los mecanismos homotéticos que existen dentro de él, los cuales, trazarán curvas que tendrán un mismo *error (o indicador) de comparación*<sup>51</sup> cuando se las compare con la curva requerida. Dicho de otra forma, cuando la diferencia de escala no es trascendental en la comparación de curvas trazadas por mecanismos, se puede eliminar una dimensión del mecanismo (logrando un mecanismo normalizado) pues, para cualesquiera que sean las dimensiones del mecanismo que traza la curva, se puede encontrar un mecanismo normalizado que trace una curva homotética del primero y que, por tanto, arroje un mismo *error de comparación* cuando sea comparada con la curva requerida, no siendo necesario evaluar aquel.

Así, si el *MCC* contempla el *requisito de independencia de tamaño*, se estará reduciendo en una el número de dimensiones del espacio de diseño que se necesitará explorar durante la optimización, lo que supone una considerable simplificación del problema.

De forma similar, la imposición del *requisito de independencia de simetrías* supone disminuir el espacio de diseño original a la mitad en el problema de optimización. En efecto, sabiendo que mecanismos simétricos generan trayectorias simétricas, será posible reducir el espacio de diseño eliminando todos los puntos que representen mecanismos simétricos de los ya evaluados.

### **3.3. Descripción de una curva plana cerrada y sus propiedades.**

Para elaborar un método que permita comparar dos curvas, es necesario estudiar las propiedades que caracterizan la forma de las curvas con el fin de decidir cuales de ellas se pueden utilizar con el fin de obtener un valor numérico que cuantifique su semejanza o su diferencia. Tales propiedades pueden depender de factores que afectan a la representación de la curva pero que no influyen en su forma intrínseca<sup>52</sup>. Entre estos factores se encuentran el

---

<sup>51</sup> En adelante se llamará de esta manera al valor numérico devuelto por los métodos de comparación de curvas, el cual cuantifica la diferencia o similitud entre las curvas comparadas.

<sup>52</sup> Entendiendo por "forma intrínseca" la geometría de la curva independiente de su tamaño, posición, orientación y, en su caso, de su representación desde el punto de vista de la simetría.

tamaño, la posición y orientación de las curvas. Asimismo existen otros factores de los que pueden depender las propiedades de las curvas que no afectan ni a la representación ni a la forma intrínseca de la curva como, por ejemplo, la evolución del parámetro dentro de la curva paramétrica, que se estudiará en detalle más adelante. En el estudio de las propiedades se ha hecho hincapié en analizar estas dependencias con el fin de evaluar cuales de estas propiedades son más independientes de estos factores y, por tanto, son más representativas de la forma intrínseca de la curva.

Una curva paramétrica plana cerrada viene expresada en forma cartesiana por las ecuaciones paramétricas de sus coordenadas:

$$P(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [t_{ini}, t_{fin}[ \quad (3.1)$$

A medida que el parámetro  $t$  toma valores dentro de los infinitos que existen en el intervalo  $[t_{ini}, t_{fin}[$ , las expresiones  $x(t)$ ,  $y(t)$  proporcionan las coordenadas de los infinitos puntos que forman la curva.

Suponiendo que la curva está referenciada en un sistema de ejes cartesianos  $X$ - $Y$ , para un cierto valor del parámetro  $t$  de la curva, ésta posee, entre otras, las siguientes *características puntuales*:

- a) Las coordenada  $x$  e  $y$  del punto de la curva correspondiente al valor  $t$ . Estos valores dependen de la posición, orientación y escala de la curva.
- b) El ángulo  $\theta$  que la recta tangente a la curva en ese punto forma con el eje  $X$ . Depende de la orientación de la curva y es independiente de la posición y escala de la misma. Se puede calcular de acuerdo con la expresión:

$$\theta(t) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\frac{d}{dt} y(t)}{\frac{d}{dt} x(t)} \right) \quad (3.2)$$

Como se aprecia, este ángulo está relacionado con las derivadas primeras de las ecuaciones paramétricas  $x(t)$ ,  $y(t)$  con respecto al parámetro  $t$ , por lo tanto su cálculo solamente es posible en aquellos puntos en los que la curva es derivable (es decir, carece de cúspides).

- c) La curvatura  $\kappa$  (o su inversa, el radio de curvatura  $\rho$ ) de la curva en ese punto. Es independiente de la posición y orientación de la curva, pero es dependiente de la escala de la misma. Se calcula:

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2\right]^{3/2}}}{d^2x(t) \cdot \frac{dy(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} \cdot d^2y(t)} \quad (3.3)$$

La curvatura está, por tanto, relacionada con las derivadas primera y segunda de las ecuaciones paramétricas  $x(t)$ ,  $y(t)$  que definen la curva con respecto al parámetro  $t$ . Si la función no es de clase  $C^2$ , no se puede asegurar el cálculo de la curvatura en todos los puntos de la curva.

- d) La longitud  $s$  de arco de curva medida desde el punto inicial de la misma (correspondiente al valor inicial del parámetro) hasta un cierto punto de la curva (correspondiente a determinado valor de  $t$ ). Como en el caso de la curvatura, la longitud  $s$  es independiente de la posición y orientación de la curva, pero es dependiente de la escala de la misma. Esta longitud se puede calcular mediante la expresión:

$$s(t) = \int_{t_{ini}}^t \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} dt \quad (3.4)$$

Si se representa cada una de las *propiedades puntuales de la curva* expuestas anteriormente con respecto al parámetro  $t$ , se obtienen otras tantas gráficas que describen la forma de la curva. Sin embargo es posible obtener dos pares de gráficas  $x(t)$  vs.  $t$ ,  $y(t)$  vs.  $t$  diferentes que correspondan a una misma curva no siendo estas, por tanto, buenas descriptoras de la forma de la curva. El motivo es que una misma curva puede venir parametrizada de formas diferentes, pudiendo radicar estas diferencias en:

- *El origen de la parametrización* —es decir, el punto inicial de la curva correspondiente al valor inferior del parámetro dentro de su intervalo de variación—.
- *La evolución del parámetro  $t$  dentro de la curva*, que puede ser diferente según la curva esté definida (sin que haya variación en su forma).
- *El sentido de avance de la curva en relación al sentido de avance del parámetro*, que tiene dos posibilidades.

Como ejemplo, en la figura 3.2 se muestra una curva parametrizada de dos formas diferentes. En ellas, el *origen de la parametrización* y el *sentido de avance* es el mismo pero la *evolución del parámetro* dentro de la curva es diferente. Las ecuaciones paramétricas de ambas son:

Parametrización 1:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \cos(t) \cdot \cos(\sin(t)) \\ y_1(t) &= \cos(t) \cdot \sin(\sin(t)) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Parametrización 2:

$$\left. \begin{aligned} x_2(t) &= \cos(\pi \cdot \cos(\pi - t/2) + \pi) \cdot \cos(\sin(\pi \cdot \cos(\pi - t/2) + \pi)) \\ y_2(t) &= \cos(\pi \cdot \cos(\pi - t/2) + \pi) \cdot \sin(\sin(\pi \cdot \cos(\pi - t/2) + \pi)) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

variando el parámetro dentro del intervalo  $[0, 2\pi[$  en ambos casos.

En la figura aparece la curva (representada en línea continua), que es la misma para ambas parametrizaciones, y una representación de cada parametrización mediante puntos correspondientes a incrementos del parámetro  $t$  iguales a  $\pi/12$ . Se observa que para el mismo valor del parámetro, las dos definiciones paramétricas (que expresan la misma curva) arrojan puntos diferentes de dicha curva.

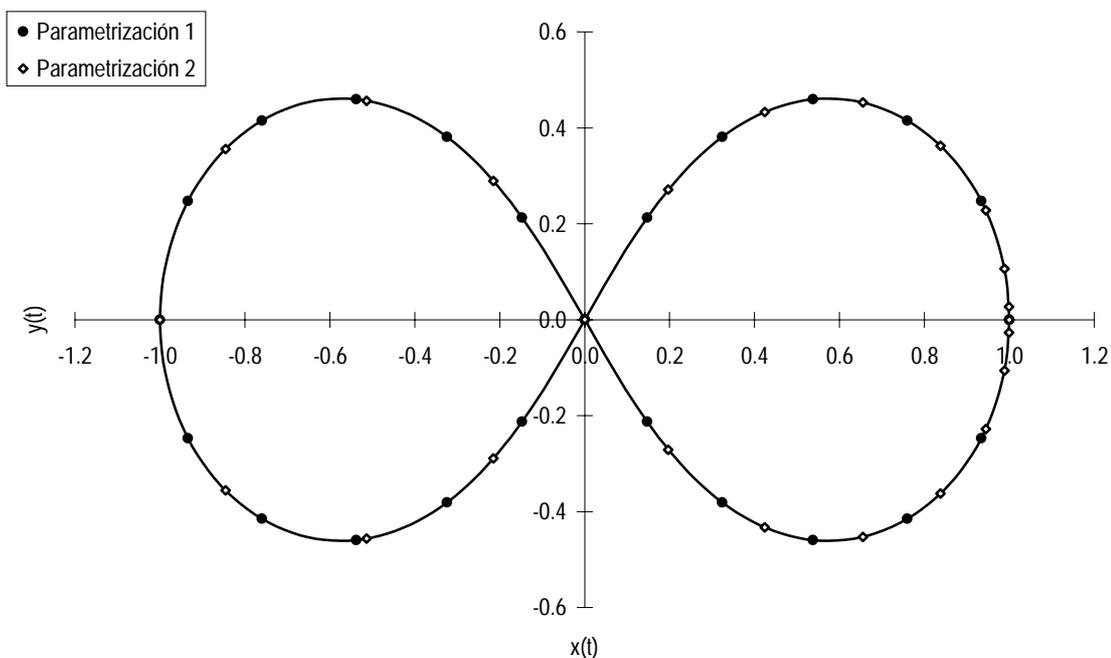


Figura 3.2. Diferentes parametrizaciones de una misma curva.

Si se utiliza el parámetro longitud de arco  $s$  en lugar del parámetro  $t$  y se representan el resto de propiedades con respecto a  $s$  se eliminará esa dependencia de la gráfica con respecto a la velocidad de variación del parámetro  $t$  a lo largo de la longitud de la curva pues, si bien  $s(t)$  también depende de la parametrización de la curva, al referenciar cualquier otra propiedad con

respecto a  $s$  se pierde la dependencia de esta parametrización (en cuanto a evolución del parámetro se refiere, aunque no en cuanto al origen de la parametrización ni a su sentido de avance).

La longitud de arco  $s$  depende del tamaño (escala) de la curva, por lo que todas las representaciones con respecto a  $s$  dependerán de dicha escala. Se puede evitar esto (posibilitando la comparación de dos representaciones gráficas de propiedades correspondientes a dos curvas independientemente del tamaño de las mismas) si se normaliza la longitud de arco de la curva  $s$  para que varíe dentro del intervalo  $[0,1[$ . Esta normalización se puede conseguir representando con respecto a  $s/L$  (siendo  $L$  el valor de  $s$  al final de la curva, es decir, la longitud total de la curva) en lugar de hacerlo con respecto a  $s$ .

De esta forma se pueden obtener las siguientes representaciones gráficas que caracterizan de forma inequívoca la curva:

- a)  $x(s)$  vs.  $s/L$  e  $y(s)$  vs.  $s/L$ : Representan la variación de las coordenadas  $x$  e  $y$  con respecto a la longitud del arco de curva normalizado. Dependen de la posición, orientación y escala de la curva, pero es independiente de la evolución del parámetro dentro de la curva.
- b)  $\theta(s)$  vs.  $s/L$ : Representa la variación del ángulo de la tangente (con el eje  $X$ ) con respecto a la longitud de arco de curva normalizado. Depende de la orientación de la curva, pero es independiente de la posición y escala de la misma así como de la evolución del parámetro.
- c)  $\kappa(s)$  vs.  $s/L$  ó  $\rho(s)$  vs.  $s/L$ : Representa la variación de la curvatura  $\kappa$  (o de su inverso, el radio de curvatura  $\rho$ ) con respecto a la longitud de arco de curva normalizado. Esta gráfica depende de la escala de la curva, siendo independiente de la posición, orientación y evolución del parámetro dentro de la misma.

Las representaciones gráficas anteriormente expuestas correspondientes a la curva mostrada en la figura 3.2 se pueden ver en las figuras 3.3, 3.4 y 3.5.

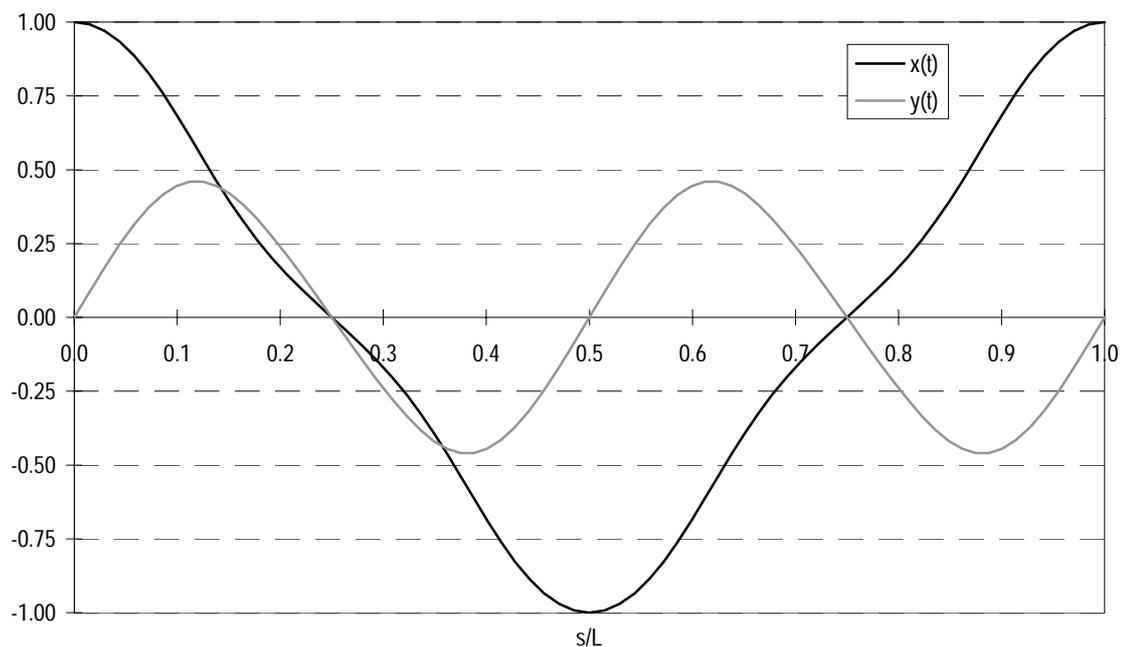


Figura 3.3. Representación de  $x$  e  $y$  vs.  $s/L$ .

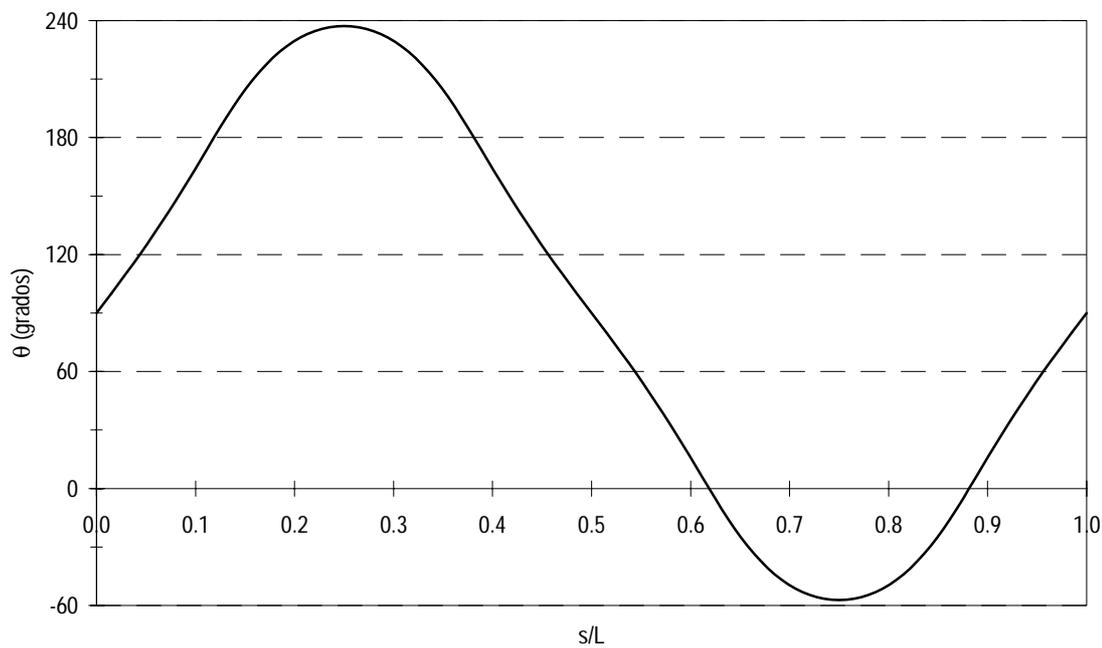


Figura 3.4. Representación del ángulo de la tangente a la curva vs.  $s/L$ .

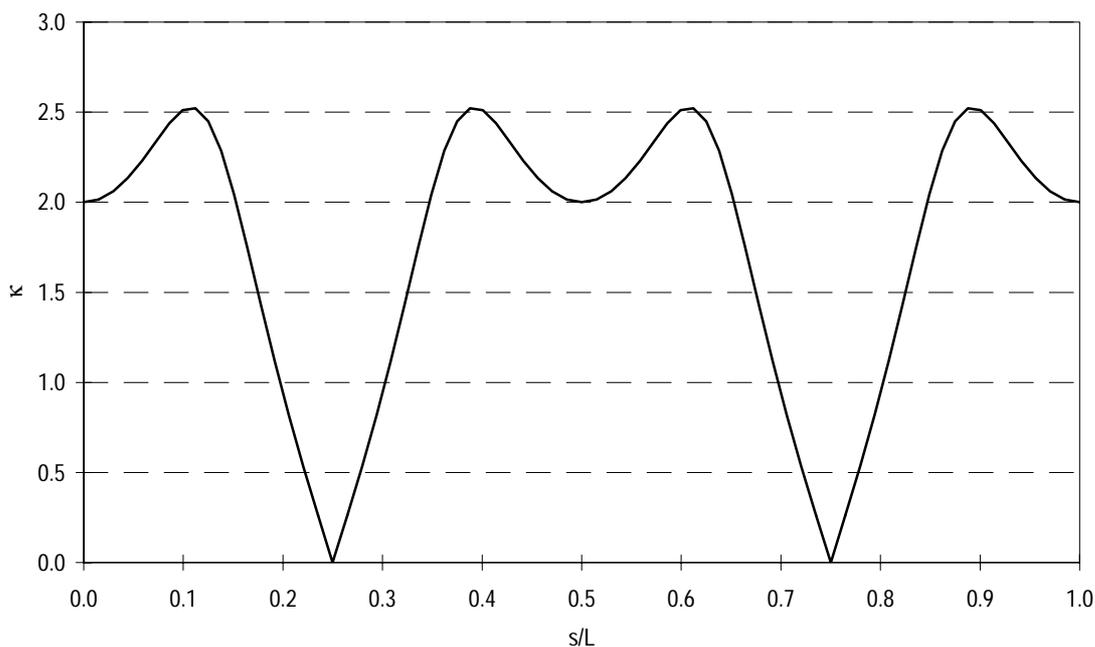


Figura 3.5. Representación de la curvatura de la curva vs.  $s/L$ .

Hay que tener en cuenta que las tres gráficas anteriores (que describen la curva) no son independientes unas de otras sino que están relacionadas de acuerdo con las ecuaciones (3.2) y (3.3) —esto es, a partir de una de ellas se pueden obtener las demás—. Además, debido a que no todas ellas dependen igualmente de los factores puramente representativos de la curva (*posición*, *orientación* y *escala*), unas serán mejores que otras para ser incluidas en el *MCC* cuando lo que se desea es, precisamente, no tener en cuenta estos factores.

En la tabla 3.1 se muestra un cuadro resumen de la dependencia de cada una de las gráficas anteriores con respecto los factores que no reflejan la forma de la curva.

	Posición	Orientación	Escala
$x(s), y(s)$ vs. $s/L$	Sí	Sí	Sí
$\theta(s)$ vs. $s/L$	No	Sí	No
$\kappa(s)$ vs. $s/L$	No	No	Sí

Tabla 3.1. Dependencia de las gráficas con respecto a posición, orientación y escala.

Existen otras *características globales* de una curva cerrada como son la longitud de la misma  $L$  o el área que encierran  $A$ , sin embargo, estas características no son útiles para

comparar diferentes curvas debido a que dos curvas pueden ser muy diferentes teniendo la misma longitud y, por otro lado, encerrando la misma área. Este aspecto es abordado con mayor profundidad en §3.4.

### 3.4. Métodos existentes de comparación de curvas.

---

Como se ha visto, una curva plana queda descrita por las gráficas que representan sus propiedades a lo largo de su longitud. Por tanto, para comparar dos curvas planas será necesario basar esta comparación en las diferencias que existen entre las propiedades que describen ambas curvas. Sin embargo, estas propiedades de la curva tienen una evolución continua a lo largo de la misma, no existiendo ninguna relación general para todas las curvas entre una propiedad de la curva en un punto y la misma propiedad en otro punto de la curva (tal relación dependerá de la curva en cuestión y, por ende, de las ecuaciones paramétricas que la definen).

El *MCC* ideal será aquel que compare las curvas en sus infinitos puntos (*comparación continua*) y que, por tanto, considere cualquier mínima discrepancia en el trazado de las curvas comparadas. Además, si se desea que el método sea independiente de la posición, orientación, escala y posible simetría de las curvas, se tendrán que contemplar estos requisitos. Consecuentemente, el método ideal para comparar curvas destinado a resolver el problema de *síntesis dimensional de trayectoria continua* será aquel que, tras una reposición, una reorientación, un reescalado y una posible simetría de las curvas de forma que el trazado de ambas coincida lo más posible, realice la comparación en sus infinitos puntos.

En la práctica, cualquier método que utilice infinitos puntos es inabordable y se han de buscar alternativas para obtener métodos viables. Existen al menos dos posibilidades para solucionar este problema: una es considerar un número finito de puntos sobre las curvas a comparar y basar la comparación de dichas curvas en las diferencias existentes entre las propiedades en los puntos seleccionados (*comparación discreta*); la otra posibilidad es utilizar *métodos integrales* que tengan en cuenta (mediante integración) las propiedades de las curvas de forma continua<sup>53</sup> (*comparación integral*).

Es necesario hacer notar que, si se utiliza un método integral, éste debe integrar las diferencias entre ambas curvas, en lugar de diferenciar las integrales sobre cada una de ellas, pues de lo contrario se incurre en un error. Así, por ejemplo, si se utiliza la diferencia de áreas

---

<sup>53</sup> Nótese que en la realidad las dos posibilidades serán discretas ya que los métodos integrales se resuelven numéricamente discretizando el dominio de integración. Sin embargo, se realiza esta diferenciación entre ambas posibilidades para indicar que los métodos aquí considerados *discretos* utilizan un número no solo finito sino pequeño de puntos para comparar las curvas; mientras que los *métodos integrales*, si bien utilizan también un número finito de puntos, este número es elevado y, en cualquier caso, muy superior al de los primeros.

(calculadas mediante un método integral) encerradas por las curvas comparadas como parámetro para evaluar las diferencias entre ambas curvas, el resultado no será representativo de sus diferencias morfológicas ya que existen infinitas curvas planas cerradas diferentes que encierran el mismo área.

En el proceso de *discretización* de la comparación de curvas (pasando de considerar infinitos puntos de comparación a un número finito (discreto) de puntos de comparación) aparece un nuevo requisito que no es aplicable a los métodos de comparación continua ni a los métodos integrales: *“El método de comparación discreta de curvas ideal debe ser independiente del número de puntos empleado en la comparación y, por tanto, su valor será igual al obtenido considerando infinitos puntos (método de comparación continua)”*. En la práctica, no será posible encontrar métodos de comparación discreta ideales según este requisito y la comparación de curvas no será independiente del número de puntos considerado en tal comparación (no siendo un requisito exigible). Sin embargo, a medida que el número de puntos considerado en la comparación crezca, el método deberá tender a comportarse de la misma forma en que lo haría el método ideal (de comparación continua) y, por lo tanto, el *error de comparación* devuelto por el primero deberá tender al valor ideal —obtenido al considerar infinitos puntos— cuando el número de puntos considerado crece. Este nuevo requisito realista, derivado del anterior, puede expresarse de la siguiente forma: *“El error de comparación calculado por el método discreto de comparación de curvas debe tender a un cierto valor numérico cuando el número de puntos considerado crece”*, lo que equivale a decir que cuando se representa el error de comparación frente al número de puntos considerado en la comparación, la gráfica debe tener una asíntota horizontal (de valor igual al devuelto por el método de comparación continua), aproximándose tanto más a ella cuanto mayor es el número de puntos considerado.

Existe la posibilidad de que un método discreto no tienda asintóticamente a un determinado valor cuando el número de puntos considerado crezca, sino que muestre otro tipo de tendencia. En tal caso, puede evaluarse la calidad del método teniendo en cuenta las oscilaciones que su resultado presenta en torno a la línea de tendencia cuando el número de puntos considerado crece. Si el método sufre grandes oscilaciones al variar el número de puntos, no será un método estable y la comparación dependerá en gran medida del número de puntos considerado. Si, por el contrario, el resultado sigue una determinada tendencia sin oscilaciones, será mucho más estable y mejor para ser utilizado como comparador de curvas.

Por otro lado, cuando el número de puntos decrezca el *MCC* arrojará resultados que tenderán a no parecerse al *error de comparación ideal*. Para cada método puede haber un umbral en el número de puntos considerado por encima del cual el *error de comparación* devuelto por el método sea suficientemente estable (es decir, sin oscilaciones) cuando se comparan curvas dentro de las pertenecientes a una determinada familia (por ejemplo, la familia de los tipos de curvas diferentes que puede generar un mecanismo determinado). Es

posible estimar este valor *umbral de estabilidad* para cada familia de curvas por medio de las pruebas pertinentes.

El *umbral de estabilidad* está asociado a (y, por tanto, depende de) un *MCC*, a una determinada familia de curvas sobre la que se aplica el método y a un determinado nivel de confianza (que representa el margen de error permitido entre el valor obtenido por el método y el valor real de la comparación). El hecho de que un *MCC* tenga un umbral de puntos bajo supone que el método necesita pocos puntos para estimar de forma estable (en el sentido de *independiente del número de puntos*) la similitud o diferencia entre dos curvas de la familia de curvas considerada. Consecuentemente, cuanto menor sea el umbral de puntos, el método antes alcanzará la estabilidad necesaria para comparar las curvas de forma independiente del número de puntos considerado. Es posible, por tanto, utilizar este umbral de puntos para comparar la estabilidad (o calidad) de los diferentes métodos, probándolos sobre una determinada familia de curvas y observando la evolución del *error de comparación* devuelto a medida que el número de puntos considerado aumenta.

A continuación se explican y analizan las propuestas metodológicas más interesantes realizadas hasta el momento para la comparación de curvas cerradas planas.

### ***3.4.1. Método de mínimos cuadrados optimizando posición y orientación, o método LSOP (Least Squares Optimizing Position).***

Este método, presentado por Watanabe en 1992 (Watanabe, 1992), está basado en la suma de distancias al cuadrado pero, previamente a la obtención de las distancias, realiza varias operaciones para independizar los resultados de la posición, orientación y escala de las curvas.

El algoritmo de cálculo de este método sigue la siguiente secuencia de acciones:

#### Primero. Obtención de puntos de las curvas.

Se obtienen  $n$  puntos de ambas curvas distribuyéndolos uniformemente a lo largo de las longitudes de las mismas. De esta forma se evita que los puntos obtenidos dependan de la evolución del parámetro dentro de las curvas.

### Segundo. Reescalado de las curvas.

Se realiza un reescalado de los puntos obtenidos de la curva propuesta de forma que el tamaño de dicha curva coincida lo más posible con el tamaño de la curva requerida. Para obtener el factor de homotecia que se aplica a estos puntos se utilizan las longitudes de las curvas de forma que, tras la homotecia, la curva propuesta tenga igual longitud —que es una medida del tamaño de la misma— que la curva requerida. En definitiva, lo que se hace es multiplicar las coordenadas  $x$  e  $y$  de cada punto obtenido de la curva propuesta por la relación  $L_{req}/L_{prop}$ , siendo  $L_{req}$  y  $L_{prop}$  las longitudes de las curvas requerida y propuesta, respectivamente. El hecho de que la homotecia así realizada tenga su centro en el origen de coordenadas (con el consecuente cambio de posición que acompaña al cambio de tamaño), en realidad no afecta a los resultados pues las siguientes operaciones se encargarán de repositonar y reorientar la curva propuesta.

Llegados a este punto, se tienen dos series de  $n$  puntos  $(x_{r_i}, y_{r_i})$  y  $(x_{p_i}, y_{p_i})$  pertenecientes a dos curvas —requerida y propuesta, respectivamente— que tienen la misma longitud.

### Tercero. Identificación de puntos homólogos<sup>54</sup>.

Con el fin de que el resultado sea lo más independiente posible del origen de la parametrización de las curvas, se ha de identificar cada pareja de puntos homólogos (es decir, se ha de determinar qué punto de la curva propuesta corresponde al primer punto de la curva requerida teniendo en cuenta la forma de las curvas). Existen  $n$  posibilidades, ya que el primer punto de la curva requerida puede ser homólogo de cada uno de los  $n$  puntos de la curva propuesta. Para realizar esta identificación, Watanabe propone buscar la mejor concordancia de curvaturas de ambas curvas en los puntos seleccionados, es decir, expresándolo de forma algorítmica, propone recorrer todas las posibilidades (variando  $m$  desde 0 hasta  $n-1$ ) y obtener el valor de  $m$  que minimice la expresión

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\kappa_{r_i} - \kappa_{p_{i+m}}| \quad (3.7)$$

siendo  $\kappa_{r_i}$  y  $\kappa_{p_i}$  las curvaturas de las curvas requerida y propuesta en el punto  $i$ -ésimo, respectivamente, y teniendo en consideración que  $i+m$  es igual a  $i+m-n$  cuando  $i+m \geq n$  —es decir, que la numeración de puntos es periódica y cuando se llega al último punto, el siguiente en la numeración vuelve a ser el primero—.

Una vez encontrado el valor de  $m$  que indica el emparejamiento ideal entre puntos homólogos, se pueden numerar de nuevo los puntos de la curva propuesta de forma que el primer punto de la curva requerida tenga como homólogo el primer punto de la curva propuesta. En adelante se considera que se ha efectuado esta reenumeración y así, que el punto  $i$ -ésimo de la curva propuesta es homólogo del punto  $i$ -ésimo de la curva requerida.

#### Cuarto. Reposicionamiento y reorientación.

Realiza un reposicionamiento y una reorientación de los puntos de la curva propuesta para que coincidan los más exactamente posible con los puntos de la curva requerida. En la reorientación, se giran los puntos de la curva propuesta un ángulo  $\beta$  con centro el origen de coordenadas y en el reposicionamiento se desplazan los puntos —una vez girados— según un vector de coordenadas  $(x_0, y_0)$ . De esta forma, tras estas transformaciones geométricas, las coordenadas de los puntos de la curva propuesta serán  $(xp_i^*, yp_i^*)$  y vendrán dadas por las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} xp_i^* &= x_0 + xp_i \cdot \cos \beta - yp_i \cdot \operatorname{sen} \beta \\ yp_i^* &= y_0 + xp_i \cdot \operatorname{sen} \beta + yp_i \cdot \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Entonces, tras esta transformación geométrica, la suma de distancias al cuadrado será:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ (xr_i - xp_i^*)^2 + (yr_i - yp_i^*)^2 \right] \quad (3.9)$$

y, sustituyendo (3.8) en (3.9) se llega a:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ (xr_i - (x_0 + xp_i \cdot \cos \beta - yp_i \cdot \operatorname{sen} \beta))^2 + (yr_i - (y_0 + xp_i \cdot \operatorname{sen} \beta + yp_i \cdot \cos \beta))^2 \right] \quad (3.10)$$

Se trata, pues, de minimizar el valor de  $S$  variando los valores de  $x_0$ ,  $y_0$  y  $\beta$  con el fin de lograr que la suma de distancias entre puntos homólogos al cuadrado sea mínima y, por tanto que las dos curvas se superpongan con la mayor coincidencia posible. Igualando a cero las derivadas parciales de la ecuación (3.10) con respecto a estas tres variables se llega a un sistema de tres ecuaciones no lineales con estos tres valores como incógnitas. El sistema está

---

<sup>54</sup> Si se seleccionan  $n$  puntos de una curva  $R$ , llamándolos  $R_0$  hasta  $R_{n-1}$ , y en la otra curva  $P$  se obtienen otros  $n$  puntos, llamándolos  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ ; se dice que el punto  $P_0$  en la segunda curva es homólogo del punto  $R_0$  de la primera curva, y lo mismo ocurre con los puntos  $P_1$  y  $R_1$ ,  $P_2$  y  $R_2$ , etc.

lo suficientemente desacoplado (en realidad sólo una de las tres ecuaciones es no lineal) y se puede resolver de forma explícita obteniendo que la función  $S$  (expresada en (3.10)) es mínima cuando:

$$\beta = \arctan \left( \frac{p_2 p_3 - p_1 p_4 + p_6 - p_8}{p_1 p_3 + p_2 p_4 - p_5 - p_7} \right)$$

$$x_0 = p_1 - p_3 \cdot \cos \beta + p_4 \cdot \sen \beta$$

$$y_0 = p_2 - p_3 \cdot \sen \beta - p_4 \cdot \cos \beta$$
(3.11)

siendo,

$$p_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{xr_i}{n} \quad p_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{yr_i}{n} \quad p_3 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{yp_i}{n} \quad p_4 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{yp_i}{n}$$

$$p_5 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{xr_i \cdot xp_i}{n} \quad p_6 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{xr_i \cdot yp_i}{n} \quad p_7 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{yr_i \cdot yp_i}{n} \quad p_8 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{xr_i \cdot xp_i}{n}$$
(3.12)

#### Quinto. Cálculo del error de comparación.

Finalmente, tras la transformación con esos valores de  $\beta$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ , Watanabe estima el error de comparación entre ambas curvas —que cuantifica su diferencia— como el máximo valor de las  $n$  distancias entre puntos homólogos de las curvas.

Con el fin de poder realiza un primer análisis de este método en lo que a cumplimiento de los requisitos (expuestos en §3.2) se refiere, se realiza una evaluación del mismo tal como sus autores lo expusieron (véase resumen en tabla 3.2).

El método cumple la mayoría de requisitos. Sin embargo, el algoritmo LSOP, tal como está planteado, no es independiente de las simetrías pues los puntos obtenidos de dos curvas iguales pero simétricas estarán dispuestos de maneras muy diferentes que, al ser superpuestos mediante reposición y reorientación, arrojan un error de comparación distinto de cero.

Por otro lado, el paso tercero (identificación de puntos homólogos) pretende independizar los polígonos obtenidos del origen de la parametrización de las curvas (buscando qué punto de los obtenidos en la curva propuesta es el homólogo del primer punto obtenido en la curva requerida). Sin embargo el proceso realiza equivalencias entre puntos de forma discreta, por lo que solo se conseguirá una independencia aproximada, incrementándose esta independencia a medida que se afina la discretización, esto es, a medida que se incrementa el número de puntos considerados.

En cuanto al *requisito de conmutabilidad*, no se puede asegurar a priori cual será el comportamiento de este método y será necesario realizar los ensayos oportunos.

Requisito		Método LSOP
Identificación		Cumple
Progresividad		Comprobar
Conmutabilidad		Comprobar
Independencia de posición		Cumple
Independencia de orientación		Cumple
Independencia de tamaño		Cumple
Independencia de simetrías		<b>No cumple</b>
Independencia de parametrización	Indep. de origen	<b>No cumple</b>
	Indep. de evolución	Cumple
	Indep. de sentido de avance	<b>No cumple</b>

Tabla 3.2. Cumplimiento de requisitos por parte del método LSOP.

Por su parte, este método propuesto por Watanabe no tiene en cuenta en ningún momento que la parametrización de la curva puede ir en un sentido o en el otro, calculando errores de comparación diferentes en ambos casos.

En último lugar, la progresividad del método cuando es utilizado para comparar curvas propuestas que se van pareciendo progresivamente menos a la curva requerida no puede asegurarse ni desmentirse a priori. Es necesario realizar ensayos para comprobar el comportamiento del método frente a cambios progresivos de las curvas.

### ***3.4.2. Método minimizando el error perpendicular o método MPE (Minimizing the Perpendicular Error).***

Este método, presentado también por Watanabe (Watanabe, 1992), es muy similar al anterior, pero se diferencia de aquel en cómo se reposiciona y se reorienta la curva propuesta antes de ser comparada con la curva requerida. El algoritmo realiza los mismos tres primeros pasos que el método anterior y continua como sigue:

#### Cuarto. Reposicionamiento y reorientación.

Realiza un reposicionamiento y una reorientación de los puntos de la curva propuesta con el objetivo de minimizar la suma de los cuadrados de los errores perpendiculares<sup>55</sup> entre las curvas requerida y propuesta (véase figura 3.6). En la reorientación, se giran los puntos de la curva propuesta un ángulo  $\beta$  con centro el origen de coordenadas y en el reposicionamiento se desplazan los puntos —una vez girados— según un vector de coordenadas  $(x_o, y_o)$ . De esta forma, tras estas transformaciones geométricas, las coordenadas de los puntos de la curva propuesta serán  $(xp_i^*, yp_i^*)$  y vendrán dadas por las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} xp_i^* &= x_o + xp_i \cdot \cos \beta - yp_i \cdot \sen \beta \\ yp_i^* &= y_o + xp_i \cdot \sen \beta + yp_i \cdot \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Tal y como se observa en la figura 3.6, la suma de errores perpendiculares al cuadrado responde a la expresión:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{pi}^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \left( (xr_i - xp_i^*) \cdot \sen \delta r_i - (yr_i - yp_i^*) \cdot \cos \delta r_i \right)^2 \quad (3.14)$$

la cual tendrá que ser minimizada variando  $x_o$ ,  $y_o$  y  $\beta$  para que las dos curvas estén superpuestas lo más perfectamente posible según este criterio. Como en el método anterior, tomando derivadas parciales de la expresión anterior se llega a un sistema de tres ecuaciones (una de ellas no lineal) con tres incógnitas. En este caso el sistema no se puede resolver de forma explícita, pero despejando  $x_o$  e  $y_o$  de las dos ecuaciones lineales y sustituyendo en la tercera, el sistema se queda en una única ecuación no lineal que puede ser resuelta eficientemente utilizando un método numérico para obtener el valor de  $\beta$ .

---

<sup>55</sup> Distancia entre un punto seleccionado de la curva propuesta y la recta tangente a la curva requerida en el punto homólogo.

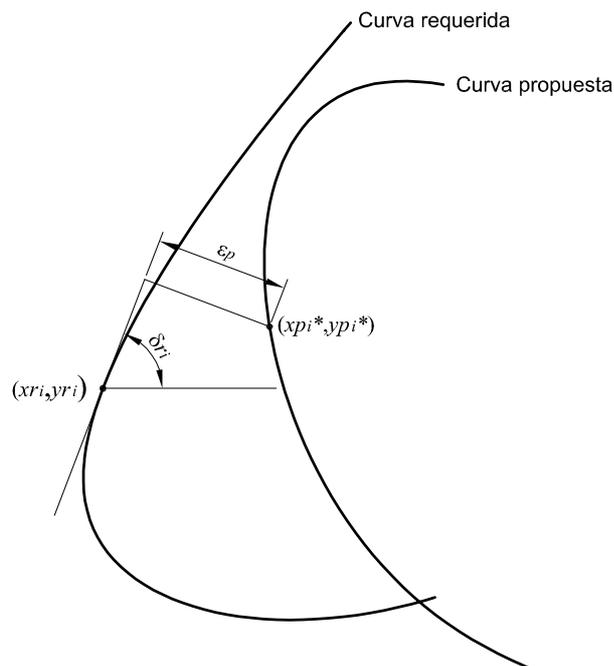


Figura 3.6. Distancia perpendicular entre dos puntos de dos curvas planas.

#### Quinto. Cálculo del error de comparación.

En este caso, Watanabe cuantifica el error de comparación entre ambas curvas como el máximo de los errores perpendicular de todos los puntos ( $\epsilon_{pi}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) tras la transformación de coordenadas descrita en el paso cuarto.

Requisito	Método MPE	
Identificación	Cumple	
Progresividad	Comprobar	
Conmutabilidad	Comprobar	
Independencia de posición	Cumple	
Independencia de orientación	Cumple	
Independencia de tamaño	Cumple	
Independencia de simetrías	<b>No cumple</b>	
Independencia de parametrización	Indep. de origen	<b>No cumple</b>
	Indep. de evolución	Cumple
	Indep. de sentido de avance	<b>No cumple</b>

Tabla 3.3. Cumplimiento de requisitos por parte del método LSOP.

Este método, muy similar al método anterior (LSOP), tiene una misma evaluación del cumplimiento de los requisitos expuestos en §3.2 que aquel ya que solamente se diferencia en la forma de superponer las curvas comparadas y en la estimación del error. No se puede asegurar a priori que el método cumple el *requisito de conmutabilidad*, ya que la suma de distancias de cada uno de los puntos de la curva propuesta a la tangente en el punto homólogo de la curva requerida no será, en general, la misma si se invierten los papeles de las curvas. Esto deberá ser comprobado con los ensayos oportunos. De esta forma, el resumen de cumplimiento de requisitos aplicable a este método se muestra en la tabla 3.3.

### **3.4.3. Método de conversión en B-Spline o método BSC (B-Spline Conversion).**

V. Unruh y P. Krishnaswami introdujeron en 1995 (Unruh y Krishnaswami, 1995) un innovador método para comparar dos curvas planas cerradas. El método está basado en que, dada una curva cerrada plana y dado un número de puntos  $n$  (adecuado según la forma de la curva), es posible obtener el polígono de control con  $n$  puntos de forma que la B-Spline asociada a tal polígono de control coincida (con un elevado nivel de precisión) con la curva inicial en todos sus puntos. Es decir, el método está basado en la obtención del polígono de control de una curva cualquiera considerada ésta como una B-Spline. Este proceso de obtención del polígono de control asociado a una curva será llamado en lo sucesivo *conversión de una curva en una B-Spline*.

De esta forma, puesto que la B-Spline asociada a un determinado polígono de control es única y dado que cualquier pequeña variación del polígono de control supone una variación en la forma de la B-Spline, se puede concluir que dicho polígono de control es un buen representante discreto —puesto que su número de magnitudes es finito— de la forma de la curva en toda su extensión —esto es, considerando sus infinitos puntos—. La idea, así expresada, resulta interesante pues da solución a un problema difícil, que es el de obtener características finitas que sean representativas de un conjunto infinito de puntos para luego poder utilizar dichas características en la comparación de esta curva con otra.

Partiendo de esto, cuando se desea comparar dos curvas cerradas planas cualesquiera, este método propone convertir las curvas en B-Splines y, de esta forma, obtener los polígonos de control de cada una de las curvas. En tanto en cuanto la forma y disposición de cada polígono de control representa la forma de la curva de la que se ha obtenido, la comparación entre la forma de los polígonos será un buen indicador de la comparación entre las formas de las curvas.

En detalle, el algoritmo para cuantificar la similitud o diferencia de dos curvas cerradas planas propuesto por este método consta de los siguientes pasos:

Primero. Obtención del polígono de control asociado a cada una de las curvas.

Teniendo en cuenta la formulación de definición de curvas B-Splines cerradas que puede encontrarse en §B.2, el procedimiento para obtener el polígono de control asociado a una curva plana cualquiera es enfocado por Unruh y Krishnaswami como un problema de optimización. Partiendo de la curva original, se puede obtener una primera estimación del polígono de control de la B-Spline que se desea sea igual a dicha curva original. De este primer polígono de control se genera la B-Spline y luego se construye una función objetivo que calcule matemáticamente la diferencia entre ambas curvas. Un algoritmo de optimización puede minimizar esta función objetivo modificando las coordenadas del polígono de control hasta lograr que la curva original y la B-Spline se parezcan lo más posible. Una vez se ha llegado al mínimo, el polígono de control obtenido (es decir, el óptimo) generará una B-Spline lo más parecida posible a la curva original y la conversión habrá finalizado, habiéndose obtenido el polígono de control asociado a la curva original.

Así pues, es necesario construir una función objetivo que mida las diferencias entre la curva original y la B-Spline generada, cuya optimización conducirá a la obtención del polígono de control asociado a la curva original. Unruh y Krishnaswami propusieron seleccionar  $m$  puntos de ambas curvas para luego basar la función objetivo en la diferencia entre ellas por suma de distancias al cuadrado de los puntos seleccionados. El algoritmo de optimización iterará modificando la posición de los puntos del polígono de control de la B-Spline hasta que los  $m$  puntos de las dos curvas coincidan lo más posible. La curva original viene expresada por sus ecuaciones paramétricas

$$P(u) = \begin{cases} x_P(u) \\ y_P(u) \end{cases} \quad u \in [u_0, u_f[ \quad (3.15)$$

que dependen del parámetro  $u$ . Los autores seleccionan  $m$  puntos de esta curva distribuyéndolos uniformemente dentro del intervalo en el que varía el parámetro, es decir, dando  $m$  valores al parámetro  $u$  y utilizando las ecuaciones paramétricas para obtener los  $m$  puntos correspondientes:

$$u_j = u_0 + \frac{u_f - u_0}{m} \cdot j \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.16)$$

De esta forma, los puntos obtenidos de la curva original son

$$\bar{P}_j = \begin{cases} x_{Pj} \\ y_{Pj} \end{cases} = \begin{cases} x_P(u_j) \\ y_P(u_j) \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.17)$$

De una forma similar se obtienen los  $m$  puntos de la B-Spline<sup>56</sup>, es decir, distribuyendo los puntos uniformemente en el intervalo  $[t_0, t_f[$  dentro del cual varía el parámetro  $t$  de la B-Spline.

$$t_j = t_0 + \frac{t_f - t_0}{m} \cdot j \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.18)$$

Y así, los puntos obtenidos de la B-Spline son:

$$\vec{P}_{Bj} = \begin{Bmatrix} x_{Bj} \\ y_{Bj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_B(t_j, \vec{x}_Q) \\ y_B(t_j, \vec{y}_Q) \end{Bmatrix} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.19)$$

donde  $\vec{x}_Q$  es un vector de  $n$  filas que contiene las coordenadas  $x$  de los  $n$  puntos del polígono de control e  $\vec{y}_Q$  es el vector de coordenadas  $y$  de los mismos.

Una vez obtenidos los  $m$  puntos en ambas curvas, la función que represente la diferencia entre ambas —función objetivo en la conversión de la curva en B-Spline— se basará en la suma de distancias al cuadrado:

$$F = \sum_{j=0}^{m-1} \left[ (x_{Pj} - x_{Bj})^2 + (y_{Pj} - y_{Bj})^2 \right] \quad (3.20)$$

o, lo que es lo mismo,

$$F = \sum_{j=0}^{m-1} \left[ (x_{Pj} - x_B(t_j, \vec{x}_Q))^2 + (y_{Pj} - y_B(t_j, \vec{y}_Q))^2 \right] \quad (3.21)$$

En virtud de las ecuaciones (3.17) y (3.19), la ecuación (3.20) depende, en última instancia de los valores de  $u_j$ ,  $t_j$ ,  $\vec{x}_Q$  e  $\vec{y}_Q$ . Sin embargo, la curva original no varía durante el proceso de optimización y, por tanto, los valores  $u_j$  ( $j = 0, 1, \dots, m-1$ ) tampoco variarán. Por su parte, se pretende que la forma de la B-Spline varíe hasta llegar a ser lo más similar posible a la forma de la curva original, para lo cual será necesario variar las coordenadas de los puntos de su polígono de control, representadas en la ecuación (3.21) por los vectores  $\vec{x}_Q$  e  $\vec{y}_Q$  (para estas coordenadas será necesario realizar una primera estimación a partir de la cual pueda

---

<sup>56</sup> Se ha de tener en cuenta que una curva B-Spline es una curva definida paramétricamente como se muestra en §B.2 de forma que cada punto de ella depende exclusivamente del valor del parámetro y de la posición de los puntos del polígono de control a partir del cual se genera.

comenzar a iterar el algoritmo de optimización<sup>57</sup>). Pero además de variar la forma de la curva, se ha de permitir durante la optimización que la posición de los  $m$  puntos seleccionados sobre la B-Spline se mueva dentro de ésta hasta que cada punto se sitúe lo más cerca posible de su punto homólogo sobre la curva original (minimizando la distancia hasta él) ya que, en general, las parametrizaciones de las curvas original y B-Spline serán diferentes. Por lo tanto, los valores  $t_j$  ( $j = 0, 1, \dots, m-1$ ) también serán variables a optimizar —es decir, serán modificadas en cada iteración por el algoritmo de optimización utilizado— y así se ha expresado en la ecuación (3.21). Consecuentemente, los valores de  $t_j$  obtenidos mediante la ecuación (3.18) no son valores definitivos, sino que constituyen solamente la primera estimación de estas variables para el proceso de optimización.

Así pues, el número de variables del proceso de optimización será  $2n+m$  ( $n$  coordenadas por cada vector  $\vec{x}_Q$  e  $\vec{y}_Q$  y los  $m$  valores  $t_j$ ). Unruh y Krishnaswami proponen considerar  $m=100$  puntos para comparar la curva original y la B-Spline durante la optimización y utilizar polígonos de control de  $n=10$  puntos para reproducir curvas del tipo que generan los mecanismos de cuatro barras (ya que este número debe variar en función de la forma y complejidad de la curva). Estas cifras hacen un total de 120 variables en el problema de optimización, lo cual parece a primera vista excesivo. Sin embargo, si se obtiene una buena primera estimación de los puntos y se utiliza un método iterativo de optimización basado en el gradiente (disponiendo explícitamente de las primeras derivadas de la función de optimización con respecto a las variables de diseño), la convergencia será, en general, rápida teniendo en cuenta la potencia de cálculo de los ordenadores actuales.

Como se ha comentado, la ecuación (3.18) ya ha proporcionado la primera estimación de los  $m$  valores del parámetro  $t$  de la B-Spline (que han sido distribuidos uniformemente dentro del intervalo de variación de dicho parámetro). Por lo tanto, solo resta estimar la posición de los  $n$  puntos del polígono de control. Para hacerlo, los autores proponen expandir  $n$  de los  $m$  puntos  $P_j$  ( $j = 0, 1, \dots, m-1$ ) de la curva original obtenidos anteriormente (ecuación (3.17)) en la dirección del y proporcionalmente al radio de curvatura de dicha curva en ese punto. Es decir, considerando el vector aplicado en el centro de curvatura<sup>58</sup>  $C_j$  de la curva original en un punto

<sup>57</sup> La primera estimación es necesaria pues Unruh y Krishnaswami utilizaron el método de optimización Fletcher-Reeves, el cual está basado en el gradiente y necesita un punto de partida.

<sup>58</sup> Las expresiones que permiten obtener la posición del centro de curvatura de una curva paramétrica en un punto de la misma son las siguientes:

$$x_C(t) = x(t) + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \left[ \frac{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}{\frac{d^2x(t)}{dt^2} \cdot \frac{dy(t)}{dt} - \frac{d^2y(t)}{dt^2} \cdot \frac{dx(t)}{dt}} \right]$$

$P_j$  y que llega hasta ese mismo punto, se puede conseguir el punto del polígono de control multiplicando dicho vector por un cierto factor. Según los autores, tras varios experimentos, un factor igual a 1.1 ha proporcionado muy buenos resultados. En la figura 3.7 se muestra el procedimiento para obtener la primera estimación de un polígono de control de 5 puntos. Partiendo de la curva original se seleccionan 5 puntos distribuyéndolos uniformemente dentro del intervalo de su parámetro (puntos P0 a P4). A continuación se calcula la posición del centro de curvatura de la curva en esos puntos, lográndose los puntos C0 a C4. Los radios de curvatura  $\rho_0$  a  $\rho_4$  unirán los centros de curvatura con los puntos sobre la curva original. Si se expanden los radios de curvatura multiplicando su módulo por 1.1 se llegan a obtener los puntos Q0 a Q4 que formarán la primera estimación del polígono de control. A partir de éste se puede representar la B-Spline en primera estimación.

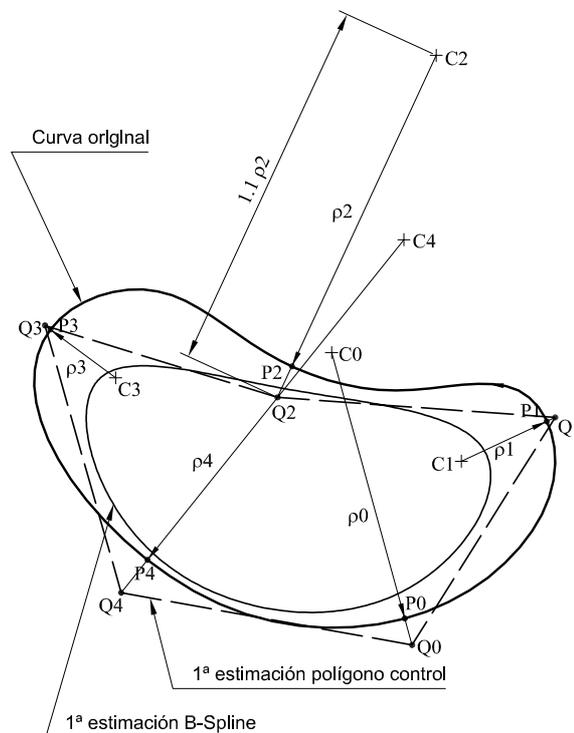


Figura 3.7. Obtención de la primera estimación del polígono de control.

$$y_C(t) = y(t) - \frac{dx(t)}{dt} \cdot \left[ \frac{\left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy(t)}{dt} \right)^2}{\frac{d^2x(t)}{dt^2} \cdot \frac{dy(t)}{dt} - \frac{d^2y(t)}{dt^2} \cdot \frac{dx(t)}{dt}} \right]$$

Matemáticamente, el procedimiento anterior es descrito como sigue. De entre los  $m$  los puntos de la curva original, los  $n$  seleccionados (marcados con \*) para, tras la expansión, proporcionar la primera estimación de los puntos del polígono de control serían:

$$P_i^* = \begin{Bmatrix} x_{P_i}^* \\ y_{P_i}^* \end{Bmatrix} = P_{i \cdot m/n} \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.22)$$

Sin embargo, evaluando las funciones de forma (véase §B.1 y §B.2) y su influencia sobre los puntos de la curva, los autores observaron que el punto de la B-Spline correspondiente a  $t=t_0$  es el más cercano al segundo punto de polígono de control cuando el grado de la B-Spline ( $k$ ) es 3 (y su orden es 4, que son los valores elegidos por Unruh y Krishnaswami para curvas del acoplador de mecanismos de cuatro barras). Teniendo todo esto en cuenta, la expresión anterior proporciona una parametrización errónea ya que una vez obtenida la primera estimación de los puntos del polígono de control, el punto de la B-Spline correspondiente a  $t=t_0$  no estará lo más cerca posible del punto de la curva original correspondiente a  $u=u_0$ . Para solucionar esta falta de coincidencia de las parametrizaciones de ambas curvas —la original y la B-Spline—, se puede desplazar el orden de los puntos de la curva original a partir de los cuales se obtendrá la primera estimación de los puntos del polígono de control de la B-Spline, quedando:

$$P_i^* = \begin{Bmatrix} x_{P_i}^* \\ y_{P_i}^* \end{Bmatrix} = P_{(i-1)m/n} \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.23)$$

donde se debe considerar que la numeración de los puntos  $P_j$  es periódica, es decir, que si  $j < 0$  entonces  $P_j = P_{j+m}$ . De esta forma se asegura que el punto inicial de la primera estimación de la B-Spline (correspondiente a  $t=t_0$ ) está lo más cerca posible del punto inicial de la curva original (correspondiente a  $u=u_0$ ) y, con ello, se asegura la proximidad entre los puntos de comparación de ambas curvas.

Finalmente, si llamamos  $(x_{C_j}, y_{C_j})$  a las coordenadas del centro de curvatura de la curva original en el punto  $P_i^*$ , la primera estimación (indicada mediante el superíndice 0) de los puntos del polígono de control podrá obtenerse mediante la ecuación:

$$P_{Q_i}^0 = \begin{Bmatrix} x_{Q_i} \\ y_{Q_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \end{Bmatrix} + 1.1 \cdot \left( \begin{Bmatrix} x_{P_i}^* \\ y_{P_i}^* \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \end{Bmatrix} \right) \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.24)$$

Una vez obtenidas las primeras estimaciones de las variables de optimización del problema consistente en obtener el polígono de control de una B-Spline igual en todos sus puntos a una curva original dada, se puede utilizar un algoritmo de minimización aplicado a la

ecuación (3.21) para encontrar la mejor solución. Sin embargo, pese a que la primera estimación es lo suficientemente buena para asegurar una rápida convergencia, el problema sigue siendo considerablemente costoso en términos computacionales debido al gran número de variables de optimización, por lo que se hace más que recomendable el uso de un algoritmo de optimización eficiente que utilice el gradiente de la función objetivo, si éste es evaluable. Por ello, habrá que proporcionar a dicho algoritmo las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a todas las variables de diseño. Puesto que existen tres tipos de variables de diseño ( $t_j$ ,  $x_{Qi}$  e  $y_{Qi}$ ), habrá tres tipos diferentes de funciones derivadas parciales. Estas derivadas no son complicadas de obtener y a partir de la ecuación (3.21) se obtienen las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = 2 \cdot [x_{Pj} - x_B(t_j, \vec{x}_Q)] \cdot \left[ \frac{\partial x_B}{\partial t}(t_j, \vec{x}_Q) \right] + 2 \cdot [y_{Pj} - y_B(t_j, \vec{y}_Q)] \cdot \left[ \frac{\partial y_B}{\partial t}(t_j, \vec{y}_Q) \right] \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{Qi}} = \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ 2 \cdot [x_{Pj} - x_B(t_j, \vec{x}_Q)] \cdot \left[ \frac{\partial x_B}{\partial x_{Qi}}(t_j, \vec{x}_Q) \right] \right\} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_{Qi}} = \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ 2 \cdot [y_{Pj} - y_B(t_j, \vec{y}_Q)] \cdot \left[ \frac{\partial y_B}{\partial y_{Qi}}(t_j, \vec{y}_Q) \right] \right\} \quad (3.27)$$

donde las diferentes derivadas de las funciones coordenadas de un punto de la B-Spline ( $x_B(t, \vec{x}_Q)$ ,  $y_B(t, \vec{y}_Q)$ ) se muestran en §B.3.

Tras desarrollar toda la formulación correspondiente al problema de optimización, Unruh y Krishnaswami utilizaron el algoritmo estándar de Fletcher y Reeves para minimizar la función objetivo.

### Segundo. Comparación de los polígonos de control obtenidos.

Una vez determinados los polígonos de control de las curvas que se deseaban comparar inicialmente, éstos representan la forma de sus curvas respectivas, por lo que comparando los polígonos se obtendrá un indicador de la similitud o diferencia entre las curvas. Así pues, es necesario idear un método para comparar los polígonos de control. Unruh y Krishnaswami concentraron sus esfuerzos en obtener magnitudes escalares que caracterizaran los polígonos.

Lo primero que hicieron fue escalar los polígonos de forma que su tamaño fuera el mismo. Como ratio de escala seleccionaron el perímetro de los polígonos de tal forma que tras

la operación de escalado los polígonos tendrían el mismo perímetro tras esta operación inicial de escalado.

Una vez que los polígonos tienen básicamente el mismo tamaño, éstos han de ser distinguidos por su forma. Los autores seleccionaron cuidadosamente aquellas características escalares que no se veían afectadas por la orientación de los polígonos. Elaboraron la siguiente lista con el fin de utilizarla en la comparación de los polígonos:

- Ratio área/perímetro.
- Ángulo interior mayor.
- Ángulo interior menor.
- Longitud del lado más largo.
- Longitud del lado más corto.
- Ratio de aspecto del menor rectángulo que encierra el polígono.
- Mínima distancia al centroide.
- Máxima distancia al centroide.
- Distancia total al centroide.

Finalmente, elaboraron algoritmos rápidos y precisos para evaluar cada una de las magnitudes escalares anteriores y utilizaron todas ellas con el fin de obtener una comparación precisa.

En lo relativo al cumplimiento de los requisitos (véase §3.2), este método cumple la mayoría de los requisitos (tales como el de *identificación*, *independencia de posición*, *orientación* y *tamaño*). Sin embargo, cuando se obtienen los puntos de las curvas que servirán como base para obtener la primera estimación de los puntos de los polígonos de control, éstos son repartidos uniformemente dentro del intervalo de variación de sus respectivos parámetros, con lo que la solución se hace dependiente de la evolución del parámetro dentro de la curva. Por esto, a priori no se cumplirá el *requisito de conmutabilidad*, sin embargo su cumplimiento deberá ser verificado mediante los ensayos oportunos.

Además, los autores no llevan a cabo ninguna acción con el fin de independizar anteriores del origen de la parametrización, por lo que existirá dependencia. Tampoco se ha tenido en cuenta en ningún momento una posible diferencia en el sentido de avance de las curvas comparadas, incumpliendo este requisito.

Finalmente, el algoritmo tampoco contempla el hecho de que se pueden estar comparando curvas iguales pero dispuestas de una forma simétrica. Por tanto, el resultado calculado para tal caso no indica igualdad, incumpliendo el requisito de *independencia de simetrías*.

En resumen, el cumplimiento de los resultados por parte de este método puede observarse en la tabla 3.4.

Requisito		Método BSC
Identificación		Cumple
Progresividad		Comprobar
Conmutabilidad		Comprobar
Independencia de posición		Cumple
Independencia de orientación		Cumple
Independencia de tamaño		Cumple
Independencia de simetrías		<b>No cumple</b>
Independencia de parametrización	Indep. de origen	<b>No cumple</b>
	Indep. de evolución	<b>No cumple</b>
	Indep. de sentido de avance	<b>No cumple</b>

Tabla 3.4. Cumplimiento de requisitos por parte del método BSC.

### 3.5. Propuesta de nuevos métodos de comparación de curvas.

Tras observar los métodos existentes para comparar curvas anteriormente descritos, se han ideado nuevos métodos con el fin de que se adapten lo más posible a los requisitos expuestos en §3.2 y que, al mismo tiempo, realicen una comparación discreta (lo cual está relacionado con la economía de computación), es decir, que con pocos y sencillos cálculos sean capaces de cuantificar la similitud o diferencia entre dos curvas de forma suficientemente realista.

Así pues, se ha puesto especial interés en idear métodos cuyos resultados sean independientes de la posición, orientación y tamaño de las curvas; independientes de la parametrización de las mismas (en cuanto a origen, evolución y sentido de avance se refiere) e independientes de posibles simetrías. De la misma forma, se ha intentado que los métodos tengan un comportamiento *progresivo* adecuado y, sobre todo, que sean computacionalmente poco costosos.

Finalmente, en base a las sugerencias de Thompson (Thompson, 1975) y de Akçali y Dittrich (Akçali y Dittrich, 1989b), se ha desarrollado un método integral ideal para comparar curvas.

### **3.5.1. Método de las diferencias poligonales o método PD (Polygon Differences).**

Una forma de comparar dos curvas es obtener varios puntos de cada una de ellas, unirlos formando un polígono —en adelante denominado *polígono característico*— y realizar la comparación en base a la forma de los polígonos obtenidos. En tanto en cuanto la forma del polígono se haga dependiente de la forma de la curva, dicho polígono será tanto más representativo de la forma de ésta.

Los pasos que este método debe realizar para comparar de forma cuantitativa dos curvas planas y cerradas se exponen a continuación:

#### Primero. Selección del número de puntos del polígono característico.

Se ha de decidir el número de puntos  $n$  del polígono característico. La dependencia de la comparación de las curvas respecto de este número de puntos elegido no se conoce a priori y será objeto de estudio más adelante.

#### Segundo. Extracción del polígono característico de cada una de las curvas.

Determinado el número de puntos  $n$  del polígono característico, uno de los problemas a solucionar es el hecho de que de una misma curva se pueden extraer infinitos polígonos característicos de  $n$  puntos. Por lo que, para un adecuado cumplimiento de los requisitos, será necesario establecer un modo de seleccionar los puntos que sea único e inequívoco para una misma curva. La primera medida que se toma en este sentido consiste en distribuir uniformemente los puntos dentro de la longitud de la curva, de esta forma se logra independizar la posición de los puntos de la evolución de la parametrización de la curva.

Una vez realizada la distribución uniforme de los puntos a lo largo de la longitud de la curva, se presenta el problema de en qué posición colocar el primer punto. Tras la colocación del primer punto, puesto que la curva es cerrada, el resto se colocarán a partir de éste en intervalos iguales de longitud medida sobre la curva. Existen, pues, infinitas posiciones para el primer punto, siendo necesario determinar una posición sobre la curva que sea única para la misma, independientemente del origen de su parametrización, posición, escala, etc. La localización de la posición de este primer punto puede realizarse en base a los extremos —máximo o mínimo— de las propiedades intrínsecas de la curva (que no dependen de la parametrización de la misma), tales como ángulo de la tangente, curvatura o radio de curvatura. Debido a que el ángulo de la tangente depende de la orientación de la curva y, además es una magnitud periódica, se ha seleccionado para situar el primer punto del polígono

característico (y, a partir de éste, obtener el resto) la posición correspondiente al radio de curvatura mínimo. La obtención de este punto —el de radio de curvatura mínimo— es un pequeño problema de optimización, de formulación muy sencilla y computacionalmente poco costoso, por lo que su obtención resulta sencilla.

Nótese que, si bien el radio de curvatura es una propiedad puntual de la curva que depende de la escala —es decir, del tamaño— de la misma, esta dependencia es lineal y, por tanto, el mínimo y su posición no dependen de dicha escala. Por otro lado, existe la posibilidad de que haya más de un punto en la curva con el radio de curvatura mínimo. Sin embargo la probabilidad de que esto ocurra es pequeña —se suele dar en curva simétricas casi exclusivamente— y se puede solucionar probando los diferentes puntos de mínimo radio de curvatura como orígenes de los puntos del polígono de control.

### Tercero, comparación de los polígonos característicos.

La comparación de los polígonos puede realizarse de muchas formas diferentes, siendo la propuesta por Unruh y Krishnaswami —expuesta dentro del método e)— una de ellas. Sin embargo, se ha intentado buscar una forma mucho más sistemática — metodológicamente hablando— de realizar tal comparación observando las características locales de los polígonos y realizando la comparación en base a éstas. Dos características locales de los polígonos son: la longitud de un segmento y el ángulo que un segmento forma con el anterior. La primera de ellas es independiente de la posición y orientación de la curva (que condiciona las del polígono) mientras que es dependiente de la escala de la misma. Por su parte, el ángulo entre segmentos concurrentes es independiente de la posición, orientación y escala de las curvas.

En la figura 3.8 se muestra un ejemplo de polígono característico de 5 vértices correspondiente a una curva cerrada. En ella se observa cómo el vértice 0 está situado en la posición de la curva donde el radio de curvatura es mínimo. A partir de este vértice se han distribuido los otros 4 a intervalos iguales de longitud de curva. Llamando a cada segmento con el número del vértice del cual parte, a cada vértice le corresponde una longitud y un ángulo, la longitud del segmento del mismo nombre y el ángulo  $\alpha$  que forma el segmento que sale del vértice con respecto al que llega al vértice.

Buscando relaciones entre estas magnitudes que sean independientes de posición orientación y escala para comparar dos polígonos, los ángulos se pueden comparar directamente ya que por sí mismos ya son independientes, sin embargo las longitudes no son independientes de la escala de los polígonos. Un cociente entre longitudes de segmentos sí sería independiente de la escala de los polígonos. Así se puede dividir la longitud de cada segmento entre la longitud del segmento mayor (normalizando el polígono), entre la longitud de la curva inicial, etc. En este caso se ha seleccionado como ratio de longitudes el cociente entre

la longitud del segmento que sale de un vértice dividido por la longitud del segmento que llega al mismo vértice. Esta propiedad lo es de cada vértice y puede calcularse fácilmente.

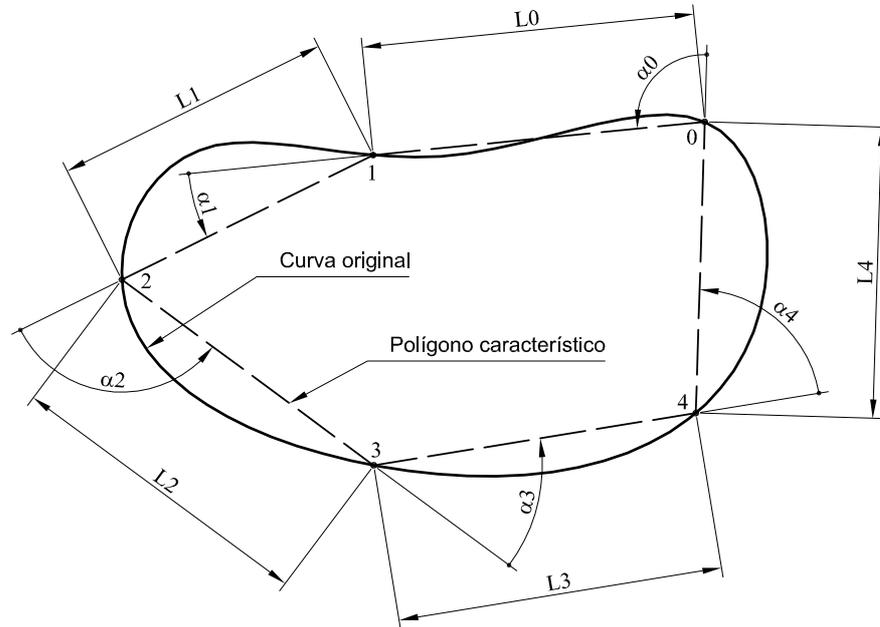


Figura 3.8. Polígono característico de una curva y sus propiedades locales.

Una vez obtenidas estas dos magnitudes que describen la forma del polígono y que están asociadas a cada vértice, se puede realizar la comparación de éstas vértice a vértice entre los dos polígonos. Para realizar tal comparación, se recurre a la suma de diferencias de tales magnitudes al cuadrado. El resultado ha sido normalizado en cuanto al número de puntos considerado (dividiendo por  $n$ ) y también en cuanto al número de sumandos dentro del sumatorio (dividiendo por 2). Así, la ecuación que determina el error de comparación según este método queda como sigue:

$$F_{PD} = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ (Ra_i^{\diamond} - Ra_i)^2 + (\alpha_i^{\diamond} - \alpha_i)^2 \right] \quad (3.28)$$

correspondiendo las variables denotadas con ( $\diamond$ ) al polígono de la curva requerida y las que no llevan ese símbolo al polígono de la curva propuesta, siendo  $\alpha_i$  el ángulo que forma el lado  $i$ -ésimo con respecto al lado de orden  $i-1$  y siendo  $Ra_i$  el cociente de longitudes para el vértice  $i$ -ésimo según la expresión:

$$Ra_i = \frac{L_i}{L_{i-1}} \quad i=0, 1, \dots, n-1 \quad (3.29)$$

y teniendo en cuenta que las magnitudes de orden  $(-1)$  son iguales a las de orden  $n-1$  —es decir, considerando que la numeración de los elementos del polígono es periódica, repitiéndose el primer elemento después del último—.

Tal como se ha puesto de manifiesto anteriormente, la ecuación (3.28) es independiente de la posición, orientación y escala de los polígonos y representa la diferencia entre ellos. Sin embargo, los dos sumandos que componen esta ecuación no tienen el mismo peso dentro de ella, por lo que las diferencias de relación de longitudes y las diferencias angulares no son equiparables y la ecuación carece de coherencia numérica. En efecto, el primer sumando  $(Ra_i^\diamond - Ra_i)^2$  que representa la diferencia de los ratios de longitudes, toma valores dentro del intervalo  $[0, +\infty[$  —el cuadrado indica, en este caso, la velocidad de la tendencia—, ya que la longitud de un segmento puede llegar a ser cero —lo cual podrá ocurrir cuando la curva se cruce sobre sí misma, es decir, cuando tenga puntos dobles—. Por otro lado, el rango de variación del segundo sumando  $(\alpha_i^\diamond - \alpha_i)^2$  de la ecuación es  $[0, \pi^2]$  ya que el ángulo diferencia  $\alpha_i^\diamond - \alpha_i$ , una vez reducido al intervalo  $[-\pi, \pi[$ , y en valor absoluto varía dentro del intervalo  $[0, \pi]$ . Por lo tanto, se hace necesaria una normalización de los sumandos para que sus pesos en la ecuación (3.28) sean equiparables.

Para ello se utiliza una función  $\Delta_{ang}$  que determina la diferencia entre ángulos de forma que cuando los ángulos son muy parecidos, la función se comporta de forma lineal —es decir, se comporta como la función diferencia angular—. Pero a medida que la diferencia real tiende a  $\pi$ , la función tiende a infinito.

En concreto se propone la siguiente función definida en dos tramos:

$$\Delta_{ang}(\alpha, \beta) = \begin{cases} |\alpha - \beta| & \text{si } |\alpha - \beta| < \varphi_{ref} \\ \frac{C_1 \cdot |\alpha - \beta|}{\pi - |\alpha - \beta|} + C_2 & \text{si } |\alpha - \beta| \geq \varphi_{ref} \end{cases} \quad (3.30)$$

donde el ángulo  $\varphi_{ref}$  es un valor de referencia que separa el comportamiento lineal de la función del no lineal y  $C_1, C_2$  son constantes incluidas para asegurar la continuidad y derivabilidad de la función al pasar de un tramo al otro.

Con esas condiciones de continuidad y derivabilidad de la función en el punto entre tramos, el valor de las constantes puede determinarse en función del ángulo de referencia, obteniéndose:

$$C_1 = \frac{(\varphi_{ref} - \pi)^2}{\pi} \quad (3.31)$$

$$C_2 = \frac{\varphi_{ref}^2}{\pi}$$

Tras diferentes pruebas se ha comprobado que un ángulo de referencia ( $\varphi_{ref}$ ) igual a  $\pi/4$  permite estimar unos resultados óptimos en la resta de ángulos destinada a ser incluida en la ecuación (3.28), por lo que se recomienda utilizar este valor. Con este valor, las constantes  $C_1$  y  $C_2$  resultan ser:

$$C_1 = \frac{9\pi}{16} \quad C_2 = \frac{\pi}{16} \quad (3.32)$$

Con estos valores, la función  $\Delta_{ang}$  es representada en la figura 3.9. En ella se observa cómo hasta una diferencia entre  $\alpha$  y  $\beta$  igual a  $\pi/4$ , la función tiene un comportamiento lineal y, a partir de ese punto se separa la linealidad tendiendo a infinito a medida que la diferencia angular tiende a  $\pi$ .

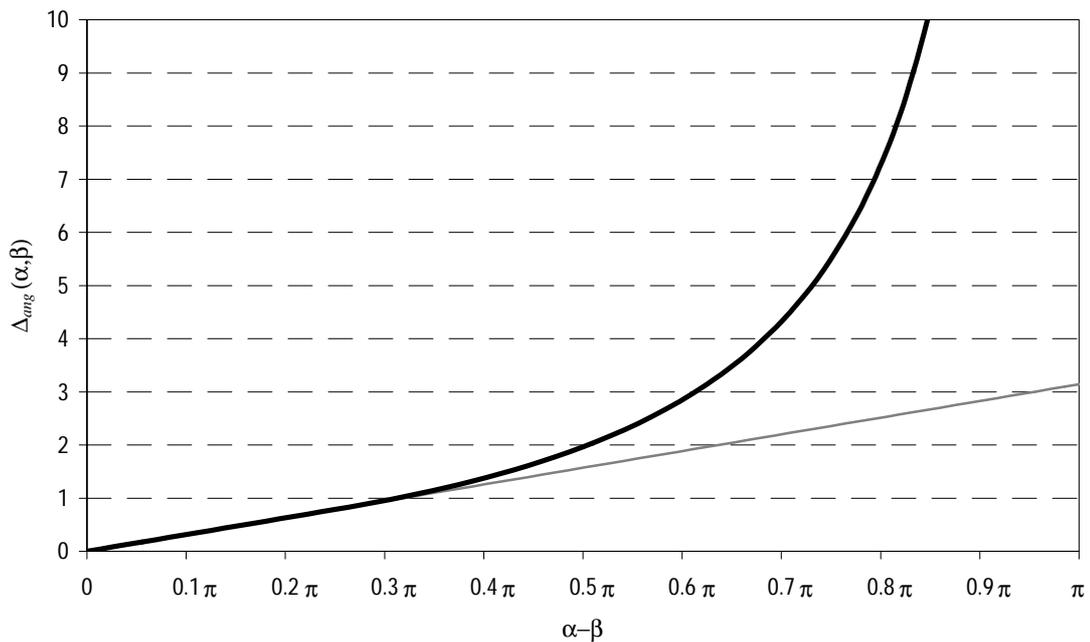


Figura 3.9. Evolución de la función  $\Delta_{ang}$  en función de la diferencia existente entre los ángulos.

Incluyendo esta función en la ecuación (3.28) para representar la diferencia angular, se llega a la expresión:

$$F_{PD} = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ (Ra_i^\diamond - Ra_i)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, \alpha_i)]^2 \right\} \quad (3.33)$$

de esta forma se asegura que el segundo sumando varía dentro de un intervalo  $[0, +\infty^2]$ , el mismo que en el primer sumando.

Con esto se consigue la coherencia numérica en los pesos de los miembros de la ecuación, de forma que en ella se reflejen tanto las diferencias entre las relaciones de las longitudes de los segmentos como las diferencias angulares entre dichos segmentos.

En cuanto a los requisitos, el método se ha diseñado para el cumplimiento de la mayoría de ellos. Es fácil deducir que se cumplirán los requisitos de *identificación*, de *conmutabilidad* y de *independencia de posición, orientación y tamaño de las curvas*. En cuanto a parametrización, se ha conseguido *independencia del origen* y de la *evolución*.

Queda pendiente evaluar el cumplimiento de los requisitos de progresividad, independencia de simetrías e independencia del sentido de avance del parámetro.

#### Resolución de deficiencias en la progresividad.

Para evaluar la progresividad del método, resulta interesante hacer una reflexión sobre la dependencia del polígono característico respecto de la forma de la curva original que representa. Si se produce una pequeña variación en la forma de la curva, es lógico pensar que o bien su longitud variará, o bien su forma variará lo suficiente como para que los puntos del polígono característico se muevan de posición. En cualquier caso la posición de los puntos del polígono cambiará, reflejando el cambio de forma de la curva. Esto hace suponer que, a priori —es decir, antes de realizar ningún tipo de ensayo con el método—, el comportamiento progresivo del mismo será razonablemente bueno. Sin embargo, también a priori se observan una deficiencia importante que es necesario subsanar.

Supóngase que se llama A al punto de la curva donde el radio de curvatura de la misma es mínimo —punto origen del polígono característico— y que existe otro punto B en la curva en el que el radio de curvatura es (necesariamente superior pero) numéricamente muy cercano al radio de curvatura en A. Si se produce una pequeña variación en la forma de la curva, es posible que ésta cambie lo suficiente como para que el punto B pase a tener un radio de curvatura menor que el A, llegando a ser B el punto de radio de curvatura mínimo. En este caso, B será el nuevo origen del nuevo polígono característico y, consecuentemente, la forma de éste no se parecerá en nada a la del polígono característico original. Al comparar ambos

polígonos de acuerdo con la ecuación (3.33), ésta arrojará una gran diferencia (ya que los polígonos son muy diferentes) cuando en realidad las curvas se parecen enormemente —en tanto en cuanto el cambio realizado en la primera para lograr la segunda ha sido pequeño—. Es decir, con este método, no siempre un cambio gradual y progresivo en la forma de la curva va acompañado de un cambio gradual y progresivo de la magnitud arrojada por la función de comparación (3.33). Esto se muestra en la figura 3.10 en la que de dos curvas cerradas similares se obtienen polígonos característicos muy diferentes por un cambio en el punto de radio de curvatura mínimo (punto 0 de cada curva).

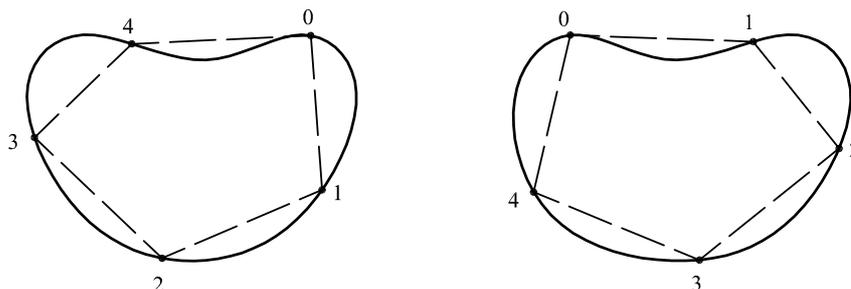


Figura 3.10. De dos curvas similares se pueden obtener polígonos característicos muy diferentes.

Para subsanar esta deficiencia, se plantea no solo comparar la curva propuesta con la requerida mediante polígonos característicos cuyo origen esté basado en el punto de radio de curvatura mínimo de las curvas, sino comparar varias posibilidades. En concreto, después de hacer pruebas, se propone obtener un único polígono característico de la curva requerida tomando como origen el punto de radio de curvatura mínimo. Sin embargo, para la curva propuesta se plantea obtener todos los mínimos locales del radio de curvatura de la curva y ordenarlos de menor a mayor, quedando en primer lugar el mínimo absoluto. De este vector de radios de curvatura mínimos (locales) se descartan todos aquellos cuyo valor sea superior a 1.5 veces el mínimo global (recortando el vector y quedando solo los menores valores). Finalmente, partiendo de la posición en la curva asociada para cada radio de curvatura persistente, se obtiene un polígono característico de la curva propuesta y se compara con el de la requerida, obteniendo un error de comparación (asociado a ese radio de curvatura mínimo local). Así, el menor de todos los errores de comparación obtenidos será el error de comparación estimado por el método.

El factor 1.5 considerado en el recorte del vector de radios de curvatura mínimos puede modificarse dependiendo de la complejidad de la familia de curvas. En las pruebas realizadas este factor funcionó considerablemente bien, no obteniendo más que 2 ó 3 radios de curvatura mínimos y no teniendo, por tanto, que realizar más de 2 ó 3 comparaciones poligonales.

Esta medida adoptada mejora considerablemente la *progresividad* del método, pero también incrementa su coste computacional. Sin embargo, con esta modificación del método, la evaluación definitiva de la progresividad queda pendiente de la realización de ensayos.

Resolución del problema de dependencia del sentido de avance del parámetro y de posibles simetrías.

El método hasta ahora expuesto no considera las posibilidad de que las curvas comparadas sean iguales en cuanto a forma pero simétricas o que tengan un sentido de avance del parámetro diferente. Para conseguir esta independencia es necesario completar el método. Si se tiene en cuenta que el sentido de avance del parámetro tiene dos posibilidades y que la curva tiene otras dos posibilidades desde el punto de vista de la simetría, en total se pueden obtener cuatro posibles polígonos característicos de curvas que deben ser iguales cuando son comparadas mediante este método. Estos cuatro polígonos característicos y las magnitudes de los mismos consideradas por el método pueden observarse en la figura 3.11.

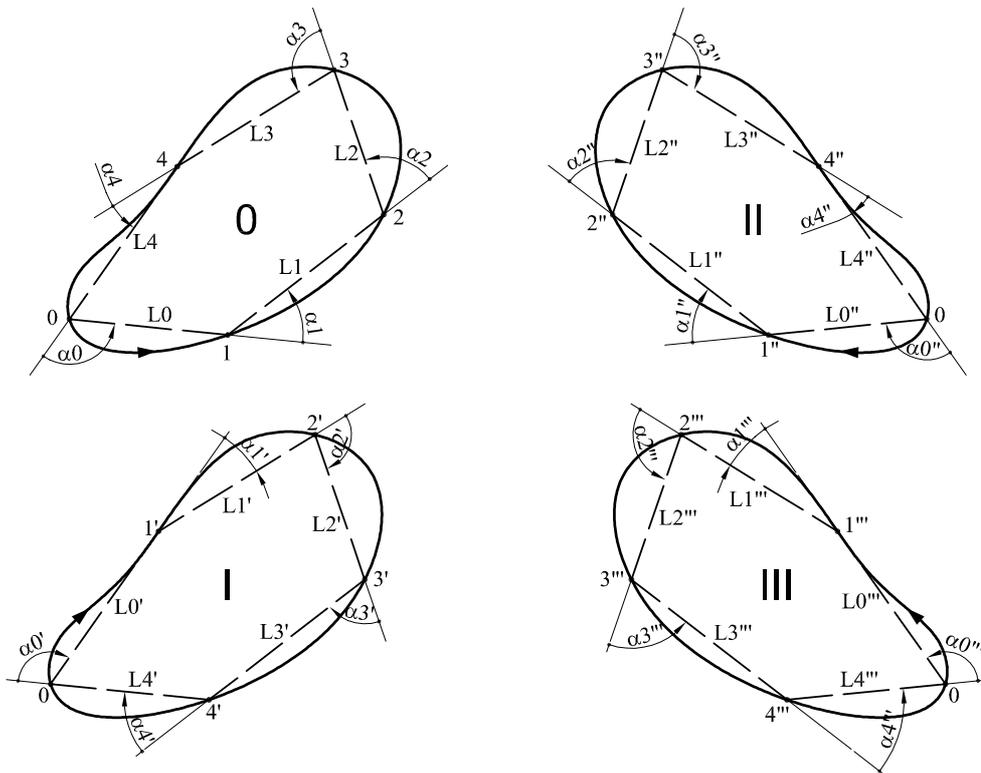


Figura 3.11. Polígonos característicos obtenidos de una misma curva cuando cambia el sentido de avance del parámetro y su representación desde el punto de vista de simetría.

Cuando se desea comparar la curva propuesta mostrada en la figura 3.11 con una curva requerida cualquiera y se desea independizar el resultado del sentido de avance del parámetro y de la posible simetría de las curvas, es necesario comparar las cuatro posibles curvas mostradas en la figura con la requerida, obteniendo cuatro resultados de la ecuación (3.33).

$$F_{PD}^0 = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - Ra_i \right)^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \alpha_i^\diamond, \alpha_i \right) \right]^2 \right\} \quad (3.34)$$

$$F'_{PD} = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - Ra'_{j(i)} \right)^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \alpha_i^\diamond, \alpha'_{j(i)} \right) \right]^2 \right\} \quad (3.35)$$

$$F''_{PD} = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - Ra''_i \right)^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \alpha_i^\diamond, \alpha''_i \right) \right]^2 \right\} \quad (3.36)$$

$$F'''_{PD} = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - Ra'''_{j(i)} \right)^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \alpha_i^\diamond, \alpha'''_{j(i)} \right) \right]^2 \right\} \quad (3.37)$$

donde

$$j(i) = [(n-i) \bmod n] \quad (3.38)$$

ha sido incluido<sup>59</sup> para corregir la numeración de las curvas I y II debido al diferente sentido de avance del parámetro, que proporciona los puntos del polígono característico en orden inverso (véase figura 3.11).

De los cuatro errores de comparación calculados (correspondientes a las cuatro posibilidades), el menor de ellos corresponderá a la posibilidad que mejor se adapte a la curva requerida, por lo tanto, el error de comparación calculado por el método será:

$$F_{PD} = \min(F_{PD}^0, F'_{PD}, F''_{PD}, F'''_{PD}) \quad (3.39)$$

Podría parecer que comprobar cuatro veces la misma curva propuesta con la curva requerida supone un considerable aumento del coste computacional, pero cuando la comparación es basada en las diferencias del polígono característico como hace este método, las magnitudes utilizadas de los cuatro polígonos característicos no son independientes y, calculando las de uno de ellos se pueden obtener fácilmente las de los demás. En efecto, si se

---

<sup>59</sup> Siendo  $(A \bmod B)$  el resto de la división entera entre  $A$  y  $B$ .

observa la figura 3.11, se puede establecer una equivalencia entre las magnitudes de los polígonos I, II y III y las del polígono 0. Tales relaciones vienen mostradas en la tabla siguiente.

		Polígonos				
0		I		II		III
$\alpha_0$	=	$-\alpha'_0$	=	$-\alpha''_0$	=	$\alpha'''_0$
$\alpha_1$	=	$-\alpha'_4$	=	$-\alpha''_1$	=	$\alpha'''_4$
$\alpha_2$	=	$-\alpha'_3$	=	$-\alpha''_2$	=	$\alpha'''_3$
$\alpha_3$	=	$-\alpha'_2$	=	$-\alpha''_3$	=	$\alpha'''_2$
$\alpha_4$	=	$-\alpha'_1$	=	$-\alpha''_4$	=	$\alpha'''_1$
$Ra_0 = L_0/L_4$	=	$L'_4/L'_0 = 1/Ra'_0$	=	$L''_0/L''_4 = Ra''_0$	=	$L'''_4/L'''_0 = 1/Ra'''_0$
$Ra_1 = L_1/L_0$	=	$L'_3/L'_4 = 1/Ra'_4$	=	$L''_1/L''_0 = Ra''_1$	=	$L'''_3/L'''_4 = 1/Ra'''_4$
$Ra_2 = L_2/L_1$	=	$L'_2/L'_3 = 1/Ra'_3$	=	$L''_2/L''_1 = Ra''_2$	=	$L'''_2/L'''_3 = 1/Ra'''_3$
$Ra_3 = L_3/L_2$	=	$L'_1/L'_2 = 1/Ra'_2$	=	$L''_3/L''_2 = Ra''_3$	=	$L'''_1/L'''_2 = 1/Ra'''_2$
$Ra_4 = L_4/L_3$	=	$L'_0/L'_1 = 1/Ra'_1$	=	$L''_4/L''_3 = Ra''_4$	=	$L'''_0/L'''_1 = 1/Ra'''_1$

Tabla 3.5. Equivalencias entre magnitudes de los cuatro polígonos (véase figura 3.11).

Haciendo uso de las equivalencias mostradas en la tabla 3.5 e incluyéndolas en las ecuaciones (3.34) a (3.37), tales ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$$F_{PD}^0 = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ (Ra_i^\diamond - Ra_i)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, \alpha_i)]^2 \right\} \quad (3.40)$$

$$F'_{PD} = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - \frac{1}{Ra_{j(i)}} \right)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, -\alpha_{j(i)})]^2 \right\} \quad (3.41)$$

$$F''_{PD} = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ (Ra_i^\diamond - Ra_i)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, -\alpha_i)]^2 \right\} \quad (3.42)$$

$$F'''_{PD} = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - \frac{1}{Ra_{j(i)}} \right)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, \alpha_{j(i)})]^2 \right\} \quad (3.43)$$

$$F_{PD} = \min(F_{PD}^0, F'_{PD}, F''_{PD}, F'''_{PD}) \quad (3.44)$$

Por lo tanto, tan solo es necesario calcular las magnitudes la posibilidad 0 para luego aplicar estas ecuaciones y obtener el menor error de comparación. Operando de esta forma se asegura el cumplimiento de los *requisitos de independencia de la evolución del parámetro y de independencia de simetrías*.

Con todas las medidas tomadas, el método cumple todos los requisitos a falta de comprobar el de *progresividad* y el de *conmutabilidad*, tal como se muestra en la tabla siguiente:

Requisito	Método PD	
Identificación	Cumple	
Progresividad	Comprobar	
Conmutabilidad	Comprobar	
Independencia de posición	Cumple	
Independencia de orientación	Cumple	
Independencia de tamaño	Cumple	
Independencia de simetrías	Cumple	
Independencia de parametrización	Indep. de origen	Cumple
	Indep. de evolución	Cumple
	Indep. de sentido de avance	Cumple

Tabla 3.6. Cumplimiento de requisitos por parte del método PD.

#### Otras deficiencias detectadas.

Por otra parte, es posible, aunque poco probable, que existan curvas completamente diferentes con el mismo polígono característico. Para probarlo, imagínese un polígono característico cualquiera con  $n$  vértices. Es posible construir sobre él infinitas curvas (que pasen por todos los vértices del polígono) de forma que la longitud del arco de curva entre cada dos vértices consecutivos sea la misma. Para todas esas curvas, aquel será su polígono característico y todas ellas son diferentes en cuanto a forma, sin embargo, la función de comparación expresada por la ecuación (3.33) no contempla estas diferencias entre las curvas, lo que constituye una gran deficiencia. Un ejemplo de esto se muestra en la figura 3.12, en la que se ha obtenido un mismo polígono característico de dos curvas completamente distintas partiendo en ambas de la posición de radio de curvatura menor y distribuyendo los puntos uniformemente en sus longitudes respectivas.

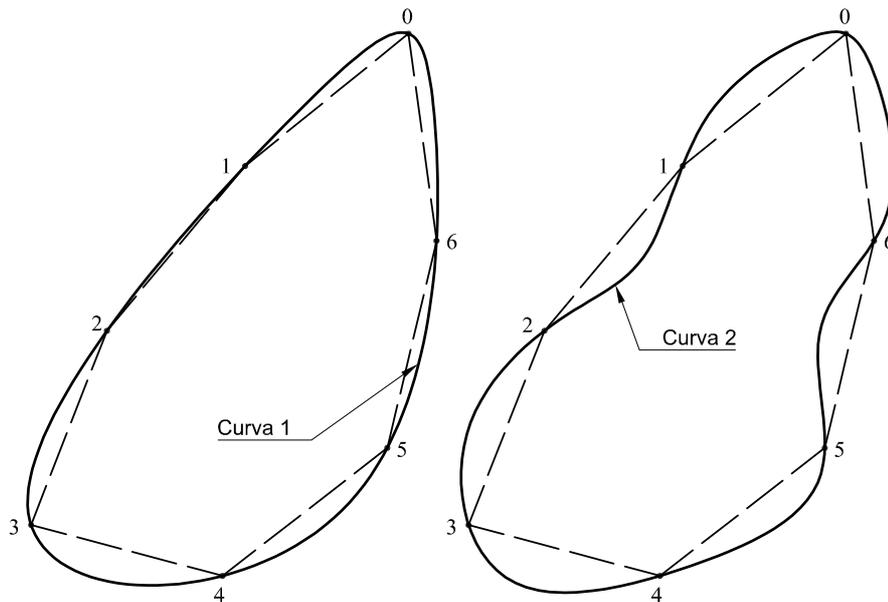


Figura 3.12. Curvas diferentes con un mismo polígono característico.

### 3.5.2. Métodos de las diferencias poligonales incluyendo propiedades de la curva o métodos PDCP (Polygon Differences with Curve Properties).

Este método es una extensión del anterior, ampliándolo con la finalidad de que la ecuación de comparación de aquel incluya las propiedades de la curva en los vértices del polígono característico. En éste nuevo método, los dos primeros pasos son idénticos a los del método anterior y el tercero es ampliado como sigue:

Existen dos propiedades intrínsecas puntuales de la curva que se pueden añadir fácilmente a la ecuación (3.33): el ángulo de la tangente y el radio de curvatura de la curva en ese punto. No obstante, se ha de tener en cuenta que el primero es dependiente de la orientación de la curva —ya que se mide con respecto al eje de abscisas del sistema de referencia utilizado— e independiente de la posición y escala de la misma. El segundo, depende linealmente de la escala de la curva y es independiente de la posición y orientación de la misma.

Es posible, a la vez que conveniente, eliminar estas dependencias, lo cual puede realizarse de forma sencilla. En el primer caso solo es necesario referenciar el ángulo de la tangente con respecto a un origen interno de la curva o de su polígono característico y en el caso del radio de curvatura, se puede dividir éste entre otra longitud inherente a la curva que dependa linealmente de la escala.

De esta forma las dos nuevas propiedades en los vértices del polígono, a añadir a las obtenidas en el método anterior (PD) son por un lado el ángulo  $\beta$  desde la tangente a la curva en el vértice considerado hasta el segmento que sale de ese vértice en el polígono característico (figura 3.13) y por otro lado, el cociente entre radio de curvatura en ese vértice y la longitud total de la curva, llamado  $Rb$  que tendrá la forma:

$$Rb_i = \frac{\rho_i}{L_{curva}} \tag{3.45}$$

siendo  $\rho_i$  el radio de curvatura de la curva en el vértice  $i$ -ésimo (figura 3.13).

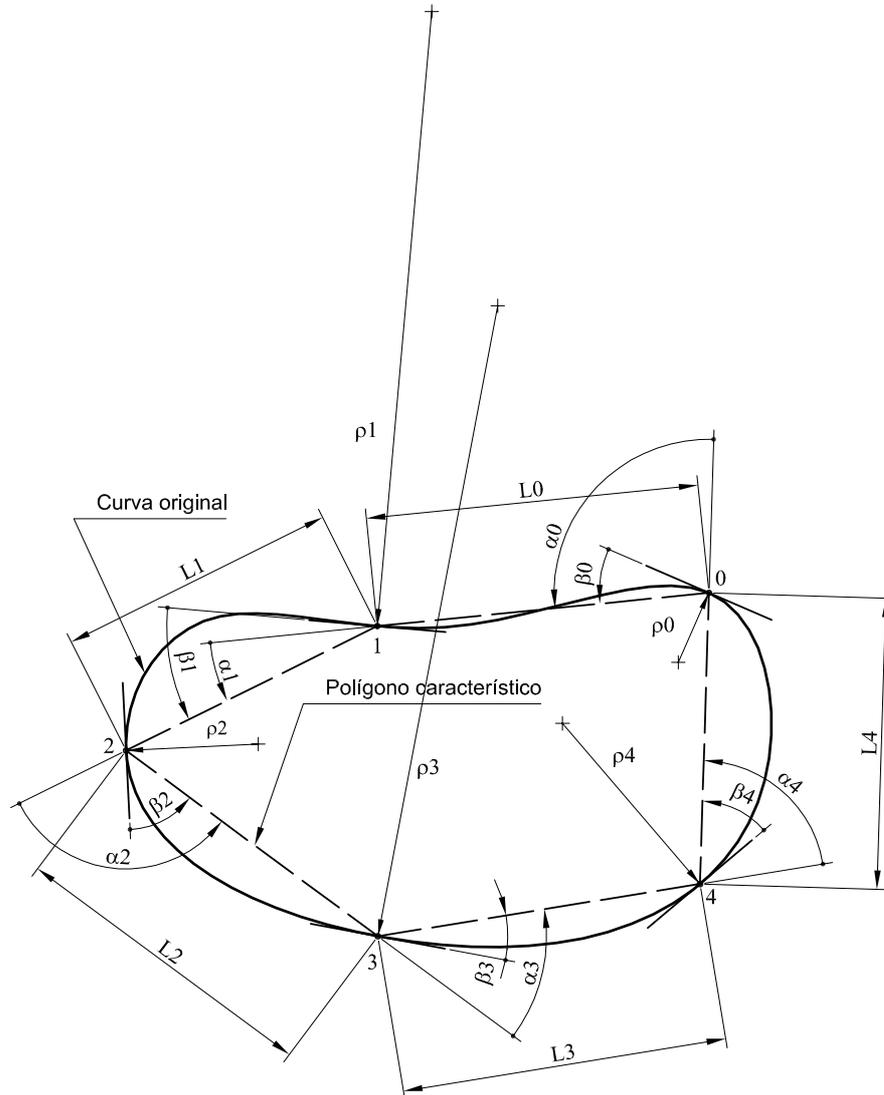


Figura 3.13. Polígono característico de la curva y todas las características puntuales incluidas en este método.

Así pues, se puede ampliar la ecuación (3.33) incluyendo el ángulo  $\beta$  y/o el factor  $Rb$ . En este caso se van a considerar tres posibilidades según se incluya uno o los dos anteriores (pudiendo, en el caso del último, incluir el radio de curvatura o su inversa, la curvatura). La expresión correspondiente al primero de ellos (llamado en adelante método PDGP1) amplía la ecuación (3.33) incluyendo el ángulo  $\beta$  y su expresión es:

$$F_{PDGP1} = \frac{1}{3n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ (Ra_i^\diamond - Ra_i)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, \alpha_i)]^2 + [\Delta_{ang}(\beta_i^\diamond, \beta_i)]^2 \right\} \quad (3.46)$$

donde el ángulo  $\beta$  se ha normalizado convenientemente para tener un peso en la ecuación similar al resto de sumandos (véase la normalización de  $\alpha$  descrita en el método PD).

Por su parte, la expresión correspondiente al método llamado PDGP2, incluye tanto el ángulo  $\beta$  como el factor  $Rb$  (que representa las diferencias en los radios de curvatura):

$$F_{PDGP2} = \frac{1}{4n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ (Ra_i^\diamond - Ra_i)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, \alpha_i)]^2 + [\Delta_{ang}(\beta_i^\diamond, \beta_i)]^2 + (Rb_i^\diamond - Rb_i)^2 \right\} \quad (3.47)$$

E igualmente para el método PDGP3, que utiliza las curvaturas en lugar de los radios de curvatura,

$$F_{PDGP3} = \frac{1}{4n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ (Ra_i^\diamond - Ra_i)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, \alpha_i)]^2 + [\Delta_{ang}(\beta_i^\diamond, \beta_i)]^2 + \left( \frac{1}{Rb_i^\diamond} - \frac{1}{Rb_i} \right)^2 \right\} \quad (3.48)$$

En estas ecuaciones se ha incluido el símbolo ( $^\diamond$ ) para señalar las variables que corresponden a la curva requerida, siendo todas aquellas variables que no incluyen tal símbolo las correspondientes a la curva propuesta.

De la misma forma que se realizó en la expresión (3.33) del método PD, el resultado final de las ecuaciones se ha normalizado en cuanto al número de puntos considerado así como en cuanto al número de sumandos dentro del sumatorio.

Con la ampliación del método PD para llegar a estos nuevos métodos de comparación de curvas planas y cerradas, se ha subsanado la segunda gran deficiencia del aquel según la cual, tal como se muestra en la figura 3.12, dos curvas diferentes podrían proporcionar polígonos característicos iguales y, por tanto, ser iguales cuando son comparadas con el mencionado método. En efecto, aunque los polígonos sean iguales, los ángulos de las tangentes en los vértices del polígono característico y los radios de curvatura de las mismas en dichos puntos no lo son, por lo que los dos últimos sumandos de la ecuación (3.46) y (3.47) serán distintos de cero y el valor arrojado por esta ecuación representará estas diferencias. Los

métodos PDCP1, PDCP2 y PDCP3, así logrados, son mucho más representativos de la forma de la curva que el método PD.

Como ocurriera en el método PD, los métodos PDCP1, PDCP2 y PDCP3 tienen un problema de *progresividad* cuando al comparar dos curvas muy similares, los puntos de radios de curvatura mínimos no están situados en posiciones similares y cercanas dentro de tales curvas. Para resolver este problema se adopta la misma técnica que la que se adoptó en el método PD, consistente en obtener de la curva propuesta varios polígonos característicos partiendo de todos los puntos de radios de curvatura mínimos locales menores que 1.5 veces el radio de curvatura mínimo global de la curva, y comparar estos polígonos con el polígono característico de la curva requerida. (véase Resolución de deficiencias en la progresividad, página 92).

De la misma forma, los métodos PDCP1 y PDCP2 tal como han sido expuestos hasta ahora no realizan ninguna acción con el fin de independizar el resultado del sentido de avance en la parametrización y de posibles simetrías. Para resolver este problema se propone la misma técnica que se utilizó en el método PD (véase Resolución del problema de dependencia del sentido de avance del parámetro y de posibles simetrías, página 94). Para ello se han de comprobar los cuatro posibles polígonos característicos mostrados en la figura 3.11 con el polígono característico de la curva requerida. Como ya se explicó, existe una relación entre las magnitudes del polígono 0 y del resto de polígonos. Esta relación entre las distintas variables  $\alpha$  y  $Ra$  de los cuatro polígonos viene especificada en la tabla 3.5. Se puede obtener relaciones similares para las distintas variables  $\beta$  y  $Rb$  de los polígonos, siendo mostradas en la tabla siguiente:

Polígonos						
0	I	II	III			
$\beta_0$	=	$-\beta'_0$	=	$-\beta''_0$	=	$\beta'''_0$
$\beta_1$	=	$-\beta'_4$	=	$-\beta''_1$	=	$\beta'''_4$
$\beta_2$	=	$-\beta'_3$	=	$-\beta''_2$	=	$\beta'''_3$
$\beta_3$	=	$-\beta'_2$	=	$-\beta''_3$	=	$\beta'''_2$
$\beta_4$	=	$-\beta'_1$	=	$-\beta''_4$	=	$\beta'''_1$
$Rb_0 = \rho_0/L$	=	$Rb'_0 = \rho'_0/L$	=	$Rb''_0 = \rho''_0/L$	=	$Rb'''_0 = \rho'''_0/L$
$Rb_1 = \rho_1/L$	=	$Rb'_4 = \rho'_4/L$	=	$Rb''_1 = \rho''_1/L$	=	$Rb'''_4 = \rho'''_4/L$
$Rb_2 = \rho_2/L$	=	$Rb'_3 = \rho'_3/L$	=	$Rb''_2 = \rho''_2/L$	=	$Rb'''_3 = \rho'''_3/L$
$Rb_3 = \rho_3/L$	=	$Rb'_2 = \rho'_2/L$	=	$Rb''_3 = \rho''_3/L$	=	$Rb'''_2 = \rho'''_2/L$
$Rb_4 = \rho_4/L$	=	$Rb'_1 = \rho'_1/L$	=	$Rb''_4 = \rho''_4/L$	=	$Rb'''_1 = \rho'''_1/L$

Tabla 3.7. Equivalencias entre magnitudes  $\beta$  y  $Rb$  de los cuatro polígonos.

Considerando estas comparaciones, el resultado propuesto por el método PDCP1 consiste en calcular los cuatro resultados obtenidos al comparar el polígono característico de la curva requerida con los cuatro posibles polígonos característicos de las curvas propuestas (figura 3.11), para luego estimar el error de comparación como el menor de los cuatro valores:

$$F_{PDCP1}^0 = \frac{1}{3n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ (Ra_i^\diamond - Ra_i)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, \alpha_i)]^2 + [\Delta_{ang}(\beta_i^\diamond, \beta_i)]^2 \right\} \quad (3.49)$$

$$F'_{PDCP1} = \frac{1}{3n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - \frac{1}{Ra_{j(i)}} \right)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, -\alpha_{j(i)})]^2 + [\Delta_{ang}(\beta_i^\diamond, -\beta_{j(i)})]^2 \right\} \quad (3.50)$$

$$F''_{PDCP1} = \frac{1}{3n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ (Ra_i^\diamond - Ra_i)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, -\alpha_i)]^2 + [\Delta_{ang}(\beta_i^\diamond, -\beta_i)]^2 \right\} \quad (3.51)$$

$$F'''_{PDCP1} = \frac{1}{3n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - \frac{1}{Ra_{j(i)}} \right)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, \alpha_{j(i)})]^2 + [\Delta_{ang}(\beta_i^\diamond, \beta_{j(i)})]^2 \right\} \quad (3.52)$$

$$F_{PDCP1} = \min(F_{PDCP1}^0, F'_{PDCP1}, F''_{PDCP1}, F'''_{PDCP1}) \quad (3.53)$$

estando  $j(i)$  definido en la ecuación (3.38).

De la misma forma, el resultado propuesto por el método PDCP2 determina cuatro resultados y estima como error de comparación el menor de ellos:

$$F_{PDCP2}^0 = \frac{1}{4n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ (Ra_i^\diamond - Ra_i)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, \alpha_i)]^2 + [\Delta_{ang}(\beta_i^\diamond, \beta_i)]^2 + (Rb_i^\diamond - Rb_i)^2 \right\} \quad (3.54)$$

$$F'_{PDCP2} = \frac{1}{4n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - \frac{1}{Ra_{j(i)}} \right)^2 + [\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, -\alpha_{j(i)})]^2 + [\Delta_{ang}(\beta_i^\diamond, -\beta_{j(i)})]^2 + (Rb_i^\diamond - Rb_{j(i)})^2 \right\} \quad (3.55)$$

$$F''_{PDCP2} = \frac{1}{4n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - Ra_i \right)^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \alpha_i^\diamond, -\alpha_i \right) \right]^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \beta_i^\diamond, -\beta_i \right) \right]^2 + \left( Rb_i^\diamond - Rb_i \right)^2 \right\} \quad (3.56)$$

$$F'''_{PDCP2} = \frac{1}{4n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - \frac{1}{Ra_{j(i)}} \right)^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \alpha_i^\diamond, \alpha_{j(i)} \right) \right]^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \beta_i^\diamond, \beta_{j(i)} \right) \right]^2 + \left( Rb_i^\diamond - Rb_{j(i)} \right)^2 \right\} \quad (3.57)$$

$$F_{PDCP2} = \min(F_{PDCP2}^0, F'_{PDCP2}, F''_{PDCP2}, F'''_{PDCP2}) \quad (3.58)$$

Y, finalmente para el método PDCP3 se tiene:

$$F^0_{PDCP3} = \frac{1}{4n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - Ra_i \right)^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \alpha_i^\diamond, \alpha_i \right) \right]^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \beta_i^\diamond, \beta_i \right) \right]^2 + \left( \frac{1}{Rb_i^\diamond} - \frac{1}{Rb_i} \right)^2 \right\} \quad (3.59)$$

$$F'_{PDCP3} = \frac{1}{4n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - \frac{1}{Ra_{j(i)}} \right)^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \alpha_i^\diamond, -\alpha_{j(i)} \right) \right]^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \beta_i^\diamond, -\beta_{j(i)} \right) \right]^2 + \left( \frac{1}{Rb_i^\diamond} - \frac{1}{Rb_{j(i)}} \right)^2 \right\} \quad (3.60)$$

$$F''_{PDCP3} = \frac{1}{4n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - Ra_i \right)^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \alpha_i^\diamond, -\alpha_i \right) \right]^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \beta_i^\diamond, -\beta_i \right) \right]^2 + \left( \frac{1}{Rb_i^\diamond} - \frac{1}{Rb_i} \right)^2 \right\} \quad (3.61)$$

$$F'''_{PDCP3} = \frac{1}{4n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( Ra_i^\diamond - \frac{1}{Ra_{j(i)}} \right)^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \alpha_i^\diamond, \alpha_{j(i)} \right) \right]^2 + \left[ \Delta_{ang} \left( \beta_i^\diamond, \beta_{j(i)} \right) \right]^2 + \left( \frac{1}{Rb_i^\diamond} - \frac{1}{Rb_{j(i)}} \right)^2 \right\} \quad (3.62)$$

$$F_{PDCP3} = \min(F_{PDCP3}^0, F'_{PDCP3}, F''_{PDCP3}, F'''_{PDCP3}) \quad (3.63)$$

Los métodos PDCP1, PDCP2 y PDCP3, tal como han sido descritos y modificados, cumplen todos los requisitos expuestos en §3.2 a falta de comprobar el *requisito de progresividad* y el *de conmutabilidad*. En efecto, los resultados calculados por ambos métodos son insensibles a la posición, orientación, tamaño, parametrización y posible simetrías de las curvas.

Requisito	Métodos PDCP	
Identificación	Cumple	
Progresividad	Comprobar	
Conmutabilidad	Comprobar	
Independencia de posición	Cumple	
Independencia de orientación	Cumple	
Independencia de tamaño	Cumple	
Independencia de simetrías	Cumple	
Independencia de parametrización	Indep. de origen	Cumple
	Indep. de evolución	Cumple
	Indep. de sentido de avance	Cumple

Tabla 3.8. Cumplimiento de requisitos por parte de los métodos PDCP.

Existe, no obstante una posibilidad de fallo de los método que se considera remota por lo intrincada que resulta. Supóngase que se tiene una curva y de ella se obtiene su polígono característico de  $n$  puntos. Si se deforma cada uno de los  $n$  segmentos de curva existentes entre los vértices del polígono de manera que la nueva curva conserve la posición y las derivadas primera y segunda en los vértices del polígono y también de forma que el incremento de longitud en cada uno de los segmentos de curva sea el mismo y además se consigue que el punto de radio de curvatura mínimo siga siendo el mismo que en la curva original, se llegará a una segunda curva muy diferente de la primera que, sin embargo, es calificada de igual a aquella cuando se le aplica este MCC. Por otro lado, si se tuviera que utilizar este método en un ámbito en el que existiera la posibilidad de que ocurriera esto, podría solucionarse el problema con solo realizar dos comparaciones de cada pareja de curvas, cada una con un número de puntos diferentes ya que, si se da esta casualidad cuando se consideran  $n$  puntos en el polígono característico, es prácticamente imposible que ocurra lo mismo cuando se utilizan, por ejemplo,  $n+1$  puntos.

### 3.5.3. Método de la curvatura de las curvas o método CC (*Curvature of Curves*).

Otra posibilidad en la comparación de curvas, sugerida por Watanabe (Watanabe, 1992) es realizar esta comparación utilizando solamente la curvatura de las curvas. La curvatura de una curva plana es una característica puntual de la misma que varía de forma inversamente proporcional al tamaño de la curva y que es independiente de la posición y orientación de la curva.

La base de este método es similar a la de los anteriores propuestos (PD y PDCP), siendo la única diferencia la función de comparación. Dicha función de comparación podría ser propuesta de acuerdo con la ecuación siguiente:

$$F_{CC} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (\kappa_i^\diamond - \kappa_i)^2 \quad (3.64)$$

donde se ha utilizado el símbolo ( $\diamond$ ) para indicar la curvatura de la curva requerida, mientras que la curvatura de la curva propuesta es indicada por la ausencia de dicho símbolo. Además, se observa que la expresión ha sido normalizada respecto al número de puntos utilizado.

Pero, la curvatura es dependiente del tamaño y se requiere que exista independencia. Para lograrlo, es posible multiplicar esta curvatura —ya que esta tiene dimensiones de longitud a la inversa— por otra dimensión que dependa linealmente del tamaño. Por ejemplo, la longitud de la curva. Entonces la expresión se transforma en la siguiente.

$$F_{CC} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (\kappa_i^\diamond \cdot L_r - \kappa_i \cdot L_p)^2 \quad (3.65)$$

en la que  $L_r$  es la longitud de la curva requerida y  $L_p$  es la longitud de la curva propuesta.

La ecuación anterior ya es adimensional e independiente del tamaño de las curvas. Sin embargo, la curvatura de una curva en un punto puede tener un valor muy elevado —en extremo infinito— cuando la curva tiene un pico (o cúspide). Así, es posible que dos curvas sean muy similares pero una de ellas tenga una cúspide y la otra no. En tal caso, si uno de los puntos seleccionados está en la cúspide, el valor devuelto por la ecuación (3.65) será muy elevado (ya que uno de los dos factores del binomio al cuadrado será muy elevado mientras que el otro no). Así, este resultado no se correspondería con la realidad de que las curvas son similares.

Esto demuestra que la comparación expresada mediante la ecuación (3.65) presenta problemas de progresividad cuando una de las curvas tiene una cúspide o una forma cercana a la cúspide. Para solucionar este problema, se propone una nueva expresión de la comparación:

$$F_{CC} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{\kappa_i^\diamond \cdot L_r - \kappa_i \cdot L_p}{\left( \frac{\kappa_i^\diamond \cdot L_r + \kappa_i \cdot L_p}{2} \right)} \right]^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{2 \cdot (\kappa_i^\diamond \cdot L_r - \kappa_i \cdot L_p)}{\kappa_i^\diamond \cdot L_r + \kappa_i \cdot L_p} \right]^2 \quad (3.66)$$

Esta ecuación realiza el sumatorio, para todos los puntos, de una magnitud puntual que se basa en la diferencia de curvaturas. Esta magnitud representa para cada punto la diferencia de factores curvatura por longitud de las curvas en relación al valor medio de ambos. Por consiguiente, uno de los factores curvatura por longitud para una de las dos curvas en un punto presenta un valor muy elevado, éste también estará presente en el denominador, llegando a

ser ambos del mismo orden. Así, el cociente de ambos será un valor moderado, en extremo igual a 2, como se muestra en la ecuación (3.67).

$$\lim_{\kappa_i^\diamond \rightarrow \infty} \left( \frac{2 \cdot (\kappa_i^\diamond \cdot L_r - \kappa_i \cdot L_p)}{\kappa_i^\diamond \cdot L_r + \kappa_i \cdot L_p} \right) = 2 \quad (3.67)$$

Si se desea imponer otro valor diferente cuando una de las curvaturas tiende a infinito se puede modificar sencillamente el coeficiente que multiplica el denominador de la expresión anterior.

Este valor moderado será un mejor indicador de la diferencia existente entre ambas curvas en el caso de que la curvatura de una de ellas tienda a infinito.

Para contemplar los requisitos de *independencia de parametrización e independencia de simetrías*, es posible realizar un planteamiento similar al de los métodos anteriores. Así, la función de comparación correspondiente a este método se obtendrá como sigue:

$$F_{CC}^0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{2 \cdot (\kappa_i^\diamond \cdot L_r - \kappa_i \cdot L_p)}{\kappa_i^\diamond \cdot L_r + \kappa_i \cdot L_p} \right]^2 \quad (3.68)$$

$$F'_{CC} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{2 \cdot (\kappa_i^\diamond \cdot L_r - \kappa_{j(i)} \cdot L_p)}{\kappa_i^\diamond \cdot L_r + \kappa_{j(i)} \cdot L_p} \right]^2 \quad (3.69)$$

$$F_{CC} = \min(F_{CC}^0, F'_{CC}) \quad (3.70)$$

estando  $j(i)$  definido en la ecuación (3.38).

En cuanto a la primera evaluación, el método cumple todos los requisitos salvo del de conmutabilidad y el de progresividad, que deberán ser comprobados mediante los ensayos oportunos.

Requisito	Método CC	
Identificación	Cumple	
Progresividad	Comprobar	
Conmutabilidad	Comprobar	
Independencia de posición	Cumple	
Independencia de orientación	Cumple	
Independencia de tamaño	Cumple	
Independencia de simetrías	Cumple	
Independencia de parametrización	Indep. de origen	Cumple
	Indep. de evolución	Cumple
	Indep. de sentido de avance	Cumple

Tabla 3.9. Cumplimiento de requisitos por parte del método CC.

### 3.5.4. Método del área entre las curvas o método ABC (*Area Between Curves*).

Es de especial importancia estudiar la progresividad de los métodos mediante ensayos de los mismos. Estos ensayos consistirán en comparar una curva requerida con varias curvas propuestas, estando las diferentes curvas propuestas obtenidas a partir de una la curva requerida mediante deformación progresiva. Si se representan los resultados obtenidos al comparar cada una de las curvas propuestas con la curva requerida, se obtiene una gráfica que representa la progresividad de cada método. El problema de evaluación de la progresividad de los métodos mediante este tipo de ensayos es que no se conoce a priori cual debe ser la forma de la gráfica de progresividad porque no se tiene ningún patrón con el que poder comparar las que se obtengan.

Con el fin de obtener un patrón lo más realista posible (en el sentido de que muestre con mayor realismo la deformación progresiva de las curvas) se propone este nuevo método integral. Por ser un método que tiene en cuenta las diferencias entre las curvas en todos sus puntos (mediante integración), servirá como referencia con la que comparar el comportamiento de los métodos discretos.

Este método integral ha sido ideado a partir de las sugerencias de Thompson (Thompson, 1975) y de Akçali y Dittrich (Akçali y Dittrich, 1989b) —aunque éstos no plantearon ninguna solución del problema—, según las cuales, el mejor indicador de la diferencia de forma entre dos curvas planas y cerradas es el área que queda encerrada entre el trazado de ambas curvas tal como se observa en la figura 3.14. Ciertamente, cuanto mayor es el área encerrada entre las curvas, mayor será la diferencia entre ambas, siendo más parecidas a medida que este área disminuye. Si el área encerrada entre ambas curvas es cero solo puede significar que las curvas son exactamente iguales y su trazado coincide en todos sus puntos.

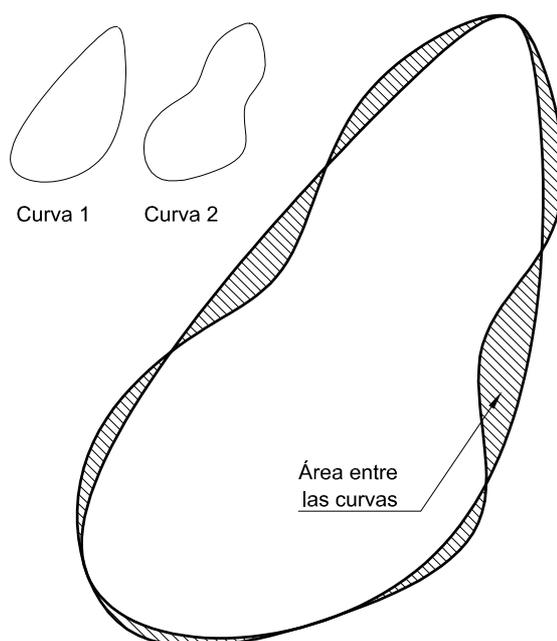


Figura 3.14. El área encerrada entre dos curvas indica su diferencia morfológica.

Sin embargo, este área encerrada entre las curvas depende de cómo se sitúe (superponga) una con respecto a la otra, es decir, depende de la posición, orientación y escala relativas de las curvas. Por lo tanto, será necesario reescalar, reubicar y reorientar las curvas según un criterio fijo para que la comparación sea independiente de tales variables. El criterio adoptado en este caso consiste en dejar inmóvil una de las curvas —por ejemplo, la curva requerida— para superponer la curva propuesta sobre la requerida. Los criterios para reescalar y reubicar la curva propuesta sobre la curva requerida son más claros que los criterios que se pueden idear para reorientarla. Por ejemplo, se puede reescalar la curva propuesta para que su longitud sea la misma que la de la curva requerida o también para que el área que encierra sea la misma que la de la curva requerida. De la misma forma, se puede desplazar la curva propuesta sobre la requerida para que coincidan los centroides de las curvas —consideradas éstas como cuerpos lineales— o, alternativamente, hacer que coincidan los centroides de las áreas que encierran. Sin embargo, una vez realizadas las transformaciones anteriores, el área entre las curvas es muy sensible a la orientación de una con respecto a la otra —lo cual está muy relacionado con el hecho de que las curvas se parecen más o menos según cada orientación—.

#### Primero. Superposición de la curva propuesta sobre la curva requerida.

Para resolver este problema de superposición de la curva propuesta sobre la requerida se adopta la técnica utilizada por Watanabe (Watanabe, 1992) en el método LSOP.

Se parte de dos curvas —la requerida, nombrada con el subíndice  $r$  y la propuesta, nombrada con el subíndice  $p$ — expresadas en forma paramétrica como sigue:

$$P_r(u) = \begin{cases} x_r(u) \\ y_r(u) \end{cases} \quad u \in [u_0, u_f] \quad (3.71)$$

$$P_p(t) = \begin{cases} x_p(t) \\ y_p(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, t_f] \quad (3.72)$$

Con el fin de superponer adecuadamente la curva propuesta a la requerida, se practica una transformación homotética de factor  $k$  a la curva propuesta con el fin de que ésta, una vez transformada, tenga la misma longitud que la curva requerida. De la curva resultante y de la requerida se toman  $n$  puntos distribuyéndolos uniformemente a lo largo de las longitudes de sus respectivas curvas. Luego se desplaza y gira la curva propuesta (determinando los valores de  $x_0$ ,  $y_0$  y  $\beta$  según las ecuaciones (3.11)) siguiendo las directrices expuestas en el paso cuarto del método LSOP (véase página 73) con el objetivo de minimizar la expresión (3.10).

Una vez realizado lo anterior, con el fin de superponer la curva propuesta adecuadamente sobre la requerida, se modifica aquella con los valores calculados de  $k$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  y  $\beta$ , obteniendo una curva cuyas expresión paramétrica es:

$$P'_p(t) = \begin{cases} x'_p(t) \\ y'_p(t) \end{cases} = \begin{cases} x_0 + k \cdot [x_p(t) \cdot \cos \beta - y_p(t) \cdot \sin \beta] \\ y_0 + k \cdot [x_p(t) \cdot \sin \beta + y_p(t) \cdot \cos \beta] \end{cases} \quad (3.73)$$

a la que se llamará curva propuesta modificada.

A continuación, el paso siguiente describe cómo se calcula el área encerrada entre esta nueva curva y la requerida.

### Segundo. Determinación del área entre las curvas.

Resulta sencillo decidir cual es el área encerrada entre las curvas cuando éstas tienen una complejidad<sup>60</sup> similar pues su geometría permite superponerlas de forma que la evolución de sus trazados tengan cierta similitud, como en el caso de las curvas representadas en la figura 3.14. Sin embargo, si se pierde similitud en la complejidad de las curvas existen varias posibilidades para decidir cual es el área encerrada, no siendo ninguna claramente mejor —en

---

<sup>60</sup> Refiriéndose aquí a la complejidad de su forma atendiendo principalmente al número de puntos dobles —aquellos puntos por los que la curva pasa dos veces, igual al número de veces que la curva se corta a sí misma— y al número de vueltas completas que da la tangente —el cual es un índice de cuantas vueltas da la curva sobre sí misma—.

el sentido de más realista— que el resto. Finalmente, si las curvas son muy diferentes en cuanto a complejidad, resulta complicado decidir cual será el área entre las curvas. Por ejemplo, obsérvense los casos presentados en la figura 3.15. El caso (a) representa el área entre dos curvas de complejidad similar (no teniendo ambas ningún punto doble y dando la tangente una vuelta en ambos casos). Se aprecia fácilmente que el criterio representado para decidir cual es el área entre las curvas es el mejor posible, no existiendo prácticamente más posibilidades. En el caso (b) las curvas también tienen la misma similitud, teniendo un punto doble cada una. En este caso el criterio óptimo de área entre las curvas no es único, habiéndose representado el que se considera mejor cuando se trata de estimar la diferencia entre las curvas en base a este área. El caso (c) representa dos de las varias alternativas que existen en la consideración del área encerrada por dos curvas de complejidad diferente (una curva tiene un punto doble mientras que la otra no tiene ninguno). Se pueden alegar ventajas en el uso de una y de otra, pero ninguna de las dos posibilidades es claramente mejor que la otra para el fin que nos ocupa.

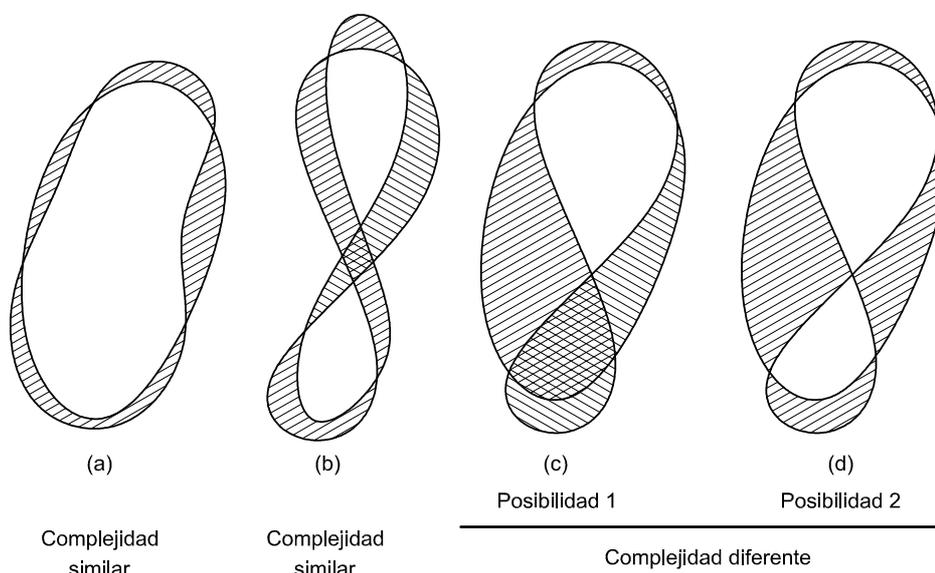


Figura 3.15. Área entre curvas de diferente complejidad.

Así pues, queda patente que el problema de establecer un criterio fijo que permita automatizar el cálculo del área entre dos curvas planas cerradas cualesquiera no tiene una solución satisfactoria para todos los casos. Sin embargo, cuando el área entre las curvas es utilizada para medir la diferencia entre ellas con el fin de constituir una función de comparación *objetivo* de una optimización, es posible pensar que cuando las curvas son de complejidad diferente es porque su trazado es muy diferente, es decir, poco parecidas. Por esto, resulta poco importante afinar en el cálculo del área entre las curvas cuando éstas son muy diferentes

(siendo válido cualquier valor elevado), pero por el contrario, es especialmente importante que el método sea capaz de determinar fielmente el área entre las curvas cuando éstas son muy parecidas. Esta sensibilidad permitirá al método de optimización converger adecuadamente hacia el óptimo desde una posición en un entorno cercano del mismo. Por este motivo, se ha puesto interés en que el algoritmo planteado a continuación calcule adecuadamente el área entre las curvas especialmente cuando éstas son parecidas. Siendo menos estricto cuando las curvas comparadas son muy diferentes.

Tal como se aprecia en la figura 3.14, el área entre dos curvas puede determinarse de una forma genérica sumando las áreas encerradas por las curvas entre cada dos puntos de intersección de las mismas. Así pues, lo primero que se ha de hacer es determinar todos los puntos de intersección entre ambas curvas, para luego integrar las curvas entre cada dos puntos de intersección consecutivos, obteniendo el área.

Para lograr determinar los puntos de intersección se opta por discretizar las curvas. Una vez convertidas éstas en poligonales resulta sencillo determinar los puntos de intersección<sup>61</sup>. Pero estos puntos no serán, en general, los verdaderos puntos de intersección de las curvas (solo lo serán cuando el punto de intersección de las dos poligonales sea un vértice de las dos) ya que la discretizaciones no representan las curvas con total exactitud. Lo que ocurre es que los valores de los parámetros  $u_{int}$  y  $t_{int}$  obtenidos para cada punto de intersección son valores interpolados y, consecuentemente, las coordenadas del punto de la curva requerida correspondiente a  $u_{int}$  no serán las mismas que las coordenadas del punto de la curva propuesta modificada correspondiente a  $t_{int}$ , aunque ambos puntos serán tanto más cercanos cuanto más fina sean las discretizaciones de las curvas.

Si se desea una mayor precisión en el proceso que la lograda hasta ahora, se puede realizar una optimización —minimización— de la función distancia entre los puntos  $P_p(u)$  y  $P_p'(t)$  de ambas curvas variando los parámetros  $u$  y  $t$ , y tomando como valores iniciales de la optimización  $u_{int}$  y  $t_{int}$  obtenidos en la discretización. De esta forma, la convergencia será rápida ya que la solución estará muy próxima —salvo que la discretización sea excesivamente burda— al punto de partida y se podrán obtener los puntos de intersección reales con la precisión que se desee.

Una vez obtenidos los puntos de intersección entre las dos curvas existe, no obstante, la posibilidad de que no todos sean válidos, siendo necesario la eliminación de los que se consideren no válidos. Ha de tenerse en cuenta que establecer un criterio que decida qué puntos de intersección son válidos y cuales no, supone establecer un criterio sobre qué porciones del área entre las curvas se considera y cuales no de entre las posibles opciones.

---

<sup>61</sup> Nótese que, con el cálculo de cada punto de intersección, no solo se obtienen las coordenadas de dicho punto en el plano  $X$ - $Y$ , sino que además se obtienen los parámetros de cada una de las dos curvas ( $u$  y  $t$ ) correspondientes a ese punto de intersección, siendo estos valores mucho más importantes en el proceso que las coordenadas del punto.

Después de diversas pruebas se ha optado por realizar un filtrado de puntos de intersección según el siguiente procedimiento: en primer lugar se parte del punto inicial de la curva requerida y se recorre dicha curva numerando los puntos de intersección según se van encontrando. Una vez hecho esto, se considera aisladamente cada punto de intersección y se determina el punto de intersección siguiente y el anterior siguiendo, no la curva requerida, sino la propuesta modificada. Se calcula la diferencia de numeración entre el punto en cuestión y el punto anterior encontrado (*diferencia anterior*) y también la diferencia entre el punto siguiente y el punto considerado (*diferencia siguiente*). Si las dos diferencias, en valor absoluto, son mayores que 1, esto significa que no es posible pasar (siguiendo la curva propuesta modificada) del punto de intersección considerado a otro punto de intersección consecutivo según la numeración sin antes pasar por, al menos, un tercer punto de intersección, por lo que la integración entre puntos no se podrá llevar a cabo. En tal caso se descarta el punto de intersección considerado y se continúa considerando el siguiente. Así, por ejemplo, considerando el punto de intersección 2 de la figura 3.16, siguiendo la curva propuesta, su punto anterior es el 0 y el punto siguiente es el 4. Esto significa que las diferencias de numeración anterior y posterior son, respectivamente (-2) y 2, siendo ambas en valor absoluto mayores que 1, por lo que se descarta el punto. Igualmente se descarta el punto 5 y no se descartan los puntos 0, 1, 3 y 4. Al final, integrando entre los puntos no descartados, se obtiene como resultado el área sombreada en la figura.

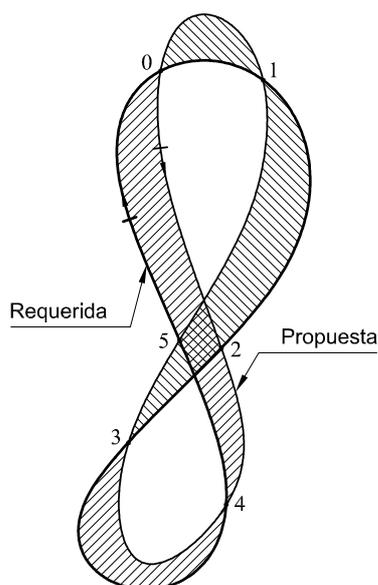


Figura 3.16. Numeración de los puntos de intersección con el fin de descartar los no válidos.

Tras descartar los puntos no válidos ya se puede proceder a la determinación del área encerrada por las curvas entre cada pareja de puntos de intersección. Para determinar esta área comprendida entre dos puntos de intersección supóngase que se tienen dos curvas

paramétricas —requerida y propuesta— referenciadas en un sistema de ejes cartesiano  $X$ - $Y$  (véase figura 3.17).

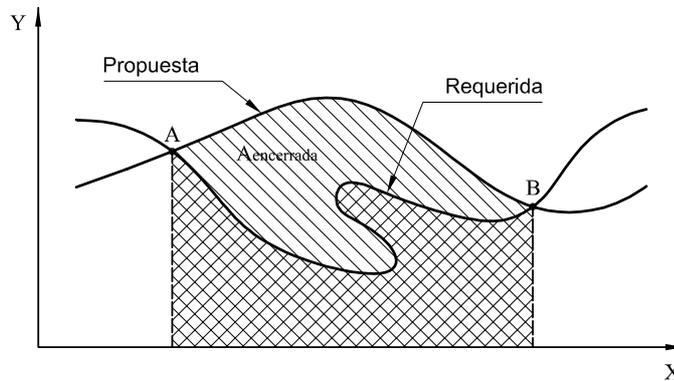


Figura 3.17. Área encerrada entre dos curvas y entre dos puntos en los que se cortan.

Si estas dos curvas se cortan en dos puntos A y B, no existiendo ningún otro punto de intersección de las curvas dentro del tramo AB, el área que queda encerrada entre ambas curvas en ese tramo es:

$$A_{AB} = \left| \int_{u_A}^{u_B} y_r(u) \cdot dx_r(u) + \int_{t_A}^{t_B} y_p(t) \cdot dx_p'(t) \right| \quad (3.74)$$

y, teniendo en cuenta que

$$dx_r(u) = \frac{dx_r(u)}{du} \cdot du, \quad \text{y que} \quad dx_p'(t) = \frac{dx_p'(t)}{dt} \cdot dt \quad (3.75)$$

la expresión (3.74) se transforma en la siguiente:

$$A_{AB} = \left| \int_{u_A}^{u_B} y_r(u) \cdot \frac{dx_r(u)}{du} du + \int_{t_A}^{t_B} y_p(t) \cdot \frac{dx_p'(t)}{dt} dt \right| \quad (3.76)$$

donde las derivadas de las coordenadas  $x$  paramétricas de ambas curvas pueden, si no se dispone de ellas explícitamente, estimarse mediante diferencias finitas (Press *et al.*, 1991). Esta ecuación puede integrarse con la precisión deseada utilizando métodos numéricos tales como los basados en la *regla de Simpson* u otros (Press *et al.*, 1991).

No obstante, puede demostrarse que existe un problema de signo si se desea calcular el área de una curva paramétrica entre dos puntos A y B cuando la curva se corta a sí misma

dentro de ese tramo. En tal caso, para resolver este problema resulta necesario integrar la curva entre cada punto clave<sup>62</sup> y el siguiente considerando cada tramo en valor absoluto. Por ejemplo, para calcular el área bajo la curva mostrada en la figura 3.18, se debe integrar el área en los tramos AI, IDI, IB y determinar el área según la ecuación:

$$A_{AB} = |A_{AI} + A_{IB}| + |A_{IDI}| \quad (3.77)$$

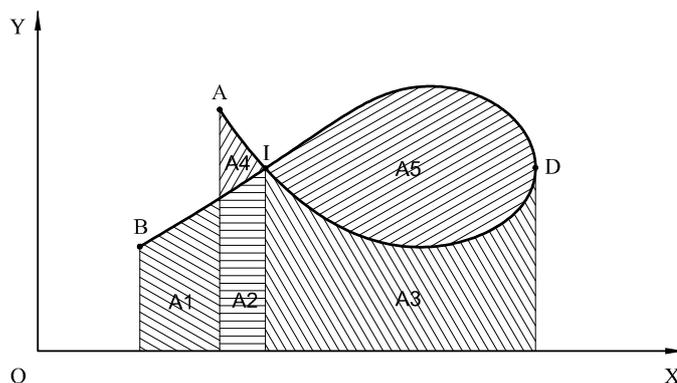


Figura 3.18. Área bajo una curva que se corta a sí misma.

De esta forma, el valor obtenido sería:

$$A_{AB} = |A_4 - A_1| + |A_5| \quad (3.78)$$

Esta forma de cálculo del área se ha comprobado que resulta adecuada cuando las curvas tienen puntos dobles —es decir, cuando las curvas se cortan consigo mismas— entre los puntos de integración.

Tras la evaluación de este método con el fin de comprobar si cumple los requisitos descritos en §3.2, se detecta que el método no es independiente del tamaño de las curvas. En efecto, el resultado que este método arroja tras la comparación de las curvas tiene unidades de área y el área depende del tamaño de las curvas que la encierran. Del tamaño de la curva propuesta no depende, ya que este tamaño se ajusta hasta hacerlo coincidir con el de la curva requerida, pero sí depende del tamaño de esta última, por lo que los resultados no serán equiparables (es decir, no se podrá decidir si una pareja de curvas se parecen más entre sí que otra pareja aplicando este método, ya que el resultado de cada comparación depende del tamaño de la curva que actúa como requerida en cada pareja de curvas comparadas).

<sup>62</sup> Puntos inicial y final y puntos de intersección dentro del tramo.

Para evitar esto, es necesario normalizar el resultado de la comparación haciendo que sea adimensional e independiente de la escala. En tanto que el resultado es un área que depende del tamaño de la curva requerida, aquel dependerá linealmente del cuadrado de cualquier dimensión lineal de ésta. Una forma de conseguir el objetivo puede ser dividiendo el resultado entre producto de dos dimensiones características de la curva requerida ya que este producto dependerá igualmente del cuadrado de la escala y la división será adimensional e independiente. Se puede utilizar, por ejemplo, la longitud de la curva requerida como factor de normalización. Esta longitud es la misma en la curva requerida y en la curva propuesta modificada, por lo que el resultado de la normalización cumplirá el *requisito de conmutabilidad*. De esta forma, el resultado devuelto por este método se calcula como:

$$F_{ABC} = \frac{A_{encerrada}}{L_{req}^2} \quad (3.79)$$

donde  $A_{encerrada}$  es el área encerrada entre las curvas y  $L_{req}$  es la longitud de la curva requerida.

En cuanto a la evaluación del cumplimiento de requisitos expuestos en §3.2, este método cumple todos los requisitos salvo el *requisito de independencia de simetrías*. Sin embargo no se va a proponer ninguna medida para independizar el resultado de posibles simetrías por dos motivos: uno porque resulta difícil simplificar el problema contemplando simetrías (en realidad lo único que cabe hacer es repetir de principio a fin el algoritmo con una curva simétrica a la curva propuesta) y dos porque este método no pretende competir con los anteriores como método ideal para la comparación de curvas, sino que pretende servir como referencia para verificar la progresividad de aquellos.

Además, será necesario comprobar si el método cumple el *requisito de conmutabilidad* mediante los ensayos oportunos.

Requisito	Método ABC	
Identificación	Cumple	
Progresividad	Cumple	
Conmutabilidad	Comprobar	
Independencia de posición	Cumple	
Independencia de orientación	Cumple	
Independencia de tamaño	Cumple	
Independencia de simetrías	<b>No cumple</b>	
Independencia de parametrización	Indep. de origen	Cumple
	Indep. de evolución	Cumple
	Indep. de sentido de avance	Cumple

Tabla 3.10. Cumplimiento de requisitos por parte de los métodos ABC.

El método ABC planteado tiene unas características que lo hacen idóneo para servir como método de referencia en los ensayos de progresividad de los métodos discretos. Sin embargo, no es un método perfecto.

Con respecto a la superposición de la curva propuesta sobre la requerida, se considera una superposición óptima aquella que minimiza el área entre las curvas. Sin embargo, en este método no se utiliza ese objetivo cuando se realiza la transformación de la curva propuesta para superponerla a la requerida (debido, fundamentalmente, a que realizar una optimización para obtener la posición, orientación y escala tales que minimicen el área entre las curvas es desproporcionadamente costoso desde el punto de vista computacional), por lo que los resultados obtenidos se separarán del resultado ideal. El procedimiento de transformación geométrica de la curva propuesta utilizado está basado en un número finito de puntos y puede mejorarse si se incrementa considerablemente el número de puntos (tomando en consideración, por ejemplo, 100 puntos), sin que esto haga que el coste computacional del método sea inabordable.

Por otro lado, el método no es estricto en el cálculo del área entre las curvas cuando estas son muy diferentes. Esto, si bien puede resultar poco importante en el procedimiento de optimización, como se ha explicado anteriormente, es posible que repercuta de alguna manera en los resultados. Lo cual sería necesario comprobar en el caso de utilizar el método para comparar curvas entre las que exista una gran diferencia.

Además, no se ha resuelto el problema de la posible simetría de las curvas comparadas.

Por último, el coste computacional de este método es sensiblemente superior al de los métodos discretos anteriores (excepto al del método BSC), como se verá más adelante.

Por estos motivos, este método ha sido planteado no con el afán de competir con los anteriores, sino sólo para ser utilizado como patrón en el análisis de progresividad de los métodos. En este ensayo se estudia la sensibilidad de los métodos frente a variaciones pequeñas en la forma de las curvas comparadas siendo, por sus características anteriormente descritas, los casos en los que mejor funciona este método.

### **3.6. Mejora de los métodos existentes.**

---

Los métodos propuestos por otros investigadores han sido expuestos en §3.4 exactamente como sus respectivos autores los publicaron. Si se realiza un análisis detallado de la metodología empleada por cada uno de estos métodos es posible, antes de realizar ensayos, mejorar algunos puntos de ellos de acuerdo con los criterios que se vienen contemplando en este capítulo y, en concreto, con los requisitos descritos en §3.2.

En este epígrafe se analizan dichos métodos para estudiar en qué aspectos se pueden mejorar. Posteriormente se proponen modificaciones o pasos alternativos con el fin de corregir estas desventajas antes de realizar el ensayo y comparación de los métodos. Es necesario hacer hincapié en el hecho de que no se pretende modificar de forma sensible la base algorítmica sobre la que se fundamenta cada método, sino solamente corregir algunos puntos de los mismos con el fin de beneficiar su funcionamiento de acuerdo con los requisitos impuestos en este estudio. Una vez determinadas las correcciones de cada método, en lo sucesivo en este capítulo, cuando se haga referencia a dicho método, se considerará siempre que sobre el método ya se han aplicado las correcciones.

#### Resolución del problema de dependencia respecto del sentido y avance del parámetro y de posibles simetrías.

Ninguno de los tres métodos expuestos en §3.4 llevan a cabo acciones con el fin de independizar los resultados respecto del sentido de avance del parámetro ni de posibles simetrías. La solución propuesta es similar a la planteada para resolver este problema en los métodos existentes (§3.4). En concreto, se trata de utilizar el método para comparar no solamente la curva propuesta con la requerida, sino para comparar la curva requerida con la curva propuesta y sus curvas derivadas simétricas y/o con sentido de avance del parámetro diferente, tal como se muestra en la figura 3.11. Por supuesto, y como ocurriera en los métodos propuestos, no es necesario ejecutar todo el algoritmo con cada una de las cuatro posibilidades, ya que las variables asociadas a cada posibilidad están relacionadas numéricamente con el resto, por lo que puede conseguirse economía de computación.

En los métodos LSOP y MPE, no es necesario obtener nuevos puntos de la curva propuesta en la opción I, II y III (véase figura 3.11), sino que una vez se han obtenido tales puntos en la opción 0 es posible, a partir de estos, determinar los puntos correspondientes la opción I con solo invertir la numeración (partiendo del punto 0), los correspondientes a la opción II con sólo cambiar el signo de la coordenada X y los correspondientes a la opción III con sólo cambiar el signo de la coordenada X e invertir la numeración. Una vez obtenidas las nuevas posibilidades, se reproduce el algoritmo a partir del paso cuarto (*reposicionamiento y reorientación*). De esta forma se evita repetir en el algoritmo cuatro veces uno de los pasos computacionalmente más costoso: la distribución uniforme de los puntos a lo largo de la longitud de la curva.

Por otro lado, en el método BSC tampoco es necesario repetir la conversión de la curva propuesta (en las cuatro opciones diferentes) a una B-Spline. Una vez que se ha convertido la curva (en la opción 0) y se ha obtenido su polígono de control asociado, se puede determinar el polígono asociado a las opciones I, II y III con estrategias similares a las descritas en el párrafo anterior.

### 3.6.1. Método LSOP.

Este método, propuesto por Watanabe (Watanabe, 1992) se fundamenta sobre la misma base de funcionamiento que el método MPE (del mismo autor). Su diferencia radica en que utilizan diferentes criterios para desplazar y orientar la curva propuesta sobre la requerida antes de estimar el error de comparación entre ambas y también en la estimación de dicho error (indicador) de comparación.

#### Resolución del problema de dependencia parcial del origen de la parametrización.

Una posible mejora se puede realizar en la identificación de puntos homólogos (paso tercero, página 72), que es común a ambos métodos. En efecto, este método obtiene  $n$  puntos de las curvas repartiendo éstos uniformemente a lo largo de la longitud de las curvas. Sin embargo existe un problema de origen de la serie de puntos ya que dependiendo de dónde se encuentre el primer punto en la curva, así se situarán el resto de puntos. Watanabe sitúa el primer punto en cada curva en la posición correspondiente al valor inicial del parámetro dentro de su intervalo de variación. Posteriormente, se percata del problema que esto supone e intenta solucionarlo buscando dentro de los puntos obtenidos de la curva propuesta el que puede ser homólogo al primer punto de la curva requerida.

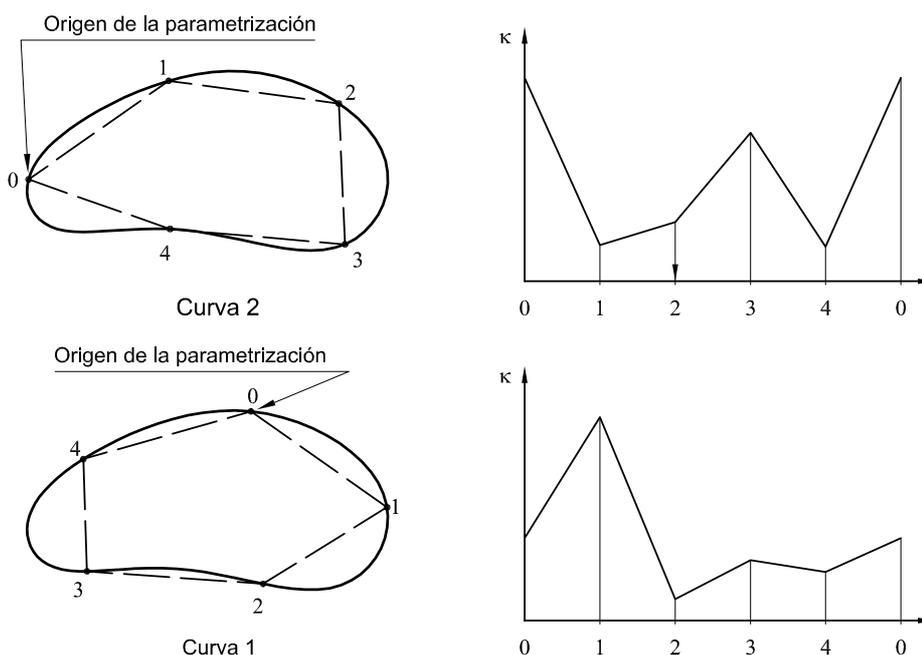


Figura 3.19. Identificación de puntos homólogos en base a la curvatura considerando 5 puntos.

Para ello busca una concordancia en la evolución de la curvatura en cada una de las dos series de puntos —la de la curva requerida y la de la curva propuesta—. Sin embargo, si el número de puntos considerado es pequeño, es muy probable que no se encuentre concordancia alguna en la curvatura de las curvas en los puntos seleccionados aun cuando las curvas, en la realidad, sean muy similares. Para ilustrar esto se ha incluido la figura 3.19. En ella se observan dos curvas morfológicamente iguales pero supuestamente definidas con una parametrización diferente y sobre las que se consideran cinco puntos. Ambas curvas tienen su origen (es decir, el punto correspondiente al valor mínimo del parámetro) en el punto 0, el cual está situado en posiciones diferentes para cada curva. La distancia entre los puntos sobre la curva no se ve influenciada por la diferente parametrización, por lo que la posición de la distribución de puntos depende, exclusivamente, de la posición del primer punto.

Una vez distribuidos los puntos sobre las curvas se procede a la identificación de los puntos homólogos. Para ello se representa la curvatura  $\kappa$  secuencialmente en cada uno de los puntos y se busca una equivalencia en la forma de las gráficas (ver figura 3.19), es decir, se busca el mínimo de la expresión (3.7). Esta forma de proceder, para este ejemplo, determina que las curvaturas en los puntos de los polígonos siguen secuencias parecidas cuando el punto 2 de la curva 2 se identifica como homólogo del punto 0 de la curva 1. Sin embargo, en la figura se aprecia que ninguno de los dos polígonos se parece (no importa qué punto de la curva 2 se haga homólogo del punto 0 de la curva 1), por lo que al realizar la comparación este método indicará que ambas curvas no son iguales cuando, en realidad, lo son.

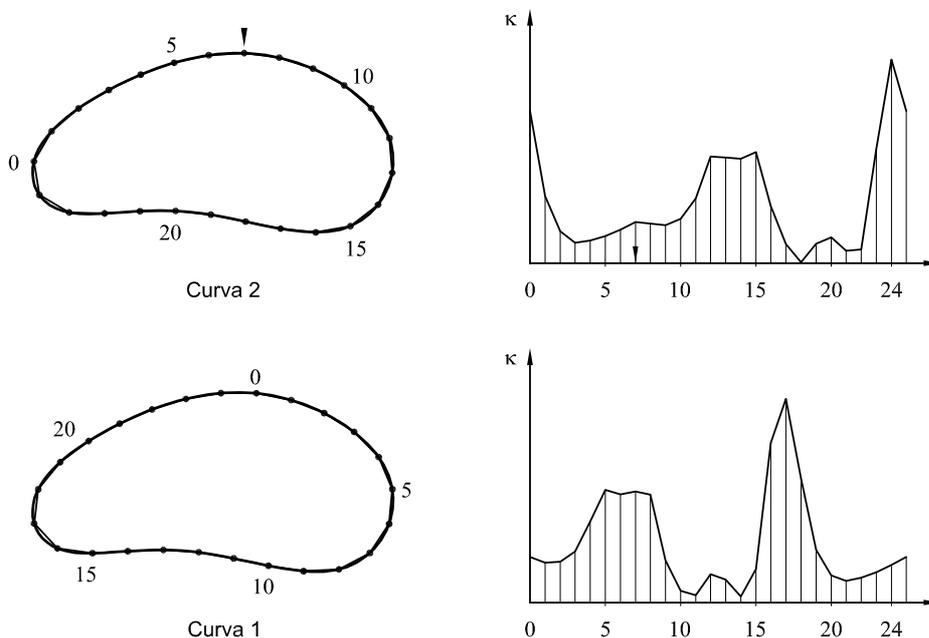


Figura 3.20. Identificación de puntos homólogos en base a la curvatura considerando 25 puntos.

Si el número de puntos considerado crece y las curvas son muy similares, los polígonos de puntos tienden a parecerse más y más y las secuencias de curvaturas en los puntos seleccionados son más fácilmente identificables. En la figura 3.20 se muestran las curvas considerando 25 puntos. Haciendo uso nuevamente de la expresión (3.7), se calcula que el punto 7 de la curva 2 es el homólogo del punto 0 de la curva 1 para que las secuencias de curvaturas en los puntos sean lo más parecidas posible. En este caso ya se observa en las gráficas una evolución similar (al igual que se observa una gran similitud entre los polígonos) pero con el desfase ocasionado por un diferente origen en la parametrización de cada curva. Sin embargo, pese a esta evolución similar, los puntos 0 de la curva 1 y 7 de la curva 2 no coinciden exactamente en la misma posición dentro de la curva, por lo que ni aún considerando 25 puntos el método de Watanabe indicará que estas dos curvas son iguales.

Además, puede ocurrir que dos curvas sean relativamente similares, se considere un gran número de puntos y, pese a todo, esta técnica propuesta por Watanabe realice una identificación deficiente de puntos homólogos. Por ejemplo, supóngase que se desea comparar dos curvas como las representadas en la figura 3.21a. Se extrae una cantidad elevada de puntos (en este ejemplo se han considerado 100 puntos) de cada una de ellas, distribuyéndolos uniformemente a lo largo de la longitud de las mismas. Si se utiliza la técnica expuesta por Watanabe para identificar los puntos homólogos y luego reescalar, reposicionar y reorientar la curva propuesta sobre la requerida con el fin de que coincidan al máximo, se obtiene una superposición como la mostrada en la figura 3.21b. Con tal identificación de puntos homólogos, la evolución de la curvatura en la secuencia de puntos de ambas curvas coincide al máximo. Sin embargo, se observa que las curvas tienen una mejor coincidencia si se superponen como se muestra en la figura 3.21c. Esto es debido a que la forma de las curvas no viene definida únicamente por la evolución de la curvatura dentro de ellas y por este motivo se puede llegar a situaciones como la expuesta.

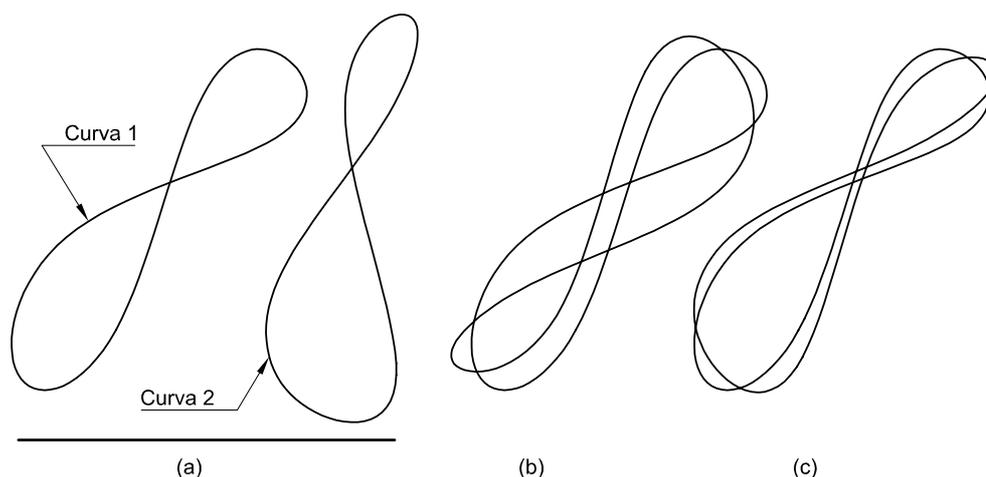


Figura 3.21. Fallo del método de Watanabe en la superposición de dos curvas.

En conclusión, queda demostrado que la forma de obtener los puntos de las curvas propuesta por Watanabe presenta ciertas deficiencias y sus resultados no son independientes de la parametrización de la curva, ni siquiera cuando el número de puntos considerado es elevado.

Como alternativa se puede utilizar la técnica de establecer el origen de la secuencia de puntos en el punto de radio de curvatura mínimo de la curva, tal como se hiciera en los métodos PD, PDCP1, PDCP2 y PDCP3. Al hacerlo así se imposibilita obtener polígonos diferentes en curvas que son morfológicamente iguales (y que se diferencian en su definición paramétrica).

#### Mejora de la estimación del error de comparación.

En este método, Watanabe estima el error de la comparación como la máxima distancia entre los vértices homólogos de los polígonos de puntos de cada una de las curvas (una vez reescalada, posicionada y orientada la curva propuesta sobre la requerida). Esta distancia máxima depende, no obstante, implícitamente de la forma de toda la curva. En efecto, si la curva propuesta cambia de forma, los  $n$  puntos considerados sobre ella (distribuidos uniformemente a lo largo de su longitud) cambiarán de posición y al hacerlo, cambiará la posición en la que esta curva propuesta se coloca sobre la requerida al realizar las transformaciones geométricas necesarias (ya que las coordenadas de todos los puntos intervienen en dichas transformaciones según las ecuaciones (3.11) y (3.12)). El cambio en la colocación de la curva propuesta sobre la requerida hará cambiar la distancia máxima entre los puntos seleccionados de ambas curvas. Sin embargo, pese a esta dependencia indirecta, se considera más conveniente estimar el indicador de diferencia entre las curvas en base las diferencias existentes entre todas las parejas de puntos homólogos considerados en ambas curvas por lo que es recomendable estimar el error de comparación como la suma de todas las distancias entre puntos homólogos, tal como expresa la ecuación (3.10).

El indicador así obtenido tras la modificación del método tiene unidades de longitud al cuadrado y depende (al igual que el cuadrado de cualquier longitud involucrada en las curvas) cuadráticamente del tamaño de la curva requerida (y no de la propuesta puesto que esta adapta su tamaño al de aquella). Ya se ha comentado anteriormente que esto supone un defecto de forma que debería ser subsanado pues, en efecto, no permite establecer si una pareja de curvas comparadas entre sí mismas se parecen más que una segunda pareja de curvas también comparadas entre sí, ya que la comparación de cada pareja depende del tamaño de la que hace de curva requerida. Para resolver esto se puede hacer adimensional del error de comparación, es decir, se puede dividir el indicador obtenido de la ecuación (3.10) por la longitud de la curva requerida. Al hacerlo así, se elimina la dependencia de la escala de dicha curva y se conservan todos los requisitos impuestos en §3.2 (incluido el *requisito de conmutabilidad*).

Por otro lado, el resultado de (3.10) es dependiente del número de puntos ( $n$ ) utilizado en tanto en cuanto que cuanto mayor es  $n$ , mayor es el número de sumandos en la ecuación. Es posible normalizar el resultado en cuanto al número de puntos si se divide aquel por este número de puntos  $n$ , lográndose un *resultado promedio por punto*.

Con estas modificaciones, el error de comparación del método LSOP termina por ser:

$$S = \frac{1}{n \cdot L_r^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[ (xr_i - (x_0 + xp_i \cdot \cos \beta - yp_i \cdot \sin \beta))^2 + (yr_i - (y_0 + xp_i \cdot \sin \beta + yp_i \cdot \cos \beta))^2 \right] \quad (3.80)$$

siendo  $x_0$ ,  $y_0$  y  $\beta$  los que se obtienen de las ecuaciones (3.11) y (3.12); y  $L_r$  la longitud de la curva requerida.

### 3.6.2. Método MPE.

Sobre este método se pueden realizar las mismas mejoras que sobre el método anterior (LSOP). El proceso de selección de puntos sobre las curvas es común en ambos métodos por lo que la corrección realizada en este punto es la misma que la realizada en el método anterior (Resolución del problema de dependencia parcial del origen de la parametrización).

#### Mejora de la estimación del error de comparación.

Por su parte, el error de la comparación entre dos curvas es estimado como la máxima distancia perpendicular, siendo más apropiado —por las mismas razones que las expuestas para el método LSOP— calcular este error como la suma de todas las distancias perpendiculares. Pero, como en aquel caso, este indicador tiene unidades de longitud al cuadrado y depende cuadráticamente del tamaño de la curva que actúa como requerida. Para eliminar esta dependencia se divide el indicador por la longitud de dicha curva al cuadrado. Por otro lado y siguiendo las correcciones realizadas en el método anterior, se divide la expresión por  $n$  utilizado con el fin de normalizar el resultado respecto del número de puntos utilizado. Al final, tras aplicar las modificaciones mencionadas, la expresión (3.14) queda de la siguiente forma:

$$S = \frac{1}{n \cdot L_r^2} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{Pi}^2 = \frac{1}{n \cdot L_r^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left( (xr_i - xp_i^*) \cdot \sin \delta r_i - (yr_i - yp_i^*) \cdot \cos \delta r_i \right)^2 \quad (3.81)$$

### 3.6.3. Método BSC.

Este método de comparación de curvas propuesto por Unruh y Krishnaswami (Unruh y Krishnaswami, 1995) constituye una innovadora forma de comparar curvas cerradas y planas, sin embargo la técnica utilizada, tal como ha sido expuesta por los autores, parece poco depurada ya que un análisis detallado ha puesto de manifiesto varias posibles mejoras importantes que se explican a continuación.

#### Mejora de la estimación de los puntos de control a partir de los puntos de comparación.

En primer lugar, en el proceso de obtención del polígono de control de una B-Spline lo más parecida posible a la curva original, se seleccionan  $m$  puntos que se utilizarán para comparar las curvas original y B-Spline durante la optimización. De estos  $m$  puntos, se seleccionan  $n$  puntos distribuyéndolos uniformemente entre los  $m$  primeros, que serán los puntos del polígono de control de la B-Spline. Los autores utilizaron  $m=100$  puntos de comparación y polígonos de control de  $n=10$ . Pero si se desea utilizar otras combinaciones numéricas y  $m$  no es múltiplo de  $n$  entonces el reparto de los  $n$  puntos de control dentro de los  $m$  puntos de comparación es desigual, ocasionando, en el mejor de los casos, peores estimaciones iniciales del polígono de control y, consecuentemente, incrementando el número de iteraciones de optimización para lograr una solución satisfactoria. Además, en el peor de los casos, es posible que tal irregularidad en la primera estimación a partir de la cual parte el proceso de optimización derive en la obtención de un óptimo local (no global) no suficientemente satisfactorio. Esto se puede solucionar sencillamente no obteniendo los  $n$  puntos de control dentro de los  $m$  puntos de comparación, sino obteniéndolos directamente de la curva (como se hizo para obtener los  $m$  primeros) y luego expandiéndolos según especificaron los autores.

#### Resolución del problema de dependencia del polígono de control obtenido respecto del origen de la parametrización al convertir una curva en una B-Spline.

Por otro lado, los autores basan la obtención de los  $m$  puntos de comparación y de los  $n$  puntos del polígono de control en la parametrización de la curva original, por lo que el resultado obtenido (el polígono obtenido) será dependiente de esta parametrización. En cuanto a los puntos de comparación, aunque a priori pudiera parecer lo contrario, un análisis detallado demuestra que esto no afecta al proceso de optimización necesario para llegar a obtener el polígono de control a partir de la curva original ya que, independientemente del origen y de la evolución de la parametrización de la curva original, tras obtener la primera estimación de todos los puntos, la proximidad entre los  $m$  puntos de comparación de ambas curvas será

elevada. Esto se debe a que la parametrización de la B-Spline depende de la posición de los puntos de su polígono de control y a que estos puntos del polígono de control se han obtenido de la curva original de forma que ambas parametrizaciones —la de la curva original y la de la B-Spline— coincidan.

No obstante, el método de obtención del polígono de control ideado por los autores no está exento de una desventaja importante: el polígono obtenido dependerá del origen de la parametrización de la curva original. En efecto, si los  $m$  puntos de comparación se eligen dependiendo de este origen y los  $n$  puntos de control también, para luego realizar el proceso de optimización que haga que las dos curvas se parezcan, el resultado dependerá necesariamente del origen de la parametrización de la curva original. Así, si en una misma curva original se cambiara el origen de su parametrización (modificando sus ecuaciones paramétricas) sin cambiar su forma, la primera estimación del polígono de control habría cambiado también y tras la optimización, el polígono de control sería diferente<sup>63</sup>. Teniendo esto en cuenta, es posible que de dos curvas perfectamente iguales pero con parametrizaciones diferentes (en cuanto a su origen) se obtengan polígonos de control diferentes cuando son convertidas en B-Splines. Si esto ocurriese, al comparar los dos polígonos el resultado sería que ambas curvas no son del todo iguales, cuando efectivamente lo son. Esta posibilidad introduce en el método una importante incoherencia e incumple uno de los requisitos fundamentales expuestos en §3.2.

La solución a este problema que ya ha surgido anteriormente en otros métodos pasa por establecer el punto inicial en una posición de la curva original que no dependa de su parametrización. Como en casos anteriores se adopta el punto de radio de curvatura mínimo como el origen de la parametrización de la curva. Los problemas menores que esto introduce ya han sido tratados anteriormente.

#### Resolución del problema de convergencia durante la conversión de una curva en una B-Spline.

Otro problema detectado en el método ideado por Unruh y Krishnaswami radica en el hecho de que la forma de expandir los puntos de la curva para proporcionar la primera estimación del polígono de control de la B-Spline no es siempre satisfactoria. En efecto, los autores proponen expandir los puntos proporcionalmente y en la dirección y sentido del radio de curvatura de la curva en ese punto según un factor 1.1 (véase figura 3.7). Sin embargo, si uno de los puntos a expandir está situado en un punto de inflexión de la curva (o cerca del mismo), el radio de curvatura será muy elevado (tendiendo a infinito) y al multiplicar por el factor 1.1 el punto de control obtenido estará muy lejos de la curva, con lo que la primera

---

<sup>63</sup> Téngase en cuenta que el polígono de control obtenido de una curva original cuando ésta es convertida a B-Spline no es único, sino que existen infinitos polígonos de control (con el mismo número de puntos) que generan B-Splines iguales a la curva original.

estimación no será muy buena y con una elevada probabilidad no se llegará, tras la optimización, a una conversión satisfactoria.

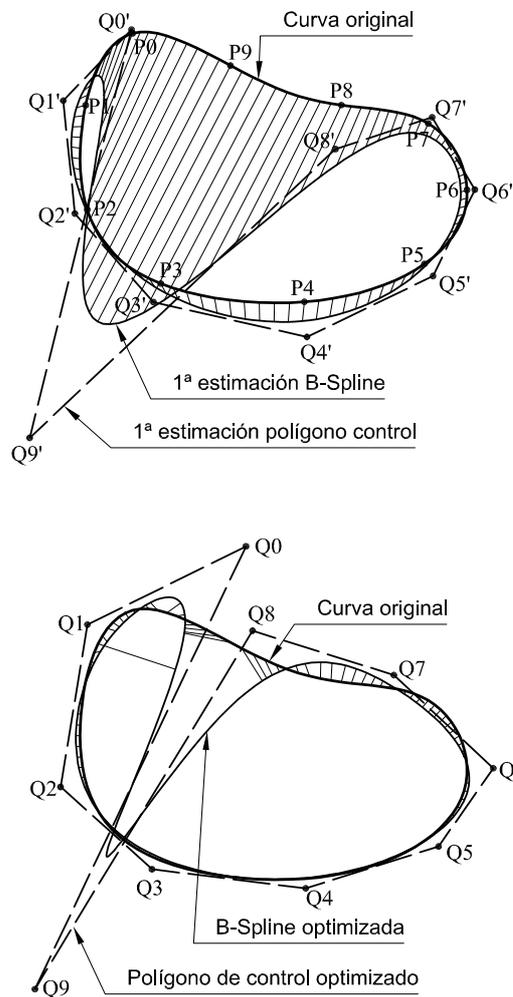


Figura 3.22. Conversión de una curva en una B-Spline con un factor de expansión 1.1.

Como ejemplo de esto, en la figura 3.22 se ha intentado convertir una curva cerrada (curva original) en una B-Spline cúbica considerando  $m=100$  puntos de comparación y un polígono de control de  $n=10$  puntos. En la parte superior de la figura se observa la curva original de la que se han seleccionado 10 puntos (puntos P0 a P9) para, tras una expansión con un factor 1.1, lograr la primera estimación del polígono de control (puntos Q0' a Q9'). Posteriormente, a partir del polígono de control se ha representado la primera estimación de la B-Spline. También se han elegido  $m=100$  puntos de comparación en ambas curvas y se ha unido cada par de puntos homólogos con un segmento. Los segmentos de todos los pares de puntos producen el rayado que se puede apreciar entre ambas curvas. A primera vista se

observa que la B-Spline obtenida se parece a la curva original en todos los puntos salvo en el entorno del punto P9. Esto es debido a que el punto P9 está cerca de un punto de inflexión de la curva (en el que el radio de curvatura es infinito) y, el punto Q9' obtenido está muy separado del punto P9 —téngase en cuenta que la distancia P9-Q9' es 0.1 veces el valor del radio de curvatura de la curva original en el punto P9—, lo que deforma considerablemente la primera estimación.

Partiendo de ese polígono de control y de esos puntos de comparación se ha realizado la optimización según el algoritmo Fletcher-Reeves, propuesto por los autores, y el resultado se muestra en la parte inferior de la figura 3.22. En ella se puede observar cómo el proceso de optimización ha modificado el polígono de control hasta acercar la B-Spline a la curva original en la medida que ha sido posible (partiendo de esa primera estimación). Por su lado si se observa cómo han evolucionado los segmentos que unen puntos de comparación homólogos sobre ambas curvas, mientras que la posición de los puntos de comparación sobre la curva original no se ha modificado (pues no forman parte de las variables a optimizar), los puntos de comparación sobre la B-Spline si se han desplazado dentro de ella intentando minimizar la distancia a sus puntos homólogos sobre la curva original. El resultado, como se aprecia, es que la comparación final no es fidedigna pues los puntos de comparación en la B-Spline no están distribuidos uniformemente sobre ésta, sino que se han dejado partes de ella sin cubrir. En conclusión, el método ha degenerado en una comparación segmentada y el resultado numérico obtenido no es realista (porque las dos curvas se parecen menos de lo que el método indica) ya que tan solo se está comparando la curva original con una parte de la B-Spline.

Existen varias soluciones a este problema, pero todas pasan por modificar el procedimiento de obtención de la primera estimación del polígono de control propuesto por los autores. En efecto, los autores consideraron que un factor de expansión 1.1 es satisfactorio cuando se ha puesto de manifiesto que no lo es<sup>64</sup>. Además, si se estudia la forma de las B-Splines en relación al polígono de control que las genera se puede observar que, en general, cuanto más cerca de la B-Spline se encuentra un punto del polígono de control, mayor será el radio de curvatura de la curva en el entorno de éste, pudiendo llegar a ser infinito (característica de los puntos de inflexión). Es decir, existe una relación inversa entre la cercanía de cada punto del polígono de control a la B-Spline y el radio de curvatura de la misma en el entorno de ese punto del polígono de control. Por esto, utilizar un factor de proporcionalidad directa (e igual a 1.1) para la expansión resulta insatisfactorio en muchos casos.

Se podría idear un factor de expansión que no fuera global para todos los puntos, sino que fuera calculado para cada punto según la relación inversa anteriormente mencionada. Sin

---

<sup>64</sup> El ejemplo anterior no es un caso aislado pues la mayoría de curvas cerradas generadas por mecanismos tienen puntos de inflexión y, por lo tanto, es muy probable que uno de los puntos de la curva elegidos para obtener (mediante expansión) la primera estimación de un punto del polígono de control esté situado relativamente cerca de uno de los puntos de inflexión, en cuyo caso ocurrirá algo parecido al ejemplo descrito, logrando tras la optimización una solución insatisfactoria.

embargo, obtener una expresión adecuada para todos los casos no resulta sencillo, pues si bien está claro que cuando el radio de curvatura tiende a infinito el factor de expansión debe tender a cero y que cuando el radio de curvatura tiende a cero el factor de expansión debe tender a infinito, resulta complicado obtener una expresión para todo el intervalo entre esos dos extremos que aporte primeras estimaciones del polígono de control satisfactorias en la mayoría de casos. Por esto, en este trabajo se ha optado por una solución más sencilla a la vez que sistemática. Ésta consiste en, para cada problema de conversión de una curva cerrada en una B-Spline, intentar varios factores de expansión diferentes y determinar cual de ellos aporta la mejor primera estimación del polígono de control a partir de la cual se procederá a la optimización. En concreto, se propone probar como factores de expansión los términos de la siguiente serie:

$$\frac{1}{2^{10-l}} \quad l = 0, 1, \dots, 10 \quad (3.82)$$

es decir, la serie:

$l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Factor	0.0010	0.0020	0.0039	0.0078	0.0156	0.0313	0.0625	0.1250	0.2500	0.5000	1.0000

Tabla 3.11. Factores de expansión para la obtención de la primera estimación del polígono de control.

El procedimiento sugerido consiste en, utilizando cada uno de los valores anteriores, obtener un polígono de control —en primera estimación— a partir de la curva original. Este polígono de control obtenido genera una B-Spline que será la primera estimación a partir de la cual realizar la optimización. Se puede evaluar la calidad de esta B-Spline mediante la ecuación (3.21), que utilizando los  $m$  puntos de comparación estimará el parecido entre la curva original y la B-Spline obtenida. Aquel de todos los factores de la serie que proporcione una B-Spline más parecida a la curva original —es decir, un resultado de la ecuación (3.21) menor— será el factor de expansión a utilizar en el caso que se trate.

Este cálculo del factor de expansión adecuado como se ha descrito apenas amplía el coste computacional del método global, debido a dos motivos fundamentales: uno, que los nuevos cálculos a realizar son sistemáticos y sencillos y dos, que el proceso que supone la mayoría del coste computacional de este método de comparación es la optimización del polígono de control hasta llegar a una solución satisfactoria. Por lo tanto, el coste computacional del resto de cálculos (incluidos los que se han añadido con esta modificación) es despreciable frente al de la optimización de la B-Spline para que sea similar a la curva original.

Para ilustrar esta última modificación propuesta, se ha resuelto el mismo ejemplo con el que se ilustró la deficiencia del método original y el resultado se muestra en la figura 3.23. En la parte superior se observa la curva original. A partir de esta se han probado todos los factores expuestos en la tabla 3.11 y se ha seleccionado el valor 0.0010 (correspondiente a  $l = 0$ ) como factor de expansión óptimo<sup>65</sup>. Con este factor de expansión se ha obtenido la primera estimación del polígono de control y, a partir de él, se representa la primera estimación de la B-Spline. Se observa que el factor de expansión adecuado ha proporcionado una primera estimación de la B-Spline muy parecida a la curva original. En la figura se han unido con segmentos los 100 puntos de comparación de ambas curvas que han servido para evaluar cada factor de expansión de la serie mediante la ecuación (3.21).

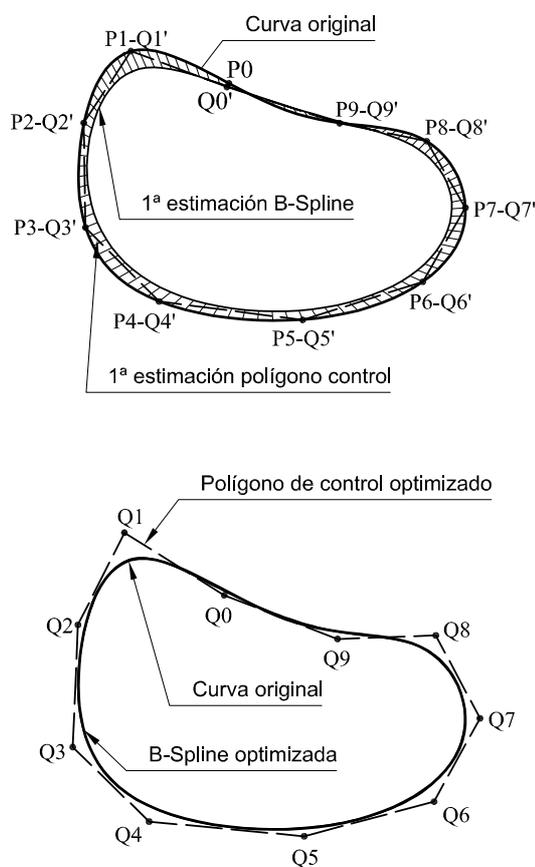


Figura 3.23. Conversión de una curva en una B-Spline con un factor de expansión optimizado.

<sup>65</sup> Nótese que al ser el valor seleccionado muy próximo a cero, los puntos de la primera estimación del polígono de control ( $Q0'$  a  $Q9'$ ) están muy cercanos a los puntos sobre la curva original ( $P0$  a  $P9$ ) a partir de los cuales se obtienen.

Una vez obtenida la primera estimación del polígono de control se lleva a cabo la optimización y el resultado se muestra en la parte inferior de la figura 3.23. En ella se observa cómo el polígono de control ha evolucionado hasta que la B-Spline generada por él ha llegado a ser prácticamente igual (la diferencia no es perceptible a simple vista) a la curva original.

En la tabla 3.12 se muestran en detalle los datos relativos a este experimento. En ella se aprecia cómo seleccionando un factor de expansión adecuado, la primera estimación de la B-Spline arroja un valor de la función objetivo (función de comparación de ambas curvas) mucho menor que si se utiliza un factor de expansión 1.1. Por otro lado, al lograr una primera estimación mejor, el algoritmo de optimización Fletcher-Reeves proporciona un óptimo mucho más adecuado (compárense el valor final de la función objetivo en ambos casos) y en menos iteraciones (26 frente a 36), por lo que el coste computacional del método tras las modificaciones propuestas decrecerá en la mayoría de los casos. Todo esto sin tener en cuenta que la solución obtenida utilizando un factor de expansión 1.1 no es, en este caso y en muchos otros, válida.

Nº de puntos del polígono de control	10
Nº de puntos de comparación	100
Método de optimización	Fletcher-Reeves
Tolerancia de optimización	0.010
<b>Utilizando un factor de expansión igual a 1.1</b>	
Valor de la función objetivo en la iteración 1	7360.512
Nº de iteraciones realizadas	36
Valor final de la función objetivo	359.401
<b>Utilizando un factor de expansión optimizado</b>	
Valor de la función objetivo en la iteración 1	273.971
Nº de iteraciones realizadas	26
Valor final de la función objetivo	0.829

Tabla 3.12. Comparación de resultados antes y después de la modificación del método.

Una vez que se han obtenido los polígonos de control de las curvas que se desean comparar, este método propone comparar los polígonos como medio de obtener un indicador de la similitud o diferencia entre las curvas. Sin embargo, los autores proponen un método de comparación de los polígonos que es poco sistemático y que, además, utiliza propiedades indirectas de los mismos (tales como el ratio del rectángulo menor que encierra el polígono, el ratio área/perímetro, el ángulo interior mayor, etc.), lo que puede llevar a una pérdida de sensibilidad en la comparación. Para evitar esto se propone una modificación del método consistente en realizar la comparación entre los polígonos de una forma sistemática y en base a magnitudes directas del polígono de forma que en la comparación se siga respetando la

independencia de la posición, orientación y escala de los polígonos. En concreto, se pueden comparar los polígonos en la forma descrita en el paso tercero del *método del polígono característico sin propiedades de la curva*, según el cual se comparan los polígonos utilizando magnitudes adimensionales tales como el cociente de longitudes de un segmento del polígono y el anterior o los ángulos que forman tales segmentos. La ecuación final que estima la diferencia entre los polígonos puede verse en la ecuación (3.33) y una representación de las magnitudes que se tienen en cuenta en esta ecuación pueden observarse en la figura 3.8.

Hay que hacer notar que este cambio en la comparación de los polígonos no solo hace al método más preciso, sino también más directo, robusto y eficiente pues la estimación de las magnitudes de cada polígono para su comparación, según la propuesta de Unruh y Krishnaswami no solo resulta imprecisa sino también mucho más compleja, involucrando (en algunos casos) procesos de optimización que aumentan el coste computacional.

Con todas estas mejoras, los métodos existentes expuestos en §3.4 cumplen todos los requisitos impuestos en §3.2, por lo que son aptos para la síntesis de mecanismos para generación de trayectorias continuas tal como se plantea en el presente trabajo.

### 3.7. Ensayo de los métodos.

---

Tras la exposición de los métodos (con las oportunas correcciones) y después del análisis preliminar, se ha realizado un ensayo de los mismos ante diferentes casos con el fin de analizar su funcionamiento en la comparación de curvas. Para ello se han programado los algoritmos correspondientes a estos métodos en ordenadores y se han ejecutado sobre diferentes problemas.

Estos ensayos experimentales de los métodos han permitido obtener conclusiones sobre la calidad de funcionamiento de cada uno de ellos y del cumplimiento de los requisitos expuestos en §3.2, posibilitando la realización de un análisis comparativo con el objetivo de decidir cual es el idóneo (o idóneos) y en qué casos.

Se han diseñado seis tipos de ensayos diferentes para contrastar el funcionamiento de los métodos en cuanto a *conmutabilidad*, cambio de *escala*, cambio de *posición* y *orientación* de las curvas comparadas; y también para verificar la *progresividad* de los métodos ante cambios pequeños de las curvas comparadas y la *estabilidad* ante la variación del número de puntos considerado en la comparación. Se va a prestar especial atención a la eficiencia<sup>66</sup> de

---

<sup>66</sup> Entendida aquí como la capacidad de realizar la tarea consumiendo el mínimo de recursos posible.

los métodos al resolver los problemas de comparación planteado. Así no solo se estudiará su resultado numérico, sino también en su coste computacional.

Para cada uno de los tipos de ensayos, se han propuesto diferentes curvas y se ha llevado a cabo la comparación. Por razones de brevedad no se incluyen aquí todos los ensayos realizados, sino que se han seleccionado algunos de los más representativos y que mejor ilustran el comportamiento de los diferentes métodos ante los distintos casos.

Para la definición de las curvas involucradas en los ensayos se ha optado por utilizar B-Splines cúbicas cerradas basadas en polígono de control (véase apéndice B) por su sencillez de definición, por su estudiada formulación y por la facilidad de manipulación de su forma, aportando versatilidad a la hora de plantear los ensayos. De esta forma, ha sido posible proponer fácilmente un gran número de curvas con una deformación progresiva.

### 3.7.1. Definición de la curva requerida.

Todos los ensayos de comparación de curvas involucran dos curvas con diferente rol. Una es la curva *requerida*, que representa la curva que se desea generar en el problema de síntesis. La otra es la curva *propuesta* que representa una curva generada por un mecanismo en el problema de síntesis.

Una serie de ensayos que se han realizado utilizan una misma curva requerida y comparan con ella las diferentes curvas propuestas. Esta serie es presentada a continuación pero, previamente, se define la curva requerida.

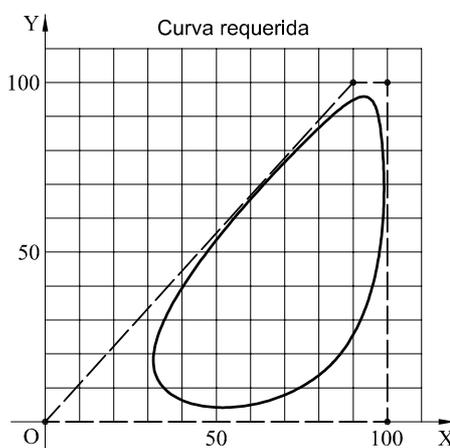


Figura 3.24. Curva requerida para el ensayo de los métodos de comparación de curvas.

En la figura 3.24 se aprecia la definición de esta curva requerida. Se ha utilizado una B-Spline de grado 3 (cúbica), cerrada, plana y no simétrica (con forma de gota, con ningún

punto doble y con una vuelta de la tangente, similar a muchas curvas generadas por mecanismos planos sencillos). Esta curva ha sido generada a partir de un polígono de control de cuatro vértices (que también se puede observar en la figura 3.24) habiéndose asegurado que la curva es continua, derivable y con derivada continua.

Las coordenadas de los vértices del polígono de control se exponen en la tabla siguiente:

Nº de vértice	Coordenada X	Coordenada Y
0	0.0	0.0
1	100.0	0.0
2	100.0	100.0
3	90.0	100.0

Tabla 3.13. Coordenadas de los vértices del polígono de control de la curva requerida.

### 3.7.2. Ensayo de conmutabilidad.

Este ensayo permite verificar el comportamiento de los diferentes métodos cuando las curvas comparadas son conmutadas (intercambiadas) en sus papeles respectivos de *curva propuesta* y *curva requerida*.

Para ello se propone comparar dos curvas A y B, utilizando 8 puntos en los métodos discretos. Las curvas serán comparadas dos veces utilizando cada uno de los métodos. Una en la que A actúa como *curva requerida* y B actúa como *curva propuesta*, y otra en la que B actúa como *curva requerida* y A actúa como *curva propuesta*. Como curva A se utiliza la definida en §3.7.1) y como curva B se utiliza una deformación de la anterior (llamada *curva Def06*), representada en la figura 3.25.

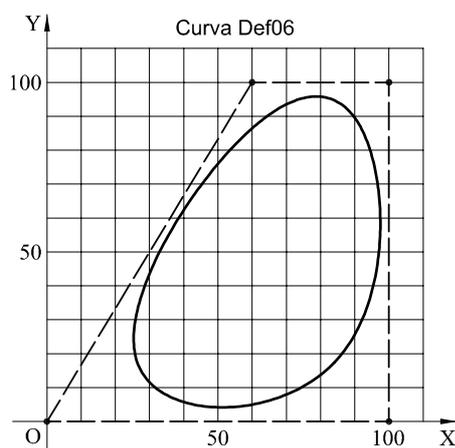


Figura 3.25. Curva *Def06* utilizada en el ensayo de conmutabilidad.

Una vez que se procede a la doble comparación de las curvas según los diferentes métodos, se obtienen resultados que se muestran en la tabla 3.14. En ella se observan dos filas. En la primera (“A vs. B”), A ejerce el papel de curva requerida y B el de curva propuesta. En la segunda (“B vs. A”) es B la que actúa como curva requerida y A como curva propuesta.

El método BSC (conversión en B-Splines) necesita, aparte del resultado de la comparación (*error de comparación*), de un segundo valor que indica si la conversión de las curvas comparadas en B-Splines ha sido aceptable (llamado *error de ajuste*). Si no lo fuera, el valor devuelto por el método BSC no sería digno de consideración ya que se estarían comparando B-Splines que no se corresponden con las curvas originales. Este valor se muestra en la columna “BSC (Err. Aj.)” y es calculado como la suma de distancias al cuadrado de los 100 puntos utilizados en la conversión de la curva propuesta original en B-Spline. Si se tiene en cuenta que las curvas comparadas en este ensayo tienen un tamaño del orden de 100 unidades de longitud (es decir, el rectángulo envolvente de la curva es del orden de 100 unidades de longitud), el error de ajuste es realmente bajo (del orden del 1%), lo que indica que la conversión de la curva propuesta original en B-Spline se ha realizado con gran éxito y que, por tanto, el error de comparación calculado por el método BSC es, en este caso, fiable.

Curva	LSOP	MPE	PD	PDCP1	PDCP2	PDCP3	CC	ABC	BSC	BSC(Err. Aj.)
A vs. B	0.00038	0.00033	0.03332	0.02748	0.07253	0.14251	0.48762	0.01509	0.01406	1.489705
B vs. A	0.00038	0.00033	0.03332	0.02748	0.07253	0.14251	0.48762	0.01509	0.01406	0.790939
$\epsilon$	0.0%	0.6%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	

Tabla 3.14. Resultados del ensayo de conmutabilidad.

Los resultados indican que prácticamente todos los métodos cumplen el *requisito de conmutabilidad*. Sin embargo, otros ensayos han revelado la posibilidad de que no se cumpla este requisito. Para ilustrarlo, se analiza esta posibilidad mediante el siguiente ejemplo.

Supóngase que se desea comparar dos curvas A y B como las mostradas en la figura 3.26. Si la curva A actúa como requerida (figura 3.26a), el punto inicial de la curva será determinado como el punto de radio de curvatura mínimo (punto R0) y a partir de este se obtienen el polígono característico de la curva requerida (en la figura se ha extraído un polígono de 6 puntos). Posteriormente, se determinan en la curva propuesta todos los puntos en los que el radio de curvatura tenga un mínimo local dentro de la curva (puntos P0 a P2, ordenados de menor a mayor radio de curvatura). De entre estos se busca el homólogo del punto R0 en la curva propuesta. Lo cual se realiza mediante el estudio de cual de esos puntos (cuando es utilizado como punto de partida) proporciona un polígono característico lo más parecido posible al de la curva requerida. Al hacer esto en este ejemplo se encuentra que, según cada método, se obtiene un mejor resultado en la comparación cuando el punto P1 se toma como punto homólogo del punto R0 y así se obtiene el polígono mostrado en la curva

propuesta de la figura 3.26a. Comparando esos polígonos (o sus vértices, y/o las propiedades de la curva en sus vértices) se obtendrá el error de comparación según cada método.

Si ahora se invierten los papeles de las curvas (figura 3.26b), el punto de radio de curvatura mínimo de la curva requerida (que ahora es la curva B) es el punto  $R0'$  y a partir de éste se extrae el polígono característico de esa curva. Por su parte, se evalúan los radios de curvatura mínimos locales dentro de la curva propuesta (que ahora es la curva A) y se obtienen los puntos  $P0'$  a  $P3'$  (ordenados de menor a mayor radio de curvatura). Se extrae el polígono característico asociado a cada punto y se evalúa (según cada método) cual es el más parecido al polígono característico de la curva requerida). Finalmente, se concluye que el más parecido es el polígono asociado al punto  $P1'$ .

En conclusión, cuando la curva A actúa como curva requerida, se comparan los polígonos característicos de la figura 3.26a, mientras que cuando la B actúa como curva requerida se comparan los de la figura 3.26b. Como ambos polígonos no son iguales, los resultados no coincidirán en ambos casos, por lo que no se cumplirá —en general— el *requisito de conmutabilidad*.

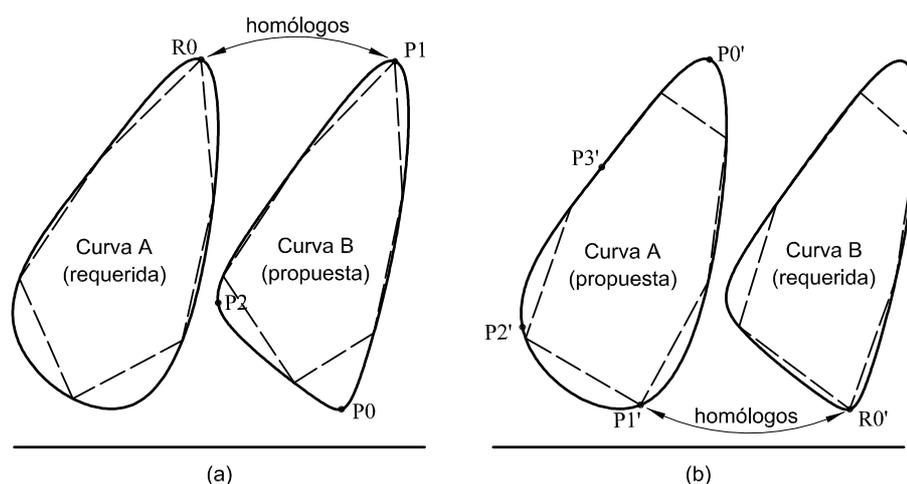


Figura 3.26. Modificación de los polígonos característicos obtenidos al cambiar los roles de las curvas comparadas en cuanto a cual actúa como curva propuesta y cual como requerida.

Por lo tanto, en general no se cumplirá este requisito en ninguno de los métodos anteriores. Únicamente se cumplirá cuando los polígonos característicos alcancen una mayor coincidencia cuando estén asociados a los puntos de radio de curvatura mínimo en ambas curvas. Pues entonces, será lo mismo cual actúe como requerida y cual actúe como propuesta, que es lo que ocurre en este ensayo para todos los métodos salvo el MPE y el ABC.

Si se desea solucionar este problema, no queda más alternativa que no basar el polígono característico en la curva que juega el papel de curva requerida. Así se podría

determinar, por ejemplo, cual es el radio de curvatura mínimo en ambas curvas y el menor de ambos decidirá cual es la curva que actúa como requerida, siendo la otra la propuesta. Este procedimiento es insensible a intercambios en el rol de las curvas. Sin embargo, esto supondría que cuando se desea comparar diferentes curvas propuestas con una misma curva requerida (que es el caso de la síntesis aproximada de mecanismos para generación de trayectoria), en cada comparación se tendría que evaluar de nuevo el polígono característico de la curva requerida, lo que duplicaría el coste computacional. Debido a esto, y por ser éste un requisito de escasa importancia —en comparación con otros— en lo que a síntesis de mecanismos se refiere, se ha optado por no modificar la metodología y asumir que el requisito no se cumplirá en algunos casos.

### ***3.7.3. Ensayo de comportamiento frente a cambio de tamaño de la curva.***

La siguiente experiencia realiza una comparación de la curva requerida con otras curvas resultantes al realizar una transformación homotética (con centro el origen de coordenadas) de la primera. De esta forma se han obtenido datos de la sensibilidad de cada uno de los métodos ensayados frente a la comparación de curvas morfológicamente iguales pero de diferente tamaño.

Para ello se han propuesto cinco nuevas curvas (llamadas *Esca101* a *Esca105*) las cuales se compararán a la curva requerida utilizando todos los métodos. Estas curvas se han generado mediante transformaciones homotéticas de la curva requerida con centro el origen de coordenadas y factores de homotecia 1.05, 1.1, 1.2, 1.5 y 10.0, respectivamente. En la figura 3.27 se muestran estas cinco curvas propuestas para este ensayo.

Como en el ensayo anterior, se utilizarán 8 puntos para comparar las curvas según los diferentes métodos discretos.

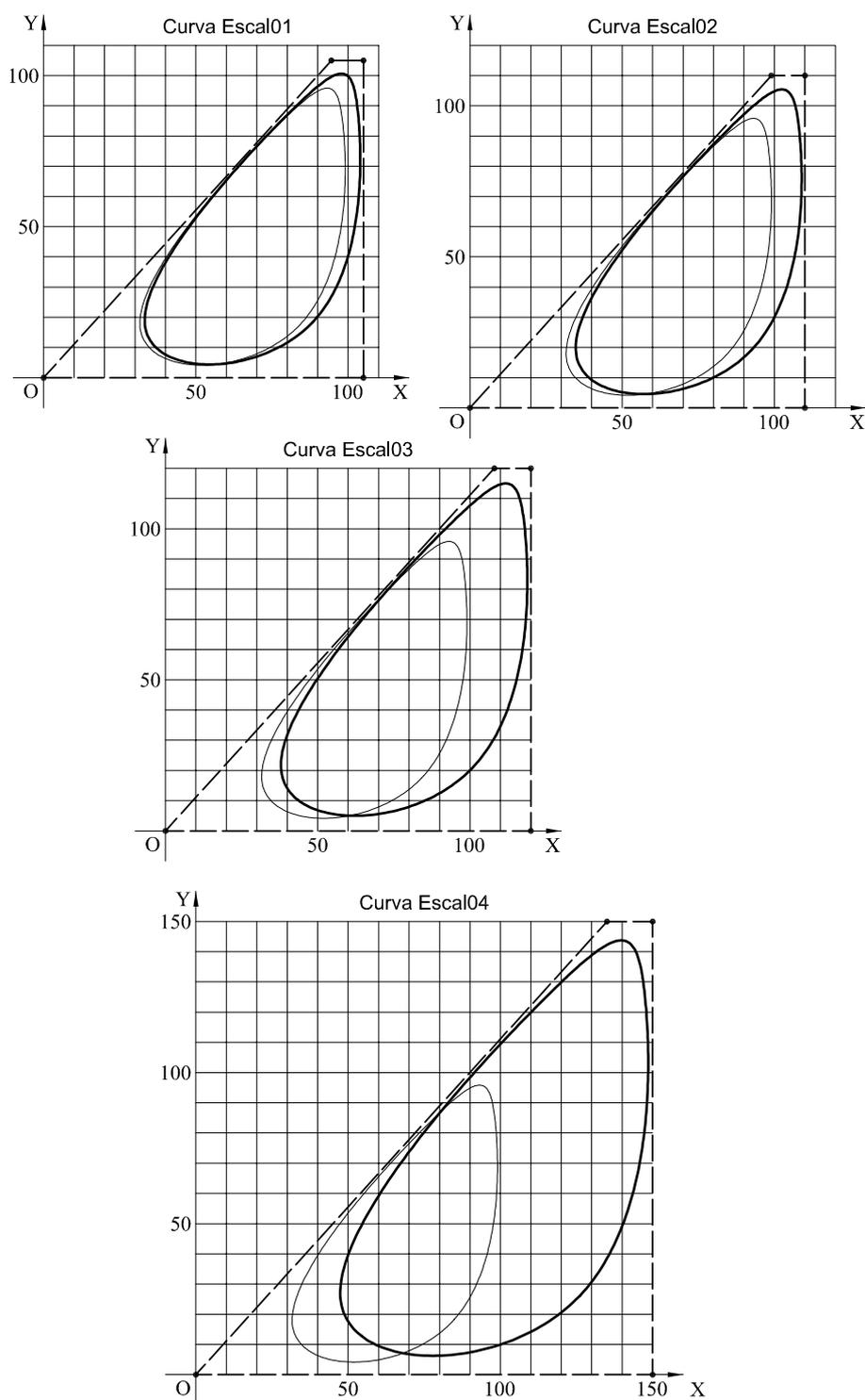


Figura 3.27. Curvas propuestas en el ensayo de comportamiento frente a cambio de tamaño.

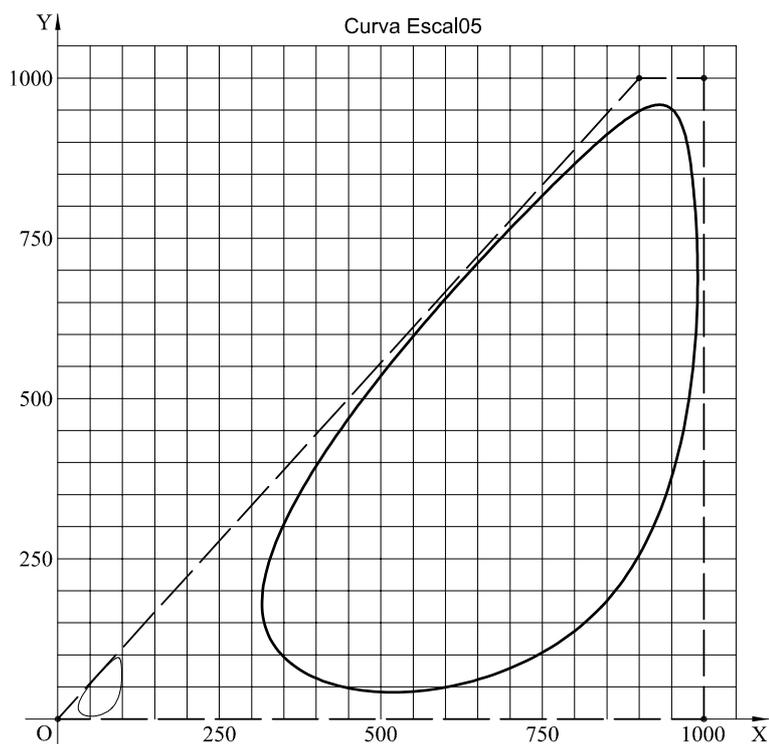


Figura 3.27 (continuación). Curvas propuestas en el ensayo de comportamiento frente a cambio de tamaño.

Los resultados de la comparación de las curvas *Escal01* a *Escal05* con la curva requerida por los diferentes métodos se muestran en la tabla 3.15. Los valores iguales (o muy próximos) a cero que se observan en dicha tabla muestran que, tal como fueron diseñados y corregidos, todos los métodos ensayados (incluido el método ABC) son insensibles al tamaño de las curvas comparadas. Además, la columna “BSC (Err. Aj.)” indica que, al aplicar el método BSC, las diferentes curvas propuestas fueron convertidas a B-Splines con gran precisión, ya que sus valores son despreciables frente al tamaño de las curvas propuestas.

Curva	LSOP	MPE	PD	PDCP1	PDCP2	PDCP3	CC	ABC	BSC	BSC(Err. Aj.)
Escal1	0	0	0	0	0	0	0	3.0E-06	2.3E-05	1.598280
Escal2	0	0	0	0	0	0	0	0	2.4E-05	1.790093
Escal3	0	0	0	0	0	0	0	0	2.6E-05	2.168568
Escal4	0	0	0	0	0	0	0	3.0E-06	3.1E-05	3.525317
Escal5	0	0	0	0	0	0	0	3.0E-06	4.0E-04	6.497065

Tabla 3.15. Resultados del ensayo de comportamiento frente a cambio de tamaño de la curva.

### 3.7.4. Ensayo de comportamiento frente a cambio de posición y orientación de la curva.

En esta experiencia se ha realizado la comparación de la curva requerida (figura 3.24) con otras curvas morfológicamente iguales y del mismo tamaño pero en diferente posición y orientación con el fin de observar la dependencia de cada uno de los métodos respecto de estas transformaciones geométricas. Para ello se han propuesto 4 nuevas curvas B-Splines (*Posic01* a *Posic04*) cuyos polígonos de control son iguales al polígono de control de la curva requerida (esto asegura la igualdad morfológica entre las curvas) pero están situados en diferentes posiciones y orientaciones en el plano. En concreto, las coordenadas de los vértices de dichos polígonos de control de las curvas propuestas vienen expuestas en la tabla 3.16, a la vez que una representación gráfica de estas curvas propuestas y sus polígonos se puede observar en la figura 3.28.

Punto	Posic01		Posic02		Posic03		Posic04	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
0	5.00000	5.000000	10.000000	10.000000	20.000000	20.000000	30.0	30.0
1	101.59258	30.881905	96.602540	60.000000	70.000000	106.602540	30.0	130.0
2	75.71068	127.474487	46.602540	146.602540	-16.602540	156.602540	-70.0	130.0
3	66.05142	124.886297	37.942286	141.602540	-21.602540	147.942286	-70.0	120.0

Tabla 3.16. Coordenadas de los vértices de los polígonos de control de las curvas propuestas en el ensayo de comportamiento frente a cambio de posición.

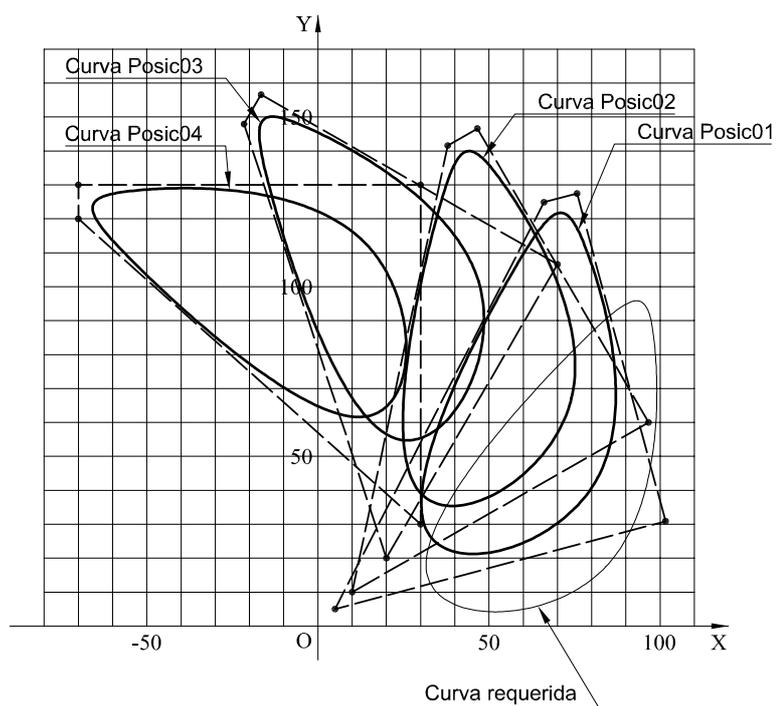


Figura 3.28. Curvas propuestas en el ensayo de comportamiento frente a cambio de posición y orientación.

Como en los ensayos anteriores, en este ensayo se propone comparar las curvas propuestas con la requerida utilizando 8 puntos de precisión en los métodos discretos.

Los resultados de este ensayo se muestran en la tabla 3.17. En ella se observa que todos los métodos son insensibles a los cambios de posición y orientación de las curvas comparadas pues no detectan diferencia alguna entre las curvas propuestas y la requerida, siendo éstas diferentes en posición y orientación. Asimismo, al ejecutar el método BSC, se observa que el *error de ajuste* en la conversión de las curvas propuestas en B-Splines es muy pequeño (comparado con el tamaño de las curvas), por lo que la conversión se ha realizado con gran precisión y el error de comparación calculado por este método es fiable.

Curva	LSOP	MPE	PD	PDCP1	PDCP2	PDCP3	CC	ABC	BSC	BSC (Err. Aj.)
Posic1	0	0	0	0	0	0	0	3.0E-06	0	0.789728
Posic2	0	0	0	0	0	0	0	3.0E-06	0	0.789793
Posic3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.791073
Posic4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.791113

Tabla 3.17. Resultados del ensayo de comportamiento frente a cambio de posición y orientación.

### ***3.7.5. Ensayo 1º de comportamiento frente a deformación progresiva de la curva.***

Los ensayos de progresividad son considerados los más importantes y los que más influyen sobre la evaluación de los métodos. El motivo es que estos ensayos estudian la evolución de los métodos de comparación de curvas cuando las curvas comparadas incrementan su diferencia. Dado que los métodos de comparación servirán como función objetivo en la síntesis dimensional aproximada, el algoritmo de optimización se basará en el gradiente de dichos métodos para dirigirse hacia el óptimo. Si este gradiente no representa el parecido de las curvas del espacio de diseño con la curva requerida, de manera suficientemente realista, el óptimo al que se llegue podría resultar ser un falso óptimo.

Así, este ensayo pretende estudiar la sensibilidad de los métodos a la deformación de las curvas comparadas con el fin de comprobar si su gradiente en el espacio de diseño se corresponde con la realidad y en qué medida. Para ello se utiliza la curva requerida definida en §3.7.1 y se consideran diferentes curvas propuestas obtenidas a partir de ésta utilizando su polígono de control para deformar progresivamente la curva.

Como en los ensayos anteriores, se han utilizado B-Splines con polígonos de control de 4 vértices y grado 3 por su capacidad para ser deformadas asegurando siempre su continuidad y suavidad. Se han considerado un total de 19 curvas propuestas —además de la curva requerida— de las que su representación gráfica y la de sus polígonos de control pueden ser apreciadas en la figura 3.29, en ella se observa la deformación progresiva de la curva requerida hasta volver a su misma forma inicial en diferente posición y orientación. Asimismo, las coordenadas de los vértices de los polígonos de control de estas 19 curvas propuestas se muestran en la tabla 3.18.

Con el fin de evaluar la progresividad de cada método en este tipo de ensayo se necesita un patrón que permita decidir si el método ensayado refleja de forma adecuada la progresividad en el cambio real de la forma de las curvas o, por el contrario, refleja una progresividad que no está relacionada con éste cambio real de forma. Con este único propósito se ha propuesto el método ABC (método del área entre las curvas), el cual, al ser un método integral, es más sensible a las pequeñas variaciones de forma de las curvas comparadas. Pese a que, como se explicó en su definición, el método ABC no es ideal de una forma estricta, su formulación permite considerarlo más ideal que el resto de métodos discretos, ejerciendo adecuadamente su función de referencia.

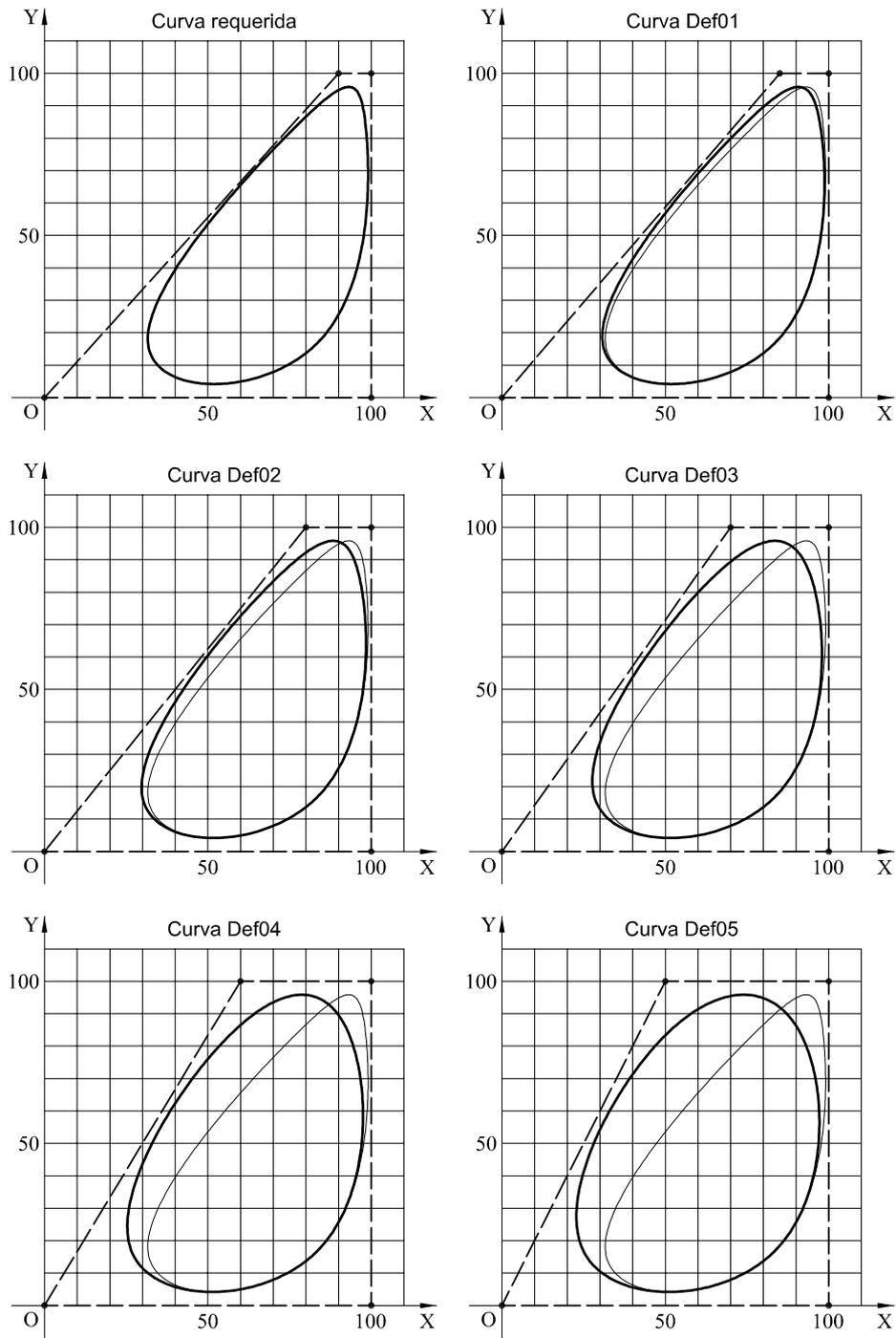


Figura 3.29. Curvas propuestas en el ensayo 1º de deformación progresiva (continua).

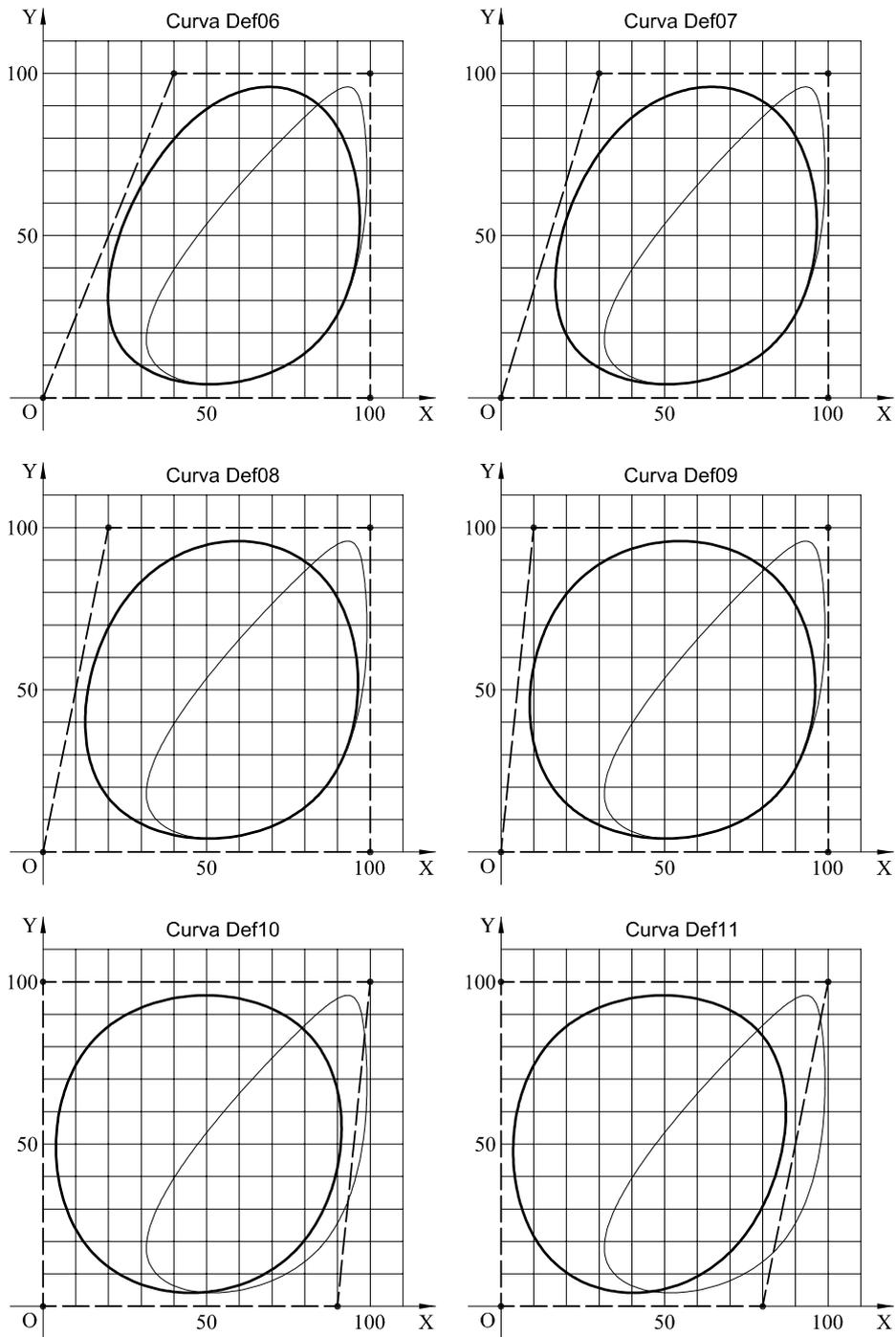


Figura 3.29 (continuación). Curvas propuestas en el ensayo 1° de deformación progresiva.

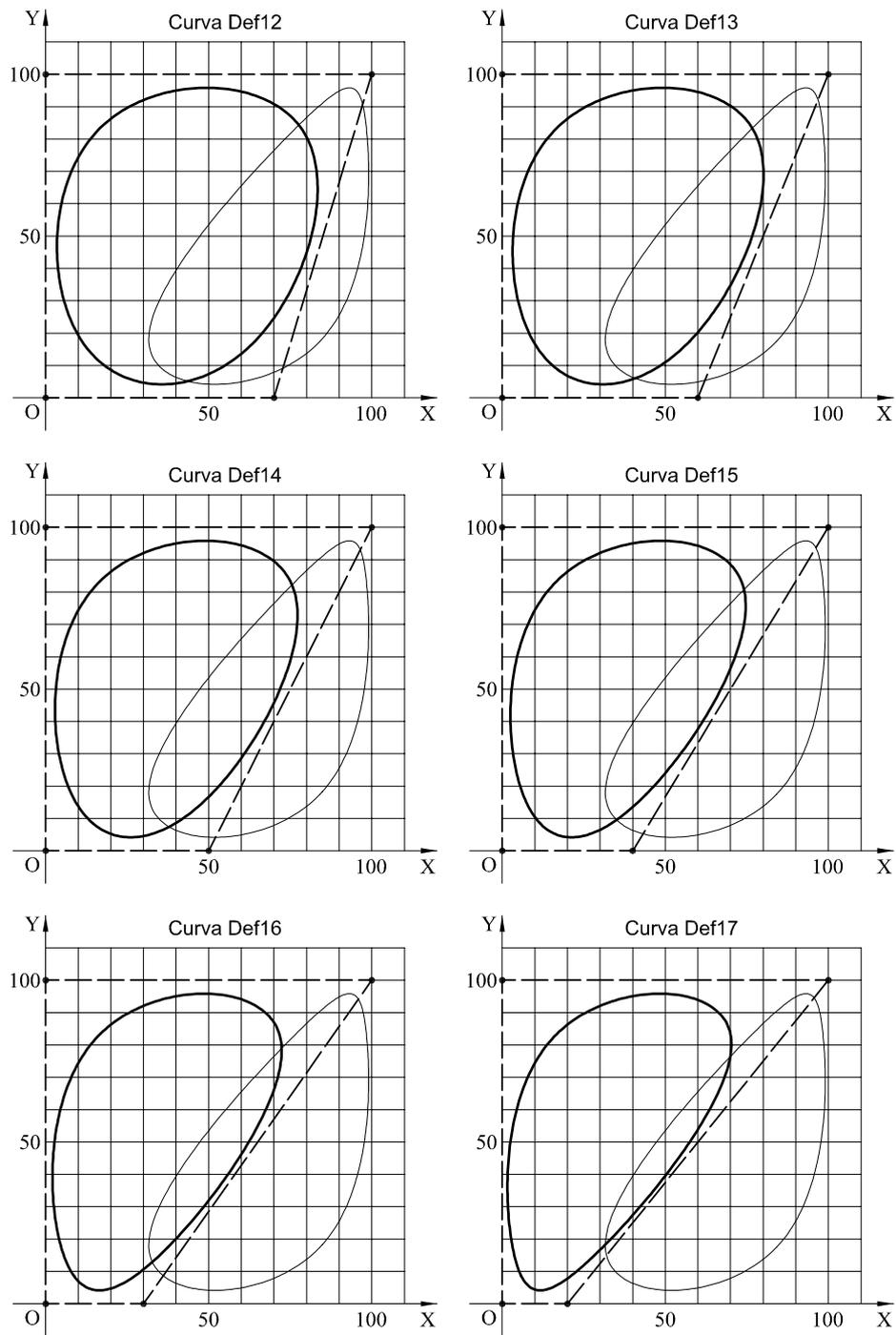


Figura 3.29 (continuación). Curvas propuestas para el ensayo 1º de deformación progresiva.

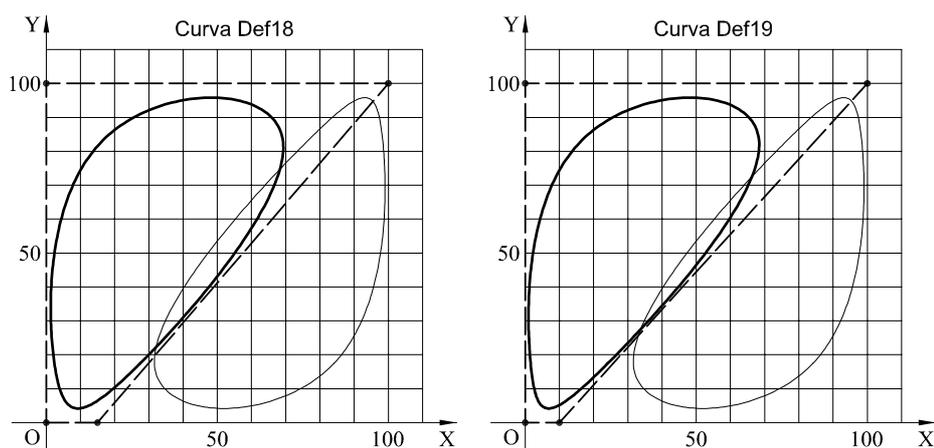


Figura 3.29 (continuación). Curvas propuestas para el ensayo de deformación progresiva.

Vértice→	0		1		2		3	
Curva	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
<i>Req.</i>	0.0	0.0	100.0	0.0	100.0	100.0	90.0	100.0
<i>Def01</i>	0.0	0.0	100.0	0.0	100.0	100.0	85.0	100.0
<i>Def02</i>	0.0	0.0	100.0	0.0	100.0	100.0	80.0	100.0
<i>Def03</i>	0.0	0.0	100.0	0.0	100.0	100.0	70.0	100.0
<i>Def04</i>	0.0	0.0	100.0	0.0	100.0	100.0	60.0	100.0
<i>Def05</i>	0.0	0.0	100.0	0.0	100.0	100.0	50.0	100.0
<i>Def06</i>	0.0	0.0	100.0	0.0	100.0	100.0	40.0	100.0
<i>Def07</i>	0.0	0.0	100.0	0.0	100.0	100.0	30.0	100.0
<i>Def08</i>	0.0	0.0	100.0	0.0	100.0	100.0	20.0	100.0
<i>Def09</i>	0.0	0.0	100.0	0.0	100.0	100.0	10.0	100.0
<i>Def10</i>	0.0	0.0	90.0	0.0	100.0	100.0	0.0	100.0
<i>Def11</i>	0.0	0.0	80.0	0.0	100.0	100.0	0.0	100.0
<i>Def12</i>	0.0	0.0	70.0	0.0	100.0	100.0	0.0	100.0
<i>Def13</i>	0.0	0.0	60.0	0.0	100.0	100.0	0.0	100.0
<i>Def14</i>	0.0	0.0	50.0	0.0	100.0	100.0	0.0	100.0
<i>Def15</i>	0.0	0.0	40.0	0.0	100.0	100.0	0.0	100.0
<i>Def16</i>	0.0	0.0	30.0	0.0	100.0	100.0	0.0	100.0
<i>Def17</i>	0.0	0.0	20.0	0.0	100.0	100.0	0.0	100.0
<i>Def18</i>	0.0	0.0	15.0	0.0	100.0	100.0	0.0	100.0
<i>Def19</i>	0.0	0.0	10.0	0.0	100.0	100.0	0.0	100.0

Tabla 3.18. Vértices de los polígonos de control de las B-Splines utilizadas como curvas propuestas en el ensayo de deformación progresiva de la curva.

Como se aprecia en la figura 3.29, la curva requerida es deformada progresivamente (aumentando su diferencia de forma con la curva requerida) hasta la curva *Def09*. A partir de ahí la deformación provoca que las curvas siguientes sean iguales a las anteriores pero en

diferente posición y con diferente orientación. Por tanto, la curva *Def10* será igual a la curva *Def09*, la curva *Def11* será igual a la *Def08* y así sucesivamente hasta llegar a la curva *Def19* que será igual a la curva *requerida*. De esta forma, al comparar las curvas *Def01* a *Def19* con la curva *requerida* según los diferentes métodos, estos deberán arrojar errores de comparación partiendo de valores muy cercanos a cero hacia valores en aumento (máximo en *Def09*) para luego, volver a disminuir (con la misma tendencia con la que aumentó) hasta llegar a un valor nulo en *Def19*.

Tras la realización del ensayo, comparando cada una de las curvas propuestas con la curva *requerida* y utilizando 8 puntos de precisión en los métodos discretos, se han obtenido los resultados se muestran en la tabla 3.19.

Curva	LSOP	MPE	PD	PDCP1	PDCP2	PDCP3	CC	ABC	BSC	BSC (Err. Aj.)
<i>Req</i>	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.7909
<i>Def01</i>	0.0000	0.0000	0.0010	0.0008	0.0059	0.0076	0.0278	0.0028	0.0006	0.7374
<i>Def02</i>	0.0000	0.0000	0.0040	0.0033	0.0176	0.0264	0.0958	0.0055	0.0013	0.3023
<i>Def03</i>	0.0002	0.0002	0.0155	0.0128	0.0449	0.0810	0.2855	0.0104	0.0067	1.4659
<i>Def04</i>	0.0004	0.0003	0.0333	0.0275	0.0725	0.1425	0.4876	0.0151	0.0141	1.4897
<i>Def05</i>	0.0007	0.0006	0.0562	0.0465	0.0994	0.2019	0.6680	0.0194	0.0282	1.6341
<i>Def06</i>	0.0010	0.0009	0.0831	0.0691	0.1249	0.2533	0.8060	0.0235	0.0474	1.5335
<i>Def07</i>	0.0014	0.0012	0.1164	0.0974	0.1513	0.3005	0.9096	0.0271	0.0744	1.3027
<i>Def08</i>	0.0018	0.0015	0.1395	0.1218	0.1704	0.3487	1.0297	0.0303	0.1100	1.6191
<i>Def09</i>	0.0022	0.0018	0.1667	0.1450	0.1913	0.3817	1.0884	0.0317	0.1284	0.2894
<i>Def10</i>	0.0022	0.0018	0.1667	0.1450	0.1913	0.3817	1.0884	0.0317	0.1284	0.2892
<i>Def11</i>	0.0018	0.0015	0.1395	0.1218	0.1704	0.3487	1.0296	0.0303	0.1101	1.6199
<i>Def12</i>	0.0014	0.0012	0.1164	0.0974	0.1513	0.3005	0.9096	0.0271	0.0744	1.3018
<i>Def13</i>	0.0010	0.0009	0.0831	0.0691	0.1249	0.2533	0.8060	0.0235	0.0474	1.5352
<i>Def14</i>	0.0007	0.0006	0.0562	0.0465	0.0994	0.2019	0.6680	0.0194	0.0282	1.6339
<i>Def15</i>	0.0004	0.0003	0.0333	0.0275	0.0725	0.1425	0.4876	0.0151	0.0141	1.4893
<i>Def16</i>	0.0002	0.0002	0.0155	0.0128	0.0449	0.0810	0.2855	0.0104	0.0067	1.4661
<i>Def17</i>	0.0000	0.0000	0.0040	0.0033	0.0176	0.0264	0.0958	0.0055	0.0013	0.3017
<i>Def18</i>	0.0000	0.0000	0.0010	0.0008	0.0059	0.0076	0.0278	0.0028	0.0006	0.7369
<i>Def19</i>	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.7911

Tabla 3.19. Resultados del ensayo 1º de comportamiento frente a deformación progresiva.

Los errores de comparación calculados por los diferentes métodos, pese a ser todos adimensionales, no pueden ser comparados de forma absoluta puesto que son calculados mediante algoritmos que no guardan relación entre sí. Sirven, por el contrario, para comparar cualitativamente la progresividad de cada método al comparar la misma familia de curvas propuesta con la curva *requerida*. Con el fin de mejorar la comparación se han reescalado los resultados de cada método (multiplicándolos por una constante) para poder minimizar el error

cuadrático<sup>67</sup> entre estos resultados y los resultados del método ABC, que servirá de referencia<sup>68</sup>. Una vez hecho esto, se puede representar gráficamente, para cada método, el error de comparación obtenido al comparar cada una de las curvas propuestas con la curva requerida, obteniendo una curva a la que se llamará *curva de progresividad del método* en este ensayo (figura 3.30). Así, esta curva de progresividad representa, según el método al que corresponde, la variación de la forma de las curvas propuestas con respecto a la curva requerida.

Tal como se ha razonado anteriormente, la curva de progresividad de los diferentes métodos en este ensayo deberá ser simétrica y así se verifica en la figura 3.30.

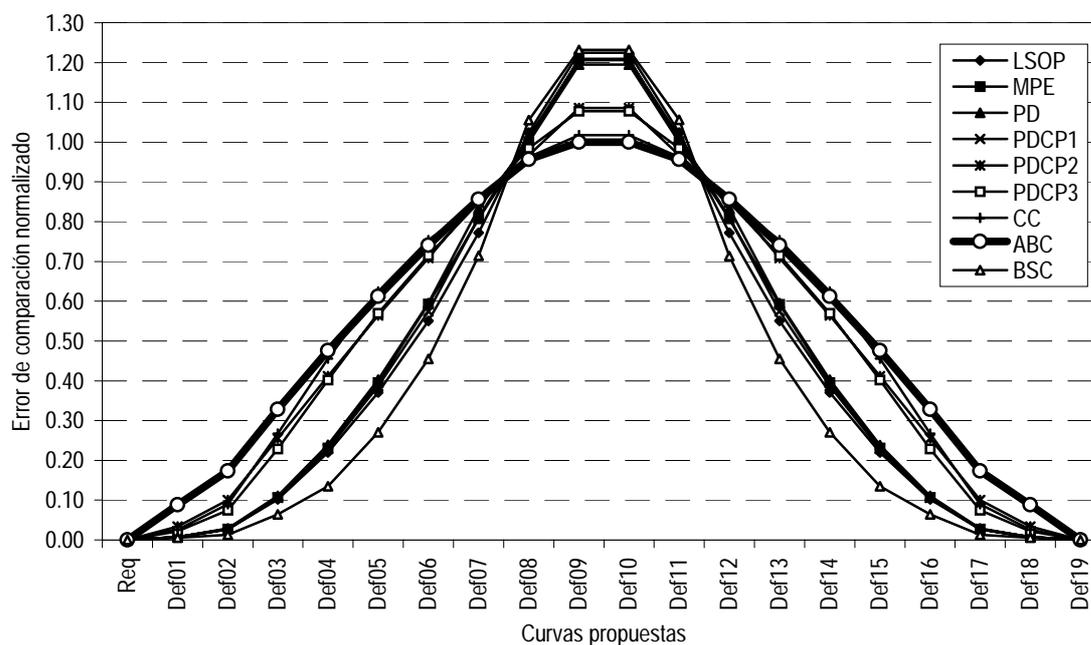


Figura 3.30. Representación de los resultados del ensayo 1º de comportamiento frente a deformación progresiva.

<sup>67</sup> Definido mediante la expresión  $\varepsilon_2(m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k \cdot \varepsilon_{Ci}|_m - \varepsilon_{Ci}|_{ABC})^2$ ; siendo  $\varepsilon_2(m)$  el error cuadrático correspondiente al

método  $m$ ,  $\varepsilon_{Ci}|_m$  el error de comparación de la curva  $i$ -ésima con la requerida mediante el método  $m$ ,  $k$  una constante de proporcionalidad para minimizar el error cuadrático,  $\varepsilon_{Ci}|_{ABC}$  el error de comparación de la curva  $i$ -ésima con la requerida mediante el método ABC y  $n$  el número total de curvas comparadas con la requerida.

<sup>68</sup> Por ser el método ABC un método integral, que integra las diferencias de entre las curvas en todos sus puntos, se adopta la curva de progresividad del método ABC como representativa de la deformación progresiva *real* de las curvas propuestas frente a la requerida.

En dicha figura, se observa cómo la progresividad indicada por todos los métodos excepto los métodos PDCP2, PDCP3 y CC es muy similar, teniendo estos últimos un comportamiento más cercano al del método de referencia (método ABC).

Con el fin de cuantificar la correlación entre cada método y el método referencia ABC, se ha determinado el error cuadrático<sup>67</sup>. Este error cuadrático (minimizado anteriormente mediante el reescalado de cada uno de los métodos discretos) es un buen indicador de la diferencia de comportamiento de cada método en relación al método ABC. Tales resultados se muestran en la figura 3.31. En ella se observa cómo los métodos PDCP2, PDCP3 y CC tienen un comportamiento mucho más cercano al método ABC que el resto de métodos. De estos tres, ninguno destaca sensiblemente sobre los demás y puede decirse que su comportamiento es igualmente bueno.

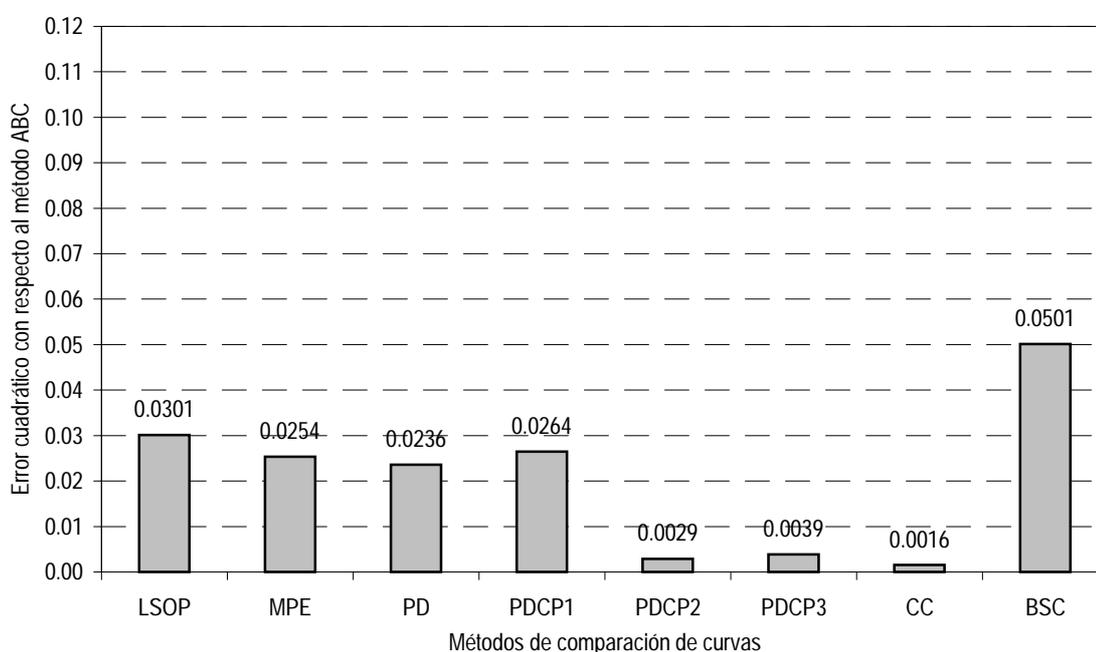


Figura 3.31. Error cuadrático de cada método discreto con respecto al método ABC.

### 3.7.6. Ensayo 2º de comportamiento frente a deformación progresiva de la curva.

En este ensayo de progresividad se comparan curvas de diferente complejidad a las utilizadas en el primero

En efecto, en el ensayo anterior se utilizaron curvas sin puntos dobles y con una única vuelta de la tangente. Además, las curvas utilizadas se caracterizaban por no tener ningún punto de inflexión de la curvatura. Sin embargo, las curvas generadas por los mecanismos de barras tradicionales —mecanismo de cuatro barras, mecanismo biela-manivela, mecanismo de cinco barras con engranajes, etc.— no son únicamente curvas de esa complejidad, sino que estos mecanismos también generan otras de diferente complejidad.

Así, este ensayo es representativo del comportamiento de los métodos al comparar curvas del tipo de las que generan estos mecanismos tradicionales. Para ello se ha seleccionado como curva requerida una B-Spline cúbica con un punto doble y ninguna vuelta completa de la tangente. Esta curva se comparará con una serie de curvas propuestas obtenidas mediante deformación progresiva de la curva requerida.

La curva requerida que se propone para este ensayo es una B-Spline cúbica con un polígono de control de 6 vértices. Representaciones de esta curva y de su polígono de control pueden observarse en la figura siguiente:

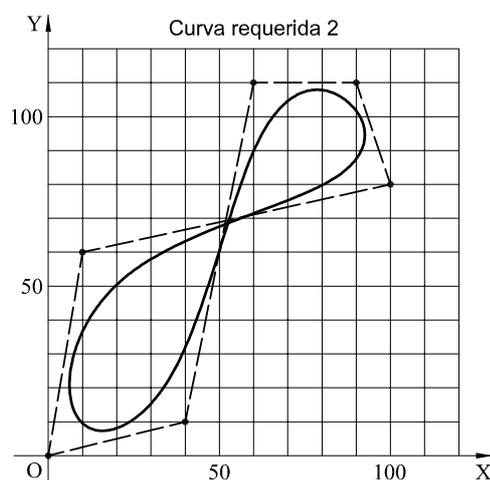


Figura 3.32. Curva requerida en el ensayo 2º de comportamiento frente a deformación progresiva.

Esta curva requerida será comparada con diferentes curvas propuestas que son también B-Splines cúbicas y con polígonos de control de 6 vértices. Sus representaciones gráficas y la de sus polígonos se muestran en la figura 3.33. En ella se observa cómo se parte de una curva *DefA* y se va incrementando su parecido a la curva requerida hasta llegar a la curva *DefF* (que es muy similar a la requerida) para luego volver a incrementar la diferencia desde la curva *DefG* hasta la *DefL*.

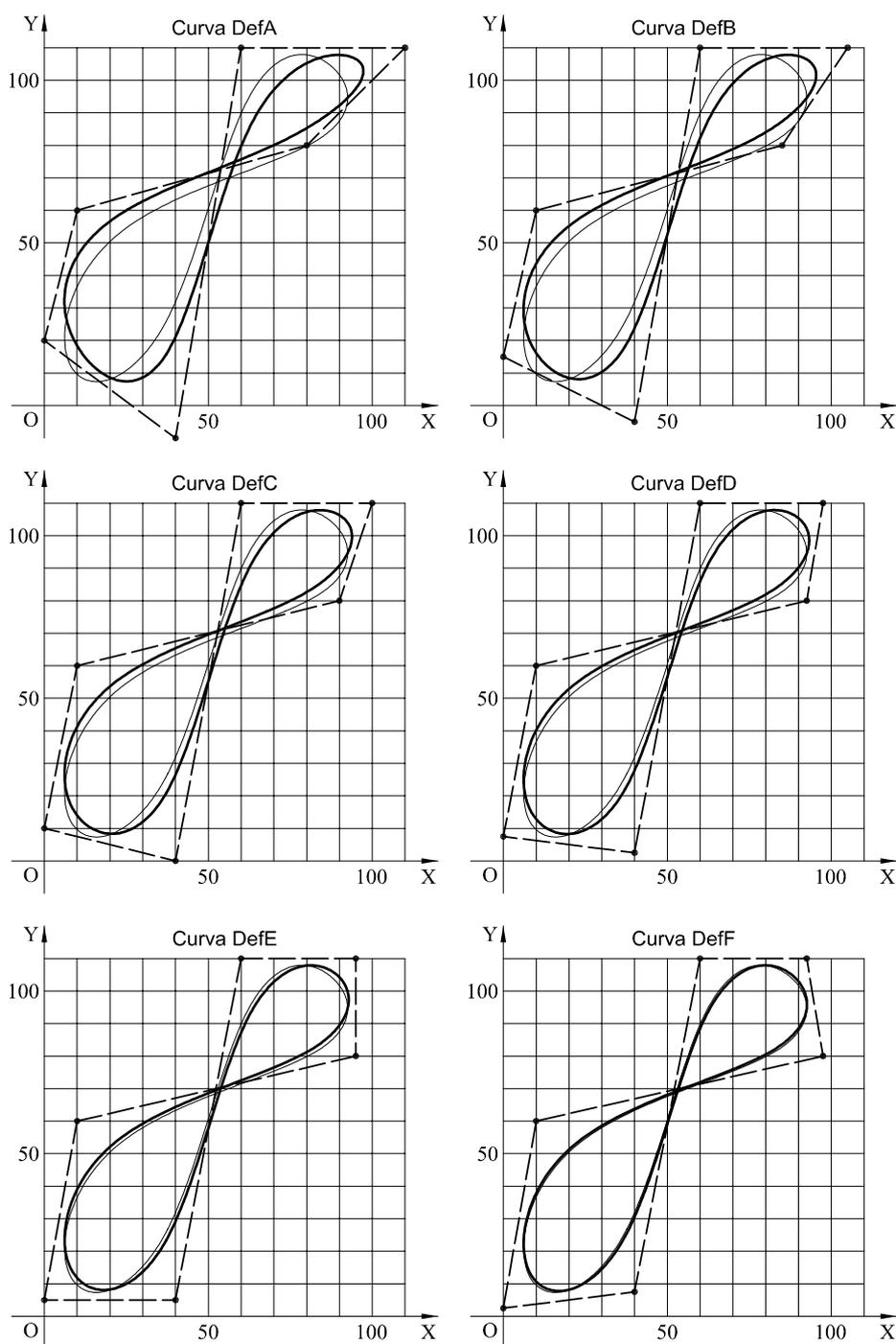


Figura 3.33. Curvas propuestas para en el ensayo 2º de comportamiento frente a deformación progresiva (continua).

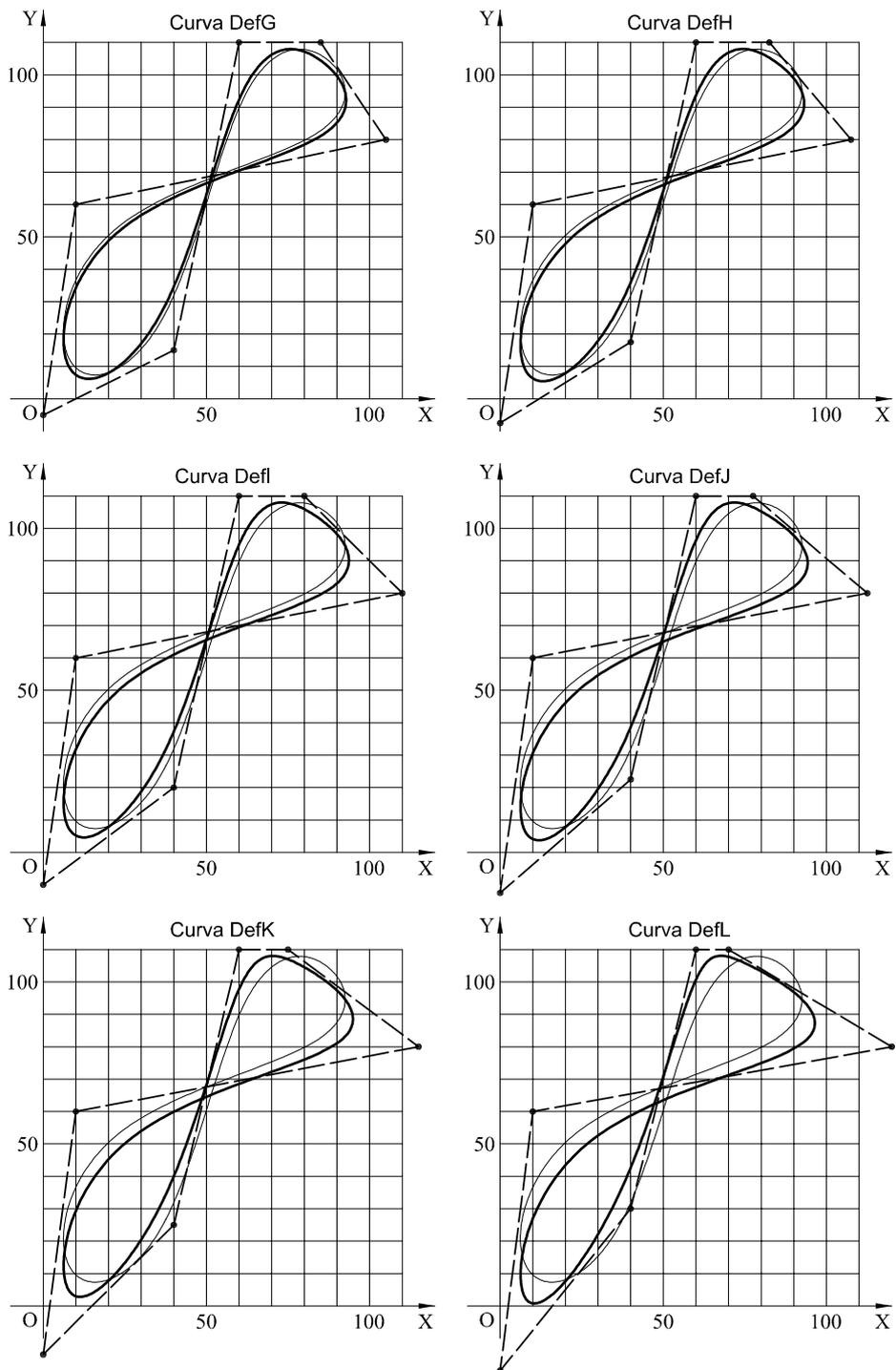


Figura 3.33 (continuación). Curvas propuestas en el ensayo 2° de comportamiento frente a deformación progresiva.

Los resultados obtenidos en este ensayo se muestran en la tabla 3.20.

Curva	LSOP	MPE	PD	PDCP1	PDCP2	PDCP3	CC	ABC	BSC	BSC (Err. Aj.)
<i>DefA</i>	0.0009	0.0002	0.0550	0.0411	3.5009	0.2230	0.7689	0.0116	0.0265	1.4606
<i>DefB</i>	0.0008	0.0001	0.0417	0.0332	2.9937	0.2163	0.6519	0.0090	0.0140	4.9439
<i>DefC</i>	0.0005	0.0000	0.0274	0.0278	2.1047	0.1285	0.4051	0.0061	0.0115	10.6596
<i>DefD</i>	0.0002	0.0000	0.0110	0.0133	1.6715	0.0753	0.2616	0.0047	0.0129	3.4336
<i>DefE</i>	0.0000	0.0000	0.0032	0.0032	0.9857	0.0214	0.0760	0.0031	0.0039	4.0424
<i>DefF</i>	0.0000	0.0000	0.0006	0.0006	2.5463	0.0548	0.2176	0.0016	0.0008	5.8553
<i>Req</i>	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3.2442
<i>DefG</i>	0.0000	0.0000	0.0023	0.0020	2.1501	0.0392	0.1510	0.0033	0.0010	3.4115
<i>DefH</i>	0.0000	0.0000	0.0053	0.0046	2.6835	0.0616	0.2327	0.0049	0.0044	9.2620
<i>DefI</i>	0.0001	0.0000	0.0095	0.0082	2.5734	0.0843	0.3126	0.0065	0.0131	12.0749
<i>DefJ</i>	0.0001	0.0000	0.0150	0.0130	0.9147	0.1080	0.3929	0.0082	0.0372	10.6118
<i>DefK</i>	0.0001	0.0000	0.0216	0.0189	3.4647	0.1328	0.4743	0.0098	0.0386	13.5700
<i>DefL</i>	0.0002	0.0001	0.0382	0.0336	1.3240	0.1859	0.6426	0.0130	0.0934	11.4249

Tabla 3.20. Coordenadas de los vértices del polígono de control de las curvas propuestas en el ensayo 2° de comportamiento frente a deformación progresiva.

Posteriormente, como se hiciera en el primer ensayo de progresividad, se escalan los resultados de cada método con el objetivo de minimizar el error cuadrático entre el método considerado y el método ABC, que sirve de referencia. Estos resultados pueden observarse en la figura 3.34.

En esta figura se observa una mayor diferencia entre los métodos de comparación de curvas y el método ABC, que la que se observó en la figura 3.30 correspondiente al primer ensayo de progresividad. Destaca por lo negativo el comportamiento del método PDCP2, que presenta mínimos locales en la curva de progresividad (en *DefE* y *DefJ*) que no existen en la realidad. Por su parte, los métodos PDCP3 y CC también presentan un mínimo no existente en la curva *DefE*. Asimismo, el método BSC también tiene una curva de progresividad irregular, comparada con la del método de referencia (ABC).

El resto de métodos tienen un comportamiento que puede considerarse distanciado del método ABC, pero el gradiente de sus respectivas curvas de progresividad tienen una tendencia similar al del método ABC.

Con el fin de estimar el realismo del comportamiento progresivo de cada método, éste es contrastado con el comportamiento del método ABC, que sirve de referencia. Para ello se calcula el error cuadrático de cada uno de los métodos en relación al método ABC y se obtienen resultados que se muestran en la figura 3.35.

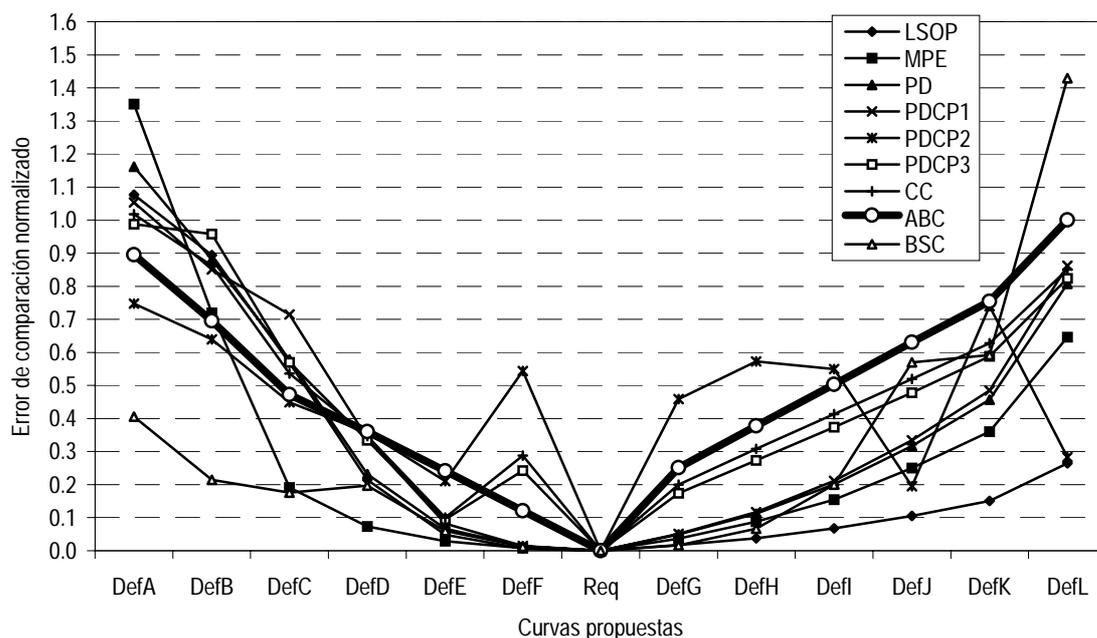


Figura 3.34. Representación de los resultados del ensayo 2º de comportamiento frente a deformación progresiva.

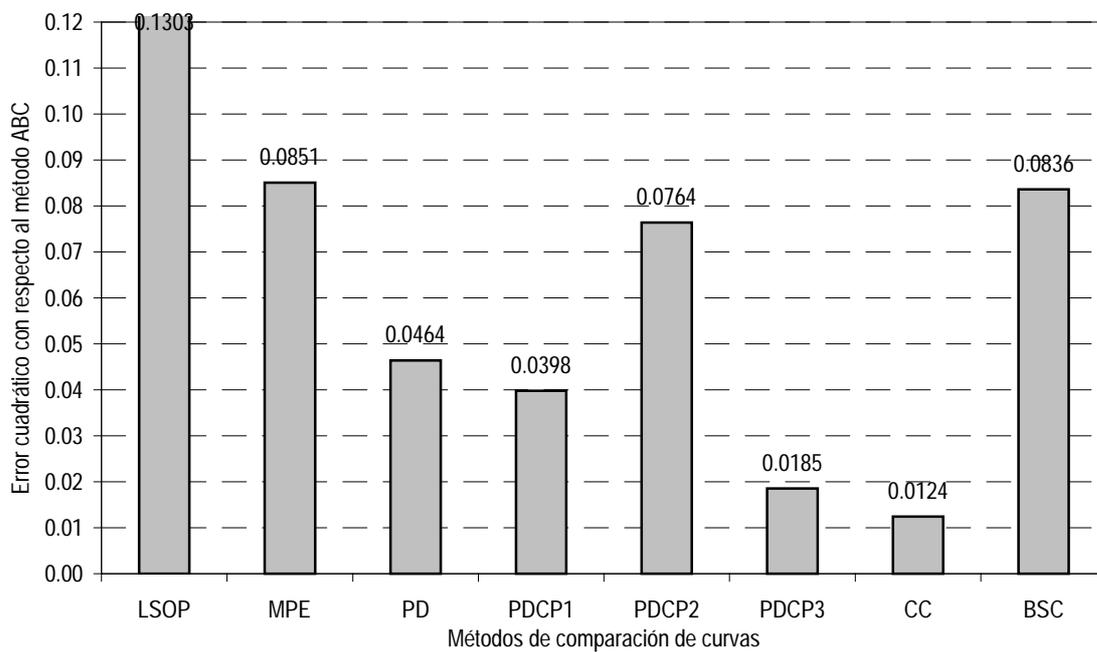


Figura 3.35. Error cuadrático de cada método discreto con respecto al método ABC en el ensayo 2º de comportamiento frente a deformación progresiva.

Esta figura indica que los métodos de comportamiento más realista (en el sentido de más parecidos al comportamiento del método ABC) son el método CC, el método PDCP3 y el método PDCP1. Sin embargo, en esta figura no se han tenido en cuenta otras consideraciones importantes como son la regularidad de la curva de progresividad de cada método o la existencia de mínimos locales no correspondientes a la realidad. Este último aspecto es considerado de especial importancia debido a que, como se ha comentado, puede conducir a resultados erróneos (falsos óptimos) en la optimización.

### ***3.7.7. Ensayo 3º de comportamiento frente a deformación progresiva de la curva.***

Un tercer ensayo de progresividad completará la muestra del comportamiento de los métodos en la comparación de curvas que se deforman progresivamente. Para este ensayo, se ha seleccionado una curva requerida de complejidad intermedia a la de los anteriores. Esta curva, mostrada en la figura 3.36, posee puntos de inflexión y no posee ningún punto doble.

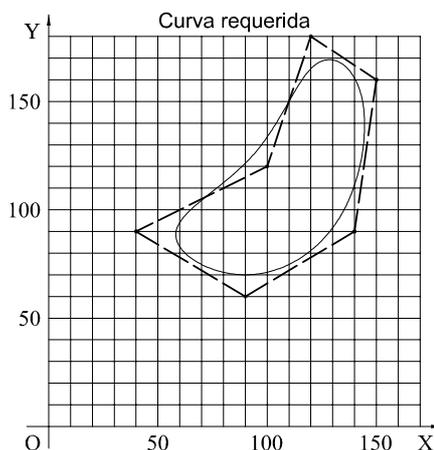


Figura 3.36. Curva requerida en el ensayo 3º de comportamiento frente a deformación progresiva.

La curva requerida será comparada con diferentes curvas propuestas obtenidas de aquella por deformación progresiva. En concreto se ha propuesto un total de 10 curvas propuestas cuya geometría puede observarse en la figura 3.37.

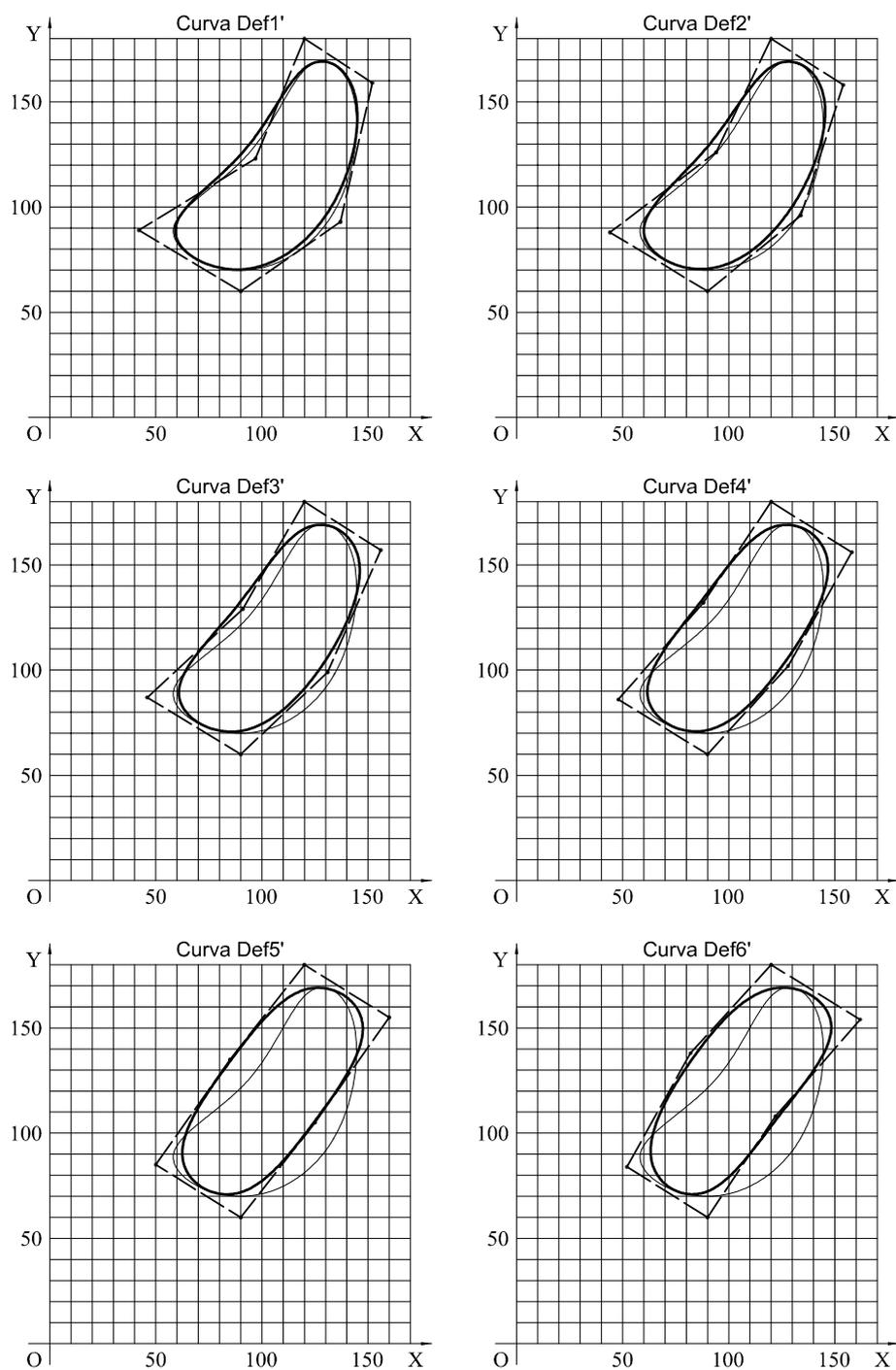


Figura 3.37. Curvas propuestas en el ensayo 3° de comportamiento frente a deformación progresiva (continua).

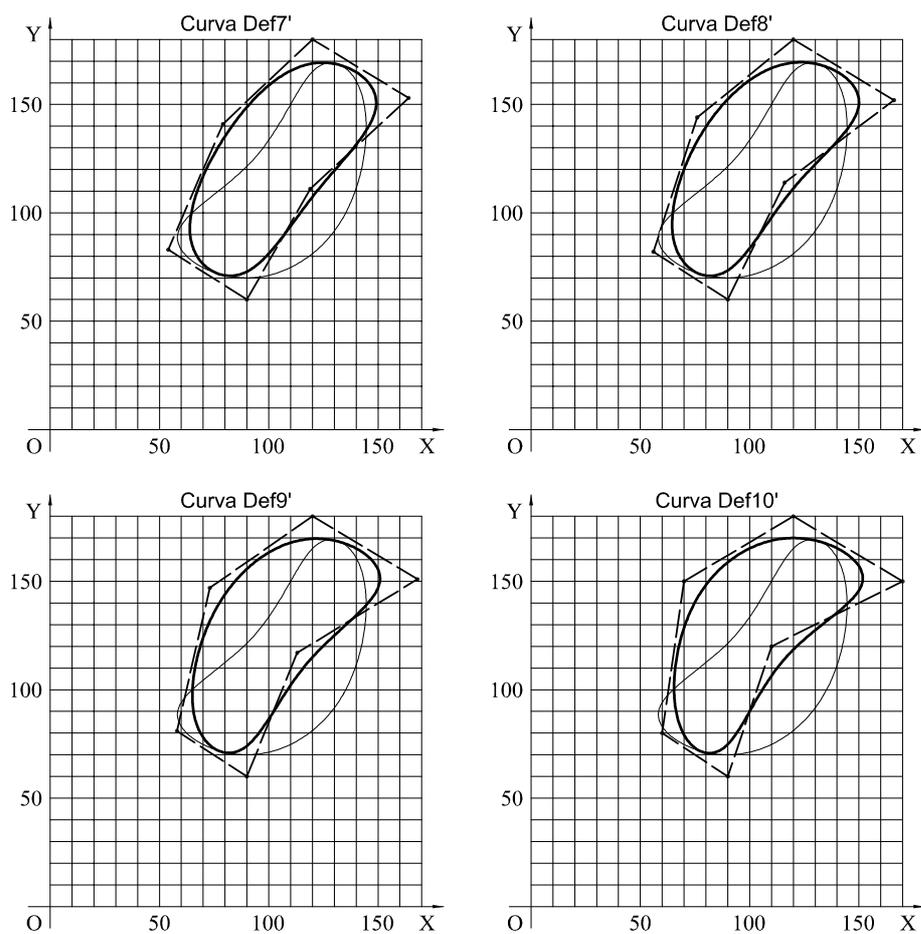


Figura 3.37 (continuación). Curvas propuestas en el ensayo 3º de comportamiento frente a deformación progresiva.

Tras la comparación de las diferentes curvas con la requerida, los resultados son mostrados en la tabla 3.21.

Curva	LSOP	MPE	PD	PDCP1	PDCP2	PDCP3	CC	ABC	BSC	BSC (Err. Aj.)
Req	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	6.1123
Curva1	0.0000	0.0000	0.0031	0.0028	0.0145	0.0211	0.0762	0.0031	0.0012	6.4393
Curva2	0.0001	0.0001	0.0131	0.0116	0.4226	0.1322	0.4940	0.0060	0.0045	4.2583
Curva3	0.0002	0.0001	0.0311	0.0272	0.6407	0.1819	0.6845	0.0090	0.0098	2.7225
Curva4	0.0003	0.0002	0.0581	0.0495	0.0581	0.1530	0.4634	0.0119	0.0158	2.3109
Curva5	0.0004	0.0004	0.0835	0.0680	0.0660	0.2039	0.6269	0.0146	0.0208	1.8859
Curva6	0.0003	0.0002	0.0582	0.0495	0.0582	0.1530	0.4636	0.0119	0.0158	2.3111
Curva7	0.0002	0.0001	0.0312	0.0272	0.6407	0.1821	0.6845	0.0090	0.0098	2.7233
Curva8	0.0001	0.0001	0.0131	0.0116	0.4219	0.1322	0.4940	0.0060	0.0045	4.2588
Curva9	0.0000	0.0000	0.0031	0.0028	0.0145	0.0211	0.0762	0.0031	0.0012	6.4386
Curva10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	6.0077

Tabla 3.21. Resultados del ensayo 3° de comportamiento frente a deformación progresiva.

Si se escalan los diferentes métodos con el fin de que el error cuadrático con respecto al método ABC sea mínimo —tal como se describió en el ensayo 1° de progresividad—, los resultados son mostrados gráficamente en la figura 3.38.

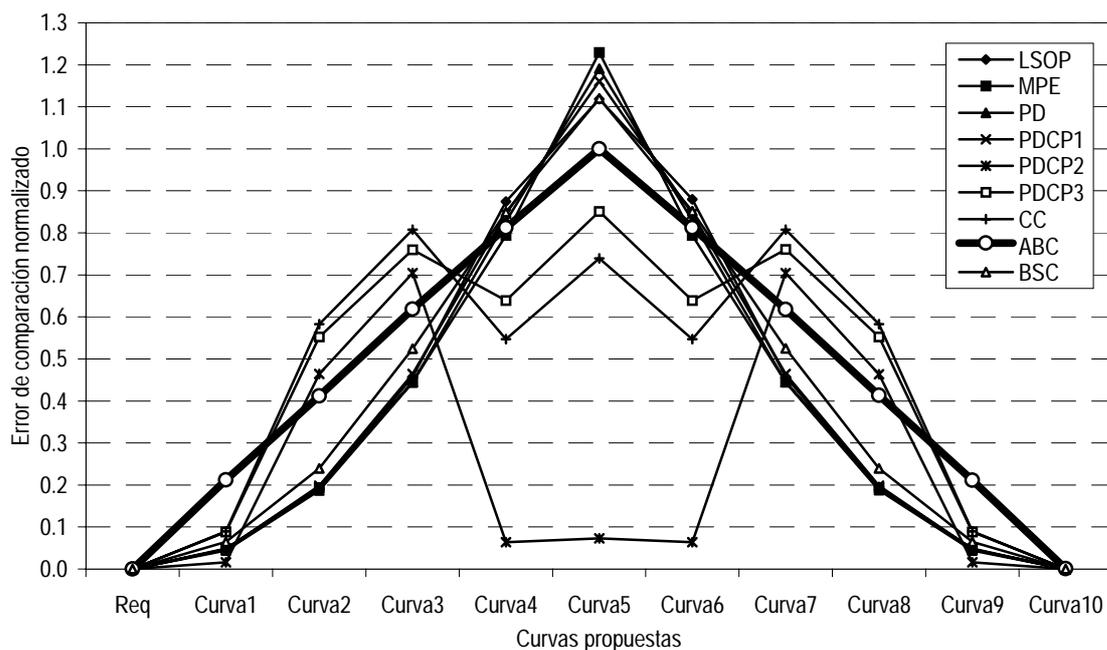


Figura 3.38. Representación de los resultados del ensayo 3° de comportamiento frente a deformación progresiva.

En ella se observa una curva de progresividad irregular para los métodos PDCP2, PDCP3 y CC. Estos métodos presentan mínimos locales que no existen en la realidad, lo que denota un gradiente poco realista.

El resto de métodos tienen un comportamiento similar y más o menos parecido al comportamiento del método de referencia (ABC).

Con el fin de cuantificar el parecido de cada método con el método ABC, se representa el error cuadrático (figura 3.39) de cada uno de los métodos. Se observa un error elevado para el método PDCP2, mientras que el resto de métodos presentan valores similares. Entre los mejores se encuentran los métodos BSC, PDCP3 y PDCP1, seguidos de cerca por el resto. Sin embargo, esta gráfica es deficiente en la representación de la calidad de los métodos, ya que no incluye otras características como la irregularidad o mínimos locales inexistentes en las curvas de progresividad.

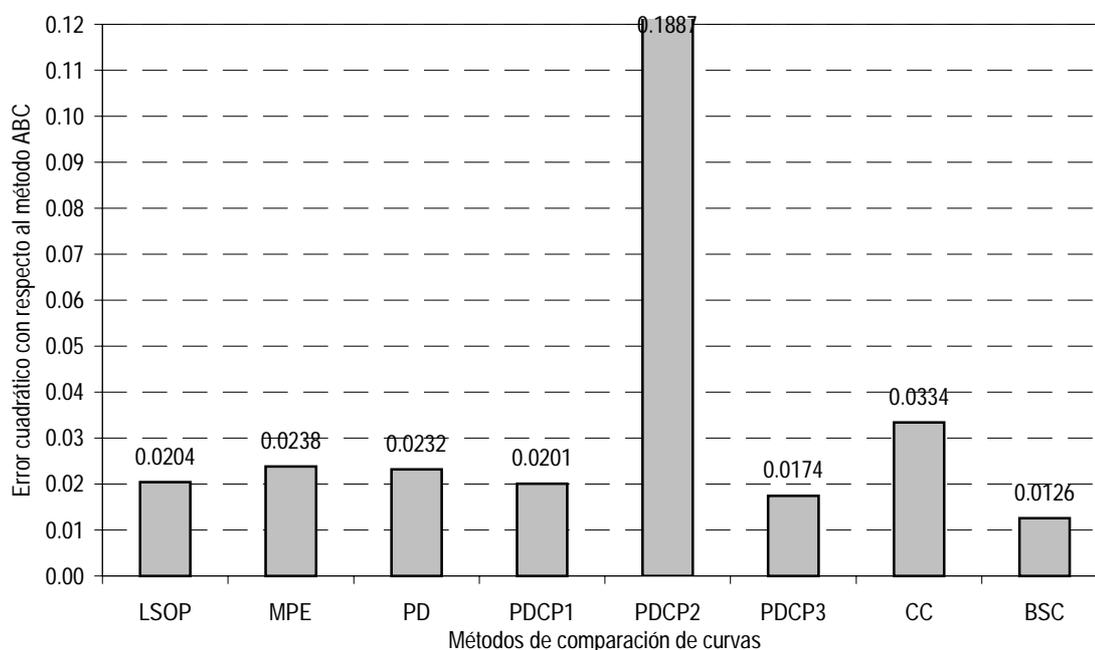


Figura 3.39. Error cuadrático de cada método discreto con respecto al método ABC en el ensayo 3º de comportamiento frente a deformación progresiva.

### 3.7.8. Ensayo de estabilidad.

Este ensayo pretende estudiar el comportamiento de los métodos discretos —métodos LSOP, MPE, PD, PDCP1, PDCP2, PDCP3 y BSC— cuando este número de puntos considerado crece desde un valor muy bajo a un valor elevado. Como se puso de manifiesto en

§3.4 (página 70), una de las características del *método discreto ideal* es que el resultado obtenido al comparar dos curvas sea independiente del número de puntos que se utilice para realizar tal comparación. Sin embargo, este ideal no es alcanzable y lo único que se puede exigir en la práctica es que los *métodos discretos* sigan determinada tendencia de forma estable cuando, comparando dos curvas, el número de puntos considerado crezca. Por lo tanto, del ideal anteriormente enunciado se desprende un criterio de evaluación: el mejor *método discreto ideal (desde el punto de vista de la estabilidad)* será aquel que alcance la estabilidad<sup>69</sup> con un número menor de puntos de comparación.

Así pues, para realizar este ensayo, se debe seleccionar una curva propuesta —y compararla con la curva requerida variando el número de puntos de comparación. Una representación gráfica de los resultados obtenidos nos permitirá observar la tendencia y el *umbral de estabilidad*<sup>70</sup>.

Con el fin de realizar un estudio completo, se ha realizado el ensayo de estabilidad con tres curvas: la curva *Def03*, la *Def06*, y la *Def09* (figura 3.29). Se han comparado cada una de estas curvas con la curva requerida (figura 3.24) variando el número de puntos de comparación considerado desde 3 hasta 40. Los resultados obtenidos (normalizados para que su intervalo de variación sea  $[0,1]$ ) se representan en las figuras 3.40, 3.41 y 3.42 (para las curvas *Def03*, *Def06* y *Def09*, respectivamente). En ellas se observa la curva de comportamiento de cada método para cada curva frente al número de puntos considerado.

Antes de analizar los resultados se ha de tener en cuenta que el *umbral de estabilidad* de un método depende del tipo de curvas que compare. En efecto, para un mismo método si la curva es muy simple, este umbral será bajo mientras que si la complejidad de la curva es elevada, el umbral será más alto. Las curvas utilizadas en este ensayo son de una misma complejidad y, por lo tanto, los umbrales de los métodos cuando comparan estas curvas pueden ser contrastados directamente.

De los resultados se desprende que la mayoría de los métodos alcanzan una estabilidad relativamente elevada con un número de puntos entre 10 y 15, siendo necesarios más puntos para los métodos PDCP2 y BSC.

Se observan, asimismo, grandes oscilaciones que perduran cuando el número de puntos crece para el método PDCP2. Las causas de esta gran oscilación son descritas en §3.8.

---

<sup>69</sup> Se considera que un método, cuando es utilizado para comparar dos curvas variando el número de puntos, ha alcanzado la estabilidad cuando se ha alcanzado un número de puntos de comparación lo suficientemente elevado como para que el método siga determinada tendencia sin fluctuaciones.

<sup>70</sup> Número de puntos a partir del cual el método se comporta de forma estable.

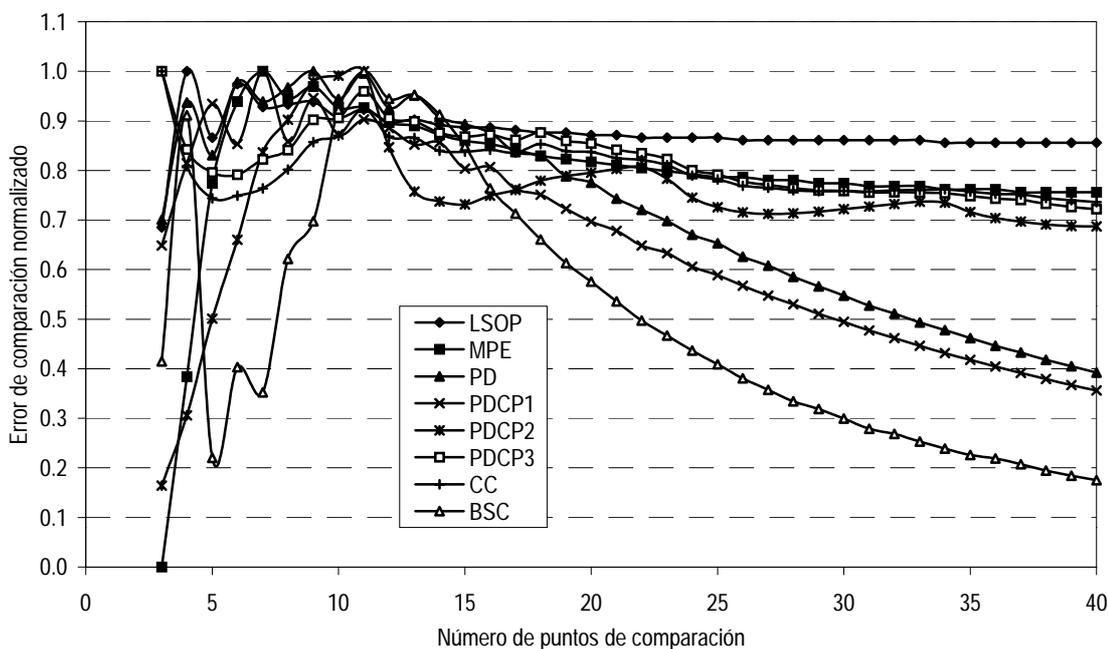


Figura 3.40. Variación del error de comparación de la curva *Def03* con la curva requerida por los diferentes métodos cuando varía el número de puntos de comparación.

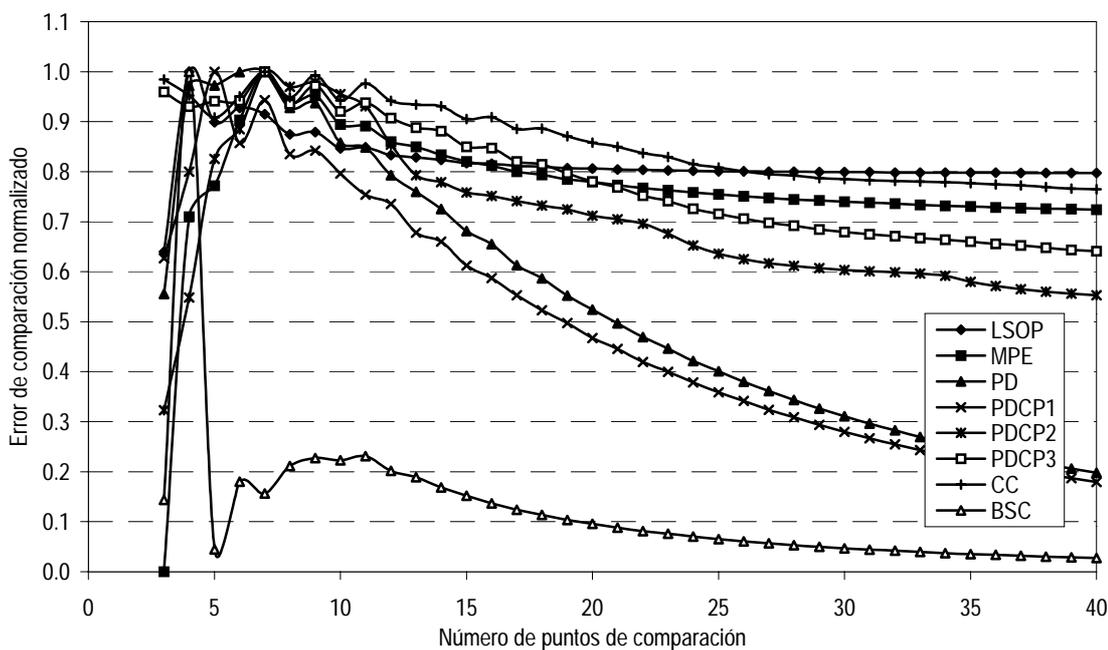


Figura 3.41. Variación del error de comparación de la curva *Def06* con la curva requerida por los diferentes métodos cuando varía el número de puntos de comparación.

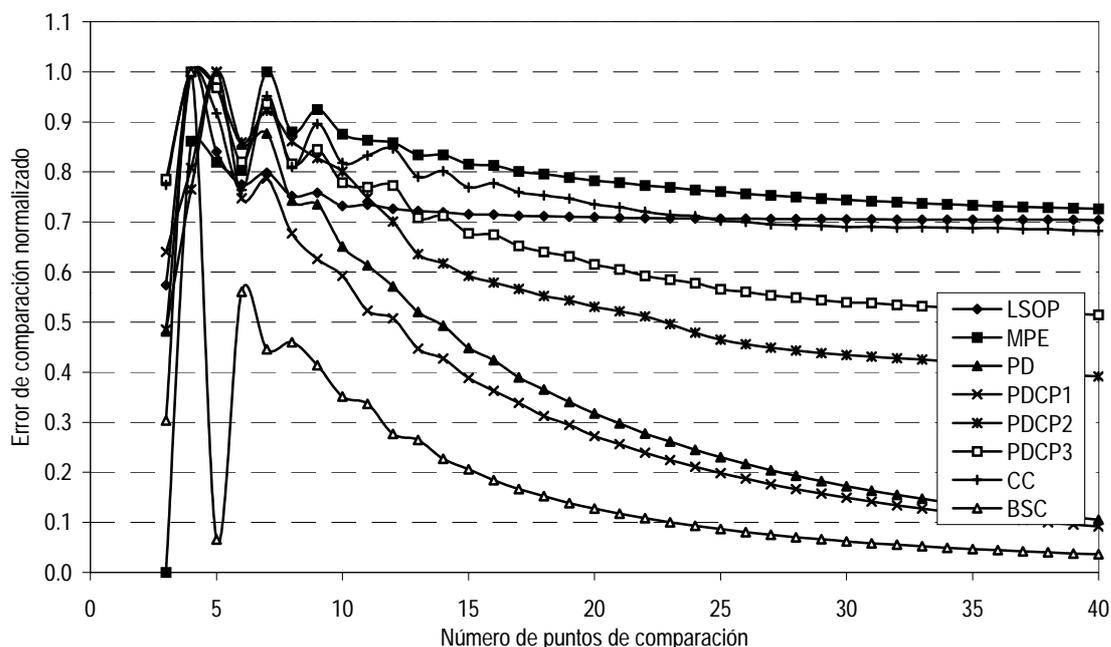


Figura 3.42. Variación del error de comparación de la curva *Def09* con la curva requerida por los diferentes métodos cuando varía el número de puntos de comparación.

El método BSC, cuando el número de puntos considerado es bajo, presenta grandes fluctuaciones que no son representativas de la estabilidad del método. El motivo es que cuando se consideran pocos puntos no es posible convertir las curvas comparadas en B-Splines y, los polígonos de control obtenidos no son representativos de las curvas iniciales, por lo que los resultados de comparar tales polígonos tampoco lo serán. El resto de métodos tiene un comportamiento errático con pocos puntos obteniendo una considerable estabilidad a partir de 7 puntos para curvas de esta complejidad.

En cuanto a las tendencias, todos los métodos tienden a cero cuando el número de puntos tiende a infinito, si bien la tendencia es menor en los métodos MPE y LSOP (este último llega a tener un comportamiento casi asintótico).

Otra consideración que se puede realizar es que los métodos LSOP, MPE, PD y PDCP1 tienen un comportamiento estable muy similar en las tres curvas comparadas, lo cual es representativo de que su estabilidad depende poco de la forma de las curvas comparadas, siempre que sean de la misma complejidad.

### 3.7.9. Evaluación del coste computacional.

Si se tiene en cuenta que los métodos de comparación de curvas van a ser utilizados para buscar la curva que más se parece a la requerida dentro del espacio de diseño, el número

de comparaciones entre curvas que se va a llevar a cabo es tan elevado que resulta especialmente importante realizar una evaluación comparativa del coste computacional de los métodos.

El coste computacional se expresa en unidades de tiempo (segundos) y en el presente caso, depende de muchos factores, como por ejemplo la potencia de cálculo del ordenador utilizado, de la complejidad de las curvas comparadas, del número de puntos considerado, etc. No tiene objeto, por tanto, evaluar este coste computacional en términos absolutos y sí en términos relativos.

Con el objetivo de recabar la máxima información posible en cuanto al coste computacional, se ha estudiado su evolución respecto al número de puntos considerados. Para ello, se ha considerado los mismos ejemplos que en el *ensayo de estabilidad*, prestando atención al coste computacional de los métodos cuando el número de puntos varía entre 3 y 40.

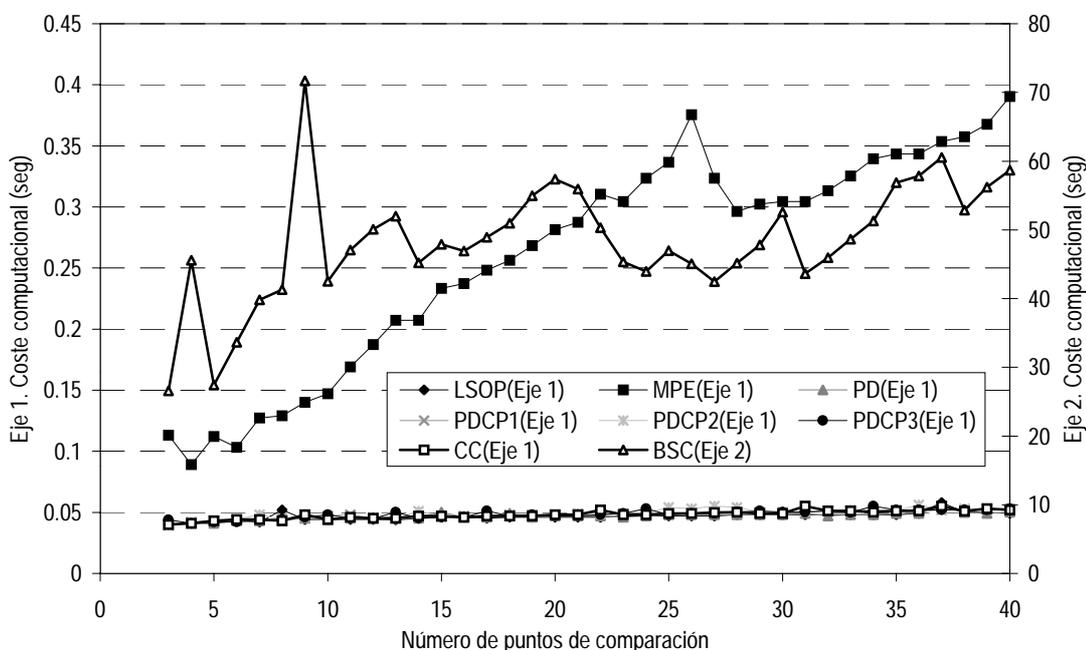


Figura 3.43. Variación del coste computacional al comparar la curva Def03 con la curva requerida por los diferentes métodos cuando varía el número de puntos de comparación.

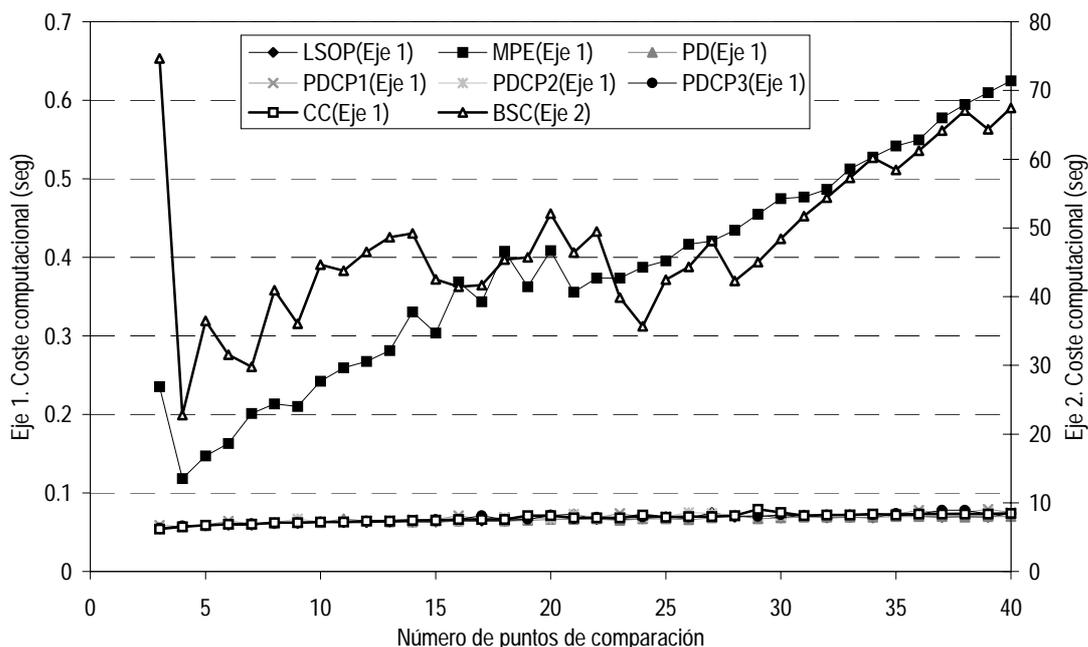


Figura 3.44. Variación del coste computacional al comparar la curva Def06 con la curva requerida por los diferentes métodos cuando varía el número de puntos de comparación.

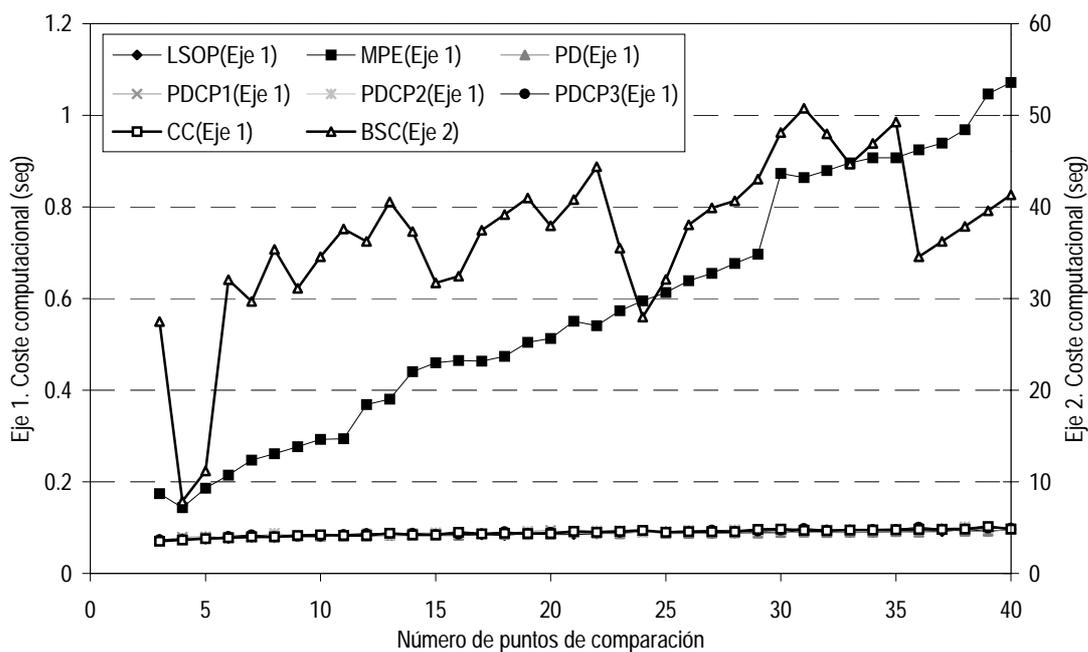


Figura 3.45. Variación del coste computacional al comparar la curva Def09 con la curva requerida por los diferentes métodos cuando varía el número de puntos de comparación.

Para la estimación del coste computacional, cuando éste supone un tiempo de computación muy bajo (del orden de centésimas de segundo) se ha cronometrado cada una de las tareas un número repetido de veces con el objetivo de lograr una mayor precisión.

Al realizar la comparación de los métodos con las curvas *Def03*, *Def06* y *Def09*, variando el número de puntos considerado, se han obtenido resultados que pueden observarse en las figuras 3.43, 3.44 y 3.45, respectivamente. En cada figura se observa cómo varía el coste computacional de cada método discreto en función del número de puntos considerado.

Se observa que el método BSC tiene un coste computacional (referido al eje secundario de ordenadas en las figuras) muy elevado (del orden de 500 veces superior al del resto de métodos. Además, este coste computacional tiene una dependencia irregular respecto del número de puntos de comparación considerado. Esto puede achacarse al efecto fortuito que queda incluido al convertir la curva en B-Spline, que puede resultar más o menos costoso dependiendo de cómo de buena sea la primera estimación del polígono de control.

El resto de métodos estudiados tiene un coste computacional que se ajusta considerablemente bien a una tendencia de crecimiento lineal. Entre ellos, el método MPE tiene un coste computacional superior, siendo el del resto de métodos muy similar.

Al margen de la evaluación relativa, hay que hacer notar que en términos absolutos, el coste computacional de todos los métodos (excepto el BSC) es muy bajo y la comparación de dos curvas se realiza en tiempos del orden de centésimas de segundo. Así pues, estos métodos son adecuados para ser utilizados en una comparación masiva de curvas con el objetivo de encontrar la más parecida a la curva requerida.

### **3.8. Análisis de resultados y conclusiones.**

---

De los ensayos realizados, de los cuales una representación se ha expuesto en el epígrafe anterior, se pueden extraer conclusiones relevantes sobre el comportamiento de los métodos de comparación de curvas cerradas.

Se ha observado que los métodos existentes estudiados en §3.4 (con las modificaciones realizadas en §3.6) y los nuevos métodos propuestos en §3.5 son insensibles a la posición, orientación y tamaño de las curvas comparadas. Esto supone una importante reducción del tamaño del espacio de diseño en la búsqueda del mecanismo óptimo para reproducir una trayectoria. Como ejemplo, el número de dimensiones necesarias para concretar una curva trazada por un mecanismo de cuatro barras (incluyendo su posición y orientación) es 9, por lo que, cuando se busca el mejor mecanismo de cuatro barras para reproducir una trayectoria, el espacio de diseño tendrá 9 dimensiones. Sin embargo, si se utilizan métodos independientes de la posición, orientación y tamaño de las curvas comparadas, el espacio de diseño llega a tener solamente 5 dimensiones, con lo que se ha

conseguido una reducción de 4 dimensiones (2 correspondientes a la posición, una correspondiente a la orientación y otra correspondiente al tamaño del mecanismo).

Del *ensayo de conmutabilidad* (§3.7.2) se desprende que el esfuerzo que se ha realizado con el fin de independizar los resultados de la comparación respecto de la parametrización de las curvas (y, en concreto, respecto del origen de tal parametrización) han supuesto el incumplimiento de este requisito. Se han evaluado las alternativas y, finalmente se han desestimado los cambios debido a que el incumplimiento de este requisito por parte de los métodos no supone ningún perjuicio en el proceso de optimización en el que van a ser incluidos, a la vez que supondría un incremento sustancial del coste computacional, lo que si perjudicaría la optimización. Así pues, se asume que los métodos no van a cumplir este requisito.

Por su parte, los *ensayos de deformación progresiva* son enormemente reveladores del comportamiento de los métodos cuando comparan curvas parecidas, lo cual resulta de especial importancia durante la optimización. El primer ensayo de progresividad (§3.7.5) demuestra que los métodos que incluyen la curvatura (o el radio de curvatura) tales como PDCP2, PDCP3 y CC, tiene un comportamiento especialmente adecuado para el tipo de curvas ensayadas (tomando como referencia el método ABC). Por otro lado, el resto de métodos tienen un comportamiento similar (figuras 3.30 y 3.31). En el segundo ensayo (§3.7.6) se comparan curvas de complejidad diferente a las del primer ensayo y los resultados muestran que los métodos PDCP2 presenta un comportamiento considerablemente más distante del comportamiento del método ABC que en el primer ensayo. Más parecido al comportamiento del método ABC es el de los métodos PDCP3 y CC, aunque presentan mínimos locales en la curva de progresividad que no existen en la realidad (figuras 3.34 y 3.35). De la misma forma, el comportamiento de los métodos LSOP y MPE es mucho menos adecuado en este segundo ensayo que en el primero. Finalmente, el tercer ensayo de progresividad muestra un comportamiento del método PDCP2 muy diferente del método de referencia ABC. Más similar al método ABC es el comportamiento de otros métodos como el PDCP3 y CC. Sin embargo, de nuevo se pone de manifiesto la irregularidad de la curva de progresividad de estos dos últimos. Por su parte, el resto de métodos tienen una curva de evolución adecuada y, en algunos casos, más parecida a la del método de referencia ABC que en otros.

Un análisis que se puede realizar a partir de los dos ensayos de progresividad es estudiar cómo varía el comportamiento de cada método en los diferentes ensayos de progresividad (es decir, cuando cambia el tipo o complejidad de las curvas comparadas) respecto del método ABC utilizado como patrón. Para ello se comparan los errores cuadráticos obtenidos en ambos ensayos (tabla 3.22), obteniendo el valor medio, la diferencia entre los valores y el error relativo de un ensayo a otro respecto al valor medio. Considerando que el error cuadrático de cada método muestra la diferencia de comportamiento entre el método en cuestión y el método ABC, se observa que todos los métodos presentan un cambio no despreciable, representado por el error relativo. De todos estos, el más estable es el método

PDCP1, cuyo error cuadrático respecto al método ABC fluctúa un 68.5% respecto al valor medio en los tres ensayos de progresividad.

	LSOP	MPE	PD	PDCP1	PDCP2	PDCP3	CC	BSC
$\varepsilon_2$ ensayo 1º	0.0301	0.0254	0.0236	0.0264	0.0029	0.0039	0.0016	0.0501
$\varepsilon_2$ ensayo 2º	0.1303	0.0851	0.0464	0.0398	0.0764	0.0185	0.0124	0.0836
$\varepsilon_2$ ensayo 3º	0.0204	0.0238	0.0232	0.0201	0.1887	0.0174	0.0334	0.0126
Valor medio	0.0603	0.0448	0.0311	0.0288	0.0893	0.0133	0.0158	0.0488
Diferencia máxima	0.1099	0.0612	0.0232	0.0197	0.1859	0.0146	0.0319	0.0711
$\varepsilon_r$ (respecto valor medio)	182.2%	136.7%	74.6%	68.5%	208.1%	110.3%	201.5%	145.7%

Tabla 3.22. Tabla comparativa de los errores cuadráticos de los métodos discretos en los ensayos de progresividad.

Del ensayo de estabilidad se deriva que la mayoría de los métodos tienen un comportamiento relativamente estable frente a cambios en el número de puntos considerado. Excepciones son los métodos PDCP2 y BSC. El análisis del método BSC permite observar que este método tiene un comportamiento poco fiable cuando el número de puntos utilizados es bajo, ya que en tal caso no es posible realizar la conversión de las curvas originales en B-Splines y la comparación de los polígonos de control obtenidos no son representativos de la comparación de las curvas originales.

Por su parte, el método PDCP2 presenta un problema adicional aún no explicado. Este problema viene por la inclusión del radio de curvatura de la curva en el coeficiente  $Rb$  de la ecuación (3.47). Dado que gran parte de las curvas generadas por mecanismos presentan puntos de inflexión (en los que el radio de curvatura es infinito), cuando uno de los puntos considerados en el método PDCP2 alcanza un de estos puntos de inflexión (o está situado en una posición cercana), el radio de curvatura llega a ser muy elevado, encontrando una gran discrepancia con el radio de curvatura de la otra curva en el punto homólogo. Es más, aunque los dos puntos homólogos sobre las curvas comparadas estén en un entorno cercano de puntos de inflexión, la probabilidad de que los valores de los radios de curvatura respectivos sean similares es muy pequeña siendo la diferencia entre ambos, en general, elevada. Así, en el *ensayo 1º de progresividad*, las curvas comparadas no tienen puntos de inflexión, por lo que el método PDCP2 tiene un comportamiento excepcionalmente bueno (referido al comportamiento del método patrón ABC). Sin embargo, en los *ensayos 2º y 3º de progresividad*, las curvas comparadas tienen puntos de inflexión y este método acusa el hecho de que el radio de curvatura pueda tomar valores muy elevados.

Por otro lado, si se aumenta el número de puntos considerado en una curva con puntos de inflexión, la probabilidad de que uno de los puntos se sitúe en o cerca de un punto de inflexión es cíclica con respecto al número de puntos. En efecto, si una curva distribuye 4 puntos en su longitud y uno de ellos está en un punto de inflexión, cuando se consideren 5

puntos, el punto de inflexión estará entre dos puntos, y también cuando se consideren 6 ó 7. Sin embargo al considerar 8 (que es múltiplo de 4), de nuevo un punto estará en el punto de inflexión. Este es el motivo por el cual el método PDCP2 presenta oscilaciones periódicas (aunque amortiguadas al aumentar el número de puntos) en la *ensayo de estabilidad* (§3.7.8).

En cuanto al coste computacional, todos los métodos discretos tienen un coste computacional muy similar salvo el método BSC, cuyo coste computacional es del orden de 500 veces superior al de los demás métodos, lo que hace que no resulte competitivo.

Los métodos que incluyen el radio de curvatura (o su inversa, la curvatura), demuestran tener otros factores negativos que constituyen desventajas importantes. El fundamental es la existencia de mínimos locales irreales en sus curvas de progresividad. Estos mínimos los hacen inadecuados para el proceso de optimización debido a que demuestra que estos métodos de comparación conducirían al algoritmo de optimización a un falso óptimo. El resto de métodos no presentan mínimos de este tipo, teniendo un comportamiento progresivo adecuado, ya se ajuste más o menos al comportamiento del método que sirve de referencia (ABC).

	Valor ideal	LSOP	MPE	PD	PDCP1	PDCP2	PDCP3	CC	BSC
Cumplimiento de requisitos	Todos	Todos <sup>71</sup>							
Comportamiento progresivo	Muy bueno	Malo	Regular	Bueno	Bueno	Malo	Muy bueno	Muy bueno	Regular
Estabilidad frente a cambio de tipo de las curvas comparadas	Muy alta	Baja	Baja	Media/Baja	Media	Baja	Baja	Baja	Baja
Estabilidad frente al número de puntos considerados	Alta	Alta	Alta	Alta	Alta	Baja	Alta	Alta	Baja
Coste computacional	Bajo	Bajo	Medio/Bajo	Bajo	Bajo	Bajo	Bajo	Bajo	Muy alto
Otros factores negativos	No	No	No	No	No	Sí <sup>72</sup>	Sí <sup>72</sup>	Sí <sup>72</sup>	No

Tabla 3.23. Cuadro resumen de evaluación de los métodos discretos de comparación de curvas.

<sup>71</sup> Excepto el requisito de conmutabilidad.

<sup>72</sup> Como se ha visto, presenta un comportamiento deficiente cuando las curvas comparadas tienen puntos de inflexión.

En resumen, y de una forma cualitativa, la tabla 3.23 presenta un resumen de la evaluación de los diferentes métodos. En ella se observa, que el método PD<sub>CP1</sub> es el que presenta un comportamiento global óptimo según los aspectos estudiados, seguido del método PD, obteniendo los métodos LSOP y MPE calificaciones menores hasta llegar a los métodos PD<sub>CP2</sub> y BSC que son los que obtienen una peor calificación.

Así pues, y a raíz de los ensayos realizados, se considera que el método PD<sub>CP1</sub> es el que mejor comportamiento global presenta y es, por tanto, el más indicado para constituir la función objetivo de un problema de síntesis dimensional aproximada de mecanismos planos para generación de trayectoria. En segundo lugar, el método PD tiene un comportamiento también considerablemente óptimo en la mayoría de las condiciones.

Los métodos tradicionales (LSOP) han demostrado tener varias desventajas a la hora de medir de forma discreta el parecido o la diferencia entre dos curvas cerradas planas, por lo que su uso en la comparación de curvas es considerablemente peor que el de los métodos anteriores.



# Capítulo 4

## Comparación de curvas planas abiertas

---

### 4.1. Introducción.

---

Este capítulo está relacionado con la síntesis de mecanismos para la generación de tramos abiertos de curva. Aunque en la literatura se ha diferenciado este caso del de generación de curvas cerradas en muy pocas ocasiones, el problema muestra ser muy diferente en su planteamiento si se analiza en profundidad.

Uno de los escasos planteamientos destinados a la síntesis de curvas abiertas es el trabajo realizado por Akçali y Dittrich (Akçali y Dittrich, 1989b), los cuales aplicaron el método de subdominio a la síntesis dimensional de mecanismos planos. Este método se basa en la obtención de la ecuación de desplazamiento de la trayectoria generada por el mecanismo plano sujeto a síntesis, en función de las variables de diseño del mismo, consiguiendo una ecuación del tipo:

$$H(x, y, t, d_1, d_2, \dots, d_n) = 0 \quad (4.1)$$

siendo  $x$  e  $y$  las coordenadas de cada punto de la trayectoria generada por el mecanismo,  $t$  el parámetro de entrada del mecanismo y  $d_1, d_2, \dots, d_n$  las variables de diseño del mismo.

Por otro lado, la curva abierta requerida constituye una relación conocida que se debe cumplir entre las coordenadas  $x$  e  $y$  de los puntos de la curva generada. Utilizando esto, el método de síntesis planteado por Akçali y Dittrich pretende determinar el valor de las dimensiones para que la ecuación (4.1) se cumpla cuando las variables  $x$  e  $y$  se sustituyen por las de la curva abierta requerida (en tal caso, dicha curva cumpliría la ecuación de desplazamiento del mecanismo y el problema se habría solucionado de forma exacta). Como esto no será posible salvo para algunos pocos casos, Akçali y Dittrich proponen una aproximación que consiste en dividir el segmento de curva abierta (requerida) en  $m$  tramos (subdominios) entre los puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$  y, posteriormente, plantear la integral de la ecuación (4.1) en cada tramo:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} H(x, y(x), t, d_1, d_2, \dots, d_n) \cdot dx = 0 \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4.2)$$

Estas integrales constituyen un sistema de  $m$  ecuaciones en las que  $x$  es la variable de integración e  $y$  está relacionada con  $x$  por medio de la definición de la curva requerida. Las incógnitas son las dimensiones  $d_1, d_2, \dots, d_n$  y la variación del parámetro de entrada del mecanismo  $t$ .

Como se observa, existen más incógnitas que ecuaciones y se hace necesario determinar la variación del parámetro para que el sistema de ecuaciones sea resoluble. Akçali y Dittrich propusieron una variación lineal del parámetro de entrada del mecanismo con respecto a la variación  $x$  de la curva abierta requerida. Es decir, la dependencia de  $t$  con  $x$  queda definida mediante la ecuación:

$$t(x) = t_0 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (x - x_0) \quad (4.3)$$

De esta ecuación,  $\Delta x$  es conocido (igual al incremento de la coordenada  $x$  de la curva abierta requerida entre sus puntos extremos) y  $x_0$  es la coordenada  $x$  del primer punto de la curva abierta requerida. Por su lado,  $t_0$  es el valor del parámetro de entrada del mecanismo a partir del cual se pretende trazar la curva abierta requerida y  $\Delta t$  es el incremento de este parámetro de entrada dentro del cual se trazarla dicha curva. Según los autores de este procedimiento, estos dos últimos parámetros deben ser concretados (de acuerdo con los requisitos de la síntesis) antes de poder continuar con la resolución del problema.

Tras esto, el problema se ha reducido a un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas que puede ser resuelto determinando el valor de las dimensiones del mecanismo. Este sistema de ecuaciones es casi siempre lineal pero la matriz de coeficientes involucra diferentes integrales sobre la variación de  $x$  e  $y$  en la curva abierta requerida.

Gráficamente, el planteamiento del método de subdominio está representado en la figura 4.1. En ella se observa un mecanismo de 4 barras con sus 9 variables dimensionales y su síntesis requiere determinar estas dimensiones para que el punto trazador dibuje un tramo de trayectoria abierta (requerida). Como se cuenta con 9 incógnitas, será necesario dividir la curva abierta requerida en 9 tramos dentro de cada uno de los cuales se lleva a cabo la integral.

Hay que considerar que el hecho de que la integral de una función sea cero en un intervalo no implica que dicha función sea nula en todo el intervalo. Teniendo esto en cuenta, el método propuesto por Akçali y Dittrich es un método aproximado que asegura que en cada intervalo, el área bajo las curvas requerida y generada sean iguales, pero no necesariamente ambas curvas (y así lo demuestran los autores en sus ejemplos).

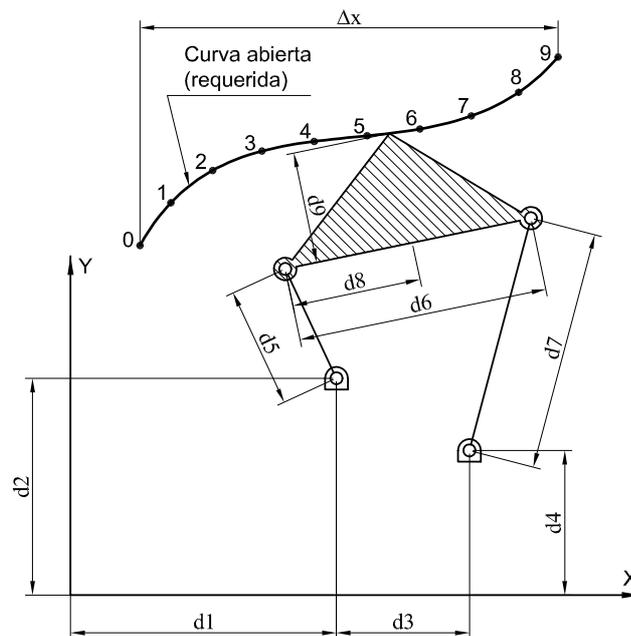


Figura 4.1. Aplicación del método de subdominio a la síntesis del mecanismo de 4 barras.

La principal ventaja de este método es la rapidez, ya que permite obtener un mecanismo solución de una forma directa (sin iteraciones) con un coste computacional despreciable (tan solo el tiempo que se tarda en realizar las integrales de las variables de la curva abierta requerida). En contra está el hecho de que aporta una única solución y que su calidad es relativa, no asegurándose la consecución del óptimo global dentro de todo el espacio de diseño.

Una alternativa al método de Akçali y Dittrich es plantear la síntesis como un problema de optimización. En tal caso (y como se ha visto anteriormente para curvas cerradas), la optimización de las dimensiones de un mecanismo para que éste sea capaz de generar un tramo de curva abierta implica la comparación de la trayectoria generada por el mecanismo y la curva abierta requerida. La curva generada puede ser cerrada —en el caso de que la barra de entrada del mecanismo realice un ciclo completo sin que el mecanismo se bloquee— o abierta —si antes de completar un ciclo el mecanismo se bloquee—. Por lo tanto, la curva abierta requerida deberá ser comparada con las curvas abiertas y cerradas que genera el mecanismo cuando se modifican sus dimensiones, permitiendo al algoritmo de optimización llegar a un óptimo.

La comparación de una curva plana abierta (en adelante también llamada *curva requerida*) con otra curva plana —abierta o cerrada— (en adelante llamada *curva propuesta*) implica otro problema que es el de la superposición de las curvas. Esta superposición no solo

depende de la posición, orientación y escala de las curvas, sino que además depende del punto de la curva propuesta a partir del cual se superpone la curva abierta. En la figura 4.2 se muestra una curva abierta y tres posibilidades de adaptación de ésta en una curva propuesta (en este caso cerrada). Como se observa, variando la posición, orientación y escala de la curva abierta se pueden conseguir numerosas posibilidades de adaptación de las que habrá que seleccionar la óptima.

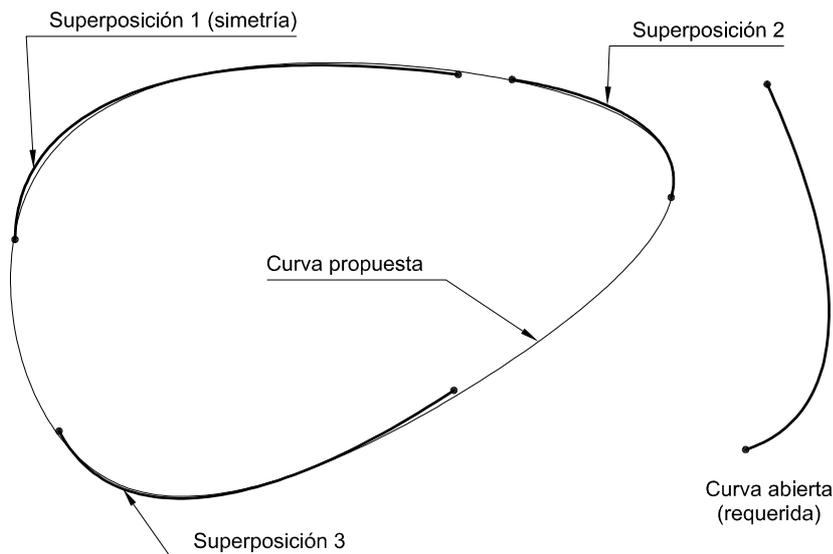


Figura 4.2. Posibilidades de adaptación de una curva abierta en otra curva.

Pero la superposición óptima de la curva requerida sobre la curva propuesta no es un problema sencillo. Se trata de una optimización en la que intervienen como variables de diseño la posición, orientación y escala de la curva requerida (considerando que la curva propuesta está fija con una determinada posición, orientación y escala) —es decir, en el caso plano intervienen dos coordenadas de posición, un ángulo de orientación y un factor de escala, que constituyen un espacio de diseño de 4 dimensiones—. Pero además, la superposición también es dependiente del sentido según el cual se recorren las dos curvas y de la posible simetría de las curvas (lo que aumenta el espacio de diseño).

Por otro lado, el problema de síntesis dimensional aproximada para generación de trayectoria consta de otro espacio de diseño cuyas dimensiones son las variables de diseño del mecanismo. Un planteamiento posible es el de añadir las variables de diseño del problema de superposición óptima a las del problema de síntesis y realizar una optimización considerando todo el conjunto de variables. Sin embargo, esta posibilidad tiene la importante desventaja de que aumenta considerablemente el espacio de diseño del problema de síntesis —al añadir 4 nuevas dimensiones—. Pero además, las nuevas dimensiones del mismo incrementan la no

linealidad de la función objetivo en el espacio de diseño<sup>73</sup>. Por otro lado el espacio de diseño añadido puede contener varios mínimos locales —considérese que la curva requerida puede adaptarse a la curva propuesta según diferentes posibilidades, tal como muestra la figura 4.2— los cuales se combinan con los ya existentes en espacio de diseño del problema de síntesis al añadir las nuevas dimensiones correspondientes al problema de superposición. Consecuentemente, en el nuevo espacio de diseño habría aumentado la no linealidad y el número de mínimos locales de una forma no despreciable, con lo que el problema de optimización se complicaría, reduciéndose la probabilidad de encontrar el óptimo global del problema de síntesis.

Otra posibilidad es separar ambos problemas de optimización y realizar por un lado la optimización de la adaptación de la curva (abierta) requerida sobre la propuesta y, por otro, la optimización de las dimensiones del mecanismo. Esta opción es ventajosa cuando lo que se persigue es encontrar el óptimo global ya que se independizan los mínimos locales de uno y otro problemas de optimización. Sin embargo, utilizando esta estrategia se incluye la optimización de la adaptación dentro de la función objetivo del problema de síntesis dimensional, lo que puede incrementar el coste computacional. Será necesario, pues, formular el problema de optimización de la adaptación prestando especial atención a este coste computacional.

## **4.2. Requisitos de los métodos de comparación de curvas abiertas.**

Los requisitos exigibles a cualquier método de comparación de curvas destinado a ser la función objetivo en síntesis dimensional aproximada para generación de trayectorias abiertas son similares a los exigidos en comparación de curvas cerradas (§3.2).

Para asegurar la disminución del espacio de diseño (eliminando variables que no son imprescindibles) se han de respetar los *requisitos de independencia de posición, orientación, escala y parametrización de las curvas comparadas* descritos en §3.2. Para que el algoritmo de optimización pueda converger hacia el óptimo deben respetarse los *requisitos de identificación y de progresividad*. Finalmente, el *requisito de conmutabilidad* no es exigible en este caso, ya que el intercambio de roles de las curvas requerida (abierta) y propuesta (cerrada/abierta) carece de sentido.

El *requisito de identificación* resulta especialmente importante como ocurriera con curvas cerradas, pero tiene una significación especial en comparación de curvas abiertas. Dado que las curvas no son iguales, este requisito debe ser redefinido para que sea útil este

---

<sup>73</sup> Ya que, como se comprobará más adelante, el problema de superposición óptima se caracteriza por una elevada falta de linealidad.

caso: “el método de comparación de una curva abierta (requerida) con una curva abierta o cerrada (propuesta) debe indicar que no existe ninguna diferencia cuando la primera curva abierta sea exactamente igual a un tramo de la segunda curva”. Así pues, para el cumplimiento de este requisito el método de comparación debe, primeramente, ser capaz de encajar la curva requerida dentro de la propuesta en la posición, orientación y escala adecuadas para que ambas curvas coincidan perfectamente en el intervalo ocupado por la requerida. Posteriormente se ha de cuantificar la diferencia entre ambas curvas obteniendo, lógicamente, un valor nulo. La dificultad en el cumplimiento de este requisito estriba, por tanto, en realizar la adaptación perfecta de la curva abierta requerida sobre la curva propuesta.

Por otro lado y como ocurriera con la comparación de curvas cerradas, si la comparación realizada no es de tipo continuo —es decir, es una comparación que se realiza en puntos discretos—, es un requisito aconsejable que el método de comparación sea lo más independiente posible del número de puntos considerados en la discretización. Como es probable que en los métodos propuestos no se llegue al ideal de independencia total, este criterio servirá para calificar a los diferentes métodos según éstos se acerquen menos o más a la independencia ideal.

### 4.3. Propuesta de nuevos métodos de comparación de curvas abiertas.

---

Como se ha visto en §4.1, el problema de síntesis para la generación de curvas abiertas supone la adición de 4 nuevas variables al espacio de diseño formado por las variables dimensionales del mecanismo. Una estrategia posible es dividir el problema de optimización global obtenido en dos subproblemas. Uno consistente en, dada una curva propuesta, la determinación de la posición, orientación y tamaño de la curva requerida para que la superposición con la propuesta sea óptima (*optimización de la superposición*). El otro será el de la determinación de las dimensiones del mecanismo para una mejor reproducción de la curva requerida (*optimización de las dimensiones del mecanismo*). Con la subdivisión es muy probable que se simplifique la tarea de encontrar el óptimo global<sup>74</sup> pero entonces el coste computacional del problema de superposición óptima pasa a tener especial importancia. Consecuentemente, si se adopta esta opción, se hace necesario buscar técnicas que permitan minimizar el coste computacional en el problema de superposición.

Es posible simplificar este problema si se utilizan ciertos criterios de adaptación de la curva requerida sobre la propuesta. Por ejemplo, si se impone que la adaptación debe realizarse siempre de forma que los puntos inicial y final de la curva requerida estén sobre la

---

<sup>74</sup> Ya que al partir en dos las dimensiones del espacio de diseño global, este se reduce considerablemente (véase capítulo 5).

curva propuesta, el problema de adaptación queda limitado a encontrar ambos puntos en la curva propuesta (o mejor, los dos valores del parámetro de la curva en esos dos puntos) para que la superposición sea óptima. En este nuevo planteamiento, el problema de adaptación cuenta solo con dos variables, con lo que se ha visto simplificado considerablemente.

A continuación se describen los métodos propuestos para reducir el número de variables de la superposición en la comparación de una curva abierta con otra curva abierta o cerrada. Para que la comparación sea totalmente independiente de la parametrización es necesario considerar las dos alternativas posibles en el sentido en el que se recorren las curvas. De la misma forma, para conseguir que la comparación sea independiente de posibles simetrías de las curvas, es necesario que se considere este aspecto en la comparación. Sin embargo, para simplificar el estudio, a continuación no se considera cambio de sentido<sup>75</sup> ni posible simetría de las curvas. Este aspecto será tratado posteriormente al final del capítulo.

### 4.3.1. Métodos de superposición con 2 variables.

Para la reducción del espacio de diseño de 4 a 2 dimensiones en el problema de superposición óptima, es posible utilizar diferentes parámetros que describen las curvas (véase §3.3). Así, se puede utilizar el criterio descrito en el párrafo anterior y buscar la mayor coincidencia entre las curvas imponiendo que los puntos inicial y final de la curva requerida estén sobre la curva propuesta. En esta optimización el espacio de diseño tendrá dos dimensiones correspondientes a la posición de los puntos inicial y final (o al valor del parámetro de la curva en esos puntos) y la función objetivo tendrá que ser capaz de calificar cada punto del espacio de diseño —es decir, cada pareja de puntos inicial y final— comparando las curvas.

Pese a que esta comparación puede realizarse atendiendo a los diferentes parámetros descriptores de cada curva, se requiere que la comparación sea independiente de *posición*, *orientación*, *escala* y *parametrización* de las curvas. Por ello se descarta una comparación basada en las coordenadas  $x$  e  $y$  de los puntos de las curvas. Podría utilizarse el radio de curvatura  $\rho$  (o su inversa, la curvatura  $\kappa$ ) normalizándolo con respecto a la longitud de la curva<sup>76</sup>, ya que cumple los requisitos de independencia. Sin embargo, en los ensayos realizados con curvas cerradas se ha observado que existe un problema numérico difícil de solucionar<sup>77</sup> porque el radio de curvatura llega a ser infinito en los puntos de inflexión (o la curvatura en curvas con cúspides llega a no estar definida o a ser infinito).

---

<sup>75</sup> Es decir, se considera que cada una de las dos curvas involucradas en la comparación son recorridas en un único sentido.

<sup>76</sup> De esta forma se logra que sea también independiente del tamaño de la curva.

<sup>77</sup> Dos curvas, aunque sean muy parecidas, pueden ser ligeramente diferentes en un entorno cercano a sus puntos de inflexión. En tal caso, la comparación de los radios de curvatura es la comparación de dos valores que tienden a infinito y su diferencia será un valor muy elevado. En tal caso, el radio de curvatura por sí solo indica que las curvas no se parecen cuando en realidad son muy parecidas.

Otra alternativa que aparentemente no presenta ninguna complicación es utilizar el ángulo de la tangente  $\theta$  a las curvas. Si bien este ángulo depende de la orientación de las curvas cuando es medido con respecto a un sistema de referencia X-Y. Si se mide su evolución con respecto a una referencia asociada a la curva —por ejemplo, respecto a su valor en un punto de partida de la curva—, este parámetro cumple todos los requisitos de independencia.

Así, dada una curva como la mostrada en la figura 4.3 y partiendo del punto P de la misma en el sentido indicado, se puede representar el ángulo de la tangente mientras se recorre la longitud de la curva (figura 4.4). En este caso se observa que la tangente da una vuelta completa y, consecuentemente, el ángulo girado por la tangente desde el punto inicial hasta el punto final es  $2\pi$ . En otros casos, siempre que la curva sea cerrada, la tangente puede dar cualquier número entero —0 incluido— de vueltas desde el punto inicial al final.

Dado que cualquier curva puede ser descrita unívocamente mediante su curva de evolución de la tangente (CET), dos curvas pueden ser comparadas en base a ésta.

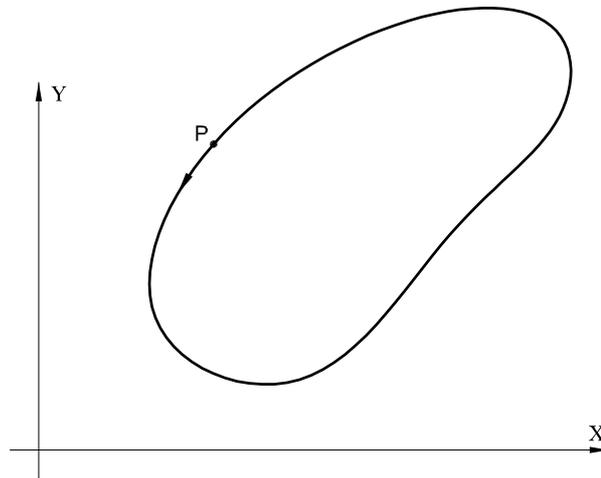


Figura 4.3. Ejemplo de curva cerrada plana con un punto de partida y recorrida en un sentido.

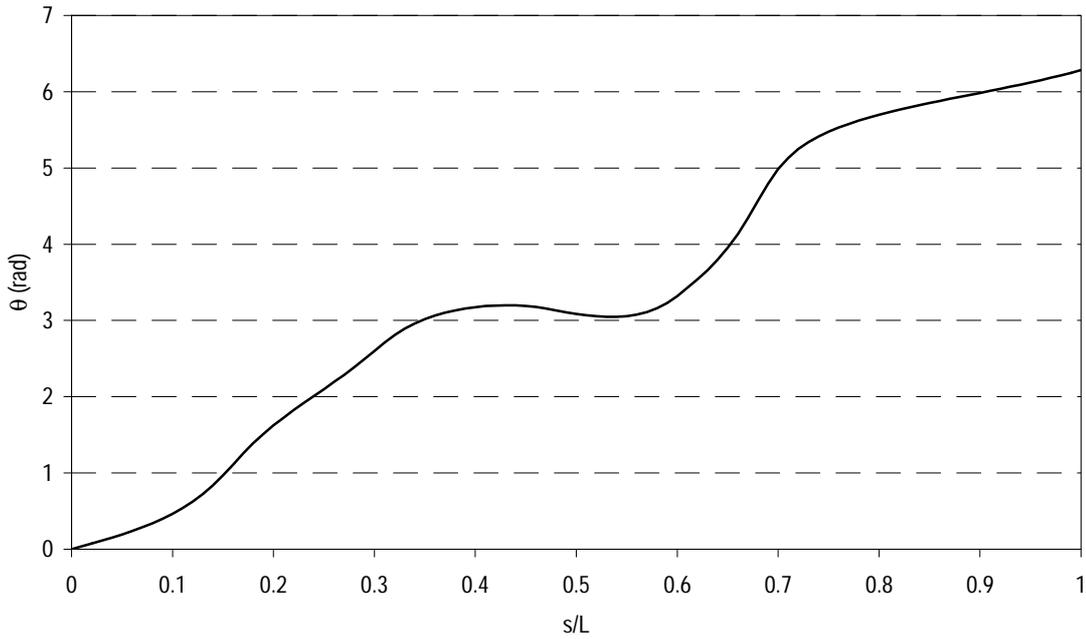


Figura 4.4. Curva de evolución de la tangente (CET) para la curva plana mostrada en la figura 4.3.

Supóngase que se desea superponer de forma óptima y luego comparar la curva abierta mostrada en la figura 4.5 con la curva cerrada de la figura 4.3. Para ello se puede observar la mayor coincidencia posible entre sus curvas de evolución de la tangente —este método será llamado **método de evolución de la tangente** o **método TE**—. Sin embargo, esta coincidencia depende del tramo de longitud de la curva cerrada que se utilice para superponer la curva abierta. Dado que la curva cerrada puede parametrizarse en función de la variable longitud de arco ( $s$ ) que varía dentro del intervalo  $[0, L]$ , es posible llamar  $[s_o, s_f]$  a un subintervalo de aquel. Así pues, se trata de encontrar el subintervalo  $[s_o, s_f]$  de forma que la curva requerida (escalada para que su longitud sea igual a  $s_f - s_o$ ) se parezca lo más posible a la curva propuesta en dicho intervalo.

Para ello, dado un intervalo  $[s_o, s_f]$  es necesario cuantificar la diferencia entre las curvas. Una posibilidad es extraer  $n$  puntos de cada curva (uniformemente espaciados a lo largo de la longitud del arco) y realizar la suma en esos  $n$  puntos de las diferencias al cuadrado entre las respectivas CET. Es decir, determinar

$$F_{TE} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (\theta^\diamond - \theta)^2 \quad (4.4)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de la tangente medido respecto al ángulo de la misma en el punto inicial de la curva y donde las variables denotadas con el símbolo ( $\diamond$ ) corresponden a la curva requerida (abierta) y el resto corresponden a la curva propuesta (en este caso cerrada).

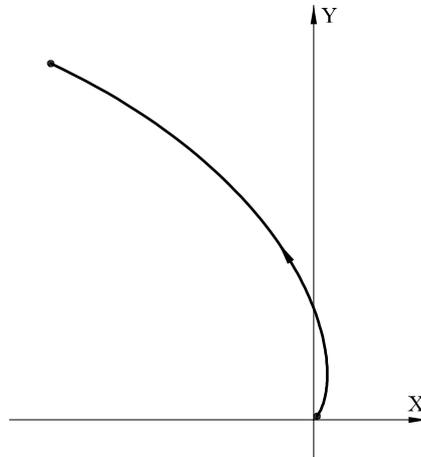


Figura 4.5. Ejemplo de curva abierta requerida.

Sin embargo, para que las curvas se parezcan, se ha de girar la curva requerida con el fin de que tenga la misma orientación que el tramo de curva propuesta en el intervalo considerado. Una posibilidad de conseguir esto es haciendo coincidir la orientación de la tangente a la curva requerida en el punto inicial con la tangente a la curva propuesta en el primer punto del intervalo considerado. Pero la técnica puede mejorarse si se ubica correctamente toda la curva requerida sobre la propuesta para que la diferencia entre sus CETs sea mínima. Esto, físicamente, significa variar la orientación de la curva requerida para que coincida al máximo (minimizando la suma de diferencias al cuadrado) con la orientación del tramo de curva propuesta. Y en la gráfica de la curva de evolución de la tangente a la curva requerida significa subir la curva de evolución o bajarla arbitrariamente en el eje de ordenadas sin modificar su aspecto para que coincida al máximo con la CET correspondiente a la curva propuesta.

En tal caso, la ecuación (4.4) puede transformarse en

$$F_{TE} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} [(\theta^{\diamond} + d) - \theta]^2 \quad (4.5)$$

donde el valor de  $d$  se calcula para que  $F_{TE}$  sea mínimo (y, por tanto, representa el desplazamiento de la referencia de ángulos en la curva requerida para el ajuste por mínimos cuadrados).

Derivando la expresión anterior con respecto a  $d$  e igualando a cero se obtiene el valor de  $d$  que minimiza la diferencia al cuadrado:

$$d = \frac{1}{n} \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-1} \theta - \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{\diamond} \right) \quad (4.6)$$

Así, el problema de superposición se ha reducido a encontrar el intervalo  $[s_o, s_f]$  dentro de la longitud de la curva propuesta para que la función definida en (4.5) sea mínima. Pero esta optimización de dos variables resulta todavía computacionalmente muy costosa pues para cada intervalo propuesto —es decir, para cada pareja de valores  $s_o, s_f$ — se han de obtener  $n$  puntos (uniformemente espaciados en longitud<sup>78</sup>) dentro de ese intervalo y luego evaluar la ecuación (4.5). Como en la optimización se evalúan numerosas veces la función de comparación, este espaciamiento de puntos es realizado otras tantas veces haciendo que el método de superposición óptima sea costoso.

Una forma de resolver este problema de manera aproximada pero con mayor economía computacional consiste en discretizar la longitud de la curva cerrada y evaluar la función definida en (4.5) entre cada dos puntos de la discretización, buscando el intervalo óptimo para la superposición. Para cada pareja de puntos se evalúa la función (4.5) pero realizando el sumatorio únicamente con los puntos de la discretización que quedan dentro de la pareja de puntos evaluados (para ello se ha debido discretizar la curva requerida y se obtiene el valor correspondiente a cada punto de la curva propuesta por interpolación). De esta forma se logra estimar de forma aproximada la mejor adaptación. Sin embargo, es posible incrementar la eficiencia del método si para cada punto inicial del intervalo de superposición no se comprueban todos los demás puntos como posibles candidatos a ser el punto final de dicho intervalo. Dado que la tangente a la curva requerida (abierta) gira un cierto ángulo desde el punto inicial al punto final, para cada punto inicial solamente se probarán aquellos en los que la tangente desde el punto inicial hasta el final considerado haya girado un ángulo parecido al de la curva requerida.

Así, habiendo discretizado la curva propuesta en  $n$  segmentos, considerando el punto  $i$ -ésimo como punto de partida, se prueban todos los puntos  $j$  ( $j = 0, \dots, n-1; j \neq i$ ) siempre que

$$\left| \theta_{i \rightarrow j} - \theta_{0 \rightarrow n-1}^{\diamond} \right| < \theta_{ref} \quad (4.7)$$

---

<sup>78</sup> La distribución uniforme de puntos a lo largo de la longitud de la curva exige plantear la integral de longitud que es, con diferencia, computacionalmente más costosa que el resto de operaciones involucradas en el método de comparación.

es decir, siempre que la diferencia entre el ángulo girado por la tangente desde el punto  $i$  hasta el  $j$  ( $\theta_{i \rightarrow j}$ ) en la curva propuesta y el ángulo girado desde el punto inicial (0) hasta el final ( $n-1$ ) en la curva propuesta sea menor que un cierto valor de referencia.

Diferentes ensayos han demostrado que un ángulo de referencia ( $\theta_{ref}$ ) del orden de  $20^\circ$  permite que el método tenga un comportamiento adecuado para la gran mayoría de los casos.

Finalmente, variando el punto inicial  $i$  desde 0 hasta  $n-1$  y para cada punto  $i$  evaluando —mediante la ecuación (4.5)— todos los puntos finales  $j$  que cumplen la ecuación (4.7), se obtiene la pareja de puntos inicial-final que permiten una superposición óptima (y también el valor de la superposición).

Es posible representar el mejor error de comparación obtenido (al variar los puntos finales dentro de los que cumplen la ecuación (4.7)) en función del punto inicial considerado. Así se obtiene una gráfica que representa la mejor superposición posible (de acuerdo con este criterio) en función del punto inicial considerado en la curva. Como ejemplo, en la superposición de la curva abierta mostrada en la figura 4.5 sobre la curva cerrada de la figura 4.3, se obtiene una gráfica de error mostrada en la figura 4.6.

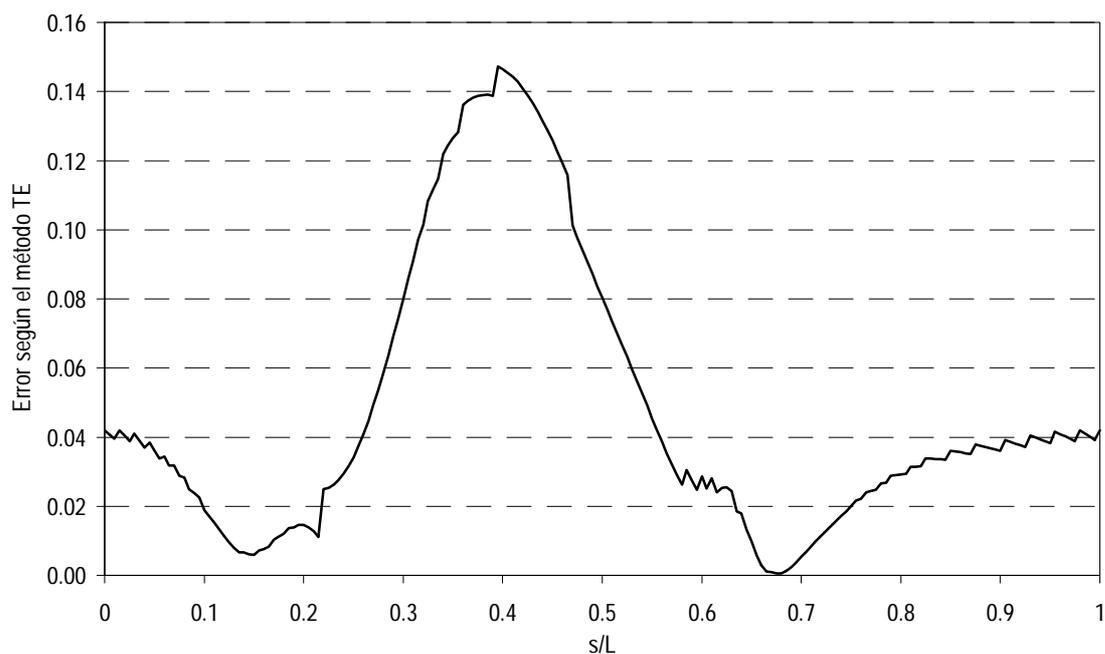


Figura 4.6. Error de comparación en función del punto inicial de superposición de las curvas.

La gráfica mostrada deja patente la no linealidad asociada al problema de superposición. Aunque existe una oscilación de alta frecuencia (debida a la discretización), en

este caso la oscilación fundamental presenta 3 mínimos locales, uno de los cuales es considerablemente mejor que los demás. Además, el valor del óptimo es muy cercano a 0, lo que indica que en la superposición óptima existe una gran coincidencia en el trazado de ambas curvas.

En la figura 4.7 se muestra la superposición óptima lograda con este método y una discretización de la curva propuesta en 200 segmentos.

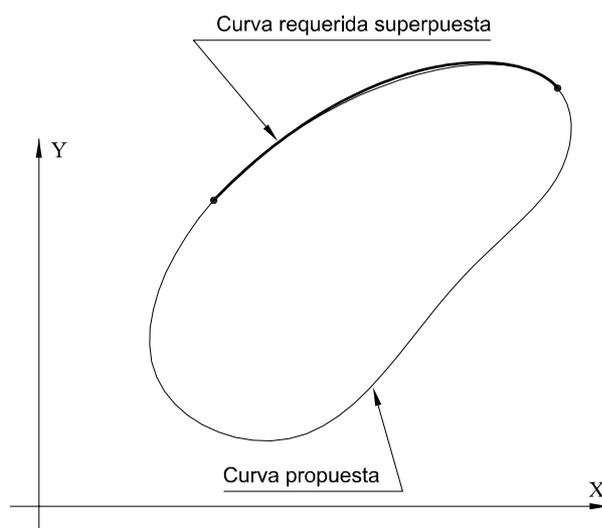


Figura 4.7. Superposición óptima de la curva requerida sobre la curva propuesta.

El método *TE* descrito cumple con los requisitos de *independencia de posición, orientación, escala y parametrización*. Sin embargo, planteado de forma discreta (sin optimización) tiene el problema de que para encontrar la superposición óptima con suficiente precisión (necesaria para contemplar el *requisito de identidad*) es necesario realizar una discretización fina, lo cual incrementa el coste computacional. Por otro lado, si se realiza una discretización muy fina (independientemente de su coste computacional), el método describe de forma realista el parecido o la diferencia entre las curvas (ya que la gráfica de evolución de la tangente correspondiente a una curva plana define de forma unívoca la forma de la curva). Así pues, en caso de que no sea competitivo en lo que respecta al coste computacional, es posible utilizarlo como referencia con la que evaluar otros métodos.

### 4.3.2. Métodos de superposición con 1 variable.

Sabiendo que la superposición óptima de las curvas formará parte de la función objetivo de la optimización de las dimensiones del mecanismo, es aconsejable reducir el

problema de superposición a la optimización de una única variable. El motivo es que durante la optimización de las dimensiones, la curva abierta (requerida) se comparará numerosas veces (probablemente del orden de millones) con otras tantas curvas propuestas y cada una de esas comparaciones implica la optimización de la superposición de ambas curvas. Se tiene, pues, dos procedimientos de optimización anidados en los que cada iteración de uno de ellos significa la ejecución del otro procedimiento de optimización.

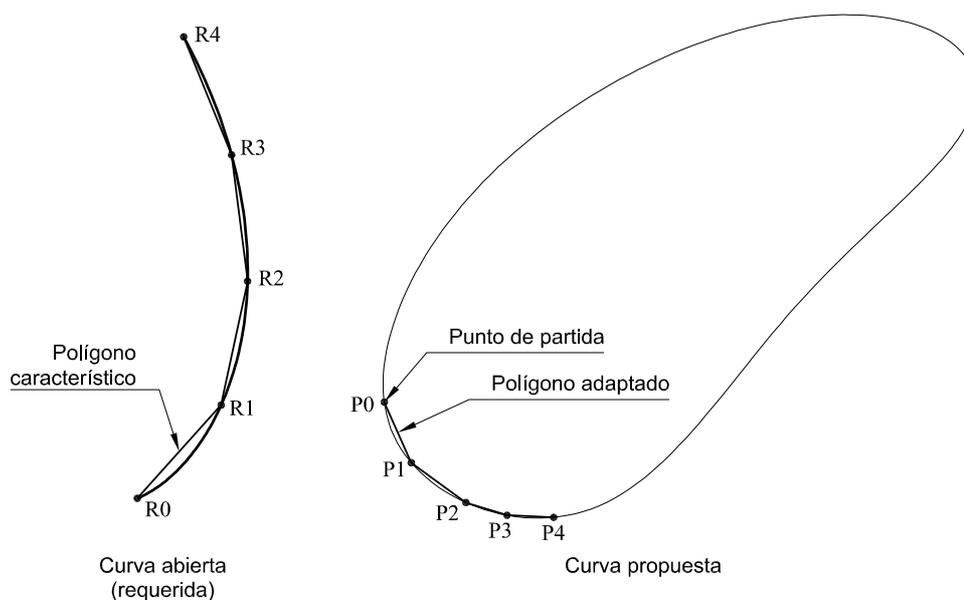


Figura 4.8. Adaptación del polígono característico de la curva requerida en la curva propuesta partiendo de un punto de la misma.

Teniendo esto en cuenta, a continuación se proponen varios métodos de superposición óptima de las curvas cuyo planteamiento consta de una única variable de diseño con el fin de obtener la mejor superposición posible (óptimo global) de una curva abierta sobre otra curva (y cumpliendo todos los requisitos de *independencia de posición, orientación, escala y parametrización de las curvas*).

Estos métodos se basan en la obtención de un polígono característico de la curva requerida y, partiendo de un punto de la curva propuesta, su adaptación en dicha curva para luego cuantificar la superposición asociada a ese punto mediante diferencias de las dimensiones de los polígonos. La optimización del punto de la curva propuesta para una mejor adaptación del polígono responderá a la mejor superposición posible.

Con el fin de cumplir el requisito de *independencia de la parametrización*, el polígono característico de la curva requerida debe obtenerse no en base al parámetro de la curva abierta (el cual puede variar de formas diferentes sin que por ello cambie la forma de la curva), sino en

base a la longitud de la curva. Para ello se propone dividir dicha longitud en tantos tramos como número de puntos se desee en el polígono menos 1.

En la figura 4.8 se muestra una curva abierta requerida. De ella se obtiene un polígono característico considerando 5 puntos. Partiendo de un punto ( $P_0$ ) de la curva propuesta se realiza una adaptación del polígono (siguiendo criterios que se explicarán seguidamente) y se obtiene el polígono adaptado. A continuación se propone cuantificar la superposición de la curva requerida partiendo del punto  $P_0$  y midiendo las diferencias entre los polígonos de forma similar a como se hizo en el capítulo 3. Una vez hecho esto, se puede obtener el punto de partida que genera un polígono adaptado mejor (en el sentido de que se parezca más al polígono característico). Será necesario comprobar mediante ensayos si ese punto corresponde con la mejor superposición de las curvas (o, al menos con un óptimo cercano al global).

La generación el polígono adaptado a partir del polígono característico puede realizarse contemplando diferentes variables de este último. Para que el planteamiento sea independiente de posición, orientación y escala de las curvas (y así cumplir los requisitos correspondientes) será necesario que esta generación se realice atendiendo a magnitudes relativas que contemplan esa independencia exigida. Teniendo esto en cuenta, es posible elaborar diferentes grupos de variables que cumplan con estos requisitos. A continuación se propone uno de estos grupos de variables que, posteriormente, será sometido a evaluación.

Suponiendo que de la curva abierta requerida se extrae un polígono característico de  $n$  vértices (en ejemplo de la figura 4.9,  $n = 5$ ), los vértices quedan numerados desde 0 hasta  $n-1$ , como se muestra. Existirán, asimismo,  $n-1$  segmentos que se numeran según el punto del que parten, logrando una secuencia desde 0 hasta  $n-2$  (segmentos ① a ③ en la figura 4.9). Las variables que se contemplan son las mostradas en la figura 4.9 y se describen a continuación:

$\alpha_i$	$i = 1, 2, \dots, n-2$	Angulo del segmento $i$ -ésimo del polígono respecto al segmento anterior.
$L_i$	$i = 0, 1, \dots, n-2$	Longitud del segmento $i$ -ésimo.
$\beta_i$	$i = 0, 1, \dots, n-2$	Angulo del segmento $i$ -ésimo respecto a la tangente a la curva en el punto $i$ , del que parte el segmento.

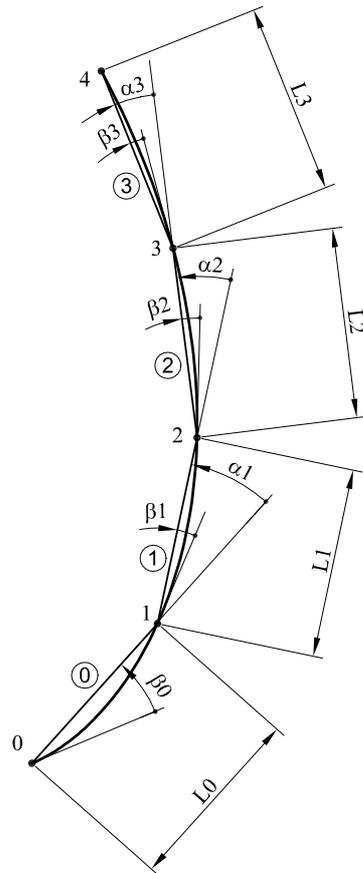


Figura 4.9. Variables consideradas en el polígono característico.

Cada una de las magnitudes está asociada a cada uno de los vértices del polígono desde el primero (0) hasta el penúltimo ( $n-2$ ), a excepción del ángulo  $\alpha$  que no tiene valor asociado al primer vértice. Sin embargo, la longitud de los segmentos  $L_i$  no es una magnitud independiente de la escala, por lo que debe ser sustituida por otra que si lo sea. En su lugar se utiliza la variable

$$Ra_i = \frac{L_i}{L_{i-1}} \quad i=1, 2, \dots, n-2 \quad \text{Cociente de longitudes del segmento } i\text{-ésimo y el anterior.} \quad (4.8)$$

que está asociada a cada uno de los vértices del polígono salvo el primero y el último y que es adimensional e independiente de posición, orientación y escala.

El método propuesto para la generación del polígono adaptado consiste en colocar cada segmento del polígono adaptado en la curva propuesta a partir del anterior de forma que el valor de alguna de las variables mencionadas en el polígono que se está generando sea el

mismo que en el polígono característico. A excepción del primer segmento que, como no cuenta con un segmento anterior en el que basarse, es posible que resulte necesario emplear más de una variable para su orientación.

Método	Determinación del primer segmento	Determinación del resto de segmentos
<u>AlfaRaAlfa</u>	$\alpha_1$ y $Ra_1$ Los segmentos 0 y 1 del polígono adaptado son determinados de forma que los puntos 1 y 2 estén sobre la curva propuesta y los valores de $\alpha_1$ y $Ra_1$ sean iguales a los del polígono característico.	$\alpha_i$ El resto de segmentos ( $i = 2, 3, \dots, n-2$ ) son determinados secuencialmente de forma que sus puntos finales estén sobre la curva propuesta y los ángulos $\alpha_i$ sean iguales a los del polígono característico.
<u>AlfaRaRa</u>	$\alpha_1$ y $Ra_1$ Los segmentos 0 y 1 del polígono adaptado son determinados de forma que los puntos 1 y 2 estén sobre la curva propuesta y los valores de $\alpha_1$ y $Ra_1$ sean iguales a los del polígono característico.	$Ra_i$ El resto de segmentos ( $i = 2, 3, \dots, n-2$ ) son determinados secuencialmente de forma que sus puntos finales estén sobre la curva propuesta y los valores $Ra_i$ sean iguales a los del polígono característico.
<u>BetaAlfa</u>	$\beta_0$ El segmento 0 del polígono adaptado es determinado de forma que el punto 1 esté en la curva propuesta y el ángulo $\beta_0$ sea igual al del polígono característico.	$\alpha_i$ El resto de segmentos ( $i = 1, 2, \dots, n-2$ ) son determinados secuencialmente de forma que sus puntos finales estén sobre la curva propuesta y los ángulos $\alpha_i$ sean iguales a los del polígono característico.
<u>BetaBeta</u>	$\beta_0$ El segmento 0 del polígono adaptado es determinado de forma que el punto 1 esté en la curva propuesta y el ángulo $\beta_0$ sea igual al del polígono característico.	$\beta_i$ El resto de segmentos ( $i = 1, 2, \dots, n-2$ ) son determinados secuencialmente de forma que sus puntos finales estén sobre la curva propuesta y los ángulos $\beta_i$ sean iguales a los del polígono característico.
<u>BetaRa</u>	$\beta_0$ El segmento 0 del polígono adaptado es determinado de forma que el punto 1 esté en la curva propuesta y el ángulo $\beta_0$ sea igual al del polígono característico.	$Ra_i$ El resto de segmentos ( $i = 1, 2, \dots, n-2$ ) son determinados secuencialmente de forma que sus puntos finales estén sobre la curva propuesta y los valores $Ra_i$ sean iguales a los del polígono característico.

Tabla 4.1. Métodos de adaptación del polígono característico en la curva propuesta.

Combinando las variables anteriores se pueden plantear diferentes métodos de adaptación que será necesario estudiar posteriormente para su validación. De estas combinaciones se proponen algunas variantes<sup>79</sup> que son mostradas en la tabla 4.1.

Se observa cómo cada método propuesto diferencia la ubicación del primer segmento del polígono adaptado de la del resto de segmentos. Esto es debido a que al ubicar el primer segmento no se cuenta con segmentos anteriores que sirvan como referencias. Únicamente se conoce el punto de partida ( $P_0$ ) y se puede determinar la tangente a la curva propuesta en ese

<sup>79</sup> La variante restante incluyendo esas variables, *AlfaRaBeta*, no se ha incluido porque se ha comprobado mediante ensayos que presenta un comportamiento deficiente y no resulta ilustrativa.

punto. De esta forma, se puede utilizar esa tangente como referencia angular (métodos *BetaAlfa*, *BetaBeta* y *BetaRa*). Si no se opta por el uso del ángulo con respecto a la tangente, serán necesarias dos magnitudes para determinar la ubicación del primer segmento. En tal caso solo queda la alternativa de ubicar los dos primeros segmentos (determinando los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , figura 4.8) de forma que se conserven los valores de  $\alpha_1$  y  $Ra_1$  del polígono característico. Tras la ubicación de los dos primeros segmentos, el resto de segmentos cuentan con su inmediato anterior como referencias, por lo que es posible obtener el punto final de cada uno de ellos de una forma sencilla, involucrando una única variable. Realizando el procedimiento de forma secuencial se puede determinar completamente el polígono adaptado asociado a ese punto de partida  $P_0$ .

Es necesario hacer notar que, partiendo de un punto del polígono adaptado, la determinación del punto siguiente involucra un proceso de optimización, ya que no es posible obtener de una forma directa el punto de la curva que proporcionará el ángulo o la relación de segmentos adecuada. Por ejemplo, si se pretende determinar la posición del punto  $P_2$  a partir del punto  $P_1$  de forma que se conserve el ángulo  $\alpha_1$ , se parte de  $P_1$  y se prueban secuencialmente los puntos siguientes (en el sentido de avance considerado) y se determina el ángulo  $\alpha$  que cada uno de ellos supondría. Se continua la iteración hasta que se sobrepasa el ángulo buscado. Luego se utiliza un algoritmo de "*Regula Falsi*" para la determinación de la posición del punto  $P_2$  con la precisión requerida.

Como cada uno de los métodos de adaptación determina el segmento siguiente del polígono basándose en una magnitud diferente, los polígonos adaptados que cada uno de ellos genera serán en general diferentes. En la figura 4.10 se observa el resultado obtenido al adaptar el polígono característico en la curva propuesta mostrada en la figura 4.8, partiendo de un mismo punto  $P_0$  y según cada uno de los métodos de adaptación estudiados.

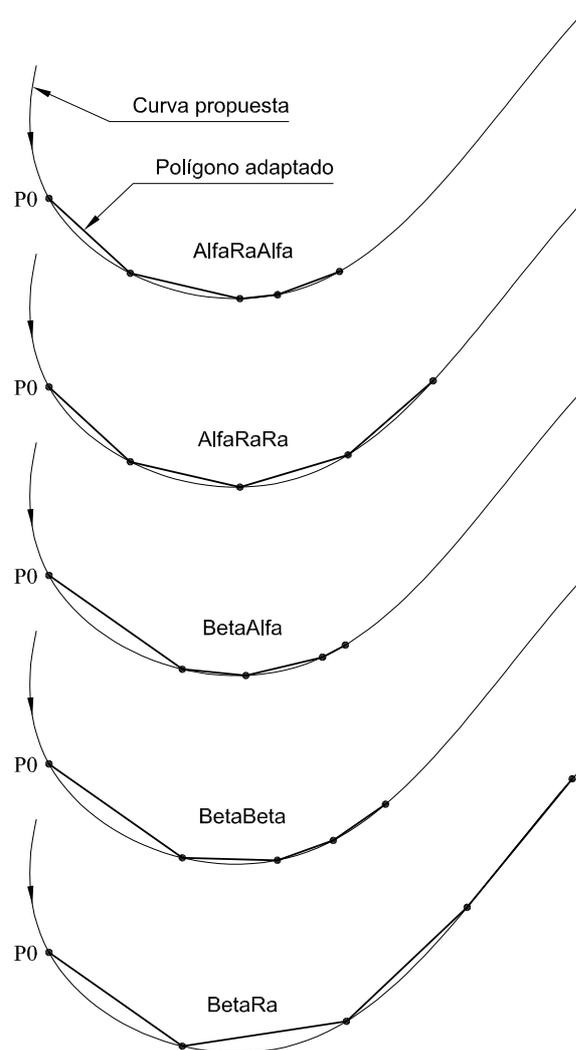


Figura 4.10. Adaptación de un polígono característico según los diferentes métodos.

Posteriormente a la adaptación del polígono, la diferencia de éste con el polígono característico será un estimador de la calidad de la superposición de la curva abierta requerida partiendo de ese punto  $P_0$ . Para la cuantificación de esta diferencia entre polígonos se puede utilizar las variables implicadas en la adaptación. Esta posibilidad tiene a su favor el hecho de que estas variables son ya independientes de posición, orientación y escala de las curvas comparadas, y el método de adaptación también. En este caso se propone utilizar el método *PDCP1* descrito en el capítulo 3 debido a que involucra todas las variables consideradas para la adaptación del polígono a la vez que no involucra el radio de curvatura, el cual puede introducir inestabilidades en la función de comparación, como se observó en dicho capítulo. De esta forma, la función propuesta corresponde a la siguiente expresión:

$$F_{PDCP1} = \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^{n-2} \left[ (Ra_i^\diamond - Ra_i)^2 + (\Delta_{ang}(\alpha_i^\diamond, \alpha_i))^2 \right] + \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-2} (\Delta_{ang}(\beta_i^\diamond, \beta_i))^2 \right\} \quad (4.9)$$

donde los valores representados con el símbolo ( $\diamond$ ) corresponden a magnitudes medidas sobre el polígono característico de la curva abierta requerida y las otras corresponden a magnitudes medidas sobre el polígono adaptado en la curva propuesta. La función  $\Delta_{ang}()$  permite cuantificar la diferencia entre dos ángulos y ha sido definida de forma que su resultado tienda a infinito cuando dicha diferencia angular tienda a  $\pm\pi$  (véase definición en ecuación (3.30)).

La ecuación (4.9) está asociada al punto de partida en la curva propuesta. Como se hiciera con el método *TE*, es posible representar el valor de dicha función a lo largo de la curva propuesta, es decir, variando el punto de partida dentro de dicha curva. Así, para el ejemplo propuesto en la figura 4.8 y utilizando el método de adaptación *BetaRa*, se obtiene una curva representada en la figura 4.11. Es posible observar cierta similitud entre esta gráfica y la obtenida con el método *TE* (figura 4.6).

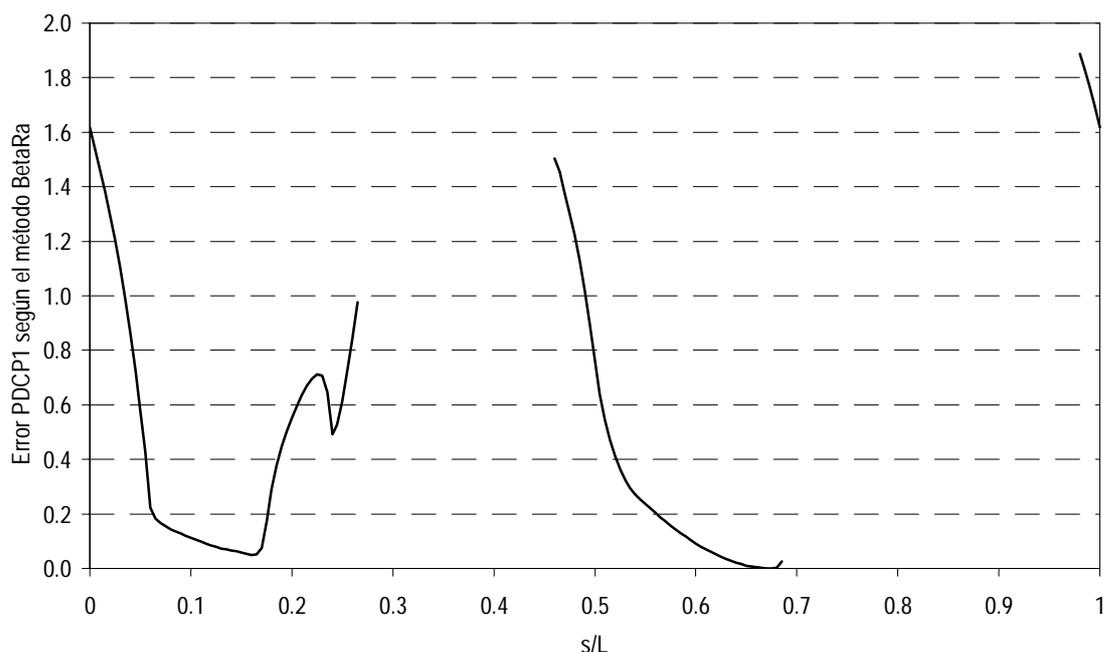


Figura 4.11. Representación de la variación de la comparación *PDCP1* a lo largo de la curva propuesta realizando la adaptación del polígono según el método *BetaRa*.

Analizando esta gráfica se observa que la adaptación poligonal presenta tres mínimos locales fundamentales, siendo uno de ellos el óptimo global. También se observa que la gráfica está dibujada a tramos. Esto es debido a que existen puntos de la curva propuesta a partir de los cuales (utilizando un el método de adaptación *BetaRa*) no es posible obtener el polígono adaptado porque no ha sido posible (y, en general, no siempre lo será) obtener todos los segmentos del mismo o porque, aunque haya sido posible, del punto inicial al punto final se ha dado más de una vuelta completa a la curva propuesta. La probabilidad de que ocurra esto será mayor en unos métodos que otros y, consecuentemente, deberá ser sometida a estudio. Sin embargo, el hecho de que esto ocurra no produce ningún perjuicio en el método debido a que sencillamente se reduce el rango del parámetro  $t$  de la curva propuesta dentro del cual se realizará la búsqueda de la mejor adaptación y puede ser interpretado considerando que para esos rangos del parámetro, las curvas se parecen tan poco que la superposición de las mismas solamente indicaría su escaso parecido.

#### 4.4. Ensayo de los métodos de adaptación.

---

Con el fin de comparar los diferentes métodos de adaptación y estudiar su comportamiento para poder determinar sus características y su idoneidad, se les ha sometido a diferentes ensayos. De los resultados obtenidos se han analizado diferentes características fundamentales que se detallan seguidamente:

- a) El rango útil de la curva propuesta. El cual se cuantifica como el porcentaje del rango del parámetro dentro del cual es posible se obtiene un error de comparación. En el método *TE* este rango útil será siempre del 100% debido a que siempre se puede realizar un ajuste de las CET partiendo de cualquier punto (aun cuando éste no sea un buen ajuste). Sin embargo, en los métodos de adaptación poligonal existirán puntos de partida que no permitan adaptar el polígono. No es claro a priori si resulta ventajoso que este rango sea lo más pequeño posible o lo mayor posible. En el primer caso, será más sencillo encontrar la superposición óptima ya que se reduce el espacio de diseño en el que hay que buscarla. Sin embargo, aumentarán los casos en los que el método de superposición óptima no encuentre ninguna solución porque no sea posible adaptar el polígono partiendo de ningún punto de la curva requerida.
- b) El número de mínimos locales provenientes de la discretización. Para encontrar el óptimo global en el problema de superposición se discretiza la curva propuesta y se obtiene el valor de la función error partiendo de cada punto de la discretización. Estos valores dispuestos en serie constituyen una representación gráfica similar a la de la figura 4.11 que permite determinar los mínimos de la discretización. Posteriormente habrá que utilizar un algoritmo de optimización partiendo de dichos mínimos discretos con el fin de obtener los correspondientes mínimos reales. Cuanto mayor sea el número

de mínimos locales, más costoso será el método de optimización global, por lo que es recomendable que este número sea bajo (aunque siempre dependerá de la forma de las curvas comparadas). De no ser por la discontinuidad implicada en la discretización, el método *TE* podría ser considerado el método más realista. Sin embargo, este método arrojará numerosos mínimos locales debido a que con la discretización la función error representada a lo largo de la curva presenta una oscilación de alta frecuencia (figura 4.6), por lo que su valor no puede ser utilizado como referencia.

- c) El error óptimo. Que cuantificará el parecido entre las curvas en la mejor superposición posible según cada uno de los métodos estudiados. Este error es calculado utilizando la función *PDCP1* para todos los métodos de adaptación poligonal, por lo que su valor se podrá comparar. Sin embargo, el método *TE* estima el error según otra formulación diferente, por lo que su error solamente podrá ser comparado con los anteriores de forma cualitativa.
- d) El valor del parámetro de la curva propuesta en que se encuentra el error óptimo. El óptimo conseguido vendrá asociado a un punto de la curva propuesta, el cual corresponde a un valor del parámetro de la misma. La evolución de este valor ante cambios en la discretización de cada uno de los métodos permitirá estudiar la estabilidad de la solución aportada por cada método. Es lógico pensar que puesto que las curvas no cambian, el punto de la curva propuesta que proporciona un mejor ajuste no debería cambiar al variar el número de puntos del polígono característico,
- e) La relación *Area encerrada/Longitud* en la superposición óptima. Una vez superpuestas las curvas de forma óptima<sup>80</sup>, es posible calcular el área encerrada entre las curvas (considerando la curva propuesta únicamente dentro del tramo abarcado por la curva requerida). Este área depende del tamaño de las curvas, siendo posible conseguir la independencia requerida dividiéndola entre la longitud de la curva requerida superpuesta. Al hacerlo así, puede decirse que el valor obtenido representa la distancia media entre las dos curvas. Considerando que el área encerrada entre las curvas es el mejor indicador del parecido entre ellas, este valor será el indicador más realista entre las diferencias de las curvas una vez que estas han sido superpuestas de forma óptima y podrá ser utilizado para comparar la solución aportada por los diferentes métodos.
- f) El coste computacional. Ya se ha insistido anteriormente en la necesidad de que la comparación de curvas sea computacionalmente lo menos costosa posible pues ello repercutirá notablemente sobre la viabilidad del problema de síntesis global.

---

<sup>80</sup> Para la superposición óptima de las curvas en los métodos de adaptación poligonal (una vez determinado el polígono adaptado óptimo) se adopta el criterio de hacer coincidir los puntos extremos de la curva abierta requerida con los puntos extremos del polígono adaptado.

### 4.4.1. Ensayo 1.

En este ensayo se estudia el cumplimiento del requisito de identidad por parte de los métodos propuestos en §4.3. Según este requisito, si la curva requerida abierta es parte de la curva propuesta —es decir, es en realidad un tramo de ésta—, al utilizar un método para comparar ambas curvas, éste debe encontrar el tramo de la curva propuesta que es igual al de la curva requerida y determinar que el error de comparación es 0.

Como curva propuesta se ha utilizado una B-Spline cúbica definida por un polígono de control de 7 vértices cuyo parámetro  $t$  varía dentro del intervalo  $[0,7[$ . La curva requerida se ha elegido dentro de esa misma B-Spline (es decir, mismas ecuaciones paramétricas) variando su parámetro  $u$  dentro del intervalo  $[0.5,2.5]$ . Ambas curvas están representadas en la figura 4.12.

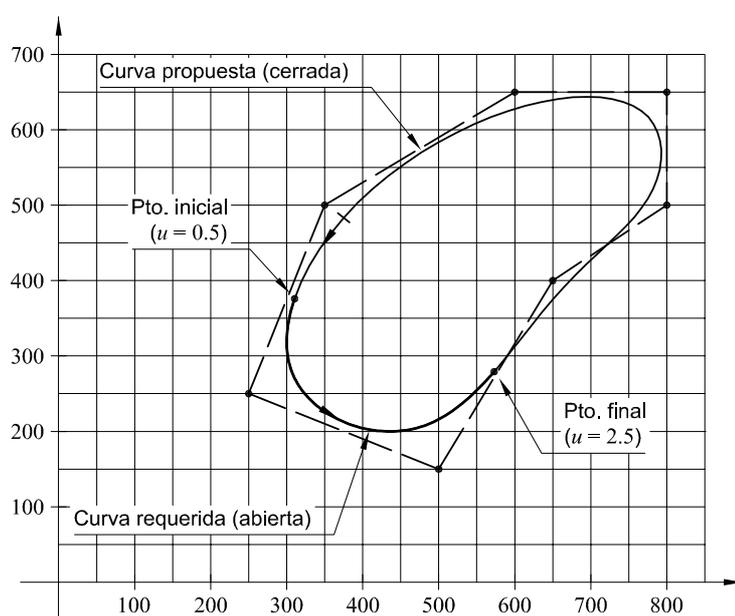


Figura 4.12. Curvas requerida y propuesta en el ensayo de identidad.

Partiendo de esos datos se ensayan los diferentes métodos. Para el método *TE* se han considerado 200 puntos (discretización) mientras que para los métodos de adaptación poligonal se han considerado 5 puntos. En estos últimos se ha realizado una búsqueda exhaustiva considerando 50 puntos<sup>81</sup> (discretización), para luego optimizar los mejores puntos y obtener el óptimo global.

<sup>81</sup> Tras diferentes pruebas se han observado que este valor resulta aceptable para los métodos. Un valor más alto supondría un aumento del coste computacional y un valor menor supondría una discretización demasiado basta que disminuiría la probabilidad de la consecución del óptimo global.

	AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
Nº ptos. del polígono	5	5	5	5	5	
Nº ptos. discretización	50	50	50	50	50	200
Rango útil	16.0%	90.0%	33.0%	65.0%	70.0%	100.0%
Nº mín. loc. discret.	2	2	5	10	6	9
Error óptimo	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000032
Param. en óptimo	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.51
Area enc./Long.	0.005526	0.006295	0.005377	0.003499	0.003789	0.790067
Coste comp. (seg)	0.79	0.70	0.18	0.29	0.18	1.62

Tabla 4.2. Resultados del ensayo de comprobación del requisito de identidad.

Los resultados de la superposición pueden observarse en la figura 4.14 y los valores sometidos a estudio se muestran en tabla 4.2. En ella se observa la diferencia entre el rango útil asociado a los diferentes métodos de adaptación poligonal. En este caso, el método *AlfaRaAlfa* presenta el menor rango útil (16%), siendo el mayor (aparte del método *TE*) el correspondiente al método *AlfaRaRa* (90%).

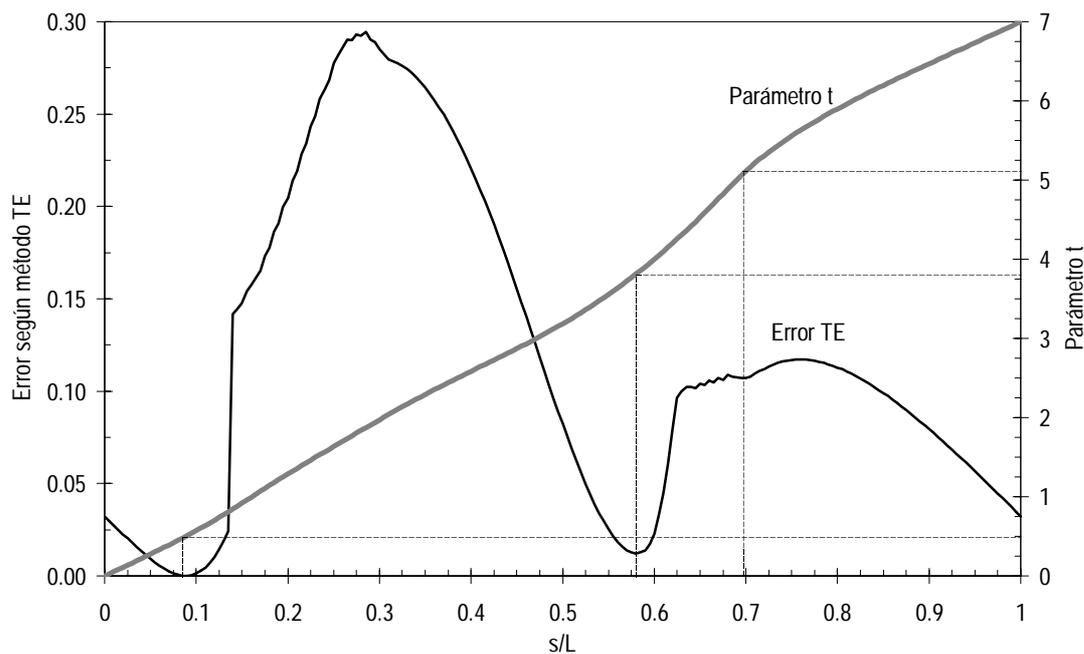


Figura 4.13. Error de comparación en función del punto inicial de superposición para las curvas del ensayo 1.

En cuanto al número de mínimos locales en la discretización —fila “*Nº mín. loc. discret.*” en la tabla 4.2—, se observa que los valores obtenidos varían entre 2 y 10. El número de óptimos en relación con el rango útil de cada método es un indicador de las oscilaciones que cada uno presenta por unidad de longitud de la curva. Se observa que hay métodos con un valor bajo de este indicador (por ejemplo, el método *AlfaRaRa*) mientras que otros presentan un valor más elevado (método *BetaAlfa*).

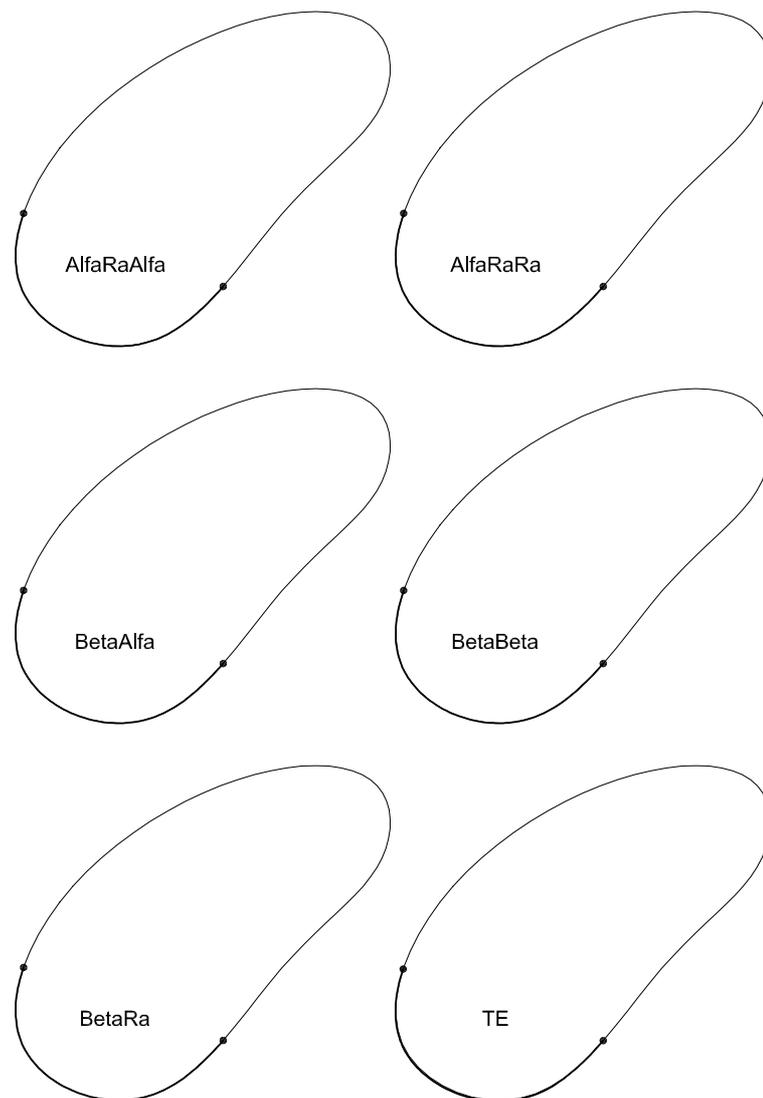


Figura 4.14. Superposición óptima de las curvas según los diferentes métodos en el ensayo 1.

Si se examina la curva de error del método *TE* en función del punto inicial de superposición (figura 4.13, en la cual también se ha representado la variación del parámetro  $t$  a

lo largo de la longitud de la curva con el fin de conocer el valor de este parámetro en cada mínimo local) y, descartando los mínimos locales debidos a la discretización, se observa que la superposición de las curvas involucradas en este ensayo presenta 3 mínimos locales fundamentales (correspondientes a valores del parámetro  $t$  iguales a 0.5, 3.8 y 5.1). Se puede comparar entonces el valor del resto de métodos con este valor observando el grado de ajuste de cada uno de ellos.

El error de comparación óptimo indica el cumplimiento o no del *requisito de identidad*. Se observa que, efectivamente, todos los métodos de adaptación poligonal cumplen este requisito. El método *TE* cumple este requisito solamente de forma aproximada ya que, como cabía esperar, la cercanía a la posición óptima depende de la finura de la discretización.

Dado que la curva requerida es en este ensayo extraída de la propuesta variando el parámetro  $u$  en el intervalo  $[0.5, 2.5]$ , la mejor superposición posible será partiendo del punto de la curva propuesta correspondiente a un valor del parámetro  $t=0.5$ . En la tabla se observa que todos los métodos de adaptación poligonal encuentran este valor, mientras que el método *TE* presenta un cierto error que es inversamente proporcional a la finura de la discretización. Esto corrobora la afirmación de que este método cumple el *requisito de identidad* solamente de forma aproximada.

En la fila que indica el área encerrada por unidad de longitud se observa cómo todos los métodos (salvo el *TE*) presentan un área encerrada de igual orden de magnitud, lo que indica que la calidad de la respuesta de todos ellos es similar. El método *TE*, una vez más debido a la discretización, realiza una superposición menos favorable de acuerdo con este valor.

Finalmente, en la evaluación del coste computacional, existe diferencia de unos métodos a otros. Los más económicos son los métodos *BetaAlfa* y *BetaRa*. El más costoso computacionalmente es el método *TE*, el cual necesita entre 2 y 9 veces más tiempo para encontrar el óptimo.

Otra característica sometida a estudio en los métodos de adaptación poligonal es la estabilidad de los parámetros más importantes de la tabla 4.2 frente a cambios en el número de puntos del polígono característico. Para ello se ha incrementado el número de puntos del polígono ( $n$ ) característico desde 5 hasta 10 puntos y se ha repetido el proceso de adaptación. Nótese que el método *TE*, al no estar basado en un polígono característico, no modifica sus propiedades y ha sido incluido en los resultados siguientes con el único fin de servir como referencia.

<i>n</i>	AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
5	16.0%	90.0%	33.0%	65.0%	70.0%	100.0%
6	8.0%	71.0%	12.0%	68.0%	77.0%	100.0%
7	21.0%	71.0%	17.0%	64.0%	81.0%	100.0%
8	11.0%	69.0%	7.0%	72.0%	82.0%	100.0%
9	12.0%	70.0%	16.0%	68.0%	82.0%	100.0%
10	21.0%	72.0%	36.0%	68.0%	82.0%	100.0%

Tabla 4.3. Rango útil frente al número de puntos del polígono en el ensayo 1.

En la tabla 4.3 se muestra el rango útil y cómo ha evolucionado al aumentar el número de puntos. Se observa que sí existe un cambio pero la tendencia es diferente de unos métodos a otros y esta falta de tendencia impide obtener conclusiones sobre los cambios en el rango útil al crecer el número de puntos.

El ensayo demuestra que el número de mínimos locales en la discretización apenas varía en la mayoría de los métodos al incrementar el número de puntos del polígono. Cabe destacar el método *BetaBeta* cuyo número de mínimos tiene una tendencia irregular con propensión a aumentar.

Del mismo modo, el valor del óptimo para este ejemplo permanece prácticamente constante al aumentar el número de puntos del polígono, lo que es indicador de la estabilidad.

En cuanto al parámetro asociado al óptimo, su estabilidad es fundamental ya que de no existir, ello significaría que el óptimo encontrado depende del número de puntos elegido en el polígono, lo que no tendría una justificación práctica. En la tabla 4.4 se muestran los datos que reflejan esta estabilidad. La respuesta de algunos métodos fluctúa en torno al valor ideal (0.5). Sin embargo, las oscilaciones son tan pequeñas que pueden achacarse a problemas computacionales debido a la precisión en la optimización.

<i>n</i>	AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
5	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.510
6	0.500	0.499	0.500	0.500	0.500	0.510
7	0.499	0.499	0.500	0.500	0.500	0.510
8	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.510
9	0.498	0.498	0.500	0.500	0.500	0.510
10	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.510

Tabla 4.4. Parámetro asociado al óptimo frente al número de puntos del polígono en el ensayo 1.

Por su parte, la variación del coste computacional de los métodos al incrementar el número de puntos considerado en el polígono es muy significativa (tabla 4.5). Se observan tendencias diferentes para cada método, aunque todas ellas se ajustan moderadamente bien a

una recta. Se ha realizado el ajuste minimocuadrático y las líneas de tendencia han sido representadas en la figura 4.15. Se observa cómo algunos métodos tienen un coste computacional creciente con el número de puntos, mientras que en otros permanece prácticamente estacionario o decrece.

<i>n</i>	AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
5	0.79	0.70	0.18	0.29	0.18	1.62
6	0.63	0.59	0.22	0.42	0.20	1.62
7	0.59	0.53	0.19	0.40	0.20	1.62
8	0.57	0.49	0.20	0.46	0.23	1.62
9	0.42	0.51	0.20	0.49	0.25	1.62
10	0.42	0.52	0.21	0.58	0.26	1.62

Tabla 4.5. Coste computacional (seg) frente al número de puntos del polígono en el ensayo 1.

Por un lado, los métodos que ubican el primer segmento en función de en  $\alpha$  y  $Ra$  — métodos *AlfaRaAlfa* y *AlfaRaRa*— sufren un decrecimiento en el coste computacional al aumentar el número de puntos. Esto es debido a que estos métodos utilizan buena parte de su tiempo de computación en colocar el primer segmento ya que ésta ubicación involucra dos optimizaciones anidadas. A medida que se incrementa el número de puntos, los segmentos son más cortos y los ángulos más obtusos, con lo que partiendo del primer punto es más fácil encontrar la posición del siguiente (sencillamente porque está más cerca del primero). Este efecto prepondera sobre el efecto de que al aumentar el número de puntos hay que adaptar más segmentos y el resultado es una disminución del coste computacional. Por otro lado, el resto de métodos de adaptación sufre un aumento del coste computacional, siendo la pendiente más significativa la del método *BetaBeta*, que al pasar de 5 a 10 puntos prácticamente duplica su coste computacional.

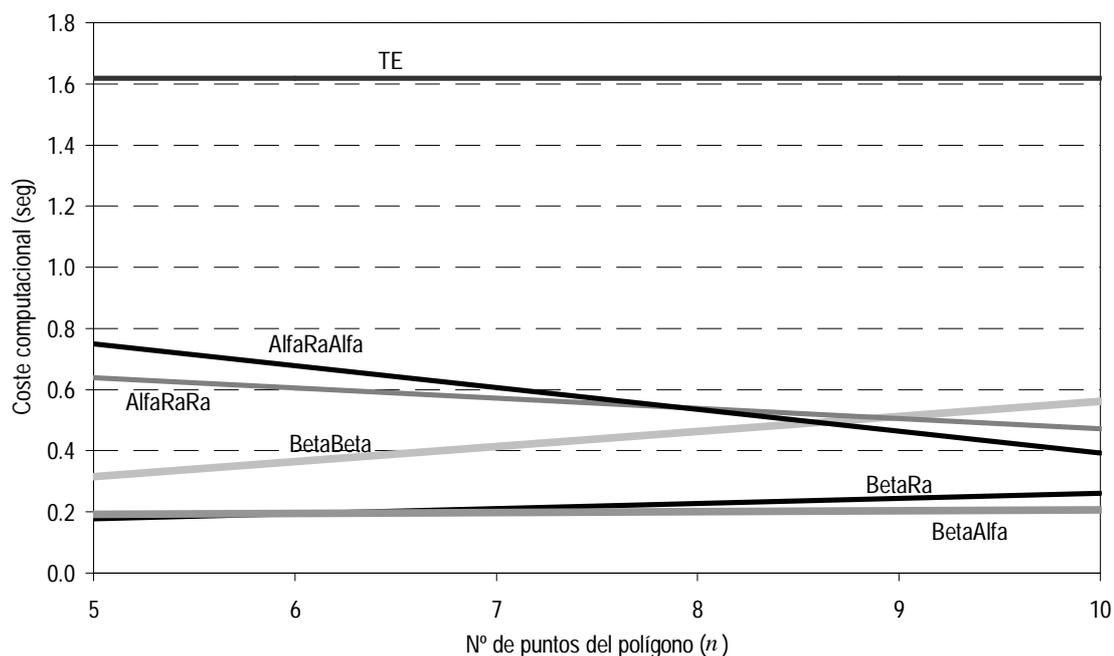


Figura 4.15. Tendencia del coste computacional al variar el número de puntos en el ensayo 1.

De este ensayo se puede concluir que la formulación de todos los métodos ocasiona que éstos presenten una tendencia clara hacia el cumplimiento del *requisito de identidad*. En el caso del método *TE* existen limitaciones prácticas debidas a que la necesaria discretización hace que la aproximación a la solución óptima real sea función del tamaño de cada segmento en dicha discretización.

Se observa, asimismo, que en los métodos de adaptación el rango útil y el número de mínimos locales cambia considerablemente de unos a otros. En el caso del número de mínimos locales, es adecuado un valor bajo pues ello supondrá un aumento de la economía computacional al no tener que comprobar un gran número de mínimos para determinar cual es el óptimo global. Sin embargo, un valor menor que el número de mínimos fundamentales del método *TE* (que es considerado el más realista) implicaría que el método no es sensible a todos los mínimos reales.

En cuanto al rango útil, un valor bajo mejora el coste computacional —ya que el espacio recorrido en la búsqueda es menor—, sin embargo, al comparar otros tipos de curvas existe una gran probabilidad de no ser capaces de aportar ninguna solución —es decir, que el rango útil llegue a ser del 0%—.

### 4.4.2. Ensayo 2.

Mediante este ensayo se representa el comportamiento de los métodos en la comparación de una curva requerida abierta sencilla (no contiene puntos dobles ni puntos de inflexión) con una curva propuesta cerrada similar a la generada por muchos mecanismos (igual a la utilizada en el ensayo 1, figura 4.16).

La curva requerida utilizada es una curva paramétrica definida por las ecuaciones.

$$\begin{aligned} x(u) &= 10 \cdot u^4 \cdot \cos(u) \\ y(u) &= 10 \cdot u^4 \cdot \sin(u) \end{aligned} \quad (4.10)$$

variando el parámetro  $u$  dentro del intervalo  $[0.75, 2.2]$ . En la figura 4.16 se puede observar la forma (y la sencillez) de esta curva abierta.

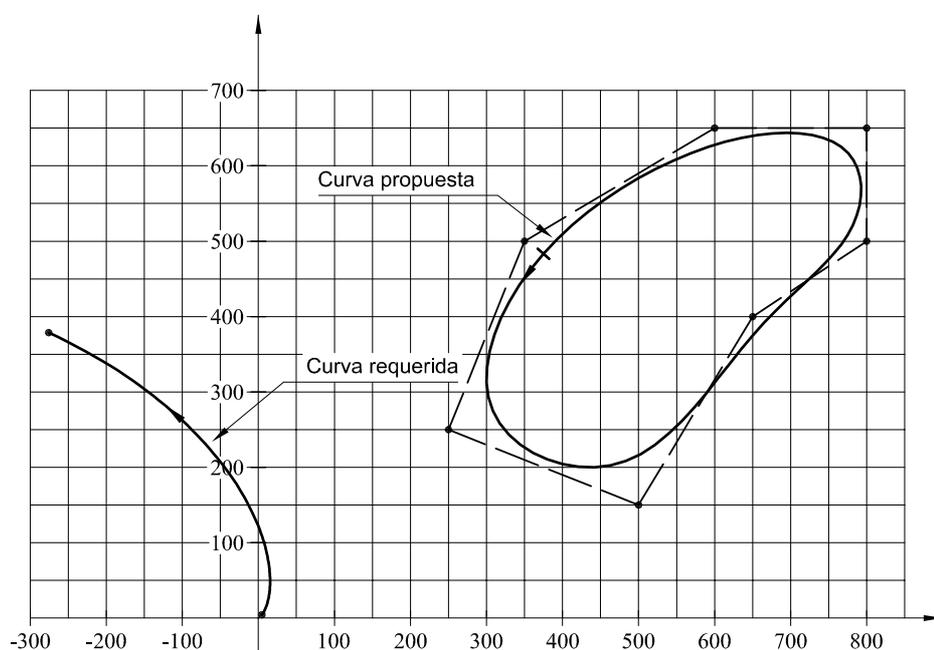


Figura 4.16. Curvas requerida y propuesta utilizadas en el ensayo 2.

Para este caso se ensayan los diferentes métodos y se obtienen los resultados mostrados en la tabla 4.6. Observando en ella el rango útil se puede comprobar que utilizar el ángulo  $\alpha$  para la adaptación de los polígonos resulta muy restrictivo. En efecto, los métodos basados en este ángulo —*AlfaRaAlfa* y *BetaAlfa*— tienen un rango útil muy pequeño (incluso llega a ser nulo en este caso para el método *BetaAlfa*). Esto implica la importante desventaja de que esos métodos no serán capaces de aportar ninguna solución para muchos casos de comparación.

En cuanto al número de mínimos locales obtenidos, su valor varía entre 3 y 21. Contemplando la curva de error correspondiente al método *TE* (figura 4.13) se observa que este presenta numerosos mínimos debidos a la discretización, pudiendo identificar 3 (o tal vez 4) mínimos locales fundamentales (ignorando los debidos a la discretización) en  $t=0.81$ ,  $t=1.4$  y  $t=4.89$ . Comparando este número con el obtenido por cada uno de los métodos se observa que el método *BetaBeta* es poco realista en este sentido. El resto de métodos no comentados presenta un número óptimo de mínimos locales.

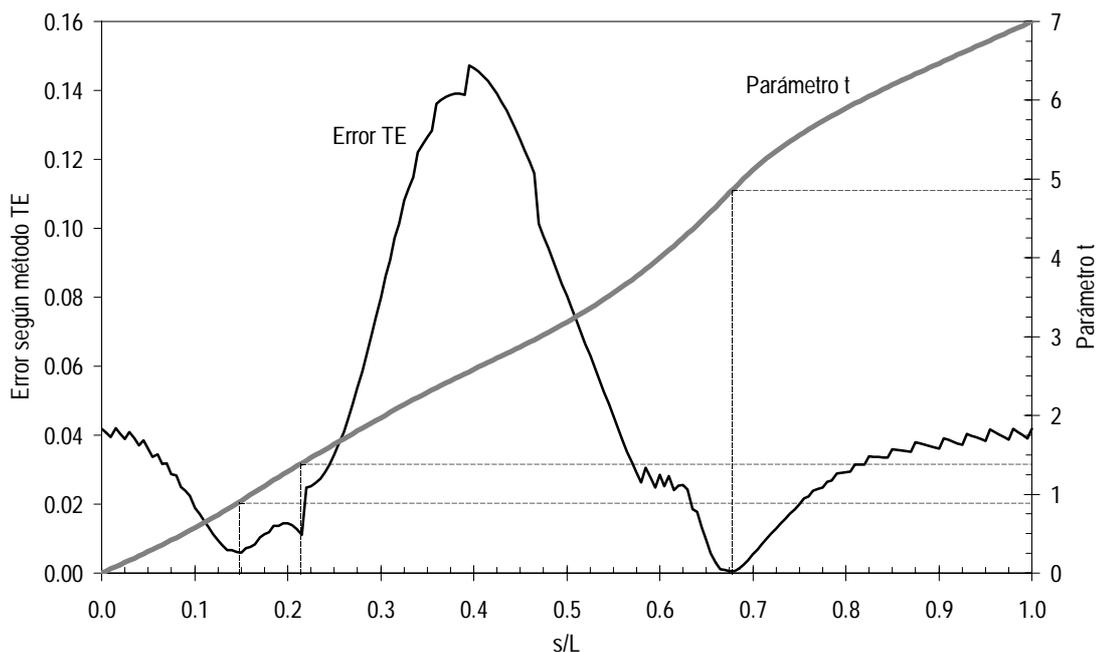


Figura 4.17. Error de comparación en función del punto inicial de superposición para las curvas del ensayo 2.

	AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
Nº pts. del poligono	5	5	5	5	5	
Nº pts. discretización	50	50	50	50	50	200
Rango útil	6.0%	94.0%	0.0%	83.0%	52.0%	100.0%
Nº mín. loc. discret.	3	3		10	3	21
Error óptimo	0.247593	0.005684		0.007991	0.000410	0.000567
Param. en óptimo	0.87	4.81		4.75	4.81	4.89
Area enc./Long.	2.473	2.458		2.492	1.633	1.779
Coste comp. (seg)	0.62	0.53	0.20	0.27	0.23	0.63

Tabla 4.6. Resultados del ensayo 2.

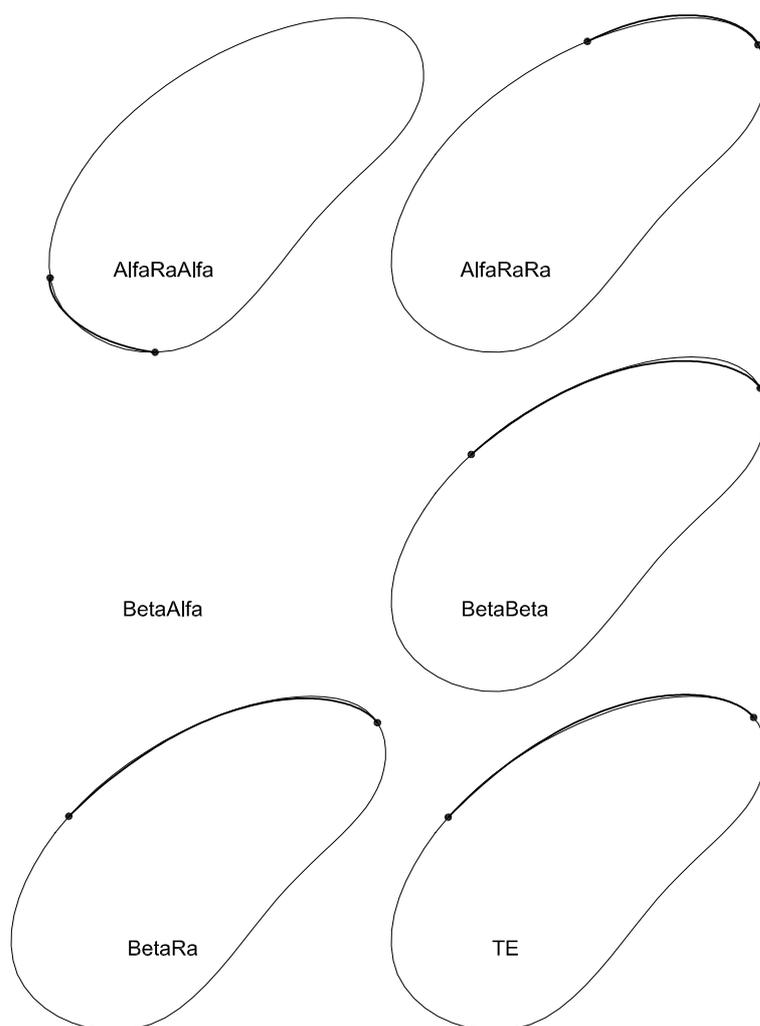


Figura 4.18. Superposición óptima de las curvas según los diferentes métodos en el ensayo 2.

Se observa, asimismo, que todos los métodos encuentran óptimos considerablemente buenos, excepto el método *AlfaRaAlfa* que aporta una solución no tan favorable (la superposición correspondiente a cada una de las soluciones aportadas por los métodos puede observarse en la figura 4.18). Esto puede contemplarse observando los errores de comparación óptimos obtenidos y, de una forma mucho más realista, observando el “*Area encerrada/Longitud*”. En este último se observa que la mejor solución es la aportada por el método *BetaRa*.

En la fila correspondiente al parámetro de la curva propuesta a partir del cual se obtiene la superposición óptima, se observa cómo el método *AlfaRaAlfa* establece la mejor

superposición en un punto de la curva propuesta que no coincide con el del resto de métodos<sup>82</sup>. En la figura 4.18 puede observarse la diferencia en la posición propuesta por este método. Igualmente se observa cómo el método *AlfaRaRa* aporta una solución diferente (ya que su polígono también lo es) al del resto de métodos, aun cuando el punto inicial del polígono adaptado está prácticamente en la misma ubicación que el de los otros métodos.

Finalmente, el coste computacional de los métodos varía entre 0.2 seg y 0.63 seg, siendo el método *TE* el más costoso.

De la misma forma que en el ensayo 1, se estudia a continuación la evolución de los diferentes parámetros característicos al aumentar el número de puntos del polígono. En la tabla 4.7 se muestra la evolución del rango útil al variar este número de 5 a 10. En general se observa un decrecimiento de los rangos útiles de los métodos basados en la adaptación de polígonos. Esto es debido a que el número de condiciones (o requisitos) que han de cumplir los polígonos adaptados aumenta con el número de puntos y, consecuentemente, aumenta también la probabilidad de que no se encuentre solución.

n	AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
5	6.0%	94.0%	0.0%	83.0%	52.0%	100.0%
6	0.0%	89.0%	0.0%	82.0%	45.0%	100.0%
7	0.0%	77.0%	0.0%	70.0%	42.0%	100.0%
8	0.0%	72.0%	0.0%	39.0%	39.0%	100.0%
9	0.0%	66.0%	0.0%	24.0%	38.0%	100.0%
10	0.0%	62.0%	0.0%	22.0%	35.0%	100.0%

Tabla 4.7. Rango útil frente al número de puntos del polígono en el ensayo 2.

El resto de parámetros presentan valores bastante estables. Entre ellos cabe destacar el parámetro asociado al óptimo, que no varía en este ejemplo, lo que indica estabilidad en el punto de superposición óptima logrado.

Finalmente, el coste computacional presenta unos datos mostrados en la tabla 4.8. Se observa una evolución irregular del coste computacional con cierta generalidad tendente al aumento en algunos métodos —*AlfaRaRa*, *BetaBeta* y *BetaRa*— y tendente a la disminución en el método *AlfaRaAlfa*.

<sup>82</sup> En realidad se observa que la solución está del primero ( $t=0.81$ ) de los 3 mínimos de la gráfica de error del método *TE* (figura 4.6).

n	AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
5	0.62	0.53	0.20	0.27	0.23	0.63
6	0.52	0.55	0.19	0.35	0.24	0.63
7	0.50	0.57	0.19	0.40	0.25	0.63
8	0.49	0.59	0.19	0.45	0.30	0.63
9	0.48	0.56	0.19	0.39	0.33	0.63
10	0.47	0.55	0.19	0.48	0.32	0.63

Tabla 4.8. Coste computacional (seg) frente al número de puntos del polígono en el ensayo 2.

### 4.4.3. Ensayo 3.

El objetivo de este ensayo es estudiar el comportamiento de los diferentes métodos en la superposición (y comparación) de curvas con puntos de inflexión. Como curva propuesta se utiliza una B-Spline cúbica definida por un polígono de control de 6 vértices, variando su parámetro  $t$  dentro del intervalo  $[0,6[$ . Esta curva y su polígono de control se muestran en la figura 4.19.

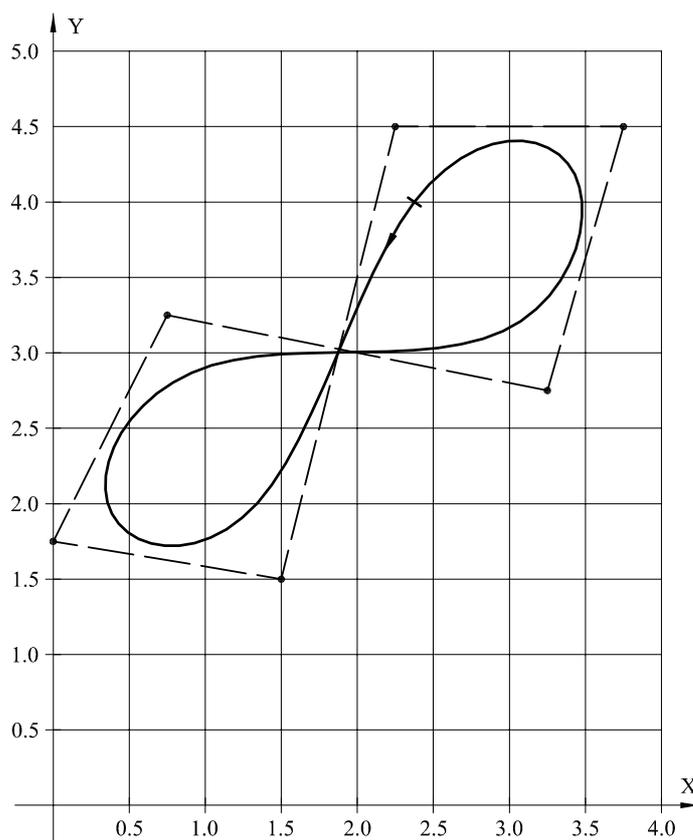


Figura 4.19. Curva propuesta en el ensayo 3.

La curva requerida utilizada para este ensayo es una curva senoidal definida paramétricamente mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(u) &= u \\ y(u) &= \text{sen}(u) \end{aligned} \quad (4.11)$$

variando el parámetro  $u$  dentro del intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Este tramo de curva se muestra en la figura 4.20.

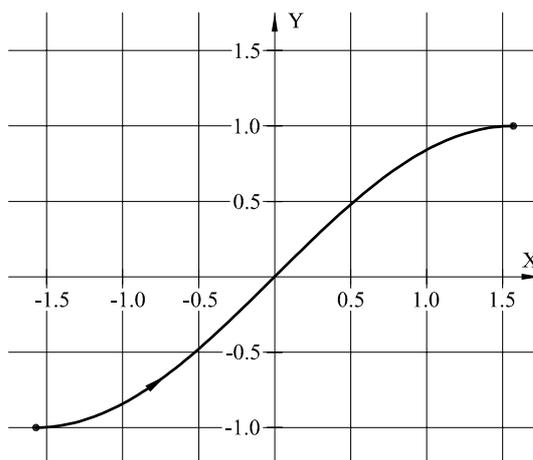


Figura 4.20. Curva abierta requerida en el ensayo 3.

Los resultados de este (tabla 4.9) reafirman el comportamiento de los métodos en los ensayos anteriores. Así, se confirma la tendencia de los *AlfaRaAlfa*, *BetaAlfa* y *BetaBeta* a presentar rangos útiles muy pequeños (incluso nulos). Por otro lado, el resto de métodos presentan valores más amplios, lo que asegura la aportación de solución incluso en casos desfavorables.

	AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
Nº pts. del polígono	5	5	5	5	5	
Nº pts. discretización	50	50	50	50	50	200
Rango útil	0.0%	56.0%	0.0%	2.0%	40.0%	100.0%
Nº mín. loc. discret.		4		1	3	18
Error óptimo		0.022982		0.006189	0.000062	0.000157
Param. en óptimo		5.65		5.63	5.65	5.65
Area enc./Long.		0.107		0.011	0.003	0.005
Coste comp. (seg)	0.47	0.52	0.18	0.20	0.20	2.50

Tabla 4.9. Resultados del ensayo 3.

Estudiando el número de mínimos locales, en la figura 4.21 se observan 3 mínimos locales fundamentales (en  $t=2.87$ ,  $t=4.18$  y  $t=5.65$ ), uno de los cuales es considerablemente menor (óptimo global) que el resto. El método *TE* presenta numerosos mínimos debidos a la discretización y se observa que para eliminar los *mínimos artificiales* se debería incrementar esta discretización de forma considerable. Del resto de métodos, los métodos *AlfaRaRa* y *BetaRa* presentan un número de mínimos muy cercano al valor real.

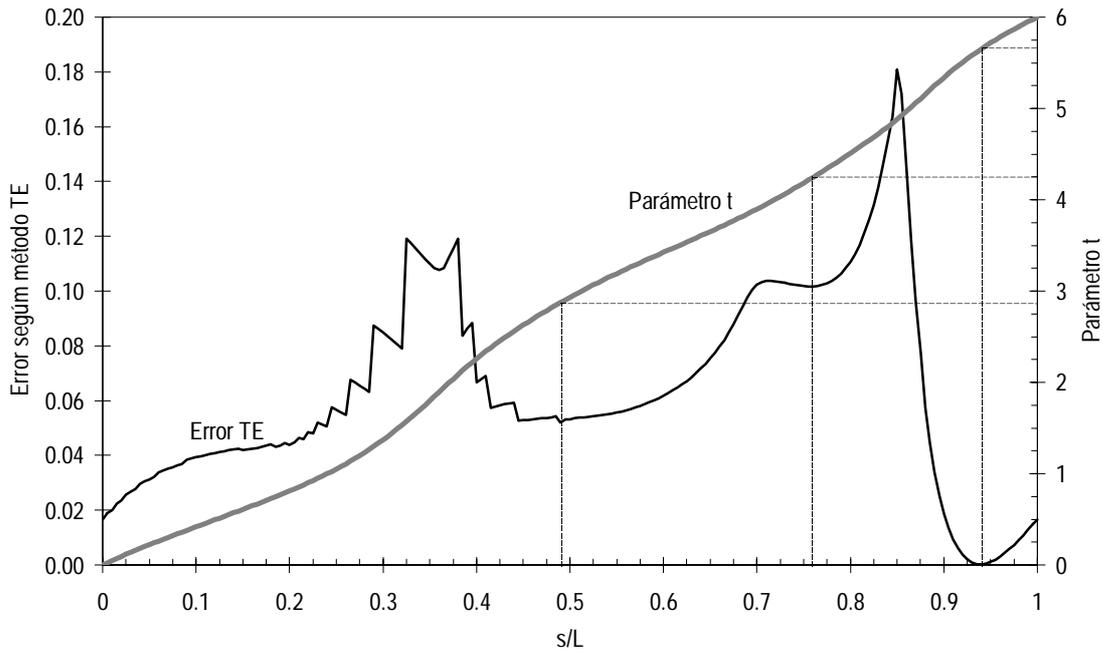


Figura 4.21. Error de comparación en función del punto inicial de superposición para las curvas del ensayo 3.

Todos los métodos que aportan solución encuentran el óptimo global, lo cual puede comprobarse observando que el valor del parámetro asociado a este óptimo está en torno a  $t=5.62$  para todos ellos. Observando el valor del área encerrada por unidad de longitud se comprueba que los mejores métodos son el método *BetaRa*, el método *TE* y luego el resto. Se observa que el método *AlfaRaRa* aporta una solución considerablemente peor que el resto de métodos, siendo el valor en éstos últimos muy similar. Las curvas superpuestas de acuerdo con la solución aportada por cada método se muestra en la figura 4.22.

Finalmente, el coste computacional de los métodos basados en la adaptación poligonal varía entre 0.18 y 0.52 seg. Se observa que, como en los métodos anteriores, existe diferencia entre los métodos de adaptación poligonal que ubican el primer segmento en base a  $\alpha$  y  $Ra$  y los que lo hacen en base a  $\beta$ . Los segundos tienen un coste computacional similar y son los

más económicos. El método *TE* ha sido en este caso considerablemente más costoso, con un coste aproximadamente igual a 14 veces superior al del mejor de los métodos anteriores.

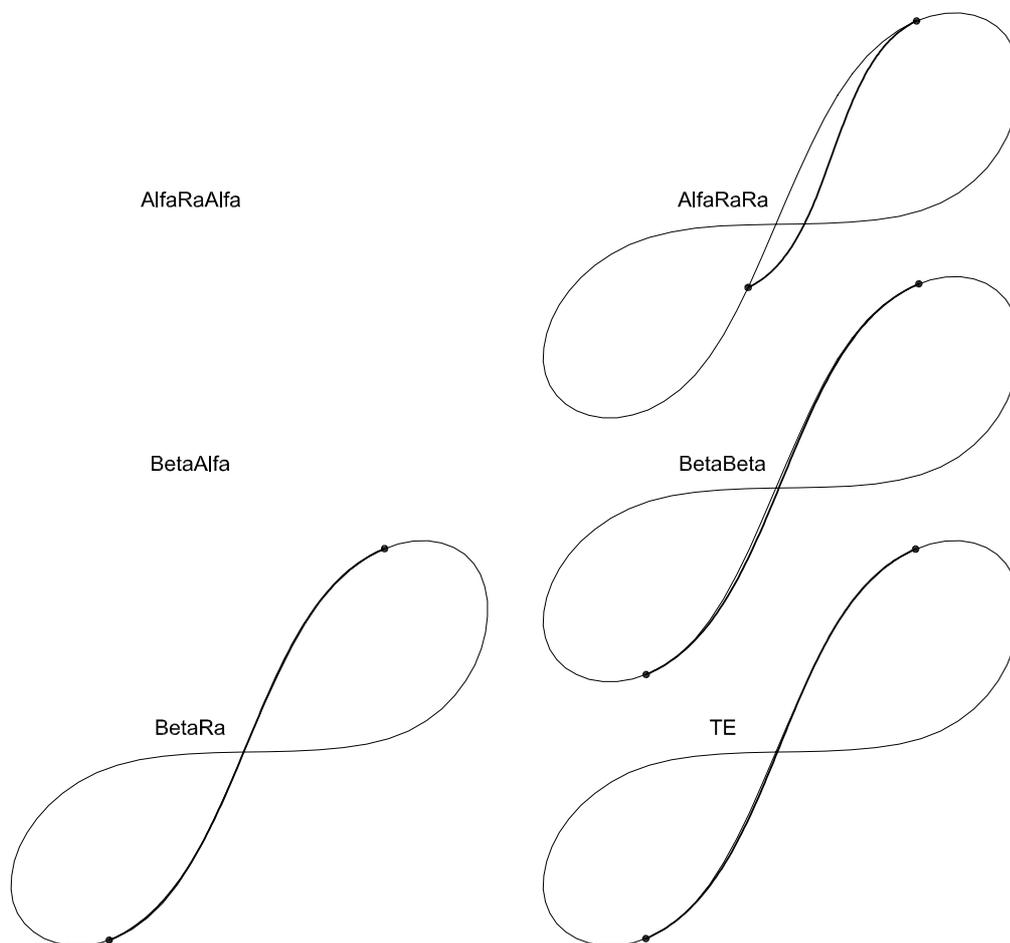


Figura 4.22. Superposición óptima de las curvas según los diferentes métodos en el ensayo 3.

Se ha analizado la evolución de los parámetros anteriores al variar el número de puntos del polígono característico desde 5 hasta 10. Se ha observado que casi todos los parámetros tienen escasa variación, siendo más significativa la del *rango útil* y la del *coste computacional*. Así, en el método *AlfaRaRa* se observa una disminución lenta del rango útil a medida que crece el número de puntos (tabla 4.10). El método *BetaBeta* que presentaba un rango útil del 2% con 5 puntos, no aporta ninguna solución con más de 5 puntos. Finalmente, el método *BetaRa* tiene una escasa variación en este ensayo.

n	AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
5	0.0%	56.0%	0.0%	2.0%	40.0%	100.0%
6	0.0%	56.0%	0.0%	0.0%	40.0%	100.0%
7	0.0%	54.0%	0.0%	0.0%	38.0%	100.0%
8	0.0%	50.0%	0.0%	0.0%	40.0%	100.0%
9	0.0%	48.0%	0.0%	0.0%	40.0%	100.0%
10	0.0%	46.0%	0.0%	0.0%	38.0%	100.0%

Tabla 4.10. Rango útil frente al número de puntos del polígono en el ensayo 3.

Por su lado, el coste computacional demuestra variar poco con este incremento del número de puntos. Se producen pequeños incrementos y decrementos (dependiendo del método) pequeños en este coste siguiendo la misma tendencia que en el ensayo 2.

En la figura 4.23 se observa que el método *AlfaRaRa* aporta una solución poco realista (en el sentido de que se puede conseguir otra mucho mejor y así lo confirman otros métodos). La razón por la que este método aporta una solución tan pobre es analizada a continuación. En la figura 4.23 se muestra el mejor polígono adaptado según éste método. Para la colocación de los dos primeros segmentos partiendo del punto 0 de la curva propuesta se buscan los puntos 1 y 2 de forma que se respeten  $\alpha_1$  y  $Ra_1$ . Para ello se propone un punto 1 y se busca el punto 2 que hace que se respeten los valores de esas variables. El problema está en que, en esa posición, el segmento 1 está casi alineado con la curva propuesta y en la búsqueda del ángulo  $\alpha_1$ , cualquier pequeña rotación del segmento 1 ocasiona que el punto 2 (intersección del segmento 1 con la curva propuesta) se desplace una gran distancia. Debido a esta posición singular, el algoritmo de optimización demuestra tener dificultad para encontrar la mejor solución en la ubicación de los segmentos ① y ② —ya que una pequeña variación del ángulo  $\alpha$  produce grandes desplazamientos—. Posteriormente, la ubicación del resto de segmentos —② y ③— está condicionada a la longitud del segmento ①, por lo que la solución no se ajustará a la realidad.

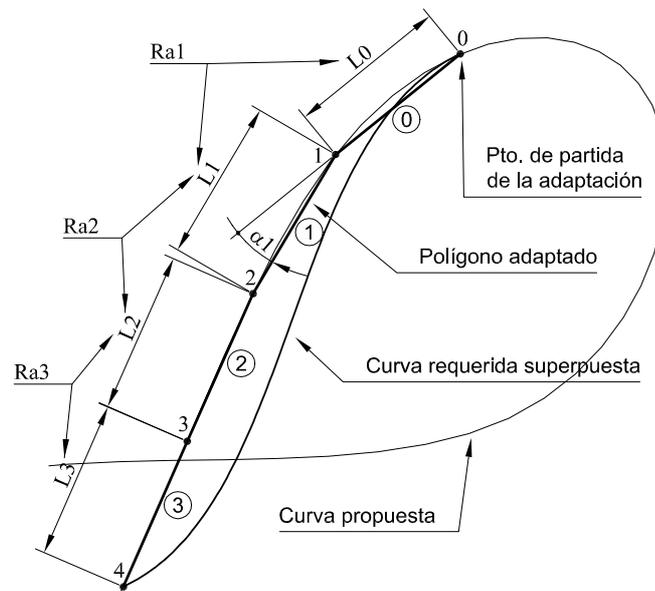


Figura 4.23. Polígono adaptado y curva superpuesta según el método *AlfaRaRa* en el ensayo 3.

#### 4.4.4. Ensayo 4.

Se ha observado que en ciertos casos, la respuesta de los métodos de comparación de curvas abiertas basados en adaptación poligonal puede ser diferente de la respuesta del método *TE*, considerado el más realista.

Para ilustrar esto, se ha realizado la comparación entre una curva abierta requerida y una propuesta cerrada. La curva requerida (figura 4.24) viene definida por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} x(u) &= 100 \cdot u^2 \cdot \cos(u) \\ y(u) &= 100 \cdot u^2 \cdot \text{sen}(u) \end{aligned} \quad (4.12)$$

variando el parámetro  $u$  dentro del intervalo  $[0.261, 1.440]$ . La curva propuesta es una B-Spline cúbica definida mediante un polígono de control de 7 vértices (figura 4.24), variando su parámetro  $t$  dentro del intervalo  $[0,7[$ .

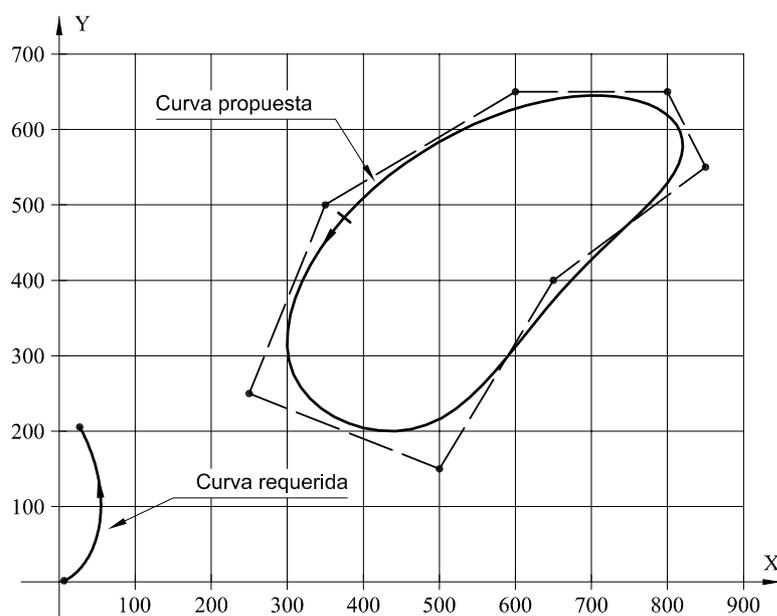


Figura 4.24. Curvas requerida y propuesta en el ensayo 4.

Se ha realizado la comparación según los diferentes métodos y los resultados se muestran en la tabla 4.11. En ella se observa cómo la posición de superposición óptima aportada por cada método (indicada por el valor del parámetro asociado al óptimo) es diferente (véase representación de las soluciones en la figura 4.26). Esto significa que cada método encuentra la mayor coincidencia entre la curva requerida y la curva propuesta en tramos diferentes de esta última.

	AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
Nº ptos. del polígono	5	5	5	5	5	
Nº ptos. discretización	50	50	50	50	50	200
Rango útil	10.0%	92.0%	6.0%	82.0%	64.0%	100.0%
Nº mín. loc. discret.	3	3	2	9	3	8
Error óptimo	0.017931	0.002023	0.097701	0.031351	0.001554	0.000533
Param. en óptimo	0.86	4.44	0.99	4.75	4.82	4.29
Area enc./Long.	1.407	3.026	2.391	6.937	7.963	0.272
Coste comp. (seg)	0.59	0.51	0.20	0.28	0.20	0.60

Tabla 4.11. Resultados del ensayo 4.

La figura 4.25 muestra la curva de error del método  $TE$  en función del punto de partida de la superposición, para todos los puntos de la curva propuesta. Se observa que existen 4 mínimos fundamentales (en  $t=0.84$ ,  $t=1.44$ ,  $t=4.29$  y  $t=4.64$ ) y el error según el método  $TE$  para

todos ellos es del mismo orden de magnitud. Se ha comprobado que, en estos casos en los que existen otros mínimos locales de valor similar al óptimo, cada método poligonal aporta como solución uno de los mínimos locales, no siendo siempre el óptimo global. Esto demuestra que la función objetivo (o función error) definida en cada método es una función aproximada y no presenta un comportamiento real exacto. Sin embargo, siempre que el óptimo global se parezca en magnitud a otros mínimos locales se estará cometiendo un error pequeño al confundir unos con otros, por lo que la estimación del error de comparación es aproximadamente la misma.

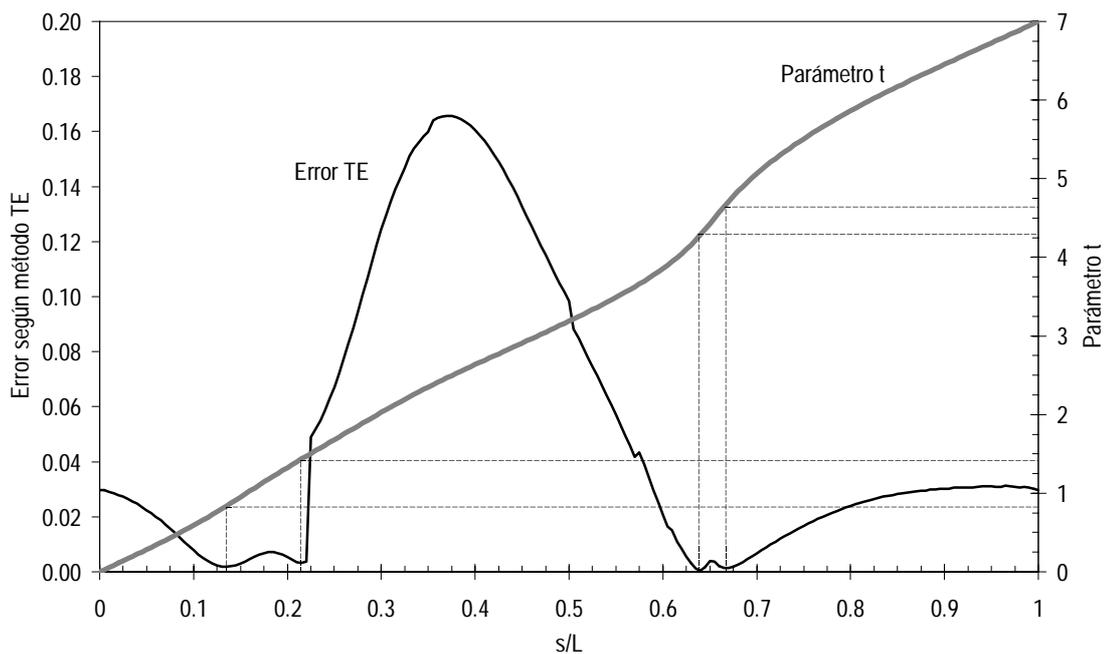


Figura 4.25. Error de comparación en función del punto inicial de superposición para las curvas del ensayo 4.

Sin embargo, en la figura 4.22 se muestra que la calidad de la superposición de las curvas es muy diferente en unas soluciones y en otras. Para solucionar esto es posible utilizar los métodos poligonales (que son menos costosos) en la optimización de las dimensiones del mecanismo y, una vez encontrado el óptimo (y careciendo de importancia el coste computacional), se puede utilizar una forma de determinar la superposición óptima más elaborada, como por ejemplo la que dictamina el método *TE*.

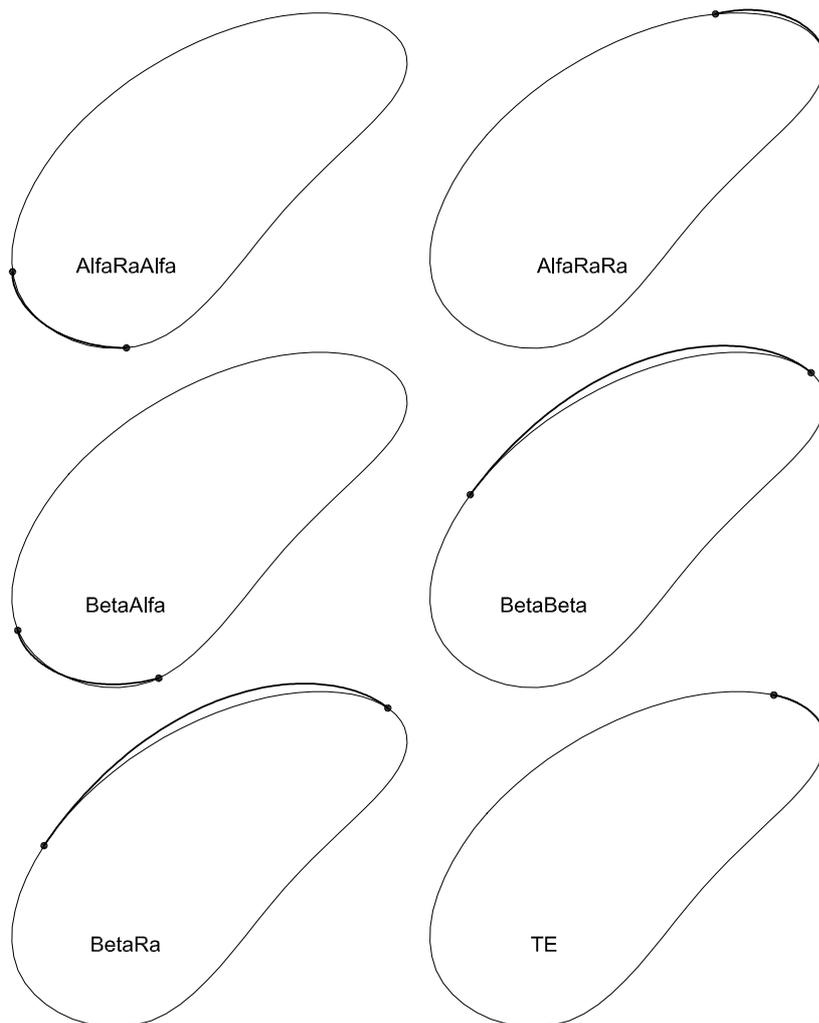


Figura 4.26. Superposición óptima de las curvas según los diferentes métodos en el ensayo 4.

#### 4.4.5. Ensayo 5.

Como ya se ha visto, los métodos de adaptación poligonal aproximan la comparación de una curva abierta y otra requerida a favor de un menor coste computacional. Sin embargo, si la diferencia entre las curvas aumenta, estos métodos pueden constituir una aproximación no tan buena (en el sentido de realista). Para ilustrar esto, se utiliza en este ensayo una curva propuesta con varios puntos de inflexión (figura 4.27). Dicha curva viene definida por una B-Spline cúbica basada en un polígono de control de 11 vértices cuyo parámetro  $t$  varía dentro del intervalo  $[0, 11[$ .

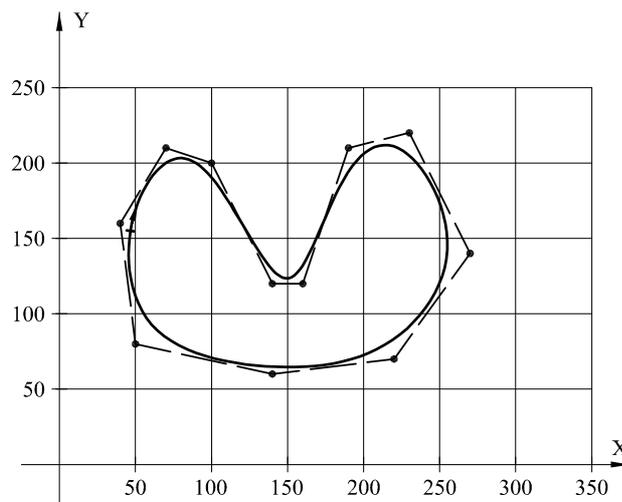


Figura 4.27. Curva propuesta en el ensayo 5.

La curva requerida utilizada es definida mediante las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x(u) = 100 \cdot u$$

$$y(u) = 100 \cdot u \cdot \text{sen}(u)$$

variando el parámetro  $u$  dentro del intervalo  $[-\pi, \pi]$  (figura 4.28).

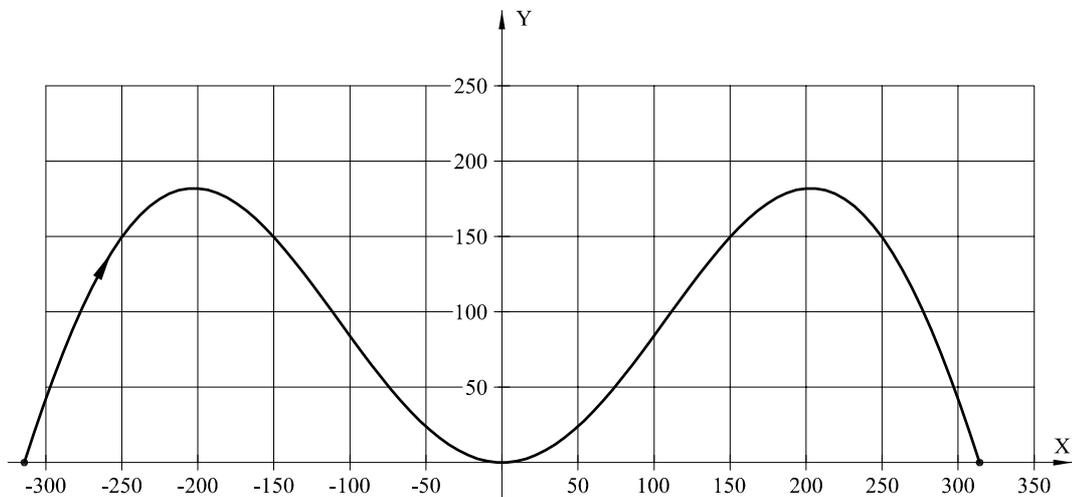


Figura 4.28. Curva requerida en el ensayo 5.

Una vez resuelto el problema de superposición óptima, los datos obtenidos según cada método se muestran en la tabla 4.12 y la representación de las curvas superpuestas según cada método (no todos encuentran solución a este problema) se muestran en la figura 4.30. En

ella se observa cómo ningún método de adaptación poligonal es capaz de encontrar la solución óptima, la cual es encontrada por el método *TE*.

	AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
Nº ptos. del polígono	5	5	5	5	5	
Nº ptos. discretización	50	50	50	50	50	200
Rango útil	0.0%	52.0%	0.0%	0.0%	82.0%	100.0%
Nº mín. loc. discret.		5			8	11
Error óptimo		0.589			0.307	0.093
Param. en óptimo		10.08			10.68	10.90
Area enc./Long.		12.580			7.011	6.771
Coste comp. (seg)	2.13	1.98	0.25	0.31	0.34	1.43

Tabla 4.12. Resultados del ensayo 5.

Con el fin de estudiar el número de mínimos del error de comparación en función del punto de partida de la superposición, se incluye la curva de error del método *TE* (figura 4.29). En ella se observa que existen 4 mínimos locales fundamentales (en  $t=4.19$ ,  $t=5.34$ ,  $t=7.63$  y  $t=10.9$ ).

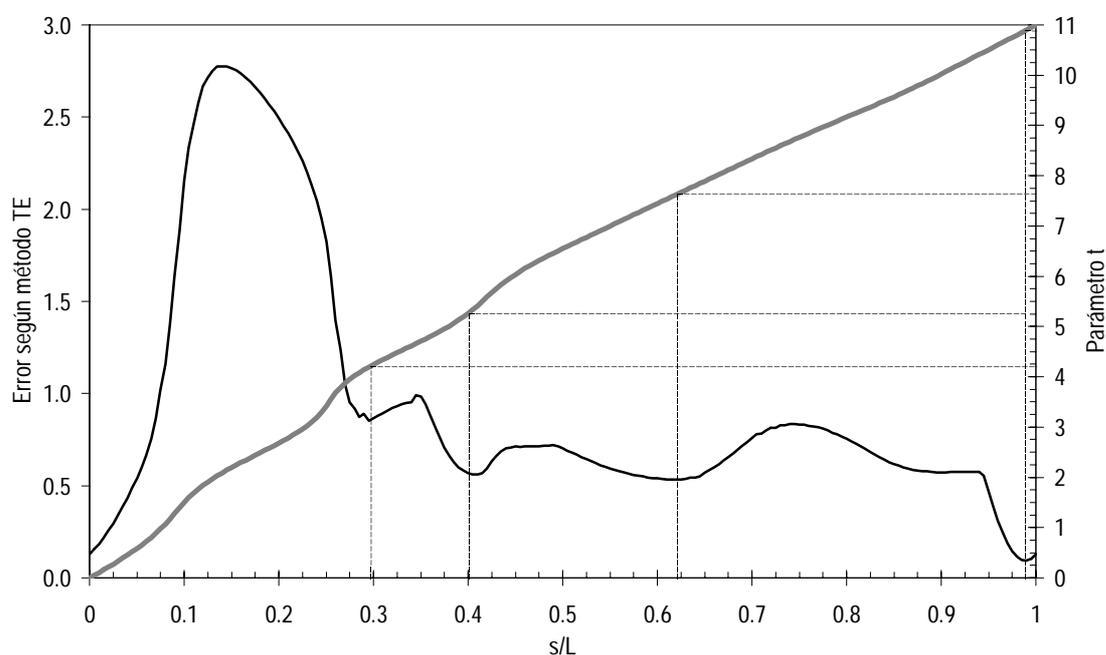


Figura 4.29. Error de comparación en función del punto inicial de superposición para las curvas del ensayo 5.

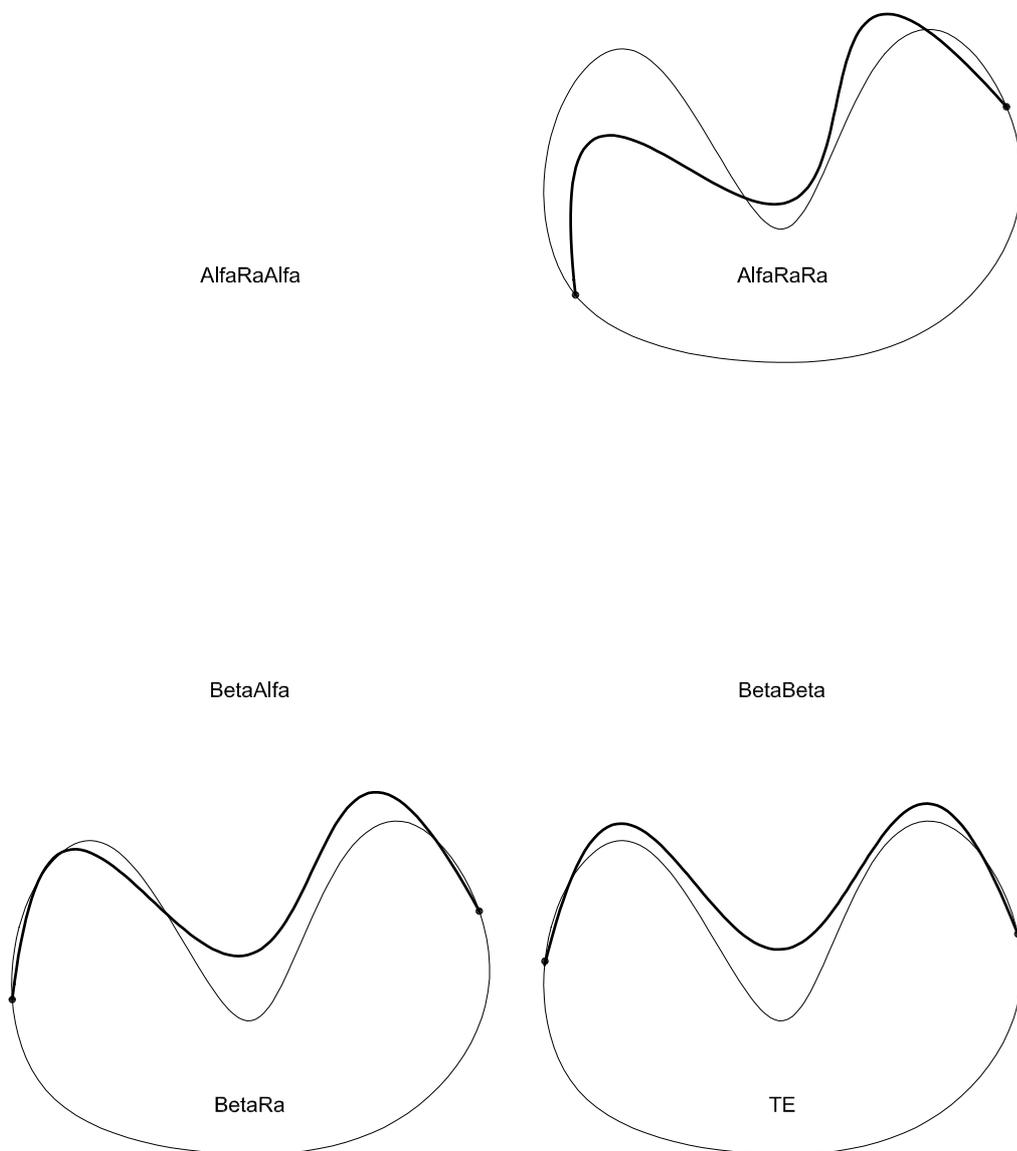


Figura 4.30. Superposición óptima de las curvas según los diferentes métodos en el ensayo 4.

## 4.5. Consideraciones de simetría y de sentido de la adaptación en las curvas.

Los métodos anteriores, tal como han sido expuestos, no cumplen los requisitos de independencia de simetrías y de la parametrización —siguen siendo dependientes del sentido de la parametrización—. Así, estos métodos necesitan ser ampliados para el cumplimiento de estos requisitos. La solución más trivial consiste en reproducir la comparación de las curvas considerando simetría en cada una de ellas y recorriendo las curvas en los dos sentidos posibles, para cada curva y su simétrica. Sin embargo, un análisis más detallado de la situación permitirá simplificar el proceso con una ganancia considerable en el coste computacional.

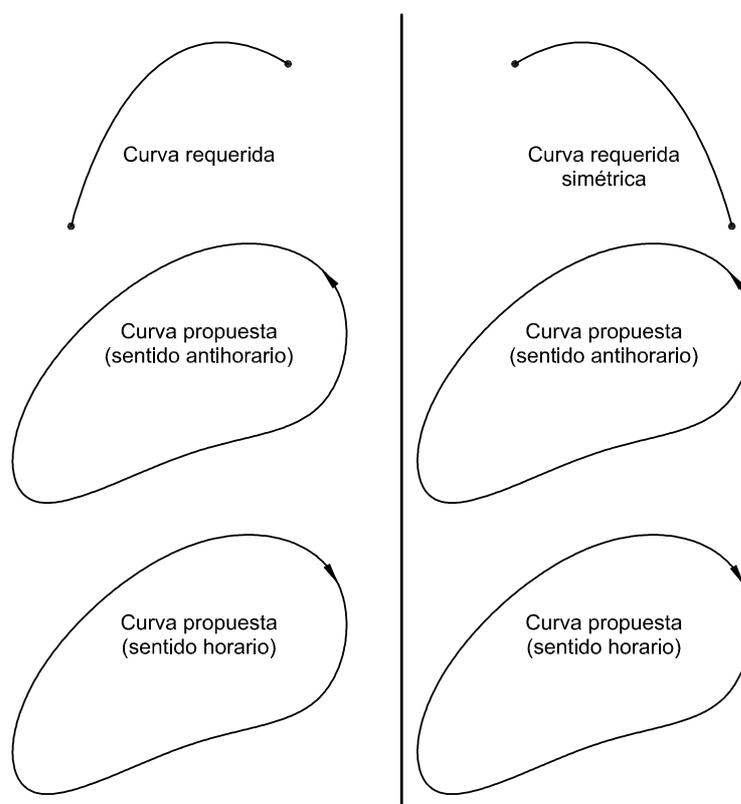


Figura 4.31. Comparación de una curva abierta con una curva cerrada considerando posibles sentidos y simetrías.

Supóngase que se desea comparar las curvas (lo cual involucra la superposición óptima) mostradas en la figura 4.31 considerando todas las posibilidades de simetría y sentido de adaptación. Para la independencia del sentido de parametrización, se debe superponer la curva requerida sobre la propuesta considerando los dos sentidos posibles al recorrer esta última. Para la independencia de simetría, se debe superponer la curva simétrica de la

requerida sobre la propuesta considerando de nuevo los dos sentidos (2 casos). Así se observa que el problema de superposición óptima ha de realizarse 4 veces para cada pareja de curvas comparadas, lo que aumentará considerablemente el coste computacional.

Al considerar dos puntos A y B de la curva propuesta y superponer la curva requerida en base a esos dos puntos, se obtienen las 4 posibilidades mostradas en la figura 4.32. En las posibilidades '0' y '1' de la figura se recorre la curva propuesta en sentido antihorario (desde A hasta B) y se superpone la curva requerida y su simétrica, respectivamente. En las posibilidades '2' y '3' de la figura se hace lo mismo pero recorriendo la curva propuesta en sentido horario. Sin embargo, en los métodos de adaptación, el polígono adaptado en '0' y '1' es el mismo, mientras que el que varía es el polígono característico (adopta dos formas debido a la simetría). Y lo mismo ocurre con las posibilidades '2' y '3'. Consecuentemente la estimación del parecido de las curvas según las dos posibilidades '0' y '1' puede realizarse comparando el polígono adaptado con el polígono característico (posibilidad '0') y con su simétrico (posibilidad '1'). Dado que el mayor gasto computacional se produce en la adaptación del polígono (que involucra diferentes procesos de optimización) y no en la comparación de los polígonos, se ahorra una de las dos adaptaciones en coste computacional con lo que aumenta el rendimiento del método. De la misma forma se puede proceder con las posibilidades '2' y '3'.

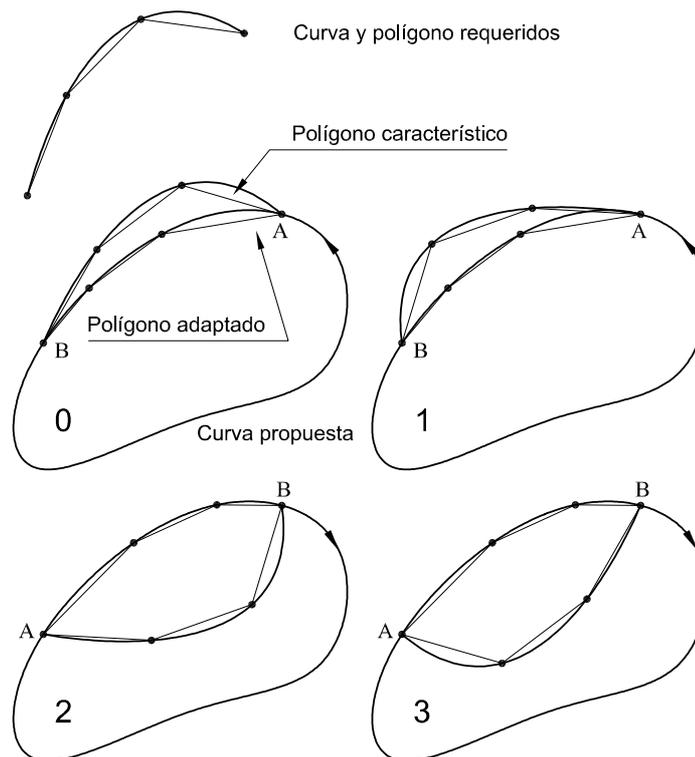


Figura 4.32. Posibilidades de superposición de una curva abierta en base a 2 puntos de una curva cerrada.

Al final se llega a que partiendo de cada punto se ha de adaptar el polígono característico en la curva propuesta según los dos sentidos posibles para luego comparar cada uno de los dos polígonos adaptados obtenidos con el polígono característico y su simétrico.

En cuanto al método *TE*, la conclusión es similar a la anterior. Para cada dos puntos A y B de la curva propuesta, en la posibilidad '0' se estima el parecido entre las curvas comparando la CET (Curva de Evolución de la Tangente) de la curva propuesta en el intervalo AB y la CET de la curva requerida original. En la posibilidad '2' se estima el parecido entre las curvas comparando la CET de la curva propuesta con la CET de la curva requerida, recorrida esta última en sentido inverso y cambiando su signo<sup>83</sup>. Para las posibilidades '2' y '3' se procede de la misma forma que en '0' y '1' pero recorriendo la curva propuesta en sentido contrario (con lo que la CET cambia de signo). Al final se obtienen 4 posibilidades que provienen de recorrer la curva propuesta según los dos sentidos posibles y, para cada uno de éstos, en recorrer la requerida también según los dos sentidos.

Ensayo		AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
1	Depend. <sup>84</sup>	0.79	0.70	0.18	0.29	0.18	1.62
	Indep. <sup>85</sup>	0.92	0.85	0.24	0.40	0.25	2.87
	<b>Incremento</b>	<b>16.2%</b>	<b>21.0%</b>	<b>31.6%</b>	<b>38.2%</b>	<b>36.9%</b>	<b>77.2%</b>
2	Depend.	0.62	0.53	0.20	0.27	0.23	0.63
	Indep.	0.80	0.65	0.25	0.33	0.31	1.17
	<b>Incremento</b>	<b>29.0%</b>	<b>23.0%</b>	<b>22.9%</b>	<b>21.9%</b>	<b>32.6%</b>	<b>85.7%</b>
3	Depend.	0.47	0.52	0.18	0.20	0.20	2.5
	Indep.	0.65	0.68	0.23	0.26	0.24	6.34
	<b>Incremento</b>	<b>39.2%</b>	<b>31.0%</b>	<b>27.8%</b>	<b>30.6%</b>	<b>22.3%</b>	<b>153.6%</b>
4	Depend.	0.59	0.51	0.20	0.28	0.20	0.6
	Indep.	0.82	0.71	0.25	0.38	0.26	1.01
	<b>Incremento</b>	<b>39.8%</b>	<b>39.5%</b>	<b>23.6%</b>	<b>35.8%</b>	<b>32.0%</b>	<b>68.3%</b>
5	Depend.	2.13	1.98	0.25	0.31	0.34	1.43
	Indep.	2.74	2.50	0.35	0.41	0.40	2.74
	<b>Incremento</b>	<b>28.6%</b>	<b>26.3%</b>	<b>38.3%</b>	<b>30.9%</b>	<b>18.4%</b>	<b>91.6%</b>

Tabla 4.13. Cambio en el coste computacional (seg) al completar los métodos para que cumplan todos los requisitos.

<sup>83</sup> Al cambiar el sentido de recorrido, el ángulo de la evolución de la tangente cambia de signo.

<sup>84</sup> Coste computacional de los métodos siendo dependientes del sentido de la parametrización y posible simetría (es decir, tal como fueron expuestos en 4.3).

<sup>85</sup> Coste computacional de los métodos corregidos para ser independientes de sentido de la parametrización y posible simetría de las curvas.

Al realizar estas modificaciones de los métodos, su coste computacional se modifica de forma desigual. Para obtener los datos finales se han repetido los ensayos y se ha medido el tiempo de computación, obteniendo los resultados que se muestran en la tabla 4.13.

En esta tabla se observa que los métodos de adaptación presentan incrementos en sus costes computacionales entre el 15% y el 40%, mientras que el método *TE* incrementa su coste computacional entre el 65% y el 155%.

## 4.6. Análisis de resultados.

---

Mediante diferentes ensayos realizados, una muestra de los cuales se ha incluido en este capítulo, se ha estudiado el comportamiento de varios métodos de comparación de curvas abiertas. Tras estos ensayos se han obtenido resultados concluyentes que son expuestos a continuación.

### 4.6.1. Identificación.

En lo relativo al requisito de identidad, se ha observado que todos los métodos de adaptación poligonal cumplen este requisito de forma precisa. El método *TE*, al ser un método discreto y no realizar optimización no logra la posición del óptimo global de forma exacta. La precisión con la que se acerca al óptimo depende de la finura de la discretización. Sin embargo, con una discretización de la curva en 200 segmentos, este método ya ha demostrado ser computacionalmente más costoso que el resto de métodos. Y un aumento de la discretización con el objetivo de cumplir el requisito de identidad con mayor precisión incrementa el coste computacional de forma considerable.

### 4.6.2. Rango útil.

Los métodos de adaptación poligonal llevan asociado implícitamente el concepto de *rango útil* ya que, partiendo de un punto de la curva propuesta, la adaptación en base a las magnitudes contempladas por el método no siempre es posible, y no siempre se podrá realizar la comparación. Así, el rango útil es la porción de curva propuesta en la cual se puede adaptar el polígono y, por tanto, dentro de la cual los métodos de adaptación poligonal pueden estimar un error de comparación. El método *TE*, por su lado, es un método que estima la diferencia entre las curvas en base a las diferencias de evolución de la tangente. Así, este método es siempre capaz de realizar la comparación y su rango útil es invariablemente del 100%.

Se ha observado que un rango útil pequeño acelera el proceso de superposición óptima ya que disminuye el número de operaciones que se han de realizar para encontrar el óptimo. Sin embargo, un rango útil excesivamente pequeño termina en muchos casos en una

ausencia de solución, lo que supone un importante inconveniente. Por ello se considera que el rango útil óptimo un porcentaje intermedio (40%-60%) que no lleve en ningún caso a una ausencia de solución.

Los ensayos han probado que la adaptación poligonal en base al ángulo  $\alpha$  es excesivamente restrictiva. Los métodos de adaptación basados en este ángulo (AlfaRaAlfa y BetaAlfa) presentan un rango útil muy pequeño, lo que significa que consiguen adaptar el polígono partiendo de muy pocos puntos de la curva propuesta. Estos métodos, cuando la curva crece en complejidad llegan a no ser capaces de adaptar el polígono dentro de la curva propuesta, por lo que no pueden estimar la diferencia entre las curvas y, consecuentemente, no aportan ninguna solución.

El método BetaBeta presenta un rango útil que varía mucho de unos casos de comparación a otros. En algunos presenta rangos amplios, mientras que en otros el rango útil es solo ligeramente superior al de los métodos basados en  $\alpha$ .

También se ha probado que la evolución del rango útil al aumentar el número de puntos suele ser decreciente (salvo en ciertos casos, pequeños en número, en los que la evolución es irregular). Esto es debido a que cuantos más puntos tenga el polígono característico, más magnitudes se tendrán que respetar, lo que restringe el problema de adaptación. En los métodos basados en  $\alpha$  se comprueba que un incremento del número de puntos puede llegar a ocasionar una restricción del rango útil tal que impida que éstos aporten solución alguna. El método BetaBeta presenta un gran decrecimiento del rango útil con el aumento del número de puntos del polígono, salvo pocos casos en los que su evolución es irregular. El resto de métodos también sufren una reducción del rango útil, pero ésta no suele derivar en una ausencia de solución.

	Valor ideal	AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
Rango útil	Medio	Reducido	Reducido	<b>Medio</b>	Valor irregular	<b>Medio</b>	Máximo
Evolución al aumentar el nº de ptos. del polígono	Invariable	Decrece rápidamente	Decrece rápidamente	Decrece lentamente	Decrece rápidamente	Decrece lentamente	<b>Invariable</b>
Tendencia a la no aportación de solución	Ninguna	Elevada	<b>Baja o ninguna</b>	Elevada	Moderada	<b>Baja o ninguna</b>	<b>Ninguna</b>

Tabla 4.14. Características del rango útil en los diferentes métodos.

La tabla 4.14 muestra, en resumen, las características generales<sup>86</sup> del rango útil de cada uno de los métodos. Se observa cómo los métodos con un mejor comportamiento desde el punto de vista del rango útil son el *AlfaRaRa*, *BetaRa* y *TE*.

### 4.6.3. Óptimo logrado.

La evaluación del óptimo encontrado incluye la evaluación de diferentes parámetros asociados al óptimo. Los métodos de adaptación poligonal buscan el óptimo de forma exhaustiva dentro de la curva propuesta. Para ello discretizan la curva y evalúan cada uno de los puntos de la discretización, identificando los mínimos locales discretos. Posteriormente, parten de estos mínimos locales discretos y realizan una optimización con el fin de observar cual de ellos conduce al menor valor, que será el óptimo global. El método *TE* es un método que se basa en la comparación masiva de puntos. Debido a su coste computacional, este método no realiza optimización sino que se acerca al óptimo afinando la discretización.

La superposición real de las curvas presenta un número de mínimos que puede ser estimado por el método *TE* (que es considerado el método más realista) descartando sus mínimos locales *ficticios* debidos a la discretización. Conocido el número real de mínimos locales en la superposición óptima, es posible evaluar los diferentes métodos atendiendo al número de mínimos locales que presentan. Si en un método este número es menor que el real, ello implicará que este método no es sensible a todos los mínimos locales reales existentes. Si es mayor significará que el método introduce mínimos locales ficticios. En este último caso, se tendrá que realizar la optimización partiendo de cada uno de ellos para encontrar el óptimo global, lo que incrementará el coste computacional. Por ello y pese a que el número óptimo de mínimos locales es el valor real, ante una falta de coincidencia, se considera más favorable que sea ligeramente superior al valor real frente a que sea inferior.

Se ha observado que los métodos *AlfaRaAlfa* y *AlfaRaRa* tienen cierta tendencia a presentar un número de mínimos locales discretos menor que el número real de mínimos locales. Lo que significa que estos métodos no son sensibles a todos los mínimos locales. Los métodos *BetaAlfa* y *BetaBeta* tienen una tendencia irregular, presentando un número de mínimos locales que es igual, superior o inferior al real. El método *BetaRa* presenta generalmente un número igual o ligeramente superior (en algunos pocos casos muy superior) al real. Finalmente, el método *TE* presenta siempre un número muy superior (incluyendo numerosos mínimos *ficticios*) debido a que en la función error se produce una oscilación debida a la discretización.

Otro parámetro importante que permitirá evaluar los métodos de comparación es la ubicación del óptimo global encontrado. Considerando que el método *TE* es el más realista

---

<sup>86</sup> Se ha observado que existen excepciones al comportamiento representado en esta tabla.

cuando la discretización de la curva propuesta es fina, se puede realizar la comparación entre la ubicación del óptimo global proporcionada por este método y la proporcionada por el resto de métodos. En este sentido se observa que los métodos *AlfaRaRa*, *BetaBeta* y *BetaRa* logran ubicar el óptimo global en el óptimo global real con elevada frecuencia<sup>87</sup>, mientras que los métodos *AlfaRaAlfa* y *BetaAlfa* terminan en ocasiones en otro mínimo local distinto del óptimo real. Estos últimos métodos, además presentan cierta tendencia al cambio de posición al variar el número de puntos del polígono característico, lo cual supone una baja estabilidad en la solución y gran dependencia de dicho número de puntos considerado.

Finalmente, la calidad del óptimo encontrado por los métodos (incluido el método *TE*) puede ser evaluada mediante la distancia media entre las curvas en el tramo de superposición (evaluada mediante el área encerrada dividida por la longitud de la curva requerida). En los ensayos se observa que los métodos *BetaRa* y *TE* presentan los valores más bajos (lo que indica una mejor superposición).

En la tabla 4.15 se muestra un resumen de la evaluación de los óptimos encontrados según cada método. En ella se observa cómo los métodos *BetaRa* y *TE* obtienen las mejores calificaciones, siendo los que presentan un mejor comportamiento.

	Valor ideal	AlfaRaAlfa <sup>88</sup>	AlfaRaRa	BetaAlfa <sup>88</sup>	BetaBeta	BetaRa	TE
Nº de mínimos locales discretos frente al nº real de mínimos locales	Igual o ligeramente superior	Igual o inferior	Igual o inferior	Igual, superior o inferior	Igual, superior o inferior	<b>Igual o superior</b>	Muy superior
Coincidencia entre la ubicación de la superposición óptima y la del óptimo real ( <i>TE</i> )	Siempre	A veces	Frecuentemente	A veces	Frecuentemente	Muy frecuentemente	<b>Siempre</b>
Estabilidad de la ubicación del óptimo frente al cambio del nº de puntos del polígono	Elevada	Baja	<b>Elevada</b>	Baja	Parcial	<b>Elevada</b>	(no aplicable)
Valor del área enc./Long. en relación al de otros métodos	Bajo	Medio	Medio o alto	Medio	Medio	<b>Bajo o medio</b>	<b>Bajo o medio</b>

Tabla 4.15. Características de la optimización y del óptimo encontrado según los diferentes métodos.

<sup>87</sup> De todos ellos, el método *BetaRa* es el que presenta un mejor comportamiento. Únicamente yerra en la ubicación del óptimo global en casos en los que la curva de error en función del punto de partida presenta varios mínimos muy similares al óptimo global. Pero en este caso el error cometido en la estimación del error de comparación es pequeño ya que el mínimo logrado y el óptimo global son muy similares.

<sup>88</sup> Las características de estos métodos reflejan su comportamiento solo en los casos en los que aportan alguna solución (es decir, en los casos en los que su rango útil es mayor que 0%). Sin embargo, puesto que la frecuencia de ausencia de solución en los casos estudiados es elevada, puede considerarse que los datos son poco fiables, careciendo esto de importancia ya que dicha ausencia representa un factor negativo mucho más importante para estos métodos.

#### 4.6.4. Coste computacional.

Al evaluar el coste computacional de los métodos de comparación (corregidos estos para que sean independientes del sentido de la parametrización y de las posibles simetrías, según se describe en §4.5) se observa que los métodos computacionalmente menos costosos son los métodos de adaptación que ubican el primer segmento del polígono en base al ángulo  $\beta$  —métodos *BetaAlfa*, *BetaBeta* y *BetaRa*— (tabla 4.16). De éstos, los métodos *BetaAlfa* y *BetaRa* son los menos costosos, siendo el método *BetaBeta* del orden de un 40% más costoso. A continuación se encuentran los métodos *AlfaRaAlfa* y *AlfaRaRa*, los cuales son del orden de 4 veces más costosos que los primeros. Finalmente se encuentra el método *TE* que tiene un coste computacional muy superior a los primeros (del orden de 10 veces superior).

	AlfaRaAlfa	AlfaRaRa	BetaAlfa	BetaBeta	BetaRa	TE
Coste computacional	Medio	Medio	Bajo	Bajo	Bajo	Alto
Coste relativo <sup>89</sup>	4.5	4.1	1	1.4	1.1	10.8

Tabla 4.16. Comparativa del coste computacional de los diferentes métodos.

Así, desde el punto de vista exclusivamente computacional, los métodos más ventajosos son el *BetaAlfa* y el *BetaRa*.

## 4.7. Conclusiones.

Los ensayos realizados demuestran que es posible superponer de forma óptima una curva abierta sobre una cerrada (o viceversa) para luego estimar el parecido de las curvas con métodos computacionalmente poco costosos. La economía de estos métodos posibilita la utilización de estrategias de optimización exhaustivas en síntesis de mecanismos con el objetivo de encontrar las dimensiones del mecanismo que genera una curva lo más parecida posible al tramo de trayectoria requerida.

El estudio llevado a cabo permite realizar una comparativa entre el comportamiento de métodos que utilizan pocos puntos de comparación (en este caso los métodos de adaptación poligonal) pero comparan varias magnitudes en cada punto y el comportamiento de métodos que utilizan muchos puntos de comparación pero una única magnitud es comparada en cada punto (el método *TE* es un ejemplo de este tipo de métodos<sup>90</sup>).

<sup>89</sup> Coste relativo al método computacionalmente menos costoso (al que se le asigna un coste unitario).

<sup>90</sup> Nótese que, tal como se concluye a partir del estudio realizado, no es sencillo obtener nuevos métodos (basados en la comparación de una única magnitud a lo largo de muchos puntos) que cumplan todos los requisitos de independencia, ya que las

En esta comparativa se observa que el método *TE* presenta siempre un comportamiento más realista ya que encuentra siempre el óptimo global real. En contrapartida, no obtiene la posición real del óptimo global, sino solamente una posición cercana (debido a que solamente encuentra la posición discreta más cercana al óptimo, ya que una optimización con este método será excesivamente costosa) y, por lo tanto, no cumplen el *requisito de identidad*, siendo el cumplimiento de este requisito fundamental en para encontrar el óptimo global dentro del espacio de diseño. Por otro lado, los métodos de adaptación realizan la superposición óptima de forma aproximada pero tras la optimización alcanzan la posición exacta (o una aproximada con mucha precisión) del óptimo encontrado. Sin embargo, se observa que cuando se comparan curvas de forma que la superposición de las mismas tiene varios mínimos locales muy similares (véase *ensayo 4*), estos métodos no siempre se decantan por el menor de ellos (debido a que realizan una estimación aproximada), sino que pueden decantarse por otro, cometiendo un cierto error.

En cuanto al coste computacional se observa que los métodos de adaptación tienen un coste computacional considerablemente menor (hasta 10 veces menor) que el método *TE*, lo cual supone un gran inconveniente para la utilización de este último. Podría pensarse en mejorar el coste computacional del método *TE* realizando una discretización con menos puntos (o en menos segmentos) de la curva propuesta. Sin embargo, esta disminución actuaría en perjuicio de la precisión del mismo, alejando su comportamiento del *requisito de identidad*. Así, la finura de la discretización del método *TE* corresponde a una solución de compromiso entre minimizar su coste computacional y acercar su comportamiento al cumplimiento del requisito de identidad. Una modificación de esta precisión de discretización en cualquier sentido actuaría en un detrimento general del comportamiento del método.

En conclusión, los métodos de adaptación expuestos son una alternativa computacionalmente económica y suficientemente aproximada para superponer de forma óptima una curva plana abierta sobre otra curva plana y estimar el parecido entre ambas curvas, siendo considerados globalmente más ventajosos que el método *TE*.

Dentro de los métodos de adaptación, se ha observado que no todos tienen un comportamiento óptimo y es posible realizar una comparativa con el fin de deducir cual es el mejor método que se puede emplear en la síntesis de curvas abiertas. Los factores principales de esta comparación son el grado de aproximación a la solución real de la comparación y el coste computacional implicado. En este sentido se observa que los métodos que utilizan el ángulo  $\alpha$  —métodos *AlfaRaAlfa* y *BetaAlfa*— para la adaptación del polígono tienen el gran inconveniente de presentar un rango útil muy reducido, llegando a no ser capaces de aportar

---

diferentes magnitudes puntuales que describen la forma de las curvas son dependientes de posición, orientación y escala y, en algunos casos como el radio de curvatura, presentan una variación que dificulta la comparación.

solución alguna en muchos casos, lo que los convierte en no aptos para la resolución de este tipo de problemas. Del resto de métodos, el método *BetaBeta* tiene un comportamiento irregular (su rango útil varía de un valor muy bajo —incluso nulo— en algunos casos a otros valores mayores en otros casos, el óptimo encontrado presenta también características irregulares de unos casos a otros), por lo que es considerado un método con un comportamiento de calidad intermedia.

Así, en cuanto al comportamiento, los mejores métodos parecen ser los métodos basados en *Ra* —*AlfaRaRa* y *BetaRa*—. Sin embargo de estos dos, el primero tiene un coste computacional en promedio 4 veces superior al del segundo, siendo su comportamiento muy similar. El método *BetaRa*, por su lado, tiene unas características muy cercanas a las ideales y su coste computacional es de los más bajos. Por este motivo (y según los criterios expuestos), este método es, de todos los estudiados, el mejor método para constituir la función objetivo del problema de síntesis dimensional aproximada de mecanismos planos para la generación de tramos abiertos de trayectoria.



# Capítulo 5

## El espacio de diseño y la optimización

### 5.1. Introducción.

Este capítulo trata sobre dos componentes fundamentales que definen el problema de optimización: el espacio de diseño (ED) y el algoritmo de optimización. El primero es un espacio  $n$ -dimensional en el que cada dimensión corresponde a una variable de diseño.

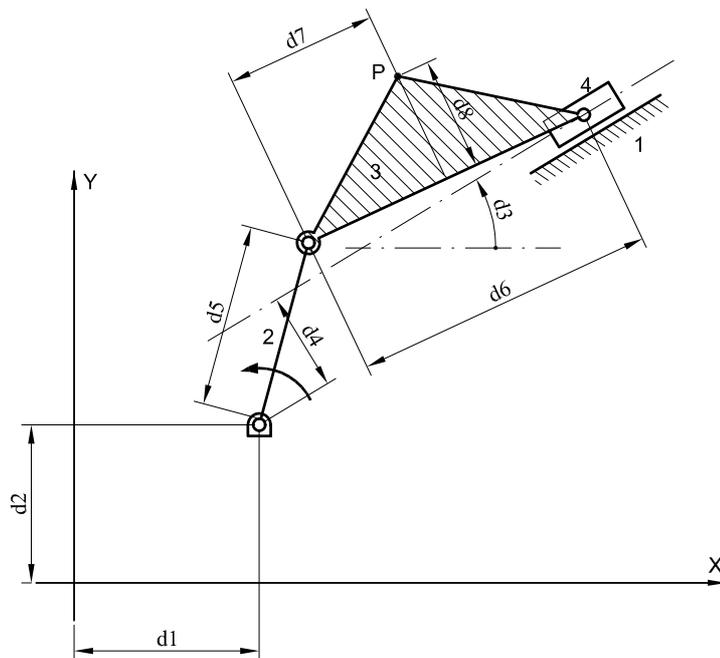


Figura 5.1. Dimensiones de un punto trazador del mecanismo biela-manivela.

Como se ha visto en capítulos anteriores, en el problema de síntesis dimensional aproximada de mecanismos planos para la generación de trayectorias, las incógnitas son las distintas dimensiones del mecanismo que determinan la posición del punto trazador. Los

mecanismos generadores de curvas son mecanismos desmodrómicos en los que, conforme la magnitud de entrada del mecanismo varía dentro de su rango, el punto trazador se desplaza dibujando una trayectoria.

En la figura 5.1 se observa un mecanismo biela-manivela que consta de 8 variables de diseño ( $d_1, d_2, \dots, d_8$ ) en el problema de síntesis dimensional. Cada punto del espacio de diseño representa, por lo tanto, a un mecanismo (con unas dimensiones concretas) y un punto trazador del mismo (ubicado en una posición concreta dentro del mecanismo). Es claro que el conjunto “*mecanismo-punto trazador*” describe una única trayectoria cuando el primero es accionado. Así, cada uno de los infinitos puntos del espacio de diseño se corresponde con una trayectoria generada.

En un problema concreto de síntesis dimensional, cada punto del espacio de diseño es evaluado por la función objetivo, la cual califica el punto —es decir, el mecanismo y su punto trazador— de acuerdo con su calidad en el cumplimiento de los requisitos. En el caso particular de síntesis de trayectoria, la función objetivo evaluará los puntos del espacio de diseño y en dicha evaluación realizará una comparación entre los requisitos del problema (impuestos en relación a la trayectoria requerida) y las características de la trayectoria asociada a dicho punto, calculando un valor menor a medida que las curvas sean más parecidas.

La función objetivo, así definida, es una función de  $\mathfrak{R}^n$  en  $\mathfrak{X}$  y constituye una hipersuperficie<sup>91</sup> dentro del espacio de diseño. Pero, puesto que la evaluación de cada punto del ED por parte de la función objetivo depende de las características de la trayectoria requerida en el problema de síntesis, esta hipersuperficie será distinta para cada problema diferente.

Por otro lado, la hipersuperficie oscilará entre un valor máximo y un valor mínimo dentro del ED según la trayectoria asociada a cada punto del ED se parezca menos o más a la trayectoria requerida. Además, debido a la no linealidad del problema, la hipersuperficie contendrá varios máximos y mínimos locales. El menor valor de la función corresponderá al menor valor de todos los mínimos locales de la hipersuperficie, el cual recibe el nombre de óptimo global.

El fin último de los métodos de síntesis aproximada es encontrar el óptimo global de la función objetivo dentro del espacio de diseño. Sin embargo, la obtención del óptimo global no es una tarea fácil debido, entre otros, a dos motivos fundamentales. En primer lugar, se comprueba que la función objetivo presenta una elevada falta de linealidad, lo que ocasiona que no pueda obtenerse de forma matemáticamente directa la posición del óptimo global dentro del ED. En segundo lugar, el ED de un mecanismo de barras sencillo tiene

---

<sup>91</sup> Es decir, una superficie en un espacio  $n$ -dimensional.

generalmente 8 o más dimensiones, y su enorme tamaño complica el planteamiento de estrategias que puedan ser ejecutadas en un tiempo razonable.

De estas dos razones anteriores, la primera es difícilmente evitable. Puede pensarse que la no linealidad de la hipersuperficie depende (para un caso de síntesis concreto) de cómo la función objetivo cuantifica la diferencia entre las características de cada punto del ED y las características requeridas. Sin embargo, independientemente de la formulación matemática de la función objetivo, existe una no linealidad inherente al problema de síntesis que no se puede evitar. Este hecho puede constatarse observando la falta de linealidad de las diferentes funciones objetivo propuestas en la literatura.

Por su parte, el segundo motivo hace referencia a la gran extensión del ED. Es posible estudiar las diferentes dimensiones del ED con el fin de disminuir su tamaño —sin disminuir las posibilidades reales de solución—. Cualquier reducción del ED implicará un menor coste computacional en la búsqueda del óptimo global o una mayor probabilidad de encontrarlo a igualdad de coste.

En este sentido, se considera que la mejor estrategia de optimización es aquella que aporta la mejor solución en un tiempo razonable. Así pues, será necesario estudiar diferentes alternativas evaluando tanto la solución obtenida como el tiempo —es decir, el coste computacional— invertido en lograr dicha solución.

## 5.2. Análisis del espacio de diseño (ED).

---

Como se ha comentado, el ED correspondiente a un problema de síntesis dimensional aproximada es un espacio  $n$ -dimensional siendo  $n$  el número de variables de diseño del mecanismo. Por ejemplo, en la figura 5.2 se observan las 9 dimensiones del espacio de diseño de un mecanismo de 4 barras. A estas 9 habría que añadirle una variable booleana —y, por lo tanto, de variación no continua— que decida la configuración del mecanismo dentro de las dos posibles (correspondientes a los dos circuitos de la trayectoria del mecanismo), siendo en total 10 las dimensiones del ED de este tipo de mecanismo.

Aunque en teoría el ED es infinito y cada una de sus dimensiones (salvo las angulares) puede tomar valores dentro del intervalo  $]-\infty, \infty[$ , en realidad este ED está acotado debido a que un mecanismo muy desproporcionado no resulta útil en la práctica. El motivo es que con el aumento de la desproporción aumentan las fuerzas internas del mecanismo y disminuye la precisión de funcionamiento debido a la rigidez finita de los eslabones. Así, para obtener soluciones prácticas, puede acotarse el ED de acuerdo con una desproporción máxima admisible, logrando un espacio de diseño acotado EDA. Esta acotación permite, además, seleccionar la porción del ED deseada, la cual queda encerrada dentro de la misma.

El grado de desproporción puede ser cuantificado mediante el cociente entre las longitudes mayor y menor de los eslabones del mecanismo. Aunque existen diferentes criterios para establecer la desproporción máxima admisible<sup>92</sup>, en este trabajo se ha considerado adecuado un valor cercano a 10, lo que significa que se considera admisible cualquier mecanismo en el que la longitud del eslabón mayor sea aproximadamente y como máximo 10 veces superior a la longitud del eslabón menor.

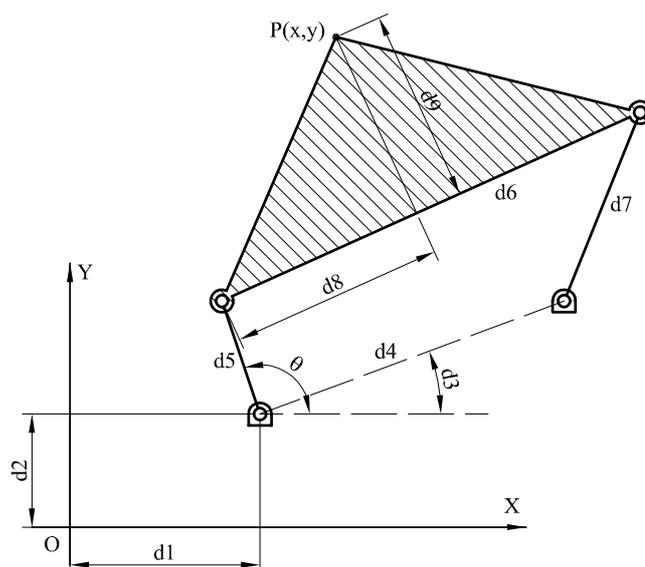


Figura 5.2. Variables de diseño del mecanismo de 4 barras.

Tomando como base el mecanismo de 4 barras (sin que ello suponga una falta de generalización de las conclusiones a las que se llegue) y con el fin de cuantificar la reducción del espacio de diseño conseguida con los razonamientos que se desarrollarán a continuación, se ha seleccionado una acotación del espacio de diseño (tabla 5.1). A continuación, se procede a la extracción de un conjunto de puntos de este EDA habiéndose adoptado la distribución uniforme de puntos de entre las diferentes alternativas. Para ello, se consideran 10 u 11 valores en cada dimensión<sup>93</sup> (tabla 5.1) —salvo en la variable de configuración, que solamente puede tomar 2 valores—, logrando un total de  $2.42 \cdot 10^9$  puntos.

<sup>92</sup> Garret y Hall (Garret y Hall, 1968) sugirieron una relación de desproporción máxima admisible igual a 25.

<sup>93</sup> Puede observarse que los valores negativos de las dimensiones  $d_5$ ,  $d_6$  y  $d_7$  no tiene un significado físico, por lo que han sido excluidos de la tabla.

Puede observarse que, pese a que el número de puntos es muy elevado (dos mil millones), el EDA es tan grande que el conjunto de puntos es difícilmente representativo<sup>94</sup> del primero. Así, se observa que en algunas dimensiones (por ejemplo  $d_8$  y  $d_9$ ) el número de valores considerado es muy pequeño y existen otros valores intermedios que pueden representar curvas muy diferentes de las consideradas. Esto proporciona una idea del enorme tamaño del EDA.

Dimensión	Número de valores	Valor mínimo	Valor máximo	Incremento	Observaciones
$d_1$	10	-4	-5	1	
$d_2$	10	-4	5	1	
$d_3$	10	0°	324°	36°	ya que 360°=0°
$d_4$	10	-10	10	2	excluyendo el valor 0
$d_5$	10	1	10	1	
$d_6$	10	1	10	1	
$d_7$	10	1	10	1	
$d_8$	11	-10	10	2	
$d_9$	11	-10	10	2	
<b>Config.</b>	2	0	1	1	
<b>N° inicial de puntos: 2.42·10<sup>9</sup></b>					

Tabla 5.1. Definición del conjunto de puntos extraídos del EDA asociado al mecanismo de 4 barras.

### 5.2.1. Primera reducción del espacio de diseño.

En la síntesis de trayectoria se busca una trayectoria que cumpla determinados requisitos. Si dos mecanismos dimensionalmente diferentes generan una misma trayectoria — lo que equivale a decir que dos puntos diferentes del EDA tienen asociada una misma trayectoria— no será necesario evaluar ambos mediante la función objetivo ya que el resultado para uno será igual al resultado para el otro. Esta es la base sobre la que se fundamenta la primera reducción del EDA y tiene como objetivo disminuir el coste computacional al no tener que evaluar (con la función objetivo) los puntos repetidos<sup>95</sup>. Y, consecuentemente, se observa que, en estos términos, la reducción no implica una pérdida de posibilidades de solución ya que solamente se eliminan puntos redundantes del EDA.

<sup>94</sup> Se entiende aquí por “representativo” la capacidad que tiene el conjunto de puntos considerado para representar de forma aproximada cualquier otro punto del EDA. Así, si para cualquier punto del EDA (y su curva asociada) se puede encontrar un punto del conjunto considerado de forma que su curva asociada sea muy similar a la del primero, se entiende que el conjunto es muy representativo del EDA.

<sup>95</sup> Esto solamente tendrá sentido práctico si las comprobaciones necesarias para verificar si el punto es una repetición de otro son computacionalmente menos costosas que la evaluación del mismo por parte de la función objetivo.

Para el mecanismo de 4 barras (figura 5.2), se observa que de las 10 dimensiones asociadas a un punto del EDA de este mecanismo, tres no modifican la trayectoria trazada por ese punto, sino que solamente la ubican en el plano. De estas tres, dos ( $d_1$  y  $d_2$ ) corresponden a la posición y una ( $d_3$ ) a la orientación de la trayectoria. Dado que se ha hecho hincapié en que los métodos de comparación de curvas —destinados a ser función objetivo— sean independientes de posición y orientación, estos métodos son insensibles a las variaciones de estas dimensiones. Por ello, dos puntos del EDA que se diferencien únicamente en  $d_1$ ,  $d_2$  y/o  $d_3$  serán evaluados por la función objetivo con el mismo valor constituyendo, por tanto, diferentes repeticiones de un mismo punto en el EDA. Así, se pueden eliminar estas tres dimensiones sin que ello implique pérdida alguna en las posibilidades de solución.

Al hacer esta reducción, la rejilla de puntos del EDA pasa de contener  $2.42 \cdot 10^9$  a contener  $2.42 \cdot 10^6$  puntos, habiendo reducido el EDA a un 0.1% de su tamaño inicial.

Pero, además, los métodos de comparación de curvas también han sido formuladas para que sean insensibles al tamaño de las curvas comparadas. Si se tienen dos puntos A y B del EDA de forma que el punto B es obtenido multiplicando todas las dimensiones<sup>96</sup> del punto A por un mismo escalar (es decir, siendo A y B punto homotéticos), las curvas asociadas a dichos puntos serán curvas homotéticas<sup>97</sup>. Consecuentemente las curvas asociadas a estos puntos, al ser comparadas con la curva requerida, serán evaluadas por la función objetivo de la misma forma, siendo en realidad puntos repetidos del EDA. Así, de nuevo es posible reducir el tamaño del EDA sin pérdida de posibilidades de solución mediante la normalización del mecanismo. Esta normalización equivale a la eliminación de la dimensión de una barra (con respecto a la cual se normaliza el mecanismo), a cuya longitud se le asigna invariablemente el valor 1. En el caso del mecanismo de 4 barras, éste se suele normalizar con respecto a la barra de entrada (dimensión  $d_5$ ) a la cual se le asigna el valor unitario (Hrones y Nelson, 1951).

Así, el conjunto de puntos del EDA considerado se reduce hasta un valor de  $2.42 \cdot 10^5$  lo que supone una reducción al 0.01% de su tamaño original.

De la misma forma, se estableció que las funciones de comparación fueran insensibles a la posible simetría de las curvas comparadas. Si se observa el EDA puede verse que existen diferentes puntos del mismo que generan trayectorias simétricas que son igualmente evaluadas por las funciones objetivo expuestas en los capítulos 3 y 4. Así, para cada punto del EDA puede eliminarse todas sus repeticiones consiguiendo una reducción importante del mismo.

---

<sup>96</sup> Salvo la variable de configuración del mecanismo.

<sup>97</sup> Ya que mecanismos dimensionalmente homotéticos generan curvas homotéticas de la misma razón y origen.

Por ejemplo, se observa que la variable de diseño  $d_4$  varía desde -10 hasta 10 en el conjunto de puntos descrito en la tabla 5.1. Esta variación es necesaria dado que los valores negativos configuran el mecanismo simétrico de los valores positivos, como se observa en la figura 5.3. Sin embargo, dado que mecanismos simétricos generan trayectorias simétricas, puede eliminarse la parte negativa de  $d_4$ , quedando la discretización con  $1.21 \cdot 10^5$  puntos y habiéndose reducido al 0.005% de su tamaño original.

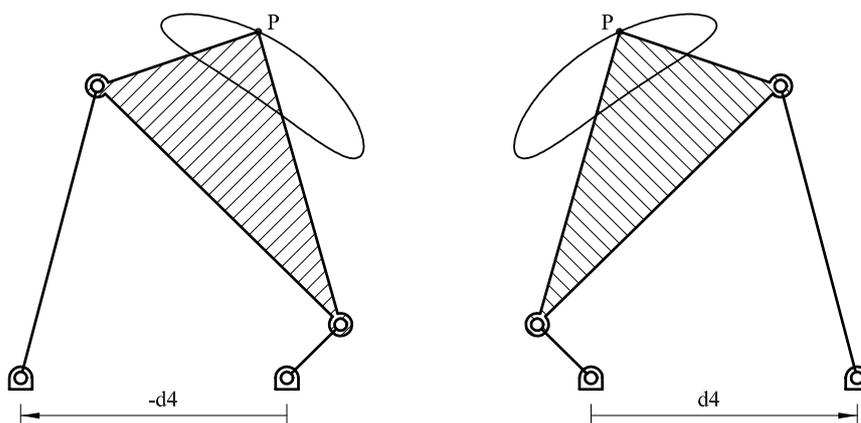


Figura 5.3. Mecanismos de 4 barras simétricos.

Finalmente, si se estudian los mecanismos en el cambio de configuración, se observa que dado un mecanismo y su punto trazador de la biela —en una configuración determinada de las dos posibles— siempre se puede encontrar otro punto de la biela de un mecanismo dimensionalmente igual al anterior pero en una configuración diferente que trace una trayectoria perfectamente simétrica de aquella. Esto quiere decir que, dado un punto del EDA siempre se puede encontrar otro punto tal que ambos trazan la misma trayectoria. Consecuentemente se puede eliminar uno de ellos logrando una nueva reducción del EDA. Por ejemplo, dado un mecanismo de 4 barras cualquiera (habiendo ya eliminado las dimensiones comentadas hasta ahora) de dimensiones

$$\{d4, d5 = 1, d6, d7, d8, d9, \text{Config.}=0\}$$

se puede demostrar que otro mecanismo de dimensiones

$$\{d4, d5 = 1, d6, d7, d8, -d9, \text{Config.}=1\}$$

traza la misma trayectoria. Esto se ilustra en la figura 5.4, donde puede verse que los puntos P y Q del acoplador de dos mecanismos dimensionalmente iguales pero montados en configuraciones diferentes generan trayectorias simétricas, teniendo P y Q coordenadas conjugadas —es decir, misma coordenada X y coordenadas Y iguales en magnitud pero diferentes en signo— en el sistema de ejes locales del acoplador  $X_a-Y_a$ .

Esta redundancia de puntos en el EDA puede anularse eliminando uno de los dos posibles valores de la variable *Configuración*. En tal caso, el número de puntos en el conjunto considerado se reduce a  $6.05 \cdot 10^4$ , lo que supone una reducción acumulada a un 0.0025% de su tamaño original.

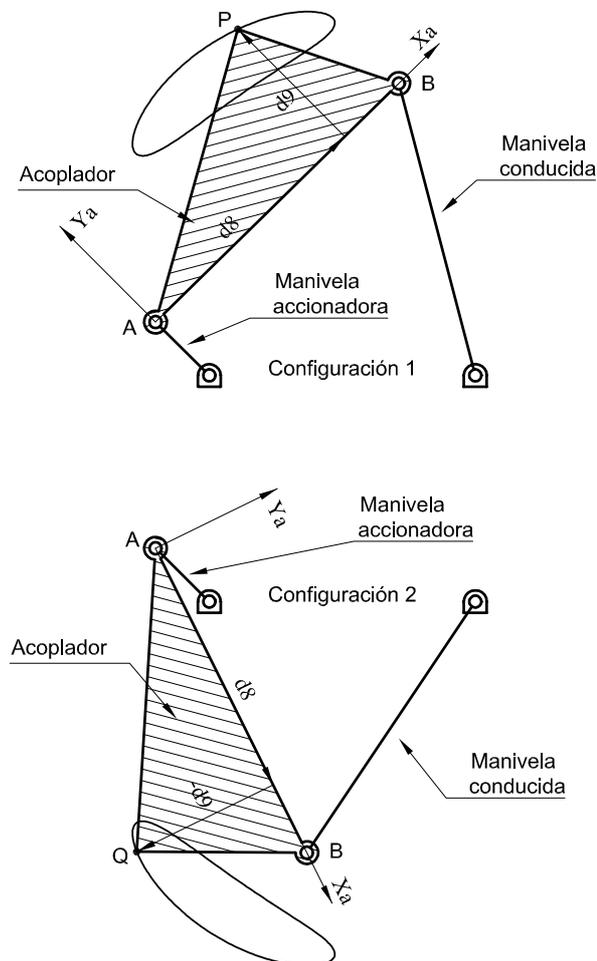


Figura 5.4. Mecanismos en diferente configuración generan trayectorias simétricas.

Se observa que el diseño de funciones objetivo que permita eliminar dimensiones del ED conlleva una reducción importante del mismo sin pérdida de posibilidades. Y, considerando que se ha reducido el espacio en el que se pretenden encontrar el óptimo global, esta reducción aumenta las probabilidades de conseguirlo.

En la tabla 5.2 queda resumido el estado final del conjunto de puntos considerado tras las reducciones planteadas.

Dimensión	Número de valores	Valor mínimo	Valor máximo	Incremento	Observaciones
$d_1$	(no se incluye)				
$d_2$	(no se incluye)				
$d_3$	(no se incluye)				
$d_4$	5	2	10	2	
$d_5$	1	1	1	(invariable)	
$d_6$	10	1	10	1	
$d_7$	10	1	10	1	
$d_8$	11	-10	10	2	
$d_9$	11	-10	10	2	
<b>Config.</b>	1	0	0	(invariable)	

Nº inicial de puntos:  $2.42 \cdot 10^9$   
Nº actual de puntos:  $6.05 \cdot 10^4$   
Reducción respecto del tamaño inicial: 0.002500%

Tabla 5.2. Estado de la discretización tras la reducción del espacio de diseño del mecanismo de 4 barras.

Otra posible reducción del EDA (sin eliminación de posibilidades reales de síntesis) es la eliminación de mecanismos cognados. Según el *Teorema de Roberts-Chebyshev* (véase Hartenberg y Denavit, 1964), dado un mecanismo de 4 barras y un punto de su acoplador que traza una curva, existen otros dos mecanismos planos de 4 barras (diferentes de aquel y diferentes entre sí) que trazan curvas idénticas a la primera (figura 5.5). Bien interpretado, esto es una prueba de que todos los puntos del ED figuran en el mismo por triplicado (de acuerdo con la forma de las curvas que generan). Entonces, es posible eliminar dos de cada tres puntos reduciendo el ED a un tercio de su tamaño actual.

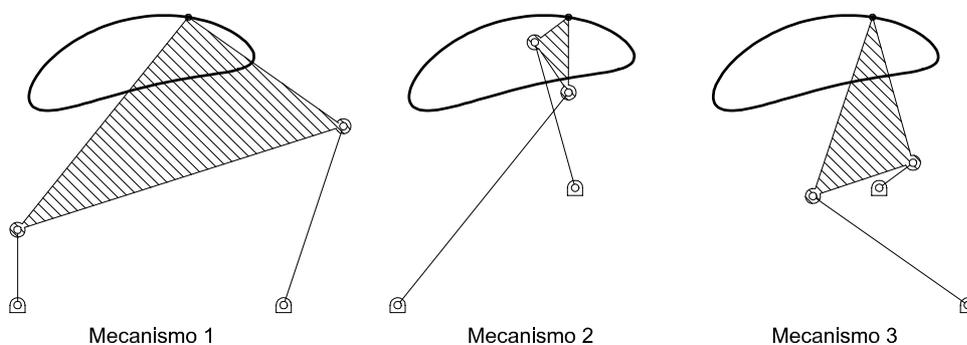


Figura 5.5. Mecanismos cognados (generan una misma trayectoria).

Para realizar esta reducción es necesario adoptar un criterio uniforme y determinista que, aplicado a un mecanismo concreto (es decir, a un punto del EDA), permita seleccionar un único mecanismo del conjunto formado por aquel y sus dos cognados. Al mecanismo seleccionado de entre esos tres se le llamará *cognado primario*. Una vez fijado el criterio, cada punto del EDA puede ser examinado con el fin de decidir si es el cognado primario. Si lo es, se

procede con su evaluación por parte de la función objetivo y si no lo es, se descarta prosiguiendo con el siguiente punto.

Es posible adoptar diferentes criterios para seleccionar el cognado primario. Sin embargo, en la determinación del criterio a utilizar se ha de prestar especial atención a la selección del mecanismo que luego pasará los filtros de eliminación posteriores (véase §5.2.2). De no hacerlo así se estarían eliminando posibilidades reales de diseño en lugar de eliminar únicamente repeticiones de estas posibilidades. Así, supóngase por ejemplo que se parte de un mecanismo —o punto del EDA— A que pasa todos los filtros de eliminación. Al determinar sus cognados se obtienen los mecanismos B y C, de los cuales C pasa todos los filtros y B no. Si se establece un criterio que de A, B y C considera B como el cognado primario, se habrían eliminado los tres puntos del EDA. En efecto, A y B serían eliminados por no ser cognados primarios, mientras que B (que es el cognado primario) sería eliminado en otro filtro posterior. Así, con los diferentes filtros se habría eliminado el punto del EDA representado por los mecanismos A, B y C de forma triplicada. En definitiva, se trata de establecer un criterio que, partiendo de un punto del EDA y sus dos cognados, determine cuales están dentro del EDA último (conseguido tras todas las reducciones aplicables) y, de éstos, seleccione un único mecanismo, descartando los demás.

Aunque se pueden establecer diferentes criterios, cualquiera que tenga en cuenta las consideraciones anteriores es, en principio, igualmente válido. Los mecanismos cognados se diferencian básicamente en las dimensiones de sus barras, por lo que el criterio estará basado en estas dimensiones. Un criterio posible que es adoptado en los sucesivos consiste en seleccionar como cognado primario aquel de los tres que tenga la manivela más corta. Su adopción tiene que ver con el hecho de que estos mecanismos son los que tienen mayor probabilidad de que la manivela accionadora realice giros completos —es decir, que no se bloqueen a lo largo del ciclo cinemático—, lo cual es importante porque la no realización de giros completos por parte de la manivela constituirá un filtro de eliminación posterior (véase §5.2.2).

Si se aplica este criterio de eliminación al EDA mostrado en la tabla 5.2, se obtiene que de los 60500 puntos, 48825 corresponden a mecanismos que son cognados primarios (se han eliminado, por tanto, 11675 mecanismos). Se observa que el número de puntos eliminados no corresponde a la tercera parte de los 60500 puntos iniciales. Esto es debido a que el criterio de eliminación de cognados no distribuye el cognado primario (considerado) y los otros dos (descartados) de forma uniforme en todo el EDA, sino que es realizado de otra forma tal que solamente 11675 puntos que no son cognados primarios han quedado incluidos dentro del EDA considerado en este ejemplo. Otra conclusión que se puede obtener de este resultado es que, dado que el EDA considerado no se ha reducido a un tercio en la eliminación de cognados tras la reducción, en realidad se están considerando las posibilidades de diseño correspondientes a un EDA de mayor tamaño que el mostrado en la tabla 5.2. Ya que existen puntos considerados cuyos cognados no están en el EDA de la tabla 5.2 y que, por tanto,

pertencen a un EDA mayor que aquel (el obtenido al considerar todos los puntos del EDA de la tabla 5.2 más todos los cognados de todos esos puntos).

La reducción del EDA en base a la eliminación de mecanismos cognados no es aplicable únicamente al mecanismo de 4 barras. Otros mecanismos (como por ejemplo el mecanismo biela-manivela) también poseen cognados y se puede asimismo aplicar esta reducción.

En esta primera etapa se ha reducido el EDA a un 0.002018% de su tamaño original eliminando exclusivamente puntos repetidos en el mismo. Esto significa que de cada millón de puntos de la discretización del EDA inicial, 999980 son repeticiones —incluyendo variación de orientación, posición, escala, simetría y mecanismos cognados— de los otros 20 puntos.

### ***5.2.2. Segunda reducción del espacio de diseño.***

La primera reducción del EDA se ha realizado con el criterio de eliminación de los puntos redundantes o repetidos. Tras su realización, las posibilidades de síntesis son exactamente iguales a las originales. Sin embargo, es posible reducir aún más el EDA eliminando los puntos del mismo en los que, a priori, se puede conocer que no suponen posibilidades óptimas de síntesis. Así, el objeto de esta segunda reducción es estudiar la curva requerida en la síntesis y descartar puntos del EDA que no tienen posibilidad de reproducir las características de la trayectoria requerida.

Para realizar esta reducción del EDA se ha estudiado el mecanismo de 4 barras y se han determinado relaciones entre las dimensiones del mecanismo y las propiedades de las curvas generadas. Con cualquier otro mecanismo se puede realizar un estudio similar que permita este tipo de reducción, sin embargo, es claro que las conclusiones a las que se llegue dependen del tipo de mecanismo.

Los mecanismos de 4 barras fueron clasificados por Grashof en función de sus dimensiones según éstos tengan alguna barra que realice giros completos o no dispongan de tal barra. En los mecanismos de 4 barras de Grashof se asegura que existe una rotación relativa continua entre dos eslabones del mecanismo. Sin embargo, de las cuatro inversiones de la cadena de Grashof, en una de ellas, la barra que realiza giros completos es el acoplador (mecanismo de doble oscilador), siendo en las otras tres una o las dos manivelas las que realizan tales movimientos. El problema de doble oscilador de Grashof es que si el accionamiento no está en el acoplador, difícilmente se consigue que éste realice giros completos, mientras que si se decide accionar el acoplador, se encuentra cierta dificultad debido a que éste no tiene un movimiento de rotación pura alrededor de un punto fijo.

Para la generación de trayectorias cerradas se requiere que el punto trazador recorra la curva generada en un sentido y realizando giros completos dentro de ella. Consecuentemente el mecanismo que mueve el punto trazador debe ser un mecanismo en el que su eslabón de accionamiento realice giros completos y, por ello, en el caso del mecanismo de 4 barras se descartan los mecanismos que no son de Grashof. Además, para la generación de trayectorias cerradas, dentro de los mecanismos de Grashof se consideran únicamente aquellos mecanismos en los que al menos una manivela realiza giros completos<sup>98</sup>.

Llamando  $s$  a la longitud de la barra más corta,  $l$  a la más larga y  $p, q$  a las longitudes de las otras dos barras del mecanismo de 4 barras, para que el mecanismo tenga una barra que realice giros completos debe cumplirse la *ley de Grashof*:

$$s + l \leq p + q \quad (5.1)$$

pero, como se ha comentado, se excluye el caso en el que la barra más corta ( $s$ ) es el acoplador, ya que entonces es ésta la que realiza giros completos.

La síntesis de trayectoria puede dividirse en dos casos que han sido estudiados separadamente en los capítulos 3 y 4: síntesis de trayectorias cerradas y síntesis de trayectorias abiertas. Las trayectorias cerradas solamente pueden ser generadas por mecanismos en los que la barra de accionamiento realiza giros completos, por lo que para este tipo de síntesis pueden excluirse directamente todos los puntos del EDA que no cumplen la *ley de Grashof*<sup>99</sup> y también aquellos que, aun cumpliéndola, la barra más corta es el acoplador. De esta forma se consigue una reducción considerable del EDA.

Por otro lado, una trayectoria abierta puede ser parte de una trayectoria cerrada o de otra abierta. Así, tanto los mecanismos de Grashof como los mecanismos no de Grashof son candidatos para generar trayectorias abiertas y no puede descartarse a priori ninguno de estos dos grupos. En conclusión, el ED del problema de síntesis de trayectorias abiertas no puede ser reducido tanto como en el caso de trayectorias cerradas.

El caso límite de Grashof en el que

$$s + l = p + q \quad (5.2)$$

corresponde a mecanismos que se pliegan (es decir, existe un instante en el cual todas las barras están alineadas). Estos mecanismos presentan una complicación adicional ya que a

<sup>98</sup> Esto tiene que ver con el hecho de que los mecanismos de trazado de trayectorias cerradas en aplicaciones industriales suelen ser movidos por accionamientos aplicados a una de las manivelas.

<sup>99</sup> Fox y Willmert (Fox y Willmert, 1967) ya introdujeron el requisito de *rotabilidad completa de la barra accionadora* en el problema de síntesis dimensional aproximada de mecanismos planos.

partir de la posición plegada pueden cambiar de configuración. Por ello, la trayectoria generada no está cinemáticamente determinada, sino que durante el movimiento y tras la alineación el mecanismo puede seguir con cualquiera de las dos configuraciones, dependiendo de la dinámica del mismo<sup>100</sup>. Consecuentemente, para casos habituales —no especiales— de síntesis pueden excluirse estos mecanismos identificados por la ecuación (5.2).

Siguiendo con el ejemplo de la primera reducción, tras la revisión de los 48825 puntos de la rejilla reducida a la que se llegó al final de §5.2.1, se obtiene que 18148 son mecanismos válidos para generar curvas cerradas (es decir, son mecanismos de Grashof que no se pliegan y en los que la barra que realiza giros completos no es el acoplador). El resto (30677) son mecanismos no válidos para generar curvas cerradas. Con este criterio, en la síntesis de trayectorias cerradas, se ha conseguido una reducción del conjunto de puntos del EDA a un 0.000750% de su tamaño original. Pero esta reducción no es aplicable al problema de síntesis de trayectorias abiertas.

Otro criterio de sencilla aplicación es la diferenciación entre trayectorias con puntos múltiples y trayectorias sin puntos múltiples. Las primeras son aquellas que se cortan a sí mismas teniendo el punto intersección dos o más tangentes a la curva (de ahí su nombre). Las segundas son trayectorias que no se cortan a sí mismas en ningún punto. En el mecanismo de 4 barras, la aparición de puntos múltiples en las trayectorias ha sido estudiada desde hace tiempo (Hartenberg y Denavit, 1964) (Torfason y Ahmed, 1978) (Hernández *et al.*, 1997) en base a la ecuación de la curva del acoplador. Esta ecuación puede ser expresada en la forma de Roberts como sigue:

$$F(x, y) = U^2 + V^2 - W^2 = 0 \quad (5.3)$$

donde  $U$ ,  $V$  y  $W$  son funciones que dependen de las dimensiones del mecanismo y de las coordenadas  $x$ ,  $y$  de los puntos de la curva del acoplador. Para que un punto  $(x, y)$  de la curva del acoplador sea un punto múltiple, debe existir más de una tangente a la curva en dicho punto. La pendiente de la tangente viene dada por la expresión:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial F(x, y)} \cdot \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(x, y) / \partial x}{\partial F(x, y) / \partial y} \quad (5.4)$$

---

<sup>100</sup> En la práctica, estos mecanismos se utilizan casi exclusivamente para la reproducción de situaciones especiales entre las que se incluyen requisitos de plegamiento del mecanismo o la existencia de puntos múltiples (puntos con varias tangentes diferentes) en la trayectoria.

y para que existan varias soluciones, este término debe quedar indeterminado. Para ello el numerador y el denominador deben ser ambos cero. Entonces, los puntos de la curva del acoplador, además de cumplir la ecuación (5.3), para ser puntos múltiples deben cumplir las ecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} &= 2 \cdot U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \cdot V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} - 2 \cdot W \cdot \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} &= 2 \cdot U \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + 2 \cdot V \cdot \frac{\partial V}{\partial y} - 2 \cdot W \cdot \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

De estas dos ecuaciones se pueden obtener las expresiones de  $U$  y  $V$  en función de  $W$  y de las derivadas parciales:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{V_x W_y - V_y W_x}{U_y V_x - U_x V_y} \cdot W = \alpha \cdot W \\ V &= \frac{U_y W_x - U_x W_y}{U_y V_x - U_x V_y} \cdot W = \beta \cdot W \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

donde el subíndice  $x$  (resp.  $y$ ) indica derivada parcial con respecto a  $x$  (resp.  $y$ ). Sustituyendo estas expresiones de  $U$  y  $V$  en la ecuación (5.3), se obtiene:

$$W^2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 - 1) = 0 \quad (5.7)$$

Así, existen dos posibilidades de solución:

$$W = 0 \quad (5.8)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0 \quad (5.9)$$

La segunda ha sido ampliamente estudiada por Hernández *et al.* (Hernández *et al.*, 1997) llegando a la conclusión de que los puntos múltiples representados por esa ecuación corresponden únicamente a mecanismos de 4 barras plegables en las diferentes posibilidades de plegamiento.

La primera solución, correspondiente a la ecuación (5.8), es la solución clásica del problema de obtención de puntos múltiples y, representada en el plano, corresponde a una circunferencia llamada *circunferencia de focos* que pasa por las dos articulaciones de las manivelas con la barra fija y abarca un triángulo semejante al triángulo del acoplador con el punto trazador. En la figura 5.6 se observa la representación de la circunferencia de focos correspondiente a un mecanismo de 4 barras. Como se ha comentado, esta circunferencia

pasa por los puntos  $O_2$ ,  $O_4$  y  $P'$ , donde  $O_2$  y  $O_4$  son las articulaciones de las manivelas con la barra fija y el punto  $P'$  es tal que el triángulo  $O_2$ - $O_4$ - $P'$  es semejante al triángulo  $A$ - $B$ - $P$ .

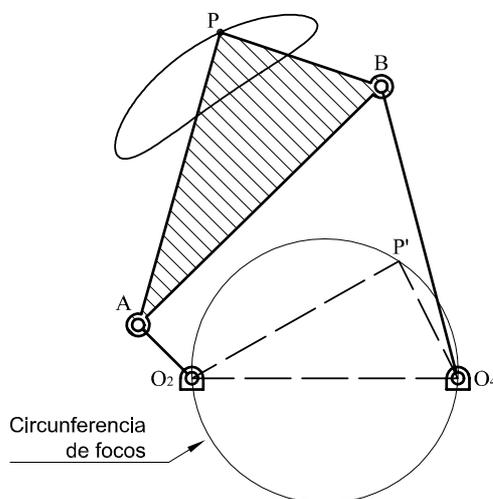


Figura 5.6. Circunferencia de focos de un mecanismo de 4 barras.

Se observa que la circunferencia de focos depende del punto trazador ( $P$ ) del acoplador. Por ello, para cada punto trazador diferente existirá una circunferencia de focos diferente.

La conclusión a la que se llega con la ecuación (5.8) es que para que una trayectoria generada por un mecanismo de 4 barras tenga puntos múltiples, las coordenadas  $(x,y)$  de esos puntos han de cumplir dicha ecuación, o lo que es lo mismo, han de pertenecer a la circunferencia de focos<sup>101</sup> (que es la representación gráfica de la ecuación (5.8)). Así, la trayectoria tendrá puntos múltiples solamente si corta a la circunferencia de focos (de forma que exista al menos un punto común a ambas).

Por otro lado, todos los puntos de la circunferencia de focos cumplen la ecuación (5.8). Por tanto, lo recíproco de lo anterior también es cierto: si la trayectoria corta a la circunferencia de focos, el punto de corte es obligatoriamente un punto múltiple. Consecuentemente, la única posibilidad de que una trayectoria no tenga puntos múltiples es que no corte a la circunferencia de focos.

Esto puede ser utilizado para diferenciar entre las curvas que se cortan a sí mismas (curvas con puntos dobles) y las que no lo hacen. Una vez que es posible realizar tal diferenciación, cuando la trayectoria requerida en síntesis sea una curva cerrada sin puntos

<sup>101</sup> Se han excluido intencionadamente los puntos múltiples externos a la circunferencia de focos (es decir, aquellos que cumplen la ecuación (5.9) en lugar de la ecuación (5.8)) debido a que son siempre pertenecientes a mecanismos que se pliegan.

dobles (resp. con puntos dobles) se pueden descartar todos los puntos del EDA correspondientes a curvas que contengan puntos dobles (resp. que no contengan puntos dobles).

Sin embargo, pueden encontrarse ciertas excepciones. Por ejemplo, en la figura 5.7a se muestra una trayectoria generada por un mecanismo que, pese a que corta a la circunferencia de focos en los puntos C y D, a priori no se corta a sí misma. Esto es debido a que la ecuación (5.3) de la curva del acoplador incluye los dos circuitos correspondientes a las posibles configuraciones del mecanismo por lo que si se representan estas dos posibilidades (figura 5.7b) se observa que, efectivamente, los dos circuitos de la trayectoria se cortan en la circunferencia de focos. En definitiva, existen casos (aunque puede comprobarse que son pocos) en los que un circuito de la trayectoria generada por un mecanismo (en una configuración determinada) corta a la circunferencia de focos sin cortarse a sí mismo (sino cortando al otro circuito de trayectoria).

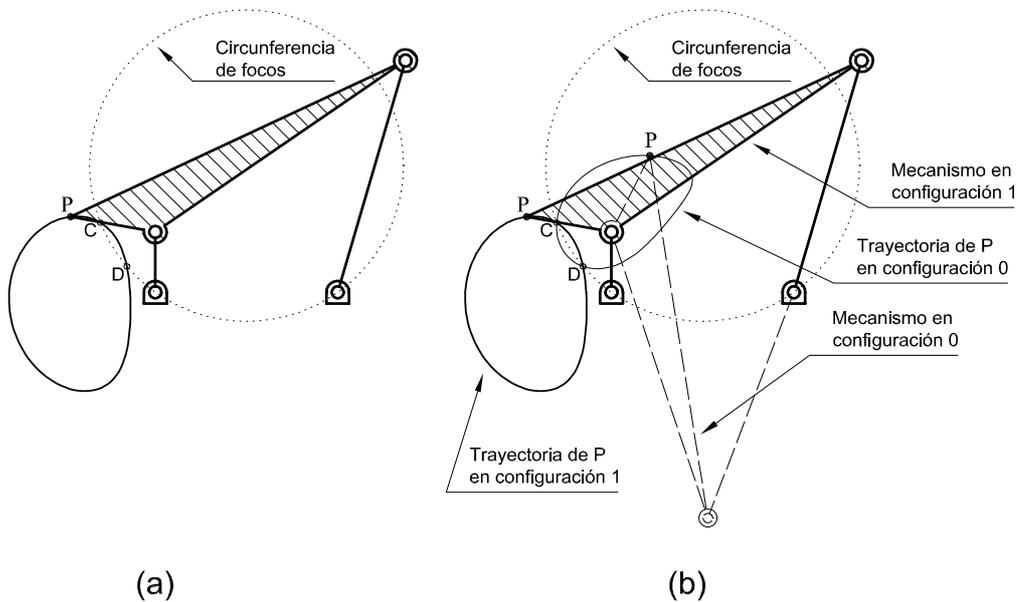


Figura 5.7. Ejemplo de circuito de trayectoria con puntos múltiples que no se corta a sí mismo.

Como se ha visto, para determinar si una curva generada por un mecanismo (que no es plegable) tiene puntos múltiples basta con estudiar si la curva corta a la circunferencia de focos. Sin embargo, dado que las curvas tienen una formulación no lineal, el algoritmo para determinar esta posibilidad de corte no es trivial. Una estrategia simple consiste en comprobar numerosos puntos de la curva y observar si todos están fuera o todos están dentro de la circunferencia de focos. En tal caso, la curva no cortará a dicha circunferencia. Por el contrario,

si hay puntos de la curva dentro y fuera de la circunferencia de focos, existirá la intersección de la primera con la segunda<sup>102</sup>.

Sin embargo, si se comprueba un número elevado de puntos, el coste computacional de la comprobación puede incrementarse hasta aproximarse (o superar) al coste computacional de la comparación de esa trayectoria con la curva requerida —es decir, al coste computacional de la evaluación de ese punto del EDA por parte de la función objetivo—. En tal caso, no se obtiene ningún beneficio en la detección de curvas con/sin puntos múltiples. Así, es necesario proponer un método de comprobación que sea computacionalmente mucho más económico que la función objetivo.

Para ello se propone comprobar si un número moderado de puntos está dentro o fuera de la circunferencia de focos. Tras varios ensayos se ha comprobado que con 10 puntos se puede obtener una estimación suficientemente aproximada con un coste computacional muy inferior al de la función objetivo. Sin embargo, también se ha detectado la posibilidad de exclusión de opciones reales de síntesis. Así, por ejemplo, en la figura 5.8 se observa una trayectoria generada por un mecanismo de 4 barras. Esta trayectoria corta a la circunferencia de focos y tiene un punto múltiple. Sin embargo, uno de los dos lazos es tan pequeño que al comprobar 10 puntos de la curva (marcados en la figura) se observa que todos ellos están fuera de la circunferencia de focos, por lo que este algoritmo indicaría que la curva no tiene puntos múltiples.

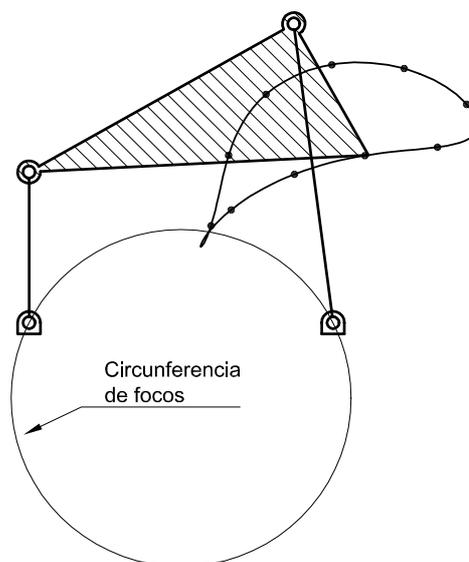


Figura 5.8. Ejemplo de fallo al considerar 10 puntos en la comprobación de puntos múltiples.

---

<sup>102</sup> Considerando que las trayectorias son cerradas y continuas.

Es conveniente evitar la eliminación de posibilidades reales de síntesis y así conservar todos los puntos del EDA que son buenas soluciones potenciales al problema de síntesis. En este sentido, dado que la comprobación de si un punto está dentro o fuera de la circunferencia de focos se realiza comparando la distancia del primero al centro de la circunferencia con el radio de esta última, es posible aplicar una cierta tolerancia al radio en la comparación para no excluir ninguna posibilidad real de síntesis asumiendo el coste de incluir algunas otras curvas que no lo son. Esta estrategia se considera conveniente y, a pesar de ser conservadora, permitirá reducir notablemente el EDA.

A la hora de aplicar la tolerancia, es necesario distinguir entre dos casos: cuando se desea eliminar del EDA las curvas con puntos múltiples y cuando se desea eliminar las curvas sin puntos múltiples. Para ello se consideran dos circunferencias equidistantes de la circunferencia de focos (de radio  $R$ ): la *circunferencia exterior* de radio  $R \cdot (1+t)$  y la *circunferencia interior* de radio  $R \cdot (1-t)$ . Siendo  $t$  la tolerancia radial que puede expresarse en tanto por ciento.

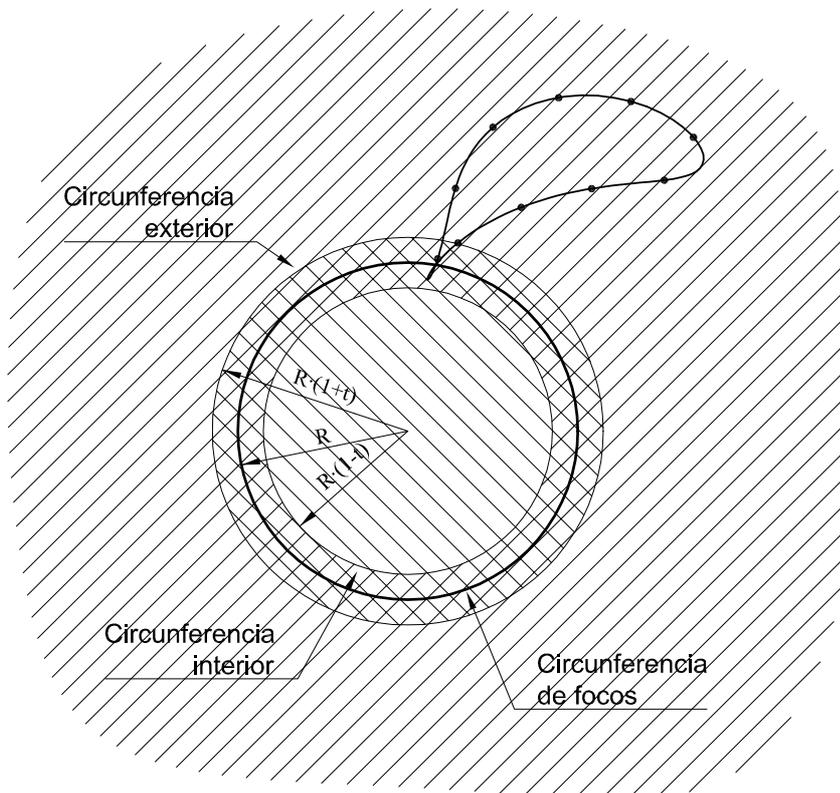


Figura 5.9. Regiones consideradas en la eliminación de curvas con puntos múltiples.

El primer caso corresponde a la síntesis de curvas sin puntos múltiples, interesando conservar todas las curvas que no tengan puntos múltiples (aún cuando para conseguir esto se

incluyan algunas con puntos múltiples). En este caso, si los 10 puntos de la curva están dentro de la circunferencia exterior (figura 5.9) o si los 10 puntos están fuera de la circunferencia interior entonces se considera que la curva no corta a la circunferencia de focos y, consecuentemente, no tiene puntos múltiples.

Como ejemplo, se observa la trayectoria mostrada en la figura 5.9 tiene los 10 puntos comprobados en el área exterior, por lo que (aún cuando tiene un punto doble) es considerada en este caso tras eliminar del EDA las curvas con puntos múltiples. Esto es una prueba de que, al incluir la tolerancia, la eliminación es más conservadora y se incluyen algunas curvas que no pertenecen al grupo buscado. Pero también puede pensarse que de esta forma se incluyen algunas curvas con puntos dobles pero con uno de los lazos muy pequeño. Esto no es una deficiencia porque es posible que esta curva sea muy parecida a la curva sin puntos dobles requerida, siendo una posible solución al problema. Teniendo esto en cuenta, la inclusión de ciertas curvas no pertenecientes al grupo buscado puede favorecer el proceso general de síntesis.

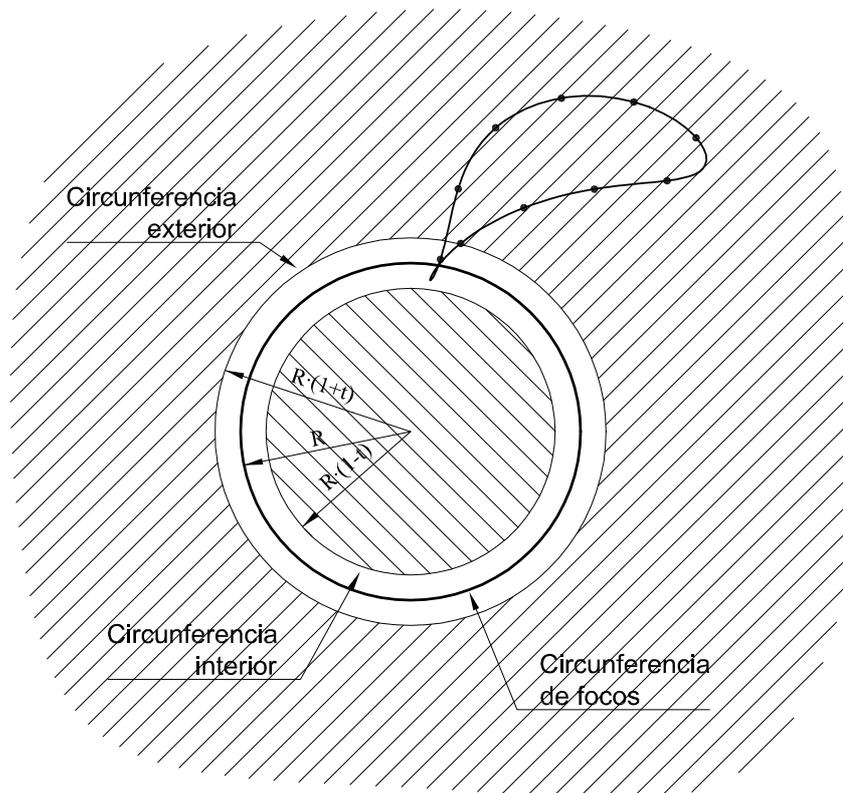


Figura 5.10. Regiones consideradas en la eliminación de curvas sin puntos múltiples.

El segundo caso corresponde a la síntesis de curvas con puntos múltiples y, por tanto, se persigue eliminar las curvas sin puntos múltiples. En este caso los criterios de eliminación

cambian. Tal como se muestra en la figura 5.10, al aplicar la tolerancia, solamente si todos los puntos de la trayectoria están en el exterior de la circunferencia exterior o si están en el interior de la circunferencia interior se considerará que la trayectoria no tiene puntos múltiples. Así, en este caso, la trayectoria mostrada en dicha figura sería considerada como perteneciente al grupo de puntos múltiples. Esta trayectoria (como todas aquellas que contengan alguno de los 10 puntos entre las circunferencias exterior e interior) sería considerada en los dos casos expuestos —es decir, pertenecerá a los dos grupos de puntos—.

Si la tolerancia  $t$  se hace 0, se está en la situación inicial y no existen puntos del EDA comunes a los dos grupos anteriores. En la figura 5.11 se muestra una rejilla de puntos del acoplador. De acuerdo con este criterio ( $t=0$ ), se han evaluado cuales generan curvas con puntos múltiples (marcados con un aspa) —es decir, cortan a sus respectivas circunferencias de focos— y cuales no (marcados con un círculo).

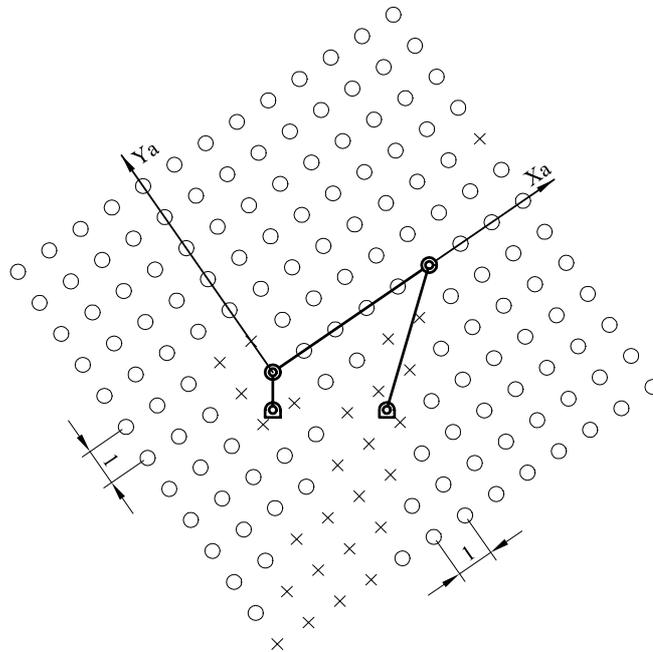


Figura 5.11. Diferenciación de puntos que trazan trayectorias con puntos dobles (x) y sin puntos dobles (o) considerando una tolerancia  $t = 0$ .

Cuando se estudian las trayectorias generadas por los puntos, se observa que existen errores en la determinación de puntos múltiples (tal como se había expuesto anteriormente) y por eso se hace necesario utilizar una tolerancia en la comprobación de la posición de los 10 puntos de la curva relativa a la circunferencia de focos.

Con el fin de estimar el valor adecuado de la tolerancia<sup>103</sup> se han ensayado varios valores. Considerando una tolerancia  $t=7.5\%$ , ya se observa (figura 5.12) que existen puntos del acoplador que pertenecen a ambos conjuntos (marcados en la figura con aspa y círculo:  $\otimes$ ). Sin embargo, es conveniente que la mayor parte de la frontera entre regiones de puntos de una determinada clase y las regiones adyacentes de otra clase de puntos esté compuesta por puntos pertenecientes a las dos regiones ya que de esta forma se asegura la inclusión de todas las posibilidades reales en cada conjunto. Para ello se necesita incrementar el valor de la tolerancia.

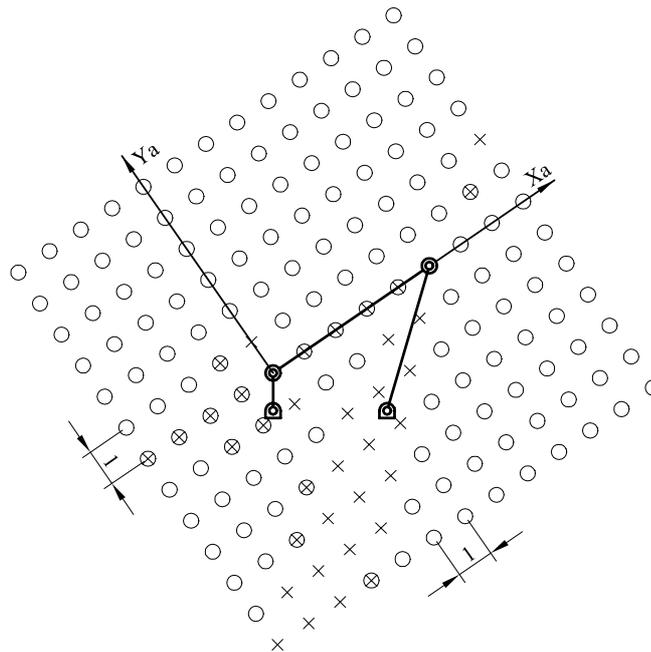


Figura 5.12. Diferenciación de puntos que trazan trayectorias con puntos dobles ( $\times$ ) y sin puntos dobles ( $\circ$ ) considerando una tolerancia  $t = 7.5\%$ .

---

<sup>103</sup> Nótese que este valor adecuado depende del número de puntos de la trayectoria utilizado en la comprobación de puntos múltiples (en este caso 10). Por tanto, si se cambia este número de puntos, será necesario volver a estimar el valor de la tolerancia  $t$ .

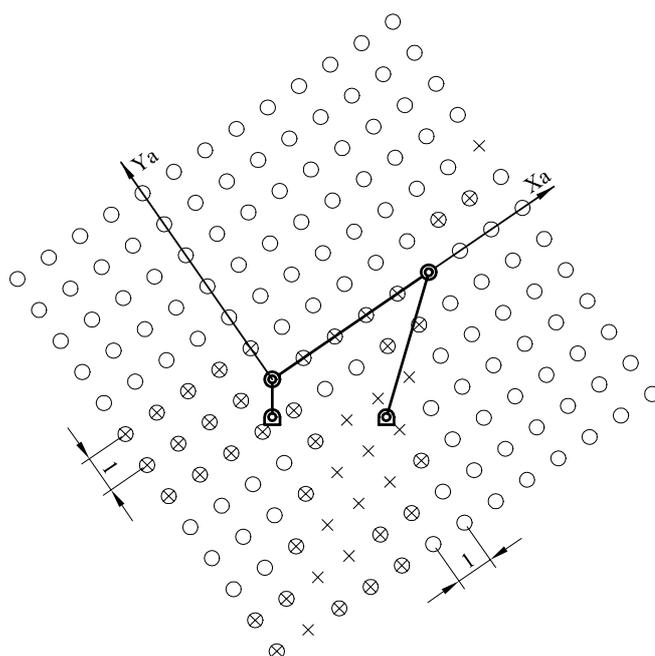


Figura 5.13. Diferenciación de puntos que trazan trayectorias con puntos dobles (x) y sin puntos dobles (o) considerando una tolerancia  $t = 15\%$ .

En la figura 5.13 se muestra el mismo ejemplo considerando una tolerancia  $t=15\%$ . Se observa cómo la mayor parte de las fronteras están definidas por puntos que pertenecen a los dos grupos. Se ha comprobado que con este valor se están incluyendo en cada grupo todas las posibilidades reales de síntesis, a la vez que un mayor valor de  $t$  supondría la una inclusión de nuevas posibilidades no reales de síntesis (con lo que la eliminación sería menos efectiva). Así, a partir de las pruebas realizadas, se considera que este valor de la tolerancia (15%) resulta adecuado.

Dado que la mayor parte de los puntos del acoplador (y, por tanto, del EDA) generan trayectorias que no se cortan a si mismas, al aplicar este criterio se gana mucho más en coste computacional en la síntesis de curvas con puntos dobles que en la síntesis de curvas sin puntos dobles. Así, en el ejemplo propuesto en la primera reducción del ED (tabla 5.1), tras aplicar este criterio se encuentra que de los 18148 que quedaban en el EDA (tras las reducciones anteriores del mismo), 17512 generan trayectorias que no se cortan a si mismas mientras que 5870 generan trayectorias que se cortan a si mismas, existiendo 5234 puntos comunes a ambos grupos. Así, para la síntesis de trayectorias cerradas que no se cortan a si mismas se ha conseguido reducir el EDA a un 0.000724% de su tamaño inicial, mientras que para la síntesis de trayectorias que se cortan a si mismas la reducción es al 0.000243% del tamaño original.

Descripción	Síntesis de trayectorias SIN puntos dobles		Síntesis de trayectorias CON puntos dobles	
	Nº pts. en el EDA	Tamaño del EDA respecto al inicial	Nº pts. en el EDA	Tamaño del EDA respecto al inicial
EDA inicial	$2.42 \cdot 10^9$		$2.42 \cdot 10^9$	
Reducción por independencia de posición y orientación	$2.42 \cdot 10^6$	0.100000%	$2.42 \cdot 10^6$	0.100000%
Reducción por independencia de tamaño	242000	0.010000%	242000	0.010000%
Reducción por independencia de simetrías	60500	0.002500%	60500	0.002500%
Reducción por eliminación de cognados	48825	0.002018%	48825	0.002018%
Reducción por eliminación de mecanismos que se bloquean	25120	0.001038%	25120	0.001038%
Reducción por eliminación de mecanismos que se pliegan	18148	0.000750%	18148	0.000750%
Reducción por eliminación de puntos que no concuerdan con la trayectoria requerida en cuanto a pts. múltiples	17512	0.000724%	5870	0.000243%

Tabla 5.3. Evolución del tamaño del EDA con la aplicación secuencial de eliminación de puntos.

En resumen, la tabla 5.3 muestra la evolución del EDA para los dos casos posibles (síntesis de trayectorias sin y con puntos dobles) a medida que se han ido aplicando las diferentes reducciones.

El resultado final obtenido puede interpretarse como que de cada millón de puntos del EDA inicial, solo 7.24 son puntos no repetidos que generan trayectorias que no se cortan a si mismas, y solo 2.43 son puntos no repetidos que generan trayectorias que se cortan a si mismas. Como se observa, la reducción de puntos ha sido muy significativa y, consecuentemente, la economía de computación en la búsqueda del óptimo se ha mejorado notablemente.

### 5.3. Análisis de la función objetivo en el espacio de diseño.

Se ha razonado anteriormente que la función objetivo constituye una hipersuperficie dentro del EDA, siendo el objetivo de la síntesis la consecución de la posición del EDA asociada al mínimo global de dicha función objetivo. Con el fin de poder plantear estrategias adecuadas para buscar el óptimo es conveniente realizar un estudio exhaustivo de la función objetivo ya que éste permitirá obtener una idea de la forma de la hipersuperficie y,

consecuentemente, de la probabilidad de encontrar el óptimo con cada una de las estrategias planteadas.

Una posibilidad que será sometida a estudio es la búsqueda del óptimo global de forma exhaustiva. En esta estrategia se discretiza el EDA (obteniendo un conjunto de puntos uniformemente distribuidos) y se evalúan todos los puntos mediante la función objetivo, para luego optimizar partiendo de los mejores valores de la discretización hasta conseguir el óptimo en el EDA. El principal problema que plantea esta estrategia es el coste computacional, el cual está estrechamente vinculado al paso de discretización (cuanto más pequeño sea el paso más puntos habrá en la malla y mayor será el coste computacional correspondiente a la evaluación de todos esos puntos). Así pues, es conveniente utilizar un paso de discretización lo más amplio posible para que el coste computacional sea menor. Pero, por otro lado, para que la hipersuperficie discretizada sea suficientemente representativa de la hipersuperficie real (continua), el paso de discretización no podrá ser mayor que un cierto valor que dependerá únicamente de la forma de la hipersuperficie real.

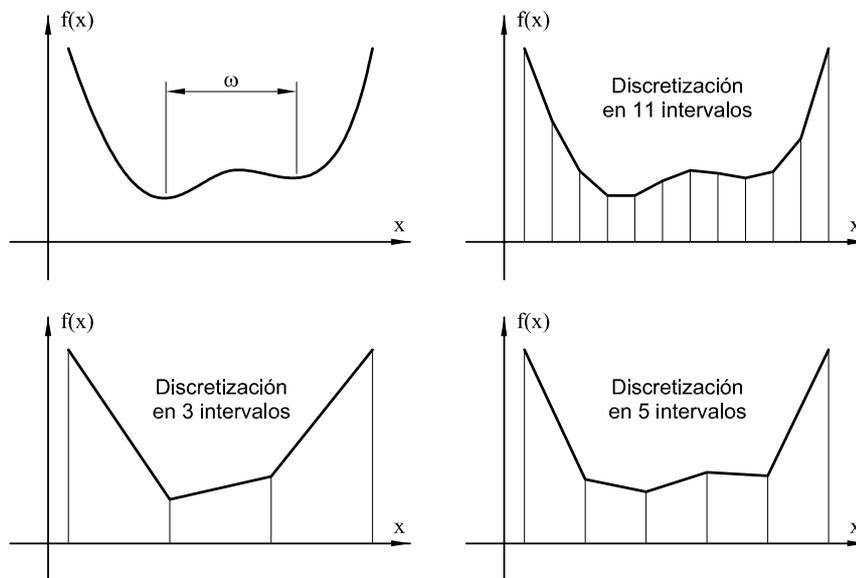


Figura 5.14. Refinamiento sucesivo en la discretización de una función de una variable.

Como ejemplo, en la figura 5.14 se muestran diferentes discretizaciones del dominio en el que está definida una función unidimensional. La primera discretización (en 3 intervalos) demuestra ser demasiado basta para ser sensible a todos los mínimos reales de la función<sup>104</sup>. Así, se observa que esta discretización solamente representa un mínimo local de los dos que

<sup>104</sup> La detección de los puntos mínimos de la discretización se realiza comparando su valor con el valor de sus puntos contiguos. Si el primero es menor que los restantes, se trata de un mínimo local en la discretización.

tiene la función en el dominio considerado. La discretización en 5 intervalos es ya representativa de los mínimos existentes en la función real ya que en ella aparecen los dos mínimos locales existentes en la función continua. Aunque estos mínimos locales discretos no están ubicados en la misma situación que en la función continua, es claro que utilizando un método de optimización basado en el gradiente y partiendo de los mínimos locales discretos se alcanzará fácilmente la ubicación de los mínimos locales reales. Finalmente, la discretización en 11 intervalos es mas fina y, por tanto, más fiel a la forma real de la curva.

Así, se observa que discretizar el dominio en 3 intervalos no es suficiente de acuerdo con el espaciado ( $\omega$ ) de aparición de los mínimos locales. Por el contrario, cuando se discretiza el dominio en 11 intervalos no se obtiene ninguna ventaja respecto a la discretización en 5 intervalos (en lo que al número de mínimos se refiere) pero sí que se incrementa el coste computacional al tener que calcular el valor de los 12 puntos de la discretización. En consecuencia, para el planteamiento exhaustivo resulta necesario estimar el nivel de discretización mínimo necesario para que la discretización represente todos los mínimos de la función objetivo en el EDA.

Por otro lado, para la estrategia exhaustiva o para cualquier otra es interesante conocer el orden de magnitud de los mínimos existentes y si estos están concentrados o distribuidos en el EDA. En tanto que, dado un tipo de mecanismo, existen varios conjuntos de dimensiones de sus barras (puntos del EDA) que trazan trayectorias similares, es de suponer que existirán varios mínimos locales con valores similares de la función objetivo y que estos estén distribuidos de alguna forma en el EDA.

Como se ha visto en los capítulos 3 y 4, los casos de síntesis de trayectoria cerrada y de trayectoria abierta tienen planteamientos diferentes con funciones objetivo diferentes. Sin embargo, las pruebas realizadas demuestran que el primero es mucho más crítico que el segundo cuando la curva requerida es mínimamente reproducible por el tipo de mecanismo considerado<sup>105</sup>. En efecto, puede considerarse que al realizar una síntesis de un tramo abierto de curva, la probabilidad de que éste sea similar a algún tramo de curva generada por los mecanismos del EDA es mucho mayor que en el caso de una curva cerrada. Y esto es así por dos motivos fundamentales: primero, por que existen más posibilidades de obtener una solución óptima al variar la posición, orientación y escala de la curva abierta requerida sobre cada curva del EDA y segundo porque existen más puntos en el EDA<sup>106</sup>. Así, con el fin de

---

<sup>105</sup> Lo que quiere decir que su geometría es similar (aunque no sea necesariamente igual) a la de alguno de los diferentes tipos de curvas que el mecanismo genera.

<sup>106</sup> Ya que al realizar la síntesis de curvas cerradas se eliminan del EDA todos los mecanismos que se bloquean (porque éstos generan trayectorias abiertas); no siendo así en la síntesis de curvas abiertas debido a que una curva abierta puede ser reproducida fielmente por un mecanismo que se bloquee.

estudiar el caso más crítico se plantea el estudio de la función PDCP1 (véase Capítulo 3) correspondiente a la síntesis de curvas cerradas.

### 5.3.1. Análisis preliminar bidimensional de la función objetivo.

Con el fin de obtener una idea aproximada de la forma de la función objetivo, se realiza una representación de la misma considerando solamente dos variables de diseño (EDA bidimensional). Para ello se selecciona un mecanismo de 4 barras, quedando como variables de diseño las coordenadas  $(X_3, Y_3)$  del punto trazador dentro del sistema de ejes locales del acoplador. Para evitar grandes desproporciones dimensionales, se puede acotar el ED de forma que  $X_3$  varíe dentro del intervalo  $[-5, 15]$  e  $Y_3$  dentro del intervalo  $[-10, 10]$ . En la figura 5.15 se observa una representación del mecanismo y el cuadrado asociado al acoplador que acota el ED. Se analizará la función objetivo dentro de dicho cuadrado.

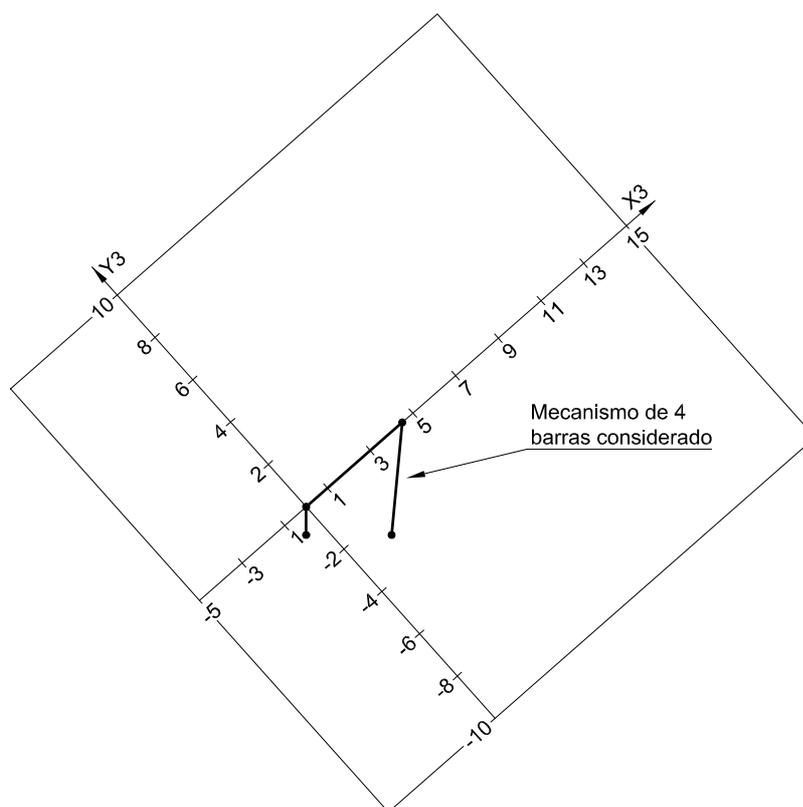


Figura 5.15. Mecanismo de 4 barras utilizado en el análisis bidimensional.

La curva requerida utilizada para este ejemplo es una B-Spline cúbica (fig. 5.16) cuya forma es catalogable dentro de las generadas por mecanismos de 4 barras. Así, los puntos del

EDA son evaluados por la función objetivo comparando su curva asociada con la requerida utilizando la función PDCP1 (con 12 puntos de comparación) definida en el capítulo 3.

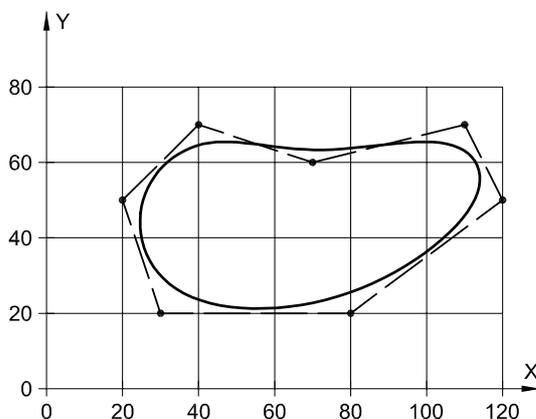


Figura 5.16. Curva requerida (B-Spline cúbica y su polígono de control).

El EDA bidimensional inicial (representado como un cuadrado en la figura 5.15) es reducido al eliminar los puntos que no son el cognado primario y al eliminar los puntos que no concuerdan con la curva requerida en cuanto a puntos múltiples<sup>107</sup> —es decir, al eliminar los puntos que representan trayectorias que se cortan a si mismas, ya que la trayectoria requerida no se corta a si misma—. Su forma es la de un cuadrado del que se le elimina un área tal como se muestra sombreada en la figura 5.17. Toda este área corresponde a la eliminación de puntos discordantes con la curva requerida —en cuanto a la existencia de puntos múltiples en las curvas—, no habiéndose producido reducción por eliminación de cognados. El motivo es que todos los puntos de este EDA tienen sus cognados fuera del mismo, con lo que no es posible eliminación alguna.

---

<sup>107</sup> Las demás reducciones del EDA planteadas en §5.2 atañen al resto de dimensiones del mecanismo y no son aplicables a este caso bidimensional.

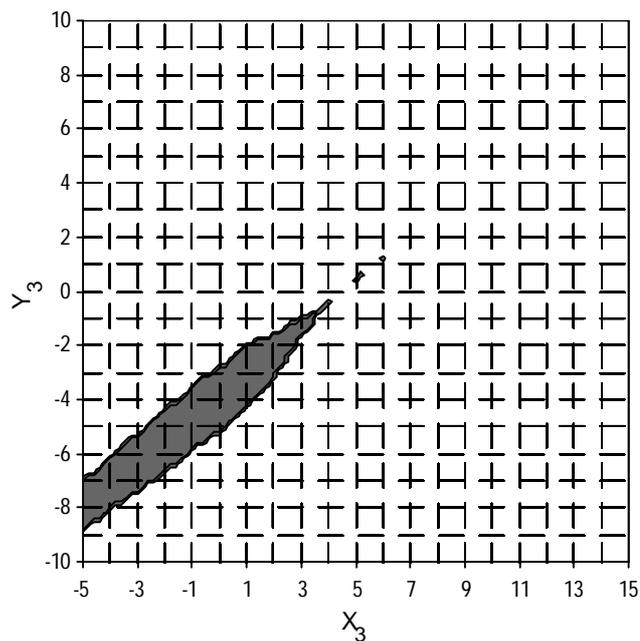


Figura 5.17. EDA bidimensional al eliminar cognados y discordantes en existencia de puntos múltiples.

Utilizando como función objetivo la función PDCP1 (véase Capítulo 3), el error de comparación asociado a cada uno de los puntos de este EDA bidimensional constituye una superficie que puede ser representada mediante sus curvas de nivel (figura 5.18). En ella se observa que la mayor parte del EDA presenta un error de comparación cercano al mínimo (color blanco). Además se observan ciertas irregularidades en la diagonal del EDA que representan rugosidad de la hipersuperficie (lo que puede venir asociado con un número elevado de máximos y mínimos en esa zona).

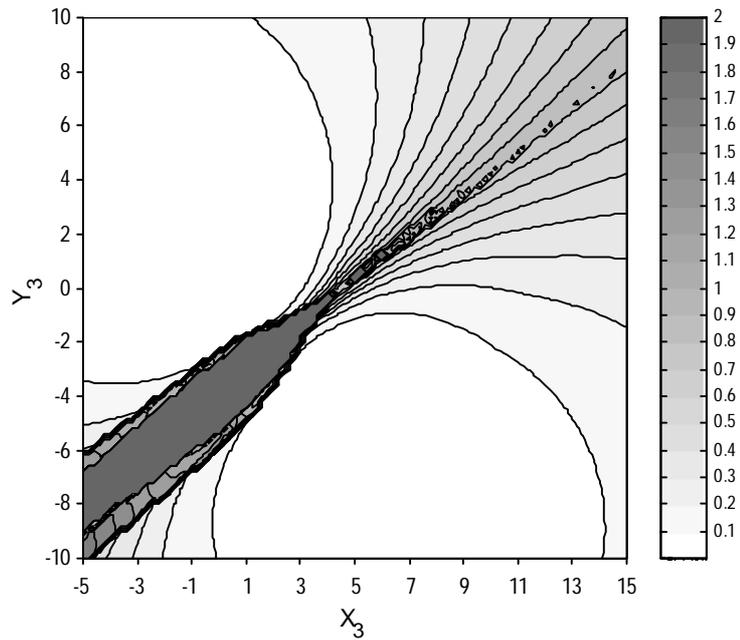


Figura 5.18. Error de comparación en el EDA bidimensional.

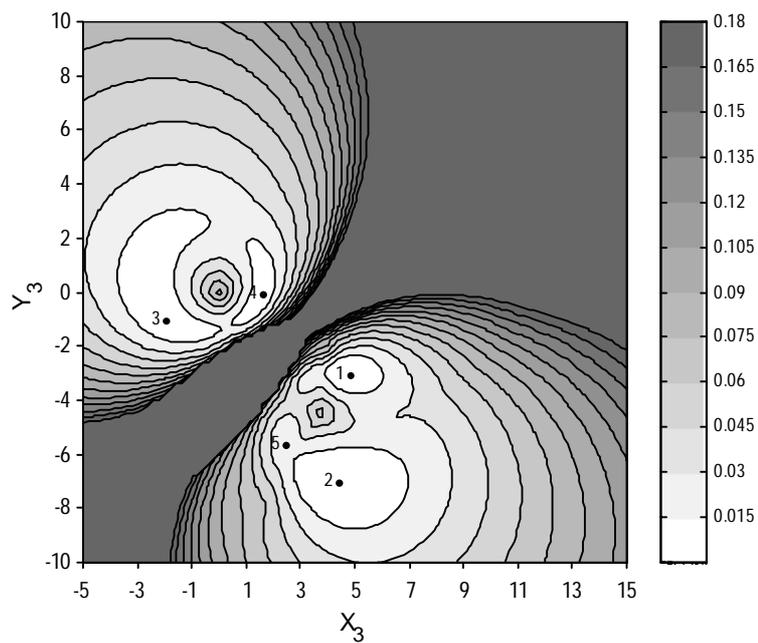


Figura 5.19. Error de comparación en el EDA bidimensional (ampliación).

Cambiando la escala de la representación (figura 5.19) se observa la forma de la superficie en los entornos cercanos a los mínimos. En esta figura se han marcado los mínimos

locales existentes dentro del intervalo de superficie representado. Se observa que existen 5 mínimos locales (numerados de menor a mayor valor de la función objetivo), existiendo otros mínimos (no marcados en la figura) provocados por la reducción del EDA al excluir el área sombreada en la figura 5.17 (los cuales son llamados *mínimos fronterizos*). Estos mínimos son debidos a la pendiente hacia fuera de la función objetivo en la frontera que acota el EDA.

En el estudio realizado para este caso bidimensional se observa que la variación de la función objetivo dentro del espacio de diseño es mayoritariamente suave, lo cual se corresponde con el hecho de que la variación en la forma de las curvas al desplazarse dentro de este EDA bidimensional es suave. En particular cabe destacar la suavidad de variación de la curva en el entorno de los mínimos locales (que corresponden a las curvas del EDA que más se parecen a la curva requerida).

Existe, no obstante, rugosidad superficial en ciertas zonas del EDA. Pero esta rugosidad se da en valores elevados de la función objetivo —considerablemente mayores que los valores mínimos— y, consecuentemente, corresponde a puntos que generan curvas muy poco parecidas a la curva requerida. En concreto, en este ejemplo, la rugosidad superficial aparece en la diagonal inferior-izquierda a superior-derecha —como se aprecia en la figura 5.18—, generando esos puntos trayectorias alargadas y muy alargadas, algunas de las cuales se cortan a si mismas (es decir, tienen puntos múltiples y han sido incluidas debido a la tolerancia de exclusión de este tipo de curvas). El hecho de que aparezcan estos mínimos locales no representa ningún perjuicio en el funcionamiento de la estrategia planteada y este ejemplo corrobora el hecho de que la función objetivo tiene buena sensibilidad cuando las curvas comparadas se parecen, tal como se estudió en el capítulo 3.

Por otra parte, la suavidad de la curva requerida mostrada en la figura 5.19 es tal que partiendo de prácticamente cualquier punto del EDA (excepto los cercanos a las zonas rugosas) y utilizando un método de optimización basado en el gradiente, es posible alcanzar fácilmente alguno de los 3 mínimos locales fundamentales (1, 2 y 3). Para localizar el mejor de ellos —es decir, el óptimo global dentro de este EDA bidimensional—, bastará con realizar una discretización (no necesariamente muy fina, a raíz de la suavidad de la superficie) del EDA y optimizar a partir de los mejores puntos de la misma.

### ***5.3.2. Análisis de la función objetivo en el caso $n$ -dimensional.***

El análisis de la función objetivo en el caso  $n$ -dimensional es más complejo que en el caso bidimensional debido a la dificultad para representar la hipersuperficie. Sin embargo, si existe rugosidad superficial en el caso bidimensional (aunque ésta exista en puntos alejados de los valores óptimos), también existirá rugosidad en el caso  $n$ -dimensional —que es una extensión del bidimensional—.

Para este análisis se ha realizado un *ensayo de refinamiento progresivo de la discretización del EDA*. En cada caso de discretización se estudian los mínimos locales

discretos en dos aspectos fundamentales: la cantidad de estos mínimos y su evolución con el refinamiento de la discretización y, por otro lado, la evolución del óptimo discreto<sup>108</sup>. Como se ha comentado anteriormente, el principal interés del análisis de la función objetivo para la búsqueda exhaustiva se centra en la determinación del paso de discretización necesario para que ésta sea sensible a todos los mínimos locales de la hipersuperficie (o, al menos, a los mínimos principales), proporcionando este ensayo información concreta relativa a este aspecto.

Es necesario hacer notar que, dado que el mecanismo ha sido normalizado con arreglo a la longitud de la manivela accionadora (a la que se le otorga una longitud unitaria), todas las dimensiones obtenidas son relativas a la longitud de esa barra. Sin embargo, esto no supone ninguna falta de generalización ya que conocido el paso de discretización necesario para el mecanismo normalizado, este paso puede aumentarse proporcionalmente a la longitud de sus manivelas accionadoras para cualquier otro conjunto de mecanismos no normalizados.

Para realizar cada ensayo es necesario concretar una curva requerida y un EDA (tabla 5.4). El procedimiento impone que el EDA sea discretizado repetidamente partiendo de un paso basto mediante refinamientos sucesivos. En cada nuevo caso de discretización se determina el valor de la función objetivo —comparando la curva generada con la curva requerida— para todos los puntos de la malla. La obtención de mínimos se realiza comparando el valor de la función objetivo en cada punto de la discretización con los valores de sus puntos vecinos (el punto será un mínimo local discreto en caso de que este valor sea menor en el punto considerado que en sus vecinos).

Posteriormente a esto, resulta necesario realizar un filtrado debido a que existen puntos de la discretización que, pese a ser menores que sus vecinos, no son mínimos reales. Esto se demuestra observando que es posible trazar un camino sobre la hipersuperficie desde uno de estos mínimos ficticios hasta otro mínimo (este último con menor valor de la función objetivo) sin realizar ninguna ascensión en el trayecto. Un filtrado sencillo y computacionalmente económico consiste en trazar una recta entre un mínimo discreto y otro y evaluar la evolución de la función objetivo en ese segmento recto. Si en dicha evolución no se produce ningún ascenso, entonces el primer mínimo puede ser descartado ya que no constituye un mínimo real.

Otra posibilidad es eliminar esta etapa de filtrado y optimizar todos los mínimos discretos aún sabiendo que es posible que varios conduzcan a un mismo mínimo real. Sin embargo, se ha comprobado que esta opción resulta más costosa que aplicar un filtrado simple y, además, ocasiona que en la lista de mínimos reales existan puntos repetidos (ya que de cada mínimo discreto conduce a un punto) que han de ser posteriormente filtrados.

---

<sup>108</sup> Definido como el punto de la discretización del EDA que presenta un menor valor al ser evaluado por la función objetivo.

Variable de diseño	Identificador	Valor mínimo	Valor máximo	Observaciones
Long. barra fija	$L_1$	1	11	
Long. manivela accionadora	$L_2$	1	1	Invariable
Long. biela	$L_3$	1	11	
Long. manivela conducida	$L_4$	1	11	
Coordenada $X_{\text{biela}}$	$X_3$	-5	15	
Coordenada $Y_{\text{biela}}$	$Y_3$	-10	10	
Configuración	<i>Config.</i>	1	1	Invariable

Tabla 5.4. Definición del EDA para el ensayo de refinamiento progresivo de la discretización.

El EDA propuesto para los ensayos (definido en la tabla 5.4) consta de siete variables de diseño, habiendo eliminado aquellas correspondientes a la posición y orientación del mecanismo. Además, el mecanismo ya se ha normalizado haciendo  $L_2$  invariablemente igual a la unidad. También se han eliminado puntos redundantes limitando la configuración a un único valor (1) de los dos posibles (0 y 1). Así queda un EDA reducido a un nivel intermedio y posteriormente se reducirá más aplicando los filtros expuestos en §5.2.

Por otro lado, en este EDA todas las barras del mecanismo tienen una longitud igual o mayor que la manivela accionadora ( $L_2$ ), por lo que en él no se han considerado los mecanismos de doble manivela, en los que la barra más corta es la barra fija ( $L_1$ ). Esta exclusión no supondrá en ningún caso una falta de generalización de las conclusiones a las que se llegue.

La discretización del EDA se realiza de forma sucesiva disminuyendo el paso de discretización de cada dimensión. En cada nuevo refinamiento, la discretización cuenta con más puntos del EDA y, por tanto, constituye una mejor aproximación de la hipersuperficie real. Los ensayos se han realizado con un paso de discretización decreciente de acuerdo con los valores mostrados en la tabla 5.5.

Nº	Paso de discretización	Número de puntos del EDA*
1	2.500	10 125
2	2.000	26 136
3	1.600	57 967
4	1.250	210 681
5	1.000	586 971
6	0.800	1 485 172
7	0.625	5 350 257

\* EDA mostrado en la tabla 5.4 antes de reducciones posteriores.

Tabla 5.5. Discretización sucesiva del EDA y número de puntos considerados.

Como primera curva requerida se utiliza la curva definida en §5.3.1 (figura 5.16). Esta curva tiene una geometría típica de las generadas por los mecanismos de 4 barras, por lo que se prevé que la solución óptima dentro del EDA será una curva muy parecida a la requerida.

Una vez realizado el ensayo se observa (figura 5.20) una variación irregular entre 11 y 16 en el número de mínimos locales discretos que aparecen según se refina la discretización. Este comportamiento oscilatorio indica que no se ha alcanzado el nivel de refinamiento necesario para que la discretización sea sensible a todos los mínimos reales. Sin embargo, la variación acotada del número de mínimos ya hace prever que éste está acotado y su valor real será de un orden de magnitud igual al obtenido con estas discretizaciones.

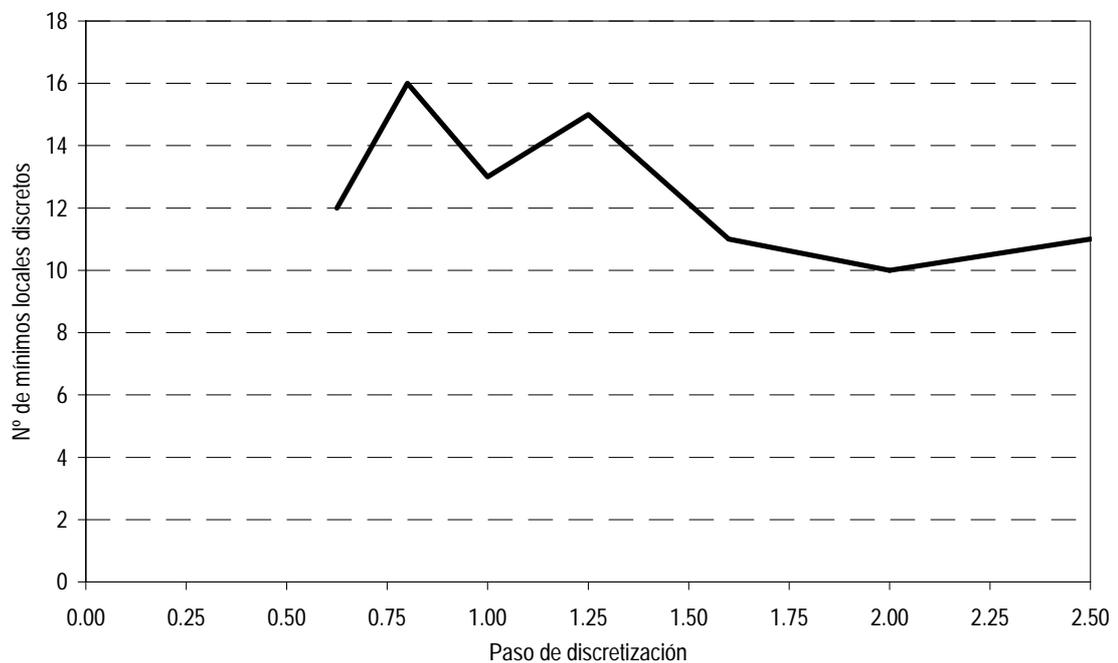


Figura 5.20. Evolución del número de mínimos locales discretos con el refinamiento de la discretización del EDA.

En cada discretización se obtiene una lista de mínimos locales discretos que puede ser ordenada de menor a mayor valor de la función objetivo, siendo el primero el óptimo discreto. Este punto evoluciona dentro del EDA a medida que se refina la discretización. Así, el valor de la función objetivo en el óptimo discreto —asociado a cada discretización— puede ser representado a medida que se refina la discretización, obteniendo la gráfica mostrada en la figura 5.21. Es lógico pensar que, a medida que se refina la discretización, el óptimo discreto

disminuirá su valor acercándose cada vez más al óptimo global real<sup>109</sup>. Así, se puede medir la fidelidad de la hipersuperficie discreta con respecto a la real observando la estabilidad de la curva representada en la figura 5.21 a medida que se disminuye el paso de discretización. En este caso, se observa una gran estabilidad en el último tramo (mayor finura en la discretización corresponde a valores más bajos del paso de discretización), que es prácticamente horizontal. Sin embargo, en esta figura, el nivel de refinamiento al que se ha llegado no permite decidir si la curva ha alcanzado la estabilidad final o si, por el contrario, una nueva discretización hará que la curva salga de esa estabilidad local con una nueva tendencia hacia abajo.

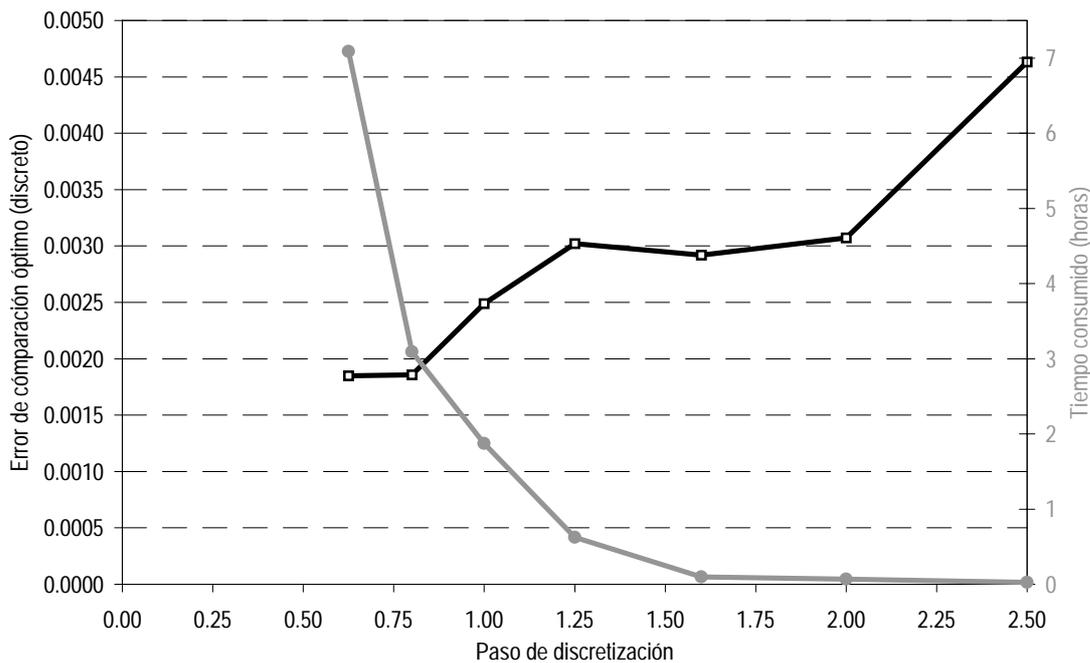


Figura 5.21. Evolución del error de comparación óptimo discreto y el tiempo total consumido, con el refinamiento de la discretización del EDA.

En cuanto al coste computacional, en la figura 5.21 se observa un crecimiento rápido a medida que se refina la malla. Siendo este tiempo aproximadamente proporcional al número de puntos considerado en cada discretización<sup>110</sup>.

<sup>109</sup> Conforme la discretización se va haciendo más fina, la distancia entre el punto de la misma más cercano al óptimo global real (el cual será, en general, el óptimo discreto) y dicho óptimo global real disminuirá y, consecuentemente, el valor de la función objetivo en el óptimo discreto tenderá al valor de la función objetivo en el óptimo global real.

<sup>110</sup> No es exactamente proporcional debido a que cada nuevo refinamiento de la discretización incluye nuevos puntos en la misma, pero la cantidad de esos puntos que son eliminados por los diferentes filtros de reducción del EDA puede variar de forma no proporcional.

A partir de los resultados obtenidos puede afirmarse que el nivel de discretización alcanzado (el paso de discretización más pequeño ensayado es igual a 0.625) no permite observar estabilidad en las curvas estudiadas, siendo necesarios nuevos refinamientos. Como el coste computacional de los nuevos refinamientos en el EDA considerado hasta el momento (tabla 5.4) resulta excesivamente costoso, se propone el estudio de un segundo EDA más pequeño que el anterior (EDA2). Este nuevo EDA queda definido tal como se describe en la tabla 5.6.

Variable de diseño	Identificador	Valor mínimo	Valor máximo	Observaciones
Long. barra fija	$L_1$	1.625	4.125	
Long. manivela accionadora	$L_2$	1	1	Invariable
Long. biela	$L_3$	2.375	9.125	
Long. manivela conducida	$L_4$	2.375	9.625	
Coordenada $X_{\text{biela}}$	$X_3$	-0.625	8.125	
Coordenada $Y_{\text{biela}}$	$Y_3$	-7.625	-3.375	
Configuración	<i>Config.</i>	1	1	Invariable

Tabla 5.6. Definición del EDA2 para el ensayo de refinamiento progresivo de la discretización.

El tamaño del EDA2 es suficientemente pequeño para permitir, con un coste computacional no excesivo, discretizaciones mucho más finas (pudiendo llegar fácilmente a un paso de discretización igual a 0.240). El EDA2 ha sido definido de forma que incluya algunos de los óptimos discretos de previas discretizaciones del EDA anterior. Por tanto, este análisis supone el estudio de una porción del EDA inicial que es significativa en cuanto a posibilidades óptimas de síntesis.

Repitiendo el proceso, se discretiza sucesivamente el EDA2 y se estudia el número de mínimos locales que aparecen en la discretización (el procedimiento de detección y posterior filtrado de mínimos es idéntico al caso anterior). Los diferentes pasos utilizados en las discretizaciones sucesivas y el número de puntos considerados pueden observarse en la tabla 5.7.

Nº	Paso de discretización	Número de puntos del EDA2*
1	2.500	480
2	2.000	1 800
3	1.600	3 024
4	1.250	5 880
5	1.000	17 280
6	0.800	46 200
7	0.625	93 600
8	0.480	246 240
9	0.400	547 162
10	0.320	1 586 816
11	0.240	6 586 074

\* EDA2 mostrado en la tabla 5.6 antes de reducciones posteriores.

Tabla 5.7. Discretización sucesiva del EDA2 y número de puntos considerados.

Como resultado de este ensayo sobre el nuevo EDA, se obtiene una curva de evolución del número de mínimos discretos frente a la disminución del paso de discretización (representado con trazo gris en la figura 5.22). Se observa una variación irregular (aunque suave) desde un paso igual a 2.5 hasta 0.625. A partir de ahí, disminuciones posteriores del paso ocasionan un crecimiento notable del número de mínimos locales discretos. Sin embargo, si se examinan los nuevos mínimos en cada nueva discretización, se observa que éstos aparecen en zonas donde la función objetivo presenta un valor elevado, es decir, aparecen en zonas del EDA en las que los puntos representan mecanismos que generan curvas que no son parecidas a la curva requerida. Por ejemplo, en las tablas 5.8 y 5.9 se muestran los mínimos locales discretos obtenidos al discretizar el EDA2 con pasos igual a 0.32 y 0.24, respectivamente. En la primera discretización se han obtenido 8 mínimos, mientras que en la segunda el número se ha elevado a 13. Para la discretización con paso 0.32 se observa que los mínimos locales discretos están divididos en dos grupos atendiendo al valor de la función objetivo en cada uno de ellos. Existe un primer grupo —grupo I—, formado por 5 mínimos, en el que la función objetivo varía dentro del intervalo [0.001680, 0.021765] (representado en negrita en la tabla 5.8). El resto de mínimos forman un segundo grupo —grupo II— en el que la función objetivo varía dentro del intervalo [0.827224, 0.950575]. Se observa que no existe ningún mínimo local discreto entre los valores de la función objetivo contenidos en el intervalo ]0.021765,0.950575[. Esto significa que existen mínimos locales en la parte alta de la función objetivo —grupo II— (en zonas donde las curvas del EDA2 no se parecen a la curva requerida<sup>111</sup>) y también en la parte más baja de la función objetivo —grupo I— (donde las curvas del EDA2 son las más parecidas a la curva requerida) pero no existen mínimos en niveles intermedios de la función objetivo. Los mínimos del grupo II se deben a la dificultad de

<sup>111</sup> Tal como se puede observar en los ensayos de progresividad realizados en el capítulo 3, un valor de la función objetivo PDCP1 en torno a 0.1 es propio de curvas que presentan una gran diferencia en sus trazados.

la función objetivo para cuantificar el parecido entre dos curvas cuando éstas son muy diferentes y estos mínimos no son interesantes en la resolución del problema de síntesis. Los mínimos del grupo I son los más interesantes pues corresponden a los puntos del EDA2 que más se parecen a la curva requerida. La ausencia de mínimos locales en la zona intermedia de valores de la función objetivo demuestra una variación suave y una pendiente sin irregularidades desde valores altos de la función objetivo hasta los valores más bajos en los que se encuentran los mínimos.

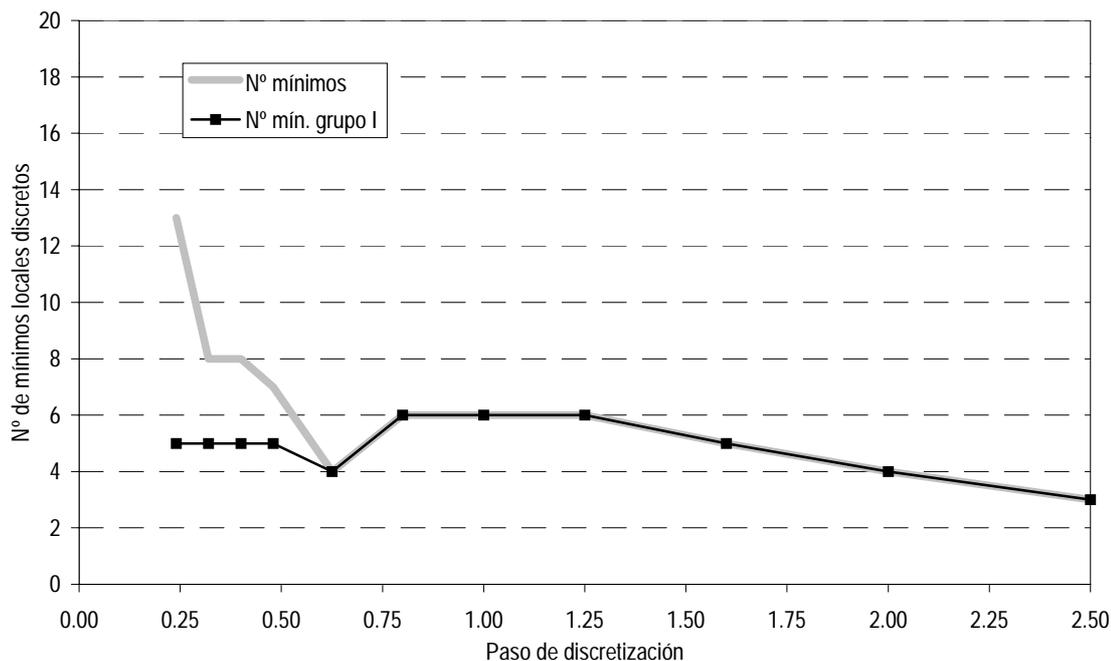


Figura 5.22. Evolución del número de mínimos locales discretos con el refinamiento de la discretización del EDA2.

Al pasar de la discretización con paso 0.32 (tabla 5.8) a la discretización con paso 0.24 (tabla 5.9), se observa cómo aparecen 5 nuevos mínimos. Pero todos ellos aparecen en el grupo II, permaneciendo invariable el número de mínimos del grupo I. Así, si para todas las discretizaciones del EDA2 se hace una diferenciación entre los mínimos correspondientes a cada grupo I y II, y luego se representa la evolución del número de mínimos del grupo I, que son los más interesantes en el problema de síntesis dimensional, se obtiene una curva como la representada en la figura 5.22 con trazo negro. En ella se observa una estabilización final, siendo invariable el número de mínimos en este grupo a partir de una discretización con un paso igual a 0.48. Esta tendencia estable demuestra que se ha alcanzado un nivel de discretización suficiente para que ésta sea sensible a todos los mínimos que pudieran pertenecer al grupo I, por lo que, en principio no sería necesario un refinamiento posterior.

Grupo	L1	L2	L3	L4	X3	Y3	Config.	Err. Comp.
I	2.40	1	5.27	5.68	1.67	-5.98	1	0.001680
	2.40	1	6.23	6.00	3.27	-3.74	1	0.001705
	4.00	1	8.79	8.88	1.35	-6.94	1	0.011433
	4.00	1	9.11	8.88	3.27	-5.34	1	0.011443
	4.00	1	3.67	2.48	-0.57	-3.42	1	0.021765
II	4.00	1	9.11	7.28	0.07	-3.42	1	0.827224
	4.00	1	5.59	5.04	-0.57	-4.70	1	0.885596
	4.00	1	5.27	2.48	0.39	-5.66	1	0.950575

Tabla 5.8. Mínimos locales discretos obtenidos en el EDA2 (discretización con paso igual a 0.32).

Grupo	L1	L2	L3	L4	X3	Y3	Config.	Err. Comp.
I	2.40	1	4.07	4.08	2.79	-5.86	1	0.001674
	2.16	1	8.87	8.88	2.55	-3.94	1	0.001686
	4.08	1	9.11	8.88	3.27	-5.38	1	0.011133
	4.08	1	8.87	9.12	1.35	-7.06	1	0.011133
	4.08	1	3.83	2.40	-0.57	-3.46	1	0.019962
II	4.08	1	5.03	2.40	1.11	-3.46	1	0.739072
	4.08	1	4.31	2.40	0.39	-6.58	1	0.867828
	4.08	1	3.59	4.32	-0.57	-5.14	1	0.887397
	4.08	1	2.87	3.84	-0.57	-6.10	1	0.903140
	4.08	1	2.39	3.60	-0.33	-6.58	1	0.909942
	4.08	1	5.51	2.64	0.87	-5.38	1	0.930141
	4.08	1	2.87	3.36	-0.09	-7.30	1	0.940098
	4.08	1	2.63	5.52	-0.09	-4.66	1	0.985192

Tabla 5.9. Mínimos locales discretos obtenidos en el EDA2 (discretización con paso igual a 0.24).

En cuanto al óptimo discreto, la evolución obtenida es acorde con la evolución del número de mínimos. En la figura 5.23 se observa cómo, a medida que se refina la discretización, el valor de la función objetivo en el óptimo discreto disminuye hasta estabilizarse a partir de un paso de discretización igual a 0.48. Esto corrobora la afirmación anterior relativa a que con ese paso de discretización, la hipersuperficie discreta obtenida es sensible a todos los mínimos de la hipersuperficie real.

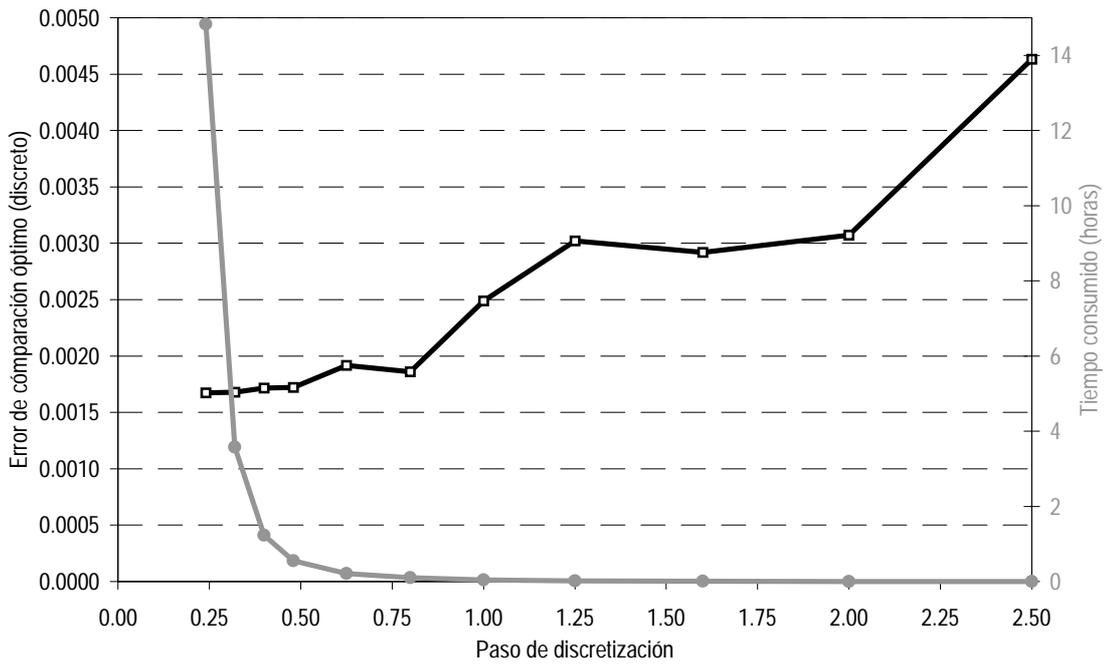


Figura 5.23. Evolución del error de comparación óptimo discreto y el tiempo total consumido, con el refinamiento de la discretización del EDA2.

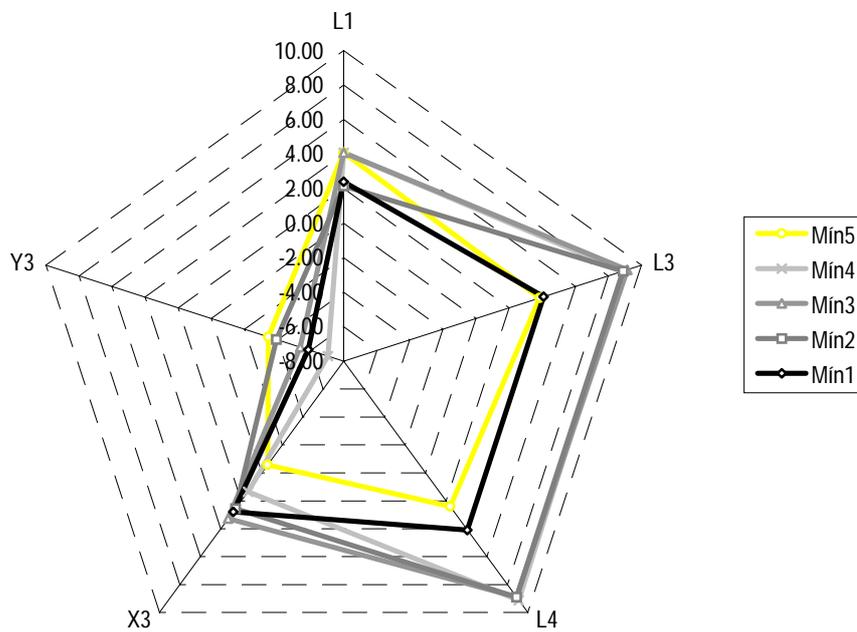


Figura 5.24. Evolución del error de comparación óptimo discreto con el refinamiento de la discretización del EDA2.

En la misma figura se observa también la evolución de los tiempos de cálculo, siendo ésta creciente con la disminución del paso de discretización. Si se compara esta evolución con la de la figura 5.21 (correspondiente a la discretización del EDA inicial) se observa que es diferente pese a que la evolución del número de puntos de ambos EDAs es similar (tablas 5.5 y 5.7). El motivo es que el EDA2 abarca una zona del EDA inicial en la que todos los puntos son buenos candidatos de síntesis. Así, el número de puntos que se consigue eliminar del EDA2 es menor que en el EDA inicial. Consecuentemente, mientras que en el EDA inicial tenía que evaluarse una proporción pequeña del número total de puntos iniciales, en el EDA2 se han tenido que evaluar prácticamente todos los puntos.

En cuanto a la ubicación de los mínimos discretos, en la figura 5.24 se representan las 5 dimensiones variables del EDA2 y los mínimos locales (cada uno de ellos constituye un pentágono irregular) obtenidos en la discretización más fina (paso igual a 0.24), siendo "Min1" el óptimo discreto. Se observa que existen dimensiones —por ejemplo  $L_3$ — en las que los valores de los 5 mínimos se agrupan en torno a diferentes posiciones. En otras —por ejemplo  $Y_3$ — los valores se distribuyen en un determinado intervalo. Se observa que algunos mínimos están cerca entre sí, mientras que otros permanecen más alejados.

La conclusión que se obtiene de este ensayo es que, para este caso, se requiere una discretización con un paso menor o igual a 0.48 para que la hipersuperficie discreta sea representativa de todos los mínimos locales de la hipersuperficie real (pertenecientes al grupo I). Así, refinamientos posteriores no modifican el número de mínimos locales obtenidos. Otros ensayos con otros casos han proporcionado valores similares del paso de discretización necesario, sin embargo, este puede variar un poco dependiendo de la forma de la curva requerida.

Una vez que se ha logrado estimar el paso de discretización necesario para que todos los mínimos reales estén contemplados en la discretización, utilizando un método de optimización basado en el gradiente y partiendo de cada uno de los mínimos locales discretos se alcanzarán los respectivos mínimos reales. El menor de todos ellos será el óptimo global de la hipersuperficie. En definitiva, la probabilidad de lograr el óptimo global es del 100%.

Este y otros ensayos realizados indican que, para una curva requerida *reproducible*<sup>105</sup> por un mecanismo de 4 barras, el valor del paso de discretización máximo para una probabilidad del 100% de obtención del óptimo global está en torno a 0.5. Pero, considerando el EDA definido en la tabla 5.4 (el cual está asociado a una relación de desproporción máxima igual a 10), si se utiliza ese paso de discretización se obtienen (antes de la aplicación de filtros de eliminación de duplicados y puntos de escaso parecido con la curva requerida) más de 15 millones de puntos. El filtrado y posterior evaluación de todos esos puntos supone un coste computacional que puede ser de varias horas dependiendo de la potencia de cálculo del ordenador utilizado. Si se desea obtener una solución con un coste computacional menor, es

posible utilizar un paso de discretización más basto (por ejemplo, igual a 0.75) sabiendo que la probabilidad de obtención del óptimo global será menor que el 100%, aunque elevada. En los diferentes ensayos realizados, se puede observar cómo la mayoría de los mínimos locales discretos obtenidos con la discretización más fina están representados en los mínimos locales discretos obtenidos con discretizaciones más bastas. Así, si se toma como ejemplo la discretización con paso 1.0, en sus mínimos locales existen puntos que son cercanos a la mayoría de los mínimos locales obtenidos con la discretización más fina. Considerando la suavidad de la función objetivo, puede afirmarse que utilizando discretizaciones más bastas que 0.5 existe una probabilidad elevada de consecución del óptimo global real.

## 5.4. Estrategias de optimización.

---

Tras el análisis de la función objetivo en el EDA se procede a la evaluación de las estrategias de optimización. Definidos ya el espacio de diseño (el cual ha sido reducido al máximo en el epígrafe anterior) y la función de optimización, pueden plantearse diferentes estrategias para encontrar el mecanismo que minimiza la función objetivo dentro del espacio de diseño.

La optimización constituye un problema matemático que ha sido exhaustivamente estudiado desde tiempo atrás por numerosos investigadores (Levenverg, 1944) (Fiacco y McCormick, 1963) (Fletcher y Powell, 1963) (Powell, 1964) (Nelder y Mead, 1965). Se han elaborado multitud de algoritmos de optimización con funcionamientos basados en fundamentos muy distintos. De forma aproximada y muy generalista, los algoritmos existentes<sup>112</sup> pueden clasificarse dentro de dos categorías: métodos basados en el gradiente y métodos no basados en el gradiente.

- Métodos basados en el gradiente. La mayor parte de los métodos deterministas están basados de una forma u otra en el gradiente<sup>113</sup> de la función objetivo. Todos ellos buscan el descenso pendiente abajo hacia puntos con menores valores de la función objetivo. Pero algunos realizan este descenso en base al gradiente matemático mientras que otros en base a la diferencia de valores en puntos del EDA entre los que existen distancias finitas (y no infinitesimales). Su convergencia suele ser muy rápida (comparada con la de métodos basados en otros fundamentos), sin embargo generalmente necesitan uno o varios puntos de partida. La gran desventaja de estos métodos es que el mínimo al que llegan suele depender de el/los punto/s inicial/es,

---

<sup>112</sup> Solamente se incluye una clasificación de los métodos para optimización en espacios no discretos, aunque existen otras categorías indicadas para espacios discretos, tales como los *métodos combinatorios de optimización*.

<sup>113</sup> "Gradiente" indica aquí "pendiente", al margen de la definición matemática del gradiente de una función en un espacio  $n$ -dimensional.

terminando en general, en un mínimo local cercano pendiente abajo. Dentro de esta categoría existen numerosos métodos pudiendo ser clasificados en dos subcategorías:

- Métodos con evaluación de derivadas de la función. Estos métodos están basados en el gradiente matemático de la función objetivo, el cual es determinado evaluando las derivadas parciales de la función objetivo respecto a las diferentes coordenadas correspondientes a las diferentes dimensiones del espacio. Conocido el gradiente es posible conocer la dirección de máxima pendiente hacia abajo y seguir esta dirección por ser la forma más rápida de alcanzar el mínimo. La ventaja de estos métodos sobre los que no evalúan derivadas es que suelen tener una convergencia más rápida (si no se evalúan las derivadas no es posible conocer de forma exacta la dirección que más rápidamente lleva al mínimo) lo que implica un coste computacional menor. Sin embargo la necesidad de evaluación de las derivadas aumenta el coste computacional del método, por lo que la primera gran ventaja es amortiguada por esta última desventaja.
- Métodos sin evaluación de derivadas de la función. Estos métodos eliminan la necesidad de evaluación de las primeras derivadas parciales de la función objetivo. Están especialmente indicados cuando no se dispone de las expresiones derivadas de la función objetivo o cuando la evaluación de éstas resulta excesivamente costosa. Están basados en la evaluación de la función objetivo en una serie de puntos (cuyo número varía de unos métodos a otros) constituyendo una información que permite establecer reglas de evolución de la posición de dichos puntos pendiente abajo, hasta lograr el mínimo.
- Métodos no basados en el gradiente. Estos métodos realizan una búsqueda del óptimo probando puntos del espacio de diseño pero sin tener en cuenta la pendiente de la función objetivo en dichos puntos. El planteamiento es diferente de los métodos anteriores. En aquellos se parte de un punto o conjunto de puntos y los métodos se dirigen pendiente abajo hasta encontrar un mínimo (que, en general, será un mínimo local de la función objetivo). Por el contrario, estos métodos no realizan una optimización de forma local, sino que evalúan un gran número de puntos dispersos en el ED (en ocasiones evolucionando la posición del conjunto de puntos) con el fin de obtener información sobre la posición del óptimo global de la función. Se pueden diferenciar los siguientes subtipos principales:
  - Métodos evolutivos o genéticos. Son algoritmos de búsqueda basados en la selección natural. Combinan la supervivencia de los mejores individuos (puntos) de entre una población con un intercambio aleatorio de información entre individuos de diferentes generaciones durante la evolución. Al contrario que los métodos aleatorios, los algoritmos evolutivos no tienen una evolución

exclusivamente fortuita, sino que explotan eficientemente la información histórica de la población para especular sobre posibles nuevos individuos (correspondientes a generaciones posteriores de la población) con valores de la función objetivo potencialmente mejores.

- Métodos aleatorios. Son métodos que realizan una extracción aleatoria de puntos del espacio de diseño y los clasifican de menor a mayor valor de la función objetivo. No obtienen de forma exacta la posición del óptimo, sino que solamente obtienen una posición probablemente próxima al mismo.
- Método exhaustivo. Consiste en la discretización del espacio de diseño y la evaluación de los puntos de la malla. Los puntos pueden ser ordenados de menor a mayor valor de la función objetivo. En función de la finura de la malla, el óptimo discreto obtenido estará más o menos cerca del óptimo real. La ventaja de este método sobre los otros métodos no basados en el gradiente es que permite fácilmente obtener información sobre si un punto de la malla es un mínimo potencial de la función o no. Dicha información será tanto más fiel a la realidad cuanto más fina sea la discretización.

Como se observa, las dos categorías fundamentales en las que se han clasificado los métodos de optimización presentan una diferencia fundamental: optimización local (u optimización fina) frente a optimización global (o búsqueda gruesa). En efecto, los métodos basados en el gradiente pueden ser descritos como métodos de optimización local, ya que desde una posición (o posiciones) cercanas en el espacio de diseño evolucionan localmente hacia el óptimo que se encuentra en una posición pendiente abajo relativa a los puntos iniciales. Por otro lado, los métodos no basados en el gradiente son métodos que realizan una optimización global sin llegar, en la mayoría de los casos, a la localización del óptimo con la precisión de los métodos basados en el gradiente. Así, lejos de ser estrategias opuestas, pueden ser consideradas alternativas que se complementan. Si el coste computacional lo permite, es posible realizar una combinación de métodos consistente en la utilización de un método no basado en el gradiente para la obtención de buenos puntos de partida para, posteriormente, utilizar un método basado en el gradiente que permita obtener con precisión y bajo coste la posición del mínimo local<sup>114</sup>.

De esta forma se generan tres posibles combinaciones: *método exhaustivo-gradiente*, *método aleatorio-gradiente* y *método evolutivo-gradiente*.

La primera opción (*método exhaustivo-gradiente*), ya comentada anteriormente en este capítulo, consiste en la discretización del espacio de diseño y la evaluación de la función objetivo en todos los puntos del mismo. Posteriormente se identifican los mínimos discretos

---

<sup>114</sup> Otros autores ya propusieron anteriormente (Watanabe, 1992)(Krishnamurty, 1992)(Ullay y Kota, 1996) la utilización de métodos de optimización combinados de búsqueda gruesa y refinamiento para la síntesis dimensional de mecanismos planos.

comparando el valor de cada punto con el valor de sus vecinos en la discretización. A continuación se realiza una optimización local (o fina), basada en el gradiente, que localiza el mínimo real asociado a ese mínimo discreto. La ventaja fundamental de este método es que permite conocer no solo el valor de cada punto de la discretización sino también la relación de este valor con el de los puntos vecinos. Es decir, la evaluación de los puntos de la discretización proporciona más información que sencillamente el valor de la función en cada punto.

La segunda opción (*método aleatorio-gradiente*) consiste en la obtención de una nube de puntos del espacio de diseño cuyas coordenadas son elegidas al azar, pudiendo considerar diferentes tipos de distribución probabilística: uniforme, normal, etc. Los puntos son evaluados por la función objetivo según se van extrayendo. A continuación se pueden optimizar localmente —con un método basado en el gradiente— partiendo de los mejores puntos logrados llegando a mínimos reales.

Los métodos evolutivos están en una ubicación intermedia entre los métodos de optimización global y los métodos de optimización local. Parten de una población de puntos similar a otros casos de optimización global, pero con el suficiente número de iteraciones llegan hasta una posición relativamente cercana al óptimo (aunque no tanto como los métodos basados en el gradiente). Su comportamiento depende en cierta medida del azar, por lo que no son métodos deterministas y su principal desventaja es que exigen un elevado número de evaluaciones de la función objetivo. Además, como en el caso de los métodos aleatorios, no permiten la obtención sencilla de información relativa entre los puntos obtenidos tal que permita la identificación aproximada de mínimos locales. Debido a que su estudio es complejo y no entra dentro de los objetivos de esta tesis, estos métodos no son considerados en este trabajo.

Comparando los dos métodos combinados considerados (*método exhaustivo-gradiente* y *método aleatorio-gradiente*) puede demostrarse que el segundo no presenta ventajas respecto al primero. El motivo es que el primero no solamente proporciona información puntual sobre la hipersuperficie, sino (de una forma sencilla y sin costosos procesos) también proporciona información sobre las zonas de la misma en las que hay mínimos locales.

Se han realizado ensayos con el fin de determinar las diferencias de comportamiento de los métodos a igualdad de coste computacional. Para ello, se ha decidido un paso de discretización del EDA y se ha ejecutado el método *exhaustivo* evaluando todos los puntos de la discretización e identificando los mínimos discretos, midiendo el tiempo que ha durado el proceso. Posteriormente se ha ensayado el método *aleatorio* fijando el tiempo para que sea igual al del método anterior, obteniendo un conjunto de puntos más o menos uniformemente distribuidos en el EDA. De esta forma se ha obtenido un conjunto de puntos con cada método de cuya comparación se pueden extraer conclusiones. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que mientras que el método *exhaustivo* es determinista, el método *aleatorio* no lo es y dado

que el resultado de este último depende del azar, dos ejecuciones sucesivas aportarán resultados muy diferentes.

Las conclusiones que se han obtenido de esta primera etapa (optimización global o búsqueda gruesa) se basan en tres aspectos fundamentales. En primer lugar, las pruebas realizadas demuestran que el número de puntos obtenidos con ambos métodos es muy similar en todos los casos probados (a igualdad de tiempo de computación invertido). En segundo lugar, los mejores puntos obtenidos al utilizar la extracción aleatoria son prácticamente siempre peores —es decir, representan trayectorias menos parecidas a la requerida— que los mejores puntos obtenidos de la discretización del EDA. En tercer lugar, del conjunto obtenido aleatoriamente puede difícilmente obtenerse información relativa entre puntos y esto impide la localización aproximada de los mínimos locales de la función objetivo.

La segunda etapa de cada método (optimización fina) consiste en extraer puntos de los conjuntos obtenidos en la primera etapa y utilizarlos como puntos de partida para llegar al mínimo real más cercano pendiente abajo. La selección de puntos de partida del conjunto obtenido por el método *exhaustivo* (ya comentada anteriormente en este capítulo) es sencilla a la vez que muy eficiente: consiste en comparar el valor de la función objetivo en cada punto con sus vecinos y extraer los puntos con menor valor que los vecinos. De esta forma se obtiene un conjunto de mínimos discretos que pueden ser utilizados como partida para obtener mínimos reales. Sin embargo, dicha extracción es mucho más compleja a la vez que ineficiente al considerar el conjunto de puntos obtenido por el método *aleatorio*. En efecto puede pensarse en ordenar los puntos del conjunto de menor a mayor valor de la función objetivo y luego utilizar los primeros (de menor valor) como puntos de partida. Sin embargo, al extraer un gran número de puntos aleatoriamente ocurre que los mejores puntos son, en realidad, agrupaciones alrededor de los mejores mínimos reales, por lo que todos los puntos de cada agrupación conducen, siguiendo el gradiente, al mismo mínimo real. Por esto, la optimización de los mejores puntos resulta ineficiente ya que al optimizar partiendo de los mejores puntos se obtienen solamente unos pocos mínimos (repetidos) un número muy inferior al de puntos de partida utilizados.

Podría pensarse en una forma de relacionar la posición de un punto del conjunto aleatorio con la posición de otros puntos cercanos, en un esfuerzo de detección de la posición de los mínimos discretos. Sin embargo, cualquier intento termina en que la realización de ese procedimiento supone un coste computacional considerable que desfavorece el método aleatorio a favor del método exhaustivo.

Por otro lado, una desventaja menor del método combinado *exhaustivo-gradiente* frente al método *aleatorio-gradiente* estriba en que, una vez decidida la finura de la discretización (determinada mediante el paso de discretización), el coste computacional es fijo y no se puede detener el proceso hasta que se han evaluado todos los puntos de la discretización —si se

detuviera, no se habrían obtenido puntos de todo el EDA, sino solamente de una parte del mismo—. Por el contrario, los métodos *evolutivo-gradiente* y *aleatorio-gradiente* permiten detener el proceso cuando se desee (por ejemplo, cuando se obtenga un valor de la función objetivo inferior a un valor admisible especificado), siendo conscientes de que un mayor tiempo significa una mayor probabilidad de obtención de mejores puntos. Sin embargo, si que puede variarse en el primero el paso de discretización utilizado en algo similar a lo que sería el establecimiento de un límite en los puntos extraídos en el método aleatorio. De esta forma es posible regular la precisión requerida (y el coste computacional asociado) en la búsqueda del mecanismo óptimo.

A tenor de lo expuesto anteriormente, el método combinado *exhaustivo-gradiente* parece ser, de los considerados, el que presenta mejores características de funcionamiento con el objetivo de lograr el óptimo global en el EDA con una probabilidad elevada y con un coste computacional moderado. Este método solamente es viable en problemas como el de síntesis de mecanismos en los que se puede aplicar una gran reducción al espacio de diseño. De esta forma, utilizando técnicas de diseño de la función objetivo como las expuestas en los capítulos 3 y 4 se consigue una significativa reducción del espacio de diseño —tal como se ha mostrado en §5.2— lo cual posibilita realizar una discretización del EDA suficientemente fina para encontrar el óptimo global o, al menos, otro mínimo que esté muy próximo.

La segunda parte del método *exhaustivo-gradiente* es la optimización de las dimensiones del mecanismo partiendo de cada uno de los mínimos discretos y utilizando un algoritmo basado en el gradiente hasta llegar al mínimo real asociado a cada mínimo discreto. Dado que la función objetivo (que compara las dos curvas, la requerida y la propuesta, esta última extraída del EDA) es una función considerablemente compleja (que incluso comprende subprocesos de optimización), no existe posibilidad de obtener analíticamente las expresiones de las derivadas parciales de esta función respecto a las variables de diseño del mecanismo. Consecuentemente, será necesario utilizar un algoritmo de optimización basado en el gradiente sin evaluación de las derivadas de la función a minimizar. Existe una amplia gama de métodos que pueden ser seleccionados, aunque todos se basan en recorrer de una forma u otra la pendiente hacia abajo en busca del mínimo de la función. Uno de ellos es el algoritmo *downhill simplex* propuesto por Nelder y Mead en 1965 (Nelder y Mead, 1965), el cual utiliza un simplex de  $n+1$  puntos (siendo  $n$  el número de variables a optimizar) cuyas posiciones van evolucionando pendiente abajo (expandiendo y contrayendo el simplex en función de la pendiente) hasta llegar al mínimo. Este método es criticado por no ser muy eficiente en cuanto al número de evaluaciones de la función objetivo que requiere, sin embargo, resulta un método sencillo y muy robusto. Otro método calificado como más eficiente que el anterior es el algoritmo de Powell (Powell, 1964). Este método persigue encontrar el mínimo partiendo de un punto y realizando una optimización a lo largo de una recta en el hiperespacio. Conseguido el óptimo cambia la dirección y realiza de nuevo una optimización. Tras varias iteraciones se logra

estar muy cerca del óptimo. Dado que la minimización a lo largo de una dirección determinada está muy optimizada, este método suele tener una rapidez de convergencia superior a la del método de Nelder y Mead. Existen otros métodos para la optimización de variables continuas, aunque la mayoría no presenta ninguna ventaja adicional sobre los anteriores.

En realidad, en lo referente al coste computacional, de las tres etapas involucradas en el *método exhaustivo-gradiente* —evaluación de los puntos de la malla, identificación de mínimos discretos y optimización fina partiendo de los mínimos discretos—, la última etapa es la menos crítica<sup>115</sup>, dado que se parte de una posición relativamente próxima al mínimo real y a que existe un número moderado de mínimos que deben ser optimizados. Por ello, el tiempo consumido durante esta optimización final es muy reducido (presenta valores habituales menores que el 1.5%) frente al tiempo consumido por todo el proceso. Así, se han probado ambos métodos y se han obtenido resultados muy parecidos con costes computacionales prácticamente iguales, lo que indica que la elección de uno u otro método de optimización final no es importante y, consecuentemente, puede ser utilizado cualquiera de ellos sin ventajas ni desventajas relativas.

Como se ha comentado, en el método *exhaustivo-gradiente*, la proporción del tiempo total invertido en cada etapa es diferente. Este tiempo es invertido mayoritariamente en la etapa de evaluación de los puntos de la discretización, aunque depende de la finura de la discretización y del tipo de curva requerida (ya que si la curva tiene puntos dobles permitirá una reducción mayor del espacio de diseño, lo que supondrá un menor tiempo de evaluación de los puntos). Por ejemplo, para una discretización como la mostrada en la tabla 5.2 y una curva requerida sin puntos dobles, el tiempo consumido por la primera etapa es el 92% del tiempo total.

En cuanto a la segunda etapa (*identificación de mínimos discretos*), suele ser la segunda en cuanto al consumo de tiempo. Dicho consumo también depende de la finura de la discretización o, más concretamente, del número de mínimos discretos existentes. El valor medio para esta etapa en discretizaciones similares a la mostrada en la tabla 5.2 es del 5%. Finalmente, el resto del tiempo es consumido por la tercera etapa (*optimización fina*), siendo menor que las anteriores.

Con el fin de estudiar el comportamiento del método combinado, se han planteado diferentes casos de síntesis, realizando la discretización con diferentes grados de refinamiento para, posteriormente, identificar los mínimos locales discretos. A continuación se ha realizado una optimización basada en el gradiente partiendo de los mínimos discretos hasta llegar a los mínimos reales de la función objetivo, obteniéndose varias conclusiones de este ensayo.

---

<sup>115</sup> En el sentido de que las primeras (sobre todo la primera) deben estudiarse con más profundidad ya que cualquier pequeña mejora en el coste computacional supone una mejora sensible en el tiempo global utilizado por el método.

En primer lugar, se aprecia el hecho de que algunos mínimos discretos conducen a mínimos reales que no están cerca de sus respectivos puntos de partida y que, además, están fuera del EDA. El motivo es que en el EDA aparecen mínimos discretos ficticios debidos a la acotación del ED. En efecto, si la pendiente de la hipersuperficie en las cercanías de la frontera del EDA tiene un descenso hacia fuera, la identificación de mínimos discretos indicará la existencia de, al menos, un mínimo en la frontera debido a que la discretización no cuenta con puntos más allá de ésta con los que comparar los puntos de la frontera para decidir si son mínimos o no. Dado que la optimización final basada en el gradiente es no restringida —y, por lo tanto, no se atiene a la acotación del ED—, el algoritmo seguirá la pendiente hacia abajo conduciendo a un punto que estará fuera del EDA. Este comportamiento aporta la ventaja de poder obtener alternativas de diseño en la periferia del EDA (que pueden ser comparadas con las incluidas en el EDA) y, dado que el coste computacional consumido es pequeño, no conlleva ninguna desventaja.

De los ensayos también se observa que no aparece un mínimo real por cada mínimo discreto, sino que es posible que, partiendo de dos mínimos discretos diferentes, un algoritmo basado en el gradiente llegue siguiendo la pendiente a un mismo mínimo real. El motivo de esto es que si el paso de discretización no es suficientemente fino, la hipersuperficie discreta es solamente una aproximación de la hipersuperficie real. Esto, unido al hecho de que la identificación de mínimos discretos se basa solamente en los puntos de la malla —esto es, en un conjunto discreto de valores— hace probable que se llegue a una situación de este tipo. Para ilustrarlo, en la figura 5.25 se representan las curvas de nivel de una superficie correspondiente a una función de dos variables —ED bidimensional—. Si se discretiza el ED como se muestra, la identificación de mínimos locales es realizada comparando el valor de la función en cada punto de la discretización con el de sus vecinos. Tras el proceso se obtienen dos mínimos discretos (M1 y M2), cuyo valor es apreciablemente menor que el de sus vecinos (marcados con círculo). Sin embargo, se observa que en la superficie real existe un único mínimo (M) en este EDA bidimensional. Partiendo de cualquiera de los dos mínimos discretos y siguiendo la pendiente hacia abajo (trazos marcados en discontinuo) se observa cómo se llega al punto M.

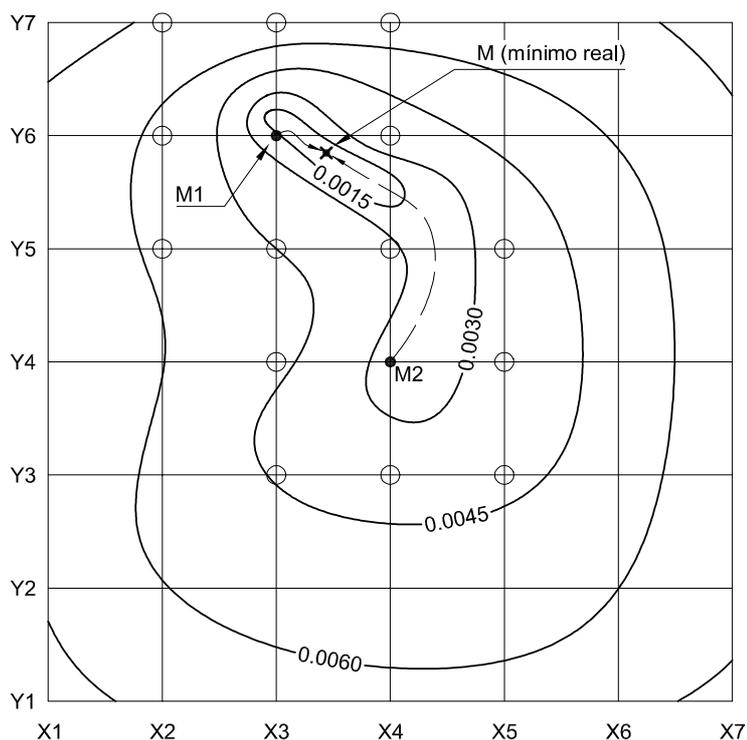


Figura 5.25. Ejemplo de superficie con dos mínimos discretos asociados a un único mínimo real.

El ejemplo muestra cómo es posible en dos dimensiones, dependiendo de la forma de la hipersuperficie y de la discretización, que dos mínimos discretos puedan llevar a un mismo mínimo real. El caso  $n$ -dimensional es una generalización de el caso bidimensional y es igualmente probable que ocurra este fenómeno.

Si la discretización del EDA fuese suficientemente fina es de esperar que la optimización del mínimo discreto al mínimo real recorra una distancia menor que la diagonal del hipercubo elemental de la discretización, ya que en tal caso, el mínimo discreto será el punto de la discretización más cercano al mínimo real. Así, en el ejemplo mostrado en la figura 5.25, la distancia recorrida desde el punto M1 hasta el punto M es menor que la diagonal del cuadrado elemental de la discretización.

Sin embargo, cuando la discretización no es suficientemente fina, es posible que, partiendo de un mínimo discreto, se llegue a un mínimo real que esté más lejos del primero que la longitud de la diagonal del hipercubo elemental. Un ejemplo de esto puede observarse en la figura 5.25, en la que la optimización desde el mínimo discreto M2 hasta el mínimo real M recorre una distancia superior a la longitud de la diagonal. Este comportamiento puede ser comprobado en las discretizaciones más bastas de los ensayos realizados y es un síntoma de que la discretización no es suficientemente fina y puede no ser sensible a todos los mínimos locales.

Finalmente, otra característica observable es la existencia de una cierta dispersión en los mínimos reales obtenidos en un mismo problema de síntesis al realizar discretizaciones con diferente grado de refinamiento. En efecto, a pesar de que los mínimos reales tiene una posición concreta, las optimizaciones partiendo de los mínimos discretos no alcanzan la posición real de los mínimos en los diferentes grados de refinamiento. Se ha estudiado el motivo de este comportamiento del método de optimización y se ha observado que la razón es el bajo gradiente que existe en las cercanías del óptimo.

Partiendo de un mínimo (local o global) de la hipersuperficie —que es un punto en el que el gradiente de la función objetivo es nulo—, cualquier pequeño desplazamiento corresponde a una curva generada que es muy parecida a la anterior. Esta variación suave en la forma de las curvas provoca una variación suave en la función objetivo. El resultado es que la hipersuperficie tiene una pendiente muy baja en una zona del ED alrededor del mínimo considerado y de tamaño no despreciable. Esto puede ser apreciado en el caso bidimensional mostrado en la figura 5.18. En ella se observa cómo el valor de la función en el EDA bidimensional representado varía dentro del intervalo  $[0, 2]$ . También se aprecia cómo el área en la que la función objetivo presenta valores por debajo de 0.1 es considerablemente grande. Una ampliación de esta zona puede verse en la figura 5.19. En ella se observa la evolución progresiva hacia el óptimo, pero con una suavidad considerable que equivale a un gradiente bajo. Este aspecto tiene realismo considerando la evolución paulatina, suave y progresiva de la forma de las curvas al desplazarse dentro del EDA.

El bajo gradiente en las cercanías del mínimo real provoca que los métodos de optimización necesiten muchas iteraciones para llegar a encontrar el mínimo (convergencia lenta). Tantas que es posible que superen el número máximo de iteraciones impuesto y terminan en una solución próxima al mínimo real. Esto provoca una cierta dispersión en los resultados. Sin embargo, este problema puede solucionarse incrementando el máximo de iteraciones permitidas ya que el coste computacional es bajo en comparación con otras etapas del problema.

Para ilustrar todo lo expuesto anteriormente, en la tabla 5.10 se muestran los cinco mejores mínimos reales obtenidos al optimizar los mínimos discretos del EDA2 definido en la tabla 5.6 en la discretización más fina lograda (paso igual a 0.24). En la última columna se observa cómo algunos mínimos discretos han conducido hacia mínimos reales que están fuera de la acotación de este segundo ED.

Mínimo	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>	X <sub>3</sub>	Y <sub>3</sub>	Config.	Err. Comp.	Posic. EDA
Min1	13.737	1	14.346	1.637	-3.108	-7.652	1	0.000647	Fuera
Min2	8.786	1	9.264	1.505	-2.814	-4.967	1	0.000709	Fuera
Min3	5.922	1	6.228	1.331	-2.844	-3.285	1	0.000916	Fuera
Min4	2.280	1	5.959	6.000	3.002	-3.469	1	0.001624	Dentro
Min5	2.231	1	8.988	9.019	2.610	-4.005	1	0.001628	Dentro

Tabla 5.10. Relación de los cinco mejores mínimos reales obtenidos al optimizar los mínimos obtenidos de la discretización del EDA2 con un paso igual a 0.24.

Mucho más interesante es la información expuesta en la tabla 5.11. En ella se observa cuales de los cinco mejores mínimos obtenidos con una discretización 0.24 han sido también obtenidos con discretizaciones más bastas. La tabla demuestra que, en este caso, una discretización con un paso igual a 0.48 ya es suficientemente fina para ser sensible a los mejores mínimos. Además, se observa que el óptimo global dentro del EDA2 (*Min4*) es obtenido por casi todas las discretizaciones, mientras que el segundo mejor interior al EDA2 (*Min5*) es también obtenido con seguridad por discretizaciones con paso inferior a 1.25.

Mínimo	Paso de discretización										
	0.240	0.320	0.400	0.480	0.625	0.800	1.000	1.250	1.600	2.000	2.500
Min1	X	X	X	X	X		X		X	X	X
Min2	X	X	X	X							
Min3	X	X	X	X	X	X					
Min4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
Min5	X	X	X	X	X	X	X			X	X

Tabla 5.11. Presencia de los cinco mejores mínimos (tabla 5.10) en las diferentes discretizaciones del EDA2.

Una vez obtenida cada solución (correspondiente a un mínimo real), el mecanismo puede ser fácilmente orientado y reescalado para que la curva generada coincida con la requerida en posición, tamaño y orientación. Así se obtienen los mecanismos mostrados en las figura 5.26 a 5.30.

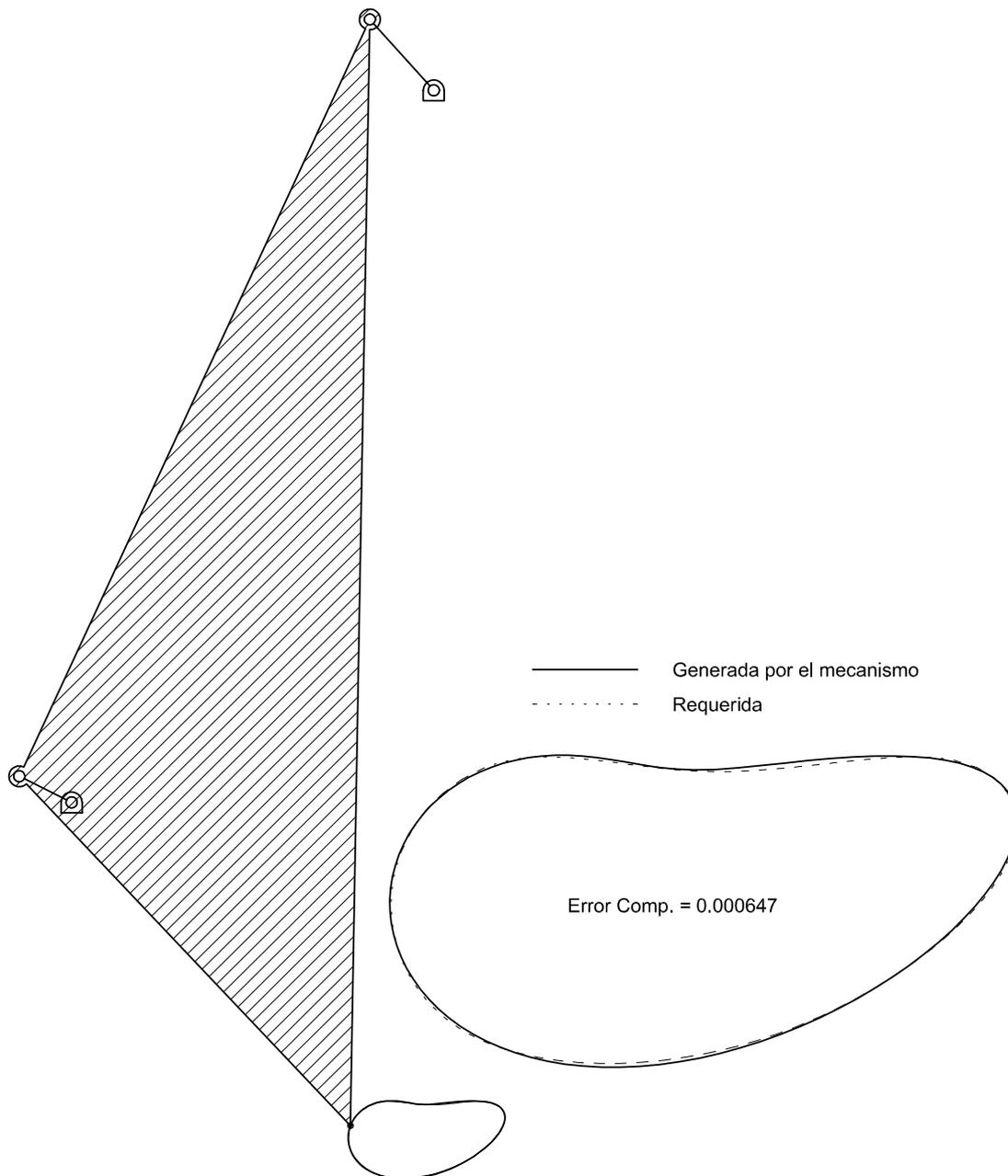


Figura 5.26. Mínimo 1: mecanismo y trayectoria que genera.

En estas figuras se puede apreciar cómo el parecido entre las curvas generadas y la requerida va disminuyendo lenta pero progresivamente a medida que el error de comparación va aumentando. También se observa cómo los mínimos reales obtenidos fuera del EDA son

mecanismos muy desproporcionados y cuyo tamaño en relación con el tamaño de la curva que generan también tiene una gran desproporción.

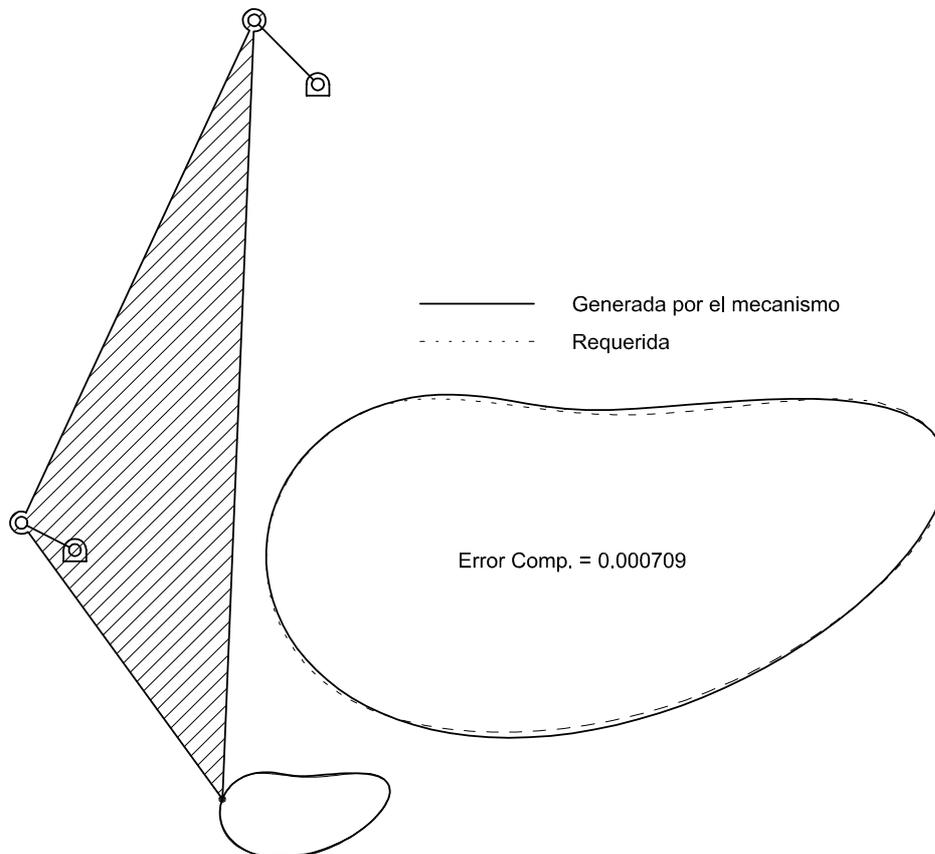


Figura 5.27. Mínimo 2: mecanismo y trayectoria que genera.

Sin embargo, las soluciones al problema obtenidas no son exclusivamente los mecanismos que se han representado, sino que son éstos más todos los mecanismos que se pueden obtener mediante las operaciones inversas a las realizadas en la reducción del espacio de diseño. Así, para cada mecanismo representado es posible obtener 2 cognados —es decir, 2 nuevos mecanismos— y, para cada uno de ellos se puede cambiar la configuración —con lo que se multiplica el número por 2— logrando una serie de mecanismos óptimos. Estos mecanismos constituyen un conjunto de soluciones óptimas posibles que el diseñador puede utilizar para seleccionar la opción más adecuada de acuerdo con otros requisitos de diseño. Así, se deberá decidir entre la consecución de ciertas características de diseño a costa de disminuir el parecido entre las curvas generada y requerida.

En definitiva, una vez que se ha conseguido obtener el conjunto de mecanismos óptimos, se pueden aplicar otros criterios para seleccionar la opción más adecuada a los requisitos externos del diseño buscado.

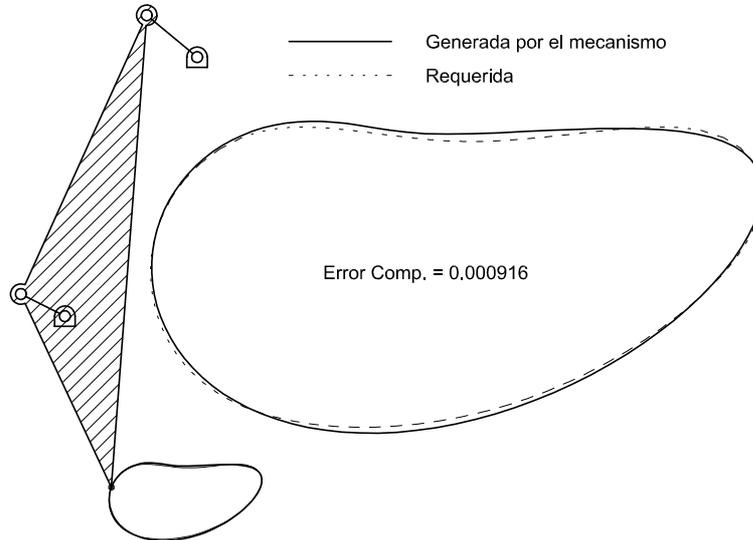


Figura 5.28. Mínimo 3: mecanismo y trayectoria que genera.

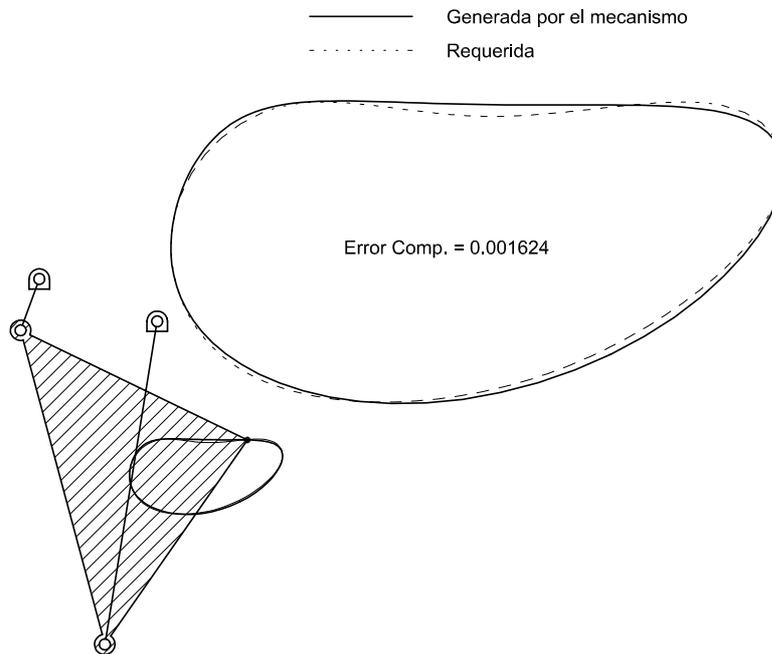


Figura 5.29. Mínimo 4: mecanismo y trayectoria que genera.

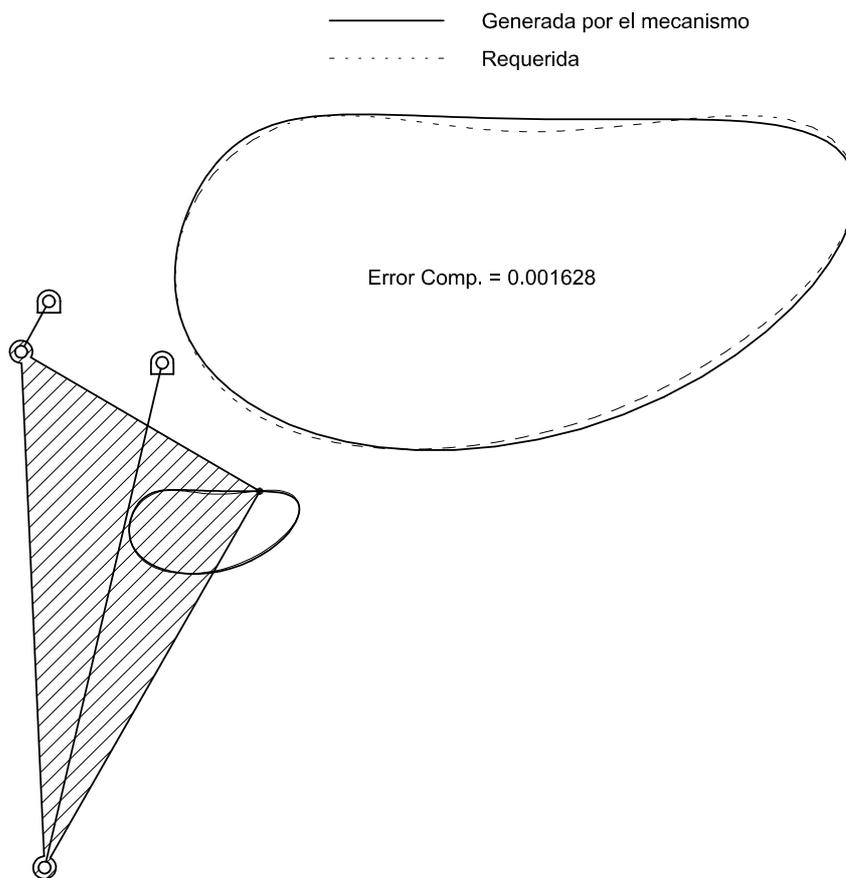


Figura 5.30. Mínimo 5: mecanismo y trayectoria que genera.

El desarrollo anterior realizado en este epígrafe trata sobre las diferentes estrategias de optimización no restringida. Sin embargo, el método propuesto no queda limitado por esta consideración.

Cuando se requiere la obtención del mecanismo óptimo para la generación de una trayectoria y, además, se imponen algún tipo de restricción de funcionamiento (por ejemplo, que el ángulo de transmisión no sea nunca inferior a  $30^\circ$ ), es posible filtrar los puntos de la discretización del EDA de una forma sencilla y rápida, considerando exclusivamente los que cumplen dicha restricción. A partir de ahí se puede proceder de la misma forma, estimando los mejores candidatos (que cumplen la restricción) y posteriormente realizar una optimización fina, esta vez con un algoritmo de optimización restringida para llegar al óptimo real.

Este proceso puede ser realizado desde el principio de la ejecución (cuando el diseñador imponen las restricciones de partida) o posteriormente, tras obtener los mecanismos óptimos sin restricciones, al darse cuenta de que las soluciones obtenidas no tienen

características desfavorables según otras consideraciones ajenas al trazado de la trayectoria requerida.

## 5.5. Conclusiones.

---

En este capítulo se ha demostrado cómo la búsqueda exhaustiva del óptimo global en síntesis de mecanismos para generación de trayectoria puede ser computacionalmente viable aplicando técnicas específicas de reducción del espacio de diseño.

Se han estudiado dos tipos de reducciones en el mecanismos de 4 barras. Por un lado se han eliminado los puntos repetidos<sup>116</sup> del espacio de diseño sin disminuir las posibilidades reales de síntesis. En este sentido, se ha reducido el espacio de diseño eliminando las dimensiones que determinan la posición y orientación del mecanismo. Se han normalizado los mecanismos del espacio de diseño eliminando el factor tamaño y se han utilizado las relaciones dimensionales que permiten predecir cuando dos mecanismos trazan trayectorias simétricas. Finalmente, se ha desarrollado una estrategia para eliminar mecanismos cognados, los cuales trazan también una misma trayectoria.

Por otro lado, se han aplicado y desarrollado una serie de reglas que permiten descartar puntos del espacio de diseño para los cuales se conoce de antemano que no suponen buenas posibilidades de síntesis. Entre estas, se ha aplicado la ley de Grashof para predecir cuando el mecanismo de 4 barras es un mecanismo que se alinea o se bloquea (el cual puede ser eliminado de antemano cuando la trayectoria requerida es cerrada), así como para la detección de la existencia de puntos dobles en las trayectoria generada.

Con las técnicas anteriormente descritas se han conseguido reducciones drásticas del espacio de diseño inicial (utilizado por muchos de los métodos propuestos por otros autores), quedando patente que la gran mayoría (hasta el 99.999767%) de los puntos son repeticiones del resto o no suponen buenas posibilidades reales de síntesis. Esta reducción es fundamental para la economía de computación y debe constituir la base de definición del espacio de diseño en cualquier problema de optimización en síntesis de mecanismos.

Se ha estudiado la forma de la función objetivo dentro del espacio de diseño. Se ha comprobado que la hipersuperficie que describe dicha función tiene una variación suave en la mayor parte del espacio de diseño, lo que concuerda con la variación suave observable en la

---

<sup>116</sup> Puntos del espacio de diseño que, dimensionalmente, representan mecanismos que generan curvas que producen los mismos resultados cuando son comparadas con la curva requerida por la función objetivo —esto es, curvas que tras ciertas transformaciones geométricas (desplazamiento, rotación, homotecia y simetría) pueden llegar a coincidir exactamente en sus trazados—.

forma de las curvas a medida que se modifican las dimensiones del mecanismo. Esta suavidad demuestra la estabilidad —o la buena progresividad— de la curva en entornos cercanos a los óptimos y facilita la búsqueda de mínimos mediante algoritmos basados en el gradiente.

Con el objetivo de estimar el paso de discretización necesario para conseguir el óptimo global, se han realizado ensayos con diferentes grados de finura en la discretización. Se ha comprobado que un paso de discretización del orden de 0.5 (en relación con la longitud de la manivela accionadora, a la que se le da el valor unitario y que sirve como dimensión para normalizar el mecanismo) asegura en muchos casos la obtención de todos los mínimos reales y con ello la obtención del óptimo global. También se ha comprobado que pasos de discretización mayores (hasta la unidad), si bien no aseguran en todos los casos la obtención de todos los mínimos de la función objetivo en el espacio de diseño, sí que permiten la obtención de la mayor parte de los mínimos (incluyendo los de valor más bajo) con una elevada probabilidad.

Se han analizado los diferentes algoritmos de optimización y los métodos combinados para una optimización gruesa seguida de una optimización fina como estrategia para la obtención del óptimo global. De esta forma se han conseguido métodos combinados, dos de los cuales (método *aleatorio-gradiente* y método *exhaustivo-gradiente*) han sido estudiados detalladamente. Se ha puesto de manifiesto que el método *exhaustivo-gradiente* presenta ventajas adicionales sobre el método *aleatorio-gradiente*, como la obtención de una mayor información a igualdad de coste computacional debido a la posibilidad de comparar cada punto de la discretización con sus vecinos, lo que permite detectar la existencia de mínimos locales. Posteriormente resulta sencillo y computacionalmente económico partir de los mínimos discretos detectados y seguir el gradiente hasta llegar al mínimo real.

En definitiva, se ha logrado una estrategia robusta que, dependiendo de la finura de la discretización (o lo que es lo mismo, del tiempo invertido), presenta elevadas probabilidades de lograr el óptimo global dentro del espacio de diseño.



# Capítulo 6

## Aplicación práctica

---

### 6.1. Introducción.

---

Para demostrar la viabilidad del método, y como evaluación global del mismo, se han resuelto diferentes casos de síntesis. Los ejemplos resueltos han sido seleccionados valorando diferentes aspectos, entre los que se encuentran la utilidad práctica y la posibilidad de contrastación con otras soluciones (existentes o propuestas teóricamente). Aún así, puede decirse que no resulta fácil encontrar casos reales estándar de síntesis de trayectoria, debido a que la mayor parte de ellos responden a necesidades específicas y muy concretas<sup>117</sup>. Existen, sin embargo, algunos pocos casos de síntesis general, como el caso de síntesis de mecanismos generadores de tramos de trayectoria rectilíneos o circulares.

De los diferentes casos resueltos se han seleccionado tres ejemplos que son estudiados en profundidad. Estos casos pretenden ser representativos de los ensayados y son una muestra descriptiva del comportamiento del método. Su resolución y resultados son similares a los de otros casos ensayados que, si no se han incluido, ha sido por razones de brevedad. En primer lugar se muestra la síntesis de un mecanismo clásico para una máquina amasadora. En segundo lugar se resuelve la síntesis de un mecanismo con pausa basado en un mecanismo generador de una trayectoria con un tramo circular y, finalmente, se resuelve la síntesis de una trayectoria con un punto doble que es comparada con los resultados de otros autores.

---

<sup>117</sup> Puede decirse que la mayor parte de las necesidades industriales de síntesis de trayectoria son particulares y no generalistas. De tal forma que cuando se requiere que un mecanismo trace una trayectoria, el problema planteado solo sirve para esa necesidad industrial concreta y no es generalizable para otros casos. Este carácter particular de los problemas planteados provoca la necesidad de métodos versátiles capaces de adaptarse a un gran número de situaciones.

## 6.2. Aplicación a la sustitución del mecanismo de una amasadora.

El primer problema planteado consiste en la sustitución del mecanismo de colisa de una amasadora (Kozhevnikov, 1981) (figura 6.1) por un mecanismo de 4 barras de forma que la trayectoria descrita sea lo más parecida posible a la inicial. Tal como se observa, el actuador P del mecanismo de colisa describe una trayectoria uno de cuyos tramos es un arco de circunferencia casi perfecto. Este mecanismo consta de 4 eslabones, uno de los cuales es fijo (1). El eslabón 2 tiene un movimiento de rotación pura alrededor de O y es accionado por el motor de la máquina (o por una transmisión que lo conecta a éste). El eslabón 4, por su parte, está articulado a la barra fija en B mediante un par de revolución y presenta un movimiento de rotación. El eslabón 3, que ejerce de biela, está ligado al eslabón 2 mediante un par de revolución en A y al eslabón 4 mediante un par de deslizamiento en B. De esta forma se consigue que el actuador P describa una trayectoria como la representada en la figura.

Es posible sustituir el mecanismo de colisa por un mecanismo de 4 barras. Así se logra la sustitución del par cinemático de deslizamiento por un par de revolución y se obtiene una ventaja debido a que los pares articulación son más fiables, sufren menos desgaste y necesitan menos mantenimiento que los pares de deslizamiento.

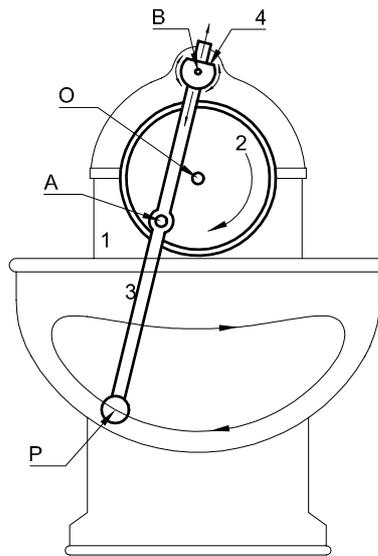


Figura 6.1. Mecanismo de una máquina amasadora.

El problema puede ser enunciado con diferentes restricciones, entre las que cabe contar restricciones de espacio, de ángulo de transmisión, etc. Sin embargo, en primer lugar se plantea la realización de una búsqueda exhaustiva del óptimo en el espacio de diseño acotado (EDA), obteniendo una lista de mínimos entre los cuales puede ser encontrada la solución. De

esta forma, se está dando prioridad a la coincidencia en la forma de las curvas frente al cumplimiento de las otras consideraciones de síntesis.

Si de la lista de mínimos no se logra ningún mecanismo aceptable de acuerdo con las restricciones del problema, se puede proceder a una síntesis restringida que, pese a tener la desventaja de un mayor coste computacional y posible discontinuidad en la solución (ya comentado en el capítulo 2), permitirá obtener la mejor solución que se adapte a las dichas restricciones.

Var. Dis.	Val. Mín.	Val. Máx.	Incremento	Optimizar
L1	1.0	11.0	0.625	Sí
L2	1.0	1.0	Invariable	No
L3	1.0	11.0	0.625	Sí
L4	1.0	11.0	0.625	Sí
X3	-5.0	15.0	0.625	Sí
Y3	-10.0	10.0	0.625	Sí
Config.	1.0	1.0	Invariable	No

Tabla 6.1. Definición del EDA.

El mecanismo de 4 barras presenta 9 variables de diseño mostradas en la figura 5.2, las cuales pueden ser reducidas utilizando las técnicas expuestas en el capítulo 5. De esta forma se obtiene un EDA cuya definición puede observarse en la tabla 6.1. Se utiliza la estrategia de búsqueda exhaustiva y para ello se discretiza el EDA con un paso igual a 0.625, obteniendo un total de 5350257 puntos. Como función objetivo se utiliza la función *PDGP1* definida en el capítulo 3, la cual basará la comparación de las curvas en un polígono de 12 puntos.

A continuación se procede a la evaluación de los puntos del EDA (aplicando las reducciones expuestas en el capítulo 5) y la posterior identificación de mínimos locales discretos. Esta evaluación supone la etapa más costosa de todo el proceso, utilizando el 96.4% del tiempo total invertido<sup>118</sup> (tabla 6.3). Posteriormente se utiliza el algoritmo de Powell (Powell, 1964) para la optimización de los mínimos discretos hasta llegar a mínimos reales. El número de puntos involucrados en cada etapa se muestra en la tabla 6.2 y los tiempos consumidos se pueden observar en la tabla 6.3.

<sup>118</sup> Problema resuelto en un ordenador compatible IBM PC con procesador Intel Pentium III a 450MHz.

Nº de puntos en el EDA inicial	5 350 257
Nº de puntos en el EDA reducido	2 169 026
Nº de mínimos discretos	18
Nº de mínimos reales	18

Tabla 6.2. Nº de puntos en cada etapa de resolución del problema.

Etapa	Tiempo <sup>118</sup>	
Evaluación de los puntos de la discretización	6h 27' 34"	96.4%
Identificación de mínimos discretos	0h 12' 11"	3.0%
Optimización partiendo de mínimos discretos	0h 02' 26"	0.6%
Total	6h 42' 11"	100.0%

Tabla 6.3. Coste computacional en tiempo de las diferentes etapas de resolución del problema.

Una vez realizado el proceso, se ha obtenido una lista de 18 puntos del EDA que son mínimos reales de la función objetivo y pueden ser ordenados de peor a mejor mecanismo para la generación de la trayectoria requerida (tabla 6.4). El mejor mecanismo obtenido es, a raíz de los resultados obtenidos en los ensayos (y siempre pendiente de un estudio estadístico más riguroso), el óptimo global dentro del EDA con una elevada probabilidad. El error de comparación obtenido con este mecanismo (0.000451) es considerablemente bajo, lo que indica que se ha conseguido un mecanismo de 4 barras para reproducir la trayectoria requerida con un elevado nivel de precisión.

En la tabla 6.4 se observa que, como ya fue expuesto en el capítulo 5, los mínimos se pueden agrupar en dos conjuntos atendiendo al orden de magnitud del error de comparación logrado. En este caso, los 15 primeros presentan un error de comparación del orden de 10 veces inferior al del segundo grupo, formado por los 3 mínimos del final de la lista. Esto indica que, como ocurriera en otros casos, existen mínimos locales en zonas del EDA en las que las curvas se parecen escasamente a la requerida.

Otra observación interesante es que algunos de los mínimos locales están fuera del EDA definido en la tabla 6.1 (la columna "Posición" en la tabla 6.4 indica si el mínimo está dentro o fuera del EDA inicial). Esto es debido a la existencia de mínimos frontera cuya existencia es ficticia y se debe a la falta de puntos más allá del límite del EDA con los que comparar el valor de la función objetivo. No obstante, y como se expuso en el capítulo 2, los mínimos situados fuera del EDA están, en su mayoría (podría decirse que todos salvo el mínimo 18) cerca de la frontera que delimita el EDA, por lo que la optimización basada en el gradiente no ha llevado a una zona alejada del mismo.

Nº	L1	L2	L3	L4	X3	Y3	Config.	Err. Comp.	Posición
1	1.922	1.000	3.820	4.482	1.604	1.699	1.000	0.000451	Dentro
2	1.626	1.000	2.258	2.252	0.627	2.501	1.000	0.001008	Dentro
3	2.827	1.000	11.179	9.886	3.362	-3.984	1.000	0.001425	Fuera
4	2.919	1.000	7.832	6.456	3.719	-3.583	1.000	0.001426	Dentro
5	2.816	1.000	9.705	10.990	-1.319	-5.718	1.000	0.001426	Dentro
6	2.866	1.000	5.330	6.615	-0.040	-6.174	1.000	0.001431	Dentro
7	3.055	1.000	8.794	7.238	3.771	-3.856	1.000	0.001432	Dentro
8	3.845	1.000	2.835	5.007	3.768	-5.927	1.000	0.001497	Dentro
9	4.164	1.000	5.881	3.265	5.702	-3.003	1.000	0.001507	Dentro
10	2.659	1.000	4.257	3.405	3.657	-2.187	1.000	0.001552	Dentro
11	8.546	1.000	9.076	2.305	11.904	-2.474	1.000	0.001660	Dentro
12	9.227	1.000	9.660	2.267	12.870	-2.311	1.000	0.001673	Dentro
13	12.220	1.000	2.216	12.569	7.032	-2.629	1.000	0.001706	Fuera
14	10.724	1.000	1.196	10.753	-1.710	0.571	1.000	0.001852	Dentro
15	4.161	1.000	4.321	1.272	2.596	1.207	1.000	0.001885	Dentro
16	11.496	1.000	6.242	6.506	4.419	5.800	1.000	0.022189	Fuera
17	11.017	1.000	4.781	7.513	3.765	4.494	1.000	0.023301	Fuera
18	190.816	1.000	2.896	188.927	1.038	0.600	1.000	0.027652	Fuera

Tabla 6.4. Mínimos reales obtenidos.

El bajo número de mínimos en el EDA (18 mínimos discretos frente a más de cinco millones de puntos evaluados en la discretización) demuestra que la función objetivo presenta una evolución suave dentro del mismo, lo que es una prueba de su estabilidad en la comparación de curvas. Esto se corresponde con la idea de una variación suave de la forma de las curvas dentro del EDA, existiendo un gradiente suave y continuo.

Aparte de las soluciones mostradas en la tabla 6.4, habría que incluir todos los mecanismos posibles que generan las mismas trayectorias que los incluidos (mecanismos cognados y mecanismos en configuraciones diferentes). Sin embargo, en este ejemplo no se han considerado dichos mecanismos porque no suponen ninguna mejora respecto de los mínimos obtenidos.

Una vez obtenido el mecanismo óptimo para la reproducción de la trayectoria requerida, éste necesita ser transformado geoméricamente para que la trayectoria generada se ajuste a la requerida en posición, orientación, tamaño y posible simetría. De esta forma, para cada solución aportada por el método, se obtiene otro mecanismo cuyas dimensiones son diferentes de las del mecanismo inicial, aunque guardan la misma relación entre ellas (*mecanismos homotéticos*) y está colocado adecuadamente para que ambas trayectorias coincidan. Así, se logra el mecanismo solución 1 (correspondiente al mínimo 1) mostrado en la figura 6.2-izquierda. En ella se observa tanto la posición relativa del mecanismo en la

amasadora como la trayectoria realizada por el mismo (en línea continua) y su parecido con la trayectoria requerida (en línea de puntos). En dicho mecanismo, la barra 1 es el eslabón fijo (bancada) y la barra 2 es la manivela accionadora que mueve el mecanismo. La barra 3 es el acoplador y P es el punto trazador. Aunque este mecanismo será viable en la práctica, el tamaño del mismo en relación al de la máquina inicial obligaría a realizar un rediseño importante de la misma para dar cabida a los nuevos elementos móviles del mismo. La interferencia del punto B (cuyo arco de movimiento puede verse en la figura) con la cuba de la amasadora puede evitarse colocando los eslabones del mecanismo en planos paralelos a diferentes profundidades. La carcasa de la máquina, necesaria para el funcionamiento seguro de la misma, tendría que ser sensiblemente mayor para albergar a todos los elementos móviles del mecanismo excepto el actuador.

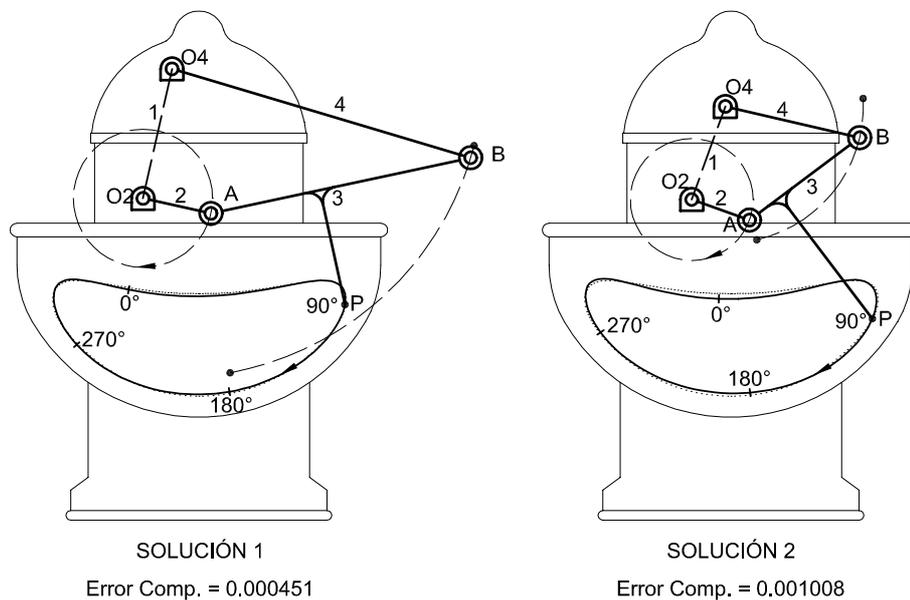


Figura 6.2. Soluciones 1 y 2 del problema de síntesis de trayectoria.

La solución 2 obtenida (correspondiente al mínimo 2) puede verse en la figura 6.2-derecha en la posición, orientación y escala adecuadas para una máxima coincidencia entre la curva trazada por este mecanismo y la requerida. Este mecanismo, si bien genera la curva requerida con menor precisión que el anterior, resulta ser más compacto que aquel y requiere una adaptación menor de la máquina. Aparte de que las longitudes de las barras del mecanismo son menores, el arco que describe el punto B es más pequeño y el área ocupada por el mecanismo durante el movimiento también lo es. Así, es posible sacrificar parte de la precisión en la reproducción de la trayectoria a favor de otras consideraciones como el tamaño. Otras soluciones (hasta las 5 primeras) también pueden ser observadas en las figuras 6.3 a 6.5.

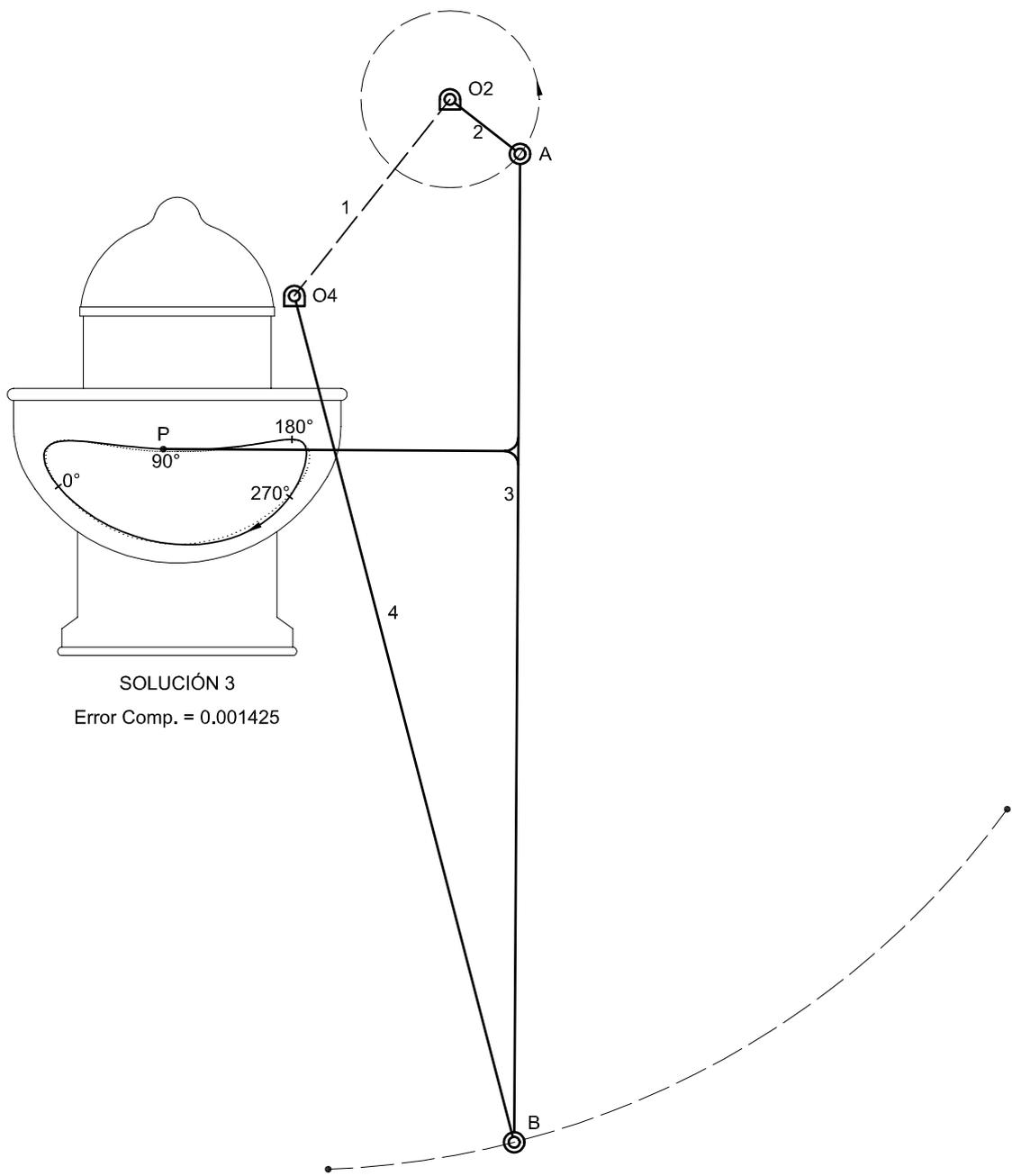


Figura 6.3. Solución 3 del problema de síntesis de trayectoria.

Se observa, sin embargo, que aparte de que la precisión va decreciendo, estos mecanismos son dimensionalmente mucho más desproporcionados que los dos primeros y que el ajuste de posición, orientación y tamaño les hace demasiado grandes en relación al tamaño inicial de la máquina, por lo que resultan impracticables. No obstante, se puede hacer notar que

pese a la imposibilidad práctica debida al tamaño, estos mecanismos continúan reproduciendo con bastante fidelidad la trayectoria requerida.

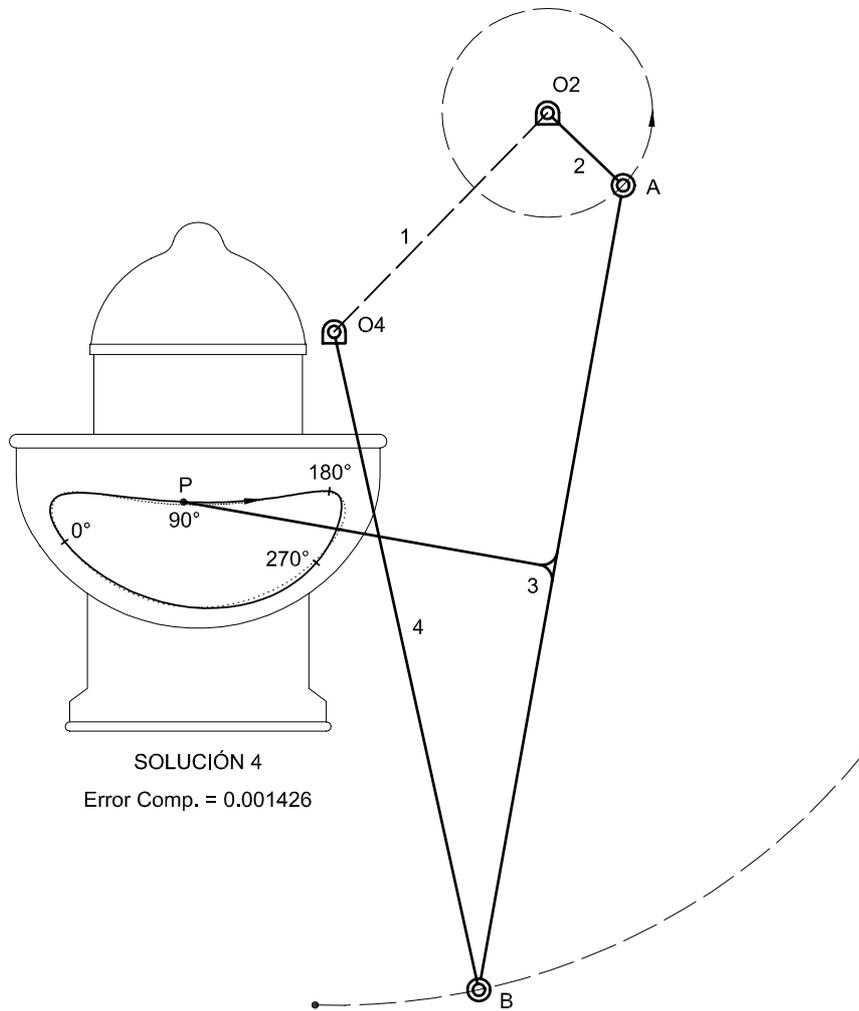
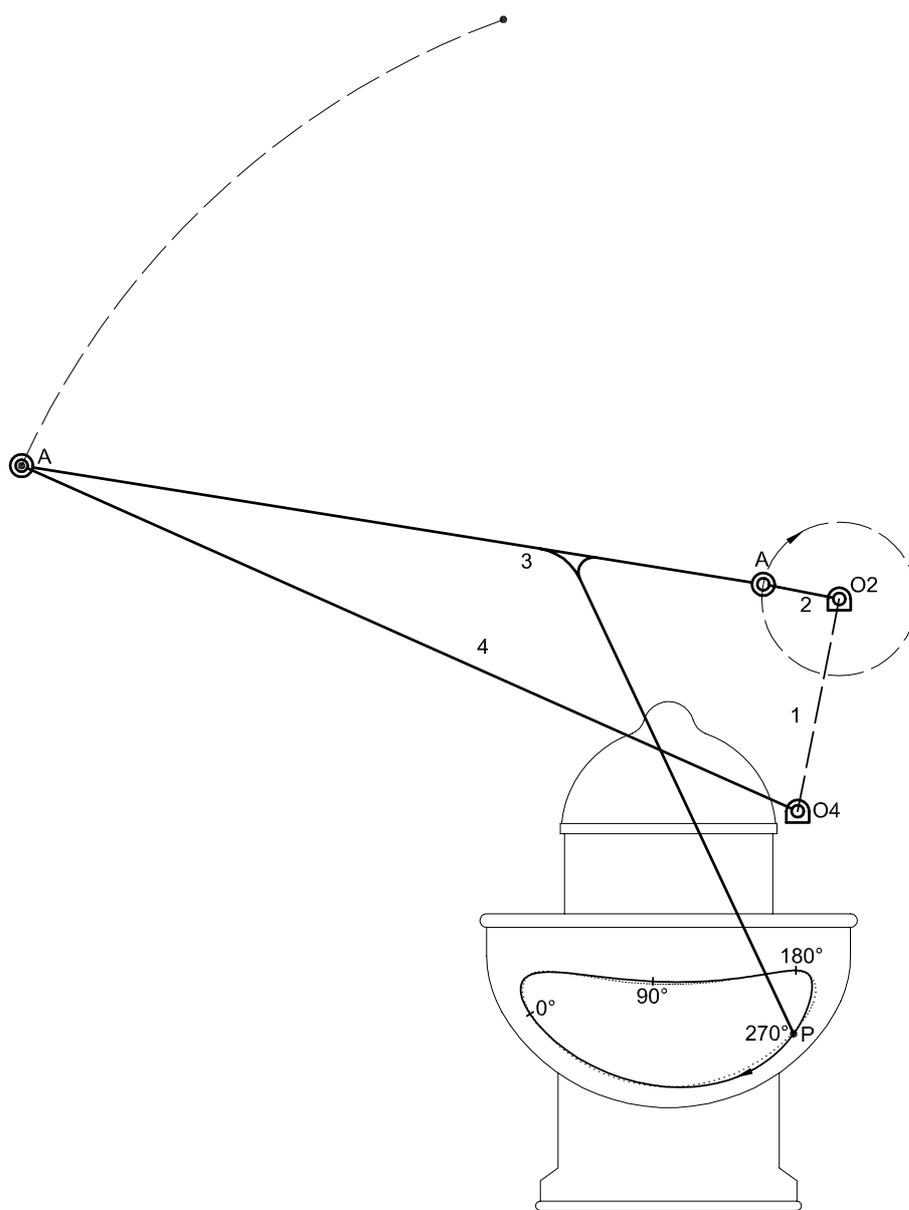


Figura 6.4. Solución 4 del problema de síntesis de trayectoria.



SOLUCIÓN 5

Error Comp. = 0.001426

Figura 6.5. Solución 5 del problema de síntesis de trayectoria.

Otra característica de los mecanismos solución que puede ayudar a la selección es la evolución del ángulo de transmisión en el ciclo cinemático de los mismos. En la figura 6.6 se representa esta evolución para las 5 primeras soluciones en función del ángulo de entrada de la manivela accionadora (medido respecto a la línea que une los pares revolución en la barra

fija). En dicha figura se observa que la solución 2 es la que presenta mejores valores del ángulo de transmisión, el cual se recomienda que no sea inferior a  $30^\circ$ . Si bien incluso en la solución 2 el ángulo de transmisión llega a estar por debajo de este valor mínimo recomendado en algún tramo del ciclo cinemático, se observa que para valores del ángulo de entrada entre  $90^\circ$  y  $270^\circ$  el ángulo de transmisión presenta valores por encima de  $50^\circ$ . Este tramo de funcionamiento corresponde al arco inferior de la trayectoria requerida (figura 6.2 derecha), donde el esfuerzo que ha de realizar el mecanismo para mover la masa es mayor. Consecuentemente el mecanismo correspondiente a la solución 2 presenta un buen ángulo de transmisión en la parte del ciclo en la que el esfuerzo es mayor y puede decirse que posee unas buenas características de transmisión o, en cualquier caso, considerablemente mejores que el resto de soluciones evaluadas.

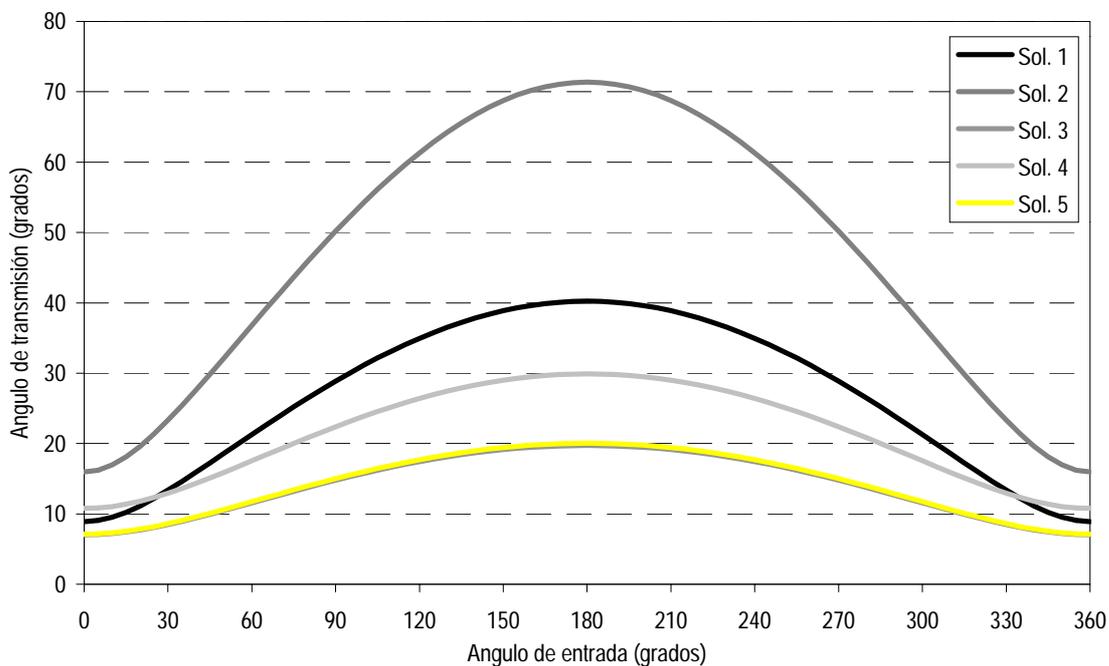


Figura 6.6. Evolución del ángulo de transmisión en los mecanismos solución.

En este ejemplo se ha conseguido obtener un mecanismo capaz de reproducir la trayectoria requerida con elevada precisión contando a la vez con unas características muy favorables de acuerdo con las restricciones del problema (en este caso basadas en el tamaño del mecanismo y en las características de transmisión de fuerzas del mismo). Sin embargo, podría no haber sido posible encontrar una solución viable ignorando en la optimización las consideraciones de diseño ajenas a la fiel reproducción de las curvas (optimización no

restringida). Para obtener una solución en tales casos es aconsejable realizar una optimización restringida en la que las restricciones pueden limitar el valor mínimo del ángulo de transmisión y, por otro lado, el tamaño del mecanismo en relación al tamaño de la máquina. Sin embargo, la inclusión de restricciones complica el proceso de optimización, haciéndolo más costoso computacionalmente hablando. Por ello, la posibilidad de obtención de buenas soluciones sin restricciones supone una ventaja que puede atribuirse al método propuesto.

Atendiendo a las consideraciones de tamaño y al ángulo de transmisión se selecciona, finalmente, el mecanismo representado en la figura 6.7.

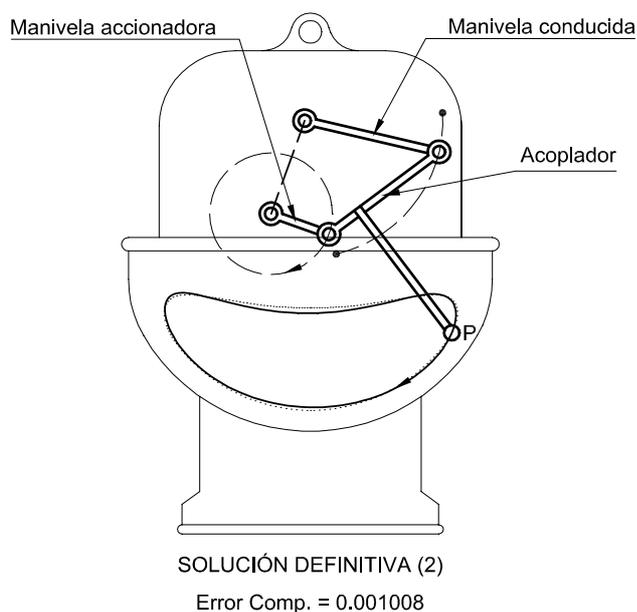


Figura 6.7. Solución definitiva al problema de rediseño del mecanismo de una amasadora.

### 6.3. Aplicación al diseño de un mecanismo con pausa.

Los mecanismos con pausa han tenido desde siempre una importancia considerable debido a sus numerosas aplicaciones industriales, especialmente en el campo de la automatización. En estos mecanismos, el movimiento continuo y uniforme del eslabón de entrada es convertido en un movimiento periódico e intermitente del eslabón conducido. Los mecanismos de movimiento con pausa (también conocidos como mecanismos *dwell*) son diseñados tomando como base diferentes tipos de mecanismos, pudiendo ser clasificados en dos categorías fundamentales: mecanismos con pares superiores y mecanismos

exclusivamente con pares inferiores (o mecanismos de barras). Pese a que los segundos tienen ventajas sobre los primeros debido a que son más baratos de fabricar y mantener y presentan un mejor comportamiento a altas velocidades, los primeros han tenido un mayor auge. Las razones son varias (Iyer, 1996): los mecanismos de barras no consiguen, en general, una pausa perfecta mientras que los mecanismos con pares superiores sí; el diseño de mecanismos de barras con pausa es mucho más complejo que el de mecanismos con pausa empleando pares superiores; existe escasez de métodos para el diseño de mecanismos de barras con pausa; etc. Por esto, con las herramientas de diseño adecuadas, la utilización de mecanismos de barras para generación de movimiento intermitente supone el logro de diseños más eficientes y robustos.

En la práctica, el diseño de mecanismos de barras con pausa se ha reducido a la síntesis de trayectoria con tramo circular o con tramo rectilíneo. Si el punto que traza una de estas trayectorias se utiliza para conducir otro eslabón dispuesto de la forma adecuada, se logra una pausa en el eslabón conducido. En la figura 6.8 se hace uso del mecanismo de Evans (el cual genera una trayectoria con un tramo rectilíneo) para la conducción de un eslabón con movimiento intermitente. Cuando el punto P recorre el tramo rectilíneo —que está alineado con el centro de rotación del eslabón 6— el eslabón conducido 6 permanece aproximadamente inmóvil.

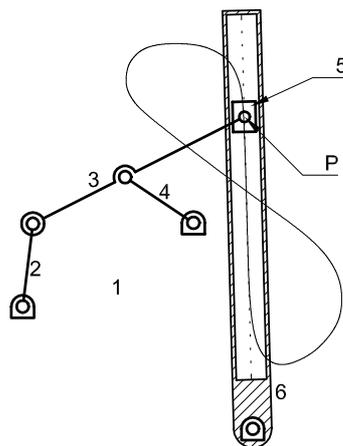


Figura 6.8. Mecanismo con pausa a partir de un mecanismo que genera un tramo de trayectoria rectilíneo.

Otra posibilidad para conseguir un movimiento intermitente es la utilización de un mecanismo de barras generador de un tramo de trayectoria circular. Como ejemplo, en la figura 6.9 se muestra un mecanismo de 4 barras —formado por las barras 1 (bancada), 2 (manivela accionadora), 3 (acoplador) y 4 (manivela conducida)— en el que un punto P del acoplador traza una trayectoria con un tramo cuasi-circular. Se puede aprovechar esta trayectoria haciendo que este punto conduzca otro eslabón (6) mediante una barra (5) de longitud igual al radio del arco de circunferencia trazado. Si además, la trayectoria de deslizamiento de 6 pasa

por el centro de la circunferencia, entonces se tiene que cuando P se encuentra sobre la parte circunferencial de su trayectoria, el eslabón 6 permanecerá inmóvil en el centro de dicha circunferencia (punto B). Una vez construido este mecanismo (que ahora es de 6 barras) puede obtenerse fácilmente la carrera del émbolo 6 (mostrada en la figura desde A hasta B).

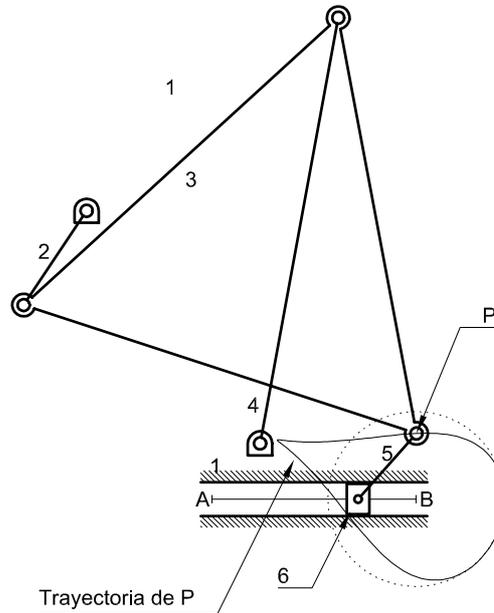


Figura 6.9. Mecanismo con pausa a partir de un mecanismo que genera un tramo de trayectoria circular.

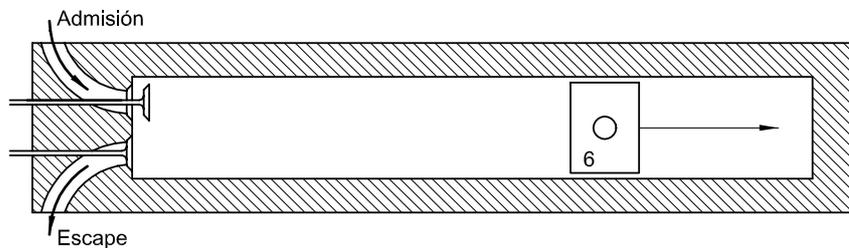


Figura 6.10. Cilindro-bomba para el suministro de volúmenes discretos de gas.

Este tipo de mecanismo puede tener aplicación en el suministro de gases por cantidades discretas de volumen. Cuando se desea suministrar cantidades fijas de un gas (a unas condiciones de presión y temperatura determinadas) puede utilizarse un conjunto cilindro-émbolo como el mostrado en la figura 6.10. Cuando la válvula de admisión está abierta, el émbolo (6) se mueve hacia la derecha y el gas entra en el cilindro por la depresión que se genera. Una vez que el cilindro está lleno, se abre la válvula de escape (la cual también puede ser una válvula accionada por presión) y el émbolo se mueve hacia la izquierda, suministrando todo el gas que hay en su interior. Sin embargo, al ser el gas un fluido compresible, si el

movimiento del émbolo se realiza con rapidez, el cilindro no llega a llenarse completamente de gas (en las condiciones de presión y temperatura que existan en el depósito de admisión) debido a que el émbolo comienza su movimiento de descarga (hacia la izquierda) cuando aún existe depresión en el cilindro. Una posibilidad de reducir este defecto es obligar al émbolo a detenerse un instante en el punto muerto derecho, permitiendo que la presión en el interior del cilindro se iguale a la del depósito antes de iniciar la descarga. Por su parte, en el punto muerto izquierdo (final de la descarga) no será necesaria ninguna pausa pues, si el sistema de válvulas está bien diseñado, no existirá espacio físico para alojar ninguna (o prácticamente ninguna) cantidad de gas. Pues bien, este tipo de movimiento alternativo con pausa puede ser obtenido, de forma aproximada, mediante un mecanismo como el mostrado en la figura 6.9.

Así, el diseño de mecanismos con pausa puede ser realizado por medio de la síntesis de una trayectoria con un tramo circular. Sin embargo, aparte de este requisito, existen otras restricciones geométricas para el funcionamiento del mecanismo completo. Por ejemplo, una vez seleccionada la dirección de deslizamiento del émbolo (eslabón 6 en la figura 6.9), ningún punto de la trayectoria de P puede estar más lejos de dicha recta de deslizamiento que la longitud del acoplador 5 (igual al radio del arco de circunferencia descrito); ya que de lo contrario no existiría compatibilidad de movimiento produciéndose el bloqueo del mecanismo.

También es posible modificar el ángulo abarcado por el arco circular de la trayectoria para conseguir una pausa más larga o más corta. Si se desea que la pausa sea larga, el ángulo abarcado debe ser grande, a la vez que la velocidad de paso del punto trazador sobre dicho arco debe ser pequeña o moderada. Sin embargo, si el ángulo abarcado (ángulo  $\alpha$  en la figura 6.11) se aproxima a  $180^\circ$ , el ángulo de transmisión  $\gamma$  obtenido cuando P sale del tramo circular es excesivamente pequeño provocando la aparición de grandes esfuerzos en los eslabones. En la figura 6.11 se observa que cuando P está en la posición P2, como el ángulo de transmisión  $\gamma$  es tan pequeño, para conseguir una fuerza unitaria en la dirección de deslizamiento de 6 es necesario realizar una fuerza considerablemente más grande en la dirección de la barra 5. Por el contrario, cuando P está en la posición P1 el ángulo de transmisión  $\gamma$  es mayor y la desproporción entre las fuerzas es mucho menor.

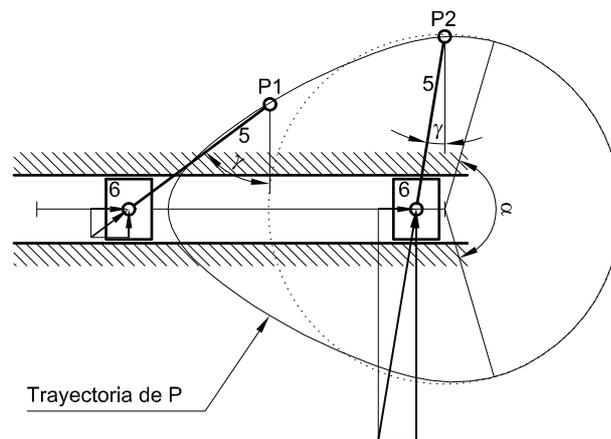


Figura 6.11. Ejemplo de ángulo de transmisión pequeño cuando el ángulo abarcado se aproxima a  $180^\circ$ .

Consecuentemente, el ángulo deberá ser obtenido por compromiso entre la longitud de pausa requerida y el buen comportamiento dinámico del mecanismo.

Como se ha visto, es posible plantear el problema como la síntesis de un tramo abierto de trayectoria circular. Sin embargo, si el problema se plantea de esta forma (requiriendo exclusivamente un tramo circular de trayectoria), la optimización tenderá a aportar como solución los puntos singulares del acoplador que producen trayectorias perfectamente circulares: los pares de unión del acoplador con cada una de las manivelas del mecanismo de 4 barras. Esto puede ser evitado modificando la curva abierta requerida para que además de poseer un tramo circular contenga dos tramos adyacentes a éste con forma no circular<sup>119</sup>.

Además, la trayectoria, al separarse del trazado circular, debe hacerlo por dentro de la misma —es decir, disminuyendo el radio— en al menos uno de los dos lados ya que, de lo contrario, se produciría el bloqueo del mecanismo como se ha comentado con anterioridad.

Para el planteamiento de este problema se ha dado prioridad a la longitud de la pausa frente a la calidad del ángulo de transmisión —es decir, se ha supuesto que el mecanismo no ha de realizar grandes esfuerzos— y, por ello, se ha requerido un tramo circular abarcando un gran ángulo. Para ello y para reflejar el resto de condicionantes se ha optado por establecer la trayectoria requerida mediante un arco circular de  $120^\circ$  y dos arcos no circulares tangentes al primero y con disminución parabólica del radio con una abertura de  $45^\circ$  cada uno de ellos. Así, la ecuación que define esta curva a tramos es la siguiente:

<sup>119</sup> Esto también tiene que ver con el hecho de que si bien se requiere que la trayectoria tenga un tramo circular, también se requiere que el resto de la trayectoria no lo sea pues, de lo contrario, no se conseguiría movimiento alguno en el émbolo.

$$R(\varphi) = \begin{cases} 10 - 0.75 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)^2 & \text{si } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right] \\ 10 & \text{si } \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \\ 10 - 0.75 \cdot \left(\frac{5\pi}{6} - \varphi\right)^2 & \text{si } \varphi \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{12}\right] \end{cases} \quad (6.1)$$

y su representación puede observarse en la figura 6.12. En ella, el tramo entre 30° y 150° es perfectamente circular y antes y después de este se han impuesto dos tramos con reducción parabólica del radio.

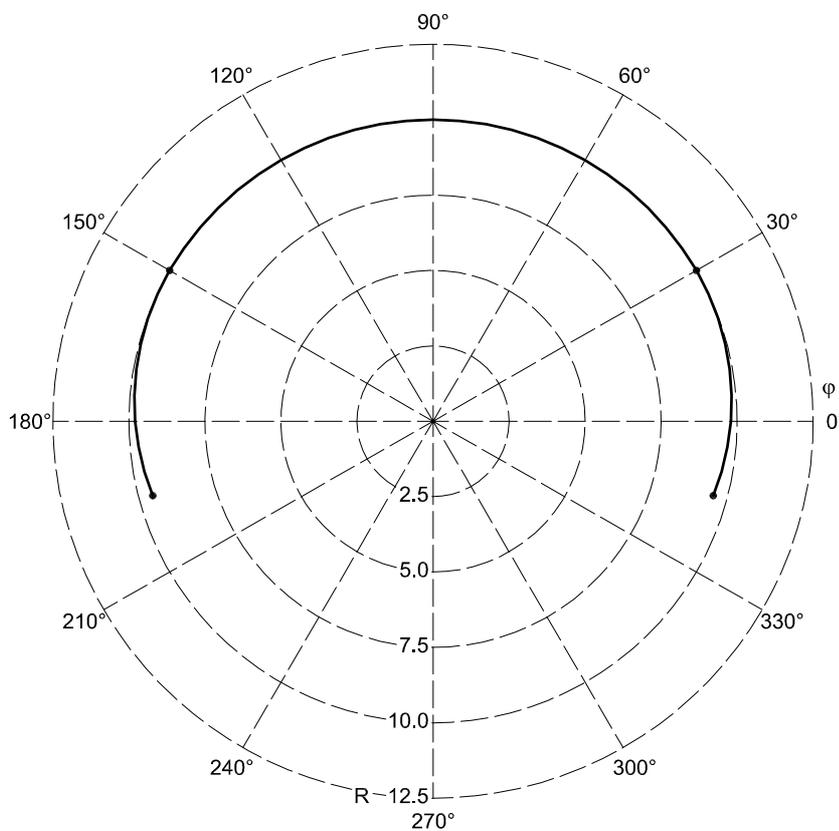


Figura 6.12. Trayectoria abierta requerida.

Con el fin de obtener un mecanismo compacto, al definir el espacio de diseño del problema de síntesis se ha limitado la relación máxima de desproporción a 5. Esto permite una discretización más fina del EDA y, consecuentemente, una mayor probabilidad de obtención del óptimo global dentro del mismo. En la tabla 6.5 se muestra la definición del EDA utilizado en la resolución de este problema de síntesis del mecanismo de 4 barras, cuya discretización consta

de 474579 puntos iniciales. Aunque se está realizando la síntesis de una trayectoria abierta, el resto de condicionantes de funcionamiento imponen que la manivela de entrada realice giros completos. Por ello se descartarán aquellos mecanismos del EDA que no cumplen esta condición como si se tratara de la síntesis de una trayectoria cerrada.

Var. Dis.	Val. Mín.	Val. Máx.	Incremento	Optimizar
L1	1.0	5.0	0.5	Si
L2	1.0	1.0	Invariable	No
L3	1.0	5.0	0.5	Si
L4	1.0	5.0	0.5	Si
X3	-5.0	10.0	0.5	Si
Y3	-5.0	5.0	0.5	Si
Config.	1.0	1.0	Invariable	No

Tabla 6.5. Definición del EDA.

Para la comparación de la trayectoria abierta requerida y la trayectoria cerrada se ha utilizado la función PDCP1 (capítulo 3) y para la adaptación de los polígonos se ha empleado el método *BetaRa* (capítulo 4) por ser el que mejores resultados ha demostrado. Asimismo, la comparación de las curvas se ha realizado utilizando polígonos característicos de 6 puntos.

La ejecución del método exhaustivo se ha realizado con los siguientes consumos de tiempo:

Etapa	Tiempo <sup>118</sup>	
Evaluación de los puntos de la discretización	3h 32' 03"	83.5%
Identificación de mínimos discretos	0h 38' 04"	15.0%
Optimización partiendo de mínimos discretos	0h 03' 43"	1.5%
Total	4h 13' 50"	100.0%

Tabla 6.6. Coste computacional en tiempo de las diferentes etapas de resolución del problema.

En comparación con el tiempo utilizado en el ejemplo anterior (§6.2), en este caso se ha utilizado un EDA con una discretización cuyo número de puntos es menor que el 10% del primero. Sin embargo, el tiempo invertido es mayor que el 50%. Esta desproporción tiene que ver con el hecho (ya puesto de manifiesto anteriormente en el capítulo 5) de que la comparación de curvas abiertas es, al involucrar un procedimiento de optimización en la adaptación, necesariamente más costosa que la comparación de curvas cerradas.

Tras la resolución del problema se obtiene un total de 22 mínimos locales reales en los que el error de comparación con la curva requerida varía desde 0.000014 hasta 0.038082. Las primeras 12 soluciones son mostradas en la figura 6.13<sup>120</sup>. La primera característica observable es que se han obtenido soluciones muy variadas (mecanismos muy diferentes). Sin embargo, estas soluciones parecen estar agrupadas en conjuntos muy similares entre si. Por ejemplo, las soluciones 1, 2, 4 y 5 son parecidas (aunque no iguales) en forma de la curva generada y también en dimensiones del mecanismo. Lo mismo ocurre con las soluciones 8, 9 y 10 y con las soluciones 11 y 12, que forman un tercer grupo. Esto puede ser debido a que varios mínimos discretos conducen a mínimos reales similares. Sin embargo, la optimización basada en el gradiente que se ha realizado no ha evolucionado, por ejemplo, de la solución 2 a la solución 1, lo que indica que en el EDA no existe un camino que conduzca de un mecanismo a otro y en el que solamente haya descenso en la función objetivo. Lo cual es una prueba de que ambos son mínimos reales de la función objetivo.

---

<sup>120</sup> Para cada mecanismo solución podrían incluirse, además, sus cognados y los nuevos mecanismos debidos a cambios de configuración. Estos mecanismos no se han incluido por brevedad, pero de haberlo hecho, el análisis posterior sería igual al realizado.

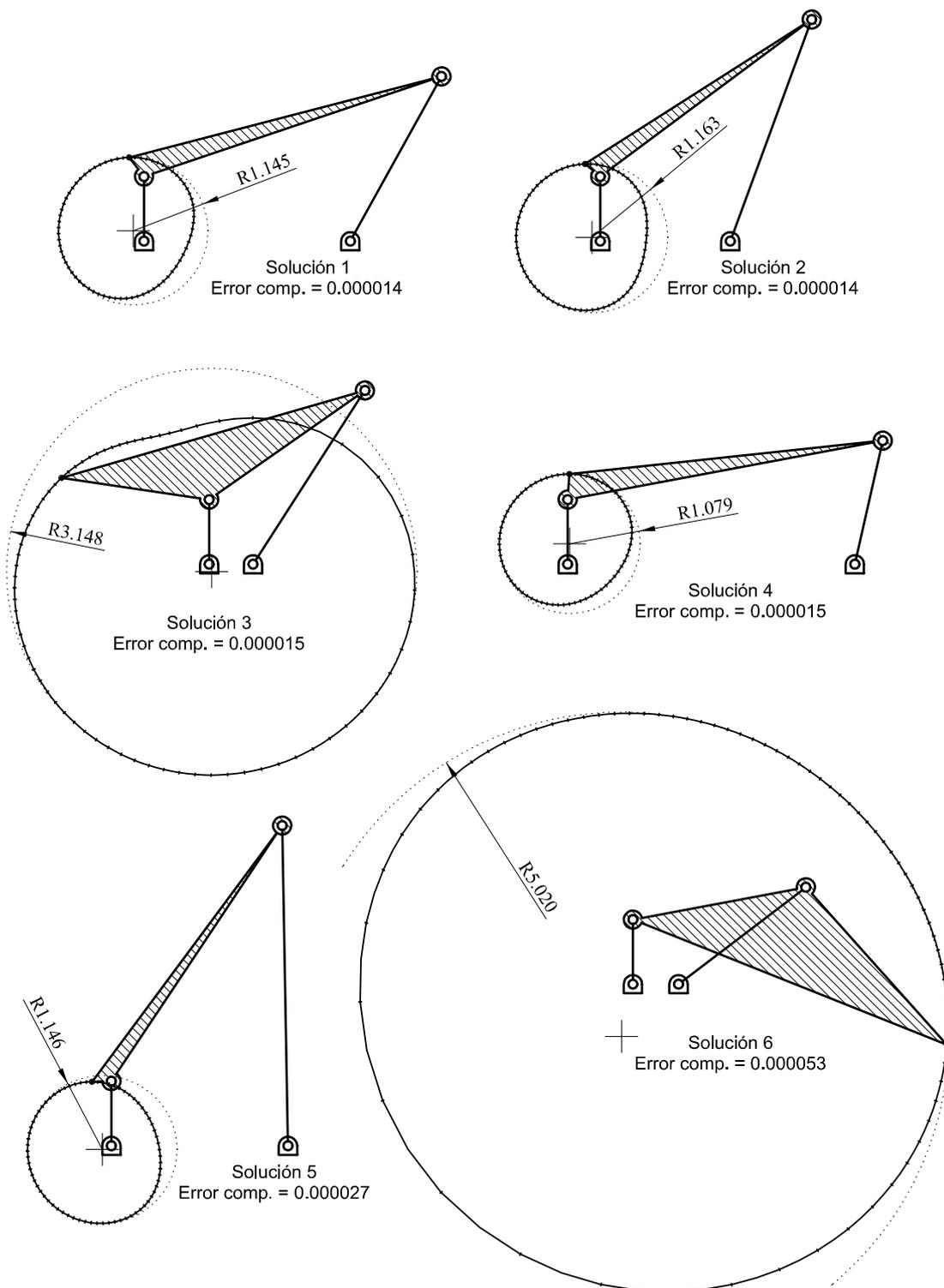


Figura 6.13. Soluciones al problema de síntesis de mecanismos con pausa (continua...).

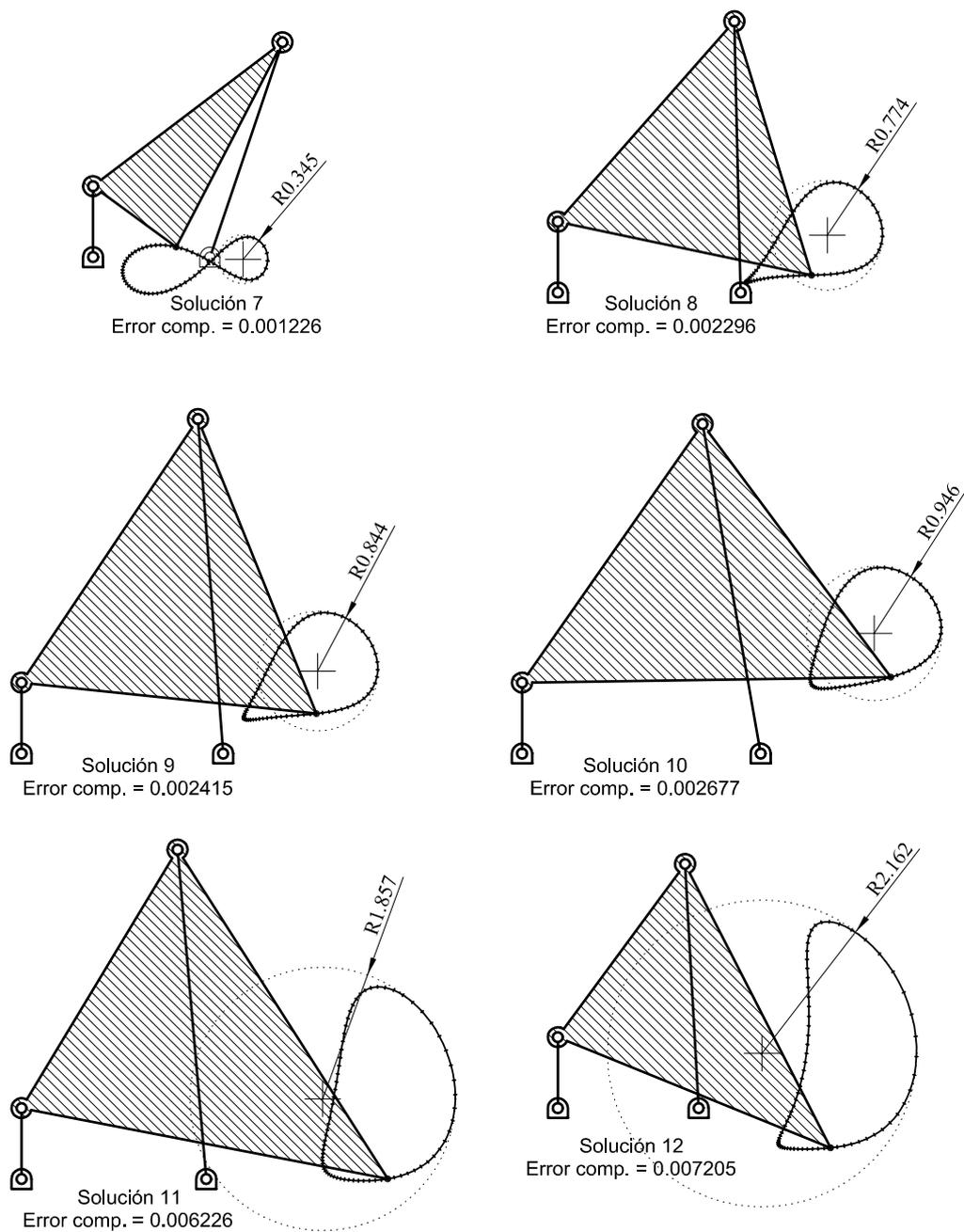


Figura 6.13 (continuación). Soluciones al problema de síntesis de mecanismos con pausa.

Por otro lado, cabe destacar la calidad del óptimo (solución 1), en el que el error de comparación es excepcionalmente pequeño. Consecuentemente se ha logrado un mecanismo que reproduce la trayectoria requerida casi con total precisión.

Se observa también que, pese a haber primado la longitud de la pausa frente a la obtención de ángulos de transmisión elevados, el método ha proporcionado mínimos (soluciones 8, 9, 10, 11 y 12) en los que el ángulo abarcado por el tramo de arco circular está claramente por debajo de  $180^\circ$ . Por lo que es posible seleccionar un mecanismo con mejores características dinámicas que las inicialmente previstas.

Una vez seleccionada una solución de las obtenidas (mostradas en la figura 6.13), es necesario completar el diseño del mecanismo decidiendo la dirección de deslizamiento del émbolo. Seleccionando por ejemplo la solución 1, la dirección de deslizamiento viene determinada por el ángulo  $\beta$  (figura 6.14). Dado que toda la trayectoria generada por este mecanismo solución está dentro de la circunferencia de radio igual al arco generado, será posible fijar cualquier valor de  $\beta$  sin que se produzca ningún bloqueo del mecanismo. En la figura 6.14 se muestra el mecanismo con un ángulo de deslizamiento tal que la línea de deslizamiento divide a la trayectoria del punto P en dos mitades aproximadamente simétricas. Así, si la velocidad de P sobre su trayectoria fuera también simétrica, esto provocaría movimientos simétricos de ida y venida del émbolo.

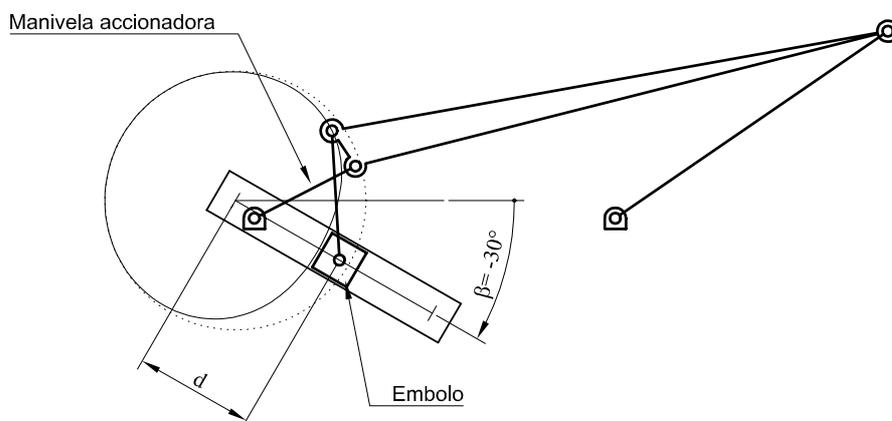


Figura 6.14. Solución 1 con un ángulo de deslizamiento  $\beta$  igual a  $-30^\circ$ .

Para un ángulo de deslizamiento  $\beta$  determinado, es posible representar la curva de desplazamiento (variable  $d$  en la figura 6.14) del émbolo desde su posición de parada (igual al centro de la circunferencia descrita). Para el caso en que este ángulo  $\beta$  es igual a  $-30^\circ$  se obtiene la gráfica mostrada en la figura 6.15, en la que se observa un movimiento con una

detención casi perfecta del émbolo ocupando un tramo angular de la manivela de entrada aproximadamente igual a  $120^\circ$  (desde  $90^\circ$  hasta  $210^\circ$ ).

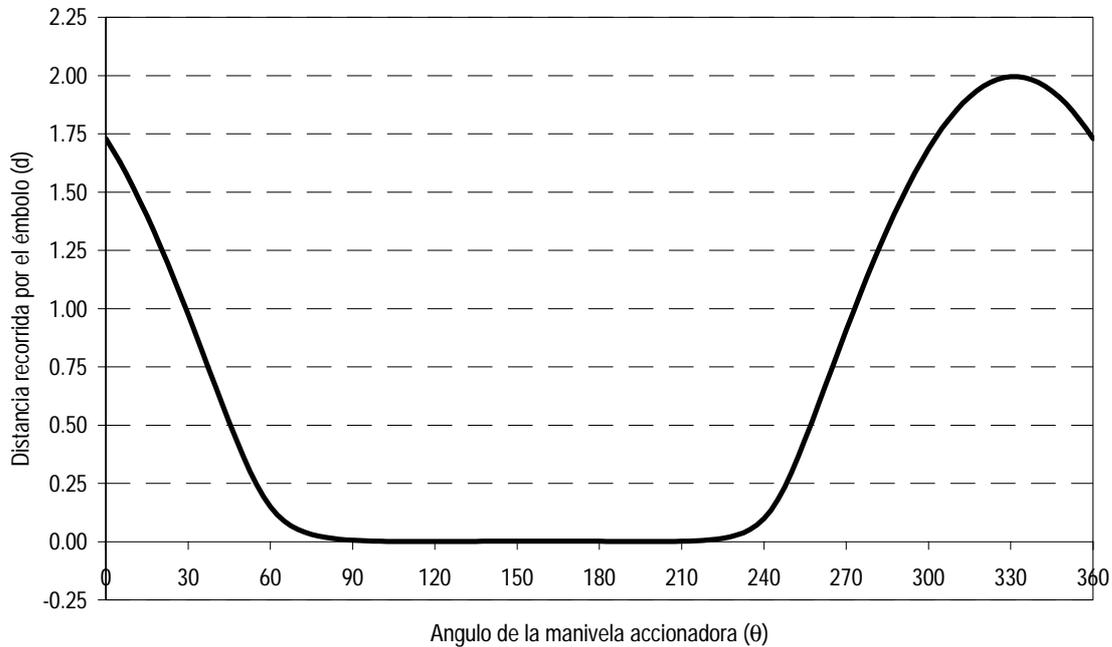
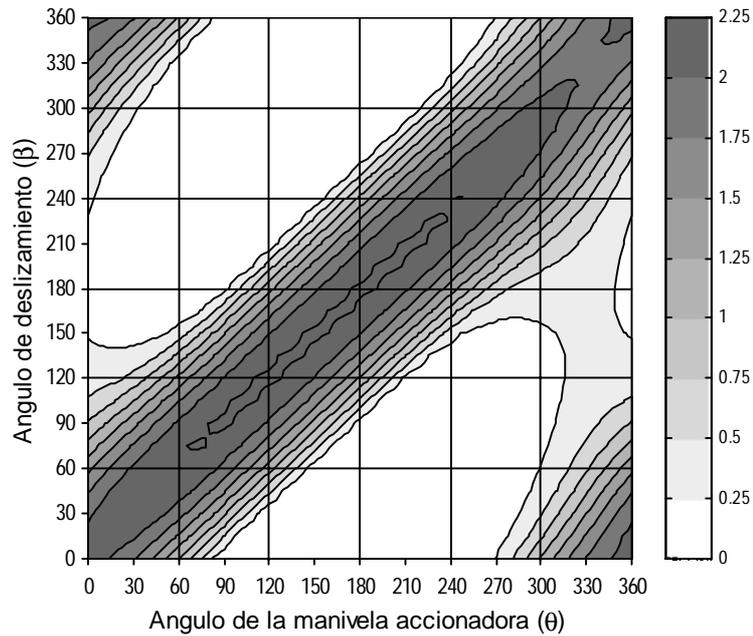


Figura 6.15. Curva de desplazamiento del émbolo correspondiente a la solución 1 y un ángulo de deslizamiento de  $-\beta = 30^\circ$ .

Los tramos de descenso y elevación del émbolo pueden modificarse variando el valor del ángulo de deslizamiento  $\beta$ . Así se obtiene que la posición ( $d$ ) del émbolo es función de dos variables: el ángulo de deslizamiento  $\beta$  y el ángulo de la manivela accionadora  $\theta$ . Con el fin de seleccionar un valor adecuado de la variable de diseño  $\beta$  puede estudiarse la posición del émbolo en función de ambas variables, obteniendo una superficie en un espacio tridimensional que puede representarse por medio de sus curvas de nivel (figura 6.16). En dicha superficie, un corte horizontal a un determinado valor de  $\beta$  equivale a la obtención de la curva de desplazamiento correspondiente a ese ángulo  $\beta$ . Así, puede verse cómo para diferentes valores de  $\beta$  se obtienen tramos de pausa (áreas blancas en la figura) del émbolo con diferente duración. También se puede modificar el descenso de la curva de desplazamiento, aunque se observa que el gradiente de ascenso es prácticamente invariable con  $\beta$ . Incluso se puede obtener un mecanismo con dos pausas y un pequeño desplazamiento entre ambas utilizando un valor de  $\beta$  cercano a  $150^\circ$ . También se observa que para  $\beta$  igual a  $-30^\circ$  ( $330^\circ$ ), aproximadamente, se obtiene la pausa de mayor duración.



**Figura 6.16.** Desplazamiento del émbolo en función del ángulo de deslizamiento y de la posición de la manivela accionadora para la solución 1.

A continuación, se puede estudiar el ángulo de transmisión ( $\gamma$ ) del eslabón conducido al émbolo (figura 6.11), correspondiente a la solución 1 y su variación con el ángulo de deslizamiento ( $\beta$ ). Como ya se ha comentado, dado que el arco de circunferencia trazado por esta solución abarca un ángulo que se aproxima a  $180^\circ$ , es de suponer que en la salida y la entrada de este tramo circular (correspondiente al inicio y al final de la detención del émbolo) los ángulos de transmisión sean muy bajos y la transmisión de fuerzas se realice interviniendo grandes esfuerzos. Al calcular este ángulo de transmisión<sup>121</sup> para un ángulo de deslizamiento  $\beta$  igual a  $-30^\circ$  se obtiene la gráfica de la figura 6.17. En ella se observa que, efectivamente, existe una correspondencia de posición entre los valores más bajos de  $\gamma$  y los instantes en los que el punto trazador entre y sale del tramo circular (figura 6.15). Además, se observa que tal como se había predicho los valores menores de  $\gamma$  son bajos (considerando valores poco apropiados todos aquellos por debajo de  $30^\circ$ ).

Dado que la forma de la trayectoria en relación con la circunferencia descrita es independiente de la dirección de deslizamiento, se deduce que una variación del ángulo de

<sup>121</sup> El cual es definido como el menor ángulo entre la barra conductora y la perpendicular a la dirección de deslizamiento del eslabón conducido (Soni, 1974) y presentará valores entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ .

deslizamiento ( $\beta$ ) no incrementará de forma sensible los valores mínimos del ángulo de transmisión. Por lo tanto, esta solución presenta este problema de forma inevitable.

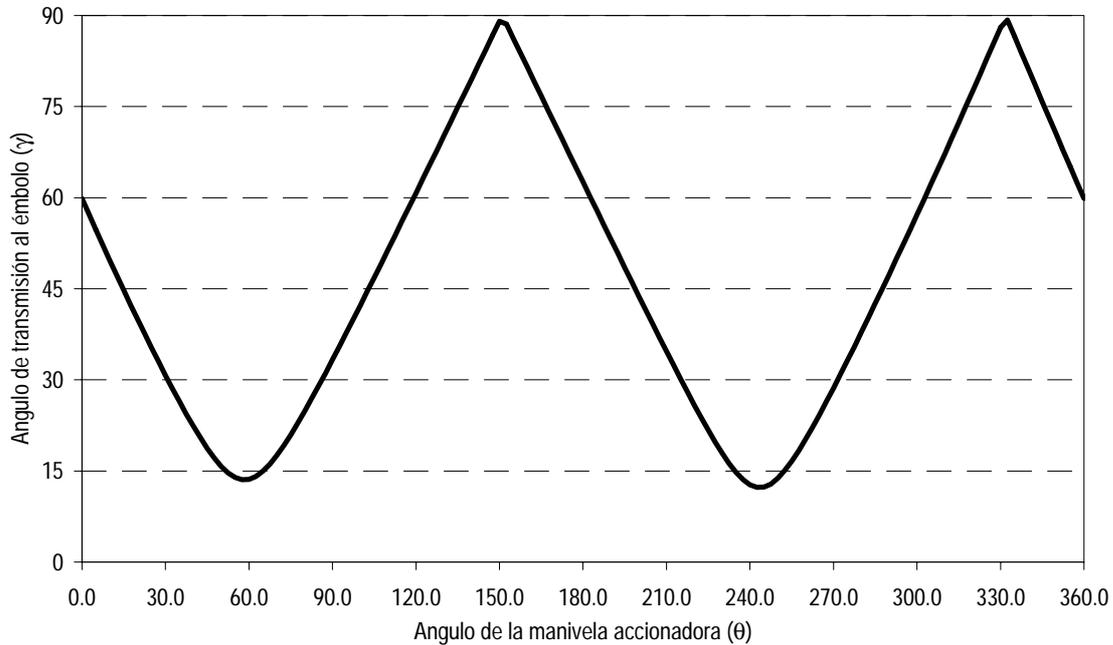


Figura 6.17. Ángulo de transmisión al émbolo correspondiente a la solución 1 y un ángulo de deslizamiento de  $-30^\circ$ .

La evolución del ángulo de transmisión en función del ángulo de entrada del mecanismo ( $\theta$ ) y del ángulo de deslizamiento ( $\beta$ ) es una función de dos variables y puede representarse mediante sus curvas de nivel (figura 6.18). Se observa que, para prácticamente cualquier ángulo de deslizamiento, se obtiene en algún momento del ciclo cinemático un valor bajo (por debajo de  $11^\circ$ ) del ángulo de transmisión. Existen, no obstante, dos pequeños rangos angulares de  $\beta$  (alrededor de  $330^\circ$  y alrededor de  $150^\circ$ )<sup>122</sup> en los que el ángulo de transmisión no desciende tanto. Sin embargo, incluso para esos valores de  $\beta$  no se consiguen ángulos de transmisión mínimos superiores a  $15^\circ$ .

<sup>122</sup> Nótese que ambos ángulos representan en realidad la misma dirección ya que su diferencia es  $180^\circ$ .

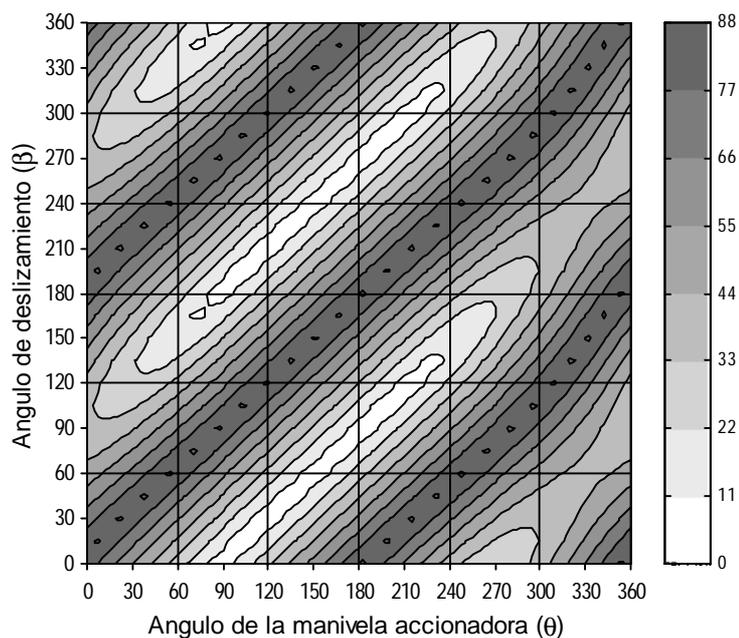


Figura 6.18. Angulo de transmisión ( $\gamma$ ) barra-émbolo en función del ángulo de desplazamiento y de la posición de la manivela accionadora para la solución 1.

Es posible adoptar otra solución sacrificando parte de la longitud de la pausa en favor de un ángulo de transmisión mejor. Si, por ejemplo, se selecciona la solución 10 (figura 6.13), se obtiene un mecanismo que traza una trayectoria con un tramo circular más pequeño y que sale del mismo considerablemente antes de alcanzar los  $180^\circ$  (figura 6.19). De nuevo se pueden seleccionar diferentes ángulos de desplazamiento ( $\beta$ ), aunque si se elige un ángulo de  $220^\circ$  se obtiene una curva de desplazamiento del mismo aproximadamente simétrica (figura 6.19).

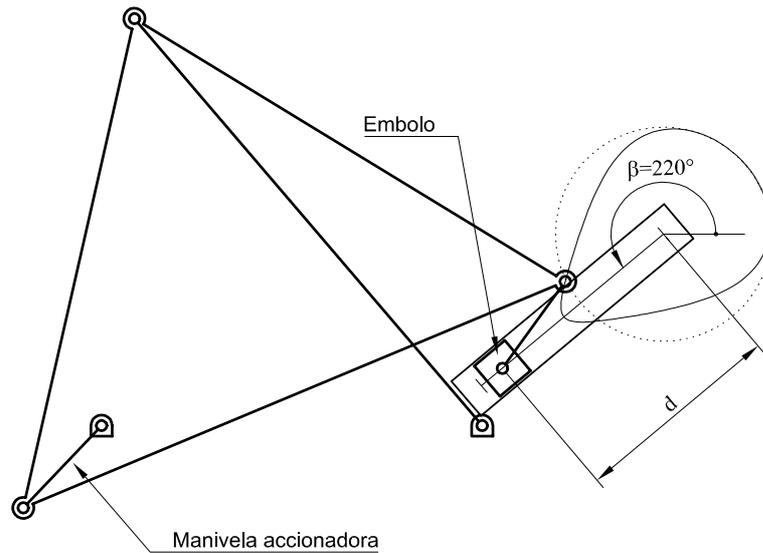


Figura 6.19. Solución 10 con un ángulo de deslizamiento igual a  $220^\circ$ .

Para este mecanismo se observa que la trayectoria descrita por el punto trazador del mecanismo de 4 barras accionador no queda incluida dentro del círculo descrito, por lo que existirán ciertos ángulos de deslizamiento ( $\beta$ ) —o ciertos rangos angulares— en los que no existirá compatibilidad de movimiento y el mecanismo se bloqueará.

Para el mecanismo mostrado en la figura 6.19 ( $\beta=220^\circ$ ) se obtiene la curva de desplazamiento de la figura 6.20. Se observa cómo la pausa es menor que para la solución 1, abarcando menos de  $60^\circ$  del ángulo de la manivela accionadora. Para ese mismo mecanismo se obtiene un ángulo de transmisión mostrado en la figura 6.21. Se observa cómo los valores mínimos son muy superiores a los conseguidos con la solución 1.

Finalmente, en las figuras 6.22 y 6.23 se representa respectivamente la gráfica de desplazamiento del émbolo y el ángulo de transmisión en función de la posición de la manivela accionada ( $\theta$ ) y del ángulo de deslizamiento ( $\beta$ ) elegido. En ellas se observa la existencia de áreas (sombreadas) en las que el mecanismo no tiene solución, habiéndose bloqueado antes de llegar a esa posición.

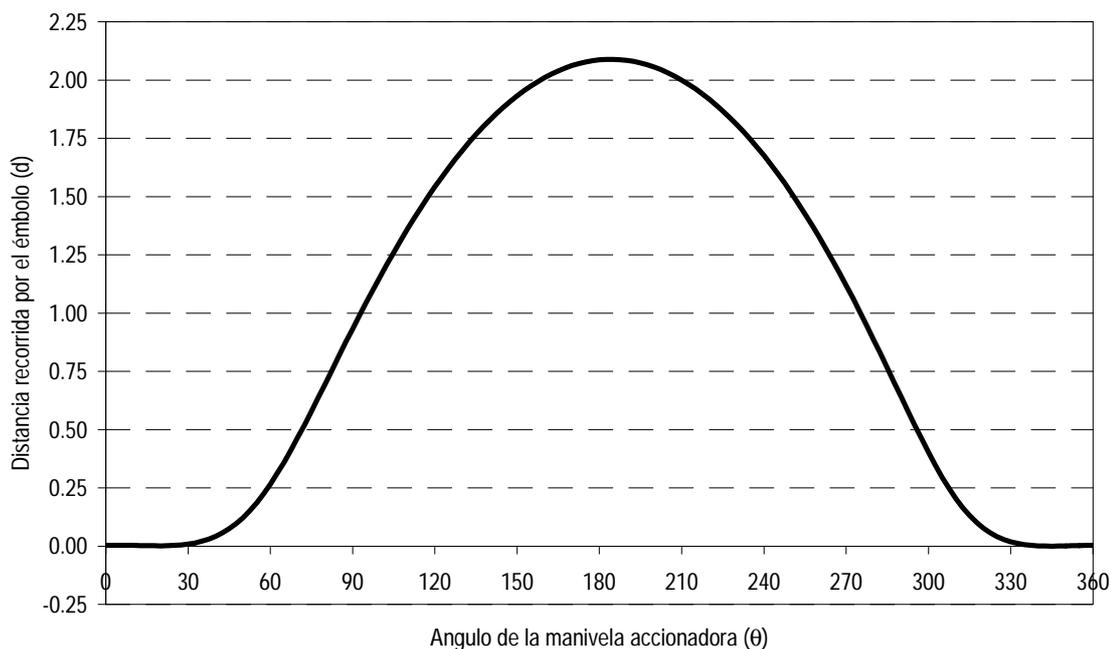


Figura 6.20. Curva de desplazamiento del émbolo correspondiente a la solución 10 y un ángulo de deslizamiento de 220°.

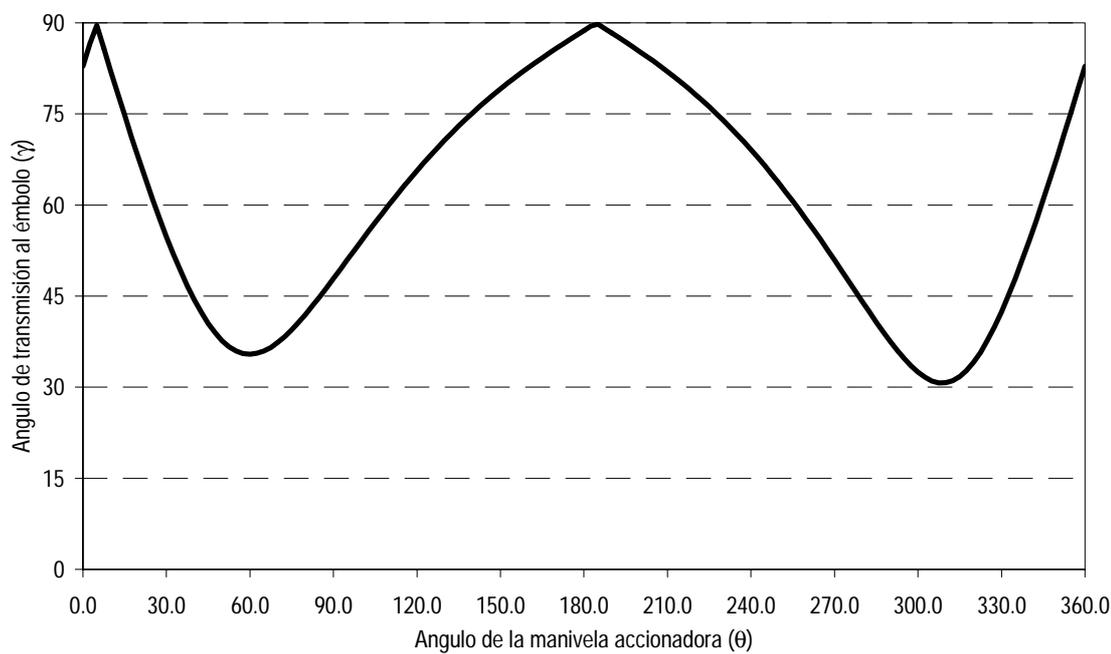


Figura 6.21. Angulo de transmisión al émbolo correspondiente a la solución 10 y un ángulo de deslizamiento de 220°.

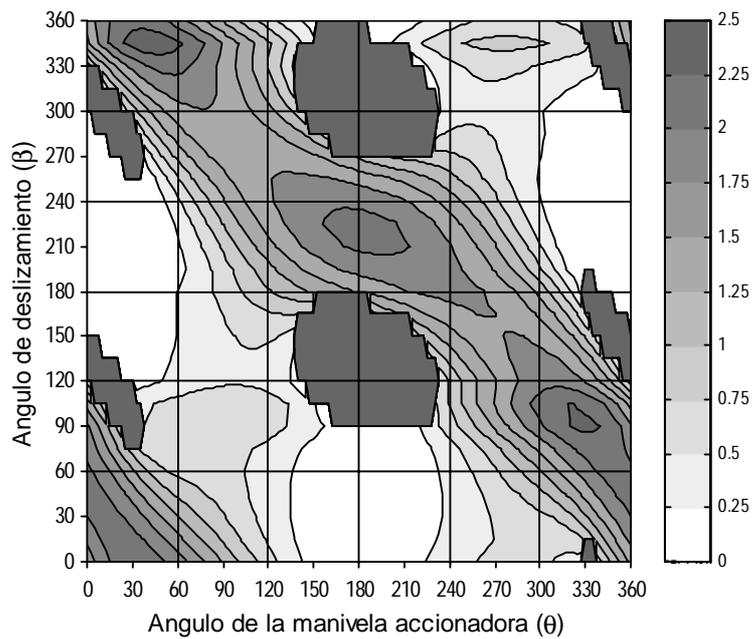


Figura 6.22. Desplazamiento del émbolo en función del ángulo de desplazamiento y de la posición de la manivela accionadora para la solución 10.

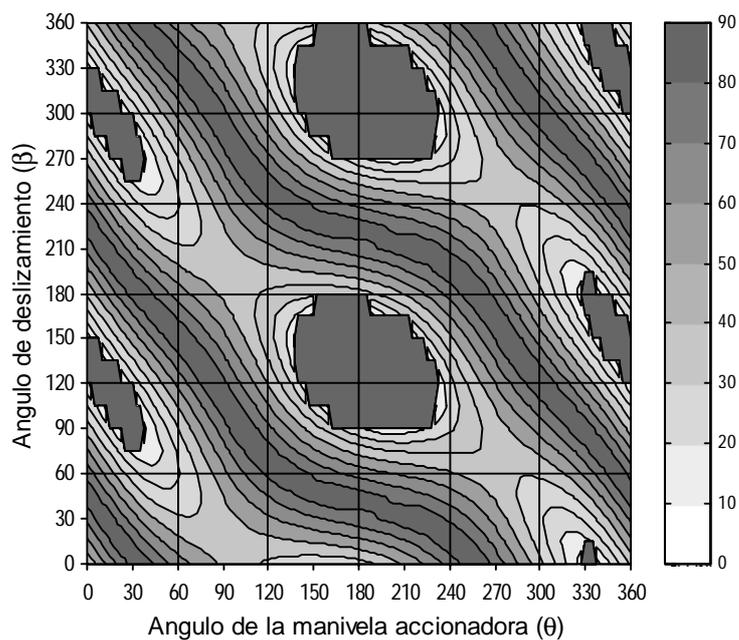


Figura 6.23. Ángulo de transmisión ( $\gamma$ ) barra-émbolo en función del ángulo de desplazamiento y de la posición de la manivela accionadora para la solución 10.

Como se ha visto en esta aplicación práctica, el método propuesto muestra un buen comportamiento en la síntesis de trayectorias abiertas. Demuestra su capacidad para encontrar soluciones con buena aproximación a la requerida y demuestra versatilidad al aportar una familia de soluciones dentro de las cuales se puede seleccionar la más adecuada de acuerdo con otros criterios de diseño. Sin embargo, un diseño adecuado de la curva requerida es aconsejable para obtener el mayor rendimiento del método. En este caso ha sido necesario añadir dos tramos no circulares adyacentes al tramo circular en la curva requerida. Con ello se ha evitado que el método conduzca a una solución inútil conocida a priori.

Tras analizar las diferentes soluciones, se ha comprobado la existencia de éstas con diferentes características dinámicas y se ha visto cómo es posible su selección posterior atendiendo a criterios diferentes de la reproducción fiel de la trayectoria requerida. Como alternativa, también es posible imponer otra trayectoria requerida con un menor ángulo de trayectoria circular y rápida salida de dicha trayectoria. Tras la búsqueda del mecanismo dimensionalmente óptimo, este tendrá unas mejores características dinámicas de transmisión de movimiento.

## **6.4. Aplicación a la generación de una trayectoria con puntos dobles.**

---

Con el fin de demostrar el funcionamiento del método en la síntesis de trayectorias con un punto doble a la vez que contrastar los resultados con otros proporcionados por los métodos ideados por otros autores se plantea, a continuación, la síntesis de la trayectoria mostrada en la figura 6.24. Esta trayectoria ha sido la elegida por Unruh y Krishnaswami (Unruh y Krishnaswami, 1995) para probar el funcionamiento del método que propusieron en 1995 denominado "*Técnica semi-automática para la síntesis con infinitos puntos de curvas del acoplador de mecanismos de 4 barras*". La curva es definida como una B-Spline cúbica y cerrada y contiene un punto doble por lo que en el método exhaustivo se podrá reducir considerablemente el número de puntos de la malla, dado que la mayoría de las curvas generadas por mecanismos de 4 barras (con rotación total en una de las manivelas) son curvas sin puntos dobles.

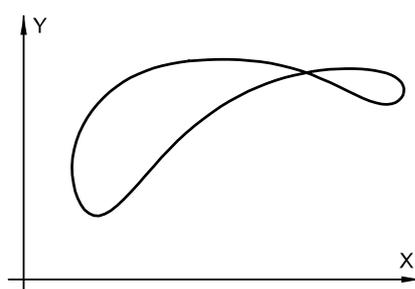


Figura 6.24. Curva requerida.

El espacio de diseño planteado es el mismo que en el primer caso práctico (tabla 6.1). Siguiendo el procedimiento exhaustivo, primero se evalúan los puntos de la discretización para, a continuación, seleccionar los mínimos discretos que conducirán a mínimos reales tras una optimización basada en el gradiente. El número de puntos involucrado en cada etapa es expuesto en la tabla 6.7.

Nº de puntos en el EDA inicial	5 350 257
Nº de puntos en el EDA reducido	651 136
Nº de mínimos discretos	11
Nº de mínimos reales	11

Tabla 6.7. Nº de puntos en cada etapa de resolución del problema.

Etapa	Tiempo <sup>118</sup>	
Evaluación de los puntos de la discretización	1h 53' 28"	96.4%
Identificación de mínimos discretos	0h 13' 37"	3.0%
Optimización partiendo de mínimos discretos	0h 02' 07"	0.6%
Total	2h 09' 12"	100.0%

Tabla 6.8. Coste computacional en tiempo de las diferentes etapas de resolución del problema.

En cuanto al coste computacional, se observa una clara disminución respecto al primer caso resuelto (§6.2). En efecto, pese a que el EDA utilizado (y su discretización) es el mismo, en este caso el tiempo es menos de un 30% del primero. Esto es debido a que el número de puntos del EDA que generan trayectorias con puntos dobles es mucho menor que el número de ellos que genera trayectorias sin puntos dobles.

La distribución de tiempos ha sido similar a los casos anteriores y se observa un consumo una consumición mayoritaria del tiempo en la fase de evaluación de los puntos de la discretización. Esta evaluación constituye la extracción de información fundamental para la detección de la posición de los óptimos.

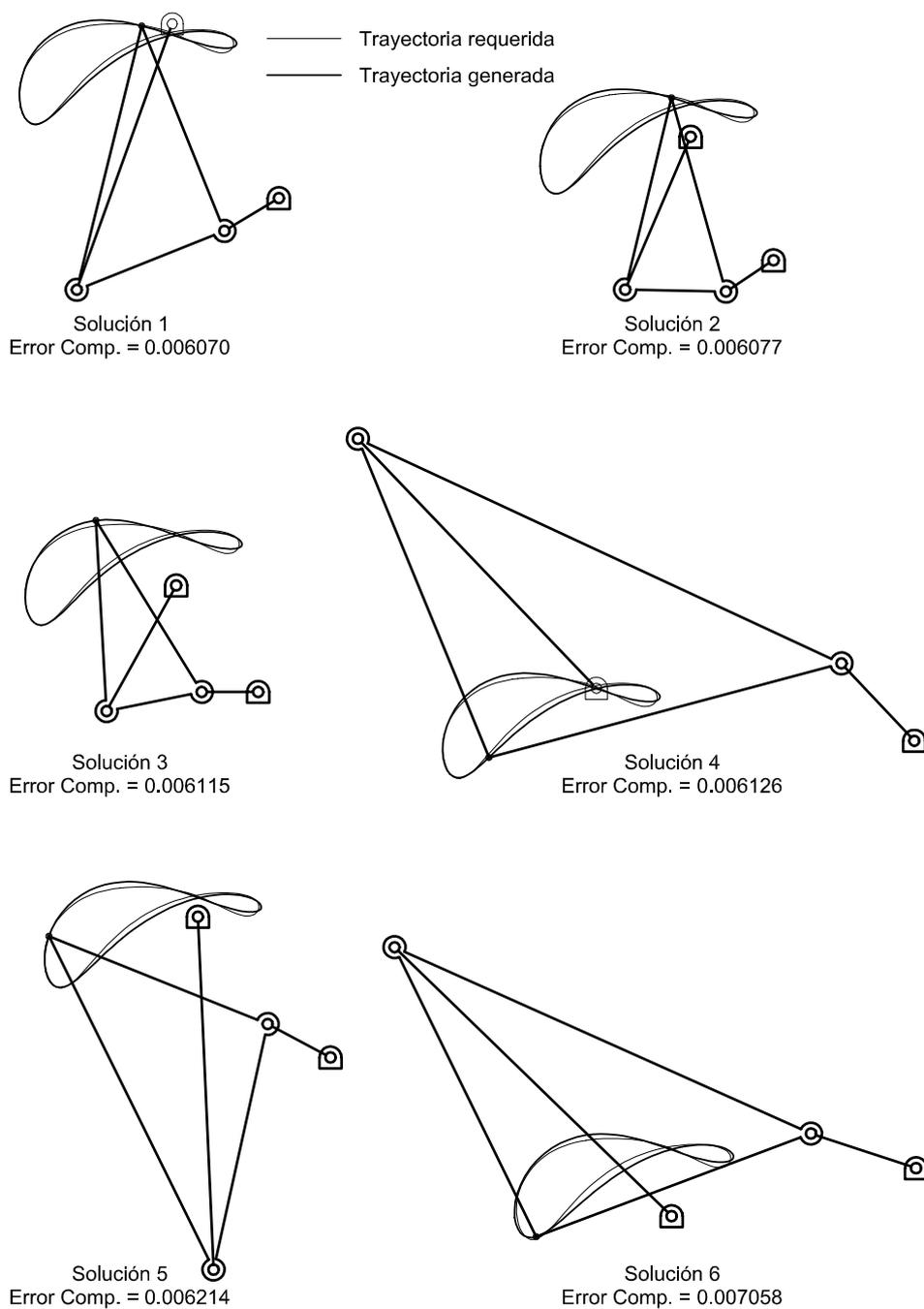


Figura 6.25. Mecanismos solución.

Tras la ejecución se obtiene un total de 11 mínimos —para cada uno de los cuales podrían considerarse 2 cognados y 2 configuraciones—. Estos pueden ser escalados, posicionados y orientados adecuadamente para que el trazado de la curva generada presente

una coincidencia máxima con la curva requerida. Así se obtiene la adaptación de los 11 mecanismos iniciales, estando representados los 6 primeros en la figura 6.25. Se observa que la solución 1 presenta un error de comparación con la curva requerida igual a 0.006070. Este valor, aun siendo bajo, es típico de curvas parecidas pero con diferencias notables en su trazado. Asumiendo que se ha logrado el mecanismo óptimo global (o un mecanismo con un valor de la función objetivo cercano al mismo), esto indica que la curva requerida no es reproducible sino de forma aproximada por un mecanismo de 4 barras.

Además, se observa de nuevo que el método aporta una diversidad de soluciones diferentes, lo que posibilita la elección adecuada según diferentes criterios. Algunas soluciones (por ejemplo la solución 2 y la 3) demuestran ser dimensionalmente muy similares. Esto refleja el hecho de que dos mínimos discretos han conducido a un mismo mínimo real; posibilidad que ya había sido predicha en el capítulo 5. Lo mismo ocurre con las soluciones 4 y 6, aunque sus dimensiones no son tan parecidas como en el caso anterior.

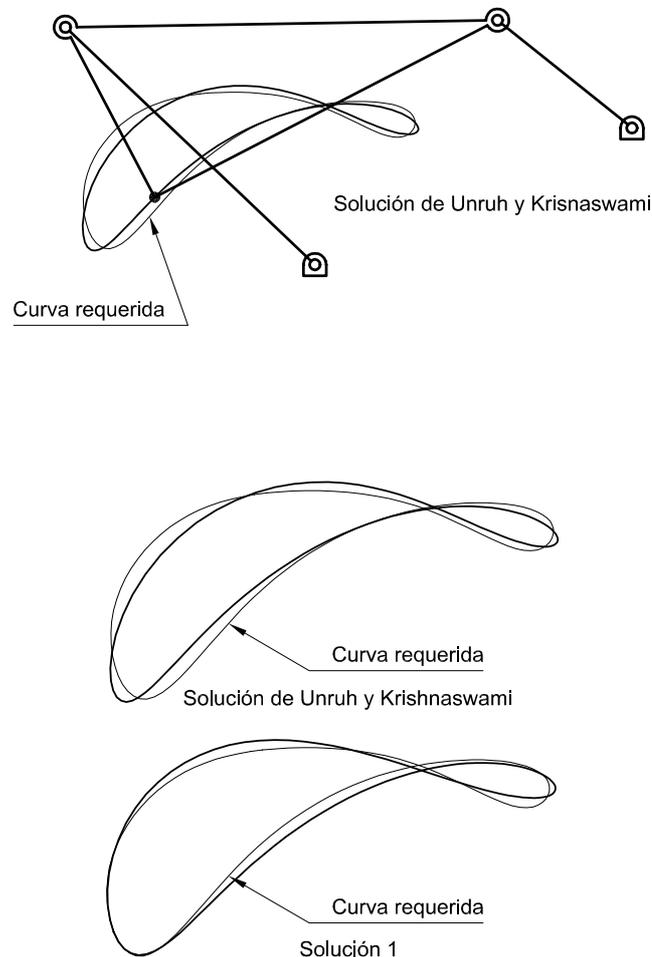


Figura 6.26. Comparación con los resultados obtenidos por Unruh y Krishnaswami.

Aparte del parecido entre la curva requerida y la mejor solución obtenida, es posible contrastar este resultado con el obtenido por Unruh y Krishnaswami. En la parte superior de la figura 6.26 se muestra el mejor mecanismo solución obtenido por ellos y el parecido entre las trayectorias requerida y generada. Se observa que entre las soluciones obtenidas con el método exhaustivo (figura 6.25) existen algunas dimensionalmente parecidas aunque no excesivamente cercanas, lo que significa que, de acuerdo con la función objetivo utilizada en el método exhaustivo<sup>123</sup>, la solución de Unruh y Krishnaswami no es un mínimo local.

En la parte inferior de la figura 6.26 se observa una ampliación de las dos soluciones óptimas: la obtenida con el método exhaustivo (solución 1) y la obtenida por Unruh y Krishnaswami. Para realizar una comparación cuantitativa en cuanto a cual de las dos es más parecida a la curva requerida, varios autores han propuesto determinar el área existente entre las curvas (Thompson, 1975). Sin embargo, el valor obtenido depende de forma no lineal — sino parabólica— del tamaño de las curvas, por lo que no es un indicador independiente. Para conseguir que lo sea, este valor puede ser dividido por el cuadrado de una longitud común a los dos casos comparados. Si el área entre las curvas se divide entre la longitud de la curva requerida (que es común a ambos casos), se obtiene la distancia promedio entre cada pareja de curvas superpuestas. Si de nuevo se divide por la longitud de la curva requerida, se obtiene un valor escalar adimensional que representa la distancia promedio entre las curvas superpuestas por unidad de longitud de curva requerida. Este valor, multiplicado por 100 expresa este promedio en porcentaje de longitud de curva requerida y es independiente del tamaño de las curvas.

En la tabla 6.9 se muestra el área encerrada cuando las curvas son escaladas de forma que la longitud de la curva requerida sea 100 unidades. Dividiendo el área entre el cuadrado de la longitud se obtiene el ratio (expresado en porcentaje). Se observa cómo la solución óptima aportada por el método exhaustivo es sensiblemente inferior a la mejor solución aportada por Unruh y Krishnaswami.

Método	Longitud	Area	Ratio
Unruh y Krishnaswami	100	60.213	0.60%
Exhaustivo	100	45.169	0.45%

Tabla 6.9. Comparación de soluciones.

En este ejemplo se ha demostrado la viabilidad del método exhaustivo para la búsqueda de trayectorias con puntos dobles. Se ha observado el menor coste computacional

<sup>123</sup> Función PDCP1 (véase capítulo 3).

necesario para encontrar soluciones óptimas con este tipo de trayectorias. Como en los ejemplos anteriores se han obtenido diversas soluciones dentro de las cuales se puede seleccionar la más idónea para cada caso. Finalmente, se ha contrastado el resultado con el obtenido por otros autores, demostrando la mejora en la solución obtenida respecto a este último.

## 6.5. Conclusiones.

---

En este capítulo se han presentado ejemplos que corroboran el buen funcionamiento del método propuesto en la obtención de mecanismos óptimos para la generación de una trayectoria requerida con independencia del tiempo. Los mecanismos obtenidos pasan por ser, a raíz de los resultados obtenidos en los estudios expuestos en capítulos anteriores (y siempre pendiente de un estudio estadístico más exhaustivo), óptimos globales dentro del espacio de diseño o, como mínimo, puntos de valor muy cercanos a dicho óptimo. Sin embargo, es posible que el óptimo obtenido no sea un mecanismo válido atendiendo a otras consideraciones tales como el tamaño del mecanismo, la ventaja mecánica o el ángulo de transmisión. En tal caso, es posible realizar una selección del mecanismo ideal de entre la lista de mínimos que el método exhaustivo proporciona. De esta forma, el método ha demostrado su versatilidad en la obtención de diferentes mecanismos con un objetivo común.

También se ha contrastado el método propuesto con un método vanguardista basado en la conversión a B-Splines e ideado por Unruh y Krishnaswami (Unruh y Krishnaswami, 1995), demostrándose la obtención de mejores resultados con el primero.

En cuanto al coste computacional, se observa que el método exhaustivo presenta tiempos de computación elevados en comparación con otros métodos. Sin embargo, este coste está asociado a la persecución del óptimo global y ha sido minimizado mediante la propuesta de funciones objetivo que permitan la reducción del espacio de diseño. Aunque este coste puede ser considerado elevado, el rápido incremento de potencia en los ordenadores personales hará que pronto sea poco significativo<sup>124</sup>.

También cabe destacar que aunque en los ejemplos expuestos se ha realizado la síntesis sobre el mecanismo de 4 barras (mecanismo mayoritariamente utilizado en la generación de trayectorias), la formulación del método no ha sido restringida en cuanto al tipo de mecanismo y, consecuentemente, puede ser utilizado con otros tipos como el mecanismo biela-manivela, el mecanismo de 5 barras con engranajes o los diferentes tipos de mecanismos de 6 barras. Sin embargo, hay que considerar que un mayor número de eslabones supone un

---

<sup>124</sup> Como nota ilustrativa de esto puede indicarse que desde el último año la potencia de los ordenadores personales se ha duplicado, por lo que de realizar los ensayos con un ordenador personal actualizado, los tiempos se verían reducidos a la mitad.

mayor número de dimensiones y, por tanto, un mayor tamaño del espacio de diseño. Así pues, la utilización de mecanismos con un mayor número de barras incrementará el coste computacional de forma significativa. Por el contrario, la síntesis dimensional del mecanismo biela-manivela supondrá un coste menor.



# Capítulo 7

## Conclusiones

---

### 7.1. Introducción.

---

Este trabajo se ha centrado en el análisis y mejora de los recursos metodológicos existentes destinados a la resolución de problemas de síntesis dimensional para generación de trayectoria por la vía numérica.

El estudio de las estrategias planteadas hasta el momento ha permitido observar insuficiencias en algunos aspectos. Por un lado, se ha observado una tendencia clásica —o poco vanguardista— en el planteamiento de los métodos de resolución, ignorando en cierta medida las herramientas informáticas que permiten, con la formulación adecuada, una resolución mucho más eficiente.

Por otro lado, se ha observado que con frecuencia ha sido olvidado el objetivo último de la síntesis dimensional aproximada: la obtención del mejor mecanismo (mecanismo óptimo global) para el cumplimiento de los requisitos de diseño. En efecto, en muchos de los métodos propuestos se sugieren alternativas con la finalidad de buscar mecanismos de una calidad intermedia, sin hacer alusión al objetivo principal.

En general, se ha detectado la falta de una estructuración adecuada en la evolución de las soluciones propuestas para este problema y un desarrollo desigual de las partes que componen el problema de optimización. Se ha tenido escasamente en cuenta el coste computacional en las alternativas propuestas y tampoco se han desarrollado estudios en profundidad sobre técnicas que permitan reducir este coste.

En este trabajo se ha contribuido a mejorar los medios para la resolución de la síntesis dimensional aproximada de mecanismos planos mediante el estudio detallado de los diferentes aspectos que el problema incluye. Se ha creado un marco de directrices dentro del cual se detallan las consideraciones que mejoran la probabilidad de lograr el mecanismo óptimo.

Simultáneamente se ha demostrado que la estrategia exhaustiva puede ser un método ventajoso para la búsqueda del óptimo global dentro del espacio de diseño. Los tiempos

consumidos por la misma son, todavía, elevados. Sin embargo, se puede intuir que la creciente potencia de los ordenadores hará que muy pronto este coste computacional quede reducido a una cuestión de minutos.

## 7.2. Conclusiones.

---

En el presente trabajo se ha estudiado el problema de síntesis dimensional aproximada con un doble objetivo: la consecución del óptimo global y la disminución del coste computacional asociado a dicha tarea. Para ello, se han estudiado por separado cada una de las partes que integran este problema de optimización, llegando a conclusiones concretas para cada una de ellas.

### 7.2.1. Función objetivo.

Se ha estudiado la formulación propuesta por otros investigadores para la función objetivo en el problema de síntesis dimensional y se han propuesto mejoras en este aspecto, obteniéndose las siguientes conclusiones:

- La mayor parte de las formulaciones realizadas hasta la fecha no son independientes de factores como la posición, orientación, escala o simetría de las trayectorias comparadas. Estos parámetros no son representativos de la forma intrínseca de las curvas. Es posible la formulación de funciones objetivo independientes de ellos, sin pérdida de sensibilidad en la comparación y posibilitando una importante reducción del espacio de diseño. En este trabajo se propone un conjunto de requisitos de la función objetivo que garantizan la reducción del espacio de diseño a la vez que un comportamiento adecuado para la optimización.
- El estudio realizado sobre los problemas de síntesis de trayectoria abierta y de trayectoria cerrada demuestra las diferencias que existen entre ambos. Se ha comprobado que la función objetivo en generación de trayectorias abiertas presenta una complicación adicional: la superposición óptima de la trayectoria abierta requerida sobre la trayectoria generada. Esta superposición, lejos de ser trivial, constituye un nuevo problema de optimización que añade nuevas variables al espacio de diseño (posición, orientación y escala de la trayectoria abierta). Por este motivo, se ha argumentado a favor de la necesidad de constituir funciones objetivo diferentes para los casos de síntesis de trayectorias abiertas y de trayectorias cerradas.
- Se ha comprobado que los métodos propuestos por otros investigadores para la comparación de curvas cerradas presentan comportamientos inadecuados en determinadas situaciones. Ha sido posible corregir los planteamientos eliminando estas deficiencias. Al mismo tiempo también se han realizado correcciones para conseguir el

cumplimiento de los requisitos que permiten una reducción máxima del espacio de diseño.

- Con el objetivo de minimizar el coste computacional se ha estudiado la posibilidad de comparar curvas planas en base a unas pocas magnitudes discretas. Para ello se han estudiado los parámetros puntuales que caracterizan una curva plana. Se ha comprobado mediante ensayos que la inclusión de la curvatura o el radio de curvatura provoca una estimación errónea en el parecido de las curvas comparadas debido a los valores extremos infinitos que estas variables toman en cúspides o puntos de inflexión. Los resultados obtenidos demuestran que es posible la comparación discreta de curvas con suficiente precisión y un enorme ahorro en coste computacional.
- El ensayo de progresividad de las funciones objetivo ha puesto de manifiesto que no todos los métodos ensayados tienen un comportamiento progresivo igualmente favorable. El estudio ha demostrado la importancia del ensayo de progresividad en la propuesta de nuevos métodos ya que éste permite observar la evolución de la comparación de curvas al aumentar progresivamente su parecido. Como patrón de referencia se ha utilizado un método de comparación continua basado en el área entre las curvas. De esta forma se ha demostrado que algunas de las funciones, propuestas en este trabajo, tienen un mejor comportamiento progresivo que otras funciones clásicas como la comparación basada la suma de distancias entre puntos al cuadrado.
- En la comparación de curvas abiertas se ha probado que es posible simplificar el problema de superposición (con un enorme ahorro en coste computacional) mediante la utilización de técnicas de adaptación poligonal. Se han propuesto y ensayado diferentes métodos de adaptación y se ha obtenido el tipo de adaptación que presenta un mejor comportamiento. Esta formulación ha permitido simplificar el problema de superposición hasta la optimización de una única variable. Así ha sido posible estimar el parecido entre una curva abierta y otra curva con suficiente precisión y gran economía de computación.

En definitiva, se ha estudiado el problema de comparación de curvas diferenciando el caso de curvas abiertas del caso de curvas cerradas. Se han establecido requisitos que regulan el funcionamiento de las funciones objetivo permitiendo una reducción máxima del espacio de diseño. Se han estudiado y complementado algunos métodos propuestos por otros autores. Se han propuesto nuevos métodos de comparación basados en características geométricas puntuales de las curvas, comprobándose que algunos de estos parámetros no son buenos estimadores del parecido entre las curvas. En el caso de curvas abiertas, se ha simplificado enormemente el problema de superposición óptima, utilizando una técnica de adaptación poligonal, cuyo funcionamiento se ha optimizado.

Así se han logrado funciones de comparación de curvas con buena progresividad y gran economía de computación.

### **7.2.2. Espacio de diseño.**

En lo relativo al espacio de diseño, la estrategia para la consecución del óptimo global se ha planteado en base a dos aspectos: la reducción máxima del espacio de diseño y el estudio de la evolución de la función objetivo dentro del mismo.

En lo relativo a la reducción del espacio de diseño, se han llegado a las siguientes conclusiones:

- El espacio de diseño inicial puede ser reducido drásticamente sin pérdida de posibilidades reales de síntesis si la función objetivo es transparente a cambios de posición, orientación, escala y simetría de las curvas. Además, la existencia de mecanismos cognados prueba que cada punto figura en el espacio de diseño por triplicado, por lo que es posible conseguir una reducción adicional. Con estas consideraciones se ha conseguido la reducción del espacio de diseño del mecanismo de 4 barras al 0.002% de su tamaño inicial, lo que da idea de las mejoras que esta técnica aporta.
- Es posible conseguir importante reducción posterior eliminando aquellos mecanismos para los que se puede determinar que no poseen buenas opciones de reproducir la trayectoria requerida. Así, por ejemplo, se han eliminado mecanismos que se bloquean en la generación de trayectorias cerradas. También se ha elaborado un método rápido para la detección de mecanismos que generan trayectorias con puntos dobles, permitiendo descartar los puntos del espacio de diseño que no concuerdan con la trayectoria requerida en número de puntos dobles. Con estas técnicas se ha logrado reducir el espacio de diseño del mecanismo de 4 barras hasta el 0.00024% de su tamaño original.

La extraordinaria reducción lograda respecto del espacio de diseño utilizado por otros autores refleja la importancia de utilización de esta técnica y su significación en la búsqueda del óptimo global.

Por otra parte, se ha estudiado la variación de la función objetivo dentro del espacio de diseño llegando a los siguientes resultados:

- El análisis bidimensional de la función objetivo óptima obtenida del estudio anterior indica una gran suavidad y una buena progresividad, acorde con la variación suave de la forma de la trayectoria generada al variar progresivamente las dimensiones del mecanismo.

- El análisis  $n$ -dimensional de dicha función objetivo ha permitido estimar la distancia mínima entre mínimos de la función objetivo, necesaria para la búsqueda determinista del óptimo global. Los ensayos realizados indican que si se realiza una discretización del espacio de diseño acotado con un paso del orden de la mitad de la longitud de la barra que normaliza el mecanismo, se consigue una discretización que es sensible a todos los mínimos de la función objetivo, posibilitando la búsqueda del óptimo.
- Los estudios realizados del espacio de diseño y la suave variación de la función objetivo dentro del mismo indican que una discretización más basta que la mencionada, si bien no es seguro que sea sensible a todos los mínimos de la función objetivo, si que será sensible a la mayor parte de ellos. Esto indica que es posible obtener soluciones de gran calidad (cercanas al óptimo global, si no el óptimo mismo) con discretizaciones menos finas y costes computacionales mucho menores que los necesarios para llegar a dicho óptimo global.

En resumen, el estudio del espacio de diseño utilizando técnicas de reducción, unido a la información obtenida del análisis de la función objetivo dentro del espacio de diseño, ha proporcionado una situación que hace abordable la localización determinista del óptimo global para la generación de una trayectoria.

### ***7.2.3. Estrategia de optimización.***

De forma complementaria a lo anterior, se han analizado las estrategias más comunes planteadas en síntesis de trayectoria. Se ha detectado una falta de propuestas destinados a la búsqueda del óptimo global siendo el principal motivo el enorme coste computacional asociado a dicha búsqueda.

A partir de la estructura y modo de operación de los algoritmos de optimización actuales, se ha argumentado a favor de la necesidad de plantear la estrategia en dos etapas: búsqueda gruesa y optimización fina; constituyendo un método de optimización combinado.

Partiendo de las principales técnicas de optimización utilizadas actualmente, se han considerado tres métodos de optimización combinados: *método exhaustivo-gradiente*, *método aleatorio-gradiente* y *método evolutivo-gradiente*. De éstas han sido comparadas las dos últimas y se ha constatado la mejor calidad del primero respecto del segundo en base a tres aspectos fundamentales: la similitud del coste computacional, el hecho de que la obtención aleatoria proporciona casi siempre peores puntos de partida que la extracción uniforme (*método exhaustivo*) y el hecho de que la extracción uniforme de puntos permite relacionar cada punto con sus vecinos con el fin de detectar la existencia de mínimos en la función objetivo, mientras que el método aleatorio no lo permite. Aparte de lo anterior, otra desventaja del método aleatorio es que, al ser un método no determinista, por más tiempo que se invierta

en la extracción aleatoria de puntos, siempre existirá una cierta probabilidad de no encontrar el óptimo global; mientras que en el caso del método exhaustivo, la probabilidad de encontrar el óptimo global es función directa de la finura de la discretización, que tiene una relación directa con el tiempo que se desee emplear en la búsqueda.

Así, se ha puesto de manifiesto que el *método exhaustivo* proporciona más información que el simple valor de la función objetivo en cada punto extraído del espacio de diseño. Y esta información resulta ser extremadamente valiosa en la detección de posibles mínimos.

La eficacia del método exhaustivo en la búsqueda del óptimo global se ha puesto de manifiesto mediante la resolución de varios ejemplos. Y aunque se ha observado que los tiempos de ejecución pueden ser considerados todavía elevados, también se aprecia que, dada la rapidez de evolución de la potencia de cálculo de los ordenadores actuales, este tiempo pronto será poco significativo.

En conclusión, en este trabajo se ha propuesto un marco de funcionamiento para la resolución de problemas de *síntesis dimensional aproximada de mecanismos planos para la generación de trayectoria* con el objetivo de lograr las dimensiones óptimas (globales) mediante una formulación muy orientada hacia el máximo aprovechamiento de los ordenadores de cálculo empleados en su resolución. La eficacia del método ha sido comprobada en la práctica mediante la resolución de ejemplos.

### 7.3. Desarrollos futuros.

---

El trabajo realizado presenta grandes posibilidades de continuación. Desde un punto de vista cercano al mismo, es posible expandir las posibilidades del método propuesto siguiendo varias vías:

- Síntesis de trayectoria con prescripción de tiempo. En el presente trabajo se ha realizado un esfuerzo importante para conseguir que la comparación de curvas sea independiente de la parametrización de las mismas. Aplicado a síntesis dimensional, esto consigue que la comparación sea independiente del factor tiempo. Se puede partir de las funciones objetivo propuestas para, eliminando esta independencia, conseguir otras que comparen las curvas teniendo en cuenta la parametrización. Conservando el resto de planteamiento se estaría contemplando el factor tiempo en la comparación y el óptimo obtenido lo sería incluyendo el factor tiempo.
- Análisis estadístico del paso de discretización asociado al óptimo global. Como trabajo de continuación se propone la realización de un estudio estadístico riguroso para la determinación del paso de discretización necesario para la consecución del óptimo

global, en función del tipo de curva requerida. Esto permitirá realizar una discretización lo más basta posible y mejorará el coste computacional global de la estrategia propuesta.

- Análisis de sensibilidad dimensional. A raíz del trabajo realizado, se intuye que las diferentes dimensiones de los mecanismos (y su variación) influyen de forma desigual en la forma de las curvas generadas. Consecuentemente, es posible aumentar la eficiencia del método realizando un análisis de sensibilidades con el objetivo de determinar la influencia relativa de cada una de ellas. El resultado puede ser utilizado para la realización de una discretización no uniforme (es decir, con un paso diferente en cada dimensión) con el fin de minimizar el coste computacional asociado a la obtención del óptimo global.
- Inclusión de otros requisitos de diseño de mecanismos. Tal como se ha puesto de manifiesto, es posible complementar el método propuesto con nuevas funciones objetivo que, de una forma combinada, no solamente consideren el parecido de las curvas, sino que también valoren otras cualidades de los mecanismos del espacio de diseño en el cumplimiento de otros requisitos de diseño habituales, tales como el tamaño, la posición relativa del mecanismo trazador frente a la curva requerida, la ventaja mecánica o el ángulo de transmisión, etc.

Desde otro punto de vista con una relación menos cercana al planteamiento realizado, es posible utilizar el método propuesto como referencia para idear otros similares que sirvan para la resolución de problemas de síntesis dimensional aproximada para generación de función y para guiado de sólido rígido.

Dentro de las tres categorías de problemas de síntesis dimensional (trayectoria, función y guiado de sólido rígido), el problema de síntesis de trayectoria puede considerarse de una complejidad intermedia a la de los otros dos. En efecto, el objetivo de este problema es la coordinación de la evolución de dos variables (dos coordenadas del punto trazador) con una tercera variable (ángulo de la barra de entrada). En el caso de generación de función, el problema consiste en la coordinación de una única variable (ángulo de la barra de salida) con la de la barra de entrada. Y en guiado de sólido rígido se han de coordinar tres variables (dos de posición del sólido rígido y una de orientación) con una única variable de entrada. De esta forma, es posible idear métodos paralelos al obtenido para conseguir otros con diferente grado de complejidad.



## Bibliografía

---

- (Akçali y Dittrich, 1989a) Akçali, I. D.; Dittrich, G. "Function Generation by Galerkin's Method". Mechanism and Machine Theory, Vol. 24, No. 1, pp. 39-43, 1989.
- (Akçali y Dittrich, 1989b) Akçali, I. D.; Dittrich, G. "Path generation by subdomain method". Mechanism And Machine Theory. Vol. 24, No. 1, pp. 45-52. 1989.
- (Allievi, 1895) Allievi, L. "Cinematica della biella piana". R. Tipografia Francesco Giannini et Figli Napole. 1895.
- (Angels et al., 1988) Angels, J.; Alivizatos, A.; Akhras, R. "An unconstrained nonlinear least-square method of optimization of RRRR planar path generators". Mechanism and Machine Theory. Vol. 23, No. 5, pp. 343-353. 1988.
- (Avilés et al., 1985) Avilés, R.; Ajuria, M. B.; García de Jalón, J. "A fairly general method for optimum synthesis of planar mechanisms". Mechanism and Machine Theory. Vol. 20, pp. 321-328. 1985.
- (Bagci y Lee, 1975) Bagci, C.; Lee, I. P. J. "Optimum synthesis of plane mechanisms for the generation of paths and rigid-body positions via the linear superposition technique". Journal of Engineering for Industry. Vol. 97, No. 1, pp. 340-346. 1975.
- (Bakthavachalam y Kimbrell, 1975) Bakthavachalam, N.; Kimbrell, J. T. "Optimum synthesis of path-generating four-bar mechanisms". Journal of Engineering for Industry. Vol. 97, No. 1, pp. 314-321, 1975.
- (Barker y Tso, 1989) Barker, C. R.; Tso, P. L. "Charasteristic surfaces for three position function generation with planar four bar mechanisms". Journal of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design. Vol. 111, pp. 104. 1989.

- (Bawab et al., 1996) Bawab, S.; Kinzel, G. L.; Waldron, K. J. "Rectified synthesis of six-bar mechanisms with well-defined transmission angles for four position motion generation". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 118, pp. 377. 1996.
- (Brady y Peterson, 1995) Brady, M.; Peterson, S. "A derivation of the pole curve equations in the projective plane". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 117, pp. 123. 1995.
- (Burmester, 1888) Burmester, L. "Lehrbuch der Kinematik". Leipzig, A. Felix. 1888.
- (Ceccarelli, 1995) Ceccarelli, M. "A synthesis algorithm for three revolute manipulators by using an algebraic formulation of workspace boundary". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 117, pp. 298. 1995
- (Cossalter et al., 1992) Cossalter, V.; Doria, A.; Pasini, M.; Scattolo, C. "A simple numerical approach for optimum synthesis of a class of planar mechanisms". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 27, No. 3, pp. 357-366. 1992.
- (Crandall, 1956) Crandall, H. S. "Engineering Analysis". McGraw-Hill. New York. 1956.
- (Chiang et al., 1994) Chiang, C. H.; Yang, Yu-Neng; Chieng, Wei H.; Hoeltzel, David A. "Four-position synthesis for spatial mechanisms with two independent loops". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 29, No. 2, pp. 265-279. 1994.
- (Chirikjian, 1995) Chirikjian, G. S. "Kinematic synthesis of mechanisms and robotic manipulators with binary actuators". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 117, pp. 573. 1995.
- (Chung y Chiang, 1990) Chung, W. Y.; Chiang, C. H. "Fourth-order synthesis of Watt-II six-bar function generators". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 25, No. 4, pp. 417-426. 1990.
- (Da Lio, 1997) Da Lio, Mauro "Robust Design of Linkages - Synthesis by Solving Non-linear Optimization Problems". *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 32, No. 8, pp. 921-932, 1997.

- (Dijksman y Timmermans, 1994) Dijksman, E. A.; Timmermans, E. A. "Look-out for prime-chains with a prescribed number of mobility-degrees of freedom". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 29, No. 5, pp. 653-672. 1994.
- (Dijksman y Smals, 1996) Dijksman, E. A.; Smals, Anton T. J. M. "Lambda-formed 4-bar linkages set in a translation-position to design mechanisms approximating a straight line". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 31, No. 8, pp. 1033-1042. 1996.
- (Erdman, 1993) Erdman, A. G. "Modern kinematics. Development in the last forty years". John Wiley & Sons, Inc. New York, 1993.
- (Fanghella y Galletti, 1995) Fanghella, P.; Galletti, C. "Metric relations and displacement groups in mechanism and robot kinematics". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 117, pp. 470. 1995
- (Fiacco y McCormick, 1963) Fiacco, A. V.; McCormick, G. P. "Programming Under Nonlinear Constraints by Unconstrained Minimization, A Primal-Dual Method". The Research Analysis Corp., RAC Tp-96, Bethesda, Md., Septiembre, 1963.
- (Fletcher y Powell, 1963) Fletcher, R.; Powell, M. J. D. "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization". *The Computer Journal*. Vol. 6, pp. 163-168. 1963.
- (Fox y Willmert, 1967) Fox, R. L.; Willmert, K. D. "Optimum design of curve-generating linkages with inequality constraints". *Journal of Engineering for Industry*, vol. 89, pp. 144-152. 1967.
- (Fox y Gupta, 1973) Fox, R. L.; Gupta, K. C. "Optimization technology as applied to mechanism design". *Journal of Engineering for Industry*. Vol. 95, No. 2, pp. 657-663. 1973.
- (Freudenstein y Sandor, 1959) Freudenstein, F.; Sandor, G. N. "Synthesis of path-generating mechanisms by means of a programmed digital computer". *Journal of Engineering for Industry*. Vol. 81 B, No. 2, pp. 159-168. 1959.
- (Freudenstein y Primrose, 1963) Freudenstein, F.; Primrose, E. J. F. "Geared five-bar motion. I-Gear ratio minus one". *Journal of Applied Mechanics*, vol. 30, pp. 161-169. 1963.

- (Freudenstein, 1973) Freudenstein, F. "Kinematics: Past, present and future". Mechanism and Machine Theory. Vol. 8, No. 2, pp. 151-160.
- (Garret y Hall, 1968) Garret, R. E.; Hall, A. S. Jr. "Optimal synthesis of randomly generated linkages". Journal of Engineering for Industry, vol 90, pp. 475-480. 1968.
- (Gibson et al., 1996) Gibson, C. G.; Marsh, D.; Xiang, Y. "An algorithm to generate the transition curve of the planar four-bar mechanism". Mechanism And Machine Theory. Vol. 31, No. 4, pp. 381-395. 1996.
- (Hain, 1964) Hain, K. "Geared five-bar motion, parts 1 and 2". Journal of Mechanical Design, vol. 31, pp. 360-362. 1964.
- (Hall, 1992) Hall, A. S. Jr "A note on the history of kinematic coefficients". Mechanism and Machine Theory. Vol. 27, No. 1, p. 367. 1992.
- (Hartenberg y Denavit, 1964) Hartenberg, R. S.; Denavit, J. "Kinematic synthesis of linkages". McGraw-Hill. New York, 1964.
- (Hernández et al., 1997) Hernández, A.; Amezua, E.; Ajuria, M. B. G.; Vallejo, J. "Síntesis de puntos triples en curvas del acoplador del cuadrilátero articulado". Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica. Vol. 1, No. 1, pp. 5-21. 1997.
- (Hrones y Nelson, 1951) Hrones, J. A.; Nelson, G. L. "Analysis of the Four-bar Linkage". John Wiley. Nueva York. 1951.
- (Iyer, 1996) Iyer, Venkatesh A. "Recdwell-computer aided design of six-link planar dwell mechanisms". Mechanism And Machine Theory. Vol. 31, No. 8, pp. 1185-1194. 1996.
- (Jiménez et al., 1997) Jiménez, J. M.; Álvarez, G.; Cardenal, J.; Cuadrado, J. "A simple and general method for kinematic synthesis of spatial mechanisms". Mechanism and Machine Theory. Vol. 32, No. 3, pp. 323-341. 1997.
- (Kozhevnikov, 1981) Kozhevnikov, S. N. "Mecanismos". Ed. Gustavo Gili. Barcelona, 1981.

- (Kramer y Sandor, 1975) Kramer, S. N.; Sandor, G. N. "Selective precision synthesis - A general method of optimization for planar mechanisms". *Journal of Engineering for Industry*. Vol. 97 B, No. 2, pp. 689-701. 1975.
- (Krishnamurty y Turcic, 1992) Krishnamurty, S; Turcic, David A. "Optimal synthesis of mechanisms using nonlinear goal programming techniques". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 27, No. 5, pp. 599-612. 1992.
- (Kunjur y Krishnamurty, 1997) Kunjur, Arun; Krishnamurty, Sundar "Genetic algorithms in mechanism synthesis". *Journal of Applied Mechanisms & Robotics*. Vol. 4, No. 2, pp. 18-24. 1997
- (Levenberg, 1944) Levenberg, K. "A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problemas in Least Squares". *Quarterly of Applied Mathematics-Notes*. Vol. II, No. 2, 1944.
- (Lewis y Gyory, 1967) Lewis, D. W.; Gyory, C. K. "Kinematic synthesis of plane curves". *Journal of Engineering for Industry*, vol. 89, pp. 173-176. 1967.
- (Lewis y Falkenhagen, 1968) Lewis, D. W.; Falkenhagen, G. L. "Displacement and velocity kinematic synthesis". *Journal of Engineering for Industry*, vol. 90, pp. 527-530. 1968.
- (Liang, 1995) Liang, Z. "Computer-aided graphical design of spatial mechanisms". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 30, No. 2, pp. 299-312. 1995.
- (Lin y Chiang, 1992) Lin, Ching-Kuo; Chiang, C. H. "Synthesis of planar and spherical geared five bar function generators by the pole method". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 27, No. 2, pp. 131-141. 1992.
- (Ling y Chase, 1996) Ling, Zhi-Kui; Chase, Thomas R. "A priori geometric design of an interference free complex planar mechanism". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 31, No. 4, pp. 513-524. 1996.
- (Liu y Yu, 1995) Liu, Tyng; Yu, Chung-Huang "Identification and classification of multi-degree-of-freedom and multi-loop mechanisms". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 117, pp. 104. 1995.

- (Lu y Hwang, 1996) Lu, Deng-Maw; Hwang, Wen-Miin "Synthesis of planar five-bar pantograph configurations by a geometric method". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 31, No. 1, pp. 11-21. 1996.
- (Luck y Modler, 1994) Luck, Kurt; Modler, Karl-Heinz "Synthesis of guidance mechanisms". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 29, No. 4, pp. 525-533. 1994.
- (Mahyuddin et al., 1989) Mahyuddin, A. I.; Nahvi, H.; Farhang, K.; Midha, A. "Approximate circular and straight-line path generation with high-performance function-generating linkages". *Journal of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design*. Vol. 111, pp. 188. 1989.
- (McCarthy, 1995) McCarthy, J. M. "The synthesis of planar RR and spatial CC chains and the equation of a triangle". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 117, pp. 101. 1995.
- (Meng et al., 1996) Meng, Cai-Fang; Lu, Xi-Nian; Yang, Yu-Hu; Zhang, Ce "The high-order optimum synthesis of a driving mechanism with flexible connector". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 31, No. 7, pp. 851-858. 1996.
- (Mirth y Chase, 1995) Mirth, J. A.; Chase, T. R. "Circuit rectification for four precision positions synthesis of Stephenson six-bar linkages". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 117, pp. 612. 1995.
- (Müller, 1892) Müller, R. "Ueber die Bewegung eines 1 starren ebenen Systems durich funf unendlich benachbarte Lagen". *Zeitschrift fut Mathematick and Physik*. Vol. 37, pp. 129-150. 1892.
- (Murray y McCarthy, 1996) Murray, A. P.; McCarthy, J. M. "Passing a central axis congruence through six arbitrary lines in space". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 118, pp. 515. 1996.
- (Murray y McCarthy, 1997) Murray, A. P.; McCarthy, J. Michael "Center-point curves through six arbitrary points". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 119, pp. 36. 1996.

- (Nageswara y Rao, 1996) Nageswara Rao, C.; Rao, A. C. "Selection of best frame, input and output links for function generators modelled as probabilistic systems". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 31, No. 7, pp. 973-983. 1996.
- (Naik y Amarnath, 1989) Naik, D. P.; Amarnath, C. "Synthesis of adjustable four bar function generators through five bar loop closure equations". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 24, No. 6, pp. 523-526. 1989.
- (Nechi, 1971) Nechi, A. J. "A relaxation and gradient combination applied to the computer simulation of a plane four-bar chain". *Journal of Engineering for Industry*. Vol. 93, pp. 113-119. 1971.
- (Nelder y Mead, 1965) Nelder, J. A.; Mead, R. "A Simplex Method for Function Minimization". *Computer Journal*. Vol. 7, pp. 308-313, 1965.
- (Nieto, 1978) Nieto Nieto, J. "Síntesis de Mecanismos". Editorial AC. Madrid, 1978.
- (Nolle y Hunt, 1971) Nolle, H.; Hunt, K. "Optimum synthesis of planar linkages to generate coupler curves". *Journal of Mechanisms*. Vol. 6, No. 3, pp. 267-287. 1971.
- (Parikian, 1997) Parikian, T. F. "Multi-generation of coupler curves of spatial linkages". *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 32, No. 1, pp. 103-110. 1997.
- (Park, 1995) Park, F. C. "Distance metrics on the rigid-body motions with applications to mechanism design". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 117, pp. 48. 1995.
- (Pennestrí, 1998) Pennestrí, E. "The transition curve of the planar four-bar: an analytical approach". *Mechanism and Machine Theory*. Vol 33, pp. 1293-1299. 1998.
- (Powell, 1964) Powell, M. J. D. "An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Using Derivatives". *The Computer Journal*. Vol. 7, pp. 155-162. 1964.

- (Prentis, 1991a) Prentis, J. M "The Pole Triangle, Burmester Theory and Order and Branching Problems. I-The Order Problem". Mechanism and Machine Theory, Vol. 26, No. 1, pp. 19-30. 1991.
- (Prentis, 1991b) Prentis, J. M "The Pole Triangle, Burmester Theory and Order and Branching Problems. II-The Branching Problem". Mechanism and Machine Theory, Vol. 26, No. 1, pp. 31-39. 1991.
- (Press et al., 1991) Press, William H.; Flannery, Brian P.; Teukolsky, Saul A.; Vetterling, William T. "Numerical recipes in C". Cambridge University Press. New York, 1991.
- (Raghavan y Roth, 1995) Raghavan, M.; Roth, B. "Solving polynomial systems for the kinematic analysis and synthesis of mechanisms and robot manipulators". Journal of Mechanical Design. Vol. 117, pp. 71. 1995.
- (Rao, 1997a) Rao, A. C. "Hamming number technique I". Mechanism And Machine Theory. Vol. 32, No. 5, pp. 477-488. 1997.
- (Rao, 1997b) Rao, A. C. "Hamming number technique II". Mechanism And Machine Theory. Vol. 32, No. 5, pp. 489-499. 1997.
- (Romeijn y Smith, 1992) Romeijn, H. E.; Smith, R. L. "Simulated Annealing for Constrained Global Optimization". Internal Report Department of Industrial and Operations Engineering. The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, USA. 1992.
- (Roth y Freudenstein, 1963) Roth, B.; Freudenstein, F. "Synthesis of path-generating mechanisms by numerical methods". Journal of Engineering for Industry, vol. 85, pp. 298-306. 1963.
- (Shi, 1997) Shi, Z. "Synthesis of mechanical error in spatial linkages based on reliability concept". Mechanism and Machine Theory. Vol. 32, No. 2, pp. 255-259. 1997.
- (Siddall, 1972) Siddall, J. N. "Analytical Decision-Making in Engineering Design". Prentice-Hall, Englewood Cliffs. N. J. 1972.

- (Somov, 1899) Somov, P. O. "On some applications of the kinematics of variable systems on link mechanisms". Warsaw Universitet Obshchestva estestvoispytatelei, Otdieleniya. Fiz. Khim. 10/11, pp. 1-46. 1899-1900.
- (Soni, 1974) Soni, A. H. "Mechanism Synthesis and Analysis". McGraw-Hill. New York, 1974.
- (Stewart, 1965) Stewart, D. "A Platform with Six Degrees of Freedom". Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 180 (1), pp. 371-386. 1965.
- (Stoilov, 1997) Stoilov Todorov, T. "Synthesis of Watt's six-link mechanism for manipulation action in relative space". Mechanism And Machine Theory. Vol. 32, No. 5, pp. 559-568. 1997.
- (Thompson, 1975) Thompson, B. S. "A survey of analytical path-synthesis techniques for plane mechanisms". Mechanism and Machine Theory. Vol. 10, No. 2/3, pp. 197-205. 1975.
- (Tomás, 1968) Tomás, J. "The synthesis of mechanisms as a nonlinear programming problem". Journal of Mechanisms. Vol. 3, No. 3, pp. 119-130. 1968.
- (Torfason y Ahmed, 1978) Torfason, L. E.; Ahmed, A. "Double points of a 4-bar linkage". Mechanism and Machine Theory. Vol. 13, No. 6, pp. 593-601. 1978.
- (Tuttle, 1996) Tuttle, E. R. "Generation of planar kinematic chains". Mechanism And Machine Theory. Vol. 31, No. 6, pp. 729-748. 1996.
- (Ullah y Kota, 1996) Ullah, I.; Kota, S. "Globally-optimal synthesis of mechanisms for path generation using simulated annealing and powell's method". Proceedings of the 1996 ASME Desing Engineering Technical Conferences. 96-DETC/MECH-1225. Irvine, California, USA. 1996.

- (Unruh y Krishnaswami, 1995) Unruh, V.; Krishnaswami, P. "A computer-aided design technique for semi-automated infinite point coupler curve synthesis of four-bar linkages". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 117, pp. 143. 1995.
- (Vallejo et al., 1995) Vallejo Matilla, J.; Avilés, Rafael; Hernández, Alfonso; Amezua, Enrique "Nonlinear optimization of planar linkages for kinematic synthesis". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 30, No. 45, pp. 501-518. 1995.
- (Vucina y Freudenstein, 1991) Vucina, Damir; Freudenstein, F. "An application of graph theory and nonlinear programming to the kinematic synthesis of mechanisms". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 26, No. 6, pp. 553-563. 1991.
- (Waldron y Sreenivasan, 1996) Waldron, K. J.; Sreenivasan, S. V. "A study of the solvability of the position problem for multi-circuit mechanisms by way of example of the double butterfly linkage". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 118, pp. 390. 1996.
- (Wang y Sodhi, 1996) Wang, Shao Jie; Sodhi, Raj S. "Kinematic synthesis of adjustable moving pivot four-bar mechanism for multi-phase motion generation". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 31, No. 4, pp. 459-474. 1996.
- (Watanabe, 1992) Watanabe, K. "Application of natural equations to the synthesis of curve generating mechanisms". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 27, No. 3, pp. 261-273. 1992.
- (Wilde y Beightler, 1967) Wilde, D. J.; Beightler, C. S. "Fundations of Optimizations". Prentice-Hall, Englewood Cliffs. N. J. 1967.
- (Wu y Wu, 1998) Wu, L.; Wu, S. "A note on Freudenstein's theorem". *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 33, No. 1, pp. 139-149. 1998.
- (Yadav et al., 1995) Yadav, J. N.; Pratap, C. R.; Agrawal, V. P. "Detection of isomorphism among kinematic chains using the distance concept". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 117, pp. 607. 1995.
- (Yan, 1992) Yan, Hong-Sen "A methodology for creative mechanism design". *Mechanism And Machine Theory*. Vol. 27, No. 3, pp. 235-242. 1992.

- 
- (Yu, 1995) Yu, Yue-Qing "Active design of a flexible space mechanism with optimal characteristics". Mechanism And Machine Theory. Vol. 30, No. 3, pp. 451-459. 1995.
- (Zhang et al., 1984) Zhang, C.; Norton, R. L.; Hammond, T. "Optimization of parameters for specified path generation using an atlas of coupler curves of geared five-bar linkages". Mechanism and Machine Theory, vol. 19, no. 6, pp. 459-466. 1984.



# Apéndice A

## Definiciones relacionadas con la síntesis de mecanismos

---

### Cadena cinemática

Conjunto de eslabones unidos entre si mediante pares cinemáticos.

### Cadenas cinemáticas isomórficas

Dícese de las cadenas cinemáticas con el mismo número de pares y barras y la misma conectividad.

### Defecto de circuito

En un mecanismo existe defecto de circuito cuando una o varias barras del mismo no pueden alcanzar todas las posiciones requeridas (para las cuales el mecanismo fue diseñado) sin ser éste desensamblado y ensamblado de nuevo en una configuración diferente. El defecto de circuito aparece solo si el mecanismo tiene solo una rotabilidad parcial (es decir, la barra accionadora no puede dar una vuelta completa) y la barra accionadora puede moverse en dos rangos de posición disjuntos. Además se ha de dar el caso de que las posiciones de diseño se encuentran repartidas en ambos rangos de movilidad.

### Diada

Dos eslabones (o barras) binarios conectados por un par articulación o por un par deslizador y provistas de pares en los extremos para ser conectadas a otras barras. Existen 5 tipos diferentes: D111, D101, D011, D001, D010; donde 0 indica un par deslizador y 1 indica un par articulación. Las diadas son partes elementales de un mecanismo y sus problemas de posición, velocidad y aceleración tienen una solución explícitamente conocida, lo que significa que si se conoce la posición de los dos pares extremos, se puede calcular directamente (sin necesidad de iteración) la posición del par intermedio.

### Grado de libertad

Cada una de las magnitudes necesarias que determinan la posición de un mecanismo. Es igual al número de accionamientos necesarios para que el mecanismo se mueva de forma inequívoca y su cantidad tiene que ver con la capacidad de movimiento del mismo.

### Interferencia

Problema de funcionamiento en mecanismos que se da cuando un mecanismo que en teoría puede moverse dentro de un rango determinado, en la práctica no puede ser físicamente concebido para moverse según ese rango debido a que unas partes del mismo chocan con otras impidiendo la continuación del movimiento.

### Mecanismos cognados

Dícese de aquellos mecanismos del mismo tipo y dimensionalmente diferentes que generan una misma trayectoria (de forma matemáticamente exacta).

### Mecanismo diádico

Es aquel mecanismo puede ser construido a partir de diadas independientes. Véase diada.

### Mecanismo espacial

En oposición al concepto de mecanismo plano, dícese de cualquier mecanismo en el que, durante el movimiento, al menos un punto de un eslabón describe una trayectoria que no está contenida en un plano o que si lo está, el plano no es paralelo al plano que incluye la trayectoria de otro punto. Véase mecanismo plano.

### Mecanismo plano

Mecanismo en el que todos los puntos de todos los eslabones describen trayectorias que están contenidas en un mismo plano o en planos paralelos.

### Par cinemático

Forma geométrica mediante la cual se unen dos sólidos rígidos de forma que el movimiento relativo entre ambos sea consistente. Existen diferentes tipos de pares cinemáticos y son habitualmente clasificados por los grados de libertad que permiten en el movimiento entre los sólidos rígidos que conectan.

### Par inferior

Tradicionalmente es definido como un tipo de par cinemático en el que el contacto entre los dos cuerpos que conecta es superficial, aunque existen excepciones a esta definición. En el caso de mecanismos planos, se consideran pares inferiores aquellos que conectan dos sólidos rígidos de forma que el movimiento relativo cuente únicamente con un grado de libertad.

### Par superior

Tradicionalmente es definido como un tipo de par cinemático en el que el contacto entre los dos cuerpos que conecta es lineal o puntual, aunque existen excepciones a esta definición. En mecanismos planos, se consideran pares superiores aquellos que conectan dos sólidos rígidos de forma que el movimiento relativo entre ellos cuente con dos grados de libertad.

### Puntos de aproximación

En síntesis dimensional, conjunto de posiciones discretas que describen los requisitos de síntesis. Sin embargo, al contrario que en síntesis exacta, no se exige el cumplimiento exacto de estas posiciones (en la mayoría de los casos porque esto no es exigible dada la naturaleza del problema), sino que se busca el mecanismo que más se acerca a estas posiciones. En general, cuando los requisitos de diseño son especificados mediante posiciones discretas que, en número, sobrepasan el límite de puntos de precisión no es posible cumplir estas posiciones de forma exacta y entonces son llamadas puntos de aproximación. Véase síntesis aproximada.

### Puntos de precisión

En síntesis dimensional de mecanismos, conjunto de posiciones discretas mediante las cuales se especifican los requisitos de la síntesis cuando se exige el cumplimiento exacto de los requisitos. El número de puntos de precisión que un mecanismo puede reproducir con total exactitud teórica está limitado y es función del tipo de mecanismo utilizado. Así, siempre se pueden obtener las dimensiones de un mecanismo de 4 barras que genere una trayectoria que pase por hasta 9 puntos cualesquiera. Véase síntesis exacta.

### Síntesis aproximada

Dícese del tipo de síntesis de mecanismos en la que no se exige el cumplimiento exacto de los requisitos, bien porque no es exigible o bien porque aún siéndolo no se obtiene beneficio alguno. Este concepto está asociado a métodos de optimización ya que se persigue encontrar el mínimo —o el máximo— de una función que se encarga de evaluar la bondad de

los mecanismos candidatos en relación con los requisitos de síntesis. También es llamada *síntesis con puntos de aproximación*. Véase puntos de aproximación.

### Síntesis con prescripción de tiempo

Dícese de la síntesis exacta o aproximada en la que los requisitos no vienen especificados exclusivamente mediante posiciones discretas, sino que además se especifica el tiempo que debe llevar al mecanismo pasar de cada posición a la siguiente.

Los mecanismos de barras habitualmente están accionados de forma que la velocidad de la barra de entrada es constante. Por lo tanto existe una relación de proporcionalidad constante entre el tiempo que transcurre desde que el mecanismo pasa de una a otra posición y el ángulo que la barra de entrada debe moverse para provocar ese cambio de posición. Teniendo esto en consideración, la prescripción de tiempo puede llevarse a cabo especificando el tiempo transcurrido entre cada dos posiciones requeridas o, igualmente, especificando la variación angular de la barra de entrada entre dos posiciones consecutivas. Por esto, si en la síntesis con puntos de precisión o con puntos de aproximación se involucra el ángulo de la barra de entrada para cada posición requerida, se estará llevando a cabo una síntesis con prescripción de tiempo.

### Síntesis con puntos de aproximación

Véase síntesis aproximada.

### Síntesis con puntos de precisión

Véase síntesis exacta.

### Síntesis exacta

Dícese del tipo de síntesis en la que se exige que los requisitos sean cumplidos de forma exacta (en oposición a aproximada), posibilitando la naturaleza del problema dicho cumplimiento exacto. También es llamada *síntesis con puntos de precisión*. Véase puntos de precisión.

# Apéndice B

## Formulación de definición de curvas B-Splines

### B.1. Definición de una B-Spline abierta.

Una B-Spline es una curva paramétrica obtenida por interpolación basada en un polígono de control (figura B.1).

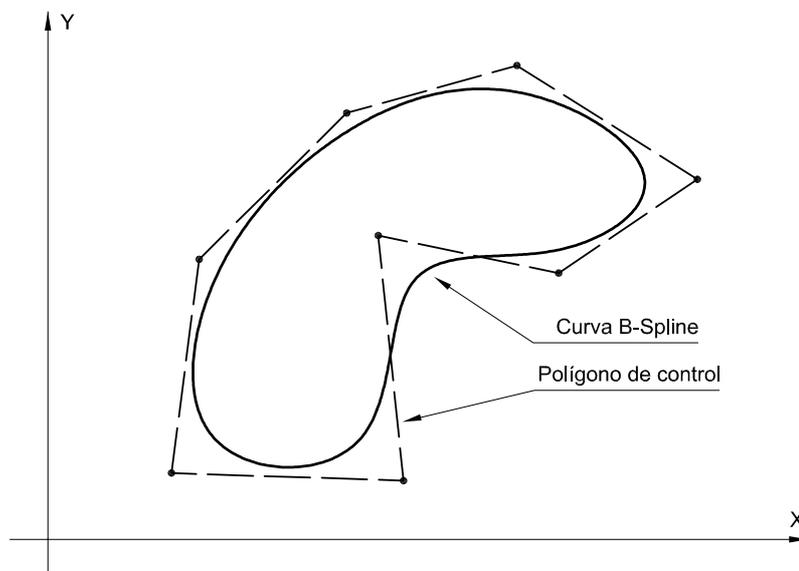


Figura B.1. Curva B-Spline y su polígono de control.

Los puntos de la B-Spline se pueden obtener a partir de la posición de los puntos del polígono de control mediante su ecuación de definición escrita en la forma recursiva de Cox-deBoor [Libro-1997-01] siguiente:

$$P_B(t, P_C) = \begin{Bmatrix} x_B(t, \vec{x}_Q) \\ y_B(t, \vec{y}_Q) \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} N_i^k(t) \cdot \begin{Bmatrix} x_{Qi} \\ y_{Qi} \end{Bmatrix}; t \in [0, n - k + 1] \quad (\text{B.1})$$

donde  $P_B(t, P_Q) = (x_B(t, \vec{x}_Q), y_B(t, \vec{y}_Q))$  es el punto (y sus coordenadas) de la B-Spline correspondiente al valor del parámetro  $t$ ,  $P_Q$  es la matriz de coordenadas de los puntos del polígono de control,  $n$  es el número de puntos de dicho polígono,  $k$  es el orden de la B-Spline,  $\vec{x}_Q = \{x_{Qi}\}$  es un vector con las coordenadas  $X$  de los  $n$  puntos del polígono de control,  $\vec{y}_Q = \{y_{Qi}\}$  es un vector similar al anterior conteniendo las coordenadas  $Y$  y  $N_i^k(t)$  es la función de forma de la B-Spline, la cual viene dada por la siguiente expresión recursiva:

$$N_i^k(t) = \begin{cases} = 1 & \text{si } v_i \leq t < v_{i+1} \\ = 0 & \text{si } (v_i > t \text{ ó } t \geq v_{i+1}) \end{cases} \quad \text{si } k = 1$$

$$= \frac{(t - v_i) \cdot N_i^{k-1}(t)}{v_{i+k-1} - v_i} + \frac{(v_{i+k} - t) \cdot N_{i+1}^{k-1}(t)}{v_{i+k} - v_{i+1}} \quad \text{si } k > 1 \quad (\text{B.2})$$

donde  $v_i$  es el vector *knot* que determina qué vertices del polígono de control contribuyen en el cálculo de la posición de un punto de la B-Spline. Existen varias formas de definir este vector *knot*, siendo una de las más extendidas la siguiente:

$$v_j = j - k + 1; \quad j = 0, 1, \dots, n+k-1 \quad (\text{B.3})$$

es decir, los elementos del vector  $v_j$  varían desde  $-k+1$  hasta  $n$  incrementándose en una unidad.

## B.2. Definición de una B-Spline cerrada.

Para que la B-Spline se cierre constituyendo una curva cerrada plana —siendo el punto de cierre *continuo y derivable hasta derivada segunda*— es necesario considerar de forma periódica más puntos que los del polígono inicial. En efecto, la B-Spline puede ser formulada como una función periódica haciendo que los puntos del polígono de control sean periódicos —es decir, haciendo que cuando  $i \geq n$  el punto de control de orden  $i$  sea el mismo que el punto de orden  $(i-n)$ — e incrementando el número de puntos considerado.

En concreto, partiendo de un polígono inicial de  $n$  puntos, se ha de considerar en la formulación  $n'$  puntos para que la B-Spline generada llegue a cerrarse, siendo:

$$n' = n + k - 1 \quad (\text{B.4})$$

La formulación de la B-Spline cerrada es idéntica a la expuesta anteriormente para la B-Spline abierta, con la salvedad de que se ha de considerar  $n'$  allí donde se hubiera considerado  $n$  y teniendo en cuenta que los puntos del polígono de control se repiten desde el primero al sobrepasar la numeración el último (ya que el número de puntos de control  $n'$

considerado es mayor que el número de puntos de control real  $n$ ). El rango del parámetro de la B-Spline también se ve afectado por  $n'$  y, sustituyendo  $n$  por  $n'$  en el rango del parámetro de la ecuación (B.1) queda:

$$t \in [0, n' - k + 1) = [0, (n + k - 1) - k + 1) = [0, n) \tag{B.5}$$

Así pues, finalmente, la ecuación (B.1) para una B-Spline cerrada de orden  $k$  generada a partir de un polígono de  $n$  puntos es:

$$P_B(t, P_Q) = \begin{Bmatrix} x_B(t, \vec{x}_Q) \\ y_B(t, \vec{y}_Q) \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{n'-1} N_i^k(t) \cdot \begin{Bmatrix} x_{Qi} \\ y_{Qi} \end{Bmatrix} \quad t \in [0, n) \tag{B.6}$$

donde  $n'$  viene definido por (B.4), la función de forma  $N_i^k(t)$  viene definida por la ecuación (B.2) y el vector  $knot\ v_j$  viene definido por la expresión:

$$v_j = j - k + 1; \quad j = 0, 1, \dots, n'+k-1 = 0, 1, \dots, n+2k-2 \tag{B.7}$$

### B.3. Derivadas de la ecuación paramétrica de la B-Spline.

En ocasiones puede ser útil disponer de las derivadas de la ecuación de la B-Spline — expresada en (B.6)— con respecto a las diferentes variables que en ella intervienen para, por ejemplo, utilizarlas en algoritmos de optimización que se sirvan del gradiente para converger hacia el óptimo. Estas expresiones se desarrollan a continuación:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial x_B(t, \vec{x}_Q)}{\partial t} \\ \frac{\partial y_B(t, \vec{y}_Q)}{\partial t} \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{n'-1} \left[ \frac{\partial N_i^k(t)}{\partial t} \cdot \begin{Bmatrix} x_{Qi} \\ y_{Qi} \end{Bmatrix} \right] \tag{B.8}$$

siendo

$$\frac{\partial N_i^k(t)}{\partial t} = \begin{cases} = 0 & \text{si } k = 1 \\ = \frac{N_i^{k-1}(t) + \frac{\partial N_i^{k-1}(t)}{\partial t} \cdot (t - v_i)}{v_{i+k-1} - v_i} + \frac{-N_{i+1}^{k-1}(t) + \frac{\partial N_{i+1}^{k-1}(t)}{\partial t} \cdot (v_{i+k} - t)}{v_{i+k} - v_{i+1}} & \text{si } k > 1 \end{cases} \tag{B.9}$$

y, por otro lado,

$$\frac{\partial x_B(t, \vec{x}_Q)}{\partial x_{Q_i}} = \frac{\partial y_B(t, \vec{y}_Q)}{\partial y_{Q_i}} = N_i^k(t) \quad (\text{B.10})$$