

## Universidad de Cantabria

Autor: **Carmen Murillo Melchor**

Título: **CONTRIBUCIONES AL ANALISIS  
ESTOCASTICO DE LA EFICIENCIA  
TECNICA MEDIANTE METODOS NO  
PARAMETRICOS**

Departamento: **Economía**

Director de Tesis: **Juan Rodríguez Poo**

Fecha: **Julio 2002**

*A mi familia.*

# Tabla de Contenidos

Tabla de Contenidos	iii
Agradecimientos	v
Introducción	1
<b>1 El Análisis de la Eficiencia Técnica</b>	<b>6</b>
1.1 Introducción . . . . .	6
1.2 La Función de Producción y la Eficiencia Técnica . . . . .	8
1.3 Proceso de Estimación de la Eficiencia Técnica . . . . .	29
1.4 Estimación de la Eficiencia Técnica con Métodos Paramétricos . . . . .	31
1.4.1 Modelos de Datos de Corte Transversal . . . . .	32
1.4.2 Modelos de Datos de Panel . . . . .	39
1.5 Estimación de la Eficiencia Técnica con Métodos no Paramétricos . . . . .	47
1.5.1 Proceso de Estimación del DEA . . . . .	47
1.5.2 Proceso de Estimación del FDH . . . . .	55
1.5.3 Otros Estimadores No Paramétricos . . . . .	59
1.6 Eficiencia y Productividad . . . . .	60
1.6.1 Índices de Productividad Total de los Factores . . . . .	62
1.6.2 Índices de Productividad Total Basados en el Índice de Malmquist . . . . .	67
<b>2 Proceso de Estimación de la Eficiencia Técnica y la Productividad mediante el Análisis Envolvente de Datos</b>	<b>86</b>
2.1 Introducción . . . . .	86
2.2 El DEA y la Estimación de la Eficiencia Técnica . . . . .	89
2.2.1 El DEA con Rendimientos Constantes de Escala . . . . .	90
2.2.2 El DEA con Rendimientos Variables de Escala . . . . .	92
2.2.3 El DEA y la Eficiencia de Escala . . . . .	96
2.2.4 Criterios de Identificación de Rendimientos de Escala . . . . .	98

2.2.5	El Problema de los Slacks y la Congestión en el DEA . . . . .	104
2.2.6	El DEA y la Eficiencia Estructural . . . . .	108
2.2.7	El DEA y la Descomposición de la Eficiencia Técnica . . . . .	110
2.3	Análisis Estadístico del DEA . . . . .	111
2.4	Construcción de Intervalos de Confianza de la Eficiencia Técnica mediante el Bootstrap . . . . .	127
2.4.1	El Bootstrap y la Eficiencia Técnica . . . . .	128
2.4.2	Intervalos de Confianza y Estimadores Corregidos . . . . .	139
2.4.3	Obtención de la Muestra Bootstrap . . . . .	142
2.5	El Índice de Productividad de Malmquist . . . . .	154
2.5.1	Estimación del Índice de Productividad de Malmquist . . . . .	157
2.5.2	El Bootstrap y la Significatividad de los Índices de Malmquist . . . . .	167
2.6	Eficiencia Técnica y Productividad en los Aeropuertos Españoles. . . . .	174
2.6.1	Introducción . . . . .	174
2.6.2	Los Aeropuertos y la Eficiencia Técnica . . . . .	175
2.6.3	Los Datos . . . . .	179
2.6.4	Estimación y Resultados con el DEA Determinístico . . . . .	182
2.6.5	Análisis Estadístico del DEA . . . . .	203
<b>3</b>	<b>Una Nueva Propuesta para Contrastar la Eficiencia Técnica</b> . . . . .	<b>220</b>
3.1	Introducción . . . . .	220
3.2	Contrastes Diseñados para Evaluar la Eficiencia Técnica . . . . .	225
3.3	Contrastes de Simetría Condicional . . . . .	234
3.4	Contraste de Eficiencia Técnica basado en Simetría Condicional . . . . .	239
3.4.1	Estimación del Residuo en el Modelo Paramétrico . . . . .	242
3.4.2	Determinación del Estadístico en el Modelo Paramétrico . . . . .	245
3.4.3	Estimador no Paramétrico de Hall y Simar . . . . .	248
3.4.4	Estimación del Residuo en el Modelo no Paramétrico . . . . .	257
3.4.5	Determinación del Estadístico en el Modelo no Paramétrico . . . . .	259
3.5	Simulaciones de Monte Carlo . . . . .	262
3.5.1	Modelo Paramétrico . . . . .	266
3.5.2	Modelo no Paramétrico . . . . .	272
	<b>Conclusiones</b> . . . . .	<b>278</b>
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>283</b>
	<b>Anexo</b> . . . . .	<b>299</b>

# Agradecimientos

Quisiera expresar mi agradecimiento de una forma especial a Juan Rodríguez Poo, mi director de tesis, puesto que sin su ayuda, sus sugerencias y su apoyo, este trabajo no hubiera llegado jamás a finalizarse. Quiero agradecerle, en especial, su paciencia y dedicación durante todos estos años en los que ha sufrido mi insistente presencia.

A mi director también tengo que agradecerle que me facilitara los contactos para estar tres meses en Lovaina la Nueva. Allí tuve la suerte de ser orientada por Philippe Vanden Eeckaut, cuya ayuda y consejos fueron de gran importancia en el desarrollo posterior de mi tesis y la fortuna de conocer a Léopold Simar, quien me atendió con gran amabilidad y ha seguido siendo un excelente consejero las sucesivas veces en las que nos hemos encontrado.

Los datos que he aplicado en la tesis me los suministró Pablo Coto a quien no sólo le agradezco ese favor sino también la oportunidad de escribir mi primer artículo.

Durante todo este tiempo he convivido con muchas personas que han hecho, día a día, que mi vida fuera mucho más agradable y que me han regalado su tiempo y su compañía. Entre ellas quiero nombrar a mi familia quienes a pesar de tener que aguantar mi mal carácter, siempre me han apoyado; a Asun, que me dió una oportunidad de oro; a Mila, mi desinteresada segunda madre; a Josefina quien me aseguraba que sólo merecía la pena lo que se conseguía con un gran esfuerzo; a Antonio y a Jackie que han compartido tantos buenos ratos conmigo; a Nuria, a quien entre otras muchas cosas le debo la, a veces suerte, a veces desgracia, de vivir en Santander; a mis compañeros de trabajo y café, quienes con su compañía, sus regalos, sus bromas y sus sonrisas han adornado tantas y tantas horas de trabajo...Y sobre todo, gracias a mis padres sin cuyo apoyo económico no hubiera podido ni empezar la tesis.

En último lugar, quiero expresar mi agradecimiento a todos los que, en este mes, han dedicado su tiempo intentando que este trabajo sea un poco mejor; y sobre todo agradecer a Antonio de las Heras su interés, su apoyo y todo el tiempo que, por ayudarme, no ha podido dedicar a su bien merecido descanso.

Santander, Julio 2002

# Introducción

El análisis microeconómico reconoce tres tipos de eficiencia productiva, la técnica, la asignativa y la de escala (Pinilla, 2000). Este trabajo de investigación se enmarca en el análisis de la eficiencia técnica en las actividades de producción de las empresas, y tiene como objetivo la obtención de medidas de eficiencia técnica de las unidades microeconómicas que no dependan de las características particulares de la muestra seleccionada. Con este objeto, en el primer capítulo, definimos la ineficiencia técnica como la máxima cantidad de outputs que es posible producir con un nivel dado de inputs. Las empresas que son eficientes técnicamente se localizan en la función de producción mientras que las que producen con este tipo de ineficiencia se sitúan por debajo de esa función frontera. Además presentamos los términos microeconómicos con los que habitualmente se modeliza la frontera de producción y las medidas con las que se cuantifica la ineficiencia técnica.

Los técnicas de estimación de la frontera y de la eficiencia técnica pueden clasificarse en los llamados métodos paramétricos y no paramétricos. Los métodos paramétricos consisten en estimar la función de producción a través de procedimientos econométricos y los no paramétricos en estimar la frontera mediante métodos de programación lineal. Tradicionalmente se ha señalado que la ventaja de los métodos paramétricos, a pesar de la rigidez de sus supuestos, consiste en que sus estimaciones

tienen buenas propiedades desde el punto de vista de la inferencia estadística, frente a los métodos no paramétricos que compensan la ventaja de su flexibilidad funcional con la falta de un análisis de inferencia. La justificación de esta ventaja se fundamentaba en que, durante mucho tiempo, el único método no paramétrico de estimación fue el DEA, que en sus orígenes se planteó como una técnica determinística, y en base a esa característica sus aplicaciones han carecido, en la mayoría de los casos, de un análisis estadístico de las estimaciones. Sin embargo se ha demostrado que las estimaciones del DEA poseen propiedades de inferencia aunque siguen presentando el inconveniente, con respecto a los métodos paramétricos, de que es imposible estimar la eficiencia con datos que hayan sido influenciados por el ruido estocástico. Un avance importante, en lo que se refiere a eliminar esta desventaja, ha sido el método desarrollado por Hall y Simar (2000) con el que sí es posible estimar consistentemente una frontera estocástica sin necesidad de especificar la función de producción mediante una forma funcional conocida.

A continuación relacionamos la eficiencia técnica con la noción de la productividad, cuyo concepto y su medición mediante los denominados índices de productividad total de los factores, se exponen al final del capítulo. Entre todos los índices con los que es posible medir la productividad, resaltamos de una forma especial al índice de Malmquist. Una de las ventajas de este índice es que para su determinación no se requiere conocer datos de precios y, por tanto, puede ser aplicado a aquellos sectores en los que, como en los modelos de transporte, no existen precios de mercado. El índice de Malmquist consiste en un ratio de funciones distancia, las cuales pueden modelizarse de forma que sean equivalentes a las medidas de ineficiencia técnica. La obtención del índice es muy sencilla, puesto que, sustituyendo el ratio de funciones distancia

por sus correspondientes medidas de ineficiencia, es posible analizar el cambio en la productividad total de los factores.

El capítulo segundo se divide en dos partes, una teórica y otra práctica. En la parte teórica se formula el procedimiento de estimación del DEA, analizándose en él, los diferentes programas lineales con los que el DEA estima la ineficiencia en las distintas tecnologías. A pesar de que normalmente las aplicaciones del DEA no incorporan inferencia estadística, la modelización de una frontera determinística no es un obstáculo para ello, por lo que en este capítulo se repasan los fundamentos estadísticos de la estimación y se detalla la construcción de intervalos de confianza mediante el bootstrap. La última parte teórica se preocupa por la eficiencia en un entorno dinámico y estima la productividad mediante el índice de Malmquist calculándolo con las medidas de eficiencia estimadas con el DEA. Otra ventaja del índice de Malmquist que le convierte en uno de los índices que más se utilizan en los trabajos de productividad es que, con él no sólo se analiza el cambio productivo sino que además es posible descomponerlo en otros índices con los que se observan las diferentes causas del cambio en la productividad total. Al igual que en el caso de la eficiencia, se efectúa un análisis estadístico no sólo del índice de Malmquist estimado con el DEA sino también de los índices en los que éste se desagrega.

La mayoría de las aplicaciones del DEA han proporcionado estimaciones determinísticas y no es habitual encontrar comparaciones entre los dos enfoques. En nuestro trabajo de investigación aplicamos al sector español de aeropuertos, ponemos en práctica la mayoría de los conceptos teóricos formulados anteriormente con el objetivo final de comparar los resultados que se obtienen en un análisis tradicional del DEA

con los que se derivan del posterior análisis estadístico; éste confirma la tendencia general estimada con el DEA pero señala un comportamiento diferente en algunos aeropuertos. Los intervalos de confianza, además, indican que los aeropuertos que el DEA considera técnicamente eficientes pueden presentar niveles de ineficiencia similares a otros aeropuertos que no eran eficientes.

En la aportación de la inferencia estadística a la estimación del DEA de los índices de Malmquist, es interesante observar que al igual que en el caso de la eficiencia técnica, hay algunos aeropuertos en los que los índices tienen un comportamiento diferente al formulado por el análisis del DEA. Los intervalos de confianza permiten analizar la significatividad del cambio productivo de cada índice y, aunque en la mayoría de los aeropuertos el índice de Malmquist es significativo, no ocurre lo mismo con los índices que explican el origen de ese cambio. De acuerdo a los resultados obtenidos se debe ser prudente en la interpretación del análisis del DEA con respecto a los índices en los que se descompone el índice de Malmquist y que son indicativos de las fuentes que producen el cambio en la productividad.

En el tercer capítulo recuperamos la preocupación inicial por la eficiencia y nos centramos en las propiedades de las estimaciones puntuales de ineficiencia cuando los datos con los que se investiga son de sección cruzada. La presencia de ineficiencia en cada una de las empresas sigue siendo difícil de detectar, ya que en la estimación paramétrica, las predicciones de eficiencia son inconsistentes y los contrastes de hipótesis diseñados, únicamente detectan la ineficiencia de toda la muestra. A excepción del estimador recientemente desarrollado por Hall y Simar (2000) con el que sí que es posible, en presencia de ruido estocástico, estimar una frontera no paramétrica

consistentemente, el resto de técnicas producen estimaciones inconsistentes si los datos son ruidosos.

Motivados por desarrollar formas más precisas de detección de ineficiencia en las empresas, proponemos un nuevo contraste que se puede aplicar en modelos paramétricos y no paramétricos para evaluar, empresa a empresa, la existencia de ineficiencia. En el tercer capítulo exponemos, por tanto, los diferentes contrastes que se han desarrollado con el objeto de evaluar la eficiencia técnica tanto en modelos paramétricos como en no paramétricos, y puesto que el contraste propuesto evalúa la simetría condicionada del residuo, analizamos el concepto de simetría condicionada y los diferentes contrastes que lo han aplicado. En este capítulo nuestra aportación ha sido la adaptación del contraste al modelo de frontera tanto al ámbito paramétrico como, especialmente, al no paramétrico. La última parte del capítulo analiza, mediante simulaciones de Monte Carlo, el comportamiento de la potencia y del tamaño del contraste en muestras finitas.

# Capítulo 1

## El Análisis de la Eficiencia Técnica

### 1.1 Introducción

El término de eficiencia productiva hace referencia a la utilización más adecuada de los recursos disponibles dada la tecnología existente en ese momento. Las actividades ineficientes tienen lugar cuando se producen en condiciones menos ventajosas a las condiciones de producción en las empresas óptimas, de esas mismas actividades. Estas últimas, consideradas empresas eficientes, se encuentran localizadas en la función óptima o frontera que se haya elegido como modelo del sector. Los indicadores de eficiencia, por tanto, están estrechamente vinculados a esta elección de la función modelo. En la estimación de la ineficiencia, dependiendo de los objetivos que se marquen en la investigación, de los datos de los que se disponga o, incluso de las necesidades del sector en el que se esté interesado, la función frontera que se elija como modelo podrá ser en cada caso, bien la función de producción, la función de costes o la función de beneficios.

A nivel microeconómico existen tres clases de eficiencia dentro de la eficiencia productiva: la ineficiencia técnica, la eficiencia asignativa y la eficiencia de escala

(Pinilla 2000).

En la actividad de producción de una empresa se origina una situación de eficiencia técnica cuando la empresa produce en su función de producción o lo que es lo mismo, cuando obtiene un nivel dado de output con la mínima cantidad de inputs con la que es posible producir. La ineficiencia técnica se produce, o bien cuando el output observado es inferior al óptimo que se podría producir con la misma dotación de inputs, o bien cuando los inputs que se utilizan para producir una cantidad dada de output son superiores a los óptimos necesarios.

La eficiencia asignativa, sin embargo, se produce cuando la empresa selecciona los inputs de modo que minimicen su coste de producción. Es decir, la ineficiencia asignativa se origina cuando las cantidades de inputs que utiliza una empresa en sus actividades productivas, no permiten que la productividad marginal de cada input sea igual a su precio.

La eficiencia de escala, por otra parte, la cumple una empresa cuando produce en la escala de tamaño óptimo en la que le es posible obtener el output con el que se maximiza el beneficio. Estos tres tipos de eficiencia o ineficiencia pueden combinarse en una empresa siendo necesario un análisis detallado de cada uno de los tres tipos de eficiencia para determinar el grado de ineficiencia productiva.

La estimación de cualquiera de estas formas de ineficiencia necesita, ya sea previa o simultáneamente, la especificación y estimación, de la frontera óptima de referencia. El investigador, para hacer posible el análisis de la realidad, debe restringir el campo de estimación mediante ciertos supuestos que en sí mismos, pueden dar lugar a estimaciones diferentes de la misma variable.

En el ámbito de la estimación de la ineficiencia, las elecciones claves que dan lugar a los distintos procedimientos de estimación son, por un lado la definición de la frontera, bien como estocástica o bien como determinística; y por el otro, una especificación de esa frontera como una función paramétrica conocida, o por contra, libre de esa restricción funcional.

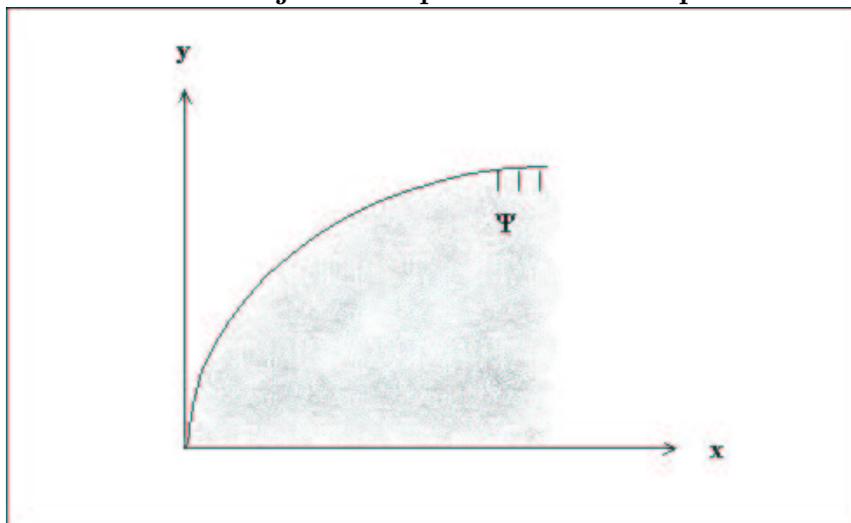
El interés de este trabajo de investigación se centra exclusivamente en la medición de la eficiencia técnica y consecuentemente en la definición y estimación de una frontera de producción óptima. La estimación paramétrica de la eficiencia técnica suele ir acompañada de la especificación de una frontera estocástica mientras que la estimación no paramétrica tradicionalmente estima una frontera determinística. Según sea el método empleado, los estimadores de la eficiencia técnica gozarán de propiedades estadísticas diferentes.

En la sección 1.2 de este capítulo se formulan los conceptos que son necesarios para definir la función de producción y las funciones distancia con el objeto de desarrollar las medidas de eficiencia técnica. La sección 1.3 analiza la estimación de la eficiencia, exponiendo en la sección 1.4 las técnicas paramétricas de estimación mientras que la sección 1.5 utiliza la metodología no paramétrica. Por último, la sección 1.6 relaciona la eficiencia técnica con la productividad y da especial importancia al índice de Malmquist dentro de los índices de productividad total de los factores.

## **1.2 La Función de Producción y la Eficiencia Técnica**

La principal actividad de una empresa es la transformación de sus factores productivos o inputs ( $x \in \mathbb{R}^p$ ) en un cierto número de productos finales o outputs ( $y \in \mathbb{R}^q$ ).

**Gráfico 1.1. Conjunto de posibilidades de producción**



Dado que *la naturaleza impone restricciones tecnológicas a las empresas: sólo hay algunas combinaciones de factores viables para obtener una cantidad dada de producción, por lo que las empresas deben de limitarse a adoptar planes de producción que sean factibles desde el punto de vista tecnológico* (Varian, 1999 pág. 324). La enumeración de todos esos planes de producción factibles es el conjunto de posibilidades de producción  $\Psi$  y puede ser formulado con las siguientes combinaciones de factores productivos (inputs) y de productos (outputs) que son tecnológicamente factibles, (ver Varian, 1999; Gravelle y Rees, 1994; Mas Colell, Whinston y Greene, 1995)

$$\Psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} \text{ donde con } x \text{ se produce } y\}. \quad (1.2.1)$$

El Gráfico 1.1 representa el conjunto de posibilidades de producción para el caso de un sólo input y un sólo output.  $\Psi$  está formado por todas las combinaciones de input y de output localizadas en la parte sombreada del gráfico. Es decir, el conjunto de posibilidades de producción está acotado, en la parte inferior, por el eje de abscisas

y superiormente por esa línea que pasa por el origen y que se definirá posteriormente como la función de producción.

El proceso productivo de una empresa tiene ciertas limitaciones tecnológicas que son las que caracterizan al conjunto de posibilidades de producción. En general, la teoría microeconómica presupone que para describir las relaciones técnicas de producción, un conjunto de posibilidades de producción debe de cumplir ciertas propiedades (ver Mas-Colell, Whinston y Greene, (1995) pág. 130-135 para una enumeración y descripción más exhaustiva de los supuestos asumibles en una tecnología).

En los análisis de eficiencia se establece habitualmente que los conjuntos de producción satisfagan las siguientes propiedades, (Kumbhakar y Lovell, 2000 pág. 19; González Fidalgo, 2001)

(P1) El conjunto de producción siempre es cerrado y acotado superiormente para que los procesos productivos de la frontera sean técnicamente factibles. Es decir, existe el límite para toda secuencia de vectores factibles de inputs y outputs y este límite es siempre factible.

En la mayoría de los análisis, se añade, también, la propiedad de convexidad. Este supuesto implica que si hay dos empresas produciendo viablemente, de modo que  $\vec{z}_1 = (x_1, y_1) \in \Psi$ ,  $\vec{z}_2 = (x_2, y_2) \in \Psi$ , debe de ser posible también la producción con cualquier combinación lineal de esos procesos productivos:  $\lambda \vec{z}_1 + (1 - \lambda) \vec{z}_2 \leq \vec{z} \forall \lambda \in [0, 1]$  y siendo  $\vec{z} = (x, y) \in \Psi$ .

(P2) Se debe de cumplir que si  $y > 0$ ,  $\Rightarrow x > 0$ .

Es decir, ninguna empresa puede producir sin utilizar alguno de los inputs.

Se permite, sin embargo, producir cero output con cantidades positivas de inputs.

En algunos casos se permite la inactividad, es decir:  $(0, 0) \in \Psi$ .

La combinación de este supuesto con el de convexidad implica rendimientos no crecientes de escala en  $\Psi$  (Mas-Colell, Whinston y Greene, (1995) pág. 133). Es decir cualquier proceso productivo observado puede ser repetido a una escala inferior. Matemáticamente se expresa del modo siguiente,

si  $(x_1, y_1) \in \Psi$ ,  $(x_2 = 0, y_2 = 0) \in \Psi$  y se cumple la propiedad (P2) significa que,  $\lambda \vec{z}_1 + (1 - \lambda) \cdot 0 = \vec{z} \Rightarrow \lambda \vec{z}_1 \in \Psi$ .

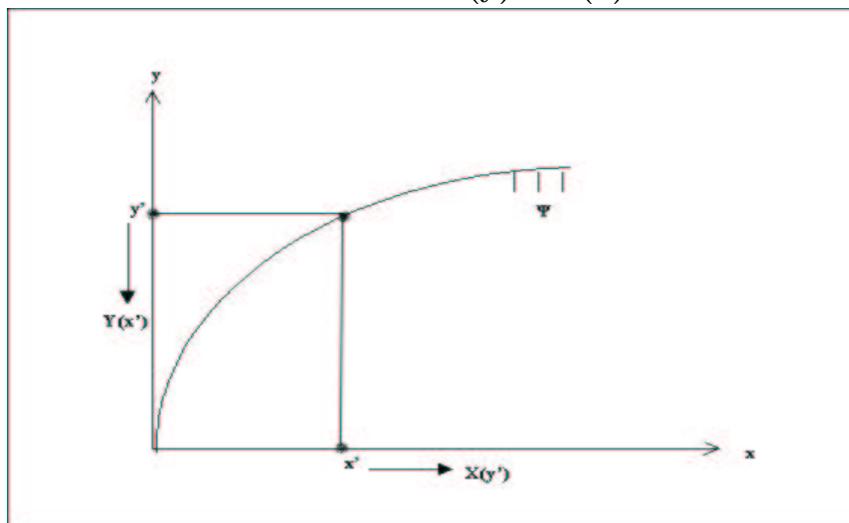
$$(P3) \quad (x, y) \in \Psi, \Rightarrow (x, \varepsilon y) \in \Psi, \quad \forall 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

Esta propiedad permite la producción con despilfarro de factores o lo que es lo mismo, las contracciones monotónicas de los outputs (eliminación gratuita de outputs) ya que es posible producir menores cantidades de outputs con los mismos inputs.

$$(P4) \quad \text{A su vez, se cumple también que: } (x, y) \in \Psi, \Rightarrow (\varepsilon x, y) \in \Psi, \forall \varepsilon \geq 1$$

Es decir, son posibles las expansiones monotónicas de los inputs (eliminación gratuita de inputs) puesto que se puede producir el mismo output con cantidades superiores de inputs.

Los supuestos (P3) y (P4) son supuestos de eliminación gratuita en sentido débil ya que se permiten únicamente expansiones o contracciones en sentido radial. La eliminación gratuita en sentido estricto, tanto de inputs como de outputs se establecería con la siguiente condición:

Gráfico 1.2.  $X(y)$  e  $Y(x)$ 

$$(P5) \quad (x, y) \in \Psi \Rightarrow (x', y') \in \Psi, \quad \forall (-x, y) \geq (-x', y')$$

donde se permiten expansiones de inputs y contracciones de outputs en cualquier dirección.

La tecnología se puede definir, alternativamente a la caracterización de  $\Psi$ , mediante el conjunto restringido de posibilidades de producción, ya sea éste formulado con inputs o con outputs.

Si lo definimos con las cantidades necesarias de factores productivos o inputs, este conjunto se puede expresar mediante la siguiente relación (Gravelle y Rees, 1994),

$$X(y) = \{x \in \mathbb{R}_+^p \mid (x, y) \in \Psi\}. \quad (1.2.2)$$

$X(y)$  define al conjunto de todas las combinaciones de factores que generan al menos  $y$  unidades de producción.

Para el caso de un input ( $x$ ) y un output ( $y$ ), el Gráfico 1.2 representa el conjunto  $X(y')$ . Este conjunto es el intervalo  $[x', +\infty)$  y representa cada una de las cantidades del input  $x$  con las que se puede producir  $y'$  unidades.

El conjunto de las cantidades necesarias de factores productivos debe de cumplir los siguientes supuestos, equivalentes a ( $P1 - P5$ ) (Kumbhakar y Lovell, 2000, pág. 21),

(X1)  $X(y)$  es un conjunto cerrado y en algunos casos también se le supone convexo.

(X2)  $0 \in X(y) \quad \forall y \geq 0$  y además  $X(0) = \mathbb{R}_+^p$

(X3) si  $x$  es finito  $\Rightarrow x \notin X(y)$  cuando  $y$  es infinito

(X4) Disponibilidad o eliminación gratuita de los outputs en sentido débil, es decir:

$$X(\varepsilon y) \subseteq X(y), \quad \forall \varepsilon \geq 1$$

(X5) Disponibilidad o eliminación gratuita de los inputs en sentido débil, es decir, si

$$x \in X(y) \Rightarrow (\varepsilon x) \in X(y), \quad \forall \varepsilon \geq 1$$

Los supuestos (X4) y (X5) son supuestos de monotoneidad en sentido débil.

La eliminación gratuita en sentido estricto se establece sustituyendo esas dos propiedades por la siguientes:

(X7) en el caso de los outputs:  $y' \geq y \Rightarrow X(y') \subseteq X(y)$ ,

(X8) y en el caso de los inputs:  $x' \geq x \in X(y) \Rightarrow x' \in X(y)$ .

La tercera caracterización alternativa del conjunto de producción se define mediante el siguiente conjunto de las cantidades de output producidas con  $x$  factores,

$$Y(x) = \{y \in \mathbb{R}_+^q \mid (x, y) \in \Psi\}. \quad (1.2.3)$$

Gráficamente,  $Y(x')$  está representado en (1.2) con el intervalo  $[0, y']$ . En este conjunto se incluyen todas las posibles cantidades de output que se pueden producir utilizando el factor  $x'$ .

Al igual que en  $X(y)$  y dado que el conjunto de posibilidades de producción  $\Psi$  satisface las propiedades (P1 – P5),  $Y(x)$  debe cumplir los siguientes supuestos equivalentes (Kumbhakar y Lovell, 2000, pág. 23),

(Y1) Para  $x \in \mathbb{R}_+^p$ ,  $Y(x)$  es siempre un conjunto cerrado y acotado; y también en algunos casos se le supone convexo.

(Y2)  $Y(0) = 0$

(Y3) Disponibilidad o eliminación gratuita de los outputs en sentido débil, es decir:

$$y \in Y(x) \Rightarrow \varepsilon y \in Y(x), \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

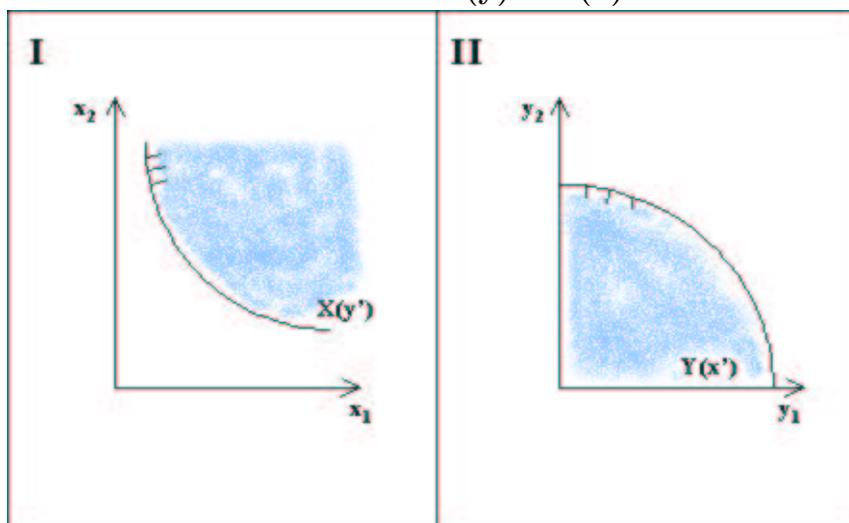
(Y4) Disponibilidad o eliminación gratuita de los inputs en sentido débil, es decir:

$$Y(\varepsilon x) \supseteq Y(x), \quad \forall \varepsilon \geq 1.$$

También en este caso los supuestos (Y3) y (Y4) son supuestos de monotoneidad en sentido débil o radial. La eliminación gratuita en sentido estricto para inputs y outputs se establece sustituyendo esas dos propiedades por la siguientes:

(Y5)  $y \leq y' \in Y(x) \Rightarrow y \in Y(x)$

(Y6)  $x' \geq x \Rightarrow Y(x') \supseteq Y(x)$

Gráfico 1.3  $X(y)$  e  $Y(x)$ 

Otro ejemplo gráfico de los conjuntos restringidos de posibilidades de producción se muestra en el Gráfico 1.3. En él,  $X(y')$  es la parte sombreada del gráfico I que se encuentra situado en el lado izquierdo de la representación. Este conjunto representa las combinaciones de factores productivos con los que es posible producir  $y'$  utilizando dos inputs  $x_1$  y  $x_2$ .  $Y(x')$  se representa en la parte sombreada de la sección II del mismo gráfico, y es el conjunto de combinaciones de dos outputs distintos ( $y_1$  e  $y_2$ ) que se pueden producir con el factor productivo  $x'$ .

Entre todas las combinaciones de inputs y outputs que pertenecen al conjunto de posibilidades de producción son especialmente interesantes las que delimitan el borde del conjunto. Si definimos la frontera mediante  $X(y)$  se pueden obtener dos fronteras diferentes: la isocuanta (ver Gravelle y Rees, 1994 pág. 181-182) o el subconjunto eficiente de los inputs.

La isocuanta,  $Iso_{X(y)}$ , (Kumbhakar y Lovell, 2000, pág 24; Färe y Primont, 1995, pág. 29) describe el conjunto de inputs mínimos con los que se producen  $y$  unidades de

output, siendo imposible su producción si se reducen proporcionalmente esos inputs a lo largo de un radio vector. Matemáticamente puede definirse como:

$$Iso_{X(y)} = \{x \in X(y) \mid (\theta x) \notin X(y) \quad \forall \theta < 1\}. \quad (1.2.4)$$

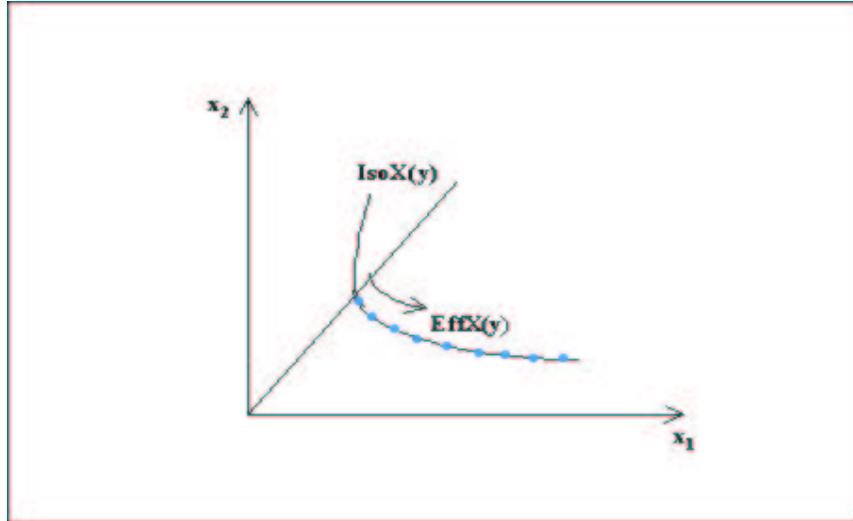
El subconjunto eficiente de inputs (ver Kumbhakar y Lovell, 2000, pág. 23),  $eff_{X(y)}$ , sin embargo, se compone de las mínimas cantidades de inputs con las que se puede producir  $y$ , siendo imposible esa producción si alguno de sus inputs es reducido lo más mínimo en cualquier proporción. Se puede definir este conjunto como (ver Kumbhakar y Lovell, 2000),

$$eff_{X(y)} = \{x \in X(y) \mid x' \leq x \Rightarrow x' \notin X(y)\}. \quad (1.2.5)$$

El Gráfico 1.4 representa la isocuanta y el subconjunto eficiente de dos inputs  $x_1$  y  $x_2$ .  $Iso_{X(y)}$  es curva que delimita  $X(y)$  mientras que  $eff_{X(y)}$  es únicamente la parte punteada de la isocuanta de factores. Se observa en el gráfico como  $eff_{X(y)}$  está incluido dentro del conjunto  $Iso_{X(y)}$  y por tanto, que la consideración de empresas eficientes es más restrictiva en la definición de  $eff_{X(y)}$  que en la de la isocuanta. En general, las combinaciones de inputs de la isocuanta que no pertenecen al conjunto eficiente  $eff_{X(y)}$ , se denominan región no económica de los factores productivos y se caracterizan porque las productividades marginales de alguno de los inputs son constantes o negativas.

Las fronteras también las podemos definir mediante  $Y(x)$ , siendo la isocuanta de productos,  $Iso_{Y(x)}$ , el conjunto formado por las combinaciones de outputs producidas

**Gráfico 1.4. Isocuanta y Subconjunto Eficiente de Factores Productivos**



con  $x$  inputs en las que es imposible la expansión equiproporcional de todos sus outputs.

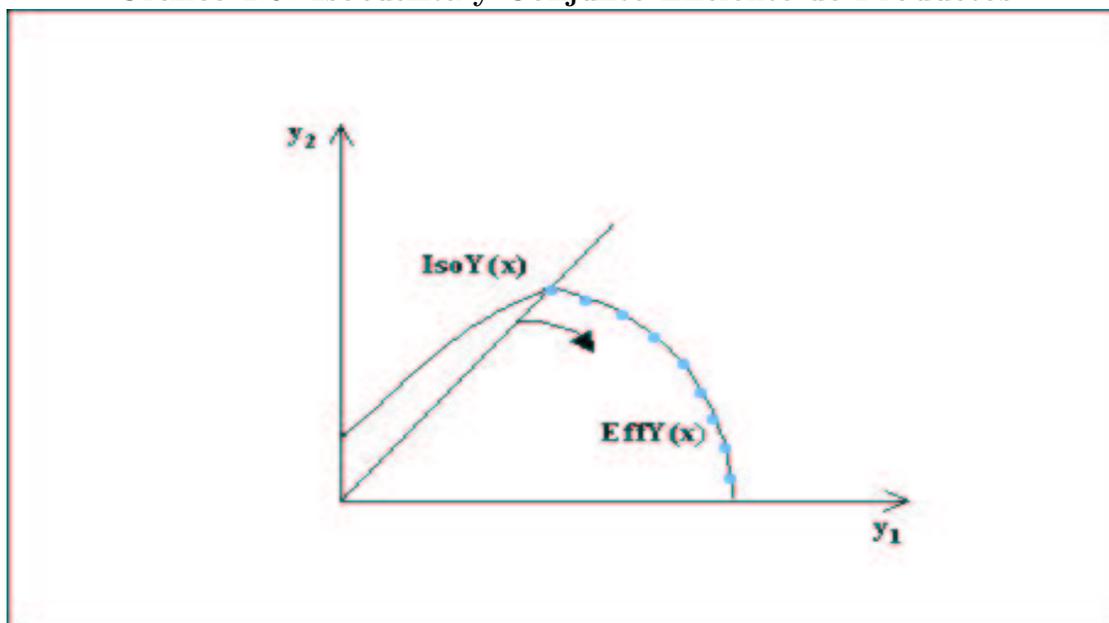
$$Iso_{Y(x)} = \{y \in Y(x) \mid (\lambda y) \notin Y(x) \quad \forall \lambda > 1\}. \quad (1.2.6)$$

Una definición más restrictiva que la isocuanta es el subconjunto eficiente de outputs,  $eff_{Y(x)}$ , que se compone de todas las combinaciones de outputs producidos por  $x$  factores que ya no pueden expandirse en ninguna dirección.

$$eff_{Y(x)} = \{y \in Y(x) \mid y' \geq y \Rightarrow y' \notin Y(x)\}. \quad (1.2.7)$$

La representación gráfica de la isocuanta y del subconjunto eficiente de los productos  $y_1$  e  $y_2$  se muestra en el Gráfico 1.5. Al igual que en el caso de los inputs, la isocuanta es toda la línea que bordea el conjunto  $Y(x)$ , mientras que el subconjunto eficiente es la parte punteada de la isocuanta y análogamente, la parte no punteada es la región no económica de los outputs.

Gráfico 1.5. Isocanta y Conjunto Eficiente de Productos



La función frontera que limita el conjunto de producción se compone del máximo producto ( $y \in \mathbb{R}^1$ ) que se puede obtener con unos factores dados o, dicho de otro modo, de la mínima cantidad de input necesaria para obtener un output dado. Es la forma habitual de definir la función de producción (Gráfico 1.1) y se formula matemáticamente con,

$$g(x) = \max\{y \mid y \in Y(x)\} = \max\{y \mid x \in X(y)\}. \quad (1.2.8)$$

Las propiedades que debe de cumplir la función de producción son las siguientes (ver Kumbhakar y Lovell, 2000),

(G1)  $g(0) = 0$ .

(G2)  $g$  es semi continua en  $\mathbb{R}_+^p$

(G3)  $g(x) > 0 \Rightarrow f(\varepsilon x) \rightarrow +\infty$  cuando  $\varepsilon \rightarrow +\infty$ .

(G4) Es una función monótona en un sentido débil, es decir:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^p \Rightarrow g(\varepsilon x) \geq g(x), \quad \varepsilon \geq 1.$$

(G5) Si se ha impuesto la convexidad en  $X(y)$ , se debe de incluir la siguiente propiedad,  $g$  es cuasiconcava en  $\mathbb{R}_+^p$ .

Si se ha definido en  $X(y)$  la monotoneidad en sentido estricto, la función de producción debe de ser monótona en sentido estricto, de forma que se sustituye la propiedad (G4) por la siguiente:

(G6)  $x' \geq x \Rightarrow g(x') \geq g(x)$ .

La función de producción especificada en la ecuación (1.2.8) se ha formulado con un solo output, siendo éste el caso, no sólo cuando se produce un output, sino también cuando los distintos productos pueden ser agregados en uno solo. En situaciones en las que se producen más de un output es más práctico caracterizar la tecnología con *funciones distancia* (Shephard, 1953, 1970). La importancia de las funciones distancia se debe no sólo a que se identifican con medidas de eficiencia técnica, sino que además son fundamentales en la teoría dual. Esto es así debido a que bajo ciertas condiciones la frontera de producción es dual a la función de costes. Además, la función distancia en el sentido de los inputs que será definida más adelante, puede ser, bajo determinadas condiciones, dual a la función de costes y del mismo modo, la función distancia en el sentido de los outputs ser dual a la función de beneficios. (Ver el capítulo 2 de Kumbhakar y Lovell (2000) para un estudio microeconómico detallado

de estas otras funciones frontera (costes y beneficios), de la eficiencia asignativa y de la eficiencia económica).

Las funciones distancia permiten cuantificar la ineficiencia técnica en un plan de producción, realizando este cometido mediante la comparación de las cantidades de inputs y de outputs que necesita una empresa que es técnicamente eficiente con los que utiliza una empresa ineficiente.

Dado el amplio número de unidades eficientes que puede tener un conjunto de producción, las distintas formas de selección de la unidad eficiente que va a servir de referencia a las empresas ineficientes, es lo que da lugar a las distintas medidas de ineficiencia técnica.

Koopmans (1951) identificó una producción técnicamente eficiente como la situación en la que no es posible incrementar uno o varios productos (outputs) sin, o disminuir la cantidad de alguno de los otros productos (outputs), o incrementar alguno de los factores (inputs) utilizados en la producción. Las empresas o unidades productivas de un sector se consideran, por tanto, técnicamente eficientes cuando se sitúan en la frontera o en el límite superior del conjunto de posibilidades de producción  $\Psi$ . Es decir, la función de producción está formada por las unidades técnicamente eficientes y puede ser tomada, al igual que las isocuantas o los subconjuntos eficientes definidos anteriormente, como la referencia de eficiencia técnica en la producción.

Las unidades productivas que son técnicamente eficientes, según la definición de Koopmans (1951), forman parte de los subconjuntos de unidades eficientes  $eff_{X(y)}$  y  $eff_{Y(x)}$  y pueden ser caracterizadas con cualquiera de las siguientes definiciones (ver Kumbhakar y Lovell, 2000):

**Definición 1.2.1.** Una empresa con  $x \in \mathbb{R}_+^p$  inputs e  $y \in \mathbb{R}_+^q$  outputs dónde  $(x, y) \in \Psi$  es técnicamente eficiente si y sólo si,  $(x', y') \notin \Psi$  para  $(-x', y') \geq (-x, y)$ .

**Definición 1.2.2.** Una empresa con  $x \in \mathbb{R}_+^p$  inputs dónde  $x \in X(y)$  es técnicamente eficiente si y sólo si,  $x' \notin X(y)$  para  $x' \leq x$ , o equivalentemente  $x \in \text{eff}_{X(y)}$ .

**Definición 1.2.3.** Una empresa con  $y \in \mathbb{R}_+^q$  outputs dónde  $y \in Y(x)$  es técnicamente eficiente si y sólo si,  $y' \notin Y(x)$  para  $y' \geq y$ , o equivalentemente  $y \in \text{eff}_{Y(x)}$ .

Debreu (1951) y Farrell (1957), en sus trabajos, propusieron una medida radial de eficiencia técnica que detecta la ineficiencia existente a lo largo de un radio vector. En ese radio vector se encuentran situadas todas las empresas que utilizan los factores productivos en la misma proporción (caso de la medida orientada a los inputs). O análogamente, se localizan todas las empresas en las que todos sus outputs son producidos en la misma proporción (caso de la medida orientada a los outputs).

La ineficiencia técnica radial se obtiene como la inversa de las funciones distancia definidas por Shephard (1953, 1970) siendo, el conjunto de unidades eficientes que sirven de referencia a las empresas ineficientes, las isoquantas. Es posible, por tanto, obtener medidas de eficiencia en el sentido de los inputs, como en el sentido de los outputs (ver Kumbhakar y Lovell, 2000).

**Definición 1.2.4.** La medida de eficiencia técnica en el sentido de los inputs es la función  $ET_I(x, y) = \theta(x, y) = \min\{\theta \mid \theta x \in X(y), \quad \forall 0 < \theta \leq 1\}$

Si el número de outputs producidos es uno, o todos ellos pueden ser agregados en uno, la medida de eficiencia se caracteriza considerando como referencia la función de producción  $g(x)$  formulada en la ecuación (1.2.8). Es decir,

**Definición 1.2.5.** *La medida de eficiencia técnica en el sentido de los inputs es la función  $ET_I(x, y) = \theta(x, y) = \min\{\theta \mid y \leq g(\theta x), \quad \forall 0 < \theta \leq 1\}$*

La eficiencia técnica mide la máxima reducción proporcional posible en todos los inputs una vez fijado el nivel de producción. Un valor unitario de  $\theta$  indica que la unidad analizada se encuentra en la frontera y es técnicamente eficiente; mientras que un valor inferior a la unidad indica que la producción puede ser obtenida con un menor volumen de factores productivos.

La eficiencia radial también debe de cumplir una serie de propiedades que son definidas seguidamente (ver Färe y Primont, 1995; Kumbhakar y Lovell, 2000):

$$(I1) \quad ET_I(x, y) \leq 1.$$

En algunos análisis se emplea la inversa de la medida de eficiencia de Farrell-Debreu. Esta medida inversa se la denomina  $D_I(x, y)$  y es la función de distancia definida por Shephard (1953, 1970). Dado que  $ET_I(x, y) = 1/D_I(x, y)$  se cumple que  $D_I(x, y) \geq 1$ .

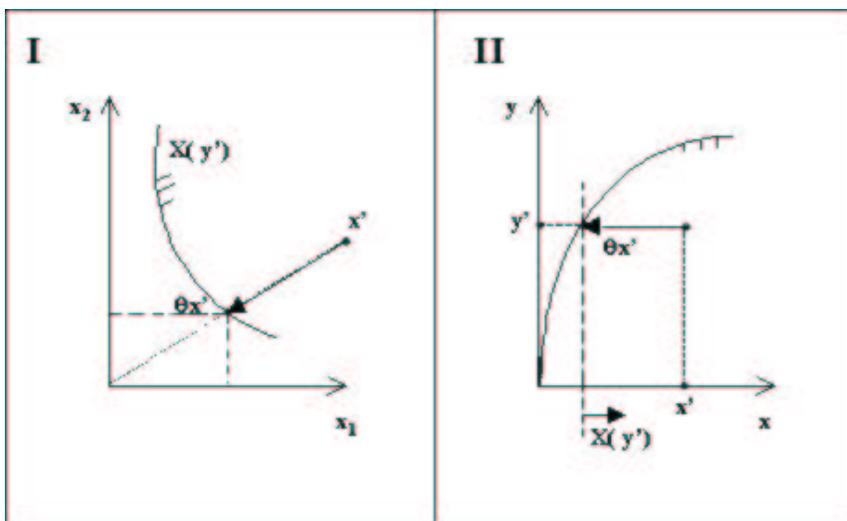
(I2) La frontera que caracteriza la eficiencia radial es la isocuanta:  $Iso_X(y)$ , es decir,

$$ET_I(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \in Iso_X(y)$$

(I3)  $ET_I(x, y)$  es no creciente en  $x$ .

Esta propiedad se introduce para no permitir que una empresa incremente su eficiencia únicamente con un mayor empleo de cantidades de inputs en la producción.

Gráfico 1.6. Medida de eficiencia técnica orientada hacia los inputs



(I4)  $ET_I(x, y)$  es una función homogénea de grado -1 en  $x$ .

La inclusión de esta propiedad permite que un cambio equiproporcional en todos los inputs produzca un cambio equivalente en  $ET_I(x, y)$ .

(I5)  $ET_I(x, y)$  es invariante con respecto, a las unidades de medida de los inputs y a las de los outputs.

El nivel de input eficiente,  $x^\delta(y)$ , fijada la producción  $y$ , se calcula como,

$$x^\delta(y) = x \cdot \theta(x, y). \quad (1.2.9)$$

En la parte II del Gráfico 1.6 se representa la medida de eficiencia técnica en el caso de un input. La empresa  $(x', y')$  es una empresa ineficiente ya que está localizada en el interior de  $Iso_{X(y)}$ . La medida de Debreu-Farrell es la máxima reducción de inputs,  $\theta$ , con la que esta empresa sigue siendo capaz de producir  $y'$ , siendo  $x'\theta$ , el valor

eficiente de inputs que permitiría a esta empresa situarse en la frontera o función de producción.

La parte I del gráfico 1.6 representa la misma medida de eficiencia pero para una empresa que produce con dos factores,  $x_1$  y  $x_2$ . En este caso, la empresa, localizada en  $x'$ , también es ineficiente y la medida de Debreu-Farrell proporciona la máxima reducción equiproporcional en los dos inputs con la que se puede seguir produciendo  $y'$ .

Alternativamente a  $ET_I(x, y)$ , se pueden fijar los factores productivos, y entonces la medida de eficiencia técnica de Debreu-Farrell se orienta hacia los outputs y se define de la siguiente manera (ver Kumbhakar y Lovell, 2000),

**Definición 1.2.6.** *La medida de eficiencia técnica en el sentido de los outputs es la función  $ET_o(x, y) = \lambda(x, y) = \max\{\lambda \mid (\lambda y) \in Y(x), \quad \forall \lambda \geq 1$*

Como en el caso de la distancia en el sentido de los inputs, si el número de outputs producidos es uno, o todos ellos pueden ser agregados en uno, caracterizamos la eficiencia con la función de producción,  $g(x)$ , formulada en la relación (1.2.8). Es decir,

**Definición 1.2.7.** *La medida de eficiencia técnica en el sentido de los outputs es la función  $ET_o(x, y) = \lambda(x, y) = \max\{\lambda \mid \lambda y \leq g(x), \quad \forall \lambda \geq 1\}$*

Ambas definiciones, (1.2.6) y (1.2.7), calculan el máximo incremento equiproporcional permitido en todos los outputs con una dotación de factores productivos dada. Un valor unitario de  $\lambda(x, y)$  indica que la unidad analizada está situada en la frontera y es técnicamente eficiente; mientras que un valor superior a la unidad indica que la producción puede ser incrementada y por tanto, el valor obtenido para  $\lambda(x, y)$

indica, en la unidad analizada, el porcentaje de ineficiencia técnica existente. Estas medidas, al igual que las obtenidas en el sentido de los inputs, cumplen las siguientes propiedades (Färe y Primont, 1995, pág. 17; Kumbhakar y Lovell, 2000, pág. 44):

1. (O1)  $ET_o(x, y) \geq 1$ .

Una medida de eficiencia inversa a la de Farrell-Debreu es  $D_o(x, y)$ , la función de distancia definida por Shephard (1953, 1970). Dado que  $ET_o(x, y) = 1/D_o(x, y)$  se cumple que  $D_o(x, y) \leq 1$ .

2. (O2)  $ET_o(x, y) = 1 \Leftrightarrow y \in Iso_Y(x)$

3. (O3)  $ET_o(x, y)$  es no decreciente en  $y$ .

El sentido de introducir esta propiedad es para permitir que una empresa mejore su eficiencia al incrementar la producción.

4. (O4)  $ET_o(x, y)$  es una función homogénea de grado 1 en  $y$ .

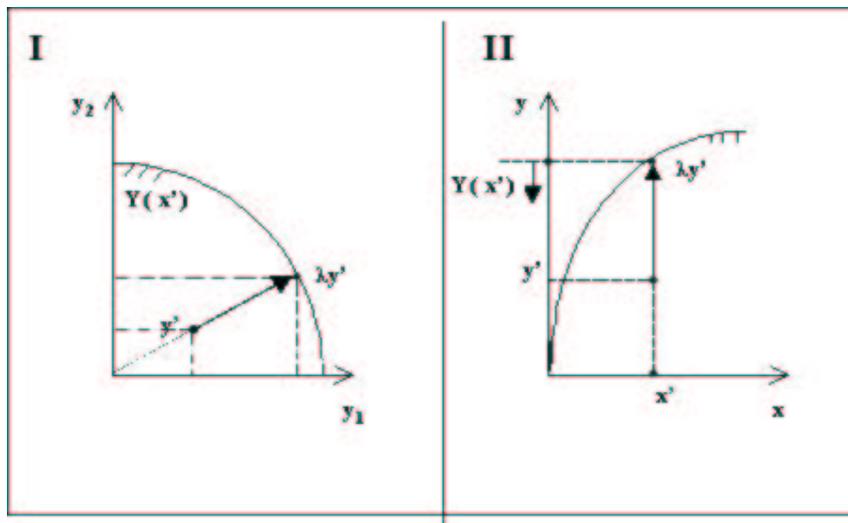
Con esta propiedad un cambio equiproporcional en todos los inputs produce un cambio equivalente en  $ET_o(x, y)$ .

5. (O5)  $ET_o(x, y)$  es invariante con respecto, tanto a las unidades de medida de los inputs, como a las de los outputs.

El nivel de output eficiente de la empresa,  $y^\delta(x)$ , fijados los factores productivos, se obtiene como,

$$y^\delta(x) = y \cdot \lambda(x, y). \quad (1.2.10)$$

Gráfico 1.7. Medida de eficiencia técnica orientada hacia los outputs



En el Gráfico 1.7 se representa la medida de eficiencia técnica para el caso de un output (parte II del gráfico). La empresa  $(x', y')$  es una empresa ineficiente ya que está localizada en el interior de  $IsO_{Y(x)}$  y la medida de Debreu-Farrell proporciona la máxima expansión del output,  $\lambda$ , que se consigue mediante el empleo del mismo factor productivo  $x'$ .

La parte I del Gráfico 1.7 representa la misma medida de eficiencia pero para una empresa que produce dos outputs,  $y_1$  e  $y_2$ . La empresa, localizada en el gráfico en  $y'$ , también es ineficiente y la medida de Debreu-Farrell proporciona la máxima expansión equiproporcional en los dos outputs que es posible obtenerse con la misma dotación de factores productivos  $x'$ .

Otra forma de medir la ineficiencia es la denominada medida de eficiencia hiperbólica, (ver Färe, Grosskopf y Lovell, 1994) la cual reduce los inputs e incrementa los outputs en la misma proporción y al mismo tiempo. Esta medida efectúa simultáneamente el proceso formulado para las orientaciones inputs y outputs. La elección entre medir

la eficiencia con la contracción de los inputs o con la expansión de los outputs o mediante ambas a la vez, se toma en cada caso, siguiendo los criterios económicos que el investigador considere más adecuados. No obstante, cuando la tecnología es homogénea de grado 1, es decir, cuando ésta se define con rendimientos constantes de escala, las medidas de eficiencia coinciden y por tanto, son independientes de la orientación.

Como ya hemos indicado, las propiedades (I2) y (O2), caracterizan al conjunto de unidades eficientes en el sentido de Farrell como unidades localizadas en las isocuantas correspondientes. El inconveniente de las isocuantas es que admiten como empresas eficientes, unidades situadas en la región no económica del conjunto de producción. Este inconveniente lo resuelven otras medidas de eficiencia no radiales que, a diferencia de la medida de Debreu-Farrell, utilizan como referencia de la eficiencia, a las empresas localizadas en  $eff_{X(y)}$  y  $eff_{Y(x)}$ .

Una de estas medidas no radiales es la denominada medida de ineficiencia de Russell (ver Färe y Lovell, 1978) que se calcula, en el caso, por ejemplo, de la eficiencia orientada a los inputs, obteniendo las medidas de ineficiencia para cada uno de los inputs y eligiendo el menor valor de sus medias aritméticas, es decir para :

$$R_I(x, y) = \mathbf{min} \left\{ \frac{\sum_{p=1}^P \theta_p}{P} \mid (\theta_1 x_1, \dots, \theta_P x_P) \in X(y), \quad \forall \theta_p \in (0, 1] \right\}, \quad (1.2.11)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^p$ .

Las reducciones efectuadas en cada input mediante la medida de Russell, no son radiales ya que no tienen por qué ser en todos ellos en la misma proporción. Las

empresas en las que  $R_I(x, y) = 1$ , son unidades técnicamente eficientes y se sitúan en  $eff_{X(y)}$ .

Otra medida de eficiencia técnica no radial, es la medida de Zieschang (1984) que también en su orientación hacia los inputs se define como,

$$Z_I(x, y) = ET_I^+(x, y) \cdot R_I(ET_I^+(x, y) \cdot x, y), \quad (1.2.12)$$

donde  $ET_I^+(x, y) = \min\{\lambda \mid \lambda \geq 0, \lambda x \in X^+(y)\}$ .  $X^+(y)$  es una tecnología a la que se le ha impuesto disponibilidad de los inputs en el sentido estricto. La medida de Zieschang primero re-escala radialmente mediante la medida radial de Debreu-Farrell ( $ET_I^+(x, y)$ ) y posteriormente, este vector es proyectado al conjunto  $eff_{X(y)}$  mediante la medida de Russell. De modo que la medida de Zieschang tiene las mismas propiedades que la de Russell y en el caso en el que  $Z_I(x, y) = 1$  la empresa eficiente pertenece al conjunto  $eff_{X(y)}$ .

Y la última de las medidas no radiales es la de eficiencia asimétrica de Färe (Färe, 1975 y Färe, Grosskopf y Lovell, 1983) que se define en el sentido de los inputs de la siguiente manera,

$$AF_I(x, y) = \min_{p=1, \dots, P} \{AF_I^p(x, y)\}, \quad (1.2.13)$$

donde  $AF_I^p(x, y) = \min\{\lambda_p \mid \lambda_p \geq 0, (x_1, \dots, \lambda_p x_j, \dots, x_P) \in X(y)\}$ . Esta medida calcula la reducción de cada uno de los factores productivos manteniendo constantes los demás y elige, de entre todas ellas, la que obtiene la mayor reducción en una

sóla dimensión. Esta medida, a diferencia de la medidas de Russell y Zieschang, no proyecta las empresas ineficientes al conjunto de unidades eficientes definido en  $eff_{X(y)}$ .

Aunque no hay ninguna razón de peso que justifique la medición de la ineficiencia radialmente, la mayoría de los trabajos de eficiencia técnica utiliza la medida de Debreu-Farrell, debido, tanto a que las medidas no radiales no son invariantes ante cambios en las unidades de medida, como a que no tienen las propiedades de homogeneidad definidas en (I4) y (O4). En este trabajo únicamente se va a analizar la eficiencia mediante las medidas radiales de Debreu-Farrell, pero un estudio detallado de las medidas no radiales y su análisis comparativo puede consultarse en Färe, Lovell y Zieschang (1983) y Dervaux, Kerstens y Vanden Eeckaut (1998).

### 1.3 Proceso de Estimación de la Eficiencia Técnica

En la práctica, ni  $\Psi$ , ni las funciones de producción, pueden ser observadas directamente sino que deben ser estimadas mediante una muestra de la población. Este proceso de estimación se realiza tradicionalmente mediante dos tipos de técnicas: la aproximación paramétrica y la no paramétrica (ver Hjalmarsson, Kumbhakar y Heshmati, 1996).

La estimación paramétrica especifica la tecnología mediante una forma funcional conocida y según se modelice la naturaleza de la perturbación aleatoria, la frontera, tendrá un carácter determinístico o estocástico. Si la perturbación aleatoria del modelo incorporara únicamente las desviaciones de la ineficiencia, se estarían dejando de lado los posibles shocks exógenos no controlables por la empresa o los posibles

errores de medida introducidos en los datos. Tendremos en este caso la estimación de una frontera determinística. Si, por el contrario, la perturbación incluyera esa aleatoriedad además de las posibles ineficiencias de las empresas, la frontera estimada sería estocástica.

Las técnicas no paramétricas sin embargo no definen la frontera mediante una forma funcional conocida, sino que formulan las características de la tecnología mediante unos supuestos sobre el conjunto de producción. La frontera estimada es más flexible que la paramétrica y está formada por las empresas de la muestra que producen la mayor cantidad de productos con la menor cantidad de inputs. En la mayoría de los modelos la estimación de la frontera es determinística (es decir: las desviaciones de la frontera se consideran producidas únicamente por ineficiencias técnicas) y se utilizan técnicas de programación lineal para su estimación.

Dentro de los modelos con frontera determinística hay dos posibles procedimientos de estimación no paramétrica: el Data Envelopment Analysis (DEA) y el Free Disposal Hull (FDH). La diferencia fundamental entre estas dos técnicas de programación lineal es que el DEA requiere convexidad en el conjunto de posibilidades de producción mientras que el FDH no. El DEA es con diferencia la técnica que más se ha utilizado pero ambos son igualmente apropiados para evaluar las actuaciones de los productores cuando se produce más de un output y en los casos en los que los precios no son fiables o son desconocidos.

La modelización en el DEA o en el FDH de una frontera estocástica convierte en inconsistentes las estimaciones de la ineficiencia, y por tanto, el principal inconveniente

de la estimación no paramétrica mediante estos métodos es la especificación determinística de su frontera. Este inconveniente no implica que no sea posible un análisis estadístico de las estimaciones, ya que éstas son consistentes y es posible construirles intervalos de confianza. La estimación no paramétrica tradicional, sin embargo, es inconsistente debido a que no se puede identificar, en el residuo del modelo, la parte correspondiente a la ineficiencia de la que corresponde al ruido estocástico.

Aunque el objetivo de este trabajo es analizar y mejorar los métodos no paramétricos de la estimación de la eficiencia insistiendo sobre todo en el tratamiento estocástico del problema, los apartados siguientes de este capítulo, revisan desde un punto de vista teórico, las ventajas e inconvenientes de los diversos métodos de estimación de la eficiencia técnica.

## **1.4 Estimación de la Eficiencia Técnica con Métodos Paramétricos**

Como ya hemos señalado, la existencia de una relación paramétrica conocida entre outputs e inputs posibilita la estimación de la función de producción mediante el uso de técnicas econométricas. Dado que no hay una justificación teórica para especificar la función de producción mediante una única función paramétrica, el principal inconveniente de estos modelos, es que los posibles errores en la especificación pueden confundirse con la ineficiencia técnica. Su principal ventaja, sin embargo, es que son modelos econométricos y por tanto los estimadores obtenidos para la ineficiencia gozan de propiedades estadísticas conocidas. A lo largo de este capítulo se van a exponer modelos paramétricos teóricos asociados a la producción de un único output,

aunque en algunos casos se puedan extender a situaciones en las que se producen más de un output efectuándose, en este caso, la estimación de la eficiencia técnica mediante la formulación de funciones distancia estocásticas (ver Kumbhakar y Lovell, 2000, págs. 93-95). En general, la diferencia fundamental de los modelos pararamétricos que expondremos en este apartado, consiste en el tipo de datos a disposición del investigador en la estimación de la ineficiencia. Y por tanto en las soluciones dadas en cada caso, se utilizarán datos de panel o de corte transversal según la disponibilidad de la información.

### 1.4.1 Modelos de Datos de Corte Transversal

Los modelos aplicados a datos de corte transversal fueron los primeros que se desarrollaron y aunque la principal ventaja de un modelo paramétrico es que tiene un carácter econométrico, también prosperaron, sobre todo en los primeros tiempos, modelos determinísticos. A continuación formulamos los principales modelos determinísticos y estocásticos que se han desarrollado con el fin de utilizar este tipo de datos.

#### 1.4.1.1. Modelos con fronteras determinísticas

La frontera de producción en estos modelos se especifica como,

$$y_j = g(x_j, \beta) \cdot \exp\{-u_j\}, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.4.1)$$

donde  $x_j \in \mathbb{R}^{p+1}$ , es el vector de inputs de la empresa  $j$  que son necesarios para producir el output  $y_j \in \mathbb{R}^1$ ;  $g(x_j, \beta)$  es una función de producción conocida;  $\beta$  es

el vector de parámetros que deben ser estimados; y  $u_j$ , es el vector que mide la ineficiencia técnica, siendo  $u_j \geq 0$ .

En este tipo de modelos, a las desviaciones de los datos con respecto a la frontera se las considera ineficiencia técnica y ésta se mide, mediante la relación que hay entre el output observado,  $y_j$ , y el máximo output posible permitido por la función de producción,  $g(x_j, \beta)$ ,:

$$\exp\{-u_j\} = \frac{y_j}{g(x_j, \beta)} \quad (1.4.2)$$

La mayoría de los investigadores suponen que la función de producción sigue la distribución de una función Cobb-Douglas pudiendose reescribirse la ecuación (1.4.1) como,

$$\ln y_j = \beta_0 + \sum_p \beta_p \cdot \ln x_{pj} - u_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.4.3)$$

donde  $u_j \geq 0$ .

Se han propuesto tres métodos para la estimación de la ecuación (1.4.3) (ver Kumbhakar y Lovell, 2000, págs. 66-72)

1. *Goal programming*: Este método, propuesto inicialmente por Aigner y Chu (1968), estiman los parámetros  $\beta$  mediante programación matemática. La ineficiencia se obtiene a través de los slacks calculados en las restricciones de esos programas. El programa, formulado en la siguiente relación, proporciona la estimación del parámetro  $\beta$  para el cual se minimiza la suma de las desviaciones

o la suma del cuadrado de las desviaciones. Ambas minimizaciones se restringen a que el output observado sea menor o igual al máximo posible. Es decir,

$$\begin{aligned} \min \sum_j u_j \quad \text{o} \quad \min \sum_j u_j^2 \\ \text{s.a. } \left[ \beta_0 + \sum_p \beta_p \ln(x_{pj}) \right] \geq \ln(y_j), \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Las medidas de eficiencia técnica se obtienen como los slacks de las restricciones de los programas formulados en (1.4.4), es decir:

$$u_j = \left[ \beta_0 + \sum_p \beta_p \ln(x_{pj}) \right] - \ln(y_j). \quad (1.4.5)$$

2. *Mínimos Cuadrados Corregidos*: Winsten (1957) estimó el modelo, en un primer paso, mediante mínimos cuadrados ordinarios, y en un segundo, dado que el estimador de  $\beta_0$  obtenido en la primera fase es sesgado, lo corrigió sumándole el máximo valor de los residuos mínimo cuadráticos. Los estimadores de la ineficiencia se obtienen también, corrigiendo los residuos mediante la resta del máximo valor de los residuos mínimo cuadráticos.
3. *Mínimos Cuadrados Modificados*: Afriat (1972) y Richmond (1974) modificaron el segundo paso de la estimación de Winsten. La novedad en este modelo es que se especifica que la ineficiencia, o se distribuye como una exponencial, o como una normal de una cola. La corrección de  $\beta_0$  y de los residuos, en este caso, se realiza mediante la media de la distribución que se haya elegido para la distribución de la ineficiencia.

Con la excepción de la estimación mediante Goal Programming, la estimación paramétrica de la ineficiencia en un entorno determinístico, ha sido abandonada ya que son más apropiados y acordes con la realidad económica los modelos que incorporan en su composición una variable aleatoria que recoja el ruido.

#### 1.4.1.2. Modelos con fronteras estocásticas

El modelo original fue propuesto al mismo tiempo por Aigner Lovell y Schmidt, (1977) y Meeusen y van den Broeck (1977) y en él, la tecnología, es representada mediante la siguiente ecuación,

$$y_j = g(x_j, \beta) \cdot \exp\{\epsilon_j\}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.4.6)$$

donde  $x_j \in \mathbb{R}^{p+1}$ , es el vector de inputs de la empresa  $j$ ,  $y_j \in \mathbb{R}^1$  es el vector del output de esa misma empresa,  $g(x_j, \beta)$  es una función de producción conocida,  $\beta$  es un vector columna de parámetros desconocidos que deben ser estimados; y  $\epsilon_j$ , es el término de error se define de la siguiente manera,

$$\epsilon_j = v_j - u_j, \quad (1.4.7)$$

siendo  $v_j$  la variable aleatoria de media cero y varianza constante que recoge el ruido del modelo y  $u_j$ , es otra perturbación aleatoria de media cero y varianza constante, que representa la ineficiencia en la producción. Los dos componentes son independientes el uno del otro y también son independientes de los regresores. Este supuesto es importante y tiene la implicación económica, que en algunas situaciones

puede no ser adecuada en el caso de la ineficiencia, de que ni el ruido ni la ineficiencia van a afectar las decisiones de elección de los inputs de una empresa.

El objetivo final de la modelización de la función de producción es conocer el grado de ineficiencia del plan de producción, y esto se obtiene, al igual que en las fronteras determinísticas, mediante la comparación del output observado con el máximo output que es posible producir.

$$ET_o^j = \exp\{-u_j\} = \frac{y_j}{g(x_j, \beta) \cdot \exp\{v_j\}}. \quad (1.4.8)$$

La estimación mediante métodos paramétricos del nivel de ineficiencia formulado en la relación (1.4.8), requiere que se especifiquen en el modelo descrito en (1.4.6), no sólo la función de producción, sino también las distribuciones de los dos componentes de la perturbación. Esta parametrización de los componentes del residuo se debe a que la estimación del residuo del modelo,  $\epsilon$ , no posibilita directamente el conocimiento de la ineficiencia ya que existe un problema de identificación de qué parte de ese residuo es ineficiencia y qué parte es ruido. La única vía con la que es posible distinguir la parte correspondiente a la ineficiencia en la estimación del residuo es, suponer distribuciones conocidas para cada componente de la perturbación.

En la práctica, la mayoría de los autores especifican la función de producción como una Cobb-Douglas o como una Trans-log (ver Christensen, Jorgenson y Lau, 1975). Al ruido se le especifica como una distribución normal de media cero y varianza constante y es en el término de la ineficiencia donde hay cinco modelos distintos según sea la distribución elegida: una seminormal, una distribución exponencial (ambas enunciadas por Aigner, Lovell y Schmidt (1977)), una normal truncada propuesta por

Stevenson (1980), una distribución gamma formulada por Greene (1990) y por último, una distribución uniforme propuesta por Li (1996).

La estimación del modelo una vez especificada la función de producción y los componentes del residuo, se puede efectuar mediante dos técnicas diferentes: el estimador de máxima verosimilitud (ML) y el de mínimos cuadrados ordinarios modificados (MOLS) (Richmond, 1974).

La estimación del modelo formulado en (1.4.6) mediante el método de estimación máximo verosímil, proporciona estimadores consistentes de todos los parámetros, incluido el de una media resumen de la ineficiencia de toda la muestra calculada mediante  $E(\exp(-u))$ , la cual proporciona únicamente la indicación de si existe o no una cierta ineficiencia en la muestra. El siguiente paso es extraer la información sobre  $u_j$  que  $\epsilon_j$  contiene y obtener las estimaciones de la ineficiencia que presentan cada una de las empresas. Esta información, como propusieron Jondrow, Lovell, Materov y Schmidt (1982), se puede extraer de la distribución de la ineficiencia condicionada, es decir,

$$f(u|\epsilon) = \frac{f(u, \epsilon)}{f(\epsilon)}. \quad (1.4.9)$$

La distribución de esta densidad es conocida al estar especificadas las distribuciones de ambas variables aleatorias y por tanto, la media:  $E(u_j|\epsilon_j)$  o la moda:  $M(u_j|\epsilon_j)$ , pueden servir para obtener predicciones de  $u_j$ . Calculadas las estimaciones puntuales de  $u_j$ , la eficiencia técnica de cada empresa se obtendrá, tal y como se formulaba en la relación (1.4.8), con,

$$ET_o^j = \exp\{-\hat{u}_j\} \quad (1.4.10)$$

o mediante la siguiente relación alternativa propuesta por Battese y Coelli (1988) cuando se especifica la distribución de la ineficiencia como una seminormal (aunque también puede emplearse para una ineficiencia caracterizada como una normal truncada),

$$ET_o^j = E(\exp\{-u_j\}|\epsilon_j) \quad (1.4.11)$$

Ambas predicciones, (1.4.10) y (1.4.11), son diferentes entre sí, inconsistentes y tienen el inconveniente de tener que obtenerse estableciendo unos supuestos muy fuertes sobre las formas funcionales de sus componentes.

Es posible, además, calcular intervalos de confianza de las estimaciones puntuales de la ineficiencia ya que la función de densidad  $f(u_j|\epsilon_j)$  ha sido estimada, (para una exposición más detallada de los intervalos de confianza en los modelos con las diferentes especificaciones de la ineficiencia, ver Kumbhakar y Lovell, 2000, págs. 79-89), pero el principal inconveniente es que la estimación de la función de densidad se efectúa con el residuo,  $\hat{\epsilon}_j$ , el cual puede ser muy sensible al ruido.

La selección de la función de distribución de la ineficiencia es importante ya que los resultados de la estimación van a ser diferentes según sea la distribución con la que se la especifique. Por ello, Ritter y Simar (1997a, 1997b) han justificado el uso de las distribuciones de ineficiencia más simples (como la exponencial o la seminormal)

debido a las grandes dificultades que se encuentran a la hora de estimar los modelos con las distribuciones de eficiencia más complejas como la gamma-normal y la truncada-normal.

El modelo definido en (1.4.6), puede ser estimado, en lugar de con el método de estimación máximo verosímil, mediante el método de los momentos (MOLS). En este caso se emplean mínimos cuadrados ordinarios para obtener estimadores consistentes de todos los parámetros excepto el del término independiente. En un segundo paso, se estima  $\beta_0$  y las varianzas del ruido y de la ineficiencia tras haber especificado las distribuciones de ambas variables aleatorias con cualquiera de las opciones formuladas para la estimación máximo verosímil. La predicción de la eficiencia se obtiene, como en el caso de la estimación máximo verosímil, con la técnica formulada por Jondrow, Lovell, Materov y Schmidt (1982) e igualmente se hace con los intervalos de confianza.

Entre los dos estimadores, el de máxima verosimilitud debe ser usado preferentemente ya que es asintóticamente más eficiente que el estimador MOLS (ver Coelli, 1995 para un análisis más profundo de sus ventajas y desventajas).

### 1.4.2 Modelos de Datos de Panel

Los modelos estocásticos de sección cruzada desarrollados en el epígrafe anterior, presentan tres importantes inconvenientes (Schmidt y Sickles, 1984):

1. La ineficiencia técnica de una empresa en particular puede ser estimada pero no de forma consistente.
2. La estimación del modelo requiere una especificación arbitraria de las distribuciones del ruido y de la ineficiencia.

3. El supuesto de que la ineficiencia es independiente de los regresores puede no ser correcto en algunas situaciones.

Para evitar en lo posible estos inconvenientes, Schmidt y Sickles (1984) propusieron un modelo de datos de panel con el que era posible efectuar diversas estimaciones de la eficiencia técnica. A diferencia de los modelos de sección cruzada, el panel permite estimar consistentemente la ineficiencia de cada empresa basándose en la disponibilidad de muchas observaciones para la misma unidad productiva; además, en algunos de los modelos de panel no es necesario imponer supuestos distribucionales tan fuertes como en el modelo de sección cruzada y tampoco es necesario suponer siempre que la ineficiencia es independiente de los regresores.

En los datos de panel una variable importante es el número de periodos que se vayan a analizar. Los primeros modelos de panel presuponían a la eficiencia técnica constante en el tiempo, pero este supuesto se convierte en un argumento poco razonable según se alargue el tiempo del panel. En general podemos clasificar a los modelos de panel en dos grandes grupos, los que mantienen invariante la eficiencia a lo largo del tiempo y los que permiten su modificación.

#### **1.4.2.1. Modelos en los que la eficiencia técnica es invariante en el tiempo**

Este tipo de modelos especifican la tecnología de la siguiente manera,

$$y_{jt} = g(x_{jt}, \beta) \cdot \exp\{v_{jt} - u_j\}, \quad j = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.4.12)$$

donde  $t$  es el periodo de tiempo analizado,  $x_{jt} \in \mathbb{R}^{p+1}$ , es el vector de inputs de la empresa  $j$ ,  $y_j \in \mathbb{R}^1$  es el vector de output,  $g(x_{jt}, \beta)$  es una función Cobb-Douglas,  $\beta$  es un vector columna de parámetros desconocidos que deben ser estimados. Por último,  $v_{jt}$ , es una perturbación aleatoria, independiente e idénticamente distribuida (i.i.d.), de media cero y varianza constante que no está correlacionada con los regresores y que representa el ruido, mientras que,  $u_j$  representa la ineficiencia técnica, invariante en el tiempo y puede considerarse según el modelo, correlacionada o no con los inputs.

Linearizándo la función definida en (1.4.12) mediante logaritmos, el modelo se reescribe de la siguiente manera,

$$Y_{jt} = \alpha + X'_{jt}\beta + v_{jt} - u_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.4.13)$$

donde  $Y_{jt} = \ln(y_{jt})$  y  $X_{jt} = \ln(x_{jt})$ .

Para  $t = 1$  el modelo es igual al especificado por Aigner, Lovell y Schmidt (1977) en la ecuación (1.4.6). Sin embargo, para  $T > 1$ , el modelo de panel es una generalización del formulado en (1.4.6). Battese y Coelli (1988) estimaron mediante la técnica de máxima verosimilitud este modelo adaptado para datos de panel. Al igual que con datos de sección cruzada, especificaron el ruido mediante una variable aleatoria i.i.d. que se distribuye como una normal  $(0, \sigma_v^2)$ , mientras que la ineficiencia es otra variable aleatoria que sigue una distribución semi normal  $(0, \sigma_u^2)$ . Los valores puntuales de la ineficiencia para cada empresa se estiman con la esperanza o la moda de  $(u_j | \epsilon_j)$  del mismo modo que ya hemos visto en (1.4.11). Dado que la ineficiencia se sigue considerando no correlacionada con los inputs y que la especificación de las funciones de distribución se sigue realizando sin una justificación teórica, la principal

ventaja de este modelo con respecto al que utiliza datos de corte transversal, es que cuando el número de periodos  $t$  tiende a infinito, las estimaciones individuales de la eficiencia son consistentes.

La estimación de los parámetros del modelo y de la eficiencia técnica con datos de panel es habitual que se obtengan mediante uno de los dos modelos clásicos de estimación de datos de panel (ver Greene, 1997, capítulo 14):

1. *El modelo de efectos fijos*: es el modelo más simple y considera a la ineficiencia como un efecto individual de cada empresa que puede estar correlacionado con los inputs. El modelo no especifica ningún supuesto distribucional sobre la eficiencia siendo el único supuesto implícito que la eficiencia es siempre mayor o igual a cero.

El modelo se estima consistentemente por mínimos cuadrados ordinarios (m.c.o.) siempre y cuando reescribamos la ineficiencia conjuntamente con el término independiente,  $\alpha_j$ , y lo estimemos como el efecto individual fijo de cada empresa. Podemos, entonces, reescribir la ecuación (1.4.13) de la siguiente manera,

$$Y_{jt} = \alpha_j + X'_{jt}\beta + v_{jt}, \quad j = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.4.14)$$

donde  $\alpha_j = \alpha - u_j$  son los efectos fijos de cada una de las empresas. La estimación de los parámetros y de los efectos fijos se efectúa simultáneamente con variables binarias (Kumbhakar y Lovell 2000, págs. 98-100). Los valores de ineficiencia técnica de cada empresa se calculan con referencia a la de, al menos un productor, que es considerado técnicamente eficiente. Para ello se

normalizan las estimaciones de los efectos fijos obtenidos en (1.4.14), con el máximo valor, es decir,  $\hat{\alpha} = \max_j \{\hat{\alpha}_j\}$ , calculándose  $\hat{u}_j$  con,

$$\hat{u}_j = \hat{\alpha} - \hat{\alpha}_j. \quad (1.4.15)$$

La ineficiencia técnica de cada unidad productiva será, entonces,  $ET_o^j = \exp(-\hat{u}_j)$ .

De un modo similar a los intervalos de confianza obtenidos para el modelo de sección cruzada, Horrace y Schmidt (1996) construyen intervalos de confianza para  $ET_o^j = \exp(-\hat{u}_j)$ . Este procedimiento es válido únicamente si los efectos fijos están incorrelacionados y necesita de tablas especiales para computar la solución. Otra vía alternativa de obtener intervalos de confianza es el bootstrap desarrollado en Hall, Härdle y Simar (1995).

La ventaja de este modelo es que los estimadores son consistentes a pesar de su simplicidad. Su principal defecto, sin embargo, es que incluyen no solo la ineficiencia técnica, sino también todos aquellos efectos que varían entre empresas pero que permanecen fijos en el tiempo.

2. *El modelo de efectos aleatorios:* A diferencia con el modelo de efectos fijos, en este caso suponemos que  $u_j$  es una variable aleatoria con media y varianza constante y que no está correlacionado con los regresores<sup>1</sup> pudiéndose reescribir la ecuación (1.4.13) como,

---

<sup>1</sup>Un modelo intermedio entre los efectos aleatorios y los fijos es el propuesto por Hausman y Taylor (1981) quienes han desarrollado un contraste de hipótesis que permite evaluar que la ineficiencia esté correlacionada sólo con un subconjunto de inputs.

$$\begin{aligned}
Y_{jt} &= \alpha - E(u_j) + X'_{jt}\beta + v_{jt} - [u_j - E(u_j)] \\
&= \alpha^* + X'_{jt}\beta + v_{jt} + u_j^* \quad j = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T. \quad (1.4.16)
\end{aligned}$$

La estimación por m.c.o. de la relación (1.4.16) presenta la dificultad de que la matriz de varianzas-covarianzas del modelo no es escalar y debe de estimarse mediante mínimos cuadrados generalizados (ver Arias Sampedro, 2001). Por tanto, tras estimar todos los parámetros en un primer paso con m.c.o.; en un segundo paso se reestiman  $\alpha^*$  y  $\beta$  con mínimos cuadrados generalizados. Los residuos se calculan entonces con

$$\hat{u}_j^* = T^{-1} \sum_j (Y_{jt} - \hat{\alpha}^* - X'_{jt}\hat{\beta}). \quad (1.4.17)$$

La ineficiencia de cada empresa la estimamos consistentemente normalizando  $u_j$  con respecto al valor máximo. Es decir,

$$\hat{u}_j = \max_j \{\hat{u}_j^*\} - \hat{u}_j^*. \quad (1.4.18)$$

La principal virtud de estos estimadores con respecto al modelo de efectos fijos, es que al caracterizar a la ineficiencia como aleatoria, es posible suponer que los regresores son invariantes en el tiempo. Sin embargo su mayor inconveniente es que no se puede aplicar a situaciones en que la ineficiencia depende de los regresores.

### 1.4.2.2. Modelos en los que la eficiencia técnica varía en el tiempo

Hay tres modelos que especifican y estiman la eficiencia técnica como variable en el tiempo,

#### 1 *Modelos que utilizan las técnicas tradicionales de los modelos de datos de panel*

El primer modelo que introdujo una ineficiencia técnica variable en el tiempo fue el desarrollado por Cornwell, Schmidt y Sickles, (1990), que puede formularse de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} Y_{jt} &= \alpha_t + X'_{jt}\beta + v_{jt} - u_{jt} \\ &= \alpha_{jt} + X'_{jt}\beta + v_{jt} \quad j = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

donde  $\alpha_t$  es el término independiente que es común, en cada periodo, a todas las empresas. El resto de variables se definen, dependiendo de que su estimación se efectue con efectos fijos o aleatorios, del mismo modo que en los modelos con eficiencia invariante.

Lee y Schmidt (1993) proponen una formulación alternativa a (1.4.19) especificando la ineficiencia como  $u_{jt} = \beta(t) \cdot u_j$ , donde  $\beta(t)$  es una función formada por un conjunto de variables binarias que se especifican para cada periodo temporal. También, como en el caso de Cornwell, Schmidt y Sickles, (1990) es posible estimar el modelo con efectos fijos y variables.

#### 2 *Modelos que utilizan el estimador de máxima verosimilitud.* El modelo a estimar

es el formulado en (1.4.19) y en este caso se supone que el ruido es una variable aleatoria i.i.d. que sigue una distribución normal de media cero y varianza constante, mientras que la ineficiencia se define como

$$u_{jt} = \beta(t) \cdot u_j,$$

donde  $u_j$  es una variable aleatoria i.i.d que se distribuye como una seminormal de media cero y varianza constante.

Kumbhakar (1990), especifica la variación en el tiempo de la ineficiencia con  $\beta(t) = [1 + \exp(\gamma t + \delta t^2)]$ , donde  $\gamma$  y  $\delta$  son dos parámetros adicionales que deben ser estimados.  $\beta(t)$  dependiendo de los signos y valores de  $\gamma$  y  $\delta$  puede ser, o monotónicamente creciente o decreciente, y cóncava o convexa. Además debe de cumplir que  $0 \leq \beta(t) \leq 1$ . Excepto la estimación de estos dos últimos parámetros, el procedimiento de estimación es el mismo que el formulado en el caso del método de estimación máximo verosímil cuando la eficiencia es invariante en el tiempo.

Un modelo alternativo es el formulado por Battese y Coelli (1992), en el que la ineficiencia se distribuye como una normal truncada y el ruido como una normal y en el que especifican  $\beta(t) = \exp(-\gamma[t - T])$ . En este caso sólo existe un parámetro adicional  $\gamma$ , y la función  $\beta(t)$  debe decrecer a una tasa creciente si  $\gamma > 0$ , crecer a una tasa creciente si  $\gamma < 0$  o permanecer constante si  $\gamma = 0$ , siendo siempre  $\beta(t) > 0$ .

3 *Modelos que utilizan el método de los momentos.* En este caso se puede reescribir la ecuación (1.4.19) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
Y_{jt} &= \alpha - \beta(t) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_u + X'_{jt} \beta + v_{jt} - [u_{jt} - E(u_{jt})] \\
&= \beta(t)^* + X'_{jt} \beta + v_{jt} - u_{jt}^* \quad j = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T.
\end{aligned} \tag{1.4.20}$$

donde  $u_{jt} = u_j \cdot \beta(t)$  y  $E(u_{jt}) = \beta(t) \cdot \sqrt{2/\pi} \sigma_u$ .

La estimación de (1.4.21) se efectúa en un primer paso con las variables binarias:  $\beta(t)^*$  mediante m.c.o. En un segundo paso, los residuos del primer paso se usan para computar el tercer momento para cada  $t$  y normalizando en  $\beta(1) = 1$  se obtienen estimaciones de los parámetros y de la varianza de la eficiencia. Posteriormente se obtiene el estimador de  $\alpha$  (ver Kumbhakar y Lovell, 2000, págs. 113-114) y la varianza del ruido; y con estas estimaciones mediante la moda o mediante la varianza de  $(u_j|\epsilon_j)$  se computan o  $\hat{u}_{jt} = E(u_j|\epsilon_j) \cdot \hat{\beta}_t$  o  $\hat{u}_{jt} = M(u_j|\epsilon_j) \cdot \hat{\beta}_t$ .

Una exposición más detallada de todos estos procedimientos de estimación y de sus ventajas y desventajas se encuentra en Kumbhakar y Lovell (2000) y Álvarez Cuesta (2001).

## 1.5 Estimación de la Eficiencia Técnica con Métodos no Paramétricos

### 1.5.1 Proceso de Estimación del DEA

La primera aplicación propiamente dicha del Análisis de la Envolvente de Datos (DEA) se formuló en Charnes, Cooper y Rhodes (1978) quienes aplicaron técnicas

de programación lineal para estimar las medidas de ineficiencia técnica definidas previamente en los trabajos de Farrell (1957) y de Debreu (1951). El procedimiento de estimación del DEA consiste en resolver, para cada una de las unidades productivas, un problema de optimización mediante programación lineal. La frontera se representa mediante las combinaciones convexas de las empresas óptimas o eficientes. El resto de empresas ineficientes quedan “envueltas” por esta frontera considerando que las únicas desviaciones posibles de la frontera se deben a una falta de eficiencia técnica.

Como ya se ha indicado, en la práctica, el conjunto de posibilidades de producción de cualquier población ( $\Psi$ ) es desconocido y su estimación, requiere la formulación de los axiomas (P1-P5) con los que se define la tecnología. De entre estos supuestos, los axiomas que habitualmente se suponen en el DEA son los siguientes:

- (A1) El conjunto de producción siempre es convexo, cerrado y acotado.
- (A2) Ninguna empresa puede producir si no dispone de inputs o factores de producción.
- (A3) Deben de ser posibles contracciones monotónicas de los outputs (eliminación gratuita de outputs en sentido estricto) y expansiones monotónicas de los inputs (eliminación gratuita de inputs en sentido estricto). La posible existencia de congestión en la tecnología puede estudiarse suavizando el sentido estricto de estos supuestos.
- (A4) Se debe presuponer un tipo de rendimientos de escala en el sector que se pretende analizar.

Charnes, Cooper y Rhodes (1978)<sup>2</sup> calcularon la ineficiencia estimando el conjunto

---

<sup>2</sup>En la literatura se denomina habitualmente con CCR

de posibilidades de producción, formulado en (1.2.1), bajo los supuestos (A1) y (A2), con eliminación gratuita de inputs y outputs en sentido estricto y definiéndolo en todos su puntos, bajo rendimientos constantes de escala

$$\hat{\Psi}_{CCR} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{p+q} \mid x \geq \sum_{j=1}^N \gamma_j x_j, \quad y \leq \sum_{j=1}^N \gamma_j y_j\}, \quad (1.5.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^p$  e  $y \in \mathbb{R}^q$  representan respectivamente los vectores de inputs y de outputs,  $j$  es cada una de las  $N$  empresas que componen la muestra y  $\gamma_j$  es el vector intensidad de la empresa  $j$ . La forma en la que se instrumentaliza el vector intensidad es la que define la forma de la frontera y permite modificar la suposición de rendimientos de escala. Banker, Charnes y Cooper incluyeron en la ecuación (1.5.1) la restricción,

$$\gamma_j \geq 0, \quad (1.5.2)$$

que especifica los rendimientos constantes de escala.

Al igual que las funciones distancia en las que está basada, la estimación de la eficiencia técnica se puede orientar en el sentido de los inputs o en el sentido de los outputs. En este último caso, la producción factible o lo que es lo mismo, el conjunto de outputs que es posible producir una vez fijados los factores productivos o inputs definido en (1.2.3), es estimado en la siguiente ecuación,

$$\hat{Y}(x)_{CCR} = \{y \in \mathbb{R}_+^q \mid (x, y) \in \hat{\Psi}_{CCR}\}. \quad (1.5.3)$$

La frontera o función de producción se estima mediante las funciones de distancia

radiales ya definidas anteriormente. Como ya se ha expuesto en la sección anterior, la isocuanta, definida en (1.2.6), está formada por las unidades eficientes en el sentido de Farrell. Es decir, matemáticamente su estimación se formula como,

$$\hat{g}(x)_{CCR} = \widehat{Iso}_{Y(x)_{CCR}} = \{y \in \hat{Y}(x)_{CCR} \mid \lambda y \notin \hat{Y}(x)_{CCR} \quad \forall \lambda > 1\}. \quad (1.5.4)$$

Teniendo como referencia de unidades eficientes las que forman la isocuanta formulada en (1.5.4), la medida de ineficiencia, definida en (1.2.6), se obtiene con la máxima expansión equiproporcional que es posible en todos los outputs manteniendo fija la dotación de inputs o matemáticamente,

$$\hat{\lambda}(x, y)_{CCR} = \mathbf{max}\{\lambda \mid \lambda y \in \widehat{Iso}_{Y(x)_{CCR}}, \quad \forall \lambda \geq 1\}. \quad (1.5.5)$$

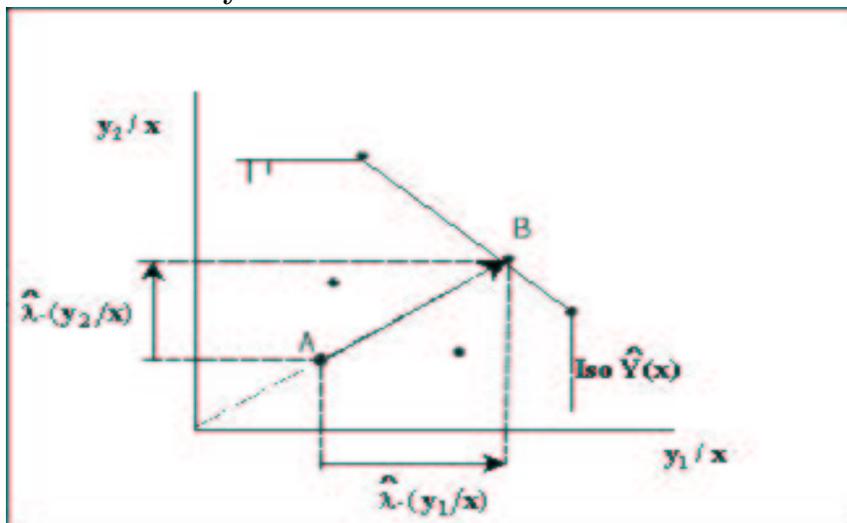
El DEA calcula los índices de eficiencia  $\hat{\lambda}_{CCR}$ , resolviendo el siguiente problema de programación lineal para cada una de las empresas de la muestra.

$$\begin{aligned} & \max_{s.a. \lambda, \gamma} \lambda_j \\ & \sum_{j=1}^N y_{jq} \gamma_j \geq \lambda_j y_{jq}, \quad q = 1, \dots, Q, \quad j = 1, \dots, N \\ & \sum_{j=1}^N x_{jp} \gamma_j \leq x_{jp}, \quad p = 1, \dots, P, \quad \gamma_j \geq 0. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

donde s.a. significa sujeto a.

La distancia que hay entre la dotación de outputs de la empresa analizada y la dotación de referencia de la frontera estimada es la medida de eficiencia, siendo una unidad productiva técnicamente eficiente si su valor  $\hat{\lambda}(x, y)_{CCR} = 1$ .

Gráfico 1.8. El DEA y la eficiencia técnica orientada hacia los outputs



Para la empresa  $j$ , el nivel de output eficiente se corresponde con,

$$\hat{y}^{\delta}(x_j)_{CCR} = \hat{\lambda}(x_j, y_j)_{CCR} \cdot y_j. \quad (1.5.7)$$

El Gráfico 1.8. muestra el proceso de estimación del DEA cuando se producen dos outputs ( $y_1, y_2$ ) con un input. Los puntos representados, excepto el punto B, son las dotaciones de output observadas en las empresas considerando fija la cantidad de inputs. La frontera,  $Iso\hat{Y}(x)$ , está formada por las dos unidades eficientes y por todas sus combinaciones convexas. Esta frontera envuelve al conjunto de los datos observados que no son eficientes. En el caso de la empresa A su ineficiencia la sitúa en el interior de la frontera y el DEA obtiene el máximo incremento equiproporcional posible de sus dos outputs,  $\hat{\lambda}$ , siendo el punto B su nivel de output eficiente.

Alternativamente se puede fijar el nivel de output y estimar las medidas de eficiencia técnica orientadas a los inputs. El conjunto restringido de inputs formulado en (1.2.2) se estima de la siguiente manera,

$$\hat{X}(y)_{CCR} = \{x \in \mathbb{R}_+^p \mid (x, y) \in \hat{\Psi}_{CCR}\}, \quad (1.5.8)$$

y su isocuanta, formulada en (1.2.4) se estima con,

$$\hat{g}(y)_{CCR} = \widehat{ISO}_{X(y)_{CCR}} = \{x \in \hat{X}(y)_{CCR} \mid \theta x \notin \hat{X}(y)_{CCR} \quad \forall \theta < 1\}. \quad (1.5.9)$$

Las unidades productivas que son técnicamente eficientes se localizan en  $\hat{g}(y)$  y el índice de eficiencia técnica en el sentido de los inputs formulada en la definición (1.2.4), se obtiene, con la máxima reducción de factores capaces de producir el nivel de output dado,

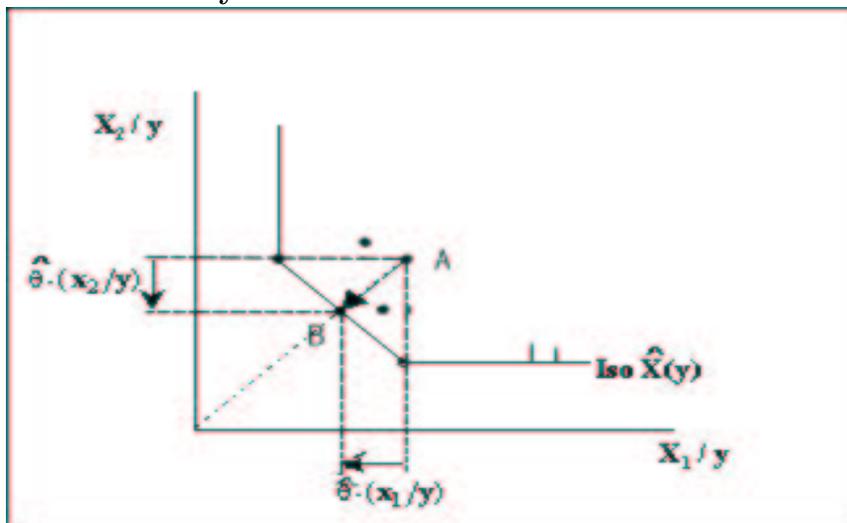
$$\hat{\theta}(x, y)_{CCR} = \mathbf{min}\{\theta \mid \theta x \in \widehat{ISO}_{X(y)_{CCR}}, \quad \forall \theta \leq 1\}. \quad (1.5.10)$$

En la práctica el DEA, resuelve el siguiente problema de programación lineal para cada empresa de la muestra,

$$\begin{aligned} & \min_{s.a.\theta, \gamma} \theta_j \\ & \sum_{j=1}^N y_{jq} \gamma_j \geq y_{jq}, \quad q = 1, \dots, Q, \quad j = 1, \dots, N \\ & \sum_{j=1}^N x_{jp} \gamma_j \leq \theta_j x_{jp}, \quad p = 1, \dots, P, \quad \gamma_j \geq 0. \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

$\hat{\theta}(x, y)_{CCR}$  mide la máxima contracción radial que es posible en todos los inputs

Gráfico 1.9 El DEA y la eficiencia técnica orientada hacia los inputs



para un nivel dado de output.  $\hat{\theta}(x, y)_{CCR}$  es igual a la unidad en las unidades productivas que son eficientes técnicamente, y el nivel de input eficiente formulado en (1.2.9) se estima con,

$$\hat{x}_j^\delta(y_j)_{CCR} = \hat{\theta}(x_j, y_j)_{CCR} \cdot x_j. \quad (1.5.12)$$

En el Gráfico 1.9. se representa un proceso de estimación del DEA con dos inputs ( $x_1$  y  $x_2$ ) y un output. Los puntos representados, excepto el punto B, son las combinaciones de los factores productivos observados con los que las empresas producen una cantidad fija de producto y la frontera  $Iso_{X(y)}$  está formada por las dos unidades eficientes y por todas sus combinaciones convexas. Las empresas ineficientes, por ejemplo el punto A, se sitúan en el interior del conjunto de combinaciones factibles y se calcula la ineficiencia,  $\hat{\theta}$ , como la máxima reducción equiproporcional posible de los dos inputs. El nivel de input eficiente en el caso de la empresa A se corresponde, entonces, con el punto B.

Debido a que el DEA estima la frontera determinísticamente, en la localización de una empresa sólo pueden existir desviaciones de la frontera por motivos de ineficiencia técnica. La formulación de una frontera determinística presenta un grave problema de inconsistencia si los datos están contaminados con ruido o presentan errores de medida puesto que su presencia puede hacer que unas empresas aparezcan como eficientes sin serlo, y que la frontera estimada se sitúe por encima de la verdadera, de tal modo que  $\Psi \subseteq \hat{\Psi}_{CCR}$ , y por tanto que unidades que en la realidad sean técnicamente eficientes aparezcan como ineficientes.

La consideración de modelo determinístico provocó que durante mucho tiempo no se realizara ningún tipo de inferencia estadística. Esta falta de propiedades estadísticas del DEA se trató de solventar, por primera vez, en Sengupta (1982) introduciendo un cierto carácter estocástico en el análisis. Sin embargo, el fundamento estadístico del DEA fue propuesto en el modelo semiparamétrico de Simar (1992) y en las pruebas de consistencia de Banker (1993). Kneip y Simar (1996) con posterioridad, introdujeron un procedimiento de estimación semiparamétrico de dos pasos para datos de panel: en el primero se eliminaba el ruido mediante un suavizado no paramétrico y en el segundo, estimaban la frontera mediante el DEA. La ineficiencia era necesario suponerla invariable en el tiempo y a pesar de que conseguía eliminar el ruido, las propiedades estadísticas del estimador seguían sin ser conocidas.

Korostelev, Simar y Tsybakov (1995) establecieron la consistencia del estimador DEA en el caso de un solo input. Bajo ciertas condiciones demostraron que el conjunto de posibilidades de producción que estima el DEA es, dentro de los conjuntos convexos limitados monotónicamente, el estimador máximo verosímil. La diferencia entre el verdadero valor y el estimador del conjunto de producción, la obtuvieron con

la medida de Lebesgue y demostraron que la tasa de convergencia del estimador es de  $N^{(-2/3)}$ . Kneip, Park y Simar (1998) generalizaron esta tasa de convergencia del estimador DEA, siendo ésta de  $N^{(-2/p+q+1)}$ , donde p y q son las dimensiones del input y del output respectivamente.

Bajo ciertas condiciones de regularidad, Gijbels, Mammen, Park y Simar (1996), aproximaron asintóticamente la distribución de la eficiencia en situaciones en las que se produce con un input y un output. La distribución asintótica de la eficiencia técnica del DEA, sin embargo, sigue siendo desconocida en el caso en el que la producción se efectúe con múltiples inputs y outputs y la única manera de analizar estadísticamente las estimaciones de eficiencia es la construcción de intervalos de confianza mediante un bootstrap (Simar y Wilson 1998a, 1998b, 2000).

### 1.5.2 Proceso de Estimación del FDH

El análisis FDH, originalmente propuesto en Deprins, Simar y Tulkens (1984), se caracteriza por determinar las unidades dominantes de la muestra de un sector. La propiedad de ser empresas dominantes, sin embargo, no necesariamente las convierte en unidades técnicamente eficientes. El FDH es un método similar al proceso de estimación del DEA cuya principal diferencia es que no cuenta con un conjunto de posibilidades de producción convexo. Por tanto, el conjunto de posibilidades de producción estimado por el DEA siempre va a incluir al conjunto de posibilidades estimado por el FDH. Un conjunto de posibilidades de producción no convexo requiere que el vector intensidad  $\gamma_i$  se le defina como cero o como uno y por tanto el FDH va a estimar al conjunto  $\Psi$ , formulado en (1.2.1), mediante la siguiente relación,

$$\hat{\Psi}_{FDH} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{p+q} \mid x \geq \sum_{j=1}^N \gamma_j x_j; y \leq \sum_{j=1}^N \gamma_j y_j, \gamma_j \in [0, 1]\}. \quad (1.5.13)$$

La estimación efectuada por el FDH de los conjuntos restringidos de inputs (ecuación 1.5.14) y de outputs (ecuación 1.2.3) es la siguiente,

$$X(\hat{y})_{FDH} = \{x \mid x \in \hat{\Psi}_{FDH}\}, \quad (1.5.14)$$

$$Y(\hat{x})_{FDH} = \{y \mid y \in \hat{\Psi}_{FDH}\}. \quad (1.5.15)$$

La estimación que efectúa el FDH de las isocuantas (ecuaciones 1.2.4 y 1.2.6) y los conjuntos eficientes (ecuaciones 1.2.5 y 1.2.7) siempre debe de tener en cuenta que la convexidad no es una propiedad que cumpla el conjunto de producción. Así se obtendrán las siguientes relaciones,

$$\widehat{ISO}_{X(y)_{FDH}} = \{x \mid x \in X(\hat{y})_{FDH}, \theta x \notin X(\hat{y})_{FDH}, \forall 0 < \theta < 1\}, \quad (1.5.16)$$

$$\widehat{ISO}_{Y(x)_{FDH}} = \{y \mid y \in Y(\hat{x})_{FDH}, \lambda y \notin Y(\hat{x})_{FDH}, \forall \lambda > 1\}. \quad (1.5.17)$$

Los subconjuntos eficientes, sin embargo, están formados únicamente por los puntos o las empresas cuya medida de eficiencia obtenida con el FDH es igual a la unidad. La estimación de la ineficiencia con el FDH puede realizarse mediante la medida de Debreu-Farrell o también mediante las medidas no radiales vistas en la primera sección

del capítulo, aunque al igual que en el DEA, la medida de Farrell posee las mejores propiedades. Un análisis más detallado de las propiedades tanto, de las medidas radiales como de las no radiales en el FDH comparandolas con las mismas medidas en el DEA, se efectúa en Kerstens y Vanden Eeckaut (1995).

La estimación efectuada por el FDH de la eficiencia de una empresa  $(x_0, y_0)$  requiere obtener en un primer paso las empresas que tienen un carácter dominante sobre ella, es decir, que producen más cantidad de outputs con menos cantidad de inputs; y en un segundo paso estimar la mayor contracción equiproporcional de los inputs, que sea posible (suponiendo que se adopte la orientación de los inputs en el análisis de la eficiencia técnica). Matemáticamente, esta estimación puede expresarse como la relación:

$$\hat{\theta}(x_0, y_0)_{FDH} = \min_{\{j|y_j \geq y_0\}} \left( \frac{x_j}{x_0}, \quad j = 1, \dots, N \right) \quad (1.5.18)$$

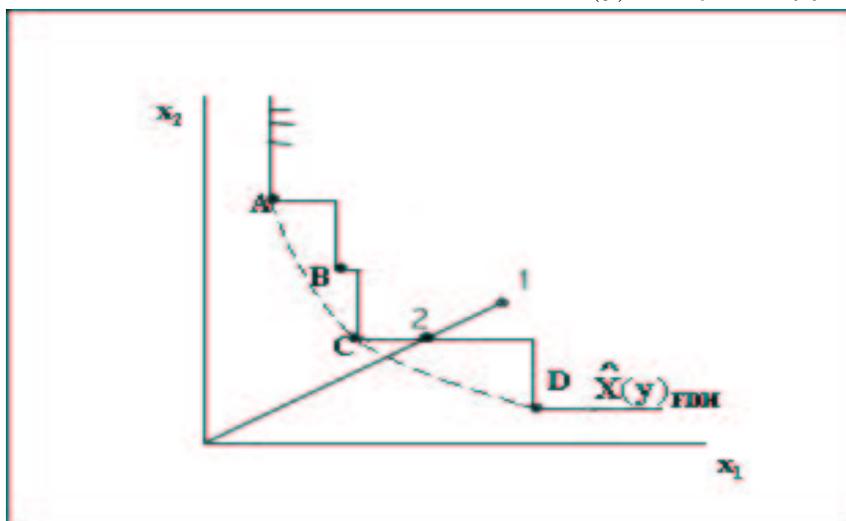
Al igual que en el DEA, la medida de eficiencia técnica en el sentido de los inputs cumple que  $\hat{\theta}(x_0, y_0)_{FDH} \leq 1$ ; y la empresa  $(x_0, y_0)$  es eficiente técnicamente con el análisis del FDH si ese valor es igual a la unidad.

Si el análisis de la eficiencia se prefiere realizarlo en el sentido de los outputs, se calcula con la relación:

$$\hat{\lambda}(x_0, y_0)_{FDH} = \max_{\{j|x_j \geq x_0\}} \left( \frac{y_j}{y_0}, \quad j = 1, \dots, N \right) \quad (1.5.19)$$

En este caso  $\hat{\lambda}(x_0, y_0)_{FDH} \geq 1$ , y al igual que cuando se orienta el estudio de la eficiencia a los inputs, si este valor es igual a la unidad, la empresa  $(x_0, y_0)$  es eficiente en el sentido de los outputs.

**Gráfico 1.10. Proceso de estimación de  $X(y)_{FDH}$  y de  $eff_{X(y)_{FDH}}$**



Como ya hemos indicado, las unidades productivas que resultan ser dominantes son las que forman el subconjunto eficiente de producción. La relación entre este subconjunto eficiente y la isocuanta estimada con el FDH se muestra en el Gráfico 1.10. En él se representa la isocuanta y el subconjunto de unidades eficientes para dos inputs,  $x_1$  y  $x_2$ , y un sólo output  $y$ . El subconjunto de unidades eficientes  $\widehat{eff}_{X(y)_{FDH}}$  son únicamente las empresas dominantes A,B,C,D y E mientras que la isocuanta  $\widehat{ISO}_{X(y)_{FDH}}$  es la línea que las une. La isocuanta estimada con el DEA, sin embargo, es la curva punteada.

El Gráfico 1.10 muestra a una empresa ineficiente, la localizada en 1, la medida de ineficiencia radial, para esa empresa, se obtiene con la contracción equiproporcional de los inputs que permite obtener la misma producción  $y$ . Es decir, la empresa 1 sería eficiente si se situara en el punto 2.

Al igual que en el DEA, la especificación de la frontera con el FDH es determinística y el estudio de las propiedades estadísticas del FDH ha sido paralelo al

proceso de estimación del DEA. También bajo ciertas condiciones <sup>3</sup>, las estimaciones de la eficiencia obtenidas con el FDH son consistentes (Korostelev, Simar y Tsybakov, 1995a,1995b) y además, a diferencia con el DEA, es conocida la distribución asintótica del estimador, incluso en el caso multivariante (Park, Simar y Weiner, 1997). La construcción de intervalos de confianza de las estimaciones de la eficiencia del FDH es inmediata incluso en situaciones en las que se produce más de un output.

### 1.5.3 Otros Estimadores No Paramétricos

Los intentos de introducir el ruido tanto en la especificación del modelo que estima el análisis del DEA, como en el que estima el análisis del FDH, para poder transformar su típica frontera determinística en una frontera estocástica, han derivado siempre en estimaciones inconsistentes de la eficiencia. La estimación no paramétrica tradicional, aunque permite especificar el modelo con un error compuesto de ineficiencia y de ruido, no permite diferenciar entre que parte de la perturbación estimada corresponde a la ineficiencia y que parte al ruido.

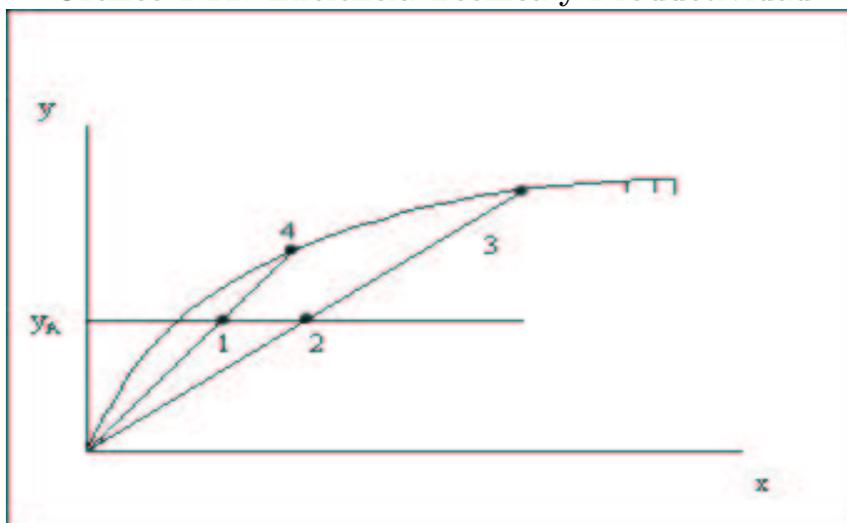
Debido a los problemas de identificación de la ineficiencia en la estimación no paramétrica, Fan, Li y Weersink (1996) han diseñado un estimador semiparamétrico donde la función de producción es estimada mediante un kernel y el término de error, sin embargo, se considera distribuido paraméricamente.

Sin embargo, Simar y Hall (2000) han desarrollado un estimador no paramétrico de la frontera de producción que resuelve el problema de la inconsistencia y es capaz

---

<sup>3</sup>un resumen más amplio de las condiciones y propiedades estadísticas del FDH aparece en Simar y Wilson 2000a

Gráfico 1.11. Eficiencia Técnica y Productividad



de diferenciar entre la ineficiencia y el ruido. Para su estimación, en vez de centrar el análisis en toda la frontera, se focaliza la estimación, en su límite o borde superior.

## 1.6 Eficiencia y Productividad

La productividad y la eficiencia son conceptos diferentes a pesar de que, como Alvarez Pinilla (2001) señala, *el concepto de productividad se ha sido utilizado frecuentemente como sinónimo de eficiencia*. La productividad media de un factor se define como la cantidad de producto que se obtiene por cada unidad empleada de ese factor. La equivalencia entre productividad y eficiencia, por tanto, sólo es cierta cuando se mantienen fijos o el input o el output de la empresa.

La diferencia entre eficiencia técnica y productividad se observa gráficamente en el Gráfico 1.11, donde se muestra un proceso productivo en el que con un input se produce un output y donde la curva representada es la frontera o función de

producción. Observando los puntos 1 y 2, donde el nivel de output está fijado en  $y_A$ , las medidas de eficiencia técnica orientadas hacia los inputs de cada punto son idénticas a sus medidas de productividad (representadas por el radiovector que parte del origen y pasa por cada uno de los puntos). Por tanto si la unidad modifica su posición del punto 2 al 1, se produce un incremento de la eficiencia técnica (su producción se acerca a la frontera eficiente) igual al incremento que se produce en la productividad. Sin embargo, en el caso en el que se comparen los puntos 3 y 4, los dos son eficientes técnicamente a pesar de tener diferentes productividades. Si la empresa 3 modifica su posición y pasa a situarse en el punto 4, esta unidad no habrá modificado su índice de eficiencia pero sí habrá incrementado su productividad.

La obtención de un índice que sea representativo de la productividad es un procedimiento sencillo sólo si el proceso productivo que se analiza consiste en producir un output con un único input. En las situaciones en las que la empresa dispone de múltiples factores productivos y los valores de productividad relativa son distintos para cada uno de ellos, la construcción de índices que midan la productividad es bastante más complicada. El problema que se presenta en estos casos es que, es necesario elegir la productividad relativa de un sólo factor cuando hay varios inputs afectando al proceso productivo. La forma en la que habitualmente se evita la arbitrariedad que supone esta elección es mediante la construcción de un índices de productividad global o total de los factores.

Las funciones distancia o equivalentemente, las medidas de eficiencia técnica, se pueden emplear en la construcción de algunos de estos índices de productividad total, de modo que no sólo puede existir una equivalencia entre el cambio en la eficiencia

técnica y el cambio en la productividad sino que además, la medición del cambio productivo se puede efectuar mediante índices formulados con las medidas de eficiencia técnica que se definieron en la sección primera.

### 1.6.1 Índices de Productividad Total de los Factores

Los índices de productividad total de los factores miden el cambio en el total del output relativo al cambio en el uso de todos los inputs del proceso productivo. Matemáticamente se construyen con el siguiente ratio (ver Coelli, Prasada Rao y Battese, 1998),

$$PTF_t = \frac{\{Indice\ Output\}_t}{\{Indice\ Input\}_t}, \quad (1.6.1)$$

donde  $t$  es el periodo de tiempo correspondiente.

Los cambios en la productividad se producen cuando el índice de outputs de la relación (1.6.1) cambia en el tiempo en una proporción distinta a la que lo hace el índice de inputs. El cambio productivo se obtiene mediante la comparación de la productividad en periodos de tiempo diferentes, o lo que es lo mismo, calculando el ratio compuesto de los índices de productividad global de cada uno de los periodos de tiempo analizados. Es decir:

$$PTF_{st} = \frac{PTF_t}{PTF_s}, \quad \text{donde } s < t, \quad (1.6.2)$$

En el caso de un solo input y un solo output, el estudio de la productividad y su modificación en el tiempo, no presenta demasiada complejidad (ver Coelli, Prasada

Rao y Battese, 1998, págs 100-103). Supongamos que las cantidades observadas de ese proceso productivo son,  $y_t, y_s, x_t$  y  $x_s$  para los dos periodos de tiempo considerados; siendo  $s < t$ . Si suponemos además, que la función de producción se ha definido cumpliendo los axiomas de la sección (1.2), y se formula como  $g_s(x)$  en el periodo  $s$  y  $g_t(x)$  en el periodo  $t$ , el índice de productividad total de los factores puede formularse (ver Coelli, Prasada Rao y Battese ,1998 o Balk, 1998) con el siguiente ratio de un índice de output dividido entre un índice de input (ecuación 1.6.1),

$$PTF_{st} = \frac{y_t/y_s}{x_t/x_s} = \frac{y_t/x_t}{y_s/x_s}. \quad (1.6.3)$$

Si la unidad productiva es eficiente técnicamente los valores observados del output serán los mismos que los de la función de producción. Si éste no es el caso, podemos esperar que la ineficiencia pueda medirse y que para ambos periodos se cumpla que,

$$\begin{aligned} y_s &= \theta_s \cdot g_s(x_s), & \text{donde} & \quad 0 \leq \theta_s \leq 1 \\ y_t &= \theta_t \cdot g_t(x_t), & \text{donde} & \quad 0 \leq \theta_t \leq 1 \end{aligned}$$

siendo  $\theta_s$  y  $\theta_t$  las funciones distancia correspondientes o, equivalentemente, las medidas de eficiencia técnicas orientadas hacia los inputs definidas en el capítulo primero.

Se pueden sustituir los valores de  $y_s$  e  $y_t$ , obtenidos en la relación anterior, en la ecuación (1.6.3) de modo que,

$$PTF_{st} = \frac{\theta_t}{\theta_s} \cdot \frac{g_t(x_t)/x_t}{g_s(x_s)/x_s}. \quad (1.6.4)$$

Si el nivel de input no se ha modificado en el transcurso de los dos periodos, ( $x_s = x_t$ ), obtenemos la siguiente descomposición del índice de productividad,

$$PTF_{st} = \frac{\theta_t}{\theta_s} \cdot \frac{g_t(x)}{g_s(x)}. \quad (1.6.5)$$

En (1.6.5) se observa que el índice de la productividad puede descomponerse en dos ratios, los cuales permiten distinguir dos posibles fuentes del cambio productivo. El primer ratio mide el cambio de la eficiencia técnica en el periodo, y el segundo ratio, el cambio técnico. Es decir, el índice de productividad total no sólo permite medir el cambio productivo sino también indagar en las causas de ese cambio.

Si el nivel de input no es el mismo en los dos periodos, podemos reescribir la cantidad del input de un periodo en función del input del otro periodo. Por ejemplo:  $x_t = \varepsilon \cdot x_s$ . En este caso el índice de productividad se transforma en,

$$PTF_{st} = \frac{\theta_t}{\theta_s} \cdot \frac{g_t(\varepsilon \cdot x_s)/\varepsilon x_s}{g_s(x_s)/x_s}. \quad (1.6.6)$$

Si conocemos el grado de homogeneidad de la función de producción,  $\hbar(t)$ , matemáticamente podemos expresarlo como,

$$g_t(\varepsilon \cdot x_s) = \varepsilon^{\hbar(t)} \cdot g_t(x_s). \quad (1.6.7)$$

Introduciendo esta expresión (1.6.7) en el índice de productividad (1.6.6) obtenemos que,

$$PTF_{st} = \frac{\theta_t}{\theta_s} \cdot \varepsilon^{\hbar(t)-1} \cdot \frac{g_t(x_s)}{g_s(x_s)}, \quad (1.6.8)$$

En (1.6.8) el cambio productivo se desglosa en tres ratios, donde la nueva fuente explicativa es el ratio de la derecha,  $g_t(x_s)/g_s(x_s)$ , y representa el cambio en la productividad debido a la escala de la producción. Por tanto, si la tecnología se define en todos sus puntos con rendimientos constantes de escala ( $\bar{h} = 1$ ) el efecto de la escala en la productividad es nulo y el índice de productividad total es el mismo al obtenido en el caso en el que  $x_s = x_t$ .

El procedimiento de reescribir el índice de productividad de la ecuación (1.6.8), se ha basado en poner el input del periodo  $t$  en función de  $x_s$ . Si el procedimiento se realiza al contrario y se pone el input del periodo  $s$ , en función del input del periodo  $t$ , se obtiene la siguiente relación,

$$PTF_{st} = \frac{\theta_t}{\theta_s} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\bar{h}(s)-1}} \cdot \frac{g_t(x_t)}{g_s(x_t)}. \quad (1.6.9)$$

Ambos índices ( ecuaciones 1.6.8 y 1.6.9) no tienen por qué ser iguales ya que el cambio técnico de la productividad, representado en el último de los tres ratios con los valores respectivos de la función de producción, sólo va a coincidir cuando haya rendimientos constantes de escala en ambas tecnologías. Es decir, de este hecho se deriva que sin el conocimiento de la tecnología existente en el periodo de tiempo que se esté analizando, no es posible reconocer los efectos que el cambio en la tecnología origina en la productividad.

El procedimiento desarrollado, proporciona, para un input y un output, el índice de productividad total en el sentido de los outputs. El índice de productividad total en el sentido de los inputs se calcula, sin embargo, siguiendo el mismo procedimiento, pero, introduciendo las transformaciones en los inputs. Se debe de tener en cuenta

que la empresa analizada es eficiente en el sentido de los inputs y en la ecuación (1.6.4) se introduce la inversa de la función de producción:  $x = g^{-1}(y)$ .

En el caso en el que el proceso productivo consista en transformar múltiples inputs en múltiples outputs, el índice de productividad total formulado en la ecuación (1.6.3) debe de estar compuesto de índices más complejos. Si a la variación de la productividad se la quiere explicar con el *valor* de inputs y de outputs, entonces los índices introducidos en la ecuación (1.6.1) serán índices de valor. Sin embargo, si el interés es expresar el cambio en la productividad mediante las modificaciones experimentadas en las *cantidades* (como en el caso desarrollado anteriormente para un sólo input y un sólo output), los índices que se aplicarán serán de cantidad o cuánticos (para una exposición más detallada de la construcción de índices, ver López Cachero, 1988).

Los índices complejos, tanto de cantidades como de precios, incluyen una ponderación. Precisamente, con esta ponderación, es como se introduce un criterio de discriminación que permite solventar el problema, comentado anteriormente, de la elección de la productividad relativa de los factores en situaciones en las que se produce con múltiples inputs. Los índices complejos que habitualmente se utilizan en el cálculo de la ecuación (1.6.1) son el índice de Törnqvist (1936) o el de Fisher (1922) (ver los capítulo 4 y 5 de Coelli, Prasada Rao y Battese (1998) para una exposición detallada de su construcción y propiedades). Ambos índices requieren el conocimiento de precios y cantidades así como realizar ciertas suposiciones sobre el comportamiento de los productores y de la tecnología, pero ofrecen la ventaja de que para obtenerlos no se requiere un procedimiento de estimación. El principal inconveniente, sin embargo, es que no se puede efectuar una diferenciación de las causas o fuentes del cambio productivo.

La mejor alternativa a la utilización de estos índices es la construcción del índice de Malmquist (Malmquist, 1953). Mediante este procedimiento sí que es posible *estimar* el cambio productivo y además analizar las causas de su modificación. Dado que el índice de Malmquist se compone de ratios de funciones distancias, su estimación nos remite a la estimación de la eficiencia técnica. El procedimiento de construcción de este índice (que se expone en la siguiente sección), no requiere, por tanto, del conocimiento de los precios ni tampoco realizar supuestos ni sobre la tecnología ni sobre el comportamiento de los productores; lo que sí se necesita es la estimación o el cálculo de la función de producción. Al igual que ocurría en la estimación de la eficiencia técnica, los métodos paramétricos (ver Kumbhakar y Lovell, 2000) y Orea, 2001, para un análisis detallado de la estimación de la productividad mediante estos métodos) estiman el cambio productivo con una frontera estocástica mientras que los no paramétricos, sin embargo, especifican la frontera determinísticamente. Dado que el objetivo fundamental del capítulo siguiente es el análisis del DEA y cómo introducir en su estimación una cierta heterogeneidad, he considerado pertinente extender el análisis estadístico a las estimaciones de la productividad. Es por ello que una parte de ese capítulo incluirá la construcción del índice de Malmquist, su estimación con el DEA y las propiedades estadísticas de esas estimaciones.

### **1.6.2 Índices de Productividad Total Basados en el Índice de Malmquist**

La principal deficiencia del empleo de los índices de cantidades o de precios, en el análisis del cambio productivo, es que en sus resultados no se distinguen las fuentes originarias de ese cambio. Es decir, en algunas situaciones no es suficiente saber que

la productividad se ha incrementado con el transcurso del tiempo, por ejemplo al incrementarse el output producido, sino que es incluso, más interesante, conocer si el incremento del output es debido a que se ha mejorado el uso de los inputs o a que se han incrementado esos inputs.

El índice de Malmquist (1953) es el método que más se ha empleado en la obtención de medidas de productividad. La ventaja fundamental de utilizar estos índices es que no necesitan, para su construcción, el conocimiento de los precios del proceso productivo. Con los únicos datos de las cantidades de productos y de factores utilizados en la producción es posible computar medidas de cambio productivo que permiten diferenciar, además, entre sus diferentes fuentes generadoras.

Hay dos posibles formas de construir índices de productividad total, y ambas empleando índices de Malmquist (ver Coelli, Prasada Rao y Battese, 1998). La primera y más utilizada es el generalmente denominado índice de productividad de Malmquist. La segunda es el designado como el índice de Hicks-Moorsteent.

#### **1.6.2.1. El índice de Productividad Total de Malmquist**

El índice de Malmquist se puede emplear tanto, en medir y comparar la productividad entre dos empresas diferentes cuando la tecnología permanece fija como, para efectuar la medición y comparación de la evolución de la productividad de la misma empresa con dos tecnologías temporales distintas. La primera adaptación del índice de Malmquist a un índice de productividad, fue realizada por Caves, Christensen y Diewert (1982). En su trabajo supusieron todas las unidades productivas eficientes y

adaptaron el problema de una empresa observada en dos periodos de tiempo diferentes a dos empresas observadas en el mismo periodo.

Sean  $s$  y  $t$  dos periodos de tiempo, con  $s < t$ . Si definimos a  $x^s \in \mathbb{R}^p$ , como el vector de inputs necesarios para la producción en el momento  $s$  y  $y^s \in \mathbb{R}^q$  es el vector de cantidades producidas en ese periodo, podemos definir  $\Psi^s$ , a imitación del conjunto formulado en (1.2.1), como,

$$\Psi^s = \{(x^s, y^s) \in \mathbb{R}^{p+q} \text{ donde } x^s \text{ se transforma en } y^s\}, \quad (1.6.10)$$

siendo los conjuntos restringidos de producción, formulados ya en (1.2.3 y 1.2.2), en el caso del periodo  $s$ ,

$$Y^s(x^s) = \{y^s \in \mathbb{R}_+^q \mid (x^s, y^s) \in \Psi^s\}, \quad (1.6.11)$$

donde  $Y^s(x^s)$  representa la producción que es obtenida con  $x^s$  factores productivos, y

$$X^s(y^s) = \{x^s \in \mathbb{R}_+^p \mid (x^s, y^s) \in \Psi^s\}, \quad (1.6.12)$$

donde  $X^s(y^s)$  define, en el periodo  $s$ , al conjunto de todas las combinaciones de factores que generan al menos  $y$  unidades de producción.

Los mismos conjuntos pueden obtenerse para la tecnología existente en el momento  $t$  como,

$$\Psi^t = \{(x^t, y^t) \in \mathbb{R}^{p+q} \mid \text{donde } x^t \text{ se transforma en } y^t\}, \quad (1.6.13)$$

$$Y^t(x^t) = \{y^t \in \mathbb{R}_+^q \mid (x^t, y^t) \in \Psi^t\}, \quad (1.6.14)$$

$$X^t(y^t) = \{x^t \in \mathbb{R}_+^p \mid (x^t, y^t) \in \Psi^t\}. \quad (1.6.15)$$

En el periodo  $s$ , la función de distancia de Farrell en el sentido de los outputs ya definida en (1.2.6), se puede formular, para una empresa  $j$ , como,

$$\lambda^s(x_j^s, y_j^s) = \max\{\lambda \mid (x^s, \lambda y^s) \in \Psi^s\} = \max\{\lambda \mid (\lambda y^s) \in Y^s(x^s)\}. \quad (1.6.16)$$

Mientras que en el periodo  $t$ , esa misma distancia se expresa, para la misma empresa  $j$ , como,

$$\lambda^t(x_j^t, y_j^t) = \max\{\lambda \mid (x^t, \lambda y^t) \in \Psi^t\} = \max\{\lambda \mid (\lambda y^t) \in Y^s(x^t)\}. \quad (1.6.17)$$

El índice de Malmquist orientado hacia los outputs, mide la productividad comparando el output que se produce con la tecnología actual con lo que se producía en una tecnología anterior si la dotación de los inputs no hubiera cambiado. Puesto que la dotación de inputs es fija, se requiere que se seleccione una de las dos tecnologías como la tecnología de referencia, con respecto a la cual, se obtienen las medidas de

eficiencia técnica. Si se elige  $s$  como periodo de referencia, el índice de Malmquist se formula con la siguiente relación (ver Färe, Grosskopf y Lovell, 1994, pág. 233-235),

$$M_o^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \frac{\lambda^s(x_j^s, y_j^s)}{\lambda^s(x_j^t, y_j^t)}, \quad (1.6.18)$$

donde<sup>4</sup>,  $\lambda^s(x_j^s, y_j^s)$  se define en la ecuación (1.6.16), y mide para la empresa  $j$  y con respecto a la tecnología existente en el periodo  $s$ , el máximo incremento en la producción cuando  $x_s$  está dado.

$\lambda^s(x_j^t, y_j^t)$ , sin embargo, mide con respecto a la misma tecnología de referencia (la del periodo  $s$ ), el máximo incremento en la producción de la empresa  $j$  siendo la dotación de output original la del periodo  $t$  cuando  $x_t$  está dado. Es decir, es la distancia que debe de ser calculada con la siguiente relación,

$$\lambda^s(x_j^t, y_j^t) = \max\{\lambda \mid (x^t, \lambda y^t) \in \Psi^s\} = \max\{\lambda \mid (\lambda y^t) \in Y^s(x^s)\}. \quad (1.6.20)$$

El valor de  $\lambda^s(x_j^t, y_j^t)$ , al considerar una dotación de un periodo distinto al de la tecnología de referencia, puede ser superior, igual o inferior a la unidad. El caso en el que  $\lambda^s(x_j^t, y_j^t) < 1$  se produce cuando la dotación de la empresa en el periodo  $t$  se encuentra localizada por encima de la tecnología de referencia y el output debe

---

<sup>4</sup>El índice de Malmquist se puede formular indistintamente, en vez de con la distancia de Farrell (Färe, Grosskopf y Lovell, 1994 pág. 233-235), con la distancia de Shephard definida también en la sección primera. El índice en ese caso se expresa como,

$$M_o(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \frac{D_o^s(x_j^t, y_j^t)}{D_o^s(x_j^s, y_j^s)}. \quad (1.6.19)$$

Su interpretación es la misma en ambos casos puesto que la medida de Farrell es la inversa de la de Shephard.

ser reducido para que la unidad productiva analizada se localice entre las empresas óptimas de la frontera de referencia.

Como hemos indicado con anterioridad, Caves, Christensen y Diewert (1982), en su adaptación del índice de Malmquist al problema de analizar la productividad supusieron que las empresas observadas en ambos periodos eran técnicamente eficientes. Considerando ese supuesto, puesto que  $\lambda^s(x_j^s, y_j^s) = 1$  el índice de la ecuación (1.6.18) se reescribe como,

$$M_o^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \frac{1}{\lambda^s(x_j^t, y_j^t)}, \quad (1.6.21)$$

donde si  $M_o^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) > 1$ , el índice indica que con la dotación  $(x_j^t, y_j^t)$  la empresa se sitúa por encima de la tecnología que existía en el momento  $s$ , y el output, por tanto, debería ser reducido ( $\lambda^s(x_j^t, y_j^t) < 1$ ) para que la empresa fuera una de las unidades productiva óptimas del periodo  $s$ . Valores del índice de Malmquist superiores a la unidad representan, por tanto, un incremento de la productividad e indican que la empresa en el periodo  $t$  ha mejorado su nivel de eficiencia con respecto a la tecnología existente en el periodo  $s$ . Sin embargo, valores inferiores a la unidad del índice  $M_o^s(x_s, x_t, y_s, y_t)$  representan disminuciones de la productividad y la situación en la que el índice es igual a la unidad señala que no ha existido cambio productivo en la empresa analizada.

Del mismo modo que se ha elegido la tecnología del periodo  $s$  para construir el índice y medir el cambio en la productividad entre los dos periodos analizados, se puede seleccionar, como tecnología de referencia, la del periodo  $t$ . El índice de Malmquist en este caso se formula como,

$$M_o^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \frac{\lambda^t(x_j^s, y_j^s)}{\lambda^t(x_j^t, y_j^t)}. \quad (1.6.22)$$

En este índice, la distancia del denominador es la que se calcula con la ecuación (1.6.17) y es igual a la unidad puesto que la empresa es eficiente técnicamente en cada uno de los periodos. Sin embargo, la distancia a introducir en el numerador, se refiere a la formulada en la siguiente relación,

$$\lambda^t(x_j^s, y_j^s) = \max\{\lambda \mid (x^s, \lambda y^s) \in \Psi^t\} = \max\{\lambda \mid (\lambda y^s) \in Y^t(x^t)\}. \quad (1.6.23)$$

Al igual que en el caso en el que la tecnología de referencia era  $s$ , esta distancia puede ser inferior, superior o igual a la unidad. El supuesto de eficiencia técnica en el periodo  $t$  permite reescribir el índice de Malmquist de la ecuación (1.6.22) como,

$$M_o^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \lambda^t(x_j^s, y_j^s), \quad (1.6.24)$$

donde valores del índice superiores a la unidad  $M_o^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) > 1$  implican necesariamente que  $\lambda^t(x_j^s, y_j^s) > 1$ . Es decir, la empresa  $j$  cuando contaba con la dotación  $(x_j^s, y_j^s)$  era eficiente en el periodo  $s$ ; pero si se considera a esa empresa con esa dotación operando en el periodo posterior  $t$  y por tanto bajo la tecnología existente en  $t$ , la empresa se convertiría en una empresa ineficiente. Es decir, con el paso del tiempo la empresa analizada ha experimentado un incremento en la productividad.

El cálculo de los índices de Malmquist formulados en las ecuaciones (1.6.18) y (1.6.22) requiere conocer la forma funcional de las funciones distancia de los dos

periodos analizados. Caves, Christensen y Diewert (1982) demostraron que si las funciones distancia de ambos periodos pueden ser representadas por funciones translog con idénticos parámetros de segundo orden, la siguiente media geométrica de los índices de Malmquist (1.6.18) y (1.6.22),

$$M_o(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = [M_o^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) \times M_o^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t)]^{1/2}, \quad (1.6.25)$$

se corresponde, bajo la hipótesis de ausencia de ineficiencias técnicas o asignativas y asumiendo un comportamiento optimizador, con índices de Törnqvist corregidos por un factor de escala. Si además en ambos periodos existen rendimientos constantes de escala (ver Coelli, Prasada Rao y Battese, 1998), la media geométrica de la ecuación (1.6.25) es exactamente una medida de productividad total de los factores (como se formulaba en la ecuación 1.6.3) cumpliéndose que,

$$[M_o^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) \cdot M_o^s(x_s, x_t, y_s, y_t)]^{1/2} = \frac{\text{Índice de output de Törnqvist}}{\text{Índice de input de Törnqvist}}. \quad (1.6.26)$$

En general el supuesto de que las empresas que se analizan son eficientes técnicamente no es muy razonable puesto que es normal observar una cierta ineficiencia en la mayoría de ellas. Si se dispone de suficiente información (suficientes unidades productivas) para poder estimar la tecnología en cada periodo analizado no hace falta asumir eficiencia técnica para calcular el índice de Malmquist de la productividad.

Färe, Grosskopf, Lindgren y Roos, (1995)<sup>5</sup> fueron los primeros que, utilizando la formulación de las funciones distancia correspondientes a las ecuaciones (1.6.18)

---

<sup>5</sup>Este trabajo fue originalmente presentado en el siguiente documento de trabajo: Färe, Grosskopf, Lindgren y Roos, (1989), Productivity Developments in Swedish Hospitals. A Malmquist output index approach, *Mimeo*.

y (1.6.22), reescribieron y estimaron el índice de Malmquist de la ecuación (1.6.25), considerando la posibilidad de ineficiencia, como,

$$M_o(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \left[ \frac{\lambda^t(x_j^s, y_j^s)}{\lambda^t(x_j^t, y_j^t)} \times \frac{\lambda^s(x_j^s, y_j^s)}{\lambda^s(x_j^t, y_j^t)} \right]^{1/2}. \quad (1.6.27)$$

Färe, Grosskopf, Lindgren y Roos (1992) al mismo tiempo que Berj, Førsund y Jansen (1992) transformaron esa media geométrica en el siguiente índice que se ha empleado en la mayoría de los trabajos de análisis del cambio productivo,

$$M_o(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \frac{\lambda^s(x_j^s, y_j^s)}{\lambda^t(x_j^t, y_j^t)} \left( \frac{\lambda^t(x_j^s, y_j^s)}{\lambda^s(x_j^s, y_j^s)} \times \frac{\lambda^t(x_j^t, y_j^t)}{\lambda^s(x_j^t, y_j^t)} \right)^{1/2}, \quad (1.6.28)$$

donde cada ratio mide el cambio entre los dos periodos analizados de, en el caso del ratio exterior al paréntesis, la eficiencia técnica orientada hacia los outputs; y en el caso del ratio del paréntesis el cambio apreciado en la tecnología.

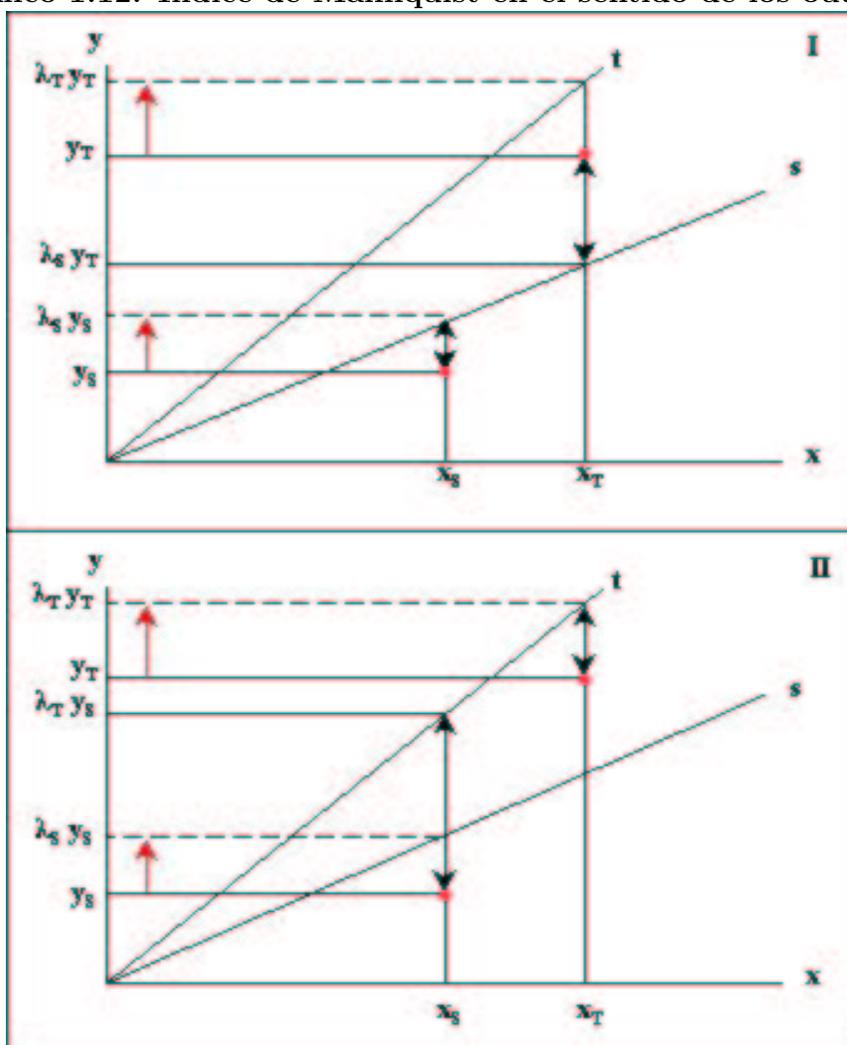
Notese que la ecuación (1.6.28) es una generalización para situaciones con múltiples inputs y múltiples outputs de la ecuación ya expresada para un input y un output en la relación (1.6.5).

Una representación gráfica del índice de Malmquist se expone en el Gráfico 1.12, donde se analiza en dos periodos de tiempo ( $s < t$ ), la productividad de una empresa que emplea un sólo input ( $x$ ) en la producción de un sólo output ( $y$ ). Se permite en el ejemplo que exista ineficiencia y en ambos periodos la empresa analizada es ineficiente.<sup>6</sup> El Gráfico 1.12 se divide en dos partes diferentes, (I y II), que representan

---

<sup>6</sup>El supuesto de eficiencia, sin embargo, permitiría que las dotaciones de la empresa analizada en los dos periodos se localizaran en sus fronteras respectivas y se cumpliría que  $\lambda_s \cdot y_s = \lambda_t \cdot y_t = 1$

Gráfico 1.12. Índice de Malmquist en el sentido de los outputs



la productividad según se elija, respectivamente, la tecnología de referencia del periodo  $s$  o la del periodo  $t$ .

En la parte I se expone la situación en la que la tecnología de referencia es la del periodo  $s$  y analiza la productividad, por tanto, con el índice (1.6.18). En este caso, la dotación de la empresa en el periodo  $s$  se denota en el gráfico con el punto  $(x_s, y_s)$  y su frontera o tecnología la representa la línea  $s$ . En ese periodo, el máximo

incremento posible de su producción ( $\lambda_s(x_s, y_s) \cdot y_s$ ) para la dotación del input  $x_s$  fija (línea paralela al eje de ordenadas que parte de  $x_s$ ) se representa con el espacio comprendido entre la línea punteada paralela al eje de abscisas respectiva y la que cruza por  $y_s$  (flecha unidireccional). Esta distancia es precisamente la que se señala el gráfico también con la línea bidireccional. El valor de  $\lambda_s(x_s, y_s)$  es superior a la unidad puesto que al ser ineficiente su output puede ser incrementado. Este valor es el numerador del índice de Malmquist de la ecuación (1.6.18).

En el momento  $t$ , sin embargo, la dotación de esta misma empresa viene señalada en el gráfico con el punto  $(x_t, y_t)$ . En este periodo la empresa es también ineficiente, y esa ineficiencia se corresponde con el máximo incremento posible de la producción (línea unidireccional igual a la diferencia  $([\lambda_t(x_t, y_t)y_t] - y_t)$  manteniendo fija la dotación de input  $x_t$ . Sin embargo, el denominador de la ecuación (1.6.18) no computa la medida de eficiencia del periodo  $t$ , sino que supone que la tecnología sigue siendo la del periodo anterior ( $s$ ) y mide la posición de la dotación de la empresa en el periodo  $t$  con respecto a la tecnología  $s$ . Es decir la empresa con la dotación  $(x_t, y_t)$  si estuviera produciendo en el momento  $s$  se encontraría por encima de la frontera y su producción eficiente no debe de ser incrementada, sino reducida hasta el punto  $(\lambda_s(x_t, y_t) \cdot y_t)$ . La reducción experimentada se representa con la línea bidireccional correspondiente.

La sustitución en la ecuación (1.6.18) de los valores de las distancias, representadas con ambas flechas bidireccionales, proporciona el índice de Malmquist

$$M_o^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \frac{\lambda_s(x_s, y_s)}{\lambda_s(x_t, y_t)}. \quad (1.6.29)$$

En este caso, su valor es superior a la unidad ( $M_o^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) > 1$ ) y representa un incremento en la productividad puesto que la empresa analizada, siempre y cuando se considere únicamente la tecnología del periodo  $s$ , de ser ineficiente con su dotación correspondiente  $(x_s, y_s)$  ha pasado a ser "supereficiente" (estar colocada por encima de la frontera) con la dotación del periodo  $t$ .

En la parte II del mismo gráfico se expone la situación en la que la tecnología de referencia es la del periodo  $t$  y analiza la productividad con el índice de la ecuación (1.6.22). En el periodo  $t$  la dotación de esta empresa se denota en el gráfico con el punto  $(x_t, y_t)$  y su frontera o tecnología la representa la línea  $t$ . Al ser la empresa ineficiente, su eficiencia se obtiene como el máximo incremento posible de su producción  $\lambda_t(x_t, y_t)$  fijada la dotación de input  $x_t$  (radio que parte de  $x_t$ ) y viene representada en el gráfico con el espacio comprendido entre la línea punteada paralela al eje de abscisas respectiva y la que cruza por  $y_t$  (flecha unidireccional). Esta distancia es precisamente la que se señala el gráfico también con la línea bidireccional marcada en el radio que parte de  $x_t$ . El valor de  $\lambda_t(x_t, y_t)$  es superior a la unidad puesto que la empresa es ineficiente y su output puede ser incrementado. Este valor es el denominador del índice de malmquist de la ecuación (1.6.22).

En el momento  $s$ , sin embargo, la dotación de esta misma empresa viene señalada en el gráfico con el punto  $(x_s, y_s)$ . En este periodo la empresa también era ineficiente, y esa ineficiencia se corresponde con el máximo incremento posible de la producción (flecha unidireccional que es igual a la diferencia  $([\lambda_s(x_s, y_s)y_s] - y_s)$  con la dotación de input  $x_s$  fija. El valor óptimo de la producción en el periodo  $s$  se localiza en el cruce de la frontera o tecnología correspondiente al periodo (línea denominada  $s$ ) y el radio que parte de  $x_s$ . Sin embargo, el numerador de la ecuación (1.6.22) no requiere

esta medida de eficiencia, sino que supone que la tecnología es la del periodo siguiente ( $t$ ) y mide la posición de la dotación de la empresa en el periodo  $s$  con respecto a esa tecnología. Es decir la empresa con la dotación  $(x_s, y_s)$  si estuviera produciendo en el momento  $t$  se encontraría colocada por debajo de la frontera y su producción eficiente debe de ser incrementada hasta el punto  $(\lambda_t(x_s, y_s) \cdot y_s)$ . El incremento experimentado se representa con la flecha bidireccional correspondiente.

La sustitución en la ecuación (1.6.22) de los valores de las distancias, representadas con ambas flechas bidireccionales, proporciona el índice de Malmquist

$$M_o^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \frac{\lambda_t(x_s, y_s)}{\lambda_t(x_t, y_t)}. \quad (1.6.30)$$

En este caso, su valor es superior a la unidad puesto que el numerador es mayor que el denominador ( $\lambda_t(x_s, y_s) > \lambda_t(x_t, y_t)$ ), y por tanto y al igual que en la parte I del gráfico,  $M_o^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) > 1$  e indica un incremento en la productividad. En este caso la empresa analizada, siempre y cuando se considere únicamente la tecnología del periodo  $t$ , presenta, con la dotación  $(x_s, y_s)$ , un grado de ineficiencia superior al que experimenta con la nueva dotación del periodo posterior  $t$ .

La media geométrica de ambos índices evita la arbitrariedad en la selección de una de las dos tecnologías de referencia.

Alternativamente a este índice de Malmquist orientado hacia los outputs, el cambio productivo se puede medir comparando la posible reducción en el uso de los inputs en una tecnología actual con la posible reducción si la tecnología es diferente en el tiempo. El índice construido de esta forma se denomina índice de productividad de

Malmquist orientado hacia los inputs y su construcción sigue el mismo procedimiento que el desarrollado para el índice orientado a los outputs.

En el periodo  $s$ , la función de distancia en el sentido de los inputs para una empresa  $j$ , siguiendo la relación (1.2.4) se puede expresar como,

$$\theta^s(x_j^s, y_j^s) = \min\{\theta \mid (\theta x^s, y^s) \in \Psi^s\} = \min\{\theta \mid (\theta x^s) \in X^s(y^s)\}. \quad (1.6.31)$$

Mientras que en el periodo  $t$ , esa misma distancia puede ser formulada como,

$$\theta^t(x_j^t, y_j^t) = \min\{\theta \mid (\theta x^t, y^t) \in \Psi^t\} = \min\{\theta \mid (\theta x^t) \in X^t(y^t)\}. \quad (1.6.32)$$

Al igual que en el caso de la orientación output, se requiere seleccionar una de las dos tecnologías (la del periodo  $s$  o la del periodo  $t$ ) como la tecnología de referencia. Si es  $s$  el periodo de referencia, el índice de Malmquist se define como

$$M_I^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \frac{\theta^s(x_j^s, y_j^s)}{\theta^s(x_j^t, y_j^t)}, \quad (1.6.33)$$

donde  $\theta^s(x_j^s, y_j^s)$  es la distancia definida en la ecuación (1.6.31). Mientras que  $\theta^s(x_j^t, y_j^t)$ , es la distancia que mide, con respecto a la tecnología de referencia (la del periodo  $s$ ), la máxima disminución de factores productivos de la dotación  $x_t$  con la que es posible producir  $y_t$ . Es decir, es la distancia que se formula en la siguiente ecuación<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup>El valor de  $\theta^s(x_j^t, y_j^t)$ , al obtener la eficiencia de una dotación de un periodo distinto al de la tecnología de referencia, puede ser superior, igual o inferior a la unidad. El caso en el que  $\theta^s(x_j^t, y_j^t) > 1$  se produce cuando la dotación de la empresa en el periodo  $t$  se localiza por encima de la tecnología de referencia y el input debe ser incrementado para que la unidad productiva analizada se localice entre las empresas óptimas de la frontera de referencia.

$$\theta^s(x_j^t, y_j^t) = \min\{\theta \mid (\theta x^t, y^t) \in \Psi^s\} = \min\{\theta \mid (\theta x^t) \in X^s(y^s)\}. \quad (1.6.34)$$

Igualmente al caso de la orientación output, la adaptación del índice de Malmquist a un índice de productividad realizada por Caves, Christensen y Diewert (1982), requería que las empresas observadas en los periodos  $s$  y  $t$  fueran ambas técnicamente eficientes. En ese caso, si  $\theta^s(x_j^s, y_j^s) = 1$  el índice se puede reformular como,

$$M_I^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \frac{1}{\theta^s(x_j^t, y_j^t)}. \quad (1.6.35)$$

En el caso en el que  $M_I^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) < 1$ , el índice indica que con la dotación  $(x_j^t, y_j^t)$  la empresa se sitúa por encima de la frontera o tecnología que existía en el momento  $s$ , y el input, por tanto, se debe de incrementar ( $\theta^s(x_j^t, y_j^t) > 1$ ) para que la empresa fuera una unidad productiva óptima en el periodo  $s$ .

Valores del índice de Malmquist inferiores a la unidad representan, por tanto, un incremento de la productividad e indican que la empresa, que era eficiente en el periodo  $s$ , ha mejorado su productividad en el periodo  $t$  puesto que ha pasado a ser "supereficientes" con respecto a la tecnología existente en el periodo  $s$ . Del mismo modo, valores superiores a la unidad del índice  $M_I^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t)$  representan disminuciones de la productividad y por último, la situación en la que el índice es igual a la unidad, señala que no ha existido cambio productivo en la empresa analizada.

Si la tecnología de referencia, sin embargo, es la del periodo  $t$ , el índice de Malmquist se formula como,

$$M_I^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \frac{\theta^t(x_j^s, y_j^s)}{\theta^t(x_j^t, y_j^t)}. \quad (1.6.36)$$

Al ser la empresa, eficiente en los dos periodos, la distancia del denominador (calculada con 1.6.32) es la unidad. La distancia del numerador, sin embargo, se formula mediante la siguiente relación,

$$\theta^t(x_j^s, y_j^s) = \min\{\theta \mid (\theta x^s, y^s) \in \Psi^t\} = \min\{\theta \mid (\theta x^s) \in X^t(y^t)\}. \quad (1.6.37)$$

Esta distancia puede ser inferior, igual o superior a la unidad y el supuesto de eficiencia técnica en el periodo  $t$  implica que el índice de Malmquist de la ecuación (1.6.36) se reescribe como,

$$M_I^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \theta^t(x_j^s, y_j^s), \quad (1.6.38)$$

donde valores del índice inferiores a la unidad  $M_i^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) < 1$  implican necesariamente que  $\theta^t(x_j^s, y_j^s) < 1$ . Es decir, la empresa  $j$  cuando contaba con la dotación  $(x_j^s, y_j^s)$  era eficiente en el periodo  $s$ ; pero si se considera a esa empresa con esa dotación operando en el periodo posterior  $t$  y por tanto bajo la tecnología existente en  $t$ , la empresa se convertiría en una empresa ineficiente. Es decir, con el paso del tiempo la empresa analizada ha experimentado un incremento en la productividad y con las dotaciones de periodos anteriores, ahora son ineficientes.

Si además en ambos periodos existen rendimientos constantes de escala, se cumple que,

$$[M_I^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) \cdot M_I^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t)]^{1/2} = \frac{\text{Indice de output de Törnqvist}}{\text{Indice de input de Törnqvist}}. \quad (1.6.39)$$

Färe, Grosskopf, Lindgren, y Roos, (1995) fueron los primeros que, suavizando el supuesto de que las empresas que se analizan son eficientes técnicamente y asumiendo que es normal observar una cierta ineficiencia en la mayoría de ellas, reescribieron y estimaron el índice de Malmquist en el sentido de los inputs como,

$$M_I(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \left[ \frac{\theta^t(x_j^s, y_j^s)}{\theta^t(x_j^t, y_j^t)} \times \frac{\theta^s(x_j^s, y_j^s)}{\theta^s(x_j^t, y_j^t)} \right]^{1/2}. \quad (1.6.40)$$

La descomposición del índice introducida por Färe, Grosskopf, Lindgren y Roos (1992, 1995) permite que éste pueda escribirse como,

$$M_I(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \frac{\theta^s(x_j^s, y_j^s)}{\theta^t(x_j^t, y_j^t)} \left( \frac{\theta^t(x_j^s, y_j^s)}{\theta^s(x_j^s, y_j^s)} \times \frac{\theta^t(x_j^t, y_j^t)}{\theta^s(x_j^t, y_j^t)} \right)^{1/2}, \quad (1.6.41)$$

donde, al igual que en el índice de Malmquist orientado hacia los outputs, el ratio exterior al paréntesis mide el cambio que ha experimentado la eficiencia técnica pero en este caso, orientada hacia los inputs. El ratio del paréntesis, sin embargo, indica el cambio en la tecnología que se ha apreciado entre los dos periodos de tiempo.

El análisis del cambio productivo generalmente se realiza para más de dos periodos de tiempo, es por ello que en esos casos hace falta generalizar el índice para varios años. La forma de seleccionar el criterio de generalización nos lleva a las propiedades deseables de un índice (ver pág. 79 y siguientes de Coelli, Prasada Rao y Battese, 1998). En lo que se refiere a la generalización del índice en el tiempo cuando los

datos son de sección cruzada, el principal problema es construir un índice que no sea transitivo. Es decir, si calculamos el cambio productivo del subperiodo  $(t, t+1)$  y el del subperiodo  $(t+1, t+2)$  estamos cambiando la tecnología de referencia en cada subperiodo y aunque estos dos índices se emplean, habitualmente, para comparar el cambio productivo entre el periodo  $t$  y el  $t+2$ ; los resultados son distintos a la obtención del mismo índice directamente con la media geométrica empleando las tecnologías del periodo inicial  $t$  y del periodo final,  $t+2$ .

Una forma de evitar este inconveniente es mantener un periodo de referencia (el periodo inicial o el final) y calcular los índices de cada año con respecto a esa tecnología de referencia (ver Berg, Førsund y Jansen, 1992). Más recientemente, Balk y Althin (1996) han propuesto también un índice transitivo para este tipo de comparaciones multianuales.

#### **1.6.2.2. El Índice de Productividad Total de los Factores de Hicks-Moorsteen**

Este índice se basa en los trabajos de Hicks (1961) y Moorsteen (1961) y, es también denominado como índice de Hicks-Moorsteen (Diewert, 1992).

Usando la misma nomenclatura que hemos utilizado en la construcción del índice de Malmquist, el índice de Hicks-Moorsteen, en el caso en el que la tecnología de referencia sea la del periodo  $t$ , se puede formular como (ver Coelli, Prasada Rao y Battese, 1998; Bjurek, 1996),

$$HM^t = \frac{[\lambda^t(x_j^s, y_j^s) \lambda^t(x_j^t, y_j^t)]}{[\theta^t(x_j^s, y_j^s) \theta^t(x_j^t, y_j^t)]}. \quad (1.6.42)$$

Es decir el índice de la ecuación (1.6.42) es el ratio entre el índice de Malmquist de los outputs y el de los inputs cuando la tecnología de referencia es la del periodo  $t$ . Es decir,

$$HM^t = \frac{M_o^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t)}{M_I^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t)}. \quad (1.6.43)$$

Del mismo modo se puede obtener un índice de Malmquist de productividad total de los factores considerando  $s$  la tecnología de referencia

$$HM^s = \frac{M_o^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t)}{M_I^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t)}, \quad (1.6.44)$$

y usando índices de Törnqvist basados en funciones traslog, también su media geométrica cumple la siguiente relación,

$$[HM^t(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) \cdot HM^s(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t)]^{1/2} = \frac{\text{I. de outputs de Törnqvist}}{\text{I. de inputs de Törnqvist}}. \quad (1.6.45)$$

Bjurek (1996) propuso este índice, especialmente, para evaluar la productividad en situaciones en las que la tecnología subyacente exhibe rendimientos variables de escala; ya que en este caso el índice de productividad de Malmquist mide incorrectamente el cambio productivo (Grifell-Tatjé y Lovell, 1995). Una ventaja adicional del índice de Hicks-Moorsteen con respecto al índice de productividad de Malmquist, es que no es necesaria realizar la elección, a veces arbitraria, de analizar la productividad bien mediante un índice orientado hacia los outputs o bien orientado hacia los inputs, puesto que en su composición se utilizan ambos.

## Capítulo 2

# Proceso de Estimación de la Eficiencia Técnica y la Productividad mediante el Análisis Envolverte de Datos

### 2.1 Introducción

En este capítulo se analiza, con un mayor detalle, la estimación de la eficiencia técnica mediante el análisis de la envolvente de los datos (DEA). El inconveniente primordial de esta técnica es, que todas las desviaciones estimadas respecto a la dotación óptima de referencia, se consideran ineficiencia técnica. Es decir, la frontera o función de producción que DEA modeliza no tiene en cuenta el carácter estocástico de la producción puesto que el modelo carece de un término aleatorio que incorpore los posibles shocks exógenos que pueden afectar a las empresas. En contraposición a las fronteras estocásticas de los métodos paramétricos, este tipo de frontera se define como determinística.

La mayoría de las aplicaciones que utilizan al DEA como la técnica de estimación

de la eficiencia técnica no realizan ningún tipo de análisis estadístico en sus resultados basándose en la naturaleza determinística del modelo. Sin embargo, no se debe de olvidar que la eficiencia se mide en relación con los valores de una estimación de la desconocida frontera de producción y puesto que esta estimación se obtiene de una muestra finita, las correspondientes medidas de eficiencia son, de hecho, sensibles a la variabilidad de la muestra utilizada para la estimación.

El objetivo de este capítulo es modificar el análisis determinístico del DEA de modo que tenga en cuenta la heterogeneidad no observada de las empresas. Mediante la incorporación de un procedimiento de inferencia estadístico al DEA convencional, será posible comparar los resultados que se obtienen con el análisis DEA tradicional y los que se infieren de la incorporación del análisis estadístico.

Al derivarse las estimaciones DEA de la eficiencia técnica de un proceso no paramétrico, sus propiedades estadísticas no son tan sencillas de deducir como en el caso de los métodos paramétricos. Bajo la imposición de ciertas condiciones de regularidad, la ineficiencia estimada con DEA se ha probado consistente (Korostelev, Simar y Tsybakov, 1995) y pese a que el modelo carece de propiedades estocásticas, estas estimaciones pueden sufrir, como ocurre en todo procedimiento de estimación, de una cierta variabilidad muestral.

El análisis de la sensibilidad de la estimación a la muestra empleada se efectúa, normalmente, mediante contrastes de hipótesis o mediante la construcción de intervalos de confianza. En el caso de la aplicación que presentamos en este trabajo, calcular los intervalos de confianza para las estimaciones no es un procedimiento inmediato ni

sencillo de realizar puesto que la distribución muestral de la eficiencia cuando los procesos productivos emplean múltiples inputs (que es nuestro caso) es desconocida. En estas situaciones, la aplicación de un proceso bootstrap es la única herramienta con la que, hasta el momento, es posible tanto aproximar la distribución muestral como analizar las propiedades estadísticas de la eficiencia que hemos estimado previamente con DEA.

Un aspecto interesante en la estimación de la eficiencia técnica es el estudio de la productividad y su evolución en el tiempo. La facilidad de computación de las medidas de eficiencia técnica con el análisis DEA facilitó la incorporación del índice de Malmquist a un entorno de productividad. Este índice no sólo permite estimar el cambio productivo sino también investigar en las fuentes que lo han originado. El índice de Malmquist consiste en ratios de funciones distancias estimadas con el DEA y, al igual que ocurre con la mayoría de los trabajos del DEA que efectúan un análisis de la eficiencia, los trabajos que construyen el índice de Malmquist mediante estimaciones del DEA tampoco suelen presentar ningún tipo de análisis estadístico.

El objetivo de esta sección es la comparación, tanto en el análisis de la eficiencia técnica como en el índice de Malmquist, de la estimación DEA tradicional con aquella en la que se incorpora un análisis de inferencia. Con este fin, en la sección siguiente se extiende el procedimiento de estimación DEA a la estimación de la eficiencia en las diversas tecnologías. Se desarrolla, también, un índice de rendimientos de escala y se investigan las diferentes fuentes de la eficiencia técnica que DEA permite analizar. En la sección III se formulan las propiedades estadísticas de las estimaciones de la eficiencia técnica. La sección IV analiza la construcción de intervalos de confianza de los estimadores mediante bootstrap. En la sección V se describe la estimación del

índice de Malmquist y su construcción de intervalos de confianza, también mediante bootstrap. Por último, la sección VI ofrece una aplicación práctica a los aeropuertos españoles de los resultados teóricos expuestos en las secciones anteriores. La principal aportación de esta aplicación es la infrecuente comparación entre el análisis DEA determinístico y el análisis DEA estocástico. La estimación se divide en dos partes, en la primera presentamos el análisis del DEA tradicional de eficiencia técnica y cambio productivo y en la segunda parte incorporamos el análisis estadístico de ambas variables mediante la aplicación de los procedimientos bootstrap expuestos en las secciones anteriores. La inferencia estadística permite construir intervalos de confianza para las estimaciones del DEA y observar como aeropuertos que el DEA tradicional consideraba eficientes pueden ser tan ineficientes como aeropuertos que en ese mismo análisis se catalogaban como ineficientes. Conclusiones parecidas pueden ser derivadas de los índices de productividad, donde, en algunos casos, las mejoras y las disminuciones en la productividad estimados con el DEA tradicional no son significativos. Esto ocurre, especialmente, en algunos de los índices en los que se descompone el índice de Malmquist.

## **2.2 El DEA y la Estimación de la Eficiencia Técnica**

Tal y como ya se ha visto en el capítulo anterior, el procedimiento de estimación de la eficiencia técnica empleando métodos no paramétricos, requiere la formulación de unos supuestos que debe de cumplir el conjunto de posibilidades de producción  $\Psi$ . En el caso del DEA estos axiomas fueron definidos con los supuestos (A1-A4) del capítulo anterior. Con el objetivo de adaptarse a la realidad económica que se quiere analizar,

en algún caso es posible la modificación de estos supuestos. La proposición (A4), que caracterizaba los rendimientos de escala, es un ejemplo del poder de adaptación del modelo a las distintas situaciones que puede presentar una tecnología.

La primera estimación efectuada con el DEA fue la de Charnes, Cooper y Rhodes (1978)<sup>1</sup>, quienes estimaron la eficiencia imponiendo rendimientos de escala constantes en todas las unidades productivas. En trabajos posteriores este supuesto se ha ido relajando y ha posibilitado la estimación con todo tipo de rendimientos de escala.

### 2.2.1 El DEA con Rendimientos Constantes de Escala

En el capítulo anterior hemos señalado los supuestos con los que Charnes, Cooper y Rhodes (1978) caracterizaron la tecnología: rendimientos constantes de escala, eliminación gratuita de inputs y outputs en sentido estricto y los supuestos (A1) y (A2) del capítulo anterior. También hemos estimado en (1.5.1) el conjunto de posibilidades de producción,  $\Psi_{CCR}$ , e indicado que esta estimación introduce en su construcción un sesgo negativo (Banker 1993), de forma que  $\widehat{\Psi}_{CCR} \subset \Psi$ .

La estimación del subconjunto de inputs factibles se formuló en (1.5.8), la de la isocuanta en (1.5.9) y la de la eficiencia técnica orientada hacia los inputs en (1.5.10),

En términos prácticos, la resolución de la ecuación (1.5.10) se reduce al siguiente problema de programación matemática,

---

<sup>1</sup>Anteriormente a esta aplicación, los métodos de programación matemática ya habían sido propuestos para obtener la eficiencia en Boles (1966) y Afriat (1972)

$$\begin{aligned}
& \max_{s.a.u,v} \left( \frac{u'y_j}{v'x_j} \right) \\
& u'y_j/v'x_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, N \\
& u, v \geq 0
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

donde  $u$  es un vector de ponderaciones de los outputs de tamaño  $(Q \times 1)$  y  $v$  es un vector de ponderaciones de los inputs de tamaño  $(P \times 1)$ . La estimación de la distancia de Farrell en el programa (2.2.1) representa la obtención de las ponderaciones óptimas del ratio de todos los outputs con respecto a todos los inputs, o lo que es lo mismo, calcula los valores de  $u$  y de  $v$  que maximizan la eficiencia de la empresa  $j$ . El programa, tal y como está planteado en (2.2.1), tiene infinitas soluciones y para delimitarlo a una única solución hay que incluir la restricción:  $v'x_j = 1$ . El problema, modificado de ese modo, es entonces,

$$\begin{aligned}
& \max_{s.a.\mu,v} \mu'y_j \\
& v'x_j = 1 \\
& \mu'y_j - v'x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, N \\
& \mu, v \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Una formulación equivalente a (2.2.2) es su transformación dual (definida ya en 1.5.11). El programa dual, formulado de nuevo en la siguiente expresión, es la forma más extendida e intuitiva de presentar la estimación de la eficiencia técnica.

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}_{CCR} &= \min_{s.a.\theta,\gamma} \theta \\
&- y_j + Y\gamma \geq 0 \\
&\theta x_j - X\gamma \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \\
&\gamma \geq 0
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Donde  $X$ , es la matriz de inputs de tamaño  $(P \times N)$ ,  $Y$  es la matriz de outputs de dimensión  $(Q \times N)$  y  $\gamma$  es el vector intensidad de magnitud  $(N \times 1)$ .

$\widehat{\theta}_{CCR}$  es el escalar que, para la empresa  $j$ -ésima, estima la máxima contracción equiproporcional en las cantidades de todos sus inputs. Su valor siempre es menor o igual que la unidad,  $0 < \widehat{\theta}_{CCR} \leq 1$ , representando, una mayor eficiencia o una menor reducción de inputs, a medida que su valor se acerca a la unidad. El programa (2.2.3) debe ser resuelto  $N$  veces, una para cada empresa de la muestra, y sus resultados son equivalentes a la eficiencia técnica de Farrell orientada hacia los inputs.

El sesgo estimado en el conjunto de producción se transmite también a todas las estimaciones efectuadas con el DEA, incluidas las medidas de eficiencia técnica, de modo que:

$$\theta \leq \widehat{\theta}_{CCR}. \tag{2.2.4}$$

## 2.2.2 El DEA con Rendimientos Variables de Escala

El supuesto de que todas las empresas están operando en una escala óptima (rendimientos constantes de escala) puede ser un supuesto demasiado restrictivo en situaciones

de competencia imperfecta. Banker, Charnes y Cooper (1984) flexibilizaron esta restricción y desarrollaron una nueva extensión del DEA para permitir rendimientos variables de escala siendo, esta terminología, aplicable a fronteras en las que se permite que existan, simultáneamente, tramos de rendimientos constantes, crecientes y decrecientes. La estimación del conjunto de posibilidades de producción,  $\widehat{\Psi}_{BCC}$ , en este caso, modifica la restricción del vector intensidad para restringir las combinaciones de inputs de empresas eficientes a este tipo de rendimientos.  $\widehat{\Psi}_{BCC}$  se estima entonces con,

$$\widehat{\Psi}_{BCC} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{p+q} \mid x \geq \sum_{j=1}^N \gamma_j x_j, \quad y \leq \sum_{j=1}^N \gamma_j y_j, \quad \sum_{j=1}^N \gamma_j = 1, \quad \gamma_j \geq 0\}. \quad (2.2.5)$$

Comparando (2.2.5) con la obtenida bajo con rendimientos constantes de escala en (??), se cumple que

$$\widehat{\Psi}_{BCC} \subset \widehat{\Psi}_{CCR}. \quad (2.2.6)$$

Del mismo modo que en la tecnología definida con rendimientos constantes, el subconjunto estimado de inputs factibles cuando los rendimientos son variables, se define como:

$$\widehat{X}(y)_{BCC} = \{x \in \mathbb{R}_+^p \mid (x, y) \in \widehat{\Psi}_{BCC}\}. \quad (2.2.7)$$

La estimación de su isocuanta,

$$\widehat{ISO}_{X(y)_{BCC}} = \{x \in \widehat{X}(y)_{BCC} \mid \theta x \notin \widehat{X}(y)_{BCC} \quad \forall \theta < 1\}. \quad (2.2.8)$$

Y por último, la función de distancia de Farrell

$$\widehat{\theta}(x, y)_{BCC} = \min\{\theta \mid \theta x \in \widehat{Iso}_{X(y)_{BCC}}\} \quad \forall \theta \leq 1. \quad (2.2.9)$$

En términos del programa dual, el problema que resuelve la eficiencia técnica incluyendo la nueva restricción de rendimientos variables de escala es el siguiente,

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_{BCC} &= \min_{s.a.\theta, \gamma} \theta \\ &- y_j + Y\gamma \geq 0 \\ &\theta x_j - X\gamma \geq 0 \\ &\sum_{j=1}^N \gamma_j = 1, \quad j = 1, \dots, N \\ &\gamma \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Si comparamos la eficiencia estimada con rendimientos constantes en (2.2.3) con la estimada ahora en (2.2.10) observamos que  $\widehat{\theta}_{BCC} \geq \widehat{\theta}_{CCR}$ . Es decir, las mismas empresas en un entorno de rendimientos variables son, o más, o igual, de eficientes que con rendimientos constantes de escala. Esto se debe a que la introducción de la nueva restricción afecta al proceso de comparación entre las empresas. Con rendimientos variables las empresas ineficientes se comparan sólo con las empresas de un tamaño similar, sin embargo, con rendimientos constantes, la comparación entre empresas se produce independientemente de su tamaño, de modo que al contar con empresas de referencia menos similares a las analizadas es posible que en rendimientos constantes se den reducciones de inputs superiores (empresas menos eficientes) a los que se dan con rendimientos variables.

En la parte derecha del Gráfico 2.1. se muestra, para un output y un input, las diferentes fronteras que se obtienen según se estime la tecnología con rendimientos de escala constantes o variables. Las 6 empresas de la muestra considerada (A, B, C, D, E, F) aparecen representadas con un punto. En el caso de rendimientos constantes la frontera estimada se representa con una línea continua y en ella aparecen dos empresas eficientes: D y E.

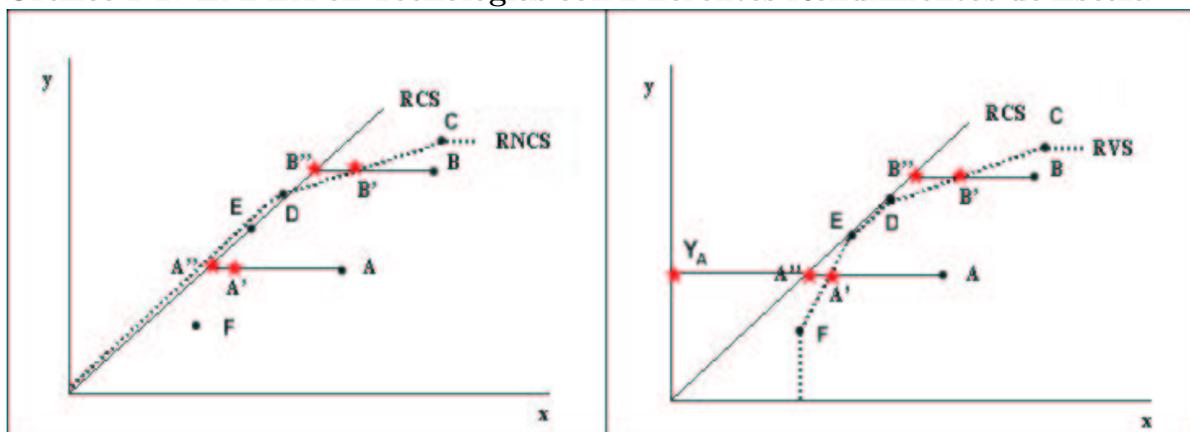
Si se estima la misma industria considerando que la tecnología no presenta rendimientos constantes en todos sus puntos, y se permite por tanto, rendimientos crecientes, constantes y decrecientes (es decir, lo que Banker, Charnes y Cooper (1984) denominaron rendimientos variables), la frontera que el DEA estima es la línea punteada y está formada por dos empresas más (C, D, E, F) que en el caso de rendimientos constantes.

Comparando las medidas de eficiencia obtenidas se observa que, según sea la tecnología considerada, en el caso de algunas empresas, esas medidas son diferentes. La parte coincidente de las dos fronteras es aquella en la que hay rendimientos constantes de escala. En el resto de puntos, la frontera con RVS estima a las empresas de la muestra como unidades más eficientes que bajo rendimientos constantes de escala. Es decir, las posibles reducciones de inputs son iguales o mayores bajo rendimientos constantes que bajo rendimientos variables:  $\hat{\theta}_{RVS} \geq \hat{\theta}_{RCS}$ <sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>A lo largo del trabajo y según se considere más adecuado, se denotaran las medidas de eficiencia bajo la denominación de los autores del modelo o, alternativamente, bajo la denominación de los rendimientos de escala en los que se han estimado. Es decir:  $\hat{\theta}_{RVS} \equiv \hat{\theta}_{BCC}$  y  $\hat{\theta}_{RCS} \equiv \hat{\theta}_{CCR}$ .

Gráfico 2.1. El DEA en Tecnologías con Diferentes Rendimientos de Escala



### 2.2.3 El DEA y la Eficiencia de Escala

Como hemos visto, la definición de una determinada tecnología bajo rendimientos variables de escala, conduce a una estimación de medidas de eficiencia técnica diferentes a la eficiencia en situaciones en las que todas las empresas hubieran estado operando en una escala óptima (rendimientos constantes de escala). La estimación con rendimientos variables supone una tecnología más flexible al permitir, en la frontera, tramos con diferentes rendimientos y, en general, se la presupone como la frontera presente o a corto plazo. Sin embargo la estimación con rendimientos constantes se considera generalmente como la frontera de referencia en la que las empresas intentan situarse a largo plazo. Esta visión de los rendimientos de escala permite considerar a la diferencia entre sus estimaciones de eficiencia respectivas, como una nueva clase de ineficiencia denominada ineficiencia de escala.

La constatación de que una fuente de la ineficiencia puede ser originada por la

escala de operaciones de la empresa analizada permite realizar la primera descomposición de las fuentes generadoras de ineficiencia. La eficiencia obtenida bajo rendimientos de escala constantes se puede descomponer, por tanto, en una medida de eficiencia técnica pura, que mide la ineficiencia que sufren las empresas en el presente, y en una medida de eficiencia de escala que mide la ineficiencia que las empresas experimentan por no producir en su escala óptima. Es decir,

$$\widehat{\theta}_{CRS} = \widehat{\theta}_{VRS} \cdot ES, \quad (2.2.11)$$

donde  $ES$  es la medida de eficiencia de escala que se obtiene mediante la siguiente relación,

$$ES = \frac{\widehat{\theta}_{RCS}}{\widehat{\theta}_{RVS}} \quad (2.2.12)$$

El índice de escala, por tanto, tiene un valor igual a  $0 < ES \leq 1$ . Cuanto más se acerque el índice a uno significa que el grado de ineficiencia de escala que sufre la empresa analizada es más pequeño. En el caso en que la empresa tenga la misma medida de eficiencia técnica ( $\widehat{\theta}_{CRS}$ ) bajo rendimientos constantes que bajo rendimientos variables ( $\widehat{\theta}_{RVS}$ ), se cumple que  $ES = 1$  y significa que la frontera de referencia es común en ambas tecnologías. Fijándonos en el Gráfico 2.1, en las empresas D y E en la parte derecha del gráfico su índice de escala es la unidad y se observa que el tramo de referencia de las dos tecnologías es el mismo. Sin embargo cuando la empresa de referencia se encuentra situada en una escala no óptima su índice de eficiencia técnica ( $\widehat{\theta}_{RVS}$ ) es superior (la empresa es más eficiente bajo este supuesto) al obtenido para rendimientos constantes de escala ( $\widehat{\theta}_{RCS}$ ). Esta situación implica que el índice de escala formulado en la relación (2.2.12) es menor que la unidad. En el

mismo gráfico, el resto de empresas (A, B, C, y F) tienen un índice de escala inferior a la unidad).

Analíticamente, los valores de eficiencia técnica de, por ejemplo, la empresa A, son

$$\widehat{\theta}_{CRSA} = \frac{Y_{AA''}}{Y_{AA}}, \quad \widehat{\theta}_{VRS_A} = \frac{Y_{AA'}}{Y_{AA}},$$

$$ES_A = \frac{\widehat{\theta}_{CRSA}}{\widehat{\theta}_{VRS_A}} = \frac{Y_{AA''}}{Y_{AA'}}.$$

Siguiendo la descomposición formulada en (2.2.11), observamos que la ineficiencia de la empresa A se origina tanto por una ineficiencia pura como por una ineficiencia de escala. La ineficiencia estimada en  $\widehat{\theta}_{VRS_A} < 1$ , podemos considerar que es una ineficiencia que se puede resolver en el corto plazo. Además, al estar produciendo en una escala diferente a la que lo puede hacer una empresa de sus características que es eficiente en una escala óptima, esta empresa sufre, además, una ineficiencia de escala añadida,  $ES_A$ . Es decir,

$$\widehat{\theta}_{CRSA} = \widehat{\theta}_{VRS_A} \cdot ES_A = \frac{Y_{AA'}}{Y_{AA}} \cdot \frac{Y_{AA''}}{Y_{AA'}}. \quad (2.2.13)$$

## 2.2.4 Criterios de Identificación de Rendimientos de Escala

La medida de eficiencia de escala ( $ES$ ), cuando es inferior a la unidad, nos informa que la empresa analizada produce en una escala diferente a la óptima, pero no nos

indica en qué tipo de escala produce. Es decir, no nos informa de si el tramo de la frontera de rendimientos variables con el que calculamos la medida relativa de eficiencia, tiene rendimientos crecientes o decrecientes.

Hay diferentes criterios para identificar los rendimientos de escala (ver Vanden Eeckaut, 1997) y los resultados obtenidos pueden ser diferentes dependiendo de si se elige la orientación input o output (Färe, Grosskopf y Lovell, 1994: pag 122-123). Los criterios de caracterización más importantes son: el propuesto por Banker, (1984) y refinado en Banker Chang y Cooper (1996), Banker Bardhan y Cooper (1996) y Zhu y Shen (1995) que consiste en analizar el vector intensidad óptimo en una tecnología bajo rendimientos de escala constante, el diseñado por Banker Charnes y Cooper, (1984) que analiza el signo del precio sombra de la restricción de convexidad o el propuesto por Färe, Grosskopf y Lovell, (1985) que definimos más adelante. Apenas se ha utilizado, sin embargo, el procedimiento obtenido por Førsund y Hjalmarsson (1979) que evalúa también la ineficiencia de escala. Banker (1996) propuso contrastes de hipótesis semiparamétricos para evaluar los rendimientos de escala y Simar y Wilson (2002) han aplicado un procedimiento bootstrap con el mismo objetivo.

En la práctica, el criterio más empleado ha sido el propuesto en Färe, Lovell y Grosskopf (1985) y tiene la ventaja, con respecto a alguno de los anteriores que la solución óptima es única. Kerstens y Vanden Eeckaut (1998) han generalizado este criterio para que se pueda aplicar a la estimación del FDH. En su formulación el criterio se basa en la bondad de ajuste y permite, al comparar los resultados del DEA con el FDH, observar el impacto del supuesto de convexidad en los rendimientos de escala.

El método requiere que se calculen, para cada empresa, las medidas de eficiencia técnica con respecto a tres tecnologías con rendimientos de escala diferentes. Hemos visto como calcular la eficiencia con rendimientos constantes (2.2.3) y con rendimientos variables (2.2.10) y en lo que respecta a una tercera medida hay dos posibles opciones, una es obtenerla en una tecnología en la que todas las empresas operan con rendimientos no crecientes de escala, y la otra es, calcularla cuando las empresas operan con rendimientos no decrecientes de escala. Vamos a definir seguidamente su estimación, en ambos casos, mediante la programación lineal.

Como hemos indicado anteriormente, el supuesto de rendimientos de escala en una tecnología afecta a la restricción del vector intensidad, es decir, al modo en que se pueden combinar las empresas eficientes para conformar la frontera. Si la elección es formular la frontera bajo rendimientos no crecientes de escala (RNCS), el problema que se requiere calcular es el siguiente,

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_{RNCS} &= \min_{s.a.\theta,\gamma} \theta \\
 &- y_j + Y\gamma \geq 0 \\
 &\theta x_j - X\gamma \geq 0 \\
 &\sum_{j=1}^N \gamma_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, N \\
 &\gamma \geq 0,
 \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

donde la inclusión en (2.2.14) de la restricción  $\sum_{j=1}^N \gamma_j \leq 1$  circunscribe la frontera a empresas óptimas cuyos rendimientos sean no crecientes. En esta frontera pueden, entonces, coexistir tramos con rendimientos constantes y decrecientes, pero como su

nombre indica, no permiten que ninguna de las empresas óptimas tenga rendimientos crecientes.

Un ejemplo gráfico de la frontera que resulta de la definición de este tipo de rendimientos se muestra en la parte izquierda del Gráfico 2.1. En él se representa con la línea punteada la estimación de la frontera de una tecnología con rendimientos no crecientes de escala para la misma muestra de 5 empresas previamente analizada. Las empresas eficientes son, en este caso, (C, D y E), el resto de unidades productivas, son ineficientes. Comparando esta estimación con la obtenida con rendimientos de escala constante, se observa que las empresas, (D y E) que se sitúan en la parte común de las dos fronteras son eficientes en las dos tecnologías, pero la empresa C que bajo rendimientos constantes era ineficiente, con estos rendimientos se convierte en eficiente. En la parte derecha se representa la frontera con rendimientos variables de escala y se observa que esta empresa también está situada en la frontera en este caso.

En la parte izquierda del gráfico se advierte, además, la relación que existe entre los conjuntos de posibilidades de producción de las tecnologías,  $\widehat{\Psi}_{RVS} \subseteq \widehat{\Psi}_{RNCS} \subseteq \widehat{\Psi}_{RCS}$ , y puesto que cuanto más lejos esté situada una empresa de su frontera de referencia más pequeño será el valor de su medida de eficiencia, la relación que existe entre sus respectivas medidas de eficiencia es  $\widehat{\theta}_{RVS} \geq \widehat{\theta}_{RNCS} \geq \widehat{\theta}_{RCS}$ .

Por otra parte, la definición de la tecnología bajo rendimientos no decrecientes de escala (RNDS) supone la situación contraria. En este caso no se permiten que existan tramos de la frontera con rendimientos decrecientes y el programa que se debe resolver es el siguiente,

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}_{RNDS} &= \min_{s.a.\theta,\gamma} \theta \\
&- y_j + Y\gamma \geq 0 \\
&\theta x_j - X\gamma \geq 0 \\
&\sum_{j=1}^N \gamma_j \geq 1, \quad j = 1, \dots, N \\
&\gamma \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

donde ahora la restricción del vector intensidad que se incluye para estimar la frontera  $\sum_{j=1}^N \gamma_j \geq 1$ .

En el ejemplo gráfico 2.2.2 la frontera con estos rendimientos no está señalada, pero fijándonos en el gráfico de la parte derecha, las empresas eficientes en este caso serían (F, E y D). En el punto D, como la frontera no puede tener rendimientos decrecientes, continuaría con rendimientos constantes.

Comparando los conjuntos de posibilidades de producción y las medidas de eficiencia de las cuatro tecnologías analizadas tenemos que

$$\widehat{\Psi}_{RVS} \subseteq \widehat{\Psi}_{RNDS} \subseteq \widehat{\Psi}_{RCS} \subseteq \Psi. \tag{2.2.16}$$

Y trasladándolas a las medidas de eficiencia:

$$\widehat{\theta}_{RVS} \geq \widehat{\theta}_{RNDS} \geq \widehat{\theta}_{RCS} \geq \theta. \tag{2.2.17}$$

Un ejemplo de los diferentes valores de ineficiencia que se obtienen para las cuatro tecnologías lo observamos con el punto A comparando las dos secciones del Gráfico 2.1., donde las medidas de eficiencia con respecto a cada tecnología son las siguientes

$$\widehat{\theta}_{CRS_A} = \widehat{\theta}_{RNCS_A} = \frac{Y_{AA''}}{Y_{AA}} < \widehat{\theta}_{VRS_A} = \widehat{\theta}_{RNDS_A} = \frac{Y_{AA'}}{Y_{AA}}. \quad (2.2.18)$$

y donde se observa cómo se mantienen las relaciones expuestas en (2.2.17) para las medidas de eficiencia.

Las diferentes estimaciones de la eficiencia se han efectuado para identificar los rendimientos de escala con el siguiente criterio propuesto por Färe, Grosskopf y Lovell (1985):

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_{RCS} = \widehat{\theta}_{RVS} = \widehat{\theta}_{RNDS} = \widehat{\theta}_{RNCS} &\Leftrightarrow \text{Rendimientos Constantes} \\ \widehat{\theta}_{RCS} = \widehat{\theta}_{RNDS} < \widehat{\theta}_{RVS} = \widehat{\theta}_{RNCS} &\Leftrightarrow \text{Rendimientos Derecientes} \\ \widehat{\theta}_{RCS} = \widehat{\theta}_{RNCS} < \widehat{\theta}_{RVS} = \widehat{\theta}_{RNDS} &\Leftrightarrow \text{Rendimientos Crecientes} \end{aligned}$$

La aplicación del criterio es inmediata cuando se tienen estimadas las diferentes medidas de eficiencia. Fijándonos de nuevo en la empresa A y la relación entre sus diferentes medidas ya señalada en (2.2.18), observamos que según el criterio arriba indicado, la empresa A está situada en la zona de rendimientos de escala crecientes.

La empresa B, tal y como ocurría en A, tampoco produce en la escala óptima puesto que su medida de eficiencia con rendimientos variables es menor que la que se obtiene bajo rendimientos constantes de escala. Si aplicamos el criterio anterior para conocer en que tipo de rendimientos de escala se sitúa, vemos, sin embargo, que la

relación entre sus medidas de eficiencia es:  $\hat{\theta}_{CRS_B} = \hat{\theta}_{RND_S_B} < \hat{\theta}_{RNC_S_B} = \hat{\theta}_{VRS_B}$ , y por tanto, está localizada en el tramo de rendimientos decrecientes de escala.

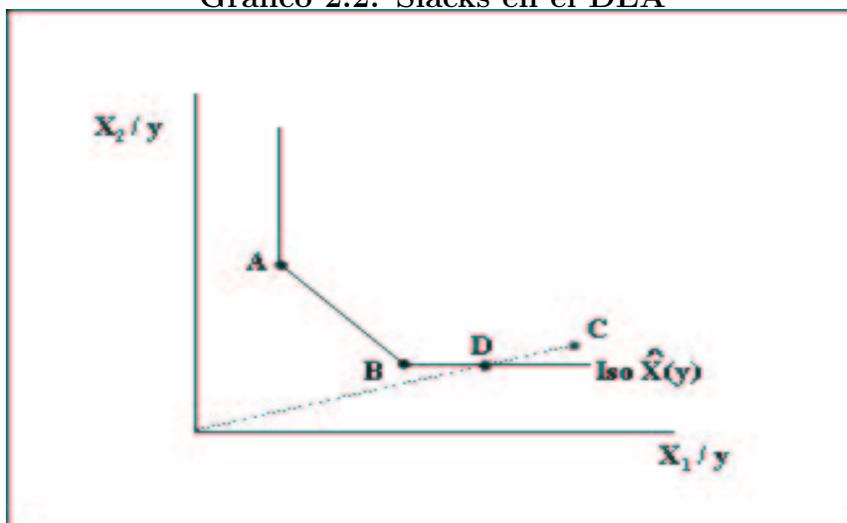
En ambos casos se advierte que no era necesario utilizar las cuatro medidas, simplemente con una cualquiera de las dos últimas formas de estimar la eficiencia expuestas en (2.2.14) y (2.2.15) más las medidas bajo rendimientos constantes y variables, hubieramos obtenido los mismos resultados.

### 2.2.5 El Problema de los Slacks y la Congestión en el DEA

En este capítulo, los supuestos con los que hemos definido la tecnología, han sido siempre los mismos excepto el supuesto de rendimientos de escala que se ha ido modificando a nuestra conveniencia. Otro de los supuestos que puede interesarnos su alteración es el de eliminación gratuita en sentido estricto. Vamos a estudiar primero cómo afecta a la forma de la frontera y en segundo lugar, vamos a analizar en qué casos nos interesa modificarlo.

Como ya hemos indicado, la frontera que construye el DEA sirve de referencia para medir la ineficiencia de las empresas que se sitúan por debajo, pero esta frontera no sólo se compone de las empresas muestrales eficientes sino que, también van a ser unidades de referencia, todas las combinaciones convexas de los inputs y outputs de esas empresas eficientes. El supuesto de eliminación gratuita en su forma estricta (tal y como ha sido definida en todos los programas anteriores) nos permite producir la misma cantidad de output utilizando una cantidad mayor de cualquier input, lo cual, en el caso de la empresa más alejada del origen de coordenadas que no tiene a su

Gráfico 2.2. Slacks en el DEA



derecha ninguna otra empresa con quien combinarse, hace que produciendo el mismo output pueda incrementar, hacia la derecha, su input hasta el infinito y, gráficamente, ese tramo de la frontera se convierte en una línea paralela a los ejes. Sin embargo, ajustar el concepto de empresas eficientes, a todas aquellas que se localizan en esa parte paralela a los ejes de la frontera, es cuando menos discutible.

El Gráfico 2.2. muestra este problema para el caso de dos inputs y un output. Supongamos que tenemos tres empresas (A, B y C). La frontera viene determinada por las empresas A y B y todas las combinaciones lineales de sus inputs que producen el mismo output. A la derecha de B no hay más empresas y la frontera se convierte en una línea paralela al eje de abscisas y lo mismo ocurre en la parte superior de A con el eje de coordenadas. La empresa C, sin embargo, es ineficiente y el DEA determina, como su empresa óptima de referencia, la reducción de inputs que muestra el punto D. Este punto, perteneciente a la isocuantas a pesar de ser considerado eficiente, gráficamente se observa cómo realmente no lo es, puesto que puede ser reducido el

exceso de input 1 hasta el punto B, sin que se necesite modificar el input 2 y aún así se sigue produciendo el mismo output.

Algunos autores (Ali y Seiford, 1993) han propuesto solucionar este inconveniente mediante una estimación en dos pasos. El primer paso es la estimación habitual del análisis DEA y el segundo paso es, una nueva estimación, que maximice la suma de los excesos de inputs (también denominados slacks) asegurando con esta maximización que las empresas se sitúen en la parte económica de la frontera de producción. Los principales inconvenientes del método con dos pasos es que la segunda estimación no es invariante a las unidades de medida y que se estima, además, no el punto eficiente más cercano al estimado en el primer paso, sino el más lejano.

La modificación del supuesto de eliminación gratuita de inputs en sentido estricto a su versión más débil provoca un tramo en la frontera el que se permite la existencia de congestión. El supuesto de congestión se refiere a la posibilidad de que haya empresas que tengan productividades marginales negativas en alguno de sus inputs. Es decir, la congestión se produce en la economía cuando es posible que incrementando las cantidades de un factor productivo o se disminuye la producción total o, si se quiere mantener la producción, se tengan que incrementar las cantidades de los otros inputs.

Al igual que en casos anteriores, la gran flexibilidad que se permite en las restricciones del programa lineal resuelto por el DEA, posibilita la obtención de la eficiencia técnica bajo congestión (ver Dervaux, Kerstens, Vanden Eeckaut, 1998). Normalmente el problema de congestión se estudia bajo los rendimientos variables de escala debido a la visión de su frontera como una tecnología a corto plazo.

Los supuestos con los que se define la tecnología en el caso en el cual tengamos

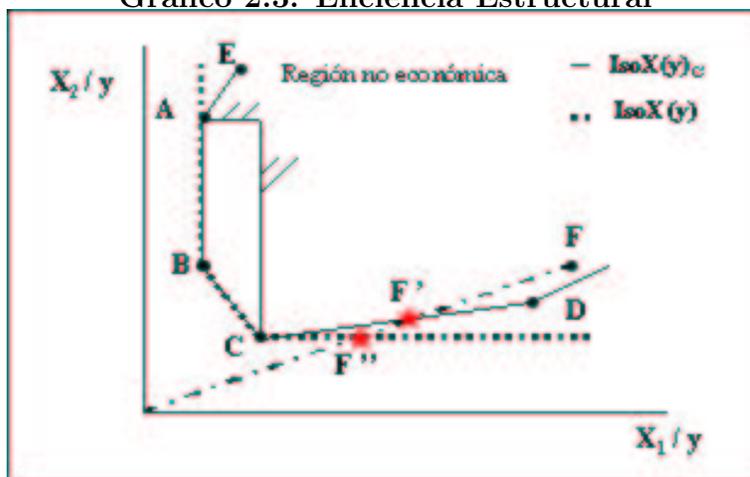
un problema de congestión, son los supuestos (A1) y (A2), los rendimientos variables de escala y el supuesto de eliminación gratuita de inputs en sentido débil y esto, se instrumentaliza en el DEA, mediante el siguiente programa matemático,

$$\begin{aligned}
 \widehat{\theta}_{VRS}^C &= \min_{s.a.\theta,\gamma} \theta \\
 -y_i + Y\gamma &\geq 0 \\
 \mu\theta x_i - X\gamma &= 0 \\
 \sum_{j=1}^N \gamma_j &= 1, \quad j = 1, \dots, N \\
 \gamma &\geq 0, \quad 0 < \mu \leq 1.
 \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Al ser (2.2.19) un programa no lineal en los parámetros tenemos que transformarlo en uno lineal. Esto lo realizamos, en un primer paso, dividiendo las tres primeras restricciones entre  $\mu$  y en un segundo paso, efectuando un cambio de variable de modo que ( $\gamma'_j = \gamma_j/\mu$ ). Tras su reconversión, la resolución del problema, ahora ya lineal, necesita por último que se añada (Färe, Grosskopf y Lovell, 1985) la siguiente restricción: ( $1/\mu = 1$ ).

En el Gráfico 2.3. se comparan las fronteras de producción con y sin congestión. La isocuanta, estimada bajo rendimientos variables y con eliminación gratuita en sentido débil, es la representada en el gráfico con una línea continua,  $Iso_{X(y)_C}$ . Esta frontera, obtenida con dos inputs y un output, está formada por las combinaciones convexas de las empresas que son eficientes (E, A, B, C y D). La frontera sin congestión se denota con la línea punteada y la denominamos,  $Iso_{X(y)}$ . La congestión se presenta a partir del punto C para el factor  $x_1$  y a partir del punto A en el caso del factor  $x_2$

Gráfico 2.3. Eficiencia Estructural



que son los puntos respectivos donde las fronteras dejan de ser comunes y, en el caso de  $IsoX(y)_C$ , define la región no económica (o lugar geométrico donde se produce la congestión).

### 2.2.6 El DEA y la Eficiencia Estructural

Normalmente una empresa es eficiente estructuralmente cuando opera en la región no congestionada de la economía (ver Dervaux, Kerstens, Vanden Eeckaut, 1998). Este tipo de eficiencia nos permite considerar, al igual que hacíamos con la ineficiencia de escala, otra de las posibles fuentes de la ineficiencia de una empresa, puesto que, una indicación de la eficiencia estructural ( $EE$ ) se puede obtener comparando la eficiencia obtenida en una producción con rendimientos variables de escala y eliminación gratuita de inputs en sentido estricto ( $\hat{\theta}_{VRS}$ ) con la obtenida en una tecnología definida también con rendimientos variables, pero con eliminación gratuita de inputs en sentido débil ( $\hat{\theta}_{VRS}^C$ ). Matemáticamente expresaríamos esa relación como:

$$EE = \frac{\widehat{\theta}_{VRS}}{\widehat{\theta}_{VRS}^C} \quad (2.2.20)$$

Por construcción, esta medida de eficiencia es siempre menor o igual a la unidad ya que observando el Gráfico 2.3. vemos que el conjunto de posibilidades de producción con congestión está incluido en el que no existe tal problema. Según el índice (2.2.20) cuando las dos fronteras coinciden es porque no existe congestión y por tanto  $EE = 1$  y es eficiente estructuralmente. Sin embargo valores inferiores a la unidad se deben a que la empresa opera en la región no económica del sector.

Volviendo al Gráfico 2.3., en una economía en la que existe congestión la empresa F es ineficiente y su medida de eficiencia técnica se estima (al igual que en otros casos) como la máxima reducción equiproporcional de ambos inputs con respecto a  $Iso_{X(y)_C}$ . Es decir el punto F'. La combinación de inputs de F', está situada en la región no económica del sector y esa eficiencia técnica es por tanto, cuando menos discutible. La combinación óptima en el caso en el que se eliminara la congestión del sector es, sin embargo, F''. Por tanto,  $\widehat{\theta}_{VRS_F}$ , es distinta a  $\widehat{\theta}_{VRS_F}^C$ , indicando que una fuente de la ineficiencia de la empresa F es la congestión. La medida de eficiencia estructural en este caso, será entonces:

$$EE_F = \frac{\widehat{\theta}_{VRS_F}}{\widehat{\theta}_{VRS_F}^C} = \frac{OF''}{OF'} \leq 1$$

### 2.2.7 El DEA y la Descomposición de la Eficiencia Técnica

Al igual que hacíamos cuando analizábamos la eficiencia de escala, otra forma de reescribir la relación (2.2.20) es la siguiente,

$$\hat{\theta}_{VRS} = \hat{\theta}_{VRS}^C \cdot EE \quad (2.2.21)$$

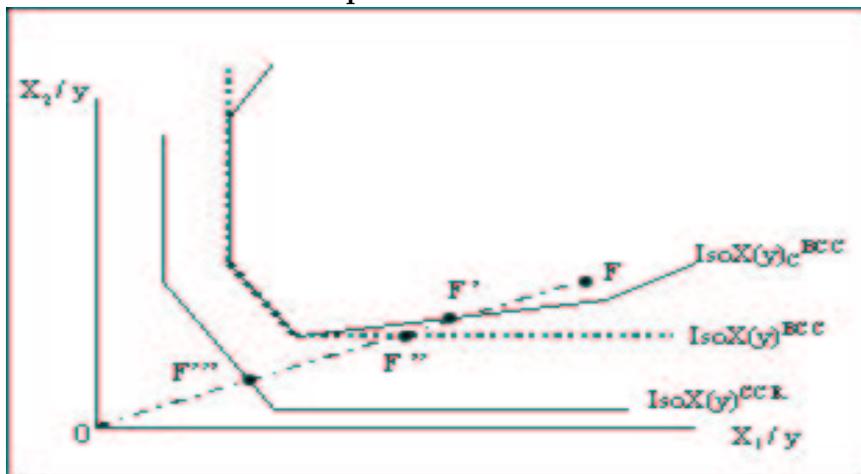
Y retomando la descomposición de la eficiencia de la ecuación (2.2.11) en la que analizábamos los orígenes de la ineficiencia, si sustituimos en ella la relación (2.2.20); la medida de eficiencia técnica en una tecnología cuyas empresas operan en una escala óptima se puede descomponer en las siguientes fuentes generadoras de ineficiencia,

$$\hat{\theta}_{CRS} = \hat{\theta}_{VRS} \cdot ES = \hat{\theta}_{VRS}^C \cdot EE \cdot ES \quad (2.2.22)$$

donde siguiendo a Färe, Grosskopf y Lovell (1983, 1985, 1994),  $\hat{\theta}_{VRS}^C$  es el índice de eficiencia técnica pura,  $EE$  es el índice de eficiencia estructural y  $ES$  es el índice de eficiencia de escala.

En el Gráfico 2.4. se analiza gráficamente la descomposición de la eficiencia técnica expresada en la relación (2.2.22). Este gráfico muestra la misma situación que en (2.2.5) pero incluyendo la frontera bajo rendimientos constantes,  $ISO_{X(y)_{RCS}}$ , con eliminación gratuita de inputs en sentido estricto (o modelo CCR). El punto F''' es la empresa técnicamente eficiente de referencia que opera en una escala óptima con la que la empresa F es comparada. La descomposición de las distintas fuentes de ineficiencia que experimenta la empresa F son los siguientes,

Gráfico 2.4. Descomposición de la Eficiencia Técnica



$$\widehat{\theta}_{CRSF} = \widehat{\theta}_{VRSF}^C \cdot EE_F \cdot ES_F = \frac{0F'}{0F} \cdot \frac{0F''}{0F'} \cdot \frac{0F'''}{0F''} \quad (2.2.23)$$

donde se observa como la ineficiencia de la empresa F se descompone en la ineficiencia pura  $\widehat{\theta}_{VRSF}^C$  que representa la ineficiencia técnica con respecto a su frontera presente, sino también a su situación de congestión y a la escala en la que se produce.

## 2.3 Análisis Estadístico del DEA

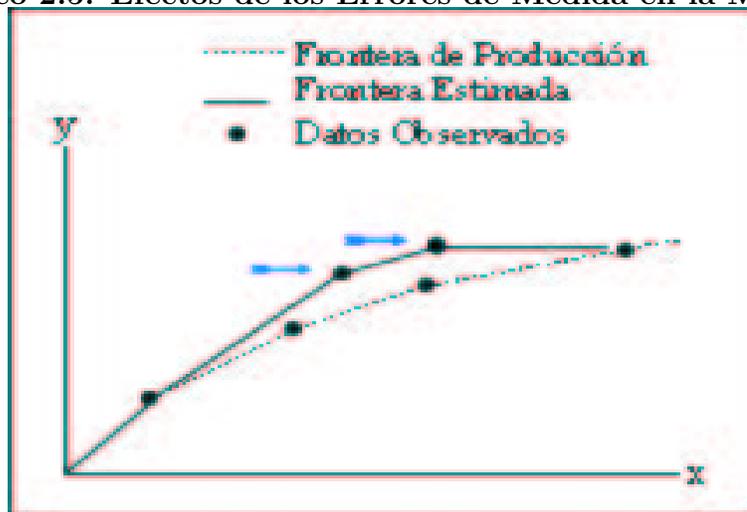
Como ya hemos visto, el DEA se caracteriza principalmente por estimar, mediante técnicas no paramétricas una función de producción determinística. La estimación de la eficiencia técnica se efectúa, como en los demás métodos, con la muestra observada, la cual, por construcción, siempre se va a situar o por debajo de la función de producción estimada o en la misma función. Esta peculiaridad del modelo se origina debido a que en su caracterización no se incluye una perturbación que incorpore el ruido, definido éste, como los errores de medida o los shocks que la empresa no

pueda controlar. Las únicas desviaciones de la frontera que son posibles en un modelo definido de este modo, son las ineficiencias que sufren las empresas, las cuales son unidireccionales y, por tanto, la única causa de que a las unidades productivas no les sea posible producir óptimamente.

El modelo especificado, al carecer de ese término en el que se acomoda el posible ruido de los datos, sufre de una gran sensibilidad tanto a los posibles errores de medida como a la existencia de outliers. La presencia de cualquiera de estos elementos puede dar lugar a que la estimación de la frontera se sitúe por encima de la frontera verdadera. En ese caso, empresas que son en realidad eficientes y que deberían formar parte de la frontera, aparecerían en la estimación como ineficientes.

Un ejemplo muy simple de esta sensibilidad se muestra en el Gráfico 2.5. estimando la eficiencia en el caso de un input y un output. Se observa como de todas las empresas observadas (representadas en el gráfico con un punto), tres de ellas forman la frontera estimada (representada con una línea continua). Si suponemos que en dos de estas empresas (las señaladas con la flecha) los valores observados del input y del output han sido obtenidos erróneamente y son por tanto dos outliers, la estimación de la eficiencia efectuada por el DEA considera a esas unidades productivas como eficientes, sin embargo, las verdaderas empresas eficientes (que son las localizadas en la línea punteada del gráfico), son catalogadas como unidades productivas ineficientes. Para evitar esta supersensibilidad del DEA a los valores extremos, es recomendable que, previamente a la estimación, se detecten y eliminen en lo posible este tipo de perturbaciones que pueden tergiversar seriamente la estimación de la eficiencia técnica.

Gráfico 2.5. Efectos de los Errores de Medida en la Muestra



La aplicación, previa a la estimación, de procedimientos que limpien los datos de potenciales outliers es difícil de efectuar, no sólo por la dificultad de definir a un outlier sino por las dificultades computacionales añadidas. Tradicionalmente el procedimiento desarrollado por Wilson (1993, 1995) es el método que mejor se adapta al problema del análisis de la eficiencia. Su principal inconveniente es que el criterio empleado en la supresión de los supuestos outliers no tiene fundamentos teóricos; asimismo el uso de este método se hace computacionalmente prohibitivo al incrementarse el número de observaciones. Recientemente, Simar (2001), ha desarrollado un nuevo método que puede aplicarse no sólo a técnicas no paramétricas sino también a las paramétricas. Su principal ventaja con respecto a la técnica de Wilson es que detecta a los outliers enmascarados por otros outliers.

La situación ideal en la que el análisis del DEA puede proporcionar buenas estimaciones de la eficiencia es cuando, en los datos que se empleen, los outliers se hayan suprimido y el ruido se considere insignificante. Aun así, el procedimiento con

el que el DEA estima la ineficiencia, al basarse en una muestra incorpora una cierta aleatoriedad que es importante que sea analizada mediante algún procedimiento de inferencia estadística.

El análisis estadístico del DEA que presentamos en este capítulo está basado en la exposición formulada en Simar y Wilson (2000a) donde, además de lo expuesto, se describen también las propiedades estadísticas que presenta la estimación del FDH.

Uno de los primeros trabajos preocupados en explorar las propiedades estadísticas del DEA fue Banker (1993) quien formuló la relación de producción como,

$$y_j = g(x_j) - u_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.3.1)$$

donde  $N$  es el número de empresas,  $y_j \in \mathbb{R}^1$  es el vector de outputs observados,  $X$  es un subespacio convexo de  $\mathbb{R}^p$  y  $x_j \in \mathbb{R}^p$  es el vector observado de inputs.

Las cantidades empleadas de inputs y la producción de outputs las define como variables aleatorias,  $u$  representa, para cada empresa, la ineficiencia técnica o, lo que es lo mismo, la desviación que la producción observada experimenta con respecto a la óptima localizada en la frontera. Por tanto,  $u$ , es una variable aleatoria, independiente, idénticamente distribuida, con soporte  $\mathbb{R}^+$  y de tamaño  $(N \times 1)$ . La definición de la ineficiencia como una variable aleatoria permite que se incorpore en ella posibles shocks aleatorios, como por ejemplo, los que resulten de defectos y daños en la producción (Aigner y Chu 1968). Esta forma de caracterizar a la ineficiencia, que es la que se va a adoptar en todo el análisis estadístico del DEA, incorpora en el modelo empírico, a diferencia con lo expuesto en el DEA determinístico, una cierta

heterogeneidad inobservable en la muestra. La frontera que se estima sigue siendo determinística puesto que las únicas desviaciones permitidas son interiores a la función de producción, pero estas desviaciones o ineficiencias son aleatorias.

El DEA, tal y como ha sido expuesto hasta el momento, se ha preocupado únicamente en especificar el conjunto de posibilidades de producción en función de ciertos axiomas (ya expuestos en apartados anteriores). La única desviación posible de la producción eficiente es la ineficiencia, pero ¿qué distribución sigue esta ineficiencia?. Esta es la pregunta que Banker (1993) intenta responder. Para ello caracteriza al conjunto de posibilidades de producción con los axiomas habituales del DEA y considera a estas desviaciones como variaciones estocásticas de la eficiencia técnica en cada unidad productiva. Su intención es imponer a la función de densidad de la ineficiencia,  $f(u)$ , las condiciones necesarias para que el DEA sea equivalente a un modelo de máxima verosimilitud.

El conjunto y la función de producción desconocidos son entonces caracterizados por Banker con los siguientes postulados,

(B1) Eliminación gratuita tanto de inputs como de outputs. Esta propiedad es equivalente a definir la función de producción como una función monótona y matemáticamente lo podemos formular como,

$$x' \geq x'' \text{ entonces } g(x') \geq g(x'') \quad \forall x', x'' \in X.$$

(B2) Convexidad del conjunto de posibilidades de producción o lo que es lo mismo, definición de una función de producción cóncava.

(B3) La función de producción envuelve a los datos observados, es decir:

$$y_j \leq g(x_j) \text{ para } j=1, \dots, N.$$

(B4) Si una función  $\tilde{g}(\cdot)$  satisface los postulados (B1, B2 y B3), entonces  $\tilde{g}(x) \geq g(x)$  para  $x \in X$ . Este supuesto es denominado por Banker *mínima extrapolación*.

Definido el modelo con estos cuatro supuestos, Banker demuestra que la única función  $y = g(x)$  que satisface los cuatro postulados anteriores es la estimada por el DEA bajo rendimientos variables de escala. El supuesto (B4) permite que la función de producción estimada por el DEA,  $\hat{g}(x_j)$ , minimice  $u_j$  para cada observación con la restricciones, primero que  $\hat{g}(x_j)$  sea monótona (B1) y cóncava (B2) y, segundo, que  $\hat{g}(x_j) - y_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, N$  (B3). Esta minimización de la unidad productiva  $j$ , además, debe de ser independiente de la minimización de las otras unidades productivas.

Para convertir al DEA en un estimador máximo verosímil se requiere que se defina en la especificación del modelo, además, la función de densidad de la ineficiencia,  $f(u)$ . Esta densidad es formulada por Banker como una función monótona decreciente en la que las ineficiencias,  $u_j$ , son independientes e idénticamente distribuidas, siendo, además,  $f(u) = 0$  para todo  $u < 0$ . Con los supuestos (B1-B4) y la definición de la función de densidad de la eficiencia, el proceso generador de datos está completamente caracterizado y Banker demuestra que el DEA es el estimador máximo verosímil del siguiente modelo,

$$\begin{aligned} \max_{f(\cdot), g(\cdot)} \quad & \prod_{j=1}^N f(u_j) \\ \text{s.a.} \quad & g(\cdot) \text{ es una función cóncava y monótona creciente.} \\ & f(u_j) = 0 \quad \forall u < 0 \quad | \quad u_j = g(x_j) - y_j \geq 0. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

En lo que respecta a la precisión de la estimación, en el caso general en el que la estimación máximo verosímil de una variable sea el máximo de esa variable, Tate (1959), demostró que esa estimación es sesgada y que el sesgo es inversamente proporcional al tamaño de la muestra. En el caso de la estimación de la frontera de producción del DEA, Banker (1993) demostró la existencia de ese sesgo con un output y múltiples inputs.

La consistencia de la estimación, sin embargo, no es sencilla de demostrar a pesar de ser el DEA un estimador máximo verosímil del modelo. La dificultad de su demostración tiene su origen en que el DEA calcula un estimador de eficiencia para cada unidad productiva. Este procedimiento requiere, entonces, que el número de parámetros a estimar crezca a medida que lo haga la muestra y puesto que el rango de la variable  $y_j$  depende de los parámetros estimados, uno de los supuestos de regularidad de la consistencia en la estimación con máxima verosimilitud no se cumple. Banker (1983) propone una prueba de consistencia en la que define la función de densidad de los inputs con soporte compacto, al ser este supuesto erróneo, la prueba de consistencia no tiene validez.

Los resultados de consistencia del DEA fueron, sin embargo, demostrados por Korostelev, Simar y Tsybakov (1995a). Al igual que Banker (1993), definen una función de producción de un output ( $y \in \mathbb{R}^1$ ) y múltiples inputs ( $x \in \mathbb{R}^p$ ) y suponen una función de producción,  $g$ , que sea cóncava y monótona. Con respecto a la caracterización de la función de densidad, suponen que los datos observados  $(y_j, x_j^1, \dots, x_j^p)$  se distribuyen de acuerdo con una función de densidad que da probabilidad uno al siguiente conjunto,

$$y_j \leq g(x_j^1, \dots, x_j^p). \quad (2.3.3)$$

El proceso generador de datos queda, entonces, caracterizado y la ineficiencia es definida según la relación (2.3.3) como una variable aleatoria asimétrica.

Bajo estos supuestos, Korostelev, Simar y Tsybakov (1995a) demuestran que la estimación del conjunto de producción definido bajo rendimientos variables,  $\widehat{\Psi}_{DEA}$  es, de todos los conjuntos de producción que se encuentran por debajo de la función de producción  $g$ , el estimador máximo verosímil de  $\Psi$ . El ratio de convergencia del estimador depende de la medida de que se elija para analizar la discrepancia entre el verdadero valor y la estimación de los conjuntos de producción:  $\Psi$  y  $\widehat{\Psi}_{DEA}$ . En el caso de una muestra infinita, Korostelev, Simar y Tsybakov (1995a) demuestran que, utilizando la medida de Lebesgue, (ver esta medida en Halmos 1974, pág. 62 y siguientes) la estimación del conjunto de posibilidades de producción que efectúa el DEA, converge al verdadero valor con un ratio igual a  $O_p(n^{-2/p+2})$  y ningún otro estimador puede hacerlo a mayor velocidad.

Este ratio de convergencia, aunque óptimo, se convierte en un ratio muy lento a medida que se incrementa el número de inputs,  $p$ . Este problema, también llamado la maldición de la dimensionalidad, produce un empeoramiento de la fiabilidad en las estimaciones de los procesos productivos con muchos inputs y la única forma de compensarlo es mediante un incremento en el número de unidades productivas de la muestra.

La consistencia del DEA en procesos productivos con múltiples outputs fue formulada, sin embargo, en Kneip, Park y Simar (1998). El proceso generador de datos,

necesario para analizar las propiedades estadísticas del estimador, es más complejo en este caso. Como en los anteriores modelos, las propiedades o axiomas con las que se define  $\Psi$ , la caracterización de la función de producción y la definición de la función de densidad del residuo o eficiencia, van a ser necesarias para formular el modelo estadístico.

El conjunto de posibilidades y la función de producción del modelo que se estima es definido por Kneip, Park y Simar (1998) con los siguientes supuestos.

( $\mathcal{A}1$ ) Convexidad del conjunto de posibilidades de producción,  $\Psi$ , siendo este conjunto el formulado en la ecuación (1.2.1).

( $\mathcal{A}2$ ) Eliminación gratuita tanto de inputs como de outputs.

Las propiedades ( $\mathcal{A}1$  y  $\mathcal{A}2$ ) son las mismas que Banker (1993) formuló en (B1 y B2) y también iguales a los supuestos definidos en Korostelev, Simar y Tsybakov (1995a) para su demostración de la consistencia en el caso de un sólo output.

Con el objeto de completar el modelo estadístico del que el DEA es un estimador consistente, Kneip, Park y Simar (1998) caracterizan el proceso generador de datos ( $\mathcal{P}$ ) con la función de densidad,  $f$ , con la que se generan las observaciones muestrales:  $(x_j, y_j) \in \Psi$ ,  $j = 1, \dots, N$ , mediante los siguientes supuestos,

( $\mathcal{A}3$ ) Los inputs y los outputs contenidos en el conjunto de producción  $\Psi$  definido en los supuestos ( $\mathcal{A}1$  y  $\mathcal{A}2$ ), son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad conjunta  $f(x, y)$ .

Debido a la naturaleza radial de la eficiencia técnica es conveniente expresar la función de densidad en sus términos polares. La posición de cualquier punto expresado con coordenadas cartesianas como  $(x, y)$  puede representarse de forma equivalente con sus coordenadas polares (ver Kaplan y Lewis, 1973, volumen I, págs. 53-55) de tal manera que la distancia polar o módulo,  $\omega$ , sea:

$$\omega = \omega(x) \in \mathbb{R}_+^1.$$

Y el ángulo polar o argumento,  $\eta$  sea:

$$\eta = \eta(x) \in [0, \pi/2]^{p-1} \quad (2.3.4)$$

Y por tanto,

$$(x, y) \equiv (\omega, \eta, y) \quad (2.3.5)$$

Si se descompone la densidad conjunta,  $f(x, y)$ , en sus densidades condicionales expresadas con las coordenadas polares, se obtiene:

$$f(\omega, \eta, y) = f(\omega \mid \eta, y)f(\eta \mid y)f(y), \quad (2.3.6)$$

La caracterización de la función de densidad conjunta se puede formular con con los siguientes supuestos que caracterizan sus densidades condicionales ,

- $f(y)$  se define con soporte compacto en  $\mathbb{R}_+^q$ ,

- $f(\eta | y)$  se define en  $[0, \pi/2]^{p-1}$ ,
- $\omega$  tiene densidad  $f(\omega | \eta, y)$  definida en  $\mathbb{R}_+^1$ .

Estos supuestos implican indirectamente que la función de densidad de la eficiencia es condicional a  $(y, \omega)$  y garantizan que su soporte sea el intervalo  $(0,1]$ . La prueba de que el soporte de la eficiencia técnica en ese intervalo es impuesto con la caracterización de la función de densidad se expone a continuación.

Orientando el modelo hacia la eficiencia de los inputs, formulábamos en (1.2.9) el nivel de input eficiente para  $y$  como  $x^\delta(y)$ . En general, para cada valor dado de output sabemos cuales son los inputs que lo han generado y tal como hemos definido el modelo; también conocemos que debido a la presencia de ineficiencia,  $x$  puede ser distinto al input eficiente:  $x^\delta(y)$ . La cantidad eficiente de inputs se localiza donde el radio vector que reduce los inputs observados en distintas proporciones, corta a la frontera de producción. De este modo, cualquier unidad productiva  $(x, y)$  puede considerarse generada condicionalmente, tanto en  $y$  como en la variable aleatoria  $\theta \in (0, 1]$ . Es decir analíticamente se puede expresar como,

$$x = \frac{x^\delta(y)}{\theta} \tag{2.3.7}$$

En términos de las coordenadas polares, el punto situado en la frontera  $x^\delta(y)$  tiene un módulo que se puede calcular como,

$$w(x^\delta(y)) = \min\{\omega \in \mathbb{R}_+^1 \mid f(\omega | y, \eta) > 0\} \tag{2.3.8}$$

Y siguiendo la expresión (2.3.7), la eficiencia técnica de Farrell en términos del módulo puede calcularse como,

$$\theta(x, y) = \frac{\omega(x^\delta(y))}{\omega(x)}. \quad (2.3.9)$$

El soporte de la densidad  $f(\omega \mid y, \eta)$  es, por la relación (2.3.8), el intervalo  $[w(x^\delta(y)), \infty]$ , mientras que la relación formulada en (2.3.9) induce a que el único soporte posible de la densidad de la eficiencia técnica,  $f(\theta \mid y, \eta)$ , sea, como ya hemos indicado, el intervalo  $(0, 1]$ .

(A.44) En los procedimientos de estimación no paramétricos donde hay que estimar la frontera o el borde del conjunto de producción se requiere, para que esa estimación sea consistente, que con probabilidad cercana a la unidad, se puedan observar unidades eficientes a medida que se incrementa el tamaño de la muestra. Con ese objetivo se define la siguiente masa probabilística en un entorno cercano a la frontera verdadera:

$\forall y \geq 0$  y  $\forall \eta \in [0, \pi/2]^{p-1}$ , deben de existir las constantes  $\epsilon_1 > 0$  y  $\epsilon_2 > 0$  tales que

$$\forall \omega \in [w(x^\delta(y)), w(x^\delta(y)) + \epsilon_2] \Rightarrow f(\omega \mid y, \eta) \geq \epsilon_1. \quad (2.3.10)$$

El intervalo al que pertenece  $\omega$  en (2.3.10) es asimétrico debido a que la única perturbación permitida en el modelo (la ineficiencia) también es asimétrica. Haciendo tan pequeño como se quiera el valor de  $\epsilon_2$  en la relación (2.3.10) se evita que las cantidades de factores productivos de la muestra se alejen de los

valores óptimos y de este modo, para muestras grandes, se garantiza que la estimación de la eficiencia se acerque a su verdadero valor.

(A45) Los ratios o la velocidad de convergencia de una estimación consistente dependen del suavizado que se incorpore a la frontera verdadera. En general el suavizado se suele definir eligiendo alguna de las propiedades de la frontera a estimar (Simar y Wilson 2000a). Siguiendo este criterio en el caso de la estimación del DEA, lo más sencillo es suavizar, incluyendo las características de los índices de eficiencia de Farrell, mediante el siguiente supuesto,

*$\theta(x, y)$  es diferenciable en sus dos argumentos para todos los puntos  $(x, y)$  del interior de  $\Psi$ .*

El requisito que Kneip, Park y Simar (1998) imponen en su trabajo para suavizar la frontera en su caracterización del proceso generador de datos no es tan fuerte como el que hemos impuesto ahora en el modelo. (A45) es más simple, e implica el suavizado de frontera impuesto por ellos y nos es útil para caracterizar los modelos estadísticos de las secciones posteriores.

El proceso generador de los datos ( $\mathcal{P}$ ), definido en los supuestos anteriores con las caracterizaciones de la función de densidad, del conjunto de posibilidades de producción y de la función frontera, puede formularse con cualquiera de las siguientes expresiones,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Psi, f(x, y)) = \mathcal{P}(\Psi, f(\omega, \eta, y)) = \mathcal{P}(\Psi, f(\theta, \eta, y)) \quad (2.3.11)$$

donde se observa cómo la estimación del proceso generador de datos se relaciona

con la estimación del soporte de la función de densidad.  $\Psi$  está implícita, como su soporte, en  $f(\omega, \eta, y)$  y en  $f(x, y)$ , pero no ocurre lo mismo en el caso de  $f(\theta, \eta, y)$  donde el soporte de la eficiencia es el intervalo  $(0, 1]$ . Necesitamos, por tanto, estimar  $\Psi$  para poder caracterizar  $\mathcal{P}$  con la función  $f(\theta, \eta, y)$  en vez de con las funciones  $f(\omega, \eta, y)$  y  $f(x, y)$ .

Bajo los supuestos ( $\mathcal{AA1}$ - $\mathcal{AA5}$ ), Kneip, Park y Simar (1998) demuestran que para todos los puntos  $(x, y)$  del interior de  $\Psi$  la distribución de la eficiencia converge al verdadero valor al siguiente ratio,

$$\widehat{\theta}(x, y) - \theta(x, y) = O_p(N^{-\frac{2}{p+q+1}}). \quad (2.3.12)$$

Al igual que en el caso de la consistencia del conjunto de producción cuando sólo se producía un output demostrado en Korostelev, Simar y Tsybakov (1995a), la velocidad de convergencia con múltiples outputs, (ecuación 2.3.12), también se ve afectada por la maldición de las dimensiones y se hace más lenta no sólo cuando se incrementan los inputs sino también al elevarse el número de outputs.

Con respecto a la construcción de intervalos de confianza de las estimaciones, en el caso del DEA, la dificultad principal estriba en el desconocimiento de la distribución del estadístico. Los intervalos de confianza de la eficiencia técnica se deben de construir con los valores de referencia de la distribución muestral, sin embargo, en la estimación del DEA sólo son conocidos los resultados analíticos para el caso en el que hay un solo input y un solo output (Gijbels, Mammen, Park y Simar, 1999).

La distribución de la eficiencia obtenida por Gijbels, Mammen, Park y Simar (1999) se deriva de la estimación del siguiente modelo,

$$y = g(x) \tag{2.3.13}$$

donde el conjunto de producción y su función frontera son caracterizados con las propiedades  $(\mathcal{AA}1)$  y  $(\mathcal{AA}2)$ . Gijbels, Mammen, Park y Simar (1999) denominan como  $f(x, y)$  a la función de densidad conjunta de la variable aleatoria i.i.d. :  $\{X_j, Y_j\}_{j=1}^N$  y completan la formulación del proceso generador de datos con los siguientes supuestos adicionales:

- $(\mathcal{BB}1)$  La función  $g$  es dos veces diferenciable en el punto  $x_0$  con su segunda derivada menor que cero.
- $(\mathcal{BB}2)$  La función de densidad  $f$  está acotada lejos de cero garantizando que haya suficientes datos en un entorno del punto  $(x_0, g(x_0))$  y es, además, una función continua en un intervalo cercano a la frontera

Como en anteriores modelos  $\Psi$  puede ser definido con la siguiente relación,

$$\widehat{\Psi} = \{(x, y) \mid f(x, y) \geq 0\} = \{(x, y) \mid y \leq g(x)\}, \tag{2.3.14}$$

y el estimador, obtenido con el DEA, de la función de producción en un punto  $x_0$  perteneciente al conjunto soporte de la función de densidad marginal de  $x$ , se puede formular como,

$$\widehat{Iso}_{Y(x)_{DEA}} = \widehat{g}(x_0)_{DEA} = \sup\{y \mid (x_0, y) \in \widehat{\Psi}_{DEA}\}. \tag{2.3.15}$$

Gijbels, Mammen, Park y Simar (1999) demuestran el siguiente resultado asintótico  $\forall z < 0$ ,

$$Pr\{N^{2/3}(b_0^2/b_2)^{1/3}(\widehat{g}(x_0) - g(x_0)) \leq z\} = \int_0^\infty \varphi(u, z) du + o(1) \quad (2.3.16)$$

donde el proceso generador de datos asumido en los supuestos (BB1) y (BB2) se formula en los siguientes coeficientes como,

$$b_0 = f(x_0, g(x_0)), \quad b_1 = g'(x_0), \quad b_2 = -g''(x_0)/2$$

$$\text{y siendo } \varphi(u, z) = (1/2)(-z)^{3/2}(1 + u^2)\exp\{-(1/6)(-z)^{3/2}(u + u^{-1})^3\}$$

Como el término derecho de la relación (2.3.16) es conocido, el sesgo asintótico,  $SSG_{asyt}$ , y la desviación asintótica,  $Std_{asyt}$ , en el caso de la estimación,  $\widehat{g}(x_0)$ , se obtienen como,

$$SSG_{asyt} = -N^{-2/3}(b_2/b_0^2)^{1/3}c_1, \quad (2.3.17)$$

donde  $c_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(u, -z) \cdot du \cdot dz \approx 0.99360$ .

$$Std_{asyt} = -N^{-2/3}(b_2/b_0^2)^{1/3}c_2, \quad (2.3.18)$$

donde  $c_2 = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty z \cdot \varphi(u, -z) \cdot du \cdot dz - c_1^2 \approx (0.31088)$ .

Estos resultados permiten estimar tanto el sesgo asintótico de  $\widehat{g}(x_0)$ , y por tanto construir intervalos de confianza, como estimar la varianza asintótica, mediante la estimación no paramétrica previa de las constantes  $b_0$  y  $b_2$  de modo que, las estimaciones asintóticas, van a depender de las condiciones impuestas en la curvatura y en la densidad del punto  $(x_0, g(x_0))$ .

Las propiedades obtenidas para  $\widehat{g}(x_0)$  son directamente aplicables a la medida de eficiencia ya que, como se ha indicado previamente, la relación entre la eficiencia técnica en el sentido de los outputs y la función de producción para un input fijo ( $x_0$ ) es la siguiente:

$$\lambda(x_0, y_0) = \frac{x^\delta(x_0)}{y_0} = \frac{g(x_0)}{y_0} \quad (2.3.19)$$

Gijbels, Mammen, Park y Simar (1999) analizan, mediante simulaciones de Monte-Carlo, qué propiedades tiene la aproximación de la distribución muestral de la eficiencia en distintas muestras finitas. Simar y Wilson (2000a) destacan que, al ser la relación (2.3.16) un resultado asintótico, la inferencia estadística basada en ella será razonable únicamente en muestras que sean lo suficientemente grandes y remarcan que, al depender todos los resultados de una estimación previa de los valores  $b_0$  y  $b_2$ ; esta estimación añadida puede introducir un ruido adicional a la aproximación de la distribución muestral de la eficiencia, y por tanto, afectar a todos los resultados asintóticos derivados (intervalos de confianza, varianzas y estimador corregido de la eficiencia).

## 2.4 Construcción de Intervalos de Confianza de la Eficiencia Técnica mediante el Bootstrap

Excepto en los casos de procesos productivos de un output y un input, la distribución de la eficiencia es desconocida, y la única vía para poder efectuar algún tipo de deducción estadística es extraer de la muestra una descripción de las propiedades

muestrales de la eficiencia técnica. Empleando otro tipo de metodologías que se basan en la computación intensiva, es posible, con el proceso generador de datos, obtener tantas muestras, similares a la analizada, como sean necesarias para efectuar una aproximación asintótica de la distribución de interés. La obtención aleatoria, con un mismo proceso generador de datos, de todas esas muestras con las que se computa la aproximación de la distribución muestral de la eficiencia se denomina bootstrap (Efron, 1979; Efron y Tibshirani, 1993).

### **2.4.1 El Bootstrap y la Eficiencia Técnica**

Simar (1992) proporcionó la primera aplicación que, en un contexto de frontera, se sirvió del bootstrap como una herramienta de análisis estadístico al incorporarlo a la estimación semiparamétrica de modelos de datos de panel. Sin embargo, la adaptación consistente del bootstrap a estimaciones del DEA fue formulada por primera vez en Simar y Wilson (1998a) siendo ésta, la única vía en la que es posible realizar inferencia estadística en las estimaciones efectuadas con el DEA.

El principio general en el que se cimienta el bootstrap es el principio de analogía. Éste se basa en la idea de que los valores empíricos son una buena representación de los desconocidos valores poblacionales. El bootstrap, bajo condiciones completamente generales, permite, imitando al mundo real, generar un mundo bootstrap con el que se puede aproximar la función de distribución de la eficiencia técnica.

El DEA, en lo que llamamos el mundo real, estima, mediante la muestra, una frontera de producción y respecto a ella obtiene las medidas de eficiencia. Esta

frontera sabemos, que por construcción, se va a situar en el interior del verdadero conjunto de posibilidades de producción. Es decir, entre la verdadera función de producción y la estimada por el DEA va a existir un sesgo. Este sesgo va a ser diferente en cada empresa y es el que vamos a aproximar con el bootstrap.

Si ahora construimos un mundo bootstrap y definimos sus valores poblacionales y muestrales imitando en lo posible el mundo real, podemos estimar ese sesgo bootstrap del modelo para cada unidad productiva y compararlo con el estimado en el mundo real.

En el mundo bootstrap, al revés que en el mundo real, conocemos la verdadera función de producción que la definimos como la estimada con el DEA en el mundo real. Necesitamos, sin embargo, obtener muestras que puedan ser generadas por el modelo y cuya función verdadera de producción (que no la estimada) sea la estimada por el DEA en el mundo real. Es decir, si estimamos el proceso generador de datos del modelo, podemos generar una (o miles) de esas muestras bootstrap con la que, imitando al mundo real, estimar con el DEA su función de producción. Esta estimación bootstrap de la frontera será una estimación del verdadero valor de la frontera bootstrap y puesto que en el mundo bootstrap conocemos tanto la función estimada como la función verdadera, el cálculo del sesgo bootstrap de cada empresa se puede obtener restando a la eficiencia estimada con el DEA original (distancia de la empresa a la frontera verdadera bootstrap) la eficiencia del DEA obtenida con el bootstrap (distancia de la empresa a la frontera bootstrap). Si repetimos este proceso infinitas veces, tendremos infinitas fronteras bootstrap que compararemos, empresa a empresa, siempre con la misma frontera verdadera. Para cada empresa, por tanto, tendremos infinitas mediciones de eficiencia bootstrap y si hemos estimado con propiedad el

proceso generador de datos, la distribución del sesgo bootstrap de cada empresa debe ser similar al que se presenta en el mundo real.

De forma más explícita se puede suponer que en un momento de tiempo denominado  $t$ , los datos a disposición del investigador,  $\chi = [(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)]$ , se pueden considerar generados como una muestra aleatoria de un proceso generador de datos desconocido ( $\mathcal{P}$ ). Aunque se ignore este generador de datos, se le puede caracterizar mediante la especificación de la función de densidad conjunta de la muestra,  $f(x, y)$  y del conjunto de posibilidades de producción  $\Psi$ . Estos dos elementos ya han sido definidos en los supuestos ( $\mathcal{AA1} - \mathcal{AA6}$ ) de Kneip, Park y Simar (1998)<sup>3</sup> incorporándoles las características específicas que hacen que la estimación del DEA sea consistente. Es decir,

$$\mathcal{P}(\Psi, f(x, y)) \tag{2.4.1}$$

La estimación del proceso generador de datos se obtiene mediante las estimaciones de  $\Psi$  y  $f(x, y)$  con sus respectivos valores muestrales de modo que,

$$\widehat{P}(\chi) = \mathcal{P}(\widehat{\Psi}, \widehat{f}(x, y)) \tag{2.4.2}$$

---

<sup>3</sup>En el supuesto ( $\mathcal{AA3}$ ) se definía, mediante coordenadas polares y utilizando la orientación input de la eficiencia, la relación que existía entre las cantidades muestrales de los inputs de una empresa, sus correspondientes cantidades eficientes de referencia y su medida de eficiencia técnica radial. Como se ha indicado previamente, en este trabajo únicamente se desarrolla la estimación de la eficiencia orientada hacia los inputs y por tanto, todos los conceptos derivados de este análisis como son, por ejemplo, el bootstrap o los índices de productividad, se van a desarrollar acomodados a esta orientación. En el caso del bootstrap, si se quisiera adoptar la orientación output, el procedimiento a desarrollar es el mismo y únicamente es necesario modificar la formulación tal y como se expone en Simar y Wilson (2001).

Korostelev, Simar y Tsybakov, (1995a) demostraron bajo las condiciones expuestas en la sección anterior, que  $\widehat{\Psi}_{RVS}$  es un estimador consistente de  $\Psi$  independientemente de la forma de la tecnología subyacente. La estimación del conjunto de posibilidades de producción bajo rendimientos variables de escala ( ecuación 2.2.5), por tanto, es la estimación más adecuada si no se conoce con seguridad la forma verdadera de la tecnología. En el caso en el que se necesitara estimar la eficiencia bajo cualquier otro supuesto de rendimientos de escala, el procedimiento bootstrap a seguir es el mismo que se desarrollará para rendimientos variables y sólo hay que tener en cuenta que el programa matemático a utilizar en la estimación de la eficiencia es diferente.

Si suponemos que  $(x_0, y_0)$  es la dotación de una empresa cualquiera de la muestra  $\chi = [(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)]$ , su estimación radial de la eficiencia técnica, cuando ésta se orienta hacia los inputs es,

$$\widehat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS} = \inf\{\theta \mid (\theta x_0, y_0) \in \widehat{\Psi}_{RVS}\}, \quad (2.4.3)$$

donde  $\widehat{\Psi}_{RVS}$  ya se formuló en la ecuación ( 2.2.5). El DEA estima la eficiencia técnica en ese punto mediante el siguiente problema de programación lineal,

$$\widehat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS} = \min\{\theta > 0 \mid \theta x_0 \geq \sum_{j=1}^N \gamma_j x_j, \quad y_0 \leq \sum_{j=1}^N \gamma_j y_j, \quad \sum_{j=1}^N \gamma_j = 1, \quad \gamma_j \geq 0\} \quad (2.4.4)$$

Como ya expusimos en el apartado anterior, las estimaciones de eficiencia técnica del DEA son, por construcción, sesgadas y para el caso de la empresa considerada,

$(x_0, y_0)$ , podemos describir la discrepancia entre el valor verdadero y su estimación con la siguiente expresión,

$$[\widehat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS} - \theta(x_0, y_0)]_{\{\mathcal{P}\}} \geq 0 \quad (2.4.5)$$

Es obvio que la estimación desarrollada, en lo que hemos denominado mundo real, no se diferencia en absoluto a la estimación que se obtiene con el DEA en el caso en el que al investigador no le preocupe la inferencia estadística. La idea del bootstrap es generar un mundo ficticio tan similar al real o verdadero que, los resultados obtenidos en él, se puedan considerar similares a los que se hubieran obtenido con datos verdaderos.

Si suponemos que es posible estimar el proceso generador de datos formulado en (2.4.2), podemos generar aleatoriamente, con él, una nueva muestra, que debe de ser similar al original y que denominaremos, muestra bootstrap, de forma que dispongamos del siguiente conjunto de dotaciones bootstrap para las  $N$  empresas de la muestra,

$$\chi^* = [(X_1^*, Y_1^*), \dots, (X_N^*, Y_N^*)]. \quad (2.4.6)$$

Esta muestra es la que vamos a emplear ahora, en el mundo bootstrap, para repetir el procedimiento efectuado en el mundo real. Es decir, el conjunto bootstrap de posibilidades de producción de la nueva muestra  $\chi^*$  lo podemos definir con,

$$\widehat{\Psi}_{RVS}^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{p+q} \mid x \geq \sum_{j=1}^N \gamma_j x_j^*, \quad y \leq \sum_{j=1}^N \gamma_j y_j^*, \quad \sum_{j=1}^N \gamma_j = 1, \quad \gamma_j \geq 0\}. \quad (2.4.7)$$

La relación (2.4.7) lleva implícita una frontera, que es la estimación bootstrap de la verdadera frontera del mundo bootstrap. La eficiencia bootstrap que nos interesa es aquella eficiencia que se observa para la empresa de la muestra original, que hemos denominado  $(x_0, y_0)$ , con respecto a esta nueva estimación. Es decir,

$$\widehat{\theta}^*(x_0, y_0)_{RVS} = \inf\{\theta \mid (\theta x_0, y_0) \in \widehat{\Psi}_{RVS}^*\}. \quad (2.4.8)$$

La resolución con programación lineal de la eficiencia bootstrap,  $\widehat{\theta}^*(x_0, y_0)_{RVS}$ , es entonces:

$$\widehat{\theta}^*(x_0, y_0)_{RVS} = \min\{\theta > 0 \mid \theta x_0 \geq \sum_{j=1}^N \gamma_j x_j^*, \quad y_0 \leq \sum_{j=1}^N \gamma_j y_j^*, \quad \sum_{j=1}^N \gamma_j = 1, \quad \gamma_j \geq 0\}, \quad (2.4.9)$$

donde se observa como el único punto desde donde medimos la eficiencia es desde  $(x_0, y_0)$  y esta eficiencia se observa en referencia a la frontera construida con la muestra de la relación (2.4.6)

Una versión diferente de la estimación bootstrap de la eficiencia es la desarrollada por Löthgren y Tambour (1999) y Löthgren, (1998), quien obtiene la muestra bootstrap mediante un estimador del proceso generador de datos que Simar y Wilson (1999a) prueban inconsistente y en lugar de estimar la eficiencia como en (2.4.9), obtiene la eficiencia de otra dotación diferente:  $(x_0^*, y_0^*)$ . Es decir, calcula la siguiente eficiencia bootstrap,

$$\widehat{\theta}^*(x_0^*, y_0^*)_{RVS} = \inf\{\theta \mid \theta(x_0^*, y_0^*) \in \widehat{\Psi}_{RVS}^*\} \quad (2.4.10)$$

donde  $\widehat{\theta}^*(x_0^*, y_0^*)_{RVS}$  es el estimador bootstrap de  $\widehat{\theta}(x_0^*, y_0^*)_{RVS}$  y, en ningún caso es, el buscado estimador bootstrap de la dotación original. Como Simar y Wilson (2000a) señalan, este procedimiento asume que no sólo el conjunto de posibilidades de producción es desconocido sino que también lo es el punto desde el cual se desea medir la eficiencia eliminando, de ese modo, la única información cierta que es la que está contenida en los datos.

La similitud de los dos mundos que estamos estimando hace que el sesgo que, por construcción, existía en la estimación del mundo real se transmita, por analogía y condicionado a la muestra que se ha empleado para la estimación del proceso generador de datos, a la estimación bootstrap de la eficiencia obtenida en el mundo bootstrap. Es decir,

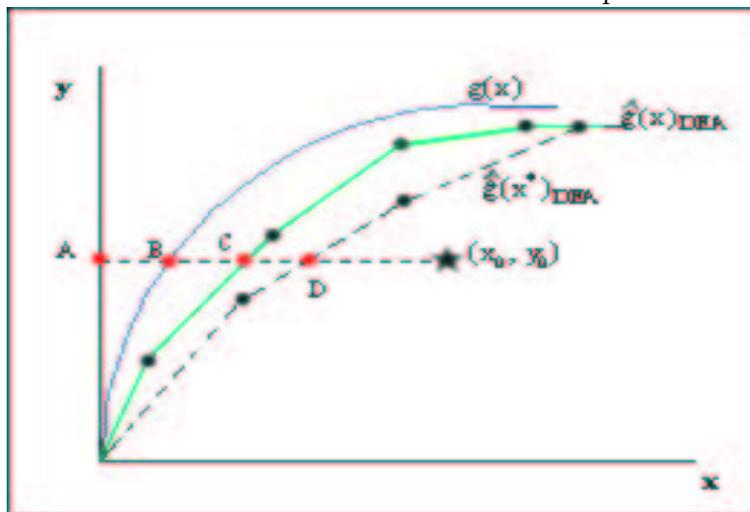
$$[\widehat{\theta}^*(x_0, y_0)_{RVS} - \widehat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS}]_{\{\widehat{P}(x)\}} \geq 0 \quad (2.4.11)$$

Si el mundo bootstrap construido es una buena imitación del mundo real, el sesgo que se estima en el mundo bootstrap deberá ser similar al estimado en el mundo real. Es decir,

$$[\widehat{\theta}^*(x_0, y_0)_{RVS} - \widehat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS}]_{\{\widehat{P}\}} \sim [\widehat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS} - \theta(x_0, y_0)]_{\{P\}} \quad (2.4.12)$$

Un ejemplo se representa en el Gráfico 2.6, donde, para el caso de un input y un output, se muestra, la eficiencia técnica estimada con el DEA, tanto en el mundo real como en el simulado mundo bootstrap. La frontera verdadera se representa con la curva denominada  $g(x)$  y el DEA la estima con la línea continua que se designa con

Gráfico 2.6. Estimación Bootstrap



$\hat{g}(x)_{DEA}$ . La línea punteada, interior a las otras dos fronteras, es la estimación de la frontera que se obtiene con la aplicación del bootstrap y que hemos denominado  $\hat{g}(x^*)_{DEA}$ . El bootstrap implica que al igual que la función  $\hat{g}(x)_{DEA}$  intenta estimar  $g(x)$ , siguiendo el principio de analogía,  $\hat{g}(x^*)_{DEA}$  intenta estimar la función  $\hat{g}(x)_{DEA}$  con la misma metodología.

La dotación  $(x_0, y_0)$  se corresponde, en el Gráfico 2.6., a una empresa de la cual nos interesa conocer su eficiencia. El DEA nos permite estimar la eficiencia técnica del modo siguiente

$$AC/AX_0 = \hat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS} \quad (2.4.13)$$

Sin embargo, el verdadero valor de la eficiencia de esa empresa es,  $AB/AX_0 = \theta(x_0, y_0)$ ; el cual únicamente puede ser calculado conociendo la frontera verdadera  $g(x)$ .

El sesgo de la estimación del DEA tradicional que tampoco conocemos es,

$$[\widehat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS} - \theta(x_0, y_0)] = \frac{AC - AB}{AX_0} \quad (2.4.14)$$

En el mundo Bootstrap, con un estimador del proceso generador de los datos, generamos otra muestra distinta a la original y que denominamos, muestra bootstrap, con la cual estimamos la tecnología o frontera bootstrap,  $\widehat{g}(x^*)_{DEA}$ . La eficiencia que nos interesa es la que experimenta la empresa muestral situada en  $(x_0, y_0)$  y por tanto es con respecto a este punto con el cual calculamos la eficiencia bootstrap. En el gráfico, esta estimación es el ratio  $AD/AX_0 = \widehat{\theta}^*(x_0, y_0)_{RVS}$ , el cual imitando al mundo real, subestima la eficiencia estimada en la siguiente proporción,

$$[\widehat{\theta}^*(x_0, y_0)_{RVS} - \widehat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS}] = \frac{AD - AC}{AX_0} \quad (2.4.15)$$

Si el bootstrap aplicado es consistente, las desviaciones en la estimación de la eficiencia en ambos mundos (ecuaciones 2.4.14 y 2.4.15) deben ser similares. Es decir,

$$\frac{AD - AC}{AX_0} \sim \frac{AC - AB}{AX_0} \quad (2.4.16)$$

Una síntesis comparativa del procedimiento de estimación de la eficiencia técnica en el mundo real y en el mundo bootstrap se muestra en el siguiente cuadro 2-I.

**Cuadro 2-I : Estimación de la Eficiencia en el Mundo Real y en el Mundo Bootstrap**

Mundo Real		Mundo Bootstrap	
Valores Poblacionales Reales:	$\theta$	Valores Poblacionales Bootstrap:	$\hat{\theta}_{DEA}$
Valores Muestrales Reales:	$\chi$	Valores Muestrales Bootstrap:	$\chi^*$
Procedimiento Estimación:	DEA	Procedimiento Estimación:	DEA
Estimación del Mundo Real:	$\hat{\theta}_{DEA}$	Estimación del Mundo Bootstrap:	$\hat{\theta}_{DEA}^*$
Sesgo del Mundo Real:	$(\hat{\theta}_{DEA} - \theta)$	Sesgo del Mundo Bootstrap:	$(\hat{\theta}_{DEA}^* - \hat{\theta}_{DEA})$

Si en vez de una única muestra tuviéramos la posibilidad de disponer de un número considerable de ellas, el verdadero valor de la desviación o, el sesgo que introduciría la estimación del DEA en todas esas muestras, se puede expresar, siguiendo lo expuesto en la ecuación (2.4.5), con,

$$SSG = E[\hat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS}] - \theta(x_0, y_0) \quad (2.4.17)$$

donde  $E[\hat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS}]$  es la media de todas las estimaciones de la eficiencia.

En el caso del mundo Bootstrap, en vez de obtener una única muestra repetiríamos el procedimiento anterior un elevado número de veces para asegurarnos que asintóticamente el sesgo del mundo bootstrap se corresponda al del mundo real. El número de veces  $B$  que se repita el procedimiento será aquel que garantice que la aproximación es fiable, siendo esta fiabilidad mayor a medida que  $B \rightarrow \infty$  y que  $N \rightarrow \infty$ . Normalmente se considera que al menos<sup>4</sup> se necesitan 1000 muestras para que los resultados asintóticos sean buenos aunque números mayores representan mejores índices de precisión.

<sup>4</sup>Simar y Wilson (2000a) recomiendan remuestrear 2000 o incluso un número mayor de veces

Si es posible estimar consistentemente el proceso generador de datos,  $\widehat{P}$ , es posible repetir el procedimiento precedente, ya expuesto para la muestra  $\chi^*$ , a todas y cada una de esas  $B$  muestras bootstrap agrupadas en el siguiente conjunto,

$$\{\chi^*\}_{b=1}^B = \{(X_j^*, Y_j^*), \quad j = 1, \dots, N\}_{b=1}^B. \quad (2.4.18)$$

Es decir, fijada la dotación muestral de la empresa  $(x_0, y_0)$  su eficiencia bootstrap estimada mediante la ecuación (2.4.9) correspondiente a cada una de las  $B$  tecnologías bootstrap,  $\{\chi^*\}_{b=1}^B$ , da lugar al siguiente conjunto de estimaciones,

$$\{\widehat{\theta}_b^*(x_0, y_0)_{RVS}\}_{b=1}^B = [\widehat{\theta}_1^*(x_0, y_0)_{RVS}, \dots, \widehat{\theta}_B^*(x_0, y_0)_{RVS}]$$

Y la estimación del sesgo similar al del mundo real definido ya en (2.4.17) para las  $B$  muestras bootstrap, se formularía como,

$$\widehat{SSG} = B^{-1} \sum_{b=1}^B \widehat{\theta}_b^*(x_0, y_0)_{RVS} - \widehat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS} \quad (2.4.19)$$

donde  $B^{-1} \sum_{b=1}^B \widehat{\theta}_b^*(x_0, y_0)_{RVS}$  es la media de las  $B$  estimaciones de la eficiencia bootstrap de la misma empresa  $(x_0, y_0)$ , obtenidas con las  $B$  tecnologías del mundo bootstrap.

Hasta el momento únicamente nos hemos preocupado de aproximar la distribución muestral de la eficiencia técnica de la empresa  $(x_0, y_0)$ . Este procedimiento formulado para esta empresa es el mismo que se debe de seguir para todas y cada uno de las unidades productivas que componen la muestra original,  $\chi = \{(X_j, Y_j)\}_{j=1}^N$ . Es decir, con el objeto de obtener la distribución muestral de las  $N$  estimaciones de la eficiencia

del DEA y sus sesgos correspondientes, se debe de repetir el proceso de estimación de la eficiencia bootstrap realizado para la dotación  $(x_0, y_0)$  (ecuación 2.4.9) con cada una de las dotaciones de las  $N$  empresas que componen la muestra original modificando, a su vez, la tecnología de referencia mediante las  $B$  muestras bootstrap,  $\{\chi^*\}_{b=1}^B$ .

El resultado de repetir,  $B$  veces, el proceso de estimación de la eficiencia de la ecuación (2.4.9) para cada una de las  $N$  empresas originales de la muestra, será el siguiente conjunto representativo de las distribuciones muestrales de la eficiencia técnica de cada una de las  $N$  empresas de la muestra  $\chi$ ,

$$\{\widehat{\theta}_b^*(x_j, y_j)_{RVS}\}_{b=1}^B = [\widehat{\theta}_1^*(x_j, y_j)_{RVS}, \dots, \widehat{\theta}_B^*(x_j, y_j)_{RVS}] \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (2.4.20)$$

## 2.4.2 Intervalos de Confianza y Estimadores Corregidos

Como ya hemos señalado anteriormente, el desconocimiento de la distribución muestral de la eficiencia impide la construcción de intervalos de confianza de las estimaciones del DEA. Si esta distribución fuera conocida, se podrían construir estos intervalos de forma inmediata, calculando los valores  $a_\alpha$  y  $b_\alpha$  tales que

$$Pr(-b_\alpha \leq \widehat{\theta}(x_j, y_j)_{RVS} - \theta(x_j, y_j) \leq -a_\alpha) = (1 - \alpha) \quad (2.4.21)$$

Sin embargo y debido al principio de analogía, la relación entre los sesgos del mundo real y del mundo bootstrap (ecuación 2.4.12), permite estimar  $a_\alpha$  y  $b_\alpha$  mediante la distribución muestral del estimador bootstrap de la eficiencia  $\widehat{\theta}_b^*(x_j, y_j)_{RVS}$  como,

$$Pr(-\widehat{b}_\alpha \leq \widehat{\theta}^*(x_j, y_j)_{RVS} - \widehat{\theta}(x_j, y_j)_{RVS} \leq -\widehat{a}_\alpha) = (1 - \alpha) \quad (2.4.22)$$

Simar y Wilson (1998, 2000a) proponen utilizar el método de los percentiles (Efron, 1982) para calcular  $\widehat{a}_\alpha$  y  $\widehat{b}_\alpha$ . Este método se basa en, ordenar de mayor a menor las diferencias  $(\widehat{\theta}_b^*(x_j, y_j)_{RVS} - \widehat{\theta}(x_j, y_j)_{RVS})_{b=1}^B$  y eliminar, a cada extremo de esa ordenación, el  $(\alpha/2)$  por cien de los valores. Tras realizar la exclusión de ese porcentaje de diferencias, los extremos de éstas diferencias ordenadas serán  $\widehat{a}_\alpha$  y  $\widehat{b}_\alpha$ , de tal modo que  $\widehat{a}_\alpha < \widehat{b}_\alpha$ . Con estos valores estimados, la aproximación del intervalo de confianza de (2.4.21) será,

$$Pr(-\widehat{b}_\alpha \leq \widehat{\theta}(x_j, y_j)_{RVS} - \theta(x_j, y_j) \leq -\widehat{a}_\alpha) = (1 - \alpha) \quad (2.4.23)$$

Y el intervalo de confianza estimado será,

$$\widehat{\theta}(x_j, y_j)_{RVS} + \widehat{a}_\alpha \leq \theta(x_j, y_j) \leq \widehat{\theta}(x_j, y_j)_{RVS} + \widehat{b}_\alpha \quad (2.4.24)$$

La infraestimación de la eficiencia técnica que el DEA, por construcción, incorpora en sus estimaciones puede ser corregida, mediante la modificación de los estimadores originales. Esta rectificación, para cada una de las empresas de la muestra, la realizan Simar y Wilson (1998a), corrigiendo el estimador original con la estimación del sesgo de la eficiencia técnica.

Dada la similitud entre  $SSG$  (ecuación 2.4.17) y  $\widehat{SSG}$  (ecuación 2.4.19), el estimador corregido  $(\widehat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS})$  se consigue restando al estimador del DEA (que

incorpora por construcción una infraestimación de la eficiencia) la estimación del sesgo en (2.4.19). Es decir,

$$\widehat{\theta(x_0, y_0)}_{RVS} = \widehat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS} - \widehat{SSG} \quad (2.4.25)$$

Y sustituyendo el valor de  $\widehat{SSG}$  en (2.4.25) se obtiene que,

$$\widehat{\theta(x_0, y_0)}_{RVS} = 2\widehat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS} - B^{-1} \sum_{b=1}^B \widehat{\theta}_b^*(x_0, y_0)_{RVS} \quad (2.4.26)$$

El inconveniente que conlleva la corrección del estimador obtenido con el DEA es que es posible que con ella se acreciente el ruido de la estimación. Es aconsejable, entonces, no modificar el estimador si el error cuadrático medio del estimador corregido,  $\widehat{\theta(x_0, y_0)}_{RVS}$ , es mayor que el de la estimación del DEA,  $\widehat{\theta}(x_0, y_0)_{RVS}$ . Dado que, incluso cuando  $B \rightarrow \infty$ , la varianza del estimador corregido será cuatro veces la varianza del estimador original, Simar y Wilson (1998a) no recomiendan la modificación a menos que la estimación de la varianza de los estimadores del DEA,  $\widehat{\sigma}$ , sea menor que la tercera parte del cuadrado del sesgo estimado. Es decir,

$$\widehat{\sigma}^2 < \frac{1}{3} [\widehat{SSG}]^2 \quad (2.4.27)$$

donde  $\widehat{\sigma}^2$  se estima con la varianza de los estimadores bootstrap tal que,

$$\widehat{\sigma}^2 = B^{-1} \sum_{b=1}^N \left( \widehat{\theta}_b^*(x_0, y_0)_{RVS} - B^{-1} \sum_{b=1}^B \widehat{\theta}_b^*(x_0, y_0)_{RVS} \right)^2. \quad (2.4.28)$$

### 2.4.3 Obtención de la Muestra Bootstrap

En el proceso formulado anteriormente hemos dado por supuesto que contábamos con una estimación del proceso generador de datos consistente, sin ella es imposible obtener las muestras bootstrap con respecto a las cuales estimamos, para cada unidad productiva de la muestra original, la eficiencia que hemos denominado bootstrap. La adecuada generación de  $\chi^*$  es fundamental si se desean obtener estimaciones consistentes de los intervalos de confianza y corregir los estimadores mediante la estimación del sesgo. Los estimadores del DEA se demostraban consistentes en Kneip, Park y Simar, (1998) quienes describían el proceso generador de datos en la ecuación (2.3.11) como,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Psi, f(x, y)) = \mathcal{P}(\Psi, f(\omega, \eta, y)) = \mathcal{P}(\Psi, f(\theta, \eta, y)). \quad (2.4.29)$$

Y su estimación, ya formulada previamente en la ecuación (2.4.2), se puede expresar ahora como,

$$\widehat{\mathcal{P}}(\chi) = \mathcal{P}(\widehat{\Psi}, \widehat{f}(x, y)) = \mathcal{P}(\widehat{\Psi}, \widehat{f}(\omega, \eta, y)) = \mathcal{P}(\widehat{\Psi}, \widehat{f}(\theta, \eta, y)), \quad (2.4.30)$$

donde  $\widehat{\Psi}$  es un estimador consistente de  $\Psi$ .

En (2.4.30) se observan las dos formas alternativas de estimar el proceso generador de datos que se exponen seguidamente,

- (1) Dado que se cumple  $\widehat{\mathcal{P}}(\chi) = \mathcal{P}(\widehat{\Psi}, \widehat{f}(x, y))$ ,  $f(x, y)$  puede ser estimada extrayendo toda la información que nos reporta la muestra original  $\chi$ . El procedimiento, repetido  $B$  veces, es el descrito una muestra bootstrap  $\chi$  en apartados anteriores. La muestra bootstrap, compuesta como  $\chi^* = [(x_1^*, y_1^*), \dots, (x_N^*, y_N^*)]$  puede ser obtenida extrayendo  $N$  valores con reemplazamiento de entre las observaciones iniciales  $\chi = [(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)]$ . Es decir, se supone que cada valor  $(x_j^*, y_j^*)$ ,  $j = 1, \dots, N$  es igual a cualquiera de los valores de  $\chi$  con probabilidad  $1/N$ .
- (2) Observando (2.4.30), notamos que hay otro procedimiento alternativo de estimación de  $\mathcal{P}$ . Si nos fijamos en la igualdad  $\widehat{\mathcal{P}}(\chi) = \mathcal{P}(\widehat{\Psi}, \widehat{f}(\theta, \eta, y))$ , podemos estimar  $f(\theta, \eta, y)$  con la distribución empírica de la eficiencia  $\{(\widehat{\theta}_j, \eta_j, y_j)\}_{j=1}^N$ . El remuestreo, en este caso, se efectúa en el conjunto de residuos estimados:

$$\widehat{\Theta} = [\widehat{\theta}(x_1, y_1)_{BBC}, \dots, \widehat{\theta}(x_N, y_N)_{RVS}],$$

de donde se obtienen  $N$  extracciones con reemplazamiento:

$$\widetilde{\Theta}^* = [\widetilde{\theta}^*(x_1^*, y_1^*), \dots, \widetilde{\theta}^*(x_N^*, y_N^*)],$$

Es decir, se supone también que cada valor  $\{\widetilde{\theta}^*(x_j^*, y_j^*)\}_{j=1}^N$  es igual a cualquiera de los estimadores del conjunto  $\widehat{\Theta}$ , con probabilidad  $1/N$ .

Al remuestrear en los residuos no estamos obteniendo muestras bootstrap sino pseudo valores de eficiencia, como estas muestras son necesarias si queremos continuar con el procedimiento de estimación de la distribución muestral de la eficiencia las calculamos con estos pseudo valores de eficiencia del conjunto  $\widetilde{\Theta}^*$ . Para ello y recordando que para cada empresa  $j$ , fijada la cantidad de

output producido, existe una relación entre su cantidad de inputs eficientes y su estimación de la eficiencia técnica, tenemos que en el caso de la estimación con rendimientos variables de escala,

$$\widehat{x}^\delta(y_j) = x_j \cdot \widehat{\theta}(x_j, y_j)_{RVS}. \quad (2.4.31)$$

Basándonos en la ecuación (2.4.31) y fijando la cantidad de outputs como la de la muestra original:  $y_j = y_j^*$ , para el pseudo estimador  $\widetilde{\theta}^*(x_j^*, y_j^*)$  debe de existir una cantidad de input  $x_j^*$  que permita obtener el input eficiente de esa empresa. Es decir,

$$\widehat{x}^\delta(y_j) = x_j \cdot \widehat{\theta}(x_j, y_j)_{RVS} = x_j^* \cdot \widetilde{\theta}^*(x_j^*, y_j^*). \quad (2.4.32)$$

Realizando este procedimiento para cada empresa se obtiene que la muestra bootstrap  $\chi^* = [(x_1^*, y_1^*), \dots, (x_N^*, y_N^*)]$  está formada de los outputs originales de cada empresa ( $y_j^* = y_j$ ), y sus correspondientes inputs obtenidos despejando en la ecuación (2.4.32) como,

$$x_j^* = \frac{x_j \cdot \widehat{\theta}(x_j, y_j)_{RVS}}{\widetilde{\theta}^*(x_j^*, y_j^*)} \quad j = 1, \dots, N \quad (2.4.33)$$

La probabilidad que ambos procedimientos de remuestreo dan a cada valor que se incorpora a la muestra bootstrap, es siempre la misma:  $(1/N)$ , y por esta característica se les distingue de otros tipos de bootstrap denominándoles bootstrap naïve.

Ferrier y Hirschberg (1997, 1999) adaptaron, al análisis de la eficiencia técnica, el bootstrap naïve con remuestreo en los residuos. El problema de esta aplicación es que aunque en el modelo clásico de regresión las estimaciones obtenidas con este bootstrap son consistentes, Simar y Wilson (1999a, 1999c) demostraron que no ocurre lo mismo en el caso de la eficiencia técnica. Esto se debe a que en el caso de la estimación de la eficiencia, el soporte de la función densidad,  $\Psi$ , está acotado y por tanto, la distribución muestral obtenida tanto de los datos como de la eficiencia, produce no sólo una mala estimación cerca del extremo superior del soporte, sino que las estimaciones de la distribución de la eficiencia son inconsistentes.

Para solventar esta dificultad, se han propuesto, según sea la técnica de remuestreo elegida, dos procedimientos diferentes: el bootstrap homogéneo y el heterogéneo.

#### 2.4.3.1. El Bootstrap Homogéneo

El bootstrap homogéneo, formulado en Simar y Wilson (1998a), supone que la distribución de la eficiencia es homogénea y es, por tanto, independiente de la localización de las empresas dentro del conjunto de producción  $\Psi$ . Si  $\Psi$  es conocido, caracterizamos al proceso generador de datos con la relación (2.4.29) de modo que si introducimos en ella el supuesto de homogeneidad en la eficiencia tenemos que,

$$\mathcal{P}(\Psi, f(\theta, \eta, y)) = \mathcal{P}(\Psi, f(\theta)) \quad (2.4.34)$$

La forma natural de estimar la función de densidad de la eficiencia es, por tanto, con el segundo de los procedimientos formulados anteriormente. Es decir, remuestreando en los valores de ineficiencia estimados con el DEA.

La inconsistencia, ya comentada en la aplicación de Ferrier y Hirschberg (1997, 1999), se produce al estimar la función de densidad de la eficiencia (que en realidad es continua por poder tomar cualquier valor del intervalo  $(0, 1]$ ) como una función de densidad discreta que con probabilidad uno es positiva, en al menos uno de sus puntos.

Simar y Wilson (1999a, 1999c, 2000a) demuestran que la probabilidad de que el valor de la eficiencia estimado por la muestra bootstrap  $\chi^*$  para la empresa de dotación  $(x_0, y_0)$  iguale a la eficiencia estimada con el DEA en el mundo real para el mismo punto es,

$$Pr[\hat{\theta}^*(x_0, y_0) = \hat{\theta}(x_0, y_0) \mid \chi] \geq [1 - (1 - N^{-1})^N]^{p+q} > 0 \quad (2.4.35)$$

Esta probabilidad va a ser positiva aun en el caso en el que  $N \rightarrow \infty$ , ya que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Pr[\hat{\theta}^*(x_0, y_0) = \hat{\theta}(x_0, y_0) \mid \chi] \geq (1 - e^{-1})^{p+q} \approx 0.632^{p+q} \quad (2.4.36)$$

Simar y Wilson (1998a) resuelven la inconsistencia suavizando la función de densidad de la eficiencia mediante una función continua de modo que se garantice que,

$$Pr[\hat{\theta}^*(x_0, y_0) = \hat{\theta}(x_0, y_0)] = 0 \quad (2.4.37)$$

El estimador de la función de densidad de la eficiencia,  $f(\theta)$ , que Simar y Wilson (1998a) proponen es el siguiente kernel Gaussiano del cual pueden ser extraídos consistentemente los pseudo valores de la eficiencia  $\tilde{\theta}^*$ ,

$$\widehat{f}_h(t) = \frac{1}{Nh} \sum_{j=1}^N \phi \left( \frac{t - \widehat{\theta}(x_j, y_j)}{h} \right) \quad (2.4.38)$$

donde  $\phi$  es la función de densidad de una normal estandarizada y  $h$  es el parámetro de suavizado o bandwidth.

En la estimación no paramétrica la selección del bandwidth es un asunto más relevante incluso que la elección del kernel. Generalmente los diferentes criterios de selección del parámetro de suavizado buscan minimizar el error cuadrático integrado (ISE) o el error cuadrático medio integrado (MISE) de la estimación (para una exposición más detallada de los métodos de selección del bandwidth ver Härdle, 1991; Park y Turlach, 1992; Turlach, 1993 y Härdle, Mueller, Sperlich y Werwatz, 1999).

La validación cruzada con mínimos cuadrados es el método que minimiza ISE; mientras que los criterios que minimizan MISE son la validación cruzada sesgada, la validación cruzada suavizada y la validación cruzada de Jones, Marron y Park. Si los datos se consideran distribuidos como una normal, otro método de estimar el parámetro de suavizado es la regla heurística propuesta por Silverman (1986) que emplea la distribución normal en el cálculo del  $h$  óptimo. Métodos que emplean distribuciones no paramétricas en lugar de la normal son el Plug-in de Park y Marron y el de Sheater y Jones. (Análisis prácticos de estos métodos pueden ser consultados en Cao, Cuevas y González-Manteiga, 1992; Jones, Marron y Sheather, 1992)

Es difícil saber cual de los métodos expuestos anteriormente es el mejor entre todos. La regla de Silverman funciona bien si la función de densidad es unimodal, sin embargo, los estimadores de validación cruzada se adaptan automáticamente a la

forma de la función de densidad y la validación cruzada sesgada y la suavizada aunque, tienen los mejores ratios de convergencia necesitan de una muestra muy amplia para que no produzcan una varianza muy grande. La recomendación más habitual es la determinación del bandwidth mediante diferentes métodos y para llevar a cabo su selección, comparar los resultados de la estimación de la densidad.

La densidad estimada con el kernel de la ecuación (2.4.38) no tiene en cuenta la particularidad de que la eficiencia toma valores entre cero y la unidad, es decir:  $0 < t \leq 1$ . Al evaluar la densidad en  $t = 1$  y ser el kernel elegido en (2.4.38) simétrico, como el soporte de  $f$  está acotado no habrá datos al lado derecho de  $t$  para suavizar la estimación<sup>5</sup>. Este hecho, si no se corrige, da lugar a estimaciones sesgadas e inconsistentes. Una posible, aunque problemática solución, es utilizar funciones kernel que sean asimétricas según se aproximen al límite de la eficiencia. Simar y Wilson (1998a, 2000a, 2000b, 2001), debido a su mayor simplicidad, utilizan sin embargo, el método de la reflexión de Silverman (1986).

Este método aporta los datos necesarios para que se produzca también el suavizado de la estimación en los puntos en los que la eficiencia es igual a la unidad. El procedimiento que se sigue es la creación de pseudo valores de eficiencia superiores a la unidad, reflejando con respecto a ese tope, cada una de las  $N$  estimaciones de la eficiencia ya obtenidas con el DEA en el mundo real  $\hat{\Theta} = [\hat{\theta}(x_1, y_1)_{RVS}, \dots, \hat{\theta}(x_N, y_N)_{RVS}]$ . De tal modo que en el mundo bootstrap la densidad se estima con la siguiente muestra de tamaño  $2N$ ,

$$\tilde{\Theta} = [\hat{\theta}(x_1, y_1)_{RVS}, \dots, \hat{\theta}(x_N, y_N)_{RVS}, 1 - \hat{\theta}(x_1, y_1)_{RVS}, \dots, 1 - \hat{\theta}(x_N, y_N)_{RVS}]$$

---

<sup>5</sup>Existe el mismo problema de soporte acotado en el límite inferior:  $t = 0$ . Pero se ignora este problema puesto que se supone que es normal que la densidad en torno a ese punto sea cero.

siendo la función de densidad de la cual se extraerán los pseudo valores:

$$\widehat{g}_h(t) = \frac{1}{2Nh} \sum_{j=1}^N \left[ \phi \left( \frac{t - \widehat{\theta}(x_j, y_j)}{h} \right) + \phi \left( \frac{t - (1 - \widehat{\theta}(x_j, y_j))}{h} \right) \right] \quad (2.4.39)$$

de modo que la función de densidad de interés,  $f(\theta)$  se estima como:

$$\widehat{f}_h(t) = \begin{cases} 2\widehat{g}_h(t) & \text{if } t \leq 1 \\ 0 & \text{if } t > 1 \end{cases} \quad (2.4.40)$$

donde, si se elige el bandwidth apropiadamente,  ${}^6\widehat{f}_h(\theta)$  es un estimador consistente de  $f(\theta)$ .

La obtención de los pseudo valores necesarios para obtener la muestra bootstrap,  $\widetilde{\Theta}^* = [\widetilde{\theta}^*(x_1^*, y_1^*), \dots, \widetilde{\theta}^*(x_N^*, y_N^*)]$ , puede simplificarse si se utiliza el teorema de la convolución de Efron y Tibshirani (1993) como proponen Simar y Wilson (1998a). El generador aleatorio de pseudo muestras consiste en proceder como si se fuera a realizar un bootstrap naïve y sumar con posterioridad a los valores extraídos con reemplazamiento del conjunto  $\widetilde{\Theta}$  un residuo normalizado que se suaviza con  $h$ . Es decir,

$$\widetilde{\theta}^*_j + h\varepsilon_j^*, \quad \forall j = 1, \dots, N. \quad (2.4.41)$$

donde

- $\widetilde{\theta}^*_j$  es la  $j$ -ésima extracción efectuada con reemplazamiento del siguiente conjunto obtenido mediante el ya indicado método de la reflexión,

$$\widetilde{\Theta} = [\widehat{\theta}(x_1, y_1)_{RVS}, \dots, \widehat{\theta}(x_N, y_N)_{RVS}, 1 - \widehat{\theta}(x_1, y_1)_{RVS}, \dots, 1 - \widehat{\theta}(x_N, y_N)_{RVS}]$$

---

<sup>6</sup>En este caso de kernel univariante se debe seleccionar  $h = O(N^{-1/5})$

- $\varepsilon_j^*$  es el residuo obtenido de una función de densidad normal estandarizada.

Con la intención de garantizar que la varianza del pseudo valor obtenido,  $\tilde{\theta}^*(x_j^*, y_j^*)$ , sea asintóticamente correcta, es decir que,

$$\begin{aligned} E(\tilde{\theta}_j^* \hat{\theta}(x_1, y_1)_{RVS}, \dots, \hat{\theta}(x_N, y_N)_{RVS}) &= \mu \\ V(\tilde{\theta}_j^* \hat{\theta}(x_1, y_1)_{RVS}, \dots, \hat{\theta}(x_N, y_N)_{RVS}) &= s^2(1 + \frac{h^2}{N(s^2+h^2)}) \end{aligned}$$

donde  $\mu$  y  $s^2$  son respectivamente la media muestral y la varianza muestral de los estimadores originales de la eficiencia; se formula el siguiente generador aleatorio de pseudo muestras de eficiencia que distingue entre los valores extraidos ya suavizados que caen dentro del tope de la eficiencia ( $\tilde{\theta}_j + h\varepsilon_j^* \leq 1$ ) y los que caen al otro lado ( $\tilde{\theta}_j + h\varepsilon_j^* > 1$ ) que son transformados en valores factibles de eficiencia,

$$\tilde{\theta}^*(x_j^*, y_j^*) = \begin{cases} \bar{\theta}^* + (1 + h^2/s^2)^{-1/2}(\tilde{\theta}_j + h\varepsilon_j^* - \bar{\theta}^*) & \text{if } \tilde{\theta}_j + h\varepsilon_j^* \leq 1 \\ 2 - [\bar{\theta}^* + (1 + h^2/s^2)^{-1/2}(\tilde{\theta}_j + h\varepsilon_j^* - \bar{\theta}^*)] & \text{if } \tilde{\theta}_j + h\varepsilon_j^* > 1 \end{cases} \quad (2.4.42)$$

donde  $\bar{\theta} = N^{-1} \sum_{j=1}^N \tilde{\theta}^*(x_j^*, y_j^*)$ ,

Una vez obtenidos los pseudo valores de (2.4.42) para las  $N$  empresas de la muestra, es posible computar la muestra bootstrap  $\chi^* = [(X_1^*, Y_1^*), \dots, (X_N^*, Y_N^*)]$  siguiendo el procedimiento indicado en las secciones anteriores. Es decir se fijan los outputs como  $(\{Y_j^* = Y_j\}_{j=1}^N)$  y con la relación (2.4.33) se calculan los inputs  $\{X_j^*\}_{j=1}^N$ .

La estimación bootstrap de la eficiencia se efectua mediante la relación (2.4.9) que calcula la eficiencia de las dotaciones originales de cada empresa con respecto

a la nueva tecnología bootstrap; y repitiendo todo el proceso  $B$  veces se obtiene la aproximación muestral de la eficiencia de (2.4.20) que posibilita la construcción de los intervalos de confianza descritos en (2.4.24).

### 2.4.3.2. El Bootstrap Heterogéneo

El bootstrap heterogéneo, formulado en Simar y Wilson (2000b), analiza un marco más genérico al no imponer la condición de homogeneidad en la función de densidad de la eficiencia. Puesto que la eficiencia depende de la localización de la empresa dentro del conjunto de producción, es decir:  $f(\theta, \eta, y)$ , siguiendo la relación (2.4.29) observamos que,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Psi, f(\theta, \eta, y)),$$

y, por tanto, para estimar  $\mathcal{P}$ , la forma más natural de aplicar el bootstrap es remuestreando en los datos.

Como hemos expuesto anteriormente, el naïve bootstrap que remuestreaba con reemplazamiento directamente en los datos de la muestra original  $\chi$  es inconsistente. Esta inconsistencia se debe a que la igualdad  $\hat{\theta}^*(x_0, y_0) = \hat{\theta}(x_0, y_0)$ , se produce con probabilidad positiva y esta dificultad no desaparece cuando  $N \rightarrow \infty$ .

La solución formulada por Simar y Wilson (2000b), al igual que en el bootstrap homogéneo, es extraer las muestras bootstrap de un estimador de la función de densidad  $f(\omega, \eta, y)$  suavizado mediante un kernel consistente. Este problema, dada la

relación (2.4.29), es equivalente a estimar mediante un kernel la función de densidad  $f(\theta, \eta, y)$  y extraer de ella las muestras  $(\theta_j^*, \eta_j^*, y_j^*)$ , siendo  $j = 1, \dots, N$ .

Tal y como ocurría en el bootstrap homogéneo, el soporte de la densidad  $f(\omega, \eta, y)$  está acotado en  $\theta = 1$  y los kernels ordinarios son sesgados e inconsistentes en los alrededores de esa cota. La solución incorporada por Simar y Wilson es también el método de la reflexión de Silverman (1986), y dado que la frontera verdadera es desconocida, se estima  $f(\hat{\theta}, \eta, y)$  empleando, para ello, el conjunto de puntos  $(\hat{\theta}_j, \eta_j, y_j)$ , siendo  $j = 1, \dots, N$ .

Como ya se ha expuesto anteriormente, el método de la reflexión precisa que se dupliquen los puntos utilizados para estimar la función de densidad mediante la reflexión, con respecto a la unidad, de los estimadores del DEA originales. Sea la siguiente matriz,

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} Z \\ Z_R \end{bmatrix} \quad (2.4.43)$$

donde  $Z = [\hat{\theta}_j \quad \eta_j \quad y_j]$  y  $Z_R = [1 - \hat{\theta}_j \quad \eta_j \quad y_j]$  son matrices de dimensiones  $N \times (p + q)$ , que en el caso de  $Z$ , su fila  $j$ -ésima contiene las observaciones muestrales expresadas en coordenadas polares. La fila  $j$ -ésima de  $Z_R$ , sin embargo, contiene las observaciones muestrales expresadas en coordenadas polares, pero reflejadas con respecto al punto o cota  $\hat{\theta} = 1$

La densidad de los  $2N$  puntos de la matriz  $\tilde{Z}$  se estiman mediante el siguiente kernel gaussiano multivariante de media cero y ajustado a la forma de la nube de puntos representada en  $\tilde{Z}$  en el espacio de dimensión  $(p + q)$ .

$$K_i(x) = (2\pi)^{-p+q/2} (\|\widehat{\Sigma}_I\|^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}x'\widehat{\Sigma}_I x), \quad i = 1, 2. \quad (2.4.44)$$

donde  $\widehat{\Sigma}_1$  es la estimación de la matriz de covarianzas de  $\widetilde{Z}$  y  $\widehat{\Sigma}_2$  es la estimación de la matriz de covarianzas de  $\widetilde{Z}_R$ .

La densidad de  $t = (\theta, \eta, y)$  puede ser estimada consistentemente con el siguiente estimador no paramétrico:

$$\widehat{g}_h(t) = \frac{1}{2Nh^{(p+q)}} \sum_{j=1}^N \left[ K_1 \left( \frac{t - t_j}{h} \right) + K_2 \left( \frac{t - t_{R_j}}{h} \right) \right] \quad (2.4.45)$$

donde  $h$  es el parámetro de suavizado que en este tipo de kernels debe de ser  $h = O(N^{\frac{-1}{p+q+4}})$  y la forma más apropiada de obtenerlo es minimizando el error cuadrático medio. Un estimador consistente de  $f$  es el siguiente,

$$\widehat{f}_h(t) = \begin{cases} 2\widehat{g}_h(t) & \text{si } t \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{si } t \notin \mathcal{A} \end{cases} \quad (2.4.46)$$

donde  $\mathcal{A}$  es el soporte acotado de la densidad  $\mathcal{A} = \mathbb{R}_+^q \times [0, \pi/2]^{(p-1)} \times (0, 1]$ .

Las pseudo muestras  $\{(\theta_j^*, \eta_j^*, y_j^*)\}_{j=1}^N$  se obtienen de la densidad estimada en (2.4.46) y, deshaciendo la transformación de las coordenadas polares en sus respectivas coordenadas rectangulares, se computa la muestra bootstrap  $\chi^* = [(X_1^*, Y_1^*), \dots, (X_N^*, Y_N^*)]$ .

La estimación bootstrap de la eficiencia técnica se calcula ahora, para cada una de las dotaciones de la muestra original, aplicando la relación (2.4.9) y repitiendo todo el proceso  $B$  veces para de ese modo aproximar la distribución muestral de la eficiencia de cada empresa. Posteriormente se construyen los intervalos de confianza de la ecuación (2.4.24) y, si fuera conveniente, los estimadores corregidos de (2.4.19).

### **Iterar el bootstrap**

Simar y Wilson (2001) muestran con simulaciones de Monte Carlo que, a pesar de que el estimador sea consistente, los ratios de cobertura ( $\alpha$ ) elegidos para la construcción de los intervalos de confianza pueden no ser muy altos. La solución que proponen Simar y Wilson (2001) a este problema consiste en iterar el bootstrap para estimar la cobertura real y modificar el intervalo de confianza inicial. El algoritmo que se aplica y una más extensa formulación del problema se presenta en Simar y Wilson (2001), págs 324-327.

## **2.5 El Índice de Productividad de Malmquist**

Los índices de Malmquist pueden aplicarse para construir índices de inputs, índices de outputs o índices de productividad. Sus ventajas con respecto a otros números índices son importantes y han representado la principal razón de que este índice se haya empleado en muchos de los trabajos de análisis productivo. En primer lugar, en su construcción, no es necesario disponer de datos de precios por lo que es muy apropiado para sectores en los que no hay precios o están muy distorsionados. No se necesita tampoco suposiciones acerca de la maximización de beneficios o la minimización de costes, por lo que es muy conveniente en los análisis en los que no se conocen los objetivos de los productores. Son muy fáciles de computar y además pueden descomponerse en otros índices que indican las fuentes originarias del cambio productivo.

Caves, Christensen y Diewert (1982) fueron quienes adaptaron el índice formulado

por Malmquist (1953) al contexto de la productividad, introduciendo en su construcción las funciones distancia de Shephard (1970).

El índice de productividad de Malmquist mide el cambio en la productividad comparando, el output producido en la tecnología actual para unos inputs dados, con el output que se podría producir con una tecnología diferente si se empleara la misma dotación de inputs. Si éste es el caso, el índice de Malmquist está orientado hacia los outputs y lo formulábamos en la ecuación (1.6.27) en función de  $\lambda$ , la medida de eficiencia radial de Farrell-Debreu. Tal y como se indicaba en la sección anterior (ecuación 1.6.19), este índice se puede expresar con la distancia de Shephard (1970) sin que por ello cambie ni su valor ni su interpretación. Caves, Christensen y Diewert (1982) expresaron el índice con la distancia de Shephard y habitualmente, aunque no siempre (Färe, Grosskopf y Lovell, 1994), se propone este índice siguiendo esa formulación originaria. En ese caso y expresándolo mediante,  $D_o$ , la distancia de Shephard en el sentido de los outputs se obtiene la siguiente relación,

$$M_o(x_s, x_t, y_s, y_t) = \left[ \frac{D_o^t(x_j^t, y_j^t)}{D_o^t(x_j^s, y_j^s)} \times \frac{D_o^s(x_j^t, y_j^t)}{D_o^s(x_j^s, y_j^s)} \right]^{1/2} \quad (2.5.1)$$

El valor y la interpretación del índice formulado en la ecuación (2.5.1) son idénticos a los expuestos en la ecuación (1.6.27) del capítulo anterior. Es decir, valores positivos indican incrementos en la productividad y negativos empeoramientos productivos.

Alternativamente a este índice orientado hacia los outputs, se puede medir el cambio productivo, comparando los factores productivos empleados cuando el nivel de producción está dado, con el uso de factores en otra tecnología diferente si se continúa produciendo el mismo output. El índice construido de esta forma se denomina índice

de productividad de Malmquist en el sentido de los inputs y era definido en la ecuación (1.6.40). Si lo expresamos mediante las distancias de Shephard orientadas hacia los inputs,  $D_i$ , su formulación es la siguiente,

$$M_I(x_s, x_t, y_s, y_t) = \left[ \frac{D_I^t(x_j^t, y_j^t)}{D_I^t(x_j^s, y_j^s)} \times \frac{D_I^s(x_j^t, y_j^t)}{D_I^s(x_j^s, y_j^s)} \right]^{1/2} \quad (2.5.2)$$

Como en el caso del índice orientado hacia los outputs, los valores e interpretación del índice formulado en la ecuación (2.5.2) son los mismos que los del índice respectivo (1.6.40) formulado con las distancias de Farrell. Es decir, valores negativos indican incrementos en la productividad y positivos, empeoramientos productivos.

Färe, Grosskopf, Lindgren y Roos (1995) redefinieron la media geométrica del índice de la productividad de Malmquist descomponiéndolo en dos índices que son representativos de los orígenes del cambio productivo. Esta descomposición aplicada al índice de Malmquist en el sentido de los inputs<sup>7</sup> da lugar a la siguiente relación,

$$M_I(x_s, x_t, y_s, y_t) = \frac{D_I^t(x_j^t, y_j^t)}{D_I^s(x_j^s, y_j^s)} \left( \frac{D_I^s(x_j^s, y_j^s)}{D_I^t(x_j^s, y_j^s)} \times \frac{D_I^s(x_j^t, y_j^t)}{D_I^t(x_j^t, y_j^t)} \right)^{1/2} \quad (2.5.3)$$

Independientemente de la orientación que se elija para construir el índice, las funciones distancia empleadas en su computación no son conocidas como tampoco lo es el conjunto de posibilidades de producción  $\Psi$  o los conjuntos restringidos de inputs,  $X(y)$ , y outputs,  $Y(x)$ . La obtención de todos estos valores requiere la incorporación de un proceso de estimación. Aunque es posible estimar la eficiencia con técnicas

---

<sup>7</sup>A lo largo de este capítulo se va a desarrollar únicamente el análisis de la productividad mediante el índice de Malmquist orientado a los inputs. La construcción del índice de Malmquist orientado a los outputs seguiría un desarrollo paralelo al formulado aquí y solo requeriría el consiguiente cambio de formulación

paramétricas, Färe, Grosskopf, Lindgren y Roos (1995) fueron los primeros que estimaron el índice de productividad de Malmquist y para ello emplearon el DEA y debido a la simplicidad de su computación, la mayoría de los análisis de productividad, siguen estimando este índice mediante el DEA.

### 2.5.1 Estimación del Índice de Productividad de Malmquist

Un concepto fundamental en la estimación del índice de productividad de Malmquist como la media geométrica formulada en la ecuación (2.5.2), es que este índice sólo mide el cambio productivo si la tecnología verdadera presenta rendimientos constantes de escala en todos sus puntos. Es decir, para medir correctamente los cambios productivos, las distancias que componen el índice deben de obtenerse en referencia a un conjunto de posibilidades de producción definido bajo rendimientos constantes de escala (Grifell y Lovell, 1995).

Dado que el índice de Malmquist analiza el cambio productivo en dos periodos de tiempo distintos:  $s$  y  $t$ , siendo  $s < t$ , todas las estimaciones se deberán realizar para los dos periodos de análisis. En la sección segunda de este capítulo, formulábamos siguiendo el enfoque de Charnes, Cooper, y Rhodes (1978) la siguiente estimación del conjunto de posibilidades de producción bajo rendimientos constantes de escala, que ahora reproducimos incluyendo el periodo de tiempo correspondiente:

$$\widehat{\Psi}_{RCS}^k = \{(x^k, y^k) \in \mathbb{R}_+^{p+q} \mid x^k \geq \sum_{j=1}^N \gamma_j x_j^k, \quad y^k \leq \sum_{j=1}^N \gamma_j y_j^k, \quad \gamma_j \geq 0\}, \quad k = s, t. \quad (2.5.4)$$

La estimación del subconjunto de inputs factibles es:

$$\widehat{X}(y)_{RCS}^k = \{x^k \in \mathbb{R}_+^p \mid (x^k, y^k) \in \widehat{\Psi}_{RCS}^k\}, \quad k = s, t. \quad (2.5.5)$$

La isocuanta correspondiente es,

$$\widehat{ISO}_{X(y)_{RCS}}^k = \{x^k \in \widehat{X}(y)_{RCS}^k \mid \theta x^k \notin \widehat{X}(y)_{RCS}^k \quad \forall \theta < 1\}, \quad k = s, t. \quad (2.5.6)$$

Y la función de distancia de Farrell la definimos con,

$$\widehat{\theta}^k(x^k, y^k)_{RCS} = \min\{\theta \mid \theta x^k \in \widehat{ISO}_{X(y)_{RCS}}^k, \quad \forall \theta \leq 1\}, \quad k = s, t. \quad (2.5.7)$$

En la práctica las distancias de cada periodo se calcula mediante el siguiente problema de programación lineal ya formulado sin el índice temporal en la ecuación (2.2.3),

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_{RCS}^k &= \min_{s.a.\theta, \gamma} \theta \\ &\quad - y_j^k + Y^k \gamma \geq 0 \\ &\quad \theta x_j^k - X^k \gamma \geq 0 \\ &\quad \gamma \geq 0. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

La distancia de Shephard es la inversa de la medida de eficiencia de Farrell, y por tanto:

$$\widehat{D}_I^k(x^k, y^k)_{RCS} = \frac{1}{\widehat{\theta}^k(x^k, y^k)_{RCS}}. \quad (2.5.9)$$

El estimador del índice de Malmquist para una empresa  $j$ , se computa calculando las estimaciones de las distancias que componen los ratios de la ecuación (2.5.2). Es decir, el estimador del índice podemos escribirlo como,

$$\widehat{M}_I(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \left[ \frac{\widehat{D}_I^t(x_j^t, y_j^t)_{RCS}}{\widehat{D}_I^t(x_j^s, y_j^s)_{RCS}} \times \frac{\widehat{D}_I^s(x_j^t, y_j^t)_{RCS}}{\widehat{D}_I^s(x_j^s, y_j^s)_{RCS}} \right]^{1/2}, \quad (2.5.10)$$

donde, las medidas de Farrell necesarias para calcular la eficiencia técnica de dotaciones y tecnologías del mismo periodo o contemporaneas, se estiman con la ecuación (2.5.8) y luego se transforma con (2.5.9) en la distancia de Shephard. Sin embargo las estimaciones de eficiencia de dotaciones de un periodo con tecnologías de otro periodo requieren que se modifique el programa anterior. Por ejemplo para el caso en el que la distancia a obtener es la eficiencia de la dotación del periodo  $t$  con respecto a la tecnología del periodo  $s$ , es decir,  $\widehat{D}_I^s(x^t, y^t)_{RCS}$ , el programa a computar es el siguiente,

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}^s(x^t, y^t)_{RCS} &= \min_{s.a.\theta, \gamma} \theta \\ &- y_j^t + Y^s \gamma \geq 0 \\ &\theta x_j^t - X^s \gamma \geq 0 \\ &\gamma \geq 0, \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

donde  $X^s$  es la matriz de inputs del periodo  $s$  de tamaño  $(P \times N)$  que representa el conjunto de inputs factibles correspondientes a la tecnología del periodo  $s$ .  $Y^s$  es la matriz del periodo  $s$  de tamaño  $(Q \times N)$  que forma, en conjunto con  $X^s$ , las

dotaciones de la tecnología de referencia. La eficiencia técnica de las dotaciones a evaluar son, sin embargo, las del periodo  $t$ :  $(X_j^t, Y_j^t)_{j=1}^N$ .

El valor inverso de las distancias estimadas en el programa (2.5.11) son las distancias requeridas en  $\widehat{D}_I^s(x^t, y^t)_{RCS}$ . La obtención de la eficiencia de la dotación del periodo  $s$  con respecto a la tecnología del periodo  $t$ , es decir,  $\widehat{D}_I^t(x^s, y^s)_{RCS}$  se obtiene análogamente al programa (2.5.11) sustituyendo los valores que antes eran de un periodo por los del otro.

Korostelev, Simar y Tsybakov, (1995a) bajo las condiciones expuestas en la sección anterior de este capítulo demuestran que  $\widehat{\Psi}_{RVS}$  es un estimador consistente de  $\Psi$ . Es sencillo (Simar y Wilson, 1998b) extender este resultado para demostrar que  $\widehat{\Psi}_{RCS}$  es un estimador consistente de  $\Psi$  si existen rendimientos constantes en todos los puntos de la tecnología. La estimación de la eficiencia técnica siempre va a ser consistente bajo rendimientos variables de escala y es la estimación más adecuada si no se conoce con seguridad la tecnología verdadera. Sin embargo el índice de Malmquist se debe de construir bajo rendimientos constantes de escala porque esas medidas de eficiencia son la única referencia óptima con la que es posible medir las fuentes del cambio productivo.

Una de las principales ventajas, ya comentadas, de la adaptación del índice de Malmquist al marco de la productividad, es que puede reescribirse y desagregarse en diferentes índices con los que es posible indagar en las diferentes fuentes del cambio de la productividad. La primera descomposición fue realizada por Färe, Grosskopf, Lindgren y Roos (1995) diferenciando entre el cambio productivo originado por el cambio en la eficiencia (lo que denominaron: catching-up) y el originado por lo que

denominaron cambio tecnológico (technical change). Desde entonces, se han desarrollado nuevas y más extensas descomposiciones con el mismo objetivo de diferenciar la procedencia del cambio productivo (ver Grifell y Lovell, 1999 para la revisión de los diferentes índices y de sus propiedades). Una desagregación del índice que explica mas apropiadamente las fuentes de la variación productiva es la desarrollada por Simar y Wilson (1998b).

La deducción de este índice requiere además de la estimación de la eficiencia técnica bajo rendimientos constantes formulada anteriormente, la estimación bajo rendimientos variables. La estimación de  $\Psi$  en este caso la formulábamos con el enfoque desarrollado por Banker, Charnes y Cooper (1994) en la sección 2 de este capítulo como,

$$\widehat{\Psi}_{RVS}^k = \{(x^k, y^k) \in \mathbb{R}_+^{p+q} \mid x^k \geq \sum_{j=1}^N \gamma_j x_j^k, \quad y^k \leq \sum_{j=1}^N \gamma_j y_j^k, \quad \sum_{j=1}^N \gamma_j = 1, \quad \gamma_j \geq 0\}, k = s, t. \quad (2.5.12)$$

El subconjunto estimado de inputs factibles era:

$$\widehat{X}(y)_{RVS}^k = \{x^k \in \mathbb{R}_+^p \mid (x^k, y^k) \in \widehat{\Psi}_{RVS}^k\}, \quad k = s, t. \quad (2.5.13)$$

La isocuanta era,

$$\widehat{ISO}_{X(y)_{RVS}}^k = \{x^k \in \widehat{X}(y)_{RVS}^k \mid \theta x \notin \widehat{X}(y)_{RVS}^k \quad \forall \theta < 1\}, \quad k = s, t. \quad (2.5.14)$$

Y por último, la función de distancia de Farrell se formulaba como,

$$\widehat{\theta}(x, y)_{RVS}^k = \min\{\theta \mid \theta x \in \widehat{ISO}_{X(y)_{RVS}}^k, \quad \forall \theta \leq 1\}, \quad k = s, t. \quad (2.5.15)$$

Al ser la distancia de Farrell la inversa de la distancia de Shephard,

$$\widehat{D}_I^k(x^k, y^k)_{RVS} = \frac{1}{\widehat{\theta}(x^k, y^k)_{RVS}}. \quad (2.5.16)$$

La estimación del índice de Malmquist, reescrito por Simar y Wilson (1998b), se formula mediante la descomposición en cuatro índices siguiente,

$$\begin{aligned} \widehat{M}_I(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) &= \left( \frac{\widehat{D}_I^t(x_j^t, y_j^t)_{RVS}}{\widehat{D}_I^s(x_j^s, y_j^s)_{RVS}} \right) \times \left( \frac{\widehat{D}_I^t(x_j^t, y_j^t)_{RCS} / \widehat{D}_I^t(x_j^t, y_j^t)_{RVS}}{\widehat{D}_I^s(x_j^s, y_j^s)_{RCS} / \widehat{D}_I^s(x_j^s, y_j^s)_{RVS}} \right) \times \\ &\times \left( \frac{\widehat{D}_I^s(x_j^t, y_j^t)_{RVS}}{\widehat{D}_I^t(x_j^t, y_j^t)_{RVS}} \times \frac{\widehat{D}_I^s(x_j^s, y_j^s)_{RVS}}{\widehat{D}_I^t(x_j^s, y_j^s)_{RVS}} \right)^{1/2} \times \\ &\times \left( \frac{\widehat{D}_I^s(x_j^t, y_j^t)_{RCS} / \widehat{D}_I^s(x_j^t, y_j^t)_{RVS}}{\widehat{D}_I^t(x_j^t, y_j^t)_{RCS} / \widehat{D}_I^t(x_j^t, y_j^t)_{RVS}} \times \frac{\widehat{D}_I^s(x_j^s, y_j^s)_{RCS} / \widehat{D}_I^s(x_j^s, y_j^s)_{RVS}}{\widehat{D}_I^t(x_j^s, y_j^s)_{RCS} / \widehat{D}_I^t(x_j^s, y_j^s)_{RVS}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

La relación resumen de la ecuación (2.5.17) es la siguiente igualdad donde se presenta el índice descompuesto en las cuatro fuentes del cambio productivo,

$$\widehat{M}_I(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) = \widehat{\mathcal{E}}_I(s, t)_j \times \widehat{\mathcal{S}}_I(s, t)_j \times \widehat{\mathcal{T}}_I(s, t)_j \times \widehat{\mathcal{ST}}_I(s, t)_j. \quad (2.5.18)$$

El primer ratio de la ecuación (2.5.18) es el denominado índice del cambio en eficiencia pura,

$$\widehat{\mathcal{E}}_I(s, t)_j = \frac{\widehat{D}_I^t(x_j^t, y_j^t)_{RVS}}{\widehat{D}_I^s(x_j^s, y_j^s)_{RVS}}. \quad (2.5.19)$$

$\widehat{\mathcal{E}}_I(s, t)_j$  mide los cambios relativos en la eficiencia técnica que una empresa  $j$  ha experimentado entre el periodo  $s$  y el periodo  $t$  respecto a sus tecnologías contemporáneas.

El segundo índice de la ecuación (2.5.18), es el ratio que mide la contribución en el cambio productivo de la ineficiencia originada por la escala de la empresa analizada,

$$\widehat{\mathcal{S}}_I(s, t)_j = \left( \frac{\widehat{D}_I^t(x_j^t, y_j^t)_{RCS} / \widehat{D}_I^t(x_j^t, y_j^t)_{RVS}}{\widehat{D}_I^s(x_j^s, y_j^s)_{RCS} / \widehat{D}_I^s(x_j^s, y_j^s)_{RVS}} \right). \quad (2.5.20)$$

$\widehat{\mathcal{S}}_I(s, t)_j$  es un ratio de los índices de eficiencia de escala ( $(IS)(s)_j / (IS)(t)_j$ ), siendo (IS) el inverso del índice de eficiencia de escala definido, con las medidas de Farrell, en (2.2.12)<sup>8</sup>, y donde cada uno de ellos miden, para sus respectivas tecnologías, la variación de la estimación de los verdaderos valores de la eficiencia con respecto a las estimaciones de los óptimos de esas mismas tecnologías.

El tercer índice de la ecuación (2.5.18) describe la contribución, en el total del cambio de la productividad, de los cambios en lo que se denomina "tecnología pura"

$$\widehat{\mathcal{T}}_I(s, t)_j = \left( \frac{\widehat{D}_I^s(x_j^t, y_j^t)_{RVS}}{\widehat{D}_I^t(x_j^t, y_j^t)_{RVS}} \times \frac{\widehat{D}_I^s(x_j^s, y_j^s)_{RVS}}{\widehat{D}_I^t(x_j^s, y_j^s)_{RVS}} \right)^{1/2}. \quad (2.5.21)$$

---

<sup>8</sup>Al emplear en su construcción las medidas de Shephard, que son las inversas de Farrell, el índice de eficiencia de escala (IS) va a ser igual o superior a la unidad, indicando una mayor ineficiencia de escala a medida que se incrementa su valor

$\widehat{\mathcal{T}}_I(s, t)_j$ , es una media geométrica de dos ratios compuestos de estimaciones de la verdadera eficiencia. El primero de los ratios mide el cambio experimentado entre el periodo  $s$  y el periodo  $t$  de la estimación de la verdadera tecnología para la empresa cuando su dotación es la correspondiente al periodo  $t$ ,  $(x_j^t, y_j^t)$ . El segundo porcentaje mide la misma variación, pero en el caso en el que se empleen  $x_j^s$  inputs para producir  $y_j^s$  outputs.

El cuarto componente de la ecuación (2.5.18), es la contribución, al cambio productivo, de lo que se designa "cambio en la escala de la tecnología",

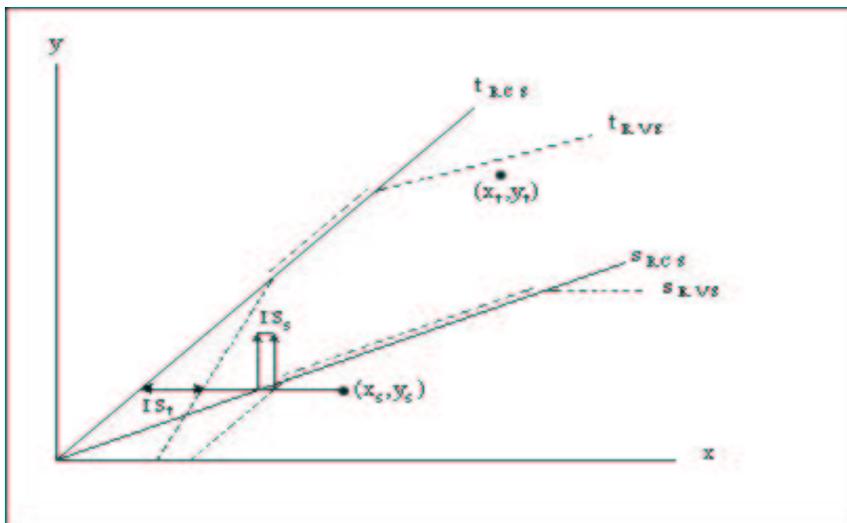
$$\widehat{\mathcal{ST}}_I(s, t)_j = \left( \frac{\widehat{D}_I^s(x_j^t, y_j^t)_{RCS} / \widehat{D}_I^s(x_j^t, y_j^t)_{RVS}}{\widehat{D}_I^t(x_j^t, y_j^t)_{RCS} / \widehat{D}_I^t(x_j^t, y_j^t)_{RVS}} \times \frac{\widehat{D}_I^s(x_j^s, y_j^s)_{RCS} / \widehat{D}_I^s(x_j^s, y_j^s)_{RVS}}{\widehat{D}_I^t(x_j^s, y_j^s)_{RCS} / \widehat{D}_I^t(x_j^s, y_j^s)_{RVS}} \right)^{1/2}. \quad (2.5.22)$$

El índice del cambio en la en escala de la tecnología, al igual que el índice del cambio en la tecnología pura, es una media geométrica de dos índices que, en este caso, se componen de índices de escala en los que se ha fijado la dotación correspondiente. Es decir,

$$\widehat{\mathcal{ST}}_I(s, t)_j = \frac{IS^t(t)}{IS^s(t)} \times \frac{IS^t(s)}{IS^s(s)}. \quad (2.5.23)$$

El primer ratio de  $\widehat{\mathcal{ST}}_I(s, t)_j$  analiza, fijada la posición de la empresa con la dotación  $(x_j^t, y_j^t)$ , los cambios que se han producido en la escala en ambas tecnologías. El segundo índice calcula los cambios en la escala de la tecnología pero fijando la dotación de la empresa como  $(x_j^s, y_j^s)$ .

Gráfico 2.7. Índice del Cambio en la Escala de la Tecnología



Valores superiores a la unidad del índice  $\widehat{ST}_I(s, t)_j$  significan cambios en la escala de la tecnología en los que con el paso del tiempo la tecnología se ha alejado más de la tecnología óptima. Valores inferiores a uno implican que el paso del tiempo ha originado un acercamiento de la tecnología verdadera a la óptima. Valores iguales a la unidad significan que no se ha producido ninguna modificación en la escala de la tecnología.

En el Gráfico 2.7 se muestra  $IS^t(s)/IS^s(s)$ , el segundo de los índices de la media geométrica de la ecuación (2.5.23) con el que es posible analizar el papel que representa el índice  $\widehat{ST}_I(s, t)_j$  en el total del índice de productividad de Malmquist. Las tecnologías estimadas son las de los dos periodos, tanto para rendimientos constantes ( $s_{RCS}, t_{RCS}$ ) como para variables ( $s_{RVS}, t_{RVS}$ ). Se observa como para la dotación  $(x_j^s, y_j^s)$  el valor del índice de escala  $IS^t(s)$  (representado en el gráfico por la flecha bidireccional denominada  $IS_t$ ) es el ratio entre la eficiencia técnica si la tecnología de análisis  $t$  se estima con rendimientos constantes o con rendimientos variables; y

su valor es mayor que uno indicando ineficiencia de escala siendo, esta ineficiencia de escala, menor cuanto más se acerque el índice a uno. El mismo análisis con respecto a la tecnología  $s$  nos lleva al mismo resultado puesto que el valor del índice de escala, representado en el gráfico con la distancia entre las líneas unidireccionales  $IS_s$  es también negativo indicando ineficiencia de escala. Dado que  $IS_s < IS_t$ , significa que para la misma dotación de la empresa  $j$ , la ineficiencia de escala en el periodo  $s$  es menor al acontecido en el periodo  $t$ . Por tanto, relativa a la situación de la dotación  $(x_s, y_s)$ , el paso del tiempo ha producido que la tecnología verdadera (RVS) se aleje de la tecnología óptima (RCS) y se incremente la ineficiencia de escala.

En el resto de índices, sus valores estimados tienen una interpretación equivalente a la expuesta para el índice de Malmquist. Es decir, sus valores podrán ser,

menores que la unidad, indicando mejoras en la productividad debidas al índice respectivo entre los periodos  $s$  y  $t$ ,

inferiores a la unidad, indicando empeoramientos en la productividad debidas al índice respectivo

iguales a la unidad, señalando que no han existido cambios en la productividad debidas al índice analizado.

Todos estos índices tienen las mismas propiedades estadísticas que la estimación de la eficiencia técnica, puesto que, son estimados mediante la sustitución de las estimaciones de la eficiencia en cada uno de los respectivos ratios del correspondiente índice. Las propiedades estadísticas de las estimaciones de la eficiencia técnica del DEA expuestas en la sección anterior son, por tanto, aplicables a las estimaciones

puntuales de los índices de cambio productivo obtenidos en esta sección. La construcción de intervalos de confianza de las estimaciones de los índices sólo van a ser posibles, al igual que ocurría con la eficiencia técnica, aplicando un bootstrap. Mediante el empleo de esta herramienta, Simar y Wilson (1999b), introducen una cierta heterogeneidad al evaluar si las estimaciones de los cambios productivos son significativamente diferentes a la unidad.

### **2.5.2 El Bootstrap y la Significatividad de los Índices de Malmquist**

Simar y Wilson (1998b, 1999b) han adaptado el procedimiento del bootstrap homogéneo, desarrollado en la sección anterior, al problema de la estimación del índice de Malmquist y su descomposición en índices causales del cambio productivo.

Dado que la estimación de los índices de Malmquist consiste en sustituir en la ecuación (2.5.17) las estimaciones de las medidas de eficiencia técnica correspondientes; los estimadores de los índices serán consistentes siempre que se apliquen las mismas condiciones que necesita la consistencia de sus componentes. La construcción de intervalos de confianza de las estimaciones del índice del Malmquist, debe de ser llevada a cabo mediante la aplicación de un bootstrap con las mismas características que el desarrollado anteriormente para la eficiencia técnica. Esto es así porque en realidad lo que el bootstrap, aplicado al índice de productividad, aproxima es de nuevo la distribución muestral de la eficiencia técnica. La única diferencia entre ambos bootstraps es que en esta estimación y puesto que los índices de Malmquist se obtienen analizando las medidas de eficiencia técnica de dos años consecutivos,

es conveniente mantener la correlación temporal que pudiera existir en la eficiencia técnica estimada en esos años. Esta característica, peculiar del índice, se debe de incluir en el procedimiento generador de la muestra bootstrap.

Tal y como veíamos en la sección anterior, puesto que el bootstrap naïve era inconsistente, se necesitaba emplear un estimador de la eficiencia técnica suavizado mediante un kernel gaussiano (ecuación 2.4.38). De esta estimación de la densidad, corregida con el método de la reflexión, se obtenían los siguientes pseudo-valores de eficiencia técnica

$$\tilde{\Theta}^* = [\tilde{\theta}^*(x_1^*, y_1^*), \dots, \tilde{\theta}^*(x_N^*, y_N^*)]. \quad (2.5.24)$$

Con este conjunto y fijando los outputs como  $(\{y_j^* = y_j\}_{j=1}^N)$ , se obtenían los inputs  $\{x_j^*\}_{j=1}^N$  de la muestra bootstrap siguiendo el procedimiento ya señalado en la ecuación (2.4.33) como,

$$x_j^* = \frac{x_j \cdot \hat{\theta}(x_j, y_j)_{RVS}}{\tilde{\theta}^*(x_j^*, y_j^*)}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.5.25)$$

Realizado este procedimiento para las  $N$  empresas, se obtenía la siguiente muestra bootstrap,

$$\chi^* = [(X_1^*, Y_1^*), \dots, (X_N^*, Y_N^*)]. \quad (2.5.26)$$

En el caso del bootstrap aplicado a los índices de Malmquist, Simar y Wilson incluyen la correlación bianual existente en los valores de la eficiencia, mediante la estimación de la siguiente función de densidad suavizada con un kernel bivariente

$$\widehat{f}_h(z) = \frac{1}{Nh^2} \sum_{j=1}^N K\left(\frac{z - Z_j}{h}\right), \quad (2.5.27)$$

donde  $z$  tiene dimensión  $(1 \times 2)$  y  $Z_j$  es la fila de dimensión  $(N \times 2)$  compuesta por los datos originales de dos años consecutivos correspondientes a la empresa  $j$ . Al igual que en secciones anteriores,  $h$ , es el parámetro de suavizado. Su elección como ya se ha indicado anteriormente es muy relevante y puede ser seleccionada mediante validación cruzada o mediante la regla heurística propuesta por Silverman (1986)<sup>9</sup> si los datos son normales

Tras efectuar el proceso de estimación, los dos años consecutivos con los que se quiera construir el índice de Malmquist, de la eficiencia técnica mediante el DEA, Simar y Wilson (1999b) construyen las siguientes matrices,

$$A = [\widehat{D}^s(x_1^s, y_1^s), \dots, \widehat{D}^s(x_N^s, y_N^s)],$$

$$B = [\widehat{D}^t(x_1^t, y_1^t), \dots, \widehat{D}^t(x_N^t, y_N^t)],$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} A & B \\ 2 - A & B \\ 2 - A & 2 - B \\ A & 2 - B \end{bmatrix},$$

donde la matriz  $\Delta$  es de dimensión  $(4N \times 2)$  y contiene  $(4N)$  pares de estimadores de eficiencia correspondientes a los dos periodos de tiempo consecutivos. Los valores

---

<sup>9</sup>Silverman recomienda en el caso de kernels bivariantes que el parámetro de suavizado sea igual a  $h = 0.96\hat{\sigma}J^{-1/6}$  donde  $\sigma$  es la desviación estandar de las eficiencias estimadas por el DEA.

que se incluyen en  $(2 - A)$  y  $(2 - B)$  son la reflexión de los estimadores de la eficiencia que al ser la inversa de la distancia Farrell se deben reflejar con respecto a dos, en vez de con respecto a la unidad.

Si  $\Delta_j$  es la  $j$ -ésima fila de la matriz  $\Delta$  se puede estimar la siguiente función de densidad

$$\widehat{g}_h(z) = \frac{1}{4Nh^2} \sum_{j=1}^{4N} K_j \left( \frac{z - \Delta_j}{h} \right), \quad (2.5.28)$$

donde  $z = [z_1, z_2]$  es bidimensional y  $K(\cdot)$  es la función de densidad normal bivariente con varianza igual a la matriz de varianzas-covarianzas  $[A \ B]$  si

$$j = 1, \dots, N, \quad 2N + 1, \dots, 3N,$$

o a la matriz de varianzas-covarianzas  $[2 - A \ 2 - B]$  si

$$j = N + 1, \dots, 2N, \quad 3N + 1, \dots, 4N.$$

Estimándose consistentemente la función de interés de la ecuación (2.5.27) como<sup>10</sup>,

$$\widehat{g}_h^*(z) = \begin{cases} 4\widehat{g}_h(z) & \text{si } z_1 \geq 1, z_2 \geq 1 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \quad (2.5.29)$$

A través de esta densidad se obtienen las necesarias parejas de pseudo-valores de la eficiencia técnica para cada dos años consecutivos. Con este conjunto de parejas de

---

<sup>10</sup>Simar y Wilson (1999b) han adaptado un algoritmo, similar al empleado en el caso de la eficiencia univariante ya expresado en la ecuación (2.4.42), que facilita la obtención de las pseudomuestras de la ecuación (2.5.29) mediante el uso del teorema de la convolución de Efron y Tibshirani (1993).

seudo eficiencias, y al igual que en la sección anterior, se sustituyen los pseudo valores en la ecuación (2.5.25) y se calcula la muestra bootstrap correspondiente a cada año como el siguiente conjunto,

$$(\chi^*)_k = [(X_1^*, Y_1^*), \dots, (X_N^*, Y_N^*)]_k, \quad k = s, t.$$

Tras obtener la muestra bootstrap se continúa el procedimiento estimando, para cada muestra bootstrap, la eficiencia del DEA tal y como se formulaba en la relación (2.4.9). Es decir, teniendo en cuenta que la estimación bootstrap de la eficiencia evalúa los datos originales con respecto a la frontera compuesta por la muestra bootstrap. Repitiendo todo el proceso  $B$  veces se obtienen las aproximaciones muestrales (2.4.20) de cada una de las distancias que son necesarias en la obtención de los componentes del índice de Malmquist de la ecuación (2.5.17).

Las distancias necesarias para computar tanto el índice de Malmquist y como sus componentes, se obtienen unas bajo rendimientos constantes y otras bajo rendimientos variables. Bajo rendimientos constantes y ya en función de la distancia Shephard (valores inversos a los de la distancia de Farrell) se deberán calcular las siguientes estimaciones

$$[\widehat{D}_{RCS}^{*s}(x_j^s, y_j^s), \widehat{D}_{RCS}^{*s}(x_j^t, y_j^t), \widehat{D}_{RCS}^{*t}(x_j^t, y_j^t), \widehat{D}_{RCS}^{*t}(x_j^s, y_j^s)]_{b=1}^B, \quad \forall j = 1, \dots, N. \quad (2.5.30)$$

y análogamente, bajo rendimientos variables de escala,

$$[\widehat{D}_{RVS}^{*s}(x_j^s, y_j^s), \widehat{D}_{RVS}^{*s}(x_j^t, y_j^t), \widehat{D}_{RVS}^{*t}(x_j^t, y_j^t), \widehat{D}_{RVS}^{*t}(x_j^s, y_j^s)]_{b=1}^B, \quad \forall j = 1, \dots, N. \quad (2.5.31)$$

Sustituidas cada una de estas estimaciones en los índices correspondientes, las estimaciones bootstrap del índice de Malmquist y sus componentes son,

$$[\widehat{\mathcal{M}}^*_j(s, t), \widehat{\mathcal{E}}^*_j(s, t), \widehat{\mathcal{S}}^*_j(s, t), \widehat{\mathcal{T}}^*_j(s, t), \widehat{\mathcal{ST}}^*_j(s, t)]_{b=1}^B, \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (2.5.32)$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{M}}^*_j(s, t) &= \widehat{M}_I(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t), & \widehat{\mathcal{E}}^*_j(s, t) &= \widehat{\mathcal{E}}^*_I(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) \\ \widehat{\mathcal{S}}^*_j(s, t) &= \widehat{\mathcal{S}}^*_I(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t), & \widehat{\mathcal{T}}^*_j(s, t) &= \widehat{\mathcal{T}}^*_I(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t), \\ \widehat{\mathcal{ST}}^*_j(s, t) &= \widehat{\mathcal{ST}}^*_I(x_j^s, x_j^t, y_j^s, y_j^t) \end{aligned}$$

Es decir la ecuación (2.5.32) aproxima, mediante los  $B$  valores correspondientes, las distribuciones muestrales de cada índice. Con la distribución muestral calculada, es sencillo construir intervalos de confianza para las estimaciones de cada uno de esos índices. El procedimiento es el mismo que el que se sigue en la eficiencia técnica y se debe de repetir para cada uno de los componentes del índice de Malmquist. Solamente se va a definir la técnica a seguir en el caso del índice de Malmquist, puesto que la actuación es la misma en todos ellos.

El desconocimiento de la distribución muestral de las estimaciones del índice de Malmquist conlleva a que no se puedan obtener, de forma inmediatea, sus intervalos de confianza mediante la siguiente relación,

$$Pr(-b_\alpha \leq \widehat{\mathcal{M}}_j(s, t) - \mathcal{M}_j(s, t) \leq -a_\alpha) = (1 - \alpha) \quad (2.5.33)$$

Los estimadores de  $a_\alpha$  y  $b_\alpha$  que permitirían construir el intervalo de confianza formulado en (2.5.33) sólo se pueden estimar mediante la distribución bootstrap como,

$$Pr(-\widehat{b}_\alpha \leq B^{-1} \sum_{b=1}^B \widehat{\mathcal{M}}_j^*(s, t) - \widehat{\mathcal{M}}_j(s, t) \leq -\widehat{a}_\alpha) = (1 - \alpha) \quad (2.5.34)$$

donde al igual que en el caso de la eficiencia Simar y Wilson (1998b) utilizan el método de los percentiles para calcular los valores  $\widehat{a}_\alpha$   $\widehat{b}_\alpha$ .

Por tanto la aproximación del intervalo de confianza se puede expresar como,

$$Pr(-\widehat{b}_\alpha \leq \widehat{\mathcal{M}}_j(s, t) - \mathcal{M}_j(s, t) \leq -\widehat{a}_\alpha) = (1 - \alpha) \quad (2.5.35)$$

y el intervalo estimarlo con la siguiente relación,

$$\widehat{\mathcal{M}}_j(s, t) + \widehat{a}_\alpha \leq \mathcal{M}_j(s, t) \leq \widehat{\mathcal{M}}_j(s, t) + \widehat{b}_\alpha \quad (2.5.36)$$

Al igual que en el caso de la eficiencia técnica, también los estimadores pueden ser corregidos, siempre que el error cuadrático medio del estimador corregido sea menor que el de los estimadores originales, eliminado el sesgo que se ha estimado con el bootstrap.

$$\check{\mathcal{M}}_j(t_1, t_2) = \widehat{\mathcal{M}}_j(s, t) - \widehat{SSG}\{\widehat{\mathcal{M}}_j(s, t)\} \quad (2.5.37)$$

siendo  $\widehat{SSG}\{\widehat{\mathcal{M}}_j(s, t)\} = B^{-1} \sum_{b=1}^B \widehat{\mathcal{M}}_j^*(s, t) - \widehat{\mathcal{M}}_j(s, t)$  el estimador del sesgo que los índices, por derivación del sesgo innato que el DEA incluye en la eficiencia, tienen por construcción.

## 2.6 Eficiencia Técnica y Productividad en los Aeropuertos Españoles.

### 2.6.1 Introducción

Generalmente en las aplicaciones del DEA se estima la eficiencia o el cambio productivo y se da por supuesto que al formular el modelo determinísticamente, sus estimaciones no presentan heterogeneidad. El enfoque estadístico del DEA, sin embargo, considera que la ineficiencia es una variable aleatoria asimétrica y agrega, a las estimaciones del DEA tradicional, un análisis estadístico modificando sustancialmente los resultados obtenidos con el DEA tradicional. La aplicación del bootstrap nos permite pues, investigar cómo la muestra, en la que basamos la estimación, puede haber influido en la estimación errónea de las variables de interés.

El objetivo de este apartado es, empleando una aplicación en el sector de aeropuertos, resaltar las aportaciones que el análisis estadístico introduce en la estimación del DEA tradicional. Como ya hemos indicado, este tipo de comparaciones son escasas y generalmente el supuesto de la consistencia del análisis del DEA da pie al investigador a no realizar ninguna inferencia estadística.

La aplicación que seguidamente presentamos tiene la estructura de un artículo, por tanto, en primer lugar, motivamos la necesidad de efectuar el análisis de eficiencia técnica y de cambio productivo tanto en general como en el caso particular de los aeropuertos españoles. El siguiente subapartado ofrece un análisis de los datos con los que contamos para efectuar la estimación. Tras los apartados clásicos de

presentación tanto del problema como de los datos de la estimación, empleamos el DEA tradicional para estimar la mayoría de los aspectos que hemos estudiado en la primera parte de este capítulo. Tras analizar los resultados obtenidos con el DEA determinístico, aplicamos inferencia estadística tanto a las estimaciones de eficiencia técnica como a las del índice de Malmquist en el último de los apartados. Las conclusiones de la evolución del sector son diferentes cuando incorporamos inferencia estadística y es en este apartado donde comparamos ambas estimaciones y resaltamos principalmente esas disparidades.

### **2.6.2 Los Aeropuertos y la Eficiencia Técnica**

Hasta una época reciente, el transporte aéreo ha sido, en general, un sector fuertemente regulado debido a motivos tales como defensa nacional, ser un servicio público, seguridad nacional y otras finalidades no comerciales. Sin embargo, en las últimas décadas, la opinión generalizada de que esta regulación puede haber contribuido a importantes pérdidas de eficiencia en los servicios prestados por los aeropuertos ha suscitado una corriente partidaria de una mayor privatización del sector. La puesta en funcionamiento de medidas de privatización y la desregularización efectuada parecen ser causa de un incremento en la eficiencia y de bajadas de los precios del transporte. Pero a pesar de estos aspectos positivos, siguen existiendo todavía evidencias de congestión y el incremento en el número de viajeros ha ocasionado problemas de gestión y planificación en muchos aeropuertos (Gonenc y Nicoletti, 2000; Betancour y Jorge, 1999).

Los servicios efectuados en los aeropuertos, en general, pueden ser clasificados en

tres grupos: servicios operativos (como son el sistema de control aéreo, las telecomunicaciones, el mantenimiento etc.), servicios de handling como son la carga y descarga del equipaje o el embarque de los viajeros y, por último, los servicios comerciales. La puesta en marcha del proceso de privatización de estas prestaciones con el objetivo primordial de mejorar la eficiencia en la gestión de los aeropuertos ha impuesto una gran presión en el sector. La valoración de los resultados de la incorporación de medidas de gestión alternativas así como la evaluación en la eficiencia de los recursos de producción disponibles deben de ser realizadas con medidas sectoriales de productividad y de eficiencia. Como en el caso de otros modelos de transporte, la dificultad en la determinación de los inputs y los outputs que integran la producción del sector y la inexistencia de precios de mercado para sus servicios dificultan el análisis económico a realizar. Sin embargo, y a pesar de estos inconvenientes, los esfuerzos de la investigación deben orientarse a investigar el impacto en la productividad y en la tecnología del proceso de privatización y de la desregulación en el sector.

Uno de los trabajos más recientes que trata de responder si la regulación limitando el poder de los monopolios mejora la eficiencia en los aeropuertos es el realizado por Gonenc y Nicoletti (2000). En su artículo, analizan las conexiones entre la liberalización, la privatización, la competitividad y la eficiencia en el sector aéreo de 27 naciones de la OCDE. Con el objetivo de obtener una medida global de eficiencia estática en casos con múltiples outputs la técnica que aplican es el DEA.

Fernandes y Pacheco (2002) analizan con el DEA la eficiencia de los aeropuertos de Brasil en términos del número de pasajeros. Gillen y Lall (1997) efectúan, con el DEA también, un análisis de la eficiencia técnica en el caso de los aeropuertos norteamericanos. En su trabajo además realizan un análisis explicativo de las variables que son

una potencial causa de la ineficiencia en el sector. En un trabajo posterior, Gillen y Lall (2001) efectúan un análisis del cambio productivo experimentado por el sector durante 5 años aplicando el DEA al índice de Malmquist. El cambio productivo lo analizan, en este caso, construyendo dos funciones de producción diferentes. Establecen, sin ninguna justificación teórica, una función de producción exclusivamente para las actividades aéreas y otra para las actividades que se efectúan en las terminales y analizan los respectivos cambios en la productividad. La principal desventaja de sus trabajos, al igual que en todos los artículos que hemos enumerado anteriormente, es que no aplican un análisis estadístico a sus estimaciones.

Con respecto a los aeropuertos españoles, en 1990 se fundó con un estatus autónomo la compañía pública denominada Ente Público de Aeropuertos Españoles y Navegación Aérea (AENA). Su principal objetivo era encargarse de la administración y del proceso de privatización de los aeropuertos españoles. En este sentido, su principal logro ha sido la introducción de financiación privada en los aeropuertos mediante los esquemas BOT<sup>11</sup> y la liberalización de las actividades de handling.

En general, la introducción del sector privado en las operaciones de los aeropuertos españoles se ha dirigido a reestructurar los aeropuertos con lo que podría ser llamado modelo de aeropuerto comercial. Los ingresos obtenidos por los aeropuertos pueden ser clasificados como aeronáuticos o no-aeronáuticos dependiendo de que éstos sean generados o no por la prestación de servicios relacionados directamente con las funciones aéreas del aeropuerto. Existe una relación entre el tamaño del aeropuerto y el origen del ingreso, siendo los aeropuertos más grandes los más capaces

---

<sup>11</sup>BOT (Build Operate Transfer) son ayudas a empresas privadas del gobierno para concesiones o franquicias que modernicen o construyan instalaciones que podrán ser explotadas por esa empresa durante un periodo de tiempo (Betancor y Rendeiro, 1999).

de explotar actividades comerciales y generar por tanto ingresos provenientes de esas actividades. Los aeropuertos pequeños, sin embargo, dependen fuertemente de los ingresos aeronáuticos puesto que tienen grandes limitaciones para expandir sus ingresos comerciales.

Con el objetivo de analizar los efectos de la privatización, Marín (1999) ha examinado las tendencias de los precios y la estructura del mercado de las rutas domésticas españolas en el periodo de 1992-1997. Rendeiro (1999) ha revisado el modelo de gestión de los aeropuertos españoles analizando su estructura de ingresos y costes así como las inversiones y la política de precios desarrollada por AENA en dos años puntuales: 1994 y 1997. En su trabajo muestra como a pesar de la privatización llevada a cabo por AENA durante estos años, los costes totales para la mayoría de los aeropuertos fue superior a los ingresos íntegros en los dos periodos. En un trabajo posterior, Rendeiro (2002), a través de la estructura de costes, realiza un estudio de las economías de escala y analiza la influencia que tienen en los aeropuertos españoles, los costes generados por el tráfico internacional.

En ninguno de estos trabajos que analizan la problemática de los aeropuertos españoles se examina ni la eficiencia técnica ni el cambio productivo experimentado por el sector. En Murillo-Melchor (1999), no obstante, se efectuó un estudio con el DEA de ambas variables pero no se incorporó al DEA tradicional ningún tipo de análisis estadístico. A lo largo este trabajo, sin embargo, sí que vamos a tratar estadísticamente las variables analizadas en Murillo-Melchor (1999) comparando los resultados de las estimaciones procedentes de ambos enfoques.

### 2.6.3 Los Datos

Los datos empleados en esta aplicación fueron suministrados por la Organización de Aviación Civil Internacional (O.A.C.I.) y consiste en un panel de datos para los 33 aeropuertos comerciales españoles durante el periodo 1992 – 94. El hecho de que la fuente de los datos sea la misma organización proporciona homogeneidad y uniformidad en el criterio contable para cada uno de los aeropuertos durante todo el periodo de estudio.

En la muestra empleada en este trabajo, los 11 aeropuertos cuyos ingresos son superiores a los costes son los mismos que Rendeiro (1999) ha mostrado que son aeropuertos rentables en el año 1997. Los deficientes ingresos por actividades comerciales y el coste elevado del trabajo, son las principales causas que parecen provocar ese desequilibrio. Dos de los años en los que este trabajo analiza la eficiencia son previos a 1994, pero los aeropuertos rentables en estos dos periodos son los mismos que en el año 1994, sin que se haya modificado sustancialmente la estructura de ingresos durante todo el periodo. Dado que la mayoría de los aeropuertos presentan ineficiencias asignativas (Rendeiro 1999), es interesante observar qué ocurre con la eficiencia técnica. El inconveniente de analizar eficiencia en empresas no rentables puede ser suavizado mediante el uso de unidades físicas como inputs y outputs en lugar de emplear datos valorados en unidades monetarias.

En su estudio de la eficiencia técnica, tanto Gillen y All (1997) como Fernandes y Pacheco, (2002), al igual que se procede en este trabajo, utilizan el número de pasajeros como output en una muestra de 21 aeropuertos en el caso de los Estados Unidos y de 35 en el caso de Brasil. Al ser el número de pasajeros el único output que

producen los aeropuertos españoles, presuponemos que cuanto mayor sea el número de viajeros de un aeropuerto mayor será también el número de los servicios que suministra y por tanto su producción. Los datos de mercancías transportadas estaban disponibles sólo en dos de los años del análisis por lo que se ha prescindido de su utilización dado que su volumen era pequeño y por tanto de excasa significatividad en el tráfico aéreo.

Con respecto a los inputs, y a diferencia del análisis efectuado por Gillen y All (1997, 2001) quienes, gracias a la diferente composición de los datos con los que trabajaban, denominaron en unidades físicas a todos sus inputs sólo ha sido posible aproximar la variable empleo con el número de trabajadores mientras que el resto de factores productivos han tenido que ser introducidos valorados en unidades monetarias.

Los tres inputs con los que hemos definido a la producción son: el número de trabajadores, el stock de capital acumulado (denominado a lo largo del trabajo: capital) el cual ha sido aproximado mediante la amortización esperada en pesetas constantes y los gastos intermedios (denominados inversión), también en pesetas constantes, representados en los datos suministrados por la O.A.C.I. con el concepto de otros gastos.

El panel de datos proporciona únicamente información de tres años de modo que el análisis de la productividad del sector realizado con el índice de Malmquist es muy pobre para derivar conclusiones a largo plazo de las consecuencias derivadas de la desregulación y la privatización pero sí que puede ser indicativo de la evolución del sector en este crítico periodo de la economía española.

En el cuadro 2-II se expone, para cada año, un resumen estadístico de los tres inputs y del output de la muestra. En este orden se muestran los valores máximo, mínimo, la media aritmética, la desviación estandar y la correlación existente entre los datos.

Observando la media de estos valores en cada uno de los años del estudio, se aprecia como los inputs valorados en unidades monetarias constantes han experimentado un crecimiento considerable en el periodo de análisis. Sin embargo, las variables formuladas en unidades físicas han permanecido casi constantes o al menos no parece que presenten ninguna tendencia definida.

Analizando los valores máximos y mínimos de los inputs y output del cuadro puede advertirse que los aeropuertos españoles tienen dos estructuras claramente diferenciadas. Los aeropuertos con una vocación claramente comercial son los que se sitúan en las ciudades más grandes como Madrid o Barcelona y la mayor parte de sus ingresos provienen de las actividades comerciales integradas en sus instalaciones y de los vuelos internacionales.

Cuadro 2-II: Resumen Estadístico

1992	Empleo	Capital	Inversión	Pasajeros
Máximo	818	54.368.078	3.506.631	18.096
Mínimo	37	569.369	23.846	100
Media	142	4.715.669	174.053	785
Des. Est.	183	11.125.006	762.786	4.094
1993	Empleo	Capital	Inversión	Pasajeros
Máximo	823	60.498.612	3.910.108	17339
Mínimo	37	650.799	24.869	91
Media	143	5.132.705	195.017	774
Des. Est.	185	12.359.387	830.959	4.056
1994	Empleo	Capital	Inversión	Pasajeros
Máximo	780	70.650.913	4.589.083	17.786
Mínimo	37	759.989	25.351	93
Media	139	5.991.764	209.403	786
Des. Est.	181	14.431.289	964.753	4.173

El desequilibrio de costes que se produce en la mayoría de los aeropuertos de pequeño tamaño es debida no solo a la falta de ingresos por actividades comerciales sino también a que la mayoría de los vuelos realizados en sus instalaciones son nacionales con la consiguiente reducción de los ingresos si se comparan con los obtenidos por los vuelos internacionales.

#### 2.6.4 Estimación y Resultados con el DEA Determinístico

En este apartado se muestran los resultados obtenidos aplicando el análisis del DEA tradicional a los datos de panel presentados anteriormente. Los resultados de la

estimación los presentamos en tres apartados diferentes, en primer lugar se expone el análisis de la eficiencia técnica de los aeropuertos. Puesto que Korostelev, Simar y Tsybakov, (1995) demostraron que  $\widehat{\Psi}_{RVS}$  es consistente independientemente de la forma de la verdadera tecnología, la estimación de la eficiencia de nuestra aplicación la vamos a efectuar bajo ese tipo de rendimientos.

En segundo lugar, presentamos los resultados de la ineficiencia de escala y puesto que suponemos una tecnología de rendimientos variables, caracterizamos los rendimientos en los que opera cada aeropuerto. El criterio elegido para estimar los rendimientos de escala precisa de la estimación de la eficiencia, además de con rendimientos variables, con dos de las tres posibles tecnologías en las que la industria puede estar produciendo desde el punto de vista de los rendimientos.

En último lugar se presentan los resultados del cambio productivo del sector durante el periodo analizado. Su estimación se ha efectuado mediante el índice de Malmquist y se ha desagregado ese indicador en cuatro índices, representativos, cada uno de ellos, de las diferentes fuentes del cambio en la productividad.

#### **2.6.4.1. Estimación de la Eficiencia Técnica**

Como hemos indicado en el apartado dos, el DEA requiere que previamente a la estimación de la eficiencia técnica se definan las propiedades o axiomas que debe de cumplir el conjunto de posibilidades de producción y que fueron formulados en (A1-A4). Puesto que el verdadero valor de este conjunto así como el de la función de producción, son desconocidos, los supuestos que se realicen sobre la tecnología deben

de ser, en la medida de lo posible, coherentes en un sentido económico con la información disponible del sector y compatibles con unas buenas propiedades estadísticas de los estimadores.

El supuesto (A4) requiere que se defina un tipo de rendimientos de escala en la tecnología. El supuesto de una tecnología en la cual sus unidades productivas, los aeropuertos, operen con rendimientos variables de escala creemos que puede considerarse como un supuesto adecuado. Con respecto a la congruencia económica, el supuesto de rendimientos variables dota de una gran flexibilidad a la función de producción; la cual, definida de este modo, admite la posibilidad de diferentes tramos de rendimientos de escala en la frontera y, por tanto, permite que existan empresas eficientes que actúen bajo cualquier tipo de rendimientos de escala. La presunción de que en nuestra muestra puedan coexistir aeropuertos localizados en la zona de rendimientos crecientes con otros que operen con rendimientos decrecientes de escala nos parece muy apropiada dada la convivencia en el sector de dos tipos de aeropuertos claramente diferenciados por su tamaño y capacidad de generar servicios comerciales.

Con respecto a la influencia que este supuesto tiene en las propiedades estadísticas de los estimadores de la eficiencia técnica, ya hemos señalado anteriormente que, bajo ciertas condiciones, la estimación efectuada con el DEA bajo rendimientos variables de escala es siempre consistente con independencia de cual sea la verdadera estructura de la tecnología. Dado que no existe certeza de cual es la verdadera forma de la tecnología del sector y que, además, no hay ningún motivo económico que sustente que no existan diferentes tramos de rendimientos en su función de producción, la eficiencia obtenida bajo rendimientos variables a escala nos parece la medida más adecuada para estimar la productividad del sector.

La eficiencia técnica se ha estimado, por tanto, resolviendo para cada uno de los aeropuertos el problema de programación lineal propuesto por Banker, Charnes y Cooper (1984) que se formuló en la ecuación (2.2.10). En la estimación de la eficiencia se ha elegido la orientación input debido a que nos ha parecido más interesante analizar las disminuciones en los tres inputs del sector en lugar de orientarlo hacia los incrementos del único output con el que se contaba. Los resultados obtenidos en cada uno de los tres años y la media de todo el periodo se presentan en el Cuadro 2-III, siendo los aeropuertos en negrilla, aquellos cuyos ingresos han sido superiores a los gastos durante los tres años analizados. Los aeropuertos que son eficientes (valores iguales a la unidad) presentan un número entre paréntesis correspondiente al número de aeropuertos que les utilizan como unidad eficiente de referencia para calcular el porcentaje de reducción de sus inputs.

Las medidas de eficiencia técnica se han calculado mediante programas de optimización formulados en Matlab aunque se ha comprobado su computación mediante programas Gauss. El algoritmo del bootstrap que se utiliza en los apartados siguientes se ha computado en Gauss. El número del paréntesis del Cuadro 2-III que se ha señalado en el párrafo anterior ha sido proporcionado, sin embargo, por el programa EMS (Efficiency Measurement System) desarrollado por Holger Scheel.

**Cuadro 2-III: Eficiencia Técnica bajo RVS e  
Identificación de los Rendimientos de Escala**

AEROPUERTOS	1992	1993	1994	92-94
1. <b>Alicante</b>	0.5423 Crec	0.5143 Crec	0.5964 Crec	0.5500
2.Almería	0.4573 Crec	0.4534 Crec	0.5501 Crec	0.4850
3.Asturias	0.6640 Crec	0.6013 Crec	0.6084 Crec	0.6239
4. <b>Barcelona</b>	0.8002 Crec	0.7542 Crec	0.8509 Crec	0.8008
5.Bilbao	0.6683 Crec	0.6058 Crec	0.6824 Crec	0.6513
6.Coruña	0.9449 Crec	0.7681 Crec	0.6686 Crec	0.7858
7. <b>Fuerteventura</b>	1 (9) Crec	0.9839 Crec	0.9886 Crec	0.9908
8.Gerona	0.2938 Crec	0.2809 Crec	0.3126 Crec	0.2955
9.Granada	0.6271 Crec	0.4723 Crec	0.4834 Crec	0.5231
10.Hierro	1 (15) Crec	0.9737 Crec	0.9737 Crec	0.9824
11. <b>Ibiza</b>	0.6319 Crec	0.6475 Crec	0.6985 Crec	0.6587
12.Jerez	0.6009 Crec	0.5623 Crec	0.5667 Crec	0.5764
13. <b>Lanzarote</b>	1 (13) Cons	1 (19) Cons	1 (16) Cons	1.0000
14.La Palma	0.6493 Crec	0.6173 Crec	0.6281 Crec	0.6314
15. <b>Gran Canaria</b>	0.7318 Decr	0.6486 Crec	0.6983 Crec	0.6920
16. <b>Madrid</b>	1 (0) Decr	1 (0) Decr	1 (0) Decr	1.0000
17. <b>Menorca</b>	0.6274 Crec	0.6152 Crec	0.6081 Crec	0.6168
18. <b>Malaga</b>	0.4634 Crec	0.4507 Crec	0.4911 Crec	0.4681
19.Melilla	0.8654 Crec	0.6225 Crec	0.6187 Crec	0.6933
20. <b>Palma Mall.</b>	1 (11) Cons	1 (15) Cons	1 (15) Cons	1.0000
21.Pamplona	0.5522 Crec	0.5211 Crec	0.5286 Crec	0.5338
22.Reus	0.6607 Crec	0.7255 Crec	0.7400 Crec	0.7079
23. <b>Murcia</b>	0.5289 Crec	0.5606 Crec	0.5522 Crec	0.5471
24.S. Sebastian	0.6981 Crec	0.6607 Crec	0.7255 Crec	0.6943
25.Tenerife	0.8532 Decr	0.9657 Decr	1 (0) Decr	0.9375
26.Santander	0.4789 Crec	0.4596 Crec	0.4730 Crec	0.4704
27.Santiago	0.5207 Crec	0.3485 Crec	0.4186 Crec	0.4235
28.Sevilla	0.5435 Crec	0.3147 Crec	0.3490 Crec	0.3908
29.Valencia	0.4603 Crec	0.4265 Crec	0.4581 Crec	0.4480
30.Valladolid	1 (16) Crec	1 (28) Crec	1 (28) Crec	1.0000
31.Vigo	0.5477 Crec	0.5262 Crec	0.5613 Crec	0.5449
32.Vitoria	0.2944 Crec	0.2700 Crec	0.2751 Crec	0.2796
33.Zaragoza	0.4390 Crec	0.4202 Crec	0.4068 Crec	0.4217
34.Sector	0.6373	0.5899	0.6158	0.6140

Con respecto a los cuatro aeropuertos que se han mantenido eficientes durante todo el periodo, excepto Valladolid (aeropuerto n°30), se corresponden con aeropuertos cuyos ingresos eran superiores a los costes. En el caso de Valladolid, este aeropuerto no sólo ha sido técnicamente eficiente los tres años sino que ha sido el "peer" o el aeropuerto de referencia para calcular la ineficiencia de casi el total de aeropuertos ineficientes, especialmente en los años 93 y 94.

En muchos casos es incluso la única unidad eficiente de referencia y por tanto al que se debe el 100% de la posible disminución de los inputs en los aeropuertos ineficientes. Resulta cuando menos curioso que este aeropuerto que no tiene una especial significatividad dentro de los aeropuertos españoles sea el aeropuerto de referencia de los de Barcelona o Málaga, por poner algún ejemplo de aeropuertos cuyos ingresos superan a los costes, y especialmente que tenga una importancia tan grande en la eficiencia de todo el sector.

El otro aeropuerto eficiente que tiene un comportamiento destacado es el n° 16: Madrid. Este, al contrario que Valladolid, a pesar de ser eficiente en todo el periodo no sirve de unidad de referencia a ninguno de los aeropuertos que forman el resto de la muestra. Su incorporación o eliminación de la muestra no afecta particularmente al resto de la estimación con este tipo de rendimientos<sup>12</sup>, e indica que, en esta muestra, esta unidad produce en otro nivel distinto y no comparable con el del resto de aeropuertos.

Fijándonos en la media geométrica del sector (aeropuerto n° 34), ésta experimentó

---

<sup>12</sup>Esto no ocurre cuando el supuesto de rendimientos de la tecnología se cambia a rendimientos constantes. En este caso, como se presentará con posterioridad, este aeropuerto no es eficiente técnicamente y no es cierto, por tanto, el supuesto de que otros aeropuertos no se comparen con su dotación de inputs.

una disminución de la eficiencia en el primero de los periodos y aunque en el año siguiente, 1993, se recuperó en cierta medida, al final del año 94 los niveles de eficiencia no alcanzaron el nivel de partida. Esta evolución, aunque con una diferente gradación, es la que parecen haber experimentado la mayoría de los aeropuertos.

Observando la evolución de la eficiencia técnica en cada periodo, vemos que en el año 1992 había 6 aeropuertos eficientes, pero debido al generalizado descenso en la eficiencia producida en el año siguiente, dos de ellos (Fuerteventura y Hierro) pasaron a ser ineficientes. Sus niveles de ineficiencia han permanecido constantes, y junto con Tenerife, son los aeropuertos de la muestra que más cercanos están de la frontera eficiente. Tenerife es, por cierto, uno de los pocos aeropuertos que incrementó sus niveles de eficiencia en todos los periodos y el único que partiendo de niveles ineficientes, se convirtió en un aeropuerto eficiente en el año 1994.

Los aeropuertos menos eficientes son Vitoria y Gerona cuyos inputs podrían reducirse alrededor de un 70%. Los niveles de eficiencia durante los tres periodos se han mantenido similares y ambos aeropuertos siguen siendo los que presentan mayores niveles de ineficiencia de todo el sector.

En el año 1993 el sector experimentó en general un retroceso en la eficiencia de la mayoría de los aeropuertos siendo sólo cuatro los que sí que incrementaron la eficiencia técnica, (unidades: 11, 22, 23 y 25).

Las variaciones en los niveles de eficiencia que se han experimentado en cada periodo, por lo general, no son de grandes proporciones. En este aspecto, destacan sin embargo, La Coruña, Granada, Melilla, Santiago y Sevilla por experimentar disminuciones muy grandes de eficiencia. Es especialmente destacable el caso de La

Coruña, la cual partía en el año 1992 de un nivel cercano a la eficiencia técnica, que ha ido alejándose sistemáticamente de las posiciones eficientes llegando en el año 94 a tener un exceso de inputs de casi un 35%. Parecida es la situación de Melilla y en el caso de Santiago y Sevilla, éstas pasan, especialmente Sevilla a convertirse en aeropuertos muy ineficientes.

En el año 1994 ocurre lo contrario a lo acaecido en 1993. La mayoría de los aeropuertos mejoran sus niveles de eficiencia relativa, aunque casi siempre en un porcentaje inferior a la disminución del periodo anterior. La mejora es en algunos casos casi insignificante como en Jerez o en Pamplona o incluso no varía como en Hierro. Sólo hay 5 aeropuertos que siguen perdiendo eficiencia pero excepto la Coruña, que ya lo hemos comentado, la caída es muy pequeña.

Con respecto a los aeropuertos señalados en negrita, indicar que a pesar de tener una estructura similar de ingresos y gastos, en lo que respecta a la ineficiencia técnica, no tienen un comportamiento homogéneo. Hay tres aeropuertos que se mantienen eficientes los tres periodos y en el resto la reducción de los inputs que se puede efectuar, aunque no son de los aeropuertos que mayor grado de ineficiencia tienen, varían del orden de un 2% en Fuerteventura en los años 93 y 94 a cerca del 50% en Alicante y Murcia.

Con respecto a la media de todo el periodo (última columna), del total de la muestra sólo hay 8 unidades (aeropuertos: 1, 2, 4, 8, 11, 22, 23 y 25) que hayan experimentado, en media, un incremento de la eficiencia con respecto a los valores iniciales y en la mayor parte de ellos ese incremento ha sido minúsculo. En el resto de aeropuertos y a excepción de los técnicamente eficientes, su ineficiencia se ha

incrementado a lo largo del periodo si la comparamos con los niveles iniciales, pero en muchos de ellos, también ese incremento, ha sido en un porcentaje muy pequeño.

A nivel autonómico podemos observar que los aeropuertos de las Islas Canarias son, con diferencia, más eficientes que el resto de aeropuertos nacionales. Barcelona a pesar de su inicial pérdida de eficiencia en el año 93 se mantiene como uno de los aeropuertos más eficientes y destacan Sevilla, Melilla y los aeropuertos gallegos (a excepción de Vigo) por las elevadas pérdidas de eficiencia que han experimentado. Valencia es también bastante ineficiente y Madrid es un mundo aparte al resto del sector.

La principal deficiencia de los datos de los que disponemos es el corto periodo de tiempo en el que los analizamos. No tenemos datos de la situación anterior a la desregulación y privatización del sector y no podemos comparar los efectos de estas políticas. El periodo de tiempo del análisis es precisamente un período de crisis en la economía nacional con depreciación continua de la peseta. Los descensos en la eficiencia técnica del año 1993 parecen deberse a esa situación de crisis y los incrementos de eficiencia en el último año podrían indicar la recuperación del sector ante la reactivación de la economía europea.

#### **2.6.4.2. Estimación de los Rendimientos a Escala**

Siguiendo el criterio propuesto por Färe, Grosskopf y Lovell (1985) ya formulado en la sección primera de este capítulo, seguidamente analizamos la escala en la que opera cada aeropuerto. Como ya indicamos, es necesario para poder emplear este criterio, estimar la eficiencia técnica definiendo la tecnología con tres tipos de rendimientos

de escala diferentes. A pesar de que para aplicar este criterio sólo son necesarias tres medidas de eficiencia técnica, hemos calculado las cuatro medidas de eficiencia que se obtienen al modificar el supuesto de rendimientos de escala.

En el Cuadro 2-IV presentamos un resumen estadístico de las mediadas obtenidas en cada caso y para cada año, incluimos los valores mínimo y máximo, la media geométrica y la desviación estandar. Por otra parte, en el anexo al final del trabajo, mostramos al completo, para cada año, todas esas medidas en cada uno de los aeropuertos (Cuadros A2-I, A2-II y A2-III). .

**Cuadro 2-IV: Resumen Estadístico**

<b>1992</b>	<b>RCS</b>	<b>RNCS</b>	<b>RNDS</b>	<b>RVS</b>
<b>Máximo</b>	1	1	1	1
<b>Mínimo</b>	0.1303	0.1303	0.2938	0.2938
<b>Media</b>	0.4148	0.4175	0.6332	0.6373
<b>Des. Est.</b>	0.2545	0.2631	0.2062	0.2118
<b>1993</b>	<b>RCS</b>	<b>RNCS</b>	<b>RNDS</b>	<b>RVS</b>
<b>Máximo</b>	1	1	1	1
<b>Mínimo</b>	0.1073	0.1073	0.27	0.27
<b>Media</b>	0.3614	0.3659	0.5826	0.5899
<b>Des. Est.</b>	0.2595	0.2786	0.2117	0.2256
<b>1994</b>	<b>RCS</b>	<b>RNCS</b>	<b>RNDS</b>	<b>RVS</b>
<b>Máximo</b>	1	1	1	1
<b>Mínimo</b>	0.1404	0.1404	0.2751	0.2751
<b>Media</b>	0.4008	0.4043	0.6105	0.6158
<b>Des. Est.</b>	0.2658	0.279	0.2083	0.2185

Los Cuadros A2-I, A2-II y A2-III presentan respectivamente para los años 1992, 1993 y 1994 las medidas de eficiencia bajo rendimientos constantes (columna denominada CRS), rendimientos no crecientes (RNCS), rendimientos no decrecientes (RNDS) y rendimientos variables (RVS), la última columna, sin embargo muestra la ineficiencia de escala (definido como el índice ES en la ecuación 2.2.12). También en estos cuadros incluimos entre paréntesis (como hemos hecho en el Cuadro 2-III), en el caso de las unidades eficientes, el número de aeropuertos que emplean como referencia esa unidad eficiente. El tipo de rendimientos en los que produce cada aeropuerto se muestra en el Cuadro 2-III en la columna adyacente a su medida de eficiencia técnica.

Seguidamente presentamos en el cuadro 2-V la medida de ineficiencia de escala para cada año y para el total del periodo. Fijándonos en la medida de escala en los tres periodos podemos notar que salvo Lanzarote y Palma de Mallorca que producen en su escala óptima ( $ES = 1$ ), el resto tienen ineficiencias de escala. La ineficiencia de escala tiene una intensidad mayor a medida que se aleja de la unidad el valor del índice de escala y esto es lo que les ocurre a los aeropuertos que pertenecen a las ciudades más pequeñas o con un menor tráfico aéreo (Reus o Pamplona). Si, en estos aeropuertos de pequeño tamaño, comparamos los valores finales de la ineficiencia de escala con los de partida, la ineficiencia se ha incrementado en la mayoría de ellos aunque en un grado bastante pequeño.

En el caso de Valladolid, se observa que el índice de escala es bastante pequeño indicando una ineficiencia de escala considerable. Por tanto aunque su producción sea eficiente con respecto a unos rendimientos variables, deja bastante que desear si se compara con la producción óptima (puesto que bajo rendimientos de escala constantes su medida de ineficiencia es bastante elevada) que podría conseguir a largo plazo.

Cuadro 2-V: Eficiencia de Escala

<b>AEROPUERTOS</b>	1992	1993	1994	92-94
1. <b>Alicante</b>	0.9985	0.9934	0.9958	0.9959
2. Almeria	0.7619	0.7772	0.8337	0.7903
3. Asturias	0.7514	0.7524	0.8014	0.7680
4. <b>Barcelona</b>	0.9885	0.9816	0.9821	0.9841
5. Bilbao	0.9202	0.7720	0.9428	0.8750
6. Coruña	0.5934	0.6304	0.6935	0.6378
7. <b>Fuerteventura</b>	0.9762	0.9601	0.9697	0.9686
8. Gerona	0.5317	0.4436	0.5250	0.4984
9. Granada	0.6793	0.6739	0.6564	0.6698
10. Hierro	0.3527	0.2733	0.3531	0.3241
11. <b>Ibiza</b>	0.9524	0.9707	0.9937	0.9721
12. Jerez	0.5084	0.3199	0.3286	0.3767
13. <b>Lanzarote</b>	1	1	1	1
14. La Palma	0.6875	0.6446	0.6673	0.6662
15. <b>Gran Canaria</b>	0.9917	0.9971	0.9522	0.9801
16. <b>Madrid</b>	0.9162	0.8272	0.9400	0.8931
17. <b>Menorca</b>	0.8798	0.8639	0.8758	0.8732
18. <b>Málaga</b>	0.9612	0.9590	0.9636	0.9612
19. Melilla	0.5738	0.5586	0.4920	0.5403
20. <b>Palma Mall.</b>	1	1	1	1
21. Pamplona	0.3178	0.2059	0.2656	0.2590
22. Reus	0.1972	0.2023	0.2681	0.2203
23. <b>Murcia</b>	0.3093	0.2383	0.2941	0.2788
24. San Sebastia	0.2717	0.3023	0.2677	0.2801
25. Tenerife	0.8880	0.8018	0.8006	0.8291
26. Santander	0.5022	0.5302	0.5376	0.5231
27. Santiago	0.8919	0.8872	0.9130	0.8973
28. Sevilla	0.8543	0.7614	0.7662	0.7928
29. Valencia	0.8749	0.8427	0.8123	0.8429
30. Valladolid	0.4226	0.4537	0.5264	0.4656
31. Vigo	0.6432	0.5741	0.6861	0.6328
32. Vitoria	0.5666	0.5256	0.5645	0.5519
33. Zaragoza	0.5150	0.5721	0.6146	0.5657
34. Sector	0.6378	0.6508	0.6126	0.6509

Por el contrario, los aeropuertos grandes tienen unos niveles de ineficiencia de escala pequeños, destacando por ejemplo los casos de Sevilla y Santiago que presentaban una considerable ineficiencia técnica bajo rendimientos variables pero que con lo que respecta a la ineficiencia de escala, ésta no es muy elevada. La mayoría de los aeropuertos que presentan ineficiencias de escala reducidas es debido a que las medidas de eficiencia bajo rendimientos de escala variables y constantes son bastante parecidas; es decir, las fronteras de referencia bajo los dos tipos de rendimientos se encuentran muy cercanas.

En general y excepto Murcia, todos los aeropuertos con superavits en los ingresos (en negrita en las tablas) presentan ineficiencias de escala reducidas y en la mayoría de ellos con el paso del tiempo ésta ha ido disminuyendo y se ha acercado, por tanto el índice a la unidad.

La caracterización de los rendimientos de escala de cada aeropuerto se muestra en el Cuadro 2-III al lado derecho de cada medida de eficiencia bajo rendimientos variables.

En general vemos que el sector presenta rendimientos crecientes de escala en la mayoría de los aeropuertos. Casos excepcionales son Madrid y Tenerife que se encuentran en rendimientos decrecientes e escala. En el caso en concreto de Tenerife, a pesar de su ineficiencia de escala, su productividad se ha ido incrementando en cada periodo de modo que en el año 1994 se ha convertido en un aeropuerto eficiente. Un caso aparte es Gran Canaria, quien presentaba rendimientos decrecientes en el año 1992 pero en los años posteriores ha pasado a producir con rendimientos crecientes de escala.

Los resultados sobre la ineficiencia de escala y los rendimientos en los que produce el sector parecen adecuarse bastante bien a la realidad y parece también que explican con relativa propiedad la estructura del sector y su problemática.

Un inconveniente que presentan estos resultados de rendimientos de escala es que sus propiedades estadísticas son desconocidas. Es decir, se debería de aplicar algún tipo de procedimiento, como por ejemplo el bootstrap (ver Simar y Wilson, 2002) para distinguir si lo que presentamos como estimaciones son realmente significativas o simplemente son resultado de la variabilidad de la muestra.

#### **2.6.4.3 Análisis del Cambio Productivo: Índice de Malmquist y su Descomposición**

A pesar de que el análisis del cambio productivo se efectúa en un periodo excesivamente corto en el que no es posible observar como era la situación de los aeropuertos antes de que se pusieran en vigor las medidas de privatización, puede ser interesante analizar su evolución en estos años tan problemáticos para la economía española. La principal desventaja con que nos encontramos es que, a la hora de explicar los resultados, son desconocidas tanto la situación previa como la posterior a esta etapa del análisis. En esta tesitura nos resulta difícil distinguir entre los posibles efectos de la crisis económica y las posibles consecuencias de las medidas de privatización del sector.

En un trabajo anterior (Murillo-Melchor, 1999) se efectuó un análisis del cambio productivo bajo rendimientos variables de escala y se aplicó, además, la descomposición de las fuentes del cambio productivo (ecuación 1.6.41) de Färe, Grosskopf,

Lindgren, y Roos, (1992). Sin embargo en este trabajo, y tal y como se ha expuesto anteriormente, hemos cambiado el supuesto de los rendimientos de escala puesto que la correcta medición del cambio en la productividad debe realizarse referenciando el índice a una situación óptima de rendimientos constantes de escala. La elección de la descomposición del índice también es diferente, pues vamos a desagregarlo tal y como lo formulamos en la ecuación (2.5.17) ya que es la descomposición más adecuada para obtener la correcta explicación de las fuentes del cambio productivo (Simar y Wilson, 1998b). Los índices se han calculado subperiodo a subperiodo modificando, de ese modo, la tecnología de referencia que se utiliza en cada subperiodo. Aunque esta forma de calcular los índices no produce resultados transitivos, la justificación de su utilización se debe a que no creemos que haya existido un cambio sustancial en la tecnología durante estos tres años que afecte significativamente a los resultados de las estimaciones.

En el cuadro 2-VI se expone un resumen estadístico de todos los índices calculados. Valores máximos, mínimos, media geométrica de todo el sector y desviación típica para cada uno de los índices en cada sub-periodo de dos años, 1992 – 93 y 1993 – 94. El último subcuadro indica los mismos valores pero en el periodo completo: 1992 – 94, los cuales se han obtenido con la media geométrica de cada índice correspondientes en los dos sub-periodos analizados.

Fijándonos en la media del último índice del cuadro 2-VI, el índice de productividad total  $\widehat{\mathcal{M}}$  formulado en la relación (2.5.10), observamos que ambos valores son superiores a la unidad significando que el sector de aeropuertos, en general, ha experimentado una disminución de la productividad en los dos sub-periodos. El valor del índice es superior en el subperiodo 1992 – 93 indicando, por tanto, que el descenso

productivo ha sido más marcado en el año 93 que en el año 94.

**Cuadro 2-VI: Resumen Estadístico de la Productividad**

1992-1993	$\hat{\mathcal{E}}$	$\hat{\mathcal{S}}$	$\hat{\mathcal{T}}$	$\widehat{\mathcal{ST}}$	$\widehat{\mathcal{M}}$
<b>Media</b>	1.0804	1.0625	0.9849	0.9878	1.1168
<b>Máximo</b>	1.7268	1.5892	1.0235	1.1953	1.9133
<b>Mínimo</b>	0.8835	0.8992	0.7999	0.9522	0.8650
<b>Desv. Est.</b>	0.1696	0.1598	0.0386	0.0422	0.2399
1993-1994	$\hat{\mathcal{E}}$	$\hat{\mathcal{S}}$	$\hat{\mathcal{T}}$	$\widehat{\mathcal{ST}}$	$\widehat{\mathcal{M}}$
<b>Media</b>	0.9580	0.9411	1.0494	1.0804	1.0221
<b>Máximo</b>	1.1488	1.1353	1.1710	1.1746	1.3414
<b>Mínimo</b>	0.8242	0.7547	0.9885	0.9053	0.8071
<b>Desv. Est.</b>	0.0642	0.0947	0.0494	0.0721	0.1167
1992-1994	$\hat{\mathcal{E}}$	$\hat{\mathcal{S}}$	$\hat{\mathcal{T}}$	$\widehat{\mathcal{ST}}$	$\widehat{\mathcal{M}}$
<b>Media</b>	1.0173	1.0000	1.0167	1.0331	1.0684
<b>Máximo</b>	1.2478	1.2439	1.0638	1.1268	1.3665
<b>Mínimo</b>	0.9118	0.8576	0.8892	0.9656	0.8669
<b>Desv. Est.</b>	0.0755	0.0646	0.0337	0.0392	0.1141

La disminución en la productividad del sector se puede explicar con los cuatro índices en los que descomponemos, en (2.5.18), el índice de productividad total. En el primer subperiodo se observa que los dos primeros índices, (cambio en la eficiencia pura (ecuación 2.5.19),  $\hat{\mathcal{E}}$  y cambio en la escala (ecuación 2.5.20),  $\hat{\mathcal{S}}$ ), tienen valores superiores a la unidad indicando que ellos han inducido el retroceso experimentado en productividad del sector. El efecto contrario, sin embargo, es el que han originado los otros dos índices, cambio en la tecnología,  $\hat{\mathcal{T}}$ , (ecuación 2.5.21) y cambio en la escala de la tecnología,  $\widehat{\mathcal{ST}}$ , (ecuación 2.5.22) puesto que sus valores son inferiores a la unidad, aunque los incrementos en la productividad que han inducido no han sido

lo suficientemente grandes para compensar el retroceso de los otros dos índices. El resultado de la variación en estos componentes es que, el índice de Malmquist que mide el cambio sectorial de la productividad en el periodo, tiene un valor superior a la unidad.

Es decir, en el transcurso de los años 1992-1993 en el sector de los aeropuertos se ha producido una disminución de la productividad. Esto se ha debido principalmente a que en el año 1993 se ha reducido la eficiencia técnica del sector con respecto al año 1992 (efecto del índice  $\widehat{\mathcal{E}}$ ) y a que la producción en el año 1993 se realiza en una escala más alejada de la óptima que en el año 1992 (efecto del índice  $\widehat{\mathcal{S}}$ ). A pesar de que han existido mejoras en la productividad debidas a que en el año 1993 se produce más eficientemente que en las mismas condiciones se hubiera producido en 1992 (efecto del índice  $\widehat{\mathcal{T}}$ ) y debido a que la frontera en el año 1993 se encuentra más cerca de la frontera óptima que en el año anterior (efecto del índice  $\widehat{\mathcal{ST}}$ ), el valor de estos incrementos en la productividad no ha sido suficiente como para compensar el empeoramiento producido por las otras dos fuentes de cambio productivo.

En el subperiodo siguiente, 1993 – 1994, ocurre exactamente lo contrario a lo visto en el periodo anterior. Los índices de eficiencia pura y de escala producen mejoras en la productividad del sector y al contrario acontece con los otros dos índices. A pesar de este efecto contrario, la productividad en su totalidad disminuye puesto que el índice de Malmquist ( $\widehat{\mathcal{M}}$ ) es superior a la unidad, no siendo suficientes la recuperación de la eficiencia técnica y la mejora de la escala de producción para compensar los empeoramientos derivados del cambio en la tecnología y en la escala de la tecnología.

La parte final del cuadro 2-VI detalla el panorama del sector para todo el periodo

(1992 – 1994) indicándonos si las variaciones en un sentido del primer subperiodo, han sido compensadas, con las variaciones en el sentido contrario del segundo. El índice de Malmquist indica que se produce un retroceso en el total de la productividad y esta merma se debe a todas y cada una de las fuentes de cambio productivo analizadas, puesto que todos los valores de los índices componentes del de Malmquist son superiores a la unidad. Todos los índices tienen valores cercanos a la unidad por lo que, aunque indican retrocesos en la productividad, no son retrocesos muy importantes y parece que casi se han compensado los movimientos contrarios de los periodos.

Es importante resaltar que las variaciones, tanto incrementos como descensos, en todos los índices y en todos los periodos del conjunto del sector han sido siempre inferiores a un 10%, indicando una cierta estabilidad en la productividad.

Aún cuando no es posible distinguir si la disminución en la productividad se ha debido a los efectos que la crisis económica general tuvo en el sector o a que las políticas de privatización introducidas por AENA fueran insuficientes o incluso a que fuera la crisis económica la que no permitiera que esas medidas tuvieran efectos positivos en la productividad, parece claro que durante este periodo los cambios experimentados en la producción del sector no provocaron los efectos deseados.

En el anexo se exponen, *para cada aeropuerto*, los resultados de estos índices para cada uno de los sub-periodos analizados. El cuadro A2-IV muestra los valores obtenidos para el índice de Malmquist y su media geométrica para todo el periodo. Los cuadros A2-V y A2-VI presentan los cuatro componentes desagregados del índice

de Malmquist para cada uno de los dos subperiodos. Por último, los cuadros A2-VII y A2-VIII ordenan de forma distinta los índices ya expuestos en los cuadros anteriores: en la tabla A2-VII se muestran los índices de eficiencia y escala para los dos subperiodos y el total del periodo y lo mismo se hace en la tabla A2-VIII con los índices de la tecnología y la escala de la tecnología.

Analizando la productividad total, particularmente en cada aeropuerto, (cuadro A2-IV) se muestra como la mayoría de los aeropuertos que experimentaron un incremento en la productividad en el primer sub-periodo (Excepto Reus y Almería), sufrieron un descenso productivo en el segundo; y viceversa. Es una pena no contar con índices en periodos sucesivos o anteriores, porque podría ocurrir que los mismos hechos afectaran con retraso a una parte de los aeropuertos. Las mayores disminuciones en la productividad se producen no obstante en el periodo 92 – 93, donde el máximo descenso es el de Sevilla con un 192'33%, aunque Jerez, Pamplona, Santiago, Melilla, Hierro, Granada o Bilbao, también presentan disminuciones importantes. La mayoría de estos aeropuertos parece recuperarse y en el subperiodo siguiente mejoran su productividad. Fijándonos en la última columna del cuadro A2-IV, se observa que la tónica general es una disminución de la productividad en el periodo puesto que, fijándonos en la productividad de partida, son 26 aeropuertos los que han sufrido pérdidas mientras que, sólo son 9, entre los que se encuentran Madrid, Barcelona e Ibiza como únicos representantes de los aeropuertos con una estructura de costes no deficitarios, los que han experimentado ganancias en su productividad.

El cuadro A2-V descompone el índice total de productividad en los cuatro índices ya indicados para el subperiodo 1992 – 93. En este subperiodo sólo hay trece aeropuertos que presenten mejoras de productividad ( $\widehat{\mathcal{M}} < 1$ ) y de ellos, sólo hay tres

(Ibiza, Palma de Mallorca y Murcia) en los que todos sus índices originan incrementos en la productividad total. En el resto de aeropuertos se sigue la tendencia general de empeoramiento en la productividad debido al efecto de los índices de eficiencia y escala que no es compensada, en la mayoría de los casos, con los incrementos debidos a los efectos de los índices del cambio en la tecnología y de la escala de la tecnología. Tampoco en este caso, al igual que ocurrirá en el subperiodo siguiente, existe un comportamiento especial de los aeropuertos con superavit de ingresos, siete de ellos empeoraron su productividad mientras que cuatro la mejoraron.

Observando alguno de los aeropuertos con mayores retrocesos en productividad (valores grandes de  $\widehat{\mathcal{M}}$ ), Sevilla por ejemplo, notamos que el empeoramiento derivado del índice de eficiencia,  $\widehat{\mathcal{E}}$ , es la principal causa del descenso productivo ya que su índice correspondiente es 1'7268. Este caso se da también en Granada, Santiago, La Coruña y en general en todos los aeropuertos, ya señalados, que tuvieron una caída en eficiencia técnica en el año 93. En el caso de Jerez, sin embargo, el empeoramiento productivo se debe al índice de escala,  $\widehat{\mathcal{S}}$ , cuyo valor es 1'5892. Esta situación la presentan también Pamplona, Murcia y Bilbao. Sin embargo, los incrementos en productividad, que han sido generales en  $\widehat{\mathcal{T}}$  y  $\widehat{\mathcal{ST}}$ , son proporcionalmente menores a los descensos de  $\widehat{\mathcal{S}}$  y  $\widehat{\mathcal{E}}$ ; y salvo Madrid en el índice del cambio en la tecnología, ninguno de ellos produce un incremento productivo superior al 5%. Es más, los incrementos en la productividad superiores a un 5% se han originado, también, gracias a los dos primeros índices, como es el caso de Reus o Tenerife con el índice del cambio en eficiencia o Zaragoza, Santander, San Sebastián o Valladolid en el caso del índice del cambio en la escala.

En el cuadro A2-VI se presentan los mismos valores para el subperiodo siguiente.

Los aeropuertos con una mejora de la productividad en este periodo se incrementaron. Esta mejora pudiera ser el principio de una posible tendencia de recuperación de la productividad en los años futuros tanto por la desaparición de la crisis como por la privatización del sector. Trece aeropuertos aumentaron su productividad en este sub-periodo y no hay ningún aeropuerto que presenten aumentos en la productividad total debido a los efectos de todos sus índices. Fijándonos en los índices componentes del de Malmquist, el empeoramiento productivo debido al cambio en la tecnología y a la escala de la tecnología es bastante general. En muchos casos, sin embargo, este empeoramiento fue compensado por la mejora productiva en los dos primeros índices. Destacan Barcelona y Madrid por ser los únicos aeropuertos que sólo tienen uno de los índices que componen el de Malmquist que empeora la productividad.

Si analizamos los aeropuertos que han experimentado los porcentajes más altos de incremento o descenso productivo, nos encontramos que en el caso del primer índice,  $\widehat{\mathcal{E}}$ , con la excepción de la Coruña, el cambio productivo es positivo siendo, estos incrementos productivos, pronunciados en el caso de Santiago y Almería, de modo que, en el caso de Santiago, se compensa el fuerte descenso del subperiodo anterior. La influencia del índice de escala es más fuerte, y en general, los incrementos en la productividad son los más elevados de todo el periodo. Pamplona, Bilbao, Hierro y Murcia, que en el periodo anterior perdieron más productividad que otros aeropuertos a causa de este índice, ahora, en un movimiento contrario, se convierten en aeropuertos que mejoran su productividad y además en una proporción bastante elevada. Reus, al igual que en el subperiodo anterior, continúa mejorando su productividad gracias a este índice y además en uno de los porcentajes más elevados. Con respecto a los otros dos índices,  $\widehat{\mathcal{T}}$  y  $\widehat{\mathcal{ST}}$ , el empeoramiento productivo es más fuerte en el

caso del índice del cambio en la escala de la tecnología y se observa como la mayoría de los aeropuertos que han tenido un incremento productivo grande a causa de  $\widehat{\mathcal{E}}$  o  $\widehat{\mathcal{S}}$ , tienen también un empeoramiento grande en la productividad (aunque de menor proporción que el incremento productivo) inducido sobre todo por el índice  $\widehat{\mathcal{ST}}$ . Este es el caso de Reus, Pamplona y Murcia, y también el de Santiago si nos fijamos en el índice  $\widehat{\mathcal{T}}$ .

Los cuadros A2-VII y A2-VIII no aportan ningún resultado nuevo a excepción de los valores medios de cada índice en el total del periodo 1992 – 94. En el caso de  $\widehat{\mathcal{E}}$  se observa como los movimientos contrarios de los dos subperiodos han suavizado los descensos productivos del primer periodo siendo Sevilla el aeropuerto más influido por este índice. Lo mismo se observa en el índice de escala siendo, en este caso, Jerez el aeropuerto más perjudicado. Reus, sin embargo, presenta el mayor incremento en productividad que se ha originado por el cambio en la escala. En el cuadro A2-VIII el interés se centra en esas mismas columnas pero, para los índices  $\widehat{\mathcal{T}}$  y  $\widehat{\mathcal{ST}}$ . En este caso, excepto Madrid que presenta un acentuado incremento productivo en  $\widehat{\mathcal{T}}$ , el resto de las variaciones son inferiores al 4%, resaltando la poca importancia que estos índices han tenido, en media, en el cambio productivo.

### 2.6.5 Análisis Estadístico del DEA

Las estimaciones presentadas en la sección anterior son consistentes sólo bajo ciertas condiciones y en el caso de muestras infinitas. La única herramienta que nos permite aproximar la distribución muestral, y por tanto comparar las estimaciones obtenidas con alguna distribución de la eficiencia, es el bootstrap presentado en las secciones

anteriores. Tanto en el caso del bootstrap aplicado a las estimaciones de eficiencia como en el caso del aplicado a los índices de Malmquist hemos elegido, por simplicidad, el bootstrap homogéneo propuesto por Simar y Wilson (1998a, 1999b).

### 2.6.5.1 Estimación Bootstrap de la Eficiencia Técnica

Una vez que se ha decidido el tipo de bootstrap que se va a emplear, la elección más relevante en la estimación de la distribución muestral de la eficiencia es el criterio de selección del parámetro de suavizado  $h$ . Para seleccionar el  $h$  hemos analizado la sensibilidad del error cuadrático medio de la estimación bootstrap a un cambio de parámetro de suavizado y partiendo de  $h = 1.96\sigma_t N^{-1/5}$ , hemos disminuido su valor hasta llegar al valor extremo cero y también lo hemos incrementado con los siguientes diez valores de  $h$ ,

$$h = \{0, 0.0075, 0.015, 0.03, 0.06, 0.12, 0.24, 0.48, 1.25, 1.96\sigma_t N^{-1/5}\} \quad (2.6.1)$$

donde  $\sigma_t$  es, para cada periodo  $t = \{1992, 1993, 1994\}$ , la desviación estandar de las estimaciones de la eficiencia del DEA calculadas en el apartado anterior. El último valor del parámetro de suavizado es el recomendado por Silverman (1986) para el caso de datos distribuidos normalmente. Hemos incluido en este conjunto (2.6.1), el caso extremo en el que  $h = 0$ , para observar la variación en los resultados con el bootstrap naïve, a pesar de que como ya hemos comentado, esos resultados son inconsistentes.

Hemos observado la sensibilidad de la eficiencia al parámetro de suavizado analizando el sesgo bootstrap y corrigiendo el estimador,  $\widehat{\theta(x_0, y_0)}_{RVS}$ , tal y como se formulaba en la relación (2.4.26). Esta corrección sólo se recomienda cuando el error cuadrático medio de la estimación bootstrap es menor que el de la estimación del DEA original. Por tanto, en los casos en los que el estimador corregido es cero, es debido a que la corrección mediante el sesgo estimado con el bootstrap incorporaba un ruido excesivo a la estimación original. Los resultados de esta corrección los presentamos para el año 1992 en el cuadro del anexo A2-IX, el cuadro A2-X muestra los del año 1993 y los del año 1994 se exponen en el cuadro A2-XI. Estos cuadros se organizan exponiendo en la primera columna el n° correspondiente al aeropuerto y en la segunda el estimador del DEA bajo rendimientos variables de escala calculado en la sección anterior. Las columnas siguientes presentan el estimador corregido,  $\widehat{\theta(x_0, y_0)}_{RVS}$ , para cada uno de los aeropuertos en cada uno de los parámetro de suavizado de la relación (2.6.1), siendo el  $h$  de la última columna  $1.96\sigma_t N^{-1/5}$ . En la última fila presentamos el número de estimaciones del DEA que han podido ser corregidas, para cada  $h$ , con el criterio formulado en la relación (2.4.27).

Los resultados son similares en cada año analizado y se observa que el número de aeropuertos que puede corregirse se incrementa a medida que aumentamos el valor de  $h$ , pero a partir de un parámetro de suavizado superior a 0.03 los resultados no son demasiados sensibles a la variación del parámetro. Siguiendo la norma expuesta en (2.4.27), la corrección del estimador la hemos realizado en los casos en los que se cumplía la siguiente relación,

$$\varrho = \frac{[\widehat{SSG}]^2}{3 \cdot \widehat{\sigma}^2} > 1. \quad (2.6.2)$$

Los cuadros del anexo, A2-XII, A2-XIII y A2-XIV muestran, para cada año del periodo, los valores de la relación (2.6.2) que se han obtenido en cada uno de los parámetros de suavizado analizados. En la última fila hemos computado la media geométrica de esos valores siendo menor el ruido que incorporamos al estimador a medida que ese ratio es mayor. Observando la media calculada con cada ratio notamos como, los valores más grandes o los parámetros de suavizado óptimos, son los obtenidos para parámetros de valores entre  $h = 0.12$  y  $h = 0.24$ . A pesar de que estos resultados varían con cada tirada de 2000 estimaciones bootstrap que se obtengan, nos ha parecido bastante razonable utilizar el parámetro de suavizado propuesto por Silverman para datos normales puesto que su valor, en todos los años, está dentro de ese intervalo óptimo.

Los resultados obtenidos con este parámetro de suavizado se exponen, en el anexo, en los cuadros A2-XV para el año 1992, A2-XVI en el caso del año 1993 y A2-XVII para 1994. En los tres cuadros presentamos los resultados del mismo modo, describiendo en la primera columna los aeropuertos y en la segunda la estimación de la eficiencia efectuada con el DEA, los valores de este estimador que están en negrilla se deben a que el estimador ha sido corregido en la sexta columna. Las cuatro columnas siguientes muestran los resultados que se han obtenidos con el bootstrap utilizando la  $h$  de Silverman siendo  $\widehat{SSG}$  el estimador del sesgo formulado en (2.4.19). La columna denominada  $STD$  es la desviación estandard de las 2000 estimaciones del sesgo obtenidas para cada aeropuerto. La columna designada con  $\rho$  describe el ratio de la ecuación (2.6.2). En los casos en los que éste valor es superior a la unidad se ha corregido el estimador original y su corrección se presenta en negrilla en la columna calificada como  $\widehat{\theta}(x, y)$ . Las cuatro columnas siguientes son los intervalos de confianza

computados siguiendo la relación (2.4.24) para un nivel de confianza del 5% las dos primeras y para el 10% las dos segundas.

Analizando los resultados presentados en el cuadro A2-XV para el año 1992 muestran un sesgo importante con respecto a las estimaciones obtenidas con el DEA en la sección anterior. Excepto en el caso de 9 aeropuertos, se han corregido las estimaciones del DEA original de todas las demás unidades. Excepto Lanzarote, todos los demás aeropuertos considerados eficientes con el DEA, no han podido ser corregidos. Estos aeropuertos tienen los sesgos más elevados de toda la muestra y aunque no tiene por qué estar directamente relacionado, también tienen las mayores desviaciones estándar. La combinación de esos sesgos tan elevados con esa alta desviación estándar creemos que se debe a la gran disparidad que existe entre las medidas de la eficiencia técnica estimadas con el DEA. Destaca en este cuadro (al igual que ocurre en los años posteriores) cómo los sesgos más elevados los presentan las unidades que aparecían como técnicamente eficientes en el DEA tradicional. El Gráfico 2.6 presentado en la sección teórica del bootstrap ilustra cómo las medidas de eficiencia bootstrap se obtenían comparando las dotaciones muestrales con una frontera generada en una muestra bootstrap. Esta frontera, por construcción, siempre está incluida en el conjunto de posibilidades de producción estimado por el DEA tradicional. Las medidas de eficiencia bootstrap de una unidad considerada eficiente en el DEA van a ser, entonces, iguales o superiores a la unidad según la frontera bootstrap de referencia sea corte o sea interior a la frontera estimada por el DEA. El algoritmo con el que se obtiene la muestra bootstrap suaviza mediante un residuo normal la distribución discreta de las medidas de ineficiencia del DEA original que han sido remuestreadas con reemplazamiento, pero a pesar de ese suavizado, la existencia de ineficiencias

elevadas que pueden aparecer en ese remuestreo posibilitan la obtención de fronteras bootstrap alejadas de las unidades eficientes del DEA dando lugar a medidas de eficiencia bootstrap superiores a la unidad. Los elevados sesgos presentados en este tipo de aeropuertos inducen a pensar que a pesar del procedimiento de reflexión introducido en el algoritmo no se ha eliminado del todo el problema del soporte acotado de la densidad.

González y Miles (2002) realizan un análisis estadístico similar al que hemos efectuado nosotros, pero aplicado al sector de servicios públicos. En su trabajo presentan dos estimaciones DEA realizadas con diferentes tamaños muestrales. La primera estimación es efectuada para 21 unidades productivas, siendo la estimación de las medidas de eficiencia más homogénea que la que presenta el sector de aeropuertos. Sin embargo su unidad más ineficiente sufre de un grado de ineficiencia bastante similar al que presentan nuestros aeropuertos más ineficientes. Los sesgos que obtienen en la aplicación del bootstrap de Simar y Wilson son similares a los de nuestra estimación excepto en las unidades eficientes. En estas unidades los sesgos que presentan son inferiores a los de nuestra aplicación pero con un signo negativo. Este sesgo negativo no tiene explicación en el análisis estadístico del DEA ya que por construcción éste siempre es positivo y el bootstrap no debería hacer otra cosa que imitar al mundo real.

Un sesgo grande supone que los intervalos de confianza obtenidos para la ineficiencia (expuestos en la última columnas de los cuadros A2-XV, A2-XVI y A2-XVII) son de una amplitud importante. En general, para que el estimador de la eficiencia, obtenido con el DEA originalmente, caiga dentro del intervalo de confianza se requiere que el valor extremo de la relación (2.4.24)  $\hat{b}_\alpha$  sea cero. Esto no ocurre con ningún

nivel de confianza y en ninguno de los aeropuertos, ni siquiera en las unidades que el DEA consideraba técnicamente eficientes.

El análisis estadístico indica que, a pesar de las estimaciones obtenidas con el DEA, ninguno de los aeropuertos produce con eficiencia técnica puesto que en ningún caso los intervalos de confianza tienen en su interior a la unidad. Las reducciones necesarias para ser eficientes son considerablemente más altas que las que estimaba el DEA y por tanto indica que la estimación puntual de la eficiencia del DEA no es demasiado precisa. Además es interesante destacar que, aeropuertos eficientes en el DEA, como por ejemplo Lanzarote, observando sus intervalos de confianza,  $[0.4237, 0.9809]$  en el año 1992 en el caso de Lanzarote) pueden ser tan ineficientes o más que los aeropuertos que tenían un grado medio de ineficiencia, como por ejemplo Melilla que en ese año su intervalo de confianza es  $[0.5350, 0.8383]$ .

Los resultados en los dos años siguientes son parecidos a los vistos para el año 1992. En 1993 hay diez aeropuertos en los que no puede ser corregida la medida de eficiencia técnica obtenida con el DEA y en 1994 el número de estos aeropuertos es de once. En los tres años se repiten valores de  $\varrho$  inferiores a la unidad para aproximadamente los mismos aeropuertos.

El estimador corregido se obtiene restandole dos veces el sesgo estimado, en nuestra aplicación las estimaciones del sesgo han permanecido lo suficientemente constantes, en cada aeropuerto y durante los tres años, como para que se mantenga la tendencia de la eficiencia técnica expuesta en el apartado anterior. Esto se observa en el Cuadro 2-VII, que presentamos seguidamente, donde se muestra la eficiencia corregida de cada año y la media geométrica de todo el periodo. Tal y como habíamos visto en el

análisis del DEA, el paso al año 1993 viene marcado por un descenso generalizado en la eficiencia mientras que en el año 1994 se produce una recuperación dando lugar a que en la mayoría de los aeropuertos la eficiencia media de todo el periodo se sitúe por debajo de los niveles iniciales.

Comparando los resultados de este cuadro con los obtenidos en el cuadro 2-III podemos señalar que esta tendencia deja de cumplirse en el caso de algunos aeropuertos. En el paso del año 92 al año 93 en el análisis del DEA hubo algunos aeropuertos que no empeoraron sus niveles de eficiencia, como por ejemplo el caso de Tenerife, Reus o Murcia que la incrementaron. En todos estos casos, con el análisis estadístico no ha sido posible corregir el estimador y por tanto no podemos afirmar que su eficiencia se incrementó.

En el caso de Lanzarote que con el DEA tradicional era técnicamente eficiente en todos los periodos, con el análisis estadístico no sólo no es eficiente técnicamente sino que en el año 93 se incrementa su ineficiencia, mejorando ligeramente en el siguiente periodo.

Observando los niveles de eficiencia en el año 94 en el análisis del DEA tradicional la mayoría de los aeropuertos incrementaban su eficiencia en relación a la del periodo 93 aunque había algunos que la empeoraban o se mantenía constante. Con el análisis estadístico, sólomente Zaragoza disminuye su eficiencia, lo cual ocurría también con el análisis del DEA originalmente. En el resto de aeropuertos, como Murcia, Hierro y Coruña la inferencia estadística no nos permite asegurar esa disminución e incluso indica lo contrario en el caso de Melilla.

**Cuadro 2-VII: Eficiencia Técnica Corregida**

<b>AEROPUERTOS</b>	1992	1993	1994	92-94
1. <b>Alicante</b>	0.3960	0.3585	0.4393	0.3966
2.Almeria	0.3673	0.3520	0.4392	0.3843
3.Asturias	0.5384	0.4667	0.4812	0.4945
4. <b>Barcelona</b>	0.0000	0.5459	0.0000	0.0000
5.Bilbao	0.5329	0.4668	0.5537	0.5165
6.Coruña	0.7872	0.0000	0.5104	0.0000
7. <b>Fuerteventura</b>	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8.Gerona	0.2348	0.2203	0.2524	0.2355
9.Granada	0.5096	0.3474	0.3806	0.4069
10.Hierro	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11. <b>Ibiza</b>	0.5003	0.4700	0.5258	0.4981
12.Jerez	0.4741	0.4457	0.4658	0.4617
13. <b>Lanzarote</b>	0.7159	0.6690	0.6716	0.6852
14.La Palma	0.5239	0.4789	0.5066	0.5028
15. <b>Gran Canaria</b>	0.5555	0.4548	0.5184	0.5078
16. <b>Madrid</b>	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17. <b>Menorca</b>	0.5045	0.4785	0.4891	0.4906
18. <b>Malaga</b>	0.3573	0.3293	0.3741	0.3531
19.Melilla	0.7141	0.4533	0.4824	0.5385
20. <b>Palma Mall.</b>	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
21.Pamplona	0.4384	0.4105	0.0000	0.0000
22.Reus	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
23. <b>Murcia</b>	0.3717	0.0000	0.0000	0.0000
24.S. Sebastian	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
25.Tenerife	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
26.Santander	0.3710	0.3211	0.3601	0.3501
27.Santiago	0.4231	0.2677	0.3405	0.3379
28.Sevilla	0.4304	0.2426	0.2844	0.3097
29.Valencia	0.3703	0.3316	0.3727	0.3577
30.Valladolid	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
31.Vigo	0.4358	0.4065	0.4445	0.4286
32.Vitoria	0.2272	0.2052	0.2174	0.2164
33.Zaragoza	0.3329	0.2993	0.2944	0.3084

La última columna del cuadro 2-VII formula la media geométrica del periodo. En el caso del DEA tradicional se obtenían 10 aeropuertos que incrementaban sus niveles de eficiencia si se les comparaba con los valores de partida, con el análisis estadístico sólo podemos confirmar que esto ocurre en Alicante, Almería y Gerona y por el contrario en Murcia, Ibiza y Vitoria, en vez de incrementarse, se confirma la tendencia general de disminución de la eficiencia.

En conclusión, el análisis estadístico confirma que, en general, se ha producido un retroceso en la eficiencia técnica en 1993 con un incremento en 1994. En la mayoría de los aeropuertos ese incremento ha sido inferior al descenso del año 93; y además, se ha incrementado la ineficiencia calculada en media para todo el periodo, si se la compara con los valores iniciales de partida. Estos resultados son similares a los que se obtenían con el DEA tradicional pero hay que matizar que la ineficiencia técnica de los aeropuertos con los estimadores corregidos es superior a la obtenida con la estimación del DEA original. También es importante señalar que con el análisis estadístico se producen diferentes comportamientos a los observados con el DEA tradicional en el caso de la evolución de la eficiencia de algunos aeropuertos de la muestra.

#### **2.6.5.2. Estimación Bootstrap de los Indices de Malmquist**

La estimación bootstrap de los índices de Malmquist se ha calculado siguiendo las pautas de la estimación bootstrap de la eficiencia técnica. La diferencia fundamental con el procedimiento anterior es que el remuestreo, en este caso, se realiza con las estimaciones de eficiencia del DEA de dos años sucesivos, y tras la obtención de la muestra bootstrap, se han deducido para cada aeropuerto la distribución muestral de

todos los índices explicativos del cambio productivo formulados en la relación (2.5.17).

Al igual que en el caso de la eficiencia técnica, se ha analizado la sensibilidad de las estimaciones a los diferentes parámetros de suavizado. En el caso de los índices de productividad se emplea un kernel bivalente, y Silverman (1986) recomienda, si los datos tienen una distribución aproximada a la normal, el siguiente valor,

$$h = 0.96 \cdot \hat{\sigma}_t \cdot N^{-1/6} \quad (2.6.3)$$

donde  $\sigma_t$  es, para cada periodo  $t = \{1992, 1993, 1994\}$ , la desviación normal estándar de las estimaciones de la eficiencia técnica del DEA. Pensamos que puesto que en el bootstrap de la eficiencia técnica el parámetro que seleccionamos fue el recomendado por Silverman para datos normales, en el caso de los índices de Malmquist también debe de ser un parámetro de suavizado adecuado. No obstante para observar la sensibilidad de la estimación con la modificación de este parámetro, hemos analizado los efectos producidos con los siguientes parámetros de suavizado,

$$h_0 = 0, \quad h_1 = h/10, \quad h_2 = h/100, \quad h0.96\hat{\sigma}_t N^{-1/6} \quad (2.6.4)$$

La elección de un  $h_0$  es el caso del bootstrap naïve cuyos resultados se han probado inconsistentes incluso en el caso de muestras infinitas, pero nos sirve en el análisis como el caso extremo en el cual no se realiza ningún tipo de suavizado.

Al igual que ocurría en el análisis de la eficiencia técnica, la aplicación del bootstrap permite obtener una aproximación del sesgo con la que se está estimando mediante el DEA. Es posible, por tanto, la corrección de todos los estimadores de los

índices determinados con el DEA original mediante la eliminación de ese sesgo, pero al igual que exponíamos en el apartado anterior, esta corrección sólo se debe de realizar si la varianza de la estimación bootstrap es inferior a la tercera parte de la estimación del sesgo al cuadrado (2.6.2). Este valor,  $\rho$ , independientemente del parámetro de suavizado aplicado es en la mayoría de los aeropuertos inferior a la unidad.

A pesar de que no hemos podido corregir los índices, hemos construido intervalos de confianza de los estimadores de los índices obtenidos en (2.5.17) y les hemos aplicado un contraste muy sencillo para evaluar si la unidad (representativa de que no ha existido cambio en la productividad en el índice que se esté analizando) pertenece o no pertenece al intervalo. En los intervalos en los que sí que aparece la unidad consideramos que no es significativo el cambio productivo estimado con el DEA; sin embargo, si la unidad no pertenece al intervalo, el cambio que estimó el DEA sí que es significativo.

Los intervalos de confianza presentados en este trabajo, se corresponden a los estimados con el parámetro de suavizado recomendado por Silverman (1986) y se han realizado para dos niveles de confianza, el 5% y el 10%. En el anexo se incluyen los cuadros A2-XVIII - A2-XXII con los resultados, únicamente, para el nivel de confianza  $\alpha = 5\%$ . En cada uno de estos cuadros se muestran los intervalos de confianza de cada índice en los dos subperiodos y en el periodos total y se sigue el mismo esquema: la primera columna indica el aeropuerto, las siguientes tres columnas presentan el índice estimado con el DEA para el primer subperiodo y sus intervalos de confianza correspondientes. Los resultados del segundo subperiodo se presentan en las tres columnas siguientes, donde también en primer lugar se muestra la estimación del índice correspondiente con el DEA, y posteriormente, sus intervalos de confianza.

Las tres últimas columnas repiten lo dicho para el periodo al completo. La estimación bootstrap de los intervalos del periodo total se han calculado con media geométrica de los valores bootstrap del índice correspondiente de los dos subperiodos (ver Simar y Wilson 1998b).

La aportación del análisis estadístico incorporado a la estimación efectuada con el DEA se observa de forma inmediata en los cuadros (A2-IV - A2-VIII), ya utilizados para analizar los resultados del cambio productivo con la estimación del DEA determinístico. Los índices expuestos en ellos tienen dos asteriscos en el caso en el que para un nivel de confianza del 10% su cambio productivo sea significativamente diferente de la unidad y un asterisco cuando esto ocurre para un nivel de confianza del 5%.

Debido a que la estimación de los índices de la tecnología y del cambio tecnológico requieren que se calcule la distancia que existe entre la dotación de un año y la tecnología óptima de otro periodo utilizando rendimientos variables de escala, en algunos casos esta distancia es imposible de obtener y por tanto, como en Madrid, no se puede aproximar la distribución muestral del índice correspondiente. En los cuadros, los índices en los que se ha producido este problema están marcados con el signo + o no aparece el valor de su intervalo de confianza.

Analizando de nuevo el cuadro A2-IV y fijándonos en el índice de productividad total, se observa como la estimación del DEA realizada anteriormente es en su mayoría significativa. En el primer subperiodo sólo hay cuatro unidades cuyas estimaciones no eran significativas y todos ellos pertenecen a los aeropuertos con superavit económico. En el periodo siguiente son ocho los aeropuertos que su cambio productivo no es

significativo y seis en el caso de todo el periodo analizado. Además, en todos los aeropuertos es significativo el cambio productivo en alguno de los periodos. Es decir, la mayoría de lo dicho para el índice  $\widehat{\mathcal{M}}$  en el DEA determinístico es confirmado con el análisis estadístico. Las excepciones son todos los índices cuyos cambios no son significativos, como por ejemplo el índice de Madrid en los años 92-93; en este caso el análisis del DEA nos indicaba que la productividad total había disminuido pero la inferencia estadística nos asegura que esa disminución no es significativa y que igualmente podría ser un incremento o haber permanecido constante.

La alta significatividad del índice  $\widehat{\mathcal{M}}$  no se produce en el resto de índices explicativos (cuadros A2-VII y A2-VIII). Esto es especialmente notorio en el caso del índice  $\widehat{\mathcal{ST}}$ , donde, en el periodo 92-93 no hay ningún cambio significativo. El índice de cambio en la eficiencia sí que presenta un mayor número de aeropuertos con valores significativos pero en ningún caso, tantos como en el índice de Malmquist.

Analizando el cuadro A2-V se observa como en la mayoría de los aeropuertos los únicos resultados significativos son los del índice de productividad total. El análisis de la evolución del cambio productivo realizado con el DEA determinístico debería matizarse, entonces, con estos resultados. Es decir, en general, la evolución experimentada por el índice de productividad total es significativa, pero sin embargo, se debe de ser más prudente a la hora de analizar la evolución de los índices que explican ese cambio productivo puesto que no es posible explicar significativamente los orígenes de ese cambio excepto en muy pocos aeropuertos. Fijándonos en los aeropuertos que tienen cambios significativos, vemos que en el índice  $\widehat{\mathcal{E}}$  la mayoría de los índices, cuyos cambios son significativos, son aquellos correspondientes a los aeropuertos en los que se producía una mayor disminución de la productividad: Sevilla, Santiago, Granada

y Coruña y también Reus, que era el que presentaba el mayor incremento en la productividad. Es decir, con el análisis estadístico no podemos saber si la tendencia del índice  $\widehat{\mathcal{E}}$  es de una disminución en la productividad porque la mayoría de los cambios, indicados en los índices, no son significativos, pero sí que podemos asegurar que, ciertas mejoras y empeoramientos en la productividad de algunos aeropuertos concretos, se deben a este índice.

En el mismo periodo, pero con respecto al índice  $\widehat{\mathcal{S}}$ , se pueden hacer parecidas observaciones. En este caso es menor el número de aeropuertos cuyo índice muestra un cambio significativo, y como ocurría anteriormente, los aeropuertos que presentaban los mayores descensos en productividad debido al índice de escala, Bilbao, Jerez, Hierro, Pamplona o Murcia, son los que estadísticamente presentan cambios significativos. Es decir, no podemos saber cual ha sido la tendencia en general de los aeropuertos con respecto a este índice pero sí que algunos aeropuertos en concreto han experimentado cambios significativos.

Los otros dos índices que componen el índice de Malmquist apenas presentan resultados significativos por lo que es imposible saber cómo han afectado a la productividad.

Los valores significativos se incrementan notoriamente en el periodo siguiente si se comparan con los resultados del 92-93, los cuales se muestran en el cuadro A2-VI. También, en este caso, es significativo el cambio productivo total estimado con el DEA en la mayoría de los aeropuertos. Es de destacar que hay 19 aeropuertos con un cambio significativo en la eficiencia, la mayoría de ellos con incremento en su productividad. 14 unidades tienen cambios significativos en el índice de cambio

de escala, 15 en el índice del cambio tecnológico y 17 en el de cambio en la escala de la tecnología. Hay, por tanto, varios aeropuertos con tres y cuatro índices cuyos cambios son significativos e incluso uno, La Coruña, en los que el DEA estimaba significativamente el cambio de los cinco índices.

El índice  $\widehat{\mathcal{E}}$  en este subperiodo presenta, a excepción de La Coruña, únicamente valores significativos en aeropuertos que experimentaron incrementos en la productividad debidos al cambio en eficiencia. Es decir, los descensos en la productividad que fueron analizados con el DEA tradicional, como por ejemplo el de Zaragoza o Murcia, no son significativos. Existen 19 aeropuertos con incrementos productivos y se podría considerar que la tendencia del sector de una mejora en la productividad estimada para este índice con el DEA podría ser significativa.

En el mismo subperiodo, la aportación de la inferencia estadística a los resultados del índice  $\widehat{\mathcal{S}}$  es muy parecida al índice anterior. También en este caso sólo son significativos los incrementos en la productividad y por tanto no tiene ningún sentido hablar de los descensos productivos de Granada, Valencia, San Sebastián y otros aeropuertos que se calcularon con el DEA.

En el caso de los índices  $\widehat{\mathcal{T}}$  y  $\widehat{\mathcal{ST}}$  también hay un gran número de aeropuertos con valores significativos y todos ellos representando empeoramientos en la productividad total. Destacan en el caso del índice  $\widehat{\mathcal{ST}}$  los tres aeropuertos que presentaban mejoras productivas, Gran Canaria, Palma de Mallorca y Tenerife porque ninguno de esos resultados son significativos con el análisis estadístico.

En conclusión, el análisis estadístico nos permite asegurar que los valores de los índices de Malmquist estimados con el DEA sólo son una indicación del valor que

pueden tomar ya que éste podría ser cualquiera de los que pertenecen al intervalo de confianza. La inferencia estadística efectuada nos ratifica las conclusiones extraídas del análisis del DEA en el caso del índice de Malmquist,  $\widehat{\mathcal{M}}$ , pero nos hace ser más prudente con respecto a la explicación de cuales han sido los orígenes de ese cambio productivo, y ésto es especialmente importante en algunos aeropuertos que parecían seguir un comportamiento diferente al del resto del sector.

# Capítulo 3

## Una Nueva Propuesta para Contrastar la Eficiencia Técnica

### 3.1 Introducción

El objeto primordial del análisis de la eficiencia técnica es la estimación, en cada empresa, de su correspondiente indicador de ineficiencia. Un requisito imprescindible para realizar este análisis es la modelización de la frontera o función de producción ya que las medidas de ineficiencia se calculan con referencia a los valores óptimos de producción localizados en esa frontera. La elección de una función frontera paramétrica impone supuestos funcionales muy fuertes no sólo con respecto a esa frontera sino también con respecto a la distribución de la ineficiencia que se desea estimar. La ventaja de imponer estos supuestos, si son correctos, es que se pueden construir intervalos de confianza de la ineficiencia estimada y contrastar estadísticamente hipótesis sobre algunos aspectos de la función de producción.

En la modelización no paramétrica, sin embargo, en vez de supuestos funcionales se establecen hipótesis sobre el proceso generador de datos de modo que, al igual

que en el caso paramétrico, sea posible conocer las propiedades estadísticas de la distribución de la ineficiencia y por tanto, realizar inferencia estadística mediante intervalos de confianza y contrastes de hipótesis.

Generalmente los contrastes de hipótesis evalúan estadísticamente aspectos de la función de producción como pueden ser los rendimientos de escala, la sustituibilidad de inputs, la especificación del modelo, la existencia de ineficiencia, etc. A lo largo de los capítulos anteriores se han señalado algunos de los trabajos que desarrollaban contrastes de hipótesis, pero recopilar todas las características de la función de producción que pueden ser objeto de evaluación y detallar los trabajos que se hayan publicado sobre ello es una tarea que se aleja del objetivo de este capítulo.

Delimitando el campo de estudio, a la evaluación de la ineficiencia técnica con datos de corte transversal, observamos que la estimación puntual de la ineficiencia en los diferentes modelos de frontera presenta carencias importantes. En el caso no paramétrico, a pesar de que se han desarrollado técnicas que estiman esa ineficiencia empresa a empresa, como por ejemplo el DEA, esto sólo es posible cuando los datos no están afectados con ruido estocástico. La estimación no paramétrica tradicional, sin embargo, no distingue entre empresas eficientes e ineficientes y su estimación de la frontera de producción es inconsistente. Por tanto y, con la excepción del estimador de Hall y Simar (2000), no existe la posibilidad de estimar la ineficiencia técnica en fronteras no paramétricas si los datos han sido afectados por ruido estocástico.

En los modelos paramétricos, sin embargo, es posible estimar una medida indicativa de la ineficiencia de toda la muestra, pero sus predicciones individuales son

inconsistentes. Motivados por esta situación, el objetivo de este capítulo es desarrollar un contraste de hipótesis con el que se pueda evaluar la ineficiencia empresa a empresa y que sea aplicable tanto a los modelos paramétricos como, y especialmente, a los no paramétricos.

En general los contrastes que evalúan la ineficiencia técnica han basado la formulación de sus hipótesis en el concepto de simetría del residuo. El término aleatorio de los modelos estocásticos se define habitualmente como una variable compuesta por ineficiencia y ruido estocástico, caracterizándose la ineficiencia con una variable aleatoria asimétrica y el ruido con una simétrica. Bajo estos supuestos y mediante la regresión del modelo es posible equiparar el análisis de eficiencia técnica a la evaluación de la forma que presenta la distribución del residuo. En el caso en el que el residuo presente una forma simétrica se considera generado por un sector eficiente mientras que una distribución asimétrica es indicio de ineficiencia en el sector.

El contraste que planteamos en este capítulo consiste en evaluar la simetría condicional del residuo y fue propuesto por Zheng (1998) quien lo diseñó para ser aplicado a modelos de regresión paramétricos. La adaptación del contraste a la evaluación de la ineficiencia técnica requiere que se adapte el supuesto de simetría condicional a un modelo de frontera. El supuesto de que la ineficiencia no depende de los regresores implica que las empresas en el momento de elegir sus inputs lo hacen independientemente de sus niveles de ineficiencia. Este supuesto es obligatorio en la mayoría de los modelos paramétricos pudiendo darse el caso de que sea inadecuado en algunas situaciones. La definición del ruido como una variable aleatoria simétrica y la ineficiencia técnica como una variable aleatoria asimétrica dependiente de los regresores,

proporcionan las bases para suponer que, tras la regresión del modelo, el residuo estimado estará condicionado a los inputs y tendrá una forma simétrica si no existe ineficiencia.

Como ya hemos indicado, Zheng (1998) diseñó este contraste para evaluar la simetría condicional del residuo que se obtenía mediante regresión paramétrica, por tanto la primera y más sencilla idea que se plantea para aplicarlo al análisis de frontera es la caracterización del modelo mediante funciones de producción paramétricas. Los supuestos distribucionales en estos modelos no son tan estrictos como en el caso del análisis de eficiencia técnica del modelo propuesto por Aigner, Lovell y Schmidt (1977) ya que no es necesario imponer una distribución al ruido y a la ineficiencia sino sólo los supuestos de simetría y asimetría respectivas. La desventaja del modelo es, sin embargo, la necesidad de caracterizar a la función de producción mediante una función conocida que, en algunas ocasiones, puede no ser un supuesto acertado y ocasionar, por tanto, errores de especificación. Es interesante, por tanto, evitar este problema adaptando el contraste a modelos no paramétricos en los que se permite una mayor flexibilidad funcional. El principal problema que se plantea en este proceso de adaptación es que la regresión no paramétrica debe de estimar consistentemente la función de producción para que sea válida la evaluación de la simetría condicional de los residuos. Este requisito era un problema sin solución hasta que Hall y Simar (2000) desarrollaron el único estimador consistente en este tipo de fronteras.

Es posible, por tanto, no sólo adaptar el contraste a modelos paramétricos sino también si se estiman los residuos con el estimador de Hall y Simar, evaluar la eficiencia técnica en modelos no paramétricos. Las ventajas de este contraste no sólo es que se puede utilizar en los dos tipos de modelos planteados sino que además se

aplica a cada una de las unidades productivas de la muestra y, por tanto, permite evaluar la ineficiencia técnica empresa a empresa. Esta ventaja es crítica porque los estadísticos de eficiencia diseñados hasta el momento evaluaban la ineficiencia media del sector dando así una idea general de si existía o no ineficiencia en la muestra pero no evaluando este concepto en cada empresa. Además y en tercer lugar, el contraste que proponemos es consistente con respecto a un número ilimitado de alternativas, ya que en la hipótesis alternativa se incluyen *todas* las distribuciones condicionales existentes que no son simétricas.

El capítulo se organiza de la forma siguiente, en la sección 3.2 se efectúa una recapitulación de los diferentes contrastes que se han diseñado para evaluar la eficiencia técnica con datos de corte transversal. En la sección 3.3 se formula el concepto y los contrastes de simetría condicional. En la sección 3.4 se adapta, en general, el contraste de Zheng al problema de la eficiencia técnica y se formula el estadístico con el que es posible evaluar la ineficiencia técnica empresa a empresa. La determinación del estadístico del contraste requiere una regresión previa del modelo, formulando en el apartado (3.4.1) las condiciones para que se realice paramétricamente y desarrollando en la sección (3.4.2) la determinación del estadístico en este caso. El contraste de Zheng puede adaptarse a un modelo no paramétrico de frontera si los residuos se obtienen con el estimador de Hall y Simar, el cual viene definido en el apartado (3.4.3). Los apartados (3.4.4) y (3.4.5), definen las condiciones para adaptar el contraste al modelo no paramétrico y el cálculo del estadístico en este caso. Por último, en la sección 3.5 y mediante un estudio de Monte Carlo, se analiza el comportamiento, en muestras finitas, de la potencia y del tamaño del contraste, tanto para el modelo paramétrico, como para el no paramétrico.

## 3.2 Contrastes Diseñados para Evaluar la Eficiencia Técnica

Una forma general de definir estocásticamente la tecnología es la siguiente relación,

$$y_j = g(x_j) + \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.2.1)$$

siendo  $x_j \in \mathbb{R}^p$  el vector de inputs e  $y_j \in \mathbb{R}^1$  el output de la empresa  $j$ .

La función de producción a estimar se representa con  $g(x_j)$  y  $\epsilon_j$  es el término aleatorio del modelo, definido, como es habitual, mediante la siguiente forma compuesta,

$$\epsilon_j = v_j - u_j \quad (3.2.2)$$

donde  $v_j$  es la variable aleatoria simétrica denominada ruido y  $u_j$ , es la variable aleatoria asimétrica que representa la ineficiencia en la producción. Estas variables aleatorias, tal y como hemos visto en el capítulo primero, se formulan de manera que la estimación que se obtenga en cada modelo de frontera sea lo más precisa posible.

En el caso del enfoque paramétrico, el primer contraste, para datos de sección cruzada, con el que se evaluó la ineficiencia fue el desarrollado por Aigner, Lovell y Schmidt (1977) quienes tras estimar por el procedimiento de estimación máximo verosímil un modelo paramétrico similar al expuesto en la ecuación (3.2.1), emplearon como estadístico una variante del estadístico de Wald (ver el estadístico de Wald en

Greene, 1997, págs: 162-165). Tal y como se ha formulado en el primer capítulo, Aigner, Lovell y Schmidt definieron  $g(x)$  como una función paramétrica conocida y lo mismo hicieron con las distribuciones que componen el término aleatorio. Entre las dos posibles caracterizaciones que eligieron para la eficiencia una de ellas fue la distribución asimétrica  $N(0, \sigma_u^2)$  truncada en cero, y caracterizando al ruido con una distribución simétrica normal:  $N(0, \sigma_v^2)$ . Las varianzas de las estos dos componentes del término aleatorio permiten caracterizar a la frontera como una función cuyos casos extremos son los siguientes:

- Si  $\sigma_v^2 = 0$ , la frontera es determinística ya que las desviaciones de la función de producción se deben únicamente a motivos de ineficiencia.
- Si  $\sigma_u^2 = 0$ , la frontera es estocástica y se caracteriza, además, por ser todas las empresas eficientes ya que para que esa varianza sea cero todas las unidades productivas deben tener medidas de ineficiencia iguales a cero.

El segundo de estos casos extremos es empleado por Aigner, Lovell y Schmidt (1977) para proponer un contraste con el que evaluar, bajo la siguiente hipótesis nula, una situación de eficiencia técnica en todo el sector,

$$H_0 : \sigma_u^2 = 0, \quad (3.2.3)$$

sin embargo, si el sector es ineficiente, esta situación se expresa con la siguiente hipótesis alternativa,

$$H_1 : \sigma_u^2 > 0. \quad (3.2.4)$$

Coelli (1995), mediante simulaciones de Monte Carlo, ha analizado las propiedades estadísticas de este contraste y ha señalado que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera, tanto en la versión del contraste de Wald propuesto por Aigner, Lovell y Schmidt (1977), como en la versión equivalente que aplica la parametrización de Battese y Corra (1977), es muy alta. En lugar del contraste de Wald, Coelli (1995) propone que se aplique el contraste alternativo de ratios de verosimilitud generalizada (ver Greene, 1997, pags. 160-162); el cual requiere la estimación del modelo tanto bajo la hipótesis nula como bajo la alternativa y necesita que se calcule el siguiente estadístico,

$$J_1 = -2 \cdot \ln \left\{ \frac{L_{H_0}}{L_{H_1}} \right\}, \quad (3.2.5)$$

donde  $L_{H_0}$  y  $L_{H_1}$  son, respectivamente, los valores de la función de verosimilitud bajo la hipótesis nula y bajo la alternativa. El estadístico  $J_1$ , se distribuye, bajo la hipótesis nula, de acuerdo a una distribución  $\chi^2$  con igual número de grados de libertad que el número de restricciones consideradas.

La principal desventaja de los dos contrastes formulados anteriormente es que para que sea posible evaluar las hipótesis planteadas se requiere la estimación previa de todos los parámetros de la frontera paramétrica y si la hipótesis nula no se rechaza, la especificación del modelo con el componente de ineficiencia es errónea.

El modelo propuesto por Aigner, Lovell y Schmidt (1977) si es estimado por mínimos cuadrados ordinarios no proporciona estimadores consistentes para el término independiente, pero sin embargo, con sus residuos, es posible contrastar la presencia de ineficiencia técnica. Schmidt y Lin (1984) fueron los primeros en formular

este contraste que consiste en evaluar la simetría de los residuos mínimo cuadráticos. La caracterización de (3.2.1) empleando funciones paramétricas especifica la perturbación aleatoria como una distribución simétrica (el ruido:  $v_j$ ) más una distribución asimétrica (la eficiencia técnica:  $u_j$ ), la suma de ambas distribuciones resulta ser asimétrica si existe ineficiencia, y simétrica si las empresas de la muestra son todas eficientes. El contraste que Schmidt y Lin (1984) proponen, supone que bajo la hipótesis nula se produce eficientemente y evaluar esta hipótesis es, por tanto equivalente, a evaluar que la distribución de los residuos sea simétrica. Bajo la hipótesis alternativa, sin embargo, se supone ineficiencia y por tanto la distribución de  $\epsilon$  es asimétrica negativa.

El estadístico con el que se analiza la simetría del residuo es el siguiente ratio de momentos:

$$J_2 = \left[ \frac{m_3}{(m_2)^{3/2}} \right]^2, \quad (3.2.6)$$

donde  $m_2$  y  $m_3$  son respectivamente, el segundo y el tercer momento muestral de los residuos mínimo cuadráticos. Si  $m_3 < 0$  la distribución de los residuos mínimo cuadráticos es asimétrica negativa, sugiriendo la presencia de ineficiencia técnica. Si  $m_3 > 0$  la distribución es asimétrica positiva, lo cual no tiene sentido en este contexto y sugiere una posible especificación errónea. Debido a que la distribución del estadístico definido en (3.2.6) no está generalmente publicada en los manuales de econometría, Coelli (1995) propuso, bajo las mismas hipótesis, el siguiente estadístico alternativo:

$$J_3 = \frac{m_3}{(6m_2^3/N)^{1/2}}. \quad (3.2.7)$$

Dado que  $m_3$  se distribuye, bajo la hipótesis nula, como una variable normal de media cero y varianza  $(6m_2^3/N)$ , el estadístico  $J_3$  se distribuirá de acuerdo a una distribución  $N(0, 1)$ .

La principal desventaja de los contrastes formulados mediante estos índices de simetría es que en algunas situaciones pueden ser inconsistentes. Esta inconsistencia se debe a que aunque el tercer momento sea el estadístico que se utiliza para determinar la simetría de la distribución, en realidad los contrastes deberían asegurar que todos los momentos impares son también cero ya que existen distribuciones que pueden parecer simétricas debido a que su tercer momento no existe o alguno de sus momentos impares no se anula aun a pesar de que el tercer momento sí es cero.

La estimación no paramétrica tradicional, al igual que en el DEA, no permite especificar consistentemente un término de error compuesto definido como en (3.2.1). El inconveniente de la regresión con técnicas no paramétricas es que la media de uno de sus componentes, la ineficiencia, no es cero, y por tanto la media condicionada de  $\epsilon_j$  para un  $x_j$  dado tampoco será cero. Es decir,

$$E(y_j|x_j) = g(x_j) - E(u_j|x_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.2.8)$$

por lo que:

$$E(y_j|x_j) \neq g(x_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.2.9)$$

Con el fin de solucionar este problema de identificación de la eficiencia en la estimación no paramétrica, Severance-Lossin (1995), diseñó un contraste con el que es posible evaluar la existencia de ineficiencia en la muestra aun estimando no paraméricamente la función de producción. Las hipótesis del contraste que planteó se basan en las siguientes probabilidades,

$$\begin{aligned} Pr[y_j = f(x_j) + \sigma(x_j) \cdot v_j] &= \lambda, \\ Pr[y_j = h(x_j) + \delta(x_j) \cdot u_j + \sigma(x_j) \cdot v_j] &= 1 - \lambda, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

donde  $x_j$  es un vector de inputs,  $y_j$  es un único output, y tanto  $u_j$  como  $v_j$ , son variables aleatorias de media cero y varianza uno.  $h(x_j) + \delta(x_j) \cdot u_j$  representa el output de una empresa ineficiente,  $h$  es la función de producción desconocida con la que se produce cuando hay ineficiencia,  $\sigma(x_j) \cdot v_j$ , es el error de medida o ruido, cumpliendose que:  $0 < h(x_j) + \delta(x_j) \cdot u_j < f(x_j)$ , siendo  $f$  una función cóncava desconocida con la que se produce cuando no existe ineficiencia. Inputs, output,  $u_j$  y  $v_j$  son variables aleatorias i.i.d. e independientes unas de las otras.

El objetivo del contraste es evaluar, bajo la hipótesis nula, que todas las empresas de la muestra sean técnicamente eficientes, lo cual es equivalente, en la relación (3.2.10), a evaluar que  $\lambda = 1$ . Bajo la hipótesis nula, entonces, desaparece el problema de identificación de la regresión no paramétrica tradicional siendo  $g(x)$  la función de producción desconocida del modelo formulado en (3.2.1). La hipótesis nula podemos formularla entonces como,

$$H_0 : \lambda = 1 \equiv \begin{cases} Pr[E[y_j|x_j] = g(x_j) = f(x_j)] = 1, \\ Pr[E[y_j|x_j] = h(x_j)] = 0 \end{cases} \quad (3.2.11)$$

Mientras que la hipótesis alternativa es, sin embargo, cualquier otro valor de  $\lambda$ ; es decir,

$$H_1 : \lambda \neq 1 \equiv \begin{cases} Pr[E[y_j|x_j] = g(x_j) = f(x_j)] = \lambda, \\ Pr[E[y_j|x_j] = h(x_j)] = 1 - \lambda \end{cases} \quad (3.2.12)$$

El contraste, bajo la hipótesis nula formulada en (3.2.11), permite que sea equivalente evaluar la existencia de eficiencia técnica en todas las empresas a evaluar que  $g(x)$ , y por tanto su estimación  $\widehat{g}(x)$ , sean funciones cóncavas.

La estimación de  $g(x)$  se obtiene mediante regresión no paramétrica seleccionando el parámetro de suavizado mediante validación cruzada y aplicando el estimador de Naradaya-Watson con un kernel que cumpla las condiciones de regularidad (ver Härdle 1990, pag 25). El sesgo existente en la estimación se calcula, en un entorno de  $\{x_j\}_{j \in I}$ , con el siguiente estadístico:

$$S_I = \sum_{j \in I} (g(x_j) - \widehat{g}(x_j))^2 \quad (3.2.13)$$

donde  $\widehat{g}(x_j)$  es el estimador no paramétrico de la función de producción obtenido con el estimador Naradaya-Watson.

La distribución del estadístico  $S_I$  se puede aproximar o, mediante sus valores asintóticos los cuales, si el error de medida sigue una distribución normal, se distribuyen como una combinación lineal de distribuciones con forma de  $\chi^2$  o, mediante

bootstrap. Severance-Lossin emplea un bootstrap diseñado por Härdle y Marron (1991) en el que, tras normalizar los residuos de la estimación no paramétrica, se remuestra en ellos obteniendo un nuevo pseudo-residuo para cada empresa,  $\epsilon_j^*$ . Este pseudo-residuo es sumado al correspondiente valor que estimado anteriormente con el Naradaya-Watson:  $\widehat{g}(x_j)$ , de modo que la suma del output estimado y el residuo sea el valor bootstrap de la producción

$$y_j^*(x_j) = \widehat{g}(x_j) + \epsilon_j^*. \quad (3.2.14)$$

Los valores bootstrap  $y^*(x_j)$  junto con los respectivos  $x_j$  originales, forman la muestra bootstrap con la que se debe de reestimar de nuevo, con el Naradaya-Watson, la función de producción. De este modo se calcula,  $\widehat{g}^*(x_j)$ , que es la estimación bootstrap de  $\widehat{g}(x_j)$  y mediante las diferencias  $\widehat{g}(x_j) - \widehat{g}^*(x_j)$  es posible aproximar asintóticamente el estadístico formulado en  $S_I$ .

El siguiente paso es la construcción de un estadístico de mínima distancia,  $S$ , con el que se pueda comparar la distancia, obtenida con el bootstrap, en  $S_I$ . Estos estadísticos fueron planteados por Varian (1985) y consisten en calcular, bajo la hipótesis nula, la distancia a la cota inferior de un estadístico desconocido. En el problema planteado por Severance-Lossin, el estadístico de mínima distancia,  $S$  se va a construir con la suma del cuadrado de las diferencias entre  $\widehat{g}(x)$  y la función cóncava que más se acerque por debajo a  $\widehat{g}(x)$ . Es decir, bajo la hipótesis nula en la cual  $g(x)$  es técnicamente eficiente y por tanto cóncava,  $S$  es el límite por abajo de  $S_I$  y se construye de la siguiente manera,

$$S = \min_{f,a} \sum_{j \in I} (f(x_j) - \widehat{g}(x_j))^2$$

$$s.a. \quad f(x_j) \leq f(x_i) + a_i(x_j - x_i), \quad (3.2.15)$$

donde  $f(x_j) \leq f(x_i) + a_i(x_j - x_i)$ ,  $\forall i, j$  es la restricción que se impone para asegurar que el conjunto de puntos  $\{f(x_j), x_j\}$  pertenezcan a un conjunto de posibilidades de producción de una función cóncava y  $a_i$  la derivada de  $f(x_i)$ .

La comparación entre los valores del estadístico  $S$  con los obtenidos con  $S_I$  permite aceptar o rechazar la hipótesis de concavidad y por tanto la hipótesis de eficiencia técnica. La hipótesis nula no se rechaza en el caso en el que el valor de  $S$  sea más pequeño que el valor obtenido en  $S_I$  ya que como hemos indicado anteriormente, bajo la hipótesis nula en la cual  $\widehat{g}(x)$  es cóncava, el Naradaya-Watson es consistente y el estadístico de mínima distancia  $S$  debe ser más pequeño que  $S_I$ .

Desgraciadamente el contraste es sólo útil frente a un limitado conjunto de alternativas ya que si  $\lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$  no es cóncava es imposible distinguir entre el modelo definido en (3.2.10) y el que genera una función de producción definida como  $\lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$ . Teniendo en cuenta este inconveniente, el contraste da una idea de si existe ineficiencia en la muestra e incluso es posible aplicar un método para observar la proporción de empresas ineficientes en los datos, pero no permite evaluar el grado de ineficiencia que presentan las empresas individualmente.

### 3.3 Contrastes de Simetría Condicional

La simetría condicional implica que la distribución de una variable aleatoria (normalmente el ruido), condicionada a otro vector aleatorio (generalmente las variables explicativas), presenta una forma simétrica.

La simetría condicional se ha utilizado tanto para la identificación en modelos de regresión semiparamétricos (Manski, 1984; Newey 1988; Powell 1986a; Newey 1991) como para el incremento de la eficiencia en el bootstrap (ver Brown y Newey, 1998) y es también necesaria para modelos ARCH/GARCH (ver Bai y Serena, 2001). Contrastes de simetría condicional se han propuesto para regresión con modelos censurados (Powell, 1986b) o para modelos de regresión lineal estimados con mínimos cuadrados asimétricos. Existen además otros tres contrastes que evalúan la simetría condicional en modelos lineales, los cuales se basan en estimar los residuos del modelo lineal con el único requisito necesario de que la estimación del modelo proporcione estimaciones consistentes de los parámetros.

El primero de los contrastes de simetría condicional en modelos lineales es el propuesto por Fan y Gencay (1995) quienes propusieron contrastar la simetría condicional del residuo en un modelo lineal especificado con

$$y_j = x_j' \beta + \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.3.1)$$

con  $x_j \in \mathbb{R}^p$ ,  $y_j \in \mathbb{R}^1$ , y donde  $\beta$  son los parámetros a estimar.  $(x_j, \epsilon_j)$  es un vector de variables aleatorias i.i.d en el cual,  $\epsilon_j$ , es el término aleatorio del modelo y su densidad, condicionada a los regresores,  $f(\epsilon_j|x_j)$ , tiene una media igual a

cero. El contraste se plantea de modo que la hipótesis nula es la simetría condicional del residuo mientras que la alternativa representa la situación en que el residuo es asimétrico, es decir,

$$\begin{aligned} H_0 : f(\epsilon|x) &= f(-\epsilon|x) \\ H_1 : f(\epsilon|x) &\neq f(-\epsilon|x) \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

La hipótesis nula del contraste es reescrita por Fan y Gencay de modo que bajo simetría condicional se cumpla la siguiente relación:

$$2 \int f(\epsilon|x) \cdot f(-\epsilon|x) \cdot d\epsilon = \int f^2(\epsilon|x) \cdot d\epsilon + \int f^2(-\epsilon|x) \cdot d\epsilon, \tag{3.3.3}$$

El segundo de los contrastes que aplica simetría condicional es el diseñado por Ahmad y Li (1997). Las hipótesis nula y alternativa son las mismas formuladas en (3.3.2), pero en su contraste Ahmad y Li reescriben la hipótesis nula con la medida de la norma  $L_2$  de modo que contrastan bajo simetría condicional la siguiente relación,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(\epsilon|x) - f(-\epsilon|x)]^2 dF = 0. \tag{3.3.4}$$

Este contraste ha sido aplicado al análisis de frontera en Li (1996). La intención de Li es demostrar que no siempre que se obtiene una distribución de errores ajustados simétrica se debe a que el sector es eficiente. El modelo que especifica es el paramétrico de Aigner, Lovell y Schimdt (1977), en el cual se define al ruido con una normal mientras que a diferencia de Aigner, Lovell y Schimdt la ineficiencia es caracterizada como una distribución uniforme en  $[0, b]$ , siendo  $b$  un parámetro a estimar. La definición de la eficiencia de este modo permite que la distribución del error

compuesto ajustado,  $\epsilon^* = \epsilon - E(\epsilon)$ , sea simétrica cuando las empresas son ineficientes (siendo  $\epsilon = v - u$ ).

Li aplica el estadístico (3.3.4) a los residuos ajustados que se han estimado por mínimos cuadrados ordinarios en el modelo de Aigner, Lovell y Schmidt (1977) cuya distribución haya resultado simétrica. Las hipótesis del estadístico son,

$$\begin{aligned} H_0 : f(\epsilon^*) &= f(-\epsilon^*) \\ H_1 : f(\epsilon^*) &\neq f(-\epsilon^*). \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

donde  $f(\cdot)$  es la función de densidad.

Sustituyendo el error ajustado en la relación propuesta en (3.3.4) se obtiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(\epsilon^*) - f(-\epsilon^*)]^2 d\epsilon^*. \quad (3.3.6)$$

Li utiliza estimación no paramétrica para calcular los valores muestrales análogos a los de la relación (3.3.6), es decir,

$$\hat{f}(\hat{\epsilon}_j^*) = \frac{1}{Nh} \sum_{j \neq i} K \left( \frac{\hat{\epsilon}_j^* - \hat{\epsilon}_i^*}{h} \right) \quad (3.3.7)$$

donde el kernel aplicado en la estimación es un "leave one out" para evitar que el estadístico bajo la hipótesis nula sea infinito. Este kernel no incluye en su sumatorio el término  $i = j$  y se utiliza en los casos en los que la función,  $K$ , empleada en la estimación es un kernel gaussiano (ver 3.5.3). En el caso en el que  $h > 0$  y se suma el término  $i = j$ , en este caso, la exponencial de  $(x_i - x_j)/h = 0$  no está acotada

superiormente y por tanto, el valor del estadístico tampoco está acotado, y no se diferencia de lo que ocurre en la hipótesis alternativa.

El estadístico,  $J_4$ , con el que se calcula muestralmente la relación (3.3.5) es el siguiente,

$$J_4 = \frac{Nh^{1/2}}{\sqrt{\hat{\sigma}_o^2}} \left\{ (N^2h)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \left[ K \left( \frac{\hat{\epsilon}_i^* - \hat{\epsilon}_j^*}{h} \right) - K \left( \frac{\hat{\epsilon}_i^* + \hat{\epsilon}_j^*}{h} \right) \right] \right\}, \quad (3.3.8)$$

siendo  $\hat{\sigma}_o^2 = 4 \left[ \int K^2(u) \, du \cdot (N^2h)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K \left( \frac{\hat{\epsilon}_i^* - \hat{\epsilon}_j^*}{h} \right) \right]$ .

$\hat{\epsilon}_i^*$  es el residuo estimado por mínimos cuadrados ordinarios,  $K(\cdot)$  es la función kernel y  $h$  es el parámetro de suavizado.

El estadístico, así computado, bajo la hipótesis nula converge a una distribución normal estandar mientras que bajo la alternativa tiende a infinito. En la práctica en la que no se dispone de muestras infinitas, Li (1996) no rechaza la hipótesis de simetría si el estadístico es menor que el  $\alpha$ -percentil de la distribución normal estandar. Cuando la hipótesis nula es aceptada, la simetría no significa que no exista ineficiencia sino que ésta se distribuye de forma distinta a la formulada en Lovell, Aigner y Schimdt (1977). Li entonces, define la distribución de ineficiencia como una uniforme, y estima el modelo como es usual en el modelo paramétrico.

El tercero de los contrastes de simetría condicional es el propuesto por Zheng (1998), quien lo construye basandose en que cuando se evalúa una variable aleatoria simétrica se cumple que la suma de las funciones de distribución de la variable y de su valor negativo es la unidad. Es decir,

$$1 - F(-\epsilon|x) - F(\epsilon|x) = 0. \quad (3.3.9)$$

Este contraste, formulado en detalle en la siguiente sección, se originó con la idea de emplearlo en modelos paramétricos. Su principal virtud es que se aplica a cada una de las unidades productivas de la muestra y que permite evaluar, por tanto, la simetría condicional empresa a empresa. Esta ventaja es de vital importancia en el análisis de la eficiencia técnica donde la asimetría condicional se identifica con la ineficiencia técnica y los contrastes existentes hasta el momento se limitaban a evaluar la presencia de ineficiencia en el sector en vez de efectuarlo en cada una de las empresas.

La aplicación de este contraste a los modelos paramétricos de datos de corte transversal es, como ya hemos indicado, una importante mejora en el análisis de la eficiencia técnica. Sin embargo, una ventaja adicional es que los supuestos funcionales del método paramétrico se pueden evitar mediante una nueva adaptación del contraste a modelos no paramétricos. En las secciones siguientes se adapta el contraste a un modelo de frontera de modo que se pueda evaluar la ineficiencia técnica con las técnicas paramétricas desarrolladas por Zheng (1998) y se formula la nueva propuesta de contraste con la que es posible, adaptar la evaluación de la ineficiencia empresa a empresa, a un modelo no paramétrico en el que se aplica el estimador desarrollado por Hall y Simar (2000)

### 3.4 Contraste de Eficiencia Técnica basado en Simetría Condicional

Sea un modelo de frontera como el definido al principio de este capítulo en donde formulábamos la tecnología con (3.2.1). El término aleatorio es caracterizado del mismo modo que en (3.2.2), siendo el ruido una variable aleatoria simétrica y la ineficiencia una variable aleatoria asimétrica. Aunque no imponemos supuestos funcionales a los componentes del término aleatorio excepto su forma simétrica o asimétrica, sí que incluimos una hipótesis adicional con respecto a la ineficiencia la cual suponemos dependiente de los inputs.

Sea  $F(\epsilon, x)$  la función de probabilidad conjunta de  $\{(\epsilon_1, X_1), (\epsilon_2, X_2), \dots, (\epsilon_N, X_N)\}$ , siendo éste un vector aleatorio que toma valores en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ , está definido en el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y se ha generado mediante la función de distribución  $F(\epsilon, x)$ .

Una vez caracterizado el modelo, efectuamos el análisis de simetría condicional mediante la relación de simetría expuesta en (3.3.9) teniendo en cuenta que dado que la ineficiencia está condicionada a los regresores, también lo estará  $\epsilon$ . Definimos, entonces,  $F(\epsilon|x)$  como la función de distribución del vector  $\epsilon$  condicionado a  $X$ , siendo, el objetivo del contraste, analizar el caso en el que la función de distribución condicionada  $F(t|x)$ , formulada como una función de  $t$ , sea simétrica con respecto a un centro común para, casi, cada  $x$ . Se puede normalizar a la distribución para que el centro de simetría sea cero y, aplicandolo a nuestro problema de eficiencia, evaluar con la siguiente hipótesis nula, que la distribución condicionada del término aleatorio del modelo sea simétrica,

$$H_o : \Pr [F(\epsilon_j|x_j) = 1 - F(-\epsilon_j|x_j)] = \mathbf{1}, \quad (3.4.1)$$

La hipótesis alternativa, presenta la importante ventaja de que incluye todas las posibles formas de distribuciones condicionalmente asimétricas, es decir, bajo asimetría condicional se cumple que,

$$H_1 : \Pr [F(\epsilon_j|x_j) = 1 - F(-\epsilon_j|x_j)] < \mathbf{1}. \quad (3.4.2)$$

Con la intención de calcular el estadístico que le sirva para evaluar esas dos hipótesis, Zheng reescribe la hipótesis nula para cada  $t \in \mathbb{R}$  de la siguiente manera,

$$H_o : \Pr [E[w_j(t)|x_j] = 1 - F(t|x_j) - F(-t|x_j) = 0] = \mathbf{1}, \quad (3.4.3)$$

donde, si representamos con  $I(\cdot)$  a la función indicador (la cual es igual a uno si ocurre el suceso que se formula dentro del paréntesis y cero en el caso contrario), podemos definir  $w_j(t)$  como,

$$w_j(t) \equiv I(\epsilon_j \geq t) - I(\epsilon_j \leq -t). \quad (3.4.4)$$

Tomando esperanzas matemáticas condicionadas en la equivalencia (3.4.4) obtenemos que,

$$E[w_j(t)|x_j] = 1 - F(t|x_j) - F(-t|x_j), \quad (3.4.5)$$

y por tanto, la condición de simetría condicional sólo se cumplirá si, y solo si:

$$E[w_j(t)|x_j] = 0, \quad (3.4.6)$$

se cumple para todo  $t$  con probabilidad uno, qué es precisamente la hipótesis nula reescrita en (3.4.3).

Basándose en que la relación (3.4.6) se cumple bajo la hipótesis nula, Zheng (1998) construye el siguiente estadístico,

$$\begin{aligned} J &\equiv \int E\{w_j(t) \cdot E[w_j(t)|x_j] \cdot p(x_j)\}dF_1(t) \\ &= \int E\{[1 - F(t|x_j) - F(-t|x_j)]^2 p(x_j)\}dF_1(t) \geq 0, \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

donde  $F_1(t)$  es la función de distribución marginal de  $\epsilon_j$  y  $p(x)$  la función de densidad de  $X$ . Este estadístico se convierte en cero cuando uno de los componentes de la integral de (3.4.7) es cero. En el caso en el que la empresa  $j$  no presente ineficiencia técnica (hipótesis nula), la distribución de  $\epsilon_j$  condicionada a  $x_j$  será simétrica cumpliéndose (3.4.6) y convirtiéndose en cero al estadístico  $J$ . Bajo la alternativa, sin embargo,  $E[w_j(t)|x_j] \neq 0$ , su valor en (3.4.7) está elevado al cuadrado por lo que siempre será positivo, al igual que el resto de componentes de  $J$  y por tanto el estadístico será mayor que cero.

La determinación del estadístico  $J$  requiere una regresión previa del modelo ya que la estimación de los valores muestrales de algunos de los componentes formulados

en (3.4.7) es imposible si no se conoce el valor del residuo. Una posible forma de resolver esta regresión es caracterizar el modelo de frontera definido en la relación (3.2.1), mediante una función de producción paramétrica. La estimación del residuo, en este caso, se obtiene, siguiendo el caso general propuesto por Zheng (1998), por mínimos cuadrados ordinarios. El contraste, entonces, se considera adaptado a un modelo de frontera paramétrico.

Recientemente Hall y Simar (2000) han desarrollado un estimador de eficiencia no paramétrico que se utiliza indistintamente en modelos de frontera paramétricos y en los no paramétricos. El contraste de Zheng puede ser reformulado en un modelo no paramétrico de frontera si en los residuos se obtienen mediante el estimador de Hall y Simar. La flexibilidad que incorpora la formulación no paramétrica de la función de producción es una ventaja importante sobre el diseño del contraste desarrollado por Zheng y puesto que la adaptación del contraste al modelo no paramétrico no había sido formulada hasta el momento, lo presentamos como una nueva posibilidad de contrastar, consistentemente, la eficiencia técnica. En ambos modelos los contrastes de eficiencia técnica, empresa a empresa, no eran posibles y este contraste supone, por tanto, un avance importante en el análisis de la eficiencia técnica.

### **3.4.1 Estimación del Residuo en el Modelo Paramétrico**

La caracterización de un modelo de producción mediante una función paramétrica consiste en suponer conocida la relación con la que se transforman los inputs en los outputs, siendo esta función, la que permite determinar la máxima producción que es posible obtener dados unos inputs fijos. En el análisis de la eficiencia técnica, la única

información de la que se dispone es una muestra del sector compuesta por cantidades y precios de inputs y de outputs. El investigador tiene que suponer cual es la forma funcional de la función de producción siendo ésta normalmente caracterizada mediante funciones Cobb-Douglas o funciones Trans-Log (Kumbhakar y Lovell, 2000). En el caso de una función Cobb-Douglas en la que se produce un output con dos inputs, la fórmula general se expresa con:  $y_j = \beta_0 x_{1j}^{\beta_1} x_{2j}^{\beta_2}$ , donde  $\beta_0$  es el término independiente que recoge el efecto de las variables que no se han incluido en el modelo, y las variables  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , representan las elasticidades parciales del output con respecto al input correspondiente si se mantiene constante el otro input.

Con el objeto de facilitar el proceso de estimación, las funciones que como la Cobb-Douglas no son lineales en los parámetros, se linearizan mediante la función logaritmo, convirtiéndose el modelo en,  $\ln(y_j) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \ln(x_{1j}) + \beta_2 \ln(x_{2j})$ , y aplicándose, entonces, las técnicas usuales de regresión lineal se estiman esos parámetros desconocidos,  $\ln(\hat{\beta}_0)$ ,  $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\beta}_2$ , indicando, estos valores, las características particulares de la función Cobb-Douglas que representa a la función de producción correspondiente a ese sector en ese periodo de tiempo.

El residuo de la estimación,  $\hat{\epsilon}_j$ , se calcula mediante la diferencia,  $\hat{\epsilon}_j = y_j - \hat{y}_j$ , siendo  $\hat{y}_j = \hat{\beta}_0 \hat{x}_{1j}^{\hat{\beta}_1} \hat{x}_{2j}^{\hat{\beta}_2}$  la producción potencial del sector e  $y_j$  la producción que nos proporciona la muestra.

La caracterización de la función de producción definida en (3.2.1) como una función paramétrica, la podemos expresar con  $g(x_j, \beta)$ , donde  $\beta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$  es precisamente el vector de parámetros a estimar. El estadístico,  $J$ , se calcula bajo la hipótesis de eficiencia técnica y por tanto el modelo con el que estimamos el residuo

puede formularse con la siguiente relación,

$$y_j = g(x_j, \beta) + \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.4.8)$$

donde  $\epsilon_j = v_j$ .

Con el objeto de garantizar las propiedades asintóticas del contraste, Zheng formula el modelo estadístico que debe de cumplir la función de producción definida en (3.4.8) con los siguientes supuestos,

(Z1)  $\{X_j, Y_j\}_{j=1}^N$  es una muestra aleatoria generada por la función de probabilidad conjunta  $Z(x, y)$  siendo  $\epsilon_j(\beta) \equiv z(y_j, x_j, \beta)$ , donde  $z(x, y)$  es la función de densidad conjunta.

(Z2)  $\epsilon_j(\beta)$ , es dos veces diferenciable con respecto a  $\beta$  de modo que<sup>1</sup>,

$$\sup_{\beta \in \Theta} \left\| \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \beta} \right\|^2 \leq b(x_j, y_j), \quad \sup_{\beta \in \Theta} \left\| \frac{\partial^2 \epsilon_j}{\partial \beta \partial \beta'} \right\| \leq b(x_j, y_j), \quad (3.4.9)$$

donde  $E[b(x_j, y_j)] < \infty$ . De modo que  $F(\epsilon_j|x_j, \beta)$  y  $F_1(\epsilon_j|\beta)$  tienen derivadas de primer y segundo orden uniformemente acotadas con respecto a  $\epsilon$  y  $\beta$ .

(Z3) La función de densidad  $p(x)$  y su derivada primera están uniformemente acotadas.

(Z4) Existe un estimador  $\hat{\beta}$  de  $\beta$  que cumple que  $\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) = O_p(1)$ .

Bajo la hipótesis nula en la cual no existe ineficiencia, la regresión efectuada por mínimos cuadrados ordinarios proporciona estimadores consistentes (supuesto Z4) de

---

<sup>1</sup> $\|A\|$  es la norma euclidiana de una matriz  $A$

los parámetros,  $\widehat{\beta}$ , de forma que es posible calcular los residuos mínimo cuadráticos necesarios para calcular el estadístico  $J$  con la siguiente relación,

$$\epsilon_j(\widehat{\beta}) = y_j - g(x_j, \widehat{\beta}), \quad (3.4.10)$$

siendo  $\widehat{\beta}$  el estimador del verdadero valor de  $\beta$ ,  $g(x_j, \widehat{\beta})$  el output estimado e  $y_j$  el output muestral.

### 3.4.2 Determinación del Estadístico en el Modelo Paramétrico

La determinación del estadístico  $J$  formulado en la ecuación (3.4.7) se efectúa bajo el supuesto de que los valores muestrales son una buena representación de los poblacionales y aplicando este principio de analogía, se calculan cada uno de los valores muestrales análogos a los componentes del estadístico  $J$ .

La distribución marginal de  $\epsilon_j$ , es estimada con la siguiente relación,

$$F_{1N}(t|\widehat{\beta}) = N^{-1} \sum_{j=1}^N I[\epsilon_j(\widehat{\beta}) \leq t], \quad (3.4.11)$$

donde  $\epsilon_j(\widehat{\beta})$  son los residuos estimados por mínimos cuadrados en la relación (3.4.10)

$w_j(t)$  es, por otra parte, calculado con la siguiente expresión,

$$\widehat{w}_j(t) = I[\epsilon_j(\widehat{\beta}) \geq t] - I[\epsilon_j(\widehat{\beta}) \leq -t]. \quad (3.4.12)$$

Y el último de los componentes de  $J$  que se requiere determinar es, la esperanza condicionada ponderada por la densidad:  $E[w_j(t)|x_j] \cdot p(x_j)$ , efectuándose su estimación con la siguiente relación:

$$\widehat{E}[w_j(t)|x_j] \cdot \widehat{p}(x_j) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{h^p} K\left(\frac{x_i - x_j}{h}\right) \widehat{w}_j(t), \quad (3.4.13)$$

donde  $h$  es el parámetro de suavizado y  $\widehat{p}(x)$  es el estimador no paramétrico de la densidad de  $x$  calculado con un kernel *leave-one*. Este kernel, ya se ha indicado que se caracteriza, porque no incluye el término  $i = j$ , y su empleo, al igual que ocurría en el contraste de Li (1996), se debe a que si se incorpora este término no es posible diferenciar los resultados bajo las dos hipótesis del contraste.  $K$  debe de ser una función kernel no negativa, acotada, continua y simétrica que cumpla las condiciones habituales de regularidad de los kernels. Es decir,

$$\begin{aligned} \int K(u) \cdot du &= 1 \\ \int \|u\|^2 \cdot K(u) du &< \infty \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Sustituyendo en el estadístico (ecuación 3.4.7) los valores muestrales análogos formulados en las ecuaciones (3.4.11), (3.4.12) y (3.4.13) obtenemos la siguiente expresión,

$$J_{N_1} \equiv \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{h^p} K\left(\frac{x_i - x_j}{h}\right) \int \widehat{w}_i(t) \cdot \widehat{w}_j(t) \cdot dF_{1N}(t|\widehat{\beta}). \quad (3.4.15)$$

Zheng (1998) demuestra que, bajo los supuestos del modelo estadístico especificados en (Z1-Z4), la distribución asintótica del estadístico viene determinada por los siguientes teoremas:

**Teorema 1.** *Si se cumple que:  $h \rightarrow 0$  y  $Nh^p \rightarrow \infty$ , bajo la hipótesis nula también se cumple que:*

$$Nh^{p/2}J_{N_1} \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (3.4.16)$$

$$\text{siendo } \sigma^2 = 8 \int K^2(u) \cdot du \cdot \int \int E\{[1 - F(s \vee t|x_j)]^2 \cdot p(x_j)\} dF_1(t) \cdot dF_N(s),$$

$$s \vee t = \max\{s, t\},$$

y la estimación consistente de  $\sigma^2$  se obtiene con,

$$\hat{\sigma}_1^2 \equiv \frac{8}{N(N-1)} \sum_i^N \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{h^p} K^2\left(\frac{x_i - x_j}{h}\right) \left[ \int I[\epsilon_i(\hat{\beta}) \geq t] \cdot I[\epsilon_j(\hat{\beta}) \geq t] \cdot dF_{1N}(t|\hat{\beta}) \right]^2.$$

Normalizando (3.4.16), el estadístico final del contraste va a ser:

$$T_{N_1} \equiv \frac{Nh^{p/2}J_{N_1}}{\hat{\sigma}_1} \quad (3.4.17)$$

el cual cumple que, cuando  $N \rightarrow \infty$  y bajo la hipótesis nula:

$$T_{N_1} \rightarrow^d \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.4.18)$$

**Teorema 2** *Si se cumple que  $h \rightarrow 0$  y  $Nh^p \rightarrow \infty$ , bajo la hipótesis alternativa se cumple también que*

$$T_{N_1}/Nh^{p/2} \rightarrow^p \int E\{[1 - F(t|x_j) - F(-t|x_j)]^2 p(x_j)\} \cdot dF_1(t)/\sigma > 0. \quad (3.4.19)$$

De modo que el contraste es consistente y cuando  $N \rightarrow \infty$  se cumple que,

$$T_{N_1} \rightarrow_p \infty. \quad (3.4.20)$$

En la práctica se calcula el estadístico bajo la hipótesis nula y se rechaza esta hipótesis cuando el valor de  $T_{N_1}$  es superior al  $\alpha$ -percentil de la distribución normal estandar.

### 3.4.3 Estimador no Paramétrico de Hall y Simar

El estimador desarrollado por Hall y Simar (2000) se ha formulado pensando en todas aquellas situaciones en las que la variable objeto del análisis no es observable directamente. Las variables observadas, sin embargo, se han formado mediante la suma o convolución de la variable desconocida que se quiere estimar, con otra u otras variables que no son tampoco, observables directamente. La estimación de la variable observada es normalmente la parte más sencilla del análisis siendo la principal dificultad la identificación, en esta estimación, de los efectos producidos por la variable de interés. El análisis de la eficiencia técnica, tanto en el caso paramétrico como en el no paramétrico tradicional, es precisamente un caso típico de este problema de identificación.

Hall y Simar (2000) proponen un escenario general para la formulación de su estimador y posteriormente lo aplican al análisis de eficiencia técnica en ambos modelos: paramétrico y no paramétrico. Seguidamente y por ser más sencilla su exposición, vamos a desarrollar el estimador en el caso paramétrico, y aprovechando los resultados obtenidos, formularemos su aplicación al caso no paramétrico.

### 3.4.3.1. Aplicación del estimador de Hall y Simar a un modelo paramétrico

Sea un modelo como el formulado en (3.2.1), en el que para facilitar la exposición no lo definimos con término independiente<sup>2</sup> y donde  $\{\epsilon_j\}_{j=1}^N$  es el vector aleatorio del modelo compuesto del mismo modo que en (3.2.2) siendo,  $u_j > 0$ , la ineficiencia técnica y  $v_j$  el ruido estocástico y definiendo ambas variables aleatorias como independientes el uno del otro.

La técnica de estimación propuesta por Hall y Simar se fundamenta en que, la función de densidad de la variable de interés, en este caso la eficiencia técnica,  $f_u$ , puede ser definida como una función continua a la izquierda de un punto,  $\theta$ , siendo este punto el límite de la distribución. La función  $f_u$  es definida, entonces, de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} f_u &> 0 \quad \forall u \in (a, \theta), \\ f_u &= 0 \quad \forall u > \theta, \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

siendo, por tanto, positiva a la izquierda de  $\theta$  y cero a su derecha. La densidad del ruido,  $f_v$ , es formulada como una función unimodal cuya moda es cero y su soporte es el intervalo compacto  $[b, c]$ , con  $\theta > a + c$ .

La formulación más estricta del modelo supone incluir el improbable supuesto de que  $f_u$  es una función constante en el intervalo  $(a, \theta)$ . En ese caso, la derivada de la

---

<sup>2</sup>La inclusión del término independiente nos obligaría a centrar en cero la ineficiencia si queremos obtener estimadores consistentes de todos los parámetros (ver pág 17 de Hall y Simar, 2000).

función de densidad<sup>3</sup> del error compuesto,  $f'_\epsilon(\epsilon)$ , va a ser proporcional a  $-f_v(\epsilon - \theta)$  siempre que  $\epsilon > a + c$ .

Analizando los valores de  $\epsilon$  en un entorno de  $\theta$ , podemos definir  $\varpi$  como el punto  $\varpi \in [a + c, \infty]$  donde  $f_\epsilon$  alcanza, en valor absoluto, la máxima pendiente. El doble supuesto de una única moda en la función  $f_v$  y el que  $f_u$  sea constante en un intervalo a la izquierda de  $\theta$ , permite caracterizar a  $\theta$  con el punto  $\varpi$  del siguiente modo,

$$\theta \approx \varpi \equiv \arg \max |f'_\epsilon|, \quad (3.4.22)$$

Simar y Hall (2000) proponen la estimación de  $f_\epsilon$  con técnicas no paramétricas de modo que,

$$\widehat{f}_\epsilon(\epsilon) = \frac{1}{Nh} \sum_{j=1}^N K \left( \frac{\widehat{\epsilon} - \widehat{\epsilon}_j}{h} \right), \quad (3.4.23)$$

donde  $K$  es una función kernel simétrica y compacta,  $h$  es el parámetro de suavizado y  $\widehat{\epsilon}$  es el residuo estimado, por ejemplo, por mínimos cuadrados ordinarios.  $\theta$  puede, entonces, estimarse mediante la siguiente expresión,

$$\widehat{\theta} = \arg \max |\widehat{f}'_\epsilon| \quad (3.4.24)$$

donde la función máximo argumento debe ser calculada en un intervalo del verdadero valor de  $\theta$ .

---

<sup>3</sup>Ver la convolución de distribuciones de dos variables independientes en pag 300-302 de López Cachero (1988)

La estimación de  $\theta$  en el caso, más realista, en el que  $f_u$  no sea constante en  $(a, \theta)$ , sino que tenga un punto de discontinuidad en  $\theta$  y su derivada a la izquierda de ese valor no desaparezca, no es tan sencilla. En este caso  $\varpi$  se convierte en una aproximación de  $\theta$  que será más precisa a medida que disminuya la desviación estandard de  $v$ . La corrección de esta aproximación requiere que se caracterice al modelo con las siguientes condiciones con el fin de obtener unas propiedades asintóticas correctas:

- (S1) Las dos primeras derivadas de  $f_u$  existen y son continuas a la izquierda de  $\theta$ .
- (S2) El límite de la derivada por la izquierda de la eficiencia es positivo:  $f_u(\theta-) > 0$ .
- (S3) La densidad de la perturbación estocástica es  $f_v(v) = \sigma^{-1}g(v/\sigma)$ , donde  $g$  es una densidad fija con soporte compacto y con una única moda en cero. (En realidad los resultados que seguidamente vamos a formular son válidos también para una densidad normal que es la que vamos a incorporar en el contraste).  $\sigma$  es la desviación estandard que debe de converger a cero en el modelo asintótico.
- (S4)  $g$  tiene dos derivadas continuas en un entorno de cero.
- (S5) La derivada segunda de  $g$  es distinta de cero:  $g''(0) \neq 0$ .

Bajo las condiciones (S1-S5)  $\varpi$  puede ser corregido siguiendo el procedimiento que se formula seguidamente:

Aproximando la función de densidad de la ineficiencia,  $f_u$ , mediante un polinomio en el intervalo  $(0, \epsilon)$  tenemos que,

$$f_u(\theta - u) = A_0 + A_1u + A_2u^2, \quad (3.4.25)$$

siendo  $A_0 > 0$  y  $-\infty < A_1 < \infty$ .

En un valor  $\epsilon$  cercano a  $\theta$ , formulamos, entonces, la derivada de la densidad del término aleatorio,  $f'_\epsilon(\epsilon)$  como,

$$-f'_\epsilon(\epsilon) = A_0f_v(\epsilon - \theta) + A_1\{1 - F_v(\epsilon - \theta)\} + 2A_2 \int_0^\infty 1 - F_v(x - \theta + t)dt, \quad (3.4.26)$$

donde  $F_v$  es la función de distribución de  $f_v$ .

Transformando la parte derecha de la relación (3.4.26) con una expansión de Taylor que sea uniforme en  $|v - \sigma| \leq c\sigma^2$ ,  $\forall c > 0$  fijo, se obtiene que:

$$-f'_\epsilon(\epsilon) = A_0f_v(0) + \frac{1}{2}(\epsilon - \theta)^2f_v''(0) + A_1\frac{1}{2} - (\epsilon - \theta)f_v(0) + A_2\gamma\sigma + o(\sigma), \quad (3.4.27)$$

siendo  $\gamma = \int |t| \cdot g(t) \cdot dt$ . Podemos, por tanto, corregir  $\varpi$  con la siguiente expresión,

$$\varpi = \theta + \frac{A_1f_v(0)}{A_0}f_v''(0) + o(\sigma^2) = \theta + O(\sigma^2). \quad (3.4.28)$$

Teniendo en cuenta que bajo la condición impuesta en (S1) podemos definir los coeficientes del polinomio (3.4.25) con los siguientes valores:  $A_0 = f_u(\theta-)$  y  $A_1 = -f'_u(\theta-)$ , y la definición de  $f_v$  en (S3) en conjunto con (S4) y (S5) permite que se cumpla que  $f_v(0) = \sigma^{-1}g(0)$  y que  $f_v''(0) = -\sigma^{-3}|g''(0)|$ , siendo  $g(0)$  y  $|g''(0)|$

estrictamente positivas. Además, el que  $\epsilon - \theta \asymp \sigma^2$  se cumpla significa que, el término lineal y el cúbico de la expansión de Taylor de (3.4.27) son de tamaño  $\sigma$  mientras que el resto de la expresión es insignificante y podemos transformar, por tanto, (3.4.28) en la siguiente relación:

$$\varpi = \theta + \frac{f'_u(\theta-) - g(0)}{f_u(\theta-) |g''(0)|} \sigma^2 + o(\sigma^2), \quad (3.4.29)$$

pudiendo, por tanto, expresar el tamaño del error cometido en  $\varpi - \theta$  como de orden  $\sigma^2$ , es decir:

$$\theta = \varpi + O(\sigma^2). \quad (3.4.30)$$

Este error puede incluso ser reducido a  $O(\sigma^3)$  si se incrementa la expansión de Taylor con los términos cúbico y cuadrático, en este caso es necesario modificar las condiciones (S1) y (S4), e introducir una nueva condición que denominamos (S6),

(S1) las cinco primeras derivadas de  $f_u$  existen y son continuas a la izquierda de  $\theta$ .

(S4)  $g$  tiene cuatro derivadas continuas en un entorno de cero.

(S6)  $g^i(0) = 0$ ,  $i = 1, 3$ .

Siendo (S2), (S3) y (S5) las mismas condiciones que se expusieron anteriormente.

Bajo las nuevas condiciones expresadas en (S1-S6) Hall y Simar (2000) prueban que,

$$-f'_\epsilon(\varpi + t) = C_0 - C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4 + O(\sigma^4), \quad (3.4.31)$$

donde

$$\begin{aligned}
C_0 &= f_u(\theta-)f_v(0) + O(1), \\
C_2 &= \frac{1}{2}f_u(\theta-)|f_v''(0)| + O(\sigma^{-2}), \\
C_3 &= -\frac{1}{6}f_u'(\theta-)|f_v''(0)| \left(1 - \frac{f_v(0)f_v^4(0)}{f_v''(0)^2}\right) + O(\sigma^{-2}), \\
C_4 &= \frac{1}{24}f_u(\theta-)f_v^4(0) + O(\sigma^{-4}).
\end{aligned} \tag{3.4.32}$$

y por tanto se cumple que,

$$\varpi = \theta + \frac{f_u'(\theta-) - g(0)}{f_u(\theta-)|g''(0)|} \sigma^2 + O(\sigma^3). \tag{3.4.33}$$

Relacionando los coeficientes del polinomio definidos como  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  con la expresión (3.4.33), se obtiene que,

$$\frac{3C_0C_3}{2(C_2^2 - 6C_0C_4)} = (\theta - \varpi)\{1 + O(\sigma)\} \tag{3.4.34}$$

y corrigiendo con la relación (3.4.34) la aproximación de  $\varpi$  formulada en la ecuación (3.4.30) obtenemos la siguiente expresión con la cual puede ser corregido  $\varpi$  que era donde se maximizaba  $f_\epsilon$ ,

$$\theta = \varpi + \frac{3C_0C_3}{2(C_2^2 - 6C_0C_4)} + O(\sigma^3). \tag{3.4.35}$$

El procedimiento de estimación de  $\theta$  en el caso en el que se deba de corregir  $\varpi$  con la expresión formulada en (3.4.34) es el siguiente,

- (1) Tras estimar consistentemente los residuos del modelo paramétrico de frontera se estima no paramétricamente con (3.4.23) la función de densidad del residuo.
- (2) Calcular  $\widehat{\omega}$  con la función máximo argumento como se hizo en la relación (3.4.24) siendo este máximo calculado en un intervalo de la cola derecha de la distribución de  $\epsilon$ .
- (3) En un entorno de  $\widehat{\omega}$  estimar las constantes del siguiente polinomio,

$$-\widehat{f}'_{\epsilon}(\widehat{\omega} + t) \approx \widehat{C}_0 - \widehat{C}_2 t^2 + \widehat{C}_3 t^3 + \widehat{C}_4 t^4, \quad (3.4.36)$$

- (4) Sustituir esas constantes y  $\widehat{\omega}$  en la relación (3.4.35) para calcular el estimador de  $\theta$  como,

$$\widehat{\theta} = \widehat{\omega} + \frac{3\widehat{C}_0\widehat{C}_3}{2(\widehat{C}_2^2 - 6\widehat{C}_0\widehat{C}_4)}. \quad (3.4.37)$$

### 3.4.3.2. Aplicación del estimador de Hall y Simar a un modelo no paramétrico

El principal interés del estimador de Hall y Simar, es su aplicación a modelos no paramétricos. En este tipo de modelos el problema de la identificación del ruido y la ineficiencia es más complejo de modelizar puesto que la estimación tradicional es inconsistente y el DEA no puede aplicarse a datos con ruido. La adaptación del estimador de Hall y Simar a un modelo no paramétrico requiere caracterizarlo de una forma diferente a la expuesta anteriormente, ya que si utilizamos como variable observada el residuo obtenido con el análisis DEA, no podemos suponer como en el caso paramétrico, que éste ha sido generado mediante la convolución de la ineficiencia técnica y el ruido.

En este caso, la variable de interés, en vez de ser la ineficiencia, es la frontera de producción. Esta frontera no es observable directamente y para su posible estimación sólo se dispone de los outputs y los inputs observados, los cuales están, además, afectados por ruido estocástico. Las empresas pueden producir ineficientemente situándose, en esos casos, su output por debajo del de la frontera.

Si definimos el modelo con un output y un input, la relación existente entre ellos se puede describir como  $y = g(x)$ , donde  $g$  es una función desconocida que representa la función de producción. Según esta relación,  $y$  puede considerarse como el máximo output que se produce para un nivel fijo de input:  $x$ .

La principal diferencia con respecto al caso paramétrico es que ahora, como variable observada, no disponemos de un residuo estimado sino que sólo contamos con los datos observados: el input y el output, los cuales son bivariantes en vez de univariantes. Es decir, en términos de la formulación previa,  $\epsilon = (x, y)$ . Al ser, inputs y outputs, variables completamente diferentes en su composición, Hall y Simar (2000) proponen, condicionar con respecto a cada input, para así convertir en univariantes los datos bivariantes y aplicar el estimador desarrollado anteriormente.

El procedimiento a seguir consiste en estimar la frontera de la producción sólo con el output de la muestra, pero no con el conjunto de todos ellos, sino sólo con un subconjunto del total. Para cada empresa se van a seleccionar como las producciones más probables, los outputs de las empresas cuyos inputs son parecidos al de la empresa analizada. Es decir, se seleccionan los outputs correspondientes a todos aquellos inputs que se encuentren localizados en un entorno del input con respecto al que se condiciona. Matemáticamente, para cada input de la muestra,  $x_j$ , seleccionamos el

siguiente conjunto de outputs con los que se estima la función de producción,

$$\tilde{\epsilon}_j = \{y_i : x_j - b \leq x_i \leq x_j + b\}_{i=1}^N \quad (3.4.38)$$

donde  $b$  es positivo y es equivalente al parámetro de suavizado utilizado en la estimación no paramétrica de la función de densidad de la ecuación (3.4.23).

Una vez obtenidos el conjunto de outputs formulado en (3.4.38), se calcula la función de densidad con el estimador no paramétrico formulado en (3.4.23). Se repite este método para cada una de las empresas de la muestra y seguidamente se continúa el procedimiento expuesto en los cuatro pasos anteriores. Es decir, se calcula  $\hat{\omega}$  para cada empresa como el output donde se maximiza la función de densidad y se corrige ese valor caracterizando a la función de densidad en un intervalo de  $\hat{\omega}$  como un polinomio y estimando sus coeficientes para, finalmente, a través de la relación (3.4.37) obtener el máximo output de cada empresa:

$$\hat{y} = \hat{g}(x_j) = \hat{\omega} + \frac{3\hat{C}_0\hat{C}_3}{2(\hat{C}_2^2 - 6\hat{C}_0\hat{C}_4)}. \quad (3.4.39)$$

### 3.4.4 Estimación del Residuo en el Modelo no Paramétrico

El modelo de frontera bajo la hipótesis nula, es decir cuando no existe ineficiencia técnica, se define como,

$$y_j = g(x_j) + \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.4.40)$$

donde  $\epsilon_j = v_j$ .

Los supuestos que debe de cumplir el modelo formulado en (3.4.40) para garantizar las propiedades asintóticas del contraste son los siguientes.

(ZZ1)  $\{X_j, Y_j\}_{j=1}^N$  es una muestra aleatoria generada por la función de probabilidad conjunta  $Z(x, y)$ .

(ZZ2)  $\epsilon_j$ , es dos veces diferenciable con respecto a  $g(x)$  de modo que,

$$\sup_{g(x)} \left\| \frac{\partial \epsilon_j}{\partial g(x)} \right\|^2 \leq c(x_j, y_j), \quad \sup_{g(x)} \left\| \frac{\partial^2 \epsilon_j}{\partial g(x) \partial g(x)'} \right\| \leq c(x_j, y_j), \quad (3.4.41)$$

donde  $E[c(x_j, y_j)] < \infty$ . De modo que  $F(\epsilon_j|x_j)$  y  $F_1(\epsilon_j)$  tienen derivadas de primer y segundo orden uniformemente acotadas con respecto a  $\epsilon$  y  $g(x)$ .

(ZZ3) La función de densidad  $p(x)$  y su derivada primera están uniformemente acotadas.

(ZZ4) Bajo las condiciones (S1-S6) expuestas en el apartado anterior, existe un estimador de  $g(x)$  que denominamos  $\widehat{g}(x)$ , el cual cumple que:

$$\widehat{g}(x) = g(x) + o_p(\sigma_v^2) \quad \text{uniformemente en } x,$$

siendo  $\sigma$  la varianza de  $\epsilon$  la cual, en el modelo asintótico, debe tender a cero.

Bajo la hipótesis nula, el estimador no paramétrico de Hall y Simar (2000) proporciona estimadores consistentes (supuesto ZZ4) de la producción óptima  $\widehat{y}_j = \widehat{g}(x_j)$  y por tanto, los residuos necesarios para obtener la estimación muestral de cada uno de los componentes del estadístico formulado en (3.4.7) se obtienen con la siguiente diferencia,

$$\widehat{\epsilon}_j = y_j - \widehat{y}_j, \quad (3.4.42)$$

donde  $\widehat{y}_j$  es el output obtenido con el estimador de Hall y Simar e  $y_j$  el output muestral.

### 3.4.5 Determinación del Estadístico en el Modelo no Paramétrico

Al igual que en el caso de de la estimación paramétrica, la determinación del estadístico  $J$  formulado en la ecuación (3.4.7) se efectúa mediante el supuesto de que los valores muestrales son una buena representación de los poblacionales. Una vez obtenidos los residuos del modelo no paramétrico,  $\widehat{\epsilon}_j$ , mediante la relación (3.4.42), calculamos la distribución marginal de  $\epsilon_j$  con la siguiente relación,

$$\widehat{F}_{1N}(t) = N^{-1} \sum_{j=1}^N I[\widehat{\epsilon}_j \leq t], \quad (3.4.43)$$

$w_j(t)$  se estima con,

$$\widehat{w}_j(t) = I[\widehat{\epsilon}_j \geq t] - I[\widehat{\epsilon}_j \leq -t]. \quad (3.4.44)$$

Y la esperanza condicionada ponderada por la densidad:  $E[w_j(t)|x_j] \cdot p(x_j)$ , se estima con,

$$\widehat{E}[w_j(t)|x_j] \cdot \widehat{p}(x_j) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{h^p} K\left(\frac{x_i - x_j}{h}\right) \widehat{w}_j(t), \quad (3.4.45)$$

donde  $h$  es el parámetro de suavizado y  $\widehat{p}(x)$  es el estimador no paramétrico de la densidad de  $x$  que se obtiene, por las mismas razones que en el caso paramétrico, con un *leave-one* kernel.  $K$  también es una función kernel no negativa, acotada, continua y simétrica que cumple las siguientes condiciones habituales de regularidad,

$$\begin{aligned} \int K(u) \cdot du &= 1 \\ \int \|u\|^2 \cdot K(u) du &< \infty \end{aligned} \quad (3.4.46)$$

Sustituyendo en el estadístico (ecuación 3.4.7) los valores muestrales análogos formulados en las ecuaciones (3.4.43), (3.4.44) y (3.4.45) obtenemos la siguiente expresión,

$$J_{N_2} \equiv \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{h^p} K\left(\frac{x_i - x_j}{h}\right) \int \widehat{w}_i(t) \cdot \widehat{w}_j(t) \cdot dF_{1N}(t). \quad (3.4.47)$$

Bajo todas las condiciones implícitas del supuesto ZZ4 y suponiendo además (ZZ1-ZZ3), se prueba, mediante la aplicación de los lemas 1 y 2 formulados, para el modelo paramétrico, en la pág. 146 de Zheng (1999), que la distribución asintótica del estadístico viene determinada por los siguientes teoremas:

**Teorema 3.** *Si se cumple que:  $h \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,  $Nh^p \rightarrow \infty$ , bajo la hipótesis nula también se cumple que:*

$$Nh^{p/2} J_{N_2} \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (3.4.48)$$

siendo  $\sigma^2 = 8 \int K^2(u) \cdot du \cdot \int \int E\{[1 - F(s \vee t|x_j)]^2 \cdot p(x_j)\} dF_1(t) \cdot dF_N(s)$ ,

$$s \vee t = \max\{s, t\},$$

y la estimación consistente de  $\sigma^2$  se obtiene con,

$$\widehat{\sigma}_2^2 \equiv \frac{8}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{h^p} K^2 \left( \frac{x_i - x_j}{h} \right) \left[ \int I[\widehat{\epsilon}_i \geq t] \cdot I[\widehat{\epsilon}_j \geq t] \cdot dF_{1N}(t) \right]^2.$$

Normalizando (3.4.48), el estadístico final del contraste va a ser:

$$T_{N_2} \equiv \frac{Nh^{p/2} J_{N_2}}{\widehat{\sigma}_2} \quad (3.4.49)$$

el cual, cuando  $N \rightarrow \infty$  y bajo la hipótesis nula cumple que,

$$T_{N_2} \rightarrow^d \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.4.50)$$

**Teorema 4.** *Si se cumple que  $h \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  y  $Nh^p \rightarrow \infty$ , bajo la hipótesis alternativa se cumple también que*

$$T_{N_2}/Nh^{p/2} \rightarrow^p \int E\{[1 - F(t|x_j) - F(-t|x_j)]^2 p(x_j)\} \cdot dF_1(t)/\sigma > 0. \quad (3.4.51)$$

De modo que el contraste es consistente y se cumple que cuando  $N \rightarrow \infty$ ,

$$T_{N_2} \rightarrow_p \infty. \quad (3.4.52)$$

En la práctica y al igual que en el modelo paramétrico, se calcula el estadístico bajo la hipótesis nula y se rechaza esta hipótesis cuando el valor de  $T_{N_2}$  es superior al  $\alpha$ -percentil de la distribución normal estandar.

### 3.5 Simulaciones de Monte Carlo

El contraste de simetría condicional, formulado en las secciones anteriores, fundamenta los resultados de sus teoremas en las propiedades asintóticas de la muestra. En la práctica, sin embargo, las muestras con las que se trabaja son finitas y las propiedades del contraste son desconocidas. La única vía con la que es posible obtener alguna indicación del comportamiento del contraste, es la simulación, mediante procesos de Monte Carlo, de muestras de distintos tamaños muestrales. En este caso, al ser conocido el modelo con el que se han generado los datos, sí que es posible observar cómo se comportan la potencia y el tamaño del contraste y derivar, de este comportamiento, conclusiones sobre las posibles propiedades del contraste en muestras finitas.

Seguidamente presentamos la forma aleatoria en la que se han generado los datos, necesarios, para analizar el comportamiento de la potencia y del tamaño del contraste, tanto, en el modelo paramétrico como en el no paramétrico.

La potencia es el número de veces que se rechaza acertadamente la hipótesis nula, por tanto y con respecto al contraste formulado en en la relación (3.4.1), es el número de veces que rechazamos la simetría cuando la distribución del residuo es asimétrica. Es deseable, entonces, que los resultados de las simulaciones muestren una potencia elevada ya que ésta representa la capacidad que tiene el contraste para reconocer un residuo asimétrico e identificarlo con la ineficiencia de la empresa que se está analizando. Incluyéndo simultáneamente, un término aleatorio simétrico que representa el ruido y un término aleatorio asimétrico que representa la ineficiencia, se han generado datos ineficientes, los cuales, y tras la regresión del modelo, han

proporcionado la distribución asimétrica del residuo que permite evaluar la potencia.

El tamaño del contraste, sin embargo, es el número de veces que se rechaza la hipótesis nula cuando ésta es cierta, es decir, el número de veces que se rechaza la simetría en el residuo cuando éste es simétrico. Es deseable, por tanto, que las simulaciones muestren un tamaño pequeño ya que éste representa la incapacidad del contraste de reconocer la simetría del residuo y, por tanto, de detectar la eficiencia de la unidad analizada. Los datos eficientes que nos proporcionan una distribución simétrica del residuo los hemos generado incorporándoles únicamente el término aleatorio simétrico que representa el ruido.

Dado que el objetivo principal de este capítulo es observar en ambos modelos, paramétrico y no paramétrico, la capacidad que tiene el contraste para detectar la ineficiencia, hemos unificado el procedimiento de generación de los datos para que sea el mismo en ambas estimaciones de la función de producción. El trabajo de Hall y Simar (2000) es la única aplicación existente de su estimador y con el objeto de tener una referencia de las estimaciones del residuo a las que posteriormente les aplicaremos el contraste, hemos seguido el modelo de simulación formulado en su trabajo modificando, únicamente, el supuesto de que la ineficiencia está condicionada a los inputs.

La generación de datos, entonces, se ha efectuado siguiendo el siguiente proceso,

- $X \in \mathbb{R}^1$  se obtiene, aleatoriamente, de una distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ :  $X \sim U[0, 1]$ .
- La función de producción se formula con la siguiente función:  $g(x) = x^{1/2}$ .

- La ineficiencia,  $U$ , la introducimos aleatoriamente con la siguiente exponencial:  
 $U \sim \exp(3)$ .
- El ruido,  $V$ , se modeliza aleatoriamente con una normal:  $V \sim N(0, 0.06^2)$ .
- Por tanto, los datos ineficientes se generan con,

$$y = x^{1/2} \exp^{-ux} \exp^v, \quad (3.5.1)$$

siendo  $Y \in \mathbb{R}^1$ . Se observa, en esta generación de datos ineficientes, que la simetría del residuo la condicionamos a los inputs multiplicando la ineficiencia por el input correspondiente.

- Y alternativamente se obtienen datos eficientes con la siguiente relación,

$$y = x^{1/2} \exp^v, \quad (3.5.2)$$

con  $Y \in \mathbb{R}^1$ .

En el Gráfico (3.4.1.a) mostramos el aspecto de una muestra de 200 datos eficientes que ha sido generada con el procedimiento expuesto anteriormente. En este gráfico se observa cómo los datos se distribuyen simétricamente con respecto a la función de producción, la cual viene representada por la curva esbozada en la nube de puntos. Sin embargo, en el Gráfico (3.4.1.b) se expone el aspecto de una muestra del mismo tamaño, que ha sido generada mediante el procedimiento anterior pero con ineficiencia. A pesar de que esta ineficiencia está presente en todas las unidades productivas, el ruido provoca que algunas empresas tengan un output superior al óptimo permitiendo, de este modo, que algunos puntos se sitúen por encima de la frontera. Se advierte que la distribución de los datos ineficientes es notoriamente asimétrica ya que la mayoría

GRAFICO 3.4.2.b DATOS INEFICIENTES

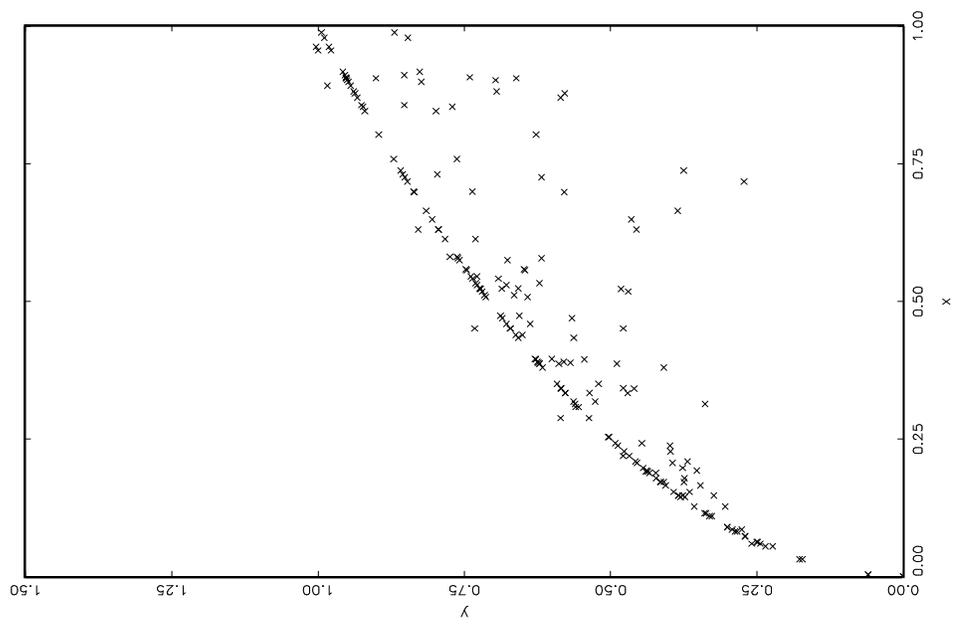
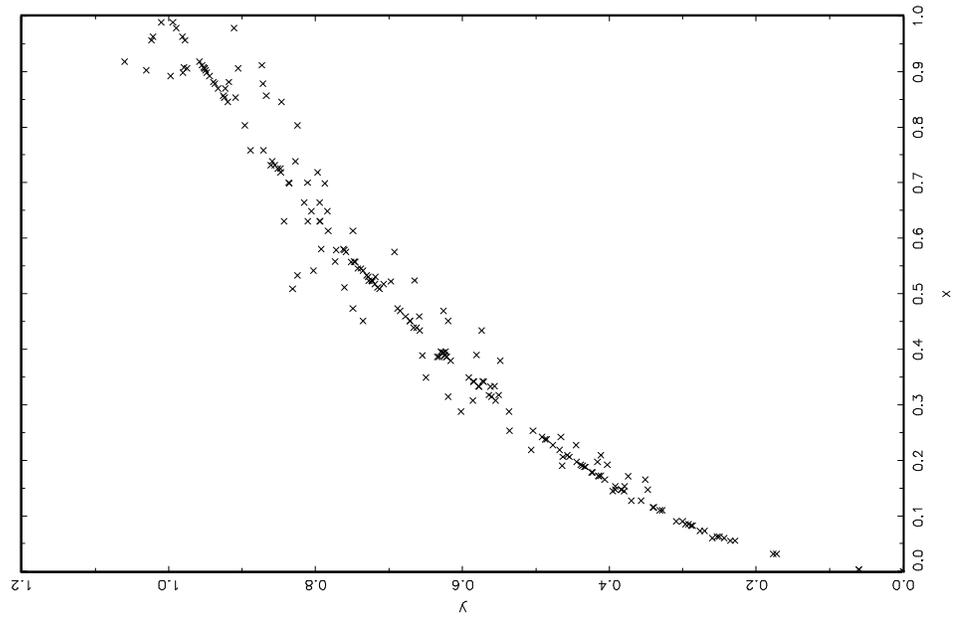


GRAFICO 3.4.1a DATOS EFICIENTES



de las unidades productivas se localizan por debajo de la función de producción, siendo esta asimetría acentuada por la condición, necesaria para la consistencia del estimador de Hall y Simar, de que la muestra se genere con un ruido cuya varianza sea muy pequeña.

En el caso paramétrico, además de analizar el comportamiento del contraste con el procedimiento de generación de datos que se ha expuesto anteriormente, hemos modificado la varianza de la distribución con la que se incorpora el ruido para, de este modo, observar la sensibilidad del contraste con respecto a mayores niveles de ruido en el modelo. Ese mismo análisis lo hemos efectuado con la ineficiencia e incluso hemos estudiado la sensibilidad que presenta el contraste a la generación de esta variable con funciones asimétricas diferentes a la exponencial. Los resultados de estas variaciones en el procedimiento generador de los datos no han sido incluidos en la tesis por el motivo anteriormente indicado de unificar la generación de los datos del modelo paramétrico con el no paramétrico, y seguir, en este caso el modelo formulado en Hall y Simar (2000).

A continuación presentamos una explicación detallada del proceso seguido en las simulaciones y los resultados obtenidos en cada uno de los modelos de estimación de los residuos.

### **3.5.1 Modelo Paramétrico**

En este modelo, tal y como expusimos en las secciones anteriores, se evalúa la simetría condicional del residuo mediante el estadístico  $J_{N_1}$  (ecuación 3.4.15). Especificando

paramétricamente la función de producción y utilizando regresión lineal se determinan los residuos cuya distribución muestral así como los demás componentes de  $J_{N_1}$  son calculados con estimación no paramétrica. La fiabilidad de esta estimación, como ya se ha indicado en el capítulo anterior, no depende tanto de la elección del kernel como del parámetro de suavizado, de modo que la estimación no paramétrica de los componentes de  $J_{N_1}$  se ha efectuado con el siguiente kernel gaussiano habitual en este tipo de contrastes (Zheng, 1998; Li, 1996),

$$K(u) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-u^2/2). \quad (3.5.3)$$

En lo que se refiere al parámetro de suavizado, ya se indicó en el capítulo anterior que no hay un sólo método de selección del  $h$  óptimo y que es, por tanto, difícil saber cual de los criterios señalados es el más adecuado en cada caso particular. En el análisis del comportamiento del contraste y al igual que en el análisis bootstrap, hemos determinado un conjunto de parámetros de suavizado bastante amplio,  $h1$ , y utilizando siempre la misma muestra hemos estimado, con cada uno de esos parámetros, el estadístico  $J_{N_1}$ .

$$h1 = \{0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 20, 50\} \quad (3.5.4)$$

En el Cuadro A3-1 del anexo se exponen los resultados del contraste con cada uno de los parámetros de suavizado formulados en (3.5.4). Aunque en un caso general en vez de en un ámbito de frontera, Zheng (1998), utilizando distintas distribuciones simétricas y asimétricas del residuo, ya analizó los porcentajes de potencia y tamaño

para el total de la muestra. Los resultados presentados en el Cuadro A3-I, sin embargo, no son los que se formulan habitualmente en este tipo de análisis ya que únicamente presentamos los porcentajes de potencia y de tamaño en tres unidades productivas de la muestra, siendo éstas representativas de tres tramos distintos de la función de producción. La elección de este tipo de análisis, además de reducir la carga computacional del programa, nos permite comparar el contraste en los dos modelos de frontera de una forma que nos ha parecido más descriptiva e interesante que el análisis con el total de la muestra. Es por ello que en este cuadro se exponen los resultados de las 2000 simulaciones que se han efectuado con cada una de las muestras de tamaño 50, 100, 200 y 500 datos, pero analizando únicamente la potencia y el tamaño del contraste en las unidades productivas que se corresponden con los tres primeros cuartiles del input, es decir,  $x=0.25$ ,  $x=0.50$  y  $x=0.75$ .

El cuadro A3-I se divide, por tanto, en 12 subcuadros de modo que, horizontalmente se presentan los resultados de potencia y tamaño en los tres cuartiles seleccionados, mientras que verticalmente y hacia abajo se incrementa el tamaño de la muestra a la cual pertenecen esos cuartiles. Cada subcuadro tiene tres columnas siendo, la primera de ellas, el valor de la potencia, la cual representa el porcentaje de las 2000 simulaciones generadas con ineficiencia en las que, para cada uno de estos inputs, se ha reconocido la asimetría del residuo. La segunda columna de cada subcuadro muestra el tamaño del contraste, que es, el porcentaje de las 2000 simulaciones generadas sin ineficiencia en las que, para cada uno de estos inputs, no se ha reconocido la simetría del residuo. La tercera columna de cada subcuadro muestra el parámetro de suavizado correspondiente al conjunto  $h1$  con el que se ha efectuado la estimación no paramétrica de cada uno de los componentes del estadístico  $J_{N_1}$ .

Generalmente el criterio que se sigue en los contrastes de hipótesis (ver Greene, 1997, págs 155-156) es marcar un nivel o error del tipo I que se corresponda con un 1%, un 5% ó un 10%, procurando al mismo tiempo, que el error tipo II sea lo menor posible, o lo que es lo mismo, que la potencia sea la máxima posible. A lo largo de este trabajo, el nivel de significación que nos ha parecido adecuado es de un 5% y por tanto, vamos a rechazar la hipótesis nula del contraste si el valor absoluto del estadístico supera 1.96 que es el valor que se corresponde al intervalo de confianza del 95% de una normal estandar. Efectuando este análisis con todos los parámetros de suavizado del conjunto  $h1$ , y calculando el tamaño y la potencia correspondiente, el  $h$  con el que se consigue que el tamaño se acerque al 5% es el que vamos a denominar  $h$  óptimo ya que permite un porcentaje similar al marcado para el nivel de significación.

Observando en conjunto los resultados del Cuadro A3-1 se advierte que una deseada disminución en el tamaño del contraste conlleva una no deseada reducción de la potencia. En negrilla se muestran no sólo el  $h$  óptimo sino también la potencia y el tamaño que se han obtenido con ese parámetro, analizando estos valores, notamos que, fijando el nivel o tamaño aproximadamente en un 5%, según se incrementa el número de datos de la muestra se incrementa también la potencia. Por ejemplo, en el caso de  $x = 0.5$ , se pasa de un valor de la potencia del 12.85% cuando la muestra era de 50 datos a una potencia del 71.3% cuando la muestra es de 500 datos. Esta evolución de la potencia es la misma en las tres unidades productivas analizadas y corrobora la teoría asintótica formulada en los teoremas 1 y 2, los cuales requerían que el tamaño muestral fuera infinito. Las propiedades asintóticas del contraste posibilitan, por tanto, que a medida que la muestra se incrementa los resultados que del contraste sean más precisos.

El comportamiento de ambos porcentajes no es el mismo en cada unidad productiva siendo más acentuada esta diferencia en los valores de la potencia de cada cuartil. En el caso de  $x = 0.25$  se obtiene un porcentaje de potencia de una cierta entidad sólo si se dispone de una muestra de 500 datos, y aun así, su valor sólo supera el 50%, sin embargo, porcentajes similares se consiguen para  $x = 0.5$  con sólo 100 datos. En el caso de que se compare el cuartil superior con los otros cuartiles, la potencia alcanza valores superiores al 70% con muestras de 100 datos pero debido a que se parte de porcentajes de potencia más elevados, según se amplía el tamaño muestral, el incremento de la potencia se produce en una proporción menor a la que lo hace en los cuartiles inferiores. En general y para cualquier tamaño muestral de los analizadas, si se fija el nivel del contraste, se producen porcentajes de potencia mayores según la empresa analizada se sitúa más a la derecha de la función de producción. Como hemos visto y de acuerdo con la teoría asintótica, la potencia siempre se incrementa con el tamaño muestral, pero para conseguir niveles de potencia similares en los tres cuartiles se requiere superar el tamaño muestral de 500 datos.

Observando en conjunto todos los valores de  $h$  que proporcionan un tamaño cercano al 5% se advierte que el parámetro de suavizado óptimo se encuentra en el intervalo  $[0.9, 2]$ . Para afinar un poco más la precisión de los resultados hemos realizado una segunda tanda de simulaciones (empleando la misma muestra de inputs que se utilizó en los resultados anteriores) para el siguiente conjunto de valores de  $h$ ,

$$h_2 = \{0.9, 1.25, 1.75, 2, 2.25, 2.75, 3, 3.25, 3.5, 4\} \quad (3.5.5)$$

Los resultados obtenidos son muy parecidos a los presentados en el Cuadro A3-1 por lo que en vez de presentar la potencia y el tamaño obtenidos con cada uno de los

parámetros de suavizado formulados en  $h_2$ , mostramos, en el Cuadro A3-2 del anexo, únicamente los valores de la potencia en el caso del  $h$  que proporciona un tamaño más cercano al 5%.

En el Cuadro A3-2 presentamos, además, los resultados obtenidos si en los mismos datos incluimos, en media, mayores y menores grados de ineficiencia. Utilizando las distribuciones  $exp(1.5)$  y  $exp(6)$  además de la ya empleada  $exp(3)$ , mostramos en el cuadro, con la misma estructura que el presentado anteriormente, los resultados para cada uno de los tres tipos de las ineficiencias introducidas. Analizando los porcentajes de potencia, se observa, que el grado de ineficiencia de la muestra no afecta a los resultados del contraste ya que los resultados de la potencia son similares en cada muestra independientemente de la ineficiencia que hayamos aplicado a los datos.

Los resultados del contraste son muy sensibles a la muestra que se analiza siendo diferentes para cada muestra generada, pero a pesar de esta restricción, se pueden extraer algunas conclusiones generales de los cuadros incluidos en el anexo.

Las propiedades asintóticas del contraste se cumplen puesto que, para el mismo nivel de significación, en todos los casos a medida que se incrementa el tamaño muestral el contraste se hace más potente.

En general, la fiabilidad del contraste requiere de una muestra bastante elevada, y esto es especialmente necesario en la zona en la que las empresas producen con una menor cantidad de inputs. Por contra, la fiabilidad del contraste es mejor en la parte de la función de producción en la que el empleo del input es mayor observándose que con muestras de 100 datos ya se obtienen potencias altas.

El contraste tiene tendencia a equivocarse con una mayor facilidad en el caso de empresas ineficientes que utilizan cantidades pequeñas de inputs puesto que éstas, con los mismos niveles de significatividad, presentan potencias más bajas que las empresas que producen con una mayor cantidad de input. Al condicionar la ineficiencia a los inputs estamos presuponiendo que una empresa ineficiente deberá elegir mayores cantidades de inputs para su producción. Lógicamente al contraste le resulta más sencillo identificar a las empresas ineficientes que emplean una mayor cantidad de input mientras que en el caso de las empresas que producen con pocos inputs el contraste es engañado por ese supuesto.

En conclusión, el comportamiento del contraste en muestras grandes es aceptable siendo especialmente buena en empresas cuya producción se efectúa con cantidades elevadas de inputs. El contraste aporta una novedad fundamental en el análisis de la eficiencia y es que permite la evaluación de la eficiencia empresa a empresa. Esta ventaja convierte a este contraste en una herramienta fundamental en el análisis paramétrico si los datos no forman un panel, ya que en este caso las estimaciones de ineficiencia son inconsistentes y sólo era posible evaluar la ineficiencia de todo el sector.

### **3.5.2 Modelo no Paramétrico**

Al igual que en el caso paramétrico, hemos generado los datos con el procedimiento expuesto anteriormente, añadiéndole al input un residuo asimétrico y un residuo simétrico, y con estos datos hemos analizado el comportamiento de la potencia y el tamaño del contraste en el caso de este modelo.

Para disponer de los residuos con los cuales efectuar la evaluación de la ineficiencia, se debe de estimar previamente el modelo no paramétrico mediante el estimador de Hall y Simar (2000). La primera elección en este proceso es la selección tanto del kernel como del parámetro de suavizado de la función de densidad formulada en (3.4.23). En el caso del kernel, ya hemos dicho que éste debe de ser simétrico y compacto, por lo cual se ha elegido el kernel de Epanechnikov (Epanechnikov, 1969) el cual se define del modo siguiente,

$$K(u) = 0.75(1 - u^2)I(|u| \leq 1). \quad (3.5.6)$$

donde al igual que se formuló en (3.4.4),  $I(\cdot)$ , es la función indicador.

La selección del parámetro de suavizado, sin embargo, se realiza, iterativamente, a la vez que se maximiza la función de densidad formulada en (3.4.23).

El procedimiento de estimación, en líneas generales, sigue, empresa a empresa, el siguiente esquema:

- (1) Los datos proporcionados por la muestra,  $(x_j, y_j)$ , son bivariantes y deben de ser transformados en univariantes. El proceso de transformación se realiza seleccionando de la muestra los outputs de las empresas cuyos inputs son semejantes al de la empresa analizada:  $x_j$ . La semejanza es definida con el intervalo formulado en (3.4.38)
- (2) El parámetro de suavizado empleado en la función de densidad (3.4.23) y en la construcción del intervalo de inputs con el el que se seleccionan los outputs del paso (1) es el mismo y se selecciona con un proceso iterativo. Se parte de un valor

grande de  $h$  con el que se efectúa el paso (1) y se calcula, con ese parámetro de suavizado, el argumento que maximiza la función de densidad estimada. Este procedimiento se repite con un valor de  $h$  más pequeño y así sucesivamente hasta que el argumento que maximice la función de densidad disminuya con respecto a los calculados con parámetros de suavizado superiores. De ese modo se obtienen, simultáneamente, el  $h$  óptimo y el output para el que se maximiza la función de densidad:  $\hat{\omega}$ .

- (3) Se estiman los coeficientes  $C_0$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  del polinomio formulado en (3.4.36). La parte izquierda de este polinomio es el valor de la derivada de la función de densidad (3.4.23) evaluada en un entorno del estimador obtenido en el paso (2). Elegimos diez puntos de un intervalo construido del siguiente modo

$$[\hat{\omega} - 0.5 \cdot h, \hat{\omega} + 0.5 \cdot h],$$

siendo  $h$  el valor óptimo del paso (2) y calculamos con esos diez puntos, diez valores de la parte izquierda del polinomio que se formuló en (3.4.36). Estimando por mínimos cuadrados ordinarios obtenemos  $\hat{C}_0$ ,  $\hat{C}_2$ ,  $\hat{C}_3$  y  $\hat{C}_4$ .

- (4) Por último, estimamos el output de esta empresa ( $\hat{y}$ ) sustituyendo  $\hat{C}_0$ ,  $\hat{C}_2$ ,  $\hat{C}_3$  y  $\hat{C}_4$  en la relación (3.4.39).

En el Cuadro 3-I se expone un resumen de los resultados de la estimación de las muestras generadas con ineficiencia. Denominamos sesgo de la estimación a la diferencia entre el output estimado y el de la función de producción, siendo éste último, conocido por ser una simulación. Se muestra, en el cuadro, los valores medios del sesgo

para los mismos cuartiles del modelo anterior y para los distintos tamaños muestrales, siendo la desviación estandar del sesgo estimado el valor del cuadro denominado Desv. Analizando los resultados del cuadro, destaca que la desviación estandar es más grande de lo que se podría esperar considerando lo pequeños que son los valores del sesgo medio que se observan. Comparando los resultados con los obtenidos por Hall y Simar para el mismo modelo, observamos que sus estimaciones son más homogéneas que las nuestras denotando una mayor precisión en sus resultados. No debemos olvidar que la ineficiencia que hemos incorporado a nuestros datos no es independiente de los inputs y ésto parece restar precisión a nuestras estimaciones.

**Cuadro 3-I: Estimacion del modelo no paramétrico**

Datos	x=0.25		x=0.50		x=0.75	
	Sesgo	Desv.	Sesgo	Desv.	Sesgo	Desv.
50	-0.002	0.069	-0.002	0.057	-0.002	0.089
100	-0.005	0.033	-0.005	0.028	-0.005	0.031
200	-0.010	0.060	-0.010	0.022	-0.010	0.031

El estimador no paramétrico nos proporciona los valores óptimos de producto para cada una de las empresas,  $\hat{y}$ , y mediante la relación (3.4.42) se obtiene el residuo de la estimación,  $\hat{\epsilon}$ . Sustituyendo los residuos en el estadístico del contraste (ecuación 3.4.47), y siguiendo el mismo procedimiento que en el caso paramétrico, es decir estimación no paramétrica de los componentes de  $J_{N_2}$  con el kernel gaussiano formulado en (3.5.3), podemos analizar el comportamiento tanto de la potencia como del tamaño del contraste.

Los resultados obtenidos para  $x = 0.25$ ,  $x = 0.50$  y  $x = 0.75$  en muestras de 50, 100 y 200 datos se presentan en el Cuadro A3-III del anexo. Al igual que en el caso

paramétrico, hemos efectuado un análisis del parámetro de suavizado observando el comportamiento de la potencia del contraste para el siguiente conjunto de valores de  $h$ ,

$$h_3 = \{0.1, 0.25, 0.4, 0.75, 1.5, 2, 2.75, 3, 3.5, 4, 4.5, 6, 8, 15, 25\} \quad (3.5.7)$$

En este cuadro se observa como las propiedades asintóticas del contraste se cumplen puesto que, para un menor nivel de significación se incrementa la potencia a medida que incrementamos el tamaño muestral de la muestra.

Comparando el Cuadro A3-III con el Cuadro A3-I, se observa que el contraste en el caso del estimador de Hall y Simar tiene peor comportamiento que en el caso del estimador mínimo cuadrático. Se observa en el Cuadro A3-III que para que la potencia empiece a tener valores razonables hacen falta muestras de 200 datos y aún con ello, el tamaño del contraste sólo es posible reducirlo al nivel del 5% mediante el empleo de muestras más grandes. En las muestras de pequeño tamaño el contraste confunde las distribuciones simétricas y las asimétricas y ésto se produce con una mayor incidencia en los residuos de las empresas con menores inputs. En general, y al igual que ocurría con el caso paramétrico, se observa que el contraste distingue mejor la asimetría o la ineficiencia en los casos en los que el input es grande.

En resumen, es preciso señalar que, con el estimador de Hall y Simar son necesarias muestras más grandes para obtener niveles similares a los que se obtenían con el estimador paramétrico.

La ventaja fundamental del contraste sigue siendo la misma que en el caso anterior

ya que tampoco, en el ámbito no paramétrico, existen otros contrastes que evalúen la ineficiencia empresa a empresa.

# Conclusiones

En este apartado, y como conclusiones, quisiera recordar y resumir los objetivos que se hemos desarrollado en cada uno de los capítulos que forman este trabajo de investigación.

El objetivo del primer capítulo era plantear el problema de la medición de la eficiencia y dar las bases teóricas que permitieran posteriormente el desarrollo de los otros dos capítulos. La primera sección del capítulo es, por tanto, un acercamiento teórico a los conceptos microeconómicos con los que se modeliza y cuantifica la eficiencia técnica. En segundo lugar hemos definido los métodos de estimación paramétricos y no paramétricos de la eficiencia técnica y en tercer lugar hemos relacionado los conceptos de eficiencia técnica y productividad. Dentro de los índices con los que es posible analizar la productividad total de los factores hemos dado una especial relevancia al índice de Malmquist debido a que puede ser formulado mediante un ratio de medidas de ineficiencia técnica. En este capítulo no sólo hemos introducido los problemas que retomamos y profundizamos en los capítulos siguientes, sino que también hemos expuesto aquellos aspectos marginales que no se hemos desarrollado pero que completaban la visión general del problema: la estimación de la eficiencia técnica y el cambio productivo.

En el segundo capítulo seleccionamos una de las posibles técnicas de estimación de la eficiencia técnica: el DEA, siendo el objetivo, comparar el análisis determinístico tradicional empleado en la mayoría de sus aplicaciones con el enfoque estadístico de la misma técnica. Esta comparación, que no es habitual en los trabajos sobre eficiencia, no sólo la hemos efectuado con las medidas de eficiencia técnica del DEA sino también con los índices de Malmquist. La primera parte del capítulo ha sido dedicada a exponer los conceptos teóricos del DEA y del índice de Malmquist y al análisis estadístico que puede efectuarse con las estimaciones obtenidas con el DEA.

Mediante la aplicación de método de remuestreo, hemos construido intervalos de confianza para las estimaciones del DEA y hemos corregido con el sesgo de la estimación. Lo mismo hemos efectuado con el índice de Malmquist, que tiene la ventaja de poderse descomponer en varios índices y con ellos analizar las fuentes del cambio productivo. Los intervalos de confianza, en este caso, se han construido para cada índice y también pueden ser corregidos con la estimación del sesgo correspondiente.

La segunda parte del capítulo es una aplicación de los conceptos formulados teóricamente en la primera parte al sector de los aeropuertos españoles. En este análisis mostramos que los resultados que pueden extraerse de un análisis determinístico, son diferentes a los que se derivan cuando se construyen intervalos de confianza en las estimaciones. En el caso del análisis de la eficiencia técnica, la construcción de intervalos de confianza para las estimaciones del DEA y su corrección posterior, muestran que, para la mayoría de los aeropuertos, la eficiencia se modifica del mismo modo al señalado por el DEA tradicional. Sin embargo, presentamos el caso de algunos aeropuertos en los que el análisis estadístico nos proporciona resultados diferentes a los obtenidos con el DEA convencional. Es relevante el caso

de los aeropuertos que, mediante el DEA tradicional, considerábamos técnicamente eficientes ya que la inferencia estadística nos indica que éstos pueden sufrir niveles de ineficiencia similares a algunos aeropuertos que en el mismo análisis DEA eran ineficientes.

En la estimación de los índices de Malmquist, al igual que en el caso de la eficiencia técnica, observamos que, con la inferencia estadística, los índices de algunos aeropuertos han tenido un comportamiento diferente al que observado con el DEA tradicional. Los intervalos de confianza y la corrección de los índices confirman las conclusiones que habíamos extraído con el DEA en el caso del cambio productivo total indicado por el índice de Malmquist, en el que casi todos los cambios productivos señalados por éste índice eran significativos. Sin embargo, no ha ocurrido lo mismo con respecto a la significatividad del cambio productivo estimado con los índices que explican las fuentes de la productividad total, y ésto ha sido especialmente importante en algunos aeropuertos que parecían, con el DEA tradicional, seguir un comportamiento diferente al del resto del sector.

La principal aportación de este capítulo es esta diferente interpretación de los resultados estimados de una y otra forma. Este tipo de análisis no es frecuente en la literatura del DEA y debería ser incluido ya que sin su incorporación no es posible diferenciar aquellos resultados significativos de los que resultados que se deben a la variabilidad de la muestra.

En el tercer capítulo retomamos la preocupación inicial por la eficiencia técnica y, motivados por la falta de contrastes que evalúen la existencia de eficiencia en cada empresa, hemos presentado una nueva posibilidad de contrastar la eficiencia en el

caso de que se disponga de datos de corte transversal. Tras una recapitulación de los diferentes contrastes con los que se ha evaluado la eficiencia técnica, formulamos el concepto de simetría condicional y los contrastes que en un ámbito general evalúan ese tipo de simetría en el residuo.

El contraste que presentamos identifica la simetría condicional del residuo permitiendo suponer que la ineficiencia está condicionada a los regresores. Este supuesto, que puede ser adecuado en algunas situaciones, no es posible utilizarlo en los modelos paramétricos si no disponemos de datos de panel. La hipótesis alternativa del contraste, presenta además la ventaja añadida de que incluye todas las posibles formas de distribuciones condicionalmente asimétricas.

Una ventaja importante del contraste es que puede aplicarse tanto a modelos paramétricos como especialmente, a los no paramétricos. Esta adaptación es igualmente un aspecto novedoso de nuestro trabajo de investigación que creemos relevante destacar.

Los supuestos distribucionales del contraste en el modelo paramétrico no son tan estrictos como en el caso del análisis de eficiencia técnica en el modelo de Aigner, Lovell y Schmidt (1977) ya que sólo es necesario imponer el supuesto de simetría al ruido y la de asimetría a la ineficiencia. La aplicación del contraste a un modelo no paramétrico permite, además, caracterizar a la tecnología con una mayor flexibilidad funcional que en el caso paramétrico.

Nuestro contraste permite evaluar la ineficiencia empresa a empresa, lo cual no era posible de efectuar con ninguno de los contrastes existentes hasta el momento.

Las simulaciones de Monte Carlo confirman que la potencia del contraste mejora con el incremento del tamaño muestral, y por tanto, corroboran las propiedades asintóticas del contraste. Los resultados obtenidos en las simulaciones difieren según sea la escala de producción de las empresas, mostrando el contraste una mayor facilidad de incurrir en errores tipo II en las empresas que utilizan cantidades pequeñas de inputs.

# Bibliografía

- Afriat, S.N., (1972), Efficiency estimation of a production function, *International Economic Review*, **13**, (3), 568-598.
- Ahmad, I. Q. y Q. Li, (1997), Testing symmetry of an unknown density function by kernel method, *Journal of Nonparametric Statistics*, **7**, (3), 279-293.
- Aigner, D.J. y S.F. Chu, (1968), On Estimating the Industry Production Function *American Economic Review*, **58**, 826-839.
- Aigner, D.J., Lovell, C.K.A., y P. Schmidt, (1977), Formulation and estimation of stochastic frontier production function models, *Journal of Econometrics*, **6**, 21-37.
- Ali, A.I., y L.M. Seiford, (1993), The Mathematical Programming Approach to Efficiency Analysis, en Fried, H.O., C.A.K. Lovell y S.S. Schmidt (Eds.), *The Measurement of productive efficiency: Techniques and applications*, Oxford University Press, New York, 120-159.
- Álvarez Cuesta, R., (2001), Modelos con eficiencia técnica variante en el tiempo, *La medición de la eficiencia y la productividad*, 59-76. Ed. Pirámide, Madrid.
- Álvarez Pinilla, A., (2001), Concepto y medición de la eficiencia productiva. *La medición de la eficiencia y la productividad*, 19-38. Ed. Pirámide, Madrid.

- Arias Sampedro, C., (2001), La estimación de la eficiencia en modelos con datos de panel, *La medición de la eficiencia y la productividad*, 41-59. Ed. Pirámide, Madrid.
- Althin, R. y B. Balk, (1996), A new transitive productivity index, *Journal of Productivity Analysis*, **7**, 19-27.
- Bai, J. y Ng. Serena, (2001), A Test for Conditional Symmetry in time series models, *Journal of Econometrics*, vol **103**, (1-2), 225-258.
- Balk, B. (1998), *Industrial Price, Quantity and Productivity Indices: Micro-Economic Theory*, Kluwer Academic Publishers. Netherland
- Banker, R.D. (1984), Estimating most productive scale size using data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, **17**(1), 35-44.
- Banker, R.D., (1993), Maximum likelihood, consistency and data envelopment analysis: a statistical foundation, *Management Science*, **39**, (10), 1265-1273.
- Banker, R.D. (1996), Hypothesis test using data envelopment analysis, *Journal of Productivity Analysis*, **7**, (2-3), 139-159.
- Banker, R.D., A. Charnes y W.W. Cooper, (1984), Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, **30**, (9), 1078-1092.
- Banker, R.D., I. Bardhan y W. Cooper, (1996), A note on returns to scale in DEA, *European Journal of Operational Research*, **88**, (3), 583-585.
- Banker, R.D., H., Chang y W. Cooper, (1996), Equivalence and implementation of alternative methods for determining returns to scale in Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operational Research*, **89**, (3), 473-481.

- Battese, G. y T. Coelli, (1988), Prediction of firm-level technical efficiencies with a generalized frontier production function for panel data, *Journal of Econometrics*, **38**, 387-399.
- Battese, G. y T. Coelli, (1992), Frontier production functions, technical efficiency and panel data: with application to Paddy farmers in India, *Journal of Productivity Analysis*, **3**, 153-169.
- Battese, G. y G. Corra, (1977), Estimation of a production frontier model: with application to the pastoral zone of Eastern Australia, *Australian Journal of Agricultural Economics*, **21**, (3), 169-179.
- Berj,S.A, F.R., Førsund y E.S. Jansen, 1992, Malmquist indices of productivity growth during the deregulation of Norwegian Banking, 1980-89. *Scandinavian Journal of Economics*, **94**, supplement, 211-228.
- Betancor O., y J.D. Jorge, (1999), El transporte aereo en Europa, *Papeles de Economia*, **82**, 225-237.
- Betancor O., y R. Rendeiro, (1999), Regulating privatized infrastructures and airport services, Working Paper num. 2180. World Bank.
- Bjurek, H. (1996), The Malmquist Total Factor Productivity Index, *Scandinavian Journal of Economics*, **98**, (2), 303-313.
- Boles, J.N., (1966), Efficiency squared - Efficient computation of efficiency indexes, *Proceedings of the 39th Annual Meeting of the Western Farm Economics Association*, 137-142.
- Brown, B.W y W.K. Newey, (1998), Efficient bootstraps for semiparametric models, Mimeo,

- Cao, R., A., Cuevas, y W. González-Manteiga, (1992), A comparative study of several smoothing methods in density estimation. manuscript.
- Caves, D.W., L.R., Christensen, y W.E. Diewert, (1982), The economic theory of index numbers and the measurement of input, output, and productivity”, *Econometrica*, vol 50, **6**, 1393-1414.
- Chang, K.P., y Y.Y. Guh, (1991), Linear production functions and the Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operational Research*, **52**, (2), 215-223.
- Charnes, A., W.W., Cooper, y E. Rhodes, (1978), Measuring the Inefficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research*, **2**, 429-444.
- Christensen, L., D., Jorgenson y L., Lau, (1975), Transcendental Logarithmic utility functions, *American Economic Review*, **65**, 367-383.
- Coelli, T. (1995), Estimators and hypothesis tests for a stochastic frontier function: a Monte Carlo Analysis, *Journal of Productivity Analysis*, **6**, 247-268.
- Coelli, T., D.S., Prasada Rao, y G.E., Battese, (1998), *An introduction to efficiency and productivity analysis*, Kluwer Academic Publishers.
- Cornwell, C., P., Schmidt, y S. Sickles, (1990), Production frontiers with cross-sectional and time-series variation in efficiency levels, *Journal of Econometrics*, **46**, 185-200.
- Debreu, G., (1951), The Coefficient of Resource utilization, *Econometrica*, **19**, (3), 273-292.
- Deprins, D., L., Simar, y H. Tulkens, (1984), Measuring labor inefficiency in post offices, *The performance of public enterprises: Concepts and Measurements*, M. Marchand, P. Pestieau y H. Iblkens (eds), Amsterdam, North Holland, 243-267.

- Dervaux, B., Kerstens, y Vanden Eeckaut, P., (1998), Radial and nonradial static efficiency decompositions: A focus on congestion measurement, *Transportation Research, B*, vol **32**, (5), 299-312.
- Diewert, W.E. (1992), Fisher ideal output, input, and productivity indexes revisited, *Journal of Productivity Analysis*, **3**, (3), 211-48.
- Efron B., (1982), *The Jackknife, the Bootstrap, and other Resampling Plans . NSF Regional Conference*, Series in Applied Mathematics, Monograph 38, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Efron B., y R.J. Tibshirani, (1993), *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman and Hall. London.
- Epanechnikov, V. (1969), Non parametric estimates of a multivariate probability density. *Theory of Probability and its Applications*, **14**, 153-158.
- Fan, Y., Q., Li, y A. Weersink, (1996), Semiparametric estimation of stochastic production frontier models, *Journal of Business Economic Statistics*, vol **14**, (4), 460-68.
- Fan, Y. y Gencay, R. (1995), A consistent nonparametric test of symmetry in linear regression models, *Journal of the American Statistical Association*, **90**, 551-557.
- Färe, R., (1975), Efficiency and the production function, *Zeitschrift fur Nationalökonomie*, **35**, (3-4), 317-324.
- Färe, R., y C.A.K. Lovell, (1978), Measuring the technical efficiency of production, *Journal of Economic Theory*, **19**, 150-162.
- Färe, R., S., Grosskopf, y C.A.K. Lovell, (1983), The estructure of technical efficiency of production. *Scandinavian Journal of Economics*, **85**, 181-190.

- Färe, R., S., Grosskopf, y C.A.K. Lovell, (1985), *The Measurement of Efficiency of Production*. Kluwer, Boston.
- Färe, R., S., Grosskopf, Lindgren, B. y P. Roos, (1992), Productivity changes in Swedish Pharmacies 1980-1989: A Non-Parametric approach, *Journal of Productivity Analysis* **3**, 85-101.
- Färe, R., S., Grosskopf, y C.A.K. Lovell, (1994), *Production Frontiers*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Färe R., S., Grosskopf, Norris M., and Z. Zhang, (1994), Productivity Growth, Technical Progress and Efficiency Change in Industrialized Countries, *The American Economic Review*, **84** (1), 66-83.
- Färe, R., S., Grosskopf, Lindgren, B. y P. Roos, (1995), Productivity developments in Hospitals: A Malmquist Output Index Approach, in A. Charnes, W.W. Cooper, A.Y. Lewin y L.M. Seiford, eds, *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Färe, R. y D. Primont, (1995), *Multi-output production and duality: Theory and applications*, Kluwer Academic Publishers. London.
- Farrell, M.J., (1957), The Measurement of Productive Efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, **120**, 253-281.
- Fernandes, E. y R.R. Pacheco, (2002), Efficient use of airport capacity, *Transportation Research, Part A: Policy and Practice*, **36**, (3), 225-238.
- Ferrier, G.D. y J.G. Hirschberg, (1997), Bootstrapping confidence intervals for linear programming efficiency scores: With an illustration using Italian bank data, *Journal of Productivity Analysis* **8**, 19-33.

- Ferrier, G.D. y J.G. Hirschberg, (1999), Can we bootstrap DEA scores?, *Journal of Productivity Analysis*, **11**, 81-92.
- Fisher, I. (1922), *The making of index numbers*, Boston:Houghton Mifflin.
- Førsund F. y L. Hjalmarsson, (1979), Generalised Farrell measures of efficiency: An application to milk processing in Swedish dairy plants, *Economic Journal*, **89** (354), 294-315.
- Gijbels, Y., E., Mammen, Park, B.U. y L. Simar, (1999), On estimation of monotone and concave frontier functions, *Journal of the American* **49**, (445), 220-28.
- Gillen D., y A. Lall, (1997), Developing measurements of airport productivity and performance: an Application of Data Envelopment Analysis, *Transportation Research-E*, vol **33**, 4, 249-259.
- Gillen D., y A. Lall, (2001), Nonparametric measures of efficiency of US airports, *International Journal of Transport Economics*, vol **33**, 3, 283-306.
- Gonenc R., y G., Nicoletti, (2000), Regulation, market structure and performance in air passenger transportation, Working Paper num. 254, OCDE economics department, Paris.
- González Fidalgo, E. (2001), La estimación de la eficiencia con métodos no paramétricos. *La medición de la eficiencia y la productividad*, 139-166. Ed. Pirámide, Madrid.
- González, X. M. y D. Miles, (2002), Statistical precision of DEA: a bootstrap application to Spanish public services, *Applied Economic Letters*, **9**, 127-132.
- Gravelle, H. y R., Rees,(1994), *Microeconomics*, capítulo 7. Longman, London.
- Greene, W., (1990), A Gamma-distributed stochastic frontier production model, *Journal of Econometrics*, **46**, 141-163.

- Greene, W., (1997), *Econometric Analysis*, Prentice-Hall International, Inc., New Jersey.
- Grifell-Tatje E., y C.A.K. Lovell (1995), A note on the Malmquist productivity index, *Economics Letters*, **47**, 169-175.
- Grifell-Tatje E., y C.A.K. Lovell (1999), Generalized Malmquist productivity index, *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa. Top*, Vol **7**, (1), 81-101.
- Hall, P., W., Härdle, y L. Simar, (1995), Iterated bootstrap with application to frontier models, *The Journal of Productivity Analysis*, **6**, 63-73.
- Hall, P. y L. Simar, (2000), Estimating a change point, boundary or frontier in the presence of observation errors, Discussion Paper, n 0012, Institute de Statistique, UCL, Louvaine-la-Neuve, Belgium.
- Halmos, P.R, (1974), *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York.
- Härdle, W., (1990), *Applied nonparametric regression*, Cambridge University Press, New York.
- Härdle, W. (1991), *Smoothing techniques, with implementations in S*, Springer, New York.
- Härdle, W. y J., Marron, (1991), Bootstrapping simultaneous error bars for non-parametric regression, *The Annals of Statistics*, Vol 19, 2, 778-796.
- Härdle, W., Mueller, S. Sperlich,, Werwatz (1999): Non- and Semiparametric Modelling
- Hausman, J.A. y W.E. Taylor, (1981), Panel data and unobservable individual effects, *Econometrica*, **46**, 1377-1398.

- Hicks, J.R., (1961), Measurement of Capital in relation to the measurement of other economic aggregates, *The Theory of Capital*, In F.A. Lutz and D.C. Hague (Eds). Macmillan, London.
- Hjalmarsson L., S.C., Kumbhakar, and A. Heshmati, (1996), DEA, DFA and SFA: A Comparison, *Journal of Productivity Analysis*, **7**, 303-327.
- Horrace, W.C. y P. Schmidt, (1996), Confidence statements for efficiency estimates from stochastic frontier models, *Journal of Productivity Analysis*, **7**, (2/3), 257-282.
- Jondrow, J., C.A.K., Lovell, I., Materov y P. Schmidt, (1982), On the estimation of technical inefficiency in the stochastic production function model, *Journal of Econometrics*, **19**, 233-238.
- Jones, M. C., J. S., Marron y S. J., Sheather, (1992), Progress in data-based bandwidth selection for kernel density estimation. Manuscript
- Kaplan, W. y J. Lewis, (1973), *Cálculo y Algebra Lineal*, Editorial Limusa, Mexico.
- Kerstens, K. y P. Vanden Eeckaut, (1995), Technical efficiency measures on DEA and FDH: a reconsideration of the axiomatic literature. Core Discussion Paper 9513. UCL. Louvain la Neuve. Belgica.
- Kneip, A. y L. Simar, (1996), A General framework for frontier estimation with panel data, *Journal of Productivity Analysis* **7**, 187-212.
- Kneip, A., B.U. Park y L. Simar, (1998), A note on the convergence of nonparametric DEA estimators for production efficiency scores, *Econometric Theory*, **14**, 783-793.
- Koopmans, T.C., (1951), An analysis of production as an efficient combination of

- activities, en T.C. Koopmans (Ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission for Research in Economics, Mongraph **13**, Nueva York.
- Korostelev, A., L., Simar, y A.B. Tsybakov, (1995a), On estimation of monotone and convex boundaries, *Pub. Inst. Stat. Univ. Paris*, XXXIX, **1**, 3-18.
- Korostelev, A., L., Simar, y A.B. Tsybakov, (1995b), Efficient estimation of monotone boundaries, *The Annals of Statistics*, **23**, (2), 476-489.
- Kumbhakar, S.C. (1990), Production frontiers, panel data and time-varying technical inefficiency, *Journal of Econometrics*, **46**, 201-211.
- Kumbhakar, S.C. y C.A.K. Lovell, (2000), *Stochastic Frontier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Lee, Y.H y P. Schmidt (1993), A Production frontier model with flexible temporal variation in technical inefficiency, Fried, H.O., C.A.K. Lovell y S.S. Schmidt (Eds.), *The Measurement of productive efficiency: Techniques and applications*, Oxford University Press, New York.
- Li, Q., (1996), Estimating a stochastic production frontier when the adjusted error is symmetric, *Economics Letter*, **52**, 221-228.
- López Cachero, M. (1988), *Fundamentos y métodos de estadística*, Ed. Pirámide. Madrid.
- Lovell, C.A.K., (1993), *Production frontiers and productive efficiency*, H. Fried, C.A.K. Lovell y P. Schmidt (Eds).
- Malmquist S., (1953), Index numbers and indifference surfaces. *Trabajos de Estadística*, **4**, 209-242.

- Manski, C., (1984), Adaptive estimation of nonlinear regression models. *Econometric Reviews*, **3**, 145-194.
- Marin, P., (1999), El transporte aereo en Espana, *Papeles de Economia*, **82**, 19-30.
- Mas-Colell, A., M.D., Whinston, y J.R., Greene, (1995), *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.
- Meeusen, W. y J. van den Broeck, (1977), Efficiency estimation from Cobb-Douglas production frontiers with composed error, *International Economic Review*, **18**, 435-444.
- Moorsteen, R.H., (1961), On measuring productive potencial and relative efficiency. *Quarterly Journal of Economics* **75**, (3), 451-467.
- Murillo-Melchor, C. (1999), An analysis of technical efficiency and productivity changes in Spanish airports by using the Malmquist index, *International Journal of Transport Economics*, vol **26**,(2) , 271-292.
- Newey, W.K., (1988), Adaptive estimation of regression models via moment restrictions, *Journal of Econometrics*, **38**, 301-339.
- Newey, W.K., (1991), Efficient estimation of Tobit models under conditional symmetry, In W.A. Barnett, J.L: Powell and G. Tauchen (Eds), *Nonparametric and Semiparametric Methods in Econometrics and Statistics*, págs. 291-336. Cambridge University Press. Cambridge.
- Orea, L. (2001), Medición y descomposición de la productividad, *La medición de la eficiencia y la productividad*, 77-93. Ed. Pirámide, Madrid.
- Park, B., U., L. Simar y Ch. Weiner, (2000), The FDH estimator for productivity efficiency scores, *Econometric Theory*, **16**, (6), 855-877.

- Park, B., U. y B. A., Turlach, (1992), Practical performance of several data driven bandwidth selectors, *Computational Statistics*, **7**, 251-270.
- Powell, J., L., (1986a), Symmetrically trimmed least squares estimation for Tobit models, *Econometrica*, **54**, 1435-1460.
- Powell, J., L., (1986b), Censored regression quantiles, *Journal of Econometrics*, **32**, 143-155.
- Rendeiro, R. (1999), Las infraestructuras aeroportuarias en España, *Papeles de Economía*, **82**, 30-42.
- Rendeiro, R., (2002), Economies of Scale and Density for the Spanish Airports Network, *International Journal of Transport Economics* **29**, (1), 119-125.
- Richmond, J., (1974), Estimating the efficiency of production, *International Economic Review*, **15**, (2), 515-521.
- Ritter, C. y L. Simar, (1997a), Pitfalls of Normal-Gamma stochastic frontier models, *Journal of Productivity Analysis*, **8**, (2), 167-182.
- Ritter, C. y L. Simar, (1997b), Another look at the American Electrical Utility Data, Working Paper, CORE e Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium.
- Schmidt, P. y T. Lin, (1984), Simple Tests of Alternative Specifications in Stochastic Frontier Models, *Journal of Econometrics*, **24**, 349-361.
- Schmidt, P. y R. Sickles, (1984), Production frontiers and panel data, *Journal of Business Economic Statistics*, **2**, (4), 367-374.
- Sengupta, J.K., (1982), Efficiency measurement in stochastic input-output systems, *International Journal of Systems Science*, **13**, 273-287.

- Severance-Lossin, E., (1995), Data envelope analysis accounting for a Stochastic Component in the Data, Discussion Paper **26**. Humboldt University zu Berlin.
- Shephard, R.W., (1953), *Cost and production functions*. Princenton: Princenton University Press.
- Shephard, R.W., (1970), *The theory of cost and production functions*. Princenton: Princenton University Press.
- Silverman, B.M., (1978), Choosing the window width when estimating a density, *Biometrika*, **65**, 1-11.
- Silverman, B.M., (1986), *Density estimation for statistics and data analysis*, Chapman and Hall Ltd., London.
- Simar, L., (1992), Estimating Efficiencies from Frontier Models with Panel Data: A Comparison of Parametric Non-Parametric and Semi-Parametric Methods with Bootstrapping, *Journal of Productivity Analysis*, **3**, 167-203.
- Simar, L., (2001), Detecting Outliers in frontier models: a simple approach, Discussion paper 9811, Institut de Statistique, UCL, Louvain la Neuve.
- Simar, L. y P. Wilson, (1998a), Sensitivity analysis of efficiency scores: How to bootstrap in nonparametric frontier models, *Management Science*, **44**, 49-61.
- Simar, L y P. Wilson, (1998b), Productivity Growth in Industrialized Countries, Discussion Paper 9836, Institut de Statistique, Universite Catholique de Louvain, Louvain la Neuve, Belgium.
- Simar, L y P. Wilson, (1999a), Some problems with the Ferrier/Hirschberg bootstrap idea, *Journal of Productivity Analysis*, **11**, 67-80.
- Simar, L y P. Wilson, (1999b), Estimating and Bootstrapping Malmquist Indices, *European Journal of Operational Research*, **115**, 459-471.

- Simar, L y P. Wilson, (1999c), Of course we can bootstrap DEA scores! But does it mean anything? Logic trumps wishful thinking, *Journal of Productivity Analysis*, **11**, 93-97.
- Simar, L y P. Wilson, (2000a), Statistical Inference in Nonparametric Frontier Models: The State of the Art, *Journal of Productivity Analysis*, **13**, 49-78.
- Simar, L y P. Wilson, (2000b), A General Methodology for Bootstrapping in Nonparametric Frontier Models, *Journal of Applied Statistics*, **1**, 159-189.
- Simar, L y P. Wilson, (2001), Aplicación del bootstrap con estimadores DEA, *La medición de la eficiencia y la productividad*, 299-327. Ed. Pirámide, Madrid.
- Simar, L y P. Wilson, (2002), Nonparametric tests of returns to scale, *European Journal of Operational Research*, **1**, 115-132.
- Stevenson, R.E., (1980), Likelihood functions for generalised stochastic frontier estimation, *Journal of Econometrics*, **13**, 57-66.
- Tate, R.F. (1959), Unbiased estimation: Functions of location and scale parameters, *Annals of Mathematical Statistics*.
- Törnqvist, L., (1936), The bank of Finland's consumption price index, *Bank of Finland Monthly Bulletin* **10**, 1-8.
- Turlach, B. A. (1993), Bandwidth selection in kernel density estimation: A review, Discussion Paper 9307, Institut für Statistik und Ökonometrie, Humboldt-Universität zu Berlin.
- Vanden Eeckaut, P. (1997), Characterizing Returns to Scale Using Nonparametric Deterministic Technologies, Capítulo de su tesis doctoral. Louvain la Neuve. Belgica.

- Varian, H.R. (1999), *Microeconomía Intermedia. Un enfoque actual*, Antoni Bosch Editor, 5ª edición, Barcelona.
- Winsten, C.B., (1957), Discussion on Mr Farrell's paper, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, **120**, 282-284.
- Wilson, P.W., (1993), Detecting outliers in deterministic nonparametric frontier models with multiple outputs, *Journal of Business and Economics Statistics*, **11**, 319-323.
- Wilson, P.W., (1995), Detecting influential observations in data envelopment analysis, *Journal of Productivity Analysis* **6**, 27-45.
- Zheng, J.X., (1998), Consistent specification testing for conditional symmetry, *Econometric Theory*, **14**, 139-149.
- Zhu, J., y Z-H. Shen, (1995), A discussion of testing DMU's returns to scale. *European Journal of Operational Research*, **81**, (3), 590-596.
- Zieschang, K., (1984), An extended Farrell efficiency measure, *Journal of Economic Theory*, **33**, 387-396.
- Zofio J.L., and C.A.K. Lovell, (1998), Graphyperbolic Productivity indexes: A re-examination of U.S. agricultural productivity growth, Working Paper, Department of Economics, University of Georgia, Athens.



# Anexo

Cuadro A2-I: Eficiencia Técnica y Medida de Escala (1992)

AEROPUERTOS	RCS	RNCS	RNDS	RVS	ESCALA
1. <b>Alicante</b>	0.5415	0.5415	0.5423	0.5423	0.9985
2. Almeria	0.3484	0.3484	0.4573	0.4573	0.7619
3. Asturias	0.4989	0.4989	0.6640	0.6640	0.7514
4. <b>Barcelona</b>	0.7910	0.7910	0.8002	0.8002	0.9885
5. Bilbao	0.6150	0.6150	0.6683	0.6683	0.9202
6. Coruña	0.5607	0.5607	0.9449	0.9449	0.5934
7. <b>Fuerteventura</b>	0.9762	0.9762	1(9)	1(9)	0.9762
8. Gerona	0.1562	0.1562	0.2938	0.2938	0.5317
9. Granada	0.4260	0.4260	0.6271	0.6271	0.6793
10. Hierro	0.3527	0.3527	1(15)	1 (15)	0.3527
11. <b>Ibiza</b>	0.6018	0.6018	0.6319	0.6319	0.9524
12. Jerez	0.3055	0.3055	0.6009	0.6009	0.5084
13. <b>Lanzarote</b>	1(29)	1(29)	1(13)	1(13)	1.0000
14. La Palma	0.4464	0.4464	0.6493	0.6493	0.6875
15. <b>Gran Canaria</b>	0.7257	0.7318	0.7257	0.7318	0.9917
16. <b>Madrid</b>	0.9084	1(0)	0.9084	1 (0)	0.9084
17. <b>Menorca</b>	0.5520	0.5520	0.6274	0.6274	0.8798
18. <b>Málaga</b>	0.4454	0.4454	0.4634	0.4634	0.9612
19. Melilla	0.4966	0.4966	0.8654	0.8654	0.5738
20. <b>Palma Mall.</b>	1(9)	1(8)	1(12)	1(11)	1.0000
21. Pamplona	0.1755	0.1755	0.5522	0.5522	0.3178
22. Reus	0.1303	0.1303	0.6607	0.6607	0.1972
23. <b>Murcia</b>	0.1636	0.1636	0.5289	0.5289	0.3093
24. San Sebastian	0.1897	0.1897	0.6981	0.6981	0.2717
25. Tenerife	0.7576	0.8532	0.7576	0.8532	0.8880
26. Santander	0.2405	0.2405	0.4789	0.4789	0.5022
27. Santiago	0.4644	0.4644	0.5207	0.5207	0.8919
28. Sevilla	0.4643	0.4643	0.5435	0.5435	0.8543
29. Valencia	0.4027	0.4027	0.4603	0.4603	0.8749
30. Valladolid	0.4226	0.4226	1(16)	1(16)	0.4226
31. Vigo	0.3523	0.3523	0.5477	0.5477	0.6432
32. Vitoria	0.1668	0.1668	0.2944	0.2944	0.5666
33. Zaragoza	0.2261	0.2261	0.4390	0.4390	0.5150
Media Geo.	0.4148	0.4175	0.6332	0.6373	0.6508
Máximo	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
Mínimo	0.1303	0.1303	0.2938	0.2938	
Desv Tp.	0.2545	0.2631	0.2062	0.2118	
Unid. Effic.	2	2	5	5	

Cuadro A2-II: Eficiencia Técnica y Medida de Escala (1993)

AEROPUERTOS	RCS	RNCS	RNDS	RVS	ESCALA
1. <b>Alicante</b>	0.5109	0.5109	0.5143	0.5143	0.9934
2. Almeria	0.3524	0.3524	0.4534	0.4534	0.7772
3. Asturias	0.4524	0.4524	0.6013	0.6013	0.7524
4. <b>Barcelona</b>	0.7403	0.7403	0.7542	0.7542	0.9816
5. Bilbao	0.4677	0.4677	0.6058	0.6058	0.7720
6. Coruña	0.4842	0.4842	0.7681	0.7681	0.6304
7. <b>Fuerteventura</b>	0.9446	0.9446	0.9839	0.9839	0.9601
8. Gerona	0.1246	0.1246	0.2809	0.2809	0.4436
9. Granada	0.3183	0.3183	0.4723	0.4723	0.6739
10. Hierro	0.2661	0.2661	0.9737	0.9737	0.2733
11. <b>Ibiza</b>	0.6285	0.6285	0.6475	0.6475	0.9707
12. Jerez	0.1799	0.1799	0.5623	0.5623	0.3199
13. <b>Lanzarote</b>	1(29)	1(29)	1(19)	1 (19)	1.0000
14. La Palma	0.3979	0.3979	0.6173	0.6173	0.6446
15. <b>G.Canaria</b>	0.6467	0.6467	0.6486	0.6486	0.9971
16. <b>Madrid</b>	0.8272	1(0)	0.8272	1(0)	0.8272
17. <b>Menorca</b>	0.5315	0.5315	0.6152	0.6152	0.8639
18. <b>Málaga</b>	0.4322	0.4322	0.4507	0.4507	0.9590
19. Melilla	0.3477	0.3477	0.6225	0.6225	0.5586
20. <b>Palma Mall.</b>	1(11)	1(10)	1(16)	1 (15)	1.0000
21. Pamplona	0.1073	0.1073	0.5211	0.5211	0.2059
22. Reus	0.1468	0.1468	0.7255	0.7255	0.2023
23. <b>Murcia</b>	0.1336	0.1336	0.5606	0.5606	0.2383
24. San Sebastian	0.1997	0.1997	0.6607	0.6607	0.3023
25. Tenerife	0.7743	0.9657	0.7743	0.9657	0.8018
26. Santander	0.2437	0.2437	0.4596	0.4596	0.5302
27. Santiago	0.3092	0.3092	0.3485	0.3485	0.8872
28. Sevilla	0.2396	0.2396	0.3147	0.3147	0.7614
29. Valencia	0.3594	0.3594	0.4265	0.4265	0.8427
30. Valladolid	0.4537	0.4537	1(28)	1(28)	0.4537
31. Vigo	0.3021	0.3021	0.5262	0.5262	0.5741
32. Vitoria	0.1419	0.1419	0.2700	0.2700	0.5256
33. Zaragoza	0.2404	0.2404	0.4202	0.4202	0.5721
Media Geo.	0.3614	0.3659	0.5826	0.5899	0.6126
Máximo	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
Mínimo	0.1073	0.1073	0.2700	0.2700	
Desv Tp.	0.2595	0.2786	0.2117	0.2256	
Unid. Effic.	2	3	3	4	

Cuadro A2-III: Eficiencia Técnica y Medida de Escala (1994)

AEROPUERTOS	RCS	RNCS	RNDS	RVS	ESCALA
1. <b>Alicante</b>	0.5939	0.5939	0.5964	0.5964	0.9958
2. Almeria	0.4586	0.4586	0.5501	0.5501	0.8337
3. Asturias	0.4876	0.4876	0.6084	0.6084	0.8014
4. <b>Barcelona</b>	0.8357	0.8357	0.8509	0.8509	0.9821
5. Bilbao	0.6434	0.6434	0.6824	0.6824	0.9428
6. Coruña	0.4637	0.4637	0.6686	0.6686	0.6935
7. <b>Fuerteventura</b>	0.9586	0.9586	0.9886	0.9886	0.9697
8. Gerona	0.1641	0.1641	0.3126	0.3126	0.5250
9. Granada	0.3173	0.3173	0.4834	0.4834	0.6564
10. Hierro	0.3438	0.3438	0.9737	0.9737	0.3531
11. <b>Ibiza</b>	0.6941	0.6941	0.6985	0.6985	0.9937
12. Jerez	0.1862	0.1862	0.5667	0.5667	0.3286
13. <b>Lanzarote</b>	1(28)	1 (27)	1(17)	1(16)	1.0000
14. La Palma	0.4191	0.4191	0.6281	0.6281	0.6673
15. <b>GCanaria</b>	0.6649	0.6649	0.6983	0.6983	0.9522
16. <b>Madrid</b>	0.9400	1(0)	0.9400	1(0)	0.9400
17. <b>Menorca</b>	0.5326	0.5326	0.6081	0.6081	0.8758
18. <b>Málaga</b>	0.4732	0.4732	0.4911	0.4911	0.9636
19. Melilla	0.3044	0.3044	0.6187	0.6187	0.4920
20. <b>Palma Mal</b>	1(8)	1(6)	1(17)	1(15)	1.0000
21. Pamplona	0.1404	0.1404	0.5286	0.5286	0.2656
22. Reus	0.1984	0.1984	0.7400	0.7400	0.2681
23. Murcia	0.1624	0.1624	0.5522	0.5522	0.2941
24. San Sebas	0.1942	0.1942	0.7255	0.7255	0.2677
25. Tenerife	0.8006	1(0)	0.8006	1(0)	0.8006
26. Santander	0.2543	0.2543	0.4730	0.4730	0.5376
27. Santiago	0.3822	0.3822	0.4186	0.4186	0.9130
28. Sevilla	0.2674	0.2674	0.3490	0.3490	0.7662
29. Valencia	0.3721	0.3721	0.4581	0.4581	0.8123
30. Valladolid	0.5264	0.5264	1(28)	1(28)	0.5264
31. Vigo	0.3851	0.3851	0.5613	0.5613	0.6861
32. Vitoria	0.1553	0.1553	0.2751	0.2751	0.5645
33. Zaragoza	0.2500	0.2500	0.4068	0.4068	0.6146
Media Geo	0.4008	0.4043	0.6105	0.6158	0.6509
Máximo	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
Mínimo	0.1404	0.1404	0.2751	0.2751	
Desv Tp.	0.2658	0.2790	0.2083	0.2185	
Unid. Eff.	2	4	3	5	

Cuadro A2-IV: Índice de Malmquist (1992-94)

AEROPUERTOS	$\widehat{M}(92, 93)$	$\widehat{M}(93, 94)$	$\widehat{M}(92, 94)$
1. <b>Alicante</b>	1.0320**	0.9883	1.0098
2. Almeria	0.9634**	0.9025**	0.9323*
3. Asturias	1.0748**	1.0896**	1.0821**
4. <b>Barcelona</b>	1.0216	0.9301**	0.9748**
5. Bilbao	1.2784**	0.8071**	1.0158
6. Coruña	1.1286**	1.2263**	1.1764**
7. <b>Fuerteventura</b>	1.0072**	1.1418**	1.0723**
8. Gerona	1.2218**	0.8917**	1.0438**
9. Granada	1.3047**	1.1780**	1.2396**
10. Hierro	1.2919**	0.9090**	1.0837**
11. <b>Ibiza</b>	0.9119**	1.0172	0.9631**
12. Jerez	1.6500**	1.0167	1.2951**
13. <b>Lanzarote</b>	0.9636**	1.1053**	1.0320
14. La Palma	1.0936**	1.0968**	1.0952**
15. <b>Gran Canaria</b>	1.1216**	1.0435	1.0818**
16. <b>Madrid</b>	1.0500	0.9239**	0.9849**
17. <b>Menorca</b>	0.9899	1.0671**	1.0277*
18. <b>Malaga</b>	1.0247*	1.0040	1.0141
19. Melilla	1.3920**	1.3414**	1.3664**
20. <b>Palma Mall.</b>	0.9826	1.0802**	1.0302**
21. Pamplona	1.5939**	0.8977**	1.1962**
22. Reus	0.8650**	0.8688**	0.8668**
23. <b>Murcia</b>	1.1936**	0.9661**	1.0738**
24. S. Sebastian	0.9260**	1.2078**	0.9860**
25. Tenerife	0.9482**	1.0253	1.0403
26. Santander	0.9620**	1.1253**	1.0574**
27. Santiago	1.4636**	0.9500**	1.1792**
28. Sevilla	1.9133**	0.9562**	1.3527**
29. Valencia	1.0709**	1.0444	1.0575*
30. Valladolid	0.9103**	1.0122	0.9598**
31. Vigo	1.1366**	0.9213**	1.0233**
32. Vitoria	1.1457**	1.0731**	1.1087**
33. Zaragoza	0.9167**	1.1292**	1.0173
34. Sector Total	1.1168	1.0221	1.0684

\*\* Indices significativamente diferentes de la unidad para un nivel de confianza del 10%

\* Indices significativamente diferentes de la unidad para un nivel de confianza del 5%

+ Indices de los cuales no ha sido posible obtener su distribución muestral

Cuadro A2-V: Descomposicion del Indice (1992-93)

AEROPUERTOS	$\hat{\mathcal{E}}$	$\hat{\mathcal{S}}$	$\hat{\mathcal{T}}$	$\widehat{\mathcal{ST}}$	$\widehat{\mathcal{M}}$
1.Alicante	1.0546*	1.0052	0.9950	0.9784	1.0320**
2.Almeria	1.0086	0.9801	0.9973	0.9773	0.9634**
3.Asturias	1.1042**	0.9987	0.9999	0.9747	1.0748**
4.Barcelona	1.0610**	1.0071	0.9960	0.9600	1.0216
5.Bilbao	1.1032	1.1919**	0.9885	0.9835	1.2784**
6.Coruña	1.2301**	0.9414	1.0206	0.9549	1.1286**
7.Fuerteventura	1.0163	1.0168	0.9832	0.9913	1.0072**
8.Gerona	1.0459	1.1987**	0.9773	0.9972	1.2218**
9.Granada	1.3278**	1.0082	1.0139	0.9613	1.3047**
10.Hierro	1.0270	1.2906**	0.9544	1.0212	1.2919**
11.Ibiza	0.9760	0.9811	0.9921	0.9599	0.9119**
12.Jerez	1.0687	1.5892**	0.9691*	1.0026	1.6500**
13.Lanzarote	1.0000	1.0000	1.0060	0.9579	0.9636**
14.La Palma	1.0518*	1.0668	0.9948	0.9797	1.0936**
15.Gran Canaria	1.1283**	0.9946	0.9936*	1.0058	1.1216**
16.Madrid	0.9915	1.1076	0.7999 <sup>+</sup>	1.1953 <sup>+</sup>	1.0500
17.Menorca	1.0198	1.0184	0.9848	0.9679	0.9899
18.Malaga	1.0283	1.0023	1.0130	0.9814	1.0247*
19.Melilla	1.3902**	1.0274	1.0220	0.9537	1.3920**
20.Palma Mall.	1.0000	1.0000	0.9932	0.9893	0.9826
21.Pamplona	1.0597	1.5432**	0.9717*	1.0030	1.5939**
22.Reus	0.9107*	0.9745	0.9746*	1.0000	0.8650**
23.Murcia	0.9435**	1.2981**	0.9749	0.9997	1.1936**
24.S. Sebastian	1.0566	0.8992	0.9746*	1.0000	0.9260**
25.Tenerife	0.8835*	1.1074	0.9410**	1.0299	0.9482**
26.Santander	1.0421	0.9472	1.0235	0.9522	0.9620**
27.Santiago	1.4942**	1.0051	0.9884	0.9860	1.4636**
28.Sevilla	1.7268**	1.1220	1.0129	0.9749	1.9133**
29.Valencia	1.0792**	1.0383	0.9849	0.9704	1.0709**
30.Valladolid	1.0000	0.9316	0.9679*	1.0096	0.9103**
31.Vigo	1.0410	1.1203*	0.9971	0.9775	1.1366**
32.Vitoria	1.0905	1.0780	1.0101	0.9649	1.1457**
33.Zaragoza	1.0447	0.9003*	1.0135	0.9616	0.9167**
34.Sector Total	1.0804	1.0625	0.9849	0.9878	1.1168

\*\* Indices significativamente diferentes de la unidad para un nivel de confianza del 10%

\* Indices significativamente diferentes de la unidad para un nivel de confianza del 5%

+ Indices de los cuales no ha sido posible obtener su distribución muestral

Cuadro A2-VI: Descomposición del Índice (1993 – 94)

AEROPUERTOS	$\hat{\mathcal{E}}$	$\hat{S}$	$\hat{T}$	$\hat{ST}$	$\hat{M}$
1.Alicante	0.8623**	0.9976	1.1373**	1.0102	0.9883
2.Almeria	0.8242**	0.9323*	1.1123**	1.0559	0.9025**
3.Asturias	0.9883	0.9388*	1.1031**	1.0647	1.0896**
4.Barcelona	0.8864**	0.9994	1.0511**	0.9990	0.9301**
5.Bilbao	0.8877*	0.8188**	1.0362	1.0716*	0.8071**
6.Coruña	1.1488**	0.9089**	1.0673*	1.1003**	1.2263**
7.Fuerteventura	0.9952	0.9901	1.1033**	1.0502*	1.1418**
8.Gerona	0.8986**	0.8450**	1.0052	1.1683**	0.8917**
9.Granada	0.9770*	1.0267	1.0452*	1.1235**	1.1780**
10.Hierro	1.0000	0.7740**	1.0000	1.1745**	0.9090**
11.Ibiza	0.9270**	0.9768	1.0921**	1.0287	1.0172
12.Jerez	0.9922*	0.9737	1.0060	1.0460	1.0167
13.Lanzarote	1.0000	1.0000	1.0910*	1.0131	1.1053**
14.La Palma	0.9828**	0.9660	1.0234	1.1288**	1.0968**
15.Gran Canaria	0.9288**	1.0472	1.0851**	0.9887	1.0435
16.Madrid	1.0000	0.8800**	0.9885 <sup>+</sup>	1.0621 <sup>+</sup>	0.9239**
17.Menorca	1.0117	0.9864	1.0187	1.0497	1.0671**
18.Málaga	0.9177**	0.9952	1.0586	1.0383	1.0040
19.Melilla	1.0061	1.1353	1.0099	1.1629**	1.3414**
20.Palma Mall.	1.0000	1.0000	1.1025**	0.9798	1.0802**
21.Pamplona	0.9858	0.7752**	1.0000	1.1746**	0.8977**
22.Reus	0.9804*	0.7547**	1.0000	1.1742**	0.8688**
23.Murcia	1.0152	0.8103**	1.0000	1.1743**	0.9661**
24.S. Sebastian	0.9107**	1.1292	1.0000	1.1745**	1.2078**
25.Tenerife	0.9657	1.0015	1.1710**	0.9053	1.0253
26.Santander	0.9717**	0.9863	1.0196	1.1516**	1.1253**
27.Santiago	0.8325**	0.9717	1.1426**	1.0277	0.9500**
28.Sevilla	0.9017**	0.9937	1.0380**	1.0281	0.9562**
29.Valencia	0.9310**	1.0374	1.0313	1.0486	1.0444
30.Valladolid	1.0000	0.8619**	1.0801*	1.0873**	1.0122
31.Vigo	0.9375**	0.8368**	1.0135	1.1588**	0.9213**
32.Vitoria	0.9815	0.9310**	1.0064	1.1669**	1.0731**
33.Zaragoza	1.0329	0.9309**	1.0272	1.1432**	1.1292**
34.Sector Total	0.9580	0.9411	1.0494	1.0804	1.0221

\*\* Indices significativamente diferentes de la unidad para un nivel de confianza del 10%

\* Indices significativamente diferentes de la unidad para un nivel de confianza del 5%

+ Indices de los cuales no ha sido posible obtener su distribución muestral

Cuadro A2-VII: Descomposición de índices de Eficiencia y Escala (1992 – 94)

AEROPUERTOS	$\hat{\mathcal{E}}(92, 93)$	$\hat{\mathcal{E}}(93, 94)$	$\hat{\mathcal{E}}(92, 94)$	$\hat{\mathcal{S}}(92, 93)$	$\hat{\mathcal{S}}(93, 94)$	$\hat{\mathcal{S}}(92, 94)$
1. <b>Alicante</b>	1.0546*	0.8623**	0.9536*	1.0052	0.9976	1.0014
2. Almeria	1.0086	0.8242**	0.9118**	0.9801	0.9323*	0.9559
3. Asturias	1.1042**	0.9883	1.0446	0.9987	0.9388*	0.9683
4. <b>Barcelona</b>	1.0610**	0.8864**	0.9697	1.0071	0.9994	1.0032
5. Bilbao	1.1032	0.8877*	0.9896	1.1919**	0.8188**	0.9879
6. Coruña	1.2301**	1.1488**	1.1888**	0.9414	0.9089**	0.9250**
7. <b>Fuerteventura</b>	1.0163	0.9952	1.0057	1.0168	0.9901	1.0034
8. Gerona	1.0459	0.8986**	0.9694	1.1987**	0.8450**	1.0064
9. Granada	1.3278**	0.9770*	1.1390**	1.0082	1.0267	1.0174
10. Hierro	1.0270	1.0000	1.0134	1.2906**	0.7740**	0.9995
11. <b>Ibiza</b>	0.9760	0.9270**	0.9512	0.9811	0.9768	0.9789
12. Jerez	1.0687	0.9922*	1.0297	1.5892**	0.9737	1.2439**
13. <b>Lanzarote</b>	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14. La Palma	1.0518*	0.9828**	1.0167	1.0668	0.9660	1.0151
15. <b>Gran Canaria</b>	1.1283**	0.9288**	1.0237	0.9946	1.0472	1.0206
16. <b>Madrid</b>	0.9915	1.0000	0.9957	1.1076	0.8800**	0.9873
17. <b>Menorca</b>	1.0198	1.0117	1.0157	1.0184	0.9864	1.0023
18. <b>Malaga</b>	1.0283	0.9177**	0.9714	1.0023	0.9952	0.9988
19. Melilla	1.3902**	1.0061	1.1827**	1.0274	1.1353	1.0800
20. <b>Palma Mall.</b>	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
21. Pamplona	1.0597	0.9858	1.0221	1.5432**	0.7752**	1.0938
22. Reus	0.9107*	0.9804*	0.9449*	0.9745	0.7547**	0.8576**
23. <b>Murcia</b>	0.9435**	1.0152	0.9787*	1.2981**	0.8103**	1.0256
24. S. Sebastian	1.0566	0.9107**	0.9809	0.8992	1.1292	1.0076
25. Tenerife	0.8835*	0.9657	0.9237*	1.1074	1.0015	1.0531
26. Santander	1.0421	0.9717**	1.0063	0.9472	0.9863	0.9665
27. Santiago	1.4942**	0.8325**	1.1153**	1.0051	0.9717	0.9883
28. Sevilla	1.7268**	0.9017**	1.2478**	1.1220	0.9937	1.0559
29. Valencia	1.0792**	0.9310**	1.0024	1.0383	1.0374	1.0379
30. Valladolid	1.0000	1.0000	1.0000	0.9316	0.8619**	0.8961**
31. Vigo	1.0410	0.9375**	0.9879	1.1203*	0.8368**	0.9682
32. Vitoria	1.0905	0.9815	1.0346	1.0780	0.9310**	1.0018
33. Zaragoza	1.0447	1.0329	1.0388	0.9003*	0.9309**	0.9155**
34. Sector Total	1.0804	0.9580	1.0173	1.0625	0.9411	1.0000

\*\* Índices significativamente diferentes de la unidad para un nivel de confianza del 10%

\* Índices significativamente diferentes de la unidad para un nivel de confianza del 5%

+ Índices de los cuales no ha sido posible obtener su distribución muestral

Cuadro A2-VIII: Descomposición de tecnología y tecnología de la escala (1992 – 94)

AEROPUERTOS	$\hat{T}(92, 93)$	$\hat{T}(93, 94)$	$\hat{T}(92, 94)$	$\widehat{ST}(92, 93)$	$\widehat{ST}(93, 94)$	$\widehat{ST}(92, 94)$
1. Alicante	0.9950	1.1373**	1.0638**	0.9784	1.0102	0.9942
2. Almeria	0.9973	1.1123**	1.0532*	0.9773	1.0559	1.0158
3. Asturias	0.9999	1.1031**	1.0502*	0.9747	1.0647	1.0187
4. Barcelona	0.9960	1.0511**	1.0232	0.9600	0.9990	0.9793
5. Bilbao	0.9885	1.0362	1.0121	0.9835	1.0716*	1.0266
6. Coruña	1.0206	1.0673*	1.0437	0.9549	1.1003**	1.0250
7. Fuerteventura	0.9832	1.1033**	1.0415	0.9913	1.0502*	1.0203
8. Gerona	0.9773	1.0052	0.9912	0.9972	1.1683**	1.0794*
9. Granada	1.0139	1.0452*	1.0294	0.9613	1.1235**	1.0392
10. Hierro	0.9544	1.0000	0.9769	1.0212	1.1745**	1.0952**
11. Ibiza	0.9921	1.0921**	1.0409*	0.9599	1.0287	0.9937
12. Jerez	0.9691*	1.0060	0.9874	1.0026	1.0460	1.0240
13. Lanzarote	1.0060	1.0910*	1.0476	0.9579	1.0131	0.9851
14. La Palma	0.9948	1.0234	1.0090	0.9797	1.1288**	1.0516
15. Gran Canaria	0.9936*	1.0851**	1.0383	1.0058	0.9887	0.9973
16. Madrid	0.7999 <sup>+</sup>	0.9885 <sup>+</sup>	0.8892 <sup>+</sup>	1.1953 <sup>+</sup>	1.0621 <sup>+</sup>	1.1268 <sup>+</sup>
17. Menorca	0.9848	1.0187	1.0016	0.9679	1.0497	1.0080
18. Malaga	1.0130	1.0586	1.0355	0.9814	1.0383	1.0095
19. Melilla	1.0220	1.0099	1.0159	0.9537	1.1629**	1.0531
20. Palma Mall.	0.9932	1.1025**	1.0464	0.9893	0.9798	0.9845
21. Pamplona	0.9717*	1.0000	0.9858	1.0030	1.1746**	1.0854**
22. Reus	0.9746*	1.0000	0.9872	1.0000	1.1742**	1.0836**
23. Murcia	0.9749	1.0000	0.9874	0.9997	1.1743**	1.0835*
24. S. Sebastian	0.9746*	1.0000	0.9872	1.0000	1.1745**	1.0838*
25. Tenerife	0.9410**	1.1710**	1.0497	1.0299	0.9053	0.9656
26. Santander	1.0235	1.0196	1.0216	0.9522	1.1516**	1.0472
27. Santiago	0.9884	1.1426**	1.0627**	0.9860	1.0277	1.0067
28. Sevilla	1.0129	1.0380**	1.0254**	0.9749	1.0281	1.0011
29. Valencia	0.9849	1.0313	1.0078	0.9704	1.0486	1.0087
30. Valladolid	0.9679*	1.0801*	1.0225	1.0096	1.0873**	1.0477*
31. Vigo	0.9971	1.0135	1.0053	0.9775	1.1588**	1.0643
32. Vitoria	1.0101	1.0064	1.0083	0.9649	1.1669**	1.0611
33. Zaragoza	1.0135	1.0272	1.0203	0.9616	1.1432**	1.0485
34. Sector Total	0.9849	1.0494	1.0167	0.9878	1.0804	1.0331

\*\* Indices significativamente diferentes de la unidad para un nivel de confianza del 10%

\* Indices significativamente diferentes de la unidad para un nivel de confianza del 5%

+ Indices de los cuales no ha sido posible obtener su distribución muestral

Cuadro A2-IX: Eficiencia Técnica corregida con el sesgo (1992)

	$\hat{\theta}$	h=0	h=.0075	h=.015	h=.03	h=.06	h=.12	h=.24	h=.48	h=1.25	h=.2062
1	0.5423	0.0000	0.0000	0.0000	0.3983	0.3951	0.3918	0.3938	0.3818	0.3140	0.3960
2	0.4573	0.3787	0.3777	0.3758	0.3738	0.3693	0.3652	0.3664	0.3610	0.3190	0.3673
3	0.6640	0.5559	0.5547	0.5516	0.5486	0.5417	0.5355	0.5373	0.5301	0.4711	0.5384
4	0.8002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.6683	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5362	0.5291	0.5305	0.5206	0.4593	0.5329
6	0.9449	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.7803	0.7847	0.7785	0.6836	0.7872
7	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6497	0.0000
8	0.2938	0.0000	0.0000	0.0000	0.2390	0.2353	0.2335	0.2337	0.2322	0.2033	0.2348
9	0.6271	0.5259	0.5252	0.5217	0.5186	0.5116	0.5065	0.5085	0.5023	0.4449	0.5096
10	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.6319	0.5145	0.5158	0.5126	0.5086	0.5053	0.4969	0.4977	0.4889	0.4269	0.5003
12	0.6009	0.4904	0.0000	0.4864	0.4828	0.4756	0.4712	0.4713	0.4679	0.4046	0.4741
13	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.7101	0.7057	0.7089	0.6827	0.5397	0.7159
14	0.6493	0.5453	0.5449	0.5411	0.5366	0.5293	0.5213	0.5219	0.5176	0.4626	0.5239
15	0.7318	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5496	0.5543	0.5382	0.0000	0.5555
16	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.6274	0.5241	0.5229	0.5197	0.5155	0.5105	0.5017	0.5020	0.4947	0.4440	0.5045
18	0.4634	0.0000	0.0000	0.0000	0.3612	0.3601	0.3536	0.3552	0.3478	0.2910	0.3573
19	0.8654	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.7086	0.7128	0.7069	0.6178	0.7141
20	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
21	0.5522	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4360	0.4355	0.0000	0.3702	0.4384
22	0.6607	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
23	0.5289	0.3782	0.3781	0.3753	0.3752	0.3683	0.3697	0.3696	0.3567	0.2647	0.3717
24	0.6981	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
25	0.8532	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
26	0.4789	0.0000	0.0000	0.0000	0.3753	0.3696	0.3684	0.3695	0.3659	0.3104	0.3710
27	0.5207	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4204	0.4216	0.4143	0.3663	0.4231
28	0.5435	0.4439	0.4463	0.4416	0.4392	0.4359	0.4277	0.4280	0.4228	0.3739	0.4304
29	0.4603	0.3847	0.3842	0.3818	0.3786	0.3751	0.3684	0.3686	0.3637	0.3262	0.3703
30	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
31	0.5477	0.4499	0.4490	0.4462	0.4428	0.4364	0.4330	0.4339	0.4300	0.3770	0.4358
32	0.2944	0.2326	0.2324	0.2310	0.2297	0.2266	0.2253	0.2263	0.2232	0.1893	0.2272
33	0.4390	0.3397	0.3388	0.3363	0.3353	0.3299	0.3303	0.3303	0.3234	0.2603	0.3329
n°		13	12	13	17	19	24	24	23	24	24

Cuadro A2-X : Eficiencia corregida con el sesgo estimado (1993)

	$\hat{\theta}$	h=0	h=.0075	h=.015	h=.03	h=.06	h=.12	h=.24	h=.48	h=1.25	h=.2197
1	0.5143	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3566	0.3503	0.3571	0.3544	0.2811	0.3585
2	0.4534	0.3543	0.355	0.3536	0.3519	0.3462	0.3417	0.3452	0.3459	0.2980	0.3520
3	0.6013	0.4696	0.4702	0.4681	0.4657	0.4578	0.4522	0.4565	0.4576	0.3941	0.4667
4	0.7542	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5459
5	0.6058	0.4946	0.4935	0.4909	0.4861	0.4801	0.4673	0.4725	0.4721	0.4236	0.4668
6	0.7681	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5810	0.5802	0.5827	0.5839	0.4947	0.0000
7	0.9839	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.2809	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2239	0.2196	0.2218	0.2225	0.1963	0.2203
9	0.4723	0.3518	0.3518	0.3496	0.3474	0.3419	0.3387	0.3431	0.3431	0.2864	0.3474
10	0.9737	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.6475	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4729	0.4653	0.4727	0.4710	0.3883	0.4700
12	0.5623	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4560	0.4467	0.4500	0.4520	0.4052	0.4457
13	1.0000	0.6585	0.0000	0.0000	0.0000	0.6526	0.6424	0.6566	0.0000	0.4782	0.6690
14	0.6173	0.5041	0.5028	0.5000	0.4956	0.4884	0.4769	0.4823	0.4828	0.4295	0.4789
15	0.6486	0.0000	0.0000	0.0000	0.4531	0.4546	0.4458	0.4563	0.4444	0.0000	0.4548
16	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6279	0.6204	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.6152	0.0000	0.0000	0.0000	0.4952	0.4872	0.4765	0.4821	0.4817	0.4277	0.4785
18	0.4507	0.0000	0.3393	0.3385	0.3348	0.3333	0.3262	0.3325	0.3283	0.2713	0.3293
19	0.6225	0.0000	0.4601	0.4570	0.4530	0.4467	0.4430	0.4484	0.4472	0.3640	0.4533
20	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6165	0.0000	0.6208	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
21	0.5211	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4117	0.0000	0.0000	0.4105
22	0.7255	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
23	0.5606	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
24	0.6607	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
25	0.9657	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
26	0.4596	0.3222	0.3221	0.3195	0.3172	0.3120	0.3113	0.3143	0.3138	0.2482	0.3211
27	0.3485	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2659	0.2619	0.2656	0.2657	0.2249	0.2677
28	0.3147	0.2578	0.257	0.2559	0.2530	0.2499	0.2433	0.2458	0.2457	0.2209	0.2426
29	0.4265	0.3475	0.3475	0.3460	0.3435	0.3380	0.3304	0.3342	0.3341	0.2974	0.3316
30	1.0000	0.0000	0.0000	0.6289	0.6288	0.6242	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
31	0.5262	0.4272	0.425	0.4225	0.4188	0.4128	0.4044	0.4088	0.4098	0.3615	0.4065
32	0.2700	0.0000	0.0000	0.2106	0.2089	0.2059	0.2027	0.2051	0.2055	0.1766	0.2052
33	0.4202	0.3000	0.3005	0.2983	0.2968	0.2925	0.2906	0.2927	0.2903	0.2257	0.2993
n°		11	12	14	17	24	24	23	21	21	23

Cuadro A2-XI:Eficiencia corregida con el sesgo estimado(1994)

	$\hat{\theta}$	h=0	h=.0075	h=.015	h=.03	h=.06	h=.12	h=.24	h=.48	h=1.25	h=.2128
1	0.5964	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4352	0.4345	0.4429	0.4325	0.3531	0.4393
2	0.5501	0.0000	0.4543	0.4536	0.4489	0.4369	0.4350	0.4394	0.4347	0.3805	0.4392
3	0.6084	0.4999	0.4975	0.4967	0.4921	0.4789	0.4767	0.4819	0.4760	0.4136	0.4812
4	0.8509	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.6824	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5480	0.5532	0.5484	0.4780	0.5537
6	0.6686	0.0000	0.5246	0.5230	0.5201	0.5063	0.5042	0.5112	0.5021	0.4207	0.5104
7	0.9886	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.3126	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2532	0.2493	0.2528	0.2509	0.2244	0.2524
9	0.4834	0.0000	0.3930	0.3904	0.3890	0.3789	0.3753	0.3809	0.3770	0.3296	0.3806
10	0.9737	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.6985	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5195	0.5301	0.0000	0.0000	0.5258
12	0.5667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4613	0.4673	0.4639	0.4223	0.4658
13	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6670	0.6631	0.6663	0.0000	0.0000	0.4724	0.6716
14	0.6281	0.5306	0.5299	0.5271	0.5221	0.5089	0.5020	0.5087	0.5046	0.4515	0.5066
15	0.6983	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5163	0.5230	0.0000	0.0000	0.5184
16	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6467	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.6081	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4871	0.4846	0.4898	0.4853	0.4271	0.4891
18	0.4911	0.0000	0.3853	0.3840	0.3811	0.3726	0.3722	0.3775	0.3709	0.3109	0.3741
19	0.6187	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4813	0.4757	0.4825	0.4762	0.4046	0.4824
20	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6408	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
21	0.5286	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4201	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
22	0.7400	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
23	0.5522	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
24	0.7255	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
25	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
26	0.4730	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3567	0.3545	0.3605	0.3547	0.2975	0.3601
27	0.4186	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3372	0.3401	0.3370	0.2943	0.3405
28	0.3490	0.2995	0.2985	0.2977	0.2940	0.2864	0.2826	0.2859	0.2836	0.2571	0.2844
29	0.4581	0.0000	0.3906	0.3898	0.3845	0.3745	0.3703	0.3745	0.3714	0.3351	0.3727
30	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6420	0.6432	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
31	0.5613	0.4616	0.4600	0.4571	0.4549	0.4432	0.4385	0.4448	0.4407	0.3888	0.4445
32	0.2751	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2170	0.2144	0.2176	0.2155	0.1892	0.2174
33	0.4068	0.2989	0.2994	0.2971	0.2973	0.2903	0.2895	0.2941	0.2844	0.2185	0.2944
n°		5	10	10	11	20	24	21	19	20	22

Cuadro A2-XII:  $\rho$ : Ratio de corrección del estimador (1992)

	h=0	h=.0075	h=.015	h=.03	h=.06	h=.12	h=.24	h=.48	h=1.25	h=2.062
1	0.9214	0.9585	0.9824	1.0177	1.1144	1.2303	1.1662	1.1987	1.1824	1.1586
2	1.2932	1.3917	1.367	1.4405	1.7744	2.0531	2.1572	2.179	2.1776	2.2357
3	1.1911	1.2943	1.2819	1.3504	1.7088	1.9854	2.1163	2.1229	2.012	2.2077
4	0.4977	0.4786	0.5226	0.552	0.6284	0.8118	0.8016	0.7499	0.6641	0.8496
5	0.8022	0.8574	0.8762	0.9592	1.0981	1.3906	1.4193	1.4206	1.3733	1.4759
6	0.5974	0.5874	0.6237	0.6682	0.8766	1.0832	1.1416	1.021	1.0776	1.1117
7	0.5961	0.6351	0.6152	0.6673	0.7262	0.8871	0.8798	0.9084	1.0322	0.9180
8	0.8406	0.8186	0.9254	1.0135	1.233	1.4801	1.5769	1.4327	1.5861	1.4896
9	1.2174	1.2872	1.2911	1.3627	1.737	2.0432	2.1741	2.1026	1.9361	2.2134
10	0.903	0.8637	0.8862	0.9376	0.9761	0.9925	0.8914	0.8277	0.9837	0.9094
11	1.0067	1.0538	1.103	1.2178	1.4057	1.8424	1.803	1.7836	1.4303	1.9154
12	1.0122	0.9564	1.0867	1.1726	1.4201	1.645	1.734	1.5489	1.605	1.6600
13	0.9117	0.932	0.9505	0.978	1.0514	1.1411	1.0664	1.094	1.147	1.0569
14	1.4636	1.4639	1.7211	1.7514	2.2276	2.6631	2.8465	2.6281	2.3452	2.8020
15	0.7894	0.7685	0.8313	0.8778	0.9361	1.2212	1.1315	1.0499	0.9512	1.1824
16	0.7798	0.8557	0.8911	0.8189	0.9184	0.8952	0.6933	0.549	0.5655	0.7564
17	1.223	1.2799	1.4119	1.4987	1.8333	2.3574	2.4075	2.3232	1.797	2.5662
18	0.9451	0.8828	0.9949	1.0172	1.1225	1.4485	1.3924	1.3382	1.3027	1.4595
19	0.6089	0.6324	0.6595	0.7264	0.9342	1.1579	1.1756	1.0762	1.1031	1.1823
20	0.9333	0.8071	0.8942	0.8737	0.8789	0.8999	0.7853	0.7052	0.7409	0.7853
21	0.5694	0.5608	0.6198	0.7077	0.847	1.0163	1.0758	0.9363	1.0096	1.0029
22	0.3903	0.3882	0.4321	0.4959	0.607	0.7856	0.8267	0.7187	0.7837	0.7780
23	1.3126	1.2432	1.3269	1.4792	1.5816	1.6656	1.5419	1.2635	1.1974	1.5427
24	0.4619	0.454	0.4902	0.5699	0.6681	0.849	0.8656	0.766	0.8171	0.8424
25	0.5587	0.5679	0.5788	0.5987	0.7101	0.8628	0.8507	0.7736	0.7501	0.8749
26	0.9333	0.8995	0.9783	1.0596	1.226	1.4751	1.4804	1.3593	1.4398	1.4296
27	0.7123	0.7795	0.758	0.8377	0.9759	1.1968	1.2198	1.2646	1.3736	1.3018
28	1.1206	1.0458	1.1843	1.2181	1.4651	1.8837	1.8451	1.8134	1.7179	2.0014
29	1.3561	1.3938	1.5611	1.6349	2.0327	2.6357	2.6467	2.5585	1.9702	2.8806
30	0.8344	0.8109	0.8727	0.9301	0.9975	0.933	0.8596	0.6798	0.8174	0.8142
31	1.2187	1.2029	1.3608	1.4166	1.7072	2.0319	2.1528	1.9598	2.1109	1.9968
32	1.2298	1.2144	1.2665	1.3182	1.5465	1.7842	1.766	1.6986	1.7305	1.7528
33	1.0897	1.0585	1.1618	1.25	1.4351	1.5881	1.5734	1.289	1.3742	1.4647
Av.	0.8714	0.8728	0.9306	0.9893	1.1529	1.3621	1.3492	1.2535	1.2508	1.3600

Cuadro A2-XIII:  $\rho$ :Ratio de corrección del estimador (1993)

	h=0	h=.0075	h=.015	h=.03	h=.06	h=.12	h=.24	h=.48	h=1.25	h=.2197
1	0.9802	0.9584	0.9767	0.9513	1.1627	1.3982	1.2193	1.0868	1.0922	1.1462
2	1.2343	1.2434	1.3018	1.3687	1.7387	2.0489	1.9818	1.7884	1.8856	1.8580
3	1.2614	1.2849	1.3432	1.4210	1.8164	2.0963	2.0351	1.8352	1.9187	1.8844
4	0.5843	0.6290	0.6130	0.7413	0.7837	0.9712	0.9295	0.8318	0.7598	1.1552
5	1.3305	1.4296	1.4915	1.5772	2.0234	2.6028	2.6640	2.4757	2.1179	2.6158
6	0.8567	0.8853	0.9134	0.9828	1.2475	1.3149	1.4056	1.2218	1.3102	0.8854
7	0.6187	0.5772	0.6018	0.6019	0.6887	0.8819	0.8002	0.6883	0.7706	0.8007
8	0.6932	0.7438	0.7871	0.8544	1.1190	1.3852	1.4823	1.3997	1.3533	1.4696
9	1.4731	1.5162	1.5622	1.6408	1.9968	2.0740	1.9297	1.7359	2.0364	1.9731
10	0.4929	0.5208	0.5518	0.5817	0.7030	0.8317	0.8440	0.7436	0.7901	0.8228
11	0.8240	0.8284	0.8360	0.8652	1.0607	1.3685	1.2717	1.1157	1.0329	1.2581
12	0.6680	0.7153	0.7547	0.8317	1.1060	1.4055	1.4910	1.4503	1.3638	1.5017
13	1.0179	0.9847	0.9861	0.9382	1.1155	1.2604	1.0803	0.9570	1.0587	1.0340
14	1.4044	1.4782	1.5680	1.6197	2.1910	2.7319	2.7618	2.5671	2.3038	2.7433
15	0.9057	0.9540	0.9761	1.0803	1.1421	1.3942	1.2640	1.0839	0.9891	1.4054
16	0.8907	0.9043	0.9561	0.9360	1.0007	1.0028	0.7877	0.6220	0.5830	0.8269
17	0.9370	0.9587	0.9803	1.0711	1.3390	1.9258	1.9688	1.6694	1.3611	1.8636
18	0.9818	1.0398	1.0619	1.1934	1.2923	1.6046	1.4951	1.3812	1.3270	1.5732
19	0.9865	1.0326	1.0921	1.1624	1.3874	1.4670	1.4207	1.2514	1.3844	1.4742
20	0.9216	0.9751	0.9494	1.0671	0.9996	1.0256	0.8117	0.6845	0.7036	0.8758
21	0.5092	0.5437	0.5767	0.6211	0.7922	0.9759	1.0414	0.9604	0.9369	1.0253
22	0.3579	0.3918	0.4083	0.4499	0.5878	0.7594	0.8186	0.7639	0.7356	0.8396
23	0.6001	0.6315	0.6729	0.7109	0.8580	0.9710	0.9823	0.8571	0.8728	0.9681
24	0.4672	0.5083	0.5307	0.5754	0.7270	0.8907	0.9510	0.8566	0.8504	0.9550
25	0.5295	0.5951	0.6340	0.6712	0.7285	0.8233	0.7494	0.6298	0.6620	0.9284
26	1.1568	1.1932	1.2560	1.3016	1.5086	1.4499	1.3705	1.2106	1.4569	1.3867
27	0.9026	0.8665	0.9080	0.9263	1.1010	1.4012	1.3040	1.1430	1.2379	1.2773
28	1.2740	1.3613	1.4373	1.5325	1.9343	2.4417	2.5202	2.3656	2.1412	2.4667
29	1.0409	1.0726	1.0956	1.1928	1.5060	2.1483	2.2034	1.8769	1.5202	2.0796
30	0.9244	0.9412	1.0038	1.0270	1.1314	0.9947	0.8641	0.6985	0.8690	0.8805
31	1.0690	1.1199	1.1985	1.2586	1.6857	2.0248	2.0736	1.9804	1.9205	2.0608
32	0.9024	0.9470	1.0015	1.0716	1.3639	1.5731	1.6048	1.4774	1.5351	1.6039
33	1.2296	1.2686	1.3447	1.3915	1.6254	1.5768	1.4379	1.2229	1.4049	1.4665
Av	0.8600	0.8931	0.9292	0.9844	1.1846	1.3887	1.3396	1.1896	1.1941	1.3351

Cuadro A2-XIV:  $\rho$ :Ratio de corrección del estimador (1994)

	h=0	h=.0075	h=.015	h=.03	h=.06	h=.12	h=.24	h=.48	h=1.25	h=.2128
1	0.7807	0.7820	0.7804	0.9493	1.0589	1.1606	1.1016	1.0363	1.0755	1.1688
2	0.9590	1.0544	1.0661	1.2550	1.4995	1.9198	1.9026	1.7501	1.7575	1.8896
3	1.0246	1.1260	1.1510	1.3223	1.5792	2.0019	1.9671	1.7488	1.7618	1.9238
4	0.4034	0.4386	0.4816	0.5165	0.6570	0.8304	0.8101	0.7542	0.2551	0.8154
5	0.5423	0.5785	0.5774	0.6947	0.8856	1.1232	1.1614	1.1299	1.0880	1.1783
6	0.9440	1.0214	1.0665	1.1235	1.3898	1.6433	1.5660	1.3149	1.3936	1.5194
7	0.5313	0.5328	0.5080	0.6170	0.7289	0.7632	0.7519	0.6968	0.8681	0.7518
8	0.6817	0.7144	0.7582	0.8135	1.1022	1.4828	1.4309	1.3749	1.3845	1.4547
9	0.9482	1.0193	1.0533	1.0951	1.4276	1.7714	1.6587	1.5614	1.7050	1.6443
10	0.4612	0.4789	0.5196	0.5056	0.6460	0.7708	0.6988	0.6234	0.6901	0.6972
11	0.6681	0.6892	0.6754	0.8150	0.9443	1.0856	1.0204	0.9733	0.9719	1.0949
12	0.5836	0.6135	0.6623	0.7169	0.9894	1.3727	1.3441	1.3318	1.2803	1.3926
13	0.9803	0.9284	0.9123	1.0905	1.1170	1.0694	0.9361	0.9287	1.0997	1.0169
14	1.1886	1.2898	1.3065	1.4697	1.8441	2.3921	2.3833	2.2982	2.1425	2.3534
15	0.7049	0.7487	0.7381	0.7738	0.9796	1.0732	1.0178	0.8615	0.8865	1.0788
16	0.8490	0.8652	0.9616	0.9794	1.0027	0.9753	0.7530	0.6148	0.5455	0.8649
17	0.6890	0.7303	0.7330	0.8835	1.1103	1.3635	1.4457	1.3964	1.2851	1.4914
18	0.9631	1.0562	1.0639	1.1398	1.3936	1.5693	1.5402	1.3956	1.4214	1.5768
19	0.7645	0.7859	0.8487	0.8511	1.1093	1.4029	1.2632	1.1547	1.1489	1.2905
20	0.8809	0.9185	0.9395	0.9130	1.0318	0.9690	0.7927	0.6590	0.7093	0.8323
21	0.4829	0.4959	0.5445	0.5602	0.7542	1.0140	0.9894	0.9309	0.9194	0.9867
22	0.3385	0.3554	0.3856	0.4104	0.5620	0.7845	0.7779	0.7405	0.7257	0.7844
23	0.5854	0.6007	0.6553	0.6487	0.8318	0.9971	0.9098	0.8105	0.8173	0.9166
24	0.3402	0.3546	0.3846	0.4087	0.5673	0.8033	0.8014	0.7676	0.7415	0.8107
25	0.5779	0.5775	0.6149	0.6835	0.7440	0.8165	0.8112	0.6542	0.6882	0.8342
26	0.7600	0.7883	0.8421	0.8337	1.0783	1.2857	1.1664	1.0581	1.1558	1.1533
27	0.6026	0.6495	0.6474	0.7898	0.9896	1.2683	1.3126	1.2593	1.2661	1.3193
28	1.0182	1.1232	1.1352	1.2805	1.6626	2.1613	2.2625	2.2111	2.0354	2.2697
29	0.9223	1.0159	1.0275	1.1784	1.5201	1.9503	2.1035	2.0272	1.8317	2.1180
30	0.8653	0.8711	0.9220	0.8875	1.0239	1.0060	0.8108	0.6876	0.8215	0.8327
31	1.0314	1.1134	1.1415	1.2090	1.5688	1.9595	1.8587	1.7594	1.8910	1.8375
32	0.7697	0.8077	0.8520	0.8816	1.1684	1.4823	1.4010	1.3185	1.4189	1.3904
33	1.0514	1.0770	1.1327	1.1144	1.3430	1.4565	1.2446	1.0855	1.2284	1.2665
Av	0.7179	0.7533	0.7818	0.8476	1.0505	1.2564	1.1937	1.0965	1.0872	1.2158

Cuadro A2-XV : Bootstrap con bandwith h=0.2062 (1992)

AEROPUERTOS	$\hat{\theta}(x, y)$	$\widehat{SSG}$	STD	$\rho$	$\hat{\theta}(x, y)$	2.5%	97.5%	5%	95%
1 Alicante	<b>0.5423</b>	0.1463	0.0785	1.1586	<b>0.3960</b>	0.2477	0.5307	0.2761	0.5233
2 Almeria	<b>0.4573</b>	0.0900	0.0348	2.2357	<b>0.3673</b>	0.2970	0.4327	0.3093	0.4240
3 Asturias	<b>0.6640</b>	0.1256	0.0488	2.2077	<b>0.5384</b>	0.4356	0.6285	0.4554	0.6173
4 Barcelona	0.8002	0.1568	0.0982	0.8496	0.0000	0.4182	0.7876	0.4542	0.7772
5 Bilbao	<b>0.6683</b>	0.1354	0.0644	1.4759	<b>0.5329</b>	0.3966	0.6317	0.4154	0.6242
6 Coruña	<b>0.9449</b>	0.1577	0.0864	1.1117	<b>0.7872</b>	0.5987	0.9296	0.6311	0.9161
7 Fuerteventura	1.0000	0.2130	0.1284	0.9180	0.0000	0.5359	0.9827	0.5635	0.9665
8 Gerona	<b>0.2938</b>	0.0590	0.0279	1.4896	<b>0.2348</b>	0.1796	0.2801	0.1877	0.2764
9 Granada	<b>0.6271</b>	0.1175	0.0456	2.2134	<b>0.5096</b>	0.4073	0.5938	0.4301	0.5817
10 Hierro	1.0000	0.3137	0.1900	0.9094	0.0000	0.3180	0.9856	0.3663	0.9716
11 Ibiza	<b>0.6319</b>	0.1317	0.0549	1.9154	<b>0.5003</b>	0.3875	0.5954	0.4049	0.5884
12 Jerez	<b>0.6009</b>	0.1268	0.0568	1.6600	<b>0.4741</b>	0.3625	0.5702	0.3771	0.5606
13 Lanzarote	<b>1.0000</b>	0.2841	0.1596	1.0569	<b>0.7159</b>	0.4237	0.9809	0.4687	0.9672
14 La Palma	<b>0.6493</b>	0.1254	0.0433	2.8020	<b>0.5239</b>	0.4373	0.6042	0.4501	0.5924
15 G.Canaria	<b>0.7318</b>	0.1763	0.0936	1.1824	<b>0.5555</b>	0.3421	0.6885	0.3810	0.6777
16 Madrid	1.0000	0.3212	0.2133	0.7564	0.0000	0.2424	0.9978	0.3053	0.9823
17 Menorca	<b>0.6274</b>	0.1228	0.0443	2.5662	<b>0.5045</b>	0.4124	0.5866	0.4296	0.5775
18 Málaga	<b>0.4634</b>	0.1061	0.0507	1.4595	<b>0.3573</b>	0.2586	0.4471	0.2710	0.4409
19 Melilla	<b>0.8654</b>	0.1513	0.0804	1.1823	<b>0.7141</b>	0.5350	0.8383	0.5699	0.8299
20 Palma Mall.	1.0000	0.3300	0.2151	0.7853	0.0000	0.2103	0.9874	0.2814	0.9729
21 Pamplona	<b>0.5522</b>	0.1138	0.0656	1.0029	<b>0.4384</b>	0.3011	0.5443	0.3270	0.5358
22 Reus	0.6607	0.1144	0.0749	0.7780	0.0000	0.3775	0.6557	0.4128	0.6511
23 Murcia	<b>0.5289</b>	0.1573	0.0731	1.5427	<b>0.3717</b>	0.2079	0.4932	0.2384	0.4807
24 San Sebastian	0.6981	0.1324	0.0833	0.8424	0.0000	0.3764	0.6882	0.4144	0.6797
25 Tenerife	0.8532	0.1801	0.1112	0.8749	0.0000	0.4218	0.8256	0.4720	0.8170
26 Santander	<b>0.4789</b>	0.1079	0.0521	1.4296	<b>0.3710</b>	0.2656	0.4552	0.2825	0.4482
27 Santiago	<b>0.5207</b>	0.0976	0.0494	1.3018	<b>0.4231</b>	0.3213	0.5033	0.3377	0.4958
28 Sevilla	<b>0.5435</b>	0.1131	0.0462	2.0014	<b>0.4304</b>	0.3420	0.5190	0.3536	0.5105
29 Valencia	<b>0.4603</b>	0.0900	0.0306	2.8806	<b>0.3703</b>	0.3071	0.4263	0.3175	0.4202
30 Valladolid	1.0000	0.3287	0.2103	0.8142	0.0000	0.2255	0.9858	0.3046	0.9704
31 Vigo	<b>0.5477</b>	0.1120	0.0458	1.9968	<b>0.4358</b>	0.3464	0.5162	0.3589	0.5069
32 Vitoria	<b>0.2944</b>	0.0673	0.0293	1.7528	<b>0.2272</b>	0.1685	0.2799	0.1766	0.2740
33 Zaragoza	<b>0.4390</b>	0.1061	0.0506	1.4647	<b>0.3329</b>	0.2234	0.4143	0.2431	0.4065

Cuadro A2-XVI: Bootstrap con bandwith h=0.2197 (1993)

AEROPUERTOS	$\hat{\theta}(x, y)$	$\widehat{SSG}$	STD	$\rho$	$\hat{\theta}(x, y)$	2.5%	97.5%	5%	95%
1 Alicante	<b>0.5143</b>	0.1557	0.0840	1.1462	<b>0.3585</b>	0.2025	0.5041	0.2224	0.4953
2 Almeria	<b>0.4534</b>	0.1014	0.0429	1.8580	<b>0.3520</b>	0.2630	0.4300	0.2803	0.4199
3 Asturias	<b>0.6013</b>	0.1346	0.0560	1.8844	<b>0.4667</b>	0.3468	0.5706	0.3733	0.5570
4 Barcelona	<b>0.7542</b>	0.2082	0.1102	1.1552	<b>0.5459</b>	0.3045	0.7383	0.3419	0.7214
5 Bilbao	<b>0.6058</b>	0.1390	0.0496	2.6158	<b>0.4668</b>	0.3652	0.5578	0.3841	0.5463
6 Coruña	0.7681	0.1548	0.0950	0.8854	0.0000	0.4185	0.7737	0.4550	0.7602
7 Fuerteventura	0.9839	0.2291	0.1470	0.8007	0.0000	0.4503	0.9682	0.4989	0.9570
8 Geroná	<b>0.2809</b>	0.0605	0.0280	1.4696	<b>0.2203</b>	0.1608	0.2690	0.1711	0.2637
9 Granada	<b>0.4723</b>	0.1248	0.0513	1.9731	<b>0.3474</b>	0.2461	0.4452	0.2641	0.4325
10 Hierro	0.9737	0.2050	0.1305	0.8228	0.0000	0.5025	0.9644	0.5496	0.9560
11 Ibiza	<b>0.6475</b>	0.1775	0.0910	1.2581	<b>0.4700</b>	0.2833	0.6270	0.3162	0.6181
12 Jerez	<b>0.5623</b>	0.1166	0.0540	1.5017	<b>0.4457</b>	0.3288	0.5374	0.3519	0.5275
13 Lanzarote	<b>1.0000</b>	0.3309	0.1870	1.0340	<b>0.6690</b>	0.3109	0.9817	0.3727	0.9659
14 La Palma	<b>0.6173</b>	0.1384	0.0480	2.7433	<b>0.4789</b>	0.3803	0.5660	0.3981	0.5552
15 GCanaria	<b>0.6486</b>	0.1938	0.0940	1.4054	<b>0.4548</b>	0.2614	0.6135	0.2885	0.5968
16 Madrid	1.0000	0.3511	0.2220	0.8269	0.0000	0.1739	0.9835	0.2605	0.9695
17 Menorca	<b>0.6152</b>	0.1367	0.0570	1.8636	<b>0.4785</b>	0.3589	0.5716	0.3769	0.5630
18 Málaga	<b>0.4507</b>	0.1213	0.0558	1.5732	<b>0.3293</b>	0.2137	0.4307	0.2341	0.4203
19 Melilla	<b>0.6225</b>	0.1692	0.0800	1.4742	<b>0.4533</b>	0.2914	0.5939	0.3171	0.5817
20 Palma Mall.	1.0000	0.3568	0.2200	0.8758	0.0000	0.1749	0.9836	0.2415	0.9601
21 Pamplona	<b>0.5211</b>	0.1106	0.0630	1.0253	<b>0.4105</b>	0.2804	0.5115	0.3032	0.5010
22 Reus	0.7255	0.1373	0.0860	0.8396	0.0000	0.4052	0.7186	0.4391	0.7123
23 Murcia	0.5606	0.1265	0.0740	0.9681	0.0000	0.2807	0.5509	0.3075	0.5413
24 San Sebastian	0.6607	0.1393	0.0820	0.9550	0.0000	0.3477	0.6485	0.3835	0.6399
25 Tenerife	0.9657	0.2428	0.1450	0.9284	0.0000	0.3952	0.9282	0.4487	0.9177
26 Santander	<b>0.4596</b>	0.1385	0.0679	1.3867	<b>0.3211</b>	0.1884	0.4392	0.2079	0.4296
27 Santiago	<b>0.3485</b>	0.0807	0.0410	1.2773	<b>0.2677</b>	0.1859	0.3346	0.1956	0.3292
28 Sevilla	<b>0.3147</b>	0.0721	0.0260	2.4667	<b>0.2426</b>	0.1890	0.2942	0.1992	0.2869
29 Valencia	<b>0.4265</b>	0.0949	0.0380	2.0796	<b>0.3316</b>	0.2518	0.3933	0.2652	0.3876
30 Valladolid	1.0000	0.3558	0.2190	0.8805	0.0000	0.2173	0.9815	0.2632	0.9594
31 Vigo	<b>0.5262</b>	0.1192	0.0481	2.0608	<b>0.4065</b>	0.3083	0.4916	0.3235	0.4803
32 Vitoria	<b>0.2700</b>	0.0647	0.0295	1.6039	<b>0.2052</b>	0.1471	0.2577	0.1547	0.2521
33 Zaragoza	<b>0.4202</b>	0.1208	0.0570	1.4665	<b>0.2993</b>	0.1877	0.3997	0.2027	0.3885

Cuadro A2-XVII : Bootstrap con bandwith h=0.2128 (1994)

AEROPUERTOS	$\hat{\theta}(x, y)$	$\widehat{SSG}$	STD	$\rho$	$\hat{\theta}(x, y)$	2.5%	97.5%	5%	95%
1 Alicante	<b>0.5964</b>	0.1571	0.0839	1.1688	<b>0.4393</b>	0.2718	0.5864	0.2972	0.5770
2 Almeria	<b>0.5501</b>	0.1110	0.0466	1.8896	<b>0.4392</b>	0.3413	0.5252	0.3578	0.5129
3 Asturias	<b>0.6084</b>	0.1272	0.0529	1.9238	<b>0.4812</b>	0.3711	0.5792	0.3881	0.5671
4 Barcelona	0.8509	0.1675	0.1071	0.8154	0.0000	0.4456	0.8344	0.4868	0.8256
5 Bilbao	<b>0.6824</b>	0.1287	0.0685	1.1783	<b>0.5537</b>	0.4045	0.6593	0.4268	0.6507
6 Coruña	<b>0.6686</b>	0.1581	0.0741	1.5194	<b>0.5104</b>	0.3555	0.6373	0.3789	0.6236
7 Fuerteventura	0.9886	0.2130	0.1419	0.7518	0.0000	0.4874	0.9754	0.5164	0.9642
8 Gerona	<b>0.3126</b>	0.0602	0.0288	1.4547	<b>0.2524</b>	0.1935	0.3012	0.2020	0.2967
9 Granada	<b>0.4834</b>	0.1028	0.0463	1.6443	<b>0.3806</b>	0.2928	0.4597	0.3052	0.4526
10 Hierro	0.9737	0.2084	0.1441	0.6972	0.0000	0.4574	0.9649	0.5052	0.9568
11 Ibiza	<b>0.6985</b>	0.1727	0.0953	1.0949	<b>0.5258</b>	0.3298	0.6859	0.3559	0.6753
12 Jerez	<b>0.5667</b>	0.1009	0.0494	1.3926	<b>0.4658</b>	0.3618	0.5466	0.3795	0.5394
13 Lanzarote	<b>1.0000</b>	0.3284	0.1881	1.0169	<b>0.6716</b>	0.3311	0.9856	0.3767	0.9696
14 La Palma	<b>0.6281</b>	0.1215	0.0457	2.3534	<b>0.5066</b>	0.4107	0.5891	0.4270	0.5785
15 GCanaria	<b>0.6983</b>	0.1799	0.1000	1.0788	<b>0.5184</b>	0.3113	0.6809	0.3470	0.6693
16 Madrid	1.0000	0.3557	0.2209	0.8649	0.0000	0.1802	0.9807	0.2520	0.9643
17 Menorca	<b>0.6081</b>	0.1190	0.0563	1.4914	<b>0.4891</b>	0.3736	0.5807	0.3907	0.5726
18 Málaga	<b>0.4911</b>	0.1170	0.0538	1.5768	<b>0.3741</b>	0.2660	0.4676	0.2845	0.4597
19 Melilla	<b>0.6187</b>	0.1363	0.0693	1.2905	<b>0.4824</b>	0.3439	0.5992	0.3649	0.5923
20 Palma Mall.	1.0000	0.3582	0.2267	0.8323	0.0000	0.1478	0.9841	0.2391	0.9651
21 Pamplona	0.5286	0.1030	0.0599	0.9867	0.0000	0.2972	0.5196	0.3215	0.5123
22 Reus	0.7400	0.1265	0.0825	0.7844	0.0000	0.4303	0.7318	0.4602	0.7265
23 Murcia	0.5522	0.1232	0.0743	0.9166	0.0000	0.2720	0.5436	0.2967	0.5364
24 San Sebastian	0.7255	0.1239	0.0794	0.8107	0.0000	0.4236	0.7145	0.4531	0.7091
25 Tenerife	1.0000	0.2462	0.1557	0.8342	0.0000	0.4138	0.9796	0.4584	0.9623
26 Santander	<b>0.4730</b>	0.1128	0.0607	1.1533	<b>0.3601</b>	0.2411	0.4606	0.2581	0.4545
27 Santiago	<b>0.4186</b>	0.0781	0.0393	1.3193	<b>0.3405</b>	0.2547	0.4042	0.2687	0.3983
28 Sevilla	<b>0.3490</b>	0.0647	0.0248	2.2697	<b>0.2844</b>	0.2317	0.3286	0.2421	0.3222
29 Valencia	<b>0.4581</b>	0.0854	0.0339	2.1180	<b>0.3727</b>	0.3009	0.4295	0.3144	0.4233
30 Valladolid	1.0000	0.3466	0.2194	0.8327	0.0000	0.2021	0.9830	0.2807	0.9690
31 Vigo	<b>0.5613</b>	0.1168	0.0498	1.8375	<b>0.4445</b>	0.3464	0.5318	0.3624	0.5235
32 Vitoria	<b>0.2751</b>	0.0577	0.0283	1.3904	<b>0.2174</b>	0.1620	0.2649	0.1704	0.2607
33 Zaragoza	<b>0.4068</b>	0.1123	0.0577	1.2665	<b>0.2944</b>	0.1839	0.3925	0.2012	0.3862

Cuadro A2-XVIII: Intervalos de Confianza del Índice de Malmquist (1992-94)

	$\widehat{\mathcal{M}}_{92-93}$	2.5%	97.5%	$\widehat{\mathcal{M}}_{93-94}$	2.5%	97.5%	$\widehat{\mathcal{M}}_{92-94}$	2.5%	97.5%
1	1.0320	1.0238	1.0527	0.9883	0.9128	1.0221	1.0099	0.9729	1.0294
2	0.9634	0.9634	0.9678	0.9025	0.9026	0.9029	0.9324	0.9325	0.9347
3	1.0748	1.0748	1.0815	1.0896	1.0896	1.0930	1.0822	1.0822	1.0869
4	1.0216	0.9764	1.0216	0.9301	0.8813	0.9301	0.9748	0.9417	0.9747
5	1.2784	1.0747	1.4970	0.8071	0.6791	0.8762	1.0158	0.8994	1.1051
6	1.1286	1.1286	1.1353	1.2263	1.2264	1.2336	1.1765	1.1765	1.1850
7	1.0072	1.0072	1.0721	1.1418	1.1264	1.2060	1.0724	1.0658	1.1198
8	1.2218	1.2218	1.2280	0.8917	0.8915	0.8923	1.0438	1.0437	1.0464
9	1.3047	1.3047	1.3207	1.1780	1.1782	1.1933	1.2397	1.2398	1.2529
10	1.2919	1.2919	1.3042	0.9090	0.9000	0.9089	1.0837	1.0786	1.0887
11	0.9119	0.8845	0.9586	1.0172	0.9800	1.0624	0.9631	0.9402	0.9967
12	1.6500	1.3595	1.8475	1.0167	0.9765	1.0405	1.2952	1.1764	1.3762
13	0.9636	0.9485	0.9727	1.1053	1.0362	1.1411	1.0320	0.9950	1.0499
14	1.0936	1.0936	1.1588	1.0968	1.0613	1.1384	1.0952	1.0828	1.1340
15	1.1216	1.0340	1.1992	1.0435	0.9859	1.1508	1.0818	1.0357	1.1601
16	1.0500	0.9972	1.0500	0.9239	0.8572	0.9239	0.9850	0.9427	0.9849
17	0.9899	0.9424	1.0161	1.0671	1.0395	1.1120	1.0278	0.9998	1.0511
18	1.0247	0.9997	1.0548	1.0040	0.9498	1.0567	1.0143	0.9891	1.0501
19	1.3920	1.3920	1.4207	1.3414	1.3414	1.3818	1.3665	1.3664	1.3936
20	0.9826	0.9601	1.0090	1.0802	1.0410	1.1105	1.0302	1.0078	1.0546
21	1.5939	1.5939	1.7613	0.8977	0.7811	0.8975	1.1961	1.1351	1.2536
22	0.8650	0.8346	0.8650	0.8688	0.8574	0.8690	0.8669	0.8508	0.8670
23	1.1936	1.1573	1.1936	0.9661	0.9515	0.9662	1.0738	1.0558	1.0739
24	0.9260	0.9260	0.9307	1.2078	1.2080	1.2235	1.0575	1.0577	1.0659
25	0.9482	0.9178	0.9677	1.0253	0.9222	1.0837	0.9860	0.9326	1.0102
26	0.9620	0.9555	0.9620	1.1253	1.1255	1.1309	1.0405	1.0372	1.0428
27	1.4636	1.4636	1.5336	0.9500	0.8869	0.9500	1.1792	1.1443	1.2045
28	1.9133	1.7127	2.0586	0.9562	0.9227	0.9837	1.3526	1.2807	1.4064
29	1.0709	1.0392	1.0813	1.0444	0.9091	1.1382	1.0576	0.9867	1.1072
30	0.9103	0.7502	0.9741	1.0122	0.9573	1.0123	0.9599	0.8675	0.9936
31	1.1366	1.1366	1.1474	0.9213	0.9186	0.9213	1.0233	1.0218	1.0280
32	1.1457	1.1457	1.1652	1.0731	1.0733	1.0792	1.1088	1.1089	1.1198
33	0.9167	0.8567	0.9167	1.1292	1.1241	1.1293	1.0174	0.9848	1.0175

Cuadro A2-XIX: Intervalos de Confianza del Cambio en la Eficiencia (1992-94)

	$\hat{\mathcal{E}}_{92-93}$	2.5%	97.5%	$\hat{\mathcal{E}}_{93-94}$	2.5%	97.5%	$\hat{\mathcal{E}}_{92-94}$	2.5%	97.5%
1	1.0546	0.9838	1.1894	0.8623	0.7685	0.8896	0.9536	0.8928	1.0065
2	1.0086	0.9265	1.1393	0.8242	0.7316	0.8491	0.9118	0.8505	0.9663
3	1.1042	1.0156	1.2551	0.9883	0.8880	1.0252	1.0446	0.9809	1.1145
4	1.0610	1.0086	1.2263	0.8863	0.7632	0.9089	0.9697	0.9058	1.0359
5	1.1032	0.9221	1.2213	0.8877	0.7835	1.0093	0.9896	0.8830	1.0790
6	1.2301	1.1009	1.4637	1.1488	1.0452	1.2424	1.1888	1.1190	1.3200
7	1.0163	0.9474	1.1535	0.9952	0.9141	1.0403	1.0057	0.9527	1.0726
8	1.0459	0.9487	1.1518	0.8986	0.8376	0.9273	0.9694	0.9136	1.0152
9	1.3278	1.2095	1.5555	0.9770	0.8041	1.0117	1.1390	1.0454	1.2356
10	1.0270	0.6639	1.0983	1.0000	0.9221	1.0829	1.0134	0.8473	1.0673
11	0.9760	0.9237	1.1322	0.9269	0.8538	0.9695	0.9512	0.9041	1.0288
12	1.0687	0.9398	1.1488	0.9922	0.9272	1.0120	1.0297	0.9551	1.0660
13	1.0000	0.9452	1.1461	1.0000	0.9182	1.0513	1.0000	0.9529	1.0746
14	1.0518	0.9913	1.1430	0.9828	0.9223	0.9979	1.0167	0.9731	1.0556
15	1.1283	1.0716	1.2949	0.9288	0.8315	0.9527	1.0237	0.9688	1.0954
16	0.9915	0.9287	1.1405	1.0000	0.9080	1.0569	0.9957	0.9411	1.0749
17	1.0198	0.9461	1.1215	1.0116	0.9437	1.0486	1.0157	0.9635	1.0671
18	1.0283	0.9713	1.1519	0.9177	0.8437	0.9482	0.9714	0.9243	1.0245
19	1.3902	1.2073	1.6742	1.0061	0.8488	1.0201	1.1827	1.0751	1.2961
20	1.0000	0.9320	1.1483	1.0000	0.9143	1.0596	1.0000	0.9481	1.0747
21	1.0597	0.9493	1.1753	0.9858	0.9144	1.0177	1.0221	0.9582	1.0750
22	0.9107	0.8168	1.0213	0.9804	0.9051	1.0169	0.9449	0.8868	1.0010
23	0.9435	0.7587	0.9914	1.0152	0.9430	1.0715	0.9787	0.8790	1.0077
24	1.0566	0.9582	1.1944	0.9107	0.7861	0.9350	0.9809	0.9026	1.0368
25	0.8835	0.8222	1.0155	0.9657	0.8978	1.0308	0.9237	0.8797	1.0042
26	1.0421	0.9461	1.2761	0.9716	0.7687	0.9960	1.0063	0.9057	1.1113
27	1.4942	1.4080	1.7183	0.8325	0.7032	0.8504	1.1153	1.0326	1.1893
28	1.7268	1.5580	1.8783	0.9017	0.8331	0.9179	1.2478	1.1630	1.2908
29	1.0792	1.0024	1.1838	0.9310	0.8399	0.9500	1.0024	0.9405	1.0475
30	1.0000	0.9314	1.1473	1.0000	0.9064	1.0610	1.0000	0.9445	1.0760
31	1.0410	0.9494	1.1325	0.9374	0.8737	0.9876	0.9879	0.9341	1.0382
32	1.0905	0.9362	1.2095	0.9814	0.8884	1.0222	1.0346	0.9435	1.0921
33	1.0447	0.9693	1.2058	1.0329	0.9413	1.0996	1.0388	0.9847	1.1236

Cuadro A2-XX: Intervalos de Confianza del Cambio en la Escala (1992-94)

	$\hat{S}_{92-93}$	2.5%	97.5%	$\hat{S}_{93-94}$	2.5%	97.5%	$\hat{S}_{92-94}$	2.5%	97.5%
1	1.0052	0.8352	1.1421	0.9976	0.8141	1.0848	1.0014	0.8785	1.0771
2	0.9801	0.822	1.1513	0.9323	0.7331	1.0165	0.9559	0.8332	1.0445
3	0.9987	0.8275	1.1679	0.9388	0.7361	1.0197	0.9683	0.8362	1.054
4	1.0071	0.8118	1.1347	0.9994	0.8378	1.112	1.0032	0.8697	1.0846
5	1.1919	0.9559	1.4725	0.8188	0.564	0.9433	0.9879	0.8167	1.1228
6	0.9414	0.7295	1.1083	0.9089	0.6741	0.9738	0.925	0.763	0.9985
7	1.0168	0.883	1.1793	0.9901	0.8329	1.0698	1.0034	0.9071	1.0919
8	1.1987	1.0534	1.4276	0.8450	0.6523	0.8953	1.0064	0.8885	1.0979
9	1.0082	0.7853	1.1762	1.0267	0.8219	1.1595	1.0174	0.8654	1.1191
10	1.2906	1.1755	1.6969	0.7740	0.5626	0.8183	0.9995	0.8852	1.1613
11	0.9811	0.7656	1.1419	0.9768	0.7894	1.0426	0.9789	0.8398	1.0611
12	1.5892	1.2909	1.8699	0.9737	0.8506	1.0487	1.2439	1.101	1.3605
13	1.0000	0.8114	1.1309	1.0000	0.846	1.0943	1.0000	0.8815	1.0789
14	1.0668	0.9488	1.2286	0.9660	0.8115	1.0241	1.0151	0.9214	1.0914
15	0.9946	0.8256	1.1186	1.0472	0.9188	1.1633	1.0206	0.9159	1.1079
16	1.1076	0.8964	1.2495	0.8800	0.7038	0.9351	0.9873	0.8424	1.0462
17	1.0184	0.876	1.1625	0.9864	0.8583	1.0831	1.0023	0.9102	1.0864
18	1.0023	0.8714	1.1211	0.9952	0.8471	1.0628	0.9988	0.8955	1.0659
19	1.0274	0.7601	1.2144	1.1353	0.9392	1.2744	1.0800	0.9118	1.1977
20	1.0000	0.8371	1.1354	1.0000	0.8198	1.0775	1.0000	0.8757	1.0743
21	1.5432	1.3986	1.8538	0.7752	0.5808	0.8154	1.0938	0.9649	1.1953
22	0.9745	0.8399	1.1400	0.7547	0.5783	0.8032	0.8576	0.7462	0.9259
23	1.2981	1.2044	1.6086	0.8103	0.6162	0.8601	1.0256	0.9233	1.1468
24	0.8992	0.7683	1.0625	1.1292	0.8964	1.2433	1.0076	0.8876	1.1119
25	1.1074	0.8891	1.276	1.0015	0.8375	1.066	1.0531	0.9104	1.1366
26	0.9472	0.6932	1.1163	0.9863	0.8004	1.128	0.9665	0.8064	1.0751
27	1.0051	0.8359	1.1738	0.9717	0.7745	1.0847	0.9883	0.8639	1.0847
28	1.1220	0.9037	1.3164	0.9937	0.8679	1.0729	1.0559	0.9281	1.1542
29	1.0383	0.8956	1.1875	1.0374	0.8794	1.1367	1.0379	0.9339	1.1218
30	0.9316	0.6762	1.0707	0.8619	0.6671	0.9282	0.8961	0.7317	0.9587
31	1.1203	0.9775	1.3231	0.8368	0.6284	0.8889	0.9682	0.8515	1.0525
32	1.0780	0.9276	1.3116	0.9310	0.7281	1.0058	1.0018	0.8805	1.1139
33	0.9003	0.7223	1.0307	0.9309	0.7164	0.9994	0.9155	0.7774	0.9798

Cuadro A2-XXI: Intervalos de Confianza del Cambio en la Tecnología (1992-94)

	$\hat{T}_{92-93}$	2.5%	97.5%	$\hat{T}_{93-94}$	2.5%	97.5%	$\hat{T}_{92-94}$	2.5%	97.5%
1	0.995	0.8689	1.0756	1.1373	1.0896	1.2206	1.0638	1.0029	1.1249
2	0.9973	0.8733	1.0910	1.1123	1.0739	1.2200	1.0532	0.9953	1.1281
3	0.9999	0.8749	1.1000	1.1031	1.0634	1.2098	1.0502	0.9947	1.1275
4	0.996	0.8466	1.0698	1.0511	1.0197	1.1692	1.0232	0.9608	1.0979
5	0.9885	0.8943	1.0541	1.0362	0.9808	1.1053	1.0121	0.9637	1.0647
6	1.0206	0.8661	1.1769	1.0673	0.9903	1.1563	1.0437	0.9694	1.1384
7	0.9832	0.8461	1.0453	1.1033	1.0412	1.1764	1.0415	0.9715	1.0923
8	0.9773	0.8404	1.0374	1.0052	0.9726	1.0681	0.9912	0.9290	1.0327
9	1.0139	0.8839	1.1481	1.0452	0.9893	1.1342	1.0294	0.9726	1.1171
10	0.9544	0.7226	1.0493	1.0000	0.9304	1.0692	0.9769	0.8484	1.0287
11	0.9921	0.8908	1.0844	1.0921	1.0221	1.1780	1.0409	0.9858	1.112
12	0.9691	0.8344	1.0107	1.006	0.9850	1.0671	0.9874	0.9255	1.0196
13	1.0060	0.8947	1.1015	1.091	0.9966	1.1600	1.0476	0.9788	1.1104
14	0.9948	0.9152	1.0609	1.0234	0.9705	1.0801	1.0090	0.9606	1.0546
15	0.9936	0.8112	1.0213	1.0851	1.0321	1.1598	1.0383	0.9454	1.0668
16	0.7999	-	-	0.9885	-	-	0.8892	-	-
17	0.9848	0.8834	1.0749	1.0187	0.9531	1.0803	1.0016	0.9446	1.0609
18	1.0130	0.9106	1.0967	1.0586	0.9827	1.1332	1.0355	0.9766	1.0934
19	1.0220	0.8644	1.1875	1.0099	0.9247	1.0672	1.0159	0.9287	1.1027
20	0.9932	0.8370	1.0656	1.1025	1.0380	1.1939	1.0464	0.9709	1.1065
21	0.9717	0.8074	1.0276	1.0000	0.9376	1.0616	0.9858	0.9037	1.0193
22	0.9746	0.8061	1.0370	1.0000	0.9536	1.0678	0.9872	0.9058	1.0251
23	0.9749	0.8041	1.0590	1.0000	0.8988	1.0545	0.9874	0.8759	1.0316
24	0.9746	0.8017	1.0346	1.0000	0.9573	1.0696	0.9872	0.9062	1.0271
25	0.9410	0.6812	0.9092	1.1710	1.0973	1.2751	1.0497	0.9066	1.0589
26	1.0235	0.8610	1.1975	1.0196	0.9434	1.1032	1.0216	0.9454	1.1270
27	0.9884	0.8500	1.0537	1.1426	1.1155	1.2568	1.0627	1.0021	1.1263
28	1.0129	0.9491	1.1097	1.038	1.0056	1.1120	1.0254	1.0046	1.0950
29	0.9849	0.8872	1.0702	1.0313	0.9774	1.0984	1.0078	0.9582	1.0684
30	0.9679	0.7377	1.0017	1.0801	0.9969	1.1659	1.0225	0.8962	1.0593
31	0.9971	0.9032	1.0777	1.0135	0.9639	1.0771	1.0053	0.9563	1.0575
32	1.0101	0.8928	1.1307	1.0064	0.9359	1.0735	1.0083	0.9422	1.0815
33	1.0135	0.8676	1.1423	1.0272	0.9181	1.0912	1.0203	0.9352	1.0960

Cuadro A2-XXII: Intervalos de Confianza del Cambio en  $\widehat{ST}$  (1992-94)

	$\widehat{ST}_{92-93}$	2.5%	97.5%	$\widehat{ST}_{93-94}$	2.5%	97.5%	$\widehat{ST}_{92-94}$	2.5%	97.5%
1	0.9784	0.8040	1.1140	1.0102	0.9335	1.1656	0.9942	0.9137	1.1000
2	0.9773	0.7445	1.0950	1.0559	0.9533	1.2432	1.0158	0.9038	1.1242
3	0.9747	0.7411	1.0921	1.0646	0.9586	1.2492	1.0187	0.8992	1.1260
4	0.9600	0.7793	1.0800	0.9989	0.8738	1.1373	0.9793	0.8729	1.0745
5	0.9835	0.8061	1.0741	1.0715	0.9843	1.2168	1.0266	0.9346	1.1103
6	0.9549	0.6679	1.0735	1.1003	1.0134	1.3168	1.0250	0.8892	1.1411
7	0.9913	0.8204	1.1225	1.0501	0.9712	1.2055	1.0203	0.9383	1.1217
8	0.9972	0.7956	1.1262	1.1683	1.0936	1.3852	1.0794	0.9882	1.2059
9	0.9613	0.6900	1.0720	1.1235	1.0288	1.3251	1.0392	0.9028	1.1469
10	1.0212	0.8029	1.2305	1.1744	1.1034	1.4100	1.0952	1.0011	1.2714
11	0.9599	0.7612	1.0658	1.0286	0.9481	1.2028	0.9937	0.8958	1.0887
12	1.0026	0.8798	1.1383	1.0459	0.9395	1.1665	1.0240	0.9477	1.1230
13	0.9579	0.7543	1.0711	1.0131	0.9117	1.1584	0.9851	0.8745	1.0720
14	0.9797	0.8078	1.0906	1.1288	1.0674	1.3014	1.0516	0.9708	1.1594
15	1.0058	0.9009	1.1744	0.9887	0.9104	1.1349	0.9973	0.9393	1.1203
16	1.1953	-	-	1.0621	-	-	1.1268	-	-
17	0.9679	0.7716	1.0741	1.0497	0.9261	1.1963	1.0080	0.9018	1.0985
18	0.9814	0.8200	1.0804	1.0383	0.9547	1.2200	1.0095	0.9265	1.1183
19	0.9537	0.6515	1.0714	1.1628	1.0961	1.3953	1.0531	0.9170	1.1746
20	0.9893	0.8221	1.1199	0.9798	0.8839	1.1350	0.9845	0.8943	1.0903
21	1.0030	0.8555	1.1525	1.1746	1.1072	1.3693	1.0854	1.0213	1.2158
22	1.0000	0.8264	1.1415	1.1742	1.0993	1.3972	1.0836	1.0062	1.2187
23	0.9997	0.7967	1.1551	1.1743	1.1123	1.4272	1.0835	0.9992	1.2356
24	1.0000	0.8160	1.1488	1.1745	1.0961	1.3976	1.0838	0.9968	1.2219
25	1.0299	0.9590	1.2540	0.9053	0.7751	1.0287	0.9656	0.9002	1.1044
26	0.9522	0.6208	1.0713	1.1516	1.0609	1.3723	1.0472	0.8923	1.1623
27	0.9860	0.7884	1.1087	1.0277	0.9229	1.1935	1.0067	0.9071	1.1069
28	0.9749	0.7722	1.0469	1.0281	0.9242	1.1655	1.0011	0.8932	1.0698
29	0.9704	0.7836	1.0757	1.0485	0.9571	1.1875	1.0087	0.9152	1.0991
30	1.0096	0.8777	1.2025	1.0873	1.0021	1.2811	1.0477	0.9848	1.1972
31	0.9775	0.7577	1.0793	1.1587	1.0831	1.3868	1.0643	0.9586	1.1759
32	0.9649	0.6964	1.0677	1.1669	1.0899	1.3966	1.0611	0.9332	1.1766
33	0.9616	0.7032	1.0768	1.1432	1.0749	1.3821	1.0485	0.9310	1.1715

Cuadro A3-I: 2000 Simulaciones del Contraste Condicional en el Modelo Paramétrico

50 datos			x=0.25			x=0.5			x=0.75		
Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h
0.10	11.85	0.0001	43.55	50.10	0.0001	98.75	77.50	0.0001			
0.10	11.85	0.001	43.10	47.05	0.001	98.40	75.90	0.001			
0.10	11.05	0.01	42.70	46.60	0.01	89.10	58.45	0.01			
0.05	7.15	0.10	33.40	36.30	0.10	83.95	47.55	0.10			
<b>0.05</b>	<b>4.20</b>	<b>0.30</b>	21.00	18.00	0.30	74.65	310.90	0.30			
0.00	3.40	0.50	19.85	12.85	0.50	65.35	17.95	0.50			
0.00	3.35	0.70	17.65	8.70	0.70	58.55	12.35	0.70			
0.00	3.50	0.90	15.30	7.25	0.90	52.60	9.70	0.90			
0.05	3.70	1.25	<b>12.85</b>	<b>5.45</b>	<b>1.25</b>	42.90	6.70	1.25			
0.05	3.85	1.50	11.75	4.60	1.50	<b>39.10</b>	<b>5.30</b>	<b>1.50</b>			
0.05	3.90	1.75	10.30	4.30	1.75	35.75	4.35	1.75			
0.05	3.90	2.00	9.95	4.15	2.00	32.95	3.65	2.00			
0.15	3.90	20.00	7.10	3.10	20.00	20.95	2.05	20.00			
0.15	3.90	50.00	7.10	3.10	50.00	20.95	2.05	50.00			
100 datos			x=0.25			x=0.5			x=0.75		
Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h
4.65	30.05	0.0001	57.2	54.20	0.0001	98.65	75.55	0.0001			
4.65	30.05	0.001	57.2	53.65	0.001	97.45	73.30	0.001			
4.45	25.70	0.01	54.9	47.00	0.01	95.85	58.20	0.01			
3.20	23.55	0.10	54.35	42.4	0.10	93.55	49.35	0.10			
1.45	17.7	0.30	61.7	35.65	0.30	89.9	42.05	0.30			
1.30	13.90	0.50	64.9	27.7	0.50	87.10	35.05	0.50			
3.45	11.15	0.70	64.45	22.05	0.70	85.65	28.80	0.70			
6.60	9.05	0.90	63.15	17.65	0.90	83.50	23.45	0.90			
12.40	7.00	1.25	61.25	12.65	1.25	81.15	15.95	1.25			
13.90	5.90	1.50	59.70	10.4	1.50	79.10	12.40	1.50			
<b>14.80</b>	<b>5.00</b>	<b>1.75</b>	58.70	7.95	1.75	77.85	10.20	1.75			
15.20	4.35	2.00	<b>57.75</b>	<b>6.80</b>	<b>2.00</b>	<b>76.75</b>	<b>8.70</b>	<b>2.00</b>			
16.35	2.60	20.00	50.80	2.30	20.00	68.20	2.25	20.00			
16.35	2.60	50.00	50.80	2.20	50.00	68.10	2.20	50.00			
200 datos			x=0.25			x=0.5			x=0.75		
Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h
1.50	21.65	0.0001	43.75	46.65	0.0001	98.85	74.90	0.0001			
1.50	21.65	0.001	43.75	46.65	0.001	96.75	71.00	0.001			
1.50	20.45	0.01	43.15	41.45	0.01	93.75	51.15	0.01			
1.15	17.30	0.10	42.75	36.25	0.10	92.60	45.00	0.10			
0.10	11.50	0.30	55.95	24.65	0.30	86.40	36.55	0.30			
0.15	7.80	0.50	59.60	19.15	0.50	83.45	26.45	0.50			
2.25	6.45	0.70	59.45	14.6	0.70	81.30	19.95	0.70			
<b>7.50</b>	<b>5.45</b>	<b>0.90</b>	58.70	11.45	0.90	79.55	14.8	0.90			
11.65	4.40	1.25	56.70	7.80	1.25	77.30	9.55	1.25			
15.05	4.00	1.50	55.80	6.10	1.50	75.95	7.40	1.50			
18.35	3.60	1.75	<b>55.05</b>	<b>5.20</b>	<b>1.75</b>	75.20	6.50	1.75			
21.55	3.35	2.00	54.6	4.25	2.00	<b>74.40</b>	<b>5.30</b>	<b>2.00</b>			
30.40	2.45	20.00	51.85	2.25	20.00	69.40	1.70	20.00			
30.45	2.45	50.00	51.75	2.25	50.00	69.40	1.65	50.00			
500 datos			x=0.25			x=0.5			x=0.75		
Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h
3.65	25.85	0.0001	50.10	50.25	0.0001	97.80	72.95	0.0001			
3.65	25.85	0.001	49.90	46.75	0.001	96.45	70.90	0.001			
3.40	22.95	0.01	49.50	43.50	0.01	96.45	56.10	0.01			
1.85	17.15	0.10	53.45	38.00	0.10	96.70	45.80	0.10			
1.50	12.80	0.30	69.65	28.80	0.30	93.30	37.65	0.30			
4.80	9.40	0.50	76.3	21.95	0.50	90.85	30.00	0.50			
17.10	8.35	0.70	76.65	16.20	0.70	89.50	23.25	0.70			
33.05	7.15	0.90	75.90	12.85	0.90	88.55	18.85	0.90			
50.15	5.50	1.25	74.25	10.00	1.25	87.55	13.55	1.25			
<b>54.20</b>	<b>5.05</b>	<b>1.50</b>	73.00	8.65	1.50	86.95	10.90	1.50			
56.60	4.35	1.75	71.80	7.20	1.75	86.65	9.10	1.75			
58.00	4.10	2.00	<b>71.30</b>	<b>5.85</b>	<b>2.00</b>	<b>86.40</b>	<b>7.70</b>	<b>2.00</b>			
59.80	1.80	20.00	67.70	1.55	20.00	83.10	2.10	20.00			
59.75	1.80	50.00	67.65	1.50	50.00	83.10	2.00	50.00			

**Cuadro A3-II: Simulaciones del Contraste Condicional en un Modelo Paramétrico**

20 datos	x=0.25			x=0.5			x=0.75		
Inefic.	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h
exp(6)	0	5.8	0.9	0.05	4.2	0.9	25.75	5.25	0.9
exp(3)	0.15	5.15	0.9	0.5	4.7	0.7	23.65	5.45	0.9
exp(1.5)	0	5	0.3	0.45	5.7	0.9	24.95	5.4	0.9
50 datos	x=0.25			x=0.5			x=0.75		
Inefic.	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h
exp(6)	0.05	3.45	4	12.15	4.7	1.25	40.8	5.15	1.5
exp(3)	0.05	4.2	0.3	12.85	5.45	1.25	39.1	5.3	1.5
exp(1.5)	0	4.55	0.3	13.8	4.65	1.25	38.2	4.55	1.5
100 datos	x=0.25			x=0.5			x=0.75		
Inefic.	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h
exp(6)	16	4.6	1.75	55.45	4.85	3	73.65	5	3
exp(3)	15.8	5.05	2	55.2	5.4	2	71.35	4.9	3
exp(1.5)	15.4	5.25	1.75	55.25	5.15	2.5	69.6	5.25	3.5
200 datos	x=0.25			x=0.5			x=0.75		
Inefic.	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h
exp(6)	6.65	4.35	0.9	54.95	4.9	1.75	75.15	5.05	2
exp(3)	6.6	5.15	0.9	54.25	5.25	1.75	73.5	5.05	2.25
exp(1.5)	7	4.7	0.9	52.25	5.15	1.75	72.95	5	2.25
500 datos	x=0.25			x=0.5			x=0.75		
Inefic.	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h	<i>Potencia</i>	<i>Tamaño</i>	h
exp(6)	58.7	4.8	1.75	72.7	4.9	2.5	84.6	5.25	3
exp(3)	56.8	5.1	1.75	70.45	5.25	2.5	84.65	5.05	3
exp(1.5)	60.15	4.9	2.25	69.7	5.1	3	85.2	4.95	3

Cuadro A3-III: Simulaciones del Contraste Condicional en un Modelo no Paramétrico

50 datos			x=0.25			x=0.5			x=0.75		
Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h
0.30	3.20	0.10	29.75	23.15	0.10	78.45	91.75	0.10			
0.15	2.95	0.25	29.85	32.90	0.25	57.90	71.85	0.25			
0.15	5.20	0.40	30.75	39.95	0.40	44.05	56.75	0.40			
0.35	46.10	0.75	31.10	44.50	0.75	26.60	42.95	0.75			
1.15	66.75	1.50	30.50	45.00	1.50	15.35	35.45	1.50			
1.35	68.30	2.00	30.30	45.05	2.00	12.90	32.95	2.00			
1.45	69.85	2.75	30.05	45.10	2.75	11.50	32.35	2.75			
1.55	69.90	3.00	30.05	45.10	3.00	11.15	32.10	3.00			
1.55	70.20	3.50	29.90	45.05	3.50	10.60	31.65	3.50			
1.55	70.55	4.00	29.85	45.05	4.00	10.35	31.45	4.00			
1.60	70.75	4.50	29.75	45.05	4.50	10.25	31.25	4.50			
1.60	71.25	6.00	29.75	45.05	6.00	9.90	30.90	6.00			
1.60	71.70	8.00	29.75	45.05	8.00	9.85	30.85	8.00			
1.60	72.00	15.00	29.75	45.05	15.00	9.70	30.75	15.00			
1.60	72.00	25.00	29.75	45.05	25.00	9.65	30.75	25.00			
100 datos			x=0.25			x=0.5			x=0.75		
Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h
0.30	12.25	0.10	63.25	30.85	0.10	88.50	59.10	0.10			
0.25	15.20	0.25	60.20	29.05	0.25	81.00	55.50	0.25			
0.25	26.10	0.40	56.95	30.25	0.40	73.95	44.95	0.40			
1.35	41.90	0.75	49.90	30.55	0.75	62.45	33.40	0.75			
1.95	46.65	1.50	43.30	29.90	1.50	53.95	30.60	1.50			
2.30	47.50	2.00	42.00	29.75	2.00	50.35	29.80	2.00			
2.70	47.95	2.75	41.15	29.50	2.75	47.90	29.25	2.75			
2.70	48.00	3.00	41.10	29.40	3.00	47.55	29.20	3.00			
2.85	48.10	3.50	40.80	29.25	3.50	46.85	29.10	3.50			
2.85	48.05	4.00	40.65	29.15	4.00	46.60	29.00	4.00			
2.85	48.20	4.50	40.50	29.10	4.50	46.00	28.90	4.50			
2.90	48.30	6.00	40.50	28.95	6.00	44.75	28.80	6.00			
2.95	48.45	8.00	40.35	28.90	8.00	44.05	28.65	8.00			
3.00	48.55	15.00	40.25	28.90	15.00	43.75	28.60	15.00			
3.00	48.55	25.00	40.25	28.85	25.00	43.65	28.60	25.00			
200 datos			x=0.25			x=0.5			x=0.75		
Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h	Potencia	Tamaño	h
0.95	52.85	0.10	58.60	16.55	0.10	98.15	6.70	0.10			
0.40	61.50	0.25	66.05	35.00	0.25	98.00	25.85	0.25			
0.15	60.70	0.40	79.40	38.50	0.40	97.45	27.70	0.40			
2.40	51.35	0.75	83.30	26.00	0.75	96.20	26.45	0.75			
27.25	56.35	1.50	81.80	20.35	1.50	93.60	24.95	1.50			
36.35	56.05	2.00	81.35	18.05	2.00	92.50	24.60	2.00			
41.00	55.90	2.75	80.75	16.70	2.75	91.35	24.15	2.75			
42.05	55.85	3.00	80.70	16.40	3.00	91.15	24.05	3.00			
43.30	55.80	3.50	80.50	16.05	3.50	90.95	23.95	3.50			
43.95	56.00	4.00	80.30	15.65	4.00	90.85	23.85	4.00			
44.45	55.95	4.50	80.20	15.35	4.50	90.70	23.70	4.50			
45.05	56.00	6.00	80.05	14.95	6.00	90.50	23.50	6.00			
45.50	56.00	8.00	80.00	14.75	8.00	90.10	23.30	8.00			
45.85	55.95	15.00	79.90	14.60	15.00	89.90	23.25	15.00			
45.90	56.00	25.00	79.85	14.55	25.00	89.90	23.20	25.00			