



**Universitat Ramon Llull**

## **TESIS DOCTORAL**

Título	PROPUESTA DE NUEVOS MODELOS CONSTITUTIVOS PARA CARACTERIZACIÓN VISCOELÁSTICA DE MATERIALES TERMOPLÁSTICOS
Realizada por	Albert Serra Aguila
en el Centro	Escuela Técnica Superior IQS
y en el Departamento	IQS School of Engineering
Dirigida por	Dra. Núria Agulló Chaler Dr. Josep Maria Puigoriol Forcada



A todas las personas que pensaron que esta tesis era posible.



"El conjunto de la ciencia no es más que un refinamiento del pensamiento cotidiano".

Albert Einstein (1879 - 1955)



# Agradecimientos

Todo empezó en marzo de 2008 cuando el Dr. Josep Maria Puigoriol me propuso la posibilidad de quedarme en la Universidad como colaborador de cátedra realizando algunas clases y actividades con él. Gracias a esta posibilidad, la idea de llevar a cabo una tesis doctoral comenzó a tomar forma. Unos meses más tarde, cuando terminé mi trabajo en Henkel KGaA en Düsseldorf (Alemania) como investigador en el Departamento de Construcciones Híbridas de la empresa, el Dr. Puigoriol, junto con la Dra. Núria Agulló y el Dr. Salvador Borrós, me ayudaron a establecerme en GEMAT-IQS (Grupo de Ingeniería de Materiales del Instituto Químico de Sarrià), como nuevo miembro de este prestigioso grupo de investigación. Muchas gracias a los tres por ello.

Además, quería agradecer a la Dra. Agulló su ayuda en el uso del aparato para los ensayos dinámomecánicos (DMA), así como también sus consejos en la parte escrita de todas mis presentaciones y de mi tesis. Sus conocimientos en ciencia de materiales y sus interpretaciones en el dominio de la frecuencia han sido de gran ayuda para desarrollar los nuevos modelos matemáticos.

Otra parte importante de esta tesis corresponde a los ensayos de creep y al estudio de la evolución de las propiedades mecánicas en función del tiempo, así como también al uso de los simuladores en los análisis estáticos y transitorios. Mi conocimiento en este campo viene del Dr. Puigoriol, a quien quiero agradecer todas las discusiones sobre estos temas durante todos estos años.

El Dr. Borrós, como jefe de GEMAT-IQS, también ha colaborado en esta tesis. Él me ha invitado en los seminarios del departamento. Gracias a él, tuve la oportunidad de discutir mi tesis y otros proyectos con mis compañeros de departamento. Por todo ello, y también por sus consejos en algunas reuniones, quería agradecer al Dr. Borrós su ayuda.

Muchas gracias también al Dr. Guillermo Reyes, jefe del Departamento de Ingeniería Industrial-IQS, por su apoyo en esta tesis.

Querría expresar mi agradecimiento a Faurecia Interior Systems España, Abrera, por la amabilidad que tuvo al prestarnos algunas curvas para probar los modelos propuestos en este trabajo, así como probetas inyectadas de los diferentes materiales utilizados.

Gracias también a PQAT-IQS (Productos Químicos de Alta Tecnología del Instituto Químico de Sarrià) por la ayuda prestada con los análisis termogravimétricos (TGA) de los materiales.

Muchas gracias por su amable colaboración al Sr. César Alquezar por el procesado del material para poder tener unas probetas apropiadas para los análisis con DMA, así como también al Dr. José Javier Molins por su ayuda para programar las subrutinas de MATLAB® 7.5.0 de esta tesis.

Muchas gracias a todos mis compañeros de GEMAT-IQS por sus consejos para mejorar la cualidad de este trabajo.

Querría expresar mi agradecimiento a la Sra. Mercedes Peña por su apoyo, así como también a su hijo, el Sr. Armando Peña, por sus sugerencias en ANSYS® 12.1 Academic Teaching, con el que compartí mucho conocimiento en esta herramienta de trabajo.

Querría añadir en esta lista al Dr. Andrés García. Junto con el Dr. Puigoriol, me ayudó con mis primeros pasos en el simulador de ABAQUS® 6.10-2.

Gracias a la Sra. Djamila Olivier. Ella empezó su tesis cuando yo inicié la mía. Con ella compartí muchos problemas y preocupaciones sobre nuestras respectivas investigaciones.

De gran ayuda fue el curso en el que participé en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Físicas de la Universidad de Guildford (Reino Unido) con el título “Introduction to composite materials science”. Gracias a todos los que prepararon dicho curso.

Para un mejor entendimiento en el funcionamiento de DMA y en el uso de la superposición tiempo-temperatura (TTS), asistí a unos seminarios que organizaba TA Instruments, Inc. Querría dar las gracias en especial al Sr. David Davila y al Dr. Carlos Gracia por la organización del curso y por sus amables respuestas a mis preguntas acerca de los análisis llevados a cabo con DMA.

Muchas gracias al Sr. Ernest Craus por su ayuda en la máquina universal de ensayos (MUE) cuando tuvimos algún problema de funcionamiento. Muchas gracias también al Sr. Javier Saez por sus consejos para programar los métodos necesarios para llevar a cabo los ensayos de tracción, de creep y de relajación de tensiones.

Gracias a Henkel KGaA, y especialmente a mis jefes (al Dr. Thomas Engels y a la Dra. Emilie Barriau). Mi conocimiento sobre este campo empezó allí realizando mis primeros ensayos de compresión y de cizalla durante el año que trabajé con ellos. Vielen Dank für Ihre Geduld und für Ihr Verständnis.

Esta tesis ha sido subvencionada con una beca FI de la Generalitat de Catalunya de 4 años. Gracias a toda la gente que hizo posible esto.

En mi vida personal, por una parte, querría agradecer a mi hermana Susana y a mi cuñado Jorge todo su apoyo en este trabajo, y por otra parte, querría agradecer a mi padre, ya que él además de darme siempre todo su apoyo, me ha ayudado y me ha dado algunos consejos en la parte escrita de esta tesis.

# Resumen

El presente trabajo tiene dos objetivos fundamentales:

- 1) Obtener modelos matemáticos para definir el comportamiento de algunos materiales termoplásticos específicos a partir de los datos del análisis dinamomecánico (DMA) y poder predecir los módulos de tracción y de creep sin usar la máquina universal de ensayos (MUE).
- 2) Obtener códigos de simulación donde el usuario pueda predecir estos mismos módulos de tracción y de creep introduciendo los parámetros de entrada necesarios. Estos parámetros son la velocidad de deformación, el tiempo y la temperatura.

Así, el concepto básico de este proyecto es el siguiente: a partir de los datos de DMA, y con el uso de sofisticados modelos matemáticos, se puede predecir la respuesta del material en ensayos de tracción o de creep (o de relajación de tensiones) sin realizar más experiencias. Para ensayos de tracción la respuesta se encuentra en función de la velocidad de deformación y de la temperatura del material. Para ensayos de creep (o de relajación de tensiones) la respuesta se encuentra en función del tiempo y de la temperatura del material. Lo mismo puede realizarse con programas de simulación introduciendo los parámetros necesarios.

Una vez realizada la caracterización a partir de los valores experimentados en DMA, se pueden predecir otros resultados cualesquiera dentro del rango de trabajo. Esto se consigue simulando otras experiencias mediante un simulador computacional, ahorrando tiempo y dinero.

En esta tesis, los bucles de tracción y de creep han sido realizados para tres materiales. Sin embargo, el procedimiento mostrado en este trabajo puede ser aplicado a distintas matrices, con o sin fibras.

Esta tesis presenta distintas contribuciones:

- 1) Creación de un nuevo modelo matemático para el bucle de tracción en función de la velocidad de deformación y de la temperatura.
- 2) Subrutina para poder alimentar un código en ANSYS® permitiendo introducir diferentes velocidades de deformación.
- 3) Creación de dos nuevos modelos matemáticos para el bucle de creep mediante la introducción de coeficientes alfa en el dominio de la frecuencia.
- 4) Modificaciones de los coeficientes de los modelos matemáticos para el bucle de creep para pasar del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo.
- 5) Desarrollo de ecuaciones para determinar los parámetros de las series de Prony (modelos generalizados de Kelvin-Voigt y de Maxwell) con  $n=1$  o  $n=2$ .
- 6) Desarrollo de ecuaciones para determinar los coeficientes del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir de los coeficientes del modelo generalizado de Maxwell o viceversa, con  $n=1$  o  $n=2$ , para poder cambiar de modelo.
- 7) Descripción de un procedimiento para desarrollar los modelos matemáticos que pueden ser aplicados a otros materiales termoplásticos.

En resumen, con estas contribuciones, se proponen nuevos modelos de ecuaciones para estudiar estas propiedades mecánicas en función de la velocidad de deformación (en tests de tracción), del tiempo (en tests de creep), y de la temperatura (en ambos tests).



# Resum

El present treball té dos objectius fonamentals:

- 1) Obtenir models matemàtics per a definir el comportament d'alguns materials termoplàstics específics a partir de les dades de l'anàlisi dinamo-mecànic (DMA) i poder predir els mòduls de tracció i de creep sense utilitzar la màquina universal d'assajos (MUE).
- 2) Obtenir codis de simulació on l'usuari pugui predir aquests mateixos mòduls de tracció i de creep introduint els paràmetres d'entrada necessaris. Aquests paràmetres són la velocitat de deformació, el temps i la temperatura.

Així, el concepte bàsic d'aquest projecte és el següent: a partir de les dades de DMA, i amb l'ús de sofisticats models matemàtics, es pot predir la resposta del material en assajos de tracció o de creep (o de relaxació de tensions) sense realitzar més experiències. Per a assajos de tracció la resposta es troba en funció de la velocitat de deformació i de la temperatura del material. En assajos de creep (o de relaxació de tensions) la resposta es troba en funció del temps i de la temperatura del material. El mateix pot realitzar-se amb programes de simulació introduint els paràmetres necessaris.

Una vegada feta la caracterització a partir dels valors experimentats en DMA, es poden predir altres resultats dintre del rang de treball. Això s'aconsegueix simulant altres experiments mitjançant un simulador computacional, estalviant temps i diners.

En aquesta tesi, els bucles de tracció i de creep han estat realitzats per a tres materials. Així i tot, el procediment mostrat en aquest treball pot ser aplicat a diferents matrius, amb o sense fibres.

Aquesta tesi presenta diverses contribucions:

- 1) Creació d'un nou model matemàtic per al bucle de tracció en funció de la velocitat de deformació i de la temperatura.
- 2) Subrutina per a poder alimentar un codi en ANSYS® permetent introduir diferents velocitats de deformació.
- 3) Creació de dos nous models matemàtics per al bucle de creep mitjançant la introducció de coeficients alfa en el domini de la freqüència.
- 4) Modificacions dels coeficients dels models matemàtics per al bucle de creep per a passar del domini de la freqüència al domini del temps.
- 5) Desenvolupament d'equacions per a determinar els paràmetres de les series de Prony (models generalitzats de Kelvin-Voigt i de Maxwell) amb  $n=1$  o  $n=2$ .
- 6) Desenvolupament d'equacions per a determinar els coeficients del model generalitzat de Kelvin-Voigt a partir dels coeficients del model generalitzat de Maxwell o viceversa, amb  $n=1$  o  $n=2$ , per a poder canviar de model.
- 7) Descripció d'un procediment per a desenvolupar els models matemàtics que poden ser aplicats a altres materials termoplàstics.

En resum, amb aquestes contribucions, es proposen nous models d'equacions per a estudiar aquestes propietats mecàniques en funció de la velocitat de deformació (en tests de tracció), del temps (en tests de creep), i de la temperatura (en ambdós tests).



# Summary

The present work has two fundamental objectives:

- 1) Obtaining of mathematical models to define the behavior of some specific thermoplastic materials from dynamic mechanical analysis (DMA) data and predict tensile and creep moduli without using the universal testing machine (MUE).
- 2) Obtaining of simulation codes where the user can predict these same tensile and creep moduli introducing the necessary input parameters. These parameters are strain rate, time and temperature.

So, the base concept of this project is the following: from DMA data, and with the use of sophisticated mathematical models, the response of the material in tensile or creep (or stress relaxation) assays can be predicted without any further experimentation. For tensile assays, the response is given as a function of strain rate and temperature of the material. For creep (or stress relaxation) assays, the response is given as a function of time and temperature of the material. The same can be done with simulation programs introducing the necessary parameters.

Once this characterization is done for the values experimented in DMA, one can predict any other results within the working range. It allows simulating other experiments through a computational simulator, to save time and money.

In this thesis, tensile and creep loops are performed with three materials. However, the procedure shown in this work can be applied to different matrices, with or without fibers.

There are several contributions of this thesis:

- 1) Creation of a new mathematical model for tensile loop as a function of strain rate and temperature.
- 2) Subroutine to feed an ANSYS® code with the introduction of different strain rates.
- 3) Creation of two new mathematical models for creep loop with the introduction of alpha coefficients in the frequency domain.
- 4) Modifications of the coefficients of the mathematical models for creep loop to pass from frequency domain to time domain.
- 5) Development of equations to determine the parameters of the Prony series (generalized Kelvin-Voigt and generalized Maxwell models) with  $n=1$  or  $n=2$ .
- 6) Development of equations to determine the coefficients of the generalized Kelvin-Voigt model from the coefficients of the generalized Maxwell model or the other way round, with  $n=1$  or  $n=2$ , to change the model.
- 7) Description of the procedure to develop the mathematical models that can be applied to other thermoplastic materials.

In conclusion, with these contributions, new models of equations to study these mechanical properties are proposed as a function of strain rate (in tensile tests), time (in creep tests) and temperature (in both tests).



## Lista de acrónimos

*A*: Amplitud (mm o  $\mu\text{m}$ , según el caso)

*a*<sub>0</sub>: Coeficiente de Prony no entrado como dato en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de las series de Prony (adimensional)

*a*<sub>f</sub>: Factor de desplazamiento de la fracción de volumen libre *f*<sub>v</sub> de la ecuación de Doolittle (adimensional)

*a*<sub>i</sub>: Coeficientes de Prony entrados como datos en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de las series de Prony (adimensional)

*a*<sub>T</sub>: Factor de desplazamiento horizontal (adimensional)

*a*<sub>TCambio Subrango</sub>: Factor de desplazamiento a la temperatura en la que hay un máximo del módulo de pérdida en el barrido de temperaturas (adimensional)

*b*: Anchura (mm)

*BN*<sub>1</sub>: Primer coeficiente de la ley de Bailey-Norton ( $\text{MPa}^{-1} \text{s}^{-1}$ )

*BN*<sub>2</sub>: Segundo coeficiente de la ley de Bailey-Norton (adimensional)

*BN*<sub>3</sub>: Tercer coeficiente de la ley de Bailey-Norton (adimensional)

*b*<sub>T</sub>: Factor de desplazamiento vertical (adimensional)

*C*<sub>1</sub>: Primer coeficiente de la ecuación de Williams-Landel-Ferry (WLF) (adimensional)

*C*<sub>2</sub>: Segundo coeficiente de la ecuación de Williams-Landel-Ferry (WLF) ( $^{\circ}\text{C}$  o  $\text{K}$ , según el caso)

*C*<sub>C</sub>: Coeficiente de ayuda para hallar las soluciones de la ecuación polinómica de tercer orden

*C*<sub>i K</sub>: Coeficientes de ayuda en función de los parámetros de los muelles y de los émbolos para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con *n*=2 (*C*<sub>1 K</sub> y *C*<sub>2 K</sub> en  $\text{MPa}$ , *C*<sub>3 K</sub>, *C*<sub>4 K</sub> y *C*<sub>5 K</sub> en  $\text{s}^{-1}$ )

*C*<sub>i M</sub>: Coeficientes de ayuda en función de los parámetros de los muelles y de los émbolos para el modelo generalizado de Maxwell con *n*=2 (*C*<sub>1 M</sub> y *C*<sub>2 M</sub> en  $\text{MPa}^{-1}$ , *C*<sub>3 M</sub>, *C*<sub>4 M</sub> y *C*<sub>5 M</sub> en  $\text{s}^{-1}$ )

*CMR*<sub>i</sub>: Coeficiente de módulo relativo (adimensional)

*C*<sub>Q</sub><sub>i</sub>: Coeficientes de ayuda para hallar las soluciones de la ecuación polinómica de cuarto orden

*CT*<sub>i</sub>: Coeficiente de tiempo (s)

*D*<sub>1</sub>: Parámetro de ajuste de la ecuación de Doolittle (adimensional)

*d*<sub>i</sub>: Función de creep ( $\text{MPa}^{-1}$ )

*DMA*: Análisis dinamomecánico

*e*: Espesor (mm)

*E*<sub>0</sub>: Parámetro del muelle ( $\text{MPa}$ )

*E*<sub>a</sub>: Energía de activación de la ecuación de Arrhenius (J)

$E_C$ : Módulo de creep (MPa)

$E_{C0}$ : Módulo de creep a tiempo inicial (MPa)

$E_{C60000} / E_{C0}$ : Valor del ratio entre el módulo de creep predicho a 60000 segundos y el mismo módulo a tiempo inicial (adimensional)

$E_{C\infty}$ : Módulo de creep a tiempo infinito (MPa)

$E_{C\infty} / E_{C0}$ : Valor del ratio entre el módulo de creep predicho a tiempo infinito y el mismo módulo a tiempo inicial, suponiendo que la curva a ajustar tuviera los mismos coeficientes obtenidos para la curva hasta 60000 segundos (adimensional)

$E_{composite}$ : Módulo elástico del material composite (MPa)

$E_F$ : Módulo de flexión (MPa)

$E_{fibra}$ : Módulo elástico de las fibras del material composite (MPa)

$e_i$ : Función de relajación (MPa)

$E_{matriz}$ : Módulo elástico de la matriz del material composite (MPa)

*errorRest*: Alto valor de error asignado en el caso de que sólo una de las restricciones de entrada de los coeficientes del modelo esté fuera del rango en MATLAB® 7.5.0 (1.00E+30)

*error 1*: Error relativo asignado para el módulo de pérdida en MATLAB® 7.5.0 (adimensional)

*error 2*: Error relativo asignado para el módulo de almacenamiento en MATLAB® 7.5.0 (adimensional)

*error 3*: Suma del *error 1* y el *error 2* en MATLAB® 7.5.0 (adimensional)

$E_T$ : Módulo de tracción (MPa)

$f$ : Frecuencia (Hz)

$F_1$ : Primer coeficiente del modelo de Findley ( $s^{-1}$ )

$F_2$ : Segundo coeficiente del modelo de Findley (adimensional)

$FCT$ : Factor de cambio de temperatura (adimensional)

$FG$ : Factor de geometría para DMA ( $mm^{-1}$ )

$FTS$ : Superposición frecuencia-temperatura

$f_v$ : Fracción del volumen libre a una deformación determinada de la ecuación de Doolittle (adimensional)

$f_{v0}$ : Fracción del volumen libre a deformación cero de la ecuación de Doolittle (adimensional)

$G_0$ : Módulo de flexión o módulo de almacenamiento a tiempo inicial (MPa)

$G'$ : Módulo de almacenamiento (MPa)

$G'_0$ : Módulo de almacenamiento a tiempo inicial (MPa)

$G'_\infty$ : Módulo de almacenamiento cuando el tiempo tiende a infinito, es decir, cuando la frecuencia tiende a cero (MPa)

$G''$ : Módulo de pérdida (MPa)

*J*: Capacitancia de creep ( $\text{MPa}^{-1}$ )

*J*<sub>0</sub>: Capacitancia de creep a tiempo inicial ( $\text{MPa}^{-1}$ )

*J*<sub>C1</sub>: Primer coeficiente del modelo de Johnson-Cook (MPa)

*J*<sub>C2</sub>: Segundo coeficiente del modelo de Johnson-Cook (adimensional)

*J*<sub>C3</sub>: Tercer coeficiente del modelo de Johnson-Cook (adimensional)

*J*<sub>C4</sub>: Cuarto coeficiente del modelo de Johnson-Cook (adimensional)

*J*<sub>*i*</sub>: Coeficiente de capacitancia de creep ( $\text{MPa}^{-1}$ )

*K*: Parámetro mecánico a tiempo *t* en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de las series de Prony (MPa)

*K*<sub>*f*</sub>: Uso efectivo de las fibras de un material composite (adimensional)

*K*<sub>0</sub>: Parámetro mecánico a tiempo cero en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de las series de Prony (MPa)

*L*: Longitud (mm)

*M*: Módulo determinado (MPa)

*MUE*: Máquina universal de ensayos

*n*: Número de términos en series o modelos matemáticos

*NW*: Número de frecuencias de los datos de entrada en MATLAB® 7.5.0

*Omega g\* imag*: Conversión en ABAQUS® 6.10-2 usando los datos del módulo de almacenamiento (adimensional)

*Omega g\* real*: Conversión en ABAQUS® 6.10-2 usando los datos del módulo de pérdida (adimensional)

*PENDE<sub>F</sub>*: Pendiente de la curva entre el módulo de flexión y el logaritmo de la velocidad de deformación usando dos puntos distintos ( $\text{MPa}/(\text{mm}/\text{min})$ )

*PENDE<sub>T</sub>*: Pendiente de la curva entre el módulo de tracción y el logaritmo de la velocidad de deformación usando dos puntos distintos ( $\text{MPa}/(\text{mm}/\text{min})$ )

*PID control*: Mecanismo de control de una máquina para obtener la respuesta deseada en los datos experimentales mediante 3 controladores: proporcional, derivativo e integral

*p<sub>i</sub>*: Coeficiente de relajación (adimensional)

*q<sub>i</sub>*: Coeficiente de retardo (adimensional)

*R*: Constante de ecuaciones termodinámicas ( $8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ )

*RC*: Ratio de coeficientes entre *p<sub>i</sub>*, coeficiente de relajación usado en el dominio de la frecuencia, y *CMR<sub>i</sub>*, coeficiente de módulo relativo usado en el dominio del tiempo (adimensional)

*RM*: Ratio de módulos (adimensional)

*t*: Tiempo (s)

*t'*: Tiempo modificado (s)

*T*: Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$  o K, según el caso)

$T_{amb}$ : Temperatura ambiente ( $^{\circ}\text{C}$  o  $\text{K}$ , según el caso)

$TC$ : Tiempo de creep (s)

$T_{Cambio\ Subrango}$ : Temperatura en la que hay un máximo del módulo de pérdida en el barrido de temperaturas ( $^{\circ}\text{C}$  o  $\text{K}$ , según el caso)

$TGA$ : Análisis termogravimétrico

$T_g$ : Temperatura de transición vítrea ( $^{\circ}\text{C}$  o  $\text{K}$ , según el caso)

$Tg\ \delta$ : Tangente del ángulo de fase (adimensional)

$t_i$ : Tiempos de Prony entrados como datos en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de las series de Prony (s)

$T_i$ : Tiempos solución de ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de ajuste de una curva a partir de datos (s)

$T_H$ : Coeficiente adimensional del modelo de Johnson-Cook (adimensional)

$T_m$ : Temperatura de fusión del material ( $^{\circ}\text{C}$  o  $\text{K}$ , según el caso)

$T_{ref}$ : Temperatura de referencia ( $30^{\circ}\text{C}$ )

$t_T$ : Tiempo para alcanzar un cierto valor en una propiedad de un material a la temperatura  $T$  (s)

$t_{Tref}$ : Tiempo para alcanzar un cierto valor en una propiedad de un material a la temperatura de referencia  $T_{ref}$  (s)

$TTS$ : Superposición tiempo-temperatura

$VD$ : Velocidad de deformación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching (mm/min)

$V_{fibra}$ : Volumen de fibra (adimensional)

$VFT_1$ : Coeficiente numérico de la ecuación de Vogel-Fulcher-Tamman ( $^{\circ}\text{C}$  o  $\text{K}$ , según el caso)

$VFT_2$ : Temperatura de Vogel de la ecuación de Vogel-Fulcher-Tamman ( $^{\circ}\text{C}$  o  $\text{K}$ , según el caso)

$w$ : Frecuencia (rad/s)

$w'$ : Frecuencia modificada (rad/s)

$WLF$ : Williams-Landel-Ferry

$w_T$ : Frecuencia para alcanzar un cierto valor en una propiedad de un material a la temperatura  $T$  (rad/s)

$w_{Tref}$ : Frecuencia para alcanzar un cierto valor en una propiedad de un material a la temperatura de referencia  $T_{ref}$  (rad/s)

$w^{\alpha_i}$ : Frecuencia usada en el modelo modificado para el dominio de la frecuencia (rad/s)

$x_i$ : Soluciones de las ecuaciones polinómicas

$Y$ : Módulo de relajación (MPa)

$Y_0$ : Módulo de relajación a tiempo inicial (MPa)

$Y_i$ : Coeficiente de módulo de relajación (MPa)

$\alpha_i$ : Coeficiente alfa (adimensional)

$\beta_0$ : Término independiente de los coeficientes solución de ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de ajuste de una curva a partir de datos ( $\text{MPa}^{1/2}$ )

$\beta_i$ : Coeficientes solución de ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de ajuste de una curva a partir de datos ( $\text{MPa}^{1/2}$ )

$\varepsilon$ : Deformación (adimensional)

$\dot{\varepsilon}$ : Velocidad de deformación (mm/min)

$\varepsilon_0$ : Deformación a tiempo inicial (adimensional)

$\varepsilon_{el}$ : Parte instantánea de la deformación (parte elástica) en el comportamiento viscoelastoplástico (adimensional)

$\varepsilon_i$ : Valor de la deformación a un tiempo o a un rango de tiempos determinado (adimensional)

$\dot{\varepsilon}_{max}$ : Valor más alto de la velocidad de deformación obtenido a partir de los datos experimentales de DMA (mm/min)

$\dot{\varepsilon}_{MaxRango}$ : Valor más alto de la velocidad de deformación obtenido a partir del rango de frecuencias modificadas a 23°C (uno de los seis valores siguientes: 1.000 mm/min, 3.466 mm/min, 12.011 mm/min, 41.628 mm/min, 144.270 mm/min y 499.000 mm/min)

$\dot{\varepsilon}_{min}$ : Valor más bajo de la velocidad de deformación obtenido a partir de los datos experimentales de DMA (mm/min)

$\dot{\varepsilon}_{MinRango}$ : Valor más bajo de la velocidad de deformación obtenido a partir del rango de frecuencias modificadas a 23°C (uno de los seis valores siguientes: 1.000 mm/min, 3.466 mm/min, 12.011 mm/min, 41.628 mm/min, 144.270 mm/min y 499.000 mm/min)

$\varepsilon_p$ : Deformación plástica efectiva del modelo de Johnson-Cook (adimensional)

$\dot{\varepsilon}_{p*}$ : Velocidad de deformación plástica efectiva del modelo de Johnson-Cook, normalizado a la velocidad de deformación de referencia  $\dot{\varepsilon}_0 = 1\text{s}^{-1}$  ( $\text{s}^{-1}$ )

$\varepsilon_{pl}$ : Parte plástica de la deformación, desarrollada durante el proceso de creep, manifestada mediante el comportamiento de creep no lineal y acelerada a altas temperaturas en el comportamiento viscoelastoplástico (adimensional)

$\varepsilon_{vi}$ : Deformación recuperable (parte viscosa) en el comportamiento viscoelastoplástico (adimensional)

$d\varepsilon/d\xi$ : Velocidad de deformación ( $\text{s}^{-1}$ )

$\delta$ : Función impulso a un tiempo determinado

$\lambda_i$ : Tiempo de retardo (s)

$\eta$ : Viscosidad ( $\text{MPa}\cdot\text{s}$ )

$\eta_{0T}$ : Viscosidad a cizalla cero a la temperatura  $T$  ( $\text{MPa}\cdot\text{s}$ )

$\eta_{0T_0}$ : Viscosidad a cizalla cero a la temperatura  $T_0$  ( $\text{MPa}\cdot\text{s}$ )

$\eta_0$ : Parámetro del émbolo ( $\text{MPa}\cdot\text{s}$ )

$\nu$ : Coeficiente de Poisson (adimensional)

$\sigma$ : Tensión (MPa)

$\sigma_0$ : Tensión de fluencia a temperatura ambiente y a baja velocidad de deformación del modelo de Johnson-Cook (MPa)

$\sigma_i$ : Valor de tensión a un tiempo o a un rango de tiempos determinado (MPa)

$d\sigma/d\xi$ : Velocidad de tensión (MPa/s)

$\tau$ : Tiempo de relajación de la ecuación de Vogel-Fulcher-Tamman (s)

$\tau_i$ : Tiempo de relajación (s)

$\tau_{T_0}$ : Tiempo de relajación de la temperatura inicial  $T_0$  de la ecuación de Vogel-Fulcher-Tamman (s)

$\xi$ : Tiempo comprendido entre 0 y  $t$  usado en las integrales de convolución para calcular tensiones y deformaciones en función del tiempo (s)

# Índice de esquemas

Esquema 1.1 - Concepto base.....	1
Esquema 1.2 - Primera parte del concepto base .....	2
Esquema 1.3 - Segunda parte del concepto base .....	2
Esquema 1.4 - Bucles .....	5
Esquema 1.5 - Bucle de tracción .....	6
Esquema 1.6 - Bucle de creep para el modelo convencional a 23°C.....	8
Esquema 1.7 - Bucle de creep para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo a 23°C .....	10
Esquema 1.8 - Bucle de creep para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo a diferentes temperaturas .....	11
Esquema 1.9 - Bucle de creep para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo a 23°C .....	12
Esquema 1.10 - Bucle de creep para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo a diferentes temperaturas .....	13



# Índice de ecuaciones

Ecuación 2.1 .....	17
Ecuación 2.2 .....	17
Ecuación 2.3 .....	20
Ecuación 2.4 .....	21
Ecuación 2.5 .....	22
Ecuación 2.6 .....	22
Ecuación 2.7 .....	23
Ecuación 2.8 .....	23
Ecuación 2.9 .....	23
Ecuación 2.10 .....	24
Ecuación 2.11 .....	24
Ecuación 2.12 .....	25
Ecuación 2.13 .....	25
Ecuación 2.14 .....	25
Ecuación 2.15 .....	26
Ecuación 2.16 .....	26
Ecuación 2.17 .....	27
Ecuación 2.18 .....	28
Ecuación 2.19 .....	29
Ecuación 2.20 .....	29
Ecuación 2.21 .....	30
Ecuación 2.22 .....	30
Ecuación 2.23 .....	33
Ecuación 2.24 .....	33
Ecuación 2.25 .....	37
Ecuación 2.26 .....	37
Ecuación 2.27 .....	38
Ecuación 2.28 .....	38
Ecuación 2.29 .....	39
Ecuación 2.30 .....	39
Ecuación 2.31 .....	40
Ecuación 2.32 .....	40
Ecuación 2.33 .....	40

Ecuación 3.1 .....	45
Ecuación 3.2 .....	52
Ecuación 3.3 .....	61
Ecuación 3.4 .....	62
Ecuación 3.5 .....	62
Ecuación 3.6 .....	62
Ecuación 3.7 .....	62
Ecuación 3.8 .....	62
Ecuación 3.9 .....	62
Ecuación 3.10 .....	64
Ecuación 3.11 .....	64
Ecuación 3.12 .....	65
Ecuación 3.13 .....	66
Ecuación 3.14 .....	67
Ecuación 3.15 .....	68
Ecuación 3.16 .....	69
Ecuación 3.17 .....	70
Ecuación 3.18 .....	71
Ecuación 3.19 .....	72
Ecuación 3.20 .....	72
Ecuación 3.21 .....	72
Ecuación 3.22 .....	72
Ecuación 3.23 .....	73
Ecuación 3.24 .....	74
Ecuación 3.25 .....	74
Ecuación 3.26 .....	76
Ecuación 3.27 .....	76
Ecuación 3.28 .....	77
Ecuación 3.29 .....	77
Ecuación 3.30 .....	78
Ecuación 3.31 .....	78
Ecuación 3.32 .....	79
Ecuación 3.33 .....	79
Ecuación 3.34 .....	79
Ecuación 3.35 .....	81

Ecuación 3.36 .....	81
Ecuación 3.37 .....	81
Ecuación 3.38 .....	81
Ecuación 3.39 .....	81
Ecuación 3.40 .....	82
Ecuación 3.41 .....	82
Ecuación 3.42 .....	82
Ecuación 4.1 .....	103
Ecuación 6.1 .....	163
Ecuación 8.1 .....	218
Ecuación 10.1 .....	259
Ecuación 10.2 .....	259
Ecuación 10.3 .....	259
Ecuación 10.4 .....	260
Ecuación 10.5 .....	260
Ecuación 10.6 .....	260
Ecuación 10.7 .....	260
Ecuación 10.8 .....	261
Ecuación 10.9 .....	261
Ecuación 10.10 .....	261
Ecuación 10.11 .....	262
Ecuación 10.12 .....	262
Ecuación 10.13 .....	263
Ecuación A.1 .....	294
Ecuación A.2 .....	294
Ecuación A.3 .....	294
Ecuación A.4 .....	295
Ecuación A.5 .....	295
Ecuación A.6 .....	295
Ecuación A.7 .....	295
Ecuación A.8 .....	295
Ecuación A.9 .....	295
Ecuación A.10 .....	298
Ecuación A.11 .....	298
Ecuación A.12 .....	298

Ecuación A.13 .....	298
Ecuación A.14 .....	298
Ecuación A.15 .....	298
Ecuación A.16 .....	298
Ecuación A.17 .....	299
Ecuación A.18 .....	299
Ecuación A.19 .....	301
Ecuación A.20 .....	301
Ecuación A.21 .....	301
Ecuación A.22 .....	301
Ecuación A.23 .....	301
Ecuación A.24 .....	301
Ecuación A.25 .....	302
Ecuación A.26 .....	302
Ecuación A.27 .....	302
Ecuación A.28 .....	306
Ecuación A.29 .....	306
Ecuación A.30 .....	306
Ecuación A.31 .....	306
Ecuación A.32 .....	306
Ecuación A.33 .....	306
Ecuación A.34 .....	307
Ecuación A.35 .....	307
Ecuación A.36 .....	307
Ecuación A.37 .....	314
Ecuación A.38 .....	314
Grupo de ecuaciones A.39.....	315
Grupo de ecuaciones A.40.....	316
Ecuación A.41 .....	316
Ecuación A.42 .....	316
Ecuación A.43 .....	317
Grupo de ecuaciones A.44.....	317
Ecuación A.45 .....	317
Ecuación A.46 .....	317
Ecuación A.47 .....	317

Ecuación A.48 .....	318
Ecuación A.49 .....	318
Ecuación A.50 .....	318
Ecuación A.51 .....	318
Ecuación A.52 .....	318
Ecuación A.53 .....	318
Grupo de ecuaciones A.54.....	319
Ecuación A.55 .....	319
Ecuación A.56 .....	319
Ecuación A.57 .....	320
Ecuación A.58 .....	320
Ecuación A.59 .....	320
Ecuación A.60 .....	320
Ecuación A.61 .....	320
Ecuación A.62 .....	321
Ecuación A.63 .....	321
Ecuación A.64 .....	321
Ecuación A.65 .....	321
Grupo de ecuaciones A.66.....	321
Grupo de ecuaciones A.67.....	322
Ecuación A.68 .....	323
Ecuación A.69 .....	323
Grupo de ecuaciones A.70.....	323
Grupo de ecuaciones A.71.....	324
Ecuación A.72 .....	324
Ecuación A.73 .....	324
Ecuación A.74 .....	325
Grupo de ecuaciones A.75.....	325
Ecuación A.76 .....	325
Ecuación A.77 .....	325
Ecuación A.78 .....	325
Ecuación A.79 .....	326
Ecuación A.80 .....	326
Ecuación A.81 .....	326
Ecuación A.82 .....	326

Ecuación A.83 .....	326
Ecuación A.84 .....	327
Grupo de ecuaciones A.85.....	327
Ecuación A.86 .....	327
Ecuación A.87 .....	328
Ecuación A.88 .....	328
Ecuación A.89 .....	328
Ecuación A.90 .....	328
Ecuación A.91 .....	328
Ecuación A.92 .....	329
Ecuación A.93 .....	329
Ecuación A.94 .....	329
Ecuación A.95 .....	329
Ecuación A.96 .....	329
Grupo de ecuaciones A.97.....	330
Grupo de ecuaciones A.98.....	330
Ecuación A.99 .....	336
Grupo de ecuaciones A.100.....	336
Ecuación A.101 .....	337
Grupo de ecuaciones A.102.....	337
Ecuación A.103 .....	337
Grupo de ecuaciones A.104.....	338
Ecuación A.105 .....	338
Grupo de ecuaciones A.106.....	339
Ecuación A.107 .....	339
Grupo de ecuaciones A.108.....	340
Ecuación A.109 .....	340
Grupo de ecuaciones A.110.....	340
Ecuación A.111 .....	341
Grupo de ecuaciones A.112.....	342
Ecuación A.113 .....	342
Grupo de ecuaciones A.114.....	343
Grupo de ecuaciones A.115.....	347
Grupo de ecuaciones A.116.....	347
Grupo de ecuaciones A.117.....	348

Grupo de ecuaciones A.118.....	348
Grupo de ecuaciones A.119.....	349
Grupo de ecuaciones A.120.....	350
Grupo de ecuaciones A.121.....	352
Grupo de ecuaciones A.122.....	352
Grupo de ecuaciones A.123.....	352
Grupo de ecuaciones A.124.....	354
Grupo de ecuaciones A.125.....	354
Grupo de ecuaciones A.126.....	354
Grupo de ecuaciones A.127.....	355
Grupo de ecuaciones A.128.....	356
Grupo de ecuaciones A.129.....	357
Grupo de ecuaciones A.130.....	358
Ecuación A.131 .....	359
Ecuación A.132 .....	359
Ecuación A.133 .....	359
Ecuación A.134 .....	359
Ecuación A.135 .....	359
Ecuación A.136 .....	359
Ecuación A.137 .....	360
Ecuación A.138 .....	360
Grupo de ecuaciones A.139.....	367
Grupo de ecuaciones A.140.....	367
Grupo de ecuaciones A.141.....	367
Grupo de ecuaciones A.142.....	368
Grupo de ecuaciones A.143.....	368
Grupo de ecuaciones A.144.....	368
Grupo de ecuaciones A.145.....	369
Grupo de ecuaciones A.146.....	369
Ecuación A.147 .....	383
Ecuación A.148 .....	383
Ecuación A.149 .....	383
Ecuación A.150 .....	383
Ecuación A.151 .....	384
Ecuación A.152 .....	384

Ecuación A.153 .....	384
Ecuación A.154 .....	384
Ecuación A.155 .....	384
Ecuación A.156 .....	384
Ecuación A.157 .....	384
Ecuación A.158 .....	384
Ecuación A.159 .....	385
Ecuación A.160 .....	385
Ecuación A.161 .....	387
Ecuación A.162 .....	387
Ecuación A.163 .....	387
Ecuación A.164 .....	387
Ecuación A.165 .....	387
Ecuación A.166 .....	388
Ecuación A.167 .....	388
Ecuación A.168 .....	388
Ecuación A.169 .....	388
Ecuación A.170 .....	388
Ecuación A.171 .....	388
Ecuación A.172 .....	388
Ecuación A.173 .....	389
Ecuación A.174 .....	389

# Índice de figuras

Figura 1.1 - Probeta de PA66 usada en DMA .....	15
Figura 1.2 - Probeta de PA66 usada en MUE .....	15
Figura 1.3 - Probeta de PA66-GF50 usada en DMA.....	15
Figura 1.4 - Probeta de PA66-GF50 usada en MUE .....	15
Figura 1.5 - Probeta de PA6-MD40 usada en DMA .....	15
Figura 1.6 - Probeta de PA6-MD40 usada en MUE.....	16
Figura 2.1 - Sólido elástico.....	24
Figura 2.2 - Fluido viscoso .....	24
Figura 2.3 - Modelo de Kelvin-Voigt.....	25
Figura 2.4 - Modelo de Maxwell.....	26
Figura 2.5 - Modelo sólido lineal estándar .....	26
Figura 2.6 - Modelo de Burgers .....	27
Figura 2.7 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt .....	28
Figura 2.8 - Modelo generalizado de Maxwell.....	28
Figura 2.9 - Representación esquemática del ensayo de creep y de recuperación .....	32
Figura 3.1 - DMA y ordenador .....	44
Figura 3.2 - DMA .....	45
Figura 3.3 - Límites de operación de DMA que definen la región del módulo en función del factor de geometría en el que se puede trabajar (cortesía de TA Instruments, Inc.).....	46
Figura 3.4 - MUE y ordenador .....	50
Figura 3.5 - MUE .....	51
Figura 3.6 - Extensómetro .....	51
Figura 3.7 - Representación gráfica general del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación.....	54
Figura 3.8 - Representación gráfica general del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación en escala logarítmica.....	55
Figura 3.9 - Representación gráfica general de la deformación en función del tiempo para un ensayo de relajación de tensiones .....	56
Figura 3.10 - Representación gráfica general de la tensión en función del tiempo para un ensayo de relajación de tensiones.....	56
Figura 3.11 - Representación gráfica general de la tensión en función del tiempo para un ensayo de creep.....	57
Figura 3.12 - Representación gráfica general de la deformación en función del tiempo para un ensayo de creep.....	58

Figura 3.13 - Representación gráfica general de la deformación en función del tiempo para un ensayo de relajación de tensiones doble .....	59
Figura 3.14 - Representación gráfica general de la tensión en función del tiempo para un ensayo de relajación de tensiones doble .....	59
Figura 3.15 - Representación gráfica general de la tensión en función del tiempo para un ensayo de creep doble.....	60
Figura 3.16 - Representación gráfica general de la deformación en función del tiempo para un ensayo de creep doble.....	60
Figura 3.17 - Un cuarto de la probeta creada en ANSYS® 12.1 Academic Teaching ..	83
Figura 3.18 - Probeta completa creada en ANSYS® 12.1 Academic Teaching .....	83
Figura 4.1 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la amplitud para PA66.....	85
Figura 4.2 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la amplitud para PA66.....	85
Figura 4.3 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la amplitud para PA66.....	86
Figura 4.4 - Representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación a partir del barrido de amplitudes para PA66.....	86
Figura 4.5 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la temperatura para PA66 .....	87
Figura 4.6 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la temperatura para PA66 .....	87
Figura 4.7 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la temperatura para PA66 .....	88
Figura 4.8 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para PA66.....	89
Figura 4.9 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia para PA66 .....	89
Figura 4.10 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia para PA66.....	90
Figura 4.11 - Representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación a partir del barrido de frecuencias para PA66 .....	90
Figura 4.12 - Linealización de la ecuación de Arrhenius para PA66.....	92
Figura 4.13 - Linealización de la ecuación WLF para PA66 .....	92
Figura 4.14 - Curva maestra del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para PA66 .....	93
Figura 4.15 - Curva maestra del módulo de pérdida en función de la frecuencia para PA66 .....	93
Figura 4.16 - Representación gráfica del factor de desplazamiento en función de la temperatura para PA66 .....	94

Figura 4.17 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la temperatura para PA66 .....	96
Figura 4.18 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66.....	97
Figura 4.19 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66 .....	98
Figura 4.20 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a diferentes temperaturas para PA66.....	100
Figura 4.21 - Curvas experimentales de tensión-deformación a diferentes temperaturas para PA66 .....	101
Figura 4.22 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66.....	104
Figura 4.23 - Curvas de tensión-deformación en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66 .....	105
Figura 4.24 - Curvas de tensión-deformación en función de la temperatura para PA66 .....	106
Figura 4.25 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 40°C para PA66 .....	106
Figura 4.26 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 60°C para PA66 .....	107
Figura 4.27 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 90°C para PA66 .....	107
Figura 5.1 - Representación gráfica de $\omega g^* \text{imag}$ en función de la frecuencia de los datos experimentales y de los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2 para PA66 .....	113
Figura 5.2 - Representación gráfica de $\omega g^* \text{real}$ en función de la frecuencia de los datos experimentales y de los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2 para PA66 .....	113
Figura 5.3 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo convencional para PA66 .....	115
Figura 5.4 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo convencional para PA66 .....	115
Figura 5.5 - Valores de los módulos de tracción y de creep que se dan en la información del producto de DuPont™ para PA66 .....	118
Figura 5.6 - Representación gráfica del módulo de creep para los datos experimentales a 23°C para PA66 .....	121
Figura 5.7 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo convencional para PA66.....	123
Figura 5.8 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo modificado para PA66 .....	124

Figura 5.9 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo modificado para PA66 .....	124
Figura 5.10 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	127
Figura 5.11 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo a cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	130
Figura 5.12 - Curva maestra a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66.....	130
Figura 5.13 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	133
Figura 5.14 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo a cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	136
Figura 5.15 - Curva maestra a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	136
Figura 5.16 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	139
Figura 5.17 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	140
Figura 5.18 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	143
Figura 5.19 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	144
Figura 6.1 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la amplitud para PA6-MD40 .....	147
Figura 6.2 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la amplitud para PA6-MD40 .....	147
Figura 6.3 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la amplitud para PA6-MD40 .....	148
Figura 6.4 - Representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación a partir del barrido de amplitudes para PA6-MD40.....	148
Figura 6.5 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la temperatura para PA6-MD40 .....	149

Figura 6.6 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la temperatura para PA6-MD40 .....	149
Figura 6.7 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la temperatura para PA6-MD40 .....	150
Figura 6.8 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para PA6-MD40.....	151
Figura 6.9 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia PA6-MD40 .....	151
Figura 6.10 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia para PA6-MD40.....	152
Figura 6.11 - Representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación a partir del barrido de frecuencias para PA6-MD40.....	152
Figura 6.12 - Linealización de la ecuación WLF para PA6-MD40.....	154
Figura 6.13 - Curva maestra del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para PA6-MD40 .....	154
Figura 6.14 - Curva maestra del módulo de pérdida en función de la frecuencia para PA6-MD40 .....	155
Figura 6.15 - Representación gráfica del factor de desplazamiento en función de la temperatura para PA6-MD40 .....	155
Figura 6.16 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la temperatura para PA6-MD40 .....	157
Figura 6.17 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA6-MD40.....	158
Figura 6.18 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA6-MD40.....	159
Figura 6.19 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a diferentes temperaturas para PA6-MD40 .....	161
Figura 6.20 - Curvas experimentales de tensión-deformación a diferentes temperaturas para PA6-MD40 .....	162
Figura 6.21 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA6-MD40.....	165
Figura 6.22 - Curvas de tensión-deformación en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA6-MD40.....	165
Figura 6.23 - Curvas de tensión-deformación en función de la temperatura para PA6-MD40 .....	167
Figura 6.24 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 90°C para PA6-MD40.....	167
Figura 7.1 - Representación gráfica de $\omega g^* \text{imag}$ en función de la frecuencia de los datos experimentales y de los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2 para PA6-MD40 .....	171

Figura 7.2 - Representación gráfica de $\omega g^*_{real}$ en función de la frecuencia de los datos experimentales y de los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2 para PA6-MD40 .....	171
Figura 7.3 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo convencional para PA6-MD40 .....	172
Figura 7.4 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo convencional para PA6-MD40 .....	172
Figura 7.5 - Curvas del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para PA6-MD40 .....	174
Figura 7.6 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo para los datos experimentales a 23°C para PA6-MD40 .....	177
Figura 7.7 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo convencional para PA6-MD40 .....	178
Figura 7.8 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo modificado para PA6-MD40.....	179
Figura 7.9 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo modificado para PA6-MD40.....	179
Figura 7.10 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	182
Figura 7.11 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo a cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	185
Figura 7.12 - Curva maestra a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	185
Figura 7.13 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	188
Figura 7.14 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo a cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	191
Figura 7.15 - Curva maestra a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	191
Figura 7.16 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	194

Figura 7.17 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	195
Figura 7.18 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	198
Figura 7.19 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	199
Figura 8.1 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la amplitud para PA66-GF50 .....	201
Figura 8.2 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la amplitud para PA66-GF50.....	201
Figura 8.3 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la amplitud para PA66-GF50 .....	202
Figura 8.4 - Representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación a partir del barrido de amplitudes para PA66-GF50 .....	202
Figura 8.5 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la temperatura para PA66-GF50.....	203
Figura 8.6 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la temperatura para PA66-GF50.....	203
Figura 8.7 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la temperatura para PA66-GF50.....	204
Figura 8.8 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para PA66-GF50 .....	204
Figura 8.9 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia para PA66-GF50.....	205
Figura 8.10 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia para PA66-GF50 .....	205
Figura 8.11 - Representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación a partir del barrido de frecuencias para PA66-GF50.....	206
Figura 8.12 - Linealización de la ecuación de Arrhenius para PA66-GF50.....	207
Figura 8.13 - Linealización de la ecuación WLF para PA66-GF50.....	208
Figura 8.14 - Curva maestra del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para PA66-GF50.....	208
Figura 8.15 - Curva maestra del módulo de pérdida en función de la frecuencia para PA66-GF50.....	209
Figura 8.16 - Representación gráfica del factor de desplazamiento en función de la temperatura para PA66-GF50.....	209
Figura 8.17 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la temperatura para PA66-GF50.....	211

Figura 8.18 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66-GF50 .....	212
Figura 8.19 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66-GF50.....	213
Figura 8.20 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a diferentes temperaturas para PA66-GF50.....	215
Figura 8.21 - Curvas experimentales de tensión-deformación a diferentes temperaturas para PA66-GF50 (cortesía de Faurecia Interior Systems España, Abrera).....	216
Figura 8.22 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66-GF50 .....	219
Figura 8.23 - Curvas de tensión-deformación en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66-GF50 .....	219
Figura 8.24 - Curvas de tensión-deformación en función de la temperatura para PA66-GF50.....	220
Figura 8.25 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 40°C para PA66-GF50.....	221
Figura 8.26 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 60°C para PA66-GF50.....	221
Figura 8.27 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 90°C para PA66-GF50.....	222
Figura 9.1 - Representación gráfica de $\omega g^* imag$ en función de la frecuencia de los datos experimentales y de los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2 para PA66-GF50 .....	227
Figura 9.2 - Representación gráfica de $\omega g^* real$ en función de la frecuencia de los datos experimentales y de los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2 para PA66-GF50 .....	227
Figura 9.3 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo convencional para PA66-GF50.....	228
Figura 9.4 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo convencional para PA66-GF50.....	228
Figura 9.5 - Curvas del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para PA66-GF50 (cortesía de Faurecia Interior Systems España, Abrera).....	230
Figura 9.6 - Representación gráfica del módulo de creep para los datos experimentales a 23°C para PA66-GF50.....	233
Figura 9.7 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo convencional para PA66-GF50 .....	235
Figura 9.8 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo modificado para PA66-GF50.....	236

Figura 9.9 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo modificado para PA66-GF50.....	236
Figura 9.10 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	239
Figura 9.11 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo a cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	242
Figura 9.12 - Curva maestra a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50 .....	242
Figura 9.13 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	245
Figura 9.14 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo a cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	248
Figura 9.15 - Curva maestra a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50 .....	248
Figura 9.16 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	251
Figura 9.17- Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	252
Figura 9.18 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	255
Figura 9.19 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	256
Figura A.1 - TGA de PA66-GF50 (cortesía de PQAT-IQS).....	290
Figura A.2 - TGA de PA6-MD40 (cortesía de PQAT-IQS).....	291
Figura A.3 - Sólido elástico.....	294
Figura A.4 - Representación gráfica general del módulo de relajación en función del tiempo para el sólido elástico .....	296
Figura A.5 - Representación gráfica general de la capacitancia de creep en función del tiempo para el sólido elástico .....	296
Figura A.6 - Representación gráfica general del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para el sólido elástico .....	297
Figura A.7 - Representación gráfica general de la capacitancia de almacenamiento en función de la frecuencia para el sólido elástico .....	297

Figura A.8 - Fluido viscoso .....	297
Figura A.9 - Representación gráfica general del módulo de relajación en función del tiempo para el fluido viscoso.....	299
Figura A.10 - Representación gráfica general de la capacitancia de creep en función del tiempo para el fluido viscoso.....	299
Figura A.11 - Representación gráfica general del módulo de pérdida en función de la frecuencia para el fluido viscoso .....	300
Figura A.12 - Representación gráfica general de la capacitancia de pérdida en función de la frecuencia para el fluido viscoso.....	300
Figura A.13 - Modelo de Kelvin-Voigt.....	301
Figura A.14 - Representación gráfica general del módulo de relajación en función del tiempo para el modelo de Kelvin-Voigt .....	302
Figura A.15 - Representación gráfica general de la capacitancia de creep en función del tiempo para el modelo de Kelvin-Voigt .....	303
Figura A.16 - Representación gráfica general del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para el modelo de Kelvin-Voigt.....	303
Figura A.17 - Representación gráfica general del módulo de pérdida en función de la frecuencia para el modelo de Kelvin-Voigt.....	304
Figura A.18 - Representación gráfica general de la capacitancia de almacenamiento en función de la frecuencia para el modelo de Kelvin-Voigt.....	304
Figura A.19 - Representación gráfica general de la capacitancia de pérdida en función de la frecuencia para el modelo de Kelvin-Voigt.....	305
Figura A.20 - Representación gráfica general de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia para el modelo de Kelvin-Voigt.....	305
Figura A.21 - Modelo de Maxwell .....	306
Figura A.22 - Representación gráfica general del módulo de relajación en función del tiempo para el modelo de Maxwell .....	307
Figura A.23 - Representación gráfica general de la capacitancia de creep en función del tiempo para el modelo de Maxwell .....	308
Figura A.24 - Representación gráfica general del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para el modelo de Maxwell .....	308
Figura A.25 - Representación gráfica general del módulo de pérdida en función de la frecuencia para el modelo de Maxwell.....	309
Figura A.26 - Representación gráfica general de la capacitancia de almacenamiento en función de la frecuencia para el modelo de Maxwell.....	309
Figura A.27 - Representación gráfica general de la capacitancia de pérdida en función de la frecuencia para el modelo de Maxwell .....	310
Figura A.28 - Representación gráfica general de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia para el modelo de Maxwell.....	310
Figura A.29 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt.....	314

Figura A.30 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con $n=1$ .....	317
Figura A.31 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con $n=2$ .....	319
Figura A.32 - Modelo generalizado de Maxwell.....	322
Figura A.33 - Modelo generalizado de Maxwell con $n=1$ .....	325
Figura A.34 - Modelo generalizado de Maxwell con $n=2$ .....	327
Figura A.35 - Representación gráfica general del módulo de relajación en función del tiempo usando las series de Prony con $n=1$ .....	331
Figura A.36 - Representación gráfica general de la capacitancia de creep en función del tiempo usando las series de Prony con $n=1$ .....	331
Figura A.37 - Representación gráfica general del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia usando las series de Prony con $n=1$ .....	332
Figura A.38 - Representación gráfica general del módulo de pérdida en función de la frecuencia usando las series de Prony con $n=1$ .....	332
Figura A.39 - Representación gráfica general de la capacitancia de almacenamiento en función de la frecuencia usando las series de Prony con $n=1$ .....	333
Figura A.40 - Representación gráfica general de la capacitancia de pérdida en función de la frecuencia usando las series de Prony con $n=1$ .....	333
Figura A.41 - Representación gráfica general de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia usando las series de Prony con $n=1$ .....	334
Figura A.42 - Representación gráfica general del módulo de relajación en función del tiempo usando las series de Prony con $n=2$ .....	334
Figura A.43 - Representación gráfica general de la capacitancia de creep en función del tiempo usando las series de Prony con $n=2$ .....	335
Figura A.44 - Representación gráfica general del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia usando las series de Prony con $n=2$ .....	335
Figura A.45 - Representación gráfica general del módulo de pérdida en función de la frecuencia usando las series de Prony con $n=2$ .....	336
Figura A.46 - Representación gráfica general de la capacitancia de almacenamiento en función de la frecuencia usando las series de Prony con $n=2$ .....	338
Figura A.47 - Representación gráfica general de la capacitancia de pérdida en función de la frecuencia usando las series de Prony con $n=2$ .....	339
Figura A.48 - Representación gráfica general de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia usando las series de Prony con $n=2$ .....	341
Figura A.49 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con $n=1$ .....	347
Figura A.50 - Resolución del modelo generalizado de Maxwell a partir del modelo generalizado de Kelvin-Voigt ( $n=1$ ).....	347
Figura A.51 - Modelo generalizado de Maxwell con $n=1$ .....	348
Figura A.52 - Resolución del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir del modelo generalizado de Maxwell ( $n=1$ ).....	348

Figura A.53 - Resolución del modelo generalizado de Maxwell a partir de los coeficientes de relajación ( $n=1$ ).....	349
Figura A.54 - Resolución del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir de los coeficientes de relajación ( $n=1$ ).....	349
Figura A.55 - Resolución del modelo generalizado de Maxwell a partir de los coeficientes de creep ( $n=1$ ).....	350
Figura A.56 - Resolución del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir de los coeficientes de creep ( $n=1$ ).....	350
Figura A.57 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con $n=2$ .....	351
Figura A.58 - Resolución del modelo generalizado de Maxwell a partir del modelo generalizado de Kelvin-Voigt ( $n=2$ ).....	351
Figura A.59 - Modelo generalizado de Maxwell con $n=2$ .....	353
Figura A.60 - Resolución del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir del modelo generalizado de Maxwell ( $n=2$ ).....	353
Figura A.61 - Resolución del modelo generalizado de Maxwell a partir de los coeficientes de relajación ( $n=2$ ).....	355
Figura A.62 - Resolución del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir de los coeficientes de relajación ( $n=2$ ).....	356
Figura A.63 - Resolución del modelo generalizado de Maxwell a partir de los coeficientes de creep ( $n=2$ ).....	357
Figura A.64 - Resolución del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir de los coeficientes de creep ( $n=2$ ).....	358
Figura A.65 - Elongación de una probeta mediante un ensayo de tracción .....	363
Figura A.66 - Medida del módulo de tracción mediante una curva de tensión-deformación .....	365
Figura A.67 - Probetas de tipo 1A, 1B, 1BA y 1BB .....	366
Figura A.68 - Probetas de tipo 5A y 5B .....	366
Figura A.69 - Representación gráfica del módulo de cizalla en función de la temperatura para una muestra seca de PA66-GF50 (cortesía de Faurecia Interior Systems España, Abrera).....	372
Figura A.70 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la temperatura para una muestra seca de PA66-GF50 (cortesía de Faurecia Interior Systems España, Abrera).....	373

# Índice de tablas

Tabla 4.1 - Pendiente y término independiente del ajuste logarítmico entre el módulo de flexión y la velocidad de deformación para PA66 .....	91
Tabla 4.2 - Módulo de flexión a 30°C para PA66 .....	94
Tabla 4.3 - Módulo de flexión y módulo de tracción a 23°C para PA66 .....	94
Tabla 4.4 - Módulo de tracción a cada temperatura para PA66 .....	95
Tabla 4.5 - Datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66 .....	96
Tabla 4.6 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66 .....	97
Tabla 4.7 - Coeficiente de variación entre los datos experimentales y los valores teóricos a 30°C para PA66 .....	98
Tabla 4.8 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación para PA66.....	99
Tabla 4.9 - Módulo de tracción a diferentes temperaturas de la representación gráfica experimental para PA66 .....	101
Tabla 4.10 - Factor de corrección a 23°C para PA66 .....	102
Tabla 4.11 - Módulo de tracción a diferentes temperaturas con la aplicación del factor de corrección para PA66.....	102
Tabla 4.12 - Errores a diferentes temperaturas a 1 mm/min para PA66 .....	102
Tabla 4.13 - Módulo de tracción predicho en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66 .....	103
Tabla 4.14 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66 .....	103
Tabla 4.15 - Datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66 .....	104
Tabla 4.16 - Errores a diferentes velocidades de deformación a 23°C para PA66.....	105
Tabla 4.17 - Módulo de tracción de la simulación del caso 1 para PA66 .....	108
Tabla 4.18 - Módulo de tracción de la simulación del caso 2 para PA66 .....	109
Tabla 5.1 - Variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura para PA66 .....	111
Tabla 5.2 - Datos de la curva maestra para PA66 .....	112
Tabla 5.3 - Datos convertidos de la curva maestra para ser introducidos en ABAQUS® 6.10-2 para PA66.....	112
Tabla 5.4 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida en función de la frecuencia con el modelo convencional para PA66 .....	116
Tabla 5.5 - Coeficientes en el dominio de la frecuencia a 30°C con el modelo convencional para PA66.....	116

Tabla 5.6 - Factor de condición a 23°C para PA66 .....	119
Tabla 5.7 - Conversión de los valores a las condiciones de la información del producto a los de la tesis para PA66.....	119
Tabla 5.8 - Estimación de $E_{C 60000} / E_{C 0}$ para PA66 .....	119
Tabla 5.9 - Valores usados a 23°C con el modelo convencional para PA66.....	119
Tabla 5.10 - Coeficientes en el dominio del tiempo a 23°C con el modelo convencional para PA66 .....	120
Tabla 5.11 - Valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo convencional para PA66.....	120
Tabla 5.12 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo convencional para PA66 .....	122
Tabla 5.13 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida en función de la frecuencia con el modelo modificado para PA66 .....	125
Tabla 5.14 - Coeficientes en el dominio de la frecuencia a 30°C con el modelo modificado para PA66.....	125
Tabla 5.15 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	126
Tabla 5.16 - Valores usados para cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66.....	128
Tabla 5.17 - Coeficientes a cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	129
Tabla 5.18 - Errores entre los datos experimentales y los valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66.....	131
Tabla 5.19 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	132
Tabla 5.20 - Valores usados para cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	134
Tabla 5.21 - Coeficientes a cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	135
Tabla 5.22 - Errores entre los datos experimentales y los valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66.....	137
Tabla 5.23 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	139
Tabla 5.24 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66 .....	140

Tabla 5.25 - Coeficientes introducidos en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66.....	142
Tabla 5.26 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66.....	143
Tabla 5.27 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66.....	144
Tabla 6.1 - Pendiente y término independiente del ajuste logarítmico entre el módulo de flexión y la velocidad de deformación para PA6-MD40.....	153
Tabla 6.2 - Módulo de flexión a 30°C para PA6-MD40 .....	156
Tabla 6.3 - Módulo de flexión y módulo de tracción a 23°C para PA6-MD40.....	156
Tabla 6.4 - Módulo de tracción a cada temperatura para PA6-MD40 .....	156
Tabla 6.5 - Datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA6-MD40 .....	157
Tabla 6.6 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA6-MD40 .....	158
Tabla 6.7 - Coeficiente de variación entre los datos experimentales y los valores teóricos a 30°C para PA6-MD40.....	159
Tabla 6.8 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación para PA6-MD40.....	160
Tabla 6.9 - Módulo de tracción a 90°C de la representación gráfica experimental para PA6-MD40 .....	162
Tabla 6.10 - Factor de corrección a 23°C para PA6-MD40 .....	162
Tabla 6.11 - Módulo de tracción a 90°C con la aplicación del factor de corrección para PA6-MD40 .....	163
Tabla 6.12 - Error a 90°C y a 1 mm/min para PA6-MD40.....	163
Tabla 6.13 - Módulo de tracción predicho en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA6-MD40 .....	163
Tabla 6.14 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA6-MD40 .....	164
Tabla 6.15 - Datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA6-MD40 .....	164
Tabla 6.16 - Errores a diferentes velocidades de deformación a 23°C para PA6-MD40 .....	166
Tabla 6.17 - Módulo de tracción de la simulación del caso 1 para PA6-MD40 .....	168
Tabla 6.18 - Módulo de tracción de la simulación del caso 2 para PA6-MD40 .....	168
Tabla 7.1 - Variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura para PA6-MD40 .....	169
Tabla 7.2 - Datos de la curva maestra para PA6-MD40.....	170

Tabla 7.3 - Datos convertidos de la curva maestra para ser introducidos en ABAQUS® 6.10-2 para PA6-MD40 .....	170
Tabla 7.4 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida en función de la frecuencia con el modelo convencional para PA6-MD40 .....	173
Tabla 7.5 - Coeficientes en el dominio de la frecuencia a 30°C con el modelo convencional para PA6-MD40 .....	173
Tabla 7.6 - Valores del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para 5, 10 y 9 MPa para PA6-MD40 .....	175
Tabla 7.7 - Valores del módulo de creep en función del tiempo con la aplicación del factor de corrección a 23°C para PA6-MD40.....	175
Tabla 7.8 - Estimación de $E_{C 60000} / E_{C 0}$ para PA6-MD40.....	175
Tabla 7.9 - Valores usados a 23°C con el modelo convencional para PA6-MD40.....	175
Tabla 7.10 - Coeficientes en el dominio del tiempo a 23°C con el modelo convencional para PA6-MD40 .....	176
Tabla 7.11 - Valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo convencional para PA6-MD40 .....	176
Tabla 7.12 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo convencional para PA6-MD40.....	177
Tabla 7.13 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida en función de la frecuencia con el modelo modificado para PA6-MD40 .....	180
Tabla 7.14 - Coeficientes en el dominio de la frecuencia a 30°C con el modelo modificado para PA6-MD40 .....	180
Tabla 7.15 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	181
Tabla 7.16 - Valores usados para cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	183
Tabla 7.17 - Coeficientes a cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	184
Tabla 7.18 - Errores entre los datos experimentales y los valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	186
Tabla 7.19 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	187
Tabla 7.20 - Valores usados para cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	189
Tabla 7.21 - Coeficientes a cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	190

Tabla 7.22 - Errores entre los datos experimentales y los valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	192
Tabla 7.23 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	194
Tabla 7.24 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	195
Tabla 7.25 - Coeficientes introducidos en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	197
Tabla 7.26 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	198
Tabla 7.27 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40 .....	199
Tabla 8.1 - Pendiente y término independiente del ajuste logarítmico entre el módulo de flexión y la velocidad de deformación para PA66-GF50 .....	206
Tabla 8.2 - Módulo de flexión a 30°C para PA66-GF50 .....	210
Tabla 8.3 - Módulo de flexión y módulo de tracción a 23°C para PA66-GF50 .....	210
Tabla 8.4 - Módulo de tracción a cada temperatura para PA66-GF50 .....	210
Tabla 8.5 - Datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66-GF50 .....	211
Tabla 8.6 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66-GF50 .....	212
Tabla 8.7 - Coeficiente de variación entre los datos experimentales y los valores teóricos a 30°C para PA66-GF50 .....	213
Tabla 8.8 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación para PA66-GF50 .....	214
Tabla 8.9 - Módulo de tracción a diferentes temperaturas de la representación gráfica experimental para PA66-GF50 .....	216
Tabla 8.10 - Factor de condición a 23°C para PA66-GF50 .....	216
Tabla 8.11 - Módulo de tracción a diferentes temperaturas con la aplicación del factor de condición para PA66-GF50 .....	217
Tabla 8.12 - Errores a diferentes temperaturas a 1 mm/min para PA66-GF50 .....	217
Tabla 8.13 - Módulo de tracción predicho en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66-GF50 .....	217
Tabla 8.14 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66-GF50 .....	218

Tabla 8.15 - Datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66-GF50.....	218
Tabla 8.16 - Errores a diferentes velocidades de deformación a 23°C para PA66-GF50 .....	220
Tabla 8.17 - Módulo de tracción de la simulación del caso 1 para PA66-GF50.....	223
Tabla 8.18 - Módulo de tracción de la simulación del caso 2 para PA66-GF50.....	223
Tabla 9.1 - Variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura para PA66-GF50.....	225
Tabla 9.2 - Datos de la curva maestra para PA66-GF50.....	226
Tabla 9.3 - Datos convertidos de la curva maestra para ser introducidos en ABAQUS® 6.10-2 para PA66-GF50 .....	226
Tabla 9.4 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida en función de la frecuencia con el modelo convencional para PA66-GF50.....	229
Tabla 9.5 - Coeficientes en el dominio de la frecuencia a 30°C con el modelo convencional para PA66-GF50 .....	229
Tabla 9.6 - Valores del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para 20, 40 y 23 MPa para PA66-GF50 .....	231
Tabla 9.7 - Estimación de $E_{C 60000} / E_{C 0}$ para PA66-GF50.....	231
Tabla 9.8 - Valores usados a 23°C con el modelo convencional para PA66-GF50 .....	232
Tabla 9.9 - Coeficientes en el dominio del tiempo a 23°C con el modelo convencional para PA66-GF50.....	232
Tabla 9.10 - Valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo convencional para PA66-GF50 .....	233
Tabla 9.11 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo convencional para PA66-GF50.....	234
Tabla 9.12 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida en función de la frecuencia con el modelo modificado para PA66-GF50.....	237
Tabla 9.13 - Coeficientes en el dominio de la frecuencia a 30°C con el modelo modificado para PA66-GF50 .....	237
Tabla 9.14 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	238
Tabla 9.15 - Valores usados para cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	240
Tabla 9.16 - Coeficientes a cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	241
Tabla 9.17 - Errores entre los datos experimentales y los valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50 .....	243

Tabla 9.18 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	244
Tabla 9.19 - Valores usados para cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	246
Tabla 9.20 - Coeficientes a cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50.....	247
Tabla 9.21 - Errores entre los datos experimentales y los valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50 .....	249
Tabla 9.22 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50 .....	251
Tabla 9.23 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50 .....	252
Tabla 9.24 - Coeficientes introducidos en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50 .....	254
Tabla 9.25 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50 .....	255
Tabla 9.26 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50 .....	256
Tabla A.1 - Coeficientes del modelo en el dominio del tiempo para cada temperatura	287
Tabla A.2 - Definición de las propiedades de un ensayo de tracción.....	364
Tabla A.3 - Diferentes tipos de probetas para ensayos.....	365



# Tabla de contenido

1	Introducción.....	1
1.1	Contextualización y motivación .....	1
1.2	Objetivos.....	3
1.3	Estructura.....	4
1.4	Materiales.....	15
2	Estado del arte .....	17
2.1	Materiales composites.....	17
2.2	Modelado .....	18
2.2.1	Modelos físicos.....	18
2.2.2	Modelos matemáticos .....	20
2.2.2.1	Modelos basados en la velocidad de deformación.....	20
2.2.2.2	Modelos viscoelásticos.....	21
2.2.2.3	Representación gráfica Cole-Cole.....	29
2.2.2.4	Comportamiento viscoelastoplástico.....	29
2.2.2.5	Modelos de creep .....	29
2.2.2.6	Modelos con derivadas fraccionales .....	30
2.3	Dominio del tiempo .....	31
2.4	Dominio de la frecuencia.....	33
2.5	Superposición tiempo-temperatura .....	36
2.5.1	Factor de desplazamiento .....	37
2.5.1.1	Factor de desplazamiento horizontal.....	37
2.5.1.2	Factor de desplazamiento vertical.....	39
2.5.2	Tiempo modificado y frecuencia modificada.....	39
2.5.3	Tiempo de relajación en función de la temperatura .....	40
3	Metodología experimental.....	43
3.1	Tests estáticos y dinámicos.....	43
3.2	Análisis dinamomecánico .....	44
3.2.1	Barrido de amplitudes.....	46
3.2.2	Barrido de temperaturas.....	47
3.2.3	Barrido de frecuencias .....	48
3.3	Máquina de ensayos universal .....	50
3.3.1	Ensayos de tensión-deformación.....	52
3.3.2	Ensayos de tracción a diferentes velocidades de deformación.....	53

3.3.3	Ensayos de relajación de tensiones.....	55
3.3.4	Ensayos de creep .....	56
3.3.5	Ensayos de relajación de tensiones doble.....	58
3.3.6	Ensayo de creep doble .....	59
3.4	Velocidad de deformación .....	61
3.5	Bucles.....	61
3.5.1	Bucle de tracción .....	61
3.5.1.1	Factor de desplazamiento .....	61
3.5.1.2	Ratio de módulos.....	64
3.5.1.3	Influencia de la temperatura.....	65
3.5.1.4	Influencia de la velocidad de deformación .....	65
3.5.1.5	Verificación del bucle de tracción.....	67
3.5.1.6	Curvas de tensión-deformación.....	68
3.5.2	Bucle de creep .....	68
3.5.2.1	Superposición frecuencia-temperatura.....	68
3.5.2.2	Modelos matemáticos para el bucle de creep.....	69
3.6	ABAQUS® 6.10-2.....	79
3.7	MATLAB® 7.5.0.....	80
3.8	ANSYS® 12.1 Academic Teaching .....	80
4	Bucle de tracción para PA66 .....	85
4.1	Barrido de amplitudes .....	85
4.2	Barrido de temperaturas .....	87
4.3	Barrido de frecuencias .....	88
4.4	Factor de desplazamiento.....	91
4.5	Ratio de módulos .....	94
4.6	Influencia de la temperatura .....	95
4.7	Influencia de la velocidad de deformación .....	96
4.8	Verificación del bucle de tracción .....	100
4.8.1	Verificación de la temperatura .....	100
4.8.2	Verificación de la velocidad de deformación .....	102
4.9	Curvas de tensión-deformación .....	105
4.10	Simulaciones de los tests de tracción .....	108
5	Bucle de creep para PA66 .....	111
5.1	Superposición frecuencia-temperatura .....	111
5.2	Modelo convencional.....	112

5.2.1	Modelo convencional en el dominio de la frecuencia .....	112
5.2.2	Modelo convencional en el dominio del tiempo .....	117
5.3	Modelos modificados.....	123
5.3.1	Modelo modificado en el dominio de la frecuencia .....	123
5.3.2	Modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo.....	126
5.3.3	Influencia de la temperatura en el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo .....	128
5.3.4	Modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo.....	132
5.3.5	Influencia de la temperatura en el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo .....	134
5.3.6	Comparación entre los dos modelos modificados .....	137
5.4	Simulaciones de los tests de creep .....	138
5.4.1	Simulaciones sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo.....	138
5.4.2	Simulaciones con coeficientes alfa en el dominio del tiempo.....	141
6	Bucle de tracción para PA6-MD40 .....	147
6.1	Barrido de amplitudes .....	147
6.2	Barrido de temperaturas .....	149
6.3	Barrido de frecuencias .....	151
6.4	Factor de desplazamiento.....	153
6.5	Ratio de módulos .....	155
6.6	Influencia de la temperatura .....	156
6.7	Influencia de la velocidad de deformación .....	157
6.8	Verificación del bucle de tracción .....	161
6.8.1	Verificación de la temperatura .....	161
6.8.2	Verificación de la velocidad de deformación .....	163
6.9	Curvas de tensión-deformación .....	166
6.10	Simulaciones de los tests de tracción .....	167
7	Bucle de creep para PA6-MD40.....	169
7.1	Superposición frecuencia-temperatura .....	169
7.2	Modelo convencional.....	170
7.2.1	Modelo convencional en el dominio de la frecuencia .....	170
7.2.2	Modelo convencional en el dominio del tiempo .....	174
7.3	Modelos modificados.....	178
7.3.1	Modelo modificado en el dominio de la frecuencia .....	178
7.3.2	Modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo.....	181

7.3.3	Influencia de la temperatura en el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo .....	183
7.3.4	Modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo.....	187
7.3.5	Influencia de la temperatura en el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo .....	189
7.3.6	Comparación entre los dos modelos modificados .....	192
7.4	Simulaciones de los tests de creep .....	193
7.4.1	Simulaciones sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo.....	193
7.4.2	Simulaciones con coeficientes alfa en el dominio del tiempo.....	196
8	Bucle de tracción para PA66-GF50.....	201
8.1	Barrido de amplitudes .....	201
8.2	Barrido de temperaturas .....	203
8.3	Barrido de frecuencias .....	204
8.4	Factor de desplazamiento.....	207
8.5	Ratio de módulos .....	209
8.6	Influencia de la temperatura .....	210
8.7	Influencia de la velocidad de deformación .....	211
8.8	Verificación del bucle de tracción .....	215
8.8.1	Verificación de la temperatura .....	215
8.8.2	Verificación de la velocidad de deformación .....	217
8.9	Curvas de tensión-deformación .....	220
8.10	Simulaciones de los tests de tracción .....	222
9	Bucle de creep para PA66-GF50.....	225
9.1	Superposición frecuencia-temperatura .....	225
9.2	Modelo convencional.....	226
9.2.1	Modelo convencional en el dominio de la frecuencia.....	226
9.2.2	Modelo convencional en el dominio del tiempo .....	230
9.3	Modelos modificados.....	235
9.3.1	Modelo modificado en el dominio de la frecuencia .....	235
9.3.2	Modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo.....	238
9.3.3	Influencia de la temperatura en el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo .....	240
9.3.4	Modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo.....	244
9.3.5	Influencia de la temperatura en el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo .....	246
9.3.6	Comparación entre los dos modelos modificados .....	249

9.4	Simulaciones de los tests de creep .....	250
9.4.1	Simulaciones sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo.....	250
9.4.2	Simulaciones con coeficientes alfa en el dominio del tiempo.....	253
10	Ecuaciones finales de los modelos .....	259
10.1	Modelo matemático para el bucle de tracción.....	259
10.2	Modelos matemáticos para el bucle de creep.....	261
10.2.1	Modelo convencional para el bucle de creep.....	261
10.2.2	Modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep .....	262
10.2.3	Modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep .....	262
11	Conclusiones y futuros desarrollos.....	265
11.1	Conclusiones .....	265
11.2	Contribuciones .....	266
11.3	Futuros desarrollos .....	266
12	Referencias .....	269
A.	Anexos .....	279
A.1	Códigos de ANSYS® .....	279
A.1.1	Simulación de los tests de tracción.....	279
A.1.2	Simulación de los tests de creep .....	284
A.1.2.1	Simulación sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo .....	284
A.1.2.2	Simulación con coeficientes alfa en el dominio del tiempo .....	286
A.2	Análisis termogravimétricos.....	289
A.3	Caracterización de modelos matemáticos viscoelásticos básicos.....	293
A.3.1	Sólido elástico.....	294
A.3.2	Fluido viscoso.....	297
A.3.3	Modelo de Kelvin-Voigt.....	301
A.3.4	Modelo de Maxwell.....	306
A.4	Caracterización de las series de Prony.....	311
A.4.1	Modelo generalizado de Kelvin-Voigt .....	314
A.4.1.1	Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con $n=1$ .....	317
A.4.1.2	Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con $n=2$ .....	319
A.4.2	Modelo generalizado de Maxwell .....	322
A.4.2.1	Modelo generalizado de Maxwell con $n=1$ .....	325
A.4.2.2	Modelo generalizado de Maxwell con $n=2$ .....	327

A.4.3 Representaciones gráficas con $n=1$ .....	331
A.4.4 Representaciones gráficas con $n=2$ .....	334
A.5 Relaciones entre los modelos generalizados de Kelvin-Voigt y de Maxwell y los coeficientes de relajación y de creep .....	345
A.5.1 Relaciones con $n=1$ .....	347
A.5.1.1 Relaciones a partir del modelo generalizado de Kelvin-Voigt con $n=1$ .....	347
A.5.1.2 Relaciones a partir del modelo generalizado de Maxwell con $n=1$ ....	348
A.5.1.3 Relaciones a partir de los coeficientes de relajación para $n=1$ .....	349
A.5.1.4 Relaciones a partir de los coeficientes de creep para $n=1$ .....	350
A.5.2 Relaciones con $n=2$ .....	351
A.5.2.1 Relaciones a partir del modelo generalizado de Kelvin-Voigt con $n=2$ .....	351
A.5.2.2 Relaciones a partir del modelo generalizado de Maxwell con $n=2$ ....	353
A.5.2.3 Relaciones a partir de los coeficientes de relajación para $n=2$ .....	355
A.5.2.4 Relaciones a partir de los coeficientes de creep para $n=2$ .....	357
A.6 Tiempo de relajación y tiempo de retardo .....	359
A.6.1 Tiempo de relajación .....	359
A.6.2 Tiempo de retardo .....	359
A.7 Propiedades dinamomecánicas en la flexión a tres puntos - ASTM D5023-07 .....	361
A.8 Propiedades de tracción - ISO 527-1, 2 .....	363
A.9 Ensayos de relajación de tensiones doble y de creep doble .....	367
A.9.1 Ensayo de relajación de tensiones doble .....	367
A.9.2 Ensayo de creep doble .....	368
A.10 Ratio de módulos .....	371
A.11 Subrutinas de MATLAB® .....	375
A.11.1 Subrutina de MATLAB® usando el modelo convencional para el bucle de creep .....	375
A.11.2 Subrutina de MATLAB® usando los modelos modificados para el bucle de creep .....	379
A.12 Derivadas de las series de Prony .....	383
A.12.1 Derivadas en función del tiempo .....	383
A.12.1.1 Derivadas de primer orden .....	383
A.12.1.2 Derivadas de segundo orden .....	383
A.12.2 Derivadas en función de la frecuencia .....	383

A.12.2.1 Derivadas de primer orden.....	383
A.12.2.2 Derivadas de segundo orden.....	384
A.13 Resolución de ecuaciones polinómicas .....	387
A.13.1 Ecuación polinómica de tercer orden .....	387
A.13.2 Ecuación polinómica de cuarto orden.....	388



# 1 Introducción

## 1.1 Contextualización y motivación

Hoy en día el uso de la máquina universal de ensayos (MUE) para caracterizar materiales de todo tipo está muy extendido. Sin embargo, dicho uso requiere, en general, de un gran número de ensayos. Por ejemplo, si se desea estudiar cómo influye la velocidad de deformación y la temperatura al traccionar un material, dicho estudio requiere un ensayo distinto para cada par de valores. Esto conlleva mucho tiempo. Sin embargo, mediante el uso de un aparato que hace ensayos dinamomecánicos (DMA), se puede obtener una gran cantidad de información en un tiempo mucho menor. Si se trata dicha información mediante una serie de modelos matemáticos, se puede obtener la misma información que se podría obtener en MUE sin necesidad de usar dicho aparato, ahorrando tiempo y dinero.

Además hoy en día, los programas de simulación, como por ejemplo ANSYS®, llevan incorporados modelos matemáticos para simular los comportamientos de los materiales, que minimizan el número de ensayos necesarios para una caracterización. Si el usuario conoce los valores de entrada de los modelos que llevan incorporados dichos programas, automáticamente éstos también pueden estimar la información que se hallaría mediante ensayo experimental.

El presente trabajo trata de desarrollar modelos matemáticos capaces de predecir los módulos de tracción y de creep a partir de datos experimentales obtenidos en DMA sin usar MUE. Además, también trata de desarrollar códigos de simulación donde el usuario pueda estimar estos módulos mediante la introducción de la velocidad de deformación y de la temperatura, en el caso de los módulos de tracción, y del tiempo y de la temperatura, en el caso de los módulos de creep. Este concepto base es el que se muestra en el Esquema 1.1.

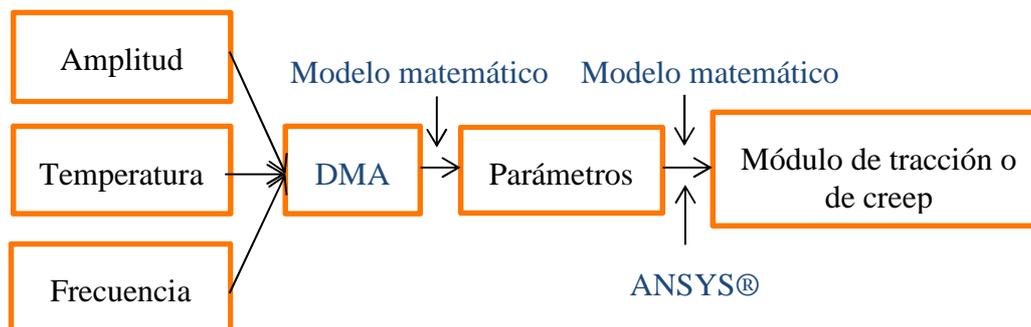
$$\begin{aligned} \text{DMA} + \text{Modelo matemático} &= \text{MUE} \\ \text{DMA} + \text{Modelo matemático} + \text{ANSYS}^\circledast &= \text{MUE} \end{aligned}$$

Esquema 1.1 - Concepto base

Los datos experimentales de DMA se obtienen a partir de ciertos valores de amplitud, frecuencia y temperatura. Una vez obtenidos dichos datos, se hallan una serie de parámetros que se presentarán en el capítulo 3. Con estos parámetros, hay dos formas de proceder. La primera es utilizando el mismo modelo matemático, con el fin de obtener los módulos buscados. La segunda es mediante el código numérico ANSYS®, que devuelve el valor de los módulos a partir de los parámetros de entrada.

## Capítulo 1 - Introducción

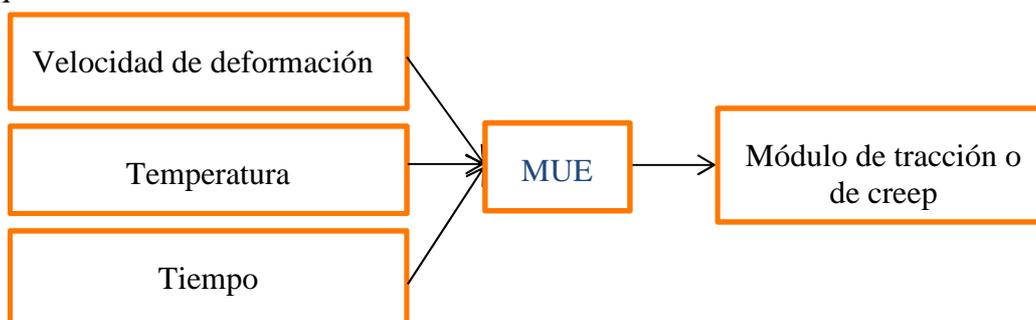
La idea de la primera parte del concepto base (DMA + Modelo matemático o DMA + Modelo matemático + ANSYS®) sería la que se muestra en el Esquema 1.2.



Esquema 1.2 - Primera parte del concepto base

Los resultados obtenidos aplicando el procedimiento expuesto en el Esquema 1.2 serán contrastados con los de MUE, para estimar su bondad.

La idea de la segunda parte del concepto base (MUE) sería la que se muestra en el Esquema 1.3.



Esquema 1.3 - Segunda parte del concepto base

Para esta tesis, se han llevado a cabo una serie de hipótesis para poder calcular los módulos de tracción y de creep.

- 1) Para calcular los módulos de tracción:
  - a) Se asume y se comprueba una tendencia logarítmica entre el módulo de flexión y la frecuencia, así como también entre el módulo de tracción y la velocidad de deformación.
  - b) Se encuentra una ecuación que relaciona la velocidad de deformación, la frecuencia y la amplitud, siguiendo la tendencia sinusoidal de los ensayos de flexión.
  - c) Se ha definido un factor que permite relacionar el módulo de tracción con el módulo de flexión. Este factor es independiente de la velocidad de deformación y de la temperatura.
  - d) Se ha definido un modelo matemático para calcular los módulos de tracción en función de la velocidad de deformación y de la temperatura. Este modelo matemático se usa en el bucle de tracción.
- 2) Para calcular los módulos de creep:
  - a) Se asumen una serie de ecuaciones propuestas en la bibliografía para calcular los módulos de flexión en función de la frecuencia y del tiempo

## Capítulo 1 - Introducción

---

como punto inicial. Este modelo matemático es el modelo convencional para el bucle de creep.

- b) Se asume una conversión de coeficientes de los de relajación en el dominio de la frecuencia a los de módulo relativo en el dominio del tiempo. Esta conversión se requiere ya que si se usan los mismos coeficientes, no se ajustan los datos experimentales.
- c) Se desarrollan dos nuevos modelos matemáticos en los que se propone el uso de los coeficientes alfa en el dominio de la frecuencia para obtener mejores resultados que los obtenidos con el modelo convencional. La diferencia entre los dos nuevos modelos matemáticos reside en el uso (o no) de estos coeficientes alfa en el dominio del tiempo. Estos nuevos modelos matemáticos son el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo y el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo.
- d) Se requiere que, para un ajuste preciso de los coeficientes en el dominio de la frecuencia a partir de los datos experimentales, los coeficientes de relajación y los coeficientes alfa se fijen dentro de un rango de trabajo. Los coeficientes de relajación se limitan de 0.01 a 0.35 y los coeficientes alfa de 0.10 a 2.00.

Esta tesis trabaja con 4 modelos matemáticos:

- 1) Modelo matemático para el bucle de tracción.
- 2) Modelo convencional para el bucle de creep.
- 3) Modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep.
- 4) Modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep.

El desarrollo de estos modelos mostrará cuáles son los que hacen que la discrepancia entre los datos experimentales y los valores teóricos sea menor.

### 1.2 Objetivos

Los objetivos de esta tesis son:

- 1) Obtener modelos matemáticos para definir el comportamiento de algunos materiales termoplásticos específicos a partir de los datos del análisis dinámomecánico (DMA) y poder predecir los módulos de tracción y de creep sin usar la máquina universal de ensayos (MUE).
- 2) Obtener códigos de simulación donde el usuario pueda predecir estos mismos módulos de tracción y de creep introduciendo los parámetros de entrada necesarios. Estos parámetros son la velocidad de deformación, el tiempo y la temperatura.

## 1.3 Estructura

Esta tesis tiene la siguiente estructura:

- 1) Introducción (Capítulo 1)
- 2) Estado del arte (Capítulo 2)
- 3) Metodología experimental (Capítulo 3)
- 4) Bucles de tracción y de creep para los tres materiales (Del capítulo 4 al capítulo 9)
- 5) Ecuaciones finales de los modelos matemáticos (Capítulo 10)
- 6) Conclusiones (Capítulo 11)
- 7) Referencias (Capítulo 12)
- 8) Anexos

En el capítulo 2, se encuentra una descripción general de los materiales composites. Este estado del arte representa una parte importante de esta tesis, debido al hecho que dos de los tres materiales estudiados en ella son materiales composites. Además, se aborda una revisión sobre los modelos constitutivos históricos para estudiar los polímeros y composites, haciendo especial énfasis en las ecuaciones constitutivas viscoelásticas.

Después de esto, se encuentra una breve revisión de los ensayos empleados en los dominios del tiempo y de la frecuencia. De especial interés es el apartado en el que se comenta la relación entre los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia.

A continuación, se explican los conceptos de la superposición tiempo-temperatura, así como también los factores de desplazamiento horizontal y vertical usados para realizar la superposición.

Especial atención merecen las ecuaciones de Williams-Landel-Ferry (WLF) y de Arrhenius para conectar los factores de desplazamiento con la temperatura mediante coeficientes ajustados, así como los conceptos de tiempo modificado y frecuencia modificada.

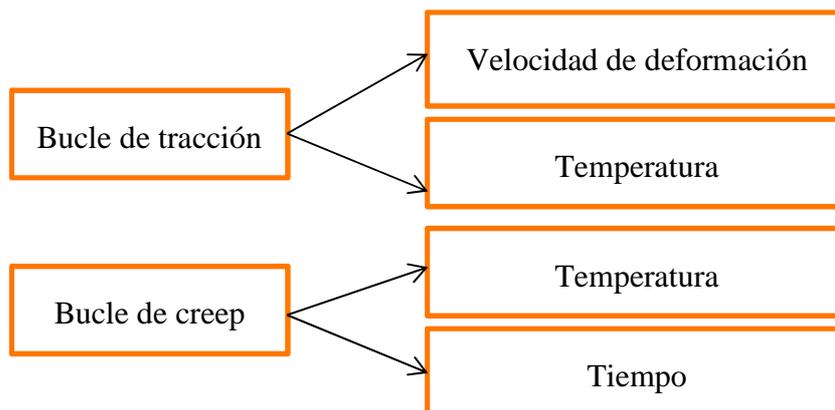
El capítulo 3 se centra en la metodología experimental de la tesis. Para ello, se explican los rangos de trabajo de los dos aparatos usados para este proyecto, DMA y MUE.

Se describen los ensayos para caracterizar los materiales utilizando ambos aparatos. Los datos experimentales de DMA se obtienen realizando barridos de amplitudes, temperaturas y frecuencias. En relación a la verificación de los modelos matemáticos desarrollados, los tests de MUE elegidos son los de tracción y de creep. Además, en este capítulo, también se encuentra una breve explicación sobre tests de relajación de tensiones, así como de creep doble y de relajación de tensiones doble.

En el Esquema 1.4 se presentan los dos bucles de esta tesis. El primer bucle se define como bucle de tracción, sirve para hallar el módulo de tracción, y se encuentra en función de la velocidad de deformación y de la temperatura. El segundo bucle se define como bucle de creep, sirve para hallar el módulo de creep, y se encuentra en función de la temperatura y del tiempo.

## Capítulo 1 - Introducción

---



Esquema 1.4 - Bucles

Se presentan los esquemas de los bucles que se nombran a continuación:

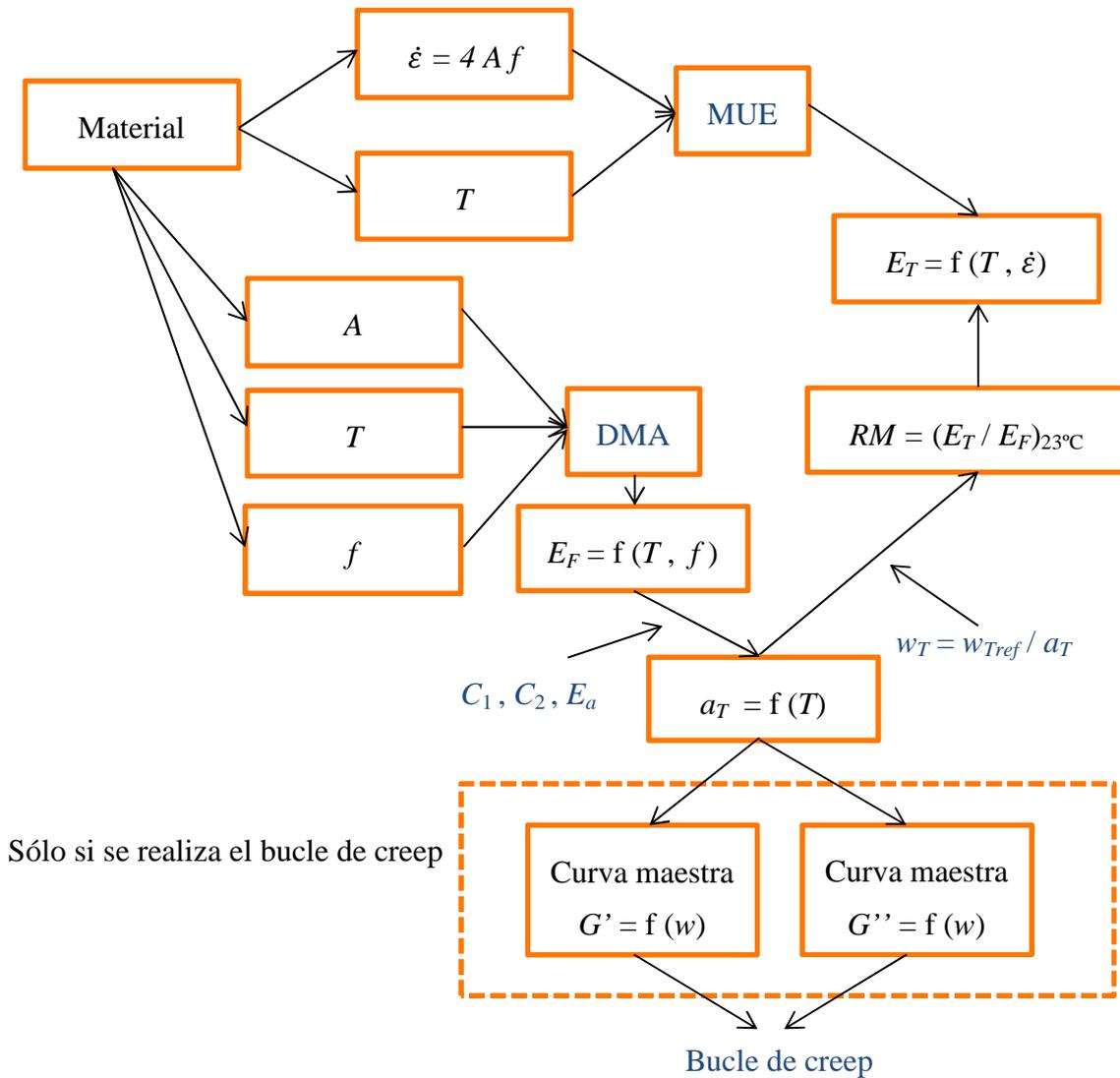
- 1) Bucle de tracción.
- 2) Bucle de creep para el modelo convencional a 23°C.
- 3) Bucle de creep para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo a 23°C.
- 4) Bucle de creep para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo a diferentes temperaturas.
- 5) Bucle de creep para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo a 23°C.
- 6) Bucle de creep para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo a diferentes temperaturas.

En los esquemas sólo se presentan los parámetros de entrada y de salida. Las explicaciones detalladas de los bucles, así como los modelos matemáticos involucrados en ellos, son explicados en el capítulo de metodología experimental.

# Capítulo 1 - Introducción

En el bucle de tracción, los parámetros de entrada son la amplitud, la temperatura y la frecuencia como datos de DMA. Con este bucle, por una parte, se obtienen los módulos de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación, mientras que por otra parte, se obtienen las curvas maestras de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia para ser usados en los bucles de creep.

En el Esquema 1.5 se presenta el bucle de tracción.



Esquema 1.5 - Bucle de tracción

# Capítulo 1 - Introducción

---

Donde:

$A$ : Amplitud

$T$ : Temperatura

$T_{ref}$ : Temperatura de referencia (30°C)

$f$ : Frecuencia en Hz

$w$ : Frecuencia en rad/s

$w_T$ : Frecuencia para alcanzar un cierto valor en una propiedad de un material a la temperatura  $T$  en rad/s

$w_{Tref}$ : Frecuencia para alcanzar un cierto valor en una propiedad de un material a la temperatura de referencia  $T_{ref}$  en rad/s

$E_F$ : Módulo de flexión

$E_T$ : Módulo de tracción

$RM$ : Ratio de módulos

$C_1$ : Primer coeficiente de la ecuación de Williams-Landel-Ferry (WLF)

$C_2$ : Segundo coeficiente de la ecuación de Williams-Landel-Ferry (WLF)

$E_a$ : Energía de activación de la ecuación de Arrhenius

$a_T$ : Factor de desplazamiento horizontal

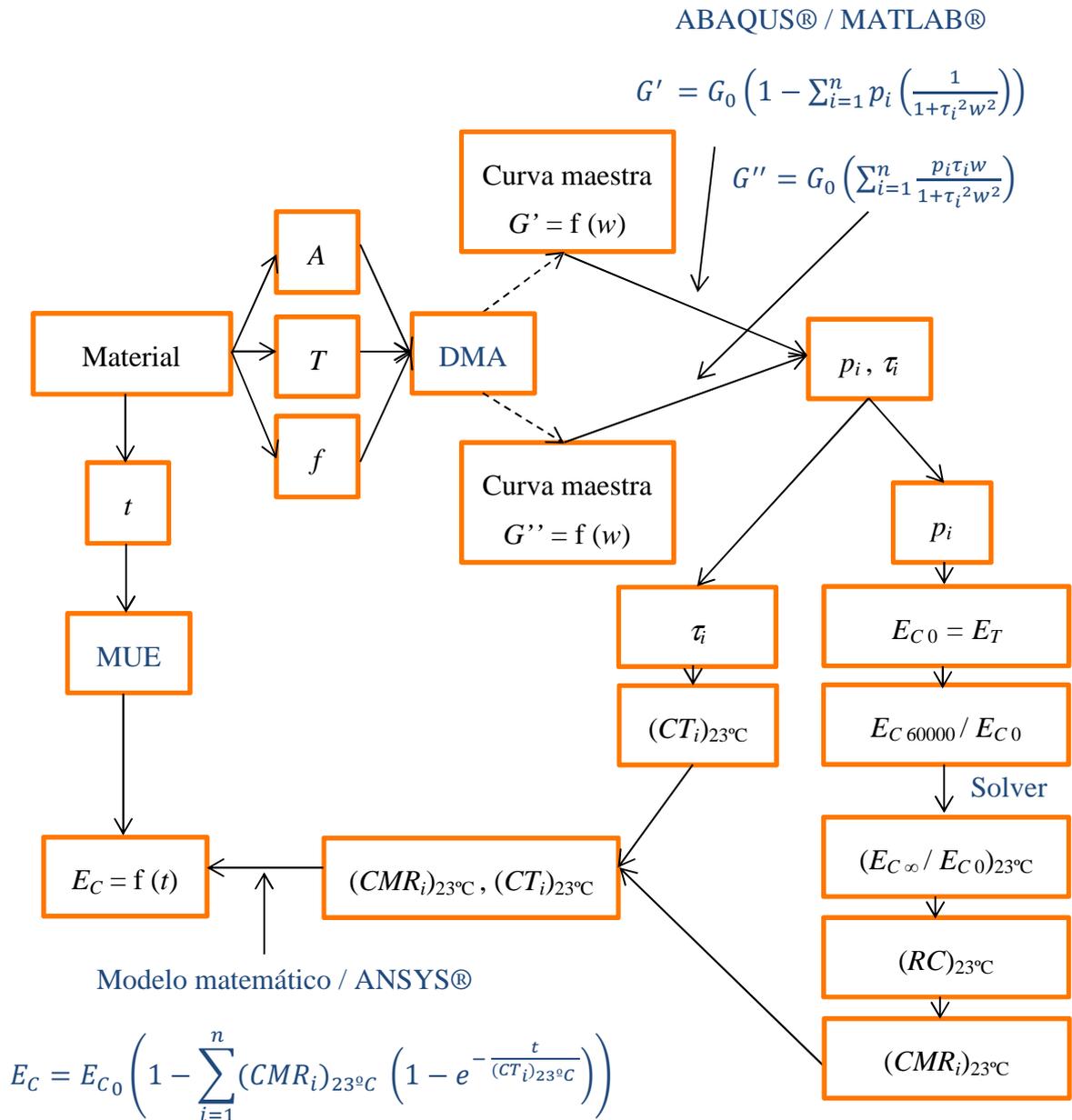
$G'$ : Módulo de almacenamiento

$G''$ : Módulo de pérdida

# Capítulo 1 - Introducción

En el bucle de creep para el modelo convencional a 23°C, los parámetros de entrada son las curvas maestras de los módulos de almacenamiento y de pérdida, halladas en el bucle de tracción, así como las ecuaciones de estos módulos en función de la frecuencia. Con este bucle, se obtienen los módulos de creep en función del tiempo a 23°C.

En el Esquema 1.6 se presenta el bucle de creep para el modelo convencional a 23°C.



Esquema 1.6 - Bucle de creep para el modelo convencional a 23°C

## Capítulo 1 - Introducción

---

Donde:

---- >: Pasos intermedios explicados en bucles anteriores

$G_0$ : Módulo de flexión o módulo de almacenamiento a tiempo inicial

$p_i$ : Coeficiente de relajación

$\tau_i$ : Tiempo de relajación

$RC$ : Ratio de coeficientes entre  $p_i$ , coeficiente de relajación usado en el dominio de la frecuencia, y  $CMR_i$ , coeficiente de módulo relativo usado en el dominio del tiempo

$CMR_i$ : Coeficiente de módulo relativo

$CT_i$ : Coeficiente de tiempo

$E_C$ : Módulo de creep

$E_{C0}$ : Módulo de creep a tiempo inicial

$E_{C60000} / E_{C0}$ : Valor del ratio entre el módulo de creep predicho a 60000 segundos y el mismo módulo a tiempo inicial

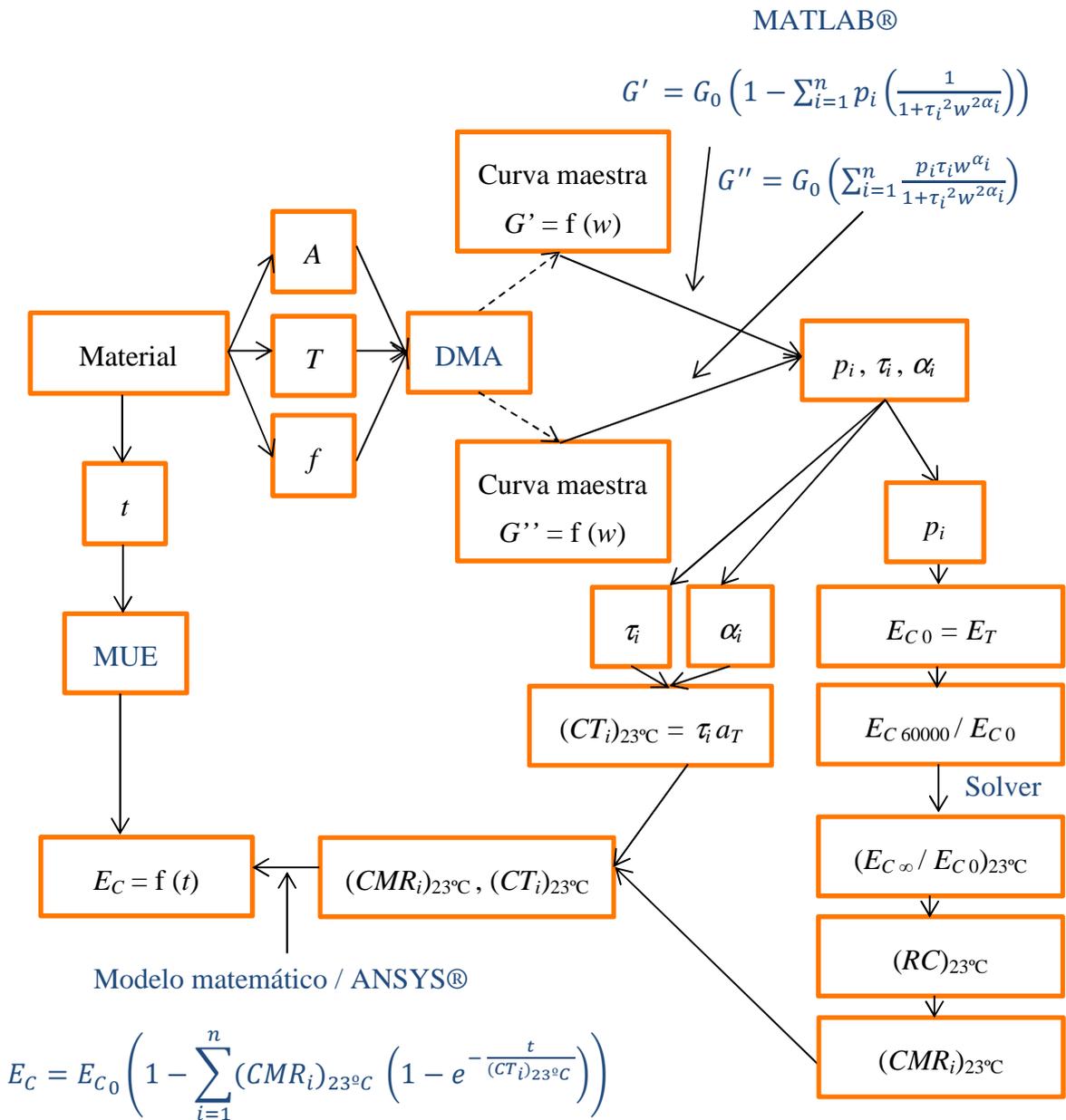
$E_{C\infty}$ : Módulo de creep a tiempo infinito

$E_{C\infty} / E_{C0}$ : Valor del ratio entre el módulo de creep predicho a tiempo infinito y el mismo módulo a tiempo inicial, suponiendo que la curva a ajustar tuviera los mismos coeficientes obtenidos para la curva hasta 60000 segundos

# Capítulo 1 - Introducción

En el bucle de creep para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo a 23°C, los parámetros de entrada son también las curvas maestras de los módulos de almacenamiento y de pérdida, y las ecuaciones de estos módulos en función de la frecuencia. Con este bucle, se obtienen los módulos de creep en función del tiempo a 23°C.

En el Esquema 1.7 se presenta el bucle de creep para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo a 23°C.



Esquema 1.7 - Bucle de creep para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo a 23°C

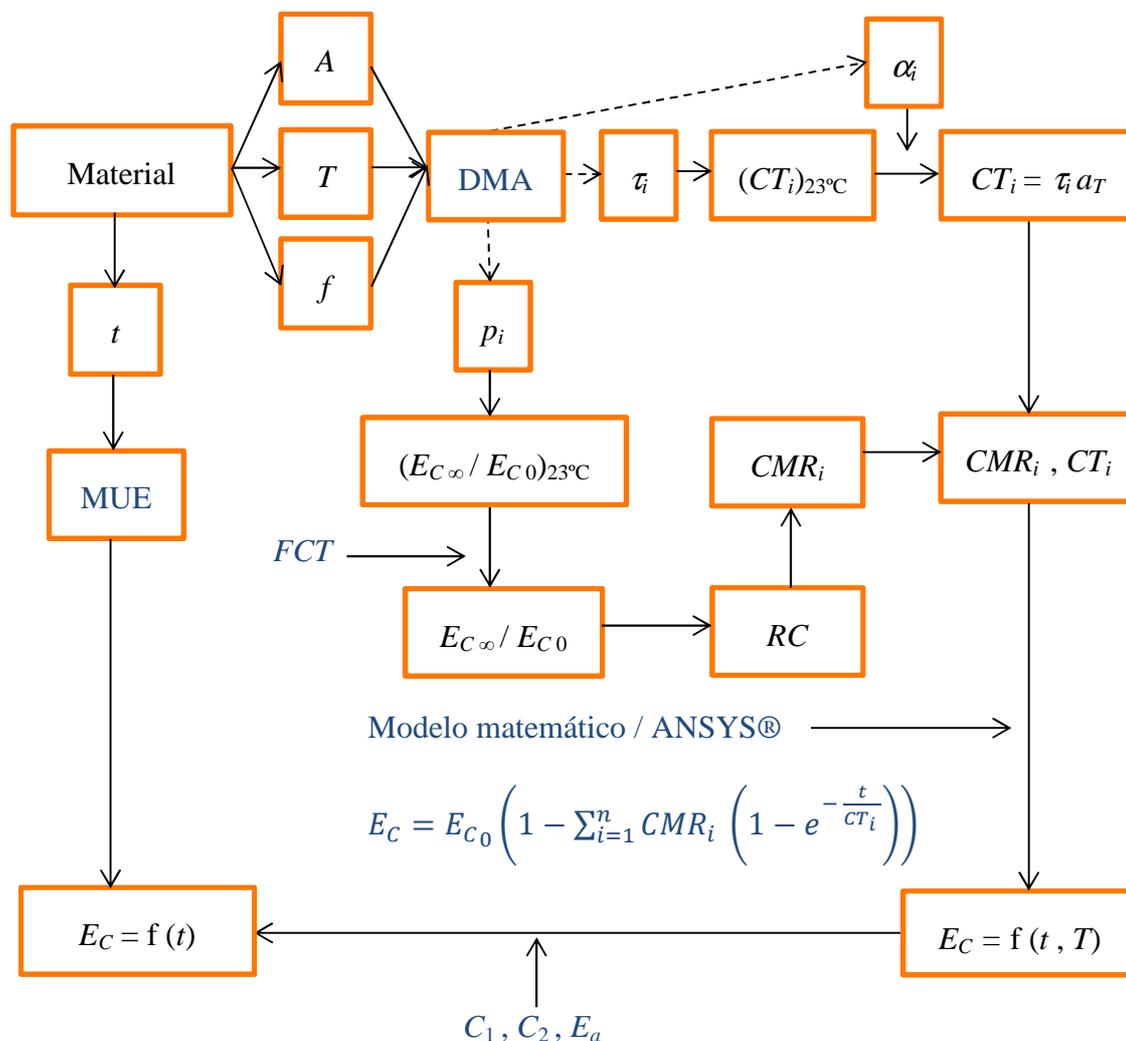
Donde:

$\alpha_i$ : Coeficiente alfa

## Capítulo 1 - Introducción

En el bucle de creep para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo a diferentes temperaturas, se obtienen los módulos de creep en función del tiempo y en función de la temperatura.

En el Esquema 1.8 se presenta el bucle de creep para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo a diferentes temperaturas.



Esquema 1.8 - Bucle de creep para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo a diferentes temperaturas

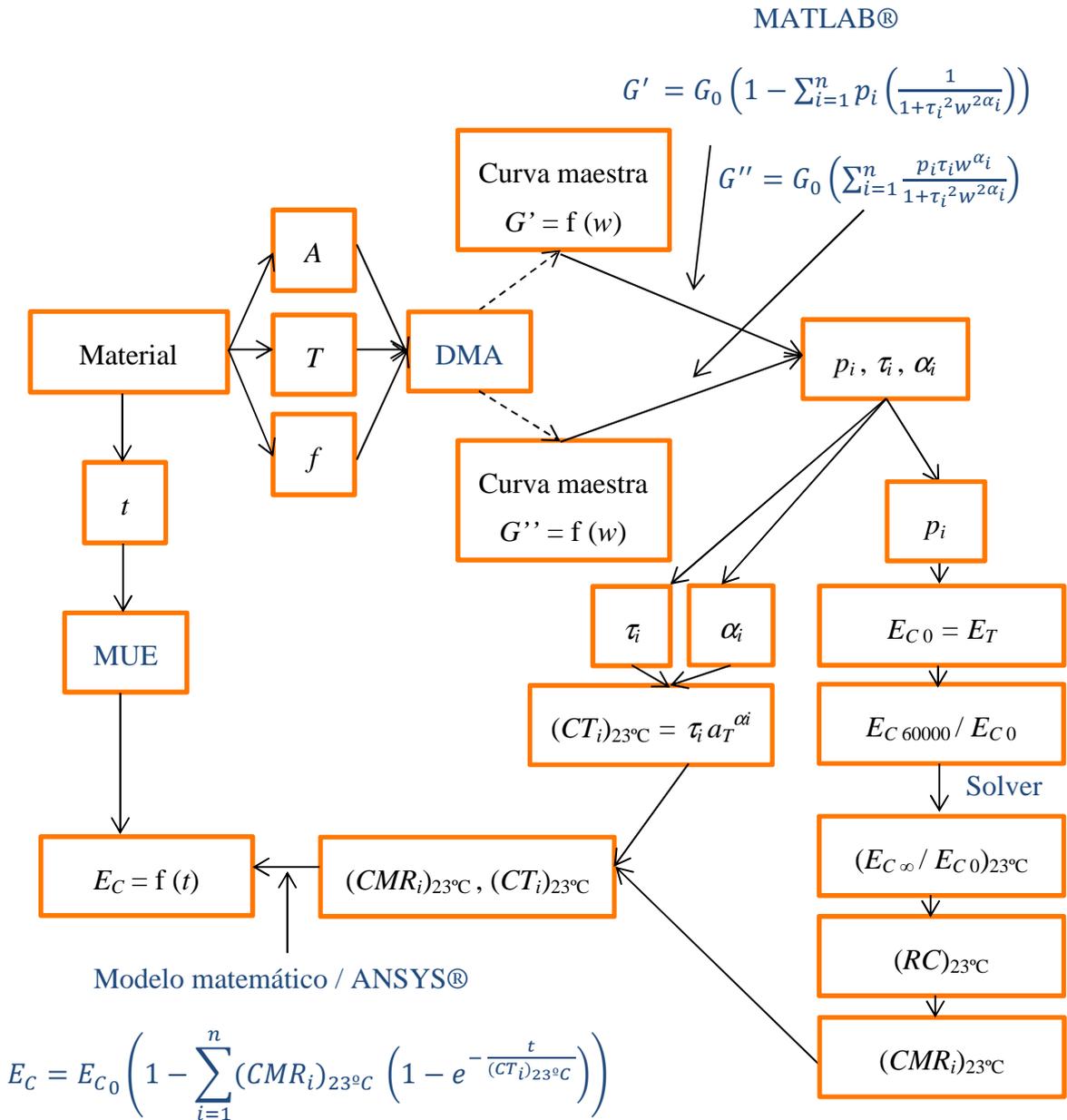
Donde:

**FCT**: Factor de cambio de temperatura

# Capítulo 1 - Introducción

En el bucle de creep para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo a 23°C, los parámetros de entrada son las curvas maestras de los módulos de almacenamiento y de pérdida, y las ecuaciones de estos módulos en función de la frecuencia. Con este bucle, se obtienen los módulos de creep en función del tiempo a 23°C.

En el Esquema 1.9 se presenta el bucle de creep para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo a 23°C.

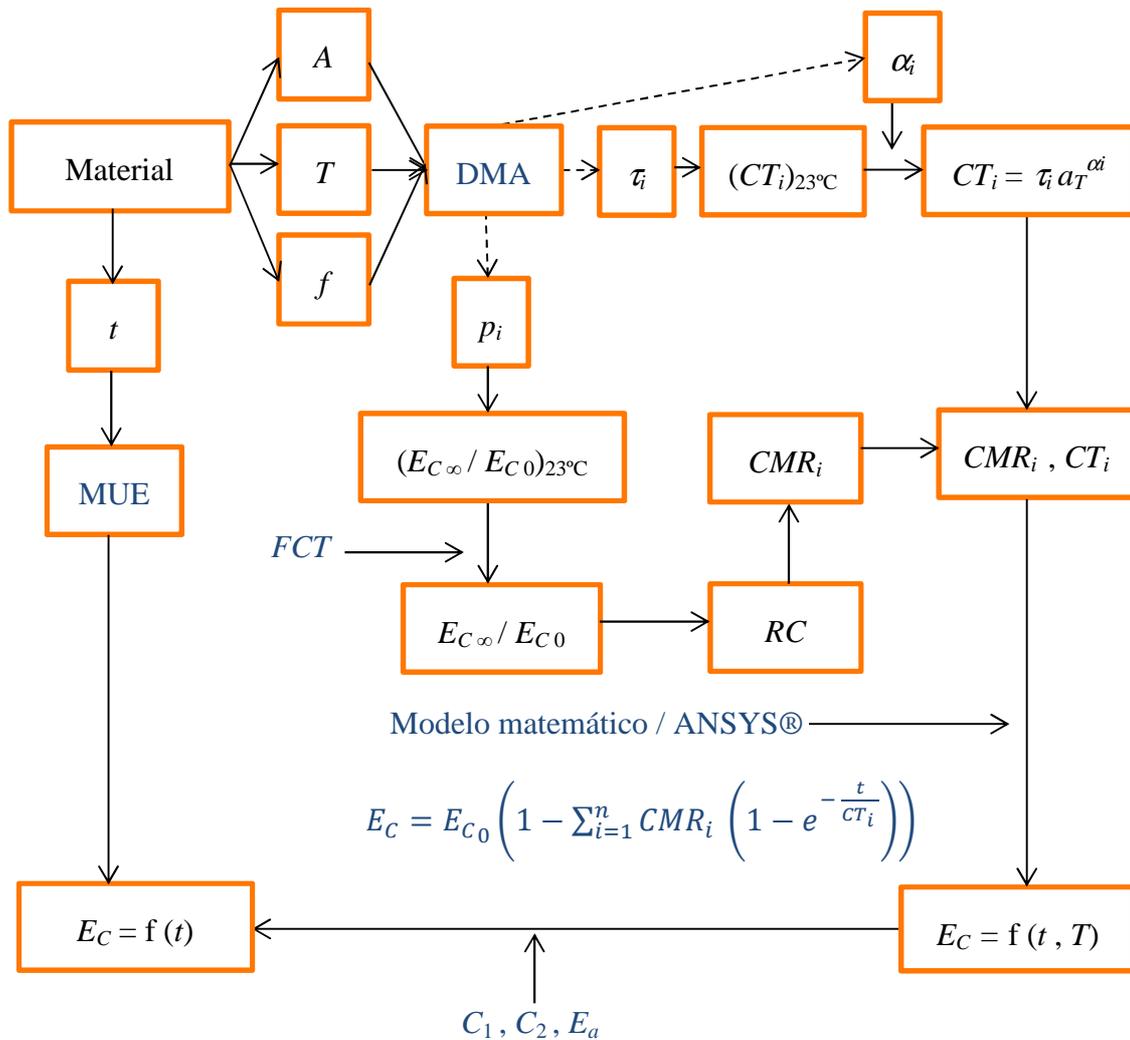


Esquema 1.9 - Bucle de creep para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo a 23°C

# Capítulo 1 - Introducción

En el bucle de creep para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo a diferentes temperaturas, se obtienen los módulos de creep en función del tiempo y en función de la temperatura.

En el Esquema 1.10 se presenta el bucle de creep para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo a diferentes temperaturas.



Esquema 1.10 - Bucle de creep para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo a diferentes temperaturas

## Capítulo 1 - Introducción

---

Después de la metodología experimental, se presentan una serie de seis capítulos, divididos dos a dos (del capítulo 4 al capítulo 9).

Estos capítulos hacen referencia a los tres materiales estudiados. Los capítulos se estructuran de la siguiente manera:

- 1) PA66
  - a) Bucle de tracción (Capítulo 4)
  - b) Bucle de creep (Capítulo 5)
- 2) PA6-MD40
  - a) Bucle de tracción (Capítulo 6)
  - b) Bucle de creep (Capítulo 7)
- 3) PA66-GF50
  - a) Bucle de tracción (Capítulo 8)
  - b) Bucle de creep (Capítulo 9)

PA66 es poliamida 66 lubricada y estabilizada térmicamente, con nombre comercial ZYTEL® 103HSL NC010 <sup>1,2</sup>

PA6-MD40 es poliamida 6 con un 40% mineral estabilizada térmicamente, con nombre comercial MINLON® 73M40 NC010 <sup>3,4</sup>

PA66-GF50 es poliamida 66 reforzada con un 50% de fibra de vidrio, estabilizada térmicamente, con nombre comercial ZYTEL® 70G50HSLA BK039B <sup>5,6</sup>

Cada capítulo sigue la estrategia presentada en estos esquemas y explicada detalladamente en la metodología experimental. Al final de cada procedimiento se presenta una tabla comparativa entre los valores obtenidos usando el modelo matemático (valores teóricos) y los datos obtenidos por la experimentación con MUE (datos experimentales), a modo de validación.

Además, al final de cada capítulo, se muestran las líneas modificadas de los códigos de ANSYS® para los materiales estudiados respecto a los códigos presentados de forma general en el anexo A.1, así como también se presentan algunos casos aplicando valores previamente definidos a los parámetros de entrada.

Después de estos capítulos, se presentan las ecuaciones finales de los modelos matemáticos para los bucles de tracción y de creep (capítulo 10).

El bucle de tracción determina el módulo de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación mediante un modelo matemático para el bucle de tracción. Los tests de tracción se definen con la norma ISO 527.

El bucle de creep determina el módulo de creep en función del tiempo y de la temperatura, en el que el módulo de creep a tiempo inicial se define como el módulo de tracción calculado al final del test de tracción a la temperatura y a la velocidad de deformación dadas. Como se ha mencionado previamente, para este bucle, se proponen tres modelos. El mejor es el modelo cuyos valores teóricos presenten errores más pequeños con respecto a los datos experimentales en los tests de creep. Estos tests se realizan manteniendo el valor de tensión al 10% del valor de la tensión de fluencia del material y llegando hasta este valor de tensión con una velocidad de deformación de 1 mm/min.

Finalmente se presentan las conclusiones (capítulo 11) y las referencias (capítulo 12).

### 1.4 Materiales

La idea de esta tesis se basa en el uso de materiales con la misma matriz polimérica (PA66) y con diferente porcentaje de fibra de vidrio. En un caso, no hay fibra de vidrio (PA66) (Figura 1.1 y Figura 1.2) y en el otro caso, el porcentaje de la fibra es aproximadamente del 50% (PA66-GF50) (Figura 1.3 y Figura 1.4).



Figura 1.1 - Probeta de PA66 usada en DMA



Figura 1.2 - Probeta de PA66 usada en MUE



Figura 1.3 - Probeta de PA66-GF50 usada en DMA



Figura 1.4 - Probeta de PA66-GF50 usada en MUE

Estos materiales se usan en la industria automovilística. El estudio de estos materiales es importante, porque esta industria está en crecimiento durante estos últimos años.

Los materiales usados en esta tesis son suministrados por DuPont™.

Además, se ha analizado un composite fabricado de PA6 con aproximadamente 40% de partículas (PA6-MD40) para estudiar un material con una matriz polimérica y una fibra distintas (Figura 1.5 y Figura 1.6).



Figura 1.5 - Probeta de PA6-MD40 usada en DMA

## Capítulo 1 - Introducción

---



Figura 1.6 - Probeta de PA6-MD40 usada en MUE

Se muestran los análisis termogravimétricos de las muestras de PA66-GF50 y PA6-MD40 en el anexo A.2.

Las poliamidas reforzadas con fibra de vidrio, tales como la poliamida 6 o 66, son excelentes materiales composites en términos de sus altos niveles de rendimiento mecánico y de resistencia a la temperatura. Los termoplásticos reforzados con fibras se han utilizado en la industria automovilística desde hace muchos años y recientemente ha habido un fuerte crecimiento en el uso de materiales con base de poliamida. Estas aplicaciones requieren de estrictos requisitos y controles de estos materiales en términos de estabilidad dimensional y de estabilidad mecánica, así como de temperatura y de resistencia química. La prueba típica para estas aplicaciones consiste en la medición de las propiedades mecánicas. Sin embargo, no siempre es fácil obtener una buena comprensión de las relaciones entre la estructura y el rendimiento de un material<sup>7</sup>.

Thomason revisó el rendimiento mecánico y los cambios dimensionales observados en la poliamida 66 reforzada con fibra de vidrio durante el acondicionamiento en líquido a 120°C y a 150°C<sup>8</sup>.

Las fibras de vidrio tienen algunas restricciones en la temperatura de uso o en la resistencia química. Hasta 8 o 9 componentes químicamente puros son, en general, utilizados para obtener fibra de vidrio en stock<sup>9</sup>.

Doy publicó un estudio sobre la longitud de flujo en función de la presión de inyección entre ZYTEL® 70G50HSLA BK039B, material utilizado en esta tesis, y ZYTEL® 70G50HSL BK039B. El estudio muestra que el primer material presenta mejores características de flujo<sup>10</sup>.

Se puede encontrar más información en los productos MINLON® y ZYTEL® de DuPont<sup>TM 11</sup>.

## 2 Estado del arte

### 2.1 Materiales compuestos

Estructuralmente, los materiales sólidos se pueden dividir en 4 grupos: los materiales metálicos, los materiales poliméricos, los materiales cerámicos y los materiales compuestos. El presente trabajo se centra en este último que es una combinación de dos o más materiales con propiedades físicas y químicas diferentes a las que tendría cada uno de los materiales que lo forma individualmente. Los materiales compuestos mejoran las propiedades de los materiales que lo componen. Un ejemplo de materiales compuestos puede ser un polímero reforzado con fibra.

La historia moderna de los materiales compuestos comenzó alrededor de la década de 1930 cuando la fibra de vidrio se fabricó por primera vez casi por accidente. Después del éxito obtenido cuando se usaron los materiales compuestos para fabricación de moldes, las posibilidades de un nuevo material se convirtieron rápidamente en algo muy prometedor.

Los materiales compuestos que usan polímeros como matriz son conocidos como compuestos poliméricos. Éstos pueden ser o bien compuestos reforzados con fibra o con partículas. Como en cualquier material compuesto, la fibra o fracción de volumen de relleno influye en el módulo elástico del material compuesto, siguiendo el modelo de Voigt si la deformación es uniforme y el modelo de Reuss si el valor constante es la tensión<sup>12,13</sup>. Sin embargo, es importante definir un cierto valor. Este valor es la eficacia de las fibras  $K_f$ . Debido a posibles problemas con la transferencia de carga en la interfase, no se logra el módulo del material compuesto máximo. En este caso, la eficacia de las fibras no es 1. Para calcular la eficacia de las fibras, se aplica la Ecuación 2.1<sup>14</sup>.

$$K_f = \frac{E_{\text{compuesto}} - E_{\text{matriz}}(1 - V_{\text{fibra}})}{E_{\text{fibra}} V_{\text{fibra}}}$$

Ecuación 2.1

Donde:

$K_f$ : Uso efectivo de las fibras de un material compuesto

$E_{\text{compuesto}}$ : Módulo elástico del material compuesto

$E_{\text{matriz}}$ : Módulo elástico de la matriz del material compuesto

$V_{\text{fibra}}$ : Volumen de fibra

$E_{\text{fibra}}$ : Módulo elástico de las fibras del material compuesto

Como se observa en la Ecuación 2.2, aparece un coeficiente  $K_f$  inferior a 1 en la parte de la fibra, que disminuye el valor final del módulo del compuesto.

$$E_{\text{compuesto}} = E_{\text{matriz}}(1 - V_{\text{fibra}}) + K_f E_{\text{fibra}} V_{\text{fibra}}$$

Ecuación 2.2

En un caso ideal, cuando la transferencia es completa,  $K_f$  presenta el valor de 1.

## Capítulo 2 - Estado del arte

---

Sin embargo, debido a la interactividad de los materiales que conforman un composite, las propiedades finales de dichos materiales no se pueden predecir simplemente sumando las propiedades de los componentes por separado. Se debe tener en cuenta que las propiedades elásticas de los composites están afectadas por las distribución asimétrica de la orientación de las fibras y de la proporción con respecto a la matriz<sup>15,16</sup>. Además, las propiedades físicas de una sustancia cambian más cuando sus partículas se reducen a tamaños nanométricos<sup>17,18,19</sup>.

De entre las ventajas que tienen los materiales composites, se mencionan las siguientes: alta resistencia específica, alta rigidez, peso ligero, excelente resistencia a la fatiga, excelente resistencia al agua y baja expansión térmica. Sin embargo, presentan también algunos inconvenientes: tiempo de desarrollo largo, dificultades de fabricación y coste caro. Para superar estas desventajas, el desarrollo de artilugios matemáticos es esencial a fin de ser capaz de predecir y modelar la respuesta del material a lo largo de la temperatura o del tiempo<sup>20,21</sup>. Los primeros modelos matemáticos fueron desarrollados en el campo de la simulación, incluyendo especialmente datos experimentales obtenidos mediante tests estáticos. Recientes avances en el campo han mostrado que la introducción de parámetros viscoelásticos es capaz de mejorar considerablemente la exactitud de los modelos haciendo que los resultados de la simulación sean mucho más fiables<sup>22,23,24</sup>. Por poner un ejemplo, en estos últimos años, el diseño y el desarrollo de composites ha sido muy importante en la mejora de las propiedades mecánicas en materiales para la industria aeronáutica<sup>25</sup>.

### 2.2 Modelado

Varios aspectos se deben tener en cuenta para modelar matemáticamente materiales composites. Por una parte, es importante conocer qué modelos matemáticos se han usado hasta ahora y se usan actualmente y conocer también las características y las limitaciones de dichos modelos. Por otra parte, es importante conocer cuáles son los ensayos experimentales para llevar a cabo un buen estudio de dichos materiales. El conocimiento de estos aspectos es clave para entender el trabajo que los científicos están realizando en la actualidad. Hoy en día, además, se usan programas modernos para la caracterización de materiales y los modelos usados para modelar tales materiales son los modelos viscoelásticos.

Un modelo puede ser físico o matemático. Un modelo físico se basa en la manera de abordar el comportamiento del material, teniendo en cuenta la escala del enfoque. Los modelos físicos se clasifican como atomísticos o continuos. Un modelo matemático se basa en una ecuación o un grupo de ecuaciones para calcular un parámetro en función de otras variables. El uso correcto de un modelo matemático depende de varios aspectos, como la naturaleza del material (elástico o viscoelástico, por ejemplo), la homogeneidad de la muestra o su estado físico (líquido o sólido), entre otros.

#### 2.2.1 Modelos físicos

Tal como se ha comentado anteriormente, los modelos físicos se pueden dividir en dos grandes grupos: los modelos atomísticos y los modelos continuos. Ambos modelos asumen las leyes de conservación de la energía, del momento y de la masa. La diferencia es que para los modelos atomísticos, cada átomo se simula como una partícula singular y entre los átomos existen unas interacciones de enlace con una

## Capítulo 2 - Estado del arte

---

distancia de equilibrio, mientras que los modelos continuos existen variaciones cuantitativas graduales sin discontinuidades<sup>26,27</sup>.

De entre todos los métodos usados a lo largo de la historia, los modelos continuos han sido los primeros a ser usados y los más extendidos. Al principio, las grandes limitaciones para mejorar la precisión se debían a los requerimientos de tiempo y capacidad de cálculo. Cuanto más sofisticado se volvía el programa, más precisión se obtenía en los análisis. Tales mejoras permitieron ir avanzando hacia una escala más pequeña, llegando a los modelos atomísticos.

En el caso de composites, la complejidad de estos materiales ha sido el motivo que ha conducido a la necesidad de desarrollar diferentes teorías capaces de dar buena respuesta para estos tipos de materiales. Desde el comienzo de la década de 1960, se han desarrollado diferentes teorías de mezcla, basadas en el principio de interacción de varios componentes en el material composite. Estas teorías se han apoyado en la contribución significativa de cada material constituyente de forma individual al comportamiento global del modelo, y han permitido el uso simultáneo de los modelos atomísticos y continuos.

Algunos desarrollos de los modelos constitutivos para materiales composites se han relacionado con la combinación de modelos. Los métodos de modelización multiescala han sido los más utilizados; en particular, para fines de investigación. Este método resuelve problemas generados en la interfase mediante el estudio de los mecanismos de fisuras que se producen, pudiendo aplicar ecuaciones diferenciales parciales, estocásticas y ordinarias, así como cadenas de Markov<sup>28</sup>.

Uno de los métodos multiescala más utilizados es el método cuasicontinuo, una poderosa herramienta para estructuras cuasiestáticas en el caso de sólidos. Este método también es muy adecuado en sólidos cristalinos para la simulación de la deformación no lineal<sup>29</sup>. Un trabajo reconocido se hizo a finales de la década de 1990 por Abraham et al acoplando tres modelos constitutivos diferentes: la elasticidad continua, la dinámica molecular y el modelo de mecánica cuántica de unión fuerte<sup>30</sup>.

Otro método con éxito en modelos multiescala ha sido el modelo dinámico molecular complejo, basado en una formulación hamiltoniana<sup>31</sup>. De acuerdo con la mecánica cuántica, un hamiltoniano es un operador que da idea de la energía total de un sistema. Se expresa como una suma de operadores: la energía potencial y la energía cinética de un sistema. Este hamiltoniano se forma mediante dos modelizaciones, una atomística y otra continua, en el dominio computacional o mediante el uso de átomos representativos<sup>32</sup>. Sin embargo, cuando se utiliza el dominio computacional con dos regiones, y se añaden algunas condiciones en la interfase atomística-continua<sup>33</sup>, el modelo constitutivo presenta algunas dificultades en la temperatura y los sistemas dinámicos. Idealmente, sólo sería necesario introducir algunas condiciones de contorno en la interfase para resolver el problema, y en principio, sería fácil encontrar estas condiciones para problemas lineales<sup>34</sup>. Sin embargo, es muy difícil encontrar estas condiciones de contorno cuando un material tiene memoria de forma. Además, cuando la región atomística cambia con el tiempo, el problema se vuelve aún más complicado. Una solución fue propuesta por E. y Huang utilizando condiciones de contorno en el esquema atomístico-continuo y los resultados mostraron que este enfoque funciona bien para la fricción entre las superficies cristalinas o para simulaciones dinámicas de fractura<sup>35,36</sup>.

La estrategia actual consiste en usar ambos modelos, los continuos y los atomísticos.

### 2.2.2 Modelos matemáticos

Como se ha explicado anteriormente, existen diferentes modelos matemáticos que se usan para caracterizar materiales. El uso de cada modelo dependerá de las condiciones de trabajo de los materiales, del comportamiento y de la naturaleza de dichos materiales, así como de los parámetros de entrada y de salida. Algunos de los más importantes se describen a continuación.

#### 2.2.2.1 Modelos basados en la velocidad de deformación

En polímeros y composites, el módulo, así como la fuerza, se incrementa al aumentar la velocidad de deformación. Lo mismo ocurre con las fibras presentes en un composite fibroso<sup>37,38</sup>.

En general, la relación presentada entre las propiedades mecánicas, como el módulo o la fuerza, en función de la velocidad de deformación sigue una relación logarítmica. Sólo en una publicación encontrada<sup>39</sup>, la relación presentada entre la velocidad de deformación y las propiedades mecánicas se ajusta mediante una relación potencial.

Uno de los modelos que estudian las propiedades mecánicas en función de la velocidad de deformación es el modelo de Johnson-Cook.

#### Modelo de Johnson-Cook

El modelo de Johnson-Cook es un modelo mecánico para materiales, desarrollado para describir el comportamiento plástico que un material sufre en condiciones de impacto. El modelo se puede usar en casos en los que se presenten altas velocidades de deformación, altas temperaturas y altas deformaciones. Este modelo se define mediante parámetros obtenidos en procedimientos experimentales a diferentes velocidades de deformación y diferentes temperaturas. La tensión de fluencia varía con el logaritmo de la velocidad de deformación. Dicha tensión de fluencia se define en la Ecuación 2.3<sup>40,41,42</sup>.

$$\sigma = (\sigma_0 + JC_1 \varepsilon_p^{JC_2}) \left(1 + JC_3 \ln(\dot{\varepsilon}_p^*)\right) (1 - T_H^{JC_4})$$

Ecuación 2.3

Donde:

$\sigma$ : Tensión

$\sigma_0$ : Tensión de fluencia a temperatura ambiente y a baja velocidad de deformación del modelo de Johnson-Cook

$\varepsilon_p$ : Deformación plástica efectiva del modelo de Johnson-Cook

$\dot{\varepsilon}_p^*$ : Velocidad de deformación plástica efectiva del modelo de Johnson-Cook, normalizado a la velocidad de deformación de referencia  $\dot{\varepsilon}_0 = 1s^{-1}$

$JC_1$ : Primer coeficiente del modelo de Johnson-Cook

$JC_2$ : Segundo coeficiente del modelo de Johnson-Cook

$JC_3$ : Tercer coeficiente del modelo de Johnson-Cook

$JC_4$ : Cuarto coeficiente del modelo de Johnson-Cook

$T_H$ : Coeficiente adimensional del modelo de Johnson-Cook

Este último coeficiente se define en la Ecuación 2.4.

$$T_H = \frac{T - T_{amb}}{T_m - T_{amb}}$$

Ecuación 2.4

Donde:

$T$ : Temperatura

$T_{amb}$ : Temperatura ambiente

$T_m$ : Temperatura de fusión del material

A partir del modelo de Johnson-Cook, se han elaborado otras ecuaciones. Éstas se usan para materiales dúctiles, con un gran efecto de endurecimientos a altas velocidades de deformación. Más detalles sobre estas ecuaciones se pueden encontrar en los proyectos llevados a cabo por Martin Bravo, Benavente y Aguilar Contreras<sup>40,41,42</sup>.

### 2.2.2.2 Modelos viscoelásticos

Debido a la naturaleza de los materiales en estudio (polímeros y composites), los modelos matemáticos viscoelásticos han sido los más adecuados, puesto que la respuesta de la tensión consiste en una combinación del comportamiento elástico y viscoso<sup>23,43</sup>. El comportamiento elástico ocurre de forma instantánea, mientras que el viscoso ocurre durante un cierto periodo de tiempo.

Los materiales viscoelásticos se han utilizado para introducir el comportamiento asociado a la parte viscosa del material. Sus propiedades dependen de la temperatura, de la carga, de la frecuencia de vibración dinámica y de la humedad<sup>44</sup>. Este tipo de materiales son muy útiles en industrias como la aeronáutica o la automovilística, porque el peso es importante, a fin de reducir el ruido y la vibración. En los análisis transitorios, la importancia yace en observar si el material puede absorber la energía de impacto generada y devolver el material a la configuración inicial<sup>44</sup>.

El comportamiento viscoelástico de los polímeros se establece mediante ecuaciones diferenciales con el fin de describir la relación entre la tensión y la deformación que siguen dichos polímeros. Los modelos más elementales utilizando la viscoelasticidad son el modelo de Kelvin-Voigt y el modelo de Maxwell.

Un ejemplo de la importancia de los modelos viscoelásticos es el siguiente modelo que consiste en una combinación de muelles y émbolos de ocho parámetros, propuesta por DeHoff y Anusavice, para caracterizar el comportamiento de creep en cerámicas dentales comerciales<sup>45</sup>. Las combinaciones de muelles y émbolos son modelos relativamente sencillos de entender y muy útiles teniendo en cuenta los buenos resultados teóricos que se obtienen comparándolos con los datos experimentales para un material dado.

### Principio de superposición de Boltzmann

Como se ha mencionado, muchos de los proyectos presentados para caracterizar el comportamiento y las propiedades de polímeros y composites se basan en modelos viscoelásticos. Basado en el principio de superposición de Boltzmann, las propiedades que dependen del tiempo para una gran familia de polímeros se caracterizan usando la teoría de la viscoelasticidad lineal. La ley constitutiva del principio se formula tal como se presenta en la Ecuación 2.5 y en la Ecuación 2.6 <sup>46</sup>.

$$\varepsilon_{i\xi} = \sigma_i d_i + \int_0^t d_{i,t-\xi} \frac{d\sigma_i}{d\xi} d\xi$$

Ecuación 2.5

$$\sigma_{i\xi} = \varepsilon_i e_i + \int_0^t e_{i,t-\xi} \frac{d\varepsilon_i}{d\xi} d\xi$$

Ecuación 2.6

Donde:

$t$ : Tiempo

$\sigma_i$ : Valor de tensión a un tiempo o a un rango de tiempos determinado

$\varepsilon$ : Deformación

$\varepsilon_i$ : Valor de la deformación a un tiempo o a un rango de tiempos determinado

$e_i$ : Función de relajación

$d_i$ : Función de creep

$\xi$ : Tiempo comprendido entre 0 y  $t$  usado en las integrales de convolución para calcular tensiones y deformaciones en función del tiempo

### Series de Prony

Las series de Prony son artificios matemáticos para describir el comportamiento viscoelástico de polímeros y composites. Se basan en un número finito de combinaciones en serie y en paralelo de muelles y émbolos.

El uso de las series de Prony es atractivo por varias razones. En primer lugar, es lo suficientemente flexible como para capturar un amplio rango del comportamiento del material. En segundo lugar, los términos del modelo tienen significado físico. Por último, la forma funcional es susceptible a la simulación numérica de algoritmos de elementos finitos viscoelásticos utilizando técnicas de solución recursiva <sup>47</sup>.

Un ejemplo de la utilización de las series de Prony se encuentra en Jansons et al. En este artículo, un modelo de Maxwell simple se utiliza para simular y ayudar a explicar la relajación de la tensión viscoelástica para refuerzos de fibra de vidrio <sup>48</sup>.

En el dominio del tiempo, las series de Prony toman la forma presentada en la Ecuación 2.7 <sup>49</sup>.

## Capítulo 2 - Estado del arte

---

$$\sum_{i=1}^n p_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

Ecuación 2.7

Para muchos materiales, las series de Prony suelen presentar dos o tres términos exponenciales. En consecuencia, se involucran de cuatro a seis coeficientes. Aunque la determinación de los coeficientes del material ya no es un problema hoy en día, gracias a la capacidad de cálculo de los programas que usan estos modelos, la cuantificación del módulo a tiempo infinito es imposible ya que el tiempo de caída no puede ser infinito<sup>50</sup>.

Un módulo de relajación continua  $Y$  en función del tiempo se aproxima a la siguiente expresión (Ecuación 2.8)<sup>51,52,53</sup>:

$$Y = Y_0 - \sum_{i=1}^n Y_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

Ecuación 2.8

Donde:

$Y$ : Módulo de relajación

$Y_0$ : Módulo de relajación a tiempo inicial

$Y_i$ : Coeficiente de módulo de relajación

$\tau_i$ : Tiempo de relajación

$n$ : Número de términos en series o modelos matemáticos

Sobre  $Y$ , se asume y se comprueba que  $Y(t)$  es mayor que 0, la primera derivada de  $Y(t)$  es menor que 0 y la segunda derivada de  $Y(t)$  es mayor que 0<sup>54</sup>.

Una capacitancia de creep continua  $J$  en función del tiempo se aproxima a la siguiente expresión (Ecuación 2.9)<sup>51,52,53</sup>:

$$J = J_0 + \sum_{i=1}^n J_i e^{-\frac{t}{\lambda_i}}$$

Ecuación 2.9

Donde:

$J$ : Capacitancia de creep

$J_0$ : Capacitancia de creep a tiempo inicial

$J_i$ : Coeficiente de capacitancia de creep

$\lambda_i$ : Tiempo de retardo

Sobre  $J$ , se asume y se comprueba que  $J(t)$  es mayor que 0, la primera derivada de  $J(t)$  es mayor que 0 y la segunda derivada de  $J(t)$  es menor que 0<sup>54</sup>.

## Capítulo 2 - Estado del arte

En las series de Prony, el número de términos para el comportamiento de cizalla y el comportamiento volumétrico no debe ser necesariamente el mismo. Además, tampoco es necesario que los tiempos de relajación sean idénticos<sup>55,56,57</sup>.

Mediante los tests de creep o de relajación, es posible la determinación de los coeficientes viscoelásticos en estas series.

Por una parte, en la Ecuación 2.10, se muestra la ecuación constitutiva del modelo con un muelle, denominada sólido elástico, que representa el componente elástico, que se muestra en la Figura 2.1.

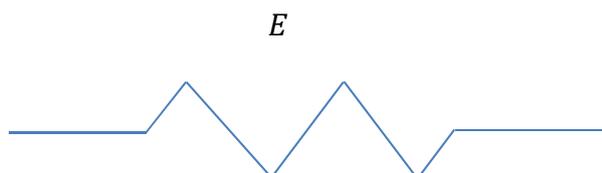


Figura 2.1 - Sólido elástico

$$\sigma = E\varepsilon$$

Ecuación 2.10

Más detalles sobre el sólido elástico se encuentran en el anexo A.3.1.

Por otra parte, en la Ecuación 2.11, se muestra la ecuación constitutiva del modelo con un émbolo, denominada fluido viscoso, que representa el componente viscoso, que se muestra en la Figura 2.2.

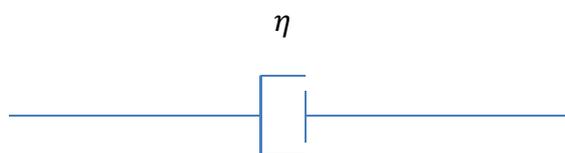


Figura 2.2 - Fluido viscoso

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Ecuación 2.11

Donde:

$\eta$ : Viscosidad

Más detalles sobre el fluido viscoso se encuentran en el anexo A.3.2.

Las ecuaciones constitutivas viscoelásticas se definen mediante la combinación de la Ecuación 2.10 y la Ecuación 2.11.

Si un material presenta una deformación definida como  $\varepsilon_0 + \varepsilon_t$ , que indica que parte de la deformación es constante (independiente del tiempo) y el resto es dependiente del tiempo, la tensión a tiempo  $t$  se presenta en la Ecuación 2.12.

$$\sigma = Y\varepsilon_0 + \int_0^t Y_{t-\xi} \frac{d\varepsilon}{d\xi} d\xi$$

Ecuación 2.12

Donde:

$d\varepsilon/d\xi$ : Velocidad de deformación

Si un material presenta una tensión definida como  $\sigma_0 + \sigma_t$ , que indica que parte de la tensión es constante (independiente del tiempo) y el resto es dependiente del tiempo, la deformación a tiempo  $t$  se presenta en la Ecuación 2.13.

$$\varepsilon = J\sigma_0 + \int_0^t J_{t-\xi} \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi$$

Ecuación 2.13

Donde:

$d\sigma/d\xi$ : Velocidad de tensión

### Modelo de Kelvin-Voigt

El modelo de Kelvin-Voigt, que se muestra en la Figura 2.3, consiste en una combinación en paralelo de un muelle y un émbolo.

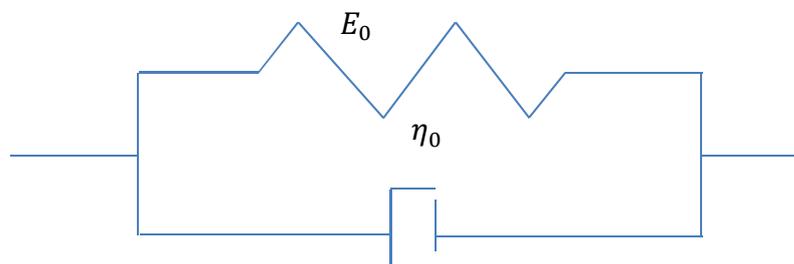


Figura 2.3 - Modelo de Kelvin-Voigt

En la Ecuación 2.14, se muestra la ecuación constitutiva de este modelo.

$$\sigma = E_0\varepsilon + \eta_0 \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Ecuación 2.14

En este caso, si se aplica una tensión constante, el muelle no se deforma instantáneamente debido al émbolo. La deformación varía con el tiempo, hasta el momento que el muelle llega a su máximo desplazamiento. Cuando se suelta la carga, el retorno es viscoelástico, como ocurría con la aplicación de la carga.

Más detalles sobre el modelo de Kelvin-Voigt se encuentran en el anexo A.3.3.

### Modelo de Maxwell

El modelo de Maxwell, que se muestra en la Figura 2.4, consiste en una combinación en serie de un muelle y un émbolo. Esta configuración fue propuesta por James Clerk Maxwell en 1867<sup>58</sup>.



Figura 2.4 - Modelo de Maxwell

En la Ecuación 2.15, se muestra la ecuación constitutiva de este modelo.

$$\sigma + \frac{\eta_0}{E_0} \frac{d\sigma}{dt} = \eta_0 \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Ecuación 2.15

En este caso, la tensión que soporta cada elemento es la misma y lo que se comparte entre los elementos es la deformación.

Más detalles sobre el modelo de Maxwell se encuentran en el anexo A.3.4.

### Modelo sólido lineal estándar

El modelo de Maxwell consiste en una primera aproximación para describir la relajación de tensiones de un sólido viscoelástico, mientras que el modelo de Kelvin-Voigt es más adecuado para describir creep. Sin embargo ninguno de ellos es suficientemente bueno para obtener una respuesta adecuada para describir el comportamiento real de un sólido viscoelástico. Una respuesta más adecuada se obtiene con el modelo sólido lineal estándar, que consiste en la introducción de un segundo muelle en paralelo con el modelo de Maxwell, que se muestra en la Figura 2.5.

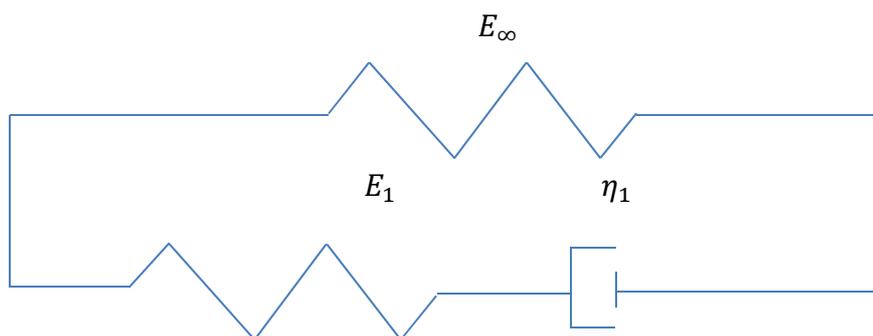


Figura 2.5 - Modelo sólido lineal estándar

El módulo de relajación de este modelo se presenta en la Ecuación 2.16<sup>59</sup>.

$$Y = (E_\infty + E_1) \left( 1 - \frac{E_1}{E_\infty + E_1} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_1/E_1}} \right) \right)$$

Ecuación 2.16

Este modelo es la primera aproximación para describir los fenómenos reales de los polímeros.

### Modelo de Burgers

El modelo de Burgers es un modelo mecánico de cuatro elementos que consiste en una combinación en serie de los modelos de Maxwell y de Kelvin-Voigt, que se muestra en la Figura 2.6.

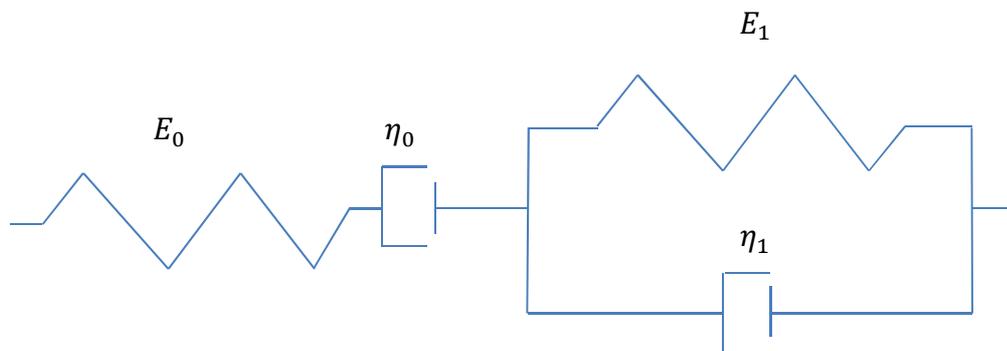


Figura 2.6 - Modelo de Burgers

La capacitancia de creep de este modelo se presenta en la Ecuación 2.17 <sup>59</sup>.

$$J = \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_0} + \frac{1}{E_1} \left( 1 - e^{-\frac{E_1 t}{\eta_1}} \right)$$

Ecuación 2.17

Tamrakar et al. <sup>60</sup> usó este modelo para determinar sus coeficientes mediante el ajuste de curvas experimentales para poder describir la respuesta de creep a corto plazo de un composite de madera y polipropileno (PP) y de cloruro de polivinilo (PVC).

En otro trabajo llevado a cabo por Ludueña et al. <sup>61</sup>, se propone el modelo de Burgers que permite ajustar las curvas de datos experimentales para el comportamiento de creep de nanocomposites de policaprolactona y arcilla.

Por lo tanto, el modelo de Burgers es ya un buen primer modelo para caracterizar el comportamiento real de polímeros y composites. Sin embargo, en muchos casos, son necesarios modelos más sofisticados para obtener un buen nivel de respuesta.

### Modelos generalizados de Kelvin-Voigt y de Maxwell

El modelo generalizado de Kelvin-Voigt (Figura 2.7) es un modelo mecánico que consiste en una combinación en serie de modelos de Kelvin-Voigt.

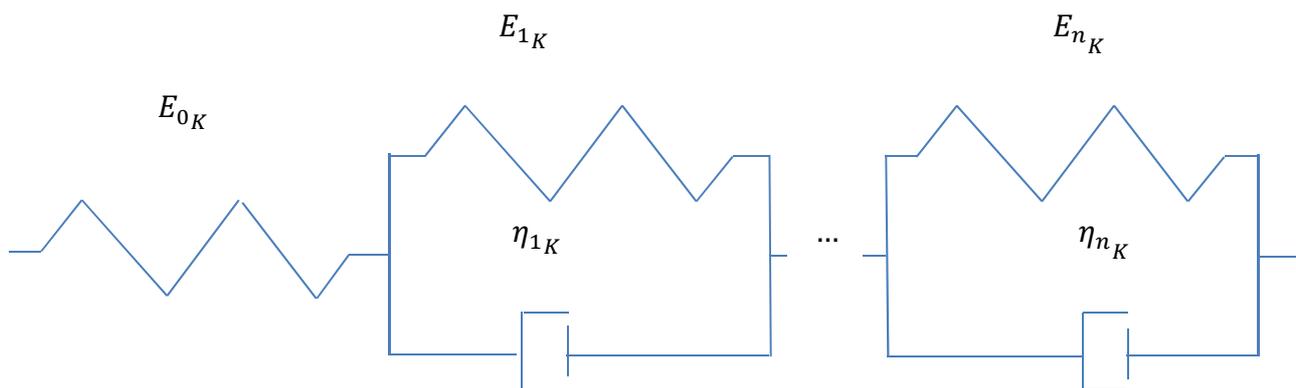


Figura 2.7 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt

La capacitancia de creep del modelo se presenta en la Ecuación 2.18.

$$J = \frac{1}{E_{0K}} \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{E_{0K}}{E_{iK}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_{iK}/E_{iK}}} \right) \right)$$

Ecuación 2.18

Más detalles sobre el modelo generalizado de Kelvin-Voigt se encuentran en el anexo A.4.1, así como los casos particulares en los que  $n=1$  y  $n=2$ .

El modelo generalizado de Maxwell (Figura 2.8) es un modelo mecánico que consiste en una combinación en paralelo de modelos de Maxwell.

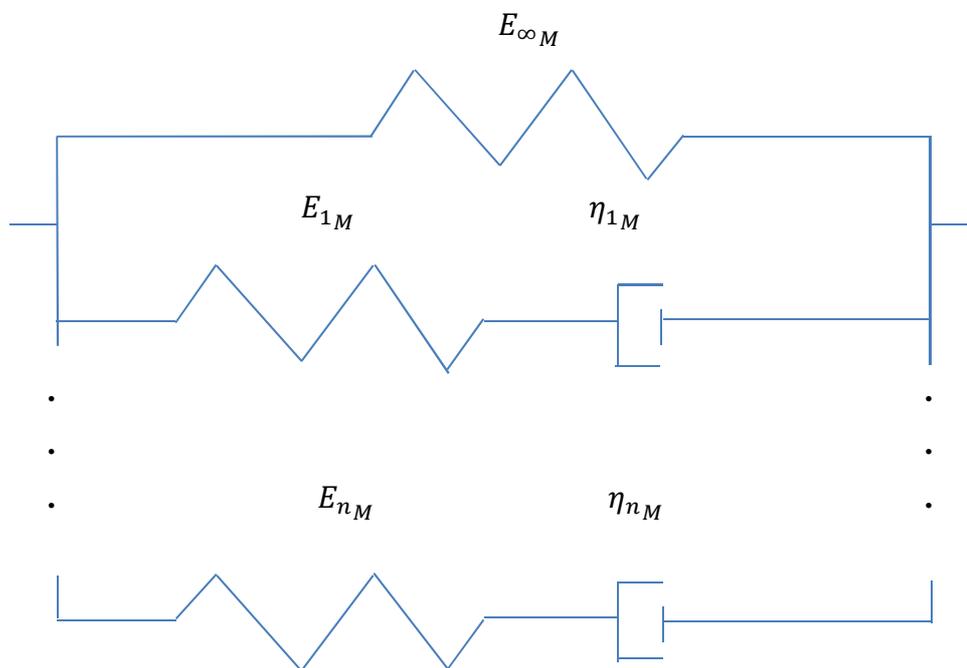


Figura 2.8 - Modelo generalizado de Maxwell

El módulo de relajación de este modelo se presenta en la Ecuación 2.19.

$$Y = \left( E_{\infty M} + \sum_{i=1}^n E_{iM} \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{E_{iM}}{E_{\infty M} + \sum_{i=1}^n E_{iM}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_{iM}/E_{iM}}} \right) \right)$$

Ecuación 2.19

Más detalles sobre el modelo generalizado de Maxwell se encuentran en el anexo A.4.2, así como los casos particulares en los que  $n=1$  y  $n=2$ .

Además, en el anexo A.5, se presentan relaciones entre los modelos generalizados de Kelvin-Voigt y de Maxwell, así como los coeficientes resultantes de creep y de relajación de estos modelos para  $n=1$  (anexo A.5.1) y  $n=2$  (anexo A.5.2).

### 2.2.2.3 Representación gráfica Cole-Cole

La representación gráfica Cole-Cole es una aplicación que sirve para estudiar la homogeneidad de los sistemas poliméricos. Este método se basa en una representación gráfica en la que los datos del módulo de pérdida  $\log(G'')$  se representan en función de los datos del módulo de almacenamiento  $\log(G')$  <sup>62,63,64</sup>.

### 2.2.2.4 Comportamiento viscoelastoplástico

Normalmente, cuando se trabaja con materiales poliméricos, se debe considerar un comportamiento viscoelastoplástico, es decir, que el material experimenta una respuesta elástica, viscosa y plástica al mismo tiempo. Por lo tanto, la deformación total que se considera para el material se puede dividir en tres partes tal como expresa la Ecuación 2.20 <sup>65</sup>.

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{vi} + \varepsilon_{pl}$$

Ecuación 2.20

Donde:

$\varepsilon_{el}$ : Parte instantánea de la deformación (parte elástica) en el comportamiento viscoelastoplástico

$\varepsilon_{vi}$ : Deformación recuperable (parte viscosa) en el comportamiento viscoelastoplástico

$\varepsilon_{pl}$ : Parte plástica de la deformación, desarrollada durante el proceso de creep, manifestada mediante el comportamiento de creep no lineal y acelerada a altas temperaturas en el comportamiento viscoelastoplástico

### 2.2.2.5 Modelos de creep

Los tests de creep son, en general, los ensayos más comúnmente usados para caracterizar el comportamiento de materiales viscoelásticos. De hecho, cuando un polímero o un composite se somete a una tensión constante a lo largo del tiempo, la deformación que el material experimenta se incrementa siguiendo una curva logarítmica, que tiende a un máximo en la deformación a tiempo infinito, debido a su comportamiento viscoelástico.

Uno de los modelos más usado es el modelo de Findley. Éste es un modelo de creep muy fiable y reconocido para evaluar la deformación en función del tiempo. Es útil para una gran variedad de materiales viscoelásticos a niveles moderados de deformación.

## Capítulo 2 - Estado del arte

---

La expresión general del modelo de Findley es la que se muestra en la Ecuación 2.21<sup>66,67</sup>.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + F_1 t^{F_2}$$

Ecuación 2.21

Donde:

$\varepsilon_0$ : Deformación a tiempo inicial

$F_1$ : Primer coeficiente del modelo de Findley

$F_2$ : Segundo coeficiente del modelo de Findley

Para un material específico, estos dos coeficientes se pueden determinar fácilmente.

Kazemy-Najafi et al. estudiaron el creep, la velocidad de creep y el módulo de creep en función del tiempo para distintos materiales como la madera o polipropileno<sup>66</sup>.

Este modelo se puede aplicar para predecir el comportamiento de creep en algunos materiales y composites.

Este modelo también fue propuesto por Ludueña et al.<sup>61</sup> para ajustar las curvas de los datos experimentales para caracterizar el comportamiento de creep de nanocomposites de policaprolactona y arcilla. En este caso, el modelo de Findley también se empleó para obtener las curvas maestras.

Otro modelo importante para estudiar el creep es la ley de Bailey-Norton, definida en la Ecuación 2.22.

$$\varepsilon = BN_1 \sigma^{BN_2} t^{BN_3}$$

Ecuación 2.22

Donde:

$BN_1$ : Primer coeficiente de la ley de Bailey-Norton

$BN_2$ : Segundo coeficiente de la ley de Bailey-Norton

$BN_3$ : Tercer coeficiente de la ley de Bailey-Norton

### 2.2.2.6 Modelos con derivadas fraccionales

El enfoque de usar el cálculo fraccional en la formulación de ecuaciones constitutivas de materiales se propuso hace años. Una revisión de las primeras publicaciones de la aplicación del cálculo fraccional a la viscoelasticidad fue propuesta por Bagley y Torvik<sup>68</sup>, en las que las derivadas de orden uno ( $d/dt$ ) en las ecuaciones constitutivas clásicas fueron sustituidas por derivadas fraccionales ( $d^\alpha/dt^\alpha$ ). Sin embargo, estas ecuaciones carecen de significado físico<sup>69</sup>. En muchas publicaciones, se propone el factor  $(t/\tau)^\alpha$ .

Sin embargo, hay diferentes definiciones de las derivadas fraccionales. Una de ellas es la definición de Grünwald. Detalles acerca de dicha definición se pueden encontrar en Schmidt et al.<sup>70,71</sup>.

La metodología fraccional se basa en la utilización de un elemento denominado *spring-pot* definido por Koeller (1984). La relación constitutiva de este elemento se puede encontrar en Welch et al.<sup>72</sup>.

En los modelos con derivadas fraccionales (FDM) se requiere un número de términos menor (menos parámetros) para hallar el comportamiento viscoelástico del material con respecto al modelo convencional basado en las ecuaciones constitutivas clásicas. Esto representa una gran ventaja. Sin embargo, la gran desventaja es la complejidad matemática que conlleva el cálculo fraccional<sup>72</sup>. Con este enfoque, las expresiones para calcular el módulo de relajación y la capacitancia de creep presentan exponentes añadidos. Sin embargo, estos exponentes suelen estar comprendidos entre 0.5 y 0.6.

Otro trabajo que debe considerarse es el de Liu et al.<sup>73</sup>. En él, proponen el uso de hasta 3 parámetros fraccionales como exponentes en los modelos con derivadas fraccionales, que se conocen como ecuaciones constitutivas fraccionales de orden superior.

Las representaciones reológicas de los elementos viscoelásticos derivados fraccionales fueron desarrollados por Papoulia et al.<sup>74</sup>. Ellos probaron que dichas representaciones convergían a un modelo fraccional en el límite, cuando el número de términos tendía a infinito. Las experiencias computacionales mostraron que incluso para un bajo número de términos, las representaciones de los modelos fraccionales resultaban bastante precisas.

### 2.3 Dominio del tiempo

Los ensayos temporales son los ensayos de tensión-deformación, de relajación de tensiones y de creep. De especial interés es el artículo publicado por Tschoegl<sup>75</sup>, en el que se puede encontrar la dependencia del tiempo de las propiedades mecánicas de los materiales que presentan un comportamiento viscoelástico.

Una de las propiedades que se considera prácticamente constante en gran cantidad de trabajos es el coeficiente de Poisson. Sin embargo, en sólidos viscoelásticos, este parámetro es, generalmente, dependiente del tiempo o de la frecuencia. Incluso dicho coeficiente presenta una dependencia del tiempo distinta en función de la modalidad del test<sup>76</sup>. Un artículo de Tscharnuter et al.<sup>77</sup> determina el coeficiente de Poisson basado en un método de optimización, en el que se trabaja con componentes de polipropileno.

En cuanto a la curva de tensión-deformación, dicha curva presenta una caída del módulo elástico en función del tiempo para una temperatura y velocidad de deformación determinadas. Un ejemplo de este hecho se encuentra en Dorigato et al.<sup>78</sup>, en el que tres materiales se estudian a 30°C a diferentes tiempos (de 200 segundos a 1000 segundos).

El comportamiento de creep como deformación en función del tiempo de los polímeros consta de 4 etapas: deformación instantánea, creep primario, creep secundario y creep terciario. En primer lugar, una carga externa se aplica y el material responde con una deformación independiente del tiempo. La velocidad de creep comienza con un valor que disminuye con el tiempo como resultado de la orientación y el deslizamiento de las cadenas de polímero bajo una tensión persistente. Después de un tiempo, la velocidad de creep alcanza un estado estacionario. Por último, la velocidad de creep aumenta rápidamente y esto indica la ruptura de creep final<sup>61</sup>. Un esquema de las etapas de creep se encuentra en Ludueña et al.<sup>61</sup>.

## Capítulo 2 - Estado del arte

Normalmente, la etapa de creep terciario no se analiza experimentalmente, debido al requerimiento de elevados tiempos.

Una representación esquemática del ensayo de creep y de recuperación se muestra en la Figura 2.9 y se encuentra en un artículo publicado por Dasappa et al.<sup>79,80</sup>.

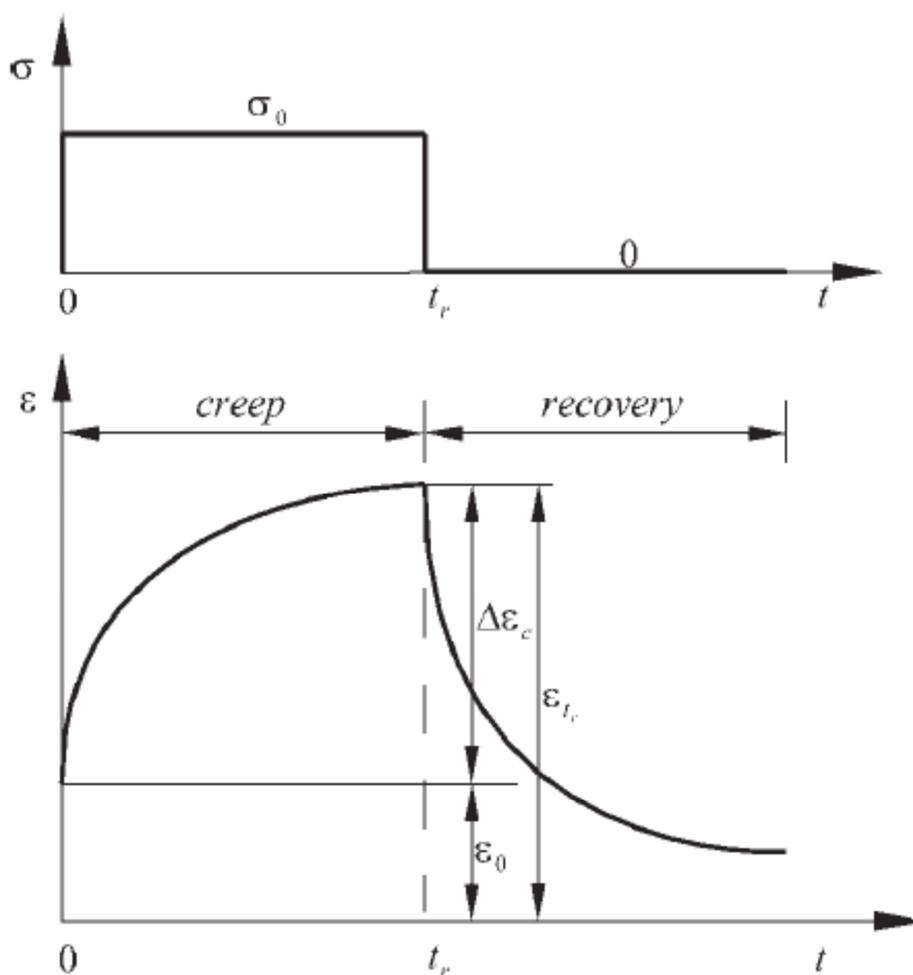


Figura 2.9 - Representación esquemática del ensayo de creep y de recuperación

Los factores que pueden afectar el comportamiento de creep son el tiempo, la temperatura y el contenido de fibra<sup>81</sup>.

La publicación de Li et al. es de especial interés. En ella, se analiza la caída de la velocidad de deformación y del módulo de creep en función del tiempo para cinco temperaturas distintas. La conclusión es que la caída es más pronunciada al incrementar la temperatura debido a una mayor velocidad a tiempo inicial para temperaturas más elevadas. Sin embargo, todas las curvas tienden a velocidad cero a tiempo infinito. En consecuencia, la caída del módulo de creep es más pronunciada en función del tiempo para valores más elevados de temperatura<sup>67</sup>.

En Reis et al.<sup>82</sup>, concluyeron que, por una parte, la velocidad de deformación afecta en gran medida a la resistencia a la tracción última y que afecta muy poco al módulo elástico, mientras que, por otra parte, la temperatura sólo afecta al módulo. En este

trabajo, ajustaron la curva generada experimentalmente, que representaba el módulo elástico en función de la temperatura, a una ecuación polinómica de tercer orden.

Cuando el ensayo de creep avanza a lo largo del tiempo, se genera una caída en la velocidad de creep. La capacitancia del composite avanza hacia un valor denominado de saturación, a medida que la velocidad de creep de va acercando a cero<sup>83</sup>.

En la investigación llevada a cabo por Raghavan et al.<sup>83</sup> para predecir el creep de un composite reforzado con fibras de carbono continuas unidireccionales, el módulo de relajación es cada vez menor y dicho valor decrece más rápido cuanto mayor es la temperatura del ensayo.

Los factores que afectan los comportamientos de los materiales sometidos a una relajación de tensiones o a un creep son los mismos. En Somashekar et al.<sup>84</sup> se observa que la variación de temperatura modifica el módulo de relajación para un material determinado. En este caso, el módulo de relajación es menor a medida que el ensayo se realiza a temperaturas más elevadas.

### 2.4 Dominio de la frecuencia

El análisis dinamomecánico (DMA) es la técnica característica usada para analizar el comportamiento de un material en función de la frecuencia de deformación. Para hacer este análisis, se fija una deformación periódica y se analiza la evolución de la tensión periódica.

Los parámetros más importantes son los módulos de almacenamiento y de pérdida y la tangente del ángulo de fase. Este último se puede describir como el ratio entre el módulo de pérdida y el módulo de almacenamiento.

Una vez se han obtenido los datos experimentales (módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia), los modelos viscoelásticos se pueden ajustar para caracterizar el material bajo estudio. Las series de Prony son los modelos más empleados a tal fin. Sus términos se determinan usando los datos de los tests en función de la frecuencia.

Las expresiones del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida se calculan usando la Ecuación 2.23 y la Ecuación 2.24, respectivamente.

$$G' = G_0 \left( 1 - \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{1}{1 + \tau_i^2 \omega^2} \right) \right)$$

Ecuación 2.23

$$G'' = G_0 \left( \sum_{i=1}^n \frac{p_i \tau_i \omega}{1 + \tau_i^2 \omega^2} \right)$$

Ecuación 2.24

Donde:

$G'$ : Módulo de almacenamiento

$G_0$ : Módulo de flexión o módulo de almacenamiento a tiempo inicial

## Capítulo 2 - Estado del arte

---

$p_i$ : Coeficiente de relajación

$w$ : Frecuencia en rad/s

$G''$ : Módulo de pérdida

El interés se centra en la determinación de  $n$ , de cada uno de los coeficientes  $p_i$  y de cada uno de los coeficientes  $\tau_i$  a partir de los datos experimentales de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia.

Se sugieren cinco pasos para resolver este problema<sup>85</sup>:

- 1) Asignar un valor para  $n$ .
- 2) Asignar valores de entrada para cada coeficiente  $p_i$  y  $\tau_i$ .
- 3) A partir de estos valores, calcular  $G'$  y  $G''$ .
- 4) Calcular la diferencia (o el residual) entre los valores teóricos y los datos experimentales.
- 5) Optimizar los parámetros a determinar usando un algoritmo de minimización.

Custodio R. et al. presentó el desarrollo de metodologías de ajuste de funciones matemáticas a partir de datos experimentales<sup>86</sup>. En su artículo, se explican en detalle métodos de regresión lineal, no lineal y multilineal así como métodos de mínimos cuadrados.

El número de puntos es uno de los parámetros de entrada más importantes. Cuanto mayor es el número de puntos a calcular, más segura es la información que se obtiene, aunque también más tiempo requiere el proceso de cálculo. Se sugiere que el valor por defecto sea de 15 puntos por década<sup>87</sup>. Haciendo uso de las transformadas de Fourier, los términos de las series de Prony para el dominio del tiempo se pueden convertir a los del dominio de la frecuencia<sup>88</sup>.

La influencia de la temperatura es muy importante, debido al cambio que experimentan las propiedades de los materiales. Con el incremento de la temperatura, el módulo de almacenamiento decrece. En el caso del módulo de pérdida, así como el de la tangente del ángulo de fase, los comportamientos son semejantes. En ambos casos, la particularidad es un máximo (o máximos), dependiendo del número de relajaciones y del rango de trabajo, que indican un máximo. Estos máximos muestran  $T_g$  (relajación  $\alpha$ ), y las relajaciones  $\beta$  y  $\gamma$  (si existen y se pueden apreciar en el rango de trabajo) a temperaturas más bajas.

Más representaciones gráficas del módulo de almacenamiento, del módulo de pérdida y del ángulo de fase ( $tg \delta$ ) en función de la temperatura que muestran los comportamientos comentados anteriormente han sido analizados por Uma Devi et al.<sup>89</sup>, por Thomason et al.<sup>90</sup> o por Chin et al.<sup>22</sup>. Los primeros experimentaron con composites de poliéster reforzado con fibra híbrida de hoja de árbol de piña y vidrio, los segundos experimentaron con poliamida 66 reforzada con fibra de vidrio y los terceros experimentaron con adhesivos epoxi.

Sin embargo, con el incremento de la frecuencia, el comportamiento de las propiedades de los materiales se opone al mencionado en el caso del incremento de la temperatura. El módulo de almacenamiento se incrementa al aumentar la frecuencia a una temperatura determinada. El módulo de pérdida y la tangente del ángulo de fase presentan un máximo (o varios), en función del número de relajaciones de la zona de trabajo. La diferencia es que las relajaciones  $\beta$  y las posteriores (si existen) se

## Capítulo 2 - Estado del arte

---

encuentran siempre a frecuencias superiores a la frecuencia en la que se ha hallado la relajación  $\alpha$ .

Un ejemplo de estos comportamientos opuestos se observa en el trabajo publicado por Kashiwagi et al.<sup>91</sup>, en el que el módulo de almacenamiento de nanocomposites es totalmente opuesto al analizar dicho módulo en función de la frecuencia a 200°C o en función de la temperatura a 1 rad/s.

De hecho, se puede resumir el comportamiento de las propiedades dinámomecánicas de los materiales poliméricos por efecto de la temperatura o de la frecuencia como se muestra a continuación:

- 1) A temperaturas bajas o a frecuencias altas, el comportamiento del polímero es parecido al de un material rígido, debido a los altos tiempos de relajación. A estas condiciones, el módulo de almacenamiento es alto y el módulo de pérdida, bajo.
- 2) A temperaturas altas o a frecuencias bajas, los movimientos internos responden a la tensión aplicada. Por lo tanto, el módulo de almacenamiento y el módulo de pérdida son bajos, y el material es viscoso.
- 3) Cuando la frecuencia experimental es similar a la frecuencia en la que los movimientos internos tienen lugar para cualquier temperatura, el módulo de almacenamiento disminuye con el aumento de la temperatura o la disminución de la frecuencia, y hay un máximo en el módulo de pérdida. Esto es el comportamiento viscoelástico del material<sup>92</sup>.

El rango de frecuencias es muy importante para definir los coeficientes viscoelásticos del modelo matemático. A modo de ejemplo, se presenta un interesante artículo de J. Stadler<sup>93</sup>. En este artículo, se analiza el efecto de un rango de frecuencias incompleto, así como la variación de los módulos de almacenamiento y de pérdida, y de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia.

Dependiendo del material y del rango de trabajo para la frecuencia y para la temperatura, la representación gráfica del módulo de pérdida o de la tangente del ángulo de fase puede mostrar una curva con un pico relativamente ancho. A modo de ejemplo, se ha estudiado el análisis dinámomecánico de composites de poliéster reforzados con fibra de plátano en función de la temperatura. En este caso, el aumento de la frecuencia muestra un aumento en los valores del módulo. El máximo en la tangente del ángulo de fase se desplaza a temperaturas más elevadas con el aumento de la frecuencia. Lo mismo sucede con el máximo del módulo de pérdida. De gran importancia es el pico ancho observado en la curva del módulo de pérdida, en el rango de temperaturas de 40°C a 140°C<sup>63</sup>. En el trabajo publicado por Gracia-Fernández et al.<sup>94</sup>, se representan gráficamente muestras de acrilonitrilo-butadieno-estireno (ABS) en función de la temperatura a diferentes frecuencias, y la conclusión es la misma. La tangente de la curva del ángulo de fase se desplaza hacia temperaturas más elevadas para frecuencias más elevadas.

Una anchura de pico grande en el módulo de pérdida o en la tangente del ángulo de fase con respecto a la temperatura es posible, como también se observó en otros trabajos publicados por Thomason et al., George et al., Zehetmeyer et al., Shen et al. o Zhang et al., donde este hecho se demuestra perfectamente<sup>8,64,95,96,97</sup>. La misma idea puede ser reproducida para la frecuencia. En algunas investigaciones, un pico ancho en el máximo del módulo de pérdida en función de la frecuencia es posible<sup>62</sup>.

Cortés et al.<sup>98</sup> presenta un caso particular, que propone un nuevo modelo viscoelástico que se basa en el hecho de que algunos materiales composites presentan un comportamiento cuasielástico, cuyo módulo de almacenamiento es constante en un amplio rango de frecuencias y de temperaturas. Debido a este hecho, se calcula la tensión en función del tiempo cuando el material se somete a una deformación constante.

La influencia del contenido de fibra también afecta a las propiedades finales del material. Debido al contenido de fibra, el módulo de almacenamiento, el módulo de pérdida y el ángulo de fase varían<sup>64</sup>.

### 2.5 Superposición tiempo-temperatura

Una superposición tiempo-temperatura (TTS) es una herramienta usada para modificar el rango de tiempo, experimentando el comportamiento del material a diferentes temperaturas, para caracterizar un polímero o un material composite. Esto ocurre porque las escalas de tiempo de los movimientos dependen de la temperatura. Estos movimientos ocurren antes cuando la temperatura es más alta<sup>99</sup>.

Se usan dos tipos de factores de desplazamiento para poder obtener la gran curva maestra. Estos factores se conocen como el factor de desplazamiento del tiempo y el factor de desplazamiento del módulo. El primero muestra la cantidad de movimiento en la dirección horizontal y representa las características de los tiempos de relajación de los materiales poliméricos. El segundo muestra el movimiento en la dirección vertical y depende de la densidad<sup>24,81,100,101,102,103</sup>.

Normalmente el factor de desplazamiento del módulo se considera 1 y entonces no existe desplazamiento vertical. En este caso, la curva resultante se conoce como curva maestra. Sin embargo, se han realizado algunos trabajos con la aplicación de ambos factores de desplazamiento. Un ejemplo se encuentra en Nakada et al.<sup>104</sup> con la caracterización viscoelástica de una resina amorfa.

Las curvas obtenidas a diferentes temperaturas pueden superponerse mediante los cambios horizontales mostrando una única curva que cubre un rango más amplio de tiempos (o de frecuencias, si en vez de tiempo se trabaja con frecuencia). Con el uso de una temperatura de referencia  $T_{ref}$ , es posible cubrir un amplio rango de tiempos (o frecuencias) fuera del rango de trabajo. En circunstancias normales, este amplio rango suele ser poco accesible mediante la experimentación<sup>22,63,90</sup>.

Con el fin de superponer las curvas para crear la curva maestra en función del tiempo, cuando la temperatura es superior a  $T_{ref}$ , la curva se desplaza en sentido creciente del eje de abscisas. Por el contrario, si la temperatura es inferior a  $T_{ref}$ , la curva se desplaza en sentido decreciente del eje de abscisas. Por lo tanto, el aumento de la temperatura implica una disminución en el módulo. Se pueden encontrar numerosos ejemplos sobre este hecho<sup>81,100,101</sup>.

En función de la frecuencia, la curva maestra presenta el comportamiento contrario. En este caso, cuando la temperatura es superior a  $T_{ref}$ , la curva se desplaza en sentido decreciente del eje de abscisas, y cuando la temperatura es inferior a  $T_{ref}$ , la curva se desplaza en sentido creciente del eje de abscisas. Se observa un ejemplo en una nota de aplicación de reología de TA Instruments, Inc.<sup>105</sup> para acetato de politetrafluoroetileno y otro ejemplo en Guedes<sup>62</sup> para polietileno (PE) de ultra alto peso molecular. Se han

## Capítulo 2 - Estado del arte

obtenido curvas muy similares por Duffrène et al.<sup>106</sup>, donde se querían determinar los coeficientes viscoelásticos a partir de los módulos de relajación dinámicos de un vidrio de sosa, cal y sílice y, para conseguirlo, se obtuvo una curva maestra.

En Achenbach et al.<sup>100</sup>, se puede encontrar otro concepto de gran ayuda. Éste es la caída del módulo de tracción para diferentes temperaturas. La gran caída se da a temperaturas cercanas a  $T_g$ . Sin embargo, si la temperatura experimental se encuentra muy lejos de  $T_g$ , el módulo cae lentamente. En términos del módulo de almacenamiento, la caída del módulo por efecto de la temperatura se lleva a cabo cerca de  $T_g$ . Esta caída es una de las maneras de determinar  $T_g$  en un material<sup>107</sup>.

La ecuación de Doolittle fue el inicio del TTS. La Mantia (1977) y La Mantia y Titomanlio (1979) supusieron un factor de desplazamiento para relacionar las fracciones de volumen libre  $f_v$  de distintas deformaciones como se muestra en la Ecuación 2.25 (Doolittle, 1951)<sup>107</sup>.

$$\ln(a_f) = D_1 \left( \frac{1}{f_v} - \frac{1}{f_{v0}} \right)$$

Ecuación 2.25

Donde:

$a_f$ : Factor de desplazamiento de la fracción de volumen libre  $f_v$  de la ecuación de Doolittle

$D_1$ : Parámetro de ajuste de la ecuación de Doolittle

$f_v$ : Fracción del volumen libre a una deformación determinada de la ecuación de Doolittle

$f_{v0}$ : Fracción del volumen libre a deformación cero de la ecuación de Doolittle

### 2.5.1 Factor de desplazamiento

El factor de desplazamiento se calcula con un procedimiento de desplazamiento.

De gran interés es conocer cómo afecta este factor de desplazamiento con la temperatura. Por definición, el factor de desplazamiento cae con la temperatura como se observa en un trabajo de Santangelo et al.<sup>108</sup>. En Chin et al.<sup>22</sup> se encuentra una representación gráfica del factor de desplazamiento para adhesivos epoxi combinando barridos de temperaturas y de frecuencias, mostrando la caída del factor de desplazamiento con la temperatura. Lo mismo se observa en Achenbach et al.<sup>100</sup>.

#### 2.5.1.1 Factor de desplazamiento horizontal

Por definición, el factor de desplazamiento horizontal se define en la Ecuación 2.26.

$$a_T = \frac{t_T}{t_{Tref}}$$

Ecuación 2.26

Donde:

$a_T$ : Factor de desplazamiento horizontal

## Capítulo 2 - Estado del arte

$t_T$ : Tiempo para alcanzar un cierto valor en una propiedad de un material a la temperatura  $T$

$t_{T_{ref}}$ : Tiempo para alcanzar un cierto valor en una propiedad de un material a la temperatura de referencia  $T_{ref}$

Se han propuesto varias ecuaciones empíricas para determinar el comportamiento dependiente de la temperatura del factor de desplazamiento. A continuación se presenta una que se usa en muchas aplicaciones (Ecuación 2.27) cuando el material se encuentra a temperaturas superiores a  $T_g$  (debido al crecimiento lineal de la fracción de volumen libre en función de la temperatura) y también en la región de  $T_g^{24,101,105}$ . La Ecuación 2.27 se conoce como la ecuación WLF y presenta la siguiente expresión<sup>109</sup>:

$$\log(a_T) = \frac{-C_1(T - T_{ref})}{C_2 + (T - T_{ref})}$$

Ecuación 2.27

Donde:

$C_1$ : Primer coeficiente de la ecuación de Williams-Landel-Ferry (WLF)

$C_2$ : Segundo coeficiente de la ecuación de Williams-Landel-Ferry (WLF)

$T_{ref}$ : Temperatura de referencia

Generalmente,  $C_1$  toma el valor de 17.44 mientras  $C_2$ , el valor de 51.6 cuando  $T_{ref}$  presenta el mismo valor que  $T_g^{110}$ .

En contraposición, cuando la temperatura es inferior a  $T_g$  (debido a que los cambios en los materiales a temperaturas inferiores a  $T_g$  siguen la cinética de activación)<sup>111</sup>, la relación entre el factor de desplazamiento horizontal y la temperatura se da mediante la ecuación de Arrhenius (Ecuación 2.28). En este caso, se asume que existe un proceso de activación térmica y que la energía de activación asociada con  $T_g$  es independiente de la temperatura. Esta región genera los factores de desplazamiento más ambiguos pero es la única región de interés para muchos materiales estructurales<sup>24,105</sup>.

$$\log(a_T) = \frac{E_a}{2.303 R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right)$$

Ecuación 2.28

Donde:

$E_a$ : Energía de activación de la ecuación de Arrhenius

$R$ : Constante de ecuaciones termodinámicas

El número de temperaturas a analizar a fin de tener un ajuste fiable del factor de desplazamiento en función de la temperatura depende de cuánto tiempo duró el experimento. En la mayoría de casos, 4 o 5 temperaturas suelen ser suficientes<sup>58,112</sup>.

Un gran número de autores determina los valores de los coeficientes de las ecuaciones utilizando  $T_{ref}$  como  $T_g$  (debido al hecho de que hay valores recomendados para los coeficientes utilizando esta temperatura como  $T_{ref}$ ). Además, en muchos casos, se suele hacer sin dividir el rango de temperaturas en diferentes subrangos. Por ejemplo, en Achenbach et al.<sup>100</sup>, tomaron  $T_{ref}$  como  $T_g$ . Sin embargo, hay otros autores<sup>113</sup> que

prefieren tomar otra temperatura como  $T_{ref}$ . En este caso, una manera de hallar los coeficientes de la ecuación es mediante ajustes lineales.

### 2.5.1.2 Factor de desplazamiento vertical

Para algunos materiales, se requiere el factor de desplazamiento vertical para obtener una curva maestra suave. Sin embargo, este factor se usa sólo para materiales complejos termoreológicamente, cuyas propiedades viscoelásticas no se superponen correctamente usando sólo el factor de desplazamiento horizontal. Los cambios en la densidad del material, los efectos hidrológicos, las expansiones térmicas, o las contracciones del material son algunas de las causas para considerar un factor de desplazamiento vertical<sup>101</sup>.

El factor de desplazamiento vertical se define con la Ecuación 2.29.

$$b_T = \frac{M_T}{M_{T_0}}$$

Ecuación 2.29

Donde:

$M$ : Módulo determinado

$b_T$ : Factor de desplazamiento vertical

El factor de desplazamiento vertical es el ratio entre el módulo para obtener un cierto valor a tiempo  $t$  y a temperatura  $T$  y el módulo para alcanzar el mismo valor al mismo tiempo  $t$  y a temperatura  $T_0$ .

El producto entre los factores de desplazamiento horizontal y vertical es igual al factor de desplazamiento que se determina a la viscosidad de cizalla cero ( $\eta_0$ ) como se muestra en la Ecuación 2.30<sup>102</sup>.

$$a_T b_T = \frac{\eta_{0T}}{\eta_{0T_0}}$$

Ecuación 2.30

Donde:

$\eta_{0T}$ : Viscosidad a cizalla cero a la temperatura  $T$

$\eta_{0T_0}$ : Viscosidad a cizalla cero a la temperatura  $T_0$

Para más información sobre la interpretación de TTS, Cho<sup>103</sup> investigó esta herramienta desde el punto de vista geométrico.

### 2.5.2 Tiempo modificado y frecuencia modificada

El tiempo modificado y la frecuencia modificada son parámetros importantes a definir. Con la aplicación de estos términos, las curvas creadas en una representación gráfica se pueden desplazar en el eje de abscisas. De esta forma, los rangos de tiempo y frecuencia se pueden amplificar. Las propiedades mecánicas de los polímeros pueden conocerse a tiempos y frecuencias fuera del rango de trabajo sin la necesidad de realizar los ensayos a estos tiempos o frecuencias.

## Capítulo 2 - Estado del arte

En muchos casos, debido al rango de trabajo del aparato o a la imposibilidad de esperar tanto tiempo, estos parámetros son herramientas de mucha utilidad para ajustar modelos con gran precisión y extraer buenas conclusiones. La modificación del tiempo viene dada por la Ecuación 2.31.

$$t' = \frac{t}{a_T}$$

Ecuación 2.31

Donde:

$t'$ : Tiempo modificado

El módulo de relajación se convierte en una función de la temperatura y del tiempo modificado cuando se aplica el nuevo tiempo<sup>113</sup>. La misma idea se aplica en el caso de la frecuencia como se indica en la Ecuación 2.32.

$$w' = w a_T$$

Ecuación 2.32

Donde:

$w'$ : Frecuencia modificada en rad/s

En este caso, la nueva frecuencia permite crear las curvas maestras de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de esta frecuencia modificada que se ha definido.

Un ejemplo de esta aplicación se observa en Mok et al.<sup>114</sup>, en la que la tangente del ángulo de fase se representa en función de la frecuencia modificada.

### 2.5.3 Tiempo de relajación en función de la temperatura

El tiempo de relajación es el tiempo requerido para disminuir la tensión a un 36.8% (1/e) de su valor inicial. Por ejemplo, en un ensayo de relajación de tensiones, donde la deformación se mantiene constante, el tiempo requerido desde el momento en el que la tensión presenta su valor inicial hasta el momento en el que la tensión ha disminuido 0.368 veces dicho valor inicial es el tiempo de relajación.

Una fórmula empírica que estudia la dependencia de la temperatura con el tiempo de relajación  $\tau$  es la ecuación de Vogel-Fulcher-Tamman. Esta expresión se presenta en la Ecuación 2.33<sup>108</sup>.

$$\tau = \tau_{T_0} e^{\frac{VTF_1}{(T-VTF_2)}}$$

Ecuación 2.33

Donde:

$\tau$ : Tiempo de relajación de la ecuación de Vogel-Fulcher-Tamman

$\tau_{T_0}$ : Tiempo de relajación de la temperatura inicial  $T_0$  de la ecuación de Vogel-Fulcher-Tamman

$VFT_1$ : Coeficiente numérico de la ecuación de Vogel-Fulcher-Tamman

## Capítulo 2 - Estado del arte

---

*VFT*<sub>2</sub>: Temperatura de Vogel de la ecuación de Vogel-Fulcher-Tamman

Un artículo en el que se usó esta ecuación se encuentra en Lin et al.<sup>115</sup>. Como en otros casos, el tiempo de relajación decrece a medida que la temperatura aumenta<sup>108</sup>.

El tiempo de retardo es el tiempo requerido para aumentar la deformación a un 63.2% (1-1/e) de su valor inicial<sup>116</sup>. Por ejemplo, en un ensayo de creep, donde la tensión se mantiene constante, el tiempo requerido desde el momento en el que la deformación presenta su valor inicial hasta el momento en el que la deformación se ha incrementado 1.632 veces dicho valor inicial es el tiempo de retardo.

En el anexo A.6 se pueden encontrar las expresiones de los tiempos de relajación (anexo A.6.1) y de los tiempos de retardo (anexo A.6.2) para  $n=1$  usando las series de Prony.



### 3 Metodología experimental

#### 3.1 Tests estáticos y dinámicos

Los tests mecánicos y reológicos se realizan para determinar propiedades de un material, tanto dependientes como independientes del tiempo<sup>117,118</sup>. La caracterización debería ser tan amplia como sea posible, incluyendo una curva de tensión-deformación (carácter elástico y plástico) y el comportamiento de la estructura dependiendo de la amplitud, de la temperatura y de la frecuencia<sup>119</sup>. Los datos experimentales deben convertirse en parámetros de entrada en el simulador. Cuantos más parámetros de entrada se introduzcan en el simulador, mejor será el ajuste, pero también mayores requerimientos de cálculo se necesitarán.

Cada material en el simulador necesita un cierto número de coeficientes para ajustar un modelo matemático, a veces incluso imposible de predecir directamente por el usuario, pero fácilmente predecible mediante un simulador. Normalmente, el trabajo experimental viene ligado a los parámetros necesarios para obtener el modelo matemático. Por esta razón se debe establecer una buena planificación de los ensayos y de las condiciones experimentales.

En el momento actual, existen equipos importantes para modelizar el comportamiento de materiales composites. Estos equipos son la máquina universal de ensayos (MUE), muy extendida en la industria, y el análisis dinamomecánico (DMA). MUE caracteriza las propiedades del material (tensión y deformación) en función del tiempo y de la temperatura. Estos parámetros se fijan para cada ensayo. DMA se basa en ensayos oscilatorios, donde los módulos de almacenamiento y de pérdida se estudian en función de la frecuencia y de la temperatura.

El comportamiento viscoelástico de los materiales composites puede caracterizarse usando individualmente MUE o DMA. Por ejemplo, en MUE, haciendo un ensayo de relajación de tensiones, si la función respuesta (tensión) decae y tiende a un valor constante diferente de cero, se puede suponer que el material presenta naturaleza viscoelástica. De forma similar, en DMA, se supone un comportamiento viscoelástico si el ángulo de fase del material en función de la frecuencia o de la temperatura no es ni  $0^\circ$  (comportamiento elástico) ni  $90^\circ$  (comportamiento viscoso), sino un ángulo intermedio.

El combinar ambos equipos da como resultado una caracterización más extensa del material aumentando la potencialidad de cualquier simulación posterior.

Por una parte, la validación del modelo constitutivo elegido (contrastando ensayo y simulación) debería ser llevada a cabo mediante el ajuste con tests sencillos (tests estáticos). A continuación se puede incrementar gradualmente la complejidad de los ensayos, variando las velocidades de deformación. Por otra parte, DMA debe ser usado para verificar una ley constitutiva, en este caso una ley constitutiva viscoelástica<sup>99,102,117</sup>.

Resumiendo, se destacan 4 tipos de ensayos para determinar las propiedades mecánicas de un material<sup>41</sup>. Estos ensayos son los ensayos de relajación de tensiones, de creep, de tensión-deformación y reológicos.

Brevemente, la relajación de tensiones es un ensayo en el que el parámetro de entrada es la deformación, que se mantiene constante, y el parámetro de salida es la tensión, que decrece con el tiempo. El creep es un ensayo en el que el parámetro de entrada es la tensión, que se

## Capítulo 3 - Metodología experimental

mantiene constante, y el parámetro de salida es la deformación, que se incrementa con el tiempo. Los ensayos de tensión-deformación son ensayos en los que el parámetro de entrada es la velocidad de deformación, que se mantiene constante, y los parámetros de salida son la deformación y la tensión, que cambian con el tiempo. Finalmente, los ensayos reológicos son ensayos cuyo parámetro de entrada es la deformación, que es periódica, y cuyo parámetro de salida es la tensión, que también es periódica.

### 3.2 Análisis dinamomecánico

El análisis dinamomecánico (DMA) (Figura 3.1 y Figura 3.2) se hace con un aparato termomecánico en el que se monitoriza el módulo de almacenamiento (respuesta elástica) y el módulo de pérdida (respuesta viscosa) de la probeta bajo carga oscilatoria en función del tiempo, de la amplitud, de la temperatura o de la frecuencia de oscilación<sup>120</sup>.

Los tres parámetros más importantes de los tests dinamomecánicos que se desean obtener en este trabajo son los siguientes:

- el módulo de almacenamiento, que mide la energía máxima almacenada en el material durante un ciclo de oscilación. Da la idea de comportamiento a la rigidez y la capacidad de soporte de la carga del material.
- el módulo de pérdida, que es proporcional a la cantidad de energía que se disipa en forma de calor por la probeta.
- la tangente del ángulo de fase, que se relaciona con el grado de movilidad molecular en el material<sup>120</sup> y con la resistencia al impacto del material<sup>63</sup>. También es el ratio entre el módulo de pérdida y el módulo de almacenamiento.

$T_g$  se define como el máximo en la curva del módulo de pérdida o en la curva de la tangente del ángulo de fase en función de la temperatura, normalmente llevado a cabo a frecuencias bajas<sup>120</sup>. El objetivo principal es obtener el módulo de almacenamiento y el módulo de pérdida de la probeta sometida a flexión en función de la frecuencia para estudiar el comportamiento viscoelástico del material.



Figura 3.1 - DMA y ordenador

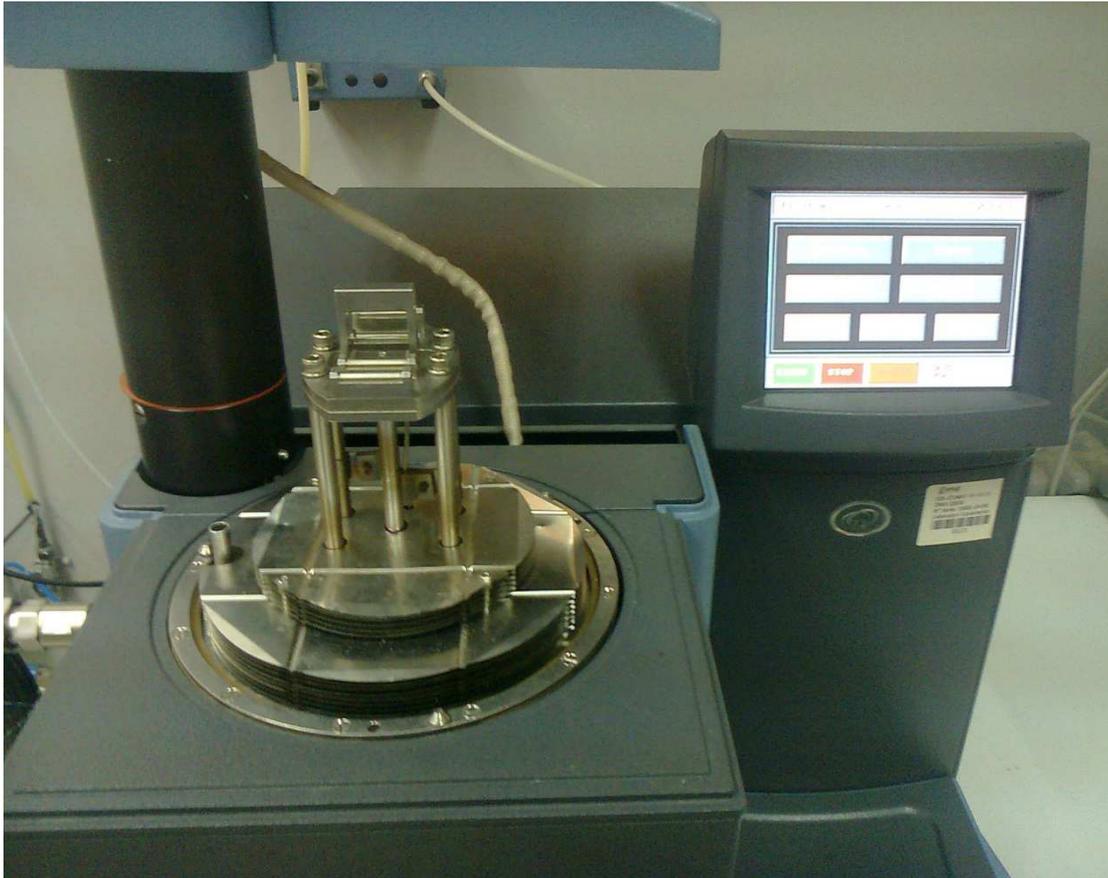


Figura 3.2 - DMA

El primer factor a tener en cuenta en DMA es la mordaza utilizada para medir las probetas. El tipo de mordaza elegida depende del material y de los datos experimentales que se requieran. Se experimentó que la flexión a tres puntos era la mordaza más adecuada para la medición de los módulos dependientes de la temperatura para DMA<sup>119</sup>. Por una parte, para materiales de alta rigidez, dichos materiales deben ser analizados usando la flexión a tres puntos. Por otra parte, con este tipo de mordaza, el módulo de flexión obtenido presenta un valor más parecido al módulo de tracción que con otras mordazas. En el anexo A.7, se encuentra la norma ASTM D5023-07, que presenta las normas de las propiedades dinámomecánicas de la flexión a tres puntos.

El segundo factor a tener en cuenta es el rango de operación de las mordazas, que también depende del material. Éste debe ser analizado con el fin de definir las dimensiones de las probetas que se experimentan en DMA. Los tamaños de las probetas se calculan mediante el factor de geometría ( $GF$ ) haciendo uso de la Ecuación 3.1 para probetas rectangulares.

$$FG = \frac{L^3}{4 b e^3} \left( 1 + \frac{12}{5} (1 + \nu) \left( \frac{e}{L} \right)^2 \right)$$

Ecuación 3.1

Donde:

$FG$ : Factor de geometría para DMA

$b$ : Anchura

## Capítulo 3 - Metodología experimental

$e$ : Espesor

$L$ : Longitud

$\nu$ : Coeficiente de Poisson

La longitud es de 50 mm, debido a que la distancia entre sujeciones es esta distancia<sup>121</sup>.

La anchura es de 10 mm, porque las probetas usadas para los ensayos de tracción y de creep en MUE son de esta anchura.

Con el espesor de las probetas en MUE de 4 mm, el factor de geometría tendría un valor aproximado de  $50 \text{ mm}^{-1}$ . Debido al alto módulo de los materiales estudiados, en la representación gráfica que se muestra en la Figura 3.3, el punto quedaría cerca del límite de operación. Si el espesor se reduce a sólo 2 mm,  $GF$  se incrementa aproximadamente a  $400 \text{ mm}^{-1}$ .

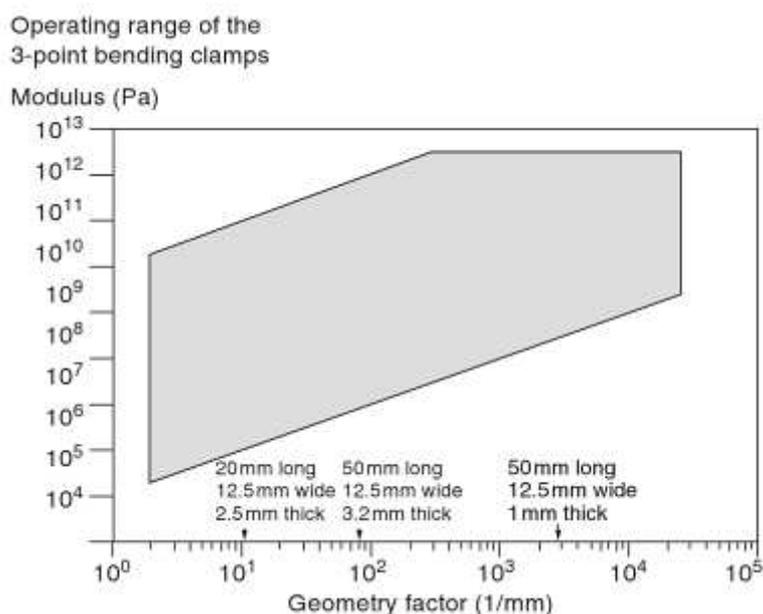


Figura 3.3 - Límites de operación de DMA que definen la región del módulo en función del factor de geometría en el que se puede trabajar (cortesía de TA Instruments, Inc.)

### 3.2.1 Barrido de amplitudes

El primer ensayo para caracterizar un material es un barrido de amplitudes. El rango viscoelástico lineal de la muestra se determina con este ensayo. El objetivo de este ensayo es el de obtener una amplitud fiable con el fin de asegurar el rango de viscoelasticidad lineal para posteriores ensayos.

El ensayo se debe realizar desde bajas a altas deformaciones. El módulo de almacenamiento indica el final del rango, debido a una caída relativamente repentina del parámetro, una vez que se alcanza un cierto valor de la amplitud. Sin embargo, una buena decisión sobre qué amplitud es la más adecuada no es fácil. Si es muy baja, se pueden presentar problemas en el barrido de frecuencias, debido a la baja velocidad de deformación necesaria para cumplir con la frecuencia requerida. Además, el ruido es mayor. Si es muy alta, dependiendo de la frecuencia de la deformación, el ensayo puede exceder el rango de viscoelasticidad lineal.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

---

Es necesario tener en cuenta dos aspectos. El primer aspecto es que el rango de viscoelasticidad lineal se reduce al incrementar la frecuencia<sup>122</sup>. El segundo aspecto es que la fuerza aplicada debe situarse entre 0.0001 N y 18 N, los límites de fuerza que se pueden aplicar en el DMA.

Las amplitudes recomendadas para las probetas usadas en las mordazas de flexión a tres puntos se encuentran entre 25 y 40  $\mu\text{m}$ <sup>110</sup>. Sin embargo, el barrido de frecuencias se debe realizar siempre para obtener una amplitud a partir de la cual se realizarán los barridos posteriores (barridos de temperaturas y de frecuencias).

En este trabajo, las condiciones requeridas para realizar todos los barridos de amplitudes son a 1 Hz y a 30°C y de 2 a 100  $\mu\text{m}$ .

En este ensayo, para cada material, la amplitud siempre se representa en escala logarítmica y se realizan cinco experiencias. Después, se obtiene la curva media para extraer conclusiones. La amplitud elegida para todos los materiales es de 30  $\mu\text{m}$ .

La primera razón es que esta amplitud se encuentra dentro del rango en el que los valores siguen una tendencia clara. Para observar esta tendencia, se representa el módulo de flexión en función de la velocidad de deformación. El módulo de flexión se considera directamente el módulo de almacenamiento<sup>121</sup> y la velocidad de deformación se obtiene en función de la amplitud. El concepto de la velocidad de deformación se describirá en el apartado 3.4.

La segunda razón se debe a que los valores recomendados por la bibliografía van desde 25 hasta 40  $\mu\text{m}$ , como ya se ha mencionado<sup>110</sup>.

### 3.2.2 Barrido de temperaturas

Una vez establecida la amplitud de trabajo dentro del rango de viscoelasticidad lineal, se realizan los barridos de temperaturas para obtener máximos en el módulo de pérdida y en la tangente del ángulo de fase. Si se obtiene dicho máximo para una temperatura determinada, después será más fácil obtener un posible máximo del mismo parámetro en función de la frecuencia en los barridos de frecuencias.

De hecho, si se encuentra un máximo en el módulo de pérdida en función de la temperatura, el modelo matemático para la caracterización del material se ajusta más fácilmente. La temperatura a la que se dé dicho máximo permite dividir el rango total de temperaturas en dos subrangos distintos. En cada uno de estos subrangos, la función de desplazamiento aplicada es diferente.

Los máximos en la tangente del ángulo de fase se asocian a las diferentes transiciones que presenta el material. La más importante es  $T_g$ , donde ocurre la relajación  $\alpha$ .

$T_g$  se identifica por 3 factores<sup>110</sup>:

- 1) El primer factor es la caída de  $G'$ . Ocurre a la temperatura menor y se relaciona con la caída de las propiedades mecánicas.
- 2) El segundo factor es el pico de  $G''$ . Ocurre a la temperatura media y se relaciona con el principio de movimiento de las cadenas.
- 3) El tercer factor es el pico de la tangente del ángulo de fase. Ocurre a la temperatura mayor y se relaciona con el punto medio entre el estado vítreo y gomoso.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

---

A temperaturas inferiores a  $T_g$ , las moléculas no adquieren movimiento cooperativo y no son capaces de relajarse. Sin embargo, a temperaturas superiores a  $T_g$ , existe el movimiento cooperativo, las moléculas se relajan, y, en consecuencia, el módulo se reduce.

El ensayo se puede realizar utilizando una rampa de temperaturas o utilizando incrementos sucesivos de temperaturas. La rampa puede implicar problemas en probetas grandes debido al gradiente térmico. Si el incremento de la temperatura es rápido, la probeta puede no estabilizarse completamente. Un aumento razonable de la temperatura para una rampa de temperaturas suele ser de 3°C por minuto. La forma usando incrementos se utiliza para estabilizar la probeta térmica y mecánicamente. Se pueden usar una o más frecuencias en cada temperatura. Para esta tesis, lo más recomendable es utilizando incrementos (entre 2°C y 5°C por incremento)<sup>110</sup>.

La amplitud a usar es la considerada como adecuada dentro del rango de viscoelasticidad lineal en el barrido de amplitudes para el resto de ensayos.

Normalmente, para los barridos de temperaturas, la frecuencia que se suele usar es o 1 o 10 Hz (6.28 o 62.8 rad/s, respectivamente). A mayor frecuencia presenta una mayor  $T_g$ <sup>110</sup>.

En este trabajo, las condiciones requeridas para realizar todos los barridos de temperaturas son una amplitud de 30  $\mu\text{m}$  y una frecuencia de 1 Hz.

En este ensayo, la temperatura se representa de forma gráfica en escala lineal. Los barridos se repiten 5 veces, en un rango de temperaturas de 30°C a 100°C, con incrementos de 5°C. Así se miden las propiedades mecánicas. Una vez obtenidas las 5 curvas, como en el barrido de amplitudes, se obtiene la curva media.

En general, el incremento de la frecuencia en los barridos de temperaturas hacen disminuir la intensidad del módulo de pérdida o de la tangente del ángulo de fase, ensanchando los picos, y hacen decrecer la pendiente de la curva del módulo de almacenamiento en la región de transición<sup>110</sup>. La temperatura a la que aparece el máximo en el módulo de pérdida en el barrido de temperaturas también es mayor.

Es normal encontrar un pico ancho en el módulo de pérdida y en la tangente del ángulo de fase, según algunos trabajos descritos en la bibliografía<sup>8,63,64,95,96,97</sup>, en el que se muestra la anchura de este pico para una gran variedad de materiales. De todos modos, los valores obtenidos en barridos de temperaturas no son cruciales, debido a que no se usan más. Estos valores sólo se utilizan para conocer cuál es la temperatura a la que se presenta un máximo en el módulo de pérdida (si la hay), y poder subdividir el rango de temperaturas en dos subrangos para poder usar en cada uno de estos subrangos la ecuación de desplazamiento conveniente.

### 3.2.3 Barrido de frecuencias

El barrido de frecuencias es el último ensayo en DMA.

El rango de frecuencias en el aparato de DMA va de  $10^{-2}$  a  $10^2$  rad/s.

Para tiempos pequeños (frecuencias altas), la respuesta del material es como la de un sólido, mientras que para tiempos grandes (frecuencias bajas), la respuesta es similar a la de un líquido<sup>110,122</sup>.

Los barridos de frecuencias se pueden realizar a una temperatura para obtener las propiedades viscoelásticas del material a dicha temperatura o a múltiples temperaturas para, posteriormente, llevar a cabo la superposición tiempo-temperatura.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

---

Se deben tener en cuenta los siguientes aspectos:

- 1) A partir del conjunto de datos, para ser analizadas frecuencias más bajas se necesita más tiempo.
- 2) La ejecución del ensayo debería realizarse partiendo de la frecuencia más alta, e ir disminuyendo la frecuencia, hasta llegar a la frecuencia más baja.
- 3) El módulo de pérdida puede presentar máximos en función de la frecuencia, como puede suceder con la tangente del ángulo de fase. Un máximo en el módulo de pérdida es de gran importancia para ajustar de forma más precisa el modelo matemático, ya que la Ecuación 2.24, ecuación que relaciona el módulo de pérdida con la frecuencia, presenta por lo menos un máximo en función de la frecuencia.
- 4) Es recomendable realizar barridos de frecuencias a temperaturas cercanas a la temperatura donde se encontró el máximo en el módulo de pérdida en el barrido de temperaturas para hallar también un máximo.
- 5) Si se encuentra un máximo para el módulo de pérdida en función de la temperatura a una frecuencia determinada, lo mismo debería ocurrir si el módulo de pérdida se experimenta en función de la frecuencia para una temperatura cercana a la temperatura donde se encontró el máximo en el módulo de pérdida en el barrido de temperaturas, como se ha comentado. En principio, para temperaturas lejanas a esta última, también debería existir un máximo, pero este máximo se debería presentar a una frecuencia lejana a la del rango de frecuencias.

El rango de frecuencias para DMA usado en este trabajo se ha limitado de 0.02 a 20 Hz, 3 décadas. Esto se ha definido así, ya que valores menores son imposibles de medir en DMA, mientras que valores mayores dan valores no fiables, debido a la gran cantidad de ruido generado en las señales del módulo de almacenamiento y de pérdida.

Cuando se incrementa la temperatura, la frecuencia a la que aparece el máximo en el módulo de pérdida también es más elevada<sup>123</sup>. En este caso, el tiempo de relajación es menor<sup>108</sup>.

Se han realizado 5 barridos de frecuencias a cada temperatura, en un rango de temperaturas de 30°C a 100°C, con incrementos de 5°C. La amplitud es la definida en el barrido de amplitudes, ya usada para el barrido de temperaturas. Finalmente, se debe decidir cuántos puntos experimentales se necesitan tomar por década de frecuencia. 15 puntos/década suelen ser suficientes como se ha mencionado en el apartado 2.4<sup>87</sup>. La frecuencia siempre se representa de forma gráfica en escala logarítmica para este ensayo.

La velocidad de deformación se puede definir en función de la frecuencia. Como se ha mencionado, su definición se explicará en el apartado 3.4, usando la Ecuación 3.3. Como se ha comentado, el módulo de flexión será también el módulo de almacenamiento<sup>121</sup>.

Por lo tanto, en conclusión, mediante barridos de frecuencias, se puede representar el módulo de flexión en función de la velocidad de deformación para cada temperatura.

Al buscar una relación entre el módulo de flexión y la velocidad de deformación, se podrá observar que si se supone un ajuste logarítmico entre estos dos términos, dicho ajuste presenta buenos resultados. Este hecho es de gran importancia. Si es cierto que un buen ajuste entre ambos términos es un ajuste logarítmico, el término independiente de la ecuación sería el módulo de flexión a 1 mm/min para cada temperatura y la pendiente sería útil para poder predecir la caída del módulo de flexión y también del módulo de tracción en función de la temperatura.

### 3.3 Máquina de ensayos universal

La máquina de ensayos universal (MUE) (Figura 3.4 y Figura 3.5) es una máquina útil para realizar ensayos mecánicos en función del tiempo, de la velocidad de deformación o de la temperatura. Trabaja con los parámetros de tensión y deformación y caracteriza el material hasta su punto de ruptura. Es útil para realizar ensayos de compresión, de cizalla o de tracción, así como ensayos de creep y de relajación de tensiones.

En esta tesis, sólo son necesarios los ensayos de tracción y de creep, a modo de comprobación.



Figura 3.4 - MUE y ordenador



Figura 3.5 - MUE

Sin embargo, se necesita de otro complemento en todos los ensayos para conseguir resultados fiables. Este complemento es un extensómetro, mostrado en la Figura 3.6.



Figura 3.6 - Extensómetro

El extensómetro es capaz de medir todos los parámetros, pero lo hace tomando sólo una pequeña parte de la probeta. Los resultados son más precisos, ya que esta pequeña parte

## Capítulo 3 - Metodología experimental

---

presenta una geometría homogénea (sección transversal constante) y los resultados no están afectados por el resto de la probeta, que presenta una sección transversal variable, ya que los puntos de apoyo con las mordazas en MUE tienen una anchura mayor.

Teniendo en cuenta la norma ISO 527-1, 2, que se encuentra en el anexo A.8, el módulo de tracción de un material se define tal como se indica en la Ecuación 3.2.

$$E_T = \frac{\sigma_{0.0025 \text{ mm/mm}} - \sigma_{0.0005 \text{ mm/mm}}}{0.0025 - 0.0005}$$

Ecuación 3.2

Donde:

$E_T$ : Módulo de tracción

En los ensayos de creep o de relajación de tensiones, el valor del parámetro que se mantiene constante es muy significativo. Al variar dicho valor, hay una mayor o menor caída del módulo de creep a lo largo del tiempo.

Por ejemplo, en un ensayo de creep, si el nivel de tensión constante es mayor, el módulo de creep a tiempo cero es ya menor. Con el tiempo, la caída también es más pronunciada. Esto significa que a mayores tensiones, se acorta el tiempo de vida del material. En otras palabras, a mayores tensiones, el tiempo de ensayo es menor, como también sucede a mayores temperaturas.

Sin embargo, en este trabajo, la variación de la tensión no se analiza. Todos los ensayos de creep para un material se realizan manteniendo constante la tensión a un valor que es el 10% de la tensión de fluencia del material. Este valor se considera suficientemente algo como para poder extraer conclusiones pero suficientemente bajo como para no ser afectado por el comportamiento plástico del material.

En cuanto a dimensiones de las probetas, la anchura de las probetas se toma como 10 mm, mientras que el espesor presenta un valor de 4 mm, aproximadamente.

La temperatura de ensayo es siempre la temperatura ambiente (23°C). No se trata experimentalmente la temperatura en MUE. Tampoco hay ninguna necesidad de usar una cámara climática, ya que los modelos matemáticos de esta tesis ya determinan los resultados a diferentes temperaturas. Estos resultados, una vez obtenidos, se corroboran con los datos experimentales de Faurecia Interior Systems España, Abrera, o de DuPont<sup>TM</sup>, dependiendo del material.

### 3.3.1 Ensayos de tensión-deformación

Los ensayos de tensión-deformación son ensayos basados en que la curva resultante (curva de tensión-deformación) se obtiene a una velocidad de deformación y a una temperatura constantes. El usuario analiza la evolución de la tensión y de la deformación en función del tiempo. Normalmente, los ensayos finalizan cuando la probeta se rompe.

En este ensayo, se analiza el comportamiento elástico y plástico del material.

Dado un material, cuando la velocidad de deformación aumenta, el módulo de tracción también aumenta. Esto se observa con la pendiente de la curva de tensión-deformación, que es mayor. Contrariamente, cuando la temperatura aumenta, el módulo elástico disminuye y la pendiente de dicha curva es menor.

### 3.3.2 Ensayos de tracción a diferentes velocidades de deformación

Uno de los parámetros más importantes a estudiar es la velocidad de deformación. Este parámetro afecta significativamente al módulo de tracción. Como se ha mencionado, el módulo de tracción se incrementa al aumentar la velocidad de deformación.

La velocidad de deformación se define como el ratio entre la deformación del material y el tiempo del ensayo.

Como parámetros de entrada, MUE necesita la longitud de los extensómetros, la anchura y el espesor de las probetas.

Los tests de tracción en MUE para obtener los datos de las curvas de tensión-deformación se repiten cinco veces para cada velocidad de deformación.

Para ISO 527, la velocidad de los tests suele ser típicamente de 5 o de 50 mm/min para medir fuerzas y deformaciones y de 1mm/min para medir módulos<sup>124</sup>. Por esta razón, en este trabajo, la velocidad de deformación más baja es de 1 mm/min. Además, en el bucle de creep, fijada a una velocidad de deformación, ésta presenta el valor de 1 mm/min. Sin embargo, se miden otros parámetros a velocidades de deformación mayores.

La velocidad de deformación mayor en este trabajo es de 499 mm/min. Por lo tanto, el rango de la velocidad de deformación utilizado se define de 1 mm/min a 499 mm/min. Los rangos de velocidad de deformación que se suelen tomar son muy variables. Sin embargo, en un trabajo realizado por Kanters<sup>125</sup> para caracterizar la cinética de deformación de elastómeros termoplásticos mediante tests de tracción, el rango era de 0.5 a 500 mm/min. Por lo tanto, rangos parecidos al rango elegido también se aplican en otros proyectos.

Inicialmente, se pensó que unos buenos valores de velocidad de deformación serían 1 mm/min, 100 mm/min, 200 mm/min, 300 mm/min, 400 mm/min y 499 mm/min. Sin embargo, para los materiales estudiados, se observó que el módulo de tracción a bajas velocidades de deformación crecía rápidamente, mientras que para velocidades de deformación altas, no se percibían fácilmente cambios de valor en dicho módulo. Una representación gráfica general de este comportamiento se observa en la Figura 3.7.

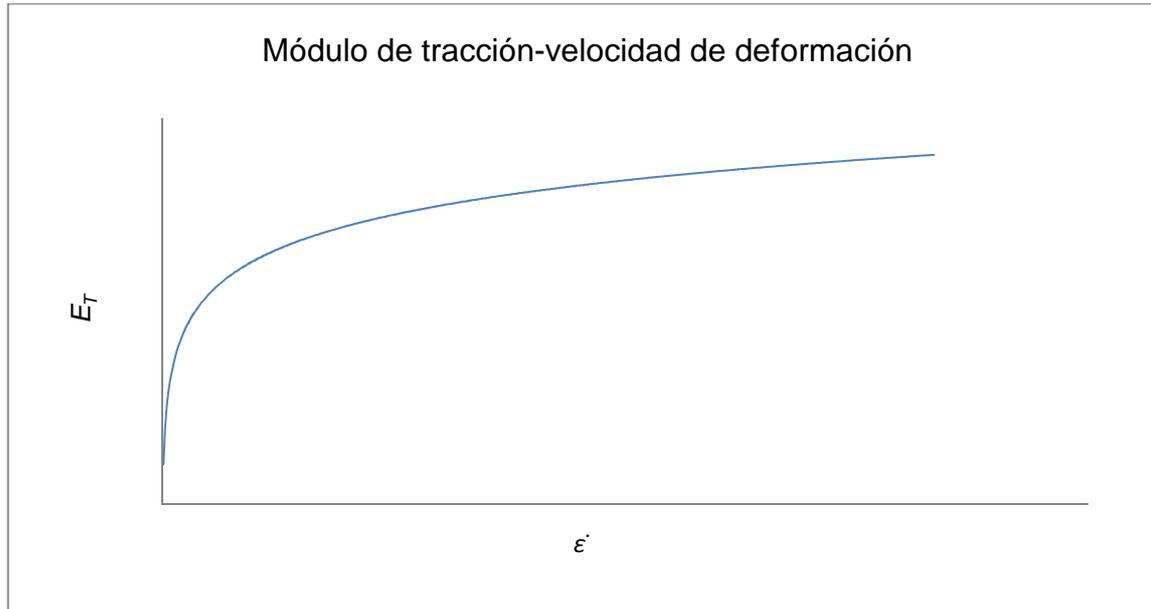


Figura 3.7 - Representación gráfica general del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación

Como se observa en la Figura 3.7, la tendencia parece ser logarítmica.

Pero además, esta tendencia parece estar de acuerdo con la tendencia logarítmica de DMA, al representar el módulo de almacenamiento en función de la amplitud. Si la amplitud es linealmente proporcional a la velocidad de deformación cuando la frecuencia se mantiene constante en DMA, la velocidad de deformación debería seguir una tendencia logarítmica con el módulo de almacenamiento.

Por lo tanto, si se asume que el módulo de almacenamiento en función de la velocidad de deformación en DMA se puede representar mediante una escala logarítmica, por analogía, el módulo de tracción en función de la velocidad de deformación debe poderse representar también mediante una escala logarítmica.

Si la representación gráfica previa (Figura 3.7) se muestra en escala logarítmica (Figura 3.8), se observa una buena linealización.

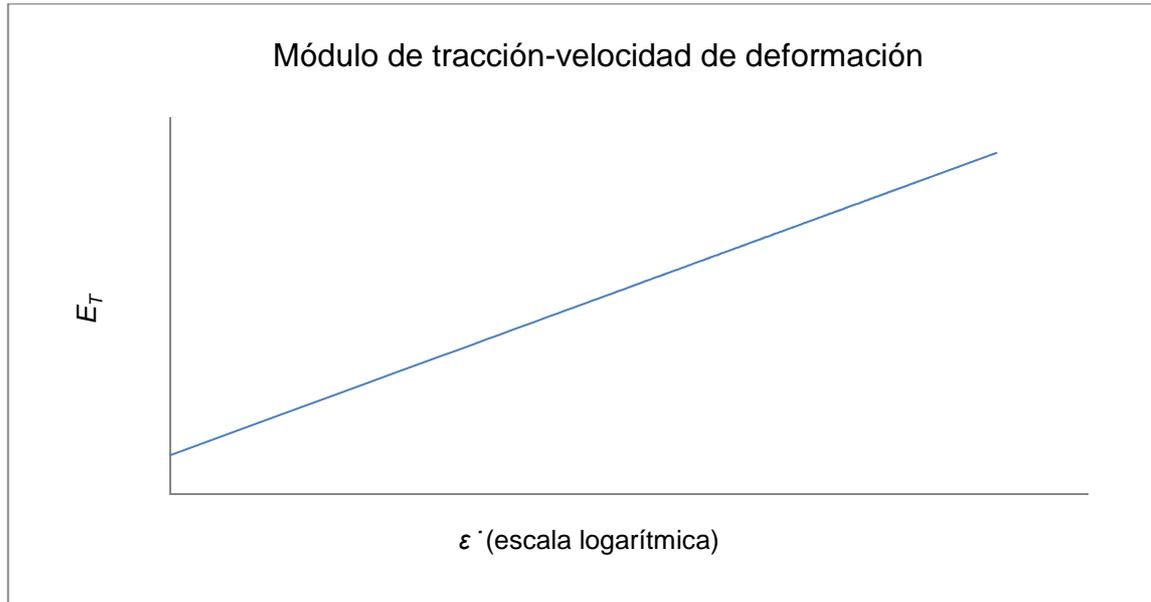


Figura 3.8 - Representación gráfica general del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación en escala logarítmica

Si se desea mantener puntos equidistantes al representar la velocidad de deformación en escala logarítmica, se proponen como buenos valores para la velocidad de deformación 1.000 mm/min, 3.466 mm/min, 12.011 mm/min, 41.628 mm/min, 144.270 mm/min y 499.000 mm/min.

### 3.3.3 Ensayos de relajación de tensiones

El ensayo de relajación de tensiones es un ensayo en el que el parámetro que se mantiene constante con el tiempo es la deformación. En este caso, lo que se estudia es la evolución de la tensión a lo largo del tiempo. La tensión disminuye con el tiempo cuando la deformación se mantiene constante. Para un ensayo de este tipo, se puede ajustar un modelo viscoelástico a partir de los datos experimentales.

La Figura 3.9 y la Figura 3.10 muestran las representaciones gráficas generales de la deformación y de la tensión, respectivamente, en función del tiempo de un material viscoelástico analizado en MUE, realizando un ensayo de relajación de tensiones.

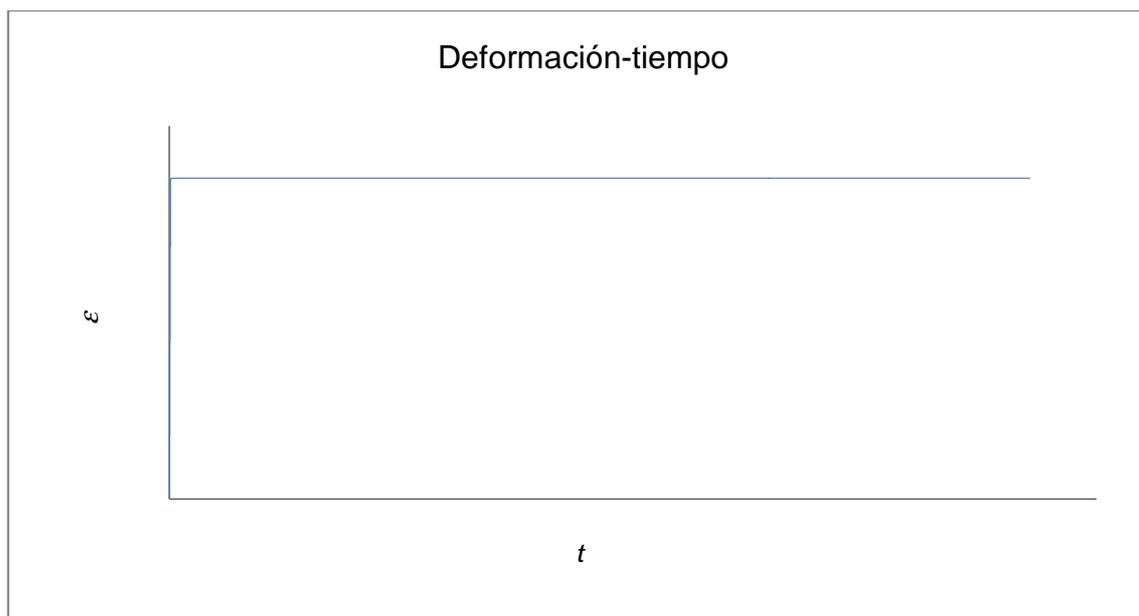


Figura 3.9 - Representación gráfica general de la deformación en función del tiempo para un ensayo de relajación de tensiones

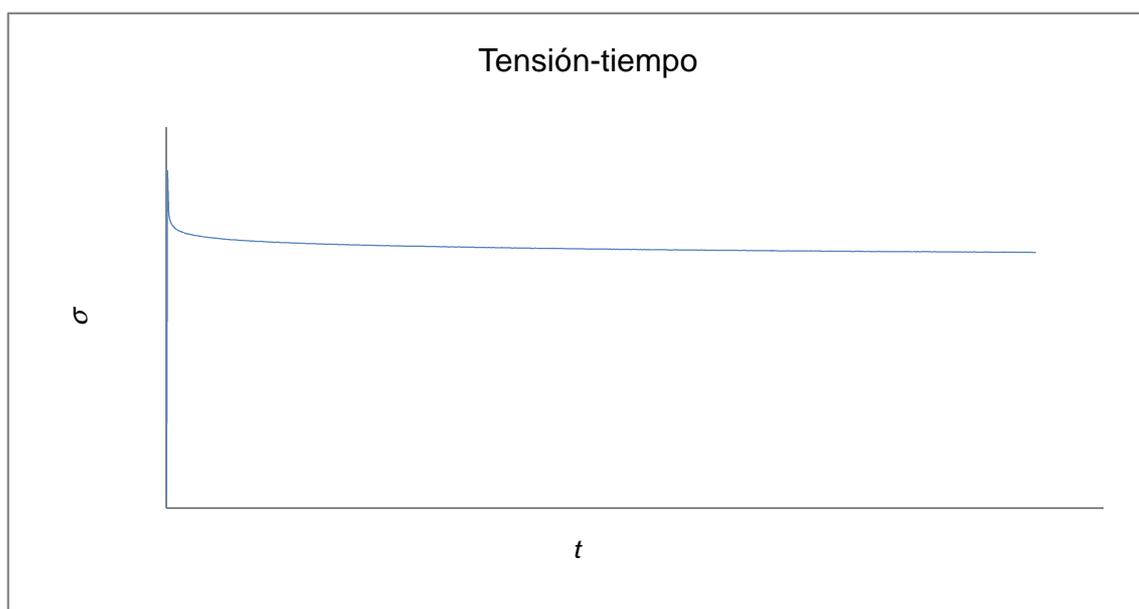


Figura 3.10 - Representación gráfica general de la tensión en función del tiempo para un ensayo de relajación de tensiones

### 3.3.4 Ensayos de creep

El ensayo de creep es un ensayo en el que el parámetro que se mantiene constante con el tiempo es la tensión. En este caso, lo que se estudia es la evolución de la deformación a lo largo del tiempo. Sin embargo, este ensayo permite observar la rapidez en la que tiene lugar el incremento de la deformación en el material y, así, poder apreciar la importancia de la parte elástica y de la parte viscosa en el material. Además, tal como ocurre para un ensayo de relajación de tensiones, a partir de los datos experimentales obtenidos en un creep, es posible ajustar un modelo viscoelástico.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

Sin embargo, los ensayos de creep han remplazado los ensayos de relajación por distintas razones. La primera razón es la facilidad de encontrar ensayos de creep en bibliografía, con respecto a ensayos de relajación de tensiones<sup>67,82,83,84</sup>. La segunda razón es porque las curvas experimentales obtenidas para comparar con los datos teóricos obtenidos usando los modelos propuestos trabajan con módulos de creep, en vez de trabajar con módulos de relajación.

Otro parámetro a considerar es el tiempo de ensayo. Se consideran ensayos cortos aquéllos que duran menos de 1000 horas, mientras que se consideran ensayos largos aquéllos que duran entre 2000 y 10000 horas<sup>126</sup>.

En este trabajo, se han realizado ensayos de creep considerados cortos, cuyo tiempo estipulado manteniendo la tensión constante ha sido de 1000 minutos<sup>127,128</sup>.

Otra consideración a tener en cuenta es la escala de trabajo. Para esta tesis, se considera más adecuado trabajar con una escala logarítmica de tiempos por dos razones.

- 1) Por conveniencia: Los datos experimentales durante los primeros minutos presentan más variación que durante los últimos minutos.
- 2) Por la aplicación : Una escala logarítmica de tiempos sirve para linealizar la curva y hallar los coeficientes de una ecuación lineal de forma sencilla como en el artículo de Castaño et al.<sup>129</sup>. Sin embargo, en este caso, la linealización no es necesaria, ya que se usan modelos matemáticos en función del tiempo que no necesitan ser previamente linealizados.

Finalmente, para realizar un ensayo de creep, la máquina tiene un control PID para poder estabilizar eficazmente la tensión durante la experimentación.

De la misma manera que se realiza la curva de tracción, el ensayo de creep empieza cuando el valor de tensión es de un 10% del valor de la tensión de fluencia. A partir de ahí, la tensión se mantiene constante, mientras que la deformación se incrementa con el tiempo.

La Figura 3.11 y la Figura 3.12 muestran las representaciones gráficas generales de la tensión y de la deformación, respectivamente, en función del tiempo de un material viscoelástico analizado en MUE, realizando un ensayo de creep.

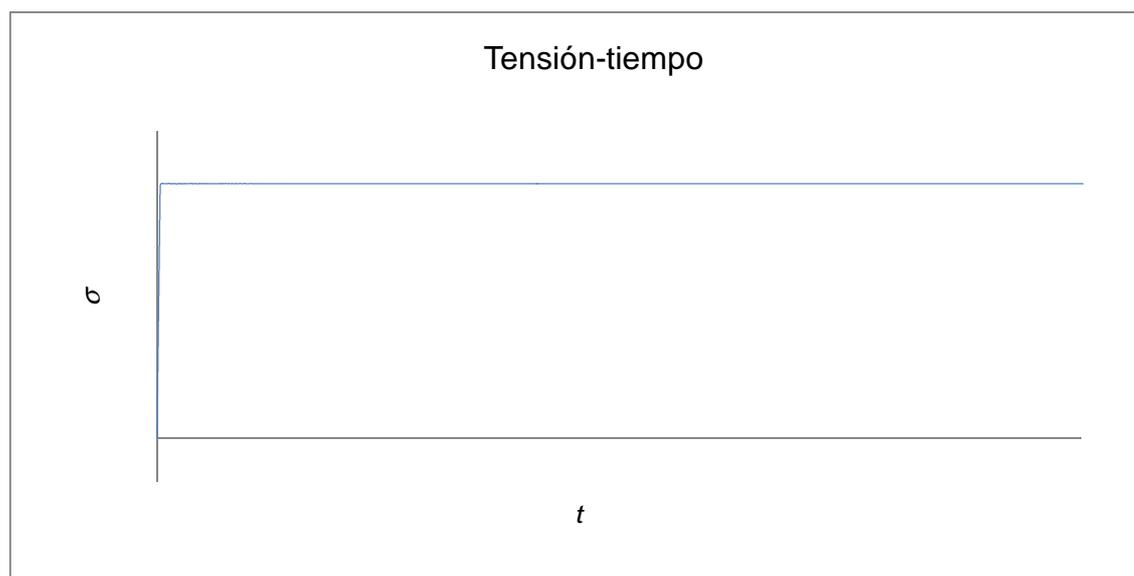


Figura 3.11 - Representación gráfica general de la tensión en función del tiempo para un ensayo de creep

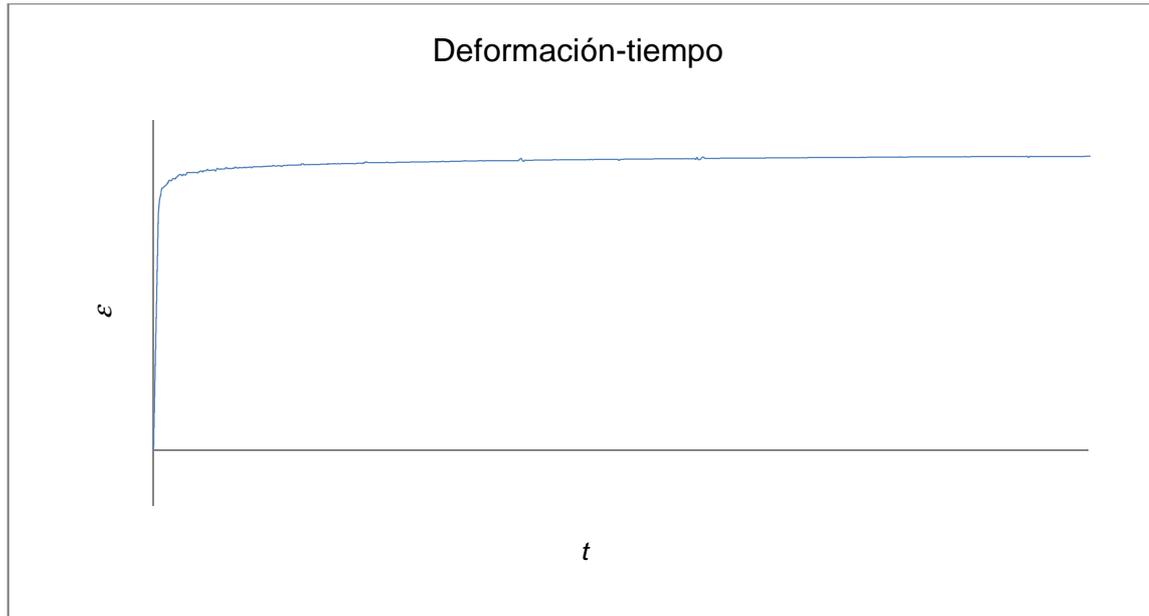


Figura 3.12 - Representación gráfica general de la deformación en función del tiempo para un ensayo de creep

Cada ensayo de creep se repite cinco veces.

### 3.3.5 Ensayos de relajación de tensiones doble

Inicialmente, el ensayo de relajación de tensiones doble es igual que el de relajación de tensiones presentado en el apartado 3.3.3. Sin embargo, después de algún tiempo previamente considerado por el usuario, manteniendo el valor de la deformación constante, lleva dicho valor de deformación a otro valor (normalmente cero) para volver a mantenerlo constante. En todo este ensayo, lo que interesa es la evolución de la tensión a lo largo del tiempo.

La Figura 3.13 y la Figura 3.14 muestran las representaciones gráficas generales de la deformación y de la tensión, respectivamente, en función del tiempo de un material analizado en MUE, realizando un ensayo de relajación de tensiones doble.

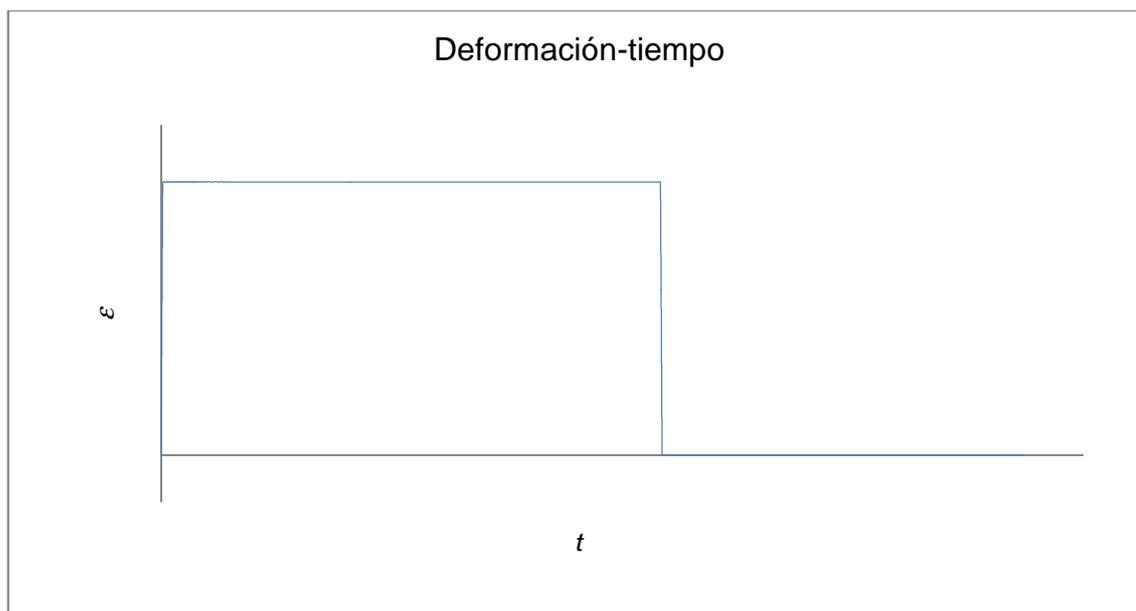


Figura 3.13 - Representación gráfica general de la deformación en función del tiempo para un ensayo de relajación de tensiones doble

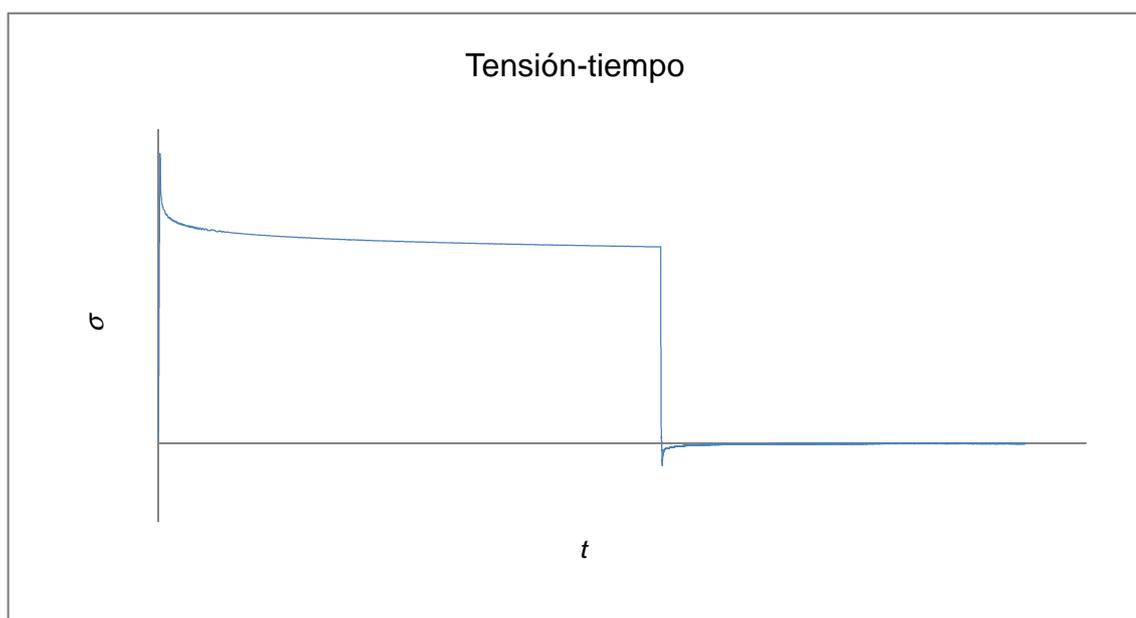


Figura 3.14 - Representación gráfica general de la tensión en función del tiempo para un ensayo de relajación de tensiones doble

Las ecuaciones matemáticas para hallar la deformación y la tensión en función del tiempo para el ensayo de relajación de tensiones doble se encuentran en el anexo A.9.1.

### 3.3.6 Ensayo de creep doble

Inicialmente, el ensayo de creep doble es igual que el de creep presentado en el apartado 3.3.4. Sin embargo, después de algún tiempo previamente considerado por el usuario, manteniendo el valor de la tensión constante, lleva dicho valor de tensión a otro valor (normalmente cero) para volver a mantenerlo constante. En todo este ensayo, lo que interesa es la evolución de la deformación a lo largo del tiempo.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

La Figura 3.15 y la Figura 3.16 muestran las representaciones gráficas generales de la tensión y de la deformación, respectivamente, en función del tiempo de un material analizado en MUE, realizando un ensayo de creep doble.

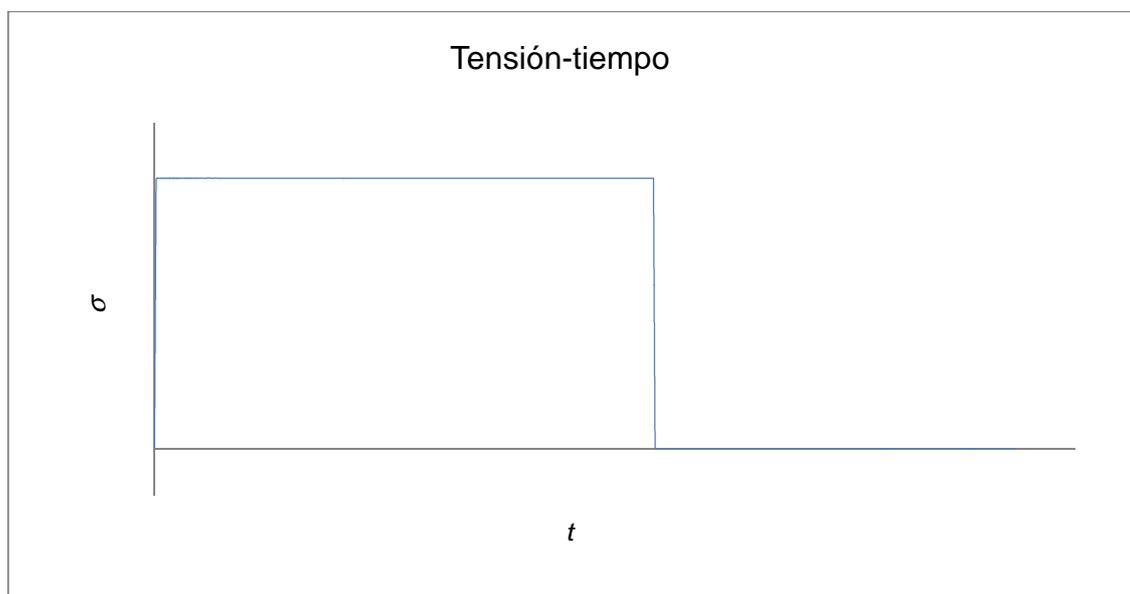


Figura 3.15 - Representación gráfica general de la tensión en función del tiempo para un ensayo de creep doble

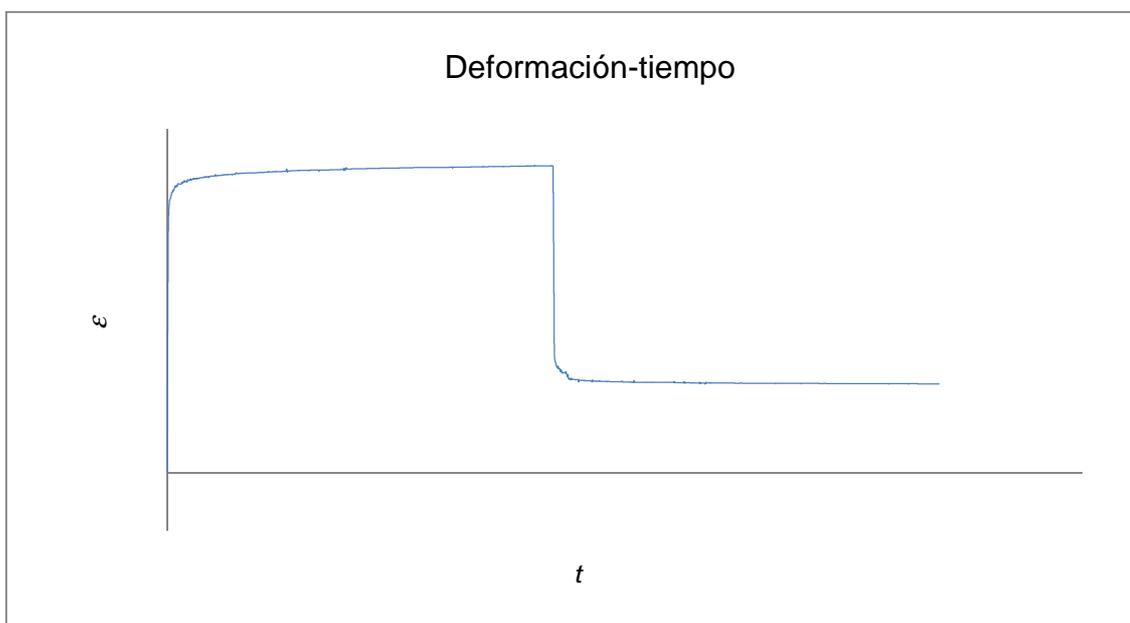


Figura 3.16 - Representación gráfica general de la deformación en función del tiempo para un ensayo de creep doble

Las ecuaciones matemáticas para hallar la tensión y la deformación en función del tiempo para el ensayo de creep doble se encuentran en el anexo A.9.2.

### 3.4 Velocidad de deformación

Es de vital importancia introducir aquí el concepto de velocidad de deformación en ensayos oscilatorios. Este concepto es necesario para hallar relaciones entre DMA y MUE.

La velocidad de deformación en DMA se considera el ratio entre la amplitud máxima para deformar la probeta y el tiempo necesario para llegar a dicha amplitud. Sin embargo, este tiempo es sólo  $\frac{1}{4}$  del periodo, es decir,  $\frac{1}{4}$  del tiempo de un ciclo entero. El periodo es la inversa de la frecuencia. Por lo tanto, para cada ensayo, es posible calcular las velocidades de deformación en función de la frecuencia y de la amplitud mediante la Ecuación 3.3.

$$\dot{\epsilon} = 4 A f$$

Ecuación 3.3

Donde:

$\dot{\epsilon}$ : Velocidad de deformación

A: Amplitud

f: Frecuencia en Hz

### 3.5 Bucles

En este trabajo, se definen y se presentan dos bucles: el bucle de tracción y el bucle de creep. Estos bucles pretenden predecir datos de MUE a partir de datos experimentales de DMA, sin necesidad de realizar ensayos en MUE, para materiales termoplásticos. La manera de proceder con dichos bucles se explica en los siguientes apartados.

#### 3.5.1 Bucle de tracción

El objetivo de este bucle es el de poder predecir módulos de tracción de un material en función de la velocidad de deformación y de la temperatura a partir de datos de DMA. Por lo tanto, se parte de los barridos de amplitudes, de temperaturas y de frecuencias presentados en los apartados 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3, y a partir de estos datos experimentales, el bucle de tracción se obtiene mediante una serie de pasos que se detallan a continuación.

##### 3.5.1.1 Factor de desplazamiento

El factor de desplazamiento es el primer parámetro necesario en el bucle de tracción.

Una vez halladas las curvas de los barridos de frecuencias a diferentes temperaturas, el bucle de tracción sería relativamente sencillo de completar sin el factor de desplazamiento, si el módulo de tracción como dato de referencia fuera obtenido a una de las temperaturas a las que se realizan los barridos de frecuencias. Sin embargo, la temperatura a la que se obtiene dicho módulo de tracción es a la temperatura ambiente, 23°C, temperatura no experimentada en los barridos de frecuencias. Es por esta razón que se necesita el factor de desplazamiento en el bucle de tracción.

Aquí se deben tener en cuenta consideraciones previas.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

---

1) Limitaciones en el uso de las funciones de desplazamiento.

Para calcular los coeficientes de las funciones de desplazamiento, se debe usar o bien el propio rango de temperaturas o bien dos subrangos, dependiendo del caso. Si se analizan las ecuaciones que permiten ajustar el factor de desplazamiento en función de la temperatura, la ecuación WLF presenta una discontinuidad cuando la temperatura de ensayo se encuentra a una cierta temperatura inferior a  $T_{ref}$ . La primera y la segunda derivadas de la ecuación WLF en función de  $T - T_{ref}$  se presentan en la Ecuación 3.4 y en la Ecuación 3.5, respectivamente.

$$\frac{d \log(a_T)}{d (T - T_{ref})} = \frac{-C_1 C_2}{(C_2 + T - T_{ref})^2}$$

Ecuación 3.4

$$\frac{d^2 \log(a_T)}{d (T - T_{ref})^2} = \frac{2C_1 C_2}{(C_2 + T - T_{ref})^3}$$

Ecuación 3.5

Por lo tanto, la ecuación WLF presenta una discontinuidad en  $T - T_{ref} = -C_2$ . Sin embargo, es útil a temperaturas superiores a  $T_{ref}$ . La forma de hallar los coeficientes de la ecuación es mediante la linealización, presentada en la Ecuación 3.6.

$$Y = AX + B ; \left( \frac{1}{\log(a_T)} \right) = \left( -\frac{C_2}{C_1} \right) \left( \frac{1}{(T - T_{ref})} \right) + \left( -\frac{1}{C_1} \right)$$

Ecuación 3.6

Además, la ecuación de Arrhenius presenta la energía de activación, cuyo factor carece de sentido a temperaturas superiores a  $T_g$ . De todas formas, analizando sus derivadas de primer y segundo orden, presentadas en la Ecuación 3.7 y en la Ecuación 3.8, respectivamente, no existen discontinuidades.

$$\frac{d \log(a_T)}{d T} = -\frac{E_a}{R} \frac{1}{T^2}$$

Ecuación 3.7

$$\frac{d^2 \log(a_T)}{d T^2} = 2 \frac{E_a}{R} \frac{1}{T^3}$$

Ecuación 3.8

En este caso, para hallar los coeficientes, la linealización presenta la forma descrita en la Ecuación 3.9.

$$Y = AX + B ; \log(a_T) = \left( \frac{E_a}{R} \right) \left( \frac{1}{T} \right) + \left( -\frac{E_a}{R} \frac{1}{T_{ref}} \right)$$

Ecuación 3.9

## Capítulo 3 - Metodología experimental

---

- 2) Inutilidad de cambiar  $T_{ref}$  para cada subrango de temperaturas, en el caso de que haya subrangos.

$T_{ref}$  no se cambia para cada subrango debido a que carece de sentido. Si se desea trabajar con todo el rango de temperaturas indistintamente,  $T_{ref}$  sólo debería ser una.

Usando diferentes  $T_{ref}$  para cada subrango, el factor de desplazamiento no seguiría una convergencia, ya que si  $T_{ref}$  se incluye en un subrango, el factor de desplazamiento para esta temperatura sería de 1 independientemente de la ecuación usada. Por lo tanto, para este caso, una de las curvas debería ser desplazada para coincidir con la otra curva del otro subrango. Esto implicaría errores asociados, ya que los coeficientes ajustados de la ecuación no serían los mismos que con una sola  $T_{ref}$ .

Si hay un cambio de subrango, el factor de desplazamiento es el mismo cuando la temperatura es la misma. De hecho, la última temperatura para el primer subrango coincide con la primera temperatura para el segundo subrango. El factor de desplazamiento debe coincidir. Si no, habría una discontinuidad en la variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura. Esto implicaría una curva maestra incorrecta, ya que una parte de la curva no estaría en continuidad con la otra parte.

Se encuentran más detalles en un artículo revisado por A.J. Franck sobre pautas para usar TTS<sup>130</sup>.

En la experimentación se pueden dar dos casos:

- 1) Máximo en el módulo de pérdida → Dos subrangos de temperaturas  
Si existe un máximo en el módulo de pérdida en función de la frecuencia, se necesitan dos subrangos de temperaturas. Por una parte, un primer subrango que va de la temperatura mínima a la temperatura a la que se encuentra el máximo y, por otra parte, un segundo subrango que va de esta última temperatura a la máxima temperatura. El primer subrango se ajusta con la ecuación de Arrhenius y el segundo subrango con la ecuación WLF.
- 2) No hay máximo en el módulo de pérdida → Un rango de temperaturas  
Si no se encuentra un máximo en el módulo de pérdida, sólo se aplica un rango que va de la mínima a la máxima temperatura. La elección de la función de desplazamiento depende de la forma de la curva. Por una parte, si el módulo de pérdida se incrementa con la temperatura, se espera que la existencia del máximo se encuentre a una temperatura superior al rango. En este caso se recomienda utilizar la ecuación de Arrhenius para el ajuste. Por otra parte, si dicho módulo disminuye con la temperatura, se espera que la existencia del máximo se encuentre a una temperatura inferior al rango. En este caso se recomienda utilizar la ecuación WLF para el ajuste.

Usando una plantilla en Microsoft® Office Excel 2010, el usuario puede cambiar los valores de los coeficientes. Automáticamente las curvas para el rango o para los dos subrangos de temperaturas, según el caso, se desplazarán. De esta forma se ajustan los coeficientes de las funciones de desplazamiento.

Como se ha comentado, los coeficientes se ajustan sin tomar ningún valor recomendado por la bibliografía.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

Además, en este caso,  $T_{ref}$  no es  $T_g$ , como consideran algunos autores.  $T_{ref}$  es 30°C por comodidad (es la temperatura mínima usada en DMA) para poder trabajar a una temperatura cercana a la usada para comprobar los datos que se obtienen con MUE (datos a 23°C). Como sucede en este trabajo, algunos autores también definen  $T_{ref}$  diferente de  $T_g$ <sup>113</sup>.

Para el primer caso, en el que se definen dos funciones de desplazamiento, debido a la continuidad del factor de desplazamiento en función de la temperatura, uno de los tres coeficientes (1 para la ecuación de Arrhenius y 2 para la ecuación WLF) se define a partir de los otros dos.

Por ejemplo, si  $C_2$  es el coeficiente que se define a partir de los otros dos, la expresión matemática en función del factor de desplazamiento y de la temperatura del cambio de subrango, de  $T_{ref}$  y de  $C_1$  quedaría como se presenta en la Ecuación 3.10.

$$C_2 = \frac{-C_1(T_{Cambio\ Subrango} - T_{ref})}{\log(a_{T_{Cambio\ Subrango}}) - (T_{Cambio\ Subrango} - T_{ref})}$$

Ecuación 3.10

Donde:

$T_{Cambio\ Subrango}$ : Temperatura en la que hay un máximo del módulo de pérdida en el barrido de temperaturas

$a_{T_{Cambio\ Subrango}}$ : Factor de desplazamiento a la temperatura en la que hay un máximo del módulo de pérdida en el barrido de temperaturas

Además, los coeficientes de la ecuación WLF,  $C_1$  y  $C_2$ , deberían cumplir las siguientes propiedades.  $C_1$  debería estar entre 5 y 25, mientras que  $C_2$  debería estar entre 25 y 75<sup>131</sup>. Una vez en este punto, cuando las curvas se desplacen cumpliendo todas las condiciones, se deberían hallar no sólo los coeficientes de las funciones de desplazamiento, sino también la variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura.

### 3.5.1.2 Ratio de módulos

Hay otro parámetro importante a determinar. Este parámetro es el ratio de módulos  $RM$ , el ratio entre el módulo de tracción a  $E_T$  y el módulo de flexión  $E_F$ , definido en la Ecuación 3.11.

$$RM = \frac{E_T}{E_F}$$

Ecuación 3.11

Donde:

$RM$ : Ratio de módulos

$E_F$ : Módulo de flexión

Por definición, este ratio de módulos se calcula cuando los módulos de tracción y de flexión se llevan a cabo a la misma temperatura y a la misma velocidad de deformación. El ratio se considera independiente de la temperatura y de la velocidad de deformación.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

En el anexo A.10 se encuentran dos representaciones gráficas, una con la variación del módulo de tracción en función de la temperatura y otra con la variación del módulo de cizalla en función de la temperatura para una muestra seca de PA66-GF50 (cortesía de Faurecia Interior Systems España, Abrera). La forma de las dos curvas es similar.

Por esta razón, el ratio de módulos se considera independiente de la temperatura.

El procedimiento para calcular el ratio de módulos es el siguiente:

- 1) Obtención del factor de desplazamiento a 23°C.  
Se debe calcular el factor de desplazamiento a 23°C. Debido a que sólo el módulo de tracción es conocido a 23°C, ya que es el valor de referencia, el módulo de flexión es el parámetro que se debe desplazar a 23°C usando el factor de desplazamiento, aunque no se pueda hallar de forma experimental y se deba aplicar una extrapolación a 23°C mediante fórmula matemática para hallar dicho valor. Sin embargo, el error es prácticamente despreciable, ya que las funciones de desplazamiento se hallan en el rango de temperaturas de 30°C a 100°C.
- 2) Obtención de la frecuencia y el módulo de flexión correspondiente a 30°C, 30 µm y 1.00 mm/min.  
La frecuencia se obtiene aplicando la Ecuación 3.3 en función de la amplitud y de la velocidad de deformación. El módulo de flexión es el término independiente (a 1 mm/min también) del ajuste logarítmico de este módulo en función de la velocidad de deformación.
- 3) Obtención de la frecuencia y del módulo de flexión correspondientes a 23°C, 30 µm y 1.00 mm/min.  
Estos valores se obtienen usando el factor de desplazamiento a 23°C. A esta temperatura el módulo de tracción es conocido.
- 4) Obtención del ratio de módulos.  
Es el ratio entre los módulos de tracción y de flexión a 23°C.

### 3.5.1.3 Influencia de la temperatura

El módulo de tracción se puede hallar a cada temperatura a partir del módulo de flexión. Para ello, una vez se conoce el módulo de flexión a cada temperatura y a 1 mm/min, multiplicando este valor por el ratio de módulos, se hallan los módulos de tracción a cada temperatura, como se muestra en la Ecuación 3.12.

$$E_{T_T} = E_{T_{23^{\circ}C}} \frac{E_{F_T}}{E_{F_{23^{\circ}C}}}$$

Ecuación 3.12

La Ecuación 3.12 es la primera parte del modelo matemático para el bucle de tracción de esta tesis. El modelo matemático completo se describe en el capítulo 10.

### 3.5.1.4 Influencia de la velocidad de deformación

El procedimiento es el siguiente:

- 1) Obtención de la curva entre el módulo de tracción y la velocidad de deformación a 30°C.  
Esta curva se obtiene de dos maneras distintas:
  - a) La primera es a partir de los valores entre el módulo de almacenamiento y la velocidad de deformación a 30°C.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

Los módulos de flexión a una velocidad de deformación determinada se pueden calcular por interpolación lineal de los datos experimentales del módulo de almacenamiento tomando para ello los dos datos experimentales más cercanos de la velocidad de deformación respecto de la velocidad que se quiere calcular el módulo de tracción. Esto significa que se deben tomar las velocidades de deformación anterior y posterior de los datos experimentales. El resultado de la interpolación se debe multiplicar por el ratio de módulos para obtener el módulo de tracción a la velocidad de deformación determinada.

- b) La segunda es usando la pendiente obtenida del ajuste logarítmico del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación ( $PENDE_F$ ) a 30°C. La fórmula propuesta (Ecuación 3.13) sería la siguiente:

$$E_{T \dot{\epsilon}} = E_{T \dot{\epsilon}_{ref}} + PENDE_F RM \ln(\dot{\epsilon}) = E_{T \dot{\epsilon}_{ref}} + \frac{(E_{F \dot{\epsilon}_{max}} - E_{F \dot{\epsilon}_{min}})}{\ln(\dot{\epsilon}_{max}) - \ln(\dot{\epsilon}_{min})} RM \ln(\dot{\epsilon})$$

Ecuación 3.13

Donde:

$PENDE_F$ : Pendiente de la curva entre el módulo de flexión y el logaritmo de la velocidad de deformación usando dos puntos distintos

$\dot{\epsilon}_{max}$ : Valor más alto de la velocidad de deformación obtenido a partir de los datos experimentales de DMA

$\dot{\epsilon}_{min}$ : Valor más bajo de la velocidad de deformación obtenido a partir de los datos experimentales de DMA

A 1mm/min, el módulo de tracción es directamente el módulo de tracción a 30°C. Para otras velocidades de deformación,  $PENDE_F$  obtenido debe ser multiplicada por el ratio de módulos.

- 2) Obtención de la curva entre el módulo de tracción y la velocidad de deformación a otras temperaturas.

Si el coeficiente de variación entre los valores hallados usando la primera manera y la segunda manera es suficientemente bajo, el método empleado de la segunda manera (fórmula teórica) ajusta bien los datos experimentales a 30°C. Por lo tanto, se puede intentar aplicar el método para todo el rango de temperaturas.

Haciendo uso de los términos independientes y de  $PENDE_F$  hallados en el ajuste logarítmico entre los valores teóricos de los módulos de flexión y las velocidades de deformación para cada temperatura, y multiplicando dichos módulos por el ratio de módulos, se puede hallar directamente el módulo de tracción en función de la temperatura para cada velocidad de deformación.

Se espera que los resultados sean los siguientes. Cuando la temperatura aumenta, el módulo de tracción disminuye. Sin embargo, un incremento en la velocidad de deformación implica un incremento en el módulo de tracción. Además, la separación entre las curvas a diferentes temperaturas es algo más pronunciada a temperaturas cercanas a las que se han hallado los máximos. Esto es lógico, debido a la caída tan significativa del módulo de flexión con la temperatura en este rango en DMA. Como era de esperar, lo mismo debía ocurrir con el módulo de tracción en función de la temperatura.

La Ecuación 3.13 es la segunda parte del modelo matemático para el bucle de tracción de esta tesis. El modelo matemático completo se describe en el capítulo 10.

### 3.5.1.5 Verificación del bucle de tracción

Para cerrar el bucle se debe hacer verificaciones. Para ello, se comparan algunos valores del módulo de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación.

#### Verificación de la temperatura

Para verificar la temperatura, se necesitan curvas de tensión-deformación a diferentes temperaturas. Con estas curvas, el módulo de tracción se calcula mediante las tensiones y las deformaciones a 0.0005 mm/mm y a 0.0025 mm/mm usando la Ecuación 3.2.

#### Verificación de la velocidad de deformación

Para verificar la velocidad de deformación, el procedimiento es el siguiente:

- 1) Predicción de algunos valores teóricos del módulo de tracción a 23°C.  
La manera de predecir los valores es usando el factor de desplazamiento a 23°C. De esta forma, para obtener un valor del módulo de flexión a una velocidad de deformación determinada a 23°C, la frecuencia a 30°C debe ser trasladada a la frecuencia modificada a 23°C para la misma velocidad de deformación mediante el factor de desplazamiento. De esta forma se obtienen los valores teóricos del módulo de flexión a 23°C. Sin embargo, estos módulos no se pueden predecir a todas las velocidades de deformación; sólo a las que presentan menor valor, debido al incremento en la frecuencia modificada de 30°C a 23°C.
- 2) Predicción de  $PENDE_T$  a 23°C.  
La manera propuesta para calcular la pendiente sería la presentada en la Ecuación 3.14.

$$PENDE_T = \frac{(E_{T \dot{\epsilon}_{MaxRango}} - E_{T \dot{\epsilon}_{MinRango}})}{\ln(\dot{\epsilon}_{MaxRango}) - \ln(\dot{\epsilon}_{MinRango})}$$

Ecuación 3.14

Donde:

$PENDE_T$ : Pendiente de la curva entre el módulo de tracción y el logaritmo de la velocidad de deformación usando dos puntos distintos

$\dot{\epsilon}_{MaxRango}$ : Valor más alto de la velocidad de deformación obtenido a partir del rango de frecuencias modificadas a 23°C (uno de los seis valores siguientes: 1.000 mm/min, 3.466 mm/min, 12.011 mm/min, 41.628 mm/min, 144.270 mm/min y 499.000 mm/min)

$\dot{\epsilon}_{MinRango}$ : Valor más bajo de la velocidad de deformación obtenido a partir del rango de frecuencias modificadas a 23°C (uno de los seis valores siguientes: 1.000 mm/min, 3.466 mm/min, 12.011 mm/min, 41.628 mm/min, 144.270 mm/min y 499.000 mm/min)

En este caso, los dos puntos a utilizar serían el que presenta el mayor valor y el que presenta el menor valor de velocidad de deformación, de entre las del rango de velocidades de deformación disminuido.

- 3) Cálculo de los valores teóricos del módulo de tracción a 23°C para todas las velocidades de deformación.  
La manera propuesta para calcular los valores teóricos del módulo de tracción sería la presentada en la Ecuación 3.15.

$$E_{T \dot{\epsilon}} = E_{T \dot{\epsilon}_{ref}} + PENDE_T \ln(\dot{\epsilon}) = E_{T \dot{\epsilon}_{ref}} + \frac{(E_{T \dot{\epsilon}_{MaxRango}} - E_{T \dot{\epsilon}_{MinRango}})}{\ln(\dot{\epsilon}_{MaxRango}) - \ln(\dot{\epsilon}_{MinRango})} \ln(\dot{\epsilon})$$

Ecuación 3.15

- 4) Comparación con los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C.

Para comparar los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C, se han realizado 5 repeticiones de las curvas de tensión-deformación en MUE para cada velocidad de deformación.

Usando la fórmula dada en la Ecuación 3.2, se han calculado los módulos de tracción para cada caso. El valor tomado como módulo de tracción es la media de los cinco módulos de tracción obtenidos para cada velocidad de deformación.

### 3.5.1.6 Curvas de tensión-deformación

Se presenta una estimación de las curvas teóricas de tensión-deformación en función de la temperatura al final de los bucles de tracción. Para ello, se calculan las tensiones a 0.0025 mm/min a cada temperatura usando la Ecuación 3.2. Como valores de entrada, se toman el valor de la tensión a 0.0005 mm/mm (el valor de referencia a 23°C) y el valor de los módulos de tracción para cada temperatura, previamente hallados.

### 3.5.2 Bucle de creep

De entrada se realizan dos hipótesis.

- 1) Se proponen una serie de nuevas ecuaciones basadas en las que se han encontrado en bibliografía<sup>132</sup> para calcular los módulos en función de la frecuencia y del tiempo.
- 2) Se propone una conversión de coeficientes del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo.

Finalmente, si los errores entre los valores teóricos y los datos experimentales son suficientemente bajos, es posible concluir que las hipótesis se cumplen.

A partir de los datos de DMA a diferentes temperaturas, usando la superposición frecuencia-temperatura (FTS) y aplicando distintos modelos matemáticos para el bucle de creep, el módulo de creep se obtiene en función del tiempo y de la temperatura.

#### 3.5.2.1 Superposición frecuencia-temperatura

La superposición frecuencia-temperatura (FTS) convierte las curvas generadas con los diferentes barridos de frecuencias (una curva para cada temperatura), a una curva más general, incrementando el rango de frecuencias. Esta nueva curva se denomina la curva maestra frecuencia-temperatura. Es interesante un artículo sobre ejemplos de curvas maestras frecuencia-temperatura<sup>133</sup>. La curva maestra suele usarse más frecuentemente para tiempo que para frecuencias. Sin embargo, ambas superposiciones se pueden realizar indistintamente, y las conclusiones extraídas usando una u otra deberían ser las mismas.

Este hecho se muestra al comparar la Ecuación 3.16 y la Ecuación 2.26. El factor de desplazamiento se puede calcular:

- 1) mediante los tiempos generados para alcanzar un cierto valor en una propiedad a diferentes temperaturas.

- 2) mediante las frecuencias generadas para alcanzar un cierto valor en una propiedad, también a diferentes temperaturas.

$$a_T = \frac{w_{T_{ref}}}{w_T}$$

Ecuación 3.16

Donde:

$w_{T_{ref}}$ : Frecuencia para alcanzar un cierto valor en una propiedad de un material a la temperatura de referencia  $T_{ref}$  en rad/s

$w_T$ : Frecuencia para alcanzar un cierto valor en una propiedad de un material a la temperatura  $T$  en rad/s

La curva maestra se obtiene usando los factores de desplazamiento a cada temperatura y desplazando las curvas en sentido creciente o decreciente del eje de abscisas (tiempo o frecuencia, según el caso). De esta forma, se superponen todas las curvas creando una nueva y única curva a  $T_{ref}$  (30°C).

### 3.5.2.2 Modelos matemáticos para el bucle de creep

Todas las ecuaciones presentes en los apartados siguientes son ecuaciones definidas y propuestas para comprobar si los modelos se ajustan adecuadamente, comparando los valores teóricos obtenidos con los datos experimentales. Durante los siguientes apartados, se usan una serie de hipótesis para crear los diferentes modelos propuestos.

#### Modelo convencional en el dominio de la frecuencia

Para desarrollar el bucle de creep, los coeficientes en el dominio de la frecuencia se obtienen a partir de los datos experimentales. Estos datos experimentales son los datos hallados una vez se obtiene el FTS.

El modelo convencional son las series de Prony, tanto para tiempo como para frecuencia. Las ecuaciones para calcular las propiedades mecánicas de los materiales en función del tiempo y de la frecuencia son las presentadas en la Ecuación 2.8, en la Ecuación 2.23 y en la Ecuación 2.24.

Una vez se encuentra la curva maestra, esta curva sirve para hallar los coeficientes de las series de Prony.

De esta forma, los datos de la curva maestra obtenida de la experimentación con DMA se introducen en ABAQUS® 6.10-2.

El usuario debe elegir el número de términos de las series de Prony, así como la tolerancia máxima de error permitida, la mínima posible. El máximo número de términos se elige basándose en dos restricciones.

- 1) El número de décadas en los datos de la frecuencia debe ser por lo menos el mismo que el número de términos.
- 2) El número de puntos debe ser por lo menos el mismo que el número de coeficientes a ajustar.

Basándose en ambas restricciones, la más restrictiva es la primera.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

Para esta tesis, en todos los casos, el número máximo de términos para las ecuaciones ajustadas es de 6. El número de coeficientes será de 12 o 18, en función del modelo matemático.

Observando que ABAQUS® 6.10-2 no presenta buenos resultados para los materiales en estudio, se programa una subrutina en MATLAB® (anexo A.11.1) para ajustar los coeficientes del modelo convencional en el dominio de la frecuencia.

Las ventajas de MATLAB® 7.5.0 respecto a ABAQUS® 6.10-2 son que el usuario puede elegir los coeficientes de entrada, así como las restricciones de los coeficientes. En este caso, el valor de los coeficientes de relajación se ha limitado dentro de un rango entre 0.01 y 0.35.

Sin embargo, aunque el uso de ABAQUS® 6.10-2 es opcional ya que no presenta buenos ajustes, puede ser útil hacer una primera estimación de los coeficientes con él, ya que puede orientar sobre qué coeficientes de entrada el usuario puede introducir en MATLAB® 7.5.0.

### Modelo convencional en el dominio del tiempo

Una vez ajustados los coeficientes en el dominio de la frecuencia, es necesario obtener los coeficientes en el dominio del tiempo para predecir el módulo de creep en función del tiempo.

Se tiene en cuenta una consideración:

- 1) El número de términos es el mismo para el dominio de la frecuencia que para el dominio del tiempo.  
En principio, no hay una razón para que el número de términos en ambos dominios sea el mismo. Por esta razón, esto es una consideración.

Sin embargo, estos coeficientes en el dominio del tiempo no son los mismos que los ajustados en el dominio de la frecuencia. Si se suponen los mismos coeficientes, los datos experimentales y los valores teóricos presentan grandes diferencias. Por lo tanto, los coeficientes en el dominio del tiempo requieren de una conversión partiendo de los coeficientes en el dominio de la frecuencia.

La Ecuación 3.17 es el modelo matemático convencional propuesto en el dominio del tiempo, basada en la Ecuación 2.8.

$$E_C = E_{C_0} \left( 1 - \sum_{i=1}^n CMR_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{CT_i a_T}} \right) \right)$$

Ecuación 3.17

Donde:

$E_C$ : Módulo de creep

$E_{C_0}$ : Módulo de creep a tiempo inicial

$CMR_i$ : Coeficiente de módulo relativo

$CT_i$ : Coeficiente de tiempo

Los modelos de tiempo propuestos en esta tesis sirven para hallar la variación del módulo de creep con el tiempo. Sin embargo, los modelos que se encuentran en los anexos A.3 y

## Capítulo 3 - Metodología experimental

A.4 sirven para encontrar el módulo de relajación y la capacitancia de creep en función del tiempo. Por lo tanto, una de las propuestas de trabajo nuevas aplicadas es proponer una nueva manera de hallar el módulo de creep en función del tiempo matemáticamente.

Como se ha mencionado, el modelo se inspira en la fórmula que relaciona el módulo de relajación con el tiempo (Ecuación 2.8). Sin embargo, debido a que no se puede asegurar la equivalencia entre el módulo de relajación y el módulo de creep, los coeficientes presentados no se pueden extrapolar a los coeficientes para la Ecuación 2.8. Los coeficientes que se hallan sólo sirven para hallar módulos de creep en función del tiempo.

Esta necesidad de hallar módulos de creep en vez de módulos de relajación, se origina porque las representaciones gráficas obtenidas de Faurecia Interior Systems España, Abrera o de DuPont<sup>TM</sup> presentan información sobre los módulos de creep.

Para poder comprobar si la metodología propuesta se ajusta bien para los materiales estudiados, es de vital importancia la necesidad de proponer modelos matemáticos que relacionen el módulo de creep con el tiempo.

Para lograr buenos ajustes, se deben tomar dos consideraciones.

- 1) Coeficiente  $p_i \rightarrow$  Coeficiente  $CMR_i$
- 2) Coeficiente  $\tau_i \rightarrow$  Coeficiente  $CT_i$

La primera consideración se basa en el método para calcular cada uno de los coeficientes  $CMR_i$  (coeficiente de módulo relativo del dominio del tiempo) a partir de cada uno de los coeficientes  $p_i$  (coeficiente de relajación del dominio de la frecuencia).

La segunda consideración se basa en el método para calcular cada uno de los coeficientes  $CT_i$  (coeficiente de tiempo del dominio del tiempo) a partir de cada uno de los coeficientes  $\tau_i$  (tiempo de relajación del dominio de la frecuencia).

- 1) Coeficiente  $p_i \rightarrow$  Coeficiente  $CMR_i$

Cada uno de los coeficientes  $p_i$  no presenta el mismo valor cuando se cambia el dominio. Cada nuevo coeficiente en el dominio del tiempo se denomina  $CMR_i$ .

Por esta razón se elabora un método para obtener la conversión. Por definición de la Ecuación 2.23 y de la Ecuación 3.17 a tiempo infinito, la suma de los valores de los coeficientes  $p$  (coeficiente de relajación) y  $CMR$  (coeficiente de módulo relativo) se define como se muestra en la Ecuación 3.18 y en la Ecuación 3.19, respectivamente. Se define un nuevo parámetro,  $E_{C\infty} / E_{C0}$ . Por definición, éste es el valor del ratio entre el módulo de creep predicho a tiempo infinito y el mismo módulo a tiempo inicial, suponiendo que la curva a ajustar tuviera los mismos coeficientes obtenidos para la curva hasta 60000 segundos. Este valor viene por el hecho de que todos los modelos se comprueban con curvas experimentales hasta 60000 segundos.

Sin embargo, en este momento, los valores de  $CMR_i$  y  $E_{C\infty}$  se desconocen.

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 - \frac{G'_{\infty}}{G'_0}$$

Ecuación 3.18

## Capítulo 3 - Metodología experimental

$$\sum_{i=1}^n CMR_i = 1 - \frac{E_{C \infty}}{E_{C 0}}$$

Ecuación 3.19

Donde:

$G'_{\infty}$ : Módulo de almacenamiento cuando el tiempo tiende a infinito, es decir, cuando la frecuencia tiende a cero

$G'_0$ : Módulo de almacenamiento a tiempo inicial

$E_{C \infty}$ : Módulo de creep a tiempo infinito

$E_{C \infty} / E_{C 0}$ : Valor del ratio entre el módulo de creep predicho a tiempo infinito y el mismo módulo a tiempo inicial, suponiendo que la curva a ajustar tuviera los mismos coeficientes obtenidos para la curva hasta 60000 segundos

Los coeficientes  $p$  y  $CMR$  sólo podrían presentar los mismos valores si la subida en el módulo de almacenamiento con la frecuencia fuera proporcional a la caída del módulo de tracción con el tiempo. Experimentalmente esto no es así. Por esta razón, los coeficientes deben cambiar. Pero éstos deberían mantener una proporción. Por lo tanto, se aplica un parámetro denominado ratio de coeficientes  $RC$ . Este parámetro  $RC$  se define como se muestra en la Ecuación 3.20.

$$RC = \frac{\sum_{i=1}^n CMR_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

Ecuación 3.20

Donde:

$RC$ : Ratio de coeficientes entre  $p_i$ , coeficiente de relajación usado en el dominio de la frecuencia, y  $CMR_i$ , coeficiente de módulo relativo usado en el dominio del tiempo

Sin embargo, los coeficientes  $CMR$  se desconocen y  $RC$  no se puede calcular.

De todas formas, es más lógico que primero se obtenga  $RC$  y después se pueden calcular los coeficientes  $CMR$ . Otra forma de expresar  $RC$  es la definida en la Ecuación 3.21, en función del módulo de creep a tiempo cero y a tiempo infinito.

$$RC = 1 + \frac{1 - \sum_{i=1}^n p_i - \frac{E_{C \infty}}{E_{C 0}}}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

Ecuación 3.21

Una vez conocido  $RC$ , cada uno de los coeficientes  $CMR_i$  se obtiene a partir de cada uno de los coeficientes  $p_i$  con la Ecuación 3.22.

$$CMR_i = p_i RC$$

Ecuación 3.22

## Capítulo 3 - Metodología experimental

Se necesita conocer un parámetro para contrastar los datos con el modelo matemático,  $E_C \infty$ . Para conocer este parámetro, se necesita conocer el valor del módulo de creep a 60000 segundos ( $E_C 60000$ ).

A partir de ahí, existen dos posibilidades.

- Obtención de  $E_C 60000$  usando dos valores del módulo de creep a dos tiempos distintos. El valor a 60000 segundos se interpola.
- Obtención de  $E_C 60000$  usando los datos experimentales del módulo de creep en función del tiempo.

$E_C / E_{C0}$  se calcula para cada tiempo hasta 60000 segundos,  $E_C 60000 / E_{C0}$ , el valor del ratio entre el módulo de creep predicho a 60000 segundos y el mismo módulo a tiempo inicial.

Para ser más preciso, la interpolación lineal se realiza entre  $t$  y  $\ln(E_C / E_{C0})$  y no directamente con  $E_C$ , ya que este parámetro decae exponencialmente con el tiempo y los tiempos analizados son muy distantes entre ellos. Si los tiempos no fueran tan distantes, la interpolación lineal podría ser directamente a partir de  $E_C$ . Sin embargo, el resultado de la interpolación suele ser prácticamente el mismo usando cualquiera de los dos métodos para la linealización.

De esta forma se halla  $RC$ .

Se prosigue de la siguiente manera.

- Se convierten todos los parámetros usando la Ecuación 3.22 a partir de los coeficientes obtenidos usando la frecuencia. Se supone un primer valor para  $E_C \infty / E_{C0}$ .
- Se hallan los primeros valores teóricos del módulo de creep a partir de la Ecuación 3.17 para este valor de  $E_C \infty / E_{C0}$ .
- Se calcula  $E_C / E_{C0}$  para cada tiempo.
- El valor de  $E_C / E_{C0}$  a 60000 segundos se impone como  $E_C 60000 / E_{C0}$  para hallar  $E_C \infty / E_{C0}$  usando para tal fin la función Solver de Microsoft® Office Excel 2010.

De esta forma se halla cada coeficiente  $CMR_i$ .

### 2) Coeficiente $\tau_i \rightarrow$ Coeficiente $CT_i$

No hay conversión de coeficientes de  $\tau$  (tiempo de relajación) a  $CT$  (coeficiente de tiempo).

El tiempo de relajación es una propiedad intrínseca del material. Por lo tanto, para una temperatura determinada, este valor se supone que no cambia. El valor hallado en el dominio de la frecuencia a una temperatura determinada es el valor en el dominio del tiempo para la misma temperatura como se muestra en la Ecuación 3.23.

$$CT_i = \tau_i$$

Ecuación 3.23

De esta forma se halla cada coeficiente  $CT_i$ .

## Capítulo 3 - Metodología experimental

Los valores teóricos deben contrastarse con los datos experimentales. Así, se puede comprobar si el modelo convencional presenta un buen ajuste entre los valores teóricos y los datos experimentales.

Se realizan cinco curvas experimentales y se calcula la curva media. Para poder apreciar mejor la caída de la curva, se usa una escala logarítmica de tiempos. El tiempo cero corresponde al tiempo en el que empieza el creep. El módulo de creep a tiempo cero coincide con el módulo de tracción obtenido en el bucle de tracción para estas condiciones de temperatura y velocidad de deformación.

Sin embargo, este modelo presenta malos ajustes a 23°C. Por lo tanto, el modelo convencional ya no se estudia en función de la temperatura.

### Modelo modificado en el dominio de la frecuencia

Como el modelo convencional no se ajusta bien, se realizan algunos cambios en el modelo para crear otro nuevo modelo, más sofisticado que el anterior, para ajustar mejor los datos experimentales con los valores teóricos.

Se parte de la idea de Papoulia et al.<sup>74</sup>, en la que la ecuación diferencial de los modelos viscoelásticos se describe usando exponentes en sus derivadas.

Siguiendo esta línea, para los modelos que se pretenden ajustar, se propone un nuevo modelo matemático que permita obtener mejores resultados que los obtenidos con el modelo convencional, para el dominio de la frecuencia.

Así pues, tomando la idea de Papoulia et al.<sup>74</sup>, las ecuaciones finales propuestas para probar si los datos experimentales de DMA se ajustan bien son la Ecuación 3.24 y la Ecuación 3.25. Estas ecuaciones presentan pequeñas diferencias respecto a la Ecuación 2.23 y a la Ecuación 2.24.

$$G' = G_0 \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{1 + \tau_i^2 w^{2\alpha_i}} \right)$$

Ecuación 3.24

$$G'' = G_0 \left( \sum_{i=1}^n \frac{p_i \tau_i w^{\alpha_i}}{1 + \tau_i^2 w^{2\alpha_i}} \right)$$

Ecuación 3.25

Donde:

$\alpha_i$ : Coeficiente alfa

$w^{\alpha_i}$ : Frecuencia usada en el modelo modificado para el dominio de la frecuencia en rad/s

Este modelo matemático resulta ser el mismo que el modelo convencional, pero con tres coeficientes en vez de dos para cada término. Esto se debe a que se presenta un exponente para la frecuencia, diferente para cada término. Este modelo con coeficientes alfa diferentes de 1 en el dominio de la frecuencia es el denominado modelo modificado en el dominio de la frecuencia.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

---

A partir de la investigación en bibliografía, se observan nuevos tipos de ecuaciones diferenciales. Algunos autores habían usado previamente este tipo de derivadas, denominadas derivadas fraccionales, ya explicadas en el apartado 2.2.2.6.

Como sucede en esta tesis, ya se había propuesto trabajar con diferentes exponentes para cada término de la ecuación. Sin embargo, estos exponentes presentaban valores entre 0.5 y 0.6, y nunca mayores a 1<sup>68,75,77,78</sup>.

Las contribuciones de esta tesis en los modelos modificados en el dominio de la frecuencia son:

- 1) Se propone un exponente diferente (coeficiente alfa) para cada término.  
De hecho, la importancia de añadir más y más parámetros fraccionales se ha ido incrementando a lo largo de estos últimos tiempos para ajustar los coeficientes de una forma más precisa.
- 2) Estos coeficientes alfa pueden ser mayores a 1 para un mejor ajuste del modelo. Pueden presentar valores entre 0.10 y 2.00.  
Debido a la aparición de exponentes, las ecuaciones que se presentan carecen de sentido físico, al presentarlas como una combinación de muelles y émbolos.
- 3) Se propone el uso de MATLAB® 7.5.0 para programar una nueva subrutina con el modelo modificado.  
Como ABAQUS® 6.10-2 no ajusta para modelo que no son el convencional, este programa sólo es útil para obtener valores de entrada en la subrutina de MATLAB® 7.5.0.  
De esta forma, se programa una nueva subrutina con el modelo modificado, mejorado respecto al convencional, en el dominio de la frecuencia (anexo A.11.2). Esta subrutina presenta mejores ajustes que ABAQUS® 6.10-2 y MATLAB® 7.5.0 para el modelo convencional. En esta subrutina, aparte de los coeficientes  $p$ , hay coeficientes alfa. Estos coeficientes alfa están restringidos de 0.10 a 2.00, como se ha mencionado.

De todas formas, sería recomendable que los simuladores tuvieran una opción para usar modelos con derivadas fraccionales<sup>132</sup>. Así se evitaría que el usuario tuviera que crear sus propias subrutinas para trabajar con modelos modificados.

### Modelos modificados en el dominio del tiempo

Una vez hallados los coeficientes en el dominio de la frecuencia, se deben hallar también los coeficientes para el dominio del tiempo.

La primera decisión a tener en cuenta es la necesidad (o no) de usar coeficientes alfa como exponentes en  $t$  ( $t^{\alpha}$ ).

- 1) Sin el uso de coeficientes alfa como exponentes en  $t$  ( $t^{\alpha}$ ).  
Los simuladores empleados en este proyecto (ANSYS® 12.1 Academic Teaching y ABAQUS® 6.10-2) no tienen la opción de trabajar con exponentes (coeficientes alfa) en  $t$  para los ajustes.  
Por lo tanto, si es posible convertir coeficientes en el dominio de la frecuencia a coeficientes en el dominio del tiempo ajustados sin coeficientes alfa en  $t$ , y este modelo se ajusta bien a los datos experimentales obtenidos para ensayos temporales, esta opción es la mejor para usar en simuladores.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

- 2) Con el uso de coeficientes alfa como exponentes en  $t$  ( $t^{\alpha_i}$ ).

Es una opción difícil a emplear. La única posibilidad sería que el usuario creara un código para trabajar con estos tipos de modelos en ANSYS® 12.1 Academic Teaching. Esta opción no se usa en esta tesis.

Por lo tanto, el dominio del tiempo no usa coeficientes alfa como exponentes en  $t$ .

Sin embargo, estos coeficientes alfa se podrían usar en el dominio del tiempo.

Tomando esta idea, se proponen dos modelos para el dominio del tiempo a partir del modelo modificado en el dominio de la frecuencia. Esto implica dos posibilidades para calcular el módulo de creep en función del tiempo.

- 1) Modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo.
- 2) Modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo.

Estos dos nuevos modelos presentan la Ecuación 3.24 y la Ecuación 3.25 en el dominio de la frecuencia.

Para ambos modelos, se hallan los coeficientes de módulo relativo y los coeficientes de tiempo a la temperatura de referencia (30°C) tal como se ha explicado para el modelo convencional con la Ecuación 3.21, la Ecuación 3.22 y la Ecuación 3.23. Sin embargo, estos coeficientes son diferentes a los del modelo convencional ya que los coeficientes  $p$ , los coeficientes  $\tau$  y  $E_{C\infty}/E_{C0}$  son diferentes.

Además, los coeficientes son también diferentes entre ambos modelos ya que  $E_{C\infty}/E_{C0}$  es diferente en cada uno de ellos.

Sin embargo, la principal diferencia entre ambos modelos radica en la manera de cambiar los coeficientes con la temperatura. Esta diferencia afecta al módulo de creep.

- 1) Modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo.

El primer modelo predice los coeficientes de tiempo a cada temperatura en función de los tiempos de relajación y los factores de desplazamiento, sin la inclusión de un exponente (coeficiente alfa) en el factor de desplazamiento. Así, para este modelo, la Ecuación 3.26 sirve para pasar los tiempos de relajación a coeficientes de tiempo.

$$CT_{i_T} = \tau_i a_T$$

Ecuación 3.26

- 2) Modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo.

El segundo modelo predice que si, por definición, el factor de desplazamiento es el ratio de frecuencias sin exponentes y los exponentes se encuentran involucrados, el factor de desplazamiento debería presentar también un exponente (coeficiente alfa). Así, para este modelo, la Ecuación 3.27 sirve para pasar los tiempos de relajación a coeficientes de tiempo.

$$CT_{i_T} = \tau_i a_T^{\alpha_i}$$

Ecuación 3.27

Por lo tanto, la Ecuación 3.28 presenta la manera de calcular el módulo de creep cuando los coeficientes alfa no se usan en el dominio del tiempo.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

$$E_C = E_{C_0} \left( 1 - \sum_{i=1}^n CMR_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{cT_i a_T}} \right) \right)$$

Ecuación 3.28

Sin embargo, si se usan los coeficientes alfa en el dominio del tiempo, la Ecuación 3.29 es la manera de calcular el módulo de creep.

$$E_C = E_{C_0} \left( 1 - \sum_{i=1}^n CMR_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{cT_i a_T^{\alpha_i}}} \right) \right)$$

Ecuación 3.29

Los datos experimentales y los valores teóricos se ajustan bien para ambos modelos a 23°C. Así, lo que se debe hacer a continuación es estudiar la influencia de la temperatura para estos dos modelos presentados.

Se toma en cuenta una consideración:

- 1) Los coeficientes de tiempo cambian con la temperatura con una variación que se predice usando el factor de desplazamiento.  
El factor de desplazamiento se ha definido previamente en función de la temperatura. Dicho factor es el ratio de frecuencias entre dos temperaturas y también el ratio de coeficientes de tiempo a las mismas dos temperaturas pero de forma invertida.

El modelo en el dominio del tiempo depende de la temperatura. La técnica TTS muestra este hecho ya que cuando aumenta la temperatura, el coeficiente de tiempo disminuye. Esto implica cambios en los coeficientes de los modelos. No sólo cambia el coeficiente de tiempo, sino también el módulo de creep a tiempo cero.

De todas formas, el valor del módulo de creep a tiempo cero es directamente el módulo de tracción y este último valor ya se conoce para cada temperatura (bucle de tracción).

Sin embargo, la dificultad radica en dos aspectos. Se deben hacer algunas hipótesis para resolver los problemas y finalmente, una vez calculados los valores teóricos, comparar dichos valores con los datos experimentales para saber si las hipótesis son correctas.

- 1) La caída de la curva en función de la temperatura.  
Se considera que los coeficientes de tiempo son los factores responsables de la caída. Estos coeficientes presentan valores menores cuando la temperatura se incrementa<sup>108</sup>. El tiempo que un polímero o un composite tarda en relajarse es menor a mayor temperatura. La Ecuación 3.26 y la Ecuación 3.27 determinan estos coeficientes de tiempo en función de la temperatura para cada modelo.
- 2) El valor estimado a tiempo final en función de la temperatura.  
Se considera que los coeficientes de módulo relativo son los factores responsables del valor final. Estos coeficientes dependen de  $E_{C_\infty} / E_{C_0}$ . Como este ratio es diferente para cada modelo a 23°C, el ratio en función de la temperatura también debe variar para cada modelo.

## Capítulo 3 - Metodología experimental

---

El procedimiento para estimar  $E_{C\infty} / E_{C0}$  a cada temperatura es el siguiente:

- a) Obtención del módulo de tracción a 1 mm/min.  
El módulo de flexión se encuentra usando las curvas del barrido de frecuencias a cada temperatura. Con este valor, el módulo de tracción se obtiene multiplicándolo por el ratio de módulos hallado en el bucle de tracción.
- b) Obtención del módulo de tracción para la frecuencia menor.  
Corresponde al menor valor obtenido para cada temperatura. En este trabajo, experimentalmente, la frecuencia mínima es de 0.02 Hz, es decir, 0.14 mm/min de velocidad de deformación.
- c) Obtención del ratio entre el módulo de tracción a la frecuencia menor y el módulo de tracción a 1 mm/min.
- d) Obtención del ratio entre el anterior ratio a temperatura  $T$  y el ratio a 23°C, la temperatura ya comprobada.  
Este valor se denomina factor de cambio de temperatura ( $FCT$ ).
- e) Obtención de  $E_{C\infty} / E_{C0}$ .  
Este valor viene de multiplicar  $E_{C\infty} / E_{C0}$  a 23°C por el valor obtenido como  $FCT$ .

De esta forma,  $E_{C\infty} / E_{C0}$  a temperatura  $T$  se reduce a la Ecuación 3.30.

$$\left(\frac{E_{C\infty}}{E_{C0}}\right)_T = \left(\frac{E_{C\infty}}{E_{C0}}\right)_{23^{\circ}C} FCT = \left(\frac{E_{C\infty}}{E_{C0}}\right)_{23^{\circ}C} \frac{\left(\frac{E_{T\ T}}{E_{T\ T}}\right)_{\frac{\dot{\epsilon}_{min}}{\dot{\epsilon}_{ref}}}}{\left(\frac{E_{T\ 23^{\circ}C}}{E_{T\ 23^{\circ}C}}\right)_{\frac{\dot{\epsilon}_{min}}{\dot{\epsilon}_{ref}}}}$$

Ecuación 3.30

Donde:

$FCT$ : Factor de cambio de temperatura

Se usa la Ecuación 3.31 para poder estimar  $E_T$  a 23°C y a la menor velocidad de deformación, ya que experimentalmente este valor es desconocido.

$$E_{T\ 23^{\circ}C} = E_{T\ 23^{\circ}C} + PENDE_{F\ 23^{\circ}C} RM \ln(\dot{\epsilon}_{min})$$

Ecuación 3.31

Los coeficientes se cambian automáticamente para cada temperatura, ya que cada parámetro presentado también cambia con la temperatura.

Así, los coeficientes en el dominio del tiempo se calculan para cada temperatura usando los modelos modificados.

Finalmente, para incrementar el rango de tiempos a 23°C, se aplican los factores de desplazamiento usando la Ecuación 3.32, similar a la Ecuación 2.31, pero añadiendo el valor del factor de desplazamiento a 23°C, ya que la representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo se debe comparar con las curvas experimentales entregadas por los proveedores, y estas últimas curvas se dan a 23°C.

$$t' = \frac{t}{a_T} a_{T_{23^{\circ}C}}$$

Ecuación 3.32

En conclusión, ambos modelos modificados son similares. Sin embargo, la gran diferencia radica en el aspecto que los coeficientes alfa se usan en el factor de desplazamiento en el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo, mientras que estos coeficientes no se usan en el factor de desplazamiento en el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo.

En el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo, el simulador predice los coeficientes de tiempo para cada temperatura porque estos coeficientes siguen la Ecuación 3.26, que es la más común.

La Ecuación 3.27 es de gran importancia, ya que los simuladores no pueden predecir automáticamente los coeficientes de tiempo para cada temperatura en el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo.

### 3.6 ABAQUS® 6.10-2

ABAQUS® 6.10-2 es uno de los principales programas incorporados ya que es capaz de ajustar los coeficientes de las series de Prony en el dominio de la frecuencia a partir de los datos experimentales de DMA.

Por lo tanto, la primera resolución de los coeficientes de Prony en el dominio de la frecuencia es con la aplicación del modelo viscoelástico que está implementado en ABAQUS® 6.10-2. Sin embargo, dicho modelo es el modelo convencional y éste es el único del que se dispone en este programa.

Sin embargo, los parámetros principales de entrada requeridos por ABAQUS® 6.10-2 no son directamente los valores de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia, sino los parámetros denominados *omega g\*imag* y *omega g\*real*. Estos dos parámetros se calculan en función de los módulos de almacenamiento y de pérdida mediante la Ecuación 3.33 y la Ecuación 3.34, respectivamente.

$$\text{Omega } g * \text{imag} = 1 - \frac{G'}{G'_{\infty}}$$

Ecuación 3.33

$$\text{Omega } g * \text{real} = \frac{G''}{G'_{\infty}}$$

Ecuación 3.34

Donde:

*Omega g\* imag*: Conversión en ABAQUS® 6.10-2 usando los datos del módulo de almacenamiento

*Omega g\* real*: Conversión en ABAQUS® 6.10-2 usando los datos del módulo de pérdida

Además de los dos coeficientes de entrada presentados, ABAQUS® 6.10-2 necesita, por una parte, el módulo de tracción a 1 mm/min y a la temperatura a la que están obtenidos

los datos experimentales. Como estos datos provienen de la curva maestra a la temperatura de referencia (30°C), el módulo de tracción a introducir ha de ser el obtenido a 30°C. Por otra parte, el programa necesita el coeficiente de Poisson, que es de 0.35. Este valor se considera constante para todas las poliamidas<sup>134,135</sup>.

Finalmente, el usuario debe introducir una tolerancia máxima de error entre los datos experimentales y los valores teóricos ajustados por el modelo. El propio simulador calcula dicha tolerancia para cada iteración que realiza y la compara con la máxima pedida por el usuario.

Como se ha explicado, ABAQUS® 6.10-2 se usa sólo para tener los primeros resultados de los coeficientes  $p$  y  $\tau$ , y el posible número de términos  $n$ . A partir de ahí, los mejores coeficientes sugeridos por el simulador así como el número de términos  $n$  del modelo en el dominio de la frecuencia pueden ser los parámetros de entrada para las subrutinas creadas en MATLAB® 7.5.0 para hallar coeficientes que se ajusten mejor a los datos experimentales.

### 3.7 MATLAB® 7.5.0

Se usa MATLAB® 7.5.0 debido al mal ajuste que presenta el modelo convencional en el dominio de la frecuencia para ABAQUS® 6.10-2. Como resultado, se programa un modelo convencional y un modelo modificado, ambos en el dominio de la frecuencia, en MATLAB® 7.5.0. Estas subrutinas usan la función *fminsearch* disponible en los programas de MATLAB®.

De esta forma, a partir de los datos de DMA, las subrutinas tratan de calcular los mejores coeficientes que ajusten las ecuaciones de los módulos de almacenamiento y de pérdida a los datos experimentales, calculando el error y minimizándolo tanto como sea posible. Dicho error se programa para que presente un valor muy elevado cuando alguno de los coeficientes a ajustar se escape de un rango previamente definido. Dicho rango se fija para controlar los valores de los coeficientes y mantener así un cierto sentido de los valores de los mismos.

Las subrutinas desarrolladas en MATLAB® 7.5.0 se encuentran en el anexo A.11.

### 3.8 ANSYS® 12.1 Academic Teaching

El programa de ANSYS® presenta tres métodos para simular comportamientos viscoelásticos. El primero usa el modelo de Maxwell generalizado, el segundo las series de Prony y el tercero utiliza el ajuste de una curva a partir de datos.

- 1) El modelo de Maxwell generalizado es el primer método. Se usa para caracterizar completamente un material viscoelástico. Sin embargo, es un método complejo ya que se necesita mucha información para ser de utilidad. Para utilizar este modelo, se pueden definir hasta 95 parámetros<sup>136</sup>. A veces puede resultar difícil conocer toda esta información para caracterizar el comportamiento viscoelástico con este modelo. Sin embargo, el modelo de Maxwell generalizado tiene en cuenta todas las características de un material viscoelástico.
- 2) Las series de Prony es el segundo método. Se usa en los casos en los que el usuario conozca los coeficientes de Prony y desee realizar la simulación para obtener los valores teóricos de los parámetros mecánicos para ser comparados con los datos

## Capítulo 3 - Metodología experimental

experimentales. La ecuación de Prony definida por el simulador ANSYS® toma la forma presentada en la Ecuación 3.35.

$$\frac{K}{K_{t_0}} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i e^{-\frac{t}{t_i}}$$

Ecuación 3.35

Donde:

$K$ : Parámetro mecánico a tiempo  $t$  en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de las series de Prony

$K_{t_0}$ : Parámetro mecánico a tiempo cero en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de las series de Prony

$a_0$ : Coeficiente de Prony no entrado como dato en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de las series de Prony

$a_i$ : Coeficientes de Prony entrados como datos en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de las series de Prony

$t_i$ : Tiempos de Prony entrados como datos en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de las series de Prony

Una vez obtenidos los coeficientes de Prony, si el usuario desea convertir estos coeficientes en aquéllos que acepta el simulador, la conversión se presenta en la Ecuación 3.36, en la Ecuación 3.37 y en la Ecuación 3.38, tal como se muestran a continuación:

$$a_0 = 1 - \sum_{i=1}^n p_i$$

Ecuación 3.36

$$a_i = p_i$$

Ecuación 3.37

$$t_i = \tau_i$$

Ecuación 3.38

- 3) El ajuste de una curva a partir de datos es el tercer método. Se usa para obtener los coeficientes ajustados a partir de los datos experimentales. Los datos de módulos se introducen en función del tiempo. En este caso, los coeficientes ajustados por el simulador ANSYS® se deben convertir en los necesarios para el usuario. El método de ajuste de una curva a partir de datos presenta la Ecuación 3.39 en ANSYS® 12.1 Academic Teaching.

$$K = \beta_0^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

Ecuación 3.39

## Capítulo 3 - Metodología experimental

---

Donde:

$\beta_0$ : Término independiente de los coeficientes solución de ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de ajuste de una curva a partir de datos

$\beta_i$ : Coeficientes solución de ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de ajuste de una curva a partir de datos

$T_i$ : Tiempos solución de ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el método de ajuste de una curva a partir de datos

Los coeficientes de Prony se hallan a partir de los coeficientes de este método usando la Ecuación 3.40, la Ecuación 3.41 y la Ecuación 3.42.

$$E_0 = \sum_{i=0}^n \beta_i^2$$

Ecuación 3.40

$$p_i = \frac{\beta_i^2}{\sum_{i=0}^n \beta_i^2}$$

Ecuación 3.41

$$\tau_i = T_i$$

Ecuación 3.42

El tipo de elemento usado para las simulaciones es el Shell 181<sup>137</sup>. Este elemento tiene 4 nodos y seis grados de libertad para cada nodo: translaciones en las 3 direcciones del espacio y rotaciones en los 3 ejes<sup>136</sup>. A pesar de la existencia de tipos de elemento más complejos, el Shell 181 se considera adecuado para obtener los resultados esperados.

Como la probeta es simétrica respecto a los ejes  $x$  e  $y$ , se debe crear sólo la parte superior derecha de la probeta para, posteriormente, aplicar restricciones de simetría.

Debido a que sólo se crea una cuarta parte de la probeta, como se muestra en la Figura 3.17, la fuerza aplicada en la simulación debe ser la mitad de la fuerza aplicada necesaria en los ensayos en MUE. Esto se debe a que la probeta en la simulación sólo presenta la mitad de la superficie en la que las mordazas sujetan la probeta real. Lo mismo se requeriría para la deformación, ya que sólo se trabaja con la mitad de la probeta en ANSYS® 12.1 Academic Teaching.

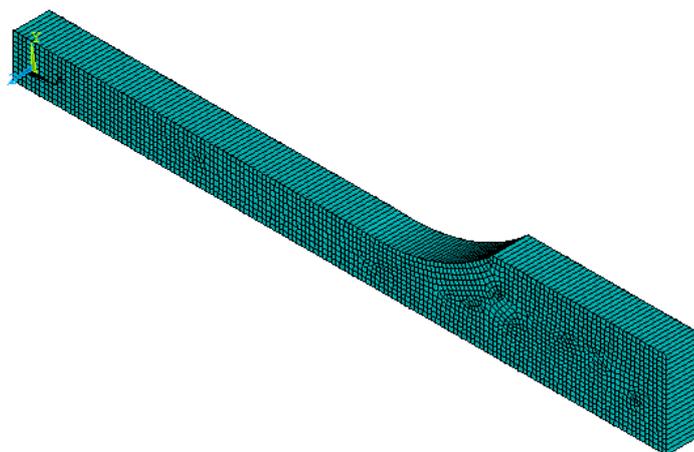


Figura 3.17 - Un cuarto de la probeta creada en ANSYS® 12.1 Academic Teaching

Finalmente, usando la expansión por simetría, la probeta completa se observa en la Figura 3.18.

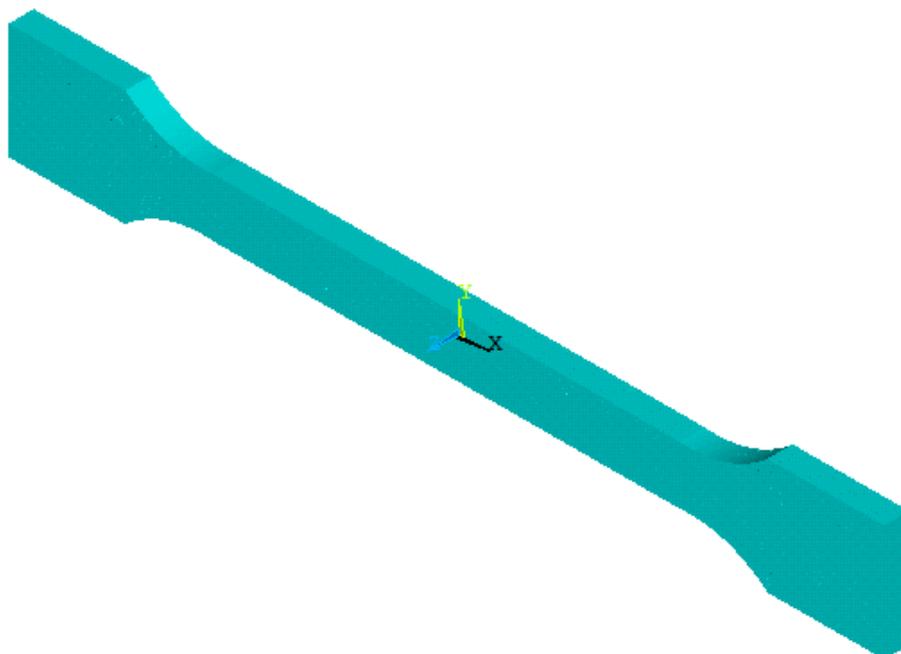


Figura 3.18 - Probeta completa creada en ANSYS® 12.1 Academic Teaching

Con ANSYS® 12.1 Academic Teaching, es posible observar la tensión y la deformación en cualquier nodo del material, así como la variación del módulo de creep con el tiempo.

Como se ha comentado, los códigos de ANSYS® se encuentran en el anexo A.1. Los parámetros de entrada para la simulación dependen del caso en estudio. En esta tesis, se presentan tres casos: los tests de tracción (anexo A.1.1), los tests de creep sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo (anexo A.1.2.1) y los tests de creep con coeficientes alfa en el dominio del tiempo (anexo A.1.2.2).



## 4 Bucle de tracción para PA66

### 4.1 Barrido de amplitudes

El barrido de amplitudes es el primer ensayo experimental con DMA. Para cada material se realizan cinco barridos de amplitudes, a 30°C y a 1 Hz.

Los barridos de amplitudes para el módulo de almacenamiento, el módulo de pérdida y la tangente del ángulo de fase para PA66 se presentan en la Figura 4.1, en la Figura 4.2 y en la Figura 4.3, respectivamente.

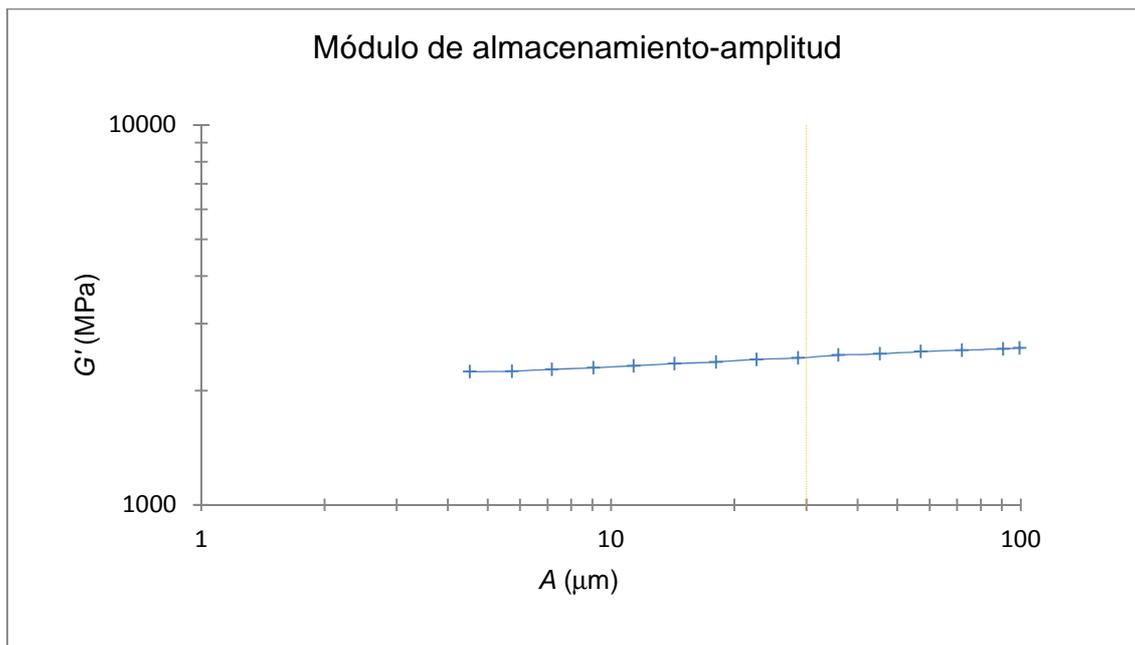


Figura 4.1 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la amplitud para PA66

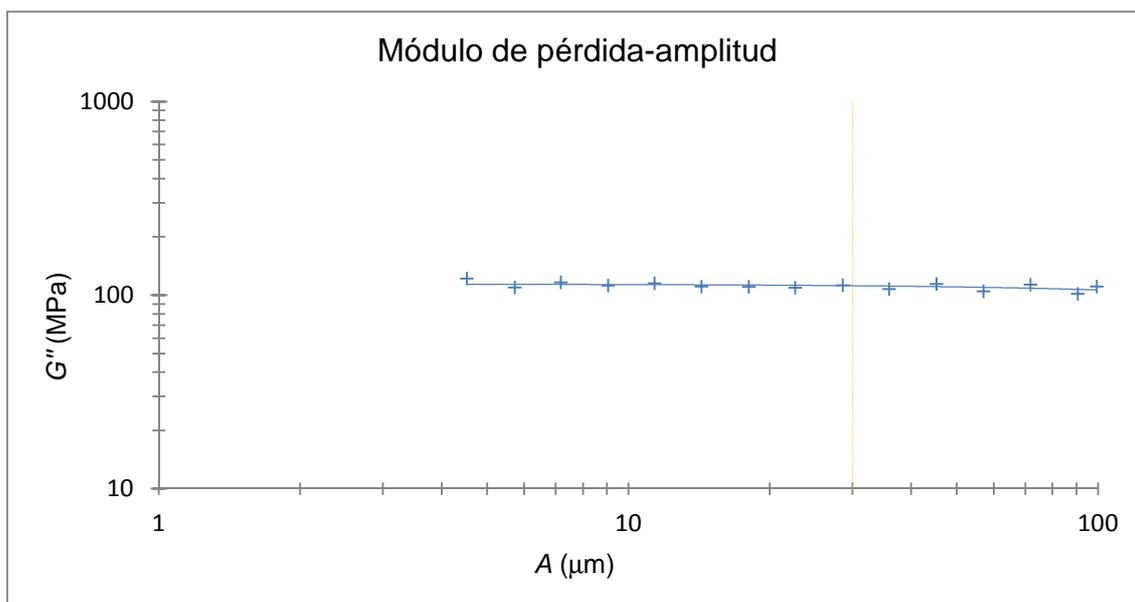


Figura 4.2 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la amplitud para PA66

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

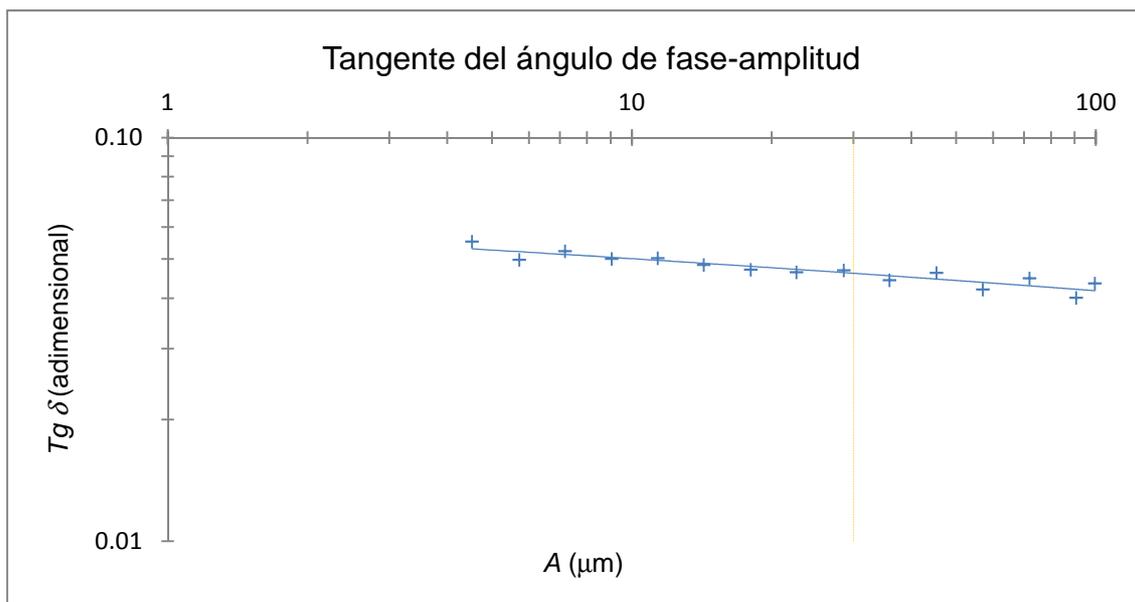


Figura 4.3 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la amplitud para PA66. Para PA66, la amplitud para realizar los ensayos posteriores es de 30  $\mu\text{m}$ . Esta amplitud se encuentra dentro del rango de viscoelasticidad lineal.

En la Figura 4.4 se representa la variación del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación obtenida a partir del barrido de amplitudes para PA66. La velocidad de deformación se calcula a partir de la amplitud mediante la Ecuación 3.3. Esta representación gráfica sólo es necesaria para observar si la tendencia entre estos dos parámetros es la esperada, una tendencia logarítmica.

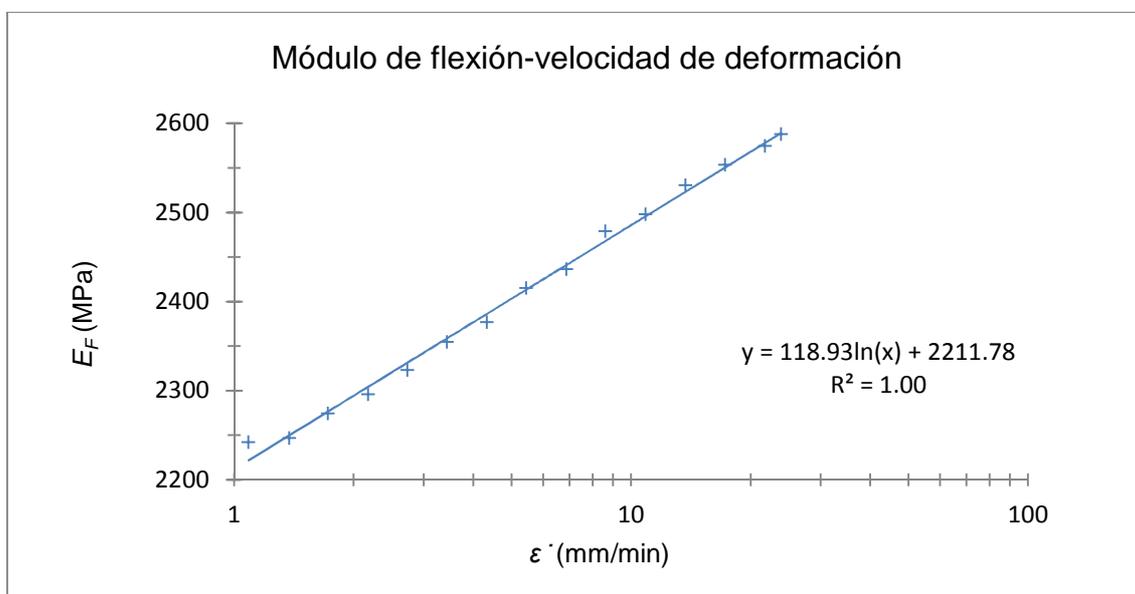


Figura 4.4 - Representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación a partir del barrido de amplitudes para PA66

Se confirma la tendencia logarítmica entre el módulo de flexión y la velocidad de deformación para PA66.

### 4.2 Barrido de temperaturas

El barrido de temperaturas es el segundo ensayo experimental con DMA. Para cada material se realizan cinco barridos de temperaturas, a  $30\ \mu\text{m}$  y a 1 Hz.

Los barridos de temperaturas para el módulo de almacenamiento, el módulo de pérdida y la tangente del ángulo de fase para PA66 se presentan en la Figura 4.5, en la Figura 4.6 y en la Figura 4.7, respectivamente.

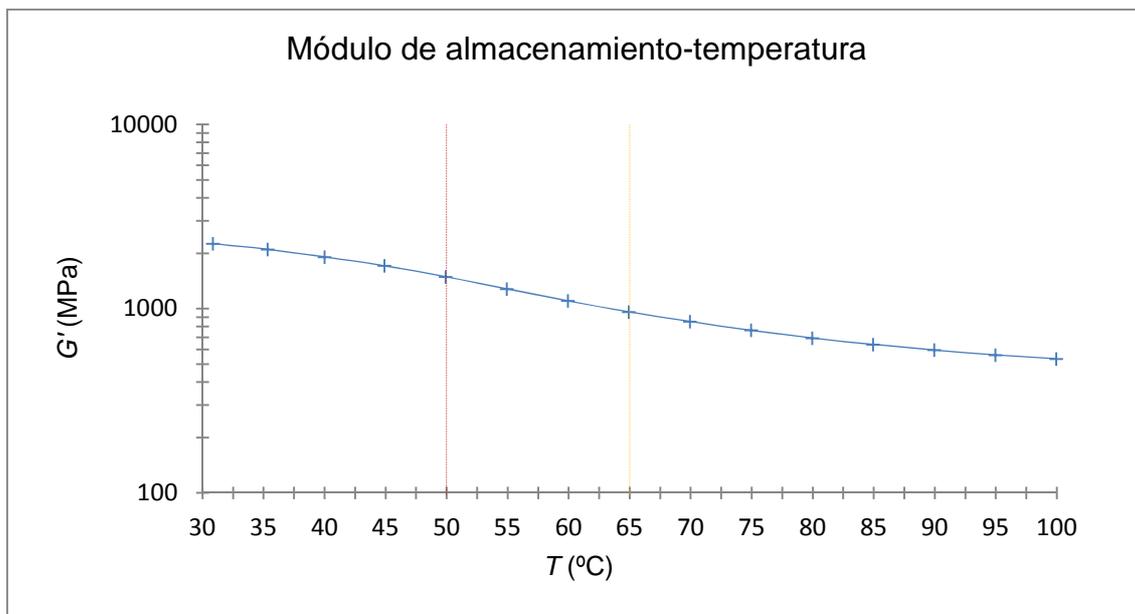


Figura 4.5 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la temperatura para PA66

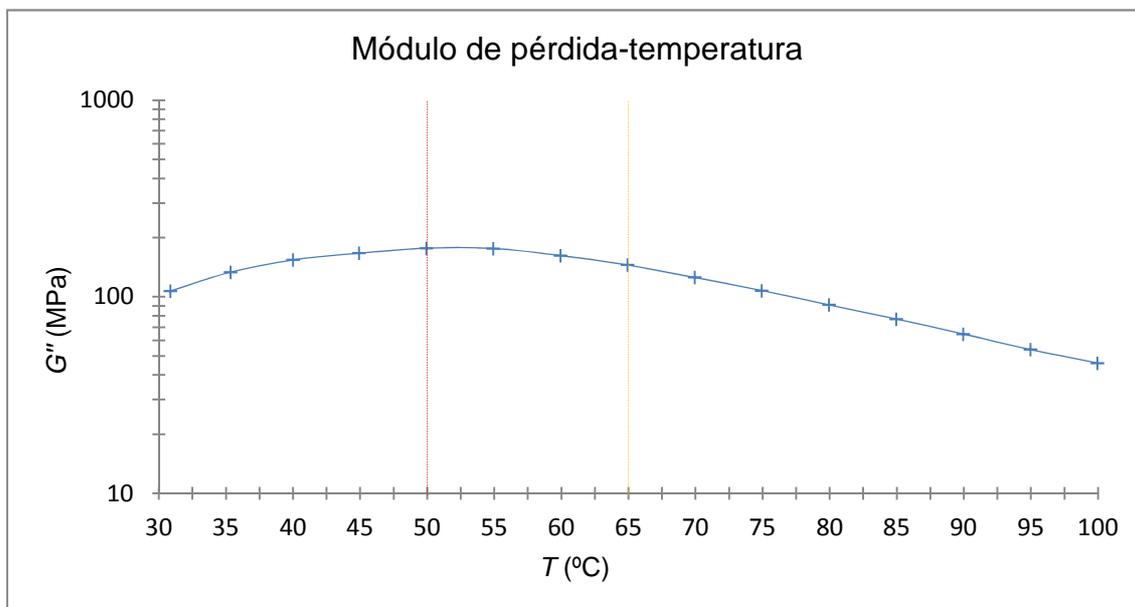


Figura 4.6 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la temperatura para PA66

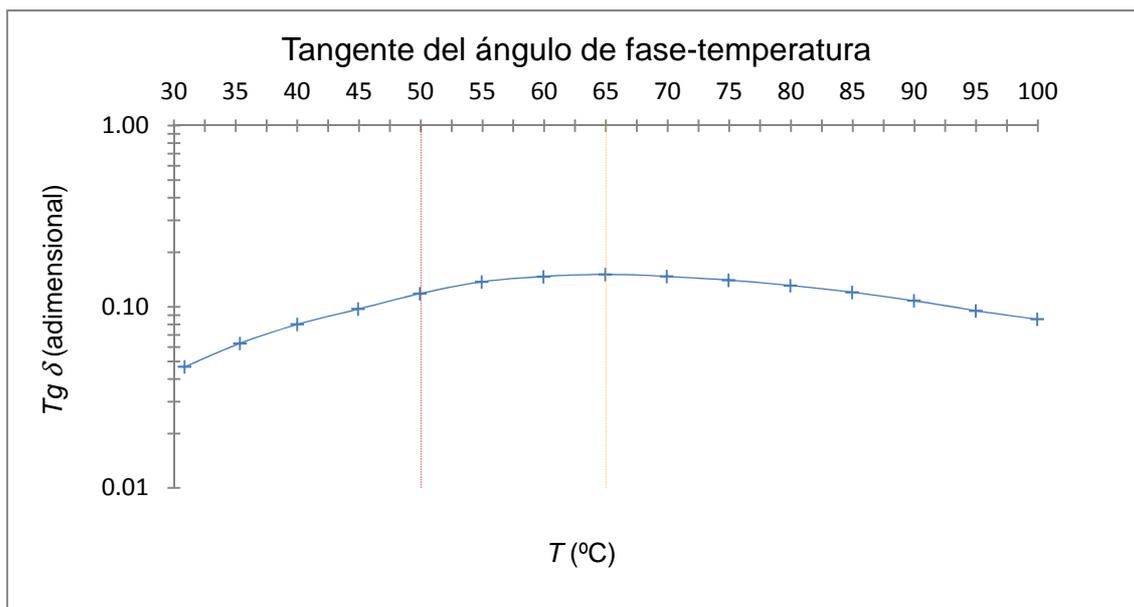


Figura 4.7 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la temperatura para PA66

Como se observa, para PA66, el máximo en el módulo de pérdida se da a 50°C, aproximadamente. Como se explica en el apartado 3.5.1.1, esto indica que el cambio de subrango se considera dicha temperatura.

### 4.3 Barrido de frecuencias

El barrido de temperaturas es el tercer y último ensayo experimental con DMA. Para cada material se realizan cinco barridos de frecuencias, a 30  $\mu\text{m}$  para cada temperatura. Dichos barridos se han experimentado a diferentes temperaturas, de 30°C a 100°C, con un incremento de 5°C entre los distintos barridos.

Sin embargo, para las representaciones gráficas en que se usen las diferentes temperaturas experimentadas, debido a la gran cantidad de datos que se generan, habrá un incremento de 10°C entre las distintas curvas.

Los barridos de frecuencias para el módulo de almacenamiento, el módulo de pérdida y la tangente del ángulo de fase para PA66 se presentan en la Figura 4.8, en la Figura 4.9 y en la Figura 4.10, respectivamente.

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

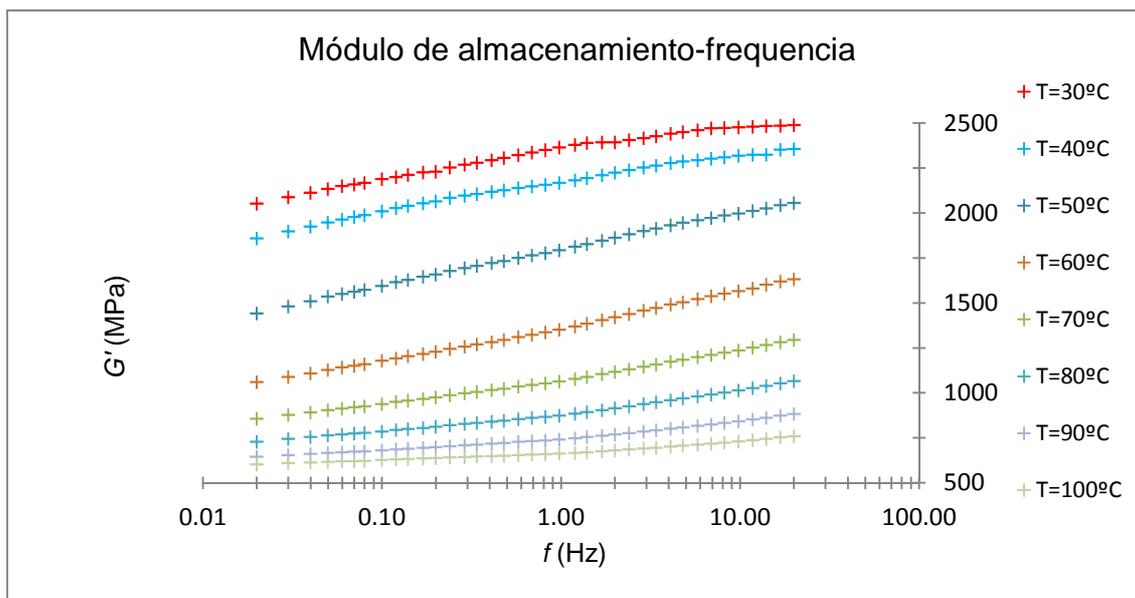


Figura 4.8 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para PA66

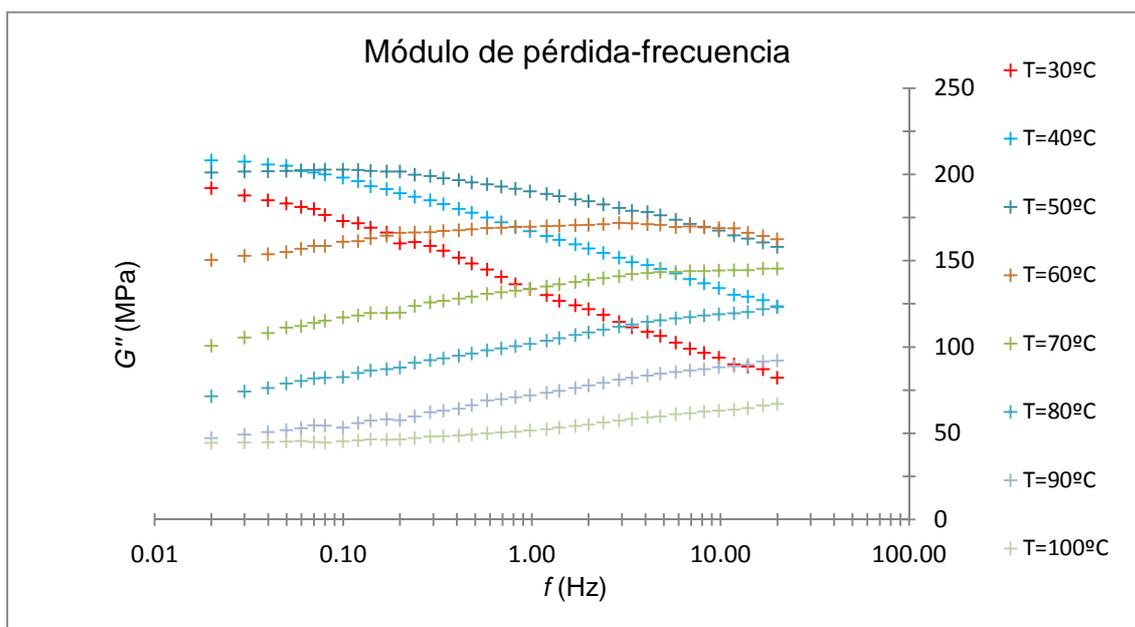


Figura 4.9 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia para PA66

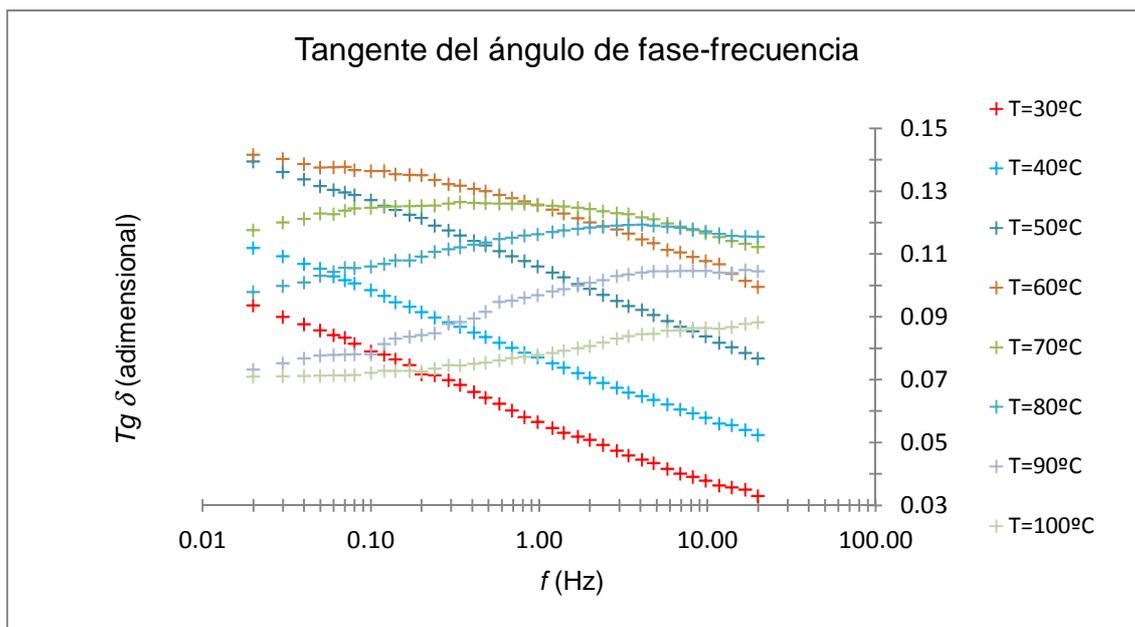


Figura 4.10 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia para PA66

En principio, se debería esperar encontrar el posible máximo en el módulo de pérdida en función de la frecuencia a una temperatura cercana a la temperatura en la que se ha encontrado experimentalmente el máximo en el módulo de pérdida en el barrido de temperaturas a 1 Hz.

Lo que se debe hacer a continuación es hallar una relación entre el módulo de flexión y la velocidad de deformación a partir del barrido de frecuencias.

Para este material, la representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación para cada temperatura se muestra en la Figura 4.11.

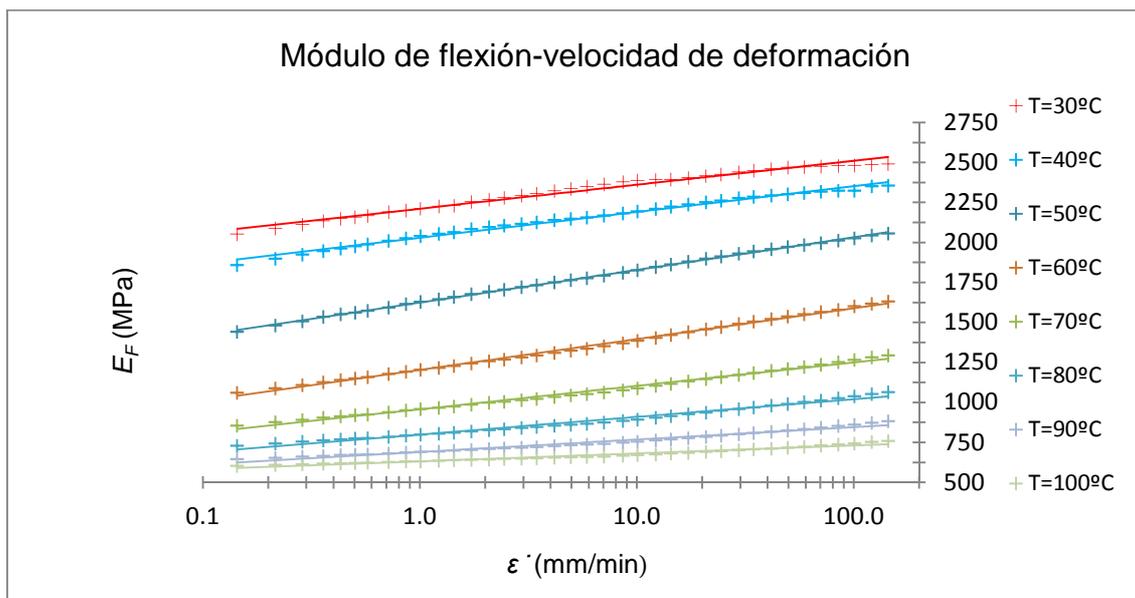


Figura 4.11 - Representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación a partir del barrido de frecuencias para PA66

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

A partir de la representación gráfica de la Figura 4.11 se ajusta una ecuación logarítmica para cada temperatura. La pendiente de la ecuación se conoce como  $PENDE_F$  y el término independiente es el módulo de flexión a 1 mm/min.

Para PA66,  $PENDE_F$  y el módulo de flexión a 1 mm/min en función de la temperatura se muestra en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 - Pendiente y término independiente del ajuste logarítmico entre el módulo de flexión y la velocidad de deformación para PA66

$T$ (°C)	$PENDE_F$ (MPa/(mm/min))	$E_F$ (MPa) 1 mm/min
30	65	2211
35	67	2151
40	70	2029
45	83	1845
50	89	1624
55	90	1411
60	84	1203
65	71	1059
70	64	957
75	56	869
80	48	799
85	40	742
90	34	690
95	27	659
100	22	632

### 4.4 Factor de desplazamiento

Como se ha explicado en el apartado 3.5.1.1, el factor de desplazamiento es un parámetro muy importante para pasar datos de una temperatura a otra.

Para este material, se usan dos subrangos de temperaturas. Por una parte, un subrango que va de 30°C a 50°C, donde se encuentra el máximo del módulo de pérdida en función de la temperatura. Por otra parte, un subrango que va de 50°C a 100°C. El primer subrango se ajusta mediante la ecuación de Arrhenius y el segundo subrango, mediante la ecuación de Williams-Landel-Ferry (WLF).

Para hallar los coeficientes de las funciones de desplazamiento, se elabora una plantilla en Microsoft® Office Excel 2010 de forma que al cambiar los valores de los coeficientes, automáticamente, las curvas de los módulos en función de la frecuencia

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

presentados anteriormente se desplacen hasta llegar a calcular aquellos coeficientes que hagan que las curvas se puedan superponer perfectamente en una sola curva con un rango de frecuencias mayor. Estos son los coeficientes de las funciones de desplazamiento.

El coeficiente de la ecuación de Arrhenius es de 141473 J.

Los coeficientes de la ecuación WLF son de 6.00 para  $C_1$  y 59.47 para  $C_2$ .

$C_1$  y  $C_2$  deben cumplir las propiedades mencionadas en el apartado 3.5.1.1.

En la Figura 4.12 se representa la linealización de la ecuación de Arrhenius, correspondiente al primer subrango de temperaturas.

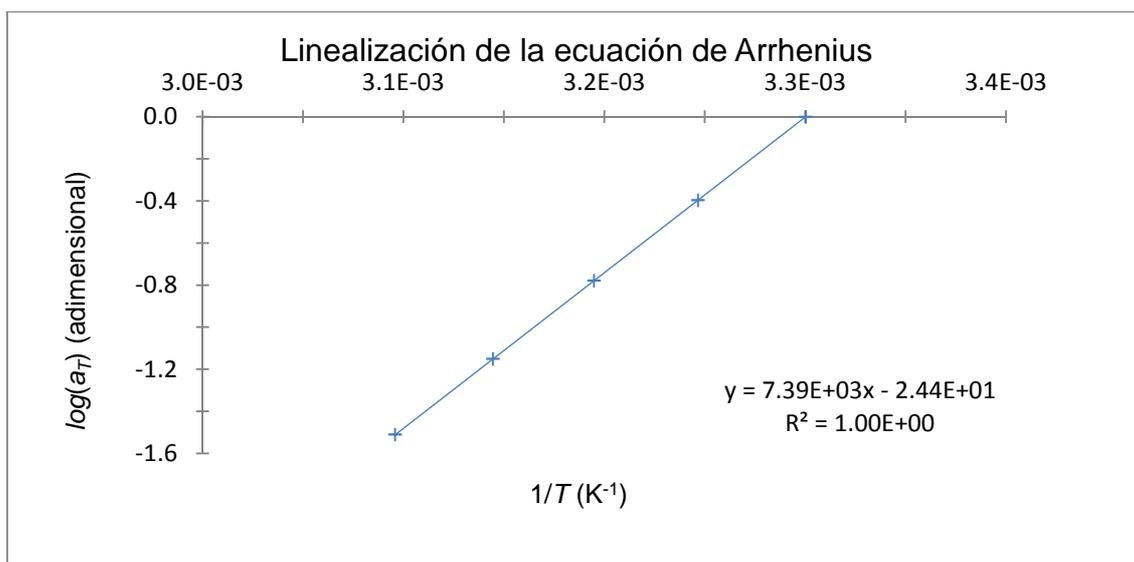


Figura 4.12 - Linealización de la ecuación de Arrhenius para PA66

En la Figura 4.13 se representa la linealización de la ecuación WLF, correspondiente al segundo subrango de temperaturas

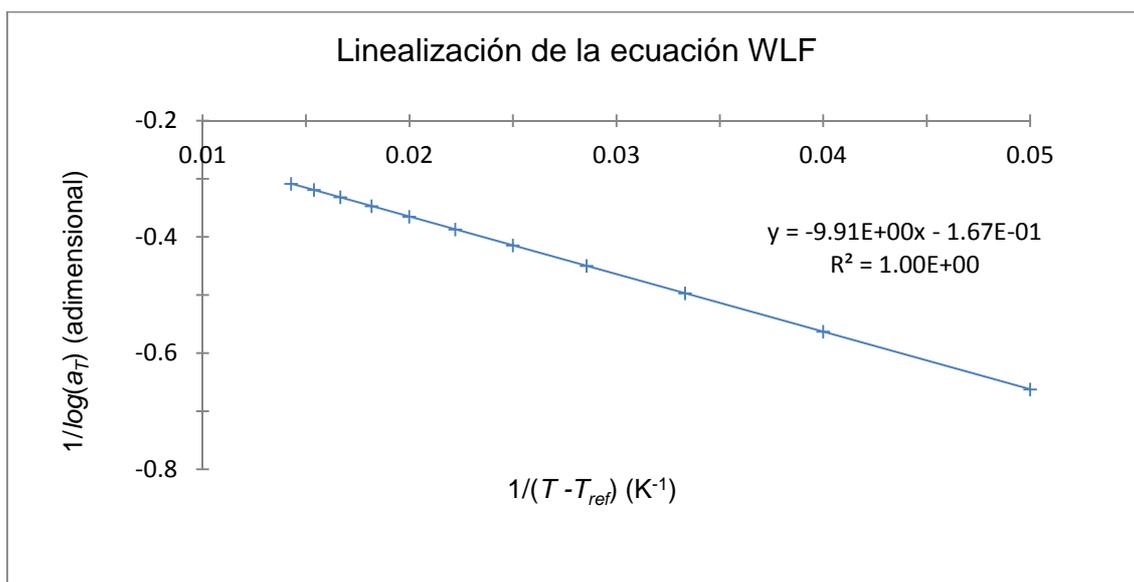


Figura 4.13 - Linealización de la ecuación WLF para PA66

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

Las curvas maestras para este material se presentan en la Figura 4.14 (módulo de almacenamiento en función de la frecuencia) y en la Figura 4.15 (módulo de pérdida en función de la frecuencia).

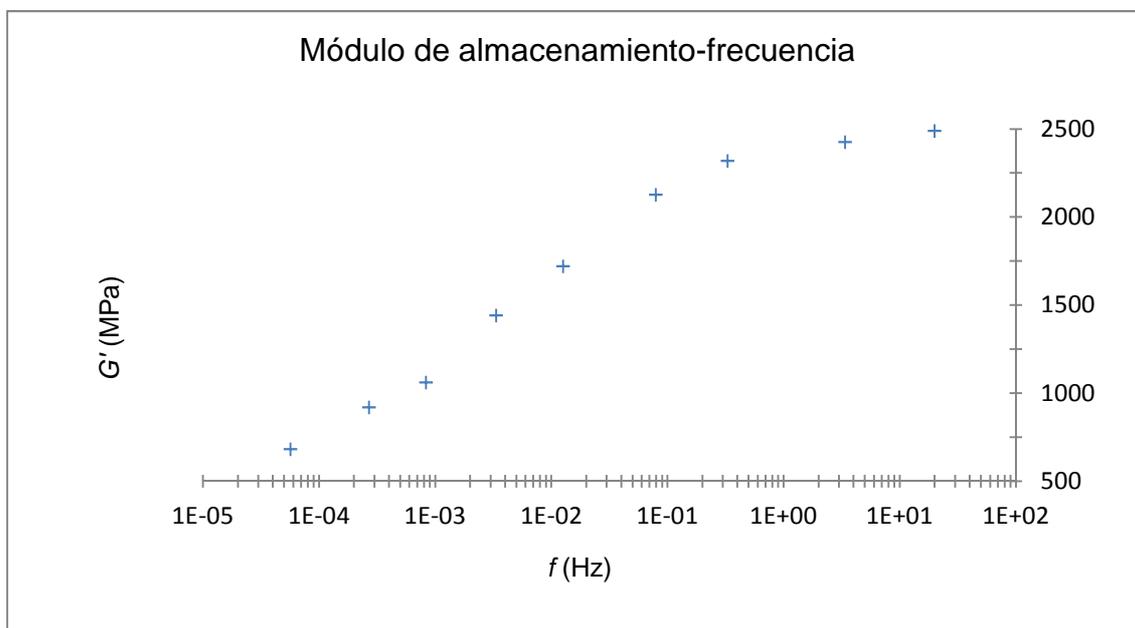


Figura 4.14 - Curva maestra del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para PA66

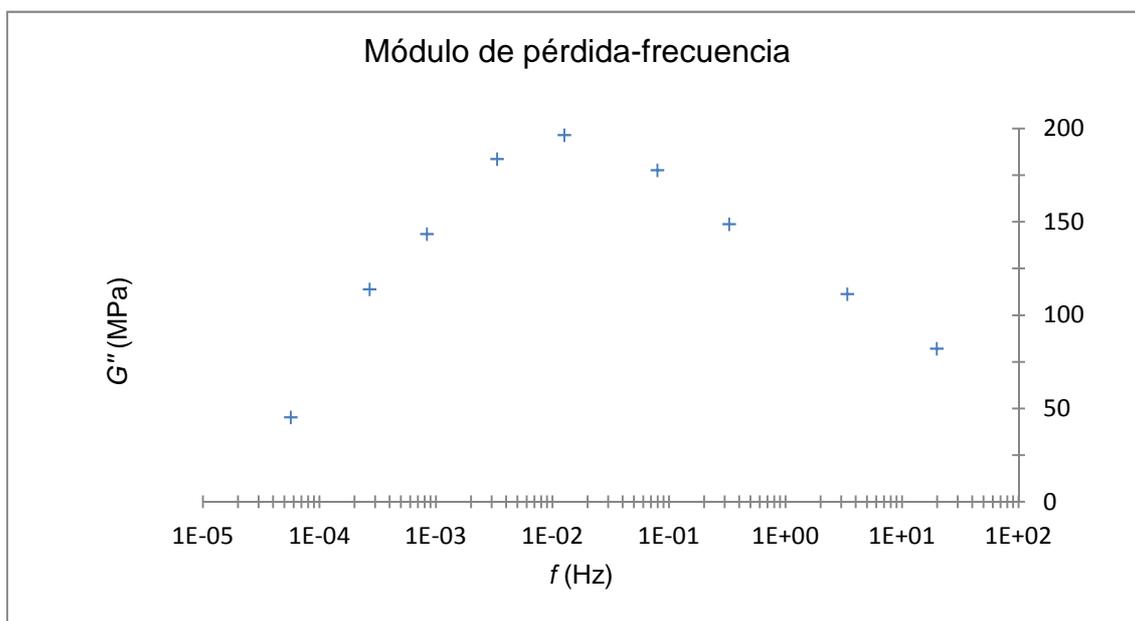


Figura 4.15 - Curva maestra del módulo de pérdida en función de la frecuencia para PA66

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

La variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura para este material se muestra en la Figura 4.16.

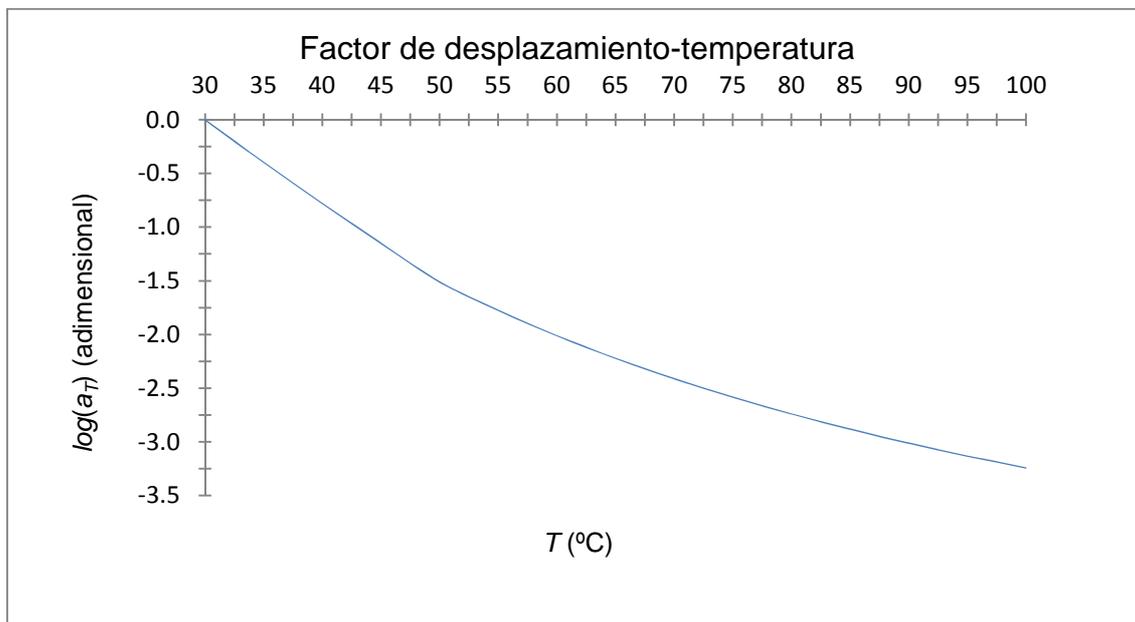


Figura 4.16 - Representación gráfica del factor de desplazamiento en función de la temperatura para PA66

### 4.5 Ratio de módulos

Como se ha explicado en el apartado 3.5.1.2, el ratio de módulos es un parámetro muy importante para pasar de flexión a tracción y viceversa.

El módulo de flexión a la temperatura de referencia (30°C) se muestra en la Tabla 4.2 para PA66.

Tabla 4.2 - Módulo de flexión a 30°C para PA66

T (°C)	A (mm)	$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	f (Hz)	$E_F$ (MPa)
30	0.03	1.00	1.39E-01	2211

Se crea una tabla similar (Tabla 4.3), con el valor de los módulos de flexión y de tracción a 23°C.

El valor del módulo de tracción a 23°C es el valor de referencia en los modelos. Este valor se puede calcular mediante la Ecuación 3.2, a partir de la curva experimental de tensión-deformación a 1 mm/min y a 23°C.

Tabla 4.3 - Módulo de flexión y módulo de tracción a 23°C para PA66

T (°C)	A (mm)	$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	f (Hz)	$E_F$ (MPa)	$E_T$ (MPa)
23	0.03	1.00	5.24E-01	2313	2780

El ratio de módulos es el ratio entre el módulo de tracción y el módulo de flexión a 23°C (Ecuación 3.11).

Por lo tanto, el ratio de módulos para PA66 es de 1.20.

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

Este ratio de módulos se considerará constante en función de la temperatura, como se explica en el apartado 3.5.1.2 y se observa en la Figura A.69 y en la Figura A.70. De esta forma se puede calcular el módulo de tracción a todas las temperaturas en las que se conozca el módulo de flexión.

### 4.6 Influencia de la temperatura

En la Tabla 4.4 se calculan diferentes módulos de tracción en función de la temperatura para PA66.

Tabla 4.4 - Módulo de tracción a cada temperatura para PA66

$T$ (°C)	$A$ (mm)	$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$f$ (Hz)	$E_F$ (MPa)	$E_T$ (MPa)
30	0.03	1.00	1.39E-01	2211	2658
35	0.03	1.00	1.39E-01	2151	2586
40	0.03	1.00	1.39E-01	2029	2439
45	0.03	1.00	1.39E-01	1845	2218
50	0.03	1.00	1.39E-01	1624	1952
55	0.03	1.00	1.39E-01	1411	1696
60	0.03	1.00	1.39E-01	1203	1446
65	0.03	1.00	1.39E-01	1059	1273
70	0.03	1.00	1.39E-01	957	1150
75	0.03	1.00	1.39E-01	869	1045
80	0.03	1.00	1.39E-01	799	960
85	0.03	1.00	1.39E-01	742	892
90	0.03	1.00	1.39E-01	690	829
95	0.03	1.00	1.39E-01	659	792
100	0.03	1.00	1.39E-01	632	760

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

La representación gráfica del módulo de tracción en función de la temperatura para este material se muestra en la Figura 4.17.

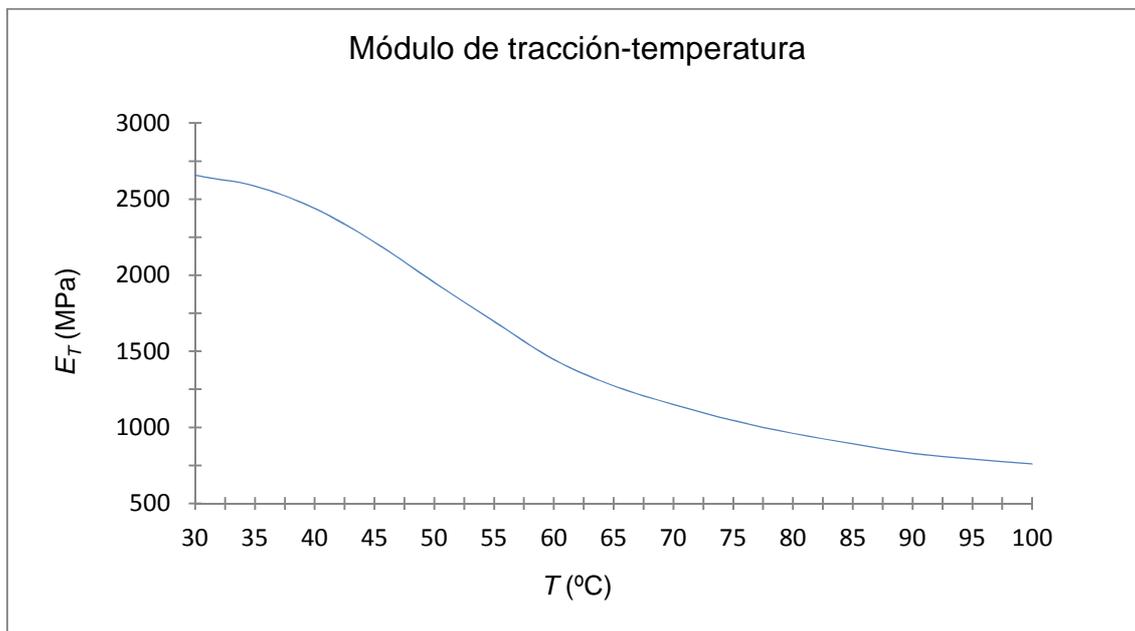


Figura 4.17 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la temperatura para PA66

### 4.7 Influencia de la velocidad de deformación

Una vez determinada la influencia de la temperatura, el otro parámetro que influye en el módulo de tracción es la velocidad de deformación.

Lo primero de todo es obtener la curva entre el módulo de tracción y la velocidad de deformación a 30°C. Dicha curva se obtiene a partir de los datos experimentales entre el módulo de almacenamiento (o de flexión) y la frecuencia a la misma temperatura. A partir de ahí, usando la Ecuación 3.3, se puede obtener la velocidad de deformación a partir de la frecuencia, y usando la Ecuación 3.11, se puede obtener el módulo de tracción a partir del de flexión.

Para PA66, debido al rango de frecuencias que se ha estudiado en DMA, se trabaja con 5 velocidades de deformación. Los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C se muestran en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5 - Datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa)
1.000	2658
3.466	2772
12.011	2874
41.628	2957
144.270	2991

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

La representación gráfica del ajuste logarítmico de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación se presenta en la Figura 4.18.

La pendiente de la ecuación ajustada es  $PENDE_T$  experimental a 30°C y el término independiente, el módulo de tracción experimental a 1 mm/min y a la misma temperatura.

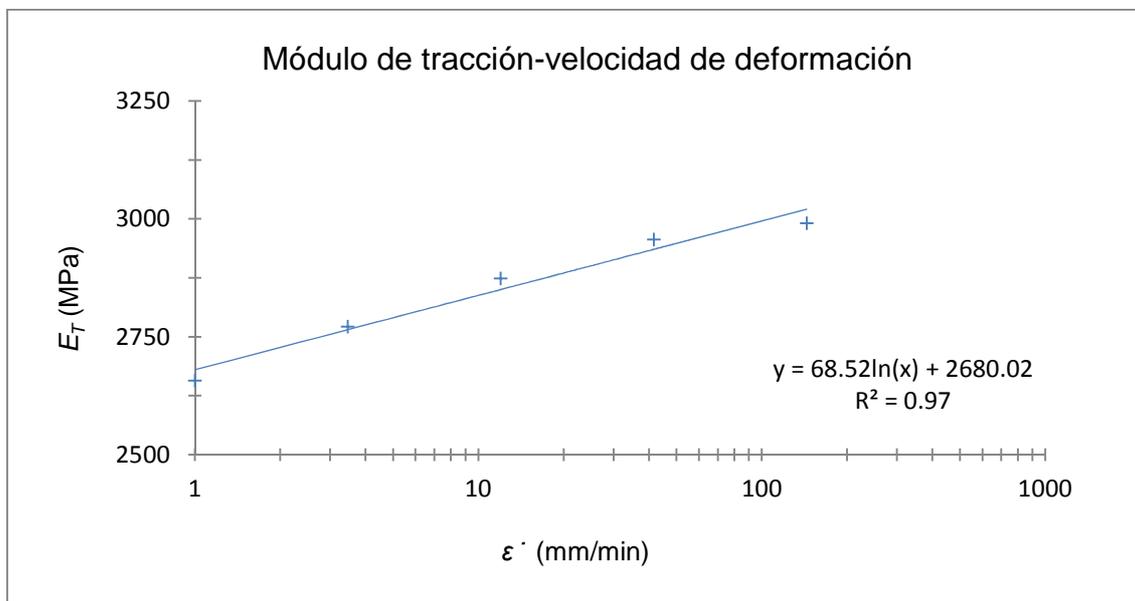


Figura 4.18 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66

A partir de ahí, se pueden calcular los valores teóricos a cada velocidad de deformación a 30°C mediante el valor del módulo de tracción a 23°C y a 1mm/min, 2780 MPa para PA66. A 1mm/min, el módulo de tracción es directamente el módulo de tracción a 30°C obtenido en la Tabla 4.4. Para otras velocidades de deformación,  $PENDE_F$  obtenida a la temperatura de estudio (30°C, en este caso) debe ser multiplicada por el ratio de módulos, tal como se muestra en la Ecuación 3.13.

En la Tabla 4.6 se calculan los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para este material.

Tabla 4.6 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa)
1.000	2658
3.466	2755
12.011	2852
41.628	2949
144.270	3046
499.000	3143

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

La representación gráfica del ajuste logarítmico de los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación se presenta en la Figura 4.19.

La pendiente de la ecuación ajustada es  $PENDE_T$  teórico a 30°C y el término independiente, el módulo de tracción teórico a 1 mm/min y a la misma temperatura.

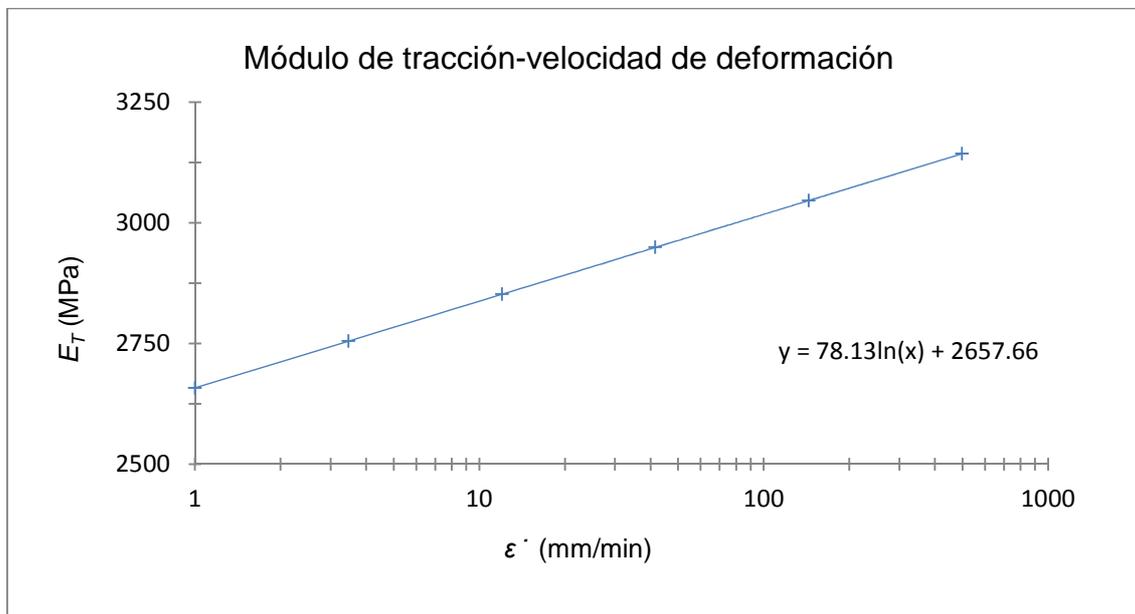


Figura 4.19 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66

En esta última representación gráfica (Figura 4.19) no se presenta el coeficiente de determinación, debido al hecho de que los valores hallados en la Tabla 4.6 son valores teóricos.

En la Tabla 4.7 se presenta una comparación entre los datos experimentales y los valores teóricos a la temperatura de referencia para las 5 velocidades de deformación.

Tabla 4.7 - Coeficiente de variación entre los datos experimentales y los valores teóricos a 30°C para PA66

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa) Datos experimentales	$E_T$ (MPa) Valores teóricos	Desviación estándar	CV (%)
1.000	2658	2658	0.00	0.00
3.466	2772	2755	12.16	0.66
12.011	2874	2852	15.86	0.83
41.628	2957	2949	5.35	0.27
144.270	2991	3046	38.85	1.89

Como se observa, para este material, la discrepancia entre los datos experimentales y los valores teóricos a 30°C es bastante pequeña. Esto significa que la aplicación del modelo se puede usar para predecir los módulos de tracción a cada temperatura y a cada velocidad de deformación.

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

---

Por lo tanto, para PA66, el mismo procedimiento puede ser extrapolado a todo el rango de temperaturas.

Así pues, se predicen los módulos de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación tal como se muestra en la Tabla 4.8.

Todos los valores se deducen a partir de los valores obtenidos en la Tabla 4.4. Con el uso de la Ecuación 3.13, se halla el módulo de tracción a las diferentes velocidades de deformación y para cada temperatura.

Tabla 4.8 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación para PA66

$\dot{\epsilon}$ (mm/min) / T (°C)	1.000	3.466	12.011	41.628	144.270	499.000
30°C	2658	2755	2852	2949	3046	3143
35°C	2586	2683	2780	2877	2974	3071
40°C	2439	2543	2648	2753	2857	2962
45°C	2218	2342	2466	2590	2714	2838
50°C	1952	2085	2218	2351	2484	2617
55°C	1696	1831	1965	2099	2234	2368
60°C	1446	1572	1697	1823	1948	2073
65°C	1273	1379	1485	1591	1697	1803
70°C	1150	1246	1342	1437	1533	1628
75°C	1045	1128	1212	1296	1379	1463
80°C	960	1032	1104	1176	1247	1319
85°C	892	952	1011	1071	1131	1191
90°C	829	880	931	982	1033	1083
95°C	792	832	873	913	953	994
100°C	760	793	825	858	891	924

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

En la Figura 4.20 se muestra la representación gráfica del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a diferentes temperaturas.

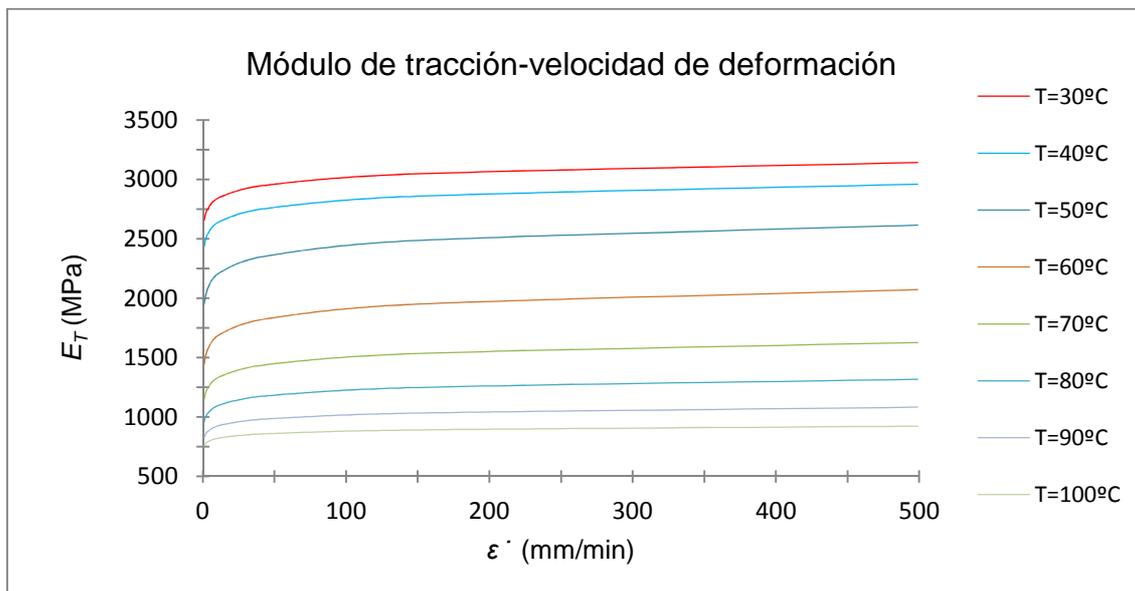


Figura 4.20 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a diferentes temperaturas para PA66

Como es de esperar, a medida que la temperatura se incrementa, el módulo de tracción decrece. Además, se observa que un incremento de la velocidad de deformación implica un incremento en el módulo de tracción.

### 4.8 Verificación del bucle de tracción

Como se explica en el apartado 3.5.1.5, se deben hacer verificaciones para comprobar si los valores teóricos de los módulos de tracción obtenidos previamente se corresponden con los experimentales. Para ello, deben compararse datos experimentales y valores teóricos de dicho módulo y calcular el error generado entre ellos. De esta forma, si los errores son suficientemente pequeños, se podrá considerar que el modelo matemático usado se ajusta bien.

#### 4.8.1 Verificación de la temperatura

Para verificar los valores del módulo de tracción en función de la temperatura, es necesario obtener curvas de tensión-deformación a diferentes temperaturas para este material. La Figura 4.21 se obtiene de DuPont<sup>TM</sup> 2. La comparación entre los datos experimentales y los valores teóricos se hace a 40°C, 60°C y 90°C.

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

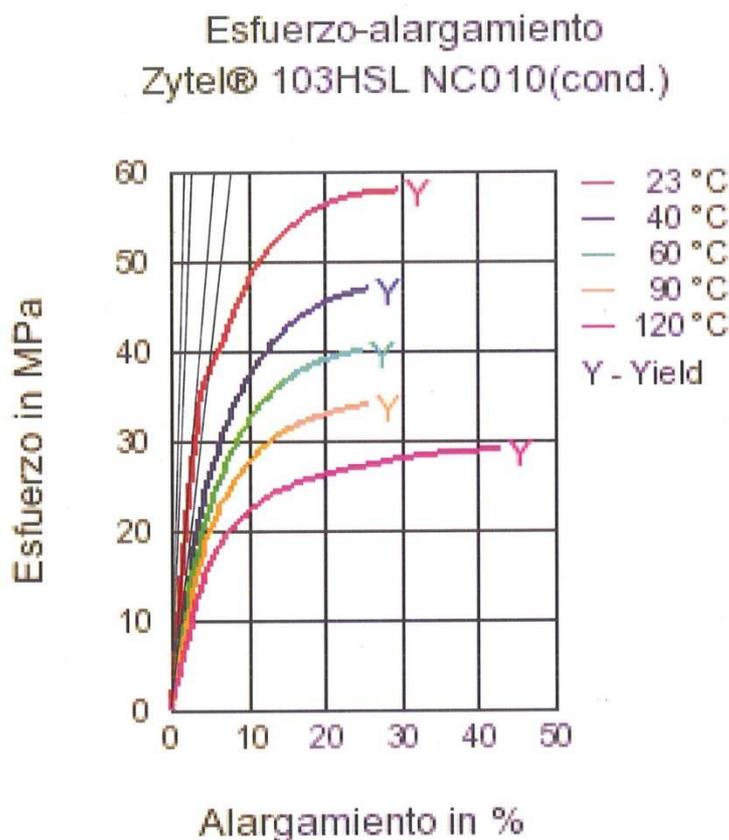


Figura 4.21 - Curvas experimentales de tensión-deformación a diferentes temperaturas para PA66

Con un pie de rey, se hacen algunas medidas en el gráfico de la Figura 4.21 para hallar las tensiones a 0.0005 y a 0.0025 mm/mm a 40°C, 60°C y 90°C. Una vez hecho esto, aplicando la Ecuación 3.2, se pueden calcular los módulos de tracción a estas temperaturas.

La Tabla 4.9 muestra el módulo de tracción a 40°C, 60°C y 90°C hallados a partir de la Figura 4.21.

Tabla 4.9 - Módulo de tracción a diferentes temperaturas de la representación gráfica experimental para PA66

$T$ (°C)	$\sigma$ (MPa) a 0.0005 mm/mm	$\sigma$ (MPa) a 0.0025 mm/mm	$E_T$ (MPa)
40	3.81	8.81	2500
60	3.33	6.19	1429
90	2.14	3.81	833

Para ajustar correctamente los módulos de tracción se debe aplicar un factor denominado factor de corrección. Este factor de corrección se calcula como el ratio entre el valor del módulo de tracción de referencia (dato experimental a 23°C y a 1 mm/min, 2780 MPa), y el valor del módulo de tracción obtenido a partir de la medida de dicho valor en la Figura 4.21 a 23°C, tal como se muestra en la Tabla 4.10.

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

El factor de corrección es el factor que se usa cuando los dos valores de dicho ratio se encuentran a las mismas condiciones.

Tabla 4.10 - Factor de corrección a 23°C para PA66

$T$ (°C)	$\sigma$ (MPa) a 0.0005 mm/mm	$\sigma$ (MPa) a 0.0025 mm/mm	$E_T$ (MPa)	Factor de corrección
23	4.76	10.24	2738	1.015

Los valores obtenidos como datos experimentales a 40°C, 60°C y 90°C se muestran en la Tabla 4.11.

Tabla 4.11 - Módulo de tracción a diferentes temperaturas con la aplicación del factor de corrección para PA66

$T$ (°C)	$E_T$ (MPa)
40	2538
60	1450
90	846

Como es de esperar, el módulo de tracción decrece cuando la temperatura aumenta.

Los errores entre los valores teóricos de la Tabla 4.8 y los datos experimentales de la Tabla 4.11 del módulo de tracción se muestran en la Tabla 4.12 para 40°C, 60°C y 90°C

Tabla 4.12 - Errores a diferentes temperaturas a 1 mm/min para PA66

$T$ (°C)	$E_T$ (MPa) Datos experimentales	$E_T$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
40	2538	2439	3.91
60	1450	1446	0.30
90	846	829	1.97

Para PA66, el modelo matemático para el bucle de tracción en función de la temperatura se ajusta bien. Los errores son inferiores al 4% en todos los casos, como se observa en la Tabla 4.12.

### 4.8.2 Verificación de la velocidad de deformación

Como se ha explicado en el apartado 3.5.1.5, mediante la variación del factor de desplazamiento, se puede calcular la frecuencia modificada a 23°C a partir de la frecuencia a 30°C. De esta forma se pueden hallar los valores teóricos del módulo de flexión a 23°C. Con la aplicación del ratio de módulos se puede predecir el módulo de tracción a 23°C para diferentes velocidades de deformación.

Sin embargo, si los datos experimentales del módulo de flexión a las temperaturas experimentadas sólo pueden llegar a predecir hasta una determinada velocidad de deformación de entre las 6 a estudiar debido al rango de frecuencias, para temperaturas fuera del rango de trabajo, los módulos de flexión sólo se podrán predecir para

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

velocidades de deformación como mucho igual y seguramente más bajas a la mencionada anteriormente.

Esto significa que si para PA66, la más alta velocidad de deformación de entre las 6 a estudiar a la que llegan los datos experimentales debido al rango de frecuencias es 144.270 mm/min (Tabla 4.7), fuera del rango de trabajo (23°C), la más alta velocidad de deformación que se podrá predecir será probablemente menor. Y efectivamente así ocurre.

Para PA66, la pendiente experimental del módulo de flexión a 23°C se puede predecir a 1.000, 3.466 y 12.011 mm/min, tres velocidades de deformación.

En la Tabla 4.13 se muestran los módulos de tracción a 23°C para estas tres velocidades de deformación.

Tabla 4.13 - Módulo de tracción predicho en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$f$ (Hz) 30°C	$f$ (Hz) 23°C	$E_F$ (MPa)	$E_T$ (MPa)
1.000	1.39E-01	5.24E-01	2313	2780
3.466	4.81E-01	1.82E+00	2392	2871
12.011	1.67E+00	6.29E+00	2465	2962

La Ecuación 4.1, que se usa para calcular la pendiente del módulo de tracción, se deduce a partir de la Ecuación 3.14 utilizando para ello la mayor y la menor velocidad de deformación de entre las que se muestran en la Tabla 4.13.

$$PENDE_T = \frac{(E_{T12.011} - E_{T1.000})}{\ln(12.011) - \ln(1.000)}$$

Ecuación 4.1

Para este material, el valor de  $PENDE_T$  que se predice presenta un resultado de 73. Los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C se muestran en la Tabla 4.14.

Tabla 4.14 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa)
1.000	2780
3.466	2871
12.011	2962
41.628	3054
144.270	3145
499.000	3236

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

Para poder comparar los valores teóricos obtenidos en la Tabla 4.14 con los datos experimentales de MUE, se han realizado cinco experiencias para obtener la curva tensión-deformación a cada una de las velocidades de deformación a 23°C. Se ha calculado la media del módulo de tracción para cada una de las velocidades anteriores. La Tabla 4.15 muestra los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C.

Tabla 4.15 - Datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa)
1.000	2780
3.466	2816
12.011	2885
41.628	2962
144.270	3060
499.000	3116

El ajuste logarítmico de los valores hallados en la Tabla 4.15 se muestra en la Figura 4.22.

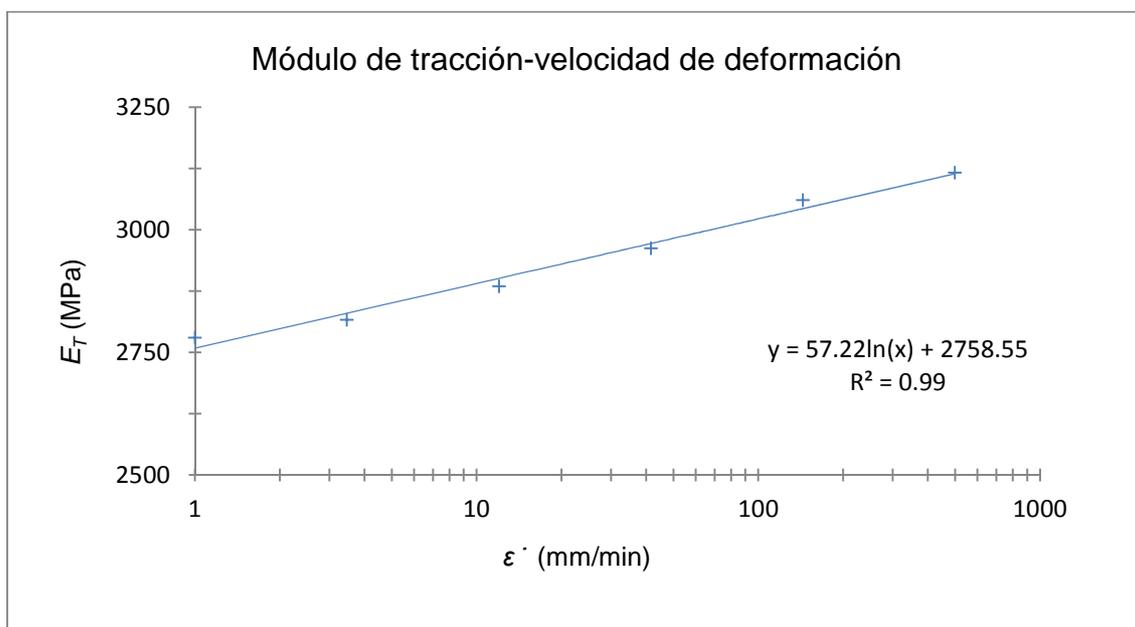


Figura 4.22 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66

En la Figura 4.23 se representan las curvas de tensión-deformación en función de la velocidad de deformación.

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

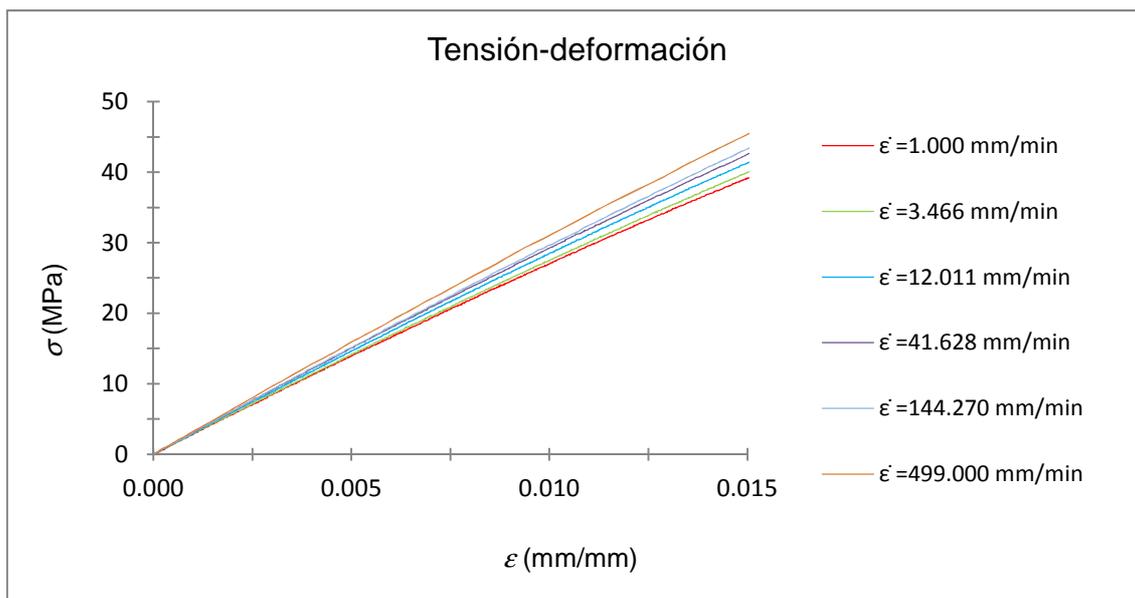


Figura 4.23 - Curvas de tensión-deformación en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66

Como es de esperar, el módulo de tracción se incrementa cuando la velocidad de deformación aumenta.

En la Tabla 4.16, los datos experimentales y los valores teóricos en función de la velocidad de deformación se comparan a 23°C, dando los siguientes errores:

Tabla 4.16 - Errores a diferentes velocidades de deformación a 23°C para PA66

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa) Datos experimentales	$E_T$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
1.000	2780	2780	0.00
3.466	2816	2871	1.99
12.011	2885	2962	2.80
41.628	2962	3054	3.31
144.270	3060	3145	3.07
499.000	3116	3236	4.33

Para PA66, el modelo matemático para el bucle de tracción en función de la velocidad de deformación se ajusta bien. Los errores son inferiores al 5% en todos los casos, como se observa en la Tabla 4.16.

### 4.9 Curvas de tensión-deformación

Para PA66 y para una deformación de 0.0005 mm/mm, la tensión a 23°C es de 1.37 MPa. Este valor se obtiene como media de las cinco experiencias usando dicha deformación. Partiendo de este valor, las tensiones a 0.0025 mm/min pueden ser calculadas a diferentes temperaturas. Para hallar esta segunda tensión, se debe usar la

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

Ecuación 3.2. En la Figura 4.24 se representan las curvas de tensión-deformación en función de la temperatura para este material.

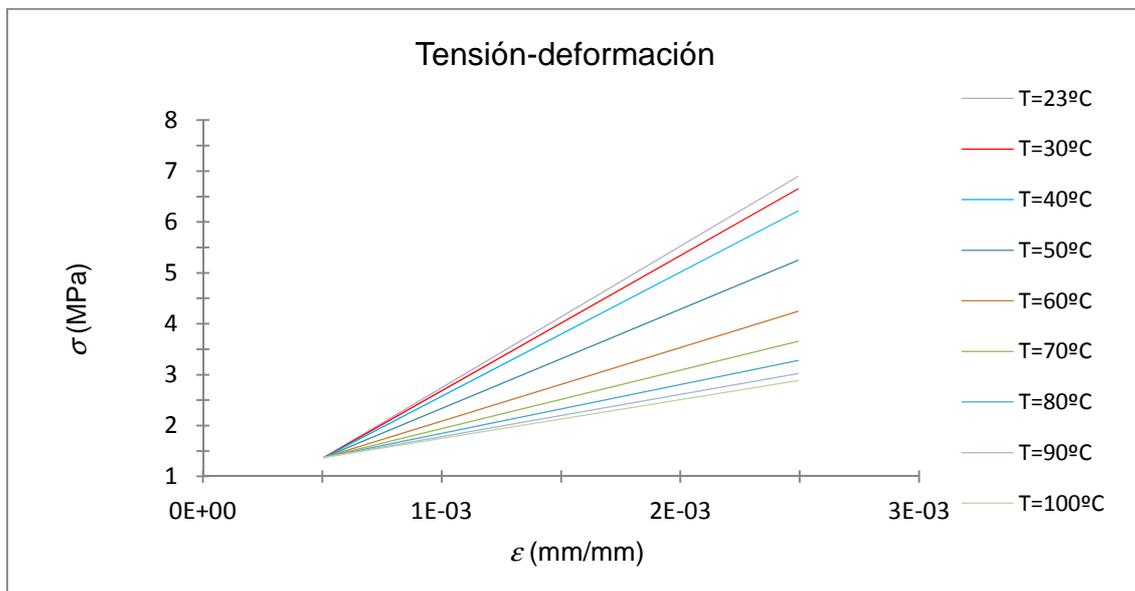


Figura 4.24 - Curvas de tensión-deformación en función de la temperatura para PA66

Se comparan las curvas de tensión-deformación a partir de los valores teóricos del módulo de tracción con las mismas curvas obtenidas a partir de los datos experimentales de dicho módulo. Estas curvas se comparan a 40°C, 60°C y 90°C, tal como muestran la Figura 4.25, la Figura 4.26 y la Figura 4.27, respectivamente.

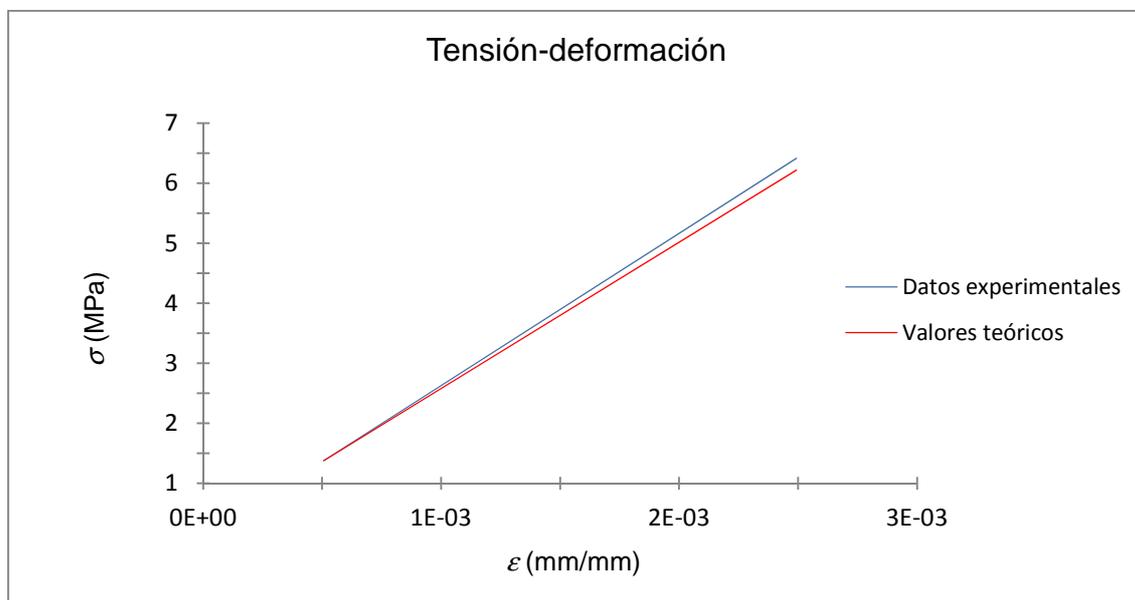


Figura 4.25 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 40°C para PA66

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

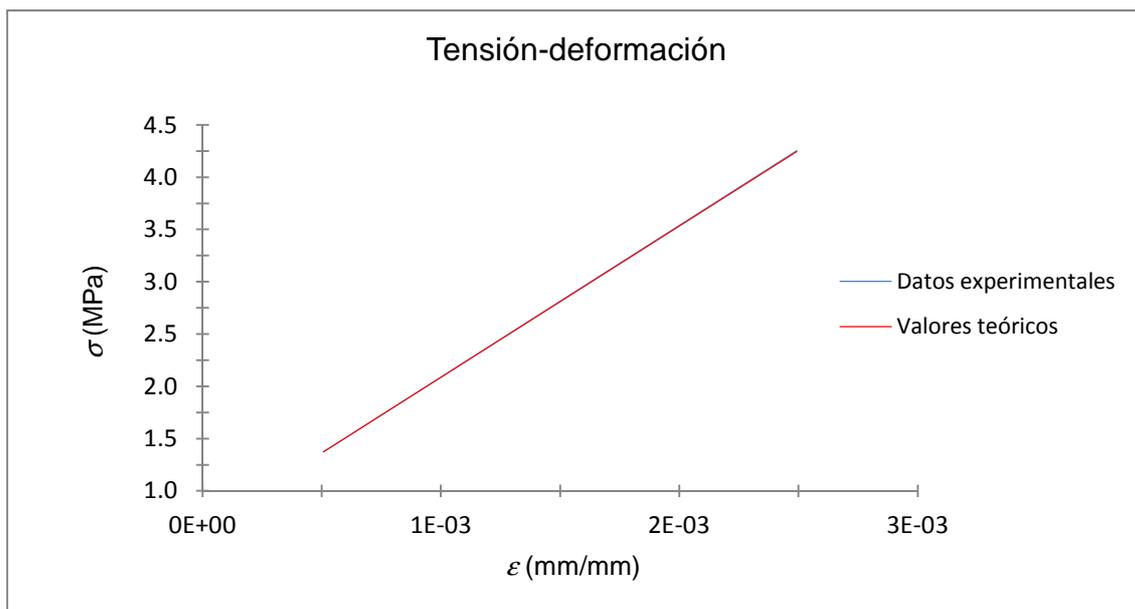


Figura 4.26 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 60°C para PA66

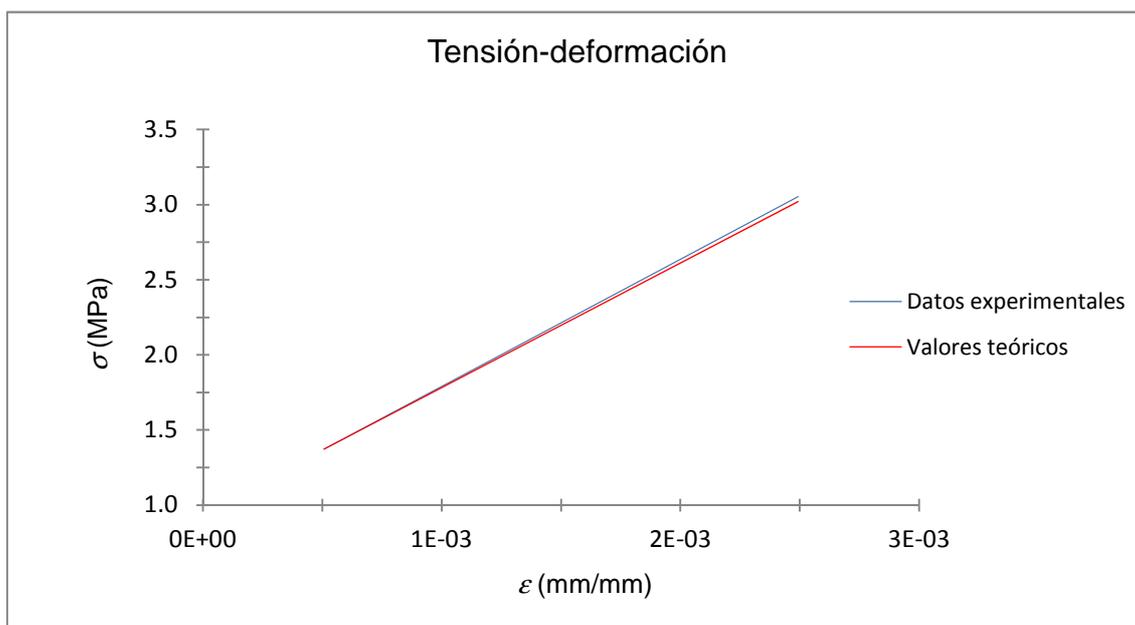


Figura 4.27 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 90°C para PA66

### 4.10 Simulaciones de los tests de tracción

Para todas las simulaciones de los tests de tracción de esta tesis se evalúan dos casos. El primer caso corresponde a datos de entrada cuyo resultado de módulo de tracción puede ser comparado con un dato experimental y un valor teórico. El segundo caso usa datos de entrada que no se han usado previamente.

Para PA66, las líneas que se deben modificar en el código de ANSYS® con respecto al código general presentado en el anexo A.1.1 se muestran a continuación.

Los valores de los módulos de tracción que se observan en estas líneas modificadas proceden de la Tabla 4.8 y de la Tabla 4.14.

Con estos códigos, se puede obtener el módulo de tracción, la tensión y la elongación para cualquier temperatura y velocidad de deformación dentro de los rangos de trabajo.

```

Línea 7      /FILENAME,TraccionPA66
Línea 8      /TITLE,TraccionPA66
Línea 12     R,1,4,1
Línea 15     MPDATA,EX,1,1,2780,2658,2586,2439,2218,1952
Línea 18     MPDATA,EX,1,7,1696,1446,1273,1150,1045,960
Línea 21     MPDATA,EX,1,13,892,829,792,760
Línea 24     MPDATA,EX,2,1,2871,2755,2683,2543,2342,2085
Línea 27     MPDATA,EX,2,7,1831,1572,1379,1246,1128,1032
Línea 30     MPDATA,EX,2,13,952,880,832,793
Línea 33     MPDATA,EX,3,1,2962,2852,2780,2648,2466,2218
Línea 36     MPDATA,EX,3,7,1965,1697,1485,1342,1212,1104
Línea 39     MPDATA,EX,3,13,1011,931,873,825
Línea 42     MPDATA,EX,4,1,3054,2949,2877,2753,2590,2351
Línea 45     MPDATA,EX,4,7,2099,1823,1591,1437,1296,1176
Línea 48     MPDATA,EX,4,13,1071,982,913,858
Línea 51     MPDATA,EX,5,1,3145,3046,2974,2857,2714,2484
Línea 54     MPDATA,EX,5,7,2234,1948,1697,1533,1379,1247
Línea 57     MPDATA,EX,5,13,1131,1033,953,891
Línea 60     MPDATA,EX,6,1,3236,3143,3071,2962,2838,2617
Línea 63     MPDATA,EX,6,7,2368,2073,1803,1628,1463,1319
Línea 66     MPDATA,EX,6,13,1191,1083,994,924
Línea 207    SAVE,TraccionPA66.db
    
```

Como se ha comentado, se simulan dos casos. Para el caso 1, los resultados se muestran en la Tabla 4.17. Para el caso 2, los resultados se muestran en la Tabla 4.18.

#### Caso 1

Temperatura = 23°C

Velocidad de deformación = 1 mm/min

Tabla 4.17 - Módulo de tracción de la simulación del caso 1 para PA66

TIME	2 UX	159 S X	4 PROD	5 QUOT
	UX	SX	Extension	ET
	average			
1. 0000	0. 312500E-01	6. 94866	0. 625000E-01	2779. 47

## Capítulo 4 - Bucle de tracción para PA66

---

### Caso 2

Temperatura = 98°C

Velocidad de deformación = 400 mm/min

Tabla 4.18 - Módulo de tracción de la simulación del caso 2 para PA66

TIME	2 UX	159 S X	4 PROD	5 QUOT
	UX	SX	Extension	ET
		average		
1.0000	0.312500E-01	2.35384	0.625000E-01	941.535

En el caso 1, el módulo de tracción que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 2779 MPa. El dato experimental y el valor teórico presentan un valor de 2780 MPa. Ambos parámetros tienen el mismo valor porque las condiciones de este caso son las de referencia y dicho valor, por lo tanto, también es el valor de referencia. El coeficiente de variación entre los dos valores es de 0.0120%.

En el caso 2, el módulo de tracción que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 942 MPa.



### 5 Bucle de creep para PA66

#### 5.1 Superposición frecuencia-temperatura

La curva maestra del material es el punto de partida para el bucle de creep.

La variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura presenta los resultados de la Tabla 5.1 para PA66.

Tabla 5.1 - Variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura para PA66

$T$ (°C)	$a_T$	$\log(a_T)$
30	1.00E+00	0.00
35	4.02E-01	-0.40
40	1.66E-01	-0.78
45	7.08E-02	-1.15
50	3.09E-02	-1.51
55	1.68E-02	-1.78
60	9.73E-03	-2.01
65	5.99E-03	-2.22
70	3.87E-03	-2.41
75	2.60E-03	-2.58
80	1.82E-03	-2.74
85	1.31E-03	-2.88
90	9.70E-04	-3.01
95	7.36E-04	-3.13
100	5.70E-04	-3.24

La curva maestra para este material se muestra en la Tabla 5.2.

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

Tabla 5.2 - Datos de la curva maestra para PA66

$f$ (Hz)	$G'$ (MPa)	$G''$ (MPa)
5.70E-05	683	45
2.71E-04	920	114
8.38E-04	1060	143
3.35E-03	1441	184
1.27E-02	1721	196
7.98E-02	2126	178
3.30E-01	2318	149
3.40E+00	2426	111
2.00E+01	2489	82

### 5.2 Modelo convencional

#### 5.2.1 Modelo convencional en el dominio de la frecuencia

ABAQUS® 6.10-2 se usa para obtener la primera estimación de los posibles coeficientes para el ajuste en el dominio de la frecuencia. Los datos de la curva maestra son los datos de entrada para obtener dichos coeficientes en el simulador. Sin embargo, estos valores no se pueden introducir directamente en ABAQUS® 6.10-2. Los datos a introducir en el simulador deben ser convertidos previamente a partir de los datos de la Tabla 5.2 usando la Ecuación 3.33 y la Ecuación 3.34.

La conversión de los valores de la curva maestra da los resultados que se muestran en la Tabla 5.3.

Tabla 5.3 - Datos convertidos de la curva maestra para ser introducidos en ABAQUS® 6.10-2 para PA66

$\Omega g^*_{real}$	$\Omega g^*_{imag}$	$f$ (Hz)
0.0664	0.0000	5.70E-05
0.1669	-0.3483	2.71E-04
0.2101	-0.5532	8.38E-04
0.2689	-1.1107	3.35E-03
0.2878	-1.5214	1.27E-02
0.2602	-2.1140	7.98E-02
0.2179	-2.3958	3.30E-01
0.1630	-2.5539	3.40E+00
0.1201	-2.6455	2.00E+01

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

Para PA66, el módulo de tracción de entrada es de 2658 MPa y el coeficiente de Poisson es de 0.35. Para este caso y en estas condiciones, el error mínimo considerado en ABAQUS® 6.10-2 es de 0.11.

Las representaciones gráficas usando los valores convertidos para el módulo de almacenamiento y para el módulo de pérdida en función de la frecuencia se muestran en la Figura 5.1 y en la Figura 5.2, respectivamente, en que se comparan los datos experimentales y los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2.

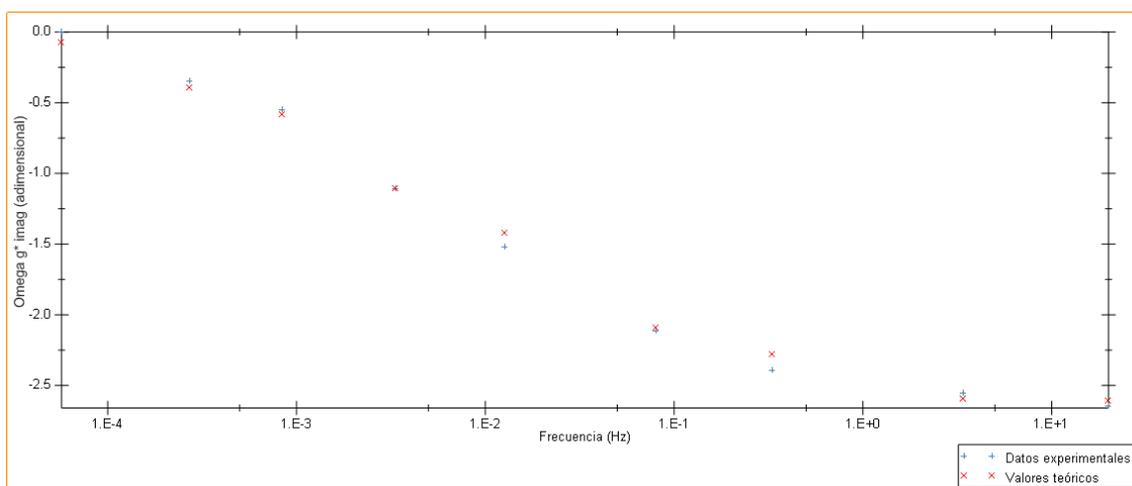


Figura 5.1 - Representación gráfica de  $\omega g^* \text{imag}$  en función de la frecuencia de los datos experimentales y de los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2 para PA66

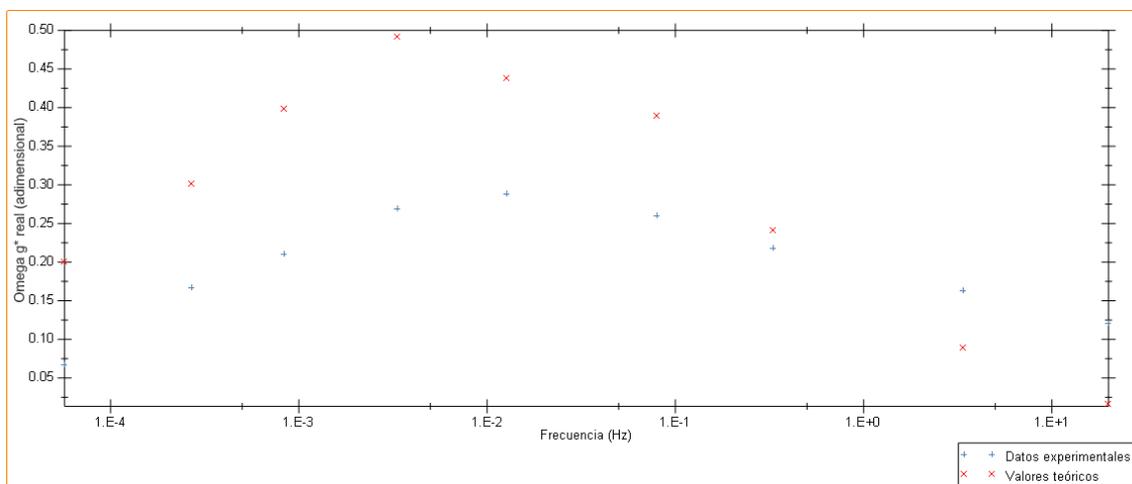


Figura 5.2 - Representación gráfica de  $\omega g^* \text{real}$  en función de la frecuencia de los datos experimentales y de los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2 para PA66

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

---

Para este material, los coeficientes propuestos en ABAQUS® 6.10-2 son los siguientes:

- Para el término 1,  $p_1$  es 0.10576 y  $\tau_1$  es 0.21656
- Para el término 2,  $p_2$  es 0.24811 y  $\tau_2$  es 4.6312
- Para el término 3,  $p_3$  es 0.24038 y  $\tau_3$  es 78.421
- Para el término 4,  $p_4$  es 0.12890 y  $\tau_4$  es 1248.0

Los coeficientes ajustados en ABAQUS® 6.10-2 no presentan buenos resultados para este material.

Estos coeficientes no se pueden tomar como buenos, ya que la representación gráfica de los datos convertidos del módulo de pérdida en función de la frecuencia no se ajusta bien con estos coeficientes. De hecho, el modelo convencional presenta una gran dificultad al elegir los coeficientes de entrada a partir de los cuales empieza el proceso de minimización matemático<sup>132</sup>. Además, parece que sólo con la introducción de una gran número de parámetros de entrada, los programas computacionales comerciales proveen resultados acurados<sup>132</sup>.

A partir de ahí, lo que se hace es usar la subrutina implementada en MATLAB® 7.5.0 para ajustar estos coeficientes en el dominio de la frecuencia usando para ello el modelo convencional pero con las ventajas explicadas en el apartado 3.5.2.2.

Las representaciones gráficas comparando los datos experimentales y los valores teóricos de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia en MATLAB® 7.5.0 usando la subrutina para el modelo convencional se muestran en la Figura 5.3 y en la Figura 5.4, respectivamente. La subrutina de MATLAB® 7.5.0 para este modelo se presenta en el anexo A.11.1.

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

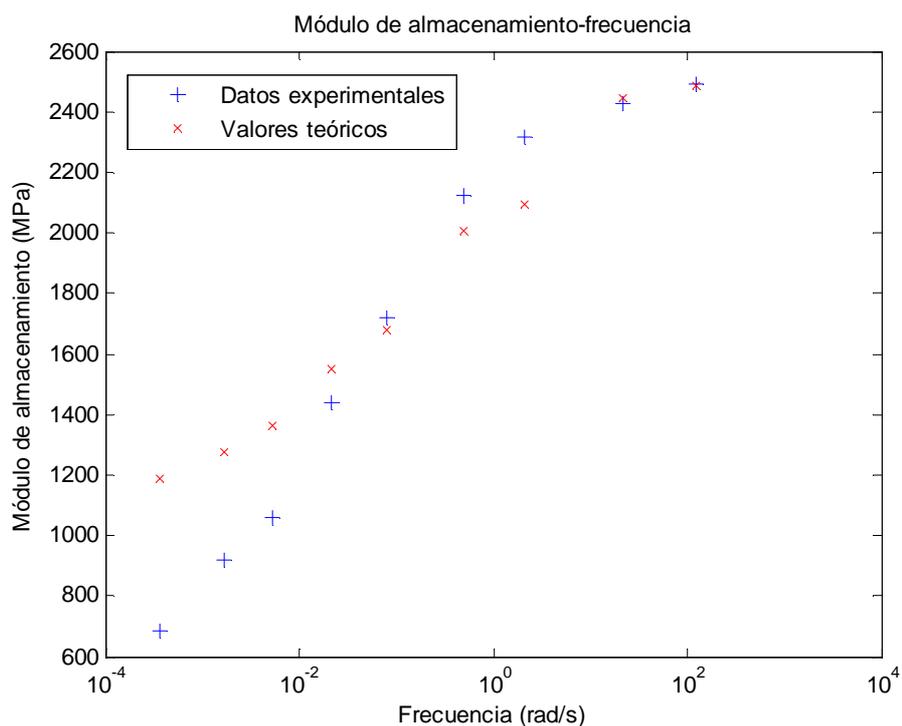


Figura 5.3 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo convencional para PA66

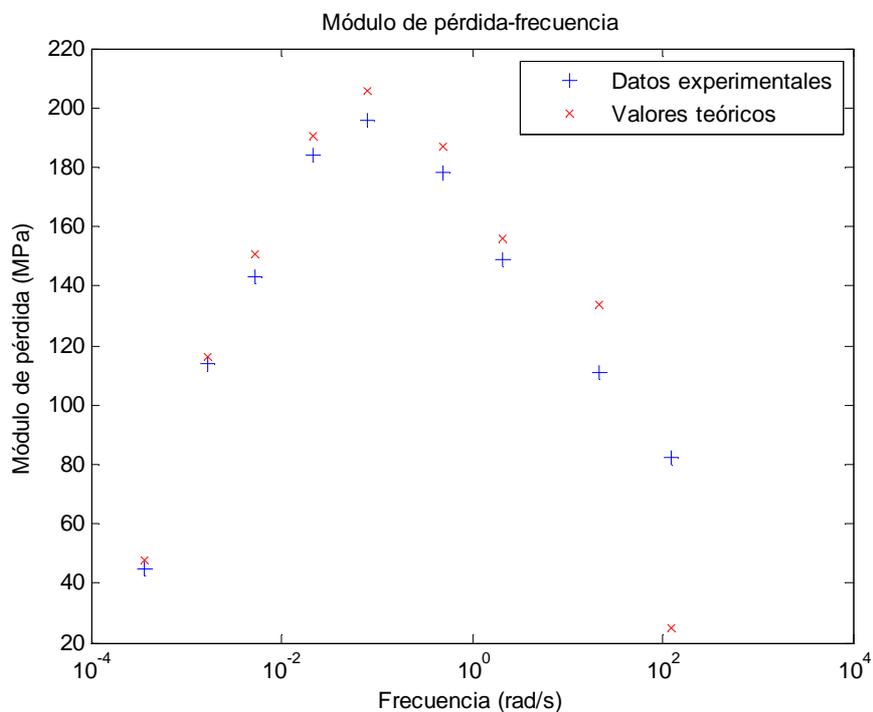


Figura 5.4 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo convencional para PA66

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

En un plantilla de Microsoft® Office Excel 2010, se obtienen los valores teóricos del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida como se ha hecho en MATLAB® 7.5.0, y se calculan sus errores respecto a los datos experimentales.

En la Tabla 5.4 se muestran los datos experimentales y los valores teóricos de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia con el modelo convencional para PA66.

Tabla 5.4 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida en función de la frecuencia con el modelo convencional para PA66

$w$ (rad/s)	$G'$ (MPa)	$G'$ (MPa)	Error $G'$ (%)	$G''$ (MPa)	$G''$ (MPa)	Error $G''$ (%)
	Datos experimentales	Valores teóricos		Datos experimentales	Valores teóricos	
3.58E-04	683	1186	73.75	45	48	5.71
1.70E-03	920	1277	38.69	114	116	2.09
5.27E-03	1060	1362	28.42	143	150	4.87
2.11E-02	1441	1547	7.38	184	191	3.78
7.96E-02	1721	1679	2.43	196	206	4.74
5.02E-01	2126	2006	5.63	178	187	5.42
2.07E+00	2318	2092	9.76	149	156	4.84
2.14E+01	2426	2445	0.77	111	133	19.89
1.26E+02	2489	2487	0.06	82	25	69.36

En la Tabla 5.5 se presentan los coeficientes ajustados para el modelo convencional en el dominio de la frecuencia.

Tabla 5.5 - Coeficientes en el dominio de la frecuencia a 30°C con el modelo convencional para PA66

Término	$p$	$\tau$ (s)
1	1.59E-02	7.55E+01
2	1.01E-02	7.55E+01
3	1.75E-01	5.02E+00
4	1.71E-01	1.38E-01
5	6.22E-02	7.56E+02
6	9.34E-02	7.55E+01

El modelo convencional se ajusta muy mal para este material. Los errores a bajas frecuencias para el módulo de almacenamiento son elevados, llegando a errores superiores al 70%. Además, a altas frecuencias, el ajuste presenta problemas en el módulo de pérdida, cuyos errores también llegan al 70%, aproximadamente.

Sin embargo, haciendo uso de estos coeficientes en el dominio de la frecuencia, los valores en el dominio del tiempo también se calculan para observar qué errores presentan.

### 5.2.2 Modelo convencional en el dominio del tiempo

Se debe estimar el valor de  $E_{C\ 60000} / E_{C\ 0}$ .

A partir de ahí,  $E_{C\ \infty} / E_{C\ 0}$  debe calcularse a partir de  $E_{C\ 60000} / E_{C\ 0}$  mediante la metodología explicada en el apartado 3.5.2.2. Para conseguirlo, se deben hacer algunas conversiones entre los parámetros de la frecuencia y del tiempo usando las ecuaciones comprendidas entre la Ecuación 3.18 y la Ecuación 3.22, ambas incluidas.

Sin embargo, en este caso, no se disponen de los datos experimentales del módulo de creep en función del tiempo en DuPont<sup>TM</sup>. Por lo tanto, es necesario obtener el valor de  $E_{C\ 60000} / E_{C\ 0}$  a partir de dos valores del módulo de creep a dos tiempos distintos disponibles en la información del producto. Una vez se disponen dichos valores, se debe realizar una interpolación para calcular el valor que se necesita<sup>1</sup>.

Pero además, el valor disponible en la información del producto que se muestra en la Figura 5.5 no se da a las condiciones requeridas, ya que el valor a tiempo cero es de 1400 MPa, mientras que el valor de referencia es de 2780 MPa. Esta diferencia entre ambos valores se debe a las distintas condiciones empleadas para el material. En la información del producto, se observa que existen dos condiciones extremas para este material, en condiciones secas y en condiciones al 50% de humedad. El valor del módulo de tracción varía de 3100 MPa a 1400 MPa. Además, la información que se da para el módulo de creep sólo se da a dos tiempos distintos (1 h y 1000 h) y sólo a las condiciones del 50% de humedad, cuando el módulo de tracción es de 1400 MPa<sup>1</sup>.

# Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

## Product Information

**DuPont™ Zytel®**

nylon resin

**Zytel® 103HSL NC010**

Zytel® 103HSL NC010 is a heat stabilized, lubricated polyamide 66 resin for injection molding.

Property	Test Method	Units	Value	
			DAM	50%RH
<b>Identification</b>				
Resin Identification	ISO 1043		PA66	
Part Marking Code	ISO 11469		>PA66<	
<b>Mechanical</b>				
Yield Stress	ISO 527	MPa (kpsi)	85 (12.3)	55 (8.0)
Strain at Break	ISO 527	%		
50mm/min			40	>100
Nominal Strain at Break	ISO 527	%	20	>100
Yield Strain	ISO 527	%	4.5	25
Tensile Modulus	ISO 527	MPa (kpsi)	3100 (450)	1400 (200)
Tensile Creep Modulus	ISO 899	MPa (kpsi)		
1h				1190 (170)
1000h				540 (80)
Flexural Modulus	ISO 178	MPa (kpsi)	2800 (410)	1200 (174)
Notched Charpy Impact Strength	ISO 179/1eA	kJ/m <sup>2</sup>		
-30°C (-22°F)			4.5	3.5
23°C (73°F)			5.5	12
Unnotched Charpy Impact Strength	ISO 179/1eU	kJ/m <sup>2</sup>		
-30°C (-22°F)			400	NB
23°C (73°F)			NB	NB

Contact DuPont for Material Safety Data Sheet, general guides and/or additional information about ventilation, handling, purging, drying, etc.  
ISO Mechanical properties measured at 4.0mm, ISO Electrical properties measured at 2.0mm, and all ASTM properties measured at 3.2mm.  
Test temperatures are 23°C unless otherwise stated

The DuPont Oval Logo, DuPont™, The miracles of science™ and Zytel® are trademarks or registered trademarks of DuPont Company. Copyright© 2005.

050630/050630

The information provided in this data sheet corresponds to our knowledge on the subject at the date of its publication. This information may be subject to revision as new knowledge and experience becomes available. The data provided fall within the normal range of product properties and relate only to the specific material designated; these data may not be valid for such material used in combination with any other materials, additives or pigments or in any process, unless expressly indicated otherwise. The data provided should not be used to establish specification limits or used alone as the basis of design; they are not intended to substitute for any testing you may need to conduct to determine for yourself the suitability of a specific material for your particular purposes. Since DuPont cannot anticipate all variations in actual end-use conditions DuPont makes no warranties and assumes no liability in connection with any use of this information. Nothing in this publication is to be considered as a license to operate under or a recommendation to infringe any patent rights. DuPont advises you to seek independent counsel for a freedom to practice opinion on the intended application or end-use of our products. Caution Do not use this product in medical applications involving permanent implantation in the human body. For other medical applications see "DuPont Medical Caution Statement", H-50102.

Figura 5.5 - Valores de los módulos de tracción y de creep que se dan en la información del producto de DuPont™ para PA66

Para comparar los valores de la información del producto con los valores hallados a partir del modelo matemático, los valores de la información del producto se deben multiplicar por un factor denominado factor de condición. Este factor se usa para pasar los valores de las condiciones dadas en la información del producto a las condiciones de la tesis. Para conseguirlo, el factor de condición (Tabla 5.6) es el ratio entre el valor del módulo de tracción de referencia y el valor del módulo de tracción de la Figura 5.5, 1400 MPa.

El factor de condición es el factor que se usa cuando los dos valores de dicho ratio se encuentran a distintas condiciones.

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

Tabla 5.6 - Factor de condición a 23°C para PA66

$E_T$ (MPa) Información del producto	$E_T$ (MPa) Valor teórico	Factor de condición
1400	2780	1.99

De esta forma, si en la información del producto, el módulo de creep a 1 h es de 1190 MPa y a 1000 h es de 540 MPa, con la aplicación del factor de condición, los nuevos valores se presentan en la Tabla 5.7.

Tabla 5.7 - Conversión de los valores a las condiciones de la información del producto a los de la tesis para PA66

t (h)	$E_C$ (MPa) Información del producto	$E_C$ (MPa) Valores teóricos
1	1190	2363
1000	540	1072

El valor de  $E_{C\ 60000} / E_{C\ 0}$  puede calcularse por interpolación mediante la Tabla 5.8.

Tabla 5.8 - Estimación de  $E_{C\ 60000} / E_{C\ 0}$  para PA66

t (s)	$E_C$ (MPa)	$E_C / E_{C\ 0}$	$\ln(E_C / E_{C\ 0})$
3.60E+03	2363	0.850	-0.163
3.60E+06	1072	0.386	-0.953

El valor estimado de  $E_{C\ 60000} / E_{C\ 0}$  para PA66 es de 0.840.

De esta forma, el valor de  $E_{C\ 60000} / E_{C\ 0}$  se impone como 0.840 para hallar  $E_{C\ \infty} / E_{C\ 0}$  usando para tal fin la función Solver de Microsoft® Office Excel 2010.

Los valores usados para esta temperatura en este modelo matemático se presentan en la Tabla 5.9.

Tabla 5.9 - Valores usados a 23°C con el modelo convencional para PA66

$T$ (°C)	23
$E_T$ (MPa)	2780
$E_{C\ \infty} / E_{C\ 0}$	0.840
$RC$	3.03E-01
$a_T$	3.77E+00

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

En la Tabla 5.10 se presentan los coeficientes en el dominio del tiempo a 23°C para este modelo.

Tabla 5.10 - Coeficientes en el dominio del tiempo a 23°C con el modelo convencional para PA66

Término	<i>CMR</i>	<i>CT</i> (s)
1	5.83E-03	2.85E+02
2	3.69E-03	2.85E+02
3	6.42E-02	1.89E+01
4	6.25E-02	5.21E-01
5	2.28E-02	2.85E+03
6	3.42E-02	2.85E+02

En la Tabla 5.11, los módulos de creep calculados en función del tiempo a 23°C son los siguientes:

Tabla 5.11 - Valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo convencional para PA66

<i>t</i> (s)	<i>E<sub>c</sub></i> (MPa)
0	2780
155	2443
245	2426
387	2407
613	2389
969	2376
1533	2366
2424	2358
3834	2349
6063	2341
9589	2337
15166	2335
23987	2335
37937	2335
60000	2335

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

Los valores teóricos deben contrastarse con los datos experimentales para poder estimar errores. A partir de estos errores, se puede predecir si el modelo convencional se ajusta bien. Sin embargo, para hacerlo, se debe obtener previamente una curva experimental del módulo de creep.

Para ello, se realizan 5 curvas experimentales del módulo de creep y se halla la curva media usando una escala logarítmica de tiempos.

El método empieza con un módulo de creep que coincide con el módulo de tracción obtenido en el bucle de tracción para estas condiciones de temperatura y velocidad de deformación.

Para este material, la curva experimental del módulo de creep presenta el aspecto que se muestra en la Figura 5.6.

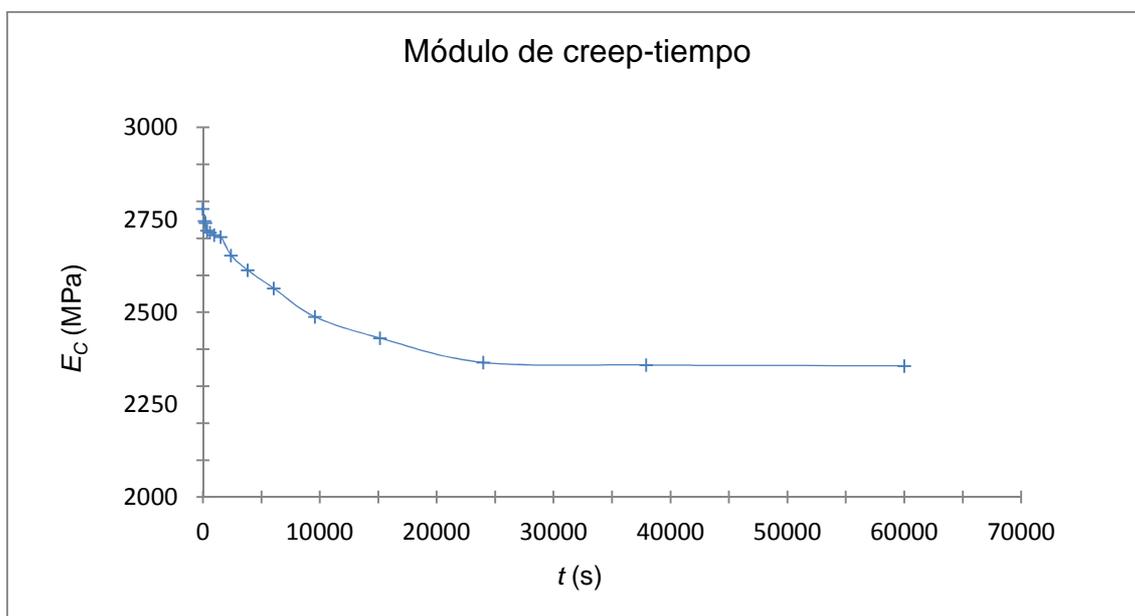


Figura 5.6 - Representación gráfica del módulo de creep para los datos experimentales a 23°C para PA66

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

En la Tabla 5.12 se comparan los datos experimentales y los valores teóricos, dando los siguientes resultados:

Tabla 5.12 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo convencional para PA66

$t$ (s)	$E_c$ (MPa) Datos experimentales	$E_c$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
0	2780	2780	0.00
155	2747	2443	11.07
245	2742	2426	11.52
387	2721	2407	11.55
613	2716	2389	12.04
969	2709	2376	12.31
1533	2704	2366	12.49
2424	2654	2358	11.16
3834	2614	2349	10.15
6063	2565	2341	8.71
9589	2488	2337	6.07
15166	2430	2335	3.90
23987	2364	2335	1.23
37937	2357	2335	0.94
60000	2355	2335	0.85

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

En la Figura 5.7 se representan los datos experimentales y los valores teóricos hallados en la Tabla 5.12 para PA66.

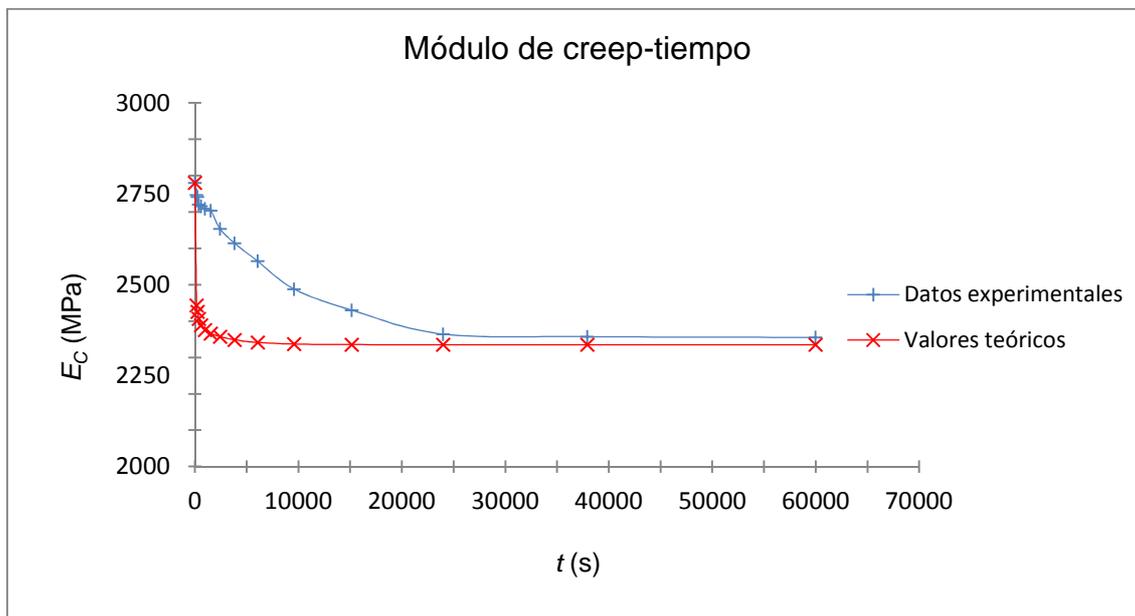


Figura 5.7 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo convencional para PA66

Para PA66, el modelo convencional para el bucle de creep en función del tiempo no se ajusta bien. Los errores son superiores al 10% en algunos casos, como se observa en la Tabla 5.12.

### 5.3 Modelos modificados

#### 5.3.1 Modelo modificado en el dominio de la frecuencia

Con el modelo modificado en el dominio de la frecuencia propuesto en el apartado 3.5.2.2, la estrategia es la misma que con el modelo convencional.

Las representaciones gráficas comparando los datos experimentales y los valores teóricos de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia en MATLAB® 7.5.0 usando la subrutina para el modelo modificado se muestran en la Figura 5.8 y en la Figura 5.9, respectivamente. La subrutina de MATLAB® 7.5.0 para este modelo se presenta en el anexo A.11.2.

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

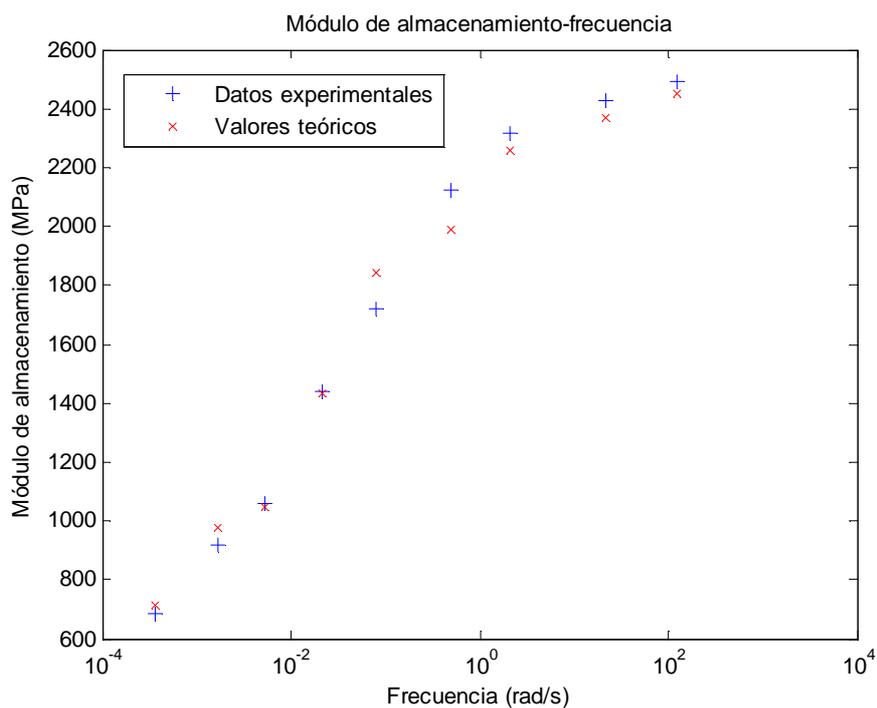


Figura 5.8 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo modificado para PA66

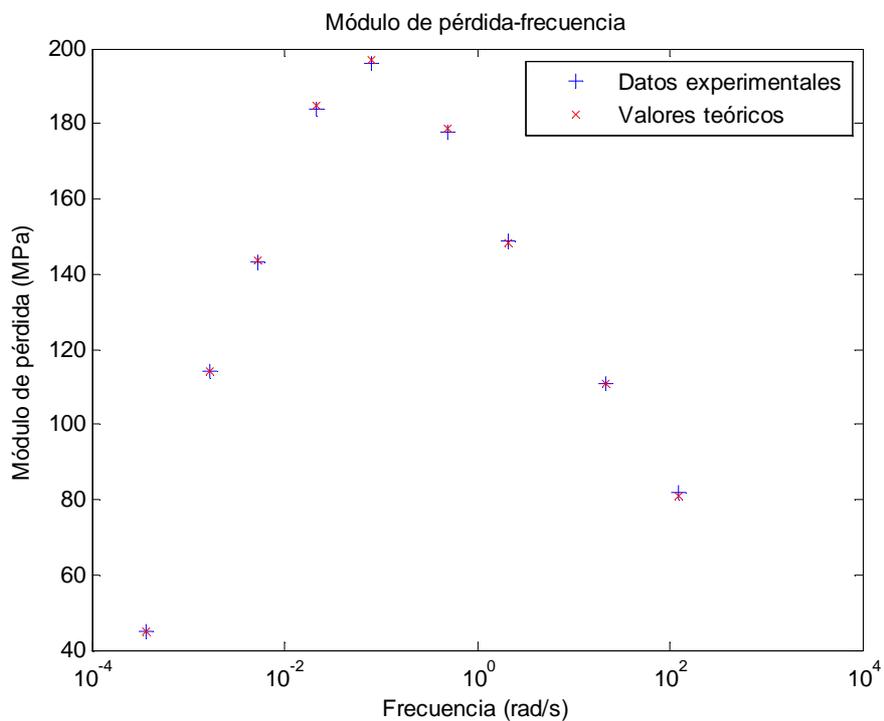


Figura 5.9 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo modificado para PA66

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

En la Tabla 5.13 se muestran los datos experimentales y los valores teóricos de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia con el modelo modificado para PA66.

Tabla 5.13 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida en función de la frecuencia con el modelo modificado para PA66

$w$ (rad/s)	$G'$ (MPa)		Error $G'$ (%)	$G''$ (MPa)		Error $G''$ (%)
	Datos experimentales	Valores teóricos		Datos experimentales	Valores teóricos	
3.58E-04	683	712	4.26	45	45	0.70
1.70E-03	920	977	6.17	114	114	0.17
5.27E-03	1060	1048	1.14	143	143	0.03
2.11E-02	1441	1435	0.43	184	185	0.66
7.96E-02	1721	1842	7.02	196	197	0.26
5.02E-01	2126	1987	6.55	178	179	0.52
2.07E+00	2318	2260	2.52	149	148	0.22
2.14E+01	2426	2367	2.45	111	111	0.56
1.26E+02	2489	2452	1.46	82	81	1.28

En la Tabla 5.14 se presentan los coeficientes ajustados para el modelo modificado en el dominio de la frecuencia.

Tabla 5.14 - Coeficientes en el dominio de la frecuencia a 30°C con el modelo modificado para PA66

Término	$p$	$\tau$ (s)	$\alpha$
1	1.75E-01	5.46E+03	1.86E+00
2	1.23E-01	5.48E+05	1.91E+00
3	1.47E-01	1.30E+00	1.36E+00
4	8.62E-02	1.74E-01	5.26E-01
5	1.50E-01	7.95E+03	1.44E-01
6	1.86E-01	3.83E+02	2.00E+00

A partir de ahí, existen dos propuestas para calcular el módulo de creep en función del tiempo, una usando la Ecuación 3.28 y otra usando la Ecuación 3.29.

### 5.3.2 Modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo, en la Tabla 5.15, se muestran los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C.

Tabla 5.15 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

$t$ (s)	$E_C$ (MPa) Datos experimentales	$E_C$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
0	2780	2780	0.00
155	2747	2622	4.55
245	2742	2615	4.60
387	2721	2605	4.26
613	2716	2590	4.63
969	2709	2571	5.10
1533	2704	2547	5.79
2424	2654	2522	4.95
3834	2614	2499	4.42
6063	2565	2477	3.42
9589	2488	2454	1.36
15166	2430	2426	0.16
23987	2364	2394	1.24
37937	2357	2361	0.15
60000	2355	2335	0.85

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

En la Figura 5.10 se representan los datos experimentales y los valores teóricos hallados en la Tabla 5.15 para PA66.

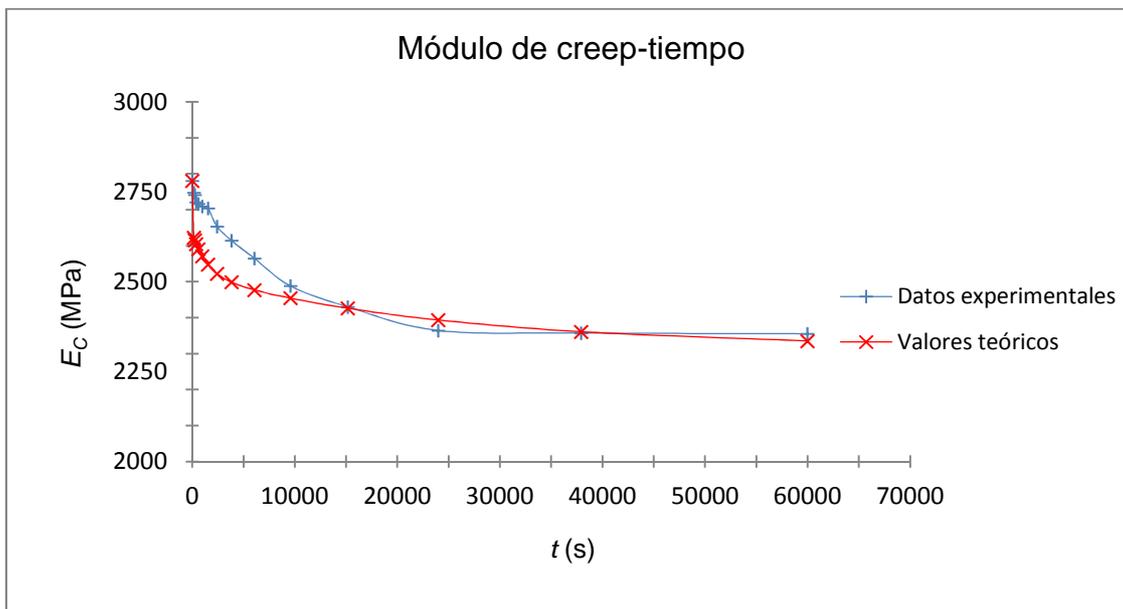


Figura 5.10 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

Para PA66, el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep en función del tiempo se ajusta suficientemente bien. Los errores son inferiores al 6% en todos los casos, como se observa en la Tabla 5.15.

### 5.3.3 Influencia de la temperatura en el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo

El procedimiento para estimar  $E_{C\infty} / E_{C0}$  a cada temperatura se describe en el apartado 3.5.2.2 usando la Ecuación 3.30 y la Ecuación 3.31. El parámetro  $RC$  a cada temperatura se obtiene a partir de la Ecuación 3.21.

Los valores usados para cada temperatura en este modelo y material se muestran en la Tabla 5.16. Los coeficientes en el dominio del tiempo en función de la temperatura para este modelo y material se presentan en la Tabla 5.17.

Los coeficientes presentados en la Tabla 5.17 se calculan mediante la Ecuación 3.22 y la Ecuación 3.26.

Tabla 5.16 - Valores usados para cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

$T$ (°C)	$E_T$ (MPa)	$E_{C\infty} / E_{C0}$	$RC$	$a_T$
23	2780	0.807	2.23E-01	3.77E+00
30	2658	0.789	2.44E-01	1.00E+00
35	2586	0.787	2.46E-01	4.02E-01
40	2439	0.779	2.55E-01	1.66E-01
45	2218	0.766	2.70E-01	7.08E-02
50	1952	0.755	2.83E-01	3.09E-02
55	1696	0.747	2.92E-01	1.68E-02
60	1446	0.750	2.89E-01	9.73E-03
65	1273	0.756	2.82E-01	5.99E-03
70	1150	0.760	2.77E-01	3.87E-03
75	1045	0.770	2.66E-01	2.60E-03
80	960	0.775	2.60E-01	1.82E-03
85	892	0.785	2.48E-01	1.31E-03
90	829	0.795	2.37E-01	9.70E-04
95	792	0.803	2.27E-01	7.36E-04
100	760	0.812	2.17E-01	5.70E-04

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

Tabla 5.17 - Coeficientes a cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

$T$ (°C)	23	30	35	40	45	50	55	60
$CMR_1$	3.90E-02	4.27E-02	4.31E-02	4.47E-02	4.73E-02	4.96E-02	5.11E-02	5.05E-02
$CT_1$ (s)	2.06E+04	5.46E+03	2.19E+03	9.08E+02	3.86E+02	1.69E+02	9.15E+01	5.31E+01
$CMR_2$	2.73E-02	2.99E-02	3.02E-02	3.13E-02	3.31E-02	3.47E-02	3.58E-02	3.54E-02
$CT_2$ (s)	2.07E+06	5.48E+05	2.20E+05	9.11E+04	3.88E+04	1.69E+04	9.18E+03	5.33E+03
$CMR_3$	3.28E-02	3.58E-02	3.62E-02	3.75E-02	3.97E-02	4.17E-02	4.29E-02	4.24E-02
$CT_3$ (s)	4.90E+00	1.30E+00	5.22E-01	2.16E-01	9.20E-02	4.02E-02	2.18E-02	1.26E-02
$CMR_4$	1.92E-02	2.10E-02	2.12E-02	2.20E-02	2.33E-02	2.44E-02	2.52E-02	2.49E-02
$CT_4$ (s)	6.58E-01	1.74E-01	7.01E-02	2.90E-02	1.23E-02	5.39E-03	2.92E-03	1.70E-03
$CMR_5$	3.34E-02	3.64E-02	3.69E-02	3.82E-02	4.04E-02	4.24E-02	4.37E-02	4.32E-02
$CT_5$ (s)	3.00E+04	7.95E+03	3.20E+03	1.32E+03	5.63E+02	2.46E+02	1.33E+02	7.74E+01
$CMR_6$	4.14E-02	4.53E-02	4.58E-02	4.74E-02	5.02E-02	5.26E-02	5.43E-02	5.36E-02
$CT_6$ (s)	1.44E+03	3.83E+02	1.54E+02	6.36E+01	2.71E+01	1.18E+01	6.41E+00	3.72E+00

Continuación

$T$ (°C)	65	70	75	80	85	90	95	100
$CMR_1$	4.93E-02	4.84E-02	4.65E-02	4.54E-02	4.34E-02	4.15E-02	3.98E-02	3.81E-02
$CT_1$ (s)	3.27E+01	2.11E+01	1.42E+01	9.92E+00	7.15E+00	5.29E+00	4.02E+00	3.11E+00
$CMR_2$	3.45E-02	3.39E-02	3.26E-02	3.18E-02	3.04E-02	2.90E-02	2.79E-02	2.66E-02
$CT_2$ (s)	3.28E+03	2.12E+03	1.43E+03	9.96E+02	7.17E+02	5.31E+02	4.03E+02	3.12E+02
$CMR_3$	4.14E-02	4.07E-02	3.91E-02	3.82E-02	3.65E-02	3.48E-02	3.34E-02	3.20E-02
$CT_3$ (s)	7.78E-03	5.02E-03	3.38E-03	2.36E-03	1.70E-03	1.26E-03	9.56E-04	7.41E-04
$CMR_4$	2.43E-02	2.39E-02	2.29E-02	2.24E-02	2.14E-02	2.04E-02	1.96E-02	1.87E-02
$CT_4$ (s)	1.04E-03	6.74E-04	4.54E-04	3.17E-04	2.28E-04	1.69E-04	1.28E-04	9.94E-05
$CMR_5$	4.22E-02	4.14E-02	3.98E-02	3.88E-02	3.71E-02	3.54E-02	3.40E-02	3.25E-02
$CT_5$ (s)	4.76E+01	3.07E+01	2.07E+01	1.45E+01	1.04E+01	7.71E+00	5.85E+00	4.53E+00
$CMR_6$	5.24E-02	5.14E-02	4.94E-02	4.82E-02	4.61E-02	4.40E-02	4.22E-02	4.04E-02
$CT_6$ (s)	2.29E+00	1.48E+00	9.96E-01	6.95E-01	5.01E-01	3.71E-01	2.81E-01	2.18E-01

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

En la Figura 5.11 se representa la variación del módulo de creep en función del tiempo para cada temperatura utilizando este modelo matemático.

Para este modelo, los valores del módulo de creep en función del tiempo se obtienen a partir de la Ecuación 3.28.

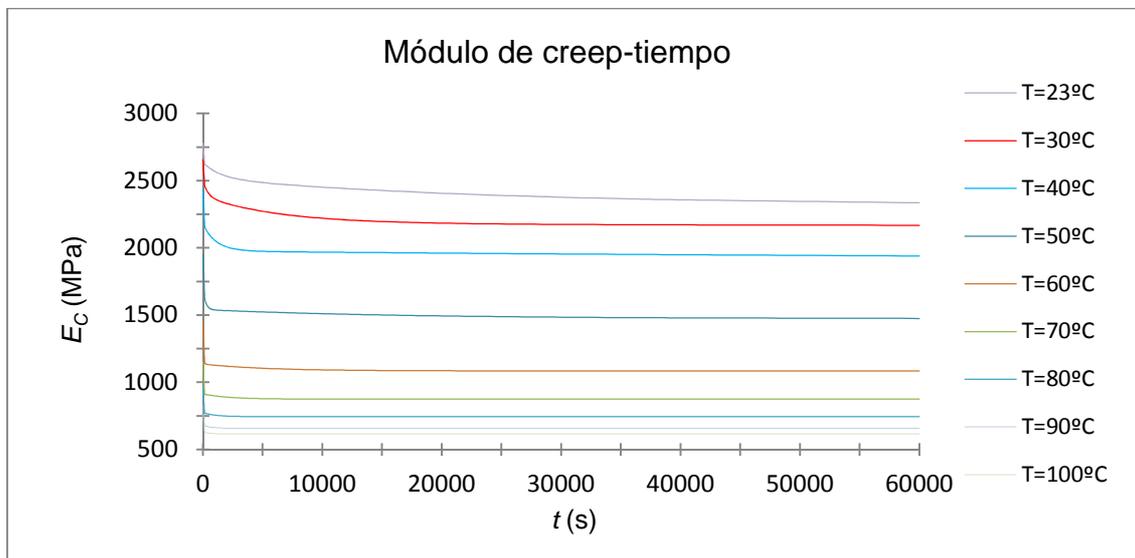


Figura 5.11 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo a cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

Para poder comparar los valores teóricos con la información del producto para el módulo de creep a 1 h y a 1000 h, se representa en la Figura 5.12 la curva maestra del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para este modelo y material.

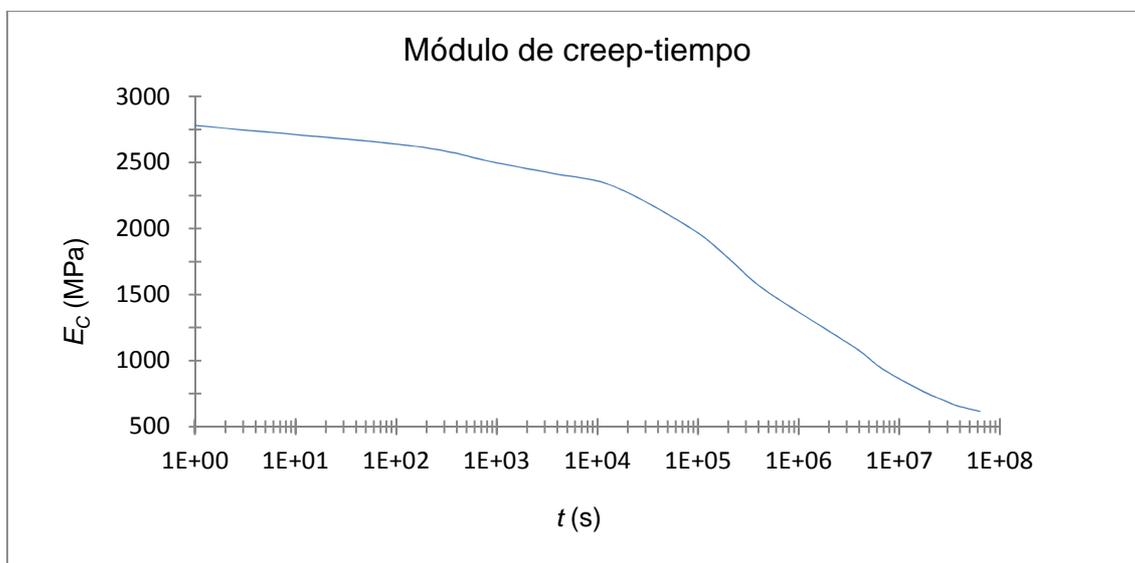


Figura 5.12 - Curva maestra a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

---

En la Tabla 5.18 se comparan los datos experimentales y los valores teóricos y se calculan los errores.

Tabla 5.18 - Errores entre los datos experimentales y los valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

t (s)	$E_c$ (MPa) Datos experimentales	$E_c$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
3.60E+03	2363	2418	2.32
3.60E+06	1072	1106	3.19

Para PA66, el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep puede usarse para caracterizar este material en función del tiempo y de la temperatura. Los errores son inferiores al 4% en todos los casos, como se observa en la Tabla 5.18.

### 5.3.4 Modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo, en la Tabla 5.19, se muestran los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C.

Tabla 5.19 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

$t$ (s)	$E_C$ (MPa) Datos experimentales	$E_C$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
0	2780	2780	0.00
155	2747	2621	4.60
245	2742	2618	4.51
387	2721	2613	3.96
613	2716	2606	4.05
969	2709	2595	4.21
1533	2704	2579	4.62
2424	2654	2556	3.68
3834	2614	2525	3.39
6063	2565	2488	3.01
9589	2488	2447	1.66
15166	2430	2409	0.87
23987	2364	2379	0.62
37937	2357	2356	0.07
60000	2355	2335	0.85

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

En la Figura 5.13 se representan los datos experimentales y los valores teóricos hallados en la Tabla 5.19 para PA66.

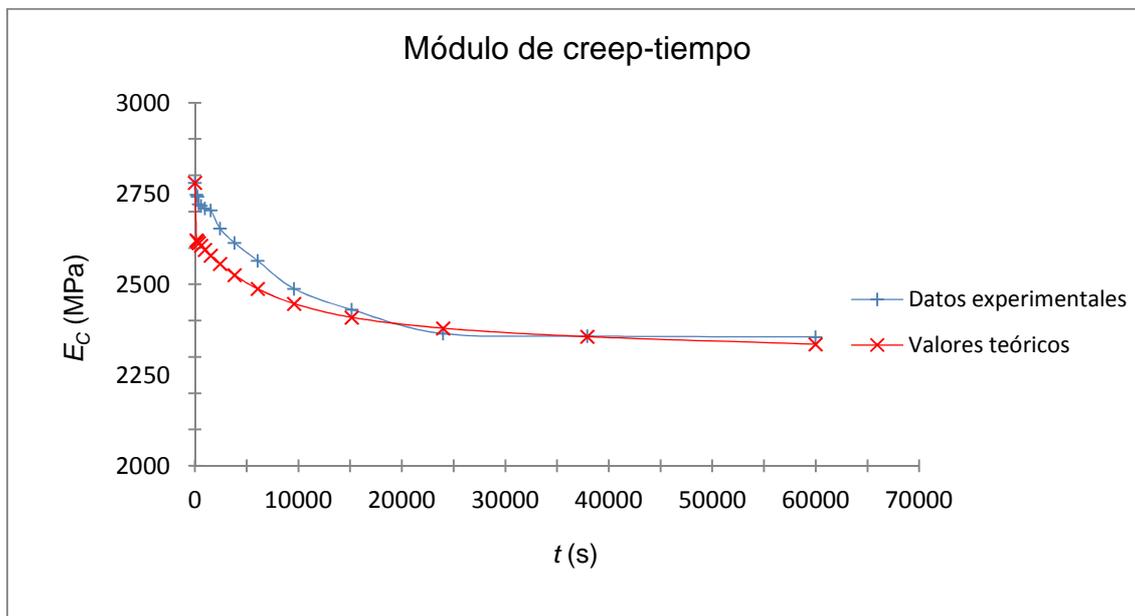


Figura 5.13 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

Para PA66, el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep en función del tiempo se ajusta suficientemente bien. Los errores son inferiores al 5% en todos los casos, como se observa en la Tabla 5.19.

### 5.3.5 Influencia de la temperatura en el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo

El procedimiento para estimar  $E_{C\infty} / E_{C0}$  a cada temperatura es el mismo que para el modelo anterior, usando la Ecuación 3.30 y la Ecuación 3.31. El parámetro  $RC$  a cada temperatura también se obtiene a partir de la Ecuación 3.21.

Los valores usados para cada temperatura en este modelo y material se muestran en la Tabla 5.20. Los coeficientes en el dominio del tiempo en función de la temperatura para este modelo y material se presentan en la Tabla 5.21.

Los coeficientes presentados en la Tabla 5.21 se calculan mediante la Ecuación 3.22 y la Ecuación 3.27.

En este caso, los coeficientes  $CT$  son los parámetros afectados por los coeficientes alfa.

Tabla 5.20 - Valores usados para cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

$T$ (°C)	$E_T$ (MPa)	$E_{C\infty} / E_{C0}$	$RC$	$a_T$
23	2780	0.795	2.37E-01	3.77E+00
30	2658	0.777	2.57E-01	1.00E+00
35	2586	0.775	2.60E-01	4.02E-01
40	2439	0.767	2.69E-01	1.66E-01
45	2218	0.755	2.83E-01	7.08E-02
50	1952	0.743	2.97E-01	3.09E-02
55	1696	0.736	3.05E-01	1.68E-02
60	1446	0.739	3.02E-01	9.73E-03
65	1273	0.745	2.95E-01	5.99E-03
70	1150	0.749	2.90E-01	3.87E-03
75	1045	0.758	2.79E-01	2.60E-03
80	960	0.763	2.73E-01	1.82E-03
85	892	0.773	2.62E-01	1.31E-03
90	829	0.783	2.51E-01	9.70E-04
95	792	0.791	2.41E-01	7.36E-04
100	760	0.799	2.32E-01	5.70E-04

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

Tabla 5.21 - Coeficientes a cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

$T$ (°C)	23	30	35	40	45	50	55	60
$CMR_1$	4.15E-02	4.51E-02	4.55E-02	4.70E-02	4.96E-02	5.19E-02	5.34E-02	5.28E-02
$CT_1$ (s)	6.48E+04	5.46E+03	9.99E+02	1.93E+02	3.93E+01	8.39E+00	2.68E+00	9.74E-01
$CMR_2$	2.90E-02	3.15E-02	3.19E-02	3.29E-02	3.47E-02	3.63E-02	3.74E-02	3.70E-02
$CT_2$ (s)	6.91E+06	5.48E+05	9.62E+04	1.78E+04	3.49E+03	7.19E+02	2.23E+02	7.92E+01
$CMR_3$	3.48E-02	3.78E-02	3.82E-02	3.95E-02	4.16E-02	4.36E-02	4.48E-02	4.43E-02
$CT_3$ (s)	7.92E+00	1.30E+00	3.76E-01	1.13E-01	3.54E-02	1.15E-02	4.98E-03	2.38E-03
$CMR_4$	2.04E-02	2.22E-02	2.24E-02	2.32E-02	2.44E-02	2.56E-02	2.63E-02	2.60E-02
$CT_4$ (s)	3.50E-01	1.74E-01	1.08E-01	6.79E-02	4.34E-02	2.81E-02	2.03E-02	1.53E-02
$CMR_5$	3.55E-02	3.85E-02	3.89E-02	4.02E-02	4.24E-02	4.44E-02	4.56E-02	4.51E-02
$CT_5$ (s)	9.63E+03	7.95E+03	6.97E+03	6.14E+03	5.42E+03	4.81E+03	4.41E+03	4.07E+03
$CMR_6$	4.40E-02	4.78E-02	4.83E-02	4.99E-02	5.26E-02	5.51E-02	5.67E-02	5.60E-02
$CT_6$ (s)	5.45E+03	3.83E+02	6.18E+01	1.06E+01	1.92E+00	3.65E-01	1.07E-01	3.62E-02

Continuación

$T$ (°C)	65	70	75	80	85	90	95	100
$CMR_1$	5.16E-02	5.07E-02	4.89E-02	4.78E-02	4.58E-02	4.39E-02	4.22E-02	4.05E-02
$CT_1$ (s)	3.94E-01	1.74E-01	8.35E-02	4.28E-02	2.32E-02	1.33E-02	7.93E-03	4.93E-03
$CMR_2$	3.61E-02	3.55E-02	3.42E-02	3.35E-02	3.21E-02	3.07E-02	2.96E-02	2.84E-02
$CT_2$ (s)	3.13E+01	1.36E+01	6.39E+00	3.22E+00	1.72E+00	9.70E-01	5.73E-01	3.52E-01
$CMR_3$	4.34E-02	4.26E-02	4.10E-02	4.01E-02	3.85E-02	3.68E-02	3.55E-02	3.40E-02
$CT_3$ (s)	1.23E-03	6.77E-04	3.95E-04	2.43E-04	1.55E-04	1.03E-04	7.08E-05	5.01E-05
$CMR_4$	2.54E-02	2.50E-02	2.41E-02	2.35E-02	2.26E-02	2.16E-02	2.08E-02	2.00E-02
$CT_4$ (s)	1.18E-02	9.41E-03	7.64E-03	6.33E-03	5.33E-03	4.55E-03	3.93E-03	3.44E-03
$CMR_5$	4.41E-02	4.34E-02	4.17E-02	4.08E-02	3.92E-02	3.75E-02	3.61E-02	3.46E-02
$CT_5$ (s)	3.80E+03	3.57E+03	3.37E+03	3.20E+03	3.05E+03	2.92E+03	2.81E+03	2.70E+03
$CMR_6$	5.48E-02	5.38E-02	5.18E-02	5.07E-02	4.86E-02	4.65E-02	4.48E-02	4.30E-02
$CT_6$ (s)	1.37E-02	5.72E-03	2.59E-03	1.26E-03	6.56E-04	3.60E-04	2.07E-04	1.24E-04

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

En la Figura 5.14 se representa la variación del módulo de creep en función del tiempo para cada temperatura utilizando este modelo matemático.

Para este modelo, los valores del módulo de creep en función del tiempo se obtienen a partir de la Ecuación 3.29.

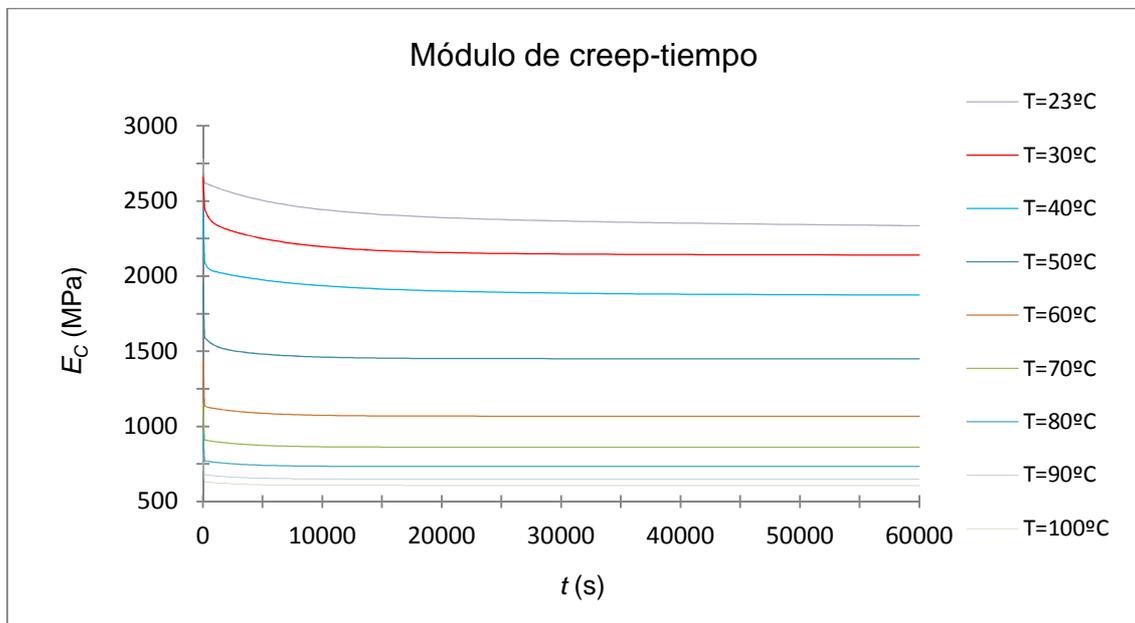


Figura 5.14 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo a cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

Para poder comparar los valores teóricos con la información del producto para el módulo de creep a 1 h y a 1000 h, se representa en la Figura 5.15 la curva maestra del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para este modelo y material.

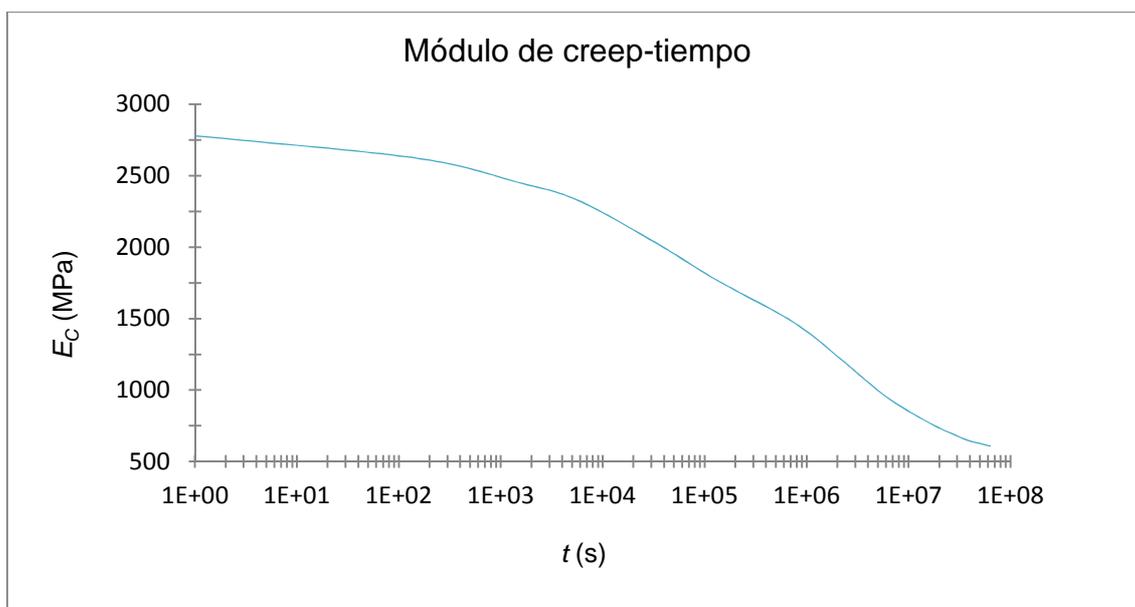


Figura 5.15 - Curva maestra a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

En la Tabla 5.22 se comparan los datos experimentales y los valores teóricos y se calculan los errores.

Tabla 5.22 - Errores entre los datos experimentales y los valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

$t$ (s)	$E_c$ (MPa)		Error (%)
	Datos experimentales	Valores teóricos	
3.60E+03	2363	2390	1.14
3.60E+06	1072	1085	1.15

Para PA66, el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep puede usarse para caracterizar este material en función del tiempo y de la temperatura. Los errores son inferiores al 2% en todos los casos, como se observa en la Tabla 5.22.

### 5.3.6 Comparación entre los dos modelos modificados

Comparando ambos métodos para este material, ambos modelos modificados, tanto el que tiene en cuenta los coeficientes alfa en el dominio del tiempo como el que no los tiene en cuenta, pueden usarse para caracterizar este material. Sin embargo, el mejor modelo es el modelo con coeficientes alfa en el dominio del tiempo.

En el fondo esto es lo lógico. Cuando el número de coeficientes se incrementa, como sucede con el modelo con coeficientes alfa en el dominio del tiempo con respecto al modelo que no presenta dichos coeficientes en dicho dominio, los errores son inferiores. De hecho, esto sucede porque hay más alternativas para los coeficientes que en el modelo sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo.

Además, estos coeficientes alfa afectan los coeficientes de tiempo. Las curvas en función de la temperatura presentan caídas más suaves con estos parámetros añadidos. La caída de los coeficientes de tiempo es menos pronunciada cuando se consideran los coeficientes alfa en el dominio del tiempo con respecto al modelo en el que estos coeficientes no se consideran en el dominio del tiempo. Por esta razón, el valor mínimo utilizado para estos parámetros es de 0.1. Sin embargo, algunos de estos parámetros presentan un valor superior a 1. Esto es para asegurar una mejor convergencia entre los datos experimentales y los valores teóricos. Esto último se puede observar con la subrutina de MATLAB®, en la que si el usuario exige que los coeficientes alfa sean todos inferiores a 1, MATLAB® 7.5.0 no presenta tan buenos ajustes como los presentados en esta tesis.

De hecho, esto es coherente. Cuanto más grande sea el rango de los parámetros, mejor se espera que sea el ajuste, siempre y cuando los parámetros presenten valores lógicos. El rango permitido de los parámetros para los ajustes de los valores teóricos se considera lógico dentro del rango de trabajo para el tiempo y para la temperatura.

### 5.4 Simulaciones de los tests de creep

Para todas las simulaciones de los tests de creep de esta tesis se programan dos códigos.

El primer código hace referencia al modelo modificado en el que no se consideran los coeficientes alfa en el dominio del tiempo. En este caso, no es necesario escribir los coeficientes para cada temperatura, ya que ANSYS® 12.1 Academic Teaching tiene la posibilidad de usar la Ecuación 2.27 y la Ecuación 2.28 en función de la temperatura. Los únicos coeficientes que el usuario debe introducir son aquéllos cuya temperatura es la de referencia (30°C), es decir, aquéllos en los que el factor de desplazamiento es 1.

El segundo código hace referencia al modelo modificado en el que sí se consideran los coeficientes alfa en el dominio del tiempo. En este caso, el usuario debe introducir los coeficientes a cada temperatura, ya que ANSYS® 12.1 Academic Teaching no tiene en cuenta estos coeficientes alfa cuando aplica los modelos viscoelásticos que tiene implementados.

Para todas las simulaciones de los tests de creep de esta tesis se evalúan dos casos. El primer caso corresponde a datos de entrada cuyo resultado de módulo de creep puede ser comparado con un dato experimental y un valor teórico. El segundo caso usa datos de entrada que no se han usado previamente.

#### 5.4.1 Simulaciones sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para PA66, las líneas que se deben modificar con respecto al código general presentado en el anexo A.1.2.1 se muestran a continuación para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep.

Los coeficientes que se deben introducir en ANSYS® 12.1 Academic Teaching son los coeficientes a 30°C mostrados en la Tabla 5.17.

```
Línea 7      /FILENAME,CreepPA66SinAlfas
Línea 8      /TITLE,CreepPA66SinAlfas
Línea 12     R,1,4,1
Línea 15     MPDATA,EX,1,1,2780,2658,2586,2439,2218,1952
Línea 18     MPDATA,EX,1,7,1696,1446,1273,1150,1045,960
Línea 21     MPDATA,EX,1,13,892,829,792,760
Línea 24     TB,DATA,1,4.27E-02,5.46E+03,2.99E-02,5.48E+05,3.58E-02,1.30E+00
Línea 25     TB,DATA,7,2.10E-02,1.74E-01,3.64E-02,7.95E+03,4.53E-02,3.83E+02
Línea 26     *IF,T,LE,50,THEN
Línea 27         TB,SHIFT,1,1,2,TN
Línea 28         TB,DATA,1,303,141473/8.314/2.303
Línea 29     *ELSE
Línea 30         TB,SHIFT,1,1,3,WLF
Línea 31         TB,DATA,1,303,6.00,59.47
Línea 32     *ENDIF
Línea 71     F,2,FX,400/10.5/2/2
Línea 72     F,27,FX,400/10.5/2,,36,1
Línea 98     SAVE,CreepPA66SinAlfas.db
```

Se simulan dos casos. Para el caso 1, los resultados se muestran en la Tabla 5.23 y la representación gráfica en la Figura 5.16. Para el caso 2, los resultados se muestran en la Tabla 5.24 y la representación gráfica en la Figura 5.17.

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

### Caso 1

Temperatura = 23°C

Tiempo de creep = 60000 s

Tabla 5.23 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

TIME	2 UX UX	159 S X SX average	4 PROD Extension	5 QUOT EC
600	0.469272E-01	9.67973	0.938543E-01	2578.39
1200	0.478945E-01	9.67906	0.957890E-01	2526.14
2400	0.487365E-01	9.67851	0.974730E-01	2482.35
4800	0.494737E-01	9.67804	0.989475E-01	2445.25
9600	0.504219E-01	9.67745	0.100844	2399.12
15600	0.511880E-01	9.67699	0.102376	2363.10
21600	0.516668E-01	9.67671	0.103334	2341.13
27600	0.519701E-01	9.67655	0.103940	2327.43
33600	0.521651E-01	9.67644	0.104330	2318.71
39600	0.522927E-01	9.67638	0.104585	2313.03
45600	0.523778E-01	9.67633	0.104756	2309.26
51600	0.524362E-01	9.67630	0.104872	2306.68
57600	0.524775E-01	9.67628	0.104955	2304.86
60000	0.524907E-01	9.67628	0.104981	2304.29

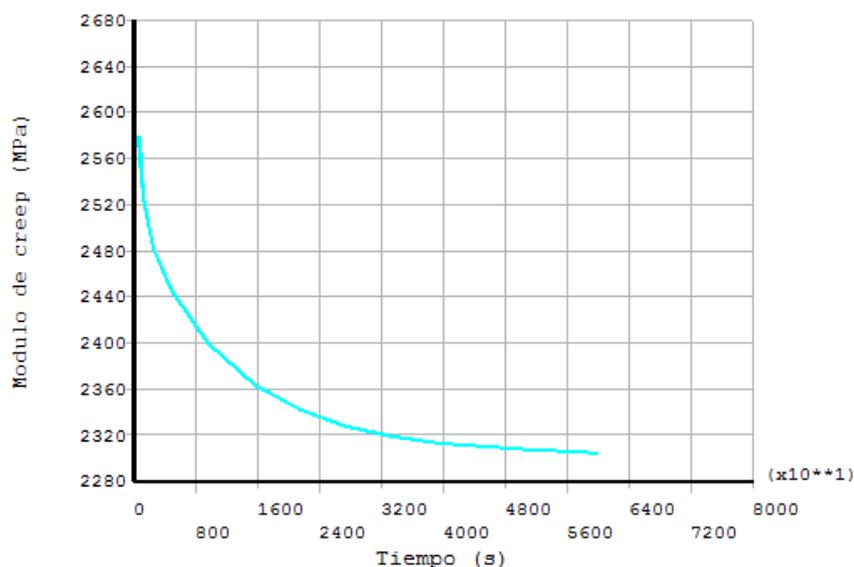


Figura 5.16 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

### Caso 2

Temperatura = 52.5°C

Tiempo de creep = 10000 s

Tabla 5.24 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

TIME	2 UX UX	159 S X SX average	4 PROD Extension	5 QUOT EC
100	0.752403E-01	9.67812	0.150481	1607.87
200	0.774308E-01	9.67723	0.154862	1562.24
400	0.792305E-01	9.67654	0.158461	1526.64
800	0.799963E-01	9.67628	0.159993	1511.99
1600	0.802353E-01	9.67620	0.160471	1507.47
2600	0.804216E-01	9.67613	0.160843	1503.97
3600	0.805924E-01	9.67607	0.161185	1500.77
4600	0.807504E-01	9.67601	0.161501	1497.83
5600	0.808966E-01	9.67596	0.161793	1495.11
6600	0.810317E-01	9.67591	0.162063	1492.61
7600	0.811567E-01	9.67587	0.162313	1490.31
8600	0.812724E-01	9.67583	0.162545	1488.18
9600	0.813794E-01	9.67579	0.162759	1486.22
10000	0.814192E-01	9.67578	0.162838	1485.49

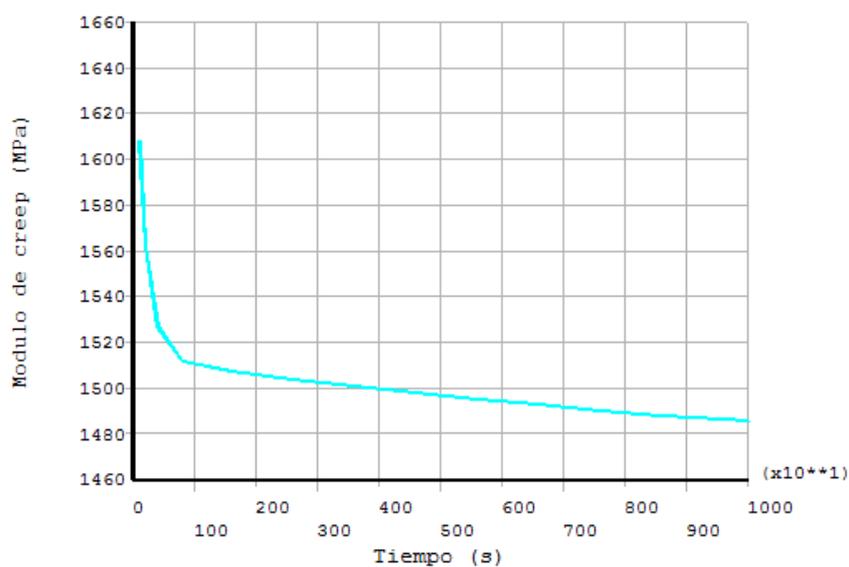


Figura 5.17 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

---

En el caso 1, el módulo de creep a 60000 segundos que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 2304 MPa, mientras que el mismo parámetro a 60000 segundos usando el modelo matemático presenta un valor de 2335 MPa. El coeficiente de variación es de 0.94%. El dato experimental presenta un valor de 2355 MPa. El coeficiente de variación con dicho dato es de 1.55%.

En el caso 2, el módulo de creep a 10000 segundos que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 1485 MPa.

### 5.4.2 Simulaciones con coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para PA66, las líneas que se deben modificar con respecto al código general presentado en el anexo A.1.2.2 se muestran a continuación para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep.

Los valores del espesor, de los módulos de tracción y de la fuerza aplicada son los mismos que para el modelo anterior.

Línea 2	Esta línea no existe
Línea 7	/FILENAME,CreepPA66ConAlfas
Línea 8	/TITLE,CreepPA66ConAlfas
De la línea 23 a la 32	Estas líneas no existen
Línea 98	SAVE,CreepPA66ConAlfas,db

La tabla de coeficientes a introducir en ANSYS® 12.1 Academic Teaching se presenta para cada temperatura en la Tabla 5.25.

Estos coeficientes deben ser introducidos manualmente puesto que los coeficientes alfa no se incluyen en ningún modelo propuesto por el simulador. Como se observa, la Tabla 5.25 es muy similar a la Tabla 5.21. Sólo los valores de las temperaturas (debido a las unidades) no presentan el mismo valor.

Se simulan los mismos casos que para el modelo sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo. Para el caso 1, los resultados se muestran en la Tabla 5.26 y la representación gráfica en la Figura 5.18. Para el caso 2, los resultados se muestran en la Tabla 5.27 y la representación gráfica en la Figura 5.19.

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

Tabla 5.25 - Coeficientes introducidos en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

296	303	308	313	318	323	328	333
4.15E-02	4.51E-02	4.55E-02	4.70E-02	4.96E-02	5.19E-02	5.34E-02	5.28E-02
6.48E+04	5.46E+03	9.99E+02	1.93E+02	3.93E+01	8.39E+00	2.68E+00	9.74E-01
2.90E-02	3.15E-02	3.19E-02	3.29E-02	3.47E-02	3.63E-02	3.74E-02	3.70E-02
6.91E+06	5.48E+05	9.62E+04	1.78E+04	3.49E+03	7.19E+02	2.23E+02	7.92E+01
3.48E-02	3.78E-02	3.82E-02	3.95E-02	4.16E-02	4.36E-02	4.48E-02	4.43E-02
7.92E+00	1.30E+00	3.76E-01	1.13E-01	3.54E-02	1.15E-02	4.98E-03	2.38E-03
2.04E-02	2.22E-02	2.24E-02	2.32E-02	2.44E-02	2.56E-02	2.63E-02	2.60E-02
3.50E-01	1.74E-01	1.08E-01	6.79E-02	4.34E-02	2.81E-02	2.03E-02	1.53E-02
3.55E-02	3.85E-02	3.89E-02	4.02E-02	4.24E-02	4.44E-02	4.56E-02	4.51E-02
9.63E+03	7.95E+03	6.97E+03	6.14E+03	5.42E+03	4.81E+03	4.41E+03	4.07E+03
4.40E-02	4.78E-02	4.83E-02	4.99E-02	5.26E-02	5.51E-02	5.67E-02	5.60E-02
5.45E+03	3.83E+02	6.18E+01	1.06E+01	1.92E+00	3.65E-01	1.07E-01	3.62E-02

Continuación

338	343	348	353	358	363	368	373
5.16E-02	5.07E-02	4.89E-02	4.78E-02	4.58E-02	4.39E-02	4.22E-02	4.05E-02
3.94E-01	1.74E-01	8.35E-02	4.28E-02	2.32E-02	1.33E-02	7.93E-03	4.93E-03
3.61E-02	3.55E-02	3.42E-02	3.35E-02	3.21E-02	3.07E-02	2.96E-02	2.84E-02
3.13E+01	1.36E+01	6.39E+00	3.22E+00	1.72E+00	9.70E-01	5.73E-01	3.52E-01
4.34E-02	4.26E-02	4.10E-02	4.01E-02	3.85E-02	3.68E-02	3.55E-02	3.40E-02
1.23E-03	6.77E-04	3.95E-04	2.43E-04	1.55E-04	1.03E-04	7.08E-05	5.01E-05
2.54E-02	2.50E-02	2.41E-02	2.35E-02	2.26E-02	2.16E-02	2.08E-02	2.00E-02
1.18E-02	9.41E-03	7.64E-03	6.33E-03	5.33E-03	4.55E-03	3.93E-03	3.44E-03
4.41E-02	4.34E-02	4.17E-02	4.08E-02	3.92E-02	3.75E-02	3.61E-02	3.46E-02
3.80E+03	3.57E+03	3.37E+03	3.20E+03	3.05E+03	2.92E+03	2.81E+03	2.70E+03
5.48E-02	5.38E-02	5.18E-02	5.07E-02	4.86E-02	4.65E-02	4.48E-02	4.30E-02
1.37E-02	5.72E-03	2.59E-03	1.26E-03	6.56E-04	3.60E-04	2.07E-04	1.24E-04

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

### Caso 1

Temperatura = 23°C

Tiempo de creep = 60000 s

Tabla 5.26 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

TIME	2 UX UX	159 S X SX average	4 PROD Extension	5 QUOT EC
600	0.461974E-01	9.68024	0.923948E-01	2619.26
1200	0.464994E-01	9.68003	0.929987E-01	2602.19
2400	0.470345E-01	9.67965	0.940690E-01	2572.49
4800	0.478810E-01	9.67906	0.957619E-01	2526.86
9600	0.489739E-01	9.67834	0.979478E-01	2470.28
15600	0.497278E-01	9.67786	0.994557E-01	2432.71
21600	0.501606E-01	9.67760	0.100321	2411.65
27600	0.504410E-01	9.67744	0.100882	2398.20
33600	0.506431E-01	9.67732	0.101286	2388.61
39600	0.508013E-01	9.67723	0.101603	2381.14
45600	0.509326E-01	9.67715	0.101865	2374.99
51600	0.510457E-01	9.67709	0.102091	2369.71
57600	0.511455E-01	9.67703	0.102291	2365.07
60000	0.511824E-01	9.67701	0.102365	2363.36

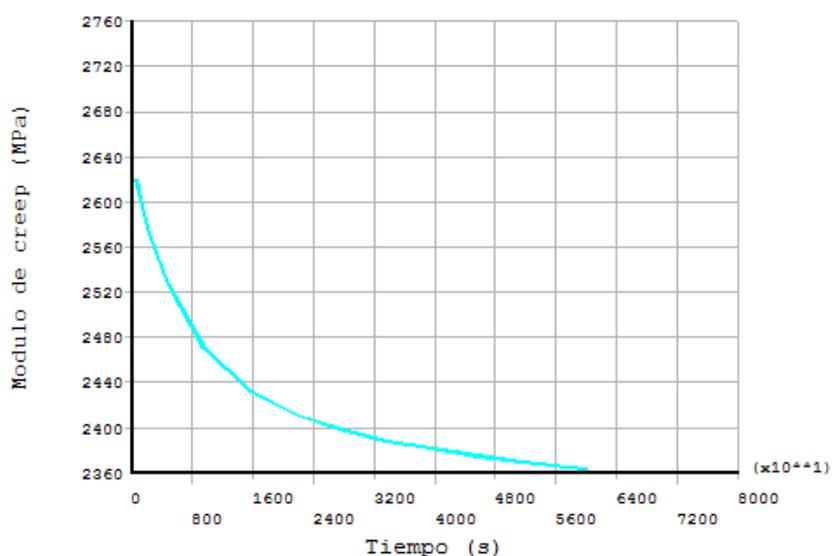


Figura 5.18 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

### Caso 2

Temperatura = 52.5°C

Tiempo de creep = 10000 s

Tabla 5.27 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

TIME	2 UX UX	159 S X SX average	4 PROD Extension	5 QUOT EC
100	0.800764E-01	9.67626	0.160153	1510.47
200	0.807315E-01	9.67602	0.161463	1498.18
400	0.817450E-01	9.67566	0.163490	1479.55
800	0.830108E-01	9.67522	0.166022	1456.92
1600	0.842105E-01	9.67482	0.168421	1436.11
2600	0.849704E-01	9.67457	0.169941	1423.23
3600	0.855027E-01	9.67440	0.171005	1414.34
4600	0.859248E-01	9.67427	0.171850	1407.37
5600	0.862674E-01	9.67416	0.172535	1401.77
6600	0.865464E-01	9.67407	0.173093	1397.24
7600	0.867739E-01	9.67400	0.173548	1393.56
8600	0.869592E-01	9.67394	0.173918	1390.59
9600	0.871103E-01	9.67390	0.174221	1388.17
10000	0.871625E-01	9.67388	0.174325	1387.33

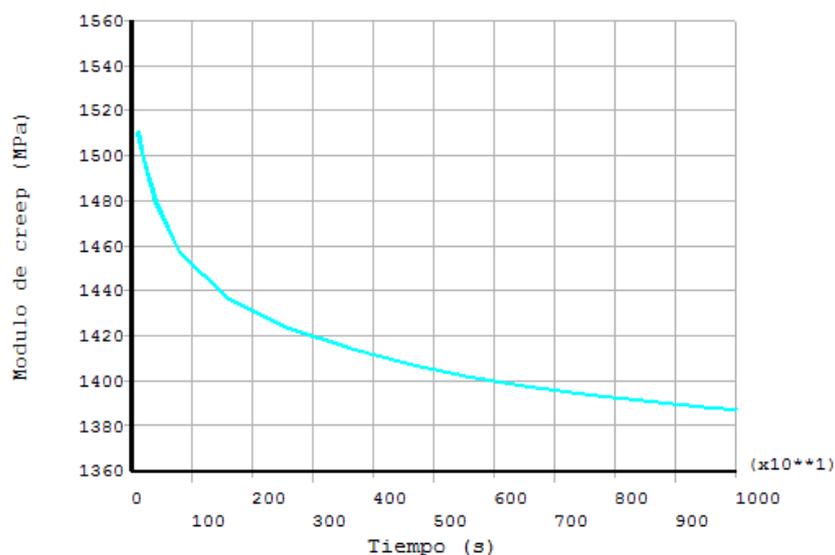


Figura 5.19 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66

## Capítulo 5 - Bucle de creep para PA66

---

En el caso 1, el módulo de creep a 60000 segundos que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 2363 MPa, mientras que el mismo parámetro a 60000 segundos usando el modelo matemático presenta un valor de 2335 MPa. El coeficiente de variación es de 0.85%. El dato experimental presenta un valor de 2355 MPa. El coeficiente de variación con dicho dato es de 0.24%.

En el caso 2, el módulo de creep a 10000 segundos que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 1387 MPa.



### 6 Bucle de tracción para PA6-MD40

El procedimiento del bucle de tracción para PA6-MD40 es el mismo que el presentado para PA66 en el capítulo 4. Por esta razón, en este capítulo sólo se añadirán algunas explicaciones y comentarios puntuales.

#### 6.1 Barrido de amplitudes

Los barridos de amplitudes para el módulo de almacenamiento, el módulo de pérdida y la tangente del ángulo de fase para PA6-MD40 se presentan en la Figura 6.1, en la Figura 6.2 y en la Figura 6.3, respectivamente.

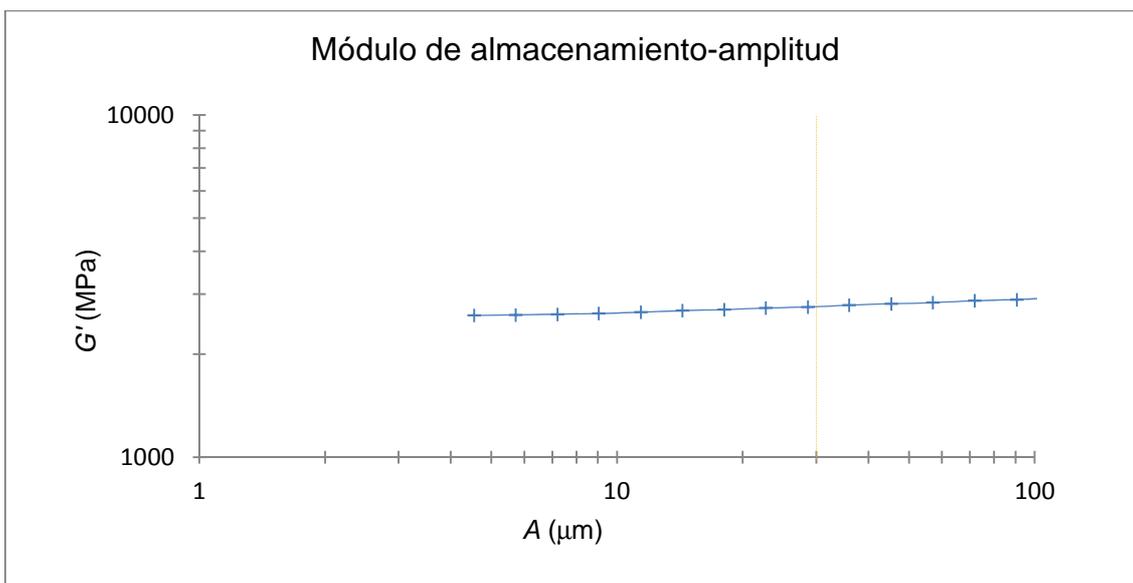


Figura 6.1 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la amplitud para PA6-MD40

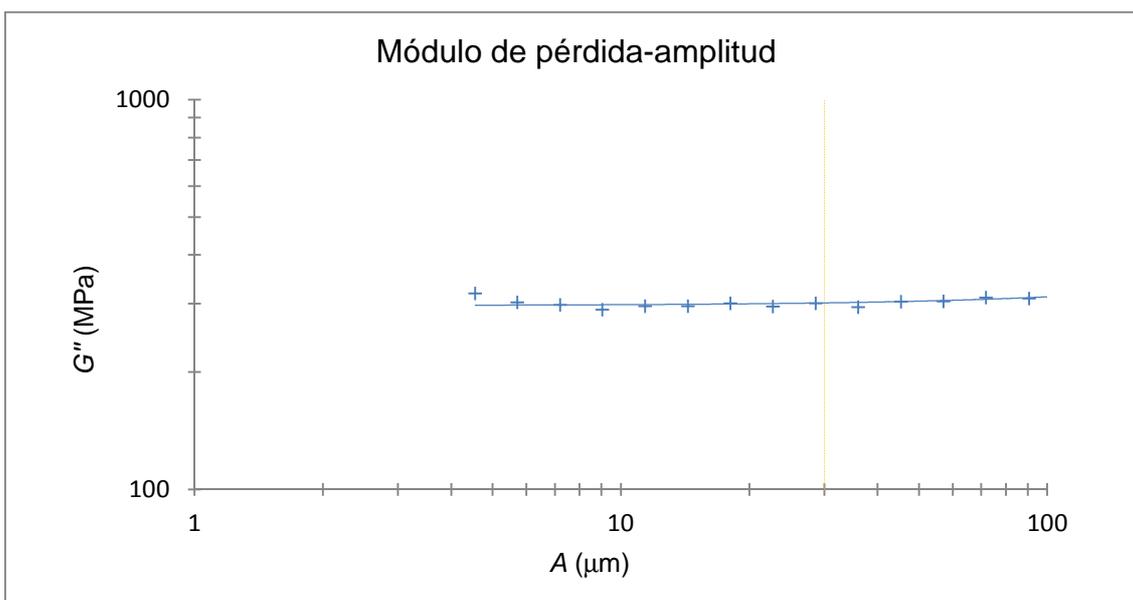


Figura 6.2 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la amplitud para PA6-MD40

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

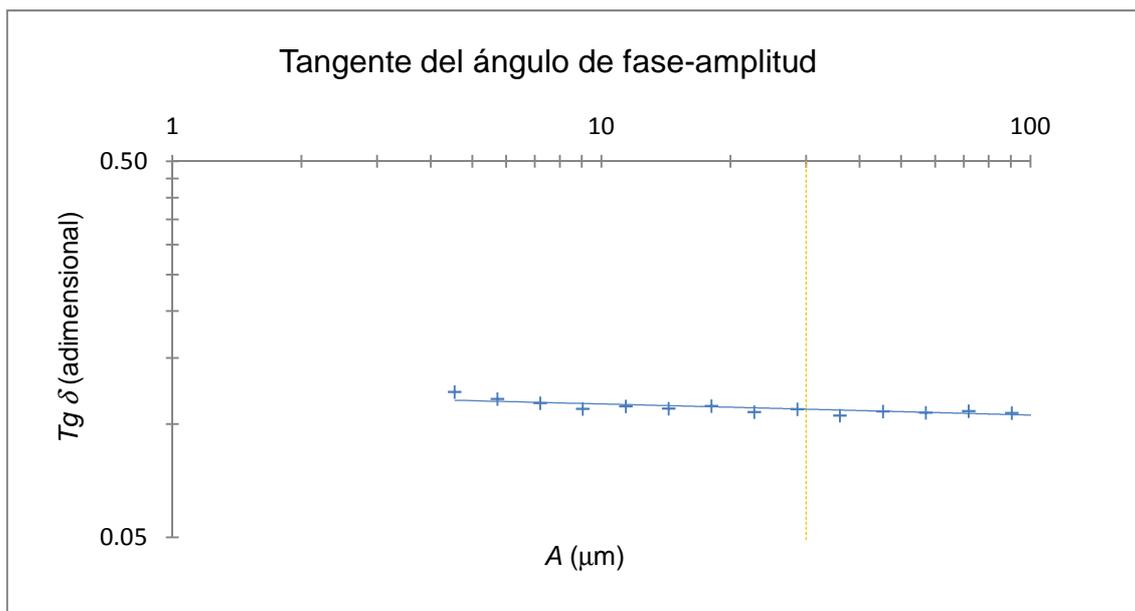


Figura 6.3 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la amplitud para PA6-MD40

Para PA6-MD40 la amplitud para realizar los ensayos posteriores es de 30  $\mu\text{m}$ .

En la Figura 6.4 se representa la variación del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación obtenida a partir del barrido de amplitudes para PA6-MD40.

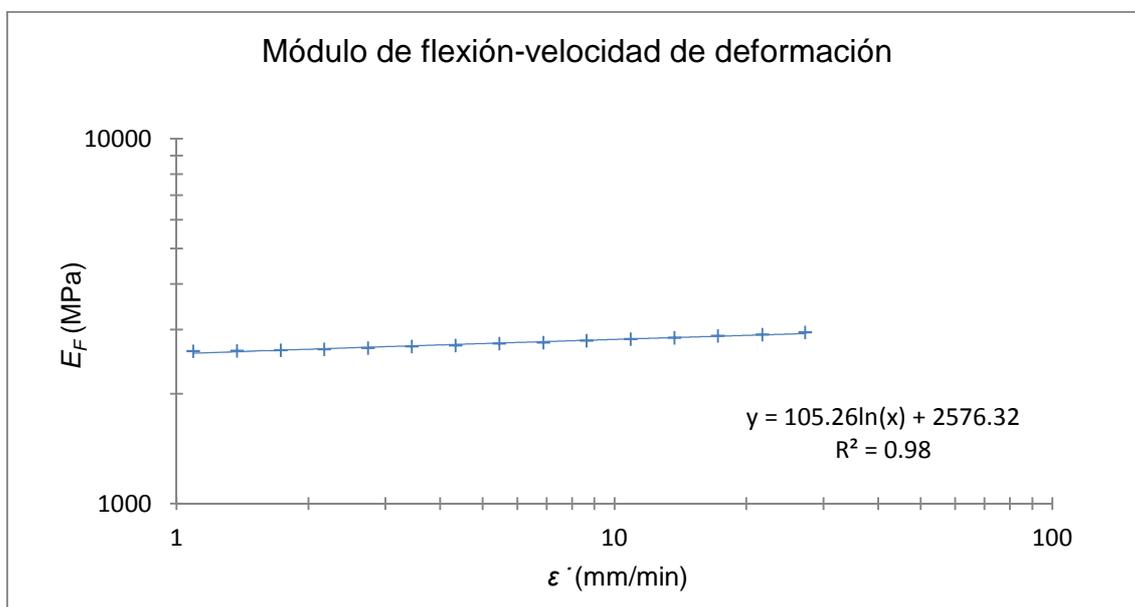


Figura 6.4 - Representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación a partir del barrido de amplitudes para PA6-MD40

Se confirma la tendencia logarítmica entre el módulo de flexión y la velocidad de deformación para PA6-MD40.

### 6.2 Barrido de temperaturas

Los barridos de temperaturas para el módulo de almacenamiento, el módulo de pérdida y la tangente del ángulo de fase para PA6-MD40 se presentan en la Figura 6.5, en la Figura 6.6 y en la Figura 6.7, respectivamente.

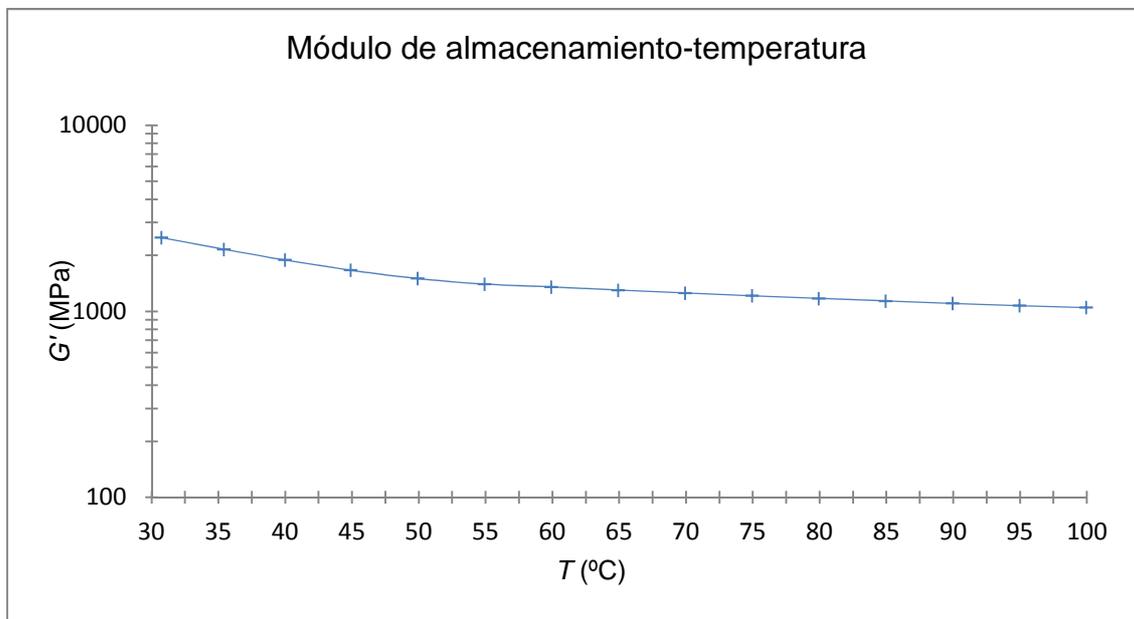


Figura 6.5 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la temperatura para PA6-MD40

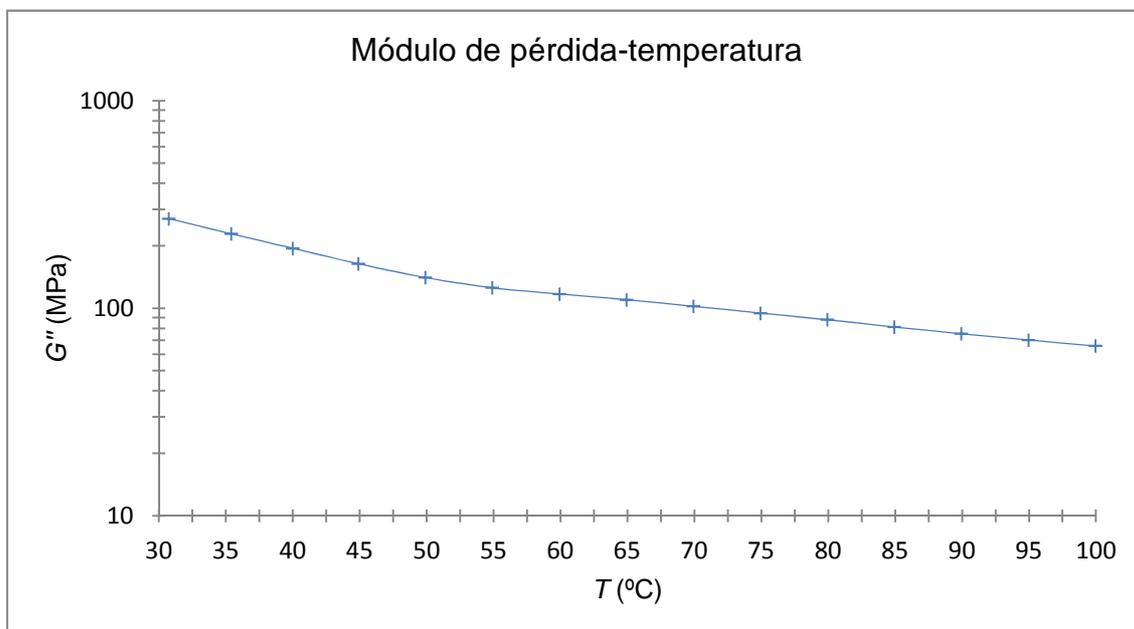


Figura 6.6 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la temperatura para PA6-MD40

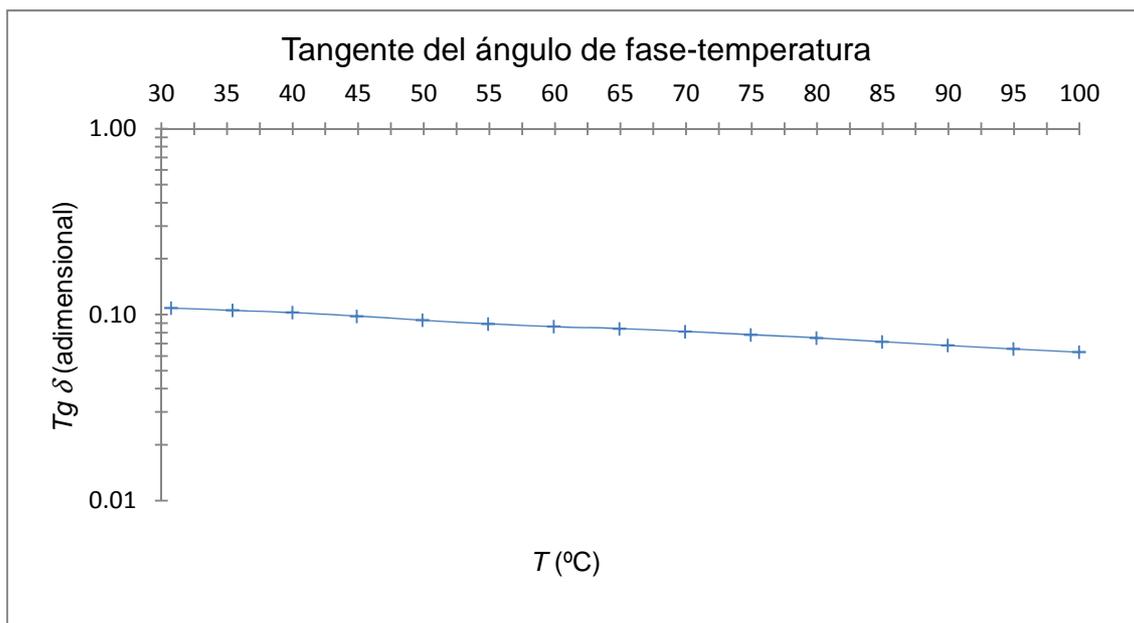


Figura 6.7 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la temperatura para PA6-MD40

Sin embargo, como se observa con los datos experimentales, para PA6-MD40, y en estas condiciones, no hay ningún máximo ni en el módulo de pérdida ni en la tangente del ángulo de fase. Como se explica en el apartado 3.5.1.1, esto significa que no hay subrangos para este material. Para este caso, teniendo en cuenta la Figura 6.6, parece que el máximo en el módulo de pérdida debe ser inferior a 30°C, la temperatura mínima del rango de temperaturas, debido a que el posible máximo en el módulo de pérdida se debe encontrar, si existe, de acuerdo a la Figura 6.6, a una temperatura inferior a la mínima. Por lo tanto, sólo se utiliza una función de desplazamiento para este material, la ecuación de Williams-Landel-Ferry (WLF).

Pero hay otro problema adicional. Una de las particularidades de este método es la necesidad de predecir  $E_F$  a 23°C, a partir de  $E_F$  a 30°C. A pesar de que es una extrapolación, esta extrapolación se puede hacer si la pendiente pronunciada del módulo de almacenamiento en función de la temperatura se encuentra dentro del rango de temperaturas que se ha estudiado, porque esto significaría que fuera de dicho rango, dicha pendiente se puede predecir fácilmente si la variación no es tan grande, como sucedía para PA66. Sin embargo, para este material, si se observa el módulo de almacenamiento en función de la temperatura, parece claro que hay una tendencia a un cambio brusco de la pendiente del módulo de almacenamiento a 30°C que sigue a temperaturas más bajas, fuera del rango de temperatura experimentado.  $E_T$  a 23°C se puede predecir, como siempre, pero en este caso, el error puede aumentar mucho a altas velocidades de deformación. Con el fin de evitar esto, es importante ajustar el modelo en un rango de temperaturas que contenga un máximo en el módulo de pérdida, un máximo en la tangente del ángulo de fase y la pendiente más pronunciada del módulo de almacenamiento. Si no es así, el modelo puede generar dificultades en sus ajustes y, de esta manera, también puede acarrear errores de mayor magnitud.

Concluyendo, y en este caso en concreto, donde no se puede definir un máximo en el módulo de pérdida en función de la temperatura, el método presentará problemas. Esto

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

implicará que el modelo no se ajustará adecuadamente a los datos experimentales. Además, los errores entre los datos experimentales y los valores teóricos serán mayores.

### 6.3 Barrido de frecuencias

Para PA6-MD40, no se encuentra un máximo en función de la temperatura. Esto implica que, en principio, no se pueden esperar encontrar máximos en el módulo de pérdida en el barrido de frecuencias para el rango de temperaturas que se estudian.

Los barridos de frecuencias para el módulo de almacenamiento, el módulo de pérdida y la tangente del ángulo de fase para PA6-MD40 se presentan en la Figura 6.8, en la Figura 6.9 y en la Figura 6.10, respectivamente.

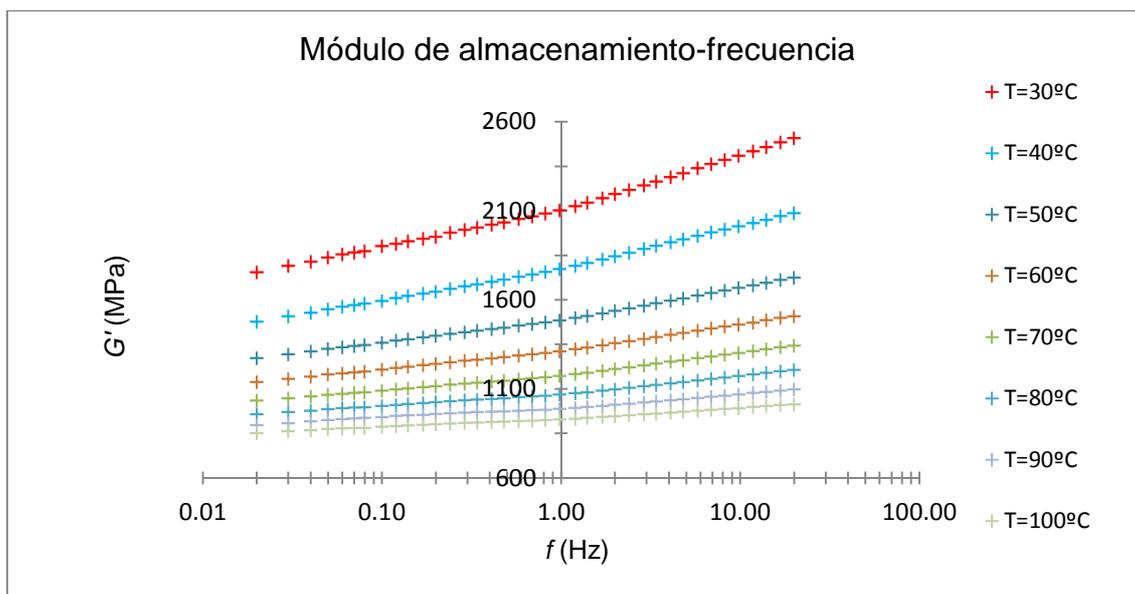


Figura 6.8 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para PA6-MD40

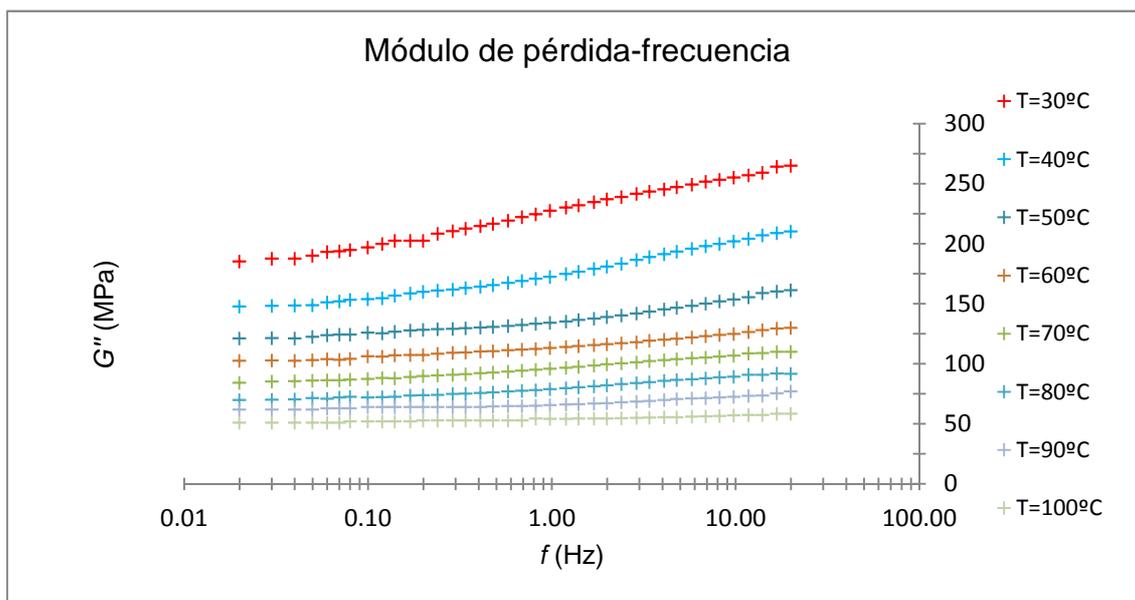


Figura 6.9 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia PA6-MD40

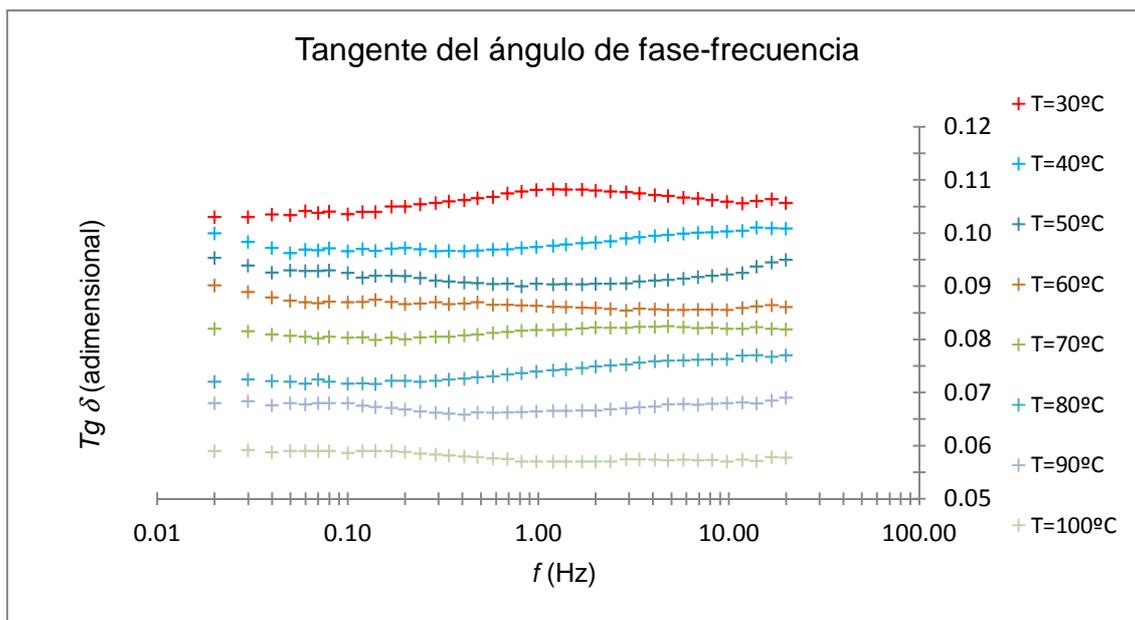


Figura 6.10 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia para PA6-MD40

Como se esperaba, no hay máximos en el módulo de pérdida en función de la frecuencia para el rango de temperatura experimentado. Por lo tanto, se puede concluir que, para este material, era lógico que en el barrido de temperaturas, no se encontraran máximos en el módulo de pérdida. Sin embargo, si se continúa con la caracterización, se observará lo que sucede cuando el rango de temperaturas elegido no contiene un máximo en el módulo de pérdida en función de la frecuencia, necesario de acuerdo con los modelos matemáticos del módulo de pérdida en función de la frecuencia, donde dicha función presenta un máximo para este parámetro.

Para este material, la representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación para cada temperatura se muestra en la Figura 6.11.

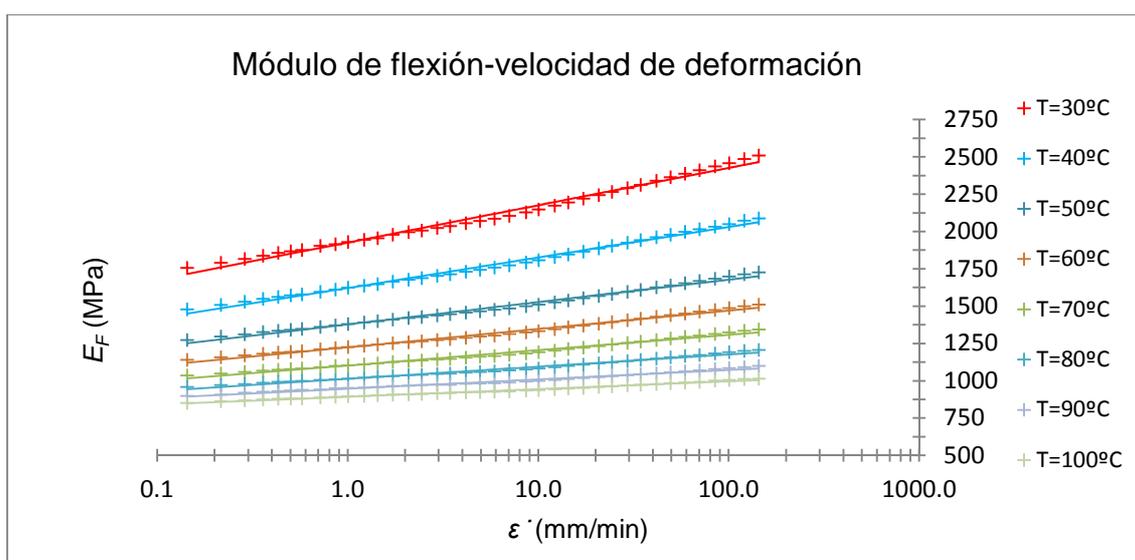


Figura 6.11 - Representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación a partir del barrido de frecuencias para PA6-MD40

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

Para PA6-MD40,  $PENDE_F$  y el módulo de flexión a 1 mm/min en función de la temperatura se muestra en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1 - Pendiente y término independiente del ajuste logarítmico entre el módulo de flexión y la velocidad de deformación para PA6-MD40

$T$ (°C)	$PENDE_F$ (MPa/(mm/min))	$E_F$ (MPa) 1 mm/min
30	109	1926
35	101	1807
40	89	1621
45	75	1481
50	65	1377
55	58	1295
60	54	1224
65	49	1159
70	45	1102
75	40	1054
80	35	1013
85	32	978
90	27	946
95	25	918
100	23	892

### 6.4 Factor de desplazamiento

Para este material, se debe usar todo el rango de temperaturas a la vez, de 30°C a 100°C. Esto se debe al hecho de que no existe máximo en el módulo de pérdida en función de la frecuencia para los rangos de frecuencia y temperatura experimentados. Como se usa todo el rango de temperaturas a la vez, sólo se debe usar una función de desplazamiento. La función de desplazamiento que se usa es la ecuación WLF porque de acuerdo a la experimentación, parece que la existencia de dicho máximo se debería situar a una temperatura inferior a 30°C.

Los coeficientes de la ecuación WLF son 9.00 para  $C_1$  y 51.00 para  $C_2$ .

En la Figura 6.12 se representa la linealización de la ecuación WLF, correspondiente a todo el rango de temperaturas.

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

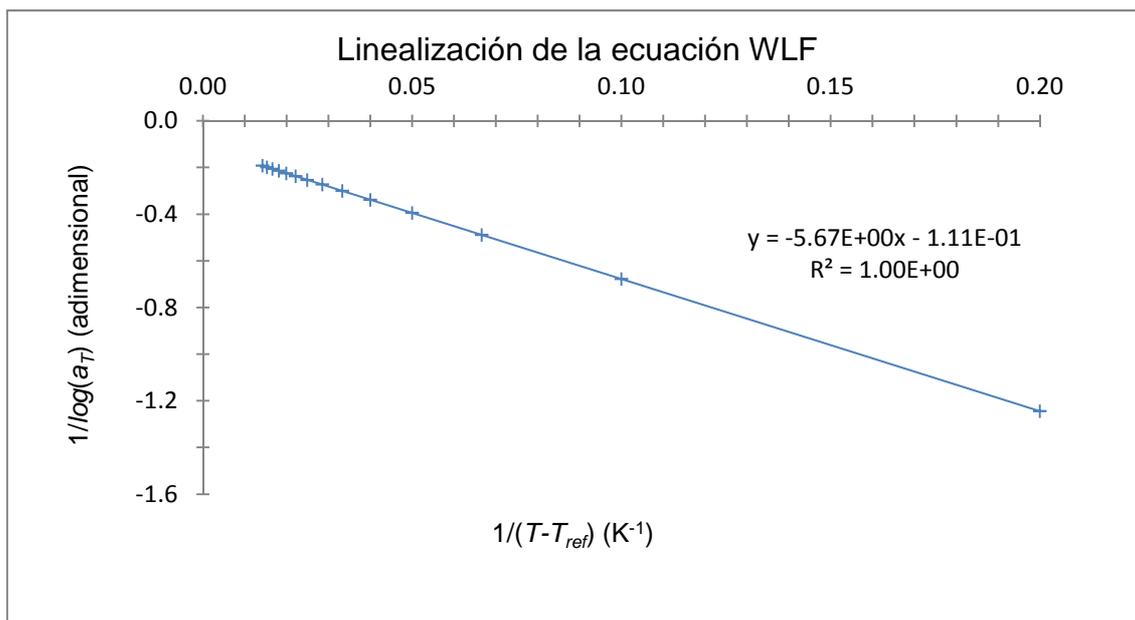


Figura 6.12 - Linealización de la ecuación WLF para PA6-MD40

Las curvas maestras para este material se presentan en la Figura 6.13 (módulo de almacenamiento en función de la frecuencia) y en la Figura 6.14 (módulo de pérdida en función de la frecuencia).

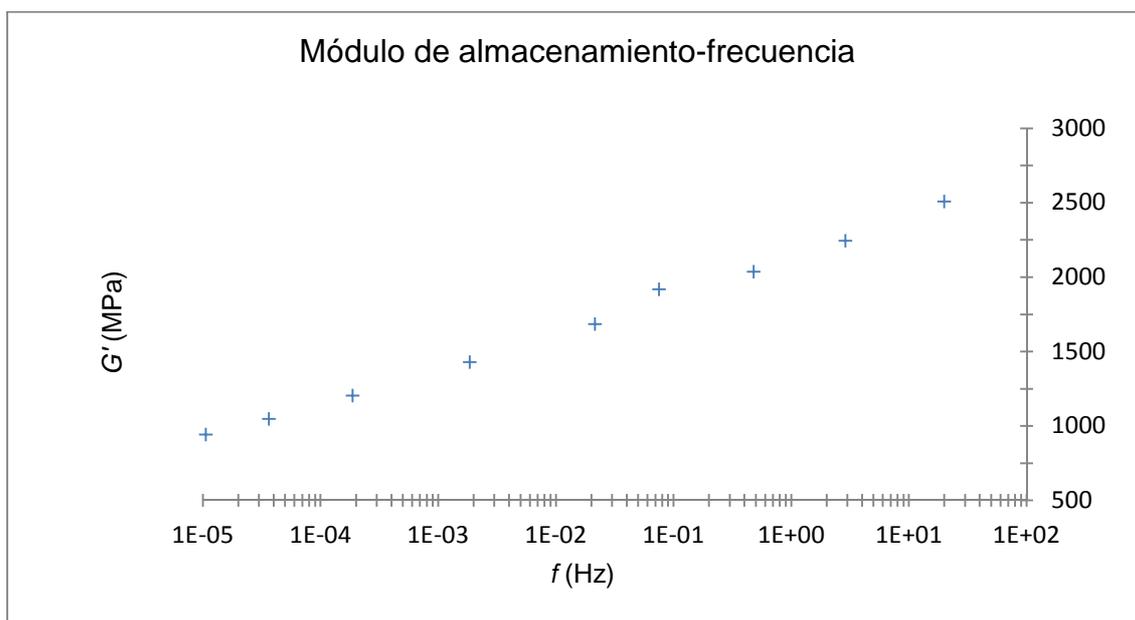


Figura 6.13 - Curva maestra del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para PA6-MD40

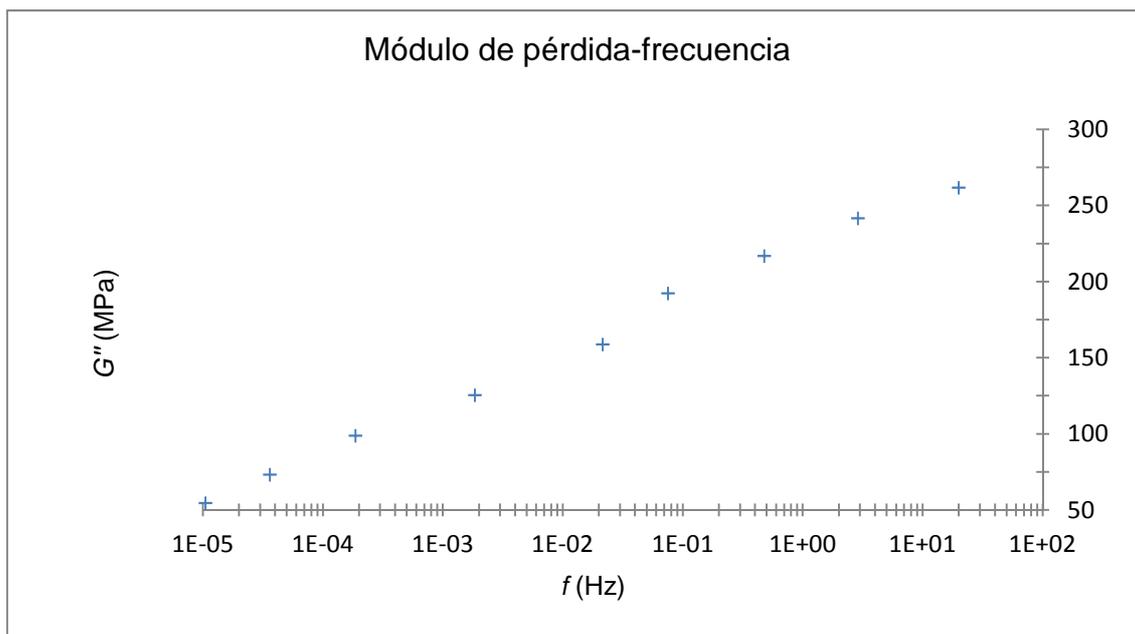


Figura 6.14 - Curva maestra del módulo de pérdida en función de la frecuencia para PA6-MD40

La variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura para este material se muestra en la Figura 6.15.

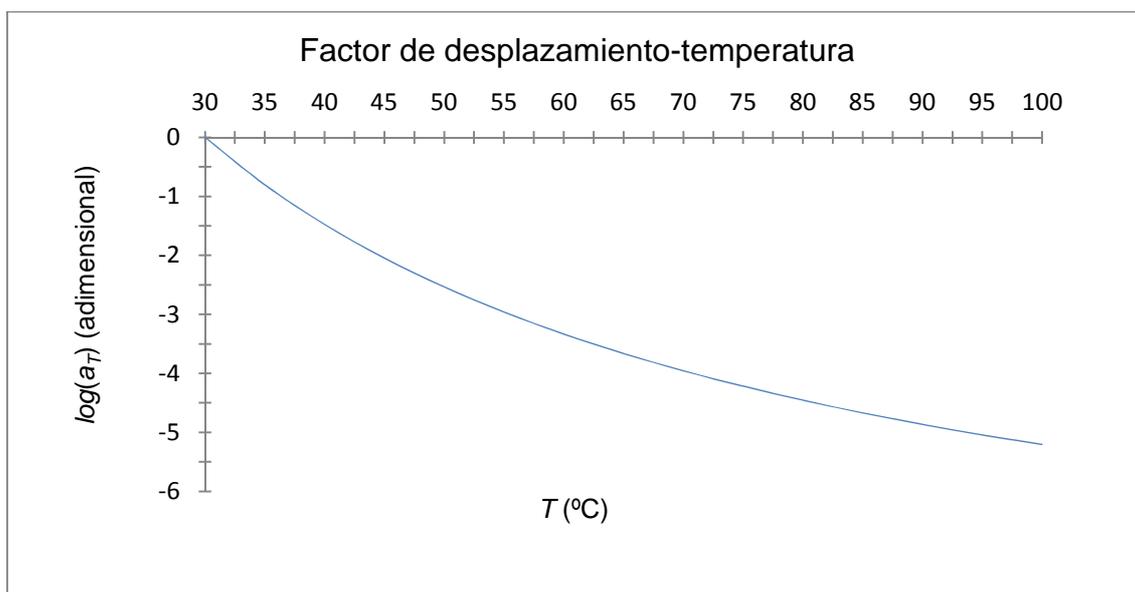


Figura 6.15 - Representación gráfica del factor de desplazamiento en función de la temperatura para PA6-MD40

### 6.5 Ratio de módulos

El módulo de flexión a la temperatura de referencia (30°C) se muestra en la Tabla 6.2 para PA6-MD40.

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

Tabla 6.2 - Módulo de flexión a 30°C para PA6-MD40

$T$ (°C)	$A$ (mm)	$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$f$ (Hz)	$E_F$ (MPa)
30	0.03	1.00	1.39E-01	1926

Se crea una tabla similar (Tabla 6.3), con el valor de los módulos de flexión y de tracción a 23°C.

Tabla 6.3 - Módulo de flexión y módulo de tracción a 23°C para PA6-MD40

$T$ (°C)	$A$ (mm)	$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$f$ (Hz)	$E_F$ (MPa)	$E_T$ (MPa)
23	0.03	1.00	3.75E+00	2275	2518

El ratio de módulos para PA6-MD40 es de 1.11.

### 6.6 Influencia de la temperatura

En la Tabla 6.4 se calculan diferentes módulos de tracción en función de la temperatura para PA6-MD40.

Tabla 6.4 - Módulo de tracción a cada temperatura para PA6-MD40

$T$ (°C)	$A$ (mm)	$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$f$ (Hz)	$E_F$ (MPa)	$E_T$ (MPa)
30	0.03	1.00	1.39E-01	1926	2132
35	0.03	1.00	1.39E-01	1807	2000
40	0.03	1.00	1.39E-01	1621	1794
45	0.03	1.00	1.39E-01	1481	1639
50	0.03	1.00	1.39E-01	1377	1524
55	0.03	1.00	1.39E-01	1295	1433
60	0.03	1.00	1.39E-01	1224	1355
65	0.03	1.00	1.39E-01	1159	1283
70	0.03	1.00	1.39E-01	1102	1220
75	0.03	1.00	1.39E-01	1054	1167
80	0.03	1.00	1.39E-01	1013	1121
85	0.03	1.00	1.39E-01	978	1082
90	0.03	1.00	1.39E-01	946	1047
95	0.03	1.00	1.39E-01	918	1016
100	0.03	1.00	1.39E-01	892	987

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

La representación gráfica del módulo de tracción en función de la temperatura para este material se muestra en la Figura 6.16.

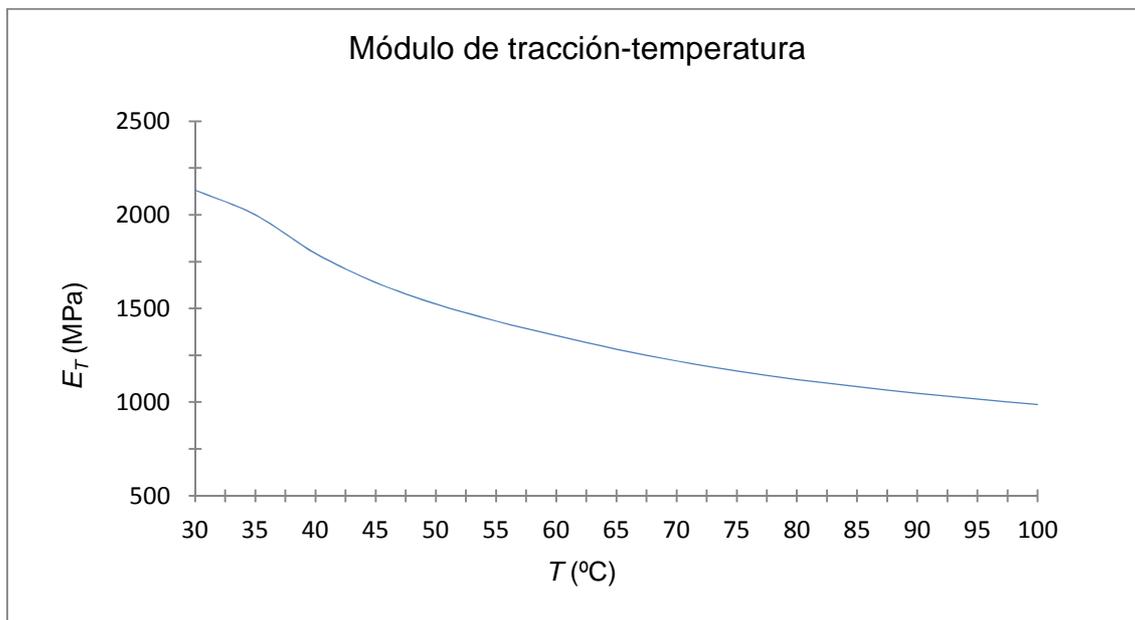


Figura 6.16 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la temperatura para PA6-MD40

### 6.7 Influencia de la velocidad de deformación

Para PA6-MD40, debido al rango de frecuencias que se ha estudiado en DMA, se trabaja con 5 velocidades de deformación. Los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C se muestran en la Tabla 6.5.

Tabla 6.5 - Datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA6-MD40

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	E <sub>T</sub> (MPa)
1.000	2134
3.466	2252
12.011	2400
41.628	2588
144.270	2776

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

La representación gráfica del ajuste logarítmico de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación se presenta en la Figura 6.17.

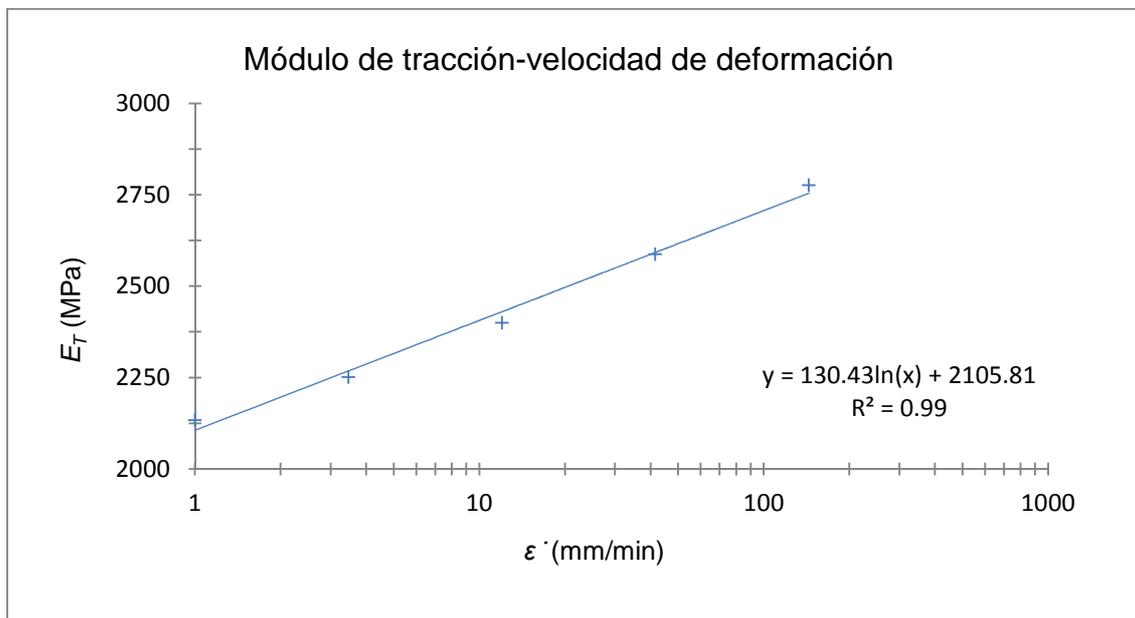


Figura 6.17 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA6-MD40

En la Tabla 6.6 se calculan los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para este material.

Tabla 6.6 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA6-MD40

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa)
1.000	2132
3.466	2282
12.011	2432
41.628	2582
144.270	2733
499.000	2883

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

La representación gráfica del ajuste logarítmico de los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación se presenta en la Figura 6.18.

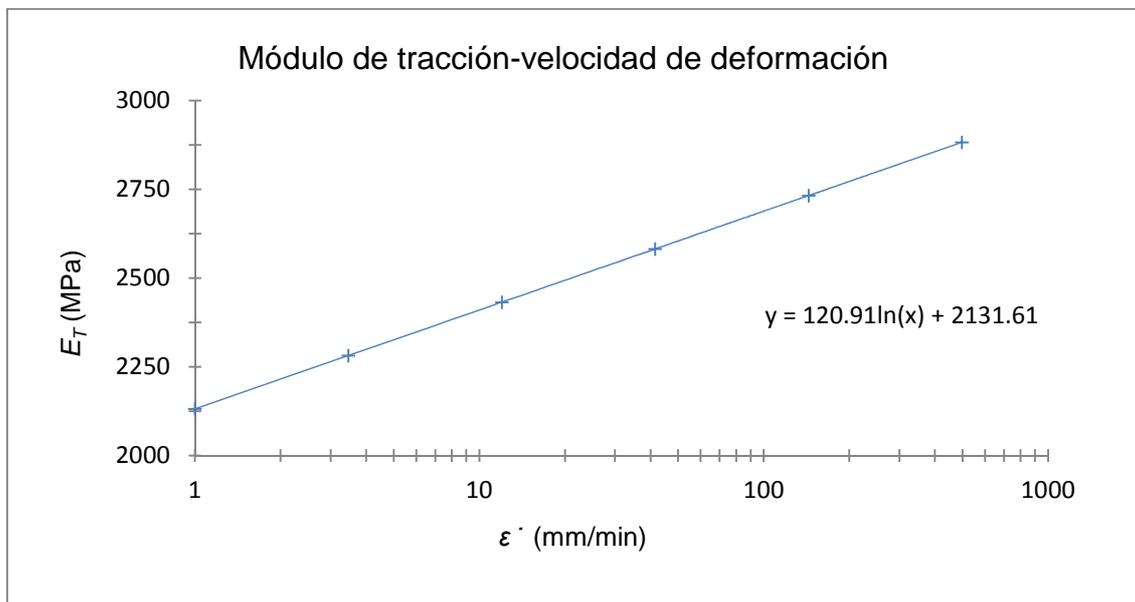


Figura 6.18 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA6-MD40

En la Tabla 6.7 se presenta una comparación entre los datos experimentales y los valores teóricos a la temperatura de referencia para las 5 velocidades de deformación.

Tabla 6.7 - Coeficiente de variación entre los datos experimentales y los valores teóricos a 30°C para PA6-MD40

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa) Datos experimentales	$E_T$ (MPa) Valores teóricos	Desviación estándar	CV (%)
1.000	2134	2132	1.58	0.07
3.466	2252	2282	21.11	0.93
12.011	2400	2432	22.81	0.94
41.628	2588	2582	3.87	0.15
144.270	2776	2733	30.90	1.12

Como se observa, para este material, la discrepancia entre los datos experimentales y los valores teóricos a 30°C es bastante pequeña. Esto significa que la aplicación del modelo se puede usar para predecir los módulos de tracción a cada temperatura y a cada velocidad de deformación para este material.

Por lo tanto, para PA6-MD40, el mismo procedimiento puede ser extrapolado a todo el rango de temperaturas.

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

Así pues, se predicen los módulos de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación tal como se muestra en la Tabla 6.8.

Tabla 6.8 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación para PA6-MD40

$\dot{\epsilon}$ (mm/min) / $T$ (°C)	1.000	3.466	12.011	41.628	144.270	499.000
30°C	2132	2282	2432	2582	2733	2883
35°C	2000	2139	2278	2417	2556	2694
40°C	1794	1916	2039	2161	2284	2406
45°C	1639	1742	1845	1949	2052	2155
50°C	1524	1613	1703	1792	1882	1971
55°C	1433	1513	1593	1673	1752	1832
60°C	1355	1429	1503	1578	1652	1726
65°C	1283	1350	1418	1485	1552	1620
70°C	1220	1282	1343	1405	1467	1529
75°C	1167	1222	1277	1332	1387	1442
80°C	1121	1169	1217	1266	1314	1362
85°C	1082	1126	1170	1214	1258	1302
90°C	1047	1084	1121	1158	1196	1233
95°C	1016	1050	1085	1119	1154	1188
100°C	987	1019	1051	1082	1114	1145

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

En la Figura 6.19 se muestra la representación gráfica del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a diferentes temperaturas.

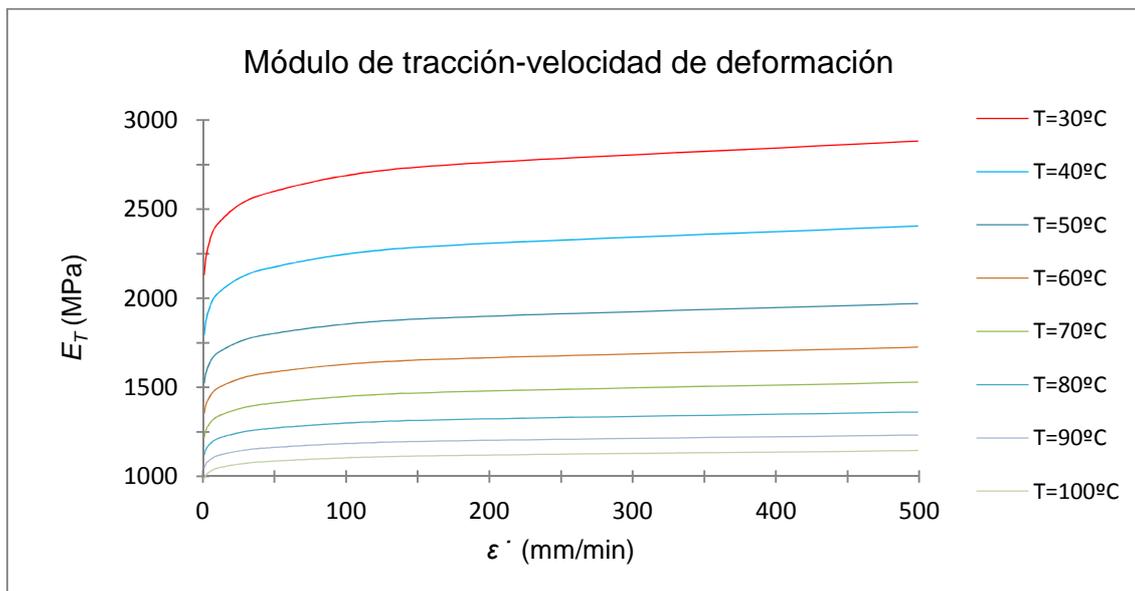


Figura 6.19 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a diferentes temperaturas para PA6-MD40

## 6.8 Verificación del bucle de tracción

### 6.8.1 Verificación de la temperatura

Para verificar los valores del módulo de tracción en función de la temperatura, es necesario obtener curvas de tensión-deformación a diferentes temperaturas para este material. La Figura 6.20 se obtiene de DuPont<sup>TM</sup> 4. La comparación entre los datos experimentales y los valores teóricos se hace a 90°C.

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

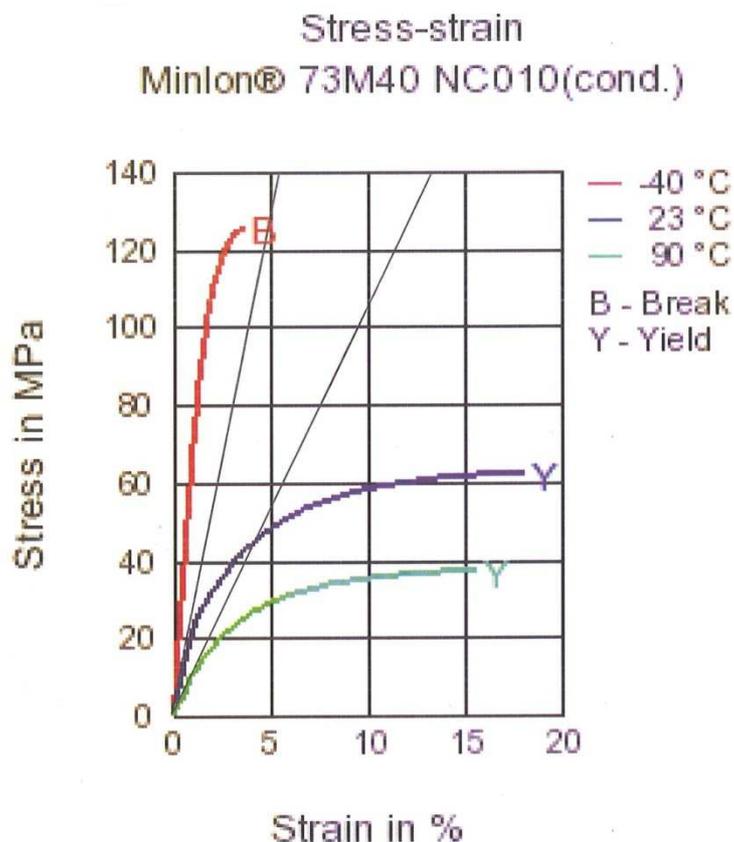


Figura 6.20 - Curvas experimentales de tensión-deformación a diferentes temperaturas para PA6-MD40

La Tabla 6.9 muestra el módulo de tracción a 90°C hallado a partir de la Figura 6.20.

Tabla 6.9 - Módulo de tracción a 90°C de la representación gráfica experimental para PA6-MD40

$T$ (°C)	$\sigma$ (MPa) a 0.0005 mm/mm	$\sigma$ (MPa) a 0.0025 mm/mm	$E_T$ (MPa)
90	2.50	4.58	1042

El factor de corrección se aplica en la Tabla 6.10. El módulo de tracción de referencia es de 2518 MPa.

Tabla 6.10 - Factor de corrección a 23°C para PA6-MD40

$T$ (°C)	$\sigma$ (MPa) a 0.0005 mm/mm	$\sigma$ (MPa) a 0.0025 mm/mm	$E_T$ (MPa)	Factor de corrección
23	8.33	13.24	2453	1.026

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

El valor obtenido como dato experimental a 90°C se muestra en la Tabla 6.11.

Tabla 6.11 - Módulo de tracción a 90°C con la aplicación del factor de corrección para PA6-MD40

$T$ (°C)	$E_T$ (MPa)
90	1069

El error entre el valor teórico de la Tabla 6.8 y el dato experimental de la Tabla 6.11 del módulo de tracción se muestra en la Tabla 6.12 para 90°C.

Tabla 6.12 - Error a 90°C y a 1 mm/min para PA6-MD40

$T$ (°C)	$E_T$ (MPa) Dato experimental	$E_T$ (MPa) Valor teórico	Error (%)
90	1069	1047	2.08

Para PA6-MD40, el modelo matemático para el bucle de tracción en función de la temperatura se ajusta bien. El error es inferior al 3%, como se observa en la Tabla 6.12.

### 6.8.2 Verificación de la velocidad de deformación

Para PA6-MD40, la pendiente experimental del módulo de flexión a 23°C se puede predecir a 1.000 y 3.466 mm/min, dos velocidades de deformación.

En la Tabla 6.13 se muestran los módulos de tracción a 23°C para estas dos velocidades de deformación.

Tabla 6.13 - Módulo de tracción predicho en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA6-MD40

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$f$ (Hz) 30°C	$f$ (Hz) 23°C	$E_F$ (MPa)	$E_T$ (MPa)
1.000	1.39E-01	3.75E+00	2275	2518
3.466	4.81E-01	1.30E+01	2447	2708

La Ecuación 6.1, que se usa para calcular la pendiente del módulo de tracción, se deduce a partir de la Ecuación 3.14 utilizando para ello la mayor y la menor velocidad de deformación de entre las que se muestran en la Tabla 6.13.

$$PENDE_T = \frac{(E_{T\ 3.466} - E_{T\ 1.000})}{\ln(3.466) - \ln(1.000)}$$

Ecuación 6.1

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

---

Para este material, el valor de  $PENDE_T$  que se predice presenta un resultado de 153. Los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C se muestran en la Tabla 6.14.

Tabla 6.14 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA6-MD40

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa)
1.000	2518
3.466	2708
12.011	2899
41.628	3089
144.270	3280
499.000	3470

La Tabla 6.15 muestra los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C.

Tabla 6.15 - Datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA6-MD40

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa)
1.000	2518
3.466	2827
12.011	3141
41.628	3481
144.270	4010
499.000	4799

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

El ajuste logarítmico de los valores hallados en la Tabla 6.15 se muestra en la Figura 6.21.

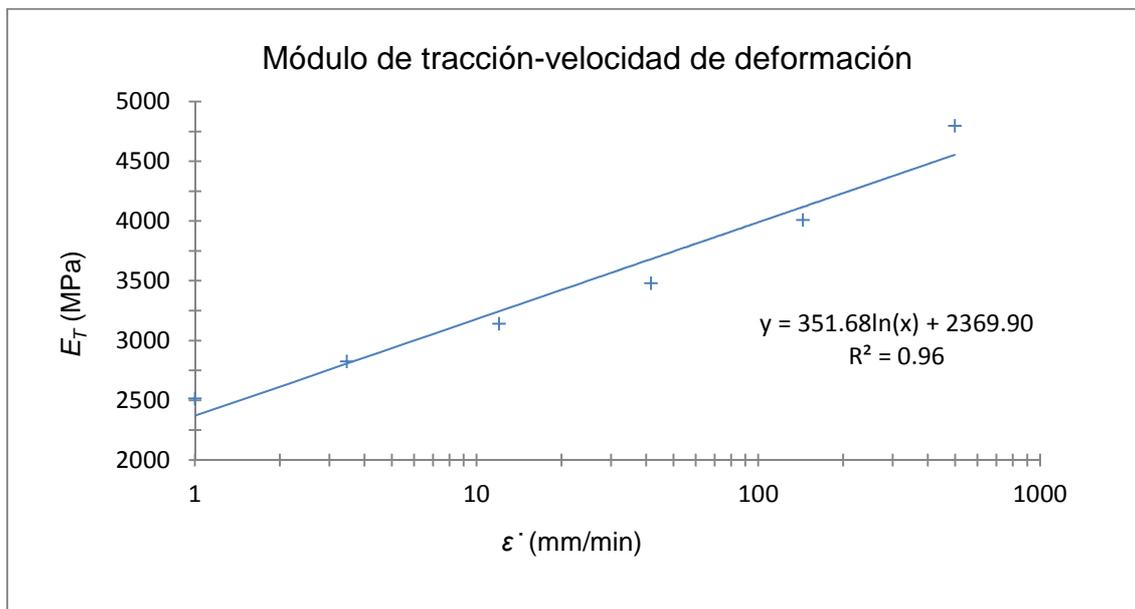


Figura 6.21 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA6-MD40

En la Figura 6.22 se representan las curvas de tensión-deformación en función de la velocidad de deformación.

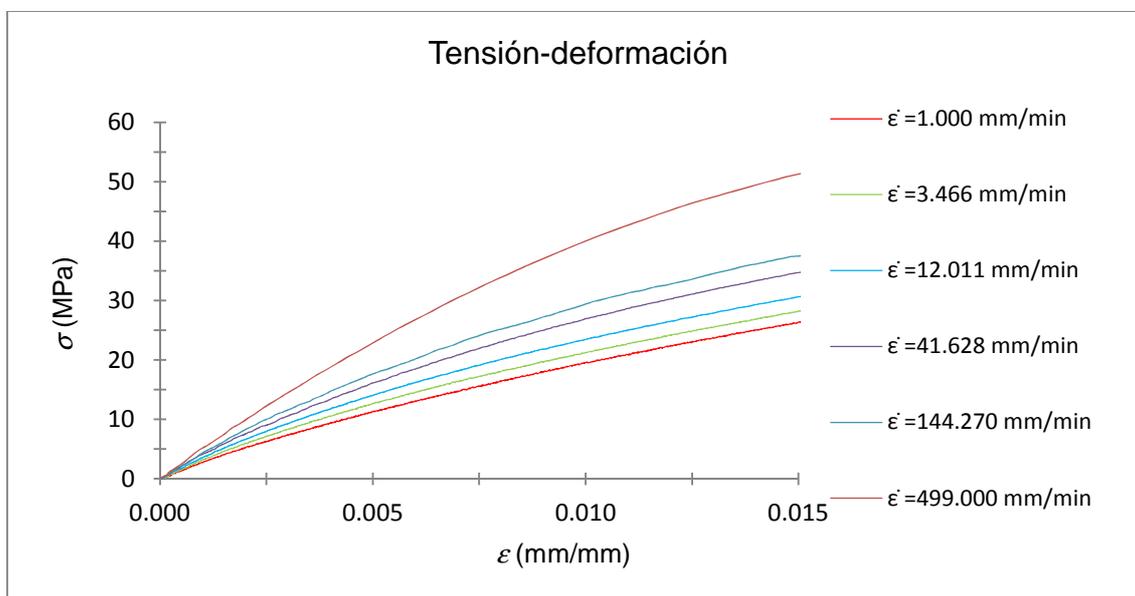


Figura 6.22 - Curvas de tensión-deformación en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA6-MD40

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

En la Tabla 6.16, los datos experimentales y los valores teóricos en función de la velocidad de deformación se comparan a 23°C, dando los siguientes errores:

Tabla 6.16 - Errores a diferentes velocidades de deformación a 23°C para PA6-MD40

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa) Datos experimentales	$E_T$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
1.000	2518	2518	0.00
3.466	2827	2708	4.36
12.011	3141	2899	8.35
41.628	3481	3089	12.69
144.270	4010	3280	22.26
499.000	4799	3470	38.32

Para PA6-MD40, el modelo matemático para el bucle de tracción en función de la velocidad de deformación no se ajusta bien. Los errores son superiores al 10% en algunos casos, como se observa en la Tabla 6.16. Estos errores se van incrementando a medida que la velocidad de deformación presenta valores mayores.

Como se ha comentado anteriormente, esto sucede porque para usar este modelo, es necesario que la extrapolación para intentar predecir los módulos de tracción a 23°C a partir de los módulos de flexión a 30°C sea posible. Esto sólo es posible cuando la variación del módulo de almacenamiento (o módulo de flexión, con una relación directa con el módulo de tracción) no es importante en este intervalo de temperaturas. Si la variación es elevada, tal como sucede para este material, el valor del módulo de tracción a 23°C no puede ser predicho de forma fiable cuando se utilizan valores teóricos del bucle de tracción para altas velocidades de deformación. Una manera de determinar si esta variación puede ser importante desde 30°C a 23°C es con el estudio del módulo de pérdida o de la tangente del ángulo de fase en función de la temperatura. Si hay un máximo de estas propiedades dentro del rango de temperaturas estudiado, significa que existe una gran posibilidad de que la gran variación en el módulo de almacenamiento en función de la temperatura esté dentro del intervalo también. Por lo tanto, fuera del rango, se puede predecir fácilmente  $E_T$ , ya que la variación es pequeña y el método obtiene mejores resultados, acorde a los datos experimentales.

### 6.9 Curvas de tensión-deformación

Para PA6-MD40 y para una deformación de 0.0005 mm/mm, la tensión a 23°C es de 1.37 MPa. Partiendo de este valor, las tensiones a 0.0025 mm/min pueden ser calculadas a diferentes temperaturas. En la Figura 6.23 se representan las curvas de tensión-deformación en función de la temperatura para este material.

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

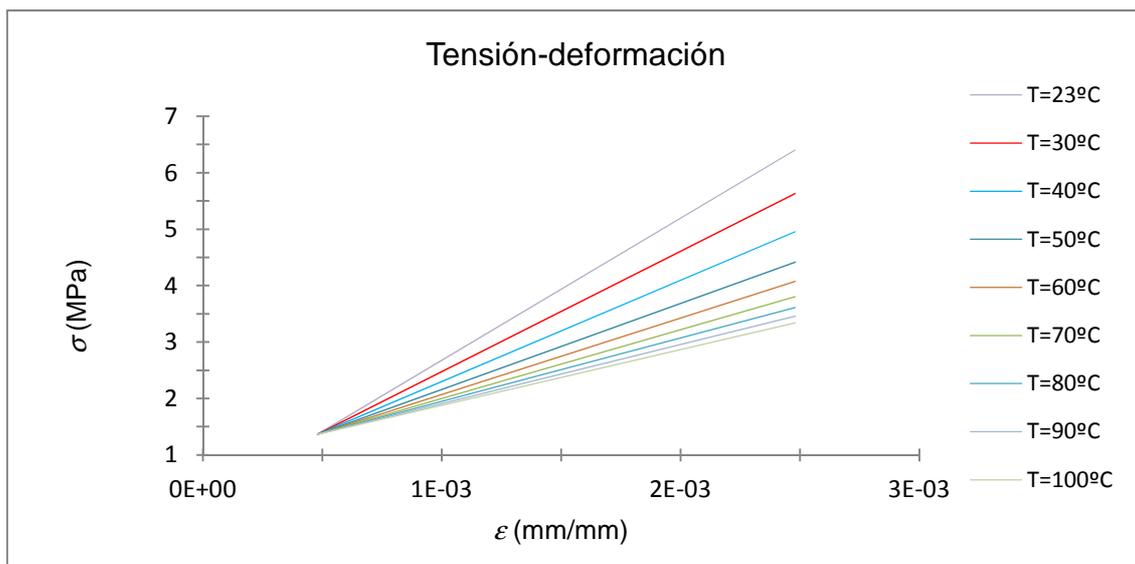


Figura 6.23 - Curvas de tensión-deformación en función de la temperatura para PA6-MD40

Se comparan las curvas de tensión-deformación a partir del valor teórico del módulo de tracción con la misma curva obtenida a partir del dato experimental de dicho módulo. Estas curvas se comparan a 90°C, tal como muestra la Figura 6.24, respectivamente

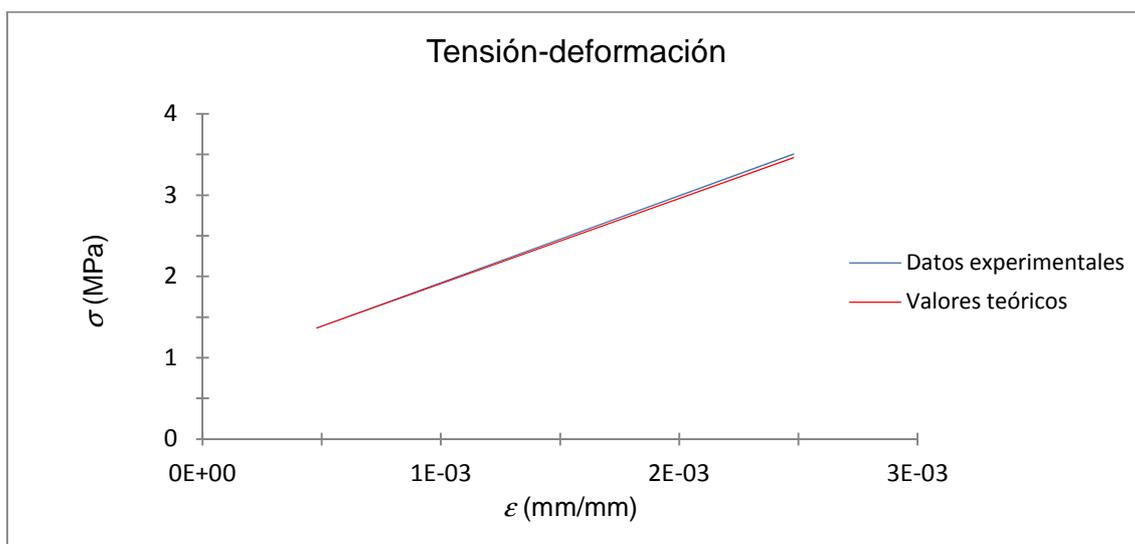


Figura 6.24 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 90°C para PA6-MD40

### 6.10 Simulaciones de los tests de tracción

Para PA6-MD40, las líneas que se deben modificar en el código de ANSYS® con respecto al código general presentado en el anexo A.1.1 se muestran a continuación.

Los valores de los módulos de tracción que se observan en estas líneas modificadas proceden de la Tabla 6.8 y de la Tabla 6.14.

## Capítulo 6 - Bucle de tracción para PA6-MD40

---

Línea 7	/FILENAME,TraccionPA6-MD40
Línea 8	/TITLE,TraccionPA6-MD40
Línea 12	R,1,4,3
Línea 15	MPDATA,EX,1,1,2518,2132,2000,1794,1639,1524
Línea 18	MPDATA,EX,1,7,1433,1355,1283,1220,1167,1121
Línea 21	MPDATA,EX,1,13,1082,1047,1016,987
Línea 24	MPDATA,EX,2,1,2708,2282,2139,1916,1742,1613
Línea 27	MPDATA,EX,2,7,1513,1429,1350,1282,1222,1169
Línea 30	MPDATA,EX,2,13,1126,1084,1050,1019
Línea 33	MPDATA,EX,3,1,2899,2432,2278,2039,1845,1703
Línea 36	MPDATA,EX,3,7,1593,1503,1418,1343,1277,1217
Línea 39	MPDATA,EX,3,13,1170,1121,1085,1051
Línea 42	MPDATA,EX,4,1,3089,2582,2417,2161,1949,1792
Línea 45	MPDATA,EX,4,7,1673,1578,1485,1405,1332,1266
Línea 48	MPDATA,EX,4,13,1214,1158,1119,1082
Línea 51	MPDATA,EX,5,1,3280,2733,2556,2284,2052,1882
Línea 54	MPDATA,EX,5,7,1752,1652,1552,1467,1387,1314
Línea 57	MPDATA,EX,5,13,1258,1196,1154,1114
Línea 60	MPDATA,EX,6,1,3470,2883,2694,2406,2155,1971
Línea 63	MPDATA,EX,6,7,1832,1726,1620,1529,1442,1362
Línea 66	MPDATA,EX,6,13,1302,1233,1188,1145
Línea 207	SAVE,TraccionPA6-MD40,db

Se simulan los mismos casos que para PA66. Para el caso 1, los resultados se muestran en la Tabla 6.17. Para el caso 2, los resultados se muestran en la Tabla 6.18.

### Caso 1

Temperatura = 23°C

Velocidad de deformación = 1 mm/min

Tabla 6.17 - Módulo de tracción de la simulación del caso 1 para PA6-MD40

TIME	2 UX	159 S X	4 PROD	5 QUOT
	UX	SX	Extension	ET
	average			
1.0000	0.312500E-01	6.29379	0.625000E-01	2517.52

### Caso 2

Temperatura = 98°C

Velocidad de deformación = 400 mm/min

Tabla 6.18 - Módulo de tracción de la simulación del caso 2 para PA6-MD40

TIME	2 UX	159 S X	4 PROD	5 QUOT
	UX	SX	Extension	ET
	average			
1.0000	0.312500E-01	2.88193	0.625000E-01	1152.77

En el caso 1, el módulo de tracción que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 2518 MPa. El dato experimental y el valor teórico presentan un valor de 2518 MPa. Ambos parámetros tienen el mismo valor porque las condiciones de este caso son las de referencia y dicho valor, por lo tanto, también es el valor de referencia. El coeficiente de variación entre los dos valores es de 0.0135 %.

En el caso 2 el módulo de tracción que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 1153 MPa.

### 7 Bucle de creep para PA6-MD40

El procedimiento del bucle de creep para PA6-MD40 es el mismo que el presentado para PA66 en el capítulo 5. Por esta razón, en este capítulo sólo se añadirán algunas explicaciones y comentarios puntuales.

#### 7.1 Superposición frecuencia-temperatura

La variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura presenta los resultados de la Tabla 7.1 para PA6-MD40.

Tabla 7.1 - Variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura para PA6-MD40

$T$ (°C)	$a_T$	$\log(a_T)$
30	1.00E+00	0.00
35	1.57E-01	-0.80
40	3.35E-02	-1.48
45	9.01E-03	-2.05
50	2.92E-03	-2.54
55	1.10E-03	-2.96
60	4.64E-04	-3.33
65	2.17E-04	-3.66
70	1.11E-04	-3.96
75	6.04E-05	-4.22
80	3.50E-05	-4.46
85	2.14E-05	-4.67
90	1.37E-05	-4.86
95	9.06E-06	-5.04
100	6.21E-06	-5.21

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

La curva maestra para este material se muestra en la Tabla 7.2.

Tabla 7.2 - Datos de la curva maestra para PA6-MD40

$f$ (Hz)	$G'$ (MPa)	$G''$ (MPa)
1.06E-05	942	54
3.64E-05	1047	73
1.88E-04	1202	99
1.86E-03	1428	125
2.16E-02	1684	159
7.55E-02	1917	192
4.80E-01	2035	217
2.90E+00	2243	242
2.00E+01	2508	262

## 7.2 Modelo convencional

### 7.2.1 Modelo convencional en el dominio de la frecuencia

La conversión de los valores de la curva maestra da los resultados que se muestran en la Tabla 7.3.

Tabla 7.3 - Datos convertidos de la curva maestra para ser introducidos en ABAQUS® 6.10-2 para PA6-MD40

$\Omega g^* real$	$\Omega g^* imag$	$f$ (Hz)
0.0577	0.0000	1.06E-05
0.0777	-0.1115	3.64E-05
0.1047	-0.2756	1.88E-04
0.1331	-0.5153	1.86E-03
0.1686	-0.7872	2.16E-02
0.2041	-1.0344	7.55E-02
0.2301	-1.1595	4.80E-01
0.2564	-1.3810	2.90E+00
0.2777	-1.6623	2.00E+01

Para PA6-MD40, el módulo de tracción de entrada es de 2132 MPa y el coeficiente de Poisson es de 0.35. Para este caso y en estas condiciones, el error mínimo considerado en ABAQUS® 6.10-2 es de 0.06.

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

Las representaciones gráficas usando los valores convertidos para el módulo de almacenamiento y para el módulo de pérdida en función de la frecuencia se muestran en la Figura 7.1 y en la Figura 7.2, respectivamente, en que se comparan los datos experimentales y los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2.

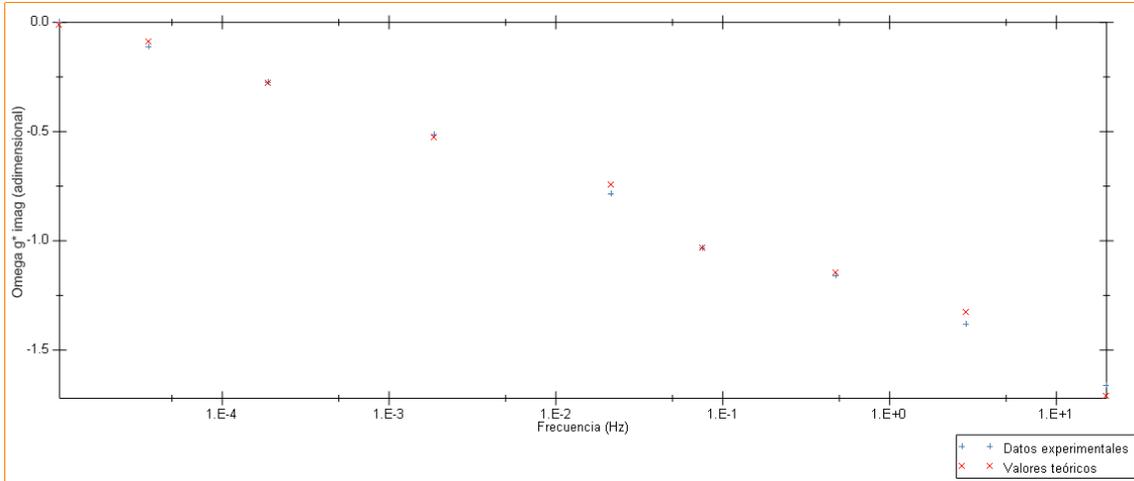


Figura 7.1 - Representación gráfica de  $\omega g^* \text{ imag}$  en función de la frecuencia de los datos experimentales y de los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2 para PA6-MD40

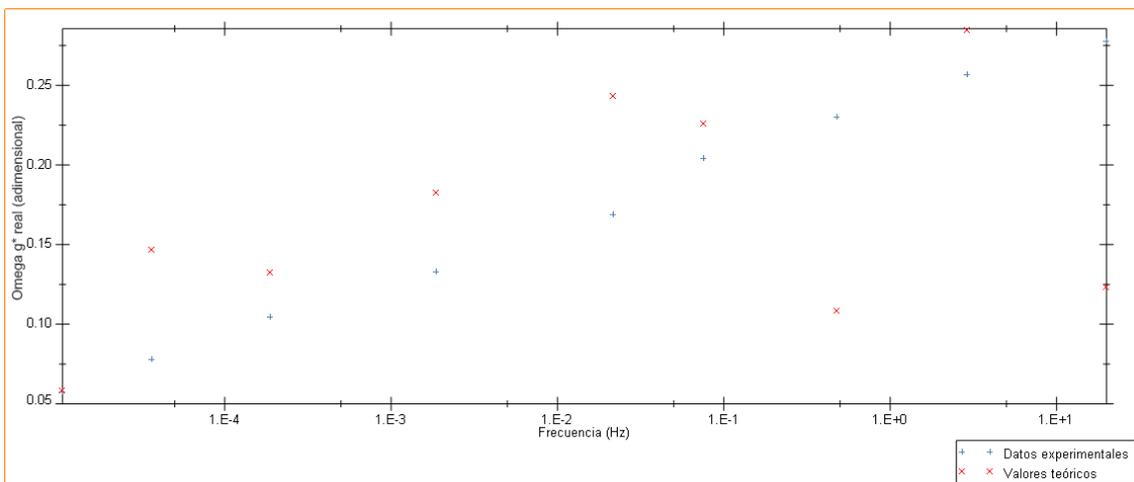


Figura 7.2 - Representación gráfica de  $\omega g^* \text{ real}$  en función de la frecuencia de los datos experimentales y de los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2 para PA6-MD40

Para este material, los coeficientes propuestos en ABAQUS® 6.10-2 son los siguientes:

- Para el término 1,  $p_1$  es 0.21804 y  $\tau_1$  es 3.72503E-02
- Para el término 2,  $p_2$  es 0.18950 y  $\tau_2$  es 4.1360
- Para el término 3,  $p_3$  es 0.11956 y  $\tau_3$  es 133.94
- Para el término 4,  $p_4$  es 0.10770 y  $\tau_4$  es 2904.1

Los coeficientes ajustados en ABAQUS® 6.10-2 no presentan buenos resultados para este material.

Las representaciones gráficas comparando los datos experimentales y los valores teóricos de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia en

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

MATLAB® 7.5.0 usando la subrutina para el modelo convencional se muestran en la Figura 7.3 y en la Figura 7.4, respectivamente. La subrutina de MATLAB® 7.5.0 para este modelo se presenta en el anexo A.11.1.

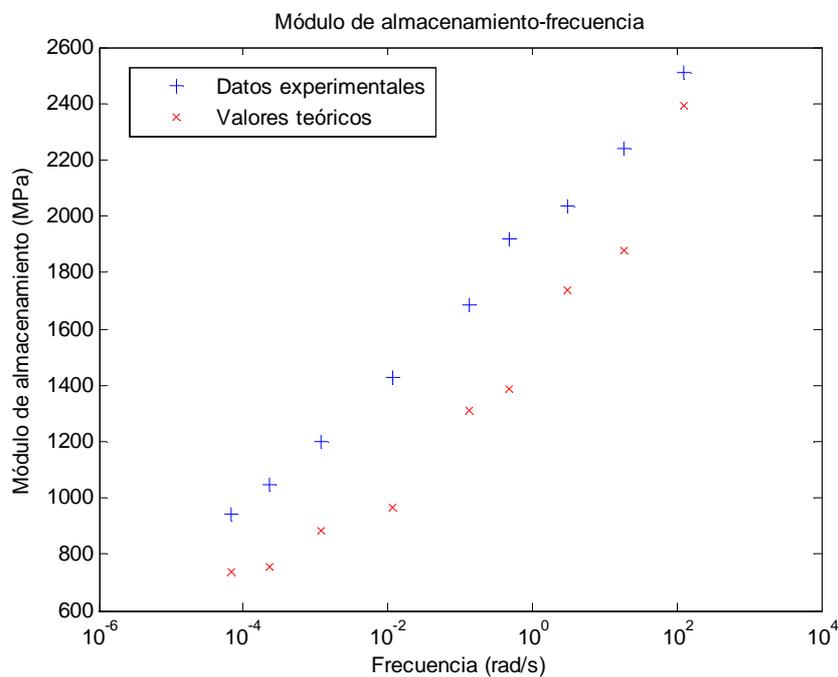


Figura 7.3 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo convencional para PA6-MD40

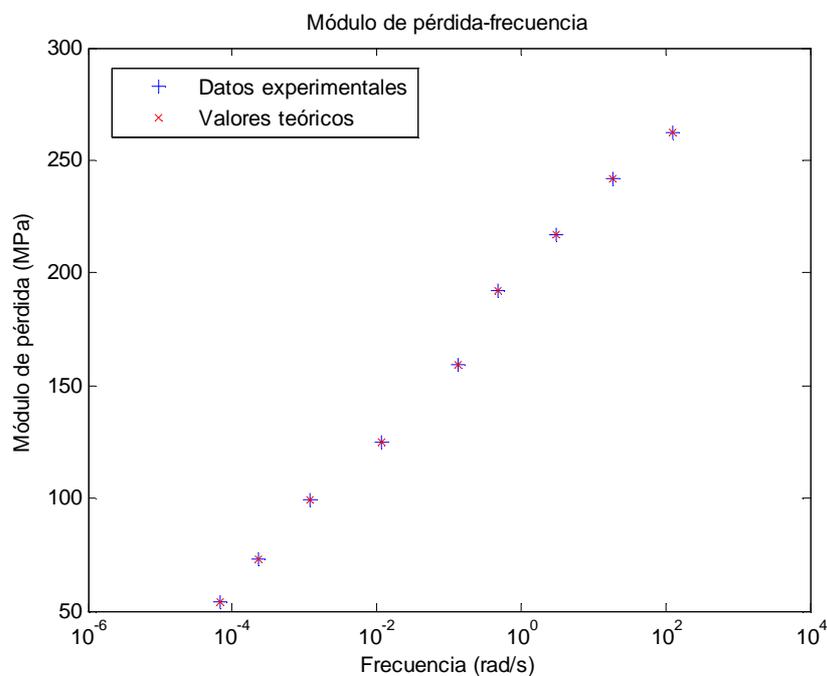


Figura 7.4 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo convencional para PA6-MD40

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

En la Tabla 7.4 se muestran los datos experimentales y los valores teóricos de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia con el modelo convencional para PA6-MD40.

Tabla 7.4 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida en función de la frecuencia con el modelo convencional para PA6-MD40

$w$ (rad/s)	$G'$ (MPa)	$G'$ (MPa)	Error $G'$ (%)	$G''$ (MPa)	$G''$ (MPa)	Error $G''$ (%)
	Datos experimentales	Valores teóricos		Datos experimentales	Valores teóricos	
6.64E-05	942	736	21.90	54	54	0.73
2.28E-04	1047	756	27.81	73	73	0.12
1.18E-03	1202	886	26.28	99	99	0.31
1.17E-02	1428	965	32.41	125	125	0.29
1.36E-01	1684	1308	22.32	159	159	0.17
4.74E-01	1917	1387	27.65	192	192	0.14
3.02E+00	2035	1737	14.62	217	217	0.16
1.82E+01	2243	1877	16.34	242	242	0.25
1.26E+02	2508	2394	4.57	262	262	0.33

En la Tabla 7.5 se presentan los coeficientes ajustados para el modelo convencional en el dominio de la frecuencia.

Tabla 7.5 - Coeficientes en el dominio de la frecuencia a 30°C con el modelo convencional para PA6-MD40

Término	$p$	$\tau$ (s)
1	2.68E-01	1.83E-02
2	7.90E-02	1.50E+03
3	1.60E-01	2.53E+01
4	3.34E-01	3.73E+05
5	1.02E-02	1.19E-02
6	1.90E-01	7.65E-01

Como se ha explicado para PA66, el modelo convencional no se ajusta bien. Sin embargo, para este material, esta conclusión ya se puede prever en el dominio de la frecuencia, sin necesidad de contrastar los valores en el dominio del tiempo. Como se observa en la Tabla 7.4, los errores a frecuencias bajas para el módulo de almacenamiento son muy elevados, llegando a errores superiores al 30%. En este caso, aún más claramente que en el caso de PA66, se deben utilizar otros modelos para el ajuste.

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

Sin embargo, aunque se pueda concluir que dicho modelo ya no se ajusta para el dominio de la frecuencia, los cálculos en el dominio del tiempo se harán de todas formas para poder comprobar realmente la gran discrepancia que existe entre los datos experimentales y los valores teóricos.

### 7.2.2 Modelo convencional en el dominio del tiempo

Se debe estimar el valor de  $E_{C 60000} / E_{C 0}$ . Para este material, la manera de estimar este valor es mediante los datos experimentales del módulo de creep en función del tiempo obtenidos de DuPont<sup>TM</sup>, presentados en la Figura 7.5<sup>4</sup>.

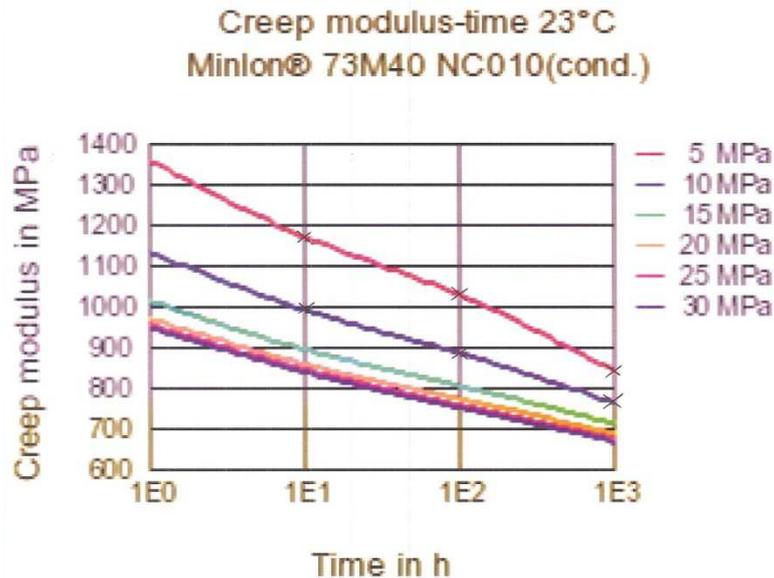


Figura 7.5 - Curvas del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para PA6-MD40

Los valores se dan en función de la tensión y la influencia de dicha tensión no es objeto de este trabajo. Sin embargo, en este caso, la tensión a comparar con los datos experimentales es de 9 MPa, ya que la fuerza aplicada es de 400 N, y ésta debe ser dividida por  $43 \text{ mm}^2$ , el área del material.

Se miden los módulos de creep a diferentes tiempos para 5 MPa y 10 MPa. Realizando una interpolación lineal, se pueden hallar los módulos de creep a 9 MPa.

La Tabla 7.6 muestra los valores del módulo de creep a diferentes tiempos para 5, 10 y 9 MPa.

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

Tabla 7.6 - Valores del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para 5, 10 y 9 MPa para PA6-MD40

$\sigma$ (MPa)	$E_C$ (MPa) 10 h	$E_C$ (MPa) 100 h	$E_C$ (MPa) 1000 h
5	1174	1033	841
10	1000	885	767
9	1035	915	782

Mediante la aplicación del factor de corrección de la Tabla 6.10, los datos experimentales del módulo de creep a 10, 100 y 1000 h y a 9 MPa se muestran en la Tabla 7.7.

Tabla 7.7 - Valores del módulo de creep en función del tiempo con la aplicación del factor de corrección a 23°C para PA6-MD40

$t$ (h)	$E_C$ (MPa)
10	1062
100	939
1000	802

El valor de  $E_{C\ 60000} / E_{C0}$  puede calcularse por interpolación mediante la Tabla 7.8.

Tabla 7.8 - Estimación de  $E_{C\ 60000} / E_{C0}$  para PA6-MD40

$t$ (s)	$E_C$ (MPa)	$E_C / E_{C0}$	$\ln(E_C / E_{C0})$
3.60E+04	1062	0.422	-0.863
3.60E+05	939	0.373	-0.987
3.60E+06	802	0.319	-

El valor estimado de  $E_{C\ 60000} / E_{C0}$  para PA6-MD40 es de 0.418.

Los valores usados para esta temperatura en este modelo matemático se presentan en la Tabla 7.9.

Tabla 7.9 - Valores usados a 23°C con el modelo convencional para PA6-MD40

$T$ (°C)	23
$E_T$ (MPa)	2518
$E_{C\infty} / E_{C0}$	0.123
$RC$	8.42E-01
$a_T$	2.70E+01

En la Tabla 7.10 se presentan los coeficientes en el dominio del tiempo a 23°C para este modelo.

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

Tabla 7.10 - Coeficientes en el dominio del tiempo a 23°C con el modelo convencional para PA6-MD40

Término	<i>CMR</i>	<i>CT</i> (s)
1	2.26E-01	4.95E-01
2	6.65E-02	4.07E+04
3	1.35E-01	6.85E+02
4	2.81E-01	1.01E+07
5	8.60E-03	3.20E-01
6	1.60E-01	2.07E+01

En la Tabla 7.11, los módulos de creep calculados en función del tiempo a 23°C son los siguientes:

Tabla 7.11 - Valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo convencional para PA6-MD40

<i>t</i> (s)	<i>E<sub>c</sub></i> (MPa)
0	2518
155	1456
245	1422
387	1377
613	1322
969	1264
1533	1216
2424	1186
3834	1172
6063	1162
9589	1150
15166	1133
23987	1110
37937	1082
60000	1053

Para este material, la curva experimental del módulo de creep presenta el aspecto que se muestra en la Figura 7.6.

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

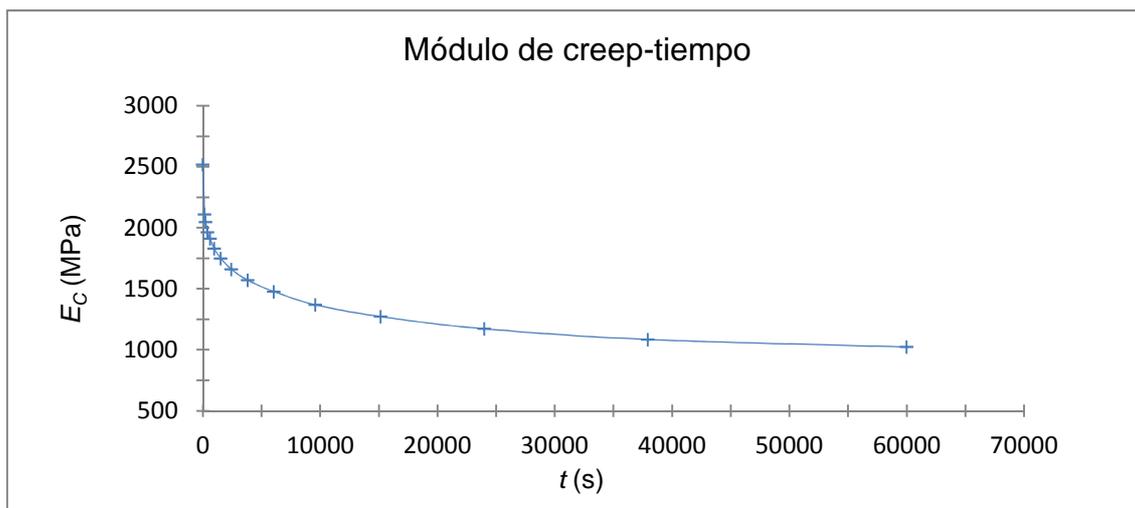


Figura 7.6 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo para los datos experimentales a 23°C para PA6-MD40

En la Tabla 7.12 se comparan los datos experimentales y los valores teóricos, dando los siguientes resultados:

Tabla 7.12 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo convencional para PA6-MD40

$t$ (s)	$E_c$ (MPa) Datos experimentales	$E_c$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
0	2518	2518	0.00
155	2108	1456	30.95
245	2048	1422	30.56
387	1963	1377	29.86
613	1910	1322	30.80
969	1830	1264	30.90
1533	1749	1216	30.49
2424	1660	1186	28.55
3834	1570	1172	25.38
6063	1477	1162	21.28
9589	1368	1150	15.96
15166	1272	1133	10.93
23987	1172	1110	5.33
37937	1084	1082	0.26
60000	1022	1053	2.94

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

En la Figura 7.7 se representan los datos experimentales y los valores teóricos hallados en la Tabla 7.12 para PA6-MD40.

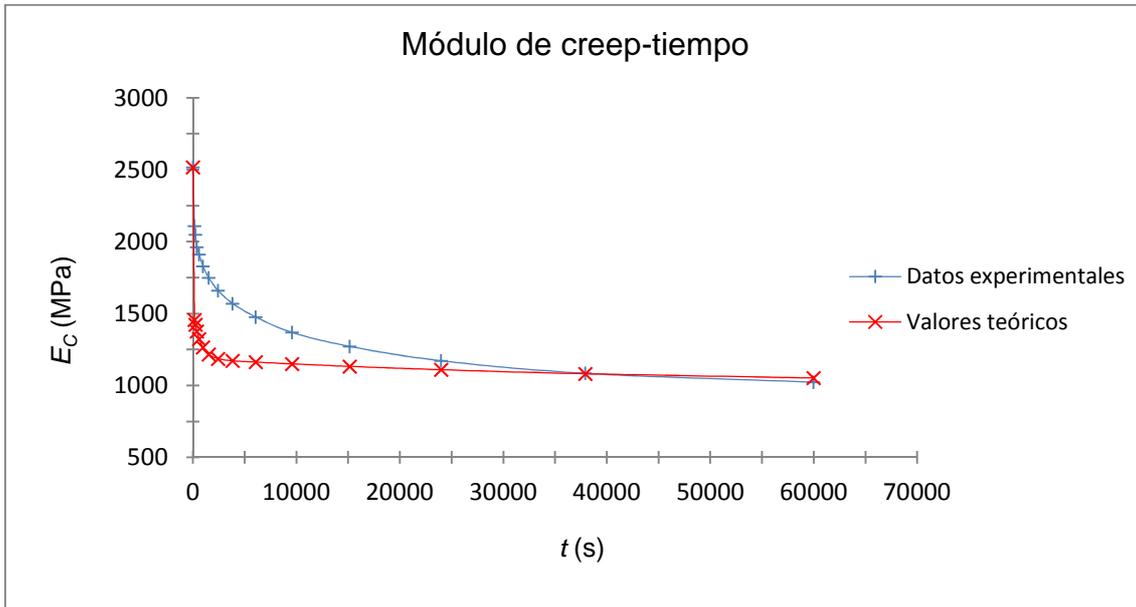


Figura 7.7 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo convencional para PA6-MD40

Para PA6-MD40, el modelo convencional para el bucle de creep en función del tiempo no se ajusta bien. Los errores son superiores al 10% en algunos casos, como se observa en la Tabla 7.12.

### 7.3 Modelos modificados

#### 7.3.1 Modelo modificado en el dominio de la frecuencia

Las representaciones gráficas comparando los datos experimentales y los valores teóricos de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia en MATLAB® 7.5.0 usando la subrutina para el modelo modificado se muestran en la Figura 7.8 y en la Figura 7.9, respectivamente. La subrutina de MATLAB® 7.5.0 para este modelo se presenta en el anexo A.11.2.

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

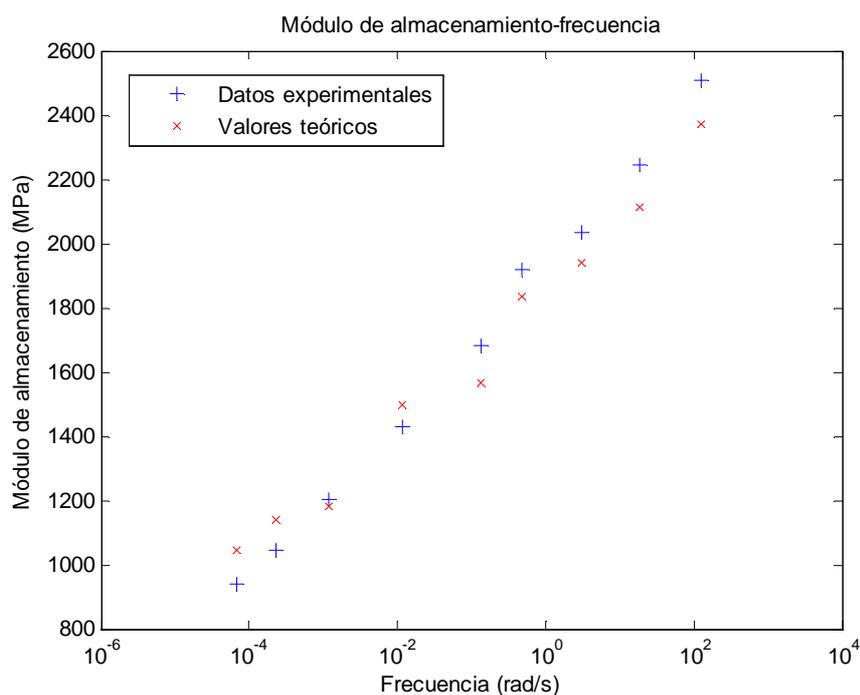


Figura 7.8 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo modificado para PA6-MD40

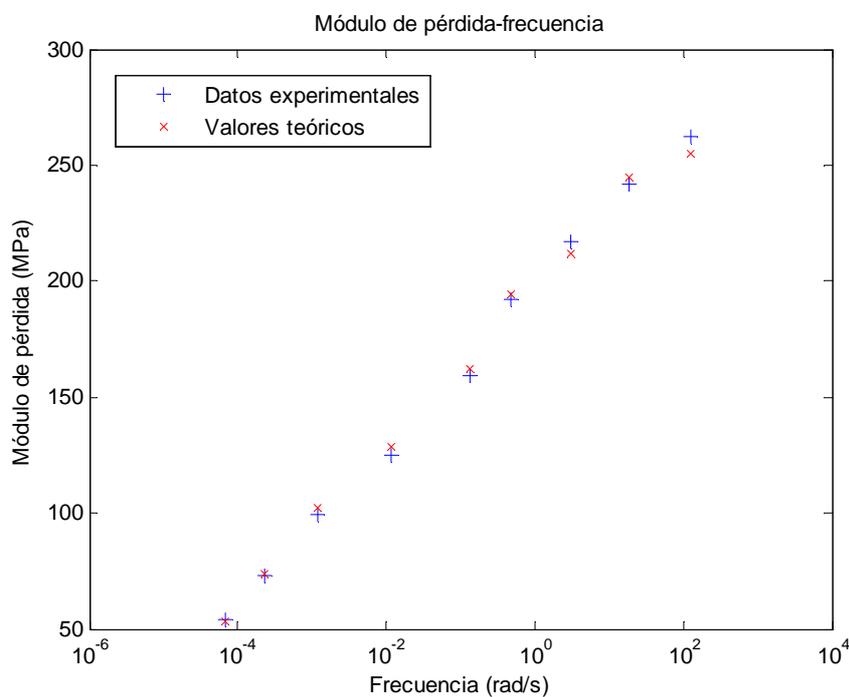


Figura 7.9 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo modificado para PA6-MD40

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

En la Tabla 7.13 se muestran los datos experimentales y los valores teóricos de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia con el modelo modificado para PA6-MD40.

Tabla 7.13 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida en función de la frecuencia con el modelo modificado para PA6-MD40

$w$ (rad/s)	$G'$ (MPa)	$G'$ (MPa)	Error $G'$ (%)	$G''$ (MPa)	$G''$ (MPa)	Error $G''$ (%)
	Datos experimentales	Valores teóricos		Datos experimentales	Valores teóricos	
6.64E-05	942	1043	10.71	54	53	1.99
2.28E-04	1047	1137	8.61	73	74	1.21
1.18E-03	1202	1184	1.50	99	102	3.49
1.17E-02	1428	1500	5.05	125	129	2.83
1.36E-01	1684	1565	7.08	159	162	1.84
4.74E-01	1917	1832	4.41	192	194	1.01
3.02E+00	2035	1940	4.64	217	212	2.21
1.82E+01	2243	2112	5.86	242	245	1.32
1.26E+02	2508	2370	5.52	262	255	2.45

En la Tabla 7.14 se presentan los coeficientes ajustados para el modelo modificado en el dominio de la frecuencia.

Tabla 7.14 - Coeficientes en el dominio de la frecuencia a 30°C con el modelo modificado para PA6-MD40

Término	$p$	$\tau$ (s)	$\alpha$
1	1.94E-01	3.56E-01	4.22E-01
2	2.55E-01	1.90E+03	1.00E-01
3	1.46E-01	5.27E+02	1.14E+00
4	5.51E-02	1.75E+05	1.35E+00
5	7.95E-02	7.64E-05	2.00E+00
6	1.17E-01	1.65E+01	2.00E+00

### 7.3.2 Modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo, en la Tabla 7.15, se muestran los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C.

Tabla 7.15 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

$t$ (s)	$E_c$ (MPa) Datos experimentales	$E_c$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
0	2518	2518	0.00
155	2108	1877	10.96
245	2048	1843	9.98
387	1963	1801	8.25
613	1910	1754	8.18
969	1830	1710	6.54
1533	1749	1674	4.31
2424	1660	1642	1.07
3834	1570	1603	2.10
6063	1477	1549	4.92
9589	1368	1475	7.79
15166	1272	1380	8.55
23987	1172	1271	8.41
37937	1084	1157	6.71
60000	1022	1053	2.94

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

En la Figura 7.10 se representan los datos experimentales y los valores teóricos hallados en la Tabla 7.15 para PA6-MD40.

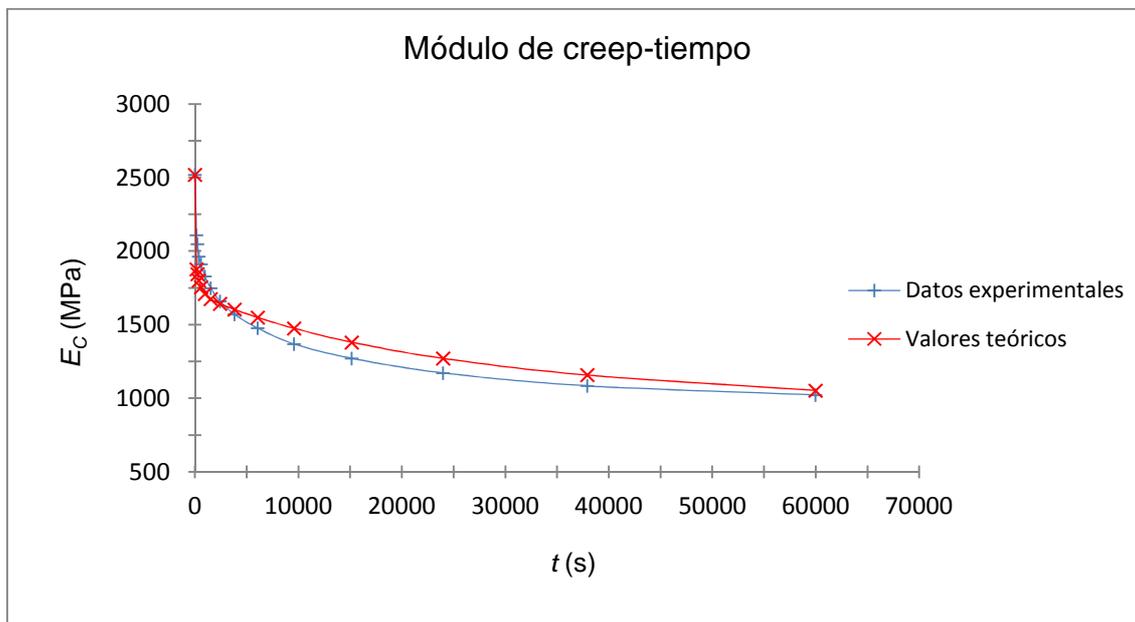


Figura 7.10 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

Para PA6-MD40, el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep en función del tiempo se ajusta suficientemente bien. Sin embargo, a 155 segundos, el error es superior al 10%, como se observa en la Tabla 7.15.

### 7.3.3 Influencia de la temperatura en el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Los valores usados para cada temperatura en este modelo y material se muestran en la Tabla 7.16. Los coeficientes en el dominio del tiempo en función de la temperatura para este modelo y material se presentan en la Tabla 7.17.

Tabla 7.16 - Valores usados para cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

$T$ (°C)	$E_T$ (MPa)	$E_{C\infty} / E_{C0}$	$RC$	$a_T$
23	2518	0.307	8.19E-01	2.70E+01
30	2132	0.317	8.08E-01	1.00E+00
35	2000	0.316	8.08E-01	1.57E-01
40	1794	0.317	8.07E-01	3.35E-02
45	1639	0.320	8.04E-01	9.01E-03
50	1524	0.321	8.02E-01	2.92E-03
55	1433	0.323	8.00E-01	1.10E-03
60	1355	0.323	8.00E-01	4.64E-04
65	1283	0.325	7.99E-01	2.17E-04
70	1220	0.326	7.97E-01	1.11E-04
75	1167	0.328	7.95E-01	6.04E-05
80	1121	0.329	7.94E-01	3.50E-05
85	1082	0.329	7.93E-01	2.14E-05
90	1047	0.330	7.93E-01	1.37E-05
95	1016	0.331	7.90E-01	9.06E-06
100	987	0.332	7.90E-01	6.21E-06

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

Tabla 7.17 - Coeficientes a cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

$T$ (°C)	23	30	35	40	45	50	55	60
$CMR_1$	1.59E-01	1.57E-01	1.57E-01	1.57E-01	1.56E-01	1.56E-01	1.56E-01	1.56E-01
$CT_1$ (s)	9.63E+00	3.56E-01	5.60E-02	1.19E-02	3.21E-03	1.04E-03	3.90E-04	1.65E-04
$CMR_2$	2.09E-01	2.06E-01	2.06E-01	2.06E-01	2.05E-01	2.04E-01	2.04E-01	2.04E-01
$CT_2$ (s)	5.14E+04	1.90E+03	2.99E+02	6.36E+01	1.71E+01	5.54E+00	2.08E+00	8.82E-01
$CMR_3$	1.19E-01	1.18E-01	1.18E-01	1.18E-01	1.17E-01	1.17E-01	1.17E-01	1.16E-01
$CT_3$ (s)	1.42E+04	5.27E+02	8.28E+01	1.76E+01	4.74E+00	1.54E+00	5.77E-01	2.44E-01
$CMR_4$	4.51E-02	4.45E-02	4.45E-02	4.45E-02	4.42E-02	4.42E-02	4.41E-02	4.40E-02
$CT_4$ (s)	4.73E+06	1.75E+05	2.75E+04	5.85E+03	1.58E+03	5.10E+02	1.92E+02	8.12E+01
$CMR_5$	6.51E-02	6.42E-02	6.43E-02	6.42E-02	6.39E-02	6.38E-02	6.36E-02	6.36E-02
$CT_5$ (s)	2.06E-03	7.64E-05	1.20E-05	2.56E-06	6.88E-07	2.23E-07	8.36E-08	3.55E-08
$CMR_6$	9.55E-02	9.42E-02	9.42E-02	9.41E-02	9.37E-02	9.35E-02	9.33E-02	9.33E-02
$CT_6$ (s)	4.46E+02	1.65E+01	2.59E+00	5.52E-01	1.49E-01	4.81E-02	1.81E-02	7.66E-03

Continuación

$T$ (°C)	65	70	75	80	85	90	95	100
$CMR_1$	1.55E-01	1.55E-01	1.55E-01	1.54E-01	1.54E-01	1.54E-01	1.54E-01	1.54E-01
$CT_1$ (s)	7.74E-05	3.94E-05	2.15E-05	1.25E-05	7.62E-06	4.86E-06	3.23E-06	2.21E-06
$CMR_2$	2.03E-01	2.03E-01	2.02E-01	2.02E-01	2.02E-01	2.02E-01	2.01E-01	2.01E-01
$CT_2$ (s)	4.13E-01	2.10E-01	1.15E-01	6.66E-02	4.07E-02	2.59E-02	1.72E-02	1.18E-02
$CMR_3$	1.16E-01	1.16E-01	1.16E-01	1.16E-01	1.15E-01	1.15E-01	1.15E-01	1.15E-01
$CT_3$ (s)	1.14E-01	5.83E-02	3.18E-02	1.85E-02	1.13E-02	7.19E-03	4.77E-03	3.27E-03
$CMR_4$	4.40E-02	4.39E-02	4.38E-02	4.37E-02	4.36E-02	4.36E-02	4.35E-02	4.35E-02
$CT_4$ (s)	3.80E+01	1.94E+01	1.06E+01	6.13E+00	3.74E+00	2.39E+00	1.58E+00	1.09E+00
$CMR_5$	6.35E-02	6.33E-02	6.32E-02	6.31E-02	6.30E-02	6.30E-02	6.28E-02	6.28E-02
$CT_5$ (s)	1.66E-08	8.45E-09	4.62E-09	2.68E-09	1.63E-09	1.04E-09	6.92E-10	4.75E-10
$CMR_6$	9.31E-02	9.29E-02	9.27E-02	9.25E-02	9.24E-02	9.24E-02	9.21E-02	9.21E-02
$CT_6$ (s)	3.59E-03	1.83E-03	9.97E-04	5.78E-04	3.53E-04	2.25E-04	1.49E-04	1.03E-04

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

En la Figura 7.11 se representa la variación del módulo de creep en función del tiempo para cada temperatura utilizando este modelo matemático.

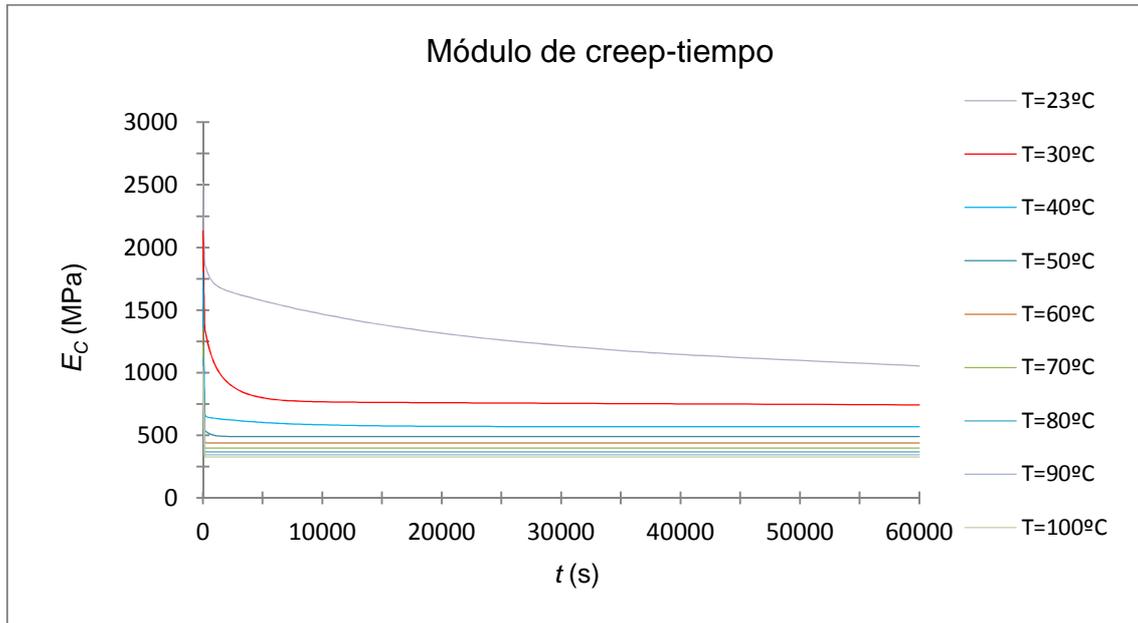


Figura 7.11 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo a cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

Para poder comparar los valores teóricos con el gráfico de la Figura 7.5, se representa en la Figura 7.12 la curva maestra del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para este modelo y material.

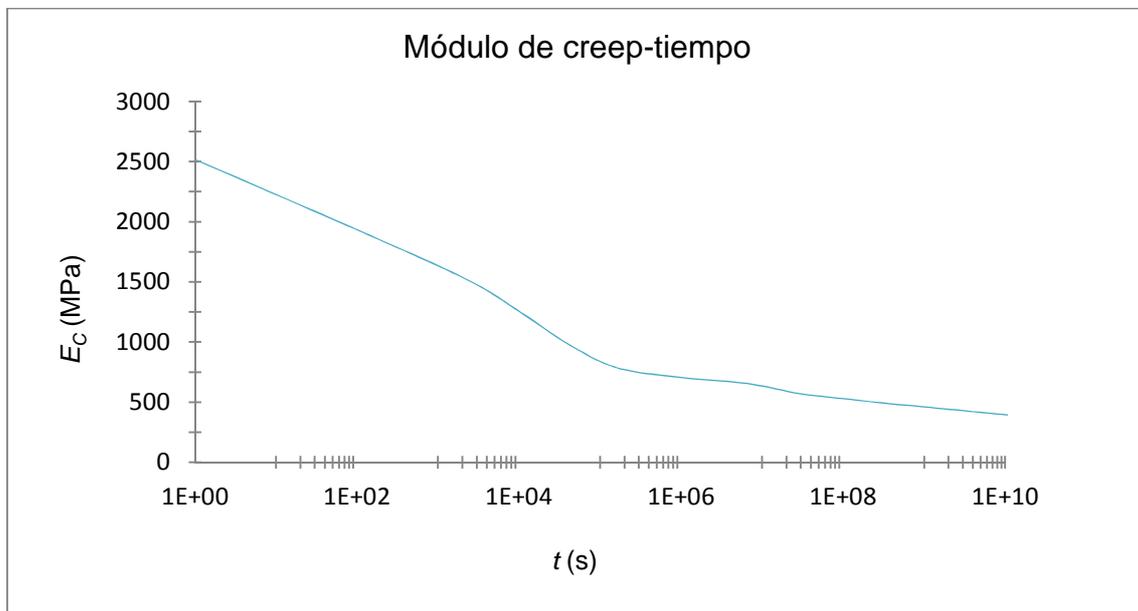


Figura 7.12 - Curva maestra a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

---

En la Tabla 7.18 se comparan los datos experimentales y los valores teóricos y se calculan los errores.

Tabla 7.18 - Errores entre los datos experimentales y los valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

$t$ (s)	$E_c$ (MPa) Datos experimentales	$E_c$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
3.60E+04	1062	1021	3.85
3.60E+05	939	766	18.39
3.60E+06	802	681	15.16

Para PA6-MD40, el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep no puede usarse para caracterizar este material en función del tiempo y de la temperatura. Los errores son superiores al 10% en algunos casos, como se observa en la Tabla 7.18.

### 7.3.4 Modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo, en la Tabla 7.19, se muestran los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C.

Tabla 7.19 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

$t$ (s)	$E_c$ (MPa) Datos experimentales	$E_c$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
0	2518	2518	0.00
155	2108	1971	6.50
245	2048	1954	4.59
387	1963	1927	1.85
613	1910	1886	1.27
969	1830	1828	0.08
1533	1749	1749	0.01
2424	1660	1648	0.68
3834	1570	1535	2.27
6063	1477	1422	3.69
9589	1368	1323	3.35
15166	1272	1236	2.84
23987	1172	1156	1.33
37937	1084	1092	0.72
60000	1022	1053	2.94

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

En la Figura 7.13 se representan los datos experimentales y los valores teóricos hallados en la Tabla 7.19 para PA6-MD40.

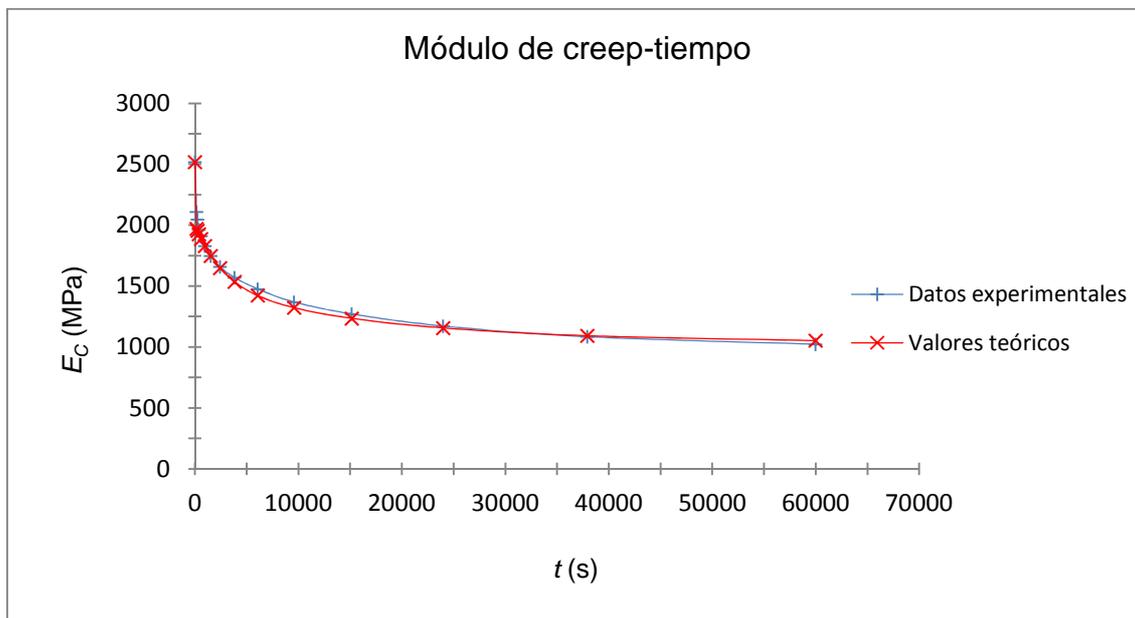


Figura 7.13 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

Para PA6-MD40, el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep en función del tiempo se ajusta suficientemente bien. Los errores son inferiores al 7% en todos los casos, como se observa en la Tabla 7.19.

### 7.3.5 Influencia de la temperatura en el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Los valores que se usan para cada temperatura en este modelo y material se muestran en la Tabla 7.20. Los coeficientes en el dominio del tiempo en función de la temperatura para este modelo y material se presentan en la Tabla 7.21.

Tabla 7.20 - Valores usados para cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

$T$ (°C)	$E_T$ (MPa)	$E_{C\infty} / E_{C0}$	$RC$	$a_T$
23	2518	0.369	7.46E-01	2.70E+01
30	2132	0.381	7.32E-01	1.00E+00
35	2000	0.380	7.33E-01	1.57E-01
40	1794	0.381	7.32E-01	3.35E-02
45	1639	0.385	7.27E-01	9.01E-03
50	1524	0.386	7.26E-01	2.92E-03
55	1433	0.388	7.23E-01	1.10E-03
60	1355	0.389	7.23E-01	4.64E-04
65	1283	0.390	7.21E-01	2.17E-04
70	1220	0.392	7.19E-01	1.11E-04
75	1167	0.394	7.17E-01	6.04E-05
80	1121	0.395	7.15E-01	3.50E-05
85	1082	0.396	7.14E-01	2.14E-05
90	1047	0.396	7.14E-01	1.37E-05
95	1016	0.398	7.11E-01	9.06E-06
100	987	0.399	7.11E-01	6.21E-06

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

Tabla 7.21 - Coeficientes a cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

$T$ (°C)	23	30	35	40	45	50	55	60
$CMR_1$	1.45E-01	1.42E-01	1.42E-01	1.42E-01	1.41E-01	1.41E-01	1.41E-01	1.41E-01
$CT_1$ (s)	1.43E+00	3.56E-01	1.63E-01	8.49E-02	4.88E-02	3.03E-02	2.01E-02	1.40E-02
$CMR_2$	1.90E-01	1.86E-01	1.87E-01	1.86E-01	1.85E-01	1.85E-01	1.84E-01	1.84E-01
$CT_2$ (s)	2.64E+03	1.90E+03	1.58E+03	1.35E+03	1.19E+03	1.06E+03	9.60E+02	8.81E+02
$CMR_3$	1.09E-01	1.07E-01	1.07E-01	1.07E-01	1.06E-01	1.06E-01	1.05E-01	1.05E-01
$CT_3$ (s)	2.25E+04	5.27E+02	6.40E+01	1.10E+01	2.46E+00	6.82E-01	2.24E-01	8.41E-02
$CMR_4$	4.11E-02	4.03E-02	4.03E-02	4.03E-02	4.00E-02	4.00E-02	3.98E-02	3.98E-02
$CT_4$ (s)	1.52E+07	1.75E+05	1.43E+04	1.75E+03	2.96E+02	6.43E+01	1.71E+01	5.33E+00
$CMR_5$	5.93E-02	5.82E-02	5.83E-02	5.82E-02	5.78E-02	5.77E-02	5.75E-02	5.75E-02
$CT_5$ (s)	5.58E-02	7.64E-05	1.89E-06	8.55E-08	6.20E-09	6.50E-10	9.16E-11	1.65E-11
$CMR_6$	8.70E-02	8.54E-02	8.54E-02	8.53E-02	8.48E-02	8.46E-02	8.43E-02	8.43E-02
$CT_6$ (s)	1.21E+04	1.65E+01	4.08E-01	1.85E-02	1.34E-03	1.40E-04	1.98E-05	3.56E-06

Continuación

$T$ (°C)	65	70	75	80	85	90	95	100
$CMR_1$	1.40E-01	1.40E-01	1.39E-01	1.39E-01	1.39E-01	1.39E-01	1.38E-01	1.38E-01
$CT_1$ (s)	1.01E-02	7.62E-03	5.90E-03	4.69E-03	3.81E-03	3.15E-03	2.65E-03	2.26E-03
$CMR_2$	1.84E-01	1.83E-01	1.83E-01	1.82E-01	1.82E-01	1.82E-01	1.81E-01	1.81E-01
$CT_2$ (s)	8.17E+02	7.63E+02	7.19E+02	6.80E+02	6.48E+02	6.19E+02	5.94E+02	5.72E+02
$CMR_3$	1.05E-01	1.05E-01	1.04E-01	1.04E-01	1.04E-01	1.04E-01	1.04E-01	1.04E-01
$CT_3$ (s)	3.54E-02	1.64E-02	8.24E-03	4.43E-03	2.53E-03	1.51E-03	9.49E-04	6.18E-04
$CMR_4$	3.97E-02	3.96E-02	3.95E-02	3.94E-02	3.93E-02	3.93E-02	3.92E-02	3.91E-02
$CT_4$ (s)	1.91E+00	7.65E-01	3.37E-01	1.61E-01	8.25E-02	4.49E-02	2.57E-02	1.55E-02
$CMR_5$	5.73E-02	5.72E-02	5.70E-02	5.69E-02	5.68E-02	5.68E-02	5.66E-02	5.65E-02
$CT_5$ (s)	3.61E-12	9.35E-13	2.79E-13	9.38E-14	3.49E-14	1.42E-14	6.26E-15	2.95E-15
$CMR_6$	8.41E-02	8.38E-02	8.36E-02	8.34E-02	8.33E-02	8.33E-02	8.29E-02	8.29E-02
$CT_6$ (s)	7.80E-07	2.02E-07	6.03E-08	2.03E-08	7.55E-09	3.08E-09	1.35E-09	6.37E-10

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

En la Figura 7.14 se representa la variación del módulo de creep en función del tiempo para cada temperatura utilizando este modelo matemático.

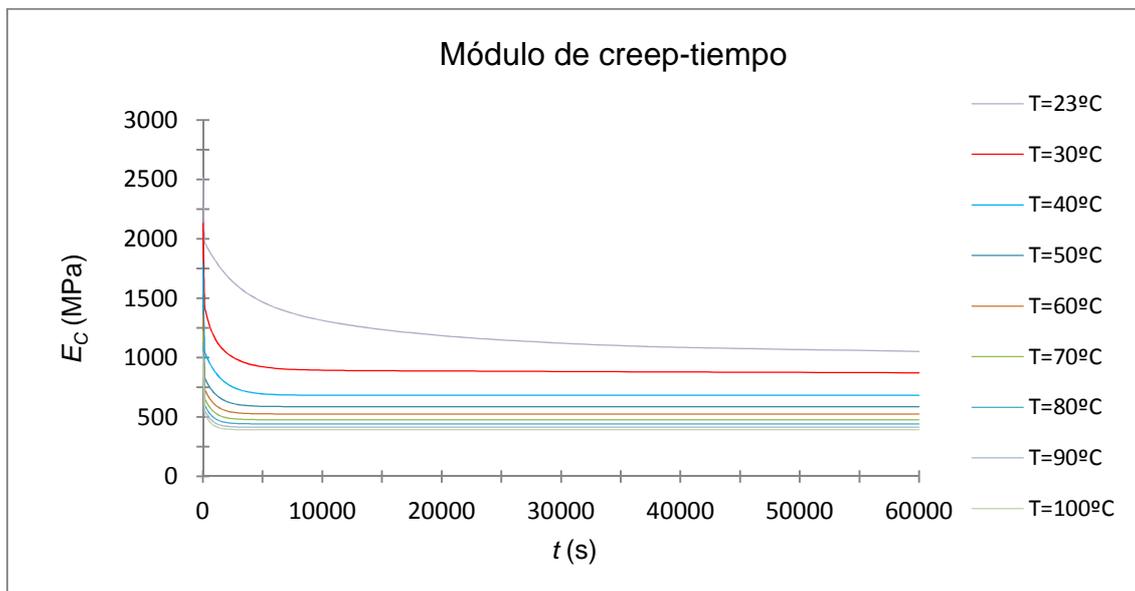


Figura 7.14 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo a cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

Para poder comparar los valores teóricos con el gráfico de la Figura 7.5, se representa en la Figura 7.15 la curva maestra del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para este modelo y material.

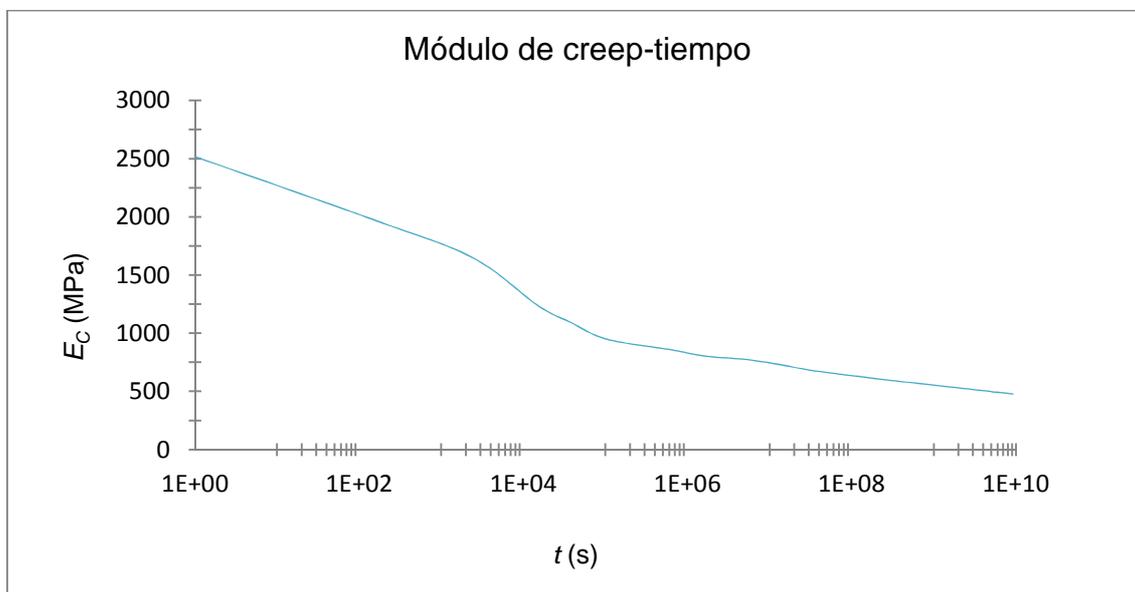


Figura 7.15 - Curva maestra a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

---

En la Tabla 7.22 se comparan los datos experimentales y los valores teóricos y se calculan los errores.

Tabla 7.22 - Errores entre los datos experimentales y los valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

$t$ (s)	$E_c$ (MPa) Datos experimentales	$E_c$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
3.60E+04	1062	1104	3.92
3.60E+05	939	904	3.68
3.60E+06	802	788	1.85

Para PA6-MD40, el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep puede usarse para caracterizar este material en función del tiempo y de la temperatura. Además, para este material, éste es el único modelo que se ajusta bien a los datos experimentales. Los errores son inferiores al 4% en todos los casos, como se observa en la Tabla 7.22.

### 7.3.6 Comparación entre los dos modelos modificados

Comparando ambos métodos, para este material, sólo el modelo que tiene en cuenta coeficientes alfa en el dominio del tiempo ajusta suficientemente bien los valores teóricos a los datos experimentales y, por lo tanto, caracteriza bien el material. El otro modelo, sin coeficientes alfa, presenta grandes errores para tiempos elevados, dando a entender que este modelo no explica de forma correcta lo que sucede con el material en función del tiempo.

### 7.4 Simulaciones de los tests de creep

#### 7.4.1 Simulaciones sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para PA6-MD40, las líneas que se deben modificar con respecto al código general presentado en el anexo A.1.2.1 se muestran a continuación para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep.

Los coeficientes que se deben introducir en ANSYS® 12.1 Academic Teaching son los coeficientes a 30°C mostrados en la Tabla 7.17.

Línea 7	/FILENAME,CreepPA6-MD40SinAlfas
Línea 8	/TITLE,CreepPA6-MD40SinAlfas
Línea 12	R,1,4,3
Línea 15	MPDATA,EX,1,1,2518,2132,2000,1794,1639,1524
Línea 18	MPDATA,EX,1,7,1433,1355,1283,1220,1167,1121
Línea 21	MPDATA,EX,1,13,1082,1047,1016,987
Línea 24	TBDATA,1,1.57E-01,3.56E-01,2.06E-01,1.90E+03,1.18E-01,5.27E+02
Línea 25	TBDATA,7,4.45E-02,1.75E+05,6.42E-02,7.64E-05,9.42E-02,1.65E+01
De la línea 26 a la 29	Estas líneas no existen
Línea 30	TB,SHIFT,1,1,3,WLF
Línea 31	TBDATA,1,303,9.00,51.00
Línea 32	Esta línea no existe
Línea 71	F,2,FX,400/10.5/2/2
Línea 72	F,27,FX,400/10.5/2,,36,1
Línea 98	SAVE,CreepPA6-MD40SinAlfas,db

Se simulan los mismos casos que para PA66. Para el caso 1, los resultados se muestran en la Tabla 7.23 y la representación gráfica en la Figura 7.16. Para el caso 2, los resultados se muestran en la Tabla 7.24 y la representación gráfica en la Figura 7.17.

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

### Caso 1

Temperatura = 23°C

Tiempo de creep = 60000 s

Tabla 7.23 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

TIME	2 UX UX	159 S X SX average	4 PROD Extension	5 QUOT EC
600	0.614277E-01	9.22343	0.122855	1876.89
1200	0.647523E-01	9.22208	0.129505	1780.26
2400	0.670775E-01	9.22127	0.134155	1718.40
4800	0.695496E-01	9.22044	0.139099	1657.17
9600	0.737159E-01	9.21910	0.147432	1563.28
15600	0.781197E-01	9.21780	0.156239	1474.95
21600	0.818537E-01	9.21679	0.163707	1407.51
27600	0.850751E-01	9.21599	0.170150	1354.10
33600	0.878957E-01	9.21535	0.175791	1310.55
39600	0.903967E-01	9.21482	0.180793	1274.22
45600	0.926376E-01	9.21437	0.185275	1243.34
51600	0.946626E-01	9.21399	0.189325	1216.69
57600	0.965049E-01	9.21367	0.193010	1193.42
60000	0.971900E-01	9.21355	0.194380	1184.99

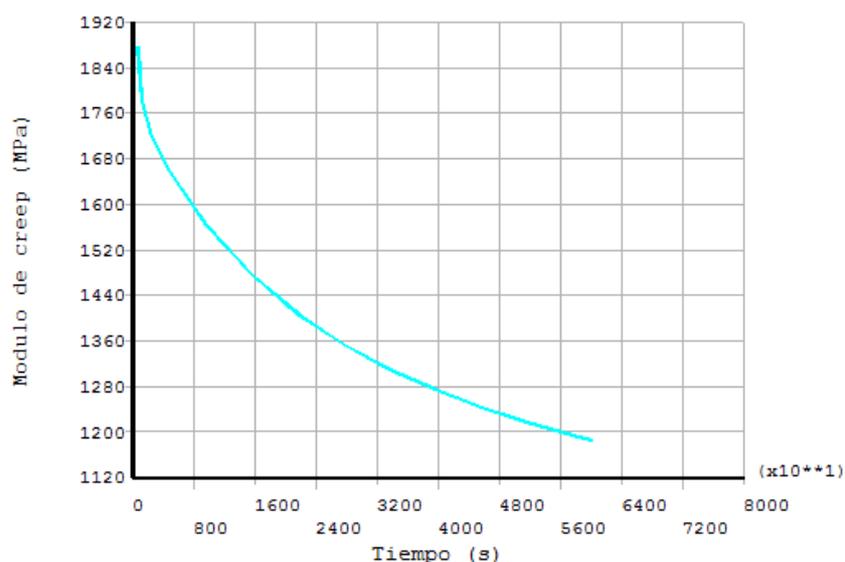


Figura 7.16 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

### Caso 2

Temperatura = 52.5°C

Tiempo de creep = 10000 s

Tabla 7.24 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

TIME	2 UX UX	159 S X SX average	4 PROD Extension	5 QUOT EC
100	0. 207018	9. 21103	0. 414036	556. 173
200	0. 212921	9. 21066	0. 425841	540. 733
400	0. 220692	9. 21021	0. 441383	521. 668
800	0. 227562	9. 20985	0. 455124	505. 898
1600	0. 230473	9. 20972	0. 460947	499. 501
2600	0. 230804	9. 20972	0. 461609	498. 784
3600	0. 230826	9. 20971	0. 461652	498. 737
4600	0. 230827	9. 20971	0. 461654	498. 734
5600	0. 230827	9. 20971	0. 461655	498. 734
6600	0. 230827	9. 20971	0. 461655	498. 734
7600	0. 230827	9. 20971	0. 461655	498. 734
8600	0. 230827	9. 20971	0. 461655	498. 734
9600	0. 230827	9. 20971	0. 461655	498. 734
10000	0. 230827	9. 20971	0. 461654	498. 734

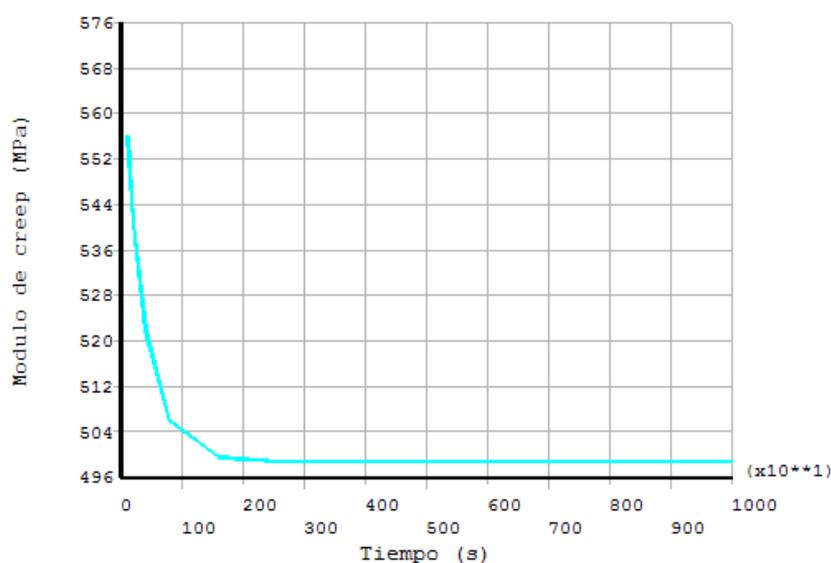


Figura 7.17 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

---

En el caso 1, el módulo de creep a 60000 segundos que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 1185 MPa, mientras que el mismo parámetro a 60000 segundos usando el modelo matemático presenta un valor de 1053 MPa. El coeficiente de variación es de 8.37%. El dato experimental presenta un valor de 1022 MPa. El coeficiente de variación con dicho dato es de 10.44%.

En el caso 2, el módulo de creep a 10000 segundos que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 499 MPa.

### 7.4.2 Simulaciones con coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para PA6-MD40, las líneas que se deben modificar con respecto al código general presentado en el anexo A.1.2.2 se muestran a continuación para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep.

Línea 2	Esta línea no existe
Línea 7	/FILENAME,CreepPA6-MD40ConAlfas
Línea 8	/TITLE,CreepPA6-MD40ConAlfas
De la línea 23 a la 32	Estas líneas no existen
Línea 98	SAVE,CreepPA6-MD40ConAlfas,db

La tabla de coeficientes a introducir en ANSYS® 12.1 Academic Teaching se presenta para cada temperatura en la Tabla 7.25.

Se simulan los mismos casos que para PA66. Para el caso 1, los resultados se muestran en la Tabla 7.26 y la representación gráfica en la Figura 7.18. Para el caso 2, los resultados se muestran en la Tabla 7.27 y la representación gráfica en la Figura 7.19.

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

Tabla 7.25 - Coeficientes introducidos en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

296	303	308	313	318	323	328	333
1.45E-01	1.42E-01	1.42E-01	1.42E-01	1.41E-01	1.41E-01	1.41E-01	1.41E-01
1.43E+00	3.56E-01	1.63E-01	8.49E-02	4.88E-02	3.03E-02	2.01E-02	1.40E-02
1.90E-01	1.86E-01	1.87E-01	1.86E-01	1.85E-01	1.85E-01	1.84E-01	1.84E-01
2.64E+03	1.90E+03	1.58E+03	1.35E+03	1.19E+03	1.06E+03	9.60E+02	8.81E+02
1.09E-01	1.07E-01	1.07E-01	1.07E-01	1.06E-01	1.06E-01	1.05E-01	1.05E-01
2.25E+04	5.27E+02	6.40E+01	1.10E+01	2.46E+00	6.82E-01	2.24E-01	8.41E-02
4.11E-02	4.03E-02	4.03E-02	4.03E-02	4.00E-02	4.00E-02	3.98E-02	3.98E-02
1.52E+07	1.75E+05	1.43E+04	1.75E+03	2.96E+02	6.43E+01	1.71E+01	5.33E+00
5.93E-02	5.82E-02	5.83E-02	5.82E-02	5.78E-02	5.77E-02	5.75E-02	5.75E-02
5.58E-02	7.64E-05	1.89E-06	8.55E-08	6.20E-09	6.50E-10	9.16E-11	1.65E-11
8.70E-02	8.54E-02	8.54E-02	8.53E-02	8.48E-02	8.46E-02	8.43E-02	8.43E-02
1.21E+04	1.65E+01	4.08E-01	1.85E-02	1.34E-03	1.40E-04	1.98E-05	3.56E-06

Continuación

338	343	348	353	358	363	368	373
1.40E-01	1.40E-01	1.39E-01	1.39E-01	1.39E-01	1.39E-01	1.38E-01	1.38E-01
1.01E-02	7.62E-03	5.90E-03	4.69E-03	3.81E-03	3.15E-03	2.65E-03	2.26E-03
1.84E-01	1.83E-01	1.83E-01	1.82E-01	1.82E-01	1.82E-01	1.81E-01	1.81E-01
8.17E+02	7.63E+02	7.19E+02	6.80E+02	6.48E+02	6.19E+02	5.94E+02	5.72E+02
1.05E-01	1.05E-01	1.04E-01	1.04E-01	1.04E-01	1.04E-01	1.04E-01	1.04E-01
3.54E-02	1.64E-02	8.24E-03	4.43E-03	2.53E-03	1.51E-03	9.49E-04	6.18E-04
3.97E-02	3.96E-02	3.95E-02	3.94E-02	3.93E-02	3.93E-02	3.92E-02	3.91E-02
1.91E+00	7.65E-01	3.37E-01	1.61E-01	8.25E-02	4.49E-02	2.57E-02	1.55E-02
5.73E-02	5.72E-02	5.70E-02	5.69E-02	5.68E-02	5.68E-02	5.66E-02	5.65E-02
3.61E-12	9.35E-13	2.79E-13	9.38E-14	3.49E-14	1.42E-14	6.26E-15	2.95E-15
8.41E-02	8.38E-02	8.36E-02	8.34E-02	8.33E-02	8.33E-02	8.29E-02	8.29E-02
7.80E-07	2.02E-07	6.03E-08	2.03E-08	7.55E-09	3.08E-09	1.35E-09	6.37E-10

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

### Caso 1

Temperatura = 23°C

Tiempo de creep = 60000 s

Tabla 7.26 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

TIME	2 UX UX	159 S X SX average	4 PROD Extension	5 QUOT EC
600	0.582869E-01	9.22478	0.116574	1978.31
1200	0.611644E-01	9.22348	0.122329	1884.98
2400	0.659165E-01	9.22151	0.131833	1748.71
4800	0.726475E-01	9.21912	0.145295	1586.28
9600	0.805205E-01	9.21696	0.161041	1430.84
15600	0.863231E-01	9.21570	0.172646	1334.48
21600	0.903513E-01	9.21492	0.180703	1274.87
27600	0.934173E-01	9.21438	0.186835	1232.96
33600	0.958191E-01	9.21400	0.191638	1202.00
39600	0.977229E-01	9.21373	0.195446	1178.55
45600	0.992422E-01	9.21353	0.198484	1160.49
51600	0.100461	9.21338	0.200922	1146.39
57600	0.101443	9.21327	0.202885	1135.28
60000	0.101773	9.21323	0.203545	1131.59

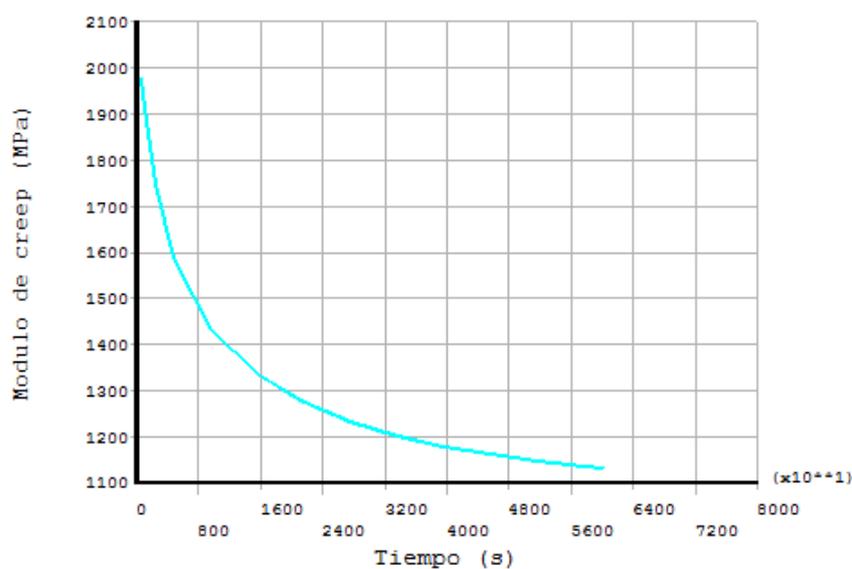


Figura 7.18 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

### Caso 2

Temperatura = 52.5°C

Tiempo de creep = 10000 s

Tabla 7.27 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

TIME	2 UX UX	159 S X SX average	4 PROD Extension	5 QUOT EC
100	0.130648	9.21845	0.261295	881.996
200	0.136463	9.21756	0.272927	844.324
400	0.143417	9.21658	0.286834	803.303
800	0.154392	9.21516	0.308783	746.086
1600	0.169140	9.21355	0.338280	680.912
2600	0.179292	9.21269	0.358585	642.296
3600	0.184500	9.21237	0.369001	624.143
4600	0.187172	9.21224	0.374344	615.225
5600	0.188543	9.21220	0.377086	610.750
6600	0.189246	9.21218	0.378492	608.479
7600	0.189607	9.21217	0.379213	607.321
8600	0.189792	9.21217	0.379584	606.729
9600	0.189887	9.21217	0.379773	606.425
10000	0.189910	9.21217	0.379820	606.350

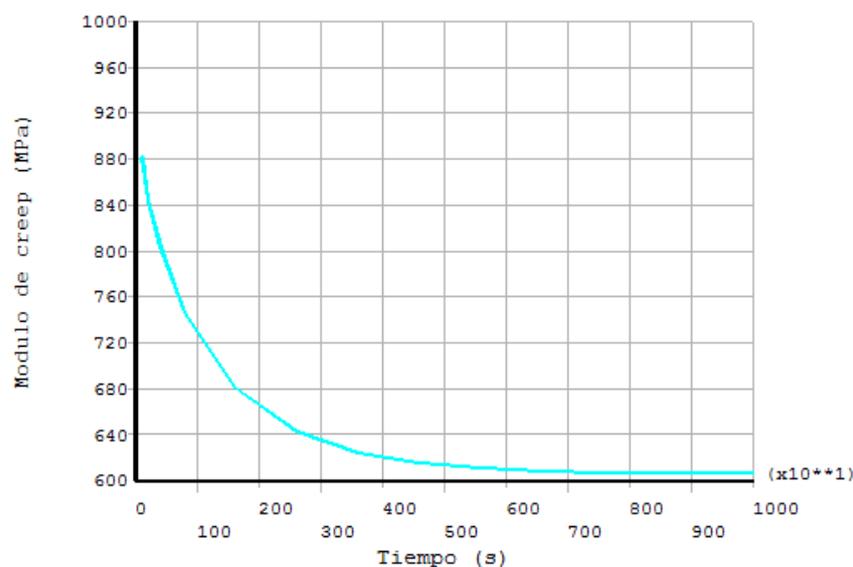


Figura 7.19 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA6-MD40

## Capítulo 7 - Bucle de creep para PA6-MD40

---

En el caso 1, el módulo de creep a 60000 segundos que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 1132 MPa, mientras que el mismo parámetro a 60000 segundos usando el modelo matemático presenta un valor de 1053 MPa. El coeficiente de variación es de 5.12%. El dato experimental presenta un valor de 1022 MPa. El coeficiente de variación con dicho dato es de 7.22%.

En el caso 2, el módulo de creep a 10000 segundos que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 606 MPa.

### 8 Bucle de tracción para PA66-GF50

El procedimiento del bucle de tracción para PA66-GF50 es el mismo que el presentado para PA66 en el capítulo 4 y para PA6-MD40 en el capítulo 6. Por esta razón, en este capítulo sólo se añadirán algunas explicaciones y comentarios puntuales.

#### 8.1 Barrido de amplitudes

Los barridos de amplitudes para el módulo de almacenamiento, el módulo de pérdida y la tangente del ángulo de fase para PA66-GF50 se presentan en la Figura 8.1, en la Figura 8.2 y en la Figura 8.3, respectivamente.

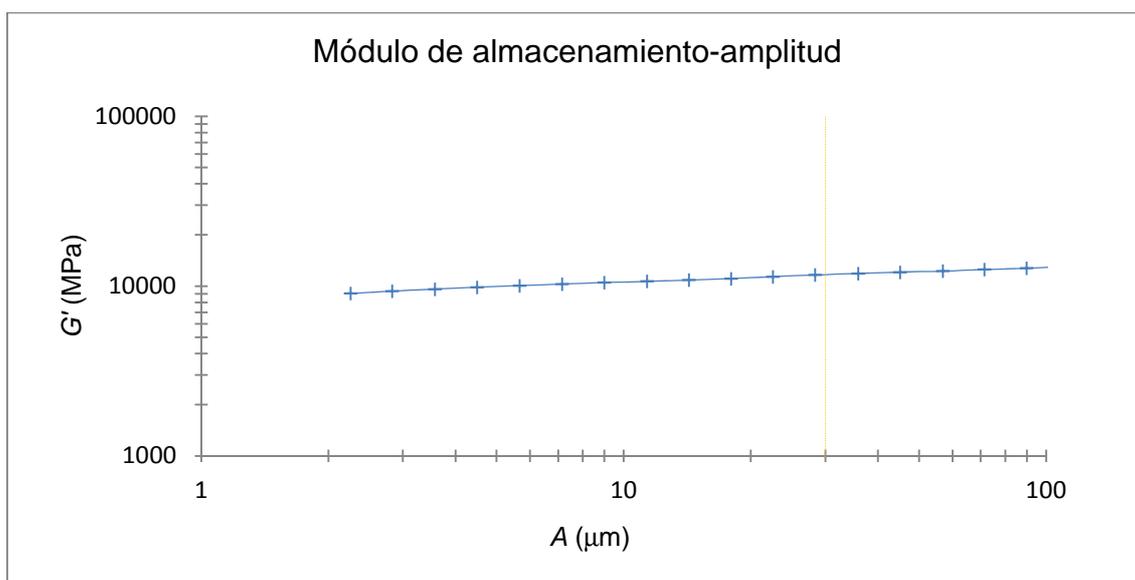


Figura 8.1 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la amplitud para PA66-GF50

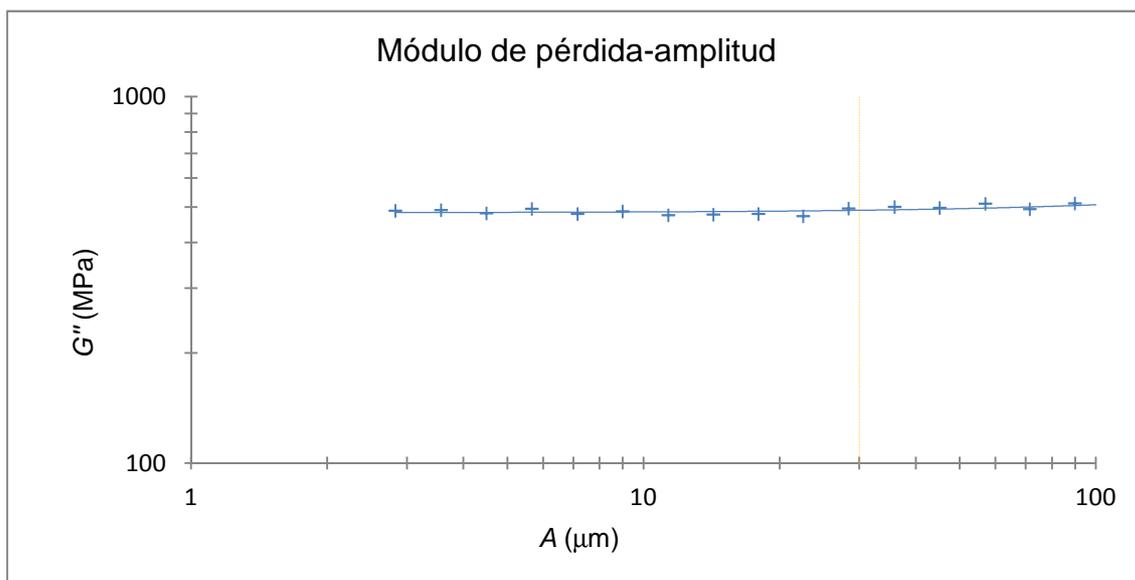


Figura 8.2 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la amplitud para PA66-GF50

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

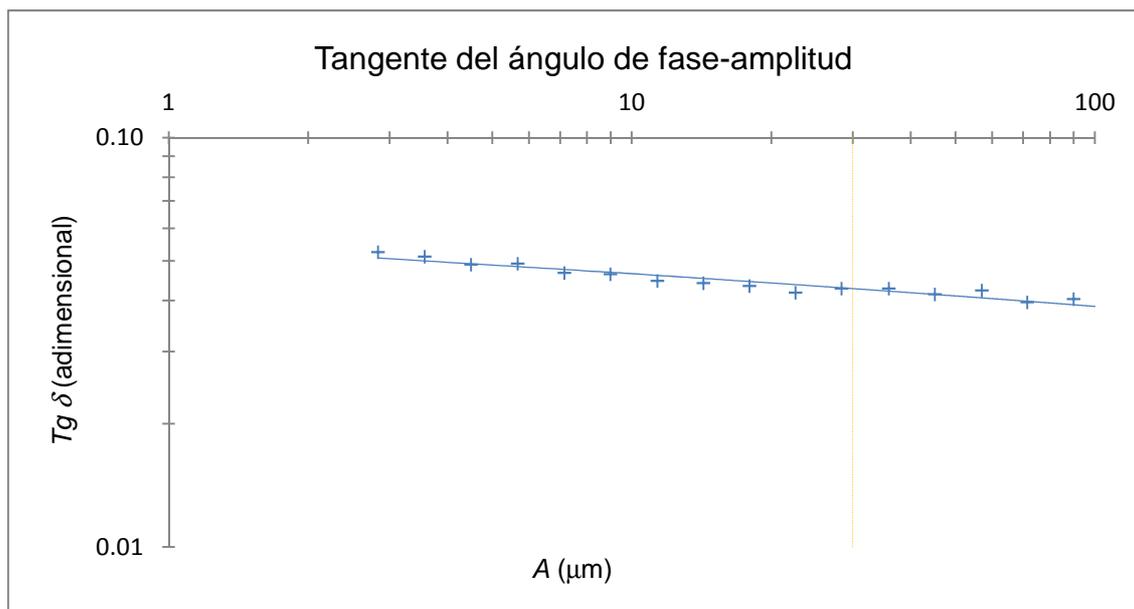


Figura 8.3 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la amplitud para PA66-GF50

Para PA66-GF50 la amplitud para realizar los ensayos posteriores es de 30  $\mu m$ .

En la Figura 8.4 se representa la variación del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación obtenida a partir del barrido de amplitudes para PA66-GF50.

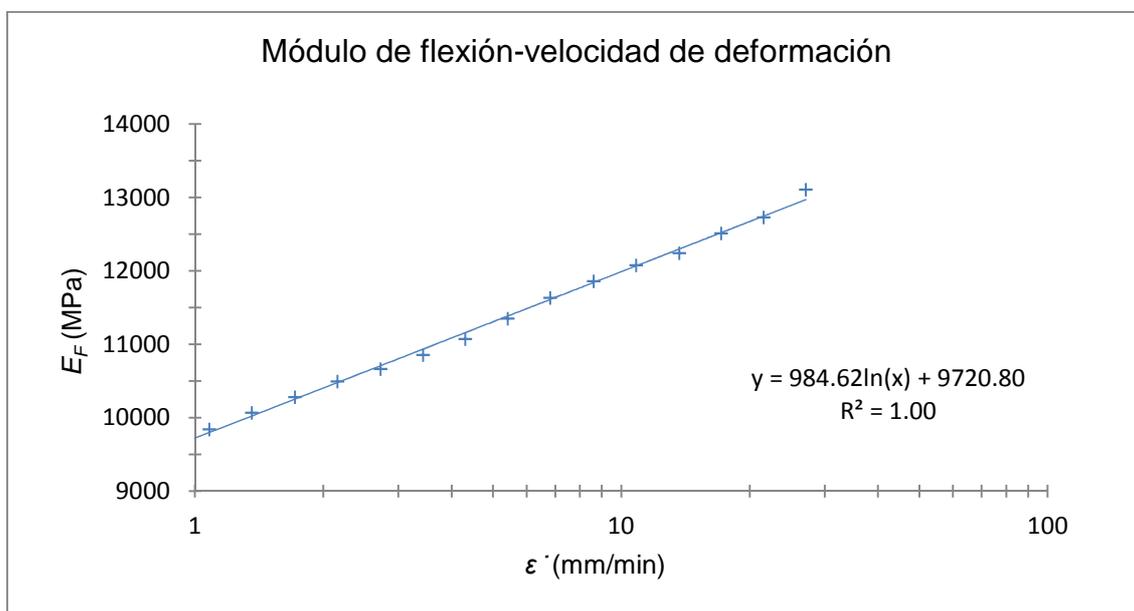


Figura 8.4 - Representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación a partir del barrido de amplitudes para PA66-GF50

Se confirma la tendencia logarítmica entre el módulo de flexión y la velocidad de deformación para PA66-GF50.

### 8.2 Barrido de temperaturas

Los barridos de temperaturas para el módulo de almacenamiento, el módulo de pérdida y la tangente del ángulo de fase para PA66-GF50 se presentan en la Figura 8.5, en la Figura 8.6 y en la Figura 8.7, respectivamente.

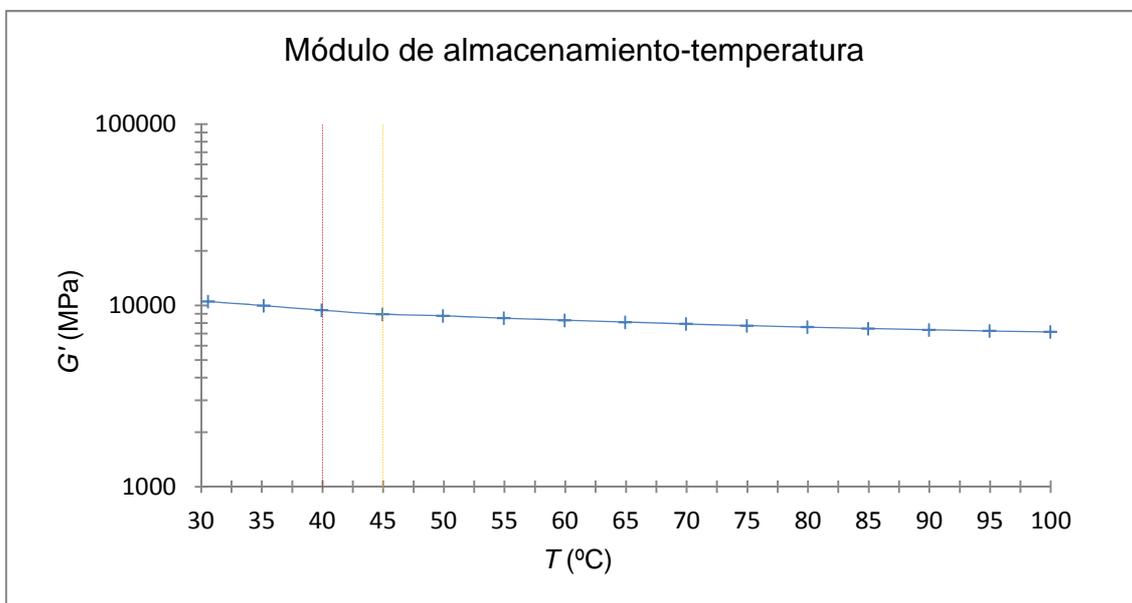


Figura 8.5 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la temperatura para PA66-GF50

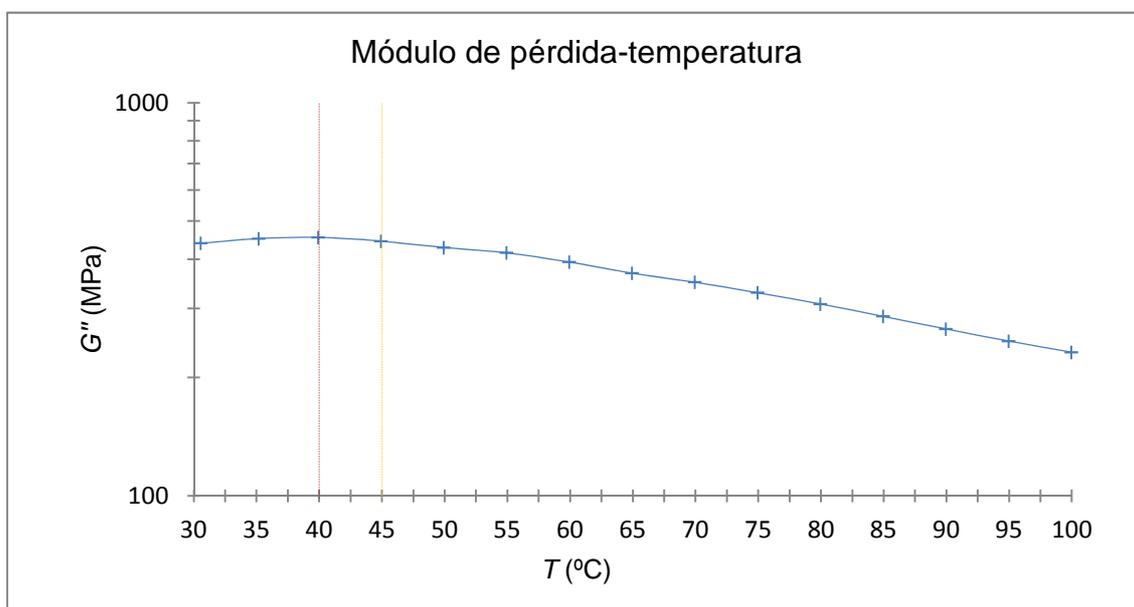


Figura 8.6 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la temperatura para PA66-GF50

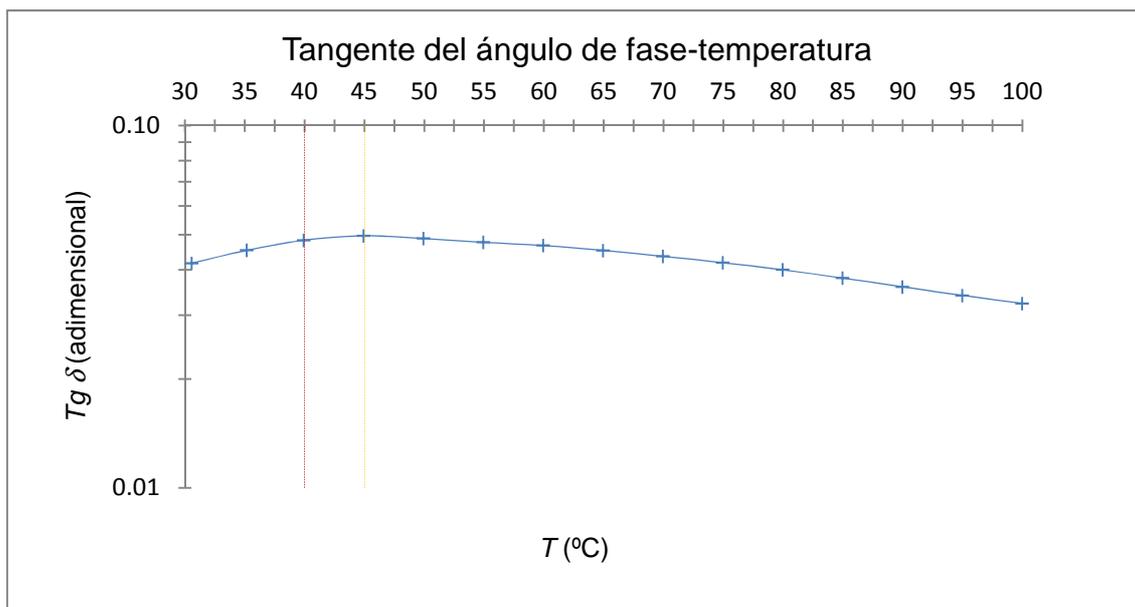


Figura 8.7 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la temperatura para PA66-GF50

Como se observa, para PA66-GF50, el máximo del módulo de pérdida se da a 40°C, aproximadamente.

### 8.3 Barrido de frecuencias

Los barridos de frecuencias para el módulo de almacenamiento, el módulo de pérdida y la tangente del ángulo de fase para PA66-GF50 se presentan en la Figura 8.8, en la Figura 8.9 y en la Figura 8.10, respectivamente.

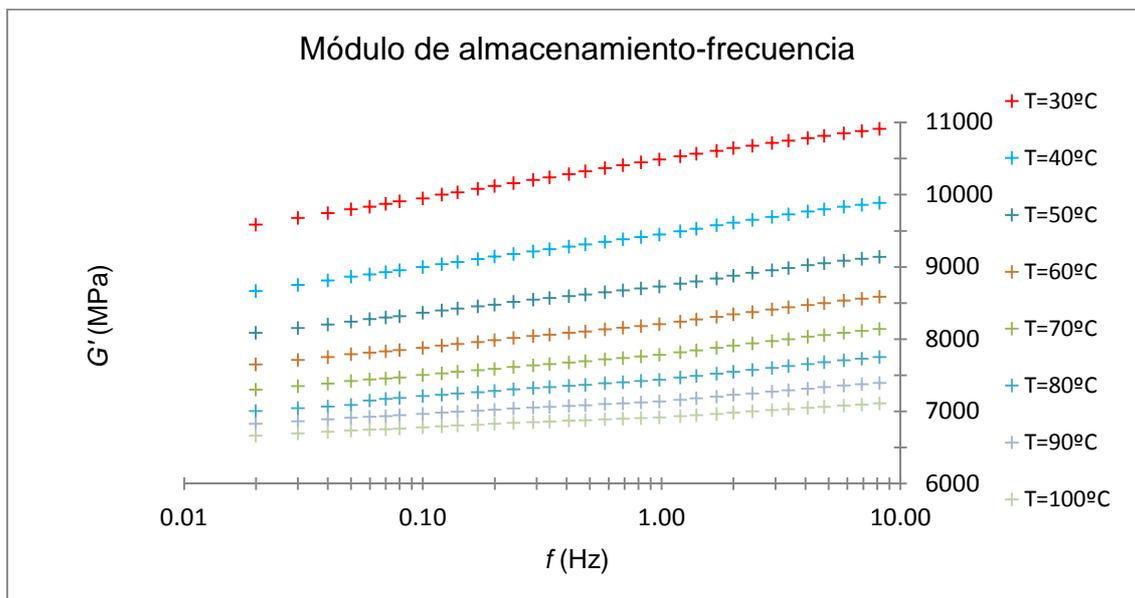


Figura 8.8 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para PA66-GF50

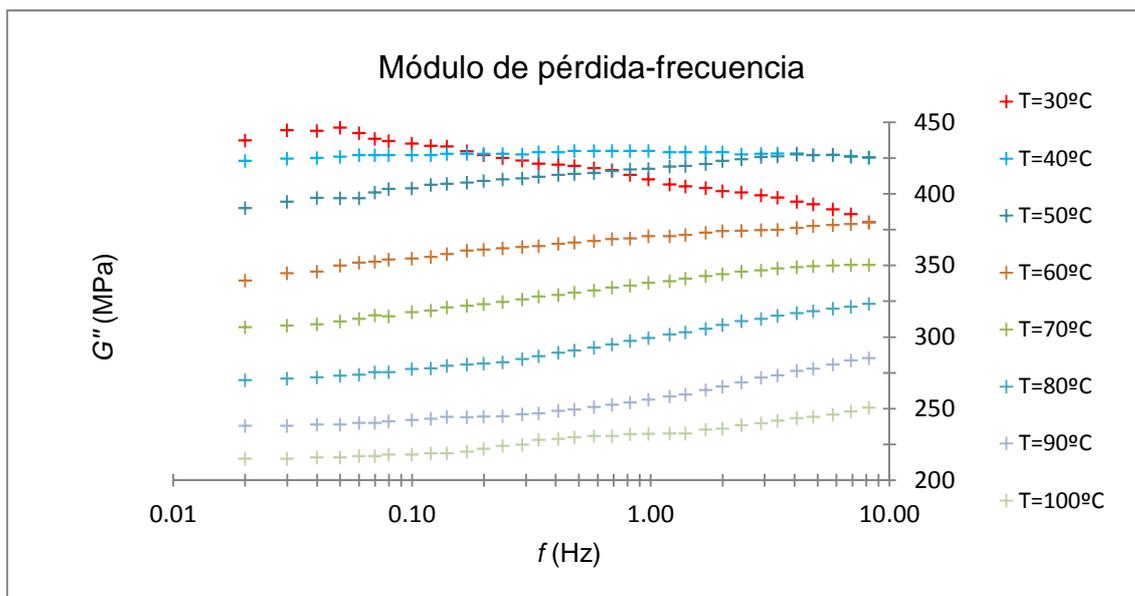


Figura 8.9 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia para PA66-GF50

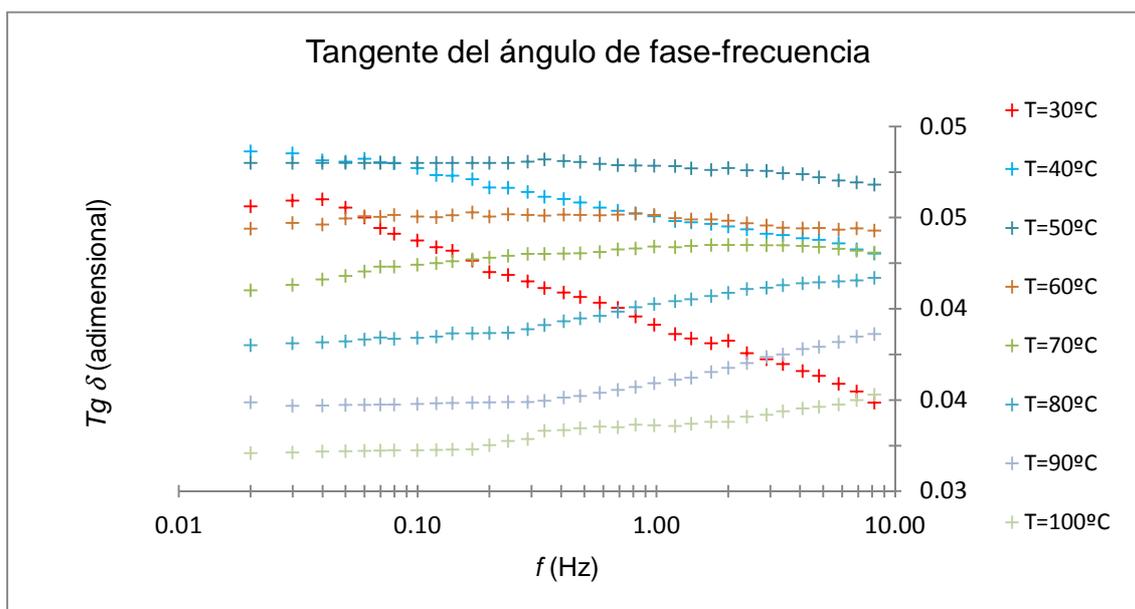


Figura 8.10 - Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia para PA66-GF50

Para este material, la representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación para cada temperatura se muestra en la Figura 8.11.

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

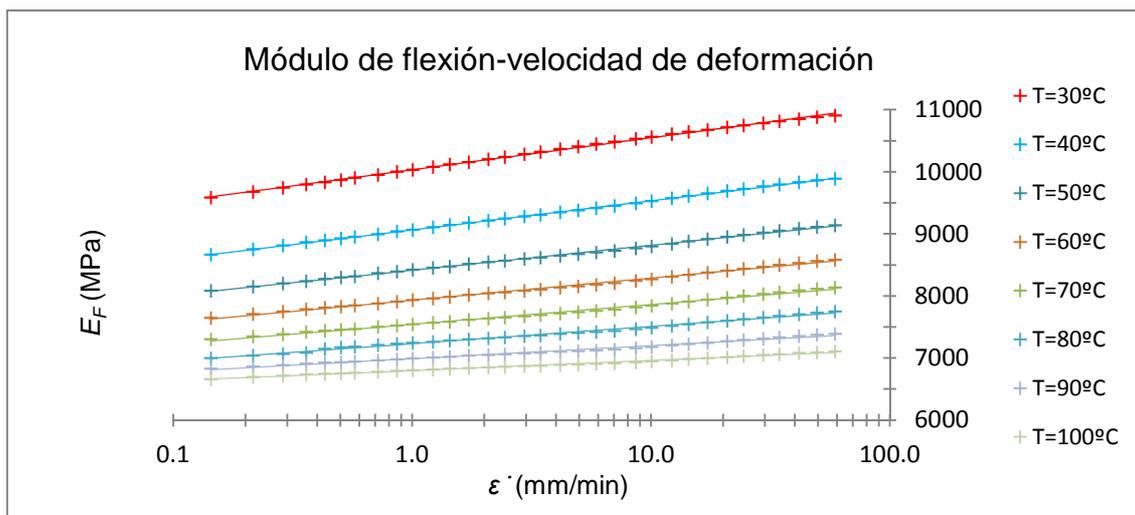


Figura 8.11 - Representación gráfica del módulo de flexión en función de la velocidad de deformación a partir del barrido de frecuencias para PA66-GF50

Para PA66-GF50,  $PENDE_F$  y el módulo de flexión a 1 mm/min en función de la temperatura se muestra en la Tabla 8.1.

Tabla 8.1 - Pendiente y término independiente del ajuste logarítmico entre el módulo de flexión y la velocidad de deformación para PA66-GF50

$T$ (°C)	$PENDE_F$ (MPa/(mm/min))	$E_F$ (MPa) 1 mm/min
30	224	10032
35	220	9559
40	204	9063
45	188	8704
50	175	8413
55	163	8167
60	155	7931
65	147	7724
70	139	7543
75	128	7383
80	121	7230
85	104	7099
90	91	6989
95	80	6890
100	71	6797

### 8.4 Factor de desplazamiento

Para este material, se usan dos subrangos de temperaturas. Por una parte, un subrango que va de 30°C a 40°C, donde se encuentra el máximo del módulo de pérdida en función de la temperatura. Por otra parte, un subrango que va de 40°C a 100°C. El primer subrango se ajusta mediante la ecuación de Arrhenius y el segundo subrango, mediante la ecuación de Williams-Landel-Ferry (WLF).

El coeficiente de la ecuación de Arrhenius es de 236595 J.

Los coeficientes de la ecuación WLF son de 9.00 para  $C_1$  y 59.08 para  $C_2$ .

En la Figura 8.12 se representa la linealización de la ecuación de Arrhenius, correspondiente al primer subrango de temperaturas.

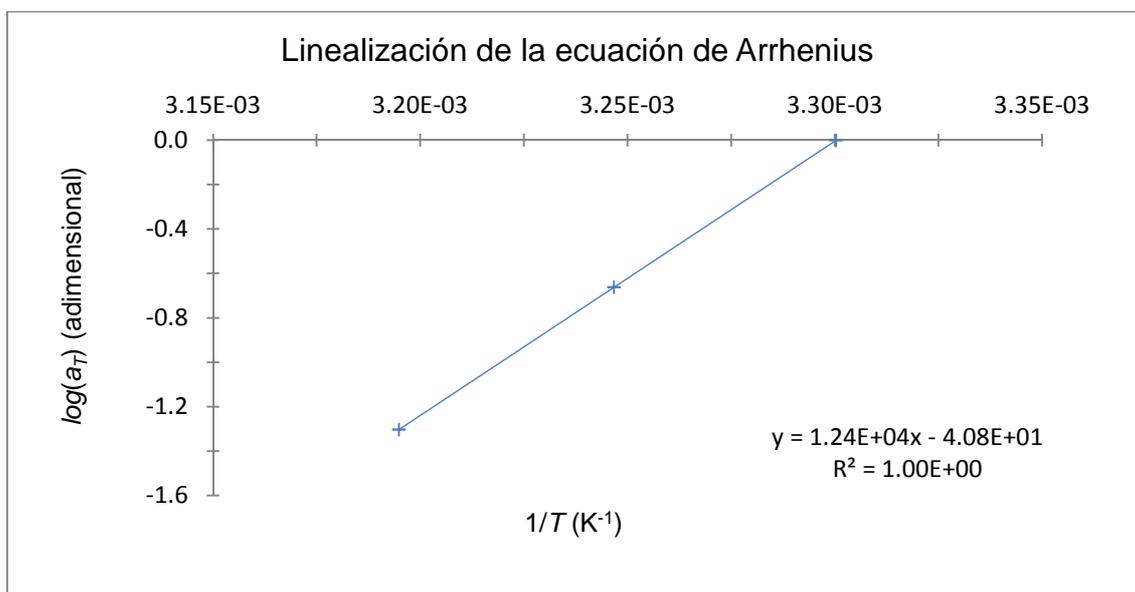


Figura 8.12 - Linealización de la ecuación de Arrhenius para PA66-GF50

En la Figura 8.13 se representa la linealización de la ecuación WLF, correspondiente al segundo subrango de temperaturas.

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

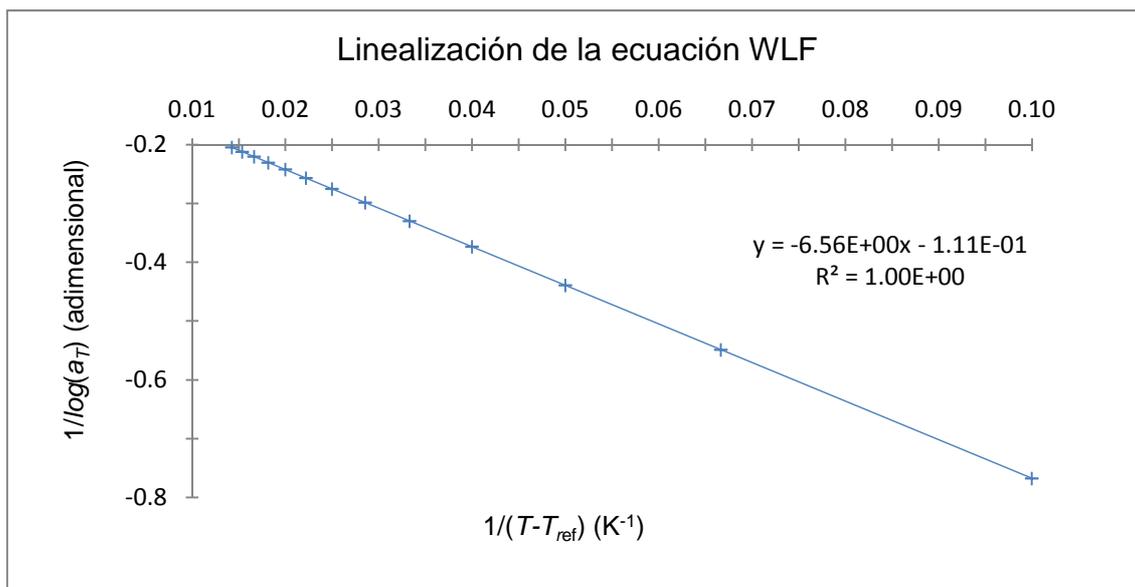


Figura 8.13 - Linealización de la ecuación WLF para PA66-GF50

Las curvas maestras para este material se presentan en la Figura 8.14 (módulo de almacenamiento en función de la frecuencia) y en la Figura 8.15 (módulo de pérdida en función de la frecuencia).

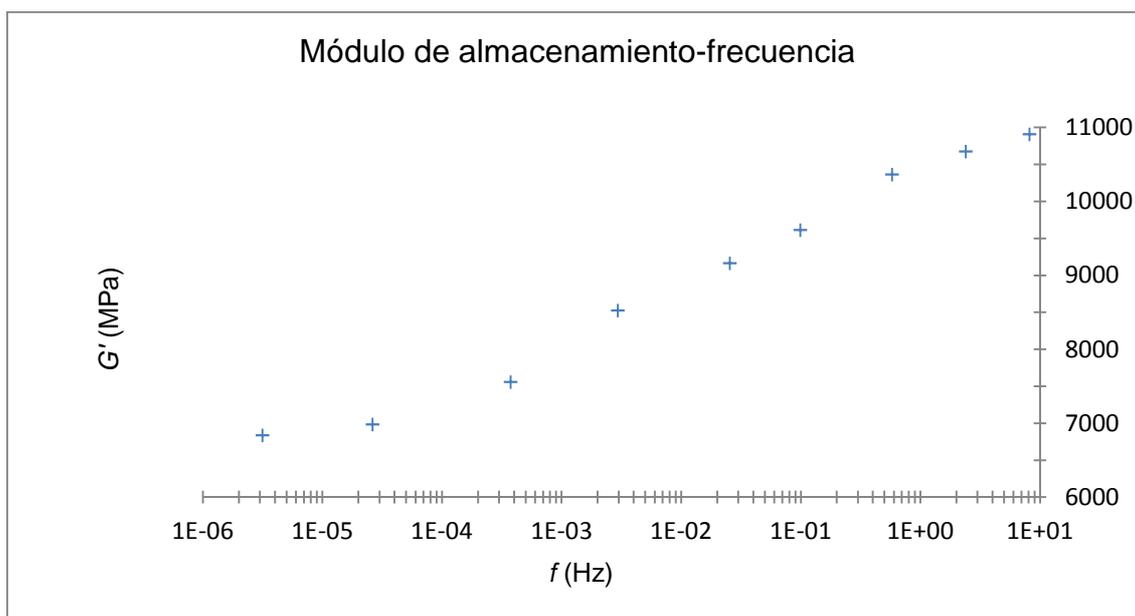


Figura 8.14 - Curva maestra del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para PA66-GF50

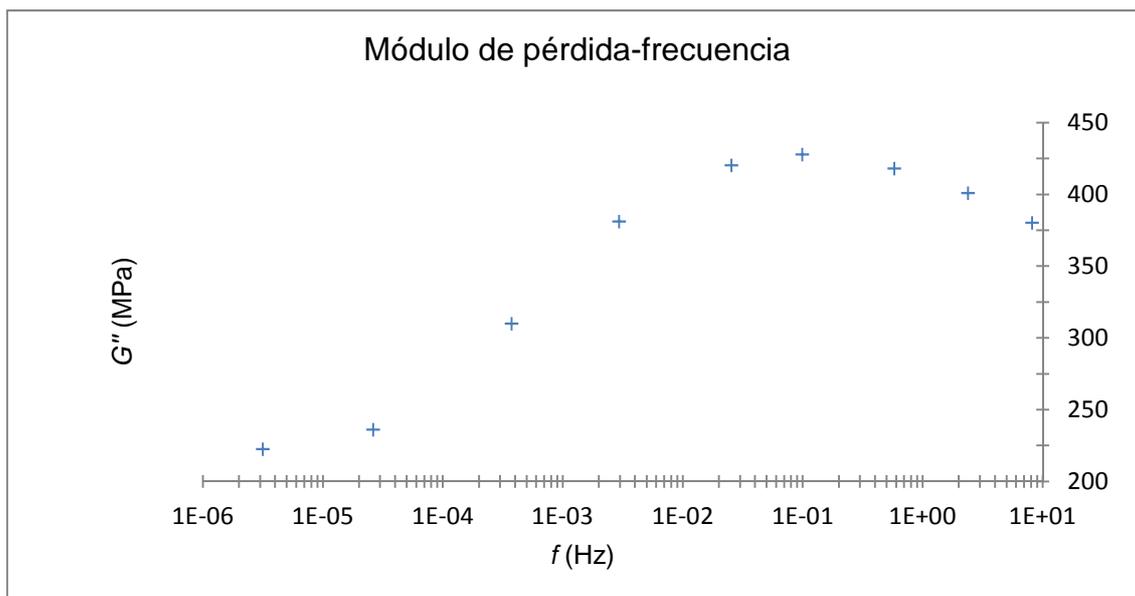


Figura 8.15 - Curva maestra del módulo de pérdida en función de la frecuencia para PA66-GF50

La variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura para este material se muestra en la Figura 8.16.

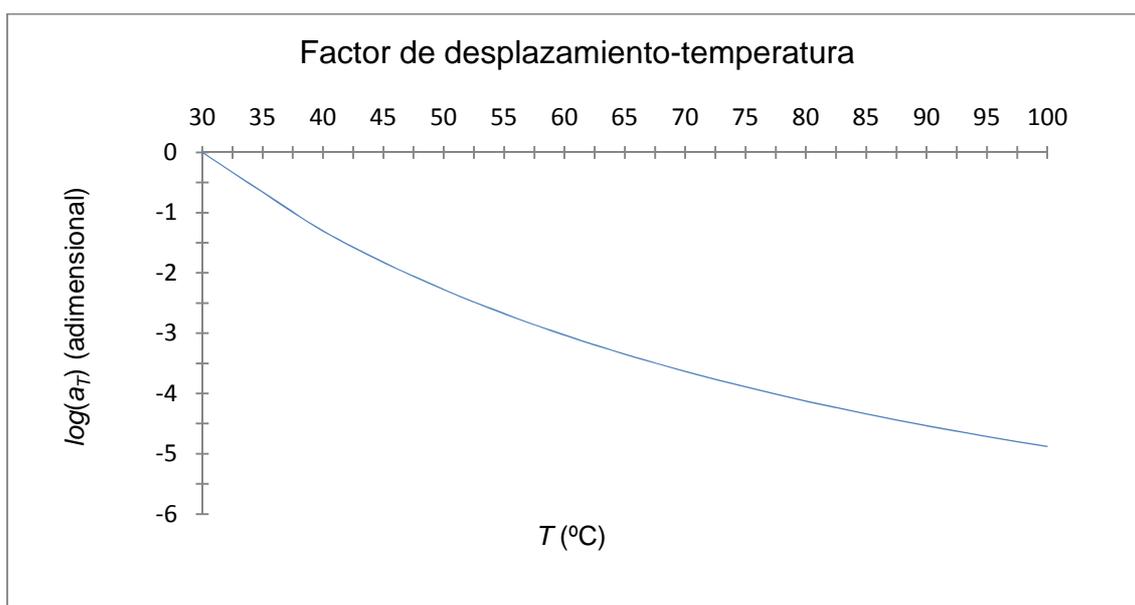


Figura 8.16 - Representación gráfica del factor de desplazamiento en función de la temperatura para PA66-GF50

### 8.5 Ratio de módulos

El módulo de flexión a la temperatura de referencia (30°C) se muestra en la Tabla 8.2 para PA66-GF50.

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

Tabla 8.2 - Módulo de flexión a 30°C para PA66-GF50

$T$ (°C)	$A$ (mm)	$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$f$ (Hz)	$E_F$ (MPa)
30	0.03	1.00	1.39E-01	10032

Se crea una tabla similar (Tabla 8.3), con el valor de los módulos de flexión y de tracción a 23°C.

Tabla 8.3 - Módulo de flexión y módulo de tracción a 23°C para PA66-GF50

$T$ (°C)	$A$ (mm)	$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$f$ (Hz)	$E_F$ (MPa)	$E_T$ (MPa)
23	0.03	1.00	1.28E+00	10546	14474

El ratio de módulos para PA66-GF50 es de 1.37.

### 8.6 Influencia de la temperatura

En la Tabla 8.4 se calculan diferentes módulos de tracción en función de la temperatura para PA66-GF50.

Tabla 8.4 - Módulo de tracción a cada temperatura para PA66-GF50

$T$ (°C)	$A$ (mm)	$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$f$ (Hz)	$E_F$ (MPa)	$E_T$ (MPa)
30	0.03	1.00	1.39E-01	10032	13768
35	0.03	1.00	1.39E-01	9559	13119
40	0.03	1.00	1.39E-01	9063	12438
45	0.03	1.00	1.39E-01	8704	11945
50	0.03	1.00	1.39E-01	8413	11546
55	0.03	1.00	1.39E-01	8167	11208
60	0.03	1.00	1.39E-01	7931	10884
65	0.03	1.00	1.39E-01	7724	10600
70	0.03	1.00	1.39E-01	7543	10352
75	0.03	1.00	1.39E-01	7383	10132
80	0.03	1.00	1.39E-01	7230	9922
85	0.03	1.00	1.39E-01	7099	9743
90	0.03	1.00	1.39E-01	6989	9592
95	0.03	1.00	1.39E-01	6890	9456
100	0.03	1.00	1.39E-01	6797	9328

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

La representación gráfica del módulo de tracción en función de la temperatura para este material se muestra en la Figura 8.17.

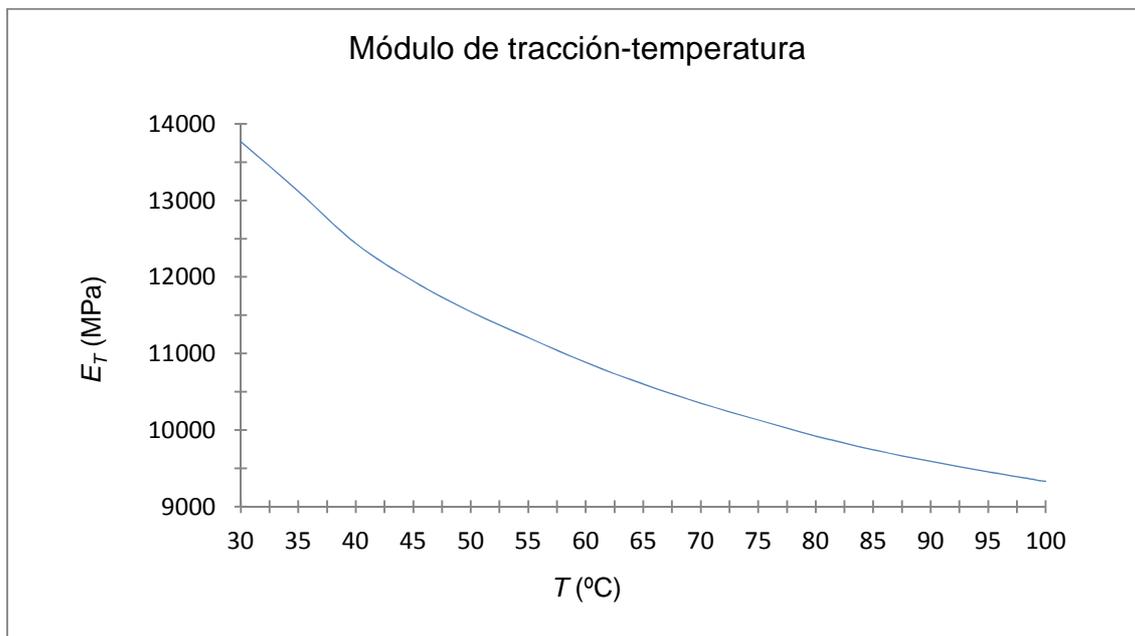


Figura 8.17 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la temperatura para PA66-GF50

### 8.7 Influencia de la velocidad de deformación

Para PA66-GF50, debido al rango de frecuencias que se ha estudiado en DMA, se trabaja con 4 velocidades de deformación. Los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C se muestran en la Tabla 8.5.

Tabla 8.5 - Datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66-GF50

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa)
1.000	13768
3.466	14168
12.011	14553
41.628	14891

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

La representación gráfica del ajuste logarítmico de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación se presenta en la Figura 8.18.

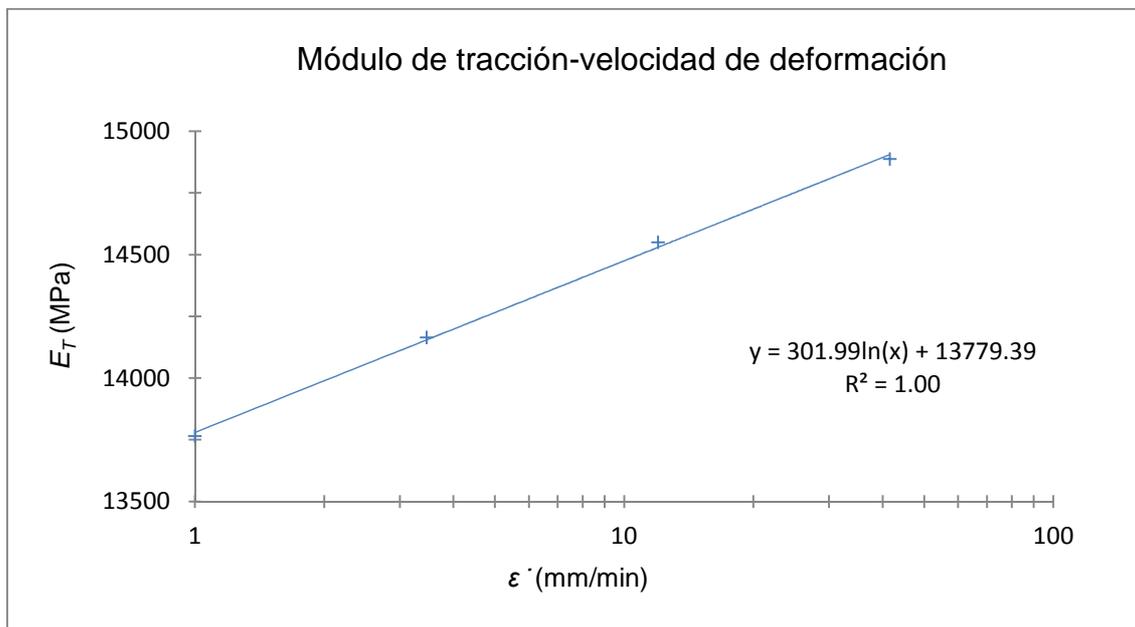


Figura 8.18 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66-GF50

En la Tabla 8.6 se calculan los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para este material.

Tabla 8.6 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66-GF50

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa)
1.000	13768
3.466	14150
12.011	14532
41.628	14914
144.270	15296
499.000	15678

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

La representación gráfica del ajuste logarítmico de los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación se presenta en la Figura 8.19.

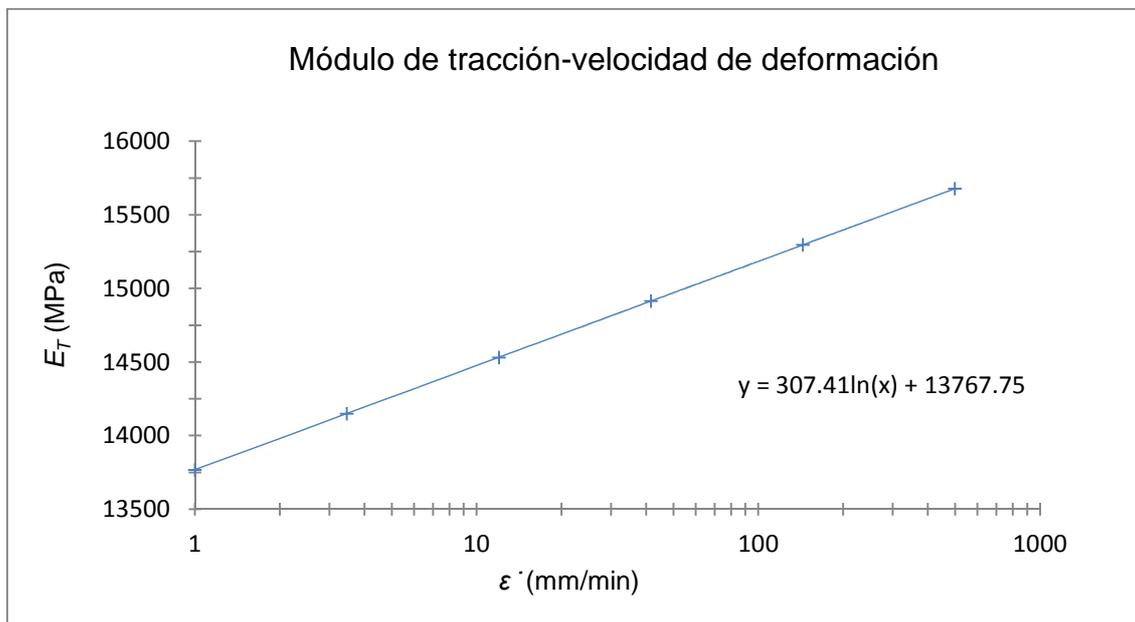


Figura 8.19 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 30°C para PA66-GF50

En la Tabla 8.7 se presenta una comparación entre los datos experimentales y los valores teóricos a la temperatura de referencia para las 4 velocidades de deformación.

Tabla 8.7 - Coeficiente de variación entre los datos experimentales y los valores teóricos a 30°C para PA66-GF50

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa) Datos experimentales	$E_T$ (MPa) Valores teóricos	Desviación estándar	CV (%)
1.000	13768	13768	1.62	0.01
3.466	14168	14150	11.08	0.08
12.011	14553	14532	13.02	0.09
41.628	14891	14914	18.15	0.12

Como se observa, para este material, la discrepancia entre los datos experimentales y los valores teóricos a 30°C es muy pequeña. Esto significa que la aplicación del modelo se puede usar para predecir los módulos de tracción a cada temperatura y a cada velocidad de deformación.

Por lo tanto, para PA66-GF50, el mismo procedimiento puede ser extrapolado a todo el rango de temperaturas.

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

Así pues, se predicen los módulos de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación tal como se muestra en la Tabla 8.8.

Tabla 8.8 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación para PA66-GF50

$\dot{\epsilon}$ (mm/min) / $T$ (°C)	1.000	3.466	12.011	41.628	144.270	499.000
30°C	13768	14150	14532	14914	15296	15678
35°C	13119	13468	13818	14168	14517	14866
40°C	12438	12786	13134	13482	13830	14177
45°C	11945	12266	12587	12907	13228	13548
50°C	11546	11844	12143	12441	12740	13038
55°C	11208	11486	11764	12042	12320	12598
60°C	10884	11149	11413	11678	11942	12206
65°C	10600	10851	11102	11353	11603	11854
70°C	10352	10589	10826	11063	11300	11537
75°C	10132	10351	10569	10787	11006	11224
80°C	9922	10129	10335	10542	10748	10954
85°C	9743	9920	10097	10275	10452	10629
90°C	9592	9747	9902	10057	10212	10367
95°C	9456	9592	9729	9865	10002	10138
100°C	9328	9449	9570	9691	9813	9933

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

En la Figura 8.20 se muestra la representación gráfica del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a diferentes temperaturas.

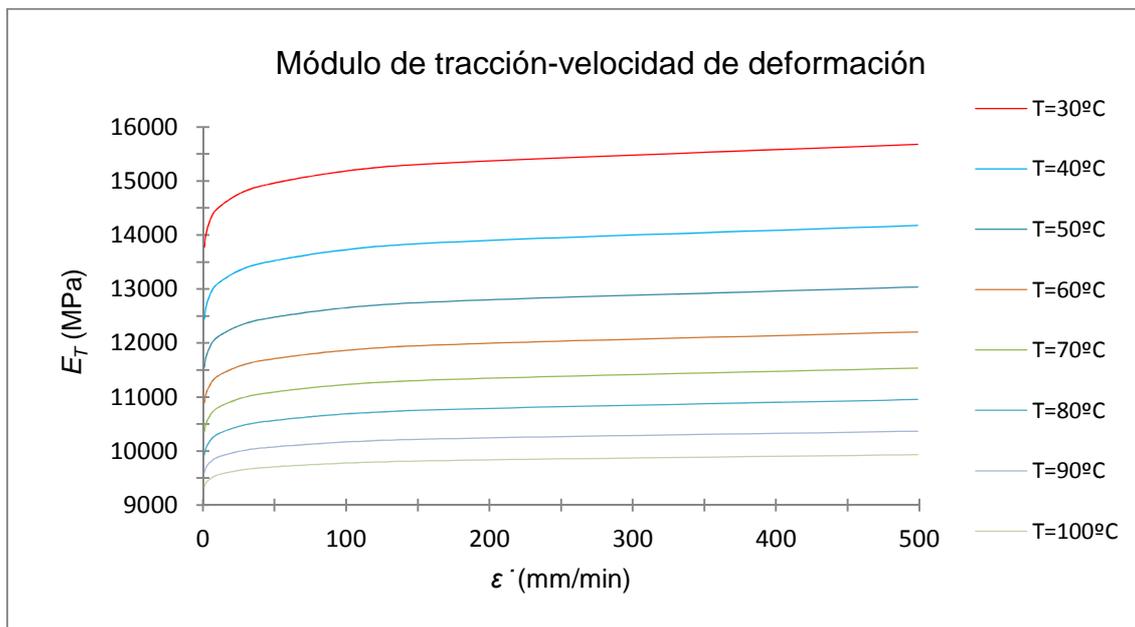


Figura 8.20 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a diferentes temperaturas para PA66-GF50

## 8.8 Verificación del bucle de tracción

### 8.8.1 Verificación de la temperatura

Para verificar los valores del módulo de tracción en función de la temperatura, es necesario obtener curvas de tensión-deformación a diferentes temperaturas para este material. En la Figura 8.21 se muestran dichas curvas (cortesía de Faurecia Interior Systems España, Abrera).

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

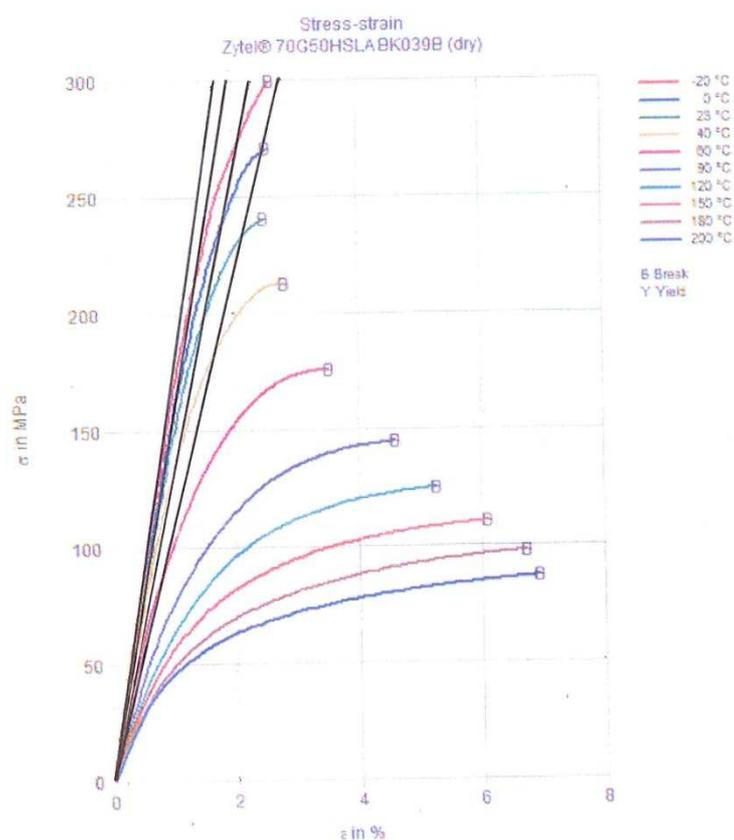


Figura 8.21 - Curvas experimentales de tensión-deformación a diferentes temperaturas para PA66-GF50 (cortesía de Faurecia Interior Systems España, Abrera)

La Tabla 8.9 muestra el módulo de tracción a 40°C, 60°C y 90°C hallados a partir de la Figura 8.21.

Tabla 8.9 - Módulo de tracción a diferentes temperaturas de la representación gráfica experimental para PA66-GF50

$T$ (°C)	$\sigma$ (MPa) a 0.0005 mm/mm	$\sigma$ (MPa) a 0.0025 mm/mm	$E_T$ (MPa)
40	7.62	38.12	15247
60	6.50	32.51	13004
90	5.38	26.91	10762

El factor de condición se aplica en la Tabla 8.10. El módulo de tracción de referencia es de 14474 MPa.

Tabla 8.10 - Factor de condición a 23°C para PA66-GF50

$T$ (°C)	$\sigma$ (MPa) a 0.0005 mm/mm	$\sigma$ (MPa) a 0.0025 mm/mm	$E_T$ (MPa)	Factor de condición
23	8.52	42.60	17040	0.849

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

Los valores obtenidos como datos experimentales a 40°C, 60°C y 90°C se muestran en la Tabla 8.11.

Tabla 8.11 - Módulo de tracción a diferentes temperaturas con la aplicación del factor de condición para PA66-GF50

$T$ (°C)	$E_T$ (MPa)
40	12950
60	11046
90	9141

Los errores entre los valores teóricos de la Tabla 8.8 y los datos experimentales de la Tabla 8.11 del módulo de tracción se muestran en la Tabla 8.12 para 40°C, 60°C y 90°C.

Tabla 8.12 - Errores a diferentes temperaturas a 1 mm/min para PA66-GF50

$T$ (°C)	$E_T$ (MPa) Datos experimentales	$E_T$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
40	12950	12438	3.95
60	11046	10884	1.46
90	9141	9592	4.93

Para PA66-GF50, el modelo matemático para el bucle de tracción en función de la temperatura se ajusta bien. Los errores son inferiores al 5% en todos los casos, como se observa en la Tabla 8.12.

### 8.8.2 Verificación de la velocidad de deformación

Para PA66-GF50, la pendiente experimental del módulo de flexión a 23°C se puede predecir a 1.000 y 3.466 mm/min, dos velocidades de deformación.

En la Tabla 8.13 se muestran los módulos de tracción a 23°C para estas dos velocidades de deformación.

Tabla 8.13 - Módulo de tracción predicho en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66-GF50

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$f$ (Hz) 30°C	$f$ (Hz) 23°C	$E_F$ (MPa)	$E_T$ (MPa)
1.000	1.39E-01	1.28E+00	10546	14474
3.466	4.81E-01	4.44E+00	10798	14820

La Ecuación 8.1, que se usa para calcular la pendiente del módulo de tracción, se deduce a partir de la Ecuación 3.14 utilizando para ello la mayor y la menor velocidad de deformación de entre las que se muestran en la Tabla 8.13.

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

$$PENDE_T = \frac{(E_{T\ 3.466} - E_{T\ 1.000})}{\ln(3.466) - \ln(1.000)}$$

Ecuación 8.1

Para este material, el valor de  $PENDE_T$  que se predice presenta un resultado de 278. Los valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C se muestran en la Tabla 8.14.

Tabla 8.14 - Valores teóricos del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66-GF50

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa)
1.000	14474
3.466	14820
12.011	15165
41.628	15511
144.270	15857
499.000	16203

La Tabla 8.15 muestra los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C.

Tabla 8.15 - Datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66-GF50

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa)
1.000	14474
3.466	14637
12.011	14999
41.628	15278
144.270	15650
499.000	16021

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

El ajuste logarítmico de los valores hallados en la Tabla 8.15 se muestra en la Figura 8.22.

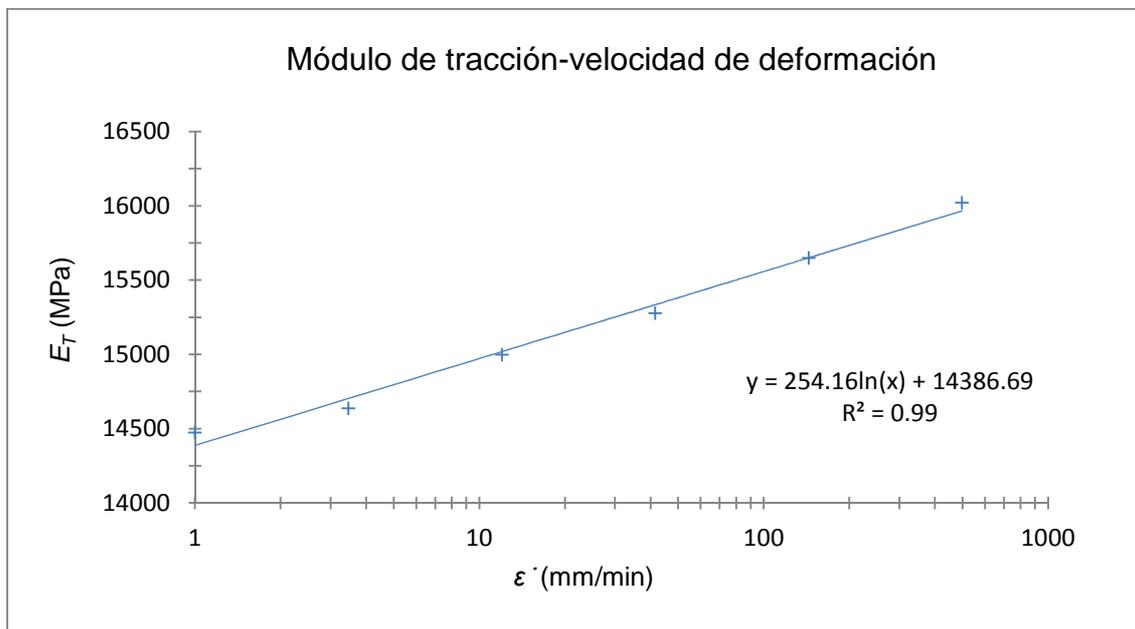


Figura 8.22 - Ajuste de la ecuación logarítmica de los datos experimentales del módulo de tracción en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66-GF50

En la Figura 8.23 se representan las curvas de tensión-deformación en función de la velocidad de deformación.

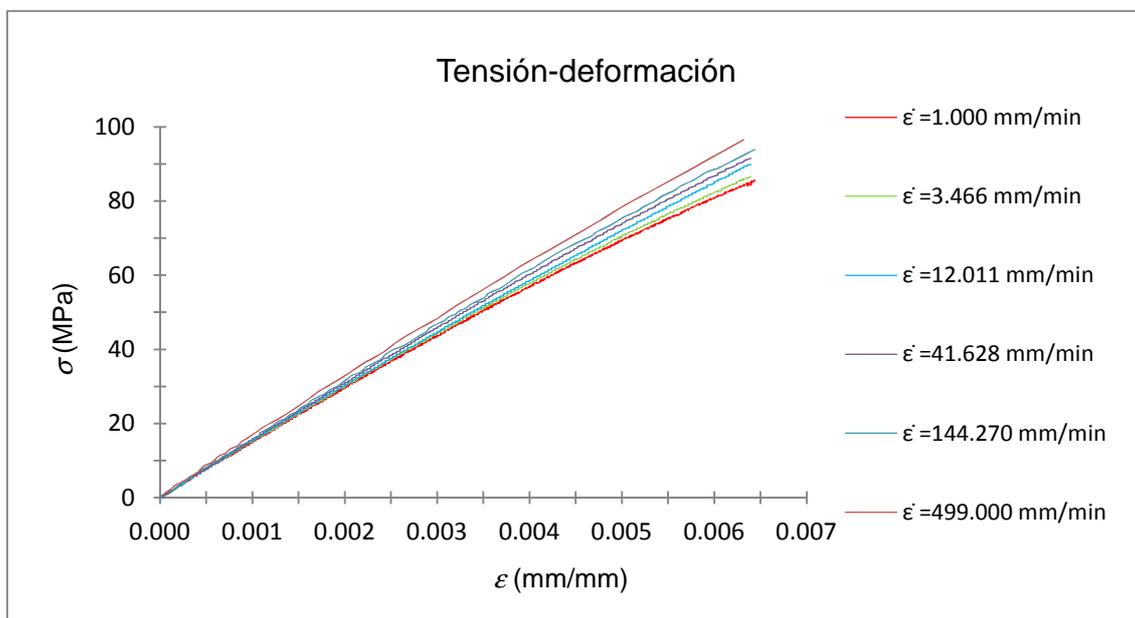


Figura 8.23 - Curvas de tensión-deformación en función de la velocidad de deformación a 23°C para PA66-GF50

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

En la Tabla 8.16, los datos experimentales y los valores teóricos en función de la velocidad de deformación se comparan a 23°C, dando los siguientes errores:

Tabla 8.16 - Errores a diferentes velocidades de deformación a 23°C para PA66-GF50

$\dot{\epsilon}$ (mm/min)	$E_T$ (MPa) Datos experimentales	$E_T$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
1.000	14474	14474	0.00
3.466	14637	14820	1.23
12.011	14999	15165	1.10
41.628	15278	15511	1.50
144.270	15650	15857	1.31
499.000	16021	16203	1.12

Para PA66-GF50, el modelo matemático para el bucle de tracción en función de la velocidad de deformación se ajusta bien. Los errores son inferiores al 2% en todos los casos, como se observa en la Tabla 8.16.

### 8.9 Curvas de tensión-deformación

Para PA66-GF50 y para una deformación de 0.0005 mm/mm, la tensión a 23°C es de 7.59 MPa. Partiendo de este valor, las tensiones a 0.0025 mm/min pueden ser calculadas a diferentes temperaturas. En la Figura 8.24 se representan las curvas de tensión-deformación en función de la temperatura para este material.

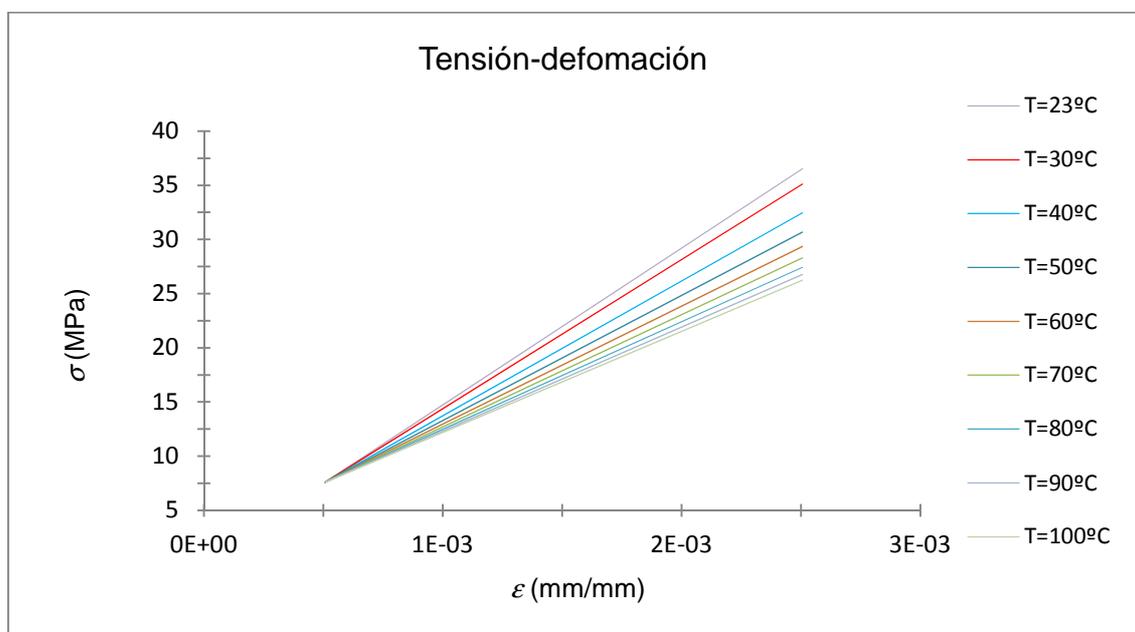


Figura 8.24 - Curvas de tensión-deformación en función de la temperatura para PA66-GF50

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

Se comparan las curvas de tensión-deformación a partir de los valores teóricos del módulo de tracción con las mismas curvas obtenidas a partir de los datos experimentales de dicho módulo. Estas curvas se comparan a 40°C, 60°C y 90°C, tal como muestran la Figura 8.25, la Figura 8.26 y la Figura 8.27, respectivamente.

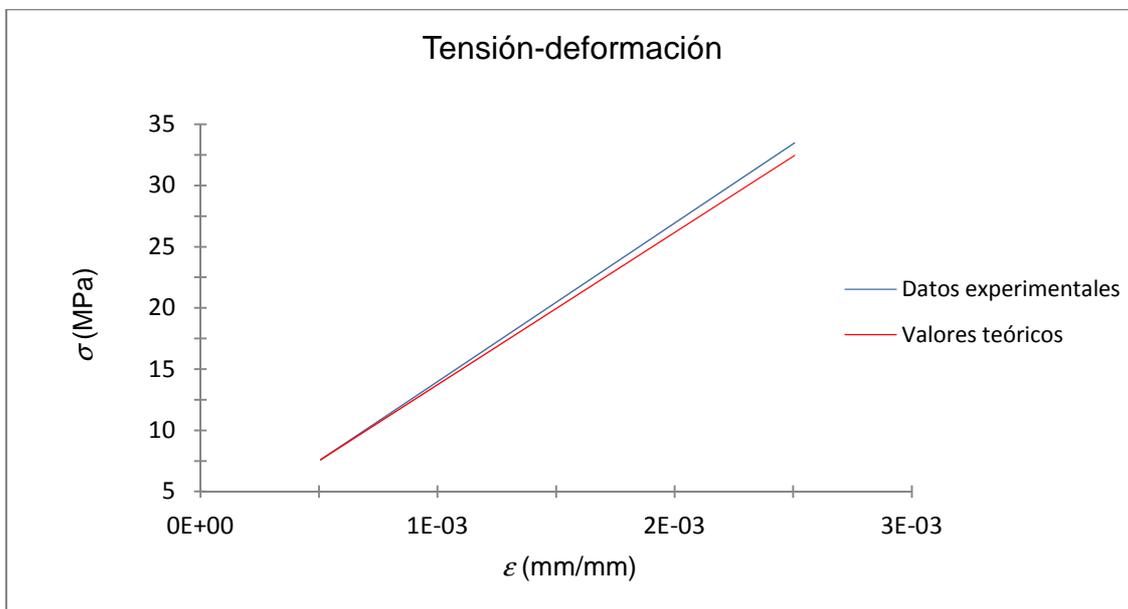


Figura 8.25 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 40°C para PA66-GF50

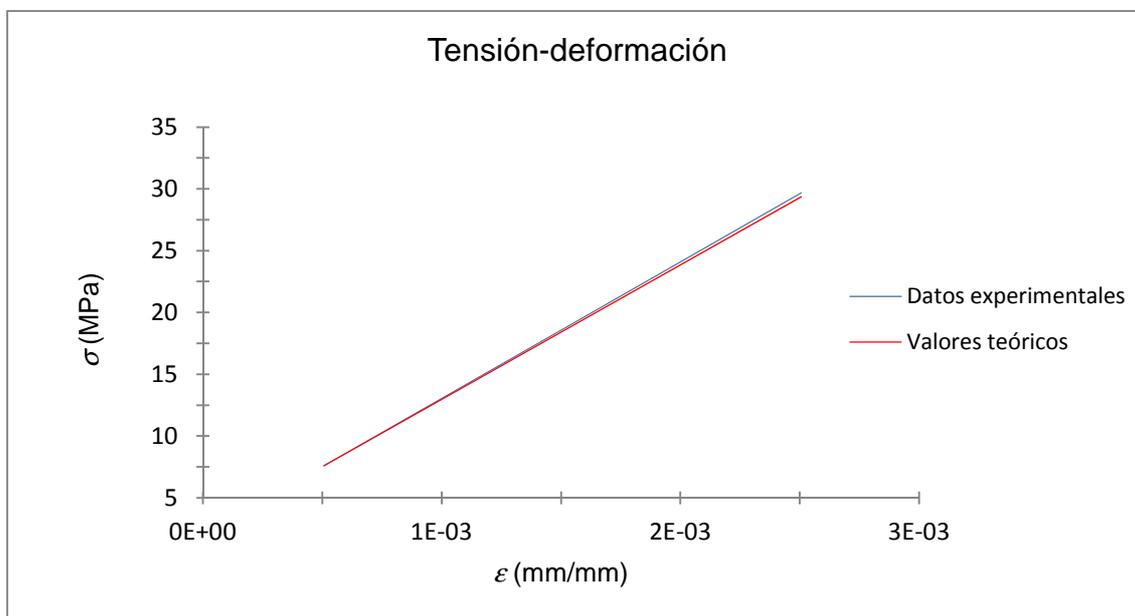


Figura 8.26 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 60°C para PA66-GF50

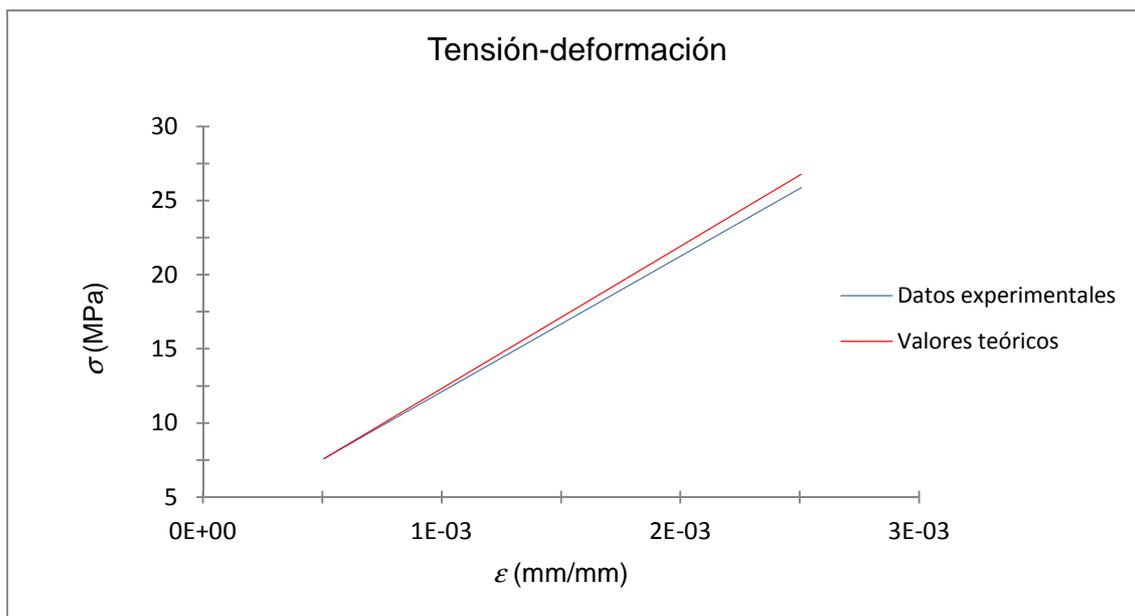


Figura 8.27 - Curvas de tensión-deformación usando los datos experimentales y los valores teóricos a 90°C para PA66-GF50

### 8.10 Simulaciones de los tests de tracción

Para PA66-GF50, las líneas que se deben modificar en el código de ANSYS® con respecto al código general presentado en el anexo A.1.1 se muestran a continuación.

Los valores de los módulos de tracción que se observan en estas líneas modificadas proceden de la Tabla 8.8 y de la Tabla 8.14.

```

Línea 7      /FILENAME,TraccionPA66-GF50
Línea 8      /TITLE,TraccionPA66-GF50
Línea 12     R,1,4,3
Línea 15     MPDATA,EX,1,1,14474,13768,13119,12438,11945,11546
Línea 18     MPDATA,EX,1,7,11208,10884,10600,10352,10132,9922
Línea 21     MPDATA,EX,1,13,9743,9592,9456,9328
Línea 24     MPDATA,EX,2,1,14820,14150,13468,12786,12266,11844
Línea 27     MPDATA,EX,2,7,11486,11149,10851,10589,10351,10129
Línea 30     MPDATA,EX,2,13,9920,9747,9592,9449
Línea 33     MPDATA,EX,3,1,15165,14532,13818,13134,12587,12143
Línea 36     MPDATA,EX,3,7,11764,11413,11102,10826,10569,10335
Línea 39     MPDATA,EX,3,13,10097,9902,9729,9570
Línea 42     MPDATA,EX,4,1,15511,14914,14168,13482,12907,12441
Línea 45     MPDATA,EX,4,7,12042,11678,11353,11063,10787,10542
Línea 48     MPDATA,EX,4,13,10275,10057,9865,9691
Línea 51     MPDATA,EX,5,1,15857,15296,14517,13830,13228,12740
Línea 54     MPDATA,EX,5,7,12320,11942,11603,11300,11006,10748
Línea 57     MPDATA,EX,5,13,10452,10212,10002,9813
Línea 60     MPDATA,EX,6,1,16203,15678,14866,14177,13548,13038
Línea 63     MPDATA,EX,6,7,12598,12206,11854,11537,11224,10954
Línea 66     MPDATA,EX,6,13,10629,10367,10138,9933
Línea 207    SAVE,TraccionPA66-GF50,db
    
```

Se simulan los mismos casos que para PA66 y para PA6-MD40. Para el caso 1, los resultados se muestran en la Tabla 8.17. Para el caso 2, los resultados se muestran en la Tabla 8.18.

## Capítulo 8 - Bucle de tracción para PA66-GF50

### Caso 1

Temperatura = 23°C

Velocidad de deformación = 1 mm/min

Tabla 8.17 - Módulo de tracción de la simulación del caso 1 para PA66-GF50

TIME	2 UX	159 S X	4 PROD	5 QUOT
	UX	SX	Extension	ET
	average			
1.0000	0.312500E-01	36.1781	0.625000E-01	14471.2

### Caso 2

Temperatura = 98°C

Velocidad de deformación = 400 mm/min

Tabla 8.18 - Módulo de tracción de la simulación del caso 2 para PA66-GF50

TIME	2 UX	159 S X	4 PROD	5 QUOT
	UX	SX	Extension	ET
	average			
1.0000	0.312500E-01	24.9397	0.625000E-01	9975.90

En el caso 1, el módulo de tracción que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 14471 MPa. El dato experimental y el valor teórico presentan un valor de 14474 MPa. Ambos parámetros tienen el mismo valor porque las condiciones de este caso son las de referencia y dicho valor, por lo tanto, también es el valor de referencia. El coeficiente de variación entre los dos valores es de 0.00879%.

En el caso 2, el módulo de tracción que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 9976 MPa.



### 9 Bucle de creep para PA66-GF50

El procedimiento del bucle de creep para PA66-GF50 es el mismo que el presentado para PA66 en el capítulo 5 y para PA6-MD40 en el capítulo 7. Por esta razón, en este capítulo sólo se añadirán algunas explicaciones y comentarios puntuales.

#### 9.1 Superposición frecuencia-temperatura

La variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura presenta los resultados de la Tabla 9.1 para PA66-GF50.

Tabla 9.1 - Variación del factor de desplazamiento en función de la temperatura para PA66-GF50

$T$ (°C)	$a_T$	$\log(a_T)$
30	1.00E+00	0.00
35	2.18E-01	-0.66
40	4.98E-02	-1.30
45	1.51E-02	-1.82
50	5.29E-03	-2.28
55	2.11E-03	-2.68
60	9.31E-04	-3.03
65	4.48E-04	-3.35
70	2.33E-04	-3.63
75	1.28E-04	-3.89
80	7.49E-05	-4.13
85	4.58E-05	-4.34
90	2.92E-05	-4.53
95	1.93E-05	-4.71
100	1.32E-05	-4.88

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

La curva maestra para este material se muestra en la Tabla 9.2.

Tabla 9.2 - Datos de la curva maestra para PA66-GF50

$f$ (Hz)	$G'$ (MPa)	$G''$ (MPa)
3.16E-06	6839	222
2.63E-05	6982	236
3.75E-04	7557	310
2.95E-03	8526	381
2.56E-02	9165	420
9.96E-02	9612	428
5.80E-01	10365	418
2.40E+00	10678	401
8.20E+00	10908	380

## 9.2 Modelo convencional

### 9.2.1 Modelo convencional en el dominio de la frecuencia

La conversión de los valores de la curva maestra da los resultados que se muestran en la Tabla 9.3.

Tabla 9.3 - Datos convertidos de la curva maestra para ser introducidos en ABAQUS® 6.10-2 para PA66-GF50

$\Omega g^* real$	$\Omega g^* imag$	$f$ (Hz)
0.0325	0.0000	3.16E-06
0.0345	-0.0208	2.63E-05
0.0453	-0.1049	3.75E-04
0.0557	-0.2467	2.95E-03
0.0615	-0.3402	2.56E-02
0.0625	-0.4054	9.96E-02
0.0611	-0.5156	5.80E-01
0.0586	-0.5613	2.40E+00
0.0556	-0.5950	8.20E+00

Para PA66-GF50, el módulo de tracción de entrada es de 13768 MPa y el coeficiente de Poisson es de 0.35. Para este caso y en estas condiciones, el error mínimo considerado en ABAQUS® 6.10-2 es de 0.02.

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

Las representaciones gráficas usando los valores convertidos para el módulo de almacenamiento y para el módulo de pérdida en función de la frecuencia se muestran en la Figura 9.1 y en la Figura 9.2, respectivamente, en que se comparan los datos experimentales y los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2.

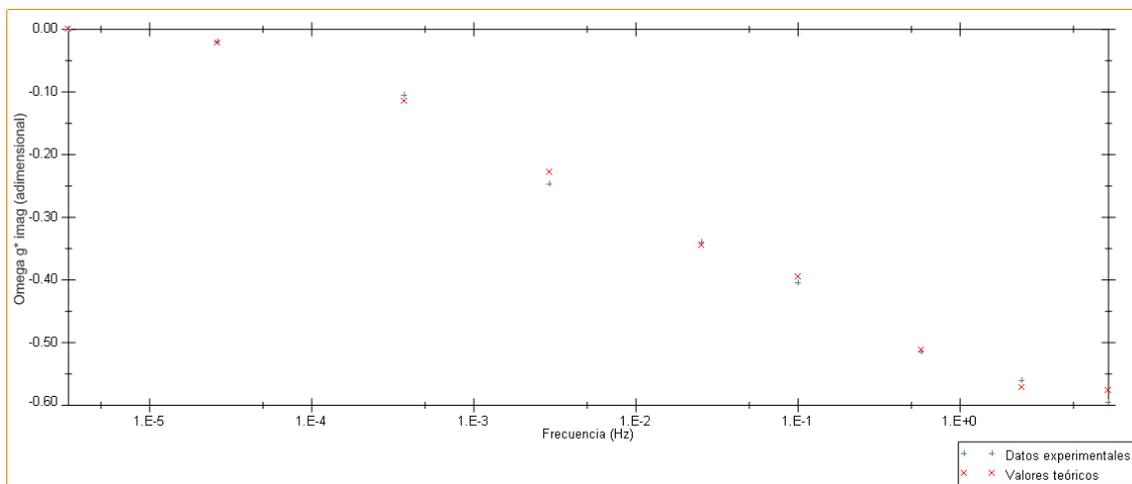


Figura 9.1 - Representación gráfica de  $\omega g^* \text{imag}$  en función de la frecuencia de los datos experimentales y de los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2 para PA66-GF50

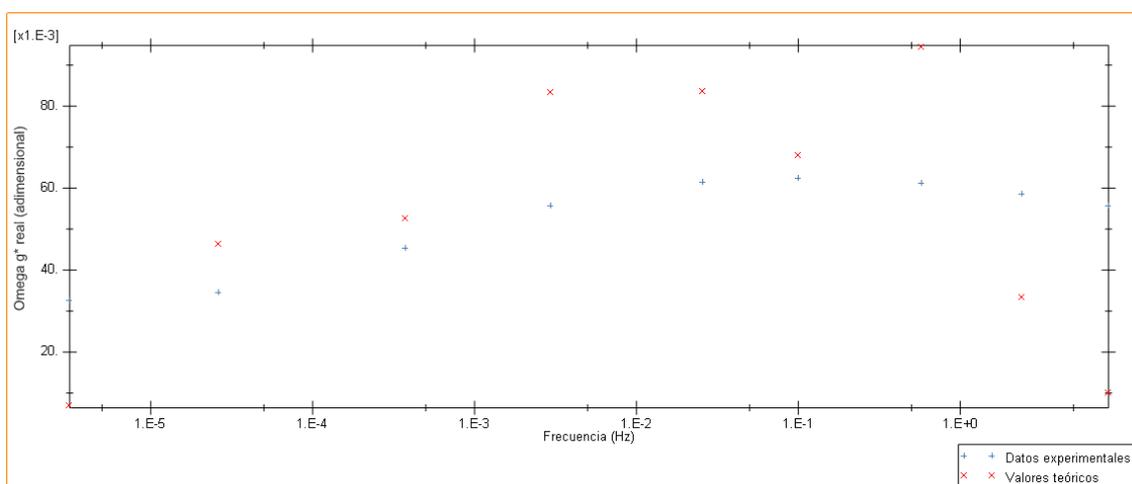


Figura 9.2 - Representación gráfica de  $\omega g^* \text{real}$  en función de la frecuencia de los datos experimentales y de los valores teóricos en ABAQUS® 6.10-2 para PA66-GF50

Para este material, los coeficientes propuestos en ABAQUS® 6.10-2 son los siguientes:

- Para el término 1,  $p_1$  es 0.11932 y  $\tau_1$  es 0.37460
- Para el término 2,  $p_2$  es 8.49366E-02 y  $\tau_2$  es 8.6733
- Para el término 3,  $p_3$  es 9.29622E-02 y  $\tau_3$  es 106.66
- Para el término 4,  $p_4$  es 6.88862E-02 y  $\tau_4$  es 3021.2

Los coeficientes ajustados en ABAQUS® 6.10-2 no presentan buenos resultados para este material.

Las representaciones gráficas comparando los datos experimentales y los valores teóricos de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia en

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

MATLAB® 7.5.0 usando la subrutina para el modelo convencional se muestran en la Figura 9.3 y en la Figura 9.4, respectivamente. La subrutina de MATLAB® 7.5.0 para este modelo se presenta en el anexo A.11.1.

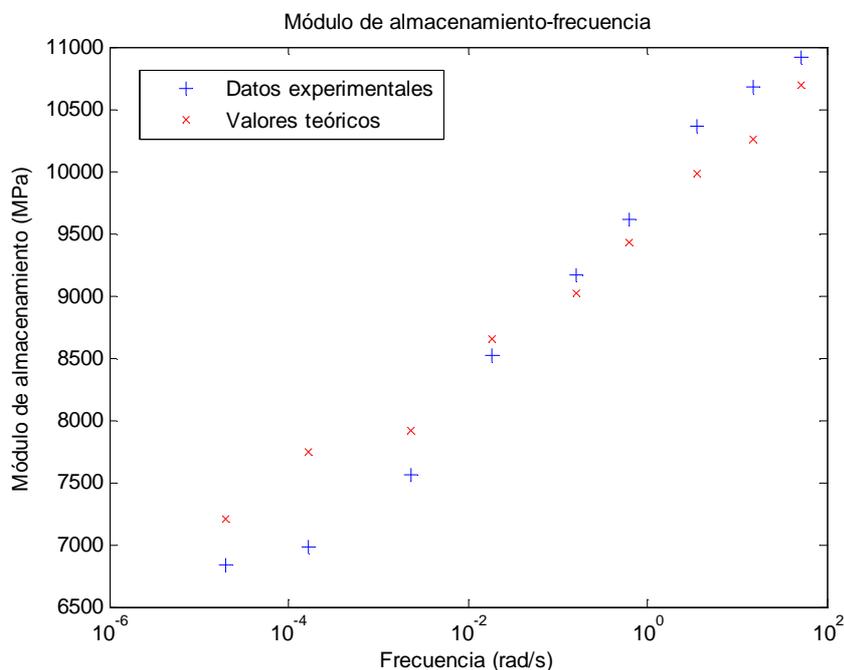


Figura 9.3 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo convencional para PA66-GF50

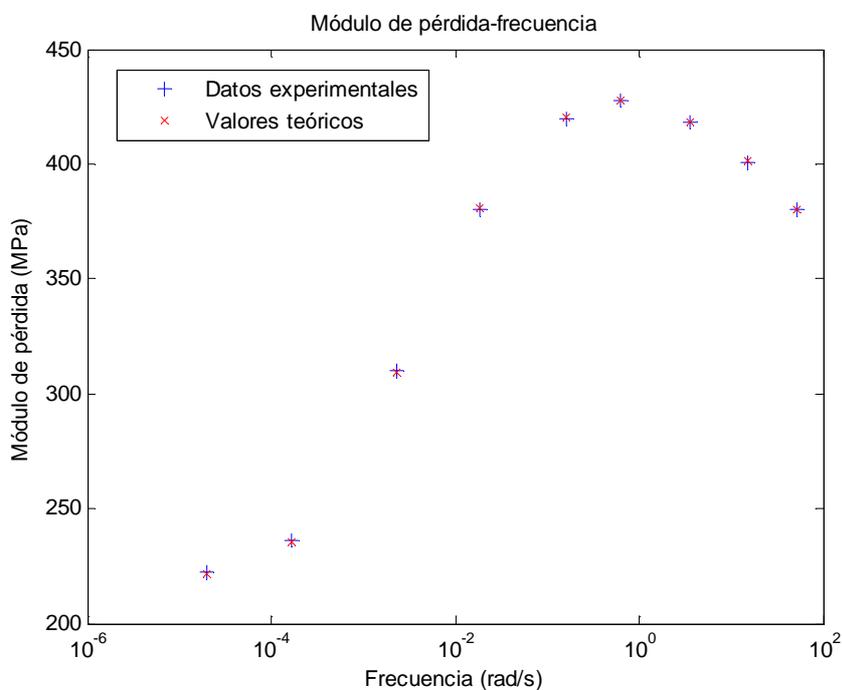


Figura 9.4 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo convencional para PA66-GF50

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

En la Tabla 9.4 se muestran los datos experimentales y los valores teóricos de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia con el modelo convencional para PA66-GF50.

Tabla 9.4 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida en función de la frecuencia con el modelo convencional para PA66-GF50

$w$ (rad/s)	$G'$ (MPa)	$G'$ (MPa)	Error $G'$ (%)	$G''$ (MPa)	$G''$ (MPa)	Error $G''$ (%)
	Datos experimentales	Valores teóricos		Datos experimentales	Valores teóricos	
1.98E-05	6839	7209	5.41	222	222	0.08
1.65E-04	6982	7749	10.99	236	235	0.29
2.36E-03	7557	7919	4.80	310	309	0.28
1.85E-02	8526	8653	1.50	381	380	0.27
1.61E-01	9165	9015	1.64	420	420	0.10
6.26E-01	9612	9423	1.97	428	428	0.05
3.64E+00	10365	9979	3.73	418	418	0.04
1.51E+01	10678	10256	3.95	401	401	0.04
5.15E+01	10908	10691	2.00	380	380	0.11

En la Tabla 9.5 se presentan los coeficientes ajustados para el modelo convencional en el dominio de la frecuencia.

Tabla 9.5 - Coeficientes en el dominio de la frecuencia a 30°C con el modelo convencional para PA66-GF50

Término	$p$	$\tau$ (s)
1	5.98E-02	4.83E+00
2	7.19E-02	3.14E-02
3	6.46E-02	5.20E-01
4	8.64E-02	1.42E+02
5	5.19E-02	1.95E+04
6	1.19E-02	1.19E+04

## 9.2.2 Modelo convencional en el dominio del tiempo

Se debe estimar el valor de  $E_{C 60000} / E_{C 0}$ . Para este material, la manera de estimar este valor es mediante los datos experimentales del módulo de creep en función del tiempo suministrados por Faurecia Interior Systems España, Abrera, presentados en la Figura 9.5.

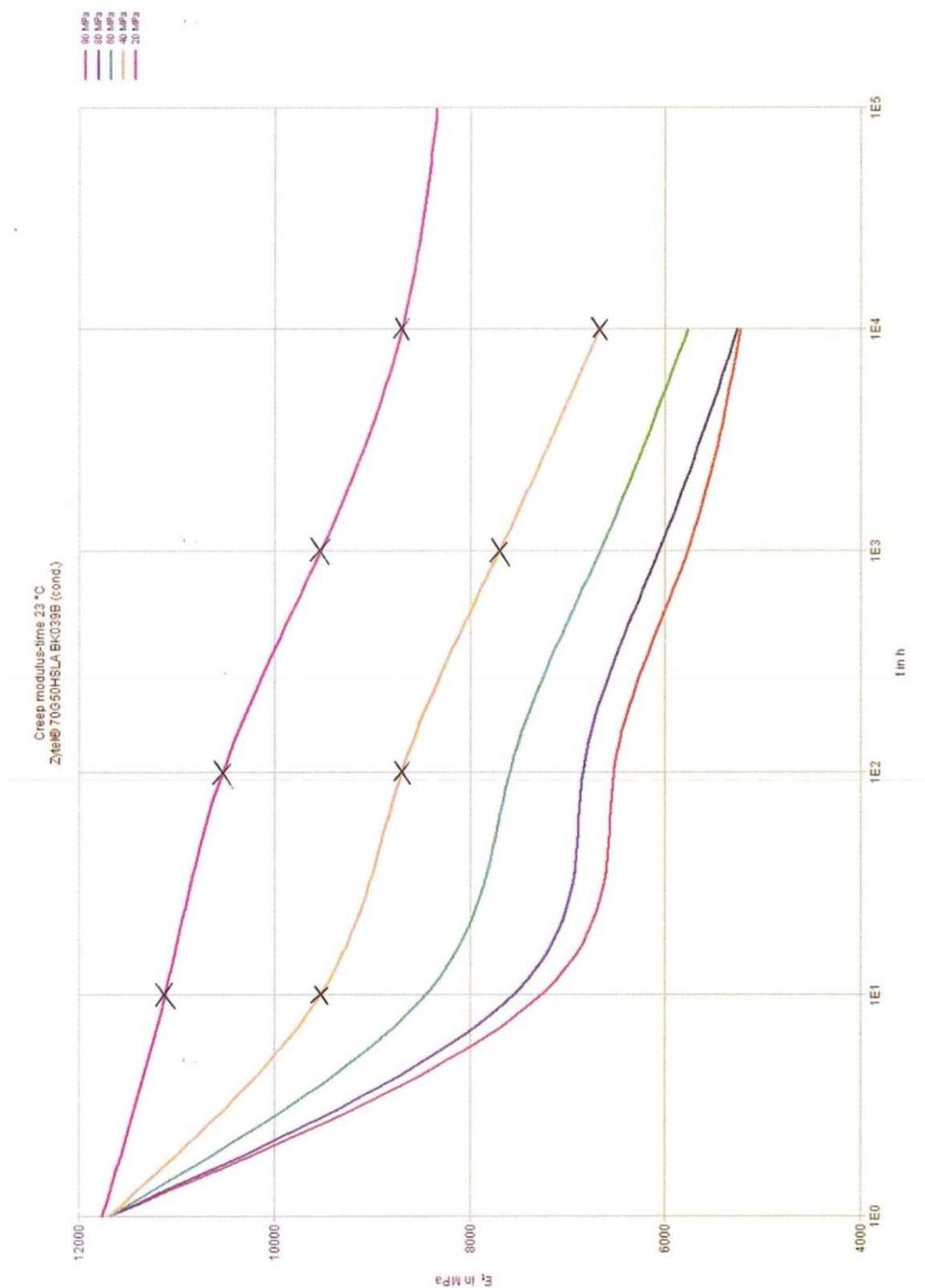


Figura 9.5 - Curvas del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para PA66-GF50 (cortesía de Faurecia Interior Systems España, Abrera)

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

Se miden los módulos de creep a diferentes tiempos para 20 MPa y 40 MPa. Realizando una interpolación lineal, se pueden hallar los módulos de creep a 23 MPa.

La Tabla 9.6 muestra los valores del módulo de creep a diferentes tiempos para 20, 40 y 23 MPa.

Tabla 9.6 - Valores del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para 20, 40 y 23 MPa para PA66-GF50

$\sigma$ (MPa)	$E_C$ (MPa) 10 h	$E_C$ (MPa) 100 h	$E_C$ (MPa) 1000 h	$E_C$ (MPa) 10000 h
20	11142	10514	9536	8667
40	9536	8696	7710	6667
23	10901	10241	9262	8367

Aquí no se aplica ningún factor de corrección. Esto se debe al hecho de que en la Figura 8.21 la muestra es seca.

El valor de  $E_{C 60000} / E_{C 0}$  puede calcularse por interpolación mediante la Tabla 9.7.

Tabla 9.7 - Estimación de  $E_{C 60000} / E_{C 0}$  para PA66-GF50

$t$ (s)	$E_C$ (MPa)	$E_C / E_{C 0}$	$\ln(E_C / E_{C 0})$
3.60E+04	10901	0.753	-0.283
3.60E+05	10241	0.708	-0.346
3.60E+06	9262	0.640	-
3.60E+07	8367	0.578	-

El valor estimado de  $E_{C 60000} / E_{C 0}$  para PA66-GF50 es de 0.750.

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

---

Los valores usados para esta temperatura en este modelo matemático se presentan en la Tabla 9.8.

Tabla 9.8 - Valores usados a 23°C con el modelo convencional para PA66-GF50

$T$ (°C)	23
$E_T$ (MPa)	14474
$E_{C\infty} / E_{C0}$	0.714
$RC$	8.27E-01
$a_T$	9.21E+00

En la Tabla 9.9 se presentan los coeficientes en el dominio del tiempo a 23°C para este modelo.

Tabla 9.9 - Coeficientes en el dominio del tiempo a 23°C con el modelo convencional para PA66-GF50

Término	$CMR$	$CT$ (s)
1	4.94E-02	4.45E+01
2	5.94E-02	2.89E-01
3	5.34E-02	4.79E+00
4	7.14E-02	1.31E+03
5	4.29E-02	1.80E+05
6	9.84E-03	1.10E+05

En la Tabla 9.10, los módulos de creep calculados en función del tiempo a 23°C son los siguientes:

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

Tabla 9.10 - Valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo convencional para PA66-GF50

$t$ (s)	$E_c$ (MPa)
0	14474
155	12031
245	11950
387	11859
613	11736
969	11580
1533	11405
2424	11242
3834	11129
6063	11073
9589	11048
15166	11023
23987	10986
37937	10932
60000	10855

Para este material, la curva experimental del módulo de creep presenta el aspecto que se muestra en la Figura 9.6.

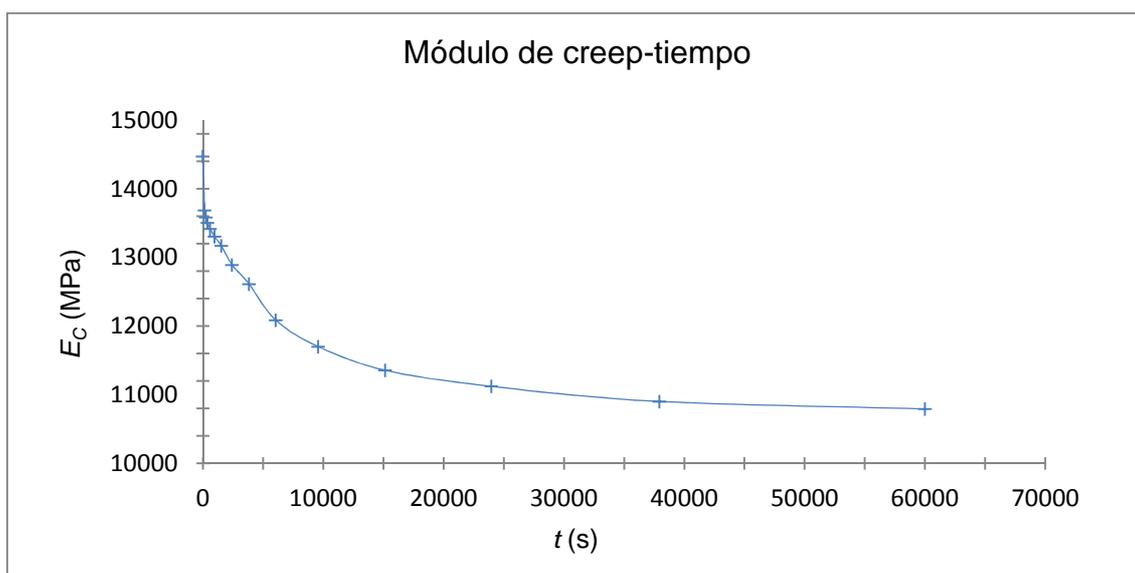


Figura 9.6 - Representación gráfica del módulo de creep para los datos experimentales a 23°C para PA66-GF50

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

En la Tabla 9.11 se comparan los datos experimentales y los valores teóricos, dando los siguientes resultados:

Tabla 9.11 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo convencional para PA66-GF50

$t$ (s)	$E_c$ (MPa) Datos experimentales	$E_c$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
0	14474	14474	0.00
155	13688	12031	12.11
245	13584	11950	12.03
387	13507	11859	12.20
613	13417	11736	12.53
969	13305	11580	12.97
1533	13172	11405	13.42
2424	12895	11242	12.82
3834	12614	11129	11.78
6063	12087	11073	8.39
9589	11702	11048	5.59
15166	11357	11023	2.94
23987	11123	10986	1.23
37937	10903	10932	0.27
60000	10794	10855	0.57

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

En la Figura 9.7 se representan los datos experimentales y los valores teóricos hallados en la Tabla 9.11 para PA66-GF50.

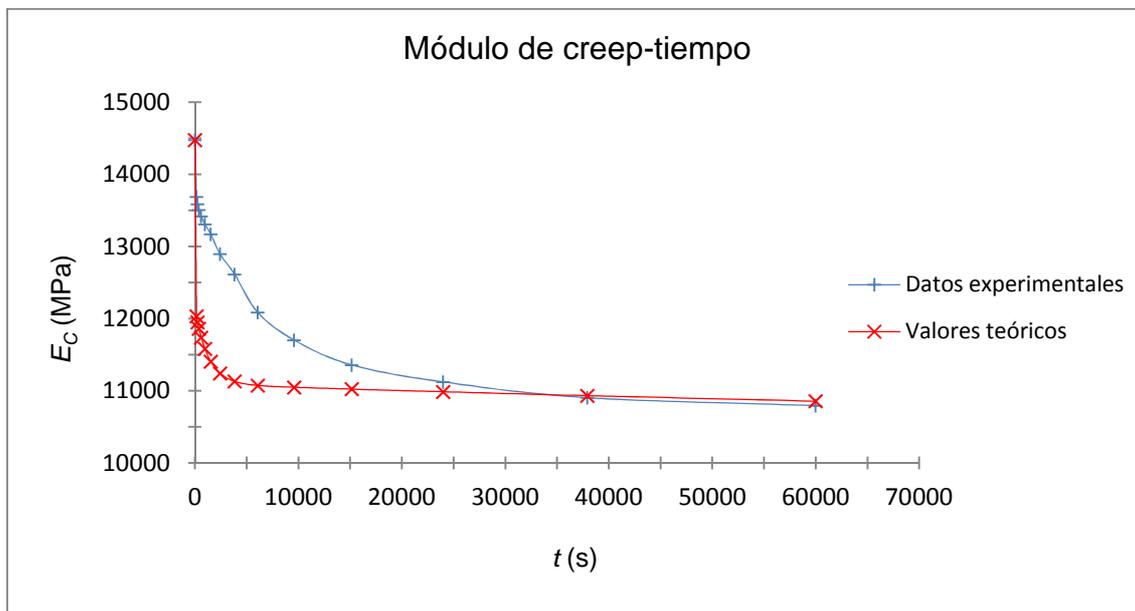


Figura 9.7 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo convencional para PA66-GF50

Para PA66-GF50, el modelo convencional para el bucle de creep en función del tiempo no se ajusta bien. Los errores son superiores al 10% en algunos casos, como se observa en la Tabla 9.11.

### 9.3 Modelos modificados

#### 9.3.1 Modelo modificado en el dominio de la frecuencia

Las representaciones gráficas comparando los datos experimentales y los valores teóricos de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia en MATLAB® 7.5.0 usando la subrutina para el modelo modificado se muestran en la Figura 9.8 y en la Figura 9.9, respectivamente. La subrutina de MATLAB® 7.5.0 para este modelo se presenta en el anexo A.11.2.

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

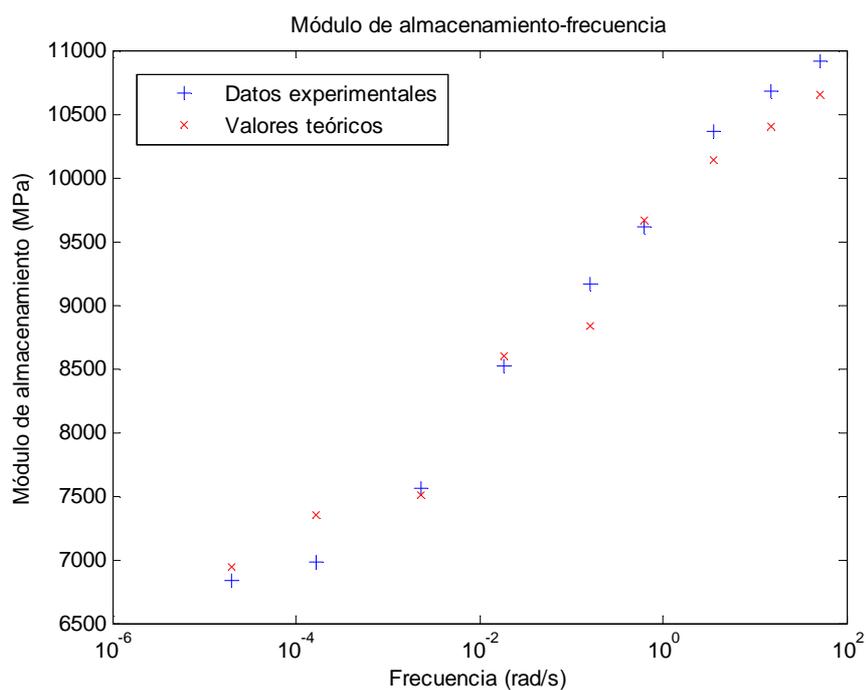


Figura 9.8 - Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo modificado para PA66-GF50

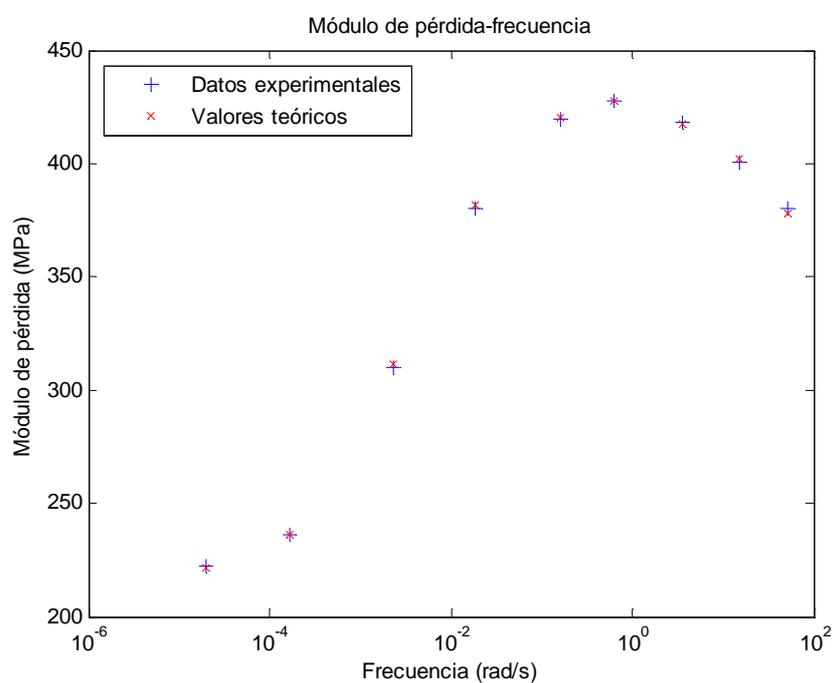


Figura 9.9 - Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia, comparando los datos experimentales y los valores teóricos obtenidos en MATLAB® 7.5.0 con el modelo modificado para PA66-GF50

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

En la Tabla 9.12 se muestran los datos experimentales y los valores teóricos de los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia con el modelo modificado para PA66-GF50.

Tabla 9.12 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida en función de la frecuencia con el modelo modificado para PA66-GF50

$w$ (rad/s)	$G'$ (MPa)	$G'$ (MPa)	Error $G'$ (%)	$G''$ (MPa)	$G''$ (MPa)	Error $G''$ (%)
	Datos experimentales	Valores teóricos		Datos experimentales	Valores teóricos	
1.98E-05	6839	6939	1.47	222	221	0.77
1.65E-04	6982	7351	5.29	236	237	0.36
2.36E-03	7557	7512	0.58	310	315	1.71
1.85E-02	8526	8608	0.96	381	377	1.23
1.61E-01	9165	8836	3.60	420	422	0.33
6.26E-01	9612	9671	0.62	428	428	0.03
3.64E+00	10365	10137	2.20	418	419	0.19
1.51E+01	10678	10403	2.58	401	402	0.33
5.15E+01	10908	10649	2.38	380	378	0.53

En la Tabla 9.13 se presentan los coeficientes ajustados para el modelo modificado en el dominio de la frecuencia.

Tabla 9.13 - Coeficientes en el dominio de la frecuencia a 30°C con el modelo modificado para PA66-GF50

Término	$p$	$\tau$ (s)	$\alpha$
1	9.43E-02	7.21E+00	1.62E+00
2	7.40E-02	1.91E-01	5.15E-01
3	3.36E-02	1.70E-01	1.99E+00
4	1.15E-01	6.35E+02	1.31E+00
5	2.10E-01	7.60E+03	1.01E-01
6	5.55E-02	2.01E+03	7.81E-01

### 9.3.2 Modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo, en la Tabla 9.14, se muestran los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C.

Tabla 9.14 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

$t$ (s)	$E_c$ (MPa) Datos experimentales	$E_c$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
0	14474	14474	0.00
155	13688	13025	4.85
245	13584	12958	4.61
387	13507	12917	4.37
613	13417	12875	4.04
969	13305	12815	3.69
1533	13172	12725	3.39
2424	12895	12596	2.32
3834	12614	12420	1.54
6063	12087	12197	0.91
9589	11702	11940	2.03
15166	11357	11672	2.78
23987	11123	11407	2.55
37937	10903	11136	2.14
60000	10794	10855	0.57

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

En la Figura 9.10 se representan los datos experimentales y los valores teóricos hallados en la Tabla 9.14 para PA66-GF50.

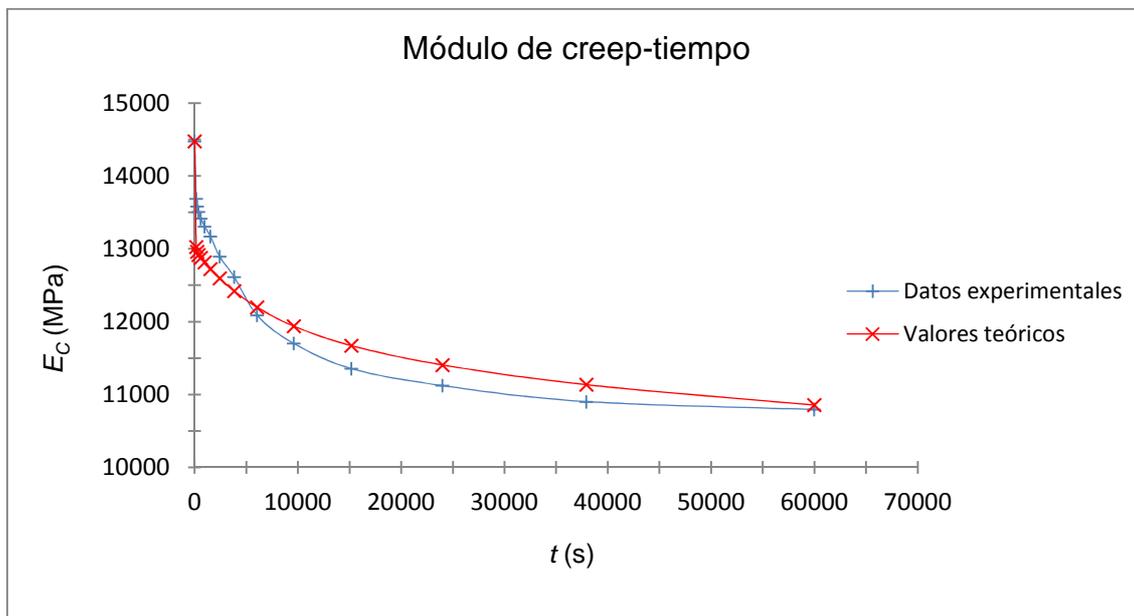


Figura 9.10 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

Para PA66-GF50, el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep en función del tiempo se ajusta suficientemente bien. Los errores son inferiores al 5% en todos los casos, como se observa en la Tabla 9.14.

### 9.3.3 Influencia de la temperatura en el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Los valores usados para cada temperatura en este modelo y material se muestran en la Tabla 9.15. Los coeficientes en el dominio del tiempo en función de la temperatura para este modelo y material se presentan en la Tabla 9.16.

Tabla 9.15 - Valores usados para cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

$T$ (°C)	$E_T$ (MPa)	$E_{C\infty} / E_{C0}$	$RC$	$a_T$
23	14474	0.704	5.09E-01	9.21E+00
30	13768	0.698	5.18E-01	1.00E+00
35	13119	0.699	5.17E-01	2.18E-01
40	12438	0.699	5.17E-01	4.98E-02
45	11945	0.701	5.13E-01	1.51E-02
50	11546	0.702	5.11E-01	5.29E-03
55	11208	0.704	5.09E-01	2.11E-03
60	10884	0.705	5.07E-01	9.31E-04
65	10600	0.707	5.04E-01	4.48E-04
70	10352	0.707	5.03E-01	2.33E-04
75	10132	0.709	4.99E-01	1.28E-04
80	9922	0.708	5.02E-01	7.49E-05
85	9743	0.712	4.94E-01	4.58E-05
90	9592	0.714	4.91E-01	2.92E-05
95	9456	0.716	4.88E-01	1.93E-05
100	9328	0.716	4.87E-01	1.32E-05

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

Tabla 9.16 - Coeficientes a cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

$T$ (°C)	23	30	35	40	45	50	55	60
$CMR_1$	4.80E-02	4.89E-02	4.87E-02	4.88E-02	4.84E-02	4.82E-02	4.80E-02	4.78E-02
$CT_1$ (s)	6.64E+01	7.21E+00	1.57E+00	3.59E-01	1.09E-01	3.82E-02	1.52E-02	6.71E-03
$CMR_2$	3.77E-02	3.83E-02	3.82E-02	3.83E-02	3.80E-02	3.78E-02	3.77E-02	3.75E-02
$CT_2$ (s)	1.76E+00	1.91E-01	4.16E-02	9.51E-03	2.87E-03	1.01E-03	4.03E-04	1.78E-04
$CMR_3$	1.71E-02	1.74E-02	1.74E-02	1.74E-02	1.72E-02	1.72E-02	1.71E-02	1.70E-02
$CT_3$ (s)	1.57E+00	1.70E-01	3.70E-02	8.46E-03	2.56E-03	9.00E-04	3.58E-04	1.58E-04
$CMR_4$	5.85E-02	5.96E-02	5.94E-02	5.95E-02	5.90E-02	5.88E-02	5.85E-02	5.83E-02
$CT_4$ (s)	5.85E+03	6.35E+02	1.38E+02	3.16E+01	9.56E+00	3.36E+00	1.34E+00	5.91E-01
$CMR_5$	1.07E-01	1.09E-01	1.09E-01	1.09E-01	1.08E-01	1.07E-01	1.07E-01	1.06E-01
$CT_5$ (s)	7.00E+04	7.60E+03	1.65E+03	3.78E+02	1.14E+02	4.02E+01	1.60E+01	7.07E+00
$CMR_6$	2.83E-02	2.88E-02	2.87E-02	2.87E-02	2.85E-02	2.84E-02	2.83E-02	2.81E-02
$CT_6$ (s)	1.85E+04	2.01E+03	4.38E+02	1.00E+02	3.03E+01	1.06E+01	4.24E+00	1.87E+00

Continuación

$T$ (°C)	65	70	75	80	85	90	95	100
$CMR_1$	4.75E-02	4.74E-02	4.71E-02	4.73E-02	4.66E-02	4.63E-02	4.60E-02	4.60E-02
$CT_1$ (s)	3.23E-03	1.68E-03	9.26E-04	5.40E-04	3.30E-04	2.10E-04	1.39E-04	9.49E-05
$CMR_2$	3.73E-02	3.72E-02	3.69E-02	3.71E-02	3.66E-02	3.63E-02	3.61E-02	3.61E-02
$CT_2$ (s)	8.56E-05	4.44E-05	2.45E-05	1.43E-05	8.75E-06	5.57E-06	3.68E-06	2.51E-06
$CMR_3$	1.69E-02	1.69E-02	1.68E-02	1.69E-02	1.66E-02	1.65E-02	1.64E-02	1.64E-02
$CT_3$ (s)	7.62E-05	3.95E-05	2.18E-05	1.27E-05	7.78E-06	4.96E-06	3.28E-06	2.24E-06
$CMR_4$	5.79E-02	5.78E-02	5.74E-02	5.77E-02	5.68E-02	5.65E-02	5.61E-02	5.60E-02
$CT_4$ (s)	2.85E-01	1.48E-01	8.15E-02	4.76E-02	2.91E-02	1.85E-02	1.22E-02	8.35E-03
$CMR_5$	1.06E-01	1.06E-01	1.05E-01	1.05E-01	1.04E-01	1.03E-01	1.02E-01	1.02E-01
$CT_5$ (s)	3.41E+00	1.77E+00	9.76E-01	5.69E-01	3.48E-01	2.22E-01	1.47E-01	1.00E-01
$CMR_6$	2.80E-02	2.79E-02	2.77E-02	2.79E-02	2.74E-02	2.73E-02	2.71E-02	2.70E-02
$CT_6$ (s)	9.01E-01	4.67E-01	2.58E-01	1.51E-01	9.20E-02	5.87E-02	3.88E-02	2.64E-02

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

En la Figura 9.11 se representa la variación del módulo de creep en función del tiempo para cada temperatura utilizando este modelo matemático.

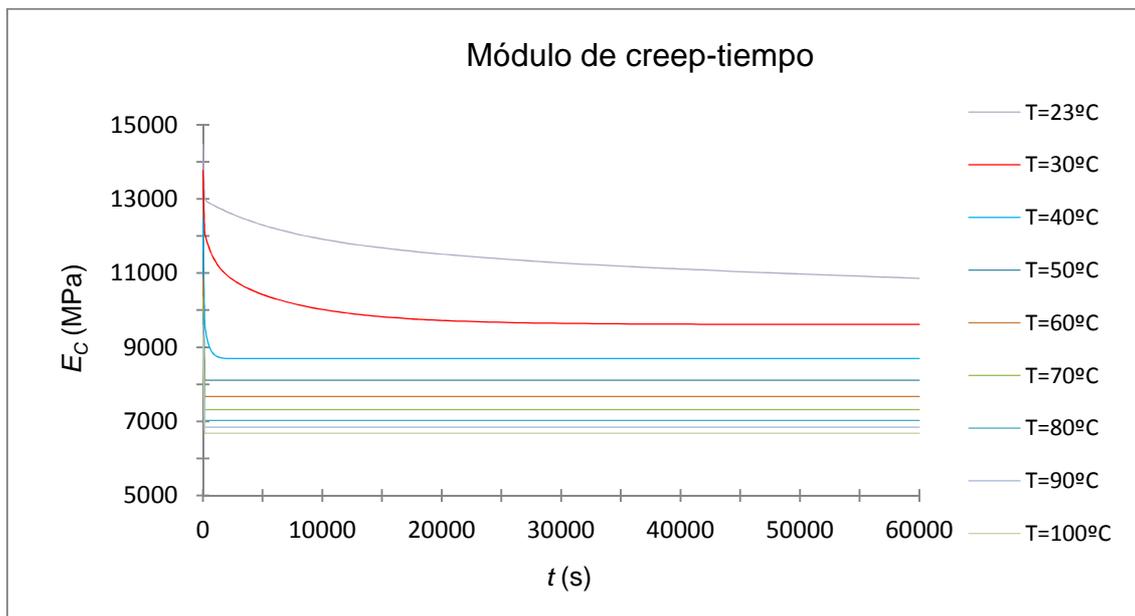


Figura 9.11 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo a cada temperatura con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

Para poder comparar los valores teóricos con el gráfico de la Figura 9.5 (cortesía de Faurecia Interior Systems España, Abrera), se representa en la Figura 9.12 la curva maestra del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para este modelo y material.

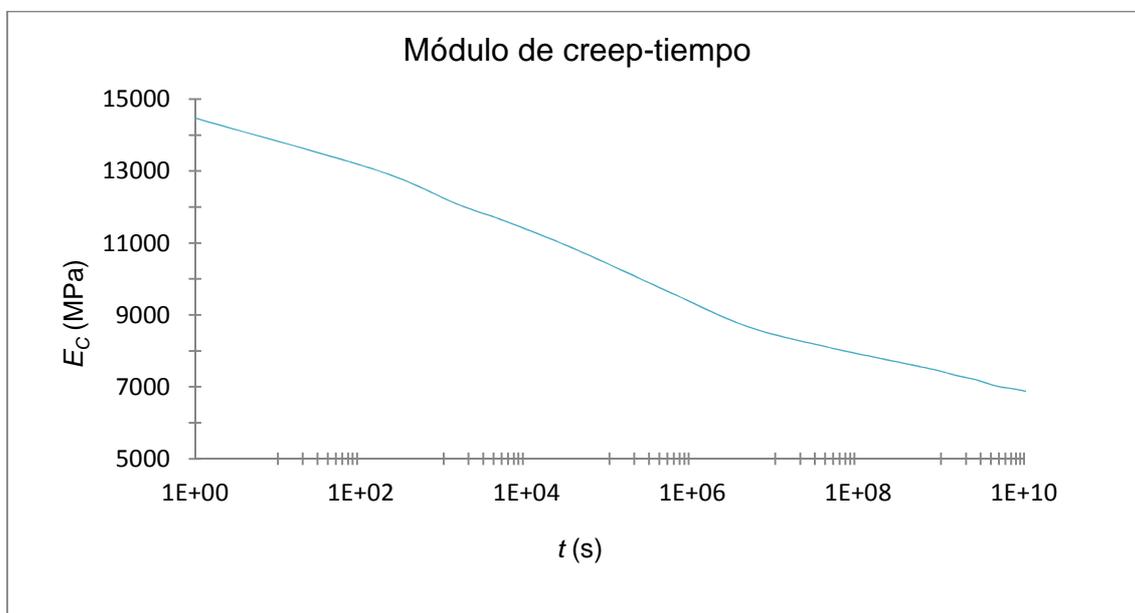


Figura 9.12 - Curva maestra a 23°C con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

---

En la Tabla 9.17 se comparan los datos experimentales y los valores teóricos y se calculan los errores.

Tabla 9.17 - Errores entre los datos experimentales y los valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

$t$ (s)	$E_c$ (MPa) Datos experimentales	$E_c$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
3.60E+04	10901	10880	0.19
3.60E+05	10241	10055	1.82
3.60E+06	9262	8883	4.09
3.60E+07	8367	8196	2.04

Para PA66-GF50, el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep puede usarse para caracterizar este material en función del tiempo y de la temperatura. Los errores son inferiores al 5% en todos los casos, como se observa en la Tabla 9.17.

### 9.3.4 Modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo, en la Tabla 9.18, se muestran los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C.

Tabla 9.18 - Datos experimentales y valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

$t$ (s)	$E_c$ (MPa) Datos experimentales	$E_c$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
0	14474	14474	0.00
155	13688	13507	1.32
245	13584	13392	1.41
387	13507	13264	1.80
613	13417	13137	2.09
969	13305	13019	2.15
1533	13172	12892	2.13
2424	12895	12721	1.35
3834	12614	12483	1.04
6063	12087	12167	0.66
9589	11702	11787	0.73
15166	11357	11398	0.37
23987	11123	11085	0.34
37937	10903	10911	0.08
60000	10794	10855	0.57

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

En la Figura 9.13 se representan los datos experimentales y los valores teóricos hallados en la Tabla 9.18 para PA66-GF50.

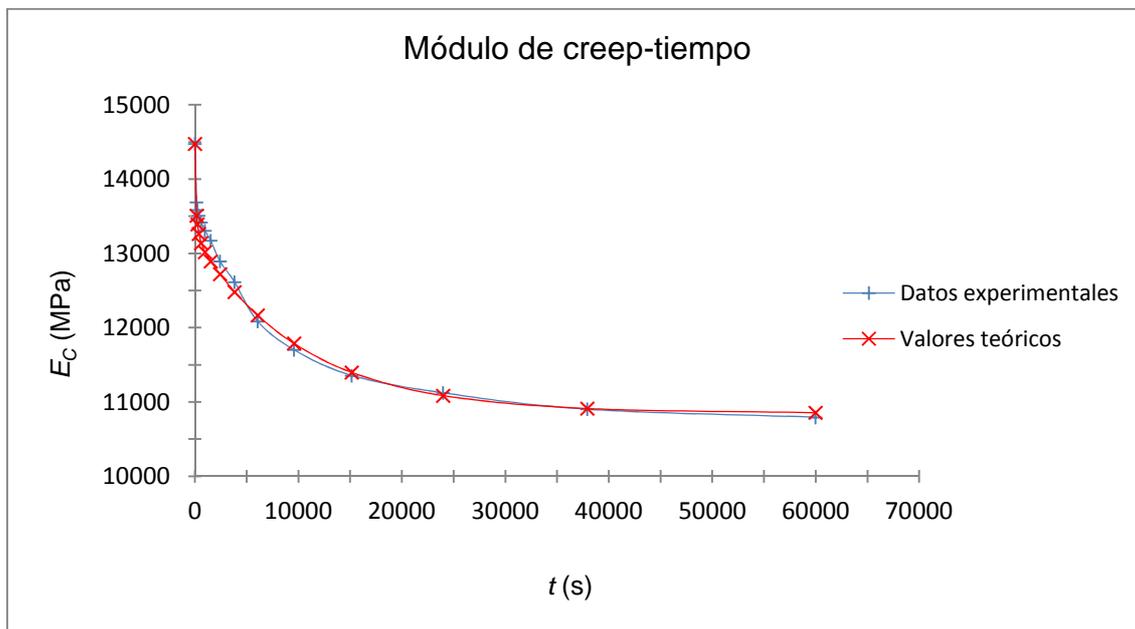


Figura 9.13 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo, comparando los datos experimentales y los valores teóricos a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

Para PA66-GF50, el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep en función del tiempo se ajusta bien. Los errores son inferiores al 3% en todos los casos, como se observa en la Tabla 9.18.

### 9.3.5 Influencia de la temperatura en el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Los valores que se usan para cada temperatura en este modelo y material se muestran en la Tabla 9.19. Los coeficientes en el dominio del tiempo en función de la temperatura para este modelo y material se presentan en la Tabla 9.20.

Tabla 9.19 - Valores usados para cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

$T$ (°C)	$E_T$ (MPa)	$E_{C\infty} / E_{C0}$	$RC$	$a_T$
23	14474	0.749	4.30E-01	9.21E+00
30	13768	0.744	4.40E-01	1.00E+00
35	13119	0.745	4.39E-01	2.18E-01
40	12438	0.744	4.39E-01	4.98E-02
45	11945	0.747	4.34E-01	1.51E-02
50	11546	0.748	4.32E-01	5.29E-03
55	11208	0.749	4.30E-01	2.11E-03
60	10884	0.751	4.28E-01	9.31E-04
65	10600	0.753	4.24E-01	4.48E-04
70	10352	0.753	4.23E-01	2.33E-04
75	10132	0.756	4.20E-01	1.28E-04
80	9922	0.754	4.23E-01	7.49E-05
85	9743	0.759	4.14E-01	4.58E-05
90	9592	0.761	4.11E-01	2.92E-05
95	9456	0.763	4.07E-01	1.93E-05
100	9328	0.763	4.07E-01	1.32E-05

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

Tabla 9.20 - Coeficientes a cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

$T$ (°C)	23	30	35	40	45	50	55	60
$CMR_1$	4.06E-02	4.15E-02	4.14E-02	4.14E-02	4.10E-02	4.08E-02	4.06E-02	4.04E-02
$CT_1$ (s)	2.63E+02	7.21E+00	6.10E-01	5.59E-02	8.05E-03	1.48E-03	3.33E-04	8.86E-05
$CMR_2$	3.18E-02	3.25E-02	3.25E-02	3.25E-02	3.22E-02	3.20E-02	3.18E-02	3.17E-02
$CT_2$ (s)	5.99E-01	1.91E-01	8.71E-02	4.07E-02	2.20E-02	1.28E-02	7.99E-03	5.25E-03
$CMR_3$	1.45E-02	1.48E-02	1.47E-02	1.47E-02	1.46E-02	1.45E-02	1.45E-02	1.44E-02
$CT_3$ (s)	1.41E+01	1.70E-01	8.18E-03	4.34E-04	4.02E-05	5.02E-06	8.03E-07	1.58E-07
$CMR_4$	4.95E-02	5.06E-02	5.04E-02	5.05E-02	5.00E-02	4.97E-02	4.95E-02	4.92E-02
$CT_4$ (s)	1.16E+04	6.35E+02	8.62E+01	1.25E+01	2.60E+00	6.62E-01	1.98E-01	6.79E-02
$CMR_5$	9.04E-02	9.23E-02	9.21E-02	9.22E-02	9.12E-02	9.08E-02	9.03E-02	8.99E-02
$CT_5$ (s)	9.51E+03	7.60E+03	6.52E+03	5.61E+03	4.97E+03	4.48E+03	4.08E+03	3.76E+03
$CMR_6$	2.39E-02	2.44E-02	2.43E-02	2.44E-02	2.41E-02	2.40E-02	2.39E-02	2.38E-02
$CT_6$ (s)	1.14E+04	2.01E+03	6.11E+02	1.93E+02	7.58E+01	3.35E+01	1.63E+01	8.63E+00

Continuación

$T$ (°C)	65	70	75	80	85	90	95	100
$CMR_1$	4.00E-02	3.99E-02	3.96E-02	3.98E-02	3.91E-02	3.88E-02	3.84E-02	3.84E-02
$CT_1$ (s)	2.71E-05	9.37E-06	3.58E-06	1.49E-06	6.74E-07	3.25E-07	1.66E-07	8.93E-08
$CMR_2$	3.14E-02	3.13E-02	3.10E-02	3.13E-02	3.06E-02	3.04E-02	3.02E-02	3.01E-02
$CT_2$ (s)	3.60E-03	2.57E-03	1.89E-03	1.43E-03	1.11E-03	8.82E-04	7.13E-04	5.85E-04
$CMR_3$	1.43E-02	1.42E-02	1.41E-02	1.42E-02	1.39E-02	1.38E-02	1.37E-02	1.37E-02
$CT_3$ (s)	3.69E-08	9.99E-09	3.07E-09	1.05E-09	3.94E-10	1.61E-10	7.05E-11	3.29E-11
$CMR_4$	4.88E-02	4.87E-02	4.83E-02	4.86E-02	4.76E-02	4.73E-02	4.69E-02	4.68E-02
$CT_4$ (s)	2.61E-02	1.10E-02	5.07E-03	2.50E-03	1.31E-03	7.28E-04	4.23E-04	2.56E-04
$CMR_5$	8.91E-02	8.89E-02	8.81E-02	8.87E-02	8.70E-02	8.63E-02	8.56E-02	8.55E-02
$CT_5$ (s)	3.49E+03	3.26E+03	3.07E+03	2.91E+03	2.77E+03	2.65E+03	2.54E+03	2.44E+03
$CMR_6$	2.36E-02	2.35E-02	2.33E-02	2.35E-02	2.30E-02	2.28E-02	2.26E-02	2.26E-02
$CT_6$ (s)	4.88E+00	2.92E+00	1.84E+00	1.21E+00	8.21E-01	5.77E-01	4.18E-01	3.10E-01

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

En la Figura 9.14 se representa la variación del módulo de creep en función del tiempo para cada temperatura utilizando este modelo matemático.

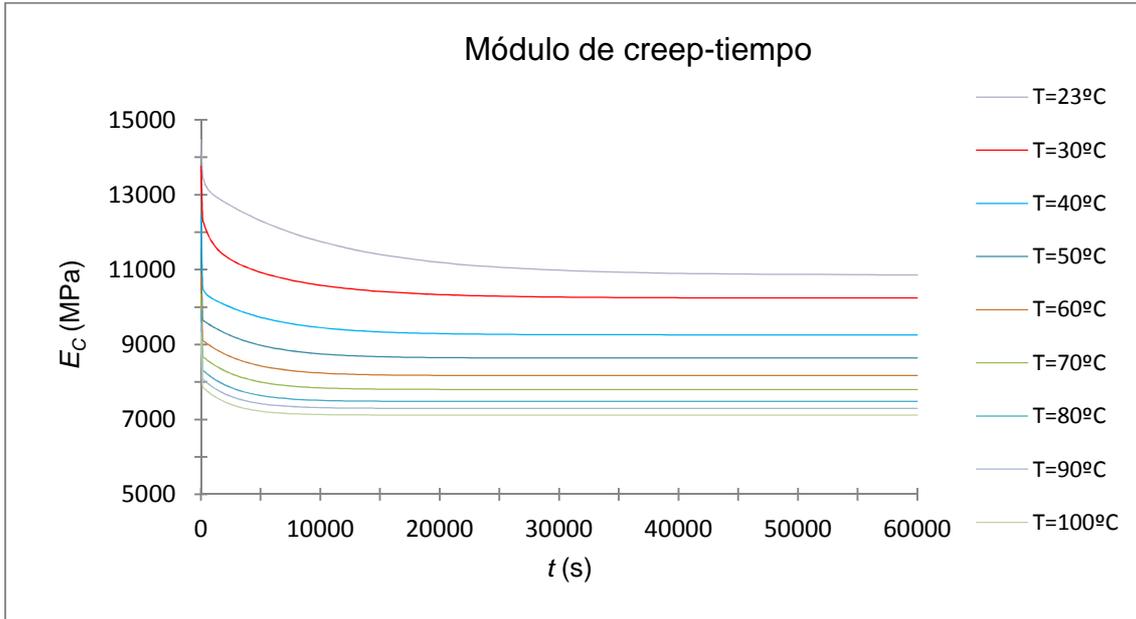


Figura 9.14 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo a cada temperatura con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

Para poder comparar los valores teóricos con el gráfico de la Figura 9.5 (cortesía de Faurecia Interior Systems España, Abrera), se representa en la Figura 9.15 la curva maestra del módulo de creep en función del tiempo a 23°C para este modelo y material.

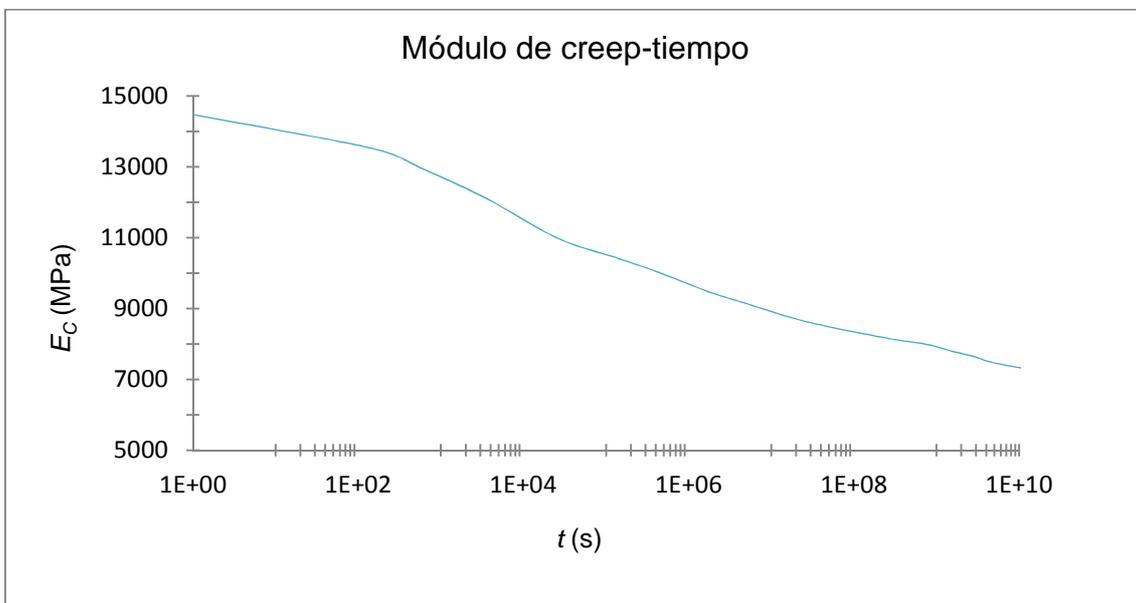


Figura 9.15 - Curva maestra a 23°C con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

En la Tabla 9.21 se comparan los datos experimentales y los valores teóricos y se calculan los errores.

Tabla 9.21 - Errores entre los datos experimentales y los valores teóricos del módulo de creep en función del tiempo con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

$t$ (s)	$E_c$ (MPa) Datos experimentales	$E_c$ (MPa) Valores teóricos	Error (%)
3.60E+04	10901	10934	0.30
3.60E+05	10241	10108	1.30
3.60E+06	9262	9266	0.04
3.60E+07	8367	8608	2.88

Para PA66-GF50, el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep puede usarse para caracterizar este material en función del tiempo y de la temperatura. Los errores son inferiores al 3% en todos los casos, como se observa en la Tabla 9.21.

### 9.3.6 Comparación entre los dos modelos modificados

Comparando ambos métodos, aunque los dos métodos sean suficientemente precisos para obtener una buena caracterización de este material, el más recomendable es este último, el modelo que trabaja con coeficientes alfa en el dominio del tiempo.

### 9.4 Simulaciones de los tests de creep

#### 9.4.1 Simulaciones sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para PA66-GF50, las líneas que se deben modificar con respecto al código general presentado en el anexo A.1.2.1 se muestran a continuación para el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep.

Los coeficientes que se deben introducir en ANSYS® 12.1 Academic Teaching son los coeficientes a 30°C mostrados en la Tabla 9.16.

```
Línea 7      /FILENAME,CreepPA66-GF50SinAlfas
Línea 8      /TITLE,CreepPA66-GF50SinAlfas
Línea 12     R,1,4,3
Línea 15     MPDATA,EX,1,1,14474,13768,13119,12438,11945,11546
Línea 18     MPDATA,EX,1,7,11208,10884,10600,10352,10132,9922
Línea 21     MPDATA,EX,1,13,9743,9592,9456,9328
Línea 24     TB,DATA,1,4.89E-02,7.21E+00,3.83E-02,1.91E-01,1.74E-02,1.70E-01
Línea 25     TB,DATA,7,5.96E-02,6.35E+02,1.09E-01,7.60E+03,2.88E-02,2.01E+03
Línea 26     *IF,T,LE,40,THEN
Línea 27         TB,SHIFT,1,1,2,TN
Línea 28         TB,DATA,1,303,236595/8.314/2.303
Línea 29     *ELSE
Línea 30         TB,SHIFT,1,1,3,WLF
Línea 31         TB,DATA,1,303,9.00,59.08
Línea 32     *ENDIF
Línea 71     F,2,FX,1000/10.5/2/2
Línea 72     F,27,FX,1000/10.5/2,,36,1
Línea 98     SAVE,CreepPA66-GF50SinAlfas,db
```

Se simulan los mismos casos que para PA66 y para PA6-MD40. Para el caso 1, los resultados se muestran en la Tabla 9.22 y la representación gráfica en la Figura 9.16. Para el caso 2, los resultados se muestran en la Tabla 9.23 y la representación gráfica en la Figura 9.17.

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

### Caso 1

Temperatura = 23°C

Tiempo de creep = 60000 s

Tabla 9.22 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

TIME	2 UX UX	159 S X SX average	4 PROD Extension	5 QUOT EC
600	0.224256E-01	23.0705	0.448512E-01	12859.5
1200	0.229149E-01	23.0689	0.458299E-01	12584.0
2400	0.236117E-01	23.0667	0.472234E-01	12211.5
4800	0.244208E-01	23.0643	0.488415E-01	11805.7
9600	0.252677E-01	23.0620	0.505354E-01	11408.8
15600	0.259153E-01	23.0603	0.518307E-01	11122.9
21600	0.263691E-01	23.0592	0.527382E-01	10931.0
27600	0.267058E-01	23.0584	0.534115E-01	10792.8
33600	0.269611E-01	23.0578	0.539221E-01	10690.3
39600	0.271565E-01	23.0574	0.543131E-01	10613.2
45600	0.273068E-01	23.0570	0.546136E-01	10554.6
51600	0.274226E-01	23.0568	0.548451E-01	10510.0
57600	0.275118E-01	23.0566	0.550236E-01	10475.8
60000	0.275412E-01	23.0566	0.550823E-01	10464.6

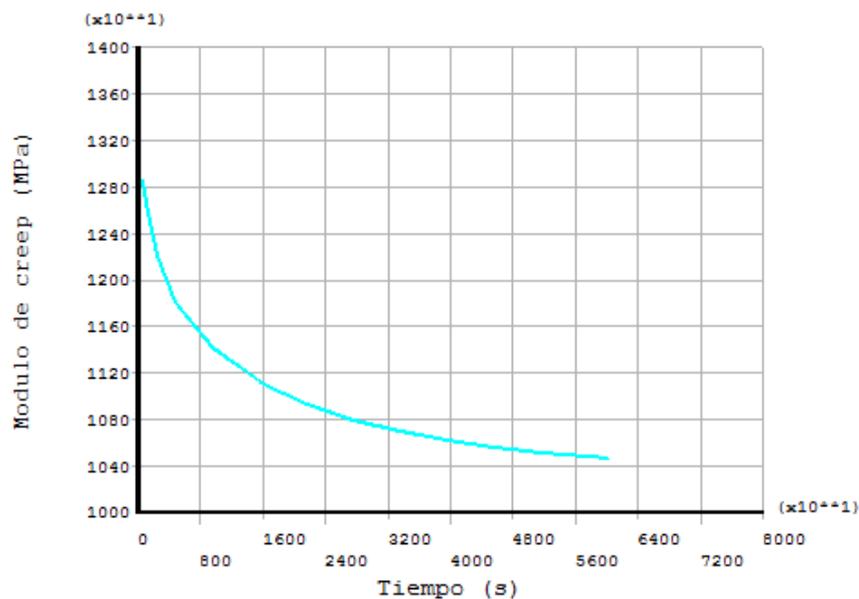


Figura 9.16 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

### Caso 2

Temperatura = 52.5°C

Tiempo de creep = 10000 s

Tabla 9.23 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

TIME	2 UX UX	159 S X SX	4 PROD Extension	5 QUOT EC
	average			
100	0.347022E-01	23.0573	0.694045E-01	8305.41
200	0.353573E-01	23.0561	0.707145E-01	8151.13
400	0.353836E-01	23.0561	0.707672E-01	8145.06
800	0.353837E-01	23.0561	0.707674E-01	8145.04
1600	0.353837E-01	23.0561	0.707674E-01	8145.04
2600	0.353837E-01	23.0561	0.707674E-01	8145.04
3600	0.353837E-01	23.0561	0.707674E-01	8145.04
4600	0.353837E-01	23.0561	0.707674E-01	8145.04
5600	0.353837E-01	23.0561	0.707674E-01	8145.04
6600	0.353837E-01	23.0561	0.707674E-01	8145.04
7600	0.353837E-01	23.0561	0.707674E-01	8145.04
8600	0.353837E-01	23.0561	0.707674E-01	8145.04
9600	0.353837E-01	23.0561	0.707674E-01	8145.04
10000	0.353837E-01	23.0561	0.707674E-01	8145.04

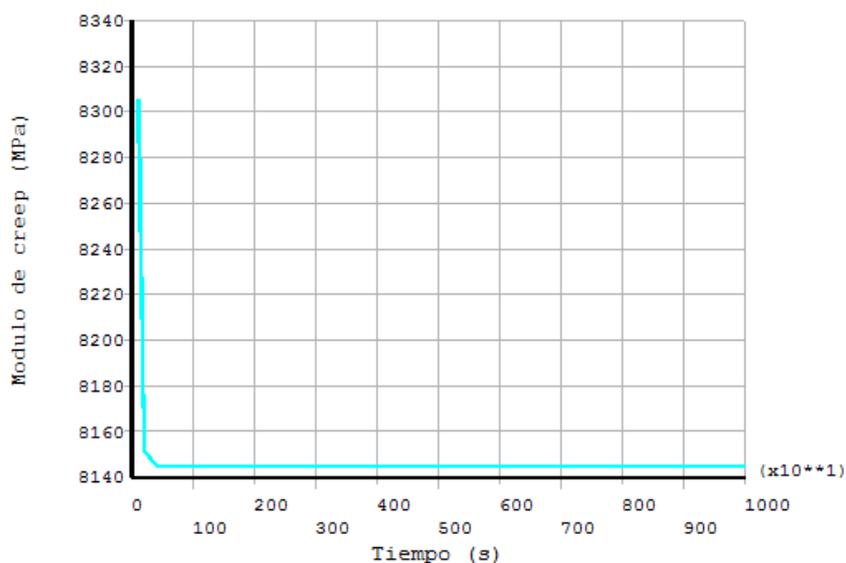


Figura 9.17- Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

---

En el caso 1, el módulo de creep a 60000 segundos que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 10465 MPa, mientras que el mismo parámetro a 60000 segundos usando el modelo matemático presenta un valor de 10855 MPa. El coeficiente de variación es de 2.59%. El dato experimental presenta un valor de 10794 MPa. El coeficiente de variación con dicho dato es de 2.19%.

En el caso 2, el módulo de creep a 10000 segundos que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 8145 MPa.

### 9.4.2 Simulaciones con coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para PA66-GF50, las líneas que se deben modificar con respecto al código general presentado en el anexo A.1.2.2 se muestran a continuación para el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep.

Línea 2	Esta línea no existe
Línea 7	/FILENAME,CreepPA66-GF50ConAlfas
Línea 8	/TITLE,CreepPA66-GF50ConAlfas
De la línea 23 a la 32	Estas líneas no existen
Línea 98	SAVE,CreepPA66-GF50ConAlfas,db

La tabla de coeficientes a introducir en ANSYS® 12.1 Academic Teaching se presenta para cada temperatura en la Tabla 9.24.

Se simulan los mismos casos que para PA66 y para PA6-MD40. Para el caso 1, los resultados se muestran en la Tabla 9.25 y la representación gráfica en la Figura 9.18. Para el caso 2, los resultados se muestran en la Tabla 9.26 y la representación gráfica en la Figura 9.19.

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

Tabla 9.24 - Coeficientes introducidos en ANSYS® 12.1 Academic Teaching con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

296	303	308	313	318	323	328	333
4.06E-02	4.15E-02	4.14E-02	4.14E-02	4.10E-02	4.08E-02	4.06E-02	4.04E-02
2.63E+02	7.21E+00	6.10E-01	5.59E-02	8.05E-03	1.48E-03	3.33E-04	8.86E-05
3.18E-02	3.25E-02	3.25E-02	3.25E-02	3.22E-02	3.20E-02	3.18E-02	3.17E-02
5.99E-01	1.91E-01	8.71E-02	4.07E-02	2.20E-02	1.28E-02	7.99E-03	5.25E-03
1.45E-02	1.48E-02	1.47E-02	1.47E-02	1.46E-02	1.45E-02	1.45E-02	1.44E-02
1.41E+01	1.70E-01	8.18E-03	4.34E-04	4.02E-05	5.02E-06	8.03E-07	1.58E-07
4.95E-02	5.06E-02	5.04E-02	5.05E-02	5.00E-02	4.97E-02	4.95E-02	4.92E-02
1.16E+04	6.35E+02	8.62E+01	1.25E+01	2.60E+00	6.62E-01	1.98E-01	6.79E-02
9.04E-02	9.23E-02	9.21E-02	9.22E-02	9.12E-02	9.08E-02	9.03E-02	8.99E-02
9.51E+03	7.60E+03	6.52E+03	5.61E+03	4.97E+03	4.48E+03	4.08E+03	3.76E+03
2.39E-02	2.44E-02	2.43E-02	2.44E-02	2.41E-02	2.40E-02	2.39E-02	2.38E-02
1.14E+04	2.01E+03	6.11E+02	1.93E+02	7.58E+01	3.35E+01	1.63E+01	8.63E+00

Continuación

338	343	348	353	358	363	368	373
4.00E-02	3.99E-02	3.96E-02	3.98E-02	3.91E-02	3.88E-02	3.84E-02	3.84E-02
2.71E-05	9.37E-06	3.58E-06	1.49E-06	6.74E-07	3.25E-07	1.66E-07	8.93E-08
3.14E-02	3.13E-02	3.10E-02	3.13E-02	3.06E-02	3.04E-02	3.02E-02	3.01E-02
3.60E-03	2.57E-03	1.89E-03	1.43E-03	1.11E-03	8.82E-04	7.13E-04	5.85E-04
1.43E-02	1.42E-02	1.41E-02	1.42E-02	1.39E-02	1.38E-02	1.37E-02	1.37E-02
3.69E-08	9.99E-09	3.07E-09	1.05E-09	3.94E-10	1.61E-10	7.05E-11	3.29E-11
4.88E-02	4.87E-02	4.83E-02	4.86E-02	4.76E-02	4.73E-02	4.69E-02	4.68E-02
2.61E-02	1.10E-02	5.07E-03	2.50E-03	1.31E-03	7.28E-04	4.23E-04	2.56E-04
8.91E-02	8.89E-02	8.81E-02	8.87E-02	8.70E-02	8.63E-02	8.56E-02	8.55E-02
3.49E+03	3.26E+03	3.07E+03	2.91E+03	2.77E+03	2.65E+03	2.54E+03	2.44E+03
2.36E-02	2.35E-02	2.33E-02	2.35E-02	2.30E-02	2.28E-02	2.26E-02	2.26E-02
4.88E+00	2.92E+00	1.84E+00	1.21E+00	8.21E-01	5.77E-01	4.18E-01	3.10E-01

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

### Caso 1

Temperatura = 23°C

Tiempo de creep = 60000 s

Tabla 9.25 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

TIME	2 UX UX	159 S X SX average	4 PROD Extension	5 QUOT EC
600	0.215615E-01	23.0735	0.431229E-01	13376.6
1200	0.219989E-01	23.0719	0.439979E-01	13109.7
2400	0.223958E-01	23.0706	0.447917E-01	12876.6
4800	0.230300E-01	23.0685	0.460600E-01	12520.9
9600	0.239823E-01	23.0654	0.479647E-01	12022.1
15600	0.247590E-01	23.0632	0.495180E-01	11643.8
21600	0.252421E-01	23.0619	0.504841E-01	11420.4
27600	0.255432E-01	23.0612	0.510863E-01	11285.4
33600	0.257312E-01	23.0607	0.514624E-01	11202.7
39600	0.258489E-01	23.0605	0.516978E-01	11151.6
45600	0.259226E-01	23.0604	0.518453E-01	11119.8
51600	0.259689E-01	23.0603	0.519379E-01	11099.9
57600	0.259980E-01	23.0602	0.519961E-01	11087.5
60000	0.260064E-01	23.0602	0.520128E-01	11083.9

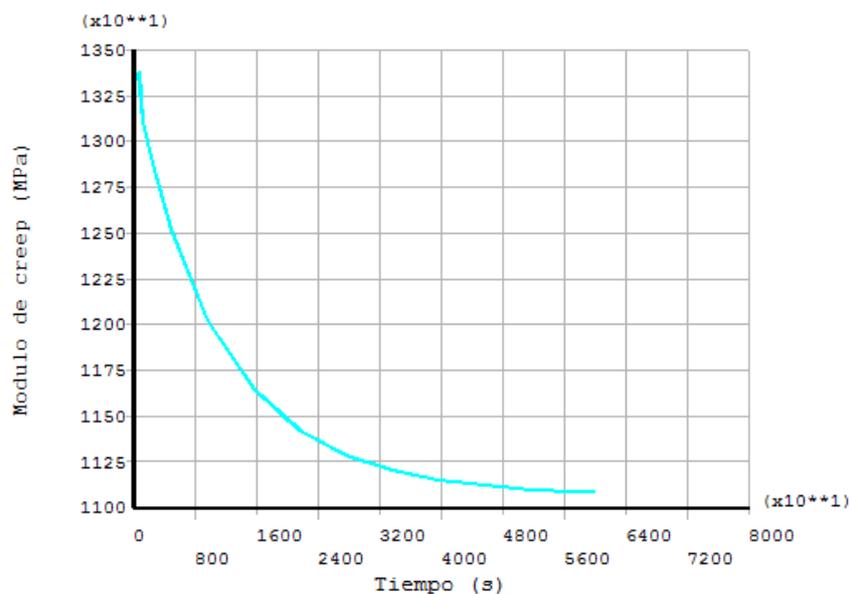


Figura 9.18 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 1 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

### Caso 2

Temperatura = 52.5°C

Tiempo de creep = 10000 s

Tabla 9.26 - Módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

TIME	2 UX UX	159 S X SX	4 PROD Extension	5 QUOT EC
	Average			
100	0.297898E-01	23.0674	0.595796E-01	9679.23
200	0.299587E-01	23.0670	0.599174E-01	9624.48
400	0.300917E-01	23.0667	0.601835E-01	9581.81
800	0.303371E-01	23.0661	0.606743E-01	9504.06
1600	0.307705E-01	23.0651	0.615409E-01	9369.81
2600	0.312198E-01	23.0641	0.624395E-01	9234.56
3600	0.315845E-01	23.0633	0.631690E-01	9127.60
4600	0.318807E-01	23.0626	0.637613E-01	9042.56
5600	0.321211E-01	23.0621	0.642421E-01	8974.68
6600	0.323163E-01	23.0617	0.646325E-01	8920.31
7600	0.324747E-01	23.0614	0.649495E-01	8876.66
8600	0.326034E-01	23.0611	0.652068E-01	8841.54
9600	0.327078E-01	23.0609	0.654157E-01	8813.22
10000	0.327439E-01	23.0609	0.654878E-01	8803.49

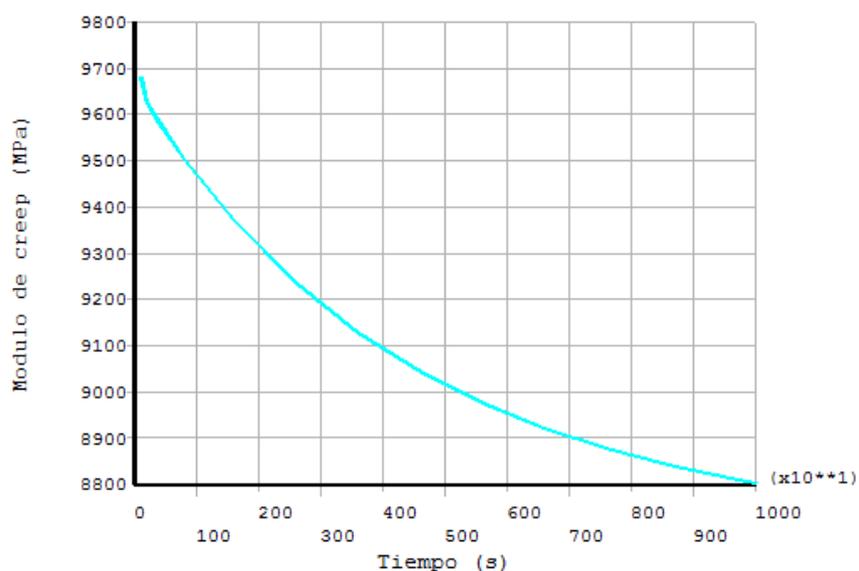


Figura 9.19 - Representación gráfica del módulo de creep en función del tiempo de la simulación del caso 2 con el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para PA66-GF50

## Capítulo 9 - Bucle de creep para PA66-GF50

---

En el caso 1, el módulo de creep a 60000 segundos que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 11084 MPa, mientras que el mismo parámetro a 60000 segundos usando el modelo matemático presenta un valor de 10855 MPa. El coeficiente de variación es de 1.48%. El dato experimental presenta un valor de 10794 MPa. El coeficiente de variación con dicho dato es de 1.87%.

En el caso 2, el módulo de creep a 10000 segundos que presenta la simulación en ANSYS® 12.1 Academic Teaching es de 8803 MPa.



## 10 Ecuaciones finales de los modelos

En este capítulo se presentan las ecuaciones finales de los modelos como conclusión del trabajo experimental.

### 10.1 Modelo matemático para el bucle de tracción

A continuación se presenta la expresión matemática para calcular el módulo de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación para el bucle de tracción. Esta expresión se compone de dos partes. Una parte representa la variación del módulo de tracción en función de la temperatura y la otra parte en función de la velocidad de deformación. La suma de ambas partes es el módulo de tracción resultante.

El concepto del ratio de módulos es de gran ayuda para pasar del módulo de flexión al módulo de tracción. Este parámetro es independiente de la temperatura y de la velocidad de deformación, como se define en el apartado 3.5.1.2.

Si el ratio de módulos es independiente de la temperatura, la Ecuación 10.1 muestra el concepto general de la independencia del ratio de módulos con la temperatura.

$$\left(\frac{E_T}{E_F}\right)_{\dot{\epsilon}_{ref} T} = \left(\frac{E_T}{E_F}\right)_{\dot{\epsilon}_{ref} 23^{\circ}C}$$

Ecuación 10.1

Esto implica que el módulo de tracción a una temperatura para una velocidad de deformación determinada es el módulo de flexión a las mismas condiciones multiplicado por el ratio de módulos como se muestra en la Ecuación 10.2.

$$E_{T \ T} = E_{F \ T} \left( \frac{E_{T \ 23^{\circ}C}}{E_{F \ 23^{\circ}C}} \right)$$

Ecuación 10.2

De esta forma, reordenando términos, como se indica en la Ecuación 10.3, el módulo de tracción a una temperatura se puede encontrar a partir del módulo de tracción a 23°C, multiplicándolo por el ratio entre el módulo de flexión a esta temperatura y el módulo de flexión a 23°C, todo a una misma velocidad de deformación.

$$E_{T \ T} = E_{T \ 23^{\circ}C} \frac{E_{F \ T}}{E_{F \ 23^{\circ}C}}$$

Ecuación 10.3

Si el ratio de módulos es independiente de la velocidad de deformación, se puede reescribir la Ecuación 10.4 como una expresión similar a la Ecuación 10.1.

## Capítulo 10 - Ecuaciones finales de los modelos

$$\left(\frac{E_T}{E_F}\right)_{23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}} = \left(\frac{E_T}{E_F}\right)_{23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}_{ref}}$$

Ecuación 10.4

De esta forma, como ocurre en la Ecuación 10.2, el módulo de tracción a una velocidad de deformación para una temperatura determinada es el módulo de flexión a las mismas condiciones multiplicado por el ratio de módulos como se muestra en la Ecuación 10.5.

$$E_{T23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}} = E_{F23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}_{ref}} \left( \frac{E_{T23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}_{ref}}}{E_{F23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}_{ref}}} \right)$$

Ecuación 10.5

Por lo tanto, con el uso de la Ecuación 3.13, el módulo de tracción presenta un ajuste logarítmico en función de la velocidad de deformación como se muestra en la Ecuación 10.6, donde el término independiente es el módulo de tracción a una temperatura determinada.

$$E_{T\ T}^{\dot{\epsilon}} = E_{T\ T}^{\dot{\epsilon}_{ref}} + \frac{\left( E_{F\ T}^{\dot{\epsilon}_{max}} - E_{F\ T}^{\dot{\epsilon}_{min}} \right) E_{T\ 23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}_{ref}}}{\ln(\dot{\epsilon}_{max}) - \ln(\dot{\epsilon}_{min})} \frac{E_{T\ 23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}_{ref}}}{E_{F\ 23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}_{ref}}} \ln(\dot{\epsilon})$$

Ecuación 10.6

Con la combinación de la Ecuación 10.3 y la Ecuación 10.6, el módulo de tracción puede determinarse en función de la temperatura y de la velocidad de deformación como se muestra en la Ecuación 10.7.

$$E_{T\ T}^{\dot{\epsilon}} = \left( \left( E_{T\ 23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}_{ref}} \frac{E_{F\ T}^{\dot{\epsilon}_{ref}}}{E_{F\ 23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}_{ref}}} \right) + \frac{\left( E_{F\ T}^{\dot{\epsilon}_{max}} - E_{F\ T}^{\dot{\epsilon}_{min}} \right) E_{T\ 23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}_{ref}}}{\ln(\dot{\epsilon}_{max}) - \ln(\dot{\epsilon}_{min})} \frac{E_{T\ 23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}_{ref}}}{E_{F\ 23^\circ\text{C}}^{\dot{\epsilon}_{ref}}} \ln(\dot{\epsilon}) \right)$$

Ecuación 10.7

La Ecuación 10.7 es el modelo matemático para el bucle de tracción.

## 10.2 Modelos matemáticos para el bucle de creep

Otra expresión que se estudia en este trabajo es la influencia de módulo de creep en función del tiempo y de la temperatura. Esta expresión también tiene dos partes. Una parte representa la variación del módulo de creep en función de la temperatura, como en el bucle de tracción, mientras que la otra parte representa la variación en función del tiempo y también en función de la temperatura. La suma de ambas partes es el módulo de creep resultante.

El módulo de creep a tiempo cero es el módulo de tracción a la velocidad de deformación y a la temperatura de estudio.

### 10.2.1 Modelo convencional para el bucle de creep

Basándose en la Ecuación 2.9, la capacitancia de creep en función del tiempo se expresa en la Ecuación 10.8.

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma} = J_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^n q_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \right) \right)$$

Ecuación 10.8

Donde:

$q_i$ : Coeficiente de retardo

El módulo de creep definido en función del tiempo corresponde a la Ecuación 10.9, que se ha probado y funciona bien experimentalmente para los materiales estudiados.

$$E_c(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon(t)} = \frac{1}{J_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^n q_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \right) \right)} = E_{c0} \left( 1 - \sum_{i=1}^n CMR_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right)$$

Ecuación 10.9

Usando la Ecuación 3.21 y la Ecuación 3.22, la Ecuación 10.10 permite convertir cada coeficiente  $p_i$  del dominio de la frecuencia a un nuevo coeficiente  $CMR_i$  en el dominio del tiempo.

$$CMR_i = p_i \left( 1 + \frac{1 - \left( \frac{E_{c\infty}}{E_{c0}} \right)_T - \sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \right)$$

Ecuación 10.10

Además, basándose en la Ecuación 3.23, se supone que los tiempos de relajación en el dominio de la frecuencia y los coeficientes de tiempo en el dominio del tiempo a la misma temperatura presentan igual valor.

Sin embargo, el modelo convencional para el bucle de creep no se ajusta a diferentes temperaturas, porque a 23°C, los valores teóricos presentan errores altos en comparación con los datos experimentales.

## Capítulo 10 - Ecuaciones finales de los modelos

Con la combinación de la Ecuación 10.10 y la Ecuación 3.23, el módulo de creep se puede determinar en función del tiempo como se muestra en la Ecuación 10.11 usando este modelo.

$$E_{C\ t} = E_{T\ 23^{\circ}C} \left( 1 - \sum_{i=1}^n \left( p_i \left( 1 + \frac{1 - \left( \frac{E_{C\ \infty}}{E_{C\ 0}} \right)_T - \sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \right) \right) \right)_{23^{\circ}C} \left( 1 - e^{-\frac{t}{(\tau_i)_{23^{\circ}C}}} \right)$$

Ecuación 10.11

La Ecuación 10.11 es el modelo convencional para el bucle de creep.

### 10.2.2 Modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep

Con el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo, los coeficientes ajustados en el dominio de la frecuencia son diferentes, basados en la Ecuación 3.24 y en la Ecuación 3.25. Como se ha definido, los coeficientes alfa son valores comprendidos entre 0.10 y 2.00.

A continuación, a la temperatura de referencia (30°C), cada coeficiente  $CMR_i$  en el dominio del tiempo se puede hallar mediante la Ecuación 10.10 y cada coeficiente  $CT_i$  mediante la Ecuación 3.23.

En función de la temperatura, los cambios de cada coeficiente  $CMR_i$  vienen dados a partir de los cambios en  $E_{C\ \infty} / E_{C\ 0}$  a cada temperatura calculados mediante la Ecuación 3.30 y la Ecuación 3.31. Los cambios en cada coeficiente  $CT_i$  en función de la temperatura se calculan mediante la Ecuación 3.26.

De esta manera, el módulo de creep puede determinarse en función de la temperatura y del tiempo como se muestra en la Ecuación 10.12 utilizando este modelo.

$$E_{C\ T} = \left( E_{T\ 23^{\circ}C} \frac{E_{F\ T}}{E_{F\ 23^{\circ}C}} \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^n p_i \left( 1 + \frac{1 - \left( \frac{E_{C\ \infty}}{E_{C\ 0}} \right)_T - \sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \right) \right) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i a_T}} \right)$$

Ecuación 10.12

La Ecuación 10.12 es el modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep.

### 10.2.3 Modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep

El modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo tiene los mismos coeficientes ajustados en el dominio de la frecuencia y los mismos coeficientes  $CT$  a la temperatura de referencia, respecto al modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo. Sin embargo, los coeficientes  $CMR$  presentan algunas diferencias debido al cambio en  $E_{C\ \infty} / E_{C\ 0}$ , también a la temperatura de referencia.

## Capítulo 10 - Ecuaciones finales de los modelos

En función de la temperatura, cada coeficiente  $CMR_i$  (debido a los cambios en  $E_{C\infty} / E_{C0}$ ) presenta valores distintos con respecto al modelo anterior. Cada coeficiente  $CT_i$  también presenta cambios respecto al modelo anterior por efecto de la temperatura. Esto se debe a la aparición de los coeficientes alfa en el dominio del tiempo para estimar los valores en función de la temperatura (Ecuación 3.27).

De esta forma, el módulo de creep puede determinarse en función de la temperatura y del tiempo como se muestra en la Ecuación 10.13 utilizando este modelo.

$$E_{C\ T} = \left( E_{T\ 23^{\circ}C} \frac{E_{F\ T}}{E_{F\ 23^{\circ}C}} \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^n p_i \left( 1 + \frac{1 - \left( \frac{E_{C\infty}}{E_{C0}} \right)_T - \sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \right) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i a_T^{\alpha_i}}} \right) \right)$$

Ecuación 10.13

La Ecuación 10.13 es el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep.



# 11 Conclusiones y futuros desarrollos

## 11.1 Conclusiones

Las conclusiones de esta tesis son las siguientes:

- 1) La metodología desarrollada permite predecir módulos de tracción y de creep de materiales termoplásticos a partir de los datos de DMA sin usar MUE.
- 2) El uso de la metodología descrita conlleva un ahorro de tiempo importante, además de una disminución significativa del número de ensayos si se compara con el procedimiento usado habitualmente mediante MUE.
- 3) El desarrollo de una serie de relaciones entre los modelos generalizados de Kelvin-Voigt y de Maxwell y los coeficientes de creep y de relajación para  $n=1$  y  $n=2$  permite cambiar la disposición de los muelles y de los émbolos de un modelo a otro. Estas relaciones tienen su utilidad, debido a que los simuladores computacionales suelen llevar implementados sólo algunas combinaciones concretas de muelles y émbolos.
- 4) En relación a la obtención y comprobación del módulo de tracción se ha elaborado un bucle de tracción, del que se extraen las siguientes conclusiones:
  - El parámetro definido como ratio de módulos permite relacionar el módulo de tracción y el módulo de flexión, presentando buenos resultados.
  - El modelo matemático para el bucle de tracción propuesto en esta tesis permite predecir los módulos de tracción en función de la temperatura y de la velocidad de deformación a partir de los datos de DMA sin usar MUE.
  - La discrepancia entre los datos experimentales y los valores teóricos usando este modelo en función de estas dos variables es pequeña para PA66 y PA66-GF50. Sin embargo, la discrepancia es grande para PA6-MD40 en el caso de trabajar a 23°C con altas velocidades de deformación. Esto se debe al hecho de que el procedimiento puede presentar resultados poco fiables si no se halla un máximo en el módulo de pérdida en función de la temperatura, dentro del rango de temperaturas a estudiar, como sucede con este último material.
  - El código de ANSYS® elaborado para simular ensayos de tracción en función de la velocidad de deformación y de la temperatura puede predecir cualquier otro valor de módulo de tracción. Este código es un sistema alternativo al del modelo matemático descrito.
- 5) En relación a la obtención y comprobación del módulo de creep se ha elaborado un bucle de creep, del que se extraen las siguientes conclusiones:
  - El modelo convencional, al calcular los módulos de flexión en función de la frecuencia, presenta valores teóricos, tanto mediante ABAQUS® como mediante una subrutina de MATLAB®, con grandes discrepancias respecto a los datos experimentales para los tres materiales en estudio.
  - Los modelos modificados propuestos en esta tesis, que usan coeficientes alfa en el dominio de la frecuencia, permiten predecir de forma alternativa los módulos de creep en función del tiempo y de la temperatura a partir de los datos de DMA sin usar MUE.
  - La propuesta de introducir un coeficiente alfa para cada término de las ecuaciones en los modelos modificados conduce a mejores resultados que los obtenidos mediante el modelo convencional.

- El modelo modificado sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo presenta buenos resultados para PA66 y PA66-GF50. Sin embargo, la discrepancia entre los datos experimentales y los valores teóricos calculados es superior al 10% para PA6-MD40.
  - El modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo conduce a buenos resultados para todos los materiales estudiados. La discrepancia entre los datos experimentales y los valores teóricos calculados es muy pequeña.
  - Los dos códigos de ANSYS® elaborados para simular ensayos de creep en función de la temperatura y del tiempo pueden predecir cualquier otro valor de módulo de creep. Estos códigos son un sistema alternativo a los dos modelos modificados.
- 6) De entre los cuatro modelos trabajados, se concluye que el modelo matemático para el bucle de tracción y el modelo modificado con coeficientes alfa en el dominio del tiempo para el bucle de creep son los dos mejores para minimizar la discrepancia entre los datos experimentales y los valores teóricos.

### 11.2 Contribuciones

Las contribuciones de esta tesis son las siguientes:

- 1) Creación de un nuevo modelo matemático para el bucle de tracción en función de la velocidad de deformación y de la temperatura.
- 2) Subrutina para poder alimentar un código en ANSYS® permitiendo introducir diferentes velocidades de deformación.
- 3) Creación de dos nuevos modelos matemáticos para el bucle de creep mediante la introducción de coeficientes alfa en el dominio de la frecuencia.
- 4) Modificaciones de los coeficientes de los modelos matemáticos para el bucle de creep para pasar del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo.
- 5) Desarrollo de ecuaciones para determinar los parámetros de las series de Prony (modelos generalizados de Kelvin-Voigt y de Maxwell) con  $n=1$  o  $n=2$ .
- 6) Desarrollo de ecuaciones para determinar los coeficientes del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir de los coeficientes del modelo generalizado de Maxwell o viceversa, con  $n=1$  o  $n=2$ , para poder cambiar de modelo.
- 7) Descripción de un procedimiento para desarrollar los modelos matemáticos que pueden ser aplicados a otros materiales termoplásticos.

### 11.3 Futuros desarrollos

Los futuros desarrollos de esta tesis serían los siguientes:

- 1) Usar otros tipos de materiales termoplásticos para comprobar que el desarrollo de los modelos constitutivos hallados también se puede aplicar para dichos materiales.
- 2) Aumentar el rango de trabajo de las variables estudiadas y así determinar la influencia de dicho aumento en los modelos constitutivos empleados.
- 3) Trabajar con las 3 variables a la vez en los bucles de creep. Esto significaría estudiar la influencia del aumento de la deformación a una temperatura y a un

## Capítulo 11 – Conclusiones y futuros desarrollos

---

tiempo determinados al variar también la velocidad de deformación para llegar al valor de carga constante.

- 4) Añadir una cuarta variable al sistema, el valor de carga constante. De esta forma, se podría estudiar el comportamiento de creep del material al variar el valor de dicha carga constante a lo largo del tiempo.



### 12 Referencias

1. DuPont™ Zytel® 103HL NC010.
2. <http://www.campusplastics.com/campus/en/datasheet/Zytel%C2%AE+103HSL+NC010/DuPont+Engineering+Polymers/52/d5681137>. (29-10-12)
3. DuPont™ Minlon® 73M40 NC010.
4. <http://www.campusplastics.com/campus/en/datasheet/Minlon%C2%AE+73M40+NC010/DuPont+Engineering+Polymers/52/9bf7eac6>. (29-10-12)
5. DuPont™ Zytel® 70G50HSLA NC010.
6. <http://www.campusplastics.com/campus/en/datasheet/Zytel%C2%AE+70G50HSLA+BK039B/DuPont+Engineering+Polymers/52/c1e55bbf>. (29-10-12)
7. Thomason, J. L. & Porteus, G. An investigation of glass-fiber reinforced polyamide 66 during conditioning in various automotive fluids. *Polymer Composites* **42**, 1369-1379 (2011).
8. Thomason, J. L. Structure-property relationships in glass reinforced polyamide, part 2 : The effects of average fiber diameter and diameter distribution. *Polymer Composites* **28**, 344 (2007).
9. Artemenko, S. E. & Kadykova, Y. A. Polymer composite materials based on carbon, basalt, and glass fibres. *Fibre Chemistry* **40**, 37-39 (2008).
10. Doy, G. DuPont™ Zytel® high glass reinforced engineering thermoplastic.
11. DuPont™ Minlon® and Zytel® design information - Module II.
12. Young, R. J. & Eichhorn, S. J. Deformation mechanisms in polymer fibres and nanocomposites. *Polymer* **48**, 2-18 (2007).
13. Bader, M. G. Introduction, Introduction to composite materials science, Lecture 1, University of Surrey.
14. Alvarez, V. A., Valdez, M. E. & Vázquez, A. Dynamic mechanical properties and interphase fiber/matrix evaluation of unidirectional glass fiber/epoxy composites. *Polymer Testing* **22**, 611-615 (2003).

## Capítulo 12 - Referencias

---

15. Jiang, B., Liu, C., Zhang, C., Wang, B. & Wang, Z. The effect of non-symmetric distribution of fiber orientation and aspect ratio on elastic properties of composites. *Composites Part B: Engineering* **38**, 24-34 (2007).
16. Termonia, Y. Structure-property relationships in nanocomposites. *Polymer* **48**, 6948-6954 (2007).
17. Chamis, C. C., Handler, L. M. & Manderscheid, J. Composite nanomechanics: a mechanistic properties prediction. (2007).
18. Anan'eva, T. A., Kuznetsov, A. Y., Shirshova, E. P., Khizhnyak, S. D. & Pakhomov, P. M. Fibre materials based on ultrahigh-molecular-weight polyethylene and montmorillonite nanoparticles. *Fibre Chemistry* **40**, 173-178 (2008).
19. Serkov, A. T. & Radishevskii, M. B. Nanotechnologies and chemical fibres. *Fibre chemistry* **40**, 26-30 (2010).
20. Sgriccia, N., Hawley, M. C. & Misra, M. Characterization of natural fiber surfaces and natural fiber composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* **39**, 1632-1637 (2008).
21. Wimmer, G., Schuecker, C. & Pettermann, H. E. Numerical simulation of delamination in laminated composite components - A combination of a strength criterion and fracture mechanics. *Composites Part B: Engineering* **40**, 158-165 (2009).
22. Chin, J., Hunston, D. & Forster, A. Thermo-viscoelastic analysis of ambient cure epoxy adhesives used in construction applications. 1-37.
23. Pal, R. Modeling and simulation of viscoelastic behavior of three-phase polymer blends with multiple droplet morphology. *Chemical product and process modeling* **3**, 1-12 (2008).
24. Reeder, J. R. Prediction of long-term strength of thermoplastic composites using time-temperature superposition. (2002).
25. Soltani, P., Keikhosravy, M., Oskouei, R. H. & Soutis, C. Studying the tensile behaviour of GLARE laminates: a finite element modelling approach. *Applied Composite Materials* **18**, 271-282 (2011).
26. Li, X. & E, W. Multiscale modeling of the dynamics of solids at finite temperature. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **53**, 1650-1685 (2005).
27. Lu, G.; Kaxiras, E. An overview of multiscale simulations of materials. *Handbook of theoretical and computational nanotechnology* **10**, 1-29 (2004).

## Capítulo 12 - Referencias

---

28. Pavliotis, G. A. & Stuart, A. M. Multiscale methods: averaging and homogenization. *Springer* (2007).
29. Tadmor, E. B., Ortiz, M. & Phillips, R. Quasicontinuum analysis of defects in crystals. *Phyl. Mag.* 1529-1963 (1996).
30. Abraham, F. F., Broughton, J. Q., Bernstein, N. & Kaxiras, E. Spanning the continuum to quantum length scales in a dynamic simulation of brittle fracture. *Europhys. Lett.* **44**, 783-787 (1998).
31. Rudd, R. E. & Broughton, J. Q. Coarse-grained molecular dynamics and the atomic limit of finite element. *Phys. Rev.* **58**, 5893-5896 (1998).
32. Wagner, G. J. & Liu, W. K. Coupling of atomistic and continuum simulations using a bridging scale decomposition. *J. Comp. Phys.* **190**, 249-274 (2003).
33. Wagner, G. J., Eduard, G. K. & Liu, W. K. Molecular dynamic boundary conditions for regular crystal lattice. *Computer method in applied mechanics and engineering* **193**, 1579-1601 (2004).
34. Cai, W., De Koning, M., Bulatov, W. W. & Yip, S. Minimizing boundary reflections in coupled-domain simulations. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3213 (2000).
35. E, W. & Huang, Z. Matching conditions in atomistic-continuum modeling of material. *Phys. Rev. Lett.* **87**, (2001).
36. E, W. & Huang, Z. A dynamic atomistic-continuum method for the simulation of crystalline material. *J. Comp. Phys.* **182**, 234-261 (2002).
37. Arao, Y., Taniguchi, N., Nishiwaki, T., Hirayama, N. & Kawada, H. Strain-rate dependence of the tensile strength of glass fibers. *Journal of Materials Science* **47**, 4895-4903 (2012).
38. Gong, G., Pyo, J., Mathew, A. P. & Oksman, K. Tensile behavior, morphology and viscoelastic analysis of cellulose nanofiber-reinforced (CNF) polyvinyl acetate (PVAc). *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* **42**, 1275-1282 (2011).
39. Ma, P., Hu, H., Zhu, L., Sun, B. & Gu, B. Tensile behaviors of co-woven-knitted fabric reinforced composites under various strain rates. *Journal of Composite Materials* **45**, 2495-2506 (2011).
40. Martin Bravo, F. Influencia de la velocidad de deformación en el comportamiento mecánico de las aleaciones 2022-O, 2050-O y 2050-T34. (2009).
41. Benavente, R. Ensayo de tracción. Efecto del grado de cristalinidad. Materiales poliméricos amorfos y semicristalinos. (2011).

## Capítulo 12 - Referencias

---

42. Aguilar Contreras, A. Caracterización mecánica mediante ensayos de tracción a alta velocidad de deformación y a altas temperaturas de aleaciones empleadas en carcasas de contención en turbinas de motores aeronáuticos. (2008).
43. Zhukovskii, V. A. *et al.* Deformation behavior of medical synthetic monofilaments. *Fibre Chemistry* **40**, 25-28 (2008).
44. Al-Huniti, N., Al-Faqs, F. & Abu Zaid, O. Finite element dynamic analysis of laminated viscoelastic structures. *Applied Composite Materials* **17**, 489-498 (2010).
45. DeHoff, P. H. & Anusavice, K. J. Shear stress relaxation of dental ceramics determined from creep behavior. *Dental materials* **20**, 717-725 (2004).
46. Vinogradov, A. M. & Holloway, F. Dynamic mechanical testing of the creep and relaxation properties of polyvinylidene fluoride. *Polymer Testing* **19**, 131-142 (2000).
47. O'Brien, D. J., Mather, P. T. & White, S. R. Viscoelastic properties of an epoxy resin during cure. *Journal of Composite Materials* **35**, 883-904 (2001).
48. Jansons, J., Aniskevich, A. & Pazhe, L. Analysis of reversible and irreversible strains in the creep of a nonlinear viscoelastic polymer. *Mechanics of Composite materials* **48**, 209-216 (2012).
49. Chen, T. Determining a Prony series for a viscoelastic material from time strain data. 1-21 (2000).
50. Xu, X. & Hou, J. A stress relaxation model for the viscoelastic solids based on the steady-state creep equation. *Mechanics of Time-Dependent Materials* **15**, 29-39 (2011).
51. Lakes, R. S. & Vanderby, R. Interrelation of creep and relaxation: a modeling approach for ligaments. *Journal of biomechanical engineering* **121**, 612-615 (1999).
52. Liu, Y. Calculation of discrete relaxation modulus and creep compliance. *Rheologica Acta* **38**, 357-364 (1999).
53. Fernández, P., Lamela, M. J. & Fernández, A. Caracterización viscoelástica del disco de articulación temporomandibular de bovinos. *Anales de la mecánica de fractura* **1**, 321-326 (2007).
54. Sorvari, J. & Malinen, M. On the direct estimation of creep and relaxation functions. *Mechanics of Time-Dependent Materials* **11**, 143-157 (2007).
55. Christensen, R. M. Theory of viscoelasticity. 3-9 (1982).

## Capítulo 12 - Referencias

---

56. Huang, Y., Crouch, S. L. & Mogilevskaya, S. G. Numerical verification of a time domain direct boundary integral method for a viscoelastic plane with circular holes and inclusions. 1-14 (2004).
57. Theory reference for ANSYS and ANSYS workbench. *ANSYS Help* (2007).
58. Mottahedi, M., Dadalau, A., Hafla, A. & Verl, A. Numerical analysis of relaxation test based on Prony series material model. 1-10 (2009).
59. Dorigato, A. & Fambri, L. Thermo-mechanical behavior of polyamide 12-polyamide 66 recycled fiber composites. *Polymer Composites* **66**, 786-795 (2011).
60. Tamrakar, S., Lopez-Anido, R. A., Kiziltas, A. & Gardner, D. J. Time and temperature dependent response of a wood-polypropylene composite. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* **42**, 834-842 (2011).
61. Ludueña, L., Vazquez, A. & Alvarez, V. Viscoelastic behavior of polycaprolactone/clay nanocomposites. *Journal of Composite Materials* **46**, 677-689 (2011).
62. Guedes, R. M. A viscoelastic model for a biomedical ultra-high molecular weight polyethylene using the time-temperature superposition principle. *Polymer Testing* **30**, 294-302 (2011).
63. Pothan, L. A., Oommen, Z. & Thomas, S. Dynamic mechanical analysis of banana fiber reinforced polyester composites. *Composites Science and Technology* **63**, 283-293 (2003).
64. George, G. *et al.* Viscoelastic behaviour of novel commingled biocomposites based on polypropylene/jute yarns. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* **43**, 893-902 (2012).
65. Kontou, E. Tensile creep behavior of unidirectional glass-fiber polymer composites. *Polymer Composites* **26**, 287-292 (2005).
66. Kazemi-Najafi, S., Nikray, S. J. & Ebrahimi, G. A comparison study on creep behavior of wood-plastic composite, solid wood, and polypropylene. *Journal of Composite Materials* **46**, 801-808 (2012).
67. Li, Y.-L., Shen, M.-Y., Chen, W.-J., Chiang, C.-L. & Yip, M.-C. Tensile creep study and mechanical properties of carbon fiber nano-composites. *Journal of Polymer Research* **19**, (2012).
68. Bagley, R. L. & Torvik, P. J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology* **27**, 201-210 (1983).

## Capítulo 12 - Referencias

---

69. Hou, T. & Chen, H. Isothermal physical aging of PEEK and PPS investigated by fractional Maxwell model. *Polymer* **53**, 2509-2518 (2012).
70. Schmidt, A. & Gaul, L. Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives. *Nonlinear dynamics* **29**, 37-55 (2002).
71. Schmidt, A. & Gaul, L. FE implementation of viscoelastic constitutive stress-strain relations involving fractional time derivatives. *Constitutive Models for Rubbers* (2001).
72. Welch, S. W. J., Rorrer, R. A. L. & Duren, R. G. Application of time-based fractional calculus methods to viscoelastic creep and stress relaxation of materials. *Mechanics of Time-Dependent Materials* **3**, 279-303 (1999).
73. Liu, J. G. & Xu, M. Y. Higher-order fractional constitutive equations of viscoelastic materials involving three different parameters and their relaxation and creep functions. *Mechanics of Time-Dependent Materials* **10**, 263-279 (2006).
74. Papoulia, K. D., Panoskaltsis, V. P., Kurup, N. V. & Korovajchuk, I. Rheological representation of fractional order viscoelastic material models. *Rheologica Acta* **49**, 381-400 (2010).
75. Tschoegl, N. W. Time dependence in material properties: an overview. *Mechanics of time-dependent materials* **1**, 3-31 (1997).
76. Lakes, R. S. & Wineman, A. On Poisson's ratio in linearly viscoelastic solids. *Journal of Elasticity* **85**, 45-63 (2006).
77. Tscharnuter, D., Jerabek, M., Major, Z. & Lang, R. W. Time-dependent poisson's ratio of polypropylene compounds for various strain histories. *Mechanics of Time-Dependent Materials* **15**, 15-28 (2010).
78. Dorigato, A., Pegoretti, A. & Kolarík, J. Nonlinear tensile creep of linear low density polyethylene/fumed silica nanocomposites: time-strain superposition and creep prediction. *Polymer Composites* 1947-1955 (2010).
79. Dasappa, P., Lee-Sullivan, P., Xiao, X. & Foss, P. H. Tensile creep of a long-fibre glass mat thermoplastic (GMT) composite. II. Viscoelastic-viscoplastic constitutive modeling. *Polymer Composites* 1204-1211 (2009).
80. Dasappa, P., Lee-Sullivan, P., Xiao, X. & Foss, P. H. Tensile creep of a long-fiber glass mat thermoplastic composite. I. Short-term tests. *Polymer Composites* 1146-1157 (2009).

## Capítulo 12 - Referencias

---

81. Sakai, T. & Somiya, S. Estimating creep deformation of glass-fiber-reinforced polycarbonate. *Mechanics of Time-Dependent Materials* **10**, 185-199 (2006).
82. Reis, J. M. L., Coelho, J. L. V., Monteiro, A. H. & Da Costa Mattos, H. S. Tensile behavior of glass/epoxy laminates at varying strain rates and temperatures. *Composites Part B: Engineering* **43**, 2041-2046 (2012).
83. Raghavan, J. & Meshii, M. Creep of polymer composites. *Composites science and technology* **57**, 1673-1688 (1997).
84. Somashekar, A. A., Bickerton, S. & Bhattacharyya, D. Modelling the viscoelastic stress relaxation of glass fibre reinforcements under constant compaction strain during composites manufacturing. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* **43**, 1044-1052 (2012).
85. Bergstöm, J. Calculation of Prony series parameters from dynamic frequency data. (2005).
86. Custodio, R., Carlos de Andrade, J. & Augusto, F. O ajuste de funções matemáticas a dados experimentais. *Química Nova* **20**, 219-225 (1997).
87. Spectral analysis and the interconversion of linear viscoelastic functions, TA Instruments.
88. Analysis user's manual, volume III: materials. *ABAQUS Version 6.4*.
89. Devi, L. U., Bhagawan, S. S. & Thomas, S. Dynamic mechanical analysis of pineapple leaf/glass hybrid fiber reinforced polyester composites. *Polymer Composites* 956-965 (2010).
90. Thomason, J. L., Ali, J. Z. & Anderson, J. The thermo-mechanical performance of glass-fibre reinforced polyamide 66 during glycol-water hydrolysis conditioning. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* **41**, 820-826 (2010).
91. Kashiwagi, T. *et al.* Relation between the viscoelastic and flammability properties of polymer nanocomposites. *Polymer* **49**, 4358-4368 (2008).
92. Navarro Cassu, S. & Felisberti, M. I. Comportamento dinâmico-mecânico e relaxações em polímeros e blendas poliméricas. *Química Nova* **28**, 255-263 (2005).
93. Stadler, F. J. Effect of incomplete datasets on the calculation of continuous relaxation spectra from dynamic-mechanical data. *Rheologica Acta* **49**, 1041-1057 (2010).
94. Gracia-Fernández, C. A. *et al.* Comparative study of the dynamic glass transition temperature by DMA and TMDSC. *Polymer Testing* **29**, 1002-1006 (2010).

## Capítulo 12 - Referencias

---

95. Zehetmeyer, G., Soares, R. M. D., Brandelli, A., Mauler, R. S. & Oliveira, R. V. B. Evaluation of polypropylene/montmorillonite nanocomposites as food packaging material. *Polymer Bulletin* **68**, 2199-2217 (2012).
96. Shen, J., Li, J. & Guo, S. The origin of a new transition in dynamic mechanical spectra of multilayer polymeric composite. *Polymer* **53**, 2519-2523 (2012).
97. Zhang, L., Su, D., Jin, L. & Li, C. Polyamide 6 composites reinforced with glass fibers modified with electrostatically assembled multiwall carbon nanotubes. *Journal of Materials Science* **47**, 5446-5454 (2012).
98. Cortés, F. & Elejabarrieta, M. J. Modelling viscoelastic materials whose storage modulus is constant with frequency. *International Journal of Solids and Structures* **43**, 7721-7726 (2006).
99. Wadud, S. E. Bin. Time-temperature superposition using DMA creep data. *Thermal Analysis and Rheology* 8-11.
100. Achenbach, M. & Herdy, M. Ermittlung viskoelastischer Materialparameter aus thermorheologischen Meßwerten mittels Evolutionsstrategie. 1-15 (1999).
101. Alwis, K. G. N. C. & Burgoyne, C. J. Time-temperature superposition to determine the stress-rupture of aramid fibres. *Applied Composite Materials* 1-19.
102. Van Gurp, M. & Palmen, J. Time-temperature superposition for polymeric blends. 18-21.
103. Cho, K. S. Geometric interpretation of time-temperature superposition. *Rheology Journal* **21**, 13-16 (2009).
104. Nakada, M., Miyano, Y., Cai, H. & Kasamori, M. Prediction of long-term viscoelastic behavior of amorphous resin based on the time-temperature superposition principle. *Mechanics of Time-Dependent Materials* **15**, 309-316 (2011).
105. Rheology applications note. Application of time-temperature superposition principles to rheology. *Thermal Analysis and Rheology*.
106. Duffrène, L. *et al.* Generalized Maxwell model for the viscoelastic behavior of a soda-lime-silica glass under low frequency shear loading. *Rheologica Acta* **36**, 173-186 (1997).
107. Drozdov, A. D. A model for the nonlinear viscoelastic response in polymers at finite strains. *International journal of solids and structures* **35**, 2315-2347 (1998).

## Capítulo 12 - Referencias

---

108. Santangelo, P. G., Ngai, K. L. & Roland, C. M. Temperature dependence of relaxation in polypropylene and poly(ethylene-co-propylene). *Macromolecules* **29**, 3651-3653 (1996).
109. Roylance, D. Engineering viscoelasticity. 1-37 (2001).
110. Seminario de análisis dinámomecánico, TA Instruments.
111. Foreman, J. A., Lundgren, C. J. & Gill, P. S. Measurement of the physical properties of engineering thermoplastics using thermal analysis. *Thermal Analysis and Rheology*.
112. ANSYS structural analysis guide. *ANSYS Help* (2005).
113. Knauss, W. G. The sensitivity of the time-temperature shift process to thermal variations-A note. *Mechanics of Time-Dependent Materials* **12**, 179-188 (2008).
114. Mok, M. M., Liu, X., Bai, Z., Lei, Y. & Lodge, T. P. Effect of concentration on the glass transition and viscoelastic properties of poly(methyl methacrylate)/ionic liquid solutions. *Macromolecules* **44**, 1016-1025 (2011).
115. Lin, Y., Shangguan, Y., Zuo, M., Harkin-Jones, E. & Zheng, Q. Effects of molecular entanglement on molecular dynamics and phase-separation kinetics of poly(methyl methacrylate)/poly(styrene-co-maleic anhydride) blends. *Polymer* **53**, 1418-1427 (2012).
116. Houshyar, S., Shanks, R. A. & Hodzic, A. Tensile creep behaviour of polypropylene fibre reinforced polypropylene composites. *Polymer Testing* **24**, 257-264 (2005).
117. Swaminathan, G., Shivakumar, K. N. & Russell, L. C. Anomalies, influencing factors, and guidelines for DMA testing of fiber reinforced composites. *Polymer Composites* 1-8 (2009).
118. Mercier, J., Bunsell, A., Castaing, P. & Renard, J. Characterisation and modelling of aging of composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* **39**, 428-438 (2008).
119. Deng, S., Hou, M. & Ye, L. Temperature-dependent elastic moduli of epoxies measured by DMA and their correlations to mechanical testing data. *Polymer Testing* **26**, 803-813 (2007).
120. Jacob, M., Francis, B. & Thomas, S. Dynamical mechanical analysis of sisal/oil palm hybrid fiber-reinforced natural rubber composites. *Polymer Composites* 671-680 (2006).

## Capítulo 12 - Referencias

---

121. Lee-Sullivan, P. & Dykeman, D. Guidelines for performing storage modulus measurements using the TA Instruments DMA 2980 three-point bending mode. I. Amplitude effects. *Polymer Testing* **19**, 155-164 (2000).
122. Seminario de reología y viscoelasticidad, TA Instruments.
123. Núñez, L., Gómez-Barreiro, S., Gracia-Fernández, C. A. & Núñez, M. R. Use of the dielectric analysis to complement previous thermoanalytical studies on the system diglycidyl ether of bisphenol A/1,2 diamine cyclohexane. *Polymer* **45**, 1167-1175 (2004).
124. <http://www.ptli.com/testlopedia/tests/tensile-plastics-d638-iso527.asp>. (04-07-11)
125. Kanters, M. An investigation of the deformation behavior of thermoplastic elastomers. (2010).
126. Time dependent behaviour: creep. 1-9
127. Geosynthetic research institute GRI test method GS10. 1-15 (2000).
128. Collins, J. A., Busby, H. R. & Staab, G. H. The failure prevention perspective. *Mechanical design of machine elements and machines* 53-58
129. Castaño Ciro, N. Control de calidad en la industria del caucho. (2001).
130. Franck, A. J. Guidelines for using TTS. *TA Instruments* 1-3.
131. Halary, J. L. Polymer materials: DSC/DMA measurements and molecular interpretations. (2011).
132. Sasso, M., Palmieri, G. & Amodio, D. Application of fractional derivative models in linear viscoelastic problems. *Mechanics of Time-Dependent Materials* **15**, 367-387 (2011).
133. Chapter 6 - Dynamic mechanical analysis. 170-238.
134. *Technical support - Polyamide product literature* -. 1-30
135. Tiryaki, V. M., Ayres, V. M., Ahmed, I. & Shreiber, D. I. Differences in nanoscale elasticity of planar and nanofibrillar tissue cultures. *Mater. Res. Soc. Symp. Proc.* **1417**, (2012).
136. Elements reference. *ANSYS Help* (2007).
137. Viscoelasticity. 1-23.
138. <http://www.astm.org/Standards/D5023.htm>. (29-10-12)

## A. Anexos

### A.1 Códigos de ANSYS®

Los códigos de ANSYS® que se presentan a continuación son generales para todos los materiales. Los parámetros de salida en ANSYS® 12.1 Academic Teaching son siempre la elongación ( $U$ ) en mm, la tensión ( $S$ ) en MPa, la extensión (*Extension*) en mm y el módulo de tracción o de creep, dependiendo del caso ( $ET$  o  $EC$ , respectivamente) en MPa. Para otros parámetros que cambian con cada material, dicho parámetro se indica con el siguiente símbolo, [...].

#### A.1.1 Simulación de los tests de tracción

Para la simulación de los tests de tracción en ANSYS® 12.1 Academic Teaching, los parámetros de entrada son el espesor (4 mm, aproximadamente), la aplicación de un cierto valor de deformación en un punto determinado (0.0025 a 12.5 mm del centro de la probeta) y el módulo de tracción para cada temperatura y velocidad de deformación, previamente hallados usando el modelo matemático para el bucle de tracción. El coeficiente de Poisson siempre presenta un valor de 0.35.

El usuario puede cambiar la temperatura ( $T$ ) y la velocidad de deformación ( $VD$ ) en ANSYS® 12.1 Academic Teaching dentro del rango de trabajo (de 23°C a 100°C para la temperatura y de 1 mm/min a 499 mm/min para la velocidad de deformación). El análisis es estático. A continuación se presenta el código general para tests de tracción.

El código empieza una nueva simulación pidiendo la temperatura y la velocidad de deformación del ensayo. Sólo si ambos parámetros están dentro del rango, la simulación se realiza. Después de esto, el código pide un nombre de archivo y un título para la simulación.

```
Línea 1 FINISH
Línea 2 /CLEAR
Línea 3 *ASK,T, UNA TEMPERATURA DE 23 A 100 GRADOS CELSIUS (SIN UNIDADES)
Línea 4 *IF,T,GE,23,AND,T,LE,100,THEN
Línea 5     *ASK,VD, UNA VELOCIDAD DE DEFORMACION DE 1 A 499 MM/MIN (SIN UNIDADES)
Línea 6     *IF,VD,GE,1,AND,VD,LE,499,THEN
Línea 7     /FILENAME,[Nombre del archivo de la simulación para el test de tracción]
Línea 8     /TITLE,[Título de la simulación para el test de tracción]
```

El código abre el preprocesador y especifica un tipo de elemento con la opción de integración completa. A continuación especifica el espesor y define la temperatura cero del usuario como el cero absoluto.

```
Línea 9 /PREP7
Línea 10 ET,1,SHELL181
Línea 11 KEYOPT,1,3,2
Línea 12 R,1,[Espesor]
Línea 13 TOFFST,0
```

El código especifica para cada temperatura, el módulo de tracción y el coeficiente de Poisson para el material 1. Estos datos son a 1.000 mm/min.

```
Línea 14 MPTMP,1,296,303,308,313,318,323
Línea 15 MPDATA,EX,1,1,[ET2961.000,ET3031.000,ET3081.000,ET3131.000,ET3181.000,ET3231.000]
Línea 16 MPDATA,NUXY,1,1,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35
Línea 17 MPTMP,7,328,333,338,343,348,353
Línea 18 MPDATA,EX,1,7,[ET3281.000,ET3331.000,ET3381.000,ET3431.000,ET3481.000,ET3531.000]
Línea 19 MPDATA,NUXY,1,7,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35
Línea 20 MPTMP,13,358,363,368,373
```

## Anexos

Línea 21 MPDATA,EX,1,13,[ET<sub>358</sub><sup>1.000</sup>,ET<sub>363</sub><sup>1.000</sup>,ET<sub>368</sub><sup>1.000</sup>,ET<sub>373</sub><sup>1.000</sup>]  
Línea 22 MPDATA,NUXY,1,13,0.35,0.35,0.35,0.35

El código especifica para cada temperatura, el módulo de tracción y el coeficiente de Poisson para el material 2. Estos datos son a 3.466 mm/min.

Línea 23 MPTEMP,1,296,303,308,313,318,323  
Línea 24 MPDATA,EX,2,1,[ET<sub>296</sub><sup>3.466</sup>,ET<sub>303</sub><sup>3.466</sup>,ET<sub>308</sub><sup>3.466</sup>,ET<sub>313</sub><sup>3.466</sup>,ET<sub>318</sub><sup>3.466</sup>,ET<sub>323</sub><sup>3.466</sup>]  
Línea 25 MPDATA,NUXY,2,1,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35  
Línea 26 MPTEMP,7,328,333,338,343,348,353  
Línea 27 MPDATA,EX,2,7,[ET<sub>328</sub><sup>3.466</sup>,ET<sub>333</sub><sup>3.466</sup>,ET<sub>338</sub><sup>3.466</sup>,ET<sub>343</sub><sup>3.466</sup>,ET<sub>348</sub><sup>3.466</sup>,ET<sub>353</sub><sup>3.466</sup>]  
Línea 28 MPDATA,NUXY,2,7,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35  
Línea 29 MPTEMP,13,358,363,368,373  
Línea 30 MPDATA,EX,2,13,[ET<sub>358</sub><sup>3.466</sup>,ET<sub>363</sub><sup>3.466</sup>,ET<sub>368</sub><sup>3.466</sup>,ET<sub>373</sub><sup>3.466</sup>]  
Línea 31 MPDATA,NUXY,2,13,0.35,0.35,0.35,0.35

El código especifica para cada temperatura, el módulo de tracción y el coeficiente de Poisson para el material 3. Estos datos son a 12.011 mm/min.

Línea 32 MPTEMP,1,296,303,308,313,318,323  
Línea 33 MPDATA,EX,3,1,[ET<sub>296</sub><sup>12.011</sup>,ET<sub>303</sub><sup>12.011</sup>,ET<sub>308</sub><sup>12.011</sup>,ET<sub>313</sub><sup>12.011</sup>,ET<sub>318</sub><sup>12.011</sup>,ET<sub>323</sub><sup>12.011</sup>]  
Línea 34 MPDATA,NUXY,3,1,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35  
Línea 35 MPTEMP,7,328,333,338,343,348,353  
Línea 36 MPDATA,EX,3,7,[ET<sub>328</sub><sup>12.011</sup>,ET<sub>333</sub><sup>12.011</sup>,ET<sub>338</sub><sup>12.011</sup>,ET<sub>343</sub><sup>12.011</sup>,ET<sub>348</sub><sup>12.011</sup>,ET<sub>353</sub><sup>12.011</sup>]  
Línea 37 MPDATA,NUXY,3,7,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35  
Línea 38 MPTEMP,13,358,363,368,373  
Línea 39 MPDATA,EX,3,13,[ET<sub>358</sub><sup>12.011</sup>,ET<sub>363</sub><sup>12.011</sup>,ET<sub>368</sub><sup>12.011</sup>,ET<sub>373</sub><sup>12.011</sup>]  
Línea 40 MPDATA,NUXY,3,13,0.35,0.35,0.35,0.35

El código especifica para cada temperatura, el módulo de tracción y el coeficiente de Poisson para el material 4. Estos datos son a 41.628 mm/min.

Línea 41 MPTEMP,1,296,303,308,313,318,323  
Línea 42 MPDATA,EX,4,1,[ET<sub>296</sub><sup>41.628</sup>,ET<sub>303</sub><sup>41.628</sup>,ET<sub>308</sub><sup>41.628</sup>,ET<sub>313</sub><sup>41.628</sup>,ET<sub>318</sub><sup>41.628</sup>,ET<sub>323</sub><sup>41.628</sup>]  
Línea 43 MPDATA,NUXY,4,1,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35  
Línea 44 MPTEMP,7,328,333,338,343,348,353  
Línea 45 MPDATA,EX,4,7,[ET<sub>328</sub><sup>41.628</sup>,ET<sub>333</sub><sup>41.628</sup>,ET<sub>338</sub><sup>41.628</sup>,ET<sub>343</sub><sup>41.628</sup>,ET<sub>348</sub><sup>41.628</sup>,ET<sub>353</sub><sup>41.628</sup>]  
Línea 46 MPDATA,NUXY,4,7,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35  
Línea 47 MPTEMP,13,358,363,368,373  
Línea 48 MPDATA,EX,4,13,[ET<sub>358</sub><sup>41.628</sup>,ET<sub>363</sub><sup>41.628</sup>,ET<sub>368</sub><sup>41.628</sup>,ET<sub>373</sub><sup>41.628</sup>]  
Línea 49 MPDATA,NUXY,4,13,0.35,0.35,0.35,0.35

El código especifica para cada temperatura, el módulo de tracción y el coeficiente de Poisson para el material 5. Estos datos son a 144.270 mm/min.

Línea 50 MPTEMP,1,296,303,308,313,318,323  
Línea 51 MPDATA,EX,5,1,[ET<sub>296</sub><sup>144.270</sup>,ET<sub>303</sub><sup>144.270</sup>,ET<sub>308</sub><sup>144.270</sup>,ET<sub>313</sub><sup>144.270</sup>,ET<sub>318</sub><sup>144.270</sup>,ET<sub>323</sub><sup>144.270</sup>]  
Línea 52 MPDATA,NUXY,5,1,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35  
Línea 53 MPTEMP,7,328,333,338,343,348,353  
Línea 54 MPDATA,EX,5,7,[ET<sub>328</sub><sup>144.270</sup>,ET<sub>333</sub><sup>144.270</sup>,ET<sub>338</sub><sup>144.270</sup>,ET<sub>343</sub><sup>144.270</sup>,ET<sub>348</sub><sup>144.270</sup>,ET<sub>353</sub><sup>144.270</sup>]  
Línea 55 MPDATA,NUXY,5,7,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35  
Línea 56 MPTEMP,13,358,363,368,373  
Línea 57 MPDATA,EX,5,13,[ET<sub>358</sub><sup>144.270</sup>,ET<sub>363</sub><sup>144.270</sup>,ET<sub>368</sub><sup>144.270</sup>,ET<sub>373</sub><sup>144.270</sup>]  
Línea 58 MPDATA,NUXY,5,13,0.35,0.35,0.35,0.35

El código especifica para cada temperatura, el módulo de tracción y el coeficiente de Poisson para el material 6. Estos datos son a 499.000 mm/min.

Línea 59 MPTEMP,1,296,303,308,313,318,323  
Línea 60 MPDATA,EX,6,1,[ET<sub>296</sub><sup>499.000</sup>,ET<sub>303</sub><sup>499.000</sup>,ET<sub>308</sub><sup>499.000</sup>,ET<sub>313</sub><sup>499.000</sup>,ET<sub>318</sub><sup>499.000</sup>,ET<sub>323</sub><sup>499.000</sup>]  
Línea 61 MPDATA,NUXY,6,1,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35  
Línea 62 MPTEMP,7,328,333,338,343,348,353  
Línea 63 MPDATA,EX,6,7,[ET<sub>328</sub><sup>499.000</sup>,ET<sub>333</sub><sup>499.000</sup>,ET<sub>338</sub><sup>499.000</sup>,ET<sub>343</sub><sup>499.000</sup>,ET<sub>348</sub><sup>499.000</sup>,ET<sub>353</sub><sup>499.000</sup>]  
Línea 64 MPDATA,NUXY,6,7,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35  
Línea 65 MPTEMP,13,358,363,368,373  
Línea 66 MPDATA,EX,6,13,[ET<sub>358</sub><sup>499.000</sup>,ET<sub>363</sub><sup>499.000</sup>,ET<sub>368</sub><sup>499.000</sup>,ET<sub>373</sub><sup>499.000</sup>]  
Línea 67 MPDATA,NUXY,6,13,0.35,0.35,0.35,0.35

## Anexos

De entre las seis velocidades de deformación que tiene información, el código elige aquella más cercana inferior a la escogida por el usuario, a no ser que el usuario haya escogido una velocidad de deformación que coincida con una de estas seis. En dicho caso, el código toma directamente la velocidad de deformación escogida por el usuario.

```
Línea 68      *IF,VD,EQ,1,THEN
Línea 69              MAT,1
Línea 70              *SET,VD1,1.000
Línea 71      *ELSEIF,VD,LE,3.466,THEN
Línea 72              MAT,2
Línea 73              *SET,VD1,3.466
Línea 74      *ELSEIF,VD,LE,12.011,THEN
Línea 75              MAT,3
Línea 76              *SET,VD1,12.011
Línea 77      *ELSEIF,VD,LE,41.628,THEN
Línea 78              MAT,4
Línea 79              *SET,VD1,41.628
Línea 80      *ELSEIF,VD,LE,144.270,THEN
Línea 81              MAT,5
Línea 82              *SET,VD1,144.270
Línea 83      *ELSEIF,VD,LE,499,THEN
Línea 84              MAT,6
Línea 85              *SET,VD1,499.000
Línea 86      *ENDIF
```

El código crea  $\frac{1}{4}$  de la probeta a partir de puntos, líneas y áreas. A continuación malla dichas áreas. Después de esto, restringe el movimiento en el eje  $z$  y pone restricciones de simetría en los ejes  $x$  e  $y$ . Finalmente, define la elongación con un valor de 0.0025 a 12.5 mm del centro de la probeta y especifica la temperatura del ensayo.

```
Línea 87      K,1,0,0,0
Línea 88      K,2,12.5,0,0
Línea 89      K,3,75,0,0
Línea 90      K,4,75,10,0
Línea 91      K,5,55,10,0
Línea 92      K,6,40,5,0
Línea 93      K,7,12.5,5,0
Línea 94      K,8,0,5,0
Línea 95      L,1,2
Línea 96      L,2,3
Línea 97      L,3,4
Línea 98      L,4,5
Línea 99      LARC,5,6,7,20
Línea 100     L,6,7
Línea 101     L,7,8
Línea 102     L,8,1
Línea 103     L,7,2
Línea 104     AL,1,9,7,8
Línea 105     AL,2,3,4,5,6,9
Línea 106     LESIZE,ALL,0.5
Línea 107     AMESH,ALL
Línea 108     DL,1,,SYMM
Línea 109     DL,2,,SYMM
Línea 110     DL,8,,SYMM
Línea 111     DK,ALL,UZ,0
Línea 112     DL,9,1,UX,0.0025*12.5
Línea 113     TUNIF,T+273
Línea 114     FINISH
```

El código realiza la simulación.

```
Línea 115     /SOLU
Línea 116     ANTYPE,STATIC
Línea 117     SOLVE
Línea 118     FINISH
```

## Anexos

El código obtiene la tensión y la elongación en los nodos que interesan.

```
Línea 119      /POST1
Línea 120      *GET,SX1,NODE,159,S,X
Línea 121      *GET,UX1,NODE,2,U,X
Línea 122      FINISH
```

El código calcula el módulo de tracción a partir de la tensión y la elongación obtenidas.

```
Línea 123      ET1=SX1*12.5/UX1
```

De entre las seis velocidades de deformación que tiene información, el código elige en este caso aquella más cercana superior a la escogida por el usuario, a no ser que el usuario haya escogido una velocidad de deformación que coincida con una de estas seis. En dicho caso, el código toma directamente la velocidad de deformación escogida por el usuario.

```
Línea 124      /PREP7
Línea 125      *IF,VD,EQ,499,THEN
Línea 126              MAT,6
Línea 127              *SET,VD2,499.000
Línea 128      *ELSEIF,VD,GE,144.270,THEN
Línea 129              MAT,5
Línea 130              *SET,VD2,144.270
Línea 131      *ELSEIF,VD,GE,41.628,THEN
Línea 132              MAT,4
Línea 133              *SET,VD2,41.628
Línea 134      *ELSEIF,VD,GE,12.011,THEN
Línea 135              MAT,3
Línea 136              *SET,VD2,12.011
Línea 137      *ELSEIF,VD,GE,3.466,THEN
Línea 138              MAT,2
Línea 139              *SET,VD2,3.466
Línea 140      *ELSEIF,VD,GE,1,THEN
Línea 141              MAT,1
Línea 142              *SET,VD2,1.000
Línea 143      *ENDIF
```

Si las dos velocidades de deformación seleccionadas por el simulador coinciden, el módulo de tracción final es el obtenido en la línea 123.

```
Línea 144      *IF,VD1,EQ,VD2,THEN
Línea 145              ET=ET1
```

Si las dos velocidades de deformación seleccionadas por el simulador son diferentes, se debe realizar una segunda simulación con la segunda velocidad de deformación para obtener un segundo módulo de tracción. Para lograrlo, el código borra el mallado anterior y vuelve a mallar todas las áreas para el nuevo material. A continuación restringe el movimiento en el eje  $z$  y pone restricciones de simetría en los ejes  $x$  e  $y$ . Finalmente, define la elongación con un valor de 0.0025 a 12.5 mm del centro de la probeta.

```
Línea 146      *ELSE
Línea 147              ACLEAR,ALL
Línea 148              LESIZE,ALL,0.5
Línea 149              AMESH,ALL
Línea 150              DL,1,,SYMM
Línea 151              DL,2,,SYMM
Línea 152              DL,8,,SYMM
Línea 153              DK,ALL,UZ,0
Línea 154              DL,9,1,UX,0.0025*12.5
Línea 155              FINISH
```

## Anexos

---

El código realiza la segunda simulación utilizando la segunda velocidad de deformación.

```
Línea 156          /SOLU
Línea 157          ANTYPE,STATIC
Línea 158          SOLVE
Línea 159          FINISH
```

El código obtiene la tensión y la elongación en los nodos que interesan.

```
Línea 160          /POST1
Línea 161          *GET,SX2,NODE,159,S,X
Línea 162          *GET,UX2,NODE,2,U,X
Línea 163          FINISH
```

El código calcula el segundo módulo de tracción a partir de la tensión y la deformación obtenidas e interpola para hallar el módulo de tracción a la velocidad de deformación especificada por el usuario.

```
Línea 164          ET2= SX2*12.5/UX2
Línea 165          ET=ET1+(ET1-ET2)*(VD-VD1)/(VD1-VD2)
```

El código crea un séptimo material con el módulo de tracción calculado para realizar una nueva simulación.

```
Línea 166          /PREP7
Línea 167          MPDATA,EX,7,1,ET
Línea 168          MPDATA,NUXY,7,1,0.35
Línea 169          MAT,7
```

Una vez seleccionado el material, el código borra el mallado anterior y vuelve a mallar todas las áreas para el nuevo material. A continuación restringe el movimiento en el eje z y pone restricciones de simetría en los ejes x e y. Finalmente, define la elongación con un valor de 0.0025 a 12.5 mm del centro de la probeta.

```
Línea 170          ACLEAR,ALL
Línea 171          LESIZE,ALL,0.5
Línea 172          AMESH,ALL
Línea 173          DL,1,,SYMM
Línea 174          DL,2,,SYMM
Línea 175          DL,8,,SYMM
Línea 176          DK,ALL,UZ,0
Línea 177          DL,9,1,UX,0.0025*12.5
Línea 178          FINISH
```

El código realiza la nueva simulación.

```
Línea 179          /SOLU
Línea 180          ANTYPE,STATIC
Línea 181          SOLVE
Línea 182          FINISH
```

El código obtiene la tensión y la elongación para el material 7.

```
Línea 183          /POST1
Línea 184          *GET,SX,NODE,159,S,X
Línea 185          *GET,UX,NODE,2,U,X
Línea 186          FINISH
Línea 187          *ENDIF
```

El código pide los valores de elongación y tensión, y además calcula la extensión y el módulo de tracción. Finalmente crea una tabla con los valores mencionados.

```
Línea 188          /POST26
Línea 189          NSOL,2,2,U,X
Línea 190          ANSOL,3,159,S,X
Línea 191          PROD,4,2,,,Extension,,,2
```

## Anexos

```
Línea 192          QUOT,5,3,2,,ET,,,12.5
Línea 193          PRVAR,2,3,4,5
Línea 194          FINISH
```

El código expande la probeta para verla completa. A continuación borra la fecha y el logo, pero mantiene el nombre del archivo. Sin embargo, no muestra restricciones de traslación ni de rotación, ni fuerzas ni momentos nodales ni tampoco fuerzas estructurales. Finalmente el código guarda la simulación en un archivo.

```
Línea 195          /ESHAPE,1
Línea 196          /EXPAND,4,POLAR,HALF,,90
Línea 197          /PLOPTS,DATE,OFF
Línea 198          /PLOPTS,LOGO,ON
Línea 199          /PLOPTS,FILE,ON
Línea 200          /PBC,U,,0
Línea 201          /PBC,ROT,,0
Línea 202          /PBC,NFOR,,0
Línea 203          /PBC,NMOM,,0
Línea 204          /PBC,RFOR,,0
Línea 205          /PBC,RMOM,,0
Línea 206          /PBC,F,,0
Línea 207          SAVE,[ Nombre del archivo de la simulación para el test de tracción],db
Línea 208          *ENDIF
Línea 209          *ENDIF
```

### A.1.2 Simulación de los tests de creep

#### A.1.2.1 Simulación sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para la simulación de los tests de creep sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo en ANSYS® 12.1 Academic Teaching, los parámetros de entrada son el espesor (4 mm, aproximadamente), la aplicación de un cierto valor de fuerza a una cierta línea (10% de la tensión de fluencia, aproximadamente, a 12.5 mm del centro de la probeta), el módulo de tracción, los coeficientes de módulo relativo y los coeficientes de tiempo a la temperatura de referencia  $T_{ref}$  (30°C) y la función de desplazamiento, dependiente de la temperatura, obtenido mediante FTS. El coeficiente de Poisson es siempre de 0.35.

En estos tipos de tests, la velocidad de deformación es de 1 mm/min. El usuario puede elegir la temperatura ( $T$ ) y el tiempo de creep ( $TC$ ) dentro del rango de trabajo (de 23°C a 100°C para la temperatura y de 0 a 60000 segundos para el tiempo de creep). El análisis es transitorio. A continuación se presenta el código general para estos tipos de tests.

El código empieza una nueva simulación pidiendo la temperatura de ensayo y el tiempo de creep. Sólo si ambos parámetros se encuentran dentro del rango, la simulación se realiza.

```
Línea 1  FINISH
Línea 2  /CLEAR
Línea 3  *ASK,T, UNA TEMPERATURA DE 23 A 100 GRADOS CELSIUS (SIN UNIDADES)
Línea 4  *IF,T,GE,23,AND,T,LE,100,THEN
Línea 5          *ASK,TC, UN TIEMPO DE CREEP DE 0 A 60000 SEGUNDOS (SIN UNIDADES)
Línea 6          *IF,TC,GT,0,AND,TC,LE,60000,THEN
Línea 7          /FILENAME,[Nombre del archivo de la simulación para el test de creep sin coeficientes alfa]
Línea 8          /TITLE,[ Título de la simulación para el test de creep sin coeficientes alfa]
Línea 9          /PREP7
Línea 10         ET,1,SHELL181
Línea 11         KEYOPT,1,3,2
Línea 12         R,1,[Espesor]
Línea 13         TOFFST,0
```

## Anexos

El código especifica para cada temperatura, el módulo de tracción y el coeficiente de Poisson para el material 1. Estos datos son a 1 mm/min.

```
Línea 14      MPTEMP,1,296,303,308,313,318,323
Línea 15      MPDATA,EX,1,1,[ET2961,000,ET3031,000,ET3081,000,ET3131,000,ET3181,000,ET3231,000]
Línea 16      MPDATA,NUXY,1,1,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35
Línea 17      MPTEMP,7,328,333,338,343,348,353
Línea 18      MPDATA,EX,1,7,[ET3281,000,ET3331,000,ET3381,000,ET3431,000,ET3481,000,ET3531,000]
Línea 19      MPDATA,NUXY,1,7,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35,0.35
Línea 20      MPTEMP,13,358,363,368,373
Línea 21      MPDATA,EX,1,13,[ET3581,000,ET3631,000,ET3681,000,ET3731,000]
Línea 22      MPDATA,NUXY,1,13,0.35,0.35,0.35,0.35
```

El código aplica los coeficientes de Prony para  $T_{ref}$ .

```
Línea 23      TB,PRONY,1,1,6,SHEAR
Línea 24      TBDATA,1,[CMR1,CT1,CMR2,CT2,CMR3,CT3]
Línea 25      TBDATA,7, [CMR4,CT4,CMR5,CT5,CMR6,CT6]
```

El código aplica el factor de desplazamiento para calcular los coeficientes de Prony para  $T^{137}$ . Dependiendo de la temperatura escogida por el usuario, la función de desplazamiento puede ser o la ecuación de Arrhenius o la ecuación WLF.

```
Línea 26      *IF,T,LE,[TCambio Subrango],THEN
Línea 27      TB,SHIFT,1,1,2,TN
Línea 28      TBDATA,1,303,[Ea]/8.314/2.303
Línea 29      *ELSE
Línea 30      TB,SHIFT,1,1,3,WLF
Línea 31      TBDATA,1,303,[C1,C2]
Línea 32      *ENDIF
Línea 33      K,1,0,0,0
Línea 34      K,2,12.5,0,0
Línea 35      K,3,75,0,0
Línea 36      K,4,75,10,0
Línea 37      K,5,55,10,0
Línea 38      K,6,40,5,0
Línea 39      K,7,12.5,5,0
Línea 40      K,8,0,5,0
Línea 41      L,1,2
Línea 42      L,2,3
Línea 43      L,3,4
Línea 44      L,4,5
Línea 45      LARC,5,6,7,20
Línea 46      L,6,7
Línea 47      L,7,8
Línea 48      L,8,1
Línea 49      L,7,2
Línea 50      AL,1,9,7,8
Línea 51      AL,2,3,4,5,6,9
Línea 52      LESIZE,ALL,0.5
Línea 53      AMESH,ALL
Línea 54      DL,1,,SYMM
Línea 55      DL,2,,SYMM
Línea 56      DL,8,,SYMM
Línea 57      DK,ALL,UZ,0
Línea 58      TUNIF,T+273
Línea 59      FINISH
```

El código aplica el método completo para análisis transitorios , sin incluir largas deflexiones y escribiendo deformaciones, reacciones, velocidades, tensiones y elongaciones elásticas a la base de datos. A continuación se aplica la fuerza a 12.5 mm del centro de la probeta, dividiéndola en diferentes nodos. Este análisis se aplica durante el tiempo especificado por el usuario, dividido también en un número de subetapas determinado (incluyendo el máximo y el mínimo número de los mismos). Finalmente se realiza la simulación.

## Anexos

```
Línea 60      /SOLU
Línea 61      ANTYPE,TRANS
Línea 62      TRNOPT,FULL
Línea 63      NLGEOM,OFF
Línea 64      OUTRES,NSOL,ALL
Línea 65      OUTRES,RSOL,ALL
Línea 66      OUTRES,V,ALL
Línea 67      OUTRES,STRS,ALL
Línea 68      OUTRES,EPEL,ALL
Línea 69      TIMINT,ON,STRUC
Línea 70      SOLCONTROL,1
Línea 71      F,2,FX,[Fuerza aplicada]/10.5/2/2
Línea 72      F,27,FX,[Fuerza aplicada]/10.5/2,,36,1
Línea 73      TIME,TC
Línea 74      NSUBST,100,1000,10
Línea 75      SOLVE
Línea 76      FINISH
```

El código pide los valores de elongación y tensión, calcula la extensión y el módulo de creep y crea una tabla con todos los valores mencionados en función del tiempo.

```
Línea 77      /POST26
Línea 78      NSOL,2,2,U,X
Línea 79      ANSOL,3,159,S,X
Línea 80      PROD,4,2,,Extension,,2
Línea 81      QUOT,5,3,2,,EC,,12.5
Línea 82      PRVAR,2,3,4,5
```

El código representa gráficamente el módulo de creep en función del tiempo.

```
Línea 83      /AXLAB,X,Tiempo (s)
Línea 84      /AXLAB,Y,Modulo de creep (MPa)
Línea 85      PLVAR,5
Línea 86      /ESHAPE,1
Línea 87      /EXPAND,4,POLAR,HALF,,90
Línea 88      /PLOPTS,DATE,OFF
Línea 89      /PLOPTS,LOGO,ON
Línea 90      /PLOPTS,FILE,ON
Línea 91      /PBC,U,,0
Línea 92      /PBC,ROT,,0
Línea 93      /PBC,NFOR,,0
Línea 94      /PBC,NMOM,,0
Línea 95      /PBC,RFOR,,0
Línea 96      /PBC,RMOM,,0
Línea 97      /PBC,F,,0
Línea 98      SAVE,[ Nombre del archivo de la simulación para el test de creep sin coeficientes alfa],db
Línea 99      *ENDIF
Línea 100 *ENDIF
```

### A.1.2.2 Simulación con coeficientes alfa en el dominio del tiempo

Para la simulación de los tests de creep en el dominio del tiempo en ANSYS® 12.1 Academic Teaching, la única diferencia con respecto a la simulación previa es que el usuario debe introducir los coeficientes para cada temperatura manualmente, como se muestra en la Tabla A.1. Esto se debe al hecho de que el simulador no usa este modelo matemático para deducir los coeficientes a cualquier temperatura a partir de  $T_{ref}$ . Sin embargo, una vez se entran los valores de la Tabla A.1, se puede realizar cualquier simulación dentro de los márgenes de trabajo de tiempo de creep y temperatura. En este caso, la función de desplazamiento no es necesaria.

## Anexos

Tabla A.1 - Coeficientes del modelo en el dominio del tiempo para cada temperatura

296	303	308	313	318	323	328	333
$CMR_1^{296}$	$CMR_1^{303}$	$CMR_1^{308}$	$CMR_1^{313}$	$CMR_1^{318}$	$CMR_1^{323}$	$CMR_1^{328}$	$CMR_1^{333}$
$CT_1^{296}$	$CT_1^{303}$	$CT_1^{308}$	$CT_1^{313}$	$CT_1^{318}$	$CT_1^{323}$	$CT_1^{328}$	$CT_1^{333}$
$CMR_2^{296}$	$CMR_2^{303}$	$CMR_2^{308}$	$CMR_2^{313}$	$CMR_2^{318}$	$CMR_2^{323}$	$CMR_2^{328}$	$CMR_2^{333}$
$CT_2^{296}$	$CT_2^{303}$	$CT_2^{308}$	$CT_2^{313}$	$CT_2^{318}$	$CT_2^{323}$	$CT_2^{328}$	$CT_2^{333}$
$CMR_3^{296}$	$CMR_3^{303}$	$CMR_3^{308}$	$CMR_3^{313}$	$CMR_3^{318}$	$CMR_3^{323}$	$CMR_3^{328}$	$CMR_3^{333}$
$CT_3^{296}$	$CT_3^{303}$	$CT_3^{308}$	$CT_3^{313}$	$CT_3^{318}$	$CT_3^{323}$	$CT_3^{328}$	$CT_3^{333}$
$CMR_4^{296}$	$CMR_4^{303}$	$CMR_4^{308}$	$CMR_4^{313}$	$CMR_4^{318}$	$CMR_4^{323}$	$CMR_4^{328}$	$CMR_4^{333}$
$CT_4^{296}$	$CT_4^{303}$	$CT_4^{308}$	$CT_4^{313}$	$CT_4^{318}$	$CT_4^{323}$	$CT_4^{328}$	$CT_4^{333}$
$CMR_5^{296}$	$CMR_5^{303}$	$CMR_5^{308}$	$CMR_5^{313}$	$CMR_5^{318}$	$CMR_5^{323}$	$CMR_5^{328}$	$CMR_5^{333}$
$CT_5^{296}$	$CT_5^{303}$	$CT_5^{308}$	$CT_5^{313}$	$CT_5^{318}$	$CT_5^{323}$	$CT_5^{328}$	$CT_5^{333}$
$CMR_6^{296}$	$CMR_6^{303}$	$CMR_6^{308}$	$CMR_6^{313}$	$CMR_6^{318}$	$CMR_6^{323}$	$CMR_6^{328}$	$CMR_6^{333}$
$CT_6^{296}$	$CT_6^{303}$	$CT_6^{308}$	$CT_6^{313}$	$CT_6^{318}$	$CT_6^{323}$	$CT_6^{328}$	$CT_6^{333}$

Continuación

338	343	348	353	358	363	368	373
$CMR_1^{338}$	$CMR_1^{343}$	$CMR_1^{348}$	$CMR_1^{353}$	$CMR_1^{358}$	$CMR_1^{363}$	$CMR_1^{368}$	$CMR_1^{373}$
$CT_1^{338}$	$CT_1^{343}$	$CT_1^{348}$	$CT_1^{353}$	$CT_1^{358}$	$CT_1^{363}$	$CT_1^{368}$	$CT_1^{373}$
$CMR_2^{338}$	$CMR_2^{343}$	$CMR_2^{348}$	$CMR_2^{353}$	$CMR_2^{358}$	$CMR_2^{363}$	$CMR_2^{368}$	$CMR_2^{373}$
$CT_2^{338}$	$CT_2^{343}$	$CT_2^{348}$	$CT_2^{353}$	$CT_2^{358}$	$CT_2^{363}$	$CT_2^{368}$	$CT_2^{373}$
$CMR_3^{338}$	$CMR_3^{343}$	$CMR_3^{348}$	$CMR_3^{353}$	$CMR_3^{358}$	$CMR_3^{363}$	$CMR_3^{368}$	$CMR_3^{373}$
$CT_3^{338}$	$CT_3^{343}$	$CT_3^{348}$	$CT_3^{353}$	$CT_3^{358}$	$CT_3^{363}$	$CT_3^{368}$	$CT_3^{373}$
$CMR_4^{338}$	$CMR_4^{343}$	$CMR_4^{348}$	$CMR_4^{353}$	$CMR_4^{358}$	$CMR_4^{363}$	$CMR_4^{368}$	$CMR_4^{373}$
$CT_4^{338}$	$CT_4^{343}$	$CT_4^{348}$	$CT_4^{353}$	$CT_4^{358}$	$CT_4^{363}$	$CT_4^{368}$	$CT_4^{373}$
$CMR_5^{338}$	$CMR_5^{343}$	$CMR_5^{348}$	$CMR_5^{353}$	$CMR_5^{358}$	$CMR_5^{363}$	$CMR_5^{368}$	$CMR_5^{373}$
$CT_5^{338}$	$CT_5^{343}$	$CT_5^{348}$	$CT_5^{353}$	$CT_5^{358}$	$CT_5^{363}$	$CT_5^{368}$	$CT_5^{373}$
$CMR_6^{338}$	$CMR_6^{343}$	$CMR_6^{348}$	$CMR_6^{353}$	$CMR_6^{358}$	$CMR_6^{363}$	$CMR_6^{368}$	$CMR_6^{373}$
$CT_6^{338}$	$CT_6^{343}$	$CT_6^{348}$	$CT_6^{353}$	$CT_6^{358}$	$CT_6^{363}$	$CT_6^{368}$	$CT_6^{373}$

## Anexos

---

Las líneas que cambian con respecto al modelo sin coeficientes alfa en el dominio del tiempo son:

Línea 2	Esta línea no existe
Línea 7	/FILENAME,[ Nombre del archivo de la simulación para el test de creep con coeficientes alfa]
Línea 8	/TITLE,[ Título de la simulación para el test de creep sin coeficientes alfa]
De la línea 23 a la 32	Estas líneas no existen
Línea 98	SAVE,[ Nombre del archivo de la simulación para el test de creep con coeficientes alfa],db

### **A.2 Análisis termogravimétricos**

Los análisis termogravimétricos se realizan para las muestras de PA66-GF50 y PA6-MD40. Dichos ensayos se muestran en la Figura A.1 y en la Figura A.2, respectivamente, para estimar los porcentajes de los componentes de los materiales.

Los dos materiales presentan diferencias. Las temperaturas de descomposición son distintas y, además, PA66-GF50 presenta un pico más ancho que PA6-MD40.

Por una parte, se estima que PA66-GF50 tiene aproximadamente el 1% de negro de carbono. Esto explicaría el color negro de la muestra. Además también presenta aproximadamente el 54% de carga mineral inorgánica, que no es carbonato.

Por otra parte, se estima que PA6-MD40 tiene aproximadamente el 40% de carga mineral inorgánica, que no es ni carbonato ni negro de carbono.

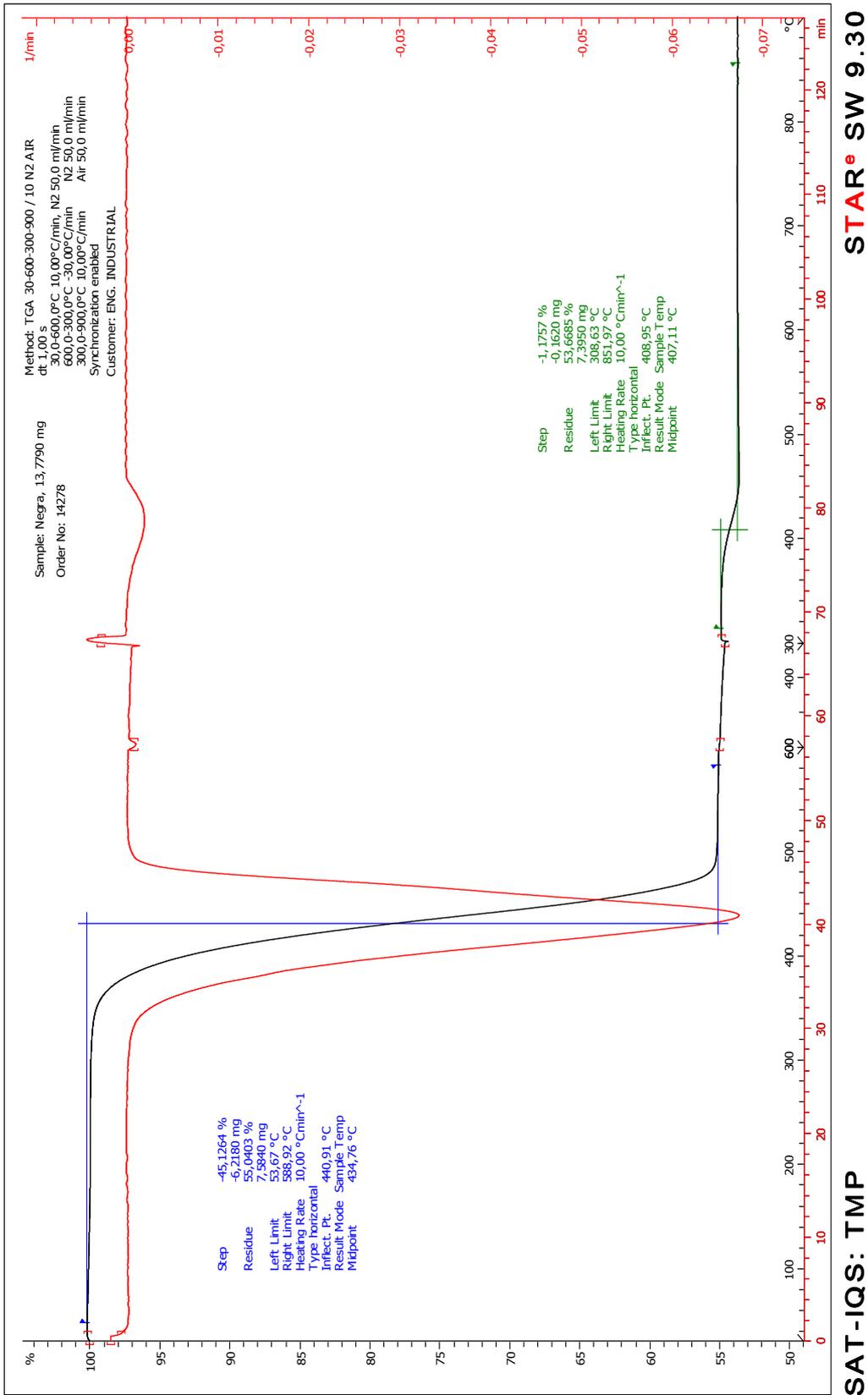


Figura A.1 - TGA de PA66-GF50 (cortesía de PQAT-IQS)

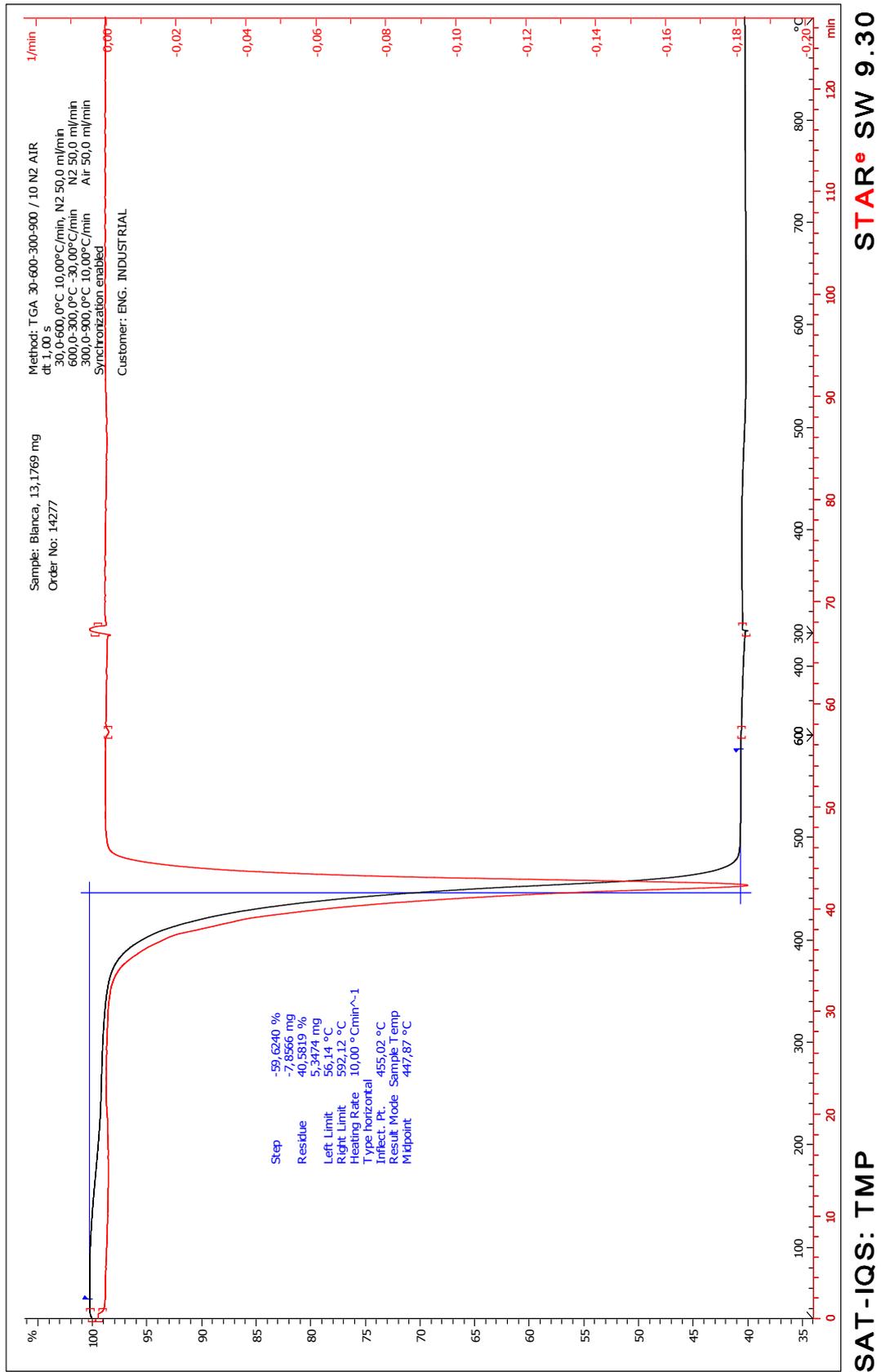


Figura A.2 - TGA de PA6-MD40 (cortesía de PQAT-IQS)



### A.3 Caracterización de modelos matemáticos viscoelásticos básicos

En este anexo se estudian 4 combinaciones distintas de muelles y émbolos.

Las 4 configuraciones son:

- 1) Sólido elástico (Figura A.3)
- 2) Fluido viscoso (Figura A.8)
- 3) Modelo de Kelvin-Voigt (Figura A.13)
- 4) Modelo de Maxwell (Figura A.21)

Para cada caso, los parámetros calculados son:

- 1) Resistencia mecánica (Ecuación A.1 para el sólido elástico, Ecuación A.10 para el fluido viscoso, Ecuación A.19 para el modelo de Kelvin-Voigt y Ecuación A.28 para el modelo de Maxwell)
- 2) Ecuación diferencial (Ecuación A.2 para el sólido elástico, Ecuación A.11 para el fluido viscoso, Ecuación A.20 para el modelo de Kelvin-Voigt y Ecuación A.29 para el modelo de Maxwell)
- 3) En el dominio del tiempo
  - a) Módulo de relajación (Ecuación A.3 para el sólido elástico, Ecuación A.12 para el fluido viscoso, Ecuación A.21 para el modelo de Kelvin-Voigt y Ecuación A.30 para el modelo de Maxwell)
  - b) Capacitancia de creep (Ecuación A.4 para el sólido elástico, Ecuación A.13 para el fluido viscoso, Ecuación A.22 para el modelo de Kelvin-Voigt y Ecuación A.31 para el modelo de Maxwell)
- 4) En el dominio de la frecuencia
  - a) Módulo de almacenamiento (Ecuación A.5 para el sólido elástico, Ecuación A.14 para el fluido viscoso, Ecuación A.23 para el modelo de Kelvin-Voigt y Ecuación A.32 para el modelo de Maxwell)
  - b) Módulo de pérdida (Ecuación A.6 para el sólido elástico, Ecuación A.15 para el fluido viscoso, Ecuación A.24 para el modelo de Kelvin-Voigt y Ecuación A.33 para el modelo de Maxwell)
  - c) Capacitancia de almacenamiento (Ecuación A.7 para el sólido elástico, Ecuación A.16 para el fluido viscoso, Ecuación A.25 para el modelo de Kelvin-Voigt y Ecuación A.34 para el modelo de Maxwell)
  - d) Capacitancia de pérdida (Ecuación A.8 para el sólido elástico, Ecuación A.17 para el fluido viscoso, Ecuación A.26 para el modelo de Kelvin-Voigt y Ecuación A.35 para el modelo de Maxwell)
  - e) Tangente del ángulo de fase (Ecuación A.9 para el sólido elástico, Ecuación A.18 para el fluido viscoso, Ecuación A.27 para el modelo de Kelvin-Voigt y Ecuación A.36 para el modelo de Maxwell)

Finalmente se muestran las siguientes representaciones gráficas (siempre que la propiedad a ser representada no sea un valor igual a cero o a infinito en todo el gráfico):

- 1) Representación gráfica del módulo de relajación en función del tiempo (Figura A.4 para el sólido elástico, Figura A.9 para el fluido viscoso, Figura A.14 para el modelo de Kelvin-Voigt y Figura A.22 para el modelo de Maxwell)

- 2) Representación gráfica de la capacitancia de creep en función del tiempo (Figura A.5 para el sólido elástico, Figura A.10 para el fluido viscoso, Figura A.15 para el modelo de Kelvin-Voigt y Figura A.23 para el modelo de Maxwell)
- 3) Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia (Figura A.6 para el sólido elástico, Figura A.16 para el modelo de Kelvin-Voigt y Figura A.24 para el modelo de Maxwell)
- 4) Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia (Figura A.11 para el fluido viscoso, Figura A.17 para el modelo de Kelvin-Voigt y Figura A.25 para el modelo de Maxwell)
- 5) Representación gráfica de la capacitancia de almacenamiento en función de la frecuencia (Figura A.7 para el sólido elástico, Figura A.18 para el modelo de Kelvin-Voigt y Figura A.26 para el modelo de Maxwell)
- 6) Representación gráfica de la capacitancia de pérdida en función de la frecuencia (Figura A.12 para el fluido viscoso, Figura A.19 para el modelo de Kelvin-Voigt y Figura A.27 para el modelo de Maxwell)
- 7) Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia (Figura A.20 para el modelo de Kelvin-Voigt y Figura A.28 para el modelo de Maxwell)

### A.3.1 Sólido elástico

Representación del modelo

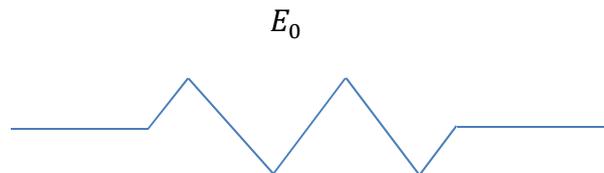


Figura A.3 - Sólido elástico

Donde:

$E_0$ : Parámetro del muelle

Resistencia mecánica

$$Z = \frac{1}{E_0}$$

Ecuación A.1

Ecuación diferencial

$$\sigma = E_0 \varepsilon$$

Ecuación A.2

Módulo de relajación

$$Y = E_0$$

Ecuación A.3

## Anexos

---

Capacitancia de creep

$$J = \frac{1}{E_0}$$

Ecuación A.4

Módulo de almacenamiento

$$G' = E_0$$

Ecuación A.5

Módulo de pérdida

$$G'' = 0$$

Ecuación A.6

Capacitancia de almacenamiento

$$J' = \frac{1}{E_0}$$

Ecuación A.7

Capacitancia de pérdida

$$J'' = 0$$

Ecuación A.8

Tangente del ángulo de fase

$$tg \delta = 0$$

Ecuación A.9

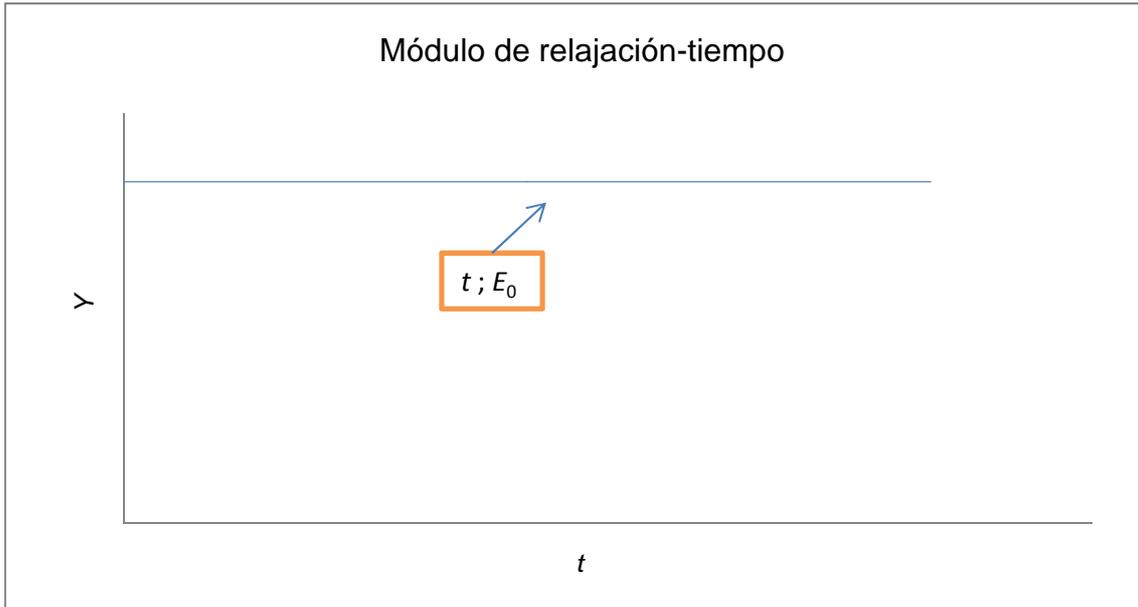


Figura A.4 - Representación gráfica general del módulo de relajación en función del tiempo para el sólido elástico

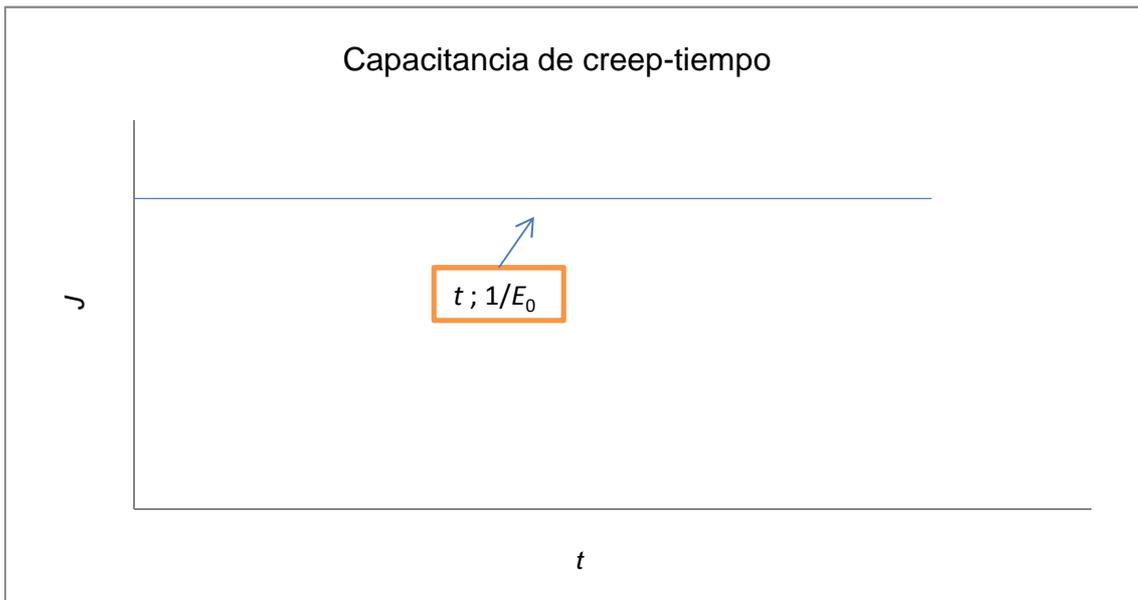


Figura A.5 - Representación gráfica general de la capacitancia de creep en función del tiempo para el sólido elástico

## Anexos

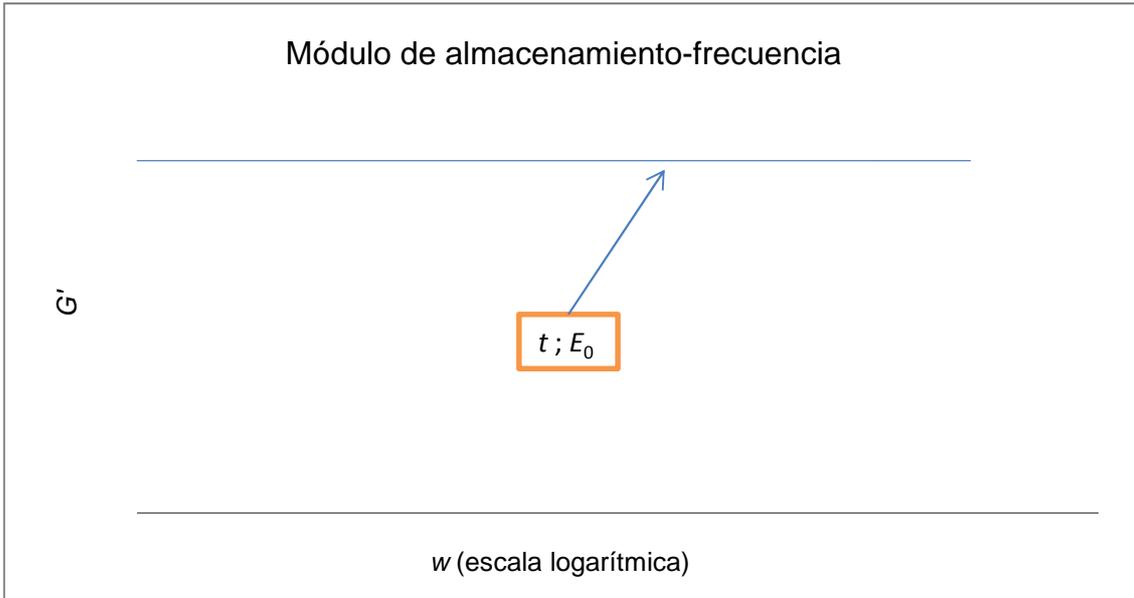


Figura A.6 - Representación gráfica general del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para el sólido elástico

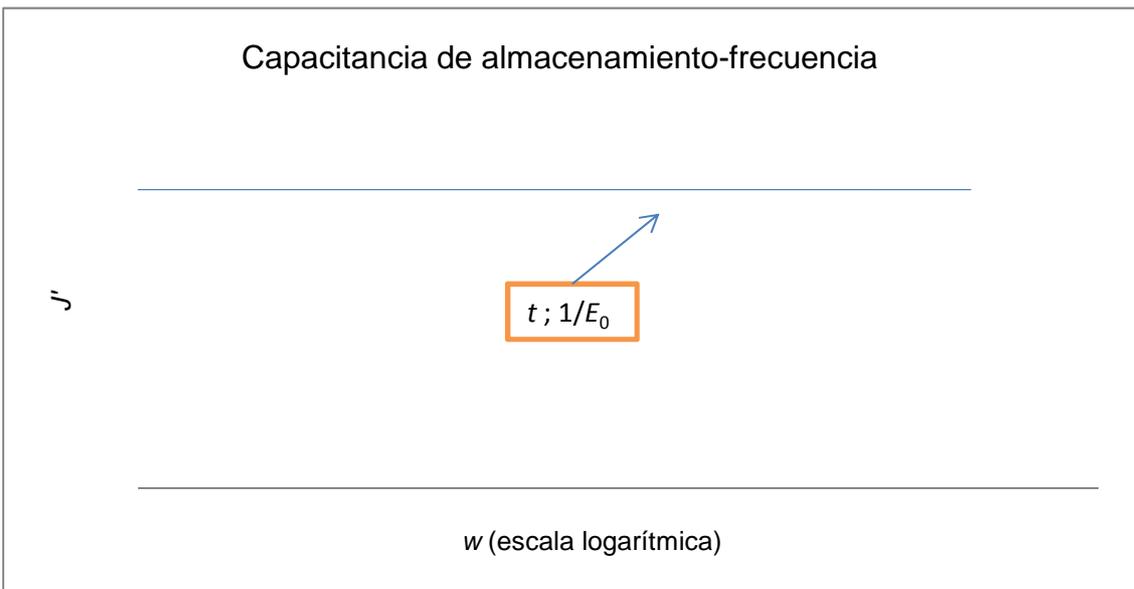


Figura A.7 - Representación gráfica general de la capacitancia de almacenamiento en función de la frecuencia para el sólido elástico

### A.3.2 Fluido viscoso

Representación del modelo

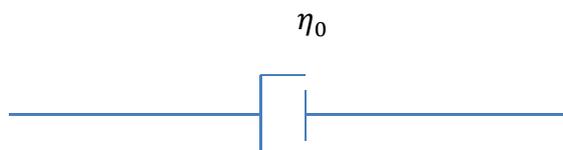


Figura A.8 - Fluido viscoso

## Anexos

---

Donde:

$\eta_0$ : Parámetro del émbolo

Resistencia mecánica

$$Z = \frac{1}{\eta_0 s}$$

Ecuación A.10

Ecuación diferencial

$$\sigma = \eta_0 \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Ecuación A.11

Módulo de relajación

$$Y = \eta_0 \delta(t)^1$$

Ecuación A.12

Donde:

$\delta$ : Función impulso a un tiempo determinado

Capacitancia de creep

$$J = \frac{t}{\eta_0}$$

Ecuación A.13

Módulo de almacenamiento

$$G' = 0$$

Ecuación A.14

Módulo de pérdida

$$G'' = \eta_0 \omega$$

Ecuación A.15

Capacitancia de almacenamiento

$$J' = 0$$

Ecuación A.16

---

<sup>1</sup>  $\delta(t)$  se considera 1 a tiempo inicial y 0 a otros tiempos.

## Anexos

Capacitancia de pérdida

$$J'' = \frac{1}{\eta_0 w}$$

Ecuación A.17

Tangente del ángulo de fase

$$\operatorname{tg} \delta = \infty$$

Ecuación A.18

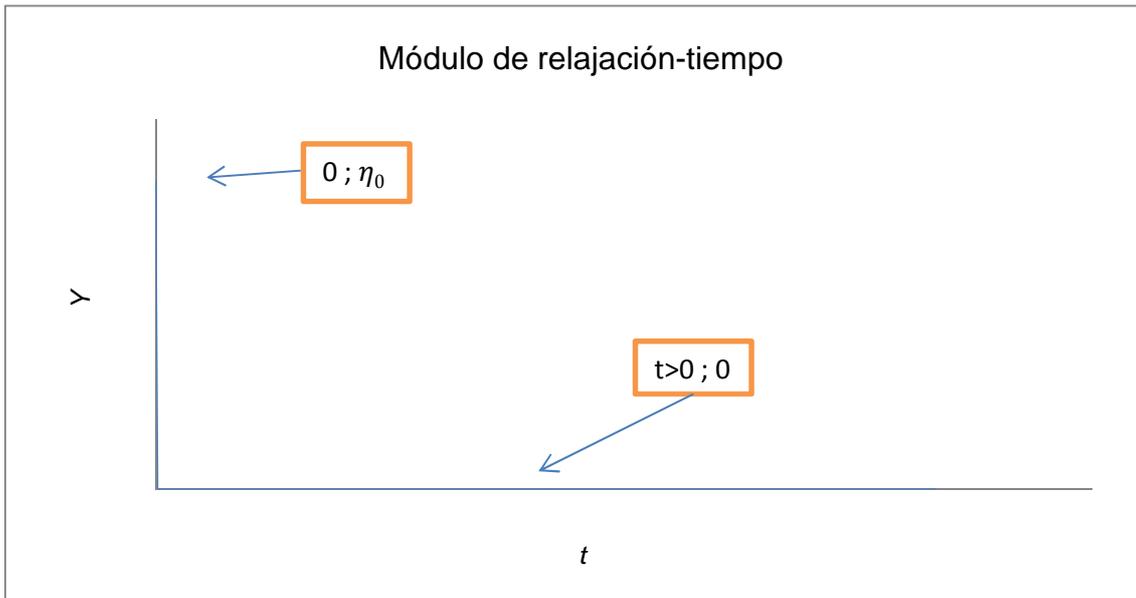


Figura A.9 - Representación gráfica general del módulo de relajación en función del tiempo para el fluido viscoso

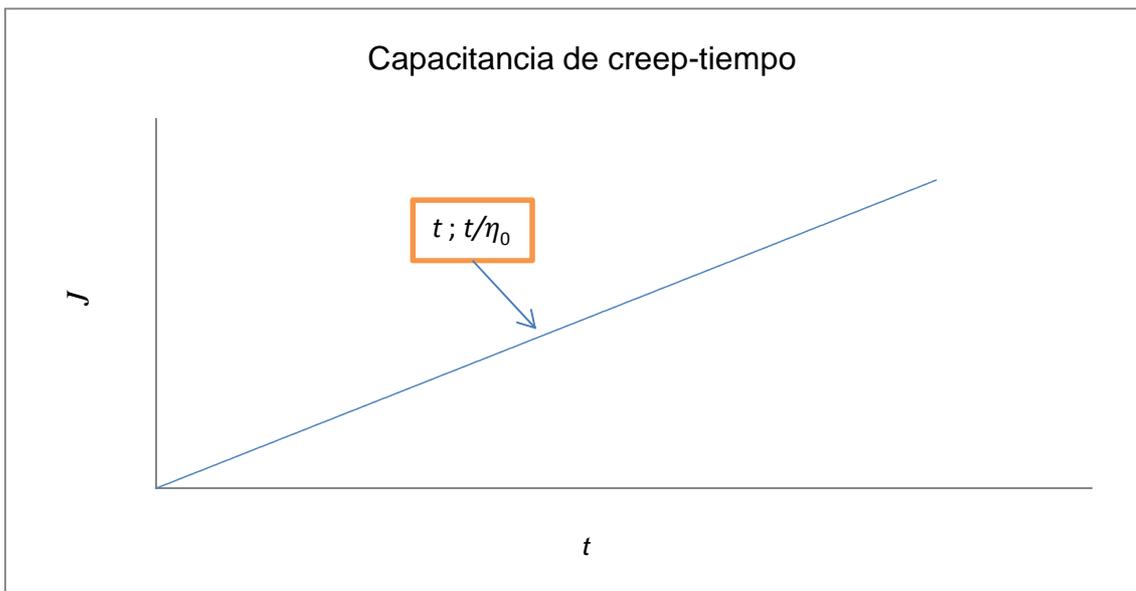


Figura A.10 - Representación gráfica general de la capacitancia de creep en función del tiempo para el fluido viscoso

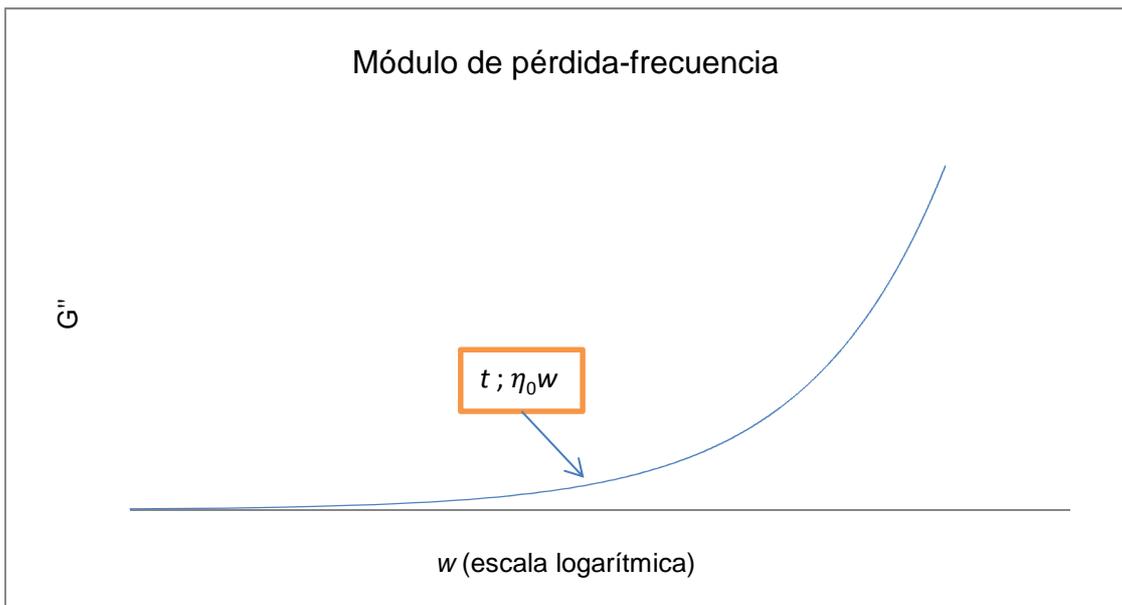


Figura A.11 - Representación gráfica general del módulo de pérdida en función de la frecuencia para el fluido viscoso

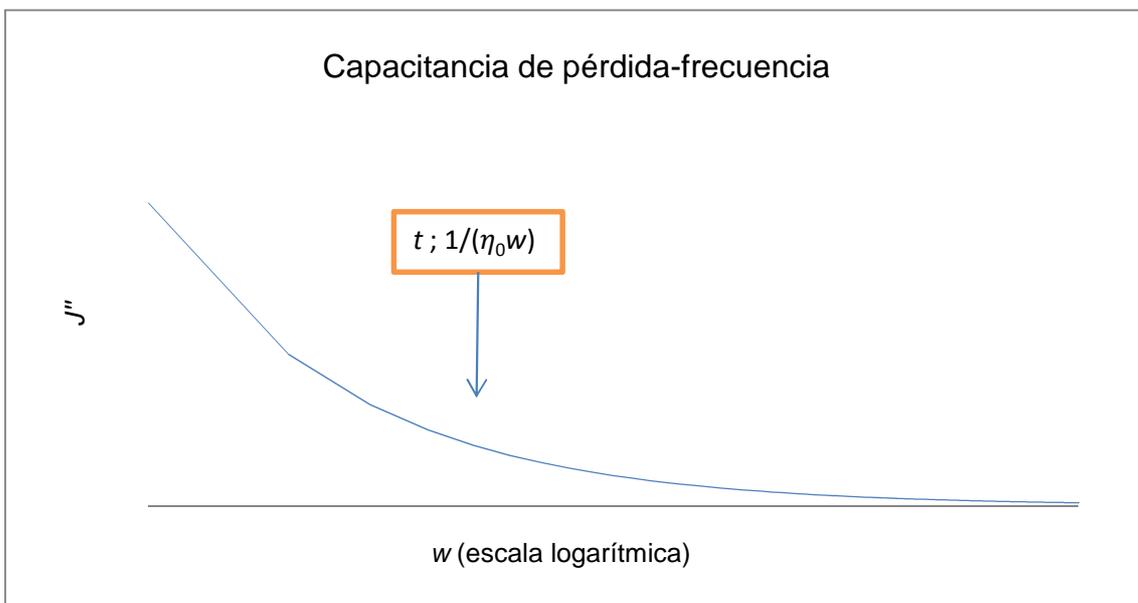


Figura A.12 - Representación gráfica general de la capacitancia de pérdida en función de la frecuencia para el fluido viscoso

## A.3.3 Modelo de Kelvin-Voigt

Representación del modelo

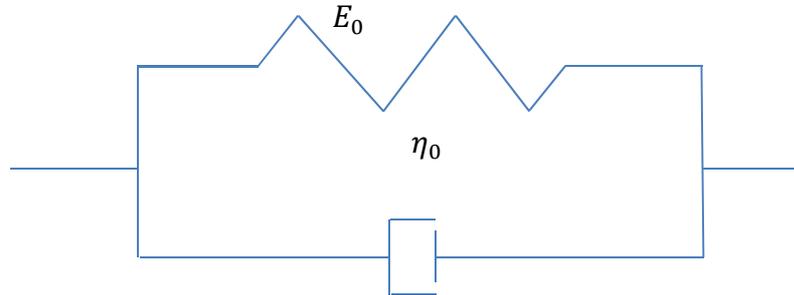


Figura A.13 - Modelo de Kelvin-Voigt

Resistencia mecánica

$$Z = \frac{1}{E_0 + \eta_0 s}$$

Ecuación A.19

Ecuación diferencial

$$\sigma = E_0 \varepsilon + \eta_0 \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Ecuación A.20

Módulo de relajación

$$Y = E_0 + \eta_0 \delta(t)^2$$

Ecuación A.21

Capacitancia de creep

$$J = \frac{1}{E_0} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_0/E_0}} \right)$$

Ecuación A.22

Módulo de almacenamiento

$$G' = E_0$$

Ecuación A.23

Módulo de pérdida

$$G'' = \eta_0 \omega$$

Ecuación A.24

---

<sup>2</sup>  $\delta(t)$  se considera 1 a tiempo inicial y 0 a otros tiempos.

## Anexos

Capacitancia de almacenamiento

$$J' = \frac{E_0}{E_0^2 + \eta_0^2 \omega^2}$$

Ecuación A.25

Capacitancia de pérdida

$$J'' = \frac{\eta_0 \omega}{E_0^2 + \eta_0^2 \omega^2}$$

Ecuación A.26

Tangente del ángulo de fase

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\eta_0 \omega}{E_0}$$

Ecuación A.27

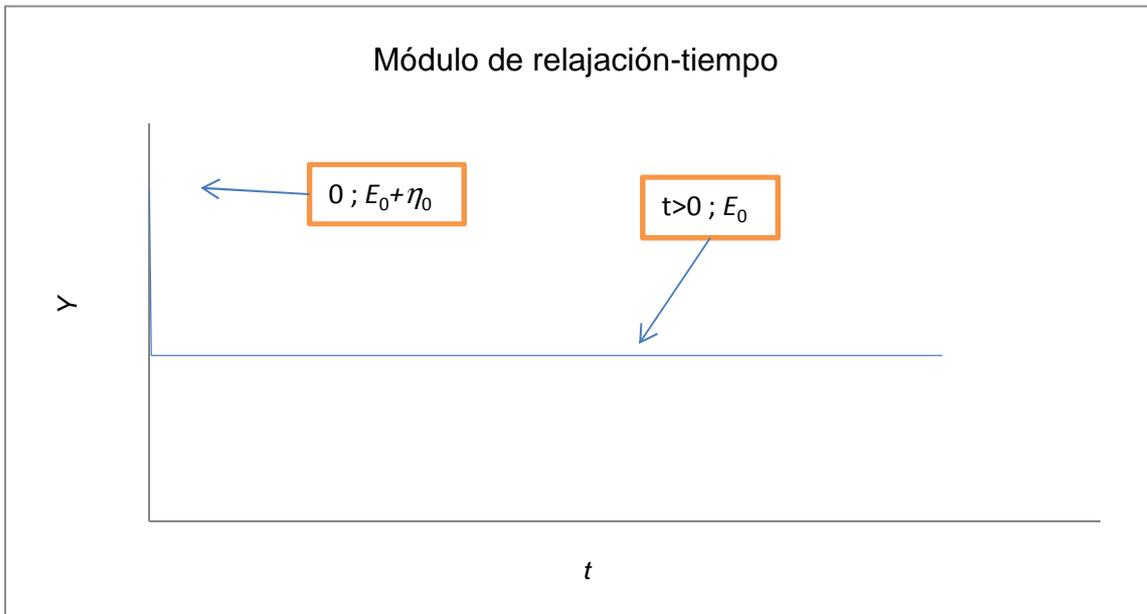


Figura A.14 - Representación gráfica general del módulo de relajación en función del tiempo para el modelo de Kelvin-Voigt

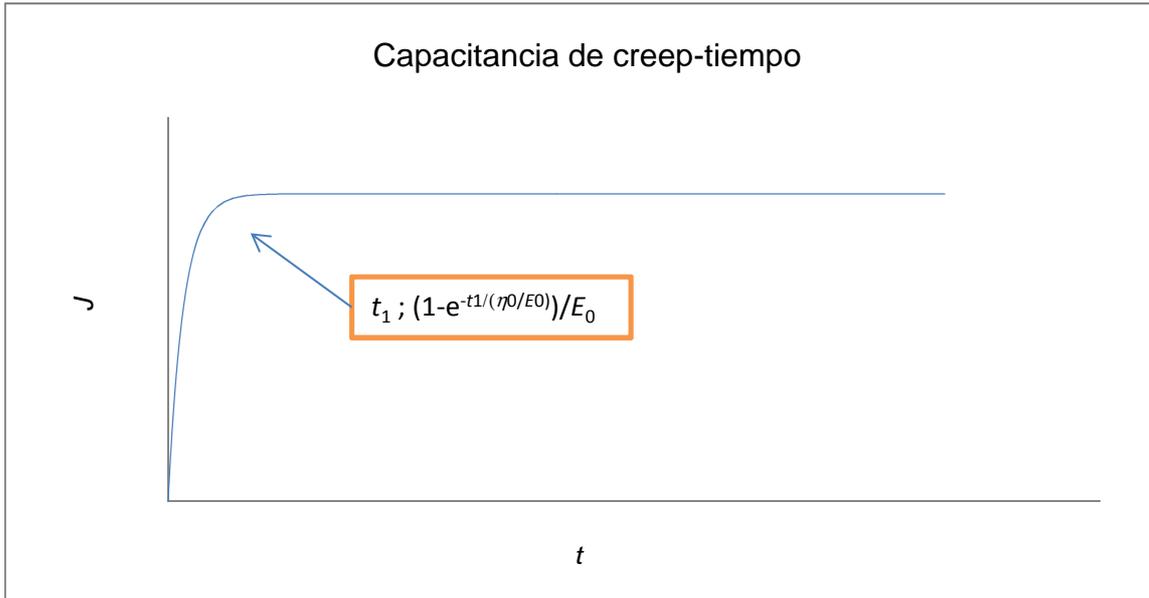


Figura A.15 - Representación gráfica general de la capacitancia de creep en función del tiempo para el modelo de Kelvin-Voigt

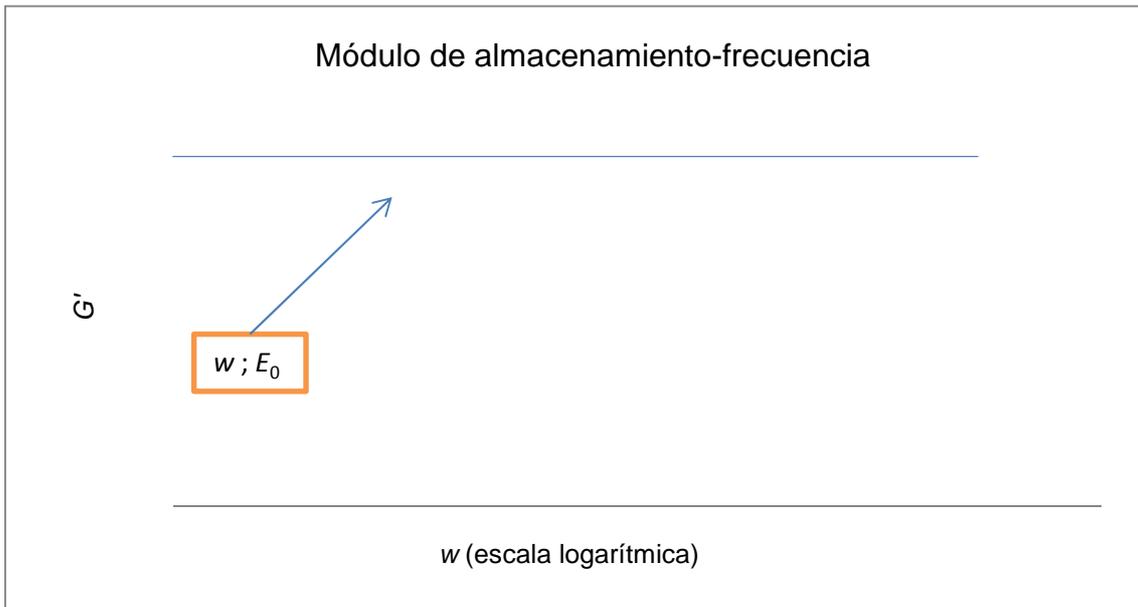


Figura A.16 - Representación gráfica general del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para el modelo de Kelvin-Voigt

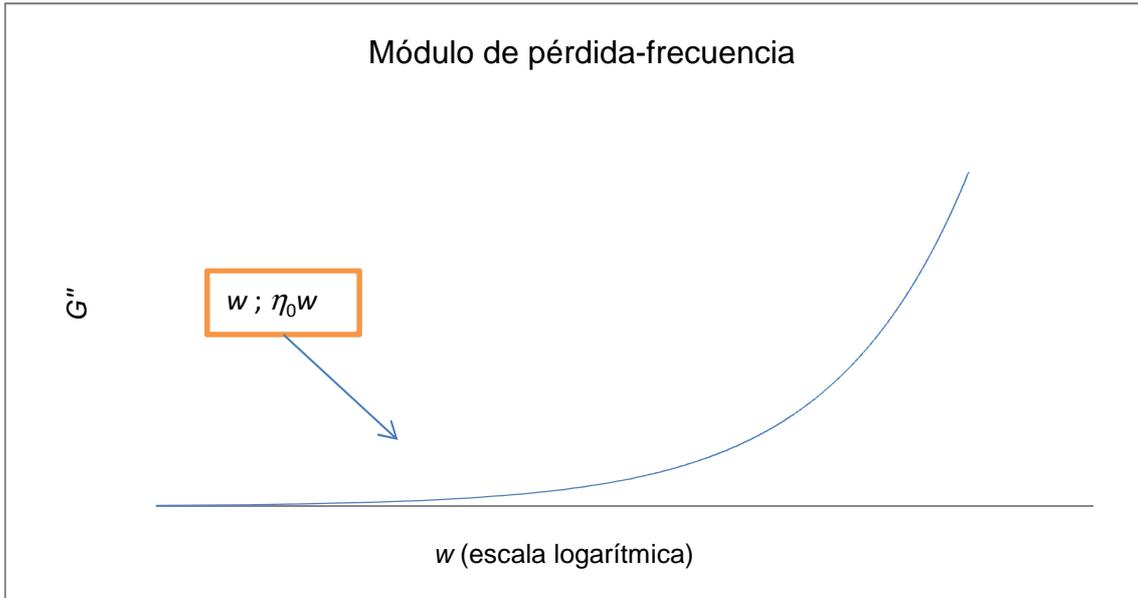


Figura A.17 - Representación gráfica general del módulo de pérdida en función de la frecuencia para el modelo de Kelvin-Voigt

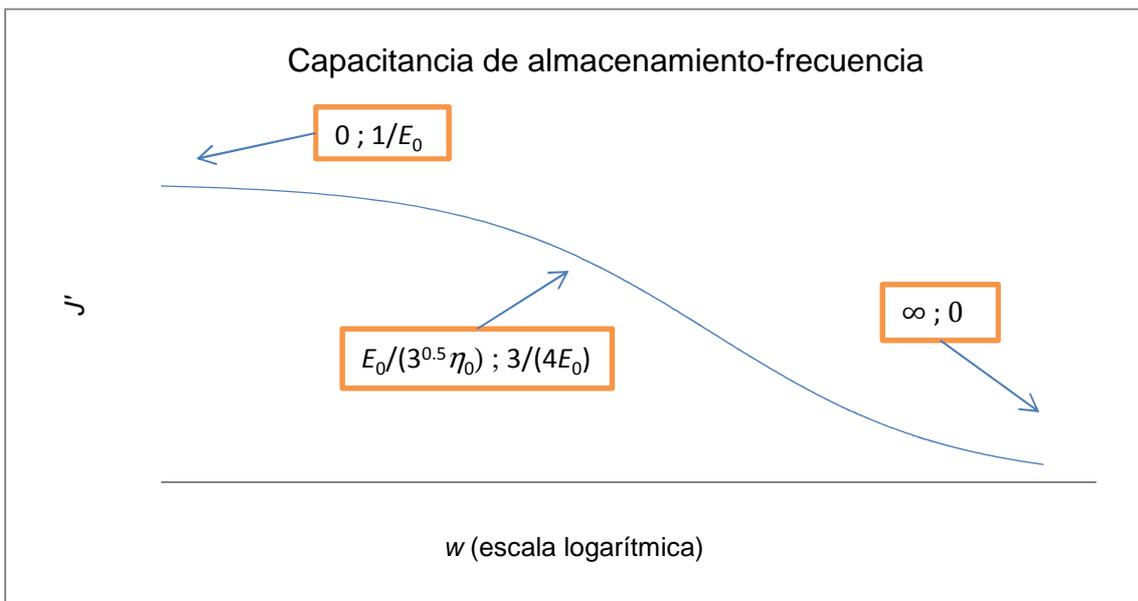


Figura A.18 - Representación gráfica general de la capacitancia de almacenamiento en función de la frecuencia para el modelo de Kelvin-Voigt

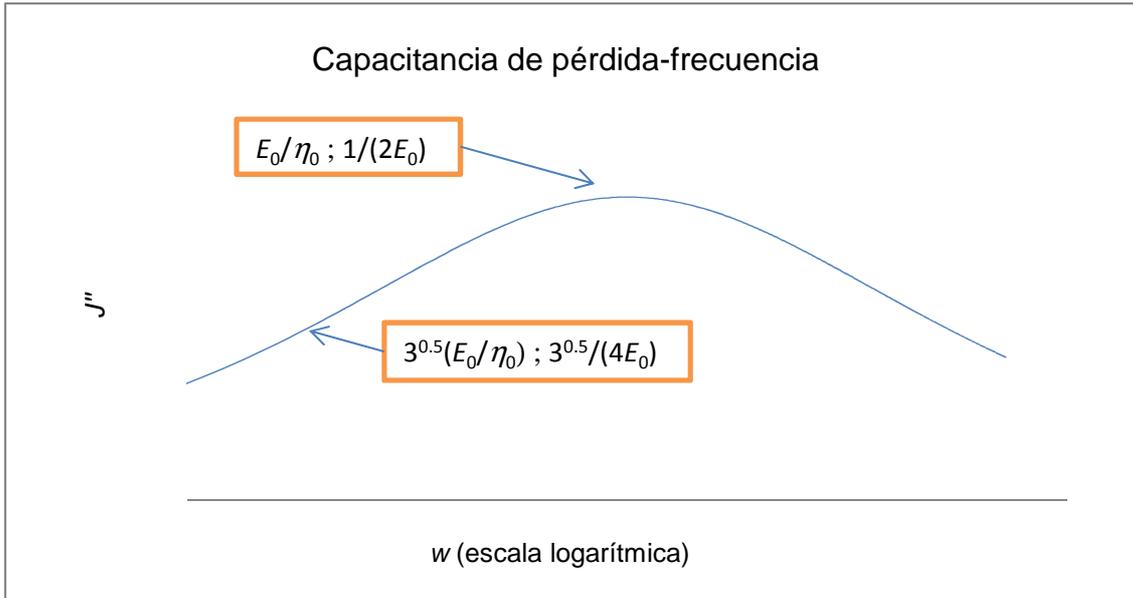


Figura A.19 - Representación gráfica general de la capacitancia de pérdida en función de la frecuencia para el modelo de Kelvin-Voigt

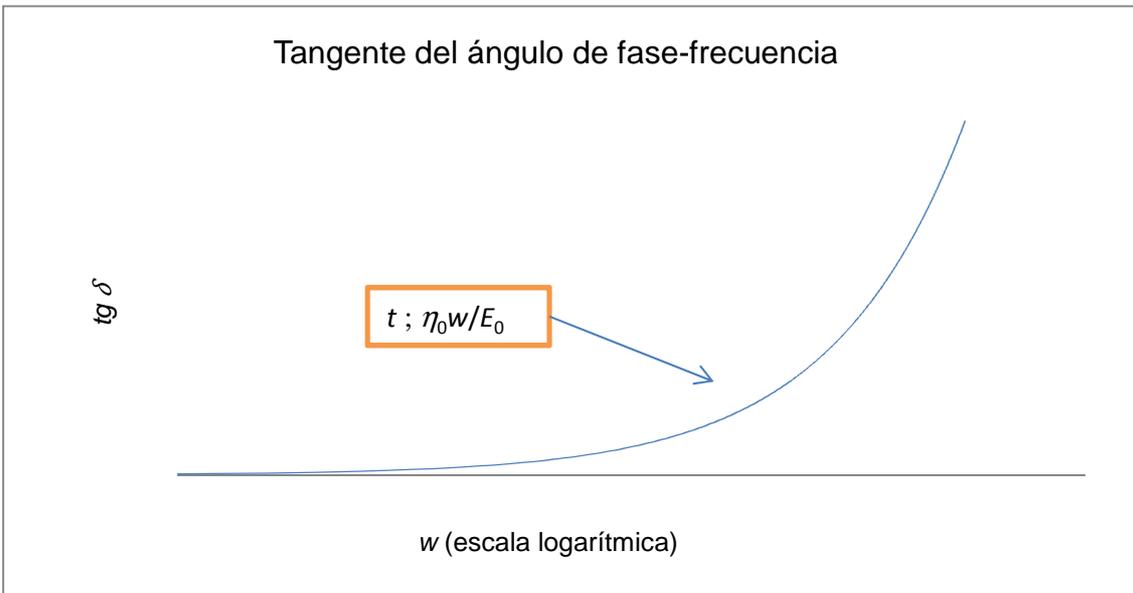


Figura A.20 - Representación gráfica general de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia para el modelo de Kelvin-Voigt

## A.3.4 Modelo de Maxwell

Representación del modelo

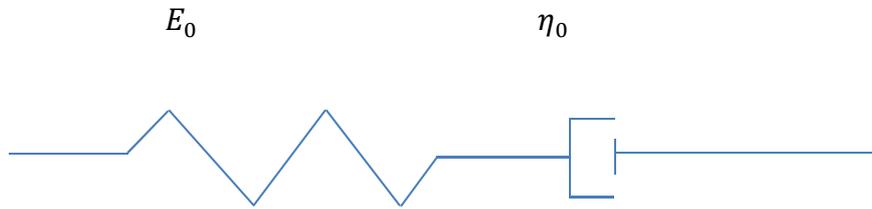


Figura A.21 - Modelo de Maxwell

Resistencia mecánica

$$Z = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{\eta_0 s} = \frac{\frac{\eta_0}{E_0} s + 1}{\eta_0 s}$$

Ecuación A.28

Ecuación diferencial

$$\sigma + \frac{\eta_0}{E_0} \frac{d\sigma}{dt} = \eta_0 \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Ecuación A.29

Módulo de relajación

$$Y = E_0 e^{-\frac{t}{\eta_0/E_0}}$$

Ecuación A.30

Capacitancia de creep

$$J = \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_0}$$

Ecuación A.31

Módulo de almacenamiento

$$G' = \frac{E_0 \eta_0^2 \omega^2}{E_0^2 + \eta_0^2 \omega^2}$$

Ecuación A.32

Módulo de pérdida

$$G'' = \frac{E_0^2 \eta_0 \omega}{E_0^2 + \eta_0^2 \omega^2}$$

Ecuación A.33

## Anexos

Capacitancia de almacenamiento

$$J' = \frac{1}{E_0}$$

Ecuación A.34

Capacitancia de pérdida

$$J'' = \frac{1}{\eta_0 \omega}$$

Ecuación A.35

Tangente del ángulo de fase

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{E_0}{\eta_0 \omega}$$

Ecuación A.36

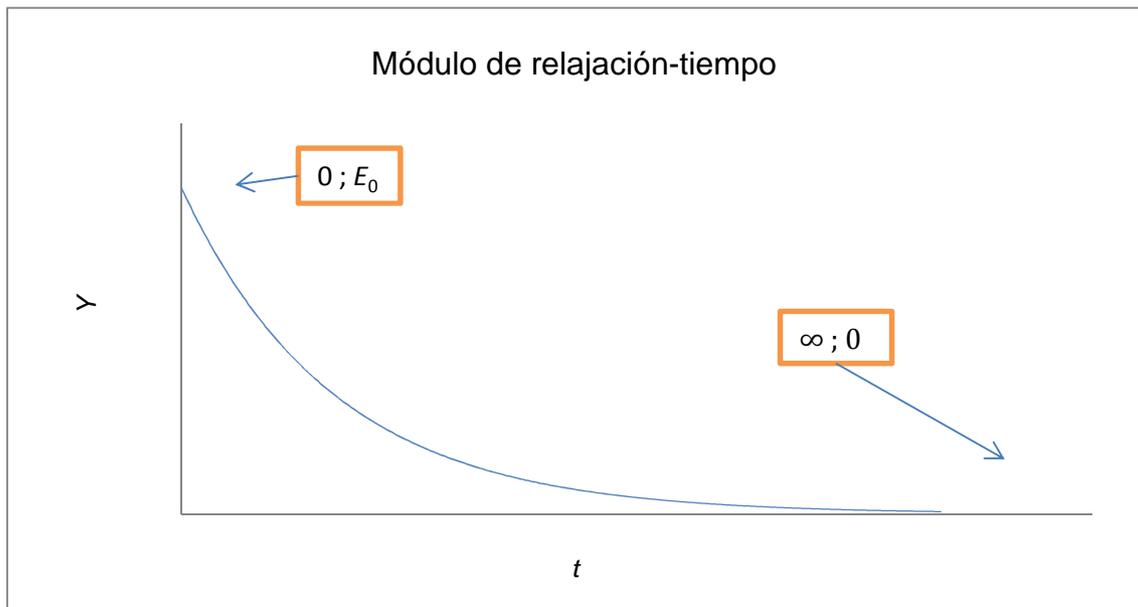


Figura A.22 - Representación gráfica general del módulo de relajación en función del tiempo para el modelo de Maxwell

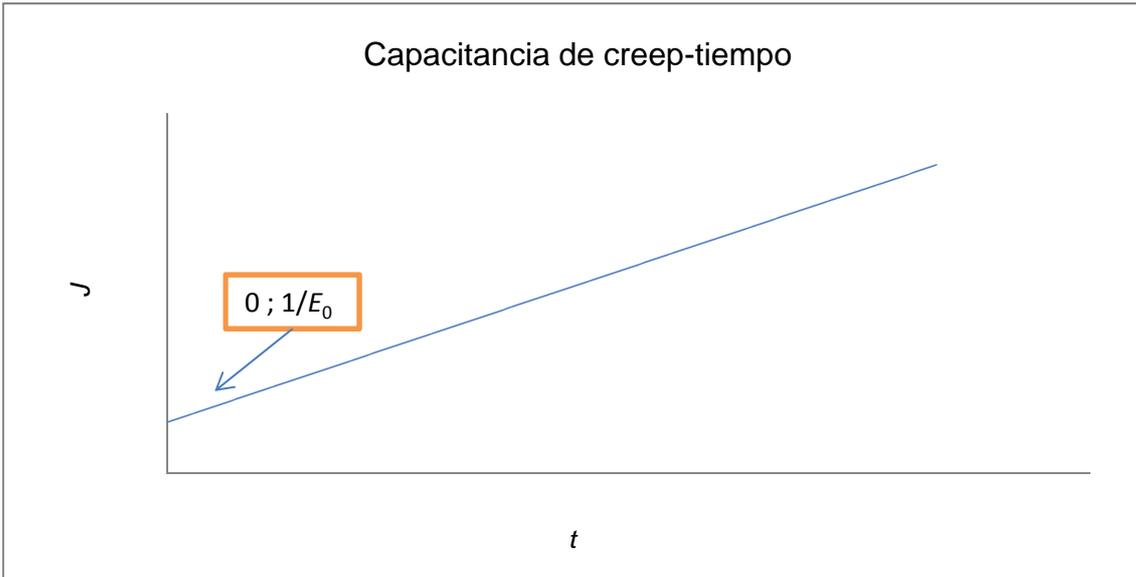


Figura A.23 - Representación gráfica general de la capacitancia de creep en función del tiempo para el modelo de Maxwell

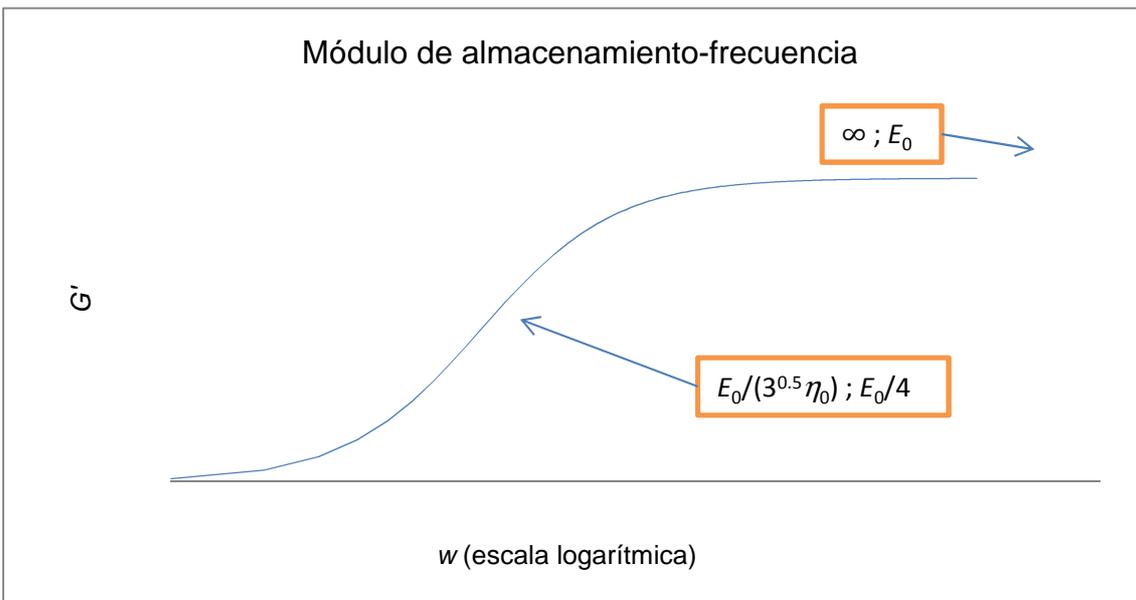


Figura A.24 - Representación gráfica general del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia para el modelo de Maxwell

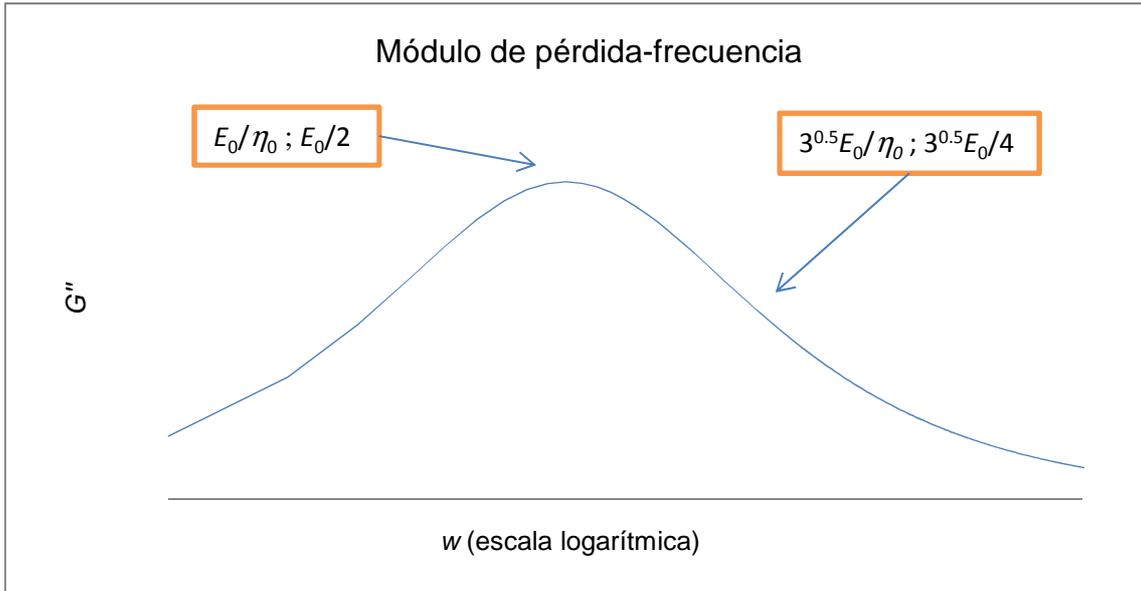


Figura A.25 - Representación gráfica general del módulo de pérdida en función de la frecuencia para el modelo de Maxwell

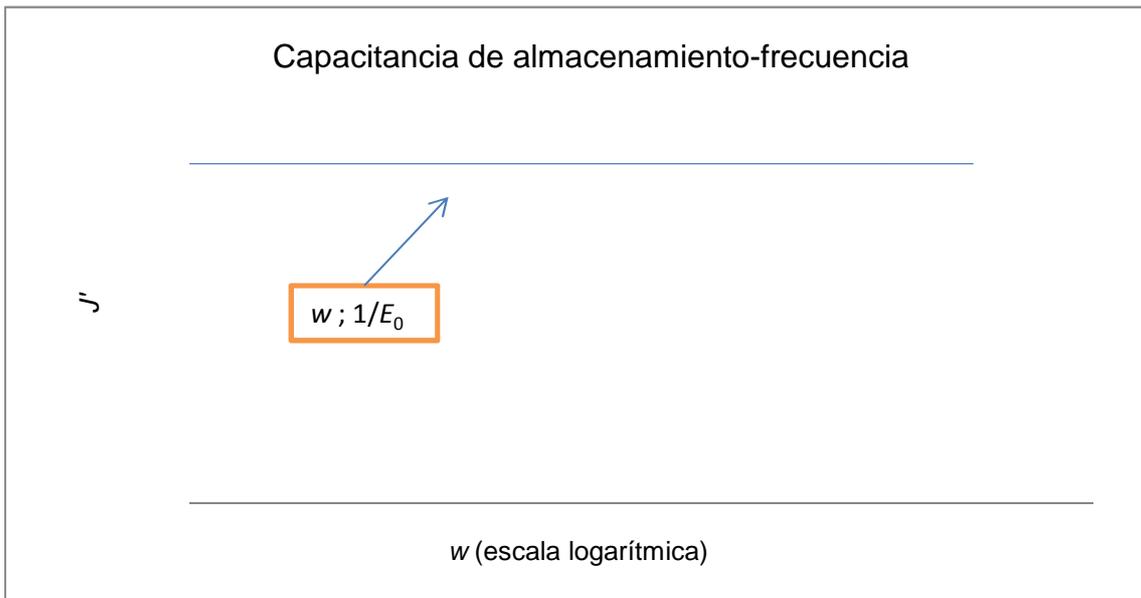


Figura A.26 - Representación gráfica general de la capacitancia de almacenamiento en función de la frecuencia para el modelo de Maxwell

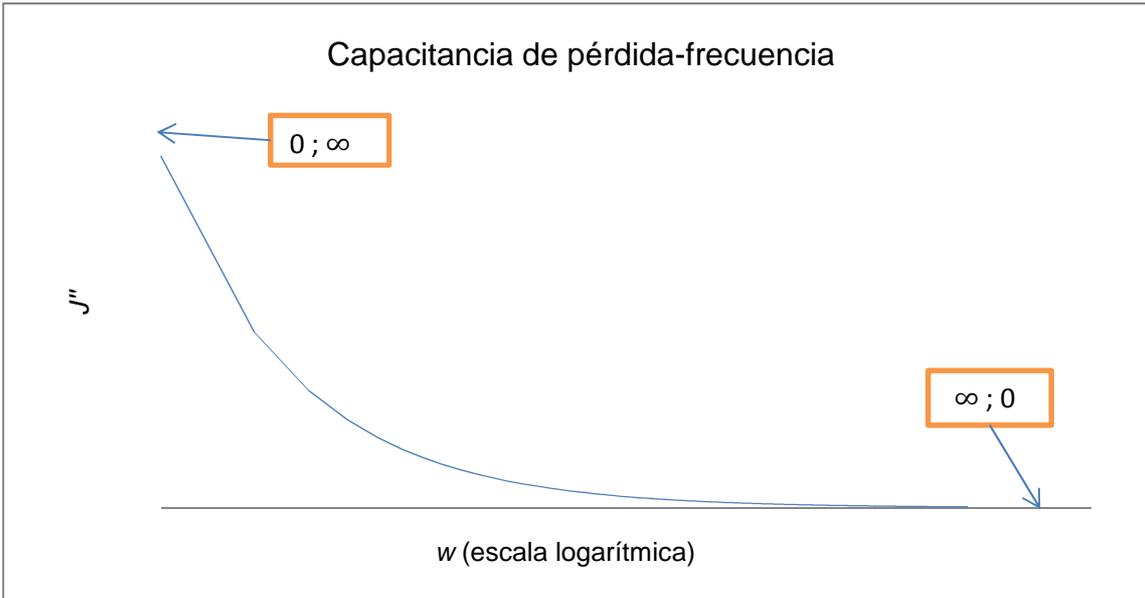


Figura A.27 - Representación gráfica general de la capacitancia de pérdida en función de la frecuencia para el modelo de Maxwell

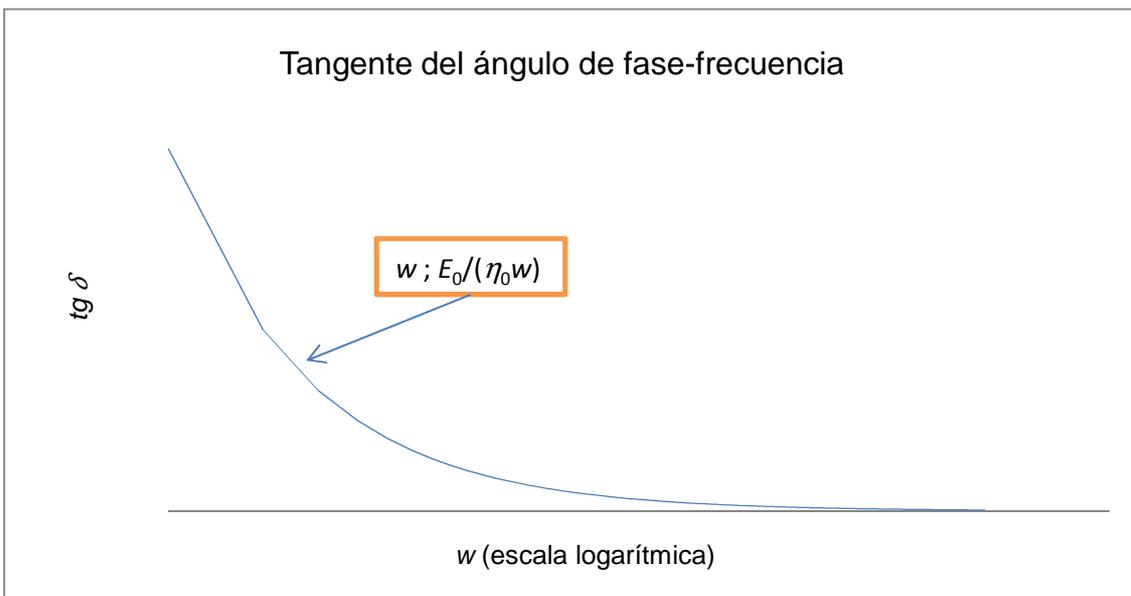


Figura A.28 - Representación gráfica general de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia para el modelo de Maxwell

### A.4 Caracterización de las series de Prony

En este anexo, empleando la misma idea del anexo A.3, se caracterizan los modelos generalizados de Kelvin-Voigt y de Maxwell formados a partir de la combinación de muelles y émbolos.

Para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt, sólo se presentan las capacitancias de creep, de almacenamiento y de pérdida. Sin embargo, para el modelo generalizado de Maxwell, los parámetros presentados son los módulos de relajación, de almacenamiento y de pérdida. A medida que el número de términos  $n$  en los modelos se incrementa, las ecuaciones que se hallan en el dominio de Laplace son más complicadas de transformar a los dominios del tiempo y de la frecuencia. Sólo en dos casos (para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con las capacitancias y para el modelo generalizado de Maxwell con los módulos), dichas transformaciones son sencillas. Esto se debe al hecho de que cada término en el dominio de Laplace puede ser transformado en una exponencial inversa en el dominio del tiempo de forma independiente.

Todas las transformaciones se pueden resolver cuando  $n=1$  o  $n=2$ . Sin embargo, en otros casos, a partir de  $n=3$ , las expresiones en función de  $n$  en el dominio de Laplace contienen un denominador con una ecuación polinómica de orden  $n$ . Incluso con la ayuda de las tablas de transformadas de Laplace, no existen expresiones para pasar de forma sencilla del dominio de Laplace al dominio del tiempo si aparecen ecuaciones polinómicas de grado 3 o superior en el denominador. Por esta razón, todos los coeficientes están resueltos sólo para los casos en los que  $n=1$  y  $n=2$ .

Sin embargo, la complejidad matemática ya es elevada para  $n=2$ . Una forma que se sugiere para obtener los mismos coeficientes hallados para  $n=1$  y  $n=2$ , pero para mayores valores de  $n$ , sería convirtiendo previamente el denominador de orden  $n$  a diferentes denominadores de grado uno o dos. De todas formas, la dificultad matemática que esto conllevaría sería alta.

Así pues, a continuación se muestran las expresiones de las capacitancias para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt y de los módulos para el modelo generalizado de Maxwell, así como todos los módulos y capacitancias hallados para los casos particulares de estos modelos cuando  $n=1$  y  $n=2$ .

Las 6 configuraciones son:

- 1) Modelo generalizado de Kelvin-Voigt (Figura A.29)
- 2) Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$  (Figura A.30)
- 3) Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$  (Figura A.31)
- 4) Modelo generalizado de Maxwell (Figura A.32)
- 5) Modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$  (Figura A.33)
- 6) Modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$  (Figura A.34)

Para cada caso, los parámetros calculados son:

- 1) Resistencia mecánica (Ecuación A.37 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt, Ecuación A.45 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$ , Ecuación A.55 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$ , Ecuación A.68 para el modelo generalizado de Maxwell, Ecuación A.76 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$  y Ecuación A.86 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$ )

## Anexos

---

- 2) Ecuación diferencial (Ecuación A.38 con definición de parámetros en el Grupo de ecuaciones A.39 y en el Grupo de ecuaciones A.40 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt, Ecuación A.46 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$ , Ecuación A.56 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$ , Ecuación A.69 con definición de parámetros en el Grupo de ecuaciones A.70 y en el Grupo de ecuaciones A.71 para el modelo generalizado de Maxwell, Ecuación A.77 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$  y Ecuación A.87 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$ )
- 3) En el dominio del tiempo
  - a) Módulo de relajación (Ecuación A.47 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$ , Ecuación A.57 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$ , Ecuación A.72 para el modelo generalizado de Maxwell, Ecuación A.78 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$  y Ecuación A.88 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$ )
  - b) Capacitancia de creep (Ecuación A.41 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt, Ecuación A.48 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$ , Ecuación A.58 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$ , Ecuación A.79 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$  y Ecuación A.89 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$ )
- 4) En el dominio de la frecuencia
  - a) Módulo de almacenamiento (Ecuación A.49 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$ , Ecuación A.59 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$ , Ecuación A.73 para el modelo generalizado de Maxwell, Ecuación A.80 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$  y Ecuación A.90 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$ )
  - b) Módulo de pérdida (Ecuación A.50 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$ , Ecuación A.60 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$ , Ecuación A.74 para el modelo generalizado de Maxwell, Ecuación A.81 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$  y Ecuación A.91 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$ )
  - c) Capacitancia de almacenamiento (Ecuación A.42 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt, Ecuación A.51 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$ , Ecuación A.61 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$ , Ecuación A.82 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$  y Ecuación A.92 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$ )
  - d) Capacitancia de pérdida (Ecuación A.43 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt, Ecuación A.52 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$ , Ecuación A.62 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$ , Ecuación A.83 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$  y Ecuación A.93 con definición de parámetros en la Ecuación A.94 y en la Ecuación A.95 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$ )
  - e) Tangente del ángulo de fase (Ecuación A.53 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$ , Ecuación A.63 con definición de parámetros en la Ecuación A.64 y en la Ecuación A.65 para el modelo generalizado

de Kelvin-Voigt con  $n=2$ , Ecuación A.84 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$  y Ecuación A.96 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$ )

- 5) Coeficientes del modelo (Grupo de ecuaciones A.44 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt, Grupo de ecuaciones A.54 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$ , Grupo de ecuaciones A.66 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$ , Grupo de ecuaciones A.75 para el modelo generalizado de Maxwell, Grupo de ecuaciones A.85 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$  y Grupo de ecuaciones A.97 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$ )
- 6) Coeficientes de ayuda (Grupo de ecuaciones A.67 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$  y Grupo de ecuaciones A.98 para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$ )

Finalmente se muestran las siguientes representaciones gráficas para  $n=1$  y para  $n=2$ :

- 1) Representación gráfica del módulo de relajación en función del tiempo (Figura A.35 para los modelos con  $n=1$  y Figura A.42 para los modelos con  $n=2$ )
- 2) Representación gráfica de la capacitancia de creep en función del tiempo (Figura A.36 para los modelos con  $n=1$  y Figura A.43 para los modelos con  $n=2$ )
- 3) Representación gráfica del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia (Figura A.37 para los modelos con  $n=1$  y Figura A.44 para los modelos con  $n=2$ )
- 4) Representación gráfica del módulo de pérdida en función de la frecuencia (Figura A.38 para los modelos con  $n=1$  y Figura A.45 para los modelos con  $n=2$ )
- 5) Representación gráfica de la capacitancia de almacenamiento en función de la frecuencia (Figura A.39 para los modelos con  $n=1$  y Figura A.46 para los modelos con  $n=2$ )
- 6) Representación gráfica de la capacitancia de pérdida en función de la frecuencia (Figura A.40 para los modelos con  $n=1$  y Figura A.47 para los modelos con  $n=2$ )
- 7) Representación gráfica de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia (Figura A.41 para los modelos con  $n=1$  y Figura A.48 para los modelos con  $n=2$ )

Las representaciones gráficas para los casos particulares de los modelos generalizados de Kelvin-Voigt y de Maxwell con  $n=1$  y con  $n=2$  son exactamente los mismos, en función de los coeficientes de Prony. La razón de este hecho es porque las expresiones generales de los módulos y de las capacitancias expresadas como coeficientes de Prony para el mismo número de términos en ambos modelos son exactamente las mismas, aunque las disposiciones de muelles y émbolos sean distintas en cada caso.

### A.4.1 Modelo generalizado de Kelvin-Voigt

Representación del modelo

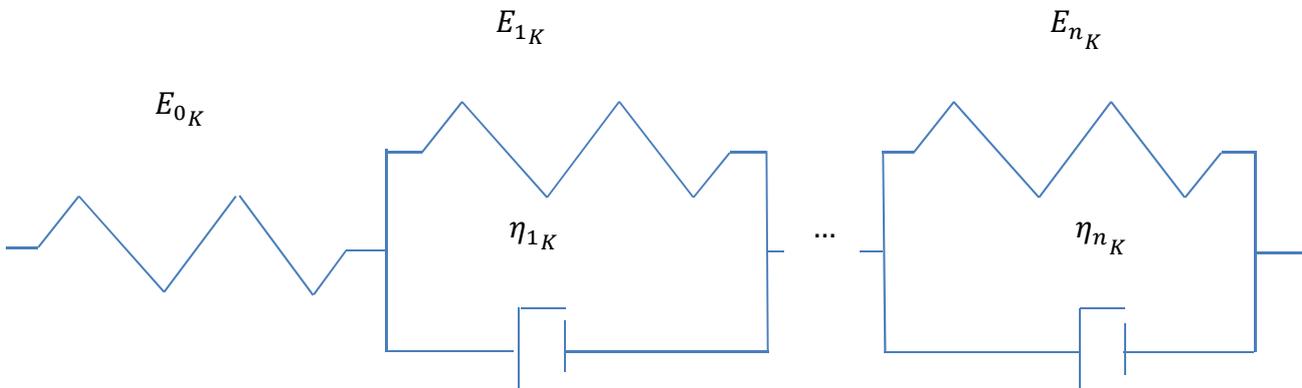


Figura A.29 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt

Resistencia mecánica

$$Z = \frac{1}{E_{0K}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_{iK} + \eta_{iK}s}$$

Ecuación A.37

Ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \sigma + \frac{B}{A} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{C}{A} \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{D}{A} \frac{d^3\sigma}{dt^3} + \dots + \frac{Y}{A} \frac{d^{n-1}\sigma}{dt^{n-1}} + \frac{Z}{A} \frac{d^n\sigma}{dt^n} \\ = \frac{a}{A} \varepsilon + \frac{b}{A} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{c}{A} \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{d}{A} \frac{d^3\varepsilon}{dt^3} + \dots + \frac{y}{A} \frac{d^{n-1}\varepsilon}{dt^{n-1}} + \frac{z}{A} \frac{d^n\varepsilon}{dt^n} \end{aligned}$$

Ecuación A.38

Donde:

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{i=0}^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n E_{i_K} \\
 B &= \sum_{i=1}^n \eta_{i_K} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_{j_K} + E_{0_K} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \eta_{j_K} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n E_{k_K} \\
 C &= \sum_{i=1}^{n-1} \eta_{i_K} \sum_{\substack{j=2 \\ j > i}}^n \eta_{j_K} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n E_{k_K} + E_{0_K} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \eta_{j_K} \sum_{\substack{k=2 \\ k > j \\ k \neq i}}^n \eta_{k_K} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j \\ l \neq k}}^n E_{l_K} \\
 D &= \sum_{i=1}^{n-2} \eta_{i_K} \sum_{\substack{j=2 \\ j > i}}^{n-1} \eta_{j_K} \sum_{\substack{k=3 \\ k > j}}^n \eta_{k_K} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j \\ l \neq k}}^n E_{l_K} + E_{0_K} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-2} \eta_{j_K} \sum_{\substack{k=2 \\ k > j \\ k \neq i}}^{n-1} \eta_{k_K} \sum_{\substack{l=3 \\ l > k \\ l \neq i}}^n \eta_{l_K} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i \\ m \neq j \\ m \neq k \\ m \neq l}}^n E_{m_K} \\
 Y &= \sum_{i=1}^n \left[ (E_{0_K} + E_{i_K}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \eta_{j_K} \right] \\
 Z &= \prod_{i=1}^n \eta_{i_K}
 \end{aligned}$$

Grupo de ecuaciones A.39

$$\begin{aligned}
 a &= \prod_{i=0}^n E_{iK} \\
 b &= E_{0K} \sum_{i=1}^n \eta_{iK} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_{jK} \\
 c &= E_{0K} \sum_{i=1}^{n-1} \eta_{iK} \sum_{\substack{j=2 \\ j > i}}^n \eta_{jK} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n E_{kK} \\
 d &= E_{0K} \sum_{i=1}^{n-2} \eta_{iK} \sum_{\substack{j=2 \\ j > i}}^{n-1} \eta_{jK} \sum_{\substack{k=3 \\ k > j}}^n \eta_{kK} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j \\ l \neq k}}^n E_{lK} \\
 y &= E_{0K} \sum_{i=1}^n E_{iK} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \eta_{jK} \\
 z &= E_{0K} \prod_{i=1}^n \eta_{iK}
 \end{aligned}$$

Grupo de ecuaciones A.40

Capacitancia de creep

$$J = \frac{1}{E_{0K}} \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{E_{0K}}{E_{iK}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_{iK}/E_{iK}}} \right) \right)$$

Ecuación A.41

Capacitancia de almacenamiento

$$J' = \frac{1}{E_{0K}} \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\frac{E_{0K}}{E_{iK}}}{1 + \left( \frac{\eta_{iK}}{E_{iK}} \right)^2 \omega^2} \right)$$

Ecuación A.42

Capacitancia de pérdida

$$J'' = \frac{1}{E_{0K}} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\frac{E_{0K}}{E_{iK}} \frac{\eta_{iK}}{E_{iK}} W}{1 + \left(\frac{\eta_{iK}}{E_{iK}}\right)^2 W^2} \right)$$

Ecuación A.43

Coefficientes del modelo

$$J_0 = \frac{1}{E_{0K}}; q_i = \frac{E_{0K}}{E_{iK}}; \lambda_i = \frac{\eta_{iK}}{E_{iK}}$$

Grupo de ecuaciones A.44

### A.4.1.1 Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con $n=1$

Representación del modelo

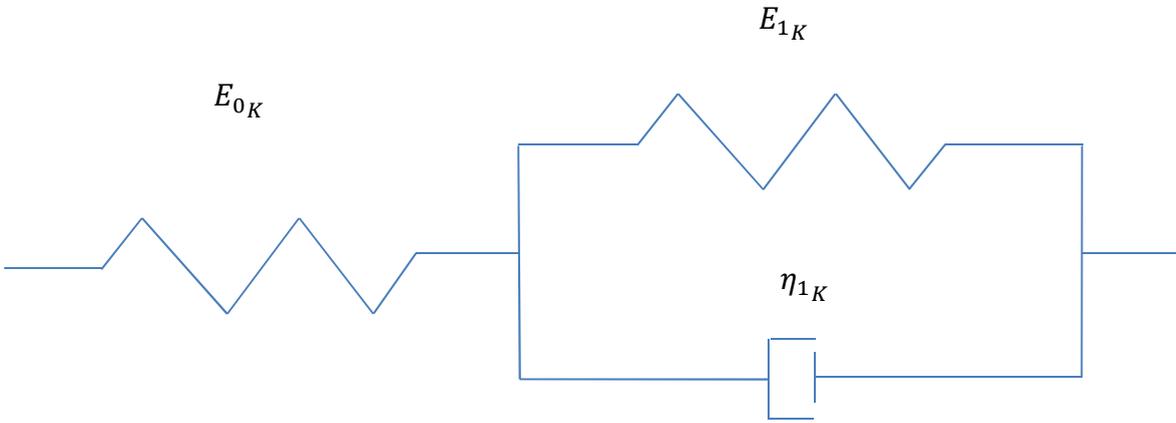


Figura A.30 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$

Resistencia mecánica

$$Z = \frac{1}{E_{0K}} + \frac{1}{E_{1K} + \eta_{1K}s}$$

Ecuación A.45

Ecuación diferencial

$$\sigma + \frac{\eta_{1K}}{E_{0K} + E_{1K}} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{E_{0K}E_{1K}}{E_{0K} + E_{1K}} \varepsilon + \frac{E_{0K}\eta_{1K}}{E_{0K} + E_{1K}} \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Ecuación A.46

Módulo de relajación

$$Y = E_{0K} \left( 1 - \frac{E_{0K}}{E_{0K} + E_{1K}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_{1K}/(E_{0K} + E_{1K})}} \right) \right)$$

Ecuación A.47

## Anexos

---

Capacitancia de creep

$$J = \frac{1}{E_{0K}} \left( 1 + \frac{E_{0K}}{E_{1K}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_{1K}/E_{1K}}} \right) \right)$$

Ecuación A.48

Módulo de almacenamiento

$$G' = E_{0K} \left( 1 - \left( \frac{\frac{E_{0K}}{E_{0K}+E_{1K}}}{1 + \left( \frac{\eta_{1K}}{E_{0K}+E_{1K}} \right)^2 w^2} \right) \right)$$

Ecuación A.49

Módulo de pérdida

$$G'' = E_{0K} \frac{\frac{E_{0K}}{E_{0K}+E_{1K}} \frac{\eta_{1K}}{E_{0K}+E_{1K}} w}{1 + \left( \frac{\eta_{1K}}{E_{0K}+E_{1K}} \right)^2 w^2}$$

Ecuación A.50

Capacitancia de almacenamiento

$$J' = \frac{1}{E_{0K}} \left( 1 + \frac{\frac{E_{0K}}{E_{1K}}}{1 + \left( \frac{\eta_{1K}}{E_{1K}} \right)^2 w^2} \right)$$

Ecuación A.51

Capacitancia de pérdida

$$J'' = \frac{1}{E_{0K}} \frac{\frac{E_{0K}}{E_{1K}} \frac{\eta_{1K}}{E_{1K}} w}{1 + \left( \frac{\eta_{1K}}{E_{1K}} \right)^2 w^2}$$

Ecuación A.52

Tangente del ángulo de fase

$$tg \delta = \frac{\frac{\frac{E_{0K}}{E_{0K}+E_{1K}} \frac{\eta_{1K}}{E_{0K}+E_{1K}} w}{1 + \left( \frac{\eta_{1K}}{E_{0K}+E_{1K}} \right)^2 w^2}}{1 - \frac{\frac{E_{0K}}{E_{0K}+E_{1K}}}{1 + \left( \frac{\eta_{1K}}{E_{0K}+E_{1K}} \right)^2 w^2}}$$

Ecuación A.53

Coefficientes del modelo

$$Y_0 = G_0 = E_{0K}; p_1 = \frac{E_{0K}}{E_{0K} + E_{1K}}; \tau_1 = \frac{\eta_{1K}}{E_{0K} + E_{1K}}$$

$$J_0 = \frac{1}{E_{0K}}; q_1 = \frac{E_{0K}}{E_{1K}}; \lambda_1 = \frac{\eta_{1K}}{E_{1K}}$$

Grupo de ecuaciones A.54

### A.4.1.2 Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con $n=2$

Representación del modelo

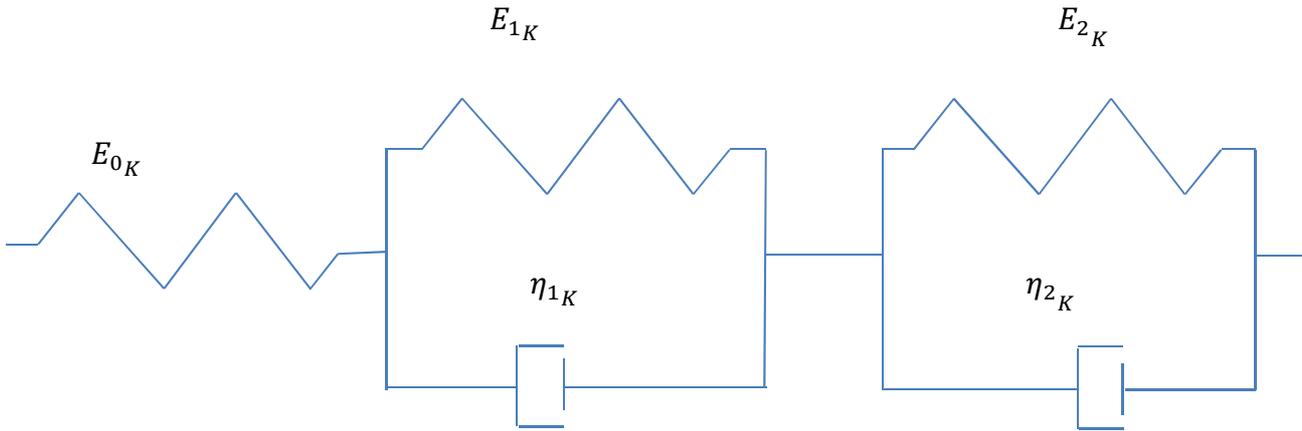


Figura A.31 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$

Resistencia mecánica

$$Z = \frac{1}{E_{0K}} + \frac{1}{E_{1K} + \eta_{1K}s} + \frac{1}{E_{2K} + \eta_{2K}s}$$

Ecuación A.55

Ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \sigma + \frac{E_{0K}(\eta_{1K} + \eta_{2K}) + E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K}}{E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K}} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\eta_{1K}\eta_{2K}}{E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K}} \frac{d^2\sigma}{dt^2} \\ = \frac{E_{0K}E_{1K}E_{2K}}{E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K}} \varepsilon + \frac{E_{0K}(E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K})}{E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K}} \frac{d\varepsilon}{dt} \\ + \frac{E_{0K}\eta_{1K}\eta_{2K}}{E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K}} \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \end{aligned}$$

Ecuación A.56

## Anexos

Módulo de relajación

$$\begin{aligned}
 Y &= C_{1K} + C_{2K} \left( e^{-C_{3K}t} \left( \cosh(C_{4K}t) + \left( \frac{C_{5K} - C_{3K}}{C_{4K}} \right) \sinh(C_{4K}t) \right) \right) \\
 &= Y_0 \left( 1 - p_1 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) - p_2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Ecuación A.57

Capacitancia de creep

$$J = \frac{1}{E_{0K}} \left( 1 + \frac{E_{0K}}{E_{1K}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_{1K}/E_{1K}}} \right) + \frac{E_{0K}}{E_{2K}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_{2K}/E_{2K}}} \right) \right)$$

Ecuación A.58

Módulo de almacenamiento

$$\begin{aligned}
 G' &= Y_0 \left( 1 - \left( \frac{p_1}{1 + \tau_1^2 w^2} \right) - \left( \frac{p_2}{1 + \tau_2^2 w^2} \right) \right) \\
 &= E_{0K} \left( \frac{(E_{1K}E_{2K} - w^2\eta_{1K}\eta_{2K})(E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K} - w^2\eta_{1K}\eta_{2K})}{(E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K} - w^2\eta_{1K}\eta_{2K})^2 + (E_{0K}(\eta_{1K} + \eta_{2K}) + E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K})w^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{w^2(E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K})(E_{0K}(\eta_{1K} + \eta_{2K}) + E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K})}{(E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K} - w^2\eta_{1K}\eta_{2K})^2 + (E_{0K}(\eta_{1K} + \eta_{2K}) + E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K})w^2} \right)
 \end{aligned}$$

Ecuación A.59

Módulo de pérdida

$$\begin{aligned}
 G'' &= Y_0 \left( \frac{p_1\tau_1 w}{1 + \tau_1^2 w^2} + \frac{p_2\tau_2 w}{1 + \tau_2^2 w^2} \right) \\
 &= E_{0K} w \left( \frac{(E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K})(E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K} - w^2\eta_{1K}\eta_{2K})}{(E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K} - w^2\eta_{1K}\eta_{2K})^2 + (E_{0K}(\eta_{1K} + \eta_{2K}) + E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K})w^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(E_{1K}E_{2K} - w^2\eta_{1K}\eta_{2K})(E_{0K}(\eta_{1K} + \eta_{2K}) + E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K})}{(E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K} - w^2\eta_{1K}\eta_{2K})^2 + (E_{0K}(\eta_{1K} + \eta_{2K}) + E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K})w^2} \right)
 \end{aligned}$$

Ecuación A.60

Capacitancia de almacenamiento

$$J' = \frac{1}{E_{0K}} \left( 1 + \frac{\frac{E_{0K}}{E_{1K}}}{1 + \left( \frac{\eta_{1K}}{E_{1K}} \right)^2 w^2} + \frac{\frac{E_{0K}}{E_{2K}}}{1 + \left( \frac{\eta_{2K}}{E_{2K}} \right)^2 w^2} \right)$$

Ecuación A.61

## Anexos

Capacitancia de pérdida

$$J'' = \frac{1}{E_{0K}} \left( \frac{\frac{E_{0K}}{E_{1K}} \frac{\eta_{1K}}{E_{1K}} w}{1 + \left(\frac{\eta_{1K}}{E_{1K}}\right)^2 w^2} + \frac{\frac{E_{0K}}{E_{2K}} \frac{\eta_{2K}}{E_{2K}} w}{1 + \left(\frac{\eta_{2K}}{E_{2K}}\right)^2 w^2} \right)$$

Ecuación A.62

Tangente del ángulo de fase

$$tg \delta = \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}} = \frac{\frac{p_1 \tau_1 w}{1 + \tau_1^2 w^2} + \frac{p_2 \tau_2 w}{1 + \tau_2^2 w^2}}{1 - \left(\frac{p_1}{1 + \tau_1^2 w^2}\right) - \left(\frac{p_2}{1 + \tau_2^2 w^2}\right)}$$

Ecuación A.63

Donde:

$$\begin{aligned} \text{Numerador} = w & \left( (E_{1K} \eta_{2K} + E_{2K} \eta_{1K})(E_{0K} E_{1K} + E_{0K} E_{2K} + E_{1K} E_{2K} - w^2 \eta_{1K} \eta_{2K}) \right. \\ & \left. - (E_{1K} E_{2K} - w^2 \eta_{1K} \eta_{2K})(E_{0K}(\eta_{1K} + \eta_{2K}) + E_{1K} \eta_{2K} + E_{2K} \eta_{1K}) \right) \end{aligned}$$

Ecuación A.64

$$\begin{aligned} \text{Denominador} = (E_{1K} E_{2K} - w^2 \eta_{1K} \eta_{2K})(E_{0K} E_{1K} + E_{0K} E_{2K} + E_{1K} E_{2K} - w^2 \eta_{1K} \eta_{2K}) \\ + w^2 (E_{1K} \eta_{2K} + E_{2K} \eta_{1K})(E_{0K}(\eta_{1K} + \eta_{2K}) + E_{1K} \eta_{2K} + E_{2K} \eta_{1K}) \end{aligned}$$

Ecuación A.65

Coefficientes del modelo

$$\begin{aligned} Y_0 = G_0 = C_{1K} + C_{2K}; \quad p_1 = \frac{C_{2K}(C_{4K} + C_{5K} - C_{3K})}{2C_{4K}(C_{1K} + C_{2K})}; \quad p_2 = \frac{C_{2K}(C_{4K} - C_{5K} + C_{3K})}{2C_{4K}(C_{1K} + C_{2K})}; \\ \tau_1 = \frac{1}{C_{3K} - C_{4K}}; \quad \tau_2 = \frac{1}{C_{3K} + C_{4K}} \\ J_0 = \frac{1}{E_{0K}}; \quad q_1 = \frac{E_{0K}}{E_{1K}}; \quad q_2 = \frac{E_{0K}}{E_{2K}}; \quad \lambda_1 = \frac{\eta_{1K}}{E_{1K}}; \quad \lambda_2 = \frac{\eta_{2K}}{E_{2K}} \end{aligned}$$

Grupo de ecuaciones A.66

Donde:

$C_{iK}$ : Coeficientes de ayuda en función de los parámetros de los muelles y de los émbolos para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$  ( $C_{1K}$  y  $C_{2K}$  en MPa,  $C_{3K}$ ,  $C_{4K}$  y  $C_{5K}$  en  $s^{-1}$ )

## Anexos

Coefficientes de ayuda

$$C_{1K} = \frac{E_{0K}E_{1K}E_{2K}}{E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K}}$$

$$C_{2K} = \frac{E_{0K}^2(E_{1K} + E_{2K})}{E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K}}$$

$$C_{3K} = \frac{E_{0K}(\eta_{1K} + \eta_{2K}) + E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K}}{2\eta_{1K}\eta_{2K}}$$

$$C_{4K} = \frac{\sqrt{(E_{0K}(\eta_{1K} + \eta_{2K}) + E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K})^2 - 4\eta_{1K}\eta_{2K}(E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K})}}{2\eta_{1K}\eta_{2K}}$$

$$C_{5K} = \frac{E_{1K}^2\eta_{2K} + E_{2K}^2\eta_{1K}}{\eta_{1K}\eta_{2K}(E_{1K} + E_{2K})}$$

Grupo de ecuaciones A.67

### A.4.2 Modelo generalizado de Maxwell

Representación del modelo

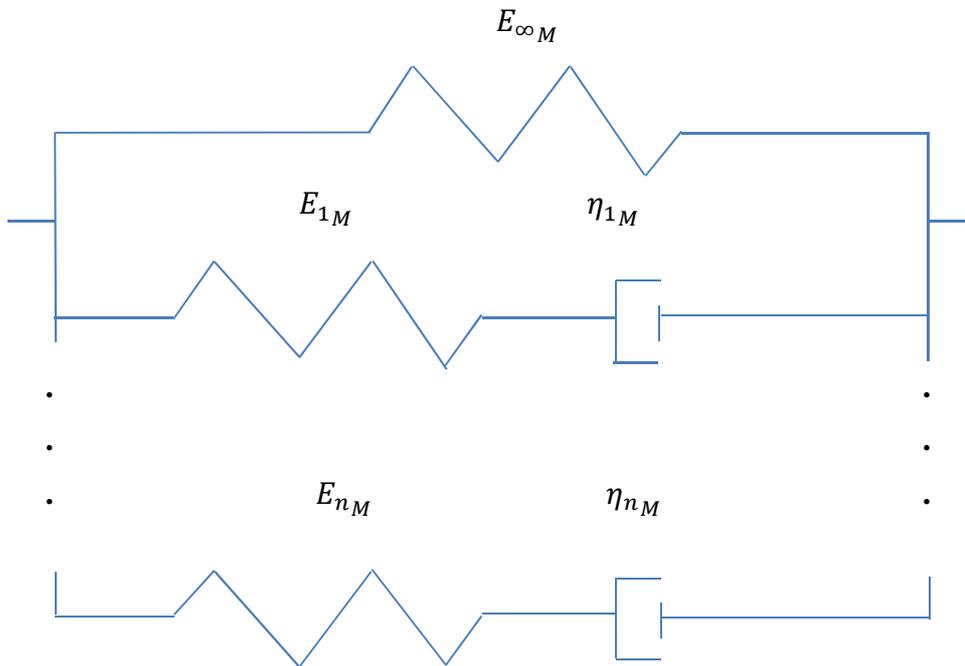


Figura A.32 - Modelo generalizado de Maxwell

## Anexos

Resistencia mecánica

$$Z = \frac{1}{E_{\infty M} + \sum_{i=1}^n \frac{E_{iM} \eta_{iM} s}{E_{iM} + \eta_{iM} s}}$$

Ecuación A.68

Ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \sigma + \frac{B}{A} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{C}{A} \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{D}{A} \frac{d^3\sigma}{dt^3} + \dots + \frac{Y}{A} \frac{d^{n-1}\sigma}{dt^{n-1}} + \frac{Z}{A} \frac{d^n\sigma}{dt^n} \\ = \frac{a}{A} \varepsilon + \frac{b}{A} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{c}{A} \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{d}{A} \frac{d^3\varepsilon}{dt^3} + \dots + \frac{y}{A} \frac{d^{n-1}\varepsilon}{dt^{n-1}} + \frac{z}{A} \frac{d^n\varepsilon}{dt^n} \end{aligned}$$

Ecuación A.69

Donde:

$$A = \prod_{i=1}^n E_{iM}$$

$$B = \sum_{i=1}^n \eta_{iM} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_{jM}$$

$$C = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_{iM} \sum_{\substack{j=2 \\ j > i}}^n \eta_{jM} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n E_{kM}$$

$$D = \sum_{i=1}^{n-2} \eta_{iM} \sum_{\substack{j=2 \\ j > i}}^{n-1} \eta_{jM} \sum_{\substack{k=3 \\ k > j}}^n \eta_{kM} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j \\ l \neq k}}^n E_{lM}$$

$$Y = \sum_{i=1}^n E_{iM} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \eta_{jM}$$

$$Z = \prod_{i=1}^n \eta_{iM}$$

Grupo de ecuaciones A.70

## Anexos

$$\begin{aligned}
 a &= E_{\infty M} \prod_{i=0}^n E_{iM} \\
 b &= \left( E_{\infty M} \sum_{i=1}^n \eta_{iM} + \sum_{i=1}^n E_{iM} \eta_{iM} \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_{jM} \\
 c &= E_{\infty M} \sum_{i=1}^{n-1} \eta_{iM} \sum_{\substack{j=2 \\ j > i}}^{n-1} \eta_{jM} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n E_{kM} + \sum_{i=1}^n E_{iM} \eta_{iM} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \eta_{jM} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n E_{kM} \\
 d &= E_{\infty M} \sum_{i=1}^{n-2} \eta_{iM} \sum_{\substack{j=2 \\ j > i}}^{n-1} \eta_{jM} \sum_{\substack{k=3 \\ k > j}}^n \eta_{kM} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j \\ l \neq k}}^n E_{lM} + \sum_{i=1}^n E_{iM} \eta_{iM} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \eta_{jM} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k > j}}^n \eta_{kM} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j \\ l \neq k}}^n E_{lM} \\
 y &= E_{\infty M} \sum_{i=1}^n E_{iM} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \eta_{jM} + \sum_{i=1}^n E_{iM} \eta_{iM} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_{jM} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n \eta_{kM} \\
 z &= \left( E_{\infty M} + \sum_{i=1}^n E_{iM} \right) \prod_{j=1}^n \eta_{jM}
 \end{aligned}$$

Grupo de ecuaciones A.71

Módulo de relajación

$$Y = \left( E_{\infty M} + \sum_{i=1}^n E_{iM} \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{E_{iM}}{E_{\infty M} + \sum_{i=1}^n E_{iM}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_{iM}/E_{iM}}} \right) \right)$$

Ecuación A.72

Módulo de almacenamiento

$$G' = \left( E_{\infty M} + \sum_{i=1}^n E_{iM} \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^n \left( \frac{E_{iM}}{E_{\infty M} + \sum_{i=1}^n E_{iM}} \right) \left( 1 + \left( \frac{\eta_{iM}}{E_{iM}} \right)^2 w^2 \right) \right)$$

Ecuación A.73

Módulo de pérdida

$$G'' = \left( E_{\infty M} + \sum_{i=1}^n E_{iM} \right) \sum_{i=1}^n \frac{E_{iM} \frac{\eta_{iM}}{w}}{E_{\infty M} + \sum_{i=1}^n E_{iM} \frac{1 + \left( \frac{\eta_{iM}}{E_{iM}} \right)^2 w^2}$$

Ecuación A.74

Coefficientes del modelo

$$Y_0 = G_0 = E_{\infty M} + \sum_{i=1}^n E_{iM} ; p_i = \frac{E_{iM}}{E_{\infty M} + \sum_{i=1}^n E_{iM}} ; \tau_i = \frac{\eta_{iM}}{E_{iM}}$$

Grupo de ecuaciones A.75

#### A.4.2.1 Modelo generalizado de Maxwell con $n=1$

Representación del modelo

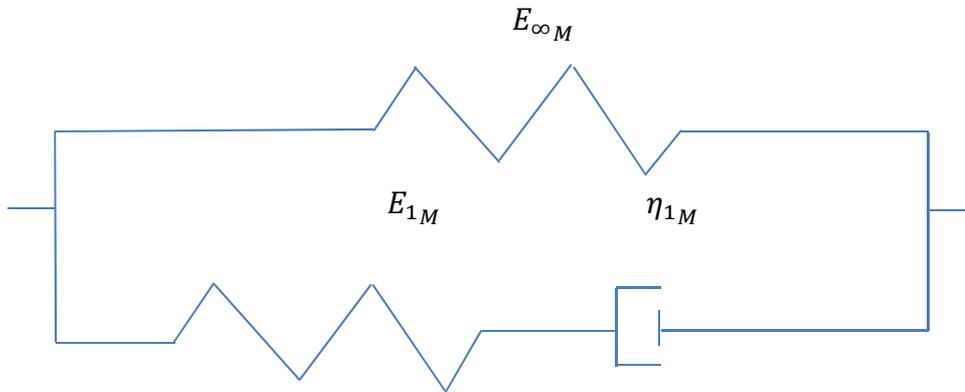


Figura A.33 - Modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$

Resistencia mecánica

$$Z = \frac{1}{E_{\infty M} + \frac{E_{1M} \eta_{1M} s}{E_{1M} + \eta_{1M} s}}$$

Ecuación A.76

Ecuación diferencial

$$\sigma + \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}} \frac{d\sigma}{dt} = E_{\infty M} \varepsilon + \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}} (E_{\infty M} + E_{1M}) \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Ecuación A.77

Módulo de relajación

$$Y = (E_{\infty M} + E_{1M}) \left( 1 - \frac{E_{1M}}{E_{\infty M} + E_{1M}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_{1M}/E_{1M}}} \right) \right)$$

Ecuación A.78

## Anexos

---

Capacitancia de creep

$$J = \frac{1}{E_{\infty M} + E_{1M}} \left( 1 + \frac{E_{1M}}{E_{\infty M}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_{1M} (1/E_{\infty M} + 1/E_{1M})}} \right) \right)$$

Ecuación A.79

Módulo de almacenamiento

$$G' = (E_{\infty M} + E_{1M}) \left( 1 - \left( \frac{\frac{E_{1M}}{E_{\infty M} + E_{1M}}}{1 + \left( \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}} \right)^2 W^2} \right) \right)$$

Ecuación A.80

Módulo de pérdida

$$G'' = (E_{\infty M} + E_{1M}) \frac{\frac{E_{1M}}{E_{\infty M} + E_{1M}} \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}} W}{1 + \left( \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}} \right)^2 W^2}$$

Ecuación A.81

Capacitancia de creep

$$J' = \frac{1}{E_{\infty M} + E_{1M}} \left( 1 + \frac{\frac{E_{1M}}{E_{\infty M}}}{1 + \left( \eta_{1M} \left( \frac{1}{E_{\infty M}} + \frac{1}{E_{1M}} \right) \right)^2 W^2} \right)$$

Ecuación A.82

Capacitancia de pérdida

$$J'' = \frac{1}{E_{\infty M} + E_{1M}} \left( \frac{\frac{E_{1M}}{E_{\infty M}} \eta_{1M} \left( \frac{1}{E_{\infty M}} + \frac{1}{E_{1M}} \right) W}{1 + \left( \eta_{1M} \left( \frac{1}{E_{\infty M}} + \frac{1}{E_{1M}} \right) \right)^2 W^2} \right)$$

Ecuación A.83

## Anexos

Tangente del ángulo de fase

$$tg \delta = \frac{\frac{E_{1M}}{E_{\infty M} + E_{1M}} \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}} w}{1 + \left(\frac{\eta_{1M}}{E_{1M}}\right)^2 w^2} \bigg/ \left( 1 - \frac{\frac{E_{1M}}{E_{\infty M} + E_{1M}}}{1 + \left(\frac{\eta_{1M}}{E_{1M}}\right)^2 w^2} \right)$$

Ecuación A.84

Coefficientes del modelo

$$Y_0 = G_0 = E_{\infty M} + E_{1M}; p_1 = \frac{E_{1M}}{E_{\infty M} + E_{1M}}; \tau_1 = \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}}$$

$$J_0 = \frac{1}{E_{\infty M} + E_{1M}}; q_1 = \frac{E_{1M}}{E_{\infty M}}; \lambda_1 = \eta_{1M} \left( \frac{1}{E_{\infty M}} + \frac{1}{E_{1M}} \right)$$

Grupo de ecuaciones A.85

### A.4.2.2 Modelo generalizado de Maxwell con $n=2$

Representación del modelo

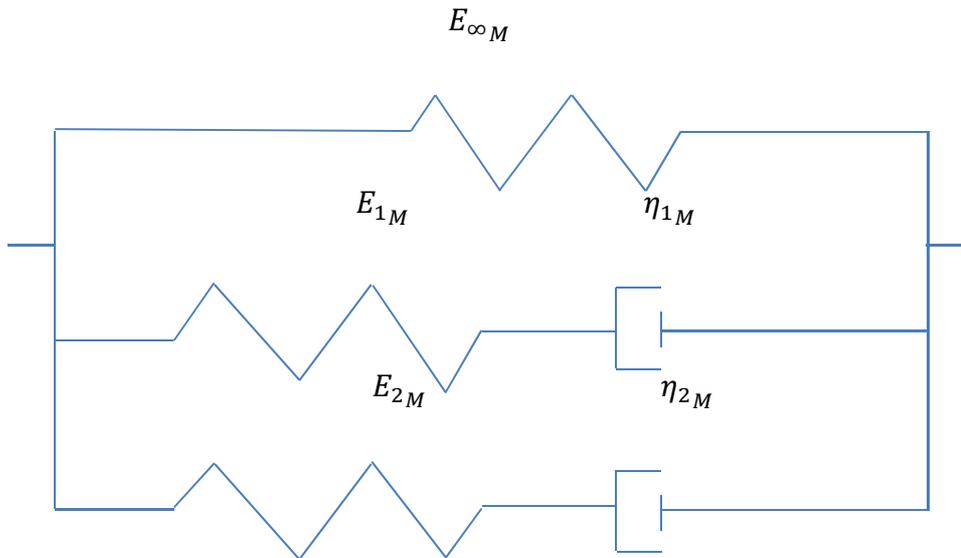


Figura A.34 - Modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$

Resistencia mecánica

$$Z = \frac{1}{E_{\infty M} + \frac{E_{1M}\eta_{1M}s}{E_{1M} + \eta_{1M}s} + \frac{E_{2M}\eta_{2M}s}{E_{2M} + \eta_{2M}s}}$$

Ecuación A.86

## Anexos

---

Ecuación diferencial

$$\begin{aligned} & \sigma + \frac{E_{1M}\eta_{2M} + E_{2M}\eta_{1M}}{E_{1M}E_{2M}} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\eta_{1M}\eta_{2M}}{E_{1M}E_{2M}} \frac{d^2\sigma}{dt^2} \\ & = E_{\infty M} \varepsilon + \left( \frac{E_{\infty M}}{E_{1M}E_{2M}} (E_{1M}\eta_{2M} + E_{2M}\eta_{1M}) + \eta_{1M} + \eta_{2M} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} \\ & + \frac{\eta_{1M}\eta_{2M}}{E_{1M}E_{2M}} (E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}) \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \end{aligned}$$

Ecuación A.87

Módulo de relajación

$$\begin{aligned} Y = & (E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}) \left( 1 - \frac{E_{1M}}{E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_{1M}/E_{1M}}} \right) \right. \\ & \left. - \frac{E_{2M}}{E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\eta_{2M}/E_{2M}}} \right) \right) \end{aligned}$$

Ecuación A.88

Capacitancia de creep

$$\begin{aligned} J = & C_{1M} + C_{2M} \left( e^{-C_{3M}t} \left( \cosh(C_{4M}t) + \left( \frac{C_{5M} - C_{3M}}{C_{4M}} \right) \sinh(C_{4M}t) \right) \right) \\ & = J_0 \left( 1 + q_1 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \right) + q_2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\lambda_2}} \right) \right) \end{aligned}$$

Ecuación A.89

Módulo de almacenamiento

$$G' = (E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}) \left( 1 - \left( \frac{\frac{E_{1M}}{E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}}}{1 + \left( \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}} \right)^2 W^2} \right) - \left( \frac{\frac{E_{2M}}{E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}}}{1 + \left( \frac{\eta_{2M}}{E_{2M}} \right)^2 W^2} \right) \right)$$

Ecuación A.90

Módulo de pérdida

$$G'' = (E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}) \left( \frac{\frac{E_{1M}}{E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}} \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}} W}{1 + \left( \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}} \right)^2 W^2} + \frac{\frac{E_{2M}}{E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}} \frac{\eta_{2M}}{E_{2M}} W}{1 + \left( \frac{\eta_{2M}}{E_{2M}} \right)^2 W^2} \right)$$

Ecuación A.91

## Anexos

Capacitancia de almacenamiento

$$J' = J_0 \left( 1 + \left( \frac{q_1}{1 + \lambda_1^2 w^2} \right) + \left( \frac{q_2}{1 + \lambda_2^2 w^2} \right) \right) =$$

$$\left( \frac{(E_{1M}E_{2M} - w^2\eta_{1M}\eta_{2M})(E_{\infty M}E_{1M}E_{2M} - w^2\eta_{1M}\eta_{2M}(E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}))}{(E_{\infty M}E_{1M}E_{2M} - w^2\eta_{1M}\eta_{2M}(E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}))^2 + (E_{\infty M}(E_{1M}\eta_{2M} + E_{2M}\eta_{1M}) + E_{1M}E_{2M}(\eta_{1M} + \eta_{2M}))^2 w^2} + \right.$$

$$\left. w^2 \frac{(E_{1M}\eta_{2M} + E_{2M}\eta_{1M})(E_{\infty M}(E_{1M}\eta_{2M} + E_{2M}\eta_{1M}) + E_{1M}E_{2M}(\eta_{1M} + \eta_{2M}))}{(E_{\infty M}E_{1M}E_{2M} - w^2\eta_{1M}\eta_{2M}(E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}))^2 + (E_{\infty M}(E_{1M}\eta_{2M} + E_{2M}\eta_{1M}) + E_{1M}E_{2M}(\eta_{1M} + \eta_{2M}))^2 w^2} \right)$$

Ecuación A.92

Capacitancia de pérdida

$$J'' = \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}} = J_0 \left( \frac{q_1 \lambda_1 w}{1 + \lambda_1^2 w^2} + \frac{q_2 \lambda_2 w}{1 + \lambda_2^2 w^2} \right)$$

Ecuación A.93

Donde:

$$\text{Numerador} = w \left( (E_{1M}\eta_{2M} + E_{2M}\eta_{1M})(E_{\infty M}E_{1M}E_{2M} - w^2\eta_{1M}\eta_{2M}(E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M})) \right.$$

$$\left. - (E_{1M}E_{2M} - w^2\eta_{1M}\eta_{2M})(E_{\infty M}(E_{1M}\eta_{2M} + E_{2M}\eta_{1M}) \right.$$

$$\left. + E_{1M}E_{2M}(\eta_{1M} + \eta_{2M})) \right)$$

Ecuación A.94

$$\text{Denominador} = (E_{\infty M}E_{1M}E_{2M} - w^2\eta_{1M}\eta_{2M}(E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}))^2$$

$$+ (E_{\infty M}(E_{1M}\eta_{2M} + E_{2M}\eta_{1M}) + E_{1M}E_{2M}(\eta_{1M} + \eta_{2M}))^2 w^2$$

Ecuación A.95

Tangente del ángulo de fase

$$\text{tg } \delta = \frac{\left( \frac{\frac{E_{1M}}{E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}} \frac{\eta_{1M} w}{E_{1M}}} {1 + \left( \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}} \right)^2 w^2} + \frac{\frac{E_{2M}}{E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}} \frac{\eta_{2M} w}{E_{2M}}} {1 + \left( \frac{\eta_{2M}}{E_{2M}} \right)^2 w^2} \right)}{\left( 1 - \left( \frac{\frac{E_{1M}}{E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}}} {1 + \left( \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}} \right)^2 w^2} \right) - \left( \frac{\frac{E_{2M}}{E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}}} {1 + \left( \frac{\eta_{2M}}{E_{2M}} \right)^2 w^2} \right) \right)}$$

Ecuación A.96

## Anexos

Coefficientes del modelo

$$J_0 = C_{1M} + C_{2M}; q_1 = -\frac{C_{2M}(C_{4M}+C_{5M}-C_{3M})}{2C_{4M}(C_{1M}+C_{2M})}; q_2 = -\frac{C_{2M}(C_{4M}-C_{5M}+C_{3M})}{2C_{4M}(C_{1M}+C_{2M})};$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{C_{3M}-C_{4M}}; \lambda_2 = \frac{1}{C_{3M}+C_{4M}}$$

$$Y_0 = G_0 = E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}; p_1 = \frac{E_{1M}}{E_{\infty M}+E_{1M}+E_{2M}}; p_2 = \frac{E_{2M}}{E_{\infty M}+E_{1M}+E_{2M}}; \tau_1 = \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}};$$

$$\tau_2 = \frac{\eta_{2M}}{E_{2M}}$$

Grupo de ecuaciones A.97

Donde:

$C_{iM}$ : Coeficientes de ayuda en función de los parámetros de los muelles y de los émbolos para el modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$  ( $C_{1M}$  y  $C_{2M}$  en  $\text{MPa}^{-1}$ ,  $C_{3M}$ ,  $C_{4M}$  y  $C_{5M}$  en  $\text{s}^{-1}$ )

Coefficientes de ayuda

$$C_{1M} = \frac{1}{E_{\infty M}}$$

$$C_{2M} = -\frac{E_{1M}+E_{2M}}{E_{\infty M}(E_{\infty M}+E_{1M}+E_{2M})}$$

$$C_{3M} = \frac{E_{\infty M}(E_{1M}\eta_{2M}+E_{2M}\eta_{1M})+E_{1M}E_{2M}(\eta_{1M}+\eta_{2M})}{2\eta_{1M}\eta_{2M}(E_{\infty M}+E_{1M}+E_{2M})}$$

$$C_{4M} = \sqrt{\frac{(E_{\infty M}(E_{1M}\eta_{2M}+E_{2M}\eta_{1M})+E_{1M}E_{2M}(\eta_{1M}+\eta_{2M}))^2 - 4E_{\infty M}E_{1M}E_{2M}\eta_{1M}\eta_{2M}(E_{\infty M}+E_{1M}+E_{2M})}{2\eta_{1M}\eta_{2M}(E_{\infty M}+E_{1M}+E_{2M})}}$$

$$C_{5M} = \frac{E_{1M}E_{2M}(\eta_{1M}+\eta_{2M})}{\eta_{1M}\eta_{2M}(E_{1M}+E_{2M})}$$

Grupo de ecuaciones A.98

**A.4.3 Representaciones gráficas con  $n=1$**

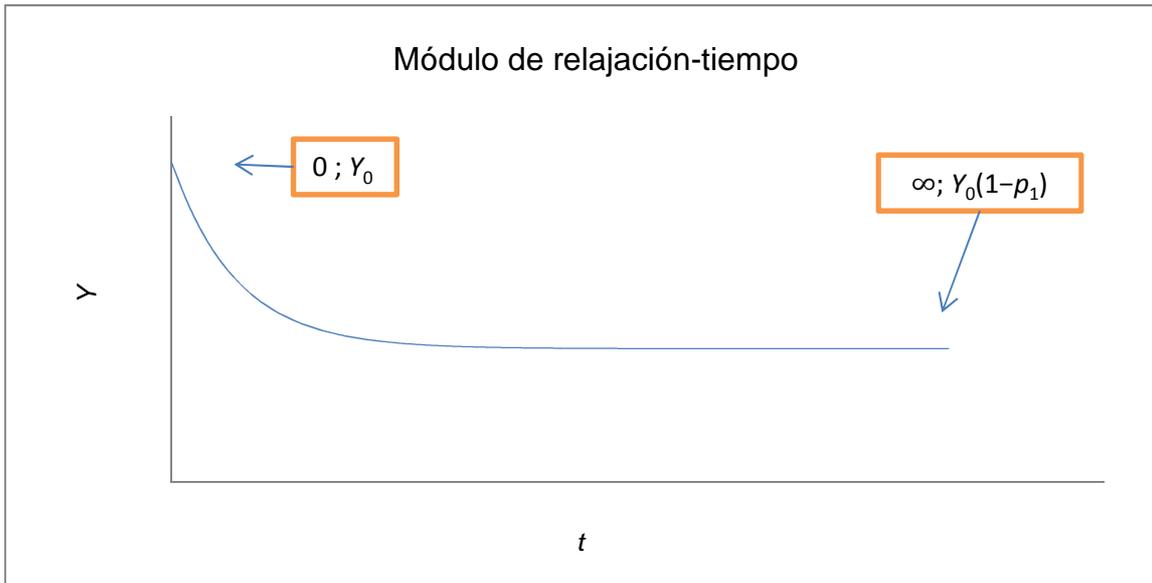


Figura A.35 - Representación gráfica general del módulo de relajación en función del tiempo usando las series de Prony con  $n=1$

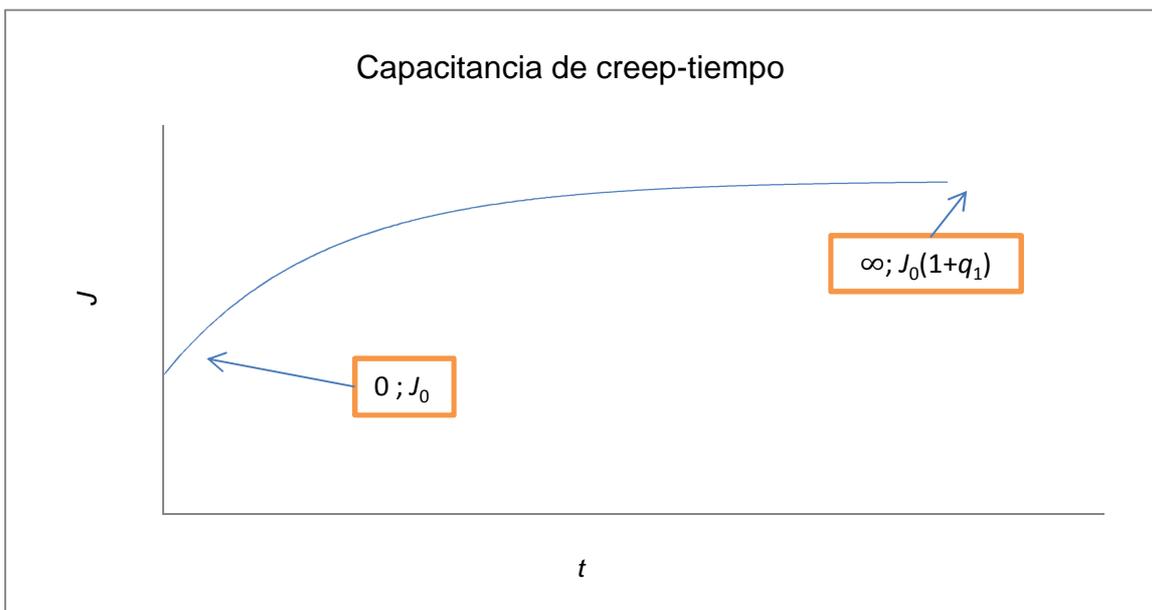


Figura A.36 - Representación gráfica general de la capacitancia de creep en función del tiempo usando las series de Prony con  $n=1$

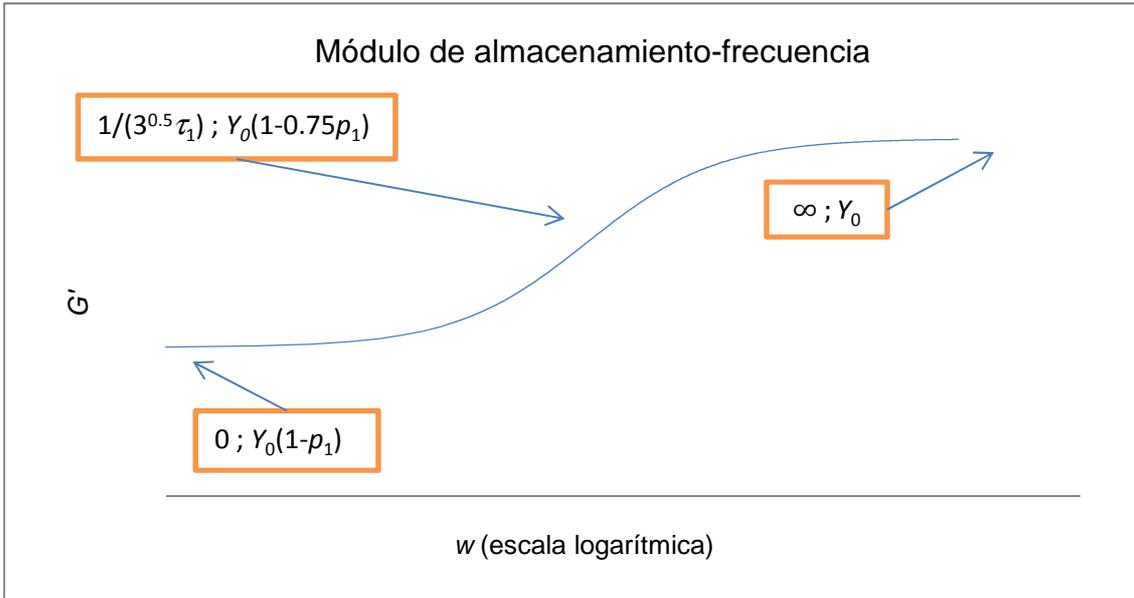


Figura A.37 - Representación gráfica general del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia usando las series de Prony con  $n=1$

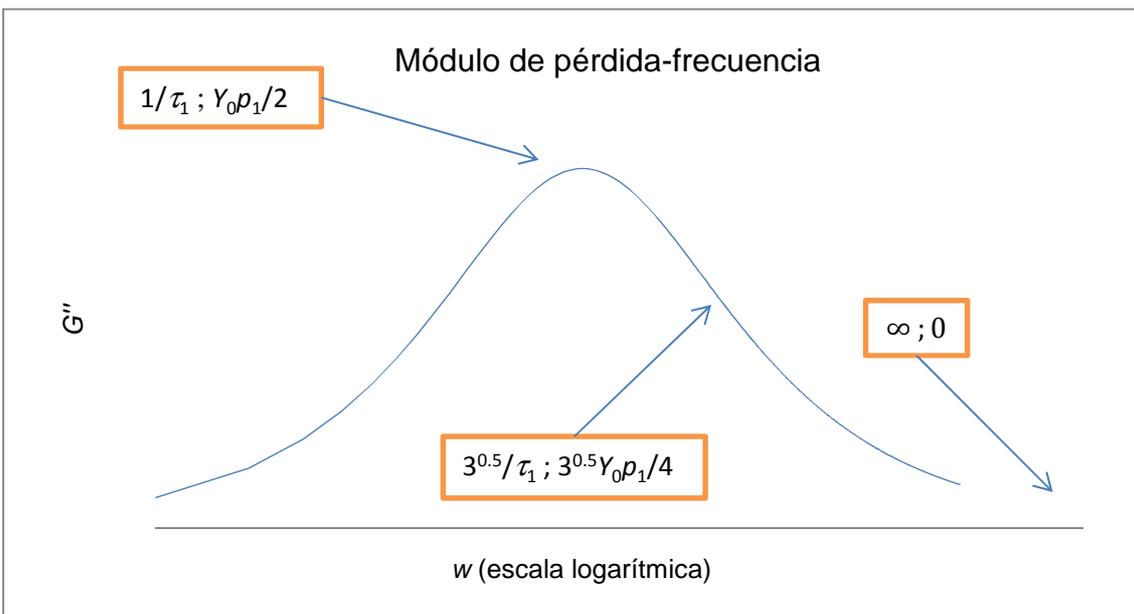


Figura A.38 - Representación gráfica general del módulo de pérdida en función de la frecuencia usando las series de Prony con  $n=1$

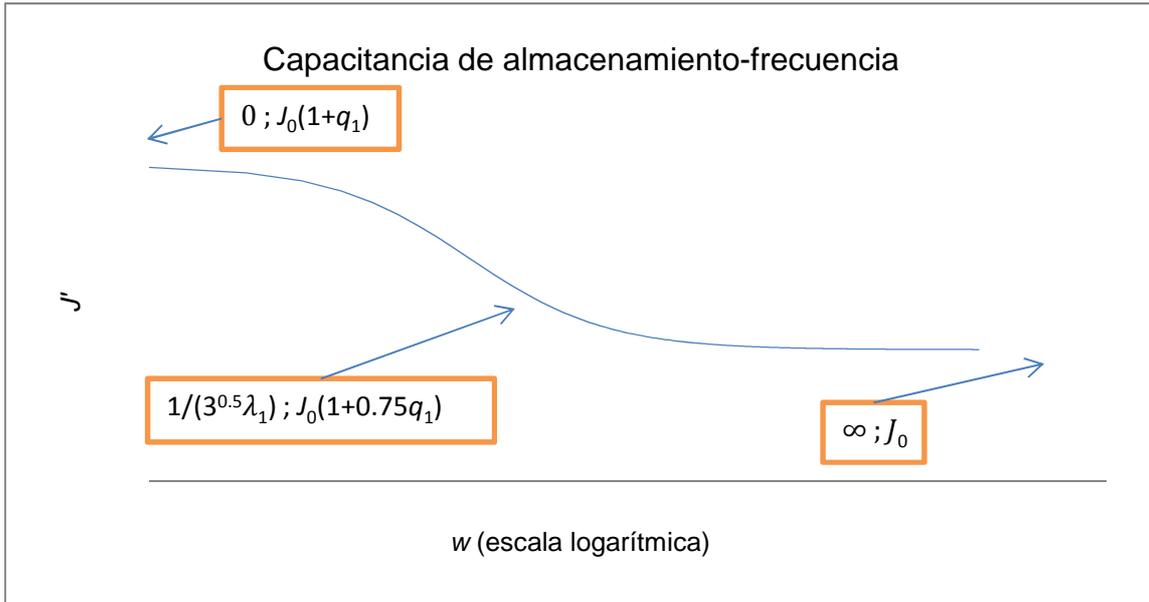


Figura A.39 - Representación gráfica general de la capacitancia de almacenamiento en función de la frecuencia usando las series de Prony con  $n=1$

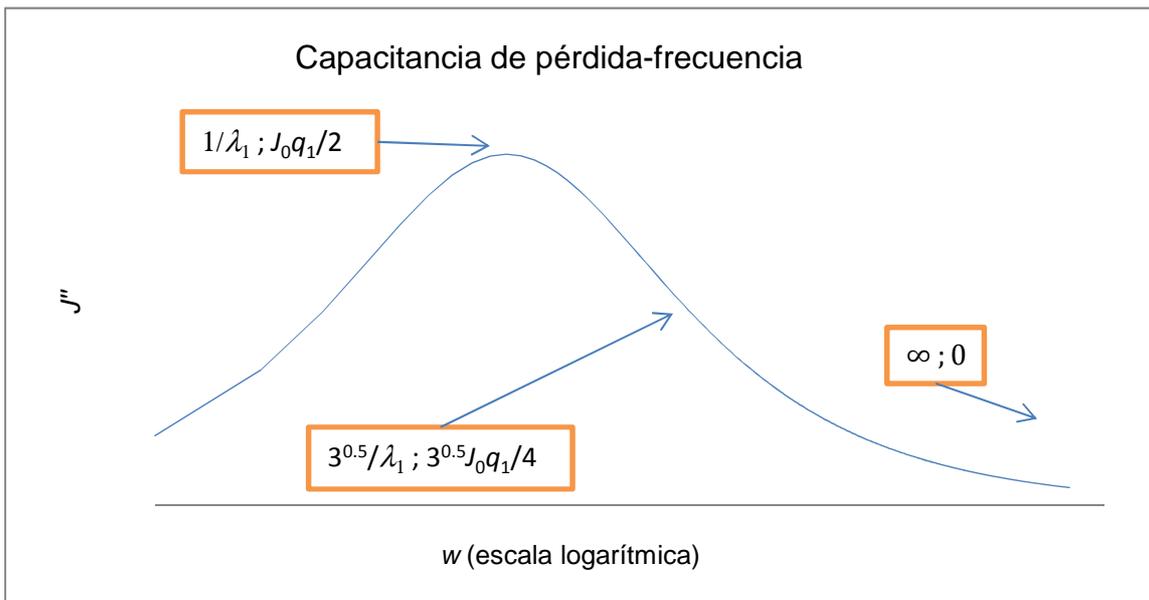


Figura A.40 - Representación gráfica general de la capacitancia de pérdida en función de la frecuencia usando las series de Prony con  $n=1$

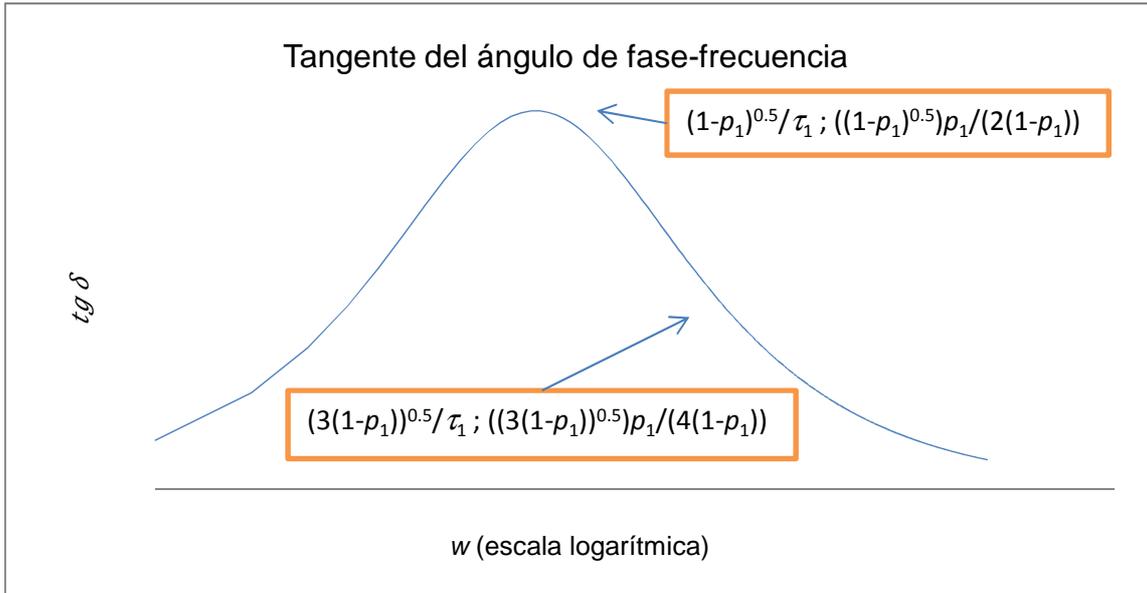


Figura A.41 - Representación gráfica general de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia usando las series de Prony con  $n=1$

#### A.4.4 Representaciones gráficas con $n=2$

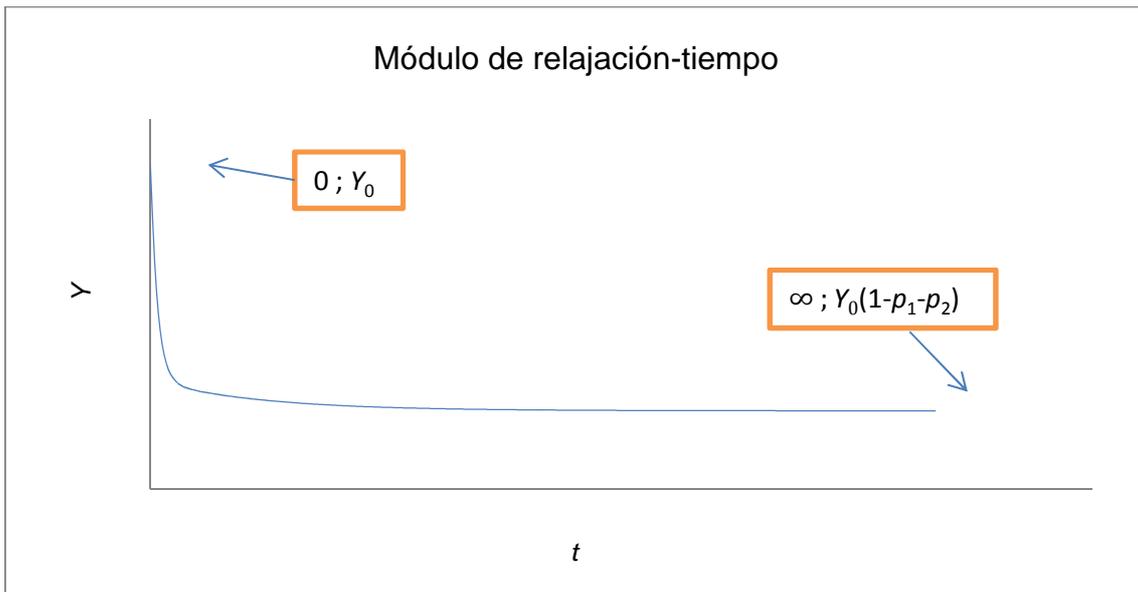


Figura A.42 - Representación gráfica general del módulo de relajación en función del tiempo usando las series de Prony con  $n=2$

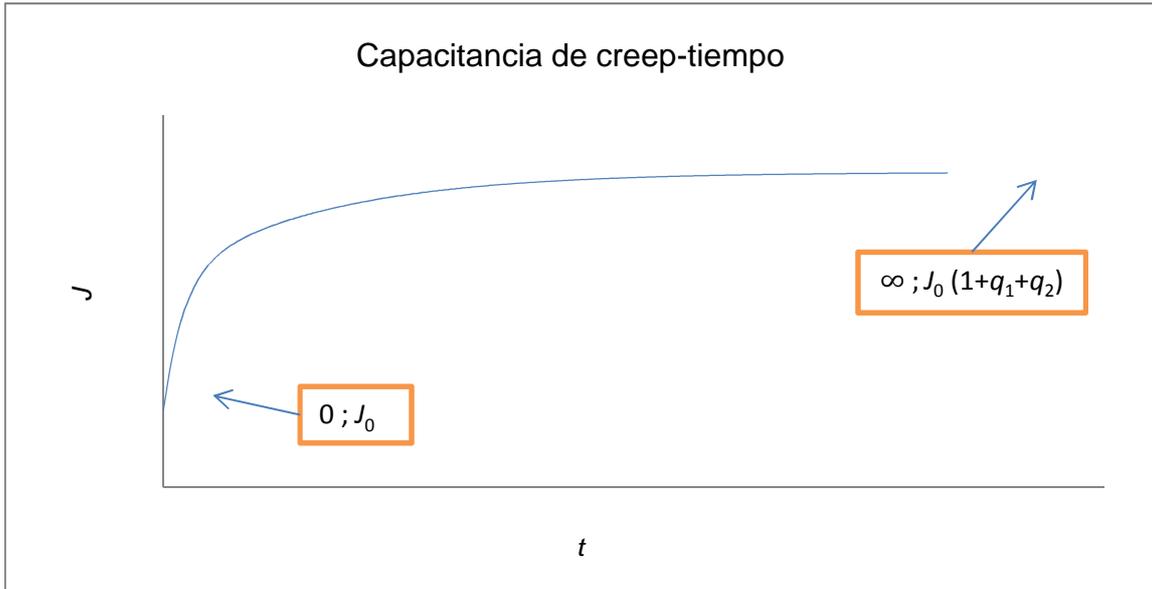


Figura A.43 - Representación gráfica general de la capacitancia de creep en función del tiempo usando las series de Prony con  $n=2$

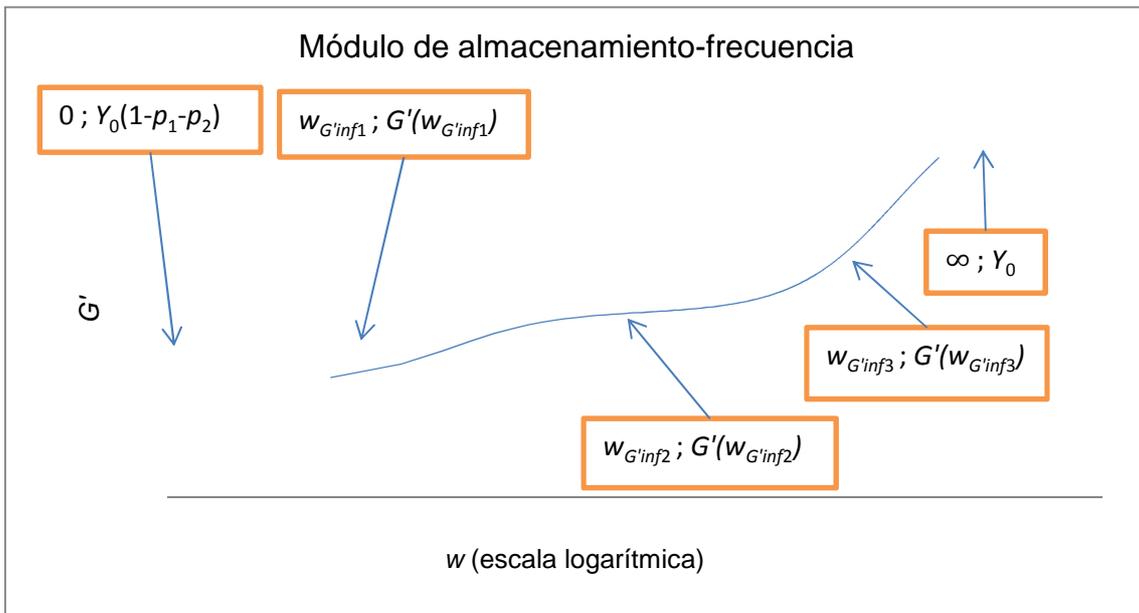


Figura A.44 - Representación gráfica general del módulo de almacenamiento en función de la frecuencia usando las series de Prony con  $n=2$

## Anexos

A partir de la Figura A.44, si se desean hallar los puntos de inflexión de la curva, se debe hacer usando la Ecuación A.156 que se encuentra en el anexo A.12.2.2, igualada a cero. Así, la ecuación final (Ecuación A.99) queda tal como se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
 & w^8 + \left( \frac{9\tau_1^4\tau_2^4(p_1 + p_2) - p_1\tau_2^4 + p_2\tau_1^4}{3\tau_1^2\tau_2^2(p_1\tau_2^2 + p_2\tau_1^2)} \right) w^6 \\
 & + \frac{3(p_1\tau_1^2 + p_2\tau_2^2) - p_1\tau_2^2 - p_2\tau_1^2}{\tau_1^2\tau_2^2(p_1\tau_2^2 + p_2\tau_1^2)} w^4 \\
 & + \frac{(\tau_1^2 - \tau_2^2)(p_1\tau_1^2 - p_2\tau_2^2)}{\tau_1^4\tau_2^4(p_1\tau_2^2 + p_2\tau_1^2)} w^2 - \frac{p_1\tau_1^2 + p_2\tau_2^2}{3\tau_1^4\tau_2^4(p_1\tau_2^2 + p_2\tau_1^2)} = 0
 \end{aligned}$$

Ecuación A.99

A partir de aquí, se hallan los puntos de inflexión de la curva mediante la resolución de una ecuación polinómica de cuarto orden tal como se muestra en el anexo A.13.2. Las raíces se muestran en el Grupo de ecuaciones A.100.

$$\begin{aligned}
 w_{G'inf1} &= x_2^{\frac{1}{2}}; G'(w_{G'inf1}) = G_0 \left( 1 + \frac{p_1}{1+\tau_1^2 w_{G'inf1}^2} + \frac{p_2}{1+\tau_2^2 w_{G'inf1}^2} \right) \\
 w_{G'inf2} &= x_3^{\frac{1}{2}}; G'(w_{G'inf2}) = G_0 \left( 1 + \frac{p_1}{1+\tau_1^2 w_{G'inf2}^2} + \frac{p_2}{1+\tau_2^2 w_{G'inf2}^2} \right) \\
 w_{G'inf3} &= x_4^{1/2}; G'(w_{G'inf3}) = G_0 \left( 1 + \frac{p_1}{1+\tau_1^2 w_{G'inf3}^2} + \frac{p_2}{1+\tau_2^2 w_{G'inf3}^2} \right)
 \end{aligned}$$

Grupo de ecuaciones A.100

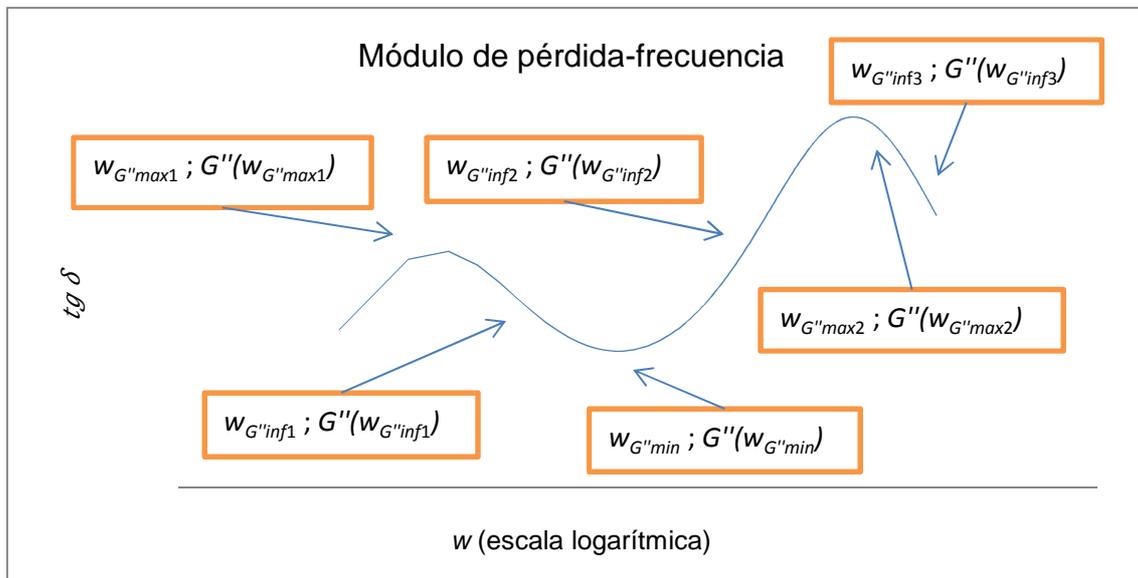


Figura A.45 - Representación gráfica general del módulo de pérdida en función de la frecuencia usando las series de Prony con  $n=2$

## Anexos

A partir de la Figura A.45, si se desean hallar los máximos y mínimos de la curva, se debe hacer usando la Ecuación A.152 que se encuentra en el anexo A.12.2.1, igualada a cero. Así, la ecuación final (Ecuación A.101) queda tal como se presenta a continuación:

$$w^6 + \frac{p_1\tau_1\tau_2^2(2\tau_1^2 - \tau_2^2) + p_2\tau_2\tau_1^2(2\tau_2^2 - \tau_1^2)}{\tau_1^3\tau_2^3(p_1\tau_2 + p_2\tau_1)}w^4 + \frac{p_1\tau_1(\tau_1^2 - 2\tau_2^2) + p_2\tau_2(\tau_2^2 - 2\tau_1^2)}{\tau_1^3\tau_2^3(p_1\tau_2 + p_2\tau_1)}w^2 - \frac{p_1\tau_1 + p_2\tau_2}{\tau_1^3\tau_2^3(p_1\tau_2 + p_2\tau_1)} = 0$$

Ecuación A.101

A partir de aquí, se hallan los máximos y mínimos de la curva mediante la resolución de una ecuación polinómica de tercer orden tal como se muestra en el anexo A.13.1. Las raíces se muestran en el Grupo de ecuaciones A.102.

$$w_{G''_{max1}} = x_1^{\frac{1}{2}}; G''(w_{G''_{max1}}) = G_0 \left( \frac{p_1\tau_1 w_{G''_{max1}}}{1 + \tau_1^2 w_{G''_{max1}}^2} + \frac{p_2\tau_2 w_{G''_{max1}}}{1 + \tau_2^2 w_{G''_{max1}}^2} \right)$$

$$w_{G''_{min}} = x_2^{\frac{1}{2}}; G''(w_{G''_{min}}) = G_0 \left( \frac{p_1\tau_1 w_{G''_{min}}}{1 + \tau_1^2 w_{G''_{min}}^2} + \frac{p_2\tau_2 w_{G''_{min}}}{1 + \tau_2^2 w_{G''_{min}}^2} \right)$$

$$w_{G''_{max2}} = x_3^{\frac{1}{2}}; G''(w_{G''_{max2}}) = G_0 \left( \frac{p_1\tau_1 w_{G''_{max2}}}{1 + \tau_1^2 w_{G''_{max2}}^2} + \frac{p_2\tau_2 w_{G''_{max2}}}{1 + \tau_2^2 w_{G''_{max2}}^2} \right)$$

Grupo de ecuaciones A.102

A partir de la Figura A.45, si se desean hallar los puntos de inflexión de la curva, se debe hacer usando la Ecuación A.157 que se encuentra en el anexo A.12.2.2, igualada a cero. Así, la ecuación final (Ecuación A.103) queda tal como se presenta a continuación:

$$w^8 + \frac{3((\tau_1^2 - \tau_2^2)(p_1\tau_2 - p_2\tau_1))}{\tau_1^2\tau_2^2(p_1\tau_2 + p_2\tau_1)}w^6 + \frac{3((p_1\tau_1^3 + p_2\tau_2^3) - 3\tau_1\tau_2(p_1\tau_2 + p_2\tau_1))}{\tau_1^3\tau_2^3(p_1\tau_2 + p_2\tau_1)}w^4 + \frac{p_1\tau_1^5 + p_2\tau_2^5 - 9\tau_1^2\tau_2^2(p_1\tau_1 + p_2\tau_2)}{\tau_1^5\tau_2^5(p_1\tau_2 + p_2\tau_1)}w^2 - 3\frac{p_1\tau_1^3 + p_2\tau_2^3}{\tau_1^5\tau_2^5(p_1\tau_2 + p_2\tau_1)} = 0$$

Ecuación A.103

A partir de aquí, se hallan los puntos de inflexión de la curva mediante la resolución de una ecuación polinómica de cuarto orden tal como se muestra en el anexo A.13.2. Las raíces se muestran en el Grupo de ecuaciones A.104.

## Anexos

$$w_{G''inf1} = x_2^{\frac{1}{2}}; G''(w_{G''inf1}) = G_0 \left( \frac{p_1 \tau_1 w_{G''inf1}}{1 + \tau_1^2 w_{G''inf1}^2} + \frac{p_2 \tau_2 w_{G''inf1}}{1 + \tau_2^2 w_{G''inf1}^2} \right)$$

$$w_{G''inf2} = x_3^{\frac{1}{2}}; G''(w_{G''inf2}) = G_0 \left( \frac{p_1 \tau_1 w_{G''inf2}}{1 + \tau_1^2 w_{G''inf2}^2} + \frac{p_2 \tau_2 w_{G''inf2}}{1 + \tau_2^2 w_{G''inf2}^2} \right)$$

$$w_{G''inf3} = x_4^{\frac{1}{2}}; G''(w_{G''inf3}) = G_0 \left( \frac{p_1 \tau_1 w_{G''inf3}}{1 + \tau_1^2 w_{G''inf3}^2} + \frac{p_2 \tau_2 w_{G''inf3}}{1 + \tau_2^2 w_{G''inf3}^2} \right)$$

Grupo de ecuaciones A.104

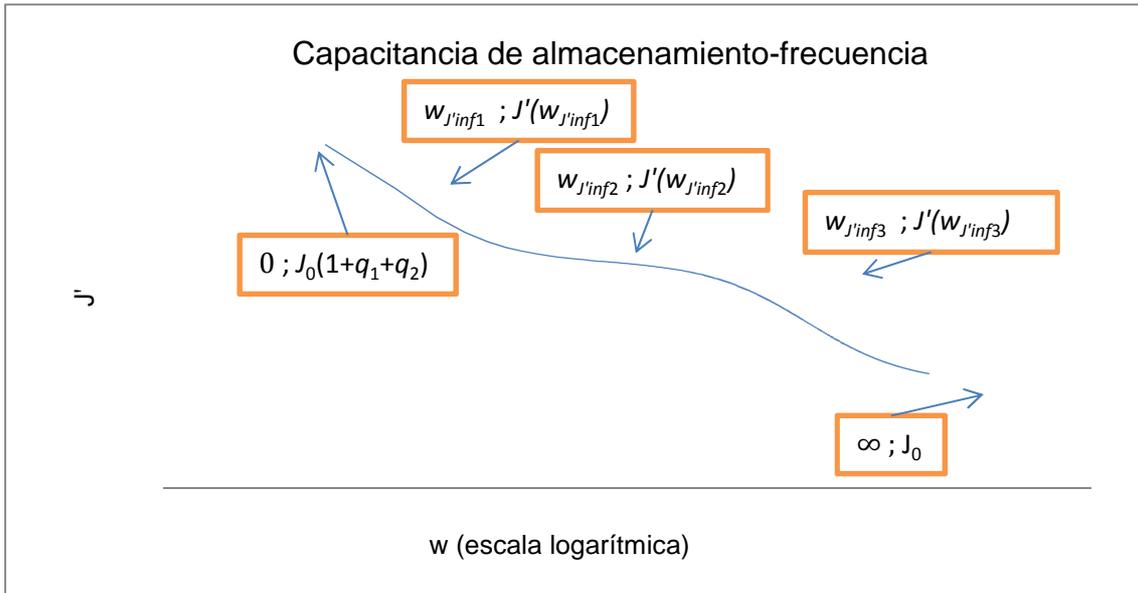


Figura A.46 - Representación gráfica general de la capacitancia de almacenamiento en función de la frecuencia usando las series de Prony con  $n=2$

A partir de la Figura A.46, si se desean hallar los puntos de inflexión de la curva, se debe hacer usando la Ecuación A.158 que se encuentra en el anexo A.12.2.2, igualada a cero. Así, la ecuación final (Ecuación A.105) queda tal como se presenta a continuación:

$$w^8 + \left( \frac{9\lambda_1^4 \lambda_2^4 (q_1 + q_2) - q_1 \lambda_2^4 + q_2 \lambda_1^4}{3\lambda_1^2 \lambda_2^2 (q_1 \lambda_2^2 + q_2 \lambda_1^2)} \right) w^6$$

$$+ \frac{3(q_1 \lambda_1^2 + q_2 \lambda_2^2) - q_1 \lambda_2^2 - q_2 \lambda_1^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 (q_1 \lambda_2^2 + q_2 \lambda_1^2)} w^4$$

$$+ \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(q_1 \lambda_1^2 - q_2 \lambda_2^2)}{\lambda_1^4 \lambda_2^4 (q_1 \lambda_2^2 + q_2 \lambda_1^2)} w^2 - \frac{q_1 \lambda_1^2 + q_2 \lambda_2^2}{3\lambda_1^4 \lambda_2^4 (q_1 \lambda_2^2 + q_2 \lambda_1^2)} = 0$$

Ecuación A.105

A partir de aquí, se hallan los puntos de inflexión de la curva mediante la resolución de una ecuación polinómica de cuarto orden tal como se muestra en el anexo A.13.2. Las raíces se muestran en el Grupo de ecuaciones A.106.

## Anexos

$$w_{J'inf1} = x_2^{\frac{1}{2}} ; J'(w_{J'inf1}) = J_0 \left( 1 + \frac{q_1}{1+\lambda_1^2 w_{J'inf1}^2} + \frac{q_2}{1+\lambda_2^2 w_{J'inf1}^2} \right)$$

$$w_{J'inf2} = x_3^{\frac{1}{2}} ; J'(w_{J'inf2}) = J_0 \left( 1 + \frac{q_1}{1+\lambda_1^2 w_{J'inf2}^2} + \frac{q_2}{1+\lambda_2^2 w_{J'inf2}^2} \right)$$

$$w_{J'inf3} = x_4^{\frac{1}{2}} ; J'(w_{J'inf3}) = J_0 \left( 1 + \frac{q_1}{1+\lambda_1^2 w_{J'inf3}^2} + \frac{q_2}{1+\lambda_2^2 w_{J'inf3}^2} \right)$$

Grupo de ecuaciones A.106

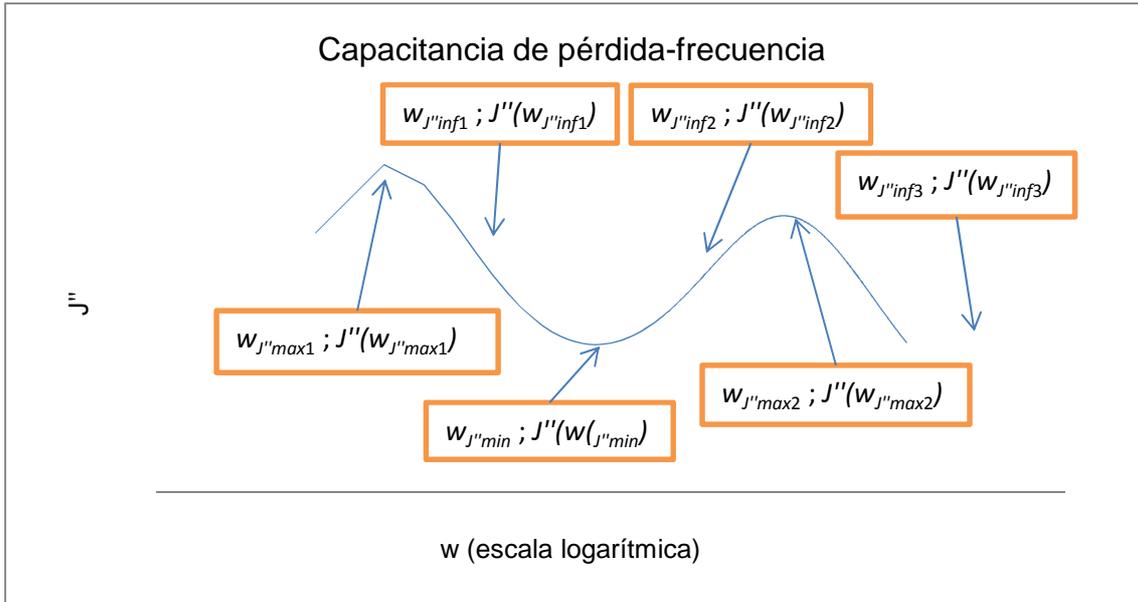


Figura A.47 - Representación gráfica general de la capacitancia de pérdida en función de la frecuencia usando las series de Prony con  $n=2$

A partir de la Figura A.47, si se desean hallar los máximos y mínimos de la curva, se debe hacer usando la Ecuación A.154 que se encuentra en el anexo A.12.2.1, igualada a cero. Así, la ecuación final (Ecuación A.107) queda tal como se presenta a continuación:

$$w^6 + \frac{q_1 \lambda_1 \lambda_2^2 (2\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + q_2 \lambda_2 \lambda_1^2 (2\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{\lambda_1^3 \lambda_2^3 (q_1 \lambda_2 + q_2 \lambda_1)} w^4$$

$$+ \frac{q_1 \lambda_1 (\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2) + q_2 \lambda_2 (\lambda_2^2 - 2\lambda_1^2)}{\lambda_1^3 \lambda_2^3 (q_1 \lambda_2 + q_2 \lambda_1)} w^2 - \frac{q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2}{\lambda_1^3 \lambda_2^3 (q_1 \lambda_2 + q_2 \lambda_1)} = 0$$

Ecuación A.107

A partir de aquí, se hallan los máximos y mínimos de la curva mediante la resolución de una ecuación polinómica de tercer orden tal como se muestra en el anexo A.13.1. Las raíces se muestran en el Grupo de ecuaciones A.108.

## Anexos

$$w_{J''_{max1}} = x_1^{\frac{1}{2}}; J''(w_{J''_{max1}}) = J_0 \left( \frac{q_1 \lambda_1 w_{J''_{max1}}}{1 + \lambda_1^2 w_{J''_{max1}}^2} + \frac{q_2 \lambda_2 w_{J''_{max1}}}{1 + \lambda_2^2 w_{J''_{max1}}^2} \right)$$

$$w_{J''_{min}} = x_2^{\frac{1}{2}}; J''(w_{J''_{min}}) = J_0 \left( \frac{q_1 \lambda_1 w_{J''_{min}}}{1 + \lambda_1^2 w_{J''_{min}}^2} + \frac{q_2 \lambda_2 w_{J''_{min}}}{1 + \lambda_2^2 w_{J''_{min}}^2} \right)$$

$$w_{J''_{max2}} = x_3^{\frac{1}{2}}; J''(w_{J''_{max2}}) = J_0 \left( \frac{q_1 \lambda_1 w_{J''_{max2}}}{1 + \lambda_1^2 w_{J''_{max2}}^2} + \frac{q_2 \lambda_2 w_{J''_{max2}}}{1 + \lambda_2^2 w_{J''_{max2}}^2} \right)$$

Grupo de ecuaciones A.108

A partir de la Figura A.47, si se desean hallar los puntos de inflexión de la curva, se debe hacer usando la Ecuación A.159 que se encuentra en el anexo A.12.2.2, igualada a cero. Así, la ecuación final (Ecuación A.109) queda tal como se presenta a continuación:

$$w^8 + \frac{3((\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(q_1 \lambda_2 - q_2 \lambda_1))}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 (q_1 \lambda_2 + q_2 \lambda_1)} w^6 + \frac{3((q_1 \lambda_1^3 + q_2 \lambda_2^3) - 3\lambda_1 \lambda_2 (q_1 \lambda_2 + q_2 \lambda_1))}{\lambda_1^3 \lambda_2^3 (q_1 \lambda_2 + q_2 \lambda_1)} w^4 + \frac{q_1 \lambda_1^5 + q_2 \lambda_2^5 - 9\lambda_1^2 \lambda_2^2 (q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2)}{\lambda_1^5 \lambda_2^5 (q_1 \lambda_2 + q_2 \lambda_1)} w^2 - 3 \frac{q_1 \lambda_1^3 + q_2 \lambda_2^3}{\lambda_1^5 \lambda_2^5 (q_1 \lambda_2 + q_2 \lambda_1)} = 0$$

Ecuación A.109

A partir de aquí, se hallan los puntos de inflexión de la curva mediante la resolución de una ecuación polinómica de cuarto orden tal como se muestra en el anexo A.13.2. Las raíces se muestran en el Grupo de ecuaciones A.110.

$$w_{J''_{inf1}} = x_2^{\frac{1}{2}}; J''(w_{J''_{inf1}}) = J_0 \left( \frac{q_1 \lambda_1 w_{J''_{inf1}}}{1 + \lambda_1^2 w_{J''_{inf1}}^2} + \frac{q_2 \lambda_2 w_{J''_{inf1}}}{1 + \lambda_2^2 w_{J''_{inf1}}^2} \right)$$

$$w_{J''_{inf2}} = x_3^{\frac{1}{2}}; J''(w_{J''_{inf2}}) = J_0 \left( \frac{q_1 \lambda_1 w_{J''_{inf2}}}{1 + \lambda_1^2 w_{J''_{inf2}}^2} + \frac{q_2 \lambda_2 w_{J''_{inf2}}}{1 + \lambda_2^2 w_{J''_{inf2}}^2} \right)$$

$$w_{J''_{inf3}} = x_4^{\frac{1}{2}}; J''(w_{J''_{inf3}}) = J_0 \left( \frac{q_1 \lambda_1 w_{J''_{inf3}}}{1 + \lambda_1^2 w_{J''_{inf3}}^2} + \frac{q_2 \lambda_2 w_{J''_{inf3}}}{1 + \lambda_2^2 w_{J''_{inf3}}^2} \right)$$

Grupo de ecuaciones A.110

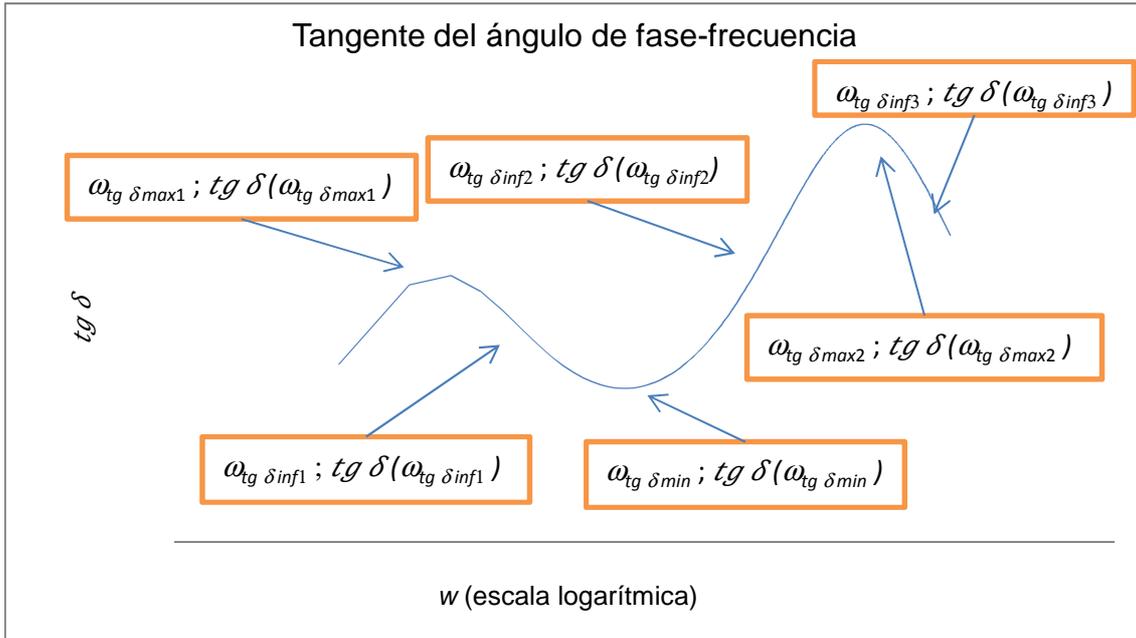


Figura A.48 - Representación gráfica general de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia usando las series de Prony con  $n=2$

A partir de la Figura A.48, si se desean hallar los máximos y mínimos de la curva, se debe hacer usando la Ecuación A.155 que se encuentra en el anexo A.12.2.1, igualada a cero. Así, la ecuación final (Ecuación A.111) queda tal como se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
 & w^6 + \frac{p_1\tau_1\tau_2^2(2\tau_1^2 - \tau_2^2(1 - p_1)) + p_2\tau_2\tau_1^2(2\tau_2^2 - \tau_1^2(1 - p_2)) + p_1p_2\tau_1^2\tau_2^2(\tau_1 + \tau_2)}{\tau_1^3\tau_2^3(p_1\tau_2 + p_2\tau_1)} w^4 \\
 & + \frac{p_1\tau_1^3 + p_2\tau_2^3 - 2\tau_1\tau_2(p_1\tau_2(1 - p_1) + p_2\tau_1(1 - p_2)) + p_1p_2(\tau_1^2(3\tau_2 - \tau_1) + \tau_2^2(3\tau_1 - \tau_2))}{\tau_1^3\tau_2^3(p_1\tau_2 + p_2\tau_1)} w^2 \\
 & + \frac{p_1p_2(\tau_1 + \tau_2) - p_1\tau_1(1 - p_1) - p_2\tau_2(1 - p_2)}{\tau_1^3\tau_2^3(p_1\tau_2 + p_2\tau_1)} = 0
 \end{aligned}$$

Ecuación A.111

A partir de aquí, se hallan los máximos y mínimos de la curva mediante la resolución de una ecuación polinómica de tercer orden tal como se muestra en el anexo A.13.1. Las raíces se muestran en el Grupo de ecuaciones A.112.

## Anexos

$$\begin{aligned}
 w_{tg\delta \max 1} = x_1^{\frac{1}{2}}; \quad tg\delta(w_{tg\delta \max 1}) &= \left( \frac{\frac{p_1 \tau_1 w_{tg\delta \max 1}}{1 + \tau_1^2 w_{tg\delta \max 1}^2} + \frac{p_2 \tau_2 w_{tg\delta \max 1}}{1 + \tau_2^2 w_{tg\delta \max 1}^2}}{1 - \frac{p_1}{1 + \tau_1^2 w_{tg\delta \max 1}^2} - \frac{p_2}{1 + \tau_2^2 w_{tg\delta \max 1}^2}} \right) \\
 w_{tg\delta \min} = x_2^{\frac{1}{2}}; \quad tg\delta(w_{tg\delta \min}) &= \left( \frac{\frac{p_1 \tau_1 w_{tg\delta \min}}{1 + \tau_1^2 w_{tg\delta \min}^2} + \frac{p_2 \tau_2 w_{tg\delta \min}}{1 + \tau_2^2 w_{tg\delta \min}^2}}{1 - \frac{p_1}{1 + \tau_1^2 w_{tg\delta \min}^2} - \frac{p_2}{1 + \tau_2^2 w_{tg\delta \min}^2}} \right) \\
 w_{tg\delta \max 2} = x_3^{\frac{1}{2}}; \quad tg\delta(w_{tg\delta \max 2}) &= \left( \frac{\frac{p_1 \tau_1 w_{tg\delta \max 2}}{1 + \tau_1^2 w_{tg\delta \max 2}^2} + \frac{p_2 \tau_2 w_{tg\delta \max 2}}{1 + \tau_2^2 w_{tg\delta \max 2}^2}}{1 - \frac{p_1}{1 + \tau_1^2 w_{tg\delta \max 2}^2} - \frac{p_2}{1 + \tau_2^2 w_{tg\delta \max 2}^2}} \right)
 \end{aligned}$$

Grupo de ecuaciones A.112

A partir de la Figura A.48, si se desean hallar los puntos de inflexión de la curva, se debe hacer usando la Ecuación A.160 que se encuentra en el anexo A.12.2.2, igualada a cero. Así, la ecuación final (Ecuación A.113) queda tal como se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
 &w^8 + \left( \frac{3(\tau_1 \tau_2 (p_1 \tau_1 (1 + p_2) + p_2 \tau_2 (1 + p_1)) - \tau_1^3 p_2 (1 - p_2) - \tau_2^3 p_1 (1 - p_1))}{\tau_1^2 \tau_2^2 (p_1 \tau_2 + p_2 \tau_1)} \right) w^6 \\
 &+ \frac{3(\tau_1^3 p_1 (1 - p_2) + \tau_2^3 p_2 (1 - p_1) + \tau_1 \tau_2 (p_1 \tau_2 (4p_1 + 3p_2 - 3) + p_2 \tau_1 (4p_2 + 3p_1 - 3)))}{\tau_1^3 \tau_2^3 (p_1 \tau_2 + p_2 \tau_1)} w^4 \\
 &+ \left( \frac{\tau_1^5 p_1 (1 - p_2)^2 + \tau_2^5 p_2 (1 - p_1)^2 + p_1 p_2 \tau_1 \tau_2 (\tau_1^3 (1 - p_2) + \tau_2^3 (1 - p_1))}{\tau_1^5 \tau_2^5 (p_1 \tau_2 + p_2 \tau_1)} \right. \\
 &+ \left. \frac{\tau_1^2 \tau_2^2 (p_1 \tau_1 (p_2 (10 + p_1 - p_2) - 9(1 - p_1)) + p_2 \tau_2 (p_1 (10 + p_2 - p_1) - 9(1 - p_2)))}{\tau_1^5 \tau_2^5 (p_1 \tau_2 + p_2 \tau_1)} \right) w^2 \\
 &+ 3 \frac{(p_1 + p_2 - 1)((p_1 \tau_1^3 (1 - p_2) + p_2 \tau_2^3 (1 - p_1)) + p_1 p_2 \tau_1 \tau_2 (\tau_1 + \tau_2))}{\tau_1^5 \tau_2^5 (p_1 \tau_2 + p_2 \tau_1)} = 0
 \end{aligned}$$

Ecuación A.113

A partir de aquí, se hallan los puntos de inflexión de la curva mediante la resolución de una ecuación polinómica de cuarto orden tal como se muestra en el anexo A.13.2. Las raíces se muestran en el Grupo de ecuaciones A.114.

$$w_{tg\delta inf1} = x_2^{\frac{1}{2}} ; tg\delta(w_{tg\delta inf1}) = \left( \frac{\frac{p_1 \tau_1 w_{tg\delta inf1}}{1 + \tau_1^2 w_{tg\delta inf1}^2} + \frac{p_2 \tau_2 w_{tg\delta inf1}}{1 + \tau_2^2 w_{tg\delta inf1}^2}}{1 - \frac{p_1}{1 + \tau_1^2 w_{tg\delta inf1}^2} - \frac{p_2}{1 + \tau_2^2 w_{tg\delta inf1}^2}} \right)$$

$$w_{tg\delta inf2} = x_3^{\frac{1}{2}} ; tg\delta(w_{tg\delta inf2}) = \left( \frac{\frac{p_1 \tau_1 w_{tg\delta inf2}}{1 + \tau_1^2 w_{tg\delta inf2}^2} + \frac{p_2 \tau_2 w_{tg\delta inf2}}{1 + \tau_2^2 w_{tg\delta inf2}^2}}{1 - \frac{p_1}{1 + \tau_1^2 w_{tg\delta inf2}^2} - \frac{p_2}{1 + \tau_2^2 w_{tg\delta inf2}^2}} \right)$$

$$w_{tg\delta inf3} = x_4^{\frac{1}{2}} ; tg\delta(w_{tg\delta inf3}) = \left( \frac{\frac{p_1 \tau_1 w_{tg\delta inf3}}{1 + \tau_1^2 w_{tg\delta inf3}^2} + \frac{p_2 \tau_2 w_{tg\delta inf3}}{1 + \tau_2^2 w_{tg\delta inf3}^2}}{1 - \frac{p_1}{1 + \tau_1^2 w_{tg\delta inf3}^2} - \frac{p_2}{1 + \tau_2^2 w_{tg\delta inf3}^2}} \right)$$

Grupo de ecuaciones A.114



## A.5 Relaciones entre los modelos generalizados de Kelvin-Voigt y de Maxwell y los coeficientes de relajación y de creep

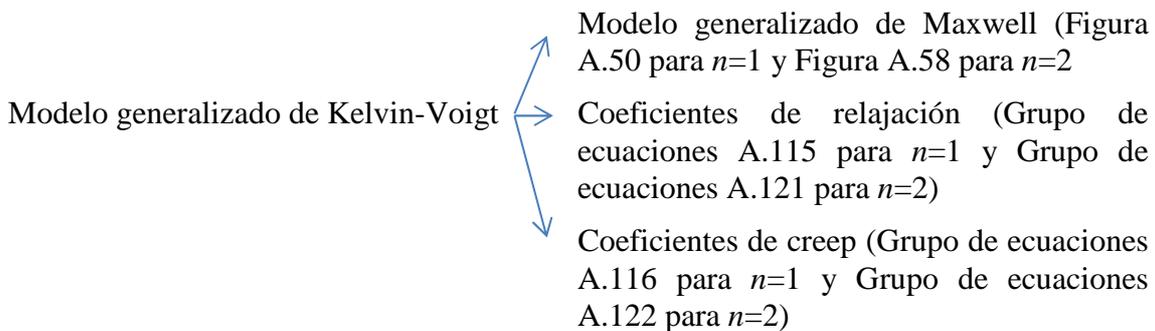
Existe la posibilidad de cambiar el modelo para modelos generalizados de Kelvin-Voigt y Maxwell con  $n=1$  y con  $n=2$ . Además también se pueden hallar los coeficientes de relajación y de creep a partir de las ecuaciones de los módulos y de las capacitancias.

De forma inicial, se presentan cuatro posibles situaciones, dependiendo de los parámetros de entrada.

- 1) Los parámetros de los muelles y de los émbolos para un modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$ ,  $E_{0K}$ ,  $E_{1K}$  y  $\eta_{1K}$ , y para  $n=2$ , añadiendo  $E_{2K}$  y  $\eta_{2K}$  (Figura A.49 para  $n=1$  y Figura A.57 para  $n=2$ )
- 2) Los parámetros de los muelles y de los émbolos para un modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$ ,  $E_{0M}$ ,  $E_{1M}$  y  $\eta_{1M}$ , y para  $n=2$ , añadiendo  $E_{2M}$  y  $\eta_{2M}$  (Figura A.51 para  $n=1$  y Figura A.59 para  $n=2$ )
- 3) Los coeficientes de relajación para las ecuaciones de los módulos para  $n=1$ ,  $E_0$ ,  $p_1$  y  $\tau_1$ , y para  $n=2$  añadiendo  $p_2$  y  $\tau_2$
- 4) Los coeficientes de creep para las ecuaciones de las capacitancias para  $n=1$ ,  $J_0$ ,  $q_1$  y  $\lambda_1$ , y para  $n=2$  añadiendo  $q_2$  y  $\lambda_2$

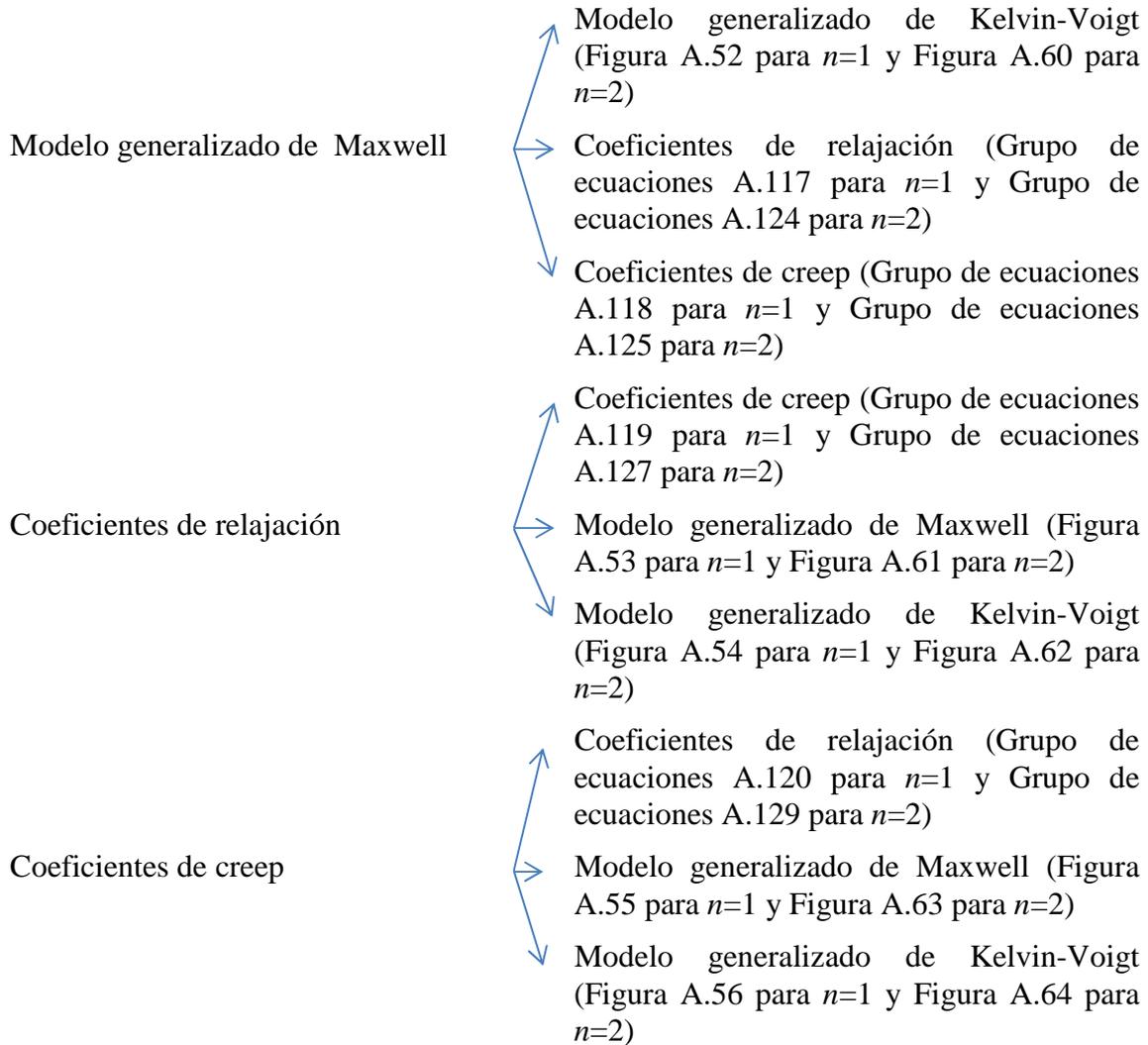
Dado uno de los cuatro casos mencionados, los otros tres puede ser hallados con  $n=1$  o con  $n=2$ .

A continuación se analiza cada una de las cuatro situaciones, mostrando las soluciones para  $n=1$  y para  $n=2$  tal como se presenta en el siguiente esquema:



## Anexos

---



Con  $n=2$ , los coeficientes de ayuda son necesarios para simplificar las expresiones finales con el Grupo de ecuaciones A.123 para el modelo generalizado de Kelvin-Voigt, con el Grupo de ecuaciones A.126 para el modelo generalizado de Maxwell, con el Grupo de ecuaciones A.128 para los coeficientes de relajación y con el Grupo de ecuaciones A.130 para los coeficientes de creep.

**A.5.1 Relaciones con  $n=1$**

**A.5.1.1 Relaciones a partir del modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$**

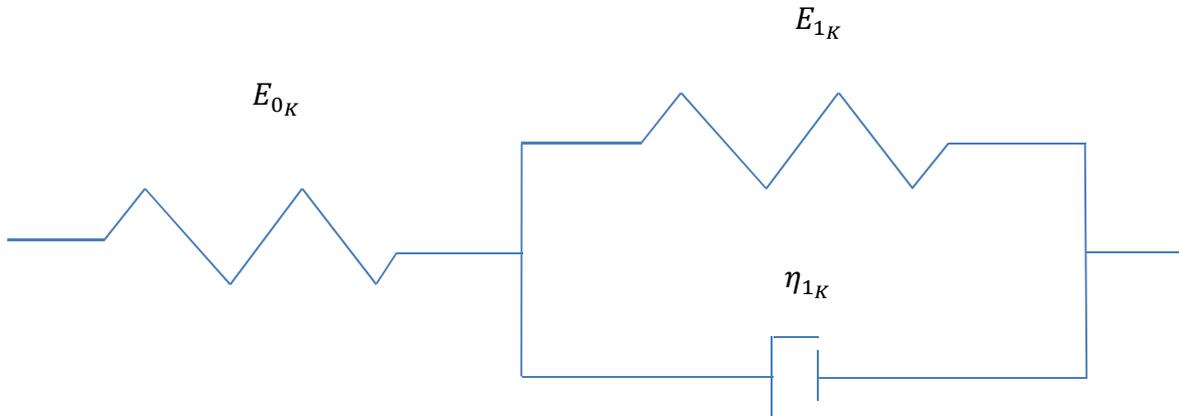


Figura A.49 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$

Modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$  ↓

$$E_{\infty M} = \frac{E_{0K}E_{1K}}{E_{0K}+E_{1K}}$$

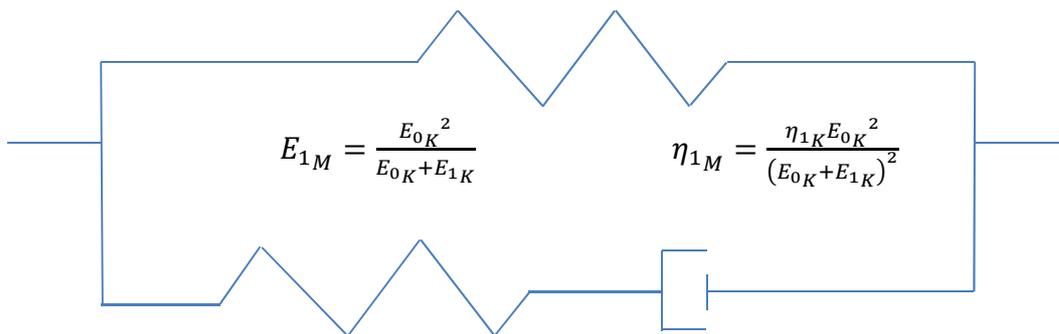


Figura A.50 - Resolución del modelo generalizado de Maxwell a partir del modelo generalizado de Kelvin-Voigt ( $n=1$ )

Coeficientes de relajación para  $n=1$  ↓

$$Y_0 = E_{0K} ; p_1 = \frac{E_{0K}}{E_{0K}+E_{1K}} ; \tau_1 = \frac{\eta_{1K}}{E_{0K}+E_{1K}}$$

Grupo de ecuaciones A.115

Coeficientes de creep para  $n=1$  ↓

$$J_0 = \frac{1}{E_{0K}} ; q_1 = \frac{E_{0K}}{E_{1K}} ; \lambda_1 = \frac{\eta_{1K}}{E_{1K}}$$

Grupo de ecuaciones A.116

A.5.1.2 Relaciones a partir del modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$

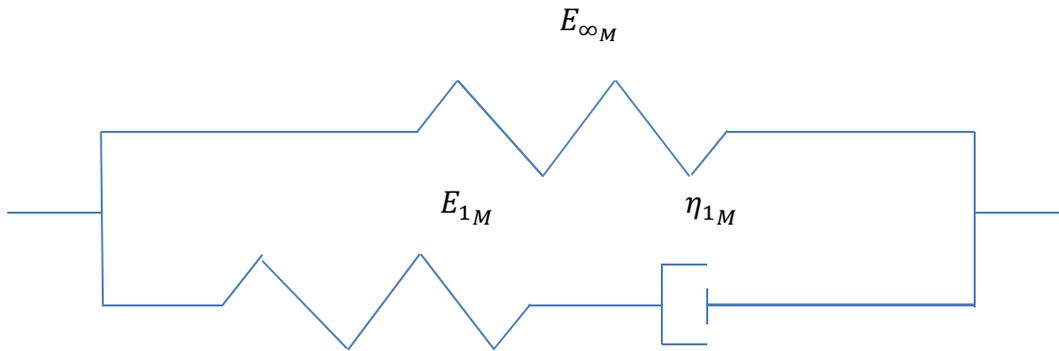


Figura A.51 - Modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$



Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$

$$E_{1K} = \frac{E_{\infty M}}{E_{1M}} (E_{1M} + E_{\infty M})$$

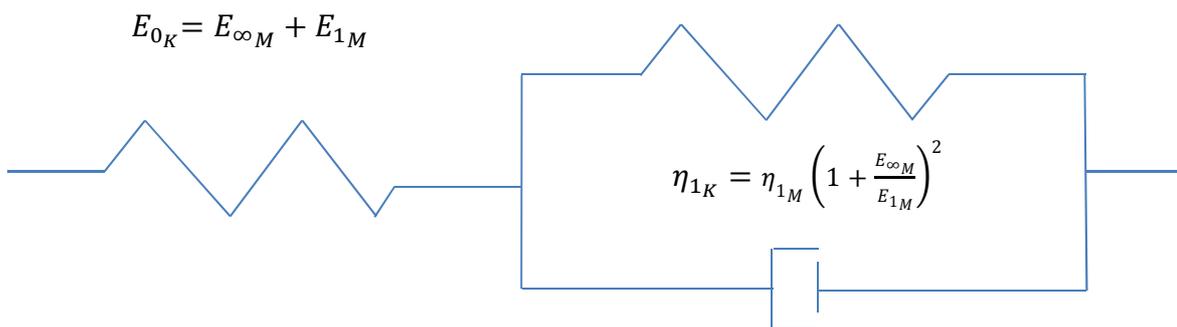


Figura A.52 - Resolución del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir del modelo generalizado de Maxwell ( $n=1$ )



Coefficientes de relajación para  $n=1$

$$Y_0 = E_{\infty M} + E_{1M}; p_1 = \frac{E_{1M}}{E_{\infty M} + E_{1M}}; \tau_1 = \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}}$$

Grupo de ecuaciones A.117



Coefficientes de creep para  $n=1$

$$J_0 = \frac{1}{E_{\infty M} + E_{1M}}; q_1 = \frac{E_{1M}}{E_{\infty M}}; \lambda_1 = \eta_{1M} \left( \frac{1}{E_{\infty M}} + \frac{1}{E_{1M}} \right)$$

Grupo de ecuaciones A.118

**A.5.1.3 Relaciones a partir de los coeficientes de relajación para  $n=1$**

$$(Y_0, p_1, \tau_1)$$

Coeficientes de creep para  $n=1$

$$J_0 = \frac{1}{Y_0}; q_1 = \frac{p_1}{1-p_1}; \lambda_1 = \frac{\tau_1}{1-p_1}$$

Grupo de ecuaciones A.119

Modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$

$$E_{\infty M} = Y_0(1 - p_1)$$

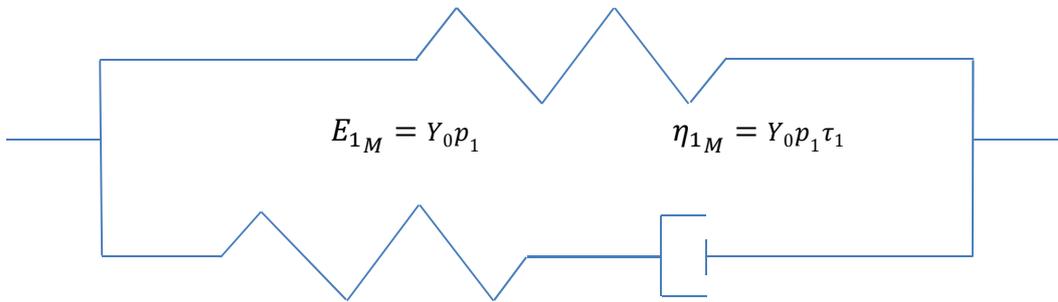


Figura A.53 - Resolución del modelo generalizado de Maxwell a partir de los coeficientes de relajación ( $n=1$ )

Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$

$$E_{1K} = Y_0 \frac{1 - p_1}{p_1}$$

$$E_{0K} = Y_0$$

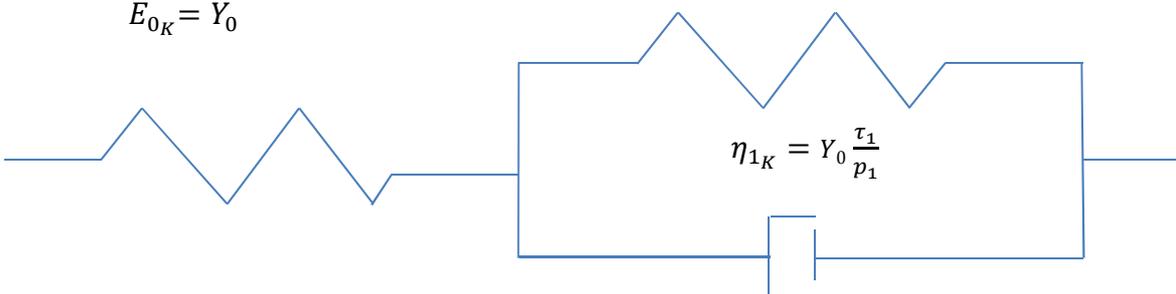


Figura A.54 - Resolución del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir de los coeficientes de relajación ( $n=1$ )

**A.5.1.4 Relaciones a partir de los coeficientes de creep para  $n=1$**

$$(J_0, q_1, \lambda_1)$$

Coeficientes de relajación para  $n=1$

$$Y_0 = \frac{1}{J_0}; p_1 = \frac{q_1}{1+q_1}; \tau_1 = \frac{\lambda_1}{1+q_1}$$

Grupo de ecuaciones A.120

Modelo generalizado de Maxwell con  $n=1$

$$E_{\infty M} = \frac{1}{J_0(1+q_1)}$$

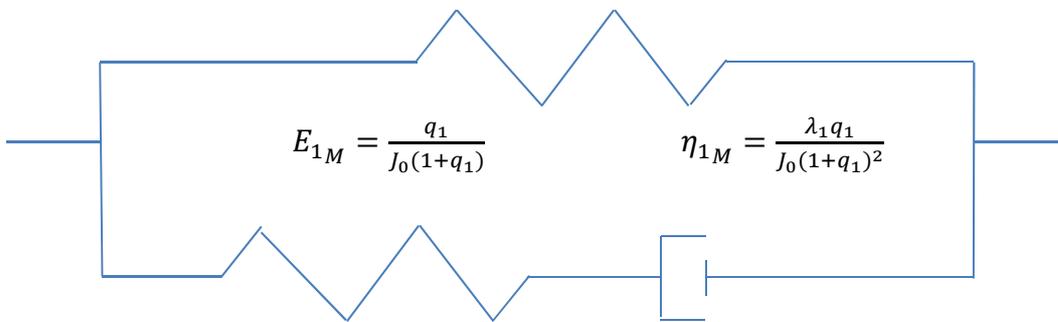


Figura A.55 - Resolución del modelo generalizado de Maxwell a partir de los coeficientes de creep ( $n=1$ )

Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=1$

$$E_{1K} = \frac{1}{J_0 q_1}$$

$$E_{0K} = \frac{1}{J_0}$$

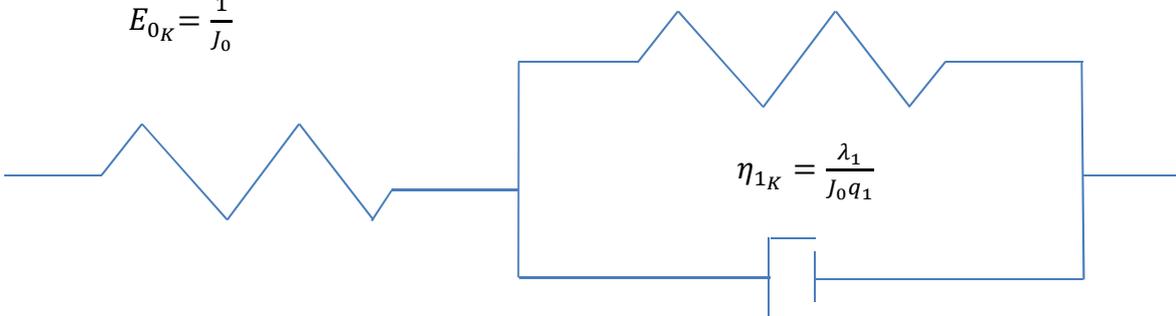


Figura A.56 - Resolución del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir de los coeficientes de creep ( $n=1$ )

**A.5.2 Relaciones con  $n=2$**

**A.5.2.1 Relaciones a partir del modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$**

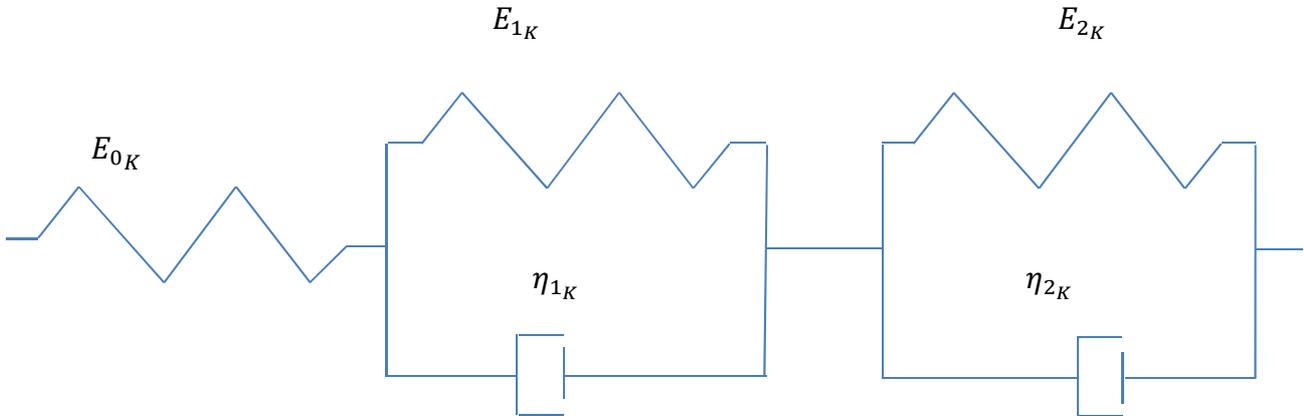


Figura A.57 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$

Modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$

$$E_{\infty M} = C_{1K}$$

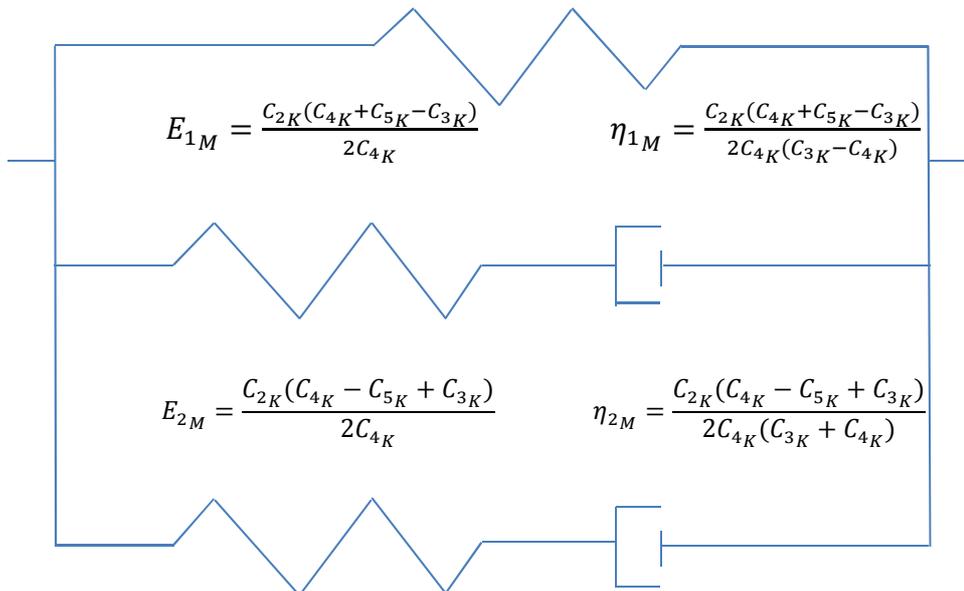


Figura A.58 - Resolución del modelo generalizado de Maxwell a partir del modelo generalizado de Kelvin-Voigt ( $n=2$ )

## Anexos

Coefficientes de relajación para  $n=2$

$$Y_0 = C_{1K} + C_{2K}; p_1 = \frac{C_{2K}(C_{4K} + C_{5K} - C_{3K})}{2C_{4K}(C_{1K} + C_{2K})}; p_2 = \frac{C_{2K}(C_{4K} - C_{5K} + C_{3K})}{2C_{4K}(C_{1K} + C_{2K})}; \tau_1 = \frac{1}{C_{3K} - C_{4K}};$$

$$\tau_2 = \frac{1}{C_{3K} + C_{4K}}$$

Grupo de ecuaciones A.121



Coefficientes de creep para  $n=2$

$$J_0 = \frac{1}{E_{0K}}; q_1 = \frac{E_{0K}}{E_{1K}}; q_2 = \frac{E_{0K}}{E_{2K}}; \lambda_1 = \frac{\eta_{1K}}{E_{1K}}; \lambda_2 = \frac{\eta_{2K}}{E_{2K}}$$

Grupo de ecuaciones A.122

Coefficientes de ayuda

$$C_{1K} = \frac{E_{0K}E_{1K}E_{2K}}{E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K}}$$

$$C_{2K} = \frac{E_{0K}^2(E_{1K} + E_{2K})}{E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K}}$$

$$C_{3K} = \frac{E_{0K}(\eta_{1K} + \eta_{2K}) + E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K}}{2\eta_{1K}\eta_{2K}}$$

$$C_{4K} = \frac{\sqrt{(E_{0K}(\eta_{1K} + \eta_{2K}) + E_{1K}\eta_{2K} + E_{2K}\eta_{1K})^2 - 4\eta_{1K}\eta_{2K}(E_{0K}E_{1K} + E_{0K}E_{2K} + E_{1K}E_{2K})}}{2\eta_{1K}\eta_{2K}}$$

$$C_{5K} = \frac{E_{1K}^2\eta_{2K} + E_{2K}^2\eta_{1K}}{\eta_{1K}\eta_{2K}(E_{1K} + E_{2K})}$$

Grupo de ecuaciones A.123

A.5.2.2 Relaciones a partir del modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$

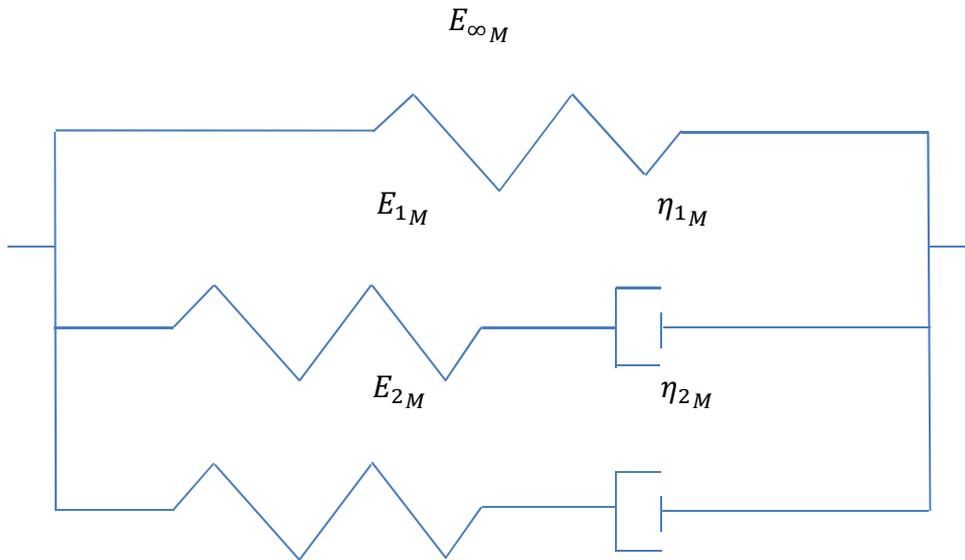


Figura A.59 - Modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$



Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$

$$E_{1K} = -\frac{2C_{4M}}{C_{2M}(C_{4M} + C_{5M} - C_{3M})} \quad E_{2K} = -\frac{2C_{4M}}{C_{2M}(C_{4M} - C_{5M} + C_{3M})}$$

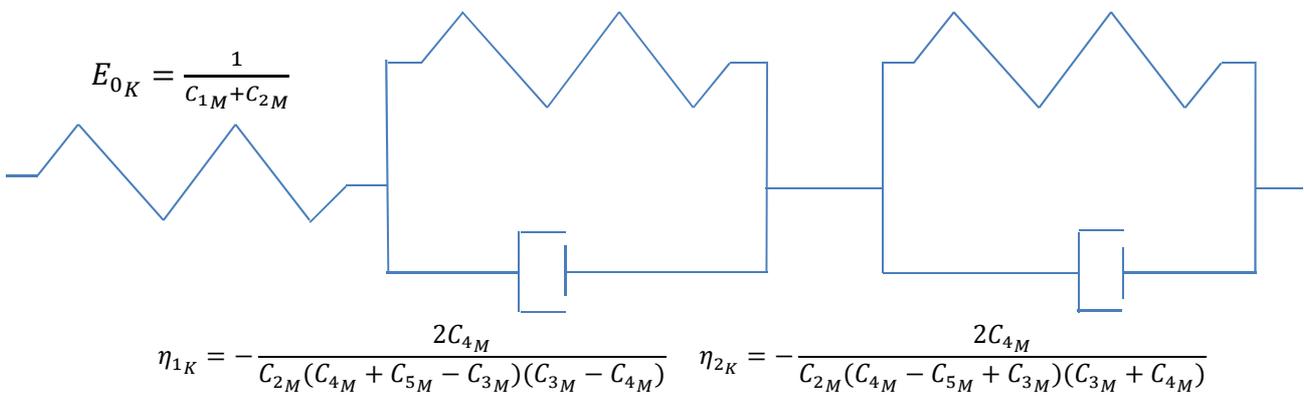


Figura A.60 - Resolución del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir del modelo generalizado de Maxwell ( $n=2$ )



## Anexos

Coefficientes de relajación para  $n=2$

$$Y_0 = E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}; p_1 = \frac{E_{1M}}{E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}}; p_2 = \frac{E_{2M}}{E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M}}; \tau_1 = \frac{\eta_{1M}}{E_{1M}};$$

$$\tau_2 = \frac{\eta_{2M}}{E_{2M}}$$

Grupo de ecuaciones A.124



Coefficientes de creep para  $n=2$

$$J_0 = C_{1M} + C_{2M}; q_1 = \frac{-C_{2M}(C_{4M} + C_{5M} - C_{3M})}{2C_{4M}(C_{1M} + C_{2M})}; q_2 = \frac{-C_{2M}(C_{4M} - C_{5M} + C_{3M})}{2C_{4M}(C_{1M} + C_{2M})};$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{C_{3M} - C_{4M}}; \lambda_2 = \frac{1}{C_{3M} + C_{4M}}$$

Grupo de ecuaciones A.125

Coefficientes de ayuda

$$C_{1M} = \frac{1}{E_{\infty M}}$$

$$C_{2M} = -\frac{E_{1M} + E_{2M}}{E_{\infty M}(E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M})}$$

$$C_{3M} = \frac{E_{\infty M}(E_{1M}\eta_{2M} + E_{2M}\eta_{1M}) + E_{1M}E_{2M}(\eta_{1M} + \eta_{2M})}{2\eta_{1M}\eta_{2M}(E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M})}$$

$$C_{4M} = \frac{\sqrt{(E_{\infty M}(E_{1M}\eta_{2M} + E_{2M}\eta_{1M}) + E_{1M}E_{2M}(\eta_{1M} + \eta_{2M}))^2 - 4E_{\infty M}E_{1M}E_{2M}\eta_{1M}\eta_{2M}(E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M})}}{2\eta_{1M}\eta_{2M}(E_{\infty M} + E_{1M} + E_{2M})}$$

$$C_{5M} = \frac{E_{1M}E_{2M}(\eta_{1M} + \eta_{2M})}{\eta_{1M}\eta_{2M}(E_{1M} + E_{2M})}$$

Grupo de ecuaciones A.126

**A.5.2.3 Relaciones a partir de los coeficientes de relajación para  $n=2$**

$$(Y_0, p_1, \tau_1, p_2, \tau_2)$$



Coeficientes de creep para  $n=2$

$$J_0 = C_{1M} + C_{2M}; q_1 = \frac{-C_{2M}(C_{4M} + C_{5M} - C_{3M})}{2C_{4M}(C_{1M} + C_{2M})}; q_2 = \frac{-C_{2M}(C_{4M} - C_{5M} + C_{3M})}{2C_{4M}(C_{1M} + C_{2M})}; \lambda_1 = \frac{1}{C_{3M} - C_{4M}};$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{C_{3M} + C_{4M}}$$

Grupo de ecuaciones A.127



Modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$

$$E_{\infty M} = Y_0(1 - p_1 - p_2)$$

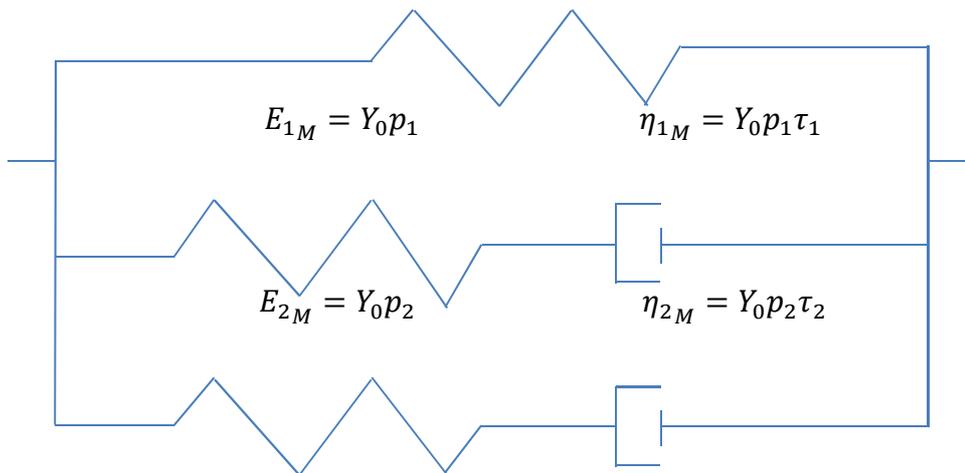


Figura A.61 - Resolución del modelo generalizado de Maxwell a partir de los coeficientes de relajación ( $n=2$ )



## Anexos

Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$

$$E_{1K} = -\frac{2C_{4M}}{C_{2M}(C_{4M}+C_{5M}-C_{3M})}$$

$$E_{2K} = -\frac{2C_{4M}}{C_{2M}(C_{4M}-C_{5M}+C_{3M})}$$

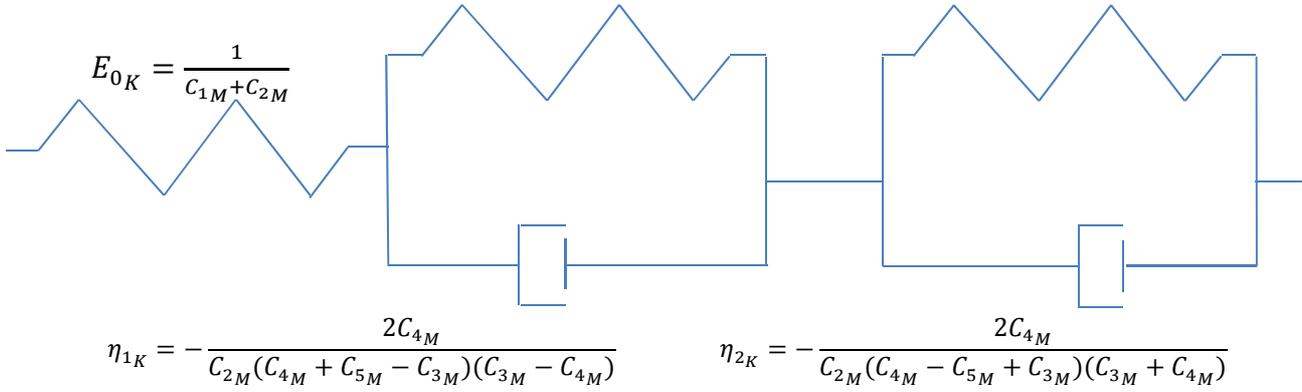


Figura A.62 - Resolución del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir de los coeficientes de relajación ( $n=2$ )

Coefficientes de ayuda

$$C_{1M} = \frac{1}{Y_0(1-p_1-p_2)}$$

$$C_{2M} = -\frac{p_1+p_2}{Y_0(1-p_1-p_2)}$$

$$C_{3M} = \frac{\tau_1(1-p_2) + \tau_2(1-p_1)}{2\tau_1\tau_2}$$

$$C_{4M} = \frac{\sqrt{(\tau_1(1-p_2) + \tau_2(1-p_1))^2 - 4\tau_1\tau_2(1-p_1-p_2)}}{2\tau_1\tau_2}$$

$$C_{5M} = \frac{p_1\tau_1 + p_2\tau_2}{\tau_1\tau_2(p_1+p_2)}$$

Grupo de ecuaciones A.128

## Anexos

### A.5.2.4 Relaciones a partir de los coeficientes de creep para $n=2$

$$(J_0, q_1, \lambda_1, q_2, \lambda_2)$$



Coeficientes de relajación para  $n=2$

$$Y_0 = C_{1K} + C_{2K}; p_1 = \frac{C_{2K}(C_{4K} + C_{5K} - C_{3K})}{2C_{4K}(C_{1K} + C_{2K})}; p_2 = \frac{C_{2K}(C_{4K} - C_{5K} + C_{3K})}{2C_{4K}(C_{1K} + C_{2K})}; \tau_1 = \frac{1}{C_{3K} - C_{4K}};$$

$$\tau_2 = \frac{1}{C_{3K} + C_{4K}}$$

Grupo de ecuaciones A.129



Modelo generalizado de Maxwell con  $n=2$

$$E_{\infty M} = C_{1K}$$

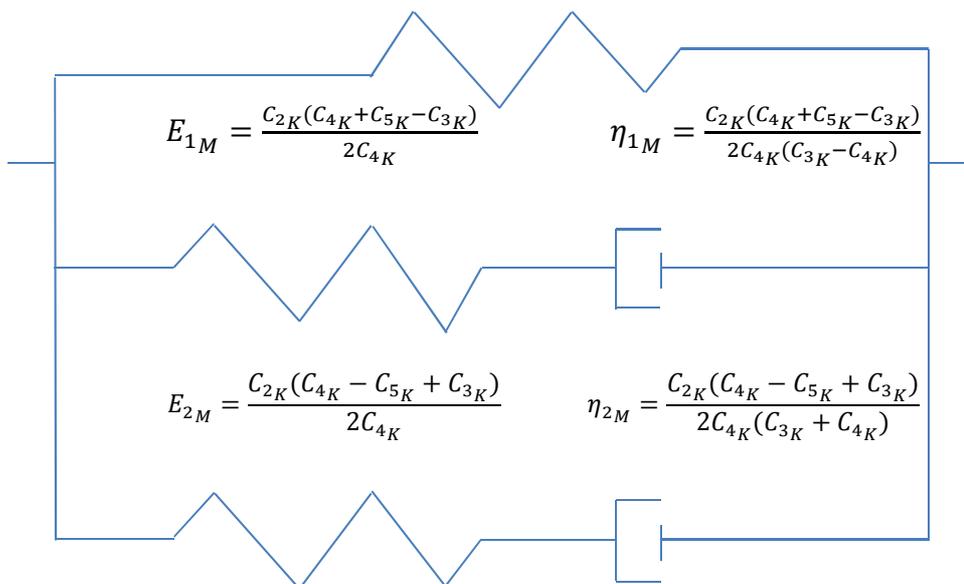


Figura A.63 - Resolución del modelo generalizado de Maxwell a partir de los coeficientes de creep ( $n=2$ )



## Anexos

Modelo generalizado de Kelvin-Voigt con  $n=2$

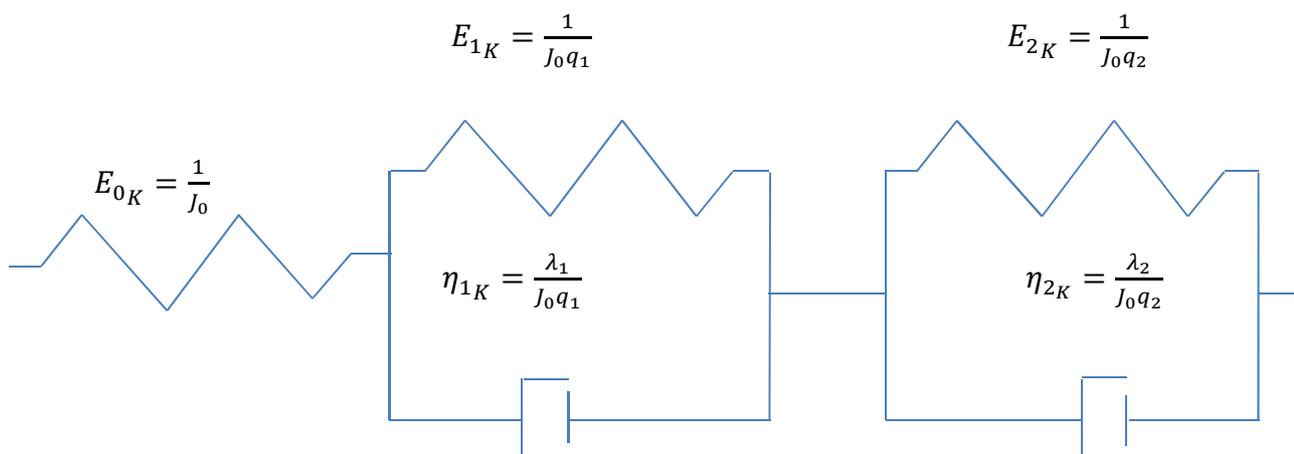


Figura A.64 - Resolución del modelo generalizado de Kelvin-Voigt a partir de los coeficientes de creep ( $n=2$ )

Coefficientes de ayuda

$$C_{1K} = \frac{1}{J_0(1 + q_1 + q_2)}$$

$$C_{2K} = \frac{q_1 + q_2}{J_0(1 + q_1 + q_2)}$$

$$C_{3K} = \frac{\lambda_1(1 + q_2) + \lambda_2(1 + q_1)}{2\lambda_1\lambda_2}$$

$$C_{4K} = \frac{\sqrt{(\lambda_1(1 + q_2) + \lambda_2(1 + q_1))^2 - 4\lambda_1\lambda_2(1 + q_1 + q_2)}}{2\lambda_1\lambda_2}$$

$$C_{5K} = \frac{q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2(q_1 + q_2)}$$

Grupo de ecuaciones A.130

## A.6 Tiempo de relajación y tiempo de retardo

### A.6.1 Tiempo de relajación

El tiempo de relajación es el tiempo necesario para que la tensión caiga hasta el 63.2% de su valor inicial cuando la deformación se mantiene constante a lo largo del tiempo. El porcentaje de caída puede hallarse en este tiempo de relajación (Ecuación A.134), mediante la Ecuación A.131, la Ecuación A.132 y la Ecuación A.133. Para ello se usa la tensión del Grupo de ecuaciones A.140 hallada en el anexo A.9.1 y el tiempo se reemplaza por  $t_1$ , tiempo en el que empieza la caída; por  $t_1 + \tau_1$ , el tiempo de relajación; y a tiempo infinito, respectivamente.

$$\sigma_{t_1} = \frac{Y_0 \varepsilon_1}{t_1} \left( t_1 (1 - p_1) + p_1 \tau_1 \left( 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} \right) \right)$$

Ecuación A.131

$$\sigma_{t_1 + \tau_1} = \frac{Y_0 \varepsilon_1}{t_1} \left( t_1 (1 - p_1) + p_1 \tau_1 \left( e^{-1} - e^{-\frac{t_1 + \tau_1}{\tau_1}} \right) \right)$$

Ecuación A.132

$$\sigma_{\infty} = Y_0 \varepsilon_1 (1 - p_1)$$

Ecuación A.133

$$\text{Caída} = \frac{\sigma_{t_1} - \sigma_{t_1 + \tau_1}}{\sigma_{t_1} - \sigma_{\infty}} = 1 - e^{-1} = 63.2 \%$$

Ecuación A.134

### A.6.2 Tiempo de retardo

El tiempo de retardo es el tiempo necesario para que la deformación suba hasta el 63.2% de su valor inicial cuando la tensión se mantiene constante a lo largo del tiempo. El porcentaje de subida puede hallarse en este tiempo de retardo (Ecuación A.138), mediante la Ecuación A.135, la Ecuación A.136 y la Ecuación A.137. Para ello se usa la tensión del Grupo de ecuaciones A.144 hallada en el anexo A.9.2 y el tiempo se reemplaza por  $t_1$ , tiempo en el que empieza la subida; por  $t_1 + \tau_1$ , el tiempo de retardo; y a tiempo infinito, respectivamente.

$$\varepsilon_{t_1} = \frac{J_0 \sigma_1}{t_1} \left( t_1 (1 + q_1) - q_1 \lambda_1 \left( 1 - e^{-\frac{t_1}{\lambda_1}} \right) \right)$$

Ecuación A.135

$$\varepsilon_{t_1 + \tau_1} = \frac{J_0 \sigma_1}{t_1} \left( t_1 (1 + q_1) - q_1 \lambda_1 \left( e^{-1} - e^{-\frac{t_1 + \lambda_1}{\lambda_1}} \right) \right)$$

Ecuación A.136

## Anexos

---

$$\varepsilon_{\infty} = J_0 \sigma_1 (1 + q_1)$$

Ecuación A.137

$$Subida = \frac{\varepsilon_{t_1 + \tau_1} - \varepsilon_{t_1}}{\varepsilon_{\infty} - \varepsilon_{t_1}} = 1 - e^{-1} = 63.2 \%$$

Ecuación A.138

### **A.7 Propiedades dinamomecánicas en la flexión a tres puntos - ASTM D5023-07**

#### **Significado y uso**

Este método de ensayo proporciona un medio simple de caracterizar el comportamiento termomecánico de composiciones plásticas utilizando cantidades muy pequeñas de material. Los datos obtenidos se pueden utilizar para el control de calidad, la investigación y el desarrollo, así como el establecimiento de las condiciones de procesado óptimas.

El ensayo dinamomecánico proporciona un medio sensible para determinar las características termomecánicas mediante la medición de módulos elásticos y de pérdida en función de la frecuencia, de la temperatura o del tiempo. Las representaciones gráficas de módulos y tangentes del ángulo de fase de un material en función de estas variables pueden ser útiles para proporcionar una información de las propiedades funcionales, de la eficacia de la curación (sistema de resina termoendurecible), y del comportamiento de amortiguación en condiciones especificadas.

Este método de ensayo puede usarse para evaluar:

- 1) Módulo en función de la temperatura
- 2) Módulo en función de la frecuencia
- 3) Los efectos del tratamiento de procesado
- 4) Las propiedades del comportamiento de la resina, incluyendo el curado y la amortiguación
- 5) Los efectos de los tipos de sustrato y la orientación (fabricación) en el módulo
- 6) Los efectos de los aditivos de formulación que podrían afectar el procesado

Toda la preparación de probetas de ensayo, acondicionamiento, dimensiones o parámetros de prueba o una combinación de éstos, desarrollada en la especificación de materiales ASTM, prevalece sobre las mencionadas en este método de ensayo. Si no hay especificaciones de materiales ASTM pertinentes, se deben aplicar las condiciones por defecto<sup>138</sup>.

#### **Alcance**

- 1) Este método de ensayo describe el uso de la instrumentación dinamomecánica para determinar e informar de las propiedades viscoelásticas de las resinas termoplásticas y termoendurecibles y de los sistemas de material compuesto en forma de barras rectangulares moldeadas directamente o cortadas de las hojas, placas o formas moldeadas. Los datos generados, usando técnicas de flexión en tres puntos, pueden ser utilizados para identificar las propiedades termomecánicas de un material plástico o de composiciones usando una variedad de instrumentos dinamomecánicos.
- 2) Este método de ensayo está destinado a proporcionar medios para determinar las propiedades viscoelásticas de una amplia variedad de materiales plásticos utilizando técnicas sin resonancia y de vibración forzada de acuerdo con la práctica D4065. Representaciones gráficas del módulo elástico (o almacenamiento), del de pérdida (o viscoso); del complejo y de la tangente del ángulo de fase en función de la frecuencia, del tiempo o de la temperatura son

## Anexos

---

indicativos de transiciones significativas en el rendimiento termomecánico de sistemas de materiales poliméricos.

- 3) Este método de ensayo es válido para una amplia gama de frecuencias, por lo general de 0,01 a 100 Hz.
- 4) Las discrepancias aparentes pueden surgir en resultados obtenidos bajo diferentes condiciones experimentales. Estas aparentes diferencias con los resultados observados en otro estudio por lo general se pueden conciliar, sin cambiar los datos observados, al informar en su totalidad (como se describe en este método de ensayo) las condiciones en las que se obtuvieron los datos.
- 5) Debido a la instrumentación, los datos generados tienen por objeto indicar los valores de las propiedades de forma relativa y no necesariamente absoluta.
- 6) Los datos de prueba obtenidos por este método de ensayo son relevantes y apropiados para su uso en el diseño de ingeniería.
- 7) Los valores indicados en unidades del sistema internacional deben ser considerados como los valores estándar. Los valores entre paréntesis sirven sólo como información.

### **Normas ASTM**

D618: Prácticas para plásticos acondicionados para las pruebas

D4000: Sistema de clasificación para la especificación de los materiales plásticos

D4065: Práctica para plásticos: propiedades dinamomecánicas: determinación e informe de procedimientos

D4092: Terminología para plásticos: propiedades dinamomecánicas

### A.8 Propiedades de tracción - ISO 527-1, 2

Los ensayos de tracción son llevados a cabo con la elongación de una probeta y la medida de la carga asociada en la probeta tal como se observa en la Figura A.65. Conociendo las dimensiones de la probeta, los datos de carga y deflexión pueden ser traducidos a una curva de tensión-deformación. Una gran variedad de propiedades mecánicas se pueden extraer de dicha curva.

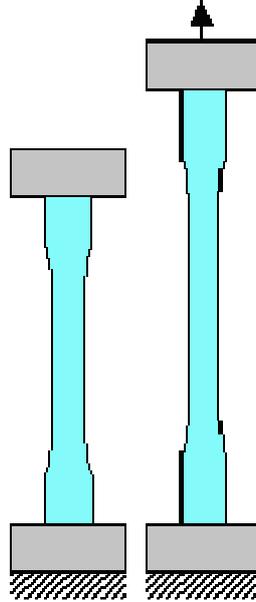


Figura A.65 - Elongación de una probeta mediante un ensayo de tracción

## Anexos

### Test de tracción

En la Tabla A.2 se muestran algunas definiciones de propiedades cuando se aplica un ensayo de tracción.

Tabla A.2 - Definición de las propiedades de un ensayo de tracción

Propiedad	Definición
Deformación de rotura	Deformación correspondiente al punto de rotura.
Deformación nominal de rotura	Deformación a la tensión de rotura.
Deformación de fluencia	Deformación correspondiente al punto de fluencia (un incremento en la deformación no tiene como resultado un incremento en la tensión).
Tensión de rotura	Tensión correspondiente al punto de rotura.
Tensión al 50% de deformación	Tensión al 50% de deformación.
Tensión de fluencia	Tensión correspondiente al punto de fluencia (un incremento en la deformación no tiene como resultado un incremento en la tensión).
Módulo de tracción	Muchas veces denominado módulo de Young o módulo de elasticidad, el módulo de tracción es la pendiente de una línea secante entre 0.05% y 0.25% de la deformación en una curva de tensión-deformación. El módulo de tracción se calcula usando la siguiente formula: $E_T = (\sigma_2 - \sigma_1) / (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ donde $\varepsilon_1$ es la deformación de 0.0005, $\varepsilon_2$ es la deformación de 0.0025, $\sigma_1$ es la tensión a $\varepsilon_1$ , y $\sigma_2$ es la tensión a $\varepsilon_2$ .

Como se define en la Tabla A.2 para el módulo de tracción, en la Figura A.66, se puede apreciar cómo medir el valor del módulo de tracción a partir de la curva tensión-deformación.

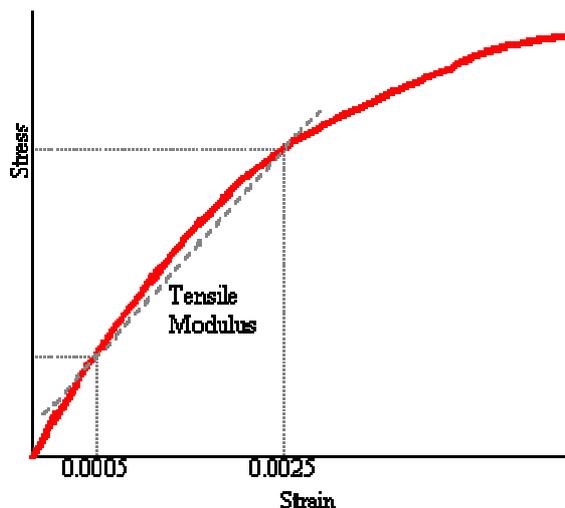


Figura A.66 - Medida del módulo de tracción mediante una curva de tensión-deformación

Según la Figura A.66, la manera de calcular el módulo de tracción es la mostrada en la Ecuación 3.2.

### Tipos de probetas para ensayos

En la Tabla A.3 se observan las características de los diferentes tipos de probetas que se usan en ensayos de tracción.

Tabla A.3 - Diferentes tipos de probetas para ensayos

Resumen de los tests de probetas		
Probeta	Nota	Espesor preferido (mm)
Tipo 1A	Preferidas para probetas moldeadas directamente para usos múltiples	4
Tipo 1B	Preferidas para probetas de ensayo en máquinas	4
Tipo 1BA	Versión escalada de la 1B. Todas las dimensiones excepto el espesor escaladas por 1.2.	>2
Tipo 1BB	Versión escalada de la 1B. Todas las dimensiones excepto el espesor escaladas por 1.5	>2
Tipo 5A	Probeta pequeña	>2
Tipo 5B	Probeta pequeña	>1

## Anexos

---

En la Figura A.67 y en la Figura A.68 se aprecia los diferentes tipos de probetas para los ensayos de tracción.



Figura A.67 - Probetas de tipo 1A, 1B, 1BA y 1BB

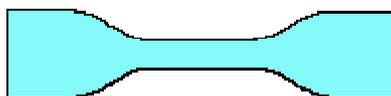


Figura A.68 - Probetas de tipo 5A y 5B

## A.9 Ensayos de relajación de tensiones doble y de creep doble

En este anexo, usando las series de Prony, se muestran las expresiones más importantes para calcular las variables de los ensayos de relajación de tensiones doble y de creep doble.

### A.9.1 Ensayo de relajación de tensiones doble

En el tramo 1, la deformación se incrementa de 0 a  $\varepsilon_1$ .

Durante el tramo 2, la deformación se mantiene constante con un valor de  $\varepsilon_1$ .

En el tramo 3, la deformación decrece de  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$ .

Durante el tramo 4, la deformación se mantiene constante con un valor de  $\varepsilon_2$ .

A partir de ahí se calculan mediante el Grupo de ecuaciones A.139 (tramo 1), el Grupo de ecuaciones A.140 (tramo 2), el Grupo de ecuaciones A.141 (tramo 3) y el Grupo de ecuaciones A.142 (tramo 4), las deformaciones ( $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  y  $\varepsilon_4$ ) y las tensiones ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  y  $\sigma_4$ ).

Tramo 1

$$t_0 \leq t \leq t_1; \varepsilon = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{(t_1 - t_0)}(t - t_0)$$

$$\sigma_1 = \frac{Y_0 \varepsilon_1}{t_1} \left[ t - \sum_{i=1}^n p_i \left( t - \tau_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right) \right]$$

Grupo de ecuaciones A.139

Tramo 2

$$t_1 \leq t \leq t_2; \varepsilon = \varepsilon_1$$

$$\sigma_2 = \frac{Y_0 \varepsilon_1}{t_1} \left[ t_1 - \sum_{i=1}^n p_i \left( t_1 - \tau_i \left( e^{-\frac{t-t_1}{\tau_i}} - e^{-\frac{t_1}{\tau_i}} \right) \right) \right]$$

Grupo de ecuaciones A.140

Tramo 3

$$t_2 \leq t \leq t_3; \varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(t_3 - t_2)}(t - t_2)$$

$$\sigma_3 = Y_0 \left( \frac{\varepsilon_1}{t_1} \left[ t_1 - \sum_{i=1}^n p_i \left( t_1 - \tau_i \left( e^{-\frac{t-t_1}{\tau_i}} - e^{-\frac{t_1}{\tau_i}} \right) \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(t_3 - t_2)} \left[ t - t_2 - \sum_{i=1}^n p_i \left( t - t_2 - \tau_i \left( 1 - e^{-\frac{t-t_2}{\tau_i}} \right) \right) \right] \right)$$

Grupo de ecuaciones A.141

Tramo 4

$$t_3 \leq t \leq t_4; \varepsilon = \varepsilon_2$$

$$\sigma_4 = Y_0 \left( \frac{\varepsilon_1}{t_1} \left[ t_1 - \sum_{i=1}^n p_i \left( t_1 - \tau_i \left( e^{-\frac{t-t_1}{\tau_i}} - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right) \right] \right) + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(t_3 - t_2)} \left[ t_3 - t_2 - \sum_{i=1}^n p_i \left( t_3 - t_2 - \tau_i \left( e^{-\frac{t-t_3}{\tau_i}} - e^{-\frac{t-t_2}{\tau_i}} \right) \right) \right] \right)$$

Grupo de ecuaciones A.142

### A.9.2 Ensayo de creep doble

En el tramo 1, la tensión se incrementa de 0 a  $\sigma_1$ .

Durante el tramo 2, la tensión se mantiene constante con un valor de  $\sigma_1$ .

En el tramo 3, la tensión decrece de  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ .

Durante el tramo 4, la tensión se mantiene constante con un valor de  $\sigma_2$ .

A partir de ahí se calculan mediante el Grupo de ecuaciones A.143 (tramo 1), el Grupo de ecuaciones A.144 (tramo 2), el Grupo de ecuaciones A.145 (tramo 3) y el Grupo de ecuaciones A.146 (tramo 4), las tensiones ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  y  $\sigma_4$ ) y las deformaciones ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  y  $\varepsilon_4$ ).

Tramo 1

$$t_0 \leq t \leq t_1; \sigma = \frac{(\sigma_1 - \sigma_0)}{(t_1 - t_0)} (t - t_0)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{J_0 \sigma_1}{t_1} \left[ t + \sum_{i=1}^n q_i \left( t - \lambda_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \right) \right) \right]$$

Grupo de ecuaciones A.143

Tramo 2

$$t_1 \leq t \leq t_2; \sigma = \sigma_1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{J_0 \sigma_1}{t_1} \left[ t_1 + \sum_{i=1}^n q_i \left( t_1 - \lambda_i \left( e^{-\frac{t-t_1}{\lambda_i}} - e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \right) \right) \right]$$

Grupo de ecuaciones A.144

## Anexos

---

Tramo 3

$$t_2 \leq t \leq t_3; \sigma = \sigma_1 + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{(t_3 - t_2)}(t - t_2)$$

$$\varepsilon_3 = J_0 \left( \frac{\sigma_1}{t_1} \left[ t_1 + \sum_{i=1}^n q_i \left( t_1 - \lambda_i \left( e^{-\frac{t-t_1}{\lambda_i}} - e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \right) \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{(t_3 - t_2)} \left[ t - t_2 + \sum_{i=1}^n q_i \left( t - t_2 - \lambda_i \left( 1 - e^{-\frac{t-t_2}{\lambda_i}} \right) \right) \right] \right)$$

Grupo de ecuaciones A.145

Tramo 4

$$t_3 \leq t \leq t_4; \sigma = \sigma_2$$

$$\varepsilon_4 = J_0 \left( \frac{\sigma_1}{t_1} \left[ t_1 + \sum_{i=1}^n q_i \left( t_1 - \lambda_i \left( e^{-\frac{t-t_1}{\lambda_i}} - e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \right) \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{(t_3 - t_2)} \left[ t_3 - t_2 + \sum_{i=1}^n q_i \left( t_3 - t_2 - \lambda_i \left( e^{-\frac{t-t_3}{\lambda_i}} - e^{-\frac{t-t_2}{\lambda_i}} \right) \right) \right] \right)$$

Grupo de ecuaciones A.146



### **A.10 Ratio de módulos**

En este anexo se muestran dos representaciones gráficas. La primera hace referencia a la variación del módulo de cizalla en función de la temperatura (Figura A.69), mientras que la segunda hace referencia a la variación del módulo de tracción en función de la temperatura (Figura A.70). El material es una muestra seca de PA66-GF50. Estos ensayos son cortesía de Faurecia Interior Systems España, Abrera.

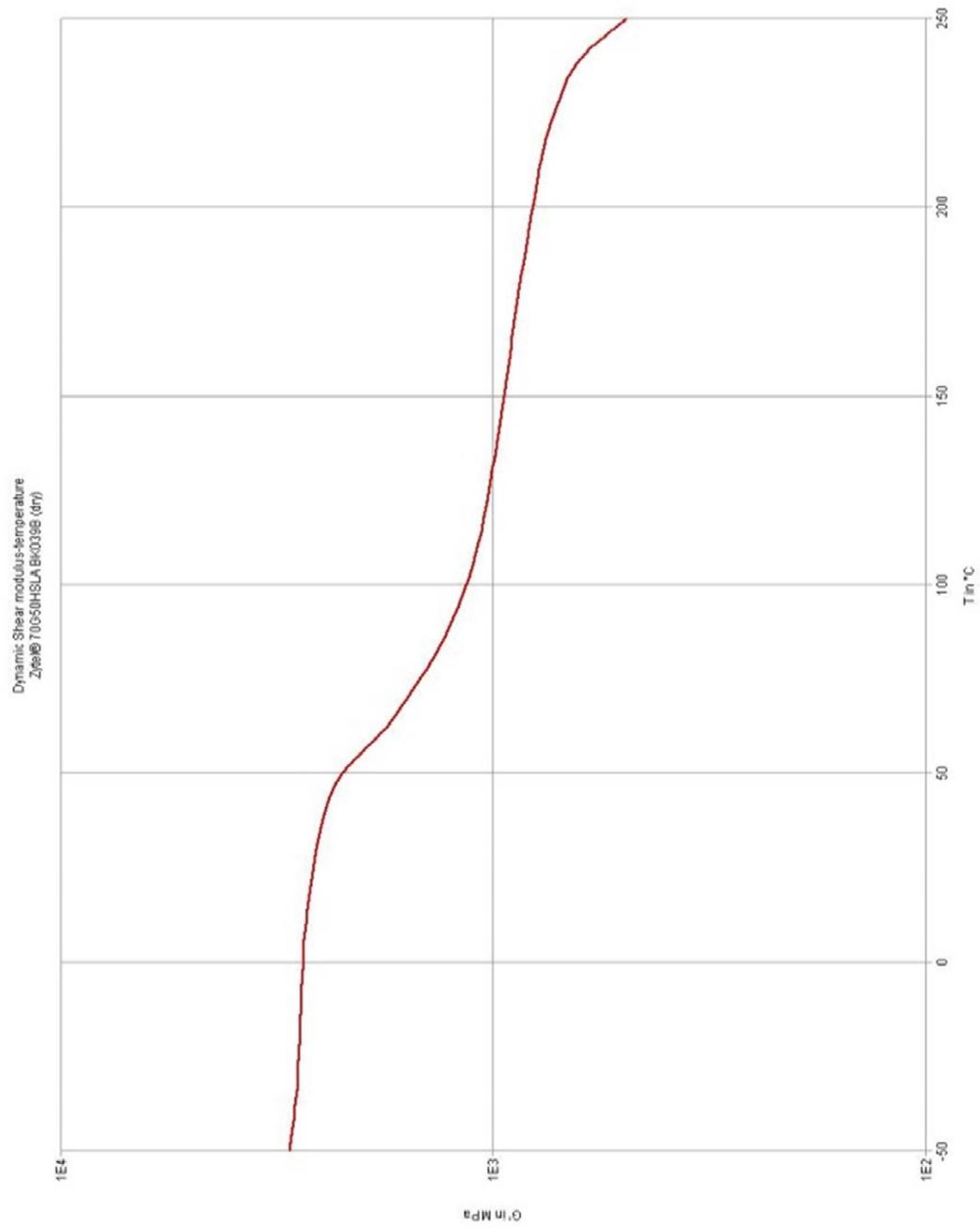


Figura A.69 - Representación gráfica del módulo de cizalla en función de la temperatura para una muestra seca de PA66-GF50 (cortesía de Faurecia Interior Systems España, Abrera)

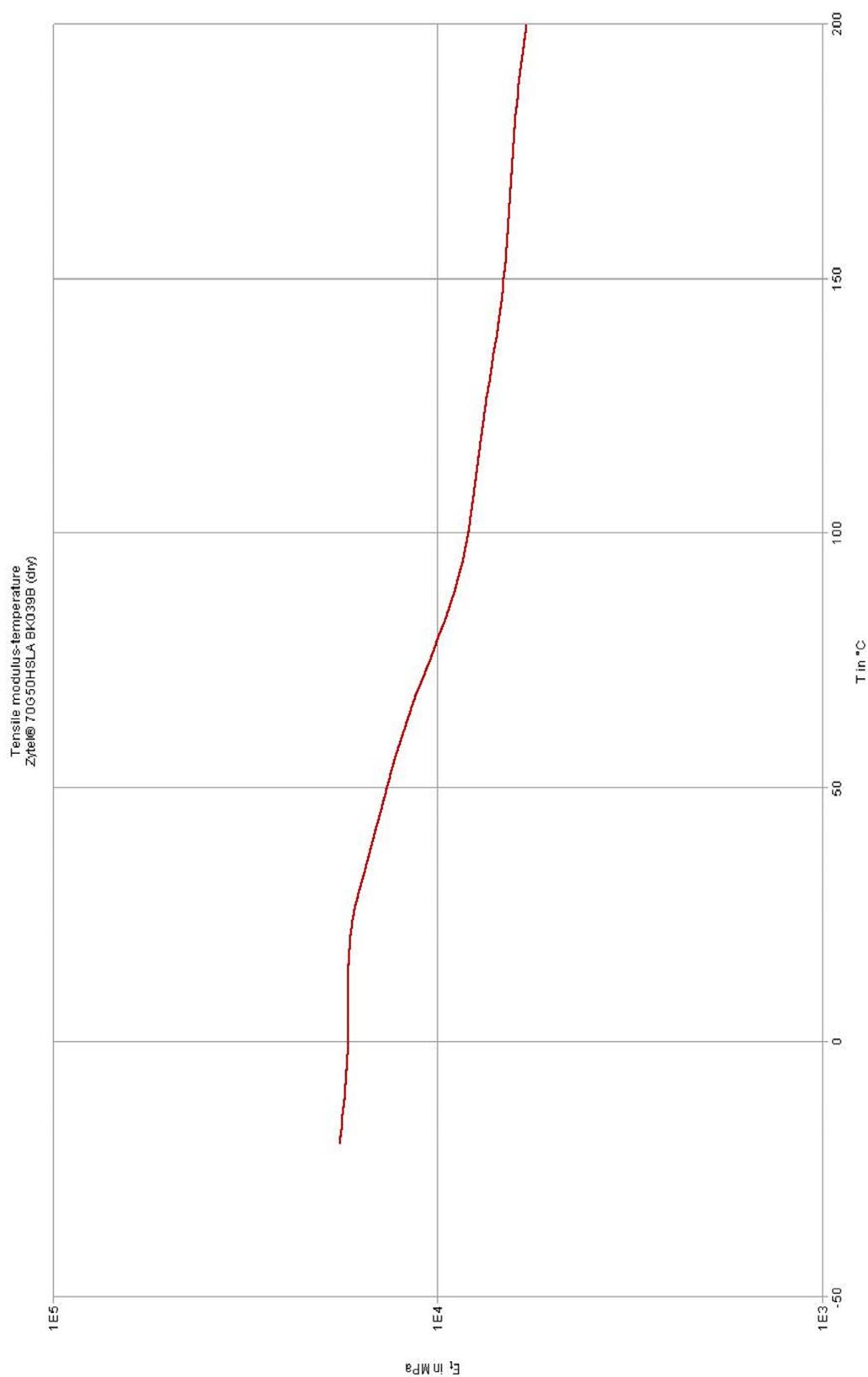


Figura A.70 - Representación gráfica del módulo de tracción en función de la temperatura para una muestra seca de PA66-GF50 (cortesía de Faurecia Interior Systems España, Abrera)



### A.11 Subrutinas de MATLAB®

Se han programado dos subrutinas en MATLAB® 7.5.0.

La primera subrutina usa el modelo convencional para el bucle de creep. La segunda usa los modelos modificados para el bucle de creep.

Sin embargo, los dos modelos modificados presentados en esta tesis comparten las mismas ecuaciones en el dominio de la frecuencia y las subrutinas presentadas sólo trabajan con datos en este dominio. Esto significa que sólo es necesario programar una subrutina para los dos modelos modificados.

Para las dos subrutinas programadas, los parámetros de entrada para cada material son:

1) Coeficientes de entrada

Definidos como *CEC* o *CEM*, éstos dependen de la subrutina empleada. El primer parámetro se usa en la primera subrutina, mientras que el segundo parámetro se usa en la segunda subrutina. El usuario debe introducir un valor de entrada para cada coeficiente. La convergencia de la subrutina depende en gran medida de los valores de entrada. Estos valores pueden ser o bien los obtenidos mediante ABAQUS® 6.10-2 o bien otros que el usuario considere apropiados.

2) Restricciones de coeficientes

Se definen como *RestCoef*. Para obtener valores lógicos, los coeficientes de relajación se limitan entre 0.01 y 0.35. El valor de cada coeficiente determina la importancia de cada término. Además, la suma de todos los coeficientes debe ser inferior a 1.00. En la segunda subrutina, en la que se presentan también coeficientes alfa, dichos coeficientes se deben limitar entre 0.10 y 2.00. Estos dos pares de límites se fijan así por conveniencia ya que de esta forma se consideran valores lógicos para obtener resultados precisos en esta metodología de trabajo.

3) Curva maestra en función de la frecuencia

Se define como *WGs*. En este caso se introducen en la subrutina como datos de entrada los datos de frecuencia, en rad/s, así como los datos de los módulos de almacenamiento y de pérdida obtenidos de la curva maestra con el fin de ser comparados con los valores calculados.

#### A.11.1 Subrutina de MATLAB® usando el modelo convencional para el bucle de creep

A continuación se muestra la subrutina en MATLAB® 7.5.0 para hallar los coeficientes del modelo convencional para el bucle de creep:

La subrutina llama al nombre de la función.

```
Línea 1    function MatlabCEC
```

La subrutina borra todos los datos previos.

```
Línea 2          clear
```

```
Línea 3          clc
```

```
Línea 4          close all
```

## Anexos

---

La subrutina define el número de términos como  $n$  para las ecuaciones.

```
Línea 5      n=6;
```

La subrutina carga los valores de entrada para los coeficientes de las ecuaciones.

```
Línea 6      load CEC.txt
```

La subrutina revisa si todos los parámetros de entrada obedecen las restricciones, definiendo un alto valor de error ( $errorRest = 1.00E+30$ ) asignado en el caso de que sólo una de las restricciones de entrada de los coeficientes del modelo esté fuera del rango en MATLAB® 7.5.0. Los valores de entrada para cada uno de los coeficientes  $p_i$  deben ser valores dentro de un rango definido entre 0.01 y 0.35.

```
Línea 7      load RestCoef.txt
```

```
Línea 8      errorRest=100;
```

```
Línea 9      for i=1:1:n
```

```
Línea 10     if CEC(i,1)<=RestCoef(1)
```

```
Línea 11     errorRest=1.00E+30;
```

```
Línea 12     elseif CEC(i,1)>=RestCoef(2)
```

```
Línea 13     errorRest=1.00E+30;
```

```
Línea 14     end
```

```
Línea 15     end
```

Si los parámetros de entrada obedecen las restricciones, la subrutina toma la curva maestra y obtiene los datos de la frecuencia de la primera columna, los del módulo de almacenamiento de la segunda y los del módulo de pérdida de la tercera. Después de esto, cuenta el número de frecuencias de los datos de entrada ( $NW$ ) en MATLAB® 7.5.0.

```
Línea 16     if errorRest~=1.00E+30
```

```
Línea 17     load WGs.txt
```

```
Línea 18     w=WGs(:,1);
```

```
Línea 19     ModuloAlmacenamiento=WGs(:,2);
```

```
Línea 20     ModuloPérdida=WGs(:,3);
```

```
Línea 21     [NW]=size(w,1);
```

La subrutina obtiene el valor máximo de los módulos de almacenamiento y de pérdida y obtiene el valor de  $G_0$  (módulo de flexión o módulo de almacenamiento a tiempo inicial) como el máximo de todos los datos del módulo de almacenamiento.

```
Línea 22     MaxValorModuloAlmacenamiento=max(WGs(:,2));
```

```
Línea 23     MaxValorModuloPérdida=max(WGs(:,3));
```

```
Línea 24     G0=MaxValorModuloAlmacenamiento;
```

La subrutina implementa la función *fminsearch* para minimizar la suma del error.

```
Línea 25     [CEC]=fminsearch(@(CEC)...
```

```
ajuste3(CEC,w,G0,ModuloPérdida,NW,...
```

```
ModuloAlmacenamiento,MaxValorModuloPérdida,...
```

```
MaxValorModuloAlmacenamiento,n,RestCoef),CEC);
```

## Anexos

---

La subrutina calcula los errores finales comparando los datos experimentales y los valores teóricos. El error relativo asignado para el módulo de pérdida en MATLAB® 7.5.0 se denomina *error 1*, el error relativo asignado para el módulo de almacenamiento en MATLAB® 7.5.0 se denomina *error 2* y la suma del *error 1* y el *error 2* en MATLAB® 7.5.0 se denomina *error 3*.

```
Línea 26      error1=ajuste1(CEC,w,G0,NW,ModuloPerdida,...
              MaxValorModuloPerdida);
Línea 27      error2=ajuste2(CEC,w,G0,NW,ModuloAlmacenamiento,...
              MaxValorModuloAlmacenamiento);
Línea 28      error3=error1+error2;
Línea 29      [errorFinal]=[error1,error2,error3]
```

La subrutina presenta un gráfico que compara los datos experimentales con los valores teóricos para los módulos de almacenamiento y de pérdida en función de la frecuencia.

```
Línea 30      figure(1)
Línea 31      semilogx(w,ModuloPerdida,'b+',w,...
              prony1(CEC,w,G0),'rx')
Línea 32      legend('Datos experimentales','Valores teóricos')
Línea 33      title('Módulo de pérdida-frecuencia')
Línea 34      xlabel('Frecuencia (rad/s)')
Línea 35      ylabel('Módulo de pérdida (MPa)')
Línea 36      figure(2)
Línea 37      semilogx(w,ModuloAlmacenamiento,'b+',w,...
              prony2(CEC,w,G0),'rx')
Línea 38      legend('Datos experimentales','Valores teóricos')
Línea 39      title('Módulo de almacenamiento-frecuencia')
Línea 40      xlabel('Frecuencia (rad/s)')
Línea 41      ylabel('Módulo de almacenamiento (MPa)')
```

La subrutina guarda los coeficientes en un archivo.

```
Línea 42      Coeficientes=[CEC];
Línea 43      save('Coeficientes.txt','-ASCII','Coeficientes')
```

La subrutina guarda los datos experimentales y los valores teóricos para los módulos de almacenamiento y de pérdida en dos archivos.

```
Línea 44      ResultadosModuloPerdida=[ModuloPerdida,...
              prony1(CEC,w,G0)]
Línea 45      ResultadosModuloAlmacenamiento=...
              [ModuloAlmacenamiento,prony2(CEC,w,G0)]
Línea 46      save('ResultadosModuloAlmacenamiento.txt',...
              '-ASCII','ResultadosModuloAlmacenamiento')
Línea 47      save('ResultadosModuloPerdida.txt',...
              '-ASCII','ResultadosModuloPerdida')
```

## Anexos

---

Si las restricciones para los coeficientes de entrada no se cumplen, la subrutina presenta un mensaje de error y se detiene la ejecución.

```
Línea 48     else
Línea 49         error('Error: Los valores de entrada no cumplen...
                    las restricciones.')
```

```
Línea 50     end
```

```
Línea 51 end
```

Se programa la expresión matemática para calcular el módulo de pérdida en función de la frecuencia usando el número de términos especificado.

```
Línea 52 function f1=prony1(CEC,w,G0)
Línea 53     f1=G0*((CEC(1,1)*CEC(1,2)*w.^(1)./...
                (1+CEC(1,2)^2*w.^(2*1)))...
                +(CEC(2,1)*CEC(2,2)*w.^(1)./...
                (1+CEC(2,2)^2*w.^(2*1)))...
                +(CEC(3,1)*CEC(3,2)*w.^(1)./...
                (1+CEC(3,2)^2*w.^(2*1)))...
                +(CEC(4,1)*CEC(4,2)*w.^(1)./...
                (1+CEC(4,2)^2*w.^(2*1)))...
                +(CEC(5,1)*CEC(5,2)*w.^(1)./...
                (1+CEC(5,2)^2*w.^(2*1)))...
                +(CEC(6,1)*CEC(6,2)*w.^(1)./...
                (1+CEC(6,2)^2*w.^(2*1)))));
Línea 54 end
```

Se programa la expresión matemática para calcular el módulo de almacenamiento en función de la frecuencia usando el número de términos especificado.

```
Línea 55 function f2=prony2(CEC,w,G0)
Línea 56     f2=G0*(1-CEC(1,1)./(1+CEC(1,2)^2*w.^(2*1)))...
                -CEC(2,1)./(1+CEC(2,2)^2*w.^(2*1)))...
                -CEC(3,1)./(1+CEC(3,2)^2*w.^(2*1)))...
                -CEC(4,1)./(1+CEC(4,2)^2*w.^(2*1)))...
                -CEC(5,1)./(1+CEC(5,2)^2*w.^(2*1)))...
                -CEC(6,1)./(1+CEC(6,2)^2*w.^(2*1)));
Línea 57 end
```

Se programa la expresión para calcular el error entre los datos experimentales y los valores calculados para el módulo de pérdida.

```
Línea 58 function error1=ajustel(CEC,w,G0,NW,...
                    ModuloPerdida,MaxValorModuloPerdida)
Línea 59     error1=(sum((prony1(CEC,w,G0)-ModuloPerdida).^2)...
                /(NW-1)/MaxValorModuloPerdida^2)^(1/2);
Línea 60 end
```

## Anexos

---

Se programa la expresión para calcular el error entre los datos experimentales y los valores calculados para el módulo de almacenamiento.

```
Línea 61  function error2=ajuste2(CEC,w,G0,NW,...
           ModuloAlmacenamiento,MaxValorModuloAlmacenamiento)
Línea 62  error2=(sum((prony2(CEC,w,G0)-...
           ModuloAlmacenamiento).^2)...
           /(NW-1)/MaxValorModuloAlmacenamiento^2)^(1/2);
Línea 63  end
```

Se programa la expresión para calcular el error total entre los dos errores previos. Antes de esto se especifican las restricciones para el ajuste de los coeficientes.

```
Línea 64  function error3=ajuste3(CEC,w,...
           G0,ModuloPerdida,NW,ModuloAlmacenamiento,...
           MaxValorModuloPerdida,MaxValorModuloAlmacenamiento,n,...
           RestCoef)
Línea 65  error3=100;
Línea 66  for i=1:1:n
Línea 67      if CEC(i,1)<=RestCoef(1)
Línea 68          error3=1.00E+30;
Línea 69      elseif CEC(i,1)>=RestCoef(2)
Línea 70          error3=1.00E+30;
Línea 71      end
Línea 72  end
Línea 73  if error3~=1.00E+30
Línea 74      error3=ajustel(CEC,w,G0,NW,ModuloPerdida,...
           MaxValorModuloPerdida)+ajuste2(CEC,w,G0,NW,...
           ModuloAlmacenamiento,...
           MaxValorModuloAlmacenamiento);
Línea 75  end
Línea 76  end
```

### A.11.2 Subrutina de MATLAB® usando los modelos modificados para el bucle de creep

A continuación se muestran las líneas a modificar para la subrutina de MATLAB® 7.5.0 para hallar los coeficientes de los modelos modificados. Sólo se añaden aquellas explicaciones que conllevan diferencias con respecto a la subrutina anterior. *CEM(:,3)* son los coeficientes alfa.

```
Línea 1  function MatlabCEM
Línea 6      load CEM.txt
Línea 10     if CEM(i,1)<=RestCoef(1)
Línea 12     elseif CEM(i,1)>=RestCoef(2)
```

## Anexos

Además de los valores de entrada de cada coeficiente  $p_i$ , se añaden los valores de entrada de cada coeficiente  $\alpha_i$  en la subrutina dentro de un rango definido entre 0.10 y 2.00.

Entre las líneas 13 y 14

```
elseif CEM(i,3)<=RestCoef(3)
    errorRest=1.00E+30;
elseif CEM(i,3)>=RestCoef(4)
    errorRest=1.00E+30;
Línea 25 [CEM]=fminsearch(@(CEM)...
    ajuste3(CEM,w,G0,ModuloPerdida,NW,...
    ModuloAlmacenamiento,MaxValorModuloPerdida,...
    MaxValorModuloAlmacenamiento,n,RestCoef),CEM);
Línea 26 error1=ajuste1(CEM,w,G0,NW,ModuloPerdida,...
    MaxValorModuloPerdida);
Línea 27 error2=ajuste2(CEM,w,G0,NW,ModuloAlmacenamiento,...
    MaxValorModuloAlmacenamiento);
Línea 31 semilogx(w,ModuloPerdida,'b+',w,...
    prony1(CEM,w,G0),'rx')
Línea 37 semilogx(w,ModuloAlmacenamiento,'b+',w,...
    prony2(CEM,w,G0),'rx')
Línea 42 Coeficientes=[CEM];
Línea 44 ResultadosModuloPerdida=[ModuloPerdida,...
    prony1(CEM,w,G0)]
Línea 45 ResultadosModuloAlmacenamiento=...
    [ModuloAlmacenamiento,prony2(CEM,w,G0)]
Línea 52 function f1=prony1(CEM,w,G0)
Línea 53 f1=G0*((CEM(1,1)*CEM(1,2)*w.^(CEM(1,3))./...
    (1+CEM(1,2)^2*w.^(2*CEM(1,3))))...
    +(CEM(2,1)*CEM(2,2)*w.^(CEM(2,3))./...
    (1+CEM(2,2)^2*w.^(2*CEM(2,3))))...
    +(CEM(3,1)*CEM(3,2)*w.^(CEM(3,3))./...
    (1+CEM(3,2)^2*w.^(2*CEM(3,3))))...
    +(CEM(4,1)*CEM(4,2)*w.^(CEM(4,3))./...
    (1+CEM(4,2)^2*w.^(2*CEM(4,3))))...
    +(CEM(5,1)*CEM(5,2)*w.^(CEM(5,3))./...
    (1+CEM(5,2)^2*w.^(2*CEM(5,3))))...
    +(CEM(6,1)*CEM(6,2)*w.^(CEM(6,3))./...
    (1+CEM(6,2)^2*w.^(2*CEM(6,3)))));
```

## Anexos

```
Línea 55  function f2=prony2(CEM,w,G0)
Línea 56      f2=G0*(1-CEM(1,1)./(1+CEM(1,2)^2*w.^(2*CEM(1,3)))...
            -CEM(2,1)./(1+CEM(2,2)^2*w.^(2*CEM(2,3)))...
            -CEM(3,1)./(1+CEM(3,2)^2*w.^(2*CEM(3,3)))...
            -CEM(4,1)./(1+CEM(4,2)^2*w.^(2*CEM(4,3)))...
            -CEM(5,1)./(1+CEM(5,2)^2*w.^(2*CEM(5,3)))...
            -CEM(6,1)./(1+CEM(6,2)^2*w.^(2*CEM(6,3))));
Línea 58  function error1=ajustel(CEM,w,G0,NW,ModuloPerdida,...
            MaxValorModuloPerdida)
Línea 59      error1=(sum((prony1(CEM,w,G0)-ModuloPerdida).^2)...
            /(NW-1)/MaxValorModuloPerdida^2)^(1/2);
Línea 61  function error2=ajuste2(CEM,w,G0,NW,...
            ModuloAlmacenamiento,MaxValorModuloAlmacenamiento)
Línea 62      error2=(sum((prony2(CEM,w,G0)-...
            ModuloAlmacenamiento).^2)...
            /(NW-1)/MaxValorModuloAlmacenamiento^2)^(1/2);
Línea 64  function error3=ajuste3(CEM,w,G0,ModuloPerdida,NW,...
            ModuloAlmacenamiento,MaxValorModuloPerdida,...
            MaxValorModuloAlmacenamiento,n,...
            RestCoef)
Línea 67      if CEM(i,1)<=RestCoef(1)
Línea 69      elseif CEM(i,1)>=RestCoef(2)
```

Aquí sucede lo mismo que sucedía en la explicación anterior. Además de los valores de entrada de cada coeficiente  $p_i$ , se añaden los valores de entrada de cada coeficiente  $\alpha_i$  en la subrutina dentro de un rango definido entre 0.10 y 2.00.

Entre las líneas 70 y 71

```
            elseif CEM(i,3)<=RestCoef(3)
                error3=1.00E+30;
            elseif CEM(i,3)>=RestCoef(4)
                error3=1.00E+30;
Línea 74      error3=ajustel(CEM,w,G0,NW,ModuloPerdida,...
            MaxValorModuloPerdida)+ajuste2(CEM,w,G0,NW,...
            ModuloAlmacenamiento,...
            MaxValorModuloAlmacenamiento);
```



## A.12 Derivadas de las series de Prony

En este anexo se muestran las expresiones matemáticas de las derivadas de primer orden y de segundo orden de las series de Prony.

### A.12.1 Derivadas en función del tiempo

#### A.12.1.1 Derivadas de primer orden

A continuación se muestran las expresiones matemáticas para calcular los máximos y mínimos del módulo de relajación (Ecuación A.147) y de la capacitancia de creep (Ecuación A.148) en función del tiempo, usando las series de Prony.

$$\frac{dY}{dt} = -Y_0 \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\tau_i} e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

Ecuación A.147

$$\frac{dJ}{dt} = J_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\lambda_i} e^{-\frac{t}{\lambda_i}}$$

Ecuación A.148

#### A.12.1.2 Derivadas de segundo orden

A continuación se muestran las expresiones matemáticas para calcular los puntos de inflexión del módulo de relajación (Ecuación A.149) y de la capacitancia de creep (Ecuación A.150) en función del tiempo, usando las series de Prony.

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = Y_0 \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\tau_i^2} e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

Ecuación A.149

$$\frac{d^2J}{dt^2} = -J_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\lambda_i^2} e^{-\frac{t}{\lambda_i}}$$

Ecuación A.150

### A.12.2 Derivadas en función de la frecuencia

#### A.12.2.1 Derivadas de primer orden

A continuación se muestran las expresiones matemáticas para calcular los máximos y mínimos del módulo de almacenamiento (Ecuación A.151), del módulo de pérdida (Ecuación A.152), de la capacitancia de almacenamiento (Ecuación A.153), de la capacitancia de pérdida (Ecuación A.154) y de la tangente del ángulo de fase (Ecuación A.155) en función de la frecuencia, usando las series de Prony.

$$\frac{dG'}{dw} = 2G_0 \sum_{i=1}^n \frac{p_i \tau_i^2 w}{(1 + \tau_i^2 w^2)^2}$$

Ecuación A.151

$$\frac{dG''}{dw} = G_0 \sum_{i=1}^n \frac{p_i \tau_i (1 - \tau_i^2 w^2)}{(1 + \tau_i^2 w^2)^2}$$

Ecuación A.152

$$\frac{dJ'}{dw} = -2J_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i \lambda_i^2 w}{(1 + \lambda_i^2 w^2)^2}$$

Ecuación A.153

$$\frac{dJ''}{dw} = J_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i \lambda_i (1 - \lambda_i^2 w^2)}{(1 + \lambda_i^2 w^2)^2}$$

Ecuación A.154

$$\frac{dtg\delta}{dw} = \frac{\frac{dG''}{dw} G' - G'' \frac{dG'}{dw}}{(G')^2}$$

Ecuación A.155

### A.12.2.2 Derivadas de segundo orden

A continuación se muestran las expresiones matemáticas para calcular los puntos de inflexión del módulo de almacenamiento (Ecuación A.156), del módulo de pérdida (Ecuación A.157), de la capacitancia de almacenamiento (Ecuación A.158), de la capacitancia de pérdida (Ecuación A.159) y de la tangente del ángulo de fase (Ecuación A.160) en función de la frecuencia, usando las series de Prony.

$$\frac{d^2 G'}{dw^2} = 2G_0 \sum_{i=1}^n p_i \tau_i^2 \frac{1 - 3\tau_i^2 w^2}{(1 + \tau_i^2 w^2)^3}$$

Ecuación A.156

$$\frac{d^2 G''}{dw^2} = 2G_0 \sum_{i=1}^n p_i \tau_i^3 \frac{w(\tau_i^2 w^2 - 3)}{(1 + \tau_i^2 w^2)^3}$$

Ecuación A.157

$$\frac{d^2 J'}{dw^2} = -2J_0 \sum_{i=1}^n q_i \lambda_i^2 \frac{1 - 3\lambda_i^2 w^2}{(1 + \lambda_i^2 w^2)^3}$$

Ecuación A.158

## Anexos

---

$$\frac{d^2 J''}{dw^2} = 2J_0 \sum_{i=1}^n q_i \lambda_i^3 \frac{w(\lambda_i^2 w^2 - 3)}{(1 + \lambda_i^2 w^2)^3}$$

Ecuación A.159

$$\frac{d^2 t g \delta}{dw^2} = \frac{G' \left( \frac{d^2 G''}{dw^2} G' - G'' \frac{d^2 G'}{dw^2} \right) - 2 \frac{dG'}{dw} \left( \frac{dG''}{dw} G' - G'' \frac{dG'}{dw} \right)}{(G')^3}$$

Ecuación A.160



## A.13 Resolución de ecuaciones polinómicas

En este anexo se presenta la resolución de las ecuaciones polinómicas de tercer y cuarto orden.

### A.13.1 Ecuación polinómica de tercer orden

En la Ecuación A.161 se muestra la expresión general de la ecuación polinómica de tercer orden. Para su resolución se define un coeficiente de ayuda,  $C_c$ , en la Ecuación A.162. Las tres raíces generales para esta ecuación polinómica se definen también en la Ecuación A.163, en la Ecuación A.164 y en la Ecuación A.165.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Ecuación A.161

$$C_c = (-2a^3 + 9ab - 27c + 3\sqrt{3}\sqrt{-a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^2})^{\frac{1}{3}}$$

Ecuación A.162

Donde:

$C_c$ : Coeficiente de ayuda para hallar las soluciones de la ecuación polinómica de tercer orden

$$x_1 = \frac{1}{12} \left( \frac{-2^{4/3}(1 + \sqrt{3}i)(a^2 - 3b) + 2^{2/3}(-1 + \sqrt{3}i)C_c^2 - 4H_c a}{C_c} \right)$$

Ecuación A.163

$$x_2 = \frac{1}{12} \left( \frac{2^{4/3}(-1 + \sqrt{3}i)(a^2 - 3b) - 2^{2/3}(1 + \sqrt{3}i)C_c^2 - 4H_c a}{C_c} \right)$$

Ecuación A.164

$$x_3 = \frac{1}{6} \left( \frac{2^{4/3}(a^2 - 3b) + 2^{2/3}C_c^2 - 2H_c a}{C_c} \right)$$

Ecuación A.165

Donde:

$x_i$  ( $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ ): Soluciones de las ecuaciones polinómicas

### A.13.2 Ecuación polinómica de cuarto orden

En la Ecuación A.166 se muestra la expresión general de la ecuación polinómica de cuarto orden. Para su resolución se definen cuatro coeficientes de ayuda,  $C_{Q1}$ ,  $C_{Q2}$ ,  $C_{Q3}$  y  $C_{Q4}$ , en la Ecuación A.167, en la Ecuación A.168, en la Ecuación A.169 y en la Ecuación A.170, respectivamente. Las cuatro raíces generales para esta ecuación polinómica se definen también en la Ecuación A.171, en la Ecuación A.172, en la Ecuación A.173 y en la Ecuación A.174.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Ecuación A.166

$$C_{Q1} = -4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9b(ac + 8d) + 27(c^2 + a^2d))^2$$

Ecuación A.167

$$C_{Q2} = 2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + H_{Q1}^{1/2}$$

Ecuación A.168

$$C_{Q3} = 2^{1/3}(b^2 - 3ac + 12d)$$

Ecuación A.169

$$C_{Q4} = \left( 3a^2 - 8b + \frac{4H_{Q3}}{H_{Q2}^{1/3}} + 2^{5/3}H_{Q2}^{1/3} \right)^{1/2}$$

Ecuación A.170

Donde:

$C_{Qi}$  ( $C_{Q1}$ ,  $C_{Q2}$ ,  $C_{Q3}$  y  $C_{Q4}$ ): Coeficientes de ayuda para hallar las soluciones de la ecuación polinómica de cuarto orden

$$x_1 = \frac{1}{12} \left( -3a - \sqrt{3}C_{Q4} - \sqrt{6} \sqrt{3a^2 - 8b - \frac{2C_{Q3}}{C_{Q2}^{1/3}} - 2^{2/3}C_{Q2}^{1/3} + \frac{3\sqrt{3}(a^3 - 4ab + 8c)}{C_{Q4}}} \right)$$

Ecuación A.171

$$x_2 = \frac{1}{12} \left( -3a - \sqrt{3}C_{Q4} + \sqrt{6} \sqrt{3a^2 - 8b - \frac{2C_{Q3}}{C_{Q2}^{1/3}} - 2^{2/3}C_{Q2}^{1/3} + \frac{3\sqrt{3}(a^3 - 4ab + 8c)}{C_{Q4}}} \right)$$

Ecuación A.172

## Anexos

---

$$x_3 = \frac{1}{12} \left( -3a + \sqrt{3}C_{Q_4} - \sqrt{6} \sqrt{3a^2 - 8b - \frac{2C_{Q_3}}{C_{Q_2}^{1/3}} - 2^{2/3}C_{Q_2}^{1/3} - \frac{3\sqrt{3}(a^3 - 4ab + 8c)}{C_{Q_4}}} \right)$$

Ecuación A.173

$$x_4 = \frac{1}{12} \left( -3a + \sqrt{3}C_{Q_4} + \sqrt{6} \sqrt{3a^2 - 8b - \frac{2C_{Q_3}}{C_{Q_2}^{1/3}} - 2^{2/3}C_{Q_2}^{1/3} - \frac{3\sqrt{3}(a^3 - 4ab + 8c)}{C_{Q_4}}} \right)$$

Ecuación A.174

$x_i$  ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$ ): Soluciones de las ecuaciones polinómicas

