UNIVERSITAT DE BARCELONA

Problema de martingala i aproximació en llei per difusions amb dos paràmetres

Carmen Florit i Selma

Problema de martingala i aproximació en llei per difusions amb dos paràmetres

CARMEN FLORIT I SELMA

Memoria presentada per aspirar
al grau de Doctora en Matematiques

Departament d Estadistica
Universitat de Barcelona

Barcelona, octubre de 1996

Certifico que la present memoria
ha estat realitzada per
Carmen Florit i Selma
al Departament d Estadistica
de la Universitat de Barcelona
sota la meva direccio

Dr David Nualart i Rodon
Departament d Estadistica
Universitat de Barcelona

Barcelona octubre de 1996

Als meus pares

Agraiments

Al Dr David Nualart, director d'aquesta tesi

A tots els meus mestres i professors

A Alberto

A Alejandra, Carles, David, Elisa, Marco, Monica, Nourdinne, Samy i Xavier

Index

0.1 Presentacio 3

0.1.1 Criteri local de regularitat de densitats 3

0.1.2 Una aproximacio de difusions per una equacio diferencial estocastica hiperbolica 4

1 Criteri local de regularitat 7

1.1 Introduccio 7

1.2 Preliminars 7

1.3 Estudi de densitats 11

1.3.1 Criteri local de regularitat 13

1.4 Maxim del drap brownia 16

1.5 Maxim del proces de Wiener 24

1.6 Positivitat de la densitat 29

2 Una aproximacio de difusions 31

2.1 Introduccio 31

2.2 Preliminars 32

2.2.1 La integral de Stratonovich 32

2.2.2 Calcul estocastic per processos amb dos parametres 34

2.2.3 Equacions hiperboliques 38

2.3 Demostracio de l'ajustament 40

2.3.1 Desigualtats per martingales discretes amb dos parametres 42

2.4 Caracteritzacio de la llei limit 50

2 5 Problema de martingala 61
2 6 Equacions hiperboliques 69

Referencies bibliografiques **71**

0 1 Presentació

Aquesta memoria consta de dues parts La primera part esta dedicada a l'obtencio d'un criteri local de regularitat de densitats per a vectors que tinguin una llei de probabilitat concentrada en un obert de $\mathbb{R}^k$ mitjançant tecniques de calcul estocastic de variacions (calcul de Malliavin) Com aplicacio d'aquest criteri es demostra que el suprem al quadrat unitat del drap brownia te una densitat infinitament diferenciable en $(0, \infty)$

En la segona part s'obte un resultat d'aproximacio de difusions per a una equacio *estocastica hiperbolica en el pla governada per* un proces de Wiener amb dos parametres La llei limit queda caracteritzada com la solucio d'un problema de martingala Es demostra l'equivalencia entre existencia i unicitat de solucio feble per a una equacio diferencial estocastica en el pla i existencia i unicitat de solucio del corresponent problema de martingala per a processos amb dos parametres

0 1 1 Criteri local de regularitat de densitats

El calcul estocastic de variacions o calcul de Malliavin es un calcul diferencial en dimensio infinita en l'espai de Wiener Va surgir a partir de la demostracio probabilistica del teorema d'hipoelipticitat de Hormander obtinguda per Malliavin en 1976 a [11]

Una de les aplicacions principals del calcul de Malliavin es l'estudi de l'existencia i regularitat de densitats de les lleis de funcionals del proces de Wiener

Bouleau i Hirsch a [2] van donar un criteri de continuitat absoluta per la llei d'un funcional A partir del treball de Malliavin [11], Stroock [20] i Watanabe [26] van donar un criteri general on s'estableixen condicions sota les quals la densitat es, a mes a mes, infinitament diferenciable El criteri de regularitat nomes es pot aplicar suposant que les components del vector aleatori estan en $\mathbb{D}^{\infty}$ En consequencia, el criteri de regularitat no permet tractar el maxim del moviment brownia en $[0, 1]$, ja que pertany a $\mathbb{D}^{1,p}$ per a tot $p > 1$ pero no pertany a $\mathbb{D}^{\infty}$ D'altra banda la seva densitat es coneguda i es infinitament diferencia ble en $(0, +\infty)$ Aquest exemple motiva la recerca d'un criteri local per vectors aleatoris que tinguin una llei de probabilitat concentrada en un obert de $\mathbb{R}^k$ sense suposar que siguin a $\mathbb{D}^{\infty}(\mathbb{R}^k)$

Un ingredient essencial per obtenir aquest criteri son les propietats de localitat de l'operador de derivacio i del seu adjunt la integral de Sko rohod demostrades per Nualart i Pardoux en [15] La localitat permet derivar un vector F, que nomes cal suposar de $\mathbb{D}^{1,2}(\mathbb{R}^k)$, en determi nades direccions admissibles D'aquesta manera es poden reemplaçar les condicions d'invertibilitat sobre la matriu de Malliavin del criteri general per condicions sobre les derivades en les direccions admissibles

Una aplicacio d'aquest criteri local es que la llei del maxim del drap brownia, que es desconeguda explicitament, pero es absolutament continua respecte la mesura de Lebesgue com demostren D Nualart i J Vives en [16], te una densitat infinitament diferenciable en $(0, +\infty)$ Per aquesta aplicacio s'ha utilitzat el lema de Garsia Rodemich Rumsey en espais normats [8], aixi com que les normes de Holder del moviment brownia son a $\mathbb{D}^{\infty}$, com demostren H Airault i P Malliavin en [1]

Aquests resultats estan publicats a [6]

0 1 2 Una aproximacio de difusions per una equacio diferencial estocastica hiperbolica

Les integrals estocastiques van ser introduides per Ito als anys 40 Stratonovich va donar una nova representacio l'any 62 en [19] Les regles de calcul de Stratonovich coincideixen amb les regles del calcul ordinari

Un article fonamental per a l'estudi del calcul estocastic en el pla es [3] de R Cairoli i J B Walsh de 1975 La teoria de la integracio estocastica respecte el proces de Wiener amb dos parametres desen- volupada en aquest article ha permes formular i resoldre equacions de difusio en dos parametres

Wong i Zakai desenvolupen les formules de diferenciacio per integrals estocastiques en el pla [28] i donen formules d'Ito per certes semimartingales [31] Hajek en [9] desenvolupa un calcul de Stratonovich dos parametric per tal de resoldre un tipus d'equacio hiperbolica no lineal Carmona i Fouque [4] han tractat el comportament en el limit quan ε tendeix a zero de la solucio de l'equacio

$$\frac{\partial^2 X^\varepsilon_{s\,t}}{\partial s \partial t} = \frac{1}{\varepsilon} F\Big(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\Big) X^\varepsilon_{s\,t}, \quad s, t \geq 0, \tag{0 1 1}$$

amb condicions a la frontera $X^\varepsilon_{0\,t} = X^\varepsilon_{s\,0} = 1$

El camp aleatori F que apareix a (0 1 1) es de la forma

$$F(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} Z_{k\,\ell} \; \mathbb{1}_{[k-1\,k)\times[\ell-1\,\ell)}(s,t)\,,$$

on $\{Z_{k\,\ell},\ k \geq 1,\ \ell \geq 1\}$ es una familia independent de variables aleatories acotades, centrades, i identicament distribuides El resultat principal de [4] es el seguent

Per cada $S > 0$ i $T > 0$ la distribucio de $\{X^\varepsilon_{s\,t},\ 0 \leq s \leq S,\ 0 \leq t \leq T\}$ convergeix feblement quan ε tendeix a zero en l'espai de Banach $C([0,S] \times [0,T])$ de les funcions reals continues en $[0,S] \times [0,T]$ cap a l'unica solucio $\{X_{s\,t}, 0 \leq s \leq S, 0 \leq t \leq T\}$ de l'equacio de Stratonovich

$$dX_{s\,t} = X_{s\,t} \circ dW_{s\,t}$$

amb condicions de frontera $X_{0\,t} = X_{s\,0} = 1$, on W es un proces de Wiener amb dos parametres En el segon capitol de la memoria s'esten aquest resultat a l'equacio no lineal

$$\frac{\partial^2 X^\varepsilon_{s\,t}}{\partial s \partial t} = \frac{1}{\varepsilon} F\Big(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\Big) \sigma(X^\varepsilon_{s\,t}) + b(X^\varepsilon_{s\,t}), \quad s,t \in [0,S] \times [0,T]$$

amb condicions a la frontera $X^\varepsilon_{0\,t} = X^\varepsilon_{s\,0} = x$ En aquest cas, X^ε convergeix en llei cap a l'unica solucio de l' equacio de Stratonovich

$$dX_{s\,t} = \sigma(X_{s\,t}) \circ dW_{s\,t} + b(X_{s\,t}),\ s,t \in [0,S] \times [0,T]\,,$$

amb condicions a la frontera $X_{0\,t} = X_{s\,0} = x$, es a dir,

$$
\begin{aligned}
X_{s\,t} = x \quad &+ \quad \int_0^s \int_0^t \sigma(X_{u\,v})\, dW_{u\,v} \qquad (0\ 1\ 2)\\
&+ \quad \frac{1}{4} \int_0^s \int_0^t \sigma' \sigma(X_{u\,v})\, du\, dv + \int_0^s \int_0^t b(X_{u\,v})\, du\, dv
\end{aligned}
$$

Aquesta convergencia feble es demostra mitjançant el problema de mar tingala, en lloc de la demostracio donada en [4] Utilitzem l'equivalencia entre existencia i unicitat de solucio del problema de martingala amb dos parametres i l'existencia i unicitat en llei per la solucio de l'equacio (0 1 2) (veure [24] i [27]) Aquests resultats estan recollits en [7]

Capítol 1

Criteri local de regularitat de densitats

1.1 Introducció

El primer capitol d'aquesta memoria esta dedicat a l'obtencio d'un criteri local de regularitat de densitats per a vectors que tinguin una llei de probabilitat concentrada en un obert de $\mathbb{R}^k$ mitjançant tecniques del calcul de Malliavin.

La primera seccio es un recull d'alguns preliminars generals sobre calcul de Malliavin. A la segona seccio s'enuncien criteris generals d'existencia i diferenciabilitat de densitats de les lleis de vectors aleatoris de certs espais.

Aquests resultats son del llibre de D. Nualart [13] i del seu curs de Saint-Flour [14].

La tercera seccio conte el criteri local de regularitat de densitats i la quarta una aplicacio d'aquest criteri al suprem del drap brownia.

1.2 Preliminars

Sigui $(T, \mathcal{B}, \mu)$ un espai de mesura σ–finita. Considerem l'espai de Hilbert $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ que suposarem separable. Es considera una família gaussiana de variables aleatories centrades $\{W(h), h \in H\}$, definides en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, i tals que $E(W(h)W(g)) = \langle h, g\rangle_H$, per tot $g, h \in H$. Suposem que la σ-algebra $\mathcal{F}$ esta generada per la família gaussiana $\{W(h)\}$ i els conjunts nuls de P.

Sigui $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ el conjunt de funcions de $\mathbb{R}^n$ a valors en $\mathbb{R}$ acotades, continues i amb derivades de tots els ordres continues i acotades.

Sigui $\mathcal{S}$ el conjunt de variables aleatories de la forma

$$F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) \tag{1.2.1}$$

on $n \geq 1$, $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ i $h_1, \ldots, h_n \in H$. Els elements de $\mathcal{S}$ son anomenats variables aleatories regulars. Si F te la forma (1.2.1) es defineix la seva derivada com el proces en $L^2(\Omega \times T) \cong L^2(\Omega, H)$,

$$D_tF = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(W(h_1), \ldots, W(h_n))\, h_j(t)$$

Es pot interpretar DF, element de $L^2(\Omega, H)$, com derivada direccional

$$\langle DF, h\rangle_H = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[f(W(h_1) + \varepsilon\langle h_1, h\rangle_H, \ldots, W(h_n) + \varepsilon\langle h_n, h\rangle_H)$$

$$-f(W(h_1), \ldots, W(h_n))]$$

La derivada k-essima D^kF es un proces amb k parametres (es a dir $D^kF \in L^2(\Omega, H^{\otimes k}) \cong L^2(\Omega \times T^k)$) definit per iteracio

$$D^k_{t_1, \ldots, t_k}F = D_{t_1} \cdots D_{t_k}F$$

Per a cada $p \geq 1$, $p \in \mathbb{R}$ i cada sencer $k \geq 0$ es defineix $\mathbb{D}^{k,p}$ com l'adherencia de $\mathcal{S}$ respecte la norma

$$\|F\|_{k,p} = \left(\|F\|_p^p + \sum_{i=1}^k \|D^iF\|^p_{L^p(\Omega; H^{\otimes i})}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Es defineix l'espai $\mathbb{D}^\infty = \bigcap_{p\geq 1} \bigcap_{k \geq 1} \mathbb{D}^{k,p}$

Si K es un espai de Hilbert separable es defineixen els corresponents espais de variables aleatories a valors en K, $\mathbb{D}^{k\,p}(K)$ i $\mathbb{D}^{\infty}(K)$

Per tot $p > 1$ i tot sencer positiu k anomenem $\mathbb{L}^{k\,p}$ a l'espai $L^p([0,1], \mathbb{D}^{k\,p})$ Observem que $\mathbb{L}^{1\,2} = \mathbb{D}^{1\,2}(H)$

Enunciem tot seguit dues propietats tecniques de l'operador de derivacio

Lema 1 2 1 *Sigui* $\{F_n, n \geq 1\}$ *una successio de variables aleatories en* $\mathbb{D}^{k\,p}$ *amb* $k \geq 1$ *i* $p > 1$ *Suposem que* F_n *convergeix a* F *en* $L^p(\Omega)$ *i* $\sup_n \|F_n\|_{k\,p} < \infty$ *Aleshores* $F \in \mathbb{D}^{k\,p}$

Proposicio 1 2 2 *Sigui* φ $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *una funcio continuament diferenciable amb derivades parcials acotades i* $p \geq 1$ *Sigui* $F = (F^1, \quad , F^m)$ *un vector aleatori amb components en l'espai* $\mathbb{D}^{1\,p}$ *Aleshores* $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1\,p}$ *i*

$$D\varphi(F) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) DF^i$$

Anomenem operador de divergencia δ a l'adjunt de l'operador D en L^2 D es un operador no acotat de $L^2(\Omega)$ a $L^2(\Omega, H)$ El domini de δ, Domδ es el subconjunt de $L^2(\Omega, H)$ de variables aleatories u tals que

$$|E(\langle DF, u\rangle_H)| \leq c\|F\|_2,$$

per a tot $F \in \mathbb{D}^{1\,2}$ on c una constant que depen de u Si $u \in$ Domδ, $\delta(u)$ es l'element de $L^2(\Omega)$ caracteritzat per

$$E(F\delta(u)) = E(\langle DF, u\rangle_H)$$

per a tot $F \in \mathbb{D}^{1\,2}$

Es defineix la classe $\mathcal{S}_H \subset L^2(\Omega, H)$ d'elements regulars de la forma

$$u = \sum_{i=1}^{n} F_i h_i,$$

on $F_i \in \mathcal{S}$ i $h_i \in H$ Els elements de $\mathcal{S}_H$ pertanyen a Domδ i

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^{n} F_i W(h_i) - \sum_{i=1}^{n} \langle DF_i, h_i \rangle_H$$

Tenim les seguents propietats que relacionen els operadors D i δ per $u, v \in \mathcal{S}_H$ i $F \in \mathcal{S}$

(a) $D_h(\delta(u)) = \langle u, h \rangle_H + \delta(D_h u)$

(b) $E(\delta(u)\delta(v)) = E(\langle u, v \rangle_H) + E(Tr(DuoDv))$

(c) $\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u \rangle_H$

La propietat (b) implica la desigualtat seguent

$$E(\delta(u)^2) \leq E(\|u\|_H^2) + E(\|Du\|_{H\otimes H}^2) = \|u\|_{1\,2\,H}^2$$

Per tant l'espai $\mathbb{D}^{1\,2}(H)$ esta inclos en Domδ, i (b) es compleix per qualsevol $u \in \mathbb{D}^{1\,2}(H)$ Podem estendre la propietat (a) per $u \in \mathbb{D}^{1\,2}(H)$ i $D_h u \in$ Domδ La propietat (c) es compleix per $F \in \mathbb{D}^{1\,2}$, $u \in$ Domδ, $Fu \in L^2(\Omega, H)$ i la banda dreta de (c) pertanyent a $L^2(\Omega)$

Els operadors D i δ son locals

Proposicio 1 2 3 *Sigui F una variable aleatoria de $\mathbb{D}^{1\,1}$ tal que $F = 0$ q s en un conjunt $A \in \mathcal{F}$ Aleshores $DF = 0$ q s en A*

Proposicio 1 2 4 *Sigui $u \in \mathbb{D}^{1\,2}(H)$ i $A \in \mathcal{F}$, tal que $u(\omega) = 0$ P q s en A Aleshores $\delta(u) = 0$ q s en A*

Podem localitzar el domini de l'operador D

Definim $\mathbb{D}^{1\,p}_{loc}, p \geq 1$ com el conjunt de variables aleatories F tals que existeix una successio $\{(\Omega_n, F_n), n \geq 1\} \subset \mathcal{F} \times \mathbb{D}^{1\,p}$ que compleix les seguents propietats

(i) $\Omega_n \uparrow \Omega$, q s

(ii) $F = F_n$ q s en Ω_n

Direm que (Ω_n, F_n) localitza F en $\mathbb{D}^{1\,p}$ i DF esta definida sense ambiguitat per $DF = DF_n$ en Ω_n, $n \geq 1$ De manera analoga s'introdueixen els espais $\mathbb{D}^{k\,p}_{loc}$, i $\mathbb{D}^{k\,p}_{loc}(H)$

1 3 Càlcul de Malliavin aplicat a l'estudi de densitats

Sigui $F = (F^1, \quad, F^m)$ un vector aleatori tal que les seves components pertanyen a l'espai $\mathbb{D}^{1\,1}_{loc}$ Anomenem matriu de Malliavin a la matriu aleatoria $\gamma_F = (\langle DF^i, DF^j\rangle_H)_{\{1\leq i\, j\leq m\}}$ Bouleau i Hirsch [2] van donar el seguent criteri de continuitat absoluta per la llei de F

Teorema 1 3 1 *Sigui $F = (F^1, \quad, F^m)$ un vector amb components en $\mathbb{D}^{1\,2}_{loc}$ i suposem que la matriu de Malliavin γ_F es invertible q s Aleshores la llei de F es absolutament continua respecte la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}^m$*

En dimensio $m = 1$ la condicio de no degeneracio es redueix a $\|DF\|_H > 0$ q s i es pot suposar $F \in \mathbb{D}^{1\,1}_{loc}$ (Nualart i Zakai [17]) La seguent proposicio dona una expressio de la densitat d'una variable aleatoria en funcio de l'operador δ

Proposicio 1 3 2 *Sigui F una variable aleatoria en $\mathbb{D}^{1\,2}$ Suposem que $\frac{DF}{\|DF\|^2} \in Dom\delta$ Aleshores la llei de F te una densitat continua i acotada donada per*

$$p(x) = E(\mathbf{1}_{\{F>x\}}\delta(\frac{DF}{\|DF\|^2}))$$

A causa de la localitat dels operadors D i δ podem afeblir les hipotesis de la Proposicio 1 3 2

Proposicio 1 3 3 *Sigui A un interval de $\mathbb{R}$, F una variable aleatoria en $\mathbb{D}^{1\,2}$, $u_A \in L^2(\Omega, H)$ i G_A una variable aleatoria tal que $\langle DF, u_A\rangle_H = G_A$ per $\{F \in A\}$ i $\frac{u_A}{G_A} \in \mathrm{Dom}\delta$ Aleshores la llei de F te una densitat continua i acotada en A donada per*

$$p(x) = E(\mathbf{1}_{\{F>x\}}\delta(\frac{u_A}{G_A}))$$

Demostració

Prenem ψ una funció regular no negativa amb suport compacte inclòs en A, i $\phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \psi(z)\,dz, y \in \mathbb{R}$. Aleshores $\phi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$, i en el conjunt $\{F \in A\}$ es compleix

$$\langle D\phi(F), u_A \rangle_H = \psi(F)\langle DF, u_A\rangle_H = \psi(F) G_A$$

En $\{F \notin A\}$, a causa de la localitat de l'operador D, tots els termes s'anul·len, i per tant també val la igualtat.

Per tant, aplicant la dualitat dels operadors D i δ

$$E(\psi(F)) = E(\langle D\phi(F), \frac{u_A}{G_A}\rangle_H) = E(\phi(F)\delta(\frac{u_A}{G_A}))$$

Aquesta desigualtat serà certa per una funció del tipus $\psi(y) = \mathbf{1}_{[a,b]}(y)$ on $[a,b] \subset A$. Aplicant el teorema de Fubini obtenim

$$P(a \leq F \leq b) = E((\int_{-\infty}^{F} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)\,dx)\delta(\frac{u_A}{G_A})) = \int_a^b E(\mathbf{1}_{\{F>x\}}\delta(\frac{u_A}{G_A}))\,dx$$

Per tant queda demostrada la proposició. □

El criteri global de regularitat de densitats és el següent:

Teorema 1.3.4 *Sigui $F = (F^1, \ldots, F^m)$ un vector aleatori que verifica les següents condicions:*

(i) $F^i \in \mathbb{D}^{\infty}$ per $i = 1, \ldots, m$.

(ii) La matriu de Malliavin $\gamma_F = (\langle DF^i, DF^j\rangle_H)_{\{1\leq i,j\leq m\}}$, satisfà

$$(det\gamma_F)^{-1} \in \cap_{p>1} L^p(\Omega)$$

Aleshores F té una densitat infinitament diferenciable.

1.3.1 Criteri local de regularitat de densitats

Un resultat fonamental per a la diferenciabilitat de la densitat d'una mesura finita en $\mathbb{R}^m$ es el seguent lema d'analisi.

Lema 1.3.5 *Sigui μ una mesura finita en $\mathbb{R}^m$. Fixat un conjunt A obert de $\mathbb{R}^m$, suposem que per tot multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \{1, \ldots, m\}^k$, $k \geq 1$ existeixen constants c_α tals que per tota funcio $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ amb suport compacte contingut en el conjunt A es compleix*

$$|\int_{\mathbb{R}^m} \partial_\alpha \varphi d\mu| \leq c_\alpha \|\varphi\|_\infty$$

Aleshores la restriccio de μ al conjunt A es absolutament continua respecte la mesura de Lebesgue i te una densitat infinitament diferenciable en A.

El seguent teorema conte el criteri local de regularitat de densitats.

Teorema 1.3.6 *Sigui $F = (F^1, \ldots, F^m)$ un vector aleatori tal que les seves components pertanyen a l'espai $\mathbb{D}^{1,2}$. Sigui A un subconjunt obert de $\mathbb{R}^m$. Suposem que existeixi un proces estocastic m dimensional $u_A = \{u_A^j(t), t \in T, 1 \leq j \leq m\}$ i una matriu aleatoria $m \times m$, $G_A = (G_A^{ij})$, tals que*

(i) $u_A^j \in \mathbb{D}^\infty(H)$ *per tot* $j = 1, \ldots, m$

(ii) $G_A^{ij} \in \mathbb{D}^\infty$ *per tot* $i, j = 1, \ldots, m$, *i* $|\det G_A|^{-1} \in L^p$ *per tot* $p \geq 2$

(iii) $\langle DF^i, u_A^j \rangle_H = G_A^{ij}$ *en* $\{F \in A\}$, *per a tot* $i, j = 1, \ldots, m$

Aleshores el vector aleatori F te una densitat infinitament diferenciable en el conjunt obert A.

Per tal de demostrar el teorema donem aquests lemes previs.

Lema 1.3.7 *(veure [10]) Sigui $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ una variable aleatoria tal que $E(|F|^{-2}) < \infty$. Aleshores $P(F > 0)$ es 0 o 1.*

Lema 1 3 8 *Suposem que G es una matriu aleatoria $m \times m$ invertible q s i tal que $|\det G|^{-1} \in L^p$ per tot $p \geq 2$ Suposem que els elements G^{ij} de G son en $\mathbb{D}^\infty$ Sigui $\sigma = G^{-1}$ Aleshores σ^{ij} pertany a $\mathbb{D}^\infty$ per a tot i, j i*

$$D\sigma^{ij} = -\sum_{k\,l=1}^{m} \sigma^{ik}\sigma^{lj} DG^{kl}$$

Demostracio

Observem que $\det G$ pertany a $\mathbb{D}^\infty$ ja que aquest espai es un algebra D'altra banda $P(\det G > 0)$ es 0 o 1 a causa del Lema 1 3 7 Aleshores es pot demostrar que els elements $(G_A^{-1})^{ji}$ de la matriu inversa de G_A tambe pertanyen a $\mathbb{D}^\infty$ utilitzant el mateix argument que a [26] La idea d'aquest argument es la seguent

Suposem que $\det G > 0$ q s Definim per a tot $\varepsilon > 0$

$$\sigma_\varepsilon = \left(\frac{\det G}{\det G + \varepsilon} \right) \sigma$$

Clarament σ_ε pertany a $\mathbb{D}^\infty$ Fent tendir ε a 0 i aplicant el Lema 1 2 1 obtenim el resultat desitjat □

Demostrem el Teorema 1 3 6

Demostracio

Suposem que φ es una funcio infinitament diferenciable amb suport compacte contingut en el conjunt obert A Utilitzant la Proposicio 1 2 2 i la hipotesi (iii) es pot escriure en $\{F \in A\}$

$$\begin{aligned} \langle D(\varphi(F)), u_A^j \rangle_H &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) \langle DF^i, u_A^j \rangle_H \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) G_A^{ij} \end{aligned} \tag{1 3 2}$$

Observem que si F no pertany a A aleshores $\varphi(F) = 0$ i tots els termes de l'equacio (1 3 2) s'anul len per la propietat de localitat de l'operador derivada Per tant (1 3 2) es compleix en tot Ω q s Fixem un element

R en $\mathbb{D}^\infty$ Utilitzant la relacio de dualitat entre els operadors D i δ es dedueix la seguent igualtat,

$$
\begin{aligned}
E\left(R\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(F)\right) &= \sum_{j=1}^{m} E\left(R\langle D(\varphi(F)), u_A^j\rangle_H (G_A^{-1})^{ji}\right) \\
&= E\left(\varphi(F)\Phi_i(R)\right),
\end{aligned}
\tag{1 3 3}
$$

on

$$
\Phi_i(R) = \sum_{j=1}^{m} \delta\left(R u_A^j (G_A^{-1})^{ji}\right)
$$

El Lema 1 3 8 implica que els elements $(G_A^{-1})^{ji}$ de la matriu inversa de G_A pertanyen a $\mathbb{D}^\infty$ Per tant , les hipotesis (i) i (ii) impliquen que $\Phi_i(R)$ es un element de $\mathbb{D}^\infty$ i un funcional lineal de R Considerem un multiindex $\alpha = (\alpha_1, \quad , \alpha_k) \in \{1 \quad , m\}^k$ i apliquem recursivament la relacio (1 3 3) a $i = \alpha_1, \quad , \alpha_k$ i a

$$
R = 1, \Phi_{\alpha_1}(1), \Phi_{\alpha_2}(\Phi_{\alpha_1}(1)), \quad , \Phi_{\alpha_k}(\Phi_{\alpha_{k-1}}(\quad (1) \quad)
$$

D'aquesta manera obtenim

$$
\begin{aligned}
\left|E\left(\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_{\alpha_1} \quad \partial x_{\alpha_k}}(F)\right)\right| &= \left|E\left(\varphi(F)\Phi_{\alpha_k}(\Phi_{\alpha_{k-1}}(\quad (1) \quad))\right)\right| \\
&\le C_\alpha \|\varphi\|_\infty,
\end{aligned}
$$

i per el Lema 1 3 5 la desigualtat anterior completa la demostracio del Teorema 1 3 6 □

1 4 Màxim del drap brownià

Un drap brownia $\{W_{s\,t}, (s,t) \in [0,1]^2\}$ es un proces gaussia, centrat i amb funcio de covariancia $E(W_{x\,y} W_{x'\,y'}) = (x \wedge x')(y \wedge y')$ En aquesta seccio suposem que $T = [0,1]^2$ i μ es la mesura de Lebesgue en $[0,1]^2$ Sigui $\{W(h), h \in H = L^2(T)\}$ un proces gaussia com a la seccio 1 2 Aleshores $W(s,t) = W(\mathbf{1}_{[0\,s]\times[0\,t]})$ es un drap brownia Sabem que W te una versio amb trajectories continues Sigui $F = \sup_{(s\,t)\in[0\,1]^2} W(s,t)$ A partir dels resultats de [16] sabem que F posseeix una llei absolutament continua en $(0,+\infty)$ L'objectiu d'aquesta seccio es demostrar que F te una densitat C^∞ en $(0,+\infty)$ Abans d'aplicar el criteri general establert en la seccio anterior donarem alguns resultats sobre la llei del maxim d'un proces continu, extrets de [16]

Proposicio 1 4 1 *Sigui T un espai metric compacte i $X = \{X(t), t \in T\}$ un proces estocastic continu Sota les seguents condicions, la varia ble aleatòria $M = \sup_{t\in T} X(t)$ pertany a $\mathbb{D}^{1\,2}$*

- *(i)* $E(M^2) < \infty$
- *(ii) Per a tot $t \in T$, $X(t) \in \mathbb{D}^{1\,2}$, el proces a valors en H $\{DX(t), t \in T\}$ te una versio continua , i $E(\sup_{t\in T} \|DX(t)\|_H^2) < \infty$*

Proposicio 1 4 2 *Sigui T un espai metric compacte i $X = \{X(t), t \in T\}$ un proces estocastic continu tal que verifica les condicions de la proposicio anterior Si $\|DX(t)\|_H \neq 0$ en el conjunt $\{t \in T, X(t) = M\}$ aleshores la llei de $M = \sup_{t\in T} X(t)$ es absolutament continua respecte la mesura de Lebesgue*

En el cas d'un proces gaussia continu, parametritzat per un espai metric compacte T, centrat i amb funcio de covariancia $k(s,t)$, la condicio $\|DX(t)\|_H \neq 0$ en el conjunt $\{t \in T, X(t) = M\}$ es redueix a $k(t,t) \neq 0$ en $\{t \in T, X(t) = M\}$ Per exemple en el cas del drap brownia $k(s,t) = (s_1 \wedge s_2)(t_1 \wedge t_2)$ per $s = (s_1, s_2)$ i $t = (t_1, t_2)$ Per tant la llei es absolutament continua ja que $\{(s\ t) \in [0\ 1]^2 \quad W(s\ t) = \sup_{(s\ t)\in[0\ 1]^2} W(s\ t)\} \subset \{(s,t) \quad st \neq 0\}$q s

Donarem uns lemes previs que son necessaris per demostrar que la densitat de $F = \sup_{(s\ t)\in[0\ 1]^2} W(s\ t)$ es infinitament diferenciable

Lema 1 4 3 *El procés W assoleix el maxim en un unic punt $(S\ T)$ quasi segurament*

Demostracio Volem demostrar que la probabilitat del conjunt

$$B = \left\{\omega \quad \sup_{z\in[0\ 1]^2} W(z) = W(z_1) = W(z_2) \quad \text{per algun} \quad z_1 \neq z_2\right\}$$

es zero Per cada $n \geq 1$ anomenem $\mathcal{R}_n$ la classe de rectangles diàdics de la forma $((j-1)2^{-n}, j2^{-n}] \times ((k-1)2^{-n}\ k2^{-n}]$ amb $1 \leq j\ k \leq 2^n$ El conjunt B està inclòs en la unió numerable

$$\bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{R_1\ R_2\in\mathcal{R}^n\ R_1\neq R_2} \left\{\sup_{z\in R_1} W(z) = \sup_{z\in R_2} W(z)\right\}$$

Per tant és suficient demostrar que per cada $n \geq 1$ i per cada parell de rectangles diadics $R_1\ R_2 \in \mathcal{R}_n$ es compleix que

$$P\{\sup_{z\in R_1} W(z) = \sup_{z\in R_2} W(z)\} = 0$$

Per demostrar aquesta propietat és suficient demostrar que per tot rectangle $[a,b] \in T$, la llei de $\sup_{z\in[a\ b]} W(z)$ condicionada a la σ-àlgebra generada per $\{W(z), z_1 \leq a_1\}$ és absolutament contínua Utilitzant la Proposicio 1 4 2 només cal veure que donats els valors de W a la frontera esquerra $\{a_1\} \times [a_2, b_2]$ de $[a\ b]$, el suprem $\sup_{z\in[a,b]} W(z)$ no assoleix el màxim en aquesta frontera. Aquest fet es pot provar fent servir el següent argument

Suposem que el suprem de W en $[a,b]$ s'assoleix al punt (a_1, y_0) de la frontera esquerra de $[a,b]$ amb probabilitat positiva. Aleshores els valors de $W(x,y_0) - W(a_1,y_0)$ per $a_1 \leq x \leq b_1$ haurien de ser negatius amb probabilitat positiva i això no és posible ja que el procés $W(x,y_0) - W(a_1,y_0), a_1 \leq x \leq b_1$ és un moviment brownià. □

Lema 1 4 4 *La variable aleatoria* $F = \sup_{z\in[0\ 1]^2} W(z)$ *pertany a* $\mathbb{D}^{1\ 2}$ *i* $D_zF = \mathbf{1}_{[0\ S]\times[0\ T]}(z)$, *on* (S,T) *es el punt on s'assoleix el maxim*

Demostracio

Introduim l'aproximacio diadica de F definida per

$$F_n = \sup_{\{0\le j\le 2^n\ 0\le k\le 2^n\}} W((j2^{-n}, k2^{-n}))$$

Es compleix que

$$D_zF_n = \mathbf{1}_{[0\ S_n]\times[0\ T_n]}(z),$$

on (S_n, T_n) es el punt diadic on el maxim

$$\sup_{0\le j\ k\le 2^n} W((j2^{-n}, k2^{-n}))$$

s'assoleix Les derivades estan uniformament acotades per 1 Per tant existeix una parcial $\{DF_{n(i)}\}$ que convergeix a DF en la topologia feble de $L^2(\Omega\times[0,1]^2)$ Prenem G un element arbitrari de $L^2(\Omega\times[0,1]^2)$ La convergencia feble implica que

$$\begin{aligned} E\left(\int_{[0\ 1]^2} G_zD_zF dz\right) &= \lim_i E\left(\int_{[0\ 1]^2} G_zD_zF_{n(i)} dz\right) \\ &= \lim_i E\left(\int_{[0\ S_{n(i)}]\times[0\ T_{n(i)}]} G_z dz\right) = E\left(\int_{[0\ S]\times[0\ T]} G_z dz\right) \end{aligned}$$

Per tant $D_zF = \mathbf{1}_{[0\ S]\times[0\ T]}$ i queda demostrat el lema □

Ara demostrarem la regularitat de la densitat de F

Proposicio 1 4 5 *La variable aleatoria* $F = \sup_{(s\ t)\in[0\ 1]^2} W(s,t)$ *te una densitat infinitament diferenciable en* $(0,+\infty)$

Abans de fer la demostracio enunciare una generalitzacio del lema de Garsia-Rodemich-Rumsey [8], que es de Stroock i Varadhan [22] Cal destacar tambe la versio d'aquest lema donada per Walsh a [25], que no necessita la continuitat de la funcio Φ

Lema 1 4 6 *Siguin p, ψ $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ funcions estrictament creixents que s'anul len al zero i tals que $\lim_{t\uparrow\infty} \psi(t) = \infty$*

Suposem que Φ $\mathbb{R}^d \to E$ es una funcio continua a valors en un espai de Banach separable $(E, \| \ \|)$ Sigui B la bola oberta en $\mathbb{R}^d$ de centre x_0 i radi r Aleshores, si

$$\Gamma = \int_B \int_B \psi(\frac{\|\Phi(t) - \Phi(s)\|}{p(|t-s|)}) dsdt < \infty$$

es compleix, per a tot $s, t \in B$,

$$\|\Phi(t) - \Phi(s)\| \leq 8 \int_0^{2|t-s|} \psi^{-1}(\frac{4^{d+1}\Gamma}{\lambda_d u^{2d}}) p(du),$$

on λ_d es una constant universal que nomes depen de d

Com a corol lari del Lema 1 4 6 obtenim el seguent resultat

Corol lari 1 4 7 *Si suposem que $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ es un proces estocastic a valors en un espai de Banach $(E, \| \ \|)$ tal que es compleix la seguent acotacio*

$$E(\|X(t) - X(s)\|)^{\gamma}) \leq H|t-s|^{\alpha} \tag{1 4 4}$$

per algun $H > 0$, $\tilde{\gamma} > 0$, $\tilde{\alpha} > d$, i per tot $s, t \in \mathbb{R}^d$ Aleshores es compleix

$$\|X(t) - X(s)\|^{\gamma} \leq C_{d\,\gamma\,m}|t-s|^m \Gamma, \ q\ s \tag{1 4 5}$$

per a tot $0 < m < \tilde{\alpha} - d$ i per a tot $s, t \in \mathbb{R}^d$, on $\Gamma = \int_B \int_B (\frac{\|X(t)-X(s)\|^{\gamma}}{|t-s|^{m+2}}) dsdt$

Demostracio Observem que a causa del lema de Kolmogorov la de sigualtat (1 4 4) implica que existeix una versio continua del proces Podem aplicar el Lema 1 4 6 prenent $\Psi(x) = x^{\gamma}$ i $p(x) = x^{\frac{m+2}{\gamma}}$, amb $0 < m < \tilde{\alpha} - d$, i fixat $w \in \Omega$ es pren $\Phi(t) = X_t(w)$ i obtenim (1 4 5) Cal observar que $\Gamma < \infty$ q s ja que

$$\begin{aligned} E(\Gamma) &\leq \int_B \int_B E(\frac{\|X(t) - X(s)\|^{\gamma}}{|t-s|^{m+2}}) \, dsdt \\ &\leq \int_B \int_B |t-s|^{\alpha - m - 2} dsdt \ \square \end{aligned}$$

Anem a demostrar la Proposició 1 4 5

Demostració

Fixem $a > 0$ i considerem el conjunt $A = (a, +\infty)$

Definim els següents temps aleatoris

$$T_a = \inf\{t \quad \sup_{\{0 \le x \le 1 \ 0 \le y \le t\}} W(x,y) > a\}$$

i

$$S_a = \inf\{s \quad \sup_{\{0 \le x \le s \ 0 \le y \le 1\}} W(x,y) > a\}$$

Els temps aleatoris S_a i T_a son temps d'atur respecte les filtracions $\mathcal{F}_s^1 = \sigma\{W(x,y) \quad 0 \le x \le s, 0 \le y \le 1\}$ i $\mathcal{F}_t^2 = \sigma\{W(x,y) \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le t\}$, respectivament

Per definició $(S_a, T_a) \le (S, T)$ en el conjunt $\{F > a\}$ Per el Lema 1 4 4 es compleix $D_z F(\omega) = 1$ q p t (z, ω) tal que $z \le (S_a(\omega), T_a(\omega))$ i $F(\omega) > a$

Per cada $0 < \gamma < 1/2$ i $p > 1$ tal que $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ es defineix la seminorma de Hölder en $C_0([0,1])$

$$\|f\|_{p\,\gamma} = \left(\int_{[0\ 1]^2} \frac{|f(x) - f(y)|^{2p}}{|x - y|^{1+2p\gamma}} dx dy \right)^{1/2p}$$

Anomenem $\mathcal{H}_{p\,\gamma}$ l'espai de Banach de les funcions contínues en $[0,1]$ que s'anul len en zero i tenen una norma (p, γ) finita

Definim dues famílies de variables aleatòries

$$\begin{aligned} Y^1(\sigma) &= \int_{[0\ \sigma]^2} \frac{\|W(s,\ ) - W(s',\ )\|_{p\,\gamma}^{2p}}{|s - s'|^{1+2p\gamma}} ds ds' \\ &= \int_{[0\ \sigma]^2 \times [0\ 1]^2} \frac{|W(s,t) - W(s',t) - W(s,t') + W(s',t')|^{2p}}{|(s-s')(t-t')|^{1+2p\gamma}} ds ds' dt dt' \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} Y^2(\tau) &= \int_{[0\ \tau]^2} \frac{\|W(\ ,t) - W(\ ,t')\|_{p\,\gamma}^{2p}}{|t - t'|^{1+2p\gamma}} dt dt' \\ &= \int_{[0\ 1]^2 \times [0\ \tau]^2} \frac{|W(s,t) - W(s',t) - W(s,t') + W(s',t')|^{2p}}{|(s-s')(t-t')|^{1+2p\gamma}} ds ds' dt dt', \end{aligned}$$

on $\sigma, \tau \in [0,1]$ Sigui $Y(\sigma,\tau) = Y^1(\sigma) + Y^2(\tau)$

Existeix una constant R, que depen de a p i γ, tal que

$$Y(\sigma,\tau) \leq R \quad \text{implica} \quad \sup_{z\in[0\ \sigma]\times[0\ 1]\cup[0\ 1]\times[0\ \tau]} W_z \leq a \qquad (1\ 4\ 6)$$

Per tal de demostrar aquesta propietat apliquem primer el Corol lari 1 4 7 a la funcio a valors en $\mathcal{H}_{p\ \gamma}$ $s \in [0,\sigma]^2 \hookrightarrow W(s,\ )$ Prenem $\tilde{\gamma} = 2p$, $\tilde{\alpha} = p$ i $m = 2p\gamma - 1$ Tindrem

$$\begin{aligned} &E(\|W(s,\ ) - W(s',\ )\|_{p\ \gamma}^{2p}) = \qquad (1\ 4\ 7)\\ &E(\int_{[0\ 1]^2} \frac{|W(s,t) - W(s,t') - W(s',t) + W(s',t')|^{2p}}{|t-t'|^{1+2p\gamma}} dtdt')\\ &\leq C_p \int_{[0\ 1]^2} |s'-s|^p |t'-t|^{p-2p\gamma-1} dtdt' \leq C_p |s'-s|^p \end{aligned}$$

El Corol lari 1 4 7 ens diu

$$\|W(s,\ ) - W(s',\ )\|_{p\ \gamma}^{2p} \leq c_{p\ \gamma} |s-s'|^{2p\gamma-1} Y_1(\sigma), \qquad (1\ 4\ 8)$$

per a tot $s, s' \in [0,\sigma]$

Per tant al conjunt $Y^1(\sigma) < R$ es compleix

$$\|W(s,\ )\|_{p\ \gamma}^{2p} \leq c_{p\ \gamma} R,$$

per a tot $s \in [0,\sigma]$

Apliquem despres el Corol lari 1 4 7 a la funcio real $t \in [0,1] \hookrightarrow W(s,t)$ (s esta ara fixada en $[0,\sigma]$) Com $E(|W(s,t) - W(s,t')|^{2p}) \leq C_p s^p |t'-t|^p$ obtenim

$$|W(s,t) - W(s,t')|^{2p} \leq c_{p\ \gamma} |t-t'|^{2p\gamma-1} \|W(s,\ )\|_{p\ \gamma}^{2p} \leq c_{p\ \gamma}^2 R |t-t'|^{2p\gamma-1},$$

per a tot $t, t' \in [0,1]$

Per tant

$$\sup_{0\le s\le\sigma\, 0\le t\le 1} |W(s,t)| \le c_p^{\frac{1}{p}}\gamma R^{\frac{1}{2p}}$$

De forma similar es demostra

$$\sup_{0\le s\le 1\, 0\le t\le \tau} |W(s,t)| \le c_p^{\frac{1}{p}}\gamma R^{\frac{1}{2p}},$$

i es suficient escollir R tal que $c_p^{\frac{1}{p}}\gamma R^{\frac{1}{2p}} < a$

Ara introduim el proces estocastic $u_A(s,t)$ i la variable aleatoria G_A que satisfan les condicions del Teorema 1 3 6

Sigui ψ $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una funcio infinitament diferenciable tal que $\psi(x) = 0$ si $x > R$, i $\psi(x) = 1$ si $x < R/2$ Aleshores definim

$$u_A(s,t) = \psi(Y(s,t)),$$

i

$$G_A = \int_{[0\ 1]^2} \psi(Y(s,t))dsdt$$

Primer comprovem la condicio (iii) En el conjunt $\{F > a\}$ es compleix

(1) $\psi(Y(s,t)) = 0$ si $(s,t) \notin [0,S_a] \times [0,T_a]$ Ja que, si $\psi(Y(s,t)) \neq 0$ aleshores $Y(s,t) \le R$ (per definicio de ψ) i per (1 4 6) aquesta desigualtat implica $\sup_{z\in[0\ s]\times[0\ 1]\cup[0\ 1]\times[0\ t]} W_z \le a$, i en consequencia $s \le S_a$, $t \le T_a$, i aixo es contradictori

(2) $D_{s\,t}F = 1$ si $(s,t) \in [0,S_a] \times [0,T_a]$, per el Lema 1 4 4

En consequencia, en $\{F > a\}$ obtenim

$$\langle DF, u_A\rangle_H = \int_{[0\ 1]^2} D_{s\,t}F\psi(Y(s,t))dsdt$$
$$= \int_{[0\ S\ ]\times[0\ T\ ]} \psi(Y(s,t))dsdt = G_A$$

La condicio (i) es compleix, es a dir $G_A \in \mathbb{D}^\infty$ i $u_A \in \mathbb{D}^\infty(H)$ ja que els processos $Y^1(s)$ i $Y^2(t)$ son a $\mathbb{D}^\infty(L^2[0,1])$ (veure [1])

Fınalment hem de demostrar que G_A^{-1} te moments de tots els ordres Tenım

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0\ 1]^2} \psi(Y(s,t))dsdt \geq \int_{[0\ 1]^2} \mathbf{1}_{\{Y(s\ t)<R/2\}} dsdt \\
&= \lambda\{(s,t) \in [0,1]^2 \quad Y^1(s) + Y^2(t) < R/2\} \geq \lambda\{s \in [0,1] \quad Y^1(s) < R/4\} \\
&\qquad \times \lambda\{t \in [0,1] \quad Y^2(t) < R/4\} \\
&= (Y^1)^{-1}(R/4)(Y^2)^{-1}(R/4)
\end{aligned}
$$

Hem utılıtzat el fet que els processos estocastıcs Y^1 ı Y^2 son contınus ı creıxents Per a tot ϵ podem escrıure

$$
\begin{aligned}
&P((Y^1)^{-1}(R/4) < \epsilon) = P(R/4 < Y^1(\epsilon)) \\
&\leq P\left(\int_{[0\ \epsilon]^2} \frac{\|W(s,\ ) - W(s',\ )\|_{p\ \gamma}^{2p}}{|s-s'|^{1+2p\gamma}} dsds' > R/4\right) \\
&\leq (\frac{4}{R})^q E\left(\left|\int_{[0\ \epsilon]^2} \frac{\|W(s,\ ) - W(s',\ )\|_{p\ \gamma}^{2p}}{|s-s'|^{1+2p\gamma}} dsds'\right|^q\right) \leq \text{Const } \epsilon^{2q}
\end{aligned}
$$

Aquesta darrera desıgualtat es dedueıx aplıcant la desıgualtat de Holder ı l'acotacıo (1 4 7)

$$
\begin{aligned}
&E\left(|\int_{[0\ \epsilon]^2} \frac{\|W(s,\ ) - W(s',\ )\|_{p\ \gamma}^{2p}}{|s-s'|^{1+2p\gamma}} dsds'|^q\right) \\
&\leq \epsilon^{2(q-1)} \int_{[0\ \epsilon]^2} E\left(\frac{\|W(s,\ ) - W(s',\ )\|_{p\ \gamma}^{2pq}}{|s-s'|^{(1+2p\gamma)q}}\right) dsds' \\
&\leq C_{p\ q}\epsilon^{2(q-1)} \int_{[0\ \epsilon]^2} |s-s'|^{(p-1-2p\gamma)q} dsds' \\
&\leq C'_{p\ q}\epsilon^{2q},
\end{aligned}
$$

per a tot $q > 2$, on $C_{p\ q}$ ı $C'_{p\ q}$ son constants que depenen de p ı q Aıxo completa la demostracıo □

Podem estendre els resultats d'aquesta seccıo al cas multıparametrıc

1 5 Màxim del procés de Wiener m-paramètric

Direm que $W = \{W_{s_1 \ldots s_m}, (s_1, \ldots, s_m) \in [0,1]^m\}$ es un proces de Wiener m parametric si W es un proces gaussia centrat, amb funcio de covariancia $E(W_{s_1 \ldots s_m} W_{s'_1 \ldots s'_m}) = \prod_{i=1}^m (s_i \wedge s'_i)$ Sigui $T = [0,1]^m$ i μ la mesura de Lebesgue en $[0,1]^m$ Aleshores si $\{W(h), h \in H = L^2(T)\}$ es un proces gaussia centrat associat a l'espai de Hilbert H, $W(s_1, \ldots, s_m) = W(\mathbf{1}_{[0\, s_1] \times \cdots \times [0\, s_m]})$ defineix un proces de Wiener m parametric

Prenem $F = \sup_{(s_1 \ldots s_m) \in [0\, 1]^m} W(s_1, \ldots, s_m)$

Proposicio 1 5 1 *La variable aleatoria* $F = \sup_{(s_1 \ldots s_m) \in [0\, 1]^m} W(s_1, \ldots s_m)$ *te una densitat infinitament diferenciable en* $(0, +\infty)$

Demostracio

Fent un raonament analeg al cas dos-parametric es demostra que quasi segurament el maxim s'assoleix en un unic punt $(S_1, \ldots, S_m)$, F pertany a $\mathbb{D}^{1\,2}$ i $D_z F = \mathbf{1}_{[0\, S_1] \times \cdots \times [0\, S_m]}(z)$ La demostracio de la regularitat de la densitat es basa en el Teorema 1 3 6

Definim, per a $i = 1 \ldots, m$

$$S_a^i = \inf\{s \geq 0 \quad \sup_{\{x_i \in [0\, s]\ x_j \in [0\, 1]\, j \neq i\}} W(x_1, \ldots, x_m) > a\}$$

S_a^i es un temps d'atur respecte la familia creixent de σ-algebres $\mathcal{F}_s^i = \sigma\{W(x_1, \ldots, x_m) \quad x_i \in [0,s], x_j \in [0,1],\ j \neq i\}$, $s \in [0,1]$

Donada una funcio $f \quad [0,\infty)^m \to \mathbb{R}$, definim l'increment m dimensional de la funcio f en el rectangle $(a,b]$, on $a, b \in \mathbb{R}^m$, i per a tot $i = 1$ a m $a_i \leq b_i$, com

$$\Delta_{a\,b}^m f = \sum_{\epsilon \in \{0\,1\}^m\ \epsilon = (\epsilon_1 \ldots \epsilon_m)} (-1)^{\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_m} f(b_1 + \epsilon_1(a_1 - b_1), \ldots, b_m + \epsilon_m(a_m - b_m))$$

Sigui $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2 \quad x \leq y\}$

Per a cada $0 < \gamma < 1/2$ i $p > 1$ tal que $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ es defineix la seminorma de Holder en $C_0([0,1]^m)$

$$\|f\|_{p\,\gamma\,m} = \left(\int_{\Delta^m} \frac{|\Delta^m_{(x_1 \quad x_m)\,(x_1 \quad x'_m)} f|^{2p}}{|(x_1 - x'_1) \quad (x_m - x'_m)|^{1+2p\gamma}} dx_1 dx'_1 \quad dx_m dx'_m\right)^{1/2p} \tag{1 5 9}$$

Anomenem $\mathcal{H}_{p\,\gamma\,m}$ l'espai de Banach de les funcions continues en $[0,1]^m$ que s'anul len en els punts que tenen alguna coordenada zero i tenen una norma (p, γ, m) finita

Definim la família de variables aleatories

$$\begin{aligned} &Y(\sigma_1, \quad ,\sigma_m) \\ &= \int_{([0\ \sigma_1]^2 \cap \Delta) \times \quad \times ([0\ \sigma_m]^2 \cap \Delta)} \frac{|\Delta^m_{(x_1 \quad x_m)\,(x_1 \quad x_m)} f|^{2p}}{|(x'_1 - x_1) \quad (x'_m - x_m)|^{1+2p\gamma}} dx_1 dx'_1 \quad dx_m dx'_m, \end{aligned}$$

per a $\sigma_1, \quad ,\sigma_m \in [0,1]$

Per $i = 1, \quad , m$ definim

$$Y^i(\sigma_i) = Y(1, \quad ,1, \sigma_i, 1, \quad ,1) = \int_{[0\ \sigma\ ]^2 \cap \Delta} \frac{\|\Delta^1_{x\ \ x} W\|^{2p}_{p\,\gamma\,m-1}}{|(x'_i - x_i)|^{1+2p\gamma}} dx_i\, dx'_i$$

Fixem una coordenada i, i apliquem el Corol lari 1 4 7 a la funcio a valors en l'espai $\mathcal{H}_{p\,\gamma\,m-1}$

$s_i \in [0, \sigma_i] \to W(\ , s_i, \ )$

Aplicant la definicio (1 5 9) de la seminorma $p, \gamma, m-1$, tenim

$$\begin{aligned} &E\left(\|W(\ s'\ ) - W(\ s\ )\|^{2p}_{p\,\gamma\,m-1}\right) \\ &\leq C \int_{[0\ 1]^{2(m-1)}} |s'_i - s_i|^p \left(|x'_1 - x_1| \quad |x'_m - x_m|\right)^{p-1-2p\gamma} dx_1 \quad dx'_m \\ &\leq C|s'_i - s_i|^p \end{aligned}$$

Aleshores per a tot $s_i, s'_i \in [0, \sigma_i]$ es compleix

$$\|W(\ , s_i', \ ) - W(\ , s_i, \ )\|_{p \ \gamma \ m-1}^{2p} \leq CY^i(\sigma_i)|s_i' - s_i|^{2p\gamma - 1}$$

Per tant en el conjunt $Y^i(\sigma_i) < R$ obtenim

$$\|W(\ , s_i', \ ) - W(\ , s_i, \ )\|_{p \ \gamma \ m-1}^{2p} \leq CR|s_i' - s_i|^{2p\gamma - 1}$$

Si prenem $s_i' = 0$ obtenim per a tot $s_i \in [0, \sigma_i]$

$$\|W(\ , s_i, \ )\|_{p \ \gamma \ m-1}^{2p} \leq CR$$

Fixada la s_i tornem a aplicar el Corol lari 1 4 7 a la funcio a valors en $\mathcal{H}_{p \ \gamma \ m-2}$

$x_j \in [0, 1] \rightarrow W(\ , s_i, \ , x_j, \ )$, on $j \neq i$

Observem que

$$\|W(\ , s_i, \ )\|_{p \ \gamma \ m-1}^{2p} = \int_\Delta \frac{\|W(\ , s_i, \ , x_j, \ ) - W(\ , s_i, \ , x_j', \ )\|_{p \ \gamma \ m-2}^{2p}}{|x_j' - x_j|^{1+2p\gamma}} dx_j \, dx_j'$$

Tenim

$$E\left(\|W(\ , s_i, \ , x_j, \ ) - W(\ , s_i, \ , x_j', \ )\|_{p \ \gamma \ m-2}^{2p}\right) =$$

$$E\Big(\int_{\Delta^{m-2}} \frac{|\Delta^{m-1}_{(x_1 \ \ x \ \ x_m)(x_1 \ \ x \ \ x_m)} W(\ , s_i, \ )|^{2p}}{|(x_1' - x_1) \ \ (x'_i - x_i) \ \ (x'_j - x_j) \ \ (x_m' - x_m)|^{2p\gamma + 1}}$$

$$dx_1 dx_1' \ \ dx_i dx_i{}' \ \ dx_j dx_j{}' \ \ dx_m dx_m'\Big)$$

$$\leq C|s_i|^p |x_j' - x_j|^p$$

Per tant, per a tot $x_j, x_j' \in [0, 1]^2$ i tot $s_i \in [0, \sigma_i]$ podem escriure

$$\|W(\ , s_i, \ , x_j, \ ) - W(\ , s_i, \ , x_j', \ )\|_{p \ \gamma \ m-2}^{2p}$$

$$\leq C\|W(\ , s_i, \ )\|^{2p}_{p\ \gamma\ m-1}|(x'_j - x_j)|^{2p\gamma-1}$$

$$\leq CR|(x'_j - x_j)|^{2p\gamma-1}$$

Prenem $x'_j = 0$ i obtenim $\forall x_j \in [0,1]^2$ i $\forall s_i \in [0, \sigma_i]$

$$\|W(\ , s_i, \ , x_j, \ )\|^{2p}_{p\ \gamma\ m-2} \leq CR$$

Iterem aquest proces, fixant succesivament les coordenades i rebaixant l'ordre de l'increment fins a aconseguir que per a tot $(x_1, \ , x_i, \ , x_m) \in [0,1]^{m-1}$ i per a tot $s_i \in [0, \sigma_i]$

$$|W(x_1, \ , s_i, \ , x_m)| \leq CR^{\frac{1}{2p}}$$

Per tant si prenem $CR^{\frac{1}{2p}} < a$ obtenim

$$\sup_{\{x_1 \in [0\ 1] \quad s \in [0\ \sigma\ ] \quad x_m \in [0\ 1]\}} W(x_1, \ , s_i, \ , x_m) \leq a$$

per $i = 1, \ , m$

Ara introduim el proces estocastic u_A i la variable aleatoria G_A que satisfan les condicions del Teorema 1 3 6

Sigui $P(s_1, \ , s_m) = Y(s_1) + \ + Y(s_m)$

Sigui $\psi \quad \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una funcio infinitament diferenciable tal que $\psi(x) = 0$ si $x > R$, i $\psi(x) = 1$ si $x < R/2$ Aleshores definim

$$u_A(s_1, \ , s_m) = \psi(P(s_1, \ , s_m)),$$

i

$$G_A = \int_{[0\ 1]^m} \psi(P(s_1, \ , s_m)) ds_1 \ \ ds_m$$

Primer comprovem la condicio (iii) En el conjunt $\{F > a\}$ es compleix

(1) $\psi(P(s_1, \quad, s_m)) = 0$ si $(s_1, \quad, s_m) \notin [0, S_a^1] \times \quad \times [0, S_a^m]$ Ja que si $\psi(P(s_1, \quad, s_m)) \neq 0$ aleshores $P(s_1, \quad, s_m) \leq R$ (per definició de ψ) i aquesta desigualtat implica

$$\sup_{\{x_1 \in [0\ 1] \quad s \in [0\ \sigma] \quad x_m \in [0\ 1]\}} W_{(x_1 \quad s \quad x_m)} \leq a$$

per $i = 1, \quad, m$ En consequencia $(s_1, \quad, s_m) \leq (S_1, \quad, S_m)$ i aixo es contradictori

(2) $D_z F = 1$ si $(s_1, \quad, s_m) \leq (S_1, \quad, S_m)$

En consequencia, en $\{F > a\}$ obtenim

$$\langle DF, u_A \rangle_H = \int_{[0\ 1]^m} D_z F \psi(P(z)) dz$$
$$= \int_{[0\ S^1] \times \quad \times [0\ S^m]} \psi(P(s_1, \quad, s_m)) ds_1 \quad ds_m = G_A$$

La condicio (i) es compleix, es a dir $G_A \in \mathbb{D}^\infty$ i $u_A \in \mathbb{D}^\infty(H)$

Finalment hem de demostrar que G_A^{-1} te moments de tots els ordres Tenim

$$\int_{[0\ 1]^m} \psi(P(z)) dz \geq \int_{[0\ 1]^m} \mathbf{1}_{\{P(z) < R/2\}} dz$$
$$= \lambda\{z \in [0,1]^m \quad Y^1(s_1) + \quad + Y^m(s_m) < R/2\}$$
$$\geq \prod_{i=1}^{m} \lambda\{s_i \in [0,1] \quad Y^i(s_i) < R/2m\} = \prod_{i=1}^{m} (Y^i)^{-1}(R/2m)$$

Hem utilitzat el fet de que els processos estocastics Y^i son continus i creixents Per tot ϵ podem escriure

$$P((Y^i)^{-1}(R/2m) < \epsilon) = P(R/2m < Y^i(\epsilon))$$
$$\leq P\left(\int_{[0\ \epsilon]^2 \cap \Delta} \frac{\|\Delta^1_{x\ x} W\|^{2p}_{p\ \gamma\ m-1}}{|(x_i' - x_i)|^{1+2p\gamma}} dx_i dx_i' > R/2m\right)$$
$$\leq CE\left(\left|\int_{[0\ \epsilon]^2 \cap \Delta} \frac{\|\Delta^1_{x\ x} W\|^{2p}_{p\ \gamma\ m-1}}{|(x_i' - x_i)|^{1+2p\gamma}} dx_i dx_i'\right|^q\right) \leq \text{Const}\ \epsilon^{2q}$$

Aixo completa la demostracio $\square$

1 6 Posıtıvıtat de la densıtat

Una de les aplıcacıons prıncıpals del calcul de Mallıavın es l'estudı de l'exıstencıa ı regularıtat de densıtats de les lleıs de funcıonals del proces de Wıener Aquest estudı ınclou els seguents resultats sobre la posıtıvıtat de la densıtat, extrets de [13]

Lema 1 6 1 *Sıguı $F \in (F^1, \quad F^k)$ un vector aleatorı amb components en $\mathbb{D}^{1\,2}$ Aleshores el suport de la lleı es un conjunt connex (un ınterval tancat en dımensıo 1)*

Proposıcıo 1 6 2 *Sıguı $F \in \mathbb{D}^{1\,p}$, $p > 2$ tal que posseeıx una densıtat $p(x)$ localment Lıpschıtz ı sıguı a un punt ınterıor del suport de la lleı de F Aleshores $p(a) > 0$*

Com els operadors D ı δ son locals ı com a consequencıa del Lema 1 6 1 podem estendre la proposıcıo anterıor per a vectors que tenen la densıtat concentrada en un obert

Proposıcıo 1 6 3 *Sıguı $F \in \mathbb{D}^{1\,p}$, $p > 2$ tal que posseeıx una densıtat $p(x)$, concentrada en un obert A, localment Lıpschıtz ı sıguı a un punt ınterıor del suport de la lleı de F Aleshores $p(a) > 0$*

Aplıcant la proposıcıo anterıor obtenım el resultat de que la densıtat de $F = \sup_{(s\,t)\in[0\,1]^2} W_{s\,t}$ no s'anul la en $(0,\infty)$

Proposıcıo 1 6 4 *Sıguı $F = \sup_{(s\,t)\in[0\,1]^2} W_{s\,t}$ ı $p(x)$ la densıtat de la lleı de F Sı $a \in (0,\infty)$ aleshores $p(a) > 0$*

Demostracıo de la Proposıcıo 1 6 4
Hem demostrat que la densıtat de $F = \sup_{(s\,t)\in[0\,1]^2} W_{s\,t}$ es ınfinıtament dıferencıable en $(0,\infty)$ ı per tant localment Lıpschıtz A mes $F \in \mathbb{D}^{1\,p}$ per a tot $p \geq 1$ Per tant es compleıxen les hıpotesıs de la Proposıcıo 1 6 3 □

Capítol 2

Una aproximació de difusions

2 1 Introducció

En aquest capitol es demostra un teorema d'aproximacio en llei de difusions per a una equacio integral estocastica en el pla governada per un proces de Wiener amb dos parametres Aquesta equacio es la versio integral d'una equacio en derivades parcials hiperbolica

L'estructura de les equacions hiperboliques permet utilitzar metodes de martingales dos parametriques

La formulacio de Stratonovich es adequada en problemes d'aproximacio ja que obeeix les regles del calcul ordinari

Aquest capitol esta dividit en cinc parts Comença amb la relacio entre la integral de Stratonovich i la integral de Skorohod, on es presenten diversos resultats de J Ll Sole i F Utzet, [21] Continua amb uns preliminars sobre calcul estocastic per processos amb dos parametres i equacions hiperboliques extrets de l'article de B Hajeck [9]

En la segona part es demostra l'ajustament de la família de processos $X^{\varepsilon}_{s\,t}$ La tercera part esta dedicada a la caracterització de la llei del limit de X^{ϵ} quan $\varepsilon \downarrow 0$ En la quarta part s estableix l'equivalencia entre el problema de martingala i la solucio feble de l'equacio (0 1 2)

Fınalment, en la darrera s'esten el resultat d'aproxımacıo a la classe d'equacıons tractada a [9]

2 2 Prelımınars

Ara donem un resum extret de [21], per tal de relacıonar la ıntegral de Stratonovıch ı la de Skorohod

2 2 1 La ıntegral de Stratonovıch

Introduım la ıntegral de Stratonovıch en el pla per a processos no necessarıament adaptats

Sıguı $T = [0,1]^2$, amb la relacıo d'ordre parcıal $z = (z_1, z_2) \leq z' = (z_1', z_2')$ sı $z_1 \leq z_1'$ ı $z_2 \leq z_2'$ Posarem $z < z'$ sı $z_1 < z_1'$ ı $z_2 < z_2'$ Sıguı $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espaı canonıc assocıat al proces de Wıener amb dos parametres $\{W_z, z \in T\}$

Prenem un proces mesurable $X = \{X_z, z \in T\}$ tal que $\int_T X_z^2 dz < \infty$ q s Sıguı Π una partıcıo de l'ınterval $[0,1]^2$

$\Pi = \{(s_\imath, t_\jmath), 0 = s_0 < s_1 < \quad < s_n = 1, 0 = t_0 < t_1 < \quad < t_m = 1\}$

Ferem servır les notacıons $\Delta_{\imath\jmath} = (s_\imath, s_{\imath+1}] \times (t_\jmath, t_{\jmath+1}]$,

ı

$|\Pi| = \max_{\imath \jmath}\{|\Delta_{\imath\jmath}|\}$

Sıguı

$$S_\Pi(X) = \sum_{\imath \jmath} \left(\frac{1}{|\Delta_{\imath\jmath}|} \int_{\Delta_{\imath\jmath}} X_z dz \right) W(\Delta_{\imath\jmath})$$

Defınıcıo 2 2 1 *Es dıu que X es ıntegrable Stratonovıch sı exısteıx el seguent lımıt en el sentıt de la convergencıa en probabılıtat*

$$I^S(X) = \lim_{|\Pi| \downarrow 0} S_\Pi(X)$$

$I^S(X)$ es la ıntegral de Stratonovıch de X ı s'escrıu

$$I^S(X) = \int_T X_z \circ dW$$

Anomenarem Dom I^S al conjunt de processos integrables Stratonovich

Donem la definicio de la traça de un proces La traça es el terme que relaciona la integral de Stratonovich i la de Skorohod (la d'Ito en el cas adaptat)

Definicio 2 2 2 *Es diu que el proces X te traça TX si existeix el limit en probabilitat*

$$TX = \lim_{|\Pi|\downarrow 0} \sum_{i j} \left(\frac{1}{|\Delta_{ij}|} \int_{(\Delta_{ij})^2} D_z X_z dz dz' \right)$$

Proposicio 2 2 3 *Sigui $X \in \mathbb{L}^{1 2}$ Aleshores $X \in Dom I^S$ si i nomes si X te traça A mes a mes*

$$I^S(X) = \delta(X) + TX$$

Definicio 2 2 4 *Direm que un proces $X \in \mathbb{L}^{1 2}$ es de la classe $\mathbb{L}_a$ si existeix una versio $\{D_z X_{z'}, (z, z') \in T^2\}$ per la qual hi ha un entorn $V \subset T^2$ de la diagonal de T^2 tal que*

(i) Per a tota z definim $V_z^{++} = \{z' \in T \quad z < z' \; i \; (z, z') \in V\}$ Aleshores l'aplicacio de V_z^{++} a valors en $L^2(\Omega)$ $z' \to D_z X_{z'}$, es continua, uniformement en z

(ii) De manera analoga es defineixen V_z^{+-}, V_z^{-+} i V_z^{--} i les aplica cions respectives, de manera que siguin continues uniformament en z

(iii)

$$\sup_{(z z') \in V} E[(D_z X_{z'})^2] < \infty$$

Per a $X \in \mathbb{L}_a$ podem definir els limits

$$DX(s^+, t^+) = L^2(\Omega) - \lim_{s' \downarrow s \; t' \downarrow t} D_{st} X_{s't'}$$

De forma analoga es defineixen $DX(s^+,t^-), DX(s^-,t^+)$ i $DX(s^-,t^-)$ Les condicions (i), (ii) i (iii) impliquen que existeix una versio de $\{DX_{z^{++}}\ _{z\in T}\}$ que pertany a $L^2(T\times\Omega)$ Fem servir la notacio

$$\Delta X_z = \frac{1}{4}(DX_z^{++} + DX_z^{-+} + DX_z^{+-} + DX_z^{--})$$

Proposicio 2 2 5 *Sigui $X\in\mathbb{L}_a$ Aleshores X te traça i*

$$TX = \int_T \Delta X_z dz$$

2 2 2 Calcul estocastic per processos amb dos parametres

Aquests preliminars son de [9] Fem servir la seguent notacio Si prenem dos punts del quadrat positiu del pla $s=(s_1,s_2)$ i $s=(s_1',s_2')$ $s\wedge s'$ denota la condicio $s_1'\geq s_1, s_2\geq s_2'$, i $s\times s'$ es el punt (s_1',s_2) Fixem $z_0\in[0,\infty)^2$ Prenem $R_{z_0}=\{s\in[0,\infty)^2, s\leq z_0\}$ Sigui $(\Omega\ \mathcal{F}\ P)$ un espai complet de probabilitat amb una família de sub σ-algebres $\{\mathcal{F}_z, z\in R_{z_0}\}$ tals que

(F1) $\mathcal{F}_z \subset \mathcal{F}_z$ si $z\leq z'$

(F2) $\mathcal{F}_0$ conte tots els conjunts nuls de $\mathcal{F}$

(F3) $\mathcal{F}_z = \bigcap_{z<z} \mathcal{F}_z$

(F4) $\mathcal{F}_{z\times z_0}$ i $\mathcal{F}_{z_0\times z}$ son condicionalment independents donat $\mathcal{F}_z$, $\forall z\in R_{z_0}$

Un proces estocastic $\{X_z, z\in R_{z_0}\}$ es adaptat si X_z es $\mathcal{F}_z$ mesurable per a tot z

Un proces de Wiener $\{W_z, z\in R_{z_0}\}$ en $(\Omega,\mathcal{F},P)$ respecte $\{\mathcal{F}_z, z\in R_{z_0}\}$ es un proces gaussia centrat de covariancia $E(W_zW_z) = \mu(R_z\cap R_z)$ on μ es la mesura de Lebesgue i tal que $\{W_z - W_{z\times z} - W_{z\times z} + W_z, z<z'\}$ es independent de $\mathcal{G}_z=\mathcal{F}_{z\times z_0}\vee\mathcal{F}_{z_0\times z}$ per a tot $z\in R_{z_0}$

Per $1 \leq p \leq \infty$ es defineix $\mathcal{L}_1^p$ com el conjunt de funcions mesurables $q(s,\omega)$ en $(R_{z_0} \times \Omega, \mathcal{B}(R_{z_0} \times \mathcal{F}))$ tal que $q(s)$ es $\mathcal{F}_s$−mesurable per tota s i $\int_{R_{z_0}} |q(s,\omega)|^p ds < \infty$ si $p < \infty$ i $\sup_s |q(s,\omega)| < \infty$ si $p = \infty$

Prenem $R_z \otimes R_z = \{(s,s') \in R_z \times R_z, s \wedge s'\}$ Es defineix $\mathcal{L}_2^p$ com el conjunt de funcions mesurables $r(s\ s',\omega)$ en $(R_{z_0} \otimes R_{z_0} \times \Omega, \mathcal{B}(R_{z_0} \otimes R_{z_0}) \times \mathcal{F}))$ tal que $r(s,s')$ es $\mathcal{F}_{s\vee s}$ −mesurable per tot $s\ s' \in R_{z_0}$ i $\int_{R_{z_0} \otimes R_{z_0}} |r(s,s')|^p ds\, ds' < \infty$ q s si $p < \infty$ i $\sup_{s\,s} |q(s,s')| < \infty$ si $p = \infty$

Introduim les seguents integrals estocastiques, definides per Wong i Zakai en [29] i [30], per processos $q \in \mathcal{L}_1^2$ i $r, \alpha, \beta \in \mathcal{L}_2^2$

$$q\ W(z) = \int_{R} q(s) dW_s$$

$$W\ r\ W(z) = \int_{R \otimes R} r(s,s') dW_s dW_{s'}$$

$$\mu\ \alpha\ W(z) = \int_{R \otimes R} \alpha(s,s') ds dW_s$$

$$W\ \beta\ \mu(z) = \int_{R \otimes R} \beta(s,s') dW_s ds'$$

Introduim una classe de semimartingales amb dos parametres Sigui $\mathcal{S}^p$ per $2 \leq p \leq \infty$ l'espai lineal dels processos de la forma

$$Z = q\ W + W\ r\ W + \mu\ \alpha\ W + W\ \beta\ \mu + b\ \mu \qquad (2\,2\,1)$$

on $q, b \in \mathcal{L}_1^p$ i $r, \alpha, \beta \in \mathcal{L}_2^p$, i on $b\ \mu$ es la integral de Lebesgue, es a dir $b\ \mu(z) = \int_R b_s ds$

Aleshores $\mathcal{S}^p \subset \mathcal{S}^2$ i $\mathcal{S}^2$ es l'espai de semimartingales Sigui $\mathcal{S}^\omega = \bigcap_{2 \leq p < \infty} \mathcal{S}^p$ Una semimartingala $Z \in \mathcal{S}^2$ es una semimartingala en un parametre si es fixa z_2 o z_1 i te una representacio

$$Z = Z_W\ W + Z_\mu\ \mu, \qquad (2\,2\,2)$$

per $i = 1, 2$

Definicio 2 2 6 *Per* $2 \leq p\ q, r < \infty$ *tals que* $1/p + 1/q = 1/r$, $Z \in \mathcal{S}^p$ *i* $\tilde{Z} \in \mathcal{S}^q$ *,i* $\psi \in \mathcal{L}_1^q$, $Z, \tilde{Z}$ *amb representacions tipus (2 2 1) i (2 2 2) es defineixen les seguents semimartingales de* $\mathcal{S}^r$

$$
\begin{aligned}
[Z, Z] &= (q\tilde{q})\ \ \mu + \mu\ \ (r\tilde{r})\ \ \mu && (2\ 2\ 3)\\
\langle Z, \tilde{Z}\rangle_1(z) &= \int_R Z_{W_1}(z, s')\tilde{Z}_{W_1}(z, s')\, ds' && (2\ 2\ 4)\\
\langle Z, \tilde{Z}\rangle_2(z) &= \int_R Z_{W_2}(z\ \ s)\tilde{Z}_{W_2}(z\ \ s)\, ds, && (2\ 2\ 5)\\
Z \star \tilde{Z} &= W\ \ (Z_{W_2}(s \vee s', s)\tilde{Z}_{W_1}(s \vee s', s'))\ \ W \\
&\quad +\mu\ \ (Z_{\mu_2}(s \vee s', s)\tilde{Z}_{W_1}(s \vee s', s'))\ \ W \\
&\quad +W\ \ (Z_{W_2}(s \vee s', s)\tilde{Z}_{\mu_1}(s \vee s', s'))\ \ \mu && (2\ 2\ 6)\\
&\quad +\mu\ \ (Z_{\mu_2}(s \vee s', s)\tilde{Z}_{\mu_1}(s \vee s', s'))\ \ \mu \\
\psi\ \ Z &= (q\psi)\ \ W + W\ \ (r_{s\,s}\,\psi_{s\wedge s})\ \ W + \mu\ \ (\alpha_{s\,s}\,\psi_{s\wedge s})\ \ W \\
&\quad +W\ \ (\beta_{s\,s}\,\psi_{s\wedge s})\ \ \mu + (b\psi)\ \ \mu && (2\ 2\ 7)
\end{aligned}
$$

Observacio

Els processos $[Z, Z]$, $\langle Z\ \tilde{Z}\rangle_1, \langle Z, \tilde{Z}\rangle_2$ i $Z \star \tilde{Z}$ definits en termes de les representacions (2 2 1) i (2 2 2) tenen la seguent interpretacio heuristica

$$\langle Z, \tilde{Z}\rangle_1(dz_1, z_2) = Z(dz_1, z_2)\tilde{Z}(dz_1, z_2)$$

$$\langle Z, \tilde{Z}\rangle_2(z_1, dz_2) = Z(z_1, dz_2)\tilde{Z}(z_1, dz_2)$$

$$[Z, Z](dz_1, dz_2) = Z(dz_1, dz_2)\tilde{Z}(dz_1, dz_2)$$

$$Z \star \tilde{Z}(dz_1, dz_2) = Z(z_1, dz_2)\tilde{Z}(dz_1, z_2)$$

$$\psi\ \ Z(dz_1, dz_2) = \psi(z)Z(dz_1, dz_2)$$

Es a dir $\langle Z, \tilde{Z}\rangle_1$ i $\langle Z, \tilde{Z}\rangle_2$ son els compensadors de Meyer de Z^2 con siderat com una semimartingala en un parametre, $[Z, Z]$ es la variacio quadratica de Z (veure [3]), i el proces $Z \star \tilde{Z}$ interve en la formula d'Ito com veurem tot seguit

El teorema seguent es la formula d' Ito per semimartingales amb dos parametres

Teorema 2 2 7 *(Formula de diferenciacio Wong Zakai Ito) Prenem* $p \geq 2, Z \in \mathcal{S}^{4p}$ *i* $F \in C^4(\mathbb{R})$ *Aleshores* $F(Z) \in \mathcal{S}^p$ *i*

$$\begin{aligned} F(Z) &= F(Z_0) + F_1(Z) \quad Z + F_2(Z) \quad (Z \star Z) \\ &+ \frac{1}{2} F_2(Z) \quad (\langle Z, Z\rangle_1 + \langle Z, Z\rangle_2 - [Z, Z]) \\ &+ \frac{1}{2} F_3(Z)(Z \star \langle Z, Z\rangle_1 + \langle Z, Z\rangle_2 \star Z + 2[Z, Z \star Z]) \\ &+ \frac{1}{4} F_4(Z) \quad (\langle Z, Z\rangle_2 \star \langle Z, Z\rangle_1) \qquad (2\ 2\ 8) \end{aligned}$$

Hajek introdueix un calcul de Stratonovich dos parametric, uti litzant els seguents ingredients Si Z i $\tilde{Z}$ tenen una representacio de tipus (2 2 1) es defineixen

$$\begin{aligned} \tilde{\langle} Z, \tilde{Z}\rangle_1 &= (W \quad \tilde{r} + \mu \quad \tilde{\alpha}) Z_{W_1} \quad \mu \qquad (2\ 2\ 9) \\ \tilde{\langle} Z, \tilde{Z}\rangle_2 &= \mu \quad Z_{W_2}(\tilde{r} \quad W + \tilde{\beta} \quad \mu) \qquad (2\ 2\ 10) \end{aligned}$$

Si X, Y son semimartingales es defineix la integral de Stratonovich de X respecte Y

$$X - Y = X \quad Y + 1/4[X, Y] + 1/2\tilde{\langle} X, Y\rangle_1 + 1/2\tilde{\langle} X, Y\rangle_2 \qquad (2\ 2\ 11)$$

i es defineix la versio de Stratonovich de $X \star Y$

$$X \overset{\star}{-} Y = X \star Y + 1/4[X, Y] + 1/2\tilde{\langle} Y, X\rangle_1 + 1/2\tilde{\langle} X, Y\rangle_2 \qquad (2\ 2\ 12)$$

El seguent teorema es la formula de diferenciacio tipus Stratonovich

Teorema 2 2 8 *Sigui $F \in \mathcal{C}^6(\mathbb{R})$ amb $F(0) = 0$ i $Z \in \mathcal{S}^{12}$ Aleshores $F(Z), F'(Z), F''(Z), F'(Z) - Z, Z \overset{\star}{-} Z$ i $F''(Z) - (Z \overset{\star}{-} Z)$ son de $\mathcal{S}^2$ i*

$$F(Z) = F'(Z) - Z + F''(Z) - (Z \overset{\star}{-} Z)$$

2 2 3 Equacions hiperboliques

Els teoremes principals de [9] son

Teorema 2 2 9 *Siguin θ i σ funcions continues i reals tals que $|\theta(x) - \theta(x')| \leq L_\theta |x - x'|$ i $|\sigma(x) - \sigma(x')| \leq L_\sigma |x - x'|$ per tot $x, x' \in \mathbb{R}$ Aleshores existeix un unic proces aleatori adaptat i continu $Z = \{Z_z\ z \in R_{z_0}\}$ tal que*

$$Z = \theta(Z) \quad \mu + \sigma(Z) \quad W \tag{2 2 13}$$

El proces solucio Z pertany a l'espai $\mathcal{S}^\infty$ L'equacio (2 2 13) es la versio integral de

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t_1 \partial t_2} = \theta(Z_t) + \sigma(Z_t)\eta_t,\ t \in R_{z_0},$$

$Z_{t_1 t_2} = 0$ si $t_1 t_2 = 0$, on $\eta_t = \dfrac{\partial^2 W}{\partial t_1 \partial t_2}$ es un soroll blanc gaussia

Considerem l'equacio integral estocastica de tipus Stratonovich

$$Y - a(Y) - (Y \overset{\star}{-} Y) - b(Y) \quad \mu - c(Y) - W = 0 \tag{2 2 14}$$

Teorema 2 2 10 *Siguin $a, b, c \in \mathcal{C}_b^4(\mathbb{R})$ Aleshores existeix una unica solucio de (2 2 14) en $\mathcal{S}^\omega$ Si $h \in \mathcal{C}^6(\mathbb{R})$, h(0)=0 i h' es estricta ment positiu i acotat , aleshores el proces $X = h(Y)$ tambe satisfa una equacio del tipus (2 2 14)*

La demostracio es basa en el Teorema 2 2 9 Suposem que $Y \in \mathcal{S}^\omega$ es una solucio de 2 2 14 Prenem $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ definida aixi

$$f(0) = 0,\ f'(x) = exp(-\int_0^x a(s)ds)$$

Prenem $\sigma = (f'c) \circ f^{-1}$, $\rho = (f'b) \circ f^{-1}$ i $Z_t = f(Y_t)$ Aleshores Z compleix

$$Z = \rho(Z) \quad \mu + \sigma(Z) - W \tag{2 2 15}$$

Utilitzant (2 2 15) i la formula d'Ito Zakai Wong del Teorema 2 2 7 aplicada a $\sigma(Z)$ obtenim

$$\begin{aligned} \sigma(Z) - W &= \sigma(Z) \quad W + 1/4[\sigma(Z), W] + 1/2\tilde{\langle}\sigma(Z), W\rangle_1 + 1/2\tilde{\langle}\sigma(Z), W\rangle_2 \\ &= \sigma(Z) \quad W + 1/4\sigma'(Z) \quad [Z, W] \\ &= \sigma(Z) \quad W + 1/4\sigma'(Z)\sigma(Z) \quad [W, W] \end{aligned}$$

Per tant l'equacio integral de Stratonovich (2 2 15) te una representacio d'Ito

$$Z = \rho(Z) \quad \mu + \frac{1}{4}\sigma'(Z)\sigma(Z) \quad \mu + \sigma(Z)\, W \tag{2 2 16}$$

Com σ, ρ i $\sigma\sigma'$ son Lipschitz podem aplicar el Teorema 2 2 9 a (2 2 16) i per tant tenim la unicitat de Z

D'altra banda per provar l'existencia d'una solucio Y de (2 2 14) , es pren $Z \in \mathcal{S}^\infty$ l'unic proces continu i adaptat, solucio de (2 2 16) i aleshores $Y_t = f^{-1}(Z_t)$ satisfa (2 2 14) i $Y \in \mathcal{S}^\infty$

Si prenem $X = h(Y)$, $g = h^{-1}$,$g \in \mathcal{C}^6(\mathbb{R})$,$g(0) = 0$ i $g' > 0$ aleshores X compleix una equacio del tipus (2 2 14)

$$X - \left(\frac{(a \circ g)(g'^2) - g''}{g'}(X)\right) - (X \overset{\star}{-} X) - \left(\frac{b \circ g}{g'}(X)\right) \mu - \left(\frac{c \circ g}{g'}(X)\right) - W = 0$$

Despres d'aquests preliminars es dona el resultat d'aproximacio

2 3 Demostració de l'ajustament

Sigui $\{X^{\varepsilon}_{s\,t},\ s \in [0,S], t \in [0,T]\}$ la solucio de l'equacio integral

$$X^{\varepsilon}_{s\,t} = x + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\int_0^t F^{\varepsilon}(u,v)\sigma(X^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv + \int_0^s\int_0^t b(X^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv\,,$$

on $(s,t) \in [0,S] \times [0,T]$ i x$\in \mathbb{R}$

Suposem que els coeficients σ i b i el camp aleatori $F^{\varepsilon}(s,t)$ satisfan les seguents condicions

(i) $\sigma, b \in C_b^4(\mathbb{R})$, es a dir σ i b tenen derivades continues i acotades fins ordre quatre ,

(ii) $F(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} Z_{k\,\ell}\ \mathbb{1}_{[k-1\,k)\times[\ell-1\,\ell)}(s,t)\,,$

i $F^{\varepsilon}(s,t) = F(\frac{s}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon})$, on $\{Z_{k\,\ell},\ k \geq 1,\ \ell \geq 1\}$ es una familia independent de variables aleatories identicament distribuides centrades i amb variancia 1, tal que $|Z_{k\,\ell}| \leq M$ per una constant $M \geq 0$ A partir d'ara anomenarem $C_i, i \geq 1$, a unes constants que depenen de p, M, S, T i dels coeficients de l'equacio

Lema 2 3 1 *Fixem $p \geq 2$ Existeix una constant C_1 tal que*

$$\sup_{\substack{0\leq\ \leq S\\ 0\leq t\leq T}} E(|X^{\varepsilon}_{s\,t}|^{2p}) \leq C_1$$

Demostracio

Sigui $H^{\varepsilon}_{s\,t}$ el proces definit per

$$H^{\varepsilon}_{s\,t} = \sup_{\substack{0\leq u\leq\\ 0\leq\ \leq t}} E(|X^{\varepsilon}_{u\,v}|^{2p})$$

Donats $0 \leq u \leq u' \leq S$ i $0 \leq v \leq v' \leq T$ introduim la seguent notacio

$$\Delta_{u\,v}X^{\varepsilon}_{u\ v} = X^{\varepsilon}_{u\ v} - X^{\varepsilon}_{u\ v} - X^{\varepsilon}_{u\,v} + X^{\varepsilon}_{u\,v},$$

$$\underline{u} = \varepsilon\left[\frac{u}{\varepsilon}\right]$$

$$\underline{\Delta}\,X^{\varepsilon}_{u\,v} = \Delta_{\underline{u},\underline{v}}\,X^{\varepsilon}_{u\,v},\ ,$$

$$Y^{\varepsilon}_{u\,v} = X^{\varepsilon}_{u\,v} - \underline{\Delta}\, X^{\varepsilon}_{u\,v} = X^{\varepsilon}_{\underline{u},v} + X^{\varepsilon}_{u\,\underline{v}} - X^{\varepsilon}_{\underline{u},\underline{v}} \tag{2 3 1}$$

Usant propietat (i) i (2 3 1) podem escriure

$$|\sigma(X^{\varepsilon}_{u\,v}) - \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})| \leq K|\underline{\Delta}\, X^{\varepsilon}_{u\,v}|\,, \tag{2 3 2}$$

on K es la constant de Lipschitz de σ Podem descomposar $\underline{\Delta}\, X^{\varepsilon}_{u\,v}$ de la seguent forma

$$\begin{aligned}
\underline{\Delta}\, X^{\varepsilon}_{u\,v} &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\underline{u}}^{u}\int_{\underline{v}}^{v} F^{\varepsilon}(\alpha,\beta)\sigma(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta})\,d\alpha\,d\beta + \int_{\underline{u}}^{u}\int_{\underline{v}}^{v} b(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta})\,d\alpha\,d\beta \\
&= T^{(1)}_{u\,v} + T^{(2)}_{u\,v}
\end{aligned}$$

Per la desigualtat de Holder obtenim

$$\begin{aligned}
E(|T^{(1)}_{u\,v}|^{2p}) &\leq \frac{M^{2p}}{\varepsilon^{2p}}(u-\underline{u})^{2p-1}(v-\underline{v})^{2p-1}E\Big(\int_{\underline{u}}^{u}\int_{\underline{v}}^{v}|\sigma(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta})|^{2p}d\alpha d\beta\Big) \\
&\leq C_2(u-\underline{u})^{p-1}(v-\underline{v})^{p-1}\int_{\underline{u}}^{u}\int_{\underline{v}}^{v}\Big(1+E(|X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}|^{2p})\Big)\,d\alpha\,d\beta \\
&\leq C_2(u-\underline{u})^{p}(v-\underline{v})^{p}(1+H^{\varepsilon}_{u\,v}) \\
&\leq C_2\,\varepsilon^{2p}(1+H^{\varepsilon}_{u\,v})\,,
\end{aligned}$$

i de forma similar

$$\begin{aligned}
E(|T^{(2)}_{u\,v}|^{2p}) &\leq (u-\underline{u})^{2p-1}(v-\underline{v})^{2p-1}E\Big(\int_{\underline{u}}^{u}\int_{\underline{v}}^{v}|b(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta})|^{2p}d\alpha\,d\beta\Big) \\
&\leq C_3(u-\underline{u})^{2p-1}(v-\underline{v})^{2p-1}\int_{\underline{u}}^{u}\int_{\underline{v}}^{v}\Big(1+E(|X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}|^{2p})\Big)\,d\alpha\,d\beta \\
&\leq C_3\,\varepsilon^{4p}(1+H^{\varepsilon}_{u\,v})
\end{aligned}$$

Per tant,

$$E(|\underline{\Delta}\, X^{\varepsilon}_{u\,v}|^{2p}) \leq C_4\,\varepsilon^{2p}(1+H^{\varepsilon}_{u\,v}) \tag{2 3 3}$$

Amb aquests preliminars podem procedir a l'estimacio de $E(|X^{\varepsilon}_{s\,t}|^{2p})$ Tenim

$$E(|X^{\varepsilon}_{s\,t}|^{2p}) \leq C_p\Big(|x|^{2p} + E(|X^{\varepsilon}_{s\,t} - x|^{2p})\Big)\,,$$

i utilitzant (2 3 2) obtenim

$$\begin{aligned} E(|X^\varepsilon_{s\,t} - x|^{2p}) &\leq C_p\left(\frac{K^{2p}}{\varepsilon^{2p}} E\Big(|\int_0^s\int_0^t |F^\varepsilon(u,v)|\,|\Delta X^\varepsilon_{u\,v}|\,du\,dv|^{2p}\Big)\right) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^{2p}} E\Big(|\int_0^s\int_0^t F^\varepsilon(u,v)\sigma(Y^\varepsilon_{u\,v})\,du\,dv|^{2p}\Big) \\ &+ E\Big(|\int_0^s\int_0^t b(X^\varepsilon_{u\,v})\,du\,dv|^{2p}\Big) \\ &= A_1 + A_2 + A_3 \qquad (2\ 3\ 4) \end{aligned}$$

Per la desigualtat de Holder i la estimacio (2 3 3) obtenim

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \frac{C_p}{\varepsilon^{2p}} K^{2p} M^{2p} s^{2p-1} t^{2p-1} \int_0^s\int_0^t E(|\Delta X^\varepsilon_{u\,v}|^{2p})\,du\,dv \quad (2\ 3\ 5) \\ &\leq C_5\Big(1 + \int_0^s\int_0^t H^\varepsilon_{u\,v}\,du\,dv\Big) \end{aligned}$$

Per tal d'acotar el terme A_2 usem la desigualtat de Burkholder per martingales discretes amb dos parametres

2 3 1 Desigualtats per martingales discretes amb dos parametres

Aquests resultats estan extrets de [12]

Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat i $\{\mathcal{F}_{m\,n}\ m,n \geq 0\}$ una família creixent de σ algebres de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_{m\,0} = \mathcal{F}_{0\,n} = \{\emptyset, \Omega\}$ per tot $m,n \geq 0$

Anomenem $\mathcal{F}_{m\,\infty} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m\,n}$ i $\mathcal{F}_{\infty\,n} = \bigvee_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m\,n}$

Un proces $\{f_{m\,n}, m,n \geq 1\}$ es una martingala si, per a tot $m,n \geq 1$, la variable aleatoria $f_{m\,n}$ es $\mathcal{F}_{m\,n}$ mesurable i integrable i , per a tot $n \geq 1$ fixat $\{f_{m\,n}, m \geq 1\}$ es una martingala en un parametre respecte a la família $\{\mathcal{F}_{m\,\infty}, m \geq 1\}$ i per a tot $m \geq 1$ fixat , $\{f_{m\,n}, n \geq 1\}$ es una martingala respecte a la família $\{\mathcal{F}_{\infty\,n}, n \geq 1\}$

La famılıa $\{\mathcal{F}_{m\,n}, m, n \geq 0\}$ satısfa la hıpotesı d'ındependencıa condıcıonal sı per a cada $m, n \geq 1$ les σ algebres $\mathcal{F}_{m\,\infty}$ ı $\mathcal{F}_{\infty\,n}$ son condıcıonalment ındependents donat $\mathcal{F}_{m\,n}$ es a dır

$$E[E[Y|\mathcal{F}_{m\,\infty}]|\mathcal{F}_{\infty\,n}] = E[Y|\mathcal{F}_{m\,n}]$$

per a tota varıable aleatorıa Y acotada ı $\mathcal{F}$ mesurable Aleshores sota aquesta condıcıo la definıcıo de martıngala coıncıdeıx amb la definıcıo usual relatıva a la relacıo d'ordre $(m, n) \leq (p, q)$ sı $m \leq p$ ı $n \leq q$

Sı f es una martıngala prenem

$$d_{m\,n} = f_{m\,n} - f_{m-1\,n} - f_{m\,n-1} + f_{m-1\,n-1}$$

$f_{m\,0} = f_{0\,n} = 0$ ı

$$S_{m\,n}(f) = \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} d_{k\,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

El teorema prıncıpal d'aquest artıcle es la desıgualtat de Burkholder

Teorema 2 3 2 *Sıguı f una martıngala Sı $p > 1$ exısteıxen dos cons tants posıtıves C_p, D_p que no depenen de f ı tals que per tot $m, n \geq 1$,*

$$C_p E[S_{m\,n}(f)^p] \leq E[|f_{m\,n}|^p] \leq D_p E[S_{m\,n}(f)^p]$$

Consıderem ara el cas que estem tractant

Consıderem les sumes parcıals $S_{m\,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} Z_{k\,\ell}, m\ n \geq 1$, amb la convencıo que $S_{m\,n} = 0$ sı $m = 0$ o $n = 0$ Aleshores, $Z_{k\,\ell} = S_{k\,\ell} - S_{k-1\,\ell} - S_{k,\ell-1} + S_{k-1\,\ell-1}$, per tot $k, \ell \geq 1$ Definım les σ algebres $\mathcal{F}_{m\,n} = \sigma\{S_{k\,\ell}, k \leq m, \ell \leq n\}$, $m, n \geq 1$, ı tambe $\mathcal{F}_{m\,0} = \mathcal{F}_{0\,n} = \{\emptyset, \Omega\}$ per tot $m, n \geq 0$ Com les varıables aleatorıes $Z_{k\,\ell}$ son ındependents es compleıx que les σ-algebres $\mathcal{F}_{m\,\infty}$ ı $\mathcal{F}_{\infty\,n}$ son condıcıonalment ındependents donada $\mathcal{F}_{m\,n}$ per tot $m, n \geq 1$ Aleshores $S_{m\,n}$ es una martıngala En aquest context la desıgualtat de Burkholder amb dos parametres es la seguent

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\,\ell} Z_{k\,\ell}\right|^{2p}\right) \leq C_p\, E\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\,\ell}^2 Z_{k\,\ell}^2\right)^p \qquad (2\ 3\ 6)$$

per tot $a_{k\,\ell} \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_{k-1\,\ell} \vee \mathcal{F}_{k\,\ell-1}, P)$ i $p > 1$

Considerem la seguent descomposicio del rectangle $[0,z]$ on $z = (s,t)$ i $\underline{z} = (\underline{s}, \underline{t})$

$$[0,z] = [0,\underline{z}] \cup [\underline{z}, z] \cup [(0,\underline{t}), (\underline{s}, t)] \cup [(0,\underline{s}), (s,\underline{t})]$$

Aleshores podem escriure

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} F^{\varepsilon}(u,v)\sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv \\
&= \sum_{k=1}^{[\frac{s}{\varepsilon}]} \sum_{\ell=1}^{[\frac{t}{\varepsilon}]} \frac{Z_{k\,\ell}}{\varepsilon} \int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k} \int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon \ell} \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv \\
&\quad + \sum_{k=1}^{[\frac{s}{\varepsilon}]} \frac{1}{\varepsilon} Z_{k\,[\frac{t}{\varepsilon}]+1} \int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k} \int_{\underline{t}}^{t} \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv \\
&\quad + \sum_{j=1}^{[\frac{t}{\varepsilon}]} \frac{1}{\varepsilon} Z_{[\frac{s}{\varepsilon}]+1\,\ell} \int_{\underline{s}}^{s} \int_{\varepsilon(j-1)}^{\varepsilon j} \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon} Z_{[\frac{s}{\varepsilon}]+1\,[\frac{t}{\varepsilon}]+1} \int_{\underline{s}}^{s} \int_{\underline{t}}^{t} \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv \\
&= M_1 + M_2 + M_3 + M_4
\end{aligned}$$

Aplicant la desigualtat (2 3 6) a $a_{k\,\ell} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k} \int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon \ell} \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv$ es compleix

$$\begin{aligned}
E(|M_1|^{2p}) &\leq \frac{C_p}{\varepsilon^{2p}} E\left(\Big(\sum_{k=1}^{[\frac{s}{\varepsilon}]} \sum_{\ell=1}^{[\frac{t}{\varepsilon}]} Z^2_{k\,\ell} \Big(\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k} \int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon \ell} \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv \Big)^2 \Big)^p \right) \\
&\leq \frac{C_p M^{2p}}{\varepsilon^{2p}} \Big[\frac{s}{\varepsilon}\Big]^{p-1} \Big[\frac{t}{\varepsilon}\Big]^{p-1} \\
&\qquad \times \textstyle\sum_{k=1}^{[\frac{s}{\varepsilon}]} \sum_{\ell=1}^{[\frac{t}{\varepsilon}]} E\left(\Big| \int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k} \int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon \ell} \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv \Big|^{2p} \right)
\end{aligned}$$

Tenim les seguents estimacions

$$\begin{aligned}
&E\left(\Big| \textstyle\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k} \int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon \ell} \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv \Big|^{2p} \right) \\
&\qquad \leq \varepsilon^{4p-2} \int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k} \int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon \ell} E\Big(|\sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})|^{2p} \Big)\,du\,dv\,,
\end{aligned}$$

ı, usant (2 3 1),

$$E(|\sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})|^{2p}) \leq C_{p\,\sigma}E(1+|Y^{\varepsilon}_{u\,v}|^{2p}) \tag{2 3 7}$$

$$\leq C_{p\,\sigma}\, E\Big((1+C_p(|X^{\varepsilon}_{\underline{u},v}|^{2p}+|X^{\varepsilon}_{u\,\underline{v}}|^{2p}+|X^{\varepsilon}_{\underline{u}\,\underline{v}}|^{2p})\Big)$$

$$\leq C_6(1+H^{\varepsilon}_{u\,v})$$

En consequencıa,

$$E(|M_1|^{2p}) \leq \tag{2 3 8}$$

$$\leq \frac{C_p M^{2p}}{\varepsilon^{2p}}\Big[\frac{s}{\varepsilon}\Big]^{p-1}\Big[\frac{t}{\varepsilon}\Big]^{p-1}\sum_{k=1}^{[\frac{s}{\varepsilon}]}\sum_{\ell=1}^{[\frac{t}{\varepsilon}]}\varepsilon^{4p-2}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell} C_5(1+H^{\varepsilon}_{u\,v}\,du\,dv)$$

$$\leq C_7\Big(1+\int_0^s\int_0^t H^{\varepsilon}_{u\,v}\,du\,dv\Big)$$

Aplıcant la desıgualtat de Burkholder per martıngales amb un parametre dıscretes ı (2 3 7) es compleıx

$$E(|M_2|^{2p}) \leq \frac{C_p}{\varepsilon^{2p}}E\left(\left(\sum_{k=1}^{[-]} Z^2_{k\,[\frac{t}{\varepsilon}]+1}\Big(\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\underline{t}}^{t}\sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv\Big)^2\right)^p\right)$$

$$\leq \frac{C_p M^{2p}}{\varepsilon^{2p}}\Big[\frac{s}{\varepsilon}\Big]^{p-1}\sum_{k=1}^{[-]} E\left(\Big|\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\underline{t}}^{t}\sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv\Big|^{2p}\right)$$

$$\leq \frac{C_p M^{2p}}{\varepsilon^{2p}}\Big[\frac{s}{\varepsilon}\Big]^{p-1}\varepsilon^{2p-1}(t-\underline{t})^{2p-1}$$

$$\times\sum_{k=1}^{[\frac{s}{\varepsilon}]}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\underline{t}}^{t} E(|\sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})|^{2p})\,du\,dv$$

$$\leq C_p M^{2p}\varepsilon^{p-1}s^{p-1}\int_0^{\underline{s}}\int_{\underline{t}}^{t} C_5(1+H^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv$$

$$\leq C_8\left(1+\int_0^s\int_0^t H^{\varepsilon}_{u\,v}\,du\,dv\right) \tag{2 3 9}$$

Obtenim una estimacio similar per el terme M_3

$$E(|M_3|^{2p}) \leq C_9 \left(1 + \int_0^s \int_0^t H^\varepsilon_{u\,v}\, du\, dv\right) \tag{2 3 10}$$

Finalment,

$$\begin{aligned} E(|M_4|^{2p}) &\leq \frac{M^{2p}}{\varepsilon^{2p}}(s-\underline{s})^{2p-1}(t-\underline{t})^{2p-1} \int_{\underline{s}}^s \int_{\underline{t}}^t E(|\sigma(Y^\varepsilon_{u\,v})|^{2p})\, du\, dv \\ &\leq C_{10}\left(1 + \int_0^s \int_0^t H^\varepsilon_{u\,v}\, du\, dv\right) \qquad (2\ 3\ 11) \end{aligned}$$

Podem estimar A_3 de la forma seguent

$$\begin{aligned} E\left(\left|\int_0^s \int_0^t b(X^\varepsilon_{u\,v})\, du\, dv\right|^{2p}\right) &\leq s^{2p-1}t^{2p-1} \int_0^s \int_0^t E(|b(X^\varepsilon_{u\,v})|^{2p})\, du\, dv \\ &\leq C_{11}\left(1 + \int_0^s \int_0^t H^\varepsilon_{u\,v}\, du\, dv\right) \end{aligned}$$

Finalment, aplicant (2 3 5), (2 3 8), (2 3 9), (2 3 10) i (2 3 11) obtenim

$$E(|X^\varepsilon_{s\,t}|^{2p}) \leq C_{12}\left(1 + \int_0^s \int_0^t H^\varepsilon_{u\,v}\, du\, dv\right) ,$$

i per la desigualtat de Gronwall conclouim la demostracio del lema

Lema 2 3 3 *Fixem* $p \geq 2$ *Existeix una constant* C_{13} *tal que* $E(|\Delta_{s\,t} X^\varepsilon_{s'\,t'}|^{2p}) \leq C_{13}(s'-s)^p(t'-t)^p$ *per tot* $0 \leq s \leq s' \leq S$, $0 \leq t \leq t' \leq T$

Demostracio

Per la definicio de l'increment $\Delta_{s\,t} X^\varepsilon_{s\,t}$ i usant (2 3 3) obtenim

$$
\begin{aligned}
|\Delta_{s\,t} X^{\varepsilon}_{s'\,t}| &= \Big| \frac{1}{\varepsilon} \int_s^{s} \int_t^{t'} F^{\varepsilon}(u,v)\, \sigma(X^{\varepsilon}_{u\,v})\, du\, dv + \int_s^{s} \int_t^{t} b(X^{\varepsilon}_{u\,v})\, du\, dv \Big| \\
&\leq \frac{K}{\varepsilon} \int_s^{s} \int_t^{t'} |F^{\varepsilon}(u,v)|\, |\underline{\Delta}\, X^{\varepsilon}_{u\,v}|\, du\, dv \Big| \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon} \Big| \int_s^{s} \int_t^{t'} F^{\varepsilon}(u,v)\, \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\, du\, dv \Big| \\
&\quad + \int_s^{s} \int_t^{t} |b(X^{\varepsilon}_{u\,v})|\, du\, dv \\
&= T_1 + T_2 + T_3
\end{aligned}
$$

Prımer estımem el terme T_1 Usant (2 3 3) ı el Lema 2 3 1 deduım

$$
\begin{aligned}
E(|T_1|^{2p}) &\leq \frac{(KM)^{2p}}{\varepsilon^{2p}} (s'-s)^{2p-1} (t'-t)^{2p-1} \\
&\qquad \times \int_s^{s} \int_t^{t'} E(|\underline{\Delta}\, X^{\varepsilon}_{u\,v}|^{2p})\, du\, dv \\
&\leq \frac{(KM)^{2p}}{\varepsilon^{2p}} (s'-s)^{2p-1} (t'-t)^{2p-1} \qquad\qquad (2\ 3\ 12) \\
&\qquad \times \int_s^{s} \int_t^{t'} C_4\, \varepsilon^{2p} (1 + H^{\varepsilon}_{u\,v})\, du\, dv \\
&\leq C_{14} (s'-s)^p (t'-t)^p
\end{aligned}
$$

Ara estımem el terme T_2

Suposarem $s'-s > \varepsilon$, $t'-t > \varepsilon$ Sı no es compleıx alguna d'aquestes desıgualtats la demostracıo serıa sımılar ı mes sımple Definım $\underline{u} = \varepsilon[\frac{u}{\varepsilon}]$, ı $\overline{u} = \varepsilon([\frac{u}{\varepsilon}] + 1)$ Consıderem la descomposıcıo seguent

$$
[(s,t),\ (s',t')] = \bigcup_{\imath=1}^{9} \Delta_{\imath},
$$

on

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = [s,\overline{s}] \times [t,\overline{t}], && \Delta_2 = [\overline{s},\underline{s}'] \times [t,\overline{t}\,], \\
&\Delta_3 = [\underline{s}',s'] \times [t,\overline{t}], && \Delta_4 = [s,\overline{s}] \times [\,\overline{t},\underline{t}'], \\
&\Delta_5 = [\overline{s},\underline{s}'] \times [\overline{t},\underline{t}'], && \Delta_6 = [\underline{s}',s'] \times [\overline{t},\underline{t}'], \\
&\Delta_7 = [s,\overline{s}] \times [\underline{t}',t'], && \Delta_8 = [\overline{s},\underline{s}'] \times [\underline{t}',t'], \\
&\Delta_9 = [\underline{s}',s'] \times [\underline{t}',t']
\end{aligned}$$

Anomenarem a $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_7, \Delta_9$ intervals de tipus 1 L'area d'aquests intervals es menor o igual que ε^2 Anomenem $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6, \Delta_8$ intervals de tipus 2, i la seva area esta acotada per εST Obtenim la seguent acotacio pels intervals de tipus 1, usant (2 3 7) i el Lema 2 3 3

$$\begin{aligned}
&E\left(\left|\frac{1}{\varepsilon}\int\int_{\Delta_1} F^{\varepsilon}(u,v)\sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv\right|^{2p}\right) \\
&\leq \frac{M^{2p}}{\varepsilon^{2p}}|\Delta_1|^{2p-1}\int\int_{\Delta_1} E(|\sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})|^{2p}\,du\,dv) \qquad (2\ 3\ 13) \\
&\leq M^{2p}|\Delta_1|^{p-1}\int\int_{\Delta_1} C_6(1+H^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv \leq C_{15}(s'-s)^p(t'-t)^p
\end{aligned}$$

Pels intervals de tipus 2 podem escriure, aplicant la desigualtat de Burkholder

$$\begin{aligned}
&E\left(\left|\frac{1}{\varepsilon}\iint_{\Delta_2} F^{\varepsilon}(u,v)\,\sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv\right|^{2p}\right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^{2p}} E\left(\left|\sum_{k=[\frac{s}{\varepsilon}]+2}^{[\frac{s'}{\varepsilon}]} Z_{k\,[\frac{t}{\varepsilon}]+2}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_t^{\overline{t}} \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv\right|^{2p}\right) \\
&\leq \frac{C_p}{\varepsilon^{2p}} E\left(\sum_{k=[\frac{s}{\varepsilon}]+2}^{[\frac{s'}{\varepsilon}]} |Z_{k\,[\frac{t}{\varepsilon}]+2}|^2\left|\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_t^{\overline{t}} \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv\right|^2\right)^p \\
&\leq \frac{C_p}{\varepsilon^{2p}} M^{2p}\left([\frac{s'}{\varepsilon}]-([\frac{s}{\varepsilon}]+1)\right)^{p-1}
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{k=[\frac{s}{\varepsilon}]+2}^{[\frac{s'}{\varepsilon}]} E\left(\Big|\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{t}^{\bar{t}} \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv\Big|^{2p}\right)$$

$$\leq \frac{C_p}{\varepsilon^{2p}} M^{2p}\Big([\frac{s'}{\varepsilon}] - ([\frac{s}{\varepsilon}]+1)\Big)^{p-1} \sum_{k=[\frac{s}{\varepsilon}]+2}^{[\frac{s'}{\varepsilon}]} \varepsilon^{2p-1}(\bar{t}-t)^{2p-1}$$

$$\times \int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{t}^{\bar{t}} E(|\sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})|^{2p})\,du\,dv$$

$$\leq C_{16}\,(s'-s)^p(t'-t)^p \qquad (2\,3\,14)$$

Usant (2 3 6), podem estimar la integral al rectangle Δ_5

$$E\left(\Big|\frac{1}{\varepsilon}\iint_{\Delta_5} F^{\varepsilon}(u,v)\,\sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv\Big|^{2p}\right)$$

$$= E\left(\Big|\sum_{k=[\frac{s}{\varepsilon}]+2}^{[\frac{s'}{\varepsilon}]}\sum_{\ell=[\frac{t}{\varepsilon}]+2}^{[\frac{t'}{\varepsilon}]} Z_{k\,\ell}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell} \sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv\Big|^{2p}\right)$$

$$\leq \frac{C_p M^{2p}}{\varepsilon^{2p}}\Big([\frac{s'}{\varepsilon}] - ([\frac{s}{\varepsilon}]+1)\Big)^{p-1}\Big([\frac{t'}{\varepsilon}] - ([\frac{t}{\varepsilon}]+1)\Big)^{p-1}$$

$$\times \sum_{k=[\frac{s}{\varepsilon}]+2}^{[\frac{s'}{\varepsilon}]}\sum_{\ell=[\frac{t}{\varepsilon}]+2}^{[\frac{t'}{\varepsilon}]} \varepsilon^{4p-2}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell} E(|\sigma(Y^{\varepsilon}_{u\,v})|^{2p})\,du\,dv$$

$$\leq C_{17}\,(s'-s)^p(t'-t)^p \qquad (2\,3\,15)$$

Finalment, acotem el terme T_3

$$E\left(\Big|\int_s^{s'}\int_t^{t'} b(X^{\varepsilon}_{u\,v})\,du\,dv\Big|^{2p}\right)$$

$$\leq (s'-s)^{2p-1}(t'-t)^{2p-1}\int_s^{s'}\int_t^{t'} E(|b(X^{\varepsilon}_{u\,v})|^{2p})\,du\,dv$$

$$\leq C_{18}(s'-s)^p(t'-t)^p \qquad (2\,3\,16)$$

Aconseguim l'estimacio desitjada aplicant (2 3 12), (2 3 13), (2 3 14), (2 3 15) i (2 3 16) □

Com a consequencia del Lema 2 3 1, les lleis de $\{X^\varepsilon_{s\,t}, (s,t) \in [0,S] \times [0,T], \varepsilon > 0\}$ son ajustades en l'espai de Banach $C([0,S] \times [0,T])$

2 4 Caracterització de la llei límit

El resultat seguent sera la eina principal per la caracteritzacio dels punts limit en el conjunt de lleis de probabilitat $\{\mathcal{L}(X^\varepsilon), \varepsilon > 0\}$

Teorema 2 4 1 *Fixem $0 \le s \le s' \le S$ i $0 \le t < t' \le T$ Aleshores per tota funcio $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ i per tot $(s_1, \quad, s_n) \in [0,S]^n$, $(t_1, \quad, t_n) \in [0,T]^n$ tal que per cada $i = 1, \quad, n$, $s_i < s$ o $t_i < t$, es compleix*

$$(a) \quad \lim_{\varepsilon \to 0} E\Big((\Delta_{s\,t} X^\varepsilon_{s\,t} - \Delta_{s\,t} A^\varepsilon_{s\,t})\, \varphi(X^\varepsilon_{s_1\,t_1}, \quad, X^\varepsilon_{s_n\,t_n})\Big) = 0$$

on $A^\varepsilon_{s\,t} = \displaystyle\int_0^s \int_0^t \Big(\frac{1}{4} \sigma'\sigma(X^\varepsilon_{u\,v}) + b(X^\varepsilon_{u\,v})\Big)\, du\, dv$

$$(b) \quad \lim_{\varepsilon \to 0} E\left(\Big((\Delta_{s\,t} X^\varepsilon_{s\,t} - \Delta_{s\,t} A^\varepsilon_{s\,t})^2 - \Delta_{s\,t} B^\varepsilon_{s\,t}\Big)\, \varphi(X^\varepsilon_{s_1\,t_1}, \quad, X^\varepsilon_{s_n\,t_n})\right) = 0,$$

on $B^\varepsilon_{s\,t} = \displaystyle\int_0^s \int_0^t \sigma^2(X^\varepsilon_{u\,v})\, du\, dv$

Demostracio

Primer demostrem la part (a) Suposem $\varepsilon < s' - s$ i $\varepsilon < t' - t$ Definim, amb la notacio introduida en la demostracio del Lema 2 3 1

$$\begin{aligned} \Delta_{s\,t} U^\varepsilon_{s\,t} &= \Delta_{s\,t} X^\varepsilon_{s'\,t} - \Delta_{s\,t} A^\varepsilon_{s\,t'} \\ &= \sum_{(k\,\ell) \in I} \left(\frac{Z_{k\,\ell}}{\varepsilon} \int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k} \int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon \ell} \sigma(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta})\, d\alpha\, d\beta \right. \qquad (2\,4\,1) \\ &\qquad \left. - \frac{1}{4} \int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k} \int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon k} \sigma'\sigma(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta})\, d\alpha\, d\beta \right) + R^\varepsilon_{s\,t\,s'\,t}, \end{aligned}$$

on $I^\varepsilon = \{(k,\ell) \quad [\frac{s}{\varepsilon}] + 2 \le k \le [\frac{s}{\varepsilon}], [\frac{t}{\varepsilon}] + 2 \le \ell \le [\frac{t}{\varepsilon}]\}$,

$$R^\varepsilon_{s\,t\,s'\,t} = \int_\Delta (\sigma(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}) \frac{1}{\varepsilon} F^\varepsilon(\alpha,\beta) - \frac{1}{4}\sigma'\sigma(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}))\, d\alpha\, d\beta\,,$$

1

$$\Delta^\varepsilon = [(s,t),(s',t')]\backslash\Delta_5$$

El terme residual $R^\varepsilon_{s\,t\,s\,t}$ convergeix a zero en L^4 De fet pel Lema 2 3 3 tenim

$$E\left(|R^\varepsilon_{s\,t\,s\,t'}|^4\right) \le C_{19}\,|\Delta^\varepsilon|^2 \tag{2 4 2}$$

Suposem que (u,v) pertany al rectangle $I_{k\,\ell} = [\varepsilon(k-1), \varepsilon k] \times [\varepsilon(\ell-1), \varepsilon\ell]$ Considerem la seguent descomposicio de $\sigma(X^\varepsilon_{u\,v})$

$$\begin{aligned} \sigma(X^\varepsilon_{u\,v}) &= \sigma(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\;\varepsilon(\ell-1)}) \qquad (2\,4\,3)\\ &+ \Big(\sigma(X^\varepsilon_{u\,v}) - \sigma(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\;v}) - \sigma(X^\varepsilon_{u\;\varepsilon(\ell-1)}) + \sigma(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\;\varepsilon(\ell-1)})\Big)\\ &+ \Big(\sigma(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\;v}) - \sigma(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\;\varepsilon(\ell-1)})\Big)\\ &+ \Big(\sigma(X^\varepsilon_{u\;\varepsilon(\ell-1)}) - \sigma(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\;\varepsilon(\ell-1)})\Big) \end{aligned}$$

Desenvolupem cada terme de la suma

$$\begin{aligned} &\sigma(X^\varepsilon_{u\,v}) - \sigma(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\;v}) - \sigma(X^\varepsilon_{u\;\varepsilon(\ell-1)}) + \sigma(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\;\varepsilon(\ell)}) \qquad (2\,4\,4)\\ &= \int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v} \frac{\partial^2\sigma(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta})}{\partial\alpha\,\partial\beta}\, d\alpha\, d\beta\\ &= \int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v} \sigma'(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta})\frac{\partial^2 X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} + \sigma''(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta})\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha}\,\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta}\, d\alpha\, d\beta\\ &= T_1 + T_2 \end{aligned}$$

Encara podem descomposar el terme T_1 aixi

$$T_1 = \frac{Z_{k\,\ell}}{\varepsilon}\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v} \sigma'\sigma(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta})\, d\alpha\, d\beta$$

$$+ \int_{\varepsilon(k-1)}^{u} \int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v} \sigma' b(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta})\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \frac{Z_{k\,\ell}}{\varepsilon}(u-\varepsilon(k-1))(v-\varepsilon(\ell-1))\,\sigma\sigma'(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})$$

$$+ \frac{Z_{k\,\ell}}{\varepsilon} \int_{\varepsilon(k-1)}^{u} \int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v} (\sigma\,\sigma'(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}) - \sigma\,\sigma'(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\varepsilon(\ell-1)}))\, d\alpha\, d\beta$$

$$+ \int_{\varepsilon(k-1)}^{u} \int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v} \sigma' b(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta})\, d\alpha\, d\beta \qquad (2\,4\,5)$$

Per tant, substituint l'expressió (2 4 4) i (2 4 5) en (2 4 3) és compleix

$$\frac{Z_{k\,\ell}}{\varepsilon} \int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k} \int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell} \sigma(X^{\varepsilon}_{u\,v})\, du\, dv - \frac{1}{4} \int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k} \int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell} \sigma\sigma'(X^{\varepsilon}_{u\,v})\, du\, dv$$

$$= \varepsilon\, Z_{k\,\ell}\, \sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}) + \frac{\varepsilon^2}{4} Z^2_{k\,\ell}\, \sigma'\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}) \qquad (2\,4\,6)$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{4}\sigma'\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}) + R^{\varepsilon}_{k\,\ell},$$

on

$$
\begin{aligned}
R^{\varepsilon}_{k\,\ell} = & -\frac{1}{4}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}(\sigma'\sigma(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}) - \sigma'\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}))\,d\alpha\,d\beta \\
& +\frac{Z^2_{k,\ell}}{\varepsilon^2}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}\Bigg[\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v}(\sigma'\sigma(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}) \\
& -\sigma'\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}))\,d\alpha\,d\beta\Bigg]\,du\,dv \\
& +\frac{Z_{k\,\ell}}{\varepsilon}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}\left[\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v}\sigma' b(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta})\,d\alpha\,d\beta\right]\,du\,dv \\
& +Z_{k,\ell}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}(\sigma(X^{\varepsilon}_{u\,\varepsilon(\ell-1)}) - \sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}))\,du \\
& +Z_{k\,\ell}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}(\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,v})) - \sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\,dv \\
& +\frac{Z_{k\,\ell}}{\varepsilon}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}\left[\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v}\sigma''(X^{\varepsilon}_{\alpha,\beta})\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha}\,\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta}\,d\alpha\,d\beta\right]\,du\,dv \\
= & \; R^{\varepsilon\,1}_{k\,\ell} + R^{\varepsilon\,2}_{k\,\ell} + R^{\varepsilon\,3}_{k\,\ell} + R^{\varepsilon\,4}_{k\,\ell} + R^{\varepsilon\,5}_{k\,\ell} + R^{\varepsilon\,6}_{k\,\ell}
\end{aligned}
$$

Lema 2 4 2 *Es compleix que*

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} E\Big(\Big|\sum_{(k\,\ell)\in I^{\varepsilon}} R^{\varepsilon\,j}_{k\,\ell}\Big|^4\Big) = 0 \quad \text{per} \quad j = 1, \quad ,6 \qquad (2\,4\,7)
$$

Demostracio

Primer demostrem (2 4 7) per $j = 1$

$$
\begin{aligned}
E\Big(|\sum_{(k\,\ell)\in I} R^{\varepsilon\,1}_{k\,\ell}|^4\Big) &\le \frac{C_{20}}{\varepsilon^{14}} \sum_{(k\,\ell)\in I} E\Big(|\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}\Big(\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v} \\
&\qquad (\sigma'\sigma(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}) - \sigma'\sigma(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\varepsilon(\ell-1)}))d\alpha d\beta\Big)du\,dv|^4\Big) \\
&\le \frac{C_{20}}{\varepsilon^8} \sup_{\substack{|z_1-z_2|\le \\ z_1\le z_2}} E(|\sigma'\sigma(X^\varepsilon_{z_1}) - \sigma'\sigma(X^\varepsilon_{z_2})|^4) \\
&\quad \times \sum_{(k\,\ell)\in I}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}(u-\varepsilon(k-1))^4(v-\varepsilon(\ell-1))^4\,du\,dv \\
&\le C_{21} \sup_{\substack{|z_1-z_2|\le \\ z_1\le z_2}} E(|\sigma'\sigma(X^\varepsilon_{z_1}) - \sigma'\sigma(X^\varepsilon_{z_2})|^4)
\end{aligned}
$$

Aquesta expresio convergeix a zero quan $\varepsilon \downarrow 0$ ja que

$$
\begin{aligned}
E\Big(|\sigma'\sigma(X^\varepsilon_{z_1}) - \sigma'\sigma(X^\varepsilon_{z_2})|^4\Big) &\le C\Big(\|\sigma'\|^4_\infty E(|\sigma(X^\varepsilon_{z_1}) - \sigma(X^\varepsilon_{z_2})|^4) \\
&+ [E\Big((\sigma(X^\varepsilon_{z_2}))^8\Big)]^{1/2}\,[E\Big(|\sigma'(X^\varepsilon_{z_1}) - \sigma'(X^\varepsilon_{z_2})|^8\Big)]^{1/2}\Big) \le C\,\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

Demostracio de (2 4 7) *per* $j = 2$

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\Big(\sum_{(k\,\ell)\in I}\frac{1}{4}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}(\sigma'\sigma(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}) - \sigma'\sigma(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})d\alpha\,d\beta\Big)^4\Big) \le \\
&\le \frac{C_{22}}{\varepsilon^6}\sum_{(k\,\ell)\in I^\varepsilon} E\Big(\Big(\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}\Big(\sigma'\sigma(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}) - \sigma'\sigma(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\,d\alpha\,d\beta\Big)^4\Big) \\
&\le C_{22}\,\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

Demostració de (2 4 7) *per* $j = 3$

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\Big|\sum_{(k\,\ell)\in I}\frac{Z_{k\,\ell}}{\varepsilon}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}\Big(\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v}\sigma' b(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta})\,d\alpha\,d\beta\Big)\,du\,dv\Big|^4\Big)\\
&\le \frac{C_{21}}{\varepsilon^6}\sum_{(k\,\ell)\in I}E\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}\Big(\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v}\sigma' b(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta})\,d\alpha\,d\beta\Big)du\,dv\Big)^4\\
&\le \frac{C_{21}}{\varepsilon^4}\sum_{(k\,\ell)\in I}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}(u-\varepsilon(k-1))^3(v-\varepsilon(\ell-1))^3\\
&\times \quad \Big(\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v}E(|\sigma' b(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta})|^4)\,d\alpha\,d\beta\Big)\,du\,dv\\
&\le C_{22}\,\varepsilon^4
\end{aligned}
$$

Demostració de (2 4 7) *per* $j = 5$

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\Big(\sum_{(k\,\ell)\in I}Z_{k\,\ell}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}(\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,v})-\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}))dv\Big)^4\Big)\\
&\le C\,E\Big(\Big(\sum_{(k\,\ell)\in I}Z^2_{k\,\ell}\Big(\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}(\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,v})-\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}))\,dv\Big)^2\Big)^2\Big)\\
&\le \frac{C_{23}}{\varepsilon^2}\sum_{(k,\ell)\in I}E\Big(\Big(\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}(\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,v})-\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}))\,dv\Big)^4\Big)\\
&\le C_{23}\,\varepsilon\sum_{(k\,\ell)\in I}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}E\Big((\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,v})-\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}))^4\Big)\,dv\\
&\le C_{24}\,\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

El terme $j = 4$ es tracta de forma similar

Demostració de (2 4 7) *per* $j = 6$

Per $\alpha \in [\varepsilon(k-1), \varepsilon k]$, $\beta \in [\varepsilon(\ell-1)\,,\ \varepsilon\ell]$ usant el Lema 2 3 3, podem deduir les seguents desigualtats

$$E\Big(|X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}-X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}|^{2p}\Big)\le C_{25}\,\varepsilon^p\,, \tag{2 4 8}$$

$$E\Big(\Big|\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha}\Big|^{2p}\Big)\le\frac{C_{26}}{\varepsilon^p}\,, \tag{2 4 9}$$

$$E\Big(\Big|\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta}\Big|^{2p}\Big) \le \frac{C_{27}}{\varepsilon^p}\,, \tag{2 4 10}$$

$$E\Big(\Big|\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha} - \frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\varepsilon(\ell-1)}}{\partial\alpha}\Big|^{2p}\Big) \le C_{28}\,, \quad \imath \tag{2 4 11}$$

$$E\Big(\Big|\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta} - \frac{\partial X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\beta}}{\partial\beta}\Big|^{2p}\Big) \le C_{29} \tag{2 4 12}$$

Introdum la seguent esperança

$$\begin{aligned}
I \;&= E\Big(\Big|\sum_{(k\,\ell)\in I}\frac{Z_{k\,\ell}}{\varepsilon}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v}\\
&\quad\times(\sigma''(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}) - \sigma''(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}))\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha}\,\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta}d\alpha\,d\beta\,du\,dv\Big|^4\Big)\\
&\le \frac{CM^4}{\varepsilon^4}\sum_{(k\,\ell)\in I}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}(u-\varepsilon(k-1))^3(v-\varepsilon(\ell-1))^3\\
&\quad\times\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v}E\Big[\Big((\sigma''(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}) - \sigma''(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\Big)^4\\
&\quad\times\Big(\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha}\Big)^4\Big(\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta}\Big)^4\Big]\,d\alpha\,d\beta\,du\,dv
\end{aligned}$$

Aplicant (2 4 9) ı (2 4 10) obtenım

$$\begin{aligned}
&E\Big((\sigma''(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}) - \sigma''(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}))^4\Big(\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha}\Big)^4\Big(\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta}\Big)^4\Big)\\
&\le \Big[E\Big[(\sigma''(X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}) - \sigma''(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}))^8\Big]\Big]^{1/2}\\
&\quad\times\Big[E\Big(\Big(\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha}\Big)^{16}\Big)\Big]^{1/4}E\Big[\Big(\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta}\Big)^{16}\Big]^{1/4} \le \frac{C_{30}}{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
I \;&\le\; \frac{CM^4}{\varepsilon^4}\sum_{(k\,\ell)\in I}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}(u-\varepsilon(k-1))^3(v-\varepsilon(\ell-1))^3\\
&\quad\times\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v}\frac{C_{30}}{\varepsilon^2}\,d\alpha\,d\beta\,du\,dv \le C_{31}\,\varepsilon^2
\end{aligned}$$

Aixo significa que en el terme $R^{\varepsilon\,6}_{k\,\ell}$ podem reemplaçar $\sigma''(X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta})$ per $\sigma''(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})$ Ara considerem la seguent descomposicio del producte de les derivades de primer ordre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha}\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta} &= \frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\varepsilon(\ell-1)}}{\partial\alpha}\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\beta}}{\partial\beta} \\
&+ \frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\varepsilon(\ell-1)}}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta} - \frac{\partial X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\beta}}{\partial\beta}\right) \qquad (2\,4\,13) \\
&+ \frac{\partial X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\beta}}{\partial\beta}\left(\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha} - \frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\varepsilon(\ell-1)}}{\partial\alpha}\right) \\
&+ \left(\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha} - \frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\varepsilon(\ell-1)}}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta} - \frac{\partial X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\beta}}{\partial\beta}\right)
\end{aligned}$$

Per tot $u \in [\varepsilon(k-1),\varepsilon k]$, $v \in [\varepsilon(\ell-1),\varepsilon\ell]$, tenim

$$\begin{aligned}
&E\left(\Big|\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v}\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\varepsilon(\ell-1)}}{\partial\alpha}\Big(\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta} - \frac{\partial X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\beta}}{\partial\beta}\Big)d\alpha\,d\beta\Big|^{2p}\right) \qquad (2\,4\,14) \\
&\le (u-\varepsilon(k-1))^{2p-1}(v-\varepsilon(\ell-1))^{2p-1}\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v}\frac{C_{32}}{\varepsilon^{p}}d\alpha\,d\beta \\
&\le C_{32}\,\varepsilon^{3p},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&E\left(\Big|\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v}\Big(\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha} - \frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\varepsilon(\ell-1)}}{\partial\alpha}\Big)\Big(\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta} - \frac{\partial X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\beta}}{\partial\beta}\Big)d\alpha\,d\beta\Big|^{2p}\right) \qquad (2\,4\,15) \\
&\le C_{33}(u-\varepsilon(k-1))^{2p}(v-\varepsilon(\ell-1))^{2p}
\end{aligned}$$

De les estimacions (2 4 14) i (2 4 15) es dedueix

$$\begin{aligned}
&E\Bigg(\Big|\sum_{(k\,\ell)\in I}\frac{Z_{k\,\ell}}{\varepsilon}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}\sigma''(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v} \\
&\quad\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\varepsilon(\ell-1)}}{\partial\beta}\Big(\frac{\partial X^{\varepsilon}_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta} - \frac{\partial X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\beta}}{\partial\beta}\Big)d\alpha\,d\beta\,du\,dv\Big|^{4}\Bigg) \\
&\le C_{34}\,\varepsilon^{2},
\end{aligned}$$

1

$$
\begin{aligned}
& E\Big(\Big|\sum_{(k\,\ell)\in I^\varepsilon} \frac{Z_{k\,\ell}}{\varepsilon}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}\sigma''(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v} \\
&\quad \Big(\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\alpha}-\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\varepsilon(\ell-1)}}{\partial\alpha}\Big)\Big(\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\beta}}{\partial\beta}-\frac{\partial X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\beta}}{\partial\beta}\Big)\Big|^4\Big) \\
\leq\ & C_{35}\,\varepsilon^4
\end{aligned}
$$

Com a consequencia, nomes cal estudiar la contribucio del primer terme en la descomposicio (2 4 12) Observem que

$$
\begin{aligned}
\int_{\varepsilon(k-1)}^{u}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{v}\frac{\partial X^\varepsilon_{\alpha\,\varepsilon(\ell-1)}}{\partial\alpha}\frac{\partial X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\beta}}{\partial\beta}\,d\alpha\,d\beta \;&=\; (X^\varepsilon_{u\,\varepsilon(\ell-1)}-X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}) \\
&\times\;\; (X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,v}-X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})
\end{aligned}
$$

Aleshores, aplicant la desigualtat de Burkholder per dos parametres (2 3 6) obtenim

$$
\begin{aligned}
& E\Big(\Big|\sum_{(k\,\ell)\in I} \frac{Z_{k\,\ell}}{\varepsilon}\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}\sigma''(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}) \\
&\quad\times (X^\varepsilon_{u\,\varepsilon(\ell-1)}-X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,v}-X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\,du\,dv\Big|^4\Big) \\
\leq\ & C\,E\Big(\Big|\sum_{(k\,\ell)\in I}\frac{Z^2_{k\,\ell}}{\varepsilon^2}\sigma''(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})^2 \\
&\quad\times\Big(\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}(X^\varepsilon_{u\,\varepsilon(\ell-1)}-X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\,du\Big)^2 \\
&\quad\times\Big(\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,v}-X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\,dv\Big)^2\Big|^2\Big) \\
\leq\ & \frac{C_{36}M^4}{\varepsilon^6}\sum_{(k\,\ell)\in I}E\Big(\Big(\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}(X^\varepsilon_{u\,\varepsilon(\ell-1)}-X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\,du\Big)^4 \\
&\quad\times\Big(\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,v})-X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}\,dv\Big)^4\Big) \\
\leq\ & \frac{C_{36}M^4}{\varepsilon^6}\sum_{(k\,\ell)\in I}\Big(E\Big(\int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k}(X^\varepsilon_{u\,\varepsilon(\ell-1)}-X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\,du\Big)^8\Big)^{1/2} \\
&\quad\times\Big(E\Big(\int_{\varepsilon(\ell-1)}^{\varepsilon\ell}(X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,v}-X^\varepsilon_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\Big)^8\Big)^{1/2}\leq C_{37}\,\varepsilon^4
\end{aligned}
$$

Aıxo completa la demostracıo del Lema 2 4 2 □

Ara contınuem amb la demostracıo de la part (a) del Teorema 2 4 1 Es compleıx que

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\Bigg(\Big(\sum_{(k\ \ell)\in I} \varepsilon\, Z_{k\,\ell}\, \sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\ \varepsilon(\ell-1)}) \tag{2 4 16}$$

$$+\ \frac{\varepsilon^2}{4}(Z^2_{k\,\ell}-1)\sigma'\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\ \varepsilon(\ell-1)})\Big)\varphi(X^{\varepsilon}_{s_1\ t_1},\quad ,X^{\varepsilon}_{s_n\ t_n})\Bigg) = 0$$

En efecte sı ε es suficıentment petıta les varıables aleatorıes $X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\ \varepsilon(\ell-1)}$

ı $\varphi(X^{\varepsilon}_{s_1\ t_1},\quad ,X^{\varepsilon}_{s_n\ t_n})$ son ındependents de $Z_{k\,\ell}$ ı a mes a mes $E(Z_{k\,\ell}) = 0$ ı $E(Z^2_{k\,\ell}) = 1$ Tenınt en compte (2 4 1), (2 4 2), Lema 2 4 2 ı (2 4 16), la demostracıo de la part (a) es completa

Ara donarem la demostracıo de la part (b) Hem d'estımar $(\Delta_{s\,t} U^{\varepsilon}_{s\ t})^2 - \Delta_{s\,t} B^{\varepsilon}_{s'\ t}$ Aplıcant (2 4 3) ı (2 4 6) obtenım

$$\begin{aligned} \Delta_{s\,t} U^{\varepsilon}_{s\ t} &= \sum_{(k\ \ell)\in I} \varepsilon\, Z_{k\,\ell}\, \sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\ \varepsilon(\ell-1)}) \\ &+\ \frac{\varepsilon^2}{4}(Z^2_{k\,\ell}-1)\,\sigma'\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\ \varepsilon(\ell-1)}) + \tilde{R}^{\varepsilon}_{s\,t\,s\ t}\,, \end{aligned} \tag{2 4 17}$$

on $\lim_{\varepsilon\to 0} E\,(|\tilde{R}^{\varepsilon}_{s\,t\,s\ t}|^4) = 0$

Descomposem $\Delta_{s\,t} B^{\varepsilon}_{s\ t}$ de la seguent manera

$$\Delta_{s\,t} B^{\varepsilon}_{s\ t'} \;=\; \sum_{(k\ \ell)\in I^{\varepsilon}} \varepsilon^2\, \sigma^2(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\ \varepsilon(\ell-1)}) + R_{s\,t\,s'\,t}\,, \tag{2 4 18}$$

on $\lim_{\varepsilon\to 0} E\,(|R_{s\,t\,s\ t}|) = 0$

Usant (2 4 17) ı (2 4 18) obtenım

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} E\Big([(\Delta_{s\,t} U^{\varepsilon}_{s'\,t})^2 - \Delta_{s\,t} B^{\varepsilon}_{s'\,t}]\,\varphi(X^{\varepsilon}_{s_1\,t_1}, \quad , X^{\varepsilon}_{s_n\,t_n})\Big] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} E\Bigg(\Big[\Big(\sum_{(k\,\ell)\in I} \varepsilon Z_{k\,\ell}\,\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}) \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2}{4}(Z^2_{k\,\ell} - 1)\sigma'\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\varepsilon(\ell-1)})\Big)^2 \\
&\quad - \sum_{(k\,\ell)\in I} \varepsilon^2\sigma^2(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\Big]\varphi(X^{\varepsilon}_{s_1\,t_1}, \quad , X^{\varepsilon}_{s_n\,t_n})\Bigg) = 0\,,
\end{aligned}
$$

ȷa que

$$
\begin{aligned}
&E\Bigg(\Big(\sum_{(k\,\ell)\in I} \varepsilon\, Z_{k\,\ell}\,\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}) + \frac{\varepsilon^2}{4}(Z^2_{k\,\ell} - 1)\sigma'\sigma(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\Big)^2\Bigg) \\
&\quad = E\Big(\sum_{(k\,\ell)\in I} \varepsilon^2\, Z^2_{k\,\ell}\,\sigma^2(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}) \\
&\quad\quad + \frac{\varepsilon^4}{16}(Z^2_{k\,\ell} - 1)^2(\sigma'\sigma)^2(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)}) \\
&\quad\quad + \frac{\varepsilon^3}{2}\, Z_{k\,\ell}(Z^2_{k\,\ell} - 1)(\sigma'\sigma^2)(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\Big)\,, \\
&\lim_{\varepsilon\to 0} E\Big(\sum_{(k\,\ell)\in I} \frac{\varepsilon^4}{16}(Z^2_{k\,\ell} - 1)^2(\sigma'\sigma^2)(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\Big) \\
&\quad + \frac{\varepsilon^3}{2}\, Z_{k\,\ell}(Z^2_{k\,\ell} - 1)(\sigma'\sigma^2)(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\Big) = 0\,,
\end{aligned}
$$

ı

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} E\Bigg(\Big(\sum_{(k\,\ell)\in I} \varepsilon^2(Z^2_{k\,\ell} - 1)\,\sigma^2(X^{\varepsilon}_{\varepsilon(k-1)\,\varepsilon(\ell-1)})\Big)\varphi(X^{\varepsilon}_{s_1\,t_1}, \quad , X^{\varepsilon}_{s_n\,t_n})\Bigg) = 0
$$

Aıxo completa la demostracıo del teorema □

2 5 Problema de martingala per equacions diferencials estocàstiques amb dos paràmetres

Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat complert i sigui $\{\mathcal{F}_{s\,t}, (s,t) \in [0,S] \times [0,T]\}$ una família de sub σ-algebres de $\mathcal{F}$ tal que satisfan

(A) $\mathcal{F}_{0\,0}$ conte tots els $N \in \mathcal{F}$ tals que $P(N) = 0$

(B) $\mathcal{F}_{s\,t} \subseteq \mathcal{F}_{s\ t}$ per tot $s \leq s'$ i $t \leq t'$

(C) $\mathcal{F}_z = \cap_{z<z} \mathcal{F}_z$ per tot $z \in [0,S] \times [0,T]$ on $z = (s,t) < z' = (s',t')$ significa $s < s'$ i $t < t'$

Direm que un proces $\mathcal{F}_z$ adaptat $M = \{M_z, z \in [0,S] \times [0,T]\}$ es una martingala forta si $E(|M_z|) < \infty$ per tot $z \in [0,S] \times [0,T]$, $M_{s\,0} = M_{0\,t} = 0$ i

$$E\left(\Delta_{s\,t} M_{s\ t'} | \mathcal{F}_{S\,t} \vee \mathcal{F}_{s\,T}\right) = 0 \quad \text{per tot} \quad (s,t) \leq (s',t')$$

Direm que un proces $\mathcal{F}_z$ adaptat $M = \{M_z, z \in [0,S] \times [0,T]\}$ es una martingala si $E(|M_z|) < \infty$ per tot $z \in [0,S] \times [0,T]$, $M_{s\,0} = M_{0\,t} = 0$ i

$$E\left(M_{s\ t} - M_{s\,t} | \mathcal{F}_{s\,t}\right) = 0 \quad \text{per tot} \quad (s,t) \leq (s',t')$$

Un proces $\mathcal{F}_{s\,T}$-adaptat (un proces $\mathcal{F}_{S\,t}$ adaptat) $M = \{M_z, z \in [0,S] \times [0,T]\}$ s'anomena 1 martingala (2 martingala) si $E(|M_z|) < \infty$ per tot $z \in [0,S] \times [0,T]$ i

$$E\left(M_{s\ t} - M_{s\,t} | \mathcal{F}_{s\,T}\right) = 0 \quad (1\ 2\ 1) \quad s \leq s', t' \in [0,T]$$

$$\left(E\left(M_{s'\,t} - M_{s'\,t} | \mathcal{F}_{S\,t}\right) = 0 \quad \text{per tot} \quad t \leq t', s' \in [0,S]\right)$$

Direm que un proces $\mathcal{F}_z$ adaptat $M = \{M_z z \in [0,S] \times [0,T]\}$ es una martingala feble si $E(|M_z|) < \infty$ per tot $z \in [0,S] \times [0,T]$ i

$$E\left(\Delta_{s\,t} M_{s\ \ t}\,|\mathcal{F}_{s\,t}\right) = 0 \quad \text{per tot} \quad (s,t) \leq (s',t')$$

Tota martingala forta es una martingala i tota martingala es una martingala feble Sota la condicio (D) que enuncio tot seguit, la classe de processos que son 1 i 2 martingales coincideix amb la classe de pro cessos que son martingales

(D) Per cada $(s,t) \in [0,S] \times [0,T]$ les σ algebres $\mathcal{F}_{S\,t}$ i $\mathcal{F}_{s\,T}$ son condicionalment independents donat $\mathcal{F}_{s\,t}$ es a dir

$$E[E[Y|\mathcal{F}_{S\,t}]|\mathcal{F}_{s\,T}] = E[Y|\mathcal{F}_{s\,t}]$$

per tota variable aleatoria Y acotada i $\mathcal{F}$ mesurable

A partir d'ara suposarem que la família de σ-algebres $\{\mathcal{F}_z, z \in [0,S] \times [0,T]\}$ satisfa les propietats (A) a (D)

Direm que un proces estocastic $a = \{a_{s\,t}, (s,t) \in [0,S] \times [0,T]\}$ es creixent si

$$\Delta\ \ {}_t a_{s\ \ t} \geq 0 \quad \text{per tot} \quad s \leq s',\ t \leq t'$$

Es diu que un proces creixent $\{a_{s\,t}, (s,t) \in [0,S] \times [0,T]\}$ es el compensador de la martingala forta $\{X_{s\,t}, (s,t) \in [0,S] \times [0,T]\}$ si

$$E\left((\Delta_{s\,t} X_{s\ \ t})^2 |\mathcal{F}_{S\,t} \vee \mathcal{F}_{s\,T}\right) = E(\Delta_{s\,t} a_{s\ \ t}\,|\mathcal{F}_{S\,t} \vee \mathcal{F}_{s\,T}) \quad \text{per tot} \quad s \leq s',\ t \leq t'$$

Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat complert i sigui $\{\mathcal{F}_{s\,t}, (s,t) \in [0,S] \times [0,T]\}$ una família de sub σ algebres de $\mathcal{F}$ que satisfan (A), (B), (C) i (D)

Definicio 2 5 1 *Un $\mathcal{F}_z$ drap brownia es un proces $W = \{W_{s\,t}, (s,t) \in [0,S] \times [0,T]\}$ continu, adaptat tal que $W_{s\,0} = W_{0\,t} = 0$ q s i per tot $s \leq s'$ i $t \leq t'$ l'increment $\Delta_{s\,t} W_{s\ \ t}$ es independent de $\mathcal{F}_{S\,t} \vee \mathcal{F}_{s\,T}$ i te distribucio normal de mitja zero i variancia $(s'-s)(t'-t)$*

Teorema 2 5 2 *Sigui* $\{X_{s\,t}, (s,t) \in [0,S] \times [0\ T]\}$ *un proces continu i* $\mathcal{F}_{s\,t}$ *adaptat tal que* $X_{s\,0} = X_{0\,t} = 0$ *Les seguents afirmacions son equivalents*

(a) X *es un* $\mathcal{F}_{s\,t}$ *drap brownia*

(b) $\{X_{s\,t}\}$ *es una martingala forta amb compensador igual a st*

(c) $E\Big[\exp\big(\theta\Delta_{s\,t}X_{s\ t}\ -\ \dfrac{\theta^2}{2}(s'-s)(t'-t)\big)|\mathcal{F}_{S\,t} \vee \mathcal{F}_{s\,T}\Big] = 1$ *per tot* $s < s',\ t < t',\ \theta \in \mathbb{R}$

Demostracio La propietat (a) implica la (b) ja que

$$E(\Delta_{s\,t}X_{s\ t}\,|\mathcal{F}_{s\,T} \vee \mathcal{F}_{S\,t}) = E(\Delta_{s\,t}X_{s\ t}\,) = 0,$$

i

$$E((\Delta_{s\,t}X_{s\ t'})^2|\mathcal{F}_{s\,T} \vee \mathcal{F}_{S\,t}) = E((\Delta_{s\,t}X_{s\ t}\,)^2) = (s'-s)(t'-t)$$

per tot $s < s'$, $t < t'$

Per tal de demostrar que (b) implica (c) introduim el proces $Y_u = \Delta_{s\,t}X_{u\,t}\,,\ u \in [s,S]$ Aquest proces es una martingala respecte a la família de σ-algebres $\{\mathcal{F}_{u\,T} \vee \mathcal{F}_{S\,t}, u \in [s,S]\}$ amb proces creixent $(u - s)(t'-t)$ Aleshores aplicant la formula d'Ito uniparametrica obtenim

$$E(\exp(\theta Y_s\ -\frac{\theta^2}{2}(s'-s)(t'-t))|\mathcal{F}_{s\,T} \vee \mathcal{F}_{S\,t}) = 1,$$

i es compleix (c)

Clarament (c) implica (a)

Per a tot $\theta \in \mathbb{R}$, $\exp(\theta\Delta_{s\,t}X_{s'\,t}\,)$ es independent de $\mathcal{F}_{S\,t} \vee \mathcal{F}_{s\,T}$, per tant $\Delta_{s\,t}X_{s'\,t}$ es independent de $\mathcal{F}_{S\,t} \vee \mathcal{F}_{s\,T}$ De (c) es dedueix que la funcio caracteristica de $\Delta_{s\,t}X_{s\ t}$ es $\exp(\dfrac{\theta^2}{2}(s'-s)(t'-t))$ i per tant que $\Delta_{s\,t}X_{s\ t}$ es $N(0,(s'-s)(t'-t))$,

Definicio 2 5 3 *Sigui $x \in \mathbb{R}$ i considerem dos funcions mesurables a i b Sigui $\Omega = C([0,S] \times [0,T])$ equipat amb la σ algebra de Borel $\mathcal{B}$ Sigui $x = \{x(s,t),(s,t) \in [0,S] \times [0,T]\}$ el proces canonic en Ω, es a dir $x(s,t)(\omega) = \omega(s,t)$ Definim $\mathcal{F}_{s\,t} = \sigma\{x(u,v), u \le s, v \le t\}$*

Una mesura de probabilitat P en $\mathcal{B}$ es solucio del problema de martingala respecte de (x,a,b) si

(1) $x(s,0) = x(0,t) = x \quad P$ *q s*

(2) *(i)* $E\,(\Delta_{s\,t}x(s',t')|\mathcal{F}_{s\,T} \vee \mathcal{F}_{S\,t}) = E(\Delta_{s\,t}B_{s'\,t}\,|\mathcal{F}_{s\,T} \vee \mathcal{F}_{S\,t})$

(ii) $E\Big((\Delta_{s\,t}(x(s',t') - B_{s\,t}))^2|\mathcal{F}_{s\,T} \vee \mathcal{F}_{S\,t}\Big) = E(\Delta_{s\,t}A_{s\,t}\,|\mathcal{F}_{s\,T} \vee \mathcal{F}_{S\,t})$

on $B_{s\,t} = \int_0^s \int_0^t b(x(u,v))du\,dv$ *i* $A_{s\,t} = \int_0^s \int_0^t a^2(x(u,v))\,du\,dv$ *es a dir* $x(s,t) - B_{s\,t}$ *es una martingala forta amb compensador* $A_{s\,t}$, *i suposem que* $E(A_{S\,T}) < \infty$ *i* $E(\int_0^S \int_0^T |b(x(u,v))|dudv) < \infty$

Observacio La mesura de Wiener es solucio del problema de martingala respecte a (0, 1, 0)

Definicio 2 5 4 *Sigui $x \in \mathbb{R}$ i considerem dos funcions mesurables a i b Anomenem solucio feble de l'equacio estocastica*

$$X_{s\,t} = x + \int_0^s \int_0^t a(X_{u\,v})dW_{u\,v} + \int_0^s \int_0^t b(X_{u\,v})du\,dv) \qquad (2\ 5\ 1)$$

a un sistema $\{\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}, \tilde{\mathcal{F}}_{s\,t}, W_{s\,t}, X_{s\,t}, (s,t) \in [0,S]\times \in [0,T]\}$ *on*

1) $\{\tilde{\mathcal{F}}_{s\,t}\}$ *es una familia de σ algebres creixent en l'espai complert* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$, *que satisfa les condicions (A), (B) (C) i (D)*

2) $\{W_{s\,t}\}$ *es un* $\tilde{\mathcal{F}}_{s\,t}$ *drap brownia*

3) $X_{s\,t}$ *es un proces* $\tilde{\mathcal{F}}_{s\,t}$ *adaptat tal que*

$$\tilde{E}(\int_0^S \int_0^T |a^2(X_{u\,v})|dudv) < \infty, \quad \tilde{E}(\int_0^S \int_0^T |b(X_{u\,v})|dudv) < \infty,$$

i la igualtat (2 5 1) es compleix $\tilde{P}$ *q s*

En [23], Tudor demostra l'existencia de solucio feble de l'equacio (2 5 1) sota les hipotesis de que a es continu i satisfa la condicio $0 < c_1 \leq a^2(x) \leq c_2$ per tot $x \in \mathbb{R}$ i b es mesurable i acotat Yeh ha establert en [27] l'existencia de solucio feble quan els coeficients a i b son continus, depenen de les variables (s, t, ω) de forma progresivament mesurable, i satisfan una condicio d'integrabilitat

El seguent teorema estableix l'equivalencia entre el problema de martingala i la nocio de solucio feble En [24], Tudor ha provat aquest resultat quan b es mesurable i acotat i a es continu i satisfa $0 < c_1 \leq a^2(x) \leq c_2$

Teorema 2 5 5 *Fixem a, b funcions mesurables i acotades, i sigui $x \in \mathbb{R}$ Hi ha una equivalencia entre l'existencia i unicitat de la solucio del problema de martingala respecte (x, a, b) i l'existencia i unicitat en llei de la solucio de l'equacio (2 5 1)*

Abans de demostrar aquest teorema donem un teorema de representacio per martingales fortes analeg al que demostra Doob en [5] per martingales amb un parametre

Teorema 2 5 6 *Sigui $\{M_{s\,t}, (s,t) \in [0, S] \times [0, T], \mathcal{F}_{s\,t}\}$ una martingala forta, continua, definida en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i tal que el seu compensador $A_{s\,t}(w)$ sigui una funcio absolutament continua de (s, t) per P quasi per tot w Aleshores existeix una extensio $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en la qual esta definit un $W = \{W_{s\,t}, \tilde{\mathcal{F}_{s\,t}}\}$ drap brownia i un proces mesurable i adaptat $X = \{X_{s\,t}, \tilde{\mathcal{F}_{s\,t}}\}$ tal que*

$$\tilde{P}[\int_0^S \int_0^T X_{s\,t}^2 \, ds \, dt < \infty] = 1$$

i tals que es compleix $\tilde{P}-$quasi segurament

$$M_{s\,t} = \int_0^s \int_0^t X_{u\,v} \, dW_{u\,v}$$

$$A_{s\,t} = \int_0^s \int_0^t X_{u\,v}^2 \, du \, dv$$

Demostracio

Prenem $a_{u\,v} = |\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} A_{u\,v}|$ i $X_{u\,v} = a_{u\,v}^{1/2}$

Si $a_{u\,v}$ no s'anul la $P-$q s prenem

$$W_{s\,t} = \int_0^s \int_0^t a_{u\,v}^{-1/2}\, dM_{u\,v}$$

Com $W_{s\,t}$ es una martingala forta amb compensador st aplicant el Teo rema (2 5 2) obtenim que $(W_{s\,t}\ \mathcal{F}_{s\,t})$ es un drap brownia

En cas de que $a(u, v)$ s'anul li s'ha d'estendre l'espai de probabilitat Prenem un drap brownia $\{\tilde{W}_{s\,t}, \tilde{\mathcal{F}}_{s\,t}\}$ en $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$, independent de $M_{s\,t}$

Prenem

$$W_{s\,t} = \int_0^s \int_0^t a_{u\,v}^{-1/2}\, \mathbf{1}_{\{a_u\ >0\}} dM_{u\,v} +$$

$$\int_0^s \int_0^t \mathbf{1}_{\{a_u\ =0\}} d\tilde{W}_{u\,v}$$

Aleshores $W_{s\,t}$ es una martingala forta amb compensador st □

A continuacio demostrem el Teorema 2 5 5

Demostracio

Sigui P una mesura de probabilitat en $(C([0, S] \times [0, T]), \mathcal{B})$ solucio del problema de martingala respecte (x, a, b) Definim $Y_{s\,t} = x(s, t) - x - B_{s\,t}$ Sabem que $Y_{s\,t}$ es una martingala forta amb compensador $A_{s\,t}$ sota P Per el Teorema (2 5 6) existeix un $\tilde{\mathcal{F}}_{s\,t}$ drap brownia $\{\tilde{W}_{s\,t}\}$ en una extensio $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ de $(C([0, S] \times [0, T]), \mathcal{B}, P)$ on $\tilde{\mathcal{F}}_{s\,t}$ satisfa (A), (B), (C) i (D) tal que

$$Y_{s\,t} = \int_0^s \int_0^t a(x(u, v))\, d\tilde{W}_{u\,v} \quad \tilde{P} - a\ s \tag{2 5 2}$$

Per tant es satisfa l'equacio (2 5 1)

Per tal de demostrar la implicacio inversa, sigui $\{\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}, \tilde{\mathcal{F}}_{s\,t}, \tilde{X}_{s\,t}, \tilde{W}_{s\,t}\}$ una solucio feble de (2 5 1) i sigui P la llei del proces $\tilde{X}_{s\,t}$ en l'espai

$(C([0,S] \times [0,T]), \mathcal{B})$ Aleshores per tot $s < s'$ ı $t < t'$ obtenım

$$E_P\Big(\Delta_{s\,t}x(s',t') - \int_s^s \int_t^t b(x(u,v))\,du\,dv|\mathcal{F}_{s\,T} \vee \mathcal{F}_{S\,t}\Big)$$

$$= E_P\Big(\Delta_{s\,t}\tilde{X}_{s\ t} - \int_s^s \int_t^t b(\tilde{X}_{u\,v})\,du\,dv|\tilde{\mathcal{F}}_{s\,T} \vee \tilde{\mathcal{F}}_{S\,t}\Big)$$

$$= E_P\Big(\int_s^s \int_t^t a(\tilde{X}_{u\,v})d\tilde{W}_{u\,v}|\tilde{\mathcal{F}}_{s\,T} \vee \tilde{\mathcal{F}}_{S\,t}\Big) = 0,$$

ı

$$E_P\Big(\Delta_{s\,t}x(s',t') - \int_s^s \int_t^{t'} b(x(u,v))\,du\,dv\Big)^2|\mathcal{F}_{s\,T} \vee \mathcal{F}_{S\,t}\Big)$$

$$= E_P\Big(\Delta_{s\,t}\tilde{X}_{s\ t} - \int_s^s \int_t^t b(\tilde{X}_{u\,v})\,du\,dv\Big)^2|\tilde{\mathcal{F}}_{s\,T} \vee \tilde{\mathcal{F}}_{S\,t}\Big)$$

$$= E_P\Big(\int_s^s \int_t^t a^2(\tilde{X}_{u\,v})\,du\,dv|\tilde{\mathcal{F}}_{s\,T} \vee \tilde{\mathcal{F}}_{S\,t}\Big)$$

$$= E_P\Big(\int_s^s \int_t^t a^2(x(u,v)\,du\,dv|\mathcal{F}_{s\,T} \vee \mathcal{F}_{S\,t}\Big)$$

Aıxo completa la demostracıo □

Els resultats anterıors permeteıxen establır la convergencıa en dıs trıbucıo de la famílıa $X^{\varepsilon}_{s\,t}$ ıntroduıda en la Seccıo 2

Teorema 2 5 7 *La dıstrıbucıo de* $\{X^{\varepsilon}_{s\,t}, 0 \le s \le S\,, 0 \le t \le T\}$ *con vergeıx feblement quan* ε *tendeıx a zero en l'espaı de Banach* $C([0,S] \times [0,T])$ *cap a la lleı de l'unıca solucıo* $\{X_{s\,t}, 0 \le s \le S\,, 0 \le t \le T\}$ *de l'equacıo ıntegral estocastıca*

$$X_{s\,t} = x + \int_0^s \int_0^t \sigma(X_{u\,v})\,dW_{u\,v} + \int_0^s \int_0^t \Big(\frac{1}{4}\sigma'\sigma(X_{u\,v}) + b(X_{u\,v})\Big)\,du\,dv \tag{2 5 3}$$

Demostracıo

En la Seccıo 1 hem demostrat l'ajustament de la famílıa de processos

$\{X^{\varepsilon}_{s\,t}, \varepsilon > 0\}$ Per tant, es suficient demostrar que la distribucio limit de tota successio feblement convergent $\{X^{\varepsilon_n}_{s\,t}, n \geq 1\}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, coincideix amb la llei del proces X solucio de (2 5 3) En la Seccio 2 hem demostrat que el limit de les succesions es solucio del problema de martingala determinat per $(x, \sigma, b + \frac{1}{4}\sigma\sigma')$, es a dir,

$$E(\Delta_{s\,t}(X_{s\,t} - B_{s\,t}) | \mathcal{F}_{S\,t} \vee \mathcal{F}_{s\,T}) = 0$$
$$E\Big((\Delta_{s\,t}(X_{s\,t} - B_{s\,t}))^2 - \Delta_{s\,t} A_{s\,t} | \mathcal{F}_{S\,t} \vee \mathcal{F}_{s\,T}\Big) = 0$$

on

$$B_{s\,t} = \int_0^s \int_0^t \Big(\frac{1}{4}\sigma'\sigma(X_{u\,v}) + b(X_{u\,v})\Big)\, du\, dv$$

i

$$A_{s\,t} = \int_0^s \int_0^t \sigma^2(X_{u\,v})\, du\, dv$$

Per el Teorema 2 5 5 $X_{s\,t}$ es una solucio feble de (2 5 3) $\square$

2 6 Aproximacio d'una classe d'equacions hiperbòliques

Podem estendre el resultat d'aproximacio de la seccio anterior a la classe tancada d'equacions, que ha estat tractada per Hajeck en [9] Utilitzem les notacions de la Seccio 2 2 2 Considerem l'equacio

$$\begin{aligned} & Y^{\varepsilon}_{s\,t} - \int_0^s \int_0^t a(Y^{\varepsilon}_{u\,v}) \frac{\partial Y^{\varepsilon}_{u\,v}}{\partial u} \frac{\partial Y^{\varepsilon}_{u\,v}}{\partial v}\, du\, dv \\ = & \ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \int_0^t F^{\varepsilon}(u,v) c(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\, du\, dv + \int_0^s \int_0^t b(Y^{\varepsilon}_{u\,v})\, du\, dv \quad (2\ 6\ 4) \end{aligned}$$

Teorema 2 6 1 *Siguin* a, b *i* $c \in C^6_b(\mathbb{R})$ *Suposem* Y^{ε} *complex (2 6 4) Si* $h \in C^4(\mathbb{R}), h(0) = 0$ *i* h' *es estrictament positiva i acotada,* $X^{\varepsilon} = h(Y^{\varepsilon})$ *tambe satisfa una equacio del tipus (2 6 4)*

Demostracio

Prenem $X^{\varepsilon} = h(Y^{\varepsilon})$ Aleshores $Y^{\varepsilon} = g(X^{\varepsilon})$, per $h^{-1} = g$
Escrivim l'equacio (2 6 4) en funcio de X^{ε}

$$g(X^{\varepsilon}_{s\,t}) - \int_0^s \int_0^t a \circ g(X^{\varepsilon}_{u\,v}) \frac{\partial g(X^{\varepsilon}_{u\,v})}{\partial u} \frac{\partial g(X^{\varepsilon}_{u\,v})}{\partial v}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \int_0^t F^{\varepsilon}(u,v) c \circ g(X^{\varepsilon}_{u\,v})\, du\, dv + \int_0^s \int_0^t b \circ g(X^{\varepsilon}_{u\,v})\, du\, dv$$

Desenvolupant els termes

$$\int_0^s \int_0^t g'(X^{\varepsilon}_{u\,v}) \Big(\frac{\partial^2 X^{\varepsilon}_{u\,v}}{\partial u \partial v} - \Big(\frac{(a \circ g) g'^2 - g''}{g'} \Big)(X^{\varepsilon}_{u\,v}) \frac{\partial X^{\varepsilon}_{u\,v}}{\partial u} \frac{\partial X^{\varepsilon}_{u\,v}}{\partial v}$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} F^{\varepsilon}(u,v) \frac{c \circ g}{g'}(X^{\varepsilon}_{u\,v}) - \frac{b \circ g}{g'}(X^{\varepsilon}_{u\,v}) \Big)\, du\, dv = 0$$

Com $g' > 0$

$$X^{\varepsilon}_{s\,t} - \int_0^s \int_0^t \frac{(a \circ g) g'^2 - g''}{g'} \Big)(X^{\varepsilon}_{u\,v}) \frac{\partial X^{\varepsilon}_{u\,v}}{\partial u} \frac{\partial X^{\varepsilon}_{u\,v}}{\partial v}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}F^\varepsilon(u,v)\frac{c\circ g}{g'}(X^\varepsilon_{u\,v}) - \frac{b\circ g}{g'}(X^\varepsilon_{u\,v}))\,du\,dv \;= 0,$$

es a dır $X^\varepsilon = h(Y^\varepsilon)$ compleix una equacio de tıpus (2 6 4) Ara veurem que podem transformar una equacio (2 6 4) en una de tıpus

$$Z^\varepsilon_{s\,t} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\int_0^t F^\varepsilon(u,v)\sigma(Z^\varepsilon_{u\,v})\,du\,dv + \int_0^s\int_0^t \rho(Z^\varepsilon_{u\,v})\,du\,dv\,,$$

Aplıcant el Teorema 2 6 1 nomes cal pendre $Z^\varepsilon_{s\,t} = h(Y^\varepsilon_{s\,t})$, amb $h = g^{-1}$ tal que

$$(a\circ g)g'^2 - g'' = 0,$$

es a dır prenem
$h(0) = 0$ ı $h'(x) = exp(-\int_0^x a(s)ds)$ ı obtenım $\sigma = \frac{c\circ g}{g} = (ch')\circ h^{-1}$ $\rho = \frac{b\circ g}{g} = (bh')\circ h^{-1}$

Teorema 2 6 2 *La dıstrıbucıo de $\{Y^\varepsilon_{s\,t}, 0 \le s \le S\,, 0 \le t \le T\}$ con vergeıx feblement quan ε tendeıx a zero en l'espaı de Banach $C([0,S]\times[0,T])$ cap a la lleı de l'unıca solucıo $\{Y_{s\,t}, 0 \le s \le S\,, 0 \le t \le T\}$ de l'equacıo ıntegral estocastıca (2 2 14)*

$$Y - a(Y) - (Y \overset{\star}{-} Y) - b(Y)\quad \mu - c(Y) - W = 0$$

Demostracıo

Per el Teorema 2 5 7 La dıstrıbucıo de $\{Z^\varepsilon_{s\,t}, 0 \le s \le S\,, 0 \le t \le T\}$ convergeıx feblement quan ε tendeıx a zero en l'espaı de Banach $C([0,S]\times[0,T])$ cap a la lleı de l'unıca solucıo $\{Z_{s\,t}, 0 \le s \le S\,, 0 \le t \le T\}$ de l'equacıo ıntegral estocastıca

$$Z_{s\,t} = \int_0^s\int_0^t \sigma(Z_{u\,v})\,dW_{u\,v} + \int_0^s\int_0^t \Big(\frac{1}{4}\sigma'\sigma(Z_{u\,v}) + \rho(Z_{u\,v})\Big)\,du\,dv \tag{2 6 5}$$

ı $Y^\varepsilon = g(Z^\varepsilon)$, per tant la dıstrıbucıo de $\{Y^\varepsilon_{s\,t}, 0 \le s \le S\,, 0 \le t \le T\}$ convergeıx feblement a la dıstrıbucıo de $\{g(Z_{s\,t}), 0 \le s \le S\,, 0 \le t \le T\}$, ı per la Proposıcıo 2 2 10, g(Z) compleıx l'equacıo (2 2 14) □

Bibliografia

[1] H Airault, P Malliavin Integration geometrique sur l'espace de Wiener *Bull Sciences Math* **112** (1988) 3 52

[2] N Bouleau, F Hirsch Propietes d'absolue continuite dans les espaces de Dirichlet et applications aux equations diferentielles stochastiques, in *Seminaire de Probabilites XX, Lecture Notes in Math* **1204** (1986) 131 161

[3] R Cairoli and J B Walsh Stochastic integrals in the plane, *Acta Math* **134** (1975), 111 183

[4] R Carmona, J P Fouque A difusion approximation result for two parameter processes *Probability Theory Rel Fields* **98** (1994), 277-298

[5] J L Doob Stochastic Processes *Wiley publications in statistics* (1953)

[6] C Florit, D Nualart A local criterion for smoothness of densities and application to the supremum of the Brownian sheet *Statistics & Probability Letters* **22** (1995) 25 31

[7] C Florit, D Nualart Diffusion Approximation for hyperbolic stochastic differential equations Es publicara a *Stochastic processes and their applications*

[8] A Garsia, E Rodemich, H Rumsey A real variable lemma and the continuity of some Gaussian processes *Indiana Univ Math Journal* **20** (1970 71) 565 578

[9] B Hajek Stochastic equations of hyperbolic type and a two parameter Stratonovich calculus *Annals Probab* **10** (1982) 451 463

[10] P Imkeller, D Nualart Integration by parts on Wiener space and the existence of occupation densities *Annals Probab* **22** (1994) 469 493

[11] P Malliavin Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators, in *Proc Inter Symp on Stoch Diff Equations* Kyoto 1976, Wiley (1978) 195 263

[12] C Metraux Quelques inegalites pour martingales a parametre bidimensionel Seminaire de Probabilites XII Lecture Notes in Math, Springer, Vol 649, 170 179

[13] D Nualart Malliavin Calculus and Related Topics Springer Verlag (1995)

[14] D Nualart Analysis on Wiener space and anticipating stochas tic calculus, in *Ecole d'ete de Probabilites de Saint Flour XXV, Lecture Notes in Math* , a publicar

[15] D Nualart, E Pardoux Stochastic calculus with anticipating integrands *Probability Theory and Related Fields* **78** (1988) 80 129

[16] D Nualart, J Vives Continuite absolue de la loi du maximum d'un processus continu *C R A S* **307** (1988) 349 354

[17] D Nualart, M Zakai The partial Malliavin calculus In *Seminaire de Probabilites XXIII,* Lecture Notes in Math **1372** (1989) 362 381

[18] A V Skorohod On a generalization of a stochastic integral *Theory Prob Appl* **20** (1975) 219 233

[19] R L Stratonovich A new form of representation of stochastic integrals and equations *SIAM J Control* 362 371

[20] D W Strook The Malliavin calculus, a functional analytic approach *J Functional Anal* **44** (1981) 212 257

[21] J Ll Sole, F Utzet Skorohod and Stratonovich line integrals in the plane *Stoch Processes and their Applications* **39** (1991) 239 262

[22] D W Strook,S R S Varadhan Multidimensional Diffusion Processes Springer Verlag (1979)

[23] C Tudor A theorem concerning the existence of the weak solutions of the stochastic equation with continuous coefficients in the plane *Rev Roum Math Pures et Appl* **22** (1977), 1303-1308

[24] C Tudor Remarks on the martingale problem in the two dimensional time parameter *Rev Roum Math Pures et Appl* **25** (1980), 1551-1556

[25] J B Walsh An introduction to stochastic partial differential equations Ecole d'Ete de Probabilites de Saint Flour,XIV *Lecture Notes in Math* **1180**, 266 437 Springer Verlag (1986)

[26] S Watanabe *Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus* Tata Institute of Fundamental Research Springer Verlag, 1984

[27] J Yeh Existence of weak solutions to stochastic differential equations in the plane with continuous coefficients *Transactions of the A M S* **290** (1985), 345-361

[28] E Wong, M Zakai Differentiation formulas for stochastic integrals in the plane *Stochastic Process Appl* **6**(1978), 339-349

[29] E Wong, M Zakai An e xtension of stochastic integrals in the plane *Ann Probability* 5 (1977) 770 778

[30] E Wong, M Zakai The sample function continuity of stochastic integrals in the plane *Ann Probability* 5 (1977) 1024-1027

[31] E Wong, M Zakai Weak martingales and stochastic integrals in the plane *Ann Probability* 4 (1976), 570-586