UNIVERSITAT DE BARCELONA

Estudi d'algunes propietats de les martingales contínues amb paràmetre bidimensional

Frederic Utzet i Civit

ESTUDI D'ALGUNES PROPIETATS DE LES

MARTINGALES CONTÍNUES AMB PARÀMETRE BIDIMENSIONAL

Memòria que presenta
Frederic Utzet i Civit
per optar al grau de Doctor en Matemàtiques
per la Universitat de Barcelona

Vist i Plau,
El Director de la Tesi.

Signat: David Nualart i Rodon,
Catedràtic d'Estadística i Investigació
Operativa de la Facultat de Matemàtiques
de la Universitat de Barcelona.

El Dr. David Nualart, que malgrat el seu carregat programa està sempre obert a qui vol treballar, ha dedicat molt temps i atenció a la direcció -plena d'idees, intuïcions i amplis coneixements matemàtics- d'aquesta memòria. Li quedo molt agraït.

Als meus pares; a la meva dona, que amb el seu suport actiu ha propiciat totes les condicions perquè pogués fer aquesta tesi; i als meus fills, Ferran i Mireia, va dedicat, amb afecte, aquest treball.

Barcelona, gener de 1985.

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ

Els processos estocàstics amb paràmetre multidimensional, també anomenats camps aleatoris, apareixen en l'estudi estadístic de fenòmens que evolucionen depenent de n variables ($n > 1$). Per exemple, en un flux turbulent con l'atmosfera, la temperatura o la pressió en un punt depèn de les seves tres coordenades i del temps (vegeu Yaglom [104], [105], que remet a una àmplia bibliografia a partir dels anys 30); o bé en agronomia en prendre mesures sobre un camp (vegeu Guyon-Prum [35]); o la propagació d'ones electromagnètiques a través d'un medi aleatori.

En l'estudi teòric d'aquests processos, les propietats més importants dels processos estocàstics ordinaris que depenen de l'ordre del conjunt d'índexs: la propietat de Markov i el caràcter martingala, es transfereixen amb més o menys dificultat al cas multidimensional. En la situació ordinària, la propietat de Markov estableix la independència entre el passat i el futur si hom coneix el present; en el cas n-dimensional, Lévy (vegeu [52]) identifica el present amb una superfície n-1 dimensional que divideix l'espai en dues parts, que s'anomenen passat i futur, i la propietat de Markov s'estableix exigint una independència condicional com l'anterior. D'altra banda, es poden donar distintes definicions de procés de Markov on intervingui l'ordre parcial natural de $\mathbb{R}^n$ i les distintes nocions de "passat" que s'hi poden introduir (vegeu, p.e., Nualart-Sanz [78], Lefort [49]). No ens ocuparem pas d'aquesta qüestió.

Si bé la propietat de martingala s'estén de manera immediata a un procés indexat per un conjunt parcialment ordenat (vegeu Krickeberg [44] (1956), Chow [22]), l'estudi de les martingales amb paràmetre multidimensional no cobra vida fins els treballs de

Cairoli [8] (1970), [9] i [10] i, especialment, els de Wong-Zakai [95] (1974) i Cairoli-Walsh [15] (1975), en els quals la teoria es comença a mostrar madura i amb futur. Des dels anys 50 (vegeu Itô [43], Yeh [106]) es comptava amb una generalització del moviment brownià, anomenada posteriorment procés de Wiener n-dimensional o drap brownià si n=2 (que cal no confondre amb el procés brownià amb paràmetre n-dimensional introduït per Lévy, cfr. [52]), definit en el cas bidimensional com un procés $\{W_{s,t}\ ,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2_+\}$ gaussià, centrat i amb covariància $E[W_{s,t}W_{s',t'}] = \min(s,s')\min(t,t')$. Wong-Zakai [95], utilitzant integrals estocàstiques de dos tipus (l'una, generalització natural de la integral d'Itô, fou introduïda per Cairoli [9] i [11] , i l'altra, anomenada integral estocàstica doble, fou introduïda per ells en aquest article), estenen un conegut resultat d'Itô [43] i Clark [18] , i demostren que tot funcional del drap brownià de quadrat integrable i, doncs, tota martingala afitada en L^2 respecte a la filtració natural del drap brownià, s'expressa com a suma d'una integral estocàstica simple i una doble.

L'important article de Cairoli-Walsh [15] està motivat per l'estudi dels processos holomorfs, això és, processos que, en un cert sentit, tenen derivada respecte del drap brownià. Ara bé, la primera part d'aquest llarg article està dedicada a construir un càlcul estocàstic bidimensional, però no sols respecte al drap brownià, sinó amb martingales afitades en L^2. Aleshores defineixen integrals simples, dobles i de línia, i demostren un teorema de Green que relaciona les integrals de línia i de superfície.

A partir d'aquell moment, la teoria avança combinant dos fronts: D'una banda estendre a dos paràmetres els resultats del cas unidimensional: construir una teoria general de processos, localització, desigualtats de Burkholder, fórmula d'Itô; d'altra banda, analitzar les noves definicions i conceptes que ha fet falta anar introduint: diferents tipus de martingales, distintes variacions quadràtiques,...

En aquesta segona línia de recerca s'inscriu aquest treball. Estudiarem, en concret, els següents dos aspectes de la teoria de processos amb dos paràmetres:

(i) La martingala $M*N$: En la fórmula d'Itô per a martingales amb dos paràmetres (cfr. Chevalier [21], Nualart [75]), si f és una funció real de classe $\mathcal{C}^4$ i $M = \{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ una martingala contínua afitada en L^4, l'expressió de $f(M_z)$ es distingeix del cas unidimensional (a part de la intervenció de derivades de f de 3r. i 4t. ordre), en què apareix una nova martingala $\tilde{M}$ (i les seves variacions $\langle M,\tilde{M}\rangle$) que és el límit de productes d'increments horitzontals i verticals de M. Quan es tracta de la fórmula d'Itô multidimensional, en l'expressió de $F(M_z^1,\dots,M_z^n)$ apareixen termes $\widetilde{M^iM^j}$ que compliquen notablement el càlcul. Aquesta dificultat s'evita definint una nova martingala $M*N$ de manera que $\widetilde{MN}$ sigui la simetritzada de l'operació $*$. S'estudien les propietats d'aquesta operació, així com la seva relació amb la mesura J_M de Cairoli-Walsh, J_{MN} de Guyon-Prum i les integrals dobles de les funcions d'angle. També calculem la variació quadràtica de $M*N$.

(ii) Relacions entre distints tipus de martingales: Ja en les primers articles de Wong-Zakai i Cairoli-Walsh es veu la necessitat de considerar distints tipus de martingales: Amb variació independent del camí (i.d.c.), fortes, febles, 1-martingales, etc.. Cairoli-Walsh [15] plantegen l'hipòtesi que les martingales contínues afitades en L^2 fortes i amb variació i.d.c. coincideixen. Nualart [70] demostra, trobant un contraexemple, que aquesta conjectura era falsa. Nosaltres estudiem les relacions entre les martingales i.d.c. i les martingales que tenen la variació $<M,\tilde{M}>$ zero. El resultat general més interessant que hem obtingut és el següent; Tota martingala contínua, afitada en L^4, nul.la sobre els eixos i amb variació i.d.c., té variació $<M,\tilde{M}>$ nul.la.

El primer capítol conté les definicions i resultats generals de processos amb dos paràmetres que s'utilitzen al llarg de la memòria. Es tracta de propietats conegudes i es donen sense demostració. En una segona part es presenten -lleugerament modificats- els resultats de Doléans [27] i Stricker-Yor [87] sobre càlcul estocàstic dependent d'un paràmetre, també d'ús constant en tots els capítols posteriors.

En el segon capítol hem agrupat els resultats generals sobre martingales contínues amb dos paràmetres que hem obtingut: estudi de les martingales $M*N$, càlcul de $<M*N>$ i el teorema citat abans, que estableix la relació entre les martingales i.d.c. i $<M,\tilde{M}> = 0$; així com les seves conseqüències per al temps local.

En el tercer capítol fem un estudi de les filtracions producte de dues filtracions generades per brownians multidimensionals independents. S'hi obtenen teoremes de representació de martingales afitades en L^2 i de martingales locals.

El quart capítol està dedicat al càlcul de $\tilde{M}$ quan M es una martingala afitada en L^2 respecte a la filtració introduïda en el capítol anterior. Hi estudiem en quins casos, si $<M,\tilde{M}> = 0$, llavors M té variació i.d.c.; L'existència de contraexemples en determinada filtració producte, permet de construir-ne un en la filtració del drap brownià.

CAPÍTOL I

MARTINGALES AMB PARÀMETRE BIDIMENSIONAL

En la primera part d'aquest capítol (§1 a 14) presentem quasi tots els resultats generals de martingales amb paràmetre bidimensional que utilitzarem al llarg de la memòria; no els exposem tots aquí ja que en alguns casos és més senzill i adient introduir-los en el moment en què fan falta; d'altra banda, hi ha més resultats dels explícitament utilitzats al llarg del treball, però els hem inclòs per donar una visió més global de la teoria i, especialment, per fer aquest capítol més fàcilment llegible sense necessitat de recòrrer a les referències originals. No es donen les demostracions perquè es tracta de propietats conegudes i sols s'indiquen les referències on es troben demostrades o que porten més informació sobre les mateixes.

En la segona part (§15) exposem els resultats de Doléans-Dade [27] i Stricker-Yor [87] sobre càlcul estocàstic dependent d'un paràmetre, lleugerament modificats ja que nosaltres considerem una mesura en l'espai dels paràmetres.

§ 1: Notacions. Filtracions i processos.

Considerarem en $\mathbb{R}^2$ l'ordre parcial usual:

$$(s,t) \leqq (s',t') \qquad \text{si} \quad s \leqq s' \quad \text{i} \quad t \leqq t',$$

i l'"ordre reforçat"

$$(s,t) < (s',t') \qquad \text{si} \quad s < s' \quad \text{i} \quad t < t',$$

que permeten definir els distints tipus d'intervals: si $z,z' \in \mathbb{R}^2$, $z<z'$, $]z,z']$ designarà el conjunt $\{\zeta \in \mathbb{R}^2 : z < \zeta \leqq z'\}$, i de forma anàloga es defineixen $[z,z']$, $[z,z'[$ i $]z,z'[$. Anomenarem <u>rectangle</u>

a tot interval de la forma $]z,z']$, i un rectangle com $]0,z]$ el designarem per R_z.

Sigui $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espai de probabilitat complet (que considerarem des d'ara fixat, però que és arbitrari). Un procés estocàstic amb paràmetre bidimensional $X = \{X_z, z\in A\}$, $A\subset\mathbb{R}^2$, és una família de variables aleatòries sobre $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ indexades per un subconjunt A de $\mathbb{R}^2$. (Escriurem també $X(z)$ per X_z). Ens limitarem, com és usual ja que no suposa pèrdua de generalitat, al cas en què $A\subset\mathbb{R}^2_+$, on $\mathbb{R}^2_+$ designa el primer cuadrant del pla: $\mathbb{R}^2_+ = [0,\infty[\times[0,\infty[$.

Direm que un procés $X = \{X_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és separable si existeix un subconjunt numerable S de $\mathbb{R}^2_+$ -anomenat conjunt separador- i un conjunt N de probabilitat zero tal que si $\omega\notin N$, per tot $z\in\mathbb{R}^2_+$

$$X_z(\omega) = \bigcap_{A\in\mathcal{A}(z)} \overline{\{X_{z'}(\omega),\ z'\in A\cap S\}}$$

on $\mathcal{A}(z)$ és la família de oberts de $\mathbb{R}^2_+$ que contenen al punt z.

El resultat fonamental de Doob que estableix l'existència de modificacions separables d'un procés unidimensional s'estén al cas bidimensional (cfr. Millet-Sucheston [67]).

Si $X = \{X_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és un procés estocàstic, l'increment rectangular de X sobre el rectangle $]z,z']$, $z,z'\in\mathbb{R}^2_+$, $z=(s,t)<z'=(s',t')$, és la variable aleatòria $X(]z,z'])$ definida per

$$X(]z,z']) = X(s',t') - X(s',t) - X(s,t') + X(s,t).$$

(S'acostuma també a designar l'increment rectangular anterior per $\Delta_{]z,z']}X$, però no hi ha ambiguïtat en l'escriptura. Noteu que si X és nul sobre els eixos, això és, si $X_{so} = X_{ot} = 0$ per tot $(s,t)\in\mathbb{R}^2_+$, aleshores $X(]0,z]) = X(R_z) = X_z$.

Com que quan un rectangle $]z,z']$ es divideix en reunió disjunta de dos $]z,z_1]$ i $]z'',z']$ tenim

$$X(]z,z']) = X(]z,z_1]) + X(]z'',z']),$$

aleshores X com a funció de conjunt s'estén a una funció finitament additiva sobre l'àlgebra de les reunions finites disjuntes dels rectangles de $\mathbb{R}^2_+$.

Considerarem també una família $\{\underline{\underline{F}}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ de sub-σ-àlgebres de $\underline{\underline{F}}$. Designarem per $\underline{\underline{F}}_{s\infty}$, o per $\underline{\underline{F}}^1_z$, la σ-àlgebra reunió $\bigvee_{v\geq 0} \underline{\underline{F}}_{sv}$ (la doble notació és, en aquest capítol, convenient, ja que si bé l'escriptura $\underline{\underline{F}}_{s\infty}$ és més transparent car expressa clarament el fet que la filtració $\{\underline{\underline{F}}_{s\infty},\ s\in\mathbb{R}_+\}$ és independent de t, $\underline{\underline{F}}^1_z$ és més unificadora i ens permet de considerar la filtració anterior com una a dos paràmetres $\{\underline{\underline{F}}^1_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$). Anàlogament, designarem per $\underline{\underline{F}}_{\infty t}$, o per $\underline{\underline{F}}^2_z$, la σ-àlgebra $\bigvee_{u\geq 0} \underline{\underline{F}}_{ut}$. Suposarem sempre, a menys que especifiquem el contrari,que es compleixen les anomenades condicions habituals:

(F1) La família de sub-σ-àlgebres és creixent:

Si $z\leq z'$, $\underline{\underline{F}}_z \subset \underline{\underline{F}}_{z'}$.

(F2) $\underline{\underline{F}}_0$ conté tots els subconjunts de $\underline{\underline{F}}$ de P-mesura zero (i, doncs, totes les σ-àlgebres $\underline{\underline{F}}_z$ són completes).

(F3) La família de sub-σ-àlgebres és contínua per la dreta:

Per tot z, $\underline{\underline{F}}_z = \bigcap_{z<z'} \underline{\underline{F}}_{z'}$.

(F4) Per tot z, les σ-àlgebres $\underline{\underline{F}}^1_z$ i $\underline{\underline{F}}^2_z$ són condicionalment independents donada $\underline{\underline{F}}_z$.

A la família $\{\underline{\underline{F}}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ se l'anomena <u>filtració amb paràmere bidimensional</u> (o simplement filtració) sobre $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$. Els exemples clàssics de filtracions que compleixen totes les condicions són els següents:

1) Filtració producte: Considerem dues famílies independents $\{\underline{\underline{F}}^1_s,\ s\in\mathbb{R}_+\}$ i $\{\underline{\underline{F}}^2_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ de sub-σ-àlgebres de $\underline{\underline{F}}$ que compleixinles condicions habituals (a un índex) i definim $\underline{\underline{F}}_{st}$ com $F^1_s \vee F^2_t$.

2) Filtració associada a un procés amb increments independents: Sigui $X = \{X_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ un procés amb increments independents (això és, nul sobre els eixos i si els rectangles $]z_1,z_1'],\dots,]z_n,z_n']$ són dos a dos disjunts, aleshores $X(]z_1,z_1']),\dots, X(]z_n,z_n'])$ són independents), continu per la dreta en probabilitat. Designem per $\underline{\underline{F}}^\circ_z$ la mínima σ-àlgebra que fa mesurables totes les variables aleatòries $X_{z'}$, $z' \leq z$, i definim $\underline{\underline{F}}_z$ com la P-completació de $\underline{\underline{F}}^\circ_z$.

<u>OBSERVACIONS 1.1</u>

1) La condició F4 va ser introduida per Cairoli [9] i anomenada F4 a partir de Cairoli-Walsh [15] .

2) Una condició equivalent a F4 és que per tota variable aleatòria afitada X i per tot $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$,

$$E[X|\underline{\underline{F}}_{s\infty}|\underline{\underline{F}}_{\infty t}] = E[X|\underline{\underline{F}}_{st}] ,$$

és a dir, les esperances respecte $\underline{\underline{F}}_{s\infty}$ i $\underline{\underline{F}}_{\infty t}$ commuten. A causa d'això també s'anomena <u>condició de commutació</u> (cfr. Meyer [64]).

3) De F4 es dedueix fàcilment que $\underline{\underline{F}}_{s\infty} \cap \underline{\underline{F}}_{\infty t} = F_{st}$.

4) La hipòtesi F4 es troba en els fonaments de la teoria de les martingales a dos índexs. Si bé es posible construir exemples de filtracions sense F4 amb propietats prou bones (Cfr. Mazziotto-Szpirglas [55]), d'altres exemples com el de Dubins-Pitman [29], on construeixen una martingala uniformement afitada divergent, posen de manifest la necessitat d'imposar condicions auxiliars a la filtració per a l'obtenció de quasi tots els resultats importants.

5) Al mateix temps que necessària, F4 estableix una diferència important amb els processos d'un índex: F4 no es conserva,en general, si es canvia la probabilitat P per una d'equivalent. (Malgrat tot, es poden estudiar teoremes de tipus Girsanov prou generals, o bé restringir-se a canvis de probabilitat que conserven F4 -se'ls

anomena canvis de probabilitat ortogonals. Vegeu en aquest respecte, Wong-Zakai [99], Guyon-Prum [33] , [35] , Nualart-Sanz [79] , Hajek-Wong [37].

PROPOSICIÓ 1.2 : (i) Les filtracions a un paràmetre $\{\underline{\underline{F}}_{s\infty},\ s\in\mathbb{R}_+\}$ i $\{\underline{\underline{F}}_{\infty t},\ t\in\mathbb{R}_+\}$ compleixen les condicions habituals. Recíprocament, donades dues filtracions a un paràmetre $\{\underline{\underline{F}}^1_s,\ s\in\mathbb{R}_+\}$ i $\{\underline{\underline{F}}^2_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ que compleixin les condicions habituals i tals que les esperances condicionades $E[\cdot|\underline{\underline{F}}^1_s]$ i $E[\cdot|\underline{\underline{F}}^2_t]$ commuten per tot s,t ; aleshores la filtració $\{\underline{\underline{F}}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ definida per $\underline{\underline{F}}_{st} = \underline{\underline{F}}^1_s \cap \underline{\underline{F}}^2_t$ compleix les condicions habituals.

(ii) Les filtracions a dos paràmetres $\{\underline{\underline{F}}^1_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ i $\{\underline{\underline{F}}^2_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ compleixen les condicions habituals.

La demostració de la primera part de (i) es troba a Zbaganu-Zhuang [102], la segona és de Meyer [64].

(ii) és una conseqüència obvia de (i).

Designarem per $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}^2_+)$ la σ-àlgebra de Bórel sobre $\mathbb{R}^2_+$. Direm que un procés $\{X_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és mesurable si l'aplicació

$$X:\mathbb{R}^2_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

és $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}^2_+)\otimes\underline{\underline{F}}$ -mesurable. Direm que $\{X_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és adaptat a $\{\underline{\underline{F}}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ (i ens limitarem a dir que $\{X_z, \underline{\underline{F}}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és adaptat) si per tot z, X_z és $\underline{\underline{F}}_z$-mesurable. Direm que és 1-adaptat (respectivament 2-adaptat) si X_z és $\underline{\underline{F}}^1_z$-mesurable (resp. $\underline{\underline{F}}^2_z$-mesurable). De la condició F4 es dedueix que un procés és adaptat si i sols si és 1 i 2-adaptat.

Direm que un procés $\{X_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és integrable si cada variable aleatòria X_z ho és: $E[\,|X_z|\,]<\infty$, per tot $z\in\mathbb{R}^2_+$.

§2: Martingales

La generalització més natural del concepte de martingala per a processos amb paràmetre bidimensional és la següent:

DEFINICIÓ 1.3 : Direm que el procés $M = \{M_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és una martingala respecte la filtració $\{\underline{\underline{F}}_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ (i direm que $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z\in\mathbb{R}_+\}$ és una martingala) si:

(1) M és adaptat.

(2) M és integrable.

(3) Si $z\leq z'$, $E[M_{z'}|\underline{\underline{F}}_z] = M_z$.

En el cas unidimensional la condició de martingala es pot expressar com l'ortogonalitat de l'increment (lineal) del procés en un punt amb la filtració en aquest punt: el procés $X = \{X_t, \underline{\underline{F}}_t, t\in\mathbb{R}_+\}$ adaptat i integrable és una martingala si per $t\leq t'$, $E[X_{t'}-X_t|\underline{\underline{F}}_t] = 0$. Això suggereix una altra definició de martingala a dos índexs utilitzant el concepte d'increment (que ara serà rectangular):

DEFINICIÓ 1.4 : Direm que el procés $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és una martingala feble si:

(1) M és adaptat.

(2) M és integrable.

(3) Si $z<z'$, $E[M(]z,z'])|\underline{\underline{F}}_z] = 0$.

Òbviament, tota martingala és una martingala feble.

Ens referirem també a la següent noció, que expressa la propietat que un procés, fixat un índex, es comporti com una martingala respecte a l'altre índex. (En realitat la condició és una mica més forta)

DEFINICIÓ 1.5 : Direm que el procés $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és una 1-martingala si:

(1) M és adaptat.

(2) M és integrable.

(3) Per a qualsevol t fix, el procés $\{M_{st}, \underline{\underline{F}}_{st}, s \in \mathbb{R}_+\}$ és una martingala.

Anàlogament es defineix <u>2-martingala</u>.

Aquesta definició és la de Meyer [64] i la de 1-martingala adaptada de Wong-Zakai [96]. És diferent de la de Cairoli-Walsh [15], que exigeigen que M_z sigui $\underline{\underline{F}}^1_z$ adaptada, integrable i $E[M(]z,z'])|\underline{\underline{F}}^1_z]=0$ per $z<z'$. Aleshores M és una 1-martingala segons la definició 1.5 si i sols si ho és en el sentit de Cairoli-Walsh i, a més, és adaptada i $\{M_{st}, \underline{\underline{F}}_{st}, s \in \mathbb{R}_+\}$ és una martingala per algun t fix.

Tenim les següents propietats:

<u>PROPOSICIÓ 1.6</u> : (i) <u>Un procés és una martingala si i sols si és una 1 i 2-martingala.</u>

(ii) <u>Tota i-martinagala (i=1,2) és una martingala feble.</u>

(iii) <u>Un procés és una martingala feble si i sols si es pot descomposar com suma d'una 1-martingala i una 2-martingala. La descomposició no és única.</u>

La demostració de (i) és de Cairoli-Walsh [15] i utilitza F4.

(ii) és trivial.

(iii) està demostrat per Wong-Zakai [96]per a una martingala feble indexada per un rectangle R_z, i estés per Meyer [64] a una martingala indexada per $\mathbb{R}^2_+$ per enganxament ("recollement").

Utilitzarem també la següent notació: si $X = \{X_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ és un procés, per a qualsevol t fix, $X_{.t}$ designarà el procés uniparamètric

$\{X_{st}, s\in\mathbb{R}_+\}$. Cal notar que degut a F4, si M és una 1-martingala, el procés $M_{.t}$ és una martingala respecte la filtració $\{\underline{\underline{F}}_{s\infty}, s\in\mathbb{R}_+\}$. Anàlogament es defineix $X_{s.}$.

Una altra generalització del concepte de martingala té en compte el fet usual d'interpretar en una filtració uniparamètrica $\{\underline{\underline{F}}_t, t\in\mathbb{R}_+\}$ el paràmetre t com el temps i $\underline{\underline{F}}_t$ com la σ-àlgebra constituïda pels successos anteriors a l'instant t. En traslladar això a dos paràmetres s'obté la definició de martingala feble, prenent $\underline{\underline{F}}_z$ com el "passat" del punt z. Però l'absència d'ordre total a $\mathbb{R}^2_+$ ens permet definir un altre "passat": anomenarem <u>passat ampli</u> del punt z, i el designarem per $\underline{\underline{F}}^*_z$, al conjunt de tots els esdeveniments que no estan en el futurde z; concretament:

$$\underline{\underline{F}}^*_z = \bigvee_{\substack{z'\in\mathbb{R}^2_+ \\ z\not<z'}} \underline{\underline{F}}_{z'} = \underline{\underline{F}}^1_z \vee \underline{\underline{F}}^2_z .$$

La filtració $\{\underline{\underline{F}}^*_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ compleix F1,F2 i F3. Tenim la següent definició:

<u>DEFINICIÓ 1.7</u> : Direm que una martingala $M = \{M_z,\underline{\underline{F}}_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és una <u>martingala forta</u> si per $z<z'$, $E[M(]z,z'])|\underline{\underline{F}}^*_z] = 0$.

També en aquest cas utilitzem la definició de Meyer [64]. Cairoli-Walsh [15] donen com a definició de martingala forta la d'un procés adaptat, integrable, nul sobre els eixos i amb $E[M(]z,z'])|\underline{\underline{F}}^*_z] = 0$. Si el procés no és nul sobre els eixos, la condició $E[M(]z,z'])|\underline{\underline{F}}^*_z]=0$ no és suficient perquè M sigui una martingala; caldria exigir, a més, que els processos $\{M_{s0},\underline{\underline{F}}_{s0}, s\in\mathbb{R}_+\}$ i $\{M_{0t},\underline{\underline{F}}_{0t}, t\in\mathbb{R}_+\}$ fossin martingales.

En l'exemple 2 de de les filtracions que compleixen F4, hem considerat un procés $X =\{X_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ amb increments independents i continu per la dreta en probabilitat, i $\{\underline{\underline{F}}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ la P-completació de la seva filtració natural. Si X és adaptat i centrat, llavors és una martingala forta.

És molt interessant l'estudi de Zbaganu-Zhuang [102] de les filtracions on totes les martingales són fortes (l'anomenen propietat F5) i demostren que una filtració $\{\underline{\underline{F}}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ compleix F5 si i sols si existeix una filtració uniparamètrica $\{\underline{\underline{H}}_u, u\in\mathbb{R}_+\}$ que compleix les condicions habituals i dues famílies estrictament creixents $\{\sigma_s, s\in\mathbb{R}_+\}$ i $\{\tau_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ amb $\sigma_s = \inf\limits_{\substack{s<q\\ q\in\mathbb{Q}}} \sigma_q$ (anàlogament per τ_t) tals que:

$$\underline{\underline{F}}_{st} = \underline{\underline{H}}_{\sigma_s\wedge\tau_t}.$$

Amb cada definició de martingala tenim les corresponents sub i super-martingala. Les que utilitzarem més seran:

<u>DEFINICIÓ 1.8</u> : Direm que un procés $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ adaptat i integrable és

(1) Una <u>submartingala feble</u> si per $z<z'$, $E[M(]z,z'])|\underline{\underline{F}}_z]\geq 0$.

(2) Una <u>submartingala</u> si per $z\leq z'$, $E[M_{z'}|\underline{\underline{F}}_z]\geq M_z$.

(3) Una <u>submartingala forta</u> si és una submartingala i per $z<z'$, $E[M(]z,z'])|\underline{\underline{F}}^*_z]\geq 0$.

Òbviament, (3) implica (1) i (2).

Per $p\geq 1$, direm que una martingala $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ <u>és de L^p</u> (o que és una L^p-martingala) si per tot z, $E[|M_z|^p]<\infty$. Direm que M és <u>afitada en L^p</u> si $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}^2_+} E[|M_z|^p]<\infty$.(Suposem que M és separable).

OBSERVACIÓ 1.9 : Si la martingala M està indexada per un rectangle R_{z_o} , $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z\in R_{z_o}\}$, les definicions de "martingala de L^p" i "martingala afitada en L^p" coincideixen, i n'hi ha prou amb exigir $E[|M_{z_o}|^p]<\infty$. Quan la martingala està indexada per $\mathbb{R}^2_+$ ambdues nocions no són iguals; i no utilitzarem l'expressió "martingales de quadrat integrable" que alguns autors defineixen com a martingala de L^2 i d'altres com a martingala afitada en L^2.

Finalment, direm que la martingala $M = \{M_z,\underline{\underline{F}}_z,z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és afitada en LlogL si $\sup_z E[|M_z|\log^+|M_z|]<\infty$.

§3: Desigualtats i convergències

Un dels resultats inicials que va permetre l'estudi de les martingales amb paràmetre multidimensional va ser l'important treball de Cairoli [8] que estén les desigualtats de Doob al cas multidimensional:

TEOREMA 1.10 : Sigui $M = \{M_z,F_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ una martingala separable. Aleshores:

(i) Per tot $\lambda>0$

$$P\{\sup_z|M_z|\geq\lambda\}\leq \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1}\sup_z E[|M_z|\log^+|M_z|].$$

(ii) Per tot $p>1$

$$E[\sup_z|M_z|^p]\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{2p} \sup_z E[|M_z|^p].$$

(iii) Si M és forta, per tot $\lambda>0$

$$P\{\sup_z|M_z|\geq\lambda\} \leq 13 \sup_z E[|M_z|].$$

La demostració de (i) i (ii) (que s'anomenen desigualtats de Cairoli-Doob) quan la martingala està indexada per una part numerable de $\mathbb{R}^2_+$ és de Cairoli [8], i consisteix en aplicar dues desigualtats de Doob consecutivament a un índex i a l'altre. Es poden estendre a una martingala indexada per $\mathbb{R}^2_+$ mitjançant un raonament estàndard prenent una successió creixent de parts finites d'un subconjunt dens i passant al límit.

La demostració de (iii) és de Walsh [90]. Vegeu també Cairoli[13].

<u>OBSERVACIONS 1.11</u>

1) Les desigualtats (i) i (ii) són també vàlides per submartingales positives. La desigualtat (iii) és vàlida per a submartingales fortes positives amb una expressió anàloga si la submartingala és nul.la sobre els eixos, o una expressió més complexa en el cas general. (cfr. Millet [1]).

2) Sigui $F:\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una funció creixent, nul.la en el zero, contínua per la dreta i amb $F(x)>0$ per $x>0$. Direm que F és <u>moderada</u> si existeix un nombre $\alpha>1$ tal que

$$\sup_{x>0} \frac{F(\alpha x)}{F(x)} <\infty .$$

Si la funció F és còncava, aleshores és moderada, ja que per tot $\alpha>1$ el suprem anterior és menor o igual a α.

Si el suprem és estrictament menor que α és diu que la funció F és <u>lenta</u>.

Si F és convexa, amb derivada per la dreta f, perquè F sigui moderada cal que el nombre

$$p = \sup_{x>0} \frac{xf(x)}{F(x)}$$

sigui finit (p s'anomena <u>l'exponent</u> de F). La funció $F(x) = x^p$, amb $p \geq 1$ és lenta, amb exponent p. Si la funció F és convexa moderada i compleix

$$\bar{p} = \inf_{x>0} \frac{xf(x)}{F(x)} > 1$$

es diu que F és una funció de Young.

(Hem seguit la nomenclatura de Lenglart-Lepingle-Pratelli [51]. Meyer [64] de les funcions que hem anomenat de Young, en diu moderades i comoderades).

Aleshores l'extensió de Dellacherie [24] de les desigualtats de Doob per a funcions de Young permet a Meyer (cfr. [64]) la següent generalització de (ii):

(ii') Si F és una funció de Young i q el conjugat de $\bar{p}$, aleshores

$$E[F(\sup_z |M_z|/q^2)] \leq \sup_z E[F(|M_z|)] .$$

Vegem ara la qüestió de la convergència: Cal distingir entre les convergències en probabilitat i L^p, i la convergència quasi segura (abreujadament, q.s.). Els resultats de convergència en probabilitat i en L^p s'obtenen de manera molt general per a martingales indexades per conjunts filtrants (cfr. Helms [39], Neveu [68] , Walsh [89]), ja que si tenim una successió generalitzada ("net") en un espai mètric complet, la convergència de Moore-Smith pot reduir-se a la convergència de les successions ordinàries que s'obtenen considerant tots els subconjunts d'índexs totalment ordenats.

La convergència q.s. és molt més delicada, ja que no és metritzable i l'argument anterior no pot utilitzar-se. D'altra banda, l'exemple citat anteriorment de Dubins-Pitman ([29]), o d'altres exemples clàssics, mostren la necessitat d'afinar més els raonaments. En general, perquè una martingala indexada en un conjunt filtrant, afitada en L^1, convergeixi q.s. cal exigir que la filtració compleixi la "condició de Vitali": Si T és un conjunt filtrant i $\{\underline{\underline{F}}_t,\ t\in T\}$ una família filtrant creixent de σ-àlgebres, direm que compleixen la condició de Vitali si per tota família $\{A_t,\ t\in T\}$ de conjunts $A_t \in \underline{\underline{F}}_t$ i per tot $\varepsilon>0$, existeix un nombre finit d'índexs $t_1, t_2, \ldots t_n \in T$ i conjunts $B_i \in \underline{\underline{F}}_{t_i}$ disjunts dos a dos, tals que

$$P\{A - \bigcup_i B_i\} \leq \varepsilon$$

on $A = \operatorname{ess\,lim\,sup}_{t\in T} A_t$. (cfr. Krickeberg [44], Neveu [68], Walsh [89]).

Aquesta condició, que es compleix quan el conjunt d'índexs és totalment ordenat, és en general difícil de comprovar. D'aquí resulta la importància de la conseqüència que Cairoli ha tret de les seves desigualtats: Tota martingala indexada per $\mathbb{R}^2_+$ afitada en LlogL convergeix q.s.. Agrupant els resultats sobre els distints tipus de convergències tenim:

<u>TEOREMA 1.12</u> : <u>Sigui</u> $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ <u>una martingala separable. Llavors:</u>

(i) <u>Si</u> M <u>és uniformement integrable, convergeix en</u> L^1 <u>a una variable aletòria</u> M_∞ <u>que tanca la martingala.</u>

(ii) <u>Si</u> M <u>és afitada en</u> L^p <u>(p>1), la convergència anterior té lloc en</u> L^p.

(iii) <u>Si</u> M <u>és afitada en LlogL,</u> M <u>convergeix q.s. a</u> M_∞ .

(iv) <u>Si</u> M <u>és forta i afitada en</u> L^1, M <u>convergeix q.s.</u>

La demostració de (i) i (ii) es troba a Helms [39], o Walsh [89]. La de (iii) a Cairoli [8]. La de (iv) a Walsh [90].

OBSERVACIONS 1.13

1) Cairoli [8] mostra amb un contraexemple que a (iii) no es pot canviar afitació en $L \log L$ per afitació en L^1.

2) (i) i (ii) són vàlides també per supermartingales (cfr. Walsh [89]).

3) (iv) és vàlida per submartingales fortes uniformement integrables (cfr. Millet [66]).

4) Es possible donar condicions suficients més generals per a la convergència quasi segura. En efecte, per al cas discret Ledoux [48] reprén la propietat clàssicade convergència q.s. d'esperances condicionades (vegeu p.e. Blacwell-Dubins [5], Lipster-Shiryayev [53], o Sucheston [88] que la demostra amb operadors sobre espais d'Orlics) següent: " Si $\{Y_m, m\in\mathbb{N}\}$ és una successió de variables aleatòries majorades, $|Y_m|\leq Y$, amb Y integrable, que convergeix q.s. a Y_∞ i $\{\underline{\underline{G}}_n, n\in\mathbb{N}\}$ és una família creixent de sub-σ-àlgebres de $\underline{\underline{F}}$ i $\bigvee_n \underline{\underline{G}}_n = \underline{\underline{G}}_\infty$, aleshores el procés de dos paràmetres $\{E[Y_m|\underline{\underline{G}}_n], (m,n)\in\mathbb{N}^2\}$ convergeix q.s. a $E[Y_\infty|\underline{\underline{G}}_\infty]$ quan m i n tendeixen a infinit". D'aquí Ledoux dedueix: "Sigui $M = \{M_{mn}, \underline{\underline{F}}_{mn}, (m,n)\in\mathbb{N}^2\}$ una martingala i una $1'$-martingala (això és $\underline{\underline{F}}_{mn}$-adaptat, integrable i tal que per n fix $\{M_{mn},\underline{\underline{F}}^1_{mn}, m\in\mathbb{N}\}$ sigui una martingala; si es compleix F4, 1-martingala implica $1'$-martingala); en una filtració que compleixi F1 a F3, tal que per tot n, la família $\{M_{mn}, m\in\mathbb{N}\}$ sigui uniformement integrable i $\sup_m E[\sup_n |M_{mn}|]<\infty$. Aleshores, M convergeix q.s."

Aquesta condició inclou, sota F4, el resultat següent: "Perquèla martingala M convergeigi q.s. és suficient que es compleixi una de les següents condicions:

a) $E[\sup_{m,n} |M_{mn}|] < \infty$.

b) $E[|M_{mn}| \log^+|M_{mn}|] < \infty$.

c) $E[S(M)] < \infty$, on $S(M)$ és la variació quadràtica de M:

$$S(M) = \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (M(m,n)-M(m-1,n)-M(m,n-1)+M(m-1,n-1))^2 \Big)^{1/2} .$$

5) De manera evident es defineixen les martingales inverses amb paràmetre bidimensional, i s'obtenen uns teoremes anàlegs al 1.12 ((i),(ii) i (iii)). (cfr. Gut [31], Walsh [89]).

Per $p \geq 1$ designarem per $\underline{\underline{M}}^p$ el conjunt de les martingales $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ contínues per la dreta i afitades en L^p. Fixat un punt z_o de $\mathbb{R}^2_+$, $\underline{\underline{M}}^p(z_o)$ designarà el conjunt de les martingales $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z \in [0,z_o]\}$ contínues per la dreta i tals que $E[|M_{z_o}|^p] < \infty$. (El sentit just del terme "continu per la dreta" l'especificarem al següent paràgraf).

Designarem per $\underline{\underline{M}}^p_c$ el subconjunt de $\underline{\underline{M}}^p$ format per les martingales de $\underline{\underline{M}}^p$ contínues i per $\underline{\underline{M}}^p_f$ el subconjunt format per les martingales fortes.

A $\underline{\underline{M}}^2$ (i òbviament a $\underline{\underline{M}}^2(z_o)$) podem definir un producte escalar mitjançant les variables terminals de les martingales: Si M,N són de $\underline{\underline{M}}^2$ definim el producte

$$(M,N) = E[M_\infty N_\infty],$$

que indueix una norma

$$\|M\| = (E[M_\infty^2])^{1/2}.$$

Tenim el següent resultat:

<u>PROPOSICIÓ 1.14</u> : <u>$\underline{\underline{M}}^2$ amb la norma anterior és un espai de Hilbert; $\underline{\underline{M}}^2_c$ i $\underline{\underline{M}}^2_f$ són subespais tancats.</u>

§4: Regularitat

Dellacherie-Meyer afirmen en [25], pag. 71, que l'existència de versions contínues per la dreta i amb límits per l'esquerra d'una supermartingala indexada per $\mathbb{R}_+$ és potser el resultat més important de tota la teoria dels processos estocàstics en temps continu. Un resultat anàleg, però molt més feble, per martingales a dos paràmetres ha costat molt de trobar. En efecte, des de Cairoli-Walsh [15] sols se sabia que si la fitració era la induïda per un drap brownià, tota martingala afitada en L logL tenia una versió contínua, i aquest resultat no es podia estendre a una martingala afitada en L^1, perquè hi havia martingales afitades en L^1 amb discontinuïtats de tipus oscil.latori i doncs sense una versió contínua per la dreta. El problema restà obert; sols resultats parcials foren assolits, així per exemple Walsh [90] demostrà que tota martingala forta tenia una versió contínua per la dreta, però no obtingué resultats sobre els límits per l'esquerra. Finalment, Bakry [2] (4anys despres del treball de Cairoli-Walsh) demostrà que tota martingala afitada en LlogL té una versió contínua per la dreta amb límits per l'esquerra. Millet-Sucheston [67] demostren l'existència de límits en els quatre quadrants (vegeu les definicions més avall) utilitzant "amarts" multidimensionals (vegeu també Bakry [3] per a una demostració sense "amarts").

Donat un punt $z=(s,t)$ de $\mathbb{R}^2_+$, $z\neq(0,0)$, $\mathbb{R}^2_+$ queda dividit en quatre quadrants denominats $Q_I(s,t)$, $Q_{II}(s,t)$, $Q_{III}(s,t)$ i $Q_{IV}(s,t)$:

$$Q_I(s,t) = \{(s',t')\in\mathbb{R}^2_+ : s\leq s' \text{ i } t\leq t'\} ,$$

$$Q_{II}(s,t) = \{(s',t')\in\mathbb{R}^2_+ : s\geq s' \text{ i } t\leq t'\} ,$$

$$Q_{III}(s,t) = \{(s',t')\in\mathbb{R}^2_+ : s\leq s' \text{ i } t\geq t'\} ,$$

$$Q_{IV}(s,t) = \{(s',t')\in\mathbb{R}^2_+ : s\geq s' \text{ i } t\geq t'\} .$$

Designarem per Q_i° l'interior de Q_i.

Donat un procés $X = \{X_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ direm que té límit en z en el quadrant Q_i si existeix $\lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in Q_i(z)}} X(z')$. Designarem per X_z^{++} el límit de X en el punt z (si existeix; en cas contrari es pot considerar lim inf i lim sup); i anàlogament es defineixen X^{+-}, X^{-+} i X^{--}. Si un procés té límit en Q_I (resp. Q_{III}) en tots els punts (resp. en tots els punts distints de (0,0)), direm que X té límits per la dreta (resp. per l'esquerra).

Direm que el procés X és continu en el punt z en el quadrant i si

$$X(z) = \lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in Q_i(z)}} X(z').$$

La continuïtat en Q_I (respectivament Q_{III}) s'anomena continuïtat per la dreta (resp. per l'esquerra).

TEOREMA 1.15 : Sigui $M = \{M_z,\ \underline{F}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ una martingala afitada en L logL. Aleshores

(i) M té límits en els quatre quadrants.

(ii) M té una versió contínua per la dreta i amb límits en els quadrants Q_{II}, Q_{III} i Q_{IV}.

També tenim:

PROPOSICIÓ 1.16 : Sigui M una martingala forta afitada en L^1. Aleshores M té una versió contínua per la dreta.

§5: El drap brownià

Designem per m la mesura de Lebesgue al pla i sigui $\bar{B}(\mathbb{R}^2_+)$ el conjunt dels borelians de $\mathbb{R}^2_+$ amb mesura de Lebesgue finita. Definim la funció C:

$$C:\ \bar{B}(\mathbb{R}^2_+)\times\bar{B}(\mathbb{R}^2_+) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$C(A,B) = m(A\cap B)$$

que és definida positiva i doncs existeix (cfr. p.e. Hida [40], teorema 1.10) un procés $\{W(A),\ A\in\bar{B}(\mathbb{R}^2_+)\}$ gaussià, centrat i amb covariància C. Aquest procés compleix:

1) $W(A)$ té llei $N(0,m(A))$.

2) Si $A\cap B = \emptyset$, $W(A)$ i $W(B)$ són independents.

També com a funció de conjunt, W és additiva:

3) $W(A\cup B) = W(A) + W(B) - W(A\cap B)$ q.s.

(Vegeu Itô [43]).

Intuitivament podem pensar que $W(A) = \int_A \xi(z)\,dz$, on $\{\xi(z),\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és un soroll blanc bidimensional, això és, una funció aleatòria generalitzada amb valors independents en cada instant amb mitjana nul.la i covariància $E[\xi_z\cdot\xi_{z'}] = \delta(z-z')$, on δ és la funció delta de Dirac al pla. És a dir, W(A) és la quantitat de soroll que hi ha a A (cfr. Wong [93]). De fet, el procés $\{W(A),\ A\in\bar{B}(\mathbb{R}^2_+)\}$ s'anomena també un soroll blanc al pla.

Definim ara un procés $W = \{W_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ per $W_z = W(]0,z])$. Es tracta doncs d'un procés gaussià, centrat i amb covariància

$$E[W(s,t)W(s',t')] = (s\wedge s')(t\wedge t'),$$

i se l'anomena <u>procés de Wiener bidimensional</u> o <u>drap brownià</u>.

Fixat un punt (s,t) de $\mathbb{R}^2_+$, els processos $\{W_{xt},\ x\in\mathbb{R}_+\}$ i $\{W_{sy},\ y\in\mathbb{R}_+\}$ són moviments brownians (no estàndards) amb covariància $(x\wedge x')t$ i $s(y\wedge y')$ respectivament.

Al llarg de la diagonal (i en general, al llarg de qualsevol camí creixent), W és una martingala gaussiana, amb increments ortogonals, però no és un moviment brownià.

Al llarg de qualsevol camí creixent, W és gaussià i Markov. En particular, sobre la hipèrbola st = 1, el procés $X_t = W(e^t, e^t)$ és un procés d'Orstein-Uhlenbeck.

El drap brownià és, doncs,una generalització del moviment brownià. No obstant, cal distingir-lo del procés brownià amb paràmetre bidimensional introduït per P.Lévy (vegeu p.e. Lévy [52] o McKean[56]): Un procés $\{B_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ tal que:

a) Per a qualssevol $z_1,\dots z_n \in \mathbb{R}^2_+$, $(B(z_1)-B(0),\dots,B(z_n)-B(0))$ té llei normal multidimensional centrada.

b) $E[(B(z)-B(z'))^2] = d(z,z')$, on d indica la distància a $\mathbb{R}^2_+$.

Els dos conceptes poden relacionar-se (vegeu Chentsov [20]).

Com per al brownià ordinari es poden considerar (al menys) dues aproximacions més al procés de Wiener bidimensional: una a través de la mesura de Wiener i l'altra com a suma d'una sèrie uniformement convergent, En efecte, Yeh [106], construeix una mesura de tipus Wiener en l'espai de les funcions contínues sobre $[0,1]^2$ nul.les sobre els eixos (designarem per $C([0,1]^2)$ aquest espai). Aleshores el procés canònic $(C([0,1]^2), \underline{\underline{B}}(C([0,1]^2)), W, W_z, z\in\mathbb{R}^2_+)$ on W_z és la projecció

$$W_z : C([0,1]^2) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longrightarrow f(z)$$

és un procés gaussiá, centrat i amb covariància

$$E[W(s,t)\ W(s',t')] = (s\wedge s')(t\wedge t').$$

Respecte a la segona aproximació, vegeu Park [84] o Delporte[26] on s'estudia una sèrie uniforment convergent, considerant les funcions de Haar sobre $L^2([0,1])$ que permeten construir un sistema ortonormal complet sobre $L^2([0,1]^n)$, o bé mitjançant una sèrie trigonomètrica, tot seguint de prop els mètodes utilitzats en un paràmetre.

D'aquestes construccions es dedueix, en particular, la continuïtat del procés de Wiener. És posible, òbviament, donar una demostració directa d'aquest fet, mitjançant el lema de Kolmogorov (per a una demostració directa de la continuïtat a partir del lema de Garsia-Rodemich-Rumsey vegeu Walsh [89]) o per d'altres resultats generals (vegeu Meyer [64]). Vegeu també Hudson [41] que obté teoremes més generals per a processos biadditius, i en particular per al procés de Wiener.

Les propietats fines de les trajectòries, tipus llei del logaritme iterat o módul de continuïtat les obtenen Zimmermant[103] i Orey-Pruit [83]. En aquest últim s'estudien també les propietats de recurrència i transitivitat del procés de Wiener n-dimensional, les quals depenen del valor de n.

El drap brownià és una martingala forta de L^p per a qualsevol p, però no afitada en L^p.

Una caracterització semblant a la de Lévy per al moviment brownià és possible per al drap brownià: "Si M és una martingala forta i M^2-st és una martingala, aleshores M és un drap brownià". (cfr. Zakai[101]). Quan M i M^2-st són martingales, cal imposar restriccions sobre M per un resultat anàleg. (cfr. Nualart-Sanz [80]).

Una última propietat que assenyalem del drap bronià és la següent caracterització (cfr. Nualart [69]): Siguin $\{X^n(t), t\in[0,1], n\in\mathbb{N}\}$

i $\{Y^n(t),\ t\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}\}$ dos moviments brownians independents infinit-dimensionals. Aleshores la successió de processos continus amb paràmetre bidimensional

$$Z_n(s,t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X^i(s)Y^j(t)$$

convergeix feblement al drap brownià $\{W(s,t),\ (s,t)\in[0,1]^2\}$.

§6: Les σ-àlgebres previsibles i opcionals

A l'espai $\mathbb{R}_+^2\times\Omega$ tenim quatre σ-àlgebres previsibles i quatre opcionals, associades a les filtracions $\{\underline{\underline{F}}_z,\ z\in\mathbb{R}_+^2\}$, $\{\underline{\underline{F}}_z^1,\ z\in\mathbb{R}_+^2\}$, $\{\underline{\underline{F}}_z^2,\ z\in\mathbb{R}_+^2\}$ i $\{\underline{\underline{F}}_z^*,\ z\in\mathbb{R}_+^2\}$. Ens ocuparem especialment de les σ-àlgebres previsibles.

Designarem $\underline{\underline{J}}$ (respectivament $\underline{\underline{J}}^1$, $\underline{\underline{J}}^2$, $\underline{\underline{J}}^*$) el conjunt dels "rectangles previsibles" de la forma

$$\begin{array}{ll}]z,z']\times F & F\in\underline{\underline{F}}_z \\ \{(0,0)\}\times G & G\in\underline{\underline{F}}_0 \\ \{0\}\times\,]t,t']\times H & H\in\underline{\underline{F}}_{0t} \\ ]s,s']\times\{0\}\times I & I\in\underline{\underline{F}}_{s0} \end{array}$$

(En prendre F,G,H i I de $\underline{\underline{F}}_z^1$, etc. resulten $\underline{\underline{J}}^1$,$\underline{\underline{J}}^2$ i $\underline{\underline{J}}^*$).

Designarem per $\underline{\underline{A}}$ ($\underline{\underline{A}}^1$,$\underline{\underline{A}}^2$, $\underline{\underline{A}}^*$) l'àlgebra generada per $\underline{\underline{J}}$ ($\underline{\underline{J}}^1$, $\underline{\underline{J}}^2$, $\underline{\underline{J}}^*$), (formada pel $\emptyset$ i les reunions finites disjuntes d'elements de $\underline{\underline{J}}$), i per $\underline{\underline{P}}$ ($\underline{\underline{P}}^1$, $\underline{\underline{P}}^2$, $\underline{\underline{P}}^*$) la σ-àlgebra engendrada per $\underline{\underline{A}}$ ($\underline{\underline{A}}^1$, $\underline{\underline{A}}^2$, $\underline{\underline{A}}^*$) i l'anomenarem <u>σ-àlgebra previsible</u> (<u>1-previsible</u>, <u>2-previsible</u>, <u>*-previsible</u>).

$\underline{\underline{P}}_\infty^1$ designarà la σ-àlgebra previsible sobre $\mathbb{R}_+\times\Omega$ associada a la filtració uniparamètrica $\{\underline{\underline{F}}_{s\infty},\ s\in\mathbb{R}_+\}$. (Anàlogament es defineix $\underline{\underline{P}}_\infty^2$).

PROPOSICIÓ 1.17 : (i) $\underline{\underline{P}}$ està engendrada pels processos adaptats i continus per l'esquerra.

(ii) $\underline{\underline{P}}$ està engendrada pels processos adaptats i continus.

(iii) $\underline{\underline{P}}$ està engendrada pels processos de la forma:

$$X_z(\omega) = h(\omega)\ I_{]a,\infty[}(z)\ ,\ a\in\mathbb{R}^2_+\ ,\ h\ \underline{\underline{F}}_a\text{-mesurable.}$$

(iv) $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}^1 \cap \underline{\underline{P}}^2$.

(v) $\underline{\underline{P}}^* = \underline{\underline{P}}^1 \vee \underline{\underline{P}}^2$.

(vi) $\underline{\underline{P}}^1 = \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\otimes\underline{\underline{P}}^1_\infty$ i $\underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\otimes\underline{\underline{P}}^2_\infty$.

La demostració de (i) i (ii) és a Merzbach [57], [59]. La de (iii) a Meyer [64]. Òbviament hi ha resultats anàlegs per $\underline{\underline{P}}^1,\underline{\underline{P}}^2$ i $\underline{\underline{P}}^*$. (iv) és a Merzbach-Zakai [60]. (v) a Merzbach [58]. (vi) suggereix que un procés a dos índex 1-previsible es un procés $\underline{\underline{P}}^1$-previsible que depèn mesusarablement del paràmetre t (cfr. Cairoli-Walsh [15], Meyer [63], [64], Doléans-Meyer [28]).

Les σ-àlgebres opcionals $\underline{\underline{O}}$ ($\underline{\underline{O}}^1$, $\underline{\underline{O}}^2$ i $\underline{\underline{O}}^*$) es defineixen com les engendrades pels processos continus per la dreta i adaptats (rep. $\underline{\underline{F}}^1,\underline{\underline{F}}^2$ i $\underline{\underline{F}}^*$-adaptats). Vegeu Bakry [4].

§7: Mesura de Doléans, descomposició de Doob-Meyer i procés creixent

DEFINICIÓ 1.18 : Direm que un procés $A = \{A_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és creixent si és nul sobre els eixos, continu per la dreta, i per tot $z,z'\in\mathbb{R}^2_+$, $z<z'$,

$$A(]z,z'])\geq 0.$$

OBSERVACIONS 1.19

1) Noti's que la condició exigida té un sentit més fort que l'ordinari del terme "creixent" (o "creixent per l'ordre") que sols exigeix que si $z \leq z'$, $A_z \leq A_{z'}$. (A un procés nul sobre els eixos, continu per la dreta, i creixent per l'ordre se l'anomena "feblememt creixent", però realment no en farem us).

2) com a conseqüència que tot procés creixent és creixent per l'ordre, i aquests últims tenen límits en els quadrants I i III, es pot prendre la regularització per la dreta. Doncs la condició continu per la dreta no és restrictiva (vegeu Mazziotto-Merzbach-Szpirglas [54]).

Una mesura aleatòria sobre $\mathbb{R}_+^2$ és una aplicació (anomenada nucli) $\mu(\omega,dz)$ de Ω en el conjunt de mesures sobre $\mathbb{R}_+^2$ tal que

$$E[\mu(\omega,\mathbb{R}_+^2)] < \infty .$$

Aleshores el procés $A_z(\omega) = \mu(\omega,R_z)$ és creixent.

Recíprocament, un procés creixent amb $E[A_\infty]<\infty$ és el procés creixent associat a una mesura aleatòria única, definida de la forma usual sobre els rectangles.

Com a un paràmetre, direm que un procés $B = \{B_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és de variació afitada si es pot escriure com a diferència de dos processos creixents. Es tracta d'un procés nul sobre els eixos, continu per la dreta i tal que per qualsevol z, si T és una partició finita de $[0,z]$ en rectangles de costats paralels als eixos i vèrtexs $\{z_i, i\in I\}$ (veurem més endavant que aquestes particions s'anomenen reixes),

$$\sup_T \sum_i |B(]z_i,z_{i+1}])| < \infty .$$

A tot procés B de variació afitada li correspon una mesura estocàstica signada.

S'anomena <u>P-mesura</u> sobre $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}^2_+)\otimes\underline{\underline{F}}$ (respectivament sobre la σ-àlgebra previsible $\underline{\underline{P}}$) qualsevol mesura sobre $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}^2_+)\otimes\underline{\underline{F}}$ (resp. $\underline{\underline{P}}$) que no carregui els conjunts P-negligibles.

Donada una mesura aleatòria $\mu(\omega,dz)$ es defineix una P-mesura sobre $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}^2_+)\otimes F$ per

$$\mu(X) = E\left[\int_{\mathbb{R}^2_+} X_z(\omega)\ \mu(\omega,dz)\right]$$

per a qualsevol procés mesurable i positiu.

La definició de les martingales a un paràmetre pot fer-se mitjançant la mesura de Doléans associada a un procés integrable (cfr. p.e. Metivier-Pellaumail [61]). Anàlogament a dos paràmetres podem definir una mesura de Doléans i relacionar-la amb els distints tipus de martingales:

<u>DEFINICIÓ 1.20</u> : Donat un procés integrable $X = \{X_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ s'anomena <u>funció de Doléans</u> associada a X, i es denota per m_X, l'aplicació

$$m_X : \underline{\underline{J}}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida sobre els rectangles *-previsibles per

$$m_X(]z,z']\times F) = E[I_G \times (]z,z'])] \ ,\ z<z',\ G\in\underline{\underline{F}}^*_z \ ,$$
$$m_X(\{(0,0)\}\times H) = 0,\ H\in\underline{\underline{F}}^*_0 \ ,\ \text{etc.},$$

i estesa a $\underline{\underline{J}}^*$.

Per a determinats processos, m_X s'estén a una mesura sobre $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{P}}^1$, $\underline{\underline{P}}^2$ o $\underline{\underline{P}}^*$. En aquest cas s'anomena <u>mesura de Doléans</u> associada a X.

<u>PROPOSICIÓ 1.21</u> : <u>Sigui</u> $X = \{X_z,\ \underline{\underline{F}}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ <u>un procés adaptat i integrable. Aleshores</u>

(i) X _és una martingala forta si i sols si_ m_X _s'anul.la sobre_ $\underline{\underline{P}}^*$.

(ii) X _és una i-martingala_ (i=1,2) _si i sols si_ m_X _s'anul.la sobre_ $\underline{\underline{P}}^i$.

(iii) X _és una martingala feble si i sols si_ m_X _s'anul.la sobre_ $\underline{\underline{P}}$.

Vegeu Merzbach [58]. Al mateix article es demostra que no hi ha cap σ-àlgebra amb una propietat anàloga per a les martingales.

Vegem la descomposició de Doob-Meyer;

TEOREMA 1.22 : _Sigui_ $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ _una martingala afitada en_ L^2. _Existeix un únic procés creixent previsible_ $\langle M\rangle$ _tal que_ $M^2 - \langle M\rangle$ _és una martingala feble. A més es compleix:_

$$E[M^2(]z,z'])|\underline{\underline{F}}_z] = E\,[M(]z,z']))|\underline{\underline{F}}_z] = E[\langle M\rangle(]z,z'])|\underline{\underline{F}}_z].$$

La demostració de l'existència d'un procés creixent A tal que $M^2 - A$ sigui una martingala feble és de Cairoli [9] (vegeu també Cairoli-Walsh [15]) on construeix de manera efectiva aquest procés passant al límit la variació quadràtica i regularitzant per la dreta. Els resultats de Merzbach-Zakai [60], permeten prendre la projecció previsible A^{π} del procés A, i el procés $\langle M\rangle = A^{\pi}$ compleix totes les condicions.

OBSERVACIÓ 1.23 : El teorema anterior continua essent cert si es canvia M^2 per una submartingala feble, positiva, contínua per la dreta, de la classe D (cfr. Merzbach [57]), o per una submartingala i submartingala feble, positiva, contínua per la dreta i afitada en L^1 (cfr. Meyer [64]).

DEFINICIÓ 1.24 : Sigui $z=(s,t)$ un punt de $\mathbb{R}^2_+$. Una reixa sobre $[0,z]$ és un subconjunt finit $\Gamma = \Gamma^1 \times \Gamma^2$ de $[0,z]$, $\Gamma^1 = \{s_1, \dots, s_{p+1}\}$ amb $0=s_1 < s_2 < \dots < s_{p+1} = s$, $\Gamma^2 = \{t_1, \dots, t_{q+1}\}$ amb $0=t_1 < \dots < t_{q+1} = t$.

Si $u=(s_i, t_j)$ és un punt de Γ , $u<z$, Δ_u designarà el rectangle $]s_i, s_{i+1}] \times]t_j, t_{j+1}]$.

Per $z' \in [0,z]$, indicarem per $\Gamma_{z'}$ la més petita reixa sobre $[0,z']$ que contingui els puns de Γ més petits que z' i z'. $\bar{\Gamma}_{z'}$ serà el conjunt $\{z'' \in \Gamma_{z'},\ z'' < z'\}$.

La norma de la reixa és el nombre

$$|\Gamma| = \max_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}} \{|s_{i+1} - s_i| + |t_{j+1} - t_j|\}.$$

Donada una successió de reixes $\{\Gamma^n, n \geq 1\}$ sobre $[0,z]$ tal que Γ^{n+1} sigui un refinament de Γ^n, direm que esdevenen arbitràriament fines si $|\Gamma^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

De forma anàloga, però substituint "subconjunt finit" per "subconjunt numerable de $\mathbb{R}^2_+$" es defineix reixa sobre $\mathbb{R}^2_+$.

Per a martingales contínues tenim el següent resultat:

TEOREMA 1.25 : Sigui $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ una martingala contínua afitada en L^p, $p \geq 2$. Aleshores el procés $\langle M \rangle = \{\langle M \rangle_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ és continu i per tot z_o de $\mathbb{R}^2_+$ i tota successió de reixes $\{\Gamma^n, n \geq 1\}$

sobre $[0,z_0]$ que esdevinguin arbitràriament fines

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\leq z_0} E[| \sum_{u\in\Gamma_z^n} M(\Delta_u)^2 - \langle M\rangle_z|^{p/2}] = 0.$$

Vegeu Nualart [74].

Si M i N són martingales afitades en L^2 definim per polarització la variació $\langle M,N\rangle$:

$$\langle M,N\rangle_z = \frac{1}{2} (\langle M+N\rangle_z - \langle M\rangle_z - \langle N\rangle_z),$$

i aleshores $\langle M,N\rangle$ és l'únic procés previsible de variació afitada tal que $\{M_zN_z - \langle M,N\rangle_z, \underline{\underline{F}}_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és una martingala feble.

Direm que dues martingales de L^2 són ortogonals si MN és una martingala feble, això és, si $\langle M,N\rangle = 0$.

Sigui $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ una 1-martingala afitada en L^2. Per a cada t existeix un únic procés creixent previsible $A^1_{.t}=\{A^1_{st},\underline{\underline{F}}_{st},s\in\mathbb{R}_+\}$ tal que $\{M^2_{st}-A^1_{st}, \underline{\underline{F}}_{st}, s\in\mathbb{R}_+\}$ és una martingala. Ara bé, per F4, $A^1_{.t}$ és l'únic procés creixent previsible respecte $\{\underline{\underline{F}}_{s\infty}, s\in\mathbb{R}_+\}$ tal que $\{M^2_{st}-A^1_{st}, F_{s\infty}, s\in\mathbb{R}_+\}$ és una martingala. Designarem A^1_{st} per $\langle M_{.t}\rangle_s$ o per $\langle M\rangle^1_{st}$.

Anàlogament, si M és una 2-martingala afitada en L^2 tindrem també $\langle M_{s.}\rangle_t$ (també escriurem $\langle M\rangle^2_{st}$).

Òbviament el procés $\langle M\rangle^1_{st}$ no ha de tenir necessàriament bones propietats en t, fixat s, ni en (s,t). Però si que les té quan M és una martingala forta (i veurem més endavant quan M és una i-martingala que té increments ortogonals en el sentit i, i=1,2).

TEOREMA 1.26 : Sigui M una martingala forta afitada en L^2. Existeixen dos únics processos $\langle M\rangle^1$ i $\langle M\rangle^2$ creixents, M^i i-previsible i tals que $M^2 - \langle M\rangle^i$ és una i-martingala. A més

$$E[M^2(]z,z'])|\underline{\underline{F}}^i_z] = E[M(]z,z'])^2|\underline{\underline{F}}^i_z] = E[\langle M\rangle^i(]z,z'])|\underline{\underline{F}}^i_z] \quad (i=1,2).$$

Vegeu Cairoli-Walsh[15],Nualart[73].

§8: Desigualtats de Burkholder

A) Cas discret

Considerem una martingala discreta $M = \{M_{nm}, \underline{\underline{F}}_{nm}, (n,m)\in \mathbb{N}^2\}$, nul.la sobre els eixos. Per tot $n,m\geq 1$, sigui

$$d_{nm} = M(n,m) - M(n-1,m) - M(n,m-1) + M(n-1,m-1),$$

$$S_{nm}(M) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_{ij}^2\right)^{1/2}$$

$$S(M) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} d_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

Sigui F una funció de Young. Aleshores

TEOREMA 1.27 : Existeixen constants C i C' que sols depenen de F tals que:

(i) $C\, E[F(S(M))] \leq \sup\limits_{n,m} E[F(|M_{nm}|)] \leq C'\, E[F(S(M))]$.

(ii) $\sup\limits_{m} E[\sup\limits_{n} |M_{nm}|] \leq C\, E[S(M)]$.

(iii) $E[S(M)] \leq C(1 + \sup\limits_{m} E[\sup\limits_{n} |M_{nm}| \log^+|M_{nm}|])$.

(iv) $E[\sup\limits_{n,m} |M_{nm}|] \leq C(1 + E[S(M) \log^+ S(M)])$.

(v) <u>Si</u> M <u>és forta</u>

$$E[S(M)] \leq C\, E[\sup |M_{nm}|] \quad .$$

La demostració de (i) quan $F(x) = x^p$, $p>1$, es troba a Metraux [62]. La generalització per a una funció de Young és de Meyer [64]. (ii), (iii) i (iv) són de Ledoux [45] que generalitza resultats de Metraux. (v) és de Brossard [6] que obté també distints reultats del tipus

$$E[S(M)^p] \leq C\, E[\sup_{n,m} |M_{nm}|^p]$$

i

$$E[\sup_{n,m} |M_{nm}|^p] \leq C\, E[S(M)^p]$$

per martingales regulars.

Sovint interessa aplicar aquestes desigualtats quan M és diferència de martingales. La definició és la següent:

<u>DEFINICIÓ 1.28</u> : Direm que un procés adaptat i integrable $D = \{D_{nm}, \underline{\underline{F}}_{nm}, (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ és diferència de martingales si és nul sobre els eixos i per tot $n,m \geq 1$,

$$E[D_{nm} | F_{n-1,\infty}] = 0$$

i

$$E[D_{nm} | F_{\infty,m-1}] = 0 \; .$$

Aleshores, per F4, el procés $\{M_{nm}, \underline{\underline{F}}_{nm}, (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ definit per

$$M_{nm} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} D_{ij}$$

és una martingala. La desigualtat (i) per $F(x) = x^p$, $p>1$, queda

$$C\, E[(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} D_{ij}^2)^{p/2}] \leq E[|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} D_{ij}|^p] \leq C'\, E[(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} D_{ij}^2)^{p/2}].$$

El cas més usual de diferència de martingales és un procés del tipus $\{N(]z_{i,j}, z_{i+1,j+i}]), \underline{\underline{F}}_{z_{i+1,j+1}}, (i,j)\in I\times J\}$ obtingut considerant una martingala amb paràmetre continu $\{N_z, \underline{\underline{F}}_z, z\in[0,z_o]\}$ i una reixa $\{z_{ij}, (i,j)\in I\times J\}$ sobre $[0,z_o]$.

B) Paràmetre continu

No es disposa, que coneguem, de versions generals de les desigualtats anteriors per a martingales indexades per $\mathbb{R}^2_+$ (o per un rectangle R_z). Però si exigim condicions de continuïtat i d'afitació en L^p podem passar al límit les desigualtats del teorema 1.27 Enunciem a continuació un resultat de Nualart [76] en que es basa la demostració. Com que tota martingala M afitada en L^p, $p\geq 2$, és tancada, no hi ha pèrdua de generalitat en considerar la varible terminal, que designarem en aquesta secció per $M_{\infty,\infty}$.

LEMA 1.29 : Sigui M una martingala de $\underline{\underline{M}}^2_c$ i F una funció moderada. Aleshores existeixen dues constants C i C' (que depenen sols de F) tals que

$$C\, E[F(\langle M\rangle_{\infty,\infty})] \leq E[F(\sup_t \langle M_{.t}\rangle_\infty)] \leq C\, E[F(\langle M\rangle_{\infty,\infty})] .$$

TEOREMA 1.30 : Sigui M una martingala de $\underline{\underline{M}}^p$, $p\geq 2$, i F una funció de Young. Aleshores existeixen constants C i C' (depenen sols de F) tals que

$$\text{(i)}\quad C\, E[F(\langle M\rangle^{1/2}_{\infty,\infty})] \leq E[F(\sup_z |M_z|)] \leq C'\, E[F(\langle M\rangle^{1/2}_{\infty,\infty})] .$$

$$\text{(ii)}\quad C\, E[|M_{\infty,\infty}|] \leq E\,[\langle M\rangle^{1/2}_{\infty,\infty}] .$$

(iii) $E[\langle M\rangle^{1/2}_{\infty,\infty}] \leq C \left(1+ \sup_z E[|M_z| \log^+|M_z|]\right)$.

Veure Nualart [76].

OBSERVACIÓ 1.31 : Sota la hipòtesi que totes les martingales de L^2 són contínues, Chevalier [21] demostra (i) per $F(x) = x^p$, $p>0$. El mètode, basat en el fet que tota martingala contínua de L^2 es pot aproximar per martingales contínues i afitades, no sabem si és vàlid en general, segons comentarem en el paràgraf dedicat a localització.

§9 Martingales amb variació quadràtica independent del camí i martingales amb increments ortogonals

En el seu primer article sobre martingales amb paràmetre multidimensional, Wong-Zakai [95] introdueixen un tipus fonamental de martingales: les martingales amb variació quadràtica independent del camí (abreujadament, martingales i.d.c.). Per definir-les ens cal el següent concepte:

Un camí és una funció contínua $\gamma:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}^2_+$ tal que $\gamma(0)=(0,0)$. Si γ és un camí creixent, la restricció d'una martingala M a la imatge de γ dóna lloc a una martingala uniparamètrica

$$M^{\gamma} = \{M_{\gamma(t)}, \underline{\underline{F}}_{\gamma(t)}, t\in[0,1]\} .$$

Recíprocament, és clar que un procés amb dos paràmetres que sigui una martingala uniparamètrica sobre tot camí creixent, serà una martingala a dos paràmetres.

Sigui $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ una martingala tal que la seva restrició a qualsevol camí creixent sigui una martingala local, localment de L^2 (per exemple que sigui contínua o afitada en L^2).

<u>DEFINICIÓ 1.32</u> : En la hipòtesi anterior, direm que M té <u>variació quadràtica independent del camí</u> si per a qualssevol camins creixents γ i τ tals que $\gamma(1) = \tau(1)$, les variacions quadràtiques de les restriccions coincideixen:

$$\langle M^{\gamma}\rangle_1 = \langle M^{\tau}\rangle_1 .$$

Tenim la següent caracterització de les martingales i.d.c. de $\underline{\underline{M}}_c^2$ (cfr. Nualart [73]):

<u>TEOREMA 1.33</u> : <u>Sigui M una martingala de $\underline{\underline{M}}_c^2$. Aleshores les següents propietats són equivalents:</u>

(i) M <u>és i.d.c.</u>

(ii) $M_{st}^2 - \langle M\rangle_{st} - \langle M_{.0}\rangle_s - \langle M_{0.}\rangle_t$ <u>és una martingala.</u>

(iii) $\langle M\rangle_{st} = \langle M_{.t}\rangle_s - \langle M_{0.}\rangle_s = \langle M_{s.}\rangle_t - \langle M_{0.}\rangle_t$.

Com en la definició 1.24, sigui $\Gamma = \{(s_i,t_j),\ (i,j)\in I\times J\}$ una reixa sobre $\mathbb{R}_+^2$. Si $u = (s_i,t_j)$ és un punt de la reixa, considerem els rectangles

$$\Delta_u^1 =]s_i,s_{i+1}] \times]0,t_j]$$

$$\Delta_u^2 =]0,s_i] \times]t_j,t_{j+1}]$$

i com abans,

$$\Delta_u =]s_i,s_{i+1}] \times]t_j,t_{j+1}] .$$

Deguda a Zakai [101] tenim la següent caracterització de les martingales i.d.c. de $\underline{\underline{M}}_c^4$ nul.les sobre els eixos:

<u>TEOREMA 1.34</u> : <u>Sigui</u> M <u>una martingala de</u> $\underline{\underline{M}}_c^4$ <u>nul.la sobre els eixos</u> i $\{\Gamma^n, n\geq 1\}$ <u>una successió de reixes sobre</u> $\mathbb{R}^2_+$ <u>que esdevinguin arbitràriament fines. Aleshores les següents propietats són equivalents:</u>

(i) M <u>és</u> i.d.c.

(ii) <u>Per a qualsevol</u> z,

$$\sum_{u\in\Gamma_z^n} M(\Delta_u^i)\, M(\Delta_u) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0\ ,\quad i=1,\ 2.$$

(iii) <u>Per a qualsevol</u> z,

$$\sum_{u\in\Gamma_z^n} E[\, M(\Delta_u^i)\, M(\Delta_u)\,|\,\underline{\underline{F}}_z^i] \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0,\quad i = 1,\ 2.$$

<u>OBSERVACIÓ 1.35</u> : A tota martingala M li podem associar una martingala nul.la sobre els eixos M^0 definida per

$$M^0(s,t) = M(s,t) - M(0,t) - M(s,0) + M(0,0)\ ,$$

que té els mateixos increments rectangulars que M: per tot $z,z'\in\mathbb{R}^2_+$, si $z < z'$,

$$M^0(\,]z,z']\,) = M(\,]z,z']\,).$$

Aleshores les propietats que depenen sols dels increments rectangulars es transmeten de M a M^0, i recíprocament, n'hi ha prou de demostrar-les per a M^0. Així, per exemple, M és forta si i sols si M^0 ho és.

La propietat i.d.c., al contrari, depèn dels increments lineals de la martingala, i la propietat i.d.c. de M^0 no implica, en general, la de M.

El conjunt de les martingales i.d.c. contínues i afitades en L^2, que designarem per $\underline{\underline{M}}^2_{c,i}$, és un subconjunt tancat de $\underline{\underline{M}}^2_c$ (cfr. Zakai [101]) i a més, $\underline{\underline{M}}^2_{c,f} \subset \underline{\underline{M}}^2_{c,i}$ (cfr. Cairoli-Walsh [15]). La inclusió és, en general, estricta, tot i que al principi es pensava que hi havia igualtat. En efecte, Cairoli-Walsh diuen a [15] que totes les indicacions suggereixen que la propietat i.d.c. és una altra caracterització de les martingales fortes. Nualart [70] demostrà que aquesta suposició era falsa, construint en determinada filtració producte, i en la del drap brownià, martingles i.d.c. que no eren fortes.

Zakai a [101] per tractar d'esbrinar la relació entre martingales fortes i i.d.c. introduí una altre classe de martingales, anomenades martingales amb increments ortogonals, més gran que la classe de les martingales fortes i més petita que la de les martingales i.d.c. Concretament:

DEFINICIÓ 1.36 : Sigui $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ una 1-martingala. Direm que M té increments ortogonals en el sentit 1 si per tot parell de rectangles disjunts $]z_1, z_1']$ i $]z_2, z_2']$ tenim

$$E[M(]z_1,z_1']) \, M(]z_2,z_2']) \,|\, F_{s_1 \wedge s_2, \infty}] = 0,$$

on $z_i = (s_i, t_i)$ i $z_i' = (s_i', t_i')$, $i = 1,2$.

Anàlogament es defineixen les 2-martingales amb increments ortogonals en el sentit 2. Es diu, finalment que una martingala té increments ortogonals si en té en ambdós sentits.

Tenim les següents caracteritzacions, la primera de Zakai [101] i la segona de Nualart [73].

TEOREMA 1.37 : Sigui M una martingala de $\underline{\underline{M}}_c^4$. Aleshores les següents propietats són equivalents:

(i) M té increments ortogonals.

(ii) M^0 té variació i.d.c. i també les martingales

$$N_z = M^0(R_z \cap]\alpha,\infty[), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^2_+.$$

(iii) Per tota successió de reixes $\{\Gamma^n, n \geq 1\}$ sobre $\mathbb{R}^2_+$ que esdevinguin arbitràriament fines i per tot z, z', amb $z < z'$,

$$\sum_{u \in \Gamma^n \cap]z,z']} M(\Delta_u^i)\, M(\Delta_u) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0, \quad i = 1,2.$$

Òbviament la propietat (iii) es podria separar per 1-martingales amb increments ortogonals en el sentit 1, i 2-martingales amb increments ortogonals en el sentit 2.

TEOREMA 1.38 : Sigui M una 1-martingala afitada en L^2. M té increments ortogonals en el sentit 1 si i sols si per tots $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, les martingales $M_{.t_2} - M_{.t_1}$ i $M_{.t_4} - M_{.t_3}$ són ortogonals. A més, si M és contínua, aquesta condició és equivalent a

$$< M_{.t_2} - M_{.t_1}, M_{.t_4} - M_{.t_3} > = 0 .$$

Finalment, l'existència de bons processos creixents que hem assenyalat per les martingales fortes, també es compleix per les i-martingales amb i-increments ortogonals:

PROPOSICIÓ 1.39 : Sigui M una i-martingala afitada en L^2 amb increments ortogonals en el sentit i (i = 1,2). Aleshores existeix un únic procés creixent i-previsible $< M >^i$ tal que $M^2 - < M >^i$ és una i-martingala i $< M >^i_{st} = 0$ si s=0 (i=1) o si t=0 (i=2).

Vegeu Guyon-Prum [35], Nualart [73].

El conjunt de les martingales de $\underline{\underline{M}}_c^2$ amb increments ortogonals, que designarem per $\underline{\underline{M}}_{c,o}^2$ és un subespai tancat de $\underline{\underline{M}}_c^2$ i es compleixen les inclusions

$$\underline{\underline{M}}_{c,f}^2 \subset \underline{\underline{M}}_{c,o}^2 \subset \underline{\underline{M}}_{c,i}^2 \subset \underline{\underline{M}}_c^2 .$$

En els exemples tenim sempre $\underline{\underline{M}}_{c,f}^2 = \underline{\underline{M}}_{c,o}^2$, però no sabem si és cert en general.

Per la seva importància en la construcció de les integrals estocàstiques recapitulem els resultats sobre les distintes variacions quadràtiques que hem anat obtenint:

PROPOSICIÓ 1.40 :

A) Sigui M una martingala afitada en L^2. Aleshores existeix un únic procés creixent previsible $\langle M\rangle$ tal que $M^2 - \langle M\rangle$ és una martingala feble. A més

$$E[M^2(]z,z']) | \underline{\underline{F}}_z] = E[(M(]z,z']))^2 | \underline{\underline{F}}_z] = E[\langle M\rangle(]z,z']) | \underline{\underline{F}}_z].$$

B) Sigui M una i-martingala afitada en L^2, nul.la sobre els eixos. Existeix un únic procés creixent en s per a cada t fix, previsible respecte la σ-àlgebra previsible associada a $\{\underline{\underline{F}}_{st}, s\in\mathbb{R}_+\}$, $\langle M\rangle_{st}^1$, tal que $\{M_{st}^2 - \langle M\rangle_{st}^1, \underline{\underline{F}}_{st}, s\in\mathbb{R}_+\}$ és una martingala. A més

$$E[M^2(\Delta_{s,s',t}^1) | \underline{\underline{F}}_{st}] = E[(M(\Delta_{s,s',t}^1)^2 | \underline{\underline{F}}_{st}] = E[\langle M\rangle^1(\Delta_{s,s',t}^1) | \underline{\underline{F}}_{st}],$$

on $\Delta_{s,s',t}^1 =]s,s']\times]0,t]$.

C) Un enunciat anàleg al B) per 2-martingales.

D) Sigui M una i-martingala afitada en L^2 amb increments

increments ortogonals en el sentit i (i = 1, 2). Aleshores existeix un únic procés creixent i-previsible tal que $M^2 - \langle M\rangle^i$ és una i-martingala. A més

$$E[M^2(]z,z'])|\underline{\underline{F}}_z^i] = E[(M(]z,z']))^2|\underline{\underline{F}}_z^i] = E[\langle M\rangle^i(]z,z'])|\underline{\underline{F}}_z^i] \ .$$

§10: Integració estocàstica

En el pla s'utilitzen distints tipus d'integrals estocàstiques: ordinàries, dobles, 1 i 2-integrals, de línia i mixtes. Ens ocuparem de les integrals ordinàries $\int f(z)\, dM_z$, amb M afitada en L^2; i de les dobles $\iint g(z,z')\, dM_z dN_z$, amb M 1-martingala amb increments ortogonals en el sentit 1 i N 2-martingala amb increments ortogonals en sentit 2, ambdues afitades en L^4; així com de l'extensió d'aquesta última integral a les funcions d'angle. Les 1 i 2-integrals s'obtenen com les integrals ordinàries però integrant processos $\underline{\underline{F}}_z^1$ o $\underline{\underline{F}}_z^2$ -adaptats, i llavors es perden algunes propietats interessants. Les integrals de línia, introduides per Cairoli-Walsh [15] són essèncialment integrals estocàstiques uniparamètriques, però no farem us de les importants propietats per a elles establertes: Fòrmula de Green, etc. Les integrals estocàstiques mixtes $\iint h(z,z')d\mu_z dM_z$, i $\iint h(z,z')dM_z\, d\mu_z$, fóren introduides per Wong-Zakai [96] (vegeu també Guyon-Prum [35]) amb condicions força restrictives sobre la mesura μ; tampoc les utilitzarem.

a) integral estocàstica ordinària: Introduida per Cairoli [9], es contrueix exactament igual que en el cas uniparamètric. Per comoditat en les notacions, és més senzill començar integrant sobre un rectangle tancat $[0,z_o]$ i després fer l'extensió a $\mathbb{R}^2_+$ per un mètode igual a l'emprat en el cas unidimensional.

Sigui $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z\in[0,z_o]\}$ una martingala de L^2. Designarem per $L^2_M(z_o)$ el conjunt dels processos

$$f:[0,z_o]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

previsibles tals que

$$E[\int_{R_{z_o}} f^2(z)\ d\langle M\rangle_z]<\infty ,$$

que, amb les identificacions usuals, és una espai de Hilbert amb la norma

$$\|f\| = \left(E[\int_{R_{z_o}} f^2(z)\ d\langle M\rangle_z]\right)^{1/2} .$$

Els processos de la forma

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{m} \alpha_{ij} I_{]z_{i,j}, z_{i+1,j+1}]}(z)$$

amb α_{ij} $\underline{\underline{F}}_{z_{ij}}$-mesurable i afitada, i $\{z_{ij},\ i=1,\dots,n+1,\ j=1,\dots,m+1\}$ una reixa sobre $[0,z_o]$, s'anomenen simples, i són densos en $L^2_M(z_o)$. Definim la integral estocàstica $f\cdot M$ d'un procés f com l'anterior per

$$f\cdot M_z = \int_{R_z} f(\zeta)\ dM_\zeta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} M(]z_{ij}, z_{i+1,j+1}]\cap R_z).$$

Es compleix

$$(*) \qquad E[(\int_{R_{z_o}} f(z)\ dM_z)^2] = E[\int_{R_{z_o}} f^2(z)\ d\langle M\rangle_z] ,$$

i doncs la integral anterior s'estén per densitat a totes les funcions de $L^2_M(z_o)$, i s'estableix una isometria entre $L^2_M(z_o)$ i $\underline{\underline{M}}^2(z_o)$ (es compleix (*)).

Les propietats són les mateixes que les d'un índex. Assenyalem especialment que $f\cdot M\in \underline{\underline{M}}^2(z_o)$, és contínua si M ho és, i

$$<f\ M_{.}, g\ N_{.}>_z = \int_{R_z} fg\ d<M,N>_\zeta \ .$$

<u>b) Integral estocàstica doble</u>: $\iint g(z,z')\ dM_z dN_{z'}$, va ésser introduida quan M = N = W per Wong-Zakai [95], generalitzada per M = N martingala forta de $\underline{\underline{M}}^4$ per Cairoli-Walsh [15], i a M 1-martingala amb increments ortogonals en el sentit 1, i N 2-martingala amb increments ortogonals en el sentit 2, ambdues de $\underline{\underline{M}}^4$, per Guyon-Prum [35].

Considerem la σ-àlgebra $\underline{\underline{G}}$ (anomenada previsible) de parts de $\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{R}_+^2$ engendrada pels conjunts de la forma $]z_1,z_1']\times]z_2,z_2']\times H$, amb H de $\underline{\underline{F}}_{z_1\vee z_2}$, i z_1, z_1', z_2 i z_2' tals que si $(s,t)\in]z_1,z_1']$ i $(s',t')\in]z_2,z_2']$, llavors $s>s'$ i $t<t'$. (Designarem aquesta relació per $(s,t)\curlywedge(s',t')$; de fet normalment es defineix a l'inrevés i llavors per a construir la integral doble cal que M sigui una 2-martingala amb i.o. en el sentit 2 i N una 1-martingala amb i.o. en el sentit 1. Prenem aquesta definició per no tenir que modificar la notació en el següent capítol).

A l'igual que en el cas anterior,es comença integrand funcions definides a $[0,z_o]\times[0,z_o]$ i estendre-ho després a $\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{R}_+^2\times\Omega$.

Sigui $M=\{M_z,\ \underline{\underline{F}}_z,\ z\in[0,z_o]\}$ una 1-martingala amb increments ortogonals en el sentit 1, amb $E[M_{z_o}^4]<\infty$, i $N=\{N_z,F_z,\ z\in[0,z_o]\}$ una 2-martingala amb i.o. en el sentit 2 i $E[N_{z_o}^4]<\infty$. Designem per $L_{M,N}^2(z_o)$ el conjunt dels processos

$$g:[0,z_o]\times[0,z_o]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

previsibles (és a dir, G-mesurables), amb la norma

$$||g|| = (E[\iint_{R_{z_o} \times R_{z_o}} g^2(z,z')d<M>^1(z)d<N>^2(z')])^{1/2}$$

finita i

$$g(z,z') = 0 \quad \text{a menys que} \quad z \curlywedge z'.$$

Els processos de la forma

$$g(z,z') = \sum_{\substack{i,j,k,r \\ i>k,\ j<r}} \alpha_{ijkr}\, I_{]z_{i,j},z_{i+1,j+1}]}(z)\, I_{]z_{k,r},z_{k+1,r+1}]}(z')$$

amb α_{ijkr} $\underline{\underline{F}}_{z_{ir}}$-mesurable i afitada, i $\{z_{mn}$, $m=1,\ldots,p+1$, $n=1,\ldots,q+1\}$ una reixa sobre $[0,z_o]$ s'anomenen simples i són densos en $L^2_{M,N}(z_o)$. Es defineix la integral estocàstica doble $g\cdot MN_z$ del procés anterior per

$$g\cdot MN_z = \iint_{R_z \times R_z} g(\zeta,\zeta')\, dM_\zeta dN_{\zeta'} =$$

$$= \sum_{\substack{i,j,k,r \\ i>k,\ j<r}} \alpha_{ijkr} M(]z_{i,j},z_{i+1,j+1}]\cap R_z)\; N(]z_{k,r},z_{k+1,r+1}]\cap R_z)\,.$$

Gràcies a la propietat d'increments ortogonals (proposició 1.40 D) tenim

$$(**) \qquad E\,[(\iint_{R_z \times R_z} g\, dMdN)^2\,] = E[\iint_{R_z \times R_z} g^2\; d<M>^1 d<N>^2\,]\,.$$

La integral s'estén ara per densitat a tot $L^2_{M,N}(z_o)$ complint-se la propietat (**).

g.MN és una martingala de $\underline{\underline{M}}^2$, contínua si M i N ho són. Si $f\in L^2_M$ i $g\in L^2_{M,M}$, llavors $f\cdot M$ i $g\cdot MM$ són ortogonals.

c) Extensió de la integral estocàstica doble per a funcions d'angle: Aquesta integral va ser introduïda per Wong-Zakai [96] en una observació, i desenvolupada per Guyon-Prum [35]. Una funció $f: \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diu que és una funció d'angle ("corner function") si existeixen dues funcions $\pi: \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ i $h: \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que

$$f(z,z') = \pi(z \vee z')\, h(z,z').$$

La propietat de les martingales amb increments ortogonals (1.40 D) que permet la isometria en la integral doble, es pot substituir per la propietat 1.40 B,C deles i-martingales, quan s'integren funcions d'angle aleatòries en el sentit que concretarem.

Sigui $\Gamma = \{z_{ij} = (s_i, t_j),\ i=1,\dots,p+1,\ j=1,\dots,q+1\}$ una reixa sobre $[0,z_o]$. Una funció de la forma

$$f(z,z') = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, I_{\Delta^1_{ij} \times \Delta^2_{ij}}(z,z')$$

amb α_{ij} $\underline{\underline{F}}_{z_{ij}}$-mesurable i afitada, i $\Delta^1_{i,j} =]s_i, s_{i+1}] \times]0, t_j]$, $\Delta^2_{i,j} =]0, s_i] \times]t_j, t_{j+1}]$, s'anomena funció simple d'angle.

La σ-àlgebra engendrada per les funcions simples d'angle, anomenada σ-àlgebra previsible d'angle coincideix amb la σ-àlgebra engendrada pels conjunts de la forma

$$]s,s'] \times]0,t] \times]0,s] \times]t,t'] \times F \ , \quad F \in \underline{\underline{F}}_{st}.$$

Si M es una 1-martingala i N una 2-martingala, de $\underline{\underline{M}}^4(z_o)$ i f una funció simple d'angle, definim la integral $f \cdot MN$ per

$$f \cdot MN_z = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, M(\Delta^1_{ij} \cap R_z)\, N(\Delta^2_{ij} \cap R_z).$$

És una martingala de $\underline{\underline{M}}^2(z_o)$, i té per procés creixent

$$\langle f \cdot MN \rangle_z = \sum_{i,j} \alpha^2_{ij}\, \langle M \rangle^1 (\Delta^1_{ij} \cap R_z)\, \langle N \rangle^2 (\Delta^2_{ij} \cap R_z)\ .$$

La integral s'estén a la completació del conjunt de les funcions simples per la norma

$$\|f\|_a = \left(E\left[\sum_{i,j} \alpha_{ij}^2 <M>^1(\Delta_{ij}^1)^2 <N>^2(\Delta_{ij}^2)^2\right)\right]^{1/2} .$$

§11: Punts, línies i regions d'atur

La qüestió d'aturar un procés amb paràmetre bidimensional s'ha mostrat extremadament delicada i, juntament amb la no invariància de F4 pels canvis de probabilitat que hem assenyalat anteriorment, constitueix una altra de les diferències essencials entre un i dos paràmetres.

S'han construit distintes introduccions als punts, línies i regions d'atur: Wong-Zakai [96], Cairoli-Walsh [17], Merzbach [59], Chevalier [21]. Seguirem bàsicament a Cairoli-Walsh.

Direm que un conjunt $A \subset \mathbb{R}_+^2 \times \Omega$ és un <u>conjunt aleatori</u> si per tot $z \in \mathbb{R}_+^2$, l'aplicació $I_A(z): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ és una variable aleatòria.

Direm que un conjunt aleatori A és <u>progressiu</u> o <u>progressivament mesurable</u> si el procés $\{I_A(z),\ z \in \mathbb{R}_+^2\}$ ho és, això és, per tot z, la restricció

$$I_{A|[0,z]\times\Omega}: [0,z]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

és $\underline{\underline{B}}([0,z]) \otimes \underline{\underline{F}}_z$-mesurable. Com que

$$I_{A|[0,z]\times\Omega} = I_{A \cap ([0,z]\times\Omega)} ,$$

tenim que A és progressiu si i sols si

$$A \cap ([0,z]\times\Omega) \in \underline{\underline{B}}([0,z]) \otimes \underline{\underline{F}}_z , \quad \forall z \in \mathbb{R}_+^2 .$$

Llavors

$$\{\omega\in\Omega:\ A(\omega)\cap[0,z]\neq\emptyset\} = \{\omega\in\Omega:\ \exists\, z'\in[0,z] \text{ i } (z',\omega)\in A\} =$$

$$= \Pi_\Omega(\ A\cap([0,z]\times\Omega)\ )\in \underline{\underline{F}}_z$$

(Π_Ω designa la projecció sobre Ω) pel teorema de capacibilitat (cfr. Dellacherie [24'], T 1.32).

Direm que una variable aleatoria $Z=(S,T):\Omega\longrightarrow \mathbb{R}_+^2\cup\{(\infty,\infty)\}$ és un <u>punt d'atur</u> si per tot $z\in\mathbb{R}_+^2$, $\{Z\leq z\}\in\underline{\underline{F}}_z$.

Si $Z=(S,T)$ és un punt d'atur, S (resp. T) és un $\{\underline{\underline{F}}_{s\infty},\ s\in\mathbb{R}_+\}$ (resp. $\{\underline{\underline{F}}_{\infty t},\ t\in\mathbb{R}_+\}$) temps d'atur, perquè

$$\{S\leq s\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(S,T)\leq(s,n)\}\in\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\underline{\underline{F}}_{sn} = \underline{\underline{F}}_{s\infty}\ .$$

El recíproc no és cert: Donats un $\{\underline{\underline{F}}_{s\infty},\ s\in\mathbb{R}_+\}$ temps d'atur S i un $\{\underline{\underline{F}}_{\infty t},\ t\in\mathbb{R}_+\}$ temps d'atur, perquè (S,T) sigui un punt d'atur cal exigir, a més, que S sigui $\underline{\underline{F}}_{\infty T}$-mesurable i T sigui $F_{S\infty}$-mesurable. (cfr. Meyer [64]).

<u>DEFINICIÓ 1.41</u> : Direm que un conjunt $D\subset\mathbb{R}_+^2\times\Omega$ és una <u>regió d'atur</u> si

1) D és un conjunt aleatòri progressiu tancat.

2) Si $Z=\inf D$, llavors $Z\in D$ (suposarem $D(\omega)\neq\emptyset$, $\forall\,\omega\in\Omega$).

3) Si $z\in D$, llavors $[Z,z]\subset D$.

<u>OBSERVACIÓ 1.42</u>

1) Si D és una regió d'atur i $Z=\inf D$, llavors Z és un punt d'atur.

2) Els dominis d'atur de Chevalier [21] són regions d'atur amb $Z=(0,0)$, ja que tot conjunt previsible és progressiu.

<u>DEFINICIÓ 1.43</u> : Sigui D una regió d'atur i designem per D^o el conjunt dels $z\in D$ tals que existeix un $z'\in D$ amb $z<z'$. A $L=D-D^o$

se l'anomena línia d'atur de D.

OBSERVACIÓ 1.44 A partir d'ara, a menys que especifiquem el contrari, suposarem sempre que les regions d'atur tenen inf D = (0,0).

DEFINICIÓ 1.45 : Direm que una regió d'atur D és esglaonada (o que la línia d'atur L associada a D és esglaonada) si per cada ω , $L(\omega)$ és reunió d'un nombre finit de segments finits de rectes paral.leles als eixos, o $L(\omega) = \emptyset$, i $\bigcup_{\omega} L(\omega)$ està contingut en la reunió d'una família numerable de rectes.

Direm que una regió d'atur D és previsible (o que la corresponent línia d'atur és previsible) si existeix una successió creient $\{D_n, n\geq 1\}$ de regions d'atur, amb $D_n \subset D^o$ i $\bigcup_n D_n = D^o$ q.s. (Es diu que la successió $\{D_n, n\geq 1\}$ anuncia D).

Si D és una regió d'atur previsible, existeix una successió de regions d'atur esglaonades i uniformement afitades que anuncien D. (cfr. Cairoli-Walsh [17]).

Aleshores la σ-àlgebra previsible $\underline{\underline{P}}$ està engendrada pels intervals estocàstics de la forma $[\lambda,\mu[$, amb λ i μ línies d'atur previsibles (cfr. Merzbach [57] , [59]).

§12: Martingales locals i localització

DEFINICIÓ 1.46 : Direm que un procés $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ és localment de $\underline{\underline{M}}^p$ $(p\geq 1)$ (o que és una martingala local de $\underline{\underline{M}}^p$) si existeix una successió $\{D_n, n\geq 1\}$ de regions d'atur i una successió $\{M^n, n\geq 1\}$ de martingales tals que:

1) $D_n \subset D_{n+1}$ per tot n, i $\bigcup_{n\geq 1} D_n = \mathbb{R}^2_+$ q.s.

2) $M^n \in \underline{\underline{M}}^p$ per tot $n\geq 1$.

3) Per tot $n \geq 1$ i quasi tot $\omega \in \Omega$,

$$M_z^n(\omega) = M_z(\omega) \qquad \text{si } z \in D_n(\omega).$$

Diem llavors que $\{D^n,\ n \geq 1\}$ redueix M. Designarem per $\underline{\underline{M}}^p_{loc}$ el conjunt dels processos localment de $\underline{\underline{M}}^p$.

Per p>1, els processos de $\underline{\underline{M}}^p_{loc}$ són continus per la dreta. Designarem per $\underline{\underline{M}}^p_{c,loc}$ al conjunt dels elements de $\underline{\underline{M}}^p_{loc}$ continus.

En el cas que totes les martingales de $\underline{\underline{M}}^2$ siguin contínues, els espais $\underline{\underline{M}}^p_{loc}$ coincideixen per $p > 1$. (cfr. Chevalier [21]).

D'altra banda, si $M \in \underline{\underline{M}}^p_{loc}$, $p > 1$, i per tot z, $\sup\limits_{z'<z} |M_{z'}| \in L^1$, llavors M és una martingala (cfr. Cairoli-Walsh [17]).

Sigui M una martingala de $\underline{\underline{M}}^2$ i sigui D una regió d'atur previsible. Posem

$$M^D = I_D \cdot M_z = \int_{R_z} I_D dM.$$

Anomenarem M^D el procés aturat a D. Aleshores

$$M^D = M \quad \text{sobre } D,$$

però fora de D, tot i que M^D té els increments nuls, no és necessàriament constant. (La propietat a un paràmetre $\int_0^t I_{[0,T]}(s)\, dM_s = M_{t\wedge T}$ amb T temps d'atur, no té sentit a dos paràmetres).

Aleshores no sabem si una martingala de $\underline{\underline{M}}^2_c$ es pot aproximar per martingales contínues i afitades. Podriem, per exemple, considerar la successió de martingales afitades

$$M_z^n = E\left[(M_\infty \vee n) \wedge (-n) \,|\, \underline{\underline{F}}_z\right]$$

que convergeigen en L^2 cap a M, però no sabem demostrar que aquestes martingales siguin contínues. D'altra banda es podrien introduir les regions d'atur previsibles

$$D_n = \{ z \in \mathbb{R}^2_+ : \sup_{z' \in R_z} |M_{z'}| \leq n \} \quad ,$$

i les martingales M^{D_n} són contínues i convergeixen cap a M en L^2, però pel que hem dit abans, no són necessàriament afitades.

Com un resultat -no local- d'aproximació, tenim el següent, degut a Nualart [76]: Designem per $\underline{\underline{M}}_c^\infty$ el conjunt $\bigcap_{p \geq 2} \underline{\underline{M}}^p_{c,loc}$. Tenim

<u>PROPOSICIÓ 1.47</u> : <u>$\underline{\underline{M}}_c^\infty$ és dens en $\underline{\underline{M}}_c^2$</u>.

Finalment, com una aplicació de les tècniques de localització donem els resultats sobre extensió de les integrals estocàstiques:

1) Haviem construit la integral $\int f(z) dM_z$ per M de $\underline{\underline{M}}^2$ i f un procés previsible tal que $E \int_{\mathbb{R}^2_+} f^2(\zeta) d\langle M\rangle_\zeta < \infty$. Com en el cas unidimensional, per localització s'estén aquesta integral a martingales locals M de $\underline{\underline{M}}^2_{loc}$ i a processos previsibles f tals que $\int_{R_z} f^2(\zeta) d\langle M\rangle_\zeta < \infty$ q.s. $\forall z \in \mathbb{R}^2_+$. Veure Cairoli-Walsh [17], Cairoli [14], Merzbach-Zakai [60] i Merzbach [57].

2) La integral doble també s'estén a processos f(z,z') previsibles, nuls a menys que $z \curlywedge z'$, i que compleixin

$$\iint_{R_z \times R_z} f^2(\zeta, \zeta') d\langle M\rangle^1_\zeta \, d\langle N\rangle^2_\zeta < \infty \quad , \quad \forall z \in \mathbb{R}^2_+ \ ,$$

però cal continuar exigint que M i N siguin de L^4, M 1-martingala amb increments ortogonals en el sentit 1 i N 2-martingala amb increments ortogonals en el sentit 2. Veure Cairoli [14], Merzbach-Zakai [60].

3) Si M és el drap brownià W, l'espai de processos L^2_W coincideix amb el conjunt del processos mesurables i adaptats tals que $E \int_{\mathbb{R}^2_+} f^2(\zeta)\, d\zeta < \infty$. L'extensió es pot fer directament (cfr. Wong-Zakai [97], [98]).

§13: Martingales en la filtració browniana

En tot aquest paràgraf designarem per $\{\underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ la filtració associada a un drap brownià $W = \{W_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$, degudament completada. L'important resultat d'itô (cfr. Itô [43]) que permet representar tot funcional de Wiener de quadrat integrable (i doncs tota martingala afitada en L^2) com una integral estocàstica (posteriorment estés per Clark [18] a tota martingala afitada en L^1) es transfereix a martingales bidimensionals; la primera demostració de Wong-Zakai [95] per martingales afitades en L^2, va ésser estesa per Cairoli-Walsh [17] a martingales localment de $\underline{\underline{M}}^2$.

TEOREMA 1.48 : *Sigui M una martingala local de $\underline{\underline{M}}^2_{loc}$. Aleshores existeixen processos $\{f(z), z \in \mathbb{R}^2_+\}$ i $\{g(z,z'), z,z' \in \mathbb{R}^2_+\}$ tals que:*

(i) f *és mesurable i adaptat.*

(ii) g *és mesurable*, $g(z,z')$ *és* $\underline{\underline{F}}_{z \vee z'}$-mesurable *i* $g(z,z')=0$ *a menys que* $z \curlywedge z'$.

(iii) $\int_{R_z} f^2(\zeta)d\zeta + \iint_{R_z \times R_z} g^2(\zeta,\zeta')d\zeta d\zeta' < \infty$, q.s., $\forall z \in \mathbb{R}^2_+$.

i tals que

$$M_z = M_0 + f\cdot W_z + g\cdot WW_z.$$

A més, si M *és afitada en L^2, els processos* f *i* g *són tals que*

$$E[\int_{\mathbb{R}^2_+} f^2(\zeta)d\zeta + \iint_{\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}^2_+} g^2(\zeta,\zeta')d\zeta d\zeta'] < \infty.$$

COROL.LARI 1.49 : Tota martingala local de $\underline{\underline{M}}^2$ té una versió contínua.

OBSERVACIÓ 1.50 : Aquest corol.lari s'estén, via desigualtat maximal, a tota martingala afitada en L logL. Un contraexemple mostra que això no és cert per martingales afitades en L^1.

DEFINICIÓ 1.51 : Direm que un procés $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ és una

2-martingala local si és mesurable, adaptat i fixat $s \in \mathbb{R}_+$, el procés $\{M_{st}, \underline{\underline{F}}_{st}, t \in \mathbb{R}_+\}$ és una martingala local.

PROPOSICIÓ 1.52 : Sigui M una 2-martingala local. Aleshores existeix un procés $f = \{f(z,s), (z,s) \in \mathbb{R}_+^3\}$ tal que

(i) f és $B(\mathbb{R}_+^3) \otimes \underline{\underline{F}}$-mesurable.

(ii) $f(u,v;s)$ és $\underline{\underline{F}}_{sv}$-mesurable si $u \leq s$, i 0 si $u > s$.

(iii) $\int_{R_z} f^2(\zeta,s)d\zeta < \infty$ q.s. per tot $z \in \mathbb{R}_+^2$,

i

$$M_{st} = M_{s0} + \int_{R_{st}} f(\zeta,s)dW_\zeta \text{ , per tot } (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 .$$

A més, si M és una 2-martingala de L^2, el procés f és pot prendre de forma que

$$E \int_{R_z} f^2(\zeta,s)d\zeta < \infty, \ \forall z \in \mathbb{R}_+^2 .$$

Vegeu Cairoli-Walsh [16] per a la segona part i Cairoli [12] per a la primera. De fet, la demostració de Cairoli és per a processos M mesurables i adaptats i tals que $\{M_{st}, \underline{\underline{F}}_{\infty t}, t \in \mathbb{R}_+\}$ sigui una martingala local, però el raonament es transfereix sense dificultat al nostre cas.

Les martingales fortes afitades en L^2 es caracteritzen perquè són integrals estocàstiques ordinàries. Tenim:

PROPOSICIÓ 1.53 : sigui M una martingala afitada en L^2. Aleshores són equivalents:

(i) M és forta.

(ii) M té increments ortogonals.

(iii) En la representació del teorema 1.48 , g = 0, això és

$$M_z = M_0 + f \cdot W_z .$$

Vegeu Cairoli-Walsh [15] i Nualart [73].

Com hem anat veient, les martingales fortes tenen propietats molt semblants a les martingales unidimensionals.

PROPOSICIÓ 1.54 : Sigui $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ una martingala forta. Aleshores existeix un procés $f = \{f(z), z \in \mathbb{R}_+^2\}$ adaptat, mesurable i tal que $\int_{R_z} f^2(\zeta)d\zeta < \infty$ q.s. per tot $z \in \mathbb{R}_+^2$, i tal que

$$M_z = M_0 + f W_z.$$

Vegeu Cairoli [12].

Les martingales gaussianes de la filtració browniana estan caracteritzades per la següent propietat:

PROPOSICIÓ 1.55 : Sigui M una martingala gaussiana de L^2. Llavors en la representació del teorema 1.48 , $f = 0$ i g és determinista.

Vegeu Guyon [32].

§14: La fórmula de diferenciació d'Itô

La pedra angular del càlcul estocàstic és la fórmula de diferenciació d'Itô. No és d'estranyar, doncs, que des del principi de la teoria el problema d'estendre-la als processos amb dos paràmetres hagi estat present en molts treballs. En efecte, en els deu anys que transcorren entre que Wong-Zakai fan la primera aproximació, fins a la darrera de Nualart, nombroses aportacions han estat fetes. Resenyem-les breument:

Wong-Zakai [95] costrueixen una fórmula de diferenciació per a processos de la forma $f(M_z^1, M_z^2, \ldots, M_z^n, z)$ amb M^i integral múltiple de Wiener (això és, $M_z^i = \int_{R_z} \varphi^i(\zeta)\, dW_\zeta$, amb φ^i determinista) i

$$f = f(u,z): \mathbb{R}^n \times [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

amb derivades parcials d'ordre 2 contínues respecte les components d'u i amb gradient continu respecte z; i tal que $f(M_z^1, \ldots, M_z^n, z)$ sigui una martingala local. En el cas m=1 i $\varphi=1$, obtenim el procés $f(W_z, z)$ i les condicions sobre f (a part de la derivabilitat) es converteixen en $D_1 f = D_2 f = 0$, on D_1 i D_2 són els operadors de difusió de W en cada coordenada:

$$D_1 = \frac{1}{2} y \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{i} \quad D_2 = \frac{1}{2} x \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial y} .$$

Cairoli-Walsh [15] utilitzant una fórmula de Green i integrals de línia, construeixen una fórmula d'Itô per $f(W_z)$ amb f de classe $\mathcal{C}^4$.

Nualart-Sanz [77] i [78] (vegeu també Sanz [85] i [86]) estableixen una fórmula d'Itô per a processos $f(W_z, z)$ amb

$$f = f(u,z): \mathbb{R}^2 \times [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

que admeti derivades parcials contínues fins a 4^t ordre. La fórmula s'obté utilitzant integrals estocàstiques simples, dobles i mixtes, i els processos de difussió D_1 i D_2 d'abans.

Wong-Zakai [100] (vegeu també Wong [94]) estableixen una fórmula per $f(X_z^1, \ldots, X_z^n)$, on X^i és suma d'integrals estocàstiques ordinàries, dobles i mixtes (aquests processos s'anomenen <u>semimartingales representables</u>) amb els integrants afitats i f amb derivades parcials mixtes fins a l'ordre 4 contínues.

Guyon-Prum [35] i [36] estableixen la fórmula per $f(X_z^1, \ldots, X_z^n, z)$, amb X^i semimartingala representable afitada en L^6, amb f amb derivades parcials mixtes fins a l'ordre 4 i imposant condicions del tipus $f''_{ij}(X^1_z,\dots,X^n_z,z)$ sigui integrable respecte X^i.

Brossard-Chevalier [7] construeixen una fórmula d'Itô per $f(M_z)$, amb $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$ amb suport compacte i M una martingala bibrowniana (això és, respecte la filtració producte de dos filtracions brownianes independents), afitada en L^p, $p>0$. També fan l'extensió per a martingales locals.

Chevalier [21] demostra la fórmula d'Itô per $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$ amb derivades afitades i nul.la en zero, i M una martingala local de L^4 en una filtració en que tota martingala de L^2 tingui una versió contínua.

Finalment, Nualart [75] demostra el resultat anterior sense la hipòtesi de continuïtat de totes les martingales de L^2. La fórmula és la següent:

TEOREMA 1.56 : Sigui $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$, nul.la en zero, i M una martingala de $\underline{\underline{M}}^4_c$ (o més generalment de $\underline{\underline{M}}^4_{c,loc}$), nul.la sobre els eixos. Aleshores per a tot $(s,t)\in\mathbb{R}^2_+$, tenim

$$f(M_{st}) = \int_{R_{st}} f'(M_z)\,dM_z + \int_{R_{st}} f''(M_z)\,d\tilde{M}_z + $$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^s f''(M_{xt})\,d\langle M_{.t}\rangle_x + \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_{sy})\,d\langle M_{s.}\rangle_y -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{R_{st}} f''(M_z)\,d\langle M\rangle_z - \int_{R_{st}} f'''(M_z)\,d\langle M,\tilde{M}\rangle_z -$$

$$- \frac{1}{4}\int_{R_{st}} f^{IV}(M_z)\,d\langle\tilde{M}\rangle_z ,$$

on $\tilde{M}$ és una martingala de $\underline{\underline{M}}^2_c$ ($\underline{\underline{M}}^2_{c,loc}$ respectivament), associada a M, segons veurem amb detall al proper capítol.

OBSERVACIÓ 1.57 : La fórmula anterior, de Chevalier i Nualart, és una versió compacte (no apareixen integrals mixtes i s'utilitzen integrals uniparamètriques). Les fórmules d'Itô estudiades en el cas del drap brownià (o de semimartingales representables) per Wong-Zakai, Guyon-Prum,..., són versions més explícites (amb integrals mixtes). Es pot passar de la versió explícita a la versió compacta mitjançant la fórmula de Green.

Una versió multidimensional de la fórmula anterior és la següent:

TEOREMA 1.58 : Siguin $M^1,\ldots,M^d$ martingales de $\underline{\underline{M}}^4_{c,loc}$ i $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^4$ nul.la en el zero. Llavors

$$
\begin{aligned}
f(M_z^1,\ldots,M_z^d) &= \int_{R_{st}} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_z)\, dM^i(z) + \\
&+ \int_{R_{st}} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_z)\, d\, \widetilde{M^i M^j} + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(M_{sy}) d\langle M^i_{s.}, M^j_{s.}\rangle_y + \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^s \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(M_{xt})\, d\langle M^i_{.t}, M^j_{.t}\rangle_x - \frac{1}{2}\int_{R_{st}} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(M_z)\, d\langle M^i, M^j\rangle_z - \\
&- \int_{R_{st}} \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}(M_z)\, d\, \langle M^i, \widetilde{M^k M^j}\rangle_z - \\
&- \frac{1}{4}\int_{R_{st}} \sum_{i,j,k,h} \frac{\partial^4 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k\partial x_h}(M_z)\, d\, \langle \widetilde{M^i M^j}, \widetilde{M^k M^h}\rangle_z ,
\end{aligned}
$$

on $\widetilde{M^i M^j} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{(M^i+M^j)} - \tilde{M}^i - \tilde{M}^j\right)$.

Com una primera conseqüència de la seva fórmula d'Itô, Cairoli-Walsh en treuen l'existència i continuitat del temps local (o densitat d'ocupació) del drap brownià respecte la mesura

$$d\mu(s,t) = st\ dsdt.$$

La última fórmula d'Itô establerte permet a Nualart generalitzar el resultat, demostrant l'existència i continuïtat del temps local d'una martingala contínua afitada en L^4 en relació a la mesura associada amb la variació quadràtica $\langle\tilde{M}\rangle$. Concretament,

PROPOSICIÓ 1.59 : Sigui M una martingala de $\underline{\underline{M}}_c^4$. Existeix un procés $\{L_{st}^x,\ (s,t,x) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}\}$ continu en (s,t,x), tal que per tota funció mesurable i afitada $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, q.p.t.$\omega$,

$$\int_{R_{st}} f(M_z)\ d\langle\tilde{M}\rangle_z = \int_{\mathbb{R}} L_{st}^x f(x)\ dx$$

per tot $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$.

§15: Càlcul estocàstic dependent d'un paràmetre

En el càlcul estocàstic de processos indexats per dues variables, interessa sovint considerar una de les variables com un paràmetre i utilitzar resultats de processos amb índex unidimensional. Trobar bones versions dels processos que resulten -per exemple, d'integrals estocàstiques que depenen d'un paràmetre- és un problema comú a moltes demostracions en els capítols que segueixen, i contínuament cal utilitzar els resultats de Doléans [27] i Stricker-Yor [87]. En aquest darrer article, situats en un espai de probabilitat filtrat $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \{\underline{\underline{F}}_t, t \in \mathbb{R}_+\}, P)$ que compleixi les condicions habituals, i donat un espai mesurable $(U, \underline{\underline{U}})$, s'estudia, per exemple, sota quines condicions, donada una aplicació $X: U \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, existeix una versió $Y: U \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}}$-mesurable, tal que per a tot $u \in U$, el procés X^u sigui indistingible del procés Y^u. Els resultats són del següent tipus (vegeu l'article citat, lema 1):

"Sigui $X: U \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que

a) Per a tot $u \in U$, el procés X^u sigui indistingible d'un procés continu per la dreta amb límits per l'esquerra.

b) Per a tot $t \in \mathbb{R}_+$, existeix una aplicació $H_t: U \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{F}}$-mesurable tal que per a tot $u \in U$, $X_t^u(.) = H_t(.)$ P-q.s.

Aleshores existeix una aplicació mesurable $Y: U \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que per a tot $u \in U$, Y^u és indistingible de X^u i les trajectòries de Y^u són totes contínues per la dreta i amb límits per l'esquerra."

Nosaltres tindrem normalment una mesura μ en l'espai $(U, \underline{\underline{U}})$, i les condicions a) i b) anteriors es compliran solament μ-q.p.t $u \in U$. És evident que llavors, en la tesi del lema, cal també afegir μ-q.p.t. $u \in U$, ja que llavors apliquem el lema a un subespai $(U', \underline{\underline{U}}')$, on es compleixin les condicions.

Per a veure que aquestes modificacions són correctes, ens cal el següent lema, que és una propietat de la σ-àlgebra traça. Donada una col.lecció $\mathcal{E}$ de subconjunts d'un conjunt Ω, si $E \subset \Omega$, designem per $\mathcal{E}_{|E}$ la traça de $\mathcal{E}$ sobre E:

$$\mathcal{E}_{|E} = \{ A \cap E,\ A \in \mathcal{E} \}.$$

És conegut que, si $\mathcal{E}$ és una àlgebra o σ-àlgebra de parts de Ω, $\mathcal{E}_{|E}$ també ho és com a conjunt de parts de E. Tenim:

<u>LEMA 1.60</u> : <u>Siguin</u> $(\Omega_1, \mathcal{F})$ i $(\Omega_2, \mathcal{G})$ <u>dos espais mesurables, i</u> $E \subset \Omega_1$ i $F \subset \Omega_2$. <u>Aleshores</u>

$$\mathcal{F}_{|E} \otimes \mathcal{G}_{|F} = (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_{|E \times F}.$$

DEMOSTRACIÓ

Òbviament n'hi ha prou de veure que

(1) $$\mathcal{F}_{|E} \otimes \mathcal{G} = (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_{|E \times \Omega_2},$$

ja que llavors

$$\mathcal{F}_{|E} \otimes \mathcal{G}_{|F} = (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}_{|F})_{|E \times F} = \left((\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_{|\Omega_1 \times F}\right)_{|E \times F} =$$
$$= (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_{|E \times F}.$$

Vegem, doncs, (1): És conegut que si la col.lecció $\mathcal{E}$ engendra la σ-àlgebra $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K} = \sigma(\mathcal{E})$), llavors $\mathcal{K}_{|E} = \sigma_E(\mathcal{E}_{|E})$, on aquest últim terme representa la σ-àlgebra sobre E engendrada per $\mathcal{E}_{|E}$. Llavors, si $\mathcal{F} \vartriangle \mathcal{G}$ és l'àlgebra producte $\{A \times B,\ A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}$,

$$(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_{|E \times \Omega_2} = \sigma_{E \times \Omega_2}\left((\mathcal{F} \vartriangle \mathcal{G})_{|E \times \Omega_2}\right) = \sigma_{E \times \Omega_2}(\mathcal{F}_{|E} \vartriangle \mathcal{G}) =$$
$$(\mathcal{F}_{|E} \otimes \mathcal{G})_{|E \times \Omega_2} = \mathcal{F}_{|E} \otimes \mathcal{G} \quad . \blacksquare$$

Vegem ara les modificacions dels resultats de Stricker-Yor:

PROPOSICIÓ 1.61 : Sigui $X:U\times \mathbb{R}_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció tal que

a) μ-q.p.t. $u\in U$, el procés X^u sigui indistingible d'un procés continu per la dreta i amb límits per l'esquerra (resp. continu).

b) Per tot $t\in\mathbb{R}_+$, existeixi una aplicació $H_t:U\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{U}}\otimes\underline{\underline{F}}$-mesurable tal que μ-q.p.t. $u\in U$, $X_t^u(.) = H_t(u,.)$ P-q.s. (el conjunt de μ-mesura zero no depen de t).

Aleshores existeix una aplicació $Y:U\times\mathbb{R}_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{\underline{U}}\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\otimes\underline{\underline{F}}$-mesurable, tal que q.p.t. u, Y^u és indistingible de X^u i per tot u les trajectòries de Y^u són totes contínues per la dreta i amb límits per l'esquerra (resp. contínues).

DEMOSTRACIÓ

Sigui $U_1\in\underline{\underline{U}}$ el conjunt on es compleixen les condicions a) i b) (el complementari té μ-mesura zero). Aleshores la restricció de X, que designarem igual, $X:U_1\times\mathbb{R}_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ compleix:

a) Per tot $u\in U_1$, el procés X^u és indistingible d'un continu per la dreta amb límits per l'esquerra.

b) Per tot t, existeix una aplicació $H_t':U_1\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{U}}_1\otimes\underline{\underline{F}}$-mesurable ($\underline{\underline{U}}_1 = \underline{\underline{U}}|_{U_1}$) tal que per tot $u\in U_1$, $X_t^u(.) = H_t'(u,.)$ P-q.s., on H_t' és la restricció de H_t -que existeix per hipòtesi- a $U_1\times\Omega$ i que és $\underline{\underline{U}}_1\otimes\underline{\underline{F}}$-mesurable, ja que pel lema anterior, $\underline{\underline{U}}_1\otimes\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{U}}\otimes\underline{\underline{F}})|_{U_1\times\Omega}$.

Llavors, pel lema 1 de Stricker-Yor (exposat al principi del paràgraf), existeix una aplicació $Y_1:U_1\times\mathbb{R}_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{\underline{U}}_1\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\otimes\underline{\underline{F}}$-mesurable tal que per tot $u\in U_1$, X^u és indistingible de Y_1^u, i per tot $u\in U_1$, les trajectòries de Y_1^u són totes contínues per la dreta amb límits per l'esquerra.

Però $\underline{\underline{U}}_1 \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}})|_{U_1 \times \mathbb{R}_+ \times \Omega}$, i l'aplicació

$$Y: U \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Y(u,t,\omega) = \begin{cases} Y_1(u,t,\omega) & \text{si } u \in U_1, \\ 0 & \text{en cas contrari,} \end{cases}$$

és clàrament $\underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}}$-mesurable i compleix les condicions requerides. La versió per a processos continus és òbvia.■

DE manera evident, resulten ara les tres proposicions següents:

<u>PROPOSICIÓ 1.62</u> : <u>Considerem una successió</u> $\{X_n,\ n \geq 1\}$ <u>d'aplicacions reals mesurables definides en</u> $(U\times\Omega\ ,\ \underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{F}})$. <u>Suposem que</u> q.p.t. $u \in U$, <u>la successió</u> $X_n(u,.)$ <u>convergeixi en probabilitat</u> (<u>en</u> L^p) . <u>Aleshores existeix una aplicació</u> $X: U\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{F}}$-mesurable <u>tal que</u> q.p.t. u $X(u,.) = \lim_{n\to\infty} X_n(u,.)$ <u>en probabilitat</u> (<u>en</u> L^p)

<u>PROPOSICIÓ 1.63</u> : <u>Sigui</u> $\underline{\underline{G}}$ <u>una sub-σ-àlgebra de</u> $\underline{\underline{F}}$ <u>i</u> $X: U\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>una aplicació</u> $\underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{F}}$-mesurable <u>que compleixi una de les condicions següents</u>:

a) X <u>és positiva</u>.

b) μ-q.p.t. $u \in U$, $E[|X(u)|] < \infty$.

<u>Aleshores existeix una aplicació</u> $Y: U\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{F}}$-mesurable <u>tal que</u> q.p.t. u, $Y(u) = E[X(u)|\underline{\underline{G}}]$ P-q.s.

<u>PROPOSICIÓ 1.63</u> : <u>Sigui</u> M <u>una martingala local i</u> $J: U\times\mathbb{R}_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>una aplicació</u> $\underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{P}}$-mesurable ($\underline{\underline{P}}$ designa la σ-àlgebra previsible

sobre $\mathbb{R}_+ \times \Omega$) <u>i tal que</u> μ-q.p.t. $u \in U$,

$$E\left[\left(\int_0^\infty (J_s^u)^2 \, d[M]_s\right)^{1/2}\right] < \infty .$$

<u>Aleshores existeix una aplicació</u> $Y: U \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}}$ - mesurable <u>tal que</u> q.p.t. u, <u>el procés</u> $\{Y_t^u , t \in \mathbb{R}_+\}$ <u>és indistingible de la integral estocàstica</u> $\{ \int_0^t J_s^u \, dM_s, t \in \mathbb{R}_+ \}$.

CAPÍTOL II

SOBRE LA FÓRMULA D'ITÔ I SOBRE LES MARTINGALES AMB VARIACIÓ INDEPENDENT DEL CAMÍ

Hem vist en el paràgraf 14 del capítol anterior que una de les diferències essencials entre la fórmula d'Itô per a martingales amb un índex o amb dos, és que aquesta última fa intervenir una nova martingala, escrita normalment $\tilde{M}$, i els "crochets" $\langle\tilde{M}\rangle$ i $\langle M,\tilde{M}\rangle$. També, en la versió multidimensional, si considerem les martingales $M^1,\ldots,M^d$ de $\underline{\underline{M}}_c^4$, apareixen unes noves martingales $\widetilde{M^i M^j}$ definides per

$$\widetilde{M^iM^j} = \frac{1}{2}\left((\widetilde{M^i+M^j}) - \widetilde{M^i} - \widetilde{M^j} \right) .$$

Ara bé, aquesta definició no proporciona una operació entre M^i i M^j amb propietats prou bones per als càlculs efectius que cal fer quan s'aplica la fórmula d'Itô. En efecte, el càlcul directe de $\widetilde{M^i+M^j}$ acostuma a ser llarg i delicat, i d'altra banda. ¿quan val la martingala $\widetilde{M^i(M^j+M^k)}$ que intervé en $\widetilde{M^i+M^j+M^k}$?

Aquestes dificultats s'eviten definint una operació $M*N$ entre dues martingales M i N de manera que $\widetilde{MN}$ sigui l'operació simetritzada de $M*N$, això és,

$$\widetilde{MN} = \frac{1}{2}\, M*N + \frac{1}{2}\, N*M .$$

A l'estudi de $M*N$ es dedica el primer paràgraf d'aquest capítol. En el segon paràgraf es calcula la variació quadràtica $\langle M*N\rangle$ quan M i N estan afitades en L^4.

Assenyalem que la martingala M, escrita J_M, per a M martingala forta, contínua i afitada en L^4, aparegué ja en Cairoli-Walsh [15] , definida com una integral doble. La martingala $M*N$, designada $J_{M,N}$, figura en la tesi de Guyon-Prum ([35]), per a M i N margales afitades en L^4, i hi és definida mitjançant d'una integral estocàstica doble d'una funció d'angle.

La definició de M*N donada aquí per a M i N contínues i afitades en L^p, $p\geq 2$, així com el càlcul de la variació $\langle M*N\rangle$ per a M i N cotínues i afitades en L^4, són originals.

El tercer paràgraf està dedicat a demostrar que si M és una martingala contínua, afitada en L^4, nul.la sobre els eixos i amb variació independent del camí, llavors $\langle M,\tilde{M}\rangle = 0$. També s'obtenen algunes conseqüències d'aquest teorema. Aquesta propietat de les martingales i.d.c. es complia en tots els exemples. Finalment, vàrem assolir una demostració general.

§1: La martingala M*N

TEOREMA-DEFINICIÓ 2.1: Siguin M i N dues martingales de $\underline{\underline{M}}_c^p(z_o)$, $p\geq 2$. Aleshores existeix una martingala contínua M*N de $\underline{\underline{M}}_c^{p/2}(z_o)$ tal que per a tota successió de reixes $\{\Gamma^n, n\geq 1\}$ sobre $[0,z_o]$ que esdevinguin arbitràriament fines, si definim les martingales S^n per

$$S_z^n = \sum_{u\in\Gamma_z^n} M(\Delta_u^1)N(\Delta_u^2) \quad , \; z\leq z_o,$$

aleshores

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{z\in[0,z_o]} E[|S_z^n - M*N_z|^{p/2}] = 0.$

(ii) Per a tot n, les martingales $S_{t_o}^n = \{S_{s,t_o}^n, \underline{\underline{F}}_{s,t_o}, s\leq s_o\}$ i $S_{s_o}^n = \{S_{s_o,t}^n, \underline{\underline{F}}_{s_o,t}, t\leq t_o\}$ són de $\underline{\underline{H}}^{p/2}$, i

$$\lim_{n\to\infty} S^n_{t_o} = M*N_{t_o}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} S^n_{s_o} = M*N_{s_o}$$

<u>en el sentit de la convergència en</u> $\underline{\underline{H}}^{p/2}$.

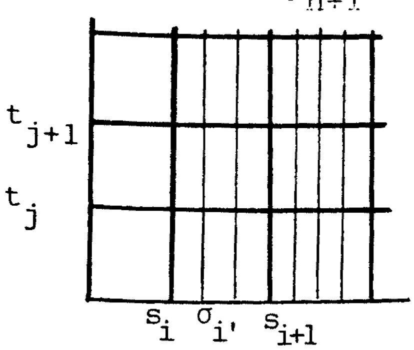
DEMOSTRACIÓ

Com que les martingales M i N, i les martingales nul.les sobre els eixos M^0 i N^0 associades amb elles tenen, respectivament, els mateixos increments rectangulars, les martingales S^n_z corresponents a M i N, i a M^0 i N^0, coincideixen, i per tant, coincideixen $M*N$ i M^0*N^0. Podem suposar, doncs, M i N nul.les sobre els eixos.

El teorema es demostra distingint els casos $p>2$ i $p=2$. La primera part s'estableix en ambdós casos adaptant, pràcticament sense modificacions, les demostracions del lema 3.2 de Nualart [74]. La segona part del teorema en el cas $p>2$ és una conseqüència òbvia de la desigualtat de Doob, i si $p=2$, la demostració segueix també la línia de l'esmentat lema, però calen més modificacions i la farem amb més detall.

Per simplificar, suposarem $z_o = (1,1)$.

a) Sigui $p>2$. Considerem una reixa Γ^n sobre $[0,1]^2$ i designem els seus punts per $u = (s_i, t_j)$, $i=1,\dots,p_{n+1}$, $j=1,\dots,q_{n+1}$, amb $0=s_1<s_2<\dots<s_{p_{n+1}}=1$ i $0=t_1<t_2<\dots<t_{q_{n+1}}=1$. Indicarem per ${}^1\Gamma^n$



una reixa sobre $[0,1]^2$ que tingui la mateixa projecció sobre l'eix t que Γ^n. Designarm els punts de ${}^1\Gamma^n$ per $u'=(\sigma_{i'}, t_j)$ $i'=1,\dots,p'_{n+1}$, $j=1,\dots,q_{n+1}$. Escriurem

$I_i = \{i' : \sigma_{i'} \in [s_i, s_{i+1}[\}$, $i = 1,\dots,p_n$. Definim

$$\bar{S}_z^n = \sum_{u' \in \bar{\Gamma}_z^n} M(\Delta^1_{u'})N(\Delta^2_{u'}), \quad z \leq (1,1).$$

Llavors

$$\text{a.1)} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{{}^1\Gamma^n} E[|\bar{S}^n_{1,1} - S^n_{1,1}|^{p/2}] = 0.$$

En efecte,

$$E[|\bar{S}^n_{1,1} - S^n_{1,1}|^{p/2}] =$$

$$= E[| \sum_{u' \in {}^1\Gamma^n} M(\Delta^1_{u'})N(\Delta^2_{u'}) - \sum_{u \in \Gamma^n} M(\Delta^1_u)N(\Delta^2_u)|] =$$

$$= E[| \sum_{u=(s_i,t_j)\in\Gamma^n} \sum_{i' \in I_i} M(\Delta^1_{u'})N(\Delta^2_{u'} - \Delta^2_u)|^{p/2}] ,$$

on $\Delta^1_{u'} =]\sigma_{i'}, \sigma_{i'+1}] \times]0,t_j]$ i $\Delta^2_{u'} - \Delta^2_u =]s_i, \sigma_{i'}] \times]t_j, t_{j+1}]$. Com que l'expressió anterior és diferència de martingales, apliquem la desigualtat de Burkholder (teorema 1.27 (i)), i obtenim

$$E[|\bar{S}^n_{1,1} - S^n_{1,1}|^{p/2}] \leq$$

$$\leq \mathbf{C}\, E[| \sum_{u\in\Gamma^n} \sum_{i' \in I_i} M(\Delta^1_{u'})^2 N(\Delta^2_{u'} - \Delta^2_u)^2|^{p/4}] \leq$$

$$\leq C\Big(E[| \sum_i \sum_{i' \in I_i} \sup_j (M(\Delta^1_{u'})^2)^{p/2}].E[|\sup_i \sup_{i'} \sum_j N(\Delta^2_{u'} - \Delta^2_u)^2|^{p/2}]\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\big(E[|M_{1,1}|^p]\big)^{1/2} \cdot \Big(E[\sup_{|z_1 - z_2| \leq \delta_n} |N_{z_1} - N_{z_2}|^p]\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \cdot \big(E[|N_{1,1}|^p]\big)^{1/p} ,$$

on δ_n és la norma de la reixa Γ^n.(Vegeu l'article citat per als detalls).

a.2) Anàlogament, designem per ${}^2\Gamma^n$ una reixa sobre $[0,1]^2$

que contingui Γ^n i que tingui la mateixa projecció que Γ^n sobre l'eix s. Designarem els punts de ${}^2\Gamma^n$ per $u'=(s_i,\tau_{j'})$, $i=1,\ldots,p_{n+1}$, $j'=1,\ldots,q'_{n+1}$, i posarem $J_j = \{j' : \tau_{j'} \in [t_j, t_{j+1}[\}$. Definim

$$\bar{\bar{S}}^n_z = \sum_{u' \in {}^2\bar{\Gamma}^n_z} M(\Delta^1_{u'}) N(\Delta^2_{u'}) \ .$$

Per simetria obtenim

$$\limsup_{\substack{n\to\infty \\ {}^2\Gamma^n}} E[|\bar{\bar{S}}^n_{1,1} - S^n_{1,1}|^{p/2}] = 0.$$

De la conjunció de a.1) i a.2), i de la desigualtat de Jensen, resulta la primera part del teorema, i de la desigualtat de Cairoli-Doob, l'existència d'una versió contínua de $M*N$. La segona part del teorema es dedueix, de forma immediata, de la desigualtat de Doob.

b) Sigui p=2. Amb les notacions anteriors:

b.1) $\limsup_{\substack{n\to\infty \\ {}^1\Gamma^n}} E[\sup_{s \leq 1} |\bar{S}^n_{1,1} - S^n_{1,1}|] = 0$.

En efecte, per la desigualtat de Davis,

$$E[\sup_{s \leq 1} |\bar{S}^n_{s,1} - S^n_{s,1}|] =$$

$$= E[\sup_{s \leq 1} | \sum_{u=(s_i,t_j)\in\Gamma^n} \sum_{i' \in I_i} N(\Delta^2_{u'} - \Delta^2_u)(M(\sigma_{i'+1} \wedge s, t_j) - M(\sigma_{i'} \wedge s, t_j))|$$

$$\leq C E[<\sum_{i,j} \sum_{i'} N(\Delta^2_{u'} - \Delta^2_u)(M(\sigma_{i'+1} \wedge \cdot, t_j) - M(\sigma_i \wedge \cdot, t_j)>_1|^{1/2}] =$$

$$= C\,E\,|\sum_{i,i'} < \sum_j N(\Delta^2_{u'} - \Delta^2_u)(M(\sigma_{i'+1}\wedge\cdot,t_j) - M(\sigma_{i'}\wedge\cdot,t_j) >_1 |^{1/2}] ,$$

ja que si $i \neq i'$, les martingales

$$\sum_j N(\Delta^2_{u'}-\Delta^2_u)M(\sigma_{i'+1}\wedge s,t_j) - M(\sigma_{i'}\wedge s,t_j))$$

i

$$\sum_j N(\Delta^2_{u'}-\Delta^2_u)M(\sigma_{i''+1}\wedge s,t_j) - M(\sigma_{i''}\wedge s,t_j))$$

són ortogonals.

Per a cada i', sigui $P_{i'}=\{\sigma^{i'}_k,\ k=i,\dots,r_{i'}\}$ una partició de $[\sigma_{i'},\sigma_{i'+1}]$, amb $\sigma_{i'}=\sigma^{i'}_1<\sigma^{i'}_2<\dots<\sigma^{i'}_{r_i} = \sigma_{i'+1}$, i sigui

$$|P_{i'}| = \max_k |\sigma^{i'}_{k+1} - \sigma^{i'}_k| .$$

Pel lema de Fatou,

$$E[\sup_{s\leq 1} |\bar{S}^n_{s,1} - S^n_{s,1}|] \leq$$

$$\leq C\,E[|\sum_i \sum_{i'\in I_i} \lim_{|P_{i'}|\downarrow 0} \sum_k (\sum_j N(\Delta^2_{u'}-\Delta^2_u)(M(\sigma^{i'}_{k+1},t_j)-M(\sigma^{i'}_k,t_j)))^2|^{1/2}] \leq$$

$$\leq C \sup_P E[|\sum_i \sum_{i'} \sum_k (\sum_j N(\Delta^2_{u'}-\Delta^2_u)M(\Delta^j_{i',k}))^2|^{1/2}] ,$$

on $\Delta^j_{i',k} =]\sigma^{i'}_k, \sigma^{i'}_{k+1}] \times]0,t_j]$, i el suprem es pren sobre totes les particions finites de $[0,1]$, $P = \{\sigma^{i'}_k,\ i'=1,\dots,p'_n,\ k=1,\dots,r_{i'}\}$ que contenen als punts $\sigma_{i'}$.

Sigui $\{f_{i',k},\ i'=1,\dots,p'_n,\ k=1,\dots,r_{i'}\}$ una família de funcions de Rademacher sobre $[0,1]$. Pel lema de Khintchine,

$$E[\sup_{s\leq 1} |\bar{S}^n_{s,1} - S^n_{s,1}|] \leq$$

$$\leq C \sup_P \int_0^1 E[| \sum_i \sum_{i'} \sum_k \sum_j N(\Delta^2_{u'} - \Delta^2_u) M(\Delta^j_{i',k}) f_{i',k}(t)|] \, dt \leq$$

$$\leq C \sup_P E[| \sum_i \sum_{i'} \sum_k \sum_j N(\Delta^2_{u'} - \Delta^2_u)^2 M(\Delta^j_{i',k})^2|^{1/2}] \leq$$

$$\leq C (E[\sum_{i,j} \sup_{i'} N(\Delta^2_{u'} - \Delta^2_u)^2] \sup_P E[\sup_{i,j} \sum_{i'} \sum_k M(\Delta^j_{i',k})^2]) ^{1/2} \leq$$

$$\leq C (E[N^2_{1,1}]) ^{1/2} (E[\sup_i \sum_{i'} (M(\sigma_{i'+1}, 1) - M(\sigma_{i'}, 1))^2]) ^{1/2} ,$$

que convergeix cap a zero, quan $n\to\infty$, en virtut del lema 2.1 de Nualart [74].

b.2) Per simetria

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{2_\Gamma n} E[\sup_{t\leq 1} |\bar{\bar{S}}^n_{1,t} - S^n_{1,t}|] = 0 .$$

De b.1 i b.2 resulta la primera part del teorema. Vegem ara

b.3)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{2_\Gamma n} E [\sup_{s\leq 1} |\bar{\bar{S}}^n_{s,1} - S^n_{s,1}|] = 0.$$

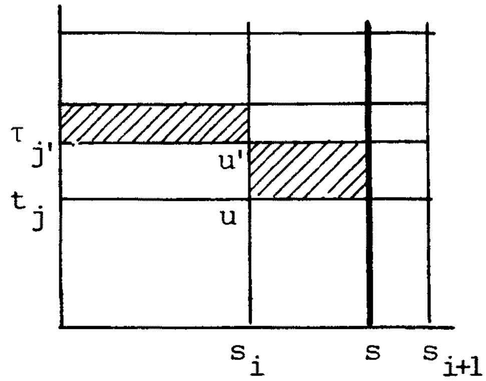
En efecte,

$$E[\sup_{s\leq 1} |\bar{\bar{S}}^n_{s,1} - S^n_{s,1}|] =$$

$$= E[\sup_{s\leq 1} | \sum_{u=(s_i,t_j)\in\Gamma^n} \sum_{j'\in J_j} N(\Delta^2_{u'}) M(](s_i\wedge s, t_j), (s_{i+1}\wedge s, \tau_{j'})]) | ,$$

on $N(\Delta^2_{u'})$ no depén de s. Per a tot i,

$$\sum_j \sum_{j'\in J_j} N(\Delta^2_{u'})M(](s_i\wedge s, t_j),(s_{i+1}\wedge s, \tau_{j'})])$$



és una martingala en s respecte $\{\underline{\underline{F}}_{s,1},\ s\leq 1\}$, i si $i\neq i'$ les martingales són ortogonals: Si $\{\xi_1,\ldots,\xi_k\}$, amb $0=\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_k=1$, és una partició de $[0,1]$ que sigui un refinament de $0=s_1<s_2<\ldots<s_{p_n}<1$, llavors

$$\big(M(](s_i\wedge\xi_{k+1},t_j),(s_{i+1}\wedge\xi_{k+1},\tau_{j'})])- M(](s_i\wedge\xi_k,t_j),(s_{i+1}\wedge\xi_k,\tau_{j'})])\big)\cdot$$

$$\cdot\big(M(](s_{i'}\wedge\xi_{k+1},\overline{t}_j),(s_{i'+1}\wedge\xi_{k+1},\overline{\tau}_{j'})])- M(](s_{i'}\wedge\xi_k,\overline{t}_j),(s_{i'+1}\wedge\xi_k,\overline{\tau}_{j'})])\big) = 0,$$

si $i\neq i'$, per a qualssevol $t_j,\tau_{j'},\overline{t}_j,\overline{\tau}_{j'}$, ja que sempre almenys un dels dos factors és zero. Per tant,

$$<\sum_j\sum_{j'} N(\Delta^2_{u'})M(](s_i\wedge\cdot,t_j),(s_{i+1}\wedge\cdot,\tau_{j'})]),\sum_j\sum_{j'}N(\Delta^2_{u'})M(](s_{i'}\wedge\cdot,t_j),(s_{i'+1}\wedge\cdot,\tau_{j'})])>_1=0.$$

Així, per Davis,

$$E[\sup_{s\leq 1}|\overline{\overline{S}}{}^n_{s,1}-S^n_{s,1}|]\leq$$

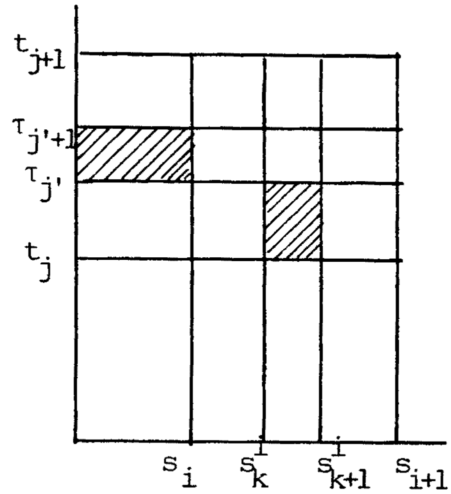
$$\leq\ C\ E[|\sum_i<\sum_j\sum_{j'}N(\Delta^2_{u'})M(](s_i\wedge\cdot,t_j),(s_{i+1}\wedge\cdot,\tau_{j'})])>_1|^{1/2}].$$

Per a cada i, sigui $P_i=\{s^i_1,s^i_2,\ldots,s^i_{r_i}\}$, una partició finita de l'interval $[s_i,s_{i+1}]$: $s_i=s^i_1<s^i_2<\ldots<s^i_{r_i}=s_{i+1}$. Per Fatou,

$$E[\sup_{s\leq 1}|\overline{\overline{S}}{}^n_{s,1}-S^n_{s,1}|]\leq$$

$$\leq C\, E\Big[\Big| \sum_i \lim_{|P_i|\downarrow 0} \sum_{s^i_k \in P_i} \Big(\sum_j \sum_{j'} N(\Delta^2_{u'})\, M](s_i,t_j),(s^i_{k+1},\tau_{j'})]\Big) -$$

$$- M(](s_i,t_j),(s^i_k,\tau_{j'})]\,)\Big)^2 \Big|^{1/2}\Big] =$$



$$= C\, E\Big[\Big|\sum_i \lim_{|P_i|\downarrow 0} \sum_k \sum_{j,j'} N(\Delta^2_{u'}) M(\Delta^{i,j}_{k,j'})\Big)^2\Big|^{1/2}\Big] \leq$$

$$(\text{on } \Delta^{i,j}_{k,j'} =]s^i_k, s^i_{k+1}] \times]t_j, \tau_{j'}] \;)$$

$$\leq C \sup_P E\Big[\Big| \sum_{i,k} \Big(\sum_{j,j'} N(\Delta^2_{u'}) M(\Delta^{i,j}_{k,j'})\Big)^2\Big|^{1/2}\Big] \quad ,$$

on $P = \{s^i_k,\ i=1,\dots,p_n,\ k=1,\dots,r_i\}$ és una partició finita de $[0,1]$ que sigui un refinament de $\{s_1,\dots,s_{p+1}\}$. Considerem, com abans, una família de funcions de Rademacher $\{f_{i,k},\ i=1,\dots,p_n,\ k=1,\dots,r_i\}$. Per les desigualtats de Khintchine i Davis,

$$E\Big[\sup_{s\leq 1} |\bar{\bar{S}}^n_{s,1} - S^n_{s,1}|\Big] \leq$$

$$\leq C \sup_P E\Big[\int_0^1 \Big| \sum_{i,k} \sum_{j,j'} N(\Delta^2_{u'}) M(\Delta^{i,j}_{k,j'}) f_{i,k}(t)\Big|\, dt\Big] =$$

$$= C \sup_P \int_0^1 E\Big[\Big| \sum_{i,k,j,j'} N(\Delta^2_{u'}) M(\Delta^{i,j}_{k,j'})\, f_{i,k}(t)\Big|\Big]\, dt \leq$$

$$\leq C \sup_P \int_0^1 E\Big[\Big| \sum_{i,k,j,j'} N(\Delta^2_{u'})^2\, M(\Delta^{i,j}_{k,j'})^2\Big|^{1/2}\Big]\, dt \leq$$

$$\leq C\Big(E\Big[\sup_i \sup_j \sum_{j'} N(\Delta^2_{u'})^2\Big] \sup_P E\Big[\sum_{i,j,k} \sup_{j'} M(\Delta^{i,j}_{k,j'})^2\Big]\Big)^{1/2}.$$

Per a afitar el primer factor, sigui $\{f_{j'},\ j' \in J_j\}$ una família de funcions de Rademacher sobre $[0,1]$. Per Khintchine,

$$E\Big[\sup_i \sup_j \sum_{j'} N(\Delta^2_{u'})^2\Big] \leq$$

$$\leq C\ E\Big[\sup_i\Big(\sup_j\int_0^1 \Big|\sum_{j'\in J_j} N(\Delta^2_{u'})f_{j'}(t)\Big|dt\Big)^2\Big] \leq$$

(per la desigualtat de Doob)

$$\leq C\ E\Big[\sup_j\Big(\int_0^1 \Big|\sum_{j'}(N(1,\tau_{j'+1})-N(1,\tau_{j'}))f_{j'}(t)\Big|dt\Big)^2\Big] \leq$$

$$\leq C\ E\Big[\sup_j\sum_{j'}(N(1,\tau_{j'+1})-N(1,\tau_{j'}))^2\Big] .$$

L'altra factor s'afita com segueix: Per la desigualtat de Doob,

$$E\Big[\sum_i\sum_j\sum_k\sup_{j'} M(\Delta^{i,j}_{k,j'})^2\Big] =$$

$$= \sum_{i,j,k} E\Big[\sup_{j'} M(\Delta^{i,j}_{k,j'})^2\Big] \leq C \sum_{i,j,k} E\Big[M(\ {}^{i}_{k,j})^2\Big] = C\big[E\ M^2_{1,1}\big] ,$$

on $\Delta^i_{k,j} =](s^i_k,t_j),(s^i_{k+1},t_{j+1})]$.

b.4) De b.1 i b.2 resulta $\lim_{n,m\to\infty} E\big[\sup_{s\leq 1}|S^n_{s,1}-S^m_{s,1}|\big]=0$. En efecte, per a qualssevol n,m, sigui Γ^{nm} una reixa sobre [0,1] amb la mateixa projecció sobre l'eix s que Γ^n i que Γ^m sobre l'eix t. Definim

$$S^{nm}_z = \sum_{u\in\bar{\Gamma}^{nm}_z} M(\Delta^1_u)N(\Delta^2_u).$$

Llavors

$$E\Big[\sup_{s\leq 1}|S^n_{s1} - S^m_{s1}|\Big] \leq$$

$$E\Big[\sup_{s\leq 1}|S^n_{s1} - S^{nm}_{s1}|\Big] + E\Big[\sup_{s\leq 1}|S^m_{s1} - S^{nm}_{s1}|\Big] .$$

Però $\lim_{n\to\infty} E[\sup_{s\leq 1} |S^n_{s1} - S^{nm}_{s1}|] = 0$ uniformement en m, i, doncs,

$$\lim_{n,m\to\infty} E[\sup_{s\leq 1} |S^n_{s1} - S^{nm}_{s1}|] = 0 ,$$

i anàlogament,

$$\lim_{m\to\infty} E[\sup_{s\leq 1} |S^m_{s1} - S^{nm}_{s1}|] = 0$$

uniformement en n, d'on resulta b.4.

Finalment, la convergència $E[\sup_{s\leq 1} |S^n_{s1} - S^m_{s1}|]$ és la de l'espai $\underline{\underline{H}}^1$, i en virtud de la completitud d'aquest espai, existeix una martingala de $\underline{\underline{H}}^1$, que designarem S_{s1}, tal que

$$E[\sup_{s\leq 1} |S^n_{s1} - S_{s1}|] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Però

$$\sup_{s\leq 1} E[|S^n_{s1} - M*N_{s1}|] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 ,$$

d'on resulta $S_{s1} = M*N_{s1}$.■

OBSERVACIONS 2.2

1) L'operació $*$ és evidenment no commutativa, distributiva respecte a la suma per la dreta i per l'esquerra.

2) $\tilde{M} = M*M$ i $\widetilde{MN} = \frac{1}{2} M*N + \frac{1}{2}N*M$.

3) $\widetilde{M+N} = \tilde{M} + \tilde{N} + M*N + N*M$.

Aquesta darrera observació proporciona una propietat que permet el càlcul de $\tilde{M}$ quan M és una suma de factors. Concretament:

<u>COROL.LARI 2.3</u>: <u>Siguin</u> $M_1,\dots,M_n$ <u>martingales de</u> $\underline{\underline{M}}_c^p$, $p\geq 2$. <u>Aleshores</u>

$$\widetilde{\sum_{i=1}^{n} M_i} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{M}_i + 2 \sum_{i\neq j} \widetilde{M_i M_j} \ .$$

DEMOSTRACIÓ

Es tracta d'un raonament per inducció trivial.■

Els resultats de Nualart [75] per a $\tilde{M}$ s'estenen sense dificultat a $M*N$. Concretament, tenim les següents propietats, la demostració de les quals és anàloga a la dels lemes 2.3 i 2.5 de l'article citat, i que s'ometrà:

<u>COROL.LARI 2.4</u> : <u>Siguin</u> M i N <u>dues martingales de</u> $\underline{\underline{M}}_c^4$ <u>i</u> $X = \{X_z,\ z\in\mathbb{R}_+^2\}$ <u>un procés continu i adaptat. Aleshores per a tot</u> $z_o \in \mathbb{R}_+^2$ <u>i per a tota successió</u> $\{\Gamma^n,\ n\geq 1\}$ <u>de reixes sobre</u> $[0,z_o]$ <u>que esdevinguin arbitràriament fines i per a tot</u> $\lambda>0$, <u>tenim</u>

$$\text{(i)}\quad \lim_{n\to\infty} P\{\sup_{z\leq z_o} |\sum_{u\in\Gamma_z^n} X_u M(\Delta_u^1)N(\Delta_u^2) - \int_{R_z} X_u \, d(M*N)_u|>\lambda\} = 0$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{n\to\infty} P\{|\sum_{u\in\bar{\Gamma}_z^n} X_u\big(M(\Delta_u^1)^2 N(\Delta_u^2)^2 - \langle M*N\rangle(\Delta_u)\big)|>\lambda\} = 0.$$

§2: Càlcul de la variació quadràtica de M*N

Siguin M i N dues martingales de $\underline{\underline{M}}_c^4(z_o)$, nul.les sobre els eixos, i sigui Γ una reixa sobre $[0,z_o]$. Considerem la martingala

$$S_z = \sum_{u\in\overline{\Gamma}_z} M(\Delta_u^1)N(\Delta_u^2)\ , \quad z \leqq z_o .$$

Aleshores:

<u>LEMA 2.5</u>: <u>Amb les notacions anteriors</u>,

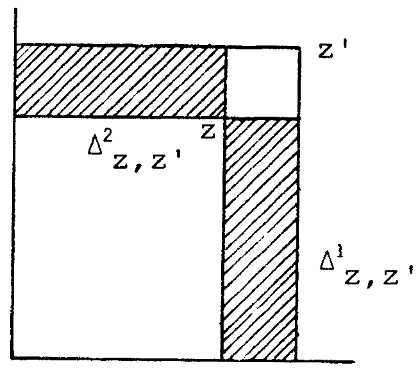
$$\langle S\rangle_z = \sum_{u\in\overline{\Gamma}_z} \langle M\rangle^1(\Delta_u^1)\langle N\rangle^2(\Delta_u^2)\ .$$

DEMOSTRACIÓ

Considerem dos punts de $[0,z_o]$, $z=(s,t)$ i $z'=(s',t')$, $z<z'$. Sigui

$\Delta^1_{z,z'} =]s,s']\times]0,t]$ i

$\Delta^2_{z,z'} =]0,s]\times]t,t']$. Aleshores



$S_z = \sum_{u\in\Gamma} M(\Delta_u^1\cap R_z)N(\Delta_u^2\cap R_z)$, i per tant,

$$S(]z,z']) = \sum_{u\in\Gamma}\left[M(\Delta_u^1\cap R.)N(\Delta_u^2\cap R.)\right](]z,z']) =$$

$$= \sum_{u\in\Gamma} M(\Delta_u^1\cap\Delta^1_{z,z'})N(\Delta_u^2\cap\Delta^2_{z,z'}) =$$

$$= \sum_{u\in\overline{\Gamma}_{z'}} M(\Delta_u^1\cap\Delta^1_{z,z'})N(\Delta_u^2\cap\Delta^2_{z,z'}).$$

Designem per A_z el procés $\sum_{u\in\overline{\Gamma}_z} \langle M\rangle^1(\Delta_u^1)\langle N\rangle^2(\Delta_u^2)$, que té les següents propietats:

a) A és creixent: Anàlogament que abans tenim:

$$A(]z,z']) = \sum_{u\in\overline{\Gamma}_{z'}} \langle M\rangle^1(\Delta_u^1\cap\Delta^1_{z,z'})\langle N\rangle^2(\Delta_u^2\cap\Delta^2_{z,z'})\ .$$

Com que M és nul.la sobre els eixos, per a tot s, $\langle M\rangle^1_{s0}=0$ i del caràcter creixent de $\langle M\rangle^1_{st}$ en s, fixat t, resulta $\langle M\rangle^1(\Delta^1_u \cap \Delta^1_{z,z'})\geq 0$; i anàlogament, $\langle N\rangle^2(\Delta^2_u \cap \Delta^2_{z,z'})\geq 0$.

b) $\langle M\rangle^1_{st}$ és $\underline{\underline{F}}_{st}$-mesurable (i també $\langle N\rangle^2_{st}$) i, doncs, A és adaptat; per construcció és continu per l'esquerra. Per tant, A és previsible.

c) S^2 - A és una martingala feble. Hem de veure que

$$E[S^2(]z,z'])|\underline{\underline{F}}_z] = E[A(]z,z'])|\underline{\underline{F}}_z] .$$

En efecte,

$$E[S^2(]z,z'])|\underline{\underline{F}}_z] = E[(S(]z,z']))^2|\underline{\underline{F}}_z]=$$

$$= \sum_{u\in\bar{\Gamma}_{z'}} E[M(\Delta^1_u\cap\Delta^1_{z,z'})N(\Delta^2_u\cap\Delta^2_{z,z'})|\underline{\underline{F}}_z] +$$

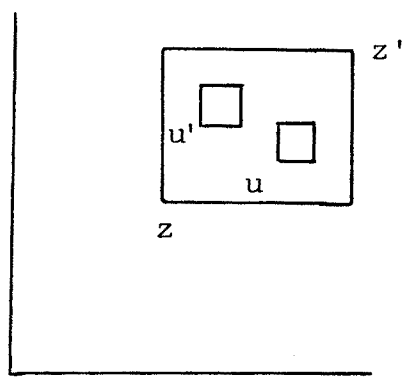
$$+ 2 \sum_{\substack{u,u'\in\bar{\Gamma}_{z'}\\ u\neq u'}} E[M(\Delta^1_u\cap\Delta^1_{z,z'})N(\Delta^2_u\cap\Delta^2_{z,z'})M(\Delta^1_{u'}\cap\Delta^1_{z,z'})N(\Delta^2_{u'}\cap\Delta^2_{z,z'})|\underline{\underline{F}}_z] .$$

Però el segon terme és zero: Si $u,u'\in[z,z']$, amb $u' \curlywedge u$, llavors

$$E[M(\Delta^1_u)N(\Delta^2_u)M(\Delta^1_{u'})N(\Delta^2_{u'})|\underline{\underline{F}}_z] =$$

$$E[M(\Delta^1_u)N(\Delta^2_u)M(\Delta^1_{u'})E[N(\Delta^2_{u'})|\underline{\underline{F}}_{u'}]|\underline{\underline{F}}_z]=$$

$= 0.$



Les altres possibilitats per a u i u' es calculen igual.

Anàlogament, pel primer terme suposem $u\in[z,z'[$ (els altres casos es tracten de la mateixa manera), i per la independència condicional, el caràcter

1-martingala de M i 2-martingala de N, i la nul.litat sobre els eixos,

$$E[M(\Delta_u^1)^2 N(\Delta_u^2)^2 | \underline{\underline{F}}_z] = E[M(\Delta_u^1)^2 N(\Delta_u^2)^2 | \underline{\underline{F}}_u | \underline{\underline{F}}_z] =$$

$$= E[E[M(\Delta_u^1)^2 | \underline{\underline{F}}_u] \cdot E[N(\Delta_u^2)^2 | \underline{\underline{F}}_u] | \underline{\underline{F}}_z] =$$

$$= E[\langle M\rangle^1(\Delta_u^1) \langle N\rangle^2(\Delta_u^2) | \underline{\underline{F}}_z] \ .$$

De les propietats a), b) i c), i de la unicitat de la variació quadràtica (teorema 1.22), deduïm que $\langle S\rangle = A$.■

<u>LEMA2.6</u>: <u>Sigui</u> $\{M^n, n \geq 1\}$ <u>una successió de martingales de</u> $\underline{\underline{M}}_c^2(z_o)$ <u>tals que</u>

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z \leq z_o} E[|M_z^n - M_z|^2] = 0.$$

<u>Aleshores</u>

$$\lim_{n\to\infty} E[|\langle M^n\rangle_{z_o} - \langle M\rangle_{z_o}|] = 0.$$

DEMOSTRACIÓ

De les desigualtats de Burkholder per a martingales contínues amb dos paràmetres (teorema 1.30 i) per a $F(x)=x^2$ i de la desigualtat de Cairoli-Doob, resulta:

$$E[\langle M^n - M\rangle_{z_o}] \leq C\ E[\sup_{z\leq z_o} |M_z^n - M_z|^2] \leq C \sup_{z \leq z_o} E[|M_z^n - M_z|^2] \ .$$

i de la desigualtat

$$E[\,|\,\langle M^n\rangle_{z_o} - \langle M\rangle_{z_o}\,|\,] \leq E[\langle M^n - M\rangle_{z_o}]$$

resulta el lema.■

<u>TEOREMA 2.7</u>: <u>Siguin</u> M i N <u>dues martingales de</u> $\underline{\underline{M}}_c^4(z_o)$, <u>nul.les sobre els eixos. Aleshores per a qualsevol successió de reixes</u> $\{\Gamma^n,\ n\geq 1\}$ <u>sobre</u> $[0,z_o]$ <u>que esdevinguin arbitràriament fines</u>,

$$\langle M*N\rangle_z = \lim_{n\to\infty} \sum_{u\in\bar{\Gamma}_z^n} \langle M\rangle^1(\Delta_u^1)\langle N\rangle^2(\Delta_u^2) \qquad \text{en } L^1.$$

<u>A més</u>, <u>si</u> M <u>té increments ortogonals en el sentit 1 i</u> N <u>en el sentit 2</u>, <u>aleshores</u>

$$\langle M*N\rangle_\zeta = \iint_{R_\zeta\times R_\zeta} \Psi(z,z')\ d\langle M\rangle^1(z)\ d\langle N\rangle^2(z')\ ,$$

on $\Psi:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ és la funció deterministe d'angle

$$\Psi(z,z') = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z \curlywedge z'\ , \\ 0 & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓ

La primera part és una conseqüència dels lemes 2.5 i 2.6. La segona part es basa en el fet que les funcions -no simples-

$$\Psi_n = \sum_{u\in\Gamma^n} 1_{\Delta_u^1\times\Delta_u^2}$$

s'aproximen puntualment a la funció Ψ. I, doncs, per convergència dominada, s'aproximen a Ψ en la norma

$$\|\Psi\| = \left(\iint_{R_{z_o}\times R_{z_o}} \Psi^2(z,z')\, d\langle M\rangle^1(z)\, d\langle N\rangle^2(z')\right)^{1/2}. \blacksquare$$

OBSERVACIONS 2.8:

1) La martingala M*N sempre es pot expressar com a

$$M*N_\zeta = \iint_{R_\zeta\times R_\zeta} \Psi(z,z')\, dM_z dN_{z'} \ ,$$

on la integral s'ha d'entendre com una integral estocàstica doble d'una funció d'angle, i Ψ és la funció definida al teorema anterior. El pas al "crochet" exigiria un estudi de les integrals del tipus

$$\iint_{R_\zeta\times R_\zeta} f(z,z')\, dA_z dB_{z'} \ ,$$

amb A creixent en la primera coordenada i B creixent en la segona.

2) Si M té increments ortogonals en el sentit 1, $\langle M\rangle^1_{st}$ és creixent en (s,t) (proposició 1.39), i anàlogament, si N té increments ortogonals en el sentit 2, $\langle N\rangle^2_{st}$ és creixent en (s,t); doncs, la integral anterior té sentit. A més, es pot calcular: per Fubini,

$$\langle M*N\rangle_{st} = \iint_{R_{st}\times R_{st}} \Psi^2(z,z')\, d\langle M\rangle^1(z)\, d\langle N\rangle^2(z') =$$

$$= \iint_{R_{st}\times R_{st}} 1_A(z,z')\, d\langle M\rangle^1(z)\, d\langle N\rangle^2(z') \ ,$$

on $A = \{(z,z') \in \mathbb{R}^4_+ \ , \ z \curlywedge z'\}$. Fixat $z=(x,y)$,

$$\int_{R_{st}} 1_A(z,z')\, d\langle N\rangle^2(z') = \langle N\rangle^2(x,t) - \langle N\rangle^2(x',y),$$

i per tant,

$$\langle M*N\rangle_{st} = \int_{R_{st}} \langle N\rangle^2(x,t)\, d\langle M\rangle^1(x,y) - \int_{R_{st}} \langle N\rangle^2(x,y)\, d\langle M\rangle^1(x,y).$$

En particular, $\langle W*W\rangle_{st} = \langle J\rangle_{st} = \dfrac{s^2t^2}{2}$.

§3: I.D.C. implica $<M,\tilde{M}> = 0$

Començarem veient una propietat dels elements de $\underline{\underline{M}}_c^4(z_o)$, nuls sobre els eixos (lema 2.9) i una caractrització de les martingales d'aquest espai nul.les sobre els eixos i amb variació i.d.c. (lema 2.10), que són una versió més forta d'unes propietats establertes per Zakai a [101](vegeu el teorema 1.34). Per simplificar, suposarem en tot aquest paràgraf que $z_o=(1,1)$.

LEMA 2.9: *Sigui* M *una martingala de* $\underline{\underline{M}}_c^4(1,1)$ *nul.la sobre els eixos. Per a tota successió de reixes* $\{\Gamma^n,\ n\geq 1\}$ *sobre* $[0,1]^2$ *que esdevinguin arbitràriament fines tenim*

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{z\in[0,1]^2} E[|\sum_{u\in\Gamma_z^n} M(\Delta_u^i)M(\Delta_u) - \tfrac{1}{2}(<M>_z^i - <M>_z)|^2] = 0\ ,\quad i=1,2.$$

DEMOSTRACIÓ

Vegem el cas i=1. Sigui $\Gamma^n = \Gamma_1^n\times\Gamma_2^n$, amb $\Gamma_1^n=\{s_1,s_2,\dots,s_{p+1}\}$, $0=s_1<s_2<\dots<s_{p+1}=1$, i $\Gamma_2^n = \{t_1,t_2,\dots,t_{q+1}\}$, $0=t_1<t_2<\dots<t_{q+1}=1$. Fixem $(s,t)\in[0,1]^2$, i siguin

$$\Delta_{ij} =](s_i\wedge s,t_j\wedge t),(s_{i+1}\wedge s,t_{j+1}\wedge t)]\ ,$$

$$\Delta_{ij}^1 =](s_i\wedge s,0),(s_{i+1}\wedge s,t_j\wedge t)]\ .$$

Aleshores

$$\sum_{i=1}^{p}\left(M(s_{i+1}\wedge s,t)-M(s_i\wedge s,t)\right)^2=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}M(\Delta_{ij})^2+2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}M(\Delta_{ij})M(\Delta_{ij}^1)\ ,$$

i, doncs,

$$E[|\sum_{u\in\Gamma_z^n} M(\Delta_u)M(\Delta_u^1) - \tfrac{1}{2}(<M>_{st}^1 - <M>_{st})|^2] =$$

$$= \frac{1}{4} E\Big[\Big| \sum_{i=1}^{p} (M(s_{i+1}\wedge s,t)-M(s_i\wedge s,t))^2 - \langle M\rangle^1_{st} - \Big(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} M(\Delta_{ij})^2 - \langle M\rangle_{st}\Big)\Big|^2\Big] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} E\Big[\Big| \sum_i (M(s_{i+1}\wedge s,t)-M(s_i\wedge s,t))^2 - \langle M\rangle^1_{st}\Big|^2\Big] + \frac{1}{2} E\Big[\Big| \sum_{i,j} M(\Delta_{ij})^2 - \langle M\rangle_{st}\Big|^2 ,$$

i el lema resulta ara dels resultats de Nualart [74] .■

<u>LEMA 2.10</u>: <u>Sigui</u> M <u>una martingala de</u> $\underline{\underline{M}}_c^4$ <u>nul.la sobre els eixos</u>. <u>Llavors</u> M <u>té variació independent del camí si i només si per a qualsevol successió de reixes</u> $\{\Gamma^n,\ n\geq 1\}$ <u>sobre</u> $[0,1]^2$ <u>que esdevinguin arbitràriament fines</u>,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{z,z'\in[0,1]^2 \\ z<z'}} E\Big[\Big| \sum_{u\in\Gamma^n\cap[z,z']} M(\Delta_u^i)M(\Delta_u)\Big|^2\Big] = 0 \quad , \; i = 1,2 \; .$$

DEMOSTRACIÓ

La condició és clarament suficient. Vegem que és necessària: Si M té variació i.d.c., per a qualssevol $z=(s,t)$, $z'=(s',t')$, si designem per D_u el producte $M(\Delta_u^i)M(\Delta_u)$, $u\in\Gamma^n$, aleshores

$$E\Big[\Big| \sum_{u\in\Gamma^n\cap[z,z'[} D_u\Big|^2\Big] \quad E\Big[\Big| \sum_{u\in\overline{\Gamma}^n_{z'}} D_u\Big|^2\Big] + E\Big[\Big| \sum_{u\in\overline{\Gamma}^n_{z}} D_u\Big|^2\Big] + E\Big[\Big| \sum_{u\in\overline{\Gamma}^n_{(s',t)}} D_u\Big|^2\Big] +$$

$$+ E\Big[\Big| \sum_{u\in\overline{\Gamma}^n_{(s,t')}} D_u\Big|^2\Big] ,$$

i sols falta prendre suprems respecte a z i z', i passar-ho al límit.■

<u>TEOREMA 2.11</u>: <u>Sigui</u> M <u>una martingala de</u> $\underline{\underline{M}}_c^4$ <u>nul.la sobre els eixos</u>. <u>Si</u> M <u>té variació independent del camí, aleshores</u> $\langle M,\tilde{M}\rangle = 0$.

on $\bar{\Delta}_{ijj'} =]s_i, s_{i+1}] \times]\tau_{j'}, \tau_{j'+1}]$. Fent una descomposició més obtenim:

$$A_1 = \sum_{\substack{i,j,j',j'' \\ j'' \geq j'+1}} M(\Delta^1_{ij}) M(\bar{\Delta}_{ijj'}) M(\Delta^2_{ij''}).$$

Però

$$\sum_i M(\Delta^1_{ij}) M(\bar{\Delta}_{ijj'}) M(\Delta^2_{ij''})$$

és 2-diferència de martingales, és a dir, és integrable, $\underline{\underline{F}}_{1,\tau_{j''+1}}$-mesurable, i ortogonal a $\underline{\underline{F}}_{1,\tau_{j''}}$. Per les desigualtats de Davis i Cauchy-Schwarz,

$$E[|A_1|] \leq C\, E[\ \{ \sum_{\substack{j,j',j'' \\ j'' \geq j'+1}} (\sum_i M(\Delta^1_{ij}) M(\bar{\Delta}_{ijj'}) M(\Delta^2_{ij''}))^2 \}^{1/2}\ ] \leq$$

$$\leq C\, E\,[\ \{ \sum_{j,j',j''} (\sum_i M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2) (\sum_i M(\Delta^1_{ij})^2 M(\Delta^2_{ij''})^2) \}^{1/2}\ ] =$$

$$= C\, E\,[\{ \sum_{j,j'} (\sum_i M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2) \sum_i \sum_{j'' \geq j'+1} M(\Delta^1_{ij})^2 M(\Delta^2_{ij''})^2 \}^{1/2}] \leq$$

$$\leq C\, E[\{\sup_j \sum_{i,j'} M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2\}^{1/2} \{ \sum_j \sup_{j'} \sum_i \sum_{j'' \geq j'+1} M(\Delta^1_{ij})^2 M(\Delta^2_{ij''})^2\}^{1/2}] \leq$$

$$\leq C\, \{E[\sup_j \sum_{i,j'} M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2\}^{1/2} \{E[\sum_j \sup_{j'} \sum_i \sum_{j'' \geq j'+1} M(\Delta^1_{ij})^2 M(\Delta^2_{ij''})^2]\}^{1/2} \leq$$

$$\leq C\, \{E[\sup_j \sum_{i,j'} M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2\}^{1/2} \{E[\sum_{i,j} (M(\Delta^1_{ij})^2 \sum_{j'} M(\Delta^2_{ij'})^2)]\}^{1/2} \leq$$

$$\leq C\, \{E \sup_j \sum_{i,j'} M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2\}^{1/2}\,.$$

$$\cdot\, \{E[\sup_j (\sum_i M(\Delta^1_{ij})^2)^2]\}^{1/4} \{ E[(\sum_j \sup_i \sum_{j'} M(\Delta^2_{ij'})^2)^2\ ]\}^{1/4} =$$

$$= C\, b_1^{1/2} \cdot b_2^{1/4} \cdot b_3^{1/4}\,.$$

1.a) Estudi de b_1: Per a cada j, j' tenim

$$\sum_i M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2 = (M(1,\tau_{j'+1})-M(1,\tau_{j'}))^2 - 2\sum_i (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))M(\bar{\Delta}_{ijj'}) ,$$

i per tant,

$$b_1 = E\Big[\sup_j \sum_{i,j'} M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2\Big] \leq$$

$$\leq E\Big[\sup_j \sum_{j'} (M(1,\tau_{j'+1})-M(1,\tau_{j'}))^2\Big] + 2E\Big[\sup_j \Big|\sum_{i,j'} (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))M(\bar{\Delta}_{ijj'})\Big|\Big] =$$

$$= b'_1 + 2b''_1 \quad .$$

Ocupem-nos de b''_1:

$$E\Big[\sup_j \Big|\sum_{i,j'} (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))M(\bar{\Delta}_{ijj'})\Big|\Big] =$$

$$= E\Big[\Big\{\sup_j \Big|\sum_{i,j'} (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))M(\bar{\Delta}_{ijj'})\Big|^2\Big\}^{1/2}\Big] \leq$$

$$\leq E\Big[\Big\{\sum_j \Big(\sum_{i,j'} (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))M(\bar{\Delta}_{ijj'})\Big)^2\Big\}^{1/2}\Big] .$$

Considerem $\{r_j, j=1,\dots,q\}$ una successió de funcions de Rademacher sobre $[0,1]$. Pel lema de Khintchine i la desigualtat de Davis,

$$b''_1 \leq CE\Big[\int_0^1 \Big|\sum_j \sum_{i,j'} (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))M(\bar{\Delta}_{ijj'})r_j(t)\Big| \, dt\Big] =$$

$$= C\int_0^1 E\Big[\Big|\sum_i \sum_{j,j'} (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))M(\bar{\Delta}_{ijj'})r_j(t)\Big|\Big] \, dt \leq$$

$$\leq C\int_0^1 E\Big[\Big\{\sum_i \Big(\sum_{j,j'} (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))M(\bar{\Delta}_{ijj'})r_j(t)\Big)^2\Big\}^{1/2}\Big] \, dt .$$

Sigui $\{r_i(s), i=1,\dots,p\}$ una altra successió de Rademacher sobre $[0,1]$. Apliquem primer el lema de Khintchine ordinari i després la versió amb dos paràmetres (cfr. Metreaux [62]).

$$b_1'' \leq C \int_0^1\int_0^1 E[|\sum_{i,j,j'} (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))M(\bar{\Delta}_{ijj'})r_j(t)r_i(s)|]\,dtds \leq$$

$$\leq C\, E[\{\sum_{i,j} (\sum_{j'} (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))M(\bar{\Delta}_{ijj'}))^2\}^{1/2}] \leq$$

$$\leq C\, E[\{\sum_{i,j} (\sum_{j'} (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))^2(\sum M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2)\}^{1/2}] \leq$$

$$\leq C\, \{E[\sup_i \sup_j \sum_{j'} (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))^2]\}^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \{E[\sum_{i,j} \sum_{j'} M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2]\}^{1/2} .$$

Per Burkholder amb dos paràmetres podem afitar el segon factor:

$$E[\sum_{i,j,j'} M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2] \leq C\, E[(\sum_{i,j,j'} M(\bar{\Delta}_{ijj'}))^2] = C\, E[M_{11}^2] .$$

Per afitar el primer factor, considerem una successió de funcions de Rademacher $\{r_{j'}(t),\ j'\in J_j\}$ sobre $[0,1]$. De les desigualtats de Khintchine i Doob resulta:

$$E[\sup_i \sup_j \sum_{j'} (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))^2] \leq$$

$$\leq C\, E[\sup_i (\sup_j \int_0^1 |\sum_{j'} (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))r_{j'}(t)|\,dt)^2] \leq$$

$$\leq C\, E[\sup_j (\int_0^1 |\sum_{j'} (M(1,\tau_{j'+1})-M(1,\tau_{j'}))r_{j'}(t)|\,dt)^2] \leq$$

$$\leq C\, E[\sup_j \sum_{j'} (M(1,\tau_{j'+1})-M(1,\tau_{j'}))^2] .$$

D'on resulta

$$b_1 \leq C\, E[\sup_j \sum_{j'} (M(1,\tau_{j'+1})-M(1,\tau_{j'}))^2]$$

1.b) Estudi de b_2: Per Doob i Burkholder-Davis-Gundy

$$b_2 = E[\sup_j (\sum_i M(\Delta^1_{ij})^2)^2] = E[\sup_j (\sum_i (M(s_{i+1},t_j)-M(s_i,t_j))^2)^2] \leq$$

$$\leq C\,E[(\sum_i (M(s_{i+1},1)-M(s_i,1))^2)^2] \leq C\,E[(\sum_i (M(s_{i+1},1)-M(s_i,1)))^4] \leq$$

$$\leq C\,E[M_{11}^4] .$$

1.c) Estudi de b_3:

$$b_3 = E[(\sum_j \sup_i \sum_{j'} M(\Delta^2_{ij'},\mathfrak{f})^2] \leq E[\sum_j \sum_{j'} \sup_i ((M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))^2)^2].$$

Definim el procés

$$B_s = \sum_{j,j'} \sup_{\sigma \leq s} (M(\sigma,\tau_{j'+1})-M(\sigma,\tau_{j'}))^2$$

que és continu, creixent i $\underline{\underline{F}}_{s1}$-adaptat. El seu potencial associat Z_s val

$$Z_s = E[B_1 - B_s | \underline{\underline{F}}_{s1}] =$$

$$= E[\sum_{j,j'} (\sup_{\sigma \leq 1} (M(\sigma,\tau_{j'+1})-M(\sigma,\tau_{j'}))^2 - \sup_{\sigma \leq s}(M(\sigma,\tau_{j'+1})-M(\sigma,\tau_{j'}))^2 \,|\underline{\underline{F}}_{s1}] \leq$$

$$\leq E[\sum_{j,j'} \sup_{\sigma\in[s,1]} (M(\sigma,\tau_{j'+1})-M(\sigma,\tau_{j'}))^2 |\underline{\underline{F}}_{s1}] =$$

$$= \sum_{j,j'} E[\sup_{\sigma\in[s,1]} (M(\sigma,\tau_{j'+1})-M(\sigma,\tau_{j'}))^2 |\underline{\underline{F}}_{s1}] \leq$$

$$\leq C \sum_{j,j'} E[(M(1,\tau_{j'+1})-M(1,\tau_{j'}))^2 |\underline{\underline{F}}_{s1}] = m_s ,$$

on l'última desigualtat és deguada a la desigualtat de Doob condicionada, i $\{m_s, \underline{\underline{F}}_{s1}, s\in[0,1]\}$ és una martingala. De la desigualtat de Garsia-Neveu deduïm:

$$E[b_3] \leq E[(\sum_{j,j'} \sup_i (M(s_i,\tau_{j'+1})-M(s_i,\tau_{j'}))^2)^2] \leq E[B_1^2] \leq$$

$$\leqq CE[m_1^2] = C\,E[(\sum_{j,j'} (M(1,\tau_{j'+1})-M(1,\tau_{j'}))^2)^2] \leqq C\,E[M_{11}^4] \,.$$

Tenim, en resum,

$$E[|A_1|] \leqq C\, b_1^{1/2} \cdot b_2^{1/4} \cdot b_3^{1/4} \leqq$$

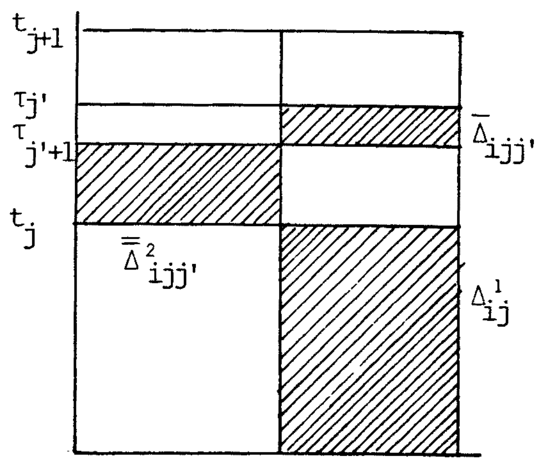
$$\leq C\{E[\sup_j \sum_{j'} (M(1,\tau_{j'+1})-M(1,\tau_{j'}))^2]\}^{1/2} \cdot E[M_{11}^4]^{1/4}\, E[M_{11}^4]^{1/4} \,.$$

i, doncs,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{m\to\infty \\ m>n}} E[|A_1|] \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} E[|A_1|] = 0,$$

d'acord amb el lema 2.1 de Nualart [74].

2) $E[|A_2|]$ es tracta igual:



$$A_2 = \sum_{i,j,i',j'} M(\Delta^1_{ij})M(\Delta_{i'j'})M(\overline{\overline{\Delta}}{}^2_{ijj'}) =$$

$$= \sum_{i,j,j'} M(\Delta^1_{ij})M(\overline{\Delta}_{ijj'})M(\overline{\overline{\Delta}}{}^2_{ijj'}) \,.$$

Aleshores $\sum_i M(\Delta^1_{ij})M(\overline{\Delta}_{ijj'})M(\overline{\overline{\Delta}}{}^2_{ijj'})$ és 2-diferència de martingales i per la desigualtat de Davis, i la de Doob,

$$E[|A_2|] \leqq C\, E[\{\sum_{j,j'} (\sum_i M(\Delta^1_{ij})M(\overline{\Delta}_{ijj'})M(\overline{\overline{\Delta}}{}^2_{ijj'}))^2\}^{1/2}] \leqq$$

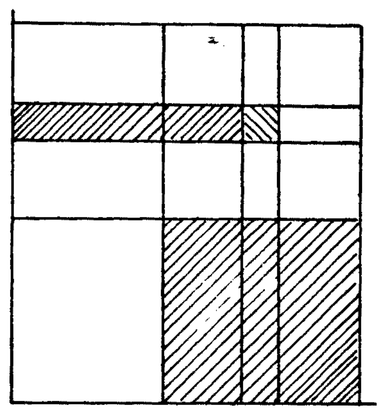
$$\leq C\{E[\sup_{j} \sum_{i,j'} M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2]\}^{1/2} \cdot \{E[\sum_{j} \sup_{j'} \sum_{i} M(\Delta^1_{ij})^2 M(\bar{\bar{\Delta}}^2_{ijj'})^2]\}^{1/2} \leq$$

$$\leq C\{E[\sup_{j} \sum_{i,j'} M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2]\}^{1/2} \cdot \{E[\sum_{i,j} M(\Delta^1_{ij})^2 M(\bar{\bar{\Delta}}^2_{ij})^2]\}^{1/2} \leq$$

$$\leq C\{E[\sup_{j} \sum_{i,j'} M(\bar{\Delta}_{ijj'})^2]\}^{1/2} \cdot \{E[\sup_{j} (\sum_{i} M(\Delta^1_{ij})^2)^2]\}^{1/4} \cdot \{E[(\sum_{j} \sup_{i} M(\bar{\bar{\Delta}}^2_{ij})^2)^2]\}^{1/2}.$$

Però el primer terme és precisament b_1, el segon b_2 i el tercer s'afita exactament igual que b_3. D'on resulta, igual que abans,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{m\to\infty \\ m>n}} E[|A_2|] = 0 .$$



3) Vegem $E[|A_3|]$:

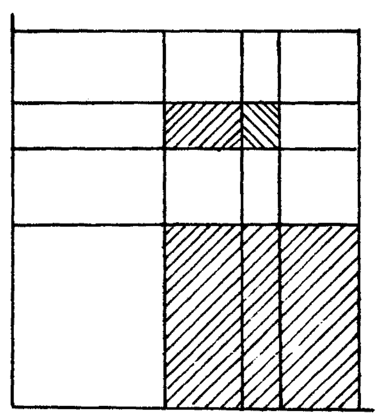
$$E[|A_3|] = E[| \sum_{i,j,i',j'} M(\Delta^1_{ij}) M(\Delta_{i'j'}) M(\Delta^2_{i'j'})|] =$$

$$= E[| \sum_{i,} M(\Delta^1_{ij}) \cdot \sum_{i',j'} M(\Delta_{i'j'}) M(\Delta^2_{i'j'})|] \leq$$

$$\leq \sum_{i,j} (E[M(\Delta^1_{ij})^2])^{1/2} \cdot (E[| \sum_{i',j'} M(\Delta_{i'j'}) M(\Delta^2_{i'j'})|^2])^{1/2} ,$$

i, doncs, fixat n, pel lema 2.10,

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ m>n}} E[|A_3|] = 0 .$$



4) Considerem finalment $E[|A_4|]$:

$$E[|A_4|] = E[| \sum_{i,j,i',j'} M(\Delta^1_{ij}) M(\Delta_{i'j'}) M(\hat{\Delta}^2_{ii'jj'})|] .$$

Per a cada i, j, j',

$$M(\overline{\Delta}_{ijj'})^2 = \sum_{i'} M(\Delta_{i'j'})^2 + 2\sum_{i'} M(\Delta_{i'j'})M(\hat{\Delta}^2_{ii'jj'}) \quad ,$$

d'on

$$E[|A_4|] \leq \frac{1}{2} E[|\sum_{i,j} M(\Delta^1_{ij}) \sum_{j'} M(\overline{\Delta}_{ijj'})^2|] + \frac{1}{2} E[|\sum_{i,j} M(\Delta^1_{ij}) \sum_{i',j'} M(\Delta_{i'j'})^2|] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \{E[\sup_{i,j} M(\Delta^1_{ij})^2]\}^{1/2} \cdot \{E[(\sum_{i,j,j'} M(\overline{\Delta}_{ijj'})^2)^2]\}^{1/2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \{E[\sup_{i,j} M(\Delta^1_{ij})^2]\}^{1/2} \cdot \{E[(\sum_{i,j,i',j'} M(\Delta_{i'j'})^2)^2]\}^{1/2} \quad ,$$

i aplicant la desigualtat de Burkholder amb dos paràmetres als dos sumands obtenim,

$$E[|A_4|] \leq C \{E[\sup_{i,j} M(\Delta^1_{ij})^2]\}^{1/2} \cdot \{E[M^4_{11}]\}^{1/2} \leq$$

$$\leq C \{E[\sup_{|z-z'|<\delta_n} |M_z - M_{z'}|^2]\}^{1/2} \cdot \{E[M^4_{11}]\}^{1/2} \quad ,$$

on δ_n és la norma de la reixa Γ^n. Com que M és contínua tenim

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{m\to\infty \\ m>n}} E[|A_4|] \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} C\, E[\sup_{|z-z'|<\delta_n} |M_z - M_{z'}|^2]^{1/2} \cdot \{E[M^4_{11}]\}^{1/2} = 0 \ .$$

5) Recapitulant obtenim:

$$\limsup_{n\to\infty} E[|\sum_{u\in\Gamma^n} M(\Delta_u)M(\Delta^1_u)M(\Delta^2_u)|] =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \limsup_{\substack{m\to\infty \\ m>n}} E\left[\left| \sum_{u\in\Gamma^n} M(\Delta_u)M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2)\right|\right] \leq$$

$$\limsup_{n\to\infty} \limsup_{\substack{m\to\infty \\ m>n}} \left(E[|A_1|] + E[|A_2|] + E[|A_3|] + E[|A_4|]\right) = 0 .$$

Del fet que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{u\in\Gamma^n} \left(M(\Delta_u)M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2) - \langle M,\tilde{M}\rangle(\Delta_u)\right) = 0$$

en probabilitat (cfr. Nualart [75]), resulta $\langle M,\tilde{M}\rangle = 0$.■

OBSERVACIONS 2.12:

1) El teorema s'estén, de manera evident, als elements de $\underline{\underline{M}}^4_{c,loc}$.

2) Si en la filtració on estem tota martingala afitada en L^2 té una versió contínua (condició que és compleix en els exemples habituals: filtració associada a un drap brownià i filtració producte de les filtracions engendrades per dos brownians multidimensionals independents), el teorema val també per a les martingales afitades en L^2, ja que (cfr. Chevalier [21]) aquestes martingales són de $\underline{\underline{M}}^p_{c,loc}$, per a tot $p>1$.

3) Si M és de $\underline{\underline{M}}^4_c$, nul.la sobre els eixos i amb variació i.d.c., la fórmula d'itô (teorema 1.56) es simplifica de manera important: Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ eś de classe $\mathcal{C}^4$, nul.la en zero,

$$f(M_{st}) = \int_{R_{st}} f'(M_z)\, dM_z + \int_{R_{st}} f''(M_z)\, d\tilde{M}_z +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^s f''(M_{xt})\, d\langle M_{.t}\rangle_x + \frac{1}{2}\int_0^s f''(M_{sy})\, d\langle M_{s.}\rangle_y -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{R_{st}} f''(M_z)\, d\langle M\rangle_z - \frac{1}{2}\int_{R_{st}} f^{IV}(M_z)\, d\langle\tilde{M}\rangle_z .$$

El fet que no intervingui la derivada 3a. de f, fa que es pugui estudiar millor la continuitat del temps local de la martingala, i aleshores (cfr. Nualrt [75]), q.p.t. ω, la funció $x \longrightarrow L^x_{st}$ és holderiana d'ordre α, per a tot $\alpha<1$.

Si M és de $\underline{\underline{M}}^p_c$, (p>4), nul.la sobre els eixos i amb variació i.d.c., es pot donar una condició necessària i suficient senzilla per a l'existència d'una versió del temps local L^x_{st} amb bones propietats de regularitat. Concretament, la condició

$$\int_{R_{st}} 1_{\{M_z = x\}} d\langle M\rangle_z = 0, \text{ per a tot } x \in \mathbb{R} ,$$

és necessària i suficient per a que existeixi una versió del temps local L^x_{st} derivable respecte a x i amb derivada contínua en (s,t,x) (vegeu l'article de Nualart abans citat).

CAPÍTOL III

PRODUCTE DE FILTRACIONS GENERADES PER BROWNIANS MULTIDIMENSIONALS INDEPENDENTS

L'objecte d'aquest capítol és establir la representació de les martingales afitades en L^2 i de les martingales locals relatives a una filtració producte de dues filtracions engendrades per brownians multidimensionals independents. L'interés de l'estudi d'aquesta filtració és doble, ja que, a més de conèixer més profundament una família de filtracions (algunes propietats depenen de la dimensió dels brownians), aquestes filtracions són una eina útil per a establir exemples, i principalment contraexemples, en la filtració associada a un drap brownià.

El primer paràgraf està dedicat a estudiar les propietats generals d'una filtració producte, demostrant detalladament que es compleixen F3 (continuïtat per la dreta) i F4, així com les relacions entre les σ-àlgebres previsibles.

En el segon paràgraf, i ja en la filtració producte de les generades per dos brownians multidimensionals independents, es demostra la representació de els martingales afitades en L^2 com a suma d'integrals respecte als brownians i bibrownians. Per a obtenir aquest resultat s'utilitza, a part de la tècnica clàssica de la isometria entre $\underline{\underline{M}}^2$ i $L^2(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, uns teoremes de tipus Fubini estocàstic, que també demostrem. Aquest paràgraf és una generalització de part dels resultats de Brossard-Chevalier [7] a dimensions superiors.

Finalment, el tercer paràgraf està dedicat a l'extensió per a martingales locals de la representació anterior. La tècnica emprada aquí segueix de prop la de Cairoli-Walsh [17].

§1: La filtració producte

Tal com hem dit en el §1 del primer capítol, sobre l'espai complet $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ considerem dues filtracions uniparamètriques $\{\underline{\underline{F}}_s^1,\ s \in \mathbb{R}\}$ i $\{\underline{\underline{F}}_t^2,\ t \in \mathbb{R}\}$, independents i que compleixin les condicions habituals. Designem per $\underline{\underline{F}}^1$ la σ-àlgebra unió $\bigvee_{s \geq 0} \underline{\underline{F}}_s^1$ i per $\underline{\underline{F}}^2$ la σ-àlgebra $\bigvee_{t \geq 0} \underline{\underline{F}}_t^2$. Considerarem la filtració producte $\{\underline{\underline{F}}_z,\ z \in \mathbb{R}_+^2\}$ definida per

$$\underline{\underline{F}}_{st} = \underline{\underline{F}}_s^1 \vee \underline{\underline{F}}_t^2 .$$

Vegem, en primer lloc, que aquesta filtració compleix les condicions habituals. Ens cal el següent lema:

<u>LEMA 3.1</u>: <u>Siguin</u> $\underline{\underline{F}}_1$ i $\underline{\underline{F}}_2$ dues <u>sub-σ-àlgebres de</u> $\underline{\underline{F}}$ <u>independents, i considerem dues aplicacions</u>

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{\underline{F}}_1\text{-mesurable,}$$

$$Y: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{\underline{F}}_2\text{-mesurable.}$$

<u>Siguin</u> $\underline{\underline{G}}_1 \subset \underline{\underline{F}}_1$ i $\underline{\underline{G}}_2 \subset \underline{\underline{F}}_2$ <u>dues sub-σ-àlgebres</u>. <u>Aleshores</u>

$$E[XY \mid \underline{\underline{G}}_1 \vee \underline{\underline{G}}_2] = E[X \mid \underline{\underline{G}}_1] \cdot E[Y \mid \underline{\underline{G}}_2] .$$

DEMOSTRACIÓ

$E[X \mid \underline{\underline{G}}_1] \cdot E[Y \mid \underline{\underline{G}}_2]$ és òbviament $\underline{\underline{G}}_1 \vee \underline{\underline{G}}_2$-mesurable. Siguin $G_1 \subset \underline{\underline{G}}_1$ i $G_2 \subset \underline{\underline{G}}_2$. Aleshores

$$\int_{G_1 \cap G_2} XY\, dP = E[X 1_{G_1} \cdot Y 1_{G_2}] = E[X 1_{G_1}] \cdot E[Y 1_{G_2}] =$$

$$= \int_{G_1} X\, dP \cdot \int_{G_2} Y\, dP = \int_{G_1} E[X \mid \underline{\underline{G}}_1]\, dP \cdot \int_{G_2} E[Y \mid \underline{\underline{G}}_2]\, dP =$$

$$= \int_{G_1 \cap G_2} E[X \mid \underline{\underline{G}}_1] \cdot E[Y \mid \underline{\underline{G}}_2]\, dP .$$

Clarament la propietat anterior s'estén a l'àlgebra de les reunions finites disjuntes d'elements de la forma $G_1 \cap G_2$, amb $G_1 \subset \underline{\underline{G}}_1$ i $G_2 \subset \underline{\underline{G}}_2$.

Sigui $\mathfrak{D} = \{A \in \underline{\underline{F}} : \int_A XY\, dP = \int_A E[X|\underline{\underline{G}}_1]\cdot E[Y|\underline{\underline{G}}_2]dP\}$ que, gràcies a les propietats de la integral, és una classe monòtona, que conté l'algebra anterior i, doncs, $\underline{\underline{G}}_1 \vee \underline{\underline{G}}_2 \subset \mathfrak{D}$, d'on resulta el lema.■

<u>PROPOSICIÓ 3.2</u>: (i) $\underline{\underline{F}}_{s\infty} = \underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2$ <u>i</u> $\underline{\underline{F}}_{\infty t} = \underline{\underline{F}}^1 \vee \underline{\underline{F}}^2_t$.

(ii) <u>Les filtracions</u> $\{\underline{\underline{F}}_{s\infty},\ s \geq 0\}$ <u>i</u> $\{\underline{\underline{F}}_{\infty t},\ t \geq 0\}$ <u>són contínues per la dreta</u>.

DEMOSTRACIÓ

(i) $\underline{\underline{F}}_{s\infty} = \bigvee_{v\geq 0} \underline{\underline{F}}_{sv} = \bigvee_{v\geq 0} (\underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2_v)$. Òbviament $\underline{\underline{F}}_{s\infty} \subset \underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2$.

Recíprocament, fixat A de $\underline{\underline{F}}^1_s$, designem per $\mathfrak{X}_A$ la classe $\{B \in \underline{\underline{F}}^2 : A \cap B \in \underline{\underline{F}}_{s\infty}\}$, que és una σ-àlgebra;

1) Si $B \in \mathfrak{X}_A$, llavors $B^c \in \mathfrak{X}_A$, ja que $A \cap B^c = A - A \cap B \in \underline{\underline{F}}_{s\infty}$.

2) Si $\{B_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{X}_A$, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathfrak{X}_A$, ja que

$$A \cap (\bigcap_i B_i) = \bigcap_i (A \cap B_i) \in F_{s\infty} .$$

A més, si $B \in \bigcup_{v\geq 0} \underline{\underline{F}}^2_v$, existirà un $v^*\geq 0$ tal que $B \in \underline{\underline{F}}^2_{v^*}$ i, per tant, $A \cap B \in \underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2_{v^*} \subset \underline{\underline{F}}_{s\infty}$. Tenim, doncs, que $\bigcup_{v\geq 0} \underline{\underline{F}}^2_v \subset \mathfrak{X}_A$ i per tant

$$\bigvee_{v\geq 0} \underline{\underline{F}}^2_v = \sigma(\bigcup_{v\geq 0} \underline{\underline{F}}^2_v) \subset \sigma(\mathfrak{X}_A) = \mathfrak{X}_A.$$

Com que A era arbitrari, tenim que per a tot A de $\underline{\underline{F}}^1_s$ i per a tot B de $\bigvee_{v\geq 0} \underline{\underline{F}}^2_v$, $A \cap B \in \underline{\underline{F}}_{s\infty}$. D'aqui es dedueix que $\underline{\underline{F}}_{s\infty}$ conté

$$\underline{\underline{F}}^1_s \vee (\bigvee_{v\geq 0} \underline{\underline{F}}^2_v) = \underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2.$$

(ii) Vegem que $\bigcap_{s<s'} (\underline{\underline{F}}^1_{s'} \vee \underline{\underline{F}}^2) = \underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2$. N'hi ha prou de

demostrar que per a tota variable aleatòria afitada X,

$$(1) \qquad E[X|\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\underline{\underline{F}}^1_{s+\frac{1}{n}} \vee \underline{\underline{F}}^2)] = E[X|\underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2] .$$

Sigui $\mathfrak{U}$ el conjunt de varibles aleatòries $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que compleixen (1). $\mathfrak{U}$ és un espai vectorial i

a) $1_\Omega \in \mathfrak{U}$.

b) Siguin $G_1 \in \underline{\underline{F}}_1$ i $G_2 \in \underline{\underline{F}}_2$. Aleshores $1_{G_1 \cap G_2} \in \mathfrak{U}$, ja que pel lema 3.1 i pel teorema de convergència de martingales inverses

$$E[1_{G_1 \cap G_2}|\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\underline{\underline{F}}^1_{s+\frac{1}{n}} \vee \underline{\underline{F}}^2)] = \lim_{n\to\infty} E[1_{G_1 \cap G_2}|\underline{\underline{F}}^1_{s+\frac{1}{n}} \vee \underline{\underline{F}}^2] =$$

$$= 1_{G_2} \cdot \lim_{n\to\infty} E[1_{G_1}|\underline{\underline{F}}^1_{s+\frac{1}{n}}] = 1_{G_2} \cdot E[1_{G_1}|\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underline{\underline{F}}^1_{s+\frac{1}{n}}] =$$

$$= E[1_{G_1 \cap G_2}|(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underline{\underline{F}}^1_{1+\frac{1}{n}}) \vee \underline{\underline{F}}^2].$$

Òbviament aquesta propietat s'estén als indicadors de les reunions finites disjuntes d'elements de la forma $G_1 \cap G_2$, $G_1 \in \underline{\underline{F}}_1$, $G_2 \in \underline{\underline{F}}_2$.

c) Sigui $\{f_k, k\geq 1\}$ una successió de funcions de $\mathfrak{U}$, $f_k \geq 0$, afitades, $f_k \uparrow f$ quan $k\to\infty$, amb f afitada. Llavors pel teorema de la convergència monòtona,

$$E[f_k|\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\underline{\underline{F}}^1_{1+\frac{1}{n}} \vee \underline{\underline{F}}^2)] \underset{k\to\infty}{\uparrow} E[f|\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\underline{\underline{F}}^1_{s+\frac{1}{n}} \vee \underline{\underline{F}}^2)] \qquad \text{q.s.}$$

i

$$E[f_k|\underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2] \underset{k\to\infty}{\uparrow} E[f|\underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2] \qquad \text{q.s.}$$

d'on resulta la igualtat q.s.

$$E[f|\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\underline{\underline{F}}^1_{s+\frac{1}{n}} \vee \underline{\underline{F}}^2)] = E[f|\underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2] ,$$

i, doncs, $f \in \mathcal{U}$.

Pel teorema de classes monòtones, $\mathcal{U}$ conté totes les funcions $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{F}}^1 \vee \underline{\underline{F}}^2$-mesurables i afitades.■

<u>TEOREMA 3.3</u>: <u>La filtració</u> $\{\underline{\underline{F}}_z,\ z \in \mathbb{R}^2_+\}$ <u>compleix les condicions habituals F1 a F4</u>.

DEMOSTRACIÓ

Comencem veient F4: Per a tota variable aleatòria $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{F}}^1 \vee \underline{\underline{F}}^2$-mesurable i afitada,

$$(2) \qquad E[X|\underline{\underline{F}}_{s\infty}|\underline{\underline{F}}_{\infty t}] = E[X|\underline{\underline{F}}_{\infty t}|\underline{\underline{F}}_{s\infty}] = E[X|\underline{\underline{F}}_{st}] \ .$$

En efecte, sigui $1_{G_1 \cap G_2}$, $G_1 \in \underline{\underline{F}}^1$, $G_2 \in \underline{\underline{F}}^2$. Pel lema 3.1,

$$E[1_{G_1 \cap G_2}|\underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2|\underline{\underline{F}}^1 \vee \underline{\underline{F}}^2_t] = E[1_{G_1}|\underline{\underline{F}}^1_s]\cdot E[1_{G_2}|\underline{\underline{F}}^2_t] = E[1_{G_1 \cap G_2}|\underline{\underline{F}}_{st}] \ .$$

Per un argument de classes monòtones, la igualtat (2) es compleix per a tots els indicadors 1_H amb H de $\underline{\underline{F}}^1 \vee \underline{\underline{F}}^2$, i per linealitat s'estén a totes les funcions $\underline{\underline{F}}^1 \vee \underline{\underline{F}}^2$-simples. Si X és positiva, llavors serà límit creixent de funcions simples i s'aplica, com en la proposició anterior, el teorema de la convergència monòtona. Per a X afitada es descomposa $X = X^+ - X^-$ i s'aplica (2) a cada part.

De F4 es dedueix $\underline{\underline{F}}_{st} = \underline{\underline{F}}_{s\infty} \cap \underline{\underline{F}}_{\infty t}$, d'on resulta la continuïtat per la dreta de la filtració $\{\underline{\underline{F}}_z,\ z \in \mathbb{R}^2_+\}$, ja que clarament

$$\underline{\underline{F}}_{st} \subset \bigcap_{(s,t)<(s',t')} \underline{\underline{F}}_{s't'} \ ,$$

i per la proposició 3.2 (ii)

$$\bigcap_{(s,t)<(s',t')} \underline{\underline{F}}_{s't'} \subset \bigcap_{s<s'} \underline{\underline{F}}_{s'\infty} = \underline{\underline{F}}_{s\infty} ,$$

i anàlogament,

$$\bigcap_{(s,t)<(s',t')} \underline{\underline{F}}_{s't'} \subset \bigcap_{t<t'} \underline{\underline{F}}_{\infty t'} = \underline{\underline{F}}_{\infty t} ,$$

obtenim

$$\bigcap_{(s,t)<(s',t')} \underline{\underline{F}}_{s't'} \subset \underline{\underline{F}}_{s\infty} \cap \underline{\underline{F}}_{\infty t} = \underline{\underline{F}}_{st} . \blacksquare$$

<u>OBSERVACIÓ 3.4</u>: Una manera d'obtenir una filtració producte és considerar dos espais filtrats $(\Omega^1, \underline{\underline{\tilde{F}}}^1, P^1, \underline{\underline{\tilde{F}}}^1_s, s\geq 0)$ i $(\Omega^2, \underline{\underline{\tilde{F}}}^2, P^2, \underline{\underline{\tilde{F}}}^2_t, t\geq 0)$ (podem suposar $\bigvee_{s\geq 0} \underline{\underline{\tilde{F}}}^1_s = \underline{\underline{\tilde{F}}}^1$ i $\bigvee_{t\geq 0} \underline{\underline{\tilde{F}}}^2_t = \underline{\underline{\tilde{F}}}^2$) que compleixin les condicions habituals, i sigui

$$\Omega = \Omega^1 \times \Omega^2 ,$$

i designem per $\underline{\underline{\tilde{F}}}$ la completació de la σ-àlgebra producte $\underline{\underline{\tilde{F}}}^1 \otimes \underline{\underline{\tilde{F}}}^2$, i per P la mesura producte $P^1 \otimes P^2$; designem per $\underline{\underline{\tilde{F}}}_{st}$ la P-completació de la σ-àlgebra $\underline{\underline{\tilde{F}}}^1_s \otimes \underline{\underline{\tilde{F}}}^2_t$.

Considerem també la σ-àlgebra $\underline{\underline{\hat{F}}}^1_s$ definida per

$$\underline{\underline{\hat{F}}}^1_s = \{ A \times \Omega^2 ,\ A \in \underline{\underline{F}}^1_s \}$$

i sigui $\underline{\underline{F}}^1_s$ la P-completació de $\underline{\underline{\hat{F}}}^1_s$. Anàlogament es defineixen $\underline{\underline{\hat{F}}}^2_t$ i $\underline{\underline{F}}^2_t$.

Aleshores $\underline{\underline{F}}^1_s$ i $\underline{\underline{F}}^2_t$ són independents (perquè $\underline{\underline{\hat{F}}}^1_s$ i $\underline{\underline{\hat{F}}}^2_t$ ho són), i

$$\underline{\underline{\tilde{F}}}^1_s \otimes \underline{\underline{\tilde{F}}}^2_t = \underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2_t .$$

Així, si $\{\tilde{\underline{\underline{F}}}^1_s,\ s\geq 0\}$ està engendrada per un brownià $\tilde{W}^1 = \{\tilde{W}^1_s\ ,\ s\geq 0\}$ en $(\Omega^1, \tilde{\underline{\underline{F}}}^1, P^1)$ i $\{\tilde{\underline{\underline{F}}}^2_t,\ t\geq 0\}$ per un altre brownià $\tilde{W}^2 = \{\tilde{W}^2_t\ ,\ t\geq 0\}$ en $(\Omega^2, \tilde{\underline{\underline{F}}}^2, P^2)$, podem definir en $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ els brownians

$$W^1_s(\omega_1, \omega_2) = \tilde{W}^1_s(\omega_1)$$

i

$$W^2_t(\omega_1, \omega_2) = \tilde{W}^2_t(\omega_2)\ .$$

Llavors W^1 i W^2 són independents i les filtracions $\{\underline{\underline{F}}^1_s,\ s\geq 0\}$ i $\{\underline{\underline{F}}^2_t,\ t\geq 0\}$ defides abans, estan engendrades per W^1 i W^2 respectivament.

Aleshores, totes les propietats demostrades per a una filtració producte $\underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2_t$ són vàlides per a una filtració de la forma $\tilde{\underline{\underline{F}}}^1_s \otimes \tilde{\underline{\underline{F}}}^2_t$.

En la filtració producte, a més de les σ-àlgebres previsibles $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{P}}^1$, $\underline{\underline{P}}^2$, $\underline{\underline{P}}^1_\infty$, $\underline{\underline{P}}^2_\infty$ introduides en el §6 del capítol I, podem considerar les σ-àlgebres previsibles respecte a les filtracions components. D'acord amb les notacions d'aquell paràgraf, designarem per

$\underline{\underline{P}}$	la -àlgebra	previsible	sobre	$\mathbb{R}^2_+\times\Omega$	associada a	$\{\underline{\underline{F}}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$;
$\underline{\underline{P}}^1$	"	"	"	$\mathbb{R}^2_+\times\Omega$	"	$\{\underline{\underline{F}}^1_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$;
$\underline{\underline{P}}^1_t$	"	"	"	$\mathbb{R}_+\times\Omega$	"	$\{\underline{\underline{F}}_{st}, s\in\mathbb{R}_+\}$;
$\underline{\underline{P}}^1_\infty$	"	"	"	$\mathbb{R}_+\times\Omega$	"	$\{\underline{\underline{F}}_{s\infty}, s\in\mathbb{R}_+\}$;
$\underline{\underline{P}}^{(1)}$	"	"	"	$\mathbb{R}_+\times\Omega$	"	$\{\underline{\underline{F}}^1_s,\ s\in\mathbb{R}_+\}$.

I, anàlogament, es defineixen $\underline{\underline{P}}^2$, $\underline{\underline{P}}^2_s$, $\underline{\underline{P}}^2_\infty$ i $\underline{\underline{P}}^{(2)}$.

Per a estudiar les relacions entre aquestes σ-àlgebres ens cal el següent lema :

<u>LEMA 3.5</u>: <u>Siguin</u> $\mathfrak{I}$ <u>i</u> $\mathfrak{J}$ <u>conjunts de partsde</u> Ω <u>tancats per intersecció finita i que continguin</u> Ω. <u>Designem per</u> $\sigma(\mathfrak{I})$ i $\sigma(\mathfrak{J})$ <u>les mínimes</u> <u>σ-àlgebres sobre</u> $\mathfrak{I}$ <u>i</u> $\mathfrak{J}$ <u>respectivament</u>. <u>Aleshores</u>,

$$\sigma(\mathfrak{I}) \vee \sigma(\mathfrak{J}) = \sigma\{ C \cap D,\ C \in \mathfrak{I},\ D \in \mathfrak{J} \} .$$

DEMOSTRACIÓ

$\{C \cap D,\ C \in \mathfrak{I},\ D \in \mathfrak{J}\}$ és tancat per intersecció finita. Pel teorema de classes monòtones, tota classe monòtona que el contingui, contindrà $\sigma\{C \cap D,\ C \in \mathfrak{I},\ D \in \mathfrak{J}\}$. Com que

$$\{C \cap D,\ C \in \mathfrak{I},\ D \in \mathfrak{J}\} \subset \sigma(\mathfrak{I}) \vee \sigma(\mathfrak{J}) ,$$

tenim

$$\sigma\{ C \cap D,\ C \in \mathfrak{I},\ D \in \mathfrak{J}\} \subset \sigma(\mathfrak{I}) \vee \sigma(\mathfrak{J}) .$$

Però $\sigma(\mathfrak{I}) \subset \sigma\{C \cap D,\ C \in \mathfrak{I},\ D \in \mathfrak{J}\}$, ja que $\Omega \in \mathfrak{J}$; i també està inclós $\sigma(\mathfrak{J})$. D'on resulta la inclusió contrària.■

<u>PROPOSICIÓ 3.6</u>: $\underline{\underline{P}}^1_\infty = \underline{\underline{P}}^{(1)} \vee (\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}}^2)$ i $\underline{\underline{P}}^2_\infty = \underline{\underline{P}}^{(2)} \vee (\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}}^1)$.

DEMOSTRACIÓ

En efecte,

$$\underline{\underline{P}}^{(1)} = \sigma\{]s,s']\times\underline{\underline{F}},\ s,s' \in \mathbb{R}_+,\ s<s',\ F \in \underline{\underline{F}}^1_s,\ \{0\}\times G, G\in\underline{\underline{F}}^1_0,\ \mathbb{R}_+\times\Omega\} ,$$

i aquesta família de generadors de $\underline{\underline{P}}^{(1)}$ és tancada per intersecció finita. També

$$\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}}^2 = \sigma\{]a,b]\times G,\ \{0\}\times G,\ a,b\in\mathbb{R}_+,\ a<b,\ G\in\underline{\underline{F}}^2 \} ,$$

i la família d'aquests generadors també és tancada per intersecció finita. Pel lema anterior,

$$\underline{\underline{P}}^{(1)} \vee (\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}}^2) =$$

$$= \sigma\{(]s,s']\times F) \cap (]a,b]\times G), (\{0\}\times H) \cap (\{0\}\times I),\ F\in\underline{\underline{F}}_s^1, G\in\underline{\underline{F}}^2, H\in\underline{\underline{F}}_0^1, I\in\underline{\underline{F}}^2\},$$

i

$$(]s,s']\times F) \cap (]a,b]\times G) \in \underline{\underline{P}}_\infty^1 \quad \text{i} \quad \{0\}\times(F\cap G) \in \underline{\underline{P}}_\infty^1,$$

ja que per la proposició 3.2 (i), $\underline{\underline{F}}_{s\infty} = \underline{\underline{F}}_s^1 \vee \underline{\underline{F}}^2$.

Recíprocament:

$$\underline{\underline{P}}_\infty^1 = \sigma\{]s,s']\times F,\ \{0\}\times G,\ F\in\underline{\underline{F}}_s^1 \vee \underline{\underline{F}}^2,\ G\in\underline{\underline{F}}_0^1 \vee \underline{\underline{F}}^2\}.$$

Designem per $\mathcal{K}$ el conjunt:

$$\mathcal{K} = \{F \in \underline{\underline{F}}_s^1 \vee \underline{\underline{F}}^2 :\ ]s,s']\times F \in \underline{\underline{P}}^{(1)} \vee (\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}}^2)\}.$$

Es tracta d'una classe monòtona, i si $F_1 \in \underline{\underline{F}}_s^1$ i $F_2 \in \underline{\underline{F}}^2$, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{K}$, ja que

$$]s,s']\times(F_1\cap F_2) = (]s,s']\times F_1) \cap (]s,s']\times F_2) \in \underline{\underline{P}}^{(1)} \vee (\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}}^2),$$

d'on resulta $\underline{\underline{F}}_s^1 \vee \underline{\underline{F}}^2 = \mathcal{K}$.

Així, per a tot $F \in \underline{\underline{F}}_s^1 \vee \underline{\underline{F}}^2$, tenim $]s,s']\times F \in \underline{\underline{P}}^{(1)} \vee (\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}}^2)$, i anàlogament, $\{0\}\times G \in \underline{\underline{P}}^{(1)} \vee (\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}}^2)$, per a qualsevol $G \in \underline{\underline{F}}_0^1 \vee \underline{\underline{F}}^2$, d'on resulta l'altra inclusió.■

<u>OBSERVACIÓ 3.7</u>

Havíem vist (proposició 1.17 (iv), (vi))

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}^1 \cap \underline{\underline{P}}^2 \quad \text{i} \quad \underline{\underline{P}}^1 = \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{P}}_\infty^1,$$

que, juntament amb la proposició anterior, proporciona les relacions entre totes aquestes σ-àlgebres.

Necessitarem més endavant el següent resultat:

PROPOSICIÓ 3.8: Considerem dues funcions $f:\mathbb{R}_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{P}}^{(1)}$-mesurable i $g:\mathbb{R}_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{P}}^{(2)}$-mesurable. Aleshores la funció

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2_+\times\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,\omega) &\longrightarrow f(x,\omega)g(y,\omega) \end{aligned}$$

és $\underline{\underline{P}}$-mesurable.

DEMOSTRACIÓ

Com que tota funció $\underline{\underline{P}}^2$-mesurable es $B(\mathbb{R}_+)\otimes\underline{\underline{F}}^2$-mesurable, tenim que g és $\underline{\underline{P}}^1_\infty$-mesurable, i òbviament també ho és f. Les aplicacions

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2_+\times\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,\omega) &\longrightarrow f(x,\omega) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g:\mathbb{R}^2_+\times\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,\omega) &\longrightarrow g(y,\ ) \end{aligned}$$

són, per les relacions anteriors, $\underline{\underline{P}}^1$-mesurables. D'on $f(x)g(y)$ és $\underline{\underline{P}}^1$-mesurable, i anàlogament és $\underline{\underline{P}}^2$-mesurable, i, doncs, $\underline{\underline{P}}$-mesurable.■

§2: Producte de filtracions generades per brownians multidimensionals independents

En l'espai $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ considerem dos brownians multidimensionals independents $W = \{(W_s^1,W_s^2,\ldots,W_s^n),\ s\in\mathbb{R}_+\}$ i $\hat{W} = \{(\hat{W}_t^1,\ldots,\hat{W}_t^m),\ t\in\mathbb{R}_+\}$ i designem per $\{\underline{\underline{F}}_s^1,\ s\in\mathbb{R}_+\}$ i $\{\underline{\underline{F}}_t^2,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ les filtracions generades per W i $\hat{W}$ respectivament, degudament completades.

Definim el <u>bibrownià</u> $W^{ij} = \{W_z^{ij}, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ com el producte de W^i i $\hat{W}^j$ $(i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m)$:

$$W_{st}^{ij}(\omega) = W_s^i(\omega)\hat{W}_t^j(\omega) .$$

Designarem per $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega, \underline{\underline{P}}_t^1, ds\otimes dP)$ (abreujadament $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{P}}_t^1)$) el conjunt de classes d'equivalència de processos

$$f:\mathbb{R}_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\underline{\underline{P}}_t^1$-mesurables i tals que

$$(1) \qquad E\int_0^\infty f^2(s)\, ds < \infty .$$

És conegut que, com a espai de Hilbert, $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{P}}_t^1)$ coincideix amb el conjunt de processos mesurables, adaptats a $\{\underline{\underline{F}}_{st}^1, s\in\mathbb{R}_+\}$ i que compleixen (1). Anàlogament es defineixen $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{P}}_\infty^1, ds\otimes dP)$, $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega, P^{(1)}, ds\otimes dP)$ i els corresponents $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{P}}_s^2, dt\otimes dP)$.

Per $L^2(\mathbb{R}_+^2\times\Omega,\underline{\underline{P}}, ds\otimes dt\otimes dP)$ (abreujadament $L^2(\mathbb{R}_+^2\times\Omega,\underline{\underline{P}})$) indicarem el conjunt de classes d'equivalència de processos

$$g:\mathbb{R}^2_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\underline{\underline{P}}$-mesurables i tals que

$$(2) \qquad E\int_{\mathbb{R}_+^2} g^2(z)\, dz < \infty.$$

Com a espai de Hilbert, $L^2(\mathbb{R}_+^2\times\Omega,\underline{\underline{P}})$ coincideix amb el conjunt de processos mesurables, $\underline{\underline{F}}_z$-adaptats i que compleixen (2).

El bibrownià W^{ij} és una martingala de L^2. Per a una funció g de $L^2(\mathbb{R}^2_+\times\Omega,\underline{\underline{P}})$ pot definir-se directament (cfr. Brossard-Chevalier [7]) la integral $\int_{R_z} g(\zeta)\, dW_\zeta^{ij}$. A més de les propietats usuals, tenim dos teoremes de tipus Fubini:

<u>PROPOSICIÓ 3.9</u> (Teorema de Fubini estocàstic): <u>Sigui</u> f <u>un procés de</u> $L^2(\mathbb{R}^2_+\times\Omega,\underline{\underline{P}})$. <u>Aleshores</u>

(i) dt -q.p.t. $y \in \mathbb{R}_+$, $f(.,y) \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, P_y^1)$.

(ii) <u>existeix una funció</u> $Y: \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \underline{\underline{F}}$-mesurable, tal que, q.p.t. $y \in \mathbb{R}_+$, <u>el procés</u> $\{Y(s,y),\ s \in \mathbb{R}_+\}$ <u>es indistingible del procés</u> $\{\int_0^s f(x,y)\, dW_x^i,\ s \in \mathbb{R}_+\}$, <u>i per a tot</u> $s \in \mathbb{R}_+$, $Y(s,.) \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, P_s^2)$.

(iii) $$\int_0^t \left(\int_0^s f(x,y)\, dW_x^i\right) d\hat{W}_y^j = \int_{R_{st}} f(x,y)\, dW_{xy}^{ij} .$$

DEMOSTRACIÓ

N'hi ha prou de considerar $n=m=1$. Suprimirem llavors els superíndexs "i" i "j" i escriurem W i $\hat{W}$.

(i) tot procés $f: \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ previsible és mesurable i $\underline{\underline{F}}_z$-adaptat, d'on es dedueix que $f(.,y): \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ és $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}}$-mesurable i $\{\underline{\underline{F}}_{xy},\ x \in \mathbb{R}_+\}$ adaptat. Per la mesurabilitat de f, podem aplicar el teorema de Fubini i tenim

$$\int_0^\infty E \int_0^\infty f^2(x,y)\, dxdy = E \int_0^\infty \int_0^\infty f^2(x,y)\, dxdy < \infty,$$

i, doncs, dt -q.p.t. $y \in \mathbb{R}_+$,

$$E \int_0^\infty f^2(x,y)\, dx < \infty .$$

(ii) Sigui f simple:

$$f(x,y,\omega) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k(\omega)\, I_{]z_k, z_{k+1}]}(x,y) ,$$

amb $]z_k, z_{k+1}] =]s_k, s_{k+1}] \times]t_k, t_{k+1}]$, α_k afitada i $\underline{\underline{F}}_{z_k}$-mesurable. Llavors,

$$\int_0^s f(x,y)\, dW_x = \sum_{K=1}^{r} \alpha_k (W_{s_{k+1} \wedge s} - W_{s_k \wedge s}) I_{]t_k, t_{k+1}]}(y) ,$$

que clarament és de $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}}_s^2)$ i $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \underline{\underline{F}}$ -mesurable.

Vegem el cas general: Sigui f de $L^2(\mathbb{R}_+^2\times\Omega, \underline{\underline{P}})$. L'existència del procés $Y:\mathbb{R}_+^2\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^2)\otimes\underline{\underline{F}}$-mesurable tal que q.p.t. $y\in\mathbb{R}_+$ el procés $\{Y(s,y),\ s\in\mathbb{R}_+\}$ sigui indistigible del procés $\{\int_0^s f(x,y)\, dW_x,\ s\in\mathbb{R}_+\}$ resulta de la proposició 1.63. D'altra banda, existeix una successió $\{f_n,\ n\geq 1\}$ de funcions simples de $L^2(\mathbb{R}_+^2\times\Omega,\underline{\underline{P}})$ tal que

$$E\int_0^\infty\int_0^\infty (f(x,y) - f_n(x,y))^2\, dxdy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Donada la $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^2)\otimes\underline{\underline{F}}$ mesurabilitat de $\int_0^s f_n(x,y)\, dW_x$ i de $Y(s,y)$, per fubini i Jensen, per a tot $s\in\mathbb{R}_+$,

$$E\int_0^\infty\Big(\int_0^s f_n(x,y)\, dW_x - Y(s,y)\Big)^2\, dy \leq$$

$$\leq E\int_0^\infty\int_0^\infty \big(f_n(x,y) - f(x,y)\big)^2\, dxdy .$$

Així, doncs, fixat s, la successió $\{\int_0^s f_n(x,y)\, dW_x,\ n\geq 1\}$ convergeix cap a $Y(s,y)$ en $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\otimes\underline{\underline{F}}, dy\otimes dP)$, d'on deduim que $Y(s,.)$ és de $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{P}}_s^2)$.

(iii) La igualtat

$$\int_0^t\Big(\int_0^s f(x,y)\, dW_x\Big)d\hat{W}_y = \int_{R_{st}} f(x,y)\, dW^{11}(x,y)$$

és òbvia per a funcions simples. En el cas general,

$$E\Big[\Big(\int_0^t\Big(\int_0^s f(x,y)\, dW_x\Big)\, d\hat{W}_y - \int_0^t\Big(\int_0^s f_n(x,y)\, dW_x\Big)d\hat{W}_y\Big)^2\Big] =$$

$$=\int_0^t\int_0^s E\big[\big(f(x,y) - f_n(x,y)\big)^2\big]dxdy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

i com que per construcció de la integral respecte el bibrownià tenim

$$\int_{R_{st}} f_n(x,y)\, dW^{11}_{xy} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{R_{st}} f(x,y)\, dW^{11}_{xy} \qquad \text{en } L^2(\Omega,\underline{\underline{F}},P),$$

obtenim la igualtat.

<u>PROPOSICIÓ 3.10</u> (Teorema de Fubini per a les integrals mixtes): <u>Sigui</u> f <u>un procés de</u> $L^2(\mathbb{R}^2_+\times\Omega,\underline{\underline{P}})$. <u>Aleshores</u>

(i) dt -q.p.t. $y\in\mathbb{R}_+$, $f(.,y)\in L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{P}}^1_\infty)$.

(ii) <u>Existeix una funció</u> $Y:\mathbb{R}^2_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $B(\mathbb{R}^2_+)\otimes\underline{\underline{F}}$ -mesurable, <u>tal que</u> q.p.t. $y\in\mathbb{R}_+$, <u>el procés</u> $\{Y(s,y),\ s\in\mathbb{R}_+\}$ <u>és indistingible del procés</u> $\{\int_0^s f(x,y)\, dW^i_x,\ s\in\mathbb{R}_+\}$, <u>i per a tot</u> $s\in\mathbb{R}_+$, $Y(s,.)$ <u>es integrable-Lebesgue (P -q.s.) respecte de y en tot interval compacte</u>.

(iii) <u>Existeix una funció</u> $Z:\mathbb{R}^2_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $B(\mathbb{R}^2_+)\otimes\underline{\underline{F}}$ -mesurable, <u>tal que</u> q.p.t. $s\in\mathbb{R}_+$, <u>el procés</u> $\{Z(s,t),\ t\in\mathbb{R}_+\}$ <u>és indistingible del procés</u> $\{\int_0^t f(s,y)\, dy,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ <u>i per a tot</u> $t\in\mathbb{R}_+$, $Z(.,t)\in L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{P}}^1_\infty)$.

(iv) $$\int_0^s\left(\int_0^t f(x,y)\, dy\right)dW^i_x = \int_0^t\left(\int_0^s f(x,y)\, dW^i_x\right)dy \quad .$$

<u>DEMOSTRACIÓ</u>

(i) L'hem vist a la proposició anterior.

(ii) Amb les notacions de la proposició anterior, fixat s, per a tot $t\geq 0$,

$$E\int_0^t Y_s^2\, dy = E\int_0^t\int_0^s f^2(x,y)\, dxdy < \infty,$$

d'on, per Jensen,

$$E\int_0^t |Y_s(y)|\ dy < \infty,$$

i de la mesurabilitat de Y resulta

$$\int_0^t |Y_s(y,\omega)|\ dy < \infty, P\text{ -q.s.}.$$

(iii) Com que f és $\underline{\underline{P}}$ -mesurable i $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}^1 \cap \underline{\underline{P}}^2$, tindrem que f és $\underline{\underline{P}}^1$ -mesurable i, fixat t, la restricció (que denotarem igual) $f: \mathbb{R}_+ \times [0,t]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ és de $L^2(\mathbb{R}_+ \times[0,t]\times\Omega, \underline{\underline{P}}^1_\infty \otimes \underline{\underline{B}}([0,t]), ds\otimes dt\otimes dP)$ (vegeu la proposició 1.17 (vi)) i pel teorema de Fubini, fixats (s,ω) $(ds\otimes dP$ -q.s.),

$$\int_0^t f^2(s,y,\omega)\ dy < \infty .$$

Aleshores, existeix la integral $\int_0^t f(s,y)\ dy$ i existeix un procés $\{Z(s,t),\ s\in\mathbb{R}_+\}$ $\underline{\underline{P}}^1_\infty$-mesurable tal que

$$Z(s,t,\omega) = \int_0^t f(s,y\omega)dy \quad ,\quad ds\otimes dP \text{ -q.p.t. } (s,\omega) \quad .$$

Fem això per a cada $t\in\mathbb{Q}_+$ i estenem Z a tot $\mathbb{R}_+$ per continuïtat. El procés que resulta és clarament $\underline{\underline{P}}^1_\infty$-mesurable (i, doncs, $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\otimes\underline{\underline{F}}$ -mesurable). Finalment, $Z(.,t)\in L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{P}}^1_\infty)$ ja que, per Cauchy-Schwarz,

$$E\int_0^\infty Z^2(s,t)\ ds = E\int_0^\infty \left(\int_0^t f(s,y)\ dy\right)^2 ds \leq t\ E\int_0^\infty\int_0^t f^2(s,y)\ dyds<\infty .$$

(iv) Per a funcions simples és òbvia. Sigui $\{f_n,\ n\geq 1\}$ una successió de funcions simples de $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega, \underline{\underline{P}})$ tals que

$$E\int_0^\infty\int_0^\infty (f(x,y) - f_n(x,y))^2\ dxdy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad .$$

Per a qualssevol $S,T\geq 0$, tenim

$$\sup_{t\leq T} E\Big[\sup_{s\leq S}\Big|\int_0^s\Big(\int_0^t f(x,y)dy\Big)dW_x - \int_0^s\Big(\int_0^t f_n(x,y)dy\Big)dW_x\Big|^2\Big]=$$

$$= \sup_{t\leq T} E\Big[\sup_{s\leq S}\Big|\int_0^s \Big(Z(x,t) - \int_0^t f_n(x,y)dy\Big)dW_x\Big|^2\Big] \leq$$

(per Burkholder i la propietat de isometria de la integral estocàstica)

$$\leq C \sup_{t\leq T} \int_0^S E\Big[\Big(Z(x,t) - \int_0^t f_n(x,y)dy\Big)^2\Big]dx \quad \leq$$

$$\leq C \sup_{t\leq T} \int_0^t\int_0^S E\big[(f(x,y) - f_n(x,y))^2\big]dxdy\big] \quad \leq$$

$$\leq C \int_0^T\int_0^S E\big[(f(x,y) - f_n(x,y))^2\big]\, dxdy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

També,

$$E\Big[\sup_{\substack{s\leq S\\ t\leq T}}\Big|\int_0^t\Big(\int_0^s f(x,y)dW_x\Big)dy - \int_0^t\Big(\int_0^s f_n(x,y)dW_x\Big)dy\Big|^2\Big] \quad \leq$$

$$\leq T\, E\Big[\sup_{s\leq S}\ \Big|\int_0^t\Big(Y(s,y) - \int_0^s f_n(x,y)dW_x\Big)^2 dy\ \Big|\Big] \quad \leq$$

$$\leq CT\, E\Big[\int_0^S \int_0^T (f(x,y) - f_n(x,y))^2\, dxdy\Big] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

OBSERVACIÓ 3.11 De la demostració de l'apartat (iv) resulta, a més, la continuïtat en (s,t) de la integral $\int_0^s\int_0^t f(x,y)\, dydW_x^i$ ja que és evident si f és simple, i el cas general resulta de la convergència uniforme establerta en darrer lloc.

TEOREMA 3.12: Sigui $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ una martingala afitada en L^2. Aleshores existeixen funcions (úniques) $f_1,\ldots,f_n$ de

$L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{P}}^{(1)})$, $g_1,\dots,g_m$ de $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{P}}^{(2)})$, $h_{11},\dots,h_{nm}$ de $L^2(\mathbb{R}_+^2\times\Omega,\underline{\underline{P}})$ tals que

$$M_{st} = \sum_{i=1}^{n}\int_0^s f_i(x)dW_x^i + \sum_{i=1}^{m}\int_0^t g_j(y)d\hat{W}_y^j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{R_{st}} h_{ij}(x,y)dW_{xy}^{ij} - M_{oo}.$$

Necessitem del següent lema:

LEMA 3.13: El conjunt de les funcions simples de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, I_{A_i\cap B_i}$$

amb $A_i\in\underline{\underline{F}}^1$, $B_i\in\underline{\underline{F}}^2$, $A_i\cap B_i$, $i=1,\dots,n$, disjunts dos a dos, és dens en $L^2(\Omega,\underline{\underline{F}}^1\vee\underline{\underline{F}}^2,P)$.

DEMOSTRACIÓ DEL LEMA

Es conegut que en un espai de mesura $(E,\underline{\underline{S}},\mu)$, si $\underline{\underline{A}}$ és una àlgebra que genera $\underline{\underline{S}}$, llavors, per a tot H de $\underline{\underline{S}}$ amb $\mu(H)<\infty$, i per a qualsevol $\varepsilon>0$, existeix $H'\in\underline{\underline{A}}$, tal que $\mu(H\,\Delta\,H')<\varepsilon$ (Δ indica la diferéncia simètrica) (cfr. Halmos [38] teorema III.13.D).

Com que si $A, A'\in\underline{\underline{F}}^1\vee\underline{\underline{F}}^2$, $\int_\Omega(I_A-I_{A'})^2\,dP = P(A\,\Delta\,A')$, resulta que les funcions simples de $(\Omega,\underline{\underline{F}}^1\vee\underline{\underline{F}}^2,P)$ són L^2 aproximables per funcions simples de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, I_{A_i\cap B_i}$$

amb $A_i\in\underline{\underline{F}}^1$ i $B_i\in\underline{\underline{F}}^2$, $A_i\cap B_i$ disjunts dos a dos. De la densitat de les funcions simples de $(\Omega,\underline{\underline{F}}^1\vee\underline{\underline{F}}^2,P)$ en $L^2(\Omega,\underline{\underline{F}}^1\vee\underline{\underline{F}}^2,P)$ resulta el lema.■

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 3.12

D'acord amb el teorema 1.12 existirà una variable aleatòria M_∞ de $L^2(\Omega, \underline{\underline{F}}^1 \vee \underline{\underline{F}}^2, P)$ tal que M_z convergeix q.s. i en L^2 cap a M_∞ quan $z \to \infty$, que tanca la martingala . Pel lema anterior,

$$M = \lim_{k\to\infty} \sum_{h=1}^{r_k} a_h^k \, I_{A_h^k \cap B_h^k} \qquad \text{en } L^2,$$

amb $A_h^k \in \underline{\underline{F}}^1$, $B_h^k \in \underline{\underline{F}}^2$. Pel lema 3.1, i com que la convergència en L^2 commuta amb l'esperança condicionada,

$$M_{st} = E[M_\infty | \underline{\underline{F}}_{st}] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{h=1}^{r_k} a_h^k \, E[I_{A_h^k} | \underline{\underline{F}}^1] \cdot E[I_{B_h^k} | \underline{\underline{F}}^2] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{h=1}^{r_k} a_h^k \, M_{kh}^1(s) M_{kh}^2(t) \; .$$

Del fet que M_{kh}^1 (respectivament M_{kh}^2) és una martingala respecte a $(\Omega, \underline{\underline{F}}^1, \underline{\underline{F}}_s^1, P, s \geq 0)$ (resp. $(\Omega, \underline{\underline{F}}^2, \underline{\underline{F}}_t^2, P, t \geq 0)$) afitada en L^2 i que $\{\underline{\underline{F}}_s^1 , s \geq 0\}$ està engendrada per un brownià n-dimensional W ($\{\underline{\underline{F}}_t^2, t \geq 0\}$ està engendrada per $\hat{W}$), es dedueix que per a cada k,h existeixen funcions $f_1^{kh}, f_2^{kh}, \ldots, f_n^{kh}$ de $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}}^{(1)})$, $g_1^{kh}, \ldots, g_m^{kh}$ de $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, P^{(2)})$ tals que

$$M_{kh}^1(s) = M_{kh}^1(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^s f_i^{kh}(x) \, dW^i(x) \; ,$$

$$M_{kh}^2(t) = M_{kh}^2(0) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t g_j^{kh}(y) \, d\hat{W}^j(y) \; .$$

amb $M_{kh}^1(0)$ i $M_{kh}^2(0)$ constants q.s. ja que $\underline{\underline{F}}_0^1$ i $\underline{\underline{F}}_0^2$ són trivials.

Aleshores,

$$M_{st} = \lim_{k\to\infty} \Big[\sum_{h=1}^{r_k} a_h^k \, M_{kh}^1(0) M_{kh}^2(0) + \sum_{h=1}^{r_k} a_h^k \Big(M_{kh}^1(0) \sum_{j=1}^{m} \int_0^t g_j^{kh}(y) d\hat{W}^j(y) \Big) +$$

$$+ \sum_{h=1}^{r_h} a_h^k \Big(M_{kh}^2(0) \sum_{j=1}^{m} \int_o^s f_i^{kh}(x)\, dW^i(x) \Big) +$$

$$+ \sum_{h=1}^{r_h} a_h^k \Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_o^s f_i^{kh}(x)\, dW^i(x) \int_o^t g_j^{kh}(y)\, d\hat{W}^j(y) \Big) \Big] .$$

Ara, fent s=t=0 obtenim

$$M_{00} = \lim_{k} \sum_{h=1}^{r_k} a_h^k \, M_{kh}^1(0) M_{kh}^2(0) .$$

També,

$$M_{s0} - M_{00} = \lim_{k\to\infty} \sum_{h=1}^{r_k} a_h^k \Big(M_{kh}^2(0) \sum_{i=1}^{n} \int_o^s f_i^{kh}(x)\, dW^i(x) \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\lim_{k\to\infty} \sum_{h=1}^{r_k} \int_o^s a_h^k M_{kh}^2(0) f_i^{kh}(x)\, dW^i(x) \Big) .$$

ja que $M_{kh}^2(0)$ és constant q.s.. La successió

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{h=1}^{r_k} \int_o^s a_h^k M_{kh}^2(0) f_i^{kh}(x)\, dW^i(x) \Big) , k \geq 1 \Big\}$$

és de Cauchy i per la independència de $W^1,\dots,W^n$, fixat i, cada successió

$$\Big\{ \sum_{h=1}^{r_k} \int_o^s a_h^k \, M_{kh}^2(0) f_i^{kh}(x)\, dW^i(x) \ , \ k\geq 1 \Big\} \ , \ i=1,\dots,n,$$

és de Cauchy. Per la isometria entre $L^2(\mathbb{R}_+ \times\Omega, \underline{\underline{P}}^{(1)}, ds\otimes dP)$ i $L^2(\Omega, \underline{\underline{F}}^1, P)$, cada successió

$$\left\{ \sum_{h=1}^{r_k} a_h^k M_{kh}^2(0) f_i^{kh} \ , k \geq 1 \right\} \ , \ i=1,\dots,n$$

és de Cauchy. De la completitud de $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}}^{(1)})$ es dedueix que existeixen processos $f_1,\dots,f_n$ d'aquest espai tals que

$$M_{s0} - M_{00} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^s f_i(x)\, dW^i(x) \ .$$

Anàlogament, existeixen processos $g_1,\dots,g_m$ de $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}}^{(2)})$ tals que

$$M_{0t} - M_{00} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t g_j(y)\, d\hat{W}^j(y) \ .$$

Finalment,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{h=1}^{r_k} \left(a_h^k \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_0^s f_i^{kh}(x)\, dW^i(x) \int_0^t g_j^{kh}(y)\, d\hat{W}^j(y) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lim_{k\to\infty} \sum_{h=1}^{r_k} \int_0^s \int_0^t a_h^k\, f_i^{kh}(x) g_j^{kh}(y)\, dW^i(x) d\hat{W}^j(y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{m} \int_{R_{st}} \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{h=1}^{r_k} a_k^h\, f_i^{kh}(x) g_j^{kh}(y) \right) dW_{xy}^{ij} \ .$$

i, repetint raonaments anàlegs als d'abans, existiran funcions $h_{11},\dots,h_{nm}$ de $L^2(\mathbb{R}^2_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}})$ tals que

$$M_{st} - M_{s0} - M_{0t} + M_{00} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{R_{st}} h_{ij}(z)\, dW^{ij}(z) \ .$$

La unicitat és trivial.■

<u>COROL.LARI 3.14</u>: <u>Tota martingala</u> $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ <u>afitada en</u> L^2 <u>té una versió contínua</u>.

§3: Martingales locals

Continuarem designan per $\{\underline{\underline{F}}_z,\ z\in \mathbb{R}^2_+\}$ la filtració producte de dues filtracions associades a brownians multidimensionals independents W i $\hat{W}$. Del fet que tota martingala afitada en L^2 tingui una versió contínua (corol.lari 3.14) s'infereix que els espais M^p_{loc} $(p>1)$ coincideixen per a tot p. Anomenarem martingala local a tot procés que sigui d'un d'aquests $\underline{\underline{M}}^p_{loc}$, $p>1$ (o, equivalenment, de tots).

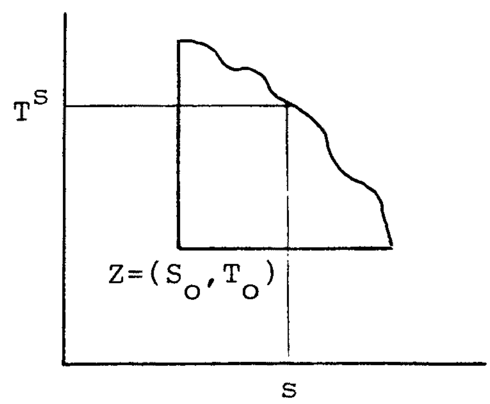
Comencem veient una propietat general de les regions d'atur. Donat un conjunt $D\subset \mathbb{R}^2_+\times\Omega$ i un punt $s\in\mathbb{R}_+$, designarem per D^s la secció de D per s, això és:

$$D^s = \{(t,\omega)\in \mathbb{R}_+\times\Omega:\ (s,t,\omega)\in D\}\ .$$

LEMA 3.15: Sigui $\{\underline{\underline{G}}_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ una filtració que compleixi F1, F2 i F3, i sigui D una regió d'atur. Per a tot $s\in\mathbb{R}_+$ tal que $D^s\neq\emptyset$, definim

$$T^s:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$$

$$T^s(\omega)= \sup\{t\in\mathbb{R}_+ :(s,t,\omega)\in D\}\ .$$



Aleshores T^s és un temps d'atur respecte la filtració $\{\underline{\underline{G}}_{\infty t},\ t\in\mathbb{R}_+\}$. A més, si $Z=(S_o,T_o)$ es l'ínfim de D,

$$D^s = \begin{cases} [\![T_o, T^s]\!] & \text{si}\quad T^s<\infty,\\ [\![T_o,\infty [\![& \text{en cas contrari.}\end{cases}$$

DEMOSTRACIÓ

Sigui s de $\mathbb{R}_+$ tal que $D^s\neq\emptyset$. La secció D^s és un conjut de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ progressivament mesurable respecte a la filtració $\{\underline{\underline{G}}_{\infty t}, t\in\mathbb{R}_+\}$, ja que

$$D^s \cap ([0,t]\times\Omega) = D^s \cap ([0,s]\times[0,t]\times\Omega)^s =$$

$$= \big(D \cap ([0,(s,t)]\times\Omega)\big)^s ,$$

i com que

$$D \cap ([0,(s,t)]\times\Omega) \in \underline{\underline{B}}([0,(s,t)])\otimes\underline{\underline{G}}_{st} ,$$

tindrem

$$\big(D \cap ([0,(s,t)]\times\Omega)\big)^s \in \underline{\underline{B}}([0,t])\otimes\underline{\underline{G}}_{st} \subset \underline{\underline{B}}([0,t])\otimes\underline{\underline{G}}_{\infty t} .$$

Vistes les hipòtesis sobre D, és clar que per tot ω de Ω, $D^s(\omega)$ és un conjunt connex i tancat de $\mathbb{R}_+$; es tracta, per tant, d'un interval $[T_o(\omega),a]$ o $[T_o(\omega),\infty[$. Llavors,

$$T^s(\omega) = \sup\{t\in\mathbb{R}_+ : (s,t,\omega)\in D\} =$$

$$= \sup\{t\in\mathbb{R}_+ : t\in D^s(\omega)\} =$$

$$= \inf\{t\in\mathbb{R}_+ : t\in (D^s(\omega))^c \cap [T_o(\omega),\infty[\,\} =$$

$$= \inf\{t\in\mathbb{R}_+ : (t,\omega)\in (D^s)^c \cap [\![T_o, \infty [\![\,\} ,$$

i com que D^s i $[\![T_o,\infty]\!]$ són $\{\underline{\underline{G}}_{\infty t}, t\in\mathbb{R}_+\}$- progressius, T^s és un $\{\underline{\underline{G}}_{\infty t}, t\in\mathbb{R}_+\}$ temps d'atur.

L'última part del lema és evident.■

Designarem per $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+\times\Omega, P^{(1)}, ds\otimes dP)$ (abreujadament $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+\times\Omega, P^{(1)})$) el conjunt dels processos $f:\mathbb{R}_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ previsibles tals que

(1) $\qquad \int_0^u f^2(s)\, ds < \infty$ q.s., per a tot $u \geq 0$.

És un espai mètric complet amb la distància

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} E\left[1 \wedge \left(\int_0^n (f(s) - g(s))^2\, ds\right)^{1/2} \right] .$$

Amb les identificacions usuals, $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}}^{(1)})$ conté tots els processos mesurables, $\{\underline{\underline{F}}^1_s, s \in \mathbb{R}_+\}$ adaptats i que compleixen (1).

Per a tot procés f de $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}}^{(1)})$ existeix una successió creixent $T_n \uparrow \infty$ de $\underline{\underline{F}}^1_s$ -temps d'atur (definits com

$$T_n = \inf \{t \geq 0 : \int_0^t f^2(s)\, ds \geq n\} \ )$$

tals que $f\, I_{[\![0,T_n]\!]} \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}}^{(1)})$.

En el cas amb dos paràmetres, $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}}, ds \otimes dt \otimes dP)$ representarà el conjunt dels processos $h : \mathbb{R}^2_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ previsibles tals que existeix una successió creixent $\{D_n, n \geq 1\}$ de regions d'atur, amb $\bigcup_{n \geq 1} D_n = \mathbb{R}^2_+$ q.s tal que $h\, I_{D_n} \in L^2(\mathbb{R}^2_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}})$. Si h és d'aquest espai, aleshores

$$\int_{R_z} h^2(\zeta)\, d\zeta < \infty \text{ , q.s., per a tot } z \in \mathbb{R}^2_+ .$$

<u>TEOREMA 3.16</u>: <u>Sigui</u> $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ <u>una martingala local</u>. <u>Aleshores existeixen processos</u> $f_1, \ldots, f_n$ <u>de</u> $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}}^{(1)})$, $g_1, \ldots, g_m$ <u>de</u> $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}}^{(2)})$ i $h_{11}, \ldots, h_{nm}$ <u>de</u> $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}})$ <u>tals que</u>

$$M_{st} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^s f_i(x)\, dW^i_x + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t g_j(y)\, d\hat{W}^j_y + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{R_{st}} h_{ij}(x,y)\, dW^{ij}_{xy} - M_{00}.$$

DEMOSTRACIÓ

Com que $\underline{\underline{M}}_{loc} = \underline{\underline{M}}^2_{loc}$, existirà una successió de martingales de $\underline{\underline{M}}^2$, $\{M^k,\ k\geq 1\}$, i una successió creixent $\{D_k,\ k\geq 1\}$ de regions d'atur, amb $\bigcup_{k\geq 1} D_k = \mathbb{R}^2_+$ q.s., tals que

$$M_z = M^k_z \quad , \text{ si } \quad z \in D_k \ .$$

També, per a cada k, exitiran funcions $f^k_1,\ldots,f^k_n$ de $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega\ ,\underline{\underline{P}}^{(1)})$, $g^k_1,\ldots,g^k_m$ de $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{P}}^{(2)})$, $h^k_{11},\ldots,h^k_{nm}$ de $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{P}})$ tals que

$$M^k_{st} = \sum_{i=1}^n \int_0^s f^k_i(x)dW^i_x + \sum_{j=1}^m \int_0^t g^k_j(y)d\hat{W}^j_y + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{R_{st}} h^k_{ij}(x,y)dW^{ij}_{xy} - M^k_{00} \ .$$

Estudiem per separat les parts de la martingala M no nul.la sobre els eixos, i la part nul.la sobre els eixos:

a) Part no nul.la sobre els eixos: Sigui k tal que la secció per 0 D^0_k sigui no buida, i definim el $\underline{\underline{F}}_{\infty t}$- temps d'atur T_k per

$$T_k(\omega) = \sup\{t\geq 0 \ :\ (0,t,\omega)\in D_k\} \quad .$$

Tindrem:

$$M_{0t} = M^k_{0t} \quad \text{per a } t\in[\![0,T_k]\!] \ .$$

Llavors, si $k\leq k'$,

$$\sum_{j=1}^m \int_0^t g^k_j(y)\ d\hat{W}^j_y = \sum_{j=1}^m \int_0^t g^{k'}_j(y)\ d\hat{W}^j_y \quad , \text{ per a } t\in[\![\ 0,T_k]\!] \ ,$$

i de la independència dels $\hat{W}^j$ resulta

$$\int_0^t g^k_j(y)\ d\hat{W}^j_y = \int_0^t g^{k'}_j(y)\ d\hat{W}^j_y, \ j=1,\ldots,m, \quad k\leq k', \quad t\in[\![\ 0,T_k]\!] \quad ,$$

i, doncs, per a cada j,

$$\int_0^\infty (g_j^k(y) - g_j^{k'}(y)) I_{[\![0,T]\!]}(y)\, d\hat{W}_y^j = 0 \quad ,$$

i com que $(g_j^k - g_j^{k'}) I_{[\![0,T_k]\!]} \in L^2(\mathbb{R}_+^2 \times \Omega, \underline{\underline{P}}^{(2)})$, llavors

$$\int_0^\infty (g_j^k(y) - g_j^{k'}(y))^2 I_{[\![0,T_k]\!]}(y)\, dy = 0$$

d'on

$$g_j^k(y) = g_j^{k'}(y) \quad dt \otimes dP\text{-q.s. sobre } [\![0,T_k]\!] \text{ , per a tot } k' \geq k.$$

Per tant, per a cada $j = 1,\ldots,m$, les funcions g_j^k , $k \geq k_o$, defineixen per reenganxament un procés g_j de $L^2(\mathbb{R}_+^2 \times \Omega, \underline{\underline{P}}^{(2)})$ tal que

$$M_{0t} = M_{00} + \sum_{j=1}^m \int_0^t g_j(y)\, d\hat{W}_y^j \ .$$

Anàlogament es tracta M_{s0}.

b) part nul.la sobre els eixos: El mètode de Cairoli-Walsh [17] per a la representació de martingales locals de $\underline{\underline{M}}^2$ respecte al drap brownià es pot transferir sense dificultat al nostre context:

Designem per M^o la martingala nul.la sobre els eixos:

$$M_{st}^o = M_{st} - M_{s0} - M_{0t} + M_{00} \ .$$

Podem prendre com a successió localitzadora de M^o $\{ M^{D_k} , k \geq 1\}$, definida per

$$M_z^{D_k} = \int_{R_z} I_{D_k}(\zeta)\, dM_\zeta^o \quad ,$$

on la integral es defineix per localització de la manera usual, i llavors M^{D_k} és de $\underline{\underline{M}}^2$.

D'altra banda, un raonament mitjançant funcions simples mostra que si α és afitat i previsible, i N una martingala local de la forma

$$\sum_{i,j} \int \xi_{ij}(z)\, dW^{ij}(z) \quad ,$$

amb $\xi_{ij} \in L^2(\mathbb{R}^2_+ \times \Omega, \underline{\underline{P}})$, tindrem

$$\alpha \cdot N_z = \sum_{i,j} \int_{R_z} \xi_{ij}(\zeta)\alpha(\zeta)\, dW^{ij}(\zeta) \quad .$$

Com que $M^{D_k} = M^{D_{k'}}$ si $k' \geq k$, tindrem

$$M_z^{D_k} = I_{D_k} \cdot M_z^{D_k} = I_{D_k} \cdot M_z^{D_{k'}} = \sum_{i,j} \int_{R_z} h_{ij}^{k'} I_{D_k}(x,y)\, dW^{ij}(x,y) \ ,$$

d'on, prenent variacions quadràtiques resulta per a cada i,j

$$h_{ij}^{k} = h_{ij}^{k'} \quad \text{q.s.} \quad \text{sobre} \quad D^k, \text{ per a tot } k' \geq k \ .$$

De nou per reenganxament es defineix un procés h_{ij} que compleix totes les propietats demanades.■

CAPÍTOL IV

CÀLCUL DE LA MARTINGALA $\tilde{M}$ EN LES FILTRACIONS PRODUCTE I APLICACIONS

En el primer paràgraf d'aquest capítol es calcula la martingala $\tilde{M}$ associada a una martingala M relativa a una filtració producte de dos brownianes multidimensionals independents, afitada en L^2; i la variació $\langle M,\tilde{M}\rangle$. El càlcul de $\tilde{M}$ s'efectua mitjançant el de la martingala $M*N$. No és l'única manera de fer-lo, ja que també pot fer-se amb la fórmula d'Itô multidimensional (teorema 1.58), però ens ha semblat més interessant d'aquesta manera; és un càlcul llarg i delicat, i mostra fins a quin punt cal afinar les eines en aquest tema.

Establert en el capítol II el teorema 2.11: "Si M és una martingala de $\underline{\underline{M}}_c^4$ nul.la sobre els eixos amb variació independent del camí, llavors $\langle M,\tilde{M}\rangle = 0$", en el segon paràgraf s'apliquen els càlculs anteriors a estudiar en quines filtracions productes és cert el recíproc, i es demostra que sols és compleix quan ambdós brownians W i $\hat{W}$ són unidimensionals. L'existència de contraexemples en el cas n=2, m=1, permet, en el tercer paràgraf, demostrar que el recíproc del teorema 2.11 també és fals en la filtració d'un drap brownià.

S'estudia, en el quart paràgraf, què succeix quan la martingala no és nul.la sobre els eixos, veient que el teorema 2.11 no és compleix en general en aquesta situació.

Finalment, s'acompanya el capítol d'un resum sobre les relacions establertes entre els distints tipus de martingales.

§1: Càlcul de $\tilde{M}$ i de les variacions $\langle M,M\rangle$ i $\langle M,\tilde{M}\rangle$

En tot aquest paràgraf i el següent, $\{\underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ designarà la filtració producte de de dues filtracions engendrades per dos brownians multidimensionals independents $W = (W^1,\dots,W^n)$ i $\hat{W} = (\hat{W}^1,\dots,\hat{W}^m)$. Comencem calculant la variació quadràtica d'una martingala afitada en L^2:

<u>PROPOSICIÓ 4.1</u>: <u>Sigui</u> $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ <u>una martingala afitada en L^2 amb representació</u>

$$M_{st} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^s f_i(x)dW_x^i + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t g_j(y)d\hat{W}_y^j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \int_{R_{st}} h_{ij}(x,y)dW_{xy}^{ij} - M_{00}.$$

<u>Aleshores</u>

$$\langle M\rangle_z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \int_0^s\int_0^t h_{ij}^2(x,y)\; dxdy\ .$$

DEMOSTRACIÓ

$\langle M\rangle$ depen sols dels increments rectangulars de M i, doncs, la part no nul.la sobre els eixos no intervé en aquests càlculs. Ara

$$\langle M\rangle_z = \sum_{i,j} \langle \int_{R.} h_{ij}(x,y)dW_{xy}^{ij}, \int_{R.} h_{ij}(x,y)dW_{xy}^{ij}\rangle_z \; +$$

$$+\; 2 \sum_{(i,j)\neq(k,p)} \langle \int_{R.} h_{ij}(x,y)dW_{xy}^{ij}\; , \int_{R.} h_{kp}(x,y)dW_{xy}^{kp}\rangle_z\ .$$

Però

$$\langle \int_{R.} h_{ij}(x,y)dW_{xy}^{ij}\; , \int_{R.} h_{kp}(x,y)dW_{xy}^{kp}\rangle_z =$$

$$= \int_{R_z} h_{ij}(x,y)h_{kp}(x,y)\;\; d\langle W^{ij},W^{kp}\rangle(x,y)\ ,$$

i

$$<W^{ij},W^{kp}>_{st} = <W^i\hat{W}^j,W^k\hat{W}^p>_{st} = <W^i,W^k>_s<\hat{W}^j,\hat{W}^p>_t =$$

$$= \delta_{ik}\delta_{jp}\ st \quad .\blacksquare$$

Per al càlcul de la martingala $M*N$ associada a dues martingales M i N afitades en L^2, ens calen els tres lemes següents. El primer estableix una versió amb les hipòtesis una mica més febles del teorema del límit iterat per a successions dobles de L^p:

<u>LEMA 4.2</u>: <u>Sigui</u> $\{X_{nm},\ n,m \geq 1\}$ <u>una successió doble de</u> $L^p(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$. <u>Si existeix el limit doble</u>

$$\lim_{n,m\to\infty} X_{nm} = X \qquad \text{en} \quad L^p$$

<u>i per a tot</u> $m \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} X_{nm} = X_m \qquad \text{en probabilitat,}$$

<u>aleshores</u>,

$$\lim_{n\to\infty} X_{nm} = X_m \quad \text{en} \quad L^p \quad \underline{i} \quad \lim_{m\to\infty} X_m = X \quad \text{en } L^p,$$

<u>és a dir</u>, <u>existeix el límit iterat en L^p i coincideix amb el límit doble</u>.

DEMOSTRACIÓ

1) Comencem veient un "teorema del límit iterat en L^p": Sigui $\{X_{nm},n,m \geq 1\}$ una successió doble de $L^p(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ i suposem que existeix el límit doble $\lim\limits_{n,m\to\infty} X_{nm} = X$ en L^p i que per a cada $m \geq 1$ existeix el límit

$$\lim_{m\to\infty} X_{nm} = X_m \qquad \text{en} \quad L^p.$$

Vegem que aleshores existeix el límit iterat

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} X_{nm} = \lim_{m\to\infty} X_m \quad \text{en } L^p$$

i coincideix amb el límit doble. En efecte, (la mateixa demostració serviria per a qualsevol espai mètric), si una successió $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Y$ en L^p, i existeixen Z de $L^p(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ i $r>0$ tals que

(1) $\qquad E[|Y_n - Z|^p] \leq r \quad$ per a n prou gran,

llavors

(2) $$E[|Y - Z|^p] \leq r ,$$

ja que el conjunt $V = \{ T \in L^p(\Omega,\underline{\underline{F}},P) : E[|T-Z|^p]>r\}$ és un obert, i si Y fos de V, aleshores V seria un entorn de Y, i per a n prou gran, $Y_n \in V$, que contradiu (1). Així, $Y \notin V$ i, doncs, tenim (2).

Si $\{X_{nm}, n,m \geq 1\}$ és una successió doble tal que existeix el límit doble X, per a tot $\varepsilon >0$, existirà $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n,m > N$,

$$E[|X_{nm} - X|^p] < \varepsilon.$$

Fixem $m >N$; llavors

$$E[|X_{nm} - X|^p] < \varepsilon \text{ per a tot } n >N,$$

i pel raonament anterior, com que $X_{nm} \xrightarrow[n\to\infty]{} X_m$, tindrem

$$E[|X_m - X|^p] <\varepsilon,$$

d'on resulta $\lim_{m\to\infty} X_m = X$ en L^p.

2) El lema es demostra ara fàcilment: Com que $\lim_{n,m\to\infty} X_{nm}=X$ en L^p, la família $\{|X_{nm}|^p, n,m \geq 1\}$ és uniformement integrable. Fixat $m\geq 1$, per hipòtesi, $\lim_{n\to\infty} X_{nm} = X_m$ en probabilitat, però com que la família $\{|X_{nm}|^p , n\geq 1\}$ és uniformement integrable, llavors $\lim_{n\to\infty} X_{nm} = X_m$ en L^p. Ara apliquem la part 1).■

NOTA 4.3 Aquest lema es pot enunciar per a la convergència en $\underline{\underline{H}}^1$ i la convergència uniforme en probabilitat. Concretament:

Sigui $\{M^{nm}, n.m \geq 1\}$ una successió doble de martingales de $\underline{\underline{H}}^1$ (això és, M^{nm} és contínua per la dreta i amb límits per l'esquerra i $E[\sup_{t\geq 0}|M_t^{nm}|] < \infty$) tal que existeixi el límit doble en $\underline{\underline{H}}^1$:

$$\lim_{n,m\to\infty} E[\sup_t |M_t^{nm} - M_t|] = 0 ,$$

i suposem que per a tot $m \geq 1$, i per a tot $\lambda > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sup_t |M_t^{nm} - M_t^m| > \lambda\} = 0.$$

Aleshores

$$\lim_{n\to\infty} E[\sup_t |M_t^{nm} - M_t^m|] = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{m\to\infty} E[\sup_t |M_t^m - M_t|] = 0.$$

En efecte, es tracta d'un raonament com el de la part 2) del lema anterior, però que utilitza la completitud de l'espai $\underline{\underline{H}}^1$: Si

$$P\{\sup_t |M_t^{nm} - M_t^m| > \lambda\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

llavors,

$$P\{\sup_t |M_t^{nm} - M_t^{n'm}| > \lambda\} \xrightarrow[n,n' \to \infty]{} 0.$$

Però la família $\{\sup_t |M_t^{nm} - M_t^{n'm}|, n,n' \geq 1\}$ és uniformement integrable i, doncs,

$$E[\sup_t |M_t^{nm} - M_t^{n'm}|] \xrightarrow[n,n' \to \infty]{} 0.$$

Finalment s'aplica la completitud de $\underline{\underline{H}}^1$ i el teorema del límit iterat en $\underline{\underline{H}}^1$ (que es demostra igual que la part 1) del lema anterior.■

El següent lema és una versió per a la convergència uniforme en probabilitat de la proposició 1.62:

LEMA 4.4: Sigui $(U,\underline{\underline{U}})$ un espai mesurable, T un interval de $\mathbb{R}_+$, i considerem una successió $\{X_n, n \geq 1\}$ de funcions $X_n : T\times U\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que:

1) Per a tot u de U, els processos $\{X_n^u(t), t \in T\}$ són continus per la dreta (respectivament continus).

2) Per a tot t de T i per a tot $n\geq 1$, $X_n(t): U\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ és $\underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{F}}$ -mesurable.

3) Per a tot u de U, la successió $\{X_n^u, n\geq 1\}$ convergeix uniformement sobre els compactes de T.

Aleshores existeix una funció $X: T\times U\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{B}}(T)\otimes\underline{\underline{U}}\otimes\underline{\underline{F}}$ -mesurable tal que per a tot u de U, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n^u = X^u$ uniformement en probabilitat sobre els compactes de T, i tal que per a tot u, les trajectòries de X^u són totes contínues per la dreta (respectivament contínues).

DEMOSTRACIÓ

Sigui C un obert relativament compacte de T. Definim, per recurrència, una successió d'aplicacions $n_k : U \longrightarrow \mathbb{N}$:

$$n_o(u) = 1$$

$$n_k(u) = \inf\{m>n_{k-1}(u): \sup_{p,q\geq m} P\{\sup_{t\in C} |X_p^u(t) - X_q^u(t)|>2^{-k}\} \leq 2^{-k}\}.$$

Demostrem, per inducció, que les n_k són $\underline{\underline{U}}$-mesurables: òbviament ho és n_o. Supsem que ho sigui n_{k-1}. Aleshores, per a qualssevol p i q de $\mathbb{N}$,

$$\{(u,\omega)\in U\times\Omega : \sup_{t\in C} |X_p^u(t) - X_q^u(t)| > 2^{-k}\} =$$

$$= \{(u,\omega)\in U\times\Omega: \sup_{t\in C\cap\mathbb{Q}} |X_p^u(t) - X_q^u(t)|> 2^{-k} \} \in \underline{\underline{U}}\otimes\underline{\underline{F}} .$$

Per Fubini, l'aplicació

$$U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longrightarrow \sup_{p,q \geq m} P\{\ \omega:\ \sup_{t\in C} |X_p^u(t,\omega) - X_q^u(t,\omega)| > 2^{-k}\ \}$$

és $\underline{\underline{U}}$ -mesurable, i també ho serà l'aplicació

$$f_m : U \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f_m(u) = \begin{cases} m \cdot I_{[0,2^{-k}]}\left(\sup_{p,q\geq m} P\{\ \omega:\ \sup_{t\in C} |X_p^u(t,\omega) - X_q^u(t,\omega)| > 2^{-k}\ \}\right), \\ \\ \infty \cdot I_{[0,2^{-k}]}\left(\sup_{p,q \ngeq m} P\{\ \omega:\ \sup_{t\in C} |X_p^u(t,\omega) - X_q^u(t,\omega)| > 2^{-k}\}\right). \end{cases}$$

(Amb el conveni $\infty \cdot 0 = 0$).

Llavors, $f(u) = \inf\{f_m(u),\ m \in \mathbb{N}\}$ és $\underline{\underline{U}}$ -mesurable, i $f(u) < \infty$ (la successió és convergent per a tot u), i, finalment, també

$$n_k(u) = f(u) \vee (n_{k-1}(u)+1)$$

serà $\underline{\underline{U}}$-mesurable.

Per a tot u de U i $k \geq 1$, posem

$$Z_k^u(t,\omega) = X_{n_k(u)}^u(t,\omega)\ .$$

Llavors

$$P\{\ \sup_{t\in C} |Z_{k+1}^u(t,\omega) - Z_k^u(t,\omega)| > 2^{-k}\} \leq 2^{-k}\ .$$

Pel lema de Bórel-Cantelli, q.p.t. ω,

$$\sup_{t\in C} |Z_{k+1}^u(t,\omega) - Z_k^u(t,\omega)| \leq 2^{-k},\ \text{per a}\ \ k \geq k_0(\omega)\ ,$$

i, doncs, q.p.t.ω, $\{Z_k^u(t,\omega)\ ,\ k \geq 1\}$ convergeix uniformement en $t \in C$. Posem

$$Y^u(t,\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} Z_k^u(t,\omega) & \text{si convergeix,} \\ \\ 0 & \text{en cas contrari .} \end{cases}$$

Ara apliquem la proposició 1.61 per obtenir una versió d'Y amb les propietats desitjades.■

LEMA 4.5: *Sigui* $\{f_n, n\geq 1\}$ *una successió de processos mesurables* $f_n:[a,b]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *amb* $\int_a^b f_n^2(t)\,dt<\infty$ q.s., *i tals que*

$$\int_a^b (f_n(t) - f_m(t))^2\,dt \xrightarrow[n,m\to\infty]{P} 0.$$

Aleshores existeix un procés $f:[a,b]\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ *mesurable i amb* $\int_a^b f^2(t)\,dt <\infty$ q.s., *tal que*

$$\int_a^b (f_n(t) - f(t))^2\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 .$$

A més, si existeix un altre procés mesurable $\bar{f}:[a,b]\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ *tal que per a tot* $t\in[a,b]$,

$$f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \bar{f}(t) ,$$

aleshores

$$f = \bar{f} \quad dt\otimes dP\text{-q.s..}$$

DEMOSTRACIÓ

Per a tot $k\geq 1$, existeix un nombre N_k de $\mathbb{N}$ tal que si $p>q\geq N_k$,

$$P\{\int_a^b (f_p(t) - f_q(t))^2\,dt > 2^{-k} \} \leq 2^{-k} .$$

Definim, per recurrència,

$$n_o = 1,$$

$$n_k = \inf\{ m>n_{k-1} : \sup_{p>q\geq m} P\{\int_a^b (f_p(t) - f_q(t))^2\,dt> 2^{-k}\}\leq 2^{-k} \} .$$

Per a $k\geq 1$, sigui $g_k = f_{n_k}$. Com que

$$\sum_{K=1}^{\infty} P\{\omega \in \Omega : \int_a^b (g_{k+1}(t,\omega) - g_k(t,\omega))^2 \, dt > 2^{-k}\} < \infty,$$

pel lema de Borel-Cantelli exitirà $\Lambda \subset \Omega$, amb $P(\Lambda)=0$, i per tot $\omega \notin \Lambda$, podrem trobar un nombre natural $k_o(\omega)$ tal que si $k \geq k_o(\omega)$,

$$\int_a^b (g_{k+1}(t,\omega) - g_k(t,\omega))^2 \, dt \leq 2^{-k} ,$$

d'on $\{g_k(\omega),\ k\geq 1\}$ és de Cauchy en $L^2([a,b],dt)$. Posem

$$g_k'(\omega) = \begin{cases} g_k(\omega) & \text{si } \omega \notin \Lambda, \\ 0 & \text{si } \omega \in \Lambda. \end{cases}$$

Llavors per a tot ω, la successió $\{g_k'(\omega),\ k\geq 1\}$ convergeix en $L^2([a,b],dt)$. Per la proposició 1.62, existirà un procés mesurable f tal que per a tot $\omega\in\Omega$,

$$\int_a^b (g_k'(t,\omega) - f(t,\omega))^2 \, dt \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 ,$$

i, per tant, q.p.t.$\omega\in\Omega$,

$$\int_a^b (g_k(t,\omega) - f(t,\omega))^2 \, dt \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 ,$$

i, doncs,

$$\int_a^b (g_k(t) - f(t))^2 \, dt \xrightarrow[k\to\infty]{P} 0,$$

d'on

$$\int_a^b (f_n(t) - f(t))^2 \, dt \xrightarrow[k\to\infty]{P} 0.$$

Vegem l'última part del lema: considerem la convergència

$$f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \bar{f}(t) .$$

A causa de la mesurabilitat de f_n i $\bar{f}$, el conjunt

$$\{(t,\omega)\in[a,b]\times\Omega \ : \ |f_n(t,\omega) - \overline{f}(t,\omega)| > \lambda\}$$

és $\underline{\underline{B}}([a,b])\otimes \underline{\underline{F}}$ -mesurable; doncs, per Fubini, la funció

$$h_n(t) = P\{\omega\in\Omega: \ |f_n(t,\omega) - \overline{f}(t,\omega)| > \lambda\}$$

és $\underline{\underline{B}}([a,b])$ -mesurable. Però $h_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puntualment, però com que

$$0 \leqq h_n(t) \leqq 1 ,$$

pel teorema de la convergència dominada,

$$\int_a^b h_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 ,$$

i per Fubini,

$$\int_a^b h_n(t)\, dt = \int_a^b E[I_{\{(t,\omega)\in[a,b]\times\Omega \ : \ |f_n(t,\omega)-\overline{f}(t,\omega)|>\lambda\}}(t,\omega)]dt,$$

és a dir, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{f}$ en mesura $dt\otimes dP$. Per tant, existeix una subsuccessió $\{f_{n'},\ n'\geqq 1\}$ i un conjunt $A\subset[a,b]\times\Omega$ de mesura $dt\otimes dP$ zero tals que si $(t,\omega)\notin A$,

$$f_{n'}(t,\omega) \xrightarrow[n'\to\infty]{} \overline{f}(t,\omega) .$$

Tornem a la successió inicial del lema:

$$\int_a^b (f_n(t) - f(t))^2\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 ,$$

i, doncs,

$$\int_a^b (f_{n'}(t) - f(t))^2\, dt \xrightarrow[n'\to\infty]{P} 0 .$$

Existirà, per tant, un conjunt $\Theta\subset\Omega$, $P(\Theta)=0$ i una subsuccessió $\{f_{n''},\ n''\geqq 1\}$ de $\{f_{n'},\ n'\geqq 1\}$, tals que si $\omega\notin\Theta$,

$$\int_a^b (f_{n''}(t,\omega) - f(t,\omega))^2\, dt \xrightarrow[n''\to\infty]{} 0.$$

Com que per a cada ω (fora de Λ) hi ha convergència en $L^2([a,b],dt)$, existirà una subsuccessió (depenent de ω) i $B_\omega\subset[a,b]$ de mesura zero tals que si $t \notin B_\omega$,

$$f_{n'''}(t,\omega) \xrightarrow[n'''\to\infty]{} f(t,\omega) .$$

Però com que per a t fora d'A_ω,

$$f_{n'''}(t,\omega) \xrightarrow[n'''\to\infty]{} \bar{f}(t,\omega) ,$$

tenim

$$f(t,\omega) = \bar{f}(t,\omega) \quad \text{q.p.t. } t \in [a,b], \text{ q.p.t.} \omega \in \Omega ,$$

i per Fubini,

$$f = \bar{f} \quad dt \otimes dP \text{ -q.s.}. \blacksquare$$

<u>TEOREMA 4.6</u>: <u>Considerem dues martingales</u> $M = \{M_z, \underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ <u>i</u> $N = \{N_z, \underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ <u>afitades en L^2 i amb representació</u>

$$M_z = \int_{R_z} f(x,y)\, dW^{ij}(x,y) ,$$

$$N_z = \int_{R_z} g(x,y)\, dW^{hk}(x,y) .$$

<u>Aleshores</u>

$$M{*}N_{st} = \int_0^s \int_0^t \left(\int_0^{t'} f(s',y)\,d\hat{W}_y^j\right)\left(\int_0^{s'} g(x,t')\,dW_x^h\right) dW_{s'}^i\, d\hat{W}_{t'}^k .$$

DEMOSTRACIÓ

Per simplificar l'escriptura, escriurem $W^i = W^1$, $\hat{W}^j = W^2$, $W^h = W^3$ i $\hat{W}^k = W^4$. Fixem un punt z_0 de $\mathbb{R}_+^2$; podem suposar $z_0=(1,1)$. Sigui $\{\Gamma^{nm}, n,m \geq 1\}$ una successió de reixes sobre $[0,1]^2$ que esdevinguin arbitràriament fines, $\Gamma^{nm} = \Gamma_1^n \times \Gamma_2^m$, amb

$$\Gamma_1^n = \{s_1^n, \ldots, s_{p_n+1}^n\}, \quad 0=s_1^n<s_2^n<\ldots<s_{p_n+1}^n=1 ,$$

$$\Gamma_2^m = \{t_1^m, \ldots, t_{q_m+1}^m\}, \quad 0=t_1^m<t_2^m<\ldots<t_{q_m+1}^m=1 .$$

Per alleugerar les notacions suprimirem els superíndex m i n en s_i i t_j respectivament. Per a $z \leq (1,1)$ definim

$$S_z^{nm} = \sum_{(s_i,t_j)\in \bar{\Gamma}_z^{nm}} M(\Delta^1(s_i,t_j))N(\Delta^2(s_i,t_j)) =$$

$$= \sum_{(s_i,t_j)\in \bar{\Gamma}_z^{nm}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_0^{t_j} f(x,y)dW_x^1 dW_y^2 \int_0^{s_i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(x,y)dW_x^3 dW_y^4 .$$

D'acord amb el teorema 2.1,

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{z\leq(1,1)} E[\,|S_z^{nm} - M*N_z|\,] = 0 .$$

Fixem s i l'índex 'i', i apliquem el teorema de Fubini per a les integrals estocàstiques (proposició 3.9); llavors la suma

$$\sum_{t_j\in\bar{\Gamma}_{2t}^m} \int_0^{t_j} \left(\int_{s_i}^{s_{i+1}} f(x,y)dW_x^1\right)dW_y^2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\int_0^{s_i} g(x,y)dW_x^3\right)dW_y^4$$

convergeix uniformement en probabilitat respecte a $t\in[0,1]$ quan $m\to\infty$ cap a

$$\int_0^t \left(\int_0^{t'} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(x,y)dW_x^1 dW_y^2\right) d_{t'} \left(\int_0^{t'} \int_0^{s_i} g(x,y)dW_x^3 dW_y^4\right) ,$$

d'acord amb l'observació del teorema VIII.15 de Dellacherie-Meyer [25], ja que

(i) $\{\int_0^t \int_0^{s_i} g(x,y)dW_x^3 dW_y^4 ,\ \underline{\underline{F}}_{\infty t},\ t\geq 0\}$ és una martingala afitada en L^2.

(ii) El procés $\{\int_0^t \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(x,y)dW_x^1 dW_y^2 ,\ t\geq 0\}$ és adaptat a $\underline{\underline{F}}_{\infty t}$ i continu.

Reordenem l'expressió anterior: Per Itô i Fubini,

$$\int_o^t \left(\int_o^{t'} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(x,y)dW_x^1\, dW_y^2\right) d_{t'} \left(\int_o^{t'} \int_o^{s_i} g(x,y)dW_x^3 dW_y^4\right) =$$

$$= \int_o^t \left(\int_o^{t'} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(x,y)dW_x^1 dW_y^2 \int_o^{s_i} g(x,t')dW_x^3\right)dW_{t'}^4 =$$

$$= \int_o^t \left(\int_o^{s_i} g(x,t')dW_x^3 \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_o^{t'} f(x,y)dW_y^2 dW_x^1\right)dW_{t'}^4 .$$

Així, fixat i, per a tot $\lambda>0$,

$$P\{\sup_{t\leq 1} \Big| \sum_{t_j\in\overline{\Gamma}_{2\,t}^m} \int_o^{t_j}\int_{s_i}^{s_{i+1}} f(x,y)dW_x^1 dW_y^2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_o^{s_i} g(x,y)dW_x^3 dW_y^4 -$$

$$-\int_o^t \left(\int_o^{s_i} g(x,t')dW_x^3 \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_o^{t'} f(x,y)dW_y^2 dW_x^1\right) dW_{t'}^4\Big| >\lambda\} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

i, doncs, fixats n i s,

$$P\{\sup_{t\leq 1} \Big| \sum_{(s_i,t_j)\in\overline{\Gamma}_{st}^{nm}} \int_o^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(x,y)dW_x^1 dW_y^2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_o^{s_i} g(x,y)dW_x^3 dW_y^4 -$$

$$-\int_o^t \Big(\sum_{s_i\in\Gamma_{1\,s}^n} \int_o^{s_i} g(x,t')dW_x^3 \int_{s_i}^{s_{i+1}} \Big(\int_o^{t'} f(x,y)dW_y^2 dW_x^1 \Big)\Big)dW_{t'}^4 \Big| >\lambda \}$$

que tendeix cap a 0 quan $m\to\infty$.

Anomenem

$$h_n(s,t') = \sum_{s_i\in\overline{\Gamma}_{1\,s}^n} \int_o^{s_i} g(x,t')dW_x^3 \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\int_o^{t'} f(x,y)dW_y^2\right)dW_x^1 .$$

L'expressió anterior s'escriu

$$P\{ \sup_{t\leq 1} |S^{nm}_{st} - \int_o^t h_n(s,t')dW^4_{t'}|>\lambda\} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Pel mateix teorema de Dellacherie-Meyer, $h_n(s,t')$ convergeix uniformement en probabilitat respecte a $s\in[0,1]$ quan $n\to\infty$ cap a

$$h(s,t') = \int_o^s(\int_o^{s'} g(x,t')dW^3_x)\ d_{s'}(\int_o^{s'}(\int_o^t f(x,y)dW^2_y)dW^1_x) =$$

$$= \int_o^s(\int_o^{s'} g(x,t')dW^3_x \int_o^{t'} f(s',y)dW^2_y)\ dW^1_{s'}\ .$$

Ara, fixat t', el procés $h_n(.,t')$ és continu i, fixat s, podem prendre una versió de $h_n(s)$ $\underline{\underline{B}}([0,1])\otimes\underline{\underline{F}}$ -mesurable. Pel lema 4.4, existeix una funció $h:[0,1]^2\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{B}}([0,1]^2)\otimes\underline{\underline{F}}$ -mesurable, continu en s i tal que per a tot (s,t'),

$$h(s,t') = \int_o^s(\int_o^{s'} g(x,t')dW^3_x \int_o^{t'} g(s',y)dW^2_y)dW^1_{s'}, \qquad P\text{-q.s.}.$$

A més, com que per a cada s, $h_n(s,t')$ és $\underline{\underline{F}}_{\infty t'}$ -mesurable, també ho serà $h(s,t')$.

Recapitulem els resultats: Hem demostrat que fixats s i n, per tot $\lambda>0$,

$$P\{ \sup_{t\leq 1} |S^{nm}_{st} - \int_o^t h_n(s,t')dW^4_{t'}|>\lambda\} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0\ .$$

Però pel teorema 2.1 (ii), fixat s

$$E\,[\sup_{t\leq 1} |S^{nm}_{st} - M*N_{st}|] \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \quad ;$$

llavors, pels resultats sobre el límit iterat en $\underline{\underline{H}}^1$ (lema 4.2, nota 4.3)

$$E\Big[\sup_{t\leq 1} |S_{st}^{nm} - \int_o^t h_n(s,t')dW_{t'}^4|\Big] \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

i
$$E\Big[\sup_{t\leq 1} |\int_o^t h_n(s,t')dW_{t'}^4 - M*N_{st}|\Big] \xrightarrow[\to\infty]{} 0 \ .$$

Per la desigualtat de Davis,

$$E\Big[\Big(\int_o^t (h_n(s,t') - h_{n'}(s,t'))^2 dt'\Big)^{1/2}\Big] \xrightarrow[n,n'\to\infty]{} 0 \ ,$$

i doncs,

$$\int_o^t (h_n(s,t') - h_{n'}(s,t'))^2 dt' \xrightarrow[n,n'\to\infty]{P} 0 \ ,$$

però com que per a tot t'

$$h_n(s,t') \xrightarrow[n\to\infty]{P} h(s,t') \ ,$$

pel lema 4.5,

$$\int_o^t (h_n(s,t') - h(s,t'))^2 dt' \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

d'on

$$\int_o^t h_n(s,t')dW_{t'}^4 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \int_o^t h(s,t')dW_{t'}^4 \ ,$$

i, per tant,

$$M*N_{st} = \int_o^t h(s,t')dW_{t'}^4 \ . \blacksquare$$

<u>COROL.LARI 4.7</u>: <u>Siguin</u> M i N <u>dues martingales afitades en L^2</u> <u>amb representació</u>

$$M_{st} = \sum_{i=1}^{n} \int_o^s f_i(x)dW_x^i + \sum_{j=1}^{m} \int_o^t g_j(y)d\hat{W}_y^j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \int_{R_{st}} h_{ij}(x,y)dW_{xy}^{ij} - M_{00},$$

$$N_{st} = \sum_{i=1}^{n} \int_o^s f_i(x)dW_x^i + \sum_{j=1}^{m} \int_o^t g_j(y)d\hat{W}_y^j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{R_{st}} h_{ij}(x,y)dW_{xy}^{ij} - N_{OO}.$$

Aleshores

$$M*N_{st} = \sum_{i,j,d,k} \int_{R_{st}} \left(\int_o^{t'} h_{ij}(s',y)d\hat{W}_y^j\right)\left(\int_o^{s'} h_{dk}(x,t')dW_x^d\right) dW_{s't'}^{ik} \ .$$

DEMOSTRACIÓ

Només cal utilitzar que $M*N = M^o*N^o$ i el teorema anterior.■

NOTACIONS 4.8

En la resta d'aquest paràgraf suposarem que les martingales són nul.les sobre els eixos. Si M és una martingala afitada en L², nul.la sobre els eixos, amb representació

$$M_{st} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_o^s\int_o^t f_{ij}(x,y) \; dW_x^i d\hat{W}_y^j \quad ,$$

escriurem

$$Y^j(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \int_o^s f_{ij}(x,t) \; dW_x^i \quad , \; j=1,\ldots,m \; ,$$

$$\hat{Y}^i(s,t) = \sum_{j=1}^{m} \int_o^t f_{ij}(s,y) \; d\hat{W}_y^j \quad , \; i=1,\ldots,n \; .$$

Pel teorema de Fubini estocàstic tenim

$$M_{st} = \sum_{j=1}^{m} \int_o^t Y^j(s,y) \; d\hat{W}^j(y) = \sum_{i=1}^{n} \int_o^s \hat{Y}^i(x,t) \; dW^i(x) \; .$$

Aquesta escriptura, generalització de la introduida per Nualart en [70], permet d'escriure $\tilde{M}$ de manera molt més concentrada. Concretament:

TEOREMA 4.9: Sigui M una martingala afitada en L^2, nul.la sobre els eixos. Amb les notacions anteriors

$$\tilde{M}_{st} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{R_{st}} \hat{Y}^i(x,y) Y^j(x,y)\, dW^{ij}(x,y) \ .$$

DEMOSTRACIÓ

Només cal tenir en compte les relacions establertes en el capítol II (observacions 2.2, corol.lari 2.3):

$$\tilde{M}_i = M_i * M_i \ .$$

$$\widetilde{M_i M_j} = \frac{1}{2} M_i * M_j + \frac{1}{2} M_j * M_i \ .$$

$$\widetilde{\sum_i M_i} = \sum_i \tilde{M}_i + 2 \sum_{i \neq j} \widetilde{M_i M_j}$$

i utilitzar el teorema 4.7. ■

OBSERVACIÓ 4.10

Quan M és de la forma $\int f dW^{ij}$ i N és $\int g dW^{dk}$, el càlcul de $\tilde{M}$ i $\widetilde{MN}$ pot fer-se també utilitzant la fórmula d'Itô multidimensional (teorema 1.58). No així el de M*N, que s'ha d'obtenir directament, ja que no intervé (sinó a través de $\widetilde{MN}$) en la fórmula d'Itô citada.

TEOREMA 4.11: Sigui M una martingala afitada en L^2. Amb les notacions anteriors

$$\langle M, \tilde{M} \rangle_{st} = \int_0^s \int_0^t \Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{ij}(x,y) \hat{Y}^i(x,y) Y^j(x,y) \Big) dxdy \ .$$

DEMOSTRACIÓ

Es calcula per polarització:

$$<M,\tilde{M}> = \frac{1}{2}(<M+\tilde{M}> - <M> - <\tilde{M}>) \ .\blacksquare$$

§2: Estudi de la implicació "Si $<M,\tilde{M}> = 0$, llavors M té varició independent del camí" en les filtracions producte

El teorema 2.11 afirma que si M és una martingala de $\underline{\underline{M}}_c^4$ nul.la sobre els eixos i amb variació i.d.c., llavors $<M,\tilde{M}> = 0$. Estudiarem ara si el recíproc d'aquest teorema és cert. Veurem que en la filtració producte de dos brownians unidimensionals independents és cert, però que en general no es compleix.

TEOREMA 4.12: Considerem n=m=1, això és, $\{\underline{\underline{F}}_z, \ z \in \mathbb{R}_+^2\}$ designarà la fltració producte de dos moviments brownians independents $W = \{W_s, \ s \in \mathbb{R}_+\}$ i $\hat{W} = \{\hat{W}_t \ , \ t \in \mathbb{R}_+\}$. Sigui $M = \{M_z, \ \underline{\underline{F}}_z, \ z \in \mathbb{R}_+^2\}$ una martingala afitada en L^2, nul.la sobre els eixos. Aleshores, si $<M,\tilde{M}> = 0$, tindrem $M = 0$.

DEMOSTRACIÓ

La representació de M serà

$$M_{st} = \int_0^s\int_0^t f(x,y) \ dW_x d\hat{W}_y \ ,$$

amb f de $L^2(\mathbb{R}_+^2 \times\Omega, \underline{\underline{P}})$. Com que

$$E \int_0^\infty\int_0^\infty f^2(x,y) \ dxdy < \infty,$$

per Fubini, q.p.t. s

$$E \int_0^\infty f^2(s,y) \ dy < \infty ,$$

i q.p.t. t

$$E \int_0^\infty f^2(x,t)\, dx < \infty.$$

D'acord amb la proposició 1.63, existirà una funció $M_1 : \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \underline{\underline{F}}$ -mesurable, tal que q.p.t. t, el procés $\{ M_1(s,t),\ s \in \mathbb{R}_+ \}$ és indistingible del procés $\{\int_0^s f(x,t) dW_x,\ s \in \mathbb{R}_+\}$; i una funció $M_2 : \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \underline{\underline{F}}$ -mesurable tal que q.p.t. s, els processos $\{M_2(s,t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ i $\{\int_0^t f(s,y) d\hat{W}_y,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ són indistingibles.

La idea de la demostració és la seguent: De $\langle M,\tilde{M}\rangle = 0$ es dedueix

(a) $f(s,t,\omega)M_1(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) = 0$, q.p.t. $(s,t,\omega) \in \mathbb{R}^2_+ \times \Omega$

Com que fixat t, $M_1(.,t)$ és una martingala, mitjançant la utilització del seu temps local, veure que P-q.s.,

$$f(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) = 0, \text{ q.p.t. } s \in \mathbb{R}_+ \text{ (respecte } \langle M_1(.,t)\rangle);$$

d'on resulta

(b) $f(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) = 0$, q.p.t. $(s,t,\omega) \in \mathbb{R}_+^2 \times \Omega$.

Fixat ara s, $M_2(s,.)$ és una martingala, i utilitzant ara el seu temps local, veurem que P-q.s.,

$$f(s,t,\omega) = 0, \text{ q.p.t. } t \in \mathbb{R}_+ \text{ (respecte } \langle M_2(s,.)\rangle);$$

d'on finalment obtenim

(c) $f(s,t,\omega) = 0$, q.p.t. $(s,t,\omega) \in \mathbb{R}_+^2 \times \Omega$.

Vegem

(a) $f(s,t,\omega)M_1(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) = 0$ q.p.t. (s,t,ω).

En efecte,

$$<M,\tilde{M}>_z = \iint_{R_z} f(x,y)M_1(x,y)M_2(x,y)\, dxdy = 0 \quad q.s..$$

Per la continuitat de la variació quadràtica, existeix $\Theta \subset \Omega$, amb $P(\Theta) = 0$, tal que si $\omega \notin \Theta$, per a tot z, $<M,\tilde{M}>_z = 0$; i, doncs, existirà un conjunt $A_\omega \subset \mathbb{R}_+^2$ de mesura de Lebesgue zero tal que si $(s,t) \notin A_\omega$,

$$f(s,t,\omega)M_1(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) = 0,$$

i com que fM_1M_2 és $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \underline{\underline{F}}$ -mesurable, per Fubini resulta

$$f(s,t,\omega)M_1(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) = 0, \text{ q.p.t. } (s,t,\omega).$$

(b) $f(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) = 0$, q.p.t. (s,t,ω).

En efecte, per (a), fixat t (fora d'un conjunt de mesura zero), existeix $\Lambda_t \subset \Omega$, $P(\Lambda_t) = 0$, tal que si $\omega \notin \Lambda_t$, existirà $S_{t\omega} \subset \mathbb{R}_+$ de mesura de Lebesgue zero, tal que si $s \notin S_{t\omega}$,

$$f(s,t,\omega)M_1(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) = 0,$$

i, per tant, fixat t i fixat $\omega \notin \Lambda_t$,

(1) $\{s \in \mathbb{R}_+ : f(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) \neq 0\} \cap S^c_{t\omega} \subset \{s \in \mathbb{R}_+ : M_1(s,t,\omega) = 0\}$.

També, fixat t (fora d'un conjunt de mesura zero), $M_1(\cdot,t)$ és una martingala contínua (en s); designem per $L^a_{1,t}(s)$ el seu temps local. Existirà $\Gamma_t \subset \Omega$, $P(\Gamma_t) = 0$, tal que si $\omega \notin \Gamma_t$, per a tot $\xi \in \mathbb{R}_+$,

(2) $\int_0^\xi I_{\{s:M_1(s,t,\omega)=0\}}(s)d<M_1(\cdot,t)>_s(\omega) =$

$$= \int_{\mathbb{R}} L^a_{1t} I_{\{0\}}(a)\, da = 0.$$

Per tant, fixat t(fora d'un conjunt de mesura zero), fixat $\omega \notin \Lambda_t \cup \Gamma_t$, per a tot $\xi \geq 0$, per (1) i (2)

$$\int_0^\xi I_{\{s:f(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega)\neq 0\} \cap S^c_{t\omega}}(s)\; d<M_1(\cdot,t)>_s \quad \leq$$

$$\leq \int_0^{\xi} I_{\{s:M_1(s,t,\omega)=0\}}(s)\ d\langle M_1(.,t)\rangle_s = 0,$$

i, doncs,

$$\{s : f(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) \neq 0\} \cap S^c_{t\,\omega}$$

té mesura $\langle M_1(.,t)\rangle$ zero. Però aquesta mesura és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue, ja que

$$\langle M_1(.,t)\rangle_s = \int_0^s f^2(x,t)\ dx\ ,$$

i, com que $S_{t\,\omega}$ té mesura de Lebesgue zero, també tindrà mesura $\langle M_1(.,t)\rangle$ zero. Per tant,

$$\{s : f(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) \neq 0\}$$

té mesura $\langle M_1(.,t)\rangle$ zero. Llavors, per a tot $\delta \geq 0$,

$$\int_0^{\delta} f(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega)\ d\langle M_1(.,t)\rangle_s(\omega) = 0,$$

i, per tant,

$$\int_0^{\delta} f^3(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega)\ ds = 0,$$

d'on resulta que existeix un conjunt $B_{t\,\omega} \subset \mathbb{R}_+$ de mesura de Lebesgue zero, tal que si $s \notin B_{t\,\omega}$,

$$f^3(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) = 0,$$

o equivalenment,

$$f(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) = 0,$$

i per Fubini

$$f(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) = 0,\ \text{q.p.t. } (s,t,\omega)\ .$$

(c) $f(s,t,\omega) = 0$, q.p.t. (s,t,ω).

En efecte, de (b) i del teorema de Fubini deduïm que q.p.t. $s \geq 0$, existeix un conjunt $D_s \subset \Omega$, amb $P(D_s) = 0$, tal que si $\omega \notin D_s$, existirà un subconjunt de $\mathbb{R}_+$, $E_{s\,\omega}$, de mesura de Lebesgue zero, tal que si $t \notin E_{s\,\omega}$

$$f(s,t,\omega)M_2(s,t,\omega) = 0,$$

i, doncs,

(3) $\{t\geq 0 : f(s,t,\omega) \neq 0\} \cap E^c_{s\ \omega} \subset \{t\geq 0 : M_2(s,t,\omega) = 0\}$.

Fixat s (fora d'un conjunt de mesura zero), $M_2(s,.)$ és una martingala contínua en t. Designem per $L^a_{2s}(t)$ el seu temps local. Existirà $F_s \subset \Omega$, $P(F_s)=0$, tal que si $\omega\notin F_s$, per tot $\tau\geq 0$,

(4) $\int_0^\tau I_{\{t\geq 0:\ M_2(s,t,\omega)=0\}} d\langle M_2(s,.)\rangle_t(\omega) =$

$$= \int_0^\infty L^a_{2s}(\tau,\omega) I_{\{0\}}(a)\ da = 0.$$

Anàlogament a (b), com que

$$\langle M_2(s,.)\rangle_t = \int_0^t f^2(s,y)\ dy ,$$

deduim de (3) i (4) que el conjunt $\{t\geq 0: f(s,t,\omega) \neq 0\}$ té mesura $\langle M_2(s,.)\rangle$ zero, d'on resulta, pel mateix raonament,

$$f(s,t,\omega) = 0 \ , \ \text{q.p.t. } (s,t,\omega) \in \mathbb{R}^2_+ \times\Omega . \blacksquare$$

Per demostrar que aquest teorema no és cert quan els brownians no són unidimensionals (o quan un d'ells no ho és) ens calen tres lemes. El primer d'ells estableix la representació de les martingales de L^2 en una filtració uniparamètrica que s'obté a partir de la filtració d'un moviment brownià ordinari. La demostració,que és anàloga a la de la primera part del teorema 3.12 i sols necessita modificacions de detall, s'ometrà.

<u>LEMA 4.13</u>: <u>Sigui</u> $W = \{W_t, t\in\mathbb{R}_+\}$ <u>un moviment brownià i</u> $\{\underline{\underline{G}}_t , t\in\mathbb{R}_+\}$ <u>la seva filtració natural</u>, <u>degudament completada</u>. <u>Designem per</u> $\underline{\underline{G}}$ <u>la σ-àlgebra unió</u> $\bigvee_{t\geq 0} \underline{\underline{G}}_t$ <u>i sigui</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>una σ-àlgebra independent de</u> $\underline{\underline{G}}$. <u>Aleshores tota martingala</u> $M = \{M_t, \underline{\underline{G}}_t \vee \underline{\underline{H}} , t\in\mathbb{R}_+\}$ <u>de L^2</u>

admet una representació de la forma

$$M_t = M_0 + \int_0^t f(u)\, dW_u ,$$

amb f $\underline{\underline{G}} \vee \underline{\underline{H}}$ -mesurable, $\underline{\underline{G}}_t \vee \underline{\underline{H}}$ -adaptat i

$$E \int_0^t f^2(u)\, du < \infty, \text{ per a tot } t \geq 0 .$$

El següent lema estableix una propietat de les solucions de l'equació diferencial estocàstica $XdX + YdY = 0$, amb X e Y martingales locals contínues:

LEMA 4.14: Sigui $\{\underline{\underline{G}}_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ una filtració arbitrària que compleixi les condicions habituals, i $X = \{X_t, \underline{\underline{G}}_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$, $Y = \{Y_t, \underline{\underline{G}}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ dues martingales locals contínues amb $X_0 = Y_0 = 0$, i tals que

$$X\, dX + Y\, dY = 0.$$

Llavors si $E[X_t^4] < \infty$, tindrem $E[Y_t^4] = E[X_t^4]$.

DEMOSTRACIÓ

Per la fórmula d'Itô,

$$X_t^4 = 4 \int_0^t X_s^3 dX_s + 6 \int_0^t X_s^2 d\, X_s .$$

$$Y_t^4 = 4 \int_0^t Y_s^3 dY_s + 6 \int_0^t Y_s^2 dY_s .$$

Com que

$$\int_0^t X_s dX_s = -\int_0^t Y_s dY_s ,$$

tindrem

$$\int_0^t X^2 d\langle X\rangle_s = \int_0^t Y^2 d\langle Y\rangle_s .$$

Definim els temps d'atur

$$T_n = \inf\{t>0 : |X_t|>n \text{ o } |Y_t|>n \text{ o } |\int_0^t X_s^3 dX_s|>n \text{ o } |\int_0^t Y_s^3 dY_s|>n\}.$$

Aleshores $T_n \uparrow \infty$ quan $n\to\infty$, i és una successió de temps d'atur que localitza X, Y, $\int_0^{\cdot} X^3 dX$, $\int_0^{\cdot} Y^3 dY$, i tenim

$$E[X_{t\wedge T_n}^4] = E[Y_{t\wedge T_n}^4] \quad , \text{ per a tot } n\geq 1.$$

Per convergència monòtona

$$E[Y_t^4] = \lim_{n\to\infty} E[Y_{t\wedge T_n}^4] = \lim_{n\to\infty} E[X_{t\wedge T_n}^4] = E[X_t^4]. \blacksquare$$

OBSERVACIÓ: Pot demostrar-se una propietat més forta (que no utilitzarem): Si X e Y són martingales locals contínues tals que $XdX + YdY = 0$, llavors existeix una constant C tal que $E[Y_t^2]\leq CE[X_t^2]$. (Preprint de D. Nualart).

<u>LEMA 4.15</u>: <u>En el cas $n=m=1$, existeixen dos processos</u> f i g <u>de</u> $L^2(\mathbb{R}_+^2\times\Omega, \underline{\underline{P}})$ <u>no nuls, tals que per a tot</u> (x,y) <u>de</u> $\mathbb{R}_+^2$

$$f(x,y) \int_0^x f(x',y)dW(x') + g(x,y) \int_0^x g(x',y)dW(x',y) = 0 .$$

DEMOSTRACIÓ

Fixem $\varepsilon>0$ arbitrari. Per a qualsevol $f:\mathbb{R}_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega, \underline{\underline{P}}^{(1)})$, a causa de la independència entre W i $\hat{W}$, el procés $\{\int_0^x f(x')dW(x'), \underline{\underline{F}}_x^1 \vee \underline{\underline{F}}_\varepsilon^2, x\geq 0\}$ és una martingala.

Com que existeix una successió $\{\xi_n, n\geq 1\}$de variabes aleatòries independents, $\underline{\underline{F}}_0^1 \vee \underline{\underline{F}}_\varepsilon^2$ -mesurables (i per tant independents de $\int_0^x f(x')dW(x')$) (prenem, per exemple,

$$\xi_n = \text{sign } (W(\tfrac{\varepsilon}{n}) - W(\tfrac{\varepsilon}{n+1})),$$

existirà (vegeu Nualart-Sanz [82]) una martingala local $Y = \{Y_s, \underline{\underline{F}}_s^1 \vee \underline{\underline{F}}_\varepsilon^2, s\geq 0\}$ tal que

$$\int_0^s f(x)\left(\int_0^x f(x')dW(x')\right)dW(x) + \int_0^s Y_x dY_x = 0 .$$

Podem elegir ara f de manera que Y sigui una martingala de L^2 Per exemple, sigui $K>0$ arbitrari i definim el temps d'atur

$$T=\inf\{t>0 : |W_t|>K\} .$$

Llavors

$$X_t = \int_0^t I_{[0,T]}(s)dW_s = W_{t\wedge T}$$

compleix les condicions del lema 4.14. ($X_0=0$ per construcció, i prenem $Y_0=0$, ja que Y_0 es pot agafar de manera arbitrària).

Ara apliquem el lema 4.13 a Y: Existirà un procés g $\underline{\underline{F}}^1 \vee \underline{\underline{F}}_\varepsilon^2$-mesurable, $\underline{\underline{F}}_s^1 \vee \underline{\underline{F}}_\varepsilon^2$-adaptat i amb $E\left[\int_0^\infty g^2(s)ds\right]<\infty$, tal que

$$Y_x = \int_0^x g(x')\, dW(x') ,$$

i llavors

$$f(x) \int_0^x f(x')dW(x') + g(x) \int_0^x g(x')dW(x') = 0 .$$

Definim finalment

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y<\varepsilon, \\ f(x) & \text{si } y\geq\varepsilon. \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y<\varepsilon , \\ g(x) & \text{si } y\geq\varepsilon . \end{cases}$$

Clarament f(x,y) i g(x,y) compleixen totes les condicions requerides.■

<u>PROPOSICIÓ 4.16</u>: <u>Si $n>1$ (o $m>1$) existeixen martingales afitades en L^2 no identicament zero i amb</u> $\langle M,\tilde{M}\rangle = 0$.

DEMOSTRACIÓ

N'hi ha prou d'estudiar el cas n=2,m=1. Considerem una martingala afitada en L^2 amb representació

$$M_z=\int_{R_z} f(x,y)dW^{11}(x,y) + \int_{R_z} g(x,y)dW^{21}(x,y).$$

D'acord amb les notacions 4.8, sigui

$$Y^1(s,t) = \int_0^s f(x,t)dW^1(x) + \int_0^s g(x,t)dW^2(x) ,$$

$$\hat{Y}^1(s,t) = \int_0^t f(s,y)d\hat{W}^1(y) ,$$

$$\hat{Y}^2(s,t) = \int_0^t g(s,y)d\hat{W}^1(y) .$$

Llavors (teorema 4.11),

$$\langle M,\tilde{M}\rangle_z = \int_{R_z} \left(f(x,y)\hat{Y}^1(x,y) + g(x,y)\hat{Y}^2(x,y)\right)Y^1(x,y)dxdy .$$

Però pel lema 4.14, existeix una solució no nul.la de l'equació

$$f\hat{Y}^1 + g\hat{Y}^2 = 0 ,$$

d'on resulta la proposició.■

§3: La implicació "Si $\langle M,\tilde{M}\rangle = 0$, llavors M és i.d.c." en la filtració generada per un drap brownià

Sigui $\{ W_z, z\in\mathbb{R}^2_+ \}$ un drap brownià. En aquest paràgraf designarem per $\{\underline{\underline{F}}_z, z\in\mathbb{R}^2_+ \}$ la filtració generada per éll. Seguint la tècnica de Nualart [70] , veurem ara que el recíproc del teorema 2.11 també és fals en aquest cas. Començarem veient un lema:

LEMA 4.17: Considerem dos brownians independents, l'un bidimensional $\{(W_s^1,W_s^2), s\in\mathbb{R}_+ \}$, i l'altre unidimensional $\{ \hat{W}_t , t\in\mathbb{R}_+\}$, i dues funcions f i g de $L^2(\mathbb{R}^2_+ \times\Omega,\underline{\underline{P}})$. Sigui A de $\mathbb{R}$ i designem per X el procés

$$X_{st} = A + \int_0^s f(x,t)dW_x^1 + \int_0^s g(x,t)dW_x^2 \ .$$

Sigui $h: \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \underline{\underline{F}}$ -mesurable. Llavors si

$$h.X = 0 \qquad dx \otimes dy \otimes dP \text{ -q.s.},$$

tindrem

$$h.(f^2 + g^2) = 0 \qquad dx \otimes dy \otimes dP \text{ -q.s.}.$$

DEMOSTRACIÓ

Es tracta d'un raonament com el de la demostració del teorema 4.12, utilitzant el temps local de la martingala $\{X_{st},\ s \in \mathbb{R}_+\}$ i que la variació quadràtica d'aquesta martingala val

$$\langle X_{.t} \rangle_s = \int_0^s f^2(x,t)dx + \int_0^s g^2(x,t)dy \ . \blacksquare$$

<u>PROPOSICIÓ 4.18</u>: <u>En la filtració</u> $\{\underline{\underline{F}}_z,\ z \in \mathbb{R}_+^2\}$ <u>generada per un drap brownià, existeixen martingales</u> M <u>no nul.les, amb</u> $\langle M, \tilde{M} \rangle = 0$ <u>i que no tenen variació i.d.c.</u>.

DEMOSTRACIÓ

Fixem un punt arbitrari de $\mathbb{R}_+^2$; per simplificar suposem que és el punt (1,1). Definim els brownians

$$W_s^1 = \sqrt{2}\ W(\,]\,(1,0),(s+1,1/2)\,]\,), \quad s \geq 0 \ ,$$

$$W_s^2 = \sqrt{2}\ W(\,]\,(1,1/2),(s+1,1)\,]\,) \quad , \quad s \geq 0$$

$$\hat{W}_t^1 = W(\,]\,(0,1),(1,t+1)\,]\,) \quad , \quad t \geq 0 \ ,$$

que són independents perquè per a tot (s,t), els rectangles $]\,(1,0),(s+1,1/2)\,]$, $]\,(1,1/2),(s+1,1)\,]$, $]\,(0,1),(1,t+1)\,]$ són disjunts dos a dos.

Siguin f i g els processos de la proposició 4.16 respecte a la fitració producte de les filtracions associades als brownians $\{(W_s^1, W_s^2)\ ,\ s \in \mathbb{R}_+\}$ i $\{\hat{W}_t^1\ ,\ t \in \mathbb{R}_+\}$.

Sigui $D_1 = [0,1]\times[1,2]$ i $D_2 = [1,2]\times[0,1]$. Definim la funció

$$\Psi((x,t),(s,y)) = \sqrt{2}\ I_{D_1}(x,t) I_{D_2}(s,y) \{f(s-1,t-1) I_{[0,1]}(x) I_{[0,1/2]}(y) +$$

$$+ g(s-1,t-1) I_{[0,1]}(x) I_{[1/2,1]}(y) \quad .$$

Sigui M la martingala definida per aquest procés:

$$M_z = \iint_{R_z \times R_z} \Psi(\zeta,\zeta)\ dW_\zeta dW_{\zeta'} \quad .$$

Un raonament mitjançant funcions simples mostra que si $(s,t) \not\geq (1,1)$, llavors $M_{st}=0$; i si $(s,t) \geq (1,1)$, llavors

$$M_{st} = \int_{R_{s-1,t-1}} (f(x,y) dW_x^1 d\hat{W}_y^1 + g(x,y) dW_x^2 d\hat{W}_y^1) \quad .$$

Si $(s,t) \in [1,2]^2$ i $x \in [0,1]$, llavors

$$L_2((x,t),s) = \int_{R_{st}} \Psi(x,t,\xi,y) dW_{\xi y} =$$

$$= I_{[0,1]}(x) \int_0^{s-1} f(\xi,t-1) dW_\xi^1 + I_{[0,1]}(x) \int_0^{s-1} g(\xi,t-1) dW_\xi^2 =$$

$$= I_{[0,1]}(x)\ Y^1(s-1,t-1) \quad .$$

Si $(s,t) \in [1,2]^2$ i $y \in [0,1]$,

$$L_1((s,y),t) = \int_{R_{st}} \Psi(x,\tau,s,y) dW_{x\tau} =$$

$$= I_{[0,1/2]}(y) \int_0^{t-1} f(s-1,\tau) d\hat{W}_\tau^1 + I_{[1/2,1]}(y) \int_0^{t-1} g(s-1,\tau) d\hat{W}_\tau^1 =$$

$$= I_{[0,1/2]}(y) \hat{Y}^1(s-1,t-1) + I_{[1/2,1]}(y) \hat{Y}^2(s-1,t-1),$$

d'acord amb les notacions de la proposició 4.16.

L_1 i L_2 són nul.les fora de la regió indicada. Llavors

$$<M,\tilde{M}>_z = \int_{R_z} h(\zeta)d\zeta,$$

amb

$$h(s,t) = \int_o^s \int_o^t \Psi(x,t,s,y)L_2((x,t),s)L_1((s,y),t)dxdy =$$

$$= \int_o^s L_2((x,t),s) \left(\int_o^t \Psi(x,t,s,y)L_1((s,y),t)dy\right)dx =$$

$$= \int_o^s L_2((x,t),s)\frac{\sqrt{2}}{2} I_{[0,1]}(x)\left(f(s-1,t-1)\hat{Y}^1(s-1,t-1) + \right.$$

$$\left. + g(s-1,t-1)\hat{Y}^2(s-1,t-1)\right) dx = 0 ,$$

d'on $<M,\tilde{M}> = 0$.

Però M no te variació i.d.c., ja que si bé

$$\int_o^t L_1((s,y),t)\Psi(x,t,s,y)\ dy = 0,$$

per a $(s,t)\in[0,1]^2$,

$$\int_o^s L_2((x,t),s)\Psi(x,t,s,y)\ dx =$$

$$= \sqrt{2}\ I_{[0,1/2]}(y)f(s-1,t-1)Y^1(s-1,t-1) + \sqrt{2}\ I_{[1/2,1]}(y)g(s-1,t-1)Y^1(s-1,t-1) .$$

Considerant que

$$Y^1(s,t) = \int_o^s f(x,t)dW^1(x) + \int_o^s g(x,t)dW^2(x) ,$$

i que per construcció f ig són no nuls; gràcies al lema 4.17, excepte, potser, en $y=1/2$, l'expressió anterior és diferent de zero per a $(s,t,\omega) \in C \in \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \underline{\underline{F}}$, amb C de mesura diferent de zero, i, doncs, $\int_o^s L_2(x,t,s)\Psi(x,t,s,y)dx$ és diferent de zero sobre un conjunt de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^3) \otimes \underline{\underline{F}}$ de mesura distinta de zero. Per tant, no es compleix una condició necessària per a que la martingala pugui tenir variació i.d.c. (cfr. Nualart [70]).■

§4: Martingales no nul.les sobre els eixos

Si la martingala M no és nul.la sobre els eixos, les nocions, "M té variació i.d.c." i "$\langle M,\tilde{M}\rangle =0$" no estan, en general, relacionades, ja que el caràcter i.d.c. depén dels increments lineals de M (i, doncs, de M_{s0} i M_{0t}), mentre que la variació $\langle M,\tilde{M}\rangle$ sols depén dels increments rectangulars de M (que no es veuen afectats per M_{s0} i M_{0t}). En efecte, existeixen en distintes filtracions martingales i.d.c. que no tenen $\langle M,\tilde{M}\rangle = 0$; la següent proposició permetrà demostrar l'existència de martingales amb aquestes característiques en la filtració producte de les engendrades per dos brownians bidimensional independents (n=m=2).

<u>PROPOSICIÓ 4.19</u>: <u>Considerem dos brownians bidimensionals independents</u>, $\{(W_s^1,W_s^2),\ s\in\mathbb{R}_+\}$ <u>i</u> $\{(\hat{W}_t^1,\hat{W}_t^2),\ t\in\mathbb{R}_+\}$, <u>i sigui</u> M <u>una martingala relativa a la filtració producte</u>, <u>de la forma</u>

$$M_{st} = A(W_s^1 + W_s^2 + \hat{W}_t^1 + \hat{W}_t^2) + \int_{R_{st}} f_1(z)dW^{11}(z) +$$

$$+ \int_{R_{st}} f_2(z)dW^{21}(z) + \int_{R_{st}} g_1(z)dW^{12}(z) + \int_{R_{st}} g_2(z)dW^{22}(z) ,$$

<u>amb</u> f_1,f_2,g_1 i g_2 <u>de</u> $L^2(\mathbb{R}_+^2\times\Omega,\underline{\underline{P}})$. <u>Llavors si</u> M <u>té variació i.d.c. i</u> $\langle M,\tilde{M}\rangle = 0$, <u>tindrem</u>

$$f_1 = f_2 = g_1 = g_2 = 0 .$$

DMOSTRACIÓ

Siguin

$$Y'(s,t) = A + \int_0^s f_1(x,t)dW^1(x) + \int_o^s f_2(x,t)dW^2(x) \ ,$$

$$Z'(s,t) = A + \int_o^s g_1(x,t)dW^1(x) + \int_o^s g_2(x,t)dW^2(x) \ ,$$

$$\hat{Y}'(s,t) = A + \int_o^t f_1(s,y)d\hat{W}^1(y) + \int_o^t g_1(s,y)d\hat{W}^2(y) \ ,$$

$$\hat{Z}'(s,t) = A + \int_o^t f_2(s,y)d\hat{W}^1(y) + \int_o^t g_2(s,y)d\hat{W}^2(y) \ .$$

Com que M té variació i.d.c. tenim (cfr. Nualart [70]):

$$(1) \qquad \begin{aligned} f_1Y' + g_1Z' &= 0 \ , \\ f_2Y' + g_2Z' &= 0 \ , \\ f_1\hat{Y}' + f_2\hat{Z}' &= 0 \ , \\ g_1\hat{Y}' + g_2\hat{Z}' &= 0 \ . \end{aligned}$$

D'altra banda, si M^o designa la martingala nul.la sobre els eixos, com que $\widetilde{M^o} = M = (\tilde{M})^o$,

$$<M,\tilde{M}>_z \ = \ <M^o,\tilde{M}^o>_z \ =$$

$$= \int_{R_z} \big(f_1(Y'-A)(\hat{Y}'-A) + f_2(Y'-A)(\hat{Z}'-A) + g_1(Z'-A)(\hat{Y}'-A) +$$

$$+ g_2(Z'-A)(\hat{Z}--A)\big)dxdy =$$

$$= A^2 \int_{R_z} (f_1(x,y) + f_2(x,y) + g_1(x,y) + g_2(x,y))dxdy \ ,$$

on l'última igualtat es deguda a (1).

De $\langle M,\tilde{M}\rangle = 0$, deduïm

$$(2) \qquad f_1 + f_2 + g_1 + g_2 = 0 \qquad dx \otimes dy \otimes dP \text{ -q.s.,}$$

que juntament amb (1) proporciona

$$(f_1 + f_2)(Y' - Z') = 0 \, ,$$

$$(f_1 + g_1)(\hat{Y}' - \hat{Z}') = 0 \, ,$$

i aplicant el lema 4.17 obtenim

$$(3) \quad (f_1 + f_2)\left[(f_1-f_2)^2 + (f_2 - g_2)^2\right] = 0 \, ,$$

$$(4) \quad (f_1 + g_1)\left[(f_1-f_2)^2 + (g_1 - g_2)^2\right] = 0 \, .$$

Fixem un punt (s,t,ω) de $\mathbb{R}^2_+ \times \Omega$ (fora d'un conjunt de mesura zero); escriurem f_1 en lloc de $f_1(s,t,\omega)$ i anàlogament f_2, etc.. De (3) deduïm que si $f_1+f_2 \neq 0$, llavors $f_1=g_1$ i $f_2=g_2$; si $f_1=g_1=0$, tindriem $f_2=g_2$, i de (2) resultaria $f_2+g_2=0$, d'on $f_1=g_1=f_2=g_2=0$, que és contradictori amb $f_1+f_2 \neq 0$. Doncs, $f_1=g_1 \neq 0$, i, per tant, $f_1+g_1 \neq 0$, que substituit a (4) proporciona $f_1=f_2$ i $g_1=g_2$, que junt amb les consequències anteriors, implica $f_1=f_2=g_1=g_2$, que per (2) dòna $f_1=f_2=g_1=g_2=0$, que també és contradictori. Per tant,

$$f_1 + f_2 = 0, \qquad dx \otimes dy \otimes dP \text{ -q.s..}$$

Análogament, s'arriba a una contradicció si suposem $f_1+g_1 \neq 0$.

Tenim, per tant, en cada punt (fora d'un conjunt de mesura zero),

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + g_1 + g_2 &= 0 \\ f_1 + f_2 \qquad\qquad &= 0 \\ f_1 \qquad + g_1 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

sistema que ens diu que, en cada punt,

$$f_1 = -f_1 \, , \; g_1 = -f_1 \; \text{ i } \; g_2 = -f_1 \, ,$$

i aleshores (1) es redueix a

$$f_1(s,t)\left(\int_0^s f_1(x,t)dW^1(x) - \int_0^s f_1(x,t)dW^2(x)\right) = 0 ,$$

que, pel lema 4.17, implica

$$f_1(s,t)\ 2f_1^2(s,t) = 0,$$

d'on resulta

$$f_1 = 0 , \qquad dx \otimes dy \otimes dP \text{ -q.s.}.\blacksquare$$

COROL.LARI 4.20: En la filtració producte de dos brownians bidimensionals independents existeixen martingales no nul.les sobre els eixos, amb variació i.d.c. i $<M,\tilde{M}> = 0$.

DEMOSTRACIÓ

És evident en virtud de l'existència de martingales i.d.c no nul.les amb la representació indicada a la proposició 4.19 (cfr. Nualart [70]).■

R E S U M

(Abreujarem martingala amb increments ortogonals per martingala I.O.)

Cas general

a) Martingales nul.les sobre els eixos:

$$\text{Forta} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \text{I.O.} \Longrightarrow \text{I.D.C.} \Longrightarrow \langle M,\tilde{M}\rangle = 0$$

i de totes les implicacions recíproques, excepte de la (1), poden construir-se contraexemples.

b) Martingales no nul.les sobre els eixos:

$$\text{Forta} \Longrightarrow \text{I.O.} \Longrightarrow \text{I.D.C.}$$

i la implicació I.D.C. $\Longrightarrow \langle M,M\rangle = 0$ no és, en general, certa.

Filtració generada per un drap brownià

Martingales nul.les sobre els eixos.

$$\text{Forta} \Longleftrightarrow \text{I.O.} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \text{I.D.C.} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \langle M,\tilde{M}\rangle = 0$$

i les implicacions (2) i (3) són estrictes.

Filtració producte de filtracions generades per brownians multidimensionals independents

Martingales nul.les sobre els eixos.

a) n=m=1:

$$\text{Forta} \Longleftrightarrow \text{I.O.} \Longleftrightarrow \text{I.D.C.} \Longleftrightarrow \langle M,\tilde{M}\rangle =0 \Longleftrightarrow M=0$$

b) n=2, m=1:

$$\text{Forta} \Leftrightarrow M=0 \Leftrightarrow \text{I.O.} \Leftrightarrow \text{I.D.C.} \overset{(4)}{\Longrightarrow} \langle M,\tilde{M}\rangle = 0$$

i la implicació (4) és estricta.

c) n=m=2

$$\text{Forta} \Leftrightarrow M=0 \Leftrightarrow \text{I.O.} \overset{(5)}{\Longrightarrow} \text{I.D.C.} \overset{(6)}{\Longrightarrow} \langle M,\tilde{M}\rangle = 0$$

i la implicació (6) és estricta. És un problema obert saber si la implicació recíproca a (5) és certa.

BIBLIOGRAFIA

[1] ADAMS, C.R. and CLARKSON, J., Properties of functions f(x,y) of bounded variation. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 1934, p.711-730.

[2] BAKRY, D., Sur la régularité des trajectoires des martingales à deux indices. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 50, 1979, p. 149-157.

[3] BAKRY, D., Limites "quadrantales" des martingales. In Processus Aléatoires à Deux Indices (Colloque E.N.S.T.-C.N.E.T., Paris, 1980), p. 40-49, Lecture Notes in Mathematics, 863, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[4] BAKRY, D., Théoremes de section et de projection pour les processus à deux indices. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 55, 1981, p.55-71.

[5] BLACKWELL, D. and DUBINS, L., Merging of opinions whith increasing information. The Annals of Mathematical Statistics, vol 33 No 3, 1962, p.882-886.

[6] BROSSARD, J., Régularité des martingales à deux indices et inegalités de normes. In Processus Aléatoires- à Deux Indices (Colloque E.N.S.T.-C.N.E.T., Paris, 1980), p.91-121, Lecture Notes in Mathematics, 863, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[7] BROSSARD, J. et CHEVALIER, L., Calcul stochastique et inégalités de norme pour les martingales bi-browniennes. Aplication aux functions bi-harmoniques. Annales Inst. Fourier, t. 30, 4, 1980, p. 97-120.

[8] CAIROLI, R., Une inégalité pour martingales à indices multiples et ses aplications. In Séminaire de Probabilités IV, p. 1-27, Lecture Notes in Mathematics, 124, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[9] CAIROLI, R., Martingales à deux paramètres de carré integrable. C.R.Acad. Sc. Paris t. 272, Sèrie A, 1971, p. 1731-1734.

[10] CAIROLI, R., Descomposition de processus à indices doubles. In Séminaire de Probabilités V , p. 38-57, Lecture Notes in Mathematics, 191, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[11] CAIROLI, R. Sur une équation différentelle estochastique. C.R.Acad. Sc. Paris t. 274, Série A, p.1739-1742.

[12] CAIROLI, R., Une representation integrale pour les martingales fortes. In Séminaire de Probabilités XII, p.162-169,Lecture Notes in Mathematics, 649, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[13] CAIROLI, R., Sur la convergence de martingales indexées par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. In Séminaire de ProbabilitésXIII, p. 162-173 , Lecture Notes in Mathematics, 721, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[14] CAIROLI, R., Sur l'extension de la définition d'intégrale stochastique. In Séminaire de Probabilités XIV, p. 18-25, Lecture Notes in Mathematics, 784, Springer-Verlag, Berlin, 1980

[15] CAIROLI, R. and WALSH, J.B. Stochastic integrals in the plane. Acta Mathematica, 134 , 1975, p. 111-183.

[16] CAIROLI, R. and WALSH, J.B., Martingale representations and holomorphic processes. The Annals of Probability, Vol. 5 No 4, 1977, p. 511-521.

[17] CAIROLI, R. and WALSH, J.B., Regions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 44, 1978, p. 279-306.

[18] CLARK, J.M.C., The representation of functionals of Brownian Motion by stochastic integrals. The Annals of Mathematical Statistics, vol 41 No 4, 1970, p.1282-1295

[19] CLARKSON, J. and ADAMS, C.R., On definition of bounded variation for functions of two variables. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 1933, p. 824-854.

[20] CHENTSOV, Levy Brownian motion for several parameters and generalized white noise. Theori. Probability Appl. 2, 1957, p. 265-266.

[21] CHEVALIER, L., Martingales continues à deux paramètres. Bulletin des Sciences Math. 2^{e} sèrie, 106, 1982, p. 19-62.

[22] CHOW, Y.S., Martingales in a σ-finite measure space indexed by directed sets. Trans. Amer. Math. Soc.Vol 97, No 2, 1960, p. 254-285.

[23] CHUNG, K.L. and WILLIAMS, R.J., Introduction to Stochastic Integration, Progress in probability and statistics, Birkhauser, Boston, 1983.

[24] DELLACHERIE, C., Inégalités de convexité pour les processus croissants et les sousmartingales. In Séminaire de ProbabilitésXIII, p.371-377,Lecture Notes in Mathematics, 721, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[24'] DELLACHERIE, C., Capacités et processus stochastiques. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[25] DELLACHERIE, C. et MEYER, P.A., Probabilités et potentiel, Chapitres V à VIII , Publications de l'Institut de Mathèmatique de l'Université de Strasbourg, XVII, Hermann, Paris, 1980.

[26] DELPORTE, Functions aleatoires de deux variables presque surement à echantillons continus sur un domaine rectangular borné. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 6, 1966, p. 181-205.

[27] DOLÉANS-DADE, C., Intégrales stochastiques dépendant d'un paramètre. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 16, 1967, p. 23-34.

[28] DOLÉANS-DADE, C. et MEYER, P.A., Un petit théorème de projection pour les processus à deux indices. In Séminaire de ProbabilitésXIII, p.205-215, Lecture Notes in Mathematics, 721, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[29] DUBINS, L.E. and PITMAN, J., A divergent, two parameter, bounded martingale. Proceedings of the Amer. Math. Soc., vol 78 No 3 , 1980, p. 414-416.

[30] GETOOR, R.K. and SHARPE, M.J. Conformal martingales. Inventiones Math., 16, 1972, p. 271-308.

[31] GUT, A., Convergence of reversed martingales with multidimensional indices. Duke Mathematical Journal, vol. 43, No 2, 1976, p. 269-275.

[32] GUYON, X. Deux résultats sur les martingales browniennes à deux indices. C.R.Acad. Sc. Paris, ser A, t. 295, 1982, p. 359-361.

[33] GUYON, X. et PRUM, B., Le théoreme de Girsanov pour une classe de processus à paramètre multidimensionnel. C.R.Acad. Sc. Paris 285, 1977, p. 565-567.

[34] GUYON, X. et PRUM, B., Differents types de variations produit pour une semi-martingale représentable à deux paramètres. Ann. Ins. Fourier, 29, 3, 1979, p. 295-317.

[35] GUYON, X. et PRUM, B. Semi-martingales à indice dans $\mathbb{R}^2$. Thèse, Université de Paris-Sud. 1980.

[36] GUYON, X. et PRUM, B., Variations-produit et formule de Ito pour les semi-martingales représentables à deux indices. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 56, 1981, p. 361-397.

[37] HAJEK,B. and WONG,E., Representation and transformation of two-parameter martingales under change of measure. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 54, 1980, p. 313-330.

[38] HALMOS, P.R., Measure Theory. Springer-Verlag, New York, 1974.

[39] HELMS, L.L., Mean convergence of martingales. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 87, 1958, p.439-446.

[40] HIDA, T., Brownian Motion. Springer-Verlag, New York, 1980.

[41] HUDSON, W.N., Continuity of sample function of biadditive processes. Pacific Journal of Math., vol. 42, No 2, 1972, p.343-358.

[42] IKEDA, N. and WATANABE,S., Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Nort-Holland Publishing Company, Ambsterdam, 1981.

[43] ITO, K. Multiple Wiener integral. Journal of the Math. SOc. of Japan, Vol. 3, No 1, 1951, p. 157-169.

[44] KRICKEBERG, K., Convergence of martingales with directed index set. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 83, 1956, p. 313-336.

[45] LEDOUX, M., Inégalités de Burkholder pour martingales indexées par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. In Processus Aléatoires à Deux Indices (Colloque E.N.S.T.-C.N.E.T., Paris, 1980), p.122-127, Lecture Notes in Mathematics, 863, Springer--Verlag, Berlin, 1981.

[46] LEDOUX, M., Classe LlogL et martingales fortes à paramètre bidimensionnel. Ann. Inst. Henri Poincaré, Sec. B, 17, 1981, p. 275-280.

[47] LEDOUX, M., Transformées de Burkholder et sommabilité de martingales à deux paramètres. Math. Zeitschift, 181, 1982, p. 529-535.

[48] LEDOUX, M., Une remarque sur la convergence des martingales à deux indices. In Séminaire de Probabilités XVII p.377-383, Lecture Notes in Mathematics, 986, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[49] LEFORT, P. Une propieté Markovienne pour les processus à deux indices. Thèse de 3^{e} cycle, Université P. et M. Curie, Paris, 1980.

[50] LENGLART, E., Sur la locasisation des integrales stochastiques. In Séminaire de Probabilités XII, p. 53-56, Lecture Notes in Mathematics, 649, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[51] LENGLART, E., LEPINGLE, D. et PRATELLI, M., Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. In Séminaire de Probabilités XIV, p. 26-48, Lecture Notes in Mathematics, 784, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[52] LÉVY, P., Processus stochastiques et mouvement brownien. 2^{em} èdition, Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[53] LIPTSER, R.S. and SHIRYAYEV, A.N., Statistic of Random Processes, I. Springer-Verlag, New York, 1977.

[54] MAZZIOTTO, G., MERZBACH,E. et SZPIRGLAS, J. Discontinuités des processus croissants et martingales à variation integrable. In Processus Aléatoires à Deux Indices (Colloque E.N.S.T.-C.N.E.T., Paris, 1980), p. 59-83 , Lecture Notes in Mathematics, 863, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[55] MAZZIOTTO, G. et SZPIRGLAS, J. Un exemple de processus à deux indices sans l'hypothese F4. In Séminaire de Probabilités XV, p.673-688,Lecture Notes in Mathematics,850 , Springer-Verlag, Berlin,1981.

[56] McKEAN Jr. H.P., Brownian Motion with a several dimensional time. Theory of Probability and its Applications, 8, 1963, p. 335-354.

[57] MERZBACH, E. Processus stochastiques à indices partiellement ordonnes. Centre de Mathématiques Appliquées. Ecole Polytechnique Palaiseau, Rapport interne, n. 55, 1979.

[58] MERZBACH, E., Une remarque sur les martingales à deux indices et leurs mesures de Doléans associées. C.R.Acad. Sc. Paris, t. 290, sèrie A, 1980, p.435-438.

[59] MERZBACH, E., Stopping for two dimensional stochastic processes. Stochastic Processes and their Applications, 10, 1980, p. 49-63

[60] MERZBACH, E., and ZAKAI, M., Predictable and dual predictable projections of two-parameter stochastic processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 53, 1980, p. 263-269.

[61] METIVIER,M. and PELLAUMAIL, J. Stochastic integration. Academic Press, New York, 1980.

[62] METRAUX, C., Quelques inégalités pour martingales à paramètre bidimensionnel. In Séminaire de Probabilités XII, p.170-179, Lecture Notes in Mathematics, 649, Springer-Verlag, Berlin, 1978

[63] MEYER, P.A., Une remarque sur le calcul stochastique dépendant d'un paramètre. In Séminaire de ProbabilitésXIII, p.199-215, Lecture Notes in Mathematics,721 , Springer-Verlag, Berlin, 1979

[64] MEYER, P.A. Théorie elementaire des processus à deux indices. In Processus Aléatoires à Deux Indices (Colloque E.N.S.T.-C.N.E.T., Paris, 1980), p. 1-39 , Lecture Notes in Mathematics, 863, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[65] MEYER, P.A., Probabilités et potentiel. Actualités scientifiques et industrielles, 1318, Hermann, Paris, 1966.

[66] MILLET, A., Convergence and regularity of strongs submartingales. In Processus Aléatoires à Deux Indices (Colloque E.N.S.T.-C.N.E.T., Paris, 1980), p.50-58 , Lecture Notes in Mathematics, 863, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[67] MILLET, A. and SUCHESTON, L. On regularity of multiparameter amarts and martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 56, 1981, p. 21-45.

[68] NEVEU, J., Martingales a temps discret. Masson et Cie, Paris, 1972.

[69] NUALART, D., Weak convergence to the law of two-parameter continuous processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 55, 1981, p. 255-259.

[70] NUALART, D. Martingales a variation independente du chemin. In Processus Aléatoires à Deux Indices (Colloque E.N.S.T.-C.N.E.T., Paris, 1980), p.128-148, Lecture Notes in Mathematics, 863, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[71] NUALART, D., Descomposition of two-parameter martingales. Stochastica, vol. V, nº 3, 1981, p. 133-150.

[72] NUALART, D., Stochastic analysis of processes with two parameters . First Catalan International Symposium of Statistics. Barcelona, 1983.

[73] NUALART, D., Differents types de martingales à deux indices. In Séminaire de ProbabilitésXVII, p.398-417. Lecture Notes in Mathematics, 986, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[74] NUALART, D., On the quadratic variation of two-parameters continuous martingales. The Annals of Probability, Vol. 12, No 2, 1984, p. 445-457.

[75] NUALART, D., Une formule d'Itô pour les martingales continues à deux indices et quelques applications. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol 20, n 3, 1984, p. 251-275.

[76] NUALART, D., Variations quadratiques et inégalités pour les martingales a deux indices. Apareixerà a Stochastics.

[77] NUALART, D. i SANZ, M., Integrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à deux parameters. Annales Scientifiques de l'Université de Clermont, mathematiques, 14^{e} fascicule, n 61, 1976, p. 89-94.

[78] NUALART, D.i SANZ, M., A Markov propperty for two parameter gaussian processes. Stochastica, Vol III, nº1, 1979, p. 1-16.

[79] NUALART, D, i SANZ, M. Teorema de Girsanov pel procés de Wiener amb dos paràmetres. Preprint, 1979.

[80] NUALART, D. i SANZ, M., Caracterisation des martingales à deux paramètres independantes du chemin. Annales Scientifiques de l'université de Clermont, Mathematiques, 17^{e} fascicule, n 67, 1979, p. 96-104.

[81] NUALART, D. i SANZ, M., Martingales à variation indèpendente du chemin dans une filtration produit. Publicacions de la Secció de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona, nº 17, 1980, p. 47-56.

[82] NUALART, D. i SANZ, M. A singular stochastic integral Equation. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 86, n 1, 1982, p. 139-142.

[83] OREY, S. and PRUITT, W.E., Sample functions of the N-parameter Wiener process. The Annals of Probability, Vol. 1, No 1, 1973, p. 138-163.

[84] PARK, W.J. A multiparameter Gaussian process. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 41, No 5, 1970, p. 1582-1595.

[85] SANZ, M., Càlcul diferencial estocàstic per a processos amb paràmetre n-dimensional. Tesi. Universitat de Barcelona, 1977.

[86] SANZ, M., Cálculo diferencial estocàstico para processos con parámetro n-dimensional. Stochastica, Vol. II, nº 4, 1978, p. 51-70.

[87] STRICKER, C. et YOR, M., Calcul stochastique dépendant d'un paramètre. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 45, 1978, p. 109-135.

[88] SUCHESTON, L., On one-parameter proofs of almost sure convergence of multiparameter processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 63, 1983, p. 43-49.

[89] WALSH, J.B., Martingales with a multi-dimensional parameter and stochastic integral in the plane. Curs de 3eme Cycle, curs 76-77, Université P. et M. Curie.

[90] WALSH, J.B., Convergence and regularity of multiparameter strongs martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 46, 1979, p. 177-192.

[91] WONG, E., Recent progress in stochastic pocesses. A survey. IEEE transactions on Information Theory, Vol IT-19, may 73.

[92] WONG, E., Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems. McGraw-Hill, New York, 1971.

[93] WONG, E., A likelihood ratio formula for two-dimensional random fields. IEEE Transactions on Information Theory, Vol IT-20, n 4, july 1974, p. 418-422.

[94] WONG, E. A calculus of multiparameter martingales and its aplications. Preprint, 1979.

[95] WONG, E. and ZAKAI, M., Martigales and stochastic integrals with a multi-dimensional parameter. Z. Wahrschein-lichkeitstheorie verw. Gebiete 29, 1974, p. 109-122.

[96] WONG, E., and ZAKAI, M., Weak martingales and stochastic integrals in the plane. The Annals of Probability, Vol. 4, No 4 , 1976, p. 570-586.

[97] WONG, E. and ZAKAI, M., An extension of stochastic integrals in the plane.The Annals of Probability, Vol. 5, No 5, 1977,p. 770-778.

[98] WONG, E. and ZAKAI, M., The sample function continuity of stochastic integrals in the plane. The Annals of Probability, Vol. 5, No 6, 1977, p. 1024-1027.

[99] WONG, E. and ZAKAI, M., Likelihood ratios and transformation of probability associated with two-parameter Wiener processes.Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 40, 1977, p. 283-308.

[100] WONG, E. and ZAKAI, M.,Differentiation formulas for stochastic integrals in the plane. Stochastic Processes and their Applicacions 6, 1978, p. 339-349.

[101] ZAKAI, M., Some classes of two-parameter martingales. The Annals of Probability, Vol. 9, No 2, 1981, p. 255-265.

[102] ZABAGANU,G. and ZHUANG, X,W., Two-parameters filtrations with respect to which all martingales are strong. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 61, 1982, p.437-452.

[103] ZIMMEMMAN, G.J., Some sample functions properties of two-parameter gaussian process. The Annals of Mathematical Statistics, 43, 1972, p. 1235-1246.

[104] YAGLOM, A.M., An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions. Prentice-Hall inc., Englewod Cliffs,New Jersey, 1962.

[105] YAGLOM, A.M., Some classes of random fields in n-dimensional space, related to stationary random processes. Theory of Probability and Its Applications, English Edition, vol. 2, 1957, p. 272-320.

[106] YEH, J. Wiener measure in a space of functions of two variables. Trans. Amer. Math. Soc. 95, 1960, p. 433-450.

[107] YOR, M., Représentation des martingales de carré integrable relatives aux processus de Wiener et Poisson à n paramèters. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 35, 1976, p. 121-129.

[108] YOR, M., Étude de certains processus (stochastiquement) differentiables ou holomorfes. Ann. Ins. Henri Poincaré vol. XIII, nº 1, 1977, p. 1-25.