UNIVERSITAT DE BARCELONA

Contribución al estudio de la estructura del conjunto de negaciones definidas en un retículo

Francesc Esteva Massaguer

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE NEGACIONES DEFINIDAS EN UN RETICULO.

por F. Esteva Massaguer

Memoria presentada para
aspirar al grado de Doc
tor en Ciencias (Sección
Matemáticas) por la Uni-
versidad de Barcelona.

INTRODUCCION

El presente trabajo fue iniciado como un estudio de las negaciones utilizadas en las diversas lógicas, tema que fue motivado por los trabajos que sobre lógica algebraica vienen desarrollándose en el departamento de Estadística. Partimos de la definición de negación dada por el profesor F. de A. Sales Vallés en [14] y que es una aplicación entre ordenados y, en especial, entre retículos, que cumple las condiciones máximas posibles de forma que las negaciones utilizadas en las distintas lógicas sean casos particulares de la definición dada.* Dichas negaciones han sido objeto, anteriormente a esta memoria, de varios trabajos de los que se han publicado los del profesor F. de A. Sales Vallés [14] y [18], el de J. Plà [19] y el de F. Esteva [20].

La presente memoria parte de estos trabajos y se dedica al estudio de las negaciones en los retículos completos. En resumen, los resultados que se obtienen son los siguientes:

En el capítulo 1 se parte de que la imagen por una negación de un retículo completo es un inf-semirretículo completo que contiene al máximo, y se estudia si, dado cualquier inf-semirretículo que contiene al máximo, existe siempre una negación que lo tenga por imagen. La respuesta es negativa, y se dan

---

*En este sentido, el estudio comparativo de las negaciones clásica, intuicionista y cuántica que se hace en el capítulo 1 de G. Bodiou [11] nos ha sido muy útil.

condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación entre negaciones e inf-semirretículos completos que contienen al máximo, sea inyectiva, exhaustiva o biyectiva. Así se ve que esta aplicación es una biyección si, y sólo si, el retículo es una cadena finita.

En el capítulo 2 se estudia el conjunto N(L) de todas las negaciones que pueden definirse en un retículo completo $(L, \wedge, \vee)$. En el apartado 1 se demuestra que N(L) es un retículo completo que notamos $(N(L), \wedge, \bar{\vee})$. En el apartado 2 se dan condiciones, unas necesarias y otras suficientes, para que $(N(L), \wedge, \bar{\vee})$ sea distributivo e infinitamente distributivo. En el apartado 3 se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que $(N(L), \wedge, \bar{\vee})$ sea un álgebra de Boole es que $(L, \wedge, \vee)$ sea un álgebra de Boole atómica, resultado que se completa en el apartado 4 al demostrar que toda álgebra de Boole de negaciones es atómica, así como al hallar la posición ocupada por la complementación del álgebra de Boole en el retículo de las negaciones. Por último, en el apartado 5 se halla una aplicación entre un álgebra de Boole y el retículo de sus negaciones que es un monomorfismo reticular, y que nos permite, por tanto, sumergir toda álgebra de Boole completa en el retículo de sus negaciones.

En el capítulo 3 se recogen y completan diversos resultados hallados en los capítulos anteriores sobre las negaciones en las cadenas completas. Así, en el cap. 2 se da una regla para construir el supremo de dos negaciones y en este capítulo se demuestra que sólo es váli da para hallar el supremo de familias finitas de negaciones. También en el cap. 2 se demuestra que si un retículo es completo, atómico y distributivo, el retículo de sus negaciones es distributivo y en el cap. 3, al demostrar que el retículo de las negaciones de una cadena completa es siempre distributivo, se prueba que la condición dada en el cap. 2 es sólo suficiente.

Por último, en una nota se da una demostración del conocido teorema de completación de Mac Neille en el caso de cadenas, utilizando los retículos de negaciones.

Creo un deber hacer constar mi agradecimiento al Profesor F. de A. Sales Vallés de quien he recibido, tanto la sugerencia del tema por él iniciado, como las necesarias orientaciones para llevarlo a término.

Agradezco también la ayuda que ha supuesto la concesión por parte de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona de una dedicación exclusiva en la Cátedra del Grupo I "Matemáticas".

Debo agradecer también a los compañeros del Departamento de Estadística y en especial a J. Plá las aportaciones y sugerencias al presente trabajo durante las discusiones que hemos tenido, sobre este tema, en nuestro departamento.

Barcelona , Junio 1974

I N D I C E

....-....

CAPITULO 1

NEGACIONES EN RETICULOS COMPLETOS.-

1.- NEGACIONES EN CONJUNTOS ORDENADOS Y EN RETICULOS.

1.A.- Negaciones en conjuntos ordenados.

Sea $(S, \leq)$ un conjunto ordenado.

Def. 1.1.- Una aplicación $\tau : S \longrightarrow S$ diremos que es una negación si se cumple:

1) Si $x \leq y$ entonces $\tau(x) \geq \tau(y)$:

2) Para todo $x \in S$ es $\tau^2(x) \geq x$.

Si además se cumple que $\tau^2 = I$ entonces diremos que τ es una negación fuerte.

Prop. 1.1.- Sea $(S, \leq)$ un conjunto ordenado y τ una negación en S. Entonces se cumple:

a) τ^2 es un operador clausura tal que $\tau^2(S) = \tau(S)$.

b) $\tau^3 = \tau$, es decir, τ es fuerte sobre el conjunto imagen $\tau(S)$.

$\tau(S)$

c) Si S tiene mínimo "o" entonces S tiene que tener máximo u ya que por toda negación τ la imagen del mínimo es el máximo $(\tau(o) = u)$.

d) τ es fuerte si, y sólo si, es una biyección.

e) Si τ es fuerte y a cubre a b entonces $\tau(b)$ cubre a $\tau(a)$.

No damos ninguna demostración ya que estas propiedades son conocidas. Véase por ejemplo F. de A. Sales Vallés [14] y [18].

<u>Def.: 2.1.-</u> Sea $(S,\leq)$ un conjunto ordenado y τ una negación de S. Entonces diremos que:

a) un elemento $x\in S$ es positivo respecto a τ si $x\geq\tau(x)$.

b) un elemento $x\in S$ es negativo respecto a τ si $x\leq\tau(x)$.

c) un elemento $x\in S$ es estrictamente positivo respecto a τ si $x>\tau(x)$.

d) un elemento $x\in S$ es estrictamente negativo respecto a τ si $x<\tau(x)$.

Notaremos los conjuntos de elementos negativos y positivos por N_τ y P_τ y los conjuntos de elementos estrictamente positivos y estrictamente negativos por $\bar{N}_\tau$ y $\bar{P}_\tau$.

Con esta nomenclatura es inmediato que $N_\tau\cap P_\tau=\{x\in S \mid \tau(x)=x\}$ y que $\bar{P}_\tau = P_\tau-(N_\tau\cap P_\tau)$ y $\bar{N}_\tau = N_\tau-(N_\tau\cap P_\tau)$.

<u>Prop. 2.1.-</u> Sean x_1, x_2, $x_3\in S$ tales que son comparables y $x_1\in\bar{N}_\tau$, $x_2\in N_\tau\cap P_\tau$ y $x_3\in\bar{P}_\tau$. Entonces es $x_1<x_2<x_3$.

En efecto:

Si $x_1\geq x_2$ entonces sería $x_1<\tau(x_1)\leq\tau(x_2)=x_2$ en contradicción con el hecho de ser $x_1\geq x_2$.

Si $x_2 \geq x_3$ entonces sería $x_2 = \tau(x_2) \leq \tau(x_3) < x_3$ en contradicción con el hecho de ser $x_2 \geq x_3$.

<u>Prop. 3.1.-</u> Sea $(S, \leq)$ un ordenado y τ una negación en S. Entonces se cumple:

a) $N_\tau \cap P_\tau$ es un conjunto totalmente desordenado.

b) N_τ es un ideal de orden y P_τ un filtro de orden.

<u>Prop. 4.1.-</u> Sea $(S, \leq)$ un ordenado y τ una negación en S. Entonces:

a) $\tau(\bar{P}_\tau) \subset \bar{N}_\tau$

b) $\tau(\bar{N}_\tau) \subset P_\tau$

En efecto:

Si $x \in \bar{P}_\tau$ entonces $\tau(x) < x$ de donde por ser $x \leq \tau^2(x)$ tenemos $\tau(x) < x \leq \tau^2(x)$ es decir $\tau(\tau(x)) > \tau(x)$ de donde $\tau(x) \in \bar{N}_\tau$.

Si $x \in \bar{N}_\tau$ entonces $\tau(x) > x$ de donde $\tau(\tau(x)) \leq \tau(x)$ es decir $\tau(x) \in P_\tau$.

<u>Corolario 1.1.-</u> Cualquiera que sea la negación τ definida en un ordenado $(S, \leq)$ nunca puede darse que:

a) $\bar{P}_\tau \neq \emptyset$ y $\bar{N}_\tau = \emptyset$.

b) $P_\tau = \emptyset$ y $\bar{N}_\tau \neq \emptyset$.

Limitándonos al caso de las cadenas tendremos que, al ser todo par de elementos comparable, dada una negación τ todo elemento de la cadena debe ser de uno de los subconjuntos N_τ ó P_τ y $P_\tau \cap N_\tau$ debe ser vacío o unitario. Con estas consideraciones y teniendo presentes las proposiciones anteriores son inmediatas las siguientes proposiciones.

<u>Prop. 5.1.-</u> Si τ es una negación en una cadena $(S, \leq)$ entonces debe ocurrir uno de los tres casos siguientes:

a) $\bar{N}_\tau \neq \emptyset$, $P_\tau \neq \emptyset$ y $N_\tau \cap P_\tau = \emptyset$.

b) $\bar{N}_\tau \neq \emptyset$, $\bar{P}_\tau \neq \emptyset$ y $N_\tau \cap P_\tau = \{a\}$.

c) $\bar{N}_\tau \neq \emptyset$, $\bar{P}_\tau = \emptyset$ y $N_\tau \cap P_\tau = \{a\}$. En este caso la negación está definida de la forma $\tau(x) = a$ para todo $x \in S$.

<u>Prop. 6.1.-</u> Si τ es una negación fuerte en una cadena $(S, \leq)$ entonces debe darse uno de los dos casos siguientes:

a) $\bar{N}_\tau \neq \emptyset$, $\bar{P}_\tau \neq \emptyset$ y $N_\tau \cap P_\tau = \emptyset$.

b) $\bar{N}_\tau \neq \emptyset$, $\bar{P}_\tau \neq \emptyset$ y $N_\tau \cap P_\tau = \{a\}$.

siendo $\bar{N}_\tau$ y $\bar{P}_\tau$ dos conjuntos isomorfos respecto a los órdenes duales.

La proposición 6.1 nos dice que para poder definir una negación fuerte en una cadena tenemos que poder dividirla en dos subconjuntos P y N, cuya intersección es vacía o unitaria tales que:

1) Todo elemento de N es menor o igual que todo elemento de P.

2) N y P son isomorfos respecto a órdenes duales.

Por tanto, podríamos decir que toda negación fuerte en una cadena es una simetría con centro de simetría <u>a</u> si $N_{\tau} \cap P_{\tau} = \{a\}$ ó sin centro de simetría si $N_{\tau} \cap P_{\tau} = \emptyset$.

1.B.- <u>Negaciones en retículos.</u>

Sea $(L, \wedge, \vee)$ un retículo y sea τ una negación en L.

<u>Def. 3.1.-</u> Diremos que una negación τ de L es un antimorfismo si para todo $x, y \in L$ es:

$$\tau(x \vee y) = \tau(x) \wedge \tau(y) \quad \text{y} \quad \tau(x \wedge y) = \tau(x) \vee \tau(y).$$

<u>Prop. 7.1.-</u> Sea $(L, \wedge, \vee)$ un retículo y τ una negación definida en L. Entonces:

a) Para todo $x, y \in L$ se cumple:

$$\tau(x \vee y) = \tau(x) \wedge \tau(y) \quad \text{y} \quad \tau(x \wedge y) \geqslant \tau(x) \vee \tau(y).$$

b) La antiimagen de un elemento $a \in \tau(L)$ es un sup-semirretículo de L con máximo $\tau(a)$.

c) Si τ es una negación fuerte entonces τ es un antimorfismo. El recíproco no es cierto, en general.

d) Si τ es un antimorfismo entonces $\tau(L)$ es un subretículo de $(L, \wedge, \vee)$. El recíproco no es cierto, en general.

e) Si τ es un antimorfismo la antiimagen de un elemento $a \in \tau(L)$ es un subretículo de L con máximo $\tau(a)$.

f) Si τ es un antimorfismo y $(L,\wedge,\vee)$ es un álgebra de Boole entonces $\tau(L)$ es un álgebra de Boole con mínimo $\tau(u)$ y máximo u, por lo que es subálgebra de $(L,\wedge,\vee)$ si, y sólo si, $\tau(u) = o$.

La demostración de estas propiedades de las negaciones son inmediatas si se parte de un conocimiento de los resultados del trabajo del Dr. F. de A. Sales Vallés [14]. Por ello no damos ninguna demostración de los mismos aunque los enunciamos puesto que nos serán útiles más adelante.

------ § ------

2.- NEGACIONES EN RETICULOS COMPLETOS.

Sea $(L,\wedge,\vee)$ un retículo completo con máximo u y mínimo c.

Prop. 1.2.- Si $(L,\wedge,\vee)$ es un retículo completo entonces:

a) $\tau(\bigvee_{x\in H} x) = \bigwedge_{x\in H}(\tau(x))$ para todo $H\subset L$.

b) $\tau(\bigwedge_{x\in H} x) \geq \bigvee_{x\in H}(\tau(x))$.

En efecto:

a) Veamos que $\tau(\bigvee_{x\in H} x) = \bigwedge_{x\in H}(\tau(x))$ para todo $H\subset L$.

- $x \leq \bigvee_{x\in H} x$ para todo $x \in H$ de donde $\tau(x) \geq \tau(\bigvee_{x\in H} x)$

y como esta desigualdad es cierta para todo $x\in H$ será;

$$\bigwedge_{x\in H} \tau(x) \geq \tau(\bigvee_{x\in H} x) \qquad (1).$$

- $x \geq \bigwedge_{x\in H} x$ para todo x de L; luego $\tau(x) \leq \tau(\bigwedge_{x\in H} x)$

y como esta desigualdad es cierta para todo $x \in H$ será,

$$\bigvee_{x\in H} \tau(x) \leq \tau(\bigwedge_{x\in H} x) \qquad (2).$$

Pero $x \leq \tau^2(x)$ para todo $x \in H$, de donde $\bigvee_{x\in H} x \leq \bigvee_{x\in H} \tau^2(x)$

Teniendo presente (2) resulta:

$\bigvee_{x\in H} x \leq \bigvee_{x\in H} \tau(\tau(x)) \leq \tau(\bigwedge_{x\in H} \tau(x))$ de donde:

$$\tau(\bigvee_{x\in H} x) \geq \tau^2(\bigwedge_{x\in H} \tau(x)) \geq \bigwedge_{x\in H} \tau(x) \qquad (3)$$

(1) y (3) demuestran el resultado buscado.

b) Para todo $x \in H$ es $x \geq \bigwedge_{x\in H} x$ de donde $\tau(x) \leq \tau(\bigwedge_{x\in H}(x))$.
Luego

$$\tau(\bigwedge_{x\in H} x) \geq \bigvee_{x\in H}(\tau(x))$$

<u>Prop. 2.2.-</u> Si $(L, \wedge, \vee)$ es un retículo completo entonces $\tau(L)$ es un inf-semirretículo completo de L que contiene a u, y por tanto un retículo completo, aunque en general no es subretículo de $(L, \wedge, \vee)$.

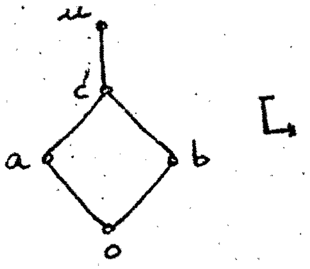
En efecto:

Del resultado a) de la proposición 1.2 se desprende que $\tau(L)$ es un inf-semirretículo completo de L y de la proposición 1.1 c) de este capítulo, que $u \in \tau(L)$. Por tanto $\tau(L)$ es un retículo completo en el que el supremo está definido de la forma:

$$\overline{\bigvee_{x\in H}} x = \bigwedge \{ y \in \tau(L) \setminus y \geq x, \forall x \in H \} \text{ para todo } H \subset \tau(L).$$

Además, en general $(\tau(L), \wedge, \overline{\vee})$ no es subretículo de $(L, \wedge, \vee)$ como puede comprobarse en el siguiente ejemplo:

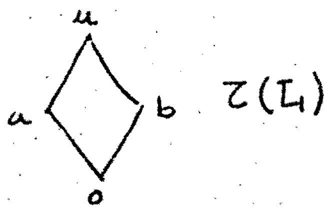
Sea $(L, \wedge, \vee)$ el retículo dado por el grafo adjunto y sea τ la negación definida de la forma:



$\tau(u) = o$, $\tau(a)=b$, $\tau(b)=a$, $\tau(o)=u$, $\tau(c)=o$.

Es inmediato que τ es una negación y que $\tau(L)$ es el retículo completo dado por el grafo adjunto.

Entonces es evidente que $(\tau(L), \wedge, \overline{\vee})$ no es subretículo de $(L, \wedge, \vee)$ ya que:



$$a \vee b = c \neq u = a \overline{\vee} b.$$

<u>Prop. 3.2.-</u> Si L es completo la antiimagen de un elemento a es un sup-semirretículo completo con máximo $\tau(a)$.

En efecto:

Sea $H = \{ x \in L \mid \tau(x) = a \}$ y sea $P \subset H$ entonces es:

$\tau(\bigvee_{x\in P} x) = \bigwedge_{x\in P} \tau(x) = \bigwedge_{x\in P} a = a$ de donde $\bigvee_{x\in P} x \in H$ es decir

H es un supsemirretículo completo. Además si $x \in H$ se cumple:

$x \leq \tau^2(x) = \tau(a)$ de donde $\tau(a) \geq x$ para todo $x \in H$

Por último $\tau(a) \in H$ pues si $a \in \tau(\mathbb{L})$ es $\tau^2(a) = a$.

Sabemos que el cuadrado de una negación es una clausura y que para las clausuras, la aplicación que hace corresponder a cada clausura su imagen nos define una biyección entre las clausuras y los inf-semirretículos completos que contienen a u*. Acabamos de ver por otra parte que la imagen por una negación de un retículo completo es un inf-semirretículo completo que contiene a u. Vamos a estudiar que ocurre con el recíproco.

<u>Teorema 1.2.-</u> Dado un retículo $\mathbb{L}$ y un inf-semirretículo $\mathbb{L}'$ completo y que contenga a u existen tantas negaciones τ tales que $\tau(\mathbb{L}) = \mathbb{L}'$ como negaciones fuertes pueden definirse en el retículo completo $(\mathbb{L}', \wedge, \overline{\vee})$.

En efecto:

Sea τ_1 una negación fuerte definida en $(\mathbb{L}', \wedge, \overline{\vee})$. Veamos que podemos definir una negación τ en $\mathbb{L}$ tal que $\tau(\mathbb{L}) = \mathbb{L}'$.

Definimos para todo x de $\mathbb{L}$ la aplicación:

$$\tau(x) = \overline{\vee}\{\tau_1(y) \mid y \in \mathbb{L}',\ y \geq x\} = \tau_1(\wedge\{y \in \mathbb{L}' \backslash y \geq x\})$$

Es inmediato que si $x \in \mathbb{L}'$ entonces $\tau(x) = \tau_1(x)$ y que $\tau(\mathbb{L}) = \mathbb{L}'$ puesto que para todo $x \in \mathbb{L}$ es $\tau(x) \in \mathbb{L}'$ pues $\mathbb{L}'$ es inf-completo.

---

* Véase, por ejemplo, M. Ward [1] ó J. Morgado [10].

Veamos que la aplicación τ definida es una negación en $\mathbb{L}$:

a) Si $x \leq y$ es inmediato que $\tau(x) \geq \tau(y)$.

b) Si $x \in \mathbb{L}$ entonces $x \leq \tau^2(x)$ ya que:

Por ser $\tau(x) \in L'$ es

$$\tau^2(x) = \tau_1(\tau(x)) = \tau_1(\bar{V}\{\tau_1(y) \mid y \in L',\ y \geq x\}) =$$

$$= \wedge\{\tau_1^2(y) \mid y \in L',\ y \geq x\}.$$

Pero para todo y de L′ con $y \geq x$ es $\tau_1^2(y) \geq y \geq x$ de donde:

$$\tau^2(x) = \wedge\{\tau_1^2(y) \mid y \in \mathbb{L}',\ y \geq x\} \geq \wedge\{y \in L' \mid y \geq x\} \geq x.$$

Veamos por último que esta negación es única:

Supongamos que, dada una negación τ_1 fuerte en L′ existieran dos negaciones $\tau \neq \tau'$ en L tales que $\tau(L) = \tau'(L) = L'$ y que a la vez $\tau|L' = \tau'|L' = \tau_1$. Por ser $\tau \neq \tau'$ existirá por lo menos un $x \in L$ tal que $\tau(x) \neq \tau'(x)$ de donde al ser $\tau(x)$ y $\tau'(x)$ de L′es:

$\tau^2(x) = \tau_1(\tau(x)) \neq \tau_1(\tau'(x)) = \tau'^2(x)$ por ser τ_1 una negación fuerte en L! Luego $\tau^2 \neq \tau'^2$; pero τ^2 y τ'^2 son dos operadores clausura que tienen el mismo conjunto imagen lo que contradice el resultado enunciado al principio de este apartado de que existe una biyección entre clausuras e inf-semirretículos completos que contiene a u (a cada clausura δ se le hace corresponder $\delta(\mathbb{L})$).

Por otra parte dada una negación τ en $\mathbb{L}$ es inmediato que τ es una negación fuerte en $\tau(\mathbb{L})$ puesto que $\tau^3 = \tau$.

<u>Corolario 1.2.-</u> En un retículo completo L si una negación τ es un antimorfismo entonces, en general, el antimorfismo no es cierto para las intersecciones infinitas.

En efecto:

Veamos un contraejemplo:

Sea L el intervalo $[-5,5]$ de la recta real que con el ínfimo y el supremo usuales es un retículo completo y sea - la negación τ que se obtiene como extensión única (por el teorema 1.2) de la negación fuerte τ_1 definida en el inf-semirretículo completo que contiene al 5, $L' = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, por $\tau_1(a) = -a$.

Es inmediato que por ser el retículo una cadena es un antimorfismo y en cambio tomando el subconjunto $(2,3)$ es:

$$\tau(\bigwedge\{x \in (2,3)\}) = \tau(2) = -2 \text{ y en cambio}$$

$\bigvee_{x\in(2,3)}(\tau(x)) = \bigvee_{x\in(2,3)}\{-3\} = \{-3\}$ puesto que para todo $x \in (2,3)$, $\tau(x) = \tau_1(\bigwedge\{y \in L' | y \geq x\}) = \tau_1(3) = -3$.

<u>Corolario 2.2.-</u> Si L es completo y τ es un antimorfismo entonces $\tau(L)$ no es en general un subretículo completo.

En efecto:

Sea L el intervalo $[-5,5]$ de los reales y sea $L' = [-1,1) \cup \{5\}$ que es un inf-semirretículo completo que contiene al 5; sea τ la negación de L obtenida como extensión de la negación τ_1 fuerte definida en L' por $\tau_1(-1)=5$, $\tau_1(5)=-1$ y $\tau_1(x)=-x$ para todo $x \in (-1,1)$. Entonces como en el caso anterior τ_1 es un antimorfismo y en cambio L' no es un subretículo completo ya que

3.- RELACION ENTRE INF-SEMIRRETICULOS COMPLETOS QUE CONTIENEN AL MAXIMO, OPERADORES CLAUSURA Y NEGACIONES.

Como consecuencia del teorema 1.2 se nos plantea el problema de estudiar cómo es la aplicación entre inf-semirretículos completos que contengan a u y las negaciones que los tienen por imagen o entre negaciones y clausuras puesto que entre los inf-semirretículos completos que contienen a u y las clausuras existe una biyección. Si llamamos N(L) al conjunto de las negaciones de L, Y(L) al conjunto de inf-semirretículos completos que contiene a u y Δ (L) al conjunto de las clausuras de L lo que pretendemos estudiar es de qué tipo son las aplicaciones:

$$f: N(L) \longrightarrow Y(L) \qquad y \qquad f_1: N(L) \longrightarrow \Delta(L)$$

$$\tau \longrightarrow f(\tau) = \tau(R) \qquad\qquad \tau \longrightarrow f_1(\tau) = \tau^2.$$

<u>Prop. 3.-</u> Una condición necesaria para que f sea inyectiva es que L sea una cadena.

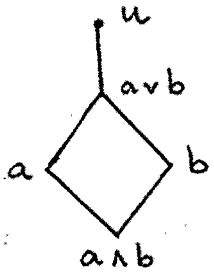
En efecto:

Si L no es una cadena deben existir por lo menos dos elementos $a, b \in L$ tales que no son comparables; entonces $L' = \{a \wedge b, a, b, u\}$ es un inf-semirretículo completo y en él pueden definirse dos negaciones fuertes τ_1 y τ_2 dadas por:

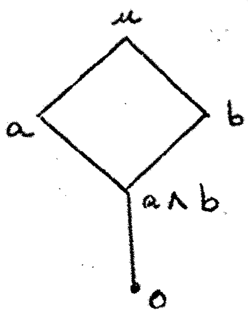
$$
\begin{array}{llll}
\tau_1(u) = a \wedge b & & \tau_2(u) = a \wedge b \\
\tau_1(b) = a & & \tau_2(b) = b \\
\tau_1(a) = b & & \tau_2(a) = a \\
\tau_1(a \wedge b) = u & & \tau_2(a \wedge b) = u
\end{array}
$$

Luego por el teorema 1.2 existen dos negaciones τ_1', τ_2' de N(L) tales que $\tau_1'(L) = \tau_2'(L) = L'$ por lo que f no será inyectiva.

Prop. 2.3.- Una condición necesaria para que f sea epiyectiva es que en el retículo completo L no exista ningún inf-semirretículo completo que contenga a u del tipo (1) ó (2).



(1)



(2)

En efecto:

Tanto en un retículo del tipo (1) como del tipo (2) no puede definirse ninguna negación fuerte pues por una negación fuerte los átomos y antiátomos deben corresponderse biyectivamente y en (1) y (2) no es posible hacerlo. Luego si en un retículo L existe un infsemirretículo completo que contenga a u del tipo (1) ó (2) no existirá ninguna negación τ tal que $\tau(L) = L'$ pues para ello debería existir, por el teorema 1.2, una negación fuerte en L'. Por tanto en tal caso la aplicación f no será epiyectiva.

<u>Corolario 1.3.-</u> La condición de la proposición 2.3 es equivalente a decir que si a,b son de L y no son comparables entonces $a \wedge b = o$ y $a \vee b = u$.

En efecto:

a) Si en L existen dos elementos no comparables a,b tales que $a \wedge b \neq o$ ($a \vee b \neq u$) entonces $L' = \{o, a \wedge b, a, b, u\}$ ($L' = \{a \wedge b, a, b, a \vee b, u\}$) es un inf-semirretículo completo que contiene a u y es del tipo (2) ((1)).

b) Por otra parte si para todo par de elementos no comparables a,b de L es $a \wedge b = o$ y $a \vee b = u$ es evidente que en L no existe ningún inf-semirretículo completo que contenga a u del tipo (1) ó (2).

<u>Corolario 2.3.-</u> La condición de la proposición 2.3 es equivalente a decir que existe en $L - \{o, u\}$ una partición formada por una familia $\{C_i\}_{i \in I}$ de cadenas tales que todo par de elementos pertenecientes a dos cadenas distintas son incomparables.

En efecto:

a) Si L cumple la condición de la proposición 2.3 entonces la relación definida en $L - \{o, u\}$ por:

$a \equiv b$ sí, y sólo si, a es comparable con b

es una equivalencia puesto que:
Es reflexiva ya que $a \equiv a$ es cierto para todo a de $L-\{o,u\}$.
Es simétrica pues es inmediato que si $a \equiv b$ es $b \equiv a$.
Es transitiva pues si $a \equiv b$ y $b \equiv c$ entonces $a \equiv c$ ya que si $a \equiv b$ y $b \equiv c$ entonces se cunple:

- O bien $a \geq b$ y $b \geq c$ en cuyo caso es $a \geq c$ y, por tanto $a \equiv c$
- O bien $a \leq b$ y $b \leq c$ en cuyo caso $a \leq c$ y, por tanto $a \equiv c$
- O bien $a > b$ y $b < c$ en cuyo caso a debe ser comparable con c ya que en caso contrario a y c serían incomparables y $a \wedge c \geq b \neq o$ lo que está en contradicción con que L cumpla la condición de la proposición 2.3 según vimos en el corolario 1.3.
- O bien $a < b$ y $b > c$ en cuyo caso a y c deben ser comparables ya que en caso contrario a y c serían incomparables y $a \vee c \leq b \neq u$ en contradicción con la hipótesis de que L cumple la condición de la proposición 2.3 según vimos en el corolario 1.3.

Luego $\equiv$ es una equivalencia en $L-\{o,u\}$ y por tanto tenemos una partición de este conjunto en clases; pero estas clases están formadas por elementos comprables y, por tanto son cadenas y dos elementos de dos clases distintas no pueden ser comparables.

b) Si existen una familia de cadenas $\{C_i\}_{i\in I}$ que forman una partición de $L-\{o,u\}$ y tal que dos elementos de dos cadenas distintas no son comparables, entonces la relación de equivalencia definida por esta partición es: $a \equiv b$ si, y sólo si, a y b son de una misma cadena C_i es decir si y sólo si a y b son comparables. Luego si a y b son dos elementos no comparables es que son de C_i y de C_j con $i \neq j$ y como los elementos de dos clases distintas no son nunca comparables es que $a \wedge b = o$ y $a \vee b = u$ lo que por el corolario 1.3 nos dice que L cumple la propiedad de la proposición 2.3.

<u>Prop. 3.3.-</u> Sea $(L, \wedge, \vee)$ un retículo completo que cumple la condición de la prop. 2.3 y sean C_i las cadenas definidas en el corolario 2.3 y que forman una partición de $L-\{o,u\}$. Entonces la condición necesaria y suficiente para que f sea exhaustiva para L es que lo sea para cada cadena $\bar{C}_i = C_i \cup \{o,u\}$.

En efecto:

a) Si f es exhaustiva para L lo es para cada $\bar{C}_i$ ya que:
Por ser los $\bar{C}_i$ subretículos completos de L, cualquier inf-semirretículo completo C' de un $\bar{C}_i$ lo es de L por lo que si L se cumple que f es exhaustiva debe existir una negación τ de L tal que $\tau(L) = C'$. Luego $\tau|C'$ es una negación fuerte en $C' \subset \bar{C}_i$ por lo que existe una negación τ' de $\bar{C}_i$ tal que $\tau'(\bar{C}_i) = C'$ extensión, por el teorema 1.2, de $\tau|C'$. Por tanto f es exhaustiva para cada $\bar{C}_i$.

b) Supongamos que la aplicación f es exhaustiva para todo $\bar{C}_i$ y que L' es un inf-semirretículo completo de L que contiene a u. Entonces $L' \cap \bar{C}_i = \bar{C}'_i$ es un infsemirretículo completo que contiene a u de $\bar{C}_i$ por lo que, por ser f exhaustiva para C_i existe una negación τ_i de $\bar{C}_i$ tal que $\tau_i(\bar{C}_i) = \bar{C}_i'$. Entonces en L podemos definir la aplicación τ de la forma:

$\tau(x) = \tau_i(x)$ siendo i el subíndice necesario para que $x \in \bar{C}_i$.

Es inmediato que τ es una negación por la forma cómo ha sido construida y que $\tau(L) = L'$. Luego la aplicación f para L es también exhaustiva.

Las proposiciones 1.3 y 3.3 nos inducen a estudiar cómo es la aplicación f en el supuesto de que L fuera - una cadena completa.

<u>Prop. 4.3.-</u> Si en una cadena completa C se pueden construir con origen en un elemento <u>a</u> dos sucesiones, una estrictamente creciente y la otra estrictamente decreciente, entonces f no es inyectiva.

En efecto:

Sea $a = b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_n < \dots$ la sucesión creciente y $a = a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$ la sucesión decreciente y sea $\bar{a} = \bigwedge_{i \in N} a_i$. Entonces

$L' = \{\bar{a}, \dots a_n \dots a_2, a, b_2, \dots b_n, \dots u\}$ es un inf-semirretículo completo que contiene a u y en él pueden definirse más de una negación fuerte;[*] por ejemplo pueden definirse las τ_1, τ_2, τ_3 dadas por

$\tau_1(\bar{a})=u$		$\tau_2(\bar{a})=u$		$\tau_3(\bar{a})=u$	
$\tau_1(a_i)=b_i$	$i\in N-\{1\}$	$\tau_2(a_i)=b_{i-1}$	$i\ N-\{1,2\}$	$\tau_3(a_i)=b_{i+1}$	$i\in N-\{1$
$\tau_1(a)=a$		$\tau_2(a_2)=a$		$\tau_3(a)=b_2$	
$\tau_1(u)=\bar{a}$		$\tau_2(a)=a_2$		$\tau_3(b_2)=a$	
$\tau_1(b_i)=a_i$	$i\in N-\{1\}$	$\tau_2(b_i)=a_{i+1}$	$i\in N-\{1\}$	$\tau_3(b_i)=a_{i-1}$	$i\in N-\{1,2$
		$\tau_2(u)=\bar{a}$		$\tau_3(u)=\bar{a}$	

Luego, por el teorema 1.2, tendremos por lo menos las tres negaciones τ_1', τ_2', τ_3' extensiones de τ_1, τ_2, τ_3 tales que $\tau_1'(L) = \tau_2'(L) = \tau_3'(L) = L'$; por tanto f no es inyectiva en L.

<u>Prop. 5.3.-</u> En una cadena completa C, una condición necesaria para que f sea exhaustiva es que no pueda construirse ninguna sucesión que sea estrictamente creciente o decreciente.

En efecto:

a) Si existe una sucesión estrictamente creciente $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ de elementos de C, entonces $L' = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, u\}$ es un inf-semirretículo completo que contiene a u y en él no puede definirse ninguna negación fuerte pues en L′ existen átomos y no hay ningún antiátomo.

---

[*] Recuérdese el resultado de la prop. 6.1 de este capítulo.

b) Si existe una sucesión estrictamente decreciente $a_1' > a_2' > \dots > a_n' > \dots$ con ínfimo $a = \bigwedge_{i \in N} a_i$, entonces $L' = \{a, \dots a_n', a_{n-1}', \dots a_2', a_1', u\}$ es un inf-semirretículo completo que contiene a u (en realidad es un subretículo completo que contiene a u) y en él no puede definirse ninguna negación fuerte puesto que en L' existe un antiátomo, a_1', y ningún átomo.

Luego en ninguno de los dos casos puede encontrarse una negación fuerte para el inf-semirretículo L'; por tanto, por el teorema 1.2, no existe en ninguno de los dos casos una negación τ de L tal que $\tau(L) = L'$, es decir f no es exhaustiva.

Es un ejercicio fácil probar los dos lemas siguientes que utilizan el lenguaje de la topología de los intervalos abiertos en las cadenas.

<u>Lema 1.3.-</u> Una cadena completa es finita si, y sólo si, no tiene puntos de acumulación.

<u>Lema 2.3.-</u> Si una cadena tiene un punto de acumulación puede definirse en ella una sucesión estrictamente creciente o decreciente.

<u>Prop. 6.3.-</u> La condición necesaria y suficiente para que f sea una biyección es que L sea una cadena finita.

En efecto:

Por la proposición 1.3 si L no es una cadena f no es inyectiva por lo que no será nunca una biyección. Si L es una cadena completa que no es finita de los lemas 1.3 y 2.3 se puede construir una sucesión estrictamente creciente o decreciente lo que por la proposición 5.3 implica que f no es exhaustiva. Luego sólo nos queda demostrar que f es biyectiva si L es una cadena finita. Pero, si L es finita, los inf-semirretículos que contienen a u son todos los subconjuntos de L que contienen a u, por lo que demostrar que f es biyectiva equivale a demostrar que dada cualquier cadena con un número finito de elementos se puede definir en ella una y sólo una negación fuerte; ello es evidente puesto que si $L' = \{a_1, a_2, \ldots a_n, u\}$ es una cadena finita con $a_1 < a_2 < a_3 < , \ldots a_n < u$ entonces, teniendo presentes las proposiciones 1.1 e) y 6.1 y sus consecuencias, toda negación fuerte en L′ debe cumplir que:

a) El transformado del mínimo debe ser el máximo, es decir

$$\tau(a_1) = u$$

b) Todo elemento que cubre a otro debe transformarse en uno que sea cubierto por la imagen del primero. Luego debe ser forzosamente

$$\tau(a_i) = a_{k-i+2}$$

Por tanto si L es una cadena finita para cada inf-semirretículo completo que contiene a u existe una negación fuerte única lo que nos dice, por el teorema 1.2, que existe una única τ cuya imagen por f es el inf-semirretículo dado.

Corolario 3.3.- Si L es una cadena finita con n elementos pueden definirse en ella 2^{n-1} negaciones *.

En efecto:

Si L es una cadena finita por la proposición 6.3 existen tantas negaciones como infsemirretículos completos que contienen a u. Por ser L cadena finita todo subconjunto que contenga a u es inf-semirretículo y contiene a u; por tanto habrá tantas negaciones en L como subconjuntos de L que contengan a u, es decir, como subconjuntos de $L-\{u\}$ y, como $L-\{u\}$ tiene n-1 elementos, tiene 2^{n-1} subconjuntos.

Para notar cada una de estas negaciones pondremos τ_H donde H es el subconjunto de $L-\{u\}$ que define la negación; luego τ_H es la negación definida por $\tau_H(L) = H \cup \{u\}$.

Ejemplo.- Sea la cadena $C = \{u,a,b,o\}$ con $u > a > b > o$. Las negaciones que pueden definirse en ella serán las $2^{4-1}=8$ siguientes:

$$\tau_\emptyset,\ \tau_{\{a\}},\ \tau_{\{b\}},\ \tau_{\{o\}},\ \tau_{\{a,b\}},\ \tau_{\{a,o\}},\ \tau_{\{b,o\}},\ \tau_{\{a,b,o\}}$$

Para facilitar la notación escribiremos τ_u en vez de $\tau_\emptyset$ y τ_a en vez de $\tau_{\{a\}}$.**

---

* También se pueden definir 2^{n-1} clausuras.

** Esta nomenclatura se continúa utilizando en aquellos casos en que $\tau(L)$ es una cadena finita. En tales casos τ_H se refiere a la extensión por el teorema 1.2 de la única negación fuerte que puede definirse en $H \cup \{u\}$.

Corolario 4.3.- Una condición suficiente para que f sea inyectiva es que L sea una sucesión estrictamente creciente.

En efecto:

Sea $L = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots u\}$ con $a_1 < a_2 < a_3 < \dots a_u < \dots u$.

Es evidente que en L hay un átomo a_1 y ningún antiátomo por lo que no podremos definir ninguna negación fuerte en L. Por otra parte todo inf-semirretículo completo de L que contenga a u ó es una subsucesión infinita de L con límite u, para la cual no podemos definir ninguna negación fuerte, ó es finita en cuyo caso, según hemos visto en la proposición 6.3, existe una y sólo una negación fuerte. Luego f es inyectiva estrictamente pues dado un inf-semirretículo completo C′ que contiene a u existe como máximo una negación τ tal que $\tau(L) = C'$.

Corolario 5.3.- Una condición suficiente para que f sea inyectiva es que L sea una sucesión estrictamente decreciente con ínfimo cero.

Su demostración es igual que la anterior.

Resumiendo los resultados obtenidos en este apartado tenemos:

Teorema 1.3.- Si $(L, \wedge, \vee)$ es un retículo completo con máximo u y mínimo o la aplicación f entre negaciones e infsemirretículos completos que contienen a u definida por $f(\tau) = \tau(L)$ es:

a) Exhaustiva si, y sólo si, $L-\{o,u\}$ es unión de una familia de cadenas finitas y disjuntas $\{C_i\}_{i\in I}$ tales que dos elementos de dos cadenas distintas no son comparables.

b) Biyectiva, si, y sólo si, L es una cadena finita.

En efecto:

Es consecuencia inmediata de la proposición 3.3 y de la proposición 6.3.

Los resultados obtenidos son aplicables, como ya dijimos, a la aplicación f_1 entre N(R) y Δ(R) definida por $f_1(\tau) = \tau^2$.

CAPITULO 2

EL RETICULO DE LAS NEGACIONES DE UN RETICULO COMPLETO

1.- RETICULO DE LAS NEGACIONES DE UN RETICULO COMPLETO.

Sea $(L,\wedge,\vee)$ un retículo completo con máximo u y mínimo o.

Def. 1.1.- Dadas dos negaciones τ_1, τ_2 de L diremos que $\tau_1 \leq \tau_2$ si, y sólo si, $\tau_1(x) \leq \tau_2(x)$ para todo $x \in L$.

Es inmediato que esta relación es una relación de orden en el conjunto de las negaciones de L.

Prop. 1.1.- Sea $\{\tau_i \mid i \in I\}$ un conjunto de negaciones de L. Entonces la aplicación $\bigwedge_{i\in I} \tau_i$ definida por $(\bigwedge_{i\in I} \tau_i)(x) = \bigwedge_{i\in I}(\tau_i(x))$ es una negación de L.

En efecto:

1) Si $x \leq y$ entonces $\tau_i(x) \geq \tau_i(y)$ para todo $i \in I$, luego $\bigwedge_{i\in I}(\tau_i(x)) \geq \bigwedge_{i\in I}(\tau_i(y))$ de donde $(\bigwedge_{i\in I} \tau_i)(x) \geq (\bigwedge_{i\in I} \tau_i)(y)$.

2) Para todo $x \in L$ es $x \leq (\bigwedge_{i\in I}\tau_i)^2(x)$ ya que:

$(\bigwedge_{i\in I} \tau_i)^2(x) = (\bigwedge_{i\in I}\tau_i)((\bigwedge_{i\in I}\tau_i)(x)) = \bigwedge_{i\in I}(\tau_i(\bigwedge_{i\in I}(\tau_i(x))))$.

pero como $\bigwedge_{i\in I} (\tau_i(x)) \leq \tau_k(x)$ para todo $k \in I$ será

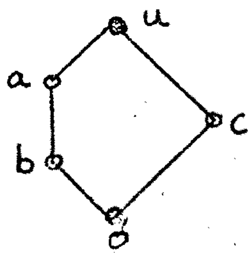
$\tau_k(\bigwedge_{i\in I}(\tau_i(x))) \geq \tau_k^2(x)$ se para todo $k \in I$ de donde

$(\bigwedge_{i\in I} \tau_i)^2(x) = \bigwedge_{k\in I}(\tau_k(\bigwedge_{i\in I} \tau_i(x))) \geq \bigwedge_{k\in I} \tau_k^2(x) \geq x$

Prop. 2.1.- Sean τ_1 y τ_2 dos negaciones de L. Entonces $\tau_1 \vee \tau_2$ definido por $(\tau_1 \vee \tau_2)(x) = \tau_1(x) \vee \tau_2(x)$ no es, en general, una negación.

En efecto:

Veamos el siguiente ejemplo:



Siendo L el retículo definido por el grafo adjunto podemos definir en él dos negaciones cuya reunión no es una negación. Definimos:

$\tau_1(u) = o$	$\tau_2(u) = o$	Por lo que $\tau_1 \vee \tau_2$ será:
$\tau_1(o) = u$	$\tau_2(o) = u$	$(\tau_1 \vee \tau_2)(u) = o$
$\tau_1(a) = c$	$\tau_2(a) = b$	$(\tau_1 \vee \tau_2)(o) = u$
$\tau_1(b) = c$	$\tau_2(b) = a$	$(\tau_1 \vee \tau_2)(a) = u$
$\tau_1(c) = a$	$\tau_2(c) = o$	$(\tau_1 \vee \tau_2)(b) = u$
		$(\tau_1 \vee \tau_2)(c) = u.$

Pero $\tau_1 \vee \tau_2$ no es una negación ya que $(\tau_1 \vee \tau_2)^2(a) = o < a$.

Prop. 3.1.- El conjunto de las negaciones de L tiene máximo y mínimo.

En efecto:

Es inmediato comprobar que τ_u definido por $\tau_u(x) = u$ para todo $x \in L$ es la negación máxima ya que para toda negación τ de L es $\tau \leq \tau_u$.

Por otra parte τ_o definida por $\tau_o(x) = o$ si $x \neq o$ y $\tau_o(o) = u$ es la negación mínima ya que toda negación τ de L cumple $\tau \geq \tau_o$.

<u>Prop. 4.1.-</u> El conjunto de las negaciones de L, que designaremos por N(L), es un retículo completo.

En efecto:

Es evidente que $\bigwedge_{i\in I} \tau_i$, definida en la proposición 1.1, es el ínfimo de la familia $\{\tau_i \mid i\in I\}$. Por tanto N(L) es un inf-semirretículo completo, con máximo τ_u; luego puede convertirse en un retículo completo definiendo:

$$\overline{\bigvee_{i\in I}} \tau_i = \bigwedge\{\tau\in N(R) \mid \tau \geq \tau_i,\ \forall i\in I\}$$

$$= \bigwedge\{\tau\in N(R) \mid \tau(x) \geq \bigvee_{i\in I}(\tau_i(x)),\ \forall x\in R\}.$$

Este retículo lo notaremos $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$.

La proposición 2.1 nos sugiere estudiar cómo debe ser L para que, dadas dos negaciones cualesquiera τ_1, τ_2 de N(L) podamos asegurar que $\tau_1 \overline{\vee} \tau_2$ sea la aplicación definida por

$$(\tau_1 \overline{\vee} \tau_2)(x) = \tau_1(x) \vee \tau_2(x).$$

El problema queda resuelto por la proposición siguiente:

<u>Prop. 5.1.-</u> La condición necesaria y suficiente para que se pueda asegurar que para todo par de negaciones τ_1, τ_2 de N(L) es $(\tau_1 \overline{\vee} \tau_2)(x) = \tau_1(x) \vee \tau_2(x)$ es que L sea una cadena.

En efecto:

1) Si L es una cadena entonces la aplicación $\tau(x) = \tau_1(x) \vee \tau_2(x)$ es una negación para todo τ_1, τ_2 de N(L) ya que:

1.a. Si $x\leq y$ entonces $\tau_1(x)\geq\tau_1(y)$ y $\tau_2(x)\geq\tau_2(y)$ de donde $\tau(x) = \tau_1(x)\vee\tau_2(x)\geq\tau_1(y)\vee\tau_2(y) = \tau(y)$.

2.a. Para todo x de L es $x\leq\tau^2(x)$ ya que:

$$\tau^2(x) = \tau(\tau_1(x)\vee\tau_2(x))$$

pero por estar en una cadena $\tau_1(x)\vee\tau_2(x)$ es el máximo de los dos; sea éste $\tau_1(x)$. Entonces será:

$$\tau^2(x) = \tau(\tau_1(x)) = \tau_1^2(x)\vee\tau_2(\tau_1(x))\geq\tau_1^2(x)\geq x.$$

Luego τ es una negación y es evidentemente la mínima que es mayor o igual que τ_1 y que τ_2 ó sea $(\tau_1\overline{\vee}\tau_2)(x) = \tau_1(x)\vee\tau_2(x)$.

2) Si L no es una cadena habrá en L dos elementos a,b no comparables. Entonces se podrá construir el infsemirretículo completo que contiene a u, $L' = \{a\wedge b, a, b, u\}$ en el que puedo definir las negaciones fuertes   y   dadas por:

$$\begin{aligned} \tau(a\wedge b) &= u & \qquad \overline{\tau}(a\wedge b) &= u \\ \tau(a) &= a & \overline{\tau}(a) &= b \\ \tau(b) &= b & \overline{\tau}(b) &= a \\ \tau(u) &= a\wedge b & \overline{\tau}(u) &= a\wedge b \end{aligned}$$

que por extensión, según el teorema 1.2 del cap. 1 nos dan las negaciones τ_1 y $\overline{\tau}_1$ de L definidas por:

$$\tau_1(x) = \begin{cases} u \text{ si } x\leq a\wedge b \\ a \text{ si } x\not\leq a\wedge b,\ x\leq a \\ b \text{ si } x\not\leq a\wedge b,\ x\leq b \\ a\wedge b \text{ si } x\not\leq a,\ x\not\leq b \end{cases}$$

$$\overline{\tau}_1(x) = \begin{cases} u \text{ si } x\leq a\wedge b \\ b \text{ si } x\not\leq a\wedge b,\ x\leq a \\ a \text{ si } x\not\leq a\quad b,\ x\leq b \\ a\wedge b \text{ si } x\not\leq a,\ x\not\leq b. \end{cases}$$

para las cuales la aplicación f definida por $f(x)=\tau_1(x)\vee\bar{\tau}_1(x)$ vale:

$$f(x) = \begin{cases} \to u \text{ si } x\leq a\wedge b \\ \to a\vee b \text{ si } x\nleq a\wedge b \text{ y } x\leq a \text{ ó } x\leq b \\ \to a\wedge b \text{ si } x\nleq a,\ x\nleq b \end{cases}$$

Es inmediato que f no es negación puesto que $f^2(a)=f(u)=a\wedge b<a$. Luego si L no es una cadena no se puede asegurar que dadas dos negaciones τ_1, τ_2 de L la aplicación f definida por $f(x) = \tau_1(x)\vee\tau_2(x)$ sea una negación.

• • • • •

En el capítulo anterior vimos que se podía definir una aplicación f_1 entre el conjunto de negaciones N(L) y el de clausuras Δ (L) de un retículo completo haciendo $f_1(\tau) = \tau^2$. Siendo N(L) y Δ (L) dos retículos completos parece interesante conocer cuando f_1 es morfismo reticular.

<u>Def. 2.1.-</u> Llamaremos τ_a a la negación de L tal que $\tau_a(L) = \{a,u\}$ es decir la negación definida por:

$$\tau_a(x) = \begin{cases} \to u \text{ si } x\leq a \\ \to a \text{ si } x\nleq a \end{cases}$$

<u>Prop. 6.1.-</u> Si L es un retículo completo con tres ó más elementos entonces f_1 no es en ningún caso un morfismo respecto al ínfimo.

En efecto:

Por tener L más de 3 elementos existe un a tal que

$u \neq a \neq o$. Tomemos las clausuras τ_a y τ_o tales que $\tau_a(L) = \{a,u\}$ y $\tau_o(L) = \{o,u\}$ *; entonces es conocido que la clausura ($\delta_a \wedge \delta_o$) es la definida por $(\delta_a \wedge \delta_o)(L)=\{o,a,u\}$. Sean, por otra parte, las negaciones τ_a y τ_o. Por ser τ_o el mínimo de N(L) es $\tau_a \wedge \tau_o = \tau_o$.

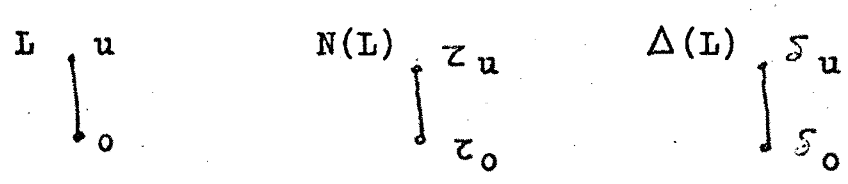
Por último está claro que $f_1(\tau_a) = \delta_a$ y $f_1(\tau_o) = \delta_o$ puesto que $\tau_x^2(L) = \tau_x(L) = \{x,u\} = \delta_x(L)$ para todo $x \in L$ y de clausuras que tengan la misma imagen sólo existe una. En cambio tenemos:

$$f_1(\tau_a \wedge \tau_o) = f_1(\tau_o) = \delta_o \neq \delta_a \wedge \delta_o = f_1(\tau_a) \wedge f_1(\tau_o)$$

<u>Teorema 1.1.-</u> La aplicación f_1 entre negaciones y clausuras definida por $f_1(\tau) = \tau^2$ es un morfismo respecto al ínfimo si, y sólo si, L está formado sólo por dos elementos ($L = \{o,u\}$).

En efecto:

Es una consecuencia inmediata de la proposición 6.1 y de los grafos de L,N(L) y Δ(L) que damos a continuación para $L = \{o,u\}$



* Recuérdese que para retículos completos una clausura queda determinada unívocamente por su imagen $\tau(L)$. Véase M. Ward [1] ó J. Riguet [3] ó Ph. Dwinger [8] y [9].

Como consecuencia del teorema 1.1 es inmediato ver que, así como para estudiar cuándo el retículo de las calusuras de un retículo completo, es un álgebra de Boole, una buena manera es ver que es lo que pasa con el retículo de los inf-semirretículos completos que contienen a u*, esto no puede - utilizarse para las negaciones si exceptuamos el caso tribial en que $L = \{o,u\}$. Por ello en la continuación utilizamos - otro camino para resolver el problema de ver cuando las negaciones de un retículo completo, que son un retículo completo, forman un álgebra de Boole.

---------- § ----------

2.- DISTRIBUTIVIDAD DE $(L,\wedge,\vee)$ Y DE $(N(L),\wedge,\overline{\vee})$.

Sea $(L,\wedge,\vee)$ un retículo completo con máximo u y mínimo o.

Recordemos que según la definición 2.1 llamamos τ_a a la negación de L definida por:

$$\tau_a(x) = \begin{cases} u \text{ si } x \leq a \\ a \text{ si } x \not\leq a. \end{cases}$$

Prop. 1.2.- Sea $H \subset L$. Entonces es:

a) $\bigwedge_{a\in H} \tau_a \geq \tau_{\bigwedge_{a\in H} a}$ valiendo el igual sí, y sólo si H es una cadena.

b) $\overline{\bigvee_{a\in H}} \tau_a = \tau_{\bigvee_{a\in H} a}$

* Véase Ph. Dwinger [1] .

En efecto:*

a) Si $x \leq \wedge a$ es $\tau_{\wedge a}(x) = u$.

Pero $x \leq \wedge a$ implica $x \leq a$, para todo $a \in H$, luego $(\bigwedge_{a\in H} \tau_a)(x) = u$.

Si $x \nleq \wedge a$ pueden haber elementos a de H tales que $x \leq a$ y otros tales que $x \nleq a$; luego por la definición de τ_a es:

$$(\bigwedge_{a\in H} \tau_a)(x) = \bigwedge_{a\in H} (\tau_a(x)) = \bigwedge_{\substack{a\ngeq x\\ a\in H}} a \geq \bigwedge_{a\in H} a$$

Luego:, si $x \leq \wedge a$, $(\bigwedge_{a\in H} \tau_a)(x) = (\tau_{\wedge a})(x) = u$ (1)

si $x \nleq \wedge a$ $(\bigwedge_{a\in H} \tau_a)(x) \geq (\tau_{\wedge a})(x)$, (2).

Veamos que sólo se da la igualdad si H es una cadena.

Si H no es una cadena existen dos elementos a,b no comparables. Entonces $\tau_a(a)=u$ y $\tau_b(a)=b$; luego $(\tau_a \wedge \tau_b)(a)=b$ pero $\tau_{a\wedge b}(a) = a\wedge b$, que por ser a no comparable con b es menor que b, es decir,

$$\tau_{a\wedge b} < \tau_a \wedge \tau_b .$$

Si H es una cadena entonces:

si $x \nleq \bigwedge_{a\in H} a$ ó bien existe un $a \in H$ tal que $a = \bigwedge_{a\in H} a$ y entonces $\tau_{\wedge a}(x) = \wedge \tau_a(x) = (\wedge \tau_a)(x)$, o bien existen infinitos elementos de H tales que $x \nleq a$ ya que si $x \leq a$ para todo $a \in H$ excepto un nº finito $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entonces $\bigwedge_{a\in H} a = x \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} a_i) = a_t$ siendo $a_t \in H$ contra lo supuesto; entonces $\bigwedge_{a\in H} a = \bigwedge_{\substack{a\in H\\ a\ngeq x}} a$ con lo

---

* Siempre que escribamos $\wedge a$, $\wedge \tau_a$, $\overline{\vee} \tau_a$, $\wedge(\tau_a(x))$, $\vee(\tau_a(x))$ suponemos que el ínfimo o el supremo se hallan para el conjunto obtenido al ir variando a en H.

que $(\bigwedge_{a\in H} \tau_a)(x) = (\tau_{\wedge a})(x)$.

b) Por la definición es evidente que por ser $\bigvee_{a\in H} a \geq a$, para todo $a\in L$ es $\tau_{\vee a} \geq \tau_a$ para todo $a\in L$. Luego $\tau_{\vee a} \geq \overline{\bigvee_{a\in H}} \tau_a$ (1)

Veamos cuanto vale la aplicación $\bigvee_{a\in H} \tau_a$:

Si $x \leq \vee a$ pueden pasar dos cosas:

ó $x \leq a$ para algún $a\in H$ y entonces $\tau_a(x)=u$ y por tanto

$$\bigvee_{a\in H} (\tau_a(x)) = u.$$

ó $x \nleq a$ para todo $a\in H$ y en tal caso $\tau_a(x) = a$ para cada $a\in H$ y por tanto $\bigvee_{a\in H} (\tau_a(x)) = \bigvee_{a\in H} a$.

Si $x \nleq \vee a$ entonces $x \nleq a$ para todo $a\in H$. Luego $\bigvee_{a\in H} (\tau_a(x)) = \bigvee_{a\in H} a$.

Veamos que si τ es una negación mayor o igual que la aplicación $\vee\tau_a$ entonces $\tau \geq \tau_{\vee a}$.

Si $\tau \geq \vee\tau_a$ entonces $\tau(u) \geq \bigvee_{a\in H} (\tau_a(u)) = \bigvee_{a\in H} a$

Luego $\tau(\bigvee_{a\in H} a) \geq \tau^2(u) = u$

Por tanto: Si $x \leq \vee a$ entonces $\tau(x) \geq \tau(\vee a) = u$, es decir, $\tau(x)=u$.

Si $x \nleq \vee a$ entonces es $\tau(x) \geq \tau(u) \geq \bigvee_{a\in H} a$

de donde al ser $\tau \geq \vee\tau_a$ es $\tau \geq \tau_{\bigvee_{a\in H} a}$ (2)

De (1) y (2) se deduce que $\overline{\bigvee_{a\in H}} \tau_a = \tau_{\bigvee_{a\in H} a}$

Def. 1.2.- Para todo a, $b \in L$ con $a \leq b$ llamaremos $\tau_{\{a,b\}}$ a la negación tal que $\tau_{\{a,b\}}(L) = \{u,a,b\}$ es decir, definida por:

$$\tau_{\{a,b\}}(x) = \begin{cases} u & \text{si } x \leq a \\ b & \text{si } x \nleq a,\ x \leq b \\ a & \text{si } x \nleq b \end{cases}$$

Es interesante hacer notar que con esta nomenclatura $\tau_{\{a,u\}} = \tau_u$ pues:

$$\tau_{\{a,u\}}(x) = \begin{cases} u & \text{si } x \leq a \\ u & \text{si } x \leq u,\ x \nleq a \\ a & \text{si } x \nleq u \end{cases}$$

es decir, $\tau_{\{a,u\}}(x) = u, \forall x \in L$.

Como caso particular de la definición 1.2 tenemos la siguiente,

Def. 2.2.- Para todo $c \in L$, llamaremos $\tau_{\{o,c\}}$ a la negación tal que $\tau_{\{o,c\}}(L) = \{o,c,u\}$ es decir, definida por:

$$\tau_{\{o,c\}}(x) = \begin{cases} u & \text{si } x = o \\ c & \text{si } x \leq c,\ x \neq o \\ o & \text{si } x \nleq c. \end{cases}$$

Prop. 2.2.- Sea $H \subset L$ y $a \in L$. Entonces se cumple:

a) $\bigwedge_{c \in H} \tau_{\{o,c\}} = \tau_{\{o, \bigwedge_{c \in H} c\}}$

b) $\tau_{\{o,c\}} \overline{\vee} \tau_a = \tau_{\{a, a \vee c\}}$

En efecto:

a) Por definición es

$$\tau_{\{o,c\}}(x) = \begin{cases} u & \text{si } x = o \\ o & \text{si } x \nleq c\,, \\ c & \text{si } x \leq c,\ x \neq o \end{cases}$$

de donde es:

$$\Big(\bigwedge_{c\in H} \tau_{\{o,c\}}\Big)(x) = \begin{cases} u & \text{si } x = o \\ o & \text{si } x \nleq c \text{ para algún } c\in H \\ c & \text{si } x \leq c \text{ para todo } c\in H \text{ con } x\neq o \end{cases}$$

pero $x \leq c$ para todo $c\in H, x \neq o$, equivale a decir $x \leq \bigwedge_{c\in H} c, x\neq o$ y $x \nleq c$ para añgún c de H es la negación de la anterior frase y por tanto equivale a decir $x \nleq \bigwedge_{c\in H} c$.

Luego es inmediato de las definiciones de $\tau_{\{o,c\}}$ y de $\tau_{\{o,\ \bigwedge_{c\in H} c\}}$ que

$$\bigwedge_{c\in H} \tau_{\{o,c\}} = \tau_{\{o,\ \bigwedge_{c\in H} c\}}\,.$$

b) Por definición es:

$$\tau_{\{o,c\}}(x) = \begin{cases} u & \text{si } x = o \\ c & \text{si } x\leq c, x\neq o \\ o & \text{si } x \nleq c \end{cases} \quad \text{y} \quad \tau_a(x) = \begin{cases} u & \text{si } x \leq a \\ a & \text{si } x \nleq a \end{cases}$$

Luego la aplicación f definida por $f(x) = \tau_{\{o,c\}}(x) \vee \tau_a(x)$ será:

$$f(x) = \begin{cases} u & \text{si } x \leq a \\ a & \text{si } x \nleq a \text{ y } x \nleq c \\ a \vee c & \text{si } x \nleq a \text{ y } x \leq c. \end{cases}$$

$\tau_{\{o,c\}} \overline{\vee}\, \tau_a$ es la mínima negación que es mayor o igual que f;

Para hallarla distinguiremos tres casos:

b.1.- Si $a \leq c$; entonces f es una negación ya que al ser $a \vee c = c$ se comprueba una dificultad que $f = \tau_{\{a,c\}}$ que es una nega-ción.

Luego $\tau_{\{o,c\}} \bar{\vee}\, \tau_a = \tau_{\{a,c\}} = \tau_{\{a,a \vee c\}}$ como queríamos probar.

b.2.- Si $a \geq c$; entonces f es negación ya que al ser $a \vee c = a$ una simple comprobación muestra que $f = \tau_a$. Además de la definición 2.1 es inmediato que si $a \geq c, \tau_{\{a,a \vee c\}} = \tau_{\{a,a\}} = \tau_a$. Luego como en b.1 tenemos que

$$\tau_{\{o,c\}} \bar{\vee}\, \tau_a = \tau_{\{a,a \vee c\}}$$

b.3.- Si a y c no son comparables; entonces f no es una negación ya que $f^2(c) = f(a \vee c) = a$ que no es comparable con c.

Entonces sea τ una negación mayor o igual que f es decir tal que $\tau(x) \geq f(x)$ para todo x de L. Esta τ debe cumplir:

- $\tau(c) \geq f(c) = a \vee c$, de donde al ser $\tau(c) \nleq a$ y $\tau(c) \nleq c$ tendremos $f(\tau(c)) = a$. Por tanto $\tau^2(c) \geq f(\tau(c)) = a$ y por ser τ una negación $\tau^2(c) \geq c$. Luego $\tau^2(c) \geq a \vee c$.
- Como $a \vee c \leq \tau(c)$ será $\tau(a \vee c) \geq \tau^2(c) \geq a \vee c$.

  Luego si $x \leq a \vee c$ será $\tau(x) \geq \tau(a \vee c.) \geq a \vee c$ (2)

De (2) y la definición de f tendremos que toda negación que sea mayor o igual que f debe cumplir:

a) $\tau(x) = u$ si $x \leq a$

b) $\tau(x) \geq a \vee c$ si $x \leq a \vee c$.

c) $\tau(x) \geq a$ si $x \nleq a \vee c$.

Recordando la definición 2.1 es inmediato que $\tau_{\{a,a\vee c\}}$ es una negación que cumple a), b) y c) y además es la mínima por lo que también en este caso es:

$$\tau_{\{o,c\}}\overline{\vee}\,\tau_a=\tau_{\{a,a\vee c\}}\,.$$

<u>Teorema 1.2.-</u> Una condición necesaria para que $(N(L),\wedge,\overline{\vee})$ sea infinitamente distributiva para el ínfimo es que lo sea el retículo $(L,\wedge,\vee)$.

En efecto:

Sean $H\subset L$ y $c\in L$ cualesquiera. Entonces por ser $(N(L),\wedge,\overline{\vee})$ infinitamente distributivo para el ínfimo será:

$$\Big(\overline{\bigvee_{a\in H}}\tau_a\Big)\wedge\tau_{\{o,c\}}=\overline{\bigvee_{a\in H}}\big(\tau_a\wedge\tau_{\{o,c\}}\big)\qquad(*)$$

Vamos a ver que ello implica que $\big(\bigvee_{a\in H}a\big)\wedge c=\bigvee_{a\in H}(a\wedge c)$.

a) Calculamos la negación del primer miembro de $(*)$.

Por la proposición 1.2 es $\overline{\bigvee_{a\in H}}\tau_a=\tau_{\bigvee_{a\in H}a}$

Entonces por ser

$$\tau_{\bigvee_{a\in H}a}(x)=\begin{cases}u & \text{si } x\le\bigvee_{a\in H}a\\ \bigvee_{a\in H}a & \text{si } x\not\le\bigvee_{a\in H}a\end{cases}\qquad\text{y}\qquad \tau_{\{o,c\}}(x)=\begin{cases}u & \text{si } x=o\\ c & \text{si } x\le c,\ x\ne o\\ o & \text{si } x\not\le c.\end{cases}$$

tendremos que:

$$\big(\tau_{\bigvee_{a\in H}a}\wedge\tau_{\{o,c\}}\big)(x)=\begin{cases}o & \text{si } x\not\le c & (1)\\ \big(\bigvee_{a\in H}a\big)\wedge c & \text{si } x\le c,\ x\not\le\bigvee_{a\in H}a & (2)\\ c & \text{si } x\le c,\ x\le\bigvee_{a\in H}a,\ x\ne o & (3)\\ u & \text{si } x=o & (4)\end{cases}$$

b) Hallemos una cota superior de la negación del segundo miembro de (*).

De las definiciones de τ_a y de $\tau_{\{o,c\}}$ tendremos:

$$(\tau_a \wedge \tau_{\{o,c\}})(x) = \begin{cases} \rightarrow o \text{ si } x \nleq c \\ \rightarrow a \wedge c \text{ si } x \leq c, x \nleq a \\ \rightarrow c \text{ si } x \leq c,\ x \leq a \\ \rightarrow u \text{ si } x = o. \end{cases}$$

de donde la aplicación f definida por $f(x) = \bigvee_{a \in H} ((\tau_a \wedge \tau_{\{o,c\}})(x))$

será la aplicación definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \rightarrow o \text{ si } x \nleq c & (1') \\ \rightarrow \bigvee_{a \in H} (a \wedge c) \text{ si } x \leq c, x \nleq a \text{ para toda } a \in H & (2') \\ \rightarrow c \text{ si } x \leq c, x \leq a \text{ para algún } a \in H & (3') \\ \rightarrow u \text{ si } x = o. & (4') \end{cases}$$

En general f no es una negación pero se puede asegurar que es menor que la negación $\tau' = \tau_{\{o, \bigvee_{a \in H}(a \wedge c), c\}}$ definida por:

$$\tau'(x) = \begin{cases} \rightarrow o \text{ si } x \nleq c & (1") \\ \rightarrow \bigvee_{a \in H}(a \wedge c) \text{ si } x \leq c,\ x \nleq \bigvee_{a \in H}(a \wedge c) & (2") \\ \rightarrow c \text{ si } x \leq \bigvee_{a \in H}(a \wedge c) & (3") \\ \rightarrow u \text{ si } x = o & (4") \end{cases}$$

Veamos que $\tau'(x) \geq f(x)$ para todo $x \in L$. En efecto:

Los elementos considerados en (1') y (4') coinciden con los considerados en (1") y (4") con igual imagen y los elementos considerados en (3') son un subconjunto de los considerados en (3") ya que: si $x \leq c$ y $x \leq a$ para algún $a \in H$ es $x \leq a \wedge c$ para algún a H de donde $x \leq \bigvee_{a\in H}(a\wedge c)$; luego para todo x del tipo (3′) es $\tau'(x) = c = f(x)$. Por último es evidente que si x es del tipo (2′) puede ser de (2") o de (3") de donde - resulta que $\tau'(x) = c$ ó $\bigvee_{a\in H}(a\wedge c)$ que en ambos casos es mayor o igual que $f(x) = \bigvee_{a\in H}(a\wedge c)$.

Luego τ' es una negación mayor o igual que $\overline{\bigvee_{a\in H}}(\tau_a \wedge \tau_{\{o,c\}})$

c) Por tanto de (*) y los resultados de a) y b) se deduce que:

$$\tau' \geq (\overline{\bigvee_{a\in H}}\tau_a)\wedge \tau_{\{o,c\}} \qquad (**)$$

c.1.- Comparemos en primer lugar las definiciones de estas negaciones.

Los elementos de (1") y (4") coinciden con los de (1) y (4) así como sus imágenes. Luego el problema queda reducido a estudiar los demás casos.

- Los elementos del tipo (3") son del tipo (3) puesto que si x es de (3") es $x \leq \bigvee_{a\in H}(a\wedge c)$ de donde por ser $\bigvee_{a\in H}(a\wedge c) \leq (\bigvee_{a\in H}a)\wedge c$ es $x \leq (\bigvee_{a\in H}a)\wedge c$ lo que nos dice que x es de (3).

Los elementos del tipo (2) son del tipo (2") lo que es inmediato al ser cierto que todo elemento de (3") es de (3).

c.2.- Apliquemos la desigualdad (**). Consideramos dos casos:

c.2.1. Los elementos de (3") y de (3) con los mismos. En tal caso, por definición de (3) (x es de (3) si y sólo si $x \leq (\bigvee_{a\in H}a)\wedge c$)) y de (3") es:

$$(\bigvee_{a\in H}a)\wedge c = \bigvee_{a\in H}(a\wedge c)$$

con lo que queda demostrada la distributividad infinita de L para el ínfimo.

c.2.2. Hay elementos de (3) que no son de (3′).

En tal caso puede ocurrir que:

c.2.2.1.- Existan elementos de (2) con lo cual por ser los elementos de (2) de (2") será según (**)

$$\tau'(x) = \bigvee_{a\in H}(a \wedge c) \geq (\bigvee_{a\in H} a) \wedge c = (\tau_{\bigvee_{a\in H} a} \wedge \tau_{\{0,c\}})(x)$$

y como en general es siempre $\bigvee_{a\in H}(a \wedge c) \leq (\bigvee_{a\in H} a) \wedge c$

será $\bigvee_{a\in H}(a \wedge c) = (\bigvee_{a\in H} a) \wedge c$ como queríamos demostrar.

c.2.2.2.- No existen elementos de (2) lo que quiere decir que no existen $x \in L$ tales que $x \leq c$, $x \not\leq \bigvee_{a\in H} a$ lo que equivale a decir que $c \leq \bigvee_{a\in H} a$ y por tanto que

$$(\bigvee_{a\in H} a) \wedge c = c \qquad (\&)$$

Por otra parte como, por suposición, existe, por lo menos un elemento x de (3) que no es de (3"), este elemento x debe ser de (2"), con lo que por la desigualdad (**) tendremos:

$$\tau'(x) = \bigvee_{a\in H}(a \wedge c) \geq c = (\tau_{\bigvee_{a\in H} a} \wedge \tau_{\{0,c\}})(x)$$

Luego como en general es $\bigvee_{a\in H}(a \wedge c) \leq c$ tendremos:

$$\bigvee_{a\in H}(a \wedge c) = c \qquad (\Delta)$$

(&) y (Δ) nos demuestran que también en este caso es válida la distributividad infinita para el ínfimo en $(L, \wedge, \vee)$.

<u>Corolario 1.2.-</u> Una condición necesaria para que $(N(L), \wedge, \bar{\vee})$ sea distributivo es que lo sea el retículo $(L, \wedge, \vee)$.

En efecto:

El teorema 1.2 nos dice que si $(N(L), \wedge, \bar{\vee})$ es distributivo entonces lo es también el retículo $(L, \wedge, \vee)$ ya que la distributividad infinita para el ínfimo implica la distributividad para el ínfimo y la distributividad para el ínfimo y para el supremo son equivalentes.

Pero esta equivalencia, como se sabe, no es cierta para la distributividad infinita por lo que damos el siguiente teorema.

<u>Teorema 2.2.-</u> Una condición necesaria para que $(N(L), \wedge, \bar{\vee})$ sea infinitamente distributivo para el supremo es que lo sea el retículo $(L, \wedge, \vee)$.

En efecto:

Sean $H \subset L$ y $a \in L$ cualesquiera. Entonces, por ser $(N(L)$ infinitamente distributivo para el supremo será:

$$\left(\bigwedge_{c \in H} \tau_{\{o,c\}}\right) \bar{\vee}\, \tau_a = \bigwedge_{c \in H} \left(\tau_{\{o,c\}} \bar{\vee}\, \tau_a\right) \qquad (*)$$

Vamos a demostrar que ello implica que $\left(\bigwedge_{c \in H} c\right) \vee a = \bigwedge_{c \in H}$

a) Calculemos la negación del primer miembro de $(*)$

Por la proposición 2.2 será:

$$\left(\bigwedge_{c \in H} \tau_{\{o,c\}}\right) \bar{\vee}\, \tau_a = \tau_{\{o, \bigvee_{c \in H} c\}} \bar{\vee}\, \tau_a = \tau_{\{a, (\bigwedge_{c \in H} c) \vee a\}}$$

b) Calculemos la negación definida en el segundo miem

Por la proposición 2.2. tendremos:

$$\tau_{\{o,c\}} \bar{\vee}\, \tau_a = \tau_{\{a, a \vee c\}}$$

Recordando que por definición es,

$$\tau_{\{a,a\vee c\}}(x) = \begin{cases} u \text{ si } x \leq a \\ (a\vee c) \text{ si } x \nleq a,\ x \leq a\vee c \\ a \text{ si } x \nleq a\vee c \end{cases}$$

Resulta que

$$\Big(\bigwedge_{c\in H} \tau_{\{a,a\vee c\}}\Big)(x) = \begin{cases} u \quad \text{si } x \quad a \\ \bigwedge_{c\in H}(a\vee c) \quad \text{si } x \nleq a,\ x \leq \bigwedge_{c\in H}(a\vee c) \\ a \quad \text{si } x \leq \bigwedge_{c\in H}(a\vee c) \end{cases}$$

de donde recordando la definición 2.2 queda claro que:

$$\bigwedge_{c\in H} \tau_{\{a,a\vee c\}} = \tau_{\{a,\ \bigwedge_{c\in H} (a\vee c)\}}$$

c) Luego para que sea cierta la igualdad (*) debe ser:

$$\Big(\bigwedge_{c\in H} c\Big)\vee a = \bigwedge_{c\in H} (a\vee c)$$

es decir, $(L, \wedge, \vee)$ debe ser infinitamente distributivo para el supremo.

<u>Corolario 2.2.-</u> Una condición necesaria para que $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ sea infinitamente distributivo es que lo sea el retículo $(L, \wedge, \vee)$.

En efecto:

Es consecuencia inmediata de los teoremas 1.2 y 2.2.

<u>Def. 3.2.-</u> Un retículo $(L, \wedge, \vee)$ diremos que es atómico cuando todo elemento de L sea unión de átomos.

<u>Prop. 3.2.-</u> En un retículo completo y atómico la restricción de una negación a los átomos la determina unívocamente.

En efecto:

Sea $x \in L$. Por ser L atómico es $x = \bigvee_{a \in H} a$ donde $H = \{a \mid a \leq x, a \text{ átomo}\}$. Entonces si se conoce el valor de la negación para los átomos, recordando el resultado de la proposición 1.2, a) del cap. 1. es:

$$\tau(x) = \tau(\bigvee_{a \in H} a) = \bigwedge_{a \in H} \tau(a) \text{ unívocamente determinado.}$$

<u>Prop. 4.2.-</u> Sean τ_1 y τ_2 dos negaciones de un retículo completo y atómico $(L, \wedge, \vee)$. Entonces la aplicación definida por

$$\tau(x) = \begin{cases} \tau_1(x) \vee \tau_2(x) & \text{si } x \text{ es un átomo ó el mismo "o"} \\ \bigwedge\{\tau_1(a) \vee \tau_2(a) \mid a \leq x, a \text{ átomo}\} & \text{si } x \text{ no es un átomo.} \end{cases}$$

Es la negación $\tau_1 \overline{\vee} \tau_2$.

En efecto:

τ es una negación ya que:

a) Si $x \leq y$ es $\tau(x) \geq \tau(y)$ pues:

Si $x = o$ el resultado es evidente.

Si $x \neq o$ entonces $x = \bigvee_{a \in H}$ a donde $H = \{a \mid a \leq x, a \text{ átomo}\}$

$y = \bigvee_{a \in M} a$ donde $M = \{a \mid a \leq y, a \text{ átomo}\}$

Por ser $x \leq y$ es $H \subset M$ y por tanto será

$$\tau(x) = \bigwedge_{a \in H} \tau(a) \geq \bigwedge_{a \in M} \tau(a) = \tau(y).$$

b) Para todo $x \in L$ es $x \leq \tau^2(x)$.

Distinguiremos tres casos:

b.1. Si $x = o$ el resultado es inmediato.

b.2. Si x es un átomo entonces puede ocurrir varios casos:

Que $\tau(x) = o$ en cuyo caso $\tau^2(x) = \tau(o) = u \geq x$ como queríamos demostrar.

Que $\tau(x) \neq o$ en cuyo caso por ser $\tau(x) = \tau_1(x) \vee \tau_2(x)$ debe ser $\tau_1(x) \neq o$ ó $\tau_2(x) \neq o$. Distinguiremos dos casos:

- Que sólo uno de los $\tau_i(x)$ sea distinto de cero; supongamos que sea $\tau_2(x) \neq o$. Entonces $o \neq \tau(x) = = \tau_2(x) = \bigvee_{a \in P} a$ siendo $P = \{a \mid a \leq \tau_2(x),\ a \text{ átomo}\}$.

  Por definición de τ será $\tau^2(x) = \bigwedge_{a \in P} \tau(a) = \bigwedge_{a \in P} (\tau_1(a) \vee \tau_2(a))$.

  Pero si $a \in P$ entonces $a \leq \tau_2(x)$ de donde $\tau_2(a) \geq \tau_2^2(x) \geq x$. De ahí que para todo $a \in P$ sea $\tau_1(a) \vee \tau_2(a) \geq x$ de donde $\tau^2(x) = \bigwedge_{a \in P} (\tau_1(a) \vee \tau_2(a)) \geq x$ como queríamos probar.

- Que $\tau_1(x)$ y $\tau_2(x)$ sean distintos de cero, en cuyo caso será $\tau_1(x) = \bigvee_{a \in M} a$ y $\tau_2(x) = \bigvee_{a \in P} a$ siendo $M = \{a \mid a \leq \tau_1(x),\ a \text{ átomo}\}$ y $P = \{a \mid a \leq \tau_2(x),\ a \text{ átomo}\}$ de ahí que por definición de τ sea

  $$\tau^2(x) = \tau(\tau_1(x) \vee \tau_2(x)) = \bigwedge_{a \in P \cup M} (\tau_1(a) \vee \tau_2(a))$$

  Pero si $a \in M$ es $a \leq \tau_1(x)$ de donde $\tau_1(a) \geq \tau_1^2(x) \geq x$ y si $a \in P$ por ser $a \leq \tau_2(x)$ es $\tau_2(a) \geq \tau_2^2(x) \geq x$

  Luego para todo $a \in P \cup M$ es $\tau_1(a) \vee \tau_2(a) \geq x$ de donde:

  $$\tau^2(x) = \bigwedge_{a \in P \cup M} (\tau_1(a) \vee \tau_2(a)) \geq x \quad \text{c. q. d.}$$

b.3. Si x no es átomo ni cero en cuyo caso será:

$x = \bigvee_{a \in H} a$ siendo $H = \{a \mid a \leq x,\ a \text{ átomo}\}$ de donde por la definición de τ y lo demostrado en b.2. será:

$$\tau^2(x) = \tau\left(\bigvee_{a \in H}(\tau(a))\right) \geq \bigvee_{a \in H} \tau^2(a) \geq \bigvee_{a \in H} a = x.$$

Por último es evidente que, al ser τ una negación, es $\tau_1 \bar{\vee} \tau_2 = \tau$.

<u>Teorema 3.2.-</u> Si $(L, \wedge, \vee)$ es un retículo completo atómico y distributivo *, entonces $(N(L), \wedge, \bar{\vee})$ es distributivo.

En efecto:

Si $\tau_1 \bar{\vee} \tau_2 = \tau_1 \bar{\vee} \tau_3$ y $\tau_1 \wedge \tau_2 = \tau_1 \wedge \tau_3$

entonces para todo átomo a debe ser según la proposición 4.2.

$$\tau_1(a) \vee \tau_2(a) = \tau_1(a) \vee \tau_3(a) \text{ y } \tau_1(a) \wedge \tau_2(a) = \tau_1(a) \wedge \tau_3(a)$$

de donde por ser $(L, \wedge, \vee)$ distributivo debe ser $\tau_2(a) = \tau_3(a)$ para todo átomo a. Luego por la proposición 3.2 debe ser $\tau_2 = \tau_3$ lo que nos dice que $(N(L), \wedge, \bar{\vee})$ es distributivo.

Debe hacerse notar que la condición dada en este teorema es sólo suficiente para que $(N(L), \wedge, \bar{\vee})$ sea distributivo como se deduce de la proposición 6.1 del tercer capítulo en el que se prueba que para toda cadena completa C el retículo $(N(C), \wedge, \bar{\vee})$ es distributivo mientras que una cadena completa C no es un retículo atómico en el sentido de la definición 3.2 de este capítulo.

---

* Pudiera pensarse que las condiciones impuestas a L hacen que L sea un álgebra de Boole completa y atómica pero ello no es cierto; piénsese, por ejemplo, en el retículo $(N, \wedge, \vee)$ de los naturales con el cero y con el M.c.d. y el m.c.m. que es com-

3.- <u>ALGEBRAS DE BOOLE DE NEGACIONES.</u>

<u>Def. 1.3.-</u> Diremos que τ_1 es incompatible con τ_2 sí, y sólo si, $\tau_1 \wedge \tau_2 = \tau_o$.

<u>Prop. 1.3.-</u> τ es incompatible con τ_a sí, y sólo si, τ cumple:

$\tau(x) = o$ si $x \wedge a \neq o$ y $\tau(x) \wedge a = o$ si $x \wedge a = o$.

En efecto:

Si $\tau \wedge \tau_a = \tau_o$ entonces para todo $x \neq o$ debe ser $\tau(x) \wedge \tau_a(x) = o$ (1).

Si $x \leq a, x \neq o$ entonces $\tau(x) \wedge \tau_a(x) = \tau(x) \wedge u = \tau(x) = o$ por (1).

Y por ser τ una negación deducimos que:

si $x \wedge a \neq o$ por ser $x \wedge a \leq a$ es $\tau(x \wedge a) = o$ luego por ser $x \geq x \wedge a$ debe ser $\tau(x) \leq \tau(x \wedge a) = o$ es decir $\tau(x) = o$.

Por tanto si τ es una negación incompatible con τ_a y $x \wedge a \neq o$ debe ser $\tau(x) = o$.

Por otra parte si $x \neq o$ y $x \wedge a = o$, como $x \nleq a$ es $\tau_a(x) = a$; luego $\tau(x) \wedge \tau_a(x) = \tau(x) \wedge a = o$.

Por tanto si x es incompatible con a, $\tau(x)$ también debe serlo.

Una comprobación directa demuestra el recíproco sin dificultad.

<u>Prop. 2.3.-</u> Sea $(L, \wedge, \vee)$ un retículo completo. Entonces

a) a es incompatible con c si, y sólo si, $\tau_{\{o,c\}}$ es incompatible con τ_a.

b) c es complemento de a si, y sólo si, $\tau_{\{o,c\}}$ es complemento de τ_a.

En efecto:

a) Si c es incompatible con a entonces $\tau_{\{o,c\}}$ es incompatible con τ_a. Se trata de una simple comprobación de que $\tau_{\{o,c\}}$ dado por la def. 2.2 cumple las condiciones de la proposición 1.3.

b) Recíprocamente, si $\tau_{\{o,c\}}$ es incompatible con τ_a entonces $\tau_a(x) \wedge \tau_{\{o,c\}}(x) = o$ para todo $x \in R$, $x \neq o$. (1)

Pero, a partir de las definiciones, es:

$$\tau_a(x) \wedge \tau_{\{o,c\}}(x) = \begin{cases} u \text{ si } x = o \\ x \text{ si } x \leq c,\ x \leq a,\ x \neq o & (*) \\ o \text{ si } x \nleq c. \\ a \wedge c \text{ si } x \leq c,\ x \nleq a & (**) \end{cases}$$

Luego para que sea cierto (1) debe ocurrir que no exista ningún x tal que $x \leq c$, $x \leq a$, $x \neq o$ lo que implica que a es incompatible con c.

c) Si c es complemento de a entonces por ser c incompatible a, por a) es $\tau_a \wedge \tau_{\{o,c\}} = \tau_o$

Por otra parte la proposición 2.2. b) dice que:

$$\tau_a \bar{\vee}\, \tau_{\{o,c\}} = \tau_{\{a, a \vee c\}}$$

y como c es complemento de a será:

$$\tau_a \bar{\vee}\, \tau_{\{o,c\}} = \tau_{\{a,u\}} = \tau_u$$

(Recuérdese que $\tau_{\{a,u\}} = \tau_u$ como se vió en la nota a la definición 1.2).

d) Si $\tau_{\{o,c\}}$ es complemento de τ_a entonces:

por ser $\tau_{\{o,c\}}$ incompatible con τ_a, según b) debe ser c incompatible con a. Por otra parte por la proposición 2.2. b) es $\tau_{\{o,c\}} \overline{\vee} \tau_a = \tau_{\{a, a\vee c\}}$ y para que $\tau_{\{a,a\vee c\}} = \tau_u$ debe ser $a \vee c = u$. Luego c es complemento de a.

<u>Lema 1.3.-</u> Si $(L, \wedge, \vee)$ es un álgebra de Boole completa entonces, dado un elemento a, el conjunto $A = \{c \mid c \wedge a = o\}$ es un inf-semirretículo completo con máximo el complemento de a y $B = \{c \mid c \vee a = u\}$ es un sup-semirretículo completo con mínimo el complemento de a. Además A es un ideal de orden y B un filtro.

Por ser este un resultado conocido de las álgebras de Boole no damos de ello ninguna demostración.

<u>Teorema 1.3.-</u> Una condición necesaria para que $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ sea álgebra de Boole completa es que $(L, \wedge, \vee)$ lo sea.

En efecto:

Por ser $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ un álgebra de Boole completa es infinitamente distributivo por lo que según vimos en Corolario 2.2, $(L, \wedge, \vee)$ debe ser infinitamente distributivo. Vamos a ver que además $(L, \wedge, \vee)$ debe ser complementado:

a) Sea $x \in L$, $x \neq o$, y definamos $\tau_{\{o,x\}}$. Entonces, por la proposición 2.3 sabemos que si $a \in L$ y $a \wedge x = o$ entonces $\tau_{\{o,x\}} \wedge \tau_a = \tau_o$. Pero al ser $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ álgebra de Boole completa según vimos en el lema 1.3 la negación

$\tau_{\bigvee_{a\wedge x=o} a} = \overline{\vee}\{\tau_a \mid a\wedge x=o\}$ es también incompatible con $\tau_{\{o,x\}}$.

Luego por la prop. 2.3 debe ser $\bigvee_{a\wedge x=o} a$ incompatible con x, es decir:

Para todo $x\in L$ existe el supremo de los incompatibles con x y este supremo es incompatible con x.

b) Sea τ_a y sea $c = \vee\{x\in L \mid x\wedge a = o\}$

Vamos a demostrar que $\tau_{\{o,c\}} = \overline{\vee}\{\tau \mid \tau\wedge\tau_a = \tau_o\}$

En primer lugar $\tau_{\{o,c\}}$ cumple las hipótesis de la proposición 1.3 y por tanto es incompatible con τ_a.

Por otra parte si τ es una negación incompatible con τ_a entonces, teniendo presente la proposición 1.3, resulta que:

- Si $x\wedge a \neq o$ entonces $\tau(x) = o$, pero $x\wedge a \neq o$ equivale a $x\nleq c$ de donde

$$\tau(x) = o \text{ si } x\nleq c \qquad (1)$$

- Si $x\wedge a = o$ entonces $\tau(x)\wedge a = o$, pero $x\wedge a = o$ equivale a $x\leq c$ de donde

$$\tau(x)\leq c \text{ si } x\leq c \qquad (2)$$

Luego $\tau_{\{o,c\}}\geq\tau$ para cualquier negación τ incompatible con τ_a como puede comprobarse de (1) y (2) y la definición de $\tau_{\{o,c\}}$. Por tanto, por el lema 1.3, $\tau_{\{o,c\}}$ es el complemento de τ_a; de donde por la proposición 2.3, c es complemento de a. Como además al ser $(N(L),\wedge,\overline{\vee})$ distributivo es $(L,\wedge,\vee)$ distributivo, este complemento será único.

El teorema 1.3 puede todavía mejorarse. Es en este sentido que tiene interés la siguiente proposición.

<u>Prop. 3.3.-</u> Sea $(L, \wedge, \vee)$ un álgebra de Boole completa. Entonces la complementación del álgebra de Boole tiene complemento en el retículo de las negaciones $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ si, y sólo si, el álgebra de Boole es atómica.

En efecto:

a) Veamos en primer lugar que si la complementación C del álgebra de Boole tiene complemento $\overline{C}$ en $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ entonces $(L, \wedge, \vee)$ debe ser atómica.
Llamaremos $\bar{x}$ al complemento de x, es decir $C(x) = \bar{x}$ para todo $x \in L$.

a.1. Veamos que si $C \wedge \overline{C} = \tau_0$ entonces $\overline{C}(x) = o$ para todo $x \neq o$ que no sea un átomo.
Por ser $C \wedge \overline{C} = \tau_0$ debe ser $C(x) \wedge \overline{C}(x) = o$ para todo $x \neq o$, es decir $C(x) \wedge \bar{x} = o$ para todo $x \in L$ de donde por el lema 1.3 al ser x el complemento de $\bar{x}$ es:

$$\overline{C}(x) \leq x \quad \text{para todo } x \neq o,\ x \in L \qquad (1)$$

De (1) si $\overline{C}(x) \neq o$ tendremos que $\overline{C}^2(x) \leq \overline{C}(x) \leq x$ lo que implica, al ser $\overline{C}$ una negación, que $\overline{C}^2(x) = \overline{C}(x) = x$

Luego para todo $x \in L$, $x \neq o$ es $\overline{C}(x) = o$ ó $\overline{C}(x) = x$ (2)
De (2) se deduce que $\overline{C}(x) = o$ para todo x que no sea átomo ya que si x no es átomo debe existir un $y \in L, y \neq o$ tal que $y < x$ de donde debe ser $\overline{C}(y) \geq \overline{C}(x)$ lo que implica:

- Si $\overline{C}(y) = o$ entonces $\overline{C}(x) \leq \overline{C}(y) = o$, es decir, $\overline{C}(x) = o$.

- Si $\overline{C}(y) = y$ entonces $\overline{C}(x) \leq y$ lo que implica que $\overline{C}(x) = o$ puesto que si $\overline{C}(x) = x$ la desigualdad anterior nos daría $x \leq y$ en contra de la suposición de que $y < x$.

a.2. Veamos que la condición necesaria para que exista el complemento de C en $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ es que $(L, \wedge, \vee)$ sea atómico.

En primer lugar es evidente que si L no tiene átomos entonces la única negación $\overline{C}$ incompatible con C es, según el apartado a.1, τ_o, por lo que C no tiene complemento en $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ pues $C \,\overline{\vee}\, \tau_o = C \neq \tau_u$.

Sea L un retículo atómico y sea $A = \{a \in L \ a, \text{átomo}\}$.

Vamos a demostrar que para que C tenga complemento debe ser $\bigvee_{a \in A} a = u$. Si $\bigvee_{a \in A} a = b \neq u$ entonces la mayor negación $\overline{C}$ incompatible con C es, según el resultado de a.1, la definida da la forma:

$$\overline{C}(x) = \begin{cases} \longrightarrow x & \text{si } x \in A. \\ \longrightarrow o & \text{si } x \notin A \text{ y } \ x \neq o \\ \longrightarrow u & \text{si } x = o \end{cases}$$

y entonces la aplicación f definida por $f(x) = C(x) \vee \overline{C}(x)$ será:

$$f(x) = \begin{cases} \longrightarrow u & \text{si } x \in A \text{ ó } x = o \\ \longrightarrow \bar{x} & \text{si } x \notin A, \ x \neq o \end{cases}$$

pero si $\bigvee_{a \in A} a = b \neq u$ entonces f es menor o igual que la negación $\tau_1^{(*)}$ definida por :

(*) Una simple comprobación muestra que τ_1 es una negación. Puede comprobarse que τ_1 es la negación τ^b que se da en la def: 1.5

$$\tau_1(x) = \begin{cases} \longrightarrow u & \text{si } x \leq b \\ \longrightarrow \bar{x} \vee b & \text{si } x \not\leq b \end{cases}$$

por lo que al ser $C \,\overline{\vee}\, \bar{C} \leq \tau_1 \neq \tau_u$, $\bar{C}$ no es el complemento de C en $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$.

Luego para que C tenga complemento en $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ debe cumplirse que $\bigvee_{a \in A} a = u$, es decir, $(L, \wedge, \vee)$ debe ser atómico (++).

b) Recíprocamente, si $(L, \wedge, \vee)$ es un álgebra de Boole atómica entonces la negación $\bar{C}$ definida por

$$\bar{C}(x) = \begin{cases} \longrightarrow x & \text{si } x \in A. \\ \longrightarrow o & \text{si } x \notin A,\ x \neq o \\ \longrightarrow u & \text{si } x = o \end{cases}$$

es el complemento de C en $N(L), \wedge, \overline{\vee})$ ya que:

- $C(x) \wedge \bar{C}(x) = o$ para todo $x \neq o$, es decir $C \wedge \bar{C} = \tau_o$.
- $C(x) \vee \bar{C}(x) = u$ para todo átomo x de donde $(C \,\overline{\vee}\, \bar{C})^2(x) = (C \,\overline{\vee}\, \bar{C})(u) \geq x$ para todo átomo x lo que implica que $(C \,\overline{\vee}\, \bar{C})(u) \geq \bigvee_{x \in A} x = u$, es decir, $(C \,\overline{\vee}\, \bar{C})(u) = u$. Luego $C \,\overline{\vee}\, \bar{C} = \tau_u$.

Teorema 2.3.- Una condición necesaria para que $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ sea un álgebra de Boole completa es que $(L, \wedge, \vee)$ sea un álgebra de Boole completa y atómica.

(++) Es inmediato que, por ser $(L, \wedge, \vee)$ un álgebra de Boole completa, si $\bigvee_{a \in A} a = u$ entonces todo elemento es unión de átomos ya que para todo $x \in L$ es:

$$x = x \wedge u = x \wedge \left(\bigvee_{a \in A} a\right) = \bigvee_{a \in A} (x \wedge a) = \bigvee_{\substack{a \in A \\ a \leq x}} a.$$

En efecto:

Es una consecuencia inmediata del teorems 1.3 y de la prop. 3.3.

Vamos a estudiar que ocurre con el recíproco:

Recordemos que el teorema 3.2 nos dice que si $(L, \wedge, \vee)$ es un retículo completo atómico y distributivo entonces $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ es distributivo; en particular si $(L, \wedge, \vee)$ es un álgebra de Boole completa y atómica, $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ será distributivo. La siguiente prop. estudia que ocurre con la complementación en $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$

<u>Prop. 4.3.-</u> Si $(L, \wedge, \vee)$ es un álgebra de Boole completa atómica entonces toda negación tiene complemento en $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$.

En efecto:

Sea $A = \{a \in L \mid a \text{ es átomo}\}$ y sea C la complementaci del álgebra de Boole.

a. Veamos en primer lugar que si τ es una negación entonces la aplicación τ_1 definida por

$$\tau_1(x) = \begin{cases} C(\tau(x)) & \text{si } x \in A \\ \bigwedge_{a\in H} C(\tau(a)) & \text{si } x \notin A \text{ y } x = \bigvee_{a\in H} \\ u & \text{si } x = o \end{cases}$$

es también una negación: En efecto:

a.1. Si $x \leq y$ entonces $\tau(x) \geq \tau(y)$ ya que:

Si $x = o$ es evidente puesto que $\tau_1(x) = u$.

Si $x \neq o$ entonces $x = \bigvee_{a\in H} a$ siendo $H = \{a \in A \mid a \leq x$

$y = \bigvee_{a\in P} a$ siendo $P = \{a \in A \mid a \leq y\}$. Además por se

será $H \subset P$ de donde

$$\tau_1(x) = \bigwedge_{a\in H} \tau_1(a) \geq \bigwedge_{a\in P} \tau_1(a) = \tau_1(y)$$

a.2. Para todo $x \in L$ es $x \leq \tau_1^2(x)$.

Para demostrarlo distinguiremos tres casos:

a.2.1. Si $x = o$ es evidente.

a.2.2. Si x es un átomo entonces distinguiremos dos casos:

- Si $\tau(x) = o$ entonces $\tau_1(x) = u$

Entonces si $b \in A$ debe ser $\tau(b) \not\geq x$ ya que si $\tau(b) \leq x$ entonces $\tau^2(b) \leq \tau(x) = o < b$ lo que nos lleva a una contradicción con el hecho de que τ es una negación.

Por tanto para todo $b \in A$ será $\tau(b) \not\geq x$ lo que implica que $C(\tau(b)) \geq x$ de donde:

$$\tau_1^2(x) = \tau_1(u) = \tau_1(\bigvee_{b \in A} b) = \bigwedge_{b \in A}(\tau_1(b)) \geq x$$

- Si $\tau(x) \neq o$ entonces $\tau(x) = \bigvee_{b \in H} b$ siendo $H = \{b \in A \mid b \leq x\}$. En estas condiciones si $b \in A$ y $b \notin H$ es $\tau(b) \not\geq x$ ya que si $\tau(b) \geq x$ entonces $b \leq \tau^2(b) \leq \tau(x)$ de donde $b \in H$ en contra de la hipótesis. De ahí que:

Para todo $b \in A$ con $b \notin H$ es $C(\tau(b)) \geq x$ (1)

Luego por ser $\tau_1(x) = C(\tau(x) = C(\bigvee_{b \in H} b) = \bigvee_{b \notin H} b$ tendremos recordando (1) que

$$\tau_1^2(x) = \tau_1(\bigvee_{b \notin H} b) = \bigwedge_{b \notin H}(\tau_1(b)) = \bigwedge_{b \notin H}(C(\tau(b))) \geq x.$$

a.2.3. Si x es un elemento cualquiera de L que no sea o.

Entonces $x = \bigvee_{a \in H} a$ siendo $H = \{a \in A \mid a \leq x\}$ de donde

$$\tau_1^2(x) = \tau_1(\tau_1(x)) = \tau_1(\bigwedge_{a \in H} \tau_1(a)) \geq \bigvee_{a \in H} \tau_1^2(a)$$

y como por a.2.2. para todo átomo a es $\tau_1^2(a) \geq a$ será:

$$\tau_1^2(x) \geq \bigvee_{a\in H} \tau_1^2(a) \geq \bigvee_{a\in H} a = x$$

b. Vamos a ver que τ_1 es el complemento de τ en $(N(L),\wedge,\bar{\vee})$

Por la prop. 4.2, para todo átomo a de L será:

$(\tau_1 \bar{\vee} \tau)(a) = \tau_1(a) \vee \tau(a) = C(\tau(a)) \vee \tau(a) = u$ y

$(\tau_1 \wedge \tau)(a) = \tau_1(a) \wedge \tau(a) = C(\tau(a)) \wedge \tau(a) = o$

de donde es inmediato que $\tau \bar{\vee} \tau_1 = \tau_u$ y $\tau \wedge \tau_1 = \tau_o$ lo que nos dice que τ_1 es el complemento de τ en $(N(L),\wedge,\bar{\vee})$.

<u>Teorema 3.3.-</u> $(N(L),\wedge,\bar{\vee})$ es álgebra de Boole completa si, y sólo si, $(L,\wedge,\vee)$ es un álgebra de Boole completa y atómica.

En efecto:

Si $(N(L),\wedge,\bar{\vee})$ es álgebra de Boole completa, entonces el teorema 2.3 nos asegura que $(L,\wedge,\vee)$ debe ser un álgebra de Boole completa y atómica.

Por otra parte, si $(L,\wedge,\vee)$ es un álgebra de Boole completa y atómica el teorema 3.2 nos asegura que $(N(L),\wedge,\bar{\vee})$ es distributivo y la proposición 4.3 que es complementado; luego $(N(L),\wedge,\bar{\vee})$ es un álgebra de Boole completa.

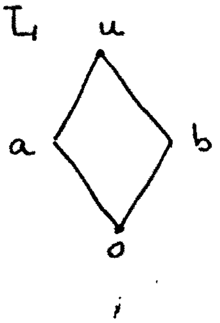
<u>Ejemplo.-</u>

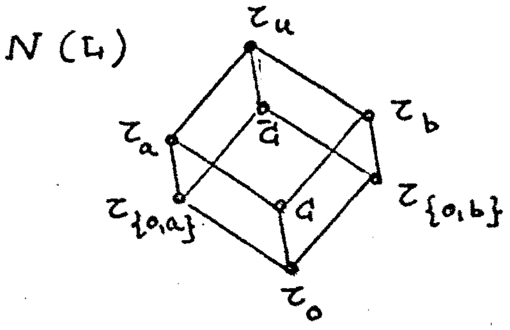
Sea $(L,\wedge,\vee)$ el álgebra de Boole dada por el grafo.

Las negaciones posibles son:

$$\tau_u, \tau_a, \tau_b, \tau_o, \tau_{\{o,a\}}, \tau_{\{o,b\}}, \; C \text{ y } \bar{C}$$

y el grafo del álgebra de Boole de las negaciones es:





Es interesante hacer notar que el álgebra de Boole $(N(L),\wedge,\bar{\vee})$ también es atómica y los átomos son:

$$\tau_{\{o,a\}}, \; \tau_{\{o,b\}}, \; \text{ y } C.$$

———— § ————

4.- CARACTER ATOMICO DEL ALGEBRA DE BOOLE DE LAS NEGACIONES.

Sea $(L, \wedge, \vee)$ un álgebra de Boole atómica y sea $A = \{ a \in L \mid a, \text{ átomo} \}$.

Def. 1.4.- Llamaremos τ_a^b con $a,b \in A$ a la negación de L definida de la forma:

$$\tau_a^b(x) = \begin{cases} \to o & \text{si } x \notin A \text{ y } x \neq o \text{ ó } x \in A - \{a,b\}. \\ \to b & \text{si } x = a \\ \to a & \text{si } x = b \\ \to u & \text{si } x = o \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que τ_a^b es una negación.

Nótese, por otra parte, que si $a = b$ entonces $\tau_a^b = \tau_{\{a,o\}}$. (Véase definición 1.2).

<u>Prop. 1.4.-</u> Si $(L, \wedge, \vee)$ es un álgebra de Boole completa y atómica entonces $(N(L), \wedge, \bar{\vee})$ es un álgebra de Boole completa y atómica cuyos átomos son las negaciones τ_a^b para todo $a,b \in A$.

(Suponemos que puede ser $a = b$, es decir, incluimos las negaciones del tipo $\tau_{\{a,o\}}$ con $a \in A$.)

En efecto:

1) τ_a^b con $a,b \in A$ $a \neq b$ es átomo de $(N(L), \wedge, \bar{\vee})$ ya que: Si $\tau_1 < \tau_a^b$ entonces $\tau_1(x) = o$ para todo $x \in A - \{a,b\}$ y $\tau_1(a)$ ó $\tau_1(b)$ debe ser estrictamente menor que τ_a^b (a) ó τ_a^b (b). Sea $\tau_1(a) < \tau_a^b(a) = b$. Por ser $b \in A$ será $\tau_1(a) = o$. Pero en tal caso $\tau_1(b) = o$ ya que si no sería $\tau_1(b) = a$ y entonces $\tau_1^2(b) = \tau_1(a) = o < b$ con lo que llegaríamos a una contradicción.

Luego si $\tau_1 < \tau_a^b$ es $\tau_1 = \tau_o$, es decir τ_a^b es un átomo.

El mismo razonamiento es válido para el caso $a = b$ o sea para $\tau_{\{a,o\}}$.

2) Toda negación es unión de átomos.

Para ello sólo hace falta demostrar que la unión de todos los átomos es el elemento máximo, es decir, τ_u. Y esto es cierto ya que para todo $x \in A$ es:

$$(\overline{\bigvee_{a,b\in A}} \tau_a^b)(x) = \bigvee_{a,b\in A} (\tau_a^b(x)) = \bigvee_{a\in A} a = u$$

Luego $(\overline{\bigvee_{a,b\in A}} \tau_a^b)(u) = u$ de donde tenemos que

$$(\overline{\bigvee_{a,b\in A}} \tau_a^b) = \tau_u.$$

De (1) y (2) resulta que $N(L), \wedge, \overline{\vee}$) es un álgebra de Boole atómica.

Corolario 1.4.- Si el álgebra de Boole atómica $(L, \wedge, \vee)$ tiene n átomos entonces $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ átomos.

En efecto:

Por la prop. anterior el conjunto de los átomos de $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ está formado por las negaciones de la forma τ_a^b con $a, b \in A$.

Luego si A tiene n átomos, de negaciones que sean átomos habrá:

Si $a \neq b$ de negaciones del tipo τ_a^b existen $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

Si $a = b$ de negaciones del tipo $\tau_{\{o,a\}}$ existen n

Luego el nº de átomos de N(L) será $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

De la prop. 1.4 y del teorema 2.3 se deduce inmediatamente el siguiente teorema.

Teorema 1.4.- $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ es un álgebra de Boole completa si, y sólo si, $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ es un álgebra de Boole completa y atómica si, y sólo si, $(L, \wedge, \vee)$ es un álgebra de Boole completa y atómica.

Veamos cuál es la posición que ocupa la complementación C del álgebra de Boole en el álgebra de Boole de las negaciones.

Prop. 2.4.- Sea C la complementación del álgebra de Boole completa y atómica $(L; \wedge, \vee)$ y sea $\bar{C}$ su complemento en $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$. Entonces

$$C = \overline{\bigvee_{\substack{a \neq b \\ a, b \in A}}} \tau_a^b \quad \text{y} \quad \bar{C} = \overline{\bigvee_{a \in A}} \tau_{\{o,a\}}$$

En efecto:

Se trata de una simple comprobación que teniendo en cuenta la proposición 3.2 sólo hay que hacer para los átomos; por la proposición 4.2 lo que hay que comprobar es que:

$$\text{Para todo } x \in A \quad \bar{C}(x) = \bigvee_{a \in A} (\tau_{\{o,a\}}(x)) \qquad (1)$$

y esto es cierto recordando la definición de $\bar{C}$ (prop. 3.3) y la definición de $\tau_{\{o,a\}}$ (def. 2.2) puesto que ambos miembros de (1) valen x.

Por ser C el complemento de $\bar{C}$ en el álgebra de Boole de las negaciones el segundo resultado es evidente.

Corolario 2.4.- $C = \bigwedge_{b\in\bar{A}} \tau_b$ siendo $\bar{A} = \{a \mid a \text{ antiátomo}\}$.

En efecto:

Sea $\complement$ la complementación del álgebra de Boole $(N(L),\wedge,\bar{\vee})$.
Entonces de $\bar{C} = \overline{\bigvee}_{a\in A} \tau_{\{o,a\}}$ y de la proporción 2.3 que nos asegura que $\complement(\tau_{\{o,a\}}) = \tau_{C(a)}$ resulta que:

$$C = \complement(\bar{C}) = \complement(\bigvee_{a\in A} \tau_{\{o,a\}}) = \bigwedge_{a\in A}\left(\complement\left(\tau_{\{o,a\}}\right)\right) = \bigwedge_{a\in A} \tau_{C(a)} .$$

y como $a\in A$ equivale a $C(a)\in\bar{A}$ queda demostrado el aserto.

Corolario 3.4.- C es átomo del álgebra de Boole de las negaciones si, y sólo si, $(L,\wedge,\vee)$ tiene sólo dos átomos.

En efecto:

Se puede ver fácilmente que si L tiene sólo dos átomos $C = \tau_a^b$ siendo a,b los átomos de L. Si L tiene más de dos átomos entonces es evidente que C no es átomo. (Ver prop. 2.4).

§

5.- INMERSION DE UN ALGEBRA DE BOOLE COMPLETA EN EL RETICULO DE SUS NEGACIONES.

5.A.- Caso general de un álgebra de Boole completa.

Sea $(L,\wedge,\vee,C)$ un álgebra de Boole con máximo u y mínimo o y llamemos $\bar{x}$ al complemento de un elemento x de L.

Def. 1.5.- Llamaremos τ^a a la aplicación de L en L definida por:

$$\tau^a(x) = a \vee \bar{x} \quad \text{para todo } x \text{ de } L.^{*}$$

Prop. 1.5.- La aplicación τ^a es una negación de L.

En efecto:

a) Si $x \leq y$ entonces $\bar{x} \geq \bar{y}$ de donde $\tau^a(x) = a \vee \bar{x} \geq a \vee \bar{y} = \tau^a(y)$

b) Para todo x de L es:

$$\tau^a(\tau^a(x)) = \tau^a(a \vee \bar{x}) = a \vee (\overline{a \vee \bar{x}}) = a \vee (\bar{a} \wedge x) = (a \vee \bar{a}) \wedge (a \vee x) =$$

$$= a \vee x \geq x.$$

Prop. 2.5.- Para todo $a \in L$, τ^a es un antimorfismo reticular y una u-complementación pero no es, excepto si $a = o$, una ortocomplementación.

En efecto:

a) $\tau^a(x \vee y) = a \vee (\overline{x \vee y}) = a \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = (a \vee \bar{x}) \wedge (a \vee \bar{y}) = \tau^a(x) \wedge \tau^a(y)$

$\tau^a(x \wedge y) = a \vee (\overline{x \wedge y}) = a \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) = (a \vee \bar{x}) \vee (a \vee \bar{y}) = \tau^a(x) \vee \tau^a(y)$

Luego τ^a es un antimorfismo reticular.

b) $x \vee \tau^a(x) = x \vee (a \vee \bar{x}) = u$ para todo $x \in L$

Luego τ^a es una u-complementación.

c) $x \wedge \tau^a(x) = x \wedge (a \vee \bar{x}) = (x \wedge a) \vee (x \wedge \bar{x}) = x \wedge a.$

Luego para que τ^a fuera una ortocomplementación debería ser $a \wedge x = o$ para todo x de L; luego debería ser cierto para $x = a$, es decir, $a \wedge a = o$, por lo

---

* Esta definición ha sido sacada de un ejemplo que dá A. Vila en [21] .

que τ^a es ortocomplementación si, y sólo si, $a = o$.

Es interesante notar que si $a = o$ entonces τ^o es la complementación C del Algebra de Boole $(L, \wedge, \vee)$.

Corolario 1.5.- Si L es completa entonces para todo $a \in L$, τ^a es un antimorfismo para las uniones e intersecciones infinitas.

En efecto:

Sea H un subconjunto infinito de L. Teniendo presente que toda álgebra de Boole completa es infinitamente distributiva tendremos:

$$\tau^a(\bigvee_{x\in H} x) = a \vee (\overline{\bigvee_{x\in H} x}) = a \vee (\bigwedge_{x\in H} \bar{x}) = \bigwedge_{x\in H} (a \vee \bar{x}) = \bigwedge_{x\in H} \tau^a(x).$$

$$\tau^a(\bigwedge_{x\in H} x) = a \vee (\overline{\bigwedge_{x\in H} x}) = a \vee (\bigvee_{x\in H} \bar{x}) = \bigvee_{x\in H} (a \vee \bar{x}) = \bigvee_{x\in H} \tau^a(x).$$

Prop. 3.5.- El conjunto $\tau^a(L)$ para todo a de L es el segmento $[a,u]$.

En efecto:

a) $\tau^a(u) = a \vee \bar{u} = a \vee o = a$. Luego el mínimo de $\tau^a(L)$ es a por lo que $\tau^a(L) \subset [a,u]$.

b) Si $x \in [a,u]$ entonces $x \in \tau^a(L)$ ya que es la imagen de $\bar{x}$ puesto que:

$\tau^a(\bar{x}) = a \vee \bar{\bar{x}} = a \vee x = x$ puesto que $a < x$.

Prop. 4.5.- Para todo a,b de L se cumple que.

a) $\tau^{a} \wedge \tau^{b} = \tau^{a\wedge b}$.

b) La aplicación τ definida por

$\tau(x) = \tau^{a}(x) \vee \tau^{b}(x)$ es la negación $\tau^{a\vee b}$.

En efecto:

a) $(\tau^{a}\wedge\tau^{b})(x) = \tau^{a}(x)\wedge\tau^{b}(x) = (a\vee\bar{x})\wedge(b\vee\bar{x}) = (a\wedge b)\vee\bar{x} = \tau^{a\wedge b}(x), \forall x\in L$

b) $\tau(x) = \tau^{a}(x)\vee\tau^{b}(x) = (a\vee\bar{x})\vee(b\vee\bar{x}) = (a\vee b)\vee\bar{x} = \tau^{a\vee b}(x) \qquad \forall x\in L$

lo que nos dice que τ es una negación pues vimos que para todo elemento x de L, τ^{x} es una negación. De ahí es evidente que $\tau^{a}\,\overline{\vee}\,\tau^{b} = \tau^{a\vee b}$.

Prop. 5.5.- Si L es completa entonces para todo $H\subset L$ es:

a) $\bigwedge_{x\in H}\tau^{x} = \tau^{\bigwedge_{x\in H} x}$ b) $\overline{\bigvee}_{x\in H}\tau^{x} = \tau^{\bigvee_{x\in H} x}$

En efecto:

a) $(\bigwedge_{x\in H}\tau^{x})(y) = \bigwedge_{x\in H}(\tau^{x}(y)) = \bigwedge_{x\in H}(x\vee\bar{y}) = (\bigwedge_{x\in H}x)\vee\bar{y} = \tau^{\bigwedge_{x\in H} x}(y).\ \forall y\in L$

b) $\bigvee_{x\in H}(\tau^{x}(y)) = \bigvee_{x\in H}(x\vee\bar{y}) = (\bigvee_{x\in H}x)\vee\bar{y} = \tau^{\bigvee_{x\in H} x}(y)$. Luego $\bigvee_{x\in H}\tau^{x} = \tau^{\bigvee_{x\in H} x}$

Teorema 1.5.- Si L es un álgebra de Boole completa, entonces el conjunto $N'(L) = \{\tau^{a} \mid a\in L\}$ es una álgebra de Boole isomorfa a L y es, a su vez un subretículo completo de $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$.

En efecto:

a) Por la proposición 5.5 es inmediato que $N'(L)$ es un subretículo completo de $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$.

b) Es inmediato que la aplicación $f: L \longrightarrow N(L)$ definida por $f(a) = \tau^a$ es un monomorfismo reticular, lo que hace que $(N'(L), \wedge, \overline{\vee})$ sea isomorfa a L y por tanto sea un álgebra de Boole.

Es interesante hacer notar que así como el máximo de $N'(L)$ es $\tau^u = \tau_u$ que es el máximo de $N(L)$, el mínimo de $N'(L)$ es $\tau^o = C$ que no es el mínimo de $N(L)$.

Es interesante también recordar que si L no es atómica, cosa que no hemos exigido, $N(L)$ no es un álgebra de Boole pero en cambio tiene un subretículo que es álgebra de Boole.

5.B.- Caso de un álgebra de Boole completa y atómica.

Sea $(L, \wedge, \vee, \complement)$ un álgebra de Boole completa y atómica.

Teorema 2.5.- Si L es un álgebra de Boole completa y atómica entonces el álgebra de Boole $N'(L)$ es el segmento $[C, \tau_u]$ del álgebra de Boole $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$

En efecto:

a) Si a es un antiátomo de L entonces $\tau^a = \tau_a$, ya que:

si $x \leq a$ entonces $\bar{x} \geq \bar{a}$ de donde $\tau^a(x) = a \vee \bar{x} \geq \bar{a} \vee a = u$ por lo que $\tau^a(x) = u$.

si $x \nleq a$ entonces si A es el conjunto de los átomos de L será, $x = \bigvee\{b_i \in A \mid b_i \leq x\}$ y $a = \bigvee\{b_i \in A \mid b_i \leq a\}$.

Pero al ser a antiátomo sólo existe un $b_k \in A$ tal que $b_k \nleq a$ de donde $a = \bigvee\{b_i \in A \mid i \neq k\}$. Por tanto si $x \nleq a$ debe ser $b_k \leq x$ lo que implica $b_k \nleq \bar{x}$ por lo que $\bar{x} \leq a$, de donde $\tau^a(x) = a \vee \bar{x} = a$.

Luego recordando la definición de τ_a es evidente que $\tau^a = \tau_a$. Por tanto el álgebra $N'(L)$ contiene a todos los antiátomos de $N(L)$ de la forma τ_a para a antiátomo de L.

b) Como $N'(L)$ es un subretículo completo de $N(L)$ está claro que $N'(L)$ debe contener al subretículo completo generado por los τ^a para a antiátomo. Por tanto como $\bigwedge\{\tau_a \mid a \text{ antiátomo de } L\} = C$ resulta que $N'(L) \supset [C, \tau_u]$.

c) Por otra parte sabemos que el mínimo de $N'(L)$ es $\tau^o = C$ por lo que $N'(L) \subset [C, \tau_u]$.

c) y b) demuestran el aserto.

Sea $(L, \wedge, \vee)$ un álgebra de Boole atómica y sea A el conjunto de sus átomos.

<u>Def. 2.5.-</u> Llamaremos $\bar{\tau}^a$ a la aplicación de L en L definida por:

$$\bar{\tau}^a(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \text{ y } x \leq a. \\ o & \text{si } x \in A \text{ y } x \nleq a \text{ ó } x \notin A \text{ y } x \neq o \\ u & \text{si } x = o \end{cases}$$

<u>Prop. 5.5.-</u> $\overline{\mathcal{Z}}^a$ es una negación en L.

En efecto:

a) Si $x \leq y$ entonces $\overline{\mathcal{Z}}^a(x) \geq \overline{\mathcal{Z}}^a(y)$ puesto que:

Si siendo $x \neq o$ es $x \notin A$ ó $x \nleq a$ entonces será $\overline{\mathcal{Z}}^a(x) = o = \overline{\mathcal{Z}}^a(y)$

Si $x \neq o, x \in A$ y $x \leq a$ entonces $\overline{\mathcal{Z}}^a(x) = x \geq \overline{\mathcal{Z}}^a(y)$ pues o bien $y = x$ con lo que se daría la igualdad o bien $y > x$ en cuyo caso $\overline{\mathcal{Z}}^a(y) = o$ por definición.

b) $(\overline{\mathcal{Z}}^a)^2(x) \geq x$ para todo x de L pues:

Si $x \in A$ y $x \leq a$ entonces $(\overline{\mathcal{Z}}^a)^2(x) = (\overline{\mathcal{Z}}^a)(x) = x$

Si siendo $x \neq o$ es $x \in A$ y $x \nleq a$ ó $x \notin A$ entonces $(\overline{\mathcal{Z}}^a)^2(x) = \overline{\mathcal{Z}}^a(o) = u \geq x$

Si $x = o$ es evidente que siempre es $(\overline{\mathcal{Z}}^a)^2(o) \geq o$.

<u>Prop. 6.5.-</u> Para todo a de L la negación $\overline{\mathcal{Z}}^a$ cumple:

a) $\overline{\mathcal{Z}}^a(L) = \{x \in A \mid x \leq a\} \cup \{o, u\}$.

b) $\overline{\mathcal{Z}}^a \wedge \overline{\mathcal{Z}}^b = \overline{\mathcal{Z}}^{a \wedge b}$

c) La aplicación $\mathcal{Z}$ definida por $\mathcal{Z}(x) = \overline{\mathcal{Z}}^a(x) \vee \overline{\mathcal{Z}}^b(x)$ es la negación $\overline{\mathcal{Z}}^{a \vee b}$.

d) Las negaciones $\overline{\mathcal{Z}}^a$ no son, en general, antimorfismos.

En efecto:

a) Es inmediato de la definición de 2.5.

b)

$$(\overline{\mathcal{Z}}^a \wedge \overline{\mathcal{Z}}^b)(x) = \overline{\mathcal{Z}}^a(x) \wedge \overline{\mathcal{Z}}^b(x) = \begin{cases} o & \text{si } x \neq o \text{ y } x \notin A \text{ ó } x \in A \text{ y } x \nleq a \wedge b \\ x & \text{si } x \in A \text{ y } x \leq a \wedge b. \\ u & \text{si } x = o \end{cases}$$

y como puede comprobarse esta es la definición de $\overline{\tau}^{a\wedge b}$ por lo que será $\overline{\tau}^{a} \wedge \overline{\tau}^{b} = \overline{\tau}^{a\wedge b}$.

c)

$$\tau(x)=\overline{\tau}^{a}(x)\vee\overline{\tau}^{b}(x)=\begin{cases} o & \text{si } x\neq o \text{ y } x\notin A \text{ ó } x\in A, x\nleq a \text{ y } x\nleq b \\ x & \text{si } x\in A \text{ y } x\leq a\vee b. \\ u & \text{si } x = o \end{cases}$$

pero esto es la definición de $\overline{\tau}^{a\vee b}$ pues si un átomo x cumple que $x\nleq a$ y $x\nleq b$ entonces $x\nleq a\vee b$. Por tanto la aplicación τ es la aplicación $\overline{\tau}^{a\vee b}$ que vimos es una negación (Proposición 5.5).

d) Veamos un contraejemplo.

Sea $(L,\wedge,\vee)$ un álgebra de Boole completa y atómica con más de dos elementos átomos. Sean a y b dos átomos distintos de L. Entonces tenemos:

$$\overline{\tau}^{a\vee b}(a\wedge b) = \overline{\tau}^{a\vee b}(o) = u$$

mientras que

$$\overline{\tau}^{a\vee b}(a) = a \quad \text{y} \quad \overline{\tau}^{a\vee b}(b) = b$$

de donde

$$\overline{\tau}^{a\vee b}(a\wedge b) = u \neq a\vee b = \overline{\tau}^{a\vee b}(a)\vee\overline{\tau}^{a\vee b}(b).$$

<u>Prop. 7.5.-</u> Si L es un álgebra de Boole atómica y completa entonces para todo conjunto $H\subset L$ es:

a) $\bigwedge_{a\in H}\overline{\tau}^{a} = \overline{\tau}^{\bigwedge_{a\in H} a}$ b) $\bigvee_{a\in H}\overline{\tau}^{a} = \overline{\tau}^{\bigvee_{a\in H} a}$

En efecto:

a)

$$\left(\bigwedge_{a\in H}\overline{\tau}^{a}\right)(x)=\bigwedge_{a\in H}(\overline{\tau}^{a}(x))=\begin{cases} o & \text{si } x\neq o \text{ y } x\notin A \text{ ó } x\in A \text{ y } x\nleq a,\ \forall a\in H \\ x & \text{si } x\in A \text{ y } x\leq a \text{ para todo } a\in H \\ u & \text{si } x = o \end{cases}$$

y como puede comprobarse ésta es la definición de $\overline{\tau}^{\bigwedge_{a\in H} a}$, por lo que $\bigwedge_{a\in H}\overline{\tau}^{a} = \overline{\tau}^{\bigwedge_{a\in H} a}$.

b)

$$\Big(\overline{\bigvee}_{a\in H}\bar{\tau}^{a}\Big)(x)\geq \bigvee_{a\in H}(\tau^{a}(x))=\begin{cases} o & \text{si } x\notin A \text{ y } x\neq o \text{ ó si } x\in A \text{ y } x\not\leq a \text{ para todo } a\in H\\ x & \text{si } x\in A \text{ y } x\leq a \text{ para algún } a\in H\\ u & \text{si } x=o\end{cases}$$

pero esto es la definición de $\bar{\tau}^{\bigvee_{a\in H}a}$ pues si un átomo x cumple $x\not\leq a$ para todo a de H entonces $x\not\leq \bigvee_{a\in H}a$. Luego la aplicación $x\longrightarrow \bigvee_{a\in H}\bar{\tau}^{a}(x)$ es la negación $\bar{\tau}^{\bigvee_{a\in H}a}$ de L. Luego $\overline{\bigvee}_{a\in H}\bar{\tau}^{a}$, que es la mínima negación que es mayor o igual que todas las $\bar{\tau}^{a}$ para todo a de H, será la negación $\bar{\tau}^{\bigvee_{a\in H}a}$.

<u>Teorema 3.5.-</u> En un álgebra de Boole atómica y completa $(L,\wedge,\vee)$ el conjunto $\bar{N}(L)=\{\bar{\tau}^{a}\mid a\in L\}$ con las operaciones $\wedge$ y $\overline{\vee}$ constituye un álgebra de Boole isomorfa a L que coincide con el segmento $[\tau_{o},\bar{C}]$ del álgebra de Boole $(N(L),\wedge,\overline{\vee})$.

En efecto:

a) Por la proposición 7.5 la aplicación $f:L\longrightarrow N(L)$ definida por $f(a)=\bar{\tau}^{a}$ es un monomorfismo reticular por lo que la imagen de f, $f(L)=\bar{N}(L)$ es un álgebra de Boole isomorfa a L con mínimo $\tau^{o}=\tau_{o}$ y máximo $\tau^{u}=\bar{C}$. Además $\bar{N}(L)$ es un subretículo completo de $(N(L),\wedge,\overline{\vee})$ pero no es subálgebra de Boole pues el máximo de $\bar{N}(L)$ es $\bar{C}$ distinto del máximo de N(L) que es τ_{u}.

b) Si a es un átomo de B entonces $\bar{\tau}^{a}$ es un átomo de N(L) pues es fácil comprobar que si a es átomo $\bar{\tau}^{a}=\tau_{\{a,o\}}$, que según se vió en la proposición 1.4 es un átomo de N(L).

c) Por tanto $\bar{N}(L)$ contiene al subretículo completo generado por las negaciones $\tau_{\{o,a\}}$ para todo átomo a de L. Luego

$$\bar{N}(L) \supset [\tau_o, \overline{\bigvee_{a\in A}} \tau_{\{o,a\}}] = [\tau_o, \bar{C}] .$$

pero por otra parte τ_o y $\bar{C}$ sabemos que son el mínimo y máximo de $\bar{N}(L)$ de donde $\bar{N}(L) \subset [\tau_o, \bar{C}]$

Luego queda probado que $\bar{N}(L) = [\tau_o, \bar{C}]$.

-.........-

Resumiendo, los resultados más importantes obtenidos en este apartado son:

1) Si $(L, \wedge, \vee)$ es un álgebra de Boole completa entonces $N'(L)$, que es el conjunto de las negaciones de la forma τ^a, constituye un subretículo completo del retículo completo $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$ y es además un álgebra de Boole isomorfa a L.

2) Si $(L, \wedge, \overline{\vee})$ es un álgebra de Boole completa y atómica entonces los conjuntos $N'(L)$ y $\bar{N}(L)$ son los segmentos $[\tau_u, C]$ y $[\tau_o, \bar{C}]$ del álgebra de Boole atómica de las negaciones $(N(L), \wedge, \overline{\vee})$, son subretículos completos de $N(L)$ y a su vez álgebras de Boole isomorfas a L, pero no son subálgebras de Boole de $N(L)$.

CAPITULO 3

RETICULO DE LAS NEGACIONES DE UNA CADENA COMPLETA.

Sea $(C, \leq)$ una cadena completa, que como se sabe es un retículo completo e infinitamente distributivo, y sea $(N(C), \wedge, \overline{\vee})$ el retículo de sus negaciones.

Recordemos que en el caso de las cadenas el supremo de dos negaciones τ_1, τ_2 de N(C) es la negación definida por:

$$(\tau_1 \overline{\vee} \tau_2)(x) = \tau_1(x) \vee \tau_2(x)$$

según demostramos en la proposición 5.1 del capítulo 2. Esta regla no es cierta en general para cualquier familia de negaciones como prueba la siguiente proposición.

<u>Prop. 1.1.-</u> Siendo C una cadena completa no es cierto en general que para cualquier familia de negaciones $\{\tau_i\}_{i \in I}$ sea

$$(\overline{\bigvee_{i \in I}} \tau_i)(x) = \bigvee_{i \in I} (\tau_i(x)).$$

En efecto:

Lo que debe probarse es que en general la aplicación $f(x) = (\bigvee_{i \in I} (\tau_i(x))$ no es una negación, puesto que si f es una negación es evidente que $f = \overline{\bigvee_{i \in I}} \tau_i$.

Veamos un ejemplo en el que la aplicación f no es negación:

Sea C la cadena formada por los reales positivos con el o y un máximo que llamaremos u. Sean la familia de negaciones $\tau_{\left\{o,\frac{n}{n+1}\right\}}$ variando n dentro de los naturales.

Recordemos que:

$$\tau_{\left\{o,\ \frac{n}{n+1}\right\}}(x) = \begin{cases} u & \text{si } x = o \\ \frac{n}{n+1} & \text{si } x \leq \frac{n}{n+1},\ x \neq o \\ o & \text{si } x \nleq \frac{n}{n+1} \end{cases}$$

De donde la aplicación f será:

Si $x = o$ $\quad f(x) = u$

Si $x \leq \frac{n}{n+1}$ para algún $n \in N$ $\quad f(x) = \bigvee\left\{\frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in N,\ x \leq \frac{n}{n+1}\right\}$

Si $x \nleq \frac{n}{n+1}$ para todo $n \in N$, $\quad f(x) = o$

Pero, por estar en una cadena completa y cumplirse que

$$(1) \quad \bigvee\left\{\frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in N\right\} = 1 \notin \left\{\frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in N\right\} \quad \text{es:}$$

a) Si $x \nleq \frac{n}{n+1}$ para todo $n \in N$ es $x > \frac{n}{n+1}$ para todo n de N de donde $x \geq \bigvee\left\{\frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in N\right\} = 1$. De (1) queda claro que es válido el signo =, es decir que:

$$\left\{x \in C \,\middle|\, x \nleq \frac{n}{n+1}, \forall n \in N\right\} = \left\{x \in C \,\middle|\, x \geq 1\right\}$$

b) Si $x \leq \frac{n}{n+1}$ para algún $n \in N$ es $x < 1$ puesto que este caso es la negación del caso anterior.

c) Si x es un elemento de C tal que $\left\{n \,\middle|\, \frac{n}{n+1} \geq x\right\} \neq \emptyset$ entonces $\bigvee\left\{\frac{n}{n+1} \,\middle|\, \frac{n}{n+1} \geq x,\ n \in N\right\} = \bigvee\left\{\frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in N\right\} = 1$

Luego f es la aplicación definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \to u & \text{si } x = o \\ \to 1 & \text{si } x < 1 \\ \to o & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y esta aplicación no es una negación puesto que si $o < x < 1$ es

$$f^2(x) = f(1) = o < x. \text{ (*)}$$

<u>Prop. 2.1.-</u> El retículo N(C) es una cadena si, y sólo si, C tiene como máximo 3 elementos.

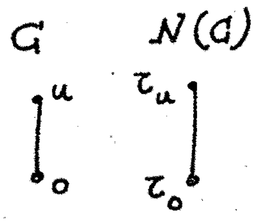
En efecto:

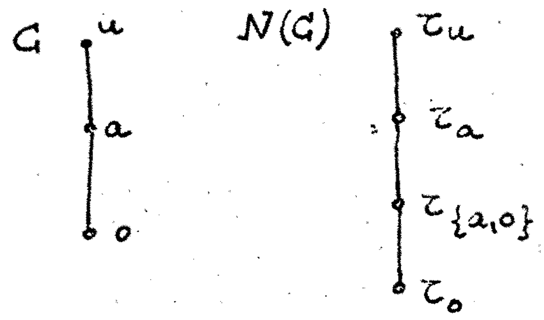
a) Si C tiene más de 3 elementos existirán dos a,b tales que $o \neq a \neq u, o \neq b \neq u$; supongamos $a > b$ y definimos las negaciones $\tau_{\{o,a\}}$ y τ_b. Por la proposición 2.2 b) del capítulo 2 es:

$$\tau_{\{o,a\}} \overline{\vee}\, \tau_b = \tau_{\{b, a \vee b\}} = \tau_{\{b,a\}}$$

y como $\tau_{\{o,a\}} \neq \tau_{\{b,a\}} \neq \tau_b$ resulta que $\tau_{\{o,a\}}$ y τ_b no son comparables por lo que N(C) no es una cadena.

b) Si $C = \{o,u\}$ ó $C = \{o,a,u\}$ entonces N(C) es una cadena como puede verse en los grafos de C y N(C) en ambos casos que adjuntamos a continuación:





(*) Lo mismo pasa en toda cadena completa C para cualquier familia $\{\tau_{\{o,a\}}\}_{a \in H}$ siempre que $\bigvee_{a \in H} a \notin H$ como puede comprobarse sin dificultad.

Prop. 3.1.- El conjunto $\{\tau_a \mid a \in C\}$ es una cadena completa isomorfa a C y un subretículo completo de $(N(C), \wedge, \bar{\vee})$.

En efecto:

La aplicación $f: C \longrightarrow N(C)$ definida por $f(a) = \tau_a$ es una aplicación inyectiva y además un morfismo reticular pues la proposición 1.2 del capítulo 2 nos dice que:

$$\bar{\bigvee_{a \in H}} \tau_a = \tau_{\bigvee_{a \in H} a} \text{ y por ser C una cadena } \bigwedge_{a \in H} \tau_a = \tau_{\bigwedge_{a \in H} a}.$$

Luego f es un morfismo reticular que al ser inyectivo nos dice que $f(C) = \{\tau_a \mid a \in C\}$ es un subretículo de N(C) isomorfo a C.

Prop. 4.1.- Si C es una cadena completa, entonces:

$$\bar{\bigvee_{c \in H}} \tau_{\{o,c\}} = \tau_{\{o, \bigvee_{c \in H} c\}} \quad \text{para todo } H \subset C.$$

En efecto:

Recordemos que

$$\tau_{\{o,c\}}(x) = \begin{cases} u & \text{si } x = o \\ c & \text{si } x \leq c,\ x \neq o \\ o & \text{si } x \not\leq c. \end{cases}$$

de donde la aplicación g definida por $g(x) = \bigvee_{c \in H} (\tau_{\{o,c\}}(x))$ viene definida por:

$$g(x) = \begin{cases} u & \text{si } x = o \\ \bigvee_{\substack{c \in H \\ c \geq x}} c & \text{para todo } x \leq c \text{ para algún c de H} \\ o & \text{si } x \not\leq c \text{ para todo c de H} \end{cases}$$

Por ser C una cadena se cumple:

a) Si $\{c \in H \mid c \geq x\} \neq \emptyset$ entonces $\vee\{c \in H \mid x \leq c\} = \vee\{c \in H\}$

ya que por ser $\{c \in H \; c \geq x\} \subset H$ es $\vee\{c \in H \mid x \leq c\} \leq \vee\{c \in H\}$ (1)

pero por otra parte si $\alpha = \vee\{c \in H \mid x \leq c\}$ entonces α es cota superior de H puesto que es mayor que x y que todos los $c \in H$ tales que $c \geq x$. Luego $\alpha \geq c$ para todo c de H de donde es $\vee\{c \in H \mid x \leq c\} \geq \bigvee_{c \in H} c$ (2)

(1) y (2) nos demuestran la igualdad que queríamos demostrar.

b) Si $x \leq c$ para algún c de H entonces $x \leq \bigvee_{c \in H} c$ siendo

$$\{x \mid x \leq c \text{ para algún } c \text{ de } H\} = \{x \mid x < \textstyle\bigvee_{c \in H} c\} \quad \text{si} \quad \bigvee_{c \in H} c \notin H$$
$$= \{x \mid x \leq \textstyle\bigvee_{c \in H} c\} \quad \text{si} \quad \bigvee_{c \in H} c \in H$$

c) Si $x \nleq c$ para todo c de H es $x > c$ para todo c de H, es decir $x \geq \bigvee_{c \in H} c$ siendo

$$\{x \mid x > c \text{ para todo } c \in H\} = \{x \mid x \geq \textstyle\bigvee_{c \in H} c\} \quad \text{si} \quad \bigvee_{c \in H} c \notin H$$
$$= \{x \mid x > \textstyle\bigvee_{c \in H} c\} \quad \text{si} \quad \bigvee_{c \in H} c \in H.$$

Luego de a), b) y c) tenemos que la definición de g será:

$$g(x) = \begin{cases} u & \text{si} \quad x = o \\ \bigvee_{c \in H} c & \text{si} \quad x < \bigvee_{c \in H} c,\ x \neq o \\ o & \text{si} \quad x > \bigvee_{c \in H} c \end{cases}$$

$$\text{con } g(\textstyle\bigvee_{c \in H} c) = \bigvee_{c \in H} c \quad \text{si} \quad \bigvee_{c \in H} c \in H \qquad (+)$$
$$= o \quad \text{si} \quad \textstyle\bigvee_{c \in H} c \notin H \qquad (++)$$

Si se da el caso (+) entonces g es exactamente la definición de la negación $\mathcal{Z}_{\{o, \bigvee_{c \in H} c\}}$ con lo que queda probada la proposición.

Si se da el caso (++) entonces g no es una negación ya que:

para todo $c \in H$ es $g^2(c) = g(\bigvee_{c\in H} c) = o < c$.

pero si τ es una negación mayor o igual que g debe ser: Para todo $c \in H$, $\tau(c) \geq g(c) = \bigvee_{c\in H} c$ pero como τ es una negación ello implica que $\tau(\bigvee_{c\in H} c) \geq \tau^2(c) \geq c$ para todo $c \in H$. Por tanto $\tau(\bigvee_{c\in H} c) \geq \bigvee_{c\in H} c$.

Luego, una negación τ que sea mayor o igual que g en el caso (++) debe ser mayor o igual que $\tau_{\{o,\bigvee_{c\in H} c\}}$. Luego, también en este caso, es

$$\overline{\bigvee_{c\in H}}\, \tau_{\{o,c\}} = \tau_{\{o,\bigvee_{c\in H} c\}}.$$

<u>Prop. 5.1.-</u> El conjunto $\{\tau_{\{o,a\}} \mid a \in C\}$ es un subretículo completo de $(N(C), \wedge, \overline{\vee})$ y una cadena isomorfa a C.

En efecto:

La aplicación $f: C \longrightarrow N(C)$ definida por $f(a) = \tau_{\{o,a\}}$ es una aplicación inyectiva y además un morfismo reticular pues la proposición 2.2 del capítulo 2 y la 4.1 anterior nos dicen que:

$$\bigwedge_{c\in H} \tau_{\{o,c\}} = \tau_{\{o,\bigwedge_{c\in H} c\}} \quad \text{y} \quad \overline{\bigvee_{c\in H}}\, \tau_{\{o,c\}} = \tau_{\{o,\bigvee_{c\in H} c\}}$$

Luego f es morfismo reticular inyectivo por lo que $f(C) = \{\tau_{\{o,a\}} \mid a \in C$ es un subretículo completo de $(N(C), \wedge, \overline{\vee})$ isomorfo a $(C, \wedge, \vee)$.

Prop. 6.1.- El retículo $(N(C), \wedge, \bar{\vee})$ es distributivo.

En efecto:

Si τ_1, τ_2, τ_3 son negaciones de $N(C)$ tales que

$$\tau_1 \bar{\vee} \tau_2 = \tau_1 \bar{\vee} \tau_3 \quad \text{y} \quad \tau_1 \wedge \tau_2 = \tau_1 \wedge \tau_3$$

entonces por definición de $\wedge$ y $\bar{\vee}$ será para todo $x \in C$

$$\tau_1(x) \vee \tau_2(x) = \tau_1(x) \vee \tau_3(x) \quad \text{y} \quad \tau_1(x) \wedge \tau_2(x) = \tau_1(x) \wedge \tau_3(x)$$

lo que, por estar en una cadena, que es un retículo distributivo, implica que $\tau_2(x) = \tau_3(x)$ para todo x de C, es decir $\tau_2 = \tau_3$.

Luego $N(C)$ es distributivo.

Prop. 7.1.- El retículo $(N(C), \wedge, \bar{\vee})$ es infinitamente distributivo respecto al supremo.

En efecto:

Sea $\{\tau_i\}_{i \in I}$ una familia cualquiera de $N(C)$. Entonces para todo $\tau \in N(C)$ es

$$\tau \bar{\vee} (\bigwedge_{i \in I} \tau_i) = \bigwedge_{i \in I} (\tau \bar{\vee} \tau_i) \text{ ya que para todo } x \in C \text{ es}$$

$$[\tau \bar{\vee} (\bigwedge_{i \in I} \tau_i)](x) = \tau(x) \vee (\bigwedge_{i \in I} \tau_i)(x) = \tau(x) \vee (\bigwedge_{i \in I} (\tau_i(x))) \overset{(+)}{=}$$

$$= \bigwedge_{i \in I} [\tau(x) \vee \tau_i(x)] = \bigwedge_{i \in I} [(\tau \bar{\vee} \tau_i)(x)] =$$

$$= [\bigwedge_{i \in I} (\tau \bar{\vee} \tau_i)](x).$$

(+) Recuérdese que una cadena completa es un retículo infinitamente distributivo.

Ejemplos de retículos de negaciones para cadenas finitas:

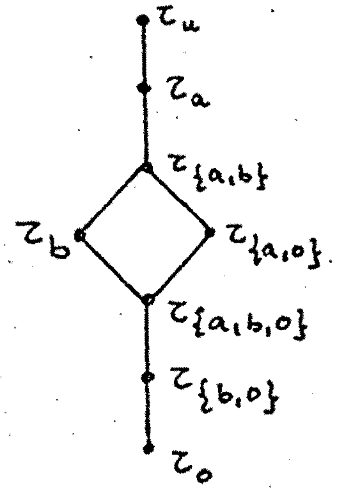
1.- Sea $C = \{o,b,a,u\}$,.

Según vimos en el Cap. 1 el conjunto $N(C)$ tendrá $2^{4-1} = 2^3 = 8$ elementos que son los siguientes:

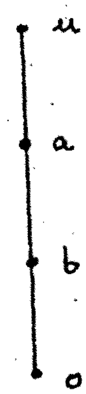
$\tau_o, \tau_b, \tau_a, \tau_u, \tau_{\{o,b\}}, \tau_{\{o,a\}}, \tau_{\{a,b\}}$ y $\tau_{\{a,b,o\}}$.

que se corresponden con los 8 subconjuntos de $\{o,b,a\}$.

El grafo del retículo $(N(C), \wedge, \bar{\vee})$ es el siguiente:

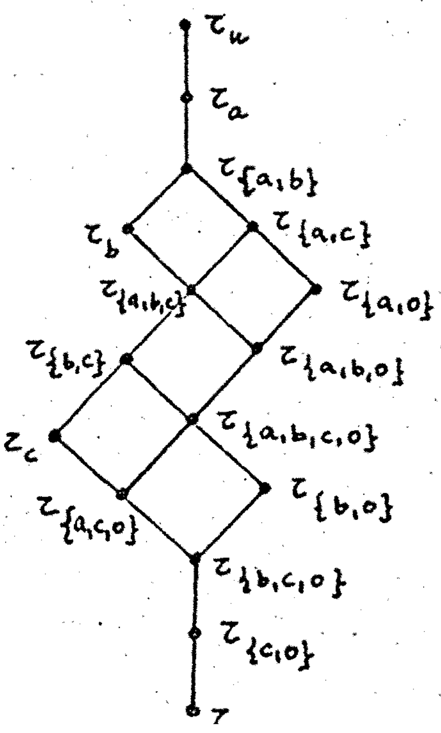


siendo C:



2.- Sea $C = \{o,c,b,a,u\}$

En este caso habrá $2^4 = 16$ negaciones cuyo grafo será:



siendo C:

A N E X O

UNA DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE MAC NEILLE PARA CADENAS.

A partir de los resultados obtenidos en el presente trabajo se puede demostrar el conocido teorema de inmersión de toda cadena en una cadena completa, conservando los ínfimos y supremos, caso particular del teorema de Mac Neille* para conjuntos parcialmente ordenados. Damos aquí la demostración del mismo utilizando los retículos de negaciones.

<u>Teorema.-</u> Toda cadena C puede ampliarse a una cadena $\bar{C}$ completa, conservando el ínfimo y el supremo de cualquier subconjunto de C que los posea.

En efecto:

Sea $(C, \leq)$ una cadena completa y notemos por $\wedge$ y $\vee$ el ínfimo y el supremo que el orden $\leq$ define en C. Sea $(\mathcal{P}(C), \cap, \cup)$ el álgebra de Boole atómica de las partes de C y sea $(N(\mathcal{P}(C)), \cap, \bar{\cup})$ el álgebra de Boole atómica de las negaciones.

Definimos $f: C \longrightarrow N(\mathcal{P}(C))$ de la forma siguiente:

$$f(x) = \tau_{A_x} \text{ para todo } x \text{ de } C \text{ siendo } A_x = \{y \in C \mid y \leq x\} = (\leftarrow, x]$$

Vamos a demostrar que f es una inyección que conserva el orden y el ínfimo de cualquier subconjunto de C que lo posea pero no el supremo.

1) La aplicación f es inyectiva lo que es evidente.

---

* Véase el capítulo V de P. Dubreil -M.L. Dubreil Jacotin [16]

2) Conserva el orden ya que:

si $x \leq y$ entonces $A_x \subset A_y$ de donde $\tau_{A_x} \leq \tau_{A_y}$

3) Conserva el ínfimo de cualquier subconjunto de C que lo posea.

Sea $H \subset C$ con $\bigwedge_{x\in H} x = y \in C$. Entonces resulta que:

3.a. $\bigcap_{x\in H} A_x = A_y$ ya que:

- Si $a \in \bigcap_{x\in H} A_x$ es que $a \leq x$ para todo $x \in H$; luego $a \leq \bigwedge_{x\in H} x = y$ de donde $a \in A_y$.
- Si $a \in A_y$ entonces $a \leq y = \bigwedge_{x\in H} x$, es decir $a \leq x$ para todo $x \in H$ de donde $a \in A_x$ para todo $x \in H$ lo que implica que $a \in \bigcap_{x\in H} A_x$.

3.b. Por otra parte $\{A_x | x \in H\}$ es un subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}(C)$ por la inclusión; luego por la proposición 1.2 a) del capítulo 2 será:

$$\bigcap_{x\in H} \tau_{A_x} = \tau_{\bigcap_{x\in H} A_x} = \tau_{A_y}$$

4) En general no conserva el supremo como puede verse en el siguiente ejemplo:

Sea la cadena $(Q, \leq)$ de los racionales con el orden usual, que no es completa y sea $H = (0,1)$. Entonces $\sup H = 1$ en Q y en cambio por la proposición II.2 del capítulo 2 es:

$$\overline{\bigcup_{x\in(0,1)}} \tau_{A_x} = \tau_{\bigcup_{x\in(0,1)} A_x} \neq \tau_{A_1} \quad \text{ya que}$$

$$\bigcup_{x\in(0,1)} (\leftarrow, x] = (\leftarrow, 1) \neq (\leftarrow, 1] = A_1.$$

Por tanto el conjunto $N(\mathcal{P}(C))$ no nos soluciona el problema. Tomamos entonces el subconjunto de $N(\mathcal{P}(C))$ definido de la forma;

$$N' = \left\{ \bigcap_{x\in H} \tau_{A_x} \;\middle|\; \forall\, H \subset C \right\} \cup \{\tau_C\} .$$

Este conjunto es un inf-semirretículo completo de $(N(\mathcal{P}(C)), \cap, \bar{\cup})$ que contiene al máximo τ_C, por lo que $(N', \cap, \bar{\bar{\cup}})$ es un retículo completo si definimos

$$\bar{\bar{\bigcup_{i\in I}}} \tau_i = \bigcap \{\tau \in N' \mid \tau \geq \tau_i,\ \forall\, i \in I\} .$$

Es inmediato que $f(C) \subset N'$ por lo que puedo considerar f como una aplicación de C en N' y es inmediato por la definición de N' que f será igualmente inyectiva y conservará el ínfimo. Veamos que también conserva el supremo:

Supongamos $H \subset C$ tal que $\bigvee_{x\in H} x = y \in C$. Vamos a ver que $\bar{\cup}\tau_{A_x} = \tau_{A_y}$. $\bar{\bar{\bigcup_{x\in H}}} \tau_{A_x} = \bigcap\{\tau \in N' \mid \tau \geq \tau_{A_x}, \forall\, x \in H\} =$

$$= \bigcap\{\tau_{A_z} \mid z \geq \vee x,\ \forall\, x \in H\} = \bigcap\{\tau_{A_z} \mid z \geq \bigvee_{x\in H} x\} = \tau_{\bigcap\limits_{z \geq \vee x} A_z} = \tau_{A_{\vee x}}$$

Luego queda demostrado que f es un monomorfismo reticular por lo que $f(C)$ es una cadena contenida en N' isomorfa a C.

Veamos, por último, que N' es una cadena.

- Si $x \leq y$ con $x, y \in C$ es inmediato que $\tau_{A_x} \leq \tau_{A_y}$, es decir son comparables.

  Por tanto lo que debemos probar es que son comparables $\bigcap_{x\in H} \tau_{A_x}$ siendo $\bigwedge_{x\in H} x \notin C$, con cualquier τ_{A_x} para $x \in C$ y con cualquier $\bigcap_{x\in M} \tau_{A_x}$ siendo $\bigwedge_{x\in M} x \notin C$.

Veamos en primer lugar que si $\bigwedge_{x\in H} x \notin C$, $\bigcap_{x\in H} \neg_{A_x}$ es comparable con todas las negaciones de la forma $\neg_{A_z}$ con $z\in C$.

Para ello definimos $P = \{y\in C \mid y\leq x, \forall x\in H\}$. Entonces tendremos:

- si $y\in P$ es $\neg_{A_y}\leq \bigcap_{x\in H}\neg_{A_x}$ ya que $\neg_{A_y}\leq \neg_{A_x}$ para todo $x\in H$ puesto que si $x\geq y$ entonces $A_x\supset A_y$.
- si $y\notin P$ es $\neg_{A_y}\geq \bigcap_{x\in H}\neg_{A_x}$ ya que si $y\notin P$ es $y>x$ para algún $x\in H$ de donde $A_y\supset A_x$ lo que implica que $A_y\supset \bigcap_{x\in H} A_x$

Veamos, en segundo lugar que si $\bigwedge_{x\in H} x\notin C$ y $\bigwedge_{x\in M} x\notin C$ entonces $\bigcap_{x\in H}\neg_{A_x}$ es comparable con $\bigcap_{x\in M}\neg_{A_x}$.

Sea $P_H = \{y\in C \mid y\leq x, \forall x\in H\}$ y $P_M = \{y\in C \mid y\leq x, \forall x\in M\}$.

Distinguiremos tres casos:

a) $P_H \supsetneqq P_M$. Entonces existe un $y\in P_M$ tal que $y\notin P_H$ de donde,

$$\bigcap_{x\in M}\neg_{A_x}\geq \neg_{A_y}\geq \bigcap_{x\in H}\neg_{A_x}$$

b) $P_M\supsetneqq P_H$, en cuyo caso ocurrirá, según hemos visto en a., que

$$\bigcap_{x\in M}\neg_{A_x}\leq \bigcap_{x\in H}\neg_{A_x}$$

c) $P_M = P_H$, en cuyo caso por ser ciertos a. y b. será $\bigcap_{x\in H}\neg_{A_x} = \bigcap_{x\in M}\neg_{A_x}$

Luego queda probado que todo par de elementos de N'son comparables lo que nos dice que N' es una cadena.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. WARD
The Closure operators of a lattice. Annals of Matematica Vol 43. nº 2 pág. 191-196 (1942).

[2] G. BIRKOFF
Lattice theorie. American Math. Soc. Collection Publishing 25 (1948).

[3] J. RIGUET
Relations binaires, fermetures, correspondences de Galois. Bulletin de la Soc. Math. de France. Vol. 76, pág. 114-155 (1948).

[4] R. CROISOT
Axiomatique des lattices distributives. Canadian Jour. of Math. Vol. 3, nº 1, pág. 24-27 (1951).

[5] M. SHOLANDER
Postulates for distributives lattices. Canadian Jour. of Math. vol. 3 nº 1, pág. 28-30 (1951).

[6] DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR ET CROISOT.
Leçons sur la teorie des treillis, des estructures algebriques ordonnées et des treillis geométriques. Gauthier-Villars, Paris 1953.

[7] P. DUBREIL et R. CROISOT
Propietés generales de la residuation en liaison avec les correspondences de Galois. Col-lectanea Math. Vol. 7, pág. 193-203 (1954).

[8] Ph. DWINGER
On the closure operators of a complete lattice. Yndagatione Math. vol. XVI-fasc. 5, pág. 560-563 (1954).

[9] PH. DWINGER.
On the lattice of the closure operators of a complete lattice. Niew. Arch. voor Wisk. (4), pág. 112-117. (1956).

[10] J. MORGADO
Note on complemented closure operators of a lattice. Portu. Math. vol XXI-fasc. 3 pág. 135-142 (1962).

[11] G. BODIOU
Theorie dialectique des probabilités. Gauthier Villars, París 1964.

[12] H. RASIOWA - R. SIKORSKI
The mathematics of metamathematics. Polish scient. publi. Warszawa, 1970

[13] F. de A. SALES VALLES
Sobre complementación y valoración de retículos. Actas de la VIII reunión anual de matemáticos españoles.

[14] F. de A. SALES VALLES
Aplicaciones de Galois en conjuntos ordenados y en retículos. Col.lectanea Math. vol. XXI-fasc. 1, pág. 19-39 (1970).

[15] F. de A. SALES VALLES
Curso de probabilidades. Universidad de Barcelona.

[16] P. DUBREIL, M. L. DUBREIL-JA(
Lecciones de álgebra moderna. Ed. Reverté, Barcelona 1971.

[17] G. SZASZ
Teorie des treillis. Dunod, París 1971.

[18] F. de A. SALES VALLES
Algebras de Hilbert. Curso monográfico de doctorado. Universidad de Barcelona 1973.

[19] J. PLA
Sobre negaciones en retículos. En curso de publicación (Actas de las II Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas. Madrid 1.973).

[20] F. ESTEVA
Negaciones en retículos completos. En curso de publicación (Actas de las II Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas. Madrid 1973).

[21] A. VILA
Contribución al estudio de los retículos S-valorados. Tesis doctoral presentada en la Universidad de Barcelona. Junio 1974.