



UNIVERSITAT DE BARCELONA



DISSENY I CONSTRUCCIÓ D'UN CORRELADOR ÒPTIC DUAL INTEGRANT LES ARQUITECTURES DE VANDERLUGT I DE TRANSFORMADES CONJUNTES

Universitat de Barcelona
Departament de Física Aplicada i Òptica

Ignasi Labastida i Juan

Apèndix A

Òptica de Fourier

En aquest apèndix s'inclouen diferents aspectes relacionats amb l'Òptica de Fourier, com són les definicions de les transformades, els productes de funcions relacionades o les propietats que s'han fet servir al llarg del treball. També s'hi presenta un breu resum dels diferents tipus de muntatges de difracció així com el desenvolupament matemàtic de diverses situacions característiques.

A.1 Definicions Matemàtiques

A.1.1 Transformada de Fourier: Definició

Es defineix la **Transformada de Fourier** (TF) d'una funció bidimensional $f(x, y)$ com:

$$F(u, v) = \mathcal{F}\{f(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(xu+yv)} dx dy \quad (\text{A.1})$$

Mentre que la **Transformada de Fourier inversa** (TFI) d'una funció bidimensional $F(u, v)$ es pot escriure com:

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u, v)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(xu+yv)} du dv \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Transformada de Fourier: Propietats

Les Transformades de Fourier compleixen les següents propietats:

Linealitat

$$\mathcal{F}\{af(x, y) + bg(x, y)\} = aF(u, v) + bG(u, v) \quad (\text{A.3})$$

Translació

$$\mathcal{F}\{f(x - x_o, y - y_o)\} = F(u, v) e^{-i2\pi(ux_o + vy_o)} \quad (\text{A.4})$$

Proporció

$$\mathcal{F}\{f(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (\text{A.5})$$

Teorema de Parseval

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |F(u, v)|^2 du dv \quad (\text{A.6})$$

A.1.3 Convolució i correlació: Definicions i propietats

El producte de convolució entre dues funcions bidimensionals, $f(x, y)$ i $g(x, y)$, es defineix com:

$$f(x, y) * g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(r, s) g(x - r, y - s) dr ds \quad (\text{A.7})$$

D'aquesta darrera expressió podem obtenir la següent relació, o Teorema de la convolució:

$$\mathcal{F}\{f(x, y) * g(x, y)\} = F(u, v)G(u, v) \quad (\text{A.8})$$

Pel que fa al producte de correlació entre dues funcions:

$$f(x, y) \otimes g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(r, s) g^*(r - x, s - y) dr ds \quad (\text{A.9})$$

De la mateixa manera, podem escriure el teorema de la correlació:

$$\mathcal{F}\{f(x, y) \otimes g(x, y)\} = F(u, v)G^*(u, v) \quad (\text{A.10})$$

A.2 Difractòmetres

Un cop definides les funcions necessàries per entendre el desenvolupament de l'òptica de Fourier cal que presentem els muntatges que ens permetin obtenir òpticament la transformada, aquests sistemes reben generalment el nom de difractòmetres. Per analitzar el seu funcionament utilitzarem la notació de VanderLugt [Van66, Van92], que es basa en la definició de la següent funció:

$$\psi(x, y; d) = e^{i\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda D}} \quad (\text{A.11})$$

Aquesta funció representa una ona esfèrica que divergeix i el seu origen es troba a una distància D del pla (x, y) .

A.2.1 Notació de VanderLugt

A partir de l'expressió de l'Equació A.11 es poden definir una sèrie de propietats.

Propietats:

Asimetria al llarg de l'eix òptic

$$\psi(x, y; d) = \psi^*(x, y; -d) \quad (\text{A.12})$$

Simetria en el pla normal a l'eix òptic:

$$\psi(-x, -y; d) = \psi(x, y; d) \quad (\text{A.13})$$

Multiplicativa:

$$\psi(x, y; d_1)\psi(x, y; d_2) = \psi(x, y; d_1 + d_2) \quad (\text{A.14})$$

Separabilitat:

$$\psi(x, y; d) = \psi(x; d)\psi(y; d) \quad (\text{A.15})$$

Canvis d'escala:

$$\psi(ax, ay; d) = \psi(x, y; a^2 d) \quad (\text{A.16})$$

Integrals de convolució:

$$\psi(x - r, y - s; d) = \psi(x, y; d)\psi(r, s; d)e^{-i\frac{2\pi(xr+ys)}{\lambda D}} \quad (\text{A.17})$$

Ona plana:

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \psi(x, y; d) = \psi(x, y; 0) = 1 \quad (\text{A.18})$$

Transformada de Fourier

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y; d_1) e^{-i\frac{2\pi(xu+yv)}{\lambda D_2}} dx dy = \frac{c}{d_1} \psi^*(u, v; \frac{d_2^2}{d_1}) \quad (\text{A.19})$$

$$\lim_{d_1 \rightarrow 0} \frac{1}{d_1} \psi^*(x, y; \frac{d_2^2}{d_1}) = \delta(x, y) \quad (\text{A.20})$$

A.2.2 Teoria de la difracció

Abans d'analitzar els muntatges òptics que ens serviran per obtenir la TF d'un objecte, cal repassar algun concepte de difracció com la propagació de la llum. Si tenim una distribució de llum representada per la funció $h(x, y)$, la seva propagació al llarg d'una distància D ve determinada per la **Transformada de Fresnel**:

$$\tau(\xi, \eta) = \frac{C}{D} \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{i\frac{\pi[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]}{\lambda D}} dx dy \quad (\text{A.21})$$

on (ξ, η) són les coordenades del nou pla i C és una constant complexa independent. La Transformada de Fresnel definida en l'Equació A.21 es pot reescriure en la notació de VanderLugt de la següent manera:

$$\tau(\xi, \eta) = \frac{C}{D} \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \psi(x, y; d) \psi(\xi, \eta; d) e^{-i\frac{2\pi(x\xi+y\eta)}{\lambda D}} dx dy \quad (\text{A.22})$$

Si un objecte, la transmitància del qual ve definida per la funció $t(x, y)$, és il·luminat per una ona esfèrica $\psi(x, y; d)$, l'ona sortint serà el producte $t(x, y)\psi(x, y; d)$.

Un altre element que cal tenir en compte són les lents. Una lent esfèrica amb distància focal F es representa per la següent funció:

$$e^{-i\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda F}} = \psi^*(x, y; f) \quad (\text{A.23})$$

És a dir que una lent introdueix un factor de fase en la llum que la travessa.

Una ona plana es pot definir en aquesta notació com $\psi(x, y; 0)$, que segons la Propietat A.18 és la unitat.

A.2.3 Muntatges òptics

Per obtenir la transformada de Fourier d'un objecte, estudiarem un sistema òptic general deixant com a variant la posició de l'objecte.

Objecte davant la lent

El primer muntatge que podem considerar és el de la Figura A.1 on l'objecte està situat a una distància D_1 per davant d'una lent amb distància focal F . L'objecte, representat per la funció $f(x, y)$, és il·luminat per una llum monocromàtica, que podem considerar com una ona esfèrica divergent $\psi(x, y; d_0)$.

A una distància D_2 per darrera lent hi haurà una distribució $g(r, s)$ que es pot determinar matemàticament tenint en compte tots els passos. Primer l'ona divergent travessa l'objecte i el producte resultant es propaga fins arribar al pla on està situada la lent, que introdueix un factor de fase dependent de la seva focal. Finalment la distribució resultant es propaga fins arribar al pla P_3 on es vol analitzar $g(r, s)$. El desenvolupament matemàtic de tots aquests processos dona com a resultat:

$$g(r, s) = d_1 d_2 \iint_{P_1} \iint_{P_2} \psi(x, y; d_0) f(x, y) \psi(x, y; d_1) \psi(u, v; d_1) e^{-i\frac{2\pi(xu+yv)}{\lambda D_1}} \times \\ \times \psi^*(u, v; f) \psi(u, v; d_2) \psi(r, s; d_2) e^{-i\frac{2\pi(ur+vs)}{\lambda D_2}} dx dy du dv \quad (\text{A.24})$$

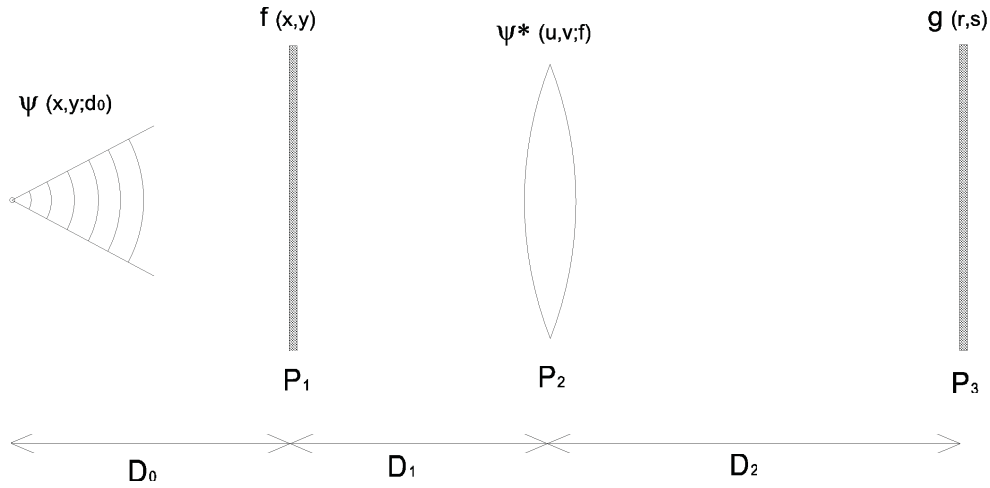


Figura A.1: Difractòmetre amb l'objecte davant la lent

Combinant les funcions ψ amb les propietats descrites anteriorment, l'Equació A.24 es pot rescriure com:

$$g(r, s) = d_1 d_2 \psi(r, s; d_2) \iint_{P_1} \iint_{P_2} \psi(x, y; d_0 + d_1) f(x, y) \psi(u, v; d_1 - f + d_2) \times \\ \times e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} [u(d_1 x + d_2 r) + v(d_1 y + d_2 s)]} dx dy du dv \quad (\text{A.25})$$

El primer que es pot fer és integrar l'Equació A.25 en funció de les variables (u, v) obtenint la següent expressió:

$$g(r, s) = \frac{d_1 d_2}{d_1 - f + d_2} \psi(r, s; d_2) \iint_{P_1} \psi(x, y; d_0 + d_1) \times \\ \times f(x, y) \psi\left(x + \frac{d_2}{d_1} r, y + \frac{d_2}{d_1} s; \frac{d_1^2}{d_1 - f + d_2}\right) dx dy \quad (\text{A.26})$$

Quan $d_1 + d_2 = f$ i utilitzant la Propietat A.20, l'anterior equació es converteix en:

$$g(r, s) \propto \psi(r, s; d_k) f\left(-\frac{d_2}{d_1} r, -\frac{d_2}{d_1} s\right) \quad (\text{A.27})$$

on s'observa que en la pla P_2 apareix l'objecte escalat en funció de l'augment lateral $(-\frac{d_2}{d_1})$, i un factor de fase que depèn del paràmetre $d_k = d_2 + \frac{d_2^2(d_0 + d_1)}{d_1^2}$. Aquest factor normalment no és important perquè els detectors que s'utilitzen només enregistren intensitats, per tant podem dir que $g(r, s)$ no depèn de l'ona divergent.

L'Equació A.26 es pot reescriure de manera semblant a l'expressió de la TF:

$$g(r, s) \propto \psi\left(r, s; d_2 - \frac{d_2^2}{d_1 - f + d_2}\right) \iint_{P_1} \psi\left(x, y; d_0 + d_1 - \frac{d_1^2}{d_1 - f + d_2}\right) \times \\ \times f(x, y) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{d_1 d_2}{d_1 - f + d_2}\right] (xr + ys)} dx dy \quad (\text{A.28})$$

Per aconseguir que l'anterior expressió esdevingui la transformada de Fourier de la funció $f(x, y)$ cal que es compleix la següent condició:

$$d_0 + d_1 - \frac{d_1^2}{d_1 + d_2 - f} = 0 \quad (\text{A.29})$$

D'aquesta manera la distribució en el pla P_3 quedarà:

$$\begin{aligned} g(r, s) &\propto \psi(r, s; d_F) \iint_{P_1} f(x, y) e^{-i \frac{2\pi(xr+ys)d_2(d_0+d_1)}{\lambda d_1}} dx dy = \\ &= \psi(r, s; d_F) F\left(\frac{D_0 + D_1}{\lambda D_0 D_2} r, \frac{D_0 + D_1}{\lambda D_0 D_2} s\right) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

que és el producte d'un factor de fase depenent del paràmetre $d_F = d_2 - \frac{d_2^2}{d_1}(d_0 + d_1)$, i la transformada de Fourier amb un factor d'escala $(\frac{D_0+D_1}{\lambda D_2})$.

Si en lloc d'il·luminar l'objecte amb una ona divergent es fa amb una ona plana, la condició de formació d'imatge queda de la mateixa manera ja que no depèn del paràmetre d_0 . En canvi, pel que fa a la TF, si l'ona és plana ($d_0 = 0$) l'Equació A.30 queda:

$$\begin{aligned} g(r, s) &\propto \psi(r, s; d_2 - \frac{d_2^2}{d_1}) \iint_{P_1} f(x, y) e^{-i \frac{2\pi(xr+ys)d_2}{\lambda}} dx dy = \\ &= \psi(r, s; d_2 - \frac{d_2^2}{d_1}) F\left(\frac{r}{\lambda D_2}, \frac{s}{\lambda D_2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

quan es compleix la condició de l'Equació A.29, que podem reescriure de la següent forma:

$$d_1 - \frac{d_1^2}{d_1 + d_2 - f} = 0 \rightarrow d_2 = f \quad (\text{A.32})$$

De la mateixa manera podem reescriure l'Equació A.31 en funció de la distància focal de la lent:

$$g(r, s) \propto \psi(r, s; f - \frac{f^2}{d_1}) F\left(\frac{r}{\lambda F}, \frac{s}{\lambda F}\right) \quad (\text{A.33})$$

Així doncs la transformada de Fourier es troba en el pla focal imatge de la lent i en el cas que l'objecte estigui en el pla focal objecte ($d_1 = f$) s'aconseguirà la TF exacta, sense cap factor de fase multiplicatiu:

$$g(r, s) \propto F\left(\frac{r}{\lambda F}, \frac{s}{\lambda F}\right) \quad (\text{A.34})$$

Objecte darrere la lent

El segon difractòmetre és el de la Figura A.2, on ara l'objecte es col·loca darrere la lent. Una ona divergent arriba a la lent i a una distància D_1 s'hi posa l'objecte.

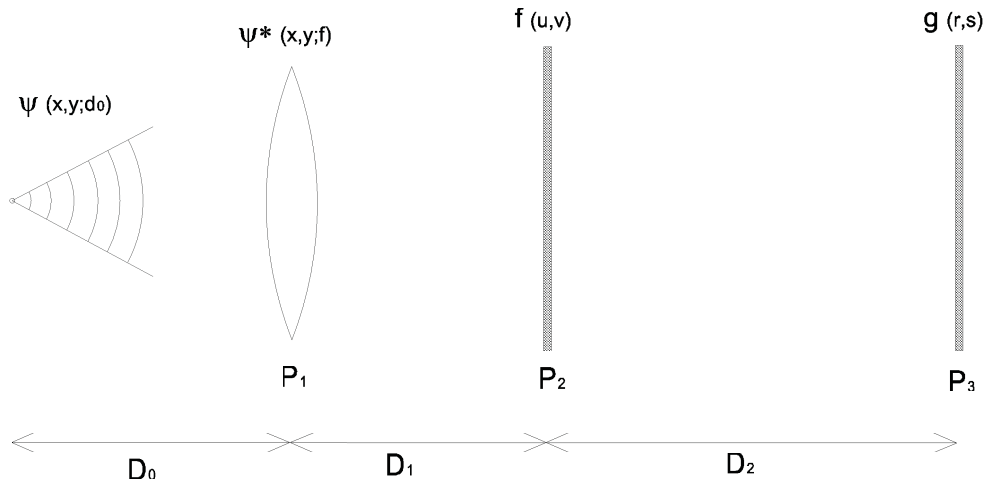


Figura A.2: Difractòmetre amb l'objecte darrere la lent

Com en el muntatge anterior podem analitzar la distribució que hi ha en un pla separat D_2 de l'objecte. Cal començar per la lent divergent que arriba a la lent, afegir el factor de fase que introdueix la lent, la propagació fins el pla de l'objecte i després la propagació fins el pla que volem estudiar.

$$g(r, s) = d_1 d_2 \iint_{P_1} \iint_{P_2} \psi(x, y; d_0) \psi^*(x, y; f) \psi(x, y; d_1) \psi(u, v; d_1) e^{-i \frac{2\pi(xu+yv)}{\lambda D_1}} f(u, v) \psi(u, v; d_2) \psi(r, s; d_2) e^{-i \frac{2\pi(ur+vs)}{\lambda D_2}} dx dy du dv \quad (\text{A.35})$$

Integrant per (x,y) i utilitzant les propietats arribem a:

$$g(r, s) \propto \psi(r, s; d_2) \iint_{P_2} f(u, v) \psi(u, v; \frac{d_1^2}{d_1 - f + d_0} - d_1 - d_2) e^{-i \frac{2\pi(ur+vs)}{\lambda D_2}} du dv \quad (\text{A.36})$$

Per reduir l'expressió anterior a una transformada de Fourier ens cal la següent condició:

$$\frac{d_1^2}{d_1 - f + d_0} - d_1 - d_2 = 0 \quad (\text{A.37})$$

que no és res més que

$$f = d_3 + \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \rightarrow \frac{1}{F} = \frac{1}{D_0} + \frac{1}{D_1 + D_2} \quad (\text{A.38})$$

Aquesta condició és la de formació d'imatge i quan es compleix, l'Equació A.36 es pot reescriure com:

$$g(r, s) \propto \psi(r, s; d_2) \iint_{P_2} f(u, v) e^{-i \frac{2\pi(ur+vs)}{\lambda D_2}} du dv = \psi(r, s; d_2) F\left(\frac{r}{\lambda D_2}, \frac{s}{\lambda D_2}\right) \quad (\text{A.39})$$

és a dir que en el pla P_3 apareix la TF de la funció $f(u, v)$ escalada en funció de la distància D_2 i multiplicada per un factor de fase que també depèn de la mateixa distància.

Quan l'ona que arriba a la lent és plana, l'Equació A.35 es transforma en la següent expressió:

$$g(r, s) = d_1 d_2 \iint_{P_1} \iint_{P_2} \psi^*(x, y; f) \psi(x, y; d_1) \psi(u, v; d_1) e^{-i \frac{2\pi(xu+yv)}{\lambda D_1}} f(u, v) \psi(u, v; d_2) \psi(r, s; d_2) e^{-i \frac{2\pi(ur+vs)}{\lambda D_2}} dx dy du dv \quad (\text{A.40})$$

Utilitzant les propietats arribem a:

$$g(r, s) \propto \frac{d_1 d_2}{d_1 - f} \psi(r, s; d_2) \iint_{P_2} f(u, v) \psi(u, v; d_1 + d_2 - \frac{d_1^2}{d_1 - f}) e^{-i \frac{2\pi(ur+vs)}{\lambda D_2}} du dv \quad (\text{A.41})$$

Ara la condició per tenir en el pla P_3 la TF de la funció $f(x, y)$ és la següent:

$$d_1 + d_2 - \frac{d_1^2}{d_1 - f} = 0 \rightarrow f = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \rightarrow F = D_1 + D_2 \quad (\text{A.42})$$

Aquesta condició ens indica que la TF apareix en el pla focal de la lent amb la següent distribució:

$$g(r, s) \propto \psi(r, s; d_2) F\left(\frac{r}{\lambda D_2}, \frac{s}{\lambda D_2}\right) \quad (\text{A.43})$$

Apèndix B

Electromagnetisme i Polarització

En aquest apèndix s'introdueixen breument els aspectes de la teoria electromagnètica de la llum que cal tenir en compte a l'hora d'estudiar el comportament de les pantalles de cristall líquid. Els fenòmens més rellevants pel que fa a aquests dispositius són el de la polarització de la llum i els referents als medis anisòtrops.

B.1 La naturalesa electromagnètica de la llum

Un camp electromagnètic es descriu mitjançant dos camps vectorials, el camp elèctric, $\vec{E}(\vec{r}, t)$, i el camp magnètic, $\vec{H}(\vec{r}, t)$. Ambdós són funcions vectorials que depenen de la posició i del temps, i que estan relacionats mitjançant les equacions de Maxwell. En un medi lliure de càrregues elèctriques, de corrents i de materials magnètics, s'han de definir dos camps vectorials més, la densitat de flux elèctric (o desplaçament elèctric), $\vec{D}(\vec{r}, t)$ i la densitat de flux magnètic, $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Les equacions de Maxwell per aquest cas són les següents:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\tag{B.1}$$

on les relacions entre \vec{D} i \vec{E} , i entre \vec{B} i \vec{H} són les següents:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}\end{aligned}\tag{B.2}$$

Els paràmetres ϵ i μ són la permitivitat elèctrica i la permitivitat magnètica del medi, respectivament. En el buit aquestes constants són ϵ_0 i μ_0 , i per tant en medis no magnètics $\mu = \mu_0$.

L'equació d'ona que se'n deriva per ambdós camps és la següent:

$$\nabla^2 \Upsilon - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{B.3})$$

on Υ representa a qualsevol dels dos camps vectorials.

La solució de l'Equació B.3 és una ona electromagnètica propagant-se a una velocitat que anomenarem **velocitat de fase** i que es defineix com:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n} = \frac{1}{n \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{B.4})$$

on c és la velocitat de la llum en el buit i n l'índex de refracció del material.

B.2 Polarització

La polarització de la llum està determinada per la variació en el temps de la direcció del camp elèctric. Una ona plana monocromàtica propagant-se en la direcció de l'eix z té associada un camp elèctric $E(z, t)$ que està contingut en el pla $x - y$ i que es pot descriure per [ST91]:

$$\vec{E}(z, t) = \Re \left\{ \vec{A} e^{i(\omega t - kz)} \right\} \quad (\text{B.5})$$

on $\vec{A} = A_x e^{i\delta_x} \hat{x} + A_y e^{i\delta_y} \hat{y}$.

Podem escriure l'expressió del camp en dues components (E_x, E_y):

$$\vec{E}(z, t) = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} \quad (\text{B.6})$$

$$E_x(z, t) = A_x \cos(\omega t - kz + \delta_x) \quad (\text{B.7})$$

$$E_y(z, t) = A_y \cos(\omega t - kz + \delta_y)$$

Les expressions de l'Equació B.7 són les equacions paramètriques d'una el·lipse, l'anomenada el·lipse de polarització, que es pot escriure

$$\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - 2 \cos \delta \frac{E_x E_y}{A_x A_y} = \sin^2 \delta \quad (\text{B.8})$$

on δ és el desfasament o diferència entre els factors de fase de cadascuna de les dues components

$$\delta = \delta_y - \delta_x \quad (\text{B.9})$$

La polarització de la llum dependrà d'aquest desfasament. Així doncs, en principi la llum està polaritzada el·lípticament però per determinats valors de δ podem assolir llum polaritzada linealment o llum polaritzada circularment si es compleixen altres condicions.

B.2.1 Representació matricial

Per descriure l'estat de polarització d'una ona plana monocromàtica es pot utilitzar la representació del vector de Jones:

$$J = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

La intensitat de la qual és:

$$I = J^\dagger J = A_x^2 + A_y^2 \quad (\text{B.11})$$

Si normalitzem el vector de Jones (intensitat=1) tenim:

$$J(\Psi, \delta) = \begin{pmatrix} \cos \Psi \\ e^{i\delta} \sin \Psi \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Els estats de polarització més usuals són els que es presenten en la Taula B.1.

Amb aquests vectors podem representar els estats de polarització de la llum, però ara cal analitzar els diferents dispositius que alteren la polarització d'una ona plana sense canviar-ne la seva naturalesa. Considerem una ona plana amb una polarització arbitrària definida pel vector $J = (J_x, J_y)$. En passar a través d'un d'aquests dispositius, la polarització de l'ona haurà canviat segons el següent producte:

$$J' = M_J J \quad (\text{B.13})$$

on J' és el vector que defineix l'estat de polarització final, i M_J és la matriu de Jones que representa els canvis en la polarització introduïts pel sistema que ha travessat la llum.

D'entre els dispositius que només canvien els estats de polarització de la llum que els travessa cal destacar els polaritzadors lineals, els retardadors d'ona, que introdueixen un desfasament ζ entre les components del camp elèctric, i els rotadors de polarització, que són dispositius que giren un angle φ la llum polaritzada linealment. Les corresponents matrius de Jones d'aquests elements òptics estan representades en la Taula B.2.

Polarització	Vector de Jones
Lineal vertical	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Lineal horitzontal	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Lineal amb angle α respecte x	$\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$
Circular dextrogira	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
Circular levogira	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Taula B.1: Estats de polarització i els seus corresponents vectors de Jones

De les expressions de les matrius de la Taula B.2 podem escriure els canvis que produeixen una làmina $\frac{\lambda}{2}$ i una làmina $\frac{\lambda}{4}$, ja que ambdues són retardadors d'ona que introdueixen un desfasament π i $\frac{\pi}{2}$, respectivament:

$$M_{\frac{\lambda}{2}} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$M_{\frac{\lambda}{4}} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

B.2.2 Canvi de coordenades

Una de les característiques dels vectors i les matrius de Jones és la seva dependència del sistema de coordenades utilitzat. És per això que, a vegades cal fer un canvi de

Dispositiu	Matriu de Jones
Polaritzador lineal vertical	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Polaritzador lineal horitzontal	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Polaritzador lineal	$\begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$
Retardador d'ona	$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\zeta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\zeta}{2}} \end{pmatrix}$
Rotador de polarització	$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

Taula B.2: Dispositius òptics i les seves corresponents matrius de Jones

sistema de referència. Si volem passar d'uns eixos xy a uns altres $x'y'$, rotats un angle θ respecte els primers, cal utilitzar una matriu de rotació:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Aquest tipus de matrius compleix la següent propietat:

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{B.17})$$

és a dir, que dos canvis de coordenades consecutius són equivalents a un únic canvi que englobi l'angle total.

Un vector de Jones en un sistema xy es transforma en un nou vector J' sota un sistema $x'y'$ segons la següent transformació:

$$J' = R(\theta)J \quad (\text{B.18})$$

Mentre que el canvi de coordenades per a una matriu de Jones és

$$M'_j = R(\theta)M_jR(-\theta) \quad (\text{B.19})$$

B.3 Medis anisòtrops

En els medis anisòtrops la relació entre \vec{D} i \vec{E} , és la següent:

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij}E_j \quad (\text{B.20})$$

on ϵ ha passat a seu un tensor en lloc d'un escalar.

Es pot trobar un sistema de coordenades on el tensor dielèctric sigui diagonal i per tant els seus elements es puguin escriure com: $\epsilon_{11} = \epsilon_x$, $\epsilon_{22} = \epsilon_y$, i $\epsilon_{33} = \epsilon_z$. Aquest sistema defineix els eixos principals i els plans principals del medi. En aquestes condicions es poden definir els índexs de refracció principals (n_x , n_y i n_z).

$$n_x = \sqrt{\frac{\epsilon_x}{\epsilon_0}} \quad n_y = \sqrt{\frac{\epsilon_y}{\epsilon_0}} \quad n_z = \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon_0}} \quad (\text{B.21})$$

La representació geomètrica d'aquests índexs és l'anomenat **el·lipsoide d'índexs**:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (\text{B.22})$$

Els medis anisòtrops uniaxials són aquells que es caracteritzen per tenir dos índexs de refracció iguals. Normalment es defineixen com $n_x = n_y = n_o$ i $n_z = n_e$, ordinari i extraordinari respectivament. En aquest tipus de materials, l'el·lipsoide d'índexs és un el·lipsoide de revolució.

En un medi anisòtrop, la velocitat de fase depèn de la direcció de propagació i de l'estat de polarització. Degut a l'anisotropia, la polarització d'una ona plana pot variar en propagar-se per aquest medi. No obstant això, donada una direcció de propagació, es poden definir dos **modes normals de propagació** que determinen una velocitat de fase i una direcció de polarització fixes. O sigui que una ona plana amb una polarització paral·lela a una d'aquestes direccions no variarà el seu estat en propagar-se a través del medi. Aquests dos modes es determinen a partir de l'el·lipsoide d'índexs i la direcció de propagació.

Una ona plana que es propaga a través d'un medi anisòtrop uniaxial en una direcció qualsevol defineix un pla perpendicular a aquesta direcció que talla l'el·lipsoide d'índexs formant una el·lipse, també anomenada **el·lipse d'índexs**. Si la direcció de

propagació forma un angle η amb l'eix òptic:

$$\frac{1}{n_e^2(\eta)} = \frac{\cos^2 \eta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \eta}{n_e^2} \quad (\text{B.23})$$

Així doncs, la llum en un medi anisòtrop uniaxial es propaga mitjançant una ona ordinària i una extraordinària.

Apèndix C

Sigles

- ACMF** Amplitude Compensated Matched Filter (*Filtre d'amplitud compensada*)
Tipus de filtre utilitzat en processos de reconeixement òptic
- AM** Amplitude Mostly (*Quasi Només Amplitud*)
Tipus de configuració de les pantalles utilitzades en el treball
- BJPS** Binary Joint Power Spectrum (*Espectre de Potència Conjunt Binaritzat*)
Distribució binària d'intensitats generada a partir de l'enregistrada en un correlador JTC
- CCD** Charge Coupled Device (*Dispositiu de càrrega acoblada*)
Tipus de càmera que s'utilitza per captar imatges.
- CGA** Color Graphics Adapter (*Adaptador de gràfics de color*)
Mode de resolució
- CMF** Classical Matched Filter (*Filtre adaptat clàssic*)
Tipus de filtre utilitzat en processos de reconeixement òptic
- FLC** Ferroelectric Liquid Crystal (*Cristall líquid ferroelèctric*)
Tipus de cristall líquid
- FPF** Fractional Power Filters (*Filtres de freqüència fraccionària*)
Grup de filtres utilitzats en processos de reconeixement òptic

HC	High Contrast (<i>Alt Contrast</i>) Tipus de configuraci'o de les pantalles utilitzades en el treball
IF	Inverse Filter (<i>Filtre invers</i>) Tipus de filtre utilitzat en processos de reconeixement òptic
JPS	Joint Power Spectrum (<i>Espectre de Potència Conjunt</i>) Distribució d'intensitats enregistrada en un correlador JTC.
JTC	Joint Transform Correlator (<i>Correlador de Transformades Conjunes</i>) Muntatge per obtenir òpticament el producte de correlació necessari per a processos de reconeixement
LCD	Liquid Crystal Display (<i>Pantalla de cristall líquid</i>) Dispositiu de cristall líquid per mostrar imatges
LCLV	Liquid Crystal Light Valve (<i>Vàlvula de llum de cristall líquid</i>) Dispositiu de cristall líquid per mostrar imatges
LCTV	Liquid Crystal Television (<i>Televisió de cristall líquid</i>) Televisor amb pantalla de cristall líquid
LUT	Look-Up-Table (<i>Taula de sortida</i>) Taula per canviar els nivells de gris d'una imatge
PM	Phase Mostly (<i>Quasi Només Fase</i>) Tipus de configuració de les pantalles utilitzades en el treball.
POF	Phase Only Filter (<i>Filtre de Fase</i>) Tipus de filtre utilitzat en processos de reconeixement òptic
SLM	Spatial Light Modulator (<i>Modulador espacial de llum</i>) Dispositiu que modula la llum en amplitud, fase o ambdues
TF	Transformada de Fourier

- TFI** Transformada de Fourier inversa
- TNLC** Twisted-Nematic Liquid Crystal (*Cristall líquid nemàtic girat*)
Tipus de cristall líquid utilitzat en molts dispositius comercials
- VGA** Video Graphics Array (*Matriu gràfica de vídeo*)
Mode de resolució
- VLCC** VanderLugt Converging Correlator (*Correlador Convergent de VanderLugt*)
Muntatge per obtenir òpticament el producte de correlació necessari per a processos de reconeixement

Apèndix D

Publicacions relacionades amb el treball

En aquest apèndix apareix una llista de les publicacions aparegudes en revistes i capítols de llibres, així com les comunicacions a congressos internacionals i nacionals, relacionades amb la tasca desenvolupada en aquest treball de recerca.

Publicacions en revistes:

- I. Labastida, S. Vallmitjana, I. Juvells, A. Carnicer y J.R. de F. Moneo, "Utilización de pantallas de cristal líquido en un correlador VanderLugt", *Opt. Pur. Apl.* **31**, 33-47, 1998.
- I. Labastida, A. Carnicer, E. Martín Badosa, S. Vallmitjana and I. Juvells, "Control of a VanderLugt correlator using a single 8-bit frame grabber", *Opt. Commun.* **153**, 331-338, 1998.
- I. Labastida, A. Carnicer, E. Martín Badosa, S. Vallmitjana and I. Juvells, "Multiple image control with an 8-bit frame grabber. Use in a VanderLugt correlator", *Proc. SPIE* **3490**, 187-190, 1998.
- I. Labastida, A. Carnicer, E. Martín Badosa, I. Juvells and S. Vallmitjana, "On-Axis joint transform correlation based on a four-level power spectrum", *Appl. Opt.* **38**, 6111-6115, 1999.
- I. Labastida, A. Carnicer, E. Martin-Badosa, S. Vallmitjana and I. Juvells, "Optical correlation using partial phase-only modulation with VGA liquid crystal displays", *Appl. Opt.* **39**, 766-769, 2000

- I. Labastida, A. Carnicer, I. Juvells and S. Vallmitjana, "On-axis joint transform correlation based on the interferometric acquisition of the output plane", *Proc. SPIE* **4089**, 425-432, 2000.
- I. Labastida, A. Carnicer, I. Juvells and S. Vallmitjana, "On-axis interferometric detection using a binary joint transform correlator ", *Opt. Commun.* **181**, 53-60, 2000.
- I. Labastida, A. Carnicer, E. Martín-Badosa, S. Vallmitjana e I. Juvells, "Correlador òptic controlado mediante una sola tarjeta digitalizadora de 8 bits", *Revista Electrónica de Visión por Computador (REVC)* **3**, 2000.

Capítols de Llibre:

- S. Vallmitjana, I. Labastida, E. Martín Badosa, A. Carnicer and I. Juvells, "Characterization of VGA liquid crystal panels with partial phase-only modulation. Application to pattern recognition", in *Optoelectronic Information Processing*, Ph. Réfrégier and B. Javidi eds., SPIE Press CR74, 71-90, Washington 1999, ISBN: 0-8194-3457-4.

Comunicacions a Congressos:

- I. Labastida, E. Martín Badosa, A. Carnicer, S. Vallmitjana e I. Juvells, "Optimización del funcionamiento de pantallas LCD en un correlador VanderLugt", V Reunión Nacional de Óptica, València, setembre 1997.
- I. Labastida, A. Carnicer, E. Martín Badosa, S. Vallmitjana and I. Juvells, "Multiple image control with an 8-bit frame grabber. Use in a VanderLugt correlator", *Optics in Computing - OC'98*, Bruges (Bèlgica), juny 1998.
- I. Labastida, A. Carnicer, E. Martín Badosa, S. Vallmitjana and I. Juvells, "Application of modulation properties of LCD displays: Centered correlation on axis with a JTC", II Jornada Internacional de la Xarxa Temàtica de Processament Òptic d'Imatges, Terrassa, desembre 1998.
- I. Labastida, A. Carnicer, E. Martín-Badosa, S. Vallmitjana and I. Juvells, "Optical correlator controlled by a single 8-bit frame-grabber", VIII Simposium Nacional de Reconocimiento de Formas y Análisis de Imágenes (SNRFAI), Bilbao, maig 1999.

- S. Vallmitjana, I. Labastida, E. Martín-Badosa, A. Carnicer and I. Juvells, "Characterization of VGA liquid crystal panels with partial phase-only modulation. Application to pattern recognition", Euro American Workshop on Optoelectronic Information Processing, Colmar (França), maig 1999
- I. Labastida, A. Carnicer, I. Juvells and S. Vallmitjana, "On-axis joint transform correlation based on the interferometric acquisition of the output plane", Optics in Computing - OC'2000, Quebec (Quebec), juny 2000.
- I. Labastida, A. Carnicer, E. Martín Badosa, S. Vallmitjana e I. Juvells, "Correlador de transformadas conjuntas en eje", VI Reunión Nacional de Óptica, Medina del Campo (Valladolid), setembre 2000.

Tesi de Llicenciatura:

- I. Labastida, "Disseny i muntatge d'un correlador òptic aplicat al reconeixement de formes", Universitat de Barcelona, setembre 1997.

