Métodos de Análisis Dinámico Discreto. Aplicaciones Financieras.

Juan Manuel Fort Martínez

20 de junio de 2.000

Índice General

Capítulo 1

MEMORIA

1.1 Objetivos y desarrollo

Desde los comienzos de mi andadura científica como profesor de matemáticas allí por el año 1970, de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Barcelona, he considerado interesante continuar en mi posición imparcial de ingeniero frente a los matemáticos y a los economistas, en lo referente a las ecuaciones en diferencias finitas, ya que los primeros tratan su contenido puramente matemático, obteniendo métodos de resolución a semejanza de como tratan las ecuaciones diferenciales, y los segundos utilizan los resultados matemáticos obtenidos anteriormente para resolver los cálculos de las aplicaciones económicas y financieras que se plantean en la práctica, en consecuencia mi objetivo está centrado en ver si era posible conocido el principio, como son las ecuaciones en diferencias finitas, y el final que son los cálculos financieros, poder encontrar una fórmula matemática, como decía Einstein, "elemental", tal que de ella pudieran deducirse todas las demás, y no una fórmula para cada proceso o aplicación.

Mi objetivo está muy claro pero el procedimiento "si es que lo hay y está a mi alcance", no era inmediato, pero con la ayuda y dirección de mi director de tesis decidimos hacer un estudio exhaustivo de todas las ecuaciones en diferencias lineales de primer orden, y como es de suponer después de muchos fracasos encontramos por fin un nuevo método de resolver las ecuaciones en diferencias que pasamos a denominar método del factor anti-diferencia, que lo podíamos aplicar como producto o como cociente.

El primer paso en firme lo dimos, cuando observamos que al resolver las ecuaciones por el método del factor anti-diferencia, nos encontrábamos que para obtener el resultado final, se debía calcular un sumatorio, no siempre fácil, y que si se resolvía por el método tradicional, resolviendo primero la homogénea y luego la completa, al igualar ambas soluciones teníamos el resultado del cálculo del sumatorio, por lo cual, necesitábamos resolver las homogéneas, por lo que hemos introducido un cálculo de productorios elementales, que no lo son tanto por su expresión, pero sí lo son por la forma ingeniosa de calcularlos tal como se detalla en el capítulo correspondiente, en el cual se obtienen seis productorios generales, con sus correspondientes casos particulares y sin contar por supuesto con los cuatro productorios inmediatos por todos conocidos, siendo suficiente este abanico de productorios para resolver todas las aplicaciones que nos habíamos propuesto, y así seguir con el proceso del cálculo de sumatorios.

Para proceder a realizar un estudio racional de los sumatorios, a partir de las ecuaciones en diferencias, consideramos oportuno empezar haciendo que los coeficientes de las ecuaciones fuesen polinomios y clasificarlas según su grado, pero en un segundo planteamiento vimos que resultaba muy interesante que una misma ecuación en diferencias pudiéramos considerarla según el valor que tome la diferencia finita, que suele representarse por la letra h y que por defecto su valor es 1, si en vez de 1 le damos el valor constante a o el valor variable ax o bien $ax + b$ o bien un polinomio de segundo grado, se obtenían ecuaciones que la intuición nos tentaba plantear y resolver pero que nunca había visto planteadas y mucho menos resueltas, por lo que decidimos trabajar intensamente en algo nuevo sin saber por donde empezar hasta que al fin la paciencia y la constancia dieron su fruto, con la obtención de un "cambio de variable", que tal como demostramos nos convierte una ecuación en diferencias con $h = h(x)$ variable, en otra de la forma habitual de diferencia $h = 1$ que se puede resolver por los métodos tradicionales, para luego deshacer el cambio y tener la solución de la ecuación inicial, que tan inaccesible se presentaba.

Dada la finalidad del estudio sobre el cálculo de sumatorios, y no sobre resolución de ecuaciones que sería exhaustivo si tenemos en cuenta la variedad de los coeficientes de la ecuación, que pueden ser polinómicos de cualquier grado e incluso no necesariamente polinómicos, y además en cada ecuación la variedad de la diferencia h como hemos comentado anteriormente, ya que consideramos los casos de coeficientes polinómicos de primer grado pero con diferencias de hasta segundo grado, obteniéndose un total de 9 fórmulas generales de sumatorios, y en cada uno de ellos considerando los distintos casos particulares de las constantes que lo forman nos dan aproximadamente un centenar de sumatorios concretos, con lo que termina la primera parte de la tesis correspondiente al análisis dinámico discreto.

En la segunda parte de la tesis correspondiente a las aplicaciones financieras más corrientes, tendremos que utilizar la primera fórmula general de sumatorios obtenida y aplicada al caso particular de un polinomio de segundo grado, $at^2 + bt + c$ lo que nos permite con una sola fórmula calcular todos los casos habituales, y para ello basta considerar, por ejemplo, si las cuantías son constantes $a = b = 0$, o varían en progresión aritmética (hacemos $a = 0$), etc.

Las aplicaciones financieras que se realizan están ordenadas según que las cuantías sean constantes, variables en progresión aritmética, variables en progresión geométrica, variables polinómicamente, pero teniendo en cuenta si la función es de concavidad positiva o negativa, y distinguiendo si es creciente o decreciente. La parte más relevante es, que en cada aplicación de la fórmula general del sumatorio, que consta de dos términos, siendo el primero constante o independiente de t, y el segundo función de t, se han considerado las condiciones y las circunstancias para la anulación de la constante, para obtener así unas fórmulas simplificadas de la fórmula general, llegando en algunos casos a trabajar con unas expresiones tan simples, que es posible realizar las tablas financieras con todas las cifras enteras.

Cada aplicación financiera está complementada con un ejemplo numérico, que nos da una ilustración del caso que tratamos, y nos sirve a la vez de comprobación, ya que el resultado final de la operación está calculado paso a paso en la tabla y de una forma directa mediante la aplicación del sumatorio que nos da la fórmula.

1.2 Contenido científico

El contenido científico de la investigación es matemático, pero dirigido como aplicación a la valoración financiera. Para comentar brevemente este contenido comenzaremos con lo que podemos considerar la primera parte, que corresponde al análisis dinámico discreto que podemos realizar de las ecuaciones en diferencias finitas.

Las ecuaciones en diferencias finitas son por todos conocidas, siendo la primera aportación el método de resolución denominado del "factor anti-diferencia", y dado que tenemos dos posibilidades, la de tener un factor que actúa multiplicando, o bien otro factor que actúa dividiendo, los denominamos método del factor anti-diferencia del producto y método del factor anti-diferencia del cociente respectivamente, ambos son de cálculo semejante pero según la ecuación puede resultar más cómodo a la hora de resolverla, la utilización de uno u otro. Este método de resolución no es más que un camino nuevo para resolver ecuaciones resolubles por métodos tradicionales ya conocidos, pero aun así es interesante tener dos herramientas para resolver un mismo problema.

La primera ventaja de este nuevo camino de resolución, es el distinto punto de vista que nos aporta, el cual lo podemos utilizar para resolver las ecuaciones, y también para plantear fácilmente ecuaciones que luego sepamos resolver, y la segunda ventaja, (que puede resultar más interesante que la primera) es que no se necesitan saber fórmulas tan complejas de sumatorios y productorios para resolver las ecuaciones en diferencias como las utilizadas con el método tradicional, ahora nos bastará seguir un proceso mecánico y ordenado de cálculo fácil de recordar.

El siguiente grano de arena científica aportado, se denomina " cambio de variable" el cual nos permite resolver ecuaciones en diferencias finitas pero con incrementos variables discretos, en algunos tratados he visto mencionar la y_x y pedir que se calcule la y_{x+h} siendo $h = 3x$ como un simple ejemplo de cálculo aunque no exigen que se resuelva, pero mediante el " cambio de variable" sí que se pueden resolver las ecuaciones, ya que las transforma en otra con $h = 1$, que resolvemos cómodamente, para luego deshacer el cambio y obtener la solución de la ecuación inicial. Los ejercicios resueltos por este método son muy gratificantes e impresionantes, ya que las soluciones pueden ser expresiones matemáticas de gran complejidad, que hasta nos haga dudar, de que realmente sea la solución de la ecuación, pero basta con sustituirlos en ella, para comprobar la veracidad del proceso. Dado que el cambio no depende de la ecuación que queremos resolver sino de la expresión de $h(x)$, se ha incorporado una demostración que confirma lo expuesto.

Al resolver las ecuaciones en diferencias homogéneas, nos encontramos frente a un productorio que tenemos que calcular. Para poder resolverlo, y además fácilmente, hemos considerado un camino, que bien podríamos tratar de "curiosidad científica", y que como resulta muy difícil de explicar en abstracto, lo expondremos mediante la realización de un caso concreto.

La solución de la ecuación $y_{x+1} - f(x)y_x = 0$ es:

$$y_x = y_1 \prod_{t=1}^{x-1} f(t)$$

En resumen buscamos una función $y_x$tal que $f(x)y_x = y_{x+1}$ lo que quiere decir que si tomamos una expresión, por ejemplo, la del producto notable $(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$, y la comparamos, vemos que si es $y_x = a - 1$, debería ser $y_{x+1} = a^2 - 1$, para lo cual bastaría considerar una función, que al cambiar la $x \to x + 1$, quede el primer término elevado al cuadrado, tal como $y_x = A^{2^x} - 1$, $y_{x+1} = A^{2 \cdot 2^x} - 1$, por lo que:

Siendo $f(t) = A^{2^t} + 1$ teniendo el siguiente productorio:

$$\prod_{t=1}^{x-1} \left[A^{2^t} + 1 \right] = \frac{A^{2^x} - 1}{A^2 - 1}$$

Una vez calculados los productorios se pasa a calcular los sumatorios en tres etapas:

a) Se resuelve la ecuación en diferencias por el método tradicional.

b) Se calcula el factor anti-diferencia del producto.

c) Se resuelve la ecuación en diferencias, mediante el método del factor, y como el resultado se obtiene en función de un sumatorio, bastará igualar este resultado con el obtenido en el primer apartado para determinarlo[1].

La estructuración del cálculo de sumatorios está basada en la ecuación en diferencias:

$$y_{x+h} + p(x) y_x = q(x)$$

El primer criterio de ordenación, se ha basado en el polinomio $p(x)$, según sea $p(x) = k$; $p(x) = kx$ y en cada caso se ha tenido en cuenta como segundo criterio de ordenación que los valores de $h(x)$ fuesen:

$$h = a; \; h = ax; \; h = ax + b; \; h = ax^2 + bx + c \; ...$$

Teniendo con estos casos un buen repertorio de operaciones y sumatorios, que por supuesto se analizan y aplican a casos particulares obteniéndose fórmulas concretas de aplicación inmediata[2].

La segunda parte está dirigida sobre aplicaciones financieras, que utilizan los sumatorios obtenidos en el análisis de las ecuaciones en diferencias, todas las aplicaciones que se resuelven, ya están resueltas por la matemática financiera tradicional, la diferencia es que, mediante una sola fórmula obtenida en el cálculo de sumatorios, podemos resolver todos los casos habituales de obtención de capitales, y algunos casos especiales de planes de ahorro, y aunque consideremos suficiente poderlos tratar todos mediante un

[1] Como ejemplo veamos uno de los sumatorios más elementales que se obtienen por este procedimiento:
$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{2 \cdot 3^t}{5^{t-1}} = 35 - \frac{3^x + 4}{5^{x-2}}$.

[2] Tal como se puede apreciar en el ejemplo de la cita anterior que corresponde a una fórmula particular aplicada a un cálculo numérico.

único modelo, no deja de resultar cuando por lo menos asombroso, ver las enormes simplificaciones que se pueden obtener por el hecho de tratar un problema por un camino distinto, ya que en dicho camino nos encontramos con un modelo de sumatorio formado por dos términos, siendo el primero constante, el cual si se puede simplificar, nos conduce a un modelo realmente sencillo, y es aquí donde cabe resaltar, que el contenido científico es puro esfuerzo combinativo para poder llegar a tales simplificaciones.

Para tener una visión más clara del contenido científico de esta segunda parte, haremos caso de aquél dicho popular " una imagen vale más que cien palabras" y pondremos un ejemplo concreto de forma esquematizada[3].

Tenemos la fórmula general $(F1S)$.

$$C_n = \sum_{x=1}^{n} \frac{ax^2+bx+c}{k^x} =$$

$$= E + \frac{(1-k)^2(an^2+bn+c)+(k-k^2)(-2an-a-b)+2ak}{(1-k)^3k^n}$$

Con,
$E = -\frac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \frac{bk}{(1-k)^2} - \frac{c}{1-k}$
Si hacemos:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n} A\left[-(k-1)x^2+2kx-k\right]k^{n+1-x} =$$

$$= Ak^{n+1}\sum_{x=1}^{n} \frac{-(k-1)x^2+2kx-k}{k^x}$$

Aplicando $(F1S)$, para $a=-(k-1)$, $b=2k$, $c=-k$ se obtiene[4]:

$$C_n = Akn^2$$

[3] El ejemplo está completamente desarrollado y justificado en la sección Simplificación del sumatorio total, del capítulo 4.

[4] Si comparamos ambas expresiones se observa que $E=0$, y el resultado del sumatorio no puede ser más sencillo.

1.3 Metodología aplicada

La metodología científica utilizada en esta tesis, podríamos considerarla puramente matemática, dado el contenido de la misma y su desarrollo.

Puedo afirmar que cuando comencé mis trabajos de investigación iba sin orden ni concierto, ya que no sabía por dónde empezar ni qué resultados podía obtener, todo era confuso y sobre todo muy cuesta arriba, pero después cuando nos pusimos a utilizar el método del análisis de las ecuaciones, y decidimos ver si el método del factor integrante utilizado en las ecuaciones diferenciales exactas, podía funcionar en las ecuaciones en diferencias finitas, vimos que no funcionaba como queríamos, pero fue así, después del primer intento, y aunque sin saber exactamente porqué, probamos una modificación del fin: en vez de querer obtener una ecuación de las llamadas exactas, quisimos obtener una ecuación que fuese la diferencia de un producto, lo cual resultó y nos proporcionó ecuaciones en diferencias que se podrían resolver cómodamente.

Una vez obtenido el camino de la utilización del factor anti-diferencia, hacemos una realización completa de su desarrollo analizando y detallando todas las operaciones, y cuando se da por concluido el proceso teórico, pasamos a su contrastación con ejemplos concretos, verificando la veracidad de la teoría, y una vez verificada se procede a comparar los resultados obtenidos por este método, con los obtenidos por los caminos clásicos conocidos por todos, que como era de esperar, son coincidentes en cuanto a su resultado final o resolución de la ecuación, pero completamente diferentes en su ejecución, y sobre todo en su extensión, siendo mucho más breves por este nuevo método que por los clásicos.

El método como puede comprobarse, es un estudio exhaustivo de todas las circunstancias y factores que intervienen en el proceso, para así poder intentar descubrir caminos nuevos, lo que nos condujo a considerar que la constante discreta h, utilizada en las ecuaciones en diferencias no fuese de valor constante sino variable, de variable discreta, y sin dejar de considerar el rigor matemático de estas ecuaciones, nos hemos limitado a resolverlas, sin entrar en el análisis de sus posibles interpretaciones, lo cual no deja de ser un camino abierto para que lo intenten los otros matemáticos, cosa que deseo y espero. El poder resolver ecuaciones tan complejas nos permitió utilizar metodologías nuevas, como el cambio de variable en ecuaciones con $h(x)$ variable, que la convirtiesen en ecuaciones con $h(z) = 1$, constante, y aunque parezca que el cambio de variable no es un método nuevo, este sí lo es, ya que las ecuaciones son nuevas, y la metodología del cambio no es una simple sustitución, ya que es necesario resolver una ecuación para la obtención del mismo.

Una vez resueltas las ecuaciones en diferencias mediante el camino del factor integrante y por el camino tradicional, utilizo el método de comparación de las soluciones, basado en la unicidad de los resultados, para determinar los sumatorios obtenidos mediante el primer camino. Como por el camino tradicional se necesita resolver la parte homogénea de la ecuación, que se traduce en resolver un productorio, es por ello que se ha introducido un apartado anterior al cálculo de sumatorios, denominado cálculo de productorios.

Por este método, se han calculado hasta nueve sumatorios generales, con sus correspondientes casos particulares, para luego considerar si era posible que la función del sumatorio fuese un polinomio de segundo grado, para así poder abarcar todos los casos de aplicaciones financieras que en un principio estaba previsto resolver. Para cada caso particular, bastará hacer que se anulen, una o varias de las constantes del polinomio de segundo grado, según se trate de una función constante, variable en progresión aritmética etc., y así tendremos las expresiones generales de los sumatorios , necesarias para las aplicaciones financieras, dando así por finalizada la primera parte correspondiente al cálculo dinámico discreto.

En las aplicaciones financieras la metodología consiste, en aplicar la fórmula general del sumatorio, que contiene un polinomio de segundo grado, a todas las aplicaciones usuales de obtención de capitales, en las cuales es suficiente determinar el polinomio que mejor se adapta a cada caso, y para ordenarlas se ha considerado el grado del polinomio, ya sea de grado cero, uno, o dos.

En los polinomios de grado dos nos encontramos con una diversidad de casos, los cuales se han tenido que clasificar a su vez en los de concavidad positiva y de concavidad negativa, para luego distinguir, en cada situación, los posibles casos de crecimiento o de decrecimiento del polinomio.

Durante toda el desarrollo de las aplicaciones financieras, se ha tenido presente el espíritu de las mismas y el método matemático utilizado no ha dejado de velar por él, tal como puede apreciarse, ya que en todos los procesos realizados siempre se han expuesto las condiciones matemáticas para que las cuantías no fuesen negativas, ya que puede darse el caso, cuando la función es decreciente, y no está controlada, pero aunque desde el punto de vista matemático sea admisible, no lo es desde el financiero.

Dentro de esta metodología de clasificación, se ha tratado en cada apartado, si era posible, simplificar la expresión del sumatorio, determinando en qué casos se anulaba la constante del mismo, y puesto que se obtienen soluciones con ecuaciones de segundo grado, se ha tomado la decisión de analizar el discriminante, junto con el denominador para obtener así una buena simplificación, como podrá apreciarse en el desarrollo de la tesis. Por supuesto que tienen que existir distintos caminos de simplificación, pero después de varios intentos, consideramos que es suficiente, ya que sus resultados podemos considerarlos buenos, pero no dudamos de que en el futuro se puedan obtener otros.

Capítulo 2

ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

2.1 Introducción y descripción del capítulo

En este capítulo resolveremos las ecuaciones en diferencias lineales, por el método tradicional y por los dos métodos que nosotros proponemos y que denominaremos "Método del factor anti-diferencia del producto", y "Método del factor anti-diferencia del cociente" , y así, podremos comparar las distintas formas de resolver estas ecuaciones, pudiendo observarse que en los dos métodos que proponemos, no es necesario memorizar fórmulas complicadas, ya que basta con seguir un proceso para obtener unos resultados, y para tener una visión más clara resolveremos un ejemplo práctico por los tres métodos.

En las ecuaciones en diferencias $y_{x+h} + f(x)y_x = g(x)$ consideraremos que h no es una simple constante, sino que puede ser una variable función de $x \in N$, que representaremos por $h(x)$. Para resolver estas ecuaciones hemos deducido un mecanismo para determinar el cambio de variable de $x \to l(z)$, tal que la nueva ecuación sea de la forma habitual:

$$y_{z+1} + f\left(l(z)\right) y_z = g\left(l(z)\right)$$

La resolveremos por los métodos citados anteriormente, luego desharemos el cambio y tendremos la solución de la ecuación inicial. También, realizaremos un ejemplo en el que además de resolver la ecuación, se realiza una sencilla comprobación del resultado obtenido, y otra comprobación de que el cambio de variable $x \to l(z)$ no viene afectado si para su cálculo hacemos $y_x = x$ o $y_x = 2x$.

Una interpretación gráfica de lo que supone considerar h como una función de x en vez de constante, la podemos obtener si observamos que la ecuación en diferencias nos relaciona y_x y $y_{x+h(x)}$, lo cual quiere decir que al representar en el plano el conjunto de puntos $P_x = (x, x + h(x))$ obtenemos puntos que se encuentran sobre la ecuación $y = x+h(x)$, que según los casos será:

1. $h(x) = 1$.

   La recta $y = x+1$ recta de pendiente uno que corta al eje de ordenadas en el punto $y = 1$.

2. $h(x) = 2$.

   La recta $y = x+2$ recta de pendiente uno que corta al eje de ordenadas en el punto $y = 2$.

3. $h(x) = a$.

   La recta $y = x+a$ recta de pendiente uno que corta al eje de ordenadas en el punto $y = a$.

   Como podemos observar para h=constante obtenemos rectas paralelas de pendiente igual a 1 y que cortan al eje de ordenadas en el punto de altura $h(x) = h(0)$.

4. $h(x) = ax + b$.

   Las rectas serán $y = (a + 1)x + b$ de pendiente $a + 1$ y que cortan al eje de ordenadas en el punto de altura $h(0) = b$.

5. $h(x) = ax^2 + bx + c$.

   Las curvas de segundo grado que se obtienen serán parábolas de ecuación $y = ax^2 + (b + 1)x + c$ que cortan al eje de ordenadas en el punto $h(0) = c$.

La interpretación de las ecuaciones lineales tradicionales de primer orden ($h = 1$) es una recta, de pendiente uno, situada a una altura 1 en el eje de abscisas, y si consideramos $h = 2$ (que sería una ecuación de segundo orden) su interpretación gráfica, sigue siendo una recta de pendiente uno, y lo único que ha variado es su punto de corte con el eje, que en vez de ser el punto uno es el punto dos, y vemos que si h es constante, siempre tendremos rectas de pendiente uno que cortan al eje de ordenadas en el punto $y = h(0)$.

Al hacer h función de x, obtenemos rectas de cualquier pendiente y altura, o curvas de cualquier tipo, siendo pues una generalización del concepto de ecuación en diferencias, aunque siempre como característica general de todas las funciones de $h(x)$ tenemos que estas cortan al eje de ordenadas en el punto $y = h(0)$, siendo esta generalización de múltiples aplicaciones como se verá en el capítulo siguiente.

2.2 Resolución de ecuaciones lineales de 1^{er} orden

2.2.1 Método tradicional

Para resolver las ecuaciones en diferencias finitas, lineales de primer orden de la forma:

$$\Delta y_x + f(x)y_x = g(x)$$

Se empieza resolviendo la homogénea:

$$\Delta y_x + f(x)y_x = 0$$

siendo:

$$y_{x+1} - y_x + f(x)y_x = 0 \; ; \; y_{x+1} = [1 - f(x)]\, y_x$$

Dando valores a x desde $x \to 0 \ a \ x \to x$ y multiplicando miembro a miembro se obtiene como solución después de simplificar:

$$y_x = y_0 \prod_{t=0}^{x-1} [1 - f(t)]$$

A continuación se resuelve la ecuación completa:

$$\Delta y_x + f(x)y_x = g(x)$$

Mediante el cambio:

$$y_x = u_x v_x \; ; \; \Delta y_x = u_{x+1}\Delta v_x + v_x \Delta u_x$$

y sustituyendo en la ecuación completa anterior obtenemos:

$$u_{x+1}\Delta v_x + v_x \Delta u_x + f(x)u_x v_x = g(x)$$

$$v_x \left[\Delta u_x + f(x) u_x \right] + u_{x+1} \Delta v_x = g(x)$$

cuya solución se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \Delta u_x + f(x) u_x = 0 \\ u_{x+1} \Delta v_x = g(x) \end{cases}$$

La primera ecuación: $\Delta u_x + f(x) u_x = 0$ por ser homogénea tiene la solución:

$$u_x = u_0 \prod_{t=0}^{x-1} [1 - f(t)]$$

La segunda ecuación:

$$u_{x+1} \Delta v_x = g(x) \; ; \Delta v_x = \frac{g(x)}{u_{x+1}} = \frac{g(x)}{u_0 \prod\limits_{t=0}^{x} [1 - f(t)]}$$

que por ser,

$$v_x = v_0 + \Delta v_0 + \Delta v_1 + \Delta v_2 + \cdots + \Delta v_{x-1} \; ; \; v_x = v_0 + \sum_{s=0}^{x-1} \Delta v_s$$

y aplicándolo a la ecuación anterior se obtiene:

$$v_x = v_0 + \sum_{s=0}^{x-1} \Delta v_s = v_0 + \sum_{s=0}^{x-1} \frac{g(s)}{u_0 \prod\limits_{t=0}^{s} [1 - f(t)]}$$

Deshaciendo el cambio de la variable $y_x = u_x v_x$ tendremos:

$$y_x = u_x v_x = u_0 \prod_{t=0}^{x-1} [1 - f(t)] \left[v_0 + \sum_{s=0}^{x-1} \frac{g(s)}{u_0 \prod\limits_{t=0}^{s} [1 - f(t)]} \right]$$

con lo que nos queda la fórmula general[1]:

[1] Podemos encontrar un ejemplo resuelto con esta fórmula en la página 536 del libro de P. Alegre, etc. (1.991)

$$y_x = y_0 \prod_{t=0}^{x-1} [1 - f(t)] + \prod_{t=0}^{x-1} [1 - f(t)] \sum_{s=0}^{x-1} \frac{g(s)}{\prod_{t=0}^{s} [1 - f(t)]} \qquad (F1)$$

2.2.2 Método del factor anti-diferencia del producto

1. Introducción.

   Este método se utiliza para resolver ecuaciones en diferencias, lineales de primer orden de la forma:

   $$\Delta y_x + f(x) y_x = g(x)$$

   Llamaremos p_x al factor anti-diferencia tal, que tenga la propiedad de convertir el primer miembro en la diferencia exacta de un producto, o sea que al multiplicar la ecuación lineal por p_x tendremos:

   $$p_x \Delta y_x + p_x f(x) y_x = p_x g(x)$$

   debiendo ser el primer miembro:

   $$p_x \Delta y_x + p_x f(x) y_x = \Delta \left(p_{x-1} y_x \right) \qquad (a)$$

   Con lo que nos quedaría una ecuación de la forma:

   $$\Delta \left(p_{x-1} y_x \right) = p_x g(x)$$

   La solución general de una ecuación de la forma: $\Delta u_x = h(x)$ es:

   $$u_x = u_1 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + ... + \Delta u_{x-1} =$$

   $$= u_1 + \sum_{t=1}^{x-1} \Delta u_t = u_1 + \sum_{t=1}^{x-1} h(t)$$

   Siendo la solución general de la ecuación lineal antes definida:

   $$p_{x-1} y_x = p_0 y_1 + \sum_{t=1}^{x-1} p_t g(t) \qquad (SG1)$$

2. Cálculo del factor anti-diferencia del producto.

Para calcular el factor partimos de la igualdad (a):

$$p_x \Delta y_x + p_x f(x) y_x = \Delta \left(p_{x-1} y_x \right)$$

Desarrollando obtenemos:

$$p_x \Delta y_x + p_x f(x) y_x = p_x \Delta y_x + \left[p_x - p_{x-1} \right] y_x \ ; \ p_x f(x) = p_x - p_{x-1}$$

de donde,

$$p_x = \frac{p_{x-1}}{1 - f(x)}$$

Dando valores desde $x \to 1 \ a \ x \to x$ y multiplicando miembro a miembro y simplificando se obtiene como solución[2]:

$$p_x = p_0 \prod_{t=1}^{x} \frac{1}{1 - f(t)} \qquad (P1)$$

2.2.3 Método del factor anti-diferencia del cociente

1. Introducción.

   Este método se utiliza también para resolver ecuaciones en diferencias, lineales de primer orden de la forma:

$$\Delta y_x + f(x) y_x = g(x)$$

   Llamaremos q_{x+1} al factor anti-diferencia tal, que tenga la propiedad de convertir el primer miembro de la ecuación en la diferencia exacta de un cociente, o sea que al dividir la ecuación lineal por q_{x+1} tendremos:

$$\frac{\Delta y_x + f(x) y_x}{q_{x+1}} = \frac{g(x)}{q_{x+1}}$$

   debiendo ser el primer miembro:

$$\frac{\Delta y_x + f(x) y_x}{q_{x+1}} = \Delta \left(\frac{y_x}{q_x} \right)$$

[2] Ver los ejemplos 1 y 2 de la sección Aplicaciones de este capítulo.

Con lo que nos quedaría una ecuación de la forma:

$$\Delta\left(\frac{y_x}{q_x}\right) = \frac{g(x)}{q_{x+1}}$$

La solución general de esta ecuación es:

$$\frac{y_x}{q_x} = \frac{y_0}{q_0} + \sum_{t=0}^{x-1} \frac{g(t)}{q_{t+1}}$$

2. Cálculo del factor anti-diferencia del cociente.

   Para calcular el factor anti-diferencia del cociente basta resolver la homogénea:

$$\Delta y_x + f(x)y_x = 0$$

   siendo $y_{x+1} - y_x + f(x)y_x = 0$; $y_{x+1} = [1 - f(x)]\, y_x$

   Dando valores desde $x \to 0$ a $x \to x$, multiplicando miembro a miembro y simplificando, se obtiene como solución[3]:

$$y_{x+1} = q_{x+1} = y_0 \prod_{t=0}^{x} [1 - f(t)] \qquad (Q1)$$

3. Demostración del factor anti-diferencia del cociente.

Tenemos que demostrar que:

$$\Delta\left(\frac{y_x}{q_x}\right) = \frac{\Delta y_x + f(x)y_x}{q_{x+1}}$$

Operando y simplificando:

$$\Delta\left(\frac{y_x}{q_x}\right) = \Delta\left(\frac{y_x}{y_0 \prod\limits_{t=0}^{x-1} [1 - f(t)]}\right) =$$

[3] Ver el ejemplo 3 de la sección Aplicaciones de este capítulo.

$$= \frac{\Delta y_x y_0 \prod_{t=0}^{x-1} [1-f(t)] - y_x y_0 \Delta \prod_{t=0}^{x-1} [1-f(t)]}{y_0 \prod_{t=0}^{x-1} [1-f(t)]\, y_0 \prod_{t=0}^{x} [1-f(t)]} =$$

$$= \frac{\Delta y_x y_0 \prod_{t=0}^{x-1} [1-f(t)] - y_x y_0 \prod_{t=0}^{x} [1-f(t)] + y_x y_0 \prod_{t=0}^{x-1} [1-f(t)]}{y_0 \prod_{t=0}^{x-1} [1-f(t)]\, y_0 \prod_{t=0}^{x} [1-f(t)]}$$

Simplificando obtenemos:

$$\Delta \left(\frac{y_x}{q_x} \right) = \frac{\Delta y_x - y_x [1-f(x)] + y_x}{y_0 \prod_{t=0}^{x-1} [1-f(t)]} = \frac{\Delta y_x + f(x) y_x}{q_{x+1}}$$

2.3 Cambios de variable

1. Introducción.

   La expresión de una ecuación lineal en diferencias es:

   $$y_{x+h} + f(x) y_x = g(x)$$

   en la que por defecto h toma el valor 1 , aunque puede tomar el valor de cualquier constante. Pasemos a estudiar ahora un caso más general de la ecuación en la que h sea una función de x, que representaremos por $h(x)$, con lo que la ecuación lineal anterior se expresaría de la forma:

   $$y_{x+h(x)} + f(x) y_x = g(x) \qquad (CV1)$$

   Si por ejemplo, fuese $h(x) = x^2$ la ecuación sería:

   $$y_{x+x^2} + f(x) y_x = g(x)$$

Para resolver estas ecuaciones debemos realizar el cambio de la variable x por una función de z, que representaremos por $l(z)$, de tal forma que una vez efectuado el cambio nos quede una ecuación en su forma usual:

$$y_{z+1} + f\left(l(z)\right) y_z = g\left(l(z)\right)$$

Una vez resuelta por el método tradicional, se deshace el cambio y se obtiene la solución general de la ecuación $(CV1)$.

2. Cambio de variable para ecuaciones en diferencias con $h(x) \neq 1$.

Determinemos el cambio de la variable x por la función de z, tal como se ha dicho anteriormente.

Para determinar l_z tenemos:

$$y_x = s(x)$$

Llamemos $x + h(x) = t(x)$, por lo que:

$$\begin{cases} y_x = s(x) = y_z \rightarrow x = s^{-1}(y_z) = l_z \\ y_{x+h(x)} = s \circ t(x) = y_{z+1} \end{cases}$$

$$y_{z+1} = s \circ t \circ s^{-1}(y_z) \rightarrow s^{-1}(y_{z+1}) = t \circ s^{-1}(y_z)$$

Teniendo la relación:

$$l_{z+1} = t(l_z)$$

Bastará resolver esta ecuación, para determinar la función l_z, que depende de la función $t \rightarrow t(x) = x + h(x)$ y no depende de la función $y_x = s(x)$ de la ecuación en diferencias[4].

3. Cambio de variable usual.

Consideremos el cambio de variable de y_x por otra función z_x que suele ser de la forma:

$$z_x = f(x) y_x$$

[4] Ver el ejemplo 4 de la sección Aplicaciones de este capítulo.

Este cambio sencillo nos permite resolver muy fácilmente ecuaciones de la forma[5]:

$$f(x+1)y_{x+1} + f(x)y_x = g(x) \qquad (ACV)$$

Con el cambio:

$$z_x = f(x)y_x \rightarrow z_{x+1} = f(x+1)y_{x+1}$$

Obtenemos la ecuación:

$$z_{x+1} + z_x = g(x)$$

Ecuación de coeficientes constantes y de fácil solución.

2.4 Aplicaciones

1. La reserva matemática R_{t_s} en el caso habitual[6], en el que la distancia entre los diferimientos es periódica y constante, siendo el régimen financiero de valoración el de un interés compuesto a un tanto efectivo I_m con la misma periodicidad, se obtiene de la ecuación en diferencias:

$$\Delta R_{t_s} - I_m R_{t_s} = C(s+1)$$

En el supuesto de un préstamo, pagadero periódicamente con la misma periodicidad y por vencido con un término amortizativo constante a tenemos:

$$C(s+1) = \Delta R_{t_s} - I_m R_{t_s} = [C_{t_s}(1+I_m) - a - C_{t_s}] - I_m C_{t_s} = -a$$

por lo que nos queda la ecuación:

$$\Delta R_{t_s} - I_m R_{t_s} = -a$$

[5] Estas ecuaciones son más usuales de lo que cabría esperar.
Ver los ejemplos 5, 6, y 7 de la sección Aplicaciones de este capítulo.

[6] Podemos encontrar una amplia información de la reserva matemática en la página 185 del libro de Rodríguez Rodríguez, A. (1.974), también en la página 428 del libro de Levi, E. (1.973) y más recientemente en la página 85 del libro de Aparicio, A. ; Gallego, R. ; etc. (1.999).

Para resolverla empezaremos calculando el factor anti-diferencia del producto mediante $(P1)$ siendo $k = 1 + I_m$.

$$p_s = p_0 \prod_{t=1}^{s} \frac{1}{k} = \frac{p_0}{k^s}$$

Aplicamos la fórmula general $(SG1)$.

$$\frac{p_0}{k^{s-1}} R_{t_s} = p_0 R_{t_1} + \sum_{r=1}^{s-1} \frac{-p_0 a}{k^r} = p_0 R_{t_1} - p_0 a \left[\frac{1}{I_m} - \frac{1}{I_m k^{s-1}} \right]$$

Siendo $\sum_{r=1}^{s-1} \frac{1}{k^r} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)k^{s-1}}$ obtenemos:

$$R_{t_s} = R_{t_1} k^{s-1} - \frac{a}{k-1}(k^{s-1} - 1)$$

2. Resolución de la ecuación dinámica de la reserva matemática[7].

$$\Delta R_{t_r} - 0'01 R_{t_r} = -47.073'47$$

Siendo $R_{t_0} = 10^6$ y $k = 1'01$.

$$R_{t_r} = R_{t_1} 1'01^{r-1} - \frac{47.073'47}{0'01}(1'01^{r-1} - 1)$$

Para $r = 0$, nos da:

$$10^6 = R_{t_1} 1'01^{-1} + 47.073'47 \cdot 1'01^{-1}$$

Siendo:

$$R_{t_1} = 1'01 \cdot 10^6 - 47.073'47$$

Sustituyendo obtenemos la solución general de la ecuación:

$$R_{t_r} = 1'01^r \cdot 10^6 - \frac{47.073'47 \cdot (1'01^r - 1)}{0'01}$$

3. Resolver por los tres métodos la ecuación en diferencias:

$$\Delta y_x + \frac{(2x+1)\, y_x}{x^2 + 2x + 2} = \frac{3}{x^2 + 2x + 2}$$

[7] Planteado en la pág. 239 del libro de Terceño, A.; Sáez, J.(1.997).

(a) Método tradicional.

i. Resolvemos la ecuación homogénea:

$$\Delta y_x + \frac{(2x+1)\,y_x}{x^2+2x+2} = 0$$

De solución:

$$y_x = y_0 \prod_{t=0}^{x-1} \left[1 - \frac{2t+1}{t^2+2t+2}\right] = y_0 \prod_{t=0}^{x-1} \left[\frac{t^2+1}{t^2+2t+2}\right] =$$

$$= y_0 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{10}{17} \cdots \cdot \frac{x^2-2x+2}{x^2+1} = \frac{y_0}{x^2+1}$$

Siendo:

$$y_x = \frac{y_0}{x^2+1}$$

ii. Aplicamos la fórmula general[8] $(F1)$.

$$y_x = \frac{y_0}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \sum_{s=0}^{x-1} \frac{\frac{3}{s^2+2s+2}}{\prod_{t=0}^{s} \left[\frac{t^2+1}{t^2+2t+2}\right]} =$$

$$= \frac{y_0}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \left[\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}} + \cdots + \frac{\frac{3}{x^2+1}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdots \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}}\right] =$$

$$= \frac{y_0}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\left[3+3+3+\cdots+3\right] = \frac{y_0}{x^2+1} + \frac{3x}{x^2+1}$$

Siendo la solución general:

$$y_x = \frac{y_0}{x^2+1} + \frac{3x}{x^2+1}$$

[8] Obtenida en la sección 2.2.1.

(b) Método del factor anti-diferencia del producto.

i. Cálculo del factor anti-diferencia p_x del producto.
Aplicamos la fórmula[9] $(P1)$ siendo:

$$p_x = p_0 \prod_{t=1}^{x} \frac{1}{1 - \frac{2t+1}{t^2+2t+2}} = p_0 \prod_{t=1}^{x} \frac{t^2+2t+2}{t^2+1} =$$

$$= p_0 \frac{5}{2} \cdots \frac{x^2+2x+2}{x^2+1} = \frac{p_0}{2}\left(x^2+2x+2\right)$$

ii. Aplicamos la fórmula de la solución general:

$$p_{x-1} y_x = p_{-1} y_0 + \sum_{t=0}^{x-1} p_t g(t)$$

Siendo:

$$p_{x-1} = \frac{p_0}{2}\left[(x-1)^2 + 2(x-1) + 2\right] = \frac{p_0}{2}(x^2+1)\ ;\ p_{-1} = \frac{p_0}{2}$$

Sustituyendo:

$$\frac{p_0}{2}(x^2+1) y_x = \frac{p_0 y_0}{2} + \sum_{t=0}^{x-1} \frac{3p_0(t^2+2t+2)}{2(t^2+2t+2)}$$

Simplificando:

$$(x^2+1) y_x = y_0 + 3\sum_{t=0}^{x-1} 1 = y_0 + 3x$$

Obtenemos la solución general:

$$y_x = \frac{y_0}{x^2+1} + \frac{3x}{x^2+1}$$

(c) Método del factor anti-diferencia del cociente.

[9] Obtenida en la sección 2.2.2

i. Cálculo del factor anti-diferencia q_x del cociente.
   Resolvemos la ecuación homogénea:

$$\Delta y_x + \frac{(2x+1)\,y_x}{x^2+2x+2} = 0$$

De solución:

$$y_x = q_x = y_0 \prod_{t=0}^{x-1} \left[1 - \frac{2t+1}{t^2+2t+2}\right] = y_0 \prod_{t=0}^{x-1} \left[\frac{t^2+1}{t^2+2t+2}\right] =$$

$$= y_0 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{10}{17} \cdots \frac{x^2-2x+2}{x^2+1} = \frac{y_0}{x^2+1}$$

Siendo:

$$q_x = \frac{y_0}{x^2+1} \ ; \ q_{x+1} = \frac{y_0}{x^2+2x+2}$$

ii. Aplicamos la fórmula de la solución general:

$$\frac{y_x}{q_x} = \frac{y_0}{q_0} + \sum_{t=0}^{x-1} \frac{g(t)}{q_{t+1}}$$

$$\frac{y_x\left(x^2+1\right)}{y_0} = 1 + \sum_{t=0}^{x-1} \frac{3\left(t^2+2t+2\right)}{\left(t^2+2t+2\right) y_0} = 1 + \frac{3}{y_0} \sum_{t=0}^{x-1} 1 = 1 + \frac{3x}{y_0}$$

Obteniéndose la solución general:

$$y_x = \frac{y_0}{x^2+1} + \frac{3x}{x^2+1}$$

4. Resolver la ecuación:

$$y_{x+h(x)} - (x+1)y_x = 5x, \quad \textit{siendo} \quad h(x) = x^2 + x$$

(a) Cálculo del cambio de variable.
    Hacemos:

$$y_x = x \rightarrow y_{x+h(x)} = x^2 + 2x = y_x^2 + 2y_x$$

Por lo que tenemos que resolver la ecuación:

$$y_{z+1} = y_z^2 + 2y_z = (y_z + 1)^2 - 1$$

Al tener en cuenta que $\left(A^{2^z}\right)^2 = A^{2^{z+1}}$, se obtiene la solución:

$$y_z = A^{2^z} - 1$$

Realizando el cambio $x = A^{2^z} - 1$ tenemos:

$$y_{z+1} - A^{2^z} y_z = 5A^{2^z} - 5$$

(b) Resolución de la ecuación.

i. Resolvemos la homogénea.

$$y_{z+1} - A^{2^z} y_z = 0 \to y_z = KA^{2^z}$$

ii. Resolvemos la completa.
Planteamos $y_z = BzA^{2^z} + C$ calculando y_{z+1} sustituyendo e identificando se obtiene $B = 0,\ C = -5$ siendo la solución general de la ecuación:

$$y_z = KA^{2^z} - 5$$

(c) Deshacemos el cambio.
En la ecuación anterior $y_z = KA^{2^z} - 5$ por ser $x = A^{2^z} - 1$ al cambiar la $z \to x$ se obtiene:

$$y_x = K(x+1) - 5$$

(d) Comprobación.
Para $x = 1 \to h = 2$.
$(x+1)y_x = 2y_1 = 4K - 10$, $y_{x+h(x)} = y_3 = 4K - 5$.
Sustituyendo en $y_{x+h(x)} - (x+1)y_x = 5x$ cumple.
Para $x = 2 \to h = 6$.
$(x+1)y_x = 3y_2 = 9K - 15$, $y_{x+h(x)} = y_8 = 9K - 5$.
Sustituyendo en $y_{x+h(x)} - (x+1)y_x = 5x$ cumple.

(e) Cálculo del cambio para otras funciones de y_x.

i. Hacemos:

$$y_x = 2x \rightarrow y_{x+h(x)} = 2(x^2 + 2x) = \frac{y_x^2}{2} + 2y_x$$

Por lo que tenemos que resolver la ecuación:

$$y_{z+1} = \frac{y_z^2}{2} + 2y_z$$

de solución $y_z = 2\left(A^{2^z} - 1\right)$, por lo que $2x = 2\left(A^{2^z} - 1\right)$. Siendo,

$$x = A^{2^z} - 1$$

ii. Hacemos $y_x = x + 1 \rightarrow y_{x+h(x)} = x^2 + 2x + 1 = y_x^2$ por lo que tenemos que resolver la ecuación:

$$y_{z+1} = y_z^2$$

De solución:

$$y_z = A^{2^z}$$

Por lo que $x + 1 = A^{2^z}$, siendo:

$$x = A^{2^z} - 1$$

iii. Hacemos $y_x = x^2 \rightarrow y_{x+h(x)} = x^4 + 4x^3 + 4x^2 = y_x^2 + 4y_x^{\frac{3}{2}} + 4y_x$ por lo que resolveremos la ecuación:

$$y_{z+1} = y_z^2 + 4y_z^{\frac{3}{2}} + 4y_z$$

De solución:

$$y_z = A^{2^{z+1}} + 1 - 2A^{2^z} = \left(A^{2^z} - 1\right)^2$$

Por lo que $x^2 = \left(A^{2^z} - 1\right)^2$, siendo:

$$x = A^{2^z} - 1$$

5. Resolver mediante el cambio de variable la ecuación:

$$\Delta y_x + \frac{(2x+1)\, y_x}{x^2+2x+2} = \frac{3}{x^2+2x+2},$$

La cual es:

$$y_{x+1} - \frac{\left(x^2+1\right) y_x}{x^2+2x+2} = \frac{3}{x^2+2x+2}$$

Que la que podemos expresar[10]:

$$\left(x^2+2x+2\right) y_{x+1} - \left(x^2+1\right) y_x = 3$$

El cambio de variable es:

$$z_x = \left(x^2+1\right) y_x \to z_{x+1} = \left(x^2+2x+2\right) y_{x+1}$$

Por lo que resulta la ecuación en diferencias:

$$z_{x+1} - z_x = 3$$

(a) Polinomio característico $r - 1 = 0 \to r = 1 \to z_x = C$.

(b) Particular de la completa $z_x = Ax \to z_{x+1} = Ax + A$.
sustituyendo e identificando se obtiene $A = 3$.
La solución es:

$$z_z = C + 3x$$

Deshaciendo el cambio:

$$y_x = \frac{C+3x}{x^2+1}$$

Donde para $x = 0 \to C = y_0$.
La solución general es:

$$y_x = \frac{y_0+3x}{x^2+1}$$

[10] De la forma (ACV).

6. Resolver mediante el cambio de variable la ecuación[11]:

$$(x+1)y_{x+1} + xy_x = 2x - 3$$

Hacemos el cambio:

$$z_x = xy_x \rightarrow z_{x+1} = (x+1)y_{x+1}$$

Obteniéndose la ecuación en diferencias:

$$z_{x+1} + z_x = 2x - 3$$

(a) Polinomio característico $r + 1 = 0 \rightarrow r = -1 \rightarrow z_x = C(-1)^x$.

(b) Particular de la completa $z_x = Ax + B \rightarrow z_{x+1} = Ax + A + B$.
Sustituyendo e identificando se obtiene$\rightarrow$ $A = 1.B = -2$.
La solución es:

$$z_x = C(-1)^x + x - 2$$

Deshaciendo el cambio:

$$y_x = \frac{C(-1)^x}{x} + 1 - \frac{2}{x}$$

Donde para $x = 1 \rightarrow C = -1 - y_1$.
La solución general es:

$$y_x = -\frac{(y_1+1)(-1)^x}{x} + 1 - \frac{2}{x}$$

7. Algunos ejemplos a resolver mediante el cambio de variable[12].

La primera ecuación es:

$$y_{x+1} - xy_x = x!$$

La dividimos por $x!$, y obtenemos[13]:

$$\frac{y_{x+1}}{x!} - \frac{y_x}{(x-1)!} = 1$$

Hacemos el cambio:

$$z_x = \frac{y_x}{(x-1)!} \rightarrow z_{x+1} - z_x = 1$$

Para resolverla:

[11] Ejercicio de la pág. 280 del libro de Vegas, A; López Cachero, M. (1.981).
[12] Ejemplos de la pág. 536 y 539 del libro de Alegre, P.; González, L. etc..(1.991).
[13] Nos queda de la forma (ACV).

(a) Polinomio característico $r - 1 = 0 \rightarrow r = 1 \rightarrow z_x = C$.

(b) Particular de la completa $z_x = Ax \rightarrow z_{x+1} = Ax + A$.
Sustituyendo e identificando se obtiene $A = 1$.
La solución es:

$$z_x = C + x$$

Deshaciendo el cambio:

$$y_x = (x-1)!(C + x) = C(x-1)! + x!$$

La solución general buscada es:

$$y_x = C(x-1)! + x!$$

La segunda ecuación es:

$$y_{x+1} - (x+1)y_x = (x+1)!$$

La dividimos por $(x+1)!$, y obtenemos[14]:

$$\frac{y_{x+1}}{(x+1)!} - \frac{y_x}{x!} = 1$$

Hacemos el cambio:

$$z_z = \frac{y_x}{x!} \rightarrow z_{x+1} - z_x = 1$$

Su solución es:

$$y_z = C + x$$

Deshaciendo el cambio:

$$y_x = x!(C + x)$$

Cuya solución general es:

$$y_x = Cx! + x \cdot x!$$

[14] Nos queda de la forma (ACV).

Capítulo 3

PRODUCTORIOS Y SUMATORIOS

3.1 Introducción y descripción del capítulo

En este capítulo empezaremos con el cálculo de productorios, ya que los necesitaremos para resolver las ecuaciones lineales en diferencias, y para ello nada mejor que observar una ecuación homogénea con su correspondiente solución, siendo este el método más sencillo que nos permite calcular los productorios más triviales.

Si tenemos una ecuación lineal homogénea $y_{x+1} - f(x)y_x = 0$ su solución es de la forma :

$$y_x = y_1 \prod_{t=1}^{x-1} f(t)$$

Observando la ecuación y su solución vemos que tenemos que determinar productos $f(x)y_x$, de forma que al cambiar y_x por y_{x+1} nos de el producto anterior, y para mayor comodidad veamos un ejemplo:

Si hacemos $y_x = a - 1$, $f(x) = a + 1 \rightarrow f(x)y_x = a^2 - 1 = y_{x+1}$ como vemos bastaría hacer $y_x = A^{2^x} - 1$.

En el desarrollo del apartado "Cálculo de productorios", podremos ver diversos ejemplos con cálculos prácticos de fórmulas de productorios, con una metodología que la podríamos considerar "fácil", para determinar productorios "sencillos", aunque también podríamos decir que se trata de productorios "sencillos ", no por la apariencia, sino porque se han determinado de una forma "fácil".

También trataremos las ecuaciones en diferencias finitas lineales de la forma $y_{x+1} + p(x)y_x = q(x)$, a las que denominaremos ecuaciones lineales de coeficientes polinómicos, ya que $p(x)$ y $q(x)$ serán funciones polinómicas que para racionalizar su estudio las ordenaremos y clasificaremos según el polinomio $p(x)$.

El proceso de cálculo de los sumatorios lo realizaremos: a) a partir de la solución general y_x de la ecuación en diferencias, que la obtendremos por el sistema tradicional; b) a partir de la relación que dicha solución general tiene, con el factor anti-diferencia del producto p_x[1], que como viene en función de un sumatorio, nos permitirá calcular el valor del mismo, despejándolo de la identidad.

Tal como sabemos la fórmula $(SG1)$ es:

$$p_{x-1}y_x = p_0 y_1 + \sum_{t=1}^{x-1} p(t)q(t)$$

El factor anti-diferencia p_x se obtiene a parir de$(P1)$. Siendo:

$$p_{x-1} = p_0 \prod_{t=1}^{x-1} \frac{1}{1-f(t)}$$

La solución de la ecuación $\triangle y_x + f(x)y_x = 0$ es:

$$y_x^0 = C \prod_{t=1}^{x-1} (1 - f(t))$$

[1] Ver solución general $(SG1)$ de la sección 2.2.2.

Siendo y_x^0 la solución de la homogénea, para $C = 1$, obtenemos[2]:

$$p_{x-1} = \frac{p_0}{y_x^0}$$

3.2 Cálculo de productorios

Vamos a utilizar las relaciones obtenidas en el capítulo anterior, para calcular el resultado analítico de productorios de la forma:

$$\prod_{t=0}^{x-1} f(t)$$

para distintas expresiones de $f(t)$.

Los restantes productorios los ordenamos de menor a mayor, teniendo en cuenta el grado y el número de términos de las expresiones que nos permiten calcularlos.

Partiremos de las siguientes expresiones:

1. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
2. $(a - 1 + \frac{1}{a})(a + 1 + \frac{1}{a}) = a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}$.
3. $(a + 2 + \frac{1}{a})(a - 2 + \frac{1}{a}) = a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}$.
4. $(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b})(a + \frac{1}{a} - b - \frac{1}{b}) = a^2 + \frac{1}{a^2} - b^2 - \frac{1}{b^2}$.

---

[2] Esta expresión, también es aplicable, a la ecuación homogénea $y_{x+1} + f(x)y_x = 0$. Por otro lado:

$$u_x = u_1 + \sum_{t=1}^{x-1} h(t)$$

Lo que nos indica, que para $x = 1$,

$$\sum_{t=1}^{x-1} h(t) = 0$$

Aplicando $(SG1)$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} p_t q(t) = 0$$

5. $(a^2 + b^2 - ab)(a + b) = a^3 + b^3$.

6. $(a^2 + b^2 + ab)(a - b) = a^3 - b^3$.

3.2.1 Productorio de $A^{2^t} + B^{2^t}$

Llamemos[3] $f(t) = A^{2^t} + B^{2^t}$.

Hacemos:

$$y_x = A^{2^x} - B^{2^x} \rightarrow y_{x+1} = y_x f(x) = A^{2\cdot 2^x} - B^{2\cdot 2^x}$$

siendo la solución:

$$y_x = y_0 \prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2^t} + B^{2^t}\right]$$

por ser $y_0 = A - B$, despejando el productorio:

$$\prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2^t} + B^{2^t}\right] = \frac{A^{2^x} - B^{2^x}}{A - B} \qquad (P1)$$

Casos particulares:

- Para $B = 1 \rightarrow \prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2^t} + 1\right] = \frac{A^{2^x} - 1}{A - 1}$.
- Para $B = \frac{1}{C} \rightarrow \prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2^t} + C^{-2^t}\right] = \frac{A^{2^x} - C^{-2^x}}{A - \frac{1}{C}}$.

3.2.2 Productorio de $A^{2^t} - 1 + A^{-2^t}$

Llamemos[4] $f(t) = A^{2^t} - 1 + A^{-2^t}$.

Hacemos:

$$y_x = A^{2^x} + 1 + A^{-2^x} \rightarrow y_{x+1} = y_x f(x) = A^{2\cdot 2^x} + 1 + A^{-2\cdot 2^x}$$

[3] $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

[4] $(a - 1 + \frac{1}{a})(a + 1 + \frac{1}{a}) = a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}$

siendo la solución:

$$y_x = y_0 \prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2^t} - 1 + A^{-2^t}\right]$$

por ser $y_0 = A + 1 + A^{-1}$, despejando el productorio:

$$\prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2^t} - 1 + A^{-2^t}\right] = \frac{A\left[A^{2^x} + 1 + A^{-2^x}\right]}{A^2 + A + 1} \qquad (P2)$$

3.2.3 Productorio de $A^{2^t} + 2 + A^{-2^t}$

Llamemos[5] $f(t) = A^{2^t} + 2 + A^{-2^t}$.

Hacemos:

$$y_x = A^{2^x} - 2 + A^{-2^x} \rightarrow y_{x+1} = y_x f(x) = A^{2 \cdot 2^x} - 2 + A^{-2 \cdot 2^x}$$

siendo la solución:

$$y_x = y_0 \prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2^t} + 2 + A^{-2^t}\right]$$

por ser $y_0 = A - 2 + A^{-1}$, despejando el productorio:

$$\prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2^t} + 2 + A^{-2^t}\right] = \frac{A\left[A^{2^x} - 2 + A^{-2^x}\right]}{A^2 - 2A + 1} \qquad (P3)$$

3.2.4 Productorio de $A^{2^t} + A^{-2^t} + B^{2^t} + B^{-2^t}$

Llamemos[6] $f(t) = A^{2^t} + A^{-2^t} + B^{2^t} + B^{-2^t}$.

Hacemos:

$$y_x = A^{2^x} + A^{-2^x} - B^{2^x} - B^{-2^x}$$

---

[5] $(a + 2 + \frac{1}{a})(a - 2 + \frac{1}{a}) = a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}$

[6] $(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b})(a + \frac{1}{a} - b - \frac{1}{b}) = a^2 + \frac{1}{a^2} - b^2 - \frac{1}{b^2}$

$$y_{x+1} = y_x f(x) = A^{2\cdot 2^x} + A^{-2\cdot 2^x} - B^{2\cdot 2^x} - B^{-2\cdot 2^x}$$

siendo la solución:

$$y_x = y_0 \prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2^t} + A^{-2^t} + B^{2^t} + B^{-2^t} \right]$$

por ser $y_0 = A + A^{-1} - B - B^{-1}$, despejando el productorio:

$$\prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2^t} + A^{-2^t} + B^{2^t} + B^{-2^t} \right] = \frac{A^{2^x} + A^{-2^x} - B^{2^x} - B^{-2^x}}{A + A^{-1} - B - B^{-1}} \qquad (P4)$$

Casos particulares:
Para determinar los casos particulares resolveremos la ecuación:

$$B^{2^t} + B^{-2^t} = K$$

siendo $t \in N$, $K \in \Re$.

- La solución más sencilla la obtenemos para $B = 1, K = 2$.

Para $B = 1 \rightarrow B^{2^t} + B^{-2^t} = 2$, y sustituyendo en $(P4)$ nos da $(P3)$.

- La otra solución nada sencilla la obtenemos !!!si hacemos!!!.

$$B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1_{\lceil 120} \ , \ K = -1 \ , \ \forall t \in N$$

O también:

$$B = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1_{\lceil 240} \ , \ K = -1 \ , \ \forall t \in N$$

Sustituyendo en $(P4)$ obtenemos $(P2)$.

3.2.5 Productorio de $A^{2\cdot 3^t} + B^{2\cdot 3^t} - A^{3^t} B^{3^t}$

Llamamos[7] $f(t) = A^{2\cdot 3^t} + B^{2\cdot 3^t} - A^{3^t} B^{3^t}$.

[7] $(a^2 + b^2 - ab)(a + b) = a^3 + b^3$

Hacemos:

$$y_x = A^{3^x} + B^{3^x} \rightarrow y_{x+1} = y_x f(x) = A^{3\cdot 3^x} + B^{3\cdot 3^x}$$

siendo la solución:

$$y_x = y_0 \prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2\cdot 3^t} + B^{2\cdot 3^t} - A^{3^t} B^{3^t} \right]$$

por ser $y_0 = A + B$, despejando el productorio:

$$\prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2\cdot 3^t} + B^{2\cdot 3^t} - A^{3^t} B^{3^t} \right] = \frac{A^{3^x} + B^{3^x}}{A + B} \qquad (P5)$$

Casos particulares:

- Para $B = 1$ será $B^{2\cdot 3^t} = B^{3^t} = 1$,sustituyendo en $(P5)$ obtenemos:

$$\prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2\cdot 3^t} + 1 - A^{3^t} \right] = \frac{A^{3^x} + 1}{A + 1}$$

- Para $B = \dfrac{1}{A}$ será $B^{2\cdot 3^t} \rightarrow A^{-2\cdot 3^t}$, $B^{3^x} \rightarrow A^{-3^x}$.
  Sustituyendo en $(P5)$ obtenemos:

$$\prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2\cdot 3^t} + A^{-2\cdot 3^t} - 1 \right] = \frac{A^{3^x} + A^{-3^x}}{A + \frac{1}{A}}$$

3.2.6 Productorio de $A^{2\cdot 3^t} + B^{2\cdot 3^t} + A^{3^t} B^{3^t}$

Llamamos[8] $f(t) = A^{2\cdot 3^t} + B^{2\cdot 3^t} + A^{3^t} B^{3^t}$.

Hacemos:

$$y_x = A^{3^x} - B^{3^x} \rightarrow y_{x+1} = y_x f(x) = A^{3\cdot 3^x} - B^{3\cdot 3^x}$$

siendo la solución:

$$y_x = y_0 \prod_{t=0}^{x-1} \left[A^{2\cdot 3^t} + B^{2\cdot 3^t} + A^{3^t} B^{3^t} \right]$$

[8] $(a^2 + b^2 + ab)(a - b) = a^3 - b^3$

por ser $y_0 = A - B$, despejando el productorio:

$$\prod_{t=0}^{x-1}\left[A^{2\cdot 3^t} + B^{2\cdot 3^t} + A^{3^t}B^{3^t}\right] = \frac{A^{3^x} - B^{3^x}}{A - B} \qquad (P6)$$

Casos particulares:

- Si hacemos $B = 1$ será $B^{2\cdot 3^t} = B^{3^t} = 1$, sustituyendo en $(P6)$ obtenemos:

$$\prod_{t=0}^{x-1}\left[A^{2\cdot 3^t} + 1 + A^{3^t}\right] = \frac{A^{3^x} - 1}{A - 1}$$

- Si hacemos $B = \dfrac{1}{A}$ será $B^{2\cdot 3^t} \to A^{-2\cdot 3^t}, B^{3^x} \to A^{-3^x}$.

  Sustituyendo en $(P6)$ obtenemos:

$$\prod_{t=0}^{x-1}\left[A^{2\cdot 3^t} + A^{-2\cdot 3^t} + 1\right] = \frac{A^{3^x} - A^{-3^x}}{A - \frac{1}{A}}$$

3.3 Sumatorios mediante Ec. lineales de coeficientes polinómicos

En esta sección obtendremos las expresiones finales de los sumatorios de la forma:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{f(t)}{g(t)}$$

siendo $g(t) \neq 0, \forall t$.

Para ello será necesario utilizar las ecuaciones en diferencias de la forma:

$$y_{x+h(x)} + p(x)y_x = q(x)$$

Siendo $p(x)$ y $q(x)$ dos funciones polinómicas.

El estudio de las ecuaciones lineales lo realizamos según el grado de $p(x)$ y el de $h(x)$ con los siguientes apartados:

1. $p(x) = -k$.
2. $p(x) = -kx$; $h(x) = a$.
3. $p(x) = -kx$; $h(x) = ax$.
4. $p(x) = -kx$; $h(x) = ax + b$.
5. $p(x) = -kx$; $h(x) = ax^2 + bx + c$.
6. $p(x) = -kx$; $h(x) = x^n - x$.

3.3.1 Polinomio p(x)=-k ; (S1)

1. Introducción.

   El polinomio de grado cero $p(x)$, lo representamos por la constante[9] $-k$, quedando las ecuaciones en diferencias de la forma:

   $$y_{x+h(x)} - ky_x = q(x)$$

   Como al hacer el cambio de $x \to l(z)$, se obtiene $y_{z+1} - ky_z = q\left(l(z)\right)$, vemos que el primer miembro de la ecuación es independiente de la función $h(x)$, por lo que el estudio se reduce al cálculo del sumatorio correspondiente a las ecuaciones de la forma:

   $$y_{x+1} - ky_x = q(x)$$

2. Resolvemos la ecuación.

   Por ser lineal de coeficientes constantes la resolveremos por el método tradicional.

   (a) La solución de la homogénea es:

   $$y_x^0 = C\prod_{x=1}^{x-1} k = Ck^{x-1}$$

   (b) La solución particular de la completa la representaremos por $f(x)$. La solución general es:

   $$y_x = Ck^{x-1} + f(x)$$

[9] El valor $-k$ es por comodidad de signos en las operaciones sucesivas.

3. Cálculo del factor.

   Utilizaremos el factor anti-diferencia del producto, para $C = 1$.

$$p_{x-1} = \frac{p_0}{y_x^0} = \frac{p_0}{k^{x-1}}$$

4. Aplicación de la fórmula.

   Utilizando la fórmula $(SG1)$ obtenemos:

$$\frac{p_0}{k^{x-1}}\left[Ck^{x-1} + f(x)\right] = p_0 y_1 + \sum_{t=1}^{x-1} \frac{p_0 q(t)}{k^t}$$

   Simplificando, y haciendo $A = C - y_1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t} = A + \frac{f(x)}{k^{x-1}}$$

   Podemos generalizarlo mediante la expresión[10]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^{t-\alpha}} = A + \frac{f(x)}{k^{x-\alpha-1}} \qquad (S1)$$

   Donde:

   $f(x)$ es la solución particular de la completa[11].

   $A = \dfrac{-f(1)}{k^{-\alpha}}$.

3.3.2 Polinomio p(x)=-kx , h(x)=a ; (S2)

1. Introducción.

   El polinomio $p(x)$ de grado uno, lo representaremos por[12] $p(x) = -kx$.

   Para $h(x) = a$, tenemos la ecuación:

$$y_{x+a} - kxy_x = q(x)$$

[10] Ver los ejemplos 1 y 2 en la sección Aplicaciones de este capítulo.

[11] $y_{x+1} - ky_x = q(x)$

[12] El valor $-kx$ es por comodidad de signos al resolver la homogénea.

El polinomio completo $p(x) = -(kx + l)$,.lo dejaremos para posteriores estudios de investigación.

Ahora debemos obtener una ecuación equivalente pero con $h(x) = 1$, y para ello utilizaremos el método del cambio de variable.

$$y_x = x \rightarrow y_{x+a} = x + a = y_x + a$$

Resolvemos la ecuación lineal de coeficientes constantes:

$$y_{z+1} = y_z + a$$

Solución de la homogénea $y_z = C$.

Solución particular de la completa $y_z = az$.

Solución general[13] $y_z = C + az$.

Cambio $x = az$.

La nueva ecuación es[14]:

$$y_{z+1} - kazy_z = q(az)$$

Por lo que el estudio se reduce al cálculo del sumatorio correspondiente a las ecuaciones de la forma:

$$y_{x+1} - kxy_x = q(x)$$

2. <u>Resolvemos la ecuación.</u>

   (a) La solución de la homogénea es:

   $$y_x^0 = Ck^{x-1}(x-1)!$$

   (b) La solución particular de la completa la representamos por $f(x)$. La solución general es:

   $$y_x = Ck^{x-1}(x-1)! + f(x)$$

3. <u>Cálculo del factor.</u>

   Utilizaremos el factor anti-diferencia del producto, para $C = 1$.

   $$p_{x-1} = \frac{p_0}{y_x^0} = \frac{p_0}{k^{x-1}(x-1)!}$$

[13] Utilizamos en el cambio la solución más sencilla, para $C = 0$, que será $y_z = az$.

[14] Ver el ejemplo 3 en la sección Aplicaciones de este capítulo.

4. Aplicación de la fórmula.

   Utilizando la fórmula $(SG1)$ obtenemos:

$$\frac{p_0}{k^{x-1}(x-1)!}\left[Ck^{x-1}(x-1)!+f(x)\right]=p_0y_1+\sum_{t=1}^{x-1}\frac{p_0q(t)}{k^tt!}$$

   Simplificando y haciendo $A=C-y_1$ se obtiene[15]:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{q(t)}{k^tt!}=A+\frac{f(x)}{k^{x-1}(x-1)!} \qquad (S2)$$

   Donde:

   $f(x)$ es la solución particular de la completa[16].

   $A=-f(1)$.

3.3.3 Polinomio p(x)=-kx , h(x)=ax ; (S3)

1. Introducción.

   Para $h(x)=ax$, tenemos la ecuación:

$$y_{x+ax}-kxy_x=q(x)$$

   Ahora debemos obtener una ecuación equivalente pero con $h(x)=1$, y para ello utilizaremos el método del cambio de variable.

$$y_{z+1}=(a+1)y_z\rightarrow y_z=C(a+1)^z$$

   La más sencilla para $C=1$ nos da el cambio $x=(a+1)^z$.

   La nueva ecuación es[17]:

$$y_{z+1}-k(a+1)^zy_z=q\left((a+1)^z\right)$$

   Por lo que el estudio se reduce al cálculo del sumatorio correspondiente a las ecuaciones de la forma:

$$y_{x+1}-kA^xy_x=q(\ x)$$

[15] Ver el ejemplo 4 en la sección Aplicaciones de este capítulo.

[16] $y_{x+1}-kxy_x=q(x)$

[17] Ver el ejemplo 5 en la sección Aplicaciones de este capítulo.

2. Resolvemos la ecuación.

   (a) La solución de la homogénea es:

   $$y_x^0 = Ck^x A^{\frac{x^2-x}{2}}$$

   (b) La solución particular de la completa es $f(x)$.
   La solución general es:

   $$y_x = Ck^x A^{\frac{x^2-x}{2}} + f(x)$$

3. Cálculo del factor.

   Utilizaremos el factor anti-diferencia del producto, para $C = 1$.

   $$p_{x-1} = \frac{p_0}{y_x^0} = \frac{p_0}{k^x A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

4. Aplicación de la fórmula.

   Utilizando la fórmula $(SG1)$ obtenemos:

   $$\frac{p_0}{k^x A^{\frac{x^2-x}{2}}}\left[Ck^x A^{\frac{x^2-x}{2}} + f(x)\right] = p_0 y_1 + \sum_{t=1}^{x-1} \frac{p_0 q(t)}{k^{t+1} A^{\frac{t^2+t}{2}}}$$

   Multiplicando por $\dfrac{k}{p_0}$ y haciendo $M = Ck - y_1 k$ se obtiene[18]:

   $$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t A^{\frac{t^2+t}{2}}} = M + \frac{f(x)}{k^{x-1} A^{\frac{x^2-x}{2}}} \qquad (S3)$$

   Donde:

   $f(x)$ es la solución particular de la completa[19].

   $M = -f(1)$.

[18] Ver el ejemplo 6 en la sección Aplicaciones de este capítulo

[19] $y_{x+1} - kA^x y_x = q(x)$

3.3.4 Polinomio p(x)=-kx , h(x)=ax+b ; (S4)

1. Introducción.

   Para $h(x) = ax + b$ tendremos la ecuación:

   $$y_{x+ax+b} - kxy_x = q(x)$$

   Ahora debemos obtener una ecuación equivalente pero con $h(x) = 1$, y para ello utilizaremos el método del cambio de variable.

   $$y_{z+1} = (a+1)y_z + b$$

   Para resolverla:

   (a) Solución de la homogénea:

   $$y_z = C(a+1)^z$$

   (b) Solución particular:$y_z = -\frac{b}{a}$.
   Solución general:

   $$y_z = C(a+1)^z - \frac{b}{a}$$

   para $C = 1$ el cambio a realizar es:

   $$x = (a+1)^z - \frac{b}{a}$$

   La nueva ecuación es[20]:

   $$y_{z+1} - k\left[(a+1)^z - \frac{b}{a}\right] y_z = q\left[(a+1)^z - \frac{b}{a}\right]$$

   Por lo que el estudio se reduce al cálculo del sumatorio correspondiente a las ecuaciones de la forma:

   $$y_{x+1} - k(A^x - B)y_x = q(\ x)$$

2. Resolvemos la ecuación.

[20] Ver el ejemplo 7 en la sección Aplicaciones de este capítulo.

(a) La solución de la homogénea es:

$$y_x^0 = C \prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)$$

(b) La solución particular de la completa es $f(x)$.
La solución general es:

$$y_x = C \prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B) + f(x)$$

3. Cálculo del factor.

Utilizaremos el factor anti-diferencia del producto para $C = 1$.

$$p_{x-1} = \frac{p_0}{y_x^0} = \frac{p_0}{\prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)} \; (si\ x = 1) \rightarrow \prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B) = 1$$

4. Aplicación de la fórmula.

Utilizando la fórmula $(SG1)$ obtenemos:

$$\frac{p_0 \left[C \prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B) + f(x) \right]}{\prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)} = p_0 y_1 + \sum_{t=1}^{x-1} \frac{p_0 q(t)}{\prod_{s=1}^{t} k(A^s - B)}$$

Simplificando y haciendo $M = C - y_1$ se obtiene[21]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{\prod_{s=1}^{t} k(A^s - B)} = M + \frac{f(x)}{\prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)} \qquad (S4)$$

Donde:

$f(x)$ es la solución particular de la completa[22].

$M = -f(1)$.

[21] Ver el ejemplo 8 en la sección Aplicaciones de este capítulo.

[22] $y_{x+1} - k(A^x + B)y_x = q(x)$

3.3.5 Polinomio p(x)=-kx , $h(x) = ax^2 + bx + c$; (S5 a S10)

Introducción.

Para $h(x) = ax^2 + bx + c$ tendremos la ecuación:

$$y_{x+ax^2+bx+c} - kxy_x = q(x) \qquad (*)$$

Ahora debemos obtener una ecuación equivalente pero con $h(x) = 1$, y para ello utilizaremos el método del cambio de variable.

$$y_{z+1} = ay_z^2 + (b+1)y_z + c$$

Para resolverla observamos que $y_{z+1} \to y_z^2 + ...$, lo que nos viene a decir que si la variable z la incrementamos en una unidad, la función y_z debe quedar elevada al cuadrado, y esto lo podemos conseguir mediante dos ecuaciones:

$$y_z = C_1 A^{2^z} + C_2 \qquad (Ecu.1)$$

$$y_z = C_1 A^{2^z} + C_2 + C_1 A^{-2^z} \qquad (Ecu.2)$$

1. Teniendo en cuenta $(Ecu.1)$.

   Por comodidad de signos y parámetros tomaremos como expresión general:

   $$y_z = \frac{A^{2^z}}{a} - b \to y_{z+1} = ay_z^2 + 2aby_z + ab^2 - b$$

   Obteniendo que:

   $$h(x) = ax^2 + (2ab-1)x + ab^2 - b$$

   El cambio es[23]:

   $$x = \frac{A^{2^z}}{a} - b$$

[23] Ver el ejemplo 9 en la sección Aplicaciones de este capítulo.

Por lo que el estudio se reduce al cálculo del sumatorio correspondiente a las ecuaciones de la forma[24]:

$$y_{x+1} - k\left[\frac{A^{2^x}}{a} - b\right] y_x = q(x)$$

(a) Resolvemos la ecuación.

i. La solución de la homogénea es:

$$y_x^0 = C\prod_{t=1}^{x-1} k\left[\frac{A^{2^t}}{a} - b\right]$$

ii. La solución particular de la completa es $f(x)$.

La solución general es:

$$y_x = C\prod_{t=1}^{x-1} k\left[\frac{A^{2^t}}{a} - b\right] + f(x)$$

(b) Cálculo del factor.

Utilizaremos el factor anti-diferencia del producto, para $C = 1$.

$$p_{x-1} = \frac{p_0}{y_x^0} = \frac{p_0}{\prod_{t=1}^{x-1} k\left[\frac{A^{2^t}}{a} - b\right]}$$

Sí $x = 1 \rightarrow \prod_{t=1}^{x-1} k\left[\frac{A^{2^t}}{a} - b\right] = 1$

(c) Aplicación de la fórmula.

Utilizando la fórmula $(SG1)$ obtenemos:

$$\frac{p_0}{\prod_{t=1}^{x-1} k\left[\frac{A^{2^t}}{a} - b\right]}\left[C\prod_{t=1}^{x-1} k\left[\frac{A^{2^t}}{a} - b\right] + f(x)\right] =$$

[24] Aplicando el cambio a la ecuación inicial $(*)$.
Con dicha expresión obtendremos $(SE1)$, que nos dará los sumatorios $S5$ y $S6$, que corresponden a la ecuación $(Ecu1)$.

$$= p_0 y_1 + \sum_{t=1}^{x-1} \frac{p_0 q(t)}{\prod_{s=1}^{t} k \left[\frac{A^{2^s}}{a} - b\right]}$$

Simplificando y haciendo $M = C - y_1$ se obtiene[25]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{\prod_{s=1}^{t} k \left[\frac{A^{2^s}}{a} - b\right]} = M + \frac{f(x)}{\prod_{t=1}^{x-1} k \left[\frac{A^{2^t}}{a} - b\right]} \qquad (SE1)$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[26].
$M = -f(1)$.

(d) <u>Determinación de los sumatorios.</u>

i. Para[27] $a = 1$, $b = -1$.
Teniendo en cuenta el cálculo de productorios[28] y aplicándolos a $(SE1)$ obtenemos que:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)\left[A^2 - 1\right]}{k^t \left[A^{2 \cdot 2^t} - 1\right]} = M + \frac{f(x)\left[A^2 - 1\right]}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 1\right]}$$

Simplificando y haciendo $N = \dfrac{M}{A^2 - 1}$ se obtiene[29]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t \left[A^{2 \cdot 2^t} - 1\right]} = N + \frac{f(x)}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 1\right]} \qquad (S5)$$

Donde:

[25] Sólo calcularemos los sumatorios particulares, cuyos productorios sean fáciles de calcular.

[26] $y_{x+1} - k\left[\frac{A^{2^x}}{a} - b\right] y_x = q(x)$

[27] Se obtendría el mismo sumatorio que si hiciésemos $a = -\frac{1}{b}$, pero con un proceso más laborioso.

[28] $\prod_{t=1}^{x-1} k\left[A^{2^t} + 1\right] = k^{x-1}\frac{A^{2^x} - 1}{A^2 - 1}$

$\prod_{s=1}^{t} k\left[A^{2^s} + 1\right] = k^t \frac{A^{2 \cdot 2^t} - 1}{A^2 - 1}$

[29] Ver el ejemplo 10 en la sección Aplicaciones de este capítulo.

$f(x)$ es la solución de la completa[30].
$N = -\dfrac{f(1)}{A^2-1}$.

ii. Para $a = 1$, $b = 0$.
Teniendo en cuenta el cálculo de productorios[31] y aplicándolos a $(SE1)$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)A^2}{k^t A^{2\cdot 2^t}} = M + \frac{f(x)A^2}{k^{x-1}A^{2^x}}$$

Simplificando y haciendo $N = \dfrac{M}{A^2}$ obtenemos[32]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t A^{2\cdot 2^t}} = N + \frac{f(x)}{k^{x-1}A^{2^x}} \qquad (S6)$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[33].
$N = -\dfrac{f(1)}{A^2}$.

2. Teniendo en cuenta $(Ecu.2)$

Por comodidad de signos y parámetros tomaremos como expresión general:

$$y_z = \frac{A^{2^z}}{a} - \frac{b}{a} + \frac{A^{-2^z}}{a} = \frac{1}{a}\left[A^{2^z} - b + A^{-2^z}\right]$$

$$y_{z+1} = ay_z^2 + 2by_z + \frac{b^2-b-2}{a}$$

esto nos indica que cuando es:

$$h(x) = ax^2 + (2ab-1)x + \frac{b^2-b-2}{a}$$

---

[30] $y_{x+1} - k\left[A^{2^x}+1\right]y_x = q(x)$

[31] $\prod_{t=1}^{x-1} kA^{2^t} = k^{x-1}\dfrac{A^{2^x}}{A^2}$

$\prod_{s=1}^{t} kA^{2^s} = k^t \dfrac{A^{2\cdot 2^x}}{A^2}$

[32] Ver el ejemplo 11 en la sección de aplicaciones de este capítulo.

[33] $y_{x+1} - kA^{2^x}y_x = q(x)$

el cambio es[34]:

$$x = \frac{1}{a}\left[A^{2^z} - b + A^{-2^z}\right]$$

Por lo que el estudio se reduce al cálculo del sumatorio correspondiente a las ecuaciones de la forma[35]:

$$y_{x+1} - k\left[A^{2^x} - b + A^{-2^x}\right] y_x = q(x)$$

(a) <u>Resolvemos la ecuación.</u>

i. La solución de la homogénea es:

$$y_x^0 = C \prod_{t=1}^{x-1} k\left[A^{2^t} - b + A^{-2^t}\right]$$

ii. La solución particular de la completa es $f(x)$.
La solución general será:

$$y_x = C \prod_{t=1}^{x-1} k\left[A^{2^t} - b + A^{-2^t}\right] + f(x)$$

(b) <u>Cálculo del factor.</u>
Utilizaremos el factor anti-diferencia del producto para $C = 1$.

$$p_{x-1} = \frac{p_0}{y_x^0} = \frac{p_0}{\prod\limits_{t=1}^{x-1} k\left[A^{2^t} - b + A^{-2^t}\right]}$$

para $x = 1$ obtenemos:

$$\prod_{t=1}^{x-1} k\left[A^{2^t} - b + A^{-2^t}\right] = 1$$

(c) <u>Aplicación de la fórmula.</u>

[34] Ver el ejemplo 12 en la sección Aplicaciones de este capítulo.
[35] Aplicando el cambio a la ecuación inicial $(*)$.

Con dicha expresión obtendremos $(SE2)$, que nos dará los sumatorios de $S7$ a $S10$, correspondientes a la ecuación $(Ecu2)$.

Utilizando la fórmula $(SG1)$ obtenemos:

$$\frac{p_0}{\prod\limits_{t=1}^{x-1} k\left[A^{2^t}-b+A^{-2^t}\right]}\left[C\prod_{t=1}^{x-1} k\left[A^{2^t}-b+A^{-2^t}\right]+f(x)\right]=$$

$$=p_0y_1+\sum_{t=1}^{x-1}\frac{p_0q(t)}{\prod\limits_{s=1}^{t} k\left[A^{2^s}-b+A^{-2^s}\right]}$$

Simplificando y haciendo $M=C-Y_1$obtenemos[36]:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{q(t)}{\prod\limits_{s=1}^{t} k\left[A^{2^s}-b+A^{-2^s}\right]}=M+\frac{f(x)}{\prod\limits_{t=1}^{x-1} k\left[A^{2^t}-b+A^{-2^t}\right]} \qquad (SE2)$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[37].
$M=-f(1)$.

(d) Determinación de los sumatorios.

i. Para $b=0$.
Teniendo en cuenta la sección de los productorios[38] y aplicándolos a $(SE2)$ tendremos que:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{q(t)\left[A^4-1\right]}{k^tA^2\left[A^{2\cdot2^t}-A^{-2\cdot2^t}\right]}=M+\frac{f(x)\left[A^4-1\right]}{k^{x-1}A^2\left[A^{2^x}-A^{-2^x}\right]}$$

[36] Sólo calcularemos los sumatorios cuyos productorios sea fáciles de calcular.

[37] $y_{x+1}-k\left[A^{2^x}-b+A^{-2^x}\right]y_x=q(x)$

[38] $\prod\limits_{t=1}^{x-1} k\left[A^{2^t}+A^{-2^t}\right]=k^{x-1}\frac{\left[A^{2^x}-A^{-2^x}\right]A^2}{A^4-1}$

$\prod\limits_{s=1}^{t} k\left[A^{2^s}+A^{-2^s}\right]=k^t\frac{\left[A^{2\cdot2^t}-A^{-2\cdot2^t}\right]A^2}{A^4-1}$

Simplificando y haciendo $N = \dfrac{MA^2}{A^4 - 1}$ se obtiene[39]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t \left[A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}\right]} = N + \frac{f(x)}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - A^{-2^x}\right]} \qquad (S7)$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[40].
$N = -\dfrac{f(1)}{A^2 - A^{-2}}$.

ii. Para $b = 1$.
Teniendo en cuenta el cálculo de productorios[41] y aplicándolos a $(SE2)$, tendremos que:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)\left[A^4 + A^2 + 1\right]}{k^t A^2 \left[A^{2\cdot 2^t} + 1 + A^{-2\cdot 2^t}\right]} = M + \frac{f(x)\left[A^4 + A^2 + 1\right]}{k^{x-1} A^2 \left[A^{2^x} + 1 + A^{-2^x}\right]}$$

Simplificando y haciendo $N = \dfrac{MA^2}{A^4 + A^2 + 1}$ se obtiene[42]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t \left[A^{2\cdot 2^t} + 1 + A^{-2\cdot 2^t}\right]} = N + \frac{f(x)}{k^{x-1}\left[A^{2^x} + 1 + A^{-2^x}\right]} \qquad (S8)$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[43].
$N = -\dfrac{f(1)}{A^2 + 1 + A^{-2}}$.

iii. Para $b = -2$.

---

[39] Ver el ejemplo 13 en la sección de aplicaciones de este capítulo.

[40] $y_{x+1} - k\left[A^{2^x} + A^{-2^x}\right] y_x = q(x)$

[41] $\prod_{t=1}^{x-1} k\left[A^{2^s} - 1 + A^{-2^s}\right] = k^{x-1}\dfrac{\left[A^{2^x} + 1 + A^{-2^x}\right]A^2}{A^4 + A^2 + 1}$

$\prod_{s=1}^{t} k\left[A^{2^s} - 1 + A^{-2^s}\right] = k^t \dfrac{\left[A^{2\cdot 2^t} + 1 + A^{-2\cdot 2^t}\right]A^2}{A^4 + A^2 + 1}$

[42] Ver el ejemplo 14 en la sección Aplicaciones de este capítulo.

[43] $y_{x+1} - k\left[A^{2x} - 1 + A^{-2^x}\right] y_x = q(x)$

Teniendo en cuenta el cálculo de productorios[44] y aplicándolos a $(SE2)$tendremos que:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)\left[A^4-2A^2+1\right]}{k^t A^2\left[A^{2\cdot 2^t}-2+A^{-2\cdot 2^t}\right]} = M + \frac{f(x)\left[A^4-2A^2+1\right]}{k^{x-1}A^2\left[A^{2^x}-2+A^{-2^x}\right]}$$

Simplificando y haciendo $N = \dfrac{MA^2}{A^4-2A^2+1}$ se obtiene[45]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t}-2+A^{-2\cdot 2^t}\right]} = N + \frac{f(x)}{k^{x-1}\left[A^{2^x}-2+A^{-2^x}\right]} \tag{S9}$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[46].
$N = -\dfrac{f(1)}{A^2-2+A^{-2}}$.

iv. Consideremos el caso en que no puede obtenerse dando un valor al parámetro b, pero que podamos aplicar la fórmula $(SE2)$ ya que los productorios[47] que tendremos que resolver son de cálculo fácil.

$$y_{x+1} - k\left[A^{2^x}+B^{2^x}\right]y_x = q(x)$$

Aplicando $(SE2)$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)\left[A^2-B^2\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t}-B^{2\cdot 2^t}\right]} = M + \frac{f(x)\left[A^2-B^2\right]}{k^{x-1}\left[A^{2^x}-B^{2^x}\right]}$$

---

[44] $\prod_{t=1}^{x-1} k\left[A^{2^t}+2+A^{-2^t}\right] = k^{x-1}\dfrac{\left[A^{2^x}-2+A^{-2^x}\right]A^2}{A^4-2A^2+1}$

$\prod_{s=1}^{t} k\left[A^{2^s}+2+A^{-2^s}\right] = k^t\dfrac{\left[A^{2\cdot 2^t}-2+A^{-2\cdot 2^t}\right]A^2}{A^4-2A^2+1}$

[45] Ver el ejemplo 15 en la sección Aplicaciones de este capítulo.

[46] $y_{x+1} - k\left[A^{2^x}+2+A^{-2^x}\right]y_x = q(x)$

[47] $\prod_{t=1}^{x-1} k\left[A^{2^t}+B^{2^t}\right] = \dfrac{k\left[A^{2^x}-B^{2^x}\right]}{A^2-B^2}$

$\prod_{s=1}^{t} k\left[A^{2^s}+B^{2^s}\right] = \dfrac{k\left[A^{2\cdot 2^t}-B^{2\cdot 2^t}\right]}{A^2-B^2}$

Simplificando y haciendo $N = \dfrac{M}{A^2 - B^2}$ se obtiene[48]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t \left[A^{2 \cdot 2^t} - B^{2 \cdot 2^t}\right]} = N + \frac{f(x)}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - B^{2^x}\right]} \qquad (S10)$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[49].
$N = -\dfrac{f(1)}{A^2 - B^2}$.

3.3.6 Polinomio p(x)=-kx, $h(x) = x^n - x$; (S11)

1. Introducción.

   Para $h(x) = x^n - x$ tendremos la ecuación:

   $$y_{x^n} - kxy_x = q(x)$$

   Ahora debemos obtener una ecuación equivalente pero con $h(x) = 1$, y para ello utilizaremos el método del cambio de variable.

   $$y_{z+1} = y_z^n$$

   de solución inmediata:

   $$y_z = A^{n^z}$$

   el cambio es[50]:

   $$x = A^{n^t}$$

   La nueva ecuación es:

   $$y_{x+1} - kA^{n^x} y_x = q(x)$$

   Por lo que el estudio se reduce al cálculo del sumatorio correspondiente a esta ecuación.

[48] Ver el ejemplo 16 en la sección Aplicaciones de este capítulo.
[49] $y_{x+1} - k\left[A^{2^x} + B^{2^x}\right] y_x = q(x)$
[50] Ver el ejemplo 17 en la sección Aplicaciones de este capítulo.

2. Resolvemos la ecuación.

   (a) La solución de la homogénea es:

$$y_x^0 = C\prod_{t=1}^{x-1} kA^{n^t} = Ck^{x-1}A^{\frac{n^x-n}{n-1}}$$

   (b) La solución particular de la completa es $f(x)$.
   La solución general es:

$$y_x = Ck^{x-1}A^{\frac{n^x-n}{n-1}} + f(x)$$

   (c) Cálculo del factor.
   Utilizaremos el factor anti-diferencia del producto para $C = 1$.

$$p_{x-1} = \frac{p_0}{y_x^0} = \frac{p_0}{k^{x-1}A^{\frac{n^x-n}{n-1}}}$$

   (d) Aplicando la fórmula $(SG1)$ obtenemos:

$$\frac{p_0}{k^{x-1}A^{\frac{n^x-n}{n-1}}}\left[Ck^{x-1}A^{\frac{n^x-n}{n-1}} + f(x)\right] = p_0y_1 + \sum_{t=1}^{x-1}\frac{p_0q(t)}{k^tA^{\frac{n^{t+1}-n}{n-1}}}$$

   dividiendo por $p_0A^{\frac{n}{n-1}}$ y haciendo $M = \frac{C-y_1}{A^{\frac{n}{n-1}}}$ se obtiene[51]:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{q(t)}{k^tA^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}} = M + \frac{f(x)}{k^{x-1}A^{\frac{n^x}{n-1}}} \qquad (S11)$$

   Donde:
   $f(x)$ es la solución particular de la completa[52].
   $M = -\dfrac{f(1)}{A^{\frac{n}{n-1}}}$.

[51] Ver el ejemplo 18 en la sección Aplicaciones de este capítulo.
[52] $y_{x+1} - kA^{n^x}y_x = q(x)$

3.4 Fórmula universal de los sumatorios

Intentemos encontrar una fórmula "universal", que nos permita obtener todas las fórmulas de sumatorios obtenidas anteriormente, y otras muchas que no están determinadas en esta tesis, para ello bastará tener en cuenta la relación:

$$h(x+1)y_{x+1} - h(x)y_x = s(x)$$

que también podemos expresar:

$$y_{x+1} - \frac{h(x)}{h(x+1)}y_x = \frac{s(x)}{h(x+1)}$$

que se resuelve en las etapas siguientes:

1. Solución de la homogénea.

   Dando valores a x , multiplicando y simplificando obtenemos:

   $$y_x^0 = \frac{h(0)y_0}{h(x)} = \frac{B}{h(x)}$$

2. Llamemos $l(x)$ a la solución particular de la completa.

   La solución general será:

   $$y_x = \frac{B}{h(x)} + l(x)$$

3. Cálculo del factor anti-diferencia del producto para $B = 1$.

   $$p_{x-1} = \frac{p_0}{y_x^0} = p_0 h(x)$$

4. Aplicamos $(SG1)$.

   $$p_0 h(x)\left[\frac{B}{h(x)} + l(x)\right] = p_0 y_1 + \sum_{t=1}^{x-1} p_0 s(t)$$

   Simplificando y haciendo $M = B - y_1$ se obtiene[53]:

   $$\sum_{t=1}^{x-1} s(t) = M + h(x)l(x) \qquad (SU)$$

[53] Ver los ejemplos 19 y 20 en la sección Aplicaciones de este capítulo.

Donde:

$l(x)$ es la solución particular de la completa[54].

$M = -h(1)l(1)$.

3.5 Aplicaciones particulares de los sumatorios

3.5.1 Sumatorio $q(t)/k^t$

Tenemos la expresión general del sumatorio $(S1)$, para $\alpha = 0$.

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t} = A + \frac{f(x)}{k^{x-1}}$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[55].
$A = \dfrac{-f(1)}{k^{-\alpha}}$.
Supongamos el caso particular $k = 1$ y tendremos[56]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} g(t) = -f(1) + f(x)$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[57].

Determinemos ahora el caso particular que nos interesa en que $q(t)$ sea un polinomio de segundo grado de la forma $at^2 + bt + c$.

Tenemos que empezar haciendo $y_x = Mx^2 + Nx + P$ y luego, en función del resultado obtenido, realizar un segundo cambio que nos permita obtener $q(t)$ de la forma deseada:

Con[58]:

$$q(x) = (M - KM)x^2 + (2M + N - kN)x + M + N + P - kP$$

[54] $h(x+1)y_{x+1} - h(x)y_x = s(x)$
[55] $y_{x+1} - ky_x = q(x)$
[56] Ver el ejemplo 21 en la sección Aplicaciones de este capítulo.
[57] $y_{x+1} - y_x = g(x)$
[58] Una vez calculada y_{x+1} sustituimos en la completa y despejamos $q(x)$.

Realicemos ahora el segundo cambio para $k \neq 1$.

$$\begin{cases} a = M - kM \rightarrow M = \dfrac{a}{1-k} \\ b = 2M + N - k \rightarrow N = \dfrac{b(1-k) - 2a}{(1-k)^2} \\ c = M + N + P - kP \rightarrow P = \dfrac{c(1-k)^2 - (a+b)(1-k) + 2a}{(1-k)^3} \end{cases}$$

Con lo que nos quedará:

$$q(t) = at^2 + bt + c$$

$$y_x = f(x) = \frac{a}{1-k}x^2 + \frac{b(1-k) - 2a}{(1-k)^2}x +$$

$$+ \frac{c(1-k)^2 - (a+b)(1-k) + 2a}{(1-k)^3}$$

Operando:

$$f(x) = \frac{(1-k)^2(ax^2 + bx + c) + (1-k)(-2ax - a - b) + 2a}{(1-k)^3}$$

Si sustituimos en $(S1)$ para $\alpha = 0$ obtenemos[59]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt + c}{k^t} = A + \frac{(1-k)^2(ax^2 + bx + c) + (1-k)(-2ax - a - b) + 2a}{k^{x-1}(1-k)^3} \tag{S1P}$$

Siendo el valor de la constante:
$A = -f(1) = -\dfrac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \dfrac{bk}{(1-k)^2} - \dfrac{c}{1-k}$

[59] Ver el ejemplo 22 en la sección Aplicaciones de este capítulo.
En el Anexo $(S1P)$ están las expresiones simplificadas de este sumatorio.

3.5.2 Sumatorio $q(t)/k^t t!$

Tenemos la expresión general del sumatorio ($S2$).

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t t!} = A + \frac{f(x)}{k^{x-1}(x-1)!}$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[60].
$A = -f(1)$.

Determinemos el caso particular en que $q(t)$ sea un polinomio de tercer grado de la forma at^3+bt^2+ct+d, para ello tenemos que empezar haciendo:

$$y_x = Mx^2 + Nx + P$$

$$y_{x+1} = Mx^2 + 2Mx + M + Nx + N + P$$

Para que el polinomio $q(x)$ quede más sencillo realizamos el cambio:

$$\left\{ \begin{array}{c} a = -kM \rightarrow M = -\dfrac{a}{k} \\ b = M - kN \rightarrow N = -\dfrac{a+bk}{k^2} \\ c = 2M + n - kP \rightarrow P = -\dfrac{2ak+a+bk+ck^2}{k^3} \end{array} \right.$$

Por lo que el sumatorio nos quedará[61]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^3+bt^2+ct-\left[\dfrac{a+b+c}{k}+\dfrac{3a+b}{k^2}+\dfrac{a}{k^3}\right]}{k^t t!} = \\ = A - \frac{\dfrac{a}{k}x^2 + \dfrac{a+bk}{k^2}x + \dfrac{2ak+a+bk+ck^2}{k^3}}{k^{x-1}(x-1)!} \qquad (S2P)$$

Siendo el valor de la constante:
$A = -f(1) = \dfrac{(a+b+c)k^2+(3a+b)k+a}{k^3}$

[60] $y_{x+1} - kxy_x = q(x)$
[61] En el Anexo ($S2P$) están las expresiones simplificadas de este sumatorio.

3.5.3 Sumatorio $q(t)/k^tA^{\frac{t^2+t}{2}}$

Tenemos la expresión general del sumatorio ($S3$).

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{q(t)}{k^tA^{\frac{t^2+t}{2}}}=E+\frac{f(x)}{k^{x-1}A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[62].
$E=-f(1)$
Supuesto:

$$y_x=Mx^2+Nx+P$$

$$y_{x+1}=Mx^2+2Mx+M+Nx+N+P$$

Para que el polinomio $q(x)$ quede más sencillo realizamos el cambio:

$$\begin{cases} M=a \\ 2M+N=b\rightarrow N=b-2a \\ M+N+P=c\rightarrow P=a-b-c \end{cases}$$

Con lo que el sumatorio nos quedará[63]:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{x-1}\frac{at^2+bt+c-\left[at^2+(b-2a)t+a-b+c\right]kA^t}{k^tA^{\frac{t^2+t}{2}}}&=\\ =E+\frac{ax^2+(b-2a)x+a-b+c}{k^{x-1}A^{\frac{x^2-x}{2}}}\end{aligned}\qquad (S3P)$$

Siendo el valor de la constante:
$E=-f(1)=-c$.

[62] $y_{x+1}-kA^xy_x=q(x)$
[63] En el Anexo ($S3P$) están las expresiones simplificadas de este sumatorio.

3.5.4 Sumatorio $q(t)/\prod_{s=1}^{t} k(A^s - B)$

Tenemos la expresión general del sumatorio $(S4)$.

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{\prod_{s=1}^{t} k(A^s - B)} = E + \frac{f(x)}{\prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)}$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[64].
$E = -f(1)$.

1. Supuesto.

$$y_x = Mx^2 + Nx + P$$

$$y_{x+1} = Mx^2 + 2Mx + M + Nx + N + P$$

Para que el polinomio $q(x)$ quede más sencillo realizamos el cambio:

$$\left\{ \begin{array}{c} M = a \\ 2M + N = b \rightarrow N = b - 2a \\ M + N + P = c \rightarrow P = a - b - c \end{array} \right.$$

Con lo que el sumatorio nos quedará[65]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt + c - \left[at^2 + (b-2a)t + a - b + c\right] k\left(A^t - B\right)}{\prod_{s=1}^{t} k(A^s - B)} =$$
$$= E + \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b + c}{\prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)} \tag{S4P}$$

Siendo el valor de la constante:
$E = -f(1) = -c$.

[64] $y_{x+1} - k(A^x + B)y_x = q(x)$
[65] En el Anexo $(S4P)$ están las expresiones simplificadas de este sumatorio.

2. Supuesto.

$$y_x = A^{\frac{x^2-x}{2}}$$

$$y_{x+1} = A^{\frac{x^2+x}{2}}$$

Con lo que el sumatorio nos quedará[66]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{(1-k)A^{\frac{t^2+t}{2}} + kBA^{\frac{t^2-t}{2}}}{\prod_{s=1}^{t} k(A^s - B)} = E + \frac{A^{\frac{x^2+x}{2}}}{\prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)} \qquad (S4Pa)$$

Siendo el valor de la constante:
$E = -f(1) = -1$.

3. Supuesto.

$$y_x = A^{-x}$$

$$y_{x+1} = A^{-x-1}$$

Con lo que el sumatorio nos quedará[67]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{\left(kB + \frac{1}{A}\right) A^{-t} - k}{\prod_{s=1}^{t} k(A^s - B)} = E + \frac{A^{-x}}{\prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)} \qquad (S4Pb)$$

Siendo el valor de la constante:
$E = -f(1) = -\dfrac{1}{A}$.

[66] En el apartado 9 del Anexo ($S4P$) está la expresión simplificada de este sumatorio.
[67] En los apartados 10 y 11 del Anexo ($S4P$) están las expresiones simplificadas de este sumatorio.

3.5.5 Sumatorio $q(t)/k^t(A^{2 \cdot 2^t} - 1)$

Tenemos la expresión general del sumatorio ($S5$).

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t \left[A^{2 \cdot 2^t} - 1\right]} = E + \frac{f(x)}{k^{x-1} \left[A^{2^x} - 1\right]}$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[68].
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2 - 1}$.

1. Supuesto.

$$y_x = Mx^2 + Nx + P$$

$$y_{x+1} = Mx^2 + 2Mx + M + Nx + N + P$$

Para que el polinomio $q(x)$ quede más sencillo realizamos el cambio:

$$\begin{cases} M = a \\ 2M + N = b \to N = b - 2a \\ M + N + P = c \to P = a - b - c \end{cases}$$

Con lo que el sumatorio nos quedará[69]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt + c - k\left[A^{2^t} + 1\right]\left[at^2 + (b-2a)t + a - b + c\right]}{k^t\left[A^{2 \cdot 2^t} - 1\right]} = \\ = E + \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 1\right]} \qquad (S5P)$$

Siendo el valor de la constante:
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2 - 1} = -\dfrac{c}{A^2 - 1}$.

[68] $y_{x+1} - k\left[A^{2^x} + 1\right] y_x = q(x)$

[69] En el Anexo ($S5P$) están las expresiones simplificadas de este sumatorio.

2. Supuesto:

$$k = \frac{1}{2}$$

$$y_x = A^{-2^x}$$

$$y_x = A^{-2\cdot 2^x}$$

Si sustituimos en $(S5)$ [70], multiplicamos por 2 y cambiamos de signo se obtiene[71]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{2^t \left[2A^{-2\cdot 2^t} + A^{-2^t}\right]}{A^{2^t} + 1} = E - \frac{2^x A^{-2^x}}{A^{2^x} - 1} \qquad (S5Pa)$$

Siendo el valor de la constante:
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2 - 1} = -\dfrac{1}{A^{24} - A^2}$.

3.5.6 Sumatorio $q(t)/k^t A^{2\cdot 2^t}$

Tenemos la expresión general del sumatorio $(S6)$.

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t A^{2\cdot 2^t}} = E + \frac{f(x)}{k^{x-1} A^{2^x}}$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[72].
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2}$.

[70] Si hacemos $y_x = A^{2^x}, k = 1$ y cambiando de signo, obtendríamos el sumatorio $(S5P)$ en el caso particular, $a = b = 0, c = 1, k = 1$.

Si hacemos $y_x = A^{2^x} - 1$, obtendríamos el sumatorio $(S1P)$ en el caso particular, $a = b = 0, c = 1 - k$.

[71] Debemos observar que $q(x) = \left(A^{-2^x} - 1\right)\left(A^{-2^x} + \frac{1}{2}\right)$

[72] $y_{x+1} - kA^{2^x} y_x = q(x)$

Supuesto[73]:

$$y_x = Mx^2 + Nx + P$$

$$y_{x+1} = Mx^2 + 2Mx + M + Nx + N + P$$

Para que el polinomio $q(x)$ quede más sencillo realizamos el cambio:

$$\begin{cases} M = a \\ 2M + N = b \rightarrow N = b - 2a \\ M + N + P = c \rightarrow P = a - b - c \end{cases}$$

Con lo que el sumatorio nos quedará[74]:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt + c - kA^{2^t}\left[at^2 + (b-2a)t + a - b + c\right]}{k^t A^{2\cdot 2^t}} &= \\ = E + \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b + c}{k^{x-1} A^{2^x}} \end{aligned} \qquad (S6P)$$

Siendo el valor de la constante:
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2} = -\dfrac{c}{A^2}$.

3.5.7 Sumatorio $q(t)/k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}\right]$

Tenemos la expresión general del sumatorio ($S7$).

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}\right]} = E + \frac{f(x)}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - A^{-2^x}\right]}$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[75].
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2 - A^{-2}}$.

---

[73] Si hacemos $y_x = A^{2^x}$, obtenemos ($S1P$) en el caso particular, $a = b = 0, c = 1 - k$.
Si hacemos $y_x = A^{-2^x}$, obtenemos ($S6P$) en el caso particular, $a = b = 0, c = 1$, realizando el cambio de $A \rightarrow A^2$.
Si hacemos $y_x = A^{2^x} + 1$, se obtiene un nuevo sumatorio que corresponde a la suma de los sumatorios ($S1P$) en el caso particular, $a = b = 0, c = 1 - k$. y el sumatorio ($S6P$) para $a = b = 0, c = 1$.

[74] En el Anexo ($S6P$) están las expresiones simplificadas de este sumatorio.

[75] $y_{x+1} - k\left[A^{2^x} + A^{-2^x}\right] y_x = q(x)$

1. Supuesto:

$$y_x = Mx^2 + Nx + P$$

$$y_{x+1} = Mx^2 + 2Mx + M + Nx + N + P$$

Para que el polinomio $q(x)$ quede más sencillo realizamos el cambio:

$$\begin{cases} M = a \\ 2M + N = b \to N = b - 2a \\ M + N + P = c \to P = a - b - c \end{cases}$$

Con lo que el sumatorio nos quedará[76]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt + c - k\left[A^{2^t} - A^{-2^t}\right]\left[at^2 + (b-2a)t + a - b + c\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$
$$= E + \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - A^{-2^x}\right]} \tag{$S7P$}$$

Siendo el valor de la constante:
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2 - A^{-2}} = -\dfrac{c}{A^2 - A^{-2}}$.

2. Supuesto:

$$y_x = A^{2^x}$$

$$y_x = A^{2\cdot 2^x}$$

Si sustituimos en $(S7)$ el sumatorio nos quedará[77]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{(1-k)A^{2\cdot 2^t} - k}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}\right]} = E + \frac{A^{2^x}}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - A^{-2^x}\right]} \tag{$S7Pa$}$$

Siendo el valor de la constante:
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2 - A^{-2}} = -\dfrac{A^2}{A^2 - A^{-2}}$.

[76] En el Anexo $(S7P)$ están las expresiones simplificadas de este sumatorio.

[77] En los apartados 9 y 10 del Anexo $(S7P)$ están las expresiones simplificadas de este sumatorio.

3. Supuesto[78]:

$$k = 1$$

$$y_x = A^{2^x} + 1$$

$$y_x = A^{2 \cdot 2^x} + 1$$

Si sustituimos en $(S7)$ [79], y cambiamos de signo se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1}{A^{2^t} - A^{-2^t}} = \frac{A^2+1}{A^2 - A^{-2}} - \frac{A^{2^x}+1}{A^{2^x} - A^{-2^x}} \qquad (S7Pb)$$

Siendo el valor de la constante:
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2 - A^{-2}} = -\dfrac{A^2+1}{A^2 - A^{-2}}$.

3.5.8 Sumatorio $q(t)/k^t \left[A^{2 \cdot 2^t} + 1 + A^{-2 \cdot 2^t}\right]$

Tenemos la expresión general del sumatorio $(S8)$.

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t \left[A^{2 \cdot 2^t} + 1 + A^{-2 \cdot 2^t}\right]} = E + \frac{f(x)}{k^{x-1}\left[A^{2^x} + 1 + A^{-2^x}\right]}$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[80].
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2 + 1 + A^{-2}}$.
Supuesto[81]:

$$y_x = Mx^2 + Nx + P$$

[78] Para $y_x = A^{2^x} - A^{-2^x}$, se obtiene el sumatorio $(S1P)$, con, $a = b = 0$, $c = 1 - k$.
Para $y_x = A^{-2^x}$, $k = 1$, se obtiene el mismo sumatorio que en el caso anterior, cuando, $y_x = A^{2^x}$, $k = 1$.

[79] Si hacemos $y_x = A^{2^x}, k = 1$, y cambiando de signo, obtendríamos el sumatorio $(S5P)$ en el caso particular, $a = b = 0, c = 1, k = 1$.
Si hacemos $y_x = A^{2^x} - 1$, obtendríamos el sumatorio $(S1P)$ en el caso particular, $a = b = 0, c = 1 - k$.

[80] $y_{x+1} - k\left[A^{2^x} - 1 + A^{-2^x}\right] y_x = q(x)$

[81] Si hacemos $y_x = A^{2^x} + 1 + A^{-2^x}$, obtendríamos el sumatorio $(S1P)$, en el caso particular, $a = b = 0, c = 1 - k$.

$$y_{x+1} = Mx^2 + 2Mx + M + Nx + N + P$$

Para que el polinomio $q(x)$ quede más sencillo realizamos el cambio:

$$\begin{cases} M = a \\ 2M + N = b \rightarrow N = b - 2a \\ M + N + P = c \rightarrow P = a - b - c \end{cases}$$

Con lo que el sumatorio nos quedará[82]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt + c - k\left[A^{2^t} - 1 + A^{-2^t}\right]\left[at^2 + (b-2a)t + a - b + c\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} + 1 + A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$
$$= E + \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} + 1 + A^{-2^x}\right]} \tag{S8P}$$

Siendo el valor de la constante:
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2 + 1 + A^{-2}} = -\dfrac{c}{A^2 + 1 + A^{-2}}$.

3.5.9 Sumatorio $q(t)/k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - 2 + A^{-2\cdot 2^t}\right]$

Tenemos la expresión general del sumatorio ($S9$).

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - 2 + A^{-2\cdot 2^t}\right]} = E + \frac{f(x)}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 2 + A^{-2^x}\right]}$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[83].
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2 - 2 + A^{-2}}$.
Supuesto[84]:

$$y_x = Mx^2 + Nx + P$$

[82] En el Anexo ($S8P$) están las expresiones simplificadas de este sumatorio.
[83] $y_{x+1} - k\left[A^{2^x} + 2 + A^{-2^x}\right] y_x = q(x)$
[84] Si hacemos $y_x = A^{2^x} - 2 + A^{-2^x}$, obtendríamos el sumatorio ($S1P$) en el caso particular $a = b = 0, c = 1 - k$.

$$y_{x+1} = Mx^2 + 2Mx + M + Nx + N + P$$

Para que el polinomio $q(x)$ quede más sencillo realizamos el cambio:

$$\left\{ \begin{array}{c} M = a \\ 2M + N = b \rightarrow N = b - 2a \\ M + N + P = c \rightarrow P = a - b - c \end{array} \right.$$

Con lo que el sumatorio nos quedará[85]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt + c - k\left[A^{2^t} + 2 + A^{-2^t}\right]\left[at^2 + (b-2a)t + a - b + c\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - 2 + A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$
$$= E + \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 2 + A^{-2^x}\right]} \qquad (S9P)$$

Siendo el valor de la constante:
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2 - 2 + A^{-2}} = -\dfrac{c}{A^2 - 2 + A^{-2}}$.

3.5.10 Sumatorio $q(t)/k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - B^{2\cdot 2^t}\right]$

Tenemos la expresión general del sumatorio ($S10$).

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - B^{2\cdot 2^t}\right]} = E + \frac{f(x)}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - B^{2^x}\right]}$$

Donde:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[86]
$E = -\dfrac{f(1)}{A^2 - B^2}$.

1. Supuesto[87]:

$$y_x = Mx^2 + Nx + P$$

[85] En el Anexo ($S9P$) están las expresiones simplificadas de este sumatorio.

[86] $y_{x+1} - k\left[A^{2^x} + B^{2^x}\right] y_x = q(x)$

[87] Si hacemos $y_x = A^{2^x} - B^{2^x}$, obtendríamos el sumatorio $S1P$ en el caso particular, $a = b = 0, c = 1 - k$.

$$y_{x+1} = Mx^2 + 2Mx + M + Nx + N + P$$

Para que el polinomio $q(x)$ quede más sencillo realizamos el cambio:

$$\left\{ \begin{array}{c} M = a \\ 2M + N = b \rightarrow N = b - 2a \\ M + N + P = c \rightarrow P = a - b - c \end{array} \right.$$

Con lo que el sumatorio nos quedará[88]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt + c - k\left[A^{2^t} + B^{2^t}\right]\left[at^2 + (b-2a)t + a - b + c\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - B^{2\cdot 2^t}\right]} =$$
$$= E + \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - B^{2^x}\right]} \qquad (S10P)$$

Siendo el valor de la constante:
$E = -\frac{f(1)}{A^2 - B^2} = -\frac{c}{A^2 - B^2}$.

2. Supuesto[89]:

$$y_x = A^{2^x}$$

$$y_{x+1} = A^{2\cdot 2^x}$$

Si sustituimos en $(S10)$ el sumatorio nos quedará[90]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{(1-k)A^{2\cdot 2^t} - kA^{2^t}B^{2^t}}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - B^{2\cdot 2^t}\right]} = -\frac{A^2}{A^2 - B^2} + \frac{A^{2^x}}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - B^{2^x}\right]}$$

[88] En el Anexo $(S10P)$ están las expresiones simplificadas de este sumatorio.

[89] Si hacemos $y_x = A^{2^x} - B^{2^x}$, obtendríamos el sumatorio $(S1P)$ en el caso particular, $a = b = 0, c = 1 - k$.

[90] Para $k = 1$ y cambiando de signo se obtiene: $\sum_{t=1}^{x-1} \frac{A^{2^t}B^{2^t}}{A^{2\cdot 2^t} - B^{2\cdot 2^t}} = \frac{A^2}{A^2 - A^{-2}} - \frac{A^{2^x}}{A^{2^x} - B^{2^x}}$

3.5.11 Sumatorio $q(t)/k^t A^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}$

Tenemos la expresión general del sumatorio ($S11$).

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t A^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}} = E + \frac{f(x)}{k^{x-1} A^{\frac{n^x}{n-1}}}$$

Siendo:
$f(x)$ es la solución particular de la completa[91]
$E = -\frac{f(1)}{A^{\frac{n}{n-1}}}$.

1. Supuesto[92]:

$$y_x = Mx^2 + Nx + P$$

$$y_{x+1} = Mx^2 + 2Mx + M + Nx + N + P$$

Para que el polinomio $q(x)$ quede más sencillo realizamos el cambio:

$$\begin{cases} M = a \\ 2M + N = b \rightarrow N = b - 2a \\ M + N + P = c \rightarrow P = a - b - c \end{cases}$$

Con lo que el sumatorio nos quedará[93]:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt + c - kA^{n^t}\left[at^2 + (b-2a)t + a - b + c\right]}{k^t A^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}} &= \\ = E + \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b + c}{k^{x-1} A^{\frac{n^x}{n-1}}} \end{aligned} \qquad (S11P)$$

Siendo el valor de la constante:
$E = -\frac{f(1)}{A^{\frac{n}{n-1}}} = -\frac{c}{A^{\frac{n}{n-1}}}$.

[91] $y_{x+1} - kA^{n^x} y_x = q(x)$

[92] Si hacemos $y_x = A^{\frac{n^x}{n-1}}$, obtenemos el sumatorio ($S1P$) en el caso particular de las constantes $a = b = 0$, $c = 1 - k$.

[93] En el Anexo ($S11P$) están las expresiones simplificadas de este sumatorio.

2. Supuesto:

$$k = 1$$

$$y_x = A^{\frac{n^x}{n-1}} - 1$$

$$y_{x+1} = A^{\frac{n \cdot n^x}{n-1}} - 1$$

Si sustituimos en $(S11)$ se obtiene[94]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{A^{n^t} - 1}{A^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}} = -1 + \frac{1}{A^{\frac{n}{n-1}}} + \frac{A^{\frac{n^x}{n-1}} - 1}{A^{\frac{n^x}{n-1}}}$$

Simplificando:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{A^{n^t} - 1}{A^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}} = \frac{1}{A^{\frac{n}{n-1}}} - \frac{1}{A^{\frac{n^x}{n-1}}}$$

3. Supuesto:

$$k = 1$$

$$y_x = A^{\frac{n^{x+1}}{n-1}}$$

$$y_{x+1} = A^{\frac{n^{x+2}}{n-1}}$$

Si sustituimos en $(S11)$ se obtiene[95]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{A^{\frac{n^{t+2}}{n-1}} - A^{n^t} A^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}}{A^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}} = -A^n + \frac{A^{\frac{n^{x+1}}{n-1}}}{A^{\frac{n^x}{n-1}}}$$

Simplificando:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \left[A^{n^{t+1}} - A^{n^t} \right] = -A^n + A^{n^x}$$

[94] Siendo la constante: $E = -\frac{A^{\frac{n}{n-1}} - 1}{A^{\frac{n}{n-1}}} = -1 + \frac{1}{A^{\frac{n}{n-1}}}$

[95] Siendo la constante: $E = -\frac{A^{\frac{n^2}{n-1}}}{A^{\frac{n}{n-1}}} = -A^n$

3.6 Anexo ($S1P$)

Veamos unas expresiones simplificadas de este sumatorio.

1. Hacemos $a = b = 0, c = 1$ nos queda ($k \neq 1$):

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1}{k^t} = -\frac{1}{1-k} + \frac{1}{(1-k)k^{x-1}}$$

   - Si aplicamos el sumatorio desde $t = 0$, hasta $t = x - 1$ y hacemos el cambio $k = \dfrac{1}{L}$ después de operar y simplificar se obtiene[96]:

$$\sum_{t=0}^{x-1} L^t = \frac{L^x - 1}{L - 1}$$

2. Hacemos $a = c = 0$, $b = 1$ nos queda ($k \neq 1$):

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t}{k^t} = \frac{k}{(1-k)^2} + \frac{(1-k)x - 1}{(1-k)^2 k^{x-1}}$$

   Podemos observar que si el sumatorio es desde $t = 0, t = x - 1$ no varía.

   - Si hacemos el cambio $k = \dfrac{1}{L}$ se obtiene[97]:

$$\sum_{t=0}^{x-1} tL^t = \frac{L}{(1-L)^2} + \frac{L^x\left[(L-1)x - L\right]}{(1-L)^2} = \frac{xL^x}{L-1} - \frac{L^{x+1} - L}{(L-1)^2}$$

[96] Cuya utilidad viene reflejada cuando deseamos obtener la sumación aproximada de Lübbock, desarrollada en las pág. 400-401 del Lóbez Urquia, J. (1.968 b) ya que en dicho proceso calcula sin justificar, ya que se trata de una progresión geométrica de razón $E^{\frac{1}{k}}$.
$f(0) \cdot \sum_{t=0}^{kn-1} E^{\frac{t}{k}} = f(0) \cdot \dfrac{E^n - 1}{E^{\frac{1}{k}} - 1}$
Coincidente para $L = E^{\frac{1}{k}}$.

[97] Expresión que coincide con
$P_{(n)}^{-1} xa^x = \dfrac{na^n}{a-1} - \dfrac{a^{x+1} - a}{(a-1)^2}$
obtenida mediante el operador $P_{(n)}^{-1}$ aplicado a $\Delta\left(u_x \cdot v_x\right), u_x = x, v_x = a^x$, expuesto en la pág. 41 del Milne-Thomson, L.M. (1.965).

- Si tomamos límites cuando $t \to \infty$ siendo $k > 1$ obtenemos:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{t}{k^t} = \frac{k}{(1-k)^2}$$

Al realizar el cambio $k = \dfrac{1}{L} \to L < 1$ es[98]:

$$\sum_{t=0}^{\infty} tL^t = \frac{L}{(1-L)^2}$$

3. Hacemos $b = c = 0$, $a = 1$ nos queda $(k \neq 1)$:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2}{k^t} = -\frac{k+k^2}{(1-k)^3} + \frac{(1-k)^2x^2 + (1-k)(-2x-1) + 2}{(1-k)^3 k^{x-1}}$$

4. Hacemos $a = 0$, $b = b$, $c = c$ nos queda $(k \neq 1)$:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{bt+c}{k^t} = \frac{bk - c(1-k)}{(1-k)^2} + \frac{(1-k)(bx+c) - b}{(1-k)^2 k^{x-1}}$$

5. Hacemos $a = a$, $b = 0$, $c = c$ nos queda $(k \neq 1)$:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2+c}{k^t} = -\frac{(k+k^2)a + (1-k)^2c}{(1-k)^3} +$$

$$+\frac{(1-k)^2(ax^2+c) + (1-k)(-2ax-a) + 2a}{(1-k)^3 k^{x-1}}$$

6. Hacemos $a = a$, $b = b$, $c = 0$ nos queda $(k \neq 1)$:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2+bt}{k^t} = -\frac{k(a-b) + k^2(a+b)}{(1-k)^3} +$$

$$+\frac{(1-k)^2(ax^2+bx) + (1-k)(-2ax-a-b) + 2a}{(1-k)^3 k^{x-1}}$$

[98] Expresión que coincide con: $\sum\limits_{x=0}^{\infty} xt^x = \dfrac{t}{(1-t)^2}$, expuesta en la pág. 23 del Jordan, Ch (1.965).

7. Hacemos $a = 0$, $b = \dfrac{2a}{1-k}$, $c = c$ y nos queda[99] ($k \neq 1$):

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + \frac{2at}{1-k} + c}{k^t} = \frac{k(a+c) - c}{(1-k)^2} + \frac{(1-k)(ax^2+c) - a}{(1-k)^2 k^{x-1}}$$

8. Hacemos $a = 1$, $b = \dfrac{2}{1-k}$, $c = \dfrac{1}{1-k}$ y nos queda[100] ($k \neq 1$):

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 + \frac{2t}{1-k} + \frac{1}{1-k}}{k^t} = -\frac{1}{1-k} + \frac{x^2}{(1-k)k^{x-1}}$$

Multiplicando por $(1-k)$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{(1-k)t^2 + 2t + 1}{k^t} = -1 + \frac{x^2}{k^{x-1}}$$

9. Todos los sumatorios anteriores tal como se indican son para $k \neq 1$, sea ahora $k = 1$.

El sumatorio inicial ($S1$) será:

$$\sum_{t=1}^{x-1} q(t) = A + f(x)$$

Donde:

$f(x)$ es la solución particular de la completa[101].

$A = -f(1)$.

Si $q(x) = ax^2 + bx + c$ hacemos:

$$y_x = Bx^3 + Cx^2 + Dx$$

De la cual obtenemos, $B = \dfrac{a}{3}$, $C = \dfrac{b-a}{2}$, $D = \dfrac{a - 3b + 6c}{6}$.

El valor de la constante es:

$A = -f(1) = -B - C - D = -c$ con lo que nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \left(at^2 + bt + c\right) = -c + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b-a}{2}x^2 + \frac{a-3b+6c}{6}x$$

[99] Estos valores se obtienen para, $N = 0$.

[100] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$, $P = 0$.

[101] $y_{x+1} - ky_x = q(x)$

3.7 Anexo $(S2P)$

Veamos unas expresiones simplificadas de este sumatorio.

1. Al hacer $a = b = 0$, $c = 1$ y multiplicar por k nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{kt-1}{k^t t!} = 1 - \frac{1}{k^{x-1}(x-1)!}$$

   - Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t-1}{t!} = 1 - \frac{1}{(x-1)!}$$

2. Al hacer $a = c = 0$, $b = 1$ y multiplicar por k^2 nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{k^2t^2-k-1}{k^t t!} = k + 1 - \frac{kx+1}{k^{x-1}(x-1)!}$$

   - Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2-2}{t!} = 2 - \frac{x+1}{(x-1)!}$$

3. Al hacer $a = 1$, $b = c = 0$ y multiplicar por k^3 nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{k^3t^3-k^2-3k-1}{k^t t!} = k^2 + 3k + 1 - \frac{k^2x^2+kx+2k+1}{k^{x-1}(x-1)!}$$

   - Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^3-5}{t!} = 5 - \frac{x^2+x+3}{(x-1)!}$$

4. Al hacer $a = 0$, $b = b$, $c = c$ y multiplicar por k^2 nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{k^2bt^2+k^2ct-k(b+c)-b}{k^t t!} = (b+c)k + b - \frac{k(bx+c)+b}{k^{x-1}(x-1)!}$$

- Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{bt^2 + ct - 2b - c}{t!} = 2b + c - \frac{bx + c + b}{(x-1)!}$$

- Para $k = 1$, $c = -2b$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 - 2t}{t!} = -\frac{x-1}{(x-1)!} = -\frac{1}{(x-2)!}$$

5. Al hacer $a = a$, $b = 0$, $c = c$ y multiplicar por k^3 nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{ak^3t^3 + ck^3t - (a+c)k^2 - 3ak - a}{k^t t!} =$$

$$= (a+c)k^2 + 3ak + a - \frac{ak^2x^2 + akx + ck^2 + 2ak + a}{k^{x-1}(x-1)!}$$

- Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^3 + ct - 5a - c}{t!} = 5a + c - \frac{ax^2 + ax + 3a + c}{(x-1)!}$$

- Para $k = 1$, $a = 1$, $c = -5$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^3 - 5t}{t!} = -\frac{x^2 + x - 2}{(x-1)!} = -\frac{x+2}{(x-2)!}$$

6. Al hacer $a = a$, $b = b$, $c = 0$ y multiplicar por k^3 nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{ak^3t^3 + bk^3t^2 - (a+b)k^2 - (3a+b)k - a}{k^t t!} =$$
$$= (a+b)k^2 + (3a+b)k + a - \frac{ak^2x^2 + (ak + bk^2)x + (2a+b)k + a}{k^{x-1}(x-1)!}$$

- Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^3 + bt^2 - 5a - 2b}{t!} = 5a + 2b - \frac{ax^2 + (a+b)x + 3a + b}{(x-1)!}$$

- Para $k = 1$, $a = 2$, $b = -5$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{2t^3 - 5t}{t!} = -\frac{2x^2 - 3x + 1}{(x-1)!} = -\frac{2x-1}{(x-2)!}$$

7. Al hacer[102] $a = a$, $b = -\dfrac{a}{k}$, $c = c$ y multiplicar por k^2 nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{ak^2t^3 - akt^2 + ck^2t - (a+c)k - 2a}{k^t t!} =$$

$$= (a+c)k + 2a - \frac{akx^2 + ck + 2a}{k^{x-1}(x-1)!}$$

- Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^3 - at^2 + ct - 3a - c}{t!} = 3a + c - \frac{ax^2 + 2a + c}{(x-1)!}$$

- Para $k = 1$, $a = 1$, $c = -3$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^3 - t^2 - 3t}{t!} = -\frac{x^2 - 1}{(x-1)!} = -\frac{x+1}{(x-2)!}$$

8. Hacemos[103] $a = k$, $b = 1$, $c = 2$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{kt^3 - t^2 - 2t - 1}{k^t t!} = 1 - \frac{x^2}{k^{x-1}(x-1)!}$$

- Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^3 - t^2 - 2t - 1}{t!} = 1 - \frac{x^2}{(x-1)!}$$

[102] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$.
[103] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$, $P = 0$.

3.8 Anexo $(S3P)$

Veamos unas expresiones simplificadas de este sumatorio.

1. Al hacer $a = b = 0$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1 - kA^t}{k^t A^{\frac{t^2+t}{2}}} = -1 + \frac{1}{k^{x-1} A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

   - Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1 - A^t}{A^{\frac{t^2+t}{2}}} = -1 + \frac{1}{A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

2. Al hacer $a = c = 0$, $b = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t - (t-1)kA^t}{k^t A^{\frac{t^2+t}{2}}} = \frac{x-1}{k^{x-1} A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

   - Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t - (t-1)A^t}{A^{\frac{t^2+t}{2}}} = \frac{x-1}{A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

3. Al hacer $a = 1$, $b = c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 - \left[t^2 - 2t + 1\right] kA^t}{k^t A^{\frac{t^2+t}{2}}} = \frac{x^2 - 2x + 1}{k^{x-1} A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

   - Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 - \left[t^2 - 2t + 1\right] A^t}{A^{\frac{t^2+t}{2}}} = \frac{x^2 - 2x + 1}{A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

4. Al hacer $a = 0$, $b = b$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{bt + c - [bt - b + c]\, kA^t}{k^t A^{\frac{t^2+t}{2}}} = -c + \frac{bx - b + c}{k^{x-1} A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

- Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{bt + c - [bt - b + c]\, A^t}{A^{\frac{t^2+t}{2}}} = -c + \frac{bx - b + c}{A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

5. Al hacer $a = a$, $b = 0$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + c - \left[at^2 - 2at + a + c\right] kA^t}{k^t A^{\frac{t^2+t}{2}}} = -c + \frac{ax^2 - 2ax + a + c}{k^{x-1} A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

- Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + c - \left[at^2 - 2at + a + c\right] A^t}{A^{\frac{t^2+t}{2}}} = -c + \frac{ax^2 - 2ax + a + c}{A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

6. Al hacer $a = a$, $b = b$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt - \left[at^2 + (b - 2a)t + a - b\right] kA^t}{k^t A^{\frac{t^2+t}{2}}} = \frac{ax^2 + (b - 2a)x + a - b}{k^{x-1} A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

- Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt - \left[at^2 + (b - 2a)t + a - b\right] A^t}{A^{\frac{t^2+t}{2}}} = \frac{ax^2 + (b - 2a)x + a - b}{A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

7. Al hacer[104] $a = a$, $b = 2a$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + 2at + c - \left[at^2 - a + c\right] kA^t}{k^t A^{\frac{t^2+t}{2}}} = -c + \frac{ax^2 - a + c}{k^{x-1} A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

- Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + 2at + c - \left[at^2 - a + c\right] A^t}{A^{\frac{t^2+t}{2}}} = -c + \frac{ax^2 - a + c}{A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

[104] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$.

8. Al hacer[105] $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 + 2t + 1 - t^2 k A^t}{k^t A^{\frac{t^2+t}{2}}} = -1 + \frac{x^2}{k^{x-1} A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

   - Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 + 2t + 1 - t^2 A^t}{A^{\frac{t^2+t}{2}}} = -1 + \frac{x^2}{A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

3.9 Anexo ($S4P$)

Veamos unas expresiones simplificadas de este sumatorio.

1. Al hacer $a = b = 0$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1 - \left[A^t - B\right] k}{\prod_{s=1}^{t} k(A^s - B)} = -1 + \frac{1}{\prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)}$$

2. Al hacer $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t - \left[A^t - B\right](t-1)k}{\prod_{s=1}^{t} k(A^s - B)} = \frac{x - 1}{\prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)}$$

3. Al hacer $a = 1$, $b = c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 - \left[A^t - B\right](t^2 - 2t + 1)k}{\prod_{s=1}^{t} k(A^s - B)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{\prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)}$$

4. Al hacer $a = 0$, $b = b$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{bt + c - \left[A^t - B\right](bt - b + c)k}{\prod_{s=1}^{t} k(A^s - B)} = -c + \frac{bx - b + c}{\prod_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)}$$

[105] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$, $P = 0$.

5. Al hacer $a = a$, $b = 0$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + c - \left[A^t - B\right](at^2 - 2at + a + c)k}{\prod\limits_{s=1}^{t} k(A^s - B)} =$$

$$= -c + \frac{ax^2 - 2ax + d + c}{\prod\limits_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)}$$

6. Al hacer $a = a$, $b = b$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt - \left[A^t - B\right]\left[at^2 + (b - 2a)t + a - b\right] k}{\prod\limits_{s=1}^{t} k(A^s - B)} =$$

$$= \frac{ax^2 + (b - 2a)x + a - b}{\prod\limits_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)}$$

7. Al hacer[106] $a = a$, $b = 2a$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + 2at + c - \left[A^t - B\right](at^2 - a + c)k}{\prod\limits_{s=1}^{t} k(A^s - B)} = -c + \frac{ax^2 - a + c}{\prod\limits_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)}$$

8. Al hacer[107] $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 + 2t + 1 - \left[A^t - B\right] t^2 k}{\prod\limits_{s=1}^{t} k(A^s - B)} = -1 + \frac{x^2}{\prod\limits_{t=1}^{x-1} k(A^t - B)}$$

9. Al hacer[108] $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{BA^{\frac{t^2-t}{2}}}{\prod\limits_{s=1}^{t} (A^s - B)} = -1 + \frac{A^{\frac{x^2+x}{2}}}{\prod\limits_{t=1}^{x-1} (A^t - B)}$$

---

[106] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$.
[107] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$, $P = 0$.
[108] En el sumatorio, $(S4Pa)$.

10. Al hacer[109] $k=1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{\left(B+\frac{1}{A}\right)A^{-t}-1}{\prod\limits_{s=1}^{t}(A^s-B)}=-\frac{1}{A}+\frac{A^{-x}}{\prod\limits_{t=1}^{x-1}(A^t-B)}$$

11. Al hacer[110]$k=1$, $B=-\dfrac{1}{A}$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{1}{\prod\limits_{s=1}^{t}(A^s+\frac{1}{A})}=+\frac{1}{A}-\frac{A^{-x}}{\prod\limits_{t=1}^{x-1}(A^t+\frac{1}{A})}$$

3.10 Anexo $(S5P)$

Veamos unas expresiones simplificadas de este sumatorio.

1. Al hacer $a=b=0$, $c=1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{1-k-kA^{2^t}}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t}-1\right]}=-\frac{1}{A^2-1}+\frac{1}{k^{x-1}\left[A^{2^x}-1\right]}$$

   (a) Para $k=1$ y cambiando de signo se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{A^{2^t}}{A^{2\cdot 2^t}-1}=\frac{1}{A^2-1}-\frac{1}{A^{2^x}-1}$$

   (b) Para $k=\dfrac{1}{2}$,multiplicando por 2 y cambiando de signo se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{2^t}{A^{2^t}+1}=\frac{2}{A^2-1}-\frac{2^x}{A^{2^x}-1}$$

2. Al hacer $a=0$, $b=1$, $c=0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{t-k\left[A^{2^t}+1\right](t-1)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t}-1\right]}=\frac{x-1}{k^{x-1}\left[A^{2^x}-1\right]}$$

[109] En el sumatorio, $(S4Pb)$.
[110] En el sumatorio, $(S4Pb)$.

(a) Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1 - A^{2^t}(t-1)}{A^{2\cdot 2^t} - 1} = \frac{x-1}{A^{2^x} - 1}$$

3. Al hacer $a = 1$, $b = c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 - k\left[A^{2^t} + 1\right](t^2 - 2t + 1)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - 1\right]} = \frac{x^2 - 2x + 1}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 1\right]}$$

(a) Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{2t - 1 - A^{2^t}(t^2 - 2t + 1)}{A^{2\cdot 2^t} - 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{A^{2^x} - 1}$$

4. Al hacer $a = 0, b = b$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{bt + c - k\left[A^{2^t} + 1\right](bt - b + c)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - 1\right]} = -\frac{c}{A^2 - 1} + \frac{bx - b + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 1\right]}$$

(a) Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{b - A^{2^t}(bt - b + c)}{A^{2\cdot 2^t} - 1} = -\frac{c}{A^2 - 1} + \frac{bx - b + c}{A^{2^x} - 1}$$

5. Al hacer $a = a$, $b = 0$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + c - k\left[A^{2^t} + 1\right](at^2 - 2at + a + c)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - 1\right]} =$$

$$= -\frac{c}{A^2 - 1} + \frac{ax^2 - 2ax + a + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 1\right]}$$

(a) Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{2at - a - A^{2^t}(at^2 - 2at + a + c)}{A^{2\cdot 2^t} - 1} =$$

$$= -\frac{c}{A^2 - 1} + \frac{ax^2 - 2ax + a + c}{A^{2^x} - 1}$$

6. Al hacer $a = a$, $b = b$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt - k\left[A^{2^t} + 1\right]\left[at^2 + (b-2a)t + a - b\right]}{k^t\left[A^{2 \cdot 2^t} - 1\right]} =$$

$$= \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 1\right]}$$

   (a) Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{2at - a + b - A^{2^t}\left[at^2 + (b-2a)t + a - b\right]}{A^{2 \cdot 2^t} - 1} =$$

$$= \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b}{A^{2^x} - 1}$$

7. Al hacer[111] $a = a$, $b = 2a$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + 2at + c - k\left[A^{2^t} + 1\right](at^2 - a + c)}{k^t\left[A^{2 \cdot 2^t} - 1\right]} =$$

$$= -\frac{c}{A^2 - 1} + \frac{ax^2 - a + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 1\right]}$$

   (a) Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{2at + a - A^{2^t}\left[at^2 - a + c\right]}{A^{2 \cdot 2^t} - 1} = -\frac{c}{A^2 - 1} + \frac{ax^2 - a + c}{A^{2^x} - 1}$$

8. Al hacer[112] $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 + 2t + 1 - k\left[A^{2^t} + 1\right]t^2}{k^t\left[A^{2 \cdot 2^t} - 1\right]} = -\frac{1}{A^2 - 1} + \frac{x^2}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 1\right]}$$

   (a) Para $k = 1$ se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{2t + 1 - A^{2^t}t^2}{A^{2 \cdot 2^t} - 1} = -\frac{1}{A^2 - 1} + \frac{x^2}{A^{2^x} - 1}$$

[111] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$.
[112] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0, P = 0$.

3.11 Anexo $(S6P)$

Veamos unas expresiones simplificadas de este sumatorio.

1. Al hacer $a = b = 0$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1 - kA^{2^t}}{k^t A^{2 \cdot 2^t}} = -\frac{1}{A^2} + \frac{1}{k^{x-1} A^{2^x}}$$

2. Al hacer $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t - kA^{2^t}(t-1)}{k^t A^{2 \cdot 2^t}} = \frac{x-1}{k^{x-1} A^{2^x}}$$

3. Al hacer $a = 1$, $b = c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 - kA^{2^t}(t^2 - 2t + 1)}{k^t A^{2 \cdot 2^t}} = \frac{x^2 - 2x + 1}{k^{x-1} A^{2^x}}$$

4. Al hacer $a = 0$, $b = b$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{bt + c - kA^{2^t}(bt - b + c)}{k^t A^{2 \cdot 2^t}} = -\frac{c}{A^2} + \frac{bx - b + c}{k^{x-1} A^{2^x}}$$

5. Al hacer $a = a$, $b = 0$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + c - kA^{2^t}(at^2 - 2at + a + c)}{k^t A^{2 \cdot 2^t}} = -\frac{c}{A^2} + \frac{ax^2 - 2ax + a + c}{k^{x-1} A^{2^x}}$$

6. Al hacer $a = a$, $b = b$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt - kA^{2^t}\left[at^2 + (b-2a)t + a - b\right]}{k^t A^{2 \cdot 2^t}} =$$

$$= \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b}{k^{x-1} A^{2^x}}$$

7. Al hacer[113] $a = a$, $b = 2a$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + 2at + c - kA^{2^t}(at^2 - a + c)}{k^t A^{2\cdot 2^t}} = -\frac{c}{A^2} + \frac{ax^2 - a + c}{k^{x-1}A^{2^x}}$$

8. Al hacer[114] $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 + 2t + 1 - kA^{2^t}t^2}{k^t A^{2\cdot 2^t}} = -\frac{1}{A^2} + \frac{x^2}{k^{x-1}A^{2^x}}$$

3.12 Anexo $(S7P)$

Veamos unas expresiones simplificadas de este sumatorio.

1. Al hacer $a = b = 0$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1 - k\left[A^{2^t} + A^{-2^t}\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}\right]} = -\frac{1}{A^2 - A^{-2}} + \frac{1}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - A^{-2^x}\right]}$$

2. Al hacer $a = 0$, $b = 1,$ $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t - k\left[A^{2^t} + A^{-2^t}\right](t-1)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}\right]} = \frac{x - 1}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - A^{-2^x}\right]}$$

3. Al hacer $a = 1$, $b = c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 - k\left[A^{2^t} + A^{-2^t}\right]\left[t^2 - 2t + 1\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}\right]} = \frac{x^2 - 2x + 1}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - A^{-2^x}\right]}$$

4. Al hacer $a = 0$, $b = b$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{bt + c - k\left[A^{2^t} + A^{-2^t}\right](bt - b + c)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}\right]} = -\frac{c}{A^2 - A^{-2}} + \frac{bx - b + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - A^{-2^x}\right]}$$

[113] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$.
[114] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$, $P = 0$.

5. Al hacer $a = a$, $b = 0$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + c - k\left[A^{2^t} + A^{-2^t}\right]\left[at^2 - 2at + a + c\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= -\frac{c}{A^2 - A^{-2}} + \frac{ax^2 - 2ax + a + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - A^{-2^x}\right]}$$

6. Al hacer $a = a$, $b = b$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt - k\left[A^{2^t} + A^{-2^t}\right]\left[at^2 + (b-2a)t + a - b\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - A^{-2^x}\right]}$$

7. Al hacer[115] $a = a$, $b = 2a$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + 2at + c - k\left[A^{2^t} + A^{-2^t}\right]\left[at^2 - a + c\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= -\frac{c}{A^2 - A^{-2}} + \frac{ax^2 - a + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - A^{-2^x}\right]}$$

8. Al hacer[116] $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 + 2t + 1 - k\left[A^{2^t} + A^{-2^t}\right]t^2}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= -\frac{1}{A^2 - A^{-2}} + \frac{x^2}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - A^{-2^x}\right]}$$

[115] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$.
[116] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$, $P = 0$.

9. Al hacer[117] $k = 1$ y cambiando de signo se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1}{A^{2\cdot 2^t} - A^{-2\cdot 2^t}} = -\frac{A^2}{A^2 - A^{-2}} + \frac{1}{1 - A^{-2\cdot 2^x}}$$

10. Al hacer[118] $k = \dfrac{1}{2}$ y multiplicando por 2 se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{2^t}{1 + A^{-2\cdot 2^t}} = -\frac{2A^2}{A^2 - A^{-2}} + \frac{2^x}{1 - A^{-2\cdot 2^x}}$$

3.13 Anexo ($S8P$)

Veamos unas expresiones simplificadas de este sumatorio.

1. Al hacer $a = b = 0$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1 - k\left[A^{2^t} - 1 + A^{-2^t}\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} + 1 + A^{-2\cdot 2^t}\right]} = -\frac{1}{A^2 + 1 + A^{-2}} + \frac{1}{k^{x-1}\left[A^{2^x} + 1 + A^{-2^x}\right]}$$

2. Al hacer $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1 - k\left[A^{2^t} - 1 + A^{-2^t}\right](t-1)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} + 1 + A^{-2\cdot 2^t}\right]} = \frac{x - 1}{k^{x-1}\left[A^{2^x} + 1 + A^{-2^x}\right]}$$

3. Al hacer $a = 1$, $b = c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 - k\left[A^{2^t} - 1 + A^{-2^t}\right](t^2 - 2t + 1)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} + 1 + A^{-2\cdot 2^t}\right]} = \frac{x^2 - 2x + 1}{k^{x-1}\left[A^{2^x} + 1 + A^{-2^x}\right]}$$

4. Al hacer $a = 0$, $b = b$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{bt + c - k\left[A^{2^t} - 1 + A^{-2^t}\right](bt - b + c)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} + 1 + A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$

[117] En el sumatorio, ($S7Pa$).
[118] En el sumatorio, ($S7Pa$).

$$= -\frac{c}{A^2+1+A^{-2}} + \frac{bx-b+c}{k^{x-1}\left[A^{2^x}+1+A^{-2^x}\right]}$$

5. Al hacer $a = a$, $b = 0$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2+c-k\left[A^{2^t}-1+A^{-2^t}\right](at^2-2at+a+c)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t}+1+A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= -\frac{c}{A^2+1+A^{-2}} + \frac{ax^2-2ax+a+c}{k^{x-1}\left[A^{2^x}+1+A^{-2^x}\right]}$$

6. Al hacer $a = a$, $b = b$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2+bt-k\left[A^{2^t}-1+A^{-2^t}\right]\left[at^2+(b-2a)t+a-b\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t}+1+A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= \frac{ax^2+(b-2a)x+a-b}{k^{x-1}\left[A^{2^x}+1+A^{-2^x}\right]}$$

7. Al hacer[119] $a = a$, $b = 2a$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2+2at+c-k\left[A^{2^t}-1+A^{-2^t}\right](at^2-a+c)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t}+1+A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= -\frac{c}{A^2+1+A^{-2}} + \frac{ax^2-a+c}{k^{x-1}\left[A^{2^x}+1+A^{-2^x}\right]}$$

8. Al hacer[120] $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2+2t+1-k\left[A^{2^t}-1+A^{-2^t}\right]t^2}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t}+1+A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= -\frac{1}{A^2+1+A^{-2}} + \frac{x^2}{k^{x-1}\left[A^{2^x}+1+A^{-2^x}\right]}$$

[119] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$.

[120] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$, $P = 0$.

3.14 Anexo ($S9P$)

Veamos unas expresiones simplificadas de este sumatorio.

1. Al hacer $a = b = 0$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1 - k\left[A^{2^t} + 2 + A^{-2^t}\right]}{k^t\left[A^{2 \cdot 2^t} - 2 + A^{-2 \cdot 2^t}\right]} = -\frac{1}{A^2 - 2 + A^{-2}} + \frac{1}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 2 + A^{-2^x}\right]}$$

2. Al hacer $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1 - k\left[A^{2^t} + 2 + A^{-2^t}\right](t-1)}{k^t\left[A^{2 \cdot 2^t} - 2 + A^{-2 \cdot 2^t}\right]} = \frac{x-1}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 2 + A^{-2^x}\right]}$$

3. Al hacer $a = 1$, $b = c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 - k\left[A^{2^t} + 2 + A^{-2^t}\right](t^2 - 2t + 1)}{k^t\left[A^{2 \cdot 2^t} - 2 + A^{-2 \cdot 2^t}\right]} = \frac{x^2 - 2x + 1}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 2 + A^{-2^x}\right]}$$

4. Al hacer $a = 0$, $b = b$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{bt + c - k\left[A^{2^t} + 2 + A^{-2^t}\right](bt - b + c)}{k^t\left[A^{2 \cdot 2^t} - 2 + A^{-2 \cdot 2^t}\right]} =$$

$$= -\frac{c}{A^2 - 2 + A^{-2}} + \frac{bx - b + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 2 + A^{-2^x}\right]}$$

5. Al hacer $a = a$, $b = 0$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + c - k\left[A^{2^t} + 2 + A^{-2^t}\right](at^2 - 2at + a + c)}{k^t\left[A^{2 \cdot 2^t} - 2 + A^{-2 \cdot 2^t}\right]} =$$

$$= -\frac{c}{A^2 - 2 + A^{-2}} + \frac{ax^2 + -2ax + a + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 2 + A^{-2^x}\right]}$$

6. Al hacer $a = a$, $b = b$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt - k\left[A^{2^t} + 2 + A^{-2^t}\right]\left[at^2 + (b-2a)t + a - b\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - 2 + A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 2 + A^{-2^x}\right]}$$

7. Al hacer[121] $a = a$, $b = 2a$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + 2at + c - k\left[A^{2^t} + 2 + A^{-2^t}\right](at^2 - a + c)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - 2 + A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= -\frac{c}{A^2 - 2 + A^{-2}} + \frac{ax^2 - a + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 2 + A^{-2^x}\right]}$$

8. Al hacer[122] $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 + 2t + 1 - k\left[A^{2^t} + 2 + A^{-2^t}\right]t^2}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - 2 + A^{-2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= -\frac{1}{A^2 - 2 + A^{-2}} + \frac{x^2}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - 2 + A^{-2^x}\right]}$$

3.15 Anexo $(S10P)$

Veamos unas expresiones simplificadas de este sumatorio.

1. Al hacer $a = b = 0$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1 - k\left[A^{2^t} + B^{-2^t}\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - B^{2\cdot 2^t}\right]} = -\frac{1}{A^2 - B^2} + \frac{1}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - B^{2^x}\right]}$$

[121] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$.
[122] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$, $P = 0$.

2. Al hacer $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t - k\left[A^{2^t} + B^{2^t}\right](t-1)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - B^{2\cdot 2^t}\right]} = \frac{x-1}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - B^{2^x}\right]}$$

3. Al hacer $a = 1$, $b = c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 - k\left[A^{2^t} + B^{2^t}\right]\left[t^2 - 2t + 1\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - B^{2\cdot 2^t}\right]} = \frac{x^2 - 2x + 1}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - B^{2^x}\right]}$$

4. Al hacer $a = 0$, $b = b$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{bt + c - k\left[A^{2^t} + B^{2^t}\right](bt - b + c)}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - B^{2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= -\frac{c}{A^2 - B^2} + \frac{bx - b + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - B^{2^x}\right]}$$

5. Al hacer $a = a$, $b = 0$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + c - k\left[A^{2^t} + B^{2^t}\right]\left[at^2 - 2at + a + c\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - B^{2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= -\frac{c}{A^2 - B^2} + \frac{ax^2 - 2ax + a + c}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - B^{2^x}\right]}$$

6. Al hacer $a = a$, $b = b$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt - k\left[A^{2^t} + B^{2^t}\right]\left[at^2 + (b-2a)t + a - b\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t} - B^{2\cdot 2^t}\right]} =$$

$$= \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b}{k^{x-1}\left[A^{2^x} - B^{2^x}\right]}$$

7. Al hacer[123] $a=a$, $b=2a$, $c=c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{at^2+2at+c-k\left[A^{2^t}+B^{2^t}\right]\left[at^2-a+c\right]}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t}-B^{2\cdot 2^t}\right]}=$$

$$=-\frac{c}{A^2-B^2}+\frac{ax^2-a+c}{k^{x-1}\left[A^{2^x}-B^{2^x}\right]}$$

8. Al hacer[124] $a=1$, $b=2$, $c=1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{t^2+2t+1-k\left[A^{2^t}+B^{2^t}\right]t^2}{k^t\left[A^{2\cdot 2^t}-B^{2\cdot 2^t}\right]}=$$

$$=-\frac{1}{A^2-B^2}+\frac{x^2}{k^{x-1}\left[A^{2^x}-B^{2^x}\right]}$$

3.16 Anexo $(S11P)$

Veamos unas expresiones simplificadas de este sumatorio.

1. Al hacer $a=b=0$, $c=1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{1-kA^{n^t}}{k^tA^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}}=-\frac{1}{A^{\frac{n}{n-1}}}+\frac{1}{k^{x-1}A^{\frac{n^x}{n-1}}}$$

2. Al hacer $a=0$, $b=1$, $c=0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{t-kA^{n^t}(t-1)}{k^tA^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}}=\frac{x-1}{k^{x-1}A^{\frac{n^x}{n-1}}}$$

3. Al hacer $a=1$, $b=c=0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\frac{t^2-kA^{n^t}\left[t^2-2t+1\right]}{k^tA^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}}=\frac{x^2-2x+1}{k^{x-1}A^{\frac{n^x}{n-1}}}$$

[123] Estos valores se obtienen de considerar que, $N=0$.

[124] Estos valores se obtienen de considerar que, $N=0$, $P=0$.

4. Al hacer $a = 0$, $b = b$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{bt + c - kA^{n^t}(bt - b + c)}{k^t A^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}} = -\frac{c}{A^{\frac{n}{n-1}}} + \frac{bx - b + c}{k^{x-1} A^{\frac{n^x}{n-1}}}$$

5. Al hacer $a = a$, $b = 0$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + c - kA^{n^t}\left[at^2 - 2at + a + c\right]}{k^t A^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}} =$$

$$= -\frac{c}{A^{\frac{n}{n-1}}} + \frac{ax^2 - 2ax + a + c}{k^{x-1} A^{\frac{n^x}{n-1}}}$$

6. Al hacer $a = a$, $b = b$, $c = 0$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt - kA^{n^t}\left[at^2 + (b - 2a)t + a - b\right]}{k^t A^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}} =$$

$$= \frac{ax^2 + (b - 2a)x + a - b}{k^{x-1} A^{\frac{n^x}{n-1}}}$$

7. Al hacer[125] $a = a$, $b = 2a$, $c = c$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + 2at + c - kA^{n^t}\left[at^2 - a + c\right]}{k^t A^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}} = -\frac{c}{A^{\frac{n}{n-1}}} + \frac{ax^2 - a + c}{k^{x-1} A^{\frac{n^x}{n-1}}}$$

8. Al hacer[126] $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ nos queda:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{t^2 + 2t + 1 - kA^{n^t} t^2}{k^t A^{\frac{n^{t+1}}{n-1}}} = -\frac{1}{A^{\frac{n}{n-1}}} + \frac{x^2}{k^{x-1} A^{\frac{n^x}{n-1}}}$$

[125] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$.
[126] Estos valores se obtienen de considerar que, $N = 0$, $P = 0$.

3.17 Aplicaciones

1. Calcular el siguiente sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{2 \cdot 3^t + 16}{5^{t-1}}$$

   Siendo $k = 5$, $q(t) = 2 \cdot 3^t + 16$.

   (a) Cálculo de la solución particular de la ecuación completa, por ser $y_{x+1} - 5y_x = 2 \cdot 3^x + 16$ hacemos $y_x = A \cdot 3^t + B \rightarrow y_{x+1} = 3A \cdot 3^t + B$ sustituyendo e identificando obtenemos $A = -1$, $B = -4$ por lo que será $f(x) = y_x = -3^x - 4$.

   (b) Cálculo de la constante $A = \dfrac{-f(1)}{k^{-\alpha}} = -\dfrac{-7}{5^{-1}} = 35$.

   (c) Aplicando la fórmula: $(S1)$.

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{2 \cdot 3^t + 16}{5^{t-1}} = 35 + \frac{-3^x - 4}{5^{x-2}}$$

2. Calcular el siguiente sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{99} \frac{10t^2 + 11t - 15}{2^{t-1} 3^{t-5}}$$

   Para aplicar la fórmula expresamos el sumatorio[127]:

$$3^4 \sum_{t=1}^{99} \frac{10t^2 + 11t - 15}{6^{t-1}}$$

   (a) Cálculo de la solución particular de la ecuación completa. Por ser:

$$y_{x+1} - 6y_x = 10x^2 + 11x - 15$$

   Tomamos un polinomio de segundo grado.

$$y_x = Ax^2 + Bx + C \rightarrow y_{x+1} = A\,(x+1)^2 + Bx + B + C$$

[127] El denominador es:
$2^{t-1}3^{t-5} = 2^{t-1}3^{t-1}3^{-4} = 3^{-4}6^{t-1}$
Siendo, $k = 6$, $q(t) = 10t^2 + 11t - 15$.

Sustituyendo obtenemos: $A = -2$, $B = -3$, $C = 2$.
Por lo que será:

$$f(x) = y_x = -2x^2 - 3x + 2$$

(b) Cálculo de la constante:

$$A = \frac{-f(1)}{k^{-\alpha}} = -\frac{-3}{6^{-1}} = 18.$$

(c) Aplicando la fórmula $(S1)$.

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{10t^2 + 11t - 15}{6^{t-1}} = 18 + \frac{-2x^2 - 3x + 2}{6^{x-2}}$$

En nuestro caso particular es:

$$3^4 \sum_{t=1}^{99} \frac{10t^2 + 11t - 15}{6^{t-1}} = 3^4 \left[18 + \frac{-2 \cdot 100^2 - 300 + 2}{6^{99-1}} \right] = 1.458$$

3. Resolver la ecuación:

$$y_{x+h} - 8xy_x = 16x - 2 \ (para\ h = 2)$$

Cambio:

Por ser $h = a = 2 \rightarrow x = 2z$ siendo la nueva ecuación:

$$y_{z+1} - 16zy_z = 32z - 2$$

(a) Solución de la homogénea $y_z^0 = C \cdot 16^{z-1}(z-1)!$.
(b) Solución particular de la completa $y_z^1 = -2$.
La solución general es:

$$y_z = C16^{z-1}(z-1)! - 2$$

Deshaciendo el cambio obtenemos:

$$y_x = C16^{\frac{x-2}{2}} \left(\frac{x}{2} - 1 \right)! - 2.$$

Por ser:

$$16^{\frac{x-2}{2}}\left(\frac{x}{2}-1\right)! = \left\{\begin{array}{c} 4^{x-2}\left(\frac{x}{2}-1\right)! \\ (-4)^{x-2}\left(\frac{x}{2}-1\right)! \end{array}\right.$$

Podemos expresar:

$$y_x^0 = C_1 4^{x-2}\left(\frac{x}{2}-1\right)! + C_2(-4)^{x-2}\left(\frac{x}{2}-1\right)!$$

Solución general:

$$y_x = C_1 4^{x-2}\left(\frac{x}{2}-1\right)! + C_2(-4)^{x-2}\left(\frac{x}{2}-1\right)! - 2$$

4. Calcular el siguiente sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{10} \frac{4^t(2t-8)}{t!}$$

Expresemos el sumatorio[128]:

$$\sum_{t=1}^{10} \frac{2t-8}{\left(\frac{1}{4}\right)^t t!}$$

(a) Cálculo de la solución particular de:

$$y_{x+1} - \frac{x}{4} y_x = 2x - 8$$

Para $y_x = Ax + B$ obtenemos $A = 0$, $B = -8$ por lo que $f(x) = -8$.

(b) Cálculo de la constante $A = -f(1) = 8$.

(c) Aplicamos la fórmula $(S2)$ para $x = 11$.

$$\sum_{t=1}^{10} \frac{2t-8}{\left(\frac{1}{4}\right)^t t!} = 8 + \frac{-8}{\left(\frac{1}{4}\right)^{10} 10!} = 5'688324515$$

[128] Siendo, $k = \frac{1}{4}$.

5. Resolver la ecuación del ejercicio 3 variando el valor de h.

$$y_{x+h} - 8xy_x = 16x - 2 \text{ (} para\ h = 3x)$$

El cambio para $a = 3$ será $x = 4^z$.

La nueva ecuación será:

$$y_{z+1} - 8 \cdot 4^z y_z = 16 \cdot 4^z - 2$$

(a) Solución de la homogénea, $y_z^0 = C \cdot 8^z 4^{\frac{z^2-z}{2}}$.

(b) Solución de la completa, $y_z = -2$.
Solución general:

$$y_z = C \cdot 8^z 4^{\frac{z^2-z}{2}} - 2$$

Deshacemos el cambio[129] $z = \log_4 x$.
Solución general:

$$y_x = Cx^{\frac{3}{2}} x^{\log_4(\frac{\sqrt{x}}{2})} - 2$$

6. Calcular el siguiente sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{6} \frac{16^t(48 - 3 \cdot 2^t)}{2^{\frac{t^2+t}{2}}}$$

Expresemos el sumatorio[130]:

$$\sum_{t=1}^{6} \frac{(48 - 3 \cdot 2^t)}{\left(\frac{1}{16}\right)^t 2^{\frac{t^2+t}{2}}}$$

(a) Cálculo de la solución particular de:

$$y_{x+1} - \frac{1}{16} 2^x y_x = 48 - 3 \cdot 2^x$$

$y_x = A + B2^x \rightarrow A = 48, B = 0 \rightarrow f(x) = 48.$

[129] Como podemos ver,
$8^z = 4^z 2^z = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$.
$4^{\frac{z^2-z}{2}} = 4^{z(\frac{z-1}{2})} = x^{\frac{1}{2}\log_4 \frac{x}{4}} = x^{\log_4(\frac{\sqrt{x}}{2})}$.

[130] Siendo, $k = \dfrac{1}{16}$, $A = 2$.

(b) Cálculo de la constante $A = -f(1) = -48$.

(c) Aplicamos la fórmula $(S3)$ para $x = 7$.

$$\sum_{t=1}^{6} \frac{(48 - 3 \cdot 2^t)}{\left(\frac{1}{16}\right)^t 2^{\frac{t^2+t}{2}}} = -48 + \frac{48}{\left(\frac{1}{16}\right)^6 2^{21}} = 336$$

7. Resolver la ecuación:

$$y_{x+h(x)} - 5xy_x = -10x^3 + 23x^2 - 3x \rightarrow \ para\ h = x + 1$$

Cambio $x = 2^z - 1$. La nueva ecuación es:

$$y_{z+1} - 5(2^z - 1)y_z = -10 \cdot 2^{3z} + 53 \cdot 2^{2z} - 79 \cdot 2^z + 36$$

(a) Solución de la homogénea, $y_z = C5^{z-1} \prod_{t=1}^{z-1} (2^t - 1)$.

(b) Solución de la completa, $y_z = 2 \cdot 2^{2z} - 7 \cdot 2^z + 6$.
Deshaciendo el cambio $z = \log_2(x + 1)$.
Solución general[131]:

$$y_x = 2x^2 - 3x + 1 + \frac{C}{5} 5^{\log_2(x+1)} \prod_{t=1}^{\log_2(x+1)-1} (2^t - 1)$$

8. Calcular el siguiente sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{6} \frac{7t - 10 + 2^t - t \cdot 2^{t-1}}{\left(\frac{1}{8}\right)^t \prod_{s=1}^{t} (2^s - 6)}$$

La ecuación correspondiente será:

$$y_{x+1} - \frac{1}{8}(2^x - 6)y_x = 7x - 10 + 2^x - x \cdot 2^{x-1}$$

[131] Si queremos sustituir la y_x en la ecuación inicial para verificar la solución obtenida, deberemos tener en cuenta que al cambiar $x \rightarrow x + h(x)$ en el productorio, nos queda:

i. $\displaystyle\prod_{t=1}^{\log_2(2x+2)-1} (2^t - 1) = \prod_{t=1}^{\log_2(x+1)} (2^t - 1) =$

$\displaystyle = \left[2^{\log_2(x+1)} - 1\right] \prod_{t=1}^{\log_2(x+1)-1} (2^t - 1) = x \prod_{t=1}^{\log_2(x+1)-1} (2^t - 1)$

(a) Cálculo de la solución particular, hacemos:

$$y_x = Cx + D \rightarrow C = 4, D = -8$$

Por lo que tendremos:

$$f(x) = 4x - 8$$

(b) Cálculo de la constante, $M = -f(1) = 4$.

(c) Aplicamos la fórmula[132] $(S4)$.

$$\sum_{t=1}^{6} \frac{7t - 10 + 2^t - t \cdot 2^{t-1}}{\left(\frac{1}{8}\right)^t \prod_{s=1}^{t}(2^s - 6)} = 4 + \frac{28 - 8}{\prod_{t=1}^{6} \frac{1}{8}(2^t - 6)} = 25'72944297$$

9. Resolver la ecuación:

$$y_{x+h} - 6xy_x = -4x^2 - 10x + 2 \quad para \;\; h = 4x^2 - 3x + \frac{1}{2}$$

Siendo $h(x) = ax^2 + (2ab - 1)x + ab^2 - b$ tendremos[133]:

$$a = 4 \; , \; 2ba - 1 = -3 \rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

Luego el cambio $x = \dfrac{A^{2^z}}{a} - b$ será:

$$x = \frac{A^{2^z}}{4} + \frac{1}{4}$$

Siendo la nueva ecuación:

$$y_{z+1} - \frac{6}{4}\left[A^{2^z} + 1\right] y_z = -\frac{1}{4}\left[A^{2 \cdot 2^z} + 12A^{2^z} + 3\right]$$

Para resolverla hacemos:

---

[132] Para $k = \frac{1}{8}$, $A = 2$, $B = 6$, $x = 7$.

[133] Vemos que las constantes, $b^2a - b = \frac{1}{2}$ cumplen.

(a) Solución de la homogénea[134].

$$y_z = K\prod_{t=0}^{z-1}\frac{3}{2}\left[A^{2^t}+1\right] = C\left(\frac{3}{2}\right)^z\left[A^{2^z}-1\right]$$

(b) Solución particular de la completa.
Planteamos la función:

$$y_z = aA^{2^z}+b \to y_{z+1} = aA^{2\cdot 2^z}+b$$

Sustituyendo e igualando se obtiene $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$ dándonos:

$$y_z = \frac{1}{2}A^{2^z}+\frac{3}{2}$$

(c) Solución general.

$$y_z = C\left(\frac{3}{2}\right)^z\left[A^{2^z}-1\right]+\frac{1}{2}A^{2^z}+\frac{3}{2}$$

Deshaciendo el cambio $x=\dfrac{A^{2^z}}{4}+\dfrac{1}{4}$ se obtiene:

$$z=\log_2\left[\log_A(4x-1)\right]$$

Solución general de la ecuación inicial:

$$y_x = C\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2[\log_A(4x-1)]}(4x-2)+2x+1$$

10. Calcular el siguiente sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{5}\frac{0'4\cdot 1'02^{2\cdot 2^t}+3'2\cdot 1'02^{2^t}-1'2}{0'8^t\left[1'02^{2\cdot 2^t}-1\right]}$$

Al compararlo con $(S5)$ obtenemos $k=0'8$, $A=1'02$ que nos da:

$$y_{x+1}-0'8\left[1'02^{2^x}+1\right]y_x = 0'4\cdot 1'02^{2\cdot 2^x}+3'2\cdot 1'02^{2^x}-1'2$$

[134] Aplicamos la fórmula de productorios $(P1)$ para $B=1$, siendo $C=\dfrac{K}{A-1}$. Para $A\neq 1$.

Para resolver la completa hacemos:

$$y_x = a1'02^{2^x} + b \rightarrow a = 2, b = -6$$

Siendo la solución particular:

$$f(x) = 2 \cdot 1'02^{2^x} - 6$$

El valor de la constante será:

$$N = -\frac{f(1)}{A^2 - 1} = -\frac{2 \cdot 1'02^2 - 6}{1'02^2 - 1} = 97'0099$$

Por lo que para $x = 6$ el sumatorio pedido será:

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{0'4 \cdot 1'02^{2 \cdot 2^t} + 3'2 \cdot 1'02^{2^t} - 1'2}{0'8^t \left[1'02^{2 \cdot 2^t} - 1\right]} =$$

$$= 97'0099 + \frac{2 \cdot 1'02^{64} - 6}{0'8^5 \left[1'02^{64} - 1\right]} = 98'3291$$

11. Calcular el siguiente sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{1'005^{2 \cdot 2^t} + 4 \cdot 1'005^{2^t} - 5}{0'8^t 1'005^{2 \cdot 2^t}}$$

Al compararlo con $(S6)$ obtenemos $k = 0'8$, $A = 1'005$ que nos da:

$$y_{x+1} - 0'8 \cdot 1'005^{2^x} y_x = 1'005^{2 \cdot 2^x} + 4 \cdot 1'005^{2^x} - 5$$

Para resolver la completa hacemos:

$$y_x = C \cdot 1'005^{2^x} + D \rightarrow C = 5 \ , \ D = -5$$

Siendo la solución particular:

$$f(x) = 5 \cdot 1'005^{2^x} - 5$$

El valor de la constante será:

$$N = -\frac{f(1)}{A^2} = -\frac{5 \cdot 1'005^2 - 5}{1'005^2} = -0'04962748$$

Por lo que para $x = 6$ el sumatorio pedido será:

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{1'005^{2\cdot 2^t} + 4\cdot 1'005^{2^t} - 5}{0'8^t 1'005^{2\cdot 2^t}} =$$

$$= -0'04962748 + \frac{5\cdot 1'005^{64} - 5}{0'8^5 1'005^{64}} = 4'12016839$$

12. Resolver la ecuación:

$$y_{x+h} + 2xy_x = 12;\ \ para\ \ h(x) = -2x^2 - x + 1$$

Para[135] $a = -2$, $2b - 1 = -1 \to b = 0$.
Luego el cambio $x = \dfrac{1}{a}\left[A^{2^z} - b + A^{-2^z}\right]$ será:

$$x = -\frac{1}{2}\left[A^{2^z} + A^{-2^z}\right]$$

Siendo la nueva ecuación:

$$y_{z+1} - \left[A^{2^z} + A^{-2^z}\right] y_z = 12$$

Para resolverla hacemos:

(a) Solución de la homogénea[136]

$$y_z = \prod_{t=0}^{z-1}\left[A^{2^t} + A^{-2^t}\right] = B\left[A^{2^z} - A^{-2^z}\right]\ \ paraA \neq 1$$

(b) Solución particular de la completa.
Planteamos la función:

$$y_z = aA^{2^z} + bA^{-2^z} + c \to y_{z+1} = aA^{2\cdot 2^z} + bA^{-2\cdot 2^z} + c$$

Sustituyendo e igualando se obtiene $a = b = -6$, $c = 0$ dándonos:

$$y_z = -6A^{2^z} - 6A^{-2^z}$$

[135] Vemos que cumple, $\dfrac{b^2 - b - 2}{a} = 1$.
[136] Aplicamos la fórmula de productorios $(P1)$.

(c) Solución general:

$$y_z = B\left[A^{2^z} - A^{-2^z}\right] - 6A^{2^z} - 6A^{-2^z}$$

Deshaciendo el cambio $x = -\frac{1}{2}\left[A^{2^z} + A^{2^z}\right]$
Para despejar A^{2^z} tenemos:

$$A^{2\cdot 2^z} + 2xA^{2^z} + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$A^{2^z} = -x \pm \sqrt{x^2-1}; A^{-2^z} = -\left[x \pm \sqrt{x^2-1}\right]$$

Por lo que el valor del término primero será:

$$B\left[A^{2^z} - A^{-2^z}\right] = C\sqrt{x^2-1}$$

Solución general de la ecuación inicial[137]:

$$y_x = C\sqrt{x^2-1} + 12x$$

13. Calcular el siguiente sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{t - \frac{1}{2}\left(1'001^{2^t} + 1'001^{-2^t}\right)(t-1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^t \left(1'001^{2\cdot 2^t} - 1'001^{-2\cdot 2^t}\right)}$$

Al compararlo con $(S7)$ obtenemos $k = \frac{1}{2}$, $A = 1'001$ que nos da:

$$y_{x+1} - \frac{1'001^{2^x} + 1'001^{-2^x}}{2} y_x = x - \frac{1'001^{2^x} + 1'001^{-2^x}}{2}(x-1)$$

Para resolver la completa hacemos:

$$y_x = Bx + C \rightarrow B = 1 \text{ , } C = -1$$

[137] Para comprobar el resultado y no tener problemas de signos, debemos tener en cuenta que para $x + h = -2x^2 + 1$ la $\sqrt{x^2-1}$se transforma en:
$\sqrt{(-2x^2+1)^2 - 1} = \sqrt{(-2x)^2 x^2 - (-2x)^2} = -2x\sqrt{x^2-1}$

Siendo la solución particular:

$$f(x) = x - 1$$

El valor de la constante será:

$$N = -\frac{f(1)}{A^2 - A^{-2}} = 0$$

Por lo que para $x = 6$ el sumatorio pedido será:

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{t - \frac{1}{2}\left(1'001^{2^t} + 1'001^{-2^t}\right)(t-1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^t \left(1'001^{2\cdot 2^t} - 1'001^{-2\cdot 2^t}\right)} =$$

$$= \frac{6-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^5 (1'001^{64} - 1'001^{-64})} = 1.249'772$$

14. Calcular el sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{3t + 8 - \left(1'001^{2^t} + 1'001^{-2^t}\right)(t+2)}{0'5^t \left(1'001^{2\cdot 2^t} + 1 + 1'001^{-2\cdot 2^t}\right)}$$

Al compararlo con $(S8)$ obtenemos $k = \dfrac{1}{2}$, $A = 1'001$ que nos da:

$$y_{x+1} - \frac{1'001^{2^x} - 1 + 1'001^{-2^x}}{2} y_x =$$

$$= 3x + 8 - \left[1'001^{2^x} + 1'001^{-2^x}\right](x+2)$$

Para resolver la completa hacemos:

$$y_x = Bx + C \rightarrow B = 2, C = 4$$

Siendo la solución particular:

$$f(x) = 2x + 4$$

El valor de la constante será:

$$N = -\frac{f(1)}{A^2 + 1 + A^{-2}} = -\frac{6}{3'000004}$$

Por lo que para $x = 6$ el sumatorio pedido será:

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{3t + 8 - \left(1'001^{2^t} + 1'001^{-2^t}\right)(t+2)}{0'5^t \left(1'001^{2 \cdot 2^t} + 1 + 1'001^{-2 \cdot 2^t}\right)} =$$

$$-\frac{6}{3'000004} + \frac{16}{0'5^5 \left[1'001^{64} + 1 + 1'001^{-64}\right]} = 168'4341231$$

15. Calcular el sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{1 - \left(1'001^{2^t} + 1'001^{-2^t}\right)\left(\frac{t}{2} + 1\right)}{0'5^t \left(1'001^{2 \cdot 2^t} - 2 + 1'001^{-2 \cdot 2^t}\right)}$$

Al compararlo con $(S9)$ obtenemos $k = \frac{1}{2}$, $A = 1'001$ que nos da:

$$y_{x+1} - \frac{1'001^{2^x} + 2 + 1'001^{-2^x}}{2} y_x =$$

$$= 1 - \left[1'001^{2^x} + 1'001^{-2^x}\right]\left(\frac{x}{2} + 1\right)$$

Para resolver la completa hacemos:

$$y_x = Bx + C \rightarrow B = 1, C = 2$$

Siendo la solución particular:

$$f(x) = x + 2$$

El valor de la constante será:

$$N = -\frac{f(1)}{A^2 - 2 + A^{-2}} = -\frac{3}{0'000004}$$

Por lo que para $x = 6$ el sumatorio pedido será:

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{1 - \left(1'001^{2^t} + 1'001^{-2^t}\right)\left(\dfrac{t}{2} + 1\right)}{0'5^t \left(1'001^{2\cdot 2^t} - 2 + 1'001^{-2\cdot 2^t}\right)} =$$

$$= -\frac{3}{0'000004} + \frac{8}{0'5^5 \left[1'001^{64} - 2 + 1'001^{-64}\right]} = 688.208'6362$$

16. Calcular el sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{2t - 3 - \left(1'002^{2^t} + 1'001^{2^t}\right)\left(t - \dfrac{5}{2}\right)}{0'5^t \left(1'002^{2\cdot 2^t} - 1'001^{2\cdot 2^t}\right)}$$

Al compararlo con $(S10)$ obtenemos $k = \dfrac{1}{2}$, $A = 1'002$ que nos da:

$$y_{x+1} - \frac{1'002^{2^x} + 2 + 1'001^{2^x}}{2} y_x =$$

$$= 2x - 3 - \left[1'002^{2^x} + 1'001^{2^x}\right] \frac{2x - 5}{2}$$

Para resolver la completa hacemos:

$$y_x = Cx + D \to C = 2 \ , \ D = -5$$

Siendo la solución particular:

$$f(x) = 2x - 5$$

El valor de la constante será:

$$N = -\frac{f(1)}{A^2 - B^2} = -\frac{3}{0'002003}$$

Por lo que para $x = 6$ el sumatorio pedido será:

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{2t - 3 - \left(1'002^{2^t} + 1'001^{2^t}\right)\left(t - \dfrac{5}{2}\right)}{0'5^t \left(1'002^{2\cdot 2^t} - 1'001^{2\cdot 2^t}\right)} =$$

$$-\frac{3}{0'002003} + \frac{7}{0'5^5 \left(1'002^{64} - 1'001^{64}\right)} = 4.681'859232$$

17. Resolver la ecuación general ($k \neq 0$).

$$y_{x+h} - kxy_x = Mx - \frac{M}{k} \to h = x^n - x$$

El cambio será:

$$x = A^{n^z}$$

Siendo la nueva ecuación:

$$y_{z+1} - kA^{n^z} y_z = MA^{n^z} - \frac{M}{k}$$

Para resolverla hacemos:

(a) Solución de la homogénea.

$$y_z = C \prod_{t=0}^{z-1} kA^{n^t} = Ck^z A^{\frac{n^z - 1}{n-1}} = Dk^z A^{\frac{n^z}{n-1}}$$

(b) Solución particular de la completa.
Planteamos la función:

$$y_z = E \to E = -\frac{M}{k}$$

(c) La solución general es:

$$y_z = Dk^z A^{\frac{n^z}{n-1}} - \frac{M}{k}$$

Deshaciendo el cambio:

$$x = A^{n^z} \to \log_A x = n^z \ , \ \log_n (\log_A x) = z$$

Solución general de la ecuación inicial:

$$y_x = Dk^{\log_n (\log_A x)} \sqrt[n-1]{x} - \frac{M}{k}$$

18. Calcular el sumatorio:

$$\sum_{t=0}^{3} \frac{2t^2 + 4t - 125\left(\frac{1}{3}\right)^{2^t}\left(2t^2 - 2\right)}{125^t\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{t+1}}}$$

Empezaremos expresando el sumatorio de la forma:

$$750 + \sum_{t=1}^{3} \frac{2t^2 + 4t - 125\left(\frac{1}{3}\right)^{2^t}\left(2t^2 - 2\right)}{125^t\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{t+1}}}$$

Al compararlo con $(S11)$ obtenemos $k = 125$, $A = \dfrac{1}{3}$, $n = 2$ que nos da:

$$y_{x+1} - 125\left(\frac{1}{3}\right)^{2^x} y_x = 2x^2 + 4x - 125\left(\frac{1}{3}\right)^{2^x}\left(2x^2 - 2\right)$$

Para resolver la completa hacemos:

$$y_x = ax^2 + bx + c \rightarrow a = 2, b = 0.c = -2$$

Siendo la solución particular:

$$f(x) = 2x^2 - 2$$

El valor de la constante será:

$$M = \frac{f(1)}{A^{\frac{n}{n-1}}} = 0$$

Por lo que para $x = 4$ el sumatorio pedido será:

$$750 + \frac{2 \cdot 4^2 - 2}{125^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^{16}} = 1.411'19$$

19. Veamos que es una fórmula universal e intentemos deducir el sumatorio anterior ya calculado $(S3)$ que es el correspondiente a la ecuación en diferencias $y_{z+1} - kA^z y_z = q(z)$.

Para poder aplicar (SU) necesitamos que la ecuación sea de la forma:

$$y_{x+1} - \frac{h(x)}{h(x+1)} y_x = \frac{s(x)}{h(x+1)}$$

Comparando obtenemos:

$$\frac{h(x)}{h(x+1)} = kA^x$$

Resolviendo la ecuación nos da:

$$h(x) = \frac{h(0)}{k^x A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

Con lo que la ecuación inicial[138] será:

$$y_{z+1} - \frac{h(z)}{h(z+1)} y_z = q(z)$$

Que también la podemos expresar:

$$h(z+1) y_{z+1} - h(z) y_z = h(z+1) q(z)$$

Por lo que tenemos:

$$s(t) = h(t+1) q(t) = \frac{h(0) q(t)}{k^{t+1} A^{\frac{t^2+t}{2}}}$$

Al aplicar (SU) se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{h(0) q(t)}{k^{t+1} A^{\frac{t^2+t}{2}}} = M + \frac{h(0) l(x)}{k^x A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

Multiplicando por $\dfrac{k}{h_0}$ y haciendo $N = \dfrac{Mk}{h(0)}$ se obtiene[139]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t A^{\frac{t^2+t}{2}}} = N + \frac{l(x)}{k^{x-1} A^{\frac{x^2-x}{2}}}$$

Siendo:
$l(x)$ es la solución particular de la completa[140].
$N = -l(1)$.

[138] $y_{z+1} - kA^z y_z = q(z)$
[139] Como se puede apreciar el resultado coincide con el que se ha obtenido anteriormente.
[140] $y_{x+1} - kA^x y_x = q(x)$

20. Veamos ahora el cálculo de un sumatorio aplicando la fórmula universal (SU).

    Dada la ecuación:

$$(x^2+2x)y_{x+1}-(x^2-1)y_x = 9x^2+x-4$$

    Calcular para $x=10.$ el sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\left(9t^2+t-4\right)$$

    De la ecuación observamos que:

$$h(x)=x^2-1, s(t)=9t^2+t-4$$

    Para calcular $l(x)$ planteamos:

$$y_x = Ax+B \rightarrow A=3, B=-4$$

    Siendo la solución particular de la completa:

$$l(x)=3x-4$$

    El valor de la constante es:

$$N=-h(1)l(1)=0$$

    Por lo que el sumatorio general será:

$$\sum_{t=1}^{x-1}\left(9t^2+t-4\right)=(x^2-1)(3x-4)$$

    Que para $x=10$ nos da:

$$\sum_{t=1}^{9}\left(9t^2+t-4\right)=99\cdot 26=2.574$$

21. Veamos una aplicación expuesta en las páginas 330-333 del Milne, William Edmund (1.973) en la cual vamos a respetar la terminología utilizada en el mismo.

$$g(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}$$

La solución de la completa es:

$$f(x) = A\Psi(x + a - 1) + B\Psi(x + b - 1)$$

Siendo:

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} ln\Gamma(x + 1) = \frac{d}{dx} ln(x!)$$

Con lo que nos queda el sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \left(\frac{A}{t+a} + \frac{B}{t+b} \right) =$$

$$= -A\Psi(a) - B\Psi(b) + A\Psi(x + a - 1) + B\Psi(x + b - 1)$$

En el caso particular[141]:

$$\sum_{t=1}^{50} \left(\frac{1}{t+\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+1} \right) = -\Psi(0'5) - B\Psi(1) + \Psi(50'5) - \Psi(51) = 0'37653$$

- La función $\Psi(x)$ está calculada mediante el desarrollo:
  $\Psi(x) = \frac{1}{2} lnx(x+1) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{90}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}\right) + ...$
  que también está tabulada en la pág. 383 del citado libro.

22. Consideremos una aplicación económica expuesta en la páginas 116-118 del libro de Alegre, P.; González, L. etc.(1.989) en la que nos propone calcular la valoración de una acción en el día de hoy 1 de enero para la cual tendremos que calcular un sumatorio de la forma $(S1P)$ teniendo en cuenta los siguientes datos.

    (a) La tendencia seguida por los dividendos durante los últimos años es $D(t) = 20 + 5t + 0'1t^2$ en la que $t = 0$ corresponde al año anterior de la compra de los títulos cuyos dividendos se cobran el 1 de abril de cada año.

[141] Por ser: $x = 51$, $A = 1$, $a = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $b = 1$.

(b) Esta tendencia se mantendrá durante los próximos 10 años, estabilizándose los dividendos a partir de entonces en la última cifra alcanzada.

(c) La valoración se ha efectuado al 9% de interés compuesto.

Para calcular la valoración en abril del año anterior a la compra teniendo en cuenta que $D(10) = 80$ será:

$$V_1 = \sum_{x=1}^{10} \frac{0'1x^2 + 5x + 20}{1'09^x} + \frac{80}{0'09 \cdot 1'09^{10}}$$

Para calcular el sumatorio aplicamos[142] $(S1P)$ dando: $302'179547$.

Siendo, $\dfrac{80}{0'09 \cdot 1'09^{10}} = 375'476273$. Obtenemos:

$$V_1 = 302'179547 + 375'476273 = 677'655820$$

El valor de la acción en el día de hoy es:

$$V_0 = V_1 \cdot 1'09^{\frac{3}{4}} = 722'90134.$$

[142] Con:
$a = 0'1$, $b = 5$, $c = 20$, $k = 1'09$, $n = 10$.

Capítulo 4

RENTAS FINANCIERAS: TÉRMINOS Y VALORACIÓN

4.1 Introducción y descripción del capítulo.

Las aplicaciones financieras de los cálculos matemáticos nacen del principio de "subestimación de las necesidades futuras" ya que necesitamos dar una respuesta a un bien económico negativo como es el tiempo, y por todos es sabido que entre dos bienes de idéntica utilidad preferiremos siempre aquél de disponibilidad más inmediata.

Las "Operaciones Financieras" consisten en un intercambio no simultáneo de capitales bajo un criterio de equivalencia.

El capital financiero se representará por un par bidimensional (C, T) y en este capítulo trataremos un modelo matemático[1] y lo aplicaremos a los distintos casos de valoración de capitales que en breve expondremos, y al estar distribuidos en el tiempo tendremos lo que se denomina suma financiera.

La expresión matemática es:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{at^2 + bt + c}{k^t} = E + \frac{(1-k)^2(ax^2 + bx + c) + (1-k)(-2ax - a - b) + 2a}{k^{x-1}(1-k)^3} \tag{$S1P$}$$

Donde,

[1] Denominado anteriormente $(S1P)$

$E = -f(1) = -\frac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \frac{bk}{(1-k)^2} - \frac{c}{1-k}$

Comenzaremos aplicando la fórmula $(S1P)$ para el sumatorio de 1 a n , para $k \neq 1$,que por ser $k = 1 + I$ no nos aportará ninguna restricción[2].

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{ax^2 + bx + c}{k^x} =$$

$$= E + \frac{(1-k)^2(an^2 + bn + c) + (k - k^2)(-2an - a - b) + 2ak}{(1-k)^3 k^n} \qquad (F1S)$$

Donde,

$E = -\frac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \frac{bk}{(1-k)^2} - \frac{c}{1-k}$

En este capítulo aplicaremos este sumatorio en todos los casos frecuentes, como son anualidades de capitalización constante, anualidades de capitalización en progresión aritmética, anualidades de capitalización en progresión geométrica, y anualidades de capitalización de segundo grado cóncava y convexa, considerando las diversas posibilidades del crecimiento y del decrecimiento, y analizando los casos en los cuales dichas expresiones puedan ser simplificadas matemáticamente y algunos casos mixtos que puedan resultar de interés, todo ello para tener una idea práctica de la capacidad del modelo, y para que sea más grata la comprensión se efectuarán ejemplos prácticos que pondrá de manifiesto la realidad de la aplicación. Es importante destacar que algunos ejemplos prácticos están realizados todos ellos con números enteros lo que nos da una visión clara de como actúa el modelo y de como poder aplicarlo.

En general consideraremos que las cuantías son prepagables, ya que los cálculos para las cuantías pospagables se diferenciarán en el factor $(1 + I)$ siendo análogos todos los procesos que se deben realizar para la obtención de los sumatorios.

La primera cuantía la denominamos C_1 que corresponde al instante inicial $T = 0$ por ser prepagable, por lo que para actualizar las n cuantías bastará un sumatorio de 1 a n .

También conviene destacar que en cada situación general que nos encontremos se ha intentado ver en que casos se puede simplificar y que limitaciones matemáticas o económicas tiene, realizando así un estudio exhaustivo

[2] Ver el ejercicio 1, de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

de cada aplicación que puede resultar interesante dado su grado de simplicidad.

4.2 Cuantías constantes.

En esta sección trataremos la obtención de capitales finales, mediante cuantías constantes, que representaremos por A prepagables, con un interés I, durante n periodos.

Si las anualidades de capitalización son constantes será $\alpha_x = A$, siendo α_1 la primera cuantía[3].

El capital final C_n para $\alpha_x = A\ ,\ k = 1 + I$ vendrá dado por:

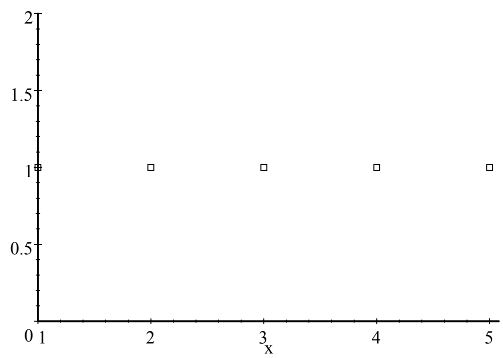
$$C_n = \sum_{x=1}^{n} A k^{n+1-x}$$

Aplicando $(F1S)$ y para $a = 0\ ,\ b = 0\ ,\ c = -1$, se obtiene[4]:

$$C_n = A k^{n+1} \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{k^x} = \frac{Ak}{I}(k^n - 1)$$

Con $\alpha_x = A$

[3] Para $A = 1$ su representación gráfica será:
$\alpha_x = 1$



[4] Expresión que se corresponde con la obtenida en el libro de Rodríguez Rodríguez, A. (1.994) en la pág. 140 que pone:
$S_n = C\dfrac{A^{np} - 1}{A^p - 1}$ teniendo en cuenta que $p = 1, C \rightarrow A, A \rightarrow k = 1 + I$

4.3 Cuantías en progresión aritmética.

Suponemos que las anualidades para la obtención de capitales son variables en progresión aritmética de valor inicial A de diferencia constante B que podrá ser positiva o negativa según sea creciente o decreciente, con un interés I, durante n periodos prepagables.

Si las anualidades son variables en progresión aritmética tendremos que $\alpha_x = A + B(x-1)$[5].

El capital final C_n para $\alpha_x = A + B(x-1)$, $k = 1 + I$ será:

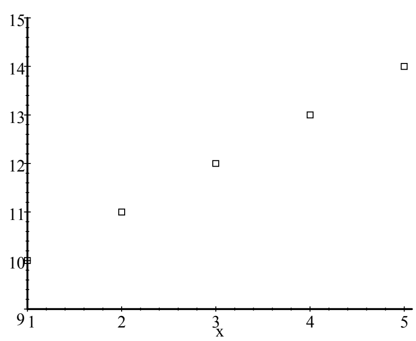
$$C_n = \sum_{x=1}^{n} [A + B(x-1)]\, k^{n+1-x}$$

Aplicando $(F1S)$ y para $a = 0$, $b = B$, $c = A - B$, se obtiene[6]:

$$C_n = k^{n+1} \sum_{x=1}^{n} \frac{Bx + A - B}{k^x} = \frac{k}{I^2}\left[(B + AI)(k^n - 1) - BnI\right]$$

Con $\alpha_x = A + B(x-1)$

[5]Su representación gráfica para $A = 10, B = 1$ será:
$\alpha_x = x + 9$



[6]Ver el ejercicio 4, de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

También la podemos expresar[7]:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) + B\left(\frac{\frac{k\,(k^n-1)}{I} - n}{I}\right)$$

- Un caso particular relativamente sencillo sería una progresión aritmética de valor inicial A, decreciente de diferencia AI, ya que basta sustituir $B \to -AI$ en la expresión anterior.

$$\alpha_x = A - AI(x-1), C_n = \sum_{x=1}^{n} \alpha_x k^{n+1-x}$$

$$C_n = AnK$$

Con[8] $\alpha_x = A - AI(x-1)$

Fórmula en que se puede despejar fácilmente el interés: $I = \dfrac{C_n - An}{An}$

- Un préstamo con los pagos por vencido en progresión aritmética es:

$$\alpha_x = A + B(x-1)$$

$$C = \sum_{x=1}^{n} \alpha_x k^{-x} = \frac{(B+AI)(k^n-1) - BnI}{I^2 k^n}$$

Si $B + AI + BnI = 0 \to A = \dfrac{C}{n} + CI$, $B = -\dfrac{CI}{n}$

$$C = \frac{An}{1+nI}$$

Los valores de A y B nos indican que estamos en un caso muy corriente, denominado de amortización constante[9].

[7] Vemos que esta expresión se corresponde con la obtenida en el libro de Rodríguez Rodríguez, A. (1.994) que en la pág. 150 pone:

$$S_n = C_1\frac{A^{np}-1}{A^p-1} + h\frac{\frac{A^{np}-1}{A^p-1} - n}{A^p-1}$$

Siendo $p = 1, C_1 = A, A = k, h = B$ y multiplicar por k.

Ver los ejercicios 2 y 3, de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

[8] Ya que $\alpha_x \geq 0$ hacemos:

$\alpha_x = A - AI(x-1) = 0 \to x = \dfrac{1+I}{I}$

Siendo, $x \in \left[1, \dfrac{1+I}{I}\right]$

[9] Ver el ejercicio 5, de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

4.4 Cuantías en progresión geométrica.

Suponemos que las anualidades de capitalización son en progresión geométrica de razón $1+r$ con un interés I, durante n periodos prepagables.

Si las anualidades de capitalización son en progresión geométrica tendremos que[10]: $\alpha_x = A(1+r)^{x-1}$.

El capital final C_n vendrá dado por:

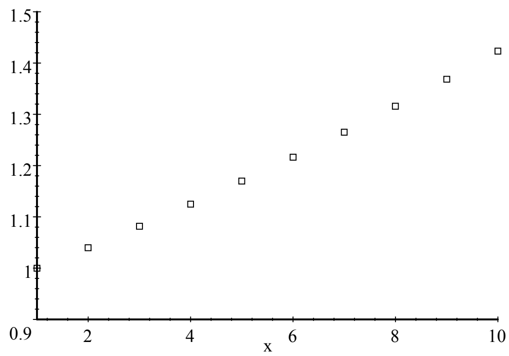
$$C_n = \sum_{x=1}^{n} A(1+r)^{x-1} k^{n+1-x}$$

Aplicando $(F1S)$ y para $a=0$, $b=0$, $c=1$, $k \to k/(1+r)$, $I \neq r$, se obtiene[11]:

$$C_n = \frac{Ak^{n+1}}{1+r} \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{\left(\dfrac{k}{1+r}\right)^x} = \frac{Ak}{I-r}\left[k^n - (1+r)^n\right]$$

Con $\alpha_x = A(1+r)^{x-1}$

[10] Su representación gráfica para $A = 1$ y $r = 0.04$ será:
$\alpha_x = 1.04^{(x-1)}$



[11] Expresión que se corresponde con la obtenida en el libro de Rodríguez Rodríguez, A. (1.994) en la pág. 147 que pone:
$S_n = C_1 \dfrac{A^{np} - q^n}{A^p - q}$ siendo, $p = 1$, $A \to k$, $q = 1 + r$ y multiplicar por k.
Ver el ejercicio 6 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

Para $I = r$ será $k = 1 + r$ y se obtiene[12]:

$$C_n = \frac{Ak^{n+1}}{k} \sum_{x=1}^{n} 1 = Ank^n$$

Con, $\alpha_x = A(1+I)^{x-1}$

4.5 Cuantías polinómicas cóncavas.

Consideremos las progresiones en las que las diferencias entre dos términos consecutivos estén en progresión aritmética, o sea, una función polinómica de segundo grado.

Si tenemos un polinomio de segundo grado será:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow P(x+1) = ax^2 + 2ax + a + bx + b + c$$

$$\Delta P(x) = P(x+1) - P(x) = 2ax + a + b \rightarrow \Delta P(x+1) = 2ax + 3a + b$$

$$\Delta^2 P(x) = \Delta P(x+1) - \Delta P(x) = 2a$$

Para su estudio, consideraremos separadamente el caso $a < 0$, representado por $-a$, que corresponderá a una función polinómica de convexidad negativa o cóncava, y el caso $a > 0$ representado por a, para la función polinómica convexa.

En esta sección nos centraremos en el estudio de las cóncavas o sea $a < 0$ y si hacemos que $\alpha_1 = \alpha_n$ siendo $\alpha_{\max} = A + B$ tendremos que la expresión general de las cuantías vendrá dada por la ecuación de segundo grado[13]:

$$\alpha_x = A + \frac{4B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + (n+1)x - n\right]$$

El capital final C_n se obtiene mediante el sumatorio:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n}\left[A + \frac{4B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + (n+1)x - n\right]\right]k^{n+1-x} =$$

[12] Ver los ejercicios 7 y 8, de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

[13] Su representación gráfica para $A = 1$, $B = 1$, $n = 21$ será:
$\alpha_x = 1 + 0.01(-x^2 + 22x - 21)$

$$= \sum_{x=1}^{n} Ak^{n+1-x} + \sum_{x=1}^{n} \left[\frac{4B}{(n-1)^2} \left[-x^2 + (n+1)x - n \right] \right] k^{n+1-x}$$

El primer sumatorio está calculado en el apartado anterior, calculemos ahora el segundo sumatorio.

$$\sum_{x=1}^{n} \left[\frac{4B}{(n-1)^2} \left[-x^2 + (n+1)x - n \right] \right] k^{n+1-x} =$$

$$= \frac{4Bk^{n+1}}{(n-1)^2} \sum_{x=1}^{n} \frac{-x^2 + (n+1)x - n}{k^x}$$

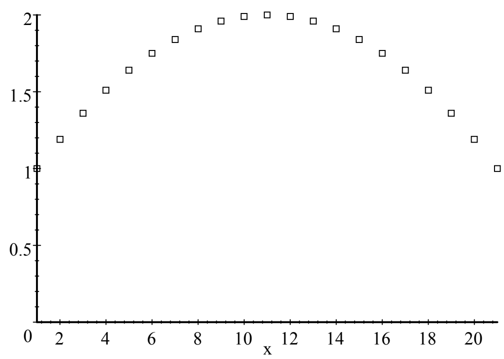
Aplicando $(F1S)$ y para $a = -1$, $b = n + 1$, $c = -n$, se obtiene:

$$\frac{4Bk^2}{(n-1)^2 I^3} \left[2 + nI + (nI - 2k)k^{n-1} \right]$$

Donde el sumatorio total es[14]:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) + \frac{4Bk^2}{(n-1)^2 I^3} \left[2 + nI + (nI - 2k)k^{n-1} \right]$$

Con $\alpha_x = A + \dfrac{4B}{(n-1)^2} \left[-x^2 + (n+1)x - n \right]$



[14] Ver los ejercicios 9 y 10, de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

1. Consideremos la parte creciente de la función polinómica.

   Dado que siendo:

$$\alpha_x = A + \frac{4B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + (n+1)x - n\right]$$

   Tenemos $\alpha_1 = \alpha_n = A$, veamos el cambio que debemos realizar[15] de la variable x para que los nuevos valores sean $\alpha_1 = A$, $\alpha_n = A + B$.

$$\left.\begin{cases} x_v = 1 & \rightarrow \quad x_n = 1 \\ x_v = \frac{n+1}{2} & \rightarrow \quad x_n = n \end{cases}\right\} x \rightarrow \frac{x+1}{2}$$

   Sustituyendo en α_x y simplificando[16]:

$$\alpha_x = A + \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + 2nx + 1 - 2n\right]$$

   Con $\alpha_1 = A$, $\alpha_n = A + B$

   Calculemos el montante final:

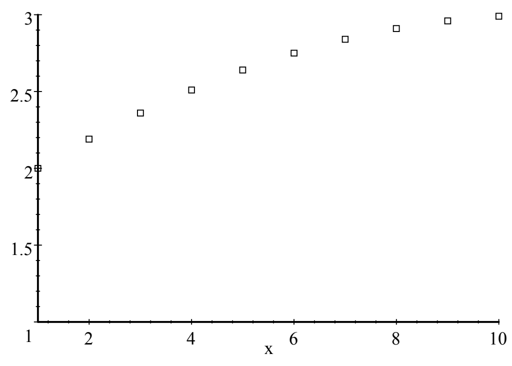
$$C_n = \sum_{x=1}^{n}\left[A + \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + 2nx + 1 - 2n\right]\right]k^{n+1-x} =$$

$$= Ak^{n+1}\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{k^x} + \frac{Bk^{n+1}}{(n-1)^2}\sum_{x=1}^{n}\frac{-x^2 + 2nx + 1 - 2n}{k^x}$$

[15] Por ser α_x una función polinómica cóncava simétrica, veamos el cambio de variable que tenemos que realizar para trasladar α_n al punto máximo de la parábola .

[16] Su representación gráfica para $A = 2$, $B = 1$, $n = 11$ es la correspondiente a la función:

$\alpha_x = 2 + 0.01(-x^2 + 22x - 21)$



El primer sumatorio está anteriormente, calculemos ahora el segundo sumatorio.

Aplicando $(F1S)$ y para $a = -1$, $b = 2n$, $c = 1 - 2n$ se obtiene:

$$\frac{Bk^{n+1}}{(n-1)^2} \sum_{x=1}^{n} \frac{-x^2 + 2nx + 1 - 2n}{k^x} =$$

$$= \frac{Bk^{n+1}}{(k-1)^3(n-1)^2} \left[-3k + 1 + 2n(k-1) + \frac{n(k-1)^2(2-n) + 3k - 1}{k^n} \right]$$

El valor final es la suma de los dos sumatorios, que simplificando es[17]:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n} \alpha_x k^{n+1-x} =$$

$$= \left[A - \tfrac{(3k-1)B}{(k-1)^2(n-1)^2} \right] \tfrac{k(k^n-1)}{k-1} + \tfrac{Bnk}{(k-1)^2(n-1)^2} \left[2k^n + (k-1)(2-n) \right]$$

Con $\alpha_x = A + \dfrac{B}{(n-1)^2} \left[-x^2 + 2nx + 1 - 2n \right]$

2. Consideremos la parte decreciente de la función polinómica.

   Dado que siendo:

$$\alpha_x = A + \frac{4B}{(n-1)^2} \left[-x^2 + (n+1)x - n \right]$$

   Tenemos $\alpha_1 = \alpha_n = A$, veamos el cambio que debemos realizar[18] de la variable x para que los nuevos valores sean $\alpha_1 = A + B$, $\alpha_n = A$.

$$\left. \begin{cases} x_v = \dfrac{n+1}{2} & \rightarrow \quad x_n = 1 \\ x_v = n & \rightarrow \quad x_n = n \end{cases} \right\} x \rightarrow \frac{x+n}{2}$$

   Sustituyendo en α_x y simplificando[19]:

$$\alpha_x = A + \frac{B}{(n-1)^2} \left[-x^2 + 2x + n^2 - 2n \right]$$

[17] Ver el ejercicio 11, de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

[18] Por ser α_x una función polinómica cóncava simétrica, veamos el cambio de variable que tenemos que realizar para trasladar α_1 al punto máximo de la parábola .

[19] Su representación gráfica para, $A = 3$, $B = 2$, $n = 21$ es:

Con $\alpha_1 = A + B, \alpha_n = A$

Calculemos el montante final:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n} \left[A + \frac{B}{(n-1)^2} \left[-x^2 + 2x + n^2 - 2n \right] \right] k^{n+1-x} =$$

$$= Ak^{n+1} \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{k^x} + \frac{Bk^{n+1}}{(n-1)^2} \sum_{x=1}^{n} \frac{-x^2 + 2x + n^2 - 2n}{k^x}$$

El primer sumatorio está calculado anteriormente, calculemos ahora el segundo sumatorio.

Aplicando $(F1S)$ y para $a = -1$, $b = 2$, $c = n^2 - 2n$, se obtiene:

$$\frac{Bk^{n+1}}{(n-1)^2} \sum_{x=1}^{n} \frac{-x^2 + 2x + n^2 - 2n}{k^x} =$$

$$= \frac{Bk^{n+1}}{(n-1)^2(1-k)^3} \left[3k - k^2 - (n^2 - 2n)(1-k)^2 + \frac{(k - k^2)(2n-1) - 2k}{k^n} \right]$$

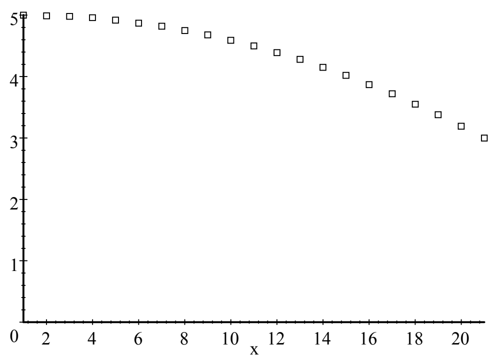
Siendo el valor final la suma de los dos sumatorios[20]:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n} \alpha_x k^{n+1-x} =$$

$$= \frac{Ak(k^n-1)}{k-1} + \frac{Bk^{n+1}}{(n-1)^2(k-1)^3} \left[-3k + k^2 + (n^2 - 2n)(1-k)^2 + \frac{(k^2-k)(2n-1)+2k}{k^n} \right]$$

Con $\alpha_x = A + \dfrac{B}{(n-1)^2} \left[-x^2 + 2x + n^2 - 2n \right]$

$\alpha_x = 3 + 0.005(-x^2 + 2x + 399)$



[20] Ver el ejercicio 12, de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

4.5.1 Simplificación del sumatorio parcial

Primera simplificación, para ello trataremos de expresar el segundo sumatorio con una expresión más sencilla, y lo conseguiremos viendo las condiciones para que se anule la constante E de la fórmula $(F1S)$.

Tenemos que para:

$$\alpha_x = A + \frac{4B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + (n+1)x - n\right]$$

C_n será:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n}\left[A + \frac{4B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + (n+1)x - n\right]\right]k^{n+1-x} =$$

$$= \sum_{x=1}^{n} Ak^{n+1-x} + \sum_{x=1}^{n}\left[\frac{4B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + (n+1)x - n\right]\right]k^{n+1-x}$$

Aplicando $(F1S)$ al segundo sumatorio[21], y para $a = -1$, $b = n+1$ $c = -n$, se obtiene:
$k + k^2 + (n+1)k(1-k) + n(1-k)^2 = 0 \rightarrow n = \dfrac{2k}{k-1}$
Si sustituimos en α_x :

$$\alpha_x = A + \frac{4B(k-1)^2}{(k+1)^2}\left[-x^2 + \frac{(3k-1)x}{k-1} - \frac{2k}{k-1}\right]$$

Simplificando,

$$\alpha_x = A + \frac{4B(k-1)}{(k+1)^2}\left[-(k-1)x^2 + (3k-1)x - 2k\right]$$

El capital final será:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n}\left[A + \frac{4B(k-1)}{(k+1)^2}\left[-(k-1)x^2 + (3k-1)x - 2k\right]\right]k^{n+1-x}$$

[21] El valor de la constante es:
$E = -\dfrac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \dfrac{kb}{(1-k)^2} - \dfrac{c}{1-k} = 0$

El primer sumatorio está calculado en el apartado anterior, calculemos ahora el segundo sumatorio.

Aplicando $(F1S)$,y para $a = -(k-1)$, $b = 3k-1$, $c = -2k$, se obtiene:

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{4B(k-1)}{(k+1)^2} \left[-(k-1)x^2 + (3k-1)x - 2k\right] k^{n+1-x} =$$

$$= \frac{4B(k-1)k^{n+1}}{(k+1)^2} \sum_{x=1}^{n} \frac{-(k-1)x^2 + (3k-1)x - 2k}{k^x} =$$

$$= \frac{4Bk(k-1)(n^2-n)}{(k+1)^2}$$

Siendo el valor final la suma de los dos sumatorios[22],

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) + \frac{4Bk(k-1)(n^2-n)}{(k+1)^2}$$

Con $\alpha_x = A + \dfrac{4B(k-1)}{(k+1)^2} \left[-(k-1)x^2 + (3k-1)x - 2k\right]$

Si $\alpha_x \geq 0 \rightarrow x \leq \dfrac{3k-1+(k+1)\sqrt{\frac{A+B}{B}}}{2(k-1)}$

1. Consideremos la parte creciente de la función polinómica.

   Dado que siendo:

   $$\alpha_x = A + \frac{4B(k-1)}{(k+1)^2} \left[-(k-1)x^2 + (3k-1)x - 2k\right]$$

   Con $\alpha_1 = A$, $\alpha_n = A$ para $n = \dfrac{2k}{k-1}$.

   Si queremos que $\alpha_n = A + B$.

[22] Ver el ejercicio 13, de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo. Esta fórmula sirve para cualquier valor de n, aunque para $n = \dfrac{2k}{k-1}$ se obtiene: $\alpha_1 = \alpha_n = A$.

Hacemos $n = \dfrac{\frac{2k}{k-1}+1}{2} = \dfrac{3k-1}{2k-2}$ siendo creciente para $x \leq \dfrac{3k-1}{2k-2}$. Obteniéndose la misma fórmula del sumatorio total[23].

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) + \frac{4Bk(k-1)(n^2-n)}{(k+1)^2}$$

2. Consideremos la parte decreciente de la función polinómica.

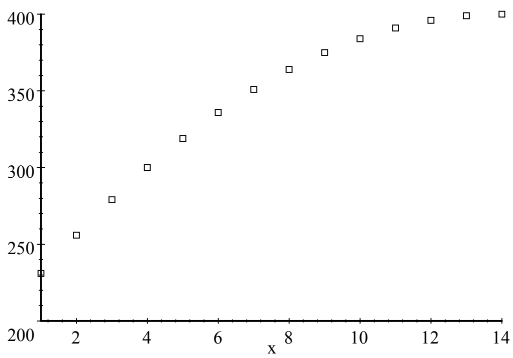
   Para:

$$\alpha_x = A + \frac{4B(k-1)}{(k+1)^2}\left[-(k-1)x^2 + (3k-1)x - 2k\right]$$

   Tenemos los valores $\alpha_1 = A$, y para $x = \dfrac{2k}{k-1}$ es $\alpha_x = A$ veamos el cambio que debemos realizar[24]:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_v = \dfrac{3k-1}{2k-2}, x_n = 1 \\ x_v = \dfrac{2k}{k-1}, x_n = \dfrac{2k}{k-1} \end{array} \right\} x \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{k}{k-1}$$

[23] La representación gráfica de α_x para $A = 231, B = 169, k = 1'08, n = \frac{3k-1}{2k-2} = 14$ es: $\alpha_x = -x^2 + 28x + 204$



Ver el ejercicio 14, de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

[24] Por ser α_x una función polinómica cóncava simétrica, veamos el cambio de variable que tenemos que realizar para que el nuevo valor inicial $x = 1$, se corresponda con el máximo o punto medio de la función anterior $x = \dfrac{\frac{2k}{k-1}+1}{2} = \dfrac{3k-1}{2k-2}$, manteniéndose el mismo valor final $x = \dfrac{2k}{k-1}$.

sustituyendo en α_x se obtiene:

$$\alpha_x = A + \frac{B}{(k+1)^2}\left[-(k-1)^2x^2 + 2(k-1)^2x + 4k\right]$$

Con $\alpha_1 = A + B$. y para $x \leq \dfrac{2k}{k-1}$, $\alpha_x \geq A$

Calculemos el sumatorio:

$$\sum_{x=1}^{n}\left[A + \frac{B}{(k+1)^2}\left[-(k-1)^2x^2 + 2(k-1)^2x + 4k\right]\right]k^{n+1-x}$$

El primer sumatorio está calculado, calculemos ahora el segundo sumatorio.

Aplicando $(F1S)$,y para $a = -1$, $b = 2$, $c = \dfrac{4k}{(k-1)^2}$se obtiene:

$$\frac{B(k-1)^2k^{n+1}}{(k+1)^2}\sum_{x=1}^{n}\frac{-x^2 + 2x + \frac{4k}{(k-1)^2}}{k^x} =$$

$$= \frac{B}{(k+1)^2(k-1)}\left[(k-1)^2n^2 + 2(k-1)n + (k+k^2)(k^n-1)\right]$$

Siendo el valor final la suma de los dos sumatorios,

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n-1) + \frac{B\left[(k-1)^2n^2 + 2(k-1)n + (k+k^2)(k^n-1)\right]}{(k+1)^2(k-1)}$$

Como podemos apreciar no se obtiene una fórmula simplificada, ya que al hacer el cambio de variable no se anula la constante E de la fórmula $(F1S)$, que era nuestro objetivo de la primera simplificación, por lo que deberemos seguir el mismo proceso que en el apartado anterior.

A partir de:

$$\alpha_x = A + \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + 2x + n^2 - 2n\right]$$

El segundo sumatorio es:

$$\frac{Bk^n}{(n-1)^2}\sum_{x=1}^{n}\frac{-x^2+2x+n^2-2n}{k^x}$$

Aplicando $(F1S)$ al segundo sumatorio[25] y para $a=-1$, $b=2$ $c=n^2-2n$, se obtiene la ecuación de segundo grado en n :

$$n^2-2n-\frac{3k-k^2}{(1-k)^2}=0$$

Con solución positiva $n=1+\dfrac{\sqrt{1+k}}{k-1}$

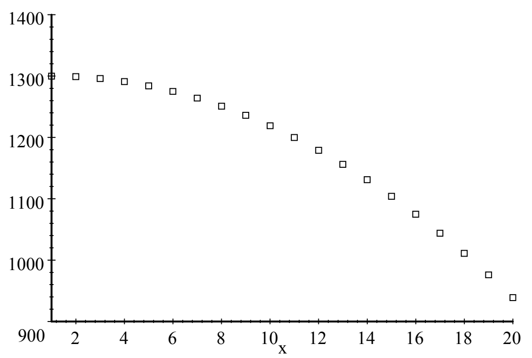
Sustituyendo en α_x se obtiene[26]:

$$\alpha_x=A+\frac{B(1-k)^2}{(1+k)}\left[-x^2+2x+\frac{3k-k^2}{(1-k)^2}\right]$$

Con $\alpha_1=A+B$.
Si $x=1+\dfrac{\sqrt{1+k}}{k-1}\rightarrow\alpha_x=A$.

[25] El valor de la constante es:
$E=-\dfrac{(k+k^2)a}{(1-k)^3}+\dfrac{kb}{(1-k)^2}-\dfrac{c}{1-k}=0$

[26] La representación gráfica para: $A=480,\ B=820,\ k=1'05$
Siendo $n=20\leq 1+\dfrac{\sqrt{1+k}}{k-1}=29'63$ es:
$\alpha_x=-x^2+2x+1299$



Para calcular el montante total tendremos:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n} \left[A + \frac{B(1-k)^2}{(1+k)} \left[-x^2 + 2x + \frac{3k-k^2}{(1-k)^2} \right] \right] k^{n+1-x}$$

El primer sumatorio está calculado, calculemos ahora el segundo sumatorio.

Aplicando $(F1S)$,y para $a = -1$, $b = 2$, $c = \dfrac{3k-k^2}{(1-k)^2}$ se obtiene:

$$\frac{B(1-k)^2 k^{n+1}}{(1+k)} \sum_{x=1}^{n} \frac{-x^2 + 2x + \dfrac{3k-k^2}{(1-k)^2}}{k^x} =$$

$$= \frac{Bk}{1+k} \left[(k-1)n^2 + 2n \right]$$

Siendo el valor final la suma de los dos sumatorios[27],

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) + \frac{Bk}{1+k} \left[(k-1)n^2 + 2n \right]$$

Con $\alpha_x = A + \dfrac{B(1-k)^2}{(1+k)} \left[-x^2 + 2x + \dfrac{3k-k^2}{(1-k)^2} \right]$

Con $\alpha_1 = A + B$, si $x = 1 + \dfrac{\sqrt{1+k}}{k-1} \rightarrow \alpha_x = A$

Si $\alpha_x \geq 0 \rightarrow x \leq 1 + \dfrac{\sqrt{1+k}\sqrt{\frac{A+B}{B}}}{k-1}$

4.5.2 Simplificación del sumatorio total

Segunda simplificación, para ello trataremos de expresar todo el sumatorio mediante un sumatorio, y empezaremos expresando α_x.

$$\alpha_x = A + \frac{4B}{(n-1)^2} \left[-x^2 + (n+1)x - n \right] =$$

[27]Ver el ejercicio 15, de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

$$= \frac{4B}{(n-1)^2}\left[-x^2+(n+1)x-n+\frac{A(n-1)^2}{4B}\right]$$

Aplicando $(F1S)$ al segundo sumatorio[28] y para $a=-1$, $b=n+1$
$c=-n+\dfrac{A(n-1)^2}{4B}$, se obtiene:

$$k+k^2+(n+1)k(1-k)-(-n+\frac{A(n-1)^2}{4B})(1-k)^2=0$$

Simplificando:

$$\frac{A(n-1)^2}{4B}(1-k)^2-(n-2)(1-k)-2=0$$

Al ser una ecuación de segundo grado en $1-k$ será:

$$1-k=\frac{n-2\pm\sqrt{n^2+4-4n+\dfrac{2A(n-1)^2}{B}}}{\dfrac{2A(n-1)^2}{4B}}$$

Para simplificar hacemos el discriminante[29] igual a n^2.

$$n^2+4-4n+\frac{2A(n-1)^2}{B}=n^2\rightarrow B=\frac{A(n-1)}{2}$$

$1-k=\dfrac{n-2\pm n}{n-1}\rightarrow 1-k=\dfrac{-2}{n-1}$
Siendo,

$$k=\frac{n+1}{n-1} \text{ ó } n=\frac{k+1}{k-1}$$

[28] El valor de la constante es:
$E=-\dfrac{(k+k^2)a}{(1-k)^3}+\dfrac{kb}{(1-k)^2}-\dfrac{c}{1-k}=0$

[29] Se pueden probar distintos valores del discriminante, y obtener otros valores de sumatorios sencillos, pero como aplicación consideramos suficiente desarrollar este caso.

Sustituyendo $B = \dfrac{A(n-1)}{2}$, $n = \dfrac{k+1}{k-1}$ en α_x se obtiene:

$$\alpha_x = A\left[-(k-1)x^2 + 2kx - k\right]$$

Con $\alpha_1 = \alpha_n = A$ para $n = \dfrac{k+1}{k-1}$.

y $\alpha_{\max} = \dfrac{Ak}{k-1}$ para $x = \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{k}{k-1}$

Aplicando $(F1S)$, y para $a = -(k-1)$, $b = 2k$, $c = -k$,se obtiene[30]:

---

[30] Esta fórmula sirve para cualquier valor de n, aunque para $n = \dfrac{k+1}{k-1}$ se obtiene $\alpha_1 = \alpha_n = A$.

Ver el ejercicio 16 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

Si la expresión de α_x obtenida anteriormente la dividimos por k el montante final será:
$C_n = A\sum\limits_{x=1}^{n}\left[-\dfrac{(k-1)x^2}{k} + 2x - 1\right]k^{n+1-x} = An^2$

El resultado obtenido es independiente del interés lo cual quiere decir que nos permite calcular fácilmente las cuotas si lo que queremos es una cantidad total fija.

Ver el ejercicio 17 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

Como tenemos: $\alpha_x = \dfrac{4B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + (n+1)x - n + \dfrac{A(n-1)^2}{4B}\right]$

Para simplificar hacemos, $c = 0 \rightarrow n = \dfrac{A(n-1)^2}{4B}$

Si tenemos en cuenta que para que se anule E debe ser:
$k + k^2 + (n+1)k(1-k) - (-n + \dfrac{A(n-1)^2}{4B})(1-k)^2 = 0$

Obtenemos que $n = \frac{2}{k-1}$, que al sustituir en α_x nos da:
$\alpha_x = \dfrac{A}{2}\left[-(k-1)x^2 + (1+k)x\right]$

Para calcular el capital final: $C_n = \sum\limits_{x=1}^{n}\alpha_x k^{n+1-x}$

Aplicamos la fórmula $(F1S)$ en el sumatorio:
$\dfrac{Ak^{n+1}}{2}\sum\limits_{x=1}^{n}\dfrac{-(k-1)x^2 + (1+k)x}{k^x}$ para: $a = 1-k, b = 1+k, c = 0$

$$C_n = \frac{A}{2}kn(n+1)$$

Siendo $\alpha_x = \frac{A}{2}\left[-(k-1)x^2 + (1+k)x\right]$
$\alpha_x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{k+1}{k-1}$

Ya sabemos que $\alpha_1 = \alpha_n = A$,para: $n = \dfrac{2}{k-1}, \alpha_{max} = \dfrac{Ak}{2(k-1)}$ para $x = \dfrac{1}{k-1}$.

Ver el ejercicio 18 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

$$C_n = \sum_{x=1}^{n} A\left[-(k-1)x^2 + 2kx - k\right] k^{n+1-x} =$$

$$= Ak^{n+1} \sum_{x=1}^{n} \frac{-(k-1)x^2 + 2kx - k}{k^x} = Akn^2$$

Con $\alpha_x = A\left[-(k-1)x^2 + 2kx - k\right]$

Si $\alpha_x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k-1}}$

En este apartado, para simplificar hemos comenzado haciendo el discriminante igual a n^2, y luego hemos considerado el caso de que fuese $c = 0$, aunque se obtiene lo mismo haciendo el discriminante igual a $(n+2)^2$.

$$n^2 + 4 - 4n + \frac{2A(n-1)^2}{B} = (n+2)^2 \rightarrow 1 - k = \frac{n - 2 - (n+2)}{2n} = -\frac{2}{n}$$

Obteniéndose el mismo resultado de $n = \dfrac{2}{k-1}$.

1. Consideremos la parte creciente de la función polinómica[31].

$$\alpha_x = A\left[-(k-1)x^2 + 2kx - k\right]$$

   Con, $\alpha_1 = A$, $\alpha_n = A$ para $n = \dfrac{k+1}{k-1}$

   Si queremos que $\alpha_n = A + B$ bastará hacer $n = \dfrac{\frac{k+1}{k-1} + 1}{2} = \dfrac{k}{k-1}$

   Siendo creciente para $x \leq \dfrac{k}{k-1}$

   Obteniéndose la misma fórmula del sumatorio total[32]:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n} A\left[-(k-1)x^2 + 2kx - k\right] k^{n+1-x} = Akn^2$$

[31] Si se tiene en cuenta el mismo criterio de considerar sólo la función creciente en el caso dado por $\alpha_x = \dfrac{A}{2}\left[-(k-1)x^2 + (1+k)x\right]$ se obtienen simplificaciones distintas que podrían resultar interesantes en otros ejercicios.

[32] Ver el ejercicio 19 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

Siendo,

α_x creciente para $x \leq \dfrac{k}{k-1}$, $(\alpha_x \geq 0 \rightarrow x \leq \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1})$.

2. Consideremos la parte decreciente de la función polinómica.

$$\alpha_x = A + \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + 2x + n^2 - 2n\right]$$

La expresaremos con un sumando.

$$\alpha_x = \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + 2x + n^2 - 2n + \frac{A(n-1)^2}{B}\right]$$

Aplicando $(F1S)$ [33] y para $a = -1$, $b = 2$, $c = n^2 - 2n + \dfrac{A(n-1)^2}{B}$, se obtiene:

$k + k^2 + 2k(1-k) - (n^2 - 2n + \dfrac{A(n-1)^2}{B})(1-k)^2 = 0$

Simplificando obtenemos un polinomio en $(1-k)$.

$$\left[1 + \frac{A}{B}\right](n-1)^2(1-k)^2 + (1-k) - 2 = 0$$

Despejando:

$$1 - k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8(n-1)^2(1 + \frac{A}{B})}}{2(n-1)^2(1 + \frac{A}{B})}$$

Para simplificar hacemos que el discriminante sea $(4n-3)^2$.

$$1 + 8(n-1)^2(1 + \frac{A}{B}) = 16n^2 + 9 - 24n$$

Resolviendo:

$$B = \frac{A(n-1)}{n} \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{n}{n-1} \rightarrow 1 + \frac{A}{B} = \frac{2n-1}{n-1}$$

[33] El valor de la constante es:
$E = -\dfrac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \dfrac{kb}{(1-k)^2} - \dfrac{c}{1-k} = 0$

Con lo que nos queda:

$$1-k=\frac{-1\pm(4n-3)}{2(n-1)(2n-1)}$$

Que nos da dos soluciones.

$$k=\frac{2n-3}{2n-1}<1\ imposible; k=\frac{n}{n-1}>1\ posible.$$

Siendo $n=\dfrac{k}{k-1}$

Sustituimos en α_x :

$$\alpha_x=\frac{A(k-1)^2}{k}\left[-x^2+2x+\frac{3k-k^2}{(k-1)^2}\right]$$

Con, $\alpha_x=A$ para $x=\dfrac{k}{k-1}$.

Si $\alpha_x\geq 0\rightarrow x\leq 1+\dfrac{\sqrt{k+1}}{k-1}$.

Calculemos el capital total.

$$C_n=\sum_{x=1}^{n}\frac{A(k-1)^2}{k}\left[-x^2+2x+\frac{3k-k^2}{(k-1)^2}\right]k^{n+1-x}=$$

$$=A(k-1)^2k^n\sum_{x=1}^{n}\frac{-x^2+2x+\dfrac{3k-k^2}{(k-1)^2}}{k^x}$$

Aplicando $(F1S)$, y para $a=-1$, $b=2$, $c=\dfrac{3k-k^2}{(k-1)^2}$se obtiene[34]:

$$C_n=An\left[(k-1)n+2\right]$$

Con $\alpha_x=\dfrac{A(k-1)^2}{k}\left[-x^2+2x+\dfrac{3k-k^2}{(k-1)^2}\right]$

Si $\alpha_x=A\rightarrow x=\dfrac{k}{k-1}$; $\alpha_x\geq 0\rightarrow x\leq 1+\dfrac{\sqrt{k+1}}{k-1}$

[34]Ver el ejercicio 20 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

Si en la fórmula obtenida anteriormente[35] se hace $b = 0$, nos queda:

$$-\frac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} - \frac{c}{1-k} = 0$$

Siendo una solución sencilla:

$a = -(1-k)^2; c = k + k^2$

Obteniéndose:

$$\alpha_x = A\left[-(1-k)^2x^2 + k + k^2\right] \rightarrow C_n = \sum_{x=1}^{n} \alpha_x k^{n+1-x}$$

Aplicando la fórmula $(F1S)$ se obtiene[36]:

$$C_n = Akn\,[n(k-1) + 2k]$$

Si $\alpha_x \geq 0 \rightarrow x \leq \dfrac{\sqrt{k+k^2}}{k-1}$

4.6 Cuantías polinómicamente convexas.

Consideramos ahora las cuantías polinómicas convexas para $a > 0$ siendo $\alpha_1 = \alpha_n = A$, y $\alpha_{\min} = A - B$. La expresión general de las anualidades vendrá dada por la ecuación de segundo grado[37]:

$$\alpha_x = A + \frac{4B}{(n-1)^2}\left[+x^2 - (n+1)x + n\right].$$

---

[35] $E = -\dfrac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \dfrac{kb}{(1-k)^2} - \dfrac{c}{1-k} = 0$

[36] Ver el ejercicio 21 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

[37] Para $A = 2, B = 1, n = 21$, sustituyendo las constantes obtenemos la siguiente gráfica para:
$\alpha_x = 2 + 0.01(x^2 - 22x + 21)$

El capital final para $\alpha_x = A + \dfrac{4B}{(n-1)^2}\left[x^2 - (n+1)x + n\right]$ vendrá dado por:

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{x=1}^{n} \alpha_x k^{n+1-x} = \\ &= \sum_{x=1}^{n} A k^{n+1-x} + \sum_{x=1}^{n} \left[\frac{4B}{(n-1)^2}\left[+x^2 - (n+1)x + n\right]\right] k^{n+1-x}. \end{aligned}$$

El primer sumatorio está calculado anteriormente, calculemos ahora el segundo sumatorio:

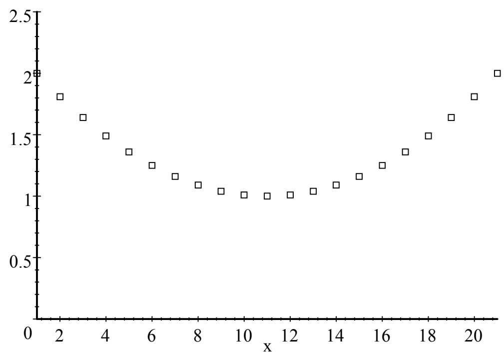
$$\sum_{x=1}^{n} \left[\frac{4B}{(n-1)^2}\left[+x^2 - (n+1)x + n\right]\right] k^{n+1-x}$$

También está calculado con anterioridad con signo contrario, cuando consideramos la función polinómica cóncava, por lo que será igual a:

$$-\frac{4Bk^2}{(n-1)^2 I^3}\left[2 + nI + (nI - 2k)k^{n-1}\right]$$

Siendo el valor resultante[38]:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) - \frac{4Bk^2}{(n-1)^2 I^3}\left[2 + nI + (nI - 2k)k^{n-1}\right]$$



[38] Ver el ejercicio 22 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

Con $\alpha_x = A + \dfrac{4B}{(n-1)^2}\left[+x^2-(n+1)x+n\right]$

Si $\alpha_1 = \alpha_n = A, \alpha_x \geq 0 \rightarrow A \geq B$

1. Consideremos la parte decreciente de la función polinómica.

   Para,

   $$\alpha_x = A + \frac{4B}{(n-1)^2}\left[+x^2-(n+1)x+n\right]$$

   Con $\alpha_1 = \alpha_n = A$.

   Hacemos el cambio $x \rightarrow \dfrac{x+1}{2}$ para que $\alpha_1 = A$, $\alpha_n = A - B$ con lo que nos quedará[39]:

   $$\alpha_x = A - \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2+2nx+1-2n\right]$$

   Con $\alpha_1 = A, \alpha_n = A - B$

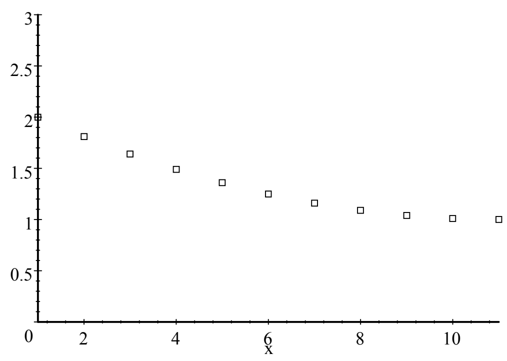
   Si $\alpha_x \geq 0 \rightarrow A \geq B$

   Calculemos el montante final:

   $$C_n = \sum_{x=1}^{n}\left[A - \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2+2nx+1-2n\right]\right]k^{n+1-x} =$$

   $$= Ak^{n+1}\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{k^x} + \frac{Bk^{n+1}}{(n-1)^2}\sum_{x=1}^{n}\frac{-x^2+2nx+1-2n}{k^x}$$

[39] Para $A = 2, B = 1, n = 11$, obtenemos la siguiente gráfica :
$\alpha_x = 2 - 0.01(-x^2+22x-21)$



Este sumatorio está calculado en la sección de cuantías polinómicas cóncavas, apartado 1, y basta cambiar el signo de B[40].

$C_n = \left[A + \frac{(3k-1)B}{(k-1)^2(n-1)^2}\right] \frac{k(k^n-1)}{k-1} - \frac{Bnk}{(k-1)^2(n-1)^2} \left[2k^n + (k-1)(2-n)\right]$

2. Consideremos la parte creciente de la función polinómica, y dado que:

$$\alpha_x = A + \frac{4B}{(n-1)^2}\left[+x^2 - (n+1)x + n\right]$$

Con $\alpha_1 = \alpha_n = A$.

Hacemos el cambio $x \rightarrow \dfrac{x+n}{2}$ para que $\alpha_1 = A - B, \alpha_n = A$ obteniendo[41]:

$$\alpha_x = A - \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + 2x + n^2 - 2n\right]$$

Con $\alpha_1 = A - B$, $\alpha_n = A$

Si $\alpha_x \geq 0 \rightarrow A \geq B$

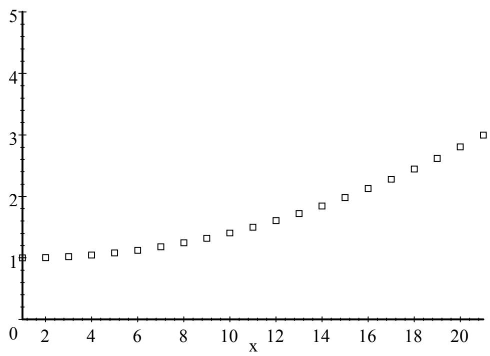
Calculemos el montante final:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n}\left[A - \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + 2x + n^2 - 2n\right]\right] k^{n+1-x} =$$

$$= Ak^{n+1}\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{k^x} - \frac{Bk^{n+1}}{(n-1)^2}\sum_{x=1}^{n}\frac{-x^2+2x+n^2-2n}{k^x}$$

[40] Ver el ejercicio 23 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

[41] Sustituyendo las constantes $A = 3, B = 2, n = 21$ obtenemos la siguiente gráfica para: $\alpha_x = 3 - 0.005(-x^2 + 2x + 399)$



Estos sumatorios están calculados en la sección anterior de cuantías y basta cambiar el signo de B[42].

$$C_n = \frac{Ak(k^n-1)}{k-1} +$$

$$+\frac{Bk^{n+1}}{(n-1)^2(k-1)^3}\left[3k-k^2-(n^2-2n)(k-1)^2+\frac{(k-k^2)(2n-1)-2k}{k^n}\right]$$

4.6.1 Simplificación del sumatorio parcial

Tratemos de expresar el segundo sumatorio con una expresión más sencilla, para ello veamos las condiciones para que se anule la constante E de la fórmula $(F1S)$, y por tratarse del mismo caso ya estudiado en la sección anterior del mismo nombre pero con el signo cambiado de la constante B tendremos[43]:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n-1) - \frac{4Bk(k-1)(n^2-n)}{(k+1)^2}$$

Con $\alpha_x = A - \frac{4B(k-1)}{(k+1)^2}\left[-(k-1)x^2+(3k-1)x-2k\right]$

Si $\alpha_x \geq 0 \rightarrow A \geq B, \alpha_1 = A, \alpha_n = A \; si \; n = \frac{2k}{k-1}$

1. Consideremos la parte decreciente de la función polinómica.

   Para[44],

$$\alpha_x = A - \frac{4B(k-1)}{(k+1)^2}\left[-(k-1)x^2+(3k-1)x-2k\right]$$

   Si $\alpha_x \geq 0 \rightarrow A \geq B \; , \; \alpha_1 = A \; , \; \alpha_n = A - B \; si \; n = \frac{3k-1}{2k-2}$

   Podemos seguir el mismo proceso que en la sección anterior haciendo:

[42] Ver el ejercicio 24 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

[43] Ver el ejercicio 25 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

[44] Para, $A = 400 \; , \; B = 169 \; , \; k = 1'08 \; , \; n = \frac{3k-1}{2k-2} = 14$
Sustituyendo las constantes obtenemos la siguiente gráfica:
$\alpha_x = x^2 - 28x + 427$

$$n = \frac{\frac{2k}{k-1}+1}{2} = \frac{3k-1}{2k-2} \text{ para que sea decreciente.}$$

El sumatorio será el mismo, por lo que[45]:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) - \frac{4Bk(k-1)(n^2-n)}{(k+1)^2}$$

2. Consideremos la parte creciente de la función polinómica:

$$\alpha_x = A - \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + 2x + n^2 - 2n\right]$$

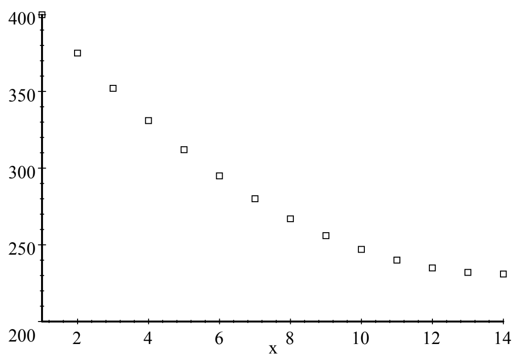
Para,

$$\alpha_x = A + \frac{4B(k-1)}{(k+1)^2}\left[-(k-1)x^2 + (3k-1)x - 2k\right]$$

Siguiendo los mismos pasos que en la sección anterior, y cambiando el signo de B obtenemos[46]:

$$\alpha_x = A - \frac{B(k-1)^2}{k+1}\left[-x^2 + 2x + \frac{3k-k^2}{(k-1)^2}\right]$$

Con $\alpha_1 = A - B$, $\alpha_n = A \rightarrow n = 1 + \frac{\sqrt{1+k}}{k-1}$



[45] Ver el ejercicio 26 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

[46] Haciendo: $A = 1.600$, $B = 820$, $k = 1'05$, $n = 20$
Sustituyendo las constantes obtenemos la siguiente gráfica:
$\alpha_x = x^2 - 2x + 781$

Dando[47],

$$C_n = \frac{Ak(k^n-1)}{I} - \frac{Bk}{1+k}\left[(k-1)n^2+2n\right]$$

4.6.2 Simplificación del sumatorio total

Tratemos de expresar los dos sumatorios en uno, y para ello, expresaremos α_x como único sumando.

$$\alpha_x = A + \frac{4B}{(n-1)^2}\left[+x^2-(n+1)x+n\right] =$$

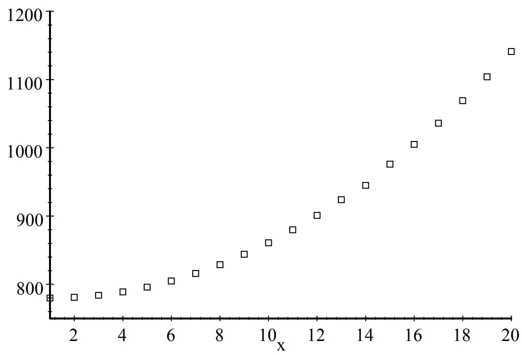
$$= \frac{4B}{(n-1)^2}\left[+x^2-(n+1)x+n+\frac{A(n-1)^2}{4B}\right]$$

Estudiemos las condiciones para que se anule la constante E[48] de la fórmula $(F1S)$.

Haciendo $a=1$, $b=-(n+1)$, $c=n+\dfrac{A(n-1)^2}{4B}$
Obtenemos:

$$k+k^2+(n+1)k(1-k)+(-n+\frac{A(n-1)^2}{4B})(1-k)^2=0$$

Simplificando,



[47] Ver el ejercicio 27 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

[48] $E = -\dfrac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \dfrac{kb}{(1-k)^2} - \dfrac{c}{1-k} = 0$

$$\frac{A(n-1)^2}{4B}(1-k)^2 + (n-2)(1-k) + 2 = 0$$

Al ser una ecuación de segundo grado en $1-k$ será:

$$1-k = \frac{-n+2 \pm \sqrt{n^2+4-4n-\dfrac{2A(n-1)^2}{B}}}{\dfrac{2A(n-1)^2}{4B}}$$

Al considerar imposiciones positivas $A > B$
El discriminante:

$$(n-2)^2 - \frac{2A(n-1)^2}{B}$$

Será negativo, por lo que no tiene solución real para k.

Para simplificar, tratemos de expresar todo el sumatorio con una expresión más sencilla, para ello, estudiaremos las condiciones para que la E de la fórmula $(F1S)$ tome el valor $\dfrac{D}{1-k}$:

$$E = -\frac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \frac{kb}{(1-k)^2} - \frac{c}{1-k} = \frac{D}{1-k}$$

Siendo,

$$\alpha_x = \frac{4B}{(n-1)^2}\left[x^2 - (n+1)x + n + \frac{A(n-1)^2}{4B}\right]$$

Haciendo $a = 1$, $b = -(n+1)$, y $c = n + \dfrac{A(n-1)^2}{4B}$

Obtenemos:

$$\left[\frac{A(n-1)^2}{4B} + D\right](1-k)^2 + (n-2)(1-k) + 2 = 0$$

Luego,

$$1-k=\frac{-n+2\pm\sqrt{n^2+4-4n-\frac{2A(n-1)^2}{B}-8D}}{\frac{2A(n-1)^2}{4B}+2D}$$

Tomemos como opción a simplificar: $\dfrac{2A(n-1)^2}{B}+8D=-8n$.

Si hacemos $A=B\rightarrow D=-\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$, por lo que:

Para $\alpha_x>0\rightarrow A>B\rightarrow D<-\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$

$$1-k=\frac{-n+2\pm(n+2)}{-2n}$$

Las dos soluciones son:

$$\begin{cases} 1-k \textit{ que no tiene sentido.} \\ 1-k=\dfrac{-4}{2n} \textit{ que si tiene sentido.} \end{cases}$$

Luego,

$$k=\frac{2+n}{n}\rightarrow n=\frac{2}{k-1}$$

Sustituyendo en α_x,

$$\alpha_x=-\frac{A}{\dfrac{2}{k-1}+D}\left[x^2-\frac{k+1}{k-1}x-D\right]$$

Con $\alpha_1=\alpha_n$ para $n=\dfrac{2}{k-1}$ y $D<-\dfrac{(k+1)^2}{4(k-1)^2}$

Calculemos ahora el montante total:

$$C_n=\sum_{x=1}^{n}-\frac{A}{\frac{2}{k-1}+D}\left[x^2-\frac{k+1}{k-1}x-D\right]k^{n+1-x}$$

Aplicando $(F1S)$,

Con $\alpha_x = -\dfrac{A}{\dfrac{2}{k-1}+D}\left[x^2 - \dfrac{k+1}{k-1}x - D\right]$

Siendo $\alpha_1 = A$, $\alpha_n = A$ para $n = \dfrac{2}{k-1}$

Si $\alpha_x > 0 \rightarrow D < -\dfrac{(k+1)^2}{4(k-1)^2}$

Se obtiene[49]:

$$C_n = \frac{Ak}{2+D(k-1)}\left[Dk^n - D + n^2 + n\right]$$

1. Consideremos la parte decreciente de la función polinómica.

$$\alpha_x = -\frac{A}{\dfrac{2}{k-1}+D}\left[x^2 - \frac{k+1}{k-1}x - D\right]$$

Con $\alpha_1 = A$, $\alpha_n = A$ para $n = \dfrac{2}{k-1}$

Si queremos utilizar la función decreciente bastará hacer:

$$n = \frac{\dfrac{2}{k-1}+1}{2} = \frac{k+1}{2k-2}$$

Obteniéndose la misma fórmula del sumatorio.

El valor final será[50]:

$$C_n = \frac{Ak}{2+D(k-1)}\left[Dk^n - D + n^2 + n\right]$$

α_x es decreciente para $x \leq \dfrac{k+1}{2k-2}$ y como:

$$\alpha_x > 0 \rightarrow D < -\frac{(k+1)^2}{4(k-1)^2}$$

[49] Ver el ejercicio 28 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

[50] Ver el ejercicio 29 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

2. Consideremos la parte creciente de la función polinómica.

   Dado que:

$$\alpha_x = A - \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + 2x + n^2 - 2n\right] =$$

$$= \frac{B}{(n-1)^2}\left[+x^2 - 2x - n^2 + 2n + \frac{A(n-1)^2}{B}\right]$$

   Veamos en qué casos se anula la constante E[51] de $(F1S)$.

   Con, $\alpha_1 = A - B$, $\alpha_n = A$, $para\ A > B \rightarrow \alpha_x > 0$

   Sustituyendo los valores de $a = 1$, $b = -2$, $c = -n^2+2n+\dfrac{A(n-1)^2}{B}$

   Obtenemos:

$$-k - k^2 - 2k(1-k) - (-n^2 + 2n + \frac{A(n-1)^2}{B})(1-k)^2 = 0$$

   Simplificando obtenemos un polinomio en $(1-k)$:

$$(\frac{A}{B} - 1)(n-1)^2(1-k)^2 - (1-k) + 2 = 0$$

   Cuyas raíces son:

$$1 - k = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8(\frac{A}{B} - 1)(n-1)^2}}{2(\frac{A}{B} - 1)(n-1)^2}$$

   Por ser $A > B$ nos puede quedar un discriminante negativo con soluciones imaginarias o bien positivo con raíz menor que 1, por lo que el numerador será positivo y el denominador también, luego al ser: $1 - k > 0$ no tendremos ninguna solución que nos dé $k > 1$.

[51] $E = -\dfrac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \dfrac{kb}{(1-k)^2} - \dfrac{c}{1-k} = 0$

- Para simplificar consideremos que E sea:

$$E = -\frac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \frac{kb}{(1-k)^2} - \frac{c}{1-k} = \frac{D}{1-k}$$

Operando y simplificando obtenemos un polinomio en $1-k$.

$$\left[\left(\frac{A}{B}-1\right)(n-1)^2 + d\right](1-k)^2 - (1-k) + 2 = 0$$

Cuyas raíces son:

$$1-k = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\left(\frac{A}{B}-1\right)(n-1)^2 - 8D}}{2\left[\left(\frac{A}{B}-1\right)(n-1)^2 + D\right]}$$

Existen varios procesos de simplificación pero resulta cómodo que el discriminante sea $(4n-1)^2$ por lo que:

$$1 - 8\left(\frac{A}{B}-1\right)(n-1)^2 - 8D = (4n-1)^2$$

Simplificando,

$$\frac{A}{B}(n-1)^2 + D = -n^2 - n - 1$$

Por ser $A > B \rightarrow \dfrac{A}{B}(n-1)^2 > n^2 - 2n + 1$

Hacemos, $\dfrac{A}{B}(n-1)^2 = n^2 - n + \dfrac{1}{2}$

Obteniéndose $D = -2n^2 + \dfrac{1}{2}$. De donde,

$$1-k = \frac{1 \pm (4n-1)}{-4n^2 + 2n} < 0$$

Siendo para $k = \dfrac{2n+1}{2n-1}$, $n = \dfrac{k+1}{2k-2}$

Sustituimos en:

$$\alpha_x = \frac{B}{(n-1)^2}\left[+x^2 - 2x - n^2 + 2n + \frac{A(n-1)^2}{B}\right]$$

y obtenemos[52]:

$$\alpha_x = \frac{4A(k-1)^2}{k^2-2k+5}\left[x^2-2x+\frac{k}{k-1}\right] > 0$$

Para $n = \dfrac{k+1}{2k-2} \rightarrow \alpha_n = A$.
Calculemos el montante total[53]:

$$C_n = \frac{4A(k-1)^2 k^{n+1}}{k^2-2k+5}\sum_{x=1}^{n}\frac{x^2-2x+\frac{k}{k-1}}{k^x}$$

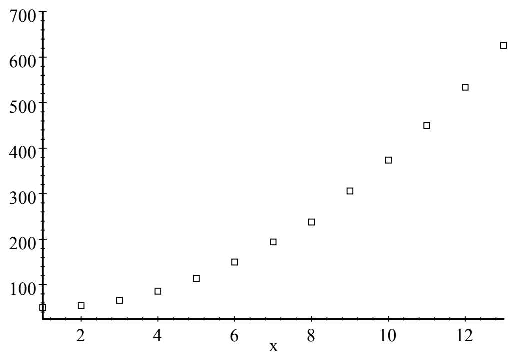
Aplicamos la fórmula $(F1S)$ para $a = 1$, $b = -2$, $c = \dfrac{k}{k-1}$.

$$C_n = \frac{4Ak}{k^2-2k+5}\left[(1-k)n^2-2n+\frac{2k(1-k^n)}{1-k}\right]$$

4.7 Aplicaciones numéricas.

- **Ejercicio** 1.- Está propuesto y resuelto en el libro de Rodríguez Rodríguez, A. (1.994) en la pág. 168 y nos pide el valor actual de una renta polinómica anual vencida e inmediata de cinco términos, siendo el general:

[52] La representación gráfica para $k = 1'08, A = 626, n = 13$ será: $\alpha_x = 4x^2 - 8x + 54$



[53] Ver el ejercicio 30 de la sección Aplicaciones numéricas de este capítulo.

$$C_r = 200r^2 - 300r + 3100$$

El régimen financiero es de interés compuesto al 7'8% anual, capitalizable semestralmente.

El tanto efectivo anual es $I_1 = I$.

$$1 + I = (1 + \frac{0'078}{2})^2 \rightarrow I = 0^{'}079521$$

El valor actual vendrá dado por la expresión:

$$V_0 = \sum_{x=1}^{5} \frac{ax^2 + bx + c}{K^x}$$

Aplicando $(F1S)$, para $a = 200$, $b = -300$, $c = 3.100$, $K = 1'079521$ es:

$$V_0 = 880.620'24 - 863.572^{'}81 = 17.047^{'}43$$

Coincidiendo con el resultado del libro.

- **Ejercicio** 2.-Veamos una aplicación concreta realizada en el libro de Terceño,A.; Sáez, J.. (1.997) que en la pág. 195 propone un plan de ahorro desde los 45 a los 64 años, ingresando el primer año 160.000 pesetas y aumentando cada año 16.000 pesetas siendo los ingresos por anticipado y el plan le proporciona el 11% de efectivo anual. Calcular la cuantía cuando se jubile a los 65 años.

Por ser una progresión aritmética tenemos:

$$\alpha_x = A + B(x - 1)$$

Con $\alpha_1 = A = 160.000$, $\alpha_2 = A + B = 176.000$, $B = 16.000$
Siendo $I = 0'11$, $k = 1'11$, $n = 20$ aplicamos la fórmula:

$$C_n = \frac{1'11}{0'11^2}\left[(16.000 + 160.000 \cdot 0'11)\left(1'11^{20} - 1\right) - 16.000 \cdot 20 \cdot 0'11\right]$$

$C_n = 18_1539.171'16$, que coincide con el resultado del libro.

- **Ejercicio** 3.-Otra aplicación muy distinta la podemos encontrar en la pág. 223 del mismo libro, que para determinar la duración de un plan expone:

$$D = \frac{\sum_{r=1}^{5} 1.200 \cdot 1'12563^{-r} r + 10.000 \cdot 1'12563^{-5} \cdot 5}{\sum_{r=1}^{5} 1.200 \cdot 1'2563^{-r} + 10.000 \cdot 1'12563^{-5}}$$

Para calcularlo tenemos:

$$\sum_{x=1}^{n} [A + B(x-1)]\, k^{-x} = \frac{(B + AI)(k^n - 1) - BnI}{I^2 k^n}$$

Para $A = B$, es:

$$\sum_{x=1}^{n} Axk^{-x} = \frac{A\,[k(k^n - 1) - nI]}{I^2 k^n}$$

Por lo que:

$$\sum_{r=1}^{5} 1.200 \cdot 1'12563^{-r} r = 11.794'57592$$

Para $B = 0$, es:

$$\sum_{x=1}^{n} Ak^{-x} = \frac{A(k^n - 1)}{Ik^n}$$

Por lo que:

$$\sum_{r=1}^{5} 1.200 \cdot 1'2563^{-r} = 4.266'072468$$

Sustituyendo ambos sumatorios en D nos da $4'026946$ años que coincide con el resultado del libro.

- **Ejercicio** 4.-Cosideremos los dos casos en que las cuantías sean crecientes y decrecientes.

1. Queremos constituir un capital de 6.500 € al cabo de 10 periodos, mediante imposiciones pagaderas por anticipado y variables en progresión aritmética creciente de diferencia 20 €, con un interés del 4%. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F$).

   Por ser,

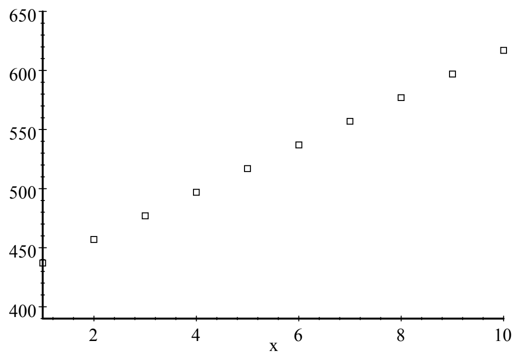
   $$C_n = \frac{k}{I^2}\left[(B + AI)(k^n - 1) - BnI\right]$$

   Para,

   $C_n = 6.500$, $k = 1'04$, $I = 0'04$, $B = 20$, $n = 10 \rightarrow A = 437'023$

   Siendo $\alpha_x = A + B(x - 1)$ su representación será :

   $\alpha_x = 20x + 417.023$

   Teniendo la siguiente tabla[54]:

[54] Siendo:

$C.I.$ →Disponibilidad al inicio de cada periodo.
$x \rightarrow C.I._{x} = C.I._{x-1} + \alpha_x$
$C.F.$ →Disponibilidad al final de cada periodo.

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	$437'023$	$437'023$	$454'504$	6	$537'023$	$3215'251$	$3343'861$
2	$457'023$	$911'527$	$947'988$	7	$557'023$	$3900'885$	$4056'920$
3	$477'023$	$1425'011$	$1482'012$	8	$577'023$	$4633'943$	$4819'301$
4	$497'023$	$1979'035$	$2058'196$	9	$597'023$	$5416'324$	$5632'977$
5	$517'023$	$2575'219$	$2678'228$	10	$617'023$	$6250'000$	$6500'000$

2. Supongamos ahora que deseamos obtener el mismo montante de 6.500 € también en diez periodos con imposiciones pagaderas por anticipado en progresión aritmética pero decrecientes de diferencia AI, con el mismo interés del 4%. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), la disponibilidad al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

   Comprobemos que cumple $\alpha_x \geq 0$, $x_{max} = \dfrac{1'04}{0'04} = 26$

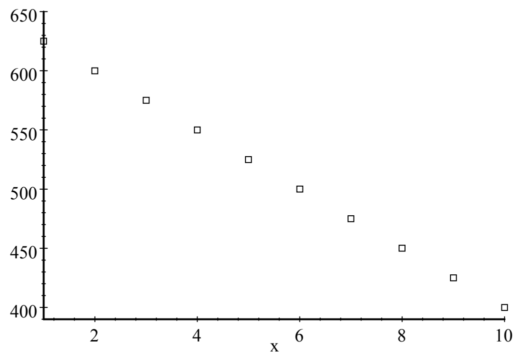
   Como tenemos diez periodos cumple.

   Como es lógico ahora $A > 437'023$ y por ser $C_n = Ank$

   $6.500 = A \cdot 10 \cdot 1'04 \rightarrow A = 625.$ siendo $\alpha_x = A - AI(x-1)$

   Su representación será:

   $\alpha_x = -25x + 650$



   Tendremos la siguiente tabla siendo $B = -AI = -25$

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	625	625	650	6	500	3750	3900
2	600	1250	1300	7	475	4375	4550
3	575	1875	1950	8	450	5000	5200
4	550	2500	2600	9	425	5625	5850
5	525	3125	3250	10	400	6250	6500

- **Ejercicio** 5.-Veamos el ejemplo expuesto en la pág. 284 del libro de Terceño, A.; Sáez, J. (1.997). Un préstamo de 1.200.000 pesetas con un interés del 9% nominal pagadero mensualmente a amortizar durante un año con cuota de amortización de capital constante.

  Tenemos $i = 0'09 \rightarrow I = 0'0075$, $n = 12$, $C = 1.200.000$

  $A = 109.000, B = -750$, $\alpha_x = A + B(x-1) = 109.000 - 750(x-1)$

  Con estos datos ya podemos calcular el cuadro de amortización y para comprobar el resultado:

  $C = \dfrac{An}{1+nI} = \dfrac{109.000 \cdot 12}{1 + 12 \cdot 0'075} = 1.200.000$ pesetas.

- **Ejercicio** 6.- Una aplicación con las cuantías en progresión geométrica la encontramos en la pág. 181 del libro de Terceño, A.; Sáez, J. (1.997), en el cual nos propone un plan de ahorro a 20 años con ingresos de 20.000 pesetas al final de cada mes, durante el primer año y los años restantes los ingresos crecerán anualmente el 6% acumulativo, si el interés efectivo anual es del 9%.

Consideraremos primero un ingreso pagadero anualmente, y luego calcularemos el factor correctivo correspondiente al pago mensual.

Por tratarse de una progresión geométrica pagadera por años vencidos tenemos:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n} A(1+r)^{x-1} k^{n-x} = \frac{A}{I-r}\left[k^n - (1+r)^n\right]$$

Siendo,
$A = 20.000 \cdot 12 = 240.000$, $I = 0'9$, $r = 0'6$, $n = 20$

$$C_n = \frac{240.000}{0.09 \cdot 0'06}\left[1'09^{20} - 1'06^{20}\right] = 19_1178.202'36$$

El factor correctivo es $\dfrac{i_1}{i_{12}}$.

$$i_1 = I = 0'9 \rightarrow (1 + I_{12})^{12} = 0'9 \rightarrow I_{12} = 0'00720732$$

$$i_{12} = 12 \cdot I_{12} = 0'08648784 \rightarrow \frac{i_1}{i_{12}} = 1'040609$$

Siendo el montante final:

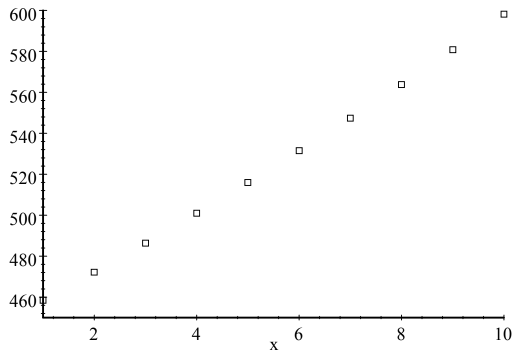
$$C_n = 19_1178.202'36 \cdot 1'040609 = 19_1957.004'50$$

- **Ejercicio** 7.-Queremos obtener un montante de 6.500 € al cabo de 10 periodos, mediante imposiciones pagaderas por anticipado y variables en progresión geométrica de razón $1 + r = 1'03$, con un interés del 4%. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Por ser,

$$C_n = \frac{Ak}{I - r}\left[k^n - (1 + r)^n\right]$$

Para,
$C_n = 6.500, k = 1'04, I = 0'04, r = 0'03, n = 10 \rightarrow A = 458'453$
Siendo $\alpha_x = A(1 + r)^{x-1}$, su representación gráfica será:
$\alpha_x = 458.453 \cdot 1.03^{x-1}$



y tendremos la siguiente tabla:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	$458'453$	$458'453$	$476'792$	6	$531'473$	$3267'248$	$3397'937$
2	$472'207$	$948'999$	$986'959$	7	$547'417$	$3945'355$	$4103'169$
3	$486'373$	$1473'332$	$1532'265$	8	$563'840$	$4667'008$	$4853'689$
4	$500'964$	$2033'230$	$2114'559$	9	$580'755$	$5434'444$	$5651'822$
5	$515'993$	$2630'552$	$2735'774$	10	$598'178$	$6250'000$	$6500'000$

- **Ejercicio** 8.-El ejemplo de la pág.91 del libro de Alegre, P.; González, L.; etc.(1.989) en el cual propone que las cuantías sean en progresión geométrica de razón 2, durante n años con un interés anual I de capitalización compuesta y sabiendo que el montante final asciende a $C_n = 2^{n-1}\dfrac{1+I}{1-I}C_1$ para $I \neq 1$ nos pide determinar el valor de I en función de n.

  Por ser,

  $A = C_1$, $k = 1 + I$, $r = 1$.

  Será:

  $$C_n = \frac{C_1 k}{k-2}\left[k^n - 2^n\right]$$

  Que al igualarlo con el valor dado en el problema, obtenemos:

  $k^n - 2^n = -2^{n-1}$, $k^n = 2^{n-1}$, $k = 2^{\frac{n-1}{n}}$

  Siendo la expresión pedida:

  $$I = 2^{\frac{n-1}{n}} - 1$$

- **Ejercicio** 9.-Queremos constituir un montante de 6.500 € al cabo de 10 periodos, mediante imposiciones pagaderas por anticipado y variables según una función polinómica cóncava, siempre que la diferencia entre la aportación máxima y la mínima sea ≤81 € . y con un interés del 4%. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Para determinar el valor de la primera cuantía A tenemos la expresión:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) + \frac{4Bk^2}{(n-1)^2 I^3}\left[2 + nI + (nI - 2k)k^{n-1}\right]$$

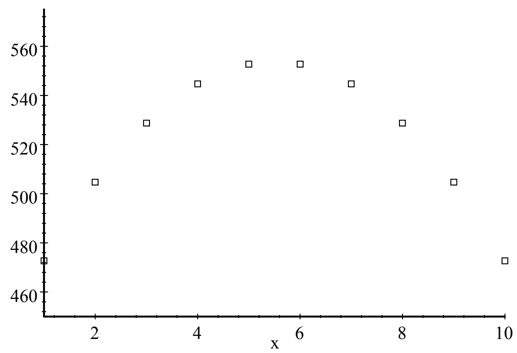
Para:
$C_n = 6.500$, $k = 1'04$, $I = 0'04$, $B = 81$, $n = 10$.

Se obtiene, $A = 472'730$.

Siendo $\alpha_x = A + \dfrac{4B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + (n+1)x - n\right]$

Su representación gráfica será:

$\alpha_x = -4x^2 + 44x + 432.730$



y tendremos la siguiente tabla:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	$472'730$	$472'730$	$491'639$	6	$552'730$	$3477'111$	$3616'196$
2	$504'730$	$996'370$	$1036'224$	7	$544'730$	$4160'926$	$4327'363$
3	$528'730$	$1564'955$	$1627'553$	8	$528'730$	$4856'093$	$5050'337$
4	$544'730$	$2172'283$	$2259'174$	9	$504'730$	$5555'067$	$5777'27$
5	$552'730$	$2811'905$	$2924'381$	10	$472'730$	$6250'000$	$6500'000$

- **Ejercicio**10.- Tratemos un caso especial. Se desea sustituir una deuda de 5 pagos anuales pagaderos por anticipado y variables según un polinomio cóncavo, de los cuales se sabe que el primero es de 6.000 € y el máximo a pagar es de 6.864 € . por una renta mensual prepagable variable anualmente según el mismo polinomio. El tanto de valoración es el 6% anual de interés pagadero mensual. Determinar las cuantías de las cuatro imposiciones restantes, así como las correspondientes imposiciones mensuales, indicando mediante una tabla el valor de las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$), y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Comenzaremos calculando el montante total, aplicando la fórmula:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) + \frac{4Bk^2}{(n-1)^2 I^3}\left[2 + nI + (nI - 2k)k^{n-1}\right]$$

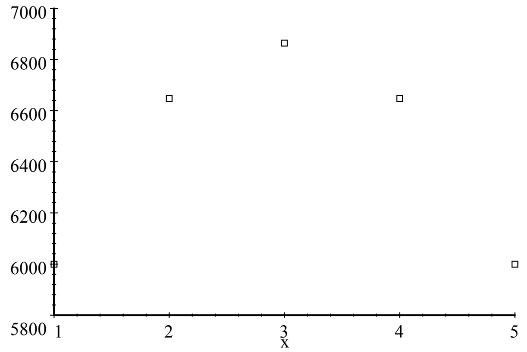
Siendo:
$A = 6.000$, $B = 864$, $n = 5$, $k = 1'06$.
Se obtiene:

$C_n = 35.851'911 + 2.574'216 = 38.427'127$ € .
Para calcular las aportaciones periódicas tenemos:

$$\alpha_x = A + \frac{4B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + (n+1)x - n\right]$$

Siendo la representación gráfica:

$\alpha_x = -216x^2 + 1296x + 4920$



y tendremos la siguiente tabla:

$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	6000	6000	6360	4	6648	$28539'629$	$30252'007$
2	6648	13008	$13788'480$	5	6000	$36252'007$	$38427'127$
3	6864	$20652'480$	$21891'629$				

La primera aportación de 6.000 € la abonaremos directamente, y para las distintas cantidades tenemos que durante el primer año y el tercer año tenemos que constituir un montante de 6.648 € , por lo que la cantidad mensual será la misma en ambos años y la obtenemos aplicando la fórmula:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n} C_1 k^{n+1-x} = \frac{C_1 k(k^n - 1)}{k-1}$$

Siendo,

$k = 1 + i = 1 + \dfrac{0'06}{12} = 1'005,\ n = 12$

Se obtiene:

$$C_{12} = \frac{C_1 k(k^{12} - 1)}{k-1} \rightarrow 6.648 = 201 C_1 (1'005^{12} - 1) \rightarrow C_1 = 536'248$$

Teniendo la siguiente tabla:

$M.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$M.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	$536'248$	$536'248$	$538'930$	7	$536'248$	$3810'516$	$3829'569$
2	$536'248$	$1075'178$	$1080'554$	8	$536'248$	$4365'817$	$4387'646$
3	$536'248$	$1616'802$	$1624'886$	9	$536'248$	$4923'895$	$4948'514$
4	$536'248$	$2161'135$	$2171'940$	10	$536'248$	$5484'763$	$5512'186$
5	$536'248$	$2708'189$	$2721'730$	11	$536'248$	$6048'435$	$6078'677$
6	$536'248$	$3257'978$	$3274'268$	12	$536'248$	$6614'925$	$6648'000$

Durante el segundo año necesitamos un montante de 6.864 € , y para calcular las mensualidades tenemos:

$$6.864 = 201C_1(1'005^{12} - 1) \rightarrow C_1 = 553'672$$

Teniendo la siguiente tabla:

$M.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$M.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	$553'672$	$553'672$	$556'440$	7	$553'672$	$3393'324$	$3953'995$
2	$553'672$	$1110'112$	$1115'662$	8	$553'672$	$4507'667$	$4530'205$
3	$553'672$	$1669'334$	$1677'680$	9	$553'672$	$5083'877$	$5109'296$
4	$553'672$	$2231'352$	$2242'509$	10	$553'672$	$5662'968$	$5691'283$
5	$553'672$	$2796'180$	$2810'161$	11	$553'672$	$6244'954$	$6276'179$
6	$553'672$	$3363'833$	$3380'652$	12	$553'672$	$6829'851$	$6864'000$

Durante el cuarto año deberemos constituir un montante de 6.000 € , y para calcular las mensualidades tenemos:

$$6.000 = 201C_1(1'005^{12} - 1) \rightarrow C_1 = 483'979$$

Teniendo la siguiente tabla:

$M.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$M.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	$483'979$	$483'979$	$486'399$	7	$483'979$	$3439'094$	$3456'290$
2	$483'979$	$970'377$	$975'229$	8	$483'979$	$3940'268$	$3959'970$
3	$483'979$	$1459'208$	$1466'504$	9	$483'979$	$4443'948$	$4466'168$
4	$483'979$	$1950'483$	$1960'235$	10	$483'979$	$4950'147$	$4974'898$
5	$483'979$	$2444'214$	$2456'435$	11	$483'979$	$5458'876$	$5486'171$
6	$483'979$	$2940'413$	$2955'115$	12	$483'979$	$5970'149$	$6000'000$

- **Ejercicio** 11.- Deseamos hacer 9 imposiciones anuales crecientes y prepagables polinómicamente cóncavas, siendo la inicial de 3.400 € y la última de 5.000 € , y disponemos de un interés del 8%.Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías

(α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$), y al finalizar el periodo ($C.F.$).

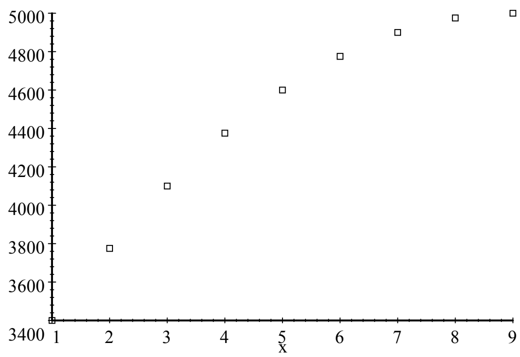
Las cuantías vendrán dadas por la fórmula:

$$\alpha_x = A + \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + 2nx + 1 - 2n\right]$$

Con,
$A = 3.400$, $B = 5.000 - 3.400 = 1.600$, $n = 9$

Siendo la representación gráfica:

$\alpha_x = -25x^2 + 450x + 2975$



El montante final será de:

$$C_n = \left[A - \frac{(3k-1)B}{(k-1)^2(n-1)^2}\right]\frac{k(k^n-1)}{k-1} + \frac{Bnk}{(k-1)^2(n-1)^2}\left[2k^n + (k-1)(2-n)\right]$$

Sustituyendo los valores anteriores de las constantes, siendo $k = 1'08$ nos queda:

$$C_n = -72.153'109 + 130.536'914 = 58383'805$$

y tendremos la siguiente tabla:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	3400	3400	3672	6	4775	$30142'380$	$33553'771$
2	3775	7447	$8042'760$	7	4900	$37453'771$	$40450'073$
3	4100	$12142'760$	$13114'181$	8	4975	$45425'073$	$49059'078$
4	4375	$17489'181$	$18888'315$	9	5000	$54059'078$	$58383'805$
5	4600	$23488'315$	$25367'380$				

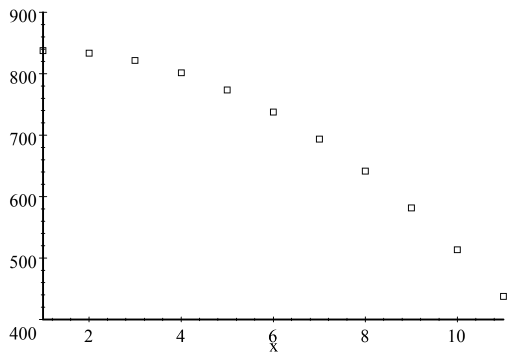
- **Ejercicio** 12.- Deseamos hacer 11 imposiciones anuales decrecientes y prepagables polinómicamente cóncavas, para obtener un montante total de 10.000 € , con un interés del 4% y que la diferencia entre la primera cuantía y la última sea de 400 € . Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Calculemos A.
Siendo $B = 400$, $n = 11$, $k = 1'04$, $C_n = 10.000$
Aplicamos la fórmula anterior de C_n y obtenemos $A = 437'571$
Siendo:

$$\alpha_x = A + \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + 2x + n^2 - 2n\right]$$

Con la representación gráfica:

$\alpha_x = -4x^2 + 8x + 833'571$



y tendremos la siguiente tabla:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	$837'571$	$837'571$	$871'074$	7	$693'571$	$6234'081$	$6483'444$
2	$833'571$	$1704'645$	$1772'831$	8	$641'571$	$7125'015$	$7410'015$
3	$821'571$	$2594'402$	$2698'178$	9	$581'571$	$7991'586$	$8311'250$
4	$801'571$	$3499'749$	$3639'739$	10	$513'571$	$8824'821$	$9177'814$
5	$773'571$	$4413'310$	$4589'842$	11	$437'571$	$9615'385$	$10000'000$
6	$737'571$	$5327'413$	$5540'510$				

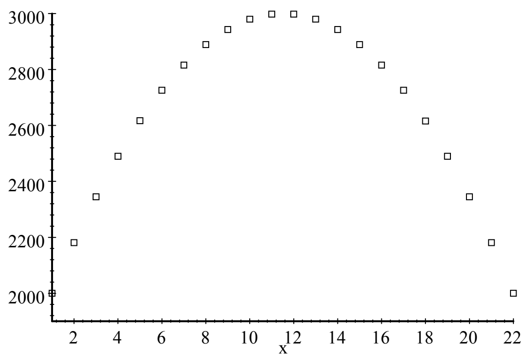
- **Ejercicio** 13.- Realizamos imposiciones variables según una función polinómica de convexidad negativa, siendo la primera de 2.000 € , y la máxima de 3.000 € , con un $I = 10\%$ (será $k = 1'1$) tendremos $n = \dfrac{2k}{k-1} = \dfrac{2.2}{0.1} = 22$ periodos. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$), y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Por ser,

$$\alpha_x = A + \frac{4B(k-1)}{(k+1)^2}\left[-(k-1)x^2 + (3k-1)x - 2k\right]$$

Con $A = 2000$, $B = 1000$, $n = 22$, $k = 1'1$
La representación gráfica será:

$\alpha_x = \dfrac{40}{4.41}(-x^2 + 23x + 198.5)$



Por ser:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) + \frac{4Bk(k-1)(n^2-n)}{(k+1)^2}$$

$$C_n = 22000(1.1^{22} - 1) + \frac{4000 \cdot 0.11 \cdot 462}{4.41} = 203181'287$$

Tendremos la siguiente tabla:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	2000	2000	2200	12	$2997'73$	$57742'36$	$60215'49$
2	$2181'40$	$4381'41$	$4819'55$	13	$2979'57$	$63195'08$	$69514'59$
3	$2344'67$	$7164'22$	$7880'64$	14	$2943'31$	$72457'90$	$79703'70$
4	$2489'80$	$10370'43$	$11407'48$	15	$2888'89$	$82592'58$	$90851'84$
5	$2616'78$	$14024'26$	$15426'68$	16	$2816'33$	$93668'17$	$103034'98$
6	$2725'62$	$18152'31$	$19967'54$	17	$2725'62$	$105760'61$	$116336'67$
7	$2816'33$	$22783'87$	$25062'25$	18	$2616'33$	$118953'45$	$130848'79$
8	$2888'89$	$27951'14$	$30746'25$	19	$2489'80$	$133338'59$	$146672'45$
9	$2943'31$	$33689'57$	$37058'52$	20	$2344'67$	$149017'12$	$163918'83$
10	$2979'57$	$40038'11$	$44041'93$	21	$2181'41$	$166100'24$	$182710'26$
11	$2997'73$	$47039'66$	$51743'62$	22	2000	$184710'26$	$203181'29$

- **Ejercicio** 14.- Deseamos obtener un capital mediante la imposición de cuantías anuales prepagables en función polinómica cóncava creciente siendo la primera cuantía de 1.200 € , y la última de 2.890 € , valorado a un interés del 8% anual durante $n = \dfrac{3k-1}{2k-2} = 14$ periodos. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Empezamos calculando el montante final mediante la fórmula anterior.
Siendo,
$A = 1.200$, $B = 2.890 - 1.200 = 1.690$, $k = 1'08$, $n = 14$

Obtenemos:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) + \frac{4Bk(k-1)(n^2-n)}{(k+1)^2} = 55.952'537$$

Con,
$\alpha_x = A + \frac{4B(k-1)}{(k+1)^2}\left[-(k-1)x^2 + (3k-1)x - 2k\right] = -10x^2 + 280x + 930$

Tendremos la siguiente tabla:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	1200	1200	1296	8	2530	19763'953	21345'069
2	1450	2746	2965'680	9	2640	23985'069	25903'875
3	1680	4645'680	5017'334	10	2730	28633'875	30924'585
4	1890	6907'334	7459'921	11	2800	33724'585	36422'552
5	2080	9539'921	10303'115	12	2850	39272'552	42414'356
6	2250	12533'115	13557'364	13	2880	45294'356	48917'904
7	2400	15957'364	17233'953	14	2890	51807'904	55952'537

- **Ejercicio** 15.-Deseamos obtener un capital al finalizar los 11 años, y lo queremos crear mediante imposiciones de cuantías prepagables variables en función polinómica cóncava decreciente, con un término inicial de 2.200 € , y uno final de 2.000 €, disponemos de un interés anual del 5%. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

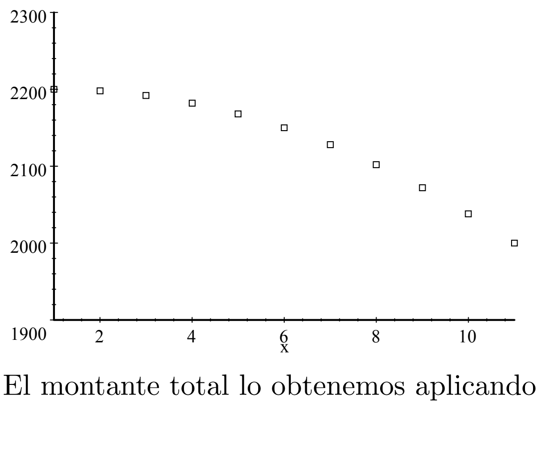
Empezaremos determinando los valores de A y B aplicando la fórmula de las cuantías.

$$\alpha_x = A + \frac{B(1-k)^2}{(1+k)} \left[-x^2 + 2x + \frac{3k-k^2}{(1-k)^2} \right] \text{ para } k = 1'05$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \quad \rightarrow \alpha_1 = A + B = 2.200 \\ x = 11 \rightarrow \alpha_{11} = A + \dfrac{1'8B}{2'05} = 2.000 \end{array} \right\} \rightarrow A = 560, \ B = 1.640$$

Con lo que la gráfica será:

$$\alpha_x = -2x^2 + 4x + 2198$$



El montante total lo obtenemos aplicando la fórmula:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) + \frac{Bk}{1+k}\left[(k-1)n^2 + 2n\right]$$

Para,

$A = 560$, $B = 1640$, $k = 105$, $n = 11 \rightarrow C_n = 31.915'591$ € .

Tenemos la siguiente tabla:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	2200	2200	2310	7	2128	17719′525	18605′501
2	2198	4508	4733′400	8	2102	20707′501	21742′876
3	2192	6925′400	7271′670	9	2072	23814′876	25005′620
4	2182	9453′670	9926′356	10	2038	27043′620	28395′801
5	2168	12094′356	12699′071	11	2000	30395′801	31915′591
6	2150	14849′071	15591′525				

- **Ejercicio** 16.- Queremos realizar unas imposiciones prepagables con variación polinómica cóncava siendo $\alpha_1 = \alpha_n = 100$ € . Con un interés $I = 8\%$ (será $k = 1'08$), en $n = \dfrac{k+1}{k-1} = 26$ periodos. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

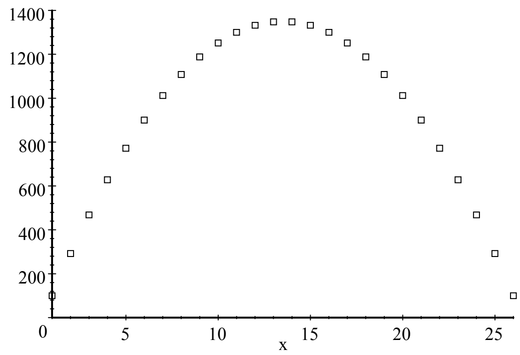
Las imposiciones vendrán dadas por la fórmula:

$$\alpha_x = A\left[-(k-1)x^2 + 2kx - k\right]$$

Para,

$A = 100$ la representación gráfica será:

$\alpha_x = -8x^2 + 216x - 108$



Para calcular el montante final aplicamos:

$$C_n = \sum_{x=1}^{26}(-8x^2 + 216x - 108)1.08^{27-x} = 100 \cdot 1.08 \cdot 26^2 = 73008$$

Obteniéndose la siguiente tabla[55]:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	100	100	108	14	1348	19600	21168
2	292	400	432	15	1332	22500	24300
3	468	900	972	16	1300	25600	27648
4	628	1600	1728	17	1252	28900	31212
5	772	2500	2700	18	1188	32400	34992
6	900	3600	3888	19	1108	36100	38988
7	1012	4900	5292	20	1012	40000	43200
8	1108	6400	6912	21	900	44100	47628
9	1188	8100	8748	22	772	48400	52272
10	1252	10000	10800	23	628	52900	57132
11	1300	12100	13068	24	468	57600	62208
12	1332	14400	15552	25	292	62500	67500
13	1348	16900	18252	26	100	67600	73008

Si el periodo fuese $n = 10$ tendríamos[56]:

$$C_n = \sum_{x=1}^{10}(-8x^2 + 216x - 108)1.08^{11-x} = 100 \cdot 1.08 \cdot 10^2 = 10800 \text{ €}$$

[55] En la cual podemos observar que: "todas las cantidades son enteras".

[56] Como puede observarse el C_n que obtenemos coincide con $C.F.$ de la tabla anterior para $n = 10$.

- **Ejercicio** 17.- Deseamos obtener un capital final de 3.024 € en 4 imposiciones polinómicas. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$), y al finalizar el periodo ($C.F.$). en los siguientes casos:

1. Si el interés es del 5%, será $k = 1'05$, $C_n = 3.024$, $n = 4$

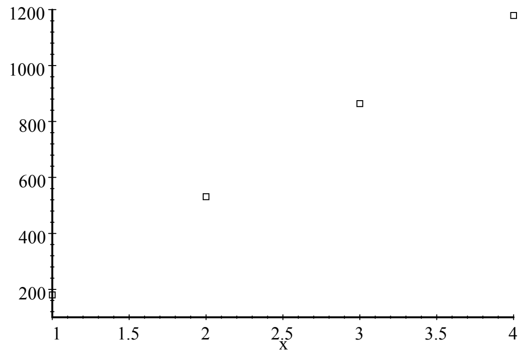
   Para calcular A aplicamos $C_n = An^2 \rightarrow A = 189$

   Siendo,

$$\alpha_x = A\left[-\frac{(k-1)x^2}{k} + 2x - 1\right]$$

   Sustituyendo obtenemos la siguiente gráfica:

   $\alpha_x = -9x^2 + 378x - 189$



   y tendremos la siguiente tabla:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	180	180	189	3	864	1620	1701
2	531	720	756	4	1179	2880	3024

2. Si el interés es del 8% será $k = 1'08$, $C_n = 3.024$, $n = 4$

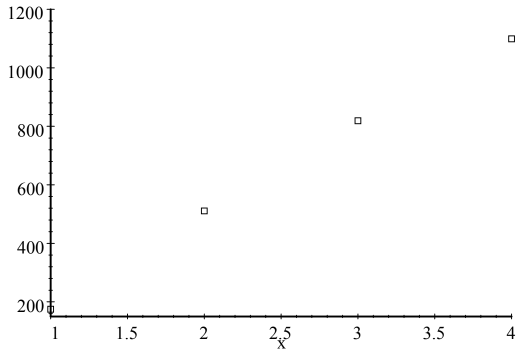
   Para calcular A aplicamos $C_n = An^2 \rightarrow A = 189$

   Siendo,

$$\alpha_x = A\left[-\frac{(k-1)x^2}{k} + 2x - 1\right]$$

Sustituyendo obtenemos la siguiente gráfica:

$\alpha_x = -14x^2 + 378x - 189$



y tendremos la siguiente tabla:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	175	175	189	3	819	1575	1701
2	511	700	756	4	1099	2800	3024

- **Ejercicio** 18.- Deseamos obtener un montante de 46.200 € en n años, con tal de realizar imposiciones anuales prepagables variables según un polinomio cóncavo y simétrico. El interés es del 10% anual. Determinar los periodos, las cuantías de las imposiciones, y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$), y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Para establecer la simetría hacemos $n = \dfrac{2}{k-1} = 20$ periodos.

Siendo, $k = 1'1$, $C_n = 46.200$
Para calcular el valor de A aplicamos:

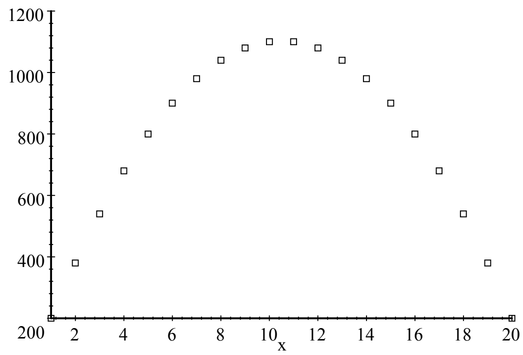
$$C_n = \frac{A}{2}kn(n+1) \rightarrow A = 200$$

Con,

$$\alpha_x = \frac{A}{2}\left[-(k-1)x^2 + (1+k)x\right]$$

Sustituyendo obtenemos la siguiente gráfica:

$\alpha_x = -10x^2 + 210x$



Obteniéndose la siguiente tabla[57]:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	200	200	220	11	1100	13200	14520
2	380	600	660	12	1080	15600	17160
3	540	1200	1320	13	1040	18200	20020
4	680	2000	2200	14	980	21000	23100
5	800	3000	3300	15	900	24000	26400
6	900	4200	4620	16	800	27200	29920
7	980	5600	6160	17	680	30500	33660
8	1040	7200	7920	18	540	34200	37620
9	1080	9000	9900	19	380	38000	41800
10	1100	11000	12100	20	200	42000	46200

- **Ejercicio** 19.- Veamos el mismo caso pero con imposiciones prepagables de variación polinómica cóncava creciente, siendo $\alpha_1 = 100$ € y el interés $I = 8\%$ (será $k = 1'08$), en $n \leq \dfrac{k}{k-1} = 13'5$ periodos. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$), y al finalizar el periodo ($C.F.$).

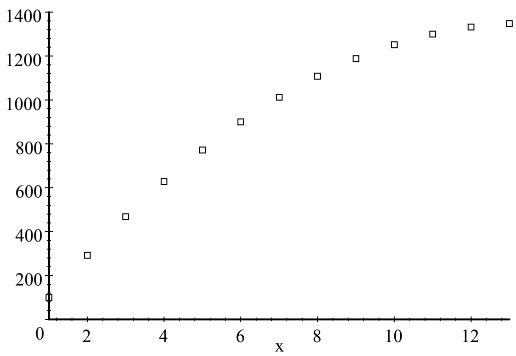
[57]En la cual podemos observar que: "todas las cantidades son enteras"

Tomaremos $n = 13$ periodos y las imposiciones vendrán dadas por:

$$\alpha_x = A\left[-(k-1)x^2 + 2kx - k\right]$$

Para $A = \alpha_1 = 100$, obtenemos la gráfica:

$\alpha_x = -8x^2 + 216x - 108$



Para calcular el montante final tenemos:
$C_n = \sum_{x=1}^{13} (-8x^2 + 216x - 108)1.08^{27-x} = 100 \cdot 1.08 \cdot 13^2 = 18.252$ €
Obteniéndose la siguiente tabla[58]:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	100	100	108	8	1108	6400	6912
2	292	400	432	9	1188	8100	8748
3	468	900	972	10	1252	10000	10800
4	628	1600	1728	11	1300	12100	13068
5	772	2500	2700	12	1332	14400	15552
6	900	3600	3888	13	1348	16900	18252
7	1012	4900	5292				

- **Ejercicio** 20.- Deseamos realizar unas imposiciones prepagables con variación polinómica cóncava y decreciente, y disponemos de un interés del 5%, con el fin de obtener un capital final de 134.505 € , en 21 periodos. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

[58] En la cual podemos observar que: "todas las cantidades son enteras"

Siendo:

$n = \frac{k}{k-1} = \frac{1'05}{0'05} = 21 \ , \ n < 1 + \frac{\sqrt{k+1}}{k-1} = 29'63 \rightarrow \alpha_x > 0$

Empecemos calculando la última aportación A, mediante:

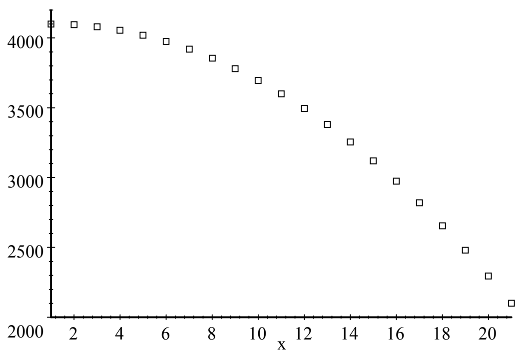
$C_n = An\left[(k-1)n+2\right], 134.505 = A \cdot 21 \cdot 3'05 \rightarrow A = 2.100$

Con:

$$\alpha_x = \frac{A(k-1)^2}{k}\left[-x^2+2x+\frac{3k-k^2}{(k-1)^2}\right]$$

Sustituyendo obtenemos la gráfica:

$\alpha_x = -5x^2 + 10x + 4095$



Obteniéndose la siguiente tabla[59]:

[59] En la cual podemos observar que: "todas las cantidades son enteras"

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	4100	4100	4305	12	3495	62400	65520
2	4095	8400	8820	13	3380	68900	72345
3	4080	12900	13545	14	3255	75600	79380
4	4055	17600	18480	15	3120	82500	86625
5	4020	22500	23625	16	2975	89600	94080
6	3975	27600	28980	17	2820	96900	101745
7	3920	32900	34545	18	2655	104400	109620
8	3855	38400	40320	19	2480	112100	117705
9	3780	44100	46305	20	2295	120000	126000
10	3695	50000	52500	21	2100	128100	134505
11	3600	56100	58905				

- **Ejercicio** 21.- Deseamos realizar unas imposiciones prepagables con variación polinómica cóncava y decreciente, y disponemos de un interés del 5%, para capitalizar 138.915 €, en 21 periodos. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Vemos que $n = 21 < \dfrac{\sqrt{k+k^2}}{k-1} = 29'34 \rightarrow \alpha_x > 0$

Empezaremos calculando el valor de A, aplicando:

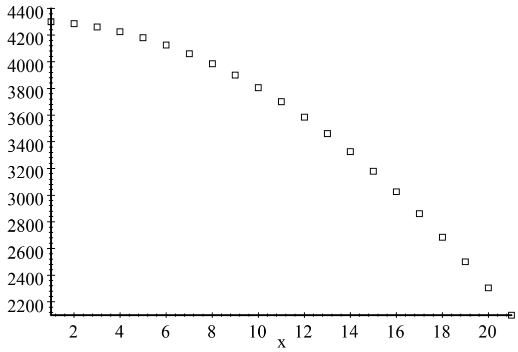
$C_n = Akn\left[n(k-1)+2k\right], 138.915 = 22'05A(1'05+2'1) \rightarrow A = 2.000$

Con,

$$\alpha_x = A\left[-(1-k)^2x^2 + k + k^2\right]$$

Sustituyendo obtenemos la gráfica:

$\alpha_x = -5x^2 + 4305$



Obteniéndose la siguiente tabla[60]:

$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	4300	4300	4515	12	3585	64800	68040
2	4285	8800	9240	13	3460	71500	75075
3	4260	13500	14175	14	3325	78400	82320
4	4225	18400	19320	15	3180	85500	89775
5	4180	23500	24675	16	3025	12800	97440
6	4125	28800	30240	17	2860	100300	105315
7	4060	34300	36015	18	2685	108000	113400
8	3985	40000	42000	19	2500	115900	121695
9	3900	45900	48195	20	2305	124000	130200
10	3805	52000	54600	21	2100	132300	138915
11	3700	58300	61215				

- **Ejercicio** 22.- Deseamos realizar 11 imposiciones periódicas prepagables con cuantías variables según una función polinómica convexa, de valor inicial 1.000 €, y de diferencia máxima 100 €, y disponemos de un interés del 5%. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Solución: El montante total se obtiene aplicando la fórmula

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) - \frac{4Bk^2}{(n-1)^2 I^3}\left[2 + nI + (nI - 2k)k^{n-1}\right]$$

Para $A = 1.000$, $B = 100$, $n = 11$, $k = 1'05$, se obtiene:

$$C_n = 14917'127 - 889'526 = 14027'600$$

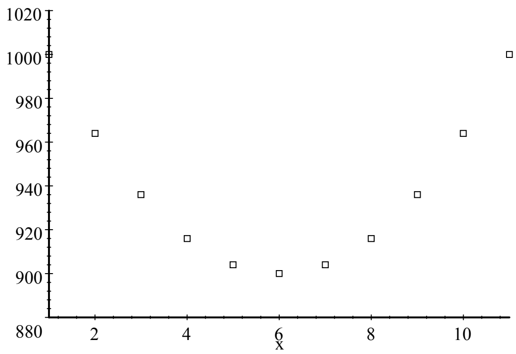
[60] En la cual podemos observar que: "todas las cantidades son enteras"

Con,

$$\alpha_x = A + \frac{4B}{(n-1)^2}\left[+x^2 - (n+1)x + n\right]$$

Sustituyendo obtenemos la gráfica:

$\alpha_x = 4x^2 - 48x + 1044$



Obteniéndose la siguiente tabla:

$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	1000	1000	1050	7	904	$7614'189$	$7994'899$
2	964	2014	$2114'700$	8	916	$8910'899$	$9356'444$
3	936	$3050'700$	$3203'235$	9	936	$10292'444$	$10807'066$
4	916	$4119'235$	$4325'197$	10	964	$11771'066$	$12359'619$
5	904	$5229'197$	$5490'657$	11	1000	$13359'619$	$14027'600$
6	900	$6390'657$	$6710'189$				

- **Ejercicio** 23.- Supongamos el mismo ejemplo anterior. Deseamos obtener un capital mediante 11 imposiciones periódicas prepagables con cuantías variables según una función polinómica convexa y decreciente de aportación inicial 1.000 € , y de diferencia máxima 100 € , y disponemos de un interés del 5%. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Empezaremos calculando el montante total mediante:

$$C_n = \left[A + \frac{(3k-1)B}{(k-1)^2(n-1)^2} \right] \frac{k(k^n-1)}{k-1} -$$

$$-\frac{Bnk}{(k-1)^2(n-1)^2} \left[2k^n + (k-1)(2-n) \right]$$

Para, $A = 1.000$, $B = 100$, $n = 11$, $k = 1'05$ se obtiene:

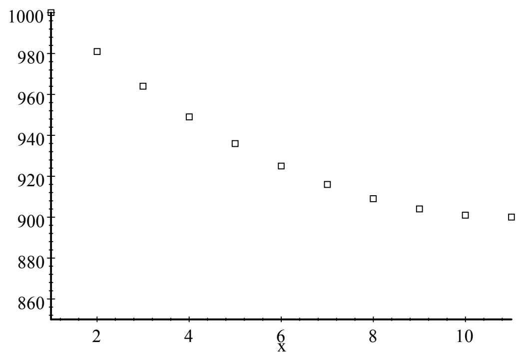
$$C_n = 1.868 \cdot 14'917 - 4.620 \cdot 2'971 = 14.021'320$$

Con,

$$\alpha_x = A - \frac{B}{(n-1)^2} \left[-x^2 + 2nx + 1 - 2n \right]$$

Sustituyendo obtenemos la gráfica:

$\alpha_x = x^2 - 22x + 1021$



Obteniéndose la siguiente tabla:

$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	1000	1000	1050	7	916	7781'652	8170'735
2	981	2031	2132'550	8	909	9079'735	9533'721
3	964	3096'550	3251'378	9	904	10437'721	10959'607
4	949	4200'378	4410'396	10	901	11860'607	12453'638
5	936	5346'396	5613'716	11	900	13353'638	14021'320
6	925	5538'716	6865'652				

- **Ejercicio** 24.- Supongamos el mismo ejemplo anterior. Deseamos obtener un capital mediante 11 imposiciones periódicas prepagables con cuantías variables según una función polinómica convexa y decreciente, de aportación inicial 900 € y de una final de 1.000 € , y el interés del 5%. Determinar las cuantías de las imposiciones, y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Empezaremos calculando el montante total, mediante:

$$C_n = \frac{Ak(k^n-1)}{k-1} +$$

$$+\frac{Bk^{n+1}}{(n-1)^2(k-1)^3}\left[3k - k^2 - (n^2-2n)(k-1)^2 + \frac{(k-k^2)(2n-1)-2k}{k^n}\right]$$

Para $A = 1.000$, $B = 100$, $n = 11$, $k = 1'05$ obtenemos:

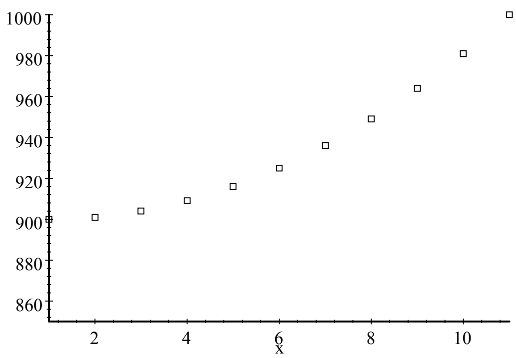
$$C_n = 14.917'127 - 1.040'669 = 13.876'458$$

Con,

$$\alpha_x = A - \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + 2x + n^2 - 2n\right]$$

Sustituyendo obtenemos la gráfica:

$\alpha_x = x^2 - 2x + 901$



Obteniéndose la siguiente tabla:

$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	900	900	945	7	936	$7424'255$	$7795'467$
2	901	1846	$1938'3$	8	949	$8744'467$	$9181'691$
3	904	$2842'3$	$2984'415$	9	964	$10145'691$	$10652'975$
4	909	$3893'415$	$4088'086$	10	981	$11633'975$	$12215'674$
5	916	$5004'086$	$5254'290$	11	1000	$13215'674$	$13876'458$
6	925	$6179'290$	$6488'255$				

- **Ejercicio** 25.- Deseamos obtener un capital mediante la imposición de cuantías prepagables variables según una función polinómica convexa y simétrica, de aportación inicial de 2.000 € y que la diferencia máxima de las aportaciones no supere los 441 € y el interés del 10%. Determinar la duración del plan, las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

El número de períodos para garantizar la simetría vendrá dada por la fórmula:
$n = \dfrac{2k}{k-1} = \dfrac{2'2}{0'1} = 22$ períodos.

El capital total vendrá dado por:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) - \frac{4Bk(k-1)(n^2-n)}{(k+1)^2}$$

Para $A = 2.000$, $B = 441$, $k = 1'1$, $n = 22$, se obtiene:

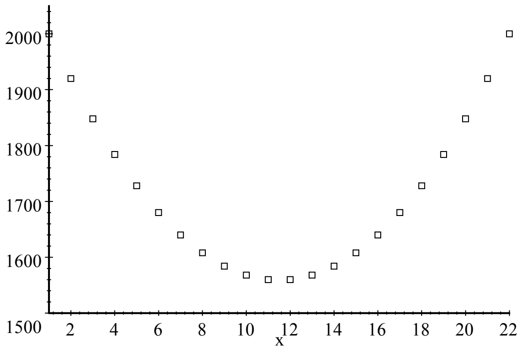
$$C_n = 157086'049 - 20328 = 136758'049$$

Con,

$$\alpha_x = A - \frac{4B(k-1)}{(k+1)^2}\left[-(k-1)x^2 + (3k-1)x - 2k\right]$$

Sustituyendo obtenemos la gráfica:

$\alpha_x = -4x^2 - 92x + 2088$



Obteniéndose la siguiente tabla:

$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	2000	2000	2200	12	1560	37488'568	41237'424
2	1920	4120	4532	13	1568	42805'424	47085'967
3	1848	6380	7018	14	1584	48669'967	53536'963
4	1784	8802	9682'2	15	1608	55144'963	60659'460
5	1728	11410'2	12551'22	16	1640	62299'460	68529'406
6	1680	14231'22	15654'342	17	1680	70209'406	77230'346
7	1640	17294'342	19023'776	18	1728	78958'346	86854'181
8	1608	20631'776	22694'954	19	1784	88638'181	97501'999
9	1584	24278'954	26706'849	20	1848	99349'999	109284'999
10	1568	28274'849	31102'334	21	1920	111204'999	122325'499
11	1560	32662'334	35928'568	22	2000	124325'499	136758'049

- **Ejercicio** 26.- Deseamos obtener un capital mediante la imposición de cuantías anuales prepagables variables según una función polinómica decreciente, con una primera cuantía de 2.890 € y una última de 1.200 €, y el interés anual del 8% durante $n = \dfrac{3k-1}{2k-2} = 14$ periodos. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Empezaremos calculando el montante final mediante:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) - \frac{4Bk(k-1)(n^2-n)}{(k+1)^2}$$

Siendo $A = 2.890$, $B = 2.890 - 1.200 = 1.690$, $k = 1'08$, $n = 14$ obtenemos:

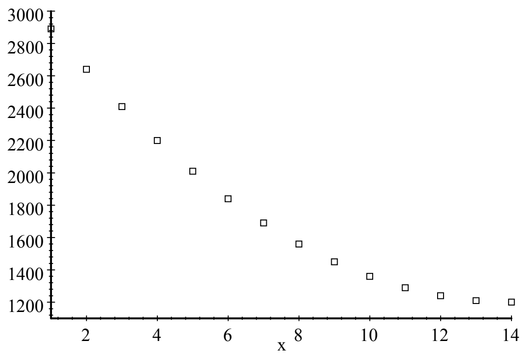
$$C_n = 75.579'609 - 24.570 = 51.009'609$$

Con,

$$\alpha_x = A - \frac{4B(k-1)}{(k+1)^2}\left[-(k-1)x^2 + (3k-1)x - 2k\right]$$

Sustituyendo obtenemos la gráfica:

$\alpha_x = 10x^2 - 280x + 3160$



Obteniéndose la siguiente tabla:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	2890	2820	$3121'200$	8	1560	$23739'854$	$25639'042$
2	2640	$5761'200$	$6222'096$	9	1450	$27089'042$	$29256'166$
3	2410	$8632'096$	$9322'664$	10	1360	$30616'166$	$33065'459$
4	2200	$11522'664$	$12444'477$	11	1290	$34355'459$	$37102'895$
5	2010	$14454'477$	$15610'835$	12	1240	$38343'895$	$41411'407$
6	1840	$17450'835$	$18846'902$	13	1210	$42621'407$	$46031'120$
7	1690	$20536'902$	$22179'854$	14	1200	$48231'120$	$51009'609$

- **Ejercicio** 27.- Deseamos obtener un capital en 11 años, mediante la imposición de cuantías prepagables variables según una función polinómica convexa y creciente, con una cuantía inicial de 2.000 € , y una final de 2.200 € y el interés anual del 5%. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

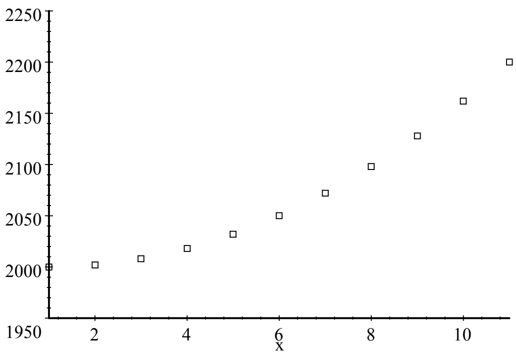
Empezaremos calculando los valores de A y B mediante:

$$\alpha_x = A - \frac{B(k-1)^2}{k+1}\left[-x^2+2x+\frac{3k-k^2}{(k-1)^2}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & = & 1 & \rightarrow & \alpha_1 & = & A & - & B & = & 2.000 \\ x & = & 11 & \rightarrow & \alpha_{11} & = & A & - & \frac{18B}{205} & = & 2.200 \end{array}\right\} \begin{array}{ccc} A & = & 3.640 \\ B & = & 1.640 \end{array}$$

Obteniéndose la gráfica:

$\alpha_x = 2x^2 - 4x + 2.002$



El montante final lo obtenemos mediante:

$$C_n = \frac{Ak(k^n-1)}{I} - \frac{Bk}{1+k}\left[(k-1)n^2+2n\right]$$

Para $A = 3.640$, $B = 1.640$, $k = 1'05$, $n = 11$ se obtiene:

$$C_n = 54.298'341 - 23.562 = 30.736'341$$

Teniendo la siguiente tabla:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	2000	2000	2100	7	2072	16476'911	17300'756
2	2002	4102	4307'100	8	2098	19398'756	20368'694
3	2008	6315'100	6630'855	9	2128	22496'694	236621'529
4	2018	8648'855	9081'298	10	2162	25783'529	27072'705
5	2032	11113'298	11668'963	11	2200	29272'705	30736'341
6	2050	13718'963	14404'911				

- **Ejercicio** 28.- Veamos ahora el mismo ejercicio anterior en este caso simplificado, con aportaciones prepagables variables según una función polinómica convexa y simétrica, con una cuantía inicial de 2.000 € y el interés anual del 10%. Determinar la duración del plan, las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

El número de períodos para garantizar la simetría vendrá dado por la fórmula:

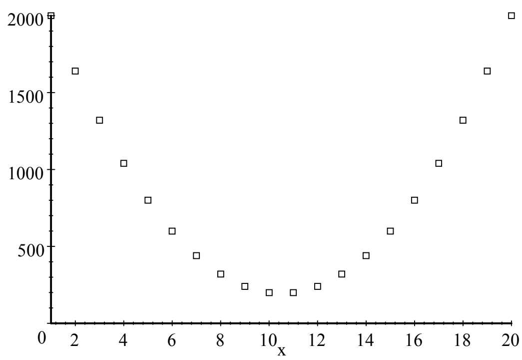
$$n = \frac{2}{k-1} = \frac{2}{0'1} = 20 \rightarrow D < -\frac{(k+1)^2}{4(k-1)^2} < -110'25$$

Tomaremos $D = -120$
Con,

$$\alpha_x = -\frac{A}{\frac{2}{k-1} + D}\left[x^2 - \frac{k+1}{k-1}x - D\right]$$

Para $A = 2.000$, $k = 1'1$, $D = -120$ obtenemos la gráfica:

$\alpha_x = 20x^2 - 420x + 2400$



El montante total se obtiene mediante:

$$C_n = \frac{Ak}{2 + D(k-1)}\left[Dk^n - D + n^2 + n\right]$$

Dando,

$$C_n = -220(-267'299) = 58.805'999$$

Teniéndose la siguiente tabla:

$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$P:$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	2000	2000	2200	11	200	18074'801	19882'281
2	1640	3840	4224	12	240	20122'281	22134'509
3	1320	5544	6098'4	13	320	22454'509	24699'960
4	1040	7138'4	7852'24	14	440	25139'960	27653'956
5	800	8652'24	9517'464	15	600	28253'956	31079'352
6	600	10117'464	111292'210	16	800	31879'352	35067'287
7	440	11569'210	12726'131	17	1040	36107'287	39718'016
8	320	13046'131	14350'745	18	1320	41038'016	45141'817
9	240	14590'745	16049'819	19	1640	46781'817	51459'999
10	200	16249'819	17874'801	20	2000	53459'999	58805'999

- **Ejercicio** 29.- Veamos el mismo caso anterior, pero con unas imposiciones prepagables con variación polinómica cóncava decreciente, siendo la primera cuantía de 2.000 € y el interés del 10%. Determinar la duración del plan, las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

La duración del plan vendrá dada por $x \leq \dfrac{k+1}{2k-2} = \dfrac{2'1}{0'2} = 10'5$

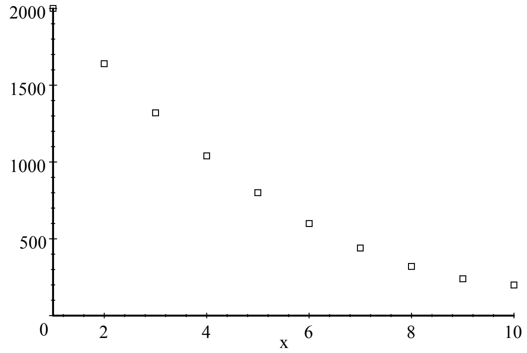
Tomamos $x = 10 \rightarrow D < -\dfrac{(k+1)^2}{4(k-1)^2} < -110'5$ hacemos $D = -120$

Con,

$$\alpha_x = -\frac{A}{\dfrac{2}{k-1} + D}\left[x^2 - \frac{k+1}{k-1}x - D\right]$$

Para $A = 2.000$, $k = 1'1$, $D = -120$ obtenemos la gráfica:

$\alpha_x = 20x^2 - 420x + 2400$



El montante total lo obtenemos mediante:

$$C_n = \frac{Ak\left[Dk^n - D + n^2 + n\right]}{2 + D(k-1)} = -220(-81'249) = 17.874'801$$

Teniéndose la siguiente tabla:

$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$P:$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	2000	2000	2200	6	600	$10117'464$	$111292'210$
2	1640	3840	4224	7	440	$11569'210$	$12726'131$
3	1320	5544	$6098'4$	8	320	$13046'131$	$14350'745$
4	1040	$7138'4$	$7852'24$	9	240	$14590'745$	$16049'819$
5	800	$8652'24$	$9517'464$	10	200	$16249'819$	$17874'801$

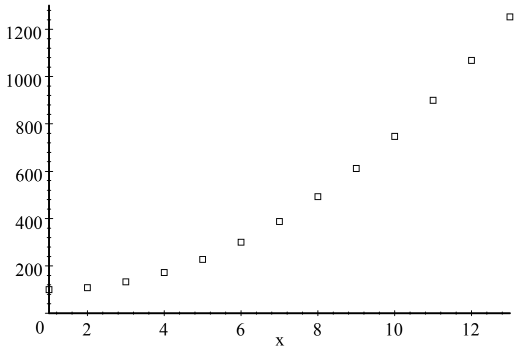
- **Ejercicio** 30.- Deseamos obtener un capital mediante imposiciones prepagables variables según una función polinómica cóncava creciente con una imposición inicial de 100 € y un interés del 8% por lo que la realizaremos en 13 imposiciones. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Determinemos el valor de A, para $x = 1$, $\alpha_1 = 100$, $k = 1'08$
Siendo:

$$\alpha_x = \frac{4A(k-1)^2}{k^2 - 2k + 5}\left[x^2 - 2x + \frac{k}{k-1}\right] \rightarrow A = 1252$$

Sustituyendo obtenemos la gráfica:

$\alpha_x = 8x^2 - 16x + 108$



El montante total se obtiene:

$$C_n = \frac{4Ak}{k^2 - 2k + 5}\left[(1-k)n^2 - 2n + \frac{2k(1-k^n)}{1-k}\right] = 9.328'285$$

Teniéndose la siguiente tabla:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	100	100	108	8	492	2318'895	2504'406
2	108	216	232'280	9	612	3116'406	3365'719
3	132	365'280	394'502	10	748	4113'719	4442'816
4	172	566'502	611'823	11	900	5342'816	5770'241
5	228	839'823	907'008	12	1068	6838'241	7385'301
6	300	1207'008	1302'569	13	1252	8637'301	9328'285
7	388	1691'569	1826'895				

Capítulo 5

PLANES ESPECIALES DE AHORRO

5.1 Introducción y descripción del capítulo

Continuando con las aplicaciones financieras, estableceremos en este capítulo unos planes especiales de ahorro para poder ver así, la gran versatilidad de la fórmula general ($F1S$), que tan exhaustivamente hemos aplicado anteriormente, para el cálculo del valor final de rentas.

El plan de ahorro con carencia que establecemos se basa en la idea de un ahorro a largo plazo, podríamos decir el de toda una vida laboral, en la que consideramos tres etapas: en la primera los ahorros van disminuyendo ya que aumentan los gastos de la unidad familiar, en la segunda etapa los gastos se disparan por la adquisición de la vivienda u otro gasto importante que antes no tenían, siendo una etapa de carencia sin poder ahorrar, y en la tercera etapa en la que está más cerca la jubilación se debe realizar un esfuerzo, para ir aumentando poco a poco las cuantías dedicadas al ahorro.

El plan de ahorro con reintegro, tiene el mismo fundamento que el anterior con carencia, ya que también se realiza en tres etapas, pero si en la segunda etapa deciden comprar una vivienda ¿porqué no disponer de parte del capital ahorrado para adquirirla ?, y esto nos conduce a estudiar el caso en que durante la segunda etapa se produzcan reintegros, sin que en ningún momento el saldo actual del plan sea negativo.

En el cálculo del capital final de un ahorro en régimen financiero de interés compuesto, observamos que la fórmula final obtenida es del tipo exponencial, pero dada la particularidad de la fórmula ($F1S$) que nosotros aplicamos para el cálculo del valor final, deducimos la función en que tienen que variar las imposiciones del ahorro, para que el valor final acumulado sea una función polinómica de segundo grado y no una exponencial.

También realizamos un plan de ahorro de prima única, como si se tratase de una herencia o la venta de una propiedad cuya cuantía la ingresamos en el banco, para luego reintegrarla mediante cuantías polinómicas hasta su cancelación.

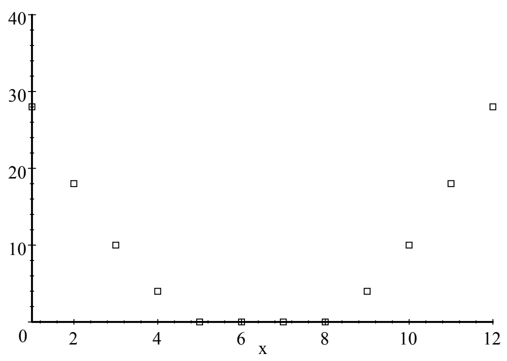
Por último consideramos un plan de ahorro, en el que primero realizamos imposiciones, para luego efectuar los reintegros y poder disfrutar del capital ahorrado, como si se tratase de un plan de jubilación, también con cuantías variables según una función polinómica.

5.2 Plan de ahorro con carencia

Consideremos un plan de ahorro adaptado a una pareja joven a un término de n años y lo distribuimos en tres etapas de la misma duración $\frac{n}{3}$, la primera con aportaciones decrecientes, luego la segunda etapa que suele ser la de más gastos por lo que será de carencia, para luego en la tercera etapa continuar con las aportaciones que serán crecientes.

Trataremos las aportaciones prepagables en forma polinómica de segundo grado y simétrica, siendo la última aportación de la primera etapa decreciente la correspondiente al periodo $\frac{n}{3}$, la segunda etapa que es de carencia empezará en el periodo $\frac{n+3}{3}$ y concluirá en el $\frac{2n}{3}$, la tercera etapa creciente comenzará en el periodo $\frac{2n+3}{3}$ y concluirá en el n[1].

[1] Si por ejemplo tenemos un plan de 12 periodos, tendrá la etapa de $x = 5$ hasta $x = 8$ de carencia que gráficamente vendría representado por:
$\alpha_x = x^2 - 13x + 40$



La expresión general de las cuantías la obtenemos haciendo que el polinomio de segundo grado se anule en $\dfrac{n+3}{3}$,y en $\dfrac{2n}{3}$:

$$\alpha_x = A\left[x - \frac{n+3}{3}\right]\left[x - \frac{2n}{3}\right] = A\left[x^2 - (n+1)x + \frac{2n^2+6n}{9}\right]$$

Dado que esta función no tiene implementado el periodo de carencia denominaremos:

C_a al montante al finalizar los n periodos con todas las aportaciones, tanto positivas como negativas.

C_b al montante al finalizar los n periodos pero considerando únicamente las aportaciones de la primera etapa.

C_c al montante al finalizar los n periodos pero considerando únicamente las aportaciones de las dos primeras etapas.

Por lo que, si denominamos C_n al montante obtenido al finalizar los n periodos con todas las aportaciones (siendo las de la segunda etapa nulas ya que es de carencia), tendremos:

$$C_n = C_a + C_b - C_c$$

Para calcular C_a tenemos:

$$C_a = \sum_{x=1}^{n} \alpha_x k^{n+1-x} = k^{n+1} \sum_{x=1}^{n} \frac{\alpha_x}{k^x}$$

Aplicamos $(F1S)$.

Para $a = 1$, $b = -(n+1)$, $c = \dfrac{2n^2+6n}{9}$ se obtiene:

$$C_a = Ak^{n+1}\left[-\tfrac{k+k^2}{(1-k)^3} - \tfrac{k(n+1)}{(1-k)^2} - \tfrac{2n(n+3)}{9(1-k)} + \frac{\tfrac{2n^2-3n}{9} - \tfrac{kn}{1-k} + \tfrac{2k}{(1-k)^2}}{(1-k)k^n}\right]$$

Ya que la constante E de la fórmula $(F1S)$ será la misma para las tres expresiones que tenemos que calcular, por comodidad de expresión y para simplificar la denominaremos E_1 , siendo[2]:

[2] Donde,
$$E_1 = -\frac{k+k^2}{(1-k)^3} - \frac{k(n+1)}{(1-k)^2} - \frac{2n(n+3)}{9(1-k)}$$

$$C_a = Ak^{n+1}\left[E_1 + \frac{\dfrac{2n^2-3n}{9} - \dfrac{kn}{1-k} + \dfrac{2k}{(1-k)^2}}{(1-k)k^n}\right]$$

Para calcular C_b tenemos:

$$C_b = \sum_{x=1}^{\frac{n}{3}} \alpha_x k^{n+1-x} = k^{n+1}\sum_{x=1}^{\frac{n}{3}} \frac{\alpha_x}{k^x}$$

Aplicamos $(F1S)$.

Para $a = 1$, $b = -(n+1)$, $c = \dfrac{2n(n+3)}{9}$ se obtiene:

$$C_b = Ak^{n+1}\left[E_1 + \frac{\dfrac{n}{3} + \dfrac{2k}{(1-k)}}{(1-k)^2 k^{\frac{n}{3}}}\right]$$

Para calcular C_c tenemos:

$$C_c = \sum_{x=1}^{\frac{2n}{3}} \alpha_x k^{n+1-x} = k^{n+1}\sum_{x=1}^{\frac{2n}{3}} \frac{\alpha_x}{k^x}$$

Aplicamos $(F1S)$.

Para $a = 1$, $b = -(n+1)$, $c = \dfrac{2n(n+3)}{9}$ se obtiene:

$$C_c = Ak^{n+1}\left[E_1 + \frac{-\dfrac{nk}{3} + \dfrac{2k}{(1-k)}}{(1-k)^2 k^{\frac{2n}{3}}}\right]$$

Siendo:

$$\alpha_x = \begin{cases} A\left[x^2 - (n+1)x + \frac{2(n+1)^2}{9}\right] & \rightarrow \; x \in \left[1, \frac{n}{3}\right[\cup \left]\frac{2n+3}{3}, n\right] \\ 0 & \rightarrow \; x \in \left[\frac{n+3}{3}, \frac{2n}{3}\right] \end{cases}$$

Con el valor total[3]:

$$C_n = Ak^{n+1}\left[E_1 + \frac{\frac{2n^2-3n}{9} - \frac{nk}{1-k} + \frac{2k}{(1-k)^2}}{(1-k)k^n} + \frac{\frac{n}{3} + \frac{2k}{1-k}}{(1-k)^2 k^{\frac{n}{3}}} - \frac{-\frac{nk}{3} + \frac{2k}{1-k}}{(1-k)^2 k^{\frac{2n}{3}}}\right]$$

5.3 Plan de ahorro con reintegro

Supongamos ahora el mismo concepto de ahorro del plan anterior, pero la segunda etapa, que era de carencia, ahora la utilizaremos para hacer reintegros y, así, poder afrontar los gastos en la fase más difícil pero siempre teniendo en cuenta que nuestro saldo sea positivo.

5.3.1 En tres etapas iguales

Consideraremos que n sea múltiplo de tres[4].

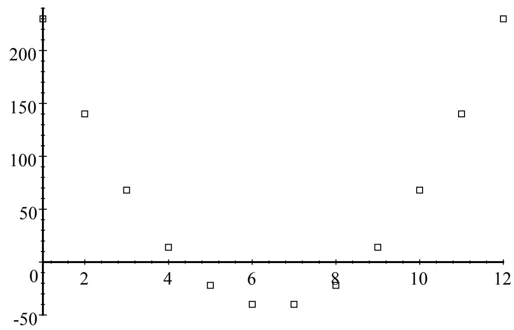
Siendo la misma expresión de las cuantías:

$$\alpha_x = A\left[x^2 - (n+1)x + \frac{2n^2+6n}{9}\right]$$

El montante total C_n coincide con el calculado en el apartado anterior y que hemos denominado C_a por lo que:

[3] Podemos ver una aplicación numérica en el ejercicio 1 del Anexo de este capítulo.

[4] Con lo que una posible representación gráfica para: $A = 9$, $n = 12$ sería:
$\alpha_x = 9x^2 - 117x + 338$



$$C_n = Ak^{n+1}\left[-\frac{k+k^2}{(1-k)^3} - \frac{k(n+1)}{(1-k)^2} - \frac{2n(n+3)}{9(1-k)} + \frac{\frac{2n^2-3n}{9} - \frac{kn}{1-k} + \frac{2k}{(1-k)^2}}{(1-k)k^n}\right]$$

Para que el saldo sea siempre positivo, es necesario que lo sea después del último reintegro, o sea en el reintegro $\frac{2n}{3}$, y llamemos C_p a ese montante:

$$C_p = \sum_{x=1}^{\frac{2n}{3}} \alpha_x k^{\frac{2n}{3}-x} = k^{\frac{2n}{3}} \sum_{x=1}^{\frac{2n}{3}} \frac{\alpha_x}{k^x}$$

Aplicamos $(F1S)$.

Para $a = 1$, $b = -n-1$, $c = \dfrac{2n(n+3)}{9}$, $n \to \dfrac{2n}{3}$ se obtiene:

$$C_p = Ak^{n+1}\left[-\frac{k+k^2}{(1-k)^3} - \frac{k(n+1)}{(1-k)^2} - \frac{2n(n+3)}{9(1-k)} + \frac{-\frac{kn}{3} + \frac{2k}{1-k}}{(1-k)^2 k^{\frac{2n}{3}}}\right] \geq 0$$

Para $C_p \geq 0$ tendremos:

$$-\frac{k+k^2}{(1-k)^3} - \frac{k(n+1)}{(1-k)^2} - \frac{2n(n+3)}{9(1-k)} \geq \frac{\frac{kn}{3} + \frac{2k}{k-1}}{(1-k)^2 k^{\frac{2n}{3}}}$$

Que podemos expresar[5]:

$$2n^2(k-1)^2 - 3n(k-1)(k+2) + 18k \geq \frac{3nk(k-1) + 18k}{k^{\frac{2n}{3}}}$$

5.3.2 En tres etapas desiguales

Partimos de la expresión de las imposiciones determinada anteriormente en la que:

$$\alpha_1 = \alpha_n = A \ , \ \alpha_{min} = A - B$$

Con,

[5] Si multiplicamos ambos términos por $9(k-1)^3 > 0$ y simplificamos.

La igualdad se cumple para $k = 1$, y para $n = \dfrac{3}{2}$ que puede servir de base para un posterior estudio.

Podemos ver una aplicación numérica en el ejercicio 2 del Anexo de este capítulo.

$$\alpha_x = A + \frac{4B}{(n-1)^2}\left[x^2 - (n+1)x + n\right]$$

Veamos la relación que debe existir entre A y B, siendo:
$\alpha_x = 0$, en $x = \dfrac{n+1}{3}$ y en $x = \dfrac{2n+2}{3}$.
Para[6], $x = \dfrac{n+1}{3}$ tenemos:

$$\alpha_x = 0 \rightarrow \frac{4B}{(n-1)^2} = \frac{9A}{2n^2 - 5n + 2}$$

Con,

$$\alpha_x = A + \frac{9A}{2n^2 - 5n + 2}\left[x^2 - (n+1)x + n\right]$$

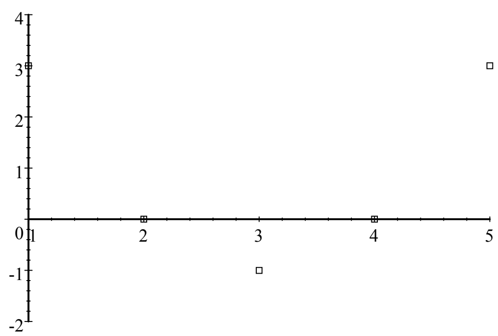
Siendo[7]:

$$\alpha_{\min} = A - B = -\frac{A(n+1)^2}{4(2n^2 - 5n + 2)}$$

Veamos la condición para que el proceso sea viable, o sea que en ningún momento tengamos un capital deudor:

[6] Por tratarse de una función polinómica simétrica en $x = \dfrac{n+1}{2}$, basta considerar sólo uno de los dos puntos.

[7] Una representación gráfica para: $A = 3$, $n = 5$ será:
$\alpha_x = x^2 - 6x + 8$



Al terminar la segunda fase deberá ser $C_2 \geq 0$.

$$C_2 = \sum_{x=1}^{\frac{2n-1}{3}} \alpha_x k^{\frac{2n+2}{3}-x} \geq 0$$

Aplicando $(F1S)$ y simplificando, obtenemos:

$$C_2 = \frac{Ak^{\frac{2n+2}{3}}}{k-1} - \frac{9Ak^{\frac{2n+2}{3}}\left[nk - 2k - n + \frac{2+4k+nk-n}{3k^{\frac{2n-1}{3}}}\right]}{(2n^2-5n+2)(k-1)^3} \geq 0$$

Operando,

$$\frac{2+4k+nk-n}{3k^{\frac{2n-1}{3}}} \leq \frac{(2n^2-5n+2)(k-1)^2}{9} - (nk-2k-n)$$

Obteniéndose la condición:

$$k^{\frac{2n-1}{3}} \geq \frac{3(2+4k+nk-n)}{(n-2)k(2nk-k-4n-7)+2(n+1)^2}$$

Cálculo del capital:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n} \alpha_x k^{n+1-x} = k^{n+1} \sum_{x=1}^{n} \frac{\alpha_x}{k^x}$$

$$C_n = k^{n+1}\left[\sum_{x=1}^{n} \frac{\alpha_x}{k^x} + \frac{9A}{2n^2-5n+2} \sum_{x=1}^{n} \frac{x^2-(n+1)x+n}{k^x}\right]$$

Aplicando $(F1S)$ y simplificando, obtenemos:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n - 1) - \frac{9Ak^2}{(2n^2-5n+2)I^3}\left[2 + nI + (nI-2k)k^{n-1}\right]$$

Con[8],

$$\alpha_x = A + \frac{9A}{2n^2-5n+2}\left[x^2-(n+1)x+n\right]$$

[8] Podemos ver una aplicación numérica en el ejercicio 3 del Anexo de este capítulo.

5.4 Plan de ahorro ¡no exponencial!

Para que el montante total C_n no sea exponencial simplificaremos el sumatorio como venimos haciendo anteriormente estudiando las condiciones para que se anule la constante E de la fórmula $(F1S)$.

$$E = -\frac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \frac{kb}{(1-k)^2} - \frac{c}{1-k} = 0$$

1. Tomemos en primer lugar la expresión obtenida anteriormente en la que $\alpha_1 = \alpha_n = A$ y $\alpha_{min} = A - B$, siendo:

$$\alpha_x = A + \frac{4B}{(n-1)^2}\left[+x^2 - (n+1)x + n\right] =$$

$$= \frac{4B}{(n-1)^2}\left[+x^2 - (n+1)x + n + \frac{A(n-1)^2}{4B}\right]$$

   Para $a = 1$, $b = -(n+1)$, $c = n + \dfrac{A(n-1)^2}{4B}$, se obtiene[9]:

$$\frac{A(n-1)^2}{4B}(1-k)^2 + (n-2)(1-k) + 2 = 0$$

   Al ser una ecuación de segundo grado en $1-k$ será:

$$1-k = \frac{-(n-2) \pm \sqrt{n^2 + 4 - 4n - \dfrac{2A(n-1)^2}{B}}}{\dfrac{2A(n-1)^2}{4B}}$$

   Observamos que, por ser A y B positivos el discriminante, será siempre menor que $(n-2)^2$ y, para simplificar, veamos el caso general en función del parámetro t.

   Discriminante $= \left(\dfrac{n-2}{t}\right)^2$, con, $t > 1$.

[9] Sustituyendo en:
$$E = -\frac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \frac{kb}{(1-k)^2} - \frac{c}{1-k} = 0$$

Oteniéndose:

$$\frac{2A(n-1)^2}{B} = \frac{(n-2)^2(t^2-1)}{t^2}$$

$$k-1 = \frac{4t}{(n-2)(t+1)}$$

$$n = \frac{2(tk+t+k-1)}{(k-1)(t+1)}$$

Si tenemos en cuenta que:

$$n-2 = \frac{4t}{(k-1)(t+1)}$$

Nos queda:

$$\frac{2A(n-1)^2}{B} = \frac{16(t-1)}{(k-1)^2(t+1)}$$

Siendo,

$$\frac{4B}{(n-1)^2} = \frac{A(k-1)^2(t+1)}{2(t-1)}$$

También tenemos:

$$n+1 = \frac{3kt+t+3k-3}{(k-1)(t+1)}$$

Sustituyendo en α_x y simplificando.

$$\alpha_x = \tfrac{A(k-1)}{2(t-1)}\left[(t+1)(k-1)x^2 - (3kt+t+3k-3)x + \tfrac{2tk^2+2k^2-4k}{k-1}\right]$$

Para calcular el capital total tenemos:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n} \alpha_x k^{n+1-x}$$

Aplicamos $(F1S)$.

$$C_n = \tfrac{-k^{n+1}AI}{k^n 2(t-1)I^3}\left[I^2\left((t+1)In^2 - (3kt+t+3I)n + \tfrac{2tk^2+2k^2-4k}{k-1}\right)+\right.$$

$$\left. +(k-k^2)(-2(t+1)In - (t+1)I + 3kt + t + 3I) + (t+1)I2k \ \right]$$

Para simplificar,[10] multiplicamos fuera del corchete por $-nI^2$ y dentro del corchete dividimos por $-nI^2$ y para facilitar el cálculo comenzaremos por el término de n^2 :

$$\frac{I^2(t+1)In^2}{-nI^2} = -(k-1)(t+1)n$$

Los términos de n serán:

$$\frac{-I^2(3kt+t+3I)n - 2(k-k^2)(t+1)In}{-nI^2} = kt + t + k - 3$$

y los términos que no contienen n se anulan[11].

Quedando al final:

$$C_n = \frac{Akn}{2(t-1)}\left[-(k-1)(t+1)n + kt + t + k - 3\right]$$

En resumen tenemos[12]:

$$C_n = \frac{Akn}{2(t-1)}\left[(k-1)(t+1)(1-n) + 2(t-1)\right]$$

[10] Merece la pena observar como la complejidad de la expresión inicial: $C_n = \tfrac{-k^{n+1}AI}{k^n 2(t-1)I^3}\left[I^2\left((t+1)In^2 - (3kt+t+3I)n + \tfrac{2tk^2+2k^2-4k}{k-1}\right)+\right.$
$\left. +(k-k^2)(-2(t+1)In - (t+1)I + 3kt + t + 3I) + (t+1)I2k \ \right]$
Se convierte en una expresión sencilla:
$C_n = \dfrac{Akn}{2(t-1)}\left[-(k-1)(t+1)n + kt + t + k - 3\right]$

[11] $I^2\left(\frac{2tk^2+2k^2-4k}{k-1}\right) + (k-k^2)(-(t+1)I + 3kt + t + 3I) + (t+1)I2k =$
$= I\left[2tk^2 + 2k^2 - 4k - k(2kt + 2t + 2k - 2) + (t+1)2k\right] = 0$

[12] La fórmula general sólo es viable para $C_n \geq 0$ o sea para:
$n \leq \dfrac{kt+t+k-3}{(k+1)(t+1)}$ *ó* $t \leq \dfrac{4}{n+k+1-nk} - 1$

Con[13],

$\alpha_x = \frac{A(k-1)}{2(t-1)}\left[(t+1)(k-1)x^2 - (3kt+t+3k-3)x + \frac{2tk^2+2k^2-4k}{k-1}\right]$

Esta expresión queda particularmente sencilla para $t = 3$.

$$C_n = Akn\left[-(k-1)n + k\right]$$

Con,

$$\alpha_x = A(k-1)\left[(k-1)x^2 - 3kx + \frac{2k^2-k}{k-1}\right]$$

Esta situación puede resultar interesante, para realizar un plan de ahorro en el cual vamos haciendo imposiciones para obtener un capital, y una vez llegado el momento, reintegrar cantidades periódicamente hasta agotar el montante que habíamos acumulado, y tanto los ingresos como los reintegros los realizamos según una función polinómica[14].

2. Sea la expresión obtenida anteriormente con $\alpha_1 = A$, $\alpha_n = A - B$ y la única condición que tendremos es que $C_n > 0$ para no estar en descubierto.

$$\alpha_x = A - \frac{B}{(n-1)^2}\left[-x^2 + 2nx + 1 - 2n\right]$$

Que puede expresarse:

$$\alpha_x = \frac{B}{(n-1)^2}\left[x^2 - 2nx - 1 + 2n + \frac{(n-1)^2 A}{B}\right]$$

Para $a = 1$, $b = -2n$,y $c = 2n - 1 + \dfrac{A(n-1)^2}{B}$ obtenemos[15]:

$$-k - k^2 - 2nk(1-k) - (2n - 1 + \frac{A(n-1)^2}{B})(1-k)^2 = 0$$

[13] Observemos que cumple: $\alpha_1 = A$.

[14] Podemos ver dos aplicaciones numéricas en los ejercicios 4 y 5 del Anexo de este capítulo.

[15] Sustituyendo en:

$E = -\frac{(k+k^2)a}{(1-k)^3} + \frac{kb}{(1-k)^2} - \frac{c}{1-k} = 0$

Simplificando obtenemos un polinomio en $(1-k)$.

$$\frac{A}{B}(n-1)^2(1-k)^2+(2n-3)(1-k)+2=0$$

De solución:

$$1-k=\frac{3-2n\pm\sqrt{4n^2+9-12n-\dfrac{8A(n-1)^2}{B}}}{\dfrac{2A(n-1)^2}{B}}$$

Podemos hacer[16]:

$$\frac{8A(n-1)^2}{B}=4n^2-12n$$

Con lo que obtenemos:

$$1-k=-\frac{2}{n}\to k=\frac{n+2}{n}\ ,\ n=\frac{2}{k-1}$$

Sustituyendo el valor de n en la α_x se obtiene:

$$\alpha_x=\frac{A(k-1)}{5-3k}\left[(k-1)x^2-4x+\frac{k(3-k)}{k-1}\right]$$

Siendo:

$$C_n=\sum_{x=1}^{n}\alpha_x k^{n+1-x}$$

Aplicando $(F1S)$.

Para $a=k-1\ ,\ b=-4\ ,\ c=\dfrac{k(3-k)}{k-1}$ se obtiene[17]:

$$C_n=\frac{Akn}{5-3k}\left[2(2-k)-(k-1)n\right]$$

Las imposiciones serán para $x\leq\dfrac{2-\sqrt{4+k^2-3k}}{k-1}$

Los reintegros serán para $\dfrac{2-\sqrt{4+k^2-3k}}{k-1}\leq x\leq\dfrac{2(2-k)}{k-1}$

[16] También pueden probarse otras soluciones.

[17] Ya que se anula la constante.

Válida para $C_n\geq 0\to n\leq\dfrac{2(2-k)}{k-1}$

Podemos ver una aplicación numérica en el ejercicio 6 del Anexo de este capítulo.

5.5 Plan de ahorro de prima única

Consideremos un plan de ahorro de prima única C_0, capitalizada al principio del primer período, y los reintegros del plan los queremos realizar según una función polinómica de segundo grado de concavidad negativa y creciente, hasta la cancelación total del capital.

El capital inicial deberá ser:

$$C_0 = \sum_{x=1}^{n} \frac{\alpha_x}{k^x}$$

Para su cálculo utilizaremos la expresión más sencilla correspondiente a[18]:

$$\alpha_x = A\left[-(k-1)x^2 + 2kx - k\right]$$

Creciente hasta $x = \dfrac{k}{k-1}$ siendo:

$$C_n = \sum_{x=1}^{n} \frac{\alpha_x}{k^{n+1-x}} = Akn^2$$

Donde[19],

$$C_0 = \sum_{x=1}^{n} \frac{\alpha_x}{k^x} = \frac{Akn^2}{k^{n+1}} = \frac{An^2}{k^n}$$

5.6 Plan de ahorro, n imposiciones y m reintegros

Deseamos realizar un plan de ahorro con n periodos impositivos prepagables, para que luego podamos disponer del montante total en m reintegros, que realizaremos al finalizar cada periodo. Todas las cuantías las realizaremos según una función polinómica creciente de concavidad negativa, por lo que considerando las imposiciones de forma que el montante total nos quede en su expresión más sencilla como vimos anteriormente, tenemos:

---

[18] Obtenida anteriormente en la sección Simplificación del sumatorio total del capítulo cuarto.

[19] Podemos ver una aplicación numérica en el ejercicio 7 del Anexo de este capítulo.

$$\alpha_x = A\left[-(k-1)x^2 + 2kx - k\right] \rightarrow C_n = Akn^2$$

Análogamente los reintegros serán:

$$\beta_x = A\left[-(k-1)x^2 + 2kx - k\right] \rightarrow C_m = \frac{Bm^2}{k^m}$$

Como ambos montantes deben ser iguales[20]:

$$Akn^2 = \frac{Bm^2}{k^m} \rightarrow Ak^{m+1}n^2 = Bm^2$$

5.7 Anexo

- **Ejercicio** 1.- Deseamos realizar un plan de ahorro con 42 imposiciones en tres etapas de la misma duración con aportaciones polinómicas prepagables y simétricas, siendo la segunda etapa de carencia. Si el interés es del 5%, y la primera aportación es de 378 € , determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$), y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Empezaremos calculando el valor de la constante A de la fórmula:

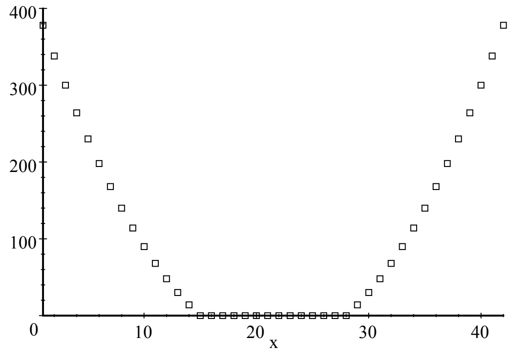
$$\alpha_x = A\left[x^2 - (n+1)x + \frac{2n^2 + 6n}{9}\right]$$

Para $x = 1$, $\alpha_1 = 378 \rightarrow A = 1$

Siendo la representación gráfica de las cuantías:

$\alpha_x = x^2 - 43x + 420$

[20]Podemos ver una aplicación numérica en el ejercicio 8 del Anexo de este capítulo.



El montante final lo obtenemos aplicando la fórmula:

$$C_n = Ak^{n+1}\left[E_1 + \frac{\frac{2n^2-3n}{9} - \frac{nk}{1-k} + \frac{2k}{(1-k)^2}}{(1-k)k^n} + \frac{\frac{n}{3} + \frac{2k}{1-k}}{(1-k)^2 k^{\frac{n}{3}}} - \frac{-\frac{nk}{3} + \frac{2k}{1-k}}{(1-k)^2 k^{\frac{2n}{3}}}\right]$$

Para $A = 1$, $k = 1'05$, $n = 42$ obtenemos:

$$C_n = 1'05^{43} \cdot 2277'498529 = 18560'85445 \text{ €}$$

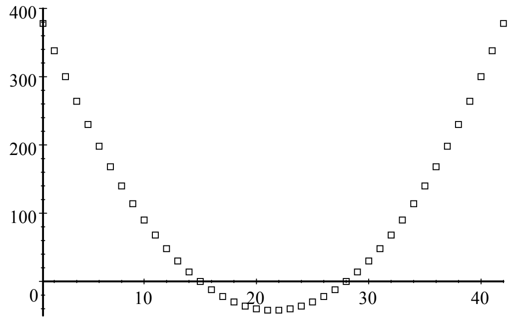
Teniendo la siguiente tabla:

P.	α_x	*C.I.*	*C.F.*	*P.*	α_x	*C.I.*	*C.F.*
1	378	378	396′900	22	0	5567′470	5845′844
2	338	734′900	771′645	23	0	5845′844	6138′136
3	300	1071′645	1125′227	24	0	6138′136	6445′043
4	264	1389′227	1458′689	25	0	6445′043	6767′295
5	230	1688′689	1773′123	26	0	6767′295	7105′659
6	198	1971′123	2069′679	27	0	7105′659	7460′942
7	168	2237′679	2349′563	28	0	7460′942	7833′989
8	140	2489′563	2614′041	29	14	7847′989	8240′389
9	114	2728′041	2864′443	30	30	8270′389	88683′908
10	90	2954′443	3102′166	31	48	8731′908	9168′504
11	68	3170′166	3328′674	32	68	9236′504	9698′329
12	48	3376′674	3545′508	33	90	9788′329	10277′745
13	30	3575′508	3754′283	34	114	10391′745	10911′333
14	14	3768′283	3956′697	35	140	11051′333	11603′899
15	0	3956′697	4154′532	36	168	11771′899	12360′494
16	0	4154′532	4362′258	37	198	12558′494	13186′419
17	0	4362′258	4580′371	38	230	13416′419	14087′240
18	0	4580′371	4809′390	39	264	14351′240	15068′802
19	0	4809′390	5049′859	40	300	15368′802	16137′242
20	0	5049′859	5302′352	41	338	16475′242	17299′004
21	0	5302′352	5567′470	42	378	17677′004	18560′854

- **Ejercicio** 2.- Deseamos realizar un plan de ahorro con 42 imposiciones en tres etapas de la misma duración con aportaciones polinómicas prepagables y simétricas, siendo la segunda etapa de reintegros. Si el interés es del 5%, y la primera aportación es de 378 € , determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$), y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Por ser el mismo caso anterior tenemos:

$\alpha_x = x^2 - 43x + 420$



Veamos primero si es viable y cumple que:

$$C_p \geq 0 \rightarrow -\frac{k+k^2}{(1-k)^3} - \frac{k(n+1)}{(1-k)^2} - \frac{2n(n+3)}{9(1-k)} \geq \frac{\frac{kn}{3} + \frac{2k}{k-1}}{(1-k)^2 k^{\frac{2n}{3}}}$$

Para $k = 1'05$, $n = 42$, $\rightarrow 7.560 \geq 5.785'524$ cumple.

El montante final lo obtenemos aplicando:

$$C_n = Ak^{n+1}\left[-\frac{k+k^2}{(1-k)^3} - \frac{k(n+1)}{(1-k)^2} - \frac{2n(n+3)}{9(1-k)} + \frac{\frac{2n^2-3n}{9} - \frac{kn}{1-k} + \frac{2k}{(1-k)^2}}{(1-k)k^n}\right]$$

Para $A = 1$, $k = 1'05$, $n = 42$ obtenemos:

$$C_n = 1'05^{43}(7.560 - 5.411'264) = 17.511'483 \text{ €}$$

Teniendo la siguiente tabla:

$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	378	378	$396'900$	22	-42	$5314'971$	$5580'720$
2	338	$734'900$	$771'645$	23	-40	$5540'720$	$5817'756$
3	300	$1071'645$	$1125'227$	24	-36	$5781'756$	$6070'843$
4	264	$1389'227$	$1458'689$	25	-30	$6040'843$	$6342'886$
5	230	$1688'689$	$1773'123$	26	-22	$6320'886$	$6636'930$
6	198	$1971'123$	$2069'679$	27	-12	$6624'930$	$6956'176$
7	168	$2237'679$	$2349'563$	28	0	$6956'176$	$7303'986$
8	140	$2489'563$	$2614'041$	29	14	$7317'986$	$7683'885$
9	114	$2728'041$	$2864'443$	30	30	$7713'885$	$8099'579$
10	90	$2954'443$	$3102'166$	31	48	$8147'579$	$8554'958$
11	68	$3170'166$	$3328'674$	32	68	$8622'958$	$9054'106$
12	48	$3376'674$	$3545'508$	33	90	$9144'106$	$9601'311$
13	30	$3575'508$	$3754'283$	34	114	$9715'311$	$10201'077$
14	14	$3768'283$	$3956'697$	35	140	$10341'077$	$10858'131$
15	0	$3956'697$	$4154'532$	36	168	$11026'131$	$11577'437$
16	-12	$4142'532$	$4349'658$	37	198	$11775'437$	$12364'209$
17	-22	$4327'658$	$4544'041$	38	230	$12594'209$	$13223'920$
18	-30	$4514'041$	$4739'743$	39	264	$13487'920$	$14162'316$
19	-36	$4703'743$	$4938'931$	40	300	$14462'316$	$15185'431$
20	-40	$4898'031$	$5143'877$	41	338	$15523'431$	$16299'603$
21	-42	$5101'877$	$5356'071$	42	378	$16677'603$	$17511'483$

- **Ejercicio** 3.- Deseamos hacer un plan de ahorro con 11 imposiciones anticipadas, con un interés del 5% y, con aportaciones polinómicas simétricas de convexidad positiva en tres etapas, de forma que la segunda sea de reintegros, siendo el valor de la primera imposición de 420 €. Determinar las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$), y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Veamos si cumple la condición:

$$k^{\frac{2n-1}{3}} \geq \frac{3(2+4k+nk-n)}{(n-2)k(2nk-k-4n-7)+2(n+1)^2}$$

Calculemos ambos términos por separado.

$$k^{\frac{2n-1}{3}} = 1'05^7 = 1'407$$

$$\frac{3(2+4k+nk-n)}{(n-2)k(2nk-k-4n-7)+2(n+1)^2} = 1'404$$

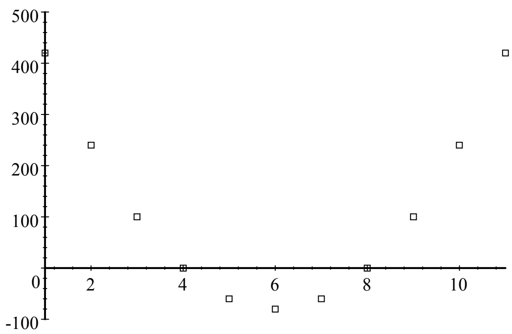
Por ser $1'407 \geq 1'404$ cumple.

Las imposiciones y los reintegros vendrán dadas por:

$$\alpha_x = A + \frac{9A}{2n^2-5n+2}\left[x^2-(n+1)x+n\right]$$

Con, $\alpha_1 = A = 420$, $n = 11$ teniendo la gráfica:

$\alpha_x = 20x^2 - 240x + 640$



El capital total lo calcularemos mediante:

$$C_n = \frac{Ak}{I}(k^n-1) - \frac{9Ak^2}{(2n^2-5n+2)I^3}\left[2+nI+(nI-2k)k^{n-1}\right]$$

Al sustituir se obtiene:

$$C_n = 6.265'193 - 4.447'631 = 1817'562 \text{ €}$$

y tendremos la siguiente tabla:

$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	420	420	441	7	-60	$780'548$	$819'576$
2	240	681	$715'050$	8	0	$819'576$	$860'555$
3	100	$815'05$	$855'803$	9	100	$960'555$	$1008'582$
4	0	$855'803$	$898'593$	10	240	$1248'582$	$1311'011$
5	-60	$838'593$	$880'522$	11	420	$1731'011$	$1817'562$
6	-80	$800'522$	$840'548$				

- **Ejercicio** 4.- Disponemos de un interés del 5%, y deseamos realizar un plan de 21 imposiciones, con una inicial de 1.200 € y que al finalizar el plan, el montante total sea nulo. Determinar las cuantías de las imposiciones y de los reintegros, el número de las mismas y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

1. Para que sea $C_n = 0 \rightarrow t = \dfrac{4}{n+k+1-kn} - 1 = 3$

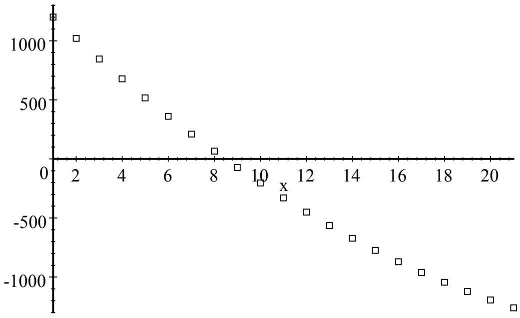
   Siendo, $\alpha_1 = A = 1.200$.

   Para calcular las imposiciones y los reintegros aplicaremos:

   $$\alpha_x = A(k-1)\left[(k-1)x^2 - 3kx + \frac{2k^2-k}{k-1}\right]$$

   Sustituyendo obtenemos la gráfica:

   $\alpha_x = 3x^2 - 189x + 1386$



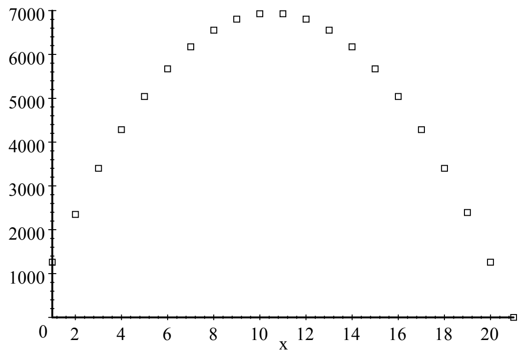
   Si hacemos: $\alpha_x = 3x^2 - 189x + 1386 = 0 \rightarrow x = 8'47$

Tendremos,

$$\begin{cases} \alpha_x \in \{1,8\} \ \textit{imposiciones} \\ \alpha_x \in \{9,21\} \ \textit{reintegros} \end{cases}$$

La gráfica correspondiente a los capitales finales de cada período será[21]:

$$C.F. = 1.200 \cdot 1'05 \cdot x\,[-0'05 \cdot x + 1'05] = -63x^2 + 1.323x$$



Teniendo la siguiente tabla[22]:

$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$	$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	1200	1200	1260	12	-450	6480	6804
2	1020	2280	2394	13	-564	6240	6552
3	846	3240	3402	14	-672	5880	6174
4	678	4080	4284	15	-774	5400	5670
5	516	4800	5040	16	-870	4700	5040
6	360	5400	5670	17	-960	4080	4284
7	210	5880	6174	18	-1044	3240	3402
8	66	6240	6552	19	-1122	2280	2394
9	-72	6480	6804	20	-1194	1200	1260
10	-204	6600	6930	21	-1260	0	0
11	-330	6600	6930				

- **Ejercicio** 5.- Realicemos el mismo plan anterior pero ahora con 25 imposiciones.

[21] En la gráfica podemos observar que los montantes al finalizar cada periodo están según una función polinómica de segundo grado y no exponencial.

[22] Podemos observar que todas las cantidades son números enteros.

1. Comenzaremos calculando el valor de t:

   Para que sea $C_n = 0 \to t = \dfrac{4}{n+k+1-kn} - 1 = 4$

   Para calcular las imposiciones y los reintegros aplicaremos:

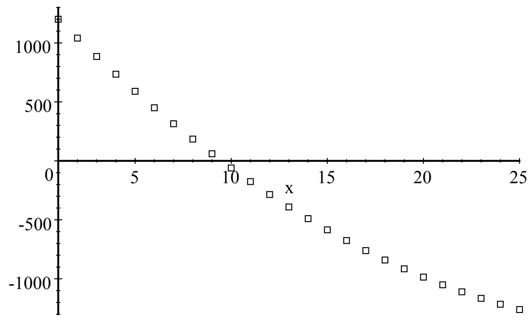
   $$\alpha_x = \frac{A(k-1)}{2(t-1)}\left[(t+1)(k-1)x^2 - (3kt+t+3k-3)x + \frac{2tk^2+2k^2-4k}{k-1}\right]$$

   Para $t = 4$ nos queda:

   $$\alpha_x = \frac{A(k-1)}{6}\left[5(k-1)x^2 - (15k+1)x + \frac{10k^2-k}{k-1}\right]$$

   Sustituyendo obtenemos la gráfica:

   $\alpha_x = 2'5x^2 - 167'5x + 1365$



   Si hacemos: $\alpha_x = 2'5x^2 - 167'5x + 1365 = 0 \to x = 9'495$

   Tendremos,

   $$\begin{cases} \alpha_x \in \{1,9\} \ \textit{imposiciones} \\ \alpha_x \in \{10,25\} \ \textit{reintegros} \end{cases}$$

   Teniendo la siguiente tabla[23]:

[23] Podemos observar que todas las cantidades son números enteros.

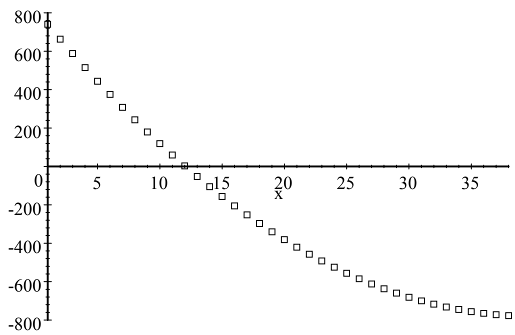
$P.$	α	$C.I.$	$C.F.$	$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	1200	1200	1260	14	-490	7700	8085
2	1040	2300	2415	15	-585	7500	7875
3	885	3300	3465	16	-675	7200	7560
4	735	4200	4410	17	-760	6800	7140
5	590	5000	5250	18	-840	6300	6615
6	450	5700	5985	19	-915	5700	5985
7	315	6300	6615	20	-985	5000	5250
8	185	6800	7140	21	-1050	4200	4410
9	60	7200	7560	22	-1110	3300	3465
10	-60	7500	7875	23	-1165	2300	2415
11	-175	7700	8085	24	-1215	1200	1260
12	-285	7800	8190	25	-1260	0	0
13	-390	7800	8190				

- **Ejercicio** 6.- Disponemos de un interés del 5%, y deseamos realizar un plan con una imposición inicial de 740 € y que al finalizar el plan el montante total sea nulo. Determinar la duración del plan, las cuantías de las imposiciones y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$), y al finalizar el periodo ($C.F.$).

1. Comencemos por calcular el número de períodos para $C_n = 0$.

   $n = \dfrac{2(2-k)}{k-1} = 38$, para $A = 740$, $k = 1.05$, tenemos:

   $\alpha_x = x^2 - 80x + 819$

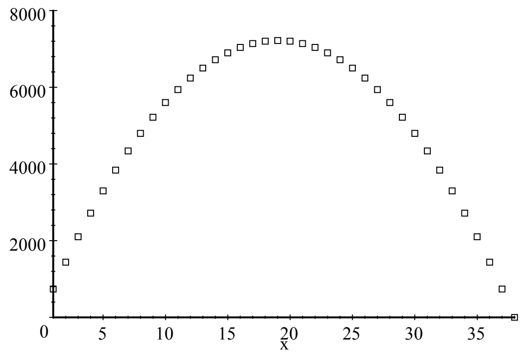
   Si hacemos: $\alpha_x = x^2 - 80x + 819 = 0 \rightarrow x = 12'05$

Tenemos,

$$\begin{cases} \alpha_x \in \{1, 12\} \ imposiciones \\ \alpha_x \in \{13, 38\} \ reintegros \end{cases}$$

La gráfica correspondiente a los capitales finales de cada período será[24]:

$$C.F. = \frac{740 \cdot 1'05 \cdot x}{5 - 3 \cdot 1'05} \left[1'9 - 0'05 \cdot x\right] = -21x^2 + 798x$$



Teniendo la siguiente tabla[25]:

[24] En la gráfica podemos observar que los montantes al finalizar cada periodo están según una función polinómica de segundo grado y no exponencial.

[25] Podemos observar que todas las cantidades son números enteros.

Si queremos saber el valor del capital disponible al finalizar el período 12 sólo tenemos que aplicar la fórmula:

$C_n = \dfrac{Akn}{5 - 3k} \left[2(2 - k) - (k - 1)n\right] = -21x^2 + 798x = 6.552$€

$P.$	α	$C.I.$	$C.F.$	$P.$	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	740	740	777	20	-381	7200	7560
2	663	1440	1512	21	-420	7140	7497
3	588	2100	2205	22	-457	7040	7392
4	515	2720	2856	23	-492	6900	7245
5	444	3300	3465	24	-525	6720	7056
6	375	3840	4032	25	-556	6500	6825
7	308	4340	4557	26	-585	6240	6552
8	243	4800	5040	27	-612	5940	6237
9	180	5220	5481	28	-637	5600	5880
10	119	5600	5880	29	-660	5220	5481
11	60	5940	6237	30	-681	4800	5040
12	3	6240	6552	31	-700	4340	4557
13	-52	6500	6825	32	-717	3840	4032
14	-105	6720	7056	33	-732	3300	3465
15	-156	6900	7245	34	-745	2720	2856
16	-205	7040	7392	35	-756	2100	2205
17	-252	7140	7497	36	-765	1440	1512
18	-297	7200	7560	37	-772	740	777
19	-340	7220	7581	38	-777	0	0

- **Ejercicio** 7.- Deseamos saber la prima única C_0 que debemos aportar al principio del primer período, para que durante los 10 períodos que dura el plan y por vencido, podamos realizar reintegros crecientes según una función polinómica de segundo grado de concavidad negativa, y deseamos que el primer reintegro sea de 200 € , disponiendo de un interés del 5%. Determinar las cuantías de los reintegros y realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$), y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Comenzaremos calculando el valor de la prima única:

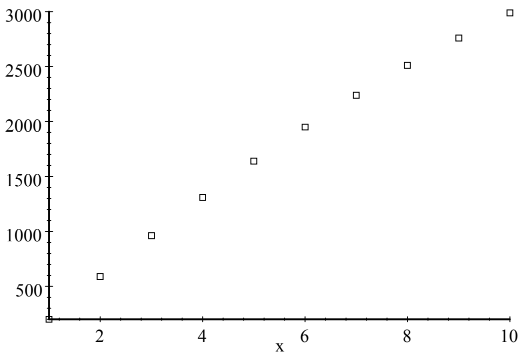
$$C_0 = \frac{An^2}{k^n} = \frac{200 \cdot 100}{1'05^{10}} = 12.278'265 \text{ €}$$

Los reintegros vendrán dados por:

$$\alpha_x = A\left[-(k-1)x^2 + 2kx - k\right]$$

Sustituyendo obtenemos la gráfica:

$\alpha_x = -10x^2 + 420x - 210$



Por ser $n = 10 < \dfrac{k}{k-1} = 21$ será posible.

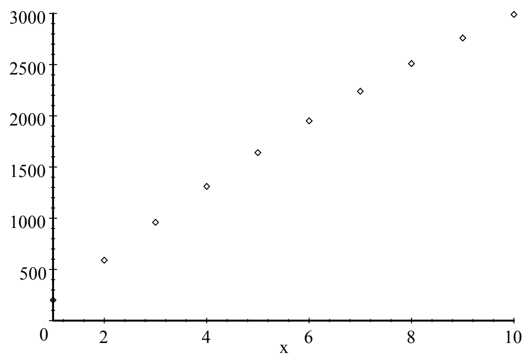
Teniendo la siguiente tabla:

$P.$	$C.I.$	$C.F.$	α_x	$P.$	$C.I.$	$C.F.$	α_x
1	$12278'265$	$12892'178$	-200	6	$10670'523$	$11204'049$	-1950
2	$12692'178$	$13326'787$	-590	7	$9254'049$	$9716'752$	-2240
3	$12736'787$	$13373'627$	-960	8	$7476'752$	$7850'590$	-2510
4	$12413'627$	$13034'308$	-1310	9	$5340'590$	$5607'619$	-2760
5	$11724'308$	$12310'523$	-1640	10	$2847'619$	2990	-2990

- **Ejercicio** 8.- Deseamos realizar un plan de ahorro con una duración de 22 periodos, de los cuales los doce primeros sean de ahorro, y los diez restantes de reintegros, si disponemos de un interés del 5% y el primer reintegro que realicemos debe ser de 200 € . Determinar las cuantías de las imposiciones y de los reintegros, realizar una tabla con las cuantías (α_x), el montante al comenzar el periodo ($C.I.$) y al finalizar el periodo ($C.F.$).

Para los reintegros tenemos $k = 1'05$, $B = 200$, $m = 10$ por lo que:

$\beta_x = -10x^2 + 420x - 210$



El montante total que debemos tener al comenzar el periodo del primer reintegro es:

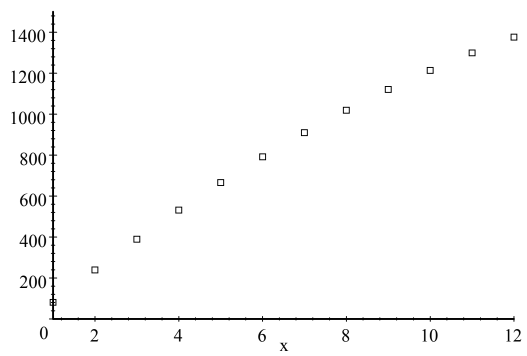
$$C_m = \frac{Bm^2}{k^m} = 12.278'26507 \text{ €}$$

Para determinar las imposiciones aplicamos:

$$Ak^{m+1}n^2 = Bm^2 \rightarrow A = 81'20545$$

Por lo que las cuantías de las imposiciones serán:

$\alpha_x = -4'1x^2 + 170'5x - 85'3$



Teniendo la siguiente tabla de imposiciones:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	$81'205$	$81'205$	$85'265$	7	$909'501$	$3979'067$	$4178'020$
2	$239'556$	$324'821$	$341'062$	8	$1019'128$	$5197'148$	$5457'006$
3	$389'786$	$730'849$	$767'391$	9	$1120'635$	$6577'642$	$6906'524$
4	$531'895$	$1299'136$	$2131'643$	10	$1214'021$	$8120'545$	$8526'572$
5	$665'884$	$2030'136$	$2131'643$	11	$1299'287$	$9825'860$	$10317'153$
6	$791'753$	$2923'396$	$3069'565$	12	$1376'432$	$11693'585$	$12278'265$

La tabla de los reintegros es como en el caso anterior[26]:

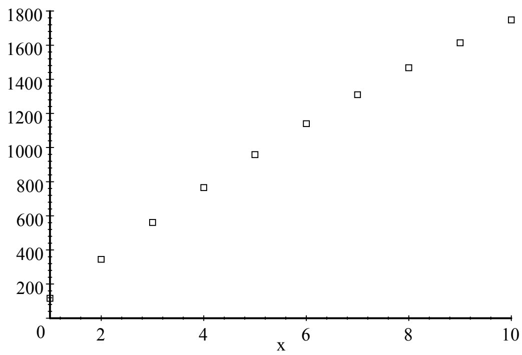
[26] La tabla de reintegros es:

$P.$	$C.I.$	$C.F.$	β_x	$P.$	$C.I.$	$C.F.$	β_x
1	$12278'265$	$12892'178$	-200	6	$10670'523$	$11204'049$	-1950
2	$12692'178$	$13326'787$	-590	7	$9254'049$	$9716'752$	-2240
3	$12736'787$	$13373'627$	-960	8	$7476'752$	$7850'590$	-2510
4	$12413'627$	$13034'308$	-1310	9	$5340'590$	$5607'619$	-2760
5	$11724'308$	$12310'523$	-1640	10	$2847'619$	2990	-2990

Si deseásemos que el plan solo durase 20 periodos, diez de ingresos y diez de reintegros. Tendríamos: $n = m = 10, B = 200, k = 1'05$

$$Ak^{m+1}n^2 = Bm^2 \rightarrow Ak^{n+1} = B \rightarrow A = 116'935858$$

Las cuantías de las imposiciones serán:
$\alpha_x = -5'9x^2 + 245'6x - 122'8$



Teniendo la siguiente tabla de imposiciones:

P	α_x	$C.I.$	$C.F.$	P	α_x	$C.I.$	$C.F.$
1	$116'936$	$116'936$	$122'782$	6	$1140'124$	$4209'690$	$4420'175$
2	$344'960$	$467'743$	$491'130$	7	$1309'681$	$5729'857$	$6016'349$
3	$561'292$	$1052'422$	$1105'043$	8	$1467'547$	$7483'894$	$7858'089$
4	$765'929$	$1870'973$	$1964'522$	9	$1613'714$	$9471'804$	$9945'394$
5	$958'874$	$2923'396$	$3069'566$	10	$1748'191$	$11693'585$	$12278'265$

Los reintegros no variarán respecto del caso anterior.

Capítulo 6

CAMPOS POR EXPLORAR Y CONCLUSIONES

6.1 Factor anti-diferencia

El método aplicado del factor anti-diferencia del producto y del cociente para resolver ecuaciones en diferencias, también nos permite definir ecuaciones en diferencias que podamos resolver; y al utilizar métodos distintos a los que se usan habitualmente, nos encontramos que sabiendo calcular un sumatorio, podemos resolver una ecuación en diferencias, teniendo de esta forma un conjunto de ecuaciones que puede ser interesante analizarlas.

Veamos un ejemplo:

Sea la ecuación en diferencias que queremos determinar:

$$\Delta y_x + f(x)y_x = q(x)$$

Planteamos el sumatorio[1]:

$$\sum_{t=1}^{x-1} p_t q(t) = \sum_{t=1}^{x-1} \frac{1}{t+1}(2t+2) = 2x - 2$$

Siendo:

[1] Como puede verse es de cálculo inmediato.

$$\begin{cases} p_x = \dfrac{1}{x+1} \ ; \ p_{x-1} = \dfrac{1}{x} \ ; \ p_0 = 1 \\ q(x) = 2x+2 \end{cases}$$

La solución de la ecuación y_x se obtiene de:

$$p_{x-1}y_x = p_0 y_1 + \sum_{t=1}^{x-1} p_t q(t)$$

Sustituyendo:

$$\frac{1}{x}y_x = y_1 + 2x - 2$$

Despejando:

$$y_x = xy_1 + 2x^2 - 2x$$

Para determinar $f(x)$ utilizamos la fórmula inicial, obteniendo[2]:

$$y_1 + 4x + f(x)(xy_1 + 2x^2 - 2x) = 2x + 2$$

Por lo que obtenemos:

$$f(x) = \frac{-1}{x}$$

Siendo la ecuación a resolver[3]:

$$\Delta y_x - \frac{1}{x}y_x = 2x + 2$$

[2] Siendo $\Delta y_x + f(x)y_x = q(x)$.

Con, $\Delta y_x = y_1 + 4x$.

[3] De solución: $y_x = xy_1 + 2x^2 - 2x$.

6.2 Cambio de variable

El cambio de variable que hemos utilizado es el que se aplica para resolver las ecuaciones de la forma:

$$y_{x+h(x)} + f(x)y_x = g(x)$$

También resulta interesante explorar otras ecuaciones más complejas, como por ejemplo:

$$y_{x+2h(x)} + f(x)y_{x+h(x)} + g(x)y_x = q(x)$$

Para ver que el camino tiene salida, realizamos un ejemplo sencillo el cual puede servir de ”tentación” para otros más completos que no hemos tenido por bien analizar ya que se distancia en exceso de los objetivos propuestos en esta tesis, pero que no descartamos poderlos investigar en el futuro.

Como ejemplo tomaremos una ecuación de coeficientes constantes en la cual la diferencia sea $h = 2$.

$$y_{x+4} - 5y_{x+2} + 6y_x = 4x - 14$$

Para obtener el cambio de variable hacemos:

$$y_x = x \left\{ \begin{array}{l} y_{x+2} = x + 2 = y_x + 2 \\ y_{x+4} = x + 4 = y_x + 4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y_{z+1} = y_z + 2 \\ y_{z+2} = y_z + 4 \end{array} \right. \rightarrow y_z = 2z + A$$

Como para el cambio $(x = y_z)$ tomamos la ecuación más sencilla $(A = 0)$ es:

$$x = 2z \ ; \ y_{x+2} = y_{z+1} \ ; \ y_{x+4} = y_{z+2}$$

Obteniéndose la ecuación:

$$y_{z+2} - 5y_{z+1} + 6y_z = 8z - 14$$

La solución de la homogénea es:

$$y_z = C_1 2^z + C_2 3^z$$

La de la completa es:

$$y_z = Az + B \rightarrow (A = 4, B = -1) \rightarrow y_z = 4z - 1$$

La solución general es:

$$y_z = C_1 2^z + C_2 3^z + 4z - 1$$

Deshaciendo el cambio:

$$y_x = C_1 2^{\frac{x}{2}} + C_2 3^{\frac{x}{2}} + 2x - 1$$

6.3 Productos notables

Si nos detenemos un momento para analizar los productos notables que se han expuesto en el cálculo de productorios nos encontramos con dos casos elementales:

$$\left(A^{2^t} + A^{-2^t} - 1\right)\left(A^{2^t} + A^{-2^t} + 1\right) = A^{2 \cdot 2^t} + A^{-2 \cdot 2^t} + 1 \qquad (*)$$

$$\left(A^{2^t} + A^{-2^t} + 2\right)\left(A^{2^t} + A^{-2^t} - 2\right) = A^{2 \cdot 2^t} + A^{-2 \cdot 2^t} - 2 \qquad (**)$$

Al compararlos con el producto:

$$\left(A^{2^t} + A^{-2^t} + B^{2^t} + B^{-2^t}\right)\left(A^{2^t} + A^{-2^t} - B^{2^t} - B^{-2^t}\right) =$$

$$= A^{2 \cdot 2^t} + A^{-2 \cdot 2^t} - B^{2 \cdot 2^t} - B^{-2 \cdot 2^t}$$

Nos planteamos resolver la ecuación para cualquier valor natural de t :

$B^{b^t} + B^{-b^t} = k$ siendo $k \in \Re$; $t \in N$ cuyas soluciones se obtienen[4]:

[4] Dado que al resolver las ecuaciones se obtienen soluciones imaginarias, consideraremos los complejos en su forma polar; en el supuesto de que el módulo sea 1 y el argumento 120^olo expresamos por: $1_{\lceil 120}$.

1. $\forall b \in \Re$; $B = 1 \rightarrow k = 2$; $-B^{2 \cdot b^t} - B^{-2 \cdot b^t} = -2$

   Que nos proporciona la relación $(**)$:

2. $b = 2$; $B = 1_{\lceil 360/3} = 1_{\lceil 120} \rightarrow k = -1$; $-B^{2 \cdot 2^t} - B^{-2 \cdot 2^t} = 1$

   Que nos proporciona la relación $(*)$:

3. $b = 3$; $B = 1_{\lceil 360/4} = 1_{\lceil 90} \rightarrow k = 0$; $-B^{2 \cdot 3^t} - B^{-2 \cdot 3^t} = 2$

   Que nos proporciona el cuadrado perfecto:

$$\left(A^{2^t} + A^{-2^t}\right)\left(A^{2^t} + A^{-2^t}\right) = A^{2 \cdot 2^t} + A^{-2 \cdot 2^t} + 2$$

4. $b = 4; B = 1_{\lceil 360/5} = 1_{\lceil 72} \rightarrow k = 2cos(72); -B^{2 \cdot 4^t} - B^{-2 \cdot 4^t} = 2cos(36)$

   Que nos proporciona la relación:

$$\left(A^{2^t} + A^{-2^t} + 2cos(72)\right)\left(A^{2^t} + A^{-2^t} - 2cos(72)\right) =$$

$$= A^{2 \cdot 2^t} + A^{-2 \cdot 2^t} + 2cos(36)$$

5. $b = 5$; $B = 1_{\lceil 360/6} = 1_{\lceil 60} \rightarrow k = 1$; $-B^{2 \cdot 5^t} - B^{-2 \cdot 5^t} = 1$

   Que nos proporciona la relación $(*)$:

y sucesivamente podríamos ir dando más valores a b y continuar...
También podemos hacer $b = 2$ y plantear ecuaciones de la forma:

$$B^{a \cdot 2^t} + B^{-a \cdot 2^t} = k$$

y suponer, por ejemplo, $k = -1$ siendo:

$$B^{a \cdot 2^t} + B^{-a \cdot 2^t} = -1$$

y, si deseamos que la solución que se obtenga sea $B = 1_{\lceil 45}$ nos basta hacer $a = \dfrac{120}{45} = \dfrac{8}{3}$ que como puede comprobarse da $B^{\frac{8}{3} \cdot 2^t} + B^{-\frac{8}{3} \cdot 2^t} = -1$.

También podemos hacer $b = 5$ y plantear ecuaciones de la forma:

$$B^{a\cdot 5^t} + B^{-a\cdot 5^t} = k$$

y suponer, por ejemplo, $k = 1$ siendo:

$$B^{a\cdot 5^t} + B^{-a\cdot 5^t} = 1$$

y, si deseamos que la solución sea $B = 1_{\lceil 45}$ basta hacer $a = \frac{60}{45} = \frac{4}{3}$ que como puede comprobarse da $B^{\frac{4}{3}\cdot 5^t} + B^{-\frac{4}{3}\cdot 5^t} = 1$.

Lo que nos puede permitir estructurar, analizar, relacionar, y completar el estudio de las ecuaciones con sus posibles implicaciones que no deja de ser un camino nuevo para realizar.

6.4 Cálculo de sumatorios

El proceso del cálculo de sumatorios lo hemos ordenado según que $p(x)$ sea o bien constante o bien kx, consideremos ahora que sea $p(x) = kx + B$.

Teniendo la ecuación:

$$y_{x+h(x)} - (kx + B)y_x = q(x)$$

Comenzamos su estudio considerando $h = a$[5].

El cambio de variable es $x = az$ que nos conduce a:

$$y_{z+1} - (Az + B)y_z = q(z)$$

La solución de la homogénea es:

$$y_z = kA^z \left(z + \frac{B}{A} - 1\right)!$$

El sumatorio que de esta ecuación se obtiene es:

[5] Como se trata de una continuación en el cálculo de sumatorios se da por supuesto que se conoce la metodología desarrollada en la tesis y bastará indicar sólo los pasos más relevantes de la aplicación.

$$\sum_{t=1}^{z-1} \frac{q(t)}{A^{t+1}\left(t+\frac{B}{A}\right)!} = N + \frac{f(z)}{A^{z}\left(z+\frac{B}{A}-1\right)!}$$

Siendo $f(z)$ la solución particular de la completa[6].

Con, $N = -\dfrac{f(1)}{A\left(\frac{B}{A}\right)!}$.

Una aplicación numérica puede ser $\sum_{t=1}^{4} \dfrac{0'2t^2}{0'2^{t+1}\,(t+5)!}$

Siendo $A = 0'2$; $B = 1$.
Para calcular $f(z)$ resolvemos:

$$y_{z+1} - (0'2z+1)y_z = 0'2z^2 - 1 \rightarrow f(z) = -z \rightarrow N = \frac{1}{4!}$$

Aplicando la fórmula tenemos:

$$\sum_{t=1}^{4} \frac{0'2t^2}{0'2^{t+1}\,(t+5)!} = \frac{1}{4!} - \frac{5^6}{9!} = -\frac{101}{72.576}$$

Resumiendo podríamos seguir ahora dando a h valores tales como $kx, etc.$ y aun queremos extender más nuestros cálculos podemos dar valores tales como $\frac{a}{x}, \frac{a}{x} + b, etc.$

Como se puede apreciar queda un campo inmenso pero de muy difícil acceso y de resultados imprevistos.

6.5 Casos particulares de sumatorios

Dentro del desarrollo normal de la tesis ya se han considerado todos los casos particulares posibles de los sumatorios, pero lo que ahora se propone es otro enfoque distinto de simplificación cuyo procedimiento como introducción se va a aplicar al primer sumatorio y que puede generalizarse a todos los demás.

El sumatorio en cuestión es:

[6] $y_{z+1} - (Az+B)y_z = q(z)$

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{q(t)}{k^t} = A + \frac{f(x)}{k^{x-1}}$$

Siendo $f(x)$ es la solución particular de la completa[7].

Con, $A = -f(1)$.

Si consideramos $y_x = p(x)$ podemos expresar el sumatorio:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{p(t+1) - kp(t)}{k^t} = \sum_{t=1}^{x-1} \frac{p(t+1)}{k^t} - k \sum_{t=1}^{x-1} \frac{p(t)}{k^t} = -p(1) + \frac{p(x)}{k^{x-1}}$$

y así poder considerar los casos particulares de $p(x)$ o bien buscar nuevas relaciones recurrentes o propiedades entre los sumatorios anteriormente expuestos.

Si, por ejemplo, hacemos:

$$p(t) = at^2 + bt + c \ , \ k = \frac{2c+b}{2c-b} \ , \ a = \frac{b^2}{2c-b}$$

Será:

$$p(t+1) - kp(t) = a(1-k)t^2 = -\frac{2b^3t^2}{(2c-b)^2}$$

Lo que nos proporciona el siguiente caso particular:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{a(1-k)t^2}{k^t} = -p(1) + \frac{p(x)}{k^{x-1}}$$

Con,

$p(x) = ax^2 + \dfrac{2ax}{k-1} + \dfrac{a(k+1)}{(k-1)^2}$

Como aplicación numérica podemos considerar:

$$b = 2 \ , \ c = 6 \ ; \ \rightarrow k = 1'4 \ , \ a = 0'4 \ , \ p(t) = 0'4t^2 + 2t + 6$$

$$\sum_{t=1}^{4} \frac{-0'4^2t^2}{1'4^t} = -8'4 + \frac{26}{1'4^4} = -\frac{3.918'4}{7^4}$$

[7] $y_{x+1} - ky_x = q(x)$

6.6 Los sumatorios y el cambio de variable

En las fórmulas obtenidas de sumatorios, además de todos los casos particulares nos queda un campo muy amplio por desarrollar, que consiste en introducir en los mismos un cambio de variable que correctamente aplicado nos puede proporcionar sumatorios casi ”personalizados” o bien expresiones nuevas, las cuales dependerán del ingenio para elegir el cambio y, porqué no, de la intuición o acierto de su elección.

Veamos un ejemplo de aplicación del cambio de variable y, para ello, tomaremos uno de los sumatorios desarrollados en esta tesis.

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{kt-1}{k^t t!} = 1 - \frac{1}{k^{x-1}(x-1)!}$$

Si hacemos el cambio:

$$t = t + n \rightarrow x = x + n$$

y lo aplicamos al sumatorio obtenemos:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{k(t+n)-1}{k^{t+n}(t+n)!} = A - \frac{1}{k^{x+n-1}(x+n-1)!}$$

Con $A = \dfrac{1}{k^n n!}$

Simplificando tenemos finalmente

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{k(t+n)-1}{k^{t}(t+n)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{k^{x-1}(x+n-1)!}$$

Una aplicación numérica para $k = 1'2$, $n = 5$, $x = 4$ es:

$$\sum_{t=1}^{3} \frac{1'2t+5}{1'2^t(t+5)!} = \frac{1}{5!} - \frac{1}{1'2^3 8!} = \frac{579'608}{1'2^3 8!}$$

6.7 Aplicaciones del sumatorio elemental

Si tenemos en cuenta la ecuación en diferencias[8].

$$f(x+1)y_{x+1} - f(x)y_x = q(x) \qquad (*)$$

Siendo:

$$\sum_{t=1}^{x-1} q(t) = -f(1)y_1 + f(x)y_x$$

Si lo que deseamos es obtener el sumatorio correspondiente al producto de un polinomio de segundo grado por un factorial debemos pensar en que tenemos $q(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) x!$ lo que nos induce que para resolver la ecuación $(*)$ debemos tomar:

$$f(x) = (x-1)!, y_x = Mx^2 + Nx + P$$

Sustituyendo en $(*)$ y dividiendo por $x!$ nos queda la identidad:

$$Mx^2 + (M+N)\,x + M + P - \frac{P}{x} \equiv ax^2 + bx + c$$

De solución $M = a\ ,\ N = b - a\ ,\ P = 0\ ,\ c = a.$

Obteniéndose "casi" el sumatorio deseado:

$$\sum_{t=1}^{x-1} \left(at^2 + bt + a\right) t! = -b + \left[ax^2 + (b-a)x\right] (x-1)!$$

Como ejemplo numérico podemos hacer[9]:

$$\sum_{t=1}^{6} \left(2t^2 + t + 2\right) t! = -1 + (2 \cdot 49 - 7)6! = 65.519$$

[8] Que como vemos es $\Delta\left[f(x)y_x\right] = q(x)$ con sumatorio inmediato.

[9] Por ser $a = 2\ ,\ b = 1\ ,\ x = 7$.

6.8 Análisis de las soluciones

Tenemos que aceptar que nos hemos detenido en el umbral que nos conduce al análisis de las soluciones de las ecuaciones en diferencias finitas cuando estas diferencias representadas por la letra h toman un valor variable y no constante e igual a uno, como es habitual. Dicho estudio teórico deberá realizarse por los especialistas en matemáticas, puesto que no se trata de un trabajo combinativo o de proceso, sino que se debe realizar un profundo análisis de la situación con sus implicaciones, consecuencias, y condiciones de existencia por citar algunas de las características del problema.

Para hacerse una idea concreta de la naturaleza del análisis vamos a citar un ejemplo que tenemos resuelto en la tesis[10] aunque lo que ahora nos importa no es la resolución sino la posible interpretación que pueda darse de las soluciones.

Sea:

$$y_{x+h(x)} - 5xy_x = -10x^3 + 23x^2 - 3x, h = x + 1 \qquad (*)$$

Obtenemos el cambio $x = 2^z - 1$ que nos da la ecuación:

$$y_{z+1} - 5\left(2^z - 1\right) y_z = -10 \cdot 2^{3z} + 53 \cdot 2^{2z} - 79 \cdot 2^z + 36$$

Resolviendo la homogénea y la completa nos da la solución general:

$$y_z = 2 \cdot 2^{2z} - 7 \cdot 2^z + 6 + C \cdot 5^{z-1} \prod_{t=1}^{z-1} \left(2^t - 1\right)$$

Deshaciendo el cambio:

$$y_x = 2x^2 - 3x + 1 + \frac{C}{5} 5^{log_2(x+1)} \prod_{t=1}^{log_2(x+1)-1} \left(2^t - 1\right)$$

- Si hacemos[11] $x = 3$.

$$y_x = y_3 = 10 + 5C, y_{x+h(x)} = y_7 = 78 + 75C$$

Si sustituimos en $(*) \rightarrow -72 = -72$ cumple:

[10] Capítulo 3, sección Aplicaciones

[11] Al que corresponde el valor de $z = 2$.

- Si hacemos[12] $x = 4$.

$$y_x = y_4 = 21 + \frac{C}{5} 5^{log_2 5} \prod_{t=1}^{log_2 5 - 1} \left(2^t - 1\right)$$

$$y_{x+h(x)} = y_9 = 136 + \frac{C}{5} \cdot 5^{log_2 10} \cdot 4 \prod_{t=1}^{log_2 10 - 1} \left(2^t - 1\right) =$$

$$= 136 + C \cdot 5^{log_2 5} \cdot 4 \prod_{t=1}^{log_2 5 - 1} \left(2^t - 1\right)$$

Si sustituimos en $(*) \rightarrow -284 = -284$ cumple[13].

6.9 Aplicaciones financieras

Como se puede apreciar en el desarrollo de la tesis, el capítulo de las aplicaciones financieras considera unas cuantas situaciones posibles y aunque por supuesto son las más corrientes, quedan muchas por tener en cuenta y si se sigue la misma metodología de la tesis, en cada nueva situación podremos investigar bajo que condiciones se pueden simplificar las expresiones matemáticas que se utilizan en el proceso, produciéndose un sinfín de casos y situaciones tan extenso, que resulta prácticamente imposible hacerse una idea de todo lo que queda por realizar.

6.10 Conclusiones

Una vez terminada la tesis, podemos preguntarnos ¿qué aportaciones se han realizado en el mundo de la economía o de las matemáticas?, y dado que en el desarrollo de la tesis se han considerado bien diferenciadas las dos partes, expondremos brevemente las conclusiones a las que hemos llegado en cada una de ellas.

En el desarrollo matemático se han aportado las ecuaciones en diferencias finitas pero con diferencias variables, cuyo planteo ya existía pero solo a nivel

[12] Al que corresponde $z = log_2 5$.

[13] Aunque no sepamos el valor o el significado de la expresión $\prod_{t=1}^{log_2 5 - 1} \left(2^t - 1\right)$.

práctico en el cálculo de algunos problemas que mejor sería considerarlos simplemente ejercicios, tales ecuaciones no se habían tratado a nivel teórico en el cual podríamos considerar su resolución, y es por eso que el cambio de variable que exponemos es la única forma de resolverla que hoy por hoy disponemos.

La resolución de las ecuaciones en diferencias por el método del factor anti-diferencia del producto o por el método del factor anti-diferencia del cociente, no nos proporciona nada nuevo ya que existen métodos tradicionales para resolverlos, pero dado que es una mecánica nueva si que nos permite descubrir nuevos caminos, como son el poder plantear ecuaciones sabiendo de antemano que serán fáciles de resolver, y el más importante: nos permite calcular sumatorios muy complejos que hasta se nos hacen difíciles de creer, y lo que es más interesante, nos permite analizar las condiciones para que las fórmulas de los sumatorios se puedan simplificar. Para tener una idea más concreta del alcance de los sumatorios obtenidos en la tesis debemos considerar que se ha desarrollado el cálculo de once sumatorios principales, los cuales dan origen a unos diez sumatorios derivados cada uno por término medio, lo que forma un conjunto de más de cien sumatorios y si tenemos en cuenta que con solo el primer sumatorio principal se realizan todas las aplicaciones económicas ya nos podemos hacer una idea de la capacidad de esta nueva herramienta matemática.

El desarrollo económico es la consecuencia y la finalidad de la tesis, que consiste en obtener una fórmula maestra de la cual se obtengan todas las demás, y es la que hemos denominado $(F1S)$ o sea la primera fórmula fundamental de los sumatorios, la cual deberemos aplicarla sucesivamente en todos y en cada uno de los casos que se nos presenten.

Para ver las aplicaciones financieras hemos considerado dos grandes capítulos, el primero correspondiente a las rentas, en el cual hemos tenido en cuenta las rentas constantes, variables en progresión aritmética, variables en progresión geométrica, variables polinómicamente según una ecuación de segundo grado, y todo el cálculo de dichas rentas se efectúa con una sola fórmula la $(F1S)$ con los diferentes matices de cada una de ellas, siendo importante destacar la facilidad de adaptación de la fórmula a cada uno de los casos y la facilidad de análisis que nos permite por un lado aplicar la fórmula solo a la parte creciente polinómica o a la parte decreciente y por otro lado encontrar las situaciones en que la fórmula queda muy simplificada, dando pie a tipos de rentas cuyas tablas de amortización se pueden realizar con todos los números enteros. El segundo grupo de aplicación que hemos considerado corresponde a los planes de ahorro, aunque mejor dicho a planes especiales de ahorro, ya que para ver mejor el alcance y la adaptabilidad de la fórmula a las distintas situaciones se han considerado planes muy distintos, si tenemos en cuenta la primera aplicación sobre un plan de ahorro con carencia vemos que la fórmula aplicada resuelve todo el problema en una sola aplicación, sin necesidad de establecer dos partes una de carencia y otra de no carencia. En las demás aplicaciones también se ha utilizado una sola fórmula para cada aplicación demostrando así la gran versatilidad de la fórmula general y de como puede y debe adaptarse dicha fórmula a cada caso en concreto.

Para terminar consideramos que son muy interesantes todos los campos que quedan por explorar expuestos anteriormente, y no descartamos que en un futuro no muy lejano sigamos trabajando en ellos, o incluso junto con otros profesores más formemos un equipo, para trabajarlos en detalle y en profundidad.

Capítulo 7

BIBLIOGRAFÍA

Alcaide, A. (1.977)
Matemática Moderna para Economistas
Ed. Aguilar , Madrid

Alegre, P.; etc. (1.989)
Matemáticas de las Operaciones Financieras
Ed. AC , Madrid

Alegre, P.; etc. (1.991)
Matemáticas Empresariales II
Ed. AC , Madrid

Alegre, P.; Borrell, M. (1.975)
Ejercicios Resueltos de Matemática de las Operaciones Financieras
Ed. AC , Madrid

Alejandre, F.; Llerena, F.; Vilella, C. (1.995)
Problemes de Matemàtiques per a Econòmiques i Empresarials
Ed. Media , Sabadell (Barcelona)

Allen, R.G.D. (1.974)
Análisis Matemático para Economistas
Ed. Aguilar , Madrid

Allen, R.G.D. (1.965)
Economía Matemática
Ed. Aguilar , Madrid

Alpha, C. Chiang (1984)
Fundamental Methods of Mathematical Economics
Ed. McGraw-Hill , New York

Aparicio, A. (1.999)
Cálculo Financiero. Teoría y Ejercicios
Ed. AC , Madrid

Ayres, F. (1.971)
Teoría y Problemas de Matemáticas Financieras
Ed McGraw-Hill

Balbas, A.; Gil, J.A. (1.989)
Análisis Matemático para la Economía
Ed. AC , Madrid

Balbas, A.; Gil, J.A. (1.987)
Programación Matemática
Ed. AC , Madrid

Barbolla, R. (1.975)
Introducción al Análisis Real
Ed. AC , Madrid

Baumol, W.J. (1.964)
Dinámica Económica
Ed. Marcombo , Barcelona

Benavie, A. (1.973)
Técnicas Matemáticas del Análisis Económico
Ed. Prentice-Hall Internacional , Madrid

Betzuen, A. (1.988)
Curso de Matemáticas Financieras I y II
Ed. Instituto de Estudios Financiero-Actuarial , Bilbao

Bonilla, M.; Ivars, A. (1.994)
Matemática de las Operaciones Financieras (Teoría y práctica)
Ed. AC , Madrid

Borrell Fontelles, J. (1.989)
Métodos Matemáticos para la Economía (Programación Matemática)
Ed. Pirámide , Madrid

Borrell Fontelles, J. (1.990)
Métodos Matemáticos para la Economía (Campos y Autosistemas)
Ed. Pirámide , Madrid

Cabello, J.M.; Gómez, J. (1.999)
Matemáticas Financieras Aplicadas, 127 problemas resueltos.
Ed. AC , Madrid

Calzada, J.M.; García, A. (1.997)
Matemática de las Operaciones Financieras.
Ed. AC , Madrid

Chiang, A. (1.971)
Métodos Fundamentales de Economía Matemática
Ed. Amorrortu , Buenos Aires

Chilov, G. (1.973)
Analyse Mathématique Vol. I y II
Ed. Mir , Moscú

Churchman; Ackoff; Arnoff (1.971)
Introducción a la Investigación Operativa
Ed. Aguilar , Madrid

Costa Reparaz, E. (1.989)
Matemáticas para Economistas
Ed. Pirámide , Madrid

Cruz Rambaud, S.; Valls, M^{a}del C. (2.003)
Introducción a las matemáticas financieras
Ed. Pirámide , Madrid

Dowling, E. (1.982)
Matemáticas para Economistas
Ed. McGraw-Hill , México

Ferrer, L. (1.941)
Cálculo Financiero
Ed. Labor , Madrid

Fort, Tomlinson (1.948)
Finite Differences and Difference Equations in the Real Domain
Ed. Oxford University

Gandolfo, G. (1.976)
Métodos y Modelos Matemáticos de la Dinámica Económica
Ed. Tecnos , Madrid

Gil Peláez, L.; Baquero, M.J. (1.989)
Matemática de las Operaciones Financieras. Problemas resueltos
Ed. AC , Madrid

Gil Peláez, L. (1.989)
Matemática de las Operaciones Financieras
Ed. AC , Madrid

Gil Peláez, L. (1.975)
Análisis Matemático para Economistas
Ed. Manero , Madrid

Goldberg, S. (1.964)
Ecuaciones en Diferencias Finitas
Ed. Marcombo , Barcelona

Goldberg, S. (1.964)
Ecuaciones en Diferencias Finitas
Ed. Marcombo , Barcelona

González, V. (1.993)
Operaciones Financieras Bancarias y Bursátiles. Curso práctico
Ed. Ciencias Sociales

Guelfand, I.M.; Ghilov, E. (1.972)
Les Distributions
Ed. Dunod , París

Gutiérrez Valdeón, S.; Franco, A. (1.997)
Matemáticas Aplicadas a la Economía y la Empresa
Ed. AC , Madrid

Huang, D. (1.964)
Introducción al Uso de la Matemática en el Análisis Económico
Ed. Siglo Veintiuno Editores , México

Induráin, E. (1.989)
Matemática Financiera a través de Ecuaciones en Diferencias Finitas
ED. A.I. Zardoya, Uned , Pamplona

Jordan, Ch. (1.965)
Calculus of Finite Differences
Ed. Chelsea Publishing Company , New Jork

Levenfeld, G.; De la Maza, S. (1.997)
Matemática de las Operaciones Financieras y de la Inversión.
Ed. McGraw-Hill

Levi, E. (1.973)
Curso de Matemática Financiera y Actuarial
Ed. Bosch , Barcelona

Lóbez Urquía, J. (1.968)
Matemática Financiera
Ed. Gráficas Instar , Barcelona

Lóbez Urquía, J. (1.968)
Análisis Matemático
Ed. Gráficas Instar , Barcelona

López, A.P. (1.993)
Matemáticas de las Operaciones Financieras Vol I
Ed. Uned , Madrid

López. A.P. (1.994)
Matemática de las operaciones Financieras Vol. II
Ed. Uned , Madrid

López Cachero, M.; Vegas Pérez, A. (1.994)
Curso Básico de Matemáticas para la Economía y Dirección de Emp. I
Ed. Pirámide , Madrid

López Cachero, M.; Vegas Pérez, A. (1.994)
Curso Básico de Matemáticas para la Economía y Dirección de Emp. II
Ed. Pirámide , Madrid

Lozano M.C. (1.993)
Curso de Matemática Financiera I
Ed. Universidad de Murcia

Lozano, M.C. (1.994)
Curso de Matemática Financiera II
Ed. Universidad de Murcia

Martí Pidelaserra, j.; Borrell, M. (1.998)
Matemàtiques de les operacions financeres
Ed. Universitat Oberta , Barcelona

Milne, William Edmund (1.973)
Numerical Calculus
Ed. Princeton University , New Jersey

Milne-Thomson, L.M. (1.965)
The Calculus of Finite Differences
Ed. Macmillan , London

Nieto de Alba, D. (1.979)
Matemática de las Operaciones Financieras
Ed. ICAI

Paricio, A.; Gallego, R. (1.999)
Cálculo financiero, Teoría y Ejercicios.
Ed. AC , Madrid

Rodríguez Rodríguez, A. (1.981)
Matemáticas para Economistas II
Ed. Romargraf ,S.A. , Barcelona

Rodríguez Rodríguez, A. (1.994)
Matemáticas de la Financiación
Ed. S. , Barcelona

Rodríguez Ruiz, J.; etc. (1.991)
Matemáticas 2 Economía y Empresa. Teoría
Ed. Centro de Estudio Ramón Areces, S.A. , Madrid

Rodríguez Vidal (1.972)
Ecuaciones Diferenciales y Temas Afines
Ed. Vicens Vives , Barcelona

Ruiz Amestoy , J.M. (1.998)
Matemática Financiera, ejercicios resueltos
Ed. Centro de Formación del Banco de España

Ruiz Amestoy, J.M. (1.990)
Matemática Financiera
Ed. Centro de Formación del Banco de España

Samuelson, A.
Relations Financieres Internationales
Ed. DAI LOZ , París

Sanz, P.; Vázquez, F. (1.995)
Cuestiones de Cálculo
Ed. Pirámide , Madrid

Sheid, F.
Análisis Numérico
Ed. McGraw-Hill , México

Terceño, A.; Sáez, J. (1.997)
Matemática Financiera
Ed. Pirámide , Madrid

Vázquez, M.J. (1.993)
Curso de Matemática Financiera
Ed. Pirámide , Madrid

Vegas, A.; López Cachero M. (1.981)
Elementos de Matemáticas para Economistas II
Ed. Pirámide , Madrid

Villazón, C.; Sanou, L. (1.993)
Matemática financiera
Ed. Foro Científico , Barcelona