UNIVERSITAT DE BARCELONA

Procesos puntuales en el plano y parada óptima

Concepción Arenas Sola

PROCESOS PUNTUALES EN EL PLANO

Y

PARADA OPTIMA

Concepción Arenas Sola

Memoria presentada para aspirar
al grado de doctor en Ciencias
Matemáticas.

Facultad de Matemáticas.
Universidad de Barcelona.

HAGO CONSTAR que la presente memoria ha sido realizada por Concepción Arenas Sola bajo mi dirección, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Barcelona.

David Nualart

Barcelona, marzo de 1987.

Dr. David Nualart Rodon.

INDICE

INTRODUCCION

Esta memoria abarca esencialmente dos temas. Por una parte contiene la resolución del problema de parada óptima en varias situaciones distintas. Por otra se dedica a un profundo estudio de los procesos puntuales en el plano, con un número finito ó infinito numerable de puntos.

Los orígenes del estudio del problema de parada óptima se remontan a J.L. Snell (1953), quién en [49], considera el caso particular de una sucesión de variables con índice discreto unidimensional y utiliza algunos resultados de la naciente Teoría de Martingalas debida a J.L.Doob. A este respecto hay que destacar, que todavía hoy se emplea el término de envoltura de Snell para indicar la mínima supermartingala que mayora un proceso, concepto que ha sido de gran utilidad en trabajos posteriores.

La formulación clásica del problema de parada óptima en tiempo discreto (siguiendo las ideas de [45]) puede presentarse como sigue.

Sea $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ una familia de variables aleatorias que representan, por ejemplo, las ganancias de un jugador en instantes sucesivos. Para cada tiempo de paro T, la variable aleatoria Z_T representa la ganancia obtenida por el ju gador, al parar de jugar en el instante T. El problema de parada óptima consiste en encontrar un tiempo de paro T* tal que alcance el supremo de las ganancias esperadas por el jugador, que decide abandonar el juego en ese instante, es decir, encontrar un tiempo de paro T* que le diremos óptimo, tal que,

$$E(Z_{T*}) = \sup \{E(Z_T),\ T \text{ tiempo de paro}\} .$$

La investigación sobre el problema de parada óptima ha seguido, esencialmente, dos caminos: por una parte se ha preocupado de la construcción explícita de una solución a dicho problema; por otra, se ha preocupado, en una vertiente que utiliza esencialmente técnicas de análisis funcional, de la existencia de solución. Los estudios de este problema, que en el caso unidimensional, han sido abordados por diversos autores, se encuentran recopilados esencialmente en los trabajos de Neveu [45] para el caso discreto, y de N. El Karoui [20] para el caso continuo. En el caso discreto se da una construcción explícita de un tiempo de paro óptimo, mientras que en el caso continuo se aborda tanto el problema de existencia como el de construcción de un tiempo de paro óptimo. Además, para el caso continuo y en el marco de la segunda línea de trabajo, siguiendo la técnica de aleatorización de los tiempos de paro (véase [6]) utilizada por Baxter-Chacon, en [19] se caracterizan los tiempos de paro como los elementos extremales del conjunto de tiempos de paro aleatorizados ó variables aleatorias "floues" adaptadas y a partir de esta caracterización se demuestra la existencia de solución al problema de parada óptima.

Las dificultades suscitadas al aumentar la dimensión del conjunto de parámetros, debidas principalmente a que no se dispone de un orden total en el conjunto de parámetros y por tanto la extensión directa de los métodos utilizados en el caso unidimensional no es posible, han sido objeto de profundos estudios. Principalmente en el caso discreto, los de G. Mazziotto y J. Szpirglas [35], U.Krengel y L. Sucheston [29] en los cuales, aunque el método de construcción de un tiempo de paro óptimo es distinta,ambos se basan en el concepto de táctica. En [35] se demuestra la existencia de puntos de paro óptimos, a partir de que, bajo ciertas condiciones sobre el proceso con el que se trabaja, existen puntos de paro maximales comprobándose que tales puntos son óptimos. Además, a partir del carácter de supermartingala de la envoltura de Snell asociada al proceso se construye de forma explícita una táctica y sobre ella un punto de paro óptimo, teniendo en cuenta que la envoltura de Snell restringida a tal táctica es una supermartingala con un índice discreto. Por su parte en [29], se introduce la noción de táctica para procesos con índices en un conjunto dirigido, dando teoremas que, bajo cier tas condiciones, permiten relacionar las tácticas con los tiempos de paro, utilizando esta relación para reducir algunos problemas de parada óptima en el plano, a problemas sobre la recta. En el caso de trabajar con variables aleatorias independientes se llega a una completa reducción del problema de parada óptima al caso lineal. En otro orden de ideas, dentro del caso discreto, R.C. Dalang [15] ha caracterizado los puntos de paro discretos como los elementos extremales del conjunto de variables aleatorias "floues" adaptadas. Esta caracterización le permite demostrar la existencia de un punto de paro óptimo. Dicha caracterización está inspirada en la técnica de aleatorización utilizada por Baxter-Chacon (ver [6]) para los tiempos de paro; no obstante hay que poner de manifiesto que los métodos utilizados en el caso unidimensional para demostrar una tal caracterización no se extienden de forma directa al caso bidimensional y que en [15] ha sido preciso la introducción de un operador llamado "supremo condicional" que tiene muchas propiedades análogas a las de la esperanza condicionada y que, además, es invariante bajo cambios de medidas equivalentes, para llegar a demostrar la anterior caracterización.

Como contraste con el caso discreto, el caso continuo parece ser el de mayor dificultad, lo que queda corroborado por la no aparición en la literatura de ningún resultado de construcción de un punto de paro óptimo. Además, tampoco aparece en la literatura ningún resultado basado en la aleatorización de los puntos de paro y su posible caracterización como elementos extremales de un conjunto conveniente. No obstante, diversos trabajos demuestran la existencia de solución al problema de parada óptima. G. Mazziotto y A. Millet en [33] dan teoremas de existencia a partir de la noción de superficie de paro aleatorizada, es decir, incluyen los puntos de paro en un conjunto más grande, el de las superficies de paro aleatorizadas, que es convexo y compacto para una cierta topología y se puede dar una caracterización de sus elementos extremales, siendo esta caracterización la que permite demostrar la existencia de un punto de paro óptimo. En otro orden de ideas G. Mazziotto en [30] demuestra la existencia de solución reduciendo el problema al estudio de un problema de parada óptima sobre una línea de paro y por tanto a un índice, suponiendo ciertas hipótesis de regularidad sobre la envoltura de Snell. Además tal solución puede ser escogida de entre los elementos maximales del conjunto de puntos de paro sobre los cuales la envoltura de Snell se comporta como una martingala.

Hay que destacar también, el interés presentado por el estudio del problema de parada óptima para procesos de Markov, tanto en el caso unidimensional (ver [20]) como en el caso bidimensional (ver [30]).

Los tres primeros capítulos de esta memoria tratan del problema de parada óptima.

En el primer capítulo nos ocupamos del problema de parada óptima para problemas con índice discreto cuando se trabaja bajo ciertas restricciones sobre la clase de tiempos (puntos) de paro. El caso unidimensional ha sido tratado por Adell (cf. [1]), teniendo este problema su origen en que existen situaciones reales en las que se plantea el problema de parar óptimamente un proceso antes de que se produzca un cierto suceso, (por ejemplo, renovar una maquinaria antes de que se estropee) ó después de que suceda un acontecimiento, ó más generalmente, el problema de parada es un intervalo estocástico. El trabajo de Adell consiste en una búsqueda de las condiciones mínimas que hay que exigir a la clase de tiempos de paro con la que se trabaja para poder desarrollar una teoría suficiente, exigiendo que tales condiciones sean suficientemente débiles como para englobar casos interesantes aparte de que la clase de tiempos de paro sea un intervalo estocástico. Además, presenta un teorema de construcción de la envolvente de Snell mediante un procedimiento de inducción descendente y da importantes resultados sobre la estructura de la clase de tiempos de paro óptimos, construyendo tanto el mínimo como el máximo tiempo de paro óptimo. En este primer capítulo construimos una solución del problema de parada óptima para el caso de procesos con índice discreto unidimensional y con una clase de tiempos de paro satisfaciendo las condiciones exigidas en [1]. Dicha construcción la hacemos mediante una técnica de cambio de tiempo que simplifica los métodos utilizados en [1]. Además, utilizando la misma técnica precedente resolvemos un problema similar para procesos con índice bidimensional discreto, caso no tratado en [1]. También damos ejemplos concretos que ponen de manifiesto la existencia de tales clases.

En el segundo capítulo, damos en el caso unidimensional continuo, una demostración propia de la caracterización de los tiempos de paro como los elementos extremales del conjunto de variables aleatorias "floues" adaptadas y mostramos como permite esta caracterización resolver el problema de parada óptima. En el caso bidimensional continuo, como contribución al estudio de si una tal caracterización es posible para los puntos de paro, demostramos que éstos son las variables aleatorias "floues" que son los elementos extremales del conjunto imagen por el operador de proyección opcional del conjunto de variables aleatorias "floues".

En el tercer capítulo, resolvemos el problema de parada óptima para un proceso, imagen de una familia markoviana bidimensional, construida a partir de dos procesos de Markov, soluciones de sendas ecuaciones diferenciales estocásticas.

En la segunda parte de la memoria, expuesta en el capítulo cuarto, nos centramos en los procesos puntuales en el plano.

El interés de los procesos puntuales en la recta se inicia en 1943, cuando empiezan a ser estudiados considerándolos modelos de comunicación telefónica. Diversos trabajos han sido dedicados a los procesos puntuales en la recta (cf. [26] , [8]).

En el caso de dos parámetros, aparte de algunos tipos concretos de procesos puntuales, como el de Poisson (cf. Merzbach-Nualart [38],[39]) la única referencia existente en la literatura sobre el estudio general de tales procesos se ocupa exclusivamente del caso en que el proceso puntual tiene un sólo punto (cf. [2] , [36]).

El cuarto capítulo de esta memoria está dedicado a los procesos puntuales con dos parámetros: tanto en el caso de tener un número finito (mayor ó igual que uno) de puntos, como en el de tener un número infinito numerable de puntos.

Dado un proceso puntual en estas condiciones, mostramos la forma explícita de su filtración natural asociada y estudiamos sus propiedades. Construimos la forma explícita de los procesos opcionales y de los procesos previsibles, así como de los procesos crecientes opcionales y de los procesos crecientes previsibles. Demostramos además que toda martingala uniformemente integrable admite una versión continua por la derecha con límites por la izquierda, no siendo cierto que una tal versión pueda tormarse continua. Este resultado permite considerar las proyecciones opcional y previsible de procesos medibles y acotados, de las que estudiamos sus propiedades. También demostramos la existencia de las proyecciones duales para procesos crecientes, estudiamos sus propiedades y construimos la proyección dual previsible de un proceso creciente relativa a una probabilidad absolutamente continua respecto de la probabilidad inducida por el proceso puntual.

Todas las proposiciones no originales van acompañadas de la correspondiente cita bibliográfica.

Finalmente, deseo expresar mi agradecimiento al Dr. David Nualart por la atención que siempre me ha prestado y por sus valiosas indicaciones.

CAPITULO I

RESOLUCION DE UN PROBLEMA DE PARADA OPTIMA

Iniciamos el capítulo resolviendo un problema de parada óptima para procesos con índice discreto y unidimensional, cuando los tiempos de paro admisibles pertenecen a una cierta familia dada con anterioridad. Los resultados se obtienen mediante una técnica de cambio de tiempo, la cual simplifica los métodos utilizados en ([1]) para tratar el mismo problema. Finalizamos resolviendo, utilizando la misma técnica de cambio de tiempo, un problema similar para procesos con índice discreto bidimensional.

§1. Procesos con índice discreto y unidimensional

En esta sección $(\Omega,\underline{\underline{G}},P)$ es un espacio de probabilidad y $\underline{\underline{F}} = \{\underline{\underline{F}}_n, n\in\mathbb{N}\}$ una familia de sub-σ-álgebras de $\underline{\underline{G}}$, creciente y completa, es decir, $\underline{\underline{F}}_o$ contiene los conjuntos negligibles de $\underline{\underline{G}}$.

Definición 1.1.

Una variable aleatoria T a valores en $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ es un $\underline{\underline{F}}$ - *tiem* *po de paro* si y solamente si $\{T = n\} \in \underline{\underline{F}}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Recordemos que todo $\underline{\underline{F}}$-tiempo de paro T tiene asociada una σ-álgebra $\underline{\underline{F}}_T$, definida por:

$$\underline{\underline{F}}_T = \{A \in \underline{\underline{G}} : A \cap \{T = n\} \in \underline{\underline{F}}_n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

En lo que concierne a las propiedades de los $\underline{\underline{F}}$-tiempos de paro ([48]) recordaremos que dados dos $\underline{\underline{F}}$-tiempos de paro T_1 y T_2, el supremo, $T_1 \vee T_2$, y el ínfimo, $T_1 \wedge T_2$, son $\underline{\underline{F}}$-tiempos de paro, y el orden inducido por el orden de $\mathbb{N}$, viene dado por

$$T_1 \leq T_2 \text{ si y sólo si } P\{T_1 \leq T_2\} = 1.$$

Sea $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$, una familia de variables aleatorias no negativas y $\underline{\underline{F}}$-adaptadas, es decir, Z_n es $\underline{\underline{F}}_n$-medible, para todo n.

Representaremos por L una clase de $\underline{\underline{F}}$-tiempos de paro <u>finitos</u> verificando las propiedades:

i) La familia de variables aleatorias $\{Z_T, T \in L\}$ es uniformemente integrable.

ii) L es estable por ínfimos finitos.

iii) L es estable por supremos finitos.

iv) Para todo $T \in L$, la familia $\{E(Z_S | \underline{\underline{F}}_T), S \in L, S \geq T\}$ es filtrante creciente, es decir, si S_1, $S_2 \in L$ y $S_1 \geq T$, $S_2 \geq T$, entonces existe un $S \in L$ con $S \geq T$, tal que:

$$E(Z_S | \underline{\underline{F}}_T) = \max\{E(Z_{S_1} | \underline{\underline{F}}_T), E(Z_{S_2} | \underline{\underline{F}}_T)\}.$$

v) L admite un sistema de generadores es decir, existe una sucesión creciente $(T_n, n \in \mathbb{N})$, con $T_n \in L$, tal que para todo $T \in L$, $T = \sum_{n \in \mathbb{N}} T_n I_{A_n}$, donde $A_n \in \underline{\underline{F}}_{T_n}$, para todo n, y son disjuntos dos a dos.

Observación 1.

Notemos que existen clases de tiempos de paro verificando dichas propiedades. Por ejemplo, la clase
$L = \{R, R$ es $\underline{\underline{F}}$-tiempo de paro, $S \leq R \leq T\}$ con $S, T, \underline{\underline{F}}$-tiempos de paro y $S \leq T$. Esta clase cumple las propiedades anteriores si $E(\sup_n Z_n) < \infty$. Es suficiente tomar como sistema de generadores, $T_n = (n \vee S) \wedge T$, para todo n de $\mathbb{N}$.

El problema de parada óptima en la clase L, que nos preocupa, consiste en encontrar un $\underline{\underline{F}}$-tiempo de paro $T^* \in L$, tal que

$$E(Z_{T^*}) = \sup_{T \in L} E(Z_T)$$

Un tal $\underline{\underline{F}}$-tiempo de paro T^*, recibe el nombre de *tiempo de paro óptimo en* L respecto la sucesión $\{(\underline{\underline{F}}_n, Z_n);\ n \in \mathbb{N}\}$.

Observación 2.

Observemos que si interpretamos la sucesión $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ como la sucesión de ganancias de un jugador en los sucesivos instantes n, nuestro propósito es encontrar un tiempo de paro, que alcance la cota superior, $\sup_{T \in L} E(Z_T)$, de las esperanzas de ganancia del jugador, que decide abandonar el juego en el instante aleatorio T, $T \in L$.

Recordemos los siguientes resultados de familias de funciones.

<u>Lema 1.2.</u> ([45], prop.6,1.1.)
Para toda familia G de funciones reales y medibles sobre Ω, existe una única, casi seguramente (c.s.), función medible g sobre Ω, tal que:

i) $g \geq f$ c.s., para todo f de G.

ii) si h es una función medible tal que $h \geq f$ c.s. para todo $f \in G$, entonces $h \geq g$, c.s.

Esta función g, se llama *supremo esencial de* G y notaremos $g = \operatorname{supess} G$. Además, existe al menos una sucesión $(f_n, n \in \mathbb{N})$ de elementos de G tal que: $\operatorname{supess} G = \sup\limits_n f_n$ c.s. Si la familia G es filtrante creciente, la sucesión $(f_n)_n$ puede ser tomada creciente c.s.

<u>Lema 1.3.</u> ([1], lema 1.2.)
En las mismas condiciones del lema anterior si G es filtrante y si las funciones de G son no negativas y existe H integrable tal que $f_i \leq H$ c.s., para todo i, entonces,

i) g es integrable y $E(g) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} E(f_n)$.

ii) Si $\underline{\underline{C}}$ es una sub-σ-álgebra de $\underline{\underline{G}}$, entonces

$$E(g/\underline{\underline{C}}) = \operatorname*{sup\text{-}ess}_{n\in\mathbb{N}} E(f_n/\underline{\underline{C}}).$$

Introduzcamos unas nuevas variables aleatorias.

Definición 1.4.

Dado $T\in L$, definimos la variable $X(T)$ por:

$$X(T) = \operatorname*{supess}_{S\geq T, S\in L} E(Z_S|\underline{\underline{F}}_T)$$

y llamaremos a $X = (X(T), T\in L)$, *proceso de ganancias condicionales* del proceso $(Z_n)_n$.

Definición 1.5.

Sea M una colección arbitraria de tiempos de paro. Una familia de variables $\{Y_T, T\in M\}$, a índices en M es una *M-supermartingala* si,

i) $Y_S = Y_T$ c.s. sobre $\{S = T\}$.

ii) para todo $T\in M$, Y_T es integrable y $\underline{\underline{F}}_T$-medible.

iii) para todo $S,T\in M, S\leq T$, se verifica:

$$E(Y_T|\underline{\underline{F}}_S) \leq Y_S .$$

La familia $\{X(T), T\in L\}$ verifica el resultado clásico siguiente:

Proposición 1.6.

i) La familia $\{X(T), T\in L\}$ es la mínima L-supermartingala que mayora $\{Z_T, T\in L\}$.

ii) Una condición necesaria y suficiente para que un tiempo de paro $S\in L$, sea óptimo en L, respecto la sucesión $\{(\underline{\underline{F}}_n, Z_n), n\in\mathbb{N}\}$ es

(a) $X(S) = Z_S$ c.s.

(b) $\forall T\in L$, $E(X(S)|S\wedge T) = E(X(S\wedge T))$.

La demostración es análoga a la del teorema 2.12.1. de [20]. #

A fin de encontrar un tiempo de paro óptimo en L, respecto la sucesión $\{(\underline{\underline{F}}_n, Z_n), n\in\mathbb{N}\}$, construimos una nueva clase $\mathcal{L}$ de tiempos de paro respecto una nueva sucesión. La clase $\mathcal{L}$ verifica las mismas propiedades que la clase L y contiene las constantes, y está en correspondencia con la clase L. Aplicando la teoría general de parada óptima ([45]) a la clase $\mathcal{L}$, encontramos un tiempo de paro ν^* óptimo en $\mathcal{L}$, el cual está en correspondencia con un tiempo de paro $T_{\nu^*}\in L$, que será óptimo en L.

Consideremos pues la nueva filtración $\underline{\underline{F}}' = \{\underline{\underline{F}}'_n = \underline{\underline{F}}_{T_n}, n\in\mathbb{N}\}$, donde $\{T_n, n\in\mathbb{N}\}$ es el sistema de generadores de la clase L y tomemos el proceso $Z' = \{Z'_n = Z_{T_n}, n\in\mathbb{N}\}$ que es $\underline{\underline{F}}'$-adaptado. Representaremos por $\bar{X}$ el proceso de ganancias condicionales asociado a Z'.

Sea $\mathcal{T}_f$ la clase de los $\underline{\underline{F}}'$-tiempos de paro finitos, y sea $\mathcal{N}$ la clase de todos los $\underline{\underline{F}}$-tiempos de paro finitos generados por la sucesión $\{T_n, n\in\mathbb{N}\}$, es decir $S\in\mathcal{N}$ sii $S = \sum_n T_n I_{A_n}$, con $A_n \in \underline{\underline{F}}_{T_n}$, $\forall n$ y disjuntos dos a dos.

Se verifica la siguiente

Proposición 1.7.

Existe una aplicación exhaustiva y creciente, en general no biyectiva, entre la clase $\mathcal{T}_f$ y la clase $\mathcal{N}$.

Demostración.

Basta con considerar la siguiente aplicación,

$$\psi : \mathcal{T}_f \longrightarrow \mathcal{N} \text{ , tal que :}$$

a todo $\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} n I_{\{\nu=n\}} \in \mathcal{T}_f$, le hace corresponder

$$\psi(\nu) = T_\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} T_n I_{\{\nu=n\}} .$$

Es evidente que ψ es exhaustiva, ya que dado $T\in\mathcal{N}$, $T = \sum_{n\in\mathbb{N}} T_n I_{A_n}$, basta con tomar $\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} n I_{A_n} \in \mathcal{T}_f$ y entonces $\psi(\nu) = T_\nu = T$.

En general no es inyectiva ya que la representación de los elementos de $\mathcal{N}$ en función del sistema de generadores $\{T_n, n\geq 1\}$, no es única, a menos que dicha sucesión sea estrictamente creciente. #

Sea $\mathcal{L}=\psi^{-1}(L)$. Observemos que la clase $\mathcal{L}$ cumple las propiedades (i)-(v) respecto a la sucesión $\{Z'_n, n \in \mathbb{N}\}$ y que contiene las constantes. Además, $T^* \in L$ es un tiempo de paro óptimo en la clase L respecto la sucesión $\{(\underline{\underline{F}}_n, Z_n), n \in \mathbb{N}\}$ si y solamente si, $T^*=\psi(\nu^*)$ con ν^* tiempo de paro óptimo en la clase $\mathcal{L}$, respecto la sucesión $\{(\underline{\underline{F}}'_n, Z'_n), n \in \mathbb{N}\}$. En efecto, basta con tener en cuenta que,

$$\sup_{T\in L} E[Z_T] = \sup_{\nu\in\mathcal{L}} E[Z_{T_\nu}] = \sup_{\nu\in\mathcal{L}} E[Z'_\nu].$$

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado,

Teorema 1.8.

Existe un tiempo de paro óptimo $T^* \in L$ respecto la sucesión $\{(F_n, Z_n), n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración.

Por la observación anterior, $\mathcal{L}$ verifica las hipótesis necesarias para aplicarle la teoría general (ver [45]) de parada óptima para procesos uniparamétricos a tiempo discreto. Por tanto, existe un tiempo de paro óptimo en la clase y de aquí resulta la afirmación. #

Observemos que utilizando las técnicas anteriores podemos construir el mínimo tiempo de paro óptimo de la clase L. En efecto, basta con aplicar los resultados de [45] a la clase $\mathcal{L}$ y transportarlos a L mediante la correspondencia ψ. Teniendo en cuenta que,

$$X(T_n) = \underset{S \geq T_n, S \in L}{\text{supess}} \; E(Z_S | \underline{\underline{F}}_{T_n}) =$$

$$= \underset{\nu_S \geq n, \nu_S \in \mathcal{L}}{\text{supess}} \; E(Z_{T_{\nu_S}} | \underline{\underline{F}}_{T_n}) = \underset{\nu \geq n, \nu \in \mathcal{L}}{\text{supess}} \; E(Z'_\nu | \underline{\underline{F}}'_n) = \bar{X}_n \; .$$

Teorema 1.9.

Dada la sucesión $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ y la familia $\{X(T), T \in L\}$ se verifica:

(i) $X(T_n) = \max[Z_{T_n}, E(X(T_{n+1}) | \underline{\underline{F}}_{T_n})]$, para todo n de $\mathbb{N}$.

(ii) $E(X(T_n)) = \underset{S \geq T_n, S \in L}{\sup} E(Z_S)$, para todo n de $\mathbb{N}$.

(iii) $\underset{n \to \infty}{\lim\sup} X(T_n) = \underset{n \to \infty}{\lim\sup} Z_{T_n}$. #

Teorema 1.10.

Sea $T_\infty = \sup_n T_n$.

El tiempo de paro definido por ,

$$T_{\nu_o} = \begin{cases} T_\infty \;, \text{ si } X(T_n) > Z_{T_n} \text{ para todo n de } \mathbb{N} , \\ \\ \inf \{T_n : X(T_n) = Z_{T_n}\} \;, \text{ en caso contrario,} \end{cases}$$

es el mínimo de los tiempos de paro óptimos en la clase L respecto la sucesión $\{(\underline{\underline{F}}_n, Z_n), n \in \mathbb{N}\}$ si y solo si $P\{T_{\nu_o} = T_\infty\} = 0$, (es decir, si $T_{\nu_o} \in L$). Además, para todo $\varepsilon > 0$ la expresión

$$T_{\nu_\varepsilon} = \inf \{T_n \geq T_o : X(T_n) < Z_{T_n} + \varepsilon\}$$

define un tiempo de paro tal que,

$$E(Z_{T_{\nu_\varepsilon}}) + \varepsilon \geq \sup_{S \in L} E(Z_S)$$

y le llamaremos *tiempo de paro* ε*-óptimo* en la clase L, respecto la sucesión $\{(\underline{\underline{F}}_n, Z_n), n \in \mathbb{N}\}$ si y solo si $P\{T_{\nu_\varepsilon} = T_\infty\} = 0$. #

Análogamente, se puede construir el máximo tiempo de paro óptimo.

Todos los resultados obtenidos, pueden extenderse de forma análoga, al caso de procesos con índices en $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, y trabajando con una clase de tiempos de paro no necesariamente finitos, verificando propiedades análogas a las propiedades (i)-(v), tomando como sistema de generadores $\{T_n, n \in \mathbb{N}; T_\infty\}$ con $T_\infty = \sup_n T_n$.

§2. Procesos con índice discreto y bidimensional.

Comenzamos introduciendo la noción de táctica, concepto básico en esta sección. Seguidamente planteamos el problema de parada óptima que nos preocupa y damos un criterio de optimalidad, así como la existencia de solución a dicho problema. Continuamos dando la forma explícita del mayor punto de paro óptimo, y finalizamos con ejemplos de clases de puntos de paro, a las que podemos aplicar toda la teoría expuesta a lo largo de esta sección.

2.1. Introducción. Noción de táctica y sus propiedades.

En esta sección $(\Omega,\underline{\underline{G}},P)$ es un espacio de probabilidad, y trabajamos con procesos a índices en $\mathbb{N}^2\cup\{\infty\}$, dotado de la relación de orden parcial usual:

$$z_1=(s_1,t_1)\in\mathbb{N}^2,\ z_2=(s_2,t_2)\in\mathbb{N}^2,\quad z_1\le z_2 \Longleftrightarrow s_1\le s_2 \text{ y } t_1\le t_2 .$$

La relación de orden parcial estricta asociada es:

$$z_1<z_2 \Longleftrightarrow s_1<s_2 \text{ y } t_1<t_2 .$$

Sea $\underline{\underline{F}}=(\underline{\underline{F}}_z, z\in\mathbb{N}^2\cup\{\infty\})$, con $\underline{\underline{F}}_\infty=\bigvee_z\underline{\underline{F}}_z$, una familia de sub-$\sigma$-álgebras de $\underline{\underline{G}}$ creciente, completa y verificando la propiedad siguiente:

las σ-álgebras $\underline{\underline{F}}^1_s=\bigvee_{r\in\mathbb{N}}\underline{\underline{F}}_{(s,r)}$ y $\underline{\underline{F}}^2_t=\bigvee_{r\in\mathbb{N}}\underline{\underline{F}}_{(r,t)}$ son condicionalmente independientes respecto la σ-álgebra $\underline{\underline{F}}_{(s,t)}$. Lo cual puede expresarse por:

$$E(E(\cdot|\underline{\underline{F}}_s^1)|\underline{\underline{F}}_t^2) = E(E(\cdot|\underline{\underline{F}}_t^2)|\underline{\underline{F}}_s^1) = E(\cdot|\underline{\underline{F}}_{(s,t)}).$$

Esta propiedad, se conoce con el nombre de propiedad F.4. (ver [10]) ó propiedad de independencia condicional.

<u>Definición 2.1.1.</u>

Una variable aleatoria T, a valores en $\mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}$, es un $\underline{\underline{F}}$-*punto de paro* si y sólo si $\{T=z\} \in \underline{\underline{F}}_z$, para todo z de $\mathbb{N}^2$.

Como en el caso unidimensional todo $\underline{\underline{F}}$-punto de paro T, tiene asociada una σ-álgebra $\underline{\underline{F}}_T$, definida por:

$$\underline{\underline{F}}_T = \{A \in \underline{\underline{G}} : A \cap \{T \leq z\} \in \underline{\underline{F}}_z , \forall z \in \mathbb{N}^2\} .$$

Respecto las propiedades de los $\underline{\underline{F}}$-puntos de paro (ver [35]), nos interesa recordar las siguientes: dados dos $\underline{\underline{F}}$-puntos de paro T,S diremos que $T \leq S$ si y sólo si $P\{T \leq S\}=1$. El supremo de dos $\underline{\underline{F}}$-puntos de paro, $S \vee T$ es también un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro, pero el ínfimo $S \wedge T$, no es en general un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro, ya que en general si $z \in \mathbb{N}^2$, no podemos asegurar que $\{z \leq T\} \in \underline{\underline{F}}_z$. Por lo tanto la noción de "pasado" de T definida por $\{(z,\omega): z \leq T(\omega)\}$ no es adecuada. Necesitamos pues introducir que entenderemos por "pasado" de un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro y por ínfimo de dos puntos de paro.

Para ello, dado un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro, vamos a construir sendas tácticas, en el sentido clásico (ver [50]), que pasen por él, y siguiendo las ideas de [21] para el caso continuo, definiremos el pasado de un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro, y el ínfimo de dos $\underline{\underline{F}}$-puntos de paro, estudiando sus propiedades.

<u>Definición 2.1.2.</u>

Diremos que la familia $\{U_p, p\in\mathbb{N}\}$ de variables aleatorias a valores en $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ es una *táctica* si

(i) $U_o = (o,o)$ y $U_p \leq U_{p+1}$, $\forall p\in\mathbb{N}$

(ii) U_p es un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro, $\forall p\in\mathbb{N}$

(iii) U_{p+1} es $\underline{\underline{F}}_{Z_p}$-medible, $\forall p\in\mathbb{N}$.

A continuación, dado un punto de paro Z construimos dos tácticas que pasan por él, utilizando una técnica similar a la utilizada por Walsh (ver [50]). Estas dos tácticas proporcionan cotas superior e inferior respectivamente para todas las tácticas que pasen por dicho punto, en el sentido de que cualquier otra táctica que pase por Z , está comprendida entre estas dos tácticas.

Dada una táctica $U=\{U_p, p\in\mathbb{N}\}$, representaremos por,

$\vec{U}=\{(\omega,(s,t))\in\Omega\times\mathbb{N}^2 : \exists U_p=(U_p^1,U_p^2), U_p^1\leq s, U_p^2\geq t\}$ y

$\overleftarrow{U}=\{(\omega,(s,t))\in\Omega\times\mathbb{N}^2 : \exists U_p=(U_p^1,U_p^2), U_p^1\geq s, U_p^2\leq t\}$.

Teorema 2.1.3.

Sea Z un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro. Existen dos tácticas Γ_Z y γ_Z, pasando por el punto Z, de forma que dada cualquier otra táctica U que pase por Z, se verifica: $\vec{U} \subset \vec{\Gamma}_Z$ y $\overleftarrow{U} \supset \overleftarrow{\gamma}_Z$.

Demostración.

Sea $Z=(S,T)$. Supongamos definida la táctica Γ_Z hasta el instante p. Ponemos $\Lambda_z=\{\Gamma_p=z\}$, con $z=(s,t) \in \mathbb{N}^2$ y $\Gamma_i \leq Z$, para todo $i \leq p$.

Sean los conjuntos, $A=\Lambda_z \cap \{Z=z\}$, $B=\Lambda_z \cap \{S>s, T \leq t\}$ y $C=\Lambda_z \cap \{S \leq s, T>t\}$.

Es evidente que son disjuntos, y que $B \in \underline{\underline{F}}^2_t$, ya que, $B=\Lambda_z \cap \Big(\bigcup_{\substack{a \geq s+1 \\ b \leq t}} \{Z=(a,b)\}\Big)$, $\Lambda_z \in \underline{\underline{F}}_z \subset \underline{\underline{F}}^2_t$ y $\{Z=(a,b)\} \in \underline{\underline{F}}^2_t$.

Analogamente, $C \in \underline{\underline{F}}^1_s$. Además por la propiedad F.4., $0=P(B \cap C | \underline{\underline{F}}_z)= =P(B|\underline{\underline{F}}_z)P(C|\underline{\underline{F}}_z)$, y $A \cap \{P(B|\underline{\underline{F}}_z)>0\} = \emptyset$ ya que $0=P(A \cap B|\underline{\underline{F}}_z)= =P(A|\underline{\underline{F}}_z)P(B|\underline{\underline{F}}_z)=I_A P(B|\underline{\underline{F}}_z)$.

Definamos,

$$\Gamma_{p+1} = \begin{cases} z, \text{ si } \omega \in A \\ \Gamma_p+(1,0), \text{ si } \omega \in B_o=\{P(B|\underline{\underline{F}}_z)>0\} \\ \Gamma_p+(0,1), \text{ si } \omega \in C_o=\Lambda_z \setminus A \cup B_o \end{cases}$$

Observemos que Γ_{p+1} es un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro, ya que, si $(u,v) \in \mathbb{N}^2$, con $(u,v) \in \{z, z+(0,1), z+(1,0)\}$ pues en caso contrario $\{\Gamma_{p+1} = (u,v)\} = \emptyset$, se tiene,

$\{\Gamma_{p+1}=(u,v)\}=$

$=(\{\Gamma_{p+1}=(u,v)\}\cap A)\cup(\{\Gamma_{p+1}=(u,v)\}\cap B_o)\cup(\{\Gamma_{p+1}=(u,v)\}\cap C_o)=$

$=(\{\Gamma_{p+1}=(u,v)\}\cap\{\Gamma_p=(u,v)\})\cup(\{\Gamma_p=(u-1,v)\}\cap\{\Gamma_p=z\}\cap B_o)\cup$

$\cup(\{\Gamma_p=(u,v-1)\}\cap\{\Gamma_p=z\}\cap C_o)\in \underline{\underline{F}}_{(u,v)}$.

Análogamente se demuestra que Γ_{p+1} es $\underline{\underline{F}}_{\Gamma_p}$-medible.

Veamos que $\Gamma_{p+1}\leq Z$. Sobre A es evidente. Sobre B_o,$P(C|\underline{\underline{F}}_z)=0$

es decir, $P(B_o\cap C)=0$, por tanto sobre B_o,$S>s$ ó $T\leq t$.

Si $\{S>s\}$ entonces $S\geq s+1$ y $\Gamma_{p+1}\leq Z$.

Sino $\{S\leq s,T\leq t\}$, por tanto $Z=z$, pero ésto está en contradicción con que estemos en B_o .

Sobre C_o, $P(B|\underline{\underline{F}}_z)=0$, es decir, $P(C_o\cap B)=0$, por tanto sobre C_o ocurre $S\leq s$ ó $T>t$.

Si $\{T>t\}$ entonces $T\geq t+1$ y $\Gamma_{p+1}=Z$.

Sino, $\{S\leq s,T\leq t\}$, por tanto $Z=z$, pero ésto está en contradicción con que estemos en C_o .

Como, $\Gamma_p\leq Z$, $\forall p$ y $\{\Gamma_{p+1}\neq\Gamma_p\}\neq\emptyset$ sobre $\{\Gamma_p\neq Z\}$, se tiene que $\{\Gamma_p\neq Z\}\xrightarrow[p\to\infty]{}\emptyset$ y por tanto la táctica Γ_Z pasa por el punto Z.

Análogamente, podemos construir otra táctica γ_Z que pase por el punto Z, de la forma siguiente, si $\Lambda'_z=\{\gamma_p=z\}$ y $C'=\Lambda'_z\cap\{S\leq s,T>t\}$, definiremos

$$\gamma_{p+1} = \begin{cases} z \text{ si } \omega \in \Lambda'_z \cap \{Z=z\} = A' \\ \\ \gamma_p + (0,1) \text{ si } \omega \in \{P(C'|\underline{\underline{F}}_z)>0\} = C'_o \\ \\ \gamma_p + (1,0) \text{ si } \omega \in \Lambda'_z \setminus A' \cup C'_o \end{cases}$$

Observemos que por construcción la táctica γ_Z está contenida en $\vec{\Gamma}_Z$.

Si $z=(s,t) \in \mathbb{N}^2$, se cumplen las siguientes propiedades,

$$I_{(\vec{\Gamma}_Z)^c}(z) \cdot P\left[T<t, S>s \,|\, \underline{\underline{F}}_{(s,t)}\right]>0 \quad \text{y}$$

$$I_{(\overleftarrow{\Gamma}_Z)^c}(z) \cdot P\left[T\leq t, S>s \,|\, \underline{\underline{F}}_{(s,t)}\right]=0$$

En efecto,

$\{z \in (\vec{\Gamma}_Z)^c\} = \bigcup_p \bigcup_{i=o}^{t-1} (\{\Gamma_p^1=s, \Gamma_p^2=i\})$ y siempre podemos tomar $p_o; i_o \in \{0,\dots,t-1\}$, de forma que,

$$\Gamma_{p_o} = (s,i_o) \text{ y } P\left[\{\Gamma_{p_o}=(s,i_o)\} \cap \{T\leq i_o, S>s\} \,|\, \underline{\underline{F}}_{(s,i_o)}\right]>0$$

por construcción de la táctica Γ_Z .

Sea $M_o = \{P\left[\{\Gamma_{p_o}=(s,i_o)\} \cap \{T\leq i_o, S>s\} \,|\, \underline{\underline{F}}_{(s,i_o)}\right]>0\}$, entonces

$$I_{(\vec{\Gamma}_Z)^c}(z) \cdot P\left[T<t, S>s \,|\, \underline{\underline{F}}_{(s,t)}\right] =$$

$$= I_{\{\Gamma_{p_o}=(s,i_o) \cap M_o\}}(z) \cdot P\left[T<t, S>s \,|\, \underline{\underline{F}}_{(s,t)}\right] =$$

$$= I_{M_o} \cdot P\left[\{\Gamma_{p_o}=(s,i_o)\} \cap \{T\leq t-1, S>s\} \,|\, \underline{\underline{F}}_{(s,t)}\right] \cdot$$

Si valiera cero, condicionando respecto $\underline{\underline{F}}_{(s,t-1)}$ como $M_o \in \underline{\underline{F}}_{(s,t-1)}$ tendríamos :

$$I_{M_o} \cdot P\left[\{\Gamma_{p_o}=(s,i_o)\} \cap \{T\leq t-1, S>s\} \mid \underline{\underline{F}}_{(s,t-1)}\right] = 0$$

pero como para s fijo, $P\left[T\leq t, S>s \mid \underline{\underline{F}}_{(s,t)}\right]$ crece respecto t, llegamos a una contradicción.

Comprobemos ahora que dado $z=(s,t)$,

$$I_{(\overleftarrow{\Gamma}_Z)^c}(z)\ P\left[T\leq t, S>s \mid \underline{\underline{F}}_{(s,t)}\right] = 0 \ .$$

Se tiene que, $\{z \in (\overleftarrow{\Gamma}_Z)^c\} = \bigcup_p \bigcup_{j=o}^{s-1} (\Gamma_p^1=j, \Gamma_p^2=t)$

y siempre podemos tomar $p_1 \in \mathbb{N}$, $j_1 \in \{0,\dots,s-1\}$, por construcción de la táctica Γ_Z , de forma que,

$$\Gamma_{p_1} = (j_1,t) \text{ y } P\left[\{\Gamma_{p_1}=(j_1,t)\} \cap \{T\leq t, S>j_1\} \mid \underline{\underline{F}}_{(j_1,t)}\right] = 0$$

Sea $M_1 = \{P\left[\{\Gamma_{p_1}=(j_1,t)\} \cap \{T\leq t, S>j_1\} \mid \underline{\underline{F}}_{(j_1,t)}\right] = 0\}$

Se tiene,

$$I_{(\overleftarrow{\Gamma}_Z)^c}(z) \cdot P\left[T\leq t, S>s \mid \underline{\underline{F}}_{(j_1,t)}\right] =$$

$$= I_{\{\Gamma_{p_1}=(j_1,t)\} \cap M_1} P\left[T\leq t, S>s \mid \underline{\underline{F}}_{(j_1,t)}\right] =$$

$$= I_{M_1} P\left[\{\Gamma_{p_1}=(j_1,t)\} \cap \{T\leq t, S>s\} \mid \underline{\underline{F}}_{(j_1,t)}\right] = 0$$

y como

$$I_{M_1}(z)\cdot P\left[T\leq t, S>s \mid \underline{\underline{F}}_{(j_1,t)}\right] =$$

$$= E\left[I_{M_1}(z)\cdot P\left[T\leq t, S>s \mid \underline{\underline{F}}_{(s,t)}\right] \mid \underline{\underline{F}}_{(j_1,t)}\right]$$

con lo cual

$$I_{(\overset{\rightarrow}{\Gamma}_Z)^c}(z)\; P\left[T\leq t, S>s \mid \underline{\underline{F}}_{(s,t)}\right] = I_{M_1}\cdot P\left[T\leq t, S>s \mid \underline{\underline{F}}_{(s,t)}\right] = 0 \;.$$

De igual forma se demuestran las siguientes propiedades análogas para la táctica γ_Z .

Si $z = (s,t) \in \mathbb{N}^2$,

$$I_{(\overset{\rightarrow}{\gamma}_Z)^c}(z)\; P\left[T>t, S<s \mid \underline{\underline{F}}_{(s,t)}\right] > 0 \;, \qquad y$$

$$I_{(\overset{\leftarrow}{\gamma}_Z)^c}(z)\; P\left[T>t, S\leq s \mid \underline{\underline{F}}_{(s,t)}\right] = 0 \;.$$

Para finalizar, sea U una táctica que pasa por el punto Z, entonces $\vec{U} \subset \overset{\rightarrow}{\Gamma}_Z$. En efecto, fijemos $z = (s,t) \in \mathbb{N}^2$ y sea

$$A = \{\omega \in \Omega : z \in [(\overset{\rightarrow}{\Gamma}_Z \cup \vec{U}) \cap \overset{\rightarrow}{\Gamma}_Z{}^c](\omega)\}.$$

Como $A \in \underline{\underline{F}}_Z$, $I_A\cdot P\left[S>s, T<t \mid \underline{\underline{F}}_Z\right] = P\left[A \cap \{S>s, T<t\} \mid \underline{\underline{F}}_Z\right]$.

Pero $A \cap \{S>s,T<t\} = \emptyset$ ya que $(\overset{\rightarrow}{\Gamma}_Z \cup \vec{U}) \cap \{S>s,T<t\}=\emptyset$ y por otra parte, hemos visto que en $(\overset{\rightarrow}{\Gamma}_Z)^c$, $P\left[S>s,T<t \mid \underline{\underline{F}}_Z\right]>0$ por lo tanto $P(A)=0$, y de ahí resulta el aserto. De forma análoga se obtiene $\overset{\leftarrow}{U} \supset \overset{\leftarrow}{\gamma}_Z$. #

Este teorema justifica la siguiente

Definición 2.1.4.

Dado un punto de paro Z, llamaremos *pasado de* Z al conjunto, $P_Z=\vec{\Gamma}_Z \cap \overleftarrow{\gamma}_Z$.

Observemos que, $\{z \in P_Z\} \in \underline{\underline{F}}_z$ y que si Z_1 y Z_2 son dos puntos de paro con $Z_1 \leq Z_2$ entonces $P_{Z_1} \subset P_{Z_2}$.

Definición 2.1.5.

Dados dos puntos de paro Z_1,Z_2, llamaremos *ínfimo de* Z_1 y Z_2 y lo notaremos $Z_1 \dot{\wedge} Z_2$, al punto de paro definido por,

$$Z_1 \dot{\wedge} Z_2 = \max\{z \in \mathbb{N}^2 : z \in P_{Z_1} \cap P_{Z_2}\} .$$

Es inmediato comprobar a partir de la definición y del teorema 1.2.3. que,

(i) Si $Z_1 \leq Z_2$ entonces $Z_1 \dot{\wedge} Z_2 = Z_1$.

(ii) $P_{Z_1 \dot{\wedge} Z_2} = P_{Z_1} \cap P_{Z_2}$.

(iii) $Z_1 \dot{\wedge} Z_2$ es el mayor punto de paro menor ó igual que Z_1 y Z_2 . En efecto, sea Z_3 un punto de paro con $Z_3 \leq Z_1$ y $Z_3 \leq Z_2$. Entonces $Z_3=Z_3 \dot{\wedge} Z_3=(Z_3 \dot{\wedge} Z_1) \dot{\wedge} (Z_3 \dot{\wedge} Z_2)=(Z_3 \dot{\wedge}(Z_1 \dot{\wedge} Z_2)$ por la definición de ínfimo, y por tanto $Z_3 \leq Z_1 \dot{\wedge} Z_2$.

Teorema 2.1.6.

Sea Z un punto de paro y sea $z \in \mathbb{N}^2$, entonces $\underline{\underline{F}}_{Z \dot{\wedge} z} = \underline{\underline{F}}_Z \cap \underline{\underline{F}}_z$.

Demostración.

Análoga a la de la proposición 9 de [21]. #

2.2. Problema de parada óptima. Criterio de optimalidad. Existencia de soluciones.

A continuación planteamos un problema de parada óptima sobre una clase particular de puntos de paro, análogo al planteado en dimensión uno. Damos un criterio de optimalidad, y mediante una técnica de cambio de tiempo demostramos la existencia de solución al problema de parada óptima que nos ocupa.

Representaremos por L la clase de puntos de paro finitos ó no finitos, con la que trabajaremos. Sea $Y=(Y_z, z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\})$ un proceso no negativo, $\underline{\underline{F}}$-adaptado y tal que la familia de variables aleatorias $\{Y_T, T \in L\}$ es uniformemente integrable.

El problema de parada óptima que nos ocupa, consiste en encontrar $T^*, T^* \in L$, tal que:

$$E(Y_{T^*}) = \sup_{T \in L} E(Y_T)$$

y diremos que T^* es un *punto de paro óptimo* en la clase L, respecto la sucesión $\{(\underline{\underline{F}}_z, Y_z), z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}\}$.

Como en el caso unidimensional, supondremos que la clase L verifica las propiedades siguientes:

(i) $\forall T \in L$, la familia de variables aleatorias $\{E(Y_S | \underline{\underline{F}}_T), S \in L, S \geq T\}$ es filtrante creciente.

(ii) La clase L es cerrada para supremos finitos.

(iii) La clase L es cerrada para ínfimos, en el sentido de la definición 2.1.5., finitos.

(iv) La clase L admite un sistema de generadores, es decir, existe una sucesión creciente $(T_z, z \in \mathbb{N}^2 ; T_\infty)$ de puntos de paro de L con $T_\infty = \sup_{z \in \mathbb{N}^2} T_z$, y tales que, un punto de paro T es de la clase L, si y sólo si T admite una expresión del tipo $T = \sum_{z \in \mathbb{N}^2} T_z I_{A_z} + T_\infty I_{A_\infty}$, donde $A_z \in \underline{\underline{F}}_{T_z}$ para todo $z \in \mathbb{N}^2$ y $A_\infty \in \underline{\underline{F}}_{T_\infty}$, siendo dos a dos disjuntos. Además, este sistema de generadores debe ser tal que la filtración $(\underline{\underline{F}}_{T_z}, z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\})$ verifique la propiedad F.4.; observemos que es creciente por serlo el sistema de generadores y que siempre la podemos suponer completa. Además exigiremos que el proceso Y verifique:

$$Y_{T_\infty} \geq \limsup_{z \in \mathbb{N}^2} Y_{T_z} .$$

<u>Definición 2.2.1.</u>

Llamaremos *sistema de ganancias condicionales* asociado al proceso Y a la familia de variables aleatorias $\{J(T), T \in L\}$ definida por:

$$\forall T \in L, J(T) = \text{supess}\{E(Y_S | \underline{\underline{F}}_T), S \in L, S \geq T\} .$$

Observemos que $\{J(T), T \in L\}$ es uniformemente integrable por serlo $\{Y_T, T \in L\}$.

A continuación enunciamos unas definiciones y resultados análogos a los dados en el caso unidimensional.

<u>Definición 2.2.2.</u>

Una familia $X = (X_T, T \in L)$ es una L-*supermartingala sistema* si verifica:

(i) $\forall S,T \in L$, $X_T = X_S$ sobre $\{T=S\}$.

(ii) $\forall T \in L$, X_T es integrable y $\underline{\underline{F}}_T$-medible.

(iii) $\forall S,T \in L, S \leq T$, $E(X_T | \underline{\underline{F}}_S) \leq X_S$.

<u>Teorema 2.2.3.</u> ([20], teorema 2.12.1.)

El sistema de ganancias condicionales $\{J(T), T \in L\}$ de Y verifica:

(i) $J(\infty) = Y_\infty$.

(ii) Es la menor L-supermartingala sistema que mayora a $\{Y_T, T \in L\}$. #

<u>Teorema 2.2.4.</u> ([20], teorema 2.12.1.)

Un $T^* \in L$ es óptimo en la clase L, respecto la sucesión

$\{(\underline{\underline{F}}_z, Y_z), z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}\}$ si y sólo si verifica las condiciones siguientes:

(i) $J(T^*) = Y_{T^*}$, casi-seguramente.

(ii) $\forall T \in L$, $E(J(T^*)) = E(J(T \wedge T^*))$. #

Observemos que gracias a la existencia de un sistema de generadores en la clase L, el teorema anterior da lugar al siguiente:

Teorema 2.2.5.

Un $T^* \in L$ es óptimo en L respecto la sucesión $\{(\underline{\underline{F}}_z, Y_z), z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}\}$, si y sólo si se verifica:

(i) $J(T^*) = Y_{T^*}$, casi-seguramente.

(ii) $E(J(T^*)) = E(J(T_{(o,o)}))$.

Demostración.

De la propiedad de crecimiento del sistema de generadores, y del caracter de supermartingala del sistema de ganancias condicionales, resulta la afirmación. #

Para demostrar la existencia de un punto de paro óptimo en la clase L respecto a la sucesión antes introducida $\{(\underline{\underline{F}}_z, Y_z), z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}\}$, y construir un tal punto de paro, utilizamos una técnica de cambio de tiempo análoga a la utilizada en el caso unidimensional. Es decir, demostramos que la clase L está en correspondencia con una cierta clase de puntos de paro $\mathcal{L}$, finitos ó no finitos, la cual verifica las mismas propiedades que la clase L y además contiene las constantes. Aplicando a $\mathcal{L}$ la teoría general de parada óptima para procesos bidimensionales a tiempo discreto (ver [35]) obtenemos la existencia de un punto de paro óptimo en la clase $\mathcal{L}$ respecto una cierta sucesión que determinaremos, el cual está en correspondencia con un punto de paro de la clase L, que es un punto de paro óptimo en la clase L respecto la sucesión $\{(\underline{\underline{F}}_z, Y_z), z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}\}$.

Consideremos pues la nueva filtración, $\underline{\underline{F}}' = \{\underline{\underline{F}}'=\underline{\underline{F}}_{T_z}, z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}\}$ y el proceso $Y' = (Y'_z = Y_{T_z}, z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\})$, donde $\{T_z, z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}\}$ es el sistema de generadores de la clase L. Observemos que $\underline{\underline{F}}'$ es creciente, completa y cumple la propiedad F.4., y que el proceso Y' es no negativo y $\underline{\underline{F}}'$-adaptado.

Representaremos por $\mathcal{T}$ la clase de los $\underline{\underline{F}}'$-puntos de paro finitos ó no finitos, y por $\mathcal{V}$ la clase de todos los puntos de paro generados por el sistema $\{T_z, z \in \mathbb{N}^2 ; T_\infty\}$.

Estamos en condiciones de enunciar los siguientes resultados, cuya demostración suprimimos por ser análoga a la de los resultados equivalentes en el caso unidimensional.

Proposición 2.2.6.

Existe una aplicación ψ exhaustiva y creciente, en general no inyectiva entre $\mathcal{T}$ y $\mathcal{V}$. #

Sea $\mathcal{L} = \psi^{-1}(L)$, como en el caso unidimensional, $T^* \in L$ es un punto de paro óptimo en la clase L respecto la sucesión $\{(\underline{\underline{F}}_z, Y_z), z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}\}$ si y sólo si $T^* = \psi(\nu^*)$ con ν^* punto de paro óptimo en la clase $\mathcal{L}$ respecto $\{(\underline{\underline{F}}'_z, Y'_z), z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}\}$. Y podemos enunciar el siguiente

Teorema 2.2.7.

Existe un punto de paro óptimo $T^* \in L$ respecto la sucesión $\{(\underline{\underline{F}}_z, Y_z), z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}\}$. #

Es importante observar que $\{Y'_\nu, \nu \in \mathcal{L}\}$ es uniformemente integrable, así como que si $\{J(\nu), \nu \in \mathcal{L}\}$ es el proceso de ganancias condicionales asociado al proceso Y', como la clase $\mathcal{L}$ contiene las constantes, existe un único proceso J, llamado *envoltura de Snell* del proceso Y' tal que para todo $\nu \in \mathcal{L}$, $J(\nu) = J_\nu$ c.s. . Además gracias a la correspondencia ψ se tiene,

$$J(T_z) = \operatorname*{supess}_{S \geq T_z, S \in L} E(Y_S | \underline{\underline{F}}_{T_z}) =$$

$$= \operatorname*{supess}_{\nu \geq z, \nu \in \mathcal{L}} E(Y'_\nu | \underline{\underline{F}}'_z) = J_z,$$

y, de forma análoga, $J(T_\infty) = J_\infty$.

La forma explícita de un punto de paro óptimo de la clase L , respecto $\{(Y_z,\underline{\underline{F}}_z), z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}\}$ viene dado por el siguiente

Teorema 2.2.8.

El punto de paro definido por $T^* = Z_\tau$ donde $(Z_p, p \in \mathbb{N})$ es la táctica dada por

$$Z_o = T_{(o,o)} \quad ; \quad Z_\infty = T_\infty \qquad \text{y para todo } p \in \mathbb{N} ,$$

para todo $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{N}^2$ con $z_1+z_2 = p$,

$$Z_{p+1} = T_{z+(1,o)} \text{ sobre } \{Z_p=T_z\} \cap \{J(T_z)>E(J(T_{z+(o,1)})|\underline{\underline{F}}_{T_z})\}.$$

$$Z_{p+1} = T_{z+(o,1)} \text{ sobre } \{Z_p=T_z\} \cap \{J(T_z)=E(J(T_{z+(o,1)})|\underline{\underline{F}}_{T_z})\}$$

y $\quad \tau = \inf\{p \in \mathbb{N} , J(Z_p)>E(J(Z_{p+1})|\underline{\underline{F}}_{T_{Z_p}})\}$

es un punto de paro óptimo de la clase L respecto $\{(Y_z,\underline{\underline{F}}_z), z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}\}$. #

2.3. Tres clases de puntos de paro.

Para concluir el capítulo, daremos tres clases de $\underline{\underline{F}}$-puntos de paro, que verifican las propiedades exigidas a la clase L .

Sea $Y = \{Y_z, z \in \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}\}$ un proceso no negativo, $\underline{\underline{F}}$-adaptado y uniformemente integrable.

Sean L^1, L^2 y L^3, las clases de $\underline{\underline{F}}$-puntos de paro definidas respectivamente por,

$$L^1 = \{R, \underline{\underline{F}}\text{-punto de paro} : R \geq T\} ,$$

$$L^2 = \{R, \underline{\underline{F}}\text{-punto de paro} : R \leq S\} ,$$

$$L^3 = \{R, \underline{\underline{F}}\text{-punto de paro} : T \leq R \leq S\} ,$$

siendo S,T dos $\underline{\underline{F}}$-puntos de paro, con $T \leq S$.

Tomemos como sistema de generadores respectivamente, los siguientes:

$$T^1_z = z \vee T \text{ , para todo } z \in \mathbb{N}^2 ,$$

$$T^2_z = z \dot{\wedge} S \text{ , para todo } z \in \mathbb{N}^2 ,$$

$$T^3_z = (z \vee T) \dot{\wedge} S, \text{ para todo } z \in \mathbb{N}^2 .$$

Es evidente que estas tres clases verifican :

(i) $\forall T \in L^i$, la familia $\{E(Y_S | \underline{\underline{F}}_T), S \geq T, S \in L^i\}$ es filtrante creciente, $i \in \{1,2,3\}$.

(ii) Son cerradas por supremos e ínfimos, en el sentido de la definición 2.1.5., finitos.

(iii) Para las clases L^2 y L^3 es evidente que $Y_{T_\infty} \geq \limsup_{z \to \infty} Y_{T_z}$, ya que, para todo ω, $(z \dot{\wedge} S)(\omega) = S(\omega)$ y $((z \vee T) \dot{\wedge} S)(\omega) = S(\omega)$, si $z \geq S(\omega)$. Para que la clase L^1 también lo verifique es necesario imponer la condición $Y_\infty \geq \limsup_{z \to \infty} Y_z$.

Por tanto lo único que nos falta comprobar es que las filtraciones

$$\underline{\underline{F}}^1 = \{\underline{\underline{F}}_{T\vee z}, z\} \ , \ \underline{\underline{F}}^2 = \{\underline{\underline{F}}_{S\dot{\wedge} z}, z\} \ \text{y} \ \underline{\underline{F}}^3 = \{\underline{\underline{F}}_{(T\vee z)\dot{\wedge} S}, z\}$$

verifican la propiedad F.4., ya que crecientes y completas lo son por serlo $\underline{\underline{F}}$.

<u>Teorema 2.3.1.</u> ([21], proposición 13).
Si $\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{N}^2)$ satisface la propiedad F.4., y Z es un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro, entonces la filtración $(\underline{\underline{F}}_{Z\dot{\wedge} z}, z \in \mathbb{N}^2)$ también satisface la propiedad F.4.. #

<u>Teorema 2.3.2.</u>
En las condiciones del teorema anterior, la filtración $(\underline{\underline{F}}_{Z\vee z}, z \in \mathbb{N}^2)$ satisface la propiedad F.4..

<u>Demostración.</u>
Sean $u,v \in \mathbb{N}$, y sea $z = (s,t) \in \mathbb{N}^2$. Consideremos los puntos de paro siguientes : $U_1 = Z\vee(s,t+v)$, $U_2 = Z\vee(s+u,t)$.
Debemos demostrar que $\underline{\underline{F}}_{U_1}$, $\underline{\underline{F}}_{U_2}$ son condicionalmente independientes respecto $\underline{\underline{F}}_{Z\vee z}$, es decir, que para toda variable aleatoria X ,

$$E[E(X|\underline{\underline{F}}_{U_2})|\underline{\underline{F}}_{U_1}] = E[E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})|\underline{\underline{F}}_{U_2}] = E(X|\underline{\underline{F}}_{Z\vee z}).$$

Demostraremos la última igualdad. La otra se demuestra de forma análoga.

Es decir, debemos comprobar que,

$$\forall A \in \underline{\underline{F}}_{U_2} \ , \ E[I_A \cdot E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})] = E[I_A E(X|\underline{\underline{F}}_{Z\vee z})] \ .$$

Si fijamos $r \in \mathbb{N}^2$, por ser Z punto de paro, el conjunto $\{Z=r\} \in \underline{\underline{F}}_Z$ y como $Z \leq U_1$ y $Z \leq U_2$ también se tiene $\{Z=r\} \in \underline{\underline{F}}_{U_1}$ y $\{Z=r\} \in \underline{\underline{F}}_{U_2}$. Podemos escribir,

$$E(I_A \cdot E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})) = \sum_{r\in\mathbb{N}^2} E(I_A \cdot I_{\{Z=r\}} \cdot E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \sum_{r\in A_i} E(I_A \ I_{\{Z=r\}} \cdot E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})) \ , \text{ donde}$$

$$A_1 = \{(r_1,r_2) \in \mathbb{N}^2 : (r_1,r_2) \geq (s+u,t+v)\} \ ,$$

$$A_2 = \{(r_1,r_2) \in \mathbb{N}^2 : r_1 > s+u \ , \ r_2 < t+v\} \ ,$$

$$A_3 = \{(r_1,r_2) \in \mathbb{N}^2 : r_1 < s+u \ , \ r_2 > t+v\} \ ,$$

$$A_4 = \{(r_1,r_2) \in \mathbb{N}^2 : (r_1,r_2) \leq (s+u,t+v)\} \ .$$

Estudiaremos cada uno de estos sumandos.

(i) Para i=1,3 , $\sum_{r\in A_i} E[I_A \ I_{\{Z=r\}} E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})]$ coincide con $\sum_{r\in A_i} E[I_A \ I_{\{Z=r\}} E(X|\underline{\underline{F}}_{Z\vee z})]$, ya que en estas regiones $U_1 = Z\vee z$.

(ii) En la región A_2 se verifica,

$$\sum_{r\in A_2} E[I_A\cdot I_{\{Z=r\}} E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})] = \sum_{r\in A_2} E[E(I_A\ I_{\{Z=r\}}E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})|\underline{\underline{F}}_{U_2})], (1.1.)$$

Como A y $\{Z=r\}$ son $\underline{\underline{F}}_{U_2}$-medibles, (1.1.) coincide con

$$\sum_{r\in A_2} E[I_A\ I_{\{Z=r\}} E(E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})|\underline{\underline{F}}_{U_2})]$$, y como sobre A_2 ,

$U_2 = Z\vee z \leq U_1$, se tiene finalmente,

$$\sum_{r\in A_2} E[I_A\ I_{\{Z=r\}}\cdot E(X|\underline{\underline{F}}_{U_2})] .$$

(iii) Por último, sea $r\in A_4$. Sobre $\{Z=r\}$ se verifica,

$Z\vee z = (Z\vee z)\ \dot{\wedge}\ (s+u,t+v) =$

$= ([(Z\vee z)\ \dot{\wedge}\ (s+u,t+v)]_1\ ,\ [(Z\vee z)\ \dot{\wedge}\ (s+u,t+v)]_2)$.

Para simplificar la notación, escribiremos :

$F^1 = \underline{\underline{F}}_{\infty,[(Z\vee z)\dot{\wedge}(s+u,t+v)]_2}$

$F^2 = \underline{\underline{F}}_{[(Z\vee z)\dot{\wedge}(s+u,t+v)]_1,\infty}$, y se verifica.

$E[I_A\ I_{\{Z=r\}}E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})] =$

$= E[E(I_A\ I_{\{Z=r\}}E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})|F^1)]$; como A y $\{Z=r\}$ son $\underline{\underline{F}}_{U_2}$-medibles,

coincide con $E[I_A I_{\{Z=r\}}E(E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})|F^1)] =$

$= E[I_A\cdot I_{\{Z=r\}}E(E(E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})|F^2)|F^1)]$; aplicando el teorema anterior a la filtración $(\underline{\underline{F}}_{(Z\vee z)\dot{\wedge}m}, m\in \mathbb{N}^2)$, lo anterior coincide con, $E[I_A\ I_{\{Z=r\}}E(E(X|\underline{\underline{F}}_{U_1})|\underline{\underline{F}}_{Z\vee z})]$, y como sobre A_4 ,

$Z \vee z \leq U_1$, ya tenemos que coincide con

$E[I_A \, I_{\{Z=r\}} \cdot E(X|\underline{\underline{F}}_{Z\vee z})]$. #

Teorema 2.2.3.

Si $\underline{\underline{F}}$ es una filtración que verifica la propiedad F.4. y S,R son dos $\underline{\underline{F}}$-puntos de paro con $S \leq R$, entonces la filtración $\{\underline{\underline{F}}_{(S\vee z)\dot{\wedge} R}\ ,\ z \in \mathbb{N}^2\}$ también verifica la propiedad F.4.

Demostración.

Es una consecuencia directa de los dos teoremas anteriores. #

CAPITULO II

VARIABLES ALEATORIAS "FLOUES". RELACION CON EL PROBLEMA DE PARADA OPTIMA.

En este capítulo trabajamos con un espacio $(\Omega,\underline{\underline{G}},P)$ de probabilidad completo y con el espacio de parámetros $K=\overline{\mathbb{R}^n_+}$. Iniciamos el capítulo caracterizando los procesos crecientes que toman valores en $\{0,1\}$ c.s.. A continuación introducimos las llamadas variables aleatorias "floues", es decir el conjunto U de probabilidades sobre Ω x K tales que su proyección sobre Ω es P. Definimos la tribu opcional y el operador de proyección opcional $P_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}}$ sobre Ω x K , con n=1,2. Seguidamente, para n=1, demostramos que los tiempos de paro son los elementos extremales del conjunto U_a de variables aleatorias "floues" adaptadas, y relacionamos el conjunto U_a con el problema de parada óptima. Para n=2. demostramos que los puntos de paro coinciden con los elementos de la intersección $U \cap \mathrm{Ext}[P_0(U)]$.

Sea $(\Omega,\underline{\underline{G}},P)$ un espacio de probabilidad completo.

Supongamos primero que el conjunto de índices es $\overline{\mathbb{R}^n_+} = \mathbb{R}^n_+ \cup \{\infty\}$ con la relación de orden parcial usual, es decir, dados $z_1 = (s_1,\ldots s_n)$ y $z_2 = (t_1,\ldots,t_n) \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$

$$z_1 \leq z_2 \iff s_i \leq t_i \text{ para todo } i \in \{1,..,n\}\ .$$

La relación de orden parcial estricta es

$$z_1 < z_2 \iff s_i < t_i \text{ para todo } i \in \{1,..,n\}\ .$$

Sea $\underline{\underline{F}} = \{\underline{\underline{F}}_z, z \in \overline{\mathbb{R}^n_+}\}$, $\underline{\underline{F}}_\infty = \bigvee_z \underline{\underline{F}}_z$ una filtración completa, creciente continua por la derecha, es decir $\forall\, z \in \mathbb{R}^n_+$ se cumple : $\underline{\underline{F}}_z = \bigcap_{z'>z} \underline{\underline{F}}_{z'}$. En el caso n=2 exigiremos que la filtración cumpla la propiedad F.4., es decir que para todo $z=(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$, las σ-álgebras $\underline{\underline{F}}_{s\infty} = \bigvee_v \underline{\underline{F}}_{(s,v)}$ y $F_{\infty,t} = \bigvee_u \underline{\underline{F}}_{(u,t)}$ son condicionalmente independientes respecto $\underline{\underline{F}}_z$.

Definición 2.1.

Una variable aleatoria T a valores en $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ es un $\underline{\underline{F}}$-*punto de paro* si y sólo si para todo z de $\mathbb{R}^n_+$, $\{T \leq z\} \in \underline{\underline{F}}_z$.

En este capítulo utilizaremos únicamente la noción de $\underline{\underline{F}}$-punto de paro, sin adentrarnos en las propiedades y características de los mismos, que pueden ser consultadas en [35].

Definición 2.2.

Un proceso $A = (A_z, z \in \overline{\mathbb{R}^n_+})$ es *creciente* si es nulo sobre los ejes y para todo $\omega \in \Omega$ la aplicación $z \longrightarrow A_z(\omega)$ es la función de distribución de una medida positiva, finita $A(\omega,dz)$ sobre los borelianos de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, es decir,

$$A_z(\omega) = A(\omega,[o,z]) \ .$$

Observemos que un tal proceso es creciente según el orden parcial de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$. Además es continuo por la derecha, es decir, $\lim_{\substack{z'\to z \\ z'\geq z}} A_{z'} = A_z$.

Para procesos crecientes se verifica el siguiente

Teorema 2.3.

Sea $A = \{A_z, z \in \overline{\mathbb{R}^n_+}\}$ un proceso creciente con $A_\infty \equiv 1$ y $\underline{\underline{F}}$-adaptado, es decir, para todo z de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, A_z es $\underline{\underline{F}}_z$-medible. En estas condiciones se verifica :

El proceso A toma valores en $\{o,1\}$ c.s., si y sólo si es de la forma $A_z = I_{[T,\infty]}(z)$ c.s. siendo T un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro.

Demostración.

Sea $\omega \in \Omega$. Sabemos que la medida $A(\omega,dz)$ sólo toma valores en $\{o,1\}$. Haremos la demostración por inducción sobre n. Para n=1 es evidente. Supongámoslo cierto hasta dimensiones menores ó iguales que n-1. Si para todo z de $\mathbb{R}^n_+$ con $z\neq\infty$, $A(\omega,[o,z])=0$, como $A_\infty \equiv 1$ debe ser $A(\omega,dz)$ una medida de Dirac en el infinito. Sino, existirá $z = (z_1,\dots,z_n) \neq \infty$ con $A(\omega,[o,z]) = 1$.

A partir de ahora trabajaremos en $[o,z]$. Fijemos una de las direcciones, por ejemplo x_1.

Consideremos los paralelepípedos $\mathcal{T}_a = \{o \leq x_1 \leq a\}$, $a \in [o,z_1]$. Observemos que si a tiende hacia z_1, los paralelepípedos $\mathcal{T}_a$ convergen hacia $[o,z]$. Como $A(\omega,dz)$ toma valores en $\{o,1\}$, existen $a \in \mathbb{R}_+$, $o \leq a \leq z_1$ tales que $A(\omega, \mathcal{T}_a) = 1$. Sea a_1 el menor de ellos. Consideremos ahora una nueva medida $\bar{A}(\omega,dz)$ sobre $[o,z_2]x \dots x[o,z_n]$ definida de la forma siguiente, $\bar{A}(\omega,B) = A(\omega,[o,a_1]xB)$, con $B \in \mathcal{B}_{[o,z_2]x\dots x[o,z_n]}$

$\bar{A}(\omega,dz)$ sólo toma valores en $\{o,1\}$ y por hipótesis de inducción debe ser una medida de Dirac en un punto $(a_2,\dots,a_n) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$. Pero por definición de $\bar{A}(\omega,dz)$ ésto nos dice que $A(\omega,dz)$ es una medida de Dirac en el punto $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Es decir ω-c.s., $A(\omega,dz)$ es una medida de Dirac en un punto a_ω, por tanto $A_z(\omega)$ es de la forma $I_{[T,\infty]}(z)$ siendo $T(\omega) = a_\omega$, que es un punto de paro, por ser A adaptado.

§1. Variables aleatorias "floues".

Representamos por C el conjunto de los procesos continuos $X = (X_z, z \in K=\overline{\mathbb{R}_+^n})$, tales que $E(\sup_z |X_z|) < \infty$, con la norma siguiente:

$$||X|| = E(\sup_z |X_z|)$$

Es conocido que $(C, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach. C' representa el dual topológico de C, con la topología débil, es decir, la topología menos fina respecto a la cual, para cada $X \in C$, las funciones

$$\begin{array}{ccc} C' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(X) \end{array}$$

son continuas. Con esta topología C' es un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo.

Siguiendo la notación de [42], tenemos la siguiente

Definición 2.1.1.

Diremos que μ es una *variable aleatoria "floue"* si es una medida sobre Ω x K tal que su proyección sobre Ω es P y $\mu(\Omega x E_o) = 0$ con $E_o = \{(x_1,\ldots,x_n) \in K \ , \ \exists\, i \in \{1,\ldots,n\}, x_i=0\}$.

Representaremos por U el conjunto de las variables aleatorias "floues". Para toda $\mu \in U$ y para toda variable aleatoria X, μ-integrable, sobre Ω x K, pondremos:

$$<X,\mu> = \int_{\Omega x K} X \, d\mu \quad ,$$

y en el caso particular de $X = I_{FxK}\cdot g$ con F de $\underline{\underline{F}}_\infty$ y g una función medible sobre Ω x K, escribiremos,

$$<Fg,\mu> = \int_{\Omega x K} I_{FxK} \, g \, d\mu \ .$$

Teorema 2.1.2. ([24], lema 1.1.)

Existe una biyección entre las variables aleatorias "floues" y los procesos $(A_z, z \in K)$ crecientes tales que $A_\infty \equiv 1$. #

Aunque no demos aquí la demostración del teorema, es importante señalar que como K es compacto, toda medida μ sobre $\Omega \times K$ admite una desintegración con respecto a su proyección sobre Ω. Si $\mu \in U$, tal proyección es P y la desintegración que admite es la siguiente: $d\mu = dP \times A(\omega,dz)$, siendo $A(\omega,dz)$ la medida asociada a un proceso creciente A y de esta descomposición resulta el teorema.

Si $\mu \in U$, observemos que para toda variable aleatoria X , μ-integrable sobre $\Omega \times K$, se verifica,

$$\langle X,\mu \rangle = E\left(\int_K X_z \, d A_z\right) .$$

Definición 2.1.3.

Diremos que una variable aleatoria "floue" es *adaptada* si y sólo si su proceso creciente A asociado es $\underline{\underline{F}}$-adaptado. Representaremos por U_a el conjunto de variables aleatorias "floues" adaptadas.

A continuación dotamos al conjunto U, respectivamente U_a, de una topología, respecto la cual seran conjuntos compactos. Para ello debemos tener en consideración el siguiente

Teorema 2.1.4.

A cada elemento $\mu \in U$, le corresponde un elemento del espacio C' por la aplicación siguiente: $X \longrightarrow \langle X,\mu\rangle$ para todo $X \in C$.

Además ([17], pag.207) para todo $f \in C'$ tal que $f \geq 0$ (es decir $f(X) \geq 0$, para todo $X \in C$ positivo) $||f|| \leq 1$ y $f(1) = 1$, existe un único elemento $\mu \in U$ tal que : $f(X) = \langle X,\mu\rangle$, $\forall X \in C$. #

Gracias al teorema anterior, el conjunto U puede considerarse como un subconjunto de C' y podemos tomar sobre U y U_a , la topología inducida, conocida con el nombre de topología de Baxter-Chacon. Con esta topología se verifica :

Teorema 2.1.5. ([42], teorema 3; [6], teorema 1.5.).

Los conjuntos U y U_a, con la topología de Baxter-Chacon son conjuntos compactos. #

Señalemos que en la demostración de este teorema es esencial que la filtración con la que trabajamos sea continua por la derecha.

Los conjuntos U y U_a son evidentemente convexos. La caracterización de los elementos extremales de U viene dada por el siguiente teorema debido a N. Ghoussoub ([24] proposición

1.2.) que se obtiene aplicando un resultado conocido de análisis de M. Yor ([52], teorema 1.1.).

Teorema 2.1.6.

Los elementos extremales del conjunto U, son las variables aleatorias "floues" $\mu \in U$, que vienen determinadas por el grafo de una función medible $g : \Omega \longrightarrow K$. El proceso creciente A asociado a una tal μ es de la forma :

$$A_z(\omega) = I_{[g(\omega),\infty]}(z) \quad . \qquad \#$$

Observemos que todo $\underline{\underline{F}}$-tiempo (punto) de paro se puede considerar como un elemento de U_a .

§2. Tribu opcional y operador de proyección opcional sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+^n$, n = 1,2 .

En primer lugar, recordemos brevemente la noción de tribu y operador opcional sobre $\Omega \times \mathbb{R}_+$.

Definición 2.2.1.

(i) La *tribu opcional* $\mathcal{O}$ sobre $\Omega \times \mathbb{R}_+$, es la tribu generada por los procesos $\underline{\underline{F}}$-adaptados y continuos por la derecha.

(ii) El *operador* $P_{\mathcal{O}}$ *de proyección opcional sobre* $\Omega \times \mathbb{R}_+$ es tal que dado X proceso medible acotado, $P_{\mathcal{O}}(X) = Y$, siendo Y el único proceso opcional, es decir, $\mathcal{O}$-medible tal que, para todo T , $\underline{\underline{F}}$-tiempo de paro

$$E(X_T \, I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_T) = Y_T \, I_{\{T<\infty\}} \; .$$

Para más detalles puede consultarse [16] y [17] .

A partir de ésto, podemos introducir la siguiente

<u>Definición 2.2.2.</u>

(i) La tribu $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \vee \sigma\{A \times \{\infty\} \, , \, A \in \underline{\underline{F}}_\infty\}$ es la *tribu opcional* sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+$.

(ii) Dado X un proceso medible acotado, el operador definido por:

$$({}^oX)_t = \begin{cases} (P_{\mathcal{O}}(X))_t & \text{si } t \in \mathbb{R}_+ \\ E(X_\infty | \underline{\underline{F}}_\infty) & \text{si } t = \infty \end{cases}$$

es el *operador de proyección opcional* sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+$.

A partir de esta definición es fácil demostrar el siguiente

<u>Teorema 2.2.3.</u>

(i) Si X es un proceso acotado, entonces ${}^oX$ es el único proceso Y opcional y acotado, tal que para todo Z, $\underline{\underline{F}}$-tiempo de paro se verifica: $E(X_Z) = E(Y_Z)$.

(ii) La tribu $\tilde{\mathcal{O}}$ está generada por los procesos adaptados y continuos por la derecha. #

También podemos hablar de medidas opcionales. Recordemos (ver [17]),

Definición 2.2.4.

Una medida μ sobre $\Omega \times \mathbb{R}_+$ es *opcional*, si y sólo si para todo proceso X acotado, $<X,\mu> = <P_{\mathcal{O}}(X),\mu>$.

Por analogía diremos que,

Definición 2.2.5.

Una medida μ sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+$ es *opcional*, si y sólo si para todo proceso X acotado, $<X,\mu> = <{}^oX,\mu>$.

Una simple comprobación muestra que:

Teorema 2.2.6.

(i) Si μ es una medida opcional sobre $\Omega \times \mathbb{R}_+$, también es opcional sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+$.

(ii) Un proceso creciente A es opcional, si y sólo si su medida asociada es opcional. #

Definamos la tribu y el operador de proyección opcional sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}^2_+}$. Para ello introduzcamos estos conceptos sobre $\Omega \times \mathbb{R}^2_+$.

Siguiendo [4], notaremos por $\mathcal{O}_i$ la tribu i-opcional con respecto a la filtración uniparamétrica $\underline{\underline{F}}^i$, i=1,2 , con $\underline{\underline{F}}^1 = \{\underline{\underline{F}}_{s,\infty}, s\geq o\}$ y $\underline{\underline{F}}^2 = \{\underline{\underline{F}}_{\infty,t}, t\geq o\}$. Y sean P_i , i=1,2, los operadores de proyección opcional respectivos. Observemos que $\underline{\underline{F}}^1$ y $\underline{\underline{F}}^2$ son completas, crecientes y continuas por la derecha (ver [53]). Podemos enunciar la siguiente

Definición 2.2.8.

(i) La tribu $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, es la *tribu opcional* sobre $\Omega \times \mathbb{R}_+^2$, con respecto la filtración $\underline{\underline{F}}$.

(ii) El operador de *proyección opcional* viene definido para todo proceso X medible y acotado por, ${}^oX = P_1 \cdot P_2(X) = P_2 \cdot P_1(X)$.

La definición anterior es correcta debido a la propiedad F.4. (Bakry [4]).

A continuación enunciamos una serie de definiciones y teoremas, que son análogas a las dadas anteriormente para el caso unidimensional.

Definición 2.2.9.

(i) La tribu $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup \sigma\{A x\{\infty\} \ , A \in \underline{\underline{F}}_\infty\}$ es la *tribu opcional* sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}_+^2}$.

(ii) El operador $P_{\tilde{\mathcal{O}}}$ definido por :

si X es medible y acotado, $(P_{\tilde{\mathcal{O}}}(X))_z = \begin{cases} {}^oX_z \ , & \text{si } z \in \mathbb{R}_+^2 \\ E(X_\infty | \underline{\underline{F}}_\infty), & \text{si } z=\infty \end{cases}$

es el *operador de proyección opcional* sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}_+^2}$.

Con esta definición son válidas definiciones análogas a las definiciones 2.2.4. y 2.2.5., y teoremas análogos a los teoremas 2.2.3. y 2.2.6 . para procesos X medibles, acotados y medidas sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+^2$.

§3. Caracterización de los tiempos de paro como elementos extremales de U_a . Parada óptima.

En esta sección demostramos utilizando un método diferente del utilizado en [19] que los tiempos de paro son los elementos extremales del conjunto U_a , y resolvemos el problema de parada óptima para procesos continuos con índices en $\overline{\mathbb{R}}_+$, utilizando dicha caracterización, la cual viene dada por el siguiente

Teorema 2.3.1.

Sea μ una variable aleatoria "floue". Las tres condiciones siguientes son equivalentes:

(i) μ es un elemento extremal de U_a .

(ii) Si g es una función definida sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+^2$ opcional y acotada tal que, $\forall F \in \underline{\underline{F}}_\infty$, $\langle Fg,\mu\rangle = 0$ entonces $g=0$, μ-c.s.

(iii) El proceso creciente A asociado a μ es de la forma : $A_t(\omega) = I_{[T(\omega),\infty]}(t)$, con T un $\underline{\underline{F}}$-tiempo de paro.

Demostración.

(i) $\to$ (ii)

Sea $\mu \in U_a$ un elemento extremal del conjunto U_a y sea g una función sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+$ opcional y acotada por k, tal que para todo $F \in \underline{\underline{F}}_\infty$, $<Fg,\mu> = 0$.

Definamos dos nuevas medidas μ_1, μ_2 de la forma siguiente,

$$\mu_1 = (1 + \frac{g}{2k})\mu \quad , \quad \mu_2 = (1 - \frac{g}{2k})\mu \ .$$

Es fácil comprobar que μ_1, $\mu_2 \in U_a$, ya que,

$\forall F \in \underline{\underline{F}}_\infty$, $<F,\mu_1> = <F,\mu> + <F\frac{g}{2k},\mu> = <F,\mu> = P(F)$.

Además, si X es un proceso acotado,

$<X,\mu_1> = <X,\mu> + <X\frac{g}{2k},\mu> =$

teniendo en cuenta que μ y g son opcionales

$= <{}^oX,\mu> + <{}^oX\frac{g}{2k},\mu> = <{}^oX,\mu_1>$.

Análogamente se comprueba que μ_2 es opcional y que su proyección sobre Ω es P.

Además $\mu = \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2$, y como μ es extremal debe ser $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, y por tanto $g=0$, μ-c.s.

(ii) $\to$ (iii)

Supongamos ahora que $\mu \in U_a$ y que es tal que si g es una función sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+$ acotada, opcional y tal para todo F de $\underline{\underline{F}}_\infty$, $<Fg,\mu> = 0$, entonces $g \neq 0$ μ-c.s.

Sea A el proceso creciente asociado a μ y consideremos la siguiente función.

$$g : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\omega,t) \longmapsto A(\omega,[o,t]) + A(\omega,[o,t)) - 1$$

como el proceso A es $\underline{\underline{F}}$-adaptado, por tanto opcional, y $A_\infty \equiv 1$, esta función g es opcional y acotada.

Además ω-c.s. se verifica :

$$\int_{\overline{\mathbb{R}_+}} (A(\omega,[o,t]) + A(\omega,[o,t)) - 1)\; A(\omega,dt) = 0$$

ya que basta aplicar la fórmula de integración por partes ([17], VI-90).

De lo anterior se tiene que para todo F de $\underline{\underline{F}}_\infty$,

$$\int_{\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+} I_{F\times\overline{\mathbb{R}}_+}\; (A(\omega,[o,t]) + A(\omega,[o,t)) - 1)\; d\mu = 0$$

y por la hipótesis sobre la medida μ, esto implica que:

$$A(\omega,[o,t]) + A(\omega,[o,t)) - 1 = 0 \quad , \quad \mu\text{-c.s.}$$

es decir, ω-c.s.,

$$A(\omega,[o,t]) + A(\omega,[o,t)) - 1 = 0, \forall t, A(\omega,dt)\text{-c.s.}$$

A continuación vamos a comprobar que el proceso A no tiene ninguna trayectoria continua, c.s..

Sea $G = \{\omega \in \Omega,\ A$ es continuo$\}$, y supongamos $P(G)>0$.

Para todo ω de G, ω-c.s., se tiene que,

$$A(\omega,[o,t]) = \frac{1}{2}, \forall t, A(\omega,dt) - \text{c.s.}$$

Sea $[a,b]$ la región donde $A(\omega,[o,t]) = \frac{1}{2}$.

Se tiene, $A(\omega,[o,a)) = 0$, $A(\omega,(b,\infty]) = 0$ y

$A(\omega,[a,b]) = A_b(\omega) - A_a(\omega) = 0$, con lo que llegamos a una contradicción. Por tanto $P(G) = 0$. Pero como

$$A(\omega,[o,t]) + A(\omega,[o,t)) = 1, \quad A(\omega,dt)\text{-c.s.}$$

este proceso A sólo puede tener un salto.

Sea x_ω el punto donde A, tiene el salto. El proceso A es creciente, por lo tanto:

$$A(\omega,[o,y]) < \frac{1}{2} \text{ para todo } y < x_\omega$$

$$A(\omega,[o,y]) > \frac{1}{2} \text{ para todo } y > x_\omega$$

esto implica que $A(\omega,[o,x_\omega)) = 0$ y $A(\omega,(x_\omega,\infty]) = 0$ y como $A(\omega,dt)$ es una medida de masa 1 debe ser, $A(\omega,\{x_\omega\}) = 1$. Por tanto, ω-c.s., $A(\omega,dt)$ es una medida de Dirac. Por lo tanto $A_t = I_{[T,\infty]}(t)$, siendo $T(\omega) = x_\omega$, y como el proceso A es adaptado, T es un $\underline{\underline{F}}$-tiempo de paro.

(iii) → (i)

Si el proceso creciente A asociado a la medida μ, es de la forma $A_t(\omega) = I_{[T,\infty]}(t)$, entonces μ por el teorema 2.1.6. es un elemento extremal de U pero $\mu \in U_a$ y de ahí la afirmación. #

Observemos que se puede demostrar de forma inmediata (ver [19]) la implicación (i) → (iii). En efecto, si existe un t tal que A_t no toma valores en $\{o,1\}$ c.s., basta con definir $A'_t = 2A_t \wedge 1$ y $A''_t + (2A_t-1) \vee 0$. Los procesos A',A'' son crecientes, adaptados y $A'_\infty = A''_\infty = 1$. Además $A = \frac{1}{2} A' + \frac{1}{2} A''$

en contradicción con que μ sea un elemento extremal en el conjunto U_a .

Observemos que si el proceso asociado a $\mu \in U_a$, es de la forma $A_t = I_{[T,\infty]}$, entonces para todo $X \in C$, $<X,\mu> = E(X_T)$.

A partir de la anterior caracterización de los elementos extremales del conjunto U_a, podemos resolver el problema de parada óptima para procesos continuos, es decir, dado un proceso continuo X, podemos demostrar la existencia de un $\underline{\underline{F}}$-tiempo de paro T* tal que:

$$E(X_{T^*}) = \sup\{E(X_T) \text{ con } T, \underline{\underline{F}}\text{-tiempo de paro}\} .$$

A T* le llamaremos *tiempo de paro óptimo*. Dicho resultado se contempla en el siguiente

<u>Teorema 2.3.2.</u> ([14], teorema 3.1.)
Sea $X = (X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+)$ un proceso continuo, tal que $E(\sup_t |X_t|) < \infty$, entonces existe un tiempo de paro óptimo.

<u>Demostración.</u>
Dado el proceso continuo X, consideremos la función $\psi_X : U_a \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a toda $\mu \in U_a$ le hace corresponder $\psi_X(\mu) = <X,\mu>$. Esta función es continua por definición de la topología débil y como U_a es un compacto, esta

función alcanza su máximo en un elemento extremal μ_o de U_a. Sea T_o el tiempo de paro asociado a μ_o. Se verifica:

$$E(X_{T_o}) = \langle X,\mu_o\rangle = \sup_{\mu\in U_a} \langle X,\mu\rangle \geq \sup\{E(X_T), T \text{ tiempo de paro}\},$$

y de ahí resulta el aserto. #

Observemos que como toda función semicontinua superiormente sobre un compacto convexo alcanza su máximo en un punto extremal ([7], p. II,58, proposición 1), en la demostración anterior sería suficiente, con que la función ψ_X fuera semicontinua superiormente, y no necesariamente continua. Condiciones que aseguran la semicontinuidad superior de la función ψ_X pueden encontrarse en [14], proposición 3.2. y teorema 3.5.

§4. Caracterización de los puntos de paro como elementos de $U \cap \operatorname{Ext} P_{\widetilde{\theta}}(U)$

En la sección anterior hemos demostrado que los elementos extremales del conjunto U_a son los tiempos de paro. Cabe preguntarse si en el caso bidimensional son los puntos de paro los elementos extremales de U_a. En [34] se da un ejemplo en el que se muestra que sin exigir condiciones a la filtración con la que trabajamos dicha afirmación es falsa en el caso continuo. Recientemente, se ha demostrado

[15] que la respuesta es afirmativa, en el caso discreto, si exigimos que la filtración verifique la propiedad C.Q.I., introducida en [29] que es más débil que la condición F.4. La extensión de los métodos utilizados para el estudio de este problema en el caso unidimensional no es posible. Debido a la dificultad que presenta el estudio de este problema, se han buscado técnicas de compactificación (ver [33],[34]) diferentes, para resolver el problema de parada óptima. Como contribución al estudio de este problema demostramos que los puntos de paro son los elementos de U que son extremales en el conjunto $P_{\underset{\sim}{\theta}}(U)$.

Este tipo de resultado podría servir como punto de partida para demostrar la existencia de un punto de paro óptimo en el caso continuo biparamétrico (suponiendo la propiedad F.4.) mediante técnicas basadas en las variables aleatorias "floues" y por tanto diferentes de los métodos de compactificación usados en [33] y [34]. Sin embargo, hasta el momento no sabemos todavía si ello es posible y los esfuerzos realizados no nos han llevado a ningún resultado satisfactorio.

A fin de demostrar que los puntos de paro coinciden con los elementos de $U \cap \mathrm{ext}\, P_{\underset{\sim}{\theta}}(U)$, necesitamos el siguiente,

Teorema 2.4.1.

Sea $\mu \in U_a$ y sea A su proceso creciente asociado.

$A_z = I_{[T,\infty]}(z)$ con T un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro si y solamente si, dada una función g sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}_+^2}$ medible y acotada, tal que para todo F de $\underline{\underline{F}}_\infty$, $<Fg,\mu> = 0$ entonces $P_{\widetilde{\Theta}}(g) = 0$, μ-c.s.

<u>Demostración.</u>

Una implicación es fácil. Si $\mu \in U_a$ y su proceso creciente asociado A es de la forma $A_t(\omega) = 1_{[T,\infty]}(t)$ con T punto de paro, por el teorema 2.1.6., μ es un elemento extremal del conjunto U y si g es una función medible y acotada, tal que para todo $F \in \underline{\underline{F}}_\infty$, $<Fg,\mu> = 0$ aplicando el teorema 1.1. de [52] se tiene que g=0 μ-c.s. y por tanto $P_{\widetilde{\Theta}}(g) = 0$, μ-c.s.

Para demostrar la otra implicación es necesario encontrar previamente algunos resultados importantes, que enunciaremos en forma de lemas.

En todo lo que sigue por tanto, supondremos que $\mu \in U_a$ es tal que si g es una función definida sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}_+^2}$ medible y acotada, tal que para todo $F \in \underline{\underline{F}}_\infty$, $<Fg,\mu> = 0$, entonces $P_{\widetilde{\Theta}}(g) = 0$, μ-c.s.

<u>Lema 2.4.2.</u>

En las hipótesis anteriores, existe un conjunto N de probabilidad cero tal que para todo $\omega \notin N$, si $A(\omega,\{\infty\}) \geq 0$ entonces $A(\omega,dt)$ es una medida de Dirac en $\{\infty\}$; y si $A(\omega,\{\infty\}) = 0$, los procesos $(A_{s,\infty}, z=(s,t) \in \overline{\mathbb{R}_+^2})$ y $(A_{\infty,t}, z=(s,t) \in \overline{\mathbb{R}_+^2})$ definidos por,

$$A_{\cdot\infty} : \Omega \times \overline{\mathbb{R}^2_+} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\omega, z=(s,t)) \longmapsto A_{s,\infty}(\omega) = A(\omega, [o,s] \times \mathbb{R}_+)$$

$$(\omega, \infty) \longmapsto 1$$

y $$A_{\infty\cdot} : \Omega \times \overline{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\omega, z=(s,t)) \longmapsto A_{\infty,t}(\omega) = A(\omega, \mathbb{R}_+ \times [o,t])$$

$$(\omega, \infty) \longmapsto 1$$

verifican, ${}^{o}(A_{\infty,t} + A_{\infty,t^-} - 1) = 0$, $A(\omega,\cdot)$-c.s.,

${}^{o}(A_{s,\infty} + A_{s^-,\infty} - 1) = 0$, $A(\omega,\cdot)$-c.s. .

Demostración.

Consideremos la función $g_1 : \Omega \times \overline{\mathbb{R}^2_+} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que, $g_1(\omega,z) = A_{\infty,t} + A_{\infty,t^-} - 1$ si $z = (s,t) \in \mathbb{R}^2_+$ y $g_1(\omega,\infty) = A(\omega,\mathbb{R}^2_+)$. Es una función 2-opcional y acotada, por ser el proceso A opcional y acotado. Además, para todo ω,

$$\int_{\overline{\mathbb{R}^2_+}} g_1 \, A(\omega,dz) = \int_{\mathbb{R}^2_+} (A_{\infty,t}+A_{\infty,t^-}-1)A(\omega,dz)+A(\omega,\mathbb{R}^2_+)\, A(\omega,\{\infty\}).$$

Por la definición de $A_{\infty,t}$ y por ser $A(\omega,\overline{\mathbb{R}^2_+}) = 1$, se tiene,

$$\int_{\overline{\mathbb{R}^2_+}} g_1 \, A(\omega,dz) = \int_{\mathbb{R}_+} (A_{\infty,t}+A_{\infty,t^-}-1)\,dA_{\infty,t}+A(\omega,\mathbb{R}^2_+)(1-A(\omega,\mathbb{R}^2_+))$$

que es cero, por la fórmula de integración por partes ([17],VI,90).

De ésto se deduce que para todo $F \in \underline{\underline{F}}_\infty$, $\langle Fg,\mu\rangle = 0$ y por hipótesis debe ser $P_{\widetilde{\theta}}(g_1) = 0$, μ-c.s.. Es decir, existe un subconjunto N de probabilidad cero tal que $P_{\widetilde{\theta}}(g_1)(\omega,z) = 0$, $A(\omega,dz)$-c.s., para todo $\omega \notin N$. Por la definición del operador $P_{\widetilde{\theta}}$ obtenemos que,

$$(P_{\widetilde{\theta}}(g_1))_z = {}^o(A_{\infty,t} + A_{\infty,t-} - 1) \text{ si } z = (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 ,$$

$$(P_{\widetilde{\theta}}(g_1))_\infty = E(A(\omega,\mathbb{R}_+^2) \mid \underline{\underline{F}}_\infty) = A(\omega,\mathbb{R}_+^2) \text{ , ya que } \underline{\underline{F}}_\infty = \bigvee_z \underline{\underline{F}}_z .$$

Por consiguiente, para todo $\omega \notin N$, si $A(\omega,\{\infty\}) > 0$ entonces $A(\omega,\mathbb{R}_+^2) = 0$ y por tanto $A(\omega,\cdot) = \delta_{\{\infty\}}$. Si $A(\omega,\{\infty\}) = 0$, debe ser ${}^o(A_{\infty,t} + A_{\infty,t-} - 1) = 0$, $A(\omega,\cdot)$-c.s.

Analogamente, para todo $\omega \notin N$ si $A(\omega,\{\infty\}) = 0$ entonces ${}^o(A_{s,\infty} + A_{s-,\infty} - 1) = 0$, $A(\omega,\cdot)$-c.s. #

<u>Lema 2.4.3.</u>

Sea T un $\underline{\underline{F}}^2$-tiempo de paro, donde $\underline{\underline{F}}^2 = \{\underline{\underline{F}}_{\infty,t}, t \geq o\}$. Notaremos $A(\cdot,\mathbb{R}_+ \times [o,T(\cdot)])$ como $A_{\infty,T}(\cdot)$, y definimos un nuevo proceso de la forma siguiente, si $\omega \in \Omega$, $z = (s,t) \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$,

$$A^-_{\infty,t\wedge T}(\omega) = \begin{cases} A_{\infty,t-}(\omega) & \text{si } t \leq T , \\ & \\ A_{\infty,T} & \text{si } t > T . \end{cases}$$

Se verifica μ-c.s. la siguiente igualdad,

$$^{o}(I_{\{T<\infty\}\times\overline{\mathbb{R}}_+^2}(A_{\infty,t\wedge T}+A^-_{\infty,t\wedge T})) = {}^{o}(I_{\{T<\infty\}\times\overline{\mathbb{R}}_+^2}(A_{\infty,T}(2-A_{\infty,T}))) .$$

Analogamente, si S es un $\underline{\underline{F}}^1$-tiempo de paro, con $\underline{\underline{F}}^1 = \{\underline{\underline{F}}_{s,\infty}, s\geq o\}$. Si $A_{S,\infty}(\cdot) = A(\cdot,[o,S(\cdot)]\times\mathbb{R}_+)$, y consideramos el proceso definido para $\omega\in\Omega$, $z=(s,t)\in\overline{\mathbb{R}_+^2}$ por,

$$A^-_{s\wedge S,\infty} = \begin{cases} A_{s^-,\infty}(\omega) & \text{si} \quad s\leq S \\ \\ A_{S,\infty}(\omega) & \text{si} \quad s>S \end{cases}$$

entonces, μ-c.s.,

$$^{o}(I_{\{S<\infty\}\times\overline{\mathbb{R}}_+^2}(A_{s\wedge S,\infty}+A^-_{s\wedge S,\infty})) = {}^{o}(I_{\{S<\infty\}\times\overline{\mathbb{R}}_+^2}(A_{S,\infty}(2-A_{S,\infty})))$$

<u>Demostración.</u>

Supongamos $P\{T<\infty\}>0$ y observemos que ω-c.s., para $\omega\in\{T<\infty\}$ se verifica,

$$I = \int_{\overline{\mathbb{R}}_+^2}(A_{\infty,t\wedge T}+A^-_{\infty,t\wedge T})A(\omega,dz) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^2}(A_{\infty,t\wedge T}+A^-_{\infty,t\wedge T})A(\omega,dz) + A(\omega,\{\infty\})\cdot 2\,A_{\infty,T} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+}(A_{\infty,t\wedge T}+A^-_{\infty,t\wedge T})dA_{\infty,t} + A(\omega,\{\infty\})\cdot 2\,A_{\infty,T}$$

Observemos que, si $A(\omega,\{\infty\}) > 0$, como $A(\omega,\cdot) = \delta_{\{\infty\}}$, entonces $A_{\infty,T} = 0$. Y sino es $A(\omega,\{\infty\}) = 0$, por lo tanto el segundo sumando siempre es nulo y podemos escribir,

$$I = \int_{[0,T]} (A_{\infty,t} + A_{\infty,t-})\, dA_{\infty,t} + \int_{(T,\infty)} 2\, A_{\infty,T}\, dA_{\infty,t}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, ([17],VI,90) se tiene,

$$I = A^2_{\infty,T} + 2\, A_{\infty,T}\,(1-A_{\infty,T}) = A_{\infty,T}(2-A_{\infty,T}) \ .$$

Es decir, ω-c.s., $\omega \in \{T<\infty\}$,

$$\int_{\overline{\mathbb{R}^2_+}} (A_{\infty,t\wedge T} + A^-_{\infty,t\wedge T} - A_{\infty,T}\,(2-A_{\infty,T}))\, A(\omega,dz) = 0 \ .$$

Por lo tanto, para todo $F \in \underline{F}_\infty$, se cumple

$$< F\, I_{\{T<\infty\}\times\overline{\mathbb{R}^2_+}} \cdot (A_{\infty,t\wedge T} + A^-_{\infty,t\wedge T} - A_{\infty,T}(2-A_{\infty,T})),\mu> = 0$$

y aplicando la hipótesis sobre μ resulta la afirmación. #

Necesitamos ahora introducir dos nuevos conceptos

<u>Definición 2.4.4.</u>

Un proceso $\{X_z, z \in \overline{\mathbb{R}^2_+}\}$ se llama *progresivo* si para todo $z \in \overline{\mathbb{R}^2_+}$, la aplicación $(\xi,\omega) \longmapsto X_\xi(\omega) I_{\{\xi<z\}}$ es

$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^2_+} \times \underline{\underline{F}}_z$-medible.

Definición 2.4.5.

Un conjunto aleatorio $D \subset \Omega \times \overline{\mathbb{R}^2_+}$, es decir, un conjunto D tal que para todo $z \in \mathbb{R}^2_+$, la aplicación $I_D(z) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria, es una *región de paro* si verifica,

(i) D es cerrado y progresivo, es decir, I_D es progresivo.

(ii) Si $Z = \inf D$, entonces $Z \in D$ sobre $\{D \neq \emptyset\}$.

(iii) Si $z \in D$, entonces $[Z,z] \subset D$.

Lema 2.4.6.

Los procesos $\{A_{s,\infty}, (s,t) \in \overline{\mathbb{R}^2_+}\}$, $\{A_{\infty,t}, (s,t) \in \overline{\mathbb{R}^2_+}\}$ no tienen ninguna trayectoria continua c.s. en $[o,+\infty]$.

Demostración.

Sea $G = \{\omega \in \Omega : A_{\infty,t}$ es continuo$\}$. Supongamos $P(G) > 0$. Observemos que si $\omega \in G$ entonces $A(\omega,\{\infty\}) = 0$. Fijemos $\varepsilon>0$, y definamos un $\underline{\underline{F}}^2$-tiempo de paro de la forma siguiente,

$$T_\varepsilon(\cdot) = \inf\{t \geq 0 \quad : \quad A(\cdot, \mathbb{R}_+ \times [o,t]) = \varepsilon\}$$

Consideremos el proceso $\overline{A_{\infty,t\wedge T_\varepsilon}}$. Entonces ω-c.s., para $\omega \in G$ se verifica:

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}^2_+} A_{\infty,t\wedge T_\varepsilon} A(\omega,dz) = \int_{\mathbb{R}_+} A_{\infty,t\wedge T_\varepsilon} dA_{\infty,t} \text{ , ya que para } \omega \in G,$$

siempre es $\{T_\varepsilon<\infty\}$, y por lo tanto el sumando $A_{\infty,T_\varepsilon}\cdot A(\omega,\{\infty\})$ es siempre nulo.

Separando la integral anterior, en dos integrales sobre $[o,T_\varepsilon]$ y sobre (T_ε,∞), utilizando la fórmula de integración por partes y teniendo en cuenta que si $\omega\in G$, $A_{\infty,t}$ es continuo y por tanto lo es $A_{\infty,t\wedge T_\varepsilon}$, la anterior integral coincide con,

$$\frac{1}{2}\cdot A^2_{\infty,T_\varepsilon} + A_{\infty,T_\varepsilon}(1-A_{\infty,T_\varepsilon}) = \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon(1-\varepsilon) = \varepsilon(1-\frac{\varepsilon}{2}) .$$

Por lo tanto, para todo $F\in \underline{\underline{F}}_\infty$ se tiene,

$$<F\cdot I_{G\times\overline{\mathbb{R}}^2_+}(A_{\infty,t\wedge T_\varepsilon} - \varepsilon(1-\frac{\varepsilon}{2}))\ ,\ \mu> = 0 .$$

Y por hipótesis sobre μ, debe ser,

$$^{o}(I_{G\times\overline{\mathbb{R}}^2_+}\cdot A_{\infty,t\wedge T_\varepsilon}) = {}^{o}I_{G\times\overline{\mathbb{R}}^2_+}\ \varepsilon(1-\frac{\varepsilon}{2})\ ,\ \mu\text{-c.s.},\quad (2.1.)$$

Consideremos la región de paro opcional D_ε siguiente,

$$D_\varepsilon = \{(z,\omega)\in\overline{\mathbb{R}^2_+}\times\Omega :\ A_z(\omega)\le\varepsilon\}.$$

Si $z=(s,t)$, se verifica la siguiente relación,

$$I_{G\times\overline{\mathbb{R}}^2_+}(A_{(s,t-)}\,I_{D_\varepsilon} + \varepsilon I_{D^c_\varepsilon}) \le I_{G\times\overline{\mathbb{R}}^2_+}\ A_{\infty,t\wedge T_\varepsilon}\ ,$$

como el proceso A y la región D_ε son opcionales, tomando proyección opcional y teniendo en cuenta la igualdad (2.1.) se obtiene la relación siguiente:

$$ {}^{o}I_{G\times\overline{\mathbb{R}^{2}_{+}}}\left(A_{(s,t-)}\, I_{D_\varepsilon} + \varepsilon I_{D^c_\varepsilon}\right) \leq {}^{o}I_{G\times\overline{\mathbb{R}^{2}_{+}}}\ \varepsilon(1-\tfrac{\varepsilon}{2}) \quad \mu\text{-c.s.} $$

Como $\varepsilon(1-\frac{\varepsilon}{2}) < \varepsilon$, esta desigualdad implica que,

$\mu(D^c_\varepsilon \cap \{{}^{o}I_{G\times\overline{\mathbb{R}^{2}_{+}}} \neq 0\}) = 0$, es decir,

$$ 0 = \int_{\Omega\times\overline{\mathbb{R}^{2}_{+}}} I_{D^c_\varepsilon}\, I_{\{{}^{o}I_{G\times\overline{\mathbb{R}^{2}_{+}}} \neq 0\}}\, d\mu = \int_{\Omega\times\overline{\mathbb{R}^{2}_{+}}} I_{D^c_\varepsilon}\ {}^{o}I_{G\times\overline{\mathbb{R}^{2}_{+}}}\, d\mu \ . $$

que coincide con $\int_{\Omega\times\overline{\mathbb{R}^{2}_{+}}} I_{D^c_\varepsilon}\, I_{G\times\overline{\mathbb{R}^{2}_{+}}}\, d\mu$, ya que la medida

μ, y la región D_ε son opcionales. Hemos obtenido pues que,

$\int_G A(\omega,(D^c_\varepsilon)_\omega)\,dP = 0$, donde $(D^c_\varepsilon)_\omega$ representa la sección de la región D^c_ε según ω. Si $\varepsilon\downarrow 0$, $0 = \int_G A(\omega,(D^c_o)_\omega)\,dP$, con lo que llegamos a una contradicción ya que $P(\omega,(D^c_o)_\omega) = 1$. Por consiguiente debe ser $P(G) = 0$.. #

Lema 2.4.7.

Consideramos un intervalo $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ con $\varepsilon_1>0$ y tal que $\varepsilon_2<\varepsilon_1\left(1-\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^{-1}$. Sea $T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$ el F^2-tiempo de paro, definido

de la forma siguiente,

$$T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} = \inf\{t>0 : A_{\infty,t} \in (\varepsilon_1,\varepsilon_2)\}$$

y sea la región $D_{\varepsilon_1} = \overline{\{(\omega,z) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^2_+ : A_z(\omega) \leq \varepsilon_1\}}$.

Si $\{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} < \infty\}$ entonces $A(\omega,(D^c_{\varepsilon_1})_\omega) = 0$, P-c.s.

Demostración.

Observemos que si $\omega \in \{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} <\infty\}$ entonces $A(\omega,\{\infty\}) = 0$.

Por el lema 2.4.3, sabemos que, μ-c.s.,

$$^{o}(I_{\{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\}\times\overline{\mathbb{R}}^2_+} \cdot (A_{\infty,t\wedge T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}} + A^-_{\infty,t\wedge T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}})) =$$

$$= {}^{o}(I_{\{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\}\times\overline{\mathbb{R}}^2_+} \cdot A_{\infty,T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}}(2-A_{\infty,T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}})), \quad (2.2.)$$

Además se cumple la desigualdad siguiente,

$$2\, I_{\{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\}\times\overline{\mathbb{R}}^2_+}(A_{(s,t^-)} I_{D_{\varepsilon_1}} + \varepsilon_1\, I_{D^c_{\varepsilon_1}}) \leq$$

$$\leq I_{\{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\}\times\overline{\mathbb{R}}^2_+}(A_{\infty,t\wedge T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}} + A^-_{\infty,t\wedge T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}}).$$

Tomando proyección opcional y teniendo en cuenta que el proceso A y la región D_{ε_1} son opcionales, así como que

$A_{\infty,T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}} \leq \varepsilon_2$ y la igualdad (2.2.) se obtiene,

$$2\,{}^{o}I_{\overline{\{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\}\times\mathbb{R}^2_+}} \cdot (A_{(s,t-)} I_{D_{\varepsilon_1}} + \varepsilon_1 I_{D^c_{\varepsilon_1}}) <$$

$$< {}^{o}I_{\overline{\{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\}\times\mathbb{R}^2_+}}\ \varepsilon_2(2-\varepsilon_1),\ \mu\text{-c.s.}$$

Podemos tomar ε_1 suficientemente próximo a ε_2 de forma que, $\varepsilon_2\left(1-\frac{\varepsilon_1}{2}\right)< \varepsilon_1$, y para un tal ε_1 tenemos, si ${}^{o}I_{\overline{\{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\}\times\mathbb{R}^2_+}} \neq$

$${}^{o}I_{\overline{\{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\}\times\mathbb{R}^2_+}} (A_{(s,t-)} I_{D_{\varepsilon_1}} + \varepsilon_1 I_{D^c_{\varepsilon_1}}) < \varepsilon_1\ {}^{o}I_{\overline{\{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\}\times\mathbb{R}^2_+}}$$

Por tanto, debe ser, $\mu(D^c_{\varepsilon_1} \cap \{{}^{o}I_{\overline{\{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\}\times\mathbb{R}^2_+}} \neq 0\}) = 0$

Razonando como en el lema anterior, debe ser $A(\omega,(D^c_{\varepsilon_1})_\omega) = 0$,

cuando $\{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\}$. #

Lema 2.4.8.

Sea $T = \inf\{t>o : A_{\infty,t} \neq A_{\infty,t-}\}$, y sea $\Delta_T = A_{\infty,T}-A_{\infty,T-}$

entonces, $\Delta_T > 0$, c.s.

Analogamente si $S = \inf\{s>o : A_{s,\infty}\neq A_{s-,\infty}\}$, y $\Delta_S = A_{S,\infty}- A_{S-,\infty}$,

entonces $\Delta_S > 0$ c.s..

Demostración.

$$\{\Delta_T = 0\} = \bigcap_{\substack{r>o\\ r\in\mathbb{Q}}} \bigcup_{E_r} \{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\} \text{ donde}$$

$E_r = \{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathbb{Q}, \varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_1\left(1-\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^{-1}, \varepsilon_2<r\}$. Por el lema anterior

para todo r, $\bigcup_{E_r} \{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\} \subset \bigcup_{E_r} \{A(\omega,(D^c_{\varepsilon_1})_\omega) = 0\} \cup N$ con

N conjunto de probabilidad nula. Por tanto,

$$P\{\Delta_T = 0\} \leq \lim_{r\downarrow o} P\{\bigcup_{E_r}\{T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}<\infty\}\} \leq$$

$$\leq \lim_{r\downarrow o} P\{\bigcup_{E_r} \{A(\omega,(D^c_{\varepsilon_1})_\omega) = 0\}\} \leq \lim_{r\downarrow o} P\{A(\omega,(D^c_r)_\omega) = 0\} = 0.$$

Analogamente se demuestra que $\Delta_S > 0$ c.s. #

Estamos ahora en condiciones de demostrar la implicación que falta del teorema 2.4.1.. Sea pues $\mu \in U_a$, tal que si g es una función medible y acotada sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}^2_+}$ de forma que $\forall F \in \underline{\underline{F}}_\infty, \langle F\cdot g,\mu\rangle = 0$, entonces $P_{\underset{\sim}{\theta}}(g) = 0$, μ-c.s. Recordemos que nuestro objetivo es demostrar que el proceso A asociado a μ, es de la forma, $A_t(\omega) = I_{[Z,\infty]}(t)$ con Z un F-punto de paro.

Para ello consideramos los tiempos de paro definidos por,

$$T(\omega) = \inf\{t\geq o,\ A(\omega,\mathbb{R}_+ x[o,t])\neq A(\omega,\mathbb{R}_+ x[o,t))\}$$

y

$$S(\omega) = \inf\{s\geq o,\ A(\omega,[o,s]x\ \mathbb{R}_+ \neq A(\omega,[o,s)x\ \mathbb{R}_+)\}\ .$$

Observemos que $0<T\leq\infty$, $0<S\leq\infty$, y consideremos la región adaptada siguiente,

$$D_o = \{(z,\omega) : \forall z'<z\ ,\ A_{z'}(\omega) = 0\} = \overline{\{(z,\omega)\ :\ A_z(\omega) = 0\}}.$$

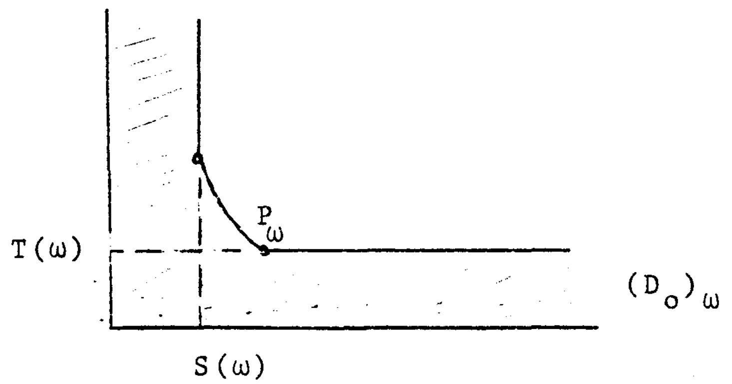
Sea $D_o^- = \{(z,\omega):\exists z'>z, A_{z'}(\omega)=0\}$ y ω-c.s. con $A(\omega,\{\infty\})=o$ sea

$$P_\omega = \inf\{z \in \overline{\mathbb{R}_+^2}\ :\ (z,\omega) \in (D_o\setminus D_o^-) \cap (\Omega x\mathbb{R}_+ x\{T(\omega)\})\}\ .$$

Demostremos que,

(i) $P_\omega < \infty$, c.s.

(ii) $\{(s,T(\omega))\ :\ (s,T(\omega) \geq P_\omega\} \subset D_o\setminus D_o^-$.



En efecto, supongamos $P\{P_\omega = \infty\} > 0$, entonces, $P\{\omega: \mathbb{R}_+ \times [o,T(\omega)] \subset (D_o^-)_\omega\} > 0$, y por tanto $P\{\omega: A(\omega, \mathbb{R}_+ \times [o,T(\omega)]) \leq A(\omega,(D_o^-)_\omega)\} > 0$. Pero $\mu(D_o^-) = 0$ y por tanto $A(\omega,(D_o^-)_\omega) = 0$, ω-c.s., de donde $A(\omega, \mathbb{R}_+ \times [o,T(\omega)]) = 0$, ω-c.s., que está en contradicción con que en T hay un salto y $T>0$. Por tanto $P_\omega < \infty$, ω-c.s.

Además, por la definición de D_o, $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times [o,T] \subset D_o$, y de aquí resulta (ii).

Analogamente, ω-c.s. con $A(\omega,\{\infty\}) = 0$, si

$Q_\omega = \inf\{z \geq o : (z,\omega) \in (D_o \setminus D_o^-) \cap (\Omega \times \{S(\omega)\} \times \mathbb{R}_+)\}$

es $Q_\omega < \infty$, c.s., y $\{(S(\omega),t) : (S(\omega),t) \geq Q_\omega\} \subset D_o \setminus D_o^-$.

A continuación demostramos que $\mu(D_o \setminus D_o^-) = 1$. Es evidente que $\mu(D_o^-) = 0$. Dado el tiempo de paro T, por el lema 2.4.1. sabemos que,

$$^o(A_{\infty,t\wedge T} + A^-_{\infty,t\wedge T}) = {}^o(A_{\infty,T}(2-A_{\infty,T})), \ \mu\text{-c.s.}$$

Multiplicando por I_{D_o}, y teniendo en cuenta que la región D_o y la medida μ son adaptadas, se verifica la siguiente igualdad,

$$\int_{\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+^2} I_{D_o}(A_{\infty,t\wedge T} + A^-_{\infty,t\wedge T})\,d\mu = \int_{\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+^2} I_{D_o} A_{\infty,T}(2-A_{\infty,T})\,d\mu, \quad (2.3.)$$

Observemos que el primer término de esta igualdad lo podemos escribir como suma de dos integrales respecto $A_{\infty,t}$, una sobre $\Omega x[o,T(\omega))$ y la otra sobre $\Omega x[T(\omega),\infty)$. Como $\mu(D_o^-) = 0$, la integral sobre $\Omega x[o,T(\omega))$ es nula, y teniendo en cuenta la definición de $A_{\infty,\cdot\wedge T}$ y $A^-_{\infty,\cdot\wedge T}$ la integral sobre $[T(\omega),\infty)$ coincide con,

$$\int_{\Omega x[T(\omega),\infty)} I_{(D_o)_\omega}\cdot A_{\infty,T}\, dA_{\infty,t} + \int_{\Omega x(T(\omega),\infty)} I_{(D_o)_\omega}\, A_{\infty,T} dA_{\infty,t} =$$

$$= E[A_{\infty,T}\cdot A(\omega,(D_o)_\omega \cap \mathbb{R}_+ x[T(\omega),\infty)) +$$

$$+ A_{\infty,T}\cdot A(\omega,(D_o)_\omega \cap \mathbb{R}_+ x(T(\omega),\infty))] .$$

El segundo miembro de (2.3.) no es más que, $E(A_{\infty,T}(2-A_{\infty,T})\cdot A(\omega,(D_o)_\omega))$, por tanto la igualdad (2.3.) dice,

$$E[A_{\infty,T}\cdot A(\omega,(D_o)_\omega \cap \mathbb{R}_+ x[T(\omega),\infty)) + A_{\infty,T}\cdot A(\omega,(D_o)_\omega \cap \mathbb{R}_+ x\ (T(\omega),\infty))] =$$

$$= E(A_{\infty,T}(2-A_{\infty,T})\cdot A(\omega,(D_o)_\omega)). \qquad (2.4.)$$

Como $\mu(D_o^-) = 0$, $A(\omega,(D_o)_\omega) = A(\omega,(D_o)_\omega \cap \mathbb{R}_+ x[T(\omega),\infty)) =$

$$= A_{\infty,T} + A(\omega,(D_o)_\omega \cap \mathbb{R}_+ x\ (T(\omega),\infty)).$$

Sustituyendo en la igualdad (2.4.) y simplificando, obtenemos,

$$E[A^2_{\infty,T}\ (A(\omega,(D_o)_\omega) - 1)] = 0 .$$

El proceso $A_{\infty,\cdot}$ tiene un salto en T, por lo cual debe ser, $A(\omega,(D_o)_\omega) = 1$ c.s. y como $\mu(D_o^-) = 0$ resulta que $\mu(D_o \setminus D_o^-) = 1$.

Consideremos la siguiente partición de la región $D_o \setminus D_o^-$. Si $P_\omega = (s_p, T(\omega))$ y $Q_\omega = (S(\omega), t_q)$ sean,

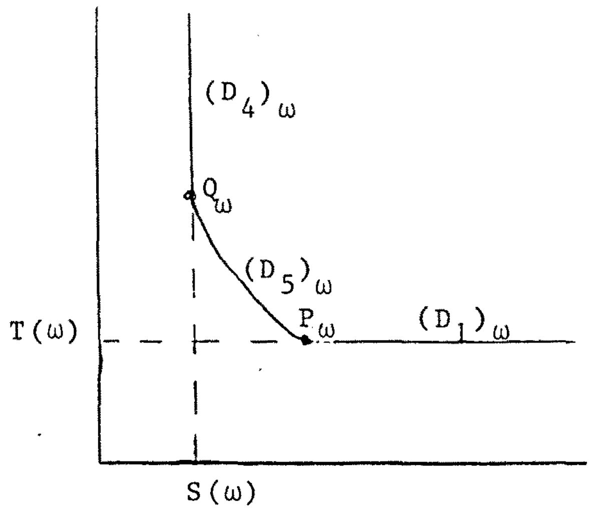
$$D_1 = \{(\omega,z) \in \Omega x \overline{\mathbb{R}_+^2} :\ z \in (D_o \setminus D_o^-)_\omega \cap (s_p,\infty] x\{T(\omega)\}\}$$

$$D_2 = \{(\omega,z) \in \Omega x \overline{\mathbb{R}_+^2} :\ z = P_\omega\}$$

$$D_3 = \{(\omega,z) \in \Omega x \overline{\mathbb{R}_+^2} :\ z = Q_\omega\}$$

$$D_4 = \{(\omega,z) \in \Omega x \overline{\mathbb{R}_+^2} :\ z \in (D_o \setminus D_o^-)_\omega \cap \{S(\omega)\} x (t_q,\infty]\}$$

$$D_5 = (D_o \setminus D_o^-) \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4).$$



Habíamos demostrado, Lema 2.4.2., que ${}^o(A_{\infty,t} + A_{\infty,t^-} - 1) = 0$, μ-c.s. . En particular, ${}^oI_{\{s \le S\}}\,{}^o(A_{\infty,t} + A_{\infty,t^-} - 1) = 0$, μ-c.s., es decir,

$$E\int_{\overline{\mathbb{R}_+^2}} {}^{o}I_{\{s\leq S\}}\,{}^{o}(A_{\infty,t}+A_{\infty,t^-})\,dA \;=\; E\int_{\overline{\mathbb{R}_+^2}} {}^{o}I_{\{s\leq S\}}\,dA\ , \qquad (2.5.)$$

Como μ es opcional, el segundo miembro no es más que, $E(A(\omega,\{Q_\omega\}) + A(\omega,(D_4)_\omega))$.

Observemos que por ser μ-opcional, si X es un proceso 1-opcional e Y un proceso 2-opcional entonces,

$$X\ Y\ d\mu = \int P_1(X)P_2(Y)\,d\mu = \int {}^{o}X\ {}^{o}Y\ d\mu\ .$$

Aplicando ésto al proceso 1-opcional $I_{\{s\leq S\}}$ y al proceso 2-opcional $A_{\infty,t} + A_{\infty,t^-}$, el primer miembro de la igualdad (2.5.) es,

$$E\int_{\overline{\mathbb{R}_+^2}} I_{\{s\leq S\}}(A_{\infty,t} + A_{\infty,t})\,dA \;=$$

$$= \int_{\{\omega\ :\ T\ =\ t_q\}} \left[A_{\infty,t_q}\cdot A(\omega,\{Q_\omega\}) + (1 - A^2_{\infty,t_q})\right] dP \;+$$

$$+ \int_{\{\omega\ :\ t_q > T\}} \left[(A_{\infty,t_q}+A_{\infty,t_q^-})(A_{\infty,t_q}-A_{\infty,t_q^-}) + (1 - A^2_{\infty,t_q})\right] dP \;=$$

$$= \int_{\{\omega\ :\ T\ =\ t_q\}} \left[A_{\infty,t_q}\cdot A(\omega,\{Q_\omega\}) + 1-A^2_{\infty,t_q}\right] dP + \int_{\{\omega\ :\ t_q\ >\ T\}} (1 - A^2_{\infty,t_q^-})\,dP\ .$$

Por tanto la igualdad (2.5.) es,

$$\int_{\{\omega\,:\,t_q = T\}} \left[A_{\infty,t_q}\cdot A(\omega,\{Q_\omega\}) + 1 - A^2_{\infty,t_q} - A(\omega,\{Q_\omega\}) - A(\omega,(D_4)_\omega)\right] dP +$$

$$+\int_{\{\omega\,:\,t_q > T\}} \left[1 - A^2_{\infty,t_q^-} - (1 - A_{\infty,t_q^-})\right] dP = 0$$

Es decir,

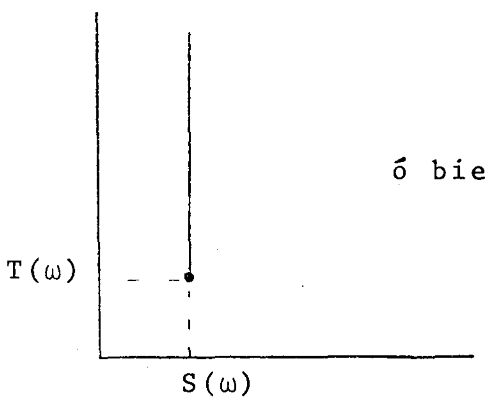
$$\int_{\{\omega\,:\,t_q = T\}} A(\omega,(D_4)_\omega)\cdot A(\omega,(D_1)_\omega)\,dP + \int_{\{\omega\,:\,t_q > T\}} A_{\infty,t_q^-}(1 - A_{\infty,t_q^-})\,dP = 0.$$

Como las funciones que integramos son positivas, si $P\{\omega : t_q > T\} > 0$, debe ser $A_{\infty,t_q^-} = 0$ ó $A_{\infty,t_q^-} = 1$, ω-c.s.

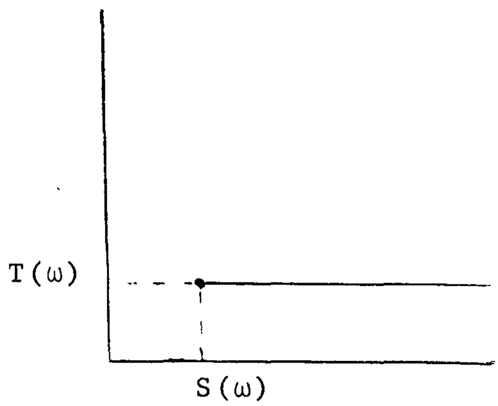
pero ésto está en contradicción con que en T y en S exista un salto, por tanto $P\{\omega : t_q > T\} = 0$. Debe ser pues,

$$A(\omega,(D_4)_\omega)\cdot A(\omega,(D_1)_\omega) = 0 \quad , \ \omega\text{-c.s.}$$

Es decir, ω-c.s.



ó bien



Además si $G_1 = \{\omega : A(\omega,(D_1)_\omega) = 0,\ A(\omega,(D_4)_\omega) \neq 0\}$

se verifica,

$$A_{(s,t)} \cdot I_{G_1} = A_{\infty,t} \cdot I_{\{S\leq s\} \cap G_1}$$

$$A_{(s,t-)} \cdot I_{G_1} = A_{\infty,t-} \cdot I_{\{S\leq s\} \cap G_1}$$

Por tanto ω-c.s., para $\omega \in G_1$,

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}_+^2} (A_{(s,t)} + A_{(s,t-)})dA = 1$$

Analogamente si $G_2 = \{\omega : A(\omega,D_1)_\omega) \neq 0,\ A(\omega,(D_4)_\omega) = 0\}$

se verifica, ω-c.s. para $\omega \in G_2$.

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}_+^2} (A_{(s,t)} + A_{(s^-,t)})dA = 1$$

Es decir, para todo F de $\underline{\underline{F}}_\infty$

$$\int_{\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+^2} I_F(A_{(s,t)} + A_{(s,t-)}\ I_{G_1} + A_{(s^-,t)}\ I_{G_2} - 1)d\mu = 0 ,$$

y por la hipótesis sobre μ debe ser, teniendo en cuenta que el proceso A es opcional,

$$A_{(s,t)} + A_{(s,t-)}\ {}^oI_{G_1} + A_{(s^-,t)}\ {}^oI_{G_2} - 1 = 0 \ , \ \mu\text{-c.s.},$$

es decir, ω-c.s.,

$$A_{(s,t)} + A_{(s,t^-)} \, {}^{o}I_{G_1} + A_{(s^-,t)} \, {}^{o}I_{G_2} - 1 = 0, \quad A(\omega,\cdot)\text{-c.s.}$$

Como $A(\omega,\{Q_\omega\}) \neq 0$, ω-c.s., debe ser

$$A(\omega,\{Q_\omega\}) - 1 = 0$$

y de ahí la afirmación. #

Estamos ahora en condiciones de demostrar,

<u>Teorema 2.4.9.</u>

Sea $\mu \in U$ y sea A su proceso creciente asociado.

Entonces $\mu \in U \cap \text{ext}\, P_{\widetilde{\theta}}(U)$ si y sólo si $A_t(\omega) = 1_{[T,\infty]}(t)$,

con T un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro.

<u>Demostración.</u>

Si $A_t(\omega) = I_{[T,\infty]}(t)$ y si $\mu \notin \text{ext}\, P_{\widetilde{\theta}}(U)$ entonces existirian μ_1,μ_2 de U , y un $\lambda \in (0,1)$ tales que,

$$\mu = \lambda P_{\widetilde{\theta}}(\mu_1) + (1-\lambda) P_{\widetilde{\theta}}(\mu_2) .$$

Es decir, existen $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ de U , tales que,

$$\mu = \lambda\bar{\mu}_1 + (1-\lambda)\bar{\mu}_2 \quad \text{y} \quad P_{\widetilde{\theta}}(\bar{\mu}_1) = P_{\widetilde{\theta}}(\mu_1) \ \text{y} \ P_{\widetilde{\theta}}(\bar{\mu}_2) = P_{\widetilde{\theta}}(\mu_2) .$$

Pero $\mu \in \text{ext}\, U$, luego $\mu = \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2$ y por tanto, $P_{\widetilde{\theta}}(\mu_1) = P_{\widetilde{\theta}}(\mu_2)$.

Recíprocamente, por el teorema 2.4.1., sea g una función sobre $\Omega \times \overline{\mathbb{R}^2_+}$ medible y acotada, por k, tal que para todo $F \in \underline{\underline{F}}_\infty$, $\langle Fg,\mu\rangle = 0$, y supongamos $P_{\tilde{\sigma}}(g) \neq 0$, μ-c.s. Definamos dos nuevas medidas, $\mu_1 = (1 + \frac{g}{2k})\mu$, $\mu_2 = (1 - \frac{g}{2k})\mu$.

Es evidente que μ_1, μ_2 son de U . Por tanto, $P_{\tilde{\sigma}}(\mu_1)$, $P_{\tilde{\sigma}}(\mu_2)$ son de $P_{\tilde{\sigma}}(U)$ y además $\mu = \frac{1}{2} P_{\tilde{\sigma}}(\mu_1) + \frac{1}{2} P_{\tilde{\sigma}}(\mu_2)$, pero como $\mu \in \text{ext } P_{\tilde{\sigma}}(U)$, debe ser $P_{\tilde{\sigma}}(\mu_1) = P_{\tilde{\sigma}}(\mu_2) = \mu$ en contradicción con que $P_{\tilde{\sigma}}(g) \neq 0$, μ-c.s. #

CAPITULO III

PARADA OPTIMA PARA UNA FAMILIA BIMARKOVIANA

En este capítulo resolvemos el problema de parada óptima cuando el proceso con el que trabajamos es función de una familia markoviana bidimensional, construida a partir de dos procesos de Markov, soluciones de sendas ecuaciones diferenciales estocásticas.

§1. Familia markoviana bidimensional.

Recordemos brevemente el concepto de proceso de Markov, su relación con las ecuaciones diferenciales estocásticas y por último la fórmula de Itô.

Sea $(\Omega,\underline{\underline{G}},P)$ un espacio de probabilidad completo y sea $(E,\mathcal{E})$ un espacio medible. Representaremos por $b(\mathcal{E})$ el conjunto de las funciones f sobre E a valores en $\mathbb{R}$, medibles y acotadas. $b(\mathcal{E})$ es un espacio de Banach con la norma $||f|| = \sup_{x\in E}|f(x)|$.

Sea X un proceso a valores en E, con $\mathbb{R}_+$ como conjunto de parámetros. Asociamos a X dos σ-álgebras,

$\underline{\underline{F}}_t^o = \sigma\{X_s, s\in[o,t]\}$ y $\underline{\underline{F}}_t^1 = \sigma\{X_s, s\in[t,\infty)\}$.

Sea $\underline{\underline{F}} = \{\underline{\underline{F}}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ una familia creciente de sub-σ-álgebras de $\underline{\underline{G}}$. La notación $\{X_t, \underline{\underline{F}}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ indicará que el proceso X es $\underline{\underline{F}}$-adaptado.

<u>Definición 3.1.1.</u>

Diremos que $\{X_t, \underline{\underline{F}}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ es un *proceso de Markov* si para todo t, las σ-álgebras $\underline{\underline{F}}_t$ y $\underline{\underline{F}}_t^1$ son condicionalmente independientes respectò $\sigma\{X_t\}$. Diremos que $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ es un *proceso de Markov* si lo es respecto la familia de σ-álgebras $\underline{\underline{F}}_t^o$ generada por el proceso.

Supondremos en lo que sigue que E es un espacio métrico separable, completo y $\mathcal{E}$ es la σ-álgebra de Borel.

Dado un proceso de Markov X, para todo $0 \leq s < t < \infty$ tomaremos una versión regular $P_{st}(x,A)$ de la distribución de probabilidad de X_t condicionada por X_s. Es decir, P_{st} es una probabilidad de transición, a saber

(i) $\forall\, x \in E$, $P_{st}(x,\cdot)$ es una probabilidad sobre $(E, \mathcal{E})$

(ii) $\forall A \in \mathcal{E}$, $P_{st}(\cdot, A)$ es $\mathcal{E}$-medible,

tal que $P_{st}(x,A) = P(X_t \in A | X_s = x)$, $\mathcal{L}(X_s)$-c.s. (3.1.)

Observemos que para todo $t>0$, la probabilidad de transición $P_t(x,A) = P_{ot}(x,A)$ determina un operador P_t sobre $b(\mathcal{E})$ no negativo, de norma uno, tal que, si $g \in b(\mathcal{E})$

$$(P_t g)(x) = \int_E g(y)\, P_t(x,dy) \ .$$

Definición 3.1.2.

Una familia de probabilidades de transición $(P_{st}, 0\leq s<t<\infty)$ se llama *función de transición de Markov* si

$s<t<u$, $P_{su} = P_{st}*P_{tu}$, donde $*$ representa la composición de probabilidades de transición.

Definición 3.1.3.

Diremos que $\{X_t, \underline{\underline{F}}_t, P_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ es un *proceso de Markov con semigrupo* P_t (i.e. $P_{s+t} = P_s * P_t$) si $E(f(X_{t+s})|\underline{\underline{F}}_t) = (P_s f)(X_t)$ c.s., $\forall s>0, t\geq 0, f \in b(E)$, (siempre $P_o(x,A) = \delta_x(A)$).

Esto equivale a decir que el proceso $\{X_t, \underline{\underline{F}}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ es Markov y admite las $P_{st} = P_{t-s}$ como probabilidades de transición, en el sentido de (3.1.).

Definición 3.1.4.

$W = \{(W_t^1, \ldots, W_t^d),\ t\geq 0\}$ es un *movimiento Browniano d-dimensional* si los procesos W^i, $1\leq i\leq d$, son independientes y para todo i, W^i es un movimiento Browniano, es decir, es un proceso gaussiano, centrado con $E(W_t W_s) = t \wedge s$.

Sea W un movimiento Browniano d-dimensional, y sea $\underline{\underline{F}} = \{\underline{\underline{F}}_t,\ t\geq 0\}$ una familia de sub-σ-álgebras de $\underline{\underline{G}}$ completa, creciente, continua por la derecha y tal que:

$\sigma\{W_s, 0\leq s\leq t\} \subset \underline{\underline{F}}_t$, y $\sigma\{W_{\ell+t} - W_t,\ \ell\geq 0\}$ independiente de $\underline{\underline{F}}_t$.

Itô (1944) introdujo la clase de procesos $\mathcal{L}_W^p, p\geq 1$,

$\mathcal{L}_W^p = \{H$ medible, adaptado, $E\int_0^t H_s^p\, ds<\infty, \forall t\}$.

Recordemos que $\mathcal{L}^2_W$ es un espacio métrico completo con la distancia,

$$d(H,H') = \sum_n 1/2^n \left[E\left(\int_0^n (H_s - H'_s)^2 ds\right) \wedge 1 \right]^{1/2} .$$

Para todo proceso $H \in \mathcal{L}^2_W$ y para cada $i=1,\ldots,d$ puede definirse la *integral estocástica*, $\int_0^t H_s dW^i_s$. El proceso, $X^i_t = \{\int_0^t H_s dW^i_s \ , \ 0 \leq t\}$ es una martingala de cuadrado integrable que admite una versión continua.

Dada una matriz $\beta(t) = (\beta_{ij}(t))_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,d}}$, tal que sus elementos son de $\mathcal{L}^2_W$, llamaremos *integral estocástica* de β, al vector m-dimensional, definido por:

$$\int_0^t \beta(s) dW_s = \left\{ \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \beta_{ij}(t) dW^j_t \right\}_{i=1,\ldots,m}$$

Consideremos un proceso ξ_t, m-dimensional, de la forma,

$$\xi_t = c + \int_0^t \alpha(s) ds + \int_0^t \beta(s) dW_s \ ,$$

donde α es un vector m-dimensional cuyas componentes son de $\mathcal{L}^1_W$ y $c \in \mathbb{R}^m$. Diremos que ξ_t tiene por *diferencial estocástica* $c + \alpha(t)\, dt + \beta(t)\, dW_t$ y escribiremos $d\xi_t = c + \alpha(t)dt + \beta(t)dW_t$.

En estas condiciones, la *fórmula de Itô* afirma que si $f(x,t) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 en t y de clase

C^2 en x, entonces, $f(\xi_t,t)$ tiene diferencial estocástico y viene dado por:

$$df(\xi_t,t) = \left[f_t(\xi_0) + \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(\xi_t,t)\,\alpha_i(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{d} \sum_{i,j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(\xi_t,t)\beta_{ir}(t)\beta_{jr}(t) \right] dt +$$

$$+ \sum_{r=1}^{d} \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(\xi_t,t)\beta_{ir}(t)dW_t^r \ .$$

A continuación vamos a definir el concepto de *ecuación diferencial estocástica.*

Sea $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\ldots,d}$ y $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_d)$, con σ_{ij} , β_j funciones medibles definidas sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$.
Sea $\{\xi_t\}_t$ un proceso a valores en $\mathbb{R}^d$ y W un Browniano d-dimensional. Entonces si,

(i) $\xi(o) = \xi_o$

(ii) $\xi_t = \xi_o + \int_0^t \beta(\xi_s,s)ds + \int_0^t \sigma(\xi_s,s)dW_s$,

en el sentido de que las integrales existen, diremos que $\{\xi_t, t\geq o\}$ es *solución de la ecuación diferencial estocástica* dada por (ii), con la condición inicial (i).

Además, si las funciones σ, β verifican:

(i) Condición de Lipschitz: $\forall x,x' \in \mathbb{R}^d$ y $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$|\beta(x,t)-\beta(x',t)| \leq k_1|x-x'|$$

$$|\sigma(x,t)-\sigma(x',t)| \leq k_2|x-x'|$$

donde k_1,k_2 son constantes no negativas.

(ii) Condición de crecimiento lineal uniforme en t;

$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+$, y ciertas constantes k_3, k_4 no negativas

$$|\beta(x,t)| \leq k_3(1+|x|)$$

$$|\sigma(x,t)| \leq k_4(1+|x|)$$

y si ξ_o es independiente de $\sigma\{W_s, o \leq s\}$ con $E(|\xi_o|^2) < \infty$, entonces existe una *única* solución X de la ecuación diferencial estocástica que es un elemento de $\mathcal{L}^2_W$, *continua*. Si $\underline{\underline{G}}_t$ es la σ-álgebra generada por ξ_o y por W_s, $0 \leq s \leq t$, entonces, $\{\xi_t, \underline{\underline{G}}_t, t \geq o\}$ es un *proceso de Markov*.

A continuación definiremos la noción de familia markoviana bidimensional y construiremos una tal familia.

Para procesos a dos índices, han sido dadas diferentes propiedades de Markov, (véase [47], [28]). La definición con la que trabajaremos, dada en [30], se expresa en función de un semigrupo.

Definición 3.1.5.

Un *semigrupo a dos índices* $P = (P_z, z \in \mathbb{R}^2_+)$ es una familia de operadores sobre $b(\mathcal{E})$ positivos con: $P_z * P_{z'} = P_{z'} * P_z = P_{z+z'}$ para todo z, z' de $\mathbb{R}^2_+$, $P_o = Id$ y para toda $f \in b(\mathcal{E})$, $||P_t f|| \leq ||f||$.

Definición 3.1.6.

Dados un espacio de probabilidad $(\Omega, \underline{\underline{G}}, P)$, una filtración $\underline{\underline{F}} = \{\underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ completa, creciente, continua por la derecha y verificando la propiedad F.4., un semigrupo $\{P_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ y una familia de procesos $X = (X^x, x \in E)$, continuos diremos que forman una *familia bi-markoviana* si para toda f de $b(\mathcal{E})$ y todo z de $\mathbb{R}_+^2$, la proyección opcional del proceso,

$$\{f(X^x_{z+.})_{z'} \quad , \; z' \in \mathbb{R}_+^2\}$$

es indistinguible del proceso,

$$P_z f(X^x_.) = \{P_z f(X^x_{z'}) \quad , \; z' \in \mathbb{R}_+^2\}$$

y además, para todo x de E, $X_0^x = x$ c.s.

Remarquemos que, contrariamente a lo que pasa en el caso unidimensional, dar un semigrupo en general, no es suficiente para determinar la ley de un proceso markoviano a dos índices. El problema reside en que el semigrupo no da información de como podemos pasar de un punto a otro si éstos no son comparables. Es necesario, para conocer el proceso, dar buenas versiones de esperanzas condicionadas.

A partir de ahora $E = \mathbb{R}^d$, y sean $\{X^x, x \in \mathbb{R}^d\}$ y $\{Y^y, y \in \mathbb{R}^d\}$, dos familias de procesos de Markov continuos construidos como las únicas soluciones de sendas ecuaciones diferenciales estocásticas asociadas a sendos movimientos Brownianos d-dimensionales ,con condiciones iniciales x e y respectivamente.Además,sabemos que los procesos X e Y tienen versiones continuas en (t,x).

Los procesos anteriores están definidos sobre espacios de probabilidad $(\Omega^i, \underline{\underline{G}}^i, P^i)$, i=1,2 , y asociados a filtraciones $\underline{\underline{F}}^i$, i=1,2 , completas, crecientes y continuas por la derecha. Además tienen P^i, i=1,2 , como semigrupo asociado.

Consideremos el espacio de probabilidad producto $(\Omega^1 x \Omega^2, \underline{\underline{G}}^1 \otimes \underline{\underline{G}}^2, P^1 \otimes P^2)$. Identificamos las σ-álgebras $\underline{\underline{F}}^1_s$, $\underline{\underline{F}}^2_t$, para todo $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$, con las correspondientes σ-álgebras del producto, es decir, $\underline{\underline{F}}^1_s$ se identifica con la σ-álgebra de conjuntos $A \times \Omega_2$ con $A \in \underline{\underline{F}}^1_s$, y $\underline{\underline{F}}^2_t$ con la σ-álgebra de conjuntos $\Omega_1 \times B$ con $B \in \underline{\underline{F}}^2_t$. Con esta identificación, tomaremos en el espacio producto, la filtración $\underline{\underline{F}} = \{\underline{\underline{F}}_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ con $\underline{\underline{F}}_z = \underline{\underline{F}}^1_s \vee \underline{\underline{F}}^2_t$, para todo $z = (s,t)$ de $\mathbb{R}^2_+$. Observemos que se verifica, $\underline{\underline{F}}_{s\infty} = \bigvee_r F_{(s,r)} = \underline{\underline{F}}^1_s \cap \underline{\underline{F}}^2_\infty$ y $\underline{\underline{F}}_{\infty t} = \bigvee_r \underline{\underline{F}}_{(r,t)} = \underline{\underline{F}}^1_\infty \cap \underline{\underline{F}}^2_t$, y además se tiene, $\underline{\underline{F}}_z = \underline{\underline{F}}_{s\infty} \cap \underline{\underline{F}}_{\infty t}$. Recordemos (ver [40]) que esta nueva filtración es completa, creciente, continua por la derecha y verifica la propiedad F.4.

Definamos una nueva familia de procesos $Z = \{Z^x, x \in \mathbb{R}^d\}$ de la forma siguiente, para $x \in \mathbb{R}^d$, $z = (s,t)$ y $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^1 x \Omega^2$,

$$Z^x_z(\omega_1, \omega_2) = Y_t^{X^x_s(\omega_1)}(\omega_2).$$

Teorema 3.1.7.

La familia Z es una familia bi-markoviana si los semigrupos P^1 , P^2 conmutan.

Demostración.

Observemos que $Z^x_{(o,o)} = Y^x_o = x$ c.s., para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Como semigrupo asociado a Z tomaremos, $P = (P_z, z \in \mathbb{R}^2_+)$ con $P_{(s,t)} = P^1_s \cdot P^2_t = P^2_t \cdot P^1_s$. Es en efecto un semigrupo, ya que:

(i) $P_z * P_{z'} = P^1_s \cdot P^2_t * P^2_{t'} \cdot P^1_{s'} = P^2_{t+t'} \cdot P^1_{s+s'} = P_{z+z'}$; $P_{(o,o)} = Id.$

(ii) Para toda f de $b(\mathcal{E})$,

$$||P_z f|| = ||P^1_s \cdot P^2_t (f)|| \leq ||f|| .$$

Basta pues con comprobar que para toda $f \in b(\mathcal{E})$, todo $z \in \mathbb{R}^2_+$ y $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(P_z f) Z^x_{z'} = {}^o(f(Z^x_{z+\cdot})_{z'}) \quad ,$$

donde ${}^oX$ representa la proyección opcional del proceso X. Analogamente ${}^{o1}X$, ${}^{o2}X$ representan las proyecciones 1-opcional y 2-opcional del proceso X respectivamente.

En efecto, por la definición de P y de Z, si $z = (s,t)$ y $z' = (s',t')$,

$$(P_z f)(Z^x_{z'}(\omega_1,\omega_2)) = (P^2_t \cdot P^1_s\, f)\; Y_{t'}^{X^x_{s'}(\omega_1)}(\omega_2) =$$

$$= {}^{o2}(P^1_s\, f)\; Y_{t'+t}^{X^x_{s'}(\omega_1)}(\omega_2)$$, ya que Y^y es un proceso de Markov

con semigrupo P^2 (ver [41]). Fijemos $\omega_2 \in \Omega^2$, y consideremos la función,

$$
\begin{aligned}
g : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\alpha &\longmapsto g(\alpha) = f(Y^{\alpha}_{t+t'}(\omega_2))
\end{aligned}
$$

por construcción $g \in b(\mathcal{E})$. Podemos escribir,

$$
{}^{o2}(P^1_s f)(Y^{X^x_{s'}(\omega_1)}_{t'+t}(\omega_2)) = {}^{o2}(P^1_s g)(X^x_{s'}(\omega_1)) \quad \text{y}
$$

teniendo en cuenta que X^x es un proceso de Markov con semi-grupo P^1 coincide con,

$$
{}^{o2\ o1}g(X^x_{s+s'})
$$

Por la definición de g y de proyección opcional se tiene,

$$
(P_z f)(Z^x_{z'}) = {}^{o}f(Y^{X^x_{s+s'}}_{t+t'}) = {}^{o}f(Z^x_{z+z'}) \quad . \quad \#
$$

§2. Parada óptima.

En esta sección supondremos las mismas hipótesis que en la sección anterior y Z será la familia bi-markoviana antes construida.

Consideremos la siguiente familia de procesos $\{U^x, x \in \mathbb{R}^d\}$, definida de la forma siguiente: para todo $z = (s,t)$ de $\mathbb{R}^2_+$, para todo x de $\mathbb{R}^d$

$$
U^x_z = e^{-p|z|} f(Z^x_z) \quad \text{y} \quad U^x_\infty = 0
$$

siendo $|z| = s+t$, $f \in b(\mathcal{E})$ positiva y uniformemente continua, y con el convenio $e^{-p|\infty|} = 0$.

Para todo x de $\mathbb{R}^d$, el proceso U^x es adaptado y tiene trayectorias continuas, ya que los procesos X^x, Y^y son continuos y adaptados. Además U^x_z tiene una versión continua en (x,z). Por otra parte U^x_z es positivo y $\{U^x_Z$, Z punto de paro$\}$ es uniformemente integrable.

Nuestro objetivo es resolver el problema de parada óptima asociado al proceso U^x, para todo x de $\mathbb{R}^d$. Es decir, demostrar que existe un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro, T* tal que,

$$E(U^x_{T*}) = \sup \{E(U^x_S),\ S, \underline{\underline{F}}\text{-punto de paro}\} .$$

Para ello, seguiremos los resultados de [30] donde se estudia el problema de parada óptima para familias bi-markovianas generales.

En [9] se demuestra que existe un proceso J^x, llamado *Envoltura de Snell* del proceso U^x tal que, para todo punto de paro T,

$$J^x_T = \text{supess}\{E(U^x_S | \underline{\underline{F}}_T),\ S \geq T,\ S \text{ punto de paro}\} .$$

La envoltura de Snell J^x es una supermartingala fuerte tal que $\{J^x_T$, T punto de paro$\}$ es uniformemente integrable, que mayora U^x sobre todos los puntos de paro, es decir, para todo Z_1, Z_2 puntos de paro con $Z_1 \leq Z_2$.

$$E(J^x_{Z_2} | \underline{\underline{F}}_{Z_1}) \leq J^x_{Z_1} \quad \text{c.s.}$$

y $J^x_{Z_1} \geq U^x_{Z_1}$, c.s.

Recordemos el siguiente

<u>Teorema 3.2.1.</u> ([30], proposición 3.1.)

Si la función f y la familia bi-markoviana Z son tales que el proceso U^x, para todo x de $\mathbb{R}^d$, tiene c.s., trayectorias semicontinuas inferiormente, entonces existe una función q de b($\mathcal{E}$) que mayora f, y tal que, c.s., para todo x de E, y para todo T punto de paro,

$$J_T^x = e^{-p|T|} q(Z_T^x) \quad . \qquad \#$$

Debemos demostrar que se verifica la siguiente condición de regularidad ,

(H) Para todo A real positivo, existe una constante k > 0, tal que, para todo S punto de paro con $|S| \leq A$,

$$E(|Z_S^x - Z_S^y|) \leq e^{kA}|x-y|$$

para todo x,y de $\mathbb{R}^d$.

Recordemos previamente el

<u>Lema de Gronwall</u>

Sean α, β funciones integrables de Lebesgue, en un intervalo $[a,b]$, y sea H una constante tal que,

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + H\int_a^t \alpha(s)\, ds$$

para todo t de $[a,b]$.

Entonces se verifica:

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + H \int_a^t e^{H(t-s)}\beta(s)\, ds \ . \qquad \#$$

Observemos que si $\beta(t) \equiv \beta$, es constante, entonces,

$$\alpha(t) \leq \beta e^{H(t-a)} \ .$$

<u>Teorema 3.2.2.</u>

Para todo x de $\mathbb{R}^d$, el proceso Z^x cumple la condición (H).

<u>Demostración.</u>

Sea $S = (S_1,S_2)$ un $\underline{\underline{F}}$-punto de paro con $|S| \leq A$. Fijemos $\omega_1 \in \Omega^1$. Observemos que $S_2(\omega_1,\cdot)$ es un $\underline{\underline{F}}^2$-tiempo de paro, ya que $\{S_2 \leq t\} \in \underline{\underline{F}}_{\infty t} = \underline{\underline{F}}^1_{\infty} \cap \underline{\underline{F}}^2_t$ y por tanto su sección $\{S_2(\omega_1,.) \leq t\}$ es de $\underline{\underline{F}}^2_t$. Además $S_2 \leq A$.

Recordemos que para todo y de $\mathbb{R}^d$, Y^y es la única solución de una ecuación diferencial estocástica, cuyas funciones σ,β verifican la condición de Lipschitz y la condición de crecimiento lineal uniforme en t.

Se verifica, para todo y^1, y^2 de $\mathbb{R}^d$,

$$E(|Y^{y^1}_{S_2} - Y^{y^2}_{S_2}|) \leq e^{kA}|y^1 - y^2|$$

para cierta constante k. En efecto, fijemos $\varepsilon>0$, y consideremos la función continua $F(x) = (\varepsilon+|x|^2)^{1/2}$. Apliquemos la fórmula de Itô a la función F y al proceso $\eta_t = Y^{y^1}_t - Y^{y^2}_t$, con lo que obtenemos,

$$F(\eta_{s_2}) = F(y^1 - y^2) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{d} \int_0^{S_2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\eta_s)\left[\sigma_{ik}(Y_s^{y1}) - \sigma_{ik}(Y_s^{y^2})\right] dW_s^k +$$

$$+ \int_0^{S_2} \sum_{i=1}^{d} \left[\beta_i(Y_s^{y^1}) - \beta_i(Y_s^{y^2})\right] \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(\eta_s) ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{S_2} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\eta_s) \sum_{k=1}^{d} \left[\sigma_{ik}(Y_s^{y^1}) - \sigma_{ik}(Y_s^{y^2})\right]\left[\sigma_{jk}(Y_s^{y^1}) - \sigma_{jk}(Y_s^{y^2})\right] ds$$

donde,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = (\varepsilon + |x|^2)^{-1/2} \cdot x_i$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = -(\varepsilon + |x|^2)^{-3/2} x_i x_j + (\varepsilon + |x|^2)^{-1/2} \delta_{ij} =$$

$$= \frac{-x_i x_j + (\varepsilon + |x|^2)\delta_{ij}}{(\varepsilon + |x|^2)^{3/2}} \leq \frac{1 + \delta_{ij}}{(\varepsilon + |x|^2)^{3/2}} \leq 2 (\varepsilon + |x|^2)^{-1/2} .$$

El tercer y cuarto sumandos, teniendo en cuenta la condición de Lipschitz están acotados por

$$\int_0^{S_2} c(\varepsilon + |\eta_s|^2)^{1/2} ds .$$

Por tanto,

$$E(F(\eta_{s_2})) \leq F(y^1 - y^2) + k \int_0^{S_2} E_2(F(\eta_s)) ds ,$$

ya que la esperanza de una integral estocástica es nula.

Aplicando el lema de Gronwall,

$$E(F(\eta_{S_2})) \leq F(y^1 - y^2)\, e^{kS_2} .$$

Haciendo tender ε a cero y por el teorema de convergencia dominada, obtenemos,

$$E(|\eta_{S_2}|) \leq |y^1 - y^2|\, e^{kS_2} .$$

Tomando $y^1 = X^x_{S_1}(\omega_1)$, $y^2 = X^y_{S_1}(\omega_1)$ y como $S_2 \leq A$ obtenemos:

$$E_2\left(|Y_{S_2}^{X^x_{S_1}(\omega_1)} - Y_{S_2}^{X^y_{S_1}(\omega_2)}| \right) \leq |X^x_{S_1} - X^y_{S_1}|\, e^{kA} .$$

Integrando respecto P^1 y razonando de forma análoga para el proceso X^x resulta el aserto. #

Recordemos el siguiente resultado,

<u>Teorema 3.2.3.</u> ([30], proposición 3.2.)
Si la función f es uniformemente continua y acotada, y si la familia bi-markoviana verifica la condición (H) entonces la función q es continua y acotada sobre $\mathbb{R}^d$. #

Por consiguiente, en nuestro caso, la envoltura de Snell J^x admite la siguiente expresión,

$$J^x_t = e^{-p|t|} q(Z^x_t), \text{ con } q \in b(\mathcal{E}) \text{ y continua}$$

Recordemos las siguientes definiciones.

Definición 3.2.4.

Diremos que R es un 1-*punto de paro*, respectivamente un 2-*punto de paro*, si es un punto de paro respecto la filtración $\{\underline{\underline{F}}_s^1, (s,t) \in \mathbb{R}_+^2\}$, respectivamente respecto $\{\underline{\underline{F}}_t^2, (s,t) \in \mathbb{R}_+^2\}$.

Definición 3.2.5.

Un proceso Y es *completamente regular* si es continuo por la derecha, con límites en los otros tres cuadrantes, la familia $\{Y_Z$, Z punto de paro$\}$ es uniformemente integrable, y además dada una sucesión $\{T^n = (T_1^n, T_2^n), n \in \mathbb{N}\}$ de puntos de paro (respectivamente, 1-puntos de paro; 2-puntos de paro) de límite $T = (T_1, T_2)$ de forma que T^n es creciente, (respectivamente, $T_1^n \leq T_1$, $T_2^n \geq T_2$; $T_1^n \geq T_1, T_2^n \leq T_2$) entonces $E(Y_{T^n})$ converge hacia $E(Y_T)$.

Para resolver el problema de parada óptima que nos ocupa, utilizaremos el siguiente resultado de existencia de solución.

Teorema 3.2.6. ([30], proposición 2.3.)

Si el proceso U^x y su envoltura de Snell J^x son continuos por la derecha y si J^x es un proceso completamente regular, entonces existe solución en el problema de parada óptima del proceso U^x para todo x de $\mathbb{R}^d$. #

Bastará pues, con comprobar que se cumplen las hipótesis de este teorema.

Teorema 3.2.7.

Para todo x de $\mathbb{R}^d$, el proceso U^x y su envoltura de Snell J^x, cumplen las hipótesis del teorema 3.2.6.

Demostración.

Ya habíamos razonado que para todo x de $\mathbb{R}^d$, el proceso U^x es continuo, y la continuidad por la derecha y la existencia de límites por la izquierda del proceso J^x se deducen de la continuidad de la función q. Como la función q es continua y acotada, y el proceso $\{Z_z^x, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ es continuo en z, aplicando el teorema de convergencia dominada resulta que J^x es completamente regular. #

CAPITULO IV

PROCESOS PUNTUALES EN EL PLANO CON k PUNTOS $1 < k \leq \infty$.

En este capítulo realizamos un estudio profundo de los procesos puntuales en el plano con un número finito ó infinito numerable de puntos que denotaremos por k.

Comenzamos definiendo el concepto de proceso puntual como medida aleatoria y estudiamos la filtración natural asociada a un tal proceso. Continuamos dando una forma explícita de los procesos adaptados, de los opcionales y de los previsibles así como de los procesos crecientes opcionales y de los procesos crecientes previsibles. Demostramos que toda martingala uniformemente integrable admite una versión continua por la derecha con límites por la izquierda. A partir de este resultado consideramos las proyecciones opcional y previsible para procesos medibles y acotados, así como las proyecciones duales, estudiando sus propiedades. Finalmente, construimos la proyección dual previsible de un proceso creciente, relativa a una probabilidad absolutamente continua respecto la probabilidad inducida por el proceso puntual.

§1. Proceso puntual. Filtración natural asociada.

Sea k natural finito ó infinito.

Sea $\hat{\Omega}_k$ el espacio de las medidas μ sobre $[o,\infty]^2$ de la forma $\mu = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{\omega_i}$, $\omega_i \in [o,\infty]^2$, tales que:

(i) μ da masa 1 al origen y a los ejes

(ii) para todo ω de $[o,\infty]^2$, $\mu(\{\omega\})$ toma el valor 0 ó 1

(iii) $\mu([o,z]) < +\infty$ para todo z de $[o,\infty)^2$.

Tomemos en $\hat{\Omega}_k$ la mínima σ-álgebra $\underline{\underline{G}}^0$ tal que para todo A boreliano de $[o,\infty]^2$, las funciones $\hat{\Omega}_k \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$ tales que $\psi(\mu) = \mu(A)$ son medibles.

Definición 4.1.1.

Un *proceso* $\hat{M}$ *puntual con k puntos* es una medida aleatoria sobre $\hat{\Omega}_k \times [o,\infty]^2$ dada por

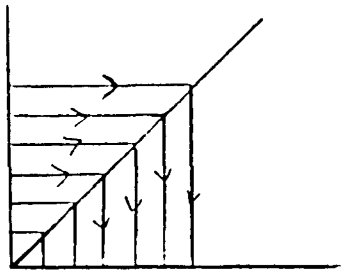
$$\hat{M}(\mu,[o,z]) = \mu([o,z]) ,$$

con μ de $\hat{\Omega}_k$, y disponemos de una probabilidad Q en $(\hat{\Omega}_k, \underline{\underline{G}}^0)$.

Denotaremos por $\sim$ el orden definido en $[0,\infty]^2$ por:

$(s,t) \sim (s',t') \Longleftrightarrow$ (si $s \neq s'$ y $t \neq t'$, entonces existen a,b de $\mathbb{R}_+$, con $a<b$ tales que: $(s,t) \leq (a,a)$ y $(s',t') \leq (b,b)$) ó (si existe a de $\mathbb{R}_+$, con $(s,t)=(s,a)$ y $(s't)=(s',a)$ con $s<s'$)

ó (si existe a de $\mathbb{R}_+$ con $(s,t) = (s,a)$, $(s',t') = (a,t')$) ó (si existe a de $\mathbb{R}_+$ con $(s,t) = (a,t)$, $(s',t') = (a,t')$ y $t>t'$).



Sea $\Omega_k \subset ([o,\infty]^2)^k$, tal que $(\omega_1,..,\omega_k)$ es de Ω_k si :

(i) $\omega_1 = (o,o)$

(ii) $\omega_i \neq \omega_j$ para todo $i \neq j$, y si ω_i y ω_j son distintos de ∞ .

(iii) Dado z de $[o,\infty)^2$ el número de ω_i que pertenecen a $[o,z]$ es finito.

Consideremos las siguientes aplicaciones,

$$\hat{\Omega}_k \xrightarrow{\pi_1} \Omega_k \xrightarrow{\pi_2} \hat{\Omega}_k$$

$$\mu \longmapsto \pi_1(\mu) = (\omega_1,..,\omega_k)$$

$$(\omega_1,..,\omega_k) \longmapsto \pi_2(\omega_1,..,\omega_k) = \mu = \sum_i \delta_{\omega_i}$$

donde $\pi_1(\mu) = (\omega_1,..,\omega_k)$, siendo $(\omega_1,..,\omega_k)$ la colección de puntos donde μ es no nula, ordenados según $\sim$. Observemos que π_2 es exhaustiva y $\pi_2\pi_1 = Id$ y tomaremos $\pi_2^{-1}(\mu) = (\omega_1,..,\omega_k)$ siendo $(\omega_1,..,\omega_k)$ la antiimagen ordenada según $\sim$, es decir $\pi_2^{-1}(\mu) = \pi_1(\mu)$.

En el espacio $(\Omega_k, \pi_1(\underline{\underline{G}}^0), P)$ donde $P = Q\pi_1^{-1}$ y $P\pi_1 = P\pi_2^{-1} = Q$ un proceso puntual M con k puntos es:

$$M_u((\omega_1,..,\omega_k)) = \sum_i I_{[o,u]}(\omega_i)$$

con $u \in [0,\infty]^2$.

Por comodidad trabajaremos en el espacio $(\Omega_k, \pi_1(\underline{\underline{G}}^0), P)$ y transportaremos los resultados obtenidos al espacio $(\hat{\Omega}_k, \underline{\underline{G}}^0, Q)$ a través de π_2.

Sea $\underline{\underline{F}}^0 = \{\underline{\underline{F}}_z^0, z \in \overline{\mathbb{R}_+^2}\}$ la filtración natural asociada al proceso puntual M, es decir, $\underline{\underline{F}}_z^0 = \sigma\{M_u, u \leq z\}$ y $\underline{\underline{F}}_\infty^0 = \bigvee_z \underline{\underline{F}}_z^0$. A continuación damos una forma explícita de esta filtración y estudiamos sus propiedades. Observemos que es creciente por construcción.

Recordemos las siguientes definiciones,

<u>Definición 4.1.2.</u>
Un conjunto $A \subset ([o,\infty]^2)^k$ es *simétrico* si y sólo si un punto $(x_1,..,x_k)$ es de A, entonces para toda biyección f de $\{1,2,...,k\}$ en sí mismo $(x_{f(1)},..,x_{f(k)})$ es de A.

El conjunto de todos los simétricos de $([o,\infty]^2)^k$ lo representaremos por S_k.

Definición 4.1.3.

Dada una función g definida sobre $([0,\infty]^2)^n$ con $1 \leq n < \infty$, su *simetrizada* es la función $\check{g}$ definida por:

$$\tilde{g}(x_1,..,x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} g(x_{\sigma(1)},..,x_{\sigma(n)})$$

donde $\mathfrak{S}_n$ es el grupo de permutaciones de $\{1,...,n\}$.

Definición 4.1.4.

Dada una permutación σ de $\{1,..,n\}$, ésta induce una función S_σ definida por,

$$\begin{array}{ccc} ([0,\infty]^2)^n & \xrightarrow{S_\sigma} & ([0,\infty]^2)^n \\ (x_1,..,x_n) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)},..,x_{\sigma(n)}) \end{array} .$$

Dado $A \subset ([0,\infty]^2)^n$, representaremos por $S_\sigma(A)$ l conjunto,

$$S_\sigma(A) = \{(x_1,..,x_n) \in A : (x_{\sigma(1)},..,x_{\sigma(n)}) \in A\} .$$

Definición 4.1.5.

Dada una σ-álgebra cualquiera $\underline{\underline{A}}$ y dado B de $\underline{\underline{A}}$ llamaremos *traza de* $\underline{\underline{A}}$ *respecto* B y notaremos $\underline{\underline{A}}_{|B}$, a la σ-álgebra dada por,

$$\underline{\underline{A}}_{|B} = \{C : C = D \cap B \text{ con } D \text{ de } \underline{\underline{A}}\} .$$

A continuación damos en forma de lemas dos resultados previos para procesos puntuales con k puntos siendo k finito.

Notaremos por $\mathcal{A}_z$ la tribu trivial sobre $(o,z]^c$ es decir,

$$\mathcal{A}_z = \sigma_{(o,z]^c}\{\emptyset,(o,z]^c\} \text{ para todo } z \text{ de } \mathbb{R}_+^2 .$$

Lema 4.1.6.

Sea z de $\mathbb{R}_+^2$. Se verifica,

$$(\mathcal{B}_{(o,z]} \vee \mathcal{A}_z)^k \cap S_k \big|_{(o,z]^k} = \sigma\{\text{abiertos de } ([o,\infty]^2)^k \text{ simétricos}\}\big|_{(o,z]^k}$$

Demostración.

Sea f una función medible de Borel simétrica definida sobre $(o,z]^k$. Por ser medible de Borel, existen abiertos A_i de $(o,z]^k$ y constantes α_i tales que,

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, I_{A_i} \longrightarrow f .$$

Simetrizando,

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \frac{1}{k!} \, I_{S_\sigma(A_i)} \longrightarrow f .$$

Notemos que $I_{S_\sigma(A_i)} = I_A \cdot S_\sigma^{-1}$.

Si demostramos que existen abiertos B_i de $(o,z]^k$ simétricos y constantes β_i de forma que,

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \frac{1}{k!} \, I_{S_\sigma(A_i)} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \, I_{B_i}$$

habremos terminado.

Para cada $i \in \{1,\dots,p\}$ sea para $j=1,\dots,k$

$$B_i^j = \{(x_1,\dots,x_n) \in A_i : (x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) \in A_i \text{ para}$$

$$\text{exactamente } j \text{ permutaciones}\}.$$

Entonces para cada i de $\{1,\dots,p\}$,

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \frac{1}{k!} I_{S_\sigma(A_i)} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} j!\, I_{B_i^j}$$

y por tanto

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \sum_{\sigma_k} \frac{1}{k!} I_{S_\sigma}(A_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \sum_{j=1}^{k} \frac{j!}{k!} I_{B_i^j}$$

de donde resulta la afirmación ya que los conjuntos B_i^j son simétricos por construcción y abiertos por serlo los A_i.

Con ésto queda demostrado que $(\mathcal{B}_{(o,z]} \vee \mathcal{Q}_z)^k \cap S_k \subset \sigma\{$abiertos de $([o,\infty]^2)^k$ simétricos$\}$. La inclusión contraria es evidente. #

<u>Lema 4.1.7.</u>

Sea z de $[o,\infty]^2$ y sean u_i de $[o,z]$ con i de $\{1,\dots,k\}$, distintos de z. Sea $\Delta_i = (u_i,u_i+\ell]$, donde $\ell=(\varepsilon,\varepsilon),\varepsilon>0$, es tal que los Δ_i son disjuntos, y si $u_i = 0$, entonces $\Delta_i = \{o\}$.

Sea $A_{(u_1,\dots,u_k)}$ el rectángulo de origen $(u_1,\dots,u_k)$ y arista ℓ contenido en $[o,z]^k$, es decir,

$$A_{(u_1,..,u_k)} = \{(\omega_1,..,\omega_k) \text{ con } \omega_i \text{ de } \Delta_i \ , \ \forall i \in \{1,..,k\}\}.$$

Se verifica, $\bigsqcup_{\sigma\in \mathfrak{S}_k} A_{(u_{\sigma(1)},..,u_{\sigma(k)})}$ es un elemento de $\underline{\underline{F}}^0_z|_{\Omega_k}$.

Demostración.

Basta con notar que,

$A_{(u_{\sigma(1)},..,u_{\sigma(k)})} = \{(\omega_1,..,\omega_k)$: el incremento del proceso M en la región Δ_i es 1, $\forall\, i \in \{1,..,k\}\}$

y de la definición de $\underline{\underline{F}}^0_z$ resulta el aserto. #

Se verifica el siguiente,

Teorema 4.1.8.

Sea $\{\underline{\underline{F}}^0_z \ , \ z \in \overline{\mathbb{R}^2_+}\}$ la filtración natural asociada a un proceso puntual M con k puntos, k finito ó infinito.

Entonces,

$$\underline{\underline{F}}^0_z|_{\Omega_k} = (\mathcal{B}_{(o,z]} \vee \mathcal{A}_z)^k \cap S_k|_{\Omega_k}$$

Demostración.

Para n natural, con $1 \leq n < k+1$, escribiremos S^n_z la unión de todos los posibles productos con n factores iguales a $(o,z]$ y k-n iguales a $(o,z]^c$. Se verifica,

$\underline{\underline{F}}^0_z|S^n_z \cap \Omega_k = \sigma\{\bigcup_f (A_{f(1)} x \dots x A_{f(k)})$, donde f es una biyección de $\{1,..,k\}$ en sí mismo, y $A_1 x..x A_n$ es un generador de $\underline{\underline{F}}'_z|(o,z]^n \cap \Omega_n$, siendo $\{\underline{\underline{F}}'_z,\ z \in \mathbb{R}^2_+\}$ la filtración natural asociada a un proceso puntual con n puntos y $A_{n+1} = .. = A_k = (o,z]^c\}$.

En efecto, basta con estudiar las funciones indicatrices de los generadores de $\underline{\underline{F}}^0_z|S^n_z \cap \Omega_k$.

Supongamos n=1, los otros casos son análogos.

Las funciones indicatrices no nulas de los generadores de $\underline{\underline{F}}^0_z|\Omega_k \cap S^1_z$ son :

$I_{\bigcup_f (B_{f(1)} x \dots x B_{f(k)}) \cap S^1_z}$ con f biyección, $B_1 = [o,u]$, $B_i = [o,u]^c$, $i \neq 1$ y coincide con, $I_{\bigcup_f (\bar{B}_{f(1)} x \dots x \bar{B}_{f(k)})}$ con $\bar{B}_1 = B_1$, $\bar{B}_i = (o,z]^c$, $i \neq 1$.

$I_{\bigcup_f (C_{f(1)} x \dots x C_{f(k)}) \cap S^1_z}$ con $C_i = [o,u]^c$ para todo i, que coincide con $I_{\bigcup_f (\bar{C}_{f(1)} x \dots x \bar{C}_{f(k)})}$ con $\bar{C}_1 = [o,u]^c \cap (o,z]$, $\bar{C}_i = (o,z]^c$, $i \neq 1$.

Por consiguiente se cumple la afirmación.

Por tanto si $\underline{\underline{F}}'_z|(o,z]^n \cap \Omega_n = (\mathcal{B}_{(o,z]})^n|_{\Omega_n}$ ya estará. La inclusión '$\subset$' es inmediata por definición de $\underline{\underline{F}}'_z$. La inclu sión contraria se debe a que todo abierto simétrico de $(o,z]^n \cap \Omega_n$ es de $\underline{\underline{F}}'_z|_{\Omega_n}$, ya que se puede poner como reunión finita ó numerable de los rectángulos estudiados en el lema 4.1.7. que son elementos de $\underline{\underline{F}}'_z|_{\Omega_n}$. #

Teorema 4.1.9.

La filtración $\{\underline{\underline{F}}^0_z,\ z \in \overline{\mathbb{R}^2_+}\}$ es continua por la derecha.

Demostración.

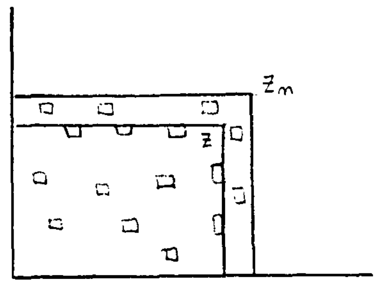
Basta con demostrar que $\bigcap_{z'>z} \underline{\underline{F}}^0_{z'} \subset \underline{\underline{F}}^0_z$, ya que la inclusión contraria es inmediata. Para ello es suficiente trabajar con una colección $\{z_n\}_n$ que decrecen hacia z.

Consideremos una colección C numerable de rectángulos Δ_i abiertos por la izquierda de forma que, $\underline{\underline{F}}_z$ coincida con la σ-álgebra generada por los incrementos del proceso sobre los Δ_i de C con $\Delta_i \subset (o,z]$, es decir,

$\underline{\underline{F}}^0_z = \sigma\{M(\Delta_i,\omega),\ \Delta_i \in C,\ \Delta_i \subset (o,z]\}$, y además para todo n,

$\underline{\underline{F}}^0_{z_n^-} = \sigma\{M(\Delta_i,\omega),\ \Delta_i \in C,\ \Delta_i \subset (o,z_n)\}$.

Tal colección existe, pues si z = (s,t) basta con tomar los rectángulos con vértices racionales y de forma que también sean vértices los puntos (r,t) y (s,r) con r racional.



Para m fijo, si X es $F^0_{z_m}$-medible existe una función G_m, función de los incrementos del proceso M sobre todo los Δ_i contenidos en $(o,z_m]$, es decir, $X = G_m(M(\Delta_i,\omega),i)$. Para m' superior a m, existe una función $G_{m'}$, función de los incrementos del proceso M, sobre todos los Δ_i contenidos en $(o,z_{m'}]$, que son menos que los contenidos en (o,z_m), es decir, $X = G_{m'}(M(\Delta_i,\omega),i)$. Fijemos un ω de Ω_k' y sea $G(\omega) = \limsup_m G_m(\omega)$. Esta función G sólo depende de los Δ_i contenidos en $(o,z]$ y además $X(\omega) = G(M(\Delta_i,\omega))$, por tanto X es $\underline{\underline{F}}^0_z$-medible. #

Sea $(\Omega_k,\underline{\underline{G}},P;\{\underline{\underline{F}}_z\}_z)$ la P-aumentación de $(\Omega_k,\underline{\underline{G}}^0,P;\{\underline{\underline{F}}^0_z\}_z)$, es decir, $\underline{\underline{G}}$ es la P-completación de $\underline{\underline{G}}^0$ y $\underline{\underline{F}}_0$ será la σ-álgebra $\underline{\underline{F}}^0_0$ aumentada con los conjuntos de probabilidad nula. Esta nueva filtración será pues completa y creciente. Además sigue siendo continua por la derecha, ya que si $\Lambda \in \bigcap_n \underline{\underline{F}}_{z+(\frac{1}{n},\frac{1}{n})}$, para todo n, exixte Λ^0_n de $\underline{\underline{F}}^0_{z+(\frac{1}{n},\frac{1}{n})}$ tal que Λ y Λ^0_n sólo difieren en un conjunto de probabilidad nula, es decir, $P(\Lambda \Delta \Lambda^0_n) = 0$. Sea $\Lambda^0 = \limsup_n \Lambda^0_n$, que es de $\underline{\underline{F}}^0_z$ por la con tinuidad por la derecha de $\underline{\underline{F}}^0$. Pero Λ^0 sólo difiere, por construcción de los Λ^0_n, de Λ en un conjunto de probabilidad nula, por tanto $\Lambda \in \underline{\underline{F}}_z$.

En general las σ-álgebras $\underline{\underline{F}}_{s\infty} = \bigvee_r \underline{\underline{F}}_{(s,r)}$ y $\underline{\underline{F}}_{\infty,t} = \bigvee_r \underline{\underline{F}}_{(r,t)}$ no satisfacen la propiedad F.4., es conocido (ver [36]) que incluso cuando el proceso puntual tiene un sólo punto esta propiedad sólo se satisface si la masa se concentra sobre un camino creciente.

A continuación enunciamos resultados análogos a los del teorema 4.1.8. para estas σ-álgebras.

Observemos que $\underline{\underline{F}}_{s,\infty} = \sigma\{M_u,\ u = (u_1,u_2), u_1 \leq s,\ u_2 \geq 0\}$ y $\underline{\underline{F}}_{\infty,t} = \sigma\{M_u,\ u = (u_1,u_2),\ u_1 \geq 0,\ u_2 \leq t\}$.

Fijado $z = (s,t)$ de $\mathbb{R}^2_+$, consideremos las siguientes regiones:

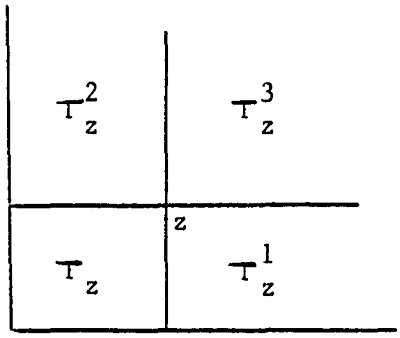
$$T^1_z = \{(s',t') \in \mathbb{R}^2_+ \ :\ s'>s, o<t'\leq t\}$$

$$T^2_z = \{(s',t') \in \mathbb{R}^2_+ \ :\ o<s'\leq s,\ t'>t\}$$

$$T^3_z = \{(s',t') \in \mathbb{R}^2_+ \ :\ s'>s,\ t'>t\}$$

$$T_z = (o,z]$$

$$V^1_s = T_z \cup T^2_z \ ;\ V^2_s = T^1_z \cup T^3_z \ ;\ M^1_t = T_z \cup T^1_z \ ;\ M^2_t = T^2_z \cup T^3_z \ .$$



Teorema 4.1.10.

Si $\mathcal{A}_s = \sigma_{V_s^2}\{\emptyset, V_s^2\}$ y $\mathcal{A}_t = \sigma_{M_t^2}\{\emptyset, M_t^2\}$, se verifica:

$$\underline{\underline{F}}_{s,\infty}\big|_{\Omega_k} = (\mathcal{B}_{V_s^1} \vee \mathcal{A}_s)^k \cap S_k\big|_{\Omega_k} \text{ y } \underline{\underline{F}}_{\infty,t}\big|_{\Omega_k} = (\mathcal{B}_{M_t^1} \vee \mathcal{A}_t)^k \cap S_k\big|_{\Omega_k}$$

Demostración.

La inclusión $\underline{\underline{F}}_{s,\infty}\big|_{\Omega_k} \subset (\mathcal{B}_{V_s^1} \vee \mathcal{A}_s)^k \cap S_k\big|_{\Omega_k}$ es evidente.

Para demostrar la otra inclusión estudiaremos las respectivas trazas sobre las regiones R_s^n, $1 \leq n < k+1$, siendo R_s^n la unión de todos los posibles productos con n factores iguales a V_s^1 y k-n iguales a V_s^2. Basta con tener en cuenta que todos los elementos de $(\mathcal{B}_{V_s^1} \vee \mathcal{A}_s)^k \cap S_k\big|_{\Omega_k \cap R_s^n}$, se pueden considerar como elementos de una región del tipo S_z^n, con $z' = (s,t')$ y t' conveniente, y aplicar el teorema 4.1.8. Análogamente para $\underline{\underline{F}}_{\infty,t}$. #

Consideremos en el espacio $(\hat{\Omega}_k, \underline{\underline{G}}, Q)$ la filtración $\hat{\underline{\underline{F}}} = \{\hat{\underline{\underline{F}}}_z, z \in \overline{\mathbb{R}^2_+}\}$ siendo $\hat{\underline{\underline{F}}}_z = \pi_2(\underline{\underline{F}}_z)$. Se verifica:

Teorema 4.1.11.

La filtración $\{\hat{\underline{\underline{F}}}_z, z \in \overline{\mathbb{R}^2_+}\}$ es completa, creciente, continua por la derecha y además $\hat{\underline{\underline{F}}}_z = \sigma\{\hat{M}_u, u \leq z\}$.

Demostración.

(i) Es completa. Si $A \subset \hat{\Omega}_k$, es tal que $Q(A) = 0$, se tiene $P(\pi_1(A)) = 0$, luego $\pi_1 A \in \underline{\underline{F}}_0$, por tanto $A = \pi_2 \pi_1 A \in \hat{\underline{\underline{F}}}_0$.

(ii) Es creciente, ya que $\underline{\underline{F}}$ lo es.

(iii) Es continua por la derecha. Si $A \in \bigcap_{z'>z} \hat{\underline{\underline{F}}}_{z'}$, y $A \notin \hat{\underline{\underline{F}}}_z$ por definición de $\hat{\underline{\underline{F}}}_z$, $\pi_1(A) \notin \pi_1\pi_2(\underline{\underline{F}}_z) = \underline{\underline{F}}_z = \bigcap_{z'>z} \underline{\underline{F}}_{z'}$, por tanto existe $z'>z$ tal que $\pi_1(A) \notin \underline{\underline{F}}_{z'}$, y de aquí $A \notin \hat{\underline{\underline{F}}}_{z'}$.

(iv) $\hat{\underline{\underline{F}}}_z = \sigma\{\hat{M}_u , u \leq z\}$ ya que por definición de $\hat{M}_u$, $\sigma\{\hat{M}_u , u \leq z\} = \sigma\{A \subset \hat{\Omega}_k : A = \pi_2(B)$ con B generador de $\underline{\underline{F}}_z\}$. #

§2. Procesos opcionales y previsibles. Procesos crecientes adaptados y previsibles.

En esta sección damos una forma explícita de los procesos adaptados y previsibles respecto la filtración $\hat{\underline{\underline{F}}}$, así como de los procesos crecientes adaptados y previsibles.

Para n de $\mathbb{N}$, $2\leq n<k+1$, y z de $\mathbb{R}^2_+$ representaremos por N^n_z la unión de todos los posibles productos, con n factores iguales a (o,z) y k-n iguales a $(o,z)^c$, y notaremos π^n_{1z}, π^n_{2z}, η^n_{1z}, η^n_{2z} las siguientes proyecciones,

$$\pi^n_{1z} : S^n_z \longrightarrow (o,z]^n ,$$

$$\pi^n_{2z} : S^n_z \longrightarrow ((o,z]^c)^{k-n} ,$$

$$\eta^n_{1z} : N^n_z \longrightarrow (o,z)^n ,$$

$$\eta^n_{2z} : N^n_z \longrightarrow ((o,z)^c)^{k-n} .$$

Notaremos por $\hat{\hat{M}} = \hat{M}(\mu,[o,z))$.

Sea $\hat{S}^n_z = \{\hat{M}_z = n\} \subset \hat{\Omega}_k$; $\hat{\pi}^n_{1z}$ será la aplicación,

$$\begin{tikzcd} \hat{S}^n_z \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[rr, bend right, "\hat{\pi}^n_{1z}"'] & S^n_z \arrow[r, "\pi^n_{1z}"] & (o,z]^n \end{tikzcd}$$

y $\hat{\pi}^n_{2z}$ será $\pi^n_{2z}\circ\pi_1$.

Además si $\hat{N}^n_z = \{\hat{\hat{M}}_z = n\} \subset \hat{\Omega}_k$, $\hat{\eta}^n_{1z}$ será la aplicación,

$$\begin{tikzcd} \hat{N}^n_z \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[rr, bend right, "\hat{\eta}^n_{1z}"'] & N^n_z \arrow[r, "\eta^n_{1z}"] & (o,z)^n \end{tikzcd}$$

y $\hat{\eta}^n_{2z}$ será $\eta^n_{2z}\circ\pi_1$.

Podemos enunciar el siguiente

Teorema 4.2.1.

Un proceso X en $\hat{\Omega}_k \times [0,\infty]^2$ es opcional (respectivamente previsible) si y sólo si existen funciones $H^n(x,z)$, $2 \leq n < k+1$, medibles respecto los borelianos de $([0,\infty]^2)^n \times [0,\infty]^2$, simétricas respecto x, y h una función medible respecto los borelianos de $[0,\infty]^2$, tales que:

$$X_z(\mu) = \overline{\sum_{2 \leq n < k+1}} H^n(\hat{\pi}^n_{1z}(\mu),z) I_{\{\hat{M}_z = n\}}(\mu) + h(z) I_{\{\hat{M}_z = 1\}}(\mu)$$

$$\text{(respect. } X_z(\mu) = \overline{\sum_{2 \leq n < k+1}} H^n(\hat{\gamma}^n_{1z}(\mu),z) I_{\{\hat{\hat{M}}_z = n\}}(\mu) + h(z) I_{\{\hat{\hat{M}}_z = 1\}}(\mu)).$$

Demostración.

(i) X es $\hat{\underline{\underline{F}}}$-adaptado si y sólo si $X \circ \pi_2$ es $\underline{\underline{F}}$-adaptado.

En efecto, si A es un boreliano de $\mathbb{R}$, $(X_z \pi_2)^{-1}(A) = \pi_2^{-1} X_z^{-1}(A) = \pi_1(B)$ con $B = X_z^{-1}(A) \in \hat{\underline{\underline{F}}}_z$. Si $\pi_1 B \notin \underline{\underline{F}}_z$, $B \notin \pi_2 \underline{\underline{F}}_z = \hat{\underline{\underline{F}}}_z$. Recíprocamente, si A es un boreliano de $\mathbb{R}$, $X_z^{-1}(A) = (X_z \pi_2 \pi_2^{-1})^{-1}(A) = $
$= (\pi_2^{-1})^{-1} (X_z \pi_2)^{-1}(A) = (\pi_2^{-1})^{-1}(B) = \pi_2(B)$ con $B \in \underline{\underline{F}}_z$.

(ii) Un proceso X sobre $\Omega_k \times [0,\infty]^2$ es opcional si y sólo si existen funciones H^n, $2 \leq n < k+1$, y h como las del enunciado, tales que, para $\omega \in \Omega_k$,

$$X_z(\omega) = \overline{\sum_{2 \leq n < k+1}} H^n(\pi^n_{1z}(\omega),z) I_{S^n_z}(\omega) + h(z) I_{S^1_z}.$$

En efecto, como todo proceso opcional es adaptado, por la forma explícita de las σ-álgebras $\underline{\underline{F}}_z$ se tiene una implicación. La otra implicación, es consecuencia de que las clases no vacias, $\{A \subset (\mathbb{R}^2_+)^k : I_{A\cap S^1_z}$ opcional$\}$ y $\{A \subset (\mathbb{R}^2_+)^k : I_{A\cap S^n_z}$ opcional$\}$ son monótonas y como las funciones H^n y h son medibles pueden escribirse como límite de combinaciones lineales de indicadores convenientes.

(iii) La tribu $\hat{\mathcal{O}}$ opcional sobre $\hat{\Omega}_k \times [0,\infty]^2$ es $\hat{\mathcal{O}} = (\pi_2 x Id)(\mathcal{O})$ siendo $\mathcal{O}$ la tribu opcional sobre $\Omega_k \times [0,\infty]^2$.

En efecto, se sabe que $\mathcal{O} = \sigma\{F \times [z,z'),\ F \in \underline{\underline{F}}_z,\ z,z' \in [0,\infty]^2\}$ y $\hat{\mathcal{O}} = \sigma\{F \times [z,z'),\ F \in \hat{\underline{\underline{F}}}_z,\ z,z' \in [0,\infty]^2\}$.

Sea $F_0 \times [z_0,z_0')$ un generador de $\mathcal{O}$, $(\pi_2 x Id)(F_0 \times [z_0,z_0')) = \pi_2 F_0 \times [z_0,z_0') \in \hat{\mathcal{O}}$.

Recíprocamente, si $F \times [z,z')$ es un generador de $\hat{\mathcal{O}}$, $F \times [z,z') = (\pi_2 x Id)(\pi^1 F \times [z,z)) \in \mathcal{O}$.

Si X es $\hat{\mathcal{O}}$-medible entonces $X\pi_2$ es $\mathcal{O}$-medible, en particular es $\underline{\underline{F}}$-adaptado y por (ii) se tiene el aserto, teniendo en cuenta,

$$\pi_2(S^i_z) = \{\mu : \mu([0,z]) = i\} = \{\hat{M}_z = i\},\ 1 \le i < k+1 .$$

Análogamente se demuestra el caso previsible. #

El siguiente resultado caracteriza los procesos crecientes y adaptados, respectivamente previsibles.

Teorema 4.2.2.

Sea A un proceso creciente. A es $\hat{\underline{\underline{F}}}$-adaptado (respect. previsible) si y sólo si existen nucleos positivos $H^n(x,\cdot)$, $2 \leq n < k+1$, sobre $([o,\infty]^2)^n \times \mathcal{B}_{[o,\infty]^2}$ simétricos respecto x y existe una medida h sobre $\mathcal{B}_{[0,\infty]^2}$ tales que,

$$A(\mu) = \overline{\sum_{2\leq n<k+1}} H^n(\hat{\pi}^n_{1z}\mu, \bigcup_{j=1}^{n}[\omega_j,z])\ I_{\{\hat{M}_z=n\}}(\mu) +$$

$$+\int_{[o,z]} I_{\{\hat{M}_x=1\}}(\mu)\,h(dx),$$ siendo ω_j los puntos de $(o,z]$

donde μ toma valor no nulo.

(respect. $$A(\mu) = \overline{\sum_{2\leq n<k+1}} H^n(\hat{\eta}^n_{1z}\mu, \bigcup_{j=1}^{n}[\omega_j,z])\ I_{\{\hat{\hat{M}}_z=n\}}(\mu) +$$

$$+\int_{[o,z)} I_{\{\hat{\hat{M}}_x=1\}}(\mu)\ h(dx))\ .$$

Demostración.

(i) Si A es creciente, $A\pi_2$ también lo es. En efecto,

$$(A\pi_2)_z\ (\omega) = A(\pi_2(\omega),[o,z]) = A(\mu,[o,z])\ .$$

(ii) Un proceso A sobre $\Omega_k \times [o,\infty]^2$ creciente, es $\underline{\underline{F}}$-adaptado si y sólo si, existen nucleos H^n y una medida h como los del enunciado tales que,

$$A_z(\omega) = \overline{\sum_{2\leq n<k+1}} H^n(\pi^n_{1z}(\omega), \bigcup_{j=1}^{n}[\omega_j,z])\ I_{S^n_z}(\omega) +$$

$$+\int_{[o,z]} I_{S^1_x}(\omega)\ h(dx),$$ siendo ω_j las coordenadas de ω que

están en $(o,z]$.

En efecto, si el proceso A admite una tal expresión, por el teorema anterior, es evidentemente adaptado. Recíprocamente, sea A un proceso creciente, y sea $A(\omega, dz)$ la medida sobre $\mathbb{R}_+^2$ asociada al proceso. Es fácil comprobar, que

$$A(\omega,[o,z]) = \sum_{2\leq n<k+1} A(\omega, \bigcup_{j=1}^{n}[\omega_j,z]) I_{S_z^n}(\omega)+\int_{[o,z]} I_{S_x^1}(\omega)A(\omega,dx).$$

Si A es adaptado, por (ii) del teorema anterior admite la expresión:

$$A_z(\omega) = \sum_{2\leq n<k+1} H^n(\pi_{1z}^n(\omega),z)\ I_{S_z^n}(\omega) + h(z)\ I_{S_z^1} ,$$

con $H^n(x,z)$, $2\leq n<k+1$ medible respecto los borelianos de $([o,\infty]^2)^n \times [o,\infty]^2$ y simétricas respecto x, y h medible respecto los borelianos de $[o,\infty]^2$.

Sea $\omega \in S_z^1$, se tiene

$$A_z(\omega)\ I_{S_z^1} = h(z) ,$$

por otra parte,

$$A_z(\omega)\ I_{S_z^1} =\int_{[o,z]} I_{S_x^1}(\omega)\ A(\omega,dx),$$ por consiguiente

$$h(z) =\int_{[o,z]} I_{S_x^1}\ A(\omega,dx)$$, como no depende del punto ω, sobre la región S_x^1 debe ser $A(\omega,dx) = \bar{h}(dx)$ siendo $\bar{h}$ una medida, sobre $\mathbb{R}_+^2$.

Por consiguiente,

$$A_z(\omega) = \sum_{2\leq n<k+1} H^n(\pi^n_{1z}(\omega),z)\, I_{S^n_z}(\omega) + \int_{[o,z]} I_{S^1_x}(\omega)\ \bar{h}(dx) =$$

$$= \sum_{2\leq n<k+1} A(\omega, \bigsqcup_{j=1}^{n} [\omega_j,z])\ I_{S^n_z}(\omega) + \int_{[o,z]} I_{S^1_x}\ \bar{h}(dx)$$

como la suma actua sobre conjuntos disjuntos, esta igualdad implica que para todo n, $2\leq n<k+1$, $H^n(\pi^n_{1z}(\omega),z) = A(\omega, \bigsqcup_{j=1}^{n} [\omega_j,z])$, por tanto debe ser $A(\omega, \bigsqcup_{j=1}^{n} [\omega_j,z]) = \bar{H}^n\ (\pi^n_{1z}(\omega),\ \bigsqcup_{j=1}^{n} [\omega_j,z])$,

ya que sólo depende que $\pi^n_{1z}(\omega)$, y no de todas las coordenadas del punto ω, y será simétrica respecto $\pi^n_{1z}(\omega)$ porque H^n lo es. #

§3. Martingalas uniformemente integrables.

En esta sección demostramos que toda $\hat{\underline{\underline{F}}}$-martingala X uniformemente integrable admite una versión continua por la derecha con límites por la izquierda.

Dado un espacio de probabilidad (Ω,A,P) y una filtración $\underline{\underline{G}}$, $\{X_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ es una $\underline{\underline{G}}$-*martingala uniformemente integrable* si,

(i) X es $\underline{\underline{G}}$-adaptada.

(ii) Para todo $z\leq z'$, puntos de $\mathbb{R}^2_+$, $E(X_{z'}\,|\,\underline{\underline{G}}_z) = X_z$

(iii) La familia $\{X_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ es uniformemente integrable.

Sea L^1 el espacio de los procesos Y con $E(|Y|)<\infty$. Una familia de variables aleatorias con índices en un conjunto parcialmente ordenado y filtrante I *converge en* L^1 hacia una variable aleatoria Z si, $E(|Z_i - Z|) \longrightarrow 0$.

<u>Teorema 4.3.1.</u> ([51], teorema 1.2.).
Dada una $\underline{\underline{G}}$-martingala M uniformemente integrable, converge en L^1, hacia una variable aleatoria M_∞, de forma que, para todo z de $\mathbb{R}_+^2$,

$$M_z = E(M_\infty | \underline{\underline{G}}_z) \quad . \qquad \#$$

Demostraremos previamente algunos resultados para $\underline{\underline{F}}$-martingalas.

Si M es una $\underline{\underline{F}}$-martingala uniformemente integrable de límite M_∞, para z de $\mathbb{R}_+^2$ y n, $2\leq n<k+1$, fijos, pondremos si $\omega \in S_z^n$,

$$M_\infty(\omega) = m_{n,z} \; (\pi_{1z}^n(\omega), \; \pi_{2z}^n(\omega))$$

y $\widetilde{m}_{n,z}$ será la simetrizada de $m_{n,z}$ respecto la primera coordenada, es decir,

$$\widetilde{m}_{n,z}(x,y) = \widetilde{m}_{n,z}((x_1,..,x_n),y) =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} m_{n,z}((x_{\sigma(1)},..,x_{\sigma(n)}),y) \quad .$$

Teorema 4.3.2.

Sea M una $\underline{\underline{F}}$-martingala uniformemente integrable de límite M_∞. Para todo z de $\mathbb{R}_+^2$ y $2 \leq n < k+1$,

$$M_z \, I_{S_z^n} = E(\widetilde{m}_{n,z} \, I_{S_z^n} | \underline{\underline{F}}_z) \ .$$

Demostración.

Como $M_z = E(M_\infty | \underline{\underline{F}}_z)$, para cada n, $M_z \, I_{S_z^n} = E(M_\infty I_{S_z^n} | \underline{\underline{F}}_z)$.

Basta, por la definición de simetrizada, demostrar que para toda permutación σ de $\{1,..,n\}$ se verifica,

$$M_z \, I_{S_z^n} = E\left[m_{n,z}(\sigma \cdot \pi_{1z}^n(\cdot), \pi_{2z}^n(\cdot)) I_{S_z^n} \mid \underline{\underline{F}}_z\right] \ .$$

Como $M_z \, I_{S_z^n}$ es $\underline{\underline{F}}_z$-medible, es suficiente con calcular para todo A de $\underline{\underline{F}}_{z|S_z^n}$, la integral,

$$\int_A m_{n,z}(\sigma \cdot \pi_{1z}^n, \pi_{2z}^n) \, I_{S_z^n} \, dP$$

que coincide por ser A simétrico con

$$\int_{S_\sigma(A)} m_{n,z}(\sigma \cdot \pi_{1z}^n, \pi_{2z}^n) \, I_{S_z^n} \, dP$$

que a su vez por ser $M_z \, I_{S_z^n} = E(M_\infty \, I_{S_z^n} | \underline{\underline{F}}_z)$

coincide con $\displaystyle\int_{S_\sigma(A)} M_z \, I_{S_z^n} \, dP = \int_A M_z \, I_{S_z^n} \, dP$

ya que A y M_z $I_{S_z^n}$ son simétricos respecto las coordenadas que están en $(o,z]$. #

Recordemos (ver [5]) que dado el espacio $(S_z^n, \underline{\underline{F}}_{z|S_z^n}, \frac{P}{P(S_z^n)})$, para $2\leq n<k+1$ con $P(S_z^n) \neq 0$ y dadas las proyecciones,

$$\pi_{1z}^n : (S_z^n, \underline{\underline{F}}_{z|S_z^n}) \longrightarrow ((o,z]^n, \mathcal{B}_{(o,z]^n} \cap S_n)$$

$$\pi_{2z}^n : (S_z^n, \underline{\underline{F}}_{z|S_z^n}) \longrightarrow (((o,z]^c)^{k-n}, \mathcal{B}_{((o,z]^c)^{k-n}} \cap S_{k-n})$$

existe $P_z^n : (o,z]^n \times (\mathcal{B}_{((o,z]^c)^{k-n}} \cap S_{k-n}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(y\ ,\ B) \longmapsto P_z^n\ (y,B)$$

de forma que:

(i) para y fijo, la aplicación $B \longmapsto P_z^n(y,B)$ es una probabilidad.

(ii) para B fijo, boreliano de $((o,z]^c)^{k-n}$ simétrico, se tiene,

1) $y \longmapsto P_z^n(y,B)$ es $\mathcal{B}_{((o,z]^c)^{k-n}} \cap S_{k-n}$-medible

2) para todo A de $\mathcal{B}_{(o,z]^n} \cap S_n$, se verifica

$$\int_{\{\pi_{1z}^n \in A\}} P_z^n\ (\pi_{1z}^n, B)\, dP = P(\{\pi_{1z}^n \in A\}, \{\pi_{2z}^n \in B\}) \ ,$$

es decir, es una versión regular de $\frac{1}{P(S_z^n)} P(\pi_{2z}^n \in B | \pi_{1z}^n = y)$,

y tomaremos esta versión simétrica respecto π_{1z}^n.

Teorema 4.3.3.

Si M es una $\underline{F}$-martingala uniformemente integrable y M_∞ su límite, se verifica,

(i) $$M_z I_{S_z^n} = E(\widetilde{\Xi}_{n,z}\, I_{S_z^n} | \underline{F}_z) = I_{S_z^n} \int_{((o,z]^c)^{k-n}} \widetilde{\Xi}_{n,z}(\pi_{1z}^n(\omega), y) P_z^n(\pi_{1z}^n(\omega), dy)$$

para $2 \leq n \leq k+1$.

(ii) $$M_z\, I_{S_z^1} = E(M_\infty\, I_{S_z^1} | \underline{F}_z) = I_{S_z^1}\, P(S_z^1)^{-1}\, E(M_\infty\, I_{S_z^1}).$$

Demostración.

(i) $I_{S_z^n} \int_{((o,z]^c)^{k-n}} \widetilde{\Xi}_{n,z}(\pi_{1z}^n(\omega), y)\; P_z^n(\pi_{1z}^n(\omega), dy)$, es $\underline{F}_z$-medible ya que es medible de Borel y sólo depende de $\pi_{1z}^n(\omega)$, siendo simétrica respecto $\pi_{1z}^n(\omega)$. Además para todo A de $\underline{F}_{z|S_z^n}$

$$\int_A I_{S_z^n} \left[\int_{((o,z]^c)^{k-n}} \widetilde{\Xi}_{n,z}(\pi_{1z}^n, y)\; P_z^n(\pi_{1z}^n, dy) \right] dP = E\left(\int \widetilde{\Xi}_{n,z}(\pi_{1z}^n, y) I_A\; P_z^n(\pi_{1z}^n, dy) \right)$$

$$= E(\widetilde{\Xi}_{n,z}\; (\pi_{1z}^n, y)\; I_A).$$

(ii) Es consecuencia directa de que los únicos conjuntos medibles respecto $\underline{F}_{z|S_z^1}$ son el vacio y S_z^1.

Por todo lo anterior, dada una martingala uniformemente integrable de límite M_∞ , admite la siguiente expresión para todo z de $[o,\infty]^2$,

$$M_z = \sum_{2\leq n<k+1} I_{S_z^n} \int_{((o,z]^c)^{k-n}} \widetilde{m}_{n,z}(\pi_{1z}^n(\omega),y)\ P_z^n(\pi_{1z}^n,dy) + I_{S_z^1}\ P(S_z^1)^{-1}\ E(M_\infty I_{S_z^1}) .$$

A continuación estudiamos la dependencia respecto z de P_z^n .

Para ello, definamos primero unas nuevas probabilidades sobre Ω_k .

(i) Si k es finito, para cada n, $2\leq n<k+1$, definimos

$$\widetilde{P}_n(\cdot) = \widetilde{P}_k(\cdot) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} P(S_\sigma(\cdot))$$

(ii) Si k es infinito, para cada n, $2\leq n<k+1$ definimos,

$$\widetilde{P}_n(\cdot) = (\prod_{i=1}^{n}(2^i-1)) \sum_{i_1=1}^{\infty} 2^{-i_1} \sum_{i_2=i_1+1}^{\infty} 2^{-i_2} \cdots \sum_{i_n=i_{n-1}+1}^{\infty} 2^{-i_n} . P(f_{\{i_1<..<i_n\}}(\cdot))$$

donde $f_{\{i_1<..<i_n\}}$ es un representante de todas las biyecciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, tales que $f(1) = i_1,..,f(n) = i_n$.

Si k es finito, es claro que $\widetilde{P}_n$, para todo n, es una probabilidad. Si k es infinito numerable, basta con demostrar que, para n fijo, $2\leq n<k+1$,

$$\sum_{i_1=1}^{\infty} 2^{-i_1} \sum_{i_2=i_1+1}^{\infty} 2^{-i_2} \dots \sum_{i_n=i_{n-1}+1}^{\infty} 2^{-i_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} (2^i-1)\right)^{-1}, \quad (4.1.)$$

Si para i_1 fijo, $\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty} 2^{-i_2} \dots \sum_{i_n=i_{n-1}+1}^{\infty} 2^{-i_n} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (2^i-1)\right)^{-1} 2^{-(n+1)i_1}$

ya estará porque entonces, el primer miembro de (4.1.) es,

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} (2^i-1)\right)^{-1} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-nr} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (2^i-1)\right)^{-1} \cdot (2^n-1)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{n} (2^i-1)\right)^{-1} .$$

Análogamente para i_1, i_2 fijos bastará con demostrar

$$\sum_{i_3=i_2+1}^{\infty} 2^{-i_3} \dots \sum_{i_n=i_{n-1}+1}^{\infty} 2^{-i_n} = \left(\prod_{i=1}^{n-2} (2^i-1)\right)^{-1} \cdot 2^{-(n-1)i_2}$$

Reiterando, bastará con comprobar que para $i_1,..,i_{n-1}$ fijos,

$\sum_{i_n=i_{n-1}+1}^{\infty} 2^{-i_n} = 2^{-i_{n-1}}$, que evidentemente es cierto.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n < k+1$, y fijados los índices $\{1,..,n\}$ la probabilidad $\widetilde{P}_n$ admite la siguiente descomposición, si $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega_k$,

$$d\widetilde{P}_n(\omega) = \widetilde{P}_{n,\{1,..,n\}}((\omega_1,\dots,\omega_n),\cdot)\; d\widetilde{P}^{1..n}(\omega_1,\dots,\omega_n)$$

siendo $\widetilde{P}_{n,\{1,..,n\}}$ una versión regular de la probabilidad condicionada respecto $(\omega_1,..,\omega_n)$ y $\widetilde{P}^{1..n}$ la marginal correspondiente. Analogamente, para $I=\{i_1<..<i_n\} \subset \mathbb{N}$, la probabilidad P admite

$$dP(\omega) = P_I((\omega_{i_1},\dots,\omega_{i_n}),\cdot)\; dP^I(\omega_{i_1},\dots,\omega_{i_n})$$

como descomposición.

La relación entre $\tilde{P}^{1\ldots n}$ y P^I, $\forall\, I = \{i_1<\ldots<i_n\} \subset \mathbb{N}$ viene dada por el siguiente

Teorema 4.3.4.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, $2\leq n<k+1$, para todo $I = \{i_1<\ldots<i_n\} \subset \mathbb{N}$, P^I es absolutamente continua respecto $\tilde{P}^{1\ldots n}$.

Demostración.

(i) k finito.

Dado $A \subset ([0,\infty]^2)^k$, se tiene,

$$\tilde{P}^{1\ldots n}(A) = \tilde{P}_n(A\times([0,\infty]^2)^{k-n}) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} P(S_\sigma(A\times([0,\infty]^2)^{k-n}) \geq$$

$$\geq \frac{1}{k!}\sum_{\substack{I=\{i_1<\ldots<i_n\}\\ I\subset\{1,\ldots,k\}}} P^I(A)$$ y de aquí la afirmación.

(ii) k infinito numerable.

$$\tilde{P}^{1\ldots n}(A) = \tilde{P}(A\times([0,\infty]^2)^k) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(2^i-1)\cdot\sum_{i_1=1}^{\infty} 2^{-i_1}\ldots\sum_{i_n=i_{n-1}+1}^{\infty} 2^{-i_n}\cdot P(f_{\{i_1<\ldots<i_n\}}(A\times([0,\infty]^2)^k) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(2^i-1)\sum_{i_1=1}^{\infty} 2^{-i_1}\ldots\sum_{i_n=i_{n=1}+1}^{\infty} 2^{-i_n}\cdot P^{i_1\ldots i_n}(A),$$ y de aquí la afirmación. #

El resultado más importante viene dado por el siguiente

Teorema 4.3.5.

Para cada n, $2\le n<k+1$, fijo, sea B un boreliano de $((o,z]^c)^{k-n}$ simétrico.

Dado $\xi = (\xi_1,..,\xi_n)$ elemento de $(o,z]^n$, notaremos para cada permutación σ de $\{1,..,n\}$, $\xi^\sigma = (\xi_{\sigma(1)},..,\xi_{\sigma(n)})$.

Se verifica,

$$P_z^n(\xi,B) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \frac{\displaystyle\sum_{I=\{i_1<..<i_n\}\subset\mathbb{N}} P_I(\xi^\sigma,B)\frac{dP^I}{d\widetilde{P}^{1..n}}(\xi^\sigma)}{\displaystyle\sum_{\substack{I=\{i_1<..<i_n\}\\ I\subset\mathbb{N}}} P_I(\xi^\sigma,((o,z]^c)^{k-n})\frac{dP^I}{d\widetilde{P}^{1..n}}(\xi^\sigma)}$$

Demostración.

Debemos demostrar que para todo A boreliano de $(o,z]^n$ simétrico

$$\int_{\{\pi_{1z}^n\in A\}} P_z^n(\pi_{1z}^n,B)\,dP = P(\{\pi_{1z}^n\in A\},\{\pi_{2z}^n\in B\}).$$

Sea pues A un boreliano de $(o,z]^n$ simétrico,

$$\int_{\{\pi^n_{1z}\in A\}} P^n_z(\pi^n_{1z},B)\,dP = \int_{\bigsqcup\limits_{I=\{i_1,\ldots,i_n\}\subset\mathbb{N}} \{(\omega_{i_1},\ldots,\omega_{i_n})\in A,\ \omega_j\in(o,z]^c,\ j\neq i_h,\ h=\{1,\ldots,n} P^n_z(\pi^n_{1z}(\omega),B)\,dP =$$

$$= \int_{\bigsqcup\limits_{I=\{i_1<\ldots<i_n\}\subset\mathbb{N}} \{(\omega_{i_1},\ldots,\omega_{i_n})\in A,\ \omega_j\in(o,z]^c,\ j\neq i_h\}} P^n_z(\pi^n_{1z}(\omega),B)\,dP \quad \text{,ya que A es simétrico.}$$

Para simplificar la notación pondremos para todo

$I = \{i_1< \ldots<i_n\}$ y toda permutación σ de $\{1,\ldots,n\}$

$\omega_I = (\omega_{i_1},\ldots,\omega_{i_n})$; $I^\sigma = \{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(n)}\}$; $\omega_{I^\sigma} = (\omega_{i_{\sigma(1)}},\ldots,\omega_{i_{\sigma(n)}})$;

$$Q(\xi,B) = \sum_{I=\{i_1<\ldots<i_n\}} P_I(\xi,B)\,\frac{dP^I}{d\tilde{P}^{1\ldots n}}(\xi) .$$

Para cada $I = \{i_1<\ldots<i_n\}$ y cada permutación σ de $\{1,\ldots,n\}$ tenemos la siguiente descomposición de P

$$dP(\omega) = P_{\sigma I}\,(\omega_{I^\sigma},d\xi)\;dP^{I^\sigma}(\omega^\sigma_I)$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{\{\pi^n_{1z}\in A\}} P^n_z(\pi^n_{1z},B)\;dP =$

$$= \sum_{I=\{i_1<\ldots<i_n\}} \int_A \int_{((o,z]^c)^{k-n}} \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \frac{Q(\xi^\sigma,B)}{Q(\xi^\sigma,((o,z]^c)^{k-n})}\,P_{\sigma I}(\xi^\sigma,d\bar{\omega})\;P^{I^\sigma}(d\xi^\sigma)$$

$$= \sum_{I=\{i_1<\ldots<i_n\}} \int_A \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \frac{Q(\xi^\sigma,B)}{Q(\xi^\sigma,((o,z]^c)^{k-n})}\,P_{\sigma I}(\xi^\sigma,((o,z]^c)^{k-n})P^{I^\sigma}(d\xi^\sigma)$$

que coincide por ser A simétrico con,

$$= \sum_{I=\{i_1<..<i_n\}} \int_A \frac{Q(\xi,B)}{Q(\xi,((o,z]^c)^{k-n})} P_I(\xi,((o,z]^c)^{k-n})\, P^I(d\xi)$$

teniendo en cuenta quién es $Q(\xi,B)$,

$$= \sum_{I=\{i_1<..<i_n\}} \int_A P_I(\xi,((o,z]^c)^{k-n}) \frac{dP^I(\xi)}{d\tilde{P}^{1..n}(\xi)} \frac{\sum_{I'} P_{I'}(\xi,B)P^{I'}(d\xi)}{Q(\xi,((o,z]^c)^{k-n})}$$

$$= \int_A \sum_{I'} P_{I'}(\xi,B)\, P^{I'}(d\xi) = P(\{\pi^n_{1z} \in A\},\{\pi^n_{2z} \in B\}) \; . \qquad \#$$

Por todo lo hecho hasta el momento, si M es una F-martingala uniformemente integrable de límite M_∞ , admite la siguiente expresión:

$$(4.2.)\quad M_z = I_{S^1_z} \cdot P(S^1_z)^{-1}\, E(M_\infty\, I_{S^1_z}) \; +$$

$$+ \sum_{2\leq n<k+1} I_{S^n_z} \int_{((o,z]^c)^{k-n}} \tilde{m}_{n,z}(\pi^n_{1z},\xi) \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \frac{\sum_{I=\{i_1<..<i_n\}} P_I(\sigma\pi^n_{1z},d\xi) \frac{dP^I}{d\tilde{P}^{1..n}}(\sigma\pi^n_{1z})}{\sum_{I=\{i_1<..<i_n\}} P_I(\sigma\pi^n_{1z},((o,z]^c)^{k-n}) \frac{dP^I}{d\tilde{P}^{1..n}}(\sigma\pi^n_{1z})}$$

Estamos ahora en condiciones de demostrar que

<u>Teorema 4.3.6.</u>

Toda F-martingala uniformemente integrable admite una versión continua por la derecha con límites por la izquierda.

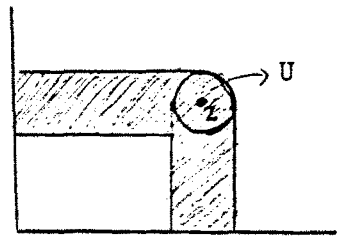
Demostración.

Haremos la demostración a partir de la igualdad (4.2.).

Fijemos $\omega_o \in \Omega_k$ y $z = (s,t) \in [o,\infty]^2$. Sea $(z_m)_m$ una sucesión decreciente hacia z.

Como para todo $u \in [o,\infty]^2$, el número de coordenadas del punto ω_o que pertenecen a $[o,u]$ es finito, podemos encontrar un entorno U de z, tal que en la zona sombreada de la figura no se encuentre ninguna coordenada de ω_o a menos que una tal coordenada pertenezca a,

$$\bar{\underline{z}} = \{(a,b) \in [o,\infty]^2 : (a=s,\ b\leq t) \text{ ó } (a\leq s,\ b=t)\} .$$



Por tanto, a partir de cierto m, $\pi^n_{1z}(\omega_o) = \pi^n_{1z_m}(\omega_o) = \xi_n, \forall n$.

De donde estudiar la continuidad por la derecha de la martingala M se reduce a demostrar:

a) $M_{z_m}(\omega_o)\ I_{S^1_{z_m}}(\omega_o) \xrightarrow[m\to\infty]{} M_z(\omega_o)\ I_{S^1_z}(\omega_o)$, si $P(S^1_z) \neq 0$

b) $M_{z_m}(\omega_o)\ I_{S^n_{z_m}}(\omega_o) \xrightarrow[m\to\infty]{} M_z(\omega_o)\ I_{S^n_z}(\omega_o)$, $\forall n,\ 2\leq n<k+1$.

si $P(S^n_z) \neq 0$.

Notaremos $\widetilde{m}_n(\xi_n,\cdot) = \widetilde{m}_{n,z_m}(\pi^n_{1z_m},\cdot) = \widetilde{m}_{n,z}(\pi^n_{1z},\cdot)$. Demostremos a) y b).

a) Por (4.2.) es equivalente a demostrar,

$$\frac{1}{P(S^1_{z_m})} E(M_\infty I_{S^1_{z_m}}) \xrightarrow{m\to\infty} \frac{1}{P(S^1_z)} E(M_\infty I_{S^1_z}) .$$

Esta convergencia es cierta ya que, sumando y restando el término, $\frac{1}{P(S^1_z)} E(M_\infty I_{S^1_{z_m}})$,

$$\left|\frac{1}{P(S^1_{z_m})} E(M_\infty I_{S^1_{z_m}}) - \frac{1}{P(S^1_z)} E(M_\infty I_{S^1_z})\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{P(S^1_{z_m})} - \frac{1}{P(S^1_z)}\right| \left|E(M_\infty I_{S^1_{z_m}})\right| + \frac{1}{P(S^1_z)} \left|E(M_\infty I_{S^1_{z_m}}) - E(M_\infty I_{S^1_z})\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{P(S^1_{z_m})} - \frac{1}{P(S^1_z)}\right| \left|E(M_\infty I_{S^1_z})\right| + \frac{1}{P(S^1_z)} \left|E(M_\infty I_{S^1_{z_m}}) - E(M_\infty I_{S^1_z})\right|$$

que tiende a cero porque $S^1_{z_m} \nearrow S^1_z$.

b) Por (4.2.) demostrar b) es equivalente a ver

$$\int_{((o,z_m]^c)^{k-n}} \widetilde{m}_n(\xi_n,\bar\omega)\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\frac{Q(\xi_n^\sigma,d\bar\omega)}{Q(\xi_n^\sigma,((o,z_m]^c)^{k-n})} \xrightarrow{m\to\infty}$$

$$\int_{((o,z]^c)^{k-n}} \widetilde{m}_n(\xi_n,\bar\omega)\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\frac{Q(\xi_n^\sigma,d\bar\omega)}{Q(\xi_n^\sigma,((o,z]^c)^{k-n})}$$

para cada n, $2\leq n<k+1$.

Fijemos σ permutación de $\{1,..,n\}$.La diferencia

$$\left|\int_{((o,z_m]^c)^{k-n}} \widetilde{m}_n(\xi_n,\bar\omega)\frac{Q(\xi_n^\sigma,d\bar\omega)}{Q(\xi_n^\sigma,((o,z_m]^c)^{k-n})} - \int_{((o,z]^c)^{k-n}} \widetilde{m}_n(\xi_n,\bar\omega)\frac{Q(\xi_n^\sigma,d\bar\omega)}{Q(\xi_n^\sigma,((o,z]^c)^{k-n})}\right|,$$

sumando y restando $\int I_{((o,z]^c)^{k-n}}\cdot\widetilde{m}_n(\xi_n,\bar\omega)\dfrac{Q(\xi_n^\sigma,d\bar\omega)}{Q(\xi_n^\sigma,((o,z_m]^c)^{k-n})}$ y

acotando $Q(\xi_n^\sigma,((o,z_m]^c)^{k-n})$ por $Q(\xi_n^\sigma,((o,z_o]^c)^{k-n})$, donde

z_o es el primer elemento de la sucesión,es menor ó igual que

$$\int |\widetilde{m}_n|\cdot\left|I_{((o,z_m]^c)^{k-n}} - I_{((o,z]^c)^{k-n}}\right|\frac{Q(\xi_n^\sigma,d\bar\omega)}{Q(\xi_n^\sigma,((o,z_o]^c)^{k-n})} +$$

$$+\int I_{((o,z]^c)^{k-n}}|\widetilde{m}_n|\left|\frac{1}{Q(\xi_n^\sigma,((o,z_m]^c)^{k-n})} - \frac{1}{Q(\xi_n^\sigma,((o,z]^c)^{k-n})}\right| Q(\xi_n^\sigma,d\bar\omega)$$

y tiende hacia cero ya que, $((o,z_m]^c)^{k-n}\nearrow((o,z]^c)^{k-n}$ y

$Q(\xi_n^\sigma,((o,z_m]^c)^{k-n})\nearrow Q(\xi_n^\sigma((o,z]^c)^{k-n})$.

Por último, observemos que si $(z_m)_m$ es una sucesión que converge hacia z en alguna de las otras tres direcciones, un razonamiento análogo al realizado en el estudio de la continuidad por la derecha nos asegura que para ω_o fijo, $(M_{z_m}(\omega_o), m\geq o)$ es de Cauchy, y por tanto tiene límite. #

Para finalizar, demostremos que,

Teorema 4.3.7.

Si $\hat{M}$ es una $\hat{\underline{\underline{F}}}$-martingala uniformemente integrable, admite una versión continua por la derecha con límites por la izquierda.

Demostración.

Sea $\hat{M}_\infty$ el límite, en L^1, de $\hat{M}$. Y sea $M = \hat{M}\pi_2$, $M_\infty = \hat{M}_\infty\pi_2$. Entonces, M es una martingala, tal que, para todo z de $\mathbb{R}_+^2$, $M_z = E(M_\infty|\underline{\underline{F}}_z)$. En efecto, es $\underline{\underline{F}}$-adaptada e integrable por ser $\hat{M}$ integrable y $\hat{\underline{\underline{F}}}$-adaptada. Es martingala y satisface $M_z = E(M_\infty|\underline{\underline{F}}_z)$ por el teorema de la medida imagen.

Por el teorema 4.3.6., M admite una versión $\bar{M}$ continua por la derecha con límites por la izquierda y por tanto $\bar{M}\pi_1$ es una versión continua por la derecha con límites por la izquierda de $\hat{M}$. #

§4. Proyección opcional y previsible. Proyecciones duales.

En esta sección definimos y estudiamos las propiedades de las proyecciones opcional y previsible de procesos medibles acotados, así como las proyecciones duales.

Gracias al resultado obtenido en el teorema 4.3.6., dada una variable aleatoria U acotada, definida sobre Ω_k, tomaremos como proyección opcional, (respectivamente previsible), del proceso asociado, la versión continua por la derecha, con límites por la izquierda, de la martingala $E(U|\underline{\underline{F}}_z)$, (respect. la versión continua por la izquierda de la martingala $E(U|\underline{\underline{F}}_{z^-})$). Más generalmente, si Q_z^n, $1 \leq n < k+1$ con $Q_z^n : ((o,z)^n \times (\mathcal{B}_{((o,z)^c)^{k-n}} \cap S_{k-n}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es la análoga a P_z^n, tenemos la siguiente

Definición 4.4.1.

Si $\{X_z,\ z \in [o,\infty]^2\}$ es un proceso medible y acotado, sobre $\Omega_k \times [o,\infty]^2$ y $X_z(\omega) = X_{nz}(\pi_{1z}^n(\omega), \pi_{2z}^n(\omega))$, si $\omega \in S_z^n$, con $\widetilde{X}_{nz}$ el simetrizado de X_{nz} respecto la primera coordenada, llamaremos *proyección opcional*, respectivamente *previsible*, al proceso X^o, respectivamente X^p, definido por:

$$X_z^o(\omega) = \sum_{2\leq n<k+1} I_{S_z^n} \int_{((o,z]^c)^{k-n}} \widetilde{X}_{n,z}(\pi_{1z}^n,\bar{\omega})P_z^n(\pi_{1z}^n,d\bar{\omega})+I_{S_z^1}\cdot P(S_z^1)^{-1}\, E(X_z I_{S_z^1})$$

$$\left(\text{respect. } X_z^p(\omega)=\sum_{2\leq n<k+1} I_{N_z^n} \int_{((o,z)^c)^{k-n}} \widetilde{X}_{n,z}(\eta_{1z}^n,\bar{\omega})Q_z^n(\eta_{1z}^n,d\bar{\omega})+I_{N_z^1}P(N_z^1)^{-1}\, E(X_x I_{N_z^1})\right)$$

Por la propia definición, estos operadores definidos sobre los procesos medibles y acotados, (son procesos del espacio L^p, $(p\geq 1)$) son lineales, monótonos y continuos, entendiendo que son continuos respecto la norma de L^p, $(||X||_p = E(|X|^p))$, y lo son, porque el operador de esperanza condicionada es continuo respecto la norma de L^p.

Definición 4.4.2.

Si X es un proceso medible y acotado sobre $\hat{\Omega}_k \times [o,\infty]^2$, llamaremos *proyección opcional*, respectivamente *previsible*, a los procesos,

$$\hat{X}_z^o = (X_z\cdot\pi_2)^o\cdot\pi_1 \qquad \text{y} \qquad \hat{X}_z^p = (X_z\cdot\pi_2)^p\pi_1$$

Teorema 4.4.3.

Si X es un proceso opcional sobre $\hat{\Omega}_k \times [o,\infty]^2$, entonces $X = \hat{X}^o$.(respect. si X es previsible entonces $X = \hat{X}^p$).

Demostración.

Basta con demostrar que si un proceso Y sobre $\Omega_k \times [o,\infty]^2$ es opcional entonces $Y = Y^o$. Ya que vimos que si X es opcional, $X\pi_2$ también lo es.

Si Y es un proceso sobre $\Omega_k \times [o,\infty]^2$ opcional admite la siguiente expresión,

$$Y_z(\omega) = \sum_{2\leq n<k+1} H^n(\pi^n_{1z}(\omega),z)\, I_{S^n_z}(\omega) + h(z)\, I_{S^1_z}$$

con H^n y h funciones verificando las condiciones del teorema 4.2.1. Sea $Y_z(\omega) = y_{nz}(\pi^n_{1z}(\omega),\pi^n_{2z}(\omega))$ si $\omega \in S^n_z$ y $\widetilde{y}_{nz}$ es la simetrizada de y_{nz} respecto la primera coordenada. Se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$, $2\leq n<k+1$, $Y_z \cdot I_{S^n_z} = H^n(\pi^n_{1z},z) \cdot I_{S^n_z}$, simetrizando respecto π^n_{1z}, $\widetilde{y}_{nz}\ I_{S^n_z} = H^n(\pi^n_{1z},z)\ I_{S^n_z}$; además

$Y_z\ I_{S^1_z} = h(z)\ I_{S^1_z}$.

Por la definición de Y^o,

$$Y^o_z = \sum_{2\leq n<k+1} I_{S^n_z} \int_{((o,z]^c)^{k-n}} H^n(\pi^n_{1z},z)P^n_z(\pi^n_{1z},d\bar{\omega}) + I_{S^1_z}\, P(S^1_z)^{-1}\, E(h(z)I_{S^1_z})$$

$$= \sum_{2\leq n<k+1} I_{S^n_z}\, H^n(\pi^n_{1z},z) + I_{S^1_z}\, h(z) = Y_z\ . \qquad \#$$

Definiremos el operador de proyección en el conjunto de procesos crecientes por dualidad.

Recordemos que si A es un proceso sobre $\Omega_k \times [o,\infty]^2$ creciente, integrable, tiene asociada una medida $\mathbb{M}^A$ sobre $(([o,\infty]^2)^k \times [o,\infty]^2, \mathcal{B}_{([o,\infty]^2)^k \times [o,\infty]^2})$, que da masa nula a los conjuntos evanescentes y es σ-finita, es decir, existe un proceso X c.s. estrictamente positivo. Que sea σ-finita equivale a que existe un proceso X c.s. estrictamente positivo, tal que $\mathbb{M}^A(X) < \infty$. Esta medida $\mathbb{M}^A$ viene definida por:

$$\mathbb{M}^A(X) = E\int_{[0,\infty]^2} X_z \, dA_z \text{ , para todo proceso X acotado.}$$

Además, la correspondencia entre A y $\mathbb{M}^A$ es biyectiva, (ver [17]).

Teorema 4.4.4.

Sea A un proceso sobre $\hat{\Omega}_k \times [o,\infty]^2$ integrable. Existe un único proceso creciente adaptado ${}^o\hat{A}$, resp. previsible ${}^p\hat{A}$ tal que, para todo proceso X acotado,

$$E\int_{[o,\infty]^2} \hat{X}^o_z \, dA_z = E\int_{[o,\infty]^2} X_z \, d\,{}^o\hat{A}_z$$

respect. $E\int_{[o,\infty]^2} \hat{X}^p_z \, dA_z = E\int_{[o,\infty]^2} X_z \, d^p\hat{A}_z$, y les llamaremos

proyección dual opcional, respect. *previsible* del proceso A.

Demostración.

El proceso $A\cdot\pi_2$ también es creciente e integrable. Sea ${}^{o}(A\pi_2)$ la proyección dual opcional del proceso $A\cdot\pi_2$, la existencia de un tal proceso es idéntica a la del Teorema-definición 4 de [36] ya que en ella no interviene la forma explícita de la proyección opcional de un proceso, sino únicamente las propiedades del operador de proyección.

Definamos ${}^{o}\hat{A} = {}^{o}(A\pi_2)\pi_1$, que es un proceso creciente y adaptado. Sea X un proceso acotado, por tanto $X\pi_2$ también lo es, y se verifica

$$\mathbb{M}^{A\pi_2}((X\pi_2)^{o}) = \mathbb{M}^{{}^{o}(A\pi_2)}(X\pi_2)$$

y del teorema de la medida imagen resulta el aserto. #

Teorema 4.4.5.

Si $\hat{X}^{o}$, (resp. $\hat{X}^{p}$), es la proyección opcional (resp. previsible) de un proceso X sobre $\hat{\Omega}_k \times [o,\infty]^2$ medible y acotado, entonces para todo proceso creciente A adaptado, (resp. previsible), integrable, sobre $\hat{\Omega}_k \times [o,\infty]^2$ se verifica,

$$E\int_{[o,\infty]^2} \hat{X}^{o}_z \, dA_z = E\int_{[o,\infty]^2} X_z \, dA_z$$

(resp. $E\int_{[o,\infty]^2} \hat{X}^{p}_z \, dA_z = E\int_{[o,\infty]^2} X_z \, dA_z$). Además A es indistinguible de su proyección dual opcional (resp. previsible).

Demostración.

Si demostramos un resultado análogo para procesos sobre $\Omega_k \times [o,\infty]^2$ ya estará, porque $A\cdot\pi_2$ es adaptado e integrable y se verificará

$$E\int_{[o,\infty]^2} (X\pi_2)^o \, d(A\pi_2) = E\int_{[o,\infty]^2} X\pi_2 \, d(A\pi_2)$$

y por el teorema de la medida imagen resulta la primera afirmación. La segunda es consecuencia de la unicidad de la proyección dual opcional.

Sea pues B un proceso creciente, integrable y adaptado sobre $\Omega_k \times [o,\infty]^2$. Sabemos, por el teorema 4.2.2. que admite la expresión siguiente,

$$B_z(\omega) = \sum_{2\leq n<k+1} H^n(\pi^n_{1z}(\omega), \bigsqcup_{j=1}^{n} [\omega_j, z]) \, I_{S^n_z}(\omega) +$$

$$+\int_{[o,z]} I_{S^1_x}(\omega) \, h(dx).$$

Calculemos $E\int_{[o,\infty]^2} X_z \, dB_z =$

$$= \sum_{2\leq n<k+1} E(\int_{[o,\infty]^2} X_z \, I_{S^n_z} \, dB_z) + E(\int_{[o,\infty]^2} X_z \, I_{S^1_z} \, dB_z)$$

teniendo en cuenta la expresión de B y que h es no aleatoria, coincide con

$$\sum_{2\leq n<k+1} E\int X_z \, I_{S^n_z} \, dB_z + \int E(X_z \, I_{S^1_z}) \, h(dz).$$

Fijemos n, $2 \leq n < k+1$. Se verifica,

$$E\int X_z \, I_{S_z^n} \, dB_z = E\int \tilde{x}_{nz}(\pi_{1z}^n, \pi_{2z}^n) \, I_{S_z^n} \, dB_z$$

donde $X_z(\omega) = x_{nz}(\pi_{1z}^n(\omega), \pi_{2z}^n(\omega))$ si $\omega \in S_z^n$, y $\tilde{x}_{nz}$ es la simetrizada de x_{nz} respecto la primera coordenada.
Fijemos una permutación σ de $\{1,..,n\}$,

$$E\int x_{nz}(\sigma\pi_{1z}^n(\omega), \pi_{2z}^n(\omega)) \, I_{S_z^n} \, dB_z =$$

$$= E\int x_{nz}(\sigma\pi_{1z}^n(\omega), \pi_{2z}^n(\omega)) \, I_{S_z^n} \, H^n(\sigma\pi_{1z}^n(\omega), d\bar{\omega})$$

que coincide, por la simetría de S_z^n y H^n respecto π_{1z}^n con,

$$E\int x_{nz}(\pi_{1z}^n(\omega), \pi_{2z}^n(\omega)) \, I_{S_z^n} \, H^n(\pi_{1z}^n(\omega), d\bar{\omega}) \ ,$$

y ésto no es más que,

$$E\int X_z \, I_{S_z^n} \, dB_z \ .$$

Por lo tanto,

$$E\int X_z \, I_{S_z^n} \, dB_z = E\int \tilde{x}_{nz}(\pi_{1z}^n, \pi_{2z}^n) \, I_{S_z^n} \, H(\pi_{1z}^n, d\bar{\omega})$$

desdoblando la esperanza en función de condicionadas,

$$= E_{\pi_{1z}^n} \, E_{\pi_{2z}^n | \pi_{1z}^n}\left(\int \tilde{x}_{nz}(\pi_{1z}^n, \pi_{2z}^n) \, I_{S_z^n} \, H(\pi_{1z}^n, d\bar{\omega})\right).$$

Como H^n es no aleatoria respecto π^n_{1z} ,

$$= E_{\pi^n_{1z}}\left(\int E_{\pi^n_{2z}|\pi^n_{1z}}(\tilde{x}_{nz}(\pi^n_{1z},\pi^n_{2z})\ I_{S^n_z})\ H^n(\pi^n_{1z},\ d\bar{\omega})\right)$$

y por la definición de X^o coincide con,

$$= E_{\pi^n_{1z}}\left(\int X^o_z\ I_{S^n_z}\ H^n(\pi^n_{1z},\ d\bar{\omega})\right) = E\left(\int X^o_z\ I_{S^n_z}\ H^n(\pi^n_{1z},\ d\bar{\omega})\right)$$

$$= E\int X^o_z\ I_{S^n_z}\ dB_z\ .$$

Teniendo ésto en cuenta, y que $E(X_z\ I_{S^1_z}) = E(X^o_z\ I_{S^1_z})$ resulta,

$$\mathbb{M}^B(X) = \sum_{2\leq n<k+1} E\int X^o_z\ I_{S^n_z}\ H^n(\pi^n_{1z},\ d\bar{\omega}) + \int E(X^o_z\ I_{S^1_z})\ h(dz) =$$

$$= \sum_{2\leq n<k+1} E\int X^o_z\ I_{S^n_z}\ H^n(\pi^n_{1z},\ d\bar{\omega}) + E\int X^o_z\ I_{S^1_z}\ h(dz)\ =$$

$= \mathbb{M}^B(X^o)$, que por el teorema anterior coincide con $\mathbb{M}^{{}^oB}(X)$, y por la unicidad de la proyección dual deben ser B y ${}^oB$ indistinguibles. #

Además, se verifica el siguiente

<u>Teorema 4.4.6.</u>

Si X es un proceso en $\hat{\Omega}_k \times [o,\infty]^2$ medible y acotado, $\hat{X}^o$ respectivamente $\hat{X}^p$, es el único proceso opcional, respectivamente previsible, que verifica el teorema anterior. Si A es un proceso en $\hat{\Omega}_k \times [o,\infty]^2$ creciente, adaptado e integrable, su proyección dual previsible ${}^p\hat{A}$, es el único proceso creciente previsible tal que $A - {}^p\hat{A}$ es una martingala débil, es decir, es adaptado, integrable y para todo $z' \leq z$, $E((A-{}^p\hat{A})(z',z] \mid \hat{\underline{\underline{F}}}_{z'}) = 0$.

Demostración.

Basta, como anteriormente, con tener un resultado análogo para procesos en $\Omega_k \times [o,\infty]^2$. La demostración de este resultado para procesos en $\Omega_k x[o,\infty]^2$ es análoga a la de la proposición 6 de [36] . #

Para finalizar, damos un resultado, que enunciaremos por comodidad en el espacio $(\Omega_k, \pi_1(\underline{\underline{G}}), P)$, relativo a probabilidades P' con $P' << P$.

Teorema 4.4.7.

Sea P' una probabilidad sobre $(\Omega_k, \pi_1(\underline{\underline{G}}))$ con $P' << P$. Sea A un proceso creciente y ${}^pA$ su proyección dual previsible respecto P. Existe un proceso Y previsible, finito tal que Y^pA es una versión de la proyección dual previsible de A respecto P'.

Demostración.

Como $P'<<P$, existe la derivada de Radon-Nikodym $Z = \frac{dP'}{dP}$ con

$Z \geq o$, c.s., e integrable, y por tanto finita c.s.

Sea $\{Z_u, u \in \mathbb{R}_+^2\}$ la versión continua por la derecha con límites por la izquierda de la martingala $\{E(Z|\underline{\underline{F}}_u), u \in \mathbb{R}_+^2\}$.

Demostremos que las medidas $\overline{\mathbb{M}}^A$ y $\overline{\mathbb{M}}^{PA}$ definidas para todo proceso X acotado por

$$\overline{\mathbb{M}}^A(X) = \int_{\Omega_k} \int_{\mathbb{R}_+^2} X_z \, dA_z \, dP' \quad ; \quad \overline{\mathbb{M}}^{PA}(X) = \int_{\Omega_k} \int_{\mathbb{R}_+^2} X_z \, d\,{}^P A_z \, dP'$$

son σ-finitas. En efecto, sabemos que $\mathbb{M}^A$ lo es, por tanto existe un proceso X positivo c.s., de forma que $\mathbb{M}^A(X) < \infty$.

Sea $\bar{X}$ un nuevo proceso definido por:

$$\bar{X} = Z^{-1} X \, I_{\{Z>o\}} + c \, I_{\{Z=o\}} \quad ,$$

con c constante positiva. Entonces,

$$\overline{\mathbb{M}}^A(\bar{X}) = \int_{\Omega_k} \int_{\mathbb{R}_+^2} \bar{X}_z \, dA_z \, dP' = \int_{\Omega_k} \int_{\mathbb{R}_+^2} \bar{X}_z \, Z \, dA_z \, dP =$$

$$= \int_{\Omega_k} \int_{\mathbb{R}_+^2} Z^{-1} Z \, X \, I_{\{Z>o\}} dA_z \, dP + \int_{\Omega_k} \int_{\mathbb{R}_+^2} c \, Z \, I_{\{Z=o\}} \, dA_z \, dP \leq$$

$$\leq \mathbb{M}^A(X) < \infty .$$

Análogamente se demuestra que $\overline{\mathbb{M}}^{PA}$ es σ-finita.

Como $\overline{\mathbb{M}}^A$ es σ-finita, A admite proyección dual previsible respecto P', que notaremos por $\overline{{}^P A}$.

Sea X un proceso previsible tal que, $\mathbb{M}^A(X) < \infty$ y $\overline{\mathbb{M}}^A(X) < \infty$.

Los procesos,

$$\left(\int X_u \, I_{\{Z_{u-}>o\}} \, dA_u\right)_u \quad ; \quad \left(\int X_u \, I_{\{Z_{u-}=o\}} \, d\,\overline{{}^{p}A_u}\right)_u \quad y$$

$\left(\int X_u \, I_{\{Z_{u-}>o\}} \, d\,{}^{p}A_u\right)_u$ son integrables, crecientes y los dos últimos previsibles.

Recordemos el siguiente resultado, ([16], VI-7-27) :

Si $(B_u)_u$ es un proceso creciente y previsible, entonces dada Z variable aleatoria se verifica :

$$E(Z\,B_\infty) = E\left(\int Z_u \, dB_u\right) = E\left(\int Z_{u-} \, dB_u\right),$$

Utilizando ésto, se tiene,

$$\overline{\mathbb{M}}^A(X\,I_{\{Z_-=o\}}) = \int_{\Omega_k}\int_{\mathbb{R}^2_+} X_z \, I_{\{Z_-=o\}} \, dA_z \, dP' =$$

por ser X previsible y $dP' = Z\,d\,P$

$$= \int_{\Omega_k}\int_{\mathbb{R}^2_+} X_z \, I_{\{Z_-=o\}} Z \, d\,\overline{{}^{p}A_z} \, dP$$, por el resultado antes citado

ésto coincide con, $\int_{\Omega_k}\int_{\mathbb{R}^2_+} X_z \, I_{\{Z_-=o\}} Z_- \, d\,{}^{p}A_z \, dP = 0$

Por lo cual,

$$\overline{\mathbb{M}}^A(X) = \overline{\mathbb{M}}^A(X\,I_{\{Z_-=o\}}) + \overline{\mathbb{M}}^A(X\,I_{\{Z_->o\}}) = \int_{\Omega_k}\int_{\mathbb{R}^2_+} X\,Z\,I_{\{Z_->o\}} dA_z dP$$

Por otra parte,

$\overline{\mathbb{M}}^{PA}(X) = \int_{\Omega_k}\int_{\mathbb{R}^2_+} X_u \, Z \, d\,{}^{p}A_u \, dP$, por el resultado citado y por ser X previsible, coincide con,

$$\int_{\Omega_k} \int_{\mathbb{R}_+^2} X_u \; Z_- \; dA_u \, dP = \mathbb{M}^A(XZ_-) \quad .$$

De todo lo anterior, se deduce que $\overline{\mathbb{M}}^A << \overline{\mathbb{M}}^{P_A}$, y por consi_ guiente, cualquier proceso Y previsible tal que $\overline{\mathbb{M}}^A = Y\overline{\mathbb{M}}^{P_A}$ resuelve la cuestión. #

BIBLIOGRAFIA

1. Adell, J.A.: Tesis doctoral. Universidad País Vasco. Facultad de Ciencias. (Lejona).

2. Al-Hussaini, A., Elliot, J.: Filtrations for the two parameter Jump Process. Journal of multivariate analysis 16, 118-139, (1985).

3. Arnold, L.: Stochastic Differential Equations. Theory and applications. Wiley and Sons, (1937).

4. Bakry, D.: Théorèmes de section et de projection pour les processus à deux indices. Z. Wahrs. verw. Gebiete 55, 55-71, (1981).

5. Bauer, H.: Probability theory and elements of measure theory. Academic Press, (1981).

6. Baxter, J.R., Chacon, R.V.: Compactness of Stopping times. Z. Wahrs. verw. Gebiete 40, 169-181, (1977).

7. Bourbaki, N.: Eléments de Math. Espaces Vectoriels Topologics. Chap 1-5. Hermann (París).

8. Brémaud, P.: Point Processes and Queues. Martingale Dynamics. Springer Series in Statistics. (1981).

9. Cairoli, R.: Envelope de Snell d'un processus à paramètre bidimensionnel. Ann. Inst. H. Poincaré 18, 1, 47-54, (1982).

10. Cairoli, R., Walsh, J.: Stochastic integrals in the plane. Acta Mathematica 134, 111-183, (1975).

11. Cairoli, R., Walsh, J.: Régions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales. Z. Wahrs. verw. Gebiete 44, 279-306, (1978).

12. Chung, K.L.: Lectures from Markov Processes to Brownian motion - Grundlehren der math. Wissenschaften 249, Springer-Verlag. (1982).

13. Dacunha-Castelle, D.: Probabilités et statistiques. Problèmes à temps mobile. Ed. Masson.

14. Dalang, R.C.: Sur l'arrêt optimal de processus à temps multidimensionnel continu. Séminaire de Probabilités XVIII. Lect. Notes in Math. 1059, 379-390, (1984).

15. Dalang, R.C.: On infinite graphs and randomized stopping points on the plane, (Preprint).

16. Dellacherie, C.: Capacités et processus stochastiques Ergebnisse der Mathematik und ihrer greenzgebiete. Band 67. Springer-Verlag, (1972).

17. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilités et potentiel capítulos V-VIII, Publications de l'institut de mathématique de l'Université de Strasbourg, XVII. Hermann-Paris, (1980).

18. Edgar, G.A.: Desintegration of measures and the vector-valued Randon-Nikodym theorem. Duke Math. J. 42,3, pág. 447-450, (1975).

19. Edgar, G.A., Millet, A., Sucheston, L.: On compactness and optimality of stopping times. Lect. Notes in Math. 939, 36-61, (1981).

20. El Karoui, N.: Les aspects probabilistes du control stochastique. Ecole d'Eté de St. Flour. Lect. Notes in Math. 876, 73-238, (1981).

21. Fouque, J.P.: The Past of a Stopping Point for Two-Parameter Processes. Journal of Multivariate Analysis 13, 561-577, (1983).

22. Fouque, J.P.: Passé d'un point d'arrêt et arrêt des processus à deux indices. C.R. Acad. Sc. París, 293, 83-85, (1981).

23. Friedman, A.: Stochastic differential equations and aplications. Vol. 1. Probability and Mathematical statistics. Academic Press, (1975).

24. Ghoussoub, N.: An integral representation of randomized probabilities and its applications. Lect. Notes in Math. 920, 519-543, (1982).

25. Jacob, J.: Transformations of Measures and Radon-Nikodym Derivatives for Point Processes (Preprint).

26. Jacob, J.: Multivariate Point Processes: Predictable Projection, Radon-Nikodym Derivatives. Representation of Martingales. Z. Wahrs. verw. Gebiete 31, 235-253, (1975).

27. Kallianpur, G.: Stochastic Filtering Theory. Applications of Mathematics nº 13. Springer-Verlag, (1980).

28. Korezlioglu, H., Lefort, P., Mazziotto, G.: Une propriété markovienne et diffusions associées. Lect. Notes in Math. 863, 245-274, Springer-Verlag, Berlin, (1981).

29. Krengel, U., Sucheston, L.: Stopping Rules and Tactics for Processes indexed by a Directed Set.,J. Multivariate Analysis II, 199-229, (1981).

30. Mazziotto, G.: Arrêt optimal de processus markoviens à deux indices (Preprint).

31. Mazziotto, G.: Two Parameter Optimal Stopping and Bi-Markov Processes. Z. Wahrs. verw. Gebiete 69, 99-135, (1985).

32. Mazziotto, G.: Optimal Stopping of Bi-Markov processes. Lect. Notes in Control and Information Sciences n° 61.

33. Mazziotto, G., Millet, A.: Optimal stopping of multi-parameter processes. (Preprint).

34. Mazziotto, G., Millet, A.: Points, lignes et systemes d'arrêt flous et problème d'arrêt optimal. (Preprint).

35. Mazziotto, G., Szpirglas, J.: Arrêt optimal sur le plan. Z. Wahrs. verw. Gebiete 62, 215-233, (1983).

36. Mazziotto, G., Szpirglas, J.: Un exemple d'un processus à deux indices sans l'hypothèse F.4. Seminaire de Probabilities XV. Lect. Notes in Math. 850, (1979/1980).

37. Mandelbaum, A., Varderbei, R.J.: Optimal Stopping and supermartingales over Partially Ordered Sets. Z. Wahrs. verw. Gebiete 57. 253-264. (1981).

38. Merzbach, E., Nualart, D.: A martingale approach to point processes in the plane. (to appear in Ann. Probab).

39. Merzbach, E., Nualart, D.: A characterization of the spatial Poisson process and changing time, 1985, (to appear in Ann. Probab).

40. Meyer, P.A.: Processus Aléatoires à Deux Indices. Lect. Notes in Math. 863, (1980).

41. Meyer, P.A.: Processus de Markov. Lect. Notes in Math. 26, (1967).

42. Meyer, P.A.: Convergence faible et compacité des temps d'arrêt d'après Baxter et Chacon. Lect. Notes in Math. 649, 411-423, (1978).

43. Millet, A.: Sur l'existence des points d'arrêt optimaux dans le plan. C.R. Acad. Sc. París. Sêrie 1. Math 295, 589-590, (1982).

44. Millet, A.: On randomized tactics and optimal stopping in the plan. (Preprint).

45. Neveu, J.: Martingales à temps discret. Masson & Cie. (1972).

46. Neveu, J.: Processus pontuels. Lect. Notes in Math. 598, (1976).

47. Nualart, D., Sanz, M.: A Markov Property for two parameter Gaussian processes. Stochastica. Vol. III. nº 1, (1979).

48. Shiryayev, A.N.: Optimal Stopping Rules. Applications of Mathematics 8. Springer-Verlag, (1978).

49. Snell, J.L.: Applications of martingale system theorems. Trans. Am. Math. Soc. 73, 293-312, (1952).

50. Walsh, J.B.: Optimal increasing paths. Lect. Notes in Math. 863, 172-201, (1981).

51. Walsh, J.B.: Martingales with a multi-dimensional parameter and Stochastic integrals in the plane. Cours de 3ème. cycle. Annēe Universi taire 1976/77. Universitē P. et M. Curie, Paris.

52. Yor, M.: Sous espaces denses dans L' on H^1 et representation des martingales. Lect. Notes in Math. 649, 265-309, (1978).

53. Zbaganu, G., Zhuang, X.W.: Two-parameter filtrations with respect to which all martingales are strong. Z.Wahrs. verw. Gebiete 61, 437-452, (1982).