TEORIA DE KREIN-MILMAN EN

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS SOBRE

CUERPOS VALUADOS

por

María Cristina Pérez García

UNIVERSIDAD DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCION DE ....

TEORIA DE KREIN-MILMAN EN

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS SOBRE

CUERPOS VALUADOS

por

María Cristina Pérez García

Memoria presentada para

optar al grado de Doctor

en Ciencias (Secc. de

Matemáticas)

PRESENTACION

Esta memoria ha sido realizada en el Departamento de "Teoría de Funciones" de la Facultad de Ciencias de Santander, bajo la dirección del Dr. Don Javier José Martínez Maurica, profesor Adjunto Numerario de "Análisis Matemático V" de la Universidad de Santander.

Quiero expresar mi agradecimiento, en primer lugar, al Dr. Martínez Maurica por su gran colaboración en este trabajo y el constante interés mostrado por su correcto desarrollo, haciendo constar que gracias a ello ha sido posible la realización del mismo; al Dr. Onieva, catedrático director del Departamento de "Teoría de Funciones" de esta Universidad, cuyas aportaciones bibliográficas y personales han constituido los cimientos de esta memoria; al resto de profesores del Departamento de "Teoría de Funciones" de la Facultad por la gran ayuda, tanto científica como humana, que de ellos he recibido.

Dedico esta memoria a mis padres.

Santander, Octubre de 1982

INDICE

INTRODUCCION

El teorema de KREIN-MILMAN, probado por estos autores en 1940 ([20]), ha llegado a ser uno de los teoremas básicos del Análisis Funcional. Aparte de su gran número de aplicaciones en otros campos, de los que luego haré mención, son numerosos los teoremas fundamentales del Análisis Funcional que se prueban a partir de dicho teorema, entre los que pueden citarse el teorema de STONE-WEIERSTRASS y el teorema de BANACH-STONE ([21]).

Actualmente, la teoría de KREIN-MILMAN no es más que una parte de la llamada teoría de representación integral (también llamada de CHOQUET), la cual, expresada en términos simples tiene por objeto representar los puntos de un conjunto convexo en función de los puntos extremos del mismo .

La teoría de representación de CHOQUET está basada en la siguiente idea: Es conocido que en dimensión finita, cada punto de un conjunto compacto convexo X es el baricentro de un número finito de puntos extremos (teorema de MINKOWSKI-CARATHEODORY). Esto se extiende a dimensión cualquiera, representando cada punto del compacto convexo como un "promedio" integral, es decir, como resultante de una medida maximal sobre X soportada por el conjunto de sus puntos extremos. Este es el enunciado del teorema de representación de CHOQUET, quien lo probó en el caso metrizable; fué extendido por BISHOP, DE LEEUW, P.A.MEYER, MOKOBOZKI y CHOQUET al caso general, y que contiene como caso particular al de KREIN-MILMAN. La unicidad de la representación en el teorema de CHOQUET es equivalente a que el conjunto X sea un simplex ó simplex de CHOQUET (teorema de CHOQUET-MEYER). Además, y por su interés en las aplicaciones, se ha extendido la teoría de CHOQUET al caso de conos, lo cual permite en determinadas circustancias obviar la compacidad. La mejor referencia acerca de este tema, aunque un poco desfasada, está en el libro de CHOQUET ([6] .vol.II), disponiéndose así mismo en el trabajo de PHELPS ([31]) de una referencia más actualizada .

Aunque históricamente, esta teoría de representación aparece en conexión con problemas de Teoría de Potencial vía la frontera de CHOQUET, hoy en día son muchas sus aplicaciones en Teoría Ergódica y Matemática Aplicada. Posiblemente, su más simple aplicación sea en Teoría Ergódica, obteniéndose fácilmente en este caso el clásico resultado de que, las medidas invariantes son representables de forma única en componentes ergódicas, resultado relacionado por otra parte, con el teorema de LANFORD-RUELLE en C^*-álgebras.

Otra aplicación del teorema de representación de CHOQUET, es el teorema de BERNSTEIN, en el que se prueba que cada función completamente monótona es la "Transformada de Laplace" de una medida de RADON positiva.

También, el clásico teorema de BOCHNER en Análisis de Fourier, probado por BOCHNER en 1933 en el caso particular de que el grupo se redujese a R , y por WEIL en 1938 en el caso general, puede probarse utilizando el teorema de CHOQUET.

Recientemente, se ha aplicado la teoría de representación integral a otros campos, tales como ecuaciones en derivadas parciales (LAHA), álgebras de funciones y semigrupos (ROGALSKI), problemas de optimización, programación convexa y aproximación ([13] y [33]), y problemas variacionales ([10]) .

Otro aspecto de gran interés en la teoría de KREIN-MILMAN, es el análisis de la estructura del conjunto de puntos extremos. El conjunto $\mathcal{E}(X)$ de puntos extremos de un conjunto compacto convexo X es siempre α-favorable y, en particular, espacio de BAIRE. Además, si $\mathcal{E}(X)$ es metrizable, entonces es topológicamente completo, es decir, homeomorfo a un espacio métrico completo, y es un G_δ en su clausura.

Respecto a la metrizabilidad del conjunto X en términos de propiedades topológicas del conjunto de sus puntos extremos, cabe citar el trabajo de CORSON ([7]), quien prueba en 1970 que X es metrizable si $\mathcal{E}(X)$ es la imagen continua de un espacio métrico completo separable, demostrando HAYDON en 1976 ([12]), que la condición de completitud no es imprescindible.

También, en 1971 JAYNE y ROGERS ([16]), dan ejemplos de conjuntos convexos cerrados y acotados de c_0 y l^1 , en los que el conjunto de puntos extremos no es ni un conjunto analítico ni un conjunto de BOREL, concluyendo su trabajo con las siguientes conjeturas:

a) Un espacio de Banach es no reflexivo si y sólo si contiene un conjunto convexo cerrado y acotado cuyo conjunto de puntos extremos no es un conjunto de BOREL.

b) Un espacio de Banach es no reflexivo si y sólo si contiene dos conjuntos convexos cerrados y acotados cuya envolvente convexa no es un conjunto de BOREL.

El concepto de punto extremo ha dado lugar a diversas variantes, de las que por su interés destacaré dos:

Un punto x de un conjunto cerrado X de un espacio de Banach real E , se dice "punto soporte" de X , si existe f perteneciente a E' tal que $f(x) = \sup f(X)$. Este concepto fué introducido y estudiado por PHELPS y BISHOP ([30]), encontrándose así mismo en [30] una recopilación de lo referente a este tema y de sus aplicaciones en Análisis Funcional no Lineal.

Un punto x de un conjunto X de un espacio de Banach real E , se dice "strongly exposed", si existe f perteneciente a E' y un número real α tal que

$$\{u \in E \ / \ f(u) = \alpha\} \cap X = \{x\},$$

y para toda sucesión $(y_n)_{n \in N}$ contenida en X tal que $f(y_n) \longrightarrow \alpha$, se verifica $\|y_n - x\| \longrightarrow 0$. El interés de este concepto radica en el conocido resultado de LINDENSTRAUSS y TROJANSKI ([44]), de que todo subconjunto convexo débilmente compacto de un espacio de Banach es la envolvente convexa cerrada de sus puntos "strongly exposed". En particular, en los espacios reflexivos, cada conjunto convexo cerrado y acotado es la envolvente convexa cerrada de sus puntos "strongly exposed".

A los espacios de Banach en los que cada conjunto convexo cerrado y acotado es la envolvente convexa cerrada de sus puntos "strongly exposed", se llaman espacios con la propiedad de RADON-NIKODYM, los cuales pueden ser caracterizados también en términos de integrales de BOCHNER (caracterización que usualmente aparece como definición), y en términos geométricos de dentabilidad y s-dentabilidad.

Un teorema dado por LINDENSTRAUSS en 1973, prueba que todo espacio de Banach con la propiedad de RADON-NIKODYM tiene también la propiedad de KREIN-MILMAN (es decir, cada conjunto convexo cerrado y acotado es la envolvente convexa cerrada de sus puntos extremos). Recíprocamente, HULF y MORRIS ([14]) prueban que, para duales de espacios de Banach, la propiedad de RADON-NIKODYM es equivalente a la de KREIN-MILMAN, prevaleciendo abierta todavía la cuestión de si la misma propiedad es váli da para espacios de Banach cualesquiera.

El estudio de la propiedad de RADON-NIKODYM en espacios de Frechet ha sido realizado por SAAB ([38]y[39]). Los resultados acerca de la propiedad de RADON-NIKODYM obtenidos hasta 1974, se hallan recopilados en el artículo de DAVIS ([8]).

Dada la importancia del teorema de KREIN-MILMAN, éste se ha extendido a contextos diferentes, variando bien el tipo de conjunto en el que se han de evaluar los puntos extremos, ó bien el tipo de espacio.

Así, en 1969 ASIMOV ([2]), y en 1974 LOONEY ([23]), extienden el teorema a ciertos conjuntos convexos no acotados. Para los espacios localmente p-convexos, LIGAUD ([22]) en 1972 ha dado una versión en términos de los puntos p-extremos, que es aplicada por VEED ([43]) al caso de los espacios L_p , $0<p<1$. Es interesante resaltar que, en cierto sentido, el comportamiento en los espacios localmente p-convexos es distinto que en los espacios localmente convexos; concretamente, mientras que no todo conjunto compacto convexo puede ser sumergido en un espacio localmente convexo (ROBERTS, [34]), KALTON ([17]) prueba sorprendentemente en 1977, que cada conjunto compacto p-convexo puede ser sumergido en un espacio localmente p-convexo, y que, por tanto, tiene "suficientes" puntos p-extremos.

En 1970, FUCHSSTEINER ([11]) da un teorema de tipo general, válido para espacios en los que se cumple una "cierta" propiedad de separación de conjuntos convexos.

Para espacios no localmente convexos, se dan todo tipo de situaciones. Mientras que ROBERTS ([34]) en 1977 soluciona un problema abierto durante largo tiempo, construyendo un F-espacio en el cual existe un conjunto compacto convexo sin puntos extremos, KALTON ([18]) en 1980 da otro ejemplo de un F-espacio con dual nulo, en el que cada conjunto compacto convexo es la envolvente convexa cerrada de sus puntos extremos.

Sin embargo, en el caso no arquimediano hay muy pocas incursiones a la teoría de KREIN-MILMAN. Es fácil encontrar motivos para ésta, aparentemente inexplicable, situación. Así, por ejemplo, en espacios normados no arquimedianos, la frontera de cada bola abierta y cerrada !es vacía ! . Como hace notar MONNA en 1974:

"J'ai déjà signalé les difficultés qu'on recontre en tous les problèmes dans lesquels la frontière d'un ensemble semble essentiel. Je pense à des notions comme convexité stricte, convexité uniforme, points extrémaux, théorème de Krein-Milman. On ne sait pas de quelle façon il faut attaquer ces problèmes en analyse non-archimédienne".

A esto hay que añadir, entre otras cosas, el caráter restrictivo de la compacidad en Análisis Ultramétrico, pues, como es sabido, la existencia de conjuntos convexos compactos con más de un punto, exige que el cuerpo base sea localmente compacto, propiedad poco usual en este tipo de cuerpos (pág. 64).

El primer estudio en relación con el tema es el desarrollado por MONNA ([25]), quien da una noción de "hiperplano de apoyo", aplicándola para demostrar un principio de máximo en análisis p-ádico ([26]).

El único teorema de KREIN-MILMAN no arquimediano, por mí conocido, ha sido enunciado por AJUPOV en 1970 ([1]) para conjuntos c-compactos convexos conteniendo el cero, en espacios localmente convexos sobre cuerpos dotados de valuación discreta. Aparte de que el citado trabajo no contiene demostraciones, su contenido es incompleto, puesto que, entre otras cosas, no se resuelve en él la cuestión de si los conjuntos extremos minimales son puntos; la definición de punto extremo es topológica, en vez de geométrica, y no indica nada de cómo demostrar el teorema cuando la valuación del cuerpo es densa ó cuando el conjunto no contiene al cero.

También puede considerarse como antecedente el trabajo ya citado de FUCHSSTEINER, quien da una versión general del teorema de KREIN-MILMAN, en la que queda incluido, en principio, el caso no arquimediano. Sin embargo, por un error en el mismo, sus principales teoremas, incluyendo el de KREIN-MILMAN, no son válidos en el contexto ultramétrico, como J.MARTINEZ MAURICA y yo hemos observado en una reciente publicación ([24]).

Por otra parte, y como antecedente más positivo, cabe destacar que los conjuntos compactos convexos y c-compactos convexos, han sido descritos de forma simple en términos de bases ortogonales por CARPENTIER ([5]) y VAN ROOIJ ([35]) respectivamente.

Con estos antecedentes, y con una fructífera sugerencia de los profesores ONIEVA y CUARTERO de que la convexidad de MONNA no parecía la adecuada para este tipo de problemas, he realizado la primera memoria acerca de la teoría de KREIN-MILMAN no arquimediana, de cuyo contenido voy a hacer a continuación un breve resumen.

Para conjuntos compactos convexos (y por tanto cuerpos localmente compactos), he desarrollado una teoría de puntos extremos (contenida en el capítulo 2), que formulo para un cuerpo valuado cualquiera, arquimediano ó no, y para diversas convexidades (en el caso no arquimediano). No obstante, el desarrollo de la misma muestra claras diferencias entre los casos arquimediano ó no, la más notoria de las cuales es que los conjuntos extremos minimales nunca se reducen a puntos en el caso no arquimediano. También es de destacar que los resultados correspondientes a la convexidad de MONNA son triviales, apareciendo como más adecuada la utilización de la x-convexidad. En capítulos posteriores, y para otras definiciones, este mal comportamiento de la convexidad de MONNA estará presente, aunque adoptando una forma distinta: Las definiciones de puntos extremos van a depender no sólo del conjunto, sino también de un punto previamente fijado en el mismo. Las limitaciones que la compacidad implica en Análisis Ultramétrico, me plantearon el extender esta definición al caso de conjuntos c-compactos convexos, lo cual sólo he conseguido en espacios normados.

Para conjuntos c-compactos convexos en espacios localmente convexos, he desarrollado en el capítulo 3 la teoría de AJUPOV ya comentada anteriormente. El énfasis lo he puesto en resolver sus limitaciones, dando nuevas definiciones para conjuntos convexos no conteniendo el cero, y resolviendo afirmativamente la cuestión de si los conjuntos extremos minimales son puntos. Quizás, la mayor dificultad se encuentre en extender la teoría a cuerpos dotados de valuación densa, introduciendo para ello el concepto de conjunto convexo m^*-cerrado, a cuyo estudio, junto con otras cuestiones geométricas, se dedica el capítulo 1.

En el capítulo 4, se prueba que la definición de AJUPOV es equivalente a una versión modificada de la que se sigue a través de la definición de hiperplano de apoyo de MONNA.

La última dificultad reseñada en la teoría de AJUPOV, que su definición de punto extremo es topológica, queda solventada al dar otra definición que da lugar a puntos extremos muy similares, y que, al no depender de la topología, hemos llamado geométrica. Esta ha sido estudiada también en el capítulo 4, que concluye con el estudio comparado de las definiciones dadas a lo largo de la memoria, el cual muestra que, en condiciones de comparación, dan lugar a "casi" los mismos puntos extremos.

PRELIMINARES

Haré a continuación una breve exposición de los conceptos y notaciones más utilizados a lo largo de la memoria.

Salvo mención expresa en contra, indicaré por $(K, |.|)$ ó simplemente K , a un cuerpo dotado de <u>valuación no arquimediana</u>, es decir, de una aplicación $|\,.\,|: K \longrightarrow R^+$ verificando:

(i) $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0.$

(ii) $|a.b| = |a|.|b| \qquad \forall a,b \in K.$

(iii) $|a+b| \leq \max(|a|, |b|) \qquad \forall a,b \in K$ ("desigualdad triangular fuerte").

Represento por N_K el grupo multiplicativo de valores de K , y por O el anillo de la valuación, es decir,

$$N_K = \{ |a| \ / \ a \in K \setminus \{0\} \} ; \quad O = \{ a \in K \ / \ |a| \leq 1 \}.$$

Supondré que la valuación de K es <u>no trivial</u>, es decir, $N_K \neq \{0,1\}$, y que K es completo con respecto a la métrica inducida por la valuación.

La valuación de K se dice <u>densa</u> si N_K es denso en R^+, en caso contrario la valuación se dice <u>discreta</u>, existiendo entonces un número real ρ mayor que uno tal que:

$$N_K = \{ \rho^n \;/\; n \in Z \} .$$

La mayor parte de las veces, y para poder disponer de teoremas de separación, K será <u>esféricamente completo</u>, es decir, en él toda familia de bolas tales que dos cualesquiera de ellas tienen intersección no vacía, tiene intersección no vacía.

Si E es un espacio vectorial sobre K , un subconjunto A de E se dice <u>convexo</u> si:

$$\lambda A + \mu A + \nu A \subseteq A$$

para todo $\lambda , \mu , \nu \in 0$ tal que $\lambda + \mu + \nu = 1$.

Un subconjunto A de E se dice <u>x-convexo</u> $(x \in E)$, si A es convexo y contiene a x . Los conjuntos 0-convexos son llamados también absolutamente convexos.

Para cada conjunto A de E , designo por $E_c(A)$ (resp. $E_{xc}(A)$) la <u>envolvente convexa</u> (resp. x-convexa) de A . Si A se reduce a dos puntos x,y , se utiliza la notación $C\{x,y\}$ para indicar la envolvente convexa de A . Denoto por $[A]$ el subespacio lineal generado por A .

Si A es una parte 0-convexa y absorbente de E , represento por p_A el <u>funcional de Minkowski</u> de A , definido por:

$$p_A(x) = \inf \{ |\lambda| \;/\; x \in \lambda A \} \qquad (x \in E),$$

verificándose la relación:

$$\{ x \in E \;/\; p_A(x) < 1 \} \subset A \subset \{ x \in E \;/\; p_A(x) \leq 1 \} .$$

Además, si la valuación de K es discreta, se tiene:

$$A = \left\{ x \in E \ / \ p_A(x) \leq 1 \right\} .$$

Si A no es absorbente, p_A será el funcional de Minkowski de A respecto de $[A]$.

Daré a continuación ciertos conceptos geométricos relativos a los lados de un hiperplano.

Si f es una forma lineal sobre E y H es el hiperplano de ecuación $f(x) = \alpha$ $(\alpha \in K)$, dos puntos x,y $(x \notin H,$ $y \notin H)$ se dicen <u>separados</u> por H si $C\{x,y\} \cap H \neq \emptyset$; en caso contrario se dice que x e y están <u>de un mismo lado</u> de H.

Se denota $x \sim y$ si x e y están de un mismo lado de H, y se verifica:

$$x \sim y \iff |f(x) - f(y)| < |\alpha - f(y)| ,$$

siendo $\sim$ una relación de equivalencia sobre E. Las clases de equivalencia respecto de la relación $\sim$, se llaman <u>lados</u> de H.

Un subconjunto A de E se dice que está <u>de un lado</u> de H si A está contenido en uno de los lados de H.

Dos subconjuntos A,B de E se dice que están <u>separados</u> por H si A y B están contenidos en lados distintos (y por tanto disjuntos) de H.

Si E es un espacio vectorial topológico sobre K, represento por E' el dual topológico de E, mientras que el símbolo E^* indicará su dual algebraico.

Como en el caso usual, E es un espacio localmente convexo sobre K cuando posee una base de 0-entornos convexos, ó equivalentemente, cuando la topología de E viene definida por una familia de seminormas no arquimedianas (es decir, verificando la desigualdad triangular fuerte).

De las proposiciones 55 y 69(i) dadas por CARPENTIER en [5] (pág. 140 y 151 respectivamente), se sigue el siguiente teorema de separación, que será utilizado en los teoremas fundamentales de la memoria:

"Sea E un espacio localmente convexo separado sobre un cuerpo K esféricamente completo, A un subconjunto convexo cerrado de E y a un punto de E que no pertenece a A. Entonces, existe un hiperplano cerrado H que separa a y A".

También, $(E, \|\ \|)$ ó simplemente E, es un espacio normado no arquimediano sobre K, si la norma $\|\ \|$ verifica la desigualdad triangular fuerte. En este caso, indicaré por N_E el conjunto de valores de la norma de E, es decir,

$$N_E = \{ \|x\| \ / \ x \in E \setminus \{0\} \} ,$$

y para x,r elementos de E y R^+ respectivamente, denoto por $B(x,r)$ (resp. $\bar{B}(x,r)$) la bola abierta (resp. cerrada) de centro x y radio r .

Una familia $(x_i)_{i\in I}$, $x_i \in E$, $x_i \neq 0$, se dice <u>ortogonal</u> si:

$$\left\| \sum_{i\in S} \rho_i x_i \right\| = \max_{i\in S} \| \rho_i x_i \|$$

para todo $\rho_i \in K$ y todo conjunto finito S contenido en I .

Una familia ortogonal $(x_i)_{i\in I}$ se dice <u>base ortogonal</u> de E , si todo elemento x de E se puede escribir en la forma de una serie convergente $\sum_{i\in I} \rho_i x_i$ según el filtro de los complementarios de las partes finitas de I . Si E posee base ortogonal se dice que E es <u>ortogonalizable</u>.

Otras definiciones y resultados del Análisis no Arquimediano no utilizados en esta memoria y no explicitados en estos preliminares, pueden encontrarse en [27] y [36] .

CAPITULO 1

NUEVAS PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS C-COMPACTOS CONVEXOS

En este capítulo se introduce y estudia ampliamente el concepto de conjunto convexo m*-cerrado, cuya importancia radica, como ya ha quedado indicado en la introducción, en el hecho de que, dentro de la teoría de KREIN-MILMAN, los conjuntos convexos c-compactos m*-cerrados desempeñarán el mismo papel que los conjuntos convexos compactos en el caso usual.

Este concepto aquí introducido, es relativamente próximo, y a lo largo del capítulo se comparan ambos, al de conjunto convexo m-cerrado definido por CARPENTIER.

Es también importante resaltar, que esta definición tiene interés sólo cuando la valuación del cuerpo es densa, pues todo conjunto convexo es m*-cerrado si la valuación es discreta.

Para el resto de la memoria, los resultados más importantes son los del párrafo 2, que hacen referencia a la estructura de los conjuntos convexos c-compactos y m*-cerrados en espacios normados no arquimedianos.

Si E es un espacio vectorial topológico sobre K , un subconjunto A de E se dice c-compacto si todo filtro convexo sobre A posee al menos un punto adherente en A . Las propiedades elementales de los conjuntos c-compactos convexos pueden encontrarse en el artículo de SPRINGER ([40]).

1. CONJUNTOS M^*-CERRADOS .

(1.1) DEFINICION. Un subconjunto convexo de K se dice m^*-cerrado si es vacío, K , ó una bola cerrada de la forma:

$$\left\{ x \in K \ / \ | x - x_o | \leq |\lambda| \right\} ,$$

para ciertos x_o, λ elementos de K .

Más en general:

(1.2) DEFINICION. Sea E un espacio vectorial topológico sobre K . Un subconjunto convexo A de E se dice m^*-cerrado si, para toda f perteneciente a E′ , f(A) es m^*-cerrado en K .

El interés de este concepto reside en cuerpos dotados de valuación densa, ya que se verifica:

(1.3) PROPOSICION. Sea E un espacio vectorial topológico

<u>sobre un cuerpo</u> K <u>dotado de valuación discreta. Entonces, to-</u>
<u>do subconjunto convexo</u> A <u>de</u> E <u>es m^*-cerrado.</u>

Demostración

Si A es un subconjunto convexo de E , para cada f perteneciente a E' f(A) es un subconjunto convexo de K , por lo que, f(A) es vacío, K , ó una bola. Además, por ser la valuación de K discreta, toda bola en K es de la forma $\bar{B}(x, |\lambda|)$, para ciertos x, λ elementos de K, con lo que, f(A) es m^*-cerrado en K .

<u>NOTAS</u>:

a) Dados E y F espacios vectoriales topológicos sobre K , caben destacar las siguientes propiedades:

(M^*-1) Si f es una aplicación lineal de E en F y A un convexo m^*-cerrado de E , f(A) es un convexo m^*-cerrado de F .

(M^*-2) Si A es un subconjunto convexo m^*-cerrado de E , $A + x$ y λA son convexos m^*-cerrados de E , para cada x, λ elementos de E y K respectivamente.

(M^*-3) Todo subespacio vectorial de E es m^*-cerrado.

(M^*-4) Si A_1 y A_2 son dos subconjuntos convexos m^*-

-cerrados de E , $A_1 + A_2$ es un subconjunto convexo m^*-cerrado de E .

En efecto, para cada f perteneciente a E' se tiene, $f(A_1 + A_2) = f(A_1) + f(A_2)$, con lo que, basta probar el resultado para $E = K$. También, podemos suponer sin pérdida de generalidad que A_1 y A_2 son 0-convexos, es decir, $A_1 = \bar{B}(0, |\lambda_1|)$ y $A_2 = \bar{B}(0, |\lambda_2|)$, para ciertos λ_1, λ_2 elementos de K . Entonces, $A_1 + A_2 = \bar{B}(0, \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$, por lo que, $A_1 + A_2$ es m^*-cerrado.

b) Existen conjuntos convexos c-compactos que no son m^*-cerrados.

En efecto, basta considerar K esféricamente completo dotado de valuación densa. Entonces, $A_1 = B(0,1)$ y $A_2 = \bar{B}(0,r)$, con $r \notin N_K$, son dos subconjuntos convexos c-compactos de K que no son m^*-cerrados.

c) Existen conjuntos convexos m^*-cerrados de E que no son c-compactos, ya que si la valuación de K es discreta, todo subconjunto convexo de E es m^*-cerrado y, trivialmente, no todo conjunto convexo es c-compacto.

También, si la valuación de K es densa y K no es esféricamente completo, la bola unidad cerrada de K es un subconjunto convexo m^*-cerrado de K que no es c-compacto.

2. ESTRUCTURA DE LOS CONJUNTOS C-COMPACTOS M^*-CERRADOS EN ESPACIOS NORMADOS .

Daré a continuación un teorema de estructura de los conjuntos 0-convexos c-compactos y m^*-cerrados en espacios normados no arquimedianos, basado en el correspondiente teorema de estructura de los conjuntos 0-convexos c-compactos en espacios de Banach, dado por VAN ROOIJ ([35]) en la siguiente forma:

"Sea E un espacio de Banach sobre un cuerpo K esféricamente completo y A un subconjunto 0-convexo c-compacto de E no reducido al cero. Entonces, existe una sucesión ortogonal de elementos de E , $(u_n)_{n\in N}$, y una sucesión $(D_n)_{n\in N}$ de discos en K , con $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| \operatorname{diam} D_n = 0$, tal que:

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \ / \ a_n \in D_n \quad \forall n \in N \right\} ".$$

Por un disco en K se entiende un subconjunto de K que es K ó un conjunto del tipo $\{ \lambda \in K \ / \ |\lambda| < r \}$ ó $\{ \lambda \in K \ / \ |\lambda| \leq r \}$, con $r > 0$. También, $\operatorname{diam} D_n$ denota el diámetro de D_n , el cual es infinito si D_n es K .

Nótese que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ converge para toda sucesión $(a_n)_{n\in N}$, con a_n perteneciente a D_n para cada natural n .

NOTA: Obsérvese que el resultado anterior es también cierto cuando E es un espacio normado no arquimediano sobre K, ya que si A es un subconjunto 0-convexo y c-compacto de E, A verifica las hipótesis del teorema de VAN ROOIJ considerado como subconjunto del completado de E, $\hat{E}$.

En lo que sigue, consideraré sólo conjuntos 0-convexos no reducidos al cero.

(1.4) TEOREMA. Sea $(E, \|\,\|)$ un espacio normado no arquimediano sobre un cuerpo K esféricamente completo. Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto de E, $(u_n)_{n\in N}$ una sucesión ortogonal de E, y $(D_n)_{n\in N}$ una sucesión de discos en K con $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| \operatorname{diam} D_n = 0$, tal que,

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \;/\; a_n \in D_n \quad \forall n \in N \right\}.$$

Entonces, son equivalentes:

(i) A es m^*-cerrado en E.

(ii) D_n es m^*-cerrado en K, para cada natural n.

Demostración

(i) implica (ii): Para cada natural n, la aplicación

$$\overline{[u_n \;/\; n \in N]} \xrightarrow{\;f_n\;} K$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n \longrightarrow x_n$$

es lineal y continua, por lo que, $f_n(A) = D_n$ es m^*-cerrado en K.

(ii) implica (i): Si para cada natural n, D_n es distinto de K, se tiene, $D_n = \bar{B}(0, |\lambda_n|)$, para un cierto λ_n en K, con lo que, la sucesión $(\lambda_n u_n)_{n \in N}$ converge a cero. Entonces, dados f y $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n$ elementos de E' y A respectivamente, se verifica:

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n f(u_n)\right| \leq \sup_{n=1}^{\infty} |x_n| \, |f(u_n)| \leq$$

$$\leq \sup_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \, |f(u_n)| = |\lambda_j| \, |f(u_j)| ,$$

para un cierto natural j.

Por tanto, si $\mu = \lambda_j f(u_j)$, $f(A)$ está contenido en $\bar{B}(0, |\mu|)$. Además, se verifica la igualdad; en efecto, si $\mu = 0$ el resultado es trivial, y si μ es distinto de cero y λ es un elemento de K con $|\lambda| \leq |\mu|$, $x = \alpha \lambda_j u_j$, con $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, es un punto de A tal que $f(x) = \lambda$, es decir, λ pertenece a $f(A)$.

En conclusión, $f(A) = \overline{B}(0, |\mu|)$, por lo que, $f(A)$ es m^*-cerrado en K .

Si existe un natural n tal que $D_n = K$, denoto por N_0 el conjunto:

$$N_0 = \left\{ n \in N \ / \ D_n = K \right\}.$$

Dada f en E' , pude suponerse sin pérdida de generalidad que $f(u_{n_0})$ es distinto de cero para algún n_0 perteneteneciente a N_0 , pues sino, se razona como en el caso anterior. Entonces, se tiene que $f(A)$ es igual a K , ya que, si $f(u_{n_0}) = \beta$ $(\beta \in K)$, para cada elemento ξ de K , $x = \frac{\varepsilon}{\beta} u_{n_0}$ es un punto de A tal que $f(x) = \varepsilon$.

<u>NOTA:</u> Obsérvese que en las hipótesis de (1.4), A es acotado en E si y sólo si D_n es acotado en K para cada natural n . Además, se verifica:

(1.5) <u>TEOREMA. Sea</u> $(E, \|\ \|)$ <u>un espacio normado no arquimediano sobre un cuerpo</u> K <u>esféricamente completo. Sea</u> A <u>un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de</u> E . <u>Entonces, existe una sucesión ortogonal de elementos de</u> E , $(e_n)_{n\in N}$, <u>con</u> $\lim_{n\to\infty} \| e_n \| = 0$, <u>tal que:</u>

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \ / \ |x_n| \leq 1 \quad \forall\, n \in N \right\}.$$

Demostración

Por (1.4), existe una sucesión ortogonal $(u_n)_{n \in N}$ de elementos de E, y una sucesión en K, $(\lambda_n)_{n \in N}$, con $\lim_{n \to \infty} |\lambda_n| \, \| u_n \| = 0$, tal que:

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \ / \ |a_n| \leq |\lambda_n| \quad \forall n \in N \right\}.$$

Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que todo λ_n es distinto de cero, con lo que:

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \lambda_n u_n \ / \ \left| \frac{a_n}{\lambda_n} \right| \leq 1 \quad \forall n \in N \right\}.$$

Por tanto, la sucesión $(e_n)_{n \in N}$, definida por $e_n = \lambda_n u_n$ para cada natural n, es una sucesión ortogonal de elementos de E, con $\lim_{n \to \infty} \| e_n \| = 0$, tal que:

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \ / \ |x_n| \leq 1 \quad \forall n \in N \right\}.$$

(1.6) PROPOSICION. Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre un cuerpo K esféricamente completo. Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo y c-compacto de E. Entonces, si la intersección de A con toda recta es m^*-cerrado en dicha recta, A es m^*-cerrado en E.

Demostración

Sea $(u_n)_{n \in N}$ la sucesión ortogonal considerada en (1.4).

Para cada natural n, la intersección de A con la recta L determinada por 0 y u_n es m^*-cerrado en L, es decir,

$$D_n = \left\{ \lambda \in K \;/\; \lambda u_n \in A \right\},$$

es m^*-cerrado en K.

Como se muestra en el siguiente ejemplo, el recíproco del resultado anterior en general no es cierto:

(1.7) EJEMPLO. Sea $(E, \|\;,\;\|)$ un espacio normado no arquimediano sobre un cuerpo K esféricamente completo dotado de valuación densa. Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de E, y $(e_n)_{n \in N}$ la sucesión ortogonal construida en (1.5) tal que,

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \;/\; |x_n| \leq 1 \quad \forall n \in N \right\}.$$

Si $r < 1$ pertenece a $R^+ \setminus N_K$ y $(x_n)_{n \in N}$ es una sucesión de elementos no nulos de K tal que la sucesión de sus módulos, $(|x_n|)_{n \in N}$, es creciente y converge a r, entonces,

$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ es un elemento de A tal que la intersección de

A con la recta S determinada por 0 y x no es m^*-cerrado en S ; en efecto, se tiene:

$$\lambda x \in A \Longleftrightarrow |\lambda|\,|x_n| \leq 1 \quad \forall n \in N \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \inf \left\{ \frac{1}{|x_n|} \;/\; n \in N \right\} = \frac{1}{\sup\limits_{n \in N} |x_n|} = \frac{1}{r} \geqslant |\lambda| \;,$$

por lo que,

$$\left\{ \lambda \in K \;/\; \lambda x \in A \right\} = \bar{B}(0, \frac{1}{r})$$

que no es m^*-cerrado en K , ya que r no pertenece a N_K .

3. C-COMPACIDAD EN ESPACIOS NORMADOS SOBRE CUERPOS LOCALES .

Es conocido que si K es un cuerpo dotado de valuación no arquimediana y E un espacio vectorial topológico sobre K , todo subconjunto compacto de E es c-compacto.

Recíprocamente, si el cuerpo K es local, se verifica:

(1.8) TEOREMA. Sea $(E, \|\;\|)$ un espacio normado no arquimediano sobre un cuerpo K local. Entonces, todo subconjunto convexo c-compacto y acotado A de E , es compacto.

Demostración

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer A 0-convexo.

Como la valuación de K es discreta, A es m^*-cerrado y, por (1.5), existe una sucesión ortogonal $(e_n)_{n\in N}$ de elementos de E con $\lim_{n\to\infty} \|e_n\| = 0$, tal que:

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \ / \ |x_n| \leq 1 \qquad \forall\, n \in N \right\}.$$

La aplicación:

$$A \xrightarrow{f} \prod_{n\in N} \bar{B}_K(0,1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \longrightarrow (x_n)_{n\in N}$$

es biyectiva y continua, por lo que, es suficiente probar que tiene inversa continua y, para ello, bastará ver la continuidad en el origen de f^{-1} .

Supuesto que $\lim_{m\to\infty} x_n^m = 0$ para cada natural n , hay que ver que la sucesión $(x^m)_{m\in N}$, definida por $x^m = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^m e_n$, converge a cero. Si, por reducción al absurdo, $(x^m)_{m\in N}$ no converge a cero, existe un natural j , tal que para todo natural m , existe $m_1 \geq m$ con $\|x^{m_1}\| > \rho^j$, es decir, $\sup_{n\in N} |x_n^{m_1}|\, \|e_n\| > \rho^j$.

Como $\lim_{n\to\infty} \|e_n\| = 0$, existe un natural p , tal que $\|e_n\| \leq \rho^j$ para todo $n \geq p$, por lo que,

$$\sup_{n\in N} \left|x_n^{m_1}\right| \, ||e_n|| = \max(\left|x_1^{m_1}\right| \, ||e_1||, \dots, \left|x_p^{m_1}\right| \, ||e_p||) >$$

$$> \rho^j \, .$$

Como $(x_1^m)_{m\in N}, \dots, (x_p^m)_{m\in N}$ son sucesiones convergentes a cero, existe m_o perteneciente a N tal que,

$$|x_1^m| \leq \rho^j \, ||e_1||^{-1} \, , \dots , \, |x_p^m| \leq \rho^j \, ||e_p||^{-1} \qquad \forall m \geq m_o \, ,$$

con lo que,

$$\max(|x_1^m| \, ||e_1||, \dots, |x_p^m| \, ||e_p||) \leq \rho^j \qquad \forall m \geq m_o \, :$$

: absurdo.

Por tanto, si E es un espacio normado no arquimediano sobre un cuerpo K local, todo subconjunto convexo c-compacto de E es homeomorfo a un producto contable del anillo de los enteros de K, obteniéndose así un resultado análogo al dado por CARPENTIER acerca de la estructura de los conjuntos O-convexos compactos, en la siguiente forma:

"Sea K un cuerpo con valuación discreta completo, E un espacio vectorial topológico sobre K y A un subconjunto O-convexo compacto de E. Entonces, existe un isomorfismo-homeomorfismo de A sobre un producto O^I, dotado de la estructura algebraica y de la topología producto" ([5]. pág. 152).

4. CONJUNTOS M-CERRADOS Y M*-CERRADOS .

En este apartado se completa el estudio del concepto de conjunto m-cerrado introducido por CARPENTIER, viéndose su relación con el concepto de conjunto m*-cerrado establecido anteriormente.

(1.9) DEFINICION. Un subconjunto convexo de K se dice m-cerrado si es vacío, K , ó un conjunto del tipo:

$$\left\{ x \in K \ / \ | x - x_o | \leq r \right\} ,$$

para ciertos x_o, r elementos de K y R^+ respectivamente.

Más en general:

(1.10) DEFINICION. Sea E un espacio vectorial sobre K . Un subconjunto de E se dice m-cerrado alrededor de un punto, si su intersección con toda recta pasando por ese punto es m-cerrado en dicha recta.

Un subconjunto convexo de E se dice m-cerrado si su intersección con toda recta es m-cerrado en dicha recta.

NOTAS:

a) Si E es un espacio vectorial sobre K , se verifica:

(M-1) Un subconjunto convexo de E m-cerrado alrededor de un punto es m-cerrado, es decir, los conceptos m-cerrado y m-cerrado alrededor de un punto son equivalentes.

(M-2) Si A es un subconjunto convexo m-cerrado de E, $A + x$ y λA son subconjuntos convexos m-cerrados de E, para cada x, λ elementos de E y K respectivamente.

(M-3) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de convexos m-cerrados de E, entonces, $\bigcap_{i \in I} A_i$ es un convexo m-cerrado de E.

(M-4) Todo subespacio vectorial de E es m-cerrado.

b) Para toda seminorma no arquimediana, las bolas cerradas son m-cerradas.

c) Si E y F son espacios vectoriales sobre K y f una aplicación lineal de E en F, se tiene:

(M-5) Para todo conjunto convexo m-cerrado A de F, $f^{-1}(A)$ es un subconjunto convexo m-cerrado de E.

(M-6) Si B es un subconjunto convexo m-cerrado de E, en general, $f(B)$ no es m-cerrado en F. Es fácil ver que $f(B)$ es m-cerrado en F si y sólo si $B + \mathrm{Ker} f$ es m-cerrado en E.

La demostración de estas propiedades puede encontrarse en [5], pág. 124-126.

También, pueden hacerse las siguientes observaciones:

d) El concepto de conjunto m-cerrado es similar al de conjunto linealmente compacto ([6].vol.II), dado en el caso usual en la siguiente forma:

"Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales ó de los complejos. Un subconjunto A de E se dice <u>linealmente compacto</u> si la intersección de A con toda recta es un intervalo cerrado de la forma:

$[a\ ,\ b] = \{ y \in E \ /\ y = \lambda a + (1 - \lambda) b\ ;\ 0 \leq \lambda \leq 1 \}$ ".

Para espacios vectoriales topológicos, cabe destacar:

e) Existen conjuntos convexos m-cerrados que no son c-compactos.

En efecto, si E es un espacio normado no arquimediano sobre K y la dimensión de E es infinita, $A = \bar{B}_E(0,1)$ es un subconjunto convexo m-cerrado de E que no es c-compacto.

f) Existen conjuntos convexos c-compactos que no son m-cerrados.

En efecto, si K es un cuerpo esféricamente completo con valuación densa, $A = B_K(0,1)$ es un subconjunto convexo c-compacto de K que no es m-cerrado.

El interés de este concepto reside también en cuerpos dota dos de valuación densa, ya que se verifica:

(1.11) PROPOSICION. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K dotado de valuación discreta. Entonces, todo subconjunto convexo A de E es m-cerrado.

Demostración

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer A 0-convexo y absorbente, pues en caso contrario, basta hacer una traslación ó considerar el subespacio engendrado por A en vez de E.

Por ser la valuación de K discreta, A es la bola unidad cerrada en p_A, por lo que, A es m-cerrado en E.

Como en (1.4), puede darse el siguiente teorema de caracterización de los conjuntos 0-convexos c-compactos m-cerrados en espacios normados no arquimedianos:

(1.12) TEOREMA. Sea $(E, \|\ ,\ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre un cuerpo K esféricamente completo. Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto de E, $(u_n)_{n\in N}$ una sucesión ortogonal de E, y $(D_n)_{n\in N}$ una sucesión de discos en K con $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| \operatorname{diam} D_n = 0$, tal que,

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \ / \ a_n \in D_n \qquad \forall n \in N \right\}.$$

<u>Entonces, son equivalentes:</u>

(i) A <u>es m-cerrado en</u> E .

(ii) D_n <u>es m-cerrado en</u> K , <u>para cada natural</u> n .

Demostración

(i) implica (ii): Como en (1.6).

(ii) implica (i): Basta probar que para todo x en A , el conjunto:

$$C = \left\{ \lambda \in K \ / \ \lambda x \in A \right\}$$

es m-cerrado en K .

Si para cada natural n , D_n es K ó un conjunto del tipo $\bar{B}(0,r_n)$ con $r_n \in R^+$, dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n$, se verifica:

$$\lambda x \in A \Longleftrightarrow \lambda x_n \in D_n \quad \forall n \in N \Longleftrightarrow |\lambda x_n| \leq r_n \quad \forall n \in N \ /$$

$$/ \ D_n \neq K \Longleftrightarrow |\lambda| \leq \inf \left\{ \frac{r_n}{|x_n|} \ / \ D_n \neq K \ y \ x_n \neq 0 \right\} =$$

$$= r ,$$

con lo que, $C = \bar{B}(0,r)$ es m-cerrado en K .

En general, la suma de dos conjuntos convexos m-cerrados no es m-cerrado ([5], pág. 126). Sin embargo, se tiene el siguiente resultado:

(1.13) TEOREMA. *Sea* E *un espacio localmente convexo separado sobre un cuerpo* K *esféricamente completo. Sean* A_1 *y* A_2 *dos subconjuntos convexos m-cerrados de* E , A_1 *c-compacto y* A_2 *cerrado. Entonces,* $A_1 + A_2$ *es un subconjunto convexo m-cerrado de* E .

Demostración

Sin pérdida de generalidad, puede suponerse A_1 y A_2 O-convexos. Sea z un elemento de $A_1 + A_2$ y $(\lambda_n)_{n \in N}$ una sucesión de elementos de K tal que la sucesión de sus módulos, $(|\lambda_n|)_{n \in N}$, es creciente y $\lambda_n z$ pertenece a $A_1 + A_2$ para cada natural n . Basta probar que si $(|\lambda_n|)_{n \in N}$ converge a $|\lambda|$ para un cierto λ en K , también se verifica que λz pertenece a $A_1 + A_2$, pues así, el conjunto:

$$C = \{ \lambda \in K \ / \ \lambda z \in A_1 + A_2 \}$$

es K ó una bola cerrada.

Para cada natural n , sean los conjuntos:

$$A_1^n = A_1 \cap (A_2 + \lambda_n z) \quad ; \quad D_n = \frac{A_1^n}{\lambda_n} \ .$$

Entonces, D_n es un subconjunto no vacío convexo y cerrado de $\frac{A_1}{\lambda_1}$. Además, para cada natural n , se tiene que

$D_{n+1} \subset D_n$; en efecto, si x es un elemento de D_{n+1} , $\lambda_{n+1}x$ pertenece a A_1 y existe y en A_2 , tal que $\lambda_{n+1}z =$ $= y + \lambda_{n+1}x$, por lo que:

$$\lambda_n x \in A_1 \quad y \quad \lambda_n z = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} y + \lambda_n x \text{ , con } \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} y \in A_2 \text{ ,}$$

es decir, x es un punto de D_n . Por tanto, por ser A_1 c--compacto, $\bigcap_{n \in N} D_n$ es no vacía.

Si x_0 es un elemento de $\bigcap_{n \in N} D_n$, por ser A_1 m-cerrado se tiene que λx_0 pertenece a A_1 . También, si para cada natural n , y_n es un punto de A_2 tal que $\lambda_n x_0 =$ $= y_n + \lambda_n z$; por ser A_2 m-cerrado, $\lambda (x_0 - z)$ pertenece a A_2 .

Por tanto, $\lambda z = \lambda x_0 + \lambda (z - x_0)$ es un elemento de $A_1 + A_2$.

Aunque en general la imagen mediante una aplicación lineal de un conjunto m-cerrado no es m-cerrado, como consecuencia de (1.13) se verifica:

(1.14) <u>COROLARIO</u>. <u>Sean</u> E <u>y</u> F <u>espacios localmente convexos separados sobre un cuerpo</u> K <u>esféricamente completo y</u> f <u>una aplicación lineal y continua de</u> E <u>en</u> F . <u>Entonces, si</u> A

<u>es un subconjunto convexo c-compacto y m-cerrado de</u> E , f(A) <u>es un subconjunto convexo c-compacto y m-cerrado de</u> F .

Demostración

Trivialmente, f(A) es un subconjunto convexo c-compacto de F . Además, por (1.13), A + Kerf es m-cerrado en E , con lo que f(A) es m-cerrado en F .

(1.15) <u>LEMA</u>. <u>Sea</u> E <u>un espacio localmente convexo separado sobre un cuerpo</u> K <u>esféricamente completo y</u> A <u>un subconjunto convexo cerrado de</u> E . <u>Entonces:</u>

$$A = \bigcap \left\{ f^{-1}(f(A)) \ / \ f \in E' \right\}.$$

Demostración

Si $B = \bigcap \left\{ f^{-1}(f(A)) \ / \ f \in E' \right\}$, trivialmente A está contenido en B . Además, si x_o es un elemento de $B \setminus A$, existe un hiperplano cerrado H de ecuación $f(x) = \alpha$ $(\alpha \in K)$ que separa x_o y A , es decir,

$$| f(x_o) - \alpha | \leq | f(x_o) - f(a) | \qquad \forall a \in A ,$$

y como $f(x_o)$ pertenece a f(A) , se tiene que $f(x_o) = \alpha$: absurdo, con lo que B coincide con A .

El siguiente resultado muestra la estrecha relación existente entre los conceptos de conjunto m-cerrado y m^*-cerrado:

(1.16) PROPOSICION. Sea E un espacio localmente convexo separado sobre un cuerpo K esféricamente completo. Sea A un subconjunto convexo c-compacto de E. Entonces, son equivalentes:

(i) A es m-cerrado en E.

(ii) $f(A)$ es m-cerrado en K, para toda f perteneciente a E'.

Demostración

(i) implica (ii): Consecuencia de (1.14).

(ii) implica (i): Para cada f perteneciente a E', $f(A)$ es m-cerrado en K y, por tanto, $f^{-1}(f(A))$ es m-cerrado en E, con lo que, por (1.15), A es m-cerrado en E.

Más aún, se verifica:

(1.17) PROPOSICION. Sea E un espacio localmente convexo separado sobre un cuerpo K esféricamente completo. Entonces, todo subconjunto convexo cerrado y m^*-cerrado de E, es m-cerrado.

Demostración

Si A es un subconjunto convexo m^*-cerrado de E, $f(A)$ es m^*-cerrado, y por tanto m-cerrado, en K, para cada f en E', con lo que, por (1.15), A es m-cerrado en E.

<u>NOTA</u>: El recíproco de la proposición anterior en general no es cierto.

En efecto, supuesto K esféricamente completo dotado de valuación densa y $r \in R^+ \setminus N_K$, $A = \bar{B}(0,r)$ es un subconjunto convexo cerrado y m-cerrado de K que no es m^*-cerrado.

En los párrafos anteriores se dan ciertas analogías y diferencias entre los conceptos de conjunto m-cerrado y m^*-cerrado. Finalmente, cabe destacar el hecho de que en todo espacio normado no arquimediano, las bolas cerradas son m-cerradas, no siendo en general m^*-cerradas, como se muestra en los siguientes ejemplos:

(1.18) <u>EJEMPLO</u>. <u>Sea</u> $(E, \|\ ,\ \|)$ <u>un espacio normado no arquimediano de dimensión infinita sobre un cuerpo</u> K <u>dotado de valuación densa, tal que</u> E <u>posee una base ortonormal numerable,</u> $(e_n)_{n \in N}$. Sea $r \in R^+ \setminus N_K$ y $(\lambda_n)_{n \in N}$ una sucesión de elementos de K tal que la sucesión de sus módulos,

$(|\lambda_n|)_{n\in N}$ es creciente y converge a r .

La aplicación:

$$E \xrightarrow{f} K$$

$$e_n \longrightarrow \lambda_n$$

es lineal y continua, ya que $\sup_{n\in N} |f(e_n)| = r$. También:

$$\overline{B}(0,1) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \ / \ |x_n| \leq 1 \qquad \forall n \in N \right\},$$

con lo que, $f(\overline{B}(0,1))$ está contenido en $\overline{B}(0,r)$. Además, $f(\overline{B}(0,1))$ no es m^*-cerrado en K , pues si $f(\overline{B}(0,1))$ fuese un conjunto del tipo $\overline{B}(0,|\lambda|)$ para un cierto λ en K , necesariamente $|\lambda| < r$: absurdo, ya que $\sup_{n\in N} |f(e_n)| = r$.

Por tanto, <u>la bola unidad cerrada de</u> E <u>no es un conjunto m^*-cerrado.</u>

(1.19) <u>EJEMPLO. Sea</u> K <u>un cuerpo valuado no arquimediano cualquiera. Dado</u> $s \in R^+ \setminus N_K$, <u>se construye el espacio normado no arquimediano</u> $K(s) = (K, \|\ \|)$, <u>con la norma:</u>

$$\|x\| = s\,|x| \qquad \forall x \in K .$$

<u>Entonces, para cada</u> λ <u>en</u> K , $A_\lambda = \overline{B}(0,|\lambda|)$ <u>no es m^*-cerrado en</u> $K(s)$.

En efecto, si existiese λ en K tal que A_λ fuese m^*-cerrado, por ser la aplicación identidad i de $K(s)$ en K

lineal y continua, $i(B(0,|\lambda|)) = B(0,\frac{|\lambda|}{s})$ sería m^*-cerrado en K : absurdo.

<u>NOTA</u>: Obsérvese que si E es un espacio normado no arquimediano de dimensión finita y ortonormalizable sobre un cuerpo K valuado no arquimediano, toda bola cerrada en E de la forma $\bar{B}(0,|\lambda|)$ para un cierto λ perteneciente a K, es m^*-cerrado en E.

En efecto, si $(e_i)_{i=1}^n$ es una base ortonormal de E, se tiene:

$$\bar{B}(0,|\lambda|) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \;/\; |x_i| \leq |\lambda| \quad \forall i \in \{1,\dots,n\} \right\}$$

con lo que, por (1.4), $\bar{B}(0,|\lambda|)$ es m^*-cerrado en E.

CAPITULO 2

TEOREMA DE KREIN-MILMAN PARA CONJUNTOS COMPACTOS

En este capítulo se desarrolla una teoría de puntos extremos para conjuntos compactos convexos de espacios vectoriales topológicos que sirve indistintamente para los casos de valuación del cuerpo base arquimediana ó no. En este último caso, caben destacar varios aspectos:

En primer lugar, los conjuntos extremos cerrados minimales que en el caso usual se reducen a los puntos extremos, tienen ahora siempre cardinal mayor que uno.

De los diversos tipos de puntos extremos (uno para cada clase de convexidad que se considere), el que corresponde a la convexidad de MONNA da lugar a resultados triviales, mientras que tiene un mejor comportamiento, comparable al de los casos usuales, el que corresponde a la convexidad absoluta ó O-convesidad.

Así como la existencia de bases ortogonales en Análisis no Arquimediano permite una completa descripción de los conjuntos compactos convexos, y consecuentemente de los puntos extremos, citemos finalmente como aspecto limitativo, que la existencia de conjuntos compactos convexos no reducidos a puntos, obliga a la compacidad local del cuerpo base.

El capítulo concluye con el estudio de los puntos extremos en dos tipos de conjuntos (no compactos): bolas en espacios normados sobre cuerpos con valuación discreta y conjuntos c-compactos m^*-cerrados y acotados en espacios normados.

1. CONJUNTOS SEMICONVEXOS Y PUNTOS C-EXTREMOS .

(2.1) DEFINICION. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K valuado. Se dice que un subconjunto A de E es *semiconvexo* si:

$$\lambda A + (1 - \lambda) A \subseteq A$$

para todo λ en K con $|\lambda| < 1$.

NOTAS:

a) Este concepto es relativamente próximo al de conjunto débilmente convexo dado por MONNA ([27], pág. 28) en la siguiente forma:

"Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K valuado no arquimediano. Un subconjunto A de E se dice <u>débilmente convexo</u> si para todo x,y elementos de A y para todo λ en K con $|\lambda| \leq 1$, $\lambda x + (1 - \lambda)y$ pertenece a A ".

Trivialmente, todo conjunto convexo es débilmente convexo. Además, si $\dim E = 1$, los dos conceptos son equivalentes y, si $\dim E > 1$, dichos conceptos son equivalentes si y sólo si $K \neq F_2$ ([27]).

b) Si K es R ó C , todo conjunto semiconvexo es convexo, mientras que si K es un cuerpo valuado no arquimediano, todo conjunto convexo es semiconvexo.

c) Si E y F son espacios vectoriales sobre un cuerpo K valuado, caben destacar las siguientes propiedades:

(S-1) Si f es una aplicación lineal de E en F y A es semiconvexo en E , $f(A)$ es semiconvexo en F ; si B es semiconvexo en F , $f^{-1}(B)$ es semiconvexo en E .

(S-2) Si A es un conjunto semiconvexo de E , $x + A$ y λA son también semiconvexos, para cada x, λ elementos de E y K respectivamente.

(S-3) Si A y B son subconjuntos semiconvexos de E, $A + B$ es semiconvexo.

(S-4) La intersección de una familia de conjuntos semiconvexos de E es semiconvexo.

(S-5) La unión de una familia filtrante creciente de conjuntos semiconvexos de E es semiconvexo.

(2.2) DEFINICION. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K valuado, x un elemento de E y A un subconjunto no vacío de E . Se dice que una parte no vacía S de A es conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) de A si:

i) S es semiconvexo.

ii) Para cada subconjunto finito $\{x_1,\dots,x_n\}$ de A tal que $E_c(\{x_1,\dots,x_n\})\cap S \neq \emptyset$ (resp. $E_{xc}(\{x_1,\dots,x_n\})\cap S \neq \emptyset$) , existe $i \in \{1,\dots,n\}$ para el que $x_i \in S$.

En los resultados posteriores, enunciados simultáneamente para conjuntos (puntos) c-extremos y (x,c)-extremos ($x\in E$), se harán las demostraciones en el caso c-extremo, siendo idénticas las correspondientes al caso (x,c)-extremo.

(2.3) PROPOSICION. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K valuado. Sea A un subconjunto convexo (resp. x-convexo) de E y S una parte no vacía semiconvexa de A . Entonces, son equivalentes:

(i) S es conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) de A.

(ii) $A\setminus S$ es convexo (resp. x-convexo).

Demostración

(i) implica (ii): Dados $x_1,...,x_n$ elementos de $A \setminus S$, por ser A convexo y S conjunto c-extremo de A , se tiene que $E_c(\{x_1,...,x_n\}) \subset A$ y $E_c(\{x_1,...,x_n\}) \cap S = \emptyset$, por lo que $A \setminus S$ es convexo.

(ii) implica (i): Dados $x_1,...,x_n$ elementos de A que no pertenecen a S , por ser $A \setminus S$ convexo, $E_c(\{x_1,...,x_n\})$ está contenido en $A \setminus S$, es decir, $E_c(\{x_1,...,x_n\}) \cap S = \emptyset$, por lo que S es conjunto c-extremo de A .

<u>NOTA</u>: (ii) implica (i) es válido aunque A no sea convexo (resp. x-convexo).

(2.4) <u>PROPOSICION</u>. <u>Sea</u> E <u>un espacio vectorial topológico separado sobre un cuerpo</u> K <u>valuado y</u> A <u>una parte no vacía semiconvexa y compacta de</u> E . <u>Entonces,</u>

$$\mathcal{S} = \{ S \subseteq A \ / \ S \text{ es conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) cerrado de } A \} ,$$

<u>es un conjunto ordenado inductivo respecto de la inclusión y, por tanto, existen elementos minimales en</u> $\mathcal{S}$.

Demostración

Trivialmente, $\mathcal{S}$ es no vacío, ya que A pertenece a $\mathcal{S}$. Además, si $\{S_i\}_{i \in I}$ es una cadena descendente en $\mathcal{S}$, $S = \bigcap_{i \in I} S_i$ es una cota inferior de $\{S_i\}_{i \in I}$ en $\mathcal{S}$, ya que S es no vacío por ser A compacto, siendo inmediato que S es cerrado y conjunto c-extremo de A .

(2.5) <u>DEFINICION</u>. Sea E un espacio vectorial topológico sobre un cuerpo K valuado, A un subconjunto no vacío de E y $\mathcal{S}$ la familia considerada en (2.4). Se dice que un punto a de A es <u>punto c-extremo</u> (resp. (x,c)-extremo) de A , cuando a pertenece a alguno de los elementos minimales de $\mathcal{S}$.

El conjunto de los puntos c-extremos (resp. (x,c)-extremos) de A se denota por $Ext_c(A)$ (resp. x-$Ext_c(A)$) .

Si K es R ó C , por $\mathcal{E}(A)$ se representa el conjunto de puntos extremos de un conjunto A en el sentido usual. Nótese que si E es separado y A es un subconjunto convexo de E , dado x perteneciente a $\mathcal{E}(A)$, es conocido que $A \setminus \{x\}$ es convexo, por lo que, $\{x\}$ es un conjunto c-extremo cerrado minimal de A , es decir, $\mathcal{E}(A)$ está contenido en $Ext_c(A)$. Además, se verifica la igualdad:

(2.6) <u>TEOREMA</u>. <u>Sea</u> E <u>un espacio vectorial topológico separado sobre</u> K (R <u>ó</u> C) , <u>con</u> E' <u>total. Sea</u> A <u>un subcon-</u>

junto no vacío convexo y compacto de E . Entonces,

$$\mathcal{E}(A) = Ext_c(A) .$$

Demostración

No existe ningún conjunto c-extremo cerrado minimal de A con más de un punto.

En efecto, si existiese un tal conjunto c-extremo S , como S es semiconvexo y cerrado, S es convexo y compacto, por lo que $\mathcal{E}(S)$ es no vacío. Además, $A \setminus S$ es convexo, con lo que, $\mathcal{E}(S) \cap \mathcal{E}(A) \neq \emptyset$ ([6], vol.II, pág. 143), lo que implica $S \cap \mathcal{E}(A) \neq \emptyset$: absurdo, por ser S minimal y $\mathcal{E}(A)$ subconjunto de $Ext_c(A)$.

Por tanto, los únicos conjuntos c-extremos cerrados minimales son los reducidos a un único punto, es decir, $\mathcal{E}(A) = Ext_c(A)$.

En lo que sigue, me limitaré al estudio de los puntos y conjuntos extremos en cuerpos base dotados de valuación no arquimediana.

(2.7) PROPOSICION. Sea E un espacio vectorial topológico separado sobre K y A una parte no vacía compacta de E . Entonces, todo conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) cerrado

S de A contiene al menos un punto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) de A .

Demostración

Por ser A compacto, S es compacto y, razonando como en (2.4),

$$\mathcal{S}_S = \{ M \subseteq S \ / \ M \text{ es c-extremo de } A \} ,$$

es un conjunto no vacío ordenado inductivo que posee elementos minimales, con lo que, S contiene al menos un conjunto c-extremo cerrado minimal de A y, por tanto, un punto c-extremo de A .

(2.8) PROPOSICION. Sea E un espacio vectorial topológico separado sobre K y A un subconjunto no vacío convexo y compacto de E . Entonces, para cada elemento a de A y para cada f en E′ ,

$$S_{af} = \left\{ s \in A \ / \ | f(s) - f(a) | = \sup_{x \in A} | f(x) - f(a) | \right\}$$

es un conjunto c-extremo y (a,c)-extremo cerrado de A y, por tanto, existe un punto x_{af} c-extremo (resp. (a,c)-extremo) de A , tal que:

$$| f(x_{af}) - f(a) | = \sup_{x \in A} | f(x) - f(a) | .$$

Demostración

Si $c = \sup_{x \in A} |f(x) - f(a)|$, el conjunto:

$$S_{af} = \{ s \in A \ / \ |f(s) - f(a)| = c \}$$

es no vacío, puesto que A es compacto. Además, puede suponerse que a no pertenece a S_{af}, ya que, en caso contrario, $S_{af} = A$, y el resultado es obvio.

Trivialmente, S_{af} es cerrado. También, S_{af} es semiconvexo, pues, dados x,y elementos de S_{af} y λ perteneciente a K con $|\lambda| < 1$, se tiene que $|1 - \lambda| = 1$ y, por tanto, $|\lambda| \, |f(x) - f(a)| < |(1 - \lambda)| \, |f(y) - f(a)|$, con lo que:

$$\begin{aligned}
&|f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f(a)| = \\
&= |\lambda(f(x) - f(a)) + (1 - \lambda)(f(y) - f(a))| = \\
&= \max(|\lambda| \, |f(x) - f(a)|, |1 - \lambda| \, |f(y) - f(a)|) = \\
&= |1 - \lambda| \, |f(y) - f(a)| = c ,
\end{aligned}$$

con lo que, $\lambda x + (1 - \lambda)y$ pertenece a S_{af}.

Finalmente, $A \setminus S_{af}$ es convexo. En efecto, si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un subconjunto finito de $A \setminus S_{af}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son elementos de K con $|\lambda_i| \leq 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, se tiene:

$$\left| f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) - f(a) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f(x_i) - f(a)) \right| \leq$$

$$\leq \max_{i=1}^{n} (|\lambda_i (f(x_i) - f(a))|) < c ,$$

con lo que, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ pertenece a $A \setminus S_{af}$.

Por tanto, S_{af} es un conjunto c-extremo y (a,c)-extremo cerrado de A que, por (2.7), contiene un punto c-extremo (resp. (a,c)-extremo) x_{af} de A , verificando:

$$| f(x_{af}) - f(a) | = \sup_{x \in A} | f(x) - f(a) | .$$

2. ESTRUCTURA DE LOS CONJUNTOS C-EXTREMOS MINIMALES. TEOREMA DE KREIN-MILMAN .

En este apartado se estudian diversas propiedades de los conjuntos c-extremos, desembocando en el teorema (2.12), donde se asegura que, a diferencia de los casos usuales, los conjuntos c-extremos nunca son puntos.

(2.9) LEMA. Sea E un espacio vectorial topológico sobre K . Sea A un subconjunto no vacío convexo de E y B un subconjunto convexo de A . Entonces, si el interior de B respecto de A , B_A^i , es no vacío, B es abierto y cerrado en A .

Demostración

Sin pérdida de generalidad, puede suponerse A y B 0--convexos. Si B_A^i es no vacío, existe un elemento x_o de B tal que B es entorno de x_o en A . Además, B es entorno en A de cada uno de sus puntos, ya que, si x pertenece a B se tiene, $B = B - x_o + x$. También, si y pertenece a $A \setminus B$, $B \cap (y + B) = \emptyset$, por lo que, $A \setminus B$ es abierto en A y, por tanto, B es cerrado en A .

Cabe destacar el siguiente resultado acerca de la estructura de los conjuntos c-extremos:

(2.10) TEOREMA. *Sea* E *un espacio vectorial topológico sobre* K *y* A *un subconjunto no vacío convexo* (resp. x-convexo) *de* E . *Entonces:*

(i) *Para todo conjunto c-extremo* (resp. (x,c)-extremo) *minimal* S *de* A , *ó bien el interior de* S *es vacío, ó* S *es abierto en* E .

(ii) *Todo conjunto c-extremo* (resp. (x,c)-extremo) *cerrado de* A , *es abierto en* A .

(iii) *Si el interior de* A *es no vacío, todo conjunto c-extremo* (resp. (x,c)-extremo) *cerrado de* A , *es abierto en* E .

Demostración

(i): Si el interior de A es vacío, también es vacío el interior de S . Si el interior de A es no vacío, A es abierto y cerrado en E , por lo que, $S^i = S^i_A$. Como S^i es se miconvexo y $A\setminus S^i$ es convexo, ya que,

$$A\setminus S^i = A\setminus S^i_A = \overline{(A\setminus S)}_A ,$$

se tiene que S^i es un conjunto c-extremo de A y, por ser S minimal, si S no es abierto en E, necesariamente S^i es vacío.

(ii): Si S es un conjunto c-extremo cerrado de A, $A\setminus S$ es un conjunto convexo abierto en A y, por (2.9), $A\setminus S$ es cerrado en A, es decir, S es abierto en A.

(iii): Consecuencia de (ii).

(2.11) COROLARIO. Sea E un espacio vectorial topológico sobre K y A un subconjunto convexo (resp. x-convexo) de E. Entonces, son equivalentes:

(i) El interior de A es no vacío.

(ii) Existe un conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) cerrado de A cuyo interior es no vacío.

(iii) Todo conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) cerrado de A tiene interior no vacío.

(i´) El interior de A es vacío.

(ii´) Existe un conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) cerrado de A cuyo interior es vacío.

(iii´) Todo conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) cerrado de A tiene interior vacío.

Por tanto, existe una correspondencia "biyectiva" entre los conjuntos convexos (resp. x-convexos) de interior no vacío y los conjuntos c-extremos (resp. (x,c)-extremos) de interior no vacío; análogamente para el caso de interior vacío.

(2.12) TEOREMA. Sea E un espacio vectorial topológico separado sobre K y A un subconjunto no vacío convexo (resp. x-convexo) de E. Si A posee más de un elemento, no existe ningún conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) de A reducido a un único punto.

Demostración

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer A 0-convexo (ver (2.18)) y absorbente (en caso contrario se razona con el subespacio engendrado por A en vez de con E).

Si el interior de A es no vacío, el resultado es consecuencia inmediata de (2.10)(iii).

Si A es acotado y $\mathcal{T}_E$, $\mathcal{T}_{p_A}$ son la topología inicial en E y la definida por p_A en E respectivamente, se tiene que $\mathcal{T}_E \leq \mathcal{T}_{p_A}$. Además, A tiene interior no vacío respecto de $\mathcal{T}_{p_A}$, con lo que, no existe ningún conjunto c-extremo de A reducido a un único punto.

Finalmente, si A no es acotado y $S = \{x\}$ es un conjunto c-extremo de A, existe y en A distinto de cero tal que x pertenece a $A_y = E_{0c}(y)$. Entonces, S es conjunto c-extremo de A_y, el cual es un subconjunto 0-convexo acotado de E con más de un elemento: absurdo.

A continuación probaré que, si A no se reduce a un único punto, todos los conjuntos c-extremos cerrados minimales de A son propios. Más adelante (párrafo 4), se estudiará cuando el conjunto de puntos c-extremos de A es un subconjunto propio de A.

(2.13) PROPOSICION. Sea E un espacio localmente convexo separado sobre un cuerpo K esféricamente completo. Sea A un subconjunto no vacío convexo (resp. x-convexo) y compacto de E no reducido a un único punto. Entonces, todo conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) cerrado minimal de A es distinto de A.

Demostración

Dado x perteneciente a A, como A no se reduce a un único punto, existen z,f elementos de A y $E'\setminus\{0\}$ respectivamente, tal que z es distinto de x y $f(z)$ es distinto de $f(x)$, con lo que, según (2.8),

$$S_{xf} = \left\{ s \in A \ / \ |f(s) - f(x)| = \sup_{y\in A} |f(y) - f(x)| \right\}$$

es un conjunto c-extremo y (x,c)-extremo cerrado propio de A , ya que x no pertenece a S_{xf} .

(2.14) TEOREMA (de KREIN-MILMAN). Sea E un espacio localmente convexo separado sobre un cuerpo K esféricamente completo. Sea A un subconjunto no vacío convexo (resp. x-convexo) y compacto de E . Entonces:

$$A = \overline{E}_c(\mathrm{Ext}_c(A))$$

(resp. $A = \overline{E}_{xc}(x\text{-}\mathrm{Ext}_c(A))$.

Demostración

Evidentemente. $\overline{E}_c(\mathrm{Ext}_c(A))$ está contenido en A . También, si x_o es punto de E que no pertenece a $\overline{E}_c(\mathrm{Ext}_c(A))$, existe un hiperplano cerrado H de ecuación $f(x) = \alpha$ $(\alpha \in K)$ que separa x_o y $\overline{E}_c(\mathrm{Ext}_c(A))$, es decir, x_o y $\overline{E}_c(\mathrm{Ext}_c(A))$ están situados en lados distintos (y por tanto disjuntos) de H .

Por (2.8), dado u perteneciente a $\overline{E}_c(\mathrm{Ext}_c(A))$, existe x_{uf} punto c-extremo de A tal que:

$$| f(x_{uf}) - f(u) | = \sup_{a \in A} | f(a) - f(u) | ,$$

y, por estar $\overline{E}_c(\mathrm{Ext}_c(A))$ de un lado de H:

$$| f(y) - f(x) | < | \alpha - f(x) | \qquad \forall x,y \in \overline{E}_c(\mathrm{Ext}_c(A)) ,$$

con lo que:

$$|f(a) - f(u)| \leq |f(x_{uf}) - f(u)| < |\alpha - f(u)| \qquad \forall a \in A .$$

Por tanto, A está de un mismo lado de H que $\overline{E_c}(Ext_c(A))$, por lo que x_o no pertenece a A .

3. TEOREMAS DE MILMAN .

El resultado central de este apartado es el teorema (2.16) análogo al teorema de MILMAN usual.

(2.15) TEOREMA. Sea E un espacio vectorial sobre K , A un subconjunto convexo (resp. x-convexo) de E y M una parte no vacía de A tal que $A = E_c(M)$ (resp. $A = E_{xc}(M)$) . Entonces, todo conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) S de A , tiene intersección con M no vacía.

Demostración

Si, por reducción al absurdo, existe S conjunto c-extremo de A cuya intersección con M es vacía, M está contenido en $A \setminus S$, por lo que,

$$A = E_c(M) \subset E_c(A \setminus S) = A \setminus S ,$$

con lo que, A coincide con $A \setminus S$, es decir, S es vacío: ab surdo.

(2.16) TEOREMA. Sea E un espacio vectorial topológico sobre K, A un subconjunto convexo (resp. x-convexo) de E y M una parte no vacía de A tal que $A = \overline{E_c}(M)$ (resp. $A = \overline{E_{xc}}(M)$). Entonces, todo conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) cerrado S de A, tiene intersección con M no vacía.

Demostración

Si, por reducción al absurdo, existe S conjunto c-extremo cerrado de A cuya intersección con M es vacía, M está contenido en $A \setminus S$, por lo que,

$$A = \overline{E_c}(M) \subset \overline{E_c}(A \setminus S) .$$

Además, $A \setminus S$ es un conjunto convexo abierto en A, con lo que, según (2.9), $A \setminus S$ es cerrado en A y, por tanto, en E. Entonces, A coincide con $A \setminus S$, es decir, S es vacío: absurdo.

(2.17) TEOREMA. Sea E un espacio localmente convexo separado sobre un cuerpo K esféricamente completo, A un subconjunto convexo (resp. x-convexo) compacto de E y M una parte no vacía de A. Entonces, son equivalentes:

(i) A es la envolvente convexa (resp. x-convexa) cerrada de M .

(ii) Todo conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) cerrado S de A , tiene intersección con M no vacía.

(iii) Todo conjunto c-extremo (resp. (x,c)-extremo) cerrado minimal S de A , tiene intersección con M no vacía.

(iv) Para cada elemento a de A y para cada f en E', existe x_{af} en M tal que:

$$| f(x_{af}) - f(a) | = \sup_{y \in A} | f(y) - f(a) |$$

(resp. Para cada f en E' , existe x_f en M tal que:

$$| f(x_f) - f(x) | = \sup_{y \in A} | f(y) - f(x) |) \ .$$

Demostración

La equivalencia de (ii) y (iii) es inmediata, ya que, por (2.7), todo conjunto c-extremo cerrado S de A contiene un conjunto c-extremo cerrado minimal.

(i) implica (ii): Teorema (2.16).

(ii) implica (iv): Consecuencia de la proposición (2.8).

(iv) implica (i): Mismo razonamiento que en el teorema de KREIN-MILMAN.

4. CALCULO DE PUNTOS C-EXTREMOS .

La teoría desarrollada en los párrafos anteriores tiene como limitación la que nos da el siguiente resultado ya conocido de Análisis no Arquimediano ([27] , pág. 40):

"Sea E un espacio localmente convexo sobre un cuerpo K valuado no arquimediano. Si existe en E un conjunto convexo compacto conteniendo al menos dos puntos, entonces, K es un cuerpo local".

El ser K un cuerpo local es realmente limitador. Los cuerpos locales son los cuerpos valuados completos cuyas valuaciones son discretas y los cuerpos de restos finitos. Estos cuerpos están clasificados ([27] , pág. 4), y son los siguientes:

1º: El completado de una extensión trascendente simple de un cuerpo finito.

2º: Las extensiones algebraicas finitas de un cuerpo Q_p , donde Q_p es el cuerpo de los números p-ádicos.

Por tanto, en este apartado, salvo mención expresa en contra, supondré que K es un cuerpo local.

Se procede a continuación al cálculo de los puntos c-extre mos (resp. (x,c)-extremos) de conjuntos convexos (resp. x-convexos) compactos en Análisis no Arquimediano, viéndose el comportamiento singular del concepto de punto c-extremo, ligado al hecho de que en un conjunto convexo, a diferencia de lo que sucede en los conjuntos x-convexos, el "centro" no está fijado.

Se calcularán sólamente los puntos (0,c)-extremos de los conjuntos 0-convexos, ya que se verifica:

(2.18) PROPOSICION. Sea E un espacio vectorial topológico sobre K y A un subconjunto no vacío convexo de E. Entonces:

(i) S es conjunto c-extremo cerrado minimal de A si y sólo si $S - x$ es conjunto c-extremo cerrado minimal de $A - x$ $(x \in E)$.

(ii) Si A no se reduce a un único punto y S es un subconjunto propio de A, S es conjunto c-extremo cerrado minimal de A si y sólo si existe x perteneciente a A tal que S es conjunto (x,c)-extremo cerrado minimal de A.

Demostración

(i): Obvio, por las propiedades de la convexidad y semiconvexidad respecto de las traslaciones.

(ii): Si S es un conjunto c-extremo cerrado minimal de A y x es un elemento de $A \setminus S$, S es un conjunto (x,c)-extremo cerrado minimal de A .

Recíprocamente, si existe x perteneciente a A tal que S es un conjunto (x,c)-extremo cerrado minimal de A , S es un conjunto c-extremo cerrado de A ; además, S es minimal pues, si existiese T conjunto c-extremo cerrado de A y subconjunto propio de S , se tiene que x pertenece a $A \setminus T$, con lo que, T es un conjunto (x,c)-extremo cerrado de A : absurdo.

Análogamente:

(2.19) PROPOSICION. Sea E un espacio vectorial topológico sobre K y A un subconjunto no vacío x-convexo de E . Entonces:

(i) S es conjunto (x,c)-extremo de A si y sólo si $S - x$ es conjunto $(0,c)$-extremo de $A - x$.

(ii) S es conjunto (x,c)-extremo cerrado minimal de A si y sólo si $S - x$ es conjunto $(0,c)$-extremo cerrado minimal de $A - x$.

También, se considerarán sólo conjuntos 0-convexos no reducidos al cero.

De acuerdo con el resultado de CARPENTIER ([5]) sobre la estructura de los conjuntos 0-convexos compactos en espacios vectoriales topológicos citado anteriormente (cap. 1, pág. 33), se tiene:

(2.20) PROPOSICION. Sea E un espacio vectorial topológico separado sobre K y A un subconjunto no vacío 0-convexo compacto de E. Entonces, existe una familia topológicamente libre de elementos de E, $(e_i)_{i \in I}$, tal que:

$$A = \left\{ \sum_{i \in I} x_i e_i \ / \ |x_i| \leq 1 \quad \forall i \in I \right\},$$

siendo única la expresión de cada elemento x de A como $\sum_{i \in I} x_i e_i$.

(2.21) TEOREMA. Sea E un espacio vectorial topológico separado sobre K, A un subconjunto no vacío 0-convexo compacto de E, y $(e_i)_{i \in I}$ una familia topológicamente libre de elementos de E en las condiciones de (2.20). Entonces:

$$0\text{-}\mathrm{Ext}_c(A) = \left\{ \sum_{i \in I} x_i e_i \in A \ / \ \sup_{i \in I} |x_i| = 1 \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{i \in I} x_i e_i \in A \ / \ \exists i \in I \text{ con } |x_i| = 1 \right\}.$$

Demostración

Para cada índice i ,

$$D_i = \left\{ \sum_{i \in I} x_i e_i \in A \ / \ |x_i| = 1 \right\}$$

es un conjunto (0,c)-extremo cerrado minimal de A .

En efecto, trivialmente D_i es un conjunto (0,c)-extremo cerrado de A . Además, D_i es minimal, pues, si existiese T conjunto (0,c)-extremo de A y subconjunto propio de D_i , dado $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ en $D_i \setminus T$, el punto:

$$y = \sum_{i \in I} y_i e_i \quad ; \quad y_j = x_j \quad \forall j \neq i \quad , \quad y_i = 0 \ ,$$

es un elemento de $A \setminus D_i$ y, por tanto, de $A \setminus T$ y, por ser $A \setminus T$ 0-convexo,

$$x - y = x_i e_i \in A \setminus T \ ,$$

con lo que, e_i pertenece a $A \setminus T$. Si $t = \sum_{i \in I} t_i e_i$ es un elemento de T ,

$$z = \sum_{i \in I} z_i e_i \quad ; \quad z_j = t_j \quad \forall j \neq i \quad , \quad z_i = 0 \ ,$$

es un punto de $A \setminus T$; además, se tiene:

$$t = t_i e_i + z \ ,$$

con lo que, $A \setminus T$ no es 0-convexo: absurdo.

Por tanto, todo elemento $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ de A para el que existe un índice i con $|x_i| = 1$, es punto (0,c)-extremo de A.

Recíprocamente, si $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ es un elemento de A tal que $\sup_{i \in I} |x_i| < 1$, x no es punto (0,c)-extremo de A.

En efecto, trivialmente existe μ en K con $|\mu| > 1$ tal que μx pertenece a A. Si, por reducción al absurdo, existe un conjunto (0,c)-extremo cerrado minimal S de A conteniendo a x, por ser $A \setminus S$ 0-convexo, también μx pertenece a S. Entonces, $\lambda = \frac{-1}{\mu - 1}$ es un elemento de K con $|\lambda| < 1$ y, por ser S semiconvexo, $0 = \lambda \mu x + (1 - \lambda) x$ es un punto de S: absurdo, por ser S conjunto (0,c)-extremo propio de A.

NOTA: En las hipótesis de (2.21), para cada elemento $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ de A, se tiene:

$$p_A(x) = \sup_{i \in I} |x_i| .$$

En efecto, si x es cero el resultado es trivial y, si x es distinto de cero, se verifica:

$$x \in \lambda A \Longleftrightarrow \frac{x}{\lambda} \in A \Longleftrightarrow \left| \frac{x_i}{\lambda} \right| \leq 1 \qquad \forall i \in I \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow |\lambda| \geq \sup_{i \in I} |x_i|$$

y, por tanto:

$$p_A(x) = \inf \left\{ |\lambda| \ / \ x \in \lambda A \right\} = \sup_{i \in I} |x_i| .$$

Como consecuencia de (2.21) y de la nota anterior, puede darse el siguiente teorema de caracterización de los puntos (0,c)-extremos en conjuntos 0-convexos compactos:

(2.22) TEOREMA. En las hipótesis de (2.21), para cada elemento $a = \sum_{i \in I} a_i e_i$ de A, son equivalentes:

(i) $a \in 0\text{-}\mathrm{Ext}_c(A)$.

(ii) $\sup_{i \in I} |a_i| = 1$.

(iii) Existe $i \in I$ tal que $|a_i| = 1$.

(iv) $p_A(a) = 1$.

Aunque su consideración no modifica los puntos (0,c)-extremos de A, conviene resaltar el hecho de que, aparte de los conjuntos (0,c)-extremos cerrados minimales D_i obtenidos en la demostración del teorema (2.21), pueden existir conjuntos (0,c)-extremos cerrados minimales S de A cuya intersección con D_i y D_j es no vacía, para ciertos índices distintos i,j de I. Una muestra de esta situación nos la da el siguiente ejemplo:

(2.23) EJEMPLO. Sea $E = K^2$, A la bola unidad cerrada en E y (e_1, e_2) una familia topológicamente libre de elementos de E, tal que:

$$A = \{ x_1 e_1 + x_2 e_2 \ / \ |x_1|, |x_2| \leq 1 \}.$$

Entonces:

$$S = D_1 \cup D_2 \setminus \{ (x_1,x_2) \in A \ / \ |x_1 - x_2| < 1 \} =$$

$$= \{ (x_1,x_2) \in D_1 \cup D_2 \ / \ |x_1 - x_2| = 1 \}$$

es un conjunto (0,c)-extremo cerrado minimal de A cuya intersección con D_1 y D_2 es no vacía.

En efecto, trivialmente S es semiconvexo, tiene intersección no vacía con D_1 y D_2, y es cerrado, por serlo D_1 y D_2. También, $A \setminus S$ es 0-convexo, ya que:

$$A \setminus S = \{ (x_1,x_2) \in A \ / \ |x_1 - x_2| < 1 \}.$$

Además, S es minimal, pues, si existiese T conjunto (0,c)-extremo de A y subconjunto propio de S, dado $x = (x_1,x_2)$ perteneciente a $S \setminus T$, como $y = (1,1)$ está en $A \setminus T$, y:

$$e_1 = \lambda_{11} x + \lambda_{12} y \quad ; \quad |\lambda_{11}| \leq 1 \ , \ |\lambda_{12}| \leq 1$$

$$e_2 = \lambda_{21} x + \lambda_{22} y \qquad |\lambda_{21}| \leq 1 \quad |\lambda_{22}| \leq 1 \ ,$$

se tiene que:

$$A = E_{oc}(e_1,e_2) \subset A \setminus T \ ,$$

es decir, T es vacío: absurdo.

A continuación se calculan los puntos c-extremos y (x,c)--extremos de los conjuntos convexos (resp. x-convexos), que tam bién se suponen no reducidos a un único punto.

Calculados los puntos (0,c)-extremos de los conjuntos 0--convexos, si A es un conjunto x-convexo y A_o el conjunto 0-convexo del cual A es trasladado, se tiene:

(2.24) PROPOSICION. Sea E un espacio vectorial topológico separado sobre K, A un subconjunto no vacío x-convexo compacto de E, y $(e_i)_{i \in I}$ una familia topológicamente libre de elementos de E en las condiciones de (2.20), tal que:

$$A_o = \left\{ \sum_{i \in I} a_i e_i \;/\; |a_i| \leq 1 \quad \forall i \in I \right\}.$$

Entonces:

$$x\text{-Ext}_c(A) = \left\{ a \in A \;/\; \exists i \in I \text{ con } |(a - x)_i| = 1 \right\}.$$

Demostración

Consecuencia de (2.19) y (2.21).

Sin embargo, para los puntos c-extremos sólo se tienen resultados triviales:

(2.25) PROPOSICION. Sea E un espacio vectorial topológico separado sobre K y A un subconjunto no vacío convexo com pacto de E . Entonces, $\mathrm{Ext}_c(A) = A$.

Demostración

Puesto que A_o es un subconjunto 0-convexo compacto de E , existe una familia topológicamente libre de elementos de E , $(e_i)_{i \in I}$, tal que:

$$A_o = \left\{ \sum_{i \in I} z_i e_i \ / \ |z_i| \leq 1 \quad \forall i \in I \right\}.$$

Como en (2.21), para cada índice i ,

$$D_i = \left\{ \sum_{i \in I} z_i e_i \in A_o \ / \ |z_i| = 1 \right\}$$

es un conjunto (0,c)-extremo cerrado minimal de A_o , con lo que, por (2.18), para cada punto x de A ,

$$D_i + x = \left\{ a \in A \ / \ |(a - x)_i| = 1 \right\}$$

es un conjunto c-extremo cerrado minimal de A .

Fijados i, y elementos de I y A respectivamente y, dado x en A , si $|(y - x)_i| < 1$, se tiene:

$$D_i + x = \left\{ a \in A \ / \ |(a - y)_i| = 1 \right\},$$

mientras que si $|(y - x)_i| = 1$, se tiene:

$$D_i + x \supset \left\{ a \in A \ / \ |(a - y)_i| < 1 \right\}.$$

Por tanto, para todo a perteneciente a A , existe x en A tal que a es un elemento de $D_i + x$, con lo que, a

es punto c-extremo de A , es decir, $Ext_c(A) = A$.

El siguiente teorema es análogo (más fuerte) al teorema de MINKOWSKI del caso usual:

(2.26) <u>TEOREMA. Sea</u> E <u>un espacio vectorial topológico separado sobre</u> K <u>y</u> A <u>un subconjunto no vacío x-convexo compacto de</u> E . <u>Entonces,</u> A <u>es la envolvente x-convexa cerrada de una familia</u> $\{u_i\}_{i\in I}$ <u>de puntos (x,c)-extremos de</u> A , <u>con</u> $|I| \leq \dim[A_o]$.

Demostración

Sea $(e_i)_{i\in I}$ una familia topológicamente libre de elementos de E , tal que:

$$A_o = \left\{ \sum_{i\in I} a_i e_i \ / \ |a_i| \leq 1 \qquad \forall i \in I \right\} =$$

$$= \overline{E}_{oc}(e_i)_{i\in I} .$$

Entonces:

$$A = x + \overline{E}_{oc}(e_i)_{i\in I} = \overline{E}_{xc}(e_i + x)_{i\in I}$$

y, por (2.25), para cada índice i en I , $e_i + x$ es un punto (x,c)-extremo de A . Además, por ser $(e_i)_{i\in I}$ una familia topológicamente libre en E , es algebraicamente libre, con lo que, $|I| \leq \dim[A_o]$.

En particular, si la dimensión de E es finita e igual a n, todo punto de un subconjunto x-convexo compacto A de E, es combinación x-convexa de a lo más m puntos de $x\text{-}Ext_c(A)$, con $m \leq \dim[A_o] \leq n$.

En espacios normados no arquimedianos, se verifica:

(2.27) PROPOSICION. Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre K y A un subconjunto no vacío O-convexo compacto de E. Entonces, si a es un elemento de A, y se consideran las propiedades siguientes:

(i) $\|a\| = \sup_{x \in A} \|x\|$,

(ii) $p_A(a) = 1$,

(iii) $a \in O\text{-}Ext_c(A)$,

se verifica:

$$(i) \Longrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii).$$

Demostración

La segunda equivalencia es consecuencia de (2.22).

(i) implica (ii): Sea a un elemento de A tal que

$\| a \| = \sup_{x \in A} \| x \|$. Si, por reducción al absurdo, $p_A(a) < 1$, existe μ en K distinto de cero, verificando $p_A(a) \leq |\mu| < 1$. Trivialmente, $y = \frac{a}{\mu}$ pertenece a A , ya que $p_A(y) \leq 1$. Además, $a = \mu y$, con lo que, $\| a \| < \| y \|$: absurdo.

El recíproco de (2.27) en general no es cierto, es decir, puede existir un punto (0,c)-extremo a de un conjunto 0-convexo compacto A , tal que $\| a \| < \sup_{x \in A} \| x \|$, como se muestra en el siguiente ejemplo:

(2.28) EJEMPLO. Si $E = K^2$ y (e_1, e_2) es una base ortogonal de E , con $\| e_1 \| < \| e_2 \|$, entonces,

$$A = \{ x_1 e_1 + x_2 e_2 \ / \ |x_1|, |x_2| \leq 1 \}$$

es un subconjunto 0-convexo compacto de E .

Como en (2.21),

$$0\text{-Ext}_c(A) = \{ x_1 e_1 + x_2 e_2 \in A \ / \ \exists\, i = 1,2 \text{ con } |x_i| = 1 \}$$

con lo que, e_1 es un punto (0,c)-extremo de A tal que $\| e_1 \| < \sup_{x \in A} \| x \| = \| e_2 \|$.

5. PUNTOS C-EXTREMOS PARA ALGUNOS CONJUNTOS NO COMPACTOS .

En este apartado se calculan primeramente los puntos

(0,c)-extremos de las bolas de centro cero en espacios normados no arquimedianos. Puesto que estos conjuntos ya no son compactos, no es necesario la restricción a cuerpos locales. Sin embargo, supondré que la valuación del cuerpo es discreta, por necesidades del teorema central (2.30).

Como en los casos usuales, es fácil comprobar que se verifica:

(2.29) LEMA. Sea E un espacio vectorial topológico separado sobre un cuerpo K valuado no arquimediano. Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo abierto y acotado de E. Entonces, la topología definida en E por el funcional de MINKOWSKI de A, coincide con la topología inicial en E.

(2.30) TEOREMA. Sea E un espacio vectorial topológico separado sobre un cuerpo K dotado de valuación discreta. Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo abierto y acotado de E. Entonces, existe una familia linealmente independiente de elementos de E, $(e_i)_{i\in I}$, tal que:

$$A = \left\{ \sum_{i\in I} x_i e_i \ / \ |x_i| \leq 1 \quad \forall i \in I \right\}.$$

Además:

$$0\text{-Ext}_c(A) = \left\{ \sum_{i\in I} x_i e_i \in A \ / \ \sup_{i\in I} |x_i| = 1 \right\} =$$

$$= \left\{ x \in A \ / \ p_A(x) = 1 \right\} .$$

Demostración

Por (2.29), la topología inicial en E coincide con la asociada a p_A, con lo que, (E, p_A) es un espacio normado no arquimediano sobre K tal que $N_E \subset N_K$ y, por tanto, posee una base ortonormal, $(e_i)_{i \in I}$, ([27], pág. 43). Como la valuación de K es discreta, se tiene:

$$A = \bar{B}_{p_A}(0,1) = \left\{ \sum_{i \in I} x_i e_i \ / \ |x_i| \leq 1 \quad \forall i \in I \right\} ,$$

entendiéndose las sumas de las familias en el sentido de las topologías $\mathcal{T}_E$ ó $\mathcal{T}_{p_A}$ indistintamente.

Como en (2.22), se demuestra que:

$$\text{O-Ext}_c(A) = \left\{ \sum_{i \in I} x_i e_i \in A \ / \ \sup_{i \in I} |x_i| = 1 \right\} =$$

$$= \left\{ x \in A \ / \ p_A(x) = 1 \right\} .$$

(2.31) <u>COROLARIO</u>. <u>Sea</u> $(E, \|\ \|)$ <u>un espacio normado no arquimediano sobre un cuerpo</u> K <u>dotado de valuación discreta.</u> <u>Sea</u> A <u>un subconjunto no vacío O-convexo abierto y acotado de</u> E. <u>Entonces, si</u> a <u>es un elemento de</u> A, <u>y se consideran las propiedades siguientes:</u>

(i) $\| a \| = \sup_{x \in A} \| x \|$,

(ii) $p_A(a) = 1$,

(iii) $a \in 0\text{-}Ext_c(A)$,

<u>se verifica:</u>

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) .

Demostración

La primera implicación se demuestra como en (2.27), y la segunda equivalencia es consecuencia de (2.30).

(2.32) <u>COROLARIO</u>. <u>Sea</u> $(E, \| \ , \ \|)$ <u>un espacio normado no arquimediano sobre un cuerpo</u> K <u>dotado de valuación discreta y</u> A <u>una bola de centro cero en</u> E . <u>Entonces:</u>

a) <u>Si</u> a <u>es un elemento de</u> A , <u>y se consideran las propiedades siguientes:</u>

(i) $\| a \| = \sup_{x \in A} \| x \|$,

(ii) $p_A(a) = 1$,

(iii) $a \in 0\text{-}Ext_c(A)$,

<u>se verifica:</u>

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) .

b) <u>Si además</u> $N_E \subset N_K$, <u>se tiene en a) la equivalencia de</u>

las tres propiedades.

Demostración

a): Consecuencia de (2.31).

b): Basta probar que (ii) implica (i). Por ser la valuación de K discreta y $N_E \subset N_K$, A es de la forma $\bar{B}(0,|\lambda|)$, para un cierto λ perteneciente a K.

Sea a un elemento de A tal que $p_A(a) = 1$. Si, por reducción al absurdo, $\| a \| < \sup_{x \in A} \| x \|$ y, si $\| a \| = |\mu|$ para un cierto μ en K, $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$ es un elemento de K de módulo menor que uno. Trivialmente, $y = \frac{a}{\alpha}$ pertenece a A, ya que $\| y \| = |\lambda|$; además, $a = \alpha y$, con lo que, $p_A(a) = |\alpha| \, p_A(y) < 1$: absurdo.

En particular, si se considera el espacio:

$$C_o = \left\{ (x_n) \subset K \ / \ \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \right\}$$

con la norma: $\| x \| = \sup_{n \in N} |x_n|$, la bola unidad de C_o posee puntos (0,c)-extremos, a diferencia del caso usual, donde la bola unidad de C_o carecía de puntos extremos.

Si la valuación de K es discreta y $N_E \not\subset N_K$, la equivalencia de b) en general no es cierta. En efecto:

(2.33) EJEMPLO. Sea $S = (s_n)_{n\in N}$ una sucesión de números reales contenida en el intervalo $(\rho^{-1},1)$. Entonces:

$$C_o(N,S) = \left\{ (x_n) \subset K \ / \ \lim_{n\to\infty} |x_n| s_n = 0 \right\}$$

es un espacio normado no arquimediano sobre K, con la norma: $\|(x_n)\| = \sup_{n\in N} |x_n| s_n$.

Si A es la bola abierta de centro cero y radio uno en $C_o(N,S)$ y a un elemento de A, se tiene:

$$p_A(a) = 1 \Longleftrightarrow \max \left\{ |\lambda| \ / \ \lambda a \in A \right\} = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \rho^{-1} < \| a \| < 1 ,$$

con lo que, todo elemento a de A tal que $\rho^{-1} < \| a \| < 1$, verifica $p_A(a) = 1$, existiendo entre ellos puntos con $\| a \| < \sup_{x\in A} \| x \|$.

Considerando que, por el teorema (1.8), los conjuntos convexos compactos en espacios normados sobre cuerpos locales coinciden con los conjuntos convexos c-compactos y acotados y que, según (1.5), los métodos utilizados en el párrafo anterior son característicos de los conjuntos c-compactos m^*-cerrados y acotados, es sugerente extender el concepto de punto (x,c)-extremo al caso de conjuntos c-compactos m^*-cerrados y acotados en cuerpos valuados no arquimedianos cualesquiera.

En virtud del teorema (1.5), para espacios normados no arquimedianos se verifica:

(2.34) TEOREMA. <u>Sea</u> $(E, \|\ \|)$ <u>un espacio normado no arquimediano sobre un cuerpo</u> K <u>esféricamente completo. Sea</u> A <u>un subconjunto no vacío O-convexo c-compacto m*-cerrado y acotado de</u> E , <u>y</u> $(e_n)_{n\in N}$ <u>una sucesión ortogonal en</u> E <u>con</u> $\lim_{n\to\infty} \|e_n\| = 0$, <u>tal que</u>:

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \ / \ |x_n| \leq 1 \qquad \forall n \in N \right\}.$$

<u>Entonces</u>:

$$\text{O-Ext}_c(A) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in A \ / \quad \exists n \in N \ \text{ con } |x_n| = 1 \right\}.$$

Demostración

Como en (2.21), para cada natural n ,

$$D_n = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in A \ / \ |x_n| = 1 \right\}$$

es un conjunto (O,c)-extremo cerrado minimal de A .

Análogamente, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ es un elemento de A tal que $\sup_{n\in N} |x_n| < 1$, x no es punto (O,c)-extremo de A .

Finalmente, si la valuación de K es densa y $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ es un elemento de A tal que $\sup_{n \in N} |x_n| = 1$ y $|x_n| < 1$ para cada natural n, x no es punto (0,c)-extremo de A.

En efecto, si x pertenece a un conjunto (0,c)-extremo cerrado minimal S de A, la sucesión $(y_n)_{n \in N}$, definida por $y_n = \sum_{m=1}^{n} x_m e_m$, está contenida en $A \setminus S$. Además, $(y_n)_{n \in N}$ converge a x en A: absurdo, ya que, por (2.10), S es abierto en A.

CAPITULO 3

TEORIA DE AJUPOV DE CONJUNTOS EXTREMOS

Este capítulo está dedicado al desarrollo de la teoría de puntos extremos de AJUPOV ([1]) en varias direcciones. Como ya se ha indicado en la introducción, en 1974 este matemático soviético inició una teoría de KREIN-MILMAN para conjuntos c--compactos absolutamente convexos de espacios localmente convexos sobre cuerpos con valuación discreta.

Debido a que el citado artículo no contiene demostraciones, se inicia el capítulo con una necesaria primera parte dedicada a la demostración de los principales resultados del mismo, pero todo ello dentro de un planteamiento más amplio que incluye el caso de espacios con cuerpo base dotado de valuación densa, para lo cual se hace uso del concepto de conjunto convexo m^*-cerrado introducidc en el capítulo 1. También, y al final del capítulo, se muestra que la restricción a conjuntos absolutamente convexos, puede obviarse dando una definición general de punto extremo para conjuntos convexos cualesquiera.

No obstante, los resultados más importantes del capítulo son los que prueban que, en espacios localmente convexos separa dos, los "conjuntos extremos minimales" (en la terminología de AJUPOV) de los conjuntos c-compactos convexos se reducen a puntos. La demostración que se incluye de este hecho para espacios normados, está contenida en el teorema fundamental (3.10), que es un típico resultado no arquimediano basado en los teoremas de estructura de conjuntos c-compactos convexos en términos de bases ortogonales. A su vez, este teorema fundamental se usa, a través de un sutil procedimiento, para probar el mismo resultado en el caso de espacios localmente convexos.

Queda también incluido en el capítulo el cálculo de los puntos extremos de las bolas en espacios normados no arquimedianos.

Cabe indicar finalmente que la comparación de esta teoría con la estudiada en el capítulo anterior se hará al final del próximo capítulo.

Es conocido que si E es un espacio localmente convexo separado sobre un cuerpo K valuado no arquimediano y existe un subconjunto convexo c-compacto de E con más de un punto, K es esféricamente completo ([37]). Por tanto, en lo que sigue se supondrá que K es un cuerpo valuado no arquimediano esféricamente completo. También, se supone que los conjuntos convexos considerados en el capítulo no se reducen a un único punto.

1. PUNTOS EXTREMOS PARA CONJUNTOS 0-CONVEXOS .

(3.1) DEFINICION. Sea E un espacio vectorial topológico sobre K y A un subconjunto no vacío 0-convexo de E . Se dice que una parte no vacía S de A es conjunto (0,r)-extremo de A si:

$$S = \bigcap_{\alpha \in K_1} \{ x \in A \ / \ f_\alpha(x) = \alpha \} \ ; \quad K_1 \subset K \ ; \quad f_\alpha \in E' \ ;$$

$$| f_\alpha(A) | \leq |\alpha| \qquad \forall \alpha \in K_1 \ .$$

Cada conjunto de la forma $\{ x \in A \ / \ f_\alpha(x) = \alpha \}$ que interviene en la definición, se denota por H_α , y se llamará "hiperplano (0,r)-extremo de A ".

Considerando en la familia de los conjuntos (0,r)-extremos de A el orden de la inclusión, se dice que un punto x de A es (0,r)-extremo de A , si x pertenece a algún conjunto (0,r)-extremo minimal propio de A .

El conjunto de puntos (0,r)-extremos de A se denotará por $0\text{-}Ext_r(A)$.

NOTAS:

a) El concepto de conjunto (0,r)-extremo de AJUPOV en Análisis no Arquimediano, es análogo al de cara soporte dado en el caso usual ([19], pág. 336) en la siguiente forma:

"Sea E un espacio localmente convexo separado sobre el cuerpo de los reales ó complejos y A un subconjunto convexo de E. Un punto x_o de A se dice soporte de A si a través de él pasa al menos un hiperplano soporte cerrado de A. Se denota por $D(x_o)$ la intersección de todos los hiperplanos soportes cerrados que pasan por x_o. Entonces, $S(x_o) = D(x_o) \cap A$ es la <u>cara soporte</u> de A a través de x_o".

b) Si H_α es un hiperplano $(0,r)$-extremo de A, se tiene:

$$H_\alpha = A \Longleftrightarrow 0 \in H_\alpha \Longleftrightarrow \alpha = 0 .$$

Por tanto, 0 no es punto $(0,r)$-extremo de A, ya que, si $S = \bigcap_{\alpha \in K_1} H_\alpha$ $(K_1 \subset K)$ es un conjunto $(0,r)$-extremo minimal propio de A conteniendo el cero, se tiene que $H_\alpha = A$ para cada α en K_1, con lo que, $S = A$: absurdo.

c) Si $E = K$, se verifica:

$$S \text{ conjunto } (0,r)\text{-extremo de } A \Longleftrightarrow S = A \ \vee \ \exists \beta \in K \ / \ / \ S = \{x \in A \ / \ \beta x = \alpha\} \text{ con } |\beta x| \leq |\alpha| \quad \forall x \in A \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow S = A \qquad S = \{a\} \text{ con } |x| \leq |a| \quad \forall x \in A .$$

Por tanto, un punto a de A es $(0,r)$-extremo de A si y sólo si para todo x de A, se verifica $|x| \leq |a|$.

(3.2) LEMA. Sea E un espacio vectorial topológico separado sobre K. Sea A un subconjunto no vacío convexo m^*-cerrado y acotado de E. Entonces, para cada f en E', existe un elemento a_f de A, tal que:

$$|f(a_f)| = \sup_{x \in A} |f(x)| .$$

Demostración

Dada f perteneciente a E', por ser A m^*-cerrado, $f(A) = \overline{B}(b, |\lambda|)$ para ciertos b, λ elementos de K. Además, existe un punto a_f en A tal que $|f(a_f)| \geq |\lambda|$, pues en caso contrario, $y = f(a_f) + \lambda$ es un elemento de $f(A)$ con $|y| = |\lambda|$: absurdo.

Entonces, para cada x de A, se verifica:

$$|f(x)| \leq \max(|f(x) - f(a_f)|, |f(a_f)|) \leq$$

$$\leq \max(|\lambda|, |f(a_f)|) = |f(a_f)| ,$$

con lo que,

$$|f(a_f)| = \sup_{x \in A} |f(x)| .$$

La existencia de conjuntos (0,r)-extremos minimales propios y , por tanto, de puntos (0,r)-extremos de un conjunto 0-convexo dado, nos lo asegura el siguiente teorema:

(3.3) TEOREMA. Sea E un espacio localmente convexo separado sobre K . Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de E . Entonces, $0\text{-}Ext_r(A)$ es no vacío.

Demostración

Si $\mathcal{S} = \{ S \subseteq A \ / \ S$ es $(0,r)$-extremo propio de $A \}$, $\mathcal{S}$ es un conjunto ordenado inductivo respecto de la inclusión.

En efecto, $\mathcal{S}$ es no vacío pues, por ser E separado, existe f en E' tal que $f(A)$ no se reduce a un único punto y, por (3.2), existe un elemento a_f de A con $|f(a_f)| = \sup_{x \in A} |f(x)|$, con lo que,

$$H = \{ x \in A \ / \ f(x) = f(a_f) \}$$

es un hiperplano $(0,r)$-extremo propio de A .

También, si $\{ S_i \}_{i \in I}$ es una cadena descendente en $\mathcal{S}$, $S = \bigcap_{i \in I} S_i$ es una cota inferior de $\{ S_i \}_{i \in I}$ en $\mathcal{S}$, ya que, S es no vacío por ser A c-compacto; además, S es conjunto $(0,r)$-extremo propio de A pues, si para cada $i \in I$:

$$S_i = \bigcap_{\alpha \in K_i} \{ x \in A \ / \ f_\alpha(x) = \alpha \} \ ; \quad K_i \subset K \ ; \quad f_\alpha \in E' \ ;$$

$$|f_\alpha(A)| \leq |\alpha| \qquad \forall \alpha \in K_i \ ,$$

se tiene:

$$S = \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{\alpha \in K_i} \{ x \in A \ / \ f_\alpha(x) = \alpha \} \right) =$$

$$= \bigcap_{\alpha \in \bigcup_{i \in I} K_i} \{ x \in A \ / \ f_\alpha(x) = \alpha \} \quad ; \quad \bigcup_{i \in I} K_i \subset K \quad ;$$

$$f_\alpha \in E' \quad ; \quad | f_\alpha(A) | \leq |\alpha| \qquad \forall \alpha \in \bigcup_{i \in I} K_i \ .$$

Por el lema de Zorn, existen elementos minimales en $\mathcal{S}$, es decir, $0\text{-Ext}_r(A)$ es no vacío.

<u>NOTA</u>: Obsérvese que si en (3.3) A no es m^*-cerrado, puede ocurrir que $0\text{-Ext}_r(A)$ sea vacío.

En efecto, si la valuación de K es densa, considerando K como espacio vectorial sobre sí mismo, $A_1 = B(0,1)$ y $A_2 = \bar{B}(0,r)$ con $r \in R^+ \setminus N_K$, son dos subconjuntos 0-convexos c-compactos de K que no son m^*-cerrados y que carecen de puntos $(0,r)$-extremos, pues no existe a en A_1 (resp. A_2) tal que $|x| \leq |a|$ para cada punto x de A_1 (resp. A_2).

(3.4) <u>PROPOSICION</u>. <u>Sea</u> E <u>un espacio localmente convexo separado sobre</u> K. <u>Sea</u> A <u>un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de</u> E. <u>Entonces, todo conjunto $(0,r)$-extremo</u> S <u>de</u> A <u>contiene al menos un punto $(0,r)$-extremo de</u> A.

Demostración

Si $S = A$ el resultado es trivial. Si S es un subconjunto propio de A, basta considerar:

$$\mathcal{S}_S = \left\{ M \subsetneq S \ / \ M \text{ es } (0,r)\text{-extremo de } A \right\},$$

y razonar como en (2.7).

(3.5) <u>COROLARIO</u>. <u>Sea</u> E <u>un espacio localmente convexo separado sobre</u> K . <u>Sea</u> A <u>un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto</u> m^*<u>-cerrado y acotado de</u> E . <u>Entonces, para cada</u> f <u>en</u> E' <u>existe un punto</u> s_f <u>(0,r)-extremo de</u> A , <u>tal que:</u>

$$| f(s_f) | = \sup_{x \in A} | f(x) | .$$

Demostración

Para cada f en E', existe a_f perteneciente a A tal que:

$$| f(a_f) | = \sup_{x \in A} | f(x) | ,$$

con lo que,

$$H = \left\{ x \in A \ / \ f(x) = f(a_f) \right\}$$

es un hiperplano (0,r)-extremo de A y, por tanto, contiene un punto s_f (0,r)-extremo de A .

2. <u>TEOREMA DE KREIN-MILMAN</u> .

Siguiendo el mismo razonamiento que en (2.14), se tiene:

(3.6) TEOREMA (de KREIN-MILMAN). Sea E un espacio localmente convexo separado sobre K. Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de E. Entonces:

$$A = \overline{E}_{oc}(0\text{-}Ext_r(A)) .$$

En general, como se muestra en el siguiente ejemplo, no se verifica $A = \overline{E}_c(0\text{-}Ext_r(A))$.

(3.7) EJEMPLO. Sea Q_2 el cuerpo de los números 2-ádicos, es decir, el completado del cuerpo Q dotado de la valuación 2-ádica. Considerando Q_2 como espacio vectorial sobre sí mismo, $A = \overline{B}(0,1)$ es un subconjunto 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de Q_2, tal que:

$$\overline{E}_{oc}(0\text{-}Ext_r(A)) \neq \overline{E}_c(0\text{-}Ext_r(A))$$

Nótese que si λ es un elemento de Q con $|\lambda| = 1$ y $\lambda \neq \pm 1$, necesariamente $\lambda = \pm \frac{p}{q}$ con p,q impares y $p \neq \pm q$, con lo que, para todo λ en Q tal que $|\lambda| = 1$, se tiene $|1 - \lambda| < 1$. Además, si x es un elemento de Q_2 tal que $|x| = 1$, también se verifica $|1 - x| < 1$, ya que, si $(x_n)_{n \in N}$ es una sucesión en Q tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existe un natural m verificando $|x_n| = |x| = 1$ para todo $n \geq m$ ([36], pág. 5), por lo que, existe una sucesión $(y_n)_{n \in N}$ en Q, con $|y_n| = 1$ para cada natural n, tal que $\lim_{n \to \infty} y_n = x$, es decir, $\lim_{n \to \infty} (1 - y_n) = 1 - x$, con lo que, $|1 - x| < 1$.

Entonces:

$$0\text{-Ext}_r(A) = \{ x \in Q_2 \ / \ |x| = 1 \} =$$

$$= \{ x \in Q_2 \ / \ |1 - x| < 1 \} = B(1,1) ,$$

con lo que, $0\text{-Ext}_r(A)$ es un subconjunto convexo de Q_2 y, por ser la valuación una aplicación continua, $0\text{-Ext}_r(A)$ es cerrado, es decir,

$$\overline{E}_c(0\text{-Ext}_r(A)) = 0\text{-Ext}_r(A) = \{ x \in Q_2 \ / \ |x| = 1 \} ,$$

mientras que:

$$\overline{E}_{oc}(0\text{-Ext}_r(A)) = A = \{ x \in Q_2 \ / \ |x| \leq 1 \} .$$

NOTA: Obsérvese que en (3.6) se verifica $A = \overline{E}_c(0\text{-Ext}_r(A))$ si y sólo si $0 \in \overline{E}_c(0\text{-Ext}_r(A))$. Esto ocurre con frecuencia, como se muestra a continuación:

(3.8) EJEMPLO. Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre un cuerpo K tal que $|2| = 1$. Entonces, si A es un subconjunto 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de E, $A = \overline{E}_c(0\text{-Ext}_r(A))$.

En efecto, sea $(e_n)_{n\in N}$ una sucesión ortogonal en E con $\lim_{n\to\infty} \| e_n \| = 0$, tal que:

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \ / \ |x_n| \leq 1 \quad \forall n \in N \right\} .$$

Se verá en el párrafo siguiente que:

$$0\text{-}Ext_r(A) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in A \ / \ \exists n \in N \text{ con } |x_n| = 1 \right\}$$

y, puesto que, $0 = 2\frac{e_n}{2} + (-1)e_n$ para cada natural n , se tiene que 0 es un elemento de $\overline{E}_c(0\text{-}Ext_r(A))$.

3. <u>CONJUNTOS EXTREMOS MINIMALES EN ESPACIOS NORMADOS</u> .

Se procede a continuación al cálculo de los puntos (0,r)--extremos de ciertos conjuntos en espacios normados no arquimedianos.

(3.9) <u>LEMA</u>. <u>Sea</u> $(E, \|\ ,\ \|)$ <u>un espacio normado no arquimediano ortogonalizable sobre</u> K . <u>Sea</u> $(e_i)_{i\in I}$ <u>una base ortogonal de</u> E <u>y</u> A <u>un subconjunto no vacío 0-convexo de</u> E . <u>Entonces, si</u> $\sum_{i\in I} a_i e_i$ <u>es un elemento de</u> A <u>tal que existe</u> $i_o \in I$ <u>verificando:</u>

$$|a_{i_o}| = \sup_{i\in I} |a_i| \geq \sup_{i\in I} |x_i| \qquad \forall \sum_{i\in I} x_i e_i \in A ,$$

$\{a\}$ es un conjunto (0,r)-extremo de A .

Demostración

Por hipótesis, el conjunto:

$$I_o = \left\{ i \in I \ / \ |a_i| = \sup_{i \in I} |a_i| \right\}$$

es no vacío.

Se define una familia de aplicaciones, $\{f_i\}_{i \in I}$, de E en K , en la forma siguiente:

$$f_i(b) = b_i \qquad \text{si} \qquad i \in I_o$$

$$f_i(b) = b_{i_o} + b_i \qquad \text{si} \qquad i \notin I_o$$

donde, $b = \sum_{i \in I} b_i e_i$ es un elemento cualquiera de E . Estas aplicaciones son lineales y continuas, por ser $(e_i)_{i \in I}$ base ortogonal de E .

Asociado a cada f_i , se define el conjunto:

$$H_i = \left\{ y \in A \ / \ f_i(y) = \alpha_i \right\} ,$$

con:

$$\alpha_i = a_i \qquad \text{si} \qquad i \in I_o$$

$$\alpha_i = a_{i_o} + a_i \qquad \text{si} \qquad i \notin I_o .$$

Trivialmente, a es un elemento de $\bigcap_{i \in I} H_i$; además, si

$y = \sum_{i \in I} y_i e_i$ es un punto de A que pertenece a $\bigcap_{i \in I} H_i$, necesariamente $y_i = a_i$ para todo i en I, con lo que, $\{a\} = \bigcap_{i \in I} H_i$.

También, se verifica:

$$|f_i(A)| \leq |\alpha_i| \qquad \forall i \in I .$$

En efecto, para cada elemento $b = \sum_{i \in I} b_i e_i$ de A se tiene:

$$|f_i(b)| = |b_i| \leq \sup_{i \in I} |b_i| \leq \sup_{i \in I} |a_i| = |a_i| = |\alpha_i| ,$$

si $i \in I_o$.

$$|f_i(b)| = |b_{i_o} + b_i| \leq \sup_{i \in I} |b_i| \leq \sup_{i \in I} |a_i| = |a_{i_o}| =$$

$$= \max(|a_{i_o}|, |a_i|) = |a_{i_o} + a_i| = |\alpha_i| , \quad \text{si} \quad i \notin I_o .$$

Por tanto:

$$\{a\} = \bigcap_{i \in I} H_i \quad ; \quad H_i = \{ y \in A \ / \ f_i(y) = \alpha_i \} \quad ;$$

$$|f_i(A)| \leq |\alpha_i| \qquad \forall i \in I ,$$

con lo que, $\{a\}$ es un conjunto $(0,r)$-extremo de A.

A partir del resultado anterior y utilizando (1.5), puede darse el siguiente teorema de caracterización de los puntos $(0,r)$-extremos:

(3.10) TEOREMA. Sea $(E, \|\ ,\ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre K. Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de E, y $(e_n)_{n \in N}$ una sucesión ortogonal en E con $\lim_{n\to\infty} \| e_n \| = 0$, tal que:

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \ / \ | x_n | \leq 1 \quad \forall n \in N \right\} .$$

Entonces, si $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ es un elemento de A, son equivalentes:

(i) $\{a\}$ es conjunto (0,r)-extremo de A.

(ii) a es punto (0,r)-extremo de A.

(iii) Existe f perteneciente a $[A]' \setminus \{0\}$ tal que $|f(a)| = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

(iv) Existe un natural n tal que $|a_n| = 1$.

En particular, todos los conjuntos (0,r)-extremos minimales de A son puntos.

Demostración

(i) implica (ii): Trivial.

(ii) implica (iii): Consecuencia inmediata de la definición de punto (0,r)-extremo.

(iii) implica (iv): Si $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ es un elemento cualquiera de A, se verifica:

$$|f(x)| \leq |f(a)| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(e_n)| \leq \sup_{n=1}^{\infty} |a_n f(e_n)| =$$

$$= |a_n f(e_n)|$$

para un cierto natural n, ya que $(a_n f(e_n))_{n \in N}$ converge a cero.

En particular, si $x = e_n$, se tiene:

$$|f(e_n)| \leq |a_n||f(e_n)|$$

y, por ser f no nula, $f(e_n)$ es distinto de cero, con lo que $|a_n| \geqslant 1$, es decir, $|a_n| = 1$.

(iv) implica (i): Trivialmente, $(e_n)_{n \in N}$ es una base ortogonal de $[A]$; además a es un elemento de A para el que existe un natural n verificando:

$$|a_n| = 1 = \sup_{n \in N} |a_n| \geqslant \sup_{n \in N} |x_n| \qquad \forall \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in A .$$

Por (3.9), considerando $[A]$ en vez de E, se tiene:

$$\{a\} = \bigcap_{n \in N} H_n \quad ; \quad H_n = \{ y \in A \ / \ f_n(y) = \alpha_n \} \quad ;$$

$$f_n \in [A]' \quad ; \quad |f_n(A)| \leq |\alpha_n| \qquad \forall n \in N .$$

Para cada natural n, sea f_n^* una extensión lineal y continua de f_n a E. Entonces, se verifica:

$$\{a\} = \bigcap_{n \in N} H_n^* \quad ; \quad H_n^* = \{ y \in A \ / \ f_n^*(y) = \alpha_n \} \quad ;$$

$$f_n^* \in E' \quad ; \quad |f_n^*(A)| \leq |\alpha_n| \qquad \forall n \in N ,$$

con lo que, $\{a\}$ es un conjunto $(0,r)$-extremo de A .

Por tanto, todos los conjuntos $(0,r)$-extremos minimales de A son puntos, y son los que verifican una cualquiera de las propiedades anteriores.

NOTA: Obsérvese que la propiedad (iii) es equivalente a:

(iii)' Existe f perteneciente a E' y distinta de cero en A tal que $|f(a)| = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

Como en (2.26), puede darse un teorema de tipo MINKOWSKI en la siguiente forma:

(3.11) TEOREMA. Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre K . Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de E . Entonces, A es la envolvente 0-convexa cerrada de una familia $\{u_i\}_{i \in I}$ de puntos $(0,r)$-extremos de A , con $|I| \leq \dim [A]$.

Se calcularán a continuación los puntos $(0,r)$-extremos de las bolas de centro cero en espacios normados no arquimedianos sobre K .

(3.12) LEMA. Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre K . Entonces, para cada x_o, s elementos no nulos de E , existe f en E' con $\|f\| = \frac{1}{\|x_o\|}$, tal que $f(x_o) = 1$ y $f(s) \neq 0$.

Demostración

Si x_o y s son proporcionales, el resultado es obvio. En caso contrario, $[x_o]$ es cerrado y propio en $[x_o, s]$, con lo que, la aplicación

$$\begin{aligned} [x_o] &\xrightarrow{f_1} K \\ \lambda x_o &\longrightarrow \lambda \end{aligned}$$

es tal que $\|f_1\| = \frac{1}{\|x_o\|}$, y puede extenderse a

$$[x_o, s] \xrightarrow{f_2} K$$

lineal y continua con $\|f_2\| = \frac{1}{\|x_o\|}$ y $f_2(s) \neq 0$ ([36], pág. 103). Así mismo, f_2 se extiende a $f : E \longrightarrow K$ lineal y continua con $\|f\| = \frac{1}{\|x_o\|}$, $f(x_o) = 1$ y $f(s) \neq 0$.

(3.13) LEMA. Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre K . Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo acotado de E . Entonces, para cada elemento a de A tal que $\|a\| = \sup_{x \in A} \|x\|$, se tiene:

$$\{a\} = \bigcap_{\substack{\|f\| = \frac{1}{\|a\|} \\ f(a)=1}} \{x \in A \ / \ f(x) = 1\}$$

con lo que, en particular, $\{a\}$ es un conjunto $(0,r)$-extremo de A.

Demostración

Por (3.12), el conjunto

$$F = \left\{ f \in E' \ / \ \|f\| = \frac{1}{\|a\|} \ \wedge \ f(a) = 1 \right\}$$

es no vacío. Si $C = \bigcap_{f \in F} \{x \in A \ / \ f(x) = 1\}$, trivialmente a es un elemento de C. Además, si b es un punto de A distinto de a, $s = b - a$ es distinto de cero y, por (3.12), existe f en E' con $\|f\| = \frac{1}{\|a\|}$ tal que $f(a) = 1$ y $f(b) \neq f(a)$, por lo que, b no pertenece a C.

También, si $\|f\| = \frac{1}{\|a\|}$, se tiene:

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| = \frac{1}{\|a\|} \|x\| \leq 1 \qquad \forall x \in A$$

y, por tanto, $\{a\}$ es conjunto $(0,r)$-extremo de A.

(3.14) PROPOSICION. Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre K. Sea A un subconjunto no vacío 0-.erto y acotado de E. Entonces, si a es un elemento de A, y se consideran las propiedades siguientes:

(i) $\|a\| = \sup_{x \in A} \|x\|$,

(ii) $\{a\}$ <u>conjunto (0,r)-extremo de</u> A ,

(iii) a <u>punto (0,r)-extremo de</u> A ,

(iv) $p_A(a) = 1$,

<u>se verifica:</u>

$$(i) \Longrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii) \Longleftrightarrow (iv).$$

Demostración

(i) implica (ii): Consecuencia de (3.13).

(ii) implica (iii): Consecuencia de la definición de punto (0,r)-extremo.

(iii) implica (iv): Si a es punto (0,r)-extremo de A , existe f en E' no nula sobre A tal que $|f(a)| = \sup_{x\in A} |f(x)|$. Si, por reducción al absurdo, $p_A(a) < 1$ y la valuación de K es discreta, existe, como en (2.27), μ en K con $|\mu| < 1$ e y en A tal que $a = \mu y$, con lo que, $|f(a)| < |f(y)|$: absurdo. Si la valuación de K es densa, existen μ , λ elementos de K tal que:

$$p_A(a) < |\mu| < |\lambda| < 1 ,$$

por lo que, $\alpha = \dfrac{\mu}{\lambda}$ es un elemento de K con $|\alpha| < 1$, e $y = \dfrac{a}{\alpha}$ es un elemento de A pues $p_A(y) < 1$; además, $a = \alpha y$, con lo que $|f(a)| < |f(y)|$: absurdo.

(iv) implica (ii): Si $p_A(a) = 1$, se tiene, $p_A(a) =$

$= \sup_{x \in B} p_A(x)$, siendo B la bola unidad cerrada en p_A . Por (3.13), $\{a\}$ es conjunto (0,r)-extremo de B en p_A , es decir,

$$\{a\} = \bigcap_{\alpha \in K_1} H_\alpha \quad ; \quad H_\alpha = \{ x \in B \ / \ f_\alpha(x) = \alpha \} \quad ;$$

$$f_\alpha \in (E, p_A)' \quad ; \quad |f_\alpha(B)| \leq |\alpha| \qquad \forall \alpha \in K_1 \quad (K_1 \subset K) .$$

Además, por (2.29), la topología inicial en E coincide con la asociada a p_A , por lo que:

$$\{a\} = \bigcap_{\alpha \in K_1} H_\alpha \quad ; \quad H_\alpha = \{ x \in A \ / \ f_\alpha(x) = \alpha \} \quad ;$$

$$f_\alpha \in E' \quad ; \quad |f_\alpha(A)| \leq |\alpha| \qquad \forall \alpha \in K_1 \quad (K_1 \subset K) ,$$

con lo que, $\{a\}$ es conjunto (0,r)-extremo de A .

Por tanto, puede darse el siguiente teorema de caracterización de los puntos (0,r)-extremos de las bolas en espacios normados no arquimedianos:

(3.15) <u>TEOREMA</u>. <u>Sea</u> $(E, \| \ \|)$ <u>un espacio normado no arquimediano sobre</u> K . <u>Sea</u> A <u>una bola de centro cero en</u> E . <u>Entonces:</u>

a) <u>Si</u> a <u>es un elemento de</u> A , <u>y se consideran las propiedades siguientes:</u>

(i) $\| a \| = \sup_{x \in A} \| x \|$,

(ii) $\{a\}$ <u>conjunto (0,r)-extremo de</u> A ,

(iii) a <u>punto (0,r)-extremo de</u> A ,

(iv) $p_A(a) = 1$,

se verifica:

$$(i) \Longrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii) \Longleftrightarrow (iv).$$

b) <u>Si además la valuación de</u> K <u>es densa ó</u> $N_E \subset N_K$, <u>se tiene en a) la equivalencia de las cuatro propiedades.</u>

Demostración

a): Consecuencia de (3.14).

b): Basta probar que (iv) implica (i). Si la valuación de K es discreta y $N_E \subset N_K$, la demostración es como en (2.32). Supuesto que la valuación de K es densa, sea a un elemento de A tal que $p_A(a) = 1$. Si, por reducción al absurdo, $\| a \| < \sup_{x \in A} \| x \|$, existen μ , λ en K verificando:

$$\| a \| < |\mu| < |\lambda| < \sup_{x \in A} \| x \| = r ,$$

por lo que, $\alpha = \dfrac{\mu}{\lambda}$ es un elemento de K de módulo menor que uno, e $y = \dfrac{a}{\alpha}$ pertenece a A , ya que $\| y \| < r$; además, $a = \alpha y$, con lo que, $p_A(a) = |\alpha| \, p_A(y) < 1$: absurdo.

NOTAS:

a) Si en (3.15) la valuación de K es discreta, siempre existe a en A tal que $p_A(a) = 1$, con lo que, $0\text{-Ext}_r(A)$ es no vacío.

En efecto, si $A = \bar{B}(0,r)$ (resp. $A = B(0,r)$) con $r \in R^+$, se tiene:

$$p_A(a) = 1 \iff \rho^{-1} r < \| a \| \leq r$$

(resp. $p_A(a) = 1 \iff \rho^{-1} r \leq \| a \| < r$)

Para cada elemento x de E con $\| x \| = s$ $(s \in R^+)$, sea n el mínimo entero tal que

$$s \rho^{-n} \leq r \rho^{-1} \qquad (\text{resp. } s \rho^{-n} < r \rho^{-1}),$$

y π_{n-1} un elemento de K con $|\pi_{n-1}| = \rho^{-n+1}$. Entonces, $a = \pi_{n-1} x$ es un punto de A verificando:

$$r \rho^{-1} < \| a \| \leq r \qquad (\text{resp. } r \rho^{-1} \leq \| a \| < r).$$

b) Si la valuación de K es discreta ó existe un punto a de A tal que $\| a \| = \sup_{x \in A} \| x \|$, A posee puntos $(0,r)$-extremos. Sin embargo, si la valuación de K es densa y no existe a en A con $\| a \| = \sup_{x \in A} \| x \|$, $0\text{-Ext}_r(A)$ es vacío.

c) El ejemplo dado en (2.33) muestra que si la valuación de K es discreta y $N_E \not\subset N_K$, la equivalencia de b) en general no es cierta.

4. CONJUNTOS EXTREMOS MINIMALES EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS .

Es conocido que si (E,p) es un espacio seminormado no arquimediano sobre un cuerpo K valuado,

$$N = \{ x \in E \ / \ p(x) = 0 \}$$

es un subespacio vectorial de E , y la aplicación q de E/N en R^{+} , definida por $q(\varphi(x)) = p(x)$, es una norma no arquimediana sobre E/N , donde $\varphi(x)$ denota la clase de representante x respecto de la proyección canónica $\varphi : E \longrightarrow E/N$. Además, la norma q define la topología cociente en E/N , por lo que, en particular, φ es continua.

También, para cada aplicación lineal y continua $f : (E,p) \longrightarrow K$, existe una aplicación lineal y continua $\hat{f} : (E/N,q) \longrightarrow K$, definida por $\hat{f}(\varphi(x)) = f(x)$; recíprocamente, a cada aplicación lineal y continua $\hat{f} : (E/N,q) \longrightarrow K$ se le puede asociar una aplicación lineal y continua $f : (E,p) \longrightarrow K$, definida en la forma $f(x) = \hat{f}(\varphi(x))$.

Si E es un espacio localmente convexo separado sobre K y $\mathcal{U}$ es una base de 0-entornos convexos de E , se supondrá en lo que sigue que la topología de E viene definida por una familia de seminormas no arquimedianas:

$$\Gamma = \{ p_i \ / \ i \in I \}$$

filtrante a derecha y tal que $p_U \in \Gamma$ para todo U en $\mathcal{U}$.

NOTA: Para cada índice i, sea $N_i = \{ x \in E \ / \ p_i(x) = 0 \}$ y $\varphi_i : E \longrightarrow E/N_i$ la correspondiente proyección canónica. Entonces, si A es un subconjunto 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de E, $\varphi_i(A)$ es un subconjunto 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de $(E/N_i, q_i)$ para todo i en I, ya que, las aplicaciones:

$$E \xrightarrow{Id} (E, p_i) \qquad \text{y} \qquad E \xrightarrow{\varphi_i} E/N_i$$

son lineales y continuas. Además, se verifica:

(3.16) LEMA. Sea E un espacio localmente convexo separado sobre K. Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de E. Entonces, si a es un elemento de A para el que existe un índice i tal que $\varphi_i(A)$ no se reduce al cero y $\varphi_i(a)$ es punto $(0,r)$-extremo de $\varphi_i(A)$, se tiene que $\varphi_j(a)$ es punto $(0,r)$-extremo de $\varphi_j(A)$ para todo j en I con $p_j \geq p_i$.

Demostración

Por ser $p_j \geqslant p_i$, la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} E/N_j & \xrightarrow{\varphi_{ji}} & E/N_i \\ \varphi_j(a) & \longrightarrow & \varphi_i(a) \end{array}$$

está bien definida, y es lineal y continua.

Si $\varphi_i(a)$ es punto (0,r)-extremo de $\varphi_i(A)$, existe f perteneciente a $(E/N_i, q_i)'$ tal que $f(\varphi_i(a)) = \alpha$ con $\alpha \neq 0$ y $| f(\varphi_i(A))| \leq |\alpha|$. Por tanto, $g = f.\varphi_{ji}$ es un elemento de $(E/N_j, q_j)'$ tal que $g(\varphi_j(a)) = \alpha$ y $|g(\varphi_j(A))| \leq |\alpha|$, con lo que, según (3.10), $\varphi_j(a)$ es punto (0,r)-extremo de $\varphi_j(A)$.

Por tanto, puede darse el siguiente teorema de caracterización de los puntos (0,r)-extremos:

(3.17) TEOREMA. Sea E un espacio localmente convexo separado sobre K . Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de E . Entonces, si a es un elemento de A , son equivalentes:

(i) $\{a\}$ es conjunto (0,r)-extremo de A .

(ii) a es punto (0,r)-extremo de A .

(iii) Existe f perteneciente a $[A]' \setminus \{0\}$ tal que $|f(a)| = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

(iv) Existe un índice i tal que $\varphi_i(A)$ no se reduce al

<u>cero y</u> $\varphi_i(a)$ <u>es punto (0,r)-extremo de</u> $\varphi_i(A)$.

<u>En particular, todos los conjuntos (0,r)-extremos minimales de</u> A <u>son puntos.</u>

Demostración

(i) implica (ii): Obvio.

(ii) implica (iii): Consecuencia de la definición de punto (0,r)-extremo.

(iii) implica (iv): La aplicación f puede extenderse a una aplicación lineal y continua sobre E que también se denota por f . Por tanto, existe un índice i tal que:

$$|f(x)| \leq M\, p_i(x) \qquad \forall x \in E \qquad (M \in R^+ \setminus \{0\})\ ,$$

con lo que, $\varphi_i(A)$ no se reduce al cero; además, si $\hat{f}$ es la aplicación de $(E/N_i, q_i)'$ asociada a f , se tiene que $\hat{f}(\varphi_i(a)) = f(a)$ con $|\hat{f}(\varphi_i(A))| \leq |f(a)|$ y, por (3.10), $\varphi_i(a)$ es punto (0,r)-extremo de $\varphi_i(A)$.

(iv) implica (i): Si $I_o = \{ j \in I \ / \ p_j \geqslant p_i \}$, para cada j en I_o , $\varphi_j(a)$ es punto (0,r)-extremo de $\varphi_j(A)$, es decir:

$$\{\varphi_j(a)\} = \bigcap_{\alpha_j \in K_j} \hat{H}\alpha_j \quad ; \quad \hat{H}\alpha_j = \{ \varphi_j(x) \in \varphi_j(A) \ /$$

$/ \quad \hat{f}_{\alpha_j}(\varphi_j(x)) = \alpha_j \Big\} \quad ; \quad \hat{f}_{\alpha_j} \in (E/N_j, q_j)' \quad ;$

$| \hat{f}_{\alpha_j}(\varphi_j(A)) | \leq | \alpha_j | \qquad \forall \alpha_j \in K_j \qquad (K_j \subset K) .$

Para cada α_j en K_j, sea f_{α_j} la aplicación de $(E, p_j)'$ asociada a $\hat{f}_{\alpha_j}$. Entonces:

$a \in \bigcap_{\alpha \in K_1} H_\alpha \quad ; \quad K_1 = \bigcup_{j \in I_o} K_j \quad ; \quad H_\alpha = \Big\{ x \in A \ /$

$/ \quad f_\alpha(x) = \alpha \Big\} \quad ; \quad f_\alpha \in E' \quad ; \quad | f_\alpha(A) | \leq | \alpha |$

$\forall \alpha \in K_1$.

Además, si b es un elemento de E distinto de a que pertenece a $\bigcap_{\alpha \in K_1} H_\alpha$, se tiene que $\varphi_j(b)$ es un punto de $\bigcap_{\alpha_j \in K_j} H_{\alpha_j} = \{ \varphi_j(a) \}$, para todo j en I_o y, por ser E separado, existe j en I con $p_j(b - a) \neq 0$: absurdo.

Por tanto, $\{ a \} = \bigcap_{\alpha \in K_1} H_\alpha$, con lo que, $\{ a \}$ es conjunto (0,r)-extremo de A .

5. PUNTOS EXTREMOS PARA CONJUNTOS X-CONVEXOS .

Sea E un espacio vectorial topológico sobre K y A un subconjunto convexo de E . Si A_o es el conjunto 0-convexo del cual A es trasladado, $A = x + A_o$ para cada x en A. Para definir los puntos r-extremos de A, sería sugerente poner:

$$x\text{-}Ext_r(A) = x + 0\text{-}Ext_r(A_o) \qquad (x \in A) .$$

Sin embargo, si x,y son puntos de A, no se tiene necesariamente que $x + 0\text{-}Ext_r(A_o) = y + 0\text{-}Ext_r(A_o)$. En efecto:

(3.18) EJEMPLO. Sea Q_p $(p > 1)$ el cuerpo de los números p-ádicos considerado como espacio vectorial sobre sí mismo. Sea $A = \bar{B}(x,|y - x|)$, con $x = \frac{p-1}{2p}$ e $y = -\frac{p+1}{2p}$.

Entonces,

$$x + 0\text{-}Ext_r(A_o) \neq y + 0\text{-}Ext_r(A_o) ,$$

es decir,

$$\left\{ x + z \in Q_p \ / \ |z| = |y - x| \right\} \neq$$

$$\neq \left\{ y + z' \in Q_p \ / \ |z'| = |y - x| \right\} .$$

En efecto, basta probar que existe z en Q_p tal que:

$$|z| = |y - x| \quad y \quad |z + x - y| < |x - y| .$$

Puesto que:

$$|x - y| = \left| \frac{p-1}{2p} + \frac{p+1}{2p} \right| = \left| \frac{2p}{2p} \right| = 1 ,$$

el punto $z = \frac{p^2+1}{p^2-1}$ verifica las propiedades requeridas, ya que:

$$| z | = \left| \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} \right| = 1 \quad , \quad | z + x - y | = \left| \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} + 1 \right| =$$

$$= \frac{| 2p^2 |}{| p^2 - 1 |} \leq | p^2 | = \frac{1}{p^2} < 1 \ .$$

Para conseguir resultados coherentes hemos, en consecuencia, de dar una definición de punto extremo relativa a un punto fijo del conjunto ("centro" en la terminología de MONNA), en la forma:

(3.19) <u>DEFINICION</u>. Sea E un espacio vectorial topológico sobre K , A un subconjunto convexo de E y x un punto de A (es decir, A x-convexo). Entonces, se definen los <u>puntos (x,r)-extremos</u> de A , y se denotan por $x\text{-Ext}_r(A)$, como:

$$x\text{-Ext}_r(A) = x + 0\text{-Ext}_r(A_o) \ .$$

Como consecuencia de (3.6), se tiene:

(3.20) <u>TEOREMA</u> (de KREIN-MILMAN). <u>Sea</u> E <u>un espacio localmente convexo separado sobre</u> K . <u>Sea</u> A <u>un subconjunto no vacío x-convexo c-compacto m*-cerrado y acotado de</u> E . <u>Entonces:</u>

$$A = \overline{E}_{xc}(x\text{-Ext}_r(A)) \ .$$

<u>NOTA</u>: Obsérvese que, como en (3.7), en general no se verifica $A = \overline{E}_c(x\text{-}Ext_r(A))$.

CAPITULO 4

OTRAS DEFINICIONES DE CONJUNTO EXTREMO

En este capítulo final se recogen otras dos definiciones de conjuntos y puntos extremos, dedicándose la última parte del mismo a la comparación de las cuatro definiciones dadas a lo largo de la memoria.

La primera de las nuevas definiciones viene motivada por el hecho de que, a diferencia de los casos usuales, las dos definiciones dadas anteriormente de punto extremo dependen de la topología. A los puntos extremos así introducidos, en cuya definición no interviene más que la estructura algebraica del espacio, se ha convenido en llamarlos "puntos extremos geométricos".

La segunda definición proviene de una modificación de un intento parcialmente fallido de MONNA de estudio de puntos extremos y, por ello, es por lo que se llamarán "puntos extremos de Monna" a los obtenidos por este procedimiento.

Como en el capítulo 3, se consideran sólo conjuntos convexos no reducidos a un único punto. También, salvo mención expre sa en contra, se supone que K es un cuerpo esféricamente completo.

1. DEFINICION GEOMETRICA.

(4.1) DEFINICION. Sea E un espacio vectorial sobre K. Para cada par de puntos x,y de E, se define la combinación semiconvexa de x e y como:

$$C'\{x,y\} = \{ \lambda x + (1-\lambda)y \ / \ |\lambda| < 1 \} .$$

NOTAS:

a) En general, $C'\{x,y\} \neq C'\{y,x\}$.

b) Si $x = y$, $C'\{x,y\} = \{x\}$.

c) Si $E = K$ y x,y son dos puntos distintos de K, $C'\{x,y\}$ es la bola abierta de centro y y radio $|y - x|$, es decir,

$$z \in C'\{x,y\} \iff |z - y| < |x - y| .$$

d) Si E y F son espacios vectoriales sobre K, caben destacar las siguientes propiedades:

(C-1) Si f es una aplicación lineal de E en F, se tiene:

$$f(C'\{x,y\}) = C'\{f(x),f(y)\} \qquad \forall x,y \in E .$$

$$(C-2) \quad C'\{x + z , y + z\} = C'\{x,y\} + z \qquad \forall x,y,z \in E.$$

A partir del concepto de combinación semiconvexa, puede darse la siguiente definición geométrica de conjunto extremo:

(4.2) DEFINICION. Sea E un espacio vectorial sobre K y A un subconjunto no vacío de E . Se dice que una parte no vacía S de A es conjunto (0,g)-extremo de A si:

$$C'\{x,0\} \cap S = \emptyset \qquad \forall x \in A .$$

Cuando S se reduce a un punto x , se dice que x es un punto (0,g)-extremo de A .

El conjunto de puntos (0,g)-extremos de A se denota por $0\text{-}Ext_g(A)$.

NOTAS:

a) Todo subconjunto de un conjunto (0,g)-extremo de A , es también conjunto (0,g)-extremo de A , con lo que, en particular, todo conjunto (0,g)-extremo de A contiene al menos un punto (0,g)-extremo de A .

b) Si A es un subconjunto 0-convexo de E , 0 no es punto (0,g)-extremo de A .

c) En la proposición (4.10) se da otra versión de la definición (4.2).

Como se verá más adelante, el interés de la definición (4.2) reside en conjuntos 0-convexos, lo cual es de esperar de acuerdo con la propia definición.

(4.3) LEMA. Sea E un espacio vectorial sobre K y H un hiperplano afín de ecuación $f(z) = \alpha$ ($f \in E^*$, $\alpha \in K$). Entonces, para cada par de puntos x,y de E tales que x (ó y) no pertenece a H, son equivalentes:

(i) $C'\{x,y\} \cap H = \emptyset$.

(ii) $C'\{f(x),f(y)\} \cap \{\alpha\} = \emptyset$.

(iii) $|f(x) - f(y)| \leq |\alpha - f(y)|$.

Demostración

(i) implica (ii): Si $C'\{x,y\} \cap H = \emptyset$, se tiene que, $f(C'\{x,y\}) \cap \{\alpha\} = \emptyset$, es decir, $C'\{f(x),f(y)\} \cap \{\alpha\} = \emptyset$.

(ii) implica (iii): Si $f(x) = f(y)$, el resultado es obvio. Si $f(x)$ es distinto de $f(y)$, por ser $C'\{f(x),f(y)\}$ la bola abierta de centro $f(y)$ y radio $|f(x) - f(y)|$, se tiene $|f(x) - f(y)| \leq |\alpha - f(y)|$.

(iii) implica (i): Como antes, puede suponerse que $f(x)$ es distinto de $f(y)$. Si $|f(x) - f(y)| \leq |\alpha - f(y)|$, α no pertenece a $C'\{f(x), f(y)\} = f(C'\{x,y\})$, con lo que, $C'\{x,y\} \cap H = \emptyset$.

<u>NOTA</u>: Obsérvese que la hipótesis de que x ó y no sean elementos de H, sólo es necesaria para la demostración de (iii) implica (i).

(4.4) <u>PROPOSICION</u>. <u>Sea</u> E <u>un espacio vectorial sobre</u> K, A <u>un subconjunto no vacío de</u> E, H <u>un hiperplano afín de ecuación</u> $f(z) = \alpha$ $(f \in E^*,\ \alpha \in K)$ <u>y</u> $H_A = \{x \in A \ / \ f(x) = \alpha\}$. <u>Entonces:</u>

$$|f(A)| \leq |\alpha| \iff H_A = A \text{ ó } C'\{x,0\} \cap H = \emptyset \quad \forall x \in A .$$

Demostración

Si $|f(A)| \leq |\alpha|$ y 0 es un punto de H, se tiene $H_A = A$, mientras que si 0 no pertenece a H, por (4.3), se verifica $C'\{x,0\} \cap H = \emptyset$ para todo x de A.

Recíprocamente, si $H_A = A$, trivialmente $|f(A)| \leq |\alpha|$ y, si $C'\{x,0\} \cap H = \emptyset$ para todo elemento x de A, por (4.3), se tiene que $|f(A)| \leq |\alpha|$.

En particular:

(4.5) COROLARIO. Sea E un espacio vectorial sobre K, A un subconjunto no vacío de E y H un hiperplano afín de ecuación $f(z) = \alpha$ $(f \in E^*, \alpha \in K)$. Entonces, si $H_A = \{ x \in A \ / \ f(x) = \alpha \}$ es no vacío y $|f(A)| \leq |\alpha|$, se tiene que $H_A = A$ ó H_A es conjunto (0,g)-extremo de A.

(4.6) TEOREMA. Sea E un espacio localmente convexo separado sobre K. Sea A un subconjunto no vacío convexo m^*-cerrado y acotado de E. Entonces, $0\text{-}Ext_g(A)$ es no vacío.

Demostración

Por ser E separado, existe f en E' tal que $f(A)$ no se reduce a un único punto y, por (3.2), existe un elemento a_f de A con $|f(a_f)| = \sup_{x \in A} |f(x)|$, con lo que,

$$H_A = \{ x \in A \ / \ f(x) = f(a_f) \}$$

es un conjunto (0,g)-extremo de A que, por tanto, contiene al menos un punto (0,g)-extremo de A, es decir, $0\text{-}Ext_g(A)$ es no vacío.

NOTA: Obsérvese que si $E = K$, se tiene:

$$a \in 0\text{-}Ext_g(A) \Longleftrightarrow C'\{x,0\} \cap \{a\} = \emptyset \quad \forall x \in A \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow |x| \leq |a| \quad \forall x \in A ,$$

para cada subconjunto A de K con más de un punto, por lo que, como en el capítulo 3, si en (4.6) A no es m^*-cerrado, puede ocurrir que $0\text{-}Ext_g(A)$ sea vacío.

(4.7) PROPCSICION. Sea E un espacio localmente convexo separado sobre K . Sea A un subconjunto no vacío convexo m^*--cerrado y acotado de E . Entonces, para cada f en E' existe un punto s_f (0,g)-extremo de A , tal que:

$$| f(s_f) | = \sup_{x \in A} | f(x) | .$$

Demostración

Para cada f en E' , existe un elemento a_f de A tal que $| f(a_f) | = \sup_{x \in A} | f(x) |$, con lo que, por (4.5), $H_A =$ $= \{ x \in A \quad f(x) = f(a_f) \}$ contiene al menos un punto s_f (0,g)-extremo de A .

Como en (3.6), se verifica:

(4.8) TEOREMA. Sea E un espacio localmente convexo separado sobre K . Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo c-

-compacto m^*-cerrado y acotado de E . Entonces:

$$A \quad \overline{E}_{0c}(0\text{-}Ext_g(A)) \ .$$

Por (3.7), en general no se verifica $A = \overline{E}_c(0\text{-}Ext_g(A))$, lo que muestra que la definición (4.2) conduce a resultados satisfactorios sólo en conjuntos 0-convexos.

Si A es un conjunto convexo se plantea el mismo problema que en el capítulo 3, dándose la siguiente definición para conjuntos x-convexos:

(4.9) DEFINICION. Sea E un espacio vectorial sobre K , A un subconjunto convexo de E y x un punto de A (es decir, A es x-convexo). Entonces, se definen los puntos (x,g)-extremos de A , y se denotan por $x\text{-}Ext_g(A)$, como:

$$x\text{-}Ext_g(A) = x + 0\text{-}Ext_g(A_0) \ .$$

NOTA: Obsérvese que si A es un conjunto x-convexo, se verifica:

$$z \in x\text{-}Ext_g(A) \iff z - x \in 0\text{-}Ext_g(A_0) \iff$$

$$\iff C'\{y - x \ , \ 0\} \cap \{z - x\} = \emptyset \qquad \forall y \in A \iff$$

$$\iff ((C'\{y,x\}) - x) \cap \{z - x\} = \emptyset \qquad \forall y \in A \iff$$

$$\iff C'\{y,x\} \cap \{z\} = \emptyset \qquad \forall y \in A \ .$$

Se calcularán a continuación los puntos (0,g)-extremos de ciertos conjuntos en espacios localmente convexos, centrando principalmente el estudio en espacios normados no arquimedianos.

Puede darse una primera caracterización de los puntos (0,g)-extremos en espacios localmente convexos:

(4.10) PROPOSICION. Sea E un espacio localmente convexo separado sobre K y A un subconjunto no vacío 0-convexo de E. Entonces, si a es un elemento de A, son equivalentes:

(i) $a \in 0\text{-}\dot{Ext}_g(A)$.

(ii) $p_A(a) = 1$.

Demostración

(i) implica (ii): Si a es punto (0,g)-extremo de A y $p_A(a) < 1$, existen (ver (3.14)) μ en K con $|\mu| < 1$ e y en A tal que $a = \mu y$, con lo que, a pertenece a $C'\{y,0\}$: absurdo.

(ii) implica (i): Si $p_A(a) = 1$ y a no es punto (0,g)-extremo de A , existen μ en K con $|\mu| < 1$ y x en A tal que $a = \mu x$, por lo que, $p_A(a) = |\mu| p_A(x) < 1$: absurdo.

A partir de (1.5) puede darse una segunda caracterización de los puntos (0,g)-extremos en espacios normados no arquimedianos:

(4.11) TEOREMA. Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre K. Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de E, y $(e_n)_{n \in N}$ una sucesión ortogonal en E con $\lim\limits_{n \to \infty} \| e_n \| = 0$, tal que:

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \ / \ |x_n| \leq 1 \qquad \forall n \in N \right\}.$$

Entonces, si $a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ es un elemento de A, son equivalentes:

(i) $a \in$ 0-$Ext_g(A)$.

(ii) $\sup\limits_{n \in N} |a_n| = 1$.

(iii) $p_A(a) = 1$.

Demostración

(i) implica (ii): Si a es punto (0,g)-extremo de A y $\sup\limits_{n \in N} |a_n| < 1$, existe μ en K distinto de cero tal que $\sup\limits_{n \in N} |a_n| \leq |\mu| < 1$, con lo que, $y = \dfrac{a}{\mu} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\mu} e_n$ es un elemento de A ; además, $a = \mu y$, con lo que, a pertenece a $C'\{y,0\}$: absurdo.

(ii) implica (iii): Si λ es un elemento de K tal que a es punto de λA , necesariamente λ es distinto de cero, por serlo a . Además, se tiene:

$$a \in \lambda A \Longleftrightarrow \frac{a}{\lambda} \in A \Longleftrightarrow \frac{a}{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \quad , \quad |x_n| \leq 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a_n}{\lambda} = x_n \qquad \forall n \in N \, .$$

Por tanto:

$$\frac{1}{|\lambda|} \sup_{n \in N} |a_n| = \sup_{n \in N} |x_n| \, ,$$

con lo que, $|\lambda| \geq 1$, es decir,

$$p_A(a) = \inf \{ \, |\lambda| \, / \, a \in \lambda A \, \} \geq 1 \, ,$$

por lo que, $p_A(a) = 1$.

(iii) implica (i): Consecuencia de (4.10).

Como en (3.11), se verifica:

(4.12) TEOREMA. <u>Sea</u> $(E, \| \ \|)$ <u>un espacio normado no arquimediano sobre</u> K . <u>Sea</u> A <u>un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto m^*- cerrado y acotado de</u> E . <u>Entonces,</u> A <u>es la envolvente 0-convexa cerrada de una familia</u> $\{u_i\}_{i \in I}$ <u>de puntos (0,g)-extremos de</u> A , <u>con</u> $|I| \leq \dim[A]$.

Se calculan a continuación los puntos (0,g)-extremos de las bolas de centro cero en espacios normados no arquimedianos sobre K .

(4.13) PROPOSICION. Sea $(E, \|\ ,\ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre K . Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo acotado de E . Entonces, si a es un elemento de A , y se consideran las propiedades siguientes:

(i) $\| a \| = \sup_{x \in A} \| x \|$,

(ii) $a \in 0\text{-}Ext_g(A)$,

(iii) $p_A(a) = 1$.

se verifica:

$$(i) \Longrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii).$$

Demostración

(i) implica (ii): Si $\| a \| = \sup_{x \in A} \| x \|$ y a no es punto (0,g)-extremo de A , existe μ en K con $|\mu| < 1$ y x en A tal que $a = \mu x$, con lo que, $\| a \| = |\mu| \, \| x \| < \| x \|$: absurdo.

La segunda equivalencia es consecuencia de (4.10).

Por tanto, siguiendo el mismo razonamiento que en (3.15), puede darse el siguiente teorema de caracterización de los puntos (0,g)-extremos de las bolas en espacios normados no arquimedianos:

(4.14) TEOREMA. Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre K y A una bola de centro cero en E. Entonces:

a) Si a es un elemento de A, y se consideran las propiedades siguientes:

(i) $\|a\| = \sup_{x \in A} \|x\|$,

(ii) $a \in 0\text{-Ext}_g(A)$,

(iii) $p_A(a) = 1$,

se verifica:

$$\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)} \Longleftrightarrow \text{(iii)}.$$

b) Si además la valuación de K es densa ó $N_E \subset N_K$, se tiene en a) la equivalencia de las tres propiedades.

NOTA: Obsérvese que si en (4.14) la valuación de K es discreta ó existe a en A con $\|a\| = \sup_{x \in A} \|x\|$, A posee puntos (0,g)-extremos, mientras que si la valuación de K es densa y no existe a en A con $\|a\| = \sup_{x \in A} \|x\|$, $0\text{-Ext}_g(A)$ es vacío.

2. DEFINICION DE MONNA .

Se comienza el apartado recordando algunas de las definiciones dadas por MONNA necesarias para el nuevo concepto de punto extremo.

MONNA ([27], pág. 79) introduce el concepto de conjunto centrado en la siguiente forma:

"Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K dotado de valuación no arquimediana. Un conjunto centrado es un par (A, ρ), donde A es un subconjunto de E y ρ es un punto de A. A ρ se le llama "centro" de A ".

Análogamente, da el concepto de interior en la forma:

"Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K dotado de valuación no arquimediana y (A, ρ) un conjunto centrado de E. Se define el interior de (A, ρ) con relación a ρ, ó simplemente interior de (A, ρ), y se denota por A_ρ^1, como el conjunto de los x en (A, ρ) tales que existe $\varepsilon(x) > 0$, verificando:

(i) El conjunto de los $\lambda \in K$ con $1 < |\lambda| < 1 + \varepsilon(x)$ es no vacío.

(ii) $\rho + \lambda(x - \rho) \in A$ para todo λ en K con

$1 < |\lambda| < 1 + \varepsilon(x)$ ".

NOTAS: Si E es un espacio vectorial sobre K y (A, ρ) un conjunto centrado de E, se verifica:

a) A^i_ρ depende de la elección del centro.

b) ρ pertenece a A^i_ρ .

c) Para cada elemento a de E, $(a + A)^i_{a+\rho} = a + A^i_\rho$.

d) Para cada λ en K, $(\lambda A)^i_{\lambda\rho} = \lambda A^i_\rho$

e) Si F es un espacio vectorial sobre K y f es una aplicación lineal de E en F, $f(A^i_\rho)$ está contenido en $(f(A))^i_{f(\rho)}$.

(4.15) LEMA. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K valuado no arquimediano y A un subconjunto equilibrado de E. Entonces:

(i) Si la valuación de K es discreta y π es un elemento de K con $|\pi| = \rho$, se verifica:

$$x \in A^i_0 \iff \pi x \in A .$$

(ii) Si la valuación de K es cualquiera, se verifica:

$$x \in A^i_0 \iff \exists \lambda \in K , |\lambda| > 1 \ / \ \lambda x \in A .$$

Demostración

(i): Si x es un punto de A_0^i, existe $\varepsilon(x) > 0$ tal que $B = \{\lambda \in K \;/\; 1 < |\lambda| < 1 + \varepsilon(x)\}$ es no vacío y $\lambda x \in A$ para todo λ en B. Como $1 + \varepsilon(x) > \rho = |\pi| > 1$, se tiene que π es un elemento de B, por lo que, πx pertenece a A.

Recíprocamente, si πx es un punto de A y $\varepsilon(x)$ es un elemento de $(\rho - 1, \rho^2 - 1)$, se tiene:

$$B = \{\lambda \in K \;/\; 1 < |\lambda| < 1 + \varepsilon(x)\} = \\ = \{\lambda \in K \;/\; |\lambda| = \rho\} .$$

Además, por ser A equilibrado, se verifica:

$$\lambda x = \frac{\lambda}{\pi} \pi x \in A \qquad \forall \lambda \in B$$

(ii): Si la valuación de K es discreta, el resultado es consecuencia de (i).

Si la valuación de K es densa y x es un punto de A_0^i, trivialmente existe λ en K con $|\lambda| > 1$ tal que λx pertenece a A. Recíprocamente, si existe λ en K con $|\lambda| > 1$ tal que λx es punto de A, $\varepsilon(x) = |\lambda| - 1 > 0$ es tal que:

$$\mu x \in A \qquad \forall \mu \in K, \; 1 < |\mu| < 1 + \varepsilon(x),$$

por lo que, x está en A_0^i.

(4.16) LEMA. En las hipótesis de (4.15), se verifica:

(i) A_0^i es un conjunto equilibrado.

(ii) Si $x \notin A_0^i$ y $|\lambda| > 1$, $\lambda x \notin A$

(iii) Si $x \in A \setminus A_0^i$ y $|\lambda| = 1$, $\lambda x \in A \setminus A_0^i$.

(iv) Si $x \in A$ y $|\lambda| < 1$, $\lambda x \in A_0^i$.

Demostración

(i): Consecuencia de (4.15).

(ii): Consecuencia de (4.15).

(iii): Por ser A y A_0^i equilibrados.

(iv): Si $\lambda = 0$ el resultado es trivial. Si λ es distinto de cero, $\mu = \frac{1}{\lambda}$ es un elemento de K con $|\mu| > 1$ tal que $\mu(\lambda x)$ está en A, por lo que, λx es un punto de A_0^i.

(4.17) PROPOSICION. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K valuado no arquimediano y A un subconjunto no vacío equilibrado de E. Entonces, si f y α son elementos de E' y $K \setminus \{0\}$ respectivamente, se verifica:

$$|f(A_0^i)| < |\alpha| \Longrightarrow |f(A)| \leq |\alpha|.$$

Demostración

Si, por reducción al absurdo, existe x en A tal que $|f(x)| > |\alpha|$, $\mu = \frac{\alpha}{f(x)}$ es un elemento de K con $|\mu| < 1$, por lo que, μx pertenece a $\overset{i}{A}_0$. Además,

$$|f(\mu x)| = \frac{|\alpha|}{|f(x)|} |f(x)| = |\alpha| :$$

absurdo, ya que $|f(\overset{i}{A}_0)| < |\alpha|$.

(4.18) DEFINICION. Sea E un espacio vectorial topológico sobre K y (A, ρ) un subconjunto convexo centrado de E. Se dice que un hiperplano H de ecuación $f(x) = \alpha$ ($f \in E'$, $\alpha \in K$) es un hiperplano (ρ, m)-extremo de A si:

(i) $H \cap A \neq \emptyset$.

(ii) $\overset{i}{A}_\rho$ está de un lado de H.

En lo que sigue, y si no hay confusión, se utilizará el término hiperplano (ρ, m)-extremo de A para indicar no a H, sino a $H \cap A$.

Un subconjunto no vacío S de (A, ρ) se dice conjunto (ρ, m)-extremo de A si S es igual a A ó S es intersección de una familia de hiperplanos (ρ, m)-extremos de A.

Un punto x de (A, ρ) se dice punto (ρ, m)-extremo de A si pertenece a algún conjunto (ρ, m)-extremo minimal propio de A .

NOTAS:

a) El concepto de hiperplano (ϱ, m)-extremo es similar al de hiperplano de apoyo dado por MONNA ([27], pág. 80), con la diferencia de considerar ahora hiperplanos cerrados.

b) Todo hiperplano (ϱ, m)-extremo de (A, ϱ) es distinto de A , ya que no contiene a ϱ .

c) Recordando que un subconjunto B de E está de un lado de un hiperplano de ecuación $f(x) = \alpha$ $(f \in E', \alpha \in K)$, si:

$$|f(x) - f(y)| < |\alpha - f(y)| \qquad \forall x,y \in B$$

y que, en particular, si B contiene al cero, esto es equivalente a:

$$|f(B)| < |\alpha| ,$$

se tiene:

H hiperplano (ϱ, m)-extremo de $(A, \varrho) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $H - \varrho$ hiperplano $(0,m)$-extremo de $(A - \varrho, 0)$,

es decir, si x es un elemento de (A, ϱ) , se tiene:

x punto (ϱ, m)-extremo de $(A, \varrho) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $x - \varrho$ punto $(0,m)$-extremo de $(A - \varrho, 0)$.

Por tanto, como en las definiciones anteriores, bastará estudiar los puntos (0,m)-extremos de los conjuntos centrados en el cero.

3. RELACION ENTRE LAS DISTINTAS DEFINICIONES DE PUNTO EXTREMO .

Se verá a continuación la estrecha relación existente entre las cuatro definiciones de punto extremo dadas a lo largo de la memoria. El estudio se centra en los puntos extremos de los conjuntos 0-convexos.

En primer lugar, las definiciones de conjunto extremo según AJUPOV y MONNA coinciden:

(4.19) PROPOSICION. Sea E un espacio vectorial topológico sobre K y A un subconjunto no vacío 0-convexo de E . Entonces, S es conjunto (0,r)-extremo de A si y sólo si S es conjunto (0,m)-extremo de A .

Demostración

Sea S conjunto (0,r)-extremo de A , es decir,

$$S = \bigcap_{\alpha \in K_1} H_\alpha \quad ; \quad H_\alpha = \left\{ x \in A \;/\; f_\alpha(x) = \alpha \right\} \quad ; \quad K_1 \subset K \;;$$

$$f_\alpha \in E' \; ; \; | f_\alpha(A) | \leq |\alpha| \qquad \forall \alpha \in K_1 \, .$$

Si $\alpha = 0$ para todo α en K_1, S es igual a A, que es conjunto (0,m)-extremo de A. En caso contrario,

$$S = \bigcap_{\alpha \in K_2} H_\alpha \; ; \; K_2 = \{ \alpha \in K_1 \; / \; \alpha \neq 0 \} \, .$$

Para cada α en K_2, $f_\alpha(A)$ es 0-convexo en K, con lo que, $f_\alpha(A) = \bar{B}(0, |\alpha|) = \alpha \bar{B}(0,1)$. Entonces:

$$(f_\alpha(A))_0^i = (\alpha \bar{B}(0,1))_0^i = \alpha \bar{B}(0,1)_0^i = \alpha B(0,1) = B(0, |\alpha|),$$

es decir, $| (f_\alpha(A))_0^i | < |\alpha|$, por lo que, $| f_\alpha(A_0^i) | < |\alpha|$ y, por tanto, S es conjunto (0,m)-extremo de A.

Recíprocamente, si S es conjunto (0,m)-extremo de A, es decir,

$$S = A \;\text{ ó }\; S = \bigcap_{\alpha \in K_1} \{ x \in A \; / \; f_\alpha(x) = \alpha \} \; ; \; K_1 \subset K \; ;$$

$$f_\alpha \in E' \; ; \; | f_\alpha(A_0^i) | < |\alpha| \qquad \forall \alpha \in K_1 \, ,$$

por (4.17), se tiene que:

$$| f_\alpha(A) | \leq |\alpha| \qquad \forall \alpha \in K_1$$

y, por tanto, S es conjunto (0,r)-extremo de A.

Respecto de las definiciones de AJUPOV y geométrica, se tiene:

(4.20) <u>PROPOSICION</u>. <u>Sea</u> E <u>un espacio localmente convexo</u>

separado sobre K . Sea A un subconjunto no vacío 0-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de E . Entonces:

(i) $0\text{-Ext}_r(A)$ está contenido en $0\text{-Ext}_g(A)$.

(ii) Si además la valuación de K es discreta, $0\text{-Ext}_r(A) = 0\text{-Ext}_g(A)$.

Demostración

(i): Si a es punto (0,r)-extremo de A , existe f perteneciente a E' y distinta de cero en A tal que $|f(a)| = \sup_{x \in A} |f(x)|$. Si, por reducción al absurdo, a no es punto (0,g)-extremo de A , existen x en A y λ en K con $|\lambda| < 1$ tal que $a = \lambda x$, con lo que, $|f(a)| = |\lambda| |f(x)| < |f(x)|$: absurdo.

(ii): Por (3.10) y (4.11), el resultado es trivial si E es un espacio normado no arquimediano sobre K .

Sea E un espacio localmente convexo separado sobre K y $\Gamma = \{ p_i \}_{i \in I}$ la familia de seminormas no arquimedianas que que define la topología de E . Sea a un punto (0,g)-extremo de A . Si, por reducción al absurdo, a no es punto (0,r)-extremo de A , por (3.17), se tiene que para cada i en I tal que $\varphi_i(A) \neq \{ \varphi_i(0) \}$, $\varphi_i(a)$ no es punto (0,r)-extremo de $\varphi_i(A)$, es decir, existe x_i en A y λ_i en K tal que $\varphi_i(a) = \lambda_i \varphi_i(x_i)$, con $|\lambda_i| < 1$.

Por tanto, para todo i en I existe x_i en A y λ_i en K con $|\lambda_i| < 1$, tal que $p_i(a - \lambda_i x_i) = 0$. En particular, si $\mathcal{U}$ es una base de 0-entornos convexos de E, para cada U perteneciente a $\mathcal{U}$, existe x_U en A y λ_U en K con $|\lambda_U| < 1$ tal que $p_U(a - \lambda_U x_U) = 0$, por lo que, $a - \lambda_U x_U$ es un elemento de U, es decir, a es punto adherente del conjunto:

$$B = \{ \lambda x \ / \ |\lambda| < 1 \ \wedge \ x \in A \} = \bigcup_{|\lambda|<1} \lambda A = \mu A ,$$

con μ elemento de K tal que $|\mu| = \sup \{ |\lambda| \ / \ / \ |\lambda| < 1 \} = \frac{1}{\rho}$. Además, por ser B cerrado, a es un punto de B : absurdo, ya que $C'\{x,0\} \cap \{a\} = \emptyset$ para todo x en A.

NOTA: Obsérvese que, como consecuencia de (3.10) y (4.11), si la valuación de K es densa, en general no se verifica la propiedad (ii). Sin embargo, si la valuación de K es discreta, la definición de punto extremo de AJUPOV, que en principio es topológica pues viene dada en términos de aplicaciones lineales continuas, es equivalente a una definición geométrica.

Más aún, por (2.34) y (3.10), para conjuntos c-compactos en espacios normados, se verifica:

(4.21) PROPOSICION. Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre K . Sea A un subconjunto no vacío O-convexo c-compacto m^*-cerrado y acotado de E . Entonces:

$$O\text{-}Ext_c(A) = O\text{-}Ext_r(A) .$$

También, en el caso de conjuntos compactos y cuerpos locales, se tiene el siguiente resultado:

(4.22) PROPOSICION. Sea E un espacio localmente convexo separado sobre un cuerpo K local. Sea A un subconjunto no vacío O-convexo compacto de E . Entonces:

$$O\text{-}Ext_c(A) = O\text{-}Ext_g(A) .$$

Demostración

Sea $(e_i)_{i \in I}$ una familia topológicamente libre de elementos de E tal que:

$$A = \left\{ \sum_{i \in I} x_i e_i \;/\; |x_i| \leq 1 \quad \forall i \in I \right\} .$$

Es inmediato que:

$$O\text{-}Ext_g(A) = \left\{ \sum_{i \in I} x_i e_i \in A \;/\; \sup_{i \in I} |x_i| = 1 \right\}$$

y, por el teorema (2.21), $O\text{-}Ext_c(A) = O\text{-}Ext_g(A)$.

Como consecuencia de los resultados anteriores, se tiene el siguiente teorema, que resume la relación existente entre las distintas definiciones de punto extremo para conjuntos c--compactos.

(4.23) TEOREMA. Sea E un espacio localmente convexo separado sobre K y A un subconjunto no vacío 0-convexo de E. Entonces:

(1) Si A es c-compacto m^*-cerrado y acotado, se tiene:

(1.1): $0\text{-Ext}_m(A) = 0\text{-Ext}_r(A) \subset 0\text{-Ext}_g(A)$.

(1.2): Si E es un espacio normado no arquimediano,

$0\text{-Ext}_c(A) = 0\text{-Ext}_m(A) = 0\text{-Ext}_r(A) \subset 0\text{-Ext}_g(A)$.

(1.3): Si la valuación de K es discreta, se da la igualdad en (1.1) y (1.2).

(2) Si A es compacto y K local, se tiene:

$$0\text{-Ext}_c(A) = 0\text{-Ext}_m(A) = 0\text{-Ext}_r(A) = 0\text{-Ext}_g(A) .$$

Finalmente, para las bolas de centro cero en espacios normados no arquimedianos, se verifica:

(4.24) TEOREMA. Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio normado no arquimediano sobre K y A una bola de centro cero en E. Entonces:

(i) $0\text{-Ext}_r(A) = 0\text{-Ext}_g(A) = 0\text{-Ext}_m(A)$.

(ii) Si además la valuación de K es discreta,

$$O\text{-}Ext_c(A) = O\text{-}Ext_r(A) = O\text{-}Ext_g(A) = O\text{-}Ext_m(A) .$$

Demostración

Consecuencia de (2.32), (3.15), (4.14) y (4.19).

CONSIDERACIONES FINALES

El objetivo de este último apartado es resaltar alguno de los resultados obtenidos en esta memoria, así como señalar ciertas cuestiones abiertas que en ella quedan planteadas.

El principal interés del trabajo reside en que es, aparte del trabajo de AJUPOV, la primera publicación (por mí conocida) en la que se incluyen diversas alternativas a una teoría de KREIN-MILMAN en Análisis no Arquimediano. Resulta satisfactorio también el que las diversas versiones consideradas en la memoria, sugeridas bien por intentos anteriores (AJUPOV,MONNA), bien por conseguir una teoría unificada en los casos arquimediano ó no, ó bien por lograr una teoría independiente de la topología, den resultados finales muy similares.

Como en el caso usual, el contexto en el que he planteado la memoria es el de los espacios vectoriales topológicos localmente convexos, si bien, con la hipótesis adicional de la completitud esférica del cuerpo base, la cual es necesaria para disponer de teoremas de separación de conjuntos convexos. Sin embargo, aparecen algunas diferencias significativas con relación al caso real ó complejo:

a) La relativización de los conceptos de puntos extremos, los cuales van a depender no sólo del conjunto, sino también de un punto previamente fijado en el mismo.

b) La consideración no sólamente de conjuntos compactos convexos (cuya existencia es muy limitada en Análisis no Arquimediano), sino con más frecuencia, de conjuntos c-compactos convexos.

c) Si bien cuando la valuación del cuerpo base es discreta, el teorema de KREIN-MILMAN es válido para cada definición de punto extremo en conjuntos convexos compactos (c-compactos), lo mismo no se cumple cuando la valuación es densa, en cuyo caso se ha impuesto a los conjuntos la hipótesis adicional de ser m^*-cerrados.

A lo largo de la memoria se dan cuatro definiciones, y sus correspondientes teoremas de KREIN-MILMAN, de punto extremo, presentando cada una de ellas un interés ó importancia relativo a distintas causas.

El interés central de la definición de punto extremo dada en el capítulo 2, reside en el hecho de que generaliza a la del caso usual. Sin embargo, implica la consideración de conjuntos compactos y, por tanto, cuerpos locales, condición ésta muy restrictiva en Análisis no Arquimediano. Además, los conjuntos extremos minimales nunca son puntos.

Las limitaciones anteriores se resuelven en el capítulo 3, donde se desarrolla y completa la teoría de AJUPOV de puntos extremos. La importancia de este capítulo radica en la extensión de dicha teoría a cuerpos dotados de valuación densa, gracias al concepto de conjunto convexo m^{*}-cerrado, así como en la respuesta a la cuestión planteada por AJUPOV en [1] de si los conjuntos extremos minimales son puntos.

Cabe destacar también la definición de punto extremo dada en el capítulo 4 a partir de una modificación del concepto de hiperplano de apoyo dado por MONNA, quien, como afirma en [28], no llegó a una teoría satisfactoria de KREIN-MILMAN.

Mientras que en el caso usual la definición de punto extremo es geométrica, no ocurre lo mismo con las tres definiciones anteriores. De ahí que la memoria concluya con una nueva definición que es independiente de la topología y que, por ello, venimos en llamar geométrica.

Entre las cuestiones no resueltas todavía en relación con el tema, la más importante, y en la cual se está trabajando actualmente, es el saber si el teorema de KREIN-MILMAN en alguna de sus versiones, tiene el mismo ó parecido interés que en el caso arquimediano, como técnica de estudio de propiedades de espacios localmente convexos.

Algunas cuestiones, entre otras, que quedan planteadas a tenor de los resultados de la memoria, son:

a) Extensión, en el contexto de los espacios vectoriales topológicos localmente convexos, a conjuntos c-compactos convexos, de la definición de punto extremo dada en el capítulo 2 para conjuntos compactos. Probablemente, esto exigiría el poder expresar un conjunto 0-convexo c-compacto en términos de series, de forma análoga al resultado de CARPENTIER dado en la página 33 , lo cual parece difícil, pues incluso en espacios localmente convexos con base Schauder, se demuestra ([9]) que un conjunto 0-convexo c-compacto está a lo sumo contenido en un conjunto expresado en términos de series.

b) Cálculo de los puntos (0,c)-extremos de las bolas en espacios normados sobre cuerpos dotados de valuación densa.

c) Obtención de teoremas de tipo MILMAN correspondientes a la teoría de AJUPOV de puntos extremos.

BIBLIOGRAFIA

[1] AJUPOV, Š.A. : "Der Kreĭn-Mil'mansche setz in local K-konvexen Răumen".

Doklady. Akad. Nauk. UzSSR, 3-5 (1974).

[2] ASIMOV, L. : "Extremal structure of well-compact convex sets".

Trans. Amer. Math. Soc. 138, 363-375 (1969).

[3] BRENDA MACGIBBON. : "A criterion for the metrizability of a compact convex set in terms of the set of extreme points".

Journal of Functional Analysis. II, 385-392 (1972).

[4] BUCY AND MALTESE. : "Extreme positive definite functions and Choquet's Representation theorem".

J. of Math. Analysis and Appl. , 371-377 (1966).

[5] CARPENTIER, J.P. : "Seminormes et ensembles convexes dans un espace vectoriel sur un corps valué ultramétrique".

Séminaire Choquet, 91-158 (1964-1965).

[6] CHOQUET, G. : "Lectures on Analysis". Vol. I-III.
W.A.BENJAMIN (1969).

[7] CORSON, H.H. : "Metrizability of compact convex sets".
Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 151, 589-596 (1970).

[8] DAVIS, W.J. : "The Radon-Nikodým property".
Séminaire Maurey-Schwartz. 1973-1974. Centre de Math., Ecole Polytech., Paris (1974).

[9] DE GRANDE-DE KIMPE, N. : "On the structure of locally K-convex spaces with a Schauder basis".
Indag. Math. 34, 113-129 (1972).

[10] EKELAND, I; TEMAM, R. : "Analyse convexe et problèmes variationnels".
DUNOD (1974).

[11] FUCHSSTEINER, B. : "Verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe und der Satz Von Krein-Milman".
Math. Ann. 186, 149-154 (1970).

[12] HAYDON, R. : "An extreme point criterion for separability of a dual Banach space, and a new proof of a theorem of Corson".
Quart. J. Math. Oxford (2) 27, no. 107, 379-385 (1976).

[13] HOLMES,R.B. : "Geometrical functional analysis and its applications".
Graduate Texts in Mathematics. No. 24. Springer-Verlag, New York-Heidelberg. x+246 p.p (1975).

[14] HULF, R.E.; MORRIS, P.D. : "Dual spaces with the Krein--Milman property have the Radon-Nikodým property".
Proc. Amer. Math. Soc. 49, 104-108 (1975).

[15] JACOBS, K. : "Extremalpunkte konvexer Mengen".
Selecta Mathematica. III. pp. 90-118. Heidelberg Taschenbücher, 86. Springer, Berlin (1971).

[16] JAYNE, J.E.; ROGERS, C.A. : "The extremal structure of convex sets".
J. Functional Analysis 26, no. 3, 251-288 (1977).

[17] KALTON, N.J. : "Compact p-convex sets".
Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 28. no. 111, 301-308 (1977).

[18] KALTON, N.J. : "An F-space with trivial dual where the Krein-Mil'man theorem holds".
Israel. J. Math. 36. no. 1, 41-49 (1980).

[19] KÖTHE, G. : "Topological Vector Spaces I".
SPRINGER-VERLAG, Berlin (1969).

[20] KREIN, M.; MILMAN, D. : "On the extreme points of regularly convex sets".
Studia Math. 9, 133-138 (1940).

[21] LARSEN, R. : "Functional Analysis, an introduction".
MARCEL DEKKER. INC. New York (1973).

[22] LIGAUD, J.P. : "Un théorème du tipe Krein-Milman pour les p-disques compacts d'un espace localement p-convexe".
Publ. Math. Univ. Bordeaux Année I, no 1. Exp. no. 6, 4 p.p (1972/73).

[23] LOONEY, CARL G. : "An Krein-Milman type theorem for certain unbounded convex sets".
J. Math. Anal. Appl. 48, 284-293 (1974).

[24] MARTINEZ MAURICA, J; PEREZ GARCIA, C. : "On a general theorem of Krein-Milman".
Pendiente de publicación.

[25] MONNA, A.F. : "Separation d'ensembles convexes dans un espace linéaire topologique sur un corps valué".
Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. A 67, 399-408, 409-421 (1964).

[26] MONNA, A.F. : "Sur un principe de maximum en analyse p-adique".

Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. A 69, 213-222 (1966).

[27] MONNA, A.F. : "Analyse non-archimedienne". SPRINGER-VERLAG, Berlin (1970).

[28] MONNA, A.F. : "Rapport sur la théorie des espaces linéaires topologiques sur un corps valué non-archimedien". Bull. Soc. Math. France, Mémoire 39-40, 255-278 (1974).

[29] OLIMOV, H.; HADŽIEV, DŽ. : "The Krein-Mil'man theorem in locally convex modules over semifields". Dok. Akad. Nauk. UzSSR. no. 6, 5-6 (1975).

[30] PHELPS, R.R. : "Support cones in Banach spaces and their applications". Advances in Math. 13, 1-19 (1974).

[31] PHELPS, R.R. : "Integral representations for elements of convex sets". Studies in functional analysis, p.p. 115-157, MAA Studies in Math., 21, Math. Assoc. America, Washington, D.C. (1980).

[32] REJTÖ, L. : "An application of the extreme point method. General type Farkas theorem".

Proceedings of the Fourth Conference on Probability Theory. (Braçov, 1971), p.p.195-197. Editura Acad. R.S.R., Bucharest (1973).

[33] ROBERTS, A.; VARBERG, E. : "Convex Functions". ACADEMIC PRESS (1973).

[34] ROBERTS, J.W. : "A compact convex set with no extreme points". Studia. Math. 60. no. 3, 255-256 (1977).

[35] ROOIJ, A.C.M. VAN. : "Notes in p-adic Banach spaces. VI". Report 7725, Math. Inst., Katholieke Universiteit, Nijmegen (1977).

[36] ROOIJ, A.C.M. VAN. : "Non-archimedean functional analysis". MARCEL DEKKER. INC. New York (1978).

[37] ROOIJ, A.C.M. VAN. : "Convexity in p-adic Banach spaces". Proceedings Conference in p-adic Analysis. p.p. 185-192. Nijmegen (1978).

[38] SAAB, E. : "Dentabilité, points extrémaux et propiété de Radon-Nikodým". C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. A-B 280, A575-A577 (1975).

[39] SAAB, E. : "Dentabilité, points extrémaux et propiété de Radon-Nikodým".
Bull. Sci. Math (2) 99. no. 3, 129-134 (1975).

[40] SPRINGER, T.A. : "Une notion de compacité dans la théorie des espaces vectoriels topologiques".
Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. A 68, 182-189 (1965).

[41] TIEL, J. VAN. : "Espaces localement K-convexes. I-III".
Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. A 68, 249-289 (1965).

[42] TIEL, J. VAN. : "Ensembles pseudo-polaires dans les espaces localement K-convexes".
Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. A 69, 369-373 (1966).

[43] VEED, E. : "A study of the Frechet spaces L_p, $0 < p < 1$ ".
Thesis University of Northern Colorado (1981).

[44] ZIRLER, V. : "Remark on extremal structure of convex sets in Banach spaces".
Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom Phys. 19, 451-455 (1971).