La teoría de conjuntos en el periodo Entreguerras: la internacionalización de la matemática polaca a través de *Fundamenta Mathematicae* y Sierpiński

Tesis doctoral de Andrés Chaves Beltrán

Director:
Dr. José Ferreirós Domínguez

Tutor:
Dr. Xavier Roqué Rodríguez

Centre D' Història de la Ciència

Universitat Autonoma de Barcelona

Septiembre de 2014

Agradezco a:

La Universidad de Nariño por patrocinar mis estudios de doctorado, sin este acto de confianza hacia mi por parte de la UDENAR habría sido poco probable que me aventurara a realizar un doctorado.

Al profesor José Ferreirós Domínguez, por acceder a dirigir esta tesis y por permitirme conocer parte de su bagage intelectual.

A Lucho Recalde por seguir brindándome su experiencia académica.

Al Master y el Doctorado en Historia de la Ciencia por mostrarme enormes posibilidades de estudio.

A mi familia por soportar mis cambios de ánimo durante estos años.

A Nancy, por tantas cosas.

Resumen

En esta tesis se abordan algunos aspectos del desarrollo histórico de la teoría de conjuntos desde su nacimiento en la década de 1870 hasta el inicio de la Segunda Guerra Mundial en 1939, enfatizando en el periodo 1920-1939 concretamente en Varsovia, en la revista *Fundamenta Mathematicae* y en la obra del matemático Waclaw Sierpiński.

En este sentido, se hace un estudio histórico de la teoría de conjuntos en la escuela de Varsovia en el periodo Entreguerras, estudiando los aspectos que se conjugaron para que la comunidad matemática en Polonia adquiriera una posición de reconocimiento a nivel internacional. Entre estos aspectos están el surgimiento de la revista *Fundamenta Mathematicae* como órgano de difusión de los matemáticos de la escuela de Varsovia, la cual se especializó en teoría de conjuntos y ramas afines a ésta, también se estudia la obra de Sierpiński en relación a la teoría de conjuntos.

Abstract

In this thesis some aspects of the historical development of set theory are tackled, since its birth in the 1870s until the beginning of the second World war in 1939, making stress in Varsovia, in the period from 1920 to 1939, in the journal *Fundamenta Mathematicae* and in the Sierpiński's work.

In this sense, a historical study of set theory in the Varsovia's school during the interwar period is made, assessing the facts that brought the mathematical community in Poland to acquire international recognition. Between them, the birth of the journal *Fundamenta Mathematicae* as an entity for spreading the work of mathematicians of the Varsovia's school, which become expert in set theory and similar branchs. It is also studied the Sierpinski's work in regard to set theory.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Esta investigación se enmarca en el estudio de la historia de la teoría de conjuntos, en concreto, se examina la concepción y los usos que una comunidad matemática emergente, como la polaca, tenía de esta rama de las matemáticas. También se aborda la conformación y la internacionalización de la comunidad polaca de matemáticos, enfatizando en la importancia de la revista *Fundamenta Mathematicae* como la primera revista especializada en una temática de las matemáticas como lo es la teoría de conjuntos, y en la figura y obra de Wacław Sierpiński, uno de los fundadores de esta revista.

La teoría de conjuntos ha jugado un papel básico en las matemáticas contemporáneas, más aún en el análisis matemático y sus ramas cercanas, ya que por ejemplo, el análisis se fundamenta en la estructuración de la línea recta, lo que permite determinar la idea moderna de función, que es indispensable para todas las ramas de las matemáticas. En [De La Pava, 2010, p. 65] se plantea la importancia de la teoría de conjuntos de la siguiente forma:

> De hecho, la relación entre la teoría de funciones, que alcanzó también su independencia del análisis, y la teoría de conjuntos ha llegado a ser tan estrecha que hoy en día difícilmente la primera puede dar un paso sin apoyarse en la segunda. La mayoría de textos modernos sobre teoría de funciones inician su presentación con uno o varios capítulos dedicados a la teoría de conjuntos.
>
> Más aún, los libros de texto de análisis, topología o álgebra,

> también tienen en sus preliminares o en el apéndice un capítulo dedicado a la teoría de conjuntos. En particular, el concepto de biyección, como instrumento para medir el tamaño de los conjuntos, ha sido trascendental en casi todas las áreas de las matemáticas. Dentro de los conceptos más extraordinarios que se han producido en la teoría de funciones, a través de métodos conjuntistas, están el de integral de Lebesgue y el concepto de medida. La presentación axiomática de la integral de Lebesgue se debe a los desarrollos de Cantor.

En ese aspecto también se puede traer a colación la visión moderna del grupo Nicolas Bourbaki, el cual ve la teoría de conjuntos como base de todas las matemáticas, donde el primero de los diez volúmenenes de su tratado *Elementos de matemática* se llama teoría de conjuntos, lo cual se relaciona con el enfoque conjuntista que se desprende de la obra de Dedekind y que se plantea en parte del capítulo 2.

Es pertinente aclarar que actualmente la teoría de conjuntos tiene un estado de independencia que no tuvo a principios del Siglo XX, ya que para ese entonces sus fronteras eran difusas y sus contenidos se solapaban con otras ramas que ahora son independientes. Estas ramas son la teoría general de conjuntos, la teoría de funciones, la topología, la teoría de la medida, la teoría descriptiva de conjuntos y la lógica. Estas ramas se han retrolimentado entre si y la historia de una de ellas implica estudiar parte de la historia de las otras.

Se puede profundizar en los tropiezos históricos que tuvo la teoría de conjuntos para obtener un reconocimiento por parte de la comunidad matemática, pasando por las dificultades de la "domesticación del infinito", de las aplicaciones que podían encontrarse a este nuevo campo y hasta por los roces personales de Cantor con algunos colegas. Lo anterior sirve para darse cuenta de la riqueza histórica de la teoría de conjuntos, lo cual significa a su vez un riesgo de perder el hilo si es que no se delimita la investigación, es así que este trabajo se centra en un fenómeno intelectual y sociológico como es el surgir de la revista *Fundamenta Mathematicae* y en la internacionalización de la matemática polaca. En ese sentido, se aborda la figura de Wacław Sierpiński, autor de 724 artículos y 50 libros (200 de estos artículos publicados en los primeros 20 años de la revista nombrada), como cabeza visible de esta comunidad de matemáticos polacos y como uno de los fundadores de esta revista, que fue la primera especializada en una rama de las matemáticas.

El surgimiento y la historia de la teoría de conjuntos ha tenido una tendencia a asociarse y a limitarse a la biografía de Georg Cantor, en ámbitos más ilustrados en los pormenores históricos y en las discusiones filosóficas surgidas de la teoría de conjuntos, se nombra también a Ernst Zermelo y el axioma de elección. En una historiografía de orden meramente epistemológico y en la que se limite a los dos principales problemas surgidos de la teoría de conjuntos estaría bien centrarse en Cantor y en Zermelo, pero para una historiografía más amplia en la que se vincule distintos enfoques de la teoría de conjuntos, como lo que se plantea en esta tesis, se debe involucrar la obra de varios más autores, algunos posteriores a ellos dos y de otros ámbitos europeos.

El aporte principal de este trabajo es la sistematización de una parte de la historia de las matemáticas que aunque se encuentra mencionada en algunos textos y artículos no se profundiza desde los distintos enfoques de los desarrollos conjuntistas surgidos de Cantor y de Dedekind ni desde la comparativa con ramas como la topología, la teoría de funciones y la lógica.

Estudiar el proceso de instauración de una escuela como la de Varsovia, requeriría el conocimiento del idioma polaco para acceder a documentos importantes tales como actas de reuniones, o quizás memorias de los seminarios y hasta la lectura de artículos en este idioma, sin embargo en la estrategia para internacionalizarse, llevada a cabo por los matemáticos polacos, facilita el estudio para un no polaco hablante, ya que optaron por publicar en los idiomas considerados internacionales (francés, alemán, inglés e italiano). Por ejemplo, la mayoría de la obra matemática de Sierpiński se encuentra publicada originalmente en francés, y en [Hartman et al., 1974] se traduce gran parte de sus artículos que fueron publicados originalmente en polaco. También buena parte de las memorias escritas por actores de esta historia se encuentra en francés y el inglés.

La investigación abordará el periodo comprendido entre la década de 1870, en la que Cantor y Dedekind hacen publicaciones con desarrollos conjuntistas, hasta el inicio de la Segunda Guerra Mundial en 1939. El énfasis se hará en las décadas de 1920 y 1930 que corresponde a los primeros veinte años de la revista *Fundamenta Mathematicae* en el ambiente de la Escuela de Varsovia y en la figura de Wacław Sierpiński, en las publicaciones que éste realiza en la revista y en el uso que éste daba de las investigaciones en conjuntos y sus aplicaciones.

La hipótesis con la que se inició esta investigación, y que fue abordada en la tesina [Chaves, 2010], es que la teoría general de conjuntos, en el sentido actual, no permite ser catalogada en 1930 como una disciplina matemática. En el capítulo 2, se dan razones para cambiar un término a esta hipótesis y se profundiza en la pregunta si la teoría de conjuntos puede, antes de la Segunda Guerra Mundial, considerarse como una subdisciplina de las matemáticas. La hipótesis y la pregunta posterior se enmarcan en una hipótesis más fuerte, trabajada en [Ferreirós, 2010], que consiste en que la teoría de conjuntos adquiere el estatus de disciplina[1] en la década de 1940 con los trabajos en lógica de Kurt Gödel, que van aplicados a la axiomatización de la teoría de conjuntos.

Al hablar de institucionalización de una subdisciplina matemática, se entra en un terreno de orden sociológico, ya que se debe enmarcar una comunidad impulsora de ésta a través de congresos especializados, producción en revistas, manuales o cursos (ligados a cátedras) en ámbitos académicos. En la década de 1870 no es preciso hablar de una comunidad en referencia a la teoría general de conjuntos, ni aún a lo que se consideraba como teoría de conjuntos. En su lugar, se puede identificar a Dedekind y Cantor como los pioneros de esta teoría. Dedekind no visualizaba la teoría de conjuntos independiente de otras subdiciplinas de las matemáticas, ya que la concebía como fundamentadora de éstas, mientras que Cantor no tenía ese enfoque y se permitía identificarle una parte pura y otra aplicada [Grattan-Guinness, 1970, p. 25]. La parte pura está relacionada con los fundamentos de ésta y la generación de transfinitos, mientras que en la parte aplicada señalaba los usos como en teoría de funciones, en topología e incluso en la física matemática.

Para 1920, ya se puede hablar de una comunidad matemática en torno a la teoría de conjuntos, siendo Varsovia uno de los casoa más se evidencia que la concepción de teoría de conjuntos ha evolucionado respecto a los desarrollos iniciales de Cantor y Dedekind. En ese sentido esta investigación se propone ahondar en la obra en teoría de conjuntos de Sierpiński, como representante de la escuela de Varsovia de matemáticas, con el fin de identificar el enfoque

[1] Subdisciplina, para el caso de esta trabajo.

de sus desarrollos conjuntistas, y determinar entre otras cosas si la parte pura de la teoría de conjuntos tiene tanta relevancia como la parte aplicada.

El objetivo general de este trabajo es caracterizar la teoría de conjuntos en Polonia en el periodo Entreguerras. Para abordar este propósito, se plantean los siguientes objetivos específicos:

1. Determinar el estatus de la teoría de conjuntos previo a la Segunda Guerra Mundial, en comparación con otras ramas de las matemáticas.

2. Determinar la recepción de los enfoques sobre los desarrollos conjuntistas de Cantor y Dedekind en algunos de los principales matemáticos de antes de la Segunda Guerra Mundial.

3. Señalar aspectos puntuales y claves que permitieron la instauración de la escuela de Varsovia y que posteriormente llevaron a ésta a ser reconocida en la comunidad matemática internacional.

4. Caracterizar la teoría de conjuntos en Sierpiński y en la revista *Fundamenta Mathematicae*.

5. Presentar una historiografía de la teoría descriptiva de conjuntos clásica.

Los objetivos específicos se abordan así: el primero en el capítulo 2, el segundo en los capítulos 3, 4 y 5 (teniendo en cuenta que en el capítulo 3 se da las bases para esta caraterización bajo los enfoques que en ese capítulo se describen), el tercer objetivo se aborda en el capítulo 4, el cuarto objetivo en capítulo 5 y el quinto objetivo en el capítulo 6.

En concreto, en el capítulo 2 se presenta el estatus de la teoría de conjuntos hasta antes de 1939, para ello se compara su relevancia con la de otras ramas. En [Chaves, 2010] se cuestiona la idea de que la teoría general de conjuntos se configuró como disciplina a partir de los trabajos de Cantor y Zermelo, lo cual se complementa y profundiza en ese capítulo. En 2.1 se presenta los criterios para que un campo de estudio se pueda considerar disciplina o subdisciplina científica, mientras que 2.2 se centra en determinar que la teoría de conjuntos, durante las décadas de 1920 y 1930, no alcanza a adquirir el rango de subdisciplina de las matemáticas, para ello se compara con la relevancia que otras ramas como la lógica y la topología han tenido en los 23 problemas de Hilbert (apartado 2.2.1), en las revistas de revisión de artículos *Jahrbuch Über die Fortschritte der Mathematik* (apartado 2.2.2) y *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* (apartado 2.2.3), y en los congresos internacionales de matemáticas (apartado 2.2.4).

En el capítulo 3 se presenta el enfoque que distintas escuelas y matemáticos tuvieron sobre la teoría de conjuntos. Se distinguen tres enfoques, los cuales son presentados en el apartado 3.1, dos de los cuales surgen de los trabajos de Cantor, el primero es de sus desarrollos conjuntistas con el propósito de resolver problemas de teoría de funciones u otras ramas, el segundo enfoque surge desde que descubrió que el conjunto de los número reales no es equipotente con el conjunto de los números racionales, dando así vida a los problemas sobre conjuntos y números transfinitos, demarcando así un enfoque en el que los desarrollos conjuntistas están para resolver problemas que son propios de la teoría de conjuntos; el tercer enfoque viene dado por la obra de Dedekind, contemporáneo de Cantor, quien inclina sus investigaciones en teoría de conjuntos con el propósito de dar una base sólida a las matemáticas. En el apartado 3.2 se presenta la recepción que tuvo los trabajos de Cantor y Dedekind entre algunos de los principales matemáticos italianos de final de Siglo XIX y también los enfoques que acogió Hilbert, el apartado 3.3 aborda ya el cambio de siglo y se adentra en los casos de la escuela de París (apartado 3.3.1), algunos matemáticos alemanes (apartado 3.3.2) y algunos matemáticos ingleses (apartado 3.3.3). En el apartado 3.4 se aborda desde mitad de la década de 1910, primero con varios matemáticos de diversas nacionalidades pero que en algún momento pasaron por Gotinga (apartado 3.4.1) y el apartado 3.4.2 se centra en Luzin y Alexandroff, de la escuela de Moscú.

El capítulo 4 se centra en Polonia, presentando algunos aspectos importantes de las matemáticas polacas del periodo Entreguerras, en lo que se resalta la fundación de la revista *FM* y la labor de Sierpiński como líder de la escuela de Varsovia. El apartado 4.1 hace un recorrido por el estado institucional de las matemáticas en el territorio polaco antes de la Primera Guerra Mundial. En 4.2 se focaliza en la escuela de Varsovia, en 4.2.1 se muestra el nacimiento y los años previos del nacimiento de ésta, mientras que en 4.2.2 se dedica a los primeros años de la revista *Fundamenta Mathematicae*, la cual sirvió para que se consolidara la escuela de Varsovia. El apartado 4.3 continúa con la escuela de Varsovia, pero analizando la retroalimentación entre lógica y matemática, enfatizando en algunos autores que encontraron temas en común entre la teoría de conjuntos y la lógica, especialmente desde los fundamentos de las matemáticas. En se desplaza el estudio hacia otro de los importantes centros matemáticos de Polonia, como es la escuela de Leópolis, donde se destaca la revista *Studia Mathematica*, surgida en el seno de esta escuela, y la cual se especializó en análisis funcional. El líder de esta escuela fue Stefan Banach, a quien se dedica el apartado 4.4.1, mientras que 4.4.2 se ocupa del denominado cuaderno escocés, que era un cuaderno en el que varios de los matemáticos de Leópolis escribían los problemas surgidos de sus disertaciones después de sus horas laborales. El apartado 4.5 se aborda superficialmente los otros tres centros importantes de matemáticas en Polonia, estos son Cracovia, Vilna y Posnania. En 4.6 se muestra algunas de las principales actividades de la Sociedad Polaca de Matemáticas y en 4.7 se presenta una biografía de Sierpiński.

El capítulo 5 tiene un énfasis estrictamente internalista, donde se analiza las publicaciones que Sierpiński hace en teoría de conjuntos, primero desde una distribución en cinco temáticas (apartado 5.1), estas son teoría general de conjuntos, apartado 5.1.1; conjuntos analíticos y proyectivos,[2] en el apartado 5.1.2; teoría de la medida, en 5.1.3; topología general, en 5.1.4; y funciones de variable real,[3] en 5.1.5. En 5.2 se hace una selección de artículos relevantes, 5.2.1 se dedica al artículo más importante de Sierpiński, en el que se repasa todos las secciones de esta larga publicación. En 5.2.2 se presenta el resumen de otosos artículos de Sierpiński, mientras que en 5.2.3 se muestra un resumen de artículos importantes publicados en *Fundamenta Mathematicae* de diversos autores. Estas últimas secciones tienen el fin de determinar, apartir de estos artículos, el enfoque que Sierpiński y *Fundamenta* daban a la teoría de conjuntos.

El capítulo 6 se dedica a una de las ramas en las que se dividió la teoría de conjuntos, esta es la teoría descriptiva de conjuntos. Se hace un especial énfasis en el surgimiento de esta teoría, enfatizando en los aportes iniciales de matemáticos de la escuela de Moscú y de la escuela de Varsovia. En 6.1 se estudia el peso de los temas de esta teoría en textos importantes, como el

[2]También denominada en otras partes de la tesis como teoría descriptiva de conjuntos.
[3]Denominada como teoría de funciones de variable real en otros apartados de la tesis.

de Hausdorff de 1914 y el de Kuratowski de 1933 que no se centran en teoría descriptiva (apartado 6.1.1) y luego en 6.1.2 en los libros de Luzin de 1930 y de Sierpiński de 1950 que si tienen como objeto de estudio temas de esta teoría, analizando la tabla de contenido de estos textos. En 6.2 se estudia cuatro hechos que han demarcado la emergencia de la teoría descrptiva, estos son: la propueta del estudio de las propiedades de regularidad, en 6.2.1; la introducción de los conjuntos borelianos y de las clases de Baire, en 6.2.2; la emergencia de los conjuntos analíticos y de los conjuntos coanalíticos, en 6.2.3; y la propuesta de la jerarquía proyectiva de conjuntos, en 6.2.4. El apartado 6.3 se dedica a analizar algunos aspectos técnicos (apartado 6.3.1) y otros de orden filosófico (apartados 6.3.2 y 6.3.3) que se infieren de la obra de Luzin en teoría descriptiva de conjuntos. Luego de las conclusiones de este capítulo (apartado 6.4), se presenta un anexo, apartado 6.5, en el que se presenta los principales resultados en teoría descriptiva de conjuntos después de su etapa clásica.

El capítulo 7, se dedica a las conclusiones que no se pueden obtener de la lectura de uno de los capítulos anteriores, sino que necesita mezclar temáticas de dos o más de esos capítulos o incluso de los apéndices.

Finalmente hay seis apéndices. En el apéndice A se presenta una clasificación disciplinar del 2010, en el apéndice B se presenta los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección, denotada por ZFE. En el apéndice C se presentan los 23 problemas que Hilbert enunció en el congreso internacional de matemáticas de 1900 en París como los que marcarían el derrotero de las matemáticas en el Siglo XX. En el apéndice D se desgloza la clasificación disciplinar del volumen de 1904 (publicado en 1906) del *Jahrbuch Über die Fortschritte der Mathematik*. En el apéndice E se muestra el artículo "Sobre las necesidades de las matemáticas en Polonia", que fue muy importante para el futuro de las matemáticas en Polonia después de la independencia en 1918. Finalmente, el apéndice F se presenta el título de todos los artículos que Sierpiński publicó en *Fundamenta Mathematicae* desde 1920 hasta 1939, clasificándolos en cinco temáticas (apéndice F.1) para posteriomente (apéndice F.2) recoger en varias tablas la información de porcentajes dedicados a cada una de las cinco temáticas.

Las cinco temáticas de las que se habla en el apéndice F son las que conforman sus temas de interés, y que para ese entonces encuadraban en lo que se denominaba teoría de conjuntos. Inicialmente, se propuso clasificar sus artículos en tres temáticas: teoría de conjuntos pura, topología y teoría de funciones; ello basado en la división de Cantor de la teoría de conjuntos de finales del siglo XIX. Sin embargo sobresalían artículos que no encuadraban en éstos, lo que llevó a reestructurar la clasificación e incluir teoría de la medida y teoría descriptiva de conjuntos. Con lo que se confirma que los procesos de independización de las subdisciplinas son graduales, ya que 30 años después de la división de Cantor, al menos en la escuela de Varsovia de matemáticas ya surgían algunas temáticas que para Cantor no se visualizaban como relevantes.

La clasificación de los artículos se ha hecho basándose inicialmente en la información que aporta el título, y cuando no era suficiente se pasaba a la lectura del resumen, que en muchos casos no era un apartado diferenciado del artículo, sino que el autor lo describía en las primeras líneas de éste. En varios casos, donde la frontera entre estas temáticas era confusa, debido a que algún artículo hacía uso de elementos conceptuales de dos o más de éstas, se ha recurrido a la fuente primaria *Jahrbuch Über die Fortschritte der Mathematik* [Jahrbuch Project, 2007], que plantea la ubicación disciplinar de estos artículos de acuerdo a los criterios vigentes en la época de publicación, lo que no necesariamente coincide con las clasificaciones actuales. También cabe decir que en los artículos donde persistía la duda sobre la preponderancia de alguna de las ramas, se nombra en una nota a pie de página cada ítem en el que podría haberse clasificado.

Como ya se dijo, un trabajo preliminar de esta tesis fue la tesina "La teoría de conjuntos en la obra de Wacław Sierpiński y los primeros años de la revista *Fundamenta Mathematicae*" [Chaves, 2010], en el cual se clasificó en cinco temáticas los artículos que Sierpiński publicó en *FM* desde 1920 hasta 1930. Previo a ello se había considerado una clasificación acorde a la concepción que Cantor presentaba de la teoría de conjuntos como pura y aplicada (ver [Grattan-Guinness, 1970]) a finales del Siglo XIX. En la parte aplicada destacaba la topología de puntos, la teoría de funciones de variable real y la física matemática, mientras que en la parte pura sobresalían los fundamentos de esta teoría y la generación de transfinitos. Cabe decir que de estas cinco temáticas señaladas por Cantor, se evidencia que Sierpiński acoge en su interés todas excepto la física matemática. Así, la propuesta inicial de clasificación de los artículos fue en tres temáticas: topología, teoría de funciones y teoría pura de conjuntos.

Sin embargo, el proceso de "destilación"de la matemática pura a fines del XIX y principios del XX (con la consiguiente separación de la física), la influencia francesa y rusa recibida por los polacos, generaron el surgimiento de unas temáticas que Cantor no podía visualizar en la década de 1880. Así en el ambiente de la naciente escuela de Varsovia de matemáticas, aquella propuesta inicial de clasificación resulta incompleta, por eso se aumentó los ítems clasificatorios de tres a cinco. En el transcurso de este trabajo se ha visto que en [Hartman et al., 1974] se divide cinco temáticas las publicaciones de Sierpiński en teoría de conjuntos,[4] ellas coincidiendo en gran parte con la que se propuso en [Chaves, 2010]. Solo hay una diferencia en las temáticas que vale la pena nombrar: aquí se denota "teoría de la medida"y en [Hartman et al., 1974] se denominó "Medida y categorías". Cabe decir que bajo ese segundo nombre tendría una frontera muy borrosa con otra de las temáticas propuesta (topología), pero se justifica ese nombre de acuerdo a la relevancia que adquirió un resultado que relaciona los conjuntos de medida cero con los conjuntos de primera categoría y que generó varias publicaciones posteriores. Aquí se decide replantear el nombre de la temática a teoría de la medida, ya que hay una cantidad de artículos que no solo se dedican a determinar si algunos conjuntos son medibles o no, sino que acoge aspectos más fundamentales de la teoría de la medida como son las medida o contenidos exterior e interior.

[4]En este caso no se tendrá en cuenta lo concerniente a teoría de números, que fué el otro gran interés de Sierpiński y al cual dedicó en la época inicial y en la final de su productividad

Capítulo 2

La categoría disciplinar de la teoría de conjuntos

En este trabajo se aborda un aparte de la historia de un campo disciplinar como lo es la teoría de conjuntos. No se opta por la perspectiva de la teoría de conjuntos desde un concepto o resultado,[1] o alrededor de la obra de un personaje como Cantor,[2] lo cual habría conducido a otra contextualización, movilizando otros fenómenos y quizás otros protagonistas. Es así que este capítulo se aborda desde una concepción diferente, entendiendo el concepto de disciplina como una unidad en el que además se pueda identificar parte de los procesos de las comunidades en los que la teoría de conjuntos tuvo relevancia.

Este capítulo se divide en dos partes, en la primera se habla de la concepción de disciplina en la historia de la ciencia, particularizando en el campo de las matemáticas. La segunda parte se centra en determinar si la teoría de conjuntos, durante las décadas de 1920 y 1930, alcanza a adquirir el rango de subdisciplina de las matemáticas y a ubicarla en una jerarquía disciplinar, para ello se usa criterios establecidos en la primera parte.

Cabe aclarar que no objetivo del capítulo abordar la concepción de disciplinas o subdisciplinas o proponer una jerarquía disciplinar en las matemáticas, sino hacer una comparativa de la teoría de conjuntos con otras ramas de las

[1] Como se hace en [Moore, 1982] tomando el axioma de elección como el centro de la historia.

[2] Como se plantea en [Grattan-Guinness, 1980].

matemáticas.

2.1. Clasificación disciplinar en matemáticas

En historia de las ciencias se ha usado el concepto de disciplina como una unidad de análisis que hace referencia a un campo de conocimiento delimitado que se identifica como una ciencia separada (más no aislada) que tiene sus propios métodos, problemas y practicantes. Como prototipos de disciplinas científicas están la física, la química, la biología y la matemática.

Los sociólogos, han usado las categorías de disciplinas, subcampos, especialidades y subespecialidades para referirse a un modelo de jerarquía de las organizaciones científicas, por ejemplo en [Nye, 1993, p. 2] recoge el siguiente ejemplo de Daryl E. Chubin:

> (1)discipline: physics; (2) subfield: high energy or elementary particle physics; (3) speciality: weak interactions; (4) subspeciality: experimental, rather than theorical, studies.

En este trabajo se abordará las tres primeras escalas de esta jerarquía, es decir disciplinas, subcampos (en este caso las llamaremos subdisciplinas) y especialidades, teniendo en cuenta que varios de los autores reseñados en la bibliografía, no distinguirán entre estas jerarquías y se referirán a todas estas como disciplinas.

Los historiadores de la ciencia se han centrado en dos tipos de factores en la constitución y descripción de una disciplina científica: los factores sociales y los intelectuales. Por ejemplo, en [Kohler, 1982] se da una aproximación a su concepción de disciplina:

> Las disciplinas son instituciones políticas que demarcan áreas del territorio académico, asignan los privilegios y responsabilidades del experto, y estructuran las demandas de recursos. Son la infraestructura de la ciencia, personificada en departamentos universitarios, en asociaciones profesionales y en las relaciones de mercado informales entre los productores y los consumidores

> del conocimiento. Son criaturas de la historia y reflejan hábitos y preferencias humanos, no un orden natural preestablecido.[3]

[Gauthier, 2006, p. 20] plantea que Kohler admite la influencia de criterios intelectuales en el inicio de la constitución de una nueva disciplina, sin embargo, considera que los factores determinantes son los económicos y políticos. En el caso de las matemáticas, el propio Gauthier recoge tres concepciones relativas a la noción de disciplina:

En primera instancia plantea como Roland Wagner-Döbler y Jan Berg[4] se proponen medir la dinámica de diferentes dominios de las matemáticas en el siglo XIX. Para ello se calcula en cada año el porcentaje de artículos publicados en las revistas matemáticas en un dominio específico. Ellos usaron el índice Matemático del *Catalogue of Scientific Papers of the Royal Society of London*, que proporciona una clasificación. Las entradas de esta clasificación se establecen para delimitar los dominios sin analizar lo que éstos abarcan. Esta herramienta es la más común, donde el punto de vista de los especialistas es pedido para identificar las disciplinas matemáticas, sin embargo Gauthier plantea una objeción a este tipo de aproximación: no todos los matemáticos tienen la misma concepción de lo que es su especialidad.

Charles Fisher[5] se opone a la concepción de teoría concebida como el conjunto de ideas relacionadas con los objetos matemáticos. En su lugar, Fisher considera que es una categoría social que cambia con el punto de vista de los matemáticos, así él propone la necesidad de considerar los factores sociales para comprender la constitución y el desarrollo de una disciplina.

De otro lado, el mismo Gauthier plantea que Ralf Haubrich propone una lista de criterios puramente internalistas para caracterizar una disciplina matemática. Esos criterios son, por ejemplo, la identificación de un objeto de estudio, de un núcleo de conceptos y de resultados principales, la sistematización de la disciplina (reflejada por su aparición en las tablas de contenido de los libros, las clasificaciones de revistas), su sistema de pruebas (es decir,

[3] En [Ferreirós, 1995] referenciando a Kohler

[4] En el artículo de 1996, “Nineteenth-Century Mathematics in the Mirror of its Literature: A Quantitative Approach.” *Historia Mathematica*, vol. 23, pp. 288-318.

[5] Fisher Charles S., 1966-1967, “The Death of a Mathematical Theory: a Study in the Sociology of Knowledge”. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 3, p. 137-159.

los medios según los cuales se validan las soluciones de los problemas propuestos), la valoración dada por los matemáticos para evaluar los problemas y los resultados obtenidos.

Los factores propiamente intelectuales son más delicados de articular que los factores sociales, sobre todo porque enunciados aparentemente idénticos pueden hacer referencia a hechos diferentes según las épocas, por ejemplo, Gauthier en las conclusiones de su tesis plantea que el sentido de la geometría de números cambia con las distintas prácticas matemáticas de Minkowski y de Mordell.

Según [Strasser, 2002] (reseñado también en [Gauthier, 2006]), el desarrollo de una nueva disciplina se describe en etapas:

-Primero, la aparición de un pequeño grupo de colaboradores de nuevas prácticas de investigación, de nuevos discursos, de nuevos factores explicativos y/o de nuevos instrumentos.[6]

-Luego, la institucionalización de tales innovaciones a través de la creación de revistas y/o institutos de investigación.

La apreciación de Strasser está acorde con el planteamiento de Kohler: primero se evidencian los factores internos y luego los sociales. En lo que corresponde a este capítulo, se debe tener en cuenta que para el caso de las subdisciplinas y especialidades de las matemáticas, los factores sociales no tienen tanto grado de relevancia como para las disciplinas.[7]

De la primera etapa se puede entender las nuevas prácticas de investigación como aquellas que se asocian al surgimiento de problemas propios, es decir que no pertenecen a las ramas cercanas, y en ese sentido eso sería un indicativo de independencia de las ramas cercanas.

Otro aspecto importante en la noción de disciplina es la enseñanza y la pedagogía. En ese sentido, Steve Fuller señala respecto al sentido antiguo de

[6] En el caso de las matemáticas se identifican algunos instrumentos como tablas de logaritmos, computadores, entre otros, sin embargo para el caso de la teoría de conjuntos no se ha usado instrumentos.

[7] Esto último se amplía en las conclusiones de este capítulo.

disciplina como "un conjunto de prácticas cultivadas y transmitidas por un grupo de gente especialmente preparada"se refiere a la noción de "escuela "de los historiadores, así que "disciplina"se relaciona con los medios de transmisión del saber.

Una categoría distinta de análisis es propuesta por Thomas Kuhn, quien prefiere interesarse en las comunidades científicas más que en las disciplinas, poniendo de relieve que elementos internos -como la noción de paradigma- son esenciales para la identificación de tales comunidades. Las comunidades científicas se apoyan en la intensificación de la interacción, en la experiencia compartida, en valores comunes y en la orientación de los miembros de la comunidad hacia los problemas que constituyen la disciplina respectiva.

De todo lo anterior, se puede concluir lo que se plantea en [Ferreirós, 1995]:

> La decisión sobre cuándo algo es realmente una disciplina no debe basarse fundamentalmente en cuestiones de contenido, sino en cuestiones algo más generales como las siguientes: ¿existe una comunidad de investigadores, sistemas de comunicación como las revistas? ¿Hay mecanismos de aprendizaje de dicha ciencia, un sistema de reproducción de la comunidad bien establecido? ¿Existen apoyos económicos e institucionales? Etc. Sin embargo, es obvio que las cuestiones de contenido son importantes a la hora de describir de qué disciplina se trata exactamente.

Ferreirós también plantea que el problema de la formación de disciplinas debe tratarse siempre en términos de un sistema, no de evoluciones aisladas (sin tener en cuenta las disciplinas cercanas), y dentro de un marco sociocultural o nacional determinado.

Así, [Ferreirós, 1995] aborda el mundo de habla alemana entre 1790 y 1840, donde surge por primera vez algo similar al moderno sistema de las disciplinas científicas. De lo expuesto en tal artículo, que entre otras cosas rastrea a la física como disciplina central y a la matemática y a la química como disciplinas vecinas, es de interés para este trabajo la ubicación en ese marco nacional alemán, donde se da suficiente información para que se pueda plantear a la matemática como disciplina central y como disciplinas vecinas la física y la ingeniería[8].

En el proceso de constitución de las disciplinas, ligado a sus procesos de profesionalización, se presupone la existencia de una *función social* de sus practicantes, el cual debe ser reconocido por la sociedad o el Estado, lo cual lleva a que se fomente económicamente el desarrollo de tales disciplinas y a que se regulen formalmente las condiciones de acceso a ellas.

Ferreirós ilustra dos funcionalidades reconocidas para las matemáticas alemanas en el Siglo XIX. De un lado, en el sur de Alemania pricipalmente (en estados como Austria, Baden y Baviera), donde se difundió el modelo parisino del Siglo XVIII, como el de la École Polytechnique, donde la matemática tenía un rol al servicio de la ingeniería en la construcción de obras civiles; ante ello Ferreirós dice que de ser ésta la única funcionalidad de la matemática no habría obtenido la cuota de independencia necesaria para consolidarse como disciplina.[9] De otro lado, en Prusia a la matemática se le daba un rol clave en la educación, será considerado el idioma de la razón, lo que llevó a que se considerará como un elemento básico para una buena educación. Además de eso, a las facultades de filosofía de las universidades alemanas se les asignó la tarea de formar a los profesores de secundaria; así la matemática obtuvo un lugar seguro en las universidades. Con lo que Ferreirós concluye[10] que ese fue el mecanismo que permitió el desarrollo de la matemática pura al menos en Alemania.[11]

La problemática histórica del surgimiento de las subdisciplinas matemáticas es distinta al de la aparición y/o consolidación de las disciplinas. En la primera mitad del Siglo XIX se consolidaron las relaciones entre las disciplinas científicas y sus fuentes de recursos y por otro lado, como se plantea en [Ferreirós, 1995, p. 13], en el Siglo XX "la existencia misma de un sistema de las disciplinas, socialmente organizado, estableció mecanismos pro-

[8]Esta última careciendo del carácter de ciencia pero retroalimentándose de las matemáticas.

[9]Aunque Ferreirós no hace alusión a las dos etapas de Strasser como requisitos para el desarrollo de una disciplina, cabe decir que esto concuerda con lo dicho sobre la independencia de las ramas cercanas como un indicativo de la primera etapa de Strasser.

[10]Citando *Die entstehung des Mathematiklehrerberufs in 19. Jahrhundert*. Beltz, Weinheim, 1983. De Schubring, G.

[11]Recuérdese que el artículo [Ferreirós, 1995] se refiere al mundo de habla alemana.

pios que regularon el desarrollo posterior", entendiendo que parte este desarrollo posterior es el surgimiento de las subdivisiones disciplinares, así en [Stichweh, 2001] se plantea que "alrededor de 1900 las mezclas interdisciplinarias y las especialidades subdisciplinarias emergieron como respuesta al estancamiento, crecimiento o dificultades de las disciplinas científicas".

En ese sentido se debe tener en cuenta alguna diferencias entre el surgimiento de las disciplinas (matemáticas, física, química, biología) con el de sus subdisciplinas o ramificaciones. En el caso de las matemáticas, y acotando aún más a lo que interesa en este trabajo como es la teoría de conjuntos y las materias cercanas (como lógica y topología entre otras), es más complejo identificar su rol o funcionalidad que en el caso de las disciplinas, ya que los aspectos internos (en relación a las materias consolidadas como subdisciplinas o en proceso de estarlo) empiezan a adquirir un mayor peso.

Ahora, relativo a la propuesta de [Ferreirós, 1995] de abordar el estudio del surgimiento de las disciplinas dentro de un marco nacional, se ha adecuado al contexto polaco en los capítulos 4 y 5, pero el siguiente apartado se usa en un contexto internacional, especialmente europeo. Sin embargo se ubica la clasificación disciplinar de las ponencias que Sierpiński hace en los congresos internacionales de matemáticas y de algunos artículos relevantes de él y de algunos publicados en *Fundamente Mathematicae*, que conecta con los objetivos de los siguientes capítulos.

2.2. Estado de las clasificaciones disciplinares en matemáticas a principios de Siglo XX: Hilbert, *Jahrbuch*, *Zentralblatt* y Congresos Internacionales

Definir las fronteras de clasificación disciplinar en matemáticas es un reto complejo[12], Emil Lampe (1840 - 1918), co editor del *Jahrbuch Über die Fortschritte der Mathematik* desde 1885 hasta su muerte explicaba:

[12] Basta ver actualmente la clasificación que maneja la *AMS* para determinar la gran cantidad de vertientes. Tal clasificación se puede consultar en http://www.ams.org/mathscinet/msc/pdfs/classifications2010.pdf

> ... ciertamente no existe una clasificación exhaustiva de las disciplinas matemáticas y aunque muchos grupos pueden ser fácilmente delimitados en una clasificación no muy fina, es extraordinariamente difícil dividir todos los campos matemáticos de acuerdo a un esquema uniforme preciso. También es bastante fácil encontrar fallos en una división de muchas categorías muy finas.[Corry, 2007, p. 226].

En lo que sigue se aborda las ramificaciones de las matemáticas a inicios de siglo XX. Ello con el objeto de identificar los dominios "académicos"que, de acuerdo a las dos etapas de surgimiento de una disciplina planteadas anteriormente por Bruno Strasser,[13] pudiesen desembocar en una subdisciplina. En este caso se presenta la clasificación por temáticas de los 23 problemas de Hilbert según el artículo [Corry, 1998], posteriormente la división disciplinar o por secciones del *Jahrbuch Über die Fortschritte der Mathematik* y del *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* y por último, las secciones de los congresos internacionales de matemáticas correspondientes a la época que aquí interesa.

Una variable que puede dar peso a la labor de identifación de las subdisciplinas es la escolaridad, en concreto se debe determinar si la teoría de conjuntos llega a convertirse en un curso habitual o especializado en la formación de los matemáticos de la época, donde se pueda seguir los contenidos de estos cursos. En este caso, se puede decir que esta variable se cubre, aunque de un modo superficial,[14] con el análisis de los contenidos de los manuales de autores como Haussdorff y Luzin en el capítulo 3, mientras que para el caso de Polonia y Sierpiński en el capítulo 6, ya que es una práctica habitual entre los profesores publicar sus notas de clase en forma de manuales. También cabe decir que en este capítulo se ha optado por darle el peso mayor a las secciones de los congresos internacionales de matemáticas, ya que representan un ámbito más universal que las cátedras locales, que en lo relativo a este capítulo es lo que interesa.

Cabe decir, que de acuerdo con el apartado 2.1, referente a los criterios que sirven para admitir a un campo de estudio como subdisciplina de las

[13] Apartado 2.1, página 22.

[14] A pesar de ello cabe recalcar que la variable escolaridad puede dar suficiente material para otra investigación.

matemáticas, y basándonos en lo propuesto por Bruno Strasser sobre las dos etapas para la descripción de una nueva disciplina, se usa la lista de los 23 problemas Hilbert como testigo de la primera etapa del surgimiento de una disciplina, del que surgirán nuevos discursos y nuevos factores explicativos,[15] mientras que la clasificación disciplinar del *Jahrbuch* y del *Zentralblatt* y las secciones de los congresos internacionales de matemáticas son indicadores que apuntan a la segunda etapa, que Strasser identifica como institucionalización de tales innovaciones.

2.2.1. Los 23 problemas de Hilbert

Al hablar del panorama de las matemáticas a inicios del Siglo XX, es necesario remitirse al Segundo Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en París en 1900, en particular a la famosa ponencia del matemático alemán David Hilbert *Mathematische Probleme* en la que él se atrevió a postular 23 problemas que marcarían el derrotero de las matemáticas en el siglo que empezaba.

[Corry, 1998] dice que no es exagerado afirmar que tal vez únicamente Hilbert hubiera podido cubrir todo ese campo y producir una lista coherente de los problemas que se le hacían más urgentes a lo largo y ancho de la disciplina, de hecho, en esa época, Hilbert, profesor en la Universidad de Gotinga, era considerado como el matemático alemán más prestigioso.

De la lista de 23 problemas propuestos por Hilbert, los dos primeros corresponden a teoría de conjuntos, estos son: [16]

1. Problema de Cantor sobre el cardinal del continuo. ¿Cuál es el cardinal del continuo?

2. La compatibilidad de los axiomas de la aritmética. ¿Son compatibles los axiomas de la aritmética?

El primer problema se ha denominado como *Hipótesis del continuo*, el cual

[15] Otro indicador de esta primera etapa son los resultados resultados de autores como Cantor, Dedekind y Zermelo entre otros, pero esto se aborda en el capítulo 3.

[16] En el apéndice C se muestra la lista completa de éstos problemas.

ha generado gran cantidad de publicaciones,[17] mientras que el segundo se trata de la consistencia de los axiomas de la aritmética (de $\mathbb{R}$), llamando así la atención hacia la nueva axiomática de inspiración conjuntista.

De otro lado, [Corry, 1998], atendiendo a la visión hilbertiana del quehacer matemático, ubica cada uno de los 23 problemas de la siguiente manera:

- Fundamentos (del análisis, de la geometría, de la física): 7 problemas, del 1 al 6 y el 18.

- Teoría de números: 6 problemas, de 7 al 12.

- Algebra (invariantes y geometría algebraica): 5 problemas, del 13 al 17.

- Análisis (cálculo Variacional y análisis complejo): 5 problemas, del 19 al 23.

En lo que no se vislumbra aún a la teoría de conjuntos como una parte de "suficiente"peso en la matemática, como lo es al álgebra o el análisis. Cabe decir también que la clasificación de Corry admite discusión, en especial al incluir los problemas geométricos en lo items de Fundamentos y de álgebra.

Aunque el propósito de la elaboración de esta lista no era presentar el estado de las matemáticas, sino más bien proponer un derrotero de las matemáticas del nuevo siglo, da una idea de los problemas más importantes para las matemáticas, y aquí hacemos uso de la ubicación disciplinar de esos problemas para poder determinar el grado de relevancia, en el ambiente matemático, de la teoría de conjuntos, así mismo podemos hacernos una primera idea de las disciplinas dominantes, ya que la lista fue elaborada por uno de los principales representantes de la matemática de la época.

[17] Sobre la historia de la hipótesis del continuo se puede consultar el artículo de Gregory Moore "Towards a History of Cantor's Continuum Problem ", in *The History of Modern Mathematics*, edited by D. Rowe, and J. McCleary, vol. I, (Boston, 1989); el libro de Paul J. Cohen de 1966 *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W. A. Benjamin, New York, 1966; o el artículo de Donald A.Martin "Hilbert's first problem: the continuum hypothesis,"en *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XXVIII*, F. Browder, editor. American Mathematical Society, 1976, pp. 81-92.

2.2.2. *Jahrbuch Über die Fortschritte der Mathematik*

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (*Anuario de avances en matemáticas*) se trata de la primera publicación científica “de segundo orden” que apareció en el mundo de las matemáticas, antecesora del actual *Mathematical Reviews*; es decir, una publicación de reseñas acerca del contenido de libros y revistas publicados en la época, para facilitar el procesamiento de la gran cantidad de información que generaban los matemáticos en el Siglo XIX.

Este anuario fue fundado por los matemáticos berlineses Felix Müller y Carl Ohrtmann [18] en 1869, y apareció continuamente cada año hasta 1945. Su propósito era reseñar todas las publicaciones anuales en matemáticas y ha sido una útil herramienta para la investigación en matemáticas, ya que más de doscientos mil publicaciones fueron reseñadas en los 68 volúmenes del *Jahrbuch*. [19]

Las secciones del volumen del año 1904 son:[20]

1. Historia y Filosofía.
2. Álgebra.
3. Aritmética elemental y superior.
4. Teoría de probabilidad y combinatoria.
5. Series.
6. Cálculo diferencial e integral.
7. Teoría de funciones.
8. Geometría pura, elemental y sintética.
9. Geometría analítica.
10. Mecánica.

[18] Ambos profesores de un Gimnasio en Berlín.

[19] Para profundizar sobre la historia del *Jahrbuch* se puede ver [Wegner y Staff Unit Communications, 2008].

[20] Se puede ver el desgloce completo de este volumen en el apéndice D

11. Física matemática.

12. Geodesia, astronomía, metereología.

Desde el primer volumen, hasta 1904, se mantienen fijas las doce secciones. Salvo pequeños cambios en nombre de éstas, como el volumen de 1880 (publicado en 1882) en el que la sección 3 no se denomina aritmética elemental y superior sino teoría de números.

De otro lado, no aparece como sección, ni siquiera como un apartado la teoría de conjuntos, ni la topología ni la lógica.

Algunas publicaciones como las de Cantor, que se pueden reconocer bajo el dominio de la teoría de conjuntos fueron clasificadas por el *Jahrbuch*: [21]

- Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.

  Published: 1883

  Subject heading: Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie. Capitel 1. Principien der Geometrie.

- Beitrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Art. I (Publicado en 1895) y Art. II (Publicado en 1897).

  Subject heading: Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie. Capitel 2. Philosophie und Pädagogik. A. Philosophie.

La primera, "Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre", de 1883, es reseñada en la sección ocho: Geometría pura, elemental y sintética, y de esta sección, en el capítulo 1: Principios de geometría.[22]

Los dos artículos "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" de 1895 y 1897, se reseñan en la sección 1: Historia y Filosofía. De esta sección en el capítulo 2: Filosofía y pedagogía, y de esta subsección, en el numeral A: Filosofía.

[21] Datos tomados de [Jahrbuch Project, 2007].

[22] Puede resultar curioso que se ubique en Geometría. Sin embargo podría entenderse porque aquí Cantor se refiere a conjuntos de puntos en el espacios euclídeos, además *Grundlagen* tiene una parte sobre el continuo y los números reales, lo que equivale al análisis del continuo geométrico.

En el volumen de 1905 (publicado en 1908) aparece por primera vez en el índice del *Jahrbuch* la palabra *Mengenlehre*, en la primera sección, que pasa de llamarse *Geschichte und Philosophie* (historia y filosofía) a *Geschichte, Philosophie und Pädagogik* (historia, filosofía y pedagogía). El desgloce de esta nueva sección es:

Erster Abschnitt. Geschichte, Philosophie und Pädagogik
Kapitel 1. Geschichte.
A. Biographisch-Literarisches
B. Geschichete einzelner Disziplinen
Kapitel 2. Philosophie, **Mengenlehre** und Pädagogik
A. Philosophie
B. **Mengenlehre**
C. Pädagogik

La inclusión de *Mengelehre* en el índice del *Jahrbuch* en 1905, tiene un fuerte motivo en que el año 1904 fue importante para la teoría de conjuntos por dos hechos que inquietaron la comunidad matemática, primero por la conferencia dictada por Julius König en el Congreso internacional de matemáticas[23] en la que “demostraba”que el cardinal del continuo no puede ser ninguno de los alefs de Cantor, concluyendo la falsedad de la hipótesis del continuo.[24]

Esta conferencia tuvo gran repercusión, sin embargo poco tiempo después, Felix Hausdorff detectó que había un error en la tesis de Bernstein, y que König apoyaba su resultado en ello, quedando reducido el resultado de König a que el continuo no puede tener una cardinalidad de ciertos alefs. Al mismo tiempo, y como segundo hecho importante en este año, Zermelo refutó indirectamente el resultado de la conferencia de König a través de un artículo con título “Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann”(“Demostración de que todo conjunto puede ser bien ordenado”, generando inmediatamente reacciones a favor y en contra por el hecho de usar abiertamente el axioma de elección y por ende alejándose de toda postura constructivista.[25]

[23]Titulada *Zum Kontinuumproblem*.

[24]Recuérdese que es el primero de los problemas de la lista de Hilbert.

[25]En [Ferreirós, 2004] se cuentan detalles de las reacciones a partir de la conferencia de König y de la demostración de Zermelo.

Una de las reacciones a la publicación de Zermelo es que al año siguiente, 1905, el volumen 60 de la revista *Mathematische Annalen*, dirigida por Klein y Hilbert, publicó una serie de artículos en los que se discutía el teorema de Zermelo y el axioma de elección y que fueron reseñados en el *Jahrbuch*. Ahora, de las 29 publicaciones reseñadas en el apartado *Mengelehre*, 17 corresponden a problemas de teoría general de conjuntos, los demás encuadran en temáticas más cercanas a topología, teoría de funciones o teoría de medida.

Entre las críticas a la demostración de Zermelo, Schoenflies plantea una duda respecto a un recurso usado en ésta debido al uso de cierto tipo de conjuntos bien ordenados, que se denominaron "γ conjuntos", que podrían generar paradojas, por lo que Zermelo realizó una demostración de su resultado en 1908 y que por supuesto *Jahrbuch* referenció en el nuevo apartado:

- Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. (Publicado en 1908)

  Subject heading: Erster Abschnitt. Geschichte, Philosophie und Pädagogik. Kapitel 2. Philosophie, Mengenlehre und Pädagogik. B. Mengenlehre.

Un ejemplo de una publicación relevante es el famoso texto de Hausdorff de 1914 que aparece así reseñado:

- Grundzüge der Mengenlehre (Publicado en 1914):

  Subject heading: Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie. Kapitel 2. Philosophie, Mengenlehre und Pädagogik. B. Mengenlehre.

Otro es el de Sierpiński de 1918:

- L' axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l' analyse (Publicado en 1918).

  Subject heading: Dritter Abschnitt. Mengenlehre. Allgemeines und abstrakte Mengen. Punktmengen.

Para el volumen de 1916-1917 *Mengelehre* deja de ser un apartado de capítulo para ser una sección (la tercera), tomando el nombre: *Mengenlehre. Allgemeines und abstrakte Mengen. Punktmengen*, siendo junto a la séptima sección

Teoría de la relatividad y teoría de la gravitación, las únicas que no tienen capítulos. Para 1928 pasa a ser la segunda sección *Mengelehre. (Abstrakte Mengen. Punktmengen)*. En el volumen de 1936, la primera sección deja de llamarse *Historia, filosofía, pedagogía* para llamarse simplemente *Historia*, donde parte de la temática que deja esa primera sección pasa a ser parte de la segunda sección, que toma el nombre *Grundlagen der Mathematik. Abstrakte Mengenlehre*. Cabe decir que estas dos secciones son las únicas que no tienen capítulos. [26]

Relativo a los apartados que pudiesen tener una frontera común con la teoría de conjuntos cabe señalar el capítulo 2 *Kotinuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie)*, de la sección: *Reine, elementare und synthetische Geometrie*. En el volumen de 1905, este apartado tiene once publicaciones, ninguna de ellas se centra en algún aspecto de la teoría general de conjuntos. De manera similar, en el apartado *Allgemeines* (generalidades) de la sección *Funktiontheorie* (teoría de funciones)[27] no está “permeada”por publicaciones centradas en Mengelehre, por lo que se puede notar que desde entonces ya se se podía establecer distinción entre la teoría de conjuntos de puntos y la teoría general de conjuntos y que la topología y la teoría de funciones tienen una frontera mejor demarcada que la teoría general de conjuntos, lo que puede servir además como indicador de tener un mayor grado de independencia respecto a sus ramas cercanos. Sin embargo en el apartado Mengelehre se puede encontrar algunas publicaciones que se asocian más al analysis situs o topología (o quizás a teoría de la medida o a funciones de variable real) que a Mengelehre.

En el volumen de 1914-15, el capítulo 2 *Kotinuitätsbetrachtungen (Analysis*

[26] En [Jahrbuch Project, 2007], la búsqueda de un importante artículo de Sierpiński aparece así referenciado:

- L’ axiome du choix et l’ hypothèse du continu. (Publicado en 1938)

  Subject heading: Erster Halbband. D. Analysis. 2. Mengenlehre. a) Abstrakte Mengen.

Lo que muestra que *Mengenlehre*, vuelve a bajar de jerarquía, perdiendo el rango de sección, para pasar a ser capítulo, sin embargo se debe tener en cuenta que hay una reorganización de las secciones del *Jahrbuch*, el cual venía perdiendo vitalidad justo en la década de 1930, por lo que no sería ya un referente idóneo para analizar como lo es el *Zentralblatt*.

[27] Con bastantes más publicaciones.

situs, Topologie) de la sección *Reine, elementare und synthetische Geometrie* ocupa 12 páginas de publicaciones (728-736 y 1345-1349), y el apartado *Mengenlehre* ocupa 13 páginas (123-133 y 1219-1222).

En el volumen de 1916 - 17 el capítulo *Kotinuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie)* pasa a llamarse *Kontinuitäts - und mengentheoretische Betrachtungen*, el cual no tiene publicaciones centradas en teoría general de conjuntos, siendo las publicaciones de ese ítem más cercanas al analysis situs y a la topología geométrica, con temas como cristalografía, grupos, homomorfismos, líneas y/o curvas de Jordan, mientras que en la sección Mengelehre se puede ver alguna publicación como la de E.W. Chittenden "On the Heine-Borel property in the theory of abstract sets"(vol 1919-1920) que claramente se centra en un concepto topológico como lo es la propiedad de Heine-Borel, o publicaciones de M. Fréchet en el volumen de 1916-17 con títulos como "Sur la notion du voisinage dans les ensembles abstraits", "Relations entre les notions de limite et de distance"; o los de Sierpiński titulados "L' arc simple comme un ensemble de points dans l' espace à m dimensions", "Un théorème sur les ensembles fermés", "Sur une extension de la notion de densité des ensembles"entre otros, que se centran en aspectos topológicos o de teoría de la medida y no en aspectos de teoría general de conjuntos. Este apartado pasó, en el volumen de 1925 a denominarse *Topologie*.

El *Jahrbuch* se vio opacado por la fundación, también en Alemania del *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* [28] en 1931 y del *Mathematical Reviews* en Estados Unidos en 1940.

Otras revistas de reseñas, contemporáneas al *Jahrbuch*, pero menos visibles e influyentes fueron el *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, que surgió en Francia en la década de 1870 y la holandesa *Revue semestrielle des publications mathématiques* que surgió en la década de 1890.

2.2.3. *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*

Zentralblatt MATH, como se le conoce actualmente, fue fundada en 1931 por el matemático Otto Neugebauer bajo el nombre *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* (*Revista central de matemáticas y temas relaciona-*

[28] De la cual se tratará en el siguiente apartado.

dos). Se creó creó como alternativa al *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, en el que las publicaciones podían tardar algunos años en ser referenciados. Entre los objetivos del *Zentralblatt* primaban la prontitud e internacionalidad.[29]

El primer volumen, en 1931 tiene la siguiente clasificación disciplinar:

1. Grundlagenprobleme, Philosophie
2. Geschichtliches
3. Algebra, Zalhentheorie
4. **Mengenlehre und reelle Funktionen**
5. Analysis
6. Numerische und graphische Methoden (s.a. Differenzenrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung)
7. **Geometrie**
8. Mechanik der Punkte und starren Körper
9. Mechanik der elastisch und plastisch deformierbaren Körper
10. Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper
11. Theorie der Elektrizitaät und des Magnetismus (s.a. Quantentheorie)
12. Optik
13. Thermodinamik und kinetische Theorie der Materie
14. Relativitätstheorie (s.a Astronomie und Quantentheorie)
15. Quantentheorie
16. Astronomie und Astrophysik
17. Geophysik

[29] Para profundizar en la historia de *Zentralblatt* se puede ver [Wegner y Staff Unit Communications, 2008].

18. Kristallographie

Donde la sección *Mengenlehre und reelle Funktionen* se divide en dos subsecciones o especialidades:

-Mengenlehre (s.a. Topologie): [30]
-Reele Funktionen, Integrationstheorie (s.a. Fourierreihen)

La sección *Geometrie* se divide en siete especialidades o subsecciones:
-Allgemeines
-Elementargeometrie (s.a. Geodäsie)
-Darstellende Geometrie
-Analytische, projective, nichteuklidische Geometrie
-Algebraische Kurven und Flächen
-Differentialgeometrie, Riemannsche Geometrie, Tensoren
-**Topologie (s.a. Mengenlehre)**
Para este primer volumen, en Topologie (s.a. Mengenlehre) no hay referencias a autores polacos ni a artículos de *FM*, lo que si sucede en los siguientes volúmenes.

Para el volumen 2, del año 1932, en el título de la sección 1 aparece la palabra *lógica*, la sección se llama: *Grundlagenprobleme, Philosophie (s.a. Quantent-*

[30]Como ejemplo se trae las cinco primeras publicaciones que se referencian de esta sección, ello para dilucidar la posible relación entre Mengenlehre y Topologie, ya que s.a. es una abreviación en alemán de *siehe auch*, que significa *ver también*:

(Behman Heinrich: Zu den Widersprüchen der Logik und der Mengenlehre. *Jber. Dtsch. Math.ver.igg* 40, pp. 37-48 (1931)...Contradicciones de la lógica y la teoría de conjuntos.).

-Jurek, Bohus: Die abzählbaren Klassen und das Maß einer Menge. *Cas. Pést. Mat. a. Fys.* 60, pp. 152-155. U. franz. Zusammenfassung 156(1931) [Tschechisch]. Las clases contables y medida de conjuntos.

- Schreier, J., et St. M. Ulam: Sur une propriété de la mesure de M. Lebesgue. *C.r. Acad. Sci.* Paris 192, pp. 539-542 (1931). Sobre una propiedad de la medida de Lebesgue.)

-Durand, Georges, et Gaston Rabaté: Sur deux conceptions de l' ensemble limite d' une collection infinie d' ensembles pontuels. *C.r. Acad. Sci.* Paris 192, pp. 474-476 (1931).

- Charpentier, Marie: Sur les points de Peano des équations $y' = f$ pour lesquelles l' unicité de la solution est assurée d' un côté. *C.r. Acad. Sci.* Paris 192. pp. 401-403 (1931).

- Viola, Tullio: Sulle funzioni continue da una parte e sulla derivazione unilaterale. *Boll. Un. Mat. Ital.* 10, pp. 20-24 (1931).

- Nikodym, Otton: Sur les suites de fonctions parfaitement additives d' ensembles abstraits. *C.r. Acad. Sci.* Paris 192. 727 (1931).)

heorie), Logik.

Para el volumen 19 Sierpiński empieza a ser parte del comité editorial de *Zentralblatt* junto con los siguientes:

K. Bechert (Giessen), W. Blaschke (Hamburgo), E. Bompiani (Roma), H. Geppert (Giessen), H. Hasse (Gotinga), F. Hund (Leipzig), G. Julia (Versalles), H. Kienkle (Gotinga), R. Nevalinna (Helsinki), F. Severi (Roma), **W. Sierpiński(Varsovia)**, E.C.G Stueckelberg von Breidenbach (Genf), T. Takagi (Tokio), H. Thirring (Viena), B.L. Van der Waerden (Leipzig).
Y la redacción estaba a cargo de E. Ullrich (Giessen).

El volumen 20, del año 1939, que es el último año que nos interesa en este trabajo tiene las siguiente clasificación disciplinar:

1. Grundlagenfragen, Philosophie, Logik
2. Geschichtliches
3. Algebra und Zalhentheorie
4. Gruppentheorie
5. **Mengenlehre und reelle Funktionen**
6. Analysis
7. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen
8. Numerische und graphische Methoden
9. Geometrie
10. Mechanik
11. Matematische Physik
12. Relativitätstheorie
13. Astrophysik

En los índices de *Zentralblatt* la teoría de conjuntos y la lógica aparecen como secciones. La teoría de conjuntos desde 1931 y la lógica desde 1932. La topología aparece relacionada con la teoría de conjuntos, de hecho en el primer volumen uno de los dos ítems de la sección *Mengenlehre und reelle Funktionen* se denomina *Mengenlehre (s.a. Topologie)*,[31] por lo que se puede concluir que en *Zentralblatt* la teoría de conjuntos, la topología, la lógica y la teoría de funciones de variable real se encuentran en un mismo nivel jerárquico.

2.2.4. Congresos Internacionales de Matemáticas

El primer congreso internacional de matemáticas se realizó en 1897 en Zurich. Participaron 208 especialistas de 16 países. Los idiomas oficiales fueron francés y alemán.[32]

En el primer congreso se fijaron los objetivos de éstos: promover las relaciones entre los matemáticos de diferentes países, presentar informes sobre temas matemáticos de actualidad y facilitar la cooperación en aspectos como la terminología y la bibliografía.

El segundo encuentro, celebrado en París en 1900, fue especialmente célebre porque en él David Hilbert leyó su histórica conferencia *Mathematische Probleme*. En ella enunció los principales problemas matemáticos que deberían abordarse en el siglo XX, y que se referenció en el apartado 2.2.1.

El congreso celebrado en Roma (1908) insistió en la necesidad de un organismo permanente que asegurase la coordinación entre congreso y congreso. Así mismo, se dispuso la creación de un órgano internacional para mejorar la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria: el ICMI (siglas en inglés de Comité Internacional de Enseñanza Matemática). El congreso previsto para celebrarse en Estocolmo en 1916 se suspendió a causa de

[31] *Teoría de conjuntos (ver también topología).*

[32] Sin embargo, la historia de estas "cumbres mundiales" de las matemáticas se remite a la creación de las sociedades matemáticas nacionales tales como The Société Mathématique de France (SMF), fundada en 1872; la Deutsche Mathematiker-Vereinigung, fundada en 1890, siendo Georg Cantor su primer presidente; The American Mathematical Society (AMS) fundada en 1888 bajo el nombre de the New York Mathematical Society, entre otras

la I Guerra Mundial. Para el congreso de Estrasburgo (1920) se excluyeron los matemáticos de las potencias derrotadas (Alemania, Austria, Hungría y Bulgaria), y en Bolonia (1928) se incorporaron nuevamente. Desde 1936 se empezó a otorgar las medallas Fields (el máximo galardón en la especialidad, concebido como el premio Nóbel de las matemáticas).

Se presenta a continuación las secciones de los primeros congresos internacionales de matemáticas:[33]

1897 Zurich

1. Aritmética y álgebra.
2. Análisis y teoría de funciones.[34]
3. Geometría.
4. Mecánica y física matemática.
5. Historia y bibliografía.

1900 París

1. Aritmética y álgebra.
2. Análisis.
3. Geometría.
4. Mecánica.
5. Bibliografía e historia.[35]
6. Enseñanza y métodos.

[33] Consultado en [International Mathematical Union, 2013].

[34] En esta sección fué presentada la ponencia de Jacques Hadamard que se tituló: “Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles”(Sobre posible aplicaciones de la teoría de conjuntos), en la que apuntaba a el estudio de conjuntos de funciones en abstracto.

[35] Cabe decir que la famosa conferencia de Hilbert que se referenció en el apartado 2.2.1 pertenecía a esta sección, pero en la publicación de las actas del congreso, se decidió incluirla entre las conferencias plenarias “dada su gran importancia”. [Ferreirós, 2004].

1904 Heidelberg

1. Aritmética y álgebra.
2. Análisis.
3. Geometría.
4. Matemática aplicada.
5. Historia de la matemática.
6. Pedagogía.

1908 Roma

1. Aritmética, álgebra, análisis.
2. Geometría.
3. *a*) Mecánica, Física Matemática, Geodesia.
   b) Aplicaciones varias de la matemática.
4. Cuestiones filosóficas, historia, didáctica.

1912 Cambridge

1. Aritmética, álgebra, análisis.
2. Geometría.
3. *a*) Mecánica, matemática física, astronomía.
   b) Economía, ciencias actuariales, estadística.
4. *a*) Filosofía e historia.
   b) Didáctica.

Durante los primeros cinco congresos no hay mención en primera línea de las secciones a la teoría de conjuntos ni a la topología ni a la lógica. Pero hay ponencias que han trascendido que claramente se identifican en la teoría de conjuntos, tal como la de el húngaro J. König en 1904 que se tituló "Zum Kontinuum-Problem", y que se reseñó en el la sección 1 (análisis). Sobre esta conferencia y sus repercusiones se trató un poco en el apartado 2.2.2.

Los congresos se suspendieron por la Primera Guerra Mundial. En 1920 se retoma y es en Estrasburgo-Francia que se desarrolla el sexto Congreso internacional de Matemáticas, en el que no se aceptó la presencia de matemáticos alemanes. Lo mismo ocurrió cuatro años mas tarde en Toronto-Canadá. Ls secciones de estos congresos fueron:

1920 Strasbourg

1. Aritmética, álgebra, análisis.
2. Geometría.
3. Mecánica. Física matemática. Matemáticas aplicadas.
4. Cuestiones filosóficas, históricas, pedagógicas.

Toronto 1924

1. Álgebra, teoría de números, análisis.
2. Geometría.
3. Mecánica, física, astronomía, geofísica.
4. Ingeniería.
5. Estadísticas, ciencias actuariales, economía.
6. Historia, filosofía, didáctica.

Uno de los personajes centrales de este trabajo, Wacław Sierpiński, está en escena a partir del congreso de 1924 con una ponencia titulada “Les ensembles bien définis, non mesurables B”[Sierpiński, 1924a], la cual se ubicó en la sección álgebra, teoría de números, análisis. En el congreso de 1928 en Bolonia, Sierpiński presentó una ponencia titulada “Sur les familles inductives et projectives d’ ensembles ”[Sierpiński, 1928d] que se ubicó en la sección de análisis; en 1932, en Zurich presenta una plenaria que se tituló: “Sur les ensembles de points qu’ on sait définir effectivement”[Sierpiński, 1932c] y en 1936, en Oslo su presentación “Sur un problème concernant les fonctions semi-continues"[Sierpiński, 1936b] se ubicó en la sección de análisis.[36]

En el congreso de 1928 de Bolonia-Italia se admite nuevamente a los matemáticos alemanes. El acta de este congreso es la única que presenta el desgloce de las secciones,[37] lo cual permite detallar la división disciplinar:

Bolonia 1928

1. Analisi:

    a) Teoria dei numeri. - Algebre, Matrici. - Gruppi discontinui. - Equazioni algebriche. - Funzioni algebriche. -

    b) **Funzioni di variabili reali**. - **Teoria degli aggregati**. **Considerazioni topologiche**. - Integrali generalizzati. - Sommazione di serie e di integrali. - Funzioni e successioni quasi periodiche. -

    c) Equazioni differenziali, alle differenze, integrali, integro-differenziali. - Calcolo delle variazioni. - Analisi funzionale. -

    d) Funzioni analitiche. - Sviluppi in serie. - Rappresentazione conforme. - **Topologia**.

2. Geometria:

    a) **Questioni topologiche in relazione con la geometria algebrica**. - Gruppi jdi trasformazioni cremoniane, arazionali, di contatto.... - Ricerche generali su curve e superficie algebriche. - Ricerche speciali. -

    b) **Topologia, in relazione alla geometria differenziale**. - Geometria di Riemann e le sue estensioni. - Geometria proiettivo-differenziale. - Geometria della sfera e della retta. - Varia.

3. Meccanica :

    a) Meccanica celeste. Astronomia. - Meccanica dei sistemi. - Meccanica relativistica. Elettrotecnica. -

[36]Datos obtenidos de la página `http://www.mathunion.org/db/ICM/Speakers/Search.php`
[37][International Mathematical Union, 2013].

   b) Idrodinamica. - Elasticità. - Equazioni della fisica matematica. - Varia.

4. Attuaria:

   a) Calcolo delle Probabilità. - Statistica Matematica. - Teoria degli errori. - Medie ed interpolazioni. -

   b) Economia matematica e Scienza attuariale.

5. Ingegneria: Idraulica. - Aerodinamica. - Costruzioni (Ponti). - Cartografia. - Applicazioni industriali.

6. Matematica elementare: **Logica matematica**. - Questioni didattiche, Commissione internazionale per línsegnamento matematico. - Pedagogia e metodologia matematica. - Varia.

7. Storia della Matematica. Filosofia: Filosofia matematica. - Storia della matematica nellántichità e nel Medio-Evo. - Storia della matematica nel Rinascimento e nell' epoca moderna. Bibliografia matematica.

Aún no aparece como sección ninguno de los dominios de interés de este trabajo, sin embargo, profundizando en las secciones aparecen menciones a la topología, a la lógica y a Teoria degli aggregati (una aproximación a la teoría de conjuntos), distribuidas en las diferentes secciones. La lógica matemática en la sección de matemática elemental; la teoría degli aggregati en la subsección I-B, funciones de variable real (o teoría de funciones) perteneciente a la sección de análisis; y la topología se menciona en dos secciones, en Análisis en la subsección Funciones analíticas y como dos subsecciones de la sección de Geometría, Cuestiones topológicas en relación con la geometría algebraica, y Topología en relación a la geometría diferencial.

Zurich 1932

1. Álgebra y teoría de números.
2. Análisis.
3. Geometría.
4. Teoría de probabilidad, matemáticas actuariales y estadísticas.

5. Ciencias Matemáticas - técnicas y astronomía.

6. Mecánica y Física Matemática.

7. Filosofía e historia.

8. Pedagogía.

Oslo 1936

1. Álgebra y teoría de números.

2. Análisis.

3. Geometría y **topología**.

4. Cálculo de probabilidades, estadística matemática, actuaría y econometría.

5. Física matemática, astronomía y geofísica.

6. Mecánica racional y aplicada.

7. **Lógica**, filosofía e historia.

8. Pedagogía.

En 1932 en Zurich no hay cambio sustancial en el nombre de las secciones, sin embargo, en 1936 en Oslo, la topología emerge en la sección 3: geometría y topología. Entre las ramas cercanas a la topología, en sus inicios, estaban la geometría y la teoría de conjuntos. Con lo anterior se evidencia que la parte que se relaciona con geometría, también conocida como *analysis situs* tuvo mayor reconocimiento en la comunidad de matemáticos que la parte que se relacionaba con la teoría de conjuntos (que se denomina teoría de conjuntos de puntos), y eso tiene que ver con el peso de la geometría en la comunidad matemática, mucho mayor que el de la teoría de conjuntos, ya que esta última no se asomaba como un dominio de tanta importancia y estaba más relegada al análisis y subdominios de éste.

2.3. Conclusiones y comentarios

1. Para que un campo de conocimiento pueda considerarse subdisciplina, especialidad o subespecialidad no se puede seguir el mismo criterio que para las disciplinas científicas (física, química, biología, matemáticas), ya que estas ciencias se reconocieran como disciplinas durante el Siglo XIX de forma paralela a su proceso de profesionalización, cuestión que en el caso de las ramificaciones de estas disciplinas (subdisciplinas, especialidades y subespecialidades, siguiendo la jerarquía de Chubin) no se puede tener en cuenta ya que se ubican en una época posterior, con una diferencia de entre cincuenta y cien años (al menos con el periodo que aquí interesa). Así, por ejemplo, hasta ahora se reconoce la profesión del matemático, sin embargo no se reconoce como profesión a la geómetría, el álgebra o la teoría teoría de conjuntos, siendo reconocidos a los especialistas en estas materias no como profesionales no en geometría, álgebra o teoría de conjuntos, sino como profesionales en matemáticas.

   Otra diferencia esencial entre el reconocimiento de las disciplinas y el de sus ramificaciones está en que para las primeras, la identificación de la *función social* es inmediata, mientras que para las subdisciplinas y especialidades esta *función* puede tener un carácter interno. Así por ejemplo, en la teoría de conjuntos se debe tener en cuenta la fundamentación del concepto de número o la determinación de la validez de la hipótesis del continuo o la búsqueda de herramientas para solucionar problemas del análisis, entre otros.

2. Las clasificaciones disciplinares han sido cada vez más complejas y densas, ello producto de la especialización en los distintos campos de conocimiento científico. Se puede ver que el índice del *Jahrbuch* del año 1904 se compone de doce secciones,[38] mientras que la actual clasificación disciplinar de la *American Mathematical Society* tiene 63 secciones.[39] Otro referente de clasificación disciplinar es el panorama de las matemáticas que Jean Dieudonné plantea en su libro de 1989 [Dieudonné, 1989, pp. 211-222], donde enumera las direcciones que pueden tomar las investi-

[38] En el apartado 2.2.2.
[39] Puede verse alguna referencia a este en el apéndice A.

gaciones matemáticas.[40]

Como ejemplo de la evolución y complejidad de las clasificaciones disciplinares, se ha podido ver los cambios que las publicaciones relativas a teoría de conjuntos y/o sus desarrollos, tuvieron desde inicios de la década de 1880 hasta antes de la Segunda Guerra, esto se constata con la revisión que se hizo del *Jahrbuch*[41] y en menor medida de las temáticas de los congresos internacionales de matemáticas.[42]

Ahora, se debe tener en cuenta que no es suficiente para un campo de conocimiento, tener el rango de sección en el *Jahrbuch* para considerarse disciplina de las matemáticas. Por ejemplo, la *historia de las matemáticas* está rankeada como sección desde el primer volumen del *Jahrbuch*, también aparece como sección en el *Zentralblatt*, así como en los congresos internacionales de matemáticas; sin embargo no puede considerarse como una subdisciplina de las matemáticas, puesto que sus objetivos no pasan por establecer teorías o técnicas para las matemáticas, sino que se ocupa del desarrollo del quehacer de las matemáticas. Así, las secciones de las revistas o de los congresos no responden únicamente a las divisiones propias de la disciplina, sino que en algunos casos como la historia, la filosofía y la pedagogía, entre otras, adquieren reconocimiento por parte de la comunidad matemática sin ser propiamente una subdisciplina de ésta porque no cumple con un requisito de la primera etapa de Strasser de usar prácticas de investigación de las matemáticas.

3. En este capítulo se aborda la hipótesis propuesta en [Chaves, 2010],

[40]Dieudoné describe los siguientes veintidos campos de conocimiento: Lógica formal y teoría de conjuntos, Combinatoria, Categorías y functores, Algebra, Grupos «abstractos», Algebra asociativa no conmutativa y álgebra no asociativa, Algebra conmutativa, Algebra homológica, Topología general, Topología algebraica y diferencial, Análisis clásico, espacios funcionales y operadores, Análisis armónico conmutativo, Ecuaciones diferenciales, Ecuaciones con derivadas parciales, Geometría diferencial, Geometría analítica, Grupos de Lie, Geometría algebraica, Teoría de números.

[41]La revisión hecha del *Zentralblatt* no puede ser concluyente ya que se revisó solamente la de diez años (desde 1930 hasta 1939) y es poco tiempo para mostrar variación significante.

[42]Debido a que la inclusión de nuevas secciones, al menos en los primeros congresos, es menos rápido que en el caso de las nuevas secciones en revistas.

acerca de que la teoría general de conjuntos no tiene el rango de subdisciplina de las matemáticas. En [Chaves, 2010] se muestra que en la obra de Sierpiński (como representante idóneo de la escuela de matemáticas de Varsovia), la teoría general de conjuntos no ocupa una mayoría de sus publicaciones hechas en *Fundamenta Mathematicae* durante la década de 1920. En este capítulo se extiende el periodo de tiempo y se usa unos criterios distintos a los de [Chaves, 2010][43] para abordar la hipótesis que guía este capítulo, que la teoría de conjuntos no llegó a tener el estatus de subdisciplina de las matemáticas hasta antes de la Segunda Guerra Mundial.

De acuerdo a la jerarquía de Chubin, y adecuándose a los criterios de Strasser, se establece que la clasificación disciplinar de los anuarios y de los congresos internacionales pueden ser un indicativo de la primera etapa de surgimiento de una subdisciplina, siempre y cuando sea un ítem de una sección. Así, teniendo en cuenta que a principios del Siglo XX hubo un notorio aumento en publicaciones, investigaciones e investigadores en teoría de conjuntos,[44] lo que se ve reflejado en el hecho de que el término *Mengelehre* aparece por primera vez en el índice del *Jahrbuch* en 1905 y llega a escalar a nivel de sección en 1916; en *Zentralblatt* también figura este nombre en una de las secciones, es necesario analizar más variables para determinar si la teoría de conjuntos adquiere en algún momento el estatus de subdisciplina de las matemáticas.

Sin embargo se debe tener en cuenta que el término *Mengelehre* no aparece independiente en los índices de estos anuarios; de hecho en *Jahrbuch* cuando adquiere el estatus de sección (en 1916-17) está acom-

[43]En [Chaves, 2010] se clasifica cada uno de los 112 artículos que Sierpiński publicó en la revista polaca *Fundamenta Mathematicae* durante la década de 1920 en cinco ramas en torno a la teoría de conjuntos y sus aplicaciones, una de ellas es la teoría general de conjuntos, que es justamente la que tiene menor número de publicaciones. Las cinco temáticas de la obra de Siepiński en teoría de conjuntos se tratan en el apartado 5.1, mientras que en el apéndice F se clasifica, entre estas cinco temáticas, cada uno de los artículos que Sierpiński publicó en *Fundamenta Mathematicae* desde 1920 hasta 1939.

[44]Es bueno decir que es debido en gran parte a la revista *Fundamenta Mathematicae*, en el que gran cantidad de publicaciones que se referencian desde 1920 en el *Jahrbuch* son de esta revista y donde el mayor contribuyente en publicaciones es Sierpiński.

pañada del término teoría de conjuntos de puntos[45] y en 1936 pasa a ser parte de la sección 1, que en el título se acompaña del término fundamentos de las matemáticas;[46] mientras en *Zentralblatt*, por lo menos desde 1931 hasta 1939, el nombre está acompañado del término funciones reales,[47] además de ello hay un ítem de esta sección que se denomina *Mengelehre (s.a Topologie)*,[48] lo que evidencia la interrelación con la topología.[49] Así La teoría de conjuntos, a nivel de los dos principales anuarios de publicaciones matemáticas del periodo Entreguerras, no alcanza un grado de independencia, ya sea de la topología, de la teoría de funciones de variable real y/o de los fundamentos de las matemáticas,[50] que le permita ser catalogado como subdisciplina de las matemáticas.[51]

Se ha visto que en los congresos internacionales de matemáticas, la teoría de conjuntos no se ha ubicado como sección, y en el caso del congreso de Bolonia de 1928, que es el único en el que en su acta se desgloza las secciones, aparece una referencia como *Teoria degli aggregati* en uno de los ítems de la sección Análisis, lo que refuerza la conclusión que la teoría de conjuntos no llega a adquirir el esatus de subdisciplina de las matemáticas y está más cerca del tercel nivel de la jerarquía de Chubin, es decir de considerarse como especialidad que como subdisciplina durante el periodo Entreguerras.

[45]El título de la sección es *Mengenlehre. Allgemeines und abstrakte Mengen. Punktmengen.*

[46]El título de la sección es *Grundlagen der Mathematik. Abstrakte Mengenlehre.*

[47]El título es *Mengenlehre und reelle Funktionen.*

[48]s.a significa ver también.

[49]Esto mismo se puede decir de la topología, debido a que en la sección Geometría, hay un ítem denominado *Topologie (s.a. Mengelehre).*

[50]No se profundiza en la independencia de otras ramas como variable para determinar el estatus de subdisciplina, sin embargo en los apartados 3 y 5.1 se hace referencia a los usos que se le ha dado a la teoría de conjuntos como herramienta para resolver problemas del análisis (especialmente de teoría de funciones), y como fundamentadora de las matemáticas.

[51]En el apéndice F se hace una clasificación disciplinar de los artículos que Sierpiński publicó en *Fundamenta Mathematicae*. Varios de estos artículos son ubicados por *Jahrbuch* y *Zentralblatt* los en el apartado *Mengenlehre*; en el caso de la clasificación que se sigue en ese apéndice, correspondería a las categorías teoría general de conjuntos ó teoría descriptiva de conjuntos.

4. Tomando [Ferreirós, 1995] como soporte para determinar que las matemáticas, la física y la química se institucionalizan como disciplinas científicas en la Alemania de mitad del Siglo XIX, se propone aquí identificar las ramas de las matemáticas que han puedan ser catalogadas como subdisciplinas. Como ramas principales de las matemáticas se han reconocido el análisis, la geometría, el álgebra y la aritmética. Estas ramas son las candidatas principales a ser consideradas subdisciplinas de las matemáticas debido a un trasegar histórico que llega a datar, en algunos casos, desde la antigüedad griega.[52]

   De hecho, desde las primeras clasificaciones del *Jahrbuch* se ubican como secciones (*álgebra y aritmética* aparece como una sola sección). Por lo cual los motivos de orden histórico pueden ser indicadores del estatus de subdisciplina de las matematicas, como que tiene problemas propios que datan de antes de la institucionalización de la matemática como disciplina, lo cual no sucede por ejemplo con la teoría de conjuntos, topología, teoría de funciones de variable real y lógica, cuyos problemas propios datan desde el Siglo XX. Es así que la comparación de la teoría de conjuntos no debe hacerse con el análisis, geometría, aritmética o álgebra, sino más bién con sus contemporáneas topología, lógica y teoría de funciones de variable real; con las cuales comparte temas en común.

   En el índice de *Zentralblatt* la teoría de conjuntos y la lógica aparecen como secciones, respectivamente *Mengenlehre und reelle Funktionen (s.a. Grundlagenprobleme, Topologie)* y *Grundlagenprobleme, Philosophie (s.a. Quantentheorie), Logik*, sin embargo el término topología aparece relacionado a la teoría de conjuntos, por lo cual se puede plantear que las tres materias están a un nivel de reconocimiento similar. Sin embargo en los congresos internacionales de matemáticas, tanto la topología como la lógica adquieren un rango superior a la teoría de con-

[52]Por ejemplo:
-Trisección de un ángulo, relativo a la geometría.
-Problemas de números primos, en aritmética.
-Para el álgebra se puede citar los famosos problemas de encontrar las raíces de las ecuaciones polinómicas de tercer, cuarto y quinto grado, que datan del Siglo XVI.
-Del análisis se puede citar los problemas y aportes al cálculo abordados por Leibniz y Newton.

juntos en el Congreso de Oslo de 1936. La sección 3 se llama *Geometría y topología* y la sección 7 se llama *Lógica, filosofía e historia*. De otro lado, al ver una clasificación actual como la de la AMS de 2010,[53] hay una sección denominada *Topología general* y otra denominada *Lógica matemática y fundamentos*, mientras que la teoría de conjuntos no es sección y aparece como un ítem de esta segunda.[54]

[53]En el apéndice A se muestra los ítems de la sección *Lógica matemática y fundamentos* también los ítems de la subsección *teoría de conjuntos*.

[54]En la década de 1930 hay un cambio notorio, quizás por la fuerza que toma la lógica, y que a nivel de publicaciones se corrobora con la aparición del *Journal of Symbolic Logic* en 1936. Para profundizar se puede consultar el artículo [Ferreirós, 2010].

Capítulo 3

Expansión y enfoques de la teoría de conjuntos

Este capítulo se propone determinar el concepto que se tenía acerca de la teoría de conjuntos en distintos momentos, distintas escuelas y/o grupos relevantes que dejaron rastro en la teoría de conjuntos antes de la Segunda Guerra Mundial.

En este contexto, se entenderá por escuela de investigación en matemáticas a un grupo que en sus inicios es dirigido (o liderado) normalmente por un matemático, localizado en un ambiente institucional (ubicado en una una universidad en particular), que cuenta con una cantidad importante de estudiantes avanzados. Como resultado de la continua interacción social y la colaboración intelectual, los miembros de una escuela llegan a compartir puntos de vista y orientaciones en la investigación: ideas filosóficas o metodológicas concernientes a como hacer su investigación, puntos de vista heurísticos sobre los problemas que deben ser abordados y cuales no. En ese sentido se hará referencia a Moscú, Varsovia y París como escuelas. En Alemania se hará referencia a Gotinga, pero se nombrará también algunos autores que no responden necesariamente a los lineamientos de esa escuela, tales como Hausdorff, Dedekind y Cantor. El caso de los italianos y los ingleses no se detallará tanto, por lo que no se referirá a ellos como escuela o tradición y sólo se hará referencia a trabajos individuales de algunos de los autores para identificar las distintas posturas que se han dado de la teoría de conjuntos.

3.1. Primer momento: Cantor y Dedekind

Desde la temprana década de 1870, los desarrollos de Cantor y Dedekind dieron los fundamentos para que se iniciara la teoría de conjuntos, sin embargo las investigaciones de estos dos autores se enmarcaron bajo distintos objetivos, en Dedekind se presuponen como fundamentadores y como lenguaje de las matemáticas mientras en Cantor se asumen como una herramienta para solucionar problemas de la teoría de funciones. Lo que claramente plantea que estos desarrollos no podían concebirse como una teoría autónoma que generaba sus propios problemas.

Dedekind y Cantor han sido receptores de las concepciones de Riemann. Al respecto, en [Ferreirós, 1999] se plantea que para entender cómo el lenguaje conjuntista emergió de las matemáticas clásicas para incorporarse como fundamento de las matemáticas, hay que pasar por Riemann, quien entendió las superficies de su teoría de funciones y las variedades[1] de su geometría diferencial basándose en la noción de extensión, es decir, de clase o conjunto. Riemann propuso una revisión de la noción clásica de magnitud y consideró variedades (clases) como un fundamento satisfactorio para la aritmética, la topología y la geometría (es decir, para las matemáticas puras).

En Riemann no se encuentran desarrollos de una teoría de conjuntos autónoma, pero si una nueva concepción intuitiva y general de hacer matemáticas y una nueva propuesta sobre los conceptos básicos de las matemáticas, la cual permaneció “desconocida”hasta 1868 cuando Dedekind publicó la lección sobre los fundamentos de la geometría, que se resume de esta forma:

> Riemann tuvo un papel central en la reconsideración de la matemática sobre bases conjuntistas y a la hora de convencer a los matemáticos de la importancia del estudio topológico de los conjuntos. Además dejó abiertas cuestiones como la depuración de su teoría de variedades, que serían un importante estímulo para autores como Cantor. Sin embargo, Riemann no contribuyó a la teoría abstracta. [Ferreirós, 1993, p. 96].

[1] El término variedad ha sido relegado exclusivamente a la geometría diferencial, pero Riemann no lo usó en este contexto sino como una prefiguración de los que años después serían los conjuntos.

De otro lado, como se comenta en [Ferreirós, 1993, p. 21], la historia de la teoría de conjuntos en el siglo XIX casi que ha llegado a identificarse con la biografía de Cantor, pero esa historiografía ha sido confrontada con la obra de Dugac: *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, en la que plantea que el "lugar de nacimiento"de la teoría de conjuntos se debe buscar en Dedekind en su teoría de ideales de 1871.

Siguiendo la sugerencia de Dugac, en el sentido de desfocalizar el origen de la teoría de conjuntos a la obra de Cantor, se puede plantear que en los primeros años de ésta se pueden identificar tres caminos por los cuales se desarrolló la teoría de conjuntos, dos de éstos se derivan de la obra de Cantor y corresponden a las dos épocas que en él se identifican, la primera es una teoría de conjuntos como herramienta para abordar problemas de otras ramas de las matemáticas (especialmente la teoría de funciones, en su caso especial la representación en series trigonométricas), la segunda corresponde a la teoría de conjuntos transfinitos,[2] mientras que el tercer camino se refiere a la fundamentación de las matemáticas desde la perspectiva de la teoría de conjuntos, la cual fue desarrollada principlamente bajo la óptica de Dedekind, y que es llamada por Ferreirós como el enfoque conjuntista. La propuesta en este capítulo es identificar a cada una de las escuelas o grupos o momentos que aquí se traten, en el uso de estas tres tendencias o caminos.

Es por lo anterior que este capítulo decide iniciar, asumiendo como primer momento de la teoría de conjuntos, con Dedekind y Cantor, anotando que no se puede considerar como los únicos creadores de toda la teoría de conjuntos, ya que ellos han sido receptores de ideas de autores como Riemann, lo cual se ha esbozado superficialmente al inicio de este apartado (lo cual se puede profundizar en [Ferreirós, 1993]).

Usualmente se ha considerado que el origen de la teoría de conjuntos está en el análisis, y esto se debe al haberse centrado el estudio histórico en la figura de Cantor, por ejemplo Grattan - Guinness lo refleja en el título de

[2]En 1883 con la serie de artículos en alemán *Grundlagen einer Allgemeinen Mannichfaltigkeitslehere* (*Fundamentos para una teoría de conjuntos*) se evidencia en Cantor un cambio de perspectiva respecto a ló que proyectaba sobre sus investigaciones, alejándose de los problemas del análisis, en particular de los relativos a teoría de funciones. Es en esos años en los que se puede evidenciar el cambio de perspectiva relativa a teoría de conjuntos.

su texto *Del cálculo a la teoría de conjuntos* [Grattan-Guinness, 1980], sin embargo trabajos como el anteriormente nombrado de [Dugac, 1976] ponen de manifiesto que el álgebra y la teoría de números también tuvieron un rol importante en el origen de la teoría de conjuntos.

Desde la perspectiva histórica del análisis, se puede decir que los intentos de rigorización de Cauchy usando límites, desigualdades y un concepto de función continua bastante abstracto no permitían demostrar rigurosamente cuestiones básicos como el teorema del valor intermedio, ya que para ello se necesitaba una definición precisa de los números reales, con la que se estableciera de forma sólida el concepto de continuidad. Así, en 1872 es el año en el que Cantor, Dedekind, Weierstrass publican sus construcciones de los números reales.[3] Weierstrass define los reales como "agregados"de $\mathbb{Q}$ que se conciben como series convergentes, Cantor los define como sucesiones de Cauchy[4] sobre $\mathbb{Q}$ y Dedekind como cortaduras en $\mathbb{Q}$. Estas construcciones parten de una base de los números racionales (aunque Weierstrass va un poco más atrás y define los todos los sistemas numéricos como los enteros y los complejos), y aunque en ninguno aparece de forma explícita la noción de conjunto, sus teorías pueden verse (como lo dice [Ferreirós, 1998, p. 396]) retrospectivamente al menos, como dependientes de esta noción, o de otras más complejas que sólo pueden explicarse sobre la idea de conjunto infinito.[5]

Desde las publicaciones de 1871[6] y de 1872[7] se puede rastrear en Dedekind su concepción de la teoría de conjuntos como un lenguaje en el cual fundamen-

[3] La de Cantor aparece en *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*; la de Dedekind en *Stetigkeit und irrationale Zahlen*; la de Weierstrass en *Die Elemente der Arithmetik*, que es un libro de E. Kosak basado en un curso impartido por Weierstrass en 1865/66. Las que más han trascendido son la de Cantor y la de Dedekind. Previo a éstas en 1969, el francés Charles Mèray había publicado su definición de los números reales (*Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données*), la cual es similar a la de Cantor.

[4] Las llama sucesiones fundamentales.

[5] El concepto de cortadura de Dedekind es el más simple y a también es el más cercano a una idea conjuntista. De otro lado, en Cantor se hace explícita la noción de conjunto para hablar de *conjuntos derivados*.

[6] *Über die Komposition der binären quadratischen Formen.* En este artículo el presenta por primera vez la idea de cuerpo, y se muestra su aproximación al álgebra, donde usa ideas como isomorfismos y automorfismos entre otras.

[7] *Stetigkeit und irrationale Zahlen.*

tar las matemáticas, lo cual derivó inmediatamente en la corriente logicista de las matemáticas,[8] mientras que en Cantor para ese entonces se podría visualizar como una herramienta para abordar problemas concernientes a la teoría de funciones, particularmente en la representación a través de series trigonométricas.[9]

Posteriormente y en los últimos años del siglo XIX, Dedekind y Cantor publicaron sus contribuciones a la teoría de conjuntos abstracta. Dedekind intentó elaborar una base abstracta para los fundamentos de las matemáticas puras (aritmética, análisis y álgebra). Mientras que Cantor volcó el objeto de sus investigaciones a la exploración de los conjuntos infinitos y el proceso creado que es usualmente llamado teoría de conjuntos en sentido estricto. Así, en la segunda mitad de la década de 1880[10] ya se puede observar en Cantor una concepción de teoría de conjuntos abstracta bajo las ideas de cardinalidad y orden.

De acuerdo a lo anterior se puede decir que el programa de Dedekind (relativo a teoría de conjuntos) se centraba en "conjuntizar"las matemáticas o darle a estas una base conjuntista. Mientras que en Cantor se puede identificar dos épocas, la primera giraba en torno a solucionar problemas de teoría de funciones y posteriormente a los conjuntos transfinitos, esa transición se vió mediada por el surgimiento de la hipótesis del continuo, que es el centro de su programa.

El impacto y recepción de las ideas de Dedekind se puede plantear desde lo

[8]El reconocimiento de Dedekind como logicista es discutido, principalmente entre Benis-Sinaceur y Ferreirós. Puede verse sus posturas en [Benis-Sinaceur, 2008], [Ferreirós, 1993], [Ferreirós, 1999] (especialmente el apartado 5.1 del capítulo VII.) y en los artículos pendientes de publicación: "Is Dedekind a logicist? Why does such a question arise?"de Benis-Sinaceur y "On Dedekind's Logicism"de Ferreirós.

[9]Conocidos son los trabajos de diversos autores como [Dauben, 1979], [Ferreirós, 1999], [Grattan-Guinness, 1980], entre otros que narran y comentan los trabajos de Cantor en torno a la búsqueda de debilitar las condiciones para que una función tuviese representación única a través de series de senos y cosenos.

[10]Se hace referencia a las publicaciones de 1887 / 88 *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* en los que presenta la teoría de conjuntos de la misma manera como los hará posteriormente en los *Beiträge*, y a un artículo que en 1885 debía ser publicado, pero no se hizo debido a inconvenientes con Mittag - Lefler. Se puede ampliar esto último en [Grattan-Guinness, 1970].

conjuntista o desde una visión que enmarque más la parte algebraica y la teoría de números. Lo que interesa en este trabajo es la primera, es decir, del propósito de fundamentar desde la teoría de conjuntos las ramas puras de las matemáticas. Así, el punto de vista abstracto se puede percibir ya en sus trabajos de 1871 y 1872, donde el se centró en los fundamentos del sistema numérico, estableciendo las nociones "lógicas"de conjunto y aplicación. Con esto, el también estaba estableciendo los fundamentos para su aproximación abstracta de álgebra y otras áreas de la matemática pura.

Por ejemplo, su *Zahlen* de 1888 tuvo un impacto variado, donde el principal tropiezo es que algunos de sus principales colegas no lo leyeron o lo hicieron sin la suficiente atención,[11] de hecho en [Ferreirós, 1993, p. 306], se plantea que Keferstein[12] y Cantor lo han malinterpretado, y que la mayoría de lectores asumían el trabajo como una contribución sólo a la teoría de números.

Sus conceptos tuvieron recepción en Italia con Betazzi, Burali - Forti y Peano[13] y en Alemania con Hessenberg y Zermelo. Su noción de aplicación intervino en la construcción lógica de $\mathbb{N}$ y en la primera definición rigurosa del infinito, y su noción de cadena sirvió de base para poner un fundamento sólido al principio de inducción, y sirvió a Zermelo para demostrar definitivamente el teorema del buen orden en su relevante artículo de 1908.[14]

La crítica y recepción más favorable de su obra se ha dado en el ámbito del logicismo, donde se entendió de mejor forma su programa. De los apartados 4.1 y 4.2 del capítulo IX de [Ferreirós, 1993] se puede seguir que su postura de conjuntizar las matemáticas puras, fue una propuesta acogida por Hilbert, quien en 1899 presenta su obra sobre fundamentos de la geometría la cual se basa en ideas conjuntistas, del mismo modo que Dedekind presentó su obra de 1894[15] de fundamentos del álgebra.

[11] En [Ferreirós, 1993, p. 306] se plantea la inconveniencia del título y de la introducción, además de lo engorroso que podría resultar seguir aquellos "senderos espinosos"que en el texto se desarrollaban.

[12] Hans Keferstein era profesor de matemáticas en un instituto de Hamburgo, y fue quien dio una primer reacción pública ante el libro de Dedekind.

[13] Los axiomas de Peano fueron influenciados por Dedekind bajo su caracterización abstracta de $\mathbb{N}$ [Ferreirós, 1993, p. 313].

[14] *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.*

[15] *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen.*

De otro lado, las ideas de Cantor relativas a conjuntos derivados y conjuntos de primera especie tuvieron impacto casi inmediato con Du Bois-Reymond, Dini y Harnack, ello a pesar de la tendencia a atribuir la poca compresión de las ideas de Cantor en los círculos matemáticos, leyenda que quizás fue alimentada por el mismo. La prueba de la equipotencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ de 1878[16] originó una inmediata reacción con una serie de publicaciones de Thomae, Lüroth, Jürgens y Netto. Además, el propio Cantor siguió contando con el aval de *Mathematische Annalen* en la que publicó una importante serie desde 1879 hasta 1884 y el de *Acta Mathematica* que en el segundo volumen incluyó la parte más importante de la investigación de Cantor[17] y que fue traducida al francés.

Las nociones topológicas que desarrolló por esa época fueron adoptadas por Poincaré, Mittag - Leffler y hasta por Weierstrass. Mittag - Leffler en su trabajo sobre representaciones analíticas de 1884 empleó fuertemente conjuntos de primera y segunda especie y los números transfinitos de segunda clase. Poincaré en 1885 empleó resultados de Cantor sobre conjuntos perfectos densos en ninguna parte.

Sin embargo, no todas las implicaciones que Cantor visualizaba sobre su trabajo fueron bien aceptadas, en especial las de potencia y número transfinito, ya que generaban dudas, especialmente en los matemáticos mayores. Por ejemplo la prueba de la equipotencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ podía ser aceptada totalmente, sin embargo su definición de potencia podía ser rechazada, ya que la conclusión que se podía obtener era que se necesitaba rigorizar la noción de dimensión. Hermite, como traductor al francés del artículo de Cantor decía que la memoria de éste le dejaba una impresión desastrosa, a pesar de abrir un nuevo campo de investigación resulta poco tentador seguir tal línea, además de criticar los "métodos arbitrarios"que el autor usa.

Aparentemente Appell, Picard y Hermite tenían la misma opinión negativa sobre el nuevo trabajo de Cantor, sin embargo Poincaré tenía una crítica positiva, y este último decía en una carta a Mittag - Leffler en marzo de

[16] "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", *JrM* 84, pp. 242-58.

[17] "Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre"[Cantor, 1883], donde plantea la existencia de ordinales y cardinales infinitos, expresando una aritmética para estos nuevos entes.

1883, que el problema de las publicaciones de Cantor era la falta de ejemplos. Así los ordinales de la segunda y tercera clase tenían forma sin materia, lo cual repugnaba al espíritu francés.

Cantor estaba convencido que su concepto de potencia podía jugar un papel decisivo en el análisis, pero su introducción de este concepto y el de los cardinales transfinitos fue "especulativo"y aportaba poco a los problemas de "interés presente y real".

A pesar de Cantor sentirse rechazado por los matemáticos alemanes como Dedekind, Weierstrass (quienes no mostraron interés en las ideas sobre los transfinitos) y por Kronecker y Schwarz (quienes tuvieron una reacción negativa ante las nuevas ideas de Cantor), algunos matemáticos jóvenes acogieron sus investigaciones, por ejemplo Du Bois - Raymond incluyó el teorema de no numerabilidad de $\mathbb{R}$ en su manual de 1889, Harnack enfatizó en la importancia de la noción de potencia en 1885 y además empleó terminología cantoriana y los transfinitos ordinales, Scheffer aplicó ideas de Cantor a la teoría de funciones, entre otros.

3.2. Segundo momento: Italianos (Peano, Bettazzi, Volterra, Levi) y Hilbert

La matemática italiana se encontraba en sus años dorados en las décadas de cambio de siglo XIX al XX, y la teoría de conjuntos no era ajena los italianos ya que estaban al tanto de lo que ocurría en Alemania, por ejemplo Peano en su libro de 1884 cita el artículo de Cantor de 1872 sobre series trigonométricas y el de Dedekind del mismo año sobre números irracionales,[18] y por ejemplo [Ferreirós, 1993, p. 311] dice que especialmente los italianos (Betazzi, Peano y Burali - Forti) en los años 1890 fueron quienes investigaron en relación al *Zahlen* de Dedekind.[19]

Ulisse Dini inició en 1878, con su libro *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, una tendencia del análisis (en este caso específico sobre la teoría de funciones) enfatizado sobre la teoría de conjuntos de puntos. Esa

[18]Se puede ampliar en [Grattan-Guinness, 2000, pp. 221-223].
[19]Se puede ampliar en [Moore, 1982, pp. 26-30].

tendencia continuaba en Italia en 1884 con la publicación de *Calcolo Differenziale e Principii di Calcolo Integrale*, en el que comentaba y ampliaba las lecciones de su profesor. Desde 1895 hasta 1908 el mismo Peano dirigió el trabajo colectivo: *Formulaire de mathématiques*, en el cual se intentó traducir todos los principales resultados matemáticos en un lenguaje simbólico sin ambigüedades, en el cual la noción de clase tenía un papel fundamental [Ferreirós, 1999, p. 300].

Peano, Bettazzi y Levi, que se encontraban en Turín tuvieron una posición marcada entorno a la naturaleza de los objetos matemáticos y por ende a la aún "incipiente discusión"sobre las elecciones arbitrarias (incluso antes de la prueba del buen orden de Zermelo). Al respecto, [Moore, 1982, p. 76] dice que incluso, algunos historiadores han planteado que ó Peano ó Levi formularon el axioma de elección antes que Zermelo, sin embargo, de las publicaciones de Peano en 1890 y 1902, de Levi en 1902 y de Bettazzi en 1894 y 1896, se sigue que los tres rechazan los procedimientos matemáticos en los que se usen las elecciones arbitrarias.

Moore dice que Peano en 1890 "Démonstration de l' intégrabilité des équations differentieles ordinaires", en el marco de un problema sobre sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, fue el primero en aceptar clases infinitas que rechazó categóricamente el uso de infinitas elecciones arbitrarias.

El artículo de 1892 de Bettazzi ("Sui punti di discontinuità delle funzioni di variable reale") también rechaza las elecciones arbitrarias. Cabe decir que el estudió la existencia de reglas de elección porque quería conocer bajo que condiciones un punto límite podía llegar a ser un punto límite secuencial.

En 1896 en "Gruppi finiti de infiniti di enti"Bettazzi cuestionó la prueba de Dedekind de 1888, en la que se planteaba que todo conjunto S infinito es Dedekind - infinito, la crítica era porque la prueba involucraba la elección arbitraria de una función uno a uno $f_n : \{1, 2, 3, ..., n\} \to S$, para todo n.

En 1902, Beppo Levi en "Intorno alla teoria degli aggregati", inspirado en la tesis de [Baire, 1899], buscaba plantear propiedades que se satisficieran para todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ (o para toda función de variable real), llegó a aseverar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de Baire (lo que no probó) y anteriormente (en 1900) había conjeturado que un teorema suyo implicaba la hipótesis del continuo. Su hipótesis de que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ satisface la propiedad de Baire contradecía el axioma de elección.[20]

Otro autor italiano, que debe ser nombrado es Vito Volterra, quien tuvo aportes en teoría de integración, en particular sobre funciones puntualmente discontinuas, concepto usado fuertemente por el francés René Baire, uno de los principales miembros de la llamada escuela francesa y a quien se tratará en el siguiente apartado, del cual realizó un pasantía en 1898 en Italia bajo la tutoría de Volterra, antes de presentar su tesis doctoral [Baire, 1899].

De otro lado, relativo a la parte alemana, concretamente a Hilbert, se puede encontrar conexiones con el enfoque de Dedekind. Como se dijo anteriormente, en 1894 Dedekind publica su versión más importante en teoría de números y álgebra, con gran contenido de lenguaje conjuntista (isomorfismos, automorfismos) y en 1899 Hilbert publica, siguiendo la línea de Dedekind, un análisis conjuntista de la geometría.[21]

De [Ferreirós, 1999, p. 302] se sigue que Hilbert contribuyó indirectamente al desarrollo de la teoría de conjuntos al estimular estudiantes y colaboradores a trabajar en ello. Zermelo empezó a trabajar en teoría de conjuntos con Hilbert y su influyente trabajo se debió gracias al trabajo junto a los matemáticos de Gotinga. Bernstein se introdujo en teoría de conjuntos a través del mismo Cantor, pero su tesis doctoral estuvo bajo la dirección de Hilbert, en la cual trabajó sobre la generalización de la descomposición que Cantor había establecido para los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$, los que implicaba que para ellos se satisfacía la hipótesis del continuo. Schoenflies también fue cercano a Hilbert, el aplicó nociones de teoría de conjuntos de puntos a curvas cerradas simples en el plano. Así, aunque Hilbert no realizó contibuciones directas a la teoría de conjuntos, si fue un impulsor de su desarrollo en Alemania.

De la famosa lista de 23 problemas de Hilbert propuestos en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en 1900, los dos primeros corresponden a la teoría de conjuntos. El primero de éstos es la hipótesis del continuo (el cual, como se planteó anteriormente, es el centro del programa cantoriano),

[20] Ver más detalles de la repercusión de ésto en [Moore, 1982, p. 78].

[21] *Grundlagen der Geometrie* (*Fundamentos de la geometría.*)

mientras que el segundo problema se refiere a la consistencia de la aritmética de $\mathbb{R}$,[22] que se puede plantear como la existencia del conjunto de los números reales.

Resumiendo, en Peano se puede identificar, de un lado la línea que identificaba la primera etapa de Cantor, y de otro la línea fundamentadora de Dedekind. Sin embargo, la línea cantoriana (relativo a una teoría de conjuntos al servicio del análisis) se evidencia en Dini, Volterra, Levi y Bettazzi en la teoría de funciones, en especial en la representación por series trigonométricas y en la fundamentación de una teoría de la medida. Hasta ese entonces en Italia no se encuentra recepción en cuanto a las ideas de Cantor sobre los transfinitos, mientras que en Hilbert es clara la influencia del enfoque de Dedekind, especialmente con la conjuntización de la geometría en sus *Grundlagen*, pero también impulsó la teoría de conjuntos transfinitos.

3.3. Tercer momento

A finales de siglo XIX había ya una recepción de las ideas conjuntistas de Cantor, mientras que las de Dedekind se demoran un poco más o fueron menos difundidas. En el siguiente apartado se verá la forma como visualizaban la teoría de conjuntos en Francia, Alemania e Inglaterra, en los últimos años del siglo XIX y principios del XX.

3.3.1. París: Borel, Baire, Lebesgue

Los trabajos de esta escuela, representada por Borel, Lebesgue y Baire, se catalogan principalmente en teoría de funciones, y más que ocuparse de la cuestión de la teoría de conjuntos como fundamento de las matemáticas, la usaron como herramienta para desarrollar la la teoría de funciones, así mismo llegaron a sostener posturas filosóficas relativas al uso de los transfinitos cantorianos y al axioma de elección.

En su artículo [Gispert, 1995] muestra como los círculos matemáticos franceses, anteriores a 1905, adoptaron los nuevos métodos de la teoría de conjuntos, pasando por Darboux, Jordan, Tannery, Hadamard, Borel, Lebesgue y Baire. Los tres últimos son los autores centrales de la teoría de funciones en Francia

[22]Suele ser confundido con la consistencia de la aritmética de $\mathbb{N}$.

y en quienes más enfatiza el artículo de Gispert como el tercer capítulo del libro [Graham y Kantor, 2009].

Camille Jordan introdujo la teoría de conjuntos en Francia en un capítulo suplementario de la segunda edición del curso de análisis de la École Polytechnique en 1893. El primer capítulo lo dedica a la construcción de los reales y a proposiciones sobre límites; el segundo capítulo se titula *"Ensembles"*, y se dedica a las nociones de conjunto derivado, perfecto, acotado, de un solo trazo y a los medibles; en el tercer capítulo usa los resultados sobre los conjuntos introducidos en el capítulo anterior para introducir las funciones acotadas y las funciones integrables. En este tercer capítulo se propone estudiar la importancia del dominio de integración sobre la integral, y a diferencia de Darboux quien en investigaciones precedentes se ha interesado en el rol de la función en la integración, Jordan necesita de la teoría de conjuntos para ello. En los cuatro capítulos siguientes se aborda las funciones continuas, las funciones de variación acotada, las derivadas e integrales de funciones de una variable.

Paul Tannery en su crítica de 1893 al libro de Jordan en el *Bulletin des sciences mathématiques*, plantea que éste se limita a lo estrictamente necesario para la sucesión de proposiciones, así, Jordan no expone ni la noción de conjunto denso ni la de potencia, pero plantea que en los primeros capítulos se exponen los principios de la forma más sólida de manera que parece ser definitiva. Así, se tiene que la teoría de conjuntos se instauraba en Francia, a través de Jordan como una rama de utilidad para el análisis, y en palabras de Lebesgue:

> Al atreverse a incorporar partes de la teoría de conjuntos en sus cursos en la Escuela Politécnica, Jordain reivindicó de alguna manera esta teoría,[23] él confirmó que se trata de una rama útil de las matemáticas. El hace algo más que afirmarlo, lo prueba para sus investigaciones [...] que han influenciado ciertos trabajos, los míos en particular.[24]

[23] Esta referencia se hace para Francia, porque como se ha visto, ya en Italia Peano en 1884 había incorporado la teoría de conjuntos como base para sus desarrollos en el cálculo.

[24] En [Gispert, 1995, p. 50] citando: Notice sur les travaux scientifiques, *Oeuvres I* , de Lebesgue en 1922.

[Gispert, 1995, p. 52] enuncia los títulos de los cursos dictados por Borel, Lebesgue y Baire en teoría de funciones en l' École Normale ou au Collège de France. Durante los primeros diez años hay seis de Borel: *Leçons sur la thèorie des fonctions*, de 1898; *Leçons sur les fonctions entières*, de 1900; *Leçons sur les séries divergentes*, de 1901; *Leçons sur les séries à termes positifs*, de 1903; *Leçons sur les fonctions méromorphes*, de 1905 y *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes*, de 1906. Hay dos de Lebesgue, que se titulan *Leçons sur líntegration et la recherche des fonctions primitives* de 1904 y *Leçons sur les séries trigonométriques* de 1906, y parece uno de Baire *Leçons sur les fonctions discontinues* de 1905.

Lo anterior muestra el gran interés que había en la teoría de funciones, de la cual Lebesgue dice en 1906:"la teoría moderna de las funciones [. . .] con su lenguaje flexible y preciso se debe a la introducción sistemática de la noción de conjunto [Gispert, 1995, p. 52]".

Leçons sur la thèorie des fonctions,([Borel, 1898]) es una publicación de los resultados de la tesis que Borel hizo en teoría de funciones. En el texto se presenta una detallada descripción de la teoría de conjuntos y las nuevas nociones sobre medida. Borel se sintió atraído a "aterrizar"problemas como la medida de la longitud de la circunferencia, donde entre otras cosas definió la clase de conjuntos medibles (Borelianos). En el prefacio de este libro, Borel plantea que el libro se dedica a teoría de conjuntos, sin embargo, el título se debe a que al hablar de conjuntos, Borel no perdía de vista las aplicaciones. Este libro es igualmente famoso porque en él aparece la prueba del teorema de Cantor - Bernstein.

El contenido del libro es el siguiente:

1. **Nociones generales sobre los conjuntos.**

   La noción de conjunto, La noción de potencia, Los conjuntos numerables, Comparación de conjuntos numerables con los otros conjuntos, Los conjuntos que tienen la potencia del continuo.

2. **Los números algebraicos y la aproximación de los inconmensurables.**

   Generalidades sobre los números algebraicos, El conjunto de los números algebraicos es numerable, Las investigaciones de Liouville, La aproximación de los números inconmesurables.

3. **Los conjuntos perfectos y los conjuntos medibles.**

   Los conjuntos cerrados y los conjuntos perfectos, Los conjuntos perfectos que no son densos en ningún intervalo, Los conjuntos medibles.

4. **La extensión analítica.**

   La definición de extensión analítica, Un teorema de Poincaré y Volterra, Nota de Weierstrass sobre las series de funciones uniformes.

5. **Sobre la convergencia de algunas funciones reales.**

   Definición de las series estudiadas, Series de una sola variable, Series de dos variables, Curvas de convergencia uniforme.

6. **La noción de función de una variable compleja.**

   Funciones analíticas y expresiones analíticas, El teorema de Mitag - Leffler, Las representaciones analíticas conocidas, Notas sobre las series de fracciones racionales, Estudio de algunas series de fracciones simples, Propiedades esenciales de las series estudiadas. - Conclusión.

El contenido de este libro se puede dividir en dos partes, la primera correspondiente a teoría de conjuntos de puntos, la segunda parte a teoría de funciones. Nótese que en el primer capítulo la noción de potencia se centra únicamente en los conjuntos numerables y en los equipotentes con el continuo, asumiendo así solo una pequeña parte de la teoría cantoriana de conjuntos. Así mismo es notoria la ausencia de la concepción de ordinal.

Borel se aproxima a la idea de conjunto como una colección de un número finito o infinito de objetos cualesquiera, sin embargo no propone una defin- ción de conjunto ya que "al parecer es una noción suficientemente primitiva, por lo que una definición sería, a lo menos, innecesaria"[Borel, 1898, p. 1]. En ese sentido, propone ejemplos de lo que es conjunto y de lo que no es, exponiendo como ejemplos el conjunto de los números racionales, el conjunto de números positivos, el conjunto de funciones continuas de una variable real, el conjunto de puntos sobre una circunferencia dada donde los senos son inconmesurables, etc.

Lo anterior sirve para reforzar la idea de que sus intereses en teoría de conjuntos no apuntan hacia su fundamentación, sino que ve a ésta como una herramienta para sus desarrollos analíticos en la teoría de funciones. Sin embargo, Borel no deja de reconocer el atractivo de esta teoría, quizás de la parte que no se aplicaba a la teoría de funciones (como la de las cardinalidades mayores) al plantear la siguiente cita:

> Al igual que a muchos matemáticos jóvenes, la teoría de conjuntos me ha cautivado inmediatamente; y no me arrepiento de ésto en lo más mínimo porque es un ejercicio mental que abre la mente[Graham y Kantor, 2009, p. 40].

De otro lado, el trío francés, como Graham y Kantor llaman a Borel, Baire y Lebesgue, es reconocido por rechazar el uso del axioma de Zermelo en las matemáticas, sin embargo, hay diferencias sutiles entre si en la aceptación de los ordinales de la segunda clase. Borel y Baire no se refieren a cardinales, pero se entiende que no aceptan ω_1. Los ordinales transfinitos los usan sólo como plantilla (o como especie de contador cuando se agota $\mathbb{N}$), pero no los conciben con carácter numérico. La gran diferencia de estos dos con Lebesgue es que el último si acepta el límite ω_1. Relativo a ello se puede hablar de dos tipos de existencia:

- La existencia constructiva de Baire: se presenta al describir objetos mediante procesos en los cuales se utilicen únicamente los ordinales de primera o segunda clase (sin admitirlos como una totalidad) de la teoría cantoriana de conjuntos.

- La existencia constructiva de Lebesgue: los objetos se describen a través de procesos que hacen uso de la totalidad de los ordinales de segunda clase.

En este sentido se está reeditando una antigua discusión entre Dedekind, Kronecker y Cantor, acerca del problema de la existencia de objetos matemáticos.[25]

[25] Para ampliar sobre esta discusión ver [Dedekind, 1888, p. 105] y [Ferreirós, 2006, pp. 38-40 y 105-108] en donde se hace referencia a las restricciones de Kronecker a la libre construcción de objetos matemáticos y a la respuesta de Cantor a estas objeciones.

Este es sólo un aparte del problema de existencia, en el cual la más interesante discusión se da entorno al axioma de elección, en el que es famoso el intercambio de estos tres con Hadamard. Baire, Borel y Lebesgue se oponen a las demostraciones en las que interviene el axioma de elección, Hadamard lo ve plausible.

Así, Borel, Baire y Lebesgue, fueron receptores moderados de las nociones sobre transfinitos de Cantor, ellos hacen uso sólo de los ordinales transfinitos de hasta segunda clase, no como números, pero si como índices cuando la plantilla de los números naturales no era suficiente. A pesar de ello, el propio René Baire en su tesis doctoral de 1899 en la que propone y aborda un problema concerniente a la teoría de funciones, prevé que la solución de este problema está en los desarrollos de la teoría de conjuntos.

Para cerrar este apartado, se puede resumir planteando que la teoría de conjuntos se retroalimentaba de la teoría de funciones, adquiriendo una mayor acogida en la Escuela de París, especialmente con los trabajos de Baire, Borel y Lebesgue, tanto así que el primero de estos planteaba que la teoría de funciones podía desplegar sus mejores problemas sólo con los avances en teoría de conjuntos de puntos, que representa la primera etapa de Cantor:

> La teoría de conjuntos de puntos juega un papel muy importante en estos métodos;[26] se puede así mismo decir que, en el orden de ideas en que nosotros nos hemos movido, todo problema relativo a la teoría de funciones conduce a ciertas cuestiones relativas a la teoría de conjuntos; y en la medida en que estas últimas cuestiones estén avanzadas, puede que sea posible resolver más o menos el problema planteado [Baire, 1899].

Así, de los tres enfoques sobre la teoría de conjuntos planteadas en el apartado 3.1, se puede asociar a Baire, Borel y Lebesgue con la primera etapa de Cantor, en la que se concibe a la teoría de conjuntos como una herramienta de la teoría de funciones, que es el área central de interés de los tres franceses.

[26]En concreto, Baire se refiere a los métodos usados para demostrar la existencia de funciones de cada una de las clases de su jerarquía definida en su tesis de 1899.

3.3.2. Alemania: Hilbert, Zermelo, Haussdorff

Este apartado se centrará en determinar la cercanía de Zermelo y Haussdorff a los tres enfoques planteados, sabiendo que varios otros autores alemanes contemporáneos a ellos pueden entrar a ser referenciados, sin embargo estos dos representan de muy buena forma las tradiciones o tendencias principales que predominaron en Alemania los primeros años del Siglo XX respecto a teoría de conjuntos.

Como se planteó en el apartado 3.2, Hilbert no es reconocido en teoría de conjuntos por su aportes y resultados directos sino por el estímulo e impulso que dio a matemáticos jóvenes para investigar en este nuevo campo, es así como por ejemplo en el primer congreso internacional de matemáticas en 1897, el alemán German Hurwitz, cercano al círculo de Hilbert y Klein dió una charla plenaria en la que se enfatizaba la importancia de la teoría de conjuntos en el análisis, concretamente, sugirió una clasificación de funciones analíticas basadas en el correspondiente conjunto de singularidades, en el que las nociones de conjunto numerable, cerrado y perfecto tenían gran importancia [Ferreirós, 1999, p. 300].

Así mismo, Ernst Zermelo quien realizó sus estudios en Berlín, logrando una buena reputación en matemáticas aplicadas y física teórica, en 1897 fue a Gotinga y bajo la influencia de Hilbert se interesó en los problemas fundamentales de la teoría de conjuntos, teniendo así un cambio en su campo de actividad. Cabe decir que Zermelo se dedica a problemas abiertos, y no publica libros, sólo artículos.

En Gotinga Zermelo imparte el que parece ser el primer curso en teoría de conjuntos [Peckhaus, 1990, p. 77ff] [27] en 1900/01, guiándose por los *Beiträge* de Cantor, y donde descubrió al mismo tiempo que Russell, pero de forma independiente, las paradojas conjuntistas que llevan el nombre de éste último. Luego en el semestre siguiente, y en Leipzig, Felix Haussdorff[28] impartió otro curso en el que, siguiendo una corrspondencia de Cantor, mostró que el conjunto de todos los tipos de orden numerables tiene la

[27] Citado en [Ferreirós, 1999, p. 317] pie de página 1. Cabe decir que Cantor ni Dedekind dictaron lecciones sobre teoría de conjuntos.

[28] Haussdorff nació en Breslavia en 1868 y pudo haber muerto en Bonn en 1942 [Purkert, 2001].

potencia del continuo (llamado posteriormente como teorema de Dedekind - Bernstein).[Purkert, 2001, p. 21].

La referenciada lección sobre teoría de conjuntos impartida por Zermelo da una muestra que su primer acercamiento a esta teoría fue a través del enfoque de la segunda etapa de Cantor, sin embargo él, es reconocido por los aportes en axiomatización y fundamentación, quizás no tanto de las matemáticas sino de la teoría de conjuntos, pero su enfoque sobre la teoría de conjuntos queda plasmada en la primera frase del artículo de 1908 [Zermelo, 1908], que dice: "La teoría de conjuntos es aquella rama de las matemáticas cuya tarea es investigar matemáticamente las nociones fundamentales de número, orden y función, tomándolas en su forma más simple para desarrollar los fundamentos de la aritmética y el análisis", claramente se observa el enfoque de Dedekind de usar la teoría de conjuntos como fundamentadora de las matemáticas. Los títulos de sus publicaciones de Zermelo son:

1. de 1901: Addition transfiniter Cardinalzahlen, *NG*. [29]

2. de 1904: Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe), *MA*.[30]

3. de 1908: Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *MA*. [31]

4. de 1908: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I, *MA*.[32]

5. de 1909: Sur les ensembles finis et le principe de l' induction complète, *AM*.

6. de 1909: Über die Grundlagen der Arithmetik, *V Congreso internacional de matemáticas, Roma*. [33]

7. de 1914: Über ganze transzendente Zahlen, *MA*. [34]

[29] Adición de cardinales transfinitos.
[30] Demostración de que cada conjunto puede ser bien ordenado.
[31] Nueva demostración de la posibilidad de un buen orden.
[32] Investigaciones sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos.
[33] Sobre los fundamentos de la aritmética.
[34] Sobre los números enteros trascendentes.

8. 1929: Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik, *FM.* [35]
9. de 1930: Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *FM.* [36]
10. de 1932: Über Stufen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen, *DMV.* [37]
11. de 1935: Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme, *FM.* [38]

Su artículo de 1904, *La prueba de que todo conjunto puede ser bien ordenado*, tuvo un impacto inmediato en los círculos matemáticos tanto de aprobación como de rechazo, debido al uso del axioma de elección, ocasionando debates de alto contenido filosófico como el que se presentó en Francia entre Hadamard de un lado, y del otro Borel, Baire y Lebesgue.[39] En este artículo se evidencia mayor recepción de las ideas de Cantor que de las de Dedekind, ya que en la demostración hace uso de la noción de cubrimiento.[40] Posterior a esa publicación, se interesó en los fundamentos de los números estudiando en detalle a Dedekind,[41] lo que se reflejó en sus artículos de 1908, en lo que emplea nociones y resultados de Dedekind,[42], tanto así que en el *Untersuchungen* de 1908, dice que intenta mostrar que la teoría creada por G. Cantor y R. Dedekind se puede reducir a unas pocas definiciones y siete principios o axiomas, aparentemente independientes entre si.[Ferreirós, 1999, p. 320].[43]

[35] Sobre el concepto de bien definido en la axiomática.

[36] Sobre los números límite y los dominios de conjuntos. Nuevas investigaciones sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos.

[37] Sobre los niveles de cuantificación y la lógica del infinito.

[38] Fundamentos de la teoría general de los sistemas de proposiciones matemáticas.

[39] Hadamard defendía la postura de Zermelo, mientras que Borel , Baire y Lebesgue la rechazaban. Este debate fue publicado bajo el título “Cinq lettres sur la théorie des ensembles”. Ver [Baire et al., 1905].

[40] De alto sentido en la teoría de conjuntos de puntos, con la que se relaciona a la primera etapa de Cantor.

[41] Se detalla en [Peckhaus, 1991, pp. 90-97].

[42] Es especialmente importante en la segunda prueba del buen ordenamiento (“Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung”) la teoría de cadenas de Dedekind, que fue usada por Zermelo como modelo para esta demostración.

[43] [Ferreirós, 1999, p. 225] dice que Zermelo estableció una conexión entre la teoría de conjuntos transfinitos de Cantor y la teoría de conjuntos, aplicaciones y cadenas presentada por Dedekind en su *Zahlen*, pero señala también la inquietud de que el mismo Dedekind pudo conocer previamente esta conexión.

De otro lado, en Felix Haussdorff se evidencia la recepción de las ideas de Cantor, de hecho ellos tenían bastante contacto, ya que entre otras cosas Leipzig y Halle son ciudades cercanas.[44] La cercanía y/o admiración de Haussdorff hacia Cantor era tal que la dedicatoria de su libro *Grundzüge der Mengenlehre* de 1914, es a éste, donde además lo reconoce como el creador de la teoría de conjuntos. Este libro, *Grundzüge* ha sido el primer manual de amplia repercusión en teoría de conjuntos, permitiendo a Haussdorff consolidarse como como una autoridad en el campo. El impacto de este libro fue tal que por ejemplo, desde el primer volumen de la revista polaca *Fundamenta Mathematicae* el *Grundzüge* de Haussdorff fue citado frecuentemente,[45] en los primeros veinte volúmenes de la revista, que se publicaron entre 1920 y 1933, de los 588 artículos publicados (excluyendo los tres de Haussdorff) no menos de 88 referenciaron esta obra [Purkert, 2001, pp. 34-35]. El libro contiene los siguientes capítulos:

1. Operaciones entre conjuntos
2. Operaciones entre funciones
3. Cardinales
4. Conjuntos ordenados. Tipos de orden
5. Conjuntos bien ordenados. Números ordinales
6. Relaciones entre conjuntos ordenados y bien ordenados
7. Conjuntos de puntos en espacios generales
8. Conjuntos de puntos en espacios especiales
9. Ejemplos de funciones
10. Contenido de conjuntos de puntos

[44]Hausdorff fue profesor en las universidades de Leipzig (1902-1910), Greifswald (1913-1921) y Bonn (1910-1913 y 1921-1935). Mientras Hausdorff estaba en la Universidad de Leipzig, Cantor era profesor en la Universidad de Halle. En [Purkert, 2001, p.21] se dice que organizaban encuentros juntos cada semestre a veces en Halle y otras en Leipzig y que Cantor llegó a invitar a todo el grupo a su casa.

[45]En los artículos de teoría de conjuntos de puntos y de topología.

Los seis primeros capítulos corresponden a teoría de conjuntos transfinitos (al rededor de doscientas páginas) mientras que los cuatro capítulo finales (alrededor de doscientas cincuenta páginas) a teoría de conjuntos de puntos y teoría de funciones. Lo que da una clara muestra del enfoque que le da a la teoría de conjuntos, en la que no le interesa los fundamentos de ésta[46] pero hereda las temáticas de intereses de Cantor, tanto de la primera como de la segunda etapa.

En 1927 Haussdorff publicó el libro titulado *Mengenlehre*, que ha sido declarada como la segunda edición del *Grundzüge* de 1914. Aunque por contenido se puede decir que es un libro nuevo. Para aparecer en la serie de Göschen, era necesario dar una presentación mucho más restringida que en el *Grundzüge*. Así, gran parte de la teoría de conjuntos ordenados y las secciones sobre teoría de la medida y la integración se eliminó del nuevo libro. Por ejemplo en la edición de 14 el capítulo correspondiente a los conjuntos de puntos en espacios generales lo hace a través de los espacios topológicos, mientras que en el 27 es através de espacios métricos. Los dos primeros capítulos del 14 se combinan y aparecen en el primer capítulo de la edición del 27. La primera edición es mucho más detallada, estudia más los conjuntos ordenados ya que en el segundo sólo estudia los números ordinales y en el segundo desaparece el capítulo de relaciones entre conjuntos bien ordenados y conjuntos ordenados.[47]

De Haussdorff es importante anotar que tuvo gran repercusión en la escuela topológica rusa iniciada por Pavel Alexandroff y Pavel Urysohn ([Purkert, 2001, p. 35]), y que en 1916 Haussdorff y Alexandroff resolvieron (cada cual por su parte) el problema del continuo para los conjuntos borelianos.

Otro punto para tener en cuenta en Alemania es que la Sociedad Matemática Alemana puso en marcha la *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (*Enciclopedia de ciencias amtemáticas*), que apareció en 1898 y en la que Schönflies escribió un apartado sobre *Mengenlehre*. Esta enciclopedia se dividió en seis partes, y *Mengenlehre* hizo parte de la primera

[46] En las páginas 1 y 2 de su libro de 1914, [Hausdorff, 1914], dice que no le interesa los fundamentos y remite al lector interesado en ello a leer a Zermelo y el artículo de éste de 1908.

[47] Los capítulos del libro de 1927 se presentan en el capítulo 6.

que se denominaba: aritmética y álgebra. La temática que trató Schöenflies se repartió entre aritmética transfinita y topología de conjuntos de puntos.[48]

3.3.3. Inglaterra

[Moore, 1982] en el apartado 2.7 (An English Debate) dice que los ingleses que hicieron parte del debate sobre el axioma de elección tenían buen conocimiento de la obra a Cantor. Entre ellos Hardy había publicado una demostración de que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ y que todo cardinal infinito o es un aleph o es más grande que todos los alephs. Jourdain propuso su propio argumento que todo conjunto puede ser bien ordenado. Russell y Whitehead han investigado aritmética cardinal en el contexto de los fundamentos de las matemáticas. W.H. Young se ha ocupado de la topología de conjuntos de puntos. El único no cantoriano era el analista Ernest Hobson, quien inició el ataque a la prueba de Zermelo.

Los esposos Young, Grace Chisholm y William Henry fueron quienes dieron a conocer la teoría de conjuntos de puntos en Inglaterra. Ambos viajaron al continente europeo posteriormente al leer una disertación de Klein de 1895. El propio Klein les sugirió introducirse en el *Mengenlehre* de Shöenflies que realizó para la Sociedad Matemática Alemana, lo cual marcó su carrera académica. Ellos vivieron en Gotinga hasta 1908, donde conocieron personalmente a Cantor y donde se sintieron atraidos a la teoría de conjuntos de puntos. William Henry publicó en 1905 una teoría general de la integración, diferente pero más o menos equivalente a la de Lebesgue, de hecho es él quien utilizó la expresión *Integral de Lebesgue*, y ambos esposos publicaron en 1906 con Cambridge University Press el tratado titulado *The theory of sets of points*, que fue el primero en inglés. También tradujeron algunos artículos de análisis de la *Encyklopädie* alemana pero encontaron poca acogida en su país y abandonaron el proyecto de seguirla traduciendo. [Grattan-Guinness, 2000, pp. 131-132]. Posteriormente realizaron publicaciones sobre teoría de funciones de variable real.

[48]Para la traducción francesa de este proyecto, que se llamó *Encyclopédie des sciences mathématiques*, la parte de teoría de conjuntos estuvo a cargo de Baire y Schöenflies y estuvo publicada en 1909, la cual amplió la versión alemana, doblando la cantidad de páginas, ya que en la versión alemana solo había 24 páginas.

La principal obra de Bertrand Russell es *Principia Mathematica*, publicada en 1910 junto a su ex-profesor Alfred North Whitehead, en la que se presenta un sistema axiomático que puede fundamentar todas matemáticas, mostrando así, su visión de que la matemática es reducible a la lógica.

Russell está mas asociado a Cantor, Peano y Frege que a Dedekind,[49] aceptando incluso que sus principales deudas en matemáticas las tiene con Cantor y Peano [Ferreirós, 1999, pp. 229-305]. Así mismo [Ferreirós, 1999, p. 305] dice que en *The Principles of Mathematics* de 1903, donde publicó las reconocidas paradojas, Russell recopiló trabajos previos sobre fundamentos de matemáticas, particularmente en análisis, geometría y lógica dando gran atención a Weierstrass, Cantor, Dedekind, von Staudt, Pasch, Pieri, Peano, Frege y Schröder. Donde habla favorablemente de las doctrinas de Cantor y Dedekind, y de este último acepta el teorema de infinitud pero no comparte su noción de ordinal ni la concepción estructural de número.

Russell fue el primero en probar que el conjunto de partes tiene un cardinal mayor que el propio conjunto, utilizando algo similar al axioma del conjunto potencia, entre otros resultados de la teoría cantoriana, sin embargo gradualmente llegó a estar más próximo a Frege (como logicista) que a Cantor [Ferreirós, 1999, p. 306].[50] De hecho diferencia entre teoría de conjuntos y Mengelehre, siendo la primera la teoría general y la segunda se refiere a los casos en que se involucra las propias ideas de Cantor, especialmente las concernientes a los transfinitos. Ello explica el porqué de los aportes de Russell en el ámbito de las paradojas conjuntistas y sus desarrollos de la teoría de tipos,[51] que en cierto momento implicó una separación de la axiomatización de Zermelo, en la que ambas tendencias intentaban reconstruir la teoría de conjuntos a partir de fundamentos apropiados, sin embargo posteriormente volvieron a converger estas posturas [Ferreirós, 1999] (pág xiv).

En una línea similar a Russell estaba Philip Jourdain de quien [Ferreirós, 1999] referencia en su bibliografía en los artículos entre 1906 y 1914 publicados

[49] Se trae a colación este hecho, debido a lo enunciado anteriormente en la parte final del apartado 3.1, sobre la buena recepción de las ideas de Dedekind entre los logicistas.

[50] Sin embargo la cercanía a Cantor, ha sido a través de los transfinitos, sin abordar la primera etapa de Cantor correspondiente a aspectos de teoría de funciones o de teoría de conjuntos de puntos.

[51] Ya que Russell concebía los conjuntos como parte de la lógica.

en *Archiv für Mathematik und Physik*, tituados "The Development of the Theory of Transfinite Numbers"y de 1910 hasta 1913 publicados en *Quarterly Journal for pure and applied Mathematics* titulados "The Development of Theories of Mathematical Logic and the principles of Mathematics"[52] y tradujo al inglés y editó en 1915 los *Beiträge* de Cantor bajo el título *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers.*

[Grattan-Guinness, 2000] referencia en su bibliografía las siguientes publicaciones de Hardy relativas a la teoría de conjuntos y las ramas cercanas: de 1903 *A theorem concerning the infinite cardinal numbers*, de 1918 *Sir George Stokes and the concept of the uniform convergence* y de 1924 *Orders of infinity.*

La primera etapa de Cantor tuvo una moderada aceptación a través de los esposos Young, sin embargo la segunda etapa de Cantor tuvo gran recepción, especialmente en el ámbito del tratamiento de las paradojas en conexión con los fundamentos de las matemáticas, donde no hay una recepción o aceptación directa de Dedekind, pero si una recepción indirecta de su visión intermediada por Peano y Frege.

3.4. Cuarto momento

De esta etapa se hablará de un grupo de autores que aunque no eran alemanes tuvieron contacto fundamental con la escuela de Gotinga en Alemania y de la escuela de Moscú. El caso de Varsovia, que es contemporáneo a los otros dos no será abordado en este apartado ya que esta escuela se profundizará en el capítulo 4.

3.4.1. Fraenkel, Gödel, Von Neumann, Bernays

Aunque Fraenkel, Gödel, Bernays y Von Neumann no fuesen propiamente alemanes,[53] parte importante de sus aportes en teoría de conjuntos se deben

[52] Jourdain también realizó una publicación en historia de la teoría de conjuntos en 1906.

[53] Fraenkel era israelí pero nacido en Alemania, Gödel nació en Brno (actualmente República Checa) pero era austriaco-estadounidense, Von Neumann húngaro y Bernays suizo.

a la influencia de la tradición de Gotinga.

La relación de estos autores con la teoría de conjuntos es a partir de los fundamentos de ésta, de hecho el capítulo XI de [Ferreirós, 1999] llamado *Consolidation of Axiomatic Set Theory*, se centra en estos cuatro autores, lo que claramente da una idea de la cercanía con el enfoque de Dedekind.

El primero que surgió de estos autores fue Abraham Fraenkel, quien desarrolló sus estudios de matemáticas en varias universidades alemanas: Múnich, Berlín, Marburgo y Breslavia, dictó clases en Marburgo desde 1916 y en 1922 tuvo una plaza como profesor en la misma universidad. Luego en 1928 dió clases en la Universidad de Kiel y en 1929 se trasladó a la Universidad Hebrea de Jerusalén donde siguió el resto de su carrera.

Fraenkel es normalmente asociado al sistema axiomático de teoria de conjuntos más reconocido, el sistema Zermelo-Fraenkel (ZF). Y su nombre fue vinculado a este sistema debido a la sugerencia que hizo, en un artículo en 1922, de que el sistema axiomático de Zermelo pudiera ser complementado por el axioma de reemplazo, aunque Mirianoff en 1917 y Skolem en 1922 ya lo habían hecho [Ferreirós, 1999, p. 366]. La relevancia de Fraenkel está en la difusión de la teoría de conjuntos a través de las tres ediciones de su libro *Einleitung in die Mengenlehre*[54], libro que tuvo muy buena recepción, como lo evidencia el hecho de que en cinco años tuviera tres ediciones, y en el cual siguió una presentación axiomática, a manera distinta de otro influyente texto como lo fue el *Grundzüge* de Haussdorff de 1914.

El resultado más importante de Fraenkel fue el que el axioma de elección es independiente de los otros postulados, resultado que publicó en un artículo de 1922 [55], de donde se desprendió la necesidad de clarificar la noción de Zermelo de *propiedad definida*.

John von Neumann nació en 1903. En 1926 obtuvo su doctorado en matemáticas en la Universidad de Budapest (su ciudad natal) con una importante tesis en teoría de conjuntos, además recibió un diploma en ingeniería química en Zurich en 1925. Asistió a clases en Berlín y a algunos seminarios en Gotin-

[54]Las tres ediciones son de los años 1923, 1927 y 1928

[55]*Zu den Grundlagen der Cantor - Zermeloschen Mengenlehre.*

ga. En 1929 estuvo durante un semestre en Princeton, los años siguientes alternó su estancia entre Alemania y Estados Unidos y en 1933 se radicó definitivamente en Pricenton.

El sistema ZFE[56] era una solución satisfactoria para el problema de una axiomatización de la teoría de conjuntos de la época, sin embargo no servía para excluir la posibilidad de la existencia de conjuntos que pertenecieran a sí mismos. En su tesis doctoral en 1925, titulada *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre* (*Una axiomatización de la teoría de conjuntos*), von Neuman presentó un sistema axiomático distinto al de Zermelo, que ha derivado en las versiones axiomáticas modernas y donde demostró cómo excluir la posibilidad de conjuntos pertenecientes a si mismos utilizando el axioma de fundación y la noción de clase.

El axioma de fundación plantea que cada conjunto puede ser construido en orden ascendente y a través de una sucesión ordenada de pasos ordenada usando los principios de Zermelo y Fraenkel, de tal forma que si un conjunto pertenece a otro, el primero debe necesariamente, ir antes del segundo en la sucesión, excluyendo así que un conjunto pueda pertenecer a sí mismo.

La noción de clase es más amplia que la de conjunto, en ese sentido se entiende un conjunto como una clase que pertenece a otras clases, mientras una clase de propiedad es definida como una clase que no pertenece a otras clases. Así, mientras en ZFE no se puede construir el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismo, en el sistema axiomático de von Neumann es válido hablar de la clase de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos, de la cual hay que aclarar que no puede ser identificada como un conjunto.

En dos de sus artículos sobre teoría de conjuntos 1923 *Zur Einführung der transfiniten Zahlen* (Sobre la introducción de números transfinitos) de 1923 y *Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre* (Sobre definiciones por inducción transfinita y cuestiones relacionadas con teoría de conjuntos) de 1928, von Neumann plantea que si se da por sentada la inducción transfinita, se podría expresar la noción de ordinal como el conjunto de todos los ordinales que lo preceden;

[56]Zermelo - Fraenkel -Elección, denotado en inglés como ZFC.

en ese sentido introdujo los ordinales a través de la serie:

$$\begin{array}{l}
\emptyset, \\
\{\emptyset\}, \\
\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\
\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
\qquad\vdots \\
\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, ...\}, \\
\qquad\vdots
\end{array}$$

De otro lado, en el Congreso internacional de matemáticas de Königsberg de 1930, Kurt Gödel anunció que los sistemas axiomáticos usuales son incompletos, lo cual significa que no pueden probar todas las proposiciones verdaderas que se puedan expresar en su lenguaje. Von Neumann, obtuvo una interesante consecuencia de su teorema: los sistemas axiomáticos usuales son incapaces de demostrar su propia consistencia. Aquellos dos resultados fueron publicados por Gödel en 1931 en "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme"("Sobre proposiciones formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas relacionados), y son conocidos como los teoremas de incompletitud de Gödel, lo que significó el punto final de medio siglo de intentos por encontrar un conjunto de axiomas suficiente para toda la matemática.

Lo anterior se refiere a parte de los aportes de Gödel en fundamentos de las matemáticas, lugar donde goza de gran reconocimiento y que corresponde a una etapa previa a sus aportes en teoría de conjuntos. Sin embargo, las contribuciones de Gödel en teoría de conjuntos han sido variadas e importantes. Durante las décadas del 30 y del 40 está la llamada concepción iterativa de los conjuntos, idea que lleva a justificar axiomas habituales del sistema de Zermelo - Fraenkel, y además aclara por qué las paradojas no afectan a la teoría axiomática de conjuntos.

Sobre las contribuciones técnicas que Gödel realizó hacia 1940, están los intentos para aplicar los métodos de la lógica matemática al estudio metateórico del sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel (y otros sistemas alternativos de teoría de conjuntos).

Respecto a la discusión sobre el axioma de elección, Gödel demostró en 1939 que, si la teoría de Zermelo-Fraenkel (sin Axioma de Elección) es consistente, entonces también lo es la teoría ZFE, por ello, la prevención contra el Axioma de Elección perdió base.

Gödel también demostró, en 1938[57]que la Hipótesis del Continuo de Cantor puede añadirse a la teoría ZFE sin afectar su consistencia.

Pasando ahora a Paul Bernays, cabe decir que el no hizo publicaciones en teoría de conjuntos antes de 1930, pero tuvo contacto directo con Zermelo y Hilbert. En 1912 Bernays obtuvo su doctorado bajo la dirección de E. Landau, en la cual su tesis era sobre teoría de números analíticos de formas cuadráticas binarias. El mismo año obtuvo su habilitación en Zurich, donde Zermelo era profesor, e hizo su habilitación sobre el teorema de Picard en teoría de funciones. En 1917, a raíz de su lectura en Zurich fue invitado por Hilbert para trabajar como asistente de investigaciones en fundamentos de aritmética en Gotinga.

Bernays y Gödel introdujeron algunos cambios que simplificaron a la axiomática de von Neumann, de hecho el sistema de axiomas se conoce como NBG (von Neumann, Bernays, Gödel). En primera instancia Bernays incluyó concepto de lógica y teoría de conjuntos de Schröder y de *Principia Mathematica* que lo acercaban a la estructura del sistema original de Zermelo.

Entre las contribuciones de Bernays al sistema axiomático de von Neumann están algunos axiomas para construcción de clases (en 1937), y la obtención de un poderoso aparato que permitió recuperar un análogo al principio de comprensión.

El sistema NBG tuvo gran aceptación a finales de la década de 1930, y una gran diferencia que éste tenía con ZFE, es que era finitamente axiomatizable.

Los cuatro autores tratados en este apartado: Fraenkel, von Neumann, Bernays y Gödel están en la línea de Hilbert y Zermelo, tratando los fundamentos de las matemáticas y los axiomas de la teoría conjuntos, sin tener cercanía a la concepción de la teoría de conjuntos al servicio de otras ramas como la topología o la teoría de funciones, como en autores de otras escuelas. De

[57] "The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis."

hecho son más cercanos a la lógica que a las aplicaciones anteriores.

3.4.2. Moscú: Luzin, Alexandroff

La escuela de Moscú, liderada por Nikolai Luzin, es reconocida por dar los pasos fundamentales para la investigación en teoría descriptiva de conjuntos y por abordar en profundidad la teoría de funciones y la topología.

Luzin, junto con I.J. Zhegalkin, B.K. Mlodzeievski, D. F. Egorov, M. Y. Suslin, P. S. Alexandroff, y P.S. Urysohn, entre otros, conformaron a principios del siglo XX, la *escuela de Moscú de matemáticas.* Con un constante intercambio con los franceses Baire, Borel y Lebesgue, estos matemáticos forjaron un estilo propio e hicieron valiosos aportes a nivel técnico y filosófico en la teoría de conjuntos, teoría de funciones, topología y anális así como en el esclarecimiento de conceptos fundamentales como función, derivada, conjunto e integral.

Según Konstantín Ríbnikov:

> El excepcional auge de las matemáticas rusas durante los años que precedieron a la revolución de octubre, y que se siguió desarrollando *a posteriori*, tuvo sus motivaciones en, al menos, tres aspectos: las pasantías realizadas por Egorov y Mlodzeievski en Francia, la tesis doctoral sobre números trasfinitos de Zhealkin y los resultados sobre funciones medibles del mismo Egorov.[58]

Luzin nació en 1883 y falleció en 1952. Su obra más famosa es *Les ensembles analytiques et leurs applications* [Luzin, 1930], publicada en 1930. En principio, su carrera investigativa estuvo referenciada principalmente por los resultados de su profesor Egorov,[59] aunque también es importante

[58] [Chaves, 2006, p. 64], citando [Ríbnikov, 1991].

[59] Por ejemplo, en 1911 Egorov estableció que "cada sucesión de funciones medibles $\{f_n\}$, que converge casi en todas partes en un intervalo I, converge uniformemente en $I - E$, donde E es un conjunto de medida arbitrariamente pequeña", resultados que impulsó las investigaciones sobre teoría de funciones en Rusia y que motivó las posteriores investigaciones de Luzin.

la influencia de Edmund Landau en su visita a Gotinga en 1910 [O'Connor y Robertson, 2014]. Es así como en 1912 establece la llamada propiedad C, según la cual cada función medible es continua sobre un intervalo si se quita un conjunto de medida arbitrariamente pequeña. Sin embargo, lo que le valió el reconocimiento de sus colegas fue su libro *Integral y series trigonométricas*, el cual presentó en 1915 como tesis de maestría.[60] En este libro, Luzin se propone establecer relaciones entre conjuntos de funciones y el cuerpo teórico que las respalda, en esencia, se propone determinar el aparato analítico que describe un conjunto determinado de funciones. Al respecto de este libro Ríbnikov dice:

> Las ideas contenidas en la tesis de Luzin es asombrosa. Podíamos dar aquí sobre ellas una idea preliminar. Todos los conceptos fundamentales del análisis: función (incluso la medible), derivada, integral y otros sufrieron un estudio profundo desde el punto de vista de la medida de los conjuntos correspondientes. La teoría métrica de funciones en Rusia y en la URSS tiene a Luzin como su fundador[Ríbnikov, 1991, pp. 479-481].

La obra de Luzin se puede suscribir a las siguientes áreas: teoría descriptiva de conjuntos, topología, teoría de la medida y fundamentos de las matemáticas, todo ello en relación con el objeto que para él tenía la teoría de conjuntos, que plantea en [Luzin, 1930, p. 2] que es determinar si es aceptable o no entender el continuo de una forma atomística, es decir como un conjunto de puntos.

Gran parte de la obra de Luzin en teoría de conjuntos se involucra en el estudio de los conjuntos efectivos, es decir en la construcción de conjuntos en los que no interviene el axioma de elección. En ese sentido Luzin es receptor de la escuela francesa (Borel, Baire y Lebesgue), sin embargo, Lyudmila Keldysh [61] considera que Luzin profundizó más que sus predecesores franceses al considerar dificultades que surgían en la teoría de conjuntos efectivos, lo cual fue estudiado intensamente durante veinte años y condujo a la solución de

[60] La investigación tenía tal profundidad conceptual que Egorov, después de escuchar la disertación de Luzin recomendó que se le otorgara el doctorado, pero eso no fue posible porque estaba escrito en un estilo distinto al que se usaba en aquel tiempo en Rusia [O'Connor y Robertson, 2014], sin embargo [Ríbnikov, 1991, p. 480] afirma que se le otorgó el grado científico de doctor.

[61] En L V Keldysh, The ideas of N N Luzin in descriptive set theory, *Russian Mathematical Surveys* 29 (5) (1974), pp. 179-193.

importantes problemas de la teoría de conjuntos.

Desde 1915, Luzin y sus alumnos Pavel Alexandroff y Mikhail Suslin, junto al polaco Wacław Sierpiński iniciaron una línea investigativa que culminaría con la estructuración de la teoría descriptiva de conjuntos, sintetizada en el libro [Luzin, 1930].

Así como se reconoce un documento con el que se puede oficializar el nacimiento de la teoría de conjuntos, que es la carta que Cantor dirige a Dedekind en diciembre de 1873 en la que hace la demostración que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ no son equipotentes, en [Graham y Kantor, 2009, p. 118] se propone que hay un momento que puede identificarse como en el que nace la teoría descriptiva de conjuntos, que es cuando Suslin advierte a su profesor Luzin, sobre el error de Lebesgue en la memoria [Lebesgue, 1905], hecho que ocurre en la oficina de Luzin y con Sierpiński como testigo. En ese sentido, el primer documento sobre teoría descriptiva de conjuntos sería el artículo titulado "Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis"[Suslin, 1917].[62] El error consistía en que Lebesgue usaba el hecho de que la proyección de todo boreliano es igualmente boreliano. Así, con esta publicación de Suslin se abrió todo un campo de investigación con una nueva y amplia clase de conjuntos que desembocaría en la teoría descriptiva de conjuntos.

La etapa de mayor auge de la escuela de Luzin fue entre 1922 y 1926, para ese entonces Luzin se concentró en escribir su segunda monografía sobre teoría de funciones, dedicando menos tiempo a los jóvenes matemáticos de su escuela, así varios de éstos se especializaron en otros tópicos como la topología, ecuaciones diferenciales y funciones de una variable compleja.

En 1927 Luzin fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias de la Unión Soviética, dos años después se vinculó al Departamento de Filosofía y luego al Departamento de Matemáticas Puras. Desde 1935 estuvo a cargo del Departamento de teoría de funciones de variable real en el instituto Steklov[O'Connor y Robertson, 2014].

Uno de los principales representantes de la escuela de Moscú o Escuela de

[62] En el capítulo 6, especialmente en los apartados 6.2 y 6.4 se hace una propuesta distinta sobre el nacimiento de la teoría descriptiva de conjuntos.

Luzin es Pavel Sergueievich Alexandroff, quien nació en Bogorodsk (Rusia) el 25 de abril de 1896 y murió el 16 de noviembre de 1982. Se graduó en la Universidad de Moscú en 1917, se unió a la facultad de matemáticas de esta universidad en 1921 y en 1929 fue nombrado su director.

Alexandroff ingresó a la Universidad de Moscú en 1913 y se unió rápidamente al seminario de Egorov. En su segundo año de estudios, Alexandroff entró en contacto con Luzin, quien había regresado a Moscú después de estar una temporada entre Francia y Alemania.

Alexandroff demostró su primer resultado importante en 1915, que dice que todo conjunto no numerable de Borel contiene un subconjunto perfecto. Después de ello, Luzin le propuso que tratara de resolver el mayor problema abierto en la teoría de conjuntos, la hipótesis del continuo,[63] lo cual no pudo probar ni refutar ya que como lo demostró Paul Cohen en los años sesenta es una hipótesis independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos.

En los veranos de 1923 y 1924 Alexandroff junto a Pavel Urysohn (1898 - 1924) visitaron Gotinga, donde conocieron a Emmy Noether, Courant y Hilbert. Después de la temprana muerte de Urysohn, Alexandroff siguió visitando todos los veranos Gotinga hasta 1932, donde mantuvo un seminario de topología con Heinz Hopf y participó en el seminario de Emmy Noether. De hecho Alexandroff siempre incluyó a Emmy Noether y Hilbert entre sus maestros, así como a Brouwer en Amsterdam y a Luzin y Egorov en Moscú.

Alexandroff y Hopf pasaron un año sabático en Princeton (de 1927 a 1928), donde planearon la escritura conjunta de tres volúmenes de Topología, pero el primer volumen apareció hasta 1935. Este fue el único de los tres volúmenes que apareció ya que la Segunda Guerra Mundial impidió la colaboración para la escritura de los dos volúmenes restantes [Díaz, 2002].

[63]La hipótesis del continuo establece que no hay ningún conjunto cuya cardinalidad esté entre la de los números Naturales y la de los números Reales.

3.5. Conclusiones y Comentarios

1. Dedekind y Cantor son los personajes que se identifican en el primer momento de los desarrollos conjuntistas. De la obra de estos dos matemáticos se identificaron tres tendencias en los desarrollos conjuntistas:

   - Como herramienta para abordar problemas de otras ramas de las matemáticas (especialmente la teoría de funciones, en su caso especial la representación en series trigonométricas).

   - Como fundamentadora de las matemáticas.

   - Para abordar la teoría de conjuntos transfinitos.

   Se puede pensar que sólo habría dos enfoques de los desarrollos conjuntistas, uno al servicio de la teoría de conjuntos actual, que correspondería a lo que denominamos en este capítulo como segunda etapa de Cantor; y otra aplicada al resto de las matemáticas, que incluiría la primera etapa de Cantor y la visión de Dedekind, sin embargo se merece un aparte especial la perspectiva de Dedekind ya que es un replanteamiento de las matemáticas en términos de conjuntos y estructuras, cuestión heredada por Hilbert y Bourbaki, y que es distinta a la forma como se hacía las matemáticas anteriormente que coincide con los primeros desarrollos conjuntistas de Cantor.

   De cada uno de los autores nombrados en este capítulo, se identificó el uso de las herramientas de la teoría de conjuntos bajo estos tres enfoques, llegando a que ninguno ha usado las tres. Cabe decir que entre los autores que se acogen la tendencia fundamentadora de Dedekind, se puede encontrar distintos propósitos, por ejemplo, en Dedekind su visión es dar base a las matemáticas (empezando por el álgebra) a través de la teoría de conjuntos; mientras que Russell busca fundamentar las matemáticas teniendo como base la lógica, siendo la teoría de conjuntos solo una parte importante de la lógica, mientras que en Zermelo el propósito es dar una base sólida a la teoría de conjuntos desarrollada por Cantor, pero para ello se apoya en el enfoque fundamentador de Dedekind.

2. El descubrimiento de paradojas en el seno de la teoría de conjuntos

transfinitos de Cantor fue un momento álgido para la crisis de los fundamentos de las matemáticas, que venía acentuada desde casi dos siglos antes, con la crítica del obispo George Berkeley a la forma en que se trataba en el cálculo a las cantidades evanescentes. Desde ese momento se intensificaron los esfuerzos por dar salida a esta problemática, surgiendo propuestas para que las matemáticas tuvieran una base firme, las cuales se desarrollaron en cuatro direcciones: la axiomática de conjuntos, el logicismo, el intuicionismo y el formalismo.

No corresponde aquí profundizar en cada una de estas direcciones, las cuales buscaban resolver un problema más amplio que el generado por las paradojas conjuntistas, sin embargo de estas direcciones surgieron posturas relativas a la forma de fundamentar la teoría de conjuntos. Estas posturas son:

a) La *teoría intuitiva de conjuntos*, que se desarrolla teniendo en cuenta únicamente el axioma de extensión y el principio de comprehensión.[64] Este último principio es el que generó la paradoja de Buralli-Forti al llegar a que no era posible admitir al conjunto de todos los ordinales[65] y otras paradojas similares.

    El estilo retórico y libre de Cantor para presentar los conjuntos ha hecho que éste sea catalogado de intuitivo[66] por algunos autores, sin embargo, hay evidencias de que Cantor conocía las paradojas a mitad de la década de 1890, por lo que aceptaría restricción al principio de comprehensión,[67] y en [Ferreirós, 2006] se plantea que de acuerdo a la correspondencia de Cantor con Hilbert y con Dedekind, el primero se considera opuesto a la

[64][Jech y Hrbacek, 1984] denominan a este último *esquema de axioma de comprehensión*, el cual dice: dada $\phi(x)$, existe $\{x : \phi(x)\}$. Se debe diferenciar del axioma de comprehensión, que tiene restricción sobre ϕ.

[65]La suposición de que la colección de todos los ordinales es un conjunto, lleva a una contradicción denominada Paradoja de Buralli - Forti, y debe su nombre al matemático Cesare Burali-Forti, que la publicó en 1897 en el artículo "Una questione sui numeri transfiniti", *Rend. Cir. Mat. Palermo*, 11(1897), 154-164. Sin embargo esta paradoja era de dominio desde principios de los años 1890.

[66]En inglés *naive set theory.*

[67]Se puede profundizar en [Tait, 2000].

concepción logicista de conjuntos, donde los representantes eran Frege, Peano y Dedekind, que es a lo que se llama *naive set theory.* Además tanto en la definición de 1895 en *Beitrage* como en ideas posteriores sobre conjuntos consistentes e inconsistentes, Cantor dio una respuesta verbal al problema de las paradojas, pero no una respuesta bien formulada matemáticamente. Así, teniendo en cuenta esos detalles históricos y conceptuales, en 1883 en los *Grundlagen*, Cantor aceptaba la idea *naive*; pero no en 1895.

b) *Las teorías axiomáticas*, las cuales surgen como respuesta a la crisis producida por las paradojas conjuntistas. Las distintas axiomaticas tienen como base el formalismo planteado por Hilbert, en el que los objetos ideales (en esta caso los conjuntos) pueden carecer de significado, sin embargo a partir de estos se podrían deducir objetos y teoremas que si tuviesen significado. En este sistema formal axiomático se usa las reglas de la lógica, para evitar involucrar contradicciones. Con esto la propuesta es no definir los conjuntos (como lo hacía Cantor), sino caracterizar a través de axiomas estos objetos.

La primera teoría axiomática de conjuntos fue desarrollada por Ernest Zermelo en su artículo *Investigaciones sobre teoría de conjuntos* de 1908, [Zermelo, 1908], donde considera un "dominio"B, de objetos, llamados "cosas". Los conjuntos son algunas de estas cosas. Las cosas se relacionan entre sí por algunas relaciones:

- Relación de 'pertenencia': se escribe de la forma $a \in b$ para significar que 'a es un elemento de b '.
- Subconjunto: Si todo elemento x de un conjunto M es también elemento del conjunto N, se dice que M es un subconjunto de N y se escribe $M \subset N$.
- Predicados: Un enunciado abierto $E(x)$, donde x es un elemento de la clase K, se dice bien definido si es posible determinar la validez o no para cada x.

Los axiomas ZFE se presentan en el apéndice B.

Hay otras axiomáticas distintas a la de Zermelo, se pueden consultar por ejemplo en [Fraenkel et al., 1973].

c) La *teoría de tipos* es propuesta por Russell, quien identificó que todas las paradojas[68] violan su principio del círculo vicioso: *ninguna colección puede contener miembros definidos en términos de sí mismo*, y que éstas podrían evitarse mediante una teoría de los tipos. [69]

"Las definiciones que deberían considerarse no predicativas son las que contienen un círculo vicioso", pero Russell llama a una función proposicional *predicativas* si esta es del orden más bajo compatible con el de su argumento, en ese sentido, un *tipo* es el rango de significancia de una función, donde se asume que siempre hay valores de x para el cual $\phi(x)$ no solo es falsa, sino que no tiene significado. El tipo de ϕ es formado por los argumentos con los cuales $\phi(x)$ tiene significado y toma valores.

La teoría extensional de los tipos propone la jerarquía que comienza con los individuos, pasa a clases de individuos, luego a clases de clases de individuos; y así sucesivamente.

[68]Algunas paradojas reconocidas, aparte de las conjuntistas, son:

La de Russell: *¿Existe un conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos?*; la paradoja del mentiroso: *Epiménides, el cretense dice: ¡Todos los cretenses son mentirosos! ¿Dice Epiménides la verdad?*; la paradoja de Richard: *Si las propiedades aritméticas se ordenan según su longitud y las definiciones que contienen la misma cantidad de letras se ordenamos alfabéticamente. Se define número richardiano a aquel que no le corresponde al número de la propiedad que lo describe. La definición de número de Richard también es una definición de la aritmética y a ella le corresponde también cierto número natural. Sea este número m. ¿Es el número m richardiano?* y la paradoja de Berry: *Sea m el "mínimo entero que no puede ser descrito con menos de trece palabras". Como esta expresión consta de doce palabras, ¿a cuál de estos conjuntos pertenece m: al conjunto de enteros expresables en español con menos de trece palabras o al conjunto de enteros que tan sólo podrán describirse usando trece palabras o más?* entre otras.

[Ladrière, 1969] clasifica estas paradojas en dos categorías: paradojas sintácticas y paradojas semánticas. A la primera, pertenecen las que proceden de conceptos matemáticos y a la segunda, las que proceden de problemas lógicos. Frank Ramsey denominaba paradojas epistemológicas a las primeras y paradojas lógicas a las segundas.

[69]Privadamente en una carta de 1908 a Jourdain y públicamente dos años más tarde en *Principia Mathematica* (Vol 1. p. vii), Russell sostenía que sólo una versión de la teoría de tipos podría eludir las paradojas [Moore, 1978].

Russell no puede acogerse al predicativismo, así que para eliminar el principio del círculo vicioso induce el axioma de reducibilidad.

La objeción más frecuente contra la teoría de los tipos, es que no establece distinción entre paradojas lógicas y paradojas semánticas, se soluciona por medio de versiones distintas de la original planteada por Russell.

d) El *semi-intuicionismo*[70] de Borel, Baire y Lebesgue, no acoge la idea de conjunto arbitrario y no acepta la existencia de $\aleph_1$.

El semi intuicionismo de los franceses no acoge todas las cardinalidades infinitas cantorianas, acepta los ordinales hasta de segunda clase, solo como contador cuando $\mathbb{N}$ no es suficiente.

Borel y Baire no se refieren a cardinales, pero se entiende que no aceptan ω_1. Los ordinales transfinitos los usan sólo como plantilla (o como especie de contador cuando se agota $\mathbb{N}$), pero no los conciben con carácter númerico. La gran diferencia de estos dos con Lebesgue es que el si acepta el límite ω_1.[72]

e) La *teoría intuicionista* tuvo en Luitzen Brouwer su principal exponente, quien exploró en detalle las consecuencias de rechazar el infinito actual, haciendo críticas al logicismo de Russel, al formalismo de Hilbert y al semi-intuicionismo de los franceses. Brower no acepta los vínculos metafísicos ímplicitos en la teoría de conjuntos infinitos de Cantor, criticando también la aplicación del tercio excluido para totalidades infinitas, y plantea que los elementos de un conjunto deben pertenecer a "cierta esfera conceptual ", como el dominio de la aritmética, de la teoría de funciones, de la geometría, o incluso de la lógica o la epistemología.

[70]Del semi-intuicionismo francés ya se habló en el apartado 3.3.1. El nombre de semi-intuicionistas viene dado po la postura restrictiva respecto a los infinitos, pero menos radical que el intuicionismo.[71]

[72]De esto se habló en la página 65.

Las leyes de la Lógica resultan de las necesidades humanas de establecer agrupaciones que tengan un número finito de objetos. Estas leyes pueden ser extendidas a las agrupaciones infinitas a condición de no utilizar el principio del tercio excluído, ya que se estarían usando injustificadamente esas generalizaciones.

f) La *teoría predicativa* de Hermann Weyl surge como una crítica al la forma tradicional de prueba y definición. En su libro de 1918,[73] Weyl propuso una versión predicativa del análisis, donde no usa el axioma de elección.

Relativo a los conjuntos, propone una concepción predicativa de éstos, donde, entre otras cosas indica que la conexión del tratamiento conjuntista de Dedekind de los números naturales no constituye una reducción de ellos a teoría pura de conjuntos.

Su solución al problema de las paradojas consistió en una estricta adherencia al principio del círculo vicioso, es decir al *predicativismo*, pero a diferencia de Russell no considera que las matemáticas se deba reducir a la lógica.

Para Weyl, la esencia del infinito es ser inagotable, por ello no es posible tratar combinatoriamente con conjuntos infinitos como si se pudiera seleccionar infinitamente muchos elementos en forma arbitraria y reunirlos luego en un conjunto. Así, un conjunto infinito puede ser determinado sólamente a través de propiedades explícitas que caractericen sus elementos.

La teoría predicativa se puede ver como una versión mejor estructurada y posicionada que el semi-intuicionismo.

[73] *Das Kontinuum* (El continuo.)

Capítulo 4

Las matemáticas en Polonia

Es necesario diferenciar entre los distintos términos que se han usado sobre las comunidades de matemáticos en Polonia, en particular entre "Escuela de Varsovia", "Escuela de Leópolis"[1] y "Escuela polaca". Mientras que los términos "Escuela de matemáticas de Varsovia"y "Escuela de matemáticas de Leópolis"son ambiguos,[2] puesto que se refieren a grupos de matemáticos del periodo Entreguerras que trabajan en temáticas comunes, el término "Escuela polaca de matemáticas"no lo es, y es usado para identificar la matemática polaca de ese mismo periodo. De acuerdo a lo presentado en el preámbulo del capítulo 3, no se hablará de Escuela Polaca de Matemáticas,[3] pero si se hablará de Escuela de Varsovia de matemáticas y se hará algunas referencias a la Escuela de Leópolis de Matemáticas. Sobre Cracovia, Vilna y Posnania, no se llamarán escuelas sino *centros matemáticos*, como se denotan en [Kuratowski, 1980].

[Kuratowski, 1980] es un libro importante para conocer la historia de las matemáticas en Varsovia y en Polonia durante el periodo Entreguerras, ya que Kuratowski es el autor que mas se ocupa por preservar la memoria histórica de la matemática polaca durante este periodo de esplendor, teniendo la ventaja que el vivió este periodo y fue actor de esta historia. También es importante el libro [Kuzawa, 1968], que se centra en los años 1918-1939, en las escuelas de Varsovia y de Leópolis y en la revista *Fundamenta Mathe-*

[1] Leópolis es actualmente una ciudad ucraniana, en polaco se ecribe Lwów y en ucraniano Lviv.

[2] Recordar el concepto de escuela dado en la página 51.

[3] En algunas citas tomadas de otros autores se usará esta expresión.

maticae[4]. Estos dos textos se referenciarán frecuentemente en este capítulo. También es importante para este capítulo el artículo [Arboleda, 1982], en especial por los análisis que hace de la correspondencia del matemático francés Maurice Fréchet con los polacos Janiszewski y Sierpiński, correspondencia que no es suficientemente conocida. Gran parte de las citas extraídas en el artículo de Arboleda se reproducen aquí, así como las interpretaciones dadas por el propio autor de ese artículo. Cabe decir que todas la citas correspondientes a cartas entre Fréchet y Janiszewski ó Sierpiński son extraídas de esa misma fuente.

En las últimas secciones de este capítulo se presentan las reseñas bibliográficas de algunos matemáticos polacos. El sitio *Genealogy Project*,[5] ha servido para ubicar los estudiantes a quienes han dirigido tesis cada uno de estos autores, así como para determinar títulos y fecha de culminación de estas tesis, también para determinar la universidad a la que estaba vinculado cada estudiante.

4.1. Estado de las matemáticas en Polonia antes de la Primera Guerra Mundial

En 1795 el territorio que era similar al de la Polonia actual, fue repartido entre Rusia, Prusia y Austria. Polonia recobró su independencia en 1918 tras la Primera Guerra Mundial como la Segunda República Polaca, fue ocupada por la Alemania nazi y la Unión Soviética al iniciar la Segunda Guerra Mundial en septiembre de 1939, para emerger luego como la República Popular de Polonia bajo la influencia soviética. En 1989, el gobierno socialista fue derrocado fue sucedido por lo que constitucionalmente se llama la Tercera República de Polonia.

El libro [Kuzawa, 1968], en su segundo capítulo, presenta el estatus de la creatividad matemática en Polonia antes de 1918, para ello hace divisiones por siglos, empezando en el XV, y resaltando las figuras mas prominentes de cada uno de esos periodos. Así, se centra en Copérnico, desde mitad del Siglo XV; en Adam Kochański, en el Siglo XVII; Jan Śniadecki en el Siglo

[4] De ahora en adelante, *FM* denotará la revista *Fundamenta Mathematicae*.
[5] La dirección de este sitio es: http://www.genealogy.ams.org/index.php

XVIII y Józef Maria Hoene-Wroński en el Siglo XIX. La época que interesa en este trabajo es la de la Segunda República Polaca, y durante el periodo Entreguerras, pero para ello es necesario dar algunos apuntes sobre la época anterior, especialmente del Siglo XIX.

Antes de la década de 1870, las difíciles condiciones políticas y sociales de Polonia se veían reflejadas en las matemáticas en el hecho de que había una muy leve recepción de éstas a un alto nivel, por ello no era posible hablar de una contribución independiente de los matemáticos polacos.

Las dificultades se derivaron de la división del territorio polaco en tres partes: la rusa, la austrica y la prusiana. En el campo de la enseñanza y la educación, la parte prusiana era la mas afectada, ya que no había instituciones de educación superior y era prohibido el uso del idioma polaco en la educación primaria y secundaria. En la parte rusa regida por las autoridades zaristas hubo un intento de revolucion en 1905, del que se hablará más adelante. La parte austriaca, llamada Galicia, tenía mayor grado de autonomía, y dos universidades funcionaban en esa región, en Cracovia y en Leópolis cuyas universidades llevaban varios siglos de funcionamiento, también estaba la Universidad técnica de Leópolis.

A pesar de las duras condiciones impuestas por potencias extranjeras (Austria, Prusia, Rusia), los esfuerzo individuales dedicados a la ciencia eran asistido por el surgimiento de instituciones científicas como la Sociedad de Amigos de la Ciencia en Varsovia, fundada en 1810, cerrada por el Zar en 1832; la Sociedad de Ciencia de Cracovia, fundada en 1816, transformada en 1873 en la Academia del Conocimiento de Cracovia, abolida en 1951, revivida en 1989 bajo el nombre de "Polska Akademia Umiejetnosci"; la Universidad de Varsovia, fundada en 1816, cerrada en 1832, refundada en 1862 como la Escuela Principal de Varsovia, cerrada y abierta en 1869 como una universidad rusa, evacuada en 1915 y establecida a final de ese mismo año como una universidad polaca; la Sociedad Científica de Varsovia, fundada en 1907; y valiosas revistas científicas, incluyendo algunas matemáticas como *Prace Matematyczno-Fizyczne* (*Trabajos de matemáticas y física*), fundada en 1884 o *Wiadomości Matematyczne* (*Noticias matemáticas*), fundada en 1894. Cabe decir que las revistas y publicaciones de los matemáticos eran en polaco, por lo cual estas no eran difundidas fuera del país.

Cracovia y Leópolis, en la región de Galicia, eran los centros de estudio en matemáticas. La Universidad de Cracovia (fundada en 1400) y la Universidad de Leópolis (fundada en 1651) jugaron un importante rol en el desarrollo de las matemáticas polacas durante ese difícil periodo de la historia polaca.

Desde inicios del Siglo XX, los profesores Stanisław Zaremba y Kazimierz Żorawski impartían clases en la Universidad Jagelona de Cracovia. Zaremba era especialista en análisis, concretamente a las ecuaciones diferenciales y a la teoría del potencial, tenía buenas relaciones con matemáticos franceses de su época de estudiante en París. Żorawski fue estudiante del matemático noruego Sophus Lie. Su campo de investigación era la geometría diferencial y la teoría de grupos continuos. El estado de las relaciones de los matemáticos polacos con los extranjeros se puede evidenciar con la siguiente cita de Władislaw Ślebodzinski, uno de los matemáticos que trabajó en el restablecimiento de las matemáticas polacas después de la destrucción nazi de la II Guerra Mundial, escribió sobre ellos dos:

> Con la aparición de estos dos académicos,[6] las matemáticas polacas dejaron de consumir los pensamientos y los resultados de las otras personas y exclusivamente a partir de ese momento comenzaron a participar activamente en el desarrollo de su propia ciencia. Las circunstancias políticas de la época eran tales que, durante una década o más, Stanisław Zaremba y Kazimierz Żorawski fueron los únicos representantes de la matemática polaca en contacto con el exterior.[7]

En la Universidad de Leópolis estaban los profesores Józef Puzyna y Wacław Sierpiński. Entre los principales intereses de Puzyna estaban la teoría de ecuaciones integrales (rama nueva por ese entonces) y la teoría de funciones analíticas, en esta última rama fue un especialista y llegó a presentar esta teoría en una forma moderna en una monografía de dos volúmenes en 1900, en la cual se incluía temas de teoría de grupos, teoría de conjuntos, topología y funciones armónicas. [Kuratowski, 1980, p. 8] plantea que en algún grado el fue un precursor de las ideas que surgirían entre los matemáticos polacos del periodo Entreguerras. Sobre el otro profesor de la universidad de Leópolis, Sierpiński, se seguirá dando detalles a lo largo de este capítulo y del resto del

[6] Se refiere a Zaremba y Żorawski.

[7] Tomado de [Kuratowski, 1980, p. 13].

trabajo.

Sobre la parte polaca dominada por Rusia, se venía gestando un par de años antes del inicio de la Primera Guerra, un boicot contra la universidad rusa presente en Varsovia, esto tenía entre otras motivaciones, la de lograr que el idioma oficial a todo nivel en esta universidad fuese el polaco, ya que las clases se daban en ruso. Previo a este boicot, en 1905 estas aspiraciones se habían llevado a cabo a nivel de las escuelas de secundaria, y para ese entonces el propósito era luchar por una autonomía para obtener el derecho de usar la lengua polaca, especialmente en los ámbitos de la cultura y de la educación. Cabe decir que por ese entonces, las autoridades zaristas rusas, permitieron el que se establecieran escuelas polacas en el lugar de las rusas, sin embargo "un graduado de las escuelas polacas era tratado por las autoridades como un iletrado"[Kuratowski, 1980, p. 14], y para evitar prestar servicio militar por un tiempo largo se debía aprobar dos exámenes, uno de ruso y otro de polaco. Con el propósito de disuadir a los estudiantes de matricularse en las escuelas polacas, hubo excesos en la pérdida de exámenes de ruso entre los graduados de estas escuelas.

Gran parte de los estudiantes que querían continuar con su educación se trasladaron a Galicia, región que estaba bajo control austriaco, siendo un régimen más tolerante, y por ende más propicio al fomento de las ideas liberales y socializantes, lo que atrajo a los jóvenes interesados en su superación científica y que también anhelaban una revolución de carácter nacionalista. También hubo éxodo importante de estudiantes universitarios a otros países, principalmente a Francia y Alemania, y un poco menos a Bélgica y a Gran Bretaña. Buena parte de los matemáticos polacos representativos del periodo Entreguerras hicieron estudios en el extranjero, por ejemplo Janiszewski terminó su tesis doctoral en París; Mazurkiewicz, Sierpiński y Steinhaus en Gotinga; Kuratowski en Glasgow (Escocia).

El sentimiento de patriotismo en Polonia, opuesto a las condiciones implantadas por las potencias extranjeras, se hizo sentir a nivel de sociedades científicas que fueron importantes durante el periodo de dominación, que marcaron parte del camino del florecimiento de las matemáticas polacas años después. Entre las mas importantes fue la *Sociedad Científica de Varsovia*, la cual fue ideada por por un grupo de miembros de la Academia del Conocimiento de Cracovia que vivían en Varsovia y por ex alumnos de la Escuela Principal de

Varsovia.[8] Los esfuerzos por obtener el permiso de las autoridades para el establecimiento de esta sociedad duraron algo más de tres años, y fue aprobado en marzo de 1907. Entre los 14 fundadores de esta sociedad se encontraban dos matemáticos: Samuel Dickstein y Władisław Gosiewski.

Una resolución de de esta sociedad, indica:

> [...]Privados de los conocimientos científicos de los nuestros, estamos limitados a rumiar de los pensamientos de otras personas, y por lo tanto estamos amenazados por la esterilización mental y trivialización. Sucumbiendo a cada vez diferentes influencias extranjeras, dependiendo de las circunstancias y gustos del escritor, nuestro pensamiento no puede encontrar una manera de expresarse en su carácter nacional original. Los procesos de pensamiento poco a poco dejan de funcionar y desaparecen, sin el estímulo del trabajo científico. Tenemos que crear fuentes de conocimiento en casa. Necesitamos personas para trabajar en la ciencia pura aquí en casa, y que los jóvenes se reúnen alrededor de ellos, los jóvenes que aprenderán a pensar de manera independiente y, además, pensar en polaco [Kuratowski, 1980, p. 19].

Esta resolución es importante porqe en ella se ve ideas que Janiszewski planteó casi diez años después, en el artículo que sirvió como base para que se estableciera una escuela matemática en Polonia.

Sobre las revistas en las que se hacían publicaciones en matemáticas, es apropiado traer una cita de la carta de Sierpiński a Fréchet, del 31 de agosto de 1919. Esta carta se debe a que el francés tenía la responsabilidad de divulgar la programación de las actividades científicas y académicas de Estrasburgo[9] por todos los medios a fin de llamar la atención de la comunidad matemática sobre la nueva universidad y, eventualmente, convencer a jóvenes talentos y a profesores visitantes para que se instalaran ahí, por una temporada:

[8] Antiguo nombre de la Universidad de Varsovia

[9] Como consecuencias de la Primera Guerra Mundial Estarsburgo dejó de ser una ciudad alemana para ser francesa, por lo cual estas gestiones se enmarcan en un contexto político complejo.

> En cuanto a nuestras publicaciones matemáticas, ellas aparecen en el *Bulletin International de l' Academie des Sciences de Cracovia* (fundado en 1885), los *Comptes Rendus de la Societé des Sciences de Varsovie* (1908), [10] en *Prece matematycznfizyczne* (desde 1889), Wekton (desde 1911) y en *Wiadomości Matematyczne* (desde 1896). Es esta última publicación la que me parece más conveniente para publicar (en polaco) el programa de los cursos matemáticos de la Universidad de Strasbourg.[11]

Nótese que aunque la carta es enviada en 1919, las revistas nombradas por Sierpiński son todas fundadas antes de la independencia polaca en 1918, e incluso antes de la Primera Guerra Mundial, sin embargo puede verse que ya se venía gestando entre los matemáticos polacos, especialmente en Varsovia, el programa para que las matemáticas polacas se independizaran de la influencia extranjera, dejando de ser meros receptores. En esto último tuvo vital importancia la apertura de la Universidad de Varsovia, ahora como una universidad polaca en 1915. Cabe decir que esto tuvo origen en que en verano de ese año tras una ofensiva austriaca-prusiana, los rusos reubicaron la Universidad de Varsovia a Rostov, en Don (donde ha existido desde entonces) y pocos meses después los polacos abrieron una universidad polaca en Varsovia.

4.2. Escuela Matemática de Varsovia

El término escuela matemática de Varsovia incluye variantes tales como escuela de lógica, conformada en sus inicios por Leśniewski y Łukasiewicz,[12] y la escuela propiamente matemática, liderada por Sierpiński, la que en sus inicios se centró en la teoría de conjuntos y sus aplicaciones. Para este capítulo se hablará de las tendencias en lógica y en matemáticas de la escuela de

[10] Estas dos publicaciones eran de amplia circulación internacional y contribuían a difundir los trabajos que en diferentes especialidades se producían en Europa central y oriental. Entre los animadores de tales publicaciones estaban aquellos profesores que junto a Sierpiński, enseñaban en las universidades polacas antes de la reconstitución: Dickstein, Żorawski, Zaremba y Puzyna. también es necesario resaltar que esta segunda revista era el órgano de publicación de la Sociedad Científica de Varsovia.

[11] Estrasburgo en francés.

[12] Esto se profundiza más adelante en el apartado 4.3.

Varsovia, y se enfatizará en la importancia del surgimiento de la revista *Fundamenta Mathematicae* en 1920 como el hecho que señala que para ese entonces ya hay una escuela de matemáticas en Varsovia.

4.2.1. Origen de la escuela

En una entrevista que Kuratowski concedió al profesor Luis Carlos Arboleda en el instituto de Matemáticas de Varsovia el 9 de noviembre de 1978, manifestó lo siguiente:

> Janiszewski es el verdadero fundador de la Escuela Polaca. A sus méritos de buen matemático, sumaba el de gran organizador. Su muerte prematura [Janiszewski murió a los 32 años en Lwów[13] como consecuencia de la terrible epidemia de “gripa española”que afectó Europa en ese entonces], es verdaderamente una pérdida dolorosa para las matemáticas de mi país. Por intermedio de él recibimos la influencia de primera y más directa de las matemáticas de la escuela francesa [Arboleda, 1982, pp.224-225].

La cita está acorde con una concepción generalizada de que en Janiszewski recaen los méritos del espelendor de la matemática polaca después de 1920. La idea novedosa de especializar una comunidad en una sola área de las matemáticas también ha favorecido a Zygmunt Janiszewski, de quien se sabe que desde 1912 tenía en mente la idea de la necesidad de periódicos especializados. Esto se ve en un párrafo de la carta que envía a Maurice Fréchet[14] con fecha del 29 de febrero de 1912:

> Aprovecho esta oportunidad para consultar su opinión sobre una cuestión, de orden matemático-social, que me parece sumamente importante. Se trata de la reforma de las publicaciones periódicas matemáticas contemporáneas y, con esta finalidad, de la creación de un “periódico modelo”. ¿No advierte usted la incomodidad proveniente del hecho de la profusión de periódicos matemáticos

[13]Recuérdese que esta ciudad es Leópolis en español, y se debe decir que Janiszewski no había cumplido aún los 32 años al momento de su muerte.

[14]A quien Janiszewski conocía desde su estadía en Francia, donde terminó sus estudios doctorales en 1911, con la tesis titulada *Sur les continus irréductibles entre deux points*, bajo la dirección de Henri Lebesgue.

> (todos con el mismo objetivo)? ¿Qué sea tan difícil de localizar la literatura de interés en condiciones de tanta dispersión, sobre todo cuando no se dispone de una buena biblioteca? Me parece que ese gran número de periódicos sería, al contrario, de gran comodidad si cada uno tuviese bien delimitada su especialidad (por ejemplo, teoría analítica de números, teoría de sustituciones...) [Arboleda, 1982, p. 225].

Fréchet comunicó a Emile Borel la idea de Janiszewski. Cabe decir que Borel conocía bien al polaco, ya que fue, junto a Lebesgue uno de los directores de tesis, aparte de ello, Borel era uno de los referentes de los medios matemáticos para opinar sobre la consulta de Janiszewski. El punto de vista de Borel al respecto se dió en una carta a Fréchet el 1 de marzo de 1912:

> La idea de Janiszewski es ingeniosa, pero me parece que ofrece un grave inconveniente. Si todos los periódicos se especializaran, sería difícil poder encuadrar una memoria sobre una cuestión nueva; habría que crear un nuevo periódico. La diversidad de periódicos y de redactores tiene por consecuencia la facilidad relativa que se le ofrece a una idea nueva de emerger y penetrar un público ya numeroso que se congrega alrededor de un periódico. Por ejemplo, las memorias de Cantor sobre los conjuntos aparecen en las *Acta Mathematica*.[15] Un inconveniente simétrico sería que al existir un tal periódico consagrado a una disciplina, trataría de provocar estudios en un tema cuyo interés podría estar probablemente agotado [Arboleda, 1982].

De otro lado, en 1911 Polonia contaba con sólo cuatro profesores ocupando plaza en las únicas dos universidades, estos eran Jozef Puzyna y Wacław Sierpiński en la Universidad de Leópolis y Stanisław Zaremba y Kazimier Żorawski en la Universidad Jagelona en Cracovia. Entre ellos no había intereses comunes, trabajaban campos distintos: Puzyna en funciones analíticas, Sierpiński en teoría de números y teoría de conjuntos, Zaremba en ecuaciones diferenciales, y Żorawski en geometría diferencial. Sierpiński hizo conciencia de ese aislamiento de los matemáticos polacos a raíz del congreso de científicos y médicos polacos en Cracovia en 1911, el observó que

[15] Borel hace referencia, obviamente, a las traducciones en francés. Los originales aparecieron en revistas alemanas, no en *Acta*.

los matemáticos polacos tenían representación en los eventos académicos, sin embargo cada trabajo era en áreas distantes, así:

> Después del congreso llegué a la conclusión de que esto no era bueno. No había colaboración, ni control mutuo. Había matemáticos conocidos por su trabajo en el extranjero, pero no había matemática polaca. Mi conclusión fue que sería mejor si un mayor número de matemáticos trabajara en un área.[16]

Como se ve en la cita, ya desde 1911 Sierpiński visualizaba un aspecto que fue fundamental para el éxito de la escuela de Varsovia: la especialización en una sola área, que fue la mayor apuesta de la revista *Fundamenta Mathematicae*.

Los siguientes registros escritos sobre la idea de fundar una revista matemática especializada en un área aparecen hasta 1918, con el influyente artículo [Janiszewski, 1918]. Sin embargo en los años previos hubo aspectos que tuvieron que ver con la maduración de esta idea, tales como la llegada de Janiszewski a la Universidad Jan Kazimierz de Leópolis en 1913 por sugerencia de Sierpiński. Para ese entonces el propio Sierpiński venía promoviendo, en el seminario de matemáticas de esta universidad, la teoría de conjuntos, nombre genérico para designar igualmente la topología general (en formación en esa época), la teoría de funciones, la teoría de la medida y los fundamentos de las matemáticas. De ahí que no es ajeno que pensara que esa debía ser el área idónea para cimentar una comunidad matemática. De hecho, para ese momento, las tesis de sus alumnos Stefan Mazurkiewicz[17] (1888-1945) y Stanisław Ruziewicz[18] (1889-1941) se centraron en topología y en funciones de variable real, respectivamente.

Durante la Primera Guerra Mundial, Sierpiński fue enviado a Rusia por el regimen zarista, mientras que Janiszewski estuvo hasta 1915 en la Legión (las tropas voluntarias polacas en la armada austriaca). A finales de ese año en

[16] [Duda, 1996, p. 482] citando:
Sierpiński (1963), "Polish School of Mathematics", *Polish Perspectives*, 6(8):25-35.

[17] *O krzywych wypelniajacych kwadrat*, (*Sobre curvas que llenan el cuadrado*).

[18] *O funkcji ciagłej monotonicznej nie posiadajacej pochodnej na nieprzeliczalnej mnogołci punktów*, (*Sobre una función continua monótona sin derivadas en un conjunto de puntos no contable*).

el que La Universidad de Varsovia pasó a ser una universidad polaca, Janiszewski se enroló como profesor, al tiempo que estaba en la Legión, mientras que Mazurkiewicz ocupó una plaza en matemáticas en esta universidad. En 1917 se inició un seminario de topología coordinado por Janiszewski y Mazurkiewicz, y en 1918 regresó Sierpiński a Varsovia donde ocupó una plaza.

En los años finales de la Primera Guerra Mundial, la fundación Mianowski, que patrocinaba la investigación de científicos polacos, creó una publicación titulada *Nauka Polska jej potrzeby, organizacja i rozwój* (*Ciencias polacas, sus necesidades, organización y desarrollo*) con el propósito de presentar los problemas organizacionales de la enseñanza en un país después de su independencia, para ello invitó a los cientificos polacos a dar sus puntos de vista sobre las necesidades de las diversas disciplinas científicas en Polonia. En el primer volumen de este periódico, en 1918, hubo dos artículos sobre "las necesidades de las matemáticas en Polonia". El primero era de Stanisław Zaremba, el segundo de Zygmunt Janiszewski.

En su artículo, Zaremba propuso que los jóvenes profesores que mostraran habilidad para la enseñanza superior deberían ser enviados para estudiar en el extranjero donde podrían prepararse para enseñar en las universidades polacas. Esa propuesta no era novedosa, en [Kuzawa, 1968, p. 54] se dice que ya había sido hecha en el territorio polaco en el siglo XVIII.[19]

El artículo de Janiszewski constaba de seis páginas[20] y se convirtió en un programa para la siguiente generación de matemáticos polacos, Janiszewski planteó que los matemáticos polacos pueden darse el lujo de "no ser sólamente receptores y consumidores de los centros extranjeros",[21] pero para que la matemática polaca se posicione a nivel mundial, se debía concentrar al personal científico en un campo especializado de las matemáticas,[22] y este

[19]Cabe decir que durante el siglo XIX se dieron numerosos casos de científicos que realizaron estadías fuera de su país de origen, por ejemplo entre los alemanes que realizaron alguna estadía en Francia durante los años 1820 o 1830 estaban Dirichlet y Plücker entre otros; entre los rusos también fue frecuente esto mismo. Muchos norteamericanos estudiaron en Alemania a fines de siglo, sobre todo con Klein en Gotinga, así como hubo un gran número de japoneses que durante la era Meiji estudiaron en Europa.

[20]Este artículo está en el apéndice E.

[21]Recordando la parte de la resolución de la Sociedad Científica de Varsovia en la página 94.

[22]Recordando la propuesta de Sierpiński presentada en la cita de la página 98.

campo debía ser uno en el cual los matemáticos polacos tuvieran intereses comunes y en el que hayan tenido reconocimiento a escala mundial. Este campo debía comprender la teoría de conjuntos junto a la topología, y los fundamentos de las matemáticas junto a la lógica matemática. Veamos un aparte de este artículo:

> un matemático no necesitaría costosos laboratorios, ni finos y caros materiales para su trabajo; todo lo que el necesita es una atmósfera matemática apropiada, un contacto permanente con colaboradores [. . .] Una atmósfera apropiada solo puede surgir por un interés en temas comunes. Los investigadores necesitan indudablemente colaboradores. Un investigador aislado la mayoría de veces se extingue en el anonimato.
>
> Las causas de esto no solo son sicológicas, no solo se refiere a la carencia de incentivos; un investigador aislado *conoce* menos que aquellos que trabajan en equipo. Este investigador recibe únicamente los resultados de la investigación; ideas completas y maduras, frecuentemente algunos años después de que ellas se originaron, esto es, cuando ya aparecen en imprenta. Un investigador aislado no presencia como ni donde estas ideas llegan a surgir; el no vive el proceso al lado de sus creadores. [. . .]
>
> Es por eso que, si no deseamos permanecer siempre en "segundo plano", debemos tomar medidas radicales, examinar las razones de nuestro fracaso. ¡Debemos crear una "forja"(un centro de investigación) en Polonia! Podremos conseguir esto solamente concentrando la mayoría de nuestros matemáticos en el cultivo de una sola rama de las matemáticas. Esto está ocurriendo ya por inercia propia, pero debemos ayudar a consolidar esta tendencia. Indudablemente, la creación de una publicación especializada en una rama de las matemáticas atraerá a muchos de nuestros colegas a trabajar en esta rama [Janiszewski, 1918].[23]

Janiszewski consideró necesario organizar un sistema escolar para organizar la investigación en matemáticas, la asistencia en las publicaciones (traducciones y contribuciones originales), la supervisión de bibliotecas matemáticas, etc. Así, el tenía la idea de que los periódicos científicos deberían ser especializados: una revista para teoría de números y álgebra, otro

[23] Ver también el apéndice E.

para geometría proyectiva, otra para geometría diferencial y ecuaciones diferenciales, para series trigonométricas, para teoría de conjuntos, para fundamentos de geometría, etc. Todo ello iba enmarcado en el plan de ganar una posición de independencia para la matemáticas polaca. En ese sentido, es apropiado traer a colación las palabras del propio Janiszewski:

> . . . sería necesario crear una revista; una publicación estrictamente académica, dedicada primariamente a una rama de las matemáticas en la cual tengamos muchos matemáticos verdaderamente creativos y distinguidos. Esta publicación al igual que Mathematische Annalen, Rendiconti del Circolo de Palermo, Acta Mathematica de Estocolmo, y muchas otras, aceptaría artículos en cualquiera de los cuatro idiomas reconocidos como internacionales en matemáticas (ellos son: Ingles, Francés, Alemán e Italiano) [. . .] Esta publicación incluiría además de investigación original, una bibliografía de la rama particular a la que está orientada, reseñas y aun reproducciones de los artículos más importantes publicados en otras partes, traducciones de artículos y valiosos escritos en idiomas no internacionales, prioritariamente artículos polacos que se están perdiendo en el anonimato; finalmente, correspondencia, preguntas y respuestas como lo hace el intermediare Mathématique. Esto sería, en cierta medida, un experimento para la realización de los escritos matemáticos, solamente que aquí se tendría que ver con los problemas más difíciles y no con los más simples.
>
> Una publicación como esta llegaría a ser indispensable para una persona que trabaje en tal rama específica de las matemáticas. La revista encontraría lectores en todas partes y en un corto periodo de tiempo ganaría colaboradores respetables en el exterior. A través de esta publicación alcanzaríamos una merecida posición en la cultura europea, nos solo porque muchos de nuestros trabajos, ahora diseminados en las publicaciones polacas, llegarían a conocerse en el mundo, sino también porque seriamos reconocidos no como individuos cuya nacionalidad muchas veces se desconoce, sino como un grupo estrechamente unido de polacos. La misma existencia y distribución de tal publicación editada en Varsovia, daría testimonio de nuestra vida

> cultural; pero, menciono esto solo de paso. Nada es más ajeno a mi mente que proponer como meta de nuestra empresa el logro de tal renombre. Si hablo de lograr un estatus independiente para las matemáticas polacas, o mejor para las matemáticas en Polonia, a través de la revista propuesta, tengo en mente una meta mucho más seria: la *creatividad real* en los escritos matemáticos polacos. Esto solamente se logra ganando *condiciones favorables para el trabajo matemático*, similares a aquellas que se dan en Occidente [Janiszewski, 1918].[24]

En 1919 Stefan Mazurkiewicz escribió un tercer artículo, también en *Nauka Polska*, sobre las necesidades de las matemáticas en Polonia. Este artículo, como reseña [Kuzawa, 1968, pp. 58-59] se entiende como un suplemento del de Janiszewski, de hecho Mazurkiewicz plantea que el artículo de Janiszewski está casi completo. En este artículo Mazurkiewicz expone seis necesidades puntuales: (1) debería haber dos centros matemáticos en Polonia en lugar de uno como lo sugiere Janiszewski; (2) los primeros signos de la creatividad matemática podrían ser ilusorios o fugaces; hay que buscar estudiantes con talento matemático entre los universitarios; (3) un boletín que contenga todas las publicaciones matemáticas debería ser publicado regularmente; (4) un modelo de bibliotecas de matemáticas como la Mathematisches Lesezimmer en Gotinga;[25] (5) alentar a los jóvenes matemáticos a publicar monografías; (6) en la Sociedad Científica de Varsovia se debe establecer un gabinete para los matemáticos.

Los artículos de Mazurkiewicz y de Janiszewski, él segundo especialmente, se convirtieron en un plan de acción que ayudó al desarrollo y el crecimiento de las matemáticas en Polonia después de 1918.

La idea de Janiszewski generaba dudas, uno de los motivos distintos a la novedad de la idea era que el hecho de escoger sólo una parte moderna de las matemáticas implicaba descuidar las otras ramas importantes como análisis, álgebra y geometría. Las críticas se hicieron sentir (incluso después de la publicación de algunos volúmenes de la revista) en Polonia por S. Zaremba

[24] Ver también el apéndice E.

[25] Se refiere a una sala de lectura creada por Klein, en la que se ponía a disposición de los alumnos separatas y ejemplares de revistas, así como los últimos libros publicados, así, los asistentes a esta sala tenían fácil acceso a lo más reciente.

(desde Cracovia) y en el extranjero por Borel, Lebesgue y Luzin.

La propuesta de publicar en idiomas diferentes al polaco era inevitable para el propósito de internacionalizar la matemática polaca, sin embargo esta idea también generó rechazo. Al respecto en [Arboleda, 1982, p. 239] (nota 9), dice:

> Esta situación [la ocupación del territorio polaco por parte de rusos y prusianos, quienes impusieron, en todos los terrenos ocupados, una serie de prohibiciones como medida que impedía el uso de la lengua nacional en las escuelas y universidades] podría explicar la reacción negativa que según todos los indicios de que disponemos manifestaron los jóvenes matemáticos polacos a la proposición de los editores de *Fundamenta* de publicar sus resultados "en idiomas accesibles a los extranjeros"; téngase en cuenta que los derechos ciudadanos (entre ellos el pleno y libre ejercicio de la lengua nacional) habían sido restablecidos solamente en noviembre de 1918 luego de que el Mariscal J. Piłsudski proclamó la República y confirmados por la Dieta en enero de 1919.

En este punto cabe decir que había publicaciones de alta calidad académica, es preciso recordar la apreciación de Stanisław Saks y Antoni Zygmund sobre la monografía sobre funciones analíticas (1900) del profesor Józef Puzyna: "si esa monografía hubiese aparecido en un idioma extranjero más ampliamente usado, se habría visto más lejos, y habría tenido ediciones mejoradas, con todas las posibilidades de convertirse en un libro clásico."[26] Lo cual apunta a favorecer la propuesta de Janiszewski.

Sin embargo, las condiciones favorecieron la idea de la revista, "la Universidad de Varsovia fue nuevamente abierta, disfrutaba de un fuerte apoyo del estado y de la sociedad, los nuevos estudiantes fueron entusiastas"[Duda, 1996, p. 485]. Así, en 1919 Janiszewski, Mazurkiewickz y Sierpiński, quienes fueron los tres primeros profesores de matemáticas en la Universidad de Varsovia, decidieron llevar a cabo la idea de Janiszewski, y la naciente revista estaría dedicada a la teoría de conjuntos, topología, teoría de funciones de una

[26]Tomado de [Kuratowski, 1980, p. 8], citando:
Funkcje Analityczne, Monografie Matematyczne, Vol. 10, Warzawa 1938. P. VIII.

variable real, fundamentos de las matemáticas y lógica matemática,[27] de esa forma se concebía *Fundamenta Mathematicae.*

4.2.2. *Fundamenta Mathematicae*

En 1920, se publicó el primer volumen de la revista después de la pronta muerte de Janiszewski, quien vió el borrador de la revista, pero no el volumen impreso. El comité editorial estuvo conformado además de Janiszewski, Mazurkiewickz y Sierpiński, por Stanislaw Leśniewski y Jan Łukasiewicz. Estos dos últimos, fueron los responsables de los desarrollos en lógica y fundamentos de las matemáticas, y estuvieron en el comité hasta 1928.

La importancia de la lógica y los fundamentos de las matemáticas, se evidencia en el nombre de la revista. De hecho [Kuratowski, 1980, p. 33] dice que se propuso alternar los volúmenes: uno se dedicaría a la teoría de conjuntos y campos cercanos, y un segundo volumen a lógica matemática y fundamentos de las matemáticas. Sin embargo esa idea no prosperó debido a que este segundo campo reultó ser mucho más modesto que el primero, aunque varios resultados importantes fueron publicados en lo concerniente a los fundamentos de las matemáticas.[28]

El primer volumen recogió 25 artículos,[29] todos de autores polacos[30] y de cuatro ciudades distintas; de Leópolis eran Stefan Banach y Stanisław Ruziewicz, de Cracovia era Witold Wilkosz, de Jasło era Hugo Steinhaus y de Varsovia eran Zygmunt Janiszewski, Kazimierz Kuratowski, Stefan Mazur-

[27] Sierpiński planteó en una carta a Fréchet, del 31 de agosto de 1919, que esta revista se consagrararía "exclusivamente a teoría de conjuntos y a la filosofía matemática (como a veces se designaba en la época el estudio de la lógica y los fundamentos)", lo que permite entender la acotación para los términos "teoría de conjuntos"y "filosofía de las matemáticas"en Sierpiński y por los editores de la revista.

[28] En el apartado 4.3 se hablará sobre la relación entre la lógica y la matemática en Polonia y para la escuela de Varsovia.

[29] Eso escribe [Hartman et al., 1974, p. 486], sin embargo [The Polish Digital Mathematical Library, 2013] sólo recoge 24 artículos de este volumen.

[30] Es pertinente recordar las palabras de Janiszewski respecto al primer volumen, en el que se nota su idea nacionalista: "mi intención es presentar en el primer volumen de la revista la cual he inventado, creado y editado, posiblemente todos los matemáticos polacos en el área de teoría de conjuntos, en lo que la revista se especializa."[Duda, 1996, p. 485].

kiewicz y Wacław Sierpiński. Los cuatro autores de Varsovia publicaron 21 de estos 25 artículos, Sierpiński contibuyó con 14, siendo uno de ellos en conjunto con Mazurkiewicz. De esos artículos sólo uno no está en francés, está en italiano y es el de Wilkosz, que se titula "Sugli insiemi non misurabili L".

Una vez publicado el primer volumen de *Fundamenta*, Sierpiński lo envió a Lebesgue. Este respondió felicitándolo por la calidad de las publicaciones de ese primer volumen de la revistas, sin embargo le manifestó sus temores sobre el futuro de una publicación tan especializada que podría quedarse, tarde o temprano, sin colaboradores y también temía que la calidad de las publicaciones decreciera.[31] Así, la desconfianza en el proyecto de la revista especializada en una temática particular de las matemáticas seguía latente entre altas personalidades extranjeras, tal como lo había manifestado Borel ocho años atrás en la carta que responde a Fréchet (página 97) , sin embargo Borel y Lebesgue serían colaborares poco después.

Trás la muerte de Janiszewski[32] el trabajo editorial del segundo volumen pasó a ser responsablidad de Mazurkiewicz y Sierpiński, siendo este último la cabeza visible, quien instauró como política publicar cualquier resultado que fuera nuevo y original, sin considerar aspectos como "valor", "trayectoria", etc. Esa política alentó a los jóvenes investigadores y fue un aliciente para que el grupo creciera rápidamente.

En el segundo volumen aparecen autores vinculado a universidades por fuera de Polonia, como Lebesgue (París), Luzin (Moscú)[33], Hahn (Bonn). Wilkosz publica tres artículos en italiano, mientras que Hahn lo hace en alemán bajo el título "Über die Komponenten offener Mengen". El resto de artículos es en francés.

[31] Tomado de [Kuratowski, 1980, p.34].

[32] Ocurrida el 3 de enero de 1920, por una epidemia de influenza que dejó gran cantidad de víctimas.

[33] En el artículo referido, que se titula "Sur l' existence d' un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait,"es publicado bajo la responsabilidad de Sierpiński, pero contiene resultados de Luzin de 1917, corresponde a una época en la que Luzin y Sierpiński perdieron contacto por efectos de la guerra polaco-soviética entre 1919 y 1921.

Cabe decir que con motivo del segundo volumen de *Fundamenta Mathematicae*, en el artículo [Lebesgue, 1922] el autor expresa su deseo de que esta revista tenga en cuenta todas las aplicaciones de la teoría de conjuntos y no sólo las más inmediatas.[34] Esas palabras, según Kuratowski, eran una muestra de verdadera amistad de parte de Lebesgue hacia la joven revista, y en ellas evidenciaba su preocupación por el futuro desarrollo de la teoría de conjuntos.[35] Lebesgue escribió lo anterior en un momento en el que la teoría de conjuntos, en comparación a otras ramas, no tenía un grado de aceptación suficiente por parte de los matemáticos, de ese hecho se generaba uno de los riesgos de especializarse, que la comunidad internacional no lo acogiera con suficiente fuerza, sin embargo los polacos vieron en ello la oportunidad de explorar una rama de las matemáticas, a tal punto que tuvieron mucho que ver en que la teoría de conjuntos y sus ramas cercanas tuviesen un mayor grado de aceptación y reconocimiento entre la comunidad matemática internacional.

Las reacciones a la novedosa propuesta de una revista especializada siguieron vigentes por lo menos hasta 1926, año en el que Luzin visitó Varsovia, gracias a una invitación de Sierpiński. El ruso expone sus reflexiones sobre *FM* en una carta a su amigo Arnaud Denjoy:[36]

> Parece que la vida matemática en Polonia sigue dos tendencias completamente distintas, una apunta a los dominios clásicos de las matemáticas, la otra a la teoría de conjuntos [o funciones]. Las dos actitudes se excluyen entre si, son hóstiles entre si, y obstinadamente luchan entre si. [...]
>
> Del lado clásico hay una antigua (más de 500 años) Universidad de Cracovia [...]. El partidario mas implacable de este lado es el profesor Zaremba. Sin embargo esta postura ha llegado a su fin en varias poblaciones [...], donde ha sido reemplazada por la de Sierpiński. Por lo tanto, en la medida de lo que puedo

[34] Aunque Kuratowski dice que esta es una sugerencia de Lebesgue, se puede corroborar que esa misma idea se planteaba desde la fundación de la revista, ya que el primer volumen tiene varios más artículos dedicados a aplicaciones de la teoría de conjuntos que a problemas propios de esta teoría.

[35] Tomado de [Kuratowski, 1980, pp. 34-35].

[36] La crítica completa aparece en [Duda, 1996, pp. 490-491], quien la toma de: (Dugac, Pierre. "N. Luzin, Lettres à Arnaud Denjoy avec introduction et notes", *Archives internationales d' histore des sciences* 27, pp. 179-206).

> juzgar confiando en mis conversaciones con los matemáticos que llegaron a Varsovia, el movimiento contemporáneo prevalece en Polonia[...].
>
> En mi opinión, esa situación es algo peligrosa porque la total concentración en la teoría de conjuntos y la desatención de los dominios clásicos de las matemáticas parece limitada y unilateral. El entusiasmo por los conjuntos puede llegar a ser fanático y eventualmente perjudicial tanto para los involucrados como para la propia ciencia. Al parecer, no hay que olvidar que la teoría de conjuntos es, al final, sólo un aspecto de las matemáticas elementales, y su pleno dominio no requiere de una cultura científica previa.
>
> Quizás esa accesibilidad para principiantes de la teoría de conjuntos es la principal fuente de popularidad para "las matemáticas modernas"en países que están en el proceso de de crear una cultura.

En esencia, Luzin criticaba la escogencia de la temática de la revista. Subestima la teoría de conjuntos y sus aplicaciones, al denotarla como "sólamente un aspecto de las matemáticas elementales"que no requiere una cultura científica, además sobreestimó las divisones de la comunidad matemática polaca. Eso sí, a continuación alabó la labor de Sierpiński como tutor científico:

> [...]Otra razón para el éxito es, en mi opinión, la personalidad del señor Sierpiński, quien es un excelente tutor científico. El mantiene relaciones cercanas con sus estudiantes, guía sus ideas científicas, les brinda temas para sus trabajos, audazmente publica sus artículos, se ocupa de todo, incluso de su situación económica.
>
> Cuando hablé con él sobre los peligros del dominio de una de esas trayectorias, en particular de la teoría de conjuntos, su respuesta fue: "Si, es un serio peligro, pero peor que el dominio de una de esas tendencias es la carencia de todo. Hasta la aparición de la tendencia de Varsovia, no había matemáticas en Polonia. Había investigadores aislados, cada uno de ellos se había interesado en algo diferente y no tenía quien lo siguiera. Por esa razón sus trabajos reflejaban solamente sus intereses particulares y no tenía

> un valor general. Sin duda, esta falta de iniciativa creativa ha sido causada por la falta de control público, la falta de opinión matemática común y de evaluación del trabajo matemático. Así, ha sido necesario crear una amplia comunidad matemática y de esa forma la escuela de Varsovia llegó a existir. Respecto a nuestras limitaciones, espero que disminuyan y eventualmente desaparezcan. La elección de la teoría de funciones como una base para la actividad común se deriva de su simplicidad."

De la anterior cita es valioso resaltar que Luzin dice que la especialiazación de la revista en teoría de conjuntos [o funciones] y Sierpiński responde dando por hecho que es teoría de funciones, lo cual da a entender que al menos ellos dos ó no tenían clara la frontera entre estas dos especialidades ó no se ocupaban de la discusión de definir las fronteras entre éstas.

En 1935, se publicó el volumen veinticinco de la revista, el cual fue un volumen especial en el que se invitó a varios de los más influyentes matemáticos del mundo para que publicaran en *FM*. Este volumen tuvo el doble de páginas que los anteriores (582 + 15 pp.), y contiene 48 publicaciones escritas por 45 autores, nueve de ellos residentes en Polonia.

En una nota de los editores escrita en 1978 para conmemorar el número 100 de *FM*,[37] se escribe con razón que "evidentemente el momento exacto del nacimiento de una nueva escuela científica no puede ser establecido con precisión".Pero en el caso de la Escuela Polaca -afirman- no hay duda de que la aparición del primer número de *Fundamenta* en 1920 determina la fecha histórica en la que se materializa un proyecto que implicaba un trabajo en equipo de unos lineamientos organizativos muy bien establecidos.

La primera época de *Fundamenta Mathematicae* se dió entre 1920 y 1939, en la cual se publicaron 32 volúmenes de ésta, manteniendo en general su formato original.

Durante la Segunda Guerra Mundial se pararon las publicaciones, para volver a surgir en 1945, manteniéndose hasta la actualidad. En [Duda, 1996] se presenta algunos datos estadísticos sobre *Fundamenta* desde el primer volu-

[37]One hundred volumes of "Fundamenta Mathematicae ". The Editors Note. (*Fundamenta Mathematicae*, 100 (1978), pp. 1-8).

men en 1920 hasta el volumen 32 en 1939: el promedio de longitud de las publicaciones era entre 8.9 y 12.6 páginas. Hubo 946 publicaciones hechas por 213 autores.[38] Dos tercios de las publicaciones fueron hechas por autores polacos. El número de autores extranjeros a finales de la década de 1920 aumentó tanto como el de polacos decreció. El autor que más publicó fue Sierpiński, con 202 artículos; seguido por Kuratowski, con 73, y Mazurkiewicz con 62. El autor extranjero que publicó más veces fue Gordon Thomas Whyburn de Estados Unidos con 16 artículos, que empezaron en el volumen 10; seguido de Robert Lee Moore también de Estados Unidos y Pavel Alexandroff de Unión Soviética, cada uno con 10 artículos, el primero empezando en el volumen 3 y el segundo en el volumen 5.

Se ha planteado los inicios de la Escuela de Varsovia de matemáticas, la cual tuvo en *Fundamenta Mathematicae*, un órgano de difusión e internacionalización que rápidamente se convirtió en una publicación única en su especie, que obtuvo el reconocimiento y la cooperación de los pares internacionales, y de la cual en [Tamarkin, 1936] se dice que su historia llegó a ser la historia de la teoría moderna de funciones y de conjuntos. Esta revista permitió a la escuela de Varsovia mostrarse como un gran ejemplo del florecimiento matemático desde una situación periférica, llegando a convertirse Varsovia en un centro de renombre internacional en lo que para entonces era considerado como teoría de conjuntos, produciendo reconocidos especialistas que fueron importantes no solo en el ámbito polaco o europeo, sino que llegaron a tener un alto grado de reconocimiento en universidades de Estados Unidos, tanto así que ya en 1943, en ocasión de los 400 años años de la muerte de Copérnico, el presidente de la Sociedad Matemática Americana, Marshall H. Stone, escribió:

> El trabajo de los hombres que fundaron y desarrollaron *Fundamenta Mathematicae* ha tenido una profunda influencia en el progreso matemático del último cuarto de siglo. Iniciando con Janiszewski y Sierpiński, allí ha crecido un movimiento fructífero con que los matemáticos americanos han tenido relaciones cercanas y eficaces. El trabajo en topología y en espacios abastractos se reconoce en toda la matemática como de carácter fundamental, la escuela polaca bajo personas como Banach y

[38] Hasta 1935, año del volumen especial número 25 participaron 170 autores, quienes publicaron 732 artículos [Tamarkin, 1936].

> Kuratowski constituyó, antes de la catástrofe actual (1939), uno de los grupos de matemáticos excepcionales.[39]

Para finalizar este apartado sobre *FM* es pertinente decir que no es posible estimar el factor de impacto de sus artículos como se hace actualmente. Por ejemplo Web of Knowledge no registra publicaciones de esta revista. En ese sentido hay que tener en cuenta que esta Web es reciente (en comparación con el periodo que interesa en este trabajo), y que por ahora recoge las reseñas y citas de revistas de los principales países tales como Estados Unidos, Francia, Alemania, Rusia y otros más. Es así que siendo *FM* una revista que tuvo un impacto relevante en la comunidad matemática internacional de las décadas de 1920 y 1930, aún no se compara con el que puedan tener otras revistas consolidadas en estos otros países. En el caso de las publicaciones de Sierpiński que se registran en Web of Knowledge, hay bastante menos de lo que pudiera considerarse representativo, únicamente 23 publicaciones distribuidas en las siguientes revistas:

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l' Académie des sciences (17)

Annals of Mathematics (2)

Comptes rendus de l' Academie des sciences de l' URSS (2)

Matematische Annalen (1)

Scripta Mathematica (1)

Sin embargo se puede dar un estado del alcance internacional de *FM*, al menos por las referencias que algunos libros hacen de esta revista. En [Kuzawa, 1968, p. 109] habla de libros en teoría de conjuntos y sus aplicaciones que citaron artículos de la revista:

En la bibliografía de *Abstract Set Theory* (1953) de Abraham Fraenkel de la Universidad de Jerusalén, hay cerca de cien referencias de *FM*; en *Topics in Topology* de Solomon Lefschetz de la Universidad de Princeton, se

[39]Tomado de [Kuzawa, 1968, pp. 15-16], citando a:
Stephen P. Mizwa (ed.) *Nicholas Copernicus: A Tribute of Nations* (New York: The Kosciuszco Foundation, 1945), p. 54.

referencia 35 artículos de varios volúmenes de *FM*; en *Set Topology* (1960) de R. Vaidyanathaswamy de la Universidad de Madras (India), hay 24 referencias; en *Theory of Integration* de Adrian C. Zaanen de la Universidad de Amsterdam, se incluye 11 referencias de *FM*.

4.3. Relación entre lógica, matemáticas y filosofía en la escuela de Varsovia

Una de las especialidades en los inicios de *Fundamenta Mathematicae* era la lógica, de esta parte se encargaron, en el comité editorial Jan Łukesiewicz y Stanislaw Leśniewski, ambos discípulos de Kaziemierz Twardowski (1866-1938) en la Universidad de Leópolis.

Y aunque uno de los propósitos de esta investigación es el de caracterizar la teoría de conjuntos en la escuela de Varsovia en el periodo Entreguerras, no se debe poder desligar de la lógica que tuvo grandes aportes no solo en Varsovia, sino también en Leópolis, donde Twardowski es el iniciador de una tradición de estudios en lógica, y a quien siguieron los ya nombrados Łukasiewicz y Leśniewski, y los posteriores (en Varsovia) como Tarski y Mostowski. Cabe decir que Leópolis no sólo destacó en el ámbito de la lógica, sino que posteriormente, en la década de 1930, se ha fortalecido en análisis funcional, de ello se habla en el apartado 4.4.

Łukasiewicz y Leśniewski fundaron lo que algunos autores (como Kuratowski) denominan escuela de lógica de Varsovia, que incluye los estudios en lógica y en fundamentos de las matemáticas de la escuela de matemáticas de Varsovia, y que se hizo reconocida mundialmente a través de Alfred Tarski.

La relación entre lógica y matemática en la escuela de Varsovia tuvo un antecedente en Leópolis antes de la Primera Guerra Mundial, cuando Sierpiński ocupa una de las plazas de matemáticas como profesor en la Universidad de Leópolis (La otra plaza era ocupada por Jozef Puzyna (1856-1919)). Hasta ese entonces Leópolis era reconocida por la escuela de filosofía liderada por Twardowski, en la que se enfatizaba en la precisión de las nociones y de los razonamientos, así su rasgo característico llegó a ser el interés en la lógica [Duda, 2004, p. 289]. Sierpiński impulsó la parte matemática, centrándose en la teoría de conjuntos y sus aplicaciones. Łukasiewicz y Leśniewski realizaron sus tesis bajo la dirección de Twardowski; mientras que Sierpiński dirigió las tesis de Mazurkiewicz y la de Ruziewicz, también realizó gestiones para que Janiszewski obtuviera un plaza de matemáticas en la Universidad de Leópolis. De todos estos pupilos de Twardowski y de Sierpiński, Ruziewicz fue el único que no ocupó plaza en Varsovia (permaneció en Leópolis), es así que a pesar que entre Twardowski y Sierpiński no hubo cooperación abierta, sus esfuerzos por crear escuela convergieron pocos años mas tarde y vieron sus frutos en Varsovia.

El inicio de la Primera Guerra Mundial dispersó el grupo encabezado por Sierpiński, quien fue enviado a Rusia por el regimen zarista, Puzyna enfermó y murió en 1919, Janiszewski se incorporó como voluntario a las fuerzas armadas polacas, Mazurkiewicz se trasladó a Varsovia, y Ruziewicz fue el único que permaneció en Leópolis. De parte del grupo liderado por Twardowski, sus dos alumnos, Łukasiwicz y Leśniewski se trasladaron a Varsovia.

El traslado de éstos a Varsovia se debió a que durante la guerra, a finales de 1915 se abrió la Universidad polaca en Varsovia. Así, la facultad de matemáticas incorporó a Leśniewski, Łukasiewickz, Janiszewski y Mazurkiewicz. Sierpiński, igualmente se incorporó en 1918, después de pasar algunos años en Rusia. Se puede hablar para ese entonces del surgimiento de dos tendencias en la naciente escuela de Varsovia, la matemática liderada por Sierpiński, Janiszewski y Mazurkiewicz y la lógica, encabezada por Leśniewski y Łukasiewicz, siendo esta última una continuación de la escuela filosófica de Leópolis. Estas dos tendencias permanecieron cercanas y se retroalimentaron constantemente. Tanta fue la colaboración entre estas dos tendencias de la escuela de Varsovia que:

> ... no se puede asegurar si el área explorada conjuntamente por logicistas y matemáticos pertenece o a la lógica o la matemática. No se puede establecer una frontera entre estas dos. Pero no es necesario. Los resultados obtenidos han enriquecido ambos, influenciando el desarrollo de las dos. El éxito es una herencia común de la escuelas de filosofía y de matemáticas de Varsovia del periodo Entreguerras.[40]

[40][Duda, 2004, p. 297] citando:

En [Murawski, 2012, p. 145] se caracteriza la actitud de los lógicos y matemáticos polacos hacia la filosofía matemática, en esencia plantea que ellos concebían que los fundamentos matemáticos y filosóficos eran independientes de las matemáticas, aunque estaban conectados de alguna forma indspensable para entender la actividad lógica y matemática. Murawski continúa en su artículo diciendo que los polacos (excepto Chwistek y Leśniewski) se guiaban por los dos principios siguientes:

- Todos los métodos matemáticos comúnmente aceptados deben ser aplicados en investigaciones metamatemáticas,

- La investigación en metamatemática no puede ser limitada por ningún punto de vista filosófico aceptado *a priori*.

La limitación de la que habla el segundo principio se asocia con la postura de neutralidad respecto a discusiones de carácter filosófico como la aceptación o no del axioma de elección o de la hipótesis del continuo. Al respecto, Murawski señala dos fuentes para esa actitud de neutralidad de los polacos frente a las discusiones filosóficas sobre problemas de la lógica y de las matemáticas:

La primer fuente es la publicación sobre el papel del axioma de elección [Sierpiński, 1918a], donde se distingue dos cuestiones independientes: las controversias filosóficas alrededor de este axioma y su lugar en la demostración de teoremas matemáticos. Según Sierpiński la segunda cuestión debe investigarse de forma independiente de las inclinaciones filosóficas sobre el problema de si el axioma de elección debe ser aceptado o no. Esta opinión fue incluida en todas las ediciones de los libros de Sierpiński en la teoría de conjuntos a partir de 1923. De hecho [Sierpiński, 1965, p. 94] escribió:

> aparte de nuestra inclinación personal de aceptar el axioma de elección, hay que tener en cuenta, en todo caso, su papel en la teoría de conjuntos y en el cálculo. Por otra parte, dado que el axioma de elección ha sido cuestionado por algunos matemáticos, es importante conocer que los teoremas se han demostrado con su ayuda y el punto exacto en que la prueba se basó en el axioma de elección, porque ha sucedido con frecuencia que varios autores han

J. Woleński, *Logic and Philosophy in the Lvov-Warsaw School*, Synthèse Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1988.

> hecho uso del axioma de elección en sus pruebas sin ser conscientes de ello. Y después de todo, aunque nadie cuestionara el axioma de elección, no estaría de más investigar qué pruebas se basan en él y que teoremas son demostrados sin su ayuda - esto, como sabemos, también se hace con respecto a la otros axiomas.[41]

La segunda fuente tiene como origen las ideas de Twardowski en Leópolis, el cual considera necesario distinguir con claridad y agudeza las cosmovisiones del trabajo científico filosófico. Esta idea se acentuó en Łukasiewicz, el arquitecto de la escuela lógica de Varsovia.

Una de las consecuencias de esa actitud de los lógicos y los matemáticos polacos fue el hecho de que ellos no trataron de desarrollar una filosofía comprehensiva de las matemáticas y la lógica (Stanisław Leśniewski y Leon Chwistek fueron las excepciones). Ellos formularon sus opiniones filosóficas acerca de las matemáticas o la lógica ocasionalmente sólo en el margen de sus propios trabajos matemáticos o lógicos (y no tenía ningún significado para los propios resultados), así, aunque algunas de las investigaciones lógicas estaban motivadas por problemas filosóficos (por ejemplo las lógicas multivaluadas de Łukasiewicz) las construcciones formales, lógicas siempre estaban separadas de sus interpretaciones filosóficas.

Sobre las tendencias de la filosofía de las matemáticas como el logicismo, el intuicionismo y el formalismo, eran conocidas por los polacos, sin embargo no hay documentos en los que se compruebe que hayan discutido esas tendencias, su significado y el desarrollo.

El programa propuesto en [Janiszewski, 1918] y llevado a cabo por los matemáticos de Varsovia apuesta por los desarrollos metodológicos alrededor de la teoría de conjuntos pero deja de lado las discusiones filosóficas. Así, [Murawski, 2012, p. 147] plantea que como consecuencia de lo descrito, no se encontraron en Polonia auténticos filósofos de las matemáticas.

A continuación se presenta las reseñas biográficas de los autores polacos que mas influyeron en que la lógica y la matemática encontraran terrenos en común.

[41] En la página 181 se hace una conclusión sobre este aspecto en Sierpiński.

4.3.1. Jan Łukasiewicz

Nació en Leópolis, el 21 de diciembre de 1878 y murió en Dublín (Irlanda) el 13 de feberero de 1956. Estudió matemáticas y filosofía en la Universidad de Leópolis obteniendo su doctorado en 1902 bajo la dirección de Kazimierz Twardowski. Recibió su habilitación en 1906 con una lectura en lógica y filosofía, siendo docente en Leópolis hasta 1911, para luego ocupar una plaza en esta misma universidad. En 1915 aceptó una invitación para hacerse a un plaza en la Universidad de Varsovia, en 1919 fue ministro de educación en Polonia, y también llegó a ser dos veces rector de la Universidad de Varsovia.[42]

La obra principal de Łukasiewicz en el dominio de la lógica ha sido la creación de las lógicas multivalentes. En 1917 llegó a la conclusión que era posible operar con una lógica distinta a la bivalente, proponiendo así la primera lógica trivalente. En esencia, Łukasiewicz agregó a los tradicionales valores de verdad (falso y verdadero) un tercer valor.

> ...He demostrado que, además de proposiciones verdaderas y falsas, hay proposiciones *posibles*, a las que corresponde la posibilidad objetiva como un tercer valor además del ser y del no-ser. Esto dio origen a un sistema de *lógica trivalente*, que desarrollé en detalle durante el verano pasado. Ese sistema es tan coherente y consistente como la lógica de Aristóteles, y resulta mucho más rico en leyes y fórmulas...[Lukasiewicz, 1974].

Las primeras publicaciones sobre la lógica trivalente datan de 1920,[43] mientras que una exposición completa de la teoría apareció hasta 1930[44]

[42]Una exposición completa de la obra científica de Łukasiewicz en la revista "Studia Logica", donde aparece las actividades de Łukasiewicz en lógica, filosofía e historia de la lógica, donde sus descubrimientos han sido particularmente importantes.

[43]"Sobre la lógica trivalente". (Original en polaco). *RF* 5 (1920), pág 170-171., y "La lógica bivalente". (Original en polaco). *PF* 23 (1921), pp. 189-205.

[44]"Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls ", *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, 23:51-77 (1930). Translated by H. Weber as "Philosophical Remarks on Many-Valued Systems of Propositional Logics", in Storrs McCall, Polish Logic 1920-1939, Clarendon Press: Oxford (1967).

Y en 1930 "Investigaciones en cálculo proposicional"["Untersuchungen über den Aussagenkalkül "], junto a Alfred Tarski

[Mostowski, 1957]. La lógica multivalente de Łukasiewicz está más cercana al cálculo de probabilidades que a la teoría de conjuntos, sin embargo se encuentra alguna aplicaciones a esta incluso en publicaciones del propio Łukasiewicz en ruso.[45]

Uno de los aportes a la formación de los matemáticos polacos por parte de Łukasiewicz fue el haber introducido la lógica como instrumento de investigación para los fundamentos de las matemáticas y en general para la metodología de las ciencias empíricas.

Łukasiewicz leyó cursos en lógica, historia de la filosofía y algunos tópicos especiales relacionados a la metodología de ciencias deductivas y a los fundamentos de la lógica matemática. "Aunque Łukasiewicz no era matemático, tenía un excepcional sentido para las matemáticas, por ello sus clases tenían gran respuesta entre los matemáticos."[Kuratowski, 1980, p. 23].

Después de algunos antiguos ensayos sobre los principios de no contradicción y el tercio excluído (1910) Łukasiewicz en 1917 llegó a la concepción de un calculo proposicional trivaluado, es decir, donde los juicios de valor no son solo falsos y verdaderos, sino que les agrega una posibilidad intermedia. En ese sentido sus posteriores investigaciones sobre lógicas multivaluadas, que el interpretó en términos probabilísticos se consideran como su mayor contribución. Łukasiewicz también creó la llamada "notación polaca"libre de la paréntesis.

La metalógica del cálculo proposicional, y en particular la teoría de su completez sintáctica y semántica debe mucho a Łukasiewicz y a sus discípulos, de hecho, el visualizó estos estudios como un preludio a las investigaciones análogas para el resto de lógicas, las cuales fueron abordadas por Tarski.

Sobre lo padecido por Łukasiewicz y su esposa (Regina Barwinska) durante la Segunda Guerra Mundial se puede consultar en una nota autobiográfica que viene anexa al artículo de uno de sus discípulos, B. Sobocinski "In Memoriam Jan Lukasiewicz".[46] Cabe decir que durante la guerra, Łukasiewicz

[45] para profundizar más ver [Mostowski, 1957, p. 3].

[46] Bolesław Sobociński, "In Memoriam Jan Lukasiewicz" *Philosophical Studies*, (Maynooth, Ireland), 6, pp. 3-49, (1956).

estuvo exiliado en Bélgica, luego aceptó ser profesor en la Academia real irlandesa de Dublín, donde permaneció hasta su muerte.

Según *Genealogy Project*, Łukaziewicz dirigió tres tesis doctorales, todas ellas en el periodo 1932-1938.

4.3.2. Alfred Tarski

Alfred Tarski nació en Varsovia el 14 de enero de 1901 y murió en Berkeley (Estados Unidos) el 23 de octubre de 1983. El apellido de nacimiento de Tarski era Tajtelbaum, el cual cambió en torno a 1924 como protección contra antisemitismo.

En el abstract de [Duda, 2004] se dice que Alfred Tarski es el más importante en la retroalimentación entre la lógica y la matemática en Varsovia en el periodo Entreguerras.

Se educó en Varsovia, sometió su disertación doctoral en 1923, la cual fue supervisada por Stanislaw Leśniewski y se tituló *O wyrazie pierwotnym logistyki* (*Sobre el término primitivo en logística*) que trataba sobre la definibilidad de los conectores lógicos en la teoría de tipos. Sus otros principales profesores en lógica y filosofía fueron Tadeusz Kotarbiński y Jan Łukasiewicz; en matemáticas fueron Stefan Banach y Wacław Sierpiński. La Univeridad de Varsovia le otorgó el doctorado en Matemáticas en 1924. En 1918 y en 1920 estuvo brevemente en la armada polaca.

Desde 1922 hasta 1925 fue instructor en lógica en el Instituto pedagógico polaco en Varsovia. Luego llegó a ser docente y profesor adjunto de matemáticas y lógica en la Universidad de Varsovia. Debido a que no tenía un puesto universitario regular, en 1925 aceptó un puesto como profesor en el Liceo Zeromski en Varsovia, dando clases tiempo completo y teniendo ambos puestos hasta 1939.

El 23 de junio de 1929 se casó con María Witkowsi, con quien tuvo una hija y un hijo. Desde enero hasta junio de 1935 trabajó en Viena con una beca de investigación del coloquio Karl Menger. Poco antes de la guerra, Tarski fue candidato para la plaza de filosofía en la Universidad de Leópolis, pero el puesto fue para Leon Chwistek. La dificultad de Tarski para obtener un nombramiento académico regular, en lo que tuvo algo ver el antisemitismo, contrastaba con su destacado rol en lógica en Varsovia.

En 1939, cuando empezó la Segunda Guerra Mundial, Tarski se encontraba en Estados Unidos en un tour de conferencias, y vivió el resto de su vida en ese país, sin embargo no fue sino hasta 1942 que tuvo una posición permanente en la Universidad de California en Berkeley. De 1939 a 1941 fue investigador asociado en matemáticas en Harvard, en 1940 también fue profesor visitante en el City College of New York, y entre 1941 y 1942 fue miembro del Institute for Advanced Study en Princeton.

Durante muchos años Tarski participó activamente en diversas organizaciones matemáticas y científicas. De 1935 a 1939 fue vicepresidente de la sociedad polaca de lógica. En 1940 fue miembro de la junta directiva de la asociación para la lógica simbolica y presidente de la asociación entre 1944 y 1946. En 1948 fue miembro del consejo de la sociedad americana de matemáticas. Fue presidente de la unión internacional de historia y filosofía de la ciencia entre 1956 y 1957 y fue presidente del comité nacional de historia y filosofía de la ciencia de Estados Unidos entre 1962 y 1963. En 1965 fue elegido miembro de la academia nacional de ciencias, además de ser miembro de la academia americana de las artes y las ciencias y miembro correspondiente de la academia británica.

Tarski se nutrió académicamente de una diversidad de autores durante los años 20: del *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, de Hilbert, también de la tradición lógico-algebraica de Peirce-Schröder y de la lógica polaca de Leśniewski and Łukasiewicz. Todas las cuatro tradiciones influenciaron su trabajo. Su disertación fue sobre la definibilidad de los conectivos lógicos en la teoría de tipos. Durante su carrera escribió varios cientos de artículos, también monografías en francés, polaco, alemán e inglés. Es tanta la riqueza de la obra de Tarski, que en [Feferman y Feferman, 2004] sugieren que para abordar completamente ésta es mejor hacerlo por temas y no cronológicamente.

En 1921 Tarski hizo su primera publicación en teoría de conjuntos, temática que siguió cultivando durante toda su vida. Su primer artículo relevante fue en 1924, sobre conjuntos finitos. Su trabajo a menudo combinaba fundamentos con resultados matemáticos, por ejemplo la paradoja de Banach-Tarski (una esfera puede ser descompuesta en un número finito de piezas y reacomodada como una esfera de mayor tamaño.) Influenciado por Sierpiński, Tarski investigó el rol del axioma de elección y demostró varias proposiciones (como la proposición de que $M^2 = M$ para todo cardinal infinito M) equivalentes a este axioma. Para Tarski, la aritmética cardinal se dividía en aquellas proposiciones equivalentes a este axioma y las que son independientes de él. La última proposición, según él, formaba parte de una nueva teoría de la equivalencia de conjuntos respecto a una clase dada de aplicaciones uno a uno, una teoría intensamente estudiada por Tarski y Banach. En 1926 Tarski estableció que el axioma de elección era consecuencia de la hipótesis generalizada del continuo (esta dice: para ningún conjunto infinito A existe una cardinal entre el de A y su conjunto potencia).

Otro tema de interés para Tarski en teoría de conjuntos fue los grandes cardinales. En 1930 introdujo con Sierpiński la noción de un cardinal inaccesible, y en 1939 presentó el axioma de existencia de cardinales inaccesibles. En 1943 en un artículo junto a Paul Erdös introdujeron los conceptos fundamentales de cardinal compacto y cardinal débilmente compacto, observaron que el cardinal compacto es medible y que cada cardinal medible es débilmente compacto. Las pruebas no fueron publicadas hasta 1961. Un año después Tarski estableció, usando resultados de su alumno William Hanf, que un cardinal medible es muy grande entre los cardinales inaccesibles resolviendo asi un problema de los años treinta.

Desde 1926 hasta 1928 Tarski condujo un seminario de metamatemática en la Universidad de Varsovia. Allí se investigó la estructura de las teorías completas en la geometría y la teoría de grupos. Usó la técnica de eliminación de cuantificadores en la teoría del orden discreto y la teoría de los campos reales cerrados, estableciendo la decibilidad de estas teorías y la de algunas más, como la de la geometría euclidiana de primer orden y del álgebra de Boole. Varios de estos resultados se publicaron muchos años después, e incluso algunos no se publicaron. Junto a su alumno Andrzej Mostowski, descubrieron en 1939 que la teoría de primer orden de los buenos ordenamientos es decidible, lo cual fue publicado hasta 1978.

Tarski descubrió interconexiones entre áreas como lógica, álgebra, teoría de conjuntos y teoría de la medida, también dotó de claridad y precisión a las semánticas de la lógica matemática y por ende legitimizó conceptos semánticos tales como verdad y definibilidad (que habían sido estigmatizados a causa de las paradojas lógicas), para ello fue muy importante su artículo de 1933 en polaco "El concepto de verdad en los lenguajes de las disciplinas deductivas", que tuvo una influyente traducción al alemán editada en 1936 bajo el título "Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen".

A mediados de la década de 1930 Tarski se interesó por la investigación en álgebra, inicialmente como herramienta para estudiar lógica, pero en los años 1940, ya viviendo en Estados Unidos la estudió cada vez más por si misma.

En Berkeley, Tarski supervisó las disertaciones doctorales de varios de los principales especialistas en lógica matemática de la siguiente generación. Su influencia fue especialmente notable en teoría de modelos al dar base a sus conceptos, problemas y metodología. Aunque investigó bastante en álgebra, se reconocía más como lógico que como algebrista. Colectivamente su trabajo puede ser visto como una inmensa y fructífera mezcla entre álgebra, teoría de conjuntos y lógica.

En *Genealogy Project* se afirma que Tarski dirigió 26 tesis doctorales, solo la de Andrzej Mostowski (de la Universidad de Varsovia) en 1938, de su época en Polonia.

4.3.3. Andrzej Mostowski

Nació en Leópolis el 1 de noviembre de 1913 y murió en Vancouver (Canadá) el 22 de agosto de 1975.

En 1931 Mostowski ingresó a la Universidad de Varsovia, donde se interesó por la lógica, la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas, entre sus maestros estuvieron Kuratowski, Leśniewski, Lukasiewicz, Sierpiński, y los dos que mas le influyeron: Lindenbaum y Tarski. Por tres décadas, después de la Segunda Guerra Mundial, fue el líder de la lógica matemática en Polonia. Filosóficamente, el era un realista respecto a los números reales, y después de los resultados de independencia de Cohen en 1963, se consideraba un formalista en lo concerniente a teoría de conjuntos.

Obtuvo una maestría en 1936 y en 1937 en la universidad de Viena asistió al curso de Gödel sobre conjuntos construíbles, en los que se estableció por primera vez la consistencia relativa del axioma de elección. En Zurich, decidió estudiar estadística con el propósito de trabajar en actuaría, ya que las plazas en matemáticas eran escasas, pero no le encontró mayor interés, así que por ese entonces asistió a clases con Polya, Hermann Weyl y a un seminario de Bernays.

En 1938 Mostowski regresó a Varsovia y defendió su tesis doctoral, que muestra varias definiciones de la finitud que no se pueden demostrar como equivalentes en la lógica sin el axioma de elección. Tarski, dirigió la tesis doctoral, el supervisor oficial era Kuratowski. Con la imposibilidad de obtener un puesto en la universidad de Varsovia, Mostowski trabajó en el instituto nacional de meteorología.

Las primeras publicaciones de Mostowski antes de la Segunda Guerra Mundial fueron sobre álgebra booleana y los llamados modelos Fraenkel-Mostowski para la teoría de conjuntos. Estas publicaciones ilustran dos temas importantes de su obra: álgebra aplicada a la lógica y la semántica de la teoría de conjuntos. Como tercer tema estaban sus investigaciones sobre la teoría de la recursividad y la decibilidad.

Su reconocido trabajo sobre los modelos Fraenkel-Mostowski tuvo origen en 1935, cuando Adolf Lindenbaum (1904-1941) plantea el problema de como formular resultados de independencia de Fraenkel con el axioma de elección. Lindenbaum y Mostowski desarrollaron la teoría de los modelos y, a la manera de Tarski, distinguieron entre el lenguaje objeto y el metalenguaje. En 1939 Mostowski publicó una demostración de que el axioma de elección no puede deducirse del principio del buen orden; profundizó el argumento de Fraenkel en las que cinco nociones de finitud no eran equivalentes, tanto en la teoría de tipos y en la teoría de conjuntos de Bernays-Gödel con urelementos.

Durante la Guerra muchos de los resultados de Mostowski fueron sobre la jerarquía de los conjuntos proyectivos en conjuntos de números naturales aritméticamente definidos y sobre las consecuencias del axioma de constructibilidad en la teoría descriptiva de conjuntos.

Varios de los resultados de tiempo de guerra de Mostowski sobre la jerarquía de los conjuntos proyectivos, en conjuntos aritméticamente definibles de los números naturales, y sobre las consecuencias del axioma de constructibilidad en teoría descriptiva de conjuntos se perdieron cuando su apartamento fue destruido durante la invasión a Varsovia. Posteriormente, Mostowski reconstruyó solo una parte de sus descubrimientos, como la decibilidad de la teoría del buen orden, obtuvo el resultado en 1941 junto con Tarski, pero este resultado fue anunciado en 1949 y se publicó en 1978.

En enero de 1945 ocupó el cargo de investigador en la escuela politécnica de Silesia. Luego enseñó en la universidad Jagelona de Cracovia, y de enero a septiembre de 1946 fue professor de la Universidad de Łodź. Ese mismo año regresó a la Universidad de Varsovia como profesor, ocupando la cátedra de filosofía de las matemáticas, de álgebra y fundamentos de matemáticas. En 1952 fue decano de la facultad de matemáticas y física. De 1948 a 1968 fue jefe de la división de los fundamentos de las matemáticas en el instituto nacional de matemáticas (que luego se convirtió en el instituto de matemáticas de la academia polaca de ciencias. Desde 1968 hasta su muerte dirigió la sección sobre los fundamentos de las matemáticas en la universidad de Varsovia.

Cuando regreso a Varsovia, Mostowski tenía poca experiencia como organizador, aun así se encargó del fortalecimiento de la lógica matemática y el álgebra como un complemento a la lógica. Escribió una serie de textos en polaco. En 1946 atrajo estudiantes sobresalientes de posgrado donde Andrzej Grzegorczyk y Helena Rasiowa) recibieron doctorado en 1950. Después de 1965 el número de sus estudiantes aumentó y llevó a cabo un gran seminario sobre los fundamentos de las matemáticas.

Mostowski trabajó en la parte editorial, y en los consejos editoriales de *Fundamenta Mathematicae* y *Journal of Symbolic Logic*, también en *Annals of Mathematical Logic* del cual fue uno de los fundadores. Fue coeditor de la serie para las matemáticas, la física y la astronomía del *Boletín de la academia polaca de ciencias*. Desde 1966 se desempeñó como editor de la serie "Studies in Logic and the Foundations of Mathematics" publicados por North Holland.

Mostowski recibió el premio estatal de Polonia en 1952 y otro en 1966. En 1956 fue elegido miembro asociado de la academia de ciencias de Polonia y miembro en pleno siete años después. En 1972 recibió el premio de la fundación Jurzykowski y también se convirtió en presidente de la división de lógica, metodología y filosofía de la unión internacional de historia y filosofía de la ciencia de la unión internacional de historia y filosofía de la ciencia.

Mostowski viajó al extranjero varias veces, entre 1948 y 1949 trabajó en el instituto de estudios avanzados de Princeton, de 1958 a 1959 en la Universidad de California y de 1969 a 1970 en Oxford. También participó frecuentemente en congresos y conferencias en Europa y America. Mostowski murió en Vancouver (Canadá) en 1975 mientras daba una serie de conferencias a las que había sido invitado.

De *Genealogy Project* se sigue que Mostowski dirigió 18 tesis doctorales. No hay registro de fechas de las primeras, pero las últimas son de 1973, siendo 16 de éstas en la Universidad de Varsovia.

4.4. Escuela de Leópolis

La actividad matemática en Polonia no era exclusividad de Varsovia, en Leópolis[47] a la cabeza de Stefan Banach y Hugo Steinhaus se desarrolló, alrededor del análisis funcional, una escuela matemática que tuvo como modelo a la de Varsovia. En 1929 sale a la luz la revista *Studia Mathematica*, la cual se especializó en un solo campo de las matemáticas, el análisis funcional. En esto se puede considerar que esta revista tomó como modelo la estrategia de *Fundamenta Mathematicae* de especializarse en un campo que no tuviese suficiente exploración y sobre el cual se pudiese cimentar la revista y la escuela.

Studia Mathematica, al igual que *Fundamenta* no publicaba en polaco sino en idiomas internacionales. En palabras de [Kuratowski, 1980, p. 41]: *Studia* “llegó a ser no sólo el órgano de la Escuela de Leópolis, sino también una de las revistas mas importantes en el campo del análisis funcional”

[47]Debe tenerse en cuenta que trás las Segunda Guerra Mundial, Leópolis pasó a ser parte de Ucrania. En ucraniano se escribe Lviv.

En el apartado 4.3 se hizo referencia a la escuela de Leópolis de filosofía liderada por Kazimierz Twardowski, cabe decir que después de la Primera Guerra Mundial, en 1919 la Universidad de Leópolis pasó a llamarse Universidad Jan Kazimierz (en honor a quien la fundó en 1651) desde 1919 hasta 1939, y a la cabeza de Hugo Steinhaus y pocos años después a la cabeza de Stefan Banach, pasó a ser reconocida por ser el centro mas importante en análisis funcional en el mundo.

A parte de Banach y Steinhaus, debe nombrarse a varios de sus estudiantes, quienes aportaron para que Leópolis se reconociera para ese entonces como el más importante centro de análisis funcional en el mundo. Entre estos se destacan Stanisław Mazur (1905-1981), Władisław Orlicz(1903-1990) y Julius Schauder(1899-1943). Pero también se debe nombrar otros como Stefan Kaczmar (1895-1939), coautor con Steinhaus de una monografía sobre series ortogonales; Marek Kac (1914-1984), quien posteriormente fue un reconocido profesor en varias universidades de Estados Unidos; Herman Auerbach (1901-1942), miembro del comité editorial de *Studia Mathematica* y cercano colaborador de Banach, y Stanisław Ulam (1909-1984), muy reconocido profesor e investigador en Estados Unidos.

Esta revista, que fue fundada en 1929 tuvo nueve volúmenes hasta 1940, luego como Leópolis dejó de ser parte de Polonia para formar parte de Ucrania, la revista fue reiniciada en 1948 en Breslavia,[48] ciudad a la que fue trasladada la Universidad de Leópolis[Zelazco, 2004].

En [Ciesielski y Moslehian, 2010] se presentan los siguientes datos sobre los autores de *Studia Mathematica*:

Entre 1936 y 1940 los editores tuvieron el apoyo, en el comité editorial, de Herman Auerbach, Stanisław Mazur and Władysław Orlicz.

En el primer volumen de *Studia Mathematica* se publicaron catorce artículos de los siguientes autores: S. Banach, Z.W. Birnbaum, L. Fontappié, S. Kaczmarz, S. Mazur, W. Nikliborc, W. Orlicz, S. Saks, J. Schauder and H. Steinhaus.

En los primeros 9 volúmenes la mayoría de las 161 publicaciones de *Studia* fueron de autores de Leópolis. Los que más publicaron fueron: Orlicz, con 21; Mazur, con 17 y Banach, con 16. Felix Hausdorff fue el autor extranjero que más publicaciones hizo en la revista con 6 artículos. 56 autores publicaron durante esos volúmenes; en alemán se escribieron 78 artículos, en francés 66, en inglés 16 y uno en italiano.

No puede hablarse del grupo de Leópolis y omitir la Universidad Técnica

[48] Wrocław en polaco, Breslau en alemán.

de Leópolis y su Departamento General. El curriculum de este departamento no difería mucho del de la Universidad de Leópolis, aunque era posible estudiar materias de ingeniería impartidas por otros departamentos y contaba con cursos dictados por profesores de la universidad de Leópolis como Banach, S. Kaczmarz y W. Nikliborc. El Departamento General tenía una sola plaza para profesor de matemáticas, y esta fue ocupada hasta 1928 por Włodzimierz Stożek, para ser sucedido por Kuratowski hasta 1933, cuando el departamento fue cerrado, y Kuratowski fue asignado a la universidad de Varsovia.

La rama de Leópolis de la Sociedad Matemática Polaca tuvo 180 reuniones con 360 comunicados entre los años 1928-1938. A esta ciudad llegaron como visitantes todos los matemáticos polacos activos y figuras como Ernst Zermelo, John von Neumann, Henri Lebesgue y algunos otros.

Veamos una reseña biográfica de Stefan Banach, fundador y cabeza de la llamada escuela matemática de Leópolis.

4.4.1. Stefan Banach

Stefan Banach[49] nació en Cracovia el 30 de marzo de 1892 y murió en Leópolis (siendo para esa fecha ya una ciudad ucraniana) el 31 de agosto de 1945.

Los padres de Stefan Banach eran Stefan Greczek y Katarzyna Banach,[50] ambos oriundos de la región de Podhale. De su padre se sabe que fue un soldado en el ejército austro-húngaro destacado en Cracovia y de su madre se sabe poco.

Sus padres no eran casados entre si, ya que el reglamento militar se lo impedía a Greczec. Debido a carencias económicas, sus padres decidieron que Stefan debía ser criado por algunos familiares y amigos, así Banach pasó sus primeros años con su abuela paterna en el pequeño pueblo de Ostrowsko, a

[49]Varios aspectos de la vida temprana de Banach son confusos, y en distintas fuentes se encuentra información con datos contrarios. Por ejemplo, en la mayor cantidad de fuentes se dice que su fecha de nacimiento es el 30 de marzo de 1892, mientras que Steinhaus dice que nació el 20 de marzo de 1892. En [Ciesielski, 1993], Krysztof Ciesielski enuncia algunos de los datos confusos.

[50]Nótese que heredó el nombre del padre pero el apellido de la madre.

80 kilómetros al sur de Cracovia.

La abuela enfermó, así Greczek arregló para que su hijo fuera criado por Franciszka Plowa y su sobrina Maria Puchalska en Cracovia. Durante esos años, un amigo francés de los Plowa, Juliusz Mien, enseñó francés a Banach y fue una especie de imagen en términos intelectuales.

En 1902 Banach, de 10 años, se inscribió en el gimnasio Henryk Sienkiewicz de Cracovia, esta escuela enfatizaba para sus estudiantes en la formación de las humanidades, sin embargo Banach y su amigo Witold Wilkosz, pasaban buena parte de su tiempo trabajando en los problemas de matemáticas durante los descansos y después de la escuela, es así que desde temprana edad se interesó por las matemáticas de forma autodidacta. Cabe decir que terminó oficialmente sus estudios de secundaria en 1914, a la edad de 22 años, sin embargo antes de eso, en 1910, a la edad de 18 años, Banach, con su amigo Wilkosz, se trasladaron a Leópolis con la intención de estudiar ingeniería en el Politécnico de esta ciudad. En algún momento él también estudió en la Universidad Jagelona de Cracovia, pero no culminó sus estudios.

En verano de 1916, Banach conoció a Hugo Steinhaus, uno de los matemáticos de renombre de la época. Según Steinhaus, mientras paseaba un día por un parque en Cracovia, oyó casualmente una conversación entre dos jóvenes amigos[51] que hablaban sobre la “medida de Lebesgue”, una teoría matemática muy reciente. Steinhaus se metió en la conversación y quedó sorprendido por los conocimientos y el talento de Banach, y Steinhaus le propuso que trabajaran juntos en un problema en el que llevaba tiempo trabajando. Dos días después, Banach volvió con el problema resuelto, y de ahí surgió la primera publicación de Banach, en la que figuraba como autor con Steinhaus, la cual trataba sobre la convergenecia de series de Fourier, y fue publicada en 1919 en el *Boletin de la Academia de Cracovia*. En 1920, sin haber terminado sus estudios formales,[52] ocupó el cargo de asistente del profesor Antoni Łomnicki en la Universidad Técnica de Leópolis. Ese mismo año recibió su doctorado,[53] bajo la dirección de Steinhaus y con Twardowski como jurado, en la Universidad de Leópolis, su tesis traducida al francés “Sur les opérations

[51] El otro era Otton Nikodym.

[52] De hecho nunca los terminó. [Ciesielski, 1993].

[53] Un permiso especial del Ministerio de Educación permitió que obtuviera el doctorado sin tener un título previo[Zelazco, 2004]

dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales", se publicó en *Fundamenta Mathematicae* en 1922[54] y ha sido tan importante que se considera la publicación crucial para el nacimiento de análisis funcional.

En 1922 Banach aprobó el examen de cualificación para el título de docente, para ello realizó una publicación sobre teoría de la medida que fue publicada en 1923, poco tiempo después fue nombrado profesor asociado, y en 1927 obtuvo el cargo de profesor titular en la Universidad de Leópolis.

En 1924 llegó a ser miembro de la Academia Polaca de Ciencias y Artes. Varios de sus estudiantes en Leópolis han alcanzado reconocimiento internacional, entre ellos S. Mazur, W. Orlicz, J. Schauder y S. Ulam, sin embargo, en *Genealogy Project* se plantea que Banach figura con un único pupilo, Stanisław Mazur, al que dirigió la tesis doctoral, terminada en 1932.

Banach y Steinhaus fundaron la revista *Studia Mathematica*, y ocupó buena parte de su tiempo y de sus esfuerzos en la redacción de textos tanto universitarios como de enseñanza secundaria.

En el periodo 1939-1941, Banach fue decano de la facultad en Leópolis y fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de Ucrania. Durante el verano de 1941 Leópolis fue ocupada por el ejército alemán y desde otoño de 1941 hasta el final de la ocupación alemana en julio de 1944 Banach se prestó para alimentar piojos con su propia sangre en el instituto bacteriológico del bacteriólogo Rudolf Weigl, lo cual le provocó una considerable degradación física. Para este punto debe decirse que esa oferta, de alimentar piojos con su propia sangre, generaba algunos beneficios, tales como una comida especial y protección contra arrestos arbitrarios y deportaciones a campos de concentración nazis. Cabe decir que entre los "privilegiados" alimentadores de piojos, estaban varios profesoeres de la Universidad de Leópolis, de matemáticas, Orlicz y otros más acompañaban a Banach, quienes aprovechaban que tenían suficiente tiempo libre para organizar cursos universitarios clandestinos y realizar otras actividades de orden educativo y patriótico.[55]

[54] De esta publicación en *FM* se hace una breve presentación en la página 178.
[55] Se puede ampliar esto último en el artículo [Durán, 2009].

Después de la liberación de Leópolis, en otoño de 1944, Banach retornó a su trabajo en la universidad, pero su salud se deterioró tanto que en menos de un año murió producto de cáncer de pulmón.

En 1932 su obra *Théories des opérations linéaires* que se imprimió como el primer volumen de *Monografie Matematyczne* (*Monografías matemáticas*), contribuyó para que se popularizaran, entre la comunidad matemática, los logros de Banach y para que se desarrollara el análisis funcional. Tanto era su reconocimiento que se le asignó una de las conferencias plenarias en el Congreso Internacional de Matemáticas en Oslo en 1936.

La obra científica de Banach consta de 58 publicaciones, de las cuales 6 son póstumas. Aunque Banach sentó las bases del análisis funcional moderno, la mayoría de sus publicaciones no pertenecen directamente a este campo, pero tienen una estrecha relación con éste, tales como en teoría de funciones de variable real, teoría de series ortogonales y teoría descriptiva de conjuntos.

Uno de los resultados más sobresalientes de Banach en teoría de conjuntos es el que junto a Tarski describe en el artículo *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents* publicado en *Fundamenta Mathematicae* en 1924,[56] y en el que se prueba que dados dos conjuntos acotados en $\mathbb{R}^n$ con interiores no vacíos son equivalentes bajo descomposición finita. A partir de este resultado se le llamó la paradoja de Banach-Tarski al siguiente enunciado: la esfera unidad se puede descomponer en una cantidad finita de partes y luego juntar esas partes para obtener dos esferas unidad.[57]

Steinhaus decía que Banach había sido su mayor descubrimiento en Matemáticas. Gracias al valor y la originalidad de sus trabajos, Banach consiguió, aunque de forma totalmente irregular, que se le concediera el título de doctor, llegando a ser uno de los matemáticos más importantes del siglo. Kuratowski denota a Banach como el matemático polaco más brillante.

En su juventud, Banach no siguió unos estudios basados en la academia tradicional, de hecho sus primeros acercamientos a las matemáticas fueron

[56] Del cual se hace una presentación en la página 178.

[57] Diez años antes, en [Hausdorff, 1914] se había planteado un enunciado equivalente, pero fue a través de este artículo que esta paradoja adquirió reconocimiento.

de forma autodidacta. A eso se puede agregar que no le gustaba presentar exámenes, y de hecho no terminó formalmente su carrera universitaria. Ya siendo profesor en la universidad de Leópolis, "le gustaba trabajar en bares, no sólo por el café, sino también porque los ambientes ruidosos le permitían concentrarse mejor. Prácticamente no ponía los pies en su despacho de la Universidad más que para asuntos de índole burocrática. Muchas veces, cuando todos los bares ya habían cerrado, se dirigía hacia la Estación del ferrocarril, cuyo bar era el único que permanecía abierto a esas horas."[58]

4.4.2. El cuaderno escocés

En Leópolis acontecía algo bastante particular, que era las reuniones de los sábados en la tarde en un café y que eran posteriores a la finalización de actividades en las universidades, en particular después de la reunión de la Sociedad matemática polaca sección Leópolis.[59] El núcleo inicial de las reuniones era conformado por Banach, Steinhaus y Mazur. No se aceptaba estudiantes, aunque las primeras excepciones fueron la de Stanisław Ulam y la de Josef Schreier. Cabe decir que con el tiempo, a estas reuniones se unieron otros matemáticos como Kaczmarz, Auerbach, Schauder, Kuratowski o Nikodym.

Las reuniones se hicieron inicialmente en el café Roma, pero Banach se enfadó con el dueño porque éste no le fiaba las consumiciones hasta final de mes, que es cuando cobraba el sueldo de la universidad. Por ello se decidió trasladar la tertulia al bar que estaba frente a éste, el Café Escocés.

De esas reuniones en el Café Escocés ha quedado un legado muy importante, una colección informal de problemas resueltos, no resueltos y también problemas indecidibles, que pasó a denominarse como el *Cuaderno Escocés*. Sobre el origen de este famoso cuaderno veamos una nota:

> En sus memorias, Ulam escribió: "Me acuerdo de una sesión en el Café Escocés con Mazur y Banach que duró 17 horas sólo interrumpidas por las comidas. Lo que más me impresionaba era cómo se podía hablar deMatemáticas, razonar y hallar

[58] Tomado de: http://sangakoomaths4life.wordpress.com/tag/cuaderno-escoces/

[59] "Una costumbre similar parece que se impuso un tiempo después en el centro de Varsovia, alrededor del *Fuker wine shop*"[Arboleda, 1982, p. 237].

> demostraciones en estos debates". Esa maratoniana reunión dio como fruto un importantísimo teorema de análisis funcional. Cuando el bar cerró, todos se marcharon cansados y satisfechos por los resultados obtenidos. Pero al día siguiente, que es cuando peligran los pequeños detalles de una demostración improvisada, se encontraron con que la mesa de mármol en la que habían estado trabajando resplandecía con un blanco incólume. No quedaba ni rastro del teorema. Los matemáticos, encabezados por Banach, pusieron el grito en el cielo y el dueño del local les recordó, por si lo habían olvidado, que el Escocés era un bar y que una de las obligaciones del personal consistía en limpiar las mesas cada día antes de cerrar. Fue entonces cuando intervino Lucja, la mujer de Banach, que le entregó a su marido una libreta que había elegido cuidadosamente, con las páginas en blanco y encuadernada con sólidas tapas de pasta. Le sugirió que anotaran en él las cosas importantes y que al finalizar la jornada se lo dieran a alguien para que lo guardara. Y fue precisamente el dueño del bar quien se hizo responsable del cuaderno. Cuando alguien del grupo lo solicitaba se lo entregaba y al finalizar la jornada volvía a depositarlo tras la barra, en un lugar seguro. [...] Se decidió que en el cuaderno se anotarían los enunciados de los problemas al inicio de las páginas impares dejando el resto y el reverso en blanco para escribir la solución. El 17 de julio de 1935, Banach escribió el primer problema.
>
> Había nacido el cuaderno escocés.[60]

Ulam, quien residía en Estados Unidos desde 1935, visitó Polonia en agosto de 1939, justo antes de la Segunda Guerra Mundial, Mazur le dijo que creía que una gran guerra era inminente, y le preocupaba que se perdieran los resultados no publicados sobre grupos numerables. Así, le dijo a Ulam que cuando iniciara la guerra pondría el libro en una caja y lo enterraría donde pudiera ser encontrado más tarde, cerca de la portería de un campo de fútbol.

Ulam no sabe si efectivamente fue esa la forma en la que se conservó el cuaderno durante la guerra, lo que si dice es que cuando Banach murió en 1945, su hijo, Stephan Banach, Jr. lo encontró, y se lo enseñó a Steinhaus.

[60]Tomado de: http://sangakoomaths4life.wordpress.com/tag/cuaderno-escoces/

Steinhaus entonces lo copió a mano palabra por palabra y en 1956 envió esa copia a Ulam, quien residía en Los Alamos (Estados Unidos). Con esa copia, Ulam lo tradujo al inglés, sacó 300 copias y las distribuyó por correo a varias universidades tanto estadounidenses como del exterior y también a varios amigos. Así, el *Cuaderno escocés* empezó a conocerse en los círculos matemáticos. R. D. Mauldin publicó el libro: *The Scottish Book, Mathematics from the Scottish Café* [Mauldin, 1981].[61]

En el cuaderno escocés hay escritos un total de 193 problemas. Banach escribió 25, 14 en solitario y los otros 11 junto con Mazur y Ulam. Mazur planteó 24, de Ulam son 40, de Steinhaus 10, y el resto fueron planteados por visitantes, entre los que están Frechet, von Neumann, Sierpiński, Lebesgue, Erdoz, Infeld, Kuratowski, Eilenberg, Lusternik, Knaster, Alexandroff. Los primeros problemas datan desde 1928, aunque el primero escrito en el cuaderno tiene la fecha de 17 de julio de 1935 y fue propuesto por Banach. El último es del 31 de mayo de 1941 y está registrado con la firma de Steinhaus.

Es importante señalar que el ambiente de camaradería e informalidad que se vivía entre los asistentes a estas reuniones debió ser un factor de gran importancia para obtener este producto, tanto así que dice que algunas soluciones a problemas venían hasta en servilletas, y que se usaban las mesas de mármol para escribir ideas. Para ello veamos como Ulam describe algunos apartes de lo que debe ser la etapa incial de estas reuniones, cuando aún se hacían en el café Roma:

> Kuratowski, que era profesor en el Instituto Politécnico, y Steinhaus, que estaba en la Universidad, preferían ir a un café más elegante. Pero Banach, Mazur y algunos visitantes como Sierpiński, eran clientes del Café Roma. Ahí nos sentábamos a discutir matemáticas, chiquiteando una taza de café o de té, durante tres o cuatro horas. Además de matemáticas, había ajedrez. Auerbach era un jugador muy fuerte. Frecuentemente jugaba una o dos partidas con Stożek o Nikliborc mientras Banach miraba y por supuesto metía su cuchara. Pero además

[61] Se puede ver la versión original manuscrita del cuaderno escocés en el enlace http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/pdf/ks-szkocka/ks-szkocka1pol.pdf
Hace parte de la página [Miranowicz y Jakimowicz, 2012], donde se encuentra suficiente información sobre Banach.

> de todo esto, los matemáticos continuábamos con la discusión que habíamos empezado más temprano en la reunión de la Sociedad Matemática. La atmósfera que se vivía, especialmente en Lvov, era de una colaboración entusiasta; la gente estaba realmente interesada en los problemas de los otros. Esto también era cierto en Varsovia, en donde había muchísima colaboración entre topólogos, aquéllos que hacían teoría de conjuntos, y lógicos. En Lvov, el interés no sólo estaba en la teoría de conjuntos sino, debido a la influencia de Steinhaus y Banach, también en el análisis funcional y algunos otros campos. [62]

Los relatos de Ulam se acompañan de anécdotas con tintes de humor matemático, eso se puede corroborar en su autobiografía [Ulam, 2002]. Correspondiente a las memorias del cuaderno escocés rescatamos una en la que interviene Henri Lebesgue y los objetos definibles:[63]

> En una ocasión, el matemático francés Henri [Lebesgue] fue invitado a cenar en el Café Escocés junto con otros quince miembros de la comunidad matemática de Lvov. El menú que le entregaron estaba en polaco y cuando el camarero se acercó a él para tomar nota, Lebesgue se lo devolvió y, utilizando el más puro estilo matemático, le dijo "Merci, je ne mange que des choses bien définies" (Gracias, yo sólo como cosas que estén bien definidas).[64]

4.5. Otros centros matemáticos en Polonia

Los centros más importantes para la matemática polaca durante el periodo Entreguerras fueron Varsovia y Leópolis, tanto así que se consideran escuelas de maemáticas según lo que se ha planteado al inicio del capítulo 3. Sin embargo no es justo hablar de matemáticas en Polonia en el periodo que aquí se trata sin hacer alusión a los esfuerzos que se realizaban en los centros matemáticos de las ciudades de Cracovia, Vilna y Posnania. Así, en este apartado se dará una breve lista de los matemáticos mas representativos de

[62]Tomado de: http://nicofersist.blogspot.com.es/2006_12_01_archive.html

[63]Se habla sobre los objetos definibles y/o nombrables para Lebesgue en el apartado 6.3.

[64]Tomado de: http://sangakoomaths4life.wordpress.com/2013/07/12/el-cuaderno-escoces/

estos centros, y su campo de especialización.

Se empezará hablando de Cracovia, en el que estaban presentes la Universidad Jagelona y la Universidad AGH de Ciencia y Tecnología. El análisis era la mayor rama de interés y en la que la revista *Anales de la Sociedad Polaca de Matemáticas*, llegó a ser la principal publicación. El principal refente en Cracovia era Stanisław Zaremba, quien se destacó por sus resultados en ecuaciones diferenciales parciales y otros campos de análisis clásico. Entre sus principales pupilos se destacaron Tadeusz Ważewski (1896-1972) en ecuaciones diferenciales y Władislaw Nikliborc (1889-1948) especializado en análisis.

En Cracovia también se debe nombrar a Franciszek Leja (1885-1979), especialista en funciones analíticas; Antoni Hoborski(1879-1940) y su alumno Stanisław Gołab (1902-1980) especialista en geometría diferencial; Otto Nykodym (1887-1974), conocido por un famoso resultado de teoría de la medida que lleva su nombre; Alfred Rosenblatt (1880-1947), quien desde 1936 se radicó en Lima - Perú, especialista en geometría algebraica y aplicaciones del análisis; Jan Śleszyński (1854-1931), uno de los pioneros de la lógica matemática en la región de Cracovia; y Witold Wilkosz (1891-1941), quien tiene su obra principalmente en análisis y fundamentos de las matemáticas.

Cabe decir que después de la Segunda Guerra Mundial, Cracovia acogió a gran parte de los profesores de Leópolis, ya que ésta última pasó a ser parte de Ucrania.

El siguiente centro del que se hablará es Vilna, que ahora hace parte de Lituania siendo su capital (en Lituano su nombre es Vilnius, en polaco se escribe Wilno). La cabeza visible en Vilna era Antoni Zygmund (1900-1992), quien fue profesor en la Universidad Stefan Batory desde 1930 hasta 1939, para luego emigrar a Estados Unidos, donde también tuvo una destacada labor académica, siendo director de tesis de Paul Cohen, el único medalla Fields (1966) en teoría de conjuntos. Obtuvo su doctorado en la Universidad de Varsovia en 1923 y sus principales áreas de interés era el análisis armónico, el cual aplicaba a la teoría de ondas y vibraciones. En [Kuratowski, 1980, p. 47] se destaca entre los pupilos de Zygmund a Józef Marcinkiewicz (1910-1940) de quien dice que era uno de los matemáticos polacos más talentosos, pero que murió con treinta años al inicio de la guerra.

Antes de Zygmund, en Vilna se destacaba Stefan Kempisty (1892-1940) quien se especializó principalmente en teoría de funciones de variable real. Kuratowski también nombra a los siguientes, como matemáticos importantes en Vilna: Mirosław Krzyżański (1907-1965) y Stanisław Krystyn Zaremba (1903-1990) (hijo de Stanisław Zaremba).

La Universidad de Posnania (en polaco Poznán), era la más joven en Polonia,[65] ya que fue fundada en 1919, contaba con dos plazas para matemáticas. En sus inicios este centro se dedicaba especialmente a la enseñanza y a trabajo administrativo, es decir, la investigación no era su prioridad. El centro era dirigido por el profesor Zdzisław Krygowski (1872-1955), quien anteriormente había sido rector de la Universidad Técnica de Leópolis.

En 1929 mejoró sustancialmente la situación científica en Posnania debido a que se concedió una plaza a Mieczysław Biernacki (1891-1959), un destacado académico que en 1928 había finalizado su tesis en París, y que se especializó en teoría de funciones analíticas. También fue importante la labor de estimular la actividad científica por parte de Władislaw Ślebodziński, quien era profesor en la Escuela de Ingeniería Mecánica de Posnania.

En 1937, Władisław Orlicz, uno de los destacados matemáticos de la escuela de Leópolis y por ende especialista en análisis funcional, asumió una plaza en Posnania, ayudando así a incrementar el estatus científico de este centro.

4.6. La Sociedad Polaca de Matemáticas

Junto a las instituciones de educación superior, la Sociedad Polaca de Matemáticas[66] tuvo un papel fundamental en el desarrollo de la matemática polaca. La actividad de la SPM tenía dos aspectos diferenciados: el primero era el puramente científico y representado principalmente por las reuniones académicas de las diferentes secciones, y el aspecto administrativo, que se ocupaba del trabajo de las oficinas centrales de la sociedad, tales como organizar eventos, la representación de matemáticos polacos en el extranjero y

[65] Actualmente la Universidad de Posnania se llama Universidad Adam Mickiewicz.
[66] De ahora en adelante se denotará como SPM.

consultar con las autoridades estatales sobre los asuntos referentes a la matemática polaca.

Desde 1917 en Leópolis se había establecido una sociedad matemática,[67] sin embargo fue el 2 de abril de 1919 la fecha en la que se considera la reunión con la que quedó establecida la SPM. Esta reunión se hizo en el espacio donde se realizaba el seminario de filosofía en la Calle Santa Ana en Cracovia. Asistieron 16 personas, incluyendo todos los profesores y docentes de la universidad Jagelona, es decir: los profesores S. Zaremba, K. Żorawski y J. Śleszyński, y los docentes A. Hoborski y A, Rosenblatt, además del asistente F. Leja y varios matemáticos más de que trabajaban en escuelas de secundaria, tales como L. Chwistek, L. Hordyński, O. Nikodym, S. Banach y dos ingenieros más.

De la reunión surgió el primer cuadro administrativo: S. Zaremba como presidente, A. Hoborski como vicepresidente, F. Leja como secretario y L. Hordyński como tesorero. Todos los demás asistentes fueron reconocidos como miembros de esta sociedad. [Kuratowski, 1980, p. 51].

Los principios de esta sociedad, en el momento de su fundación eran:

- Fomento de la matemática pura y aplicada
- Organización de seminarios y reuniones
- La publicación de los Anales de la Sociedad Polaca de Matemáticas

La popularización como meta fue rechazada.

De acuerdo con el primer estatuto, el propósito de la sociedad era "una cultivación comprehensiva de las matemáticas puras y aplicadas a través de sesiones científicas combinadas con conferencias".[68] El primer cambio a este estatuto, en 1921, fue la siguiente adición: "la publicación de un periódico y

[67]En la nota al pie de página de [Kuratowski, 1980, p. 50], se dice que una historia detallada de la Sociedad Polaca de Matemáticas fue publicada por T. Iwiński, quien durante gran tiempo fue secretario de esta sociedad: *Más de medio siglo de actividad de los matemáticos polacos*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw 1975 (en polaco).

[68]Tomado de [Kowalski, 2004, p. 24].

mantener los contactos con el movimiento científico matemático".

En Varsovia por ese entonces, Janiszewski, Łukasiewicz, Mazurkiewicz, Sierpiński y algunos de los alumnos de ellos, tuvieron reuniones académicas semanales, tales reuniones no eran muy diferentes de las que se ejercían posteriormente cuando Varsovia ingreso oficialmente a la Sociedad Polaca Matemática.

De Varsovia no participó nadie en la primera reunión de la Sociedad, sin embargo, después de algunos meses de deliberación, cinco matemáticos de Varsovia se unieron a la Sociedad Matemática de Cracovia el 19 de septiembre de 1919. Estos fueron Dickstein, Sierpiński, Janiszewski, Mazurkiewicz, y Zakrocki. Por ello se anunció en la reunión de la Sociedad de Cracovia que una Junta Extraordinaria se celebrará el 29 de septiembre:

> Matemáticos de diferentes partes de Polonia han sido invitados a participar en ella. El objetivo de la reunión es para organizar una oficina de informes para la recogida y difusión de información en el extranjero sobre el movimiento científico en Polonia, y considerar una posible reorganización de la Sociedad ... para ampliar el ámbito de actividades de la Sociedad en todo el país.[69]

En 1921, la Sociedad Matemática de Cracovia se transformó en la Sociedad Matemática Polaca, con sede principal en Cracovia. Para ese entonces contaba con 49 miembros.

Poco después se empezó a admitir en la sociedad, miembros que no vivieran en Cracovia, para ello se crearon secciones en diversas ciudades; desde 1921 en Leópolis, y desde 1923 en Varsovia, Posnania y Vilna.

La sociedad tenía un carácter científico, donde las posibilidades de tener voto activo o pasivo eran exclusivas de los autores de publicaciones matemáticas.

Un nuevo estatuto, realizado en 1936 en Leópolis, estableció una organización federativa de cinco seccionales, con sede principal en Varsovia. La sede fue movida a Varsovia en 1937 y se extendieron unos nuevos propósitos:

[69] Tomado de: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Societies/Polish.html citando J. Piorek. Polish Mathematical Society, *European Mathematical Society Newsletter* 32, pp. 17-18, (June, 1999).

- Ser representación de la comunidad matemática polaca
- Introducir premios a la investigación
- Relaciones internacionales
- Programa de publicaciones extendido

Los presidentes de la Sociedad fueron: S. Zaremba, de Cracovia (1919); W. Staniewicz, de Vilna (1921); Z. Krygowski, de Posnania (1926); W. Sierpiński, de Varsovia (1928); K. Bartel, de Leópolis (1930), S. Mazurkiewicz, de Varsovia (1932) y S. Banach, de Leópolis (1939).

La intensa actividad de la Sociedad Polaca matemática en el periodo 1919-1939 se puede ver en los siguientes números: 1143 reportes presentados, de los cuales 446 fueron de la secciónal de Varsovia, 373 de Leópolis y 184 de Cracovia.

El número de miembros de la SPM aumentó rápidamente, de 100 en 1924 a cerca de 200 en 1938.

Varios matemáticos del extranjero fueron miembros de la SPM y colaboraron con ésta. Entre ellos P.S. Alexandroff, Elie Cartan, E. Čech, S. Lefschetz, T. Levi-Civita, N.N. Luzin, P. Montel, R.L. Moore, G. Vitali, I. Vinogradov, E. Zermelo.

Entre las actividades de tipo administrativo se destacan algunos hechos, tales como la organización de congresos polacos de matemáticas, el primero de ellos inició el 7 de septiembre de 1927. Anterior a este congreso, los matemáticos en Polonia asistían a los llamados "Congresos de Médicos y Científicos Naturales", pero su participación no era muy notoria, por ejemplo, en el congreso llevado a cabo en 1925, la sección de matemática fue sólo una de las 35 secciones del congreso, 10 matemáticos participaron en este evento. Es así que el protagonismo de los matemáticos, frente al de sus colegas de las otras ciencias no era satisfactorio para los matemáticos polacos de la época, por ello la reunión general de la SPM en 1926 en Cracovia decidió organizar el Primer Congreso Polaco de Matemáticas, el cual tuvo 200 participantes venidos de distintas partes del país y varios de ellos del extranjero, entre los que se destacaba John von Neumann. Se realizó un Segundo Congreso Polaco de Matemáticas, este se llevó a cabo en Vilna en 1931, y el tercero fue en 1937 en Varsovia. A la organización de estos eventos de carácter nacional hay que sumar el Primer Congreso de Matemáticos de Países Eslavos, el cual se realizó en Polonia en 1929. En total, durante el periodo 1919-1939 se realizaron 1143 conferencias relacionadas con la SPM.

Sobre las publicaciones de la SPM, durante el periodo Entreguerras, en 1921 surgió un órgano llamado "Disertaciones de la Sociedad Polaca Matemática", un año después se transformó en un periódico denominado "Anales de la Sociedad Polaca de Matemáticas". El cual tuvo 25 volúmenes desde 1922 hasta 1952.

La SPM ha gestionado la popularización y el reconocimiento de los matemáticos polacos. Eso se puede ver en la realización de competiciones y la asignación de premios, como también en las iniciativas para que algunas calles lleven el nombre de figuras de la matemática polaca. Entre las competencias y premios para matemáticos menores de 28 años, están los grandes premios por logros científicos (llamados posteriormente Stefan Banach, Stefan Mazurkiewicz, Stanisław Zaremba, Wacław Sierpiński, Tadeusz Ważewski y Zygmunt Janiszewski); por logros en el campo de matemáticas aplicadas y elaboraciones prácticas (llamados posterioremente Hugo Steinthaus y Wacław Pogorzeiski) y finalmente, por logros en beneficio de la cultura matemática (llamado posteriormente Samuel Dickstein).

La seccional de Toruń de la SPM organiza "la competición Józef Marcinkiewicz", para el mejor artículo entre estudiantes, la seccional de Breslavia lo hace igualmente al mejor artículo entre estudiantes, pero en teoría de probabilidad y aplicaciones matemáticas. También el consejo editorial de *Didáctica de las Matemáticas* organiza "la competición Anna Zofia Krygowska"para el mejor artículo de estudiantes en didáctica de las matemáticas.

La SPM también ha estado en la organización y supervisión de de competiciones para premios que posteriormente se llamaron Kazimierz Kuratowski, Stanisław Mazur y Władisław Orlicz. También participa en la concesión de la "Medalla Wacław Sierpiński"para conferencias.

Por iniciativa de la SPM varias calles y avenidas en Cracovia, Varsovia y Breslavia, han llegado a tener nombres de matemáticos polacos, entre ellos:

Stanisław Gołab, Bronisław Knaster, Mirosław Krzyżański, Kazimierz Kuratowski, Francizek Leja, Edward Marczewski, Zdzisław Opial, Witold Pogorzelski, Marian Rejewski, Wacław Sierpiński, Stefan Straszewicz, Jacek Szarski, Tadeusz Ważewski y Stanisław Zaremba.

El 23 de noviembre de 1982, la Oficina Postal Polaca publicó cuatro estampillas como una serie de matemáticos polacos con retratos de Stefan Banach, Zygmunt Janiszewski, Wacław Sierpiński y Stanisław Zaremba. Además bajo la iniciativa de la seccional de Cracovia de la SPM se erigió un monumento a Stefan Banach en ocasión de la XV Asamblea de Matemáticos Polacos en 1999.

4.7. Biografía de Sierpiński

Wacław Franciszek Sierpiński nació en Varsovia el 14 de marzo de 1882 y murió en 21 de octubre de 1969 también en Varsovia. Era hijo de un reconocido físico, Konstanty Sierpiński. En la escuela secundaria tuvo como profesor a W. Włodarski, con quien Sierpiński empezó a mostrar gran interés en las matemáticas.

En 1899 ingresó a estudiar en el Departamento de Matemáticas y Física de la Universidad de Varsovia, culminando sus estudios en 1904. Durante su época de estudiante universitario tuvo una marcada influencia del profesor ruso Giorgy Voronoi, especialista en teoría de números; de hecho en 1903, obtuvo una medalla de oro concedida por el Departamento de Matemáticas y Física, por el mejor ensayo de un alumno sobre la contribución de Voronoi a la teoría de números. Al no estar dispuesto a que su ensayo se publicara en ruso en el *Izvestia* de la Universidad de Varsovia lo retuvo hasta 1907, año en que se apareció en la revista matemática de Samuel Dickstein[70], *Prace Matematyczno-Fizyczne*[71]. Después de obtener su título, ejerció como docente en la enseñanza secundaria, lo cual para la época, era un trabajo frecuente y poco atractivo para los científicos jóvenes que hacían parte de la región de influencia de la Rusia zarista en Polonia.

[70]Matemático polaco de origen judío, quien vivió entre 1851 y 1939.
[71] *Trabajos de matemáticas y física.*

Figura 4.1: Sierpiński

A raíz de la gran huelga escolar que acompañó la Revolución de 1905, que fue un incentivo para que Sierpiński se negase a publicar en ruso su primer escrito, renunció a su puesto docente en el liceo y se trasladó a Cracovia para continuar sus estudios en la Universidad Jagelona, asistiendo entre otros, a los cursos dcitados por Stanisław Zaremba. Obtuvo su doctorado en 1906 con la tesis titulada *Sur la somation de la série* $\sum f(m^2+n^2)$ *où* $m^2+n^2 \leq x$. Según *Genealogy Project*, sus tutores fueron Zaremba y Voronoi. Luego volvió a Varsovia y retomó su puesto docente en la enseñanza secundaria, y por entonces sus investigaciones y resultados los enviaba a las más importantes publicaciones de Cracovia y Varsovia.

Hasta ese entonces, el campo de trabajo de Sierpiński en matemáticas era la teoría de números, pero en 1907 empieza su interés en teoría de conjuntos debido a un resultado que llamó su atención: la posición de los puntos del plano pueden ser totalmente descritos por un número real. Por ello escribió a su amigo Banachiewicz, quien estudiaba en Gotinga, y la respuesta de éste ha pasado a la historia por ser de una sola palabra: "Cantor". Al poco tiempo, y después de una estadía en Gotinga, sus intereses cambiaron de la teoría de números a la teoría de conjuntos.

En 1908 es nombrado miembro titular de la Sociedad de Ciencias de Varsovia, el mismo año , bajo invitación del profesor Józef Puzyna presentó y aprobó el examen de cualificación para ejercer como docente en la Universidad de Leópolis y en 1910 llega a ser profesor asociado en esta universidad.

Desde 1909 dictó varios cursos sobre teoría de conjuntos, temática que fue ganando importancia cada año, contribuyendo así "a la extensión y transformación de ese campo en una teoría sistematizada"[Kuratowski, 1980, p. 169]. Su curso en la Universidad de Leópolis de 1909 es uno de los primeros sobre teoría de conjuntos[72]. Su libro *Zarys teorii mnogości*,[73] de 1912 es una síntesis de esta teoría, una de la primeras publicaciones al respecto, el cual elaboró basándose en los cursos dictados.

Sierpiński no se dedicaba sólo a su trabajo creativo en la investigación. Para satisfacer las necesidades de sus estudiantes, publicaba manuales para los universitarios de un alto nivel científico, tanto así que todos estos recibieron el Premio de la Academia de Ciencias y Letras de Cracovia.

Al inicio de la Guerra mundial en 1914, Sierpiński, y su familia fueron internados por las autoridades zaristas en la ciudad de Vyatka, ya que tenía pasaporte austriaco. Los profesores Dimitri Egorov y Nicolai Luzin gestionaron que se permitiese su traslado a Moscú, ofreciéndole unas condiciones favorables para continuar con su trabajo científico. Es de este periodo que datan importantes trabajos escritos en común entre Sierpiński y Luzin (cuatro artículos según [Grattan-Guinness, 2000]); éstos marcaron el inicio de una cooperación que duró varios años y que se centró en la teoría de conjuntos analíticos, que llevaría posteriormente a la teoría descriptiva de conjuntos, y la teoría de funciones reales. En esa época, también dedica parte de su

[72]Se debe aclarar que en la biografía de Sierpiński que se presenta en [Hartman et al., 1974] se plantea que es quizás el primer curso que se dictó en esta materia. Pero Kuratowski no conocía que en Gotinga en 1900, Zermelo ya había impartido un curso de teoría de conjuntos, y en Leipzig en 1901 Haussdorff también. Aunque es válido presumir que el contenido del curso de Sierpiński debía ser distinto, especialmente del dictado por Zermelo debido a las diferentes visiones que tenían de la teoría de conjuntos.

[73]*Estructura de la teoría de conjuntos.*

actividad a desarrollar sus investigaciones en topología general, originadas en sus trabajos de 1912-1915 sobre las llamadas curvas de Peano y la caracterización topológica de ciertos conjuntos de puntos.

En febrero de 1918 Sierpiński vuelve a Leópolis, en otoño del mismo año obtuvo una plaza en la Universidad de Varsovia, donde se reencontró con Mazurkiewicz y Janiszewski, profesores de esta universidad desde que se reestableció como una universidad polaca en 1915. Este periodo es el más decisivo para la actividad de Sierpiński y de la historia de las matemáticas modernas de Polonia, ya que se lleva a cabo el programa que prevé la creación de una escuela matemática en Varsovia y crean *Fundamenta Mathematicae*, la primera revista revista especializada en una temática de las matemáticas. Janiszewski figuró como editor del primer volumen, murió prematuramente en 1920 antes que éste se publicara, así Sierpiński heredó sus responsabilidades, ejerciéndolas durante varios años.

A final de los años 20, la escuela de Varsovia de matemáticas está en la vanguardia de la matemática mundial, y por su extraordinaria actividad, Sierpiński es su principal representante. Célebres universidades le otorgan el título de doctor honoris causa, además, numerosas academias de ciencias lo nombran miembro extranjero.

Los años entre guerras están marcados por la gran producción de Sierpiński, lo que se expresa en el número de publicaciones, por la edición de su obra principal *Hypothèse du continu* (publicada en la serie Monografías Matemáticas (*Monografie Matematyczne*) de la que Sierpiński fue uno de sus fundadores), y por la formación de una gran cantidad de sus discípulos. En la misma época Sierpiński figuraba en abundantes cargos administrativos; es presidente de la Sociedad de Ciencias de Varsovia desde 1931 (durante veinte años), miembro de la oficina de la Academia Polaca de Ciencias y Letras, presidente de la Sociedad polaca de matemáticas (1928-1929) y de la Asociación de profesores de escuelas secundarias y superiores.

Durante la Segunda Guerra Mundial Sierpiński no abandonó su trabajo científico, sigió escribiendo artículos que los enviaba a revistas italianas, y en cada uno de éstos finalizaba con las siguientes palabras: "Las pruebas de estos teoremas aparecerán en la publicación de *Fundamenta Mathematicae* ", también preparó nuevas ediciones de sus obras ya impresas. Su labor de profesor no se frenó, ya que hizo parte activa de la universidad clandestina dictando cursos ante un número reducido de oyentes.

Después de la insurrección de Varsovia, en 1944, Sierpiński fue deportado por los alemanes a la región de Cracovia. Después de la liberación de Cracovia impartió cursos en la Universidad Jagelona de Cracovia, después, en otoño de 1945, retomó sus deberes y su lugar en la Universidad de Varsovia. Ahí, publicó, entre otros, una monografía sintética y enciclopédica sobre la teoría de conjuntos, que se titula *Cardinal and Ordinal Numbers* (1958). En 1964 publicó otra monografía igualmente importante: *Elementary Theory of Numbers*, con lo que retornó a trabajar en los intereses con los que inició su carrera científica, de hecho en sus últimos veinte años predominan nuevamente sus trabajos sobre teoría de números, tanto así que fue editor de la revista *Acta Arithmetica*, especializada en este campo de las matemáticas.

Las labores administrativas lo coparon, continuó ejerciendo las labores de presidente de la Sociedad de Ciencias de Varsovia, y con ese cargo toma parte activa en la ciencia polaca devastada por la ocupación. Participó en las labores del primer congreso de Ciencia polaca, y en las de la Comisión encargada de la organización de la Academia de Ciencias, herencia y continuación de la Academia de Ciencia y Letras (localizada en Cracovia) y de otras sociedades surgidas antes de la guerra. Cuando la nueva Academia Polaca de Ciencias fue creada, asumió la vicepresidencia, ejerciendo esta función durante el periodo 1952-1956, como miembro del presidium lo hizo hasta el final de su vida.

El contribuyó a la creación de un organismo nuevo que toma una gran importancia en las matemáticas de Polonia, El instituto Matemático, del cual fue presidente del Consejo científico, y a partir de 1968 fue nombrado presidente honorario, ejercndoie esta función hasta su muerte.

En 1949 recibió el Premio científico del Estado de primer grado, en 1957 fue condecorado con la gran Cruz de la orden Polonia Restituta, antes de esa fecha recibió la *Ordre de l'étendard du Travail* de primera clase. La capital le confirió el Premio de la ciudad de Varsovia, y la sociedad polaca de matemáticas el título de miembro de honor.

El título de doctor honoris causa le fue adjudicado en las siguientes universidades: de Amsterdam, de Bordeaux, de Lucknow, de Leópolis (antes de la guerra), de Moscú, de París, de Praga, de Sofía, de Tartu (antes de la guerra) y de Breslavia.

Fue nombrado miembro extranjero de las Academias de Ciencias siguientes: de Alemania, de Bulgaria, de Italia, de Lima, de Nápoles, de París, de Holanda, de Rumania, de Serbia, de Checoslovaquia, del Vaticano y de Zagreb.

Sobre las clase de Sierpiński y la forma de estimular a sus estudiantes Kuratowski escribió:

> Las clases de Sierpiński [...] y particularmente sus seminarios jugaron un gran papel al estimular la curiosidad científica de los jóvenes matemáticos. él tenía muy buenas relaciones con los principales matemáticos del mundo [...] y solía leer sus correspondencias en los seminarios, agregando sus propios comentarios para precisar los más importantes problemas. Era una forma de introducir *in medias res* los problemas actuales a los participantes, y por consiguiente un estímulo inusual para que investigaran ellos mismos o para hacerlo bajo la guía de su maestro[Duda, 1996, p. 489].

De *Genealogy Project* se sigue que Sierpiński dirigió nueve tesis doctorales, todas ellas entre 1913 y 1963. La lista de dirigidos es la siguiente:

Stefan Mazurkiewicz (1913), Universidad de Leópolis; Stanisław Ruziewicz (1913), Universidad de Leópolis; Jerzy Neyman (1924), Universidad de Varsovia; Wladysław Ślebodziński, (1928), Universidad Jagelona; Zygmunt Zalcwasser, (1928) Universidad de Varsovia; Edward Marczewski, (1932) Universidad de Varsovia; Antoni Wakulicz, (1949) Universidad de Varsovia; Andrzej Schinzel, (1960) Universidad de Varsovia; Andrzej Rotkiewicz, (1963) Academia Polaca de Ciencias.

El epitafio sobre la tumba de Sierpiński, y de acuerdo a su deseo expresado años antes de su muerte, dice: *EXPLORADOR DEL INFINITO*.

4.8. Conclusiones y comentarios

1. El proyecto de Janiszewski, de internacionalizar la matemática polaca, explicado en su artículo de 1918 se cristalizó a través de *Fundamenta Mathematicae*. Entre sus ideas originales cabe destacar la de publicar en los cuatro idiomas considerados internacionales (francés, alemán, inglés e italiano), es decir dejando de lado el polaco; pero especialmente revolucionario fue el hecho de centrar los esfuerzos en un campo especializado, lo cual al día de hoy no parece extraño (actualmente hay gran cantidad de revistas especializadas), pero cabe destacar que la apuesta de ese entonces era tal que no había antes revistas de matemáticas especializadas en uno de sus tópicos, y es modelo de revistas especializadas promovido por *FM* se acogió rápidamente en Polonia, fundándose en 1929 *Studia Mathematica* especializada en análisis funcional y en 1935 la revista *Acta Arithmetica* en Varsovia, especializada en teoría de números, siendo así Polonia, para ese momento, el único país con tres revistas especializadas y dedicadas a las matemáticas puras.

   Aunque se reconoce a Janiszewski como el personaje que propuso la idea de crear una revista como *Fundamenta Mathematicae*, y desde 1912 hay registros de su idea de la revista en carta a Fréchet, un año antes, como se ve en la página 98 Sierpiński en el congreso de 1911 ya identificaba que los esfuerzos de los matemáticos polacos no tenían recepción entre los propios colegas nacionales, es así que en este último empezó a surgir la idea de incentivar una sola área de estudio entre las nuevas generaciones.

2. Entre los factores que influyeron en la creación e internacionalización de la matemática polaca está el desarrollo del trabajo en grupo vinculado a intereses científicos comunes. En contraste a lo que ocurría en Cracovia, donde Zaremba y Żorawski trabajaban de forma independiente y no hubo una escuela matemática en tal universidad. Por ejemplo, en *FM*, un gran número de estudios en la revista fueron obra de dos o incluso tres autores no necesariamente de los mismos centros matemáticos. Por ejemplo, en el sexto volumen, "Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes", escrito por Banach

de Leópolis y Tarski de Varsovia; y en el vigésimo quinto volumen, el artículo "Note on the differentability of multiple integrals"fue escrito por B. Jessen de Copenhague, y J. Marcinkiewicz y A. Zygmund de Vilna.

Debe resaltarse que aunque este capítulo se centra en la escuela matemática de Varsovia, este mismo modelo se extendió a Leópolis, donde se encuentra más documentos, en especial los relatos concernientes al café Roma y al café escocés, sobre la colaboración mutua entre los matemáticos, donde había una buena disposición para encontrar terrenos comunes para los intereses científicos, en ese sentido es pertinente la reflexión en [Arboleda, 1982]:

> Había una conciencia del trabajo colectivo; la comprensión de que la discusión de cuestiones matemáticas de un dominio particular, la formulación de problemas y el intercambio de soluciones en este campo, estimulan grandemente el esfuerzo de creación individual. Mucho más que el trabajo solitario y al margen del resto de especialistas que, en última instancia, no es más que una ilusión ya que el esfuerzo individual que produce el progreso de la matemática está de alguna manera asociado a un centro de influencia.

3. El florecer de la escuela de Varsovia se sirvió de soportes gubernamentales. En la reseña sobre el volumen 25 de *FM*, en [Tamarkin, 1936, p. 300] se hace la siguiente reflexión:

> Este espléndido éxito es debido no sólo al interés y estima en el que el mundo matemático tiene a *Fundamenta*, no sólo a la autorizada dirección de sus editores y su secretario, K. Kuratowski, sino también al generoso soporte dado por el gobierno. Esperamos que este soporte continúe en el futuro, y que *Fundamenta*, en los años por venir, mantenga su lugar de honor entre los periódicos matemáticos del mundo.

Cabe recordar que Łukasiewicz ocupó altos cargos administrativos en la Universidad de Varsovia siendo rector en dos ocasiones, y que en 1919 fue ministro de educación, también es relevante traer a colación que al menos el primer número de *FM*, fue subsidiado por el ministerio de educación.[74] En ese sentido sería interesante la búsqueda de documentación sobre mas gestiones de Łukasiewicz en beneficio de la revista, con la cual se pueda profundizar esta reflexión.

4. Una de los propósitos del programa de Janiszewski fue la creación en Polonia de una "forja" matemática que atraería a los matemáticos de todo el mundo. Esta tarea se realizó en gran parte debido a la creación de las revistas *Fundamenta* y luego de *Studia*. Cada año aumentaba el número de trabajos presentados a estas revistas por parte de matemáticos extranjeros, lo que permitió que estas se conviertieran en instrumentos para la cooperación internacional. De esta cooperación surgieron contactos personales, lo que pótenció que matemáticos extranjeros llegaran a Polonia, y que matemáticos polacos fueran al extranjero.

   Entre los matemáticos que visitaron Polonia en las décadas de 1920 y de 1930 están: E. Borel, E. Cartan, A. Denjoy, H. Lebesgue y P. Montel de Francia; E. Zermelo de Alemania; N. N. Luzin, P.S. Alexandroff y P. Urysohn de Moscú; J. von Neumann, S. Lefschetz, MH Stone y G. Whyburn de los Estados Unidos; K. Menger desde Viena; E. Čech de Praga; H. Hopf de Zurich; D . Pompeiu de Bucarest; F. Enrique de Italia; J. Schouten de Holanda; Th. Skolem de Noruega y muchos otros.

   Las relaciones más estrechas de los matemáticos polacos se dieron inicialmente con los matemáticos soviéticos, de hecho P.S. Alexandroff, uno de los más destacados matemáticos soviéticos, especialista en topología y miembro extranjero de la Academia de Ciencias Polaca, escribió: "Sería difícil nombrar a dos escuelas científicas más estrechamente conectadas en su trabajo creativo que las escuelas matemática polaca y la soviética [Kuratowski, 1980, p. 61]"

   Para sustentar lo anterior, Alexandroff menciona ejemplos de cooperación como la de Sierpiński con Luzin y sus estudiantes, que data

[74] Tomado de [Arboleda, 1982, p. 224], citando una nota necrológica que Sierpiński publicó en la prensa el 7 de enero de 1920, a los cuatro días de la muerte de Janiszewski.

de 1915, época en la que el polaco se encontraba en Rusia. Sobre el periodo posterior a la guerra, Alexandroff escribe: “En la historia de las matemáticas soviéticas “ Fundamenta Mathematicae” ha jugado un papel inmenso y único: los años en que la referida revista fue fundada y en el que se publicaron sus primeros volúmenes fueron los años en los que la nueva escuela (soviética) de matemáticas se estaba formando en Moscú bajo N. N. Luzin.

Esa escuela, al tener como fortalezas la teoría de conjuntos analíticos y la teoría de funciones, era natural que acogieran con entusiasmo a la primera revista del mundo dedicada especialmente a unas temáticas en las que lso rusos se especializaban. Unido a ello, cabe decir que el aislamiento de los soviéticos a prinicipios de los años veinte, perjudicaba también las relaciones de los matemáticos con los académicos extranjeros, la únicas revistas extranjeras que recibía eran *Fundamenta Mathematicae* y el *Boletín de la Academia Polaca de Ciencias*, que llegaba con regularidad Al respecto decía Alexandroff:

> Se pueden imaginar la alegría que era para nosotros los matematicos soviéticos recibir cada nuevo volumen de “Fundamenta”. En aquellos años, nuestros contactos con los matemáticos polacos se amplió, para incluir los científicos de la generación joven. A pesar de las conexiones postales difíciles e irregulares, la correspondencia no sólo eran con Luzin y Sierpiński, sino también con Urysohn y Kuratowski, Bari y Rajchman, y otros[Kuratowski, 1980, p. 63]

Durante el periodo Entreguerras, la matemática polaca logró un grado de reconocimiento internacional nunca antes obtenido, sin embargo, una vez iniciada la Segunda Guerra, el proceso de internacionalización siguió un rumbo distinto con los matemáticos que llegaron a Estados Unidos, unos producto de la guerra, con anterioridad a ésta y debido a la escasez de plazas para matemáticos en Polonia. Entre estos están Ulam, Kac, Zygmund y Tarski. Cabe decir que antes de la Segunda Guerra Mundial, en Polonia solo había 23 plazas para matemáticos y 27 posiciones auxiliares, así que varios matemáticos de renombre, por ejemplo Orlicz o Nikodym trabajaban en escuelas de secundaria. De los polacos que se instauraron en Estados Unidos Tarski fue el más influyente para la internacionalización de la matemática polaca, quizás pueda verse como algo negativo el hecho de que no hay podido instalarse definitivamente en Polonia, sin embargo desde Estados Unidos sirvió como referente de la solidez que había alcanzado el proceso llevado a cabo por sus antecesores de ubicar a Polonia en el ámbito matemático internacional, ya que sobre el se fundó la escuela de lógica en Berkeley.

5. El nacionalismo jugó un papel importante en el desarrollo de la cultura polaca, y en particular del crecimiento de la creatividad matemática polaca después de la independencia en 1918. A pesar de que cada una de las tres partes del país era regida en términos culturales y académicos bajo sus propias condiciones y distante del resto, la unión de ideales nacionalistas fue un vínculo importante. Así el nacionalismo propio de los polacos explica por qué las severas de Rusia de no dejar florecer lo polaco fallaron, por qué las medidas alemanas de reprimir el uso de la lengua polaca y, por último, el porque de la expulsión de miles de polacos de sus tierras fue en vano. Con ese panorama, fue natural que las universidades de Cracovia y de Leópolis, ubicadas en Galicia, el sector austriaco, que disfrutó de una medida de libertad académica, se convirtieron en los más importantes centros de la cultura nacional, donde lo mejor de la juventud polaca se congregó a estudiar.

En Sierpiński, por ejemplo se detecta el rasgo nacionalista, incitado por los abusos a los que fue sometido el pueblo polaco por parte de las potencias que lo invadían. Por ejemplo, en la carta de Sierpiński a Fréchet referenciada anteriormente (fechada en Varsovia el 31 de agosto de 1919) presenta el balance de la situación de la enseñanza superior y de las publicaciones matemáticas en Polonia, en la cual aprovecha para enfatizar en el daño que las invasiones han causado a las instituciones universitarias polacas:

> Usted pregunta sobre el número de universidades polacas.[...] Las otras dos Universidades polacas que existían en el Siglo XVIII, fueron clausuradas por los bárbaros rusos y prusianos en el siglo XIX. Actualmente contamos con 6 universidades polacas: en Cracovia, Leópolis, Varsovia, Lublin, Poznan y Vilna.

Después del reconocimiento como nación polaca, en 1918 ese sentimiento nacionalista de que había que defender lo que se había ganado seguía presente, eso se evidencia en la carta de Sierpiński del 30 de julio de 1920, en la que comenta sobre la situación polaca en relación a la guerra polaco-soviética:[75]

> Nos vemos actualmente forzados a combatir a los bárbaros para salvar la civilización europea. El enemigo quiere invadir nuestra patria y se encuentra ya sobre nuestros terrenos. Todos los hombres se alistan al campo [de batalla], entre ellos los estudiantes y los profesores de todos los colegios. Esta es la razón por la cual de ninguna manera podremos participar en el Congreso [Internacional] de Matemáticas que tendrá lugar en Strasbourg [Arboleda, 1982, p. 232].

6. Así como fue importante para la matemática polaca el establecimiento internacional de las revistas *Fundamenta Mathematicae* y *Studia Mathematica*, también lo fue el de *Monografie Mathematyczne* (*Monografías matemáticas*)[76] en 1931, lo cual marcó un avance en el desarrollo de las publicaciones matemáticas en Polonia. En el inicio de las escuelas de Varsovia y de Leópolis dominaba la publicación de artículos y resultados, especialmente en *Fundamenta* y en *Studia*. Con *Monografías matemáticas* se oficializó la síntesis de los resultados y de los campos de las matemáticas en los cuales los polacos habían hecho una apreciable contribución. Los primeros volúmenes de *Monografías* se centraron en temas de especialización de las revistas nombradas (excepto lógica), los títulos y autores fueron los siguientes:

   Volumen I: *Teoría de operaciones lineales* de Banach (1932), volumen II: *Teoría de la integral* de Saks (1933), volumen III: *Topología* de Kuratowski (1933), volumen IV: *La hipótesis del continuo* de Sierpiński (1934), volumen V: *Teoría de series trigonométricas* de Zygmund (1935) y volumen VI: *Teoría de series ortogonales* de Steinhaus y Kaczmarz (1936).

[75] La guerra polaco-soviética fue un conflicto armado que enfrentó a la Rusia Soviética y la Segunda República Polaca desde febrero de 1919 hasta marzo de 1921.

[76] Los fundadores de esta serie fueron Banach, Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz, Sierpinski y Steinhaus.

7. No es justo ni completo hablar de Polonia en el periodo Entreguerras, sin hacer alusión a la tragedia de esta nación durante la Segunda Guerra. En cuanto a la situación de los matemáticos durante esta guerra es muy diciente lo que narra Antonio Durán en [Durán, 2009] (alrededor de la página 297), sobre la alimentación de piojos con la sangre de Banach y otros de Leópolis, y lo cual se nombra en el apartado 4.4.1, también el éxodo de matemáticos que emigraron. Sin embargo éntre lo mas impactante están los datos de matemáticos polacos muertos durante los años de guerra, el 20 % de los miembros de la Sociedad Polaca de Matemáticas murieron durante la Segunda Guerra Mundial.[77] Entre los reconocimientos a estas víctimas, está la que *FM* publicó en el tomo 33 en el año 1945, el primero publicado desde el final de la guerra, el cual es dedicado a los colaboradores de la revista fallecidos durante la guerra, y que se muestra en la figura 4.2.

[77] Tomado de http://www.euro-math-soc.eu/files/ptm_90_yrs_presentation.pdf

FUNDAMENTA
MATHEMATICAE

ZAŁOŻYCIELE
ZYGMUNT JANISZEWSKI, STEFAN MAZURKIEWICZ
i WACŁAW SIERPIŃSKI

REDAKTOROWIE
KAZIMIERZ KURATOWSKI i WACŁAW SIERPIŃSKI

SEKRETARZ REDAKCJI
KAROL BORSUK

TOM XXXIII

Z SUBWENCJI
WYDZIAŁU NAUKI
MINISTERSTWA OŚWIATY

WARSZAWA 1945
SEMINARIUM MATEMATYCZNE UNIWERSYTETU
UL. HOŻA 69

V

Ce volume est dédié
à la Mémoire des Collaborateurs des „Fundamenta Mathematicae",
Victimes de la guerre:

Herman Auerbach, Chargé du cours à l'Université de Lwów, péri entre les mains de la Gestapo à Lwów en été de 1942.

Antoni Hoborski, ancien Recteur de l'Académie des Mines de Cracovie, Professeur à l'Université de Cracovie, mort en 1940 au camp de concentration de Sachsenhausen, où il fut transporté en Novembre de 1939 avec les autres professeurs de l'Université de Cracovie, dont 18 sont également morts dans ce camp.

Stefan Kaczmarz, Chargé du cours à l'Université de Lwów, péri en automne de 1939.

Stefan Kempisty, Professeur à l'Université de Wilno, mort en prison en août de 1940.

Andrzej Kozniewski, Docteur de mathématique, mort à Zbaraż en décembre de 1939.

Adolf Lindenbaum, Chargé du cours à l'Université de Varsovie, tué par la Gestapo à Nowa Wilejka en été de 1941.

Antoni Łomnicki, Professeur et Protecteur de l'École Polytechnique de Lwów, fusillé par la Gestapo à Lwów en juillet de 1941 avec plus de 20 autres professeurs des Écoles Supérieures de Lwów.

Józef Pepis, Docteur de mathématique, Assistant à l'Université de de Lwów, tué par la Gestapo en août de 1941.

Aleksander Rajchman, Professeur à l'Université Libre de Varsovie, péri en 1940 au camp de concentration à Dachau.

Stanisław Ruziewicz, Recteur de l'Académie de Commerce de Lwów, ancien Professeur à l'Université de Lwów, fusillé par la Gestapo à Lwów en juillet de 1941.

Stanisław Saks, Chargé du cours à l'Université de Varsovie, tué par la Gestapo à Varsovie en novembre de 1942.

Juliusz P. Schauder, Chargé du cours à l'Université de Lwów, péri entre les mains de la Gestapo à Lwów en septembre de 1943.

Włodzimierz Stożek, Professeur de l'École Polytechnique de Lwów, fusillé par la Gestapo à Lwów en juillet de 1941.

Witold Wilkosz, Professeur à l'Université de Cracovie, mort à Cracovie en mars de 1941.

Józef Zalcwasser, Professeur à l'Université Libre de Varsovie, tué dans les chambres à gaz de Treblinka en janvier de 1943

— et plusieurs autres, dont on ignore encore le sort et la date de mort.

Figura 4.2: En memoria de los colaboradores de *FM* muertos durante la Segunda Guerra Mundial

Capítulo 5

Algunos artículos relevantes

En este capítulo se presenta, primero, la obra de Sierpiński desde una distribución en cinco temáticas, en la que se trata de caracterizar sus publicaciones en teoría de conjuntos hasta 1939. Posteriormente se presenta un resumen de las publicaciones de Sierpiński que se ha considerado de mayor relevancia; sin embargo se ha dado mayor relevancia al artículo titulado "L' axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l' analyse"al cual se dedica un apartado

La escogencia de estas publicaciones se hace bajo dos criterios: resultado importante e impacto en la comunidad. Cabe decir que no se tuvo en cuenta un aspecto recurrente en la obra de Sierpiński, como lo es la "mejora"de pruebas de resultados obtenidos. Por último se presenta un resumen de las principales publicaciones en la revista *FM* (excluyendo las de Sierpiński) hasta 1939, de los cuales se hace una reseña de contenido. El criterio de selección ha sido el mismo que se usó para las publicaciones de Sierpiński.

El capítulo es de orden matemático, y responde, a diferencia de los otros capítulos, a un tipo de historia interna. Es valioso recopilar información sobre el contenido puramente matemático de los trabajos de Sierpiński y de algunos otros autores porque permite profundizar más en los detalles de los problemas de la teoría de conjuntos que manejaban tanto Sierpiński como los otros autores de la revista *Fundamenta Mathematicae*.

5.1. La teoría de conjuntos y sus aplicaciones en Sierpiński

En [Duda, 1996, p. 495] se dice: "El impacto de *FM* se sintió más fuertemente en dos áreas de excelencia: la teoría general de conjuntos y la topología. También tuvo un considerable efecto en el crecimiento de la teoría de funciones de una variable real, la teoría de conjuntos analíticos y proyectivos, la teoría de la medida y categorías, los inicios del análisis funcional y de la lógica matemática". [Moore, 1982] plantea que el área de la teoría de conjuntos fué dominada por la inmensa figura de Sierpiński, cuyas contribuciones están entre las más básicas en cada una de las primeras cinco áreas de *FM* enumeradas anteriormente.

La primera publicación que hizo Sierpiński en teoría de conjuntos fue el artículo [Sierpiński, 1908], en el que demuestra la equipotencia entre los conjuntos de puntos de la semirrecta y de un cuadrante del plano. En ese momento Sierpiński no conocía el trabajo de Cantor, quien ya había mostrado ese hecho anteriormente.

Las cinco temáticas, de lo que se entendía como teoría de conjuntos hasta antes de la Segunda Guerra Mundial, en que trabajó Sierpiński son teoría general de conjuntos, conjuntos analíticos y proyectivos, medida y categorías, topología general y funciones de variable real.

En los siguientes apartados se hará una descripción de la relación de Sierpiński con cada una de estas temáticas, para ello la fuente principal es el tomo 2 de [Hartman et al., 1974].

5.1.1. Teoría general de conjuntos

Los trabajos de Sierpiński que actualmente[1] corresponden a la teoría general de conjuntos fueron dedicados a problemas clásicos: teoría de potencias, en particular de operaciones sobre números cardinales, problemas concernientes a conjuntos ordenados y operaciones sobre estos conjuntos. Cabe decir que entre las más de 700 publicaciones de Sierpiński, la teoría general de conjun-

[1]Aunque la cita anterior es de 1974 cabe para la actualidad, ya que no hay diferencia sustancial entre la concepción de teoría general de conjuntos actual y la de ese entonces.

tos no llega a ser el centro de más de cien.

Las operaciones sobre números cardinales fueron el objeto de los trabajos [Sierpiński, 1908] y [Sierpiński, 1922b], mientras que [Sierpiński y Tarski, 1930] y [Sierpiński, 1933d] se dedican a lo números fuertemente inaccesibles.

El trabajo más importante de Sierpiński en teoría general del orden es [Sierpiński, 1937b], mientras que las propiedades de los órdenes, estudiadas inicialmente por Hausdorff en 1908, las abordó en [Sierpiński, 1922c], [Sierpiński, 1932a] y [Sierpiński, 1937b].

Los conjuntos casi disjuntos son abordados a través de la teoría de potencias y familias de conjuntos, ésto se hace en los artículos [Sierpiński, 1928h] y [Sierpiński, 1929c], la principal propiedad es que para todo cardinal infinito α existe una familia de potencia $> \alpha$ compuesta de subconjuntos casi disjuntos de potencia α, lo cual fue abordado en [Sierpiński, 1937b] y [Sierpiński, 1938b]. Aplicaciones de ésto se encuentran en [Robinson, 1963] y en [Jensen y Solovay, 1970].

Sobre operaciones de conjuntos están [Sierpiński, 1927b] y [Sierpiński, 1928i], en las que construye σ - anillos de conjuntos a partir de estructuras de operaciones finitas, lo que ha sido generalizado y aplicado en [Pettis, 1971].

Dos temas generales y sobresalientes del interés de Sierpiński son el axioma de elección y la hipótesis del continuo. Sobre el axioma de elección y su papel en la demostración de teoremas, en 1918 escribe el que es quizás su más importante importante artículo [Sierpiński, 1918a] en el que presenta los más importantes resultados del análisis y de la teoría de conjuntos en los que interviene este axioma. En sus trabajos ulteriores no deja de insistir sobre los razonamientos donde usa este axioma y de la búsqueda de un modo de eliminarlo. También concede atención a la efectividad de sus construcciones y [Sierpiński, 1921a] es importante por la relación que muestra entre ejemplos efectivos y axioma de elección. El se declara neutro en cuanto a la veracidad o falsedad del axioma de elección, pero insiste en la importancia de distinguir las demostraciones que usan este axioma y las que no.

Sobre la hipótesis del continuo, al igual que con el axioma de elección se declara neutro, pero deduce consecuencias de teoremas que son equivalentes a ésta. Los resultados de sus investigaciones comienzan con [Sierpiński, 1924b] y continúan durante varios años por ejemplo en [Braun y Sierpiński, 1932], [Sierpiński, 1933c], [Sierpiński, 1935c], [Sierpiński, 1937a] y fueron recopilados en [Sierpiński, 1934a].

Sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos, Sierpiński aborda desde una posición neutral el axioma de Zermelo y la hipótesis del continuo, respeta por igual la actitud de los "idealistas" que atribuyen a los conjuntos una "existencia real" y la de los "realistas" que aceptan únicamente los conjuntos "bien definidos". No es partidario de la exposición axiomática de la teoría de conjuntos, de hecho en el prefacio de su libro de 1912 *Zarys teorii mnogości* (*Estructura de la teoría de conjuntos*), dice "el método axiomático no se presta para un curso elemental", esto mismo pensaba Hilbert, que no usaba el método en sus cursos normales.

5.1.2. Conjuntos analíticos y proyectivos

En [Luzin, 1917] se probó que los conjuntos analíticos son Lebesgue medibles. Posteriormente, en [Luzin y Sierpiński, 1918] se precisó que la operación A (también denominada como operación de Suslin) aplicada a los conjuntos Lebesgue medibles genera siempre conjuntos Lebesgue medibles.

Sierpiński apuesta por caracterizar de diversas formas los conjuntos analíticos y a mejorar los resultados de Luzin, por ejemplo en [Luzin, 1927, pp. 12-15] se probó que al extraer un conjunto numerable de puntos todo conjunto analítico puede ser visto como el conjunto de valores de una función $f(t)$ definida en $[0,1)$ continua por la derecha en cada punto de t mientras que en [Sierpiński, 1927d] se demuestra que no es necesario extraer el conjunto numerable, y además lo demuestra para continuidad por izquierda en el intervalo $(0,1]$.[2]

En [Sierpiński, 1925b] se muestra que el conjunto de distancias entre dos puntos cualequiera de un conjunto plano E del tipo G_δ no es siempre boreliano, pero que es analítico siempre que E lo sea.

[2]La continuidad unilateral puede reemplazarse, en el teorema de Sierpiński por la semicontinuidad [Sierpiński, 1927a].

En [Sierpiński, 1925a] mostró que si $f(x, y)$ es continua en el cuadrado unidad, el conjunto de valores de y que son soluciones únicas de la ecuación $f(x, y) = 0$ para un x fijo forma un conjunto analítico contenido en el intervalo $(0, 1)$.

En [Luzin y Sierpiński, 1923] se construye, con ayuda de la criba de Lebesgue, un conjunto analítico no boreliano. En el mismo artículo muestran que todo conjunto analítico, al igual que su complemento se pueden ver como la unión de $\aleph_1$ borelianos. Este importante teorema y algunos similares han sido investigados por varios autores posteriormente, por ejemplo en [Sélianovski, 1933] se ha usado para mostrar que todo conjunto analítico es Lebesgue medible. La demostración de este teorema se simplificó en [Sierpiński, 1933b].

En el espacio de los conjuntos cerrados contenidos en el cuadrado unidad en los que la intersección con toda recta $x = a$ es no numerable constituyen un conjunto de clase $CPCA$ pero no un PCA,[3] con la topología de Hausdorff [Sierpiński, 1935a]. Anteriormente en [Hurewicz, 1930] se había demostrado que el conjunto de cerrados no numerables es analítico y no boreliano.

Siguiendo la idea de criba expuesta en [Luzin, 1927], Sierpiński introduce la idea de criba generalizada, que la usa en [Mazurkiewicz y Sierpiński, 1924], [Sierpiński, 1931] y [Sierpiński, 1928b]. También generalizó la idea de conjunto universal plano en relación a una familia F de partes de $\mathbb{R}$, lo que sirvió para demostrar la existencia de conjuntos, pertenecientes a F, donde los complementos no están en F [Sierpiński, 1929b].

Relativo al problema de la *uniformización* de conjuntos planos,[4], propuesto por Luzin en 1930, que dice que todo conjunto F se puede uniformizar por un conjunto F_1, de la misma manera que todo conjunto cerrado se puede uniformizar por un G_δ, que es un resultado que una alumna de Sierpiński publicó en [Braun, 1937]. En [Sierpiński, 1930a] se demostró que hay conjuntos G_δ que no se pueden uniformizar por conjunto analíticos y que todo boreliano se puede uniformizar por un coanalítico. Este último resultadoa

[3]La equivalencia en notación moderna se puede ver en la página 216.

[4]Se trata de escoger en un conjunto de una cierta clase boreliana o proyectiva, un punto sobre cada paralela al eje OY , de forma que se obtenga un conjunto donde la clase F_1 no sea la mayor. La definición de *uniformizado por un conjunto* está mejor expuesta en [Moschovakis, 1974]

fué generalizado en [Kondô, 1939] a través de un famoso teorema: *todo conjunto coanalítico es uniformizable por un coanalítico.*

Los autores de la teoría de conjuntos analíticos y proyectivos se han acotado a trabajar en espacios euclidianos, sin embargo la teoría generalizada se encuentra expuesta sistemáticamente en el libro [Kuratowski, 1933].

Por último un resultado notable en [Sierpiński, 1929a]: dados dos conjuntos analíticos no numerables de dimensión 0, cada uno es imagen continua del otro.

Sierpiński expone la teoría de conjuntos analíticos y proyectivos en sus obras [Sierpiński, 1934a], [Sierpiński, 1956] y [Sierpiński, 1950],[5] donde este último es un fascículo del Mémorial des Sciences Mathématiques, dedicado únicamente a esta materia y del cual se da más detalle en el apartado 6.1.

5.1.3. Medida

En [Hartman et al., 1974] se propone el título "medida y categoría", del cual se hace buena referencia en este apartado, sin embargo queda bastante restringido en comparación a los demás. Aquí se modifica siendo menos restrictivo y cambiándolo a medida, argumentando que *categoría* es un concepto topológico y por ende apunta al apartado 5.1.4. Así, con esta ampliación se involucra más artículos en los que se busca mostrar que un determinado conjunto es no medible.

El origen de las investigaciones sobre el problema general de la medida está en el teorema de Vitali en el que se asegura que existe un conjunto no Lebesgue medible. Tal resultado, que no requiere la hipótesis del continuo, se traduce como la inexistencia en $\mathbb{R}$ de una medida universal[6] invariante respecto a las translaciones.

[5] También está el libro:
Funkcje przedstawialne analitycznie (*Funciones representables analíticamente*), Lwów, Warszawa-Kraków 1925, Zakład Narodowy im. Ossolińskich.

[6] Es decir, que sea exhaustiva, simplemente aditiva, invariante bajo isometrías y normada en el segmento unidad.

Para una medida universal μ simplemente aditiva en el conjunto de enteros positivos que sólo tome los valores 0 y 1, en [Sierpiński, 1938a] se demostró que ella da lugar a un conjunto no Lebesgue medible.

En [Sierpiński, 1924b] se "construye"con la ayuda de la hipótesis del continuo un subconjunto de $\mathbb{R}$ no numerable donde cada parte de medida 0 es numerable, siendo este un resultado análogo al de Luzin, que igualmente usó la hipótesis del continuo para probar que existe un conjunto donde toda parte de primera categoría es numerable. En [Marczewski, 1931] se encuentra aplicaciones de este resultado.

En [Sierpiński, 1934c] se pone en evidencia una dualidad entre medida y categoría, para ello se usa la hipótesis del continuo, el resultado dice que existe una función biunívoca φ que se aplica sobre el mismo intervalo de dominio tal que todo conjunto de medida 0 se transforma en un conjunto de primera categoría y que todo conjunto de primera categoría tiene como imagen un conjunto de medida 0. Para perfeccionar la relación entre medida cero y primera categoría, él intenta encontrar una aplicación que además transforme las clases de conjuntos de primera categoría en conjuntos de medida nula, intercambiando esos dos tipos de conjuntos. En [Erdös, 1943] se mejoró la aplicación de Sierpiński al manejar $\varphi^{-1} = \varphi$.

La analogía entre medida y categoría no se limita únicamente a los conjuntos de medida 0 y a los de primera categoría, por ejemplo las álgebras de conjuntos que admiten esas clases de conjuntos como ideales, como el álgebra de conjuntos Lebesgue medibles y la que contiene los conjuntos que satisfacen la condición de Baire en sentido amplio, tienen fuertes analogías, por ejemplo en [Marczewski, 1930] se muestra que esas dos clases son invariantes bajo la operación A.

La dualidad entre medida y categoría se debilita cuando se va más allá de los conjuntos de primera categoría y de los conjuntos de medida 0, por ejemplo cuando se extiende a los Lebesgue medibles o a los que satisfacen la condición de Baire. La razón es el siguiente resultado que se encuentra en [Marczewski, 1934]: todo espacio métrico separable para el que exista una medida boreliana que se anula para los conjuntos unitarios, puede descomponerse en dos conjuntos donde uno es de primera categoría y el otro es de medida nula. Así, Si una medida se anula sobre un conjunto de primera categoría, esta medida tendrán que anularse para todo el espacio.

Sobre la medibilidad de cardinales, la no medibilidad del cardinal del continuo puede deducirse de dos resultados: el primero, demostrado en [Sierpiński, 1928f], dice que un conjunto de Luzin[7] es un conjunto que satisface la condición C.[8] El segundo resultado, dado en [Marczewski, 1934], plantea que no existe ninguna medida universal sobre un conjunto que satisfaga esta condición.

La no medibilidad de $\aleph_1$ no exige ninguna hipótesis suplementaria de la teoría de conjuntos, además en [Sierpiński y Szpilrajn, 1936] se demuestra que un conjunto que contiene un único punto de cada término de una sucesión transfinita del tipo ω_1 de borelianos, adecuadamente construida, no tiene medida universal.

Entre los resultados negativos que Sierpínski obtuvo sobre la condición de Baire, se destaca el obtenido en [Sierpiński, 1934e], donde se demuestra que el conjunto cilíndrico en el plano no necesariamente satisface la condición de Baire en sentido restringido Ba^*,[9] a pesar que la base si satisfaga esta condición.

En [Sierpiński, 1934b] se estudia la invarianza de la propiedad Ba^* de un conjunto, en relación a los homeomorfismos generalizados, donde se muestra que una transformación biunívoca y continua en la que la recíproca es una función B medible de clase $\beta < \omega_1$ cualquiera conserva la propiedad Ba^*.

5.1.4. Topología General

No existe una transformación biunívoca y continua que transforme un segmento en un cuadrado, pero renunciando a la biunivicidad, en los artículos

[7] Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ no numerable es un conjunto de Luzin (o satisface la condicón L) si todo conjunto perfecto no denso contiene a lo más un conjunto numerable de punto de E.

[8] $E \subset \mathbb{R}$ satisface la condición C si está contenido en la unión de una sucesión $\{\delta_n\}_n$ de intervalos en los que la longitud de cada δ_n es menor o igual a la de un $a_n > 0$ previamente dado.

[9] Ba^* corresponde a la condición de Baire en sentido restringido.

[Sierpiński, 1912d] y [Sierpiński, 1912b], se demuestró que una función continua que transforme un segmento en un cuadrado, se deja definir como el límite de líneas discontinuas a saltos.

Sobre lo que Kuratowski llama continuos de Peano, en el artículo [Sierpiński, 1920a] se muestra una caracterización, probando que el continuo dado se puede representar como la unión de un número finito de continuos de diámetro tan pequeño como se quiera. Esa publicación y la de Mazurkiewicz[10] en 1920 en el primer volumen de *FM* contribuyeron al éxito de esta revista. La condición formulada por Sierpiński la estudió posteriormente R.L. Moore, Whyburn, Kuratowski y otros, y se discutió y se aplicó en obras como [Hausdorff, 1927, pp. 205-207] y [Menger, 1932, p.40]

Sierpiński caracterizó intrínsicamente otros conjuntos: en [Sierpiński, 1917] los arcos simples y en [Kuratowski y Sierpiński, 1921], las diferencias de conjuntos cerrados a través de su compacidad local.

En [Sierpiński, 1918b] se establece el siguiente resultado: ningún continuo (es decir un conjunto compacto y conexo) se deja descomponer en una infinidad numerable de conjuntos cerrados disjuntos, posteriormente, en [Kuratowski, 1961] se demostró que para ese teorema, la hipótesis de la compacidad no se puede reemplazar por la compacidad local. A través de este teorema de Sierpiński, en [Lelek, 1959] se asegura que nace la noción de $\sigma-$conexidad, la cual se estudió en trabajos posteriores como en [Jameson, 1972].

En [Sierpiński, 1915] construye un triángulo donde todo punto es un punto de ramificación de orden 3 excepto en una cantidad numerable de puntos de orden 4 y dos puntos de orden 2.

En [Sierpiński, 1916b] se presentó la llamada la alfombra de Sierpiński que tiene bastantes aplicaciones y una extendida literatura, que es una curva plana universal que contiene imágenes homeomorfas de todas las curvas planas. La curva universal plana de Sierpiński ha tenido también aplicaciones en diversas investigaciones topológicas como en [Borsuk, 1955] y [Knaster y Lelek, 1958].

[10] "Sur les lignes de Jordan." que se presenta en la página 177.

Algunos resultados concernientes a la teoría de la dimensión se ven desde 1921 como en [Sierpiński, 1921b], incluso antes que la noción de dimensión fuese definida. También, en investigaciones posteriores sobre conjuntos PCA, muestra implícitamente que todo cerrado de un espacio (métrico separable) de dimensión nula es una retracción [Sierpiński, 1928e].

En [Mazurkiewicz y Sierpiński, 1920] los autores describen la estructura topológica de los conjuntos compactos numerables y los clasifican, lo cual ha sido aplicado en [Semadeni, 1959] y [Semadeni, 1971, p.155].

En general, las nociones más importantes de topología conjuntista atrajeron la atención de Sierpiński y lo llevaron a obtener resultados nuevos e importantes. Entre estas nociones están la de espacio completo en [Sierpiński, 1928c] y [Sierpiński, 1928g]; de conjunto ralo[11] en [Sierpiński, 1922d], conjunto frontera y conjunto con la propiedad de Baire.

Dejando de lado la construcción de curvas importantes, se debe resaltar los ejemplos propuestos como los de conjuntos puntiformes conexos y aquellos de una descomposición del plano en dos conjuntos puntiformes en [Sierpiński, 1920b] y [Kuratowski y Sierpiński, 1922].

En [Marczewski, 1935] se establece la siguiente condición: un conjunto E satisface s si todo conjunto perfecto contiene un perfecto P tal que se tiene $P \subset E$ ó $P \cup E = \emptyset$. Esta condición se introdujo luego de que en [Sierpiński, 1935b] se estudiase la siguiente propiedad: todo conjunto perfecto contiene un perfecto P tal que $f|P$[12] es continua.

Marczewski en [Hartman et al., 1974, p. 20] dice que la mayor parte de los trabajos de Sierpiński que pertenecen a topología general han sido concebidos entre 1915 y 1924, y que luego se centró en la teoría descriptiva de conjuntos, donde la topología conjuntista tuvo un amplio campo de investigación que fue explotado por Sierpiński.

[11] A es ralo cuando $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.

[12] Quiere decir que función f se restringe al dominio P.

5.1.5. Funciones de variable real

Según Hartman, el papel de Sierpiński en teoría de funciones no es primordial y sus trabajos en ésta no son tan potentes como los que el aportó en topología o en teoría de números.

Para el periodo antes de la guerra, se puede distinguir tres ciclos y/o temáticas que ocuparon a la teoría de funciones: las derivadas de Dini, la clasificación de Baire y la condición de Baire.

En [Sierpiński, 1912c], a través del estudio del número de derivadas de una función no diferenciable, se llegó a un notable resultado: el conjunto de puntos en el que una función continua admite una derivada de cada lado y donde ellas son distintas es a lo más numerable. La prueba de este resultado fué la primera en un ciclo de demostraciones que se apoyaron en examinar la cotangente y que llevó a teoremas famosos de Denjoy, G.C. Young y Saks.

En [Sierpiński, 1914] aparace otro teorema sobre las derivadas de Dini: si una función continua f admite un conjunto denso de máximos y mínimos, sus derivadas de Dini se anulan cada una en un conjunto denso. Posteriormente, en [Garg, 1962] se probó que este conjunto tiene la potencia del continuo.

El artículo [Sierpiński, 1912a] fue el primero en demostrar que el conjunto de máximos de una función cualquiera es a lo más numerable. En [Sierpiński, 1922a] donde aborda las derivadas de Dini y la clasificación de Baire, publica el siguiente teorema: las derivadas de Dini de una función de clase α son de clase $\leq \alpha + 2$; así que si la función es no medible, sus derivadas de Dini pueden ser no medibles. Esto último fué un problema que abordó Banach en los años siguientes.

En [Sierpiński, 1932b] hizo un intento de generalizar la clasificación de Baire a un dominio abtracto, a partir de un espacio lineal X de funciones reales definidas en un conjunto cualquiera, a condición que X sea lo que el autor llama un "anillo".[13]

En [Sierpiński, 1924c] se define un método que permite construir borelianos de todas las clases infinitas sin usar el método de la diagonal.

[13]Es decir que si f y $g \in X$ entonces $\min(f, g)$ y $\max(f, g) \in X$.

En [Sierpiński, 1927c] Presenta una construcción puramente efectiva de una función de la cuarta clase de Baire e indica que su método se puede extender a todas las clases de Baire finitas.

En [Sierpiński, 1921c] da respuesta negativa a la pregunta de si una función de la primera clase puede representarse como una serie absolutamente convergente de funciones continuas.

Así mismo, se muestra en [Sierpiński, 1933a] que los límites puntuales de composiciones iteradas $f_1, f_2 \circ f_1, f_3 \circ f_2 \circ f_1, ...$ no abarcan la totalidad de la primera clase.

En [Sierpiński, 1936a] demuestra, usando la hipótesis del continuo, que exite una función f de la primera clase y un conjunto no numerable E tales que f no es continua ni semicontinua superiormente sobre ninguna parte no numerable de E.

Sobre la propiedad de Baire, en [Sierpiński, 1934d] se muestra que a pesar de la analogía entre los conjuntos Lebesgue medibles y los (Ba)[14] las demostraciones de teoremas son habitualmente mas complejos usando la propiedad de Baire que usando la medibilidad, y demuestra, usando la hipótesis del continuo, que si la función f satisface la propiedad de Baire en sentido restringido y g es continua, que la composición $f \circ g$ no satisface necesariamente la propiedad de Baire.

En [Sierpiński, 1936c] se demuestra que existe una función no medible tal que para casi todo x satisface la ecuación $f(x+y) = f(x-y)$ para todo y, excepto para un conjunto de potencia inferior a la del continuo.

En [Sierpiński, 1932d] se prueba que toda función $f(x, y)$ que es continua respecto a cada variable está completamente determinada por los valores que ella toma en un conjunto denso.

Varios resultados de la teoría de funciones aparecen en artículos dedicados a la topología o a la teoría de la medida, por ejemplo en [Sierpiński, 1928a]

[14] Ver el apartado 5.1.3 de medida.

demuestra el teorema que dice que el conjunto de valores de una función semicontinua puede ser un conjunto analítico cualquiera. Otro ejemplo es [Sierpiński, 1920c], en el que demuestra que existe un conjunto plano no medible tal que toda recta vertical u horizontal lo corta a lo más en un punto.

5.2. Una selección más aguda

No fue únicamente el número de artículos, sino la calidad de estos trabajos académicos lo que permitió el reconocimiento internacional de *FM*. Entre las publicaciones de esta revista hay destacados tratados que ayudaron de manera significativa en el desarrollo de las matemáticas y se han ganado un lugar de prestigio en la literatura matemática mundial.

En este aparatado se presenta algunos de los artículos más relevantes de Sierpiński desde 1918 hasta 1939 y luego de diversos autores que publicaron en *FM* hasta antes de la Primera Guerra Mundial. Los artículos que se han escogido ha sido teniendo en cuenta aspectos como el surgimiento de un concepto nuevo, o que se proponen las bases para una teoría o el "impulso" que este artículo haya generado para trabajos posteriores. No se tiene en cuenta como un factor para determinar la importancia, la elaboración de pruebas novedosas de resultados previamente establecidos (esto se dice porque gran cantidad de trabajos de Sierpiński se dedica a ello). Las referencias usadas para escoger estos artículos son [Duda, 1996], el apartado titulado: Travaux de W. Sierpiński sur la théorie de ensembles et ses applications, en [Hartman et al., 1974, pp. 11-36] (Tomo II), [Kanamori, 1995] y [Kuzawa, 1968, pp. 110-11]. Cabe decir que varios otros artículos se pudieron escoger, pero es imposible abarcar una cantidad representativa debido a la cantidad de material.

5.2.1. L' axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l' Analyse

Este artículo fue publicado por Sierpiński en *Biuletyn Polskiej Akademii Umiejetności, Kraków*, pp. 97-152. (1918). Se puede ver en el Tomo II de

[Hartman et al., 1974] pp. 208-255.

En 1904, Zermelo enuncia un axioma que no genera contradicción con los axiomas previamente aceptados. Este dice:

Para todo conjunto M en el que sus elementos son conjuntos P, no vacíos y disjuntos dos a dos, existe al menos un conjunto N que contiene uno y sólo un elemento de cada conjunto P que pertenece a M

Esta larga memoria de Sierpiński está dividida en introducción y nueve apartados:

1. El axioma de Zermelo en las demostraciones de la equivalencia de diferentes definiciones de conjunto infinito.

   En este apartado, primero se demuestra la equivalencia entre tres definiciones de conjunto infinito, para ello no se usa el axioma de Zermelo. Luego se recuerda algunas definiciones de conjunto finito y demuestra su equivalencia. Luego aborda las definiciones de conjunto numerable y plantea que el siguiente teorema no se puede demostrar sin el uso de axioma de Zermelo:

   Si de un conjunto no numerable E se extrae un subconjunto numerable, el conjunto restante tendrá la misma potencia que E.

2. El axioma de Zermelo en la teoría de números cardinales.

   De los varios resultados sobre número cardinales enunciados en este apartado, el siguiente es erróneo. Sierpiński dice que el axioma de Zermelo se necesita para ser demostrado:

   Si M es un conjunto en el cual sus elementos son conjuntos no vacíos, el conjunto unión S de todos los subconjuntos P que conforman a M tiene potencia mayor o igual a la de M.

   Un contraejemplo es el siguiente: sea $M = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$, entonces $CarM = 3$ y $CarS = 2$. La proposición se puede corregir exigiendo que los elementos sean conjuntos disjuntos.

3. El axioma de Zermelo en la teoría de conjuntos ordenados y de números transfinitos.

   Se plantea que no se sabe demostrar sin la ayuda del axioma de Zermelo lo siguiente: *Para toda sucesión infinita de números transfinitos de la segunda clase, existe un número de la misma clase que es más grande que todos los términos de la sucesión considerada.*

   Y plantea luego un resultado equivalente: *para toda infinidad numerable de números de la segunda clase existe un número mayor de la misma clase.*

   También muestra teoremas en los cuales no interviene el axioma de Zermelo, tal como que $\aleph_1 > \aleph_0$ y que $\aleph_\beta > \aleph_\alpha$ para $\beta > \alpha$.

   Finaliza este apartado diciendo que el axioma de Zermelo interviene en la demostración de la mayoría de teoremas de la teoría que se ocupa especialmente de conjuntos ordenados (investigaciones de Haussdorff).

4. El axioma de Zermelo en la teoría de conjuntos de puntos. (Topología)

   En este apartado se plantea que normalmente se usa las nociones de *punto límite* y de *punto de acumulación* como equivalentes.[15] sin embargo esta equivalencia no puede demostrarse sin el axioma de Zermelo. Se puede demostrar sin el axioma de Zermelo que todo punto límite de P es punto de acumulación de P, pero la recíproca necesita de este axioma. Plantea que la definición de conjunto cerrado depende de cuál

[15] Cabe decir que Sierpiński rconoce que hay autores que no diferencian entre estas dos nociones. Sin embargo Sierpiński las diferencia de la siguiente forma:

Se dice que g es *punto de acumulación* del conjunto de puntos P si para todo $\epsilon > 0$ existe un punto distinto de g que pertenece a P y cuya distancia a g sea menor que ϵ.

Se dice que g es un *punto límite* del conjuntos de puntos P, si existe una sucesión infinita $p_1, p_2, p_3, ...$ de elementos de P (distintos de g), que converge a g.

de las nociones se use.[16] Algo similar sucede con las definiciones de conjunto derivado, de conjunto denso, de conjunto perfecto, de conjunto aislado.

Por ejemplo, el teorema de recubrimiento de Heine-Borel[17] se puede demostrar sin usar el axioma de Zermelo, asumiendo que un conjunto es cerrado si contiene sus puntos de acumulación; pero si se asume los conjuntos cerrados como aquellos que contienen a sus puntos límites, se necesitaría el axioma de Zermelo para demostrar ese resultado.

5. El axioma de Zermelo en la teoría de la medida.

Sin el axioma de Zermelo no se puede demostrar el teorema fundamental de la teoría de la medida de Lebesgue, que plantea que la unión numerable de conjuntos medibles es un conjunto medible.

Sin el axioma de Zermelo no se sabe mostrar que si la unión numerable de conjuntos medibles (disjuntos dos a dos) es medible, su medida será igual a la suma de la medida de los conjuntos.

Se puede demostrar sin el axioma de Zermelo que todo conjunto medible es, para todo $\epsilon > 0$, la unión de un conjunto cerrado[18] y de un conjunto de medida menor que ϵ.

6. El axioma de Zermelo en el análisis. [19]

[16] De una lado se diría que un conjunto de puntos se dice *cerrado* si contiene todos sus puntos de acumulación; de otro lado se diría que es *cerrado* si contiene todos sus puntos límite.

[17] Sierpiński lo enuncia de la siguiente manera: si se tiene una infinidad de intervalos $\delta_1, \delta_2, \delta_3, ...$ tal que todo punto de un conjunto cerrado y acotado F sea interior al menos a uno de estos intervalos, existe un número limitado de estos intervalos, tal que todo punto del conjunto F sea interior a uno de ellos al menos.

[18] Es decir, que contiene a todos sus puntos de acumulación.

[19] En este apartado se incluye teoría de funciones, lo que indica que Sierpiński asume la teoría de funciones más como una parte del análisis que como una parte de de la teoría de conjuntos.

Se presentan las definiciones de continuidad de Cauchy y de Heine y se comparan de acuerdo al axioma de Zermelo.

Se puede demostrar, sin usar el axioma de Zermelo, que la continuidad en el sentido de Cauchy implica continuidad en el sentido de Heine, sin embargo, la recíproca necesita de este axioma.

Lo anterior se presenta para las defınciones de continuidad puntual, sin embargo las definiciones de continuidad para todo el intervalo (continuidad global) se muestra la equivalencia de las nociones de Cauchy y de Heine.

Al igual que con el problema de la continuidad de una función, se tiene dos definiciones para la derivada de una función: una que se basa en conocidas desigualdades y otra que se fundamenta en sucesiones infinitas. Sin aplicar el axioma de Zermelo, se puede probar que para las funciones continuas en un intervalo, las dos definiciones de derivada en un punto dado son equivalentes entre si.

Habitualmente se asume que una función es representable analíticamente si y sólo si pertenece a una de las clases de Baire. Pero mostrar la inclusión de las Clases de Baire en la clase de las funciones analíticas requiere usar el axioma de Zermelo.

Un ejemplo efectivo muy simple (sin números transfinitos) de una función que escapa a las Clases de Baire fué dado por Suslin, pero para la demostración de algunas propiedades de este se recurrió al axioma de Zermelo.

Aún no se sabe demostrar, sin recurrir al axioma de Zermelo, la cerradura de las Clases de Baire respecto a la convergenica puntual, es decir, si $f_1(x), f_2(x), f_3(x), ...$ es una sucesión convergente de funciones que pertenecen a la clasificación de Baire, el límite es una función que pertenece a esta misma clasificación.

Se puede demostrar sin el axioma de Zermelo el teorema de Fréchet que dice que para toda función perteneciente a la clasificación de Baire existe una serie de polinomios que converge hacia la función dada, excepto puede ser para un conjunto de medida nula. Pero no se puede demostrar sin el axioma de Zermelo que para toda función medible exista una serie doble de polinomios, convergente en toda parte, en el que la suma es igual en casi toda parte a la función considerada.

El teorema de Luzin que plantea que el continuo no se puede descomponer en una infinidad numerable de conjuntos numerables, no requiere para su demostración del axioma de Zermelo.

Sin el axioma de Zermelo se puede mostrar la equivalencia de dos definiciones sobre la *continuidad aproximativa* de una función en un punto (Denjoy). Sin embargo, no se sabe demostrar sin usar el axioma de Zermelo, el teorema de Denjoy en el que plantea que toda función medible es aproximativamente continua en casi toda parte.

7. El axioma de Zermelo en la construcción de ejemplos.

En este apartado se muestra construcciones de conjuntos y de funciones en los que interviene el axioma de Zermelo, por ejemplo la descomposición que Haussdorff hizo de la superficie de una esfera en cuatro conjuntos disjuntos A, B, C, D, donde D es numerable y los conjuntos A, B, C y $B \cup C$ se pueden superponer dos a dos a través de una rotación conveniente de la esfera considerada. Esta es la base de la paradoja de Banach-Tarski, de la que se habla en la página 178.

También se muestra la construcción de Luzin y Sierpiński de un conjunto de puntos no numerable que se transforma en un conjunto de medida nula para toda transformación biunívoca y continua en el intervalo que lo contiene.

Finaliza este apartado con la construcción de un problema propuesto por Luzin, que usa el axioma de Zermelo, de una función medible que no puede ser mayorada por ninguna función representable analíticamente.

8. Los problemas que conducen a las funciones no medibles.

   Un problema determinado implica funciones no medibles, si admitiendo que éste se resuelve afirmativamente, se deduce la existencia de funciones no medibles sin usar el axioma de Zermelo.

   Entre estos problemas (y/o enunciados) están:

   - La clase de todos los subconjunto numerables del continuo tiene la potencia del continuo.

   - Existe un conjunto ordenado, formado por todas las funciones de la segunda Clase de Baire.

   - Existe una descomposición del segmento en dos conjuntos donde ninguno contiene un subconjunto perfecto.

   - Existe una función discontinua que satisface la ecuación funcional $f(x+y) = f(x) + f(y)$

9. El principio general de elección. Elecciones dependientes.

   El principio general de elección puede enunciarse de la siguiente manera:

   Sea M un conjunto en el que sus elementos son conjunto no vacíos (no necesariamente disjuntos), existe una ley que asigna a cada conjunto P de M un elemento p de P.

   A través de un ejemplo Sierpiński explica la diferencia entre elección independiente y elección dependiente. Tal ejemplo permite obtener una descomposición del continuo en una infinidad no numerable de conjuntos no medibles.

5.2.2. Otros artículos de Sierpiński

Se presenta a continuación los artículos en orden cronológico y se da una descripción de cada uno de ellos:

- (Junto a N. Luzin). "Sur quelques propriétés des ensembles (A)", *Biuletyn Polskiej Akademii Umiejetności, Kraków*, pp. 35-48. (1918). En Tomo II de [Hartman et al., 1974] pp. 192-204.

  La mayor parte de las propiedades de los conjuntos A han sido estudiadas en los artículo [Suslin, 1917] y [Luzin, 1917]. Esta memoria es relevante por dos aspectos, el primero es que simplifica la demostración del teorema fundamental de Suslin sobre los conjuntos analíticos: *todo conjunto analítico es Lebesgue medible.*

  Sin embargo el segundo aspecto que da relevancia a esta publicación es el más importante, ya que corresponde a una generalización del teorema anterior. Esta generalización se enuncia de la siguiente manera:

  La operación A, efectuada sobre un sistema de conjuntos Lebesgue medibles genera siempre un conjunto Lebesgue medible.

- "Sur une condition pour qu' un continu soit une courbe jordanienne", *FM* 1, pp. 44-60. (1920). En Tomo II de [Hartman et al., 1974] pp. 308-321.

  Marczewski en [Hartman et al., 1974] (tomo II pp. 18) dice que la publicación de esta memoria y la de Mazurkiewicz[20] también en el primer volumen de *FM* contribuyeron al éxito de *FM*.

  El objeto de esta memoria es la demostración del siguiente teorema:

  Para que un continuo[21] *C (de un espacio euclidiano m-dimensional) sea una curva de Jordan, es necesario y suficiente que para todo $\epsilon > 0$, C se pueda ver como la unión de una cantidad finita de continuos de diámetro $< \epsilon$.*

[20] "Sur les lignes de Jordan", que se presenta en la página 177.

[21] Un continuo es un espacio topológico conexo y compacto.

- (Junto a N. Luzin). "Sur un ensemble non mesurable B", *J. Math. Pur. Appl.* (9) 1 (1923), pp. 53-72. En Tomo II de [Hartman et al., 1974] pp. 504-519.

  Entre Baire y Lebesgue dedujeron que toda función representable analíticamente es puntualmente discontinua sobre todo conjunto perfecto cuando se extrae conjuntos de primera categoría respecto al conjunto perfecto. Luzin probó esto mismo en 1917 apoyándose en el axioma de elección pero sin la hipótesis del continuo, y previamente, en 1914, había mostrado que la condición de Baire no es suficiente si se asume la hipótesis del continuo.

  Esta memoria se propone definir efectivamente una función no representable analíticamente que satisface la condición de Baire, sin embargo hace más cosas, tales como demostrar que para los conjuntos analíticos se satisface la propiedad de Baire.

  [Kanamori, 1995] dice que esta memoria es fundamental ya que con ésta se cambió el énfasis hacia los conjuntos coanalíticos (los complementos de los analíticos), y estipuló una representación básica para éstos. Sobre esto último se trata en la página 213.

- "Sur l'hypotèse du continu $2^{\aleph_0} = \aleph_1$". *FM* 5, 1924, pp. 177-187. En Tomo II de [Hartman et al., 1974] pp. 527-536.

  Se examina algunos teoremas que se obtienen al utilizar la hipótesis del continuo, al igual que algunas equivalencias de esta hipótesis y finalmente un resultado que se obtiene al negar esta hipótesis. Se divide el artículo en seis apartados:

  1. La hipótesis del continuo ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) equivale al teorema de que todo subconjunto no numerable de $\mathbb{R}$ tiene la potencia del continuo, sin embargo para tal resultado se necesita hacer uso del axioma de Zermelo.
  2. Se hace distinción entre la hipótesis del continuo y el problema del continuo. Este último consiste en la determinación del aleph correspondiente al continuo, o del ordinal α tal que $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$.

3. Se enuncia algunos pocos teoremas que son equivalentes a la hipótesis del continuo:

    a) El conjunto de todos los puntos del plano es la unión de dos conjuntos, donde uno es a lo más numerable sobre toda paralela al eje de de las abscisas y el otro es a lo más numerable sobre toda paralela al eje de las ordenadas. Resultado tomado de [Sierpiński, 1919].

    b) El conjunto de todos los números reales es una unión de conjuntos crecientes numerables. Resultado tomado de [Sierpiński, 1922c].

    c) $\aleph_2^{\aleph_0} > \aleph_1^{\aleph_0}$.[22] Esta equivalencia la usa Sierpiński para llegar a la siguiente proposición: $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$ *si y sólo si* α *es el menor ordinal que satisface* $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$.

4. Las siguientes, son consecuencias de la hipótesis del continuo:

    a) $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$ (que se obtiene a partir de la desigualdad de Cantor $2^{\aleph_1} > \aleph_1$).

    b) Existe un conjunto ordenado (linealmente) de potencia $\aleph_1$ que contiene subconjuntos de todo tipo de orden de potencia $\aleph_1$. Resultado tomado de [Hausdorff, 1914, pp. 181-182].

    c) Existe en el intervalo $(0,1)$ un conjunto E no numerable, tal que todo conjunto no denso en $(0,1)$ contiene a lo más un conjunto numerable de puntos de E. Resultado tomado de [Luzin, 1914, p. 1259].

    d) Todo conjunto lineal de potencia inferior a la del continuo es de la primera categoría de Baire.[23]

    e) Existe una función de una variable real $f(x)$ que es discontinua sobre todo conjunto no numerable. Resultado tomado de [Sierpiński y Zygmund, 1923, p. 318].

    f) Todo conjunto no medible (L) tiene la potencia del continuo. Además se puede demostrar que existe un conjunto lineal no numerable donde todo subconjunto no numerable es no medible (L).

[22]Dado que la igualdad $\aleph_2^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0}$ es equivalente a negar la hipótesis del continuo

[23]Respuesta afirmativa al problema de Ruziewicz en *FM* 1922, Volumen III, p. 322. Problème 18.

g) Si $A \subseteq \mathbb{R}$ no es de primera categoría en ningún intervalo, existe una descomposición: $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$, tal que ni B ni C son de primera categoría en ningún intervalo.[24]

5. La demostración de la mayoría de proposiciones que se obtienen con la hipótesis del continuo se pueden modificar de forma tal que se tienen resultados verídicos, independientes de esta hipótesis y tales que las proposiciones en cuestión son inmediatas si se admite la hipótesis del continuo. Por ejemplo si se modifica ligeramente la demostración de la tercera proposición (de Luzin) del apartado 4, se obtiene (usando el axioma de Zermelo, sin admitir la hipótesis del continuo):

   Existe en el intervalo $(0, 1)$ un conjunto E no numerable, tal que el conjunto de puntos de E comunes con un conjunto dado cualquiera no denso en $(0, 1)$ tiene potencia inferior a la del continuo.

   Similarmente, la quinta y la sexta proposición pueden reemplazarse (cambiando la hipótesis del continuo por el axioma de Zermelo) respectivamente por los siguientes teoremas:

   Existe una función de una variable real discontinua sobre todo conjunto de la potencia del continuo.

   Existe un conjunto lineal de la potencia del continuo donde todo subconjunto de la potencia del continuo es no medible (L).

6. Se conocen pocas proposiciones que se demuestran bajo la negación de la hipótesis del continuo, por ejemplo la siguiente:

   Todo conjunto lineal de la potencia del continuo tal que su complemento es un conjunto analítico contiene un subconjunto perfecto.

- "Sur l' uniformisation des ensembles mesurables (B)", *FM* 16, 1930,

[24]Respuesta afirmativa al problema propuesto por Kuratowski en *FM* 1923, Volumen 4, p. 368. problème 21.

pp. 136-139. En Tomo III de [Hartman et al., 1974] pp. 44-46

Un conjunto plano E está *uniformizado* por el conjunto $H \subset E$, si toda paralela al eje OY que corta a E, corta a H en un solo punto.

Luzin probó que todo conjunto plano B medible puede ser uniformizado por un complementario analítico, para ello usó el denominado método de los cinturones. En este artículo, Sierpinski demuestra este teorema basándose en principios distintos a los de Luzin. La prueba de Sierpiński permite además demostrar que todo conjunto analítico puede ser uniformizado por medio de un PCA (proyección de un conjunto coanalítico). Además va un poco más lejos y demuestra que un conjunto boreliano en el que la proyección sobre el eje OX no sea boreliano no puede ser uniformizado por un conjunto analítico.

Finalmente plantea la siguiente pregunta: ¿Un conjunto plano coanalítico es siempre uniformizable por un conjunto $CPCA$ o incluso por un conjunto proyectivo? Esta pregunta fue abordada por varios matemáticos durante la década del 30; el resultado mas general al que se llegó en relación a la uniformización, fue el obtenido en [Kondô, 1939], en el que se demuestra que todo conjunto coanalítico es uniformizable por un coanalítico.

- "Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle", *FM* 22, 1934, pp. 276-280. En Tomo III de [Hartman et al., 1974] pp. 207-210.

Se muestra, con la ayuda de la hipótesis del continuo, el siguiente teorema que muestra una dualidad entre medida y categoría:

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, existe una transformación biunívoca f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que si $E \subseteq \mathbb{R}$ es de primera categoría, $f(E)$ es un conjunto de medida nula, y si $E \subseteq \mathbb{R}$ tiene medida nula, $f^{-1}(E)$ es un conjunto de primera categoría.

Este artículo es el principal para la temática denominada medida y categorías, descrito en el apartado 5.1.3.

5.2.3. Algunos artículos en *FM* hasta 1939

- "Sur les lignes de Jordan". Por Mazurkiewicz. *FM* 1 (1920). pp. 166-209.

  Marczewski en [Hartman et al., 1974] (tomo II pp. 18) dice que esta memoria y al igual que el artículo [Sierpiński, 1920a][25] en 1920 en el primer volumen de *FM* contribuyeron al éxito de esta revista.

  Esta memoria, de contenido topológico, contiene una exposición sistemática de resultados de Mazurkiewicz, de los cuales la mayoría fueron publicados en tres notas presentadas a la Sociedad de Ciencias de Varsovia. Contiene siete apartados que se titulan:

  1. Diámetro de un conjunto de puntos. 2. Distancia relativa 3. Género de un punto. 4. Líneas de Jordan. 5. Líneas de Jordan generalizadas. 6. Un teorema sobre los conjuntos saturados. 7. Líneas de Jordan y continuos irreducibles.

- "Une méthode d' elimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques". Por Kuratowski. *FM* 3 (1922). pp. 76-108.

  Este es un artículo que propone un método basado en el concepto de cadena de Dedekind, con el que se puede prescindir de los números transfinitos para algunos razonamientos matemáticos. Aunque el método propuesto corresponde a teoría general de conjuntos, las aplicaciones que nombra Kuratowski a lo largo del artículo abarcan distintas ramas de las matemáticas, tal como lo hacía Sierpiński con sus investigaciones sobre hipótesis del continuo y sobre el axioma de Zermelo en [Sierpiński, 1924b] y [Sierpiński, 1918a] respectivamente.

  El artículo tiene dos partes, la primera es en la que que explica el método de eliminación de los transfinitos al identificar unos procedimientos representados por ciertos esquemas y reemplazar ciertas

[25] *Sur une condition pour qu' un continu soit une courbe jordanienne.*

definiciones de estos esquemas. La segunda parte es de aplicaciones y consta de diez apartados que se denominan: 1. Teorema de Zermelo. 2. Conjuntos saturados e irreducibles. Teorema de Brouwer. 3. Clases abstractas de Fréchet. 4. Derivadas y coherencias. 5. Conjuntos ralos y teorema de Cantor-Bendixson. 6. Residuos y conjuntos que son a la vez F_δ y G_δ. 7. Clases de Borel. 8. Funciones de Baire. 9. Problema de Baire y problema auxiliar de M. de la Vallée Poussin. 10. Los conjuntos (A) de Suslin.

- "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales". Por Banach. *FM* 3 (1922). pp. 133-181.

  Corresponde a la tesis de Banach presentada en la Universidad de Leópolis, en la que se axiomatiza una nueva clase de espacios llamados posteriormente como espacios de Banach que se caracterizan por ser espacios vectoriales completos y dotados de una norma.

  Esta publicación da nacimiento a una nueva rama de las matemáticas que se denomina análisis funcional. Y entre los campos funcionales que se trabajan en esta publicación están el conjunto de funciones continuas, el conjunto de funciones sumables (o Lebesgue integrables), el conjunto de funciones integrables con la r-ésima potencia, el conjunto de funciones medibles y acotadas, el conjunto de uniones duhamelianas acotadas, el conjunto de funciones con la (p-1)-ésima derivada absolutamente continua (y la primera derivada, o continua, o Lebesgue integrable o con la r-ésima potencia Lebesgue integrable, o acotada, o duhameliana).

- "Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes". Por Banach y Tarski. *FM* 6 (1924). pp. 244-277.

  Se prueba que dados dos conjuntos acotados en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ con interiores no vacíos son equivalentes bajo descomposición finita. Posteriormente, y a partir de este resultado se le llamó la paradoja de Banach-Tarski al siguiente enunciado: *la esfera unidad puede descomponerse en finitas partes y juntarse en dos esferas unidad.*

Esta paradoja se apoya en el axioma de Zermelo para realizar una cantidad no numerable de elecciones arbitrarias.

Un resultado parcial y fundamental para este enunciado se había planteado en el libro [Hausdorff, 1914],[26] sin embargo fue a través de este artículo que esta paradoja adquiere reconocimiento.

- "Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes". Por Urysohn. *FM* 7 (1925). p. 30-137 y *FM* 8 (1926). pp. 225-351.

  Corresponde a dos publicaciones póstumas de Urysohn, en las que se inicia la investigación en teoría de dimensión basada en el concepto de dimensión inductiva pequeña, presentando todos los resultados fundamentales de la teoría de la medida.

  En esencia, Uryshon explora las definiciones de curva y de superficie, investigando también las definiciones de variedad cantoriana de n dimensiones, centrando su atención en el concepto de dimensión.

- "Sur les ensembles analytiques". Por Luzin. *FM* 10 1927. pp. 1-95.

  En esta memoria, Luzin recoge sus investigaciones sobre los conjuntos analíticos. Difiere de la presentación de su posterior libro [Luzin, 1930],[27] en el orden de presentación, presentando tres capítulos que se denominan: 1. La construcción de Lebesgue y sus generalizaciones, en el que presenta la construcción que Lebesgue hizo de un conjunto que escapa a toda representación analítica (pero que el francés no estudió sus propiedades), generaliza la operación criba a varias dimensiones, e introduce la operación proyección. 2. La B medida, donde aborda dos propiedades inductivas: la analiticidad y la unicidad, luego introduce la B separabilidad, la construcción efectiva de todo conjunto de unicidad y las funciones implícitas. 3. El conjunto analítico más general, en el que trata el criterio de la B medida, lo transfinito (incluyendo el axioma de elección y el axioma del conjunto

[26] Para profundizar más, ver el libro [Wagon, 1993].
[27] Del cual se profundiza algo más en el apartado 6.1.2.

potencia)[28] y finalmente unas pocas páginas para abordar los conjuntos proyectivos.

- "Les opérations logiques et les ensembles projectifs". Por Kuratowski y Tarski. *FM* 17 (1931). pp. 240-248.

  Kuratowski y Tarski escribieron sobre el uso de operaciones lógicas en la teoría descriptiva de conjuntos, en particular para la jerarquía de conjuntos proyectivos. En esencia, se plantea que la jerarquía proyectiva se puede obtener a través de la combinación de los siguientes cinco operadores lógicos: $\neg$, que corresponde a la operación complemento; $\exists$, que corresponde a la proyección; $\forall$, que se puede ver como la composición $\neg\forall$ más la negación de la proposición; y $\vee$ y $\wedge$ que corresponden a unión e intersección respectivamente. Estos operadores lógicos se aplican sobre la clase de las funciones proposicionales.

- "Théorie générale de l' homologie dans un espace quelconque". Por Čech. *FM* 19 (1932). pp. 149-183.

  Se propone Čech en este trabajo mostrar como se llega a una teoría de la homología en un espacio cualquiera, lo cual implica unir conceptos de la topología de puntos y la topología algebraica. En este trabajo se generaliza la teoría de la homología ya que anteriormente se desarrollaba la teoría de la homología solo para espaciós métricos y compactos. En [Eilenberg y Steenrod, 1952] dice que esta publicación es el inicio de la teoría de homología y cohomología de Čech.

  Esta publicación se divide en cinco capítulos. El primero nombra (sin demostrar) algunas propiedades de módulos. En el segundo capítulo se expone una teoría general de homología de forma más abstracta, sin suponer nada sobre la naturaleza del espacio sobre el que se trabaja. En el tercer capítulo se considera el caso especial donde el espacio a trabajar es topológico, es decir donde la familia fundamental

[28] Interesante la inclusión de esta dos axiomas, ya que se relacionan a través del argumento de René Baire para no aceptar la primera demostración del buen orden realizada por Zermelo en 1904. El argumento de Baire se centra en que la demostración se basa en axioma del conjunto potencia.

está conformada por redes abiertas. En el cuarto capítulo se aborda una aplicación, en la que se generaliza un teorema sobre las homologías en la suma de dos espacios topológicos normados y cerrados para la suma. En el quinto capítulo se aborda la teoría de ciclos con coeficientes racionales.

- El volumen 25 de *FM*, en 1935, se publicó como un volumen especial, con 47 publicaciones de 45 autores de doce países, entre ellos: Lebesgue, Borel, Luzin, Alexandroff, Hardy, Littlewood, Hopf, Hausdorff, Von Neumann, Banach, Tarski, Kuratowski, Zygmund y Sierpiński. De esta forma ya no había duda sobre el reconocimiento internacional que tenía *FM*. En [Tamarkin, 1936], con motivo de este volumen especial de esta revista, se escribió lo siguiente: "el volumen 25 de *FM* representa un evento notable en la vida matemática del mundo entero".

5.3. Conclusiones y comentarios

1. Sierpiński no se posicionaba filosóficamente respecto a la aceptación o no de la hipótesis del continuo y del axioma de elección, tomando siempre una posición neutral, no se preocupa por dar la respuesta definitiva si la razón está del lado de Zermelo o de quienes se oponen a la aceptación de demostraciones o procedimientos matemáticos en los que se involucre este axioma (igul con la hipótesis del continuo). Sin embargo no fue ajeno a la discusión y exploró como quizás ningún otro de los matemáticos de su época las consecuencias de la aplicación de éstos. En ese sentido, en sus publicaciones es recurrente que diga explícitamente si usa o no el axioma de elección o la hipótesis de continuo. Así, Sierpiński puede verse como un prototipo de matemático que se inmiscuye en la discusión filosófica pero que es conciente de su labor de explorar a profundidad las consecuencias de asumir una u otra hipótesis.

   Sobre el axioma de elección hay muchas referencias a Sierpiński, de hecho [Moore, 1982], que es el texto más completo sobre historia e influencia de este axioma dedica un capítulo a la escuela de Varsovia y reseña 43 publicaciones de Sierpiński en su bibliografía. La bibliografía de este libro, que se ubica por autores en orden cronológico, ubica como primer publicación de Sierpiński a [Sierpiński, 1916a], que es un abrebocas de [Sierpiński, 1918a] (el primer artículo de Sierpiński presentado en el apartado 5.2).

En [Moore, 1982, p. 289] se plantea que hasta 1938 no hubo cambio en las posiciones sobre el axioma de elección, lo cual se corroboró en la reunión que se denominó Las *Entretiens de Zurich* que tuvo lugar en la École Polythechnique Fédérale de Zurich del 6 al 9 de diciembre de 1938. Entre los participantes en esta conferencia, dedicada a los fundamentos de las matemáticas, había matemáticos, lógicos y filósofos como Gonseth, Skolem, Fréchet, Łukasiewicz, Lebesgue, Polya, Sierpiński y Bernays. Lebesgue y Sierpiński se hicieron eco de lo que habían escrito en años anteriores sobre el axioma de elección.

En su conferencia, Lebesgue elogia Sierpiński como "el hombre que mejor ha sabido utilizar el axioma de elección". La conferencia de Sierpiński resumía principalmente la investigación sobre el axioma de la escuela de Varsovia. En esta, dijo no estar ni a favor ni en contra del axioma, sin embargo consideraba artificial aceptar sólo la versión numerable del axioma,[29] ya que no había ninguna razón sustancial para hacer una división del axioma para esta cardinalidad.

Por otro lado, Bernays, quien no podía creer que el axioma fuese meramente una hipótesis en lugar de verdadero o falso, sospechaba que la investigación intensiva sobre el axioma de los miembros de la Escuela de Varsovia, como Sierpiński, era un intento de derivar una paradoja desde el axioma.

De otro lado, Sierpiński en gran parte es un autor de reacción a partir de investigaciones de otros de sus contemporáneos. [Sierpiński, 1918a], que es el artículo de mayor impacto de Sierpiński, es un ejemplo claro de ello, sin embargo en este artículo hay todo un estado del arte de la discusión sobre el axioma de elección y los distintos resultados del análisis y de la teoría de conjuntos donde se ha usado, lo cual muestra que la relevancia de una publicación en fundamentos de las matemáticas no está ligada necesariamente a un resultado

[29] Oponiéndose a las divisiones planteadas principalmente por los franceses.

absolutamente novedoso (como podría ocurrir con una publicación de otra rama de las matemáticas) ya que como en el caso de la publicación en cuestión, la novedad y el aporte están en la investigación exhaustiva del entramado deductivo en que se inserta un axioma.

2. Algunas citas en las que se intenta caracterizar la matemática polaca del periodo Entreguerras se recogen a continuación:

> Jean-Pierre Kahane expresó que el rasgo característico era un uso libre del axioma de elección en las demostraciones no constructivas de existencia, y de acuerdo a ello el libre uso de otro métodos no medibles, basados por ejemplo en la teoría de Baire o en la probabilidad (equivalentemente, medida de Lebesgue)[Duda, 2004, p. 297].

En [Kuratowski, 1980, p. 78] se plantea lo siguiente:

> Las principales contribuciones de los matemáticos polacos en el periodo Entreguerras tienen que ver con análisis funcional y topología. En análisis funcional, principalmente en Leópolis, tuvo un papel protagónico al introducir y desarrollar métodos fundamentales, nociones y teoremas.
>
> En el campo de la topología, los matemáticos polacos jugaron un papel fundamental al desarrollar los métodos conjuntistas y vincular sus diferentes partes en un solo sistema.
>
> Además de estas dos ramas de las matemáticas, cuyo surgimiento y desarrollo son, en cierta medida, debido a los matemáticos polacos, también se ha contribuido al desarrollo de la teoría de funciones reales (sobre todo en los campos de la teoría de las series trigonométricas, la teoría de la medida y la teoría descriptiva de conjuntos). Los matemáticos polacos han contribuido mucho al desarrollo de la teoría de conjuntos y lógica matemática (la elucidación del papel de axioma de Zermelo y la hipótesis del continuo, las contribuciones a la teoría de la deducción y la iniciación de la investigación en general en los sistemas matemáticos).

Estas citas se refieren a la matemática polaca, que no es necesariamente lo mismo que la matemática en Sierpiński, o la matemática en la escuela de Varsovia o la matemática en *FM*. Sin embargo en 1920, Sierpiński, la escuela de Varsovia y la matemática polaca compartían el enfoque sobre la teoría de conjuntos de la primera etapa de Cantor,[30] que se caracterizaba por usar los desarrollos conjuntistas para la solución de problemas del análisis o de la topología o de la teoría de funciones.

Como fundadores de la escuela de Varsovia de matemáticas Sierpiński, Mazurkiewicz y Janiszewski marcaron unas líneas de investigación que se enmarcaban en el enfoque de la primera etapa de Cantor. El libro [Hausdorff, 1914] fue muy importante para que entre los matemáticos de Varsovia se acogiera este enfoque.[31] Respecto a Haussdorff, Arboleda plantea que al introducir el primer parágrafo sobre "Vecindades", éste aclara uno de los rasgos característicos de la formalización de las estructuras topológicas, el hecho de fundamentarse en lenguaje conjuntista, y recoge una cita de [Hausdorff, 1914, p. 209]:

> La teoría de conjuntos ha celebrado su más bello triunfo en la aplicación a los conjuntos de puntos de los espacios, en la clarificación y la consolidación de los fundamentos geométricos [Arboleda, 2012, p. 38].

Arboleda plantea que las investigaciones de Baire y el impacto que tuvieron en Sierpiński y los matemáticos soviéticos y polacos en los años 1920 dan un buen indicio de que para ellos la teoría de conjuntos abstractos estaba al servicio de la solución de problemas, no solo del análisis de variable real, sino del análisis general, es decir la teoría de funciones generalizadas definidas sobre un espacio abstracto y, en particular, las funcionales. Este punto de vista lo resume Fréchet de la siguiente manera en la Introducción de su obra sobre los "Espacios Abstractos": "Un estudio preliminar de los espacios abstractos[32] es más importante para el desarrollo del análisis funcional que para la teoría

[30] Ver el capítulo 3.

[31] Recuérdese la influencia que ejerció [Hausdorff, 1914] en *FM* planteada en la página 70 y la visión de este autor sobre la teoría de conjuntos descrita en el capítulo 3 (y corresponde a las dos etapas de Cantor).

[32] Entendidos como la generalización de la teoría de conjuntos, según Arboleda.

clásica de funciones". Lo cual apunta más a la especialización de la escuela de Leópolis con Banach a la cabeza, que a los intereses más variados entre los matemáticos de Varsovia (particularmente Sierpiński).

Sin embargo, se puede ver en los principales artículos de Sierpiński (el de axioma de elección y de hipótesis del continuo), que aunque en primera instancia se asocian más a la teoría general de conjuntos que a las otras ramas de la teoría de conjuntos, la investigación se relacionaba con los resultados de otras ramas de las matemáticas donde se usa éstos. El artículo [Kuratowski, 1922],[33] es una muestra más de esta visión de Sierpiński, en la que una investigación que se enmarcaría inicialmente en una temática de la teoría general de conjuntos (como lo es los números transfinitos), abarca una serie de aplicaciones a varias ramas de las matemáticas.[34]

Para finalizar, la cita de Kuratowski aporta varios datos importantes, así como una óptica de un representante idóneo de la escuela de Varsovia. Por ejemplo se entiende que la teoría descriptiva de conjuntos se relacionaba más con la teoría de funciones que con la teoría de conjuntos y que las temáticas de interés de Sierpiński en la teoría general de conjuntos, como el axioma de elección y la hipótesis del continuo, marcaron una línea de acción para la escuela de Varsovia (Kuratowski dice que es para los polacos en general).

[33] Que se presenta en la página 177.

[34] Aunque Tarski y Mostowski son un buen ejemplo de la influencia de Hilbert Zermelo, y la visión conjuntista de Dedekind, la que les ha llegado por el lado de la tendencia logicista de Varsovia representada por Łukasiewicz y Leśniewski.

Capítulo 6

Sobre la teoría descriptiva de conjuntos

De los campos de trabajo de Sierpiński en teoría de conjuntos, que se destacan en el capítulo 5, se ha considerado interesante encuadrar lo estudiado sobre este autor con el desarrollo histórico de la teoría descriptiva de conjuntos, que en el capítulo mencionado se denota como conjuntos analíticos y proyectivos en el apartado 5.1.2. Este es uno de los campos en los que Sierpiński presenta resultados propios, lo que diferencia con sus aportes por ejemplo en teoría general de conjuntos, donde normalmente divulga, hace demostraciones novedosas, o hasta presenta las consecuencias de usar o no axiomas o hipótesis controversiales. La topología, que es otro campo de acción de Sierpiński, ha sido suficientemente estudiada e investigada desde lo histórico en libros como [Aull y Lowen, 1997] y [James, 1999], y la teoría de funciones de variable real se estancó en un punto en el que ahora no es una rama de interés en las matemáticas, y gran parte de ésta (en especial la desarrollada a partir de los analistas franceses de cambio de siglo XIX al XX) se conectó con la teoría descriptiva de conjuntos posteriormente.

En [Kanamori, 1995, p. 241] se plantea que la teoría descriptiva de conjuntos es la teoría de la definibilidad del continuo, es decir, el estudio de las propiedades estructurales de los conjuntos definibles de números reales. En [Moschovakis, 2009, p. xiv] se dice que el problema central de la teoría descriptiva de conjuntos y la teoría de la definibilidad es buscar y estudiar las propiedades características de los objetos definibles, planteando además que lo que hace interesante la teoría descriptiva de conjuntos es lo que lo hace difícil, que es que se debe saber de varias cosas: un poco de topología, análisis y lógica, un buen conocimiento de teoría de funciones recursivas y un gran conocimiento de teoría de conjuntos, incluyendo constructibilidad, forcing, grandes cardinales y determinancia. Cabe decir que los tópicos principales de la teoría descriptiva de conjuntos son: la jerarquía de las clases de conjuntos borelianos y la jerarquía de conjuntos proyectivos.

En Kanamori se evidencia un énfasis hacia lo aspectos estructurales (topológicos), mientras que Moschovakis plantea una visión más incluyente, en la que hace parte una serie de temáticas que han sido esenciales para el desarrollo actual de la teoría descriptiva de conjuntos. En ese sentido aquí se opta por hacer un seguimiento al problema central que plantea el segundo autor, pero teniendo en cuenta que varias de los temas que él nombra, como el forcing, los grandes cardinales y la determinancia; no surgieron en la etapa clásica de la teoría descriptiva de conjuntos.

Se puede identificar 3 fases en el desarrollo histórico de la teoría descriptiva de conjuntos, la primera que se ubica desde los inicios, que en el apartado 6.2 se discute sobre los hechos y/o momentos que pueden considerarse como el inicio de esta teoría, hasta finales de la década de 1930 con el estancamiento en el surgimiento de resultados sobre la jerarquía proyectiva; esta primera fase es la que tiene principal interés en este trabajo, por contener el periodo en que se centra esta tesis; la segunda fase que abarca desde el final de la primera hasta los años sesenta se conecta con los aportes de lógica y teoría de funciones recursivas; la tercera y última fase incorpora los axiomas de determinación y va hasta la actualidad.

La teoría descriptiva de conjuntos se ha estudiado muy poco desde una perspectiva histórica, de hecho no hay libros dedicados a ello[1] siendo dos artículos en inglés son mas representativos: [Kanamori, 1995] y [Kanovei, 1985], siendo la segunda focalizada en la obra de Luzin. Hay varios más artículos en ruso, que se encuentran referenciados en el artículo [Kanovei, 1985]. Cabe decir que la historiografía que se encuentra sobre teoría descriptiva de conjuntos es presentista y hecha por matemáticos[2]. En

[1]Hay textos sobre teoría decriptiva de conjuntos en los que hay apartes sobre su historia. El más interesante es [Moschovakis, 2009], que presenta notas históricas al final de cada capítulo.

[2]Un trabajo con un matiz distinto sobre la historia de la teoría descriptiva de conjuntos

este capítulo se presenta un recorrido histórico de la teoría descriptiva de conjuntos clásica, enfatizando en los aportes de Luzin y Sierpiński, también se discute la importancia que en [Kanamori, 1995, p. 245], se dice que llegaron a obtener las propiedades de regularidad (ver apartado 6.2.1) en esta teoría.

6.1. Teoría descriptiva de conjuntos en los textos

[Moschovakis, 2009, p. 46] dice que de los libros de teoría de conjuntos y topología que cubren la teoría descriptiva de conjuntos, las mejores referencias son los textos siguientes: [Hausdorff, 1927], [Sierpiński, 1956] y [Kuratowski, 1933]; siendo este último el más exhaustivo y sirve como referencia estándar para la teoría de conjuntos clásica.[3] Teniendo en cuenta esa apreciación, en este apartado se repasará el índice de cuatro libros importantes, en los cuales se aborda temáticas concernientes a la teoría descriptiva de conjuntos. Estos libros son *Mengenlehre* [Hausdorff, 1927], el volumen I de *Topologie* [Kuratowski, 1933], *Les ensembles analytiques* [Luzin, 1930] y *Les ensembles projectifs et analytiques* [Sierpiński, 1950].

Los dos primeros libros, [Hausdorff, 1927] y [Kuratowski, 1933] son publicados en la época en la que se centra esta tesis y sus títulos no corresponden a una temática de la teoría descriptiva de conjuntos. El texto [Luzin, 1930] cabe en el periodo que aquí interesa, pero su título y temática se centra en los conjuntos analíticos, que es un tema exclusivo de la teoría descriptiva de conjuntos, siendo el primer manual que se centra en esta teoría. [Sierpiński, 1950] es una memoria de resultados de la etapa clásica de la teoría descriptiva de conjuntos, y aunque fue publicado en 1950, en un periodo por fuera del que nos interesa, se enmarca en unos temas que representan la etapa clásica de esta teoría.

Entre los textos más actuales que se dedican a la teoría descriptiva de

y sus principales autores en Rusia, está en [Graham y Kantor, 2009], en las que se presenta un recuento sobre el contexto religioso alrededor de Luzin, Egorov y Florensky.

[3]Cabe decir que la referencia que da Moschovakis del libro de Kuratowski, es la traducción al inglés de 1966:

[1966] *Topology*, vol. 1, Academic Press, New York and London, translated from the French *Topologie*, vol. 1, PWN,Warsaw, 1958.

conjuntos, están [Moschovakis, 2009] y [Kechris, 1995], los cuales incorporan gran parte de las tendencias surgidas posteriormente a la etapa clásica de esta teoría, es por eso que no se exponen en este apartado.

6.1.1. Textos de Hausdorff y de Kuratowski

Los capítulos del libro de Hausdorff (tercera edición de 1937, aunque los capítulos son los mismos que la segunda edición de 1927) son los siguientes:[4]

1. Conjuntos y operaciones entre conjuntos
2. Números cardinales
3. Tipo de orden
4. Números ordinales
5. Sistemas de conjuntos
6. Conjuntos de puntos
7. Conjuntos de puntos y números ordinales
8. Aplicaciones entre espacios
9. Funciones reales
10. Suplemento

En el prefacio a esta segunda edición, se dice que los cambios respecto a la primera edición, que en esencia corresponde a la disminución en temas de teoría de conjuntos ordenados y a la eliminación de teoría de integración de Lebesgue es porque estos temas se han tratado en otros textos. A eso añade que el punto de vista topológico en la teoría de conjuntos de puntos es lo que parece haber atraído a la mayoría de lectores de la primera edición.[5]

[4]En el apartado 3.3.2 se muestra los capítulos del libro de Hausdorff de 1914, que puede ser visto como la primera edición de éste que se presenta.

[5]Esto concuerda con lo planteado en el capítulo 2 que la topología generaba más interés que la teoría de conjuntos general.

En [Kanovei y Lyubetsky, 2003], se dice que este libro de Hausdorff es el primero en el que se presenta de manera sistemática y para espacios polacos (métricos, separables y completos), la teoría descriptiva de conjuntos. Esa afirmación tiene sentido desde el capítulo 5 al 10, en los cuales se acentúa los temas de esta teoría: en el capítulo V (sistemas de conjuntos) el apartado 18 se denomina sistemas de Borel y el 19 Conjuntos de Suslin,[6] los cuales corresponden a temas que dieron origen a la teoría descriptiva de conjuntos. En el capítulo VI se presentan los espacios métricos, separables y completos, para luego continuar con los conjuntos de primera y segunda categoría,[7] lo que da base a la afirmación de [Kanovei y Lyubetsky, 2003]. El capítulo VII (conjuntos de puntos y números ordinales) en el apartado 30 (recubrimientos y núcleos) se relaciona con los llamados sistemas determinantes introducidos por Suslin para definir la operación A,[8] luego usa eso para el 32 que se denomina Conjuntos de Borel y de Suslin, en ese mismo capítulo el apartado 34 se denomina criterios para conjuntos de Borel; en el capítulo VII (aplicaciones entre espacios) está el apartado 37, Imágenes de conjuntos de Suslin, y finaliza con espacios topológicos. El capítulo IX (Funciones reales) trabaja desde la perspectiva de la teoría de funciones de variable real, en la que introduce las clases de Baire, finalmente en el capítulo X (Suplemento) está el apartado 45 se denomina la condición de Baire.

El volumen I del libro de Kuratowski, *Topologie*, publicado en 1933[9] tiene la siguiente tabla de contenido:

- Introducción

1. Operaciones de la lógica y de la teoría de conjuntos 2. Producto cartesiano 3. Funciones

-Primer capítulo. Nociones fundamentales. Cálculo topológico.

4. Sistema de axiomas. Reglas de cálculo 5. Conjuntos cerrados, conjuntos abiertos 6. Frontera, interior de conjunto 7. Entorno de un punto.

[6]Hausdorff llama conjuntos de Suslin a los conjuntos analíticos.

[7]Tema que surge desde las temparanas investigaciones de Baire en su tesis [Baire, 1899], y aunque son de orden topológico surgen en el marco de la jerarquía de funciones de Baire.

[8]Esta operación se define en la página 211.

[9]Hay una segunda edición de este libro, publicada en 1948. En este caso se toma la primera edición porque el año de publicación está en el periodo de tiempo que interesa este trabajo. Aunque para efectos de revisar las temáticas de teoría descriptiva de conjuntos no hay mayor cambio.

Localización de propiedades 8. Conjuntos densos, fronteras, no densos 9. Puntos de acumulación 10. Conjuntos de primera categoría 11. Propiedad de Baire 12. Series alternadas de conjuntos cerrados 13. Continuidad. Homeomorfía
-Segundo capítulo. Espacios metrizables y separables.
A. Introducción del límite, de la distancia y de coordenadas.
14. Espacios $\mathscr{L}^*$ (provistos con la noción de límite) 15. Espacios métricos 16. Axioma IV (de separación) 17. Axioma V (de base)
B. Problemas de la potencia
18. Potencia del espacio. Puntos de condensación 19. Potencia de diversas familias de conjuntos
C. Problemas de la dimensión.
20. Definiciones. Propiedades generales 21. Espacio de dimensión 0 22. Espacio de dimensión n 23. Productos cartesianos 24. Productos cartesianos numerables 25. Límites inferior y superior
E. Conjuntos borelianos. Funciones B medibles
26. Conjuntos borelianos 27. Funciones B medibles 28. Funciones que satisfacen la propiedad de Baire
-Tercer capítulo. Espacios completos
29. Definiciones. Generalidades
A. Espacios completos arbitrarios.
30. Sucesiones de conjuntos. Teorema de Baire 31. Extensión de funciones
B. espacios completos separables
32. Relaciones del conjunto $\mathfrak{N}$ de los números irracionales 33. Conjuntos borelianos en los espacios completos separables 34. Conjuntos proyectivos 35. Conjuntos analíticos 36. Espacios totalmente imperfectos

Nótese que a diferencia del libro de Haussdorff, el de Kuratowski tiene un apartado que se denomina conjuntos proyectivos (el numeral 35). Luego habla de los conjuntos analíticos (numeral 36). Cabe decir que en el de Haussdorff no está este tema debido a que este libro se considera una segunda edición, además recortada, de un libro publicado en 1914, y para ese entonces aún no se descubrían los conjuntos analíticos, menos los proyectivos, sin embargo para la segunda edición (de 1927) se incluyeron algunos temas correspondientes a los analíticos (o en palabras de Haussdorff: Conjuntos de Suslin), y aunque Sierpiński y Luzin ya habían expuesto desde 1925 la jerarquía proyectiva, esta no es usada por Haussdorff en su libro. Cabe decir que en el libro de Kuratowski, mas que ocuparse de los problemas relacionados a la existencia de conjuntos de las diversas clases proyectivas, se ocupa de las propiedades topológicas de estas clases.

En este libro se presenta un importante resultado en la transición de la teoría descriptiva de conjuntos de $\mathbb{R}^n$ a espacios topológicos, en particular a los llamados espacios polacos (espacios métricos, separables y completos), ya que muestra que la teoría descriptiva de conjuntos no depende del espacio no numerable en el que se trabaje, siempre y cuando sea un espacio polaco. Así el estudio de los problemas de la teoría descriptiva de conjuntos se puede restringir a los espacios polacos, en el que principalmente se usa el espacio de Baire $\mathbb{N}^\omega$.[10]

Las razones para trabajar en el espacio $\mathbb{N}^\omega$ en lugar de $\mathbb{R}$ son principalmente topológicas, como que es un espacio de dimensión 0, además que su estructura permite describir conjuntos de puntos y sus propiedades por medio de un lenguaje simple con fórmulas analíticas, eso simplifica aspectos técnicos. Este espacio, además es isomorfo a la *línea de Baire* (conjunto de número irracionales de $\mathbb{R}$) a través de una representación en fracciones continuas, que son usadas como herramienta para la exposición en [Luzin, 1930].

De los textos observados, este es el único en el que plantea de inicio (apartado 38) que la jerarquía de conjuntos proyectivos puede ser fácilmente extendida a los ordinales de la primera y de la segunda clase, tal como ocurre con la jerarquía de borelianos.

6.1.2. Textos de Luzin y de Sierpiński

El libro *Les ensembles analytiques* [Luzin, 1930], a diferencia de los dos libros anteriores, se inscribe completamente en la línea de la teoría descriptiva de conjuntos, y tiene los siguientes cinco capítulos:

1. Nociones generales sobre los conjuntos B medibles
2. Investigaciones sobre la estructura de los conjuntos B medibles
3. Los conjuntos analíticos
4. Funciones implícitas

[10]El espacio de Baire $\mathbb{N}^\omega$ es el de las sucesiones de números naturales.

5. Los conjuntos proyectivos

De los cinco capítulos, los dos primeros se dedican a abordar los conjuntos borelianos. En el primero después de dar preliminares sobre las operaciones sobre conjuntos, menciona varios métodos para definir estos conjuntos y muestra sus equivalencias. El segundo capítulo es el más extenso y estudia la estructura de de los borelianos desde un punto de vista geométrico. Describe el proceso para construir conjuntos de las primeras clases de conjuntos de la jerarquía de Baire-de la Vallée Poussin (de las clases 0, 1, 2, 3 y 4). Luego muestra la existencia de elementos universales en el plano, lo que le sirve para mostrar que existen conjuntos de todas las clases de Baire-de la Vallé Poussin.

En el capítulo 3 se introduce los conjuntos analíticos a partir de los borelianos, lo cuales son estudiados en detalle, enfatizando en la separabilidad y las representaciones de estos conjuntos. También hace uso de la operación criba (de Lebesgue), y a través de esta operación Luzin muestra quela memoria [Lebesgue, 1905] dio el primer ejemplo de un conjunto analítico no boreliano.

Lebesgue se interesa en la parte analítica más que en la interpretación geométrica de la función con la que obtiene tal ejemplo, Luzin da mas peso al punto de vista geométrico, por lo que es más consciente que Lebesgue de este nuevo tipo de conjuntos.

El cuarto capítulo es sobre funciones implícitas, y a esto se refiere como "las aplicaciones"que nombra en el título del libro. En este capítulo muestra cómo el problema de la existencia de una función de Baire se relaciona con las propiedades geométricas desde el punto de vista de los conjuntos analíticos.

El último capítulo se divide en dos partes: en la primera presenta y estudia los conjuntos proyectivos, en la que muestra la existencia de conjuntos proyectivos de todas las clases. La segunda parte de este capítulo es una análisis de la memoria de Lebesgue, en la cual complementa el punto de vista analítico funcional de Lebesgue.

Para finalizar, y después de la conclusión, incluye una nota de Sierpiński, que es un artículo publicado en el volumen 10 de *Fundamenta Mathematicae* que se titula "Sur la séparabilité des ensembles au moyen des ensembles projectifs"

El libro *Les ensembles projectifes et analytiques* de Sierpiński fue publicado en un año que no corresponde a lo que se denomina el periodo de la teoría descriptiva de conjuntos clásica, pero las temáticas que presenta corresponden a esa época. Su contenido es el siguiente:

Los conjuntos proyectivos:
Introducción
1. Conjuntos abiertos 2. Operaciones elementales 3. Conjuntos proyectivos 4. Clases de conjuntos proyectivos 5. Conjuntos universales 6. Un conjunto abierto universal 7. Conjuntos proyectivos universales 8. La existencia de conjuntos proyectivos de toda clase 9. Construcción de un conjunto no proyectivo 10. Proyección e imagen continua 11. Proyecciones biunívocas 12. Proyección y suma 13. Las operaciones lógicas y los conjuntos proyectivos 14. Propiedades de los conjuntos proyectivos 15. Los conjuntos proyectivos y la criba de Luzin 16. Los conjuntos proyectivos en los espacios métricos

Los conjuntos analíticos
Introducción
17. Conjuntos analíticos como núcleos de sistemas determinantes 18. Operación A 19. Operaciones σ y γ 20. Operación B 21. Conjuntos analíticos como proyecciones de conjuntos G_δ 22. Conjuntos analíticos como conjuntos de valores de funciones continuas en más de un lado, respectivamente discontinuas 23. Conjuntos borelianos 24. Descomposición de conjuntos analíticos en una suma y un producto de $\aleph_1$ conjuntos borelianos 25. Potencias de conjuntos analíticos y de sus complementarios 26. Conjuntos analíticos que no son B medibles 27. Teorema de Suslin 28. Teorema de unicidad de Luzin 29. Las clases de funciones y de sus imágenes geométricas 30. Uniformización de conjuntos planos 31. Operación de la criba 32. Operación de la criba generalizada 33. Cribas cerradas 34. Cribas cerradas y las funciones analíticas de una sucesión infinita de conjuntos 35. Cribas cerradas en los espacios métricos 36. Cribas borelianas y analíticas 37. Conjuntos cribados de E. Sélivanowski 38. Cribas funcionales 39. Los conjuntos analíticos y los límites topológicos de conjuntos 40. Conjuntos analíticos en los espacios métricos no separables 41. Funciones analíticas positivas y operaciones de Hausdorff 42. Problemas que llevan a conjuntos analíticos 43. Elección efectiva de un punto en un complementario analítico

El libro se compone de dos partes, la primera trata sobre los conjuntos proyectivos, que consta de 16 apartados en 27 páginas; mientras que la segunda parte trata sobre los conjuntos analíticos, y tiene 27 apartados en 50 páginas. Lo cual muestra que aunque los conjuntos analíticos son solo una parte de la totalidad de los proyectivos, las investigaciones hasta ese momento no habían sobrepasado ese primer nivel de la escala proyectiva.

Es una tendencia en las presentaciones modernas de la teoría descriptiva de conjuntos hacer una presentación como la de este libro, que consiste en abordar primero los conjuntos proyectivos y luego particularizar en los analíticos, mostrando los borelianos como una caso particular de los analíticos. En ese sentido, el libro [Luzin, 1930] presenta sus temas de una forma más acorde con la construcción histórica de la teoría descriptiva clásica, es decir presentando primero los borelianos, luego los analíticos y finalmente los proyectivos.

Los trabajos de Sierpiński en teoría descriptiva de conjuntos no acogen el lenguaje lógico en el que se relaciona las principales operaciones lógicas con las operaciones entre los conjuntos proyectivos[11] que se propuso en [Kuratowski y Tarski, 1931][12] y [Kuratowski, 1931]. En el libro en cuestión solo se dedica un apartado (el 13) a la lógica.

Sobre las propiedades de los conjuntos proyectivos (apartado 14), habla de la potencia, la medida y la separación unilateral (previo a este último enuncia teoremas de reducción). Estos problemas se relacionan con dos de las tres propiedades de regularidad (ver apartado 6.2.1): el primero con la propiedad del conjunto perfecto, el segundo con ser Lebesgue medible, el tercero no es incluído por Kanamori como una de las propiedades de regularidad. Así que para Sierpiński, la propiedad de Baire parece no tener la relevancia de las otras dos.

[11] α' (operación complemento de un conjunto) designa la negación de α
$\alpha + \beta$ (unión entre conjuntos) es la disyunción "α o β "
$\alpha.\beta$ (intersección entre conjuntos) es la conjunción "α y β "
Si $\varphi(x)$ designa una función proposicional,$\Sigma_x \varphi(x)$ quiere decir que "existe un x, tal que $\varphi(x)$"(el operador existencial se relaciona con la operación proyección de un conjunto); $\prod_x \varphi(x)$ quiere decir que "para todo x, se tiene $\varphi(x)$".

[12] Del que se presenta un resumen en la página 180.

Sierpiński hace su exposición para $\mathbb{R}^n$, a diferencia de las presentaciones de los libros de Luzin y Kuratowski.[13] El primero hace su presentación tomando como base el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales[14] y Kuratowski es mas moderno en sus presentaciones y trabaja la jerarquía proyectiva en espacios polacos. Aunque el último apartado de la primera parte (el 16) es para conjuntos proyectivos en los espaciós métricos, completos y separables (espacios polacos).

Del apartado 9, donde se construye un conjunto no proyectivo, se reafirma que Sierpiński asume la jerarquía proyectiva tomando como índices los números naturales, sin embargo dice que asumiendo la jerarquía ampliada, es decir con índices ordinales de la primera y de la segunda clase de los transfinitos, también se puede demostrar la existencia de un conjunto no proyectivo, para ello se hace análogamente a como se demuestra la existencia de un conjunto no boreliano (ya que los borelianos admiten, bajo la clasificación de Baire - De La Vallée Poussin, una jerarquía con índices ordinales de la segunda clase).

Los conjuntos analíticos los presenta tal como Suslin llegó a ellos. Empezando por los conjuntos elementales (segmentos, rectángulos, etc) que al operarlos bajo una cantidad a lo más numerable de intersecciones o uniones generan los borelianos. Entre los borelianos destaca algunas clase de conjuntos por su orden de complejidad, primero los elementales (que ya fueron nombrados), luego las uniones a lo más numerables de conjuntos elementales, luego las intersecciones a lo más numerables de estos últimos. A cada una de estas clases de conjuntos aplica la operación proyección (que se define en la página 211) para luego determinar que en esas primeras clases de conjuntos puede conmutar la proyección con las uniones y con las intersecciones. Seguido a ello y basado en las operaciones unión y proyección define lo que es un sistema determinante, que se define en la página 211, para introducir inmediatamente los conjuntos analíticos denominándolos *núcleos de los sistemas determinantes* formados de segmentos (o rectángulos en el plano).

Sierpiński dedica los apartados 21 y 22 a mostrar formas de obtener los conjuntos analíticos. Luego define los conjuntos borelianos con el propósito de

[13]Aunque en [Sierpiński, 1956], la presentación de los conjuntos proyectivos se hace al modo como lo presenta Kuratowski en su libro expuesto anteriormente. Cabe decir que ambos libros son dedicados a la topología.

[14]Sobre esta presentación en Luzin se trata el apartado 6.3.1.

abordar la descomposición de los conjuntos analíticos en uniones e intersecciones de $\aleph_1$ borelianos.

Respecto a las propiedades de regularidad en los analíticos, es de notar que ni la propiedad de Baire ni la medida de Lebesgue se abordan en ningún apartado, mientras que sobre la propiedad del conjunto perfecto está el apartado 26 (potencia de conjuntos analíticos y sus complementarios). Eso muestra que para Sierpiński lo que Kanamori denomina como propiedades de regularidad no tiene un papel tan importante, como por ejemplo lo tiene la operación criba, a la cual dedica seis apartados (desde el 31 hasta el 36).

Cabe decir que los temas de teoría descriptiva de conjuntos clásica en un texto actual, como [Moschovakis, 2009] o [Kechris, 1995] se notan bastante reducidos en comparación a éstos que se han presentado, debido a que las herramientas posteriores a la "época clásica "pueden ocupar el ochenta por ciento del contenido de estos textos.

De los libros vistos, los dos primeros tienen un propósito que no es el de abordar como tema central los temas de la teoría descriptiva de conjuntos, más bien su centro de interés es las estructuras topológicas de las nuevas clases de conjuntos. Los libros de Luzin y Sierpiński si son manuales de teoría descriptiva, en ellos la topología es importante, pero no es el eje de estos textos, ya que estudian con bastante más detalle que los otros textos, los temas sobre existencia de las distintas clases de conjuntos.

6.2. Orígenes de la teoría descriptiva de conjuntos

Sobre el origen de la teoría descriptiva de conjuntos hay tres momentos que los historiadores resaltan:

- Las primeras nociones en teoría descriptiva de conjuntos, que estaban en la clasificación de funciones de Baire en la tesis [Baire, 1899].

- La publicación de [Lebesgue, 1905], donde se estudió a profundidad las nociones de la tesis de Baire.

- El nacimiento de la teoría de conjuntos analíticos en 1916, cuando Suslin detecta un error en la memoria de Lebesgue.

A parte de estos momentos, se puede agregar las publicaciones [Cantor, 1884], [Cantor, 1883] y [Bendixson, 1883] entre los años 1883 y 1884, como un germen en la teoría descriptiva de conjuntos, ya que en éstas se hace el primer uso de la propiedad del conjunto perfecto[15], que es una de las tres propiedades de regularidad que a partir de cierto momento pasan a ser problemas de primera línea en la agenda de la teoría descriptiva de conjuntos.

Otro momento que puede tomarse como importante es el de la publicación del libro [Borel, 1898], en el que se definen los conjuntos borelianos. Cabe decir que aunque está implícita la idea de estudiar conjuntos definibles a partir de ciertas operaciones, no hay aún una propuesta de jerarquía constructiva, que es uno de los pilares de la teoría descriptiva, apesar de ello [Kanovei y Lyubetsky, 2003] incluye el libro de Borel, junto a la tesis [Baire, 1899] y la memoria [Lebesgue, 1905], como los documentos con los que inicia la teoría descriptiva de conjuntos.

6.2.1. Propiedades de regularidad

La verificación de las propiedades de regularidad, como se denominan en [Kanamori, 1995], llegó a ser un problema central de la teoría descriptiva de conjuntos. En gran parte de este capítulo se hará mención a éstas, pero teniendo en cuenta que aquí se plantea que la teoría descriptiva de conjuntos tiene como propósito el estudio de los conjuntos definibles, se analizará tal afirmación.

Desde 1883 se puede ubicar un germen de la teoría descriptiva de conjuntos, concretamente en las publicaciones [Cantor, 1884], [Cantor, 1883] y [Bendixson, 1883]. En estos artículos se enuncia algunos resultados sobre conjuntos perfectos, cerrados y derivados y se usa por primera vez una de las “propiedades de regularidad”.

[15] Esta propiedad se define en el apartado 6.2.1.

Cantor y Bendixson en sus mencionadas publicaciones de 1883 y 1884 no tienen aún la intención de abordar la idea central de lo que se ha aceptado como teoría descriptiva de conjuntos, ya que no se ocupan de estudiar los conjuntos definibles ni en jerarquizar las clases de conjuntos, sino que buscan dar respuesta parcial a la hipótesis del continuo.

Estas son: la propiedad de ser Lebesgue, la propiedad de Baire y la propiedad del conjunto perfecto.

Propiedad de ser Lebesgue Medible.

Esta propiedad fue establecida en [Lebesgue, 1902]. Para definirla se necesita algunos conceptos como medida exterior y medida interior. La medida exterior $m_e(E)$ de un conjunto acotado E es la mayor cota inferior de las medidas de todos los conjuntos abiertos acotados que contienen al conjunto E:

$$m_e(E) = \inf_{E \subset G}\{mG/\ G \text{ abierto}\}$$

La medida interior $m_i(E)$ de un conjunto acotado E es la menor cota superior de las medidas de todos los conjuntos cerrados contenidos en E:

$$m_i(E) = \sup_{F \subset E}\{mF/\ F \text{ cerrado}\}$$

Un conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}$ se dice *Lebesgue medible* si:

$$m_e(E) = m_i(E)$$

Propiedad de Baire.

Esta propiedad surge del concepto de conjuntos de primera y de segunda categoría, en [Baire, 1899]. Se dice que $E \subset R$ es de *primera categoría* si existe una sucesión $\{E_n\}$ de conjuntos diseminados (conjuntos que no son densos en ninguna parte), tal que para todo $x \in E$, existe n tal que $x \in E_n$. En otro caso, se dice que E es de *segunda categoría.*

A partir de esta definición, Baire estableció el denominado teorema de categoría de Baire que dice que en $\mathbb{R}$, la unión de conjuntos numerables, cada uno de primera categoría, es también de primera categoría. De este teorema se puede deducir que $\mathbb{R}$ es de segunda categoría.

Las investigaciones de Baire sugirieron la propiedad básica siguiente: $E \subset \mathbb{R}$ satisface la *propiedad de Baire* si tiene una diferencia simétrica de primera categoría con algún conjunto abierto.

Propiedad del conjunto perfecto.

El estudio de conjuntos derivados [16] llevó a Cantor a descubrir una nueva noción topológica, la de *conjunto perfecto*. Un conjunto P es perfecto si $P = P'$, donde P' es el conjunto de puntos de acumulación de P. En [Ferreirós, 1999, pp. 205-208] se muestra la idea detrás del teorema de Cantor-Bendixson, donde Cantor llega a mostrar que dado un conjunto derivado P' este se puede descomponer de la siguiente forma

$$P' = R \cup S$$

donde S es un conjunto perfecto y R es numerable. En [Cantor, 1883, p. 193], se denominó a R como conunto reducible, esto significa que $R^{\alpha} = \emptyset$ para algún ordinal α, pero no es cierto en general. El sueco Ivar Otto Bendixson, alumno de Gösta Mittag-Leffler señaló el error y demostró en [Bendixson, 1883] que el resultado correcto es el siguiente: Existe un α tal que $R \cap R^{\alpha} = \emptyset$.

$E \subset \mathbb{R}$ satisface la *propiedad del conjunto perfecto* si es contable o contiene un subconjunto perfecto.

La propiedad del conjuntos perfecto es la primera propiedad de regularidad que surge, y lo hace en el marco de determinar la validez o falsedad de la hipótesis del continuo. Esta hipótesis dice que todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ o es numerable o tiene la potencia del continuo.

Al no haber una respuesta inmediata a la veracidad o falsedad de la hipótesis del continuo, Cantor se propuso abordar este problema tomando desde las clases de conjuntos más sencillos, progresivamente hasta los más complejos.[17]

[16] El derivado de un conjunto P se denota por P', y es el conjunto de punto de acumulación de P. Una equivalencia en $\mathbb{R}$ sería: $E \subset \mathbb{R}$ es perfecto si es no vacío, cerrado y no contiene puntos aislados.

[17] Otras estrategias para abordar el problema de la hipótesis del continuo se pueden ver en los artículos de W. Hugh Woodin: "The Continuum Hypothesis, I-II "*Notices of the American Mathematical Society*, 48 (2001), pp. 567 - 576, 681 - 690.

Por ejemplo, los intervalos abiertos se biyectan con $\mathbb{R}$, y de forma sencilla se puede mostrar que los conjuntos abiertos infinitos son biyectables con $\mathbb{R}$, es por ello que esa clase de conjuntos satisface la hipótesis del continuo.

Los conjuntos cerrados son más complejos. Por ejemplo $\mathbb{Z}$ es cerrado y numerable, mientras que todo intervalo cerrado es biyectable con $\mathbb{R}$, por ello esta clase de conjuntos debía ser abordada para determinar si en ella existía un conjunto infinito que no fuera biyectable ni con $\mathbb{N}$ ni con $\mathbb{R}$.

De los conjuntos cerrados, Cantor abordó los llamados conjuntos perfectos, que son aquellos conjuntos, distintos del vacío, que no tienen puntos aislados. Cantor demostró que todo conjunto perfecto (excepto el vacío) es biyectable con $\mathbb{R}$. Seguido a ello, en 1883, Bendixson demostró que todo cerrado puede descomponerse como unión de un cerrado perfecto (o vacío) y de un conjunto numerable. Por lo tanto, ningún cerrado podía servir de contraejemplo a la hipótesis del continuo.

Cantor y Bendixson apuntan en sus publicaciones a dar respuesta parcial a la hipótesis del continuo, no se interesan aún por el estudio de objetos definibles. Así, es muy prematuro aún decir que es estos autores hay un propósito de hacer teoría descriptiva, sin embargo, la propuesta de Cantor de buscar respuesta a la hipótesis del continuo en clases de conjuntos de cada vez mayor grado de complejidad, puede ser visto como un germen de que hay clase de conjuntos con distintos grados de complejidad, y los cuales deben ser estudiados empezando con los más sencillos e ir avanzando según el grado de complejidad.

6.2.2. Borelianos y clases de Baire

En la línea de los temas que motivaron la emergencia de la teoría descriptiva de conjuntos, después de este último resultado, conocido como el teorema de Cantor -Bendixson, hay más de una década en la que no hay resultados. De hecho se tuvo que esperar hasta 1898 en que la escuela de analistas franceses, en particular Emile Borel, propusiera una nueva clase de conjuntos, que se conocen como borelianos (o B medibles), los cuales serían los siguientes en grado de complejidad y que serían los siguientes para determinar si en ellos se satisface o no la hipótesis del continuo. En *Leçons sur la theorie des fonctions* [Borel, 1898], partiendo de que la medida del intervalo $[0, 1]$ es 1, se describe las condiciones para una "medida útil" la cual es una función, denotada por m, tal que:

1. $mA \geq 0$ para todo A.

2. Si $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo par de números $i, j \in \mathbb{N}$ entonces
$$m \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} mA_n.$$

3. Si $D \subseteq C$ entonces $m(C - D) = mC - mD$.

4. Si $mA > 0$ entonces A no es numerable.

A partir de ahí, Borel amplió el dominio de los conjuntos borelianos contenidos en $[0, 1]$. El universo de los conjuntos borelianos está determinado a partir de los intervalos y las operaciones de uniones finitas, uniones numerables y sus complementos.

El capítulo III de [Borel, 1898] se ocupa del estudio de conjuntos perfectos y los conjuntos medibles. En particular establece propiedades generales para los conjuntos perfectos (iniciados anteriormente por Cantor) y diseminados, tipo conjunto triádico de Cantor[18].

[18]Un conjunto se dice diseminado si no es denso en ninguna parte. Como ejemplo de un conjunto perfecto y diseminado se tiene el conjunto triádico de Cantor. Para construirlo, se sigue el procedimiento de hacer una partición del intervalo $[0, 1]$ de la siguiente forma, $\{[0, \frac{1}{3}], (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), [\frac{2}{3}, 1]\}$ y extraer el intervalo de la mitad. A los intervalos restantes, $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$ se les hace una partición similar y se excluyen los subintervalos del centro. Así, el proceso sigue de esa forma, indefinidamente. Es decir, se define la sucesión de conjuntos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$
$C_2 = [0, \frac{1}{3^2}] \cup [\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}] \cup [\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}] \cup [\frac{8}{3^2}, 1]$
$C_3 = [0, \frac{1}{3^3}] \cup [\frac{2}{3^3}, \frac{3}{3^3}] \cup [\frac{6}{3^3}, \frac{7}{3^3}] \cup [\frac{8}{3^3}, \frac{9}{3^3}] \cup [\frac{18}{3^3}, \frac{19}{3^3}] \cup [\frac{20}{3^3}, \frac{21}{3^3}] \cup [\frac{24}{3^3}, \frac{25}{3^3}] \cup [\frac{26}{3^3}, 1]$
$\vdots$
$C_n = [0, \frac{1}{3^n}] \cup [\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}] \cup [\frac{6}{3^n}, \frac{7}{3^n}] \cup [\frac{8}{3^n}, \frac{9}{3^n}] \cup [\frac{18}{3^n}, \frac{19}{3^n}] \cup [\frac{20}{3^n}, \frac{21}{3^n}] \cup [\frac{24}{3^n}, \frac{25}{3^n}] \cup [\frac{26}{3^n}, \frac{27}{3^n}] \cup \ldots \cup [\frac{3^n-1}{3^n}, 1]$
$\vdots$

Borel demuestra, por un lado, que los conjuntos perfectos y acotados son borelianos; y de otro lado, que la potencia del conjunto formado por los subconjuntos del intervalo $[0,1]$ es mayor que la potencia de $\mathbb{R}$. Dado que el conjunto de los borelianos es equipotente con $\mathbb{R}$, se tiene que el conjunto de los borelianos tiene una cardinalidad menor que $\wp(\mathbb{R})$, el conjunto de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

De otro lado,la tesis [Baire, 1899] se basó en la convergencia de series para incorporar una jerarquía de funciones de variable real $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

C_0 : *Clase* 0, constituida por las funciones continuas.

C_1 : *Clase* 1, conformada por las funciones que no pertenecen a C_0 y que se pueden ver como límite de sucesiones de funciones pertenecientes a C_0.

C_2 : *Clase* 2, conformada por las funciones que no pertenecen ni a C_0 ni a C_1, y que se pueden ver como límite de sucesiones de funciones de C_0 y C_1.

$\vdots$

C_n : *Clase* n, conformada por las funciones que no pertenecen a una clase anterior a C_n, y que se pueden ver como límite de sucesiones de las clases anteriores.

$\vdots$

Baire define las *clases de funciones* de orden trasfinito: si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones tal que para todo n, existe i tal que $f_n \in C_i$; además, $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, donde $f_n \notin C_i$ para todo i, entonces se tiene que $f \in C_\omega$, donde ω es el primer ordinal trasfinito de la teoría cantoriana. De la misma forma se definen $C_{\omega+1}$,$C_{\omega+2}$,...$C_{2\omega}$,... Cabe decir, en este punto, que Emile Borel, René Baire y Henri Lebesgue, acogieron el modelo de definición de inducción transfinita en el que hicieron uso de los ordinales transfinitos de

Se define el conjunto triádico de Cantor de la siguiente manera:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

Tomado de [Chaves, 2006].

Cantor de hasta segunda clase (o para casos numerables), no como números sino como índices cuando la plantilla de los números naturales no era suficiente.

El método de generación de clases de Baire contiene un principio de limitación, tal como lo enunció el propio Baire:

Teorema 1 *Sea*

$$E = \{f/f \in C_\alpha : \ \alpha \textit{ es un ordinal de la primera o segunda clase}\},$$

si una sucesión de funciones pertenecientes al conjunto E tiene un límite, esta función límite también pertenece a E.

Baire conjetura que su clasificación de funciones no es meramente nominal, es decir, que existen funciones de cada una de estas clases. Esto es lo que en [Chaves, 2006] se denomina *conjetura de Baire*. El sólo prueba, y de manera constructiva, la existencia de funciones de las primeras cuatro clases, es decir, hasta C_3.

Como ejemplo de una función de clase C_0 sería cualquier función continua. Como ejemplo de una función de clase C_1 puede ser una función con un punto de discontinuidad, tal como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in [0,1) \end{cases}$$

Como ejemplo de una función de clase C_2 está la función característica de los racionales

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Para funciones de clase C_3, se puede dar una construcción: si se reduce en fracción continua[19] un número irracional x comprendido entre 0 y 1:

$$x = \cfrac{1}{\alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{a_2 + ...}}}$$

[19]En el apartado 2.3 de [Chaves, 2006] se define la representación en fracciones continuas.

La función f que satisface lo siguiente:[20]

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha_n < \alpha_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

pertenece a C_3.

El problema sobre la existencia de funciones de todas las clases de Baire sería continuado y complementado por Lebesgue, quien en [Lebesgue, 1903] abordó el problema de representación de funciones, pero fue en su memoria [Lebesgue, 1905] sintetizó sus desarrollos. Aunque en esta memoria el objeto de estudio son las funciones, es interesante para la teoría descriptiva de conjuntos, porque muestra una jerarquía transfinita de conjuntos borelianos que es el primer eslabón de la jerarquía proyectiva de conjuntos (siendo esta jerarquía proyectiva la base de conjuntos que tratará la teoría descriptiva de conjuntos). A diferencia de las clase de Baire, en la jerarquía de borelianos la clase 2 incluye a la clase 1, la clase 3 a las clases 2 y 1, y así sucesivamente.[21]

Cabe decir que Lebesgue acogió técnicas de Baire para abordar el problema de existencia de las clases de Baire, pero para ello utilizó el concepto de *función representable analíticamente*, que denota a las funciones que se pueden obtener empleando las operaciones suma, producto y paso al límite, tomando como punto de partida los polinomios. Es decir, son aquellas cuyo origen último se encuentra en las series de potencias.

[20] Está función tiene como dominio el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$, ya que los ejemplos que se proponen [Luzin, 1930] tienen como dominio fundamental este subconjunto de $\mathbb{R}$.

[21] Una jerarquía de conjuntos borelianos que no funciona como cadena de contenencias, es decir, donde todas las clases entre si son disjuntas, y que es equivalente a las clases de Baire, es la que en [Luzin, 1930] se presenta como las clases de Baire - De La Vallée Poussin, y que ha tomado la base de *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d' Ensemble, Classes de Baire.* Paris, Gauthier-Villars, 1916 del matemático belga Charles De la Vallée Poussin, a la que Luzin modificó excluyendo los puntos racionales.

A una función f cuyo conjunto de puntos de continuidad es E, y que pertenece a la jerarquía de Baire, se le asocia la función característica χ_E. Se puede demostrar que las funciones f y χ_E pertenecen a la misma clase C_α, así el conjunto E pertenecerá a la clase K_α en la jerarquía de Baire-De La Vallée Poisson.

De otro lado, la potencia de todos los conjuntos Lebesgue medibles[22] es la misma potencia que la de todos los subconjuntos de $[0, 1]$, por ello se tiene que existen conjuntos Lebesgue medibles que no son Borel medibles. Cuestión que a Lebesgue le permitió visualizar la manera de definir funciones que no pertenezcan a las clases de Baire; para ello debía buscar la forma de relacionar las funciones de Baire con los borelianos.

Sabiendo que las funciones que pertenecen a las clases de Baire son funciones expresables analíticamente, Lebesgue se propuso establecer una correspondencia entre las funciones expresables analíticamente y los conjuntos borelianos, y para ello trabajó con las preimágenes de funciones restringidas a intervalos, esto es:

$$E(a \leq f \leq b) = f^{-1}[a, b] = \{x/a \leq f(x) \leq b\}$$

$$E(a < f < b) = f^{-1}(a, b) = \{x/a < f(x) < b\}$$

$$E(a < f) = f^{-1}(a, \infty) = \{x/a < f(x)\}$$

Teniendo en cuenta la clase a la que pertenece f, Lebesgue definió la clase de los conjuntos preimagen, obteniendo una jerarquía de conjuntos que coinciden con los borelianos. Con ello definió las funciones B-medibles:

Definición 1 *Una función de variable real f es B-medible, si para a y b cualesquiera, $f^{-1}([a, b])$, $f^{-1}((a, b))$ y $f^{-1}((a, \infty))$ son borelianos.*

Lebesgue también demostró la equipotencia entre los borelianos y las funciones B-medibles, y extendió la noción de medida de Borel, permitiendo demostrar la existencia de conjuntos que no son Borelianos y que son Lebesgue medibles, así, estableció la existencia de funciones que no pertenecen a ninguna de las clases de Baire. En 6.1 se muestra las equipotencias determinadas por Lebesgue.

$$\begin{tikzcd}
\text{Funciones de Baire} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{Funciones B-medibles} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{funciones representables analíticamente} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{Conjuntos borelianos}
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

[22] Ver definción de conjunto Lebesgue medible en el apartado 6.2.1.

Esta correspondencia entre funciones Baire y conjuntos borelianos marca un aspecto importante en la teoría descriptiva de conjuntos, ya que esta se muestra como un híbrido de distintos temas entre los que se encuentran la teoría de funciones de variable real y la teoría de conjuntos. Así, un problema como la conjetura de Baire que pertenece a la teoría de funciones tiene un equivalente en la teoría de conjuntos. En el apartado de conclusiones se tocará el tema de los problemas de la teoría descriptiva de conjuntos y su relación con la teoría de funciones.

La jerarquía para los borelianos que Lebesgue introdujo se describe de la siguiente forma:

En la base de esta jerarquía está la clase Σ^0_1 de los conjuntos abiertos y la clase Π^0_1 de los conjuntos cerrados (sus complementarios). En el segundo nivel están las clases Σ^0_2 y Π^0_2, la primera de las cuales contiene a las uniones numerables de cerrados (conjuntos también se denominan F_σ) y la segunda a sus complementarios, que son también las intersecciones numerables de abiertos (o conjuntos G_δ). En general, para cada ordinal numerable α, las clases Σ^0_α y Π^0_α constan, respectivamente, de las uniones e intersecciones numerables de conjuntos de las clases precedentes Π^0_β y Σ^0_β, respectivamente. Lo que en terminología moderna se vería como lo representa la figura 6.1.[23]

Relativo a las propiedades de regularidad en los borelianos, fácilmente se comprueba que los borelianos satisfacen la propiedad de Baire, y en [Lebesgue, 1902] se define la medida de Lebesgue y comprobándose que los borelianos son Lebesgue medibles. La propiedad del conjunto perfecto tarda unos años más en verificarse, sin embargo hay un resultado parcial sobre ello en 1903 a través del inglés William Young (1863-1942), quien demostró que los conjuntos G_δ (o Π^0_1, en la notación que se ha introducido) satisfacen la propiedad del conjunto perfecto.[24] En la memoria de Lebesgue, la verificación de estas propiedades no es el aspecto central, pero ello se conjuga con los problemas de existencia de funciones de todas las clases de Baire y con la existencia de funciones que no pertenecen a estas clases.

[23] $\Delta^0_n = \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n$, así, por ejemplo Δ^0_0 está conformada por los conjuntos que son abiertos y cerrados. Cabe decir que Lebesgue no define estos conjuntos Δ.

[24] Young. Willian H., 1903. "Zur Lehre der nicht abgeschlossenen Punktmengen", *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse 55*, pp. 287-293.

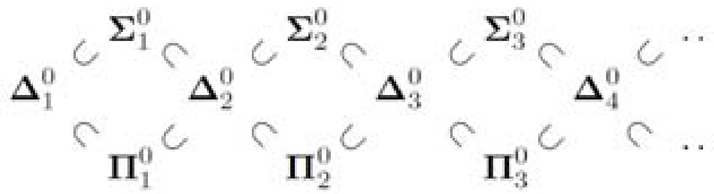

Figura 6.1: Jeraquía boreliana en notación moderna

En [Lebesgue, 1905, pp. 191-192] se usó un resultado erróneo que plantea que la proyección de borelianos es también un conjunto boreliano, el cual no afectaba los resultados principales de esta memoria: ninguna de las clases de Baire es vacía y la construcción una función que escapa a las clases de Baire. Este error fue detectado en 1916 por Michael Suslin, por entonces estudiante de Nikolai Luzin en la Universidad de Moscú, y la detección de este error dio paso al descubrimiento de los conjuntos analíticos.

6.2.3. Los conjuntos analíticos y los coanalíticos

En la Universidad de Moscú, a partir de 1914 Luzin dirigió un seminario en el que una de las temáticas principales era “teoría descriptiva de funciones”,[25] al cual asistía Sierpiński. Uno de los asistentes y además alumno de Luzin, Pavel Alexandroff (1896-1982), demostró que los conjuntos borelianos satisfacen la hipótesis del continuo, y expuso en el seminario este resultado el 13 de octubre 1915 [Graham y Kantor, 2009, p. 118]. La demostración se hizo pública en [Alexandroff, 1916], quedando completa la verificación de las propiedades de

[25]En el apartado conclusiones se recordará este hecho para señalar que el propósito de varias de las investigaciones sobre teoría descriptiva de conjuntos se enmarcaban más en el propósito de aplicarse a teoría de funciones que en el propósito de investigarse en teoría de conjuntos general.

regularidad para la clase de los borelianos, ya que se hizo a través del siguiente resultado:

Teorema 2 *Todo conjunto boreliano satisface la propiedad del conjunto perfecto.*[26]

Para demostrar este teorema fue necesario una nueva manera de abordar los conjuntos borelianos respecto a las sucesiones de ordinales transfinitos. En esencia, Alexandroff introdujo la idea de una operación (que fue denominada por Suslin como *operación A*) que sirvió para demostrar que los borelianos pueden construirse a partir de conjuntos cerrados, usando una forma más sencilla que la de Lebesgue, quien usaba sucesiones transfinitos, lo cual hasta ese momento se consideraba inevitable. Esa operación, que también se encuentra esbozada en el artículo [Hausdorff, 1916], se presentó formalmente en el artículo [Suslin, 1917].[27]

Luego de esto, Luzin interesado en la hipótesis de continuo, propuso a Alexandroff determinar si todos los conjuntos construidos con su nueva operación eran borelianos, quizás ello pensando en la estrategia de Cantor de ir comprobando la veracidad de esta hipótesis en clase de conjuntos cada vez mas complejos. Este último no pudo resolver este problema después de algunos meses, por lo que en [Graham y Kantor, 2009, p. 118] se asegura que Alexandroff se enfadó con Luzin y ello fue motivo para posteriores dificultades entre ellos.

Por otro lado, Mikhail Yakovlevich Suslin (1894-1919), otro alumno de Luzin de los que asistía a su seminario y quien leía la memoria [Lebesgue, 1905], detectó en ésta un error que estaba inmerso en la demostración del siguiente enunciado: *si una función representable analíticamente tiene valores distintos, su función inversa también es representable analíticamente.* Para la

[26]Cabe decir que de manera independiente, Hausdorff también estableció este resultado en [Hausdorff, 1916] después de obtener un resultado parcial en [Hausdorff, 1914, p. 465].

[27]En el artículo [Kuratowski, 1922], que se presenta en la página 177, se plantea que cierto tipo de teoremas, de distintas aplicaciones de la teoría de conjuntos, pueden ser demostrados sin necesidad de recurrir a los números transfinitos. Kuratowski no enuncia este resultado, pero si el procedimiento para obtener los conjuntos analíticos (o conjuntos A de M. Suslin, como los llama Kuratowski).

demostración de ese teorema Lebesgue usó el siguiente lema: *la proyección*[28] *sobre una recta, de la intersección infinita descendente de conjuntos*[29] *planos es la intersección de las proyecciones de esos conjuntos.* El lema fue asumido por Lebesgue sin demostrarlo.

En [Kuratowski, 1980, p. 69] se dice que Lebesgue pudo haber estado inducido al error porque el lema es cierto para el caso de las uniones. Un contraejemplo para el caso de las intersecciones es el siguiente:

Sea $\{C_1, C_2, C_3, ...\}$ la sucesión de conjuntos de puntos de $\mathbb{R}^2$ tales que $C_n = \{(x, y) : x = 0 \text{ y } 0 < y < \frac{1}{n}\}$ es descendente. Se tiene que $C_1 \cap C_2 \cap C_3 ... = \emptyset$, por lo tanto la proyección de esta intersección también será vacía. Sin embargo, la proyección de cada C_n sobre el eje OX es el punto $(0, 0)$, así que la intersección de estas proyecciones no es vacío, ya que es el conjunto formado por un punto $(0, 0)$.

Suslin no solo constata la falsedad en el lema de Lebesgue, en [Suslin, 1917] estudia si los resultados que se apoyaban en el lema eran falsos o verdaderos. Entre los resultados erróneos estaba el que planteaba que la proyección sobre la recta de todo boreliano del plano es boreliano,[30] lo cual sirvió para que Luzin intuyera que más allá de los borelianos hay una nueva y vasta clase de conjuntos. Suslin construyó un ejemplo de un conjunto que no era boreliano, llamó a este nuevo tipo de conjuntos como A - *conjuntos*,[31] pero posteriormente han pasado a conocerse como *conjuntos analíticos*, lo que dio

[28] La *proyección* de $Y \subseteq \mathbb{R}^k$, se define de la siguiente forma:

$$pY = \{(x_1, x_2, ..., x_{k-1}) : \exists y \text{ donde } (x_1, x_2, ..., x_{k-1}, y) \in Y\}$$

[29] Una sucesión $\{C_1, C_2, C_3, ...\}$ de conjuntos es descendente si $C_1 \supset C_2 \supset C_3$ ...

[30] Los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}^2$, así como los de $\mathbb{R}^n$ se definen de manera análoga a como se definieron los borelianos de $\mathbb{R}$.

[31] Definamos la operación A y luego los A - *conjuntos*:

Un *sistema definido* es una familia $\{X_s\}_s$ de conjuntos indexados por sucesiones finitas s de números enteros. Se define $A(\{X_s\}_s)$, el resultado de aplicar la operación A sobre tal sistema de la siguiente forma:

$x \in A(\{X_s\}_s)$ si y solo si existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in X_{f/n}$.

Ahora $X \subseteq \mathbb{R}$ es un A - *conjunto* (o es un conjunto analítico), si y solo si $X = A(\{X_s\}_s)$ para algún sistema definido $X_s\}_s$ de conjuntos cerrados de números reales.

nacimiento a lo que se conoce como teoría de conjuntos analíticos.[32]

En [Suslin, 1917] se publicaron los siguientes resultados sobre la nueva clase de conjuntos:

- Todo boreliano es analítico.
- Un conjunto es boreliano si y sólo si tanto él como su complemento son analíticos.
- Existen $2^{\aleph_0}$ subconjuntos analíticos de $\mathbb{R}$.
- Existen conjuntos analíticos que no son borelianos.

En una nota de la misma publicación [Luzin, 1917], se enunció que los conjuntos analíticos satisfacen las tres propiedades de regularidad:

- Todo conjunto analítico es Lebesgue medible, satisface la propiedad de Baire y satisface la propiedad del conjunto perfecto.

Suslin solo tuvo una publicación, aquella de 1917. Ello debido a que murió de tifus en 1919, a la edad de 24 años.

Los resultados enunciados en [Suslin, 1917] y [Luzin, 1917] guiaron parte de las investigaciones de Luzin y de Sierpiński durante los años siguientes. En [Luzin y Sierpiński, 1918] y [Luzin y Sierpiński, 1923] se demostró dos de los resultados enunciados en el artículo de Suslin: todo boreliano es analítico y la existencia de analíticos no borelianos. Y en cuanto a las propiedades de regularidad, en [Luzin y Sierpiński, 1918] se demostró que los analíticos son Lebesgue medibles, la propiedad de Baire se demostró en [Luzin y Sierpiński, 1923] y la propiedad del conjunto perfecto fue demostrada en [Luzin, 1926]. En este útlimo artículo también se estableció un resultado importante que relaciona los analíticos con las operaciones unión e intersección en borelianos:

- Todo conjunto analítico se puede ver como la unión de $\aleph_1$ borelianos y como la intersección de $\aleph_1$ borelianos.

[32] Cabe decir que en [Hausdorff, 1927] se denomina a estos conjuntos como *conjuntos de Suslin*, y En la nota 7 de [Kanamori, 1995] se comenta que Alexandroff planteaba que el nombre de operación A, propuesto por Suslin, era un reconocimiento a él por haberla propuesto, y que el nombre de conjuntos analíticos empezó a ser usado por Luzin años después, y que el propio Luzin afirmaba que el nombre de A-conjuntos era una abreviación de conjuntos analíticos.

Relativo a los conjuntos analíticos y las propiedades de regularidad esto es lo más importante que sucedió al menos hasta la década de 1920.

Entre las obras que tratan la teoría de conjuntos analíticos durante el periodo Entreguerras, a parte de los mencionados [Hausdorff, 1927], [Luzin, 1930], [Kuratowski, 1933] están:

-H. Hahn, *Reelle Funktionen*, I Teil, Leipzig, 1932, V Kapitel, pp. 339-398: Die analytischen Mengen.

-K. Kunugui, "La thèorie des ensembles analytiques et les espaces abstraits", *Journ of the Faculty of Sciencie Hokkaïdo Imperial University*, sèrie I, vol. IV, pp. 1-40 (Sapporo 1935).

-N. Lusin (Luzin), "Mèmoire sur les ensembles analytiques et projectifs", *Recueil mathematique de la Societe Math. De Moscou*, t. 33, 1926, pp. 237-290).

-W. Sierpiński, *Funkeje przedstawialne analitycznie*, Lwów 1925, Chap. V, pp. 71-101 (en polaco).

-W. Sierpiński, *Zarys teorji mngosa*, t. II (*Topologja Ogolna*, Warszawa, 1928, S. 63-78, pp. 153-215) (en polaco).

-W. Sierpiński,*Introduction to general Topology*, (Toronto, University Press, 1934, pp. 135-190).[33]

-W. Sierpiński, *Lectiuni despre multimile analitice*, Cluj, 1937, pp. 1-16 (en Rumano).

-G. Steinbach, *Beiträge zur Mengenlehre* (Inaugural-Dissertation, Bonn, 1930, pp. 8-34).

Un paso en la ampliación de conceptos de la teoría descriptiva de conjuntos se dió en el mencionado artículo [Luzin y Sierpiński, 1923][34], ya que generó que

[33]Esta es la edición original de [Sierpiński, 1956].

[34]En el que los autores se proponen definir efectivamente una función no representable analíticamente que satisface la condición de Baire.

se cambiara el énfasis de las investigaciones hacia los *conjuntos coanalíticos* (que son los complementos de los conjuntos analíticos).[35] Así como se ha señalado la importancia en el paso de los conjuntos borelianos a los analíticos, también se debe resaltar la importancia del cambio de énfasis de los analíticos hacia los coanalíticos, ya que se extiende una práctica que se aplicaba en los borelianos, la de usar los complementos de determinadas clases de conjuntos para obtener nuevas clases. El descubrimiento de los analíticos aumentó el campo de investigación de los conjuntos definibles, a tal punto que se reconoce que hay una teoría de conjuntos analíticos, no ocurre así con los coanalíticos, sin embargo el que Luzin y Sierpiński se centraran en investigar esta nueva clase de conjuntos marcó un camino: investigar las propiedades estructurales de cada nueva clase de conjuntos obtenida al aplicar en forma alterna las operaciones proyección y complemento.

6.2.4. La jerarquía proyectiva

El siguiente avance conceptual ocurrió en 1925 al ser extendido el dominio de conjuntos que debían ser estudiados. Las publicaciones [Luzin, 1925a], [Luzin, 1925b], [Luzin, 1925c] y [Sierpiński, 1925c], presentan una jerarquía de conjuntos que tiene como primer escalón a los borelianos, y se obtiene iterando las operaciones proyección y complemento. En notación moderna se

[35] En [Lebesgue, 1905] se planteó un precedente para la representación de los coanalíticos en la demostración de la existencia de un conjunto Lebesgue medible que no es boreliano, la idea es que los coanalíticos pueden definirse en términos de la operación A, para ello supóngase que $Y \subseteq \mathbb{R}$ es coanalítico, es decir $Y = \mathbb{R} - X$ para algún $X = A(\{X_s\}_s)$, así que

$$x \in Y \text{si y solo si para todo} f : \omega \longrightarrow \omega \text{ existe } n \text{ tal que } x \notin X_{f/n}$$

Ahora dadas dos sucesiones finitas s_1 y s_2, se define $s_1 \prec s_2$ si s_2 es un segmento inicial propio de s_1. Donde, para todo $x \in \mathbb{R}$ se define

$$T_x = \{s/x \in X_t \text{ para todo segmento inicial } t \text{ de } s\}$$

. Por lo tanto

- $x \in Y$ si y solo si $\prec$ es una relación bien fundada sobre T_x

es decir, no existe una sucesión infinita descendente ... $\prec s_2 \prec s_1 \prec s_0$.

En [Kanamori, 1995, p. 248] y [Kanamori, 1996, p. 25] se comenta que a través de esta representación de los conjuntos coanalíticos, las relaciones bien fundadas entraron a hacer parte de las prácticas matemáticas.

describen los primeros niveles de la siguiente forma:

Para $E \subseteq \mathbb{R}^k$:
$E \in \Sigma^1_1$ si es analítico
$E \in \Pi^1_1$ si $\mathbb{R}^k - E \in \Sigma^1_1$. Estos son los coanalíticos.
En forma recursiva, para $n \in \mathbb{N}$:
$E \in \Sigma^1_n$ si $E = pY$ (proyección de Y),[36] para algún conjunto $Y \in \Pi^1_{n-1}$, y
$E \in \Pi^1_n$ si $\mathbb{R}^k - E \in \Sigma^1_n$.

De lo cual se genera una estructura como la de la figura 6.2.[37]

En la definición de conjunto proyectivo se puede reemplazar la operación proyección por una transformación continua de conjuntos (como se hace en [Kuratowski, 1933] en el capítulo dedicado a los conjuntos proyectivos), lo que permite tratar a los conjuntos proyectivos lineales sin necesidad de salir del espacio lineal, como se hace en [Sierpiński, 1925c]. En particular se puede definir la familia de conjuntos proyectivos lineales como la familia más pequeña de conjuntos lineales que que contiene los abiertos y es cerrada respecto al complemento y a la imagen de funciones continuas.

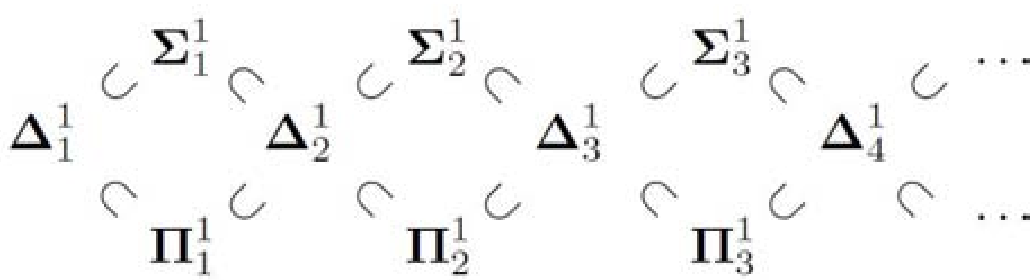

Figura 6.2: Jeraquía proyectiva en notación moderna

La notación usada de los Σ's,Π 's y Δ's para la jerarquía de borelianos como para la jerarquía proyectiva fue introducida en el artículo [Addison, 1959].

[36] La operación proyección de un conjunto se definió en la página 211.

[37] $\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$, así, por ejemplo$\Delta^1_0$ está conformada por los borelianos, que son los que satisfacen ser analíticos y coanalíticos a la vez. Estos conjuntos Δ's no fueron introducidos ni por Sierpiński ni por Luzin.

En la nota histórica 19 del primer capítulo de [Moschovakis, 2009, pág. 48] dice que los logicos aceptaron rápidamente esta notación,[38] sin embargo no ocurrió eso mismo con los especialistas en topología o en teoría de conjuntos que trabajaban en teoría descriptiva de conjuntos. Así y todo, esta notación acaba siendo la más aceptada.

Esta cadena ascendente de clases de conjuntos conforma la jerarquía proyectiva, y se dice que un conjunto es proyectivo si pertenece aΣ^1_n o Π^1_n, para algún $n \in \mathbb{N}$. En [Kuratowski, 1933, p. 360] se define la jerarquía proyectiva tomando $n \in \mathbb{N}$, pero también dice que que por medio de operaciones numerables (uniones e intersecciones denotadas como$\Sigma^{\infty}_{n=1}$ y $\Pi^{\infty}_{n=1}$ respectivamente) se puede extender a transfinitos ordinales menores que Ω, teniendo así una jerarquía similar a la de los borelianos.

Tanto Sierpiński como Luzin denotan la operación complemento con la letra C y la operación proyección con la letra P. Sierpiński inicia la presentación de las distintas clases proyectivas con los conjuntos abiertos, conjuntos G; los complementarios de éstos, CG los denomina cerrados o conjuntos F (*fermés*, en francés), luego aplicando P obtiene los PCG, que los denomina F_δ y al aplicar complemento a éstos obtiene los $CPCG$ que denomina G_δ; la proyección de estos últimos, es decir los $PCPCG$ son los analíticos oΣ^1_1.

En el capítulo 5 de [Luzin, 1930] se define la clase n así: un conjunto de puntos es un conjunto proyectivo de clase n si se puede poner de la forma $PCP...PE$ o bien $CPC...PE$, donde E es un boreliano de un dominio con un número cualquiera de dimensiones y donde la letra P, alternando con la letra C, se escribe exactamente n veces, y si eso es imposible cuando se reemplaza el entero positivo n por un número más pequeño.

Así, dado un conjunto E obtiene la siguiente notación para cada clase de conjuntos: los analíticos o conjuntos A los denota como PE, los coanalíticos o conjuntos CA como CPE, los Σ^1_2 (nombrados en otras partes como PCA)

[38]Esto tiene sentido con que el definir la jerarquía en términos de Σ's yΠ 's provenga de la introducción de conceptos de la lógica en la teoría descriptiva de conjuntos, y para ello fueron importantes los artículos [Kuratowski y Tarski, 1931] y [Kuratowski, 1931] publicados en *Fundamenta Mathematicae*. Estos artículos sirvieron para introducir un nuevo estilo de trabajo de la teoría descriptiva de conjuntos, que se volvió habitual después de la segunda guerra.

como $PCPE$, los Π^1_2 (nombrados también como $CPCA$) como $CPCPE$ y así sucesivamente. Cabe decir que esta notación lleva implícita la aplicación de índices finitos, y es en algo que Sierpiński, mas no Luzin, señala que puede haber una jerarquía extendida a los transfinitos de segunda clase, pero la demostración de la existencia de conjuntos de todas las clases proyectivas lo demuestran para el caso de los Σ's,Π 's con índice finito, pero esta demostración para el caso extendido Sierpiński no lo muestran, aunque Sierpiński dice que es posible.

Sobre la jerarquía proyectiva surgieron preguntas similares a las que se generaron sobre la jerarquía de borelianos, tales como si existen conjuntos de cada una de estas clases y si existen conjuntos que no pertenecen a esta jerarquía. Las respuestas fueron más rápidas que en el caso de los borelianos, en [Luzin, 1930] ya aparecen las demostraciones de ello, con el planteamiento de las respectivas discusiones sobre lo que significa existencia. Sobre ello se profundiza en el apartado 6.3. El otro tipo de preguntas alrededor de los conjuntos proyectivos tuvo que ver con la estructura de cada una de las nuevas clases de conjuntos, en esencia con las propiedades de regularidad. Sin embargo se presentaron dificultades, como que la propiedad del conjunto perfecto no se podía establecer para los conjuntos coanalíticos (losΠ^1_1), y tampoco era posible probar si los conjuntos proyectivos fueran Lebesgue medibles,[39] por lo cual en [Luzin, 1925b, p.1572] se planteó lo siguiente:

> Los esfuerzos que he hecho para resolver este problema me llevaron a este nada previsible resultado: existe una familia que admite una aplicación sobre el continuo de conjuntos efectivos, tal que no sabe y nunca se sabrá, si un conjunto cualquiera de esta familia (supuestamente no numerable) tiene la potencia del continuo, si es o no de tercera categoría,[40] o si es medible.

En [Luzin, 1925a], refiriéndose a estas dificultades, se plantea que se debe examinar detenidamente la legitimidad de los conjuntos proyectivos así como la existencia de algunos conjuntos no borelianos. Eso fue escrito doce años

[39] Luzin señaló el caso particular de losΣ^1_2 en [Luzin, 1925a].

[40] En la bibliografía onsultada no se ha encontrado referencia a conjuntos de tercera categoría, por lo que se puede deducir que es un error de escritura y se refiere a si es de primera o de segunda categoría, con el propósito de determinar si se satisface la propiedad de Baire.

antes que se descubriera métodos que permiten establecer la indecibilidad de los problemas.[41]

A pesar de encontrarse con este obstáculo, algunos resultados mas modestos que los de los años anteriores, se siguieron obteniendo. Es así como en [Sierpiński, 1925c, p. 242] se pudo llegar a lo siguiente:

- TodoΣ^1_2 se puede ver como la unión de $\aleph_1$ borelianos.

En [Sierpiński, 1928d] se demuestra la cerradura de todas estas clases bajo uniones contables e intersecciones.

El estudio de las propiedades de regularidad en las escalas proyectivas estaba detenido, sin embargo el texto clásico [Luzin, 1930] definió el problema general de la *uniformización* para conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$:

Definición 2

A es *uniformizado por* B *si* $B \subseteq A$ y $\forall x(\exists y(\langle x, y\rangle \in A) \leftrightarrow \exists! y(\langle x, y\rangle \in B))$.

En otras palabras, $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$ uniformiza A, respecto a la primera componente, si B tiene la misma proyección que A, pero, cada $x \in \mathbb{R}$ que sea proyección de un elemento de A es la proyección de un único elemento de B.

El axioma de elección implica que todo conjunto es uniformizable por uno de sus subconjuntos. Sin embargo interesaba estudiar la propiedad de ser uniformizado para las diferentes clases proyectivas. En ese sentido, Luzin planteó algunas condiciones con las que un conjunto analítico puede ser uniformizado por otro conjunto analítico. Pero en [Novikov, 1931] se demostró que hay un conjunto cerrado que no puede ser uniformizado por ningún conjunto analítico. En [Sierpiński, 1930b] surgió la pregunta si todo conjunto deΠ^1_1 podía ser uniformizado por un conjunto proyectivo, y en [Luzin y Novikov, 1935] se verificaba que si se podía para conjuntos que son al menosΣ^1_2. A partir de esto último, en [Kondô, 1937] y [Kondô, 1939] se demostró el siguiente resultado:

- Todo $A \subseteq \Pi^1_1$ de $\mathbb{R}^2$ puede ser uniformizado por un conjunto deΠ^1_1.

[41] Esta predicción se pondría en duda a partir de 1989 bajo el axioma de determinación proyectiva (APD). Lo cual se puede ampliar en: Martin, D. & Steel, J. (1989). "A proof of Projective Determinacy". *Journal of the American Mathematical Society*. 2, pp. 71-125.

Este resultado implica que, a través de proyecciones, todo conjunto deΣ^1_2 puede ser uniformizado por un conjunto deΣ^1_2, pero quedaba abierto el interrogante si todoΠ^1_2 podía ser uniformizado por un conjunto proyectivo.

6.3. Algunos aspectos técnicos y filosóficos de la obra de Luzin

Como se vio en 6.2 y más específicamente en 6.2.3, Nikolai Nikolaevich Luzin fue una figura esencial en la teoría descriptiva de conjuntos.[42] Es por ello que en este apartado se presenta algunos aspectos de Luzin que se relacionan directamente con esta teoría. Cabe decir que Luzin hizo varias reflexiones sobre aspectos filosóficos de las matemáticas, una muy buena reflexión se encuentra en [Luzin, 1928], donde habla de idealismo y realismo en los desarrollos recientes (por ese entonces) de la teoría de conjuntos, pero aquí no se tocará esos temas, solo algunos que tienen relación directa con la teoría descriptiva de conjuntos.

Petr Sergeevich Novikov y Lyudmila Vsevolodovna Keldysh, pupilos de Luzin, en el segundo volumen de *Luzin's Collected Works*[43], plantearon que en las publicaciones de Luzin sobre teoría descriptiva de conjuntos, se distinguen tres ciclos, que se describen a continuación.[44]

El primero corresponde las investigaciones sobre tipos concretos de conjuntos "definibles". De este primer ciclo se puede indicar cinco direcciones básicas, la primera es el estudio de los conjuntos analíticos descubiertos por Suslin, de los cual Luzin obtuvo importantes resultados, tales como los de haber demostrado las propiedades de regularidad (a recordar: la de Baire, la del conjunto perfecto y la de ser Lebesgue medible) y el teorema de separación.

La segunda dirección del primer ciclo estuvo marcada por la investigación sobre distintas clases de conjuntos planos (en otras terminología: funciones

[42]En el apartado 3.4.2 se da algunos datos biográficos de Luzin.

[43]N.N. Luzin.*Collected works. II*, Izdat. Akad Nauk SSSR, Moscow 1958.

[44]Para la descripción de estos ciclos se ha tomado como base la introducción de [Kanovei, 1985] (pág 136-139).

implícitas), particularmente en conexión con el problema de uniformización.

La tercera dirección fue el desarrollo de la operación de la criba y las descomposiciones, que es la principal herramienta técnica en la construcción de la teoría clásica del primer y del segundo nivel de la jerarquía proyectiva.

La cuarta dirección es sobre la estructura de clases de la jerarquía de Borel, sobre lo que Luzin tuvo importantes resultados tales como los teoremas de separación.

La quinta dirección de se relaciona con el descubrimiento de los conjuntos proyectivos y la construcción de la jerarquía proyectiva.

El segundo ciclo se da en la década de 1930, cuando las ideas de la teoría descriptiva de conjuntos clásica se agotaban y se identificaron los límites de su aplicación. Luzin cambió gradualmente su interés de investigación, apuntando al análisis de las dificultades para solucionar problemas como el de la hipótesis del continuo, el de la cardinalidad de los conjuntos analíticos y el de una construcción efectiva de conjuntos que contenga exactamente $\aleph_1$ puntos.

En esos análisis, Luzin introdujo el concepto de colección de conjuntos borelianos de clase acotada, sobre ello planteó diversos tipos de problemas apoyándose en los conceptos de criba y constituyentes. También abordó problemas relacionados con "formas debilitadas" del problema del continuo, que resultaron ser más complejos que el problema original.[45]

El tercer ciclo (principalmente en la década de 1940), corresponde a las aplicaciones del axioma de elección, ante el cual Luzin es crítico, sin embargo llama la atención sobre las consecuencias de este axioma en la existencia de conjuntos de puntos que tienen propiedades imposibles de obtener con construcciones más efectivas.

Tres direcciones marcaron este ciclo de Luzin, la primera es la construcción y el análisis de conjuntos de puntos singulares, que se han conocido posteriormente como *conjuntos de Luzin*[46] que son aquellos conjuntos de puntos cuya

[45] Para profundizar, consultar el apartado $\mathcal{S}7$ de [Kanovei, 1985].
[46] En [Kuratowski, 1933] se denominan *v conjuntos*.

intersección con cualquier conjunto diseminado (denso en ninguna parte) de un espacio dado es a lo más contable.

La segunda dirección fue el estudio de cuestiones que se relacionan con el problema del continuo restringido, pero en un sentido no efectivo. Este problema consiste en la necesidad de tener una partición del continuo que contenga $\aleph_1$ conjuntos borelianos no vacíos de rango acotado.

La tercera dirección fue el análisis de problemas sobre subconjuntos de números naturales. Para ello introduce el concepto de *ortogonalidad* entre familias de partes de series de números naturales. Ese concepto lo usa para definir familias *separadas*. Se muestra sin dificultad que dos familias separadas son ortogonales. Luzin se ocupó de estudiar la proposición inversa.

Luzin no sólo se limita a desarrollar los aspectos técnicos matemáticos, sino que se interesa por indagar de qué manera las nociones que incorpora pueden ser admitidas como objetos propiamente matemáticos de acuerdo a una concepción filosófica que lo guía, llegando incluso a encontrarse consideraciones sicológicas, como se ven en la cita de la página 225. Esta forma de presentar los resultados hace parte de la tradición francesa de la cual Luzin es continuador.

Roger Cooke investigó parcialmente los archivos de Luzin durante un período de tres meses en el invierno de 1988-89 en la Academia de Ciencias de Moscú. En el apéndice *Luzin's Personal Archives* de [Graham y Kantor, 2009, pp. 205-211] se muestran unas importantes citas que sirven para caracterizar parte del contenido matemático-filosófica de los archivos, aquí se recogen algunas y se complementan con otras citas extraídas de [Luzin, 1930].

Algunos de los aspectos generales más relevantes de la propuesta de Luzin, que se plantean a continuación:

6.3.1. Dominio fundamental

Para sus razonamientos, Luzin parte del conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales, al que llama "dominio fundamental". Una de las razones por las cuales hace uso exclusivo de los irracionales, en el apartado 3.2 [Chaves, 2006] se plantea desde la perspectiva de la solución de la llamada *conjetura de Baire*, y se dice que:

> ...tiene que ver con el hecho de que a cada $x \in \mathbb{I}$ le corresponde una única representación por fracciones continuas. Luzin acude a la representación de irracionales a través de fracciones continuas, en especial para la demostración de la existencia de elementos universales de todas las clases.
>
> Aunque Luzin toma como base jerárquica la clasificación de De La Vallée Poussin, aclara que excluirá los puntos que representan números racionales. Según el propio Luzin esto "permite enunciar los resultados en una forma más simple y permite evitar los casos excepcionales" ([Luzin, 1930], p. 53). Atribuimos esta modificación al hecho de que Baire toma como conjuntos fundamentales a los conjuntos de segunda categoría, catalogando a los de primera categoría (tipo $\mathbb{Q}$) como casos excepcionales sin incidencia en los resultados.

Los espacios de Baire[47] son más apropiados que los espacios euclidianos para las construcciones descriptivas principales. En concreto, en [Addison, 1959] se mostró que los espacios de Baire, a diferencia de los espacios euclídeos, permiten usar fórmulas con un lenguaje especial bastante simple, que es especial para describir conjuntos de puntos y para formalizar cálculos con los cuales se reducen sustancialmente las demostraciones de los resultados de la teoría descriptiva clásica.

El tratamiento de la teoría descriptiva en espacios de Baire tiene una desventaja sobre los espacios euclidianos, que es la intuitividad geométrica presente en los segundos, sin embargo, en [Kanovei, 1985] (pág. 140), plantea que eso no es esencial, que lo que interesa es la biyectividad entre los espacios de Baire y el conjunto $\mathbb{I}$ de los irracionales. Tanto así que la estructura de la teoría descriptiva tanto en espcios euclidianos como en espacios de Baire, conduce esencialmente a teoremas idénticos (excepto en casos particulares como cerradura correspondiente a la compacidad, la continuidad para discontinuidad contable.)

[47] $\mathbb{I}$ es un espacio de Baire.

6.3.2. El problema de la existencia

La discusión sobre la existencia en matemáticas fue abordada por Luzin, quien plantea sus reflexiones sobre este asunto en distintos momentos. Respecto al axioma de elección y la existencia, Luzin dice que la cuestión central en la discusión sobre la aceptación o no de este axioma, en los procedimientos matemáticos, pasa por determinar lo que entiende por existencia:

> vemos que en la ausencia de una regla *analítica*[48] (no auswahlic)[49] (que es lo único que nos puede dar confianza en la existencia de la clase requerida), la existencia de una clase llega a ser misteriosa y el problema es en realidad la cuestión de la validez de esta existencia y el sentido mismo de esta existencia. ¡Un análisis de la palabra "existencia"sería interesante! Filosóficamente denota ser absoluto. Sólo que no sé si eso es equivalente a ser objetivo. Existir no significa en absoluto "ser un objeto de nuestro pensamiento."Es algo más, ya que incluso una contradicción puede ser un objeto de nuestro pensamiento, y eso está desprovisto de existencia. De hecho, hablamos de existencia objetiva al mismo grado de certeza como la existencia de cualquier objeto matemático (en el sentido anterior), tales como una línea recta o un círculo.[50]

Luzin decidió no hacer públicas esta anotación, según Cooke, debido a la hostilidad que ocasionaba en su país el hablar sobre temas metafísicos en su país.

Seguido de la cita anterior, Luzin resume lo que se entiende por la palabra alemana *Existenz*:

---

[48]El término usado en ruso es *obshcheobyazatell' nyi*, que puede ser traducido literalmente como "por obligación general", esto es, a priori, pero Luzin solía usar esta expresión como una traducción de lo que para Lebesgue era analítico. [Cooke, 2003, p. 176].

[49]Una palabra acuñada por Luzin - *ausvalicheskii* en ruso - para indicar el uso o no uso del axioma de elección (*Auswahlprinzip*) en la definición. [Cooke, 2003, p. 176].

[50]Cita que se encuentra en [Cooke, 2003, p. 176] y [Graham y Kantor, 2009, pp. 209-210].

> Hay dos tipos de *existenz*: En primer lugar, algo existe porque está definido *analíticamente*[51] para todos; aquí no nos importa cual es el procedimiento analítico particular que se usó para la definición, todo lo que importa es que las definiciones sean *analíticas*; el procedimiento es indiferente para nosotros, y por lo tanto, también lo son las funciones y los procedimientos mediante los cuales se obtiene la definición analítica. Requerimos únicamente operaciones sin arbitrariedad. En segundo lugar, una cosa existe en virtud del axioma de Zermelo, es decir, que existe, a pesar de que no puede ser analíticamente definido. Ese es el verdadero significado del axioma de Zermelo. Esto es lo que hay en el concepto de "existenz", y por lo tanto todo se reduce a descubrir el contenido de ese concepto.

Es de notar que plantea solo dos posibilidades, la definible analíticamente, ante lo cual no profundiza en esta cita, y la existencia usando el axioma de Zermelo. Veremos, en la página 226, que posteriormente amplía el panorama más completo de las posibilidades de asumir la existencia en matemáticas.

En 1916 Sierpiński publica un artículo[52] de tres páginas en el que advierte que tres importantes resultados del análisis se apoyan en la versión numerable del axioma de Zermelo. Estos resultados son: la equivalencia de la continuidad puntual en el sentido de Cauchy y en el sentido de Heine, toda función de la segunda clase de Baire es el límite iterado de funciones continuas, y la unión numerable de conjuntos Lebesgue medibles es un conjunto Lebesgue medible[53]. Este artículo generó "reacciones vehementes", entre ellas la de Luzin, quien admitió que encontró "horroroso"lo escrito por Sierpiński [Cooke, 2003, p. 176]. En [Graham y Kantor, 2009, p. 207], se muestra una cita de Luzin de enero de 1917 en la que referente al artículo de Sierpiński, esboza el porque no debe haber problema con los precedimientos que involucren el axima de Zermelo en versión numerable, para ello habló desde

[51]Se podría decir: efectivamente, por medio de una regla o fórmula unívoca, sin ambigüedad ni arbitrariedad.

[52][Sierpiński, 1916a]

[53]Este artículo es un preludio de [Sierpiński, 1918a], que es mucho más completo (55 páginas) y en el que muestra los usos que ha tenido el axioma de Zermelo no solo para el análisis sino también para la teoría de conjuntos. Sobre este último artículo se dan detalles en el apartado 5.2.

la equivalencia de este axioma con la aceptación de los ordinales de segunda clase:

> Vamos a ocuparnos de la sicología. En nuestra mente consideramos a los números naturales *objetivamente existentes*.
>
> En nuestra mente consideramos la totalidad de todos los números naturales *objetivamente existente*. Finalmente, consideramos la totalidad de todos los transfinitos de la segunda clase *objetivamente existente*.
>
> Queremos lo siguiente: habiendo asumido que nos enfrentamos a la totalidad objetiva existente de todos los números naturales y transfinitos de la Clase II, damos a cada uno de los transfinitos de la Clase II una definición, un "nombre", y además de manera uniforme para todos aquellos transfinitos que estamos considerando. Usted ve, si nos dan los naturales, podemos escribir cada uno de ellos en un sistema decimal, medido por igual, con los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Para nosotros no hay necesidad (teóricamente) de escribir los símbolos en una ubicación fija tal como un número finito. Prácticamente, todo el tiempo estamos dentro de los límites de los millones, o $< 10^{10}$, o una magnitud similar.
>
> Es necesario recordar que $4^{4^{4^4}}$ es ya, un tipo de número inimaginable, incluso en sistema decimal. De una u otra forma asociamos a cada número natural una representación definitiva de éste, igualmente medida, por diez símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Yo digo que en ésto, teóricamente no hay círculo vicioso, ya que estamos hablando del lugar para los símbolos ubicados en un número finito que para nosotros es prácticamente < 10,[54] nosotros no nos preocupamos teóricamente por eso, consideramos que ese número *no puede ser expresado* en símbolos decimales. Si expresamos esto en decimales (es decir un número con lugares decimales de un número dado N), llegaríamos a un número más pequeño que podríamos expresar otra vez en decimales, y así sucesivamente. Tomando números < 10,[55] calculamos un número de procesos de reducción, y así sucesivamente. Nuestro pensamiento empezaría a vagar por un espeso bosque

[54] Debe ser $< 10^{10}$.
[55] idem.

> de reducciones, la reducción de las reducciones, y todo esto sería un tipo de caos de reducciones, al esfuerzo del pensamiento para acoger el número natural dado en una percepción única de símbolos decimales. Esto dicho sintéticamente.
>
> De una manera similar para los números transfinitos de la Clase II, es totalmente justificado buscar algo en la naturaleza de un sistema decimal que permita definir (nombrar - en francés "nommer") cada transfinito de la Clase II. No es necesario que busquemos aquí un círculo vicioso teórico, como en números finitos. En los números naturales cada número lo podemos *nombrar* por medio de símbolos decimales, *exactamente nombrar*, por la percepción del número de los propios símbolos decimales, por ejemplo $\aleph_1$, puede ser de nuevo una reducción.
>
> Pero en los números naturales esa *nominación* está dada.[56]

Al plantear que nuestra mente acepta la existencia objetiva de la totatilidad de los transfinitos de segunda clase está asumiendo una postura similar a la de Lebesgue que se planteará en la página 227. De otro lado, la concepción de definido *analíticamente* a la que Luzin se refiere en la cita de la página 223, acoge procedimientos que se apoyen en los transfinitos de segunda clase.

De otro lado, el problema de la existencia en matemáticas involucra la teoría descriptiva de conjuntos, y en particular con el problema histórico de la conjetura de Baire. Una vez propuesta su conjetura, Baire la aborda tratando de construir ejemplos explícitos de funciones de cada una de las clases. Como estrategia, eso no fue apropiado, ya que además de ser un método bastante laborioso (en algo más de veinte años sólo se había logrado construir ejemplos de hasta la clase 4), era inoperante cuando se trabaja en niveles no finitos. Luzin enfrenta el problema de la existencia de funciones de las clases transfinitas a partir de los desarrollos matemáticos mismos, para ello es necesario establecer el tipo de existencia que se ponga en consideración. En ese sentido, en [Luzin, 1930] la reflexión sobre la existencia en matemáticas es más detallada que lo que dicen las citas anteriores. En la página 55 del libro mencionado, Luzin identifica cuatro categorías de existencia de objetos matemáticos:

1. Existencia de Zermelo: se aceptan objetos en los que interviene una

[56] [Graham y Kantor, 2009, pp. 207-208].

función de elección.[57] Esto implica que existen conjuntos en los cuales los elementos no se pueden exhibir de manera individual.

2. La existencia constructiva de Lebesgue: los objetos se describen a través de procesos que hacen uso de la totalidad de los ordinales de segunda clase.

3. Existencia a través de la diagonal: en la que se acepta objetos que se determinan a partir de una generalización del método de la diagonal, usado por Cantor para demostrar que $\mathbb{R}$ es no equipotente con $\mathbb{N}$.

4. Existencia constructiva de Baire: que se presenta al describir objetos mediante procesos en los cuales se utilicen únicamente los ordinales de primera o segunda clase de la teoría cantoriana de conjuntos.

La diferencia entre el segundo y cuarto ítem es que el segundo acepta como una totalidad los ordinales de segunda clase, mientras que el cuarto no.[58] La existencia constructiva de Baire surge a raíz de que el propio Baire pone en duda el axioma del conjunto potencia, sin el cual no puede demostrarse que existe el conjunto de todos los ordinales de clase II.

Sobre el tercer ítem, a principios de 1910, Luzin dice que el argumento de Cantor sólo muestra que los reales no son "efectivamente enumerables"(significa definidos sin el axioma de elección). Sin embargo, podría ocurrir que los reales fueran "contables", pero no "efectivamente enumerables".

Luzin adopta las categorías 2, 3 y 4, sin recurrir a la existencia que usa el ítem 1.[59] No es que Luzin se oponga al axioma de Zermelo, pero no lo usa

[57]Respecto a este ítem se han planteado elaboradas discusiones. La más relevante, una vez planteado la demostración de que todo conjunto puede ser bien ordenado por parte de Zermelo en 1904, fue la que sostuvieron los franceses Baire, Borel, Lebesgue y Hadamard. Esta discusión se recoge en [Baire et al., 1905]. En 1908 Zermelo plantea una segunda demostración, que es una réplica a toda la discusión generada por el primer artículo. También hay varios otros trabajos posteriores, siendo muy relevante el de Gödel que demostró la consistencia relativa del sistema ZFE (Zermelo-Fraenkel + axioma de elección) respecto a ZF.

[58]Esto recuerda el problema de la aceptación del infinito en acto a raíz del surgimiento de teoría de conjuntos, en la que se acepta como un conjunto a una colección infinita.

[59]Se señala el uso de esta categorías en Luzin, en el artículo "Nicolás Lusin y el problema de existencia en matemáticas", Chaves A., y Recalde L. (pendiente de publicación).

en el caso de la demostración de la validez de la conjetura de Baire. Luzin en sus inicios se adhirió a la postura constructivista de los franceses Borel, Baire y Lebesgue, y al igual que Sierpiński consideraba en sus publicaciones cuando usaba este axioma o una de sus equivalencias. Cabe decir en este punto, que en la esencia misma de la teoría descriptiva de conjuntos está el evitar el axioma de Zermelo, ya que se trata de conjuntos descriptos, definidos efectivamente o analíticamente mediante operaciones concretas, evitando así elecciones arbitrarias.

6.3.3. Operaciones negativas-virtualidades

Luzin llama la atención en algunas dificultades que se presentan con el uso de las operaciones diferencia y complemento, la cuales denomina como *operaciones negativas*. De las operaciones negativas surgen conjuntos como un todo sin una determinación específica. A los conjuntos generados por operaciones negativas Luzin los denomina *virtualidades*, es decir nociones que no definen objetos completamente acabados.

Al verse desacelerado el impulso inicial de la teoría descriptiva de conjuntos, es decir al no poderse resolver los problemas de regularidad, Luzin hace una reflexión sobre el lugar ontológico de los conjuntos proyectivos en las matemáticas:

> El autor del libro adopta el punto de vista empirista[60] y se inclina a considerar los ejemplos construidos por él, como formados de palabras y no definen objetos verdaderamente acabados, sino solamente *virtualidades*. En particular, considera los conjuntos proyectivos como objetos donde la definición no puede ser completamente acabada: estos son virtualidades puramente negativas[61] que escapan a todo modo de definición positiva. *Y hay buenas posibilidades que esas virtualidades sean irreducibles dos a dos*. Para citar un ejemplo, el autor considera como irresoluble la pregunta de saber si todos los conjuntos proyectivos son medibles

[60]Empirista en este caso significa constructivista, que es el punto de vista desarrollado principalmente por Borel, Baire y Lebesgue y del que se habla en el apartado 3.3.1 (en las conclusiones de el capítulo 3), también se le denota a esta postura como semi-intuicionismo.

[61]En este caso se refiere a la operación complemento.

> o no, ya que en su opinión, los procesos mismos de definición de los conjuntos proyectivos y de la medida en el sentido de H. Lebesgue son virtualidades incomparables, y por consiguiente, privados de relaciones lógicas mutuas. En resumen, el dominio de conjuntos proyectivos es un dominio donde el tercio excluido no aplica, aunque todo conjunto proyectivo sea formalmente definible por medio de una infinidad numerable de condiciones. [Luzin, 1930, p. 323].

El axioma de Zermelo permite demostrar la existencia de puntos en los conjuntos proyectivos, pero en la mayoría de estos conjuntos no se puede indicar efectivamente un punto; tampoco se puede reconocer sus propiedades. Luzin señalaba que eso era la principal dificultad de la teoría de conjuntos proyectivos.

Pareciera extraño que Luzin se opusiera a reconocer un estatus matemático a los conjuntos proyectivos que el mismo descubrió, sin embargo hay que tener cuenta dos aspectos: el primero es el espíritu crítico de este autor por ejemplo hacia el axioma de elección y los objetos arbitrarios y también cuando plantea que el objeto de la teoría de conjuntos es determinar si la concepción del continuo como un conjunto de puntos es aceptable o no; de esa forma no da por sentado que sea correcto, ver $\mathbb{R}$ como un conjunto de individuos, puntos o números. El otro aspecto a tener en cuenta es que esta cita se da en un momento en el que los resultados sobre los conjuntos proyectivos no surgían, y empieza lo que en la página 220 se denominó segundo ciclo de Luzin. Es así que Luzin reflexionando sobre la dificultad de determinar la veracidad o falsedad de las propiedades de regularidad en el segundo nivel de la jerarquía proyectiva visualiza la imposiblidad de que los axiomas clásicos de la teoría de conjuntos dieran respuesta a estas inquietudes. Sin embargo, Luzin no dice abiertamente rechazar el sentido de estas virtualidades negativas, aunque se nota su preferencia porque se pudiese evitarlas, al decir en [Luzin, 1930, p.269] que expondrá “algunos resultados positivos”de la teoría de conjuntos proyectivos.

6.4. Conclusiones y comentarios

1. Señalar el origen de la teoría descriptiva de conjuntos depende de lo que se resalte de ésta. Si es el estudio de los objetos definibles, entonces debe ubicarse a finales del siglo XIX con los aportes de Borel y Baire, quienes se encargaron de construir, respectivamente una primera clase de conjuntos y de funciones descriptibles bajo procesos en los que no se incluyera elecciones arbitrarias. Cabe decir que en Borel se carece de una jerarquía de clases de conjuntos, y con Baire hay una clasificación jerárquica pero de funciones, es por ello que estas obras no deben reconocerse como el nacimiento de la teoría descriptiva de conjuntos. Pero la obra de Lebesgue combina los dos elementos esenciales de la teoría descriptiva de conjuntos: la cuestión de la definibilidad de los conjuntos y la jerarquía de estos, así [Lebesgue, 1905] se puede considerar la obra fundamental para el nacimiento de la teoría descriptiva de conjuntos. Cabe decir que en este libro se plantea explícitamente el paralelo entre la jerarquía de funciones de Baire (funciones respresentables analíticamente, en palabras de Lebesgue) y una jerarquía de conjuntos borelianos, que son los objetos (funciones y conjuntos) definibles.

   De otro lado, el descubrimiento del error de Lebesgue por parte de Suslin, que es señalado en [Graham y Kantor, 2009] como el momento en el que nace la teoría descriptiva de conjuntos, debe reconocerse como un avance importante en el estudio y descubrimiento de conjuntos definibles, ya que se amplió el espectro de esta clase de conjuntos, sin embargo no debe reconocerse como el nacimiento de la teoría descriptiva de conjuntos, ya que desde la perspectiva del estudio de los conjuntos definibles, se debe reconocer que los franceses con las limitaciones de no conocer la teoría de conjuntos analíticos, ya estudiaban los conjuntos borelianos, y desde el lado de las jerarquías de clase de conjuntos este momento señaló una ampliación a una nueva clase de mucha mayor riqueza estructural de las que se tenía conocimiento, sin embargo no deja de ser solo un nivel de la jerarquía proyectiva propuesta en 1925 en los artículos de Sierpiński y de Luzin.

2. La relación histórica entre teoría de conjuntos y teoría de funciones ha sido evidente, tanto así que una de las motivaciones de Cantor para des-

cubrir los ordinales transfinitos fue la la representación de funciones[62]. Posteriormente René Baire, uno de los representantes de la Francia de cambio de siglo que se enfocaba en solucionar problemas de la teoría de funciones, de la medida y de la integral, plantea que los avances en teoría de funciones pasan por los avances en teoría de conjuntos, mostrando ello que entre los franceses, lo que se conoce como teoría descriptiva de conjuntos tiene sentido como una herramienta para resolver problemas de teoría de funciones. En Borel, Baire y Lebesgue el objetivo no es la investigación en teoría de conjuntos sino en teoría de funciones de variable real, pero en el proceso de sus estudios surgen los conjuntos borelianos y su jerarquía transfinita, la cual se retroalimenta de la jerarquía de funciones de Baire. Es así que las tendencias constructivistas son las que orientan las investigaciones en las funciones y conjuntos definibles.

El otro escenario del surgimiento de la teoría descriptiva es Moscú, específicamente el seminario dirigido por Luzin, en el que una de las temáticas se denominaba *teoría descriptiva de funciones*, y es en ese marco que se dearrolló toda la historia previa al descubrimiento del error de Lebesgue. Precisamente en el seminario de Luzin, y específicamente con el descubrimiento del error de Lebesgue por parte de Suslin en 1916, se evidencia un cambio en esta perspectiva, y la teoría descriptiva de conjuntos, que para entonces surgía como teoría de conjuntos analíticos, pasa a ser un campo de investigación independiente de sus aplicaciones en teoría de funciones, usando herramientas topológicas para caracterizar las distintas clases de conjuntos.

En los años 1930, es evidente su interrelación con la lógica y la topología. En ese sentido la teoría descriptiva de conjuntos es una rama híbrida que surgió y se desarrolló en el contexto de las demás ramas que a su vez surgía y se consolidaban como la topología, lógica, teoría de funciones de variable real.[63]

[62] Ampliar en [Recalde, 2010] o [Grattan-Guinness, 1980].

[63] En el apéndice F se muestra, por ejemplo algunos artículos de Sierpiński, en los que se involucran y se interrelacionan temáticas de topología, teoría de funciones de variable real, teoría de medida, teoría general de conjuntos y teoría descriptiva de conjuntos.

3. Los problemas de regularidad para las distintas clases proyectivas no pudieron ser resueltos con las herramientas de la teoría descriptiva de conjuntos clásica, ello, como se dice en la conclusión de [Luzin, 1930] es debido a que la definición de los conjuntos proyectivos y de medida de Lebesgue (también se puede hacer extensivo a las otras dos propiedades de regularidad), no tienen relaciones lógicas mutuas. En ese contexto, tiene sentido la "predicción"de Luzin sobre la imposibilidad de saber que pasaría con los conjuntos proyectivos en relación a las propiedades de regularidad. Cabe decir que el camino o estrategia utilizada para abordar estos problemas después de comprobarse que la teoría clásica no era suficiente, no solo fue demarcado por los descubrimientos de Gödel sobre incompletitud, sino que ya previamente se mostraban relaciones de la teoría descriptiva de conjuntos con lenguaje de lógica, con las publicaciones [Kuratowski y Tarski, 1931] y [Kuratowski, 1931], sino también con [Skolem, 1923] en la que se anticipa quince años y propone la independencia de la hipótesis de continuo bajo consideraciones metamatemáticas. Este paso puede parecer simple, sin embargo debe tenerse en cuenta que es durante este período que la lógica de primer orden se está estableciendo como un lenguaje canónica para los estudios de los fundamentos de las matemáticas y para ello fueron esenciales las publicaciones [Skolem, 1923] y la de Gödel[64].

4. Entre las contribuciones de los polacos a la teoría descriptiva de conjuntos está el hecho de haber ampliado el espacio en el que existen los conjuntos proyectivos. Es decir, los resultados de $\mathbb{R}^n$ los extendieron a espacios más generales (espacios métricos completos y separables) que posteriormente se denominarían espacios polacos.

   La memoria [Sierpiński, 1956], presenta el apartado de conjuntos proyectivos en espacios polacos, además de ello en el apartado 5.1.4, se dice que Sierpiński hizo solo dos artículos sobre espacios completos (aunque no necesariamente separables) y en la memoria [Sierpiński, 1950], (presentada en la página 195), se hace la presentación en $\mathbb{R}^n$ y dedica solo

[64] Gödel, Kurt F., 1931. Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik 38*, pp. 173-198. Traducido al inglés en [Gödel, 1986], pp. 145-195.

página y media a la versión de los conjuntos proyectivos en los espacios métricos completos y separables. Así, Sierpiński no ocupó buena parte de sus publicaciones a estos espacios, siendo éste, uno de los aspectos de la teoría descriptiva de conjuntos en los que la obra de Sierpiński no ocupa tanto interés como para el conglomerado de matemáticos de la escuela de Varsovia.[65]

En [Kuratowski, 1933] ya hay una adaptación de la teoría descriptiva a estos nuevos espacios, lo que permite indicar que en Kuratowski se compagina la tendencia de los estudios topológicos abstractos de sus maestros Mazurkiewicz y Janizsewski, con las ideas en nuevas clases de conjuntos que su otro maestro, Sierpiński, había conocido en sus años de contacto con la escuela de Luzin.

5. La colaboración entre Luzin y Siepiński fue fructífera. Ambos son los autores más prolíficos en la etapa clásica de la teoría descriptiva de conjuntos. Incluso, entre 1917 y 1929 publicaron siete artículos en conjunto, todos ellos se enmarcan en la línea de la teoría descriptiva de conjuntos. Estos se titulan:

   -[Luzin y Sierpiński, 1917a] "Sur une decomposition d' un intervalle en une infinité non dénombrable d' ensembles non mesurables"

   -[Luzin y Sierpiński, 1917b] "Sur une propriété du continu"

   -[Luzin y Sierpiński, 1918] "Sur quelques proprieties des ensembles (A)"

   -[Luzin y Sierpiński, 1922] "Sur une decomposition du continu"

   -[Luzin y Sierpiński, 1923] "Sur un ensemble non mesurable B"

[65] En [Chaves, 2006] se concluye que la salvedad más importante de los temas de desarrollo en Varsovia en los que Sierpiński no incursionó fue la lógica, sin embargo de este capítulo puede añadirse que la adaptación de la teoría decriptiva de conjuntos a espacios polacos no fue un tema de recurrentes publicaciones en Sierpiński, al menos durante el periodo Entreguerras.

-[Luzin y Sierpiński, 1928] "Sur un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait"

-[Luzin y Sierpiński, 1929] "Sur les classes des constituantes d' un complémentaire analytique"

Aunque Sierpiński tiene aportes relevantes a la teoría descriptiva de conjuntos en cuanto a la obtención de resultados, es mayor el aporte de Luzin en esta teoría. Luzin es quien determinó la ampliación de los conjuntos definibles, primero de los borelianos a los analíticos en 1916 al concluir que detrás del error de Lebesgue detectado por Suslin había una clase nueva de conjuntos, que resultaron ser los analíticos; y en 1924-1925 en su curso de la Universidad de Moscú donde planteó las primeras investigaciones sobre la jerarquía proyectiva.

Cabe decir que Sierpiński aborda temas mas amplios de la teoría de conjuntos y la topología que Luzin, no es solo los temas de teoría descriptiva de conjuntos lo que le interesa, aunque si es de resaltar que en las publicaciones de Sierpiński no hay mayor espacio para reflexiones de orden filosófico, tanto así que en la introducción de [Sierpiński, 1950] dice que "la noción de conjunto proyectivo parece presentar un gran interés filosófico gracias, especialmente, a su vínculo con la lógica matemática", así que no es coincidencia que Sierpiński no presenta publicaciones en lógica y no tome postura en discusiones filosóficas de las matemáticas, como las relativas al axioma de elección y a la hipótesis de continuo. Mientras que Luzin si presenta reflexiones filosóficas y toma posición en estas discusiones, tal como se vió en el apartado 6.3.

La diferencia más notable entre Sierpiński y Luzin es sobre el axioma de elección. Se vió en el apartado 6.3.2 la neutralidad de Sierpiński en cuanto a su uso, al publicar [Sierpiński, 1916a] y [Sierpiński, 1918a] en los que expone diversos resultados de la teoría de conjuntos y del análisis en los que es necesario este axioma, sin embargo Luzin hace una réplica en la que advierte que este axioma en la versión numerable (aceptando los ordinales de segunda clase) podría ser aceptable. También Luzin en la cita del apartado 6.3.3 (que la hace en 1930) se declara empirista, es decir constructivista en cuanto a la concepción de objetos matemáticos. Esto implica que no considera matemáticamente aceptable procedimientos que se apoyen en elecciones arbitrarias. Al respecto, en [Moore, 1982, p. 288] se plantea que Luzin entendía el axioma de elección como una herramienta heurística para encontrar teoremas cuando no pudieran ser demostrados sin usarlo. Sin embargo, Luzin, al igual que Sierpiński consideraban importante indicar cuando una demostración se apoyaba en el axioma y cuando no lo hacía.

6. En la página 42 se habla de las ponencias de Sierpiński en los congresos internacionales de matemáticas, asistió como ponente a cuatro congresos, (desde 1924 hasta 1936). Todas se enmarcan en teoría descriptiva de conjuntos. Las tres primeras tienen como papel central las operaciones propias de esta rama y las clases de conjuntos borelianos y proyectivos, mientras que la de 1936 no se centra en estas clases de conjuntos sino en el tipo de funciones semicontinuas, pero que se dejan definir efectivamente, que corresponde a un tipo de objetos que la teoría descriptiva de conjuntos (y de funciones) abordan.

   En 1924, en Toronto, su conferencia se tituló: "Les ensembles bien définis, non mesurables B". En esta concluyó:

   > Las operaciones que nos permiten hoy definir efectivamente los conjuntos a partir de los conjuntos efectivamente definidos no han sido enumeradas, tampoco las propiedades de las clases de conjuntos que a ellas conducen, ni sus relaciones mutuas han sido estudiadas satisfactoriamente. Los resultados de Baire, Borel, Lebesgue, Luzin y Suslin que comenzaron este estudio deben continuar. Esto es esencial si queremos abordar la importante pregunta planteada recientemente por Borel: ¿cuáles son los números reales que sabemos definir? [Sierpiński, 1924a].

   Sierpiński insiste en la importancia de estudiar sistemática y detalladamente las operaciones sobre conjuntos. Es por ello que expone parte de sus resultados sobre las operaciones básicas en las clases proyectivas, tal como el que se muestra en la página 218. A eso añadió la importancia de la aplicación de estas investigaciones para cuestiones fundamentales de las matemáticas como la de los números reales que son definibles.

En la ponencia de 1928 en Bolonia, la conferencia se tituló: "Sur les familles inductives et projectives d' ensembles". En esta hace un breve balance de la teoría de los conjuntos proyectivos, planteando que estaba poco desarrollada, sin embargo, varios de los métodos empleados por Luzin en la teoría de conjuntos analítica podrían llegar a extenderse a conjuntos proyectivos.

En esta conferencia Sierpiński demostró que si F es una familia inductiva y proyectiva, la familia PC(F) también lo es. El enunciado es simple, pero su prueba es complicada, y se basa en un método utilizado por Luzin para demostrar algunas de las propiedades básicas de conjuntos analíticos. Dice Sierpiński, que eligió solo un teorema de este estilo para mostrar que los problemas de la teoría de conjuntos proyectivas surgen naturalmente cuando uno quiere examinar sistemáticamente las operaciones más simples sobre los conjuntos elementales.

La de 1932 en Zurich fue una plenaria, y se tituló: "Sur les ensembles de points qu' on sait définir effectivement". Aquí Sierpiński se refiere a los conjuntos que se pueden definir efectivamente, haciendo la aclaración que hay conjuntos no proyectivos que se pueden definir, tal es el caso de las construcciones efectivas de conjuntos que escapan a la jerarquía proyectiva que presenta en el apartado 9 de [Sierpiński, 1950]. En esta plenaria se planteó:

> A partir de los conjuntos elementales, por ejemplo, los intervalos y aplicando una cantidad finita o infinita numerable de veces las operaciones de suma y resta (multiplicación respectivamente)[66] de conjuntos, se obtienen los conjuntos borelianos. Pero desde las primeras clases de conjuntos borelianos se presentan grandes dificultades para definir conjuntos efectivamente.

[66] Unión y diferencia (interesección) respectivamente.

> ¿Cuáles son los intervalos que sabemos definir efectivamente? Para definir un intervalo, se debe definir sus extremos. El problema se reduce así a lo siguiente: ¿Cuáles son los números reales que sabemos definir efectivamente?
>
> Una clasificación de los números inconmensurables definibles es realmente necesario en primer lugar - dice Emile Borel, este es un tema muy difícil, pero en el que cualquier conquista es infinitamente preciosa por sus repercusiones; ya que se trata de lo que da vida a todos los objetos matemáticos, así, nada es más importante que las propiedades del número.
>
> El problema sobre los conjuntos proyectivos que se pueden definir se reduce al problema: ¿cuáles son las sucesiones infinitas de números naturales que podemos definir efectivamente? Este problema por lo tanto, es la investigación fundamental en la que estamos interesados[Sierpiński, 1932c].

Sierpiński ha trasladado el problema de los conjuntos proyectivos definibles efectivamente a un problema de sucesiones de números naturales, enfatizando más en la parte de las construcciones efectivas que en las que entra en juego la existencia pura.

Sobre el de 1936 en Oslo, que se tituló: "Sur un problème concernant les fonctions semi-continues", cambia el énfasis respecto a las anteriores presentaciones, centrándose en la parte efectiva no de los conjuntos sino de las funciones. El resumen de la conferencia es el siguiente:

> Se verá que ya entre las funciones semi-continuas hay funciones que no satisfacen la propiedad P.[67] Se sabe definir efectivamente (nombrarlas) tales funciones, pero para demostrar que hay funciones que no gozan de la propiedad P se utiliza la hipótesis del continuo. [Sierpiński, 1936b]

[67] Una función $f(x)$ de variable real satisface la condición P si todo conjunto lineal no numerable contiene un subconjunto no numerable sobre el cual la función $f(x)$ es continua

6.5. Anexo: La etapa post-clásica de la teoría descriptiva de conjuntos. Resultados principales

En 6.2 se presentó los principales resultados obtenidos en la etapa clásica de la teoría descriptiva de conjuntos, que en términos cronológicos, llega hasta la publicación [Kondô, 1939]. Cabe decir que durante esos años, especialmente en la década de 1930, se dieron avances de lo que sería la siguiente etapa de la teoría descriptiva, tales como las publicaciones [Kuratowski, 1931] y [Kuratowski y Tarski, 1931], en las que se plantea la introducción de herramientas de la lógica en la teoría descriptiva de conjuntos.[68] También en esa época los resultados de Gödel sobre incompletitud tendrían repercusión en el rumbo de las investigaciones sobre la jerarquía proyectiva.

En [Gödel, 1938] se construyó un modelo con la axiomática de Zermelo-Fraenkel (ZF) que es compatible tanto con el axioma de elección (AE) como con la hipótesis del continuo (HC), es decir, si ZF es consistente (no contradictorio), entonces también es consistente ZFE + HC. El modelo de Gödel se denomina el Universo Constructible, L. En este universo son verdaderos tanto la Hipótesis del Continuo como el Axioma de Elección. A pesar de este modelo quedaban dudas acerca del tamaño del continuo. ¿Sería posible construir un universo en el que el continuo fuera más grande? El mismo Gödel creía que introduciendo algunos axiomas naturales se podría construir un modelo en el la negación de HC fuera verdadera. Si esto sucediera, entonces se habría logrado mostrar la independencia de la Hipótesis del Continuo a partir de ZFE. Esto último fue realizado en [Cohen, 1963].

En esa misma publicación, Gödel anunció dos resultados que tienen que ver directamente con la jerarquía proyectiva:

- El axioma de constructibilidad[69] implica la existencia de un conjunto Δ^1_2 no es Lebesgue medible.

[68] Se plantea que la jerarquía proyectiva se obtiene mediante la interacción de cinco operadores lógicos $(\neg, \vee, \wedge, \exists, \forall)$, los cuales se aplican sobre la clase de las funciones proposicionales.

[69] Para ver el enunciado y los preliminares del axioma de constructibilidad, dirigirse a [Jensen, 1995].

- Existe un conjunto deΠ^1_1 no numerable sin subconjuntos perfectos.

Esto apuntaba a que las dificultades para obtener resultados sobre las clases proyectivas de rango superior a los analíticos eran similares a las que no permitían dar solución a la hipótesis del continuo propuestas por Cantor hace mas de cuarenta años.

En [Moschovakis, 1974] se presenta algunos resultados relevantes en teoría descriptiva de conjuntos que van en la vía de agregar a ZFE algún axioma que permita caracterizar parte de los conjuntos proyectivos, para ello los divide en cuatro ciclos: la teoría clásica, los resultados sobre independencia, hipótesis de grandes cardinales y las hipótesis de determinación proyectiva.

Los resultados que Moschovakis presenta, que se obtuvieron con las herramientas de la teoría clásica y que son los mejores resultados posibles con la axiomática ZFE son los siguientes:[70]

1. **Teorema (Suslin).** Todo $P \in \Sigma^1_1$ contiene un subconjunto perfecto y por lo tanto es equipotente con $\mathbb{R}$.
2. **Teorema (Sierpiński).** Todo $P \in \Sigma^1_2$ se puede ver como la unión de $\aleph_1$ borelianos.
3. **Teorema (Kôndo).** Todo $P \in \Pi^1_1$ (Σ^1_2) puede ser uniformizado por un conjunto perteneciente aΠ^1_1 (Σ^1_2).

Los siguientes tres resultados se han probado bajo la hipótesis de la consistencia de ZFE, en los que se evidencia el poco alcance de esta axiomática respecto a la jerarquía proyectiva, y Moschovakis los llamó **Tres resultados sobre independencia**:

1. **Teorema (Cohen)** No se puede probar en ZFE que todo $P \in \Sigma^1_2$ no contable tenga cardinalidad $2^{\aleph_0}$.[71]
2. **Teorema (Solovay)** No se puede probar en ZFE que todo $P \in \Sigma^1_3$ sea la unión de menos de $2^{\aleph_0}$ borelianos.[72]

[70]Estos tres resultados se presentaron en los apartados 6.2.3 y 6.2.4.
[71]Implícito en [Cohen, 1963].
[72]Moschovakis lo referencia de un trabajo no publicado de Robert M. Solovay

3. **Teorema (Levy)** No se puede probar en ZFE que todo $P \in \Sigma^1_3$ pueda ser uniformizado por algún conjunto proyectivo.[73]

Debido a esto, en [Gödel, 1947] se sugiere que la solución de los problemas del continuo depende de las nuevas hipótesis en teoría de conjuntos, específicamente en axiomas que impliquen la existencia de grandes cardinales.[74] Para los tres siguientes teoremas enunciados por Moschovakis, que los llama **Hipótesis de grandes cardinales**, se usará el concepto de *cardinal medible*, el cual es un cardinal κ de un conjunto X en el que su conjunto potencia admite una medida μ bivaluada y κ-aditiva tal que $\mu(X) = 1$ y para todo conjunto unitario $\{x\}$ se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$.[75]

1. **Teorema (Solovay).** Si existe un cardinal medible, entonces todo conjunto no contable deΣ^1_2 tiene un subconjunto perfecto y por lo tanto es equipotente con $\mathbb{R}$.[76] Similarmente, si existe un cardinal medible entonces todo $P \in \Sigma^1_2$ es Lebesgue medible y tiene la propiedad de Baire (Solovay, no publicado).

2. **Teorema (Martin).** Si existe un cardinal medible entonces todo $P \in \Sigma^1_3$ es la unión de $\aleph_2$ borelianos.[77]

3. **Teorema (Martin-Solovay.)** Si existe un cardinal medible entonces todo $P \in \Sigma^1_3$ puede ser uniformizado por un conjunto $Q \in \Sigma^1_4$.[78]

Moschovakis dice que estos son los mejores resultados que se pueden obtener si a ZFE se agrega la hipótesis de la existencia de un cardinal medible, pero que aún así esta axiomática sigue siendo insuficiente para probar que todo conjunto deΣ^1_4 sea uniformizado por un conjunto proyectivo.

[73]En [Lévy, 1965].

[74]Para ver la relación entre distintas perspectivas de la teoría de conjuntos, como grandes cardinales y teoría descriptiva de conjuntos ver [Jensen, 1995].

[75]Para profundizar se puede ver el apartado 6G de [Moschovakis, 2009].

[76]Moschovakis referencia este resultado en:

R.M. Solovay. “On the Cardinality ofΣ^1_2 sets of reals”, *Fundations of Math.(Sympos. Conmemorating Kurt Gödel, Columbus, Ohio*, 1969, pp. 58-73. MR. 43 # 3115.

[77]Moschovakis lo atribuye a Donald Martin como un trabajo no publicado pero ampliamente difundido. Con título “Projective Sets and Cardinal Numbers”.

[78]Moschovakis referencia este resultado en:

D.A. Martin and R.M. Solovay. “A basis theorem forΣ^1_3 sets”, *Ann. of Math.* (2) 89 (1969, 139-159. MR41 #53.

La hipótesis de determinación proyectiva asume que en todo juego infinito de dos personas con la información perfecta y que es proyectivo, uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora, es decir, que todo juego está determinado. David Blackwell[79] incorporó esta técnica, propia de la teoría de juegos, para dar una prueba de la propiedad de separación en los conjuntos deΣ^1_1.

Previo a la hipótesis de determinación proyectiva está la hipótesis de determinación, que no es compatible con el axioma de elección porque contradice este último, sin embargo la hipótesis de determinación proyectiva es una versión debilitada de ésta, y es compatible con el sistema ZFE.

La generalización, usando la hipótesis de determinación proectiva, de los tres teoremas clásicos: el de Suslin, de Sierpiński y de Kôndo, se enuncian respectivamente de la siguiente manera:

1. **Teorema.** Si se asume la hipótesis de determinación proyectiva entonces todo conjunto proyectivo no contable contiene un subconjunto perfecto y por lo tanto es equipotente con $\mathbb{R}$.[80]
2. **Teorema (Martin)** Si se asume la hipótesis de determinación proyectiva entonces todo conjunto deΣ^1_4 se puede ver como la unión de $\aleph_3$ borelianos.[81]
3. **Teorema (Moschovakis).** Si se asume la hipótesis de determinación proyectiva entonces todo conjunto proyectivo puede ser uniformizado por un conjunto proyectivo, de hecho, para k impar todo conjunto deΠ^1_k puede ser uniformizado por un conjunto deΠ^1_k, y para n todo conjunto deΣ^1_n puede ser uniformizado por un conjunto deΣ^1_n.[82]

[79]En:
Blackwell, David. “Infinite games and analytic sets”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 58. 1967. pp. 1836-1837.

[80]Moschovakis no lo atribuye a algún autor específico.

[81]Moschovakis lo atribuye a Donald Martin como un trabajo no publicado pero ampliamente difundido. Con título “Projective Sets and Cardinal Numbers”.

[82]Moschovakis referencia este resultado en:
Y.N. Moschovakis. “Uniformization in a playful universe”, *Bull. Amer. Math. Soc.* 77 (1971), pp. 731-736. MR 44 #2609.

Capítulo 7

Conclusiones generales

1. En el capítulo 4 se analizaron los elementos que permitieron la conformación de la escuela de Varsovia y la internacionalización de la matemática polaca. Se hizo referencia al nacionalismo como elemento clave, también al hecho de especializarse en una rama de las matemáticas que no fuera muy fuerte en otras comunidades matemáticas y que, a su vez, estuviera en los márgenes del reconocimiento internacional como una rama de interés y de peso. En ese sentido la apuesta de fundar una revista especializada fue lo que, en su momento, permitió que el propósito de obtener reconocimiento internacional como comunidad llegara a buen puerto.

   La preocupación por publicar fue uno de los legados que Sierpiński[1] dejó a sus alumnos fue una de las herencias que éste inculcó en sus alumnos. Los polacos consideraban que las publicaciones era algo natural que respondía a las necesidades propias de los individuos. Eso se habla en [Kuratowski, 1980, p. 57], respecto a las revistas *FM*, *Studia Mathematicae* y la serie *Monografie matematyczne*: "no era una cuestión de prestigio, sino de satisfacer una de las necesidades más esenciales de la escuela polaca de matemáticas".

   La escogencia de la teoría de conjuntos y sus aplicaciones como tema de especialización fue una decisión natural (por estar involucrados en ello Sierpiński, Janiszewski y Mazurkiewicz) y afortunada, ya que la

[1] Para 1919 contaba ya con más de 100 artículos publicados.

tendencia propia de la época demarcaba que parte de la importancia de una cierta temática de especialización pasaba por la interdisciplinaridad de ésta; requisito que la teoría de conjuntos cumplía con sus aplicaciones a ramas emergentes como la topología y la teoría de funciones. En el caso de la escuela de Varsovia, la teoría de conjuntos también se retroalimentaba con la lógica; rama promovida inicialmente por Leśniewski y Łukasiewicz y que dio sus mejores frutos con híbridos en matemática y lógica como Kuratowski, Mostowski y Tarski, quienes incidieron en esa parte de las matemáticas que necesitaba discusión sobre sus fundamentos, y en la que las axiomáticas conjuntistas jugaron un rol importante desde finales de la década de 1930.

Una pregunta que surge al reflexionar sobre el florecimiento de la matemática polaca es ¿cuáles de los factores que impulsaron la conformación de una comunidad matemática en Polonia, y que incidieron en su reconocimiento internacional, pueden adaptarse en alguna otra periferia? Responder esta pregunta requiere una investigación de un orden distinto al que se pretende en esta tesis, pero para ello se debe analizar el caso del nacionalismo, la especialización y el impulso a las publicaciones. Particularizando en el caso colombiano se debe tener en cuenta que no sería el nacionalismo un impulsor para el proyecto de conformación de comunidad matemática con propósito de obtener reconocimiento internacional, al menos no el nacionalismo que se percibía en los polacos de inicios de Siglo XX, el cual era alimentado por los años de opresión por parte de otras naciones. Sobre la especialización cabe decir que en la época actual no sería una opción sino una necesidad, ya que, como se observa en el apéndice A, hay una enorme variedad de divisiones temáticas de las matemáticas actuales. Para un centro particular sería imposible tener especialistas en buena cantidad de esos temas. De esa forma, el reconocimiento de los centros de matemáticas debe pasar por la especialización. El aspecto que sí es común para cualquier centro que aspire a conformar una comunidad y un posterior reconocimiento, es el de las publicaciones; en ese sentido los esfuerzos deben enfocarse en impulsar la idea que la socialización de resultados a través de publicaciones escritas es esencial, educando a los jóvenes en que la comunicación es una necesidad esencial de cada investigador.

A lo anterior habría que anexar todo un estudio de distintos órdenes, pasando por lo cultural, lo político y lo presupuestal; también se debe tener en cuenta las áreas de especialización de quienes aspiran a formar comunidad, comparando debilidades y fortalezas propias con centros vecinos.

2. Como se señala en el apartado 5.1 hay cinco temáticas de la teoría de conjuntos en las que Sierpiński se especializa, sin embargo no publica en todas las ramas que se tratan en *FM*, entre ellas están la lógica y la teoría descriptiva de conjuntos post clásica.

   Kuratowski es uno de los matemáticos más representativos de la escuela de Varsovia, siendo no solo especialista en las cinco ramas de la teoría de conjuntos en las que también es experto Sierpiński, sino que además se adentra en algunos aspectos de la lógica y de la teoría descriptiva de conjuntos de la época post clásica. El acercamiento de Kuratowski a la lógica es debido a la recepción de ideas de Łukasiewicz,[2] quien fue profesor de Kuratowski en Varsovia, siendo esa formación en lógica lo que le permitió abordar los avances en teoría descriptiva de conjuntos después de la época clásica, lo cual no hizo Sierpiński.

   Sin embargo es Sierpiński quien mejor representa la escuela de Varsovia, ya que es el autor con más publicaciones en *FM*, con 200 artículos durante los 20 primeros años de esta revista; además es uno de sus fundadores y tras la muerte de Janiszewski asumió su liderato. Kuratowski fue cercano a Sierpiński y se puede decir que es un sucesor de éste en cuanto a prolijidad, a la variedad de temas que aborda, a la ocupación de cargos administrativos y también a la idea de preservar una comunidad matemática. En ese sentido si se opta por una historiografía de la escuela de Varsovia dandole peso a uno de sus miembros, ese debe ser Sierpiński, pues sin éste autor quizás en sus sucesores, como Kuratowski, no hubiese florecido tal como sucedió, las capacidades matemáticas y el compromiso con mantener una escuela.

[2] También de Tarski, con quien realizó publicaciones.

En ese sentido se puede plantear que para la escuela de Varsovia, liderada por Sierpiśnki y con *FM* como órgano de difusión, la teoría de conjuntos se entendía como un conglomerado de las siguientes ramas: teoría general de conjuntos, topología, teoría de funciones, teoría de la medida, teoría descriptiva de conjuntos y lógica, siendo esta última la única en la que Sierpiński no hace publicaciones. Con los argumentos presentados en el capítulo 2 se puede asegurar que ninguna de esas ramas llega a adquirir el estatus de subdisciplina autónoma en el periodo Entreguerras.

De acuerdo a la clasificación realizada en el apéndice F, y que se ha recopilado en las tablas finales de ese apartado, se debe mencionar que aunque los más importantes artículos de Sierpiński corresponden a la teoría general de conjuntos,[3] no es esta la rama en la que más tuvo publicaciones.[4] Esto concuerda con el espíritu de la época, en el sentido de las temáticas de los manuales que abordan temas de teoría de conjuntos, como el de Hausdorff en 1914, *Grundzüge der Mengenlehre*, el de Luzin de 1930 *Leçons sur les ensembles analytiques et leur applications* y *Topologie I* de Kuratowski de 1933[5] donde predomina las llamadas aplicaciones de Cantor.

A lo anterior se puede añadir que las escuelas de Moscú (liderada por Luzin) y la de París (donde sobresalían Lebesgue, Borel, Baire y Hadamard), en donde adquirieron parte de la formación los iniciadores de la escuela de Varsovia, estaban orientadas a una visión bastante moderna en la que prevalecía la teoría de funciones, topología y teoría de la medida (es decir, una concepción moderna y abstracta del análisis, separada ya de la tradición francesa de un análisis más limitado a lo necesario para la física matemática). De acuerdo a lo anterior se observa una continuidad y coherencia entre los casos polaco, ruso y francés en el período Entreguerras, lo cual se contrapone con la situación en las décadas de 1940 y siguientes en la escuela de Berkeley, encabezada por el polaco Alfred Tarski, que se ha encaminado a la lógica, a la teoría

[3]Remitirse al capítulo 5.

[4]Sin embargo en la década de 1930 aumentó el porcentaje de publicaciones en esta rama.

[5]Textos de los que se presenta su índice en el apartado 6.1.

general de conjuntos (con temas como la teoría de grandes cardinales) y teoría de modelos.[6]

3. Después de la Segunda Guerra Mundial, Sierpiński empieza a interesarse en la teoría de números, publicando cada vez menos en teoría de conjuntos. Cabe recordar que los inicios de Sierpiński fueron en teoría de números, pero desde 1907 se mostró intrigado por la teoría de conjuntos de Cantor. Sobre la evolución investigativa de Sierpiński en teoría de conjuntos, Marczewski en [Hartman et al., 1974, p. 20] plantea que la mayoría de trabajos en topología general de Sierpiński datan del periodo 1915-1924, y que luego de eso hay un cambio hacia la teoría descriptiva de conjuntos, lo cual es discutible desde el punto de vista de la clasificación que se plantea en el apartado F.2, donde se muestra que en todo el periodo Entreguerras, Sierpiński hace más publicaciones cercanas a la topología que a la teoría descriptiva de conjuntos; cabe entonces decir que varias de las publicaciones involucran aspectos de estas dos ramas; sin embargo varios de los estudios en las nuevas clases de conjuntos, obtenidas a través de la aplicación de proyecciones y complementos, han sido para estudiar propiedades topológicas de estas clases de conjuntos; de hecho se puede decir que el interés de Sierpiński en estas nuevas clases era el estudio de sus propiedades topológicas.

   La posibilidad de obtener resultados en teoría descriptiva de conjuntos se vio reducida, poco después que se expusieran las clases proyectivas; es así que ni Sierpiński ni ningún otro matemático podía seguir produciendo resultados sobre esta rama. Así, la necesidad de escribir de Sierpiński beneficiaba más a otras ramas (como fue la topología y la teoría general de conjuntos en los años 30) que a la teoría descriptiva. Es así que el poco acercamiento a la lógica y a los fundamentos de las matemáticas fue un impedimento para que Sierpiński abordara la etapa siguiente de la teoría descriptiva de conjuntos. Así, después de la Segunda Guerra Mundial retornó a sus investigaciones en teoría de números.

4. De los tres enfoques sobre la teoría de conjuntos, planteados en el capítulo 3, se puede concluir que Sierpiński es ajeno al enfoque de Dedekind, que promueve la teoría de conjuntos como fundamentadora de

[6] Para ampliar, ver [Ferreirós, 2010] o [Feferman y Feferman, 2004].

las matemáticas. El enfoque de la segunda etapa de Cantor, en el que se tiene a la teoría de conjuntos como una rama independiente de sus aplicaciones, es asumido por Sierpiński en varias de las publicaciones que se nombran en el apartado 5.1.1 y que en el apéndice F se identifican con la teoría general de conjuntos. No se puede decir que todas las publicaciones que en el apéndice F se etiquetan con teoría general de conjuntos se acojan a este enfoque, ya que en algunos de éstos artículos se llega a discutir el uso del axioma de elección y de la hipótesis del continuo en las aplicaciones, mostrando un enfoque más cercano al de la primera etapa de Cantor. Así de los artículos publicados por Sierpiński en *FM*, durante el periodo Entreguerras, menos del 36 %[7] cuadra en el enfoque de la segunda etapa de Cantor, mientras que más del 64 %[8] encuadran en el enfoque de la primera etapa de Cantor que se entiende como la teoría de conjuntos al servicio de resolver problemas de otras ramas.

Los motivos para que en Sierpiński predomine, al menos en número de artículos, el enfoque de la primera etapa de Cantor sobre el de la segunda etapa, pueden ser varios: uno sería el freno que tuvo la teoría descriptiva de conjuntos al no poderse obtener resultados con la axiomática clásica más alla del segundo nivel de la jerarquía proyectiva. Otro motivo corresponde al grado de abstracción y complejidad que se manejaba en los temas de teoría general de conjuntos tales como grandes cardinales, lo cual se evidencia en que el surgimiento de resultados en estas áreas era más lento que en topología. También influye el hecho de que las principales relaciones de Sierpiński, que se forjaron en la década de 1910, fue con matemáticos franceses y rusos, en quienes predominaba el enfoque de la primera etapa de Cantor.

Sobre *FM* y los enfoques en teoría de conjuntos, cabe decir que aunque la influencia de Sierpiński sobre esta revista fue notoria, también hubo

[7]Que corresponde en la última tabla del apéndice F.2 a los porcentajes de artículos que se relacionan con teoría descriptiva de conjuntos y a algunos de teoría general de conjuntos.

[8]Que corresponde en la última tabla del apéndice F.2 a los porcentajes de los artículos clasificados en topología, teoría de funciones o teoría de medida y a algunos de teoría general de conjuntos.

espacio considerable para el enfoque de Dedekind, reivindicado por los especialistas en lógica y fundamentos de las matemáticas, entre ellos Leśniewski, Tarski, Mostowski, Lindenbaum y Łukasiewicz (este último no publicó en *FM*).

Ahora, sobre la visión desde el extranjero de lo que era la teoría de conjuntos en *FM*, Lebesgue en 1922 escribió:

> Si ese ostracismo en contra de la teoría de conjuntos se está desvaneciendo, es debido al hecho de que la teoría de conjuntos, que se desarrolló a partir de la teoría de las funciones analíticas, podría resultar útil a su hermana mayor y podría mostrar a la gente sus cualidades y riqueza.[9]

De esta cita se puede deducir el predominio del enfoque de la primera etapa de Cantor, aunque la opinión puede tener sesgo de atención en Lebesgue porque el francés es exponente de ese mismo enfoque.

Para la teoría general de conjuntos, Polonia no fue una autopista de desarrollo sino una carretera lateral, eso se explica en que en Polonia no se construyó algún paradigma como lo hizo Cantor, Dedekind, Zermelo o posteriormente Cohen. Como comunidad se puede decir que han sido una autopista de desarrollo para la topología y posiblemente para la teoría descriptiva de conjuntos y en el caso de Leopólis, para el análisis funcional. Lo anterior no quiere decir que no hayan hecho aportes a la teoría de conjuntos, sino que al visualizarla como una rama herramienta sus aportes en teoría general de conjuntos se notan más desde lo topológico.

5. En el apéndice F se clasificó, en cinco ramas, los artículos que Sierpiński publicó en *FM* desde 1920 hasta 1939. El número de artículos y los porcentajes de cada rama se recopiló en tablas por periodos de diez años, de la década de 1920 y de la década de 1930, para ver cambios en los énfasis de Sierpiński.

[9] Tomado de [Kuratowski, 1980, p. 35], citando [Lebesgue, 1922].

El principal cambio entre estas dos décadas está en teoría general de conjuntos, rama que en la primera década obtiene el menor número de artículos, con apenas 8,82 % de las publicaciones, mientras que en la segunda década tiene el mayor porcentaje con 27.55 %.

Las publicaciones en teoría descriptiva de conjuntos empiezan en 1924, y en esta rama hay buena producción de artículos hasta 1931, justo el año en el que la teoría general de conjuntos empieza a aumentar sus publicaciones, lo cual responde a la barrera con la que topó la teoría descriptiva (descrita anteriormente) para continuar su desarrollo.

La topología y la teoría de funciones son las ramas en las que más artículos tiene Sierpiński, 27 % y 26 % respectivamente. Esos porcentajes sumados al 11 % de teoría de la medida da 64 %, corroborando ello que el enfoque de la teoría de conjuntos al que más se aproxima es al de la primera etapa de Cantor, y que coincide con lo que este último llamaba la teoría de conjuntos aplicada.

De otro lado, es conveniente saber que varios de los artículos que se han clasificado contienen apartes de varias de estas temáticas, basta por ejemplo recordar lo planteado en el capítulo 5 sobre los artículos de 1918 y 1924 sobre el axioma de Zermelo y sobre la hipótesis del continuo, en los que se plantea resultados de diversas áreas de las matemáticas donde se hace uso de éstos. También es conveniente decir que las clasificaciones disciplinares de la época, por ejemplo en el *Jahrbuch*[10] no diferencia entre estas temáticas. Por ejemplo, los artículos denotados con las numeraciones 2114 y 20121, según [Jahrbuch Project, 2007], se describen con las mismas temáticas, pero actualmente y según la clasificación aquí propuesta se diferenciarían en teoría general de conjuntos y teoría descriptiva de conjuntos, respectivamente. Así mismo hay varios casos más.

[10] Que se puede obtener para la mayoría de artículos de Sierpiński en [Jahrbuch Project, 2007].

Apéndice A

Clasificación disciplinar MSC10

En la clasificación de the Mathematical Subject Classification de 2010 (MSC10), revisión a cargo de *Mathematical Reviews* y *Zentralblatt für Mathematik*, hay 63 secciones. La teoría de conjuntos aparece como una subsección de la sección 03-XX MATHEMATICAL LOGIC AND FOUNDATIONS. Las otras subsecciones son:[1]

-Philosophical aspects of logic and foundations
-Model theory
-Computability and recursion theory
-**Set theory**
-Proof theory and constructive mathematics
-Algebraic logic
-Nonstandard models

Los apartados que componen teoría de conjuntos son:

03E02 Partition relations
03E04 Ordered sets and their cofinalities; pcf theory
03E05 Other combinatorial set theory
03E10 Ordinal and cardinal numbers
03E15 Descriptive set theory
03E17 Cardinal characteristics of the continuum

[1]Tomado de http://www.ams.org/mathscinet/msc/pdfs/classifications2010.pdf.

03E20 Other classical set theory (including functions, relations, and set algebra)
03E25 Axiom of choice and related propositions
03E30 Axiomatics of classical set theory and its fragments
03E35 Consistency and independence results
03E40 Other aspects of forcing and Boolean-valued models
03E45 Inner models, including constructibility, ordinal definability, and core models
03E47 Other notions of set-theoretic definability
03E50 Continuum hypothesis and Martin's axiom
03E55 Large cardinals
03E57 Generic absoluteness and forcing axioms
03E60 Determinacy principles
03E65 Other hypotheses and axioms
03E70 Nonclassical and second-order set theories
03E72 Fuzzy set theory
03E75 Applications of set theory
03E99 None of the above, but in this section

Otros apartados de esta clasificación en los que aparece el término teoría de conjuntos son:

extremal set theory en Extremal combinatorics, en Miscellaneous topics in measure theory, Descriptive set theory (topological aspects of Borel, analytic, projective, etc. sets), Games involving topology or set theory, Sets, relations, set theory en Foundations of mathematics.

Apéndice B

Axiomas ZFE

Las relaciones del dominio B están regidas por los siguientes axiomas:

- Axioma I (de Extensión): Si cada elemento de M es elemento de N y, recíprocamente, cada elemento de N es elemento de N, entonces $M = N$. Esto es, si $M \subset N$ y $N \subset M$, entonces $M = N$.

- Axioma II (de Conjuntos elementales): Existe un conjunto impropio, el 'conjunto nulo'$\emptyset$,que no tiene ningún elemento. Si a es una cosa, existe un conjunto $\{a\}$ que contiene a a y sólo a a como elemento. Si a y b son cosas, existe un conjunto $\{a, b\}$ que tiene a y a b como únicos elementos.

- Axioma III (de Separación): Si un enunciado abierto E está bien definido para todos los elementos de un conjunto M, existe un subconjunto ME que tiene todos los elementos x de M para los cuales $E(x)$ es verdadero.

- Axioma IV (de Partes): A cada conjunto T, le corresponde un nuevo conjunto $\mathcal{M}T$ que contiene todos los subconjuntos de T y solamente ellos.

- Axioma V (de Unión): A cada conjunto T, le corresponde un nuevo conjunto δT que contiene todos los elementos de los elementos de T y solamente ellos.

- Axioma VI (de Elección): Si T es un conjunto tal que todos sus elementos son diferentes de vacío y son disjuntos de dos en dos, su unión δT contiene un subconjunto S_1 que tiene un elemento común y sólo uno con cada elemento de T.

- Axioma VII (del Infinito): El dominio B contiene al menos un conjunto Z, que contiene como elemento al conjunto vacío y para todo elemento a de Z se tiene que el conjunto a también pertenece a Z.

En 1922, Abraham Fraenkel introduce el axioma de reemplazo y en 1925 Von Newman introduce el axioma de regularidad.

- Axioma VIII (Reemplazo): Si se tienen un conjunto A y una función F, entonces la imagen directa de A bajo F, $F[A]$ es un conjunto.
- Axioma IX (Regularidad): Todo conjunto $A \neq \emptyset$, tiene un elemento x, tal que A y x no tienen elementos comunes.

Apéndice C

Lista de problemas de Hilbert

1. La igualdad de los volúmenes de dos tetraedros de igual base e igual altura.

2. El problema de la distancia más corta entre dos puntos. ¿Es la línea recta la distancia más corta entre dos puntos, sobre cualquier superficie, en cualquier geometría?

3. Establecer el concepto de grupo de Lie, o grupo continuo de transformaciones, sin asumir la diferenciabilidad de las funciones que definen el grupo.

4. Axiomatización de la física. ¿Es posible crear un cuerpo axiomático para la física?

5. La irracionalidad y trascendencia de ciertos números como e, $\sqrt{2}$, etc.

6. El problema de la distribución de los números primos.

7. Demostración de la ley más general de reciprocidad en un cuerpo de números cualesquiera.

8. Establecer métodos efectivos de resolución de ecuaciones diofánticas.

9. Formas cuadráticas con coeficientes algebraicos cualesquiera.

10. La extensión del teorema de Kronecker sobre cuerpos abelianos a cualquier dominio de racionalidad algebraica.

11. Imposibilidad de resolver la ecuación general de séptimo grado por medio de funciones de sólo dos argumentos.
12. Prueba de la condición finita de ciertos sistemas completos de funciones.
13. Fundamentación rigurosa del cálculo enumerativo de Schubert o geometría algebraica.
14. Problema de la topología de curvas algebraicas y de superficies.
15. La expresión de formas definidas por sumas de cuadrados.
16. Construcción del espacio de los poliedros congruentes.
17. Las soluciones de los problemas regulares del cálculo de variaciones, ¿son siempre analíticas?
18. El problema general de condiciones de contorno de Dirichlet.
19. Demostración de la existencia de ecuaciones diferenciales lineales de clase fuchsiana, conocidos sus puntos singulares y grupo monodrómico.
20. Uniformidad de las relaciones analíticas por medio de funciones automórficas: siempre es posible uniformizar cualquier relación algebraica entre dos variables por medio de funciones automorfas de una variable.
21. Extensión de los métodos del cálculo de variaciones.

Apéndice D

Indice del *Jahrbuch*

Veamos el desgloce disciplinar completo del volumen de 1904 (publicado en 1906):

1. Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie

   Kapitel 1. Geschichte.

   A. Biographisch-Literarisches

   B. Geschichete einzelner Disziplinen

   Kapitel 2. Philosophie und Pädagogik

   A. Philosophie

   B. Pädagogik

2. Zweiter Abschnitt. Algebra

   Kapitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraissche und transzendente Gleichungen)

   Kapitel 2. Theorie der Formen (Invariantentheorie)

   A. Theorie der algebraischen Formen.

   B. Differenetialinvarianten

   Kapitel 3. Substitutionen und Gruppentheorie, Determinanten, Elimination und symmetrische Funktionen

   A. Substitutionen und Gruppentheorie.

   B. Determinanten.

   C. Elimination und symmetrische Funktionen

3. Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik

   Kapitel 1. Niedere Arithmetik

   Kapitel 2. Zahlentheorie

   A. Allgemeines

   B. Theorie der Formen

   Kapitel 3. Kettenbrüche

4. Vierter Abschnitt. Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

5. Fünfter Abschnitt. Reihen

   Kapitel 1. Allgemeines

6. Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung

   Kapitel 1. Allgemeines (Lehrbücher usw)

   Kapitel 2. Differentialrechnung (Differentiale, Funktionen von Differentialen, Maxima und Minima)

   Kapitel 3. Integralrechnung

   Kapitel 4. Bestimmte Integrale

   Kapitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen und Differenzenrechnung

   A. Gewöhnliche Differentialgleichungen

   B. Differenzenrechnung

   Kapitel 6. Partielle Differentialgleichungen

   Kapitel 7. Variationsrechnung

7. Siebbenter Abschnitt. Funktiontheorie

   Kapitel 1. Allgemeines

   Kapitel 2. Besondere Funktionen

   A. Elementare Funktionen, Gammafunktion und hypergeometrische Reihe

   B. Elliptische Funktionen

C. Hyperelliptische, Abelsche und verwandte Funktionen

D. Kugelfunktionen und verwandte Funktionen

8. Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie

   Kapitel 1. Prinzipen der geometrie

   Kapitel 2. Kontinuitätsbetrachtungen (Analysis situs Topologie)

   Kapitel 3. Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie)

   Kapitel 4. Darstellende Geometrie

   Kapitel 5. Neuere syntetische Geometrie

   A. Allgemeines

   B. Besondere ebene Gebilde

   C. Besondere räumliche Gebilde

   D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen

   E. Abzählende Geometrie

9. Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie

   Kapitel 1. Lehrbücher, Koordinaten

   Kapitel 2. Analytische geometrie der Ebene

   A. Allgemeine Theorie der ebenen Kurven

   B. Theorie der algebraischen Kurven

   C. Gerade Linie und Kegelschnitte

   D. Andere spezielle Kurven

   Kapitel 3. Analytische Geometrie des Raumes

   A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven

   B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumkurven

   C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades

   D. Andere spezielle Raumgebilde

   E. Gebilde Räumen von mehr als drei Dimensionen

   Kapitel 4. Liniengeometrie (Komplexe, Strahlensysteme)

Kapitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen und Abbildungen

B. Konformen Abbildungen und dergleichen

10. Zehneter Abschnitt. Mechanik

Kapitel 1. Allgemeines (Lehrbücher usw)

Kapitel 2. Kinematik

Kapitel 3. Statik

A. Statik fester Körper

B. Hydrostatik

Kapitel 4. Dynamik

A. Dynamik fester Körper

B. Hydrodynamik

Kapitel 5. Potentialtheorie

11. Elfter Abschnitt. Mathematische Physik

Kapitel 1. Molekularphysik, Elastizität und Kapillarität

A. Mollekularphysik und Allgemeines

B. Elastizitätstheorie

C. Kapillarität

Kapitel 2. Akustik und optic

A. Akustik

B. Teoretische Optik

C. Geometrische Optik

Kapitel 3. Elektrizität und Magnetismus

Kapitel 4. Wärmelehre

A. Mechanische Wärmetheorie

B. Gastheorie

12. Zwölfter Abschnitt. Geodäsie, Astronomie, Metereologie

    Kapitel 1. Geodäsie

    Kapitel 2. Astronomie

    Kapitel 3. Mathematische Geographie und Meteorologie

Apéndice E

Sobre las necesidades de las matemáticas en Polonia

> Nota[1]: Esta es una versión española del artículo de Z. Janiszewski aparecido en 1918 en el primer volumen de Nauka Polska, publicación de la Fundación Mianowski (cfr. *Lecturas Matemáticas*, Vol. I, pp. 123-297). La traducción estuvo a cargo del profesor Diego Pareja H. de la Universidad del Quindío y fue realzada a partir del Apéndice del libro La génesis de una escuela en Polonia de la Hermana Mary Grace Kuzawa.

No fue sino después de cierta resistencia de mi parte que me dispuse a hacer esta presentación de las necesidades de las matemáticas. Al ver las urgentes necesidades de otras disciplinas en Polonia, donde se carece de las cosas más esenciales, como materiales e instrumentos científicos, donde se hace necesario reunir enormes capitales para ofrecer los requerimientos mínimos de investigación, para la construcción de laboratorios, museos, estaciones experimentales y otros servicios técnicos, parece inapropiado que nosotros, los matemáticos viviendo en un mundo abstracto, donde no es gratuito, estemos al lado de nuestros colegas más necesitados, demandando una participación en los fondos del estado. Pero comprendiendo que, en el momento presente las necesidades más apremiantes de las matemáticas requieren solo un cierto esfuerzo y que pueden satisfacer enteramente con un pequeño gasto, procedo

[1]Esta traducción ha sido transcrita textualmente del apéndice B del artículo [Arboleda, 1982].

con esta presentación.

La necesidad prioritaria de las matemáticas, en la actualidad, es atraer y retener en su seno a todos los individuos que muestren una habilidad extraordinaria para las matemáticas. No es mi deseo lamentarme por la falta de fondos para becas; el punto central de esta discusión, más bien, el método de distribuir los fondos indispensables. Sin embargo prefiero abstenerme de criticar el método de distribución que ahora se acepta y se practica. Quiero simplemente discutir algunos problemas que son, en cierta medida, nuevos y que se proyectan hacia el futuro.

Hay una multitud de individuos brillantes y creativos que desperdician su talento a causa de dificultades económicas. ¿Por qué pasa esto? La mayoría de ellos o no saben cómo o les da pena solicitar ayuda financiera. Es imperativo localizar a estos individuos en lugar de esperar que ellos por propia iniciativa, se presenten. *Debe iniciarse un seguimiento* a estos individuos, aun antes de que abandonen la escuela secundaria; de hecho, tan pronto como se descubran sus habilidades. ¿Quien metódica y sistemáticamente hace esto hoy en día? Es imposible exigir que cada entidad encargada de distribuir fondos realice esta actividad. Puesto que el seguimiento y la promoción constituyen un problema enorme, debe crearse, con este propósito, una *comisión especial* una "comisión encargada del desarrollo de las matemáticas". Su objetivo seria dirigir de nuevo me atrevo a sugerir la administración de los fondos de becas para todo el país. En particular tal comisión informaría a quien corresponda sobre individuos que requieren ayuda financiera. Seria apropiado también que la comisión, por si misma, dispusiera de cierto número de becas. Por esta razón tal entidad debería ser creada por una institución análoga a la fundación Imenia Mianowski.

La tarea de la administración de becas no debe limitarse solo a la cuestión de *a quien* se le otorga la beca. Uno debe saber *en que forma y en qué condiciones* se hace el otorgamiento, de tal forma que esta sea aceptada pero no malgastada en matriculas inútiles y en síntesis, que incida ventajosamente sobre el trabajo creativo del beneficiario. A menudo es bueno incluir ciertos incentivos no materiales; estableciendo, por ejemplo, una obligación moral hacia la investigación, al confiar al individuo una tarea investigativa conveniente.

Para ejecutar estas obligaciones la comisión planeada podría disponer de otros recursos. A mismo tiempo que se encargue de la *organización del trabajo matemático* podría crear un "Centro de Investigación matemática "a donde los matemáticos con mejores ideas puedan recurrir en busca de asistencia para ejecutar las partes menos complejas de su investigación. El profesor Enrique de Bologna, uno de los matemáticos contemporáneos más brillantes, me ha comunicado esta idea que tiene como fin la explotación benéfica, para la causa del conocimiento. De aquellas fuerzas y trabajo puestos en los artículos matemáticos que, aunque no tengan mayor valor para el avance de la ciencia, son escritas con el solo propósito de mostrar la habilidad del autor para la investigación: por ejemplo muchas de las disertaciones doctorales de hoy en día. En otras palabras, benéfica y efectivamente se ha venido "explotando"al candidato a doctor por parte de distinguidos académicos, especialmente profesores universitarios que tienen a su cargo estos candidatos. Esta idea, sin embargo, podría extenderse a un círculo más amplio, incluyendo aquellos que ya han dejado la universidad; todo esto debe organizarse en forma bien planeada. Más aun, si el trabajo asignado a un individuo *fuera pagado* (por alguna entidad) al terminar su ejecución esta llegaría a ser la mejor forma de promover la investigación. Además de facilitar el trabajo de los investigadores esto permitiría a un individuo trabajar en un ambiente qu ele proporcione un entrenamiento de laboratorio que lo haría más efectivo. Esto no interferiría, por ejemplo, con la salida de los candidatos para estudios más avanzados en el exterior.

Con el propósito de prevenir el desperdicio de las habilidades seria sacar el mayor provecho en el campo de las publicaciones delegando la interpretación, redacción, etc de monografías a quienes este trabajo pueda atraer hacia la investigación. (¡Pero solo a esas personas! Hay otras personas para las cuales obligaciones como estas resultan desastrosas para su trabajo independiente). El registro de estas publicaciones, sin embargo, y en parte su control, podría estar bajo responsabilidad de la misma comisión.

Por lo tanto, la administración *administración de las publicaciones de carácter profesional* debe ser confiada a la comisión en referencia. Al asignar estas funciones a una entidad organizada se asegura que las publicaciones estarán libres tanto de errores como de unilateralidad. Naturalmente yo supongo que la comisión estará formada por los académicos mas distinguidos, quienes, por su experiencia, conocen las necesidades del estudiante. Confiar una responsabilidad como la estructuración de los planes de publicación a personas que carecen de las cualidades mencionadas conducirán a la proliferación de artículos innecesarios, sin valor y plagados de errores. Sin embargo, este es un problema que desee examinar más de cerca aquí.

La ausencia de un programa, cuando de la publicación de trabajos se trata, no puede ser compensada con la información obtenida para cada caso particular. Uno, ciertamente, puede responder a preguntas como las siguientes: ¿hay trabajos dignos de publicación? ¿Es la cobertura y la exposición de estos conveniente?, ¿Tenemos libros útiles para lo que hemos planeado? Pero es demasiado pedir que un funcionario por si solo de respuesta acertada a estos interrogantes. Más aun: no es posible si la publicación de tal o cual libro llena la laguna mas importante en nuestra literatura o siquiera si su publicación responde a alguna necesidad general sin conocer los trabajos que se publicaran subsecuentemente.

Sin lugar a dudas una investigación de las *mas importantes lagunas* en nuestra literatura debe ser la meta principal de los encargados de la producción editorial. Las publicaciones actuales de la Fundación Mianowski dan la impresión de que se publicara aquí cualquier cosa. Un Comité editorial debe no solo escoger sino también ordenar traducciones, publicar libros de texto originales, monografías, etc.

El Comité propuesto debería igualmente incluir, en su esfera de influencia, la protección de la *administración* de nuestras bibliotecas, mantener un *registro de colecciones existentes de libros de matemáticas* y preparar un *catalogo* modelo de trabajos que estén a disposición en las bibliotecas y que sean accesibles a la mayoría de matemáticos. Hoy en día, como resultado de la carencia de coordinación y control profesional, encontramos la siguiente situación: los mismos libros y revistas se piden para dos bibliotecas en la misma ciudad mientras que en ambas se carece de muchos libros indispensables. Los miembros de la Comisión, con su influencia personal, podrían fácilmente lograr la ejecución de los requerimientos propuestos por el Comité; naturalmente hay que tener en cuenta varios aspectos del asunto.

Uno puede en efecto, aseverar que todos los objetivos enumerados antes son metas y funciones de investigadores y docentes, de sociedades matemáticas, etc. Esto es cierto pero el hecho real es que nadie hace nada por lograrlos.

Los objetivos demandan una organización que no poseemos y la que es difícil exigir de una sola persona. No debemos esperar que un individuo, por su propia cuenta, inicie esta tarea; es necesario *llamar* y comprometer a ciertas personas para que desempeñen esta labor y, en cierto sentido, *imponerles* esta obligación, dándoles ante todo la *ayuda financiera y la oportunidad de realizar*, aunque sea parcialmente, sus proyectos; otorgándoles también cierto poder decisorio con el fin de que consigan sus propósitos. Por ejemplo, ellos podrían actuar en el campo de las becas , tanto en relación con los interesados en ellas como con aquellos que las ofrecen. Las personas que trabajen en estas actividades tendrán la oportunidad de hacer realidad todos sus proyectos. Puesto que la Fundación Mianowski es un guardián del conocimiento. Tiene la obligación moral y el deber de establecer tal "comisión de protección", aunque solo tuviera carácter privado.

Aquí esta entonces la respuesta general a la cuestión relacionada con las necesidades de las matemáticas en Polonia:

La primera necesidad es la creación de una institución permanente cuyo propósito sea trabajar en la búsqueda de respuestas particulares al problema de las necesidades de las matemáticas.

Entre los problemas específicos quiero destacar uno que tiene para mi especial significación y que demanda solución aparte:

La base de este problema se centra en el cambio de método seguido actualmente por las publicaciones académicas, o mejor, tiene que ver con la carencia de método en las publicaciones actuales. Los escritos de hoy, en muchos casos continuación de otros, están esparcidos en una gran variedad de publicaciones de distintos países (el autor esta usualmente motivado por consideraciones personales); esto impide al individuo que no dispone de bibliotecas investigar a fondo en el área de su especialización, aun en el caso de que este suscrito a varias publicaciones. A causa de esta disposición de materiales de investigación hasta los más afortunados encuentran muy difícil la ejecución de su labor. Como resultado, el trabajo impreso que no se encuentra en las pocas revistas de amplia circulación, definitivamente no se lee. De otro lado la suscripción de un individuo a una revista científica pierde su valor práctico puesto que un artículo que aquí aparece puede ser apenas parte de una "serie continuada "de trabajos y extensiones de otros artículos que aparecen en distinto lugar. Además lo usual es que nueve decimos del contenido de una serie de estas revistas esta fuera del campo de interés del investigador.

Tengo el convencimiento de que debemos transformar la literatura periódica *estrictamente académica* haciéndola más especializada; por ejemplo, una publicación debería estar dedicada a la teoría de los números y al álgebra, otra a la geometría proyectiva, otra a las ecuaciones diferenciales y a la geometría diferencial, a las series trigonométricas y campos relacionados, a la teoría de conjuntos, a los fundamentos de la geometría, etc. De esta forma, quien se suscriba a una o dos de tales publicaciones, podría tener en casa la mayor parte de la literatura que necesita.

Naturalmente esta es una propuesta de gran envergadura que debe iniciarse cuanto antes servir de modelo en el futuro. Es aquí don de el campo operativo empieza para nosotros y donde nuestros propósitos asumen un significado especial; tenemos en mente la *consecusión* de una *posición independiente* para las *matemáticas polacas*

En vista del proyecto propuesto, sería necesario crear una revista; una publicación estrictamente académica, dedicada primariamente a una rama de las matemáticas en la cual tengamos muchos matemáticos verdaderamente creativos y distinguidos. Esta publicación al igual que Mathematische Annalen, Rendiconti del Circolo de Palermo, Acta Mathematica de Estocolmo, y muchas otras, aceptaría artículos en cualquiera de los cuatro idiomas reconocidos como internacionales en matemáticas (ellos son: Ingles, Francés, Alemán e Italiano) Me referiré, por brevedad, de aquí en adelante a estos idiomas como “internacionales”. Esta publicación incluiría además de investigación original, una bibliografía de la rama particular a la que está orientada, reseñas y aun reproducciones de los artículos más importantes publicados en otras partes, traducciones de artículos y valiosos escritos en idiomas no internacionales, prioritariamente artículos polacos que se están perdiendo en el anonimato; finalmente, correspondencia, preguntas y respuestas como lo hace el intermediare Mathematique. Esto sería, en cierta medida, un experimento para la realización de los escritos matemáticos, solamente que aquí se tendría que ver con los problemas más difíciles y no con los más simples.

Una publicación como esta llegaría a ser indispensable para una persona que trabaje en tal rama específica de las matemáticas. La revista encontraría lectores en todas partes y en un corto periodo de tiempo ganaría colaboradores respetables en el exterior. A través de esta publicación alcanzaríamos una merecida posición en la cultura europea, nos solo porque muchos de nuestros trabajos, ahora diseminados en las publicaciones polacas, llegarían a conocerse en el mundo, sino también porque seriamos reconocidos no como individuos cuya nacionalidad muchas veces se desconoce, sino como un grupo estrechamente unido de polacos. La misma existencia y distribución de tal publicación editada en Varsovia, daría testimonio de nuestra vida cultural; pero, menciono esto solo de paso. Nada es más ajeno a mi mente que proponer como meta de nuestra empresa el logro de tal renombre. Si hablo de lograr un estatus independiente para las matemáticas polacas, o mejor para las matemáticas en Polonia, a través de la revista propuesta, tengo en mente una meta mucho más seria: la *creatividad real* en los escritos matemáticos polacos. Esto solamente se logra ganando *condiciones favorables para el trabajo matemático*, similares a aquellas que se dan en Occidente.

En verdad, un matemático no necesitaría costosos laboratorios, ni finos y caros materiales para su trabajo; todo lo que el necesita es una atmósfera matemática apropiada, un contacto permanente con colaboradores.

Esta atmósfera es necesaria, no solo para los estudiantes, sino también para aquellos que están extendiendo las fronteras del conocimiento. Para crear esta atmósfera entre los estudiantes, la concentración de receptores brillantes es mucho más provechosa que la concentración de expositores talentosos. Por supuesto, la asociación colegal es el factor de desarrollo más importante y también el más importante factor síquico para la motivación hacia el trabajo investigativo. Organizar grandes concentraciones de estudiantes de matemáticas es, en mi opinión, el elemento más importante en la formación de matemáticos.

Por esta razón hago, incidentalmente, el siguiente comentario (este asunto lo pongo en consideración de la entidad que tenga a su cargo la organización de las universidades): un paso importante para el progreso del conocimiento seria *ofrecer* como *prerrogativas* una *rama del conocimiento* a cada una de nuestras universidades; por ejemplo un departamento de otra universidad haciendo lo propio en matemáticas, etc., dando naturalmente la debida importancia a las ramas aledañas al área central.

En ciertas universidades alemanas el favoritismo por alguna rama particular se crea por si misma debido, probablemente, al número de profesores y a la concentración de recursos auxiliares (talleres, bibliotecas especiales, etc.) los que a su vez sirven para atraer un mayor número de docentes. Uno podría decir también que en Francia este privilegio se ha reforzado aun mas con un buen numero de cátedras estatuidas, aunque con una diferencia: los departamentos privilegiados están todos en una y en la misma universidad: París.

Yendo un poco más allá, yo crearía no solo un buen numero de cátedras en una división específica y privilegiada de una universidad, sino que también conferiría, solamente a esta universidad, el derecho a otorgar doctorados en ese campo particular. Mi principal objetivo aquí seria presionar a los más destacados cultivadores de un área específica a que asistan a la universidad privilegiada en dicha área, aunque fuera por cortos periodos de tiempos. Esto se fundamenta en dos razones: por una parte los más destacados se prepararían mejor y, por otra, la misma concentración de las figuras más brillantes en esta rama crearía una verdadera atmósfera cultural.

Sé que este proyecto enfrentara la oposición de la mayoría debido a que es nuevo ya que, por peculiaridad universal de la mente humana, el argumento más efectivo contra lo nuevo es haber procedido hasta ahora en forma distinta. Sin embargo me siento firme en mis convicciones por cuanto no veo salvo su novedad ningún otro obstáculo para su realización y porque considero igualmente prioritaria la creación de una atmósfera cultural en cada área del conocimiento. Aun más, este proyecto es el más económico dentro de lo factible, pues demandaría más fondos para una rama específica solamente en una ciudad.

Terminemos esta discusión incidental y volvamos a la creatividad matemática. Una atmósfera apropiada solo puede surgir por un interés en temas comunes. Los investigadores necesitan indudablemente colaboradores. Un investigador aislado la mayoría de veces se extingue en el anonimato.

Las causas de esto no solo son sicológicas, no solo se refiere a la carencia de incentivos; un investigador aislado *conoce* menos que aquellos que trabajan en equipo. Este investigador recibe únicamente los resultados de la investigación; ideas completas y maduras, frecuentemente algunos años después de que ellas se originaron, esto es, cuando ya aparecen en imprenta. Un investigador aislado no presencia como ni donde estas ideas llegan a surgir; el no vive el proceso al lado de sus creadores. Un ruso muy culto me dijo un día en Gotinga, respecto a sus compatriotas: "hemos estado alejados de estas forjas y centros de investigación en las cuales las matemáticas se crean; hemos llegado tarde y ya no hay remedio, debemos permanecer en segundo plano"¡con cuanta mayor razón esto se refería a nosotros!

Es por eso que, si no deseamos permanecer siempre en "segundo plano", debemos tomar medidas radicales, examinar las razones de nuestro fracaso. ¡Debemos crear una "forja"(un Centro de investigación) en Polonia! Podremos conseguir esto solamente concentrando la mayoría de nuestros matemáticos en el cultivo de una sola rama de las matemáticas. Esto está ocurriendo ya por inercia propia, pero debemos ayudar a consolidar esta tendencia. Indudablemente, la creación de una publicación especializada en una rama de las matemáticas atraerá a muchos de nuestros colegas a trabajar en esta rama.

Por otra parte, esta publicación nos ayudara a crear esta "forja"en otro sentido: llegaríamos a ser el centro técnico de la publicación matemática en esta área. Matemáticos de otras partes nos enviarían manuscritos de nuevos trabajos y mantendrían relaciones permanentes con nosotros.

¡Con el deseo de conquistar una posición honrosa en el mundo de la cultura, saquemos adelante nuestra propia iniciativa!

Apéndice F

Artículos de Sierpiński en *FM*

Los 200 artículos que Sierpiński publica durante los primeros veinte años (1920-1939) de *Fundamenta Mathematicae* se distribuyen en 32 volúmenes. En cada uno de los años 1924, 1927, 1928, 1929, 1930, 1932, 1933, 1934, 1935, 1936, 1937 y 1938 se publicaron dos volúmenes, en los restantes años se publicó de a un volumen. Todos los artículos de Sierpiński en esta revista están en francés.

Primero se presenta, por volúmenes, los títulos de cada uno de los artículos que Sierpiński publicó en *Fundamenta Mahematicae* en los primeros 32 volúmenes. Cabe decir que no se tendrá en cuenta los problemas y anexos que este autor presentaba en estos volúmenes. También se presenta la clasificación que se le ha dado a cada artículo en una de las cinco ramas siguientes: topología, teoría de funciones, teoría general de conjuntos, teoría de la medida y teoría descriptiva de conjuntos. La numeración que cada artículo tiene corresponde a la que ha asignado [The Polish Digital Mathematical Library, 2013] de donde se puede obtener cada uno de éstos. Luego del listado, se presenta algunas tablas en la que se recopila información estadística producto de esta clasificación.

Algunos artículos y su clasificación van acompañados de notas a pie de página en la que se hace referencia a un término que aparezca en el título o a una indicación que se considere pertinente sobre su clasificación.

F.1. Clasificación de artículos

- En el volumen 1 (1920) hay 14 artículos:

Topología: 6
Teoría de funciones: 6
Teoría general de conjuntos: 0
Conjuntos medibles y no medibles: 2
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

Los artículos son los siguientes:

111. Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles de points.
Topología.
112. Sur un ensemble ponctiforme connexe.
Topología.
113. Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi.
Topología.
114. (Junto a Mazurkiewicz) Contribution á la topologie des ensembles dénombrables.
Topología.
115. Sur la décomposition des ensembles de points en parties homogènes.
Topología.
118. Sur une condition pour qu' un continu soit une courbe jordanienne.
Topología.
1112. Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel.
Conjuntos medibles y no medibles.
1113. Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement.
Conjuntos medibles y no medibles.
1114. Sur l' équation fonctionnelle
Teoría de funciones.
1116. Sur les fonctions convexes mesurables.
Teoría de funciones.
1118. Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire.
Teoría de funciones.

1119. Sur les rapports entre l' existence des intégrales $\int_0^1 f(x,y)dx$; $\int_0^1 f(x,y)dy$ et $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$
Teoría de funciones.
1121. Sur un problème de M. Lebesgue.
Teoría de funciones.
1122. Démonstration d' un théoreme de M. Baire sur les fonctions représentables analytiquement.
Teoría de funciones.

- En el volumen 2 (1921) hay 9 artículos:

Topología: 3
Teoría de funciones: 4
Teoría general de conjuntos: 2
Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

214. Sur les fonctions développables en séries absolument convergentes de fonctions continues.
Teoría de funciones.
216. Démonstration d' un théorème sur les fonctions de première classe.
Teoría de funciones.
217. Sur l' ensemble des points de convergence d' une suite de fonctions continues.
Teoría de funciones.
2110. Sur les images des fonctions représentables analytiquement.
Teoría de funciones.
2111. Sur les ensembles connexes et non connexes.
Topología.
2114. Les exemples effectifs et l' axiome du choix.
Teoría de conjuntos pura.
2123. (Junto a C. Kuratowski) Le théorème de Borel-Lebesgue dans la théorie des ensembles abstraits.
Topología.
2124. Sur l' equivalence de trois propriétés des ensembles abstraits.
Topología.
2127. Un remarque sur la notion de l' ordre.

Teoría general de conjuntos.

- En el volumen 3 (1922) hay 12 artículos:

Topología: 3
Teoría de funciones: 5
Teoría general de conjuntos: 4
Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

311. Sur l' egualité $2m = 2n$ pour les nombres cardinaux.
Teoría general de conjuntos.
312. Sur une propriété des ensembles frontières.
Topología.
315. Sur l' inversion des fonctions représentables analytiquement.
Teoría de funciones.
316. (Junto a B. Knaster) Sur un ensemble abstrait, dont chaque élément est un élément limite de chaque sous-ensemble non dénombrable.
Topología.
319. Sur une propriété des ensembles clairsemés.
Topología.
3110. Sur la notion dísomorphisme des ensembles.
Teoría general de conjuntos.
3115. Sur un problème concernant les sous-ensembles croissants du continu.
Teoría general de conjuntos.
3117. Sur quelques invariants d' Analysis Situs.
Teoría general de conjuntos.
3118. Sur les fonctions dérivées des fonctions discontinues.
Teoría de funciones.
3125. Sur les fonctions d' ensemble additives et continues.
Teoría de funciones.
3128. (Junto a C. Kuratowski) Les fonctions de classe 1 et les ensembles connexes punctiformes.
Teoría de funciones.
3129. Démonstration de quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions mesurables.
Teoría de funciones.

En el volumen 4 (1923) hay 6 artículos:

Topología: 3
Teoría de funciones: 2
Teoría general de conjuntos: 0
Teoría de la medida: 1
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

411. Sur quelques propriétés topologiques du plan.
Topología.
4110. Sur une généralisation de la notion de la continuité approximative.
Teoría de funciones.
4116. Démonstration élémentaire du théorème sur la densité des ensembles.
Topología.
4119. Un lemme métrique.
Conjuntos medibles y no medibles.
4125. (Junto a A. Zygmund) Sur une fontion qui est discontinue sur tout ensemble de puissance du continu.
Teoría de funciones.
4126. Sur l' invariance topologique de la propriété de Baire.
Topología.

En el volumen 5 (1924) hay 8 artículos:

Topología: 0
Teoría de funciones: 5
Teoría general de conjuntos: 2
Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 1

511. Sur une décomposition effective de fonctions en $\aleph$ classes.[1]
Teoría de funciones.
515. Une remarque sur la condition de Baire.
Teoría de funciones.

[1]El término *efectiva* hace alusión a tipos de existencia, ya sea de conjuntos o de funciones. Puede corresponder también a la teoría general de conjuntos, pero se extiende a las otras ramas.

519. Sur un exemple effectif d' une fonction non représentable anaytiquement.
Teoría de funciones.
5119. Les projections des ensembles mesurables (B) et les ensembles (A).[2]
Teoría descriptiva de conjuntos.
5121. Sur la puissance des ensembles mesurables (B).
Teoría general de conjuntos.[3]
5123. Sur l' hypotèse du continu
Teoría general de conjuntos.
5127. Démonstration d' un théorème sur les fonctions additives d' ensemble.
Teoría de funciones.
5133. Sur une propriété des fonctions de M. Hamel.
Teoría de funciones.

En el volumen 6 (1924) hay 7 artículos:

Topología: 3
Teoría de funciones: 1
Teoría general de conjuntos: 0
Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 3

611. Sur une propriété des ensembles ambigus.
Teoría descriptiva de conjuntos.
614. Sur une propriété des ensembles $F_{\sigma\delta}$.[4]
Topología.
615. Sur une défintion topologique des ensembles $F_{\sigma\delta}$.
Topología.
618. Un exemple effectif d' un ensemble mesurable (B) de classe α.[5]
Teoría descriptiva de conjuntos.
6111. Sur une opération sur les suites infinies d' ensembles.

[2]Conjunto (B) se refiere a los conjuntos borelianos, mientras que conjunto (A) se referirá a los conjuntos analíticos.

[3]Se ha optado por clasificarlo como teoría general de conjuntos por sobre teoría descriptiva de conjuntos por la preponderancia del término potencia.

[4]Los conjuntos $F_{\sigma\delta}$ son aquellos que se pueden ver como las intersecciones numerables de uniones numerables de conjuntos cerrados.

[5]α puede tomar el valor de un ordinal de la primera la segunda clase de los ordinales de Cantor.

Teoría descriptiva de conjuntos.
6112. Une définition topologique des ensembles G_δ.[6]
Topología.
6119. (Junto a S. Mazurkiewicz) Sur une problème concernant les fonctions continues.
Teoría de funciones.

En el volumen 7 (1925) hay 6 artículos:

Topología: 0
Teoría de funciones: 0
Teoría general de conjuntos: 0
Teoría de la medida: 4
Teoría descriptiva de conjuntos: 2

717. Sur l' ensemble de distances entre les points d' un ensemble.
Teoría de la medida.
719. Les fonctions continues et les ensembles (A).
Teoría descriptiva de conjuntos.[7]
7111. Sur un ensemble non dénombrale dont tout homéomorphe est de mesure nulle.
Teoría de la medida.
7113. Sur un ensemble fermé conduisant à un ensemble non mesurable (B).
Teoría de la medida.
7117. Sur une classe d' ensembles.
Teoría descriptiva de conjuntos.
7120. (Junto a Otton Nikodym) Sur un ensemble ouvert, tel que la somme de toutes les droites quíl contient est un ensemble non mesurable (B).
Teoría de la medida.

En el volumen 8 (1926) hay 5 artículos:

Topología: 3
Teoría de funciones: 0

[6] Los G_δ son conjuntos borelianos formados por intersecciones contables de conjuntos abiertos.

[7] También puede catalogarse en teoría de funciones, pero le da un poco más de relevancia en este artículo a los conjuntos (A).

Teoría general de conjuntos: 0
Teoría de la medida: 1
Teoría descriptiva de conjuntos: 1

816. Sur l' invariance topologique des ensembles G_δ.
Topología.
8114. (Junto a C. Kuratowski) Sur un problème de M. Fréchet concernant les dimensions des ensembles lináires.
Topología.
8117. Sur une problème de M. Menger.
Topología.
8121. Sur une propriété des ensembles (A).
Teoría descriptiva de conjuntos.
8122. Sur l' ensemble de valeurs qu' une fonction continue prend une infinité non dénombrable de fois.
Teoría de la medida.

En el volumen 9 (1927) hay 6 artículos:

Topología: 2
Teoría de funciones: 2
Teoría general de conjuntos: 1
Teoría de la medida: 1
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

911. Sur une propriété des fontions semi-continues.
Teoría de funciones.
915. Remarque sur la convergence en mesure.
Teoría de funciones.
917. Sur la puissance des ensembles d' une certaine classe.
Teoría general de conjuntos.
9114. Sur la densité linéaire des ensembles plans.
Teoría de la medida.
9115. La connexité des ensembles et la propriété de Darboux.
Topología.

9116. Sur l' espace D_ω de M. Fréchet.[8]
Topología.

En el volumen 10 (1927) hay 4 artículos:

Topología: 0
Teoría de funciones: 0
Teoría general de conjuntos: 0
Teoría de la medida: 1
Teoría descriptiva de conjuntos: 3

1014. Sur une propriété caractéristique des ensembles analytiques.
Teoría descriptiva de conjuntos.
1017. Sur un problème conduisant à un ensemble non mesurable.
Teoría de la medida.
10118. Sur une classification des ensembles mesurables (B).
Teoría descriptiva de conjuntos.
10124. Sur un problème de M. Hausdorff.
Teoría descriptiva de conjuntos.

En el volumen 11 (1928) hay 10 artículos:

Topología: 1
Teoría de funciones: 3
Teoría general de conjuntos: 0
Teoría de la medida: 2
Teoría descriptiva de conjuntos: 4

11134. Sur un question concernant les ensembles analytiques plans.
Teoría descriptiva de conjuntos.
11136. Sur un ensemble non dénombrable, dont toute image continue est de mesure nulle.
Teoría de la medida.
11116. Sur une hypothèse e M. Mazurkiewicz.
Teoría de funciones.

[8] El espacio D_ω de Fréchet corresponde al conjunto de todas las sucesiones de números reales.

1118. (Junto a S. Saks) Sur une propriété générale de fonctions.
Teoría de funciones.
11110. Sur les projections des ensembles complémentaires aux ensembles (A).
Teoría descriptiva de conjuntos.
11111. Sur les produits des images continues des ensembles C(A).[9]
Teoría descriptiva de conjuntos.
11137. La propriété de Baire de fonctions et de leurs images.
Teoría de funciones.
11122. Sur les ensembles complets d' un espace (D).
Topología.
11121. Sur les points linéairement acesibles des ensembles mesurables (Solution d' un problème de P. Urysohn).
Teoría de la medida.
1112. Le crible de M. Lusin et l' opération (A) dans les espaces abstraits.[10]
Teoría descriptiva de conjuntos.

En el volumen 12 (1928) hay 4 artículos:

Topología: 0
Teoría de funciones: 0
Teoría general de conjuntos: 0
Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 4

1211. Les ensembles projectifs et le crible de M. Lusin.
Teoría descriptiva de conjuntos.
1216. Sur un ensemble analytique plan, universel pour les ensembles mesurables (B) (Extrait d' une lettre adreasée à M. N. Lusin).
Teoría descriptiva de conjuntos.
12117. Un théorème général sur les familles d' ensembles.
Teoría descriptiva de conjuntos.
12118. Sur les images continues et biunivoques des complémentaires analytiques.

[9] Los conjuntos $C(A)$ son los coanalíticos, o losΠ^1_1 en notación moderna.
[10] La operación (A) es aquella que genera los conjuntos analíticos, que se definió en el apartado 6.2.3.

Teoría descriptiva de conjuntos.

En el volumen 13 (1929) hay 4 artículos:

Topología: 3
Teoría de funciones: 0
Teoría general de conjuntos: 0
Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 1

13117. Sur les families inductives et projectives d' ensembles.
Teoría descriptiva de conjuntos.
13122. Sur un type infini de dimensions qui est localment fini.
Topología.
13113. Sur une décomposition du segment.
Topología.
1317. Sur les plus petits types de dimensions incomparables.
Topología.

En el volumen 14 (1929) hay 7 artículos:

Topología: 3
Teoría de funciones: 0
Teoría general de conjuntos: 0
Teoría de la medida: 1
Teoría descriptiva de conjuntos: 3

1412. Sur l' existence de diverses classes d' ensembles.
Teoría descriptiva de conjuntos.
1419. Remarques concernant les types de dimension.
Topología.
14132. Sur les images continues des ensembles analytiques linéaires ponctiformes.
Teoría descriptiva de conjuntos.
14115. Sur une propriété des ensembles F_σ linéaires.[11]

[11] Los conjuntos F_σ son aquellos que se pueden ver como la unión numerable de conjuntos cerrados y disjuntos dos a dos.

Topología.
14117. Sur un problème conduisant à un ensemble non mesurable, ne contenant aucun sous-ensemble parfait.
Teoría de la medida.
14119. Sur les images continues des ensembles de points.
Topología16.
14125. Sur un théorème de MM. Banach et Kuratowski.
Teoría descriptiva de conjuntos.

En el volumen 15 (1930) hay 6 artículos:

Topología: 0
Teoría de funciones: 2
Teoría general de conjuntos: 3
Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 1

1511. Sur l' hypothèse qu' il n' existe aucun nombre cardinal intermédiaire entre $2^{\aleph_0}$ et $2^{2^{\aleph_0}}$.
Teoría general de conjuntos.
15113. Sur la puissance des ensembles analytiques.
Teoría general de conjuntos.
15117. Sur les images de Baire des ensembles linéaires.
Teoría de funciones.
15118. Sur les opérations de M. Hausdorff. (Solution de cinq problèmes de M. Tarski).
Teoría descriptiva de conjuntos.
15128. Sur un problème concernant les fonctions continues.
Teoría de funciones.
15129. (Junto a A. Tarski) Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles.
Teoría general de conjuntos.

En el volumen 16 (1930) hay 4 artículos:

Topología: 1
Teoría de funciones: 1
Teoría general de conjuntos: 0

Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 2

1611. Sur une propriété des opérations de M. Hausdorff.
Teoría descriptiva de conjuntos.
1618. Sur l' extension des fonctions de Baire définies sur les ensembles linéaires quelconques.
Teoría de funciones.
16113. Sur l' uniformisation des ensembles mesurables (B).
Teoría descriptiva de conjuntos.
16117. Sur une propriété des ensembles G_δ.
Topología.

En el volumen 17 (1931) hay 4 artículos:

Topología: 0
Teoría de funciones : 0
Teoría de la medida: 0
Teoría general de conjuntos: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 4

1711. Sur une crible universal.
Teoría descriptiva de conjuntos.
1715. Sur les cribles projectifs.
Teoría descriptiva de conjuntos.
1718. Les ensembles analytiques comme criblés au moyen des ensembles fermés.
Teoría descriptiva de conjuntos.
1720. Sur deux complémentaires analytiques non séparables B.
Teoría descriptiva de conjuntos.

En el volumen 18 (1932) hay 4 artículos:

Teoría de funciones: 2
Teoría general de conjuntos: 2
Topología: 0
Teoría de la medida: 0

Teoría descriptiva de conjuntos: 0

1811. Sur les anneaux de fonctions.
Teoría de funciones.
18110. Remarque sur les suites infinies de fonctions (Solution d' un problème de M.S. Saks)
Teoría de funciones.
18119. Sur les ensembles de la même puissance qui ne sont pas effectivement de la même puissance.
Teoría general de conjuntos.
18123. Généralisation d' un théorème de Cantor concernant les ensembles ordonnés dénombrables.
Teoría general de conjuntos.

En el volumen 19 (1932) hay 6 artículos.

Topología: 2
Teoría de funciones: 1
Teoría general de conjuntos: 1
Teoría de la medida: 1
Teoría descriptiva de conjuntos: 1

1911. Sur quelques propositions équivalentes à l' hypothèse du continu.
Teoría general de conjuntos.
1914. Sur un ensemble parfait qui a avec toute sa translation au plus un point commun.
Topología.
1915. Sur les translations des ensembles linéaires.
Teoría de la medida.
1919. Sur un problème concernant les types de dimensions. Topología.
19117. Un théorème concernant les transformations continues des ensembles linéaires.
Teoría de funciones.
19123. Sur les rapports entre les classifications des ensembles de MM. F. Hausdorff et Ch. de la Vallée Poussin.
Teoría descriptiva de conjuntos.

En el volumen 20 (1933) hay 4 artículos:

Topología: 1
Teoría de funciones: 2
Teoría general de conjuntos: 1
Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

20110. Sur l' ensemble de valeurs d' une fonction mesurable à valeurs distinctes.
Topología.[12]
20114. Sur une certain suite infinie de fonctions d' une variable réelle.
Teoría de funciones.
20116. Sur la superposition des fonctions de Baire.
Teoría de funciones.
20121. Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles.
Teoría general de conjuntos.

En el volumen 21 (1933) hay 6 artículos:

Topología: 3
Teoría de funciones: 0
Teoría general de conjuntos: 2
Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 1

2114. Sur les constituantes des ensembles analytiques.
Teoría descriptiva de conjuntos.
2116. Sur le recouvrement du plan par une infinité dénombrable de courbes congruentes.
Topología.
2118. Un exemple effectif d' un ensemble dénombrable de nombres réels qui n' est pas effectivement énumérable.

[12] La condición de búsqueda en el teorema a demostrar es que el conjunto lineal contenga un subconjunto perfecto.

Teoría general de conjuntos.[13]
21111. Sur une propriété des ensembles G_δ non dénombrables.
Topología .
21116. Sur les espaces métriques localement separables.
Topología.
21129. Le théorème d' unicité de M. Lusin pour les espaces abstraits.
Teoría general de conjuntos.

En el volumen 22 (1934) hay 7 artículos:

Topología: 3
Teoría de funciones: 2
Teoría general de conjuntos: 0
Teoría de la medida: 1
Teoría descriptiva de conjuntos: 1

2211. Sur les ensembles partout de deuxième catégorie.
Topología.
2214. Sur la superposition de fonctions qui jouissent de la propriété de Baire.
Teoría de funciones.
2217. Deux théorèmes sur les familles des fonctions de Baire.
Teoría de funciones.
2219. Sur un problème de M. Kuratowski concernant la propriété de Baire des ensembles.
Topología.
22121. La propriété de Baire des ensembles et l' homéomorphie généralisée.
Topología.
22124. Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle.
Teoría de la medida.
22130. Remarque sur un ensemble de M. Lusin
Teoría descriptiva de conjuntos.

En el volumen 23 (1934) hay 5 artículos:

[13] El ejemplo dado es un complementario analítico, que es tema de teoría descriptiva de conjuntos, sin embargo el propósito es la numerabilidad efectiva que es un tema de la teoría general de conjuntos.

Topología: 2
Teoría de funciones: 1
Teoría general de conjuntos: 1
Teoría de la medida: 1
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

23110. Sur l' approximation des fonctions continues par les superpositions de quatre fonctions.
Teoría de funciones.
23111. Sur les ensembles jouissant de la propriété de Baire.
Teoría general de conjuntos.[14]
23112. Sur une propriété des ensembles linéaires quelconques.
Teoría de la medida.
23119. Un théorème topologique équivalent à l'hypothèse du continu.
Topología.
23123. Sur la séparabilité multiple des ensembles mesurables B.
Topología.

En el volumen 24 (1935) hay 7 artículos:

Topología: 1
Teoría de funciones: 3
Teoría general de conjuntos: 2
Teoría de la medida: 1
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

2411. Les superpositions transfinies des fonctions continues et les fonctions de Baire.
Teoría de funciones.
2412. Un théorème de la théorie générale des ensembles et ses conséquences.
Teoría general de conjuntos.
2413. Sur un problème de M. Ruziewicz concernant les superpositions de fonctions jouissant de la propriété de Baire.
Teoría de funciones.

[14]Porque el artículo se dedica a mostrar que la portencia de la clase de conjuntos que satisfacen la propiedad de Baire es $2^{\aleph_1}$.

2416. Sur deux problèmes de M. Ruziewicz concernant la décomposition de l' intervalle en paires de points.
Teoría de la medida.
2417. Sur le produit combinatoire de deux ensembles jouissant de la propriété C. Topología.
24122. Sur les suites infinies de fonctions defines dans les ensembles quelconques.
Teoría de funciones.
24124. Sur une propriété de la droite.
Teoría general de conjuntos.

En el volumen 25 (1935) hay 6 artículos:

Topología: 0
Teoría de funciones: 2
Teoría general de conjuntos: 1
Teoría de la medida: 1
Teoría descriptiva de conjuntos: 2

2511. Sur une propriété de fonctions quelconques d' une variable réelle.
Teoría de funciones).
2515. Le théorème de Souslin dans la théorie générale des ensembles.
Teoría general de conjuntos.
25110. Sur les transformations des ensembles par les fonctions de Baire.
Teoría de funciones.
25113. Sur une hypothèse de M. Lusin.
Teoría descriptiva de conjuntos.
25125. Sur un ensemble projectif de classe 2 dans l' espace des ensambles fermés plans.
Teoría descriptiva de conjuntos.
25143. Un théorème de la théorie générale des ensembles.
Teoría de la medida. [15]

En el volumen 26 (1936) hay 6 artículos:

[15] Este artículo es un ejemplo de que el título induce a clasificar en teoría general de conjuntos, sin embargo el propósito es determinar si hay conjuntos de medida nula o no.

Topología: 3
Teoría de funciones: 0
Teoría general de conjuntos: 1
Teoría de la medida: 2
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

2612. Sur les images biunivoques et continues dans un sens.
Topología.
2616. Remarque sur les translations d' ensembles.
Teoría de la medida.
26112. (Junto a C. Kuratowski) Sur les ensembles qui ne contiennent aucun sous-ensemble indénombrable non-dense.
Topología.
26113. Un théorème concernant les translations d' ensembles.
Topología.
26127. Remarque sur le problème de la mesure.
Teoría de la medida.
26134. Sur une suite universelle d' ensembles dénombrables.
Teoría general de conjuntos.

En el volumen 27 (1936) hay 4 artículos:

Topología: 2
Teoría de funciones: 1
Teoría general de conjuntos: 1
Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

2711. Sur les suites transfinies multiples universelles.
Teoría general de conjuntos (se refiere a sucesiones de números ordinales).
2714. Sur la séparabilité généralisée.
Topología.
27115. Sur un problème concernant les fonctions de première classe.
Teoría de funciones.
27126. Sur les transformations continues biunivoques.
Topología.

En el volumen 28 (1937) hay 6 artículos:

Topología: 1
Teoría de funciones: 2
Teoría general de conjuntos: 3
Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

2811. Sur un problème concernant les fonctions semi-continues
Teoría de funciones.
2818. Sur les fonctions dépendantes
Teoría de funciones.
2819. Sur un problème de la théorie des relations.
Teoría general de conjuntos.
28114. Sur une décomposition du segment en plus que $2_0^{\aleph}$ ensembles non mesurables et presque disjoints.
Teoría general de conjuntos.[16]
28115. Sur les suites transfinies finalement disjointes.
Teoría general de conjuntos .
28116. Les fonctions continues et la propriété de Baire.
Topología.

En el volumen 29 (1937) hay 7 artículos:

Topología: 0
Teoría de funciones: 0
Teoría general de conjuntos: 7
Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

2911. Sur une décomposition effective d' ensembles.
Teoría general de conjuntos.
2913. Sur la non-existence d' opération universelle pour les ensembles dénombrables.
Teoría general de conjuntos.
2916. Sur une décomposition du segment. Teoría general de conjuntos.

[16]El el propósito es mostrar que existe una familia de potencia mayor que $2^{\aleph_0}$.

2917. Sur deux propositions, dont l' ensemble équivaut à l' hypothèse du continu. Teoría general de conjuntos.
29111. Sur le rapport de la propriété (C) à la théorie générale des ensembles. Teoría general de conjuntos.
29122. Le théorème de M. Lusin comme une proposition de la Théorie générale des ensembles.
Teoría general de conjuntos.
29124. Sur un problème de la théorie générale des ensembles concernant les familles boreliennes d' ensembles.
Teoría general de conjuntos.

En el volumen 30 (1938) hay 8 artículos:

Topología: 2
Teoría de funciones: 2
Teoría general de conjuntos: 2
Teoría de la medida: 0
Teoría descriptiva de conjuntos: 2

3011. Sur un problème de M. Hausdorff.
Teoría general de conjuntos.
3013. Sur le plus petit corps contenant une famille donnée d' ensembles.
Teoría general de conjuntos.
3019. Remarque sur le problème de l' invariance topologique de la proprieté (C).
Topología.
30110. Sur un problème concernant les fonctions projectives.
Teoría descriptiva de conjuntos.
30111. Sur un problème concernant les ensembles projectives.
Teoría descriptiva de conjuntos.
30112. Sur l' équivalence des problèmes de M. Kolmogoroff et M. Mazurkiewicz.
Teoría de funciones.
30116. Fonctions aditives non complètement additives et fonctions non mesurables.
Teoría de Funciones.
30120. Sur une propriété des espaces métriques separables.

Topología.

En el volumen 31 (1938) hay 4 artículos:

Topología: 1
Teoría de funciones: 2
Teoría general de conjuntos: 0
Teoría de la medida: 1
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

3111. Sur un problème concernant les familles d' ensembles parfaits.
Teoría de la medida.[17]
31123. Sur une relation entre deux conséquencces de l' hypothèse du continu.
Teoría de funciones.
31126. Sur l' existence d' une base dénombrable d' ensembles linéaires dénombrables.
Topología.
31129. Un théorème concernant la convergence des fonctions sur les ensembles dénombrables.
Teoría de funciones.

En el volumen 32 (1939) hay 4 artículos:

Topología: 2
Teoría de funciones: 1
Teoría general de conjuntos: 0
Teoría de la medida: 1
Teoría descriptiva de conjuntos: 0

3211. Remarque sur les suites doublés de fonctions continues.
Teoría de funciones.
32119. Sur quelques transformations biunivoques de la droite en elle-même.
Teoría de la medida.
32124. Sur les ensembles concentrés.
Topología.
32125. Sur un ensemble à propriété λ.

[17] Se trata de determinar si existe un conjunto de medida cero.

Topología.

F.2. Resultados de la clasificación

Las tablas F.1 y F.2 resumen el número de artículos por cada materia anualmente. Las tablas F.3 y F.4 presentan el número de artículos y porcentajes de cada rama por década, mientras que en la tabla F.5 se presenta en número de artículos y los porcentajes de los veinte años.

Cuadro F.1: artículos 1920-1929

	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929
Topología	6	3	3	3	3	0	3	2	1	6
Teoría de funciones	6	4	5	2	6	0	0	2	3	0
Teoría de la medida	2	0	0	1	0	4	1	2	2	1
Teoría general de conjuntos	0	2	4	0	2	0	0	1	0	0
Teoría descriptiva de conjuntos	0	0	0	0	4	2	1	3	8	4

Cuadro F.2: artículos 1930-1939

	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939
Topología	1	0	2	4	5	1	5	1	3	2
Teoría de funciones	3	0	3	2	3	5	1	2	4	1
Teoría de la medida	0	0	1	0	2	2	2	0	1	1
Teoría general de conjuntos	3	0	3	3	1	3	2	10	2	0
Teoría descriptiva de conjuntos	3	4	1	1	1	2	0	0	2	0

Cuadro F.3: porcentajes 1920-1929

	Número de artículos	%
Topología	30	29,41
Teoría de funciones	28	27,45
Teoría de la medida	13	12,74
Teoría general de conjuntos	9	8,82
Teoría descriptiva de conjuntos	22	21,56

Cuadro F.4: porcentajes 1930-1939

	Número de artículos	%
Topología	24	23,52
Teoría de funciones	24	23,52
Teoría de la medida	9	8,82
Teoría general de conjuntos	27	27,55
Teoría descriptiva de conjuntos	14	13,72

Cuadro F.5: Total

	Número de artículos	%
Topología	54	27
Teoría de funciones	52	26
Teoría de la medida	22	11
Teoría general de conjuntos	36	18
Teoría descriptiva de conjuntos	36	18

Bibliografía

[Addison, 1959] Addison, J. (1959). Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory. *Fundamenta Mathematicae*, 46, pp. 123–135.

[Alexandroff, 1916] Alexandroff, P. (1916). Sur la puissance des ensembles mesurables B. *Comptes Rendus de l' Académie des Sciences, Paris*, 162, pp. 323–325.

[Arboleda, 1982] Arboleda, L. (1982). Elementos inéditos sobre la creación de la escuela polaca de matemáticas. *Lecturas Matemáticas*, 3, pp. 221–256.

[Arboleda, 2012] Arboleda, L. (2012). Objetos matemáticos y prácticas constitutivas: la génesis de la topología de vecindades. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, 1(1), pp. 32–44.

[Aull y Lowen, 1997] Aull, C. y Lowen, R. (1997). *Handbook of the History of General Topology*. Springer. Volúmenes 1-3.

[Baire, 1899] Baire, R. (1899). Sur les Fonctions de variables reélles. *Annali di matematica pura ed applicata*, 3, pp. 1–123. También en *Œuvres Scientifiques,* Gauthier-Villars, Paris, 1990, pp. 49-173.

[Baire et al., 1905] Baire, R., Borel, E., Lebesgue, H., y Hadamard, J. (1905). Cinq lettres sur la théorie des ensembles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 33, pp. 261–273. Con traducción al inglés en [Moore, 1982].

[Bendixson, 1883] Bendixson, I. (1883). Quelques théorèmes de la théorie des ensembles. *Acta Mathematica*, 2, pp. 415–429.

[Benis-Sinaceur, 2008] Benis-Sinaceur, H. (2008). Nécessité et fécondité des définitions : les fondements de la théorie des nombres de Richard Dedekind (1831-1916). En *Mieville, Denis, Joray, Pierre. Définition : rôles et fonctions en logique et mathématiques*, pp. 29–72. Neuchâtel (Suiza).

[Borel, 1898] Borel, E. (1898). *Leçons sur la théorie des fonctions.* Primera edición. Gauthier-Villars, Paris, (Segunda edición 1914).

[Borsuk, 1955] Borsuk, K. (1955). On some metrization of the hyperspace of compact sets. *Fundamenta Mathematicae*, 41, pp. 168–202.

[Braun, 1937] Braun, S. (1937). Sur l' uniformisation des ensembles fermés. *Fundamenta Mathematicae*, 28, pp. 214–218.

[Braun y Sierpiński, 1932] Braun, S. y Sierpiński, W. (1932). Sur quelques propositions équivalentes à l' hypothèse de continu. *Fundamenta Mathematicae*, 19, pp. 1–7.

[Cantor, 1879] Cantor, G. (1879). Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. Reimpreso en [Cantor, 1932], pp. 134 - 138.

[Cantor, 1883] Cantor, G. (1883). Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Leipzig, (edición separada de [Cantor, 1879], parte 5). Aparece en [Cantor, 1932], pp. 165-208. Traducido al inglés en [Ewald, 1996], volumen 2.

[Cantor, 1884] Cantor, G. (1884). Über unendliche, lineaire Punktmannichfaltigkeiten. VI. *Matematicshe Annnalen*, 23, pp. 453–488. Reimpreso en [Cantor, 1966], pp. 210-246.

[Cantor, 1932] Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* ed. E. Zermelo, Berlin, Springer.

[Cantor, 1966] Cantor, G. (1966). *Gesammelte Abehandlungen.* Hildesheim, Georg Olms Verlag.

[Chaves, 2006] Chaves, A. (2006). *Las clases de Baire en el surgimiento de los conjuntos analíticos.* Tesis de maestría, Universidad del Valle, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Matemáticas, Cali .

[Chaves, 2010] Chaves, A. (2010). *La teoría de conjuntos en la obra de Waclaw Sierpiński y los primeros años de la revista Fundamenta Mathematicae*. Trabajo de fin de master, Máster interuniversitario (UAB - UB) Historia de la Ciencia: Ciencia, Historia y Sociedad.

[Ciesielski, 1993] Ciesielski, K. (1993). On some details of Stefan Banach's life. *Opuscula Mathematica*, 13, pp. 71–74. Disponible en [Miranowicz y Jakimowicz, 2012].

[Ciesielski y Moslehian, 2010] Ciesielski, K. y Moslehian, M. (2010). Some Remarks on the History of Functional Analysis. *Annals of Functional Analysis*, 1, pp. 1–12. Cominicatted by L. Székelyhidi.

[Cohen, 1963] Cohen, P. (1963). The Independence of the Continuum Hypothesis. *Proceddings of the National Academy of Science of the United States of America*, 50, pp. 1143–1148. También en volumen 51, 1964, pp. 105-110.

[Cooke, 2003] Cooke, R. (2003). Review: Labyrinth of thought: A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics, by José Ferreirós. *The Review of Modern Logic*, 9(1-2), pp. 167–182. Disponible en: http://projecteuclid.org/euclid.rml/1081173841.

[Corry, 1998] Corry, L. (1998). Los 23 Problemas de Hilbert y su Transfondo Histórico. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 5(2), pp. 119–125.

[Corry, 2007] Corry, L. (2007). *Episodes in the History of Modern Algebra: (1800-1950)*, Capítulo: From Algebra (1895) to Moderne Algebra (1930): Changing Conceptions of a Discipline. A Guided Tour Using the Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, pp. 221–244. Providence, American Mathematical Society / London Mathematical Society.

[Dauben, 1979] Dauben, J. (1979). *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Cambridge, Harvard University Press.

[Díaz, 2002] Díaz, J. (2002). Pavel Sergueievich Aleksandrov. *Apuntes de historia de las matemáticas*, 1(3), pp. 41 – 47.

[De La Pava, 2010] De La Pava, L. V. (2010). *Los trabajos de Cantor y la teoría de conjuntos como rama de las matemáticas: La hipótesis del continuo y el axioma de elección.* Tesis de maestría., Universidad del Valle.

[Dedekind, 1888] Dedekind, R. (1888). *¿Qué son y para qué sirven los números?, y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática.* Madrid: Alianza, D.L. 1998. Edición, introducción y traducción del alemán a cargo de José Ferreirós.

[Dieudonné, 1989] Dieudonné, J. (1989). *En honor del espíritu humano. Las matemáticas de hoy.* Alianza Universidad. Versión española de Mirnaya Chabás y José Chabás.

[Duda, 1996] Duda, R. (1996). *L'Europe mathématique / Mathematical Europe*, Capítulo: Fundamenta Mathematicae and the Warsaw School of Mathematics, pp. 480–498. Editions de la Maison des sciences de l'homme, Paris.

[Duda, 2004] Duda, R. (2004). On the Warsaw interactions of logic and mathematics in the years 1919-1939. *Annals of Pure and Applied Logic*, 127, pp. 289–301.

[Dugac, 1976] Dugac, P. (1976). *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques (avec de nombreux textes inédits).* Paris, Vrin.

[Durán, 2009] Durán, A. (2009). Pasiones, piojos, dioses. . . y matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 12(2), pp. 279–300.

[Eilenberg y Steenrod, 1952] Eilenberg, S. y Steenrod, N. (1952). *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton University Press.

[Erdös, 1943] Erdös, P. (1943). Some remarks on set theory. *Ann. of Math.*, 44, pp. 643–646.

[Ewald, 1996] Ewald, W. (1996). *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics.* Oxford University Press. Volúmenes 1 y 2.

[Feferman y Feferman, 2004] Feferman, A. y Feferman, S. (2004). *Alfred Tarski. Life and logic.* Cambridge University Press.

[Ferreirós, 1993] Ferreirós, J. (1993). *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854 - 1908.* Madrid, Publicaciones de la Universidad Autónoma.

[Ferreirós, 1995] Ferreirós, J. (1995). De la Naturlehre a la física: factores epistemológicos y factores socioculturales en el nacimiento de una disciplina científica. *Arbor CLI, 596*.

[Ferreirós, 1998] Ferreirós, J. (1998). El enfoque conjuntista en matemática. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, (3), pp. 389 – 412.

[Ferreirós, 1999] Ferreirós, J. (1999). *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Basel/Boston, Birkhäuser. Nueva edición en paperback, 2007.

[Ferreirós, 2004] Ferreirós, J. (2004). Un episodio de la crisis de fundamentos: 1904. *La Gaceta de la RSME*, 7.2, pp. 449–467.

[Ferreirós, 2006] Ferreirós, J. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos : escritos y correspondencia selecta / Georg Cantor*. Barcelona : Crítica, Cop. 2006.

[Ferreirós, 2010] Ferreirós, J. (2010). La lógica matemática: una disciplina en busca de encuadre. *Theoria*, 25 (69), pp. 279 – 299.

[Fraenkel et al., 1973] Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., y Levy, A. (1973). *Foundations of Set Theory*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier Science.

[Garg, 1962] Garg, K. (1962). On nowhere monotone functions II. *Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées*, 7, pp. 663 – 671.

[Gauthier, 2006] Gauthier, S. (2006). *La géométrie des nombres comme discipline (1890- 1945)*. PhD thesis, Université Paris VI - Pierre et Marie Curie.

[Gödel, 1938] Gödel, K. (1938). The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.*, 24, pp. 556–557.

[Gödel, 1947] Gödel, K. (1947). What is Cantor's continuum problem? *American Mathematical Monthly*, 54, pp. 515–525.

[Gödel, 1986] Gödel, K. (1986). *Collected Works, vol. 1*. New York, Oxford University Press.

[Gispert, 1995] Gispert, H. (1995). La théorie des ensembles en france avant la crise de 1905: Baire, Borel, Lebesgue . . . et tous les autres. *Revue d' histoire des mathématiques*, 1, pp. 39 – 81.

[Graham y Kantor, 2009] Graham, P. y Kantor, J. (2009). *Naming Infinity*. Belknap Press of Harvard University Press.

[Grattan-Guinness, 1970] Grattan-Guinness, I. (1970). An unpublished paper by Georg Cantor: Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilung. *Acta Mathematica*, 124, pp. 65 – 107.

[Grattan-Guinness, 1980] Grattan-Guinness, I. (1980). *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910*. Londres, Duckworth.

[Grattan-Guinness, 2000] Grattan-Guinness, I. (2000). *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940: Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*. Princeton Univ. Press.

[Hartman et al., 1974] Hartman, S., Kuratowski, K., Marczewski, E., Mostowski, A., Schinzel, A., Sikorski, R., y Stark, M. (1974). *Œuvres choisies. Wacław Sierpiński*. Académie Polonaise des Sciences, Institut Mathématique.

[Hausdorff, 1914] Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig, Veit. Reprint New York, Chelsea, 1949.

[Hausdorff, 1916] Hausdorff, F. (1916). Die Mächtiggkeit der Borelschen Mengen. *Mathematische Annalen*, 77, pp. 430–437.

[Hausdorff, 1927] Hausdorff, F. (1927). *Set Theory*. Chelsea Publishing Co., New York, NY. Traducido al inglés en 1957, de la tercera edición alemana de [Hausdorff, 1914], titulada *Mengenlehre*.

[Hurewicz, 1930] Hurewicz, Z. (1930). Zur Theorie der analytischen Mengen. *Fundamenta Mathematicae*, 15, pp. 4–17.

[International Mathematical Union, 2013] International Mathematical Union (2013). ICM Proceedings 1893-2010, http://www.mathunion.org/icm/.

[Jahrbuch Project, 2007] Jahrbuch Project (2007). Jahrbuch Database, http://www.emis.de/math/jfm/quick.html.

[James, 1999] James, I., editor (1999). *History of Topology.* Elsevier.

[Jameson, 1972] Jameson, G. (1972). A variant of a theorem of Sierpiński concerning partitions of continua. *Colloq. Math*, 25, pp. 79–80.

[Janiszewski, 1918] Janiszewski, Z. (1918). Sobre las necesidades de las matemáticas en Polonia. *En [Arboleda, 1982, Apéndice B]*, pp. 11–18. Traducido del inglés *On the needs of science in Poland* por Diego Pareja, en [Kuzawa, 1968, pp. 112-118].

[Jech y Hrbacek, 1984] Jech, T. y Hrbacek, H. (1984). *Introduction to Set Theory.* New York : Marcel Dekker.

[Jensen, 1995] Jensen, R. (1995). Inner Models and Large cardinals. *The Bulletin of Symbolic Logic.*

[Jensen y Solovay, 1970] Jensen, R. y Solovay, R. (1970). Some applications of almost disjoint sets. En *Proceedings of an international colloquium. Jersualem 1968.*, pp. 84–104. Y. Bar Hillel. Amsterdam-London. En *Mathematical logic and fundations of set theory.*

[Kanamori, 1995] Kanamori, A. (1995). The Emergence of Descriptive Set Theory. *J. Hintikka, ed., From Dedekind to Gödel, Dordrecht, Kluwer.*

[Kanamori, 1996] Kanamori, A. (1996). The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 2(1), pp. 1–71.

[Kanovei, 1985] Kanovei, V. (1985). The development of the descriptive theory of sets under the influence of the work of Luzin. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40(3), pp. 117 – 155.

[Kanovei y Lyubetsky, 2003] Kanovei, V. y Lyubetsky, V. (2003). On some classical problems of descriptive set theory. *Uspekhi Mat. Nauk*, 58(3), pp. 3 – 88.

[Kechris, 1995] Kechris, A. (1995). *Classical Descriptive Set Theory.* Graduate Texts in Mathematics, no. 156, Springer-Verlag, New York. ix.

[Knaster y Lelek, 1958] Knaster, B. y Lelek, A. (1958). Coutures et tapis. *Fundamenta Mathematicae*, 45, pp. 186–199.

[Kohler, 1982] Kohler, R. (1982). *From Medical Chemistry to Biochemistry: the Making of a Biomedical Discipline*. Cambridge: Cambridge University Press,.

[Kondô, 1937] Kondô, M. (1937). L' uniformisation des complémentaires analytiques. *Proceedings of the Imperial Academy of Japan*, 13, pp. 287 –291.

[Kondô, 1939] Kondô, M. (1939). Sur l' uniformisation des complémentaires analytiques et les ensembles projectifs de la seconde classe. *Japanese Journal of Mathematics*, 15, pp. 197–230.

[Kowalski, 2004] Kowalski, J. (2004). The Polish Mathematical Society (PTM). *European Mathematical Society*, pp. 24–29.

[Kuratowski y Sierpiński, 1921] Kuratowski, C. y Sierpiński, W. (1921). Sur les différences de deux ensembles fermés. *Tôhoku Math. J.*, 20, pp. 22–25.

[Kuratowski y Sierpiński, 1922] Kuratowski, C. y Sierpiński, W. (1922). Les fonctions de classe 1 et les ensembles connexes ponctiformes. *Fundamenta Mathematicae*, 3, pp. 303–313.

[Kuratowski, 1922] Kuratowski, K. (1922). Une méthode d' elimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques. *Fundamenta Mathematicae*, 3, pp. 76–108.

[Kuratowski, 1931] Kuratowski, K. (1931). Evaluation de la classe Borélienne ou projective d' un ensemble de points à l' aide des symboles logiques. *Fundamenta Mathematicae*, 17, pp. 249–272.

[Kuratowski, 1933] Kuratowski, K. (1933). *Topologie I.* Monografje Matematyczne. Warzawa - Lwow.

[Kuratowski, 1961] Kuratowski, K. (1961). *Topologie II.* PWN Polish Scientific Publishers. Troisième édition corrigée et complétée de deux Appendices.

[Kuratowski, 1980] Kuratowski, K. (1980). *A half Century of Polish Mathematics*. Pergamon Press. Polish Scientific Publishers. Warsawa. Traducido de polaco a inglés por Andrzej Kirkor. Editor de traducción: Marc E. Heine.

[Kuratowski y Tarski, 1931] Kuratowski, K. y Tarski, A. (1931). Les opérations logiques et les ensembles projectifs. *Fundamenta Mathematicae*, 17, pp. 240–248.

[Kuzawa, 1968] Kuzawa, M. (1968). *Modern Mathematics : The Genesis of a School in Poland*. College and University Press, New Haven.

[Ladrière, 1969] Ladrière, J. (1969). *Limitaciones internas de los formalismos*. Madrid : Editorial Tecnos.

[Lebesgue, 1902] Lebesgue, H. (1902). Intégrale, longueur, aire. *Annali di Math.*, (3) 7, pp. 231–359.

[Lebesgue, 1903] Lebesgue, H. (1903). Sur la representation, à partir de $z = x + yi$, des fonctions continues de x et y. *Bull. Sci. Math.*, (2) 27, pp. 82–84.

[Lebesgue, 1905] Lebesgue, H. (1905). Sur les functions représentables analytiquement. *J. de Math. Pures et Appl*, 6.

[Lebesgue, 1922] Lebesgue, H. (1922). A propos d' une nouvelle revue mathématique "Fundamenta Mathematicae". *Bull. Sc. Math.*, 46, pp. 1–13.

[Lelek, 1959] Lelek, A. (1959). Ensemble σ-connexes et le théorème de Gehman. *Fundamenta Mathematicae*, 47, pp. 265–276.

[Lukasiewicz, 1974] Lukasiewicz, J. (1974). Lección de despedida pronunciada por el profesor Jan Łukasiewicz en el aula magna de la Universidad de Varsovia el 7 de marzo de 1918. En *Estudios de lógica y filosofía*, pp. 251 – 257.

[Luzin, 1914] Luzin, N. (1914). Sur un problème de M. Baire. *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences, Paris*, 158, pp. 1258–1261.

[Luzin, 1917] Luzin, N. (1917). Sur la classification de M. Baire. *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences, Paris*, 164, pp. 91 –94.

[Luzin, 1925a] Luzin, N. (1925a). Les propriétés des ensembles projectifs. *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences, Paris*, 180, pp. 1817 – 1819.

[Luzin, 1925b] Luzin, N. (1925b). Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue. *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences, Paris*, 180, pp. 1572 – 1574.

[Luzin, 1925c] Luzin, N. (1925c). Sur un problème de M. Emile Borel et les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue; les ensembles analytiques. *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences, Paris*, 180, pp. 1318 – 1320.

[Luzin, 1926] Luzin, N. (1926). Mémoires sur les ensembles analytiques et projectifs. *Matematichskii Sbornik*, 33, pp. 237–290.

[Luzin, 1927] Luzin, N. (1927). Sur les ensembles analytiques. *Fundamenta Methematicae*, 10, pp. 1–95.

[Luzin, 1928] Luzin, N. (1928). Sur les voies de la théorie des ensembles. En *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928, Bologna*, volume 1, pp. 295 – 299. Disponible en [International Mathematical Union, 2013].

[Luzin, 1930] Luzin, N. (1930). *Les ensembles analytiques et leurs applications*. Primera edición, Paris 1930. Segunda edición Chelsea Publishing Company, New York, 1972.

[Luzin y Novikov, 1935] Luzin, N. y Novikov, P. (1935). Choix éffectif d' un point dans un complémentaire analytique arbitraire, donné par un crible. *Fundamenta Mathematicae*, 25, pp. 559 – 560.

[Luzin y Sierpiński, 1917a] Luzin, N. y Sierpiński, W. (1917a). Sur une decomposition d' un intervalle en une infinité non dénombrable d' ensembles non mesurables . *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l' Academie des Sciences, Paris*, 165, pp. 422– 424.

[Luzin y Sierpiński, 1917b] Luzin, N. y Sierpiński, W. (1917b). Sur une propriété du continu. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l' Academie des Sciences, Paris*, 165, pp. 498 – 500.

[Luzin y Sierpiński, 1918] Luzin, N. y Sierpiński, W. (1918). Sur quelques proprieties des ensembles (A) . *Bulletin de l' Académie des Sciences de Cracovie*, Ser. A, pp. 35–48.

[Luzin y Sierpiński, 1922] Luzin, N. y Sierpiński, W. (1922). Sur une decomposition du continu. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l' Academie des Sciences, Paris*, 175, pp. 357 – 359.

[Luzin y Sierpiński, 1923] Luzin, N. y Sierpiński, W. (1923). Sur un ensemble non mesurable B. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.

[Luzin y Sierpiński, 1928] Luzin, N. y Sierpiński, W. (1928). Sur un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait. *Atti. Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. fis. Mat. nat*, ser. 6, 7, pp. 214– 215.

[Luzin y Sierpiński, 1929] Luzin, N. y Sierpiński, W. (1929). Sur les classes des constituantes d' un complémentaire analytique. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l' Academie des Sciences, Paris*, 189, pp. 794 – 796.

[Lévy, 1965] Lévy, A. (1965). Definability in axiomatic set theory. En *Proceedings of the 1964 International Congress*, pp. 127–151, Amsterdam. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Editado por Bar-Hillel Yehoshua, North-Holland Publishing Company.

[Marczewski, 1930] Marczewski, E. (1930). Sur la mesurabilité et condition de Baire. *Comptes Rendus du* 1^{er} *Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Warzawa 1929*, pp. 297–303. (En polaco). También se encuantra bajo el nombre de E. Szpilrajn.

[Marczewski, 1931] Marczewski, E. (1931). Sur un ensemble non mesurable de M. Sierpiński. *Comptes Rendus Soc. Sc. Lettres Varsovie. Cl III*, 24, pp. 78–85. También se encuantra bajo el nombre de E. Szpilrajn.

[Marczewski, 1934] Marczewski, E. (1934). Remarques sur les fonctions complètement additives d' ensemble et sur les ensembles jouissant de la propriété de Baire. *Fundamenta Mathematicae*, 22, pp. 303–311. También se encuantra bajo el nombre de E. Szpilrajn.

[Marczewski, 1935] Marczewski, E. (1935). Sur une classe de fonctions de M. Sierpiński et la classe correspondante d' ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, 24, pp. 17–34. También se encuantra bajo el nombre de E. Szpilrajn.

[Mauldin, 1981] Mauldin, R. D., editor (1981). *The Scottish Book, Mathematics from the Scottish Café.*

[Mazurkiewicz y Sierpiński, 1920] Mazurkiewicz, S. y Sierpiński, W. (1920). Contribution à la topologie des ensembles dénombrables. *Fundamenta Mathematicae*, 1, pp. 17–27.

[Mazurkiewicz y Sierpiński, 1924] Mazurkiewicz, S. y Sierpiński, W. (1924). Sur un problème concernant les fonctions continues. *Fundamenta Mathematicae*, 6, pp. 161–169.

[Menger, 1932] Menger, K. (1932). *Kurventheorie.* Leipzig ; Berlin : B.G. Teubner.

[Miranowicz y Jakimowicz, 2012] Miranowicz, A. y Jakimowicz, E. (2012). Home Page of Stefan Banach. Disponible en http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/e-index.html.

[Moore, 1978] Moore, G. (1978). The Origins of Zermelo's Axiomatization of Set Theory. *Journal of Philosophical Logic*, 7, pp. 307–329.

[Moore, 1982] Moore, G. (1982). *Zermelos's Axiom of choice. Its Origins, Development and Influence* . Berlin, Springer. Second edition.

[Moschovakis, 1974] Moschovakis, Y. (1974). New Methods and Results in Descriptive Set Theory. En *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver)*, volume 1, pp. 251 – 257. Disponible en [International Mathematical Union, 2013].

[Moschovakis, 2009] Moschovakis, Y. (2009). *Descriptive Set Theory.* Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society.

[Mostowski, 1957] Mostowski, A. (1957). L' ouvre scientifique de Jan Łukasiewicz dans le domaine de la logique mathématique. *Fundamenta Mathematicae*, 44, pp. 1–11.

[Murawski, 2012] Murawski, R. (2012). Philosophy of Logic and Mathematics in the Warsaw School of Mathematical Logic. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, 27(40), pp. 145–155.

[Novikov, 1931] Novikov, P. S. (1931). Sur les fonctions implicites mesurables B. *Fundamenta Mathematicae*, 17, pp. 8 – 25.

[Nye, 1993] Nye, M. (1993). *From Chemical Philosophy to Theoretical Chemistry: Dynamics of Matter and Dynamics of Disciplines, 1800-1950.* University of California Press.

[O'Connor y Robertson, 2014] O'Connor, J. J. y Robertson, E. F. (2014). The MacTutor History of Mathematics archive, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/.

[Peckhaus, 1990] Peckhaus, V. (1990). "Ich habe mich wohl gehütet, alle Patronen auf einmal zu verschiessen." Ernst Zermelo in Göttingen. *History and Philosophy of Logic*, 11, pp. 19 – 58.

[Peckhaus, 1991] Peckhaus, V. (1991). *Hilbertprogramm und kritische Philosophie*. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

[Pettis, 1971] Pettis, B. (1971). On some theorems of Sierpiński on subalgebra of Boolean σ-rings. *Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques (BAPMAM)*, 19, pp. 563–568.

[Purkert, 2001] Purkert, W. (2001). Felix Hausdorff - Paul Mongré. En http://hausdorff-edition.de/media/pdf/FH.pdf.

[Recalde, 2010] Recalde, L. (2010). *La teoría de funciones de Baire: La constitución de lo discontinuo como objeto matemático*. Universidad del Valle. Cali.

[Ríbnikov, 1991] Ríbnikov, K. (1991). *Historia de las matemáticas*. Mir, Moscú.

[Robinson, 1963] Robinson, A. (1963). *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*. Nort Holland Publishing Company Amsterdam.

[Semadeni, 1959] Semadeni, Z. (1959). Sur les ensembles clairsemés. *Rozprawy Matematyczne.*, 19, pp. 1–39.

[Semadeni, 1971] Semadeni, Z. (1971). *Banach spaces of continuous functions*. PWN Polish Scientific Publishers.

[Sierpiński, 1908] Sierpiński, W. (1908). 0 pewnym twierdzeniu Cantora (Sobre un teorema de Cantor). *Wiadomości Matematyczne*, 12, pp. 31–37.

[Sierpiński, 1912a] Sierpiński, W. (1912a). Dowód przeliczalności ekstremów właściwych (Demostración de la numerabilidad de los valores extremos de una función). *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, 5, pp. 232–237.

[Sierpiński, 1912b] Sierpiński, W. (1912b). O krzywych wypełniajacych kwadrat (Sobre las curvas que llenan un cuadrado). *Prace Matematyczno-Fizyczne*, 23, pp. 193–219.

[Sierpiński, 1912c] Sierpiński, W. (1912c). Sur l' ensemble des points angulaires d' une courbe $y = f(x)$. *Biuletyn Polskiej Akademii Umiejetności, Kraków*, pp. 850–855.

[Sierpiński, 1912d] Sierpiński, W. (1912d). Sur une nouvelle courbe continue qui remplit tout une aire plane. *Biuletyn Polskiej Akademii Umiejetności, Kraków*, pp. 462–478.

[Sierpiński, 1914] Sierpiński, W. (1914). Un théorème sur les fonctions dérivées. *Biuletyn Polskiej Akademii Umiejetności, Kraków*, pp. 205–217.

[Sierpiński, 1915] Sierpiński, W. (1915). Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l' Académie des Sciences, Paris*, 160, pp. 302–305.

[Sierpiński, 1916a] Sierpiński, W. (1916a). Sur le rôle de l' axiome de M. Zermelo dans l' Analyse moderne. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l' Academie des Sciences, Paris*, 163, pp. 688 – 691. Disponible en http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3116z.

[Sierpiński, 1916b] Sierpiński, W. (1916b). Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donée. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l' Académie des Sciences, Paris*, 162, pp. 629–632.

[Sierpiński, 1917] Sierpiński, W. (1917). L' arc simple comme un ensemble de points dans l' espace à m dimensions. *Ann. Mat. Pur. Appl.*, 3, pp. 131–150.

[Sierpiński, 1918a] Sierpiński, W. (1918a). L' axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l' analyse. *Bulletin de l' Académie des Sciences de Cracovie*, pp. 97 – 152.

[Sierpiński, 1918b] Sierpiński, W. (1918b). Un théorème sur les continus. *Tôhoku Math. J.*, 13, pp. 300–303.

[Sierpiński, 1919] Sierpiński, W. (1919). Sur un théorème équivalent à l' hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$). *Bulletin de l' Académie des Sciences de Cracovie*, pp. 1 – 3.

[Sierpiński, 1920a] Sierpiński, W. (1920a). Sur la condition pour qu' un continu soit une courbe jordanienne. *Fundamenta Mathematicae*, 1, pp. 44–60.

[Sierpiński, 1920b] Sierpiński, W. (1920b). Sur un ensemble ponctiforme connexe. *Fundamenta Mathematicae*, 1, pp. 7–10.

[Sierpiński, 1920c] Sierpiński, W. (1920c). Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement. *Fundamenta Mathematicae*, 1, pp. 112–115.

[Sierpiński, 1921a] Sierpiński, W. (1921a). Les exemples effectifs et láxiome du choix. *Fundamenta Mathematicae*, 2, pp. 112–118.

[Sierpiński, 1921b] Sierpiński, W. (1921b). Sur les ensembles connexes et non-connexes. *Fundamenta Mathematicae*, 2, pp. 81–95.

[Sierpiński, 1921c] Sierpiński, W. (1921c). Sur les fonctions développables en séries absolument convergentes de fonctions continues. *Fundamenta Mathematicae*, 2, pp. 15–27.

[Sierpiński, 1922a] Sierpiński, W. (1922a). Sur les fonctions dérivées des fonctions discontinues. *Fundamenta Mathematicae*, 3, pp. 123–127.

[Sierpiński, 1922b] Sierpiński, W. (1922b). Sur l'égalité $2m = 2n$ pour les nombres cardinaux. *Fundamenta Mathematicae*, 3, pp. 1–6.

[Sierpiński, 1922c] Sierpiński, W. (1922c). Sur un problème concernant les sous-ensembles croissants du continu. *Fundamenta Mathematicae*, 3, pp. 109–112.

[Sierpiński, 1922d] Sierpiński, W. (1922d). Sur une propriété des ensembles clairsemés. *Fundamenta Mathematicae*, 3, pp. 46–49.

[Sierpiński, 1924a] Sierpiński, W. (1924a). Les ensembles bien définis, non mesurables B. En *Proceedings of the International Mathematical Congress Toronto, 1924*, volume 1, pp. 419 – 421. Disponible en [International Mathematical Union, 2013].

[Sierpiński, 1924b] Sierpiński, W. (1924b). Sur l'hypothèse du continu $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. *Fundamenta Mathematicae*, 5, pp. 177–187.

[Sierpiński, 1924c] Sierpiński, W. (1924c). Un exemple effectif d' un ensemble mesurable (B) de classe α. *Fundamenta Mathematicae*, 6, pp. 303–313.

[Sierpiński, 1925a] Sierpiński, W. (1925a). Les fonctions continues et les ensembles (A). *Fundamenta Mathematicae*, 7, pp. 155–158.

[Sierpiński, 1925b] Sierpiński, W. (1925b). Sur l' ensemble de distances entre les points d' un ensemble. *Fundamenta Mathematicae*, 7, pp. 144–148.

[Sierpiński, 1925c] Sierpiński, W. (1925c). Sur une classe d' ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, 7, pp. 237 – 243.

[Sierpiński, 1927a] Sierpiński, W. (1927a). Les ensembles analytiques et les fonctions semi-continues. *Biuletyn Polskiej Akademii Umiejetności, Kraków*, pp. 697–701.

[Sierpiński, 1927b] Sierpiński, W. (1927b). Les ensembles boreliens abstraits. *Annales de la Société Polonaise des Mathématiques*, 6, pp. 50–53.

[Sierpiński, 1927c] Sierpiński, W. (1927c). Sur une fonction de classe 4. *In memoriam N. I. Lobatschevskii, Kasan*, 2, pp. 197–201.

[Sierpiński, 1927d] Sierpiński, W. (1927d). Sur une propriété caractéristique des ensembles analytiques. *Fundamenta Mathematicae*, 10, pp. 169–171.

[Sierpiński, 1928a] Sierpiński, W. (1928a). Le crible de M. Lusin et l' opération (A) dans les espaces abstraits. *Fundamenta Mathematicae*, 11, pp. 15–18.

[Sierpiński, 1928b] Sierpiński, W. (1928b). Les ensembles projectifs et le crible de M. Lusin. *Fundamenta Mathematicae*, 12, pp. 1–3.

[Sierpiński, 1928c] Sierpiński, W. (1928c). Sur les ensembles complets d' un espace (D). *Fundamenta Mathematicae*, 11, pp. 203–205.

[Sierpiński, 1928d] Sierpiński, W. (1928d). Sur les familles inductives et projectives d' ensembles. En *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928*, volume 2, pp. 237 – 239. Disponible en [International Mathematical Union, 2013].

[Sierpiński, 1928e] Sierpiński, W. (1928e). Sur les projections des ensembles complémentaires aux ensembles (A). *Fundamenta Mathematicae*, 11, pp. 117–122.

[Sierpiński, 1928f] Sierpiński, W. (1928f). Sur un ensemble non dénombrable dont toute image continue est de mesure nulle. *Fundamenta Mathematicae*, 11, pp. 302–304.

[Sierpiński, 1928g] Sierpiński, W. (1928g). Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu' un espace métrique soit complet. *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, 21, pp. 131–134.

[Sierpiński, 1928h] Sierpiński, W. (1928h). Sur une décomposition d' ensembles. *Monatshefte Math. Phys.*, 35, pp. 239–242.

[Sierpiński, 1928i] Sierpiński, W. (1928i). Un théorème général sur les familles d' ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, 12, pp. 206–210.

[Sierpiński, 1929a] Sierpiński, W. (1929a). Sur les images continues des ensembles analytiques linéaires ponctiformes. *Fundamenta Mathematicae*, 14, pp. 345–349.

[Sierpiński, 1929b] Sierpiński, W. (1929b). Sur l' existence de diverses classes d' ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, 14, pp. 82–91.

[Sierpiński, 1929c] Sierpiński, W. (1929c). Sur une décomposition du segment. *Fundamenta Mathematicae*, 13, pp. 195–200.

[Sierpiński, 1930a] Sierpiński, W. (1930a). Sur l' uniformisation des ensembles mesurables (B). *Fundamenta Mathematicae*, 16, pp. 136–139.

[Sierpiński, 1930b] Sierpiński, W. (1930b). Sur l' uniformisation des ensembles mesurables (B). *Fundamenta Mathematicae*, 16, pp. 136 – 139.

[Sierpiński, 1931] Sierpiński, W. (1931). Les ensembles analytiques comme criblés au moyen des ensembles fermés. *Fundamenta Mathematicae*, 17, pp. 77–91.

[Sierpiński, 1932a] Sierpiński, W. (1932a). Généralisation d' un théorème de Cantor concernant les ensembles ordonnés dénombrables. *Fundamenta Mathematicae*, 18, pp. 280–284.

[Sierpiński, 1932b] Sierpiński, W. (1932b). Sur les anneaux de fonctions. *Fundamenta Mathematicae*, 18, pp. 1–22.

[Sierpiński, 1932c] Sierpiński, W. (1932c). Sur les ensembles de points qu' on sait définir effectivement. En *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932*, volume 1, pp. 280 – 287. Disponible en [International Mathematical Union, 2013].

[Sierpiński, 1932d] Sierpiński, W. (1932d). Sur une propriété de fonctions de deux variables réelles, continues par rapport à chacune de variables. *Publications mathématiques de l' Université de Belgrade*, 1, pp. 125–128.

[Sierpiński, 1933a] Sierpiński, W. (1933a). Remarque sur les superpositions de fonctions continues. *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, 26, pp. 1–3.

[Sierpiński, 1933b] Sierpiński, W. (1933b). Sur les constituantes des ensembles analytiques. *Fundamenta Mathematicae*, 21, pp. 29–34.

[Sierpiński, 1933c] Sierpiński, W. (1933c). Sur un problème de M. Ruziewicz concernant, l' hypothèse du continu. *Bull. Acad. Sei. Math. Mat. Belgrade*, 1, pp. 67–73.

[Sierpiński, 1933d] Sierpiński, W. (1933d). Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, 20, pp. 214–220.

[Sierpiński, 1934a] Sierpiński, W. (1934a). *Hypothèse du continu.* Monografie Matematyczne, Warszawa. Segunda edición, New York 1956, Chelsea.

[Sierpiński, 1934b] Sierpiński, W. (1934b). La propriété de Baire des ensembles et l' homéomorphie généralisée. *Fundamenta Mathematicae*, 22, pp. 262–266.

[Sierpiński, 1934c] Sierpiński, W. (1934c). Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle. *Fundamenta Mathematicae*, 22, pp. 276–280.

[Sierpiński, 1934d] Sierpiński, W. (1934d). Sur la superposition de fonctions, qui jouissent de la propriété de Baire. *Fundamenta Mathematicae*, 22, pp. 21–23.

[Sierpiński, 1934e] Sierpiński, W. (1934e). Sur un problème de M. Kuratowski concernant la propriété de Baire des ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, 22, pp. 54–56.

[Sierpiński, 1935a] Sierpiński, W. (1935a). Sur un ensemble projectif de classe 2 dans l' espace des ensembles fermés plans. *Fundamenta Mathematicae*, 25, pp. 261–263.

[Sierpiński, 1935b] Sierpiński, W. (1935b). Sur un problème de M. Ruziewicz concernant les superpositions des fonctions jouissant de la propriété de Baire. *Fundamenta Mathematicae*, 24, pp. 12–16.

[Sierpiński, 1935c] Sierpiński, W. (1935c). Une propriété du nombre $\aleph_2$ et l' hypothèse du continu. *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, 27, pp. 128–129.

[Sierpiński, 1936a] Sierpiński, W. (1936a). Sur un problème concernant les fonctions de première classe. *Fundamenta Mathematicae*, 27, pp. 191–200.

[Sierpiński, 1936b] Sierpiński, W. (1936b). Sur un problème concernant les fonctions semi-continues. En *Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens Oslo, 1936*, volume 2, pp. 120 – 122. Disponible en [International Mathematical Union, 2013].

[Sierpiński, 1936c] Sierpiński, W. (1936c). Sur une fonction non mesurable, partout presque symétrique. *Acta Litt. Scient. Szeged*, 8, pp. 1–6.

[Sierpiński, 1937a] Sierpiński, W. (1937a). Sur deux propositions dont l' ensemble équivaut à l' hypothèse du continu. *Fundamenta Mathematicae*, 29, pp. 31–33.

[Sierpiński, 1937b] Sierpiński, W. (1937b). Sur les suites transfinies finalement disjointes. *Fundamenta Mathematicae*, 28, pp. 115–119.

[Sierpiński, 1938a] Sierpiński, W. (1938a). Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mesurables. *Fundamenta Mathematicae*, 30, pp. 96–99.

[Sierpiński, 1938b] Sierpiński, W. (1938b). Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints. *Mathematica, Cluj*, 14, pp. 15–17.

[Sierpiński, 1950] Sierpiński, W. (1950). *Les ensembles projectifs et analytiques*. Mémorial des science mathematiques, Gauthier-Villars, CXII Paris.

[Sierpiński, 1956] Sierpiński, W. (1956). *General Topology*. University of Toronto Press, Toronto. Segunda edición, traducido por C.Cecilia Krieger.

[Sierpiński, 1965] Sierpiński, W. (1965). *Cardinal and ordinal numbers*. Polish Scientific Publishers. Monografie Matematyczne. Warszawa. Second Edtidition.

[Sierpiński y Szpilrajn, 1936] Sierpiński, W. y Szpilrajn, E. (1936). Remarque sur le problème de la mesure. *Fundamenta Mathematicae*, 26, pp. 256–261.

[Sierpiński y Tarski, 1930] Sierpiński, W. y Tarski, A. (1930). Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles. *Fundamenta Mathematicae*, 15, pp. 292–300.

[Sierpiński y Zygmund, 1923] Sierpiński, W. y Zygmund, A. (1923). Sur une fonction qui est discontinue sur tout ensemble de puissance du continu. *Fundamenta Mathematicae*, 4, pp. 316 – 318.

[Skolem, 1923] Skolem, T. (1923). Einige Bemerkung zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. pp. 217–232. Reimpreso en [Skolem, 1970], pp. 137-152.

[Skolem, 1970] Skolem, T. (1970). *Selected Works in Logic*. Fenstad, Jens E. (ed.) Oslo, Universitetsforlaget.

[Sélianovski, 1933] Sélianovski, E. (1933). Sur les propiété des constituantes des ensembles analytiques. *Fundamenta Mathematicae*, 21, pp. 20–28.

[Stichweh, 2001] Stichweh, R. (2001). Scientific disciplines, history of. En Heilbron, J., editor, *The Oxford companion to the history of modern science*, pp. 13727–13731. Oxford; New York : Oxford University Press, cop.

[Strasser, 2002] Strasser, B. (2002). Totems de laboratoires, microscopes électroniques et réseaux scientifiques : L' émergence de la biologie moléculaire à Genève (1945 - 1960). *Revue d' histoire des sciences*, 55, pp. 5 – 43.

[Suslin, 1917] Suslin, Y. (1917). Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis. *Comptes Rendus de l' Académie des Sciences, Paris*, 164, pp. 88–91.

[Tait, 2000] Tait, W. W. (2000). Cantor' s Grundlagen and the Paradoxes of Set Theory. pp. 269–290.

[Tamarkin, 1936] Tamarkin, J. (1936). Twenty-five volumes of Fundamenta Mathematicae. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 42(5), pp. 300.

[The Polish Digital Mathematical Library, 2013] The Polish Digital Mathematical Library (2013). Fundamenta Mathematicae, http://pldml.icm.edu.pl/pldml/element/bwmeta1.element.bwnjournal-journal-fm.

[Ulam, 2002] Ulam, S. (2002). *Aventuras de un matemático. Memorias de Stanislaw Ulam*. Nivola. Traducción y notas de Ricardo García-Pelayo Novo.

[Wagon, 1993] Wagon, S. (1993). *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge: Cambridge University Press.

[Wegner y Staff Unit Communications, 2008] Wegner, B. y Staff Unit Communications, editors (2008). *A Focus on Mathematics*. FIZ Karlshure. Disponible en: http://www.zentralblatt-math.org/year-of-mathematics/year-of-mathematics.pdf.

[Zelazco, 2004] Zelazco, W. (2004). A Short History of Polish Mathematics. En *Proceedings of the Workshop on Operator Theory and Operator Algebras, Kanagawa University, Yokohama*, pp. 105–112. Disponible en: http://www.impan.pl/Sixty/polmat.pdf.

[Zermelo, 1908] Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen*, 65, pp. 261 –281.