Universitat Autònoma
de Barcelona

Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas

Autor: **Manuel Goizueta**

Directora: **Núria Planas**

Doctorat en Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Facultat de Ciències de l'Educació
Universitat Autònoma de Barcelona

Tesis presentada para obtener el título de Doctor Internacional por la
Universitat Autònoma de Barcelona

Mayo 2015

A Toño Lee y a Javier Páez, por su guía, ejemplo y amistad

A Nancy, Arturo y Ana

El ojo que ves no es ojo porque tú lo veas;

es ojo porque te ve.

Antonio Machado

Agradecimientos

A Dan, a Ellen y a sus alumnos por su colaboración desinteresada y por permitirme aprender con ellos.

A Núria Planas, por seguirme/guiarme en este camino; si este proyecto ha sido posible es en gran medida gracias a su gran ayuda y esfuerzo. Gracias, tutorísima.

A todos los miembros del Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals de la UAB por su apoyo constante y por confiar en mí. Ha sido un privilegio enorme ser becario del Departament y formar parte de este grupo. Esperando haber estado a la altura, gracias.

A los colegas que me han acompañado en este viaje. En especial a Maria Alessandra Mariotti (a.k.a. MAM), por su complicidad, por su saber y por su disposición; a Paolo Boero por su voluntad inquebrantable de implicarse (a cualquier hora y bajo cualquier circunstancia); a Nadia Douek por sus epístolas inspiradas/doras y a todos los autores que me han nutrido intelectualmente.

A mis amigos y a mi madre, que son la sal de la vida.

Tabla de contenidos

Lista de Figuras

Lista de Tablas

1. Introducción

Este trabajo de tesis doctoral, "Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas", se inscribe en el Programa de Doctorat en Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona, en el período comprendido entre 2011 y 2015. Se trata de un estudio desarrollado en el marco del Proyecto "Análisis de entornos colaborativos de aula desde la perspectiva de su mediación en la construcción discursiva de conocimiento matemático", EDU2012-31464, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España, y del "Grup d'Investigació en Pràctica Educativa i Activitat Matemàtica", SGR-2014-972, financiado por la Generalitat de Catalunya, ambos con sede en el Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals de esta Universidad. Para el desarrollo de este trabajo, el autor ha contado con el apoyo de una beca de cuatro años de Personal Investigador en Formació, otorgada por la Universitat Autònoma de Barcelona.

La investigación que presentamos en esta memoria es la continuación de un proceso iniciado en el Màster Oficial - Recerca en Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències, el cual condujo a la presentación del trabajo final de máster titulado "Interpretaciones del profesorado de matemáticas sobre prácticas argumentativas en el aula de secundaria". Tanto aquel trabajo como esta tesis, su secuela, testimonian el interés y los esfuerzos del autor por investigar las prácticas argumentativas y el desarrollo de competencias discursivas en el aula de matemáticas, como un elemento esencial de la reflexión para la planeación e implementación de medidas tendientes a mejorar la educación matemática.

La memoria que presentamos representa un doble logro. Por un lado, desde el punto de vista de la formación investigadora del autor, representa el esfuerzo por construir un punto de vista lúcido, sólido y justificado respecto a problemáticas relevantes de la investigación en educación matemática. Un punto de vista con el cual sumarse a la comunidad investigadora que, de manera interactiva, participa en la reflexión acerca de estas cuestiones y en el avance de entendimientos comunes al respecto. En este sentido, la construcción de un marco teórico coherente y de un diseño metodológico adecuado a un conjunto de objetivos de investigación realista, así como la constante exposición y discusión sobre estos en foros nacionales e internacionales, han sido prácticas formativamente relevantes, facilitadas por el Proyecto y el Grupo mencionados, para comenzar a participar de manera significativa y plena dentro de la comunidad investigadora en educación matemática. Por otro lado, presentamos esta memoria convencidos de que los resultados científicos obtenidos resultan relevantes para la discusión de algunos de los temas y problemáticas abordados al interior de la comunidad investigadora. Por tanto, esta memoria constituye nuestro aporte original al esfuerzo conjunto de aquellos que intentan reflexionar, entender mejor e incidir positivamente en el desarrollo de la educación matemática y, en particular, en el desarrollo de competencias discursivas como parte de este esfuerzo educativo.

1.1. Perspectiva general y motivación del estudio

En la actualidad, gran cantidad de currículos escolares enfatizan la idea de que la educación, y por lo tanto la educación matemática, deben contribuir a formar ciudadanos críticos, reflexivos y con capacidad de analizar e incidir en su realidad a partir de los conocimientos desarrollados durante la educación obligatoria. Esta aspiración es hoy compartida por los diversos actores que participan en la organización, planeación, puesta en práctica y evaluación de los planes y programas de estudio de gran cantidad de países. En este marco, la educación matemática no puede quedar reducida a meros aspectos instrumentales, a la transmisión de técnicas propias del área y al ejercicio de su correcta ejecución en el contexto escolar. Si esperamos que la educación matemática contribuya a fundar un posicionamiento crítico y reflexivo que forme parte de la interacción de las personas con su realidad, resulta necesario formar las competencias discursivas que consientan utilizar el conocimiento para fundar y justificar los puntos de vista y acciones mediante los cuales se interpreta e incide en el mundo. En relación con los objetivos de la educación matemática, De Gamboa, Planas y Edo (2010) sostienen que el trabajo en prácticas argumentativas es esencial y que los alumnos deben desarrollar progresivamente habilidades para reconocer y construir argumentos válidos según el nivel en el que se encuentran. De este modo, desde la perspectiva del interés social, la investigación en el ámbito de la argumentación en el aula de matemáticas está justificada.

En particular, tanto entre profesores de matemáticas como en el ámbito de la investigación en educación matemática, la idea de que los alumnos deben desarrollar competencias argumentativas en el aula de matemáticas es extensamente aceptada (Mariotti, 2006; Yackel, 2001). Estas competencias deben ser tanto un producto de la actividad matemática del aula como parte de los medios que le dan soporte; es decir, se espera que los alumnos aprendan a construir argumentos adecuados a los requisitos epistémicos y comunicativos del aula y que los utilicen adecuadamente como parte de su actividad matemática. Sin embargo, en nuestra experiencia docente en educación secundaria y en el bachillerato en México y, más recientemente, enseñando matemáticas a profesores de primaria en formación en España, constatamos las enormes dificultades que tienen los alumnos tanto para justificar lo que hacen y dicen en clase como para reflexionar acerca de estos procesos de justificación. La propia experiencia, así como los testimonios de compañeros profesores de matemáticas, dan cuenta de las enormes dificultades que enfrentan docentes de todos niveles para incorporar en la agenda del aula de matemáticas, de manera deliberada, la discusión significativa acerca del alcance y las limitaciones de los argumentos que se exponen para justificar la producción matemática. En muchos casos, estas dificultades lastran la posibilidad de incorporar tareas matemáticas complejas, que impliquen la participación creativa de los alumnos en procesos de construcción de conocimientos matemáticos y, en cambio, favorecen la planeación de actividades reproductivas en las que la participación de los alumnos se limita a la ejecución de procedimientos prescritos por el profesor. En muchas aulas de matemáticas, la experiencia de participar en la construcción y validación de conocimientos matemáticos y de reflexionar acerca de este proceso es, sin duda, poco frecuente.

En las últimas décadas, la argumentación en el aula de matemáticas ha recibido una atención creciente por parte de investigadores y de instituciones dedicadas a la planeación y organización de la educación matemática (ver, por ejemplo, los Common Core Standards del National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010). Gran parte de la investigación realizada en torno a la argumentación se funda en el papel subsidiario que se le atribuye en relación con la demostración matemática y en la idea de que la demostración debe ser parte fundamental de la educación matemática de los alumnos (Mariotti, op. cit.). Desde este punto de vista, entender la relación entre la argumentación y la demostración matemática es esencial para diseñar experiencias de aprendizaje cuyo objetivo sea la enseñanza de la demostración (Boero, 2011). En los últimos años, un número creciente de investigaciones destacan el papel fundamental que tiene la argumentación no sólo en relación con la demostración matemática, sino en la actividad matemática en general, tanto entre los matemáticos profesionales como entre los alumnos de matemáticas de distintos niveles (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007; Boero, op. cit.). Estas investigaciones ponen de manifiesto la necesidad investigar la producción argumentativa dentro del aula, sus particularidades y cómo es que conforma y funciona de soporte a la actividad matemática de los alumnos. Para Viholainen (2007) resulta fundamental decidir qué tipo de argumentos deben ser favorecidos y apreciados en el aula y qué tipo de argumentos deben aprender a entender, producir y presentar los alumnos. Así, tanto desde la perspectiva social como desde la perspectiva científica, la investigación en prácticas argumentativas en el aula de matemáticas está justificada.

1.2. Planteamiento de la cuestión y de los objetivos de investigación

Gran parte del trabajo de investigación que da cuenta de la situación y el papel de la argumentación como parte de la actividad matemática, se centra en la producción y reconocimiento de argumentos matemáticamente válidos por parte de los alumnos como objetivo pedagógico (Harel y Sowder, 1998). Muchos de estos estudios se basan en presuposiciones epistémicas acerca del conocimiento matemático y meta-matemático que se espera formen parte, o pasen a formar parte mediante la enseñanza, de los conocimientos y del repertorio argumentativo de los alumnos. Sin embargo, menos frecuentes son los estudios que pretenden investigar el desarrollo de condiciones epistémicas como parte de la emergencia del conocimiento matemático en el aula (Steinbring, 2005).

Boero (2011) considera que lograr que los alumnos entiendan las reglas de la argumentación en matemáticas es uno de los principales retos de la educación matemática. Compartimos con este autor la idea de que en el aula de matemáticas se debe desarrollar una cultura de la argumentación y que esta debe incluir prácticas en la producción de conjeturas, conocimientos acerca del rol de los contraejemplos y de la generalidad y conocimientos meta-matemáticos acerca de la aceptabilidad de las razones expuestas para aceptar o rechazar justificaciones. Debe incluir también elementos que consientan la evaluación de la producción matemática e ideas generales acerca del uso de estos conocimientos como parte de las prácticas argumentativas del aula, así como la consciencia necesaria acerca de todos estos elementos para ejercer un control deliberado y autónomo de estas prácticas. La base fundamental de una cultura de la argumentación adecuada a estas expectativas debe ser, por tanto, una epistemología de las matemáticas acorde, en la que la construcción y validación del conocimiento encuentre sustento en los objetivos educativos y los conocimientos disciplinares.

Según Steinbring (op. cit.), los participantes en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas contribuyen a construir, de modo interactivo, una epistemología de las matemáticas del aula. Esta epistemología conforma, en parte, las condiciones de emergencia del nuevo conocimiento matemático producido; a la vez que este nuevo conocimiento, recíprocamente, contribuye a conformar la epistemología de las matemáticas del aula. Para poder promover una cultura de la argumentación acorde a los objetivos de la enseñanza y para planificar consecuentemente el diseño de situaciones de aprendizaje adecuadas a este fin, los procesos por los que esta epistemología de las matemáticas del aula se conforma, como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, deben ser mejor comprendidos. En particular, es necesario comprender los procesos mediante los que alumnos y profesores construyen y validan el conocimiento matemático, los conocimientos meta-matemáticos que apuntalan estos procesos, las condiciones epistémicas en las que se dan así como los aspectos contextuales que los condicionan. Para contribuir en este sentido, en nuestro estudio nos planteamos la siguiente cuestión de investigación:

> ¿Cómo se construye la validez de la producción matemática cuando se resuelven problemas en aulas de matemáticas?

Para responder a esta pregunta nos planteamos los siguientes objetivos de investigación:

Primer objetivo:

> Caracterizar procesos de construcción de la validez de la producción matemática en el trabajo en grupo de alumnos.

Segundo objetivo:

> Caracterizar procesos de construcción de la validez de la producción matemática en la interacción de grupos de alumnos con el profesor del aula.

Tercer objetivo:

> Caracterizar la gestión de procesos de construcción de la validez de la producción matemática a cargo de dos profesores en el aula de matemáticas.

1.3. Descripción general de la memoria

La memoria de esta tesis se compone de siete capítulos. En la introducción, el primer capítulo, describimos de manera sucinta el ámbito en el que se inscribe nuestra investigación, sus motivaciones y, de manera general, la cuestión de investigación. En el segundo capítulo hacemos una reseña de la bibliografía revisada más relevante en relación con nuestra cuestión de investigación; en ella damos cuenta de las líneas de investigación principales que, en el ámbito de la educación matemática, dan cuenta de la argumentación en el aula de matemáticas. Dividimos este capítulo en dos secciones, por un lado revisamos estudios que enfatizan aspectos cognitivos de la argumentación en el aula y, por otro lado, revisamos estudios que ponen el énfasis en aspectos socio-interactivos de la argumentación. El tercer capítulo presenta nuestro marco teórico; en él describimos la perspectiva adoptada en relación con el conocimiento matemático, su construcción y validación y sobre la argumentación, introduciendo los conceptos que fundamentan nuestra mirada teórica y posibilitan el análisis de datos. Presentamos el diseño metodológico de nuestro estudio en el cuarto capítulo. Inicialmente explicamos de manera precisa las preguntas y los objetivos de investigación y justificamos su interés y relevancia en el marco del conjunto de investigaciones reseñadas; más adelante caracterizamos la investigación y damos cuenta de las acciones realizadas para recoger y analizar los datos, obtener los resultados, alcanzar nuestros objetivos de investigación y garantizar la calidad científica del estudio. En el quinto capítulo presentamos el análisis de datos que sustenta los resultados obtenidos. En el sexto capítulo consignamos los resultados en forma de temas, organizados en tres secciones correspondientes a cada uno de los objetivos del estudio. En el séptimo capítulo proponemos las conclusiones, reflexionamos acerca de las limitaciones del estudio y discutimos posibles prospectivas. Finalmente consignamos la bibliografía consultada e incluimos, como anexos, elementos del estudio que, por sus dimensiones, no fueron incorporados en el cuerpo de la memoria.

2. Revisión de la literatura

En este capítulo repasamos los principales trabajos de investigación revisados, dedicándole particular atención a aquellos que nutren nuestra perspectiva teórica y teórico-metodológica. La literatura en el ámbito de la educación matemática que aborda el tema de la argumentación, ya sea como su foco de atención o como un elemento subsidiario, es extensa y diversa, de modo que no resulta sencillo organizarla. Hemos elegido hacerlo en dos grandes bloques (no excluyentes), cuya distinción permite ilustrar algunas ideas que son importantes dentro de nuestro estudio.

Empezamos con trabajos de investigación que consideran la argumentación en relación con la actividad cognitiva del individuo; es decir, que enfatizan aspectos individuales y cognitivos de la argumentación. Muchos de estos trabajos adscriben la argumentación al ámbito de la demostración matemática (entendida como el proceso mediante el cual una proposición matemática es verificada) y su enseñanza; es decir, son trabajos que enfatizan el papel subsidiario que la argumentación tiene en relación con la demostración. En cambio, a partir de la discusión de los papeles que la demostración tiene dentro de la producción matemática, otros trabajos que incluimos en este grupo destacan distintas funciones de la argumentación dentro de la actividad matemática del aula; es decir, la consideran más allá del papel que tiene en la verificación de proposiciones matemáticas.

Posteriormente consideramos trabajos de investigación donde la argumentación es un fenómeno social, en el que los participantes tratan de ajustar sus intenciones e interpretaciones, presentando las razones de sus actos para llegar a entendimientos con otros. Es decir, trabajos de investigación que enfatizan aspectos socio-interactivos de la argumentación. Muchos de estos trabajos se centran en aspectos culturales y normativos del aula, así como en cuestiones relativas a la interacción entre participantes. En estos trabajos la argumentación queda comprendida dentro de procesos de comunicación más amplios, en los que cuestiones interpersonales y contextuales resultan relevantes.

Al proponer esta organización no sugerimos que estas son categorías mutuamente excluyentes o que se puede trazar una línea clara para delimitarlas. Algunos trabajos de investigación pueden ser clasificados en ambos grupos y otros, por sus particularidades, pueden desafiar esta clasificación. Esta organización pretende reflejar, *grosso modo*, perspectivas habituales en el área, cuya distinción propone debates relevantes acerca de la argumentación en el aula de matemáticas.

2.1. Estudios que enfatizan aspectos cognitivos de la argumentación en el aula de matemáticas

La demostración matemática es una de las características esenciales de la disciplina matemática. Aunque el interés por la demostración en el ámbito de la educación matemática no es nuevo, su lugar en currículos de todo el mundo es, en los últimos años, más prominente (Hanna y De Villiers, 2012; Mariotti, 2006). Son muchas las voces que sugieren incluir actividades que sean significativas en relación con la enseñanza de la demostración matemática en todos los niveles de la educación(Brown, 2014).La National Governors Association y el Council of Chief State School Officers (2010) indican que la habilidad para justificar de manera adecuada por qué una proposición matemática es cierta (o no) debe ser una cuestión central a trabajar en todas las aulas de matemáticas, de acuerdo con la madurez matemática de los alumnos.

Aunque la importancia de la demostración para las matemáticas y, por lo tanto, para la educación matemática parecen difíciles de rebatir, las implicaciones prácticas de hacer de la demostración un elemento habitual del aula están lejos de ser claras (Brown, op. cit.).

Siendo la demostración una actividad fundamentalmente argumentativa, no es de extrañar que muchos trabajos de investigación que se ocupan de la reflexión en torno a la demostración matemática y su inclusión en el aula aborden la cuestión desde la perspectiva más amplia de la argumentación. Algunos de estos trabajos se centran en la exploración y caracterización de las dificultades que los alumnos evidencian cuando se enfrentan a tareas que implican demostraciones. Estas dificultades suelen ser descritas a partir de tipos de argumento que los alumnos producen, aceptan o rechazan como justificaciones matemáticas válidas (Harel y

Sowder, 1998; Healy y Hoyles, 2000; Knuth, Choppin y Bieda, 2009; Mamona-Downs y Downs, 2011; Pfeiffer, 2010; Selden y Selden, 2003).

Con base en un extenso estudio, que implicó alumnos de distintos niveles y áreas como teoría de números, geometría y álgebra lineal, Harel y Sowder (1998) reportan distintas prácticas argumentativas observadas entre los alumnos a la hora de enfrentarse con tareas de demostración. La caracterización y organización de estas prácticas les permite conformar una taxonomía de los esquemas de demostración de los alumnos. La primera división en la taxonomía que proponen estos autores separa estos esquemas de demostración en 'externos', 'empíricos' y 'analíticos'. Los autores observan que algunos alumnos aceptan proposiciones matemáticas como demostraciones cuando estas provienen de una autoridad matemática, por aspectos rituales de la presentación de su justificación o por el uso de símbolos, sintaxis y transformaciones simbólicas que reconocen como matemáticas. Son estas actuaciones las que catalogan como esquemas de demostración externos. Observan también que algunos alumnos aceptan proposiciones matemáticas generales mediante su evaluación en casos específicos y que consideran estos argumentos inductivos como demostraciones. En geometría, por ejemplo, algunos alumnos utilizan propiedades específicas de una figura para construir un argumento general sobre una clase más extensa. Estos esquemas de demostración son a los que llaman empíricos. Finalmente, los argumentos deductivos de distinto tipo que los alumnos proponen o identifican como demostraciones son los que constituyen los esquemas de demostración analíticos; aquellos que se espera que los alumnos logren reconocer y construir en el aula.

Los resultados obtenidos por Harel y Sowder confirman los de otros trabajos de investigación citados por estos autores, que afirman que muchos alumnos de distintos niveles (secundaria, bachillerato y profesores de primaria en formación) aceptan argumentos no deductivos de distinto tipo como justificaciones matemáticas adecuadas (Lovell, 1971; Martin y Harel, 1989); no parecen apreciar el papel de los argumentos deductivos en la construcción de justificaciones matemáticas (Fischbein y Kedem, 1982; Galbraith, 1981; Porteous, 1986) y, en general, no logran un entendimiento de la demostración matemática adecuado a las expectativas del ciclo formativo correspondiente (Usiskin, 1987; Williams 1980).

Aunque Harel y Sowder reconocen que los argumentos que corresponden a esquemas de demostración externos y empíricos pueden ser relevantes en los procesos de conjetura y exploración, estos son considerados como meros auxiliares, cuando no versiones defectuosas, de los argumentos deductivos que se espera que los alumnos logren reconocer y producir como demostraciones matemáticas. Los autores concluyen que uno de los objetivos centrales de la educación matemática debe ser ayudar a los alumnos a refinar progresivamente sus concepciones acerca de lo que constituye una justificación matemática; deben superar sus concepciones iniciales, dominadas por percepciones superficiales y prácticas ritualizadas, para lograr otras nuevas, basadas en la convicción interna y la necesidad. En este sentido, llaman la atención acerca de la urgencia de que los profesores de matemáticas incorporen a su planeación de clase actividades que fomenten este pasaje. Sugieren, además, la necesidad de que los profesores reflexionen críticamente acerca de su propia práctica para determinar qué tipo de justificaciones promueven como matemáticamente adecuadas en el aula a través de sus acciones e interacciones con los alumnos. Mamona-Downs y Downs (2011) coinciden a este respecto, señalando que un problema fundamental de los alumnos de nivel universitario para entender la naturaleza de la demostración, es que sus profesores no son consistentes a la hora de aceptar como válidas distintos tipos de justificaciones. Según estos autores, muchos profesores esperan que los alumnos infieran elementos constitutivos de la demostración como parte del contrato didáctico del aula; la inconsistencia a la hora de aceptar o rechazar argumentos que pretenden el estatus de demostración resulta entonces un problema para los alumnos, quienes no logran identificar y abstraer los aspectos esenciales.

En línea con los resultados de Harel y Sowder (op. cit.), en un trabajo de investigación realizado con ocho alumnos de matemáticas y profesores de matemáticas de secundaria en formación, Selden y Selden (2003) documentan las dificultades que estos alumnos tienen para decidir si ciertos argumentos constituyen o no demostraciones matemáticas. Cuando los alumnos refieren qué elementos consideraron para decidir si los textos revisados son o no demostraciones, destacan la evaluación de los argumentos paso por paso, su secuencia lógica, su evaluación mediante ejemplos y la verificación de que las ideas tienen sentido. A pesar de que estas declaraciones parecen satisfactorias, los autores conjeturan que son declaraciones ritualizadas basadas en las expectativas percibidas acerca de sus respuestas, pues en la evaluación de su desempeño constatan que no logran implementar estas intenciones adecuadamente y que identifican elementos superfluos o inadecuados para justificar sus decisiones. Los resultados de Selden y Selden son corroborados por Pfeiffer (2010), quien documenta las dificultades que ocho alumnos universitarios de matemáticas de primer año tienen al tratar de determinar si ciertos argumentos, producidos por otros alumnos, constituyen o no demostraciones matemáticas.

Numerosos trabajos de investigación apoyan los resultados de Harel y Sowder (op. cit.) en relación con la producción de argumentos que los alumnos presentan como demostraciones. Healy y Hoyles (2000) documentan que en un grupo de alumnos de secundaria a los que solicitaron construir demostraciones de un conjunto de conjeturas, 34% presentó argumentos inductivos (i.e. argumentos generales basados en la evaluación de un conjunto finito de casos particulares) como demostración de una conjetura familiar y 43% presentó este tipo de argumentos en el caso de conjeturas no familiares. Del mismo modo, estos alumnos se mostraron proclives a identificar argumentos inductivos como demostraciones matemáticas. Knuth, Choppin y Bieda (2009), en un estudio en el que presentaron a cuatrocientos alumnos de secundaria distintas tareas matemáticas solicitándoles que justifiquen sus respuestas, encontraron que el medio de justificación predominante entre los alumnos fue la argumentación inductiva. Por otro lado, a la pregunta: "¿cómo sabes que algo es correcto en matemáticas?", la amplia mayoría de los alumnos citó la autoridad del maestro o del libro de texto como la razón. Los autores consideran que estas respuestas de los alumnos están relacionadas con la falta de situaciones de aprendizaje que posibiliten la reflexión acerca del origen epistémico de la validez matemática; lo que provoca que los alumnos no reconozcan la relevancia de distintos tipos de razonamiento como medio para validar la actividad matemática. Los autores destacan el hecho de que los alumnos sitúen la posibilidad de decidir sobre la validez de su producción matemáticas en agentes externos (el profesor y el libro de texto) y ajenos a su control.

La situación de la enseñanza de la demostración matemática (y con ella de la argumentación en el aula de matemáticas), tal y como la describen los trabajos reseñados hasta aquí, está lejos de ser la que los educadores matemáticos desean (más allá de los desacuerdos que puede haber al respecto). A pesar de ello, diversos investigadores documentan experiencias de aprendizaje exitosas. A partir del análisis y de la reflexión crítica acerca estas experiencias, distintos estudios realizan propuestas, teóricas y prácticas, con el fin de mejorar los resultados en esta área (Brown, 2014; Cyr, 2011; Jahnke, 2005; Zaslavsky, 2005).

En un estudio con dos grupos de veinticinco alumnos del último año de la escuela primaria en Quebec, Cyr (2011) implementó una serie de ocho tareas geométricas diseñadas para promover la emergencia de argumentos deductivos entre los alumnos. Aunque inicialmente la mayoría de los alumnos privilegiaron la medición directa y la información perceptual como justificaciones en sus argumentos, Cyr reporta que hacia el final de la intervención la mayoría de los alumnos había logrado una transición hacia argumentos deductivos basados en teorías geométricas. Una de las estrategias utilizadas por el investigador para promover la emergencia de la argumentación deductiva, fue utilizar dibujos con trazos gruesos e imprecisiones deliberadas al consignar las figuras geométricas en las tareas propuestas. Las mediciones diferentes que los alumnos obtenían al medir estas figuras les permitió reflexionar acerca de la imprecisión de estos métodos y las ventajas de una aproximación teórica. Según Cyr, las tareas matemáticas en las que los métodos utilizados por los alumnos generan incertidumbre posibilitan la emergencia de aproximaciones teórico-deductivas y la reflexión acerca de su utilidad.

Con una idea similar acerca del uso de la incertidumbre en el aula de matemáticas, Zaslavsky (2005) documenta el uso de tareas matemáticas diseñadas para generar distintos tipos de duda entre los alumnos de un curso de geometría para futuros maestros de secundaria. La autora reivindica la duda como acicate de la reflexión: cuando una persona tiene dudas respecto a una cuestión, adopta una postura acorde para tratar de resolverla. Zaslavsky propone tres tipos de incerteza interrelacionadas que pueden estar implicadas en tareas matemáticas: 'proposiciones en competencia', 'trayectoria desconocida o conclusión cuestionable' y 'respuestas no verificables'. El primer tipo de incerteza (proposiciones en competencia) surge cuando dos o más proposiciones acerca de una cuestión ofrecen buenas razones a la vez que resultan incompatibles. Las proposiciones pueden corresponder tanto a conocimientos matemáticos compartidos, expectativas o referencias extra-matemáticas. La necesidad de revisar estas proposiciones, sus ventajas y desventajas, posibilita tanto la reflexión acerca de su validez en el contexto de justificación pertinente, como la reflexión acerca de la necesidad de criterios para decidir al respecto. El segundo tipo de incerteza (trayectoria desconocida o conclusión cuestionable) se refiere a las dudas que pueden tener los alumnos frente a tareas que implican investigación, con problemas abiertos, en las que no pueden anticipar la solución o los recursos matemáticos necesarios para llegar a ella. Este tipo de tarea suele llevar a los alumnos a ciclos iterativos de conjetura-prueba-refutación/validación, en la que los argumentos expuestos pueden irse refinando. Es posible que los alumnos lleguen a una solución satisfactoria a partir de este proceso, o que la solución obtenida no sea reconocida como válida (de ahí que sea "cuestionable") y los lleve a buscar aproximaciones alternativas. Finalmente, el tercer tipo de incerteza (respuestas no verificables) se refiere a tareas en las que los alumnos no cuentan con los medios para decidir acerca de la validez de la solución obtenida. Una tarea matemática puede implicar más de un tipo de incerteza. Por otro lado, la incerteza resulta subjetiva, pues distintos alumnos pueden experimentar una, otra o ninguna en función de sus conocimientos o aproximación particular a la tarea.

A partir de su estudio, Zaslavsky (op. cit.) sugiere que el diseño deliberado de tareas matemáticas capaces de generar incerteza en los alumnos puede resultar provechoso para que estos se impliquen en procesos argumentativos con la intención de llegar a soluciones satisfactorias. Estos procesos pueden constituir la base para la reflexión acerca de los criterios que se utilizan para justificar la producción matemática.

Brown (op. cit.) retoma las ideas de Zaslavsky de modo crítico para notar que, a pesar de los esfuerzos de diseño, no siempre resulta posible provocar incerteza en los alumnos. El desarrollo de cierto convencimiento personal basado en evidencias empíricas puede ser un obstáculo en este sentido (de hecho esto es lo que parece subyacer en el uso reiterado por parte de muchos alumnos de argumentos inductivos para justificar su producción matemática). En esas ocasiones pueden no emerger proposiciones alternativas que puedan competir con la conclusión del argumento inductivo producido por los alumnos; además, es posible que estos consideren tal argumento como una justificación adecuada al caso. Brown pone en duda que, en estos casos, la solicitud directa del profesor de proporcionar una respuesta alternativa genere un estado de duda genuino en los alumnos. Según la autora, no basta el diseño e implementación de tareas específicas que promuevan la incerteza como condición inicial para la reflexión, sino que es necesario formar en los alumnos una "disposición hacia el escepticismo a pesar de la evidencia empírica"; es decir, esta disposición debe ser parte de las cultura matemática del el aula. En otras palabras, no basta que la tarea provoque dudas en los alumnos, es necesario que estos sean capaces de mantener la duda a pesar de las posibles evidencias empíricas en favor de una cierta conclusión. En el estudio que realiza durante ocho semanas con dieciocho alumnos de matemáticas de primer y segundo año de la universidad, la autora constata que los alumnos pueden desarrollar disposición hacia el escepticismo al menos de dos modos: a partir de experiencias con tareas matemáticas o como parte de la introducción a la cultura de la comunidad matemática que promueve el profesor. En el primer caso, Brown observa que, a partir de la implementación reiterada de tares dirigidas a generar dudas en los alumnos (en el sentido de Zaslavsky, op. cit.), algunos de estos aprovechan las experiencias anteriores para mantener dudas acerca de los resultados que obtienen mediante exploraciones empíricas en nuevas tareas. Esto lleva a los alumnos a dudar de la evidencia empírica que producen, a buscar nuevas estrategias de validación/refutación y a la elaboración de argumentos deductivos. En el segundo caso, la autora observa que la insistencia del profesor en sancionar ciertos argumentos como válidos (deductivos) y otros como no-válidos (inductivos) en matemáticas, lleva a los alumnos a implementar estrategias acordes para decidir sobre la validez de los argumentos que proponen. Si en el primer caso el origen de la disposición al escepticismo es una necesidad intelectual, en el segundo esta disposición emana del proceso de aculturación del alumno en su esfuerzo por comenzar a participar, de manera legítima, en las prácticas propias de la cultura matemática que el profesor representa. Brown deja abierta la pregunta acerca de en qué modo una y otra estrategia pueden ser beneficiosas, a largo plazo, en la educación matemática de los alumnos, en el desarrollo de competencias argumentativas y en la enseñanza de la demostración. En este sentido coincide con Boero (2011) y Mariotti (op. cit.) en que estudios que exploren el potencial de distintos contextos son necesarios para arrojar luz respecto a las características generales requeridas. Brown sugiere, como Jahnke (2005), que los ambientes en que la experimentación y la argumentación son vistas como básicas para el establecimiento del conocimiento matemático pueden ser adecuados para el desarrollo de la argumentación deductiva y la demostración matemática.

Las ideas de Brown (op. cit.),Cyr (op. cit.) y Zaslavsky (op. cit.) en relación con la utilidad de la incertidumbre en el diseño de tareas matemáticas que pretenden promover la argumentación en el aula, resultan pertinentes para los propósitos de nuestro estudio. En la descripción del diseño metodológico explicamos cómo estas ideas fueron tenidas en cuenta en el diseño de la intervención didáctica.

Los estudios mencionados hasta aquí enfatizan la función que la demostración matemática tiene como medio para verificar proposiciones matemáticas (lo cual no quiere decir que no reconozcan a la demostración otras funciones); por otro lado, destacan su carácter de producto intelectual con características epistemológicas específicas. Para Harel y Sowder (op. cit.), por ejemplo, la demostración matemática es "el proceso empleado por un individuo para eliminar o crear dudas acerca de la verdad de una observación", y sugieren que está constituida por dos subprocesos: asegurarse y persuadir. "Asegurarse es el proceso empleado por un individuo para eliminar sus propias dudas acerca de la verdad de una observación. Persuadir es el proceso empleado por un individuo para eliminar las dudas de otro acerca de una observación" (p. 241). Para Selden y Selden (op. cit.), las demostraciones matemáticas son "argumentos que prueban teoremas" (p. 4).

Todos estos autores conciben la demostración como un tipo de argumento particular, con características epistemológicas distinguibles, aceptado en la comunidad matemática como adecuado para verificar proposiciones matemáticas. Dentro de estas perspectivas, la argumentación resulta subsidiaria de la demostración y su utilidad y alcances están delimitados por los intereses de la enseñanza de la demostración. En un extremo de esta interpretación, encontramos algunos autores que intentan establecer un límite neto entre la argumentación y la demostración y que incluso ven la primera como un posible obstáculo en la enseñanza de la segunda (Balacheff, 1999; Duval, 1999).

Según Duval (1999), a pesar de que a nivel textual las diferencias entre una demostración matemática y un argumento pueden ser poco evidentes, desde el punto de vista cognitivo la demostración matemática implica una ruptura con la argumentación. La construcción y efectividad persuasiva de un argumento está fundamentalmente vinculada a los aspectos semánticos de sus partes y a su articulación; en el caso de la demostración los aspectos semánticos son irrelevantes y la efectividad (la transmisión de verdad de las premisas a la conclusión) se asienta exclusivamente en el papel que juegan las distintas partes para conformar un esquema deductivo. De este modo Duval distingue la argumentación de la demostración y propone que la primera, incluso en sus formas más refinadas, no abre el camino al aprendizaje de la segunda, para lo cual es necesario un proceso de aprendizaje que enfatice el razonamiento deductivo.

Apoyándose en estas ideas, Balacheff (1999) sostiene que la argumentación (no deductiva) constituye un obstáculo epistemológico para la enseñanza de la demostración matemática y que resulta importante que los alumnos entiendan la inadecuación de la primera en la validación de conocimientos matemáticos. Según este autor resulta erróneo hablar de argumentación matemática (i.e. de prácticas argumentativas distintas de la demostración que puedan considerarse propias de las matemáticas) pues el aspecto persuasivo que caracteriza a la argumentación (en cualquier área) no puede dar cuenta de las necesidades epistemológicas inherentes a la demostración matemática. Tanto Balacheff como Duval conciben la demostración matemática como un producto intelectual con características bien definidas; de modo que un determinado texto, oral o escrito, califica como demostración (o no) en función de su adherencia a ciertos parámetros establecidos.

Diversos autores se oponen a las concepciones de la demostración que enfatizan su función en la verificación de proposiciones matemáticas o que, incluso, la reducen a esta. Algunos de estos autores aducen la complejidad e importancia de los distintos procesos mediante los cuales las demostraciones (como productos) son obtenidas dentro de la actividad matemática; procesos en los que la argumentación, en sus distintas formas, tiene un papel destacado (Boero, 1999, 2011; Boero, Douek y Ferrari, 2002; Boero, Douek, Morselli y Pedemonte, 2010; Camargo, 2010; Douek, 2007; Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007; Pedemonte, 2007). Cuando elaboran acerca de la demostración matemática, estos autores se refieren no sólo al producto, i.e. al texto (oral o escrito) producido para verificar una proposición matemática, sino también al conjunto de actividades que emprenden tanto los matemáticos profesionales como los alumnos de matemáticas para obtener estos productos. Otros autores sostienen que la demostración matemática tiene distintas funciones relevantes dentro de la actividad matemática que deben ser también consideradas (De Villiers, 1990; Hanna y De Villiers, 2012; Weber, 2008; Weber y Mejía-Ramos, 2011).

Camargo (2010) y Boero, Douek y Ferrari (2002) consideran relevantes las actividades de definir, conjeturar y argumentar como parte de lo que la primera denomina actividad demostrativa. En su estudio con futuros profesores de matemáticas de secundaria, Camargo muestra la relevancia del uso y formulación de definiciones como parte de la actividad demostrativa, no solamente para la validación de enunciados sino también para dar significado a estos enunciados y relacionarlos con otros conocimientos matemáticos. Boero, Douek y Ferrari sostienen que distintas actividades argumentativas son indispensables a la actividad de demostrar proposiciones matemáticas; en particular, destacan la producción y el manejo de metáforas así como la gestión de dudas a través del cuestionamiento entre los participantes. Por otro lado, enfatizan la necesidad de cierta consciencia y competencia meta-lingüística para la obtención de productos que sean aceptables dentro de la comunidad matemática del aula. Estos autores insisten en la necesidad de desarrollar competencias argumentativas como parte del aprendizaje matemático y en que el foco en aspectos lógico-formales de la producción textos (orales y escritos) no es suficiente. En su estudio con alumnos de primaria los autores evidencian el papel fundamental que el lenguaje natural tiene en la actividad matemática de los alumnos; en particular para controlar los pasajes entre el uso más formal de términos matemáticos (en este caso algebraicos) y las expresiones informales con que los alumnos se comunican. Los autores concluyen que este control no puede emerger espontáneamente en los alumnos y que el profesor debe tener una participación activa en este sentido, seleccionando producciones de los alumnos y ofreciendo otras para ejemplificar usos adecuados.

Algunos trabajos de investigación sugieren que la producción de demostraciones por parte de los alumnos puede facilitarse si hay una cierta continuidad con su actividad argumentativa previa, vinculada a las fases de exploración y conjetura (Garuti, Boero, Lemut y Mariotti, 1996; Pedemonte, 2007). Los alumnos pueden aprovechar elementos desarrollados en estas fases (expresiones, dibujos, heurísticas, teoremas, etc.) para construir argumentos deductivos posteriormente. En estos caso, las referencias utilizadas por los alumnos en sus argumentos informales, posiblemente no deductivos, sirven de base a la construcción de argumentos deductivos (Garuti, Boero, Lemut y Mariotti, 1996). Sin embargo, Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010) y Pedemonte (2007) notan que cuando la continuidad entre argumentación y demostración se da a nivel de la estructura de los argumentos, esta puede resultar un problema para los alumnos. Dado que en general los argumentos informales de los alumnos no son deductivos (sino abductivos o inductivos), la continuidad espontánea que en ocasiones se observa entre argumentación y demostración en el trabajo matemático de los alumnos, puede llevarlos a presentar argumentos no deductivos como demostraciones matemáticas o, en general, como justificaciones adecuadas de su trabajo matemático. En su investigación con ciento dos alumnos de secundaria a los que les fueron presentados tres problemas geométricos que requerían la producción de una conjetura y su posterior demostración, Pedemonte encontró que algunos alumnos lograban pasar de argumentos abductivos, en la fase de conjetura, a argumentos deductivos como solución final. Sin embargo documenta casos de alumnos que, a pesar de conocer teoremas suficientes para probar sus conjeturas de modo deductivo, persisten en utilizar la estructura abductiva usada previamente en la producción de demostraciones. La autora concluye que la continuidad espontánea que se observa en muchos alumnos entre argumentación y demostración, a nivel de la estructura de los argumentos, debe ser considerada en relación con la enseñanza de la demostración en el aula de matemáticas.

Douek (2007) considera todas las actividades llevadas a cabo para impulsar la construcción de una demostración (conjeturar, interpretar, formar analogías, comparar, sistematizar, argumentar) como parte de la actividad demostrativa. Analizando cómo un grupo de alumnos universitario de matemáticas de primer año resuelve una tarea matemática, la autora evidencia la búsqueda de significados y herramientas interpretativas por parte de estos para desarrollar su trabajo. Los conocimientos de referencia a los que recurren los alumnos para darle sentido a su actividad matemática no siempre corresponden a cuerpos institucionalizados de conocimientos matemáticos; en ocasiones, representaciones apropiadas, no estandarizadas, emergen para satisfacer esta necesidad. La autora concluye que las inferencias formales suelen ser insuficientes y que, entonces, los argumentos semánticamente fundados resultan críticos en los procesos de producción matemática. El trabajo constructivo-reflexivo en matemáticas no puede desarrollarse solamente mediante expresiones y conceptos formales, es necesaria una interpretación semánticamente consistente de éstos. En este sentido, apoya las conclusiones de Boero, Douek y Ferrari (op. cit.).

Muchos investigadores consideran que la demostración matemática cumple con distintas funciones además de la de verificar proposiciones matemáticas. Según De Villiers (1990), un problema para la enseñanza de la demostración resulta de la falta de reconocimiento, por parte de los alumnos, de las distintas funciones que la demostración satisface en matemáticas; esto provoca que no reconozcan su utilidad y por lo tanto su relevancia. Según este autor, la concepción de la demostración como el medio mediante el cual alguien se convence acerca de la validez de una cierta proposición matemática no se corresponde con la práctica real de los matemáticos. La demostración no es un requisito para el convencimiento en matemáticas; por el contrario, a veces el convencimiento es necesario para decidir embarcarse en la construcción de una demostración.

De Villiers propone cinco funciones asociadas con la demostración: verificación (en relación con el estatus epistémico de una proposición), explicación (en relación con la capacidad de sugerir por qué un cierto enunciado es verdadero), sistematización (en relación con la organización de la proposición en función de otros conocimientos y dentro de teorías más generales), descubrimiento (en relación con las técnicas y conocimientos empleados y las posibilidades que sugieren para construir nuevos conocimientos) y comunicación (en relación con la difusión de los conocimientos matemáticos). Una demostración no sólo evidencia la veracidad de una proposición, sino que, poniéndola en relación con otros resultados conocidos, evidencia por qué es verdadera. En este sentido, la demostración tiene poder explicativo. Según Weber y Mejía-Ramos (2011), muchos matemáticos se interesan por leer las investigaciones de sus colegas para considerar ideas en este sentido y no exclusivamente para verificar la validez de la proposición matemática que se pretende demostrar. Los autores, al igual que Hanna y De Villiers (2012), coinciden con De Villiers en que, en muchos casos, esta puede ser la función principal de la demostración. Por otro lado, las demostraciones permiten organizar conocimientos matemáticos en estructuras deductivas o teorías más generales capaces de contenerlos. El interés de la demostración puede ser entonces el de facilitar o proponer este tipo de sistematizaciones dentro del cuerpo de conocimientos matemáticos establecidos. Aunque en muchas ocasiones las demostraciones resultan de la necesidad de verificar una conjetura obtenida por métodos no deductivos, De Villiers destaca que algunas demostraciones pueden sugerir nuevos desarrollos basados en conocimientos y métodos que la misma demostración ilumina. Un ejemplo en este sentido es el desarrollo de las geometrías no euclidianas, cuya creación enraíza en el razonamiento deductivo más que en los logros de la intuición geométrica. En estos casos la demostración demuestra su potencial para proponer nuevas exploraciones. Finalmente, la demostración es un vehículo por el cual las ideas matemáticas son comunicadas dentro de una comunidad y alrededor del cual el debate es posible. Según De Villiers, esta actividad resulta fundamental dentro de la comunidad para negociar los criterios y condiciones según los cuales un argumento puede ser aceptado. El debate meta-matemático que la publicación, revisión y discusión de demostraciones posibilita es esencial en la negociación de las nociones de validez, rigor y aceptabilidad dentro de la comunidad matemática.

Para De Villiers, un problema fundamental de la enseñanza de la demostración es la creencia, popular entre el profesorado, de que el único interés de la demostración es su papel en la verificación de enunciados matemáticos; verificación que los alumnos pueden considerar superflua, innecesaria o incluso pedante cuando cuentan con evidencias que les resultan convincentes (Mamona-

Downs y Downs, op. cit.). El autor concluye que las distintas funciones de la demostración deben ser promovidas, aclaradas y explotadas en el aula; lo que debería facilitar el debate y la comprensión acerca de los papeles de la evidencia empírica y de distintos tipos de argumentos en la actividad matemática.

Weber (2008) y Weber y Mejía-Ramos (op. cit.) documentan la relevancia que algunas de las distintas funciones identificadas por De Villiers para la demostración tienen para matemáticos dedicados a la investigación. Los matemáticos que participaron en el estudio de Weber y Mejía-Ramos sostienen que, en muchas ocasiones, el interés principal para leer trabajos de investigación de colegas matemáticos es evaluar la posibilidad de utilizar técnicas y resultados, empleados por estos, en sus propio trabajo. Por otro lado, los autores afirman que algunos matemáticos utilizan argumentos inductivos y se basan en evidencia empírica para generar convencimiento acerca de proposiciones matemáticas cuando leen trabajos de investigación; a la vez que pueden aceptar estas proposiciones como válidas si son garantizadas por una autoridad matemática. Esto los lleva a concluir que la argumentación no deductiva, así como la autoridad matemática, juegan un papel relevante en la evaluación y comprensión de demostraciones matemáticas por parte de matemáticos profesionales. A partir de esta idea, sugieren que los profesores de matemáticas de distintos niveles deberían ser conscientes de la importancia de los argumentos no deductivos, del razonamiento empírico y del papel de la autoridad para ganar certeza acerca de una proposición matemática y para evaluar su validez. La cuestión meta-matemática acerca de las limitaciones y los alcances de la argumentación en matemáticas debería entonces ser trabajada en el aula.

Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007) documentan la capacidad de un grupo de matemáticos para utilizar argumentos de distinto tipo (no necesariamente deductivos) dentro de la actividad demostrativa. Los resultados de este estudio evidencian la complejidad del proceso mediante el cual estos matemáticos elaboran un cierto nivel de certeza en relación con conjeturas a partir de los tipos de argumentos (inductivos, intuitivos-estructurales, deductivos) que esgrimen en favor o en contra de estas. Esto lleva a los autores a concluir que una cuestión fundamental para la educación matemática es que los alumnos comprendan los alcances y limitaciones de los distintos tipos de argumento para que logren adecuar sus niveles de certeza en función de los argumentos que utilizan. Los resultados de Perry, Molina, Camargo y Samper (2011) muestran que los profesores de matemáticas en formación utilizan distintos tipos de argumentos en su actividad demostrativa y que estos son relevantes para progresar en su actividad; sin embargo no siempre son capaces de identificar situaciones en las que resulta necesario construir un argumento deductivo para justificar una afirmación matemática. Por su parte, Healy and Hoyles (op. cit.) observan que los alumnos de secundaria prefieren argumentos de distinto tipo dependiendo del auditorio al que se dirigen; aunque encuentran los argumentos informales ofrecidos verbalmente más explicativos y los argumentos que incluyen ejemplos más convincentes, sostienen que el profesor prefiere aquellos que son presentados mediante símbolos matemáticos. Esto indica que los criterios con que estos alumnos determinan el alcance de unos y otros argumentos no se corresponde con los criterios que utilizan los matemáticos que participaron en el estudio de Inglis, Mejía-Ramos y Simpson; si para estos últimos es una cuestión epistémica propia de la construcción y validación del conocimiento matemático, para los alumnos de secundaria está más vinculada con la necesidad de satisfacer las expectativas del profesor.

Tomando conjuntamente todos los trabajos de investigación reseñados hasta aquí, concluimos, como Hanna y de Villiers (op. cit.), que resulta indispensable entender mejor la relación entre la argumentación y la demostración matemática en el aula; es decir, el papel que la argumentación tiene en la producción, transmisión, sistematización y validación del conocimiento matemático. Coincidimos con Dreyfus (1999) en que es necesario preguntarse qué consideran los alumnos un argumento satisfactorio y cuál es la base de esta consideración, a la vez que debemos preguntarnos por el origen de las diferencias entre concepciones de alumnos y profesores. Además, como sugieren Boero (2011) y Mariotti (op. cit.), resulta necesario entender mediante qué tipo de situaciones de aprendizaje se puede promover la comprensión, por parte de los alumnos, de los papeles que la argumentación tienen dentro de la actividad matemática. Siendo estas cuestiones meta-matemáticas, consideramos que resulta de capital importancia entender los aspectos epistemológicos de esta problemática. Es necesario entender mejor cómo es que alumnos y profesores, mediante sus prácticas argumentativas, construyen y validan conocimientos matemáticos en el aula. Es decir, cuáles son las condiciones epistémicas de la emergencia del conocimiento matemático tal y como es construido en el aula entre alumnos y profesores. Entender mejor los procesos de validación del conocimiento dentro del aula debe estar en la base de la reflexión acerca del desarrollo de una cultura de la argumentación que, como sugiere Boero (op. cit.), permita a los alumnos participar de manera autónoma y reflexiva en la construcción del conocimiento matemático. Nuestro trabajo de investigación pretende aportar entendimientos en este sentido.

2.2. Estudios que enfatizan aspectos socio-interactivos de la argumentación en el aula de matemáticas

Los estudios reseñados en la sección anterior han servido para presentar elementos importantes del estado del arte en lo que a la investigación acerca de la argumentación en el aula de matemáticas se refiere. Al hacerlo nos hemos centrado en la relación entre prácticas argumentativas individuales y construcción del conocimiento matemático en el aula. Desde esta perspectiva, la interacción entre los distintos actores en la construcción de conocimientos matemáticos, así como los aspectos contextuales en que ocurre, son tratados como elementos catalizadores del aprendizaje, pero no son necesariamente vistos como elemento integrales del proceso o de sus productos. Desde la década de 1980 diversas voces en la comunidad de educadores matemáticos y de investigadores en educación matemática destacan la necesidad de considerar la relevancia que los aspectos sociales de la educación matemática tienen en los procesos de aprendizaje (Cobb y Bauersfeld, 1995; Planas y Civil, 2013; Sfard y Kieran, 2001; Steinbring, 2005; Voigt, 1995; Yackel, Cobb y Wood, 1991).

Según Cobb y Bauersfeld (1995) los significados matemáticos son constituidos de manera interactiva entre los participantes dentro de la cultura matemática del aula. Esta cultura del aula es desarrollada conjuntamente tanto por el profesor como por los alumnos y el proceso de negociación de significados entre estos media entre la cognición y la cultura construida. Los procesos de enseñanza y aprendizaje quedan ligados a los aspectos socio-culturales del contexto en el que se desarrollan, de modo que los primeros no pueden ser entendidos sino a condición de entender su relación con los segundos. Así, los conocimientos matemáticos son productos de la interacción de los participantes y específicos de la cultura del aula en la cual se los considera (Voigt, 1995). Desde esta perspectiva, los argumentos que se esgrimen en el aula de matemáticas, así como las constricciones que regulan su uso, no son meras externalizaciones del conocimiento individual, sino una expresión de la cultura matemática del aula.

Diversos estudios vienen documentando las ventajas de la interacción entre los alumnos y del aprendizaje cooperativo en el aula (Slavin, 1985). La investigación en el aula de matemáticas ha ido acumulando evidencias acerca de los efectos benéficos de que los alumnos verbalicen su pensamiento matemático mientras trabajan con sus compañeros e interaccionan con el profesor (Lampert, 1990; Yackel, Cobb y Wood, 1991). El énfasis en la importancia de la comunicación de las ideas matemáticas como medio para procurar su aprendizaje es una tendencia pedagógica general hoy en día, la cual parece estar bien fundamentada y proveer resultados positivos (Sfard y Kieran, 2001).

A partir de su trabajo de investigación con alumnos de primaria, Yackel, Cobb y Wood (1991) sugieren que el trabajo interactivo entre los alumnos y entre los alumnos y el profesor brinda oportunidades de aprendizaje que organizaciones más tradicionales del trabajo en el aula no ofrecen. Mientras interaccionan, los alumnos tienen oportunidades para expresar y organizar verbalmente sus ideas, manifestar sus dudas y ofrecer y solicitar justificaciones. Así, la actividad argumentativa tiene un papel esencial en la interacción, tanto en la organización como en el desarrollo de la actividad matemática. Cuando los alumnos tienen que justificar sus acciones ante sus compañeros o el profesor, deben reflexionar y reelaborar los argumentos que ofrecen con la intención de hacerlos comprensibles. Cuando los alumnos intentan dotar de sentido a las acciones de sus compañeros o del profesor, deben valorar los argumentos ofrecidos con el fin de llegar a entendimientos comunes. De modo que ofrecer argumentos e interpretar los argumentos de otros resulta una actividad central de la interacción en el aula. Los autores afirman que el papel del profesor es central para lograr que el trabajo en el aula se desarrolle en estos términos. Mediante la selección y discusión de situaciones paradigmáticas, el profesor contribuye a la emergencia de expectativas y obligaciones relativas a la interacción entre los distintos actores. Esta actividad posibilita la emergencia de normas sociales adecuadas al desarrollo productivo del aprendizaje.

Para explicar cómo es que los aspectos normativos de la interacción en el aula sostienen la actividad argumentativa y orientan el trabajo matemático, Yackel y Cobb (1996) proponen la noción de norma socio-matemática. Más allá de las normas sociales más generales que regulan las acciones de los participantes (e.g., la obligación percibida de que se debe explicar aquello que se propone de modo que otros lo puedan entender), los autores sugieren que existen aspectos normativos relativos a la discusión matemática que son específicos de la actividad matemática del aula (e.g., los criterios para aceptar un argumento como matemáticamente válido). A partir de su investigación con alumnos de primaria, los autores evidencian cómo es que estas normas socio-matemáticas son interactivamente negociadas y constituidas y en qué modo regulan la actividad argumentativa de los alumnos e influencian el tipo de oportunidades de aprendizaje que surgen en el aula. Estas normas no son criterios predeterminados introducidos en el aula, en cambio emergen de la interacción de todos los actores y son continuamente modificadas y renegociadas en el proceso. Yackel y Cobb consideran que aunque el profesor pueda tener ideas preconcebidas acerca de las normas socio-matemáticas que pretende fomentar en el aula, la participación de los alumnos resulta determinante. De modo que tanto las normas sociales como las normas socio-matemáticas de distintas aulas de matemáticas pueden diferir considerablemente. Los autores sugieren que fomentar que el profesor interprete la actividad matemática del aula en términos de normas socio-matemáticas posibilita que aspectos meta-matemáticos relevantes sean evidenciados y abordados de manera deliberada (e.g., la aceptabilidad de los argumentos o la necesidad de sofisticación matemática). Yackel (2001) sugiere que el énfasis en la necesidad de explicar y justificar en el aula de matemáticas potencia la formación de competencias argumentativas, el razonamiento y el aprendizaje matemáticos. Desde esta perspectiva, lejos de reducirse al papel de guía de la interacción entre los alumnos, el papel del profesor resulta esencial para mediar entre la cultura matemática del aula y la cultura matemática que se pretende fomentar.

Steinbring (2005) destaca que el desarrollo del conocimiento matemático sucede a partir de una cierta epistemología de la disciplina, que se conforma en el contexto del aula mediante la interacción y negociación de significados y prácticas matemáticas entre los alumnos y el profesor, y que es, por tanto, parte de la cultura matemática del aula. El autor destaca que también existe en el aula un sistema socio-interactivo que regula la interacción entre los participantes y condiciona la emergencia del conocimiento matemático; este sistema se funda en expectativas sociales relativas tanto al aula de matemáticas como a la institución escolar. Mediante su trabajo con alumnos de primaria, Steinbring documenta la complejidad de establecer una comunicación matemática productiva en el aula (en el sentido de propiciar el aprendizaje). En coincidencia con Yackel y Cobb (op. cit.) y con Yackel, Cobb y Wood (op. cit.), el autor concluye que las dinámicas de la comunicación matemática, y con esta de la actividad argumentativa, son parte de la cultura del aula, de modo que cualquier intervención que pretenda mejorar la calidad de la enseñanza tiene que implicar, forzosamente, la participación de los alumnos y el profesor que conforman interactivamente esta cultura. Al igual que Yackel y Cobb, sugiere que procesos de aprendizaje que demuestran cierto éxito en un determinado contexto no son simplemente transferibles a otro; los aspectos culturales del aula deben ser considerados.

Aunque existe cierto consenso acerca de los potenciales beneficios del trabajo grupal en el aula para promover el aprendizaje matemático (Yackel, Cobb y Wood, op. cit.), existen también ciertas controversias acerca de las condiciones bajo las cuales estas dinámicas pueden ser instruccionalmente efectivas. Sfard y Kieran (2001), analizando el caso de un par de alumnos de secundaria que trabajan juntos resolviendo problemas matemáticos, evidencian la complejidad que la interacción reviste y los posibles efectos negativos para el aprendizaje y la relación entre los alumnos. A pesar de que la evaluación de la producción matemática de estos alumnos, al final de la instrucción, resulta positiva, el análisis de sus conversaciones muestra que tienen dificultades para negociar significados matemáticos y avanzar juntos y de manera productiva en las tareas asignadas. Las autoras sugieren que los aspectos interpersonales y meta-matemáticos de la comunicación son de gran importancia y que pueden llegar a minar el trabajo matemático cuando su gestión pasa al primer plano dentro de la interacción. Las autoras documentan distintas estrategias que, sacrificando la comunicación y producción matemática, permiten a los alumnos sobrellevar diferencias personales mientras trabajan juntos. El trabajo de Sfard y Kieran destaca la necesidad de considerar aspectos sociales de la interacción, a nivel conversacional, como parte del análisis del trabajo matemático de los alumnos.

Brousseau (1997) propone la noción de contrato didáctico para explicar aspectos de la interacción entre los distintos actores en el aula de matemáticas. Según el autor, las expectativas tanto de los alumnos como del profesor acerca de lo que unos y otro tienen la responsabilidad de hacer en el aula, se presentan de manera condicionada, como si estuvieran reguladas por un contrato entre las partes. Distintos aspectos del contrato didáctico puede emerger de manera explícita o implícita en el aula de matemáticas y los participantes actúan como si las cláusulas de este contrato fueran de necesaria observación. Según D'Amore (2008) estas cláusulas corresponden a comportamientos reiterados, tanto por parte de los alumnos como del profesor, que se observan cuando ciertas condiciones didácticas y sociales se dan de modo similar en el aula; comportamientos que resultan entonces esperables cuando estas condiciones son reproducidas. La reiteración de estos mecanismos de interacción en el aula fundan expectativas en los participantes acerca de cómo se debe actuar en ciertas circunstancias. En este marco, la producción y exposición de argumentos, los tipos de tarea y situaciones en las cuales deben ser presentados así como las funciones que deben cubrir, son condicionados por el contrato didáctico vigente. Brousseau analiza distintas situaciones en aulas de educación primaria para describir y explicar cómo es que el contrato didáctico emerge y regula la interacción, de acuerdo con las particularidades del conocimiento matemático con el que se está trabajando.

A partir de un trabajo de investigación con alumnos de primaria, D'Amore (op. cit.) documenta tres cláusulas comunes del contrato didáctico. La primera cláusula indica que los alumnos asumen que cuando se les presenta un problema ellos deben proveer una respuesta, incluso si no han entendido el sentido del problema o si la respuesta construida no es satisfactoria. Actuando bajo esta cláusula, es de esperarse que los alumnos construyan y presenten argumentos de modo arbitrario, sin estar convencidos o incluso sin haber revisado que sean adecuados. La segunda cláusula indica que los alumnos reproducen esquemas de resolución que se han demostrado socialmente exitosos anteriormente: si los alumnos suelen resolver problemas manipulando la información numérica presente en los enunciados, tenderán a repetir esta estrategia sin mayor reflexión, pues esperan que el esquema de resolución sea siempre efectivo. En estos casos, se espera que los argumentos sean válidos por la reiteración del esquema y no a partir de su evaluación reflexiva deliberada. Una tercera cláusula, relacionada con las anteriores, indica que los alumnos suelen limitar su responsabilidad a decidir cuáles son los constructos matemáticos necesarios para resolver el problema y a qué datos numéricos se deben aplicar; después de lo cual la responsabilidad de la validez de la solución, y por lo tanto de los argumentos que la soportan, se ubica en los conocimientos matemáticos mismos (o en los instrumentos utilizados, e.g., la calculadora) y no en su evaluación reflexiva. Es decir, es la responsabilidad del conocimiento (o del instrumento) que la respuesta sea válida, la responsabilidad del alumno se limita a consignarla según los requisitos comunicativos del caso. Así, la actividad argumentativa de los alumnos se ve constreñida por las cláusulas del contrato didáctico, las cuales sugieren qué tipo de argumentos deben ser ofrecidos y cómo deben ser evaluados en función de las expectativas que al respecto tienen los alumnos.

Los estudios que hemos reseñado en esta última sección ponen de manifiesto la relevancia del contexto en que las prácticas argumentativas se dan y, en particular, de los aspectos sociales de la interacción en el aula. Distintos investigadores proponen distintas perspectivas, términos y constructos teóricos para dar cuenta de estos aspectos y de los contextos dentro de los cuales el trabajo matemático, y la argumentación como parte de este, deben ser considerados. Estos estudios destacan que la actividad argumentativa en el aula no se da *per se*, aislada de procesos sociales más amplios y en respuesta a meras cuestiones intrínsecas al conocimiento matemático. De modo que reducir la interpretación del papel de la argumentación en el aula a meros aspectos disciplinares y considerarla solamente en términos de las actuaciones y procesos de los individuos puede dejar cuestiones relevantes desatendidas. Resulta necesario comprender cuáles son las expectativas de los participantes en relación con las actividades en las que se implican, así como los aspectos sociales más generales que condicionan sus prácticas argumentativas y su trabajo matemático en general. Nuestro trabajo de investigación pretende aportar entendimientos en este sentido.

3. Marco Teórico

Nuestro interés es desarrollar un marco teórico que permita dar cuenta de la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria de manera que posibilite la investigación de la epistemología de las matemáticas del aula. Esto es, un marco que permita investigar procesos por los cuales el conocimiento matemático emerge y obtiene tal estatus en las prácticas del aula y cómo es que la argumentación resulta parte de estos procesos. Para hacer esto de manera coherente e inteligible es indispensable ofrecer nuestro posicionamiento en relación con el conocimiento matemático desde un punto de vista filosófico y epistemológico; consideramos, como Steinbring (2005), que "cualquier análisis cualitativo de la comunicación matemática siempre tiene que comenzar -explícita o implícitamente- con presuposiciones acerca del estatus del conocimiento matemático" (p. 34). Hacer explícitas estas presuposiciones contribuirá a fundar nuestras reflexiones acerca de la argumentación en el aula y posibilitará una reflexión más lúcida y abierta acerca de la pertinencia de las ideas y de los métodos empleados en nuestro estudio.

Comenzaremos por ofrecer algunas ideas acerca de la filosofía y epistemología de las matemáticas, asociándolas con la comunidad de los matemáticos, sus conocimientos y sus prácticas. Ofreceremos entonces algunas ideas sobre los papeles de la demostración y de la argumentación como componentes fundamentales de estas prácticas, proponiendo un marco general para entender la argumentación en el contexto de la producción y validación de conocimientos matemáticos. A partir de este marco general desarrollaremos ideas que permitirán considerar las especificidades del aula de matemáticas de secundaria y de la emergencia y validación de conocimientos matemáticos en este contexto.

3.1. Relevancia de un posicionamiento filosófico en el ámbito de la educación matemática y su investigación

Desde que Euclides escribiera sus 'Elementos' hasta bien entrado el siglo diecinueve, las matemáticas han sido consideradas, en la tradición occidental, un paradigma de certeza y de producción de conocimiento infalible. En nuestros días son fundamento indispensable de la producción y la comunicación científicas. Estos hechos, por sí mismos, ilustran la enorme relevancia que cualquier revisión crítico-reflexiva del conocimiento matemático puede tener en nuestra sociedad.

Desde finales del siglo diecinueve hasta hoy, varios han sido los intentos por dotar a las matemáticas de bases sólidas sobre las que finalmente descansar y constituirse, con pleno derecho, en el fundamento seguro del resto de las ciencias. Los esfuerzos de Russell y Whitehead o de Hilbert y su famoso programa son dos de los ejemplos más relevantes en este sentido. Aunque estos esfuerzos han redundado en nuevos avances dentro de las matemáticas y han servido para clarificar cuestiones acerca de su naturaleza, todos los intentos por encontrar una fundación última han fracasado y la cuestión sigue viva en los debates de los filósofos de las matemáticas.

A pesar de la vigencia de los debates acerca de la naturaleza y origen del conocimiento matemático así como de sus condiciones de emergencia, sus alcances y sus límites, la capacidad de los matemáticos profesionales para comunicar sus resultados dentro de su comunidad y acordar su validez y relevancia dentro del área es notable (Hersh, 1979; Steinbring, 2005). La falta de acuerdo entre las distintas posiciones filosóficas que pretenden fundar el conocimiento matemático y ubicarlo en el espectro más amplio de los conocimientos científicos no parece ser una fuente de preocupaciones habitual para los matemáticos profesionales, ni parece arrojar sobre sus resultados una sombra de duda que los obligue a atender estas cuestiones de manera urgente. Posiblemente es este consenso de la comunidad matemática en relación con la comunicación y evaluación de la producción matemática lo que deja la problemática de los fundamentos en segundo plano y la falta de acuerdo en este sentido como un mal menor. Sin embargo, coincidimos con Hersh en que

> los problemas acerca de la verdad y el significado no son cuestiones técnicas en alguna rama recóndita de la lógica o de la teoría de conjuntos.

> Si queremos, podemos ignorarlos. Hacerlo, sin embargo, es volvernos prisioneros de nuestras propias preconcepciones filosóficas no examinadas. (...) [Estas ideas] tienen consecuencias. Las propias concepciones acerca de qué son las matemáticas afecta las concepciones acerca de cómo deben ser presentadas. Los modos en que son presentadas son una indicación de lo que creemos es más esencial en ellas. (1979, p. 33; itálicas en el original).

Para Hersh, una revisión profunda que recoja y articule las enseñanzas de los varios intentos fundacionalistas del siglo pasado es necesaria, so pena de "condenarnos" a las consecuencias de nuestras pre-concepciones filosóficas no examinadas.

Según Sierpinska y Lerman (1996), muchos matemáticos profesionales conciben el desarrollo de los conocimientos matemáticos como un proceso más o menos continuo. Su capacidad para utilizar estándares de producción y evaluación de gran aceptación en su comunidad parece permitirles avanzar en cuestiones estrictamente matemáticas sin la necesidad de discutir sus métodos y filosofías de manera recurrente o que condicione la posibilidad de acuerdo. Aparentemente, para muchos matemáticos no hay "grandes cambios" en el nivel de los conocimientos matemáticos, que es el nivel que suelen considerar más relevante; los grandes cambios ocurren, esporádicamente, en el nivel meta-matemático. Sin embargo, la perspectiva de los educadores matemáticos es distinta, pues para éstos el nivel meta-matemático resulta crucial en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Aunque los matemáticos logran comunicar y evaluar sus producciones a pesar de sus diferentes posicionamientos filosóficos "esto puede ser distinto para los alumnos, para los que el nivel técnico de las matemáticas puede estar totalmente entrelazado con cuestiones de naturaleza filosófica" (Sierpinska, 1990; en Sierpinska y Lerman, op. cit., p. 834). Para los profesores y para los alumnos, que están comenzando a participar en el proceso de creación matemática, la acumulación de conocimientos matemáticos es tan importante como sus condiciones de emergencia, los estándares para su evaluación, la reflexión acerca de éstos y el desarrollo de sus significados. Si en la praxis cotidiana del matemático profesional y de su comunidad los debates filosóficos parecen tener consecuencias limitadas, en el ámbito de la educación matemática sus consecuencias son más claras: "los investigadores en didáctica de la matemática están interesados en observar y explicar los procesos del descubrimiento matemático en acción, tanto entre expertos matemáticos como entre alumnos. En última instancia, como profesionales, investigan modos de provocar estos procesos en la enseñanza" (Sierpinska y Lerman, op. cit., p. 829).

En nuestro estudio asumimos el papel fundamental del posicionamiento filosófico respecto de las matemáticas en la reflexión acerca de su aprendizaje. De modo que en la siguiente sección examinamos algunas ideas básicas acerca de la filosofía de las matemáticas y, particularmente, acerca de la epistemología de las matemáticas. La intención no es hacer un estudio exhaustivo de distintas posiciones filosóficas sino, más bien, posicionar nuestra investigación dentro de este ámbito, destacando elementos que son relevantes para nuestro estudio.

3.2. Marco general: cuestiones sobre filosofía y epistemología de las matemáticas

En esta sección presentamos algunas ideas en relación con la filosofía y epistemología de las matemáticas, considerando aspectos del quehacer de los matemáticos profesionales. Presentamos la disciplina matemática como un producto cultural e histórico, justificando la necesidad de entenderla como parte de la acción humana. Explicamos nuestra perspectiva sobre la demostración matemática y su papel como parte de procesos de construcción y validación de conocimientos matemáticos. En este marco ubicamos la argumentación, ofreciendo nuestra propia definición y explicándola como parte de la actividad matemática.

3.2.1. Las matemáticas como producto cultural e histórico

En nuestro estudio asumimos la visión 'falibilista' de las matemáticas de Lakatos (1978) y su revisión por Ernest (1998), según la cual las matemáticas son falibles, están sujetas a crítica racional y a posibles correcciones. Esta visión rechaza la idea de que las matemáticas son un conocimiento *a priori*, es decir, fundado en una serie de nociones básicas auto-evidentes y desarrollado de manera formal según una serie de reglas de inferencia previamente aceptadas. Según la visión apriorística, las matemáticas son un conocimiento indudable, incorregible e infalible; posición que Ernest denomina absolutismo.

La tesis falibilista no pretende, simplemente, dar cabida al error humano en relación con lo que se cree, dejando inalterado el estatus epistémico de las posibles creencias implicadas, considerándolo inherente a éstas. Por el contrario, implica que el conocimiento matemático puede perder su estatus epistémico (necesario, posible, etc.) por acción de su revisión crítica. La justificación de tal conocimiento puede ser rechazada y éste considerado injustificado o incluso falso.

Aunque la crítica de Lakatos y Ernest a los proyectos fundacionalistas, como los de Hilbert y Russell y Whitehead, parece minar inexorablemente la fiabilidad (en términos apriorísticos) del conocimiento matemático, la suya no es una crítica escéptica o destructiva; es un llamado de atención acerca de la necesidad de reivindicar el valor y la importancia del conocimiento matemático falible para acomodarlo de manera más lúcida en el proyecto científico moderno. Lakatos se pregunta:

> ¿Por qué empeñarse en pruebas "*últimas*" y autoridades "decisivas"? ¿Por qué buscar fundamentos, si se acepta que son subjetivos? ¿Por qué no admitir honestamente la falibilidad matemática, e intentar defender la dignidad del conocimiento *falible* contra el escepticismo cínico, en lugar de hacernos la ilusión de que podemos reparar, hasta que no se note, el último rasgón del tejido de nuestras intuiciones "últimas"? (op. cit., p. 41, cursivas y comillas en el original)

Para Hersh, este posicionamiento da lugar a una tarea fundamental para la filosofía de las matemáticas, "no la búsqueda de la verdad indudable sino dar cuenta del conocimiento matemático como realmente es: falible, corregible, tentativo y en evolución, como lo es cualquier otro tipo de conocimiento humano" (1979, p. 43). Un ejemplo clásico del valor de la revisión crítica del conocimiento matemático y de sus fundamentos es el desarrollo de las geometrías no euclidianas a partir de la sustitución del quinto postulado de Euclides. Sus consecuencias y su valor, tanto para el desarrollo de las matemáticas como para la física moderna, son enormes.

Según Kirtcher (1984), y así lo asumimos en nuestro estudio, una piedra angular de la tesis falibilista es el hecho de que la justificación del conocimiento matemático implica la acción humana y por lo tanto no puede ser reducido a condiciones objetivas inherentes al conocimiento mismo. Los estándares de validación del conocimientos están, también ellos, sujetos a crítica y modificación;

son aceptados en un momento histórico determinado porque son considerados adecuados por grupos de individuos (e.g., la comunidad matemática). De este modo, tanto el conocimiento matemático como los estándares de evaluación con que es validado dependen de su aceptación social como tales. Una consecuencia inmediata de aceptar la historicidad del conocimiento y del meta-conocimiento matemáticos es que la vigencia de la validez de su configuración presente, a pesar del consenso que pueda generar, está sujeta a los resultados de la actualidad de su revisión crítica. Esto no quiere decir, por supuesto, que el conocimiento matemático de la comunidad matemática o sus estándares de evaluación sean arbitrarios o que no progresen con el tiempo. Por el contrario, éstos son el producto más actual del trabajo profesional de los matemáticos, basado en el debate y escrutinio públicos. Los conceptos matemáticos, las definiciones, los teoremas y las demostraciones evolucionan, cambian e incluso son abandonados con el paso del tiempo, al igual que los estándares de evaluación y de rigor. El conocimiento matemático es entonces intersubjetivo e históricamente determinado, enraíza en la tradición y en la continuidad histórica (Ernest, op. cit.). Las matemáticas, como cualquier otro conocimiento teórico, necesitan contextos específicos en los que desarrollarse, organizarse, sistematizarse y conectarse con significados.

A pesar de que la visión falibilista del conocimiento matemático ha ganado terreno en las últimas décadas en el campo de la filosofía de las matemáticas y de la investigación en educación matemática (Sierpinska y Lerman, 1996), la presentación de la materia en las aulas sigue teniendo tintes absolutistas. Si se considera que la actividad que desarrollan los matemáticos debe informar de manera fundamental a la educación matemática, este hecho tiene consecuencias. Las posiciones absolutistas, como el formalismo, el logicismo o el intuicionismo, dan cuenta del conocimiento de manera prescriptiva; es decir, constituyen en sí mismas un programa acerca de cómo se deben entender y desarrollar las matemáticas, en lugar de dar cuenta de cómo lo hacen, en realidad, en la praxis de los matemáticos. "Confundir descripción y programa -confundir 'es' con 'debe ser'- es tan dañino en la filosofía de las matemáticas como en cualquier otra" (Köner, 1960, p. 12; en Ernest, op. cit., p. 51). Si esperamos que la praxis de los matemáticos informe a la didáctica de las matemáticas, resulta necesaria una filosofía de las matemáticas que sea capaz de explicar, al menos, qué es el conocimiento matemático, cuál es su carácter y su ontología y, a la vez, cómo es que surge como resultado de la actividad que realmente llevan a cabo los matemáticos, cómo es que queda justificado dentro de la comunidad matemática, cómo se relaciona con otros conocimientos humanos y cómo es que los humanos aprenden a hacer matemáticas. Las respuestas a estas preguntas son de gran relevancia para la enseñanza de las matemáticas y para la reflexión acerca de ésta. Lakatos (1976), por ejemplo, se aproxima a algunas de estas preguntas mediante el análisis de discusiones matemáticas ficticias inspiradas en datos históricos. El autor propone una visión de las matemáticas que se distancia definitivamente de posiciones absolutistas, describiéndolas como un producto falible y perfectible del trabajo intelectual humano.

Desde la perspectiva que asumimos, la dimensión social del conocimiento matemático no se puede entender como una mera contingencia. Considerando las matemáticas como un producto cultural históricamente determinado, la dimensión social está inextricablemente ligada a cualquier epistemología que pretenda dar cuenta del conocimiento matemático como fruto de la acción humana. Nos sumamos así al interés creciente, en el ámbito de la investigación en didáctica de las matemáticas, por el desarrollo de teorías que incluyan la dimensión socio-cultural, explícita o implícitamente, como un elemento fundamental para entender los procesos asociados con la producción de conocimientos matemáticos (Sfard, 2008; Sierpinska y Lerman, op. cit.). Este interés refleja el alejamiento, en este ámbito, de la perspectiva absolutista del conocimiento matemático, así como el rechazo de la asociación de su construcción con el solo individuo, en favor de visiones que entienden el conocimiento matemático y su justificación como una construcción colectiva inscrita en un contexto particular.

Para introducir la dimensión social en la discusión acerca del conocimiento matemático, tanto Sfard (2008) como Ernest (op. cit.) recurren a propuestas y nociones de Wittgenstein (1953/2001). Las epistemologías basadas en las ideas de Wittgenstein adscriben la producción del conocimiento a la esfera de la acción de los agentes humanos y las comunidades culturales que estos conforman (sus 'formas de vida'), otorgando un papel preponderante al uso del lenguaje (sus 'juegos del lenguaje'). Para Wittgenstein, el significado de un término o de una proposición es su uso en el lenguaje. De este modo, el conocimiento matemático de la comunidad matemática es el producto de la actividad de los matemáticos implicándose en los distintos juegos del lenguaje que conforman y caracterizan determinadas formas de vida en este grupo. Este posicionamiento rechaza, por un lado, tanto el apriorismo del conocimiento matemático como su infalibilidad

(Ernest, op. cit.) y, por otro, ubicando el significado en la actividad discursiva humana y no en las mentes individuales o en relaciones entre objetos y palabras, lo convierte en una cuestión pública e investigable (Sfard, op. cit.). La primera cuestión abre la puerta a una visión naturalista y anti-prescriptiva del conocimiento matemático (en el sentido de Kirtcher, op. cit.) y la segunda cuestión abre la puerta a los métodos de la pragmática para el estudio del conocimiento matemático y su producción. Los posicionamientos epistemológicos que las ideas de Wittgenstein posibilitan, son capaces de acomodar visiones socio-culturales de la producción y justificación del conocimiento matemático y proveer de fundamentos a su desarrollo.

Es esta visión histórica y socialmente fundada de la epistemología, y en particular de la epistemología de las matemáticas, la que adoptamos en nuestro estudio. Aunque son variadas las visiones acerca de la epistemología de las matemáticas que enraízan en la dimensión social y que han sido consideradas en el ámbito de la educación matemática, no pretendemos hacer una revisión exhaustiva. Algunas ideas al respecto serán desarrolladas más adelante para acotar y explicar en detalle nuestro punto de vista.

A continuación describimos elementos básicos relativos a la praxis matemática y cómo éstos se articulan, a la luz de las ideas propuestas, para explicar la producción y validación de conocimientos matemáticos al interior de la comunidad matemática. Elucidar estas cuestiones permitirá, más adelante, exponer nuestras ideas acerca de los procesos de producción y validación de conocimientos matemáticos en el contexto del aula de matemáticas y establecer similitudes y diferencias relevantes que permitan describir especificidades del contexto del aula.

3.2.2. El conocimiento y la praxis matemáticos

Visiones tradicionales de las matemáticas suelen presentar el conocimiento matemático como colecciones de proposiciones explícitas que pueden ser entendidas por sí mismas, de manera intra-matemática, prescindiendo de otras consideraciones. Desde la perspectiva apriorística, por ejemplo, esta presentación está justificada, pues la misión esencial del matemático es, además de develar los fundamentos últimos de las matemáticas, acumular sus consecuencias necesarias mediante el razonamiento deductivo; las formulaciones particulares de estos conocimientos y sus condiciones de emergencia no son más que aspectos menores. Desde la perspectiva que hemos asumido, sin embargo, esta visión reductiva del conocimiento matemático resulta inadecuada. Por un lado, si el significado es el uso en el lenguaje, una posición que enajene el conocimiento aislándolo de las personas que lo enuncian, no podría explicar cómo es que este conocimiento se constituye, es decir, cómo es que llega a ser usado en los juegos del lenguaje de ciertas formas de vida. Por otro lado, tal posición dejaría en segundo plano tanto a los procesos creativos que están en el origen del conocimiento matemático como a la reflexión crítica que lleva a su replanteamiento, modificación e incluso abandono a lo largo de la historia. Esta dicotomización entre conocimiento y condiciones de emergencia está en la base de la distinción entre el contexto de justificación, al que el conocimiento proposicional conformaría, y el contexto de descubrimiento, una suerte de estadio previo que sólo merece una atención secundaria pues no resulta constitutivo del conocimiento. Lakatos (1976) muestra cómo ambos contextos se relacionan dialécticamente en un proceso complejo que está en la base de la producción matemática; proceso al que denomina 'lógica del descubrimiento matemático'. Para hacer matemáticas no basta 'saber qué', es necesario 'saber cómo' y ser capaz de participar en prácticas que implican ambos tipos de conocimiento. Estas ideas están en línea con resultados recientes relativos a las motivaciones de matemáticos profesionales para leer demostraciones publicadas en revistas especializadas y los modos en que lo hacen. Según Weber y Mejía-Ramos (2011), los matemáticos no están solamente interesados en los teoremas enunciados y en la corrección de sus demostraciones, sino también en las ideas y procedimientos que los desarrollan y sus posibles adaptaciones y usos en sus investigaciones.

Coincidimos con Ernest (1998) en que el conocimiento matemático incluye no sólo conocimiento proposicional, sino también un 'saber hacer' que permite a quien participa en la construcción de conocimientos matemáticos hacerlo activamente de modos reconocibles como adecuados. Estos conocimientos no suelen presentarse en forma de proposiciones, aunque puedan (o no) ser presentados de ese modo. Así, el conocimiento matemático de un individuo incluye no sólo conocimiento proposicional que puede ser públicamente enunciado, sino también un saber hacer matemático, posiblemente tácito, que debe ser entonces acomodado dentro de la epistemología de las matemáticas. Según Polanyi (1966) sabemos más de lo que podemos enunciar de manera explícita. Un ejemplo de conocimiento tácito es el relacionado con el lenguaje: la competencia como hablante no se basa exclusivamente en la capacidad de quien habla de evidenciar su conocimiento acerca del lenguaje. Es un cierto saber hacer, compartido entre un grupo de hablantes (una forma de vida y sus juegos del lenguaje), y no necesariamente sus conocimientos explicitables acerca de la gramática de la lengua lo que consiente a las personas acordar, por ejemplo, la corrección de una cierta frase. De modo que la tesis wittgensteiniana acerca del significado también sugiere la necesidad de ciertos conocimientos tácitos que sustentan la participación en ciertos juegos de lenguaje. El conocimiento en general, y por lo tanto el matemático, enraíza indefectiblemente en conocimientos tácitos.

Para que estos conocimientos tácitos puedan ser considerados como tales es necesario entender cómo es que son justificados. Cualquier justificación de cierto conocimiento tácito debe ser, al menos en parte, tácita: la validez de cierto conocimiento tácito es demostrada implícitamente por la participación exitosa de los individuos en actividades sociales o formas de vida (Ernest, op. cit.). Por lo tanto, el conocimiento tácito será considerado como tal siempre y cuando pueda sostenerse sobre la base de algún tipo de justificación de la cual las personas implicadas en su validación son conscientes o pueden llegar a serlo. Es así que el conocimiento tácito, tanto como el proposicional, resulta epistemológicamente relevante.

Además de distinguir entre conocimiento proposicional y conocimiento tácito, distinguimos entre conocimiento objetivo y subjetivo. Cuando Sierpinska y Lerman (1996) dan cuenta de la visión interaccionista de la construcción de conocimiento, sostienen que los significados considerados como compartidos por un grupo no son la intersección de significados subjetivos de los individuos, sino interpretaciones emergentes, posiblemente inconscientes, que les permiten interaccionar "sin problemas", haciendo predicciones exitosas acerca de las acciones y movimientos de los interlocutores. Los significados de un individuo en relación con cierto conocimiento emergen de las formas en que otras personas actúan cuando interaccionan con éste en relación con estos conocimientos y son, por lo tanto intersubjetivos. Con 'conocimiento objetivo' nos referiremos a los conocimientos públicos e intersubjetivos al interior de una comunidad. Al llamar a estos conocimientos 'públicos' no nos referimos necesariamente a que sean explícitos o explicitables sino al hecho de que son desplegados públicamente, aunque sea de manera implícita, para que otros miembros de la comunidad lo atestigüen y evalúen (Ernest, op. cit.). De este modo, incluimos como conocimientos objetivos los conocimientos tácitos que fundan y permanecen implícitos en prácticas y juegos de lenguaje particulares de ciertas formas de vida. En la comunidad matemática, el conocimiento objetivo incluye axiomas y teoremas, teorías, conjeturas y demostraciones, pero también convenciones acerca del lenguaje matemático, visiones meta-matemáticas y un cierto saber hacer.

Es su carácter social e intersubjetivo el que confiere al conocimiento objetivo su existencia autónoma e independiente de los individuos y su apariencia impersonal y objetivada; no pertenece a un individuo particular sino a un colectivo y a la vez puede ser compartido y criticado por los individuos. De modo que el conocimiento objetivo en matemáticas es aquel aceptado como legítimamente justificado por la comunidad matemática, es el conocimiento acordado y compartido por esta comunidad, el cual satisface sus procedimientos y criterios de aceptación, no algo supra-humano y absoluto (Ernest, op. cit.).

3.2.2.1. Demostrar

La demostración matemática es el instrumento con el que los matemáticos validan, hacen público y comunican su conocimiento proposicional dentro de la comunidad matemática. Sin embargo, a pesar de su papel preponderante, la noción de 'demostración matemática' sigue siendo motivo de debate.

Una primera distinción que conviene hacer para abordar esta cuestión es entre la demostración matemática como proceso (de aquí en adelante 'actividad demostrativa', adoptando el término de Camargo, 2010) y la demostración matemática como producto (de aquí en adelante 'demostración') (Boero, Douek y Ferrari, 2002; Douek, 2007).

Con demostración nos referimos a los textos que los matemáticos presentan como producto de su trabajo para ser sometidos al escrutinio de la comunidad con la finalidad de ser aceptados como conocimiento matemático; de aquí su relevancia tanto social como epistemológica. Estos productos presentan características especiales: se inscriben en un sistema teórico de referencia y se desarrollan a partir de razonamientos, procedimientos y registros lingüísticos aceptados por la comunidad matemática con la intención de validar, a partir de un conjunto de premisas explícitas, una proposición-objetivo, que es entonces un teorema dentro de esta teoría. La publicación de estos productos en revistas especializadas, proceso en el que son revisados por otros expertos, es el medio por el que la comunidad matemática reconoce públicamente el estatus de demostración a determinados textos matemáticos. Sin embargo, cuando se observa aquello a lo que los matemáticos llaman, en la práctica, demostración, resulta claro que no hay total acuerdo al interior de la comunidad matemática acerca de lo que la demostración debe ser. Weber (2014) proporciona ejemplos de textos escritos por matemáticos y publicados como demostraciones que, en un sentido u otro, no satisfacen las definiciones intesionales de demostración que con mayor frecuencia se ofrecen en la literatura. Este autor sostiene que en la práctica matemática no hay un conjunto de propiedades explicitables que caracterice plenamente la demostración. Es decir, una definición intensional de la noción de demostración, plenamente aceptada, no es factible a partir de las prácticas de la comunidad matemática. Kitcher (1984) sugiere que los estándares para la demostración no pueden hacerse completamente explícitos y que gran parte del conocimiento meta-matemático respecto de la demostración corresponde a conocimientos tácitos de la comunidad matemática. Este autor sugiere que algunos elementos relevantes de la demostración se definen ostensivamente mediante ejemplos paradigmáticos y que los tratamientos logicistas que se suelen hacer para intentar definiciones intensionales no cubren la variedad de demostraciones que los matemáticos producen y validan en la práctica. Sin embargo, lo que resulta claro al considerar el crecimiento de la comunidad matemática y de los conocimientos matemáticos en los últimos ciento cincuenta años, es la capacidad de esta comunidad para utilizar estos conocimientos para la producción, validación y publicación de demostraciones. Los errores que se detectan esporádicamente en demostraciones publicadas suelen ser subsanados sin mayores consecuencias y el debate acerca de textos particulares, cuyo estatus como demostración es cuestionado, es más bien marginal (aunque autores como Hersh (1979) lo consideran de capital importancia).

Por otro lado, llamamos actividad demostrativa a las actividades llevadas a cabo con el objetivo de producir una demostración (de manera muy similar a Camargo, op. cit.). Una de estas actividades, implicada en la producción de una demostración, es ‘explorar’. Entendemos la exploración como una actividad ecléctica, de carácter heurístico (en el sentido de Pólyia, 1945), en la que los matemáticos se involucran con la intención de ubicar un cierto problema de interés matemático en el ámbito de conocimientos y procedimientos previamente aceptados, ya sea con el fin de elucidar elementos suficientes para la producción de una demostración adecuada al caso, para descartar el problema como tal o para reformularlo.

Otra actividad que asociamos a la actividad demostrativa es 'conjeturar'. La conjetura es una hipótesis que se avanza y que no tiene aún estatus de teorema; puede estar en el origen de la exploración, como detonante, o puede ser una de sus instancias.

Consideramos también la actividad de 'definir' como parte de la actividad demostrativa. Definir implica hacer explícitas las condiciones necesarias y suficientes que delimitan un concepto o noción. Esta actividad es central dentro de la actividad demostrativa, pues es necesaria para la creación de contra-ejemplos, registra los ámbitos de aplicación de teoremas y determina las clases de objetos matemáticos bajo el alcance de una demostración. Desde nuestro punto de vista, es central a las matemáticas de un modo más profundo y general: la acción de definir establece relaciones entre objetos y conceptos matemáticos y por lo tanto establece relaciones entre los ámbitos en los que estos objetos y conceptos se inscriben. Nótese que estas relaciones pueden incluso constituirse como nuevos objetos o conceptos matemáticos; la teoría de categorías explota esta característica y demuestra la fertilidad de la definición al interior de las matemáticas. La acción de definir no es inocua, máxime si rechazamos el formalismo y el apriorismo como bases de la filosofía de las matemáticas y aceptamos su historicidad, su inextricable relación con otros conocimientos humanos y el papel fundamental del lenguaje. La acción de definir está en el seno de las formas de vida de la comunidad matemática y es constitutiva de sus juegos de lenguaje.

La relevancia de estas actividades para la praxis matemática, como parte constituyente del proceso de producción de demostraciones, así como su complejidad, son ilustradas a partir de estudios históricos por Lakatos (1976). En el aula ficticia que nos propone, durante las conversaciones que sostienen un grupo de alumnos y un profesor, el autor muestra cómo éstas actividades (explorar, conjeturar y definir) se suceden de manera no-lineal para impulsar la investigación, refutar los dichos de otros, re-orientar, convencer y validar (aceptar o rechazar) los productos parciales de la actividad demostrativa (ejemplos, contraejemplos, lemas, técnicas, etc.). La compleja y polifacética conversación que plantea el autor contrasta con la linealidad del estilo deductivista que se exige a las demostraciones para su publicación. Esta intricada red de actividades y su no-lineal devenir está en el corazón de la lógica del descubrimiento matemático: la visión heurística que el autor propone sobre la actividad que realizan los matemáticos profesionales como parte de la creación de demostraciones, a la que hemos llamado actividad demostrativa.

El objetivo más evidente de la actividad demostrativa es proveer de justificación al conocimiento matemático proposicional; proceso que, como nota Ernest (op. cit.), suele tener un efecto menor, si es que tiene alguno, en la epistemología subyacente. Es decir, no suele producir la revisión de las visiones meta-matemáticas o de los criterios de validación implicados. Sin embargo, y aunque no suele ser el objetivo explícito de la actividad demostrativa, un efecto en este sentido es posible. Ocasionalmente, los matemáticos se ven forzados a reestructurar el conocimiento matemático de maneras más profundas, tanto los conocimientos explícitos como los tácitos. Los cambios en este sentido pueden ser significativos pues

> pueden resultar en cambios acerca de lo que constituye formulaciones lingüísticas aceptables, paradigmas de demostraciones y criterios para la aceptación de demostraciones, y las visiones meta-matemáticas de la comunidad matemática (...) Estos cambios pueden resultar en una re-orientación profunda de las matemáticas. La consecuencia de esta reestructuración radical es un nuevo y revisado contexto científico y epistemológico para las matemáticas. (Ernest, op. cit., p. 152)

Es a partir de la actividad que desarrollan los matemáticos y de la reflexión crítica sobre ésta, que los cambios epistemológicos en el ámbito de las matemáticas suceden. Por otro lado concordamos con la esencia dialéctica que el autor propone para la relación entre la producción del conocimiento matemático y la reestructuración de su contexto epistemológico.

A la luz de lo dicho hasta aquí, resulta indispensable considerar otra actividad constituyente de la actividad demostrativa, cuya discusión, por su importancia para nuestro estudio, realizamos en el siguiente apartado: ‘argumentar’.

3.2.2.2. Argumentar

Al igual que Ernest (1998), consideramos que la 'proposición' y la 'demostración' como unidades epistemológicas del conocimiento matemático son deficientes en el sentido de su prescindencia del contexto socio-histórico y de sus agentes humanos, a la vez que oscurecen la naturaleza dialógica de la emergencia del conocimiento matemático. Ernest introduce la noción de 'conversación' como unidad epistemológica complementaria con la intención de paliar esta deficiencia. La proposición y la demostración no son capaces de dar cuenta del papel del lenguaje, el discurso y la interacción en la producción de conocimientos, en donde el papel del otro para la revisión, crítica, corrección y validación resulta esencial, pues es así que se despliega la dimensión dialógica de esta actividad.

Según Habermas,

> para saber algo en un sentido explícito, no es suficiente con estar familiarizado con hechos que pueden ser representados en proposiciones verdaderas (...) Quien sea que crea que tiene conocimiento a su disposición asume la posibilidad de su vindicación discursiva (...) Dicho de otro modo, es parte de la gramática de la expresión 'conocer' que todo aquello que conocemos puede ser criticado y justificado. (1998, p. 312)

Esta idea está en el corazón de la noción de racionalidad de Habermas, para quien se puede calificar una creencia como racional siempre que se presenten buenas razones que la apoyen en un contexto relevante de justificación: la racionalidad de una proposición no implica su verdad sino, meramente, su aceptabilidad justificada en un cierto contexto. Quien actúa racionalmente, según Habermas, orienta sus acciones según las pretensiones de validez[1] que reclama para lo que dice y hace, dando cuenta de manera reflexiva de esta orientación y responsabilizándose de este modo de actuar. De modo que la racionalidad de lo que se dice y hace no es una característica intrínseca e invariante de lo que se dice o de lo que se hace, sino una consecuencia de la toma de responsabilidad de los sujetos al dar cuenta de la orientación de sus discursos y acciones según sus pretensiones de validez.

[1] Traducimos como 'pretensión de validez' el término 'validity claim' utilizado en Habermas (1998).

En nuestro estudio ubicamos el principio dialógico de la producción del conocimiento, que entendemos como una empresa racional en el sentido propuesto, en la actividad argumentativa. De manera provisional, definimos 'argumentación' siguiendo el *Merriam-Webster Dictionary* como "el acto o proceso de formar razones y sacar conclusiones y aplicarlas al caso en cuestión" ("argumentation", 2014). De este modo destacamos las funciones reflexiva, justificativa y persuasiva de la argumentación.

En la tradición de la retórica, desde Aristóteles hasta hoy, la argumentación suele considerarse como el proceso por el cual una persona intenta persuadir a un oyente o auditorio acerca de alguna cuestión "bien definida", aportando para ello elementos que justifican su posición. Éste es el modelo que subyace, por ejemplo, a la obra de Perelman y Olbrechts-Tyteca (1969) o a la de Toulmin (2007). Ambas aproximaciones resultan valiosas para describir aspectos de la argumentación; sin embargo, coincidimos con Krummheuer (1995) en que este escenario "ideal" no es habitual en las aulas modernas, donde la argumentación está ligada a la interacción entre participantes, para quienes las dimensiones comunicativa e interpersonal resultan igualmente relevantes. Aunque la práctica argumentativa puede darse de manera bien organizada, explícita y dirigida por objetivos más o menos discernibles (e.g., como parte de un monólogo o de un intercambio epistolar), en el aula, debido a la naturaleza emergente de la interacción social, suele darse de modo fragmentario, tácito, con la participación simultánea de distintos actores y en relación con distintos objetivos. Entendemos la argumentación como una práctica Discursiva, en el sentido de Gee (1999), y por lo tanto consideramos que vehicula, además de elementos explícitos e implícitos relativos al tema o temas en cuestión, elementos relativos a la identidad de los participantes, a sus preferencias y a su posición respecto a los otros y al conocimiento. De modo que, aunque estemos interesados en las funciones justificativa, reflexiva y persuasiva de la argumentación en el marco de procesos de producción de conocimientos matemáticos, no podemos olvidar cómo esta actividad se inserta en el contexto más amplio de la interacción social.

Debido a que son estos escenarios complejos los más frecuentes en las situaciones de aula, resulta relevante asumir una perspectiva que pueda dar cuenta de la polifonía y eclecticismo de las interacciones en estos contextos. Con este fin, asumimos la perspectiva de la 'teoría de los actos de habla' desarrollada en primera instancia por Austin (1962), refinada por Searle (1969) y utilizada por

Habermas (op. cit.). La tesis fundamental de esta teoría es que el texto (hablado o escrito) es un tipo de acción: un acto de habla. Los actos de habla pueden presentar distintos aspectos, uno locutivo (proposicional) y otro ilocutivo (pragmático), además de un aspecto performativo, relativo al efecto perlocutivo que se pretende conseguir en los interlocutores. Esta perspectiva resulta relevante cuando se consideran conversaciones complejas en la que se forman argumentos cuyas funciones o elementos no son discernibles a partir de la sola consideración de sus aspectos sintácticos y semánticos y una perspectiva pragmática es indispensable. Una emisión del tipo '12+7 es igual a 11+8' puede pretender validar una transformación dentro del desarrollo de una ecuación o puede llamar la atención sobre las consecuencias de un procedimiento de conteo con la intención de establecer ostensivamente una propiedad de los números naturales; en el primer caso se utiliza la validez aceptada del contenido proposicional y en el segundo se pretende fundar la validez de un procedimiento general sobre las condiciones de un ejercicio manipulativo. Estas distintas pretensiones de validez (la primera en el nivel matemático y la segunda en el meta-matemático) son distinguibles como dos actos de habla ilocutivos distintos a partir de los aspectos pragmáticos de la emisión. Desde una perspectiva wittgensteiniana, consideramos que los aspectos pragmáticos de ciertos actos de habla residen en los juegos del lenguaje propios de ciertas formas de vida; de modo que el contexto resulta un elemento esencial para la interpretación de estos aspectos.

A partir de nuestra interpretación de Habermas (op. cit.) y de la adaptación de su constructo de 'comportamiento racional' por Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010), asumimos que la práctica argumentativa consta de tres dimensiones inextricablemente entrelazadas: una epistémica, relativa a las constricciones epistemológicas inherentes a la construcción y control de las proposiciones, justificaciones y validaciones; otra teleológica, relacionadas con las intenciones, los objetivos y las decisiones estratégicas de los participantes; y una más comunicativa, relativa a la selección de los registros lingüísticos e instrumentos semióticos apropiados para comunicarse dentro de la comunidad cultural. Aunque no sea de manera consciente, quien argumenta elabora su discurso de manera intencionada y en atención a sus objetivos; a la vez que lo hace dentro de las constricciones que asume y que le permiten discernir lo que puede ser caracterizado como justificado, válido o adecuado de lo que no. Según Habermas, los instrumentos que seleccione del repertorio comunicativo culturalmente adecuado al caso vehiculan, de modo inextricable, el *telos* y la *episteme* de la praxis argumentativa. Distintos autores han sugerido la relevancia del análisis de la argumentación en el aula en términos de los tres componentes que Habermas propone (Boero, 2006; Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010; Goizueta, Mariotti y Planas, 2014; Goizueta y Mariotti, en prensa).

A partir de la caracterización que hasta aquí hemos hecho, la argumentación resulta una actividad pluridimensional y ecléctica en la que pueden estar implicadas varias personas de manera interactiva. Los participantes se involucran ofreciendo razones para justificar o criticar sus posiciones o las de otros con la intención de convencer (i.e., para modificar positiva o negativamente el valor epistémico de las distintas posiciones). Aunque en nuestra caracterización enfatizamos el papel del otro, la argumentación puede restringirse a la esfera individual. Al abordar de manera reflexiva una cuestión, una persona funge como proponente y crítico de la posición o posiciones consideradas.

A partir de sus interpretaciones, los participantes en una argumentación (o un observador) pueden "reconstruir", dentro de la interacción, un discurso coherente e intencional en relación con los objetos de su atención. A esta reconstrucción, que no necesariamente es llevada a cabo de manera consciente o deliberada, la llamamos 'argumento'. No es posible garantizar que todos los participantes hagan reconstrucciones similares o incluso compatibles a partir de la misma situación interactiva; esto hace que la reformulación, el parafraseo y el cambio de registro resulten actividades clave dentro de la interacción para maximizar las probabilidades de que esto suceda (Goizueta y Planas, 2013a; Goizueta y Planas, 2013b). Como indica Krummheuer (1995), esto no quiere decir que la argumentación es o implica una actividad meta-comunicativa paralela o posterior a la acción comunicativa misma; consideramos, más bien, que es una característica o rasgo de esta acción que los participantes "imprimen" (y son capaces de interpretar) en ésta participando interactivamente. Los argumentos muestran, entonces, un doble carácter como constituyente de la argumentación, entendida como proceso, y como producto de ésta.

Resulta así relevante buscar herramientas que permitan la reconstrucción deliberada y el análisis de los argumentos con la intención de comprender sus condiciones de emergencia, estructura, alcances y limitaciones. El modelo funcional para representar argumentos de Toulmin (op. cit.) ha sido utilizado para el análisis de la argumentación y la reconstrucción de argumentos en diversas áreas incluyendo, en las últimas tres décadas, la didáctica de las matemáticas, donde se ha utilizado para analizar las argumentaciones de alumnos y profesores en el aula (Boero et al, 2010; Knipping, 2008; Krumheuer, 1995; Mariotti, 2006) e incluso matemáticos en su ámbito (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2005).

La aproximación de Toulmin a la argumentación es compatible con la nuestra en el sentido de enfatizar las funciones justificativa, reflexiva y persuasiva de esta actividad y de relacionarla con los contextos en que acontece. Toulmin indica, sin embargo, que su estudio se refiere a lo que denomina 'argumentos justificatorios', a saber los argumentos que se elaboran *a posteriori*, de manera deliberada y explícita, para justificar una conclusión a la que se ha llegado por ciertos medios. Aclara que es posible que el proceso por el que se ha llegado a la conclusión coincida con el proceso por el que se establece un argumento justificatorio, pero que éste puede no ser el caso. Nosotros ampliamos el ámbito de aplicación del modelo de Toulmin a los argumentos que se forman en la interacción. Ya que estos argumentos pueden no hacerse explícitos y no requieren necesariamente del consenso de los participantes, el resultado de la aplicación del modelo dependerá de las reconstrucciones particulares a las que se refiera y, por lo tanto, de quien las realiza, ya sea alguno de los participantes o un observador. Esta es la postura que asumen Krummheuer (1995), de manera explícita, y Knipping (2008), implícitamente. En nuestro estudio, las reconstrucciones que hacemos se fundan en el análisis pragmático de la conversación, desde la 'teoría de los actos de habla', y desde la interpretación de la interacción en términos del constructo habermasiano de 'comportamiento racional'.

El modelo de Toulmin para la argumentación consta de seis elementos interrelacionados que juegan distintos papeles en el argumento. La 'conclusión' (C) es la proposición que quien argumenta pretende justificar y de la que quiere convencer a sus interlocutores. Los 'datos' (D) constituyen la evidencia que quien argumenta presenta para fundar el argumento. La 'garantía' (G) legitima la inferencia de la conclusión a partir de los datos. El 'respaldo' (R) autoriza la garantía. El 'calificador modal' (CM) califica la conclusión en términos de la certeza que el argumento le otorga. Y, finalmente, las 'condiciones de refutación' (Ref) establecen las condiciones en las que la garantía no consiente la inferencia de la conclusión a partir de los datos aportados. Posiblemente, no todas las partes del argumento se harán explícitas durante el proceso argumentativo y distintos actores podrán interpretarlas y explicitarlas de modos distintos. Ilustramos el modelo gráficamente en la Figura 1.

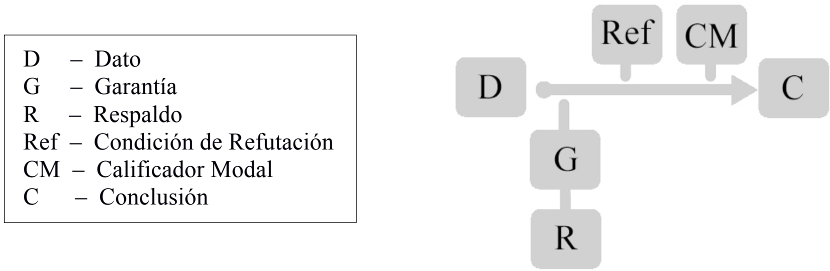


Figura 1; modelo de Toulmin para la argumentación

Aunque el modelo de Toulmin no es capaz de dar cuenta por sí mismo de la naturaleza contextual de la argumentación y de sus aspectos semánticos, pragmáticos y epistémicos, en nuestro estudio lo asumimos como descriptor estructural y lo utilizamos en conjunción con otros instrumentos para el análisis de las argumentaciones que se producen en la interacción en el aula.

3.2.2.3. Validar

Si entendemos la argumentación como una empresa racional en el sentido sugerido por Habermas (1998), es decir, si asumimos que quien argumenta intenta aportar buenas razones para justificar su posición y convencer a sus interlocutores a la vez que da cuenta y se responsabiliza de sus pretensiones de validez; y asumimos que está dispuesto a reflexionar acerca de esta posición atendiendo a las críticas recibidas, es natural preguntarse de qué tipo pueden ser esas 'buenas razones' y cómo es que modifican el estatus epistémico de las conclusiones que pretenden justificar. Podemos reformular estas preguntas en los términos del modelo de Toulmin preguntando de qué tipo pueden ser los datos y las garantías aportados y de qué modo las segundas ligan los primeros a las conclusiones, consintiendo la asignación de un valor epistémico.

Una primera aproximación útil la ofrece Toulmin (2007) con su distinción entre argumentos analíticos y argumentos sustanciales. Los argumentos analíticos son aquellos en los que la garantía presupone la conclusión, de modo que son, *ipso facto*, válidos (i.e., la conclusión se sigue necesariamente de las premisas). Así, siempre que se acepten los datos y la garantía como verdaderos, se deberá aceptar la conclusión como verdadera. En este caso la conclusión resulta una elaboración visible, a partir de un razonamiento deductivo, de aspectos particulares de las premisas y no es más informativa que las premisas mismas, pues éstas la presuponen. Desde la perspectiva logicista en matemáticas las demostraciones son argumentos analíticos formalmente válidos. Bermejo-Luque (2010) nota que Toulmin aboga por una noción de validez 'material' (en el sentido de Sellars, 1953) en oposición a la 'validez formal' para los argumentos analíticos. A diferencia de la validez formal, el criterio de validez material no implica la derivabilidad formal de la conclusión a partir de las premisas, sino sólo su necesidad. Por ejemplo "Barcelona está al norte de Tarragona, por lo tanto Tarragona está al sur de Barcelona" es un argumento materialmente válido pero no formalmente válido: es necesario considerar cuestiones semánticas y no sólo sintácticas para obtener la necesidad de la conclusión. Por otro lado, los argumentos sustanciales están sujetos a crítica y a posibles reelaboraciones; requieren de la reflexión y evaluación de los elementos aportados para derivar de manera motivada el estatus epistémico de la conclusión que sostienen. Quien los critica puede aportar nuevos elementos que se contrastan con los previamente ofrecidos. Su evaluación permite asumir la conclusión con cierto grado de certeza y, tal vez, con salvedades (Toulmin, op. cit.).

Resulta claro que los argumentos que emergen en la interacción en el aula no son siempre de tipo analítico. Por otro lado, desde la perspectiva epistemológica que hemos asumido, el estudio de los argumentos no puede limitarse a los argumentos analíticos, pues el mismo rechazo del logicismo y el fundacionalismo en la filosofía de las matemáticas imponen la revisión crítica de esta noción y del ideal de demostración que propone. Sin embargo, el papel privilegiado de la inferencia deductiva en la producción y evaluación de demostraciones sugiere que su consideración es relevante. De modo que un grupo de buenas razones para apoyar una cierta conclusión que podemos distinguir inicialmente, es el de aquellas que permiten construir argumentos analíticos. Este tipo de buenas razones son las preferidas por los matemáticos para producir sus demostraciones, pues el estatus epistémico de la conclusión es 'necesario' y no admite refutaciones dentro de la teoría.

Los resultados de Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2005) sugieren que la producción de argumentos sustanciales es relevante en el proceso de producción de argumentos analíticos y que los matemáticos no rechazan los primeros, simplemente, en favor de los segundos. En su estudio, en entrevistas individuales en las que propusieron distintas conjeturas a matemáticos profesionales solicitándoles que prueben su veracidad o falsedad mediante demostraciones, los autores observaron la producción de argumentos sustanciales como apoyo a la producción de demostraciones. Según los autores, los argumentos sustanciales auxiliares que construyeron los matemáticos les permitieron valorar las conjeturas propuestas en relación con niveles de certeza, a la vez que consideraban conocimientos matemáticos específicos que podían resultar útiles en la construcción de una demostración o un contraejemplo. Estos niveles de certeza eran expresados mediante el adecuado emparejamiento entre garantías ofrecidas y calificadores modales aplicados a las conclusiones de los argumentos auxiliares; "donde 'adecuado' queda definido por la práctica experta" (p. 17).

Los autores destacan la sofisticada habilidad de estos matemáticos para modalizar sus conclusiones a partir de las garantías que consideran y ubican en la correspondencia entre garantías y calificadores modales un elemento crucial para la producción exitosa de las demostraciones. Los resultados presentados por estos autores sugieren que la producción de argumentos sustanciales y la modalización apropiada de conclusiones (i.e., el adecuado reconocimiento de su valor epistémico) en correspondencia con las garantías proporcionadas, forman parte esencial de la actividad demostrativa. Esto los lleva incluso a sugerir que "tal vez el objetivo de la enseñanza no debería ser eliminar todo rastro de razonamiento inductivo o intuitivo de los argumentos de los alumnos, sino asegurarse de que califiquen estos tipos de garantías apropiadamente" (p. 19).

Una cuestión clave en la actividad argumentativa es la "capacidad" de derivar el valor epistémico de las conclusiones (necesario, posible, plausible, etc.) de manera "adecuada" a partir de los datos y garantías considerados y, desde la perspectiva del interlocutor, respectivamente, la "capacidad" de evaluar esta "adecuación". Bermejo-Luque (op. cit.) afirma al respecto que evaluar un argumento es determinar si la conclusión está adecuadamente modalizada en vista de las razones ofrecidas. Inglis, Mejía-Ramos y Simpson ubican esta capacidad y esta adecuación en "la práctica experta", es decir, en los conocimientos y prácticas de la comunidad matemática.

Para dar cabida como parte de la evaluación de los argumentos a la práctica y el conocimiento expertos, Toulmin (op. cit.) adelanta la noción de 'campo argumentativo' y sugiere que los estándares para evaluar los argumentos dependen del campo argumentativo al que los refiramos. Así, los motivos por los que se considerará adecuado o inadecuado un argumento en el ámbito de las matemáticas (las que Toulmin considera un campo argumentativo) estarán dados por cómo realizan esta evaluación los matemáticos y podrán ser distintos de los que se usarán, por ejemplo, en el ámbito legal. Coincidimos con Toulmin en la idea de que la evaluación de los argumentos depende del contexto, pero al igual que Goodnight (2010) consideramos que la noción de campo argumentativo resulta problemática. Desde la propuesta de Toulmin la selección de un campo argumentativo para establecer las garantías de un argumento resulta de una conexión "natural" entre el argumento y el contexto. Así, un argumento matemático deberá proveer garantías del ámbito de las matemáticas, uno jurídico del ámbito jurídico, etc. El problema es que la cuestión parece menos clara cuando consideramos argumentos que aparecen en contextos complejos o menos definidos, pues no parece claro qué criterios se deben usar para determinar en qué campo deben enraizar sus garantías y, por lo tanto, qué estándares de evaluación son aplicables. Piénsese, por ejemplo, en casos complejos de modelado matemático en los que tal vez intervienen no sólo conocimientos matemáticos sino también datos empíricos y conocimientos de otras áreas. No es inmediato, en este caso, cuál es el campo argumentativo o los campos argumentativos a considerar.

Para atender estas cuestiones, en nuestro estudio, nos basamos en las nociones de 'conocimiento' y 'racionalidad'. El contexto para la evaluación de argumentos estará dado por el conocimiento compartido por la comunidad en la que la argumentación acontece, incluyendo conocimientos proposicionales, tácitos, meta-conocimientos y su saber hacer. Entendemos que quien argumenta lo hace dando cuenta de sus pretensiones de validez y se implica en su vindicación dentro de este contexto cuando éstas son desafiadas. Siguiendo a Habermas (op. cit.), quien acepta las pretensiones de validez de su interlocutor acepta que su legitimidad puede ser adecuadamente justificada, es decir, que ciertas condiciones de validez pueden ser satisfechas. Estas condiciones de validez no son solamente estándares compartidos, pueden ser también constricciones contingentes que emergen para acomodar elementos que son considerados como relevantes para la evaluación de la validez en el contexto específico. Estas condiciones de validez expresan lo que en ese contexto de justificación es intersubjetivamente considerado como 'buenas razones'. De modo que la validez se relaciona con la aceptación basada en la satisfacción de condiciones de validez. Esto implica que la validez no es simplemente una propiedad de las proposiciones, sino que emerge del modo en el que son contextualmente tratadas (Goizueta y Mariotti, en prensa).

Con esta noción de validez, nos distanciamos de la 'validez formal' (un argumento es formalmente válido si la conclusión se puede derivar lógicamente de las premisas) para dar cabida a una visión más laxa, que nos permita capturar elementos contextuales que en el discurso y la acción racionales contribuyen a establecer la validez. De modo amplio y siguiendo a Govier (1995, p. 178; citada en Pinto, 2010, p. 115) diremos que "un argumento es 'válido' si sus premisas están conectadas apropiadamente con la conclusión y proveen razones adecuadas para ésta". Llamaremos 'validar' a la actitud y a las acciones dirigidas a establecer la validez de un argumento. Esta noción de validez nos permite dejar de lado la dicotomía válido/no-válido del acercamiento deductivista a la argumentación. De modo que un argumento puede no implicar necesariamente su conclusión y aún así proveer un cierto grado de soporte a ésta, el cual puede resultar informativo y adecuado al caso. Los argumentos no-deductivos recuperan de este modo su valor y función y no constituyen, simplemente, un fracaso. Consideramos que esta visión da cabida a los resultados y observaciones de Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (op. cit.) expuestos más arriba.

Según Krummheuer (1995), los participantes en la argumentación no sólo utilizan sus conocimientos para fundar sus posiciones sino que, a la vez, intentan dar cuenta de esta actitud haciendo el proceso inteligible. Quien argumenta no sólo pretende hacer sus proposiciones aceptables sino que, en la misma acción, pretende también evidenciar en términos intersubjetivos por qué deben ser aceptadas. Según Toulmin (1972), las selecciones prácticas que realizamos de estándares intelectuales revelan nuestra concepción sobre nuestra propia situación epistémica. Desde nuestra perspectiva, son las condiciones de validez observables en la interacción, y por lo tanto accesibles a través del análisis interpretativo, las que expresan y por lo tanto dan cuenta de las razones que son puestas en juego en los procesos de validación. La noción de 'condición de validez' nos permite explorar, hasta cierto punto y siempre desde la perspectiva de quien reconstruye los argumentos, las constricciones epistémicas que los participantes imprimen en los procesos de validación.

Esto no quiere decir que en todos los casos las acciones de los participantes ofrezcan una explicación exhaustiva o incluso suficiente de las razones y de las condiciones de validez que esgrimen. El resto de los participantes (o un observador), a través de sus interpretaciones, juegan un papel esencial en el proceso de hacer inteligibles los argumentos. Las posibles disonancias interpretativas provocan aclaraciones, reformulaciones o nuevos argumentos con la intención de lograr la aceptación de las pretensiones de validez expresadas. Estos argumentos suelen ser nuevas instancias de estas razones y condiciones de validez y pueden implicar incluso su tematización (Habermas, 1984).

3.3. Adaptación del marco general al aula de matemáticas

En las secciones anteriores hemos presentado de manera general nuestras ideas acerca de la filosofía y epistemología de las matemáticas. Hemos justificado la necesidad de una perspectiva socio-histórica que permita acomodar los agentes humanos y su contexto en la producción de conocimientos matemáticos. Con este fin, hemos descrito la actividad matemática a partir de distintos tipos de conocimientos y actividades en las que se implican los matemáticos. Entre éstas hemos destacado el papel de las demostraciones como piedra angular de la comunicación entre los matemáticos y de la validación de su conocimiento proposicional. Hemos descrito la demostración como producto de la actividad demostrativa y hemos destacado en este proceso el papel de la argumentación, en la que hemos ubicado los principios dialógico y crítico-reflexivo de la producción de conocimientos; principios que fundan nuestra noción de racionalidad. Hemos descrito la argumentación como una actividad discursiva y racional enfatizando sus funciones reflexiva, justificativa y persuasiva y hemos esbozado elementos para entenderla de manera pluridimensional en contextos de interacción. Con este fin hemos definido las nociones de 'argumento', a la que hemos extendido la aplicabilidad del modelo de Toulmin, hemos definido de manera amplia las nociones de 'validez' y 'validación' y hemos avanzado la noción de 'condición de validez' como elemento clave de la validación de los argumentos.

Nos hemos referido sistemáticamente a la actividad de los matemáticos y ocasionalmente a las especificidades del aula de matemáticas. En lo que sigue, vincularemos esta perspectiva general a cuestiones concretas relativas al aula de matemáticas, con la intención de evaluar sus consecuencias, alcances, limitaciones y la necesidad de adaptaciones y consideraciones para este contexto. Esto permitirá presentar una perspectiva clara de cómo las ideas que hemos desarrollado constituyen nuestra visión acerca de los procesos que pretendemos investigar en el aula de matemáticas. Distinguiremos las prácticas y conocimientos matemáticos del aula de los de otros ámbitos utilizando, a partir de ahora, términos apropiados (e.g., 'conocimiento matemático escolar' o 'matemáticas del aula').

3.3.1. Las matemáticas en el aula de matemáticas: diferencias relevantes respecto a las matemáticas profesionales

Desde nuestro punto de vista, el conocimiento matemático es un producto cultural históricamente determinado y su desarrollo debe ser contextualizado para ser comprendido; resulta notable entonces que, como área del saber, presente una cohesión, unidad y carácter acumulativo únicos entre los conocimientos humanos. Coincidimos con Steinbring (2005) en que esto se debe, en particular, al papel de la demostración en la comunicación entre los matemáticos. Los conocimientos meta-matemáticos compartidos que consienten a la comunidad matemática regular la comunicación de sus productos cimentan esta visión cohesiva y consistente del conocimiento matemático. "La unidad de las matemáticas es el resultado de un proceso de comunicación socio-histórico e interactivo entre los matemáticos, el que está, de algún modo, orientado hacia un producto coherente: las matemáticas uniformes" (Steinbring, op. cit., p. 15). Esto es, son los matemáticos los que, con sus estándares comunicativos, cultivan estas características en el cuerpo de conocimientos que producen. Ernest (1998) considera que las demostraciones son necesarias para que la comunidad matemática acepte nuevos conocimientos proposicionales.

La demostración funda entre los matemáticos un cierto principio de autonomía y responsabilidad compartida en relación con la producción y comunicación matemáticas, pues consiente a los miembros de la comunidad evaluar las producciones tanto propias como de otros miembros en términos de estándares intersubjetivos. Esto queda bien ilustrado por Weber y Mejía-Ramos (2011), quienes sugieren que algunos matemáticos llegan a asumir la validez de ciertas producciones considerando el proceso de revisión al que suponen fueron sometidas (e.g., demostraciones publicadas en revistas especializadas). Esto no se debe al simple hecho de que un experto o grupo de expertos afirme su validez, sino a que consideran compartidos y adecuados los estándares para su evaluación. Es decir, asumen que los conocimientos necesarios (matemáticos y meta-matemáticos) y los estándares para realizar esta evaluación son intersubjetivamente compartidos y están sistemáticamente disponibles, de modos relativamente estables, dentro de la comunidad. Quien realiza esta evaluación asume la responsabilidad del proceso. Incluso en situaciones de comunicación informales la demostración tiene un papel esencial entre los matemáticos, pues cuando otros mecanismos no resultan suficientes es la demostración la que posibilita el acuerdo y el éxito de la comunicación matemática (Steinbring, op. cit.). Un alumno de la escuela secundaria no puede ser comparado, en este sentido, con un matemático profesional, pues este último tiene muchos años de experiencia comunicando conocimientos matemáticos y negociando la corrección de proposiciones matemáticas utilizando las reglas comunicativas de la demostración. Para los alumnos, que están sólo comenzando a participar en la cultura matemática, las reglas comunicativas de la demostración constituyen objetivos de aprendizaje. Los conocimientos matemáticos escolares no proveen a los alumnos con un equivalente funcional de la demostración para validar las producciones matemáticas y fundar la comunicación en el aula, de modo que las decisiones acerca de la validez de ciertas proposiciones o acciones estarán sujetas a controversia y ambigüedades. En muchas ocasiones es el profesor quien dirime estas cuestiones, y por lo tanto se responsabiliza, acerca de lo que es válido y lo que no lo es. Según Steinbring, el efecto de las intervenciones del profesor en los alumnos no es inmediatamente accesible a éste, quien sólo en el curso de futuras interacciones puede evaluarlo en términos de la satisfacción de sus expectativas en relación con el comportamiento de los alumnos y los objetivos de aprendizaje. Mariotti (2006) destaca el papel de 'mediador cultural' que debe asumir el profesor, de quien se espera que, mediante la instrucción, posibilite que los alumnos participen cada vez con mayor legitimidad (en relación con los objetivos de aprendizaje) en las prácticas de producción, validación y comunicación matemáticas. Este proceso sucede, en parte, de manera indirecta mediante las acciones del profesor, quien selecciona producciones discursivas, propone registros lingüísticos adecuados a los alumnos y adecua su uso, demuestra su satisfacción o insatisfacción con prácticas particulares y provee ejemplos pertinentes, coordinando así la cultura matemática, de la que funciona como garante, y la cultura matemática del aula. No entendemos este proceso, sin embargo, como la enculturación de los alumnos en una cultura pre-existente que el profesor representa y administra. Consideramos, como Steinbring, que en este proceso el alumno no se limita a recibir pasivamente las prescripciones del profesor; por el contrario, participa activamente en la construcción y negociación de significados y por lo tanto en la conformación de la cultura matemática del aula y de sus conocimientos intersubjetivos. Aunque sus papeles difieran, tanto el profesor como los alumnos participan de este proceso y es mediante la interacción dentro de esta cultura que los miembros de la comunidad del aula constituyen formas de vida matemáticas particulares junto con sus propios juegos de lenguaje (Wittgenstein, 1953/2001).

3.3.2. Consideraciones sobre la epistemología de las matemáticas del aula

En el aula de matemáticas, donde la comunicación está orientada en relación con la matemática escolar, se presenta entonces una tensión importante: por un lado, el éxito de la comunicación está ligado a la validez de las producciones matemáticas y de los argumentos que las sostienen; por otro lado, los criterios con los que la validez se evalúa (y por lo tanto aquello que cuenta como válido o no) no son estables, sino que son constantemente negociados, revisados y modificados pues son, a su vez, objetos de aprendizaje (Steinbring, 2005). Para examinar cómo es que los argumentos presentados por los participantes son evaluados y sus pretensiones de validez aceptadas o rechazadas hay que considerar también el proceso por el cual emerge y se acepta una noción de validez operativa (aplicable al caso), de manera interactiva, en las prácticas argumentativas. Éste es el proceso que permite lograr y continuar la comunicación matemática en el aula. Aunque en este sentido la validez en el aula es comparable con la demostración entre los matemáticos, consideramos, como Steinbring, que esta noción emergente de validez matemática no presenta el estatus epistémico de la demostración en relación con la comunicación matemática. Los conocimientos matemáticos y meta-matemáticos necesarios para conformar una cierta noción de validez matemática no pueden ser introducidos según las condiciones epistémicas que esta misma noción pretende fundar, de modo que estarán sujetos a ciertas condiciones relacionadas con normas más generales relativas a la comunicación escolar. La aparente estabilidad de la noción de validez matemática y de los modos en que es utilizada en la matemática escolar se debe al carácter regular de los juegos de lenguaje en los que interviene y no a su estatus epistémico, cuya constante reconfiguración es una condición de la producción de nuevos conocimientos y meta-conocimientos matemáticos. Así, existe una relación dialéctica entre la validez matemática y el conocimiento matemático producido en el aula; la primera conforma un marco que condiciona la emergencia del segundo y el segundo desarrolla la primera para ajustarse a los nuevos discursos matemáticos legitimados en la interacción. Desde esta perspectiva, el conocimiento matemático escolar debe entenderse a partir de las condiciones epistemológicas emergentes de su producción interactiva. Siguiendo a Steinbring, en el aula se constituye así una epistemología específica del conocimiento matemático escolar, que es a la vez condición y objeto del conocimiento matemático (y meta-matemático) interactivamente producido. Esta epistemología de las matemáticas del aula influencia el modo en que se interpreta y analiza la comunicación matemática. Una consecuencia de esta posición para el análisis interpretativo de la interacción en el aula de matemáticas es la necesidad de "reconstruir" las condiciones epistemológicas en las que (y de las que) emerge el conocimiento matemático (Goizueta, 2014). Coincidimos con Steinbring en que la epistemología del aula de matemáticas es investigable a partir de la interacción entre los participantes y con Knipping (2008) en que para esto resulta fundamental investigar las prácticas argumentativas del aula. En nuestro estudio, a partir de la consideración de la emergencia y satisfacción de condiciones de validez, intentamos comprender aspectos de la epistemología de las matemáticas del aula que "apuntalan" prácticas argumentativas.

3.3.3. Consideraciones sobre las condiciones de emergencia de la epistemología de las matemáticas del aula

En el escenario del aula, el papel del profesor resulta relevante, pues en calidad de garante tanto de la cultura matemática como de la cultura matemática del aula condiciona el proceso de negociación interactiva de la validez matemática. "[Las evaluaciones] llevadas a cabo por el profesor en términos de lo que es matemáticamente correcto o matemáticamente equívoco son un criterio de selección esencial para la instrucción" (Steinbring, 2005, p. 74). Sin embargo, este proceso no es ni simple ni inmediato; la interacción entre los alumnos y el profesor muchas veces funciona de modo que los alumnos no relacionan las intervenciones del profesor con los aspectos matemáticos del problema en cuestión, sino que las interpretan en el contexto de las pistas interactivas, alusiones y expectativas. El éxito de este "juego interactivo", reside en que los alumnos logran satisfacer de este modo las expectativas del profesor con cierta facilidad, a la vez que éste parece entonces tener éxito en satisfacer sus objetivos instruccionales. La interpretación en términos epistemológicamente relevantes del acto social de aceptación o rechazo de ciertas producciones puede entonces corresponder, o no, a los estándares de validación que el profesor pretende para el caso. De modo que la noción de validez matemática y su constante negociación estará sujeta tanto a las condiciones epistémicas del contexto como a las interpretaciones "espontáneas" que emergen de este sistema socio-interactivo. Según Steinbring, el análisis de la interacción en el aula de matemáticas requiere distinguir y considerar estos dos planos y examinar sus posibles interrelaciones.

En nuestro estudio entendemos y consideramos este tipo de dinámicas a partir de la noción de contrato didáctico de Brousseau (1997). El contrato didáctico corresponde a las expectativas y obligaciones recíprocas percibidas dentro de la situación didáctica por el profesor y por los alumnos en relación con los conocimientos en juego (o percibidos como tales). El contrato didáctico es el resultado de la "negociación", usualmente implícita, acerca del establecimiento de relaciones entre un alumno o grupo de alumnos, un cierto contexto educativo y un sistema educativo (Education Committee of the EMS, 2012). El contrato didáctico no es un contrato pedagógico general, sino que depende de los contenidos matemáticos en juego y del contexto, de modo que cuando cambian las circunstancias de la situación, el contrato didáctico se reconforma en consecuencia (Brousseau, op. cit.). Así, el carácter del contrato didáctico es emergente y no es posible definirlo plenamente de manera anticipada. No es un contrato real, pues no es explícito y consentido por las partes que, sin embargo, se comportan como si respetaran unas cláusulas pactadas. A medida que los participantes interaccionan, este sistema de expectativas evoluciona en relación con las decisiones que éstos toman con la intención de satisfacer estas expectativas, cuya (aparente) satisfacción no garantiza, por sí sola, la concreción de las intenciones de los participantes o la consecución de los objetivos de aprendizaje. Son muchas las instancias habituales del contrato didáctico. Una cláusula común sugiere que los datos numéricos que acompañan un problema deben ser operados para obtener la respuesta correcta, incluso cuando hacerlo no esté sugerido por la interpretación del problema; el caso de 'la edad del capitán' ilustra esta cláusula (D'Amore, 2008). Otra cláusula sugiere que el profesor espera que los alumnos utilicen los conocimientos recientemente producidos en las situaciones que se les proponen; donde llegan a aplicarlos incluso sin considerar su pertinencia (Education

Committee of the EMS, op. cit.). Una cláusula más es la que D'Amore (op. cit.) denomina ‘autoridad formal’; según esta cláusula, cuando los alumnos deciden que cierta operación o procedimiento es adecuado, la responsabilidad de la validez de los resultados es “transferida” al procedimiento mismo. Según los alumnos no es necesario que ellos verifiquen la corrección de los resultados o la adecuación del procedimiento, pues esta ya no es su responsabilidad.

La evolución de los criterios que sugieren qué producciones presentar y de qué modo hacerlo para procurar aceptación, en el contexto de la interacción en el aula, depende de cuestiones que rebasan el criterio de validez matemática negociado; el cual convive con otros criterios de aceptación/rechazo fundados en dinámicas sociales de interacción basadas en la percepción de expectativas recíprocas.

3.3.4. Validar en el aula de matemáticas

En este marco complejo que constituye la interacción en el aula debemos ubicar la argumentación y los procesos de validación de los argumentos.

Como vimos, Goodnight (2010) llama la atención acerca de la complejidad de los argumentos cuyas garantías (o respaldos) son, o pueden ser, de distinta índole. Un argumento puede enraizar en conocimientos matemáticos objetivos (tanto tácitos como proposicionales), pero también en testimonios personales, prácticas sociales (que pueden incluir la conformación tácita a las cláusulas del contrato didáctico), observaciones empíricas, etc. Sobre todo cuando hay un “exceso de buenas razones”, que compiten dentro de la argumentación, la legitimación de la pertinencia y relevancia de los respaldos para fundar la autoridad de las garantías (lo que antes llamamos ‘validación’) resulta relevante para entender los argumentos (Goodnight, op. cit.). En este sentido, en el aula de matemáticas tendremos que considerar no sólo el conocimiento matemático escolar y la noción emergente de validez, sino también los aspectos contingentes del contrato didáctico asociable al contexto y, en general, los aspectos socio-interactivos implicados. Tanto la validez de los argumentos como los procesos de validación deben ser entendidos y considerados a partir de la interrelación de todos estos elementos, que conforman parte del contexto de justificación.

Douek (2007) llama la atención sobre otro elemento que consideraremos como parte de este contexto. La autora pone en evidencia la importancia de la fundación semántica en los procesos argumentativos. A partir de su trabajo con un grupo universitario de alumnos de matemáticas, sugiere que la búsqueda de significados que funcionen como herramientas interpretativas a partir de referencias tanto explícitas como implícitas, es fundamental para la actividad argumentativa. Representaciones apropiadas, no estandarizadas, basadas en estas referencias tienen un papel importante en la práctica de los alumnos. El uso de metáforas es un ejemplo de este fenómeno, que a la vez ilustra la complejidad semántica de la argumentación en el aula de matemáticas. Estas referencias pueden ser conocimientos matemáticos escolares (tanto explícitos como tácitos) o conocimientos de otras áreas identificables (e.g., conocimientos sobre biología en una situación donde se pretende modelar matemáticamente un fenómeno biológico), pero pueden ser también elementos visuales, evidencia experimental, constricciones físicas, creencias compartidas, etc. Estas referencias no siempre pertenecen a un cuerpo institucionalizado (o institucionalizable) de conocimientos y tal vez sólo se evidencian cuando son operativizadas dentro de la actividad argumentativa. Al conjunto de todas estas referencias Douek lo denomina 'corpus de referencia'. Lo que es común a las referencias es que no son objeto de duda: la veracidad (en el sentido de su estatus epistémico) de una referencia, y con ella su operatividad dentro de la argumentación, es asumida en el contexto en que emerge como tal (esto no quiere decir que no pueda ser puesta en duda *a posteriori*, en el proceso argumentativo, como consecuencia de la reflexión sobre su estatus). Considerar el corpus de referencia al observar la interacción en el aula resulta relevante en situaciones donde estas referencias provienen de distintos cuerpos de conocimientos y requieren de gran esfuerzo de coordinación dentro de la argumentación. Las situaciones de resolución de problemas con contexto cotidiano, por ejemplo, pueden constituir escenarios de este tipo, pues pueden requerir de los alumnos que articulen conocimientos matemáticos que no dominan aún, con conocimientos de otras áreas y datos empíricos que deben ser interpretados de manera acorde. En un contexto en el que las referencias se limiten a teoremas y axiomas dentro de una teoría (e.g., demostrar un teorema geométrico considerando ciertos teoremas previamente establecidos), la coherencia interna del corpus de referencia estará ligada a la coherencia de la teoría de referencia; pero en un escenario complejo, que se nutra de conocimientos que no pertenecen a un marco común, esta coherencia no está garantizada. La noción de 'corpus de referencia' contiene y excede a la de 'conocimiento objetivo' de Ernest (1998), pues da cabida a elementos que, aunque no se puedan considerar como justificados dentro de la comunidad y por lo tanto no podamos considerar conocimiento objetivo, son, en un contexto dado, asumidos *de facto* y utilizados como tales. Consideraremos el corpus de referencia como parte del contexto de justificación asociado a una cierta situación argumentativa.

Desde el punto de vista que hemos descrito hasta aquí, es a través de la emergencia, posiblemente tácita, de ciertas condiciones de validez que los participantes vehiculan (y reconocen) expresiones concretas de este contexto de justificación con la intención de validar los argumentos expuestos, haciendo a la vez inteligible este proceso. A través de la satisfacción (o no) de estas condiciones de validez, el proceso de validación, y con él la argumentación, se desarrolla, ya sea para aceptar o para rechazar las pretensiones de validez de los participantes. Las acciones de los participantes no ofrecen siempre una explicación exhaustiva de este proceso, de modo que los interlocutores pueden requerir aclaraciones o vindicaciones ulteriores de lo que se hace y dice para apoyar una proposición o para validar argumentos. Ya que los argumentos evolucionan en un contexto complejo e interactivo, este proceso de evaluación puede no ser lineal ni sistemático; los argumentos (y su validez) se revisitan a la luz de la evolución de este proceso y de la reconfiguración del contexto de justificación en el que se inscribe.

Desde la perspectiva de un observador, esto implica que los argumentos y los procesos de validación no son siempre ni simplemente “reconstruibles” a partir del análisis interpretativo; de modo que estrategias y métodos que hagan estas reconstrucciones más probables y plausibles, son necesarios para investigar las bases epistemológicas de la argumentación en el aula de matemáticas. Abordaremos esta cuestión como parte del diseño metodológico de nuestro estudio.

4. Diseño metodológico

En este capítulo presentamos el diseño metodológico de nuestro estudio. En la sección 4.1 enunciamos la cuestión y los objetivos de investigación, planteamos de manera general la situación experimental a partir de la cual obtuvimos datos en dos aulas de matemáticas de secundaria y presentamos de manera general los métodos de análisis empleados. En las secciones 4.2, 4.3 y 4.4 describimos en detalle las distintas fases del estudio, los procedimientos de análisis y las acciones de investigación llevadas a cabo. En la sección 4.5 explicamos en detalle cómo es que obtenemos los resultados de nuestro estudio, en forma de temas narrativos, a partir del análisis de datos realizado. Finalmente, en la sección 4.6 explicamos las acciones llevadas a cabo para garantizar el rigor y la validez científica de nuestro estudio.

4.1. Objetivos de investigación y planteamiento metodológico general

Como mencionamos en el Capítulo 1, la cuestión de investigación a la que este trabajo de tesis doctoral pretende contribuir es:

> ¿Cómo se construye la validez de la producción matemática cuando se resuelven problemas en aulas de matemáticas?

Para lo cual nos planteamos los siguientes objetivos de investigación:

Primer objetivo:

> Caracterizar procesos de construcción de la validez de la producción matemática en el trabajo en grupo de alumnos.

Segundo objetivo:

> Caracterizar procesos de construcción de la validez de la producción matemática en la interacción de grupos de alumnos con el profesor del aula.

Tercer objetivo:

> Caracterizar la gestión de procesos de construcción de la validez de la producción matemática a cargo de dos profesores en el aula de matemáticas.

A partir de la revisión de la literatura (Capítulo 2) constatamos que en la comunidad de investigadores en educación matemática hay un interés creciente en relación con la argumentación, entendiéndola como una práctica relevante en el aula para la producción y validación de conocimientos matemáticos. De ahí que la cuestión de investigación que nos hemos planteado resulte relevante en el ámbito de la educación matemática.

Hemos mostrado que muchas investigaciones relativas a la argumentación en el aula de matemáticas se centran en el estudio de los argumentos que los alumnos producen y presentan como justificación de su producción matemática. Son menos las investigaciones que pretenden estudiar los procesos mediante los cuales estos argumentos son producidos y, en particular, las condiciones epistémicas de su emergencia. La caracterización de procesos de construcción de la validez en situaciones de resolución de problemas es un objetivo relevante en este sentido, pues permite dar cuenta de la producción argumentativa de los alumnos en relación con la epistemología de las matemáticas del aula.

Hemos mostrado que algunos investigadores enfatizan aspectos cognitivos de la argumentación y que otros la consideran en el contexto social del aula, como parte de procesos de interacción entre los participantes. Estas perspectivas son complementarias e investigaciones que intenten abordar la problemática de la argumentación en el aula de matemáticas considerando ambas cuestiones son valiosas. En este sentido, los tres objetivos de nuestro estudio son complementarios, pues la construcción de la validez de la producción matemática es considerada en situaciones de interacción habituales en el aula: el trabajo en grupo y la interacción con el profesor. Nuestros objetivos son complementarios también en otro sentido: los dos primeros ponen el foco en los conocimientos de los participantes (alumnos y profesor), quienes se implican interactivamente en el trabajo matemático; el tercero, en cambio, pone el foco en las acciones que el profesor realiza para concretar el proceso de enseñanza aprendizaje y en sus especificidades.

Para la consecución de los objetivos se resolvió llevar a cabo un estudio cualitativo, basado en datos de aula a partir de un contexto de resolución de problemas que incentive entre los alumnos la necesidad de argumentar para validar su producción matemática. Caracterizamos el estudio como comparativo (en el sentido de Glaser y Strauss, 1965) dado que el análisis de datos se estructura alrededor del 'método de comparación constante', según lo proponen Glaser y Strauss (op. cit.) y las posteriores elaboraciones de Bernard y Ryan (2010), Boeije (2002), Charmaz (2006), Strauss y Corbin (1998) y Tilbury y Walford (1996). La comparación constante de situaciones similares está en la base del análisis interpretativo-inductivo mediante el cual se generan categorías descriptivas y explicativas que dan cuenta de los datos analizados y, mediante un proceso de síntesis, de los objetivos de la investigación. Nuestro estudio está enmarcado dentro del paradigma investigativo de la Teoría Fundamentada (Glaser y Strauss, op. cit.; Strauss y Corbin, op. cit.).

Nuestra investigación no comenzó con una serie de supuestos *a priori* en relación con las cuestiones a observar, ni era nuestra intención verificar hipótesis planteadas de antemano. Pretendíamos indagar las acciones de alumnos y profesor, dentro de una situación de interés, para identificar y caracterizar inductivamente cuestiones epistemológicamente relevantes de las prácticas argumentativas de los participantes en el marco del trabajo matemático del aula. A partir de estas caracterizaciones, pretendíamos arrojar luz acerca de cómo éstas cuestiones contribuyen a conformar procesos de validación de la producción matemática. Por lo tanto, el análisis de los datos no se inició a partir de un modelo de análisis cerrado, previamente estructurado. Con base en el marco teórico se generaron líneas generales de interpretación que reflejan nuestro posicionamiento teórico en relación con la argumentación y la validación en el aula. Estas líneas generales, que orientan la interpretación y codificación de los datos, constituyen un primer nivel de análisis pero deben entenderse como la base sobre la cual se procede inductivamente para derivar, mediante comparación constante de situaciones similares, cuestiones cuya relevancia se funda en los datos mismos. Es decir, no se intenta "encajar" los datos dentro de categorías teóricas establecidas, sino utilizar nociones que conforman el marco teórico para fundar la interpretación y la emergencia inductiva de cuestiones que son interpretadas como relevantes desde el punto de vista teórico asumido. Estas cuestiones son aprehendidas en términos de conceptos y categorías que se incorporan a un proceso cíclico e iterativo de análisis comparativo, en el que los datos son revisados a la luz de estas nuevas interpretaciones con el fin de revisar los conceptos y categorías conformados e inducir nuevos, a partir de los cuales el ciclo se repite hasta el punto de saturación teórica (Glaser y Strauss, op. cit.).

Se decidió plantear un estudio en dos fases: la primera basada en la implementación de tres problemas matemáticos a trabajar dentro de un aula de secundaria y la segunda en la implementación de uno de estos problemas, seleccionado a partir de criterios emergentes del análisis preliminar de los datos obtenidos en la primera fase, en una segunda aula de secundaria. En la segunda fase, se llevarían a cabo entrevistas con alumnos. En esta segunda experiencia, que cubre la función de muestreo teórico (Glaser y Strauss, op. cit.), se intentaría refinar la primera con la intención de corroborar cuestiones observadas en la primer aula y generar nuevas situaciones, con base en consideraciones derivadas del análisis de la fase inicial, a partir de las que enriquecer el proceso de análisis y generación de conceptos y categorías explicativas. Las entrevistas con los alumnos permitirían explorar en profundidad cuestiones observadas en el aula, verificar o refutar interpretaciones acerca de las acciones de los participantes y consolidar los conceptos y categorías conformados en el análisis de las situaciones de aula.

La concreción de los objetivos se consigue a partir de la tematización de los productos del análisis llevado a cabo. Utilizamos el modelo de Van Manen (1990) para elaborar temas que dan cuenta de manera articulada de los aspectos más relevantes aparecidos en el análisis de los datos. Planas, Font y Edo (2009) describen los temas como configuraciones narrativas y sintéticas derivadas de la interpretación repetida y triangulada de un conjunto de datos cualitativos. El proceso consiste en abstraer elementos esenciales mediante la búsqueda de consenso entre más de un investigador familiarizado con los datos y un marco teórico de referencia común. De modo que el procedimiento mediante el cual se construyen los temas no es mecánico y está influenciado por quienes articulan narrativamente estos temas. En este sentido, la sensibilidad del investigador para relacionar los datos con la perspectiva teórica asumida y la transparencia de las interpretaciones realizadas en ese marco resultan fundamentales.

4.2. Selección, análisis y caracterización del problema matemático

Dado que el interés central de nuestra investigación está en la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria y en la validación de la producción matemática, la primera cuestión a decidir fue el tipo de situación y contenido matemático que, como contexto de la experiencia, resulta capaz de generar un ambiente argumentativo rico en el aula. En este sentido se decidió que una situación de resolución en grupo de problemas con contexto cotidiano resultaba adecuada. Utilizar contextos cotidianos permite a los alumnos invocar no solamente conocimientos matemáticos, sino también distintos tipos de referencias (posiblemente extra-matemáticas) en relación con la situación planteada. Esto, a su vez, permite a los alumnos hacer consideraciones tanto matemáticas (en el sentido que implican sus conocimientos matemáticos) como prácticas (en el sentido que implican referencias extra-matemáticas sobre la situación) en relación con la situación. Por otro lado pretendíamos que los problemas resultaran novedosos para los alumnos, en el sentido de que implicaran un uso novedoso de sus conocimientos matemáticos y/o la construcción de conceptos matemáticos nuevos; esperábamos que esto evitara que aplicaran de manera habitual conocimientos y heurísticas consolidadas en su repertorio matemático.

Consideramos que una situación de resolución de problemas con estas características propiciaría situaciones de incertidumbre en los tres sentidos que propone Zaslavsky (2005):

- Proposiciones en competencia; cuando distintos conocimientos matemáticos o usos de un conocimiento matemático sugieren soluciones distintas, o cuando referencias extra-matemáticas acerca de la situación sugieren soluciones distintas a las producidas mediante conocimientos matemáticos. En estas situaciones se espera que los alumnos reflexionen acerca de las distintas razones ofrecidas para justificar soluciones disonantes, ofreciendo argumentos en favor y en contra de estas con la intención de validarlas o refutarlas.

- Trayectoria desconocida o conclusión cuestionable; cuando no es posible anticipar una solución o una trayectoria de resolución o cuando la solución obtenida no puede ser validada. En estas situaciones se espera que los alumnos entren en ciclos iterativos de conjetura-prueba-refutación/validación, oponiendo y refinando sus argumentos para decidir sobre criterios para considerar una solución como satisfactoria.

- Respuestas no verificables; cuando los alumnos no cuentan con los medios para decidir acerca de la validez de las soluciones que producen. En estas situaciones se espera que los alumnos reconozcan la falta de herramientas para decidir sobre la validez de su producción matemática y reflexionen al respecto.

Como sugieren Zaslavsky (op. cit.) y Brown (2014), esperábamos que la incertidumbre fuera parte de la conformación de un ambiente reflexivo en el que la necesidad de justificar las acciones realizadas resultara prioritaria.

Con base en la revisión de literatura acerca del uso de problemas para la introducción de conceptos matemáticos (Boero, 2011; Fenaroli, Guala, Goizueta, Paola y Sanna, 2014; García Cruz, 2000; Paola, 1998) y considerando los planes y programas de la educación secundaria en España, se decidió que la introducción a la teoría de la probabilidad constituía un contexto idóneo para proponer problemas con las características mencionadas. García Cruz (2000) da cuenta del uso de un problema histórico para desarrollar las nociones básicas de probabilidad, equiprobabilidad, juego equitativo y escenario favorable en el nivel secundario de la enseñanza obligatoria en España. Paola (1998) utiliza una variación de este problema con alumnos italianos de este mismo nivel, enfatizando la diversidad de argumentos producidos por los alumnos. Boero (2011) da cuenta de los distintos tipos de argumentos y las reflexiones que emergen al trabajar un problema de probabilidad con profesores de primaria en formación (que parecen no recordar conocimientos de probabilidad vistos anteriormente).

Cuatro cuestiones fueron consideradas para la selección de la introducción a la teoría de la probabilidad como contexto de nuestro estudio y para la selección de tres problemas basados en contextos cotidianos: 1) los alumnos pueden utilizar conocimientos básicos de aritmética para abordar y resolver estos problemas (García Cruz, op. cit.); 2) los alumnos pueden utilizar argumentos de distinto tipo (deductivos, inductivos, abductivos) tanto fundados en sus conocimientos matemáticos como en sus referencias en relación con las situaciones planteadas en los problemas (Paola, op. cit.); 3) el objetivo del trabajo con estos problemas es la emergencia de nociones matemáticas nuevas (aunque se tengan ideas no formalizadas respecto a la probabilidad y a la equidad fundadas en conocimientos extra-escolares); 4) la probabilidad es un conocimiento matemático fundamental que debe ser introducido en la etapa de educación secundaria.

Considerando el contexto de introducción a la probabilidad como el marco de contenidos matemáticos para la situación experimental, se seleccionaron tres problemas de dificultad creciente que se implementaron durante la primera fase del estudio. A partir del análisis preliminar de los resultados obtenidos y considerando las sugerencias didácticas de García Cruz (op. cit.) y Paola (op. cit.), finalmente se optó por uno de los problemas, el de dificultad intermedia, para su implementación en la segunda fase. Dado que los datos relativos a los otros dos problemas no fueron ulteriormente considerados, nos limitamos a presentar y analizar las características del problema cuya resolución aporta los datos que fueron analizados en el estudio.

El problema seleccionado, que fue presentado a los alumnos en catalán, fue el siguiente:

> Dos jugadores juegan a lanzar una moneda de modo que uno de ellos se anota un punto cuando sale cara y el otro se lo anota cuando sale cruz. Cada uno pone 3€ y deciden que el que gane ocho puntos se quedará con los 6€. Por una causa ajena a los dos jugadores, deben interrumpir la partida cuando uno ha ganado 7 puntos y el otro sólo 5 puntos. ¿Cómo deben repartirse el dinero? Justifiquen su respuesta.

Caracterizamos el problema como de modelado matemático, en el sentido de Blum y Borromeo Ferri (2009): para resolver el problema es necesario un esfuerzo de "traducción" entre la situación empírica planteada y las matemáticas, en ambas direcciones. Es decir, las relaciones entre los elementos empíricos que definen la situación deben ser interpretadas en términos matemáticos y los resultados matemáticos establecidos posteriormente se deben interpretar en términos de los elementos empíricos para solucionar el problema.

Blum y Leiss (2007) proponen un modelo de seis elementos y siete procesos que describe el ciclo de modelado matemático seguido por un modelador, no necesariamente de manera lineal, para resolver problemas de modelado matemático (Figura 2).

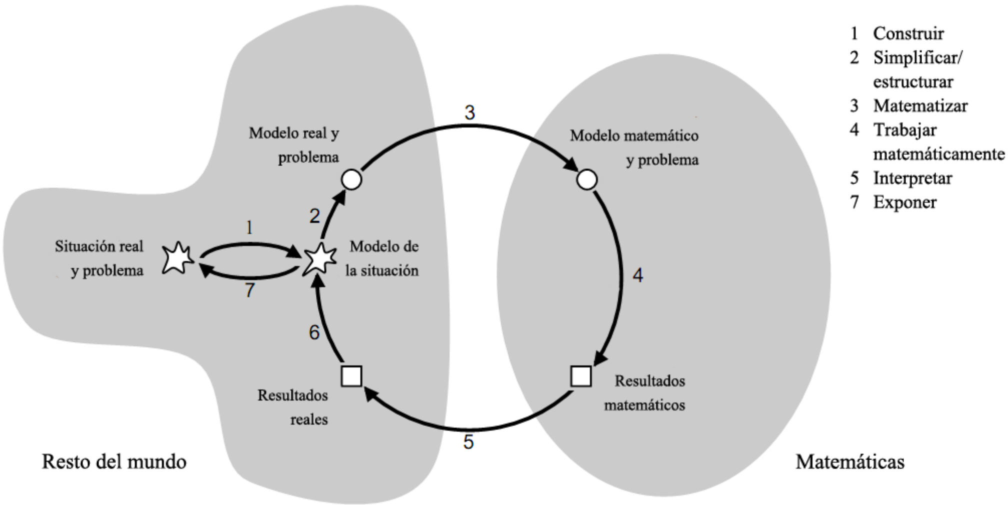


Figura 2; ciclo de modelado matemático

Mediante su interpretación de la situación real, el modelador determina cuales son los elementos empíricos relevantes, así como las relaciones entre estos, que constituyen y determinan la situación real. El producto obtenido en este proceso (1) es una versión sintética de la situación real que pretende dar cuenta de esta a partir del conjunto de elementos identificados y de las relaciones entre estos: el modelo de la situación. En el siguiente paso (2) el modelador identifica cuáles son los elementos relevantes para la situación problemática que se pretende resolver. Posteriormente (3) los elementos empíricos y sus relaciones son sustituidos por objetos y constructos matemáticos que los representan; el producto de este proceso (al que los autores denominan matematización) es el modelo matemático. Mediante manipulaciones matemáticas (4) el modelador obtiene resultados matemáticos que deben ser interpretados (5) en términos de los elementos empíricos considerados y sus relaciones. La interpretación de estos resultados (6) en el marco del modelo de la situación constituye, si los resultados son aceptados, la solución al problema. En este caso, los resultados se exponen como solución al problema originalmente planteado (7) y se dice que el modelo matemático es representativo de la situación empírica. Si los resultados no son consistentes con el modelo de la situación, el modelador debe revisar reflexivamente las acciones llevadas a cabo con el fin de producir una solución satisfactoria. Las etapas del proceso de modelado se pueden suceder de manera no lineal y todas son esenciales y potencialmente problemáticas (Blum y Borromeo Ferri, op. cit.).

A partir de esta caracterización del proceso de modelado matemático resulta posible analizar aspectos relevantes del problema seleccionado, con el fin de identificar cuestiones que pueden resultar problemáticas para los alumnos, así como anticipar posibles trayectorias de resolución. Este análisis, a su vez, arroja luz acerca de líneas argumentativas que son esperables entre los alumnos.

Debemos recordar que el problema se pretende presentar como parte de la construcción inicial de nociones de teoría de la probabilidad, de modo que los alumnos no tendrán recursos probabilísticos construidos en clase para abordar el problema. Sin embargo, es de esperar que relacionen la situación empírica con sus referencias relacionadas con lanzamiento de monedas y otros juegos de azar; así como es de esperar que utilicen un léxico adecuado a estas situaciones. Paola (op. cit.) y García Cruz (op. cit.), que utilizan variaciones numéricas de este mismo problema con el mismo propósito, documentan la emergencia de la noción de azar, cuando los alumnos se refieren al problema y su naturaleza, y de justicia, cuando discuten acerca de la aceptabilidad de distintas soluciones numéricas. Ambos autores sugieren que los alumnos asumen como un conocimiento compartido que es igualmente posible que salga cara y que salga cruz en un lanzamiento. Una de las estrategias adoptadas por Paola para trabajar con este problema es la introducción en clase de lo que el autor denomina voces históricas relativas a su resolución (e.g., la correspondencia entre Pascal y Fermat, quienes ofrecieron la primer solución probabilística al problema). Aunque nosotros no adoptamos esta estrategia, lo mencionamos para no traicionar el espíritu de la intervención didáctica que este profesor-investigador promueve.

Desde la perspectiva del modelado matemático, una de las dificultades que identificamos es la constitución de un modelo de la situación adecuado. Una característica esencial de la situación planteada (entendida probabilísticamente) es que las posibilidades que cada jugador tiene de ganar dependen de los puntos que aún debe obtener y son independientes de los puntos obtenidos; de modo que los alumnos deben identificar la primera como una variable relevante y la segunda como una variable irrelevante de la situación empírica. Esto no parece una cuestión inmediata, sin embargo, la comparación de variaciones numéricas del problema en las que los puntos a obtener por cada jugador para ganar coinciden y los puntos obtenidos difieren, podría propiciar la reflexión en este sentido. Esto requiere que los alumnos asuman un papel investigador, ya sea motu propio o inducido por el profesor. Las experiencias documentadas por Paola (op. cit.), García Cruz (op. cit.) y Fenaroli et al. (2014) sugieren que los alumnos no suelen proceder de este modo de manera espontánea y que tal aproximación debe ser promovida por el profesor.

Otra cuestión potencialmente problemática resulta del hecho que la solución (probabilística) al problema no se obtiene a partir de cálculos directos con los datos numéricos presentes en el enunciado; es necesario producir unos nuevos con los que operar para obtenerla. En este nivel escolar, los problemas que se resuelven operando los datos numéricos que se ofrecen en el enunciado del problema son frecuentes, de modo que es posible que los alumnos procedan de este modo. D'Amore (2008) sugiere que esta es una cláusula habitual del contrato didáctico en aulas de matemáticas de secundaria.

Por otro lado, dado que la situación supone la actividad de repartir, es posible que los alumnos asocien el problema con situaciones de costos y repartos proporcionales (frecuentes en este nivel escolar en el ámbito educativo catalán) y que, por lo tanto, apliquen sus conocimientos de proporcionalidad a los datos numéricos ofrecidos para resolver el problema. Por proximidad semántica, es posible que los alumnos hagan esta asociación. Paola (op. cit.) documenta que la división de la apuesta de manera proporcional a los puntos obtenidos por cada jugador es una solución habitual entre los alumnos. También en este caso, la exploración de variaciones numéricas del problema puede permitir a los alumnos reflexionar acerca de la inadecuación de aplicar de este modo la proporcionalidad. En el caso extremo en que un jugador no ha obtenido ningún punto, tal solución implica que el jugador en ventaja (por mínima que esta sea) se llevará el total de la apuesta; lo que es de esperar que resulte contrario a la intuición para los alumnos.

Finalmente, otro elemento relevante para considerar la complejidad del problema es la necesidad de criterios que permitan a los alumnos decidir acerca de la representatividad de los modelos matemáticos que proponen. Una vez construida la noción de probabilidad, una repartición resulta adecuada si es proporcional a las probabilidades que cada jugador tiene de ganar; la noción de probabilidad permite cuantificar qué tan posible es que gane uno u otro jugador y repartir de manera acorde. Sin embargo, mientras la noción de probabilidad no esté disponible, los alumnos deben utilizar estrategias que les permitan evaluar la representatividad de los modelos matemáticos que producen; es decir, deben generar información empírica que les permita determinar si el modelo matemático propuesto representa esta información de manera adecuada. En el caso que proponíamos en el párrafo anterior, la repartición proporcional a los puntos obtenidos prevé que en el jugador en ventaja se lleve el total de la apuesta, sin importar con cuantos puntos aventaja a su contrincante. En situaciones en que el marcador es idéntico pero los puntos que se deben obtener para ganar difieren, el mismo modelo prevé repartos idénticos. En ambos casos la soluciones resultan contrarias a la intuición si se consideran referencias comunes sobre el juego, las cuales se espera los alumnos compartan. Sin embargo, en ambos casos vemos la necesidad de una reflexión estructurada, dirigida a considerar relaciones particulares entre los elementos empíricos de la situación (puntos faltantes para ganar, puntos obtenidos) a la luz de información empírica compartida que se espera emerja en las discusiones. Esto destaca la necesidad de una aproximación investigativa por parte de los alumnos, en la que tienen que poner en juego sus conocimientos y experiencias personales. Si bien esta característica describe la potencialidad del problema, a la vez describe su complejidad.

Las experiencias descritas por Paola (op. cit.) y García Cruz (op. cit.) acerca de la implementación didáctica del problema, sugieren que con la adecuada guía del profesor, con conocimientos aritméticos básicos y con la introducción de instrumentos semióticos adecuados para representar la situación (e.g., esquemas de árbol para representar los lanzamientos sucesivos), los alumnos pueden desarrollar las ideas necesarias para resolver el problema. A partir del trabajo en el aula, las nociones de probabilidad, equiprobabilidad y escenario favorable pueden ser identificadas, como un paso inicial en la enseñanza de teoría de la probabilidad.

Todas estas consideraciones permiten concluir que el problema seleccionado presenta las características planteadas al inicio de la sección como adecuadas para generar un ambiente investigador en el aula, rico en oportunidades para observar distintos tipos de argumentos ofrecidos para validar la producción matemática. A la vez, la anticipación hecha acerca de las distintas problemáticas a las que los alumnos pueden enfrentarse, sugiere que el problema presenta características adecuadas para promover situaciones positivas de incertidumbre entre los alumnos (en el sentido de Zaslavski, op. cit.).

Por otro lado, se hicieron distintas consideraciones para la redacción del enunciado del problema. Se decidió utilizar datos numéricos cuya manipulación no representara una complicación añadida para la resolución. Así, se prefirieron números de una cifra que al ser operados por los alumnos, de los modos que anticipábamos, arrojaran resultados fácilmente interpretables como montos de dinero en la moneda local (e.g., 5,25€ tiene una expresión en términos de billetes y monedas de uso corriente entre los alumnos). Se decidió proponer una situación en la que uno de los jugadores necesita exactamente un punto para ganar; se espera que esto simplifique la representación de la situación mediante esquemas de árbol y facilite la discusión sobre distintas probabilidades de marcadores finales. Estas consideraciones permitieron elegir la información numérica del enunciado.

Otros elementos fueron incorporados deliberadamente en la redacción del enunciado. Por ejemplo, para presentar el marcador se decidió utilizar la frase “uno ha ganado 7 puntos y el otro sólo 5 puntos”; el vocablo “sólo” (“només”, en el original en catalán) pretende dirigir la atención de los alumnos hacia la diferencia en los puntajes. La formulación de la pregunta fue “¿Cómo deben repartirse el dinero? Justifiquen su respuesta”; en este caso, el vocablo “deben” (“han de”, en catalán) sugiere la toma de responsabilidad por parte de quien propone una respuesta (los jugadores deben repartirse la apuesta de tal o cual forma). Es decir, el criterio en que se basa la solución se sugiere como un deber para los jugadores, y por lo tanto quien lo propone asume cierta responsabilidad en la repartición. Otra formulación considerada fue “¿Cómo pueden repartirse el dinero? Justifiquen su respuesta”; sin embargo, en este caso, quien propone una solución asume una responsabilidad menor y esto se presta a proponer respuestas arbitrarias. Finalmente, se solicita justificar la respuesta con la intención de propiciar que los alumnos elaboren argumentos para justificar las soluciones que proponen.

El centro de atención de nuestro estudio está en los aspectos epistemológicos de la actividad matemática de los alumnos y no en la construcción de contenidos matemáticos particulares. De modo que tanto la elección de la introducción a la teoría de la probabilidad como contexto matemático de la experiencia, como el diseño de la tarea matemática deben ser entendidos como medios para generar una situación de aula que propicie que los alumnos se impliquen en prácticas argumentativas y no como una unidad didáctica pensada para la introducción a la teoría de la probabilidad. Las decisiones metodológicas adoptadas en el diseño de la tarea deben ser consideradas en función de los propósitos y necesidades investigativas a las que responden.

4.3. Primera fase de la investigación

Cómo explicamos en la Sección 4.1, el estudió se desarrolló en dos fases sucesivas, cada una relativa a un profesor y un aula particulares. En esta sección explicamos en detalle las acciones de investigación llevadas a cabo durante la primera fase. Describimos quiénes fueron los participantes y el proceso de recogida de datos en el aula; explicamos cuáles fueron los métodos de análisis empleados y damos cuenta en detalle del proceso de codificación de datos en el entorno informático en que fueron analizados. Finalmente explicamos de qué forma este proceso nos permitió planear la segunda fase del estudio.

4.3.1. Participantes y recogida de datos

Para la selección de un profesor se recurrió al grupo de profesores que habían colaborado antes con otros miembros del Proyecto y del Grupo de Investigación en el cual se inscribe este estudio y que estuvieran enseñando en el cuarto año de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en ese momento. Entre los posibles candidatos se buscó un profesor con interés y experiencia en la implementación de situaciones de resolución de problemas en el aula de matemáticas. Esto tenía dos propósitos, por un lado que el profesor contara con experiencia en la gestión del aula en tales situaciones y, por otro lado, que los alumnos pudieran considerar la resolución del problema como una situación regular y no excepcional dentro del curso. Aunque el uso de material de grabación y la presencia de investigadores en el aula constituyen una situación extraña para los alumnos, esperábamos recrear circunstancias tan habituales para estos como fuera posible.

Finalmente, Dan[2] aceptó colaborar en nuestro estudio. Dan es un profesor de matemáticas con muchos años de experiencia como docente de nivel secundario, con experiencia en investigación en el ámbito de la educación matemática y que había colaborado con el equipo del Proyecto en un estudio previo. Durante el ciclo lectivo 2011-2012 se encontraba enseñando matemáticas en el cuarto año del nivel secundario de la enseñanza obligatoria en un Instituto de Educación Secundaria de Manresa y tenía planeado introducir la teoría de la probabilidad durante ese curso. Sus alumnos no habían estudiado formalmente teoría de la probabilidad en cursos

[2] Los nombres de todos los participantes han sido modificados para garantizar su anonimato.

anteriores. En las entrevistas preliminares sostenidas con Dan, le explicamos nuestro proyecto de manera somera, pues queríamos evitar que una explicación detallada lo llevara a adoptar decisiones desviadas de su práctica habitual, con la intención de potenciar aspectos particulares del proceso de resolución en el aula. Le informamos que queríamos observar las prácticas argumentativas de sus alumnos mientras resolvían problemas y que nos interesaba proponer problemas útiles para introducir la teoría de la probabilidad en el aula; lo que le pareció posible encajar en su planeación del curso. Los tres problemas originales fueron presentados a Dan, quien dio su visto bueno y sugirió trabajarlos en cinco sesiones de cincuenta minutos cada una entre los meses de marzo y abril de 2012. Se dedicaría una sesión al primer problema y dos sesiones a cada uno de los siguientes. El primer problema se implementó el día 14 de marzo de 2012, el segundo problema los días 16 y 23 de marzo de 2012 y el tercer problema los días 25 y 27 de abril de 2012.

El aula de Dan tenía veintiún alumnos de entre 15 y 16 años que interaccionaban regularmente en catalán, tanto entre ellos como con el profesor. Dan nos informó que sus alumnos estaban acostumbrados a trabajar en resolución de problemas, discutiendo inicialmente en parejas y poniendo en común los resultados y que ocasionalmente la resolución de un problema se prolongaba por varias clases. Nos informó también que él solía hacer hincapié en la necesidad de justificar la producción matemática, por lo que sus alumnos estaban acostumbrados a presentar argumentos para apoyar y justificar sus resultados. El estilo de trabajo de Dan en el aula encajaba de manera adecuada con los problemas que se querían proponer y la situación que se quería generar.

En consonancia con los objetivos de la investigación, se pretendía obtener registros de lo que los alumnos y el profesor hacen y dicen mientras resuelven los problemas propuestos. Con este propósito, se decidió que durante las cinco sesiones se obtendrían registros de audio y video de tres parejas de alumnos, mientras trabajaban en pequeño grupo, y de las puestas en común. Además se recogerían los protocolos escritos de los tres grupos, cuya interpretación (en el sentido de qué fue escrito en qué momento) debía ser posibilitada por el registro de audio y video. Se consideró que este volumen de información proveería datos suficientes, a la vez que manejables, para observar la emergencia de argumentos variados y distintos procesos de validación en la producción matemática de los alumnos. Para seleccionar a las parejas recurrimos a Dan, solicitándole que indicara alumnos que considerara participativos y proclives a expresar y comunicar sus ideas. Con esto buscábamos tener buenos registros verbales y evitar casos de alumnos que abandonaran el trabajo matemático o que no compartieran sus ideas mientras trabajaban en pareja. Finalmente, seleccionamos dos parejas y un grupo de tres chicos que en ese período estaban trabajando juntos.

Durante las cinco sesiones seguimos a cada uno de estos grupos con una cámara de video y una grabadora de audio. La cámara se posicionó de modo que captase de manera frontal (o tan frontal como fuera posible) y ligeramente en picada a los dos o tres alumnos en un mismo plano, capturando a la vez la superficie donde los alumnos escribían. La grabadora de audio se posicionó entre los alumnos. Esto permitió registrar aquello que los alumnos decían y hacían mientras trabajaban juntos y tener indicios que nos permitieron vincular los protocolos escritos con las acciones video-registradas. En estas circunstancias, y dado que las cámaras estaban fijas, en los registros de las interacciones de los grupos con el profesor no siempre era posible ver el rostro de Dan. Aunque generalmente era posible observar los gestos que realizaba con las manos, en ocasiones se posicionaba fuera de cuadro. Durante las puestas en común, una de estas tres cámaras fue utilizada para registrar la clase, desde la perspectiva de la pizarra, y otra para registrar la pizarra desde el fondo del aula. El investigador principal estuvo presente en todas las sesiones y contó con la ayuda de un asistente financiado por el Proyecto y con el apoyo del Grupo de Investigación. El investigador principal y el asistente posicionaron y manipularos las cámaras y grabadoras.

En la primera sesión correspondiente a cada uno de los tres problemas, el investigador principal y el asistente entregaron a cada alumno el enunciado del problema en una tira de papel, mientras que Dan daba indicaciones acerca del trabajo a realizar. En las tres ocasiones, Dan enfatizó la necesidad de razonar para resolver los problemas y de justificar las soluciones propuestas. Durante el desarrollo de cada sesión el investigador principal se limitó a circular entre los grupos, observando la interacción y tomando notas de campo; mientras que el asistente se limitó a comprobar el adecuado funcionamiento del equipo de grabación.

En resumen, a partir de las acciones descritas obtuvimos registros de audio/video del trabajo realizado por tres grupos durante las cinco sesiones, los protocolos escritos de los alumnos de estos grupos, registros de audio/video de las puestas en común de cada problema y las notas de campo del investigador principal.

Este material fue revisado con la intención de seleccionar uno de los problemas planteados, para constituir a partir de este el cuerpo de datos correspondiente a la primera fase. La revisión de los registros procedió bajo la guía de los objetivos de la investigación; de modo que buscamos el problema cuya resolución hubiera supuesto una mayor riqueza argumentativa en el trabajo de los alumnos. Observamos que en la resolución del tercer problema los alumnos emplearon mucho tiempo para encontrar una aproximación productiva, después de lo cual dedicaron la mayor parte del tiempo a la manipulación numérica (relativamente compleja), en detrimento del tiempo que dedicaban a validar sus acciones mediante la exposición de argumentos. Esta situación suponía datos pobres para analizar prácticas argumentativas y procesos de validación por parte de los alumnos y fue el motivo por el cual el problema fue descartado. En la resolución del primer problema, los tres grupos observados no tuvieron dificultades para encontrar una respuesta satisfactoria (desde su punto de vista); de modo que observamos pocas situaciones en que los alumnos propusieran distintas soluciones y tuvieran la necesidad de justificar su producción ante sus compañeros o de presentar contra-argumentos. En cambio, durante la resolución del segundo problema observamos un amplio repertorio argumentativo y numerosas situaciones en que los alumnos validaban o rechazaban distintas soluciones al problema. Para los objetivos de nuestra investigación la consideración de los tres problemas hubiera sido valiosa; sin embargo, considerando las ventajas investigativas de realizar un muestreo teórico (Glaser y Straus, 1965), hemos preferido seleccionar un único problema con la intención de refinar la experiencia y reproducirla en otra aula, para así obtener situaciones comparables que nos permitan un entendimiento más profundo de los procesos de validación de los alumnos. Ya que los dos problemas que fueron descartados no jugaron ningún papel en nuestro estudio después de esta fase inicial, omitimos su discusión en esta memoria.

4.3.2. Acciones preparatorias para el análisis

Estaba planeado organizar el análisis de datos con la ayuda del programa de análisis de datos cualitativos AtlasTi, de modo que los registros de audio/video, los protocolos escritos de los alumnos y las notas de campo fueron adaptados de manera que esto fuera posible. En el lenguaje de AtlasTi, los bloques de información que se incorporan se denominan documentos primarios (archivos de audio/video, archivos de imagen estática, archivos de texto) y el entorno en que estos documentos primarios son gestionados se denomina unidad hermenéutica. En nuestro caso, el conjunto de documentos primarios quedó conformado inicialmente por: siete archivos de audio-video, correspondientes al registro del trabajo de cada grupo durante cada una de las dos sesiones y a la puesta en común; siete archivos de imagen, correspondientes a las versiones digitalizadas de los protocolos escritos de cada alumno; y un archivo de texto, correspondiente a las notas de campo del investigador principal. En la Tabla 1 se resumen los documentos primarios asociados a cada uno de los grupos registrados (a los que a partir de ahora denominaremos grupos DA, DB y DC) dentro de la unidad hermenéutica. El conjunto de documentos primarios relativos a cada uno de los tres grupos, a la puesta en común y a las notas de campo constituye el cuerpo de datos correspondiente a la primera fase del estudio.

Grupo	Alumnos	Documentos primarios		
		Audio/video registros	Protocolos escritos	Notas de campo
DA	Alin y Laura	2 (uno por sesión)	2 (uno por alumno)	
DB	Roy, Tom y Stan	2 (uno por sesión)	3 (uno por alumno)	
DC	Jay y Tess	2 (uno por sesión)	2 (uno por alumno)	
Puesta en común	Grupo completo	1 (final segunda sesión)		
		Total: 7	Total: 7	Total: 1

Tabla 1; documentos primarios incorporados a la unidad hermenéutica (1a fase del estudio)

La intención de preservar toda la información posible acerca de las interacciones entre los participantes, motivó la decisión de realizar el análisis directamente sobre los registros de audio/video y no sobre sus transcripciones. Los registros de audio/video se transcribieron solamente con fines de discusión o difusión de la investigación en grupos de trabajo o congresos y para la redacción de esta memoria. Cualquier transcripción de una situación de interacción conlleva una pérdida de información, más allá del sistema que se utilice para consignar distintos aspectos (tonos de voz, pausas, énfasis, gestos, etc.); en este sentido, el análisis llevado a cabo directamente sobre los registros de audio/video resulta ventajoso.

4.3.3. Procedimientos de análisis y acciones de investigación

Nuestro estudio se inspira en la Teoría Fundamentada como paradigma metodológico e investigativo; esto implica que el análisis de los datos no se lleva a cabo con la intención de describir y explicar las acciones de los individuos en términos de una teoría preconcebida, que pretende abarcar y dar cuenta del fenómeno bajo observación. El papel de la teoría, en cambio, es el de informar la mirada del investigador cuando se acerca a los datos con la intención de dar sentido a las acciones de los individuos. De modo que el análisis no trata de buscar en los datos instancias particulares de situaciones (comportamientos, acciones, etc.) conceptualizados previamente dentro de un teoría establecida, sino de conceptualizar estas situaciones según la interpretación informada que de estas se realiza y de refinar estos conceptos mediante la comparación constante de instancias interpretadas de modo similar. Según Holton (2007), el proceso de conceptualización consiste en organizar cuestiones que emergen del análisis de datos alrededor de conceptos que estructuran estas cuestiones y que son relevantes para los objetivos de investigación. La pregunta fundamental '¿en qué se parecen y en qué difieren situaciones que son interpretadas mediante un mismo concepto (o grupo de conceptos)?' está en el centro del método de comparación constante y del proceso de conceptualización. Mediante la comparación constante de fragmentos similares se evidencian y definen las dimensiones y propiedades de estos conceptos. Este proceso continúa hasta el punto de saturación teórica, a partir del cual el análisis de nuevos datos no implica la emergencia de nuevos conceptos o la revisión de los existentes, los cuales permiten dar cuenta de los nuevos datos analizados. Usamos los términos concepto y conceptualizar de este modo, siguiendo a Holton (op. cit.).

Consideramos, como Boeije (2002), que el análisis consiste en fragmentar y conectar: fragmentar implica destacar, mediante la asignación de códigos, segmentos de datos relevantes desde el punto de vista del fenómeno bajo estudio y de la perspectiva teórica; conectar implica tematizar las interpretaciones de estos fragmentos de modo que resulte relevante para los objetivos de la investigación. La intención de este proceso es identificar cuestiones centrales que se evidencian frecuentemente, permiten conectar fragmentos relevantes y contribuyen a explicar distintas situaciones de modo significativo para la consecución de los objetivos de investigación (Tilbury y Walford, 1996).

Nuestros métodos de codificación de datos, que denominamos codificación abierta y codificación axial, corresponden a la interpretación de los métodos propuestos por Glaser y Strauss (1965) y reelaboradas por Charmaz (2006), Holton (op. cit.) y Strauss y Corbin (1998). La codificación abierta consiste en la exploración y fragmentado de los datos a través de la creación, síntesis y asignación de códigos. Inicialmente, los códigos suelen ser descriptivos, pues responden a la pregunta básica '¿De qué trata este fragmento?'. Posteriormente, fragmentos codificados con el mismo código o con códigos similares son sistemáticamente comparados con la intención de determinar similitudes y diferencias. Este proceso de comparación constante lleva al establecimiento de descriptores y rangos de aplicabilidad para los distintos códigos; lo cual puede implicar la integración de dos o más códigos o la división de un código en dos o más códigos para representar la variabilidad interpretada en los fragmentos de datos codificados. Esta reestructuración permanente del sistema de códigos implica que el cuerpo de datos debe ser revisado reiteradamente a la luz del estado actual de este sistema. La reflexión acerca de los códigos generados y de las posibles relaciones entre estos lleva a la creación de nuevos códigos, en un nivel de abstracción mayor, que permiten capturar abductivamente estas relaciones entre códigos (Reichertz, 2007). Estos nuevos códigos se incorporan al flujo de trabajo y al proceso cíclico de codificación y comparación constante. La codificación abierta concluye con la emergencia de conceptos centrales, es decir conceptos que permiten estructurar y dar cuenta de los datos y los códigos de modos conducentes a la identificación de cuestiones centrales evidenciables en los datos (Holton, op. cit.).

Una vez que se han identificado conceptos centrales, resulta de interés entender y delimitar estos a partir de sus relaciones con otros conceptos. Denominamos codificación axial al proceso por el cual se examina un cierto concepto y sus relaciones con otros conceptos. Esto implica integrar o desagregar fragmentos de datos relacionados con el concepto en cuestión, con la intención de determinar sus relaciones con otros conceptos relacionados con estos datos. Este procedimiento permite formar una visión integradora respecto a un conjunto de códigos en torno a un concepto central (de ahí la denominación 'axial'), posibilitando la inferencia de relaciones causales, condiciones de emergencia/excepción o consecuencias relacionadas con las acciones de los participantes vinculadas mediante los códigos a tal concepto. La reflexión en torno al proceso de codificación axial posibilita una mejor comprensión acerca de las cuestiones centrales que emergen durante el análisis, lo que puede llevar a la reconfiguración del sistema de códigos (ya sea mediante la emergencia o síntesis de códigos o la modificación de sus condiciones de aplicabilidad). En este caso, un nuevo ciclo de revisión y codificación de los datos comienza, para dar cabida a este proceso reflexivo.

Por otro lado, a lo largo del proceso de codificación, otra actividad importante consiste en la redacción de memos. Los memos son textos escritos para consignar frutos de la reflexión sobre las acciones de investigación llevadas a cabo. Pueden ser interpretaciones de fragmentos de datos, reflexiones en torno a la construcción de conceptos, hipótesis emergentes, referencias a las teorías de referencia o análisis parciales. La redacción de memos y su integración en etapas avanzadas de la investigación resultan esenciales en el proceso de tematización de las cuestiones centrales detectadas en los datos. Es a través de la reflexión constante acerca del proceso de análisis, consignada de manera sistemática en los memos, que las cuestiones centrales emergen de los datos y pueden ser exploradas y presentadas de manera temática para dar cuenta de los objetivos de investigación.

4.3.4. Codificación abierta

Con la mirada que emerge de nuestro marco teórico, comenzamos el proceso de codificación abierta de datos en el entorno de AtlasTi. La intención inicial era detectar y codificar fragmentos que resultaran informativos en relación con nuestras preguntas y objetivos de investigación. Llamamos fragmento a un segmento continuo de documento primario que es destacado en el entorno de AtlasTi; este puede ser un segmento de video, un texto o una imagen estática. Es sobre estos fragmentos que los códigos son aplicados. La primera revisión de los datos estuvo centrada, por un lado, en identificar fragmentos de interacción entre los alumnos y entre los alumnos y el profesor en los que sus acciones estuvieran dirigidas a la construcción y validación de una solución o aproximación al problema y, por otro lado, a codificar estos fragmentos interpretativamente. La pregunta básica en esta primera mirada a los datos es '¿qué hacen y dicen los participantes?', de modo que los primeros códigos que emergen son descriptivos.

Cada vez que creamos y aplicamos un código nuevo escribimos un párrafo descriptor sobre este, intentando abstraer el fragmento concreto con la intención de sugerir condiciones para el uso del código en fragmentos similares. Los códigos no resultan inteligibles *per se*, son estos descriptores y su vínculo con el marco teórico los que los definen y llenan de significado. Una de las funciones principales de estos descriptores es establecer un rango de aplicabilidad para el código que describe; es decir, determinar en qué circunstancias debe ser aplicado el código a un determinado fragmento. Cada vez que resultó posible, codificamos un fragmento con los códigos creados; cuando esto no resultó posible, creamos uno nuevo, que se sumó al sistema de códigos junto con su descriptor. Cuando se consideró que dos o más códigos estaban relacionados a través de un concepto que los abarcara, los códigos se organizaron como una 'familia' alrededor de tal concepto (que es integrada como un nuevo código en el sistema de códigos). Inversamente, cuando se observó que un código debía ser escindido para representar adecuadamente la variabilidad de los fragmentos que habían sido codificados con este, el código dio origen a la familia dentro de la cual se ubicaron los nuevos códigos. Este proceso de integración y escisión produce un sistema de códigos anidado, en el que algunos códigos aparecen subordinados a otros. Los códigos subordinados son más específicos y descriptivos; captan cuestiones inmediatas de los fragmentos que codifican. Los códigos que agrupan otros códigos en familias son más abstractos y conceptuales; describen aspectos generales de los códigos subordinados.

Inicialmente procedimos grupo por grupo, de modo que comenzamos codificando los datos correspondientes al grupo DA, continuamos con los grupos DB y DC y finalmente codificamos la puesta en común. Los protocolos escritos de los alumnos fueron codificados paralelamente al registro de audio y video, revisándolos según la cronología de su producción; es decir, aquello que observábamos a los alumnos escribir en el registro de audio/video era revisado en paralelo sobre los protocolos escritos. Esto no quiere decir que la codificación inicial de cada grupo fue definitiva; la emergencia de nuevos códigos y familias de códigos, así como la comparación constante de fragmentos codificados mediante los mismos códigos, conlleva la revisión permanente de la codificación previa con la intención de refinar los descriptores de cada código y su rango de aplicabilidad.

Durante etapas iniciales de la codificación abierta de los datos, uno de los intereses era entender cómo los alumnos organizaban sus acciones para resolver el problema planteado, a qué soluciones llegaban y qué expectativas acerca de su trabajo y su desempeño se ponían de manifiesto; de modo que una familia de códigos estaba orientada a discernir y describir distintas fases del proceso de resolución, otra a documentar las soluciones propuestas y una más a registrar expectativas evidenciadas mediante nuestra interpretación de las acciones de los alumnos. En la Tabla 2, a modo de ejemplo, mostramos los códigos asociados a estas tres familias y sus descriptores en un momento intermedio de la codificación abierta de los datos recogidos en la primera fase del estudio. A partir de ahora, utilizamos el signo "#" delante del nombre de cada código, en itálicas, para destacarlo.

#Fases de resolución	#Explorar	El alumno (o el grupo) trata de darle sentido a la situación empírica con base en sus referencias acerca de esta y/o en sus conocimientos matemáticos. Establece relaciones entre elementos de la situación planteada en el problema (o situaciones hipotéticas relacionadas) o se refiere a la situación mostrando interpretaciones particulares sobre esta. Estas acciones pueden ser explícitas (cuando elaboran verbalmente respecto a la situación empírica) o implícitas (cuando sus elecciones demuestran entendimientos particulares acerca de la situación empírica).
	#Validar	El alumno (o el grupo) acepta como válida una solución numérica, un modelo matemático o un modelo de la situación. El estatus epistémico puede no ser claro. La aceptación puede ser explícita (cuando se manifiesta en este sentido) o implícita (cuando sus acciones posteriores sugieren aceptación). Puede o no ofrecerse una justificación para la validación.
	#Rechazar	El alumno (o el grupo) rechaza una solución numérica, un modelo matemático o un modelo de la situación, ofreciendo o no una justificación.
	#Problematizar	El alumno (o el grupo) problematiza una solución numérica, un modelo matemático o un modelo de la situación. El resultado de esta actuación es la puesta en duda de la solución numérica, del modelo matemático o del modelo de la situación. El estatus epistémico no siempre resulta discernible.
	#Simplificar	El alumno (o el grupo) utiliza una variación numérica del problema más simple (generalmente recurriendo a números más pequeños) para explorar el problema. Esto suele ser motivado por el profesor.
	#Proponer solución numérica	El alumno (o el grupo) propone una solución numérica.
	#Proponer un modelo matemático	El alumno (o el grupo) propone un modelo matemático. Esto puede suceder de manera explícita (cuando enuncia una sucesión de pasos a seguir para obtener la solución numérica) o implícita (cuando el modelo se evidencia en los pasos seguidos para obtener la solución numérica).
	#Proponer un modelo matemático general	El alumno (o el grupo) propone un modelo matemático general. Los datos numéricos son identificados como variables de la situación (puntos obtenidos, puntos necesarios para ganar, etc.) consintiendo el uso del modelo matemático en variaciones numéricas del problema. Es posible que se enuncie el modelo general de manera explícita o que las acciones de los alumnos lo pongan en evidencia (p. ej. sustituyendo datos numéricos que cumplen la misma función en distintas variaciones numéricas del problema).
	#Interpretar el problema	El alumno (o el grupo) realiza una interpretación específica de la situación planteada en la que queda en evidencia su interpretación del problema a resolver. Esto puede suceder de manera explícita (cuando se enuncia verbalmente) o implícita (cuando las acciones de los alumnos evidencian una toma de posición al respecto).
#Soluciones numéricas	#Sol 7/8+5/8	Se propone la solución 7/8x6€ para el jugador en ventaja y 5/8x6€ para el jugador en desventaja. La solución se obtiene utilizando conocimientos de proporcionalidad mediante un razonamiento habitual en este nivel: "si obteniendo 8 puntos se ganan 6€, obteniendo x puntos se debe obtener una parte proporcional". El resultado intermedio 0,75€ por cada punto obtenido suele emerger como parte de la construcción de la solución.

	#Sol 7/12+5/12	Se propone la solución 7/12x6€ para el jugador en ventaja y 5/12x6€ para el jugador en desventaja. La solución se obtiene utilizando conocimientos de proporcionalidad mediante un razonamiento habitual en este nivel: "los 6€ se deben repartir equitativamente entre los 12 puntos obtenidos por ambos jugadores". El resultado intermedio 0,50€ por cada punto obtenido suele emerger como parte de la construcción de la solución.
	#Sol 3/4+1/4	Se propone la solución 3/x6€ para el jugador en ventaja y 1/4x6€ para el jugador en desventaja. La solución se obtiene dividiendo los posibles marcadores finales favorables entre todos los marcadores posibles o considerando los puntos que a cada jugador faltan para ganar la partida.
	#Sol 7/8 + 1/8 (proP)	Se propone la solución 7/8x6€ para el jugador en ventaja y 1/8x6€ para el jugador en desventaja. La solución se obtiene utilizando conocimientos de proporcionalidad mediante un razonamiento habitual en este nivel: "si obteniendo 8 puntos se ganan 6€, obteniendo 7 puntos se debe ganar 7/8 de los 6€; el jugador en desventaja ganará el resto".
	#Sol 7/8 + 1/8 (proB)	Se propone la solución 7/8x6€ para el jugador en ventaja y 1/8x6€ para el jugador en desventaja. La solución se obtiene considerando los posibles marcadores finales si la partida continuara y notando (de manera informal) que los posibles marcadores finales no son equiprobables. Los alumnos utilizan fracciones o porcentajes para establecer (de manera informal) qué tan probable es un determinado marcador final.
	#Sol 3+3	Se propone la solución 3€ para el jugador en ventaja y 3€ para el jugador en desventaja. Se esgrime como argumento que la partida no termino en los términos acordados y que por lo tanto no es posible repartir la apuesta, de modo que cada jugador recupera su inversión original.
	#Sol 6+0	Se propone la solución 6€ para el jugador en ventaja y 0€ para el jugador en desventaja. Se decide que el jugador en ventaja, por esta condición, debe recibir el total de la apuesta.
	#Sol continuar otro día	Se propone que no es posible repartir la apuesta y que la partida debe continuar en otra ocasión.
	#Sol arbitraria	Se propone una solución numérica de manera aparentemente arbitraria.
#Expectativas	#La solución debe ser matemática	Los alumnos realizan consideraciones acerca de la validez de una solución en función de su aceptabilidad en el contexto del aula de matemáticas. En sentido negativo, los alumnos rechazan una solución que no resulta socialmente aceptable como "matemática" (p. ej. no se han utilizado constructos matemáticos para producirla); el rechazo puede ser explícito o tácito. En sentido positivo, las acciones de los alumnos se orientan a propiciar un tratamiento matemático para la obtención de una solución.
	#Tipos de número más o menos probables en la resolución	Los alumnos realizan consideraciones acerca de la validez de una solución en función de los números que obtienen en su cálculos (p. ej. consideran negativamente una solución si implica números con decimales periódicos; consideran positivamente una solución si es construible con monedas de denominaciones existentes).
	#Una respuesta numérica debe ser producida	Los alumnos realizan cálculos de manera tentativa, sin vincularlos con su interpretación de la situación empírica, con la intención aparente de obtener una solución numérica. Pueden manifestar explícitamente no saber por qué realizan estos cálculos o esto puede ser aparente en sus acciones.
	#La dificultad debe ser acorde a las circunstancias	Los alumnos realizan consideraciones acerca de la validez de una solución en función de la dificultad matemática que le asignan. En sentido negativo, los alumnos consideran, explícita o implícitamente, que una solución obtenida (demasiado) fácilmente resulta sospechosa. En sentido positivo, los alumnos consideran positivamente la validez de una solución después de un proceso percibido como complejo, ya sea explícita o implícitamente.

Tabla 2; códigos correspondientes a las familias #Fases de resolución, #Soluciones numéricas y #Expectativas

A medida que el proceso de fragmentación y codificación avanzaba, la creación de nuevos códigos fue cambiando de cariz: nuevos códigos de carácter descriptivo aparecían con menor frecuencia, pues los códigos con los que contábamos resultaban suficientes para codificar los nuevos fragmentos; sin embargo, a partir de un entendimiento cada vez mayor de las acciones de los alumnos y del profesor, nuevos códigos, más analíticos, emergían para dar cabida a estas comprensiones. Por ejemplo, la co-ocurrencia del código *#Validar* (con el cual codificamos fragmentos asociados con procesos de validación) con algún código de la familia *#Expectativas*, nos llevó a realizar conjeturas acerca del contrato didáctico del aula y de su influencia en los procesos de validación. La comparación constante entre los fragmentos codificados con un mismo elemento de la familia *#Soluciones numéricas*, nos llevó a reflexionar acerca de las condiciones de emergencia de soluciones particulares y al análisis de sus validaciones (en sentido positivo o negativo), a la vez que a interpretar el papel del profesor en estos procesos. Estas cuestiones evidenciaron la necesidad de una mirada más refinada acerca de los procesos de validación de los alumnos, una cuestión central para los objetivos del estudio. Así, decidimos imprimir la perspectiva pragmática asumida en el marco teórico acerca de los procesos de validación en el sistema de códigos. Los códigos *#Validar* y *#Rechazar* se fusionaron en la familia *#Validación*, que quedó caracterizada de modo general como "el conjunto de acciones de los alumnos cuya componente ilocutiva está caracterizada por la intensión de validar (en sentido positivo o negativo) una cierta conclusión (que ha sido o no expresada explícitamente); es decir, acciones encaminadas a establecer una relación entre esta conclusión y las razones que se esgrimen (tácita o explícitamente) para apoyarla o rechazarla". Esta visión general de la actividad de validar, un concepto central en esta fase del análisis, permitió articular fragmentos de datos en un esquema coherente con la intención de dar cuenta de los procesos de validación observados, tanto de los modelos matemáticos emergentes como de las soluciones numéricas construidas mediante estos. De este modo, todo tipo de acciones de los participantes que apuntaran a procesos de validación, fueron codificadas con un código de esta familia, que quedó dividida en dos partes principales: códigos que indican acciones destinadas a aceptar un modelo o solución numérica y códigos que indican acciones destinadas a rechazar un modelo o solución numérica (marcados con los prefijos 'Val+' y 'Val-' respectivamente). En la Tabla 3 se presentan los códigos de la familia *#Validación* hacia el final del proceso de codificación abierta de datos correspondiente a la primera fase del estudio.

#Validación	#Val+ Autoritaria	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido positivo) explícita o implícitamente sobre una base de autoridad matemática. Esta autoridad puede ejercerla el profesor o un alumno.
	#Val+ Coincidencia del resultado numérico	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido positivo) explícita o implícitamente cuando el resultado numérico producido coincide con el producido por otro grupo.
	#Val+ Complejidad matemática	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido positivo) explícita o implícitamente cuando los alumnos perciben que la complejidad matemática del proceso es adecuada al contexto.
	#Val+ Deseabilidad	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido positivo) explícita o implícitamente cuando los alumnos perciben que posee elementos "deseables" en la respuesta correcta.
	#Val+ Plausibilidad de la solución numérica	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido positivo) explícita o implícitamente considerando la plausibilidad de la solución numérica en relación con referencias compartidas sobre el juego.
	#Val+ Heurística	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido positivo) explícita o implícitamente actuando una heurística. Puede ser una heurística perteneciente al repertorio que se espera tengan los alumnos u otra emergente y *ad hoc*.
	#Val+ Matematicidad	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido positivo) explícita o implícitamente mostrando preferencia por el uso de constructos matemáticos.
	#Val+ Pensamiento proporcional	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido positivo) explícita o implícitamente utilizando conocimientos sobre proporcionalidad o nociones relativas a esta.
	#Val+ Refuerzo inductivo	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido positivo) explícita o implícitamente mediante un razonamiento inductivo.
	#Val+ Representatividad del modelo: El jugador en ventaja debe recibir más dinero	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido positivo) explícita o implícitamente cuando implica que el jugador en ventaja reciba una parte mayor de la apuesta.
	#Val+ Representatividad del modelo: Los montos repartidos deben sumar seis euros.	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido positivo) explícita o implícitamente cuando implica que los montos que se han repartido suman seis euros.
	#Val+ Representatividad del modelo: Correspondencia modelo matemático-modelo de la situación	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido positivo) explícita o implícitamente evidenciando que representa adecuadamente elementos del modelo de la situación con el que los alumnos operan.
	#Val- Autoritaria	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido negativo) explícita o implícitamente sobre una base de autoridad matemática. Esta autoridad puede ejercerla el profesor o una alumno.
	#Val- Complejidad matemática	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido negativo) explícita o implícitamente cuando los alumnos perciben que la complejidad matemática del proceso no es adecuada al contexto.
	#Val- Deseabilidad	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido negativo) explícita o implícitamente cuando los alumnos perciben que carece de elementos "deseables" en la respuesta correcta.

	#Val- Plausibilidad de la solución numérica	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido negativo) explícita o implícitamente considerando la plausibilidad de la solución numérica en relación con referencias compartidas sobre el juego.
	#Val- Heurística	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido negativo) explícita o implícitamente actuando una heurística. Puede ser una heurística perteneciente al repertorio que se espera tengan los alumnos u otra emergente y *ad hoc*.
	#Val- Matematicidad	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido negativo) explícita o implícitamente mostrando preferencia por el uso de constructos matemáticos.
	#Val- Pensamiento proporcional	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido negativo) explícita o implícitamente utilizando conocimientos sobre proporcionalidad o nociones relativas a esta.
	#Val- Refuerzo inductivo	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido negativo) explícita o implícitamente mediante un razonamiento inductivo.
	#Val- Representatividad del modelo: El jugador en ventaja debe recibir más dinero	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido negativo) explícita o implícitamente cuando implica que el jugador en ventaja reciba una parte menor de la apuesta.
	#Val- Representatividad del modelo: Los montos repartidos deben sumar seis euros.	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido negativo) explícita o implícitamente cuando implica que los montos que se han repartido suman una cantidad distinta de seis euros.
	#Val- Representatividad del modelo: Correspondencia modelo matemático-modelo de la situación	Un modelo matemático o solución numérica es validado (en sentido negativo) explícita o implícitamente evidenciando que no representa adecuadamente elementos del modelo de la situación con el que los alumnos operan.

Tabla 3; códigos correspondientes a la familia #Validación

Una actividad relevante hacia el final del proceso de codificación abierta fue la revisión y reducción del sistema de códigos. Códigos distintos referidos a los mismos aspectos de un fragmento (o conjunto de fragmentos) fueron comparados, ya sea para integrarlos, pues aportaban informaciones similares, ya sea para refinar sus descriptores y distinguirlos. Otros códigos, utilizados con poca frecuencia durante la codificación de datos, fueron revisados sistemáticamente para decidir sobre su relevancia; cuando se consideró que no resultaban informativos en relación con nuestros objetivos de investigación, fueron eliminados del sistema de códigos. Este proceso de refinamiento permitió consolidar el Sistema Inicial de 62 códigos (Anexo 1).

El proceso de codificación abierta permitió construir un panorama general acerca de los procesos de resolución de los tres grupos, de las distintas interpretaciones que realizaron de la situación empírica planteada en el problema y de su evolución, de los conocimientos matemáticos de los que se sirvieron durante el proceso, de distintas cuestiones relacionadas con la validación de los modelos matemáticos y las soluciones numéricas que construyeron, de las prácticas argumentativas observadas y de las estrategias comunicativas utilizadas por el profesor para guiar el trabajo de los alumnos. Todas estas cuestiones fueron consignadas en memos dentro del entorno AtlasTi. Distintos fragmentos que informan acerca de una misma cuestión pueden ser vinculados a un mismo memo (o a varios) que la discute; de este modo, la reflexión acerca de esta cuestión gira en torno a la comparación sistemática de distintos fragmentos que han sido vinculados a través del memo correspondiente. Estas reflexiones guían la revisión sistemática de los datos alrededor de los conceptos centrales identificados, alrededor de los que se organizan cuestiones relevantes discutidas en los memos. Es a este proceso al que hemos llamado codificación axial. Es necesario aclarar que el proceso de codificación axial no comienza después de la codificación abierta. La reflexión acerca del proceso de codificación y el ejercicio de conceptualización de las situaciones analizadas, capturados mediante la redacción de memos, empieza desde el mismo inicio del proceso de codificación abierta. Aunque inicialmente el interés principal es fragmentar los datos y describir significativamente estos fragmentos a través de la creación y asignación de códigos, el proceso reflexivo que caracteriza la codificación axial corre en paralelo y gana ímpetu a medida que más datos son codificados y códigos más analíticos (como opuesto a descriptivos) son creados. De modo que la codificación axial y la codificación abierta deben entenderse como procesos concomitantes que se retroalimentan y no como procesos concatenados y discernibles.

4.3.5. Codificación axial

Si la intención de la codificación abierta es fragmentar los datos, la de la codificación axial es relacionar estos fragmentos de manera coherente (Charmaz, 2006). Según Strauss y Corbin (1998), si la codificación abierta está orientada por la pregunta '¿qué es lo que hacen y dicen los participantes?', la codificación axial está orientada por las preguntas 'cuándo, cómo, por qué, quién y con qué consecuencias'. Inspirados por esta interpretación de la codificación axial, organizamos su puesta en práctica alrededor de tres elementos principales: las acciones/interacciones de los participantes (alumnos y profesor); las condiciones de emergencia de estas acciones/interacciones (i.e., las circunstancias que las estructuran y posibilitan) y sus consecuencias. De manera transversal a este esquema, y en relación con la perspectiva adoptada en el marco teórico, consideramos los aspectos epistémico, teleológico y comunicativo de las acciones/interacciones de los participantes, de las condiciones de emergencia de esta acciones/interacciones y de sus consecuencias. Es decir, por un lado intentamos entender cómo es que los participantes regulan y controlan sus acciones de manera acorde a sus conocimientos y cuáles son las consecuencias de este control en el proceso de resolución (aspecto epistémico). Por otro lado intentamos entender cómo es que este proceso es gestionado, mediante la toma de decisiones, con la intención de satisfacer los objetivos didácticos percibidos (aspecto teleológico). Finalmente, intentamos entender cómo es que el proceso de resolución se concreta a partir de la interacción y la comunicación, mediante registros adecuados a la cultura matemática del aula (aspecto comunicativo).

La comparación constante de fragmentos etiquetados con el mismo código o conjunto de códigos, así como la reflexión acerca de las relaciones entre fragmentos codificados, nos permitió comenzar a elucidar cuestiones centrales en relación con los procesos de resolución observados. Estas reflexiones, plasmadas en memos, nos permitieron definir conceptos centrales alrededor de los cuales se organizaban fragmentos y códigos particulares. Por ejemplo, se observó que códigos de la familia *#Validación* ponían en evidencia expectativas de los alumnos en relación con la solución a obtener, con su desempeño como alumnos de matemáticas y con los conocimientos matemáticos implicados. Es decir, como parte de procesos de validación, los alumnos evidenciaban características esperadas de la solución correcta, de los conocimientos a utilizar y de las acciones a emprender para resolver el problema. De modo que las expectativas de los alumnos se convirtieron en un concepto central y los datos se revisaron para establecer cuáles son estas expectativas y cómo es que condicionan el trabajo matemático de los alumnos; cuestión relevante para la consecución del primero y segundo objetivo de investigación. La reflexión acerca de las expectativas de los alumnos dio origen a la familia *#Expectativas*, mediante la cual codificamos fragmentos en los que estas expectativas quedaron en evidencia. En la Tabla 4 se pueden ver los códigos de esta familia tal y como quedaron definidos al final de la codificación axial durante la primera fase del estudio.

#Expectativas	#Datos numéricos deben ser identificados y manipulados para producir una solución	#Datos numéricos deben ser identificados y manipulados para producir una solución (de modo Coherente)	Los alumnos centran su actividad en la producción de nuevos datos numéricos a partir los datos numéricos presentes en el enunciado del problema. Estos datos son manipulados matemáticamente como parte de la búsqueda de una solución numérica. Estas manipulaciones son guiadas por interpretaciones del problema (i.e., se corresponden con elementos empíricos de la situación de una manera coherente).
		#Datos numéricos deben ser identificados y manipulados para producir una solución (de modo Incoherente)	Los alumnos centran su actividad en la producción de nuevos datos numéricos a partir los datos numéricos presentes en el enunciado del problema. Estos datos son manipulados matemáticamente como parte de la búsqueda de una solución numérica. Estas manipulaciones son actuadas de manera aparentemente arbitraria y su interpretación en términos de elementos empíricos de la situación es *a posteriori*.
	#La dificultad debe ser acorde a las circunstancias		Los alumnos realizan consideraciones acerca de la validez de una solución en función de la dificultad matemática que le asignan. En sentido negativo, los alumnos consideran, explícita o implícitamente, que una solución obtenida (demasiado) fácilmente resulta sospechosa. En sentido positivo, los alumnos consideran positivamente la validez de una solución después de un proceso percibido como complejo, ya sea explícita o implícitamente.
	#La solución debe ser matemática		Los alumnos realizan consideraciones acerca de la validez de una solución en función de su aceptabilidad en el contexto del aula de matemáticas. En sentido negativo, los alumnos rechazan una solución que no resulta socialmente aceptable como "matemática" (p. ej. no se han utilizado constructos matemáticos para producirla); el rechazo puede ser explícito o tácito. En sentido positivo, las acciones de los alumnos se orientan a propiciar un tratamiento matemático para la obtención de una solución.
	#Las sugerencias del profesor deben ser implementadas		Los alumnos centran su actividad en acomodar sugerencias (explícitas o implícitas) realizadas por el profesor. Esto puede ser mediante la incorporación de ciertas características a un modelo matemático o solución, o mediante el rechazo de un modelo o solución cuya validez fue puesta en duda o rechazada por el profesor.
	#Tipos de número probables en la resolución		Los alumnos realizan consideraciones acerca de la validez de una solución en función de los números que obtienen en su cálculos (p. ej. consideran negativamente una solución si implica números con decimales periódicos; consideran positivamente una solución si es construible con monedas de denominaciones existentes).
	#Una respuesta numérica debe ser producida		Los alumnos realizan cálculos de manera tentativa, sin vincularlos con su interpretación de la situación empírica, con la intención aparente de obtener una solución numérica. Pueden manifestar explícitamente no saber por qué realizan estos cálculos o esto puede ser aparente en sus acciones.

Tabla 4; códigos correspondientes a la familia #Expectativas

Se observó también que las intervenciones del profesor resultaban clave para re-orientar el trabajo de los alumnos, de modo que los fragmentos de datos relativos a sus intervenciones fueron comparados sistemáticamente. Este proceso nos permitió distinguir distintos tipos de actuaciones del profesor, las cuales organizamos en la familia de códigos *#Actuaciones del profesor*. En la Tabla 5 mostramos los códigos relativos a la familia *#Actuaciones del profesor* tal y como quedaron definidos al final de la primera fase del estudio. A su vez, esta distinción permitió entender cómo es que acciones de los alumnos se relacionan con acciones del profesor y, por lo tanto, cómo es que lo que hace y dice el profesor condiciona la producción matemática de los alumnos; lo cual resultó relevante para la consecución del segundo y tercer objetivo de investigación.

#Actuaciones del Profesor	#Indicar elementos de la solución probabilística	Las acciones del profesor indican a los alumnos elementos de la solución probabilística. Las indicaciones pueden ser directas (se explicita una característica de la solución correcta) o indirecta (se alude a características de la solución correcta de manera indirecta).
	#Proveer instrumentos comunicativos	Las acciones del profesor proveen a los alumnos palabras, nociones y estrategias comunicativas para referirse a la situación. Este código se aplica siempre en relación con el código *#Adoptar estrategias comunicativas del profesor.*
	#Re-orienta	Las acciones del profesor re-orientan, de manera explícita o implícita, el trabajo de los alumnos. En estos casos, aquello que hace o dice el profesor sugiere una nueva línea de acciones a los alumnos. Esto puede ir acompañado, o no, de la evaluación del trabajo previo realizado por el grupo.
	#Valida+	Las acciones del profesor validan en sentido positivo, de manera explícita o implícita, la producción matemática de los alumnos.
	#Valida-	Las acciones del profesor validan en sentido negativo, de manera explícita o implícita, la producción matemática de los alumnos.

Tabla 5; códigos correspondientes a la familia #Actuaciones del profesor

El proceso de codificación axial se llevó a cabo de dos maneras complementarias (no secuenciales); por una parte se revisaron los datos correspondientes al trabajo de cada uno de los tres grupos de alumnos por separado, intentando entender el proceso de cada grupo y sus particularidades. Por otro lado, situaciones similares relacionadas con conceptos centrales y observadas en más de un grupo se compararon sistemáticamente con la intención de identificar sus condiciones de emergencia y variabilidad. Las reflexiones producto de la codificación axial fueron consignadas en memos, los cuales sirvieron de base para la planeación de la segunda fase del estudio.

Una cuestión que se desprendió del proceso de codificación axial fue la dependencia de los procesos de validación de los alumnos de las acciones del profesor. Las interacciones de Dan con los distintos grupos, frecuentemente de carácter directivo, ofrecían elementos a los alumnos para determinar el punto de vista del profesor en relación con la validez de los resultados numéricos y modelos matemáticos presentados. Inferimos que esto provocaba que los alumnos descartasen estos resultados y modelos sin mayores reflexiones al respecto y que, por lo tanto, no ofrecieran argumentos para justificar estas acciones; cuestión que observamos en los tres grupos. Conjeturamos que un seguimiento menos directivo, que evitara la posibilidad de validar la producción matemática mediante la autoridad del profesor, podría propiciar una actividad argumentativa más variada por parte de los alumnos y la necesidad de reflexionar acerca de los resultados numéricos y los modelos matemáticos propuestos en relación con la situación empírica. De este modo, la actuación del profesor fue considerada como una cuestión central alrededor de la cual diseñar un muestreo teórico; es decir, la recogida de más datos que nos permitan entender cómo es que las acciones del profesor se relacionan con las acciones de los alumnos para validar su producción matemática. Con esta intensión, y a partir de los análisis parciales realizados sobre los datos del aula de Dan, diseñamos la segunda fase del estudio, la cual explicamos a continuación.

4.4. Segunda fase de la investigación

En esta sección explicamos en detalle las acciones de investigación llevadas a cabo durante la segunda fase del estudio. Describimos quiénes fueron los participantes y explicamos de qué modo el análisis de los datos obtenidos en la primera fase nos permitió modificar la implementación del problema con la intención de propiciar la emergencia de argumentos entre los alumnos. Describimos el proceso de recogida de datos en el aula y el diseño e implementación de las dos entrevistas realizadas. Explicamos, también, cómo es que los datos obtenidos en esta segunda fase fueron incorporados al cuerpo de datos del estudio y los métodos de análisis empleados.

4.4.1. Participantes y recogida de datos

Cinco meses después de la obtención de los primero datos, durante el mes de octubre de 2012, de entre los posibles profesores candidatos, contactamos con Ellen, una profesora de nivel secundario que había colaborado antes en el Proyecto en el que se inscribe el estudio. Ellen es una profesora de matemáticas con muchos años de experiencia como docente de nivel secundario y, al igual que Dan, con experiencia en investigación en el ámbito de la educación matemática. Durante el curso escolar 2012-2013 Ellen se encontraba enseñando en el cuarto año de la Educación Secundaria Obligatoria en una escuela de Barcelona y tenía planeado introducir la teoría de la probabilidad en su curso. Los alumnos de Ellen no habían estudiado teoría de la probabilidad en cursos anteriores. Según nos comentó, sus alumnos estaban acostumbrados a trabajar en pequeño grupo en la resolución de problemas y a discutir y justificar su producción matemática; de modo que el perfil de Ellen y su grupo resultaba adecuado para nuestros propósitos.

Durante las entrevistas preliminares con Ellen le explicamos que nuestro interés era observar las prácticas argumentativas de sus alumnos mientras resuelven un problema, que queríamos implementar uno en particular que habíamos utilizado en una experiencia previa y que nos interesaba entrevistar a algunos alumnos posteriormente. Le explicamos que en esa experiencia previa observamos cómo las intervenciones del profesor, de carácter directivo, habían sido operativizadas por los alumnos para descartar soluciones sin discutirlas en profundidad. Le comentamos que queríamos evitar esto a partir de unas pautas de actuación para el docente, diseñadas para promover la discusión de distintas soluciones y la reflexión acerca de su validez (explicamos el diseño e implementación de estas pautas más abajo, en la sección 4.4.1.1). Ellen se mostró dispuesta a colaborar en el sentido requerido. La idea de llevar al aula un problema introductorio a la teoría de la probabilidad le pareció compatible con su programa y las fechas para realizarlo se adecuaron a su calendario de actividades. Se dedicarían dos sesiones de cincuenta minutos durante dos días consecutivos, trabajando en pequeño grupo primero con una puesta en común final, y se realizarían dos entrevistas con dos de estos grupos una semana después. Las sesiones de resolución se llevaron a cabo los días 27 y 28 de noviembre de 2012 y las dos entrevistas los días 4 y 5 de diciembre.

El aula de Ellen tenía veintiocho alumnos, de entre 15 y 16 años, que desde el inicio del curso trabajaban en grupos de cuatro durante la clase de matemáticas y que no habían estudiado aún teoría de la probabilidad. Los alumnos interaccionaban entre sí generalmente en catalán, aunque Ellen se dirigía tanto a la clase como a los distintos grupos en castellano. A pesar de que el uso de dos lenguas seguramente tuvo impacto en la actividad del aula, el análisis de este aspecto no es parte del presente estudio.

Se decidió obtener audio y video registros de tres grupos de alumnos mientras resolvían el problema, así como sus protocolos escritos. Para la selección de los tres grupos se recurrió a Ellen, solicitándole que indicara grupos de alumnos que consideraba participativos. Se pretendió con esto obtener buenos registros verbales y evitar la posibilidad de que los alumnos abandonaran el trabajo matemático o no lo comunicaran al interior del grupo. Con este criterio se seleccionaron tres grupos de cuatro alumnos cada uno, los cuales serán denominados EA, EB y EC a partir de ahora. Por otro lado, con la intención de contar con más datos para triangular el análisis, se le pidió a Ellen que solicitara a los alumnos la producción de un texto escrito grupal donde consignaran y justificaran sus resultados. Ellen estuvo de acuerdo y decidió que estos textos serían parte de la evaluación de los alumnos; lo cual consideramos positivamente, pues los llevaría previsiblemente a esforzarse por producir textos de buena calidad expresiva.

Durante las dos sesiones de resolución seguimos a cada grupo con un cámara de video y una grabadora de audio. Al igual que en el aula de Dan, la cámara se posicionó de modo que captase de manera frontal (o tan frontal como fuera posible) y ligeramente en picada a los alumnos en un mismo plano, capturando a la vez la superficie donde estos escribían. La grabadora de audio se posicionó entre los alumnos. Esto permitió registrar aquello que los alumnos decían y hacían mientras trabajaban juntos y vincular los protocolos escritos con las acciones video-registradas. En estas circunstancias, y dado que las cámaras estaban fijas, en los registros de las interacciones de los grupos con la profesora no siempre era posible ver el rostro de Ellen. Durante las puestas en común, una de estas tres cámaras fue utilizada para registrar la clase, desde la perspectiva de la pizarra, y otra para registrar la pizarra desde el fondo del aula. El investigador principal estuvo presente durante las dos sesiones junto con un asistente provisto por el Proyecto. Entre ambos posicionaron y manipularon las cámaras y grabadoras.

Al inicio de la primera sesión, el investigador principal y el asistente entregaron a cada alumno una tira de papel con el enunciado del problema en catalán y algunas hojas en blanco, con la instrucción de utilizarlas para sus anotaciones. Los alumnos de los grupos seleccionados recibieron hojas marcadas con un código individual para identificarlos posteriormente. Ellen explicó que en esas hojas los alumnos debían ir escribiendo “todos los razonamientos que van surgiendo” con la intensión de explicar la solución del problema. Les comunicó, además, que continuarían trabajando el siguiente día y que deberían escribir un reporte grupal que “explique cómo han resuelto el problema”, el cual sería parte de la evaluación trimestral. Posteriormente, Ellen presentó el problema como histórico, comentando que estaba en el origen de una rama muy importante de las matemáticas. La profesora leyó el problema en voz alta, reformulando la pregunta final como: "¿Cuál es la manera justa de repartirse esos dineros?". Finalmente sintetizó la tarea a realizar diciendo: "Lo que ustedes tienen que explicar es cuál consideran que es una manera justa de repartirse el dinero y justificar su respuesta".

Durante el desarrollo de cada sesión el investigador principal se limitó a circular entre los grupos, observando la interacción y tomando notas de campo; mientras que el asistente se limitó a comprobar el adecuado funcionamiento del equipo de grabación.

En resumen, a partir de las acciones descritas obtuvimos registros de audio/video del trabajo realizado por tres grupos durante las dos sesiones de resolución del problema, los protocolos escritos de los alumnos de estos grupos y sus reportes grupales, registros de audio/video de la puesta en común y las notas de campo del investigador principal.

Una semana después entrevistamos a dos de los tres grupos registrados. Explicamos el diseño y la implementación de estas entrevistas más adelante, en la sección 4.4.1.2.

4.4.1.1. Diseño de pautas para el docente

El análisis llevado a cabo hasta el momento sobre los datos recogidos en la primera fase del estudio sugería que las intervenciones del profesor eran operativizadas por los alumnos para decidir sobre la validez de su producción matemática. De modo que la autoridad matemática del maestro aparecía como potencial condicionante para la emergencia de argumentos para validar las soluciones numéricas y los modelos matemáticos producidos por los alumnos. Esto parecía ser favorecido por las indicaciones directivas ofrecidas por Dan frecuentemente, tanto cuando interaccionaba con los grupos como cuando se dirigía a toda la clase. Esto llevó a solicitar a Ellen, como una de las pautas de actuación, que evitara manifestarse acerca de la validez de las soluciones numéricas y de los modelos matemáticos producidos por los alumnos cuando interaccionara con ellos y que, en cambio, favoreciera que fueran ellos los que decidieran al respecto.

Para facilitar que los alumnos problematizaran los modelos matemáticos construidos, así como la emergencia de distintos modelos matemáticos en competencia, sugerimos a Ellen que planteara a los alumnos, cuando lo considerase oportuno, variaciones numéricas del problema original en la que los modelos propuestos resultaran problemáticos. Basándonos tanto en el análisis de los datos de la primera fase de nuestro estudio como en la literatura sobre la implementación del problema en el aula (Paola, 1998; García Cruz, 2000), construimos variaciones numéricas problematizadoras para los modelos matemáticos que emergen con mayor frecuencia entre los alumnos. Consideramos que una variación numérica del problema resulta problematizadora cuando los resultados numéricos que se obtienen al aplicar el modelo matemático en cuestión contradicen referencias que se espera que los alumnos tengan en relación con el juego. En la Figura 3 se pueden ver dos ejemplos de variaciones numéricas problematizadoras construidas y su relación con los modelos matemáticos que pretenden problematizar (representados por razonamientos frecuentemente observados entre los alumnos).

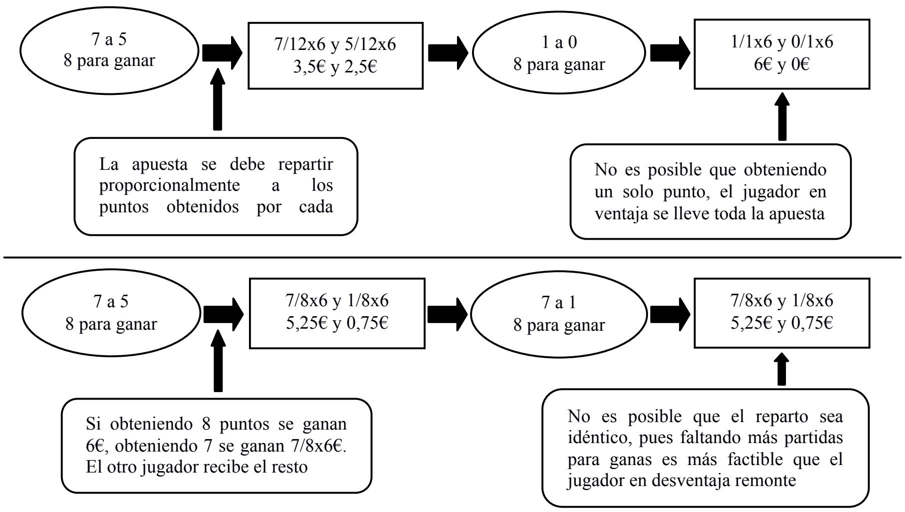


Figura 3; variaciones numéricas problematizadoras

Además de problematizar modelos matemáticos frecuentemente observados, las variaciones numéricas problematizadoras pretendían propiciar la reflexión, por parte de los alumnos, acerca de las relaciones entre las variables empíricas de la situación. En particular, esperábamos propiciar que los alumnos notaran que un modelo matemático que describa la situación empírica debe ser independiente de los puntos obtenidos y, en cambio, debe considerar los puntos que cada jugador aún debe obtener para ganar.

Tanto las trayectorias de resolución observadas entre los alumnos como las variaciones numéricas problematizadoras fueron discutidas con Ellen. Así, otra de las pautas de actuación sugeridas a la profesora fue promover la problematización de los modelos matemáticos sugiriendo a los alumnos la exploración de variaciones numéricas del problema. Para evitar que los alumnos interpretaran estas sugerencias en relación con la validez de los modelos matemáticos (i.e., como evaluaciones implícitas acerca de la validez de los modelos presentados), las variaciones numéricas problematizadoras serían propuestas después de proponer otras que no problematizaran el modelo matemático en cuestión. Mediante estas estrategias, se esperaba que los alumnos se implicaran más en la reflexión acerca de los modelos matemáticos, en su validación y en la construcción de modelos matemáticos en competencia para tratar de resolver las situaciones problemáticas.

Una tercera pauta sugerida a Ellen fue la promoción de la comparación de modelos en competencia como parte del reporte escrito grupal. Se esperaba que los alumnos ofrecieran argumentos en favor de la validez de uno u otro modelo a partir de las problemáticas detectadas y de sus esfuerzos por entenderlas y solucionarlas.

4.4.1.2. Diseño e implementación de las entrevistas

Se consideró que era importante entrevistar a algunos de los grupos observados en un plazo no superior a una semana, después de lo cual la experiencia comenzaría a ser lejana. Se decidió que en ese lapso de tiempo era posible diseñar dos de ellas, de modo que dos grupos deberían ser seleccionados para ser entrevistados. Así, el material obtenido durante las dos sesiones de resolución fue revisado inmediatamente después de la segunda sesión con la intención de realizar esta selección. El criterio aplicado fue la implementación de las pautas de actuación para el docente: se prefirieron los dos grupos en los que estas pautas habían sido implementadas de manera más apegada a la planeación previa acordada con la profesora. Así, se eligieron los grupos EA y EB para realizar las entrevistas, cuya planeación e implementación describimos en esta sección.

Dado que nuestra intención era indagar aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas, y que estos aspectos suelen ser vehiculados de manera implícita en las acciones de los participantes, el análisis de datos resulta necesariamente interpretativo. De modo que uno de los objetivos de las entrevistas era la triangulación de datos; es decir, posibilitar la confirmación o refutación de interpretaciones realizadas durante el análisis de las sesiones de resolución del problema. Esta necesidad investigativa llevó a diseñar entrevistas semi-estructuradas con base en el visionado de situaciones verificadas en el aula, presentadas mediante videoclips. Para cada uno de los dos grupos que serían entrevistados, seleccionamos momentos de su trabajo durante la resolución del problema que consideramos especialmente informativos en relación con nuestros objetivos de investigación. De entre todas las situaciones seleccionadas, preferimos aquellas cuyo tratamiento en la entrevista pudiera aclarar o enriquecer su análisis.

El uso de videoclips durante la entrevista tiene distintas ventajas; por un lado funciona como mediador y referencia común para los alumnos y el entrevistador, permitiendo la alusión directa a las prácticas del aula: las preguntas giran en torno al contenido explícito del video, igualmente accesible a todos. Por otro lado, el video redirige las diferencias interpretativas que se pueden presentar durante la entrevista a un elemento idéntico y contrastable: el video mismo; que constituye así una referencia verificable, en contraste con la apelación a recuerdos de los participantes.

Otro de los objetivos de las entrevistas era posibilitar la indagación de cuestiones centrales identificadas durante el proceso de codificación axial de los datos de la primera fase del estudio. El análisis de los datos obtenidos en esta segunda fase debería permitir la reflexión acerca de estas cuestiones, mediante la búsqueda de situaciones que confirmen o refuten su relevancia y adecuación para dar cuenta de aspectos epistémicos de las acciones de los participantes mientras intentan resolver el problema. Esto llevó a construir una serie de preguntas generales, relativas a estas cuestiones centrales, que queríamos incorporar a la entrevista, relacionándolas con momentos particulares del proceso de resolución de los grupos, los cuales servirían como detonantes para las preguntas. Se seleccionaron situaciones del proceso de resolución de cada grupo que se consideró podían servir a este propósito. Las preguntas generales se adaptaron a las especificidades de estas situaciones; es decir, se reformularon en términos de las acciones concretas de los participantes y de los elementos contextuales de las situaciones presentadas en los videoclips. Las preguntas generales que sirvieron para construir preguntas específicas para las entrevistas fueron las siguientes.

- ¿Por qué es relevante probar un modelo matemático en distintas variaciones numéricas? ¿Sobre qué aspectos del modelo matemático informa esta acción?
- ¿Un modelo matemático válido en una variación numérica debe ser válido en general?
- ¿Cómo decide un alumno qué conocimientos y estrategias utilizar para resolver un problema planteado? ¿Cómo decide si estos conocimientos y estrategias son adecuados?
- ¿Qué características tiene un argumento convincente en matemáticas?
- ¿Qué características tienen los argumentos del profesor que los hacen convincentes?
- ¿Qué características tienen los argumentos de los alumnos que los hacen convincentes?
- ¿Se requieren distintos argumentos para convencer a un compañero y para convencer al profesor?
- ¿Cómo puede hacer un alumno o grupo de alumnos para decidir de manera autónoma acerca de la validez de su producción matemática? ¿Con qué estrategias cuenta?
- ¿Cómo puede ponerse de acuerdo un grupo de alumnos acerca de la validez de su producción matemática?
- ¿Es siempre necesaria la evaluación del profesor para decidir sobre la validez de lo que se hace y dice en matemáticas?
- ¿Existen distintos grados de certeza en matemáticas? ¿Cómo se aumenta la certidumbre acerca de lo que se hace y dice en el aula de matemáticas? ¿Bajo qué circunstancias se tiene total certeza?

Con la intención de triangular las respuestas de los alumnos durante el análisis retrospectivo de las entrevistas, se formularon distintas preguntas específicas en distintos términos alrededor de cada una de las preguntas generales, tratando de plantear cada cuestión en más de una ocasión y en relación con distintas situaciones.

A partir de los dos objetivos para las entrevistas, se realizó una primera selección de situaciones, consignadas en distintos videoclips. Se consideró que una cuestión clave era que los videoclips presentados a los alumnos ofrecieran elementos contextuales suficientes para ubicarlos en la situación sin tener una longitud excesiva; de modo que se descartaron aquellos que no cumplían con este requisito para obtener la selección final. En el caso del grupo EA se seleccionaron diez videoclips con una longitud total de unos diecisiete minutos y en el caso del grupo EB se seleccionaron doce videoclips con una longitud total de unos trece minutos. Cada entrevista tuvo una duración de cincuenta minutos.

Para cada situación que se presentaría mediante los videoclips, se construyeron baterías de preguntas: una o dos preguntas iniciales y algunas otras anticipando posibles respuestas de los alumnos. Este no era un formato cerrado, sino una estructura básica para secuenciar la entrevista. Una de las consignas era indagar en cuestiones consideradas relevantes que emergieran espontáneamente; es por esto que caracterizamos las entrevistas como semi-estructuradas. En la formulación de las preguntas se utilizaron los mismos términos que se empleaban en la situación visionada (e.g., validez, justicia, corrección) y las mismas acepciones (según nuestra interpretación), de modo que la introducción de nuevos términos o acepciones no resultara problemática.

Durante las entrevistas, los cuatro alumnos se sentaron de manera semicircular frente a una mesa, donde estaba instalada una pantalla en la cual visionaron los videoclips. Para capturar las respuestas de los alumnos, se obtuvo registro de audio/video de la entrevista mediante una cámara posicionada sobre esta pantalla, de modo que los cuatro alumnos aparecían en el encuadre. El investigador principal se posicionó a un costado de la pantalla, fuera del encuadre, frente a un ordenador portátil que le permitía reproducir los videoclips en la pantalla de los alumnos y acceder de manera simultánea y privada a las preguntas planeadas. Al inicio de la entrevista se indicó a los alumnos que verían algunos videoclips de situaciones ocurridas en el grupo durante las dos sesiones de resolución del problema. Se les informó que estaban organizados en orden cronológico y que se les harían preguntas acerca de lo que en esas situaciones estaban haciendo y diciendo. Se les indicó que contestaran libremente y comentaran lo que quisieran al respecto. Ambas entrevistas se realizaron en un ambiente distendido y todos los alumnos se mostraron participativos.

4.4.2. Acciones preparatorias para el análisis

A partir del material obtenido durante las dos sesiones de resolución y las dos entrevistas se crearon veinticinco documentos primarios (nueve archivos de audio/video, quince archivos de imagen y un archivo de texto) que se incorporaron a la unidad hermenéutica en AtlasTi. En la Tabla 6 resumimos los documentos primarios asociados a cada grupo registrado en la segunda fase del estudio.

Grupo	Alumnos	Documentos primarios			
		Audio/video registros	Protocolos escritos	Reportes grupales	Notas de campo
EA	Anna, Vasi, Zoe y Josy	3 (uno por sesión y uno por la entrevista)	4 (uno por alumno)	1 (uno por grupo)	
EB	Joe, John, Kurt y Ron	3 (uno por sesión y uno por la entrevista)	4 (uno por alumno)	1 (uno por grupo)	
EC	Lyn, Tim, Ely y Sue	2 (uno por sesión)	4 (uno por alumno)	1 (uno por grupo)	
Puesta en común	Grupo completo	1 (final segunda sesión)			
		Total: 9	Total: 12	Total: 3	Total: 1

Tabla 6; documentos primarios incorporados a la unidad hermenéutica (2a fase del estudio)

Estos documentos primarios se sumaron a los generados en la primera fase para totalizar cuarenta documentos primarios que constituyen el cuerpo de datos final de nuestra investigación. En la Tabla 7 se resumen todos los documentos primarios asociados a cada uno de los grupos registrados en las dos fases del estudio.

Grupo	Miembros	Documentos primarios			
		Audio/video registros	Protocolos escritos	Reportes grupales	Notas de campo
DA	Alin y Laura	2 (uno por sesión)	2 (uno por alumno)		2 (uno por aula)
DB	Roy, Tom y Stan	2 (uno por sesión)	3 (uno por alumno)		
DC	Jay y Tess	2 (uno por sesión)	2 (uno por alumno)		
Puesta en común	Grupo completo	1 (final segunda sesión)			
EA	Anna, Vasi, Zoe y Josy	3 (uno por sesión y uno por la entrevista)	4 (uno por alumno)	1 (uno por grupo)	
EB	Joe, John, Kurt y Ron	3 (uno por sesión y uno por la entrevista)	4 (uno por alumno)	1 (uno por grupo)	
EC	Lyn, Tim, Ely y Sue	2 (uno por sesión)	4 (uno por alumno)	1 (uno por grupo)	
Puesta en común	Grupo completo	1 (final segunda sesión)			
		Total: 16	Total: 19	Total: 3	Total: 2

Tabla 7; documentos primarios en la unidad hermenéutica

4.4.3. Codificación abierta

Al incorporar nuevos datos al proceso de análisis inauguramos un nuevo ciclo de codificación abierta, en el sentido descrito en la sección 4.3.4. A partir del sistema de códigos conformado hasta ese momento, procedimos a fragmentar y codificar los nuevos datos; de modo que los nuevos fragmentos eran codificados con códigos existentes o implicaban la creación de nuevos códigos. De manera similar a como lo hiciéramos en la primera fase, procedimos grupo por grupo, considerando primero sólo los datos de las dos sesiones de resolución del problema. Iniciamos con los datos correspondientes al grupo EA, continuando con el grupo EB, el grupo EC y finalmente la puesta en común. Al igual que en la primera fase, el proceso de comparación constante de fragmentos similares implicó la revisión permanente de la codificación previa; de modo que la codificación secuencial de los tres grupos no se debe entender como un proceso lineal y acumulativo, sino como uno cíclico e iterativo a partir del cual el sistema de códigos y descriptores es refinado para dar cuenta de la variabilidad observada en los datos. Los protocolos escritos de los alumnos fueron codificados paralelamente al registro de audio y video, revisándolos según la cronología de su producción; es decir, aquello que observábamos a los alumnos escribir en el registro de audio/video era revisado en paralelo sobre los protocolos escritos. Del mismo modo, los reportes grupales fueron codificados siguiendo su proceso de producción en el aula.

En un segundo momento realizamos la codificación abierta de las dos entrevistas con los grupos EA y EB. Dado que las entrevistas se basaron en el visionado de fragmentos de las sesiones de resolución del problema, su codificación se realizó relacionando sistemáticamente las respuestas de los alumnos con los fragmentos correspondientes. Esto permitió evaluar la codificación e interpretación de estos fragmentos, corroborándolas, rechazándolas o modificándolas en función de las respuestas de los alumnos. Este proceso fue clave para el refinamiento de los descriptores de algunos códigos. Por otro lado, dado que algunas preguntas se formularon en distintas ocasiones durante la entrevista y en relación con distintos fragmentos, la codificación de los fragmentos de entrevista correspondientes se realizó comparando las respuestas de los alumnos en ambos momentos. Esto permitió triangular las respuestas de los alumnos en torno a cuestiones y conceptos centrales y reforzar la plausibilidad de las interpretaciones realizadas.

La reflexión acerca de la emergencia de nuevos códigos, necesarios para codificar los datos recogidos en la segunda fase del estudio, permitió poner en evidencia similitudes y diferencias entre las dos aulas observadas. Por ejemplo, no fue necesario expandir la familia de códigos que consignaba las distintas soluciones numéricas propuestas por los alumnos, pues las soluciones numéricas observadas en el aula de Ellen resultaron un subconjunto propio de las observadas en el aula de Dan. En cambio, fue necesario hacer consideraciones más refinadas acerca del uso por parte de los alumnos de variaciones numéricas del problema. En el aula de Dan, generalmente por sugerencia del profesor, los alumnos recurrían a la exploración de variaciones numéricas del problema consideradas más simples para intentar ganar entendimiento acerca de la situación empírica, a partir del cual construir modelos matemáticos. Este uso de variaciones numéricas del problema se veía reforzado por el rechazo explícito por parte de Dan de soluciones presentadas por los alumnos, lo que sugería la necesidad de reinterpretar los datos del problema para generar un modelo matemático distinto. En cambio, en el aula de Ellen, donde la profesora procuraba abstenerse de validar las soluciones presentadas por los grupos, la exploración de variaciones numéricas llevó frecuentemente a los alumnos a validar inductivamente el modelo matemático con el que estaban trabajando. Esta diferencia fundamental, que ilustra practicas argumentativas distintas, llevó a distinguir estos dos posibles usos de variaciones numéricas del problema y, por lo tanto, a la creación de dos códigos para distinguirlos: uno referido al uso exploratorio y otro referido al uso validador.

Como parte de la reflexión en torno a los argumentos ofrecidos por los participantes, y de manera consecuente con nuestra perspectiva teórica, incluimos el análisis estructural de argumentos con base en el modelo de Toulmin. Esto permitió organizar nuestra interpretación de los argumentos con la intensión de identificar las razones que se ponían en juego para aceptar o rechazar distintos productos de la reflexión y trabajo matemático (modelos matemáticos, interpretaciones de la situación empírica, soluciones numéricas, etc.). Creamos una serie de códigos destinados a captar los elementos estructurales del modelo: *#Datos*, *#Garantías*, *#Respaldos*, *#Condiciones de refutación*, *#Calificador modal* y *#Conclusiones*. Esta mirada estructurada a los argumentos resultó útil para hacer evidentes y explícitas nuestras interpretaciones de las distintas prácticas argumentativas de los alumnos. Esta cuestión fue de especial relevancia cuando distintos elementos de los argumentos, vehiculados de manera implícita, requirieron un esfuerzo interpretativo por parte de quien los analizaba. La representación explícita de estos elementos permitió triangular y refinar nuestras interpretaciones comparándolas con las realizadas por otro investigador del Grupo de Investigación, con quien se buscaban interpretaciones consensuadas.

La codificación abierta de los datos recogidos en la segunda fase del estudio llevó a la revisión de la codificación de los datos de la fase inicial. El proceso de comparación constante de fragmentos similares abarcó el cuerpo de datos completo. Una cuestión central en este proceso fue decidir acerca de similitudes y diferencias entre fragmentos correspondientes a distintas fases del estudio en vista de la diversidad de elementos contextuales (e.g., en relación con acciones del profesor). La participación ocasional de otros investigadores familiarizados con el marco teórico en la triangulación de interpretaciones acerca de distintos fragmentos, fue esencial para reflexionar acerca de posibles desviaciones idiosincrásicas del investigador principal. De este modo se precisaron descriptores de algunos códigos, así como su rango de aplicabilidad considerando elementos contextuales.

Este proceso de codificación abierta permitió construir un panorama general de lo que había sucedido en ambas aulas, de las especificidades, diferencias y similitudes de los procesos de resolución de los seis grupos implicados y de las acciones de ambos profesores para guiar el trabajo de los alumnos. Todas estas cuestiones fueron consignadas en memos dentro del entorno AtlasTi y constituyeron la base del proceso de codificación axial sobre el cuerpo final de datos, del cual damos cuenta en la siguiente sección.

4.4.4. Codificación axial

A partir de las cuestiones centrales identificadas durante la primera fase del estudio (Sección 4.3.5), su discusión consignada en memos y la reflexión acerca de los productos parciales de la codificación abierta de los datos de la segunda fase, comenzamos una nueva etapa de codificación axial. Al igual que durante la primera fase, la codificación axial se organizó en torno a tres elementos principales: las acciones/interacciones de los participantes (alumnos y profesor); las condiciones de emergencia de estas acciones/interacciones (i.e., las circunstancias que las estructuran y posibilitan) y sus consecuencias y, de manera transversal, alrededor de los aspectos epistémico, teleológico y comunicativo de estos elementos. Este proceso permitió decantar y refinar dos conceptos centrales, 'condiciones de validez' y 'estrategias comunicativas del profesor', alrededor de los cuales se organizaron el análisis y la reflexión que sentaron las bases para la consecución de nuestros objetivos de investigación.

Durante la codificación de los datos obtenidos en la primera fase del estudio, habíamos puesto de manifiesto la relevancia de las expectativas de los alumnos, representadas por la familia de códigos *#Expectativas* (Tabla 4), en su producción matemática. La reflexión al respecto, plasmada en memos, junto con el análisis de los fragmentos codificados con distintos códigos de las familias *#Validación* y *#Expectativas*, así como sus relaciones con otros códigos, permitió identificar distintos elementos que los alumnos consideraron dentro de los procesos de validación en los que se implicaron. Ya sea de manera explícita o implícita, estos elementos permitieron a los alumnos avanzar en la resolución del problema mediante la construcción de constricciones que utilizaron reiteradamente para evaluar la validez de su producción matemática. Estas constricciones, a las que llamamos condiciones de validez, conformaron uno de los conceptos centrales alrededor de los que se articuló la codificación axial. La comparación constante de fragmentos similares nos permitió identificar cinco elementos constituyentes principales de estas condiciones de validez, los cuales conformaron la familia *#Condición de validez*. Los fragmentos en los que se observó la operativización, por parte de los alumnos, de las preferencias e indicaciones del profesor para decidir sobre la validez de la producción matemática, fueron codificados con el código *#Autoridad del profesor*. Los fragmentos en los que los alumnos utilizaron sus conocimientos sobre proporcionalidad para construir y validar modelos matemáticos fueron codificados con el código *#Pensamiento proporcional*. Los códigos *#Contrato didáctico (aspectos matemáticos)* y *#Contrato didáctico (aspectos sociales)* fueron utilizados para codificar fragmentos en los que distintas cláusulas del contrato didáctico quedaban en evidencia, ya sea en relación con los conocimientos matemáticos implicados o con expectativas acerca del desempeño de los alumnos en el aula. Finalmente, con el código *#Representatividad del modelo matemático* codificamos los fragmentos en los que los alumnos consideraban aspectos empíricos del problema para evaluar la representatividad del modelo matemático y para decidir, a partir de esta, sobre su validez. En la Tabla 8 presentamos los cinco códigos de la familia *#Condición de validez* junto con sus descriptores.

#Condiciones de validez	#Autoridad del profesor	Las preferencias del profesor, percibidas por los alumnos, son puestas en juego como condición de validez en un proceso de validación. Los alumnos consideran la validez de un modelo matemático o solución numérica en relación con sus interpretaciones de las preferencias del profesor. En sentido positivo, se observa que los alumnos incrementan su certeza en relación con un modelo matemático o solución numérica (en ocasiones en sentido "total"); en sentido negativo, los alumnos abandonan el modelo matemático o la solución numérica ofreciendo o no ulteriores argumentos. Este código es aplicado independientemente de la manifestación de entendimiento y/o acuerdo con el profesor por parte de los alumnos.
	#Contrato didáctico (aspectos matemáticos)	Una cláusula del contrato didáctico, asociada con conocimientos matemáticos puestos en juego (o percibidos como tales), es puesta de manifiesto en un proceso de validación, ya sea para aceptar o rechazar la validez de la producción matemática. El estatus epistémico de las acciones a las que la cláusula da sostén puede o no ser evidenciado.
	#Contrato didáctico (aspectos sociales)	Una cláusula del contrato didáctico, asociada con expectativas en relación con el desempeño de los alumnos, es puesta de manifiesto en un proceso de validación, ya sea para aceptar o rechazar la validez de la producción matemática. El estatus epistémico de las acciones a las que la cláusula da sostén puede o no ser evidenciado.
	#Pensamiento proporcional	Los conocimientos acerca de proporcionalidad de los alumnos son utilizados para decidir acerca de la validez de su producción matemática. Estos pueden funcionar en sentido positivo, cuando sugieren la adecuación del modelo matemático propuesto o de los resultados numéricos obtenidos, o en sentido negativo, cuando evidencian

		inconsistencias en los modelos matemáticos o en los resultados numéricos. En el primer caso funciona acrecentando la certeza de los alumnos (el estatus epistémico derivado suele no explicitarse) y en el segundo caso suele implicar la falsación del modelo matemático o de los resultados numérico.
	#Representatividad del modelo matemático	La descripción por parte de un modelo matemático propuesto de aspectos empíricos del modelo de la situación con el que se opera es considerada como condición de validez en un proceso de validación. El modelo y/o los resultados numéricos producidos son aceptados o rechazos considerando su capacidad para dar cuenta de aspectos empíricos de la situación. Los elementos empíricos considerados pueden haberse hecho explícitos o manifestarse implícitamente. El uso de este código está ligado a los códigos agrupados en las sub-familias *#Val- Representatividad del modelo* y *#Val+ Representatividad del modelo*, los cuales consignan aspectos específicos considerados.

Tabla 8; códigos correspondientes a la familias #Condición de validez

El análisis de la incidencia de estos códigos en el marco de las acciones de alumnos, tanto dentro del trabajo en grupo como en las interacciones con el profesor, y la comparación constante de fragmentos similares, permitieron identificar distintos elementos epistemológicamente relevantes que conformaron procesos de validación de la producción matemática de los alumnos. Los memos en los que consignamos estos análisis y las reflexiones al respecto sentaron las bases para caracterizar estos procesos de validación, tanto en el trabajo en grupo de los alumnos como en la interacción con el profesor. Esto permitió la consecución de los dos primeros objetivos de investigación de nuestro estudio, los cuales se consiguen, finalmente, a través de la integración sintética de estos análisis y reflexiones en temas emergentes, tal y como lo explicamos en la siguiente sección. Dada la relevancia que tuvo para la consecución de nuestros objetivos el análisis de la emergencia y operativización de condiciones de validez dentro de los distintos grupos, la primera sección del Capítulo 5 (Análisis de datos) pretende exponer y ejemplificar los procedimientos y reflexiones que permitieron evidenciar estas condiciones de validez y situarlas dentro de la producción matemática de los alumnos.

El segundo concepto central alrededor del cual se desarrolló la codificación axial, fue las estrategias comunicativas del profesor, descritas en términos de las distintas acciones agrupadas en la familia *#Actuaciones del profesor* (Tabla 5) y su relación con otros códigos, en particular los de las familias *#Validación* y *#Expectativas*. La codificación axial alrededor de este concepto pretendió, por un lado, identificar y caracterizar las indicaciones del profesor y las sub-tareas que proponía a los alumnos como estadios intermedios para llegar a la solución del problema (e.g., trabajar en variaciones numéricas, considerar otros elementos empíricos o utilizar un cierto tipo de representación). Nos interesaba interpretar las consideraciones epistémicas que las acciones del profesor vehiculaban, tanto en relación con la producción matemática de los alumnos hasta el momento, como con la producción matemática esperada a partir de la intervención. Esto lo conseguimos a partir de dos tipos de acción: por un lado mediante el análisis de las emisiones del profesor, interpretadas desde nuestra perspectiva teórica y, por otro lado, analizando la incidencia de códigos de la familia *#Actuaciones de los alumnos* en las acciones de los alumnos posteriores a las intervenciones del profesor. De este modo intentamos establecer cuáles eran algunas de las consecuencias de las acciones del profesor en la producción matemática de los alumnos y en los discursos de estos acerca de su validez. Este proceso permitió caracterizar acciones relevantes de los alumnos, vinculándolas a la actuación del profesor. En general esto resultó posible a partir de las familias de códigos establecidas, sin embargo también implicó la creación de algunos códigos puntuales, necesarios para capturar elementos de las acciones de los alumnos y su relación con las actuaciones del profesor. Por ejemplo, el recurso sistemático a la autoridad matemática del profesor como garante de validez dio lugar al código *#Falta de autonomía para validar*. En otras ocasiones se observó cómo los alumnos utilizaron modelos matemáticos validados por el profesor para deducir las relaciones entre aspectos empíricos de la situación, fenómeno que dio lugar al código *#Modelado ex post facto*. La comparación entre lo sucedido en las dos aulas puso en evidencia la adopción, por parte de los alumnos, del léxico y expresiones empleados por el profesor en su interacción con los grupos; cuestión que dio lugar al código *#Adoptar estrategias comunicativas del profesor*. En la Tabla 9 consignamos estos tres códigos junto con sus descriptores.

#Adoptar estrategias comunicativas del profesor	El alumno (o el grupo) adopta y utiliza expresiones del profesor para referirse a la situación. Esto puede incluir léxico, nociones y estrategias comunicativas.
#Falta de autonomía para validar	El alumno (o el grupo) sugiere, de manera explícita o implícita, que el profesor debe ser consultado en relación con la validación de su producción matemática. En estos casos, las acciones de los alumnos sugieren que no se perciben como competentes para decidir sobre la validez de su producción matemática.
#Modelado *ex post facto*	El alumno (o el grupo) establece relaciones entre los aspectos empíricos de la situación a partir de la construcción de un modelo matemático. En estos casos, el modelo matemático no describe aspectos empíricos identificados previamente, sino que los aspectos empíricos son inferidos a partir del modelo matemático construido.

Tabla 9; algunos códigos puntuales que relacionan las acciones de los alumnos y del profesor

La comparación constante de intervenciones similares de cada profesor y de acciones posteriores de los alumnos permitió observar distintas estrategias comunicativas de cada profesor, dar cuenta de su variabilidad en los datos analizados y evidenciar algunas de sus consecuencias en el trabajo de los alumnos. El análisis de los datos provenientes de las entrevistas fue particularmente relevante para corroborar nuestras interpretaciones en relación con lo observado en el aula de Ellen y para sugerir explicaciones acerca de lo observado en el aula de Dan, en los casos en que acciones de alumnos de ambas aulas resultaban comparables. En particular, este análisis permitió poner en evidencia algunas de las consecuencias de la implementación realizada por Ellen de la planeación de las sesiones de resolución del problema. Es a partir de la reflexión acerca de todas estas cuestiones que logramos caracterizar la gestión realizada por los profesores de procesos de construcción de la validez de la producción matemática y conseguir el tercer objetivo de nuestro estudio. En el Capítulo 5 (Análisis de datos) dedicamos una sección a cada uno de los profesores, donde damos cuenta del análisis que posibilitó estas caracterizaciones, las cuales presentamos de manera temática en el Capítulo 6.

El proceso de codificación se consideró finalizado una vez que la revisión y comparación constante de fragmentos similares, así como la reflexión plasmada en memos, no conllevaron la emergencia de nuevos códigos. En ese momento se consideró alcanzado el punto de saturación teórica (Boeije, 2002; Strauss y Corbin, 1998). En el Anexo 2 consignamos el sistema de 76 códigos y descriptores tal y como quedó finalmente configurado. Llegados a ese punto, las acciones de investigación se dirigieron a la revisión y articulación sistemática de los memos escritos hasta el momento, con la intención de presentar los resultados del análisis de manera sintética mediante la redacción de temas. En la siguiente sección explicamos el proceso de construcción de temas para dar cuenta de los objetivos de investigación.

El trabajo realizado hasta llegar al punto de saturación teórica hubiera consentido diseñar un nuevo muestreo teórico, con la finalidad de obtener nuevos datos que permitan confirmar conjeturas y refinar aún más nuestro análisis. Sin embargo, considerando los objetivos de investigación y la cantidad y calidad de los datos con que se contaba, se decidió no continuar este proceso. Esta decisión resultó adecuada, pues permitió encontrar un equilibrio entre la profundidad del análisis realizado, la fundamentación de su plausibilidad y la relevancia de los resultados alcanzados. Como parte de las conclusiones de este estudio, en la Sección 7.2 reflexionamos acerca de las fortalezas y limitaciones del diseño metodológico y en la Sección 7.4 acerca de su prospectiva

4.5. Emergencia y elaboración de temas

Para la producción de temas utilizamos los principios que propone van Manen (1990). Según este autor, las experiencias de las personas, y en general los fenómenos sociales, son aprehensibles en términos de estructuras de significados; es a estas estructuras a las que denomina temas. Los temas son entendidos como las estructuras de la experiencia; tematizar, entonces, implica identificar y hacer inteligibles las estructuras experienciales que constituyen una experiencia o fenómeno particular. La tematización, o análisis temático, se refiere al proceso de recuperar un tema o temas latentes e implícitos en la evolución de las acciones y situaciones que conforman el fenómeno observado. La tematización es el medio por el que se intenta capturar y entender un fenómeno mediante la aprehensión de sus estructuras significativas. Tematizar implica la captura, mediante la reflexión, del significado de las acciones de las personas; para lo cual es necesario clarificar y hacer explícitas las interpretaciones de estas acciones. Los significados no son nunca simples y por lo tanto no se pueden condensar en conceptos teóricos; en cambio son multidimensionales, por lo que resulta necesario comunicarlos de manera textual, por medio de narraciones organizadas que evidencien sus distintas dimensiones. Es por esto que el investigador debe implicarse en la labor reflexiva de creación de textos que dan cuenta de los temas identificados: “hacer investigación en ciencias sociales es involucrarse en la creación de textos” (p. 78). Reflexionar y dar cuenta de un fenómeno a partir de la elaboración de textos implica entonces analizar, caracterizar y hacer inteligibles los aspectos temáticos de las experiencias de los participantes; aquellos aspectos que conforman su carácter y permiten explicar el fenómeno de manera relevante y significativa. En este sentido, los distintos temas proveen de orden y control a nuestra investigación, a nuestra reflexión y al proceso de escritura de textos.

Planas, Font y Edo (2009) entienden el proceso de tematización como la abstracción de elementos esenciales del fenómeno bajo estudio a partir de la interpretación reiterada y triangulada de un conjunto de datos cualitativos y su articulación en narraciones sintéticas. Estos autores coinciden con van Manen en que la tematización no constituye un proceso mecánico, sino uno influenciado por quienes articulan narrativamente los temas dentro del texto. La captura y formulación de entendimientos y reflexiones tematizados no es un proceso claramente regulado, sino un acto de "ver" interpretativamente significados latentes en las acciones de las personas. El tema puede ser considerado como el medio por el cual se llega a los significados de los que se pretende dar cuenta narrativamente. Resulta claro, entonces, que distintos temas pueden emerger de un mismo conjunto de datos. Son la mirada y sensibilidad teóricas del investigador las que posibilitan interpretar de manera significativa los datos analizados y vincularlos de manera relevante con los objetivos de investigación. El tema vehicula así el sentido que quien tematiza es capaz de dar, a partir de su posicionamiento, a las acciones observadas, las cuales constituyen el fenómeno investigado. Un tema implica la reducción del fenómeno y de los conceptos mediante los cuales pretendemos dar cuenta de este; ninguna formulación temática es capaz de aprehender la totalidad de los significados de la experiencia humana. Por lo tanto, distintos investigadores tematizarán distintos aspectos de un mismo fenómeno o darán cuenta de un mismo aspecto de modos distintos. Es por esto que la transparencia del posicionamiento del investigador resulta crucial para dotar de plausibilidad a las interpretaciones que realiza y a los temas mediante los cuales pretende aprehender los aspectos fundamentales del fenómeno que estudia. La elaboración de temas implica la descripción copiosa y sistemática de situaciones en las que la estructura temática del fenómeno es puesta en evidencia. El investigador debe describir y analizar las situaciones que refiere, en términos del punto de vista asumido, para justificar y hacer evidentes sus interpretaciones, además de relacionar de manera consistente estas interpretaciones con otras hechas previamente para hacer posible la emergencia de los temas latentes en las situaciones descritas. Es a partir de la recurrencia de aspectos o elementos comunes en estos análisis y descripciones que una estructura temática es puesta en evidencia. La tarea entonces es capturar esta estructura de manera narrativa, destacando los elementos recurrentes que la constituyen y sus relaciones. Es a este proceso al que denominamos tematizar y son estos los principios básicos que guían nuestras acciones al tematizar aspectos relevantes de las acciones de alumnos y profesores observadas en el aula.

En el marco de nuestra investigación, el proceso de tematización comienza con la fragmentación de los datos; esta actividad lleva en su seno las primeras interpretaciones acerca de la cuestión bajo estudio, implícitas en la toma de decisión de lo que es relevante y lo que no lo es en el esfuerzo por aprehender las experiencias de los participantes desde la perspectiva asumida. En un segundo nivel, la creación de códigos y sus descriptores implica la reflexión deliberada que permite aislar y agregar, interpretativamente, distintos fragmentos de datos que conjuntamente representan una o varias cuestiones de interés. La reflexión acerca de estas cuestiones y sus relaciones permite decantar conceptos centrales, alrededor de los cuales construir las estructuras temáticas que consienten la tematización de aspectos relevantes de las acciones de los participantes. El proceso por el cual estos conceptos centrales emergen se sustenta en la sensibilidad del investigador para poner en relación los datos analizados con la perspectiva teórica asumida, sin que esto se limite a la mera interpretación de los datos mediante ideas preconcebidas. Para lograr esto procedimos de manera abductiva, tratando de dar cuenta explicativamente de conjuntos de datos analizados. Las explicaciones construidas, en calidad de conjeturas, fueron constantemente puestas a prueba al intentar explicar conjuntos de datos similares. Este proceso nos permitió refutar algunas de estas conjeturas, cuando no lograban dar cuenta de nuevos datos analizados, o refinarlas y reforzarlas inductivamente cuando resultaban adecuadas. Los temas incipientes que emergieron de este proceso dirigieron nuestras acciones de investigación hacia la búsqueda de evidencias, tanto positivas como negativas, que nos permitieran delimitarlos y dar cuenta de sus distintas dimensiones. Las reflexiones en este sentido fueron consignadas en los memos que, posteriormente, nos permitieron crear los textos sintéticos que consignan estos temas y que presentamos como resultados de nuestro estudio en el Capítulo 6.

En el caso del primer y segundo objetivo de investigación, el esfuerzo por interpretar las acciones de los alumnos a partir de la emergencia y uso de distintas condiciones de validez como instancias recurrentes de procesos de validación y comunicación de resultados, nos permitió identificar elementos epistemológicamente relevantes de distintos procesos de resolución analizados. Estos elementos, capturados en códigos y en memos en los que se reflexiona acerca de su papel en los distintos procesos en los que fueron observados, constituyen las estructuras de significados que dan origen a los cinco temas que presentamos en el Capítulo 6 y que dan cuenta de nuestro primer y segundo objetivo de investigación.

En el caso del tercer objetivo de investigación, el análisis de acciones del profesor en sus interacciones con los alumnos, así como de acciones posteriores de estos, permitió identificar elementos relevantes a partir de los que caracterizamos las estrategias comunicativas del profesor. Es a partir de interpretaciones de estas acciones, capturadas mediante la codificación y escritura de memos, que emergen cuestiones relevantes que evidencian estructuras temáticas en la gestión realizada por cada uno de los profesores. De estas estructuras temáticas damos cuenta en el último tema que presentamos en el Capítulo 6, mediante el cual conseguimos el tercer objetivo de nuestro estudio.

4.6. Criterios de rigor y validez científica

En todo momento hemos procurado que las acciones de investigación emprendidas resultaran pertinentes para la consecución de nuestros objetivos; es decir, cada acción de investigación estuvo motivada por la reflexión acerca de su adecuación y encaje en una planeación coherente dirigida a la consecución de los objetivos. De esta planeación, su coherencia y rigor hemos intentado dar cuenta en esta memoria; tanto en lo que se refiere a la revisión de la literatura, a la concreción del marco teórico como al diseño metodológico. En esta sección referimos algunas cuestiones específicas que fueron consideradas para garantizar el rigor científico del estudio.

Las bases epistémicas de lo que se hace y dice no son algo de lo que la gente de cuenta de manera explícita habitualmente; de hecho, la reflexión consciente respecto de esta cuestión no resulta una tarea fácil, ni siquiera para quien se esfuerza deliberadamente (Toulmin, 1972). Sin embargo, según Toulmin, estas bases son constitutivas de las preferencias prácticas de una persona en su trato intelectual con el mundo, y por lo tanto evidenciables en sus acciones; "haciendo explícitos los argumentos subyacentes en sus ambiciones conceptuales e insatisfacciones, traemos a la luz su autorretrato epistémico" (p. 3). El esfuerzo por hacer explícitas las bases epistémicas de las acciones de las personas, constante durante nuestro análisis, es necesariamente interpretativo, por lo que medidas para justificar la plausibilidad de estas interpretaciones deben ser implementadas. En este sentido, dos cuestiones principales fueron consideradas. Por un lado, hemos implementado distintas estrategias para triangular el análisis de datos y, por otro, hemos intentado ser diligentes a la hora de describir situaciones de aula con la intención de hacer transparente el análisis que nos permitió construir los temas que son los resultados del estudio.

En lo que se refiere a la triangulación del análisis de datos hemos adoptado dos medidas complementarias, tanto al nivel de la recogida de datos como al de su análisis. Uno de los objetivos principales del diseño de las entrevistas que mantuvimos con dos grupos fue posibilitar la confirmación de interpretaciones realizadas, tanto acerca del trabajo de estos dos grupos como de cuestiones generales observadas en ambas aulas. Las entrevistas nos permitieron clarificar, confirmar o rechazar interpretaciones acerca de las acciones de los alumnos de los grupos entrevistados, pero también indagar acerca de cuestiones generales observadas en el trabajo de distintos grupos en ambas aulas. Preguntas diseñadas para indagar cuestiones centrales fueron planteadas en distintos términos y relacionadas con distintas situaciones de aula, con la intención de triangular las respuestas de los alumnos (Sección 4.4.1.2.). Hubiera sido preferible entrevistar a todos los grupos observados para tener un panorama más completo y específico. Esto no resultaba posible durante la primera fase, en la cual las ideas incipientes que emergían del análisis inicial no permitían diseñar preguntas adecuadas en un plazo razonable. Durante la segunda fase, teniendo en cuenta el volumen de trabajo asumible por el investigador principal, se decidió entrevistar solamente a dos grupos. Consideramos que esta limitación fue adecuadamente cubierta por el diseño cuidadoso de las dos entrevistas realizadas.

Por otro lado, procuramos contar con diversas miradas a nuestro conjunto de datos. La participación ocasional de otros investigadores del Grupo de Investigación, familiarizados con el marco teórico, en la interpretación de situaciones analizadas fue crucial para detectar desviaciones idiosincrásicas y para confirmar o rechazar interpretaciones particulares. La triangulación de interpretaciones con la intensión de buscar consenso nos permitió dar consistencia y plausibilidad a conjeturas realizadas, o rechazarlas cuando este consenso no pudo ser alcanzado. Con este fin se participó en distintos seminarios de investigación, tanto en nuestra universidad como en otras instituciones, bajo financiación del Proyecto y del Grupo de Investigación de referencia, en los que tanto los métodos de análisis como sus instancias particulares fueron sometidos al escrutinio de especialistas. En particular, una estancia realizada durante tres meses en una universidad italiana, bajo financiación de la Universitat Autònoma de Barcelona, permitió colaborar estrechamente en este sentido con otro investigador especialista en cuestiones afines. La triangulación de perspectivas y miradas sobre los datos de nuestro estudio fue un elemento central en el esfuerzo por dotar de plausibilidad a nuestros resultados. No menos importante ha sido la presentación de resultados parciales de nuestra investigación en distintos congresos internacionales bajo financiación del Proyecto y del Grupo de Investigación de referencia; tanto los procesos de revisión de los textos enviados, como las reacciones durante exposiciones, sirvieron para hacer consideraciones generales acerca de la relevancia y plausibilidad del trabajo.

En lo que se refiere a la transparencia del análisis, coincidimos con Voigt (1995) en que, en el caso de estudios cualitativos, para justificar sus interpretaciones acerca de una situación el investigador debe proveer descripciones copiosas de la situación, aclarar su perspectiva teórica y relacionar estas interpretaciones con otras realizadas previamente. De modo que hemos intentado en todo momento justificar nuestras interpretaciones e inferencias proveyendo extensas y significativas descripciones de las situaciones analizadas. En estas descripciones hemos procurado evidenciar nuestras interpretaciones, relacionando los datos con las nociones que fundan nuestra perspectiva teórica. En otras palabras, hemos intentado evidenciar nuestra mirada sobre los datos de modo que quien sigue nuestro análisis pueda contrastar esta mirada con la propia, y así juzgar la plausibilidad de nuestras interpretaciones e inferencias.

Finalmente, es difícil decidir si los temas que presentamos como resultados de nuestra investigación capturan las cuestiones más relevantes de acciones de los participantes. La relevancia está relacionada con la perspectiva teórica adoptada y no es una componente objetiva, intrínseca a los datos. En este sentido, otro investigador podría haber evidenciado otras cuestiones y, por lo tanto, producido otros temas con base en su posicionamiento teórico y trayectoria científica. Es esencial haber establecido con claridad el posicionamiento teórico e intereses generales de investigación, desde los cuales la relevancia y pertinencia de nuestros resultados pueden ser consideradas.

5. Análisis de datos

En este capítulo presentamos el análisis temático (Van Manen, 1990) llevado a cabo sobre los datos. Es decir, mostramos cómo analizamos los datos con la intención de poner en evidencia cuestiones relevantes desde el punto de vista asumido en nuestro estudio. A partir de este análisis construimos los temas que presentamos en el siguiente capítulo como resultados de investigación y que nos permiten conseguir los objetivos planteados.

Explicamos el análisis de manera organizada en relación con los objetivos. Dado que la emergencia y satisfacción de condiciones de validez, como parte de procesos de validación de la producción matemática en el aula, es de gran relevancia en nuestro estudio y es una cuestión transversal a los tres objetivos, en la primera Sección 5.1 analizamos procesos de emergencia de condiciones de validez. Presentamos este análisis con el triple propósito de documentar condiciones de validez frecuentemente observadas, ilustrar su complejidad y ejemplificar el análisis mediante el cual mostramos su emergencia. En la Sección 5.2, en relación con el primer y segundo objetivos, enfocamos el análisis en el trabajo en grupo de los alumnos y en la interacción con el profesor. Analizamos procesos de validación de modelos matemáticos llevados a cabo por tres grupos de alumnos, con los cuales ejemplificamos cuestiones observadas en todos los grupos estudiados. Esto nos permite identificar cuestiones epistemológicamente relevantes del trabajo de los alumnos, a partir de las cuales caracterizamos procesos de construcción de la validez de la producción matemática mientras trabajan en grupo. Paralelamente, analizamos cómo los alumnos presentan su trabajo al profesor y cómo en estas interacciones se construye la validez de la producción matemática. A partir de este análisis emergen los temas del siguiente capítulo, mediante los cuales alcanzamos los objetivos uno y dos del estudio. En la Sección 5.3, en relación con el tercer objetivo, enfocamos el análisis en la gestión realizada por los profesores. Esto nos permite mostrar cuestiones relevantes de las acciones de los dos profesores y construir el tema mediante el cual caracterizamos la gestión de procesos de construcción de la validez de la producción matemática.

Presentamos este tema en el siguiente capítulo para alcanzar el tercer objetivo del estudio.

Las transcripciones de este capítulo aparecen numeradas por orden de aparición en el manuscrito. Entre paréntesis identificamos el grupo (los seis grupos observados y las dos puestas en común) o el profesor, el orden de aparición dentro de la sección correspondiente (relativo al grupo o al profesor) y su origen (1a sesión, S1; 2a sesión, S2; o entrevista, E). Dentro de cada transcripción, la numeración de cada turno corresponde a su lugar en la secuencia de intervenciones del grupo en la sesión correspondiente o en la entrevista.

5.1. Emergencia de condiciones de validez

Después de leer el problema individualmente, en todos los grupos observamos la búsqueda de interpretaciones comunes. Algunos alumnos recurren al parafraseo en voz alta del enunciado o a la descripción de la situación planteada en otros términos para indicar su punto de vista y buscar la aprobación de sus compañeros. De manera generalmente tácita, utilizan conocimientos, creencias y referencias relacionadas con el juego y la situación planteados para derivar cuestiones no explícitas en el enunciado. Los alumnos intervienen para hacer explícitos datos numéricos derivados de los datos del enunciado y algunas consecuencias. En todos los grupos hay intervenciones donde se destaca que: a un jugador le faltan tres puntos para ganar y al otro uno; según las reglas del juego ninguno ha ganado; el jugador que ha obtenido más puntos tiene más posibilidades de ganar pero ambos jugadores pueden ganar aún. A partir de estas intervenciones los alumnos construyen un marco interpretativo para el problema; es decir, relacionan de manera coherente referencias que consideran relevantes para interpretar la situación. Las intervenciones iniciales de Anna durante la primera sesión, en el grupo EA, ejemplifican esto:

Transcripción 1 (EA-1-S1)

110_Anna:	Vale. O sigui, a aquest només li falta un punt i a aquest tres per arribar als sis euros. Però clar, com que és a l'atzar, el joc, un té més possibilitats. Perquè imagina't que ara, de repent, si no s'aturés el joc... imagina't, podrien tocar tres seguides de creu i llavors guanyaria aquest, o sigui, sí que té més possibilitat de guanyar l'A, però també és possible que guanyi el B.

111_Vasi: Molt bon raonament, Anna.

112_Anna: A veure, pel que hi ha aquí s'hauria de quedar més diners el jugador A. Perquè ha tingut més punts.

Anna describe la situación como un 'juego de azar' [110] y con ello parece apelar a ciertos conocimientos compartidos acerca del juego y su dinámica. Haciendo uso de la noción de posibilidad, determina que el jugador que va ganando (al que denomina A) tiene más posibilidades de ganar que su contrincante. Vasi no solamente parece estar de acuerdo [111], sino que valora positivamente la intervención de Anna. Anna interpreta la división del dinero de la apuesta en relación con la ventaja de un jugador sobre el otro [112]: el jugador que va ganando tiene más posibilidades de ganar y por lo tanto debe recibir más dinero.

Al describir la situación en estos términos Anna trae a la conversación, de manera tanto explícita como implícita, referencias constituyentes de un marco interpretativo (experiencias con juegos de azar y lanzamiento de monedas, discursos públicos sobre estos, etc.) así como palabras adecuadas para hablar al respecto. Este corpus de referencia (Douek, 2007) funda semántica y empíricamente la interpretación de Anna y sus compañeras acerca de la situación; a partir de estas referencias las alumnas conforman un modelo de la situación (Blum y Leiß, 2007). Este modelo puede variar a lo largo del proceso de resolución mediante su revisión crítica, pero sea cual fuere el modelo de la situación vigente en un momento dado, cualquier respuesta al problema deberá dar cuenta de este modelo para ser considerada válida. En este grupo, por ejemplo, a partir de la interpretación inicial de Anna, cualquier respuesta deberá conceder más dinero al jugador en ventaja. De modo que este marco interpretativo ofrece a los alumnos la posibilidad de evaluar operativamente la validez de cualquier solución numérica que se ofrezca y, a la vez, del modelo matemático dentro del cual esta es construida. Anna establece así lo que llamamos una condición de validez, enunciable como: 'el jugador que ha obtenido más puntos debe recibir más dinero'. La validez de un posible modelo matemático implicará la satisfacción de esta condición de validez en este marco interpretativo.

La condición de validez que emerge está ligada a la dimensión empírica del problema. Aunque no podamos saber con precisión a qué se refiere Anna con "tiene más posibilidades de ganar A, pero también es posible que gane B", esta frase describe un estado imaginado de cosas en el mundo. Tener más puntos implica tener más posibilidades de ganar y esto afecta la repartición del dinero en favor de quien tiene la ventaja. Un modelo matemático que represente esta situación tendrá que dar cuenta de este estado de cosas como condición necesaria de validez; es decir, tendrá que dar cuenta de este aspecto empírico del modelo de la situación. Anna indica esta necesidad en la condición de validez que propone. De manera similar, el reconocimiento de que el jugador en desventaja tiene aún posibilidades de ganar, podría sugerir que debe recibir una parte no nula de la apuesta. Esta podría ser otra condición de validez derivada del marco interpretativo generado. Sin embargo, esta proposición no se hace explícita por lo que desconocemos su estatus.

La dimensión epistémica del comportamiento racional de Anna y sus compañeras (según el uso de comportamiento racional en Habermas, 1998) parece estar asociada en este momento con la necesidad de establecer constricciones que emergen de su marco interpretativo. Esta actividad apoya dos procesos: la búsqueda abductiva de un modelo de la situación que represente los aspectos empíricos de la situación y, con base en esta representatividad, la justificación de su validez; lo que da cuenta de la dimensión teleológica del comportamiento racional de las alumnas.

No siempre las referencias que evocan los alumnos aparecen organizadas y explícitas como en este ejemplo. Consecuentemente, no siempre resulta sencillo distinguir las condiciones de validez que emergen en la conversación. Por ejemplo en el grupo DB, formado por Roy, Tom y Stan, después de que los alumnos leen individualmente el enunciado, la siguiente conversación tiene lugar:

Transcripción 2 (DB-1-S1)

005_Roy	És que per què volen saber això? Que cadascú es quedi els seus diners i ja està.
006_Tom	O que continuïn amb la partida un altre dia.
007_Stan	O si no, a hòsties!
008/017_Roy	A veure, hi ha dos jugadors (...) I cadascú ha ficat tres euros (...) si un tira cara obté un punt. I l'altre quan tira creu té un punt. I un ha guanyat set llançaments i l'altre cinc.
018_Stan	Pues vol dir que es queda amb els sis el de set i ja està... o no?
019_Roy	No, pues que es quedi cinc i que l'altre se'n quedi un.
020_Tom	Bé, aquest és el que hem de trobar.
021_Roy	Sí, això és el que hem de trobar.

Las primeras tres intervenciones [5, 6 y 7] se fundan en que, según las reglas del juego, nadie ha ganado aún. Según Roy, cada jugador debe recuperar aquello que apostó [5]; según Tom la partida debe continuar en otro momento [6]; y según Stan, que bromea, la repartición se debe dirimir a golpes [7]. Las tres intervenciones destacan que el único criterio público y aceptado que consiente repartir el dinero no es aplicable, pues ningún jugador ha obtenido los ocho puntos necesarios. El hecho de que Roy relea y parafrasee el enunciado [8-17] y que sus compañeros le sigan parece indicar que ninguna de las tres propuestas tiene gran aceptación o merece, en ese momento, consideración.

Stan propone [18] entonces que el jugador en ventaja se quede toda la apuesta. No sabemos si su propuesta es seria o continúa en tono de broma; sin embargo, parece plausible que se base en el hecho de que el jugador que ha obtenido más puntos tiene algún tipo de ventaja. Roy la rebate proponiendo otra respuesta numérica concreta, según la cual el jugador en ventaja recibe una parte mayor (cinco euros) y el otro jugador una parte no nula (un euro) [19]. Tampoco aquí resulta claro el criterio utilizado para proponer esta solución numérica. El comentario de Tom sugiere que ninguna de las soluciones numéricas propuestas es satisfactoria [20]: el objetivo de la actividad es precisamente "encontrar eso". Entendemos que el alumno se refiere a 'la solución numérica adecuada' del problema; de modo que un criterio que la justifique como tal debe ser presentado.

Aunque las soluciones de Stan y Roy no sean aceptadas como válidas, indican la condición de validez según la cual quien ha obtenido más puntos debe recibir una parte mayor. Esta interpretación será corroborada por sus intervenciones posteriores, en las que esta condición de validez se hará explícita. El hecho de que Roy rebata la propuesta de Stan [9] apunta al reconocimiento de que, dentro del marco interpretativo según el cual considera la situación, el jugador que tiene menos puntos debe recibir una parte no nula de la apuesta. Esto resulta indicativo de las referencias que conforman el marco interpretativo de Roy. Al igual que Anna en el grupo EA, Roy parece reconocer que el jugador en desventaja tiene aún posibilidades de ganar y considera que esto debe reflejarse en el reparto de la apuesta. Así se señala la condición de validez según la cual 'el jugador en desventaja debe recibir una parte no nula de la apuesta', la cual Roy parece operativizar para rebatir la propuesta de Stan.

Más adelante los alumnos de este grupo se refieren a estas condiciones de validez:

Transcripción 3 (DB-2-S1)

074_Roy	A veure, està clar que aquest ha d'emportar-se més de la meitat.
075_Tom	El que està clar és que si has de marxar no t'estaràs a fer un problema.
076_Roy	Ja (...) Està clar que aquest s'ha d'emportar la majoria perquè en té set, i aquest només cinc.

Roy explica que 'el jugador que ha obtenido más puntos debe recibir más dinero'. En cambio, parece menos claro el estatus de la otra condición de validez, que queda sólo sugerida cuando adjudica "la mayoría" (como opuesto a 'todo') al jugador en ventaja.

En las conversaciones de clase de los alumnos de todos los grupos, a partir de sus referencias compartidas en relación con el juego y su dinámica, emergen estas condiciones de validez, tal vez de manera implícita, de modos que influyen en sus acciones. Este corpus de referencia es parte de la conformación de un marco interpretativo que consiente a los alumnos relacionar los modelos y soluciones que proponen con los aspectos empíricos que consideran y que asocian con la situación.

Ahora bien, la intervención de Tom [75] da ocasión para discutir otro tipo de condición de validez. La objeción de este alumno llama la atención sobre una cuestión relevante: de estar en la situación descrita, estos alumnos tomarían una decisión sin necesidad de resolver un problema matemático, lo cual parece impracticable en la situación planteada. Tal vez las soluciones iniciales [5, 6, 7, 18 y 19], que fueron descartadas sin mayor discusión, no estén tan alejadas de las decisiones que estos alumnos tomarían de encontrarse en tal situación. Estas soluciones aparecen con mayor o menor frecuencia en todos los grupos y, sin embargo, son descartadas sin mayores consideraciones. Reconocemos en estas acciones una cláusula habitual del contrato didáctico según la cual cualquier respuesta válida debe estar relacionada con actividades matemáticamente significativas. Esta cláusula se ve reforzada en cada aula por la introducción de los profesores para la actividad (Secciones 4.3.1 y 4.4.1). Al introducir el problema, Dan se dirige a la clase del siguiente modo:

Transcripción 4 (Dan-1-S1)

Dan	S'ha d'argumentar. No val dir, tal cosa. No. Tal cosa per tal raó per tal argument, per tal cosa. D'acord? No us deixeu emportar per la qüestió fàcil. (…) Aprofiteu tots els recursos que teniu per intentar argumentar la resposta que donareu a aquest problema. Penseu que els dos jugadors saben moltes matemàtiques. Què significa? Que no es conformaran amb la resposta que doni un jugador o que doni l'altre. Per tant vosaltres heu de justificar la resposta que doneu.

Dan enfatiza que los jugadores saben muchas matemáticas y que, debido a ello, no se conformarán con cualquier respuesta. Les pide a los alumnos que justifiquen sus soluciones y les recomienda que no se dejen llevar por soluciones fáciles. Ellen, por su parte, se dirige a la clase diciendo lo siguiente:

Transcripción 5 (Ellen-1-S1)

Ellen	Es un problema que históricamente ha sido muy relevante. Después de que lo resolvamos, explicaremos cómo este problema, tanto Pascal como Fermat, en la discusión que tuvieron sobre este problema, surgió una rama de las matemáticas que es muy importante.

Ellen informa a sus alumnos de que este es un problema históricamente muy relevante, que está en el origen de una rama muy importante de las matemáticas. Los comentarios de ambos profesores sugieren que el problema reviste cierta complejidad matemática. Por otro lado hay observadores presentes, con cámaras y micrófonos para registrar la sesión, lo cual posiblemente refuerza esta idea.

El contrato didáctico, reforzado por estas introducciones de los profesores, funciona como una condición de validez: 'la respuesta debe ser matemáticamente valiosa'. Así, el resultado de la actividad de los alumnos no debe ser sólo una solución que represente adecuadamente los aspectos empíricos que consideran (según un cierto marco interpretativo), sino también que pueda ser reconocida, en el contexto establecido, como matemáticamente valiosa. No es sorprendente entonces que los alumnos descarten soluciones como las propuestas por el grupo DB, incluso a pesar de lo que suponen que harían para dirimir la cuestión si se encontraran en tal situación. Estas expectativas, observadas en todos los grupos, contribuyen a formar la dimensión teleológica del comportamiento racional de los alumnos y les permiten decidir sobre la validez de las soluciones que proponen.

Podemos reflexionar acerca de las acciones de los alumnos del grupo DB a partir del análisis de algunos de sus argumentos. Consideremos esquemáticamente los turnos 5 y 6 de Roy y Tom (Transcripción 2). En las casillas ovaladas de la Figuras 4 y 5 colocamos elementos no explicitados, que suponemos implícitos en los argumentos según nuestra reconstrucción (en el sentido dado por Krummheuer, 1995 al esquema de Toulmin); en los rectángulos colocamos los elementos explícitos.

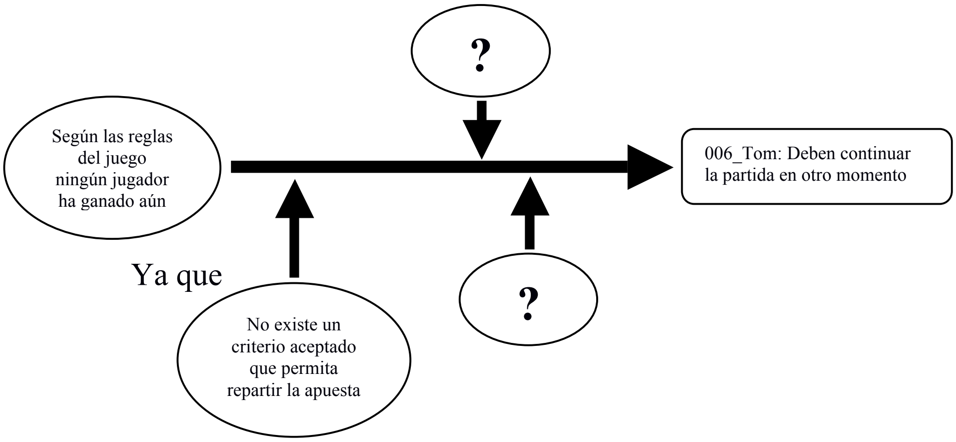


Figura 4; argumento en 6_Tom (Transcripción 2)

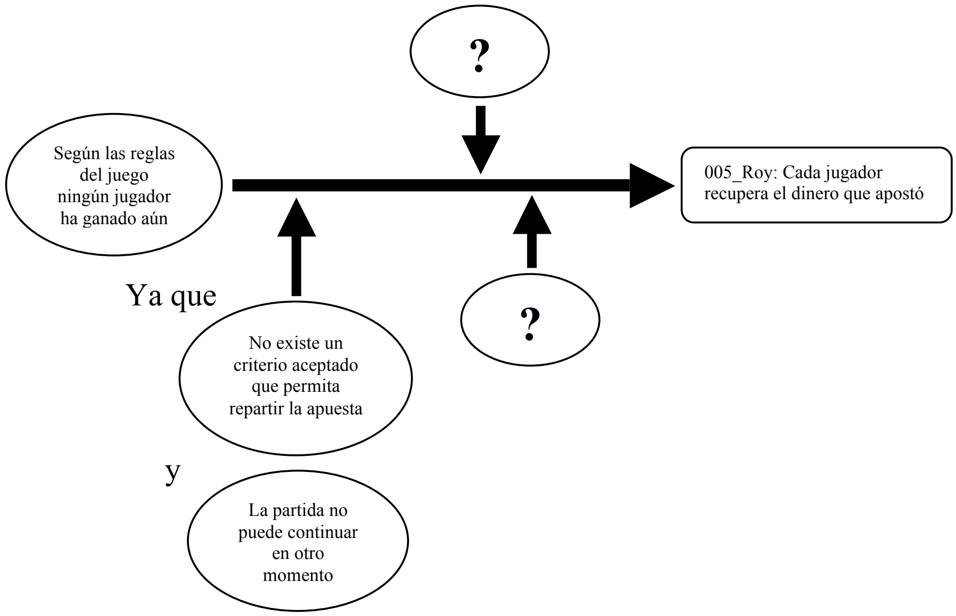


Figura 5; argumento en 5_Roy (Transcripción 2)

Si interpretamos el hecho de que los alumnos parafraseen el enunciado y sistematicen la información [8-17] como el rechazo de estos argumentos, debemos reflexionar acerca de sus posibles condiciones de refutación. Tom propone (Figura

4) que la partida continúe en otro momento [6]; de este modo el criterio a aplicar en la repartición, ante la ausencia de otro adecuado, será el que establecen las reglas del juego una vez finalice. Esta opción no queda excluida por el enunciado y si consideramos los aspectos prácticos que Tom destaca posteriormente [Transcripción 3, 75], parece digna de ser considerada. Con el argumento de Roy [5] (Figura 5) pasa algo similar; si suponemos que asume que la partida no podrá continuar y que no hay un criterio conocido y aceptado que consienta repartir la apuesta, la idea de devolver el dinero a cada jugador parece ser también digna de considerarse. Aunque el estatus epistémico de las conclusiones a las que llegan los alumnos no es claro, pues no modalizan sus expresiones, ambos argumentos proponen una solución al problema. El rechazo sin discusión de las conclusiones debe entonces significar que hay condiciones de refutación para la autoridad de la garantía esgrimida, es decir, o bien una repartición arbitraria resulta apropiada o bien existe un criterio adecuado para la repartición. Una repartición arbitraria parece atentar contra cualquier estándar de 'justicia' y, por otro lado, los alumnos no parecen contar en este momento con un criterio adecuado para hacer una repartición de la apuesta. ¿Por qué son entonces rechazados, sin más, los argumentos? Sugerimos que no son rechazados en el contexto hipotético planteado por el problema, sino en uno más amplio que incluye meta-cuestiones relacionadas con el contexto en el que la actividad de los alumnos se desarrolla. En este contexto más amplio la validez de los argumentos es evaluada no sólo en relación con los requerimientos del contexto del enunciado, sino además en relación con los requerimientos propios del contexto en que la actividad se desarrolla. La inadecuación de las soluciones propuestas no está dada por condiciones propias de la situación planteada en el enunciado, sino por las condiciones del contexto relativas al desempeño de los alumnos y la relevancia matemática de la solución. Los argumentos planteados no pueden ser válidos pues resultan matemáticamente irrelevantes y no se corresponden con las expectativas de los alumnos en relación con el desempeño que de ellos se espera. Algún criterio adecuado debe existir y es su trabajo, como alumnos de matemáticas, encontrarlo para generar una respuesta válida. Las intervenciones que siguen [18-21] indican que los alumnos reconocen así la situación y reflejan sus primeras ideas en relación con un posible criterio que permita producir una solución válida. Así surgen un marco interpretativo adecuado al contexto y las condiciones de validez que, de modo más o menos evidente, los alumnos derivan de éste [76 y 78].

La siguiente conversación entre Alin y Laura (grupo DA), al inicio de su trabajo con el problema ilustra no sólo la emergencia de las condiciones de validez analizadas antes, sino la emergencia de un modelo matemático frecuentemente observado y, con él, de nuevas condiciones de validez.

Transcripción 6 (DA-1-S1)

020_Alin	I la pregunta... Com han de repartir-se els diners?... Ah, vale, perquè un ha guanyat set i l'altre cinc.
021_Laura	A un li faltaria un per guanyar i a l'altre tres.
022_Alin	Sí... Clar, aquí hi ha una relació de vuit sis... Si guanyant sis et quedes vuit, guanyant set...
023_Laura	Bé, podria ser. La cosa està en què... Són vuit llançaments, però aquí de llançaments ja n'han fet més. O sigui, és un lío. A veure, provem això que dius tu, Alin. Si de vuit et quedes sis, de set et quedes... Estic fent una regla de tres que segur que no li farà cap gracia.
024_Alin	Per això no pot ser. No pot ser.
025_Laura	Podem provar a veure què passa (...) [calculadora] Cinc coma vint-i-cinc... però l'altre no pot ser que es quedi tan poc... Si són sis euros...
026_Alin	Setanta-cinc?
(…)	
029_Laura	Això seria [calculadora] cinc per sis entre vuit...
030_Alin	No donarà zero setanta-cinc. No, no, no.
031_Laura	És tres coma vint-i-cinc. La suma d'això és nou.

Alin relaciona el reparto de la apuesta con la ventaja de un jugador sobre el otro [20]. Al decir "porque" propone causalidad y sugiere que en función de esta ventaja se debe repartir la apuesta. La reacción de Laura, que replantea la ventaja en términos de los puntos que le faltan a cada jugador para ganar, parece confirmar esta interpretación [21]. Vemos así emerger de manera implícita tanto elementos constituyentes de un marco interpretativo asociable con los conocimientos de las alumnas acerca del juego, como la primera condición de validez discutida: 'el jugador que ha obtenido más puntos debe recibir más dinero'. En su siguiente intervención [22] Alin apoya esta interpretación cuando propone repartir la apuesta según una razón determinada, a saber 6:8. Aunque se equivoca en el uso de los datos numéricos, sus palabras corresponden a una forma habitual de evocar la proporcionalidad: "hay una relación de ocho seis"; "si ganando seis [ocho] te quedas ocho [seis], ganando siete...". Laura adopta esta interpretación y corrige el uso de los datos numéricos [23] apelando a la misma formulación: "Si de ocho te quedas seis, de siete te quedas...”. Asociamos la emergencia de este modelo matemático con problemas frecuentes y conocidos por los alumnos de estas edades sobre costos y repartos proporcionales en el contexto institucional del sistema catalán; problemas que suelen ser resueltos con la manipulación de los datos numéricos incluidos en sus enunciados y presentados de modos similares al que vemos aquí. Esta asociación es puesta en evidencia durante la entrevista sostenida con el grupo EB, cuando Joe comenta acerca del uso de la proporcionalidad en su grupo para resolver el problema:

Transcripción 7 (EB-1-E)

076_Joe	El de euros por tirada lo hemos calculado muchas veces, tanto en física como en matemáticas, como en... yo qué sé, tecnología. Porque otras cosas, otras variantes, pero siempre es dividir una cosa entre otra, te da una constante y esta constante multiplicarla por otra. Y entonces esto te da bien siempre.

La búsqueda de conocimientos matemáticos que sean adecuados apunta a la segunda condición de validez que analizamos: ‘la solución debe ser matemáticamente valiosa’. En este sentido, la intervención de Laura [23] resulta significativa, pues según ella “esta regla de tres (el reparto según la razón 6:8) no le hará ninguna gracia [al profesor]”, cuestión que Alin secunda [24]. Asociamos esta expresión con las expectativas de las alumnas en relación con la complejidad matemática del problema. El modelo explorado posiblemente parece “demasiado simple” ante los ojos de las alumnas y esto genera incerteza sobre la solución. Las expectativas en relación con la complejidad matemática de la solución aparecen como una instancia de esta condición de validez.

La siguiente intervención de Laura revela otro tipo de expectativas, esta vez relacionadas con el resultado numérico [25]. Entiende que si el jugador en ventaja obtiene cinco coma veinticinco euros, el otro debe recibir el resto: setenta y cinco céntimos. Desde su punto de vista, este último monto es “demasiado poco”. Diversos grupos que exploraron esta solución numérica (5,75€ para el jugador en ventaja y 0,75€ para el otro) a partir de la razón 6:8 manifestaron que el jugador que ha obtenido menos puntos recibe “demasiado poco”, de modo similar a como lo hacen Laura y Alin; ésta es, sin embargo, la respuesta numérica correcta de acuerdo con el modelo probabilístico que se espera de los alumnos. En el marco interpretativo que emerge entre las alumnas, determinado por la necesidad de repartir la apuesta en función de la ventaja de un jugador sobre el otro, es plausible que los conocimientos y referencias que ponen en juego (i.e., la proporcionalidad) sugieran rangos de valores adecuados (o inadecuados) para la solución numérica. La intervención de Roy (Transcripción 3, 74), indica esta misma cuestión y provee una cota inferior clara para el jugador en ventaja: debe ganar más de la mitad. Es de esperar que las experiencias de los alumnos con juegos de azar y situaciones de reparto provean referencias empíricas relativas a los resultados que cabe esperar; también es de esperar que los conocimientos matemáticos que asocian con la situación y utilizan para construir modelos matemáticos sugieran otras expectativas, posiblemente en conflicto con las anteriores aunque no necesariamente, acerca de estos resultados. La previsión de todas estas expectativas está en la base de los ejemplos problematizadores que diseñamos para el aula de Ellen y que describimos en la sección 4.4.1.1. Así, las expectativas acerca del rango en que el resultado numérico debe acomodarse conforman otra condición de validez. Una solución numérica, y con ella el modelo matemático a partir del que es construida, podrá ser puesta en duda a partir de su situación en relación con este rango.

Asociamos las expectativas de Laura con sus conocimientos sobre proporcionalidad y su experiencia con problemas que se resuelven mediante estos: al repartir proporcionalmente según la razón 6:8 una respuesta numérica como la obtenida [25] resulta inverosímil. Laura calcula [29], siguiendo el mismo razonamiento proporcional, cuánto dinero debería recibir el jugador en desventaja. Las alumnas saben que en una repartición proporcional este cálculo debería corresponder al complemento de lo que obtiene el otro jugador [30]. Según sus cálculos, esto no es así pues “la suma es nueve” [31]. A partir de aquí las alumnas abandonan este modelo y exploran otras opciones. Esto sugiere que, para ellas, el hecho de que la suma de los montos repartidos siguiendo el procedimiento no sea seis falsa definitivamente el modelo. Observamos actuaciones similares en todos los grupos que exploraron este modelo. Resulta relevante que, para rechazarlo, las alumnas pasen de una observación intuitiva, relativa a sus expectativas sobre el resultado numérico, a otra más precisa y verificable, relacionada con sus conocimientos acerca del uso de la proporcionalidad en situaciones de reparto: si el primer resultado numérico (5,25€ y 0,75€) arrojaba dudas sobre el procedimiento, el hecho de que los montos calculados utilizando la proporcionalidad (5,25€ y 3,75€) no sumen seis euros sino nueve, falsa definitivamente el modelo. Esto evidencia, por un lado, los conocimientos de los alumnos relativos a la proporcionalidad y los modos en que son utilizados; por otro lado, evidencia la emergencia de una nueva condición de validez: cualquier modelo matemático que pueda ser considerado como válido deberá arrojar una solución numérica tal que 'la suma de los montos repartidos sea seis'. Las alumnas utilizan esta condición de validez para falsar el modelo que están considerando.

Consideremos la situación a partir del análisis de dos argumentos de Laura, esquematizados en las Figuras 6 y 7:

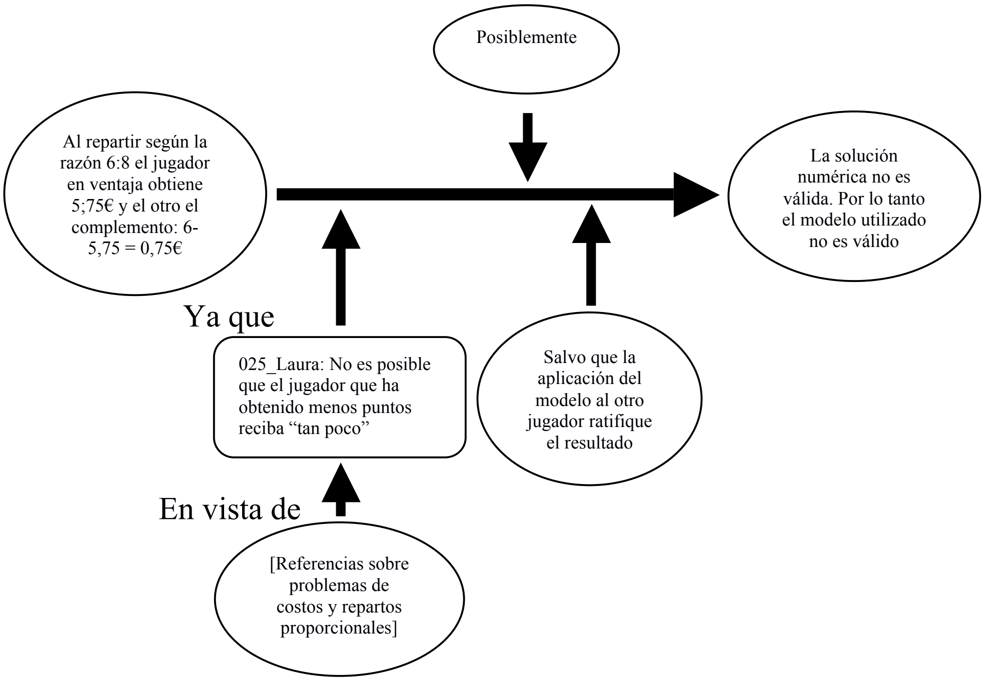


Figura 6; argumento en 25_Laura

En el argumento de la Figura 6 la primera cuestión notable es que, según nuestra reconstrucción, la alumna sólo verbaliza la garantía (ver casilla rectangular). Sin embargo, a partir de la interpretación pragmática de la interacción entre las alumnas, esta es una reformulación plausible, en términos verbales, de la acción comunicativa de Laura. La alumna comienza escribiendo los datos numéricos necesarios para calcular el monto que el jugador en ventaja debe obtener al repartir según la razón 6:8. La organización de los datos y la secuencia en el registro de los resultados corresponden a modos habituales (en el contexto institucional y curricular del estudio) de uso de la proporcionalidad en problemas de costo y reparto proporcionales. El resultado de esta operación (7 x 6/8 = 5,25) corresponde a lo que debe obtener, según este modelo, el jugador en ventaja. Tanto Laura como

Alin, que la sigue en el proceso, entienden que el otro jugador debe recibir el resto (6 - 5,25 = 0,75); cantidad que Laura parece calcular mentalmente. Las cantidades así obtenidas conforman los datos del argumento de Laura, obtenidos a partir del uso (parcial, pues sólo es aplicado al jugador en ventaja) del modelo matemático basado en la razón 6:8. El juicio que Laura emite respecto del monto que así obtiene el jugador en desventaja [25] actúa en su argumento como garantía de la conclusión. No es posible precisar cuáles son las referencias que la alumna toma como respaldo para enunciar esta “imposibilidad” o cuál es el estatus epistémico que le atribuye, pero el mismo uso de este modelo sugiere que estas referencias están relacionadas con sus conocimientos sobre proporcionalidad. Laura sabe que un cálculo similar, sustituyendo los puntos de un jugador por los del otro, debe producir como resultado el monto que el otro jugador debe recibir; así lo demuestran sus acciones siguientes. Es posible, entonces, que estas referencias estén basadas en la intuición proporcional de la alumna, que opera para sugerir la inadecuación de las cantidades. Esta intuición se funda en la experiencia que podemos suponer a los alumnos de estas edades con problemas de costos y reparto proporcionales; tal como lo sugiere la intervención de Joe en la entrevista (Transcripción 7). Es así que Laura pone en duda la validez de los resultados obtenidos y del modelo con el que fueron construidos, lo que constituye la conclusión de su argumento. Aunque no verbaliza la conclusión, y por lo tanto no la modaliza explícitamente, el hecho de que luego calcule el monto que debe obtener el otro jugador según este modelo sugiere que el estatus epistémico de la falsación construida de este modo no es ‘necesario’, sino uno que admite condiciones de refutación. Una posible condición que deslegitimaría la garantía del argumento es que la aplicación del modelo al otro jugador confirme el resultado obtenido. Al verificar esta cuestión, la alumna posiblemente hace esta consideración.

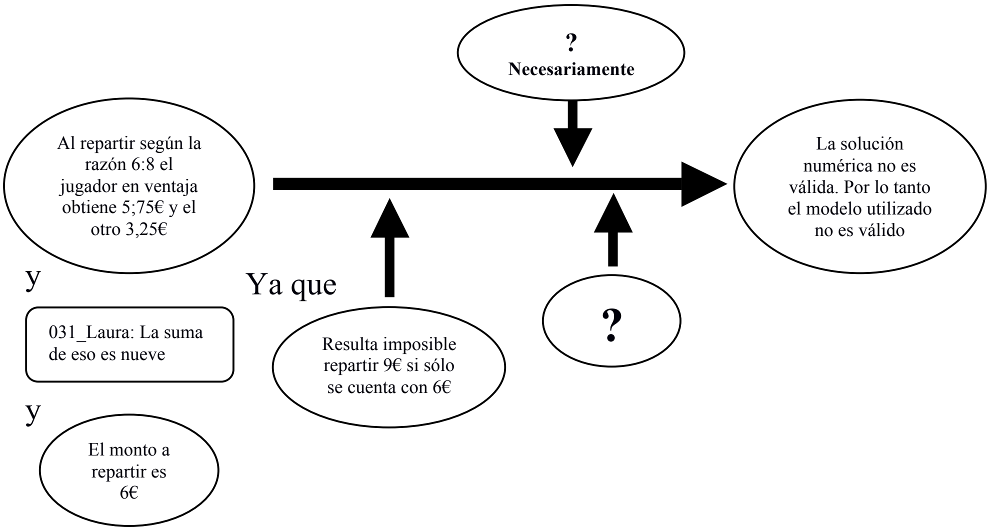


Figura 7; argumento en 31_Laura

Después de calcular, según el modelo matemático considerado, cuánto debe recibir cada jugador, Laura dice que la suma de estos montos es nueve. Junto con las condiciones planteadas en el enunciado, este es el conjunto de datos del nuevo argumento de la alumna (Figura 7). La expresión de Laura indica que, según este modelo, 'nueve euros deben ser repartidos entre los jugadores'. La imposibilidad de repartir nueve euros contando sólo con seis es la garantía de la conclusión: la solución numérica no puede ser válida y por ello tampoco el modelo a partir del cual es construida. La evidencia de esta garantía es posiblemente el motivo por el que no se verbaliza. El hecho de que las alumnas abandonen el modelo sin considerar refutaciones del argumento indica que el estatus epistémico de la conclusión es fuerte. No podemos asegurar que las alumnas la consideran 'necesaria' y por eso la marcamos con un signo de interrogación en la Figura 7, pero sus acciones indican un fuerte grado de certeza.

Ambos argumentos (Figuras 6 y 7) apoyan la misma proposición: 'el resultado numérico, y con él el modelo matemático, no son válidos'. La garantía del primer argumento, que parece admitir condiciones de refutación y por ello sólo consiente una modalización débil de la conclusión, es sustituida por otra, en el segundo argumento, que consiente la falsación (aparentemente) necesaria del modelo. La sustitución de una garantía basada en una observación intuitiva (relativa a expectativas sobre el resultado numérico) por otra verificable (relacionada con conocimientos bien establecidos sobre el uso de la proporcionalidad) revelan una actuación competente por parte de las alumnas en relación con la actividad modeladora. La garantía esgrimida, que reformulamos como 'los montos repartidos deben sumar seis', es una condición de validez utilizada por todos los grupos para validar (aceptar o rechazar) los modelos que proponen.

Con el análisis realizado hasta aquí, hemos mostrado cómo es que distintas condiciones de validez emergen en el trabajo en grupo y permiten a los alumnos decidir acerca de la validez de su producción matemática. Hemos analizado datos de cuatro grupos y de ambos profesores para evidenciar la emergencia y uso de condiciones de validez observadas frecuentemente en el trabajo de los distintos grupos. Nuestro análisis da cuenta de la complejidad de los procesos de emergencia de estas condiciones de validez, las cuales enraízan tanto en la necesidad de representar datos empíricos relacionados con referencias compartidas, como en la necesidad de producir una solución aceptable en el contexto del aula de matemáticas. En esta sección hemos ilustrado cómo el análisis llevado a cabo da cuenta de la emergencia de condiciones de validez, cuestión relevante, en las dos próximas secciones, para analizar procesos de construcción de validez de la producción matemática y la gestión realizada por los profesores de estos procesos.

5.2. El trabajo en grupo y la interacción con el profesor

En esta sección analizamos tres casos de grupos de alumnos, EA, DC y EC, mientras trabajan juntos para resolver el problema planteado. Dado que el trabajo en grupo es la base de la interacción con el profesor y que esta interacción condiciona el trabajo en grupo, analizamos ambos tipos de situación paralelamente. Para cada caso, presentamos las distintas situaciones en orden cronológico, enfocando el análisis en procesos de construcción de la validez de la producción matemática. Los subtítulos que incluimos destacan los aspectos más relevantes de las situaciones a las que se refieren; esto pretende proveer una visión general organizada de la trayectoria de resolución de cada grupo.

5.2.1. El caso del grupo EA

Emergencia del marco interpretativo y de las primeras condiciones de validez

Como vimos en la sección anterior, mientras trabaja con su grupo durante la primera sesión, Anna asocia la situación propuesta con referencias compartidas en relación con juegos de azar [110 y 112]. Así la alumna funda un marco interpretativo que permite al grupo construir un modelo de la situación y dar cuenta del problema: la apuesta se debe repartir en función de la ventaja de un jugador sobre otro (Sección 5.1, Transcripción 1).

Transcripción 8 (EA-1-S1)

110_Anna:	Vale. O sigui, a aquest només li falta un punt i a aquest tres per arribar als siseuros. Però clar, com que és a l'atzar, el joc, un té més possibilitats. Perquè imagina't que ara, de sobte, si no s'aturés el joc... imagina't, podrien tocar tres seguides de creu i llavors guanyaria aquest, o sigui, sí que té més possibilitat de guanyar l'A, però també és possible que guanyi el B.
111_Vasi:	Molt bon raonament, Anna.
112_Anna:	A veure, pel que hi ha aquí s'hauria de quedar més diners el jugador A. Perquè ha tingut més punts.

En el marco interpretativo dado por las referencias compartidas que Anna evoca en sus intervenciones, emerge la condición de validez que en la sección anterior enunciamos como 'el jugador que ha obtenido más puntos debe recibir más dinero'. Dentro de este marco interpretativo, las alumnas proponen y exploran un primer modelo matemático:

Transcripción 9 (EA-2-S1)

116_Anna	Vale, llavors si sis és el total...
117_Vasi	Hem de calcular... Si calculem quant val un punt...
118_Anna	Espera, espera.
119_Zoe	I si fem el percentatge?
120_Anna	Hem de dir: un punt quants diners.
121_Vasi	El que acabo de dir jo.
122_Anna	Ah, ¿sí?
123_Zoe	Un punt de vuit…
124_Anna	Sí, un punt de vuit, quants diners. O sigui. ¿Sis entre vuit? No, perdó... Sí, ¿sis entre vuit?

125_Josy	Zero coma setanta-cinc.
(...)	
130_Josy	És a dir, que un punt són zero setanta-cinc.
131_Anna	Això és un punt.

Cuando Vasi recuerda al grupo la necesidad de recurrir a cálculos [117] y cuando Zoe sugiere calcular porcentajes [119], reconocemos la condición de validez según la cual 'la solución debe ser matemáticamente valiosa'. Para resolver el problema se debe recurrir a conocimientos matemáticos y utilizarlos de maneras que sean socialmente reconocibles. El contrato didáctico condiciona la actuación de este grupo de modo similar a como lo describimos en la Sección 5.1 para el grupo DB (Transcripciones 2 y 3). Las alumnas orientan su actividad hacia la construcción de una solución que sea reconocible como adecuada en el contexto del aula de matemáticas, lo que da cuenta de la dimensión teleológica de su comportamiento racional en este momento. Las intervenciones de Anna [120, 124 y 131] y de Josy [125 y 130] consignan el modelo matemático que proponen para describir y solucionar la situación. Es posible sintetizarlo como: 'si ganando ocho puntos se obtienen seis euros, por cada punto obtenido los jugadores deben recibir setenta y cinco céntimos'. Al igual que en el caso del grupo DA (Sección 5.1, Transcripción 6), asociamos la emergencia de este modelo con problemas habituales para este nivel sobre costos y repartos proporcionales, los cuales suelen resolverse manipulando los datos numéricos ofrecidos. Las acciones de las alumnas sugieren que consideran la proporcionalidad y esta tipología de problemas como referencias posiblemente adecuadas para resolver el problema. El uso de los verbos 'valer' y 'costar' por parte de Vasi [117] y Anna [169 y 171], respectivamente, confirman esta interpretación.

Falsación del modelo matemático inicial, emergencia de nuevas condiciones de validez y del modelo matemático proporcional

Zoe nota que la solución numérica obtenida mediante este modelo no es válida:

Transcripción 10 (EA-3-S1)

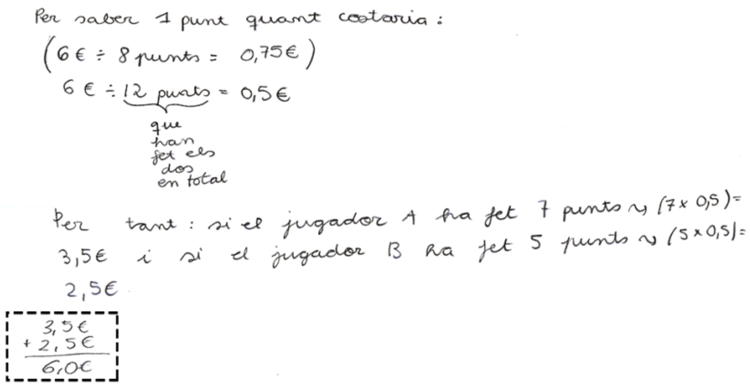
132_Josy	No, però llavors només arribaran sis euros si fan vuit punts i aquí han fet dotze punts.
133_Anna	És veritat.

Josy indica que la aceptación del modelo propuesto conlleva una interpretación incoherente de la situación [132]: si cada jugador obtiene setenta y cinco céntimos por punto, se repartirán seis euros sólo si han hecho ocho puntos en total, pero han hecho doce puntos. Dicho de otro modo, el modelo matemático implica que se han hecho ocho puntos y en cambio se han hecho doce. Poniendo de manifiesto que el modelo matemático no representa adecuadamente elementos empíricos de la situación, las alumnas falsan el modelo. El rechazo del modelo matemático por este motivo indica la dimensión epistémica de la actividad modeladora del grupo. En el argumento de Josy vemos emerger la condición de validez, observada también en el grupo DA (Sección 5.1, Transcripción 6), según la cual ‘los montos a repartir deben sumar seis euros’ (nótese que en el marco de este modelo, los montos repartidos suman seis euros si y solamente si se han hecho ocho puntos). El uso de esta condición de validez se pone de manifiesto en las siguientes acciones de las alumnas, quienes intentan corregir el modelo matemático:

Transcripción 11 (EA-4-S1)

135_Anna	Clar, no, llavors hem de dividir el set... Espera, hem de dividir, set més cinc, dotze. Doncs hem de dividir entre dotze. A veure quant dóna entre dotze.
139_Anna	Zero coma cinc.
140_Zoe	Sí.
141_Anna	Llavors, zero coma cinc per set? Calcula un segon.
142_Josy	Tres coma cinc.
143_Zoe	Sí, tres coma cinc, és la meitat.
144_Anna	I zero coma cinc per cinc?
145_Zoe	Dos coma cinc.
146_Anna	I dos coma cinc més tres coma cinc?
147_Josy	Precisa!
148_Anna	Ja està. És això!

Anna propone un nuevo modelo matemático [135], que corresponde a la distribución proporcional a los puntos obtenidos por cada jugador. No es posible saber si esta propuesta se funda en sus conocimientos sobre proporcionalidad o si está manipulando de modo tentativo los datos numéricos del texto. Es decir, no podemos decidir si la sustitución de ocho (los puntos necesarios para ganar el juego) por doce (los puntos conseguidos por ambos jugadores) en el modelo original, corresponde a un proceso reflexivo acerca de la aplicación de la proporcionalidad o si se manipulan los datos numéricos con la intención de obtener un resultado que satisfaga la condición de validez con la que se opera ('la suma de los montos repartidos debe ser seis euros'). Posteriormente Anna escribirá que doce son los puntos "que han hecho los dos en total" (Figura 8). En cualquiera de las dos opciones, calculando [139-146] los montos que deben ser repartidos según este modelo matemático (3,5€ para el jugador en ventaja y 2,5€ para el otro) y cerciorándose de que suman seis euros, las alumnas muestran la inmunidad de este modelo al proceso de falsación aplicado al modelo precedente. En sus textos escritos todas ellas destacan el hecho de que los montos repartidos suman seis euros (Figura 8-11). Para las alumnas, el hecho de que este modelo no pueda ser falsado del mismo modo que el anterior es una confirmación positiva de su validez [147 y 148], aunque su estatus epistémico no es claro a partir de estas intervenciones ni de sus textos escritos.



Per saber 1 punt quant costaria:

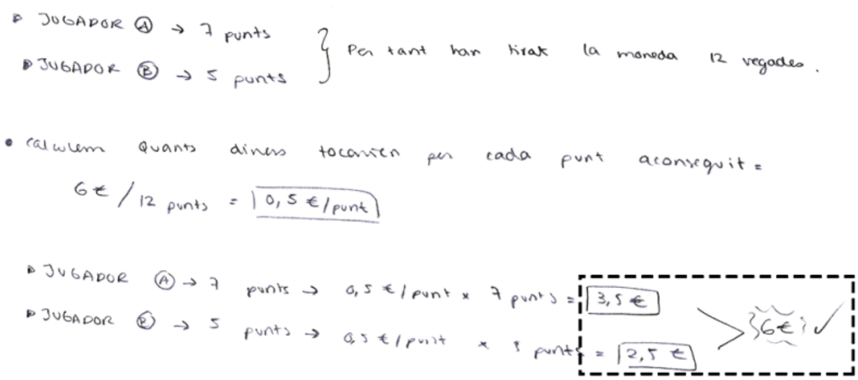
(6€ ÷ 8 punts = 0,75€)

$6\,€ \div \underbrace{12 \text{ punts}}_{\text{que han fet els dos en total}} = 0{,}5\,€$

Per tant: si el jugador A ha fet 7 punts ~ (7 × 0,5) = 3,5€ i si el jugador B ha fet 5 punts ~ (5 × 0,5) = 2,5€

3,5€ + 2,5€ = 6,0€

Figura 8; texto de Anna (1)



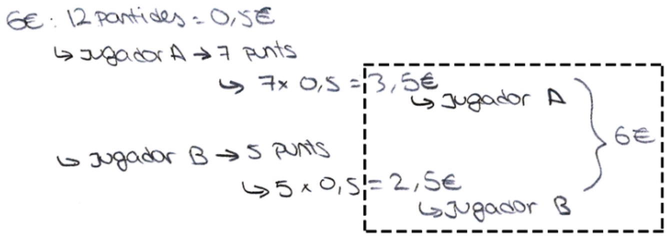
▸ JUGADOR (A) → 7 punts
▸ JUGADOR (B) → 5 punts
} Per tant han tirat la moneda 12 vegades.

• Calculem quants diners tocaran per cada punt aconseguit:

6€ / 12 punts = 0,5 €/punt

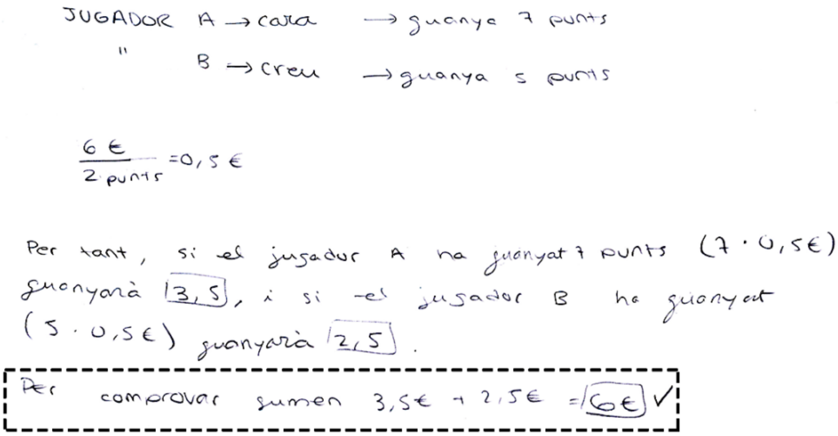
▸ JUGADOR (A) → 7 punts → 0,5 €/punt × 7 punts = 3,5 €
▸ JUGADOR (B) → 5 punts → 0,5 €/punt × 5 punts = 2,5 €
> 6€

Figura 9; texto de Josy



6€ : 12 partides = 0,5€
↳ Jugador A → 7 punts
↳ 7x 0,5 = 3,5€
↳ Jugador A
↳ Jugador B → 5 punts
↳ 5 x 0,5 = 2,5€
↳ Jugador B
6€

Figura 10; texto de Vasi (1)



JUGADOR A → cara → guanya 7 punts
" B → creu → guanya 5 punts

$\frac{6 €}{2 \text{ punts}}$ = 0,5 €

Per tant, si el jugador A ha guanyat 7 punts (7 · 0,5€) guanyarà 3,5, i si el jugador B ha guanyat (5 · 0,5€) guanyarà 2,5.

Per comprovar sumen 3,5€ + 2,5€ = 6€ ✓

Figura 11; texto de Zoe

Las acciones llevadas a cabo hasta aquí parecen proveer a las alumnas de un alto nivel de certeza en relación con el modelo matemático construido (a partir de ahora, ‘modelo proporcional’) y con la solución numérica obtenida (a partir de ahora, ‘solución proporcional’). Suponemos que reconocen el proceso de resolución hasta el momento como positivo en relación con su desempeño matemático: han conformado un marco interpretativo a partir de referencias que consideran adecuadas; utilizando conocimientos matemáticos relevantes asociables con problemas de reparto (proporcionalidad) han generado un primer modelo matemático, el cual han falsado evaluando su representatividad en relación con la situación empírica; han entonces propuesto un nuevo modelo matemático que resuelve este problema, lo cual han comprobado utilizando sus conocimientos sobre proporcionalidad, relacionando los elementos funcionales del modelo con los datos empíricos del problema (la apuesta se repartirá proporcionalmente a los puntos obtenidos por jugador). Resulta plausible que supongan entonces que, así considerada, su actuación resulta adecuada a las expectativas de la profesora.

Desde el punto de vista epistemológico, la actividad modeladora de las alumnas hasta este momento corresponde a la búsqueda abductiva de un modelo matemático que represente aspectos empíricos de la situación (expresados como condiciones de validez) y que sea reconocible como matemáticamente valioso. La falsación del primer modelo sugiere que las alumnas asumen como necesario que el modelo matemático represente adecuadamente los elementos empíricos considerados ('el jugador que ha obtenido más puntos debe recibir más dinero' y 'la suma de los montos repartidos debe ser seis'); sin embargo parecen no reconocer que la satisfacción de estas condiciones de validez no basta para justificar (en sentido necesario) la validez del segundo modelo matemático (i.e., no reconocen su falsabilidad). Lo que hacen y dicen las alumnas acerca de la validez del segundo modelo enraíza en este control limitado de su representatividad, en la percepción de que la proporcionalidad es un conocimiento posiblemente adecuado y en que el trabajo realizado es reconocible como matemáticamente valioso.

Presentación a la profesora de la solución proporcional

Después de escribir individualmente sus resultados, sin discutirlos ulteriormente, las alumnas deciden presentar esta solución a la profesora. Lo cual hacen en los siguientes términos:

Transcripción 12 (EA-5-S1)

159_Anna	A ver, nosotras hemos pensado, si… Bueno, el jugador A [muestra sus anotaciones a la profesora] ha hecho siete puntos y el B cinco puntos, ¿vale? Hemos pensado que si los dos hubieran hecho cuatro puntos, tres euros cada uno y el repartiment seria just. Vale. Entonces hemos hecho seis euros dividido entre ocho que son el total por cuantos puntos... ¿Sabes? O sea, un punto cuánto costaría, ocho puntos en total.
160_Vasi	Però hem dit que no.
161_Anna	Pero hemos dicho: no, no, no. Como han hecho doce puntos en total... y hemos multiplicado cada punto que han hecho por cero coma cinco que cuesta un punto y nos ha dado justo [en su hoja de trabajo: "jugador A: 3,5€ y jugador B: 2,5€" y "2,5 + 3,5 = 6" (Figura 8)].

A partir del análisis del proceso de resolución de las alumnas hasta este momento, suponemos que la intención de Anna es convencer a la profesora acerca de la validez de la respuesta numérica y del modelo matemático con el que fue construida; validez sobre la que las alumnas parecen tener un alto grado de certeza. Lo que Anna dice subraya lo que ella considera buenas razones para justificar la validez de la producción del grupo. Comienza elaborando sobre una situación de empate en los puntos obtenidos (cuatro por jugador) [159], la cual puede ser considerada como un ejemplo genérico: en cualquier situación de empate la apuesta se repartirá en partes iguales entre los jugadores. Dentro del marco interpretativo generado por las alumnas, basado en sus referencias sobre juegos de azar, ésta es una consecuencia inmediata que fue indicada antes en el grupo. Anna califica este reparto como "justo", invocando así una noción de 'justicia' para describir el resultado numérico e indicar su validez (este término fue utilizado por la profesora en su presentación del problema; Sección 4.4.1 y Sección 5.1, Transcripción 5). Inmediatamente después la alumna da cuenta del primer modelo enfocándose en los ocho puntos necesarios para ganar y en la razón 6:8 como resultado parcial (dinero a recibir por punto obtenido). La formulación verbal de Anna, que pretende establecer "cuánto cuesta un punto", señala la relación que las alumnas consideran entre el problema planteado y otros relativos a costos y repartos proporcionales.

Siguiendo la intervención de Vasi [160], Anna rechaza este modelo destacando como razón que se deben considerar doce puntos en lugar de ocho, pues estos son los puntos hechos por ambos jugadores [161]. La referencia explícita al proceso de falsación del primer modelo matemático sugiere su relevancia para las alumnas. Sin embargo, parece difícil que, a partir de esta emisión, la profesora pueda reconocer este proceso, su relevancia y sus raíces epistémicas: este modelo matemático no es capaz de representar aspectos empíricos del modelo de la situación con el que el grupo opera y por lo tanto no puede ser válido.

Apoyándose en su texto escrito (Figura 8), Anna presenta el segundo modelo matemático [161], destacando el papel del valor 0,5 como resultado parcial (dinero a recibir por punto obtenido) para obtener la solución numérica, la cual muestra a la profesora por escrito. Así Anna hace evidente su interpretación del problema: se debe repartir la apuesta en función de los puntos obtenidos por jugador, y de manera implícita propone la proporcionalidad como conocimiento matemático adecuado para modelar la situación. Finalmente destaca que les "ha dado justo", mostrando en su hoja de trabajo que los montos repartidos suman seis euros, el monto total a repartir. Esta evaluación del resultado, basada en la satisfacción de la condición de validez 'los montos repartidos deben sumar seis euros' resulta significativa a la luz del proceso de resolución del grupo; especialmente considerando el papel de esta condición de validez en la falsación del primer modelo matemático y su utilización en la validación del modelo proporcional. El estatus epistémico del resultado obtenido (necesario, posible, etc.) no se enuncia, aunque la expresión "nos ha dado justo" constituye una evaluación positiva de la validez tanto del resultado numérico como del modelo mediante el cual fue construido. Esta expresión sustituye a la expresión "el reparto sería justo" del turno anterior [159] como indicador de validez (primero "justo" se refiere a 'justicia' y luego a 'exactitud'; a pesar de la homonimia esta interpretación es verosímil considerando las acciones de Anna). Si en la situación de empate la provisión de justicia garantizaba la validez del resultado, en la situación propuesta en el problema es la inmunidad al proceso de falsación lo que la garantiza.

La exposición de Anna está centrada en el uso de la proporcionalidad para obtener el resultado intermedio (0,5 céntimos por punto obtenido) que permite calcular los montos a recibir. Las referencias mediante las cuales las alumnas interpretan la tarea y construyen un modelo de la situación (Transcripción 5) son omitidas y el complejo proceso de emergencia y falsación del primer modelo matemático, como base para la construcción del modelo proporcional, es apenas sugerido. Por otro lado, la relación entre el reparto propuesto y la noción de 'justicia', utilizada por la alumna en su presentación, no es explicada o considerada. La intervención de Anna parece tener como objetivo principal exponer de manera reconocible la utilización de la proporcionalidad para la construcción de la solución numérica del problema y la destreza del grupo en su uso; éste es el elemento central de su exposición acerca de la validez del modelo matemático y de la solución numérica. El razonamiento abductivo detrás de la emergencia del modelo, y con éste el control sobre su representatividad, es apenas esbozado y su reconocimiento dejado al discernimiento de la profesora. En la interacción con la profesora observamos un cambio en torno a la justificación de la validez del modelo matemático: la complejidad epistemológica del proceso de validación dentro del grupo se ve desplazada para destacar el uso de constructos matemáticos conocidos y las soluciones numéricas producidas.

Después de la explicación de Anna, la profesora propone a las alumnas una nueva tarea:

Transcripción 13 (EA-6-S1)

162_Ellen	Muy bien. A ver, verifiquemos por ejemplo situaciones diferentes a ver si ese razonamiento se mantiene. Por ejemplo si hubiera el partido terminado... si se hubiera interrumpido cuando van siete a uno, ¿cómo

> sería? A ver si... ¿Entienden lo que digo? A ver, para probar la consistencia de la solución, probar distintas soluciones, a ver si eso se mantiene.

Es posible analizar la emisión de Ellen en al menos dos sentidos; por un lado como la solicitud que la acción comunicativa de la profesora constituye y, por otro, atendiendo a aspectos epistemológicos en relación con la validez del modelo propuesto por las alumnas. Con las expresiones “verificar situaciones diferentes” y “probar distintas soluciones”, Ellen se refiere a aplicar el modelo matemático propuesto en variaciones numéricas del problema; de hecho propone una concreta en la que el marcador del juego es “siete a uno”. También pide “verificar que ese razonamiento se mantiene”, expresión que luego parafrasea solicitando “probar la consistencia de la solución”. Basándonos en la planeación de la sesión (Sección 4.4.1.1) interpretamos que la palabra ‘razonamiento’ alude al modelo matemático propuesto por las alumnas y ‘mantenerse’ alude a la aceptabilidad de la validez del modelo. Para propiciar en clase la reflexión acerca de la representatividad de los modelos matemáticos que los alumnos proponen se planearon variaciones numéricas del problema potencialmente problematizadoras de estos modelos; la actuación de la profesora en este caso está en línea con esta planeación. Así la solicitud de Ellen podría interpretarse como ‘verificar la aceptabilidad de la validez del modelo en variaciones numéricas del problema’. Esta interpretación se corresponde con la de las alumnas, en el sentido de que su efecto perlocutivo será éste: las alumnas adaptarán el modelo a la nueva situación propuesta y verificarán que las condiciones de validez que consideraron antes son satisfechas.

A nivel epistemológico, mediante las expresiones “a ver si” y “para probar”, Ellen relaciona la validez del modelo matemático en la situación planteada (la satisfacción de las condiciones de validez consideradas) y su validez en variaciones numéricas del problema. Sin embargo, la falta de elaboración en este sentido por parte de la profesora no permite saber cuál es la interpretación que espera de las alumnas. Desde el punto de vista experto (Sección 4.2), dado que el modelo presentado por las alumnas corresponde al modelado de un fenómeno empírico a través un razonamiento abductivo, la solicitud de Ellen sugiere la búsqueda de potenciales falsadores del modelo matemático y no la verificación directa de su validez apodíctica. Es decir el modelo matemático propuesto puede ser falsado si su aplicación en variaciones numéricas del problema no satisface las condiciones de validez consideradas, pero no es posible demostrar la necesidad de su validez. La planeación de la sesión y la creación de variaciones numéricas problematizadoras se fundaron en esta cuestión epistemológica (se espera que los alumnos reconozcan que el modelo propuesto no representa la situación empírica en las variaciones numéricas problematizadoras y que esto sea un motivo para reflexionar sobre su validez; Sección 4.4.1.1). El proceso de validación del modelo proporcional sugiere que las alumnas no reconocen su falsabilidad (Transcripción 11), de modo que no resulta posible saber cuáles son las consideraciones epistemológicas que realizan en relación con la solicitud de la profesora. Durante la entrevista que mantuvimos con este grupo se indagó en este sentido.

Interpretaciones de la intervención de la profesora por parte de las alumnas

Durante la entrevista las alumnas visionaron las situaciones que hemos analizado (Transcripciones 8-13). A partir de ahí se indagaron sus interpretaciones acerca de la intervención de Ellen, particularmente en relación con sus implicaciones para la validez del modelo matemático y la solución propuestos. Se mantuvo la siguiente conversación con el grupo:

Transcripción 14 (EA-7-E)

021_Invest.[3]	Aquí, Ellen viene, ustedes le explican qué está pasando y ella les pide que lo prueben en otras situaciones. ¿Por qué creen que les pide esto?
022_Zoe	Para comprobarlo, si pasa lo mismo.
023_Josy	Comprobarlo.
024_Vasi	Sí. Si siempre se cumple. O sea, si no es sólo en este caso.
025_Invest.	¿Y por qué sería importante que se cumpla también en otros?
026_Anna	Porque así verificarías que tu meto... el método que hemos utilizado sería correcto.
027_Invest.	¿Y qué quiere decir que un método sea correcto?
028_Anna	Bueno, o que sea... en este caso, que el repartimiento de dinero fuera justo para los dos. Y que funcionara no sólo en este caso, sino en otros.

La ambigüedad de la expresión “ustedes le explican qué está pasando” [21] y el uso del deíctico en la expresión “lo prueben”, son deliberados. La intención de esta acción es apelar a los términos utilizados por las alumnas y la profesora en sus interacciones tal y como son escuchados en los videoclips, sin proponer expresiones nuevas que induzcan respuestas.

[3] Con esta forma abreviada nos referimos al investigador principal.

Según Zoe hay “algo” que “pasa” y la profesora les pide “comprobar” que también “pasa” en la variación numérica que les propone [22]. Según Vasi lo que debe ser comprobado es si “[eso] siempre se cumple” [24]. Interpretamos que con estos deícticos las alumnas se refieren a la satisfacción de las condiciones de validez que han considerado hasta ese momento: aquello que debe “cumplirse” es que las condiciones de validez consideradas, cuya satisfacción las llevaron a presentar la solución numérica al problema, se satisfagan en la nueva situación propuesta. Vasi se refiere de modo ambiguo al alcance de la solicitud de la profesora [24]: “siempre” puede referirse a ‘para toda variación numérica del problema’, pero “no sólo en este caso” puede significar ‘para algún otro caso’. No resulta claro si la alumna se refiere a la generalidad del modelo matemático o a una noción más débil, pero es un indicador de que Vasi reconoce cierta relevancia a la satisfacción de las condiciones de validez consideradas en la aplicación del modelo a variaciones numéricas del problema. La siguiente pregunta del entrevistador [25] pretende indagar en este sentido. Anna sugiere que el hecho de que las condiciones de validez consideradas sean satisfechas en otras (todas las) variaciones numéricas implica que el modelo matemático es “correcto” [26]. Interpretamos que con el término “correcto” Anna se refiere a la validez del modelo. Así, la respuesta de Anna puede ser enunciada como ‘si las condiciones de validez consideradas son satisfechas en otras (todas las) variaciones numéricas del problema entonces el modelo matemático es válido’. No decimos que la emisión de Anna es equivalente a ésta (en alguna de sus dos versiones), pero sí establecemos una relación causal positiva entre la verificación de las condiciones de validez en otras (todas las) variaciones numéricas y la validez del modelo matemático. Cuando Anna es cuestionada respecto del término “correcto” [27], lo equipara con “justo” [28], un término que utilizó al describir la repartición de la apuesta en una situación de empate (Transcripción 12). Subordina la noción de ‘justicia’ a la satisfacción de las condiciones de validez consideradas, con lo que provee una noción operativa de justicia y un modo de evaluarla: una repartición resulta justa si se satisfacen las condiciones de validez. Confirmamos esta interpretación más adelante en la interacción de las alumnas en el aula y en la entrevista.

El refuerzo inductivo de la validez del modelo proporcional

Después de la solicitud de la profesora (Transcripción 13), quien deja al grupo trabajar por su cuenta, Josy aborda la cuestión de la implementación del modelo proporcional en variaciones numéricas del problema:

Transcripción 15 (EA-8-S1)

163_Josy	Seria el mateix, l'únic que dividint pel número de punts totals. (...) Amb les diferents situacions divideixes el nombre de diners entre el nombre de punts totals.

Josy plantea el modelo proporcional en términos generales [163]. Su intervención generaliza los elementos del modelo (los seis euros de la variación numérica original corresponden al "número de dineros" y los doce puntos hechos por los jugadores corresponden al "número de puntos totales") y sistematiza los pasos a seguir en su aplicación para obtener el resultado intermedio que permite calcular los montos que cada jugador debe recibir.

Anna y Vasy concuerdan con Josy y aplican el modelo matemático generalizado a la variación numérica propuesta por la profesora. Anna escribe en su hoja, enunciando en voz alta los cálculos que realiza (Figura 12).

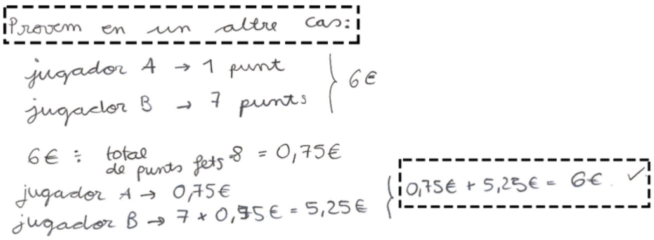


Figura 12; texto de Anna (2)

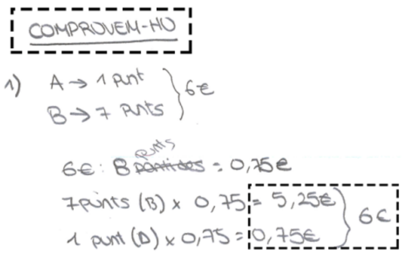


Figura 13; texto de Vasi (2)

En su texto escrito (Figura 13), Vasi encabeza la aplicación del modelo matemático en esta variación numérica escribiendo "comprobémoslo"; lo que sugiere una relación causal positiva entre la verificación de las condiciones de validez en esta variación numérica y la validez del modelo matemático. Anna, por su parte, escribe "probemos en otro caso". Ambas alumnas concluyen que la suma de los montos repartidos (5,25€ y 0,75€) es seis euros. Esta es la única indicación de la validez del resultado numérico obtenido. Después de haber escrito esto, presentan a la profesora sus resultados:

Transcripción 16 (EA-9-S1)

193_Anna	Ellen, ya lo tenemos. [La profesora se acerca]
194_Ellen	¿Sí? ¿Y qué pasa?
195_Anna	Siempre tenemos que dividir el seis euros del total entre los puntos hechos, entonces calculas cuánto cuesta un punto y entonces lo multiplicas y te da siempre así.
196_Ellen	De acuerdo. Dijimos que íbamos a cambiar, cambiaron uno a siete. ¿Cuánto le tocaría, uno a siete?
197_Anna	Cero setenta y cinco euros cada punto. Y si, por ejemplo, el jugador A ha hecho un punto, cero setenta y cinco, y si el jugador B ha hecho siete puntos, siete por cero setenta y cinco, cinco veinticinco [muestra su hoja de trabajo (Figura 12)].
198_Vasi	Dóna sis.

De modo similar a como lo hiciera Josy (Transcripción 15), Anna explica en términos generales el modelo matemático [195]. Enfatiza el papel del resultado intermedio ("cuánto cuesta un punto") y la secuencia de los pasos a seguir para obtener la solución numérica. Establece que "siempre" se debe proceder de este modo, sin justificar esta aseveración. Ésta es la respuesta del grupo a la solicitud de Ellen (Transcripción 13). Las alumnas no hablan acerca de "la consistencia de la solución" ni acerca de si "el razonamiento se mantiene", que son los focos de dicha solicitud. Al igual que en la interacción anterior con la profesora (Transcripción 12), el foco de la exposición de las alumnas está en el conocimiento matemático utilizado (la proporcionalidad) y en los resultados numéricos (en los pasos a seguir para obtenerlos). Las alumnas no se refieren a la validez del modelo matemático de modo evidente y la profesora no parece contar con elementos suficientes para interpretar la posición del grupo al respecto, más allá de sus expectativas en relación con el proceso de resolución seguido.

Ante la nueva solicitud de Ellen [196], Anna presenta la solución numérica construida, destacando inicialmente el resultado intermedio (0,75€) y enunciando después los montos obtenidos mediante cálculos. Las indicaciones explícitas acerca de la validez del resultado numérico son, por un lado, la suma "0,75€ + 5,25€ = 6€", que Ellen puede ver en la hoja de Anna (Figura 12) y, por otro lado, la emisión de Vasi [197], "da seis", que destaca esta misma cuestión. La enunciación general del modelo proporcional, que requiere un proceso de abstracción, podría ser considerada por las alumnas como un desempeño matemáticamente valioso reconocible por la profesora y, a la luz del contrato didáctico, como otro indicador de la validez del modelo matemático. No reconocemos otros indicios acerca de la validez del modelo matemático o del resultado numérico. Las alumnas no han considerado nuevas condiciones de validez relacionadas con elementos empíricos de la situación y se han limitado a la verificación de la que habían considerado antes: 'los montos repartidos deben sumar seis euros'.

Las alumnas no parecen notar que el hecho de que los montos repartidos sumen seis euros no sólo no garantiza la validez del modelo matemático, sino de que esto es consecuencia del uso dado a la proporcionalidad. Es decir, la comprobación *a posteriori* de que los montos repartidos suman seis euros resulta redundante, pues es una consecuencia de la aplicación del modelo matemático; sin embargo las alumnas actúan como si comprobaran empíricamente la representatividad del modelo. Vista de este modo, la verificación sucesiva de la satisfacción de esta condición de validez parece funcionar como refuerzo inductivo de la validez del modelo matemático. Esta cuestión resulta epistemológicamente relevante: si consideramos el modelo matemático que proponen las alumnas como el producto de un razonamiento abductivo, la acción de validar el modelo matemático inductivamente verificando su capacidad de representar datos empíricos resulta adecuada; este es el procedimiento mediante el cual los científicos crean y validan teorías falsables para modelar los fenómenos empíricos que estudian. Las alumnas cometen el error de interpretar la verificación *a posteriori* de la satisfacción de la condición de validez como la adecuada representación de datos empíricos, pues esta es una característica intrínseca al modelo y por lo tanto consecuencia de su uso. Por otro lado no reconocen la necesidad de considerar sistemáticamente otros datos empíricos para contrastarlos con los resultados del modelo. Mientras las alumnas se limiten a comprobar que los montos repartidos suman seis euros, el modelo propuesto no puede más que ser inductivamente "validado"; donde esta validez no es más que la comprobación circular de una característica intrínseca al modelo. No hay indicios de que las alumnas tengan en cuenta esta problemática.

Fracaso de la variación numérica problematizadora

En la siguiente interacción con la profesora, Ellen propone una nueva situación numérica, correspondiente a la variación problematizadora en la que un jugador ha obtenido dos puntos y el otro ninguno:

Transcripción 17 (EA-10-S1)

243_Ellen	Muy bien. Entonces... dos a cero (…) Si es dos cero, cómo repartirías el dinero?
244_Anna	Pues seis y cero.
245_Vasi	Pues seis y cero.
246_Ellen	Pero y el otro... No sé. Yo me quejaría. Porque digo, a ver, no es seguro que yo vaya a perder.
247_Anna	Ya, pero es lo justo.
248_Ellen	Yo creo que podría haber alguna queja.
249_Anna	Pero queja seguro, porque claro, quien no se lleva el dinero se queja siempre. Pero es lo justo.
250_Ellen	La idea es ver una manera en que podamos convencerlo matemáticamente de que es justo repartirlo así.

Anna [244] y Vasi [245] responden sin dudar que el jugador en ventaja debería llevarse toda la apuesta; lo cual corresponde a la aplicación del modelo proporcional en esta situación. A pesar de las expectativas de la profesora, las alumnas no reconocen el reparto implicado por su modelo en esta variación numérica como problemático. El hecho de que el jugador en ventaja obtenga el total de la apuesta sin haber ganado parece no resultar un problema para las alumnas y ninguna otra cuestión empírica sobre el juego se considera (p. ej. el resultado es independiente de los puntos necesarios para ganar). La reacción de Ellen [246 y 248] está guiada por la intención de evidenciar elementos empíricos que no son adecuadamente descritos por el resultado ("no es seguro que yo vaya a perder") y, de ahí, la inadecuación del resultado numérico. Sin ofrecer justificación, Anna insiste en que el reparto es "justo" [247 y 249]. La frase final de Ellen [250] pone de manifiesto que no está satisfecha con la respuesta.

El proceso de validación del modelo matemático ha llevado a las alumnas hasta el punto de tener una certeza aparentemente total de su validez. El grupo parece no reconocer la falsabilidad del modelo. La subordinación de la noción de 'justicia' a la satisfacción de las condiciones de validez cierra un mecanismo de autovalidación que la objeción de la profesora no parece problematizar: el modelo matemático implica la satisfacción de las condiciones de validez, su verificación da cuenta de la justicia del resultado y esta, a su vez, de la validez del modelo. El modelo matemático define así lo que es un reparto justo.

Durante la entrevista se pregunta a las alumnas por qué consideran la solución numérica, en ese momento, como "justa". Las alumnas desarrollaron posteriormente otro modelo matemático que implica una solución numérica distinta y que calificaron como "más justa" (repartir la apuesta proporcionalmente a los posibles marcadores finales favorables a cada jugador, como si fueran equiprobables, si la partida hubiera continuado); la perspectiva de las alumnas durante la entrevista está también informada por estos acontecimientos posteriores.

La validez del modelo matemático y su relación con la noción de 'justicia' (Entrevista)

Transcripción 18 (EA-11-E)

054_Anna	Claro, porque siguiendo el método que estábamos haciendo [modelo proporcional], que todavía no habíamos hecho el segundo, era lo justo; porque era como habíamos pensado. (…) Siguiendo el método que estábamos haciendo, pues claro, era como, es que es así. Porque lo hemos hecho con otros casos, hemos dividido el número total de puntos y eso, y entonces quedaba así.

Anna confirma que, en ese momento del proceso de resolución, la "justicia" del resultado era consecuencia de aplicar el modelo matemático [054]. Esto explica las respuestas de Anna a la profesora (Transcripción 17) y confirma nuestra interpretación acerca de la subordinación de la noción de 'justicia' a la satisfacción de las condiciones de validez (Transcripción 14): si se satisfacen las condiciones de validez, entonces el reparto resulta justo. La frase final ("porque lo hemos hecho en otros casos, hemos dividido el número total de puntos y eso") parece confirmar que la validez del modelo matemático se funda inductivamente en la verificación de la satisfacción de las condiciones de validez en variaciones numéricas del problema. Esto señala la circularidad de la verificación de la validez del modelo matemático y de los resultados numéricos obtenidos: el modelo matemático implica que los montos repartidos sumarán seis euros y cada vez que esto se verifica la validez del modelo se ve confirmada. El modelo se considera válido (en general) y por lo tanto los resultados numéricos de su aplicación "justos". En este escenario, la variación numérica mediante la cual se pretendía problematizar el modelo proporcional, llamando la atención sobre cuestiones empíricas que no son adecuadamente representadas, no resulta efectiva.

La complejidad epistemológica del proceso de resolución del grupo no resulta discernible en su interacción con la profesora. El proceso de construcción de la validez del modelo y de los resultados numéricos no está en el foco de los argumentos que las alumnas exponen a la profesora, los cuales destacan conocimientos matemáticos y resultados numéricos. Ellen no parece contar con elementos suficientes para interpretar la situación y actuar de manera acorde. Al fallar el ejemplo problematizador, cuando las alumnas no consideran el reparto implicado por su modelo como problemático, el recurso de Ellen es poner el problema en evidencia (Transcripción 17). Aunque el sentido común y las experiencias previas de las alumnas podrían contribuir a problematizar la situación, el trabajo realizado hasta ahora por el grupo sugiere con fuerza la corrección del resultado obtenido. La emisión final de Ellen [250] demuestra su insatisfacción con la respuesta, pero no es claro cuál es la naturaleza de su indicación (“ver una manera en que podamos convencerlo matemáticamente de que es justo repartirlo así”).

La interpretación de las indicaciones de la profesora

Durante la entrevista, al visionar la situación de la Transcripción 17, indagamos acerca de la interpretación de las alumnas sobre la objeción de Ellen:

Transcripción 19 (EA-12-E)

084_Invest.	¿Qué opináis ahora de lo que pasó ahí? (Transcripción 17) ¿Les parece convincente? O sea, ¿estáis convenciendo a Ellen?
085_Josy	No [a coro con Vasi y Zoe].
086_Invest.	¿Por qué no?
087_Josy	Creo que no porque ella nos dice que nos basemos en un futuro. Hasta ahora sólo nos hemos basado en lo que ha pasado... hasta ahora. Entonces, después viene la otra posibilidad que pensamos, que es lo de las posibilidades.

La referencia de Josy a la validez del modelo matemático [87] es en relación con las expectativas de la profesora: ella espera que el modelo esté “basado en un futuro” y no “en lo que ha pasado”; estas expectativas eran desconocidas para las alumnas durante la interacción a la que Josy se refiere; fueron expresadas por Ellen posteriormente (Transcripción 20). El foco de la explicación de Josy está en estas expectativas: el modelo matemático no es válido porque no es el que la profesora espera. Josy no relaciona la objeción de Ellen con la incapacidad del modelo matemático para representar la situación empírica. El intento de la profesora de poner a discusión la validez del modelo mediante su falta de representatividad se ve reducido así a la solicitud, basada en su autoridad, de que incorpore cierta característica. La respuesta de Josy indica la relevancia de obtener la solución que la profesora espera como parte de la actividad matemática. La discusión de la validez del modelo como elemento relevante para convencer a la profesora queda en segundo plano.

Después de la interacción con la profesora (Transcripción 17), las alumnas no logran hacer una interpretación de lo dicho por Ellen que les ayude a replantear el problema o a reflexionar sobre su proceso de resolución. Será necesaria una nueva intervención de Ellen para redirigir el trabajo:

Transcripción 20 (EA-13-S1)

270_Ellen	A ver, ¿cómo vamos? ¿Estamos atrancadas?
271_Anna	Es que no sabemos qué tenemos que hacer más.
272_Ellen	A ver, vamos a hacer una cosa. Pasemos una línea ahí y pensemos: si la partida continuara... en este momento va cinco a siete. Si la partida continuara, ¿cómo podría continuar la partida? Hemos pensado hasta ahora siempre en lo que pasaba y ahora... (…) A ver si analizando qué es lo que puede pasar después nos ayuda a entender cómo se puede repartir el dinero. ¿Sí?

La intervención de Ellen constituye un acto de autoridad [272]. Sugiere “pasar una línea” y reflexionar acerca de “lo que puede pasar” si la partida continúa. En su última frase, sugiere una dirección concreta para el trabajo del grupo: repartir el dinero en función de lo que podría pasar. La propuesta, como acto de habla ilocutivo, pone en duda la validez del modelo proporcional de las alumnas sin establecer con claridad una discusión al respecto, a la vez que pone de manifiesto preferencias de Ellen acerca de la solución. Estos son los elementos que Josy destaca en la entrevista (Transcripción 19) cuando explica por qué su exposición no resulta convincente para la profesora. Esto indica la importancia que la intervención de Ellen tiene para esta alumna: satisfacer las demandas de la profesora es una cuestión relevante.

La construcción de la validez en el aula de matemáticas

Durante la entrevista indagamos las ideas de los alumnos sobre la construcción de la validez en el aula de matemáticas y sobre cómo se logra convencer a otros y a uno mismo de la validez de lo que se hace y dice en el aula. Preguntas con contenidos similares se formularon de distintos modos, en distintas ocasiones y en relación con distintos momentos del proceso de resolución del problema a fin de triangular las respuestas (Sección 4.4.1.2).

Tras visionar una interacción con la profesora (Transcripción 17) y de que Josy respondiera la primera pregunta en relación con esta (Transcripción 19), se mantuvo la siguiente conversación:

Transcripción 21 (EA-14-E)

089_Invest.	Si no les parece convincente (Transcripción 17), ¿cómo se logra estar convencido en clase de matemáticas? O sea cuando ustedes explican algo, ¿cómo debe ser para que sea convincente?
090_Vasi	Lo has de demostrar... con otros casos.
091_Anna	Yo creo que es ejemplos. O sea, en matemáticas puedes utilizar, como hicimos, el método éste, el primer; pero para verificar que esto está bien y que esto funciona realmente y que puede ser, yo qué sé, igual una fórmula o lo que sea, creo que todos los matemáticos lo que han hecho es buscar, aparte del que han tenido, otros ejemplos, para verificar diciendo: vale, pues este método está bien. O no, o está mal porque no funciona siempre.
092_Zoe	Ellen, cuando nos explica... ¿sabes? El método de Ruffini, siempre nos...
093_Anna	Nos dice por qué y nos explica...
094_Zoe	Qué pensó... Bueno, lo que pensó el hombre...
(...)	
097_Josy	Por qué pasa eso.
098_Anna	Y en qué se basó para hacer esto y cómo... No sé.
099_Invest.	¿Y cómo hacéis vosotras?... Estáis resolviendo un problema, en equipo o solas. ¿Cómo hacéis vosotras para estar convencidas de que lo que estáis haciendo es correcto, es válido? O lo que estáis diciendo, la solución que proponéis. ¿Cómo tratáis de pensar por vosotras mismas si lo que estáis haciendo está bien?
100_Anna	Bueno yo, por mí, siempre hago comprobación. Yo qué sé, en un problema, voy haciendo lo que creo que es correcto y al final siempre hago la comprobación de si me ha salido bien el resultado o no. En el caso de una división de polinomios, hacerla de los dos métodos que nos han enseñado. (…) Seguir los pasos que nos han dicho.

No resulta evidente a qué se refiere la respuesta de Vasi [90]. Si la relacionamos con el proceso de resolución de las alumnas, parece indicar que reconoce la importancia de aplicar el modelo en variaciones numéricas del problema; aunque no es posible determinar las implicaciones epistemológicas de esta acción. La respuesta de Anna [91] va en este sentido: para validar un modelo matemático ("método") hay que ponerlo a prueba en distintas situaciones. Según Anna, este es el modo en que proceden los matemáticos. En su respuesta relaciona la generalidad del modelo matemático con su validez ("o está mal porque no funciona siempre"); sin embargo no es posible discernir si se refiere al refuerzo inductivo de un modelo falsable o a la necesidad de que el modelo sea válido en general. La cuestión esencial acerca de qué significa verificar y de sus implicaciones epistemológicas no resulta clara. Si consideramos que la alumna describió el proceso de resolución del grupo en términos similares (Transcripción 18), su respuesta sugiere la adecuación de este proceso; el cual llevó a validar el modelo proporcional y a valorar las soluciones numéricas producidas como justas. La respuesta de Anna está en línea con la interpretación que hemos hecho antes (Transcripción 17): la alumna no reconoce la falsabilidad del modelo matemático y, en cambio, considera la satisfacción de las condiciones de validez como suficiente para validar el modelo.

Zoe dirige la conversación en otro sentido [92]; su intención parece ser describir lo que ella valora de las explicaciones de la profesora como elementos que las hacen convincentes. Sus compañeras la secundan. Conviene analizar las distintas intervenciones para entender a qué se refieren. Zoe toma el "método de Ruffini" como ejemplo para destacar que la profesora explica "qué es lo que pensó el hombre" [94]. Anna agrega que la profesora "dice por qué" "y en qué se basó para hacerlo" [93 y 98]. Suponemos que ambas se refieren a que las explicaciones que ofrece la profesora aportan razones (presentadas, en el ejemplo de Zoe, como las razones de Ruffini) para justificar la validez del método de Ruffini. Así, las alumnas destacan que un elemento que hace las exposiciones de la profesora convincentes es el ofrecimiento de razones para justificar la validez de lo que expone.

La siguiente pregunta [99] intenta enfocar la atención de las alumnas en la reflexión acerca de la evaluación autónoma de sus producciones matemáticas. En su respuesta [100], Anna sustituye el ejemplo de la invención de un método por parte de un matemático (el método de Ruffini para dividir polinomios) por el de la ejecución de métodos conocidos por parte de un alumno: ella misma. El ejemplo en el que se coloca es el de la división de polinomios (posiblemente sugerido por la mención del método de Ruffini). Anna valida el resultado ejecutando dos métodos conocidos y comparando ("comprobando") sus resultados; lo cual equivale a "seguir los pasos que le han dicho". Anna sustituye el proceso creativo del matemático por el proceso reproductivo del alumno; recurre a una situación posiblemente más habitual para elaborar acerca de la validación de su producción matemática: la ejecución de técnicas conocidas. Los méritos que antes destacaban de las explicaciones de la profesora no parecen aplicables a tal situación, pues no es necesario "explicar por qué" o "qué se piensa": una vez identificado el método a aplicar, la validez de los resultados obtenidos recae en el método mismo y no en el trabajo matemático del alumno, limitado a la adecuada identificación y ejecución del método.

La respuesta de Anna sugiere que el trabajo del alumno está más relacionado con el uso técnico de conocimientos compartidos y válidos *a priori* que con la tarea creativa de construcción y validación de conocimientos matemáticos. Esta interpretación de las emisiones de Anna está en línea con el análisis realizado hasta aquí del proceso de resolución del grupo: la proporcionalidad es invocada como conocimiento matemático pertinente y la interacción con la profesora está enfocada en evidenciar su uso y los resultados obtenidos. La validez del modelo y de los resultados está fundada en la validez del conocimiento matemático mismo y el mérito de las alumnas está en identificarlo y utilizarlo con dominio. Los méritos del trabajo de los alumnos contrastan con los méritos del trabajo de la profesora, quien ofrece razones para justificar el conocimiento matemático que introduce en el aula. Aunque las alumnas valoran positivamente estas acciones, no parecen relacionarlas con su actividad matemática.

Más adelante en la entrevista enfocamos la actividad matemática de las alumnas desde otra perspectiva; esta vez en relación con el trabajo que realizan al interior del grupo:

Transcripción 22 (EA-15-E)

141_Invest.	Yo entiendo que en clase de mates, al menos, trabajáis siempre juntas. Eso implica, supongo, tener que explicarse cosas, ponerse de acuerdo. ¿Os resulta fácil poneros de acuerdo? ¿Cómo lo hacéis normalmente?

(…)

145_Anna	Tenemos visiones diferentes de las matemáticas. Sobre todo Zoe, que siempre va a lo más complicado. No sé, yo voy a lo más simple, a lo que me han enseñado: pum pum, hago así.
146_Invest.	Y cuando no estáis de acuerdo, ¿cómo funciona? ¿Cómo lográis poneros de acuerdo? ¿Hay algo como una estrategia?
147_Zoe	También nos pasamos la hoja, nos miramos cómo lo ha hecho. ¿Sabes? Entonces dices: ah, ¿pero esto? Entonces nos lo vamos explicando. Esto es así, porque no sé qué. ¿Sabes?
148_Anna	Yo tengo que ser sincera. A veces no entiendo nada y digo: pásame la hoja que lo copio. ¿Sabes? O sea, tampoco es todo perfecto.
151_Josy	Lo que nos pasa a Zoe y a mí siempre [ríen], es que lo hacemos igual pero de distinta forma a la misma vez. Entonces: que no, que no está bien. Entonces al final le preguntamos a Ellen y dice: sí, es que son dos formas, y nosotras: ah, vale.

La respuesta de Anna [145] confirma la interpretación del papel que se atribuye como alumna de matemáticas: se trata de aplicar los conocimientos aprendidos; eso es “lo más fácil”. La respuesta de Zoe [147] acerca de cómo superan sus diferencias y llegan a acuerdos es ambigua, sin embargo pone de manifiesto que en el grupo suele haber la intención de explicar aquello que hacen de modo que las compañeras lo puedan entender. La siguiente intervención de Anna [148] pone en perspectiva esta cuestión: a veces la tarea no se entiende, pero es importante cumplir hasta donde sea posible. Esto ilustra expectativas de los alumnos en relación con su desempeño en el aula: aunque entender y ponerse de acuerdo es importante, la exigencia de cumplir con un producto final es una parte fundamental del trabajo de los alumnos. Finalmente, la intervención de Josy [151] llama la atención sobre otra cuestión; en ocasiones no es sencillo ponerse de acuerdo con las compañeras. Las explicaciones entre alumnas no siempre resultan suficientes; entonces es la profesora, como autoridad matemática, la que parece dirimir la cuestión. Josy destaca el papel de autoridad matemática de la profesora, capaz de decidir, por ejemplo, que dos planteamientos diferentes son equivalentes.

5.2.2. El caso del grupo DC

Emergencia del marco interpretativo, de las primeras condiciones de validez y falsación del primer modelo matemático

Tess y Jay, los alumnos del grupo DC, comienzan a trabajar en el problema durante la primera sesión derivando nuevos datos, de manera deductiva, a partir del enunciado del problema:

Transcripción 23 (DC-1-S1)

008_Jay	Un té set i l'altre cinc. En total han fet dotze punts.
(…)	
011_Tess	O sigui, de dotze punts aquest n'ha fet set i aquest n'ha fet cinc.
(…)	
014_Jay	Com mínim de llançaments es podrien haver fet vuit. Com mínim, perquè guanyés un. I com màxim quinze (…) perquè podrien quedar set i vuit.
015_Tess	Val, si. O sigui, aquest ha de fer tres, per guanyar...
016_Jay	I l'altre set... Ai, i l'altre u.

Los alumnos están interesados en producir nuevos datos numéricos a partir de los que el enunciado provee [8-16]. Posiblemente esta acción está relacionada con la habitual necesidad de manipular datos numéricos para resolver problemas que se plantean en el aula de matemáticas. Aunque no se hace explícito, los alumnos posiblemente observan que un jugador tiene cierta ventaja sobre el otro, indicada por el hecho de que le falta obtener menos puntos para ganar el juego [15-16]. Suponemos que los alumnos hacen esta consideración a partir de referencias compartidas sobre el juego, las cuales son parte de su marco interpretativo.

El primer modelo matemático que propone Tess está en línea con esta interpretación y evidencia que la alumna relaciona este problema con otros acerca de reparto y costos proporcionales:

Transcripción 24 (DC-2-S1)

030_Tess	Si fem: si amb vuit llançaments guanyadors sis euros... amb set llançaments guanyadors, quants euros?
031_Jay	Com has fet això? Què has fet?
032_Tess	Proporció. [calculadora] A aquest li toquen cinc coma vint i cinc euros.

033_Jay	Sí, però llavors imagina't que l'altre també ha fet set. Perquè també ho pot fer. Llavors també li tocarien els mateixos i no, no...
034_Tess	Clar, és veritat! Això està malament.

Tess propone la proporcionalidad como un constructo asociable con la situación, evocándolo de manera reconocible mediante frases habituales, relativas a su uso en el aula de matemáticas [30-32]. Al igual que las alumnas de los grupos DA (Sección 5.1, Transcripción 6) y EA (Transcripción 8), Tess orienta su actividad hacia la identificación de conocimientos matemáticos que puedan ser útiles y hacia la construcción de una solución que pueda ser reconocida como adecuada en el aula de matemáticas. Esto sugiere la emergencia de la condición de validez según la cual 'la respuesta debe ser reconocible como matemáticamente valiosa'. Esta cláusula del contrato didáctico marca así la dimensión teleológica del comportamiento racional de Tess en este momento y sustenta la emergencia de este primer modelo.

Mediante su aplicación en una variación numérica del problema [33], Jay falsa el modelo propuesto por Tess: si ambos jugadores tuvieran siete puntos, ambos deberían recibir 5,25€, lo cual es imposible. La intervención del alumno pone de manifiesto referencias sobre el juego que constituyen su marco interpretativo: si se da empate, los jugadores deben recibir partes iguales de la apuesta. Por otro lado, al aplicar el modelo a una variación numérica y trasladar su inadecuación a la variación planteada en el problema, Jay sugiere que espera construir un modelo que sea aplicable en general. En esta intervención vemos emerger una condición de validez ya observada: 'la suma de los montos repartidos debe ser seis'. De este modo el alumno utiliza sus conocimientos sobre proporcionalidad para señalar que el modelo matemático propuesto no es capaz de representar adecuadamente elementos empíricos de la situación planteada. Este es el mismo control acerca de la representatividad del modelo que observamos en el caso del grupo EA. Los alumnos rechazan un modelo matemático que implica una interpretación incoherente de la situación [34].

Emergencia del modelo matemático proporcional

Inmediatamente después, el mismo Jay hace una propuesta distinta:

Transcripción 25 (DC-3-S1)

035_Jay	I això? Clar, això no pot ser. Set dotzens de sis no pot ser. (…) Pot ser

	sí, eh. [calculadora] Set dividit entre dotze multiplicat per sis... es tres coma cinc. I cinc dividit entre dotze multiplicat per sis... dos coma cinc. A mi em surt això. No sé si està bé. (…) El que he fet és, són sis euros, els que s'han de repartir; sis multiplicat per set dotzens, no sé si està bé, i surt tres coma cinc i llavors l'altre sis multiplicat per cinc dotzens, que surt dos coma cinc. I la suma total... no surt!
044_Tess	Sí, sí que és això.
045_Jay	Ah, sí sí sí.
046_Tess	Es igual a sis. Sis euros. Pos li toca això.
047_Jay	Però no sé.
048_Tess	I si ho provem de fer... si amb altres números funcionaria igual? Que no és una casualitat? Per exemple estén, jo què sé, quatre a tres. Sí, no? Sis per quatre setens... [calculadora] (…) Sí, sí que és això [en su hoja de trabajo "6 x 4/7 = 3,43", "6 x 3/7 = 2,57" y "3,43 + 2,57 = 6"].
056_Jay	I ara si fem igual. Que tinguessin igual?
057_Tess	Val, si tenen...
058_Jay	Set i set, per exemple.
059_Tess	Sis per set catorzens... donarà tres. (…) Tres, tres i sumaran sis euros.

La propuesta de Jay corresponde al modelo proporcional [35] que también hemos visto emerger en el caso del grupo EA (Transcripción 11). Las dudas del alumno mientras explica los pasos a seguir, así como la conclusión a la que arriba ayudado por su compañera [44-46] ("la suma de los montos repartidos es seis"), sugiere que el alumno busca relacionar los datos numéricos con los que cuenta de manera que la suma de los montos repartidos sea seis. No resulta claro hasta qué punto se da cuenta del uso que hace de la proporcionalidad y de las implicaciones de este uso. Esta interpretación se ve reforzada por la propuesta de Tess [48], quien sugiere verificar, mediante la aplicación del modelo en variaciones numéricas del problema, que no es casual que los montos repartidos sumen seis. Ella misma propone la variación del jugador en ventaja con cuatro puntos y su contrincante con tres, y comprueba la satisfacción de la condición de validez: en su hoja de trabajo se lee '6 x 4/7 = 3,43', '6 x 3/7 = 2,57' y está indicado que la suma de estas cantidades es seis (Figura 14). Esta verificación provoca que la alumna evalúe positivamente el modelo matemático. A propuesta de Jay aplican el modelo a la situación de empate a siete puntos [56-59], comprobando que la condición de validez resulta satisfecha (Figura 14). Esto parece ser para los alumnos una indicación positiva de la validez del modelo, que a diferencia del anterior, satisface la condición de validez que están considerando. No resulta posible, sin embargo, precisar el estatus epistémico que le otorgan a partir de sus comprobaciones.

Hasta este momento la verificación de que 'la suma de los montos repartidos es seis' es el único control explícito que los alumnos hacen de la representatividad del modelo matemático. Sin embargo no parecen darse cuenta de que esta suma de los montos deriva del uso que hacen de la proporcionalidad y de que, por tanto, las comprobaciones posteriores son redundantes y no corresponden a la verificación de la representación de datos empíricos relativos a la situación. De modo similar al grupo EA, este proceso parece reforzar inductivamente la validez del modelo matemático. Al igual que en aquel caso, la justificación de la validez del modelo matemático enraíza en la satisfacción de la condición de validez y, mediante la asociación del problema con otros de reparto y costos proporcionales, en la percepción de la proporcionalidad como conocimiento matemático posiblemente adecuado.

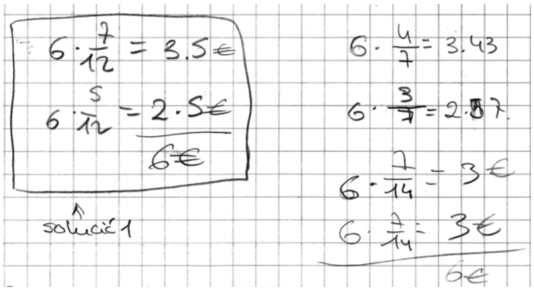


Figura 14; texto de Tess (1)

La interacción con el profesor

El profesor se acerca en ese momento y después de observar la hoja de trabajo de Tess (Figura 14) mantiene la siguiente conversación con los alumnos:

Transcripción 26 (DC-4-S1)

064_Dan	Però quina quantitat? Dos i mig i?...
065_Tess	El jugador u...
066_Dan	No, no. No es conformarà. El que més partides guanyades té, no es conformarà amb això.
067_Tess	Per què no es conformarà?
068_Dan	No, no es conformarà. Si jo fos el jugador que més partides ha guanyat, jo no em conformaria amb aquest repartiment. Tu sí? Doncs jo, no.

El profesor se aleja tras su intervención y, con ello, no facilita a los alumnos que expliquen el razonamiento que los ha llevado a obtener la solución numérica. La falsación del primer modelo, la emergencia del segundo y el proceso de validación basado en la verificación de que los montos repartidos suman seis euros en variaciones numéricas del problema, no se evidencia en la hoja de trabajo de Tess. El profesor no cuenta con información acerca de la trayectoria de los alumnos más allá de la solución numérica ofrecida (Figura 14), que evidencia el modelo matemático proporcional. Dan realiza una evaluación explícita de la validez de la solución numérica [66]. Su frase no sólo indica que el resultado es incorrecto, además informa que el jugador en ventaja debe recibir una parte mayor de la apuesta. La respuesta a la pregunta de Tess [67] apela a su autoridad matemática y evita proporcionar más información [68]: los jugadores, que encarnan su autoridad matemática, sólo se conformarán con la respuesta correcta. Esta acción es parte de la estrategia comunicativa de Dan, la cual analizamos en profundidad en la Sección 5.3.1. Aunque aquí no parece propiciar la reflexión de los alumnos acerca de su proceso de resolución, la necesidad de satisfacer los requerimientos del profesor sugiere al grupo redirigir su trabajo en un sentido concreto: producir un modelo matemático que otorgue una parte mayor al jugador en ventaja.

Después de una interacción similar con el grupo DA, Dan se dirige a la clase con nuevas indicaciones:

Transcripción 27 (DC-5-S1)

075_Dan	A veure si m'escolteu un moment. Aquests dos jugadors saben matemàtiques, i no es conformen amb qualsevol cosa. Vosaltres sou persones joves... joves; i mireu més al futur que no pas al passat. Al futur: què passarà. Més que no pas al que ha passat. Vinga! (...) Feu esquemes, feu gràfics. Mirant al futur.

Esta intervención del profesor ofrece nuevos indicios acerca de la solución que espera: los alumnos deben considerar "aquello que puede pasar y no aquello que ha pasado". Aunque por el modo en que es expresada esta frase no resulta claro cómo deben interpretarla los alumnos, un modelo matemático válido deberá satisfacer esta nueva condición de validez. Posiblemente la intención de Dan es propiciar la reflexión de los alumnos acerca de la situación empírica y, por lo tanto, del modelo de la situación y del marco interpretativo; en particular acerca del hecho de que las posibilidades de ganar de cada jugador dependen de los puntos que a cada uno le falta obtener y son independientes de los puntos obtenidos. En ninguno de los grupos observados en el aula de Dan verificamos reflexiones de este tipo a partir de esta intervención; en cambio observamos que los alumnos dirigen su atención sobre los puntos que a cada jugador le faltan para ganar (3 y 1) y los manipulan a fin de producir un nuevo modelo matemático. Estas acciones por parte de los alumnos indican la relevancia de satisfacer las solicitudes del profesor en el proceso de resolución; pero a la vez sugieren que estas indicaciones son operativizadas para la manipulación de los datos numéricos, dejando en segundo plano la revisión del marco interpretativo y la reflexión sobre aspectos empíricos de la situación. Veremos instancias particulares de este resultado más adelante en las acciones del grupo DC.

Tess y Jay tienen dificultades para operativizar la indicación de Dan; los alumnos reconocen que su modelo y la solución numérica producida no satisfacen al profesor, sin embargo el hecho de que consideran plausible la respuesta construida les lleva a intentar discutirla una vez más:

Transcripción 28 (DC-6-S1)

146_Tess	Però per què no val, Dan? [el modelo proporcional y la solución 3,5€ y 2,5€]
(…)	
149_Dan	Aquí què feu, una proporció?
150_Tess	Sí.
151_Dan	Perquè no. No és així. Perquè tu no has... No conta el que tu has fet fins ara, sinó el que queda per fer. Les possibilitats que queden per fer. En les possibilitats que queden per fer, ja està contemplat el que s'ha fet anteriorment. Perquè clar, el de set ja surt amb set guanyades, per tant ja estan contemplades. Però tu has de veure el futur. Què passaria a partir del set? A partir del set, qui podria guanyar? Quines possibilitats té un? Quines possibilitats té l'altre? Feu esquemes, feu gràfics, feu coses. A veure.
152_Jay	Val.

Tess no justifica de ningún modo los motivos que tienen para considerar la validez del modelo matemático y la solución numérica producidos. Al igual que en el caso del grupo EA, las emisiones de los alumnos hacen visibles el resultado numérico y el uso de la proporcionalidad en su construcción [146-150], omitiendo aspectos relevantes de su validación. La tarea de discernir estos aspectos recae en el profesor, quien no cuenta con más información que los cálculos que puede ver en la hoja de trabajo de la alumna (Figura 14). La simplificación del proceso de resolución no permite a Dan valorar las distintas fases del trabajo de los alumnos así como su complejidad epistemológica; estas no son inmediatamente accesibles para el profesor y los alumnos no las comunican de manera inteligible. Dan reitera su indicación anterior, ofreciendo además la reflexión que posiblemente esperaba que hicieran los alumnos: "no cuenta lo que tú has hecho hasta ahora, sino lo que queda por hacer". Esta reflexión, clave para la emergencia de nociones probabilísticas, es expuesta por el profesor; sin embargo no es evidente que los alumnos logren relacionarla con aspectos empíricos de la situación para modificar su modelo de la situación de manera acorde. La intervención de Dan, como acto de habla, puede considerarse una solicitud en relación con la construcción de un modelo matemático y una respuesta numérica válidos: se deben considerar los puntos que faltan para ganar y no los hechos hasta el momento.

La explicación del profesor podría fundar la reflexión crítica de los alumnos acerca del modelo matemático proporcional, de su marco interpretativo y del modelo de la situación asociado, pues sugiere relaciones entre las variables del fenómeno empírico que son relevantes para modelarlo. Sin embargo no observamos reflexiones orientadas en este sentido a partir de esta interacción. Las acciones posteriores de los alumnos sugieren que la intervención del profesor no es aprovechada de este modo. Los alumnos acaban abandonando el modelo matemático anterior y centran sus esfuerzos en la manipulación de los datos numéricos para generar uno nuevo que satisfaga las indicaciones del profesor.

Emergencia de un nuevo modelo matemático

Transcripción 29 (DC-7-S1)

159_Tess	Queden quatre punts per jugar... per guanyar. Entre tots dos.
160_Jay	Bé, queden quatre punts com a màxim. Pot ser que a la primera... a la següent tirada ja guanyi l'u.
161_Tess	Però també pot ser que no.
162_Jay	A veure, té un setanta cinc per cent el jugador u i l'altre un vint-i-cinc per cent.
163_Tess	Sí. (…) A veure [escribe], a tu et queda un punt i a tu et queden tres punts. Tu tens un setanta cinc per cent de guanyar i tu tens un vint-i-cinc per cent de guanyar.
164_Jay	Les possibilitats serien...

165_Tess Si multipliques el sis per tres quarts [calculadora], a aquest li tocarien quatre coma cinc euros. Sis per un quart, que és el vint-i-cinc per cent [calculadora], u coma cinc euros.

Tess asocia las indicaciones del profesor con los puntos que a cada jugador le faltan para ganar el juego, uno al jugador en ventaja y tres a su contrincante [159]. Los alumnos intentan relacionar estos datos numéricos con la situación empírica según sus referencias acerca del juego [160 y 161]. En este marco interpretativo intentan dar sentido a las indicaciones recibidas. A partir de estos datos numéricos Jay produce unos nuevos [162] que ponen en evidencia, una vez más, el uso de la proporcionalidad. Los alumnos parecen reemplazar [163] los datos utilizados en el modelo anterior (los puntos obtenidos por jugador) por los datos que les han sido indicados (los puntos que a cada jugador faltan para ganar); el dinero se repartirá proporcionalmente a estas nuevas cantidades. Por otro lado, los alumnos parecen adoptar palabras y expresiones del profesor [164 y 165]: la expresión en términos de porcentajes resulta adecuada para indicar las "posibilidades de ganar" de cada jugador. De este modo obtienen una nueva solución numérica según la cual el jugador en ventaja recibe 4,5€ (el 75% de la apuesta) y 1,5€ su contrincante (el 25% de la apuesta). Esta nueva solución satisface la solicitud de Dan, otorgando una parte mayor de la apuesta que el modelo anterior al jugador en ventaja. Así los alumnos operativizan las indicaciones del profesor [151]; aunque tratan de relacionar los datos numéricos con los que trabajan en su marco interpretativo de manera coherente, el foco de sus acciones está en la construcción de un nuevo resultado numérico que satisfaga estas indicaciones.

La dimensión teleológica de las acciones de los alumnos está marcada por la necesidad de satisfacer las demandas de Dan; el contrato didáctico indica que las intervenciones regulativas del profesor tienen propósitos didácticos que deben ser interpretados para dirigir el trabajo en el aula. En el plano epistemológico, la interpretación de los alumnos de la intervención del profesor y las acciones consecuentes resultan interesantes: en lugar de propiciar la reflexión sistemática sobre los aspectos empíricos de la situación que el profesor destaca (relación entre los puntos hechos, puntos restantes y posibilidades de ganar), los alumnos la operativizan para identificar otro conjunto de datos numéricos a los que aplicar sus conocimientos sobre proporcionalidad. Aunque la necesidad de relacionar esta interpretación con sus referencias acerca de la situación es evidente, la actuación de los alumnos se centra en la aplicación de conocimientos matemáticos compartidos y no en la reflexión en torno a la situación que están modelando.

Jay propone representar la situación de manera gráfica y elabora una tabla por cada posible final de la partida (Figura 15); posiblemente para satisfacer la solicitud del profesor acerca de la elaboración de "esquemas y gráficas" (Transcripción 28, 151).

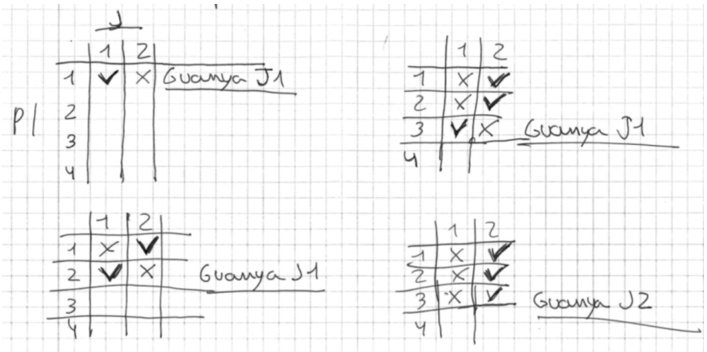


Figura 15; texto de Jay

A partir de estas representaciones Jay problematiza el modelo planteado:

Transcripción 30 (DC-8-S1)

177_Jay	Per tant no són quatre, son tres. Perquè no s'arriba al quatre.
178_Tess	Però veus, hi ha quatre opcions. Tres donen la victòria a aquest i una dóna la victòria a aquest.
179_Jay	Però com a màxim només hi haurà tres tirades. (…) Sí, sí, sí, de quatre possibilitats en té tres, el jugador u.
184_Tess	De quatre possibles finals tres donen la victòria al jugador u i només un al jugador dos. És això!

El problema que plantea Jay [177] enraíza en su interpretación de la situación y en el significado que le asigna en su marco interpretativo a los datos numéricos que utiliza. La confusión entre el número máximo de partidas que pueden ser jugadas (3) y la suma de los puntos que cada jugador necesita obtener para ganar (4) tiene como precedente lo dicho en las emisiones 159 y 160 (Transcripción 29). Lo que parece ser significativo para Jay es el número máximo de partidas que aún pueden ser jugadas, de modo que la repartición efectuada no parece justificada. Tess plantea una interpretación distinta de los datos numéricos [178]: hay cuatro "opciones" (posibles marcadores finales), tres corresponden a victorias del jugador en ventaja y una a la victoria del contrincante. Jay acepta la interpretación de Tess [179], quien muestra confianza en la validez del modelo matemático que han producido [180]. La interpretación de Tess podría considerarse como un paso adecuado en la construcción del modelo probabilístico, pues corresponde a distribuir el dinero en función de los posibles marcadores finales considerándolos equiprobables. Sin embargo, su interpretación parece emerger para acomodar las indicaciones del profesor y no a partir de la reflexión acerca de las relaciones entre los elementos empíricos de la situación. La dimensión teleológica de su actividad no está marcada por la necesidad de representar aspectos empíricos de la situación que surgen de su reflexión sobre esta, sino por la necesidad de satisfacer las expectativas del profesor. Desde el punto de vista epistemológico, la validez del modelo no se fundamenta en el control de su representatividad, sino en la autoridad del profesor, mediante la "adecuada" interpretación de sus indicaciones. Aunque la necesidad de ajustar el modelo matemático al modelo de la situación que emerge del marco interpretativo parece clara en las acciones de los alumnos, la prioridad parece ser producir una respuesta que satisfaga al profesor.

Presentación de la solución al profesor

Al inicio de la segunda sesión los alumnos presentan al profesor su nueva respuesta numérica, obtenida mediante el modelo matemático que han construido a partir de sus indicaciones:

Trascripción 31 (DC-9-S2)

015_Tess	Dan, una cosa. Aquest estaria bé? ["6 x ¾ = 4,5€" y "6 x ¼ = 1,5€" y tablas, Figura 16]
016_Dan	Jo crec que no em conformaria amb això. Si fos aquest [jugador en ventaja].
017_Tess	Si fossis aquest?!
018_Dan	Sí.
019_Jay	Ens hem fixat en les tirades que li queden al final, no les que han fet.
020_Dan	Sí, els hi queden. Feu una altra cosa. Feu un altre diagrama que sigui més visible.... Heu calculat així o no?
021_Tess	Això vol dir que aquí hi ha quatre possibles finals, com que tres li donen la solució al jugador u, doncs, o sigui, l'hem de multiplicar per tres quarts.
022_Dan	Però a veure. (…) No totes les possibilitats tenien la mateixa probabilitat. M'explico? Aquí hi ha tres i una, possibilitats, però penseu que les tres i la una no tenen les mateixes possibilitats. M'explico?
023_Jay	Per això. Aquest té més possibilitats de guanyar.
024_Tess	Té més possibilitats de guanyar que l'altre.

025_Dan Sí, però no són tres i una. Bé, són tres i una, però la una... las tres i la una possiblement no tinguin el mateix pes. M'explico. [se aleja]

026_Jay No tenen el mateix pes?

027_Tess És que la cara pesa més que la creu. Aleshores, aquesta guanya perquè el més possible és que treguin cara.

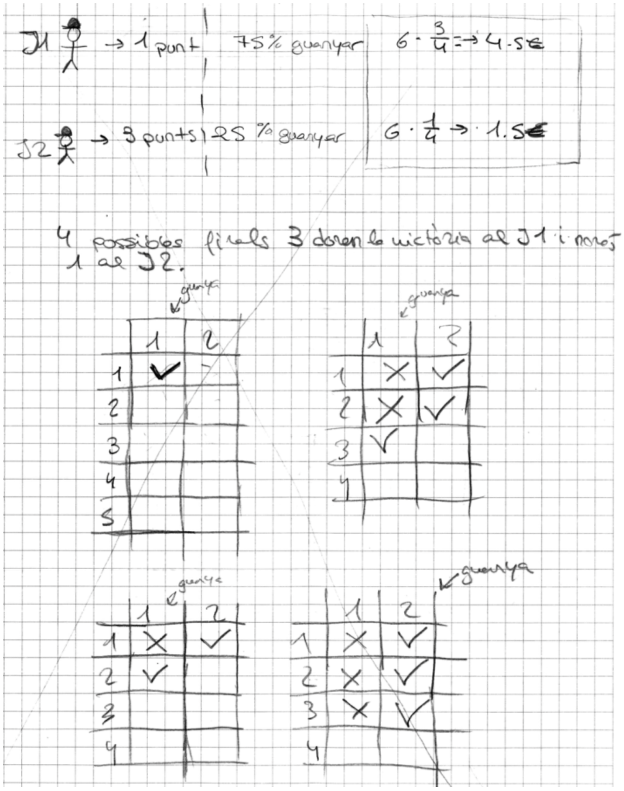


Figura 16; texto de Tess (2)

Tess presenta sus resultados [15] aportando los cálculos y las tablas visibles en su hoja de trabajo (Figura 16), sin explicación complementaria. Más allá del resultado numérico y de los elementos que lo acompañan, la alumna no justifica la validez de su producción. La tarea de interpretar el trabajo realizado recae en el profesor, quien no parece contar con información suficiente para entender el proceso de los alumnos. Dan se refiere a la solución [16] del mismo modo que lo hiciera antes (Transcripción 26) para indicar la incorrección del resultado numérico y en qué sentido difiere del resultado correcto: "el jugador en ventaja no se conformará". El reclamo de Jay [19] pone en evidencia que han seguido las indicaciones de Dan en la construcción del modelo matemático. El alumno no se refiere de modo inteligible a la interpretación de la situación a partir de estas indicaciones; Jay considera satisfecha la solicitud del profesor ("nos hemos fijado en las tiradas que les quedan al final y no en las que han hecho"). La validez que Jay reclama para el modelo matemático construido no se basa en su capacidad para describir la situación empírica, sino en el hecho de que satisface las indicaciones recibidas. Tess ensaya entonces una explicación de las tablas que presentan [21], haciendo visible el papel de la proporcionalidad en la obtención del resultado. La respuesta de Dan [22] no sólo reitera su insatisfacción con la solución, sino que aporta nuevos indicios acerca de la respuesta esperada: aunque son cuatro los marcadores finales posibles, "no tienen las mismas probabilidades" (no son equiprobables). Los alumnos no parecen entender el sentido de la réplica de Dan y la asocian con las posibilidades de los jugadores [23 y 24]: su modelo matemático refleja que un jugador tiene más posibilidades de ganar que el otro. Dan recurre a la metáfora del peso [25] para indicar el hecho de que los marcadores finales no son equiprobables. Esta indicación del profesor parece no ser comprendida por los alumnos [26 y 27], que no logran interpretarla de un modo que les permita redirigir sus esfuerzos.

La justificación de los alumnos acerca de la validez de la solución y del modelo matemático mediante el cual fue construida se centra en la satisfacción de las indicaciones recibidas y en la aplicación de la proporcionalidad sobre los elementos indicados por el profesor. Son la autoridad del profesor, plasmada en la interpretación de sus indicaciones, y el uso de un conocimiento matemático asociable con la situación lo que se esgrime como garantía de la validez del resultado. La reflexión acerca de cómo han sido interpretadas las indicaciones de Dan y sobre cómo esta interpretación da cuenta de aspectos empíricos de la situación se limita a destacar que el modelo implica que el jugador en ventaja tiene más posibilidades de ganar.

Aunque las indicaciones del profesor podrían detonar la reflexión acerca de la relación entre los elementos empíricos de la situación (los posibles marcadores finales no son equiprobables), no observamos reflexiones en este sentido. Los alumnos no parecen reconocer la falsabilidad del modelo que proponen ni las indicaciones finales de Dan logran ayudarles. Serán necesarias nuevas intervenciones del profesor para que las indicaciones recibidas consientan a los alumnos construir el modelo probabilístico. Analizamos la emergencia de esta solución en la siguiente sección, como parte del análisis de la gestión que el profesor realiza.

5.2.3. El caso del grupo EC

El caso del grupo EC, formado por Lyn, Tim, Ely y Sue, es excepcional en un sentido que resulta relevante para comprender la complejidad epistemológica del aula de matemáticas: las acciones de Lyn suelen estar orientadas a verificar la representatividad de los modelos matemáticos que exploran como una condición de validez. Sus acciones promueven frecuentes discusiones en este sentido, tanto al interior del grupo como con la profesora. Por otro lado, las acciones de Tim están orientadas a la producción de una solución numérica construida mediante conocimientos matemáticos conocidos y asociables con problemas de costos y repartos proporcionales, de manera similar a lo observado con los grupos EA y DC. El contraste entre acciones de estos alumnos permite ejemplificar las dificultades que los alumnos y la profesora experimentan al tratar aspectos epistemológicamente complejos de conocimientos matemáticos construidos interactivamente en el aula.

Emergencia de las primeras condiciones de validez y falsación del primer modelo matemático

Después de la introducción de la profesora y de releer individualmente el problema, Lyn hace una primera propuesta al grupo:

Transcripción 32 (EC-1-S1)

015_Lyn	Jo faria vuit entre sis per saber a quants euros toca a cada punt que tens.
016_Ely	Vuit entre sis... Vuit per què?
017_Lyn	Perquè són els vuit punts... O sigui, sabem que vuit punts costen sis euros... i doncs fem vuit entre sis per saber quant costa un punt. [calculadora] Però clar, et dóna... [escribe "8/6 = 1,333..."]
(…)	
020_Tim	Si desprès ho multipliques per set i cinc, dóna més dels diners que els que hem de repartir. (…) Hem derepartir sis. Hem de fer percentatges.

La propuesta de Lyn [15 y 17] asocia la situación planteada con problemas de costos y repartos proporcionales, de modo similar al observado en el grupo DA (Sección 5.1, Transcripción 6). Su uso del verbo 'costar' [17], que no corresponde al contexto del problema, y el hecho de que lo entrecomille con señas, refuerzan esta interpretación. Lyn se equivoca en su planteamiento, en vez de considerar la razón 6:8 considera 8:6, de donde obtiene el valor 1,333... como resultado intermedio. Reconocemos en estas primeras acciones la intención de producir una respuesta que implique el uso de conocimientos matemáticos y, por lo tanto, la cláusula del contrato didáctico que dicta que 'la solución al problema debe ser matemáticamente valiosa'.

Tim objeta que, "multiplicando por siete y cinco", este resultado intermedio implica que se deben repartir más de seis euros ("lo que se debe repartir") [20]. Esta intervención falsa el modelo de Lyn haciendo uso de la condición de validez que hemos visto emerger en otros casos: 'los montos repartidos deben sumar seis euros', de modo que el resultado intermedio propuesto por Lyn no puede ser correcto. Parece claro que la objeción de Tim hubiera surgido incluso si Lyn no se hubiera equivocado en su planteamiento. Por otro lado, la frase "multiplicando por siete y cinco" lleva implícito el modelo matemático que más adelante Tim propone: repartir la apuesta proporcionalmente a los puntos hechos por cada jugador. Su frase final ("tenemos que hacer porcentajes") está posiblemente orientada en este sentido.

Los alumnos no se darán cuenta del error cometido por Lyn y lo incluirán como un primer intento inadecuado en el reporte escrito que entregarán al final de la segunda sesión (Figura 17). La única indicación acerca de la validez del modelo matemático y de la solución numérica, en sentido negativo, es el hecho de que la suma de los montos repartidos no es seis.

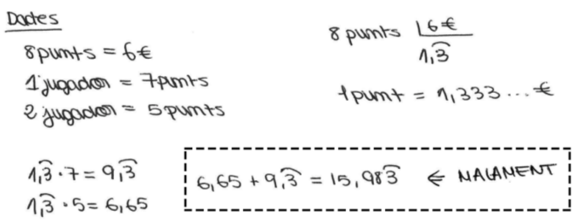


Figura 17; texto del grupo EC

Emergencia del modelo matemático proporcional y discusión sobre su representatividad

Tim propone entonces el modelo matemático que antes esbozaba:

Transcripción 33 (EC-2-S1)

041_Tim	Ja ho he fet. Mira. Sumem els punts, val? I els diners. Pillem els diners i els dividim entre el número de punts, llavors ens dóna quant val cada

	punt, d'aquests dotze punts que tenim. Llavors ho dividim i dóna zero coma cinc.
042_Lyn	No, perquè set més cinc no és vuit.
043_Tim	Tres coma cinc més dos coma cinc sí que són sis. Un guanya tres coma cinc i l'altre dos coma cinc.
044_Lyn	Vale, però escolta un moment, set més cinc no és vuit. Vale?
045_Tim	És dotze.
046_Lyn	Vale. I el sis euros eren per vuit punts.
047_Tim	Ja però com que no està bé, ho repartim així [Lyn llama a la profesora] Si no han pogut acabar ho han de repartir així.

Tim describe un procedimiento que corresponde a repartir la apuesta proporcionalmente a los puntos hechos por jugador [41]. De este modo propone el uso de la proporcionalidad para resolver el problema, a la vez que soluciona [43] las deficiencias del modelo propuesto antes por Lyn: los montos repartidos suman seis euros. Lyn no responde de manera evidente a la propuesta de Tim [42]; es necesario considerar sus tres emisiones para entender de qué está hablando. La alumna se refiere a las reglas del juego [46]: un jugador gana si logra obtener ocho puntos y bajo ninguna otra circunstancia. Conjeturamos que Lyn objeta considerar los doce puntos hechos por ambos jugadores porque esto no corresponde a las reglas del juego; es decir, el modelo no da cuenta de la situación empírica de manera satisfactoria. Esta interpretación será confirmada posteriormente (Transcripción 34, 63). Tim replica haciendo notar que los montos repartidos suman seis euros [43]. Aunque no indica de manera inteligible el estatus epistémico que le asigna al modelo matemático y a la solución numérica, la satisfacción de esta condición de validez es para Tim un indicador positivo de su validez. Esta condición de validez, que fue usada para falsar el modelo matemático propuesto por Lyn, es ahora utilizada para validar este nuevo modelo. Las acciones de Tim son similares, en este sentido, a las de los grupos EA y DC.

Por otro lado, el cambio de foco en cada una de las emisiones de Tim [41, 43 y 45] y el hecho de que no respondan a la cuestión que señala Lyn, posiblemente indican que no está entendiendo a qué se refiere la objeción de su compañera. Sólo en su última emisión [47] parece intentar una respuesta. Tim no da cuenta de la objeción de Lyn acerca de la representatividad del modelo matemático. Por otro lado, Lyn no logra expresar con claridad su objeción. De modo que no es posible saber a partir de estas emisiones si Tim no logra entender la objeción o si no la encuentra relevante. Por su parte, Sue y Ely se mantienen al margen de la discusión.

Lyn llama a la profesora para plantear la discusión. Aunque no sabemos por qué decide hacerlo, esto apunta a las dificultades del grupo para exponer y negociar sus ideas de manera autónoma, así como al papel de la profesora como autoridad matemática:

Transcripción 34 (EC-3-S1)

054_Lyn	Vale. Si sólo hay seis euros a repartir y seis euros son por ocho puntos, pero hay doce puntos en total... ¿Tenemos que olvidarnos de que seis euros son por ocho puntos?
055_Ellen	¡No! Tú no te tienes que olvidar en ningún momento. Lo que pasa... O sea, que seis... Tú estás confundiendo: seis euros son por ocho puntos para una misma persona. Cuando tú hablas de doce puntos es que han obtenido los doce puntos entre las dos personas. ¿De acuerdo?
056_Lyn	Lo sé, pero repartir significa darles a los dos...
057_Ellen	No, porque el que llega primero a ocho se llevaría todos los euros, los seis euros completos. Si alguien hubiera llegado a ocho antes de que empezara a llover, se hubiera llevado los seis euros completos. ¿De acuerdo? El problema es que como la partida no pudo terminar, tenemos que dividirlo.
058_Tim	Jo dic... jo he repartit els dotze punts amb els sis euros, i llavors un guanya tres coma cinc i l'altre dos coma cinc… I seria just.
059_Lyn	Pero no tiene sentido, porque...
060_Ellen	A ver, ¿por qué no tiene sentido? Esa es una posible solución. Estoy de acuerdo. Un criterio para dividir el dinero es ese que acaba de decir en este momento Tim. Ahora, Lyn está diciendo que eso no tiene sentido y me tienes que dar un argumento por el cual no tiene.
061_Lyn	Porque estás... O sea... No, no... Porque los seis euros eran por ocho puntos. Y lo que está haciendo es coger los seis euros y repartiendo... y repartiéndolo entre todos los puntos que tiene...
062_Ellen	Pero él ha hecho eso justamente.
063_Lyn	No, no, no. Digo... Pero eso no es... O sea... no es como las normas que había.
064_Ellen	A ver, una de las posibilidades que tenemos es, para ver si nuestra solución es consistente lo que podemos hacer es... A ver, cambiemos como termina la partida. Imaginemos que... No sé, seis a dos. Van seis a dos cuando se interrumpe el partido. Veamos cómo se reparte el dinero. Y veamos si es justo o no.

Lyn refiere a la profesora la discusión que mantiene con Tim [54]. Desde la perspectiva de sus compañeros, esta intervención revela nuevos elementos que explican la objeción de Lyn: dividir el dinero en doce partes implica "olvidar" que corresponde a ocho puntos. Desde la perspectiva de Ellen, que interacciona con el grupo por primera vez durante la primera sesión, el planteamiento de la alumna no parece tener elementos suficientes para entender la discusión y su complejidad epistemológica. Ellen interpreta la emisión de Lyn como una confusión [55]. Las siguientes intervenciones confirman la ineficacia de la interacción: no es claro a qué se refiere Lyn [56] ni el sentido de la respuesta de Ellen [57]. La alumna no organiza sus ideas para hacer su objeción inteligible y la profesora no logra inferirla, de modo que sus respuestas parecen no contribuir a aclarar la cuestión o a su reflexión. Tim interrumpe con su explicación [58], destacando un procedimiento y un resultado numérico que seguramente revelan a Ellen la repartición proporcional esperada. Califica el resultado numérico como “justo” sin ofrecer ningún indicio acerca de su validez o del proceso de construcción y validación del modelo matemático mediante el cual lo obtuvo. Las acciones para validar el modelo, tal cual se desarrollaron en las interacciones del grupo, son dejadas al margen por Tim en favor de evidenciar los conocimientos matemáticos aplicados y el resultado numérico obtenido.

Lyn vuelve a referirse a la representatividad de este modelo [59], pero lo hace, otra vez, de un modo ininteligible para Ellen, quien reacciona apoyando la propuesta de Tim [60] y pidiendo a Lyn un argumento. Basándonos en la planeación de la sesión (Sección 4.4.1.1), suponemos que el apoyo de la profesora al modelo de Tim no pretende validarlo, sino destacar que debe ser considerado y que, por lo tanto, es necesario un argumento adecuado para falsarlo. Al referirse a la propuesta de Tim como “una posible solución” y “un criterio”, Ellen implica que otras soluciones y otros criterios pueden ser considerados; esto está en línea con la planeación de la sesión: Ellen pretende propiciar la emergencia de distintos modelos y su discusión. Las siguientes intervenciones de Lyn muestran que las intervenciones de la profesora no le ayudan a exponer con mayor precisión su objeción acerca de la representatividad del modelo. Cuando intenta reformular la cuestión [63], la profesora no se refiere a ella directamente [64]; en cambio apela a las consignas de la planeación y propone considerar una variación numérica del problema junto con una sugerencia: aplicar el modelo en esta nueva situación “para ver si la solución es consistente”, decidiendo si la repartición “es justa o no”. No es claro cómo interpretan los alumnos en este momento las palabras “justa” y “consistente”, pero Ellen sugiere una relación entre la validez del modelo y la “justicia” de las soluciones en distintas situaciones. El estatus epistémico de esta relación tampoco es claro en su intervención, pero indica una nueva tarea para los alumnos: explorar esta relación como parte del proceso de validación del modelo matemático.

Las acciones de Lyn y Tim sugieren distintas posturas epistemológicas y teleológicas subyacentes en sus argumentos. Lyn parece entender su tarea inmediata como la evaluación de la relación entre el modelo matemático y el modelo implícito de la situación; según el cual dividir la apuesta entre los puntos hechos por ambos jugadores corresponde a “olvidarse” de que quien obtiene ocho puntos se lleva el total. De modo que intenta poner en evidencia la falta de representatividad del modelo matemático: éste no da cuenta de las reglas del juego. Lyn no expone esta cuestión con claridad ni la sistematiza a partir de la relación entre las variables empíricas de la situación, sin embargo su inclinación a considerar elementos empíricos es notable. Tim parece enfocar su actividad en la identificación y aplicación de un conocimiento matemático que pueda considerarse adecuado; evocando y aplicando sus conocimientos sobre proporcionalidad, parece cumplir con este cometido.

La importancia para Lyn de este posicionamiento se evidencia cuando manifiesta su insatisfacción con su desempeño y el del grupo:

Transcripción 35 (EC-4-S1)

068_Lyn	Es molt raro eso, no? No ho entenc. (…) Som estúpids. No ho resoldrem. No sabem fer això.

Lyn percibe el problema como complejo y novedoso. Cuando dice “es muy raro”, “no sabemos hacer esto” interpretamos que se refiere a que no cuentan con conocimientos matemáticos directamente aplicables. Es decir, no es un problema que pueda resolverse mediante la aplicación inmediata de contenidos matemáticos y heurísticas conocidos. La falta de reacción de sus compañeros no permite identificar su posicionamiento al respecto. Sin embargo, el modelo propuesto por Tim, que corresponde a la aplicación de la proporcionalidad a la situación, sugiere que él no percibe el problema así. Mientras que las acciones de Lyn corresponden a una aproximación reflexiva al problema, las de Tim sugieren otra más bien reproductiva.

Cambio de enfoque hacia una solución probabilística

Después de trabajar durante unos minutos de manera individual, Lyn propone una nueva idea:

Transcripción 36 (EC-5-S1)

087_Lyn	No sé on vull arribar. Però, per arribar a on et donen sis, a aquest li faltava un i a aquest li faltaven tres. Entonces, a partir d'això... mirar com s'han de repartir aquests vuit. Però no sé com.

Lyn cambia el foco de atención del marcador del juego (siete a cinco), la base del modelo proporcional, a los puntos que cada jugador necesitaría para ganar, la base del modelo probabilístico. Aunque este cambio fue observado en distintos grupos, la acción de Lyn es excepcional, pues no es la respuesta a las intervenciones regulativas de la profesora; de hecho implica obviar su última solicitud (Transcripción 34, 64). Por lo tanto no se relaciona con la satisfacción de expectativas de la profesora percibidas por la alumna. Parece un intento deliberado y autónomo de considerar relaciones entre elementos empíricos para construir un modelo de la situación y un modelo matemático representativo. La alumna continúa reflexionando en este sentido:

Transcripción 37 (EC-6-S1)

095_Lyn	O sigui, si repartim els sis euros entre això, que es el que falta [escribe "3+1=4" y "6/4=1,5"]... dóna u coma cinc [escribe "3x1,5=4,5" y "1x1,5=1,5"]. Però esclar, li hem de donar més a aquest, perquè està més a prop que aquest. Doncs jo el que faria és donar-li aquest [4,5] cros aquest [jugador en ventaja] i aquest [1,5] cros aquest [jugador en desventaja]. Però no sé per què!
096_ Ely	Pos està bé això.
097_Lyn	Però per què?
098_Ely	Perquè és proporcional això. (...) Jo crec que està bé.
(...)	
104_Lyn	Jo li trobo sentit, però no sé ni per què!
105_ Ely	I si els sumes, dóna sis. Sis euros.
(...)	
108_Lyn	Anem a l'Ellen que ens ho desmunti. A veure com ens ho desmunta. Perquè nosaltres no sabem.

El argumento de Lyn [95] se desarrolla obteniendo un resultado numérico intermedio (1,5) mediante la razón 6:4. El dato numérico 4 corresponde a la suma de los puntos que a cada jugador le faltan para ganar (1 y 3); estos son los datos numéricos que Lyn ha destacado antes como relevantes para producir un modelo matemático [87]. Utiliza este resultado intermedio para hacer una repartición proporcional a los puntos que a cada jugador le faltan: 1 al jugador en ventaja y 3 a su contrincante. De este modo el producto 1,5 queda relacionado con el jugador que ha obtenido más puntos y el producto 4,5 con el otro. Lyn nota que esto implica darle una parte menor al jugador en ventaja, lo cual no tiene sentido. La alumna apela aquí a referencias compartidas sobre el juego, las cuales implican una condición de validez que hemos observado en otros casos: 'el jugador que ha obtenido más puntos debe recibir más dinero'. Ella misma propone enmendar esto "cruzando" las cantidades: el jugador en ventaja debe recibir 4,5€ y el otro 1,5€. Cuando finalmente dice "no saber por qué", Lyn apunta a esta acción como arbitraria, es decir no encuentra una correspondencia con el modelo de la situación con el que está operando. Vemos una vez más la importancia para esta alumna de evaluar la representatividad de los modelos matemáticos que explora; representatividad que no encuentra justificada en esta ocasión.

Por su parte, Ely encuentra méritos suficientes a este modelo para evaluarlo positivamente [96, 98 y 105]. Esto lo justifica mostrando la satisfacción de dos condiciones de validez que hemos analizado antes: 'la respuesta debe ser matemáticamente valiosa' [98] y 'la suma de los montos repartidos debe ser seis' [105]. Para Ely, el uso evidente de conocimientos sobre proporcionalidad parece ser un signo positivo de la validez del modelo matemático. Observamos una instancia más de la asociación del problema planteado con otros, habituales en este nivel escolar, que se resuelven aplicando conocimientos sobre proporcionalidad. El hecho de que los montos repartidos sumen seis euros no solamente es el único control explícito sobre la representatividad del modelo matemático, sino que es utilizado para verificar en sentido positivo su validez. Las observaciones de Ely no abordan la problemática de la representatividad del modelo que plantea Lyn; como para Tim (Transcripción 33), no resulta claro si Ely no entiende la objeción que Lyn plantea contra su propio modelo matemático o si no la encuentra relevante. La justificación de Ely no satisface a Lyn y su necesidad de evaluar la representatividad del modelo matemático como parte del proceso de validación; de modo que sugiere plantear la cuestión a la profesora [108], pues no cree que sean capaces de resolverla. Para Lyn las conversaciones al interior del grupo no están siendo fructíferas.

Las acciones de Ely denotan una postura epistémica y teleológica similar a la de Tim: evalúa positivamente la validez del modelo basándose en la satisfacción de las mismas condiciones de validez, dejando en segundo plano la capacidad del modelo matemático para representar la situación empírica. Lyn, por su parte, se reafirma en su posición: subordina la validez del modelo matemático que propone al establecimiento de una relación adecuada (en el sentido de representar las referencias empíricas que considera) entre éste y el modelo de la situación con el que opera.

La primera sesión termina sin lograr un acuerdo sobre la solución del problema y sin que los alumnos establezcan una discusión fructífera en relación con las bases de las pretensiones de validez que reclaman para los modelos matemáticos que consideran.

Al inicio de la segunda sesión Lyn y Sue continúan discutiendo el modelo propuesto por Lyn a partir de la sugerencia de la profesora: probarlo en variaciones numéricas del problema:

Transcripción 38 (EC-7-S2)

047_Sue	Què passaria si fos set i sis?
048_Lyn	Si fos set i sis, a aquest li faltaria un i a aquest li faltarien dos. Llavors dividiríem el sis euros entre tres i ens donaria dos euros. Llavors li donaríem a aquest quatre i a aquest dos.
049_Sue	¡Pero eso está mal! Perquè aquest té quatre [el jugador en desventaja] i aquest dos [el jugador en ventaja] i aquest té més possibilitats.
050_Lyn	No, al revés: a aquest quatre i a aquest dos. És que el que no s'entén és aquest canvi últim que fem només perquè aquest té més que l'altre. O sigui, li treu tot el sentit a tot lo altre que hem fet abans. M'entens? Fins aquí una mica de sentit té...

Lyn procede como en la sesión anterior [48], por lo que reproduce el mismo procedimiento que había considerado arbitrario (Transcripción 37). La confusión de Sue [49], basada en la condición de validez que exige que el jugador en ventaja obtenga una parte mayor de la apuesta, promueve la reflexión de Lyn [50]: aunque considerar los puntos que a cada jugador le faltan para ganar parece adecuado (en un sentido que no aclara), la aparente arbitrariedad del modo en que los montos se asignan finalmente "le quita todo el sentido". La necesidad de que el modelo matemático represente la situación empírica sigue siendo el hilo conductor de la actividad matemática de Lyn.

Más adelante, de manera individual, Lyn vuelve a la reflexión acerca del modelo matemático y la variación numérica original y logra interpretar el modelo de manera aparentemente satisfactoria. Le explica a Sue del siguiente modo sus reflexiones:

Transcripción 39 (EC-8-S2)

093_Lyn	Hauria de rebre vuit però s'ha quedat en cinc. Si hagués arribat a vuit, li haguéssim donat sis euros, però no ha arribat. Per tant li restem el que li ha faltat. Sis menys quatre coma cinc [calculadora], i ens dóna u coma cinc i li donem u coma cinc euros. I a aquest li falta un, i doncs fem sis menys u coma cinc [calculadora]... no perquè aquest tingui u coma cinc, sinó perquè u per u coma cinc dóna u coma cinc. Doncs fem (...) sis menys u coma cinc i ens dóna quatre coma cinc. [dirigiéndose al grupo completo] He aconseguit com explicar el que hem fet ahir!

Lyn interpreta los productos 1,5 y 4,5 no como los montos que deben recibir el jugador en ventaja y su contrincante, respectivamente, sino como "lo que a cada uno de ellos le ha faltado" para conseguir el total de seis euros. Así cada jugador debe recibir seis euros menos "lo que le ha faltado" para ganar el juego. La acción que antes resultaba arbitraria, pues no tenía correlación con ningún aspecto empírico del problema, queda así relacionada de manera coherente con el modelo de la situación que resulta del marco interpretativo de la alumna. Esta interpretación es equivalente al reparto proporcional a los posibles marcadores favorables a cada jugador que hemos observado en el grupo DC (Transcripción 29).

Lyn explica esta interpretación a Ely de modo que pueda incluirla en el reporte escrito:

Transcripción 40 (EC-9-S2)

110_Lyn	Al primer que hagués arribat a vuit, li haguéssim donat sis euros. El que faríem és... Diguéssim... Espera, t'ho explico, d'acord? Agafem el que els ha faltat per arribar a vuit punts, fem la proporció i li restem dels que els toquen.
111_Ely	Fem la proporció i què?

112_Lyn	En total els han faltat quatre punts als dos per arribar als vuit punts. Doncs el que fem és sis entre quatre, que ens dóna u coma cinc. I... llavors... eh... Llavors fem u coma cinc per tres, quatre coma cinc. Llavors li restem a sis, quatre coma cinc, que ens dóna u coma cinc, i u coma cinc és el que li donem al que ha fet cinc punts. Després amb l'altre multipliquem u per u coma cinc, li restem a sis u coma cinc i ens dóna quatre coma cinc, que és el que li donem... El resultat és el mateix que abans, però ho expliquem.
113_Sue	Però abans no sabíem per què.
114_Ely	Vale, Lyn. Ho vols escriure tu?

El primer intento de Lyn por explicar sus ideas es infructuoso [110]. Para Ely, que no participó en la discusión entre Lyn y Sue (Transcripciones 38 y 39), resulta imposible entender la explicación [111]. El siguiente intento de Lyn [112] tampoco parece aclarar su planteamiento. La explicación de la alumna describe una serie de manipulaciones numéricas cuya relación con la situación empírica no es inmediata; aunque esta relación está en la base de su proceso de validación, el establecimiento de relaciones entre los elementos empíricos de la situación, los datos numéricos y las etapas sucesivas del modelo matemático que plantea no son claros. A pesar de que la actividad matemática de Lyn en ambas sesiones ha estado dirigida a la evaluación de la representatividad de los modelos matemáticos, no produce una explicación inteligible en este sentido. Es posible que Sue, que ha trabajado con ella antes, tenga elementos suficientes para comprender su explicación [113], pero Ely no parece lograrlo [114]. Lyn no sólo no explica de modo inteligible la interpretación que ha hecho y su relación con el modelo matemático, sino que tampoco explica por qué esta relación justifica la validez del modelo y de la solución numérica.

Dificultades para discutir con la profesora acerca de la validez del modelo matemático

Es posible que Lyn note que su explicación no resulta satisfactoria, pues en ese momento solicita la ayuda de la profesora:

Transcripción 41 (EC-10-S2)

116_Lyn	Una cosa que hicimos ayer y que llegamos a la conclusión de que no estaría... Hemos como conseguido una manera de explicarlo pero... no sabemos cómo redactarlo. Hemos hecho, al que ha hecho cinco le faltan tres para llegar a ocho puntos y al que ha hecho siete le falta uno. Entonces hemos hecho, los seis euros... ¡No! ¡Sí! Los seis euros entre los cuatro puntos que les faltan para llegar a ocho cada uno, que nos da

uno coma cinco. Entonces multiplicamos uno coma cinco por tres y lo restamos de los seis que... habría conseguido y entonces le damos uno coma cinco.

117_Ellen	Claro, porque si no te quedaría que le faltan... el que le quedan más tendría más dinero. Y entonces para hacerlo, lo que haces es restar.
118_Lyn	Pero... ¿Cómo explicar esto?
119_Ellen	Y entonces... A ver, y entonces, ¿cómo sería? ¿Y si lo hicieras al revés, con el otro, con el que gana? ¿Que al que gana le falta uno?
120_Lyn	Hago uno por uno coma cinco y entonces le resto a seis, uno coma cinco.
121_Ellen	Ahora entiendo lo que me decías. Bien, el argumento... la distribución está clara, digamos. ¿No? Y entonces, ¿cuál es tu pregunta?
122_Lyn	Que... que... no sé.
123_Ely	No sabemos cómo redactarlo.
124_Ellen	¿Por qué? Si como me lo han explicado a mí... ¡Si está fantástico! Yo lo he entendido. Ustedes me han dicho que han calculado cuántas partidas les faltan para ganar o cuántos... No, más que partidas, cuántos puntos le faltan para ganar a uno y al otro. Con todos los puntos que faltan para ganar han hecho un reparto y después, debido a que no podía ser que al que le falten más le toque más dinero, lo han resuelto haciendo una resta. Eso es lo que tienen que explicar ustedes.
125_Lyn	Vale.
126_Ellen	Estamos de acuerdo. Y lo que también tendrían que mirar es si en otras distribuciones de... de puntajes... Si la partida acaba en otras distribuciones de puntajes, si sigue siendo igual de razonable repartirlo de esa manera.
127_Lyn	Vale.

La explicación de Lyn resulta bien organizada [116]. Está enfocada en la descripción de las sucesivas etapas del modelo matemático, en la manipulación de los datos numéricos y en el resultado obtenido para el jugador en desventaja (1,5€). La alumna destaca el resultado intermedio (1,5) que le permite calcular los montos que corresponden a cada jugador. En su descripción relaciona los datos numéricos que enuncia con elementos empíricos de la situación (puntos que le faltan a cada jugador, dinero que habría conseguido, etc.); sin embargo, la discusión sobre la adecuación de esta interpretación y la validez del modelo matemático asociado no son el foco de su explicación. Ellen parece entender correctamente la mecánica del modelo presentado (i.e., los pasos a seguir) [117]. Su emisión sugiere que no interpreta el último paso descrito por Lyn (“lo restamos de los seis que... habría conseguido”) como un modo de describir matemáticamente relaciones entre elementos empíricos de la situación, sino como una acción *ad hoc* para corregir un modelo que de otro modo no sería válido (considera como una obviedad que el jugador en ventaja debe recibir más dinero). Su frase "y entonces para hacerlo, lo que haces es restar", parece referirse a una acción arbitraria y no al modelado matemático de condiciones empíricas del problema.

Aunque no es posible asegurarlo, la reacción de Lyn [118] posiblemente se debe a que interpreta de este modo la emisión de Ellen. Lyn pretende mostrar, precisamente, que este paso no es arbitrario, sino una consecuencia de las relaciones entre elementos empíricos de la situación; este debía ser el logro de su reflexión previa (Transcripciones 40 y 41). Cuando se pregunta "¿cómo explicarlo?" es posible que se refiera a esto y no al problema de redactar la sucesión de pasos del modelo. Ellen solicita a la alumna que explique cómo obtendría el monto que corresponde al jugador en ventaja a partir de este modelo [119]. La explicación de Lyn, esta vez, se limita a la descripción de las manipulaciones numéricas necesarias [120]. La profesora reconoce que la alumna es capaz de aplicar el modelo matemático sin dificultades [121]: "la distribución está clara". Posiblemente su interpretación de la intervención inicial de Lyn le hizo suponer dificultades en la sistematización del modelo; dado que este no parece ser así, pide una aclaración: "¿cuál es tu pregunta?". Lyn no logra reformular la cuestión [122] y Ely relanza la redacción como cuestión problemática [123]. Ellen describe los pasos a seguir [124] según su entendimiento del modelo matemático explicado por Lyn. Su descripción acentúa la idea de que el último es un paso *ad hoc* para satisfacer una condición de validez conocida: 'el jugador en ventaja debe recibir más dinero'. Su siguiente intervención [126] propone, como lo hiciera antes (Transcripción 34, 64), la aplicación del modelo matemático en distintas variaciones numéricas para considerar su validez (para "mirar si sigue siendo igual de razonable").

Aunque la actividad matemática de Lyn está centrada en evaluar la representatividad del modelo matemático que propone, y a pesar de tener cierto éxito en este sentido, no logra llevar las distintas conversaciones hacia la discusión de esta cuestión. En las explicaciones a Ely (Transcripción 40) y a la profesora (Transcripción 41) destaca la descripción de la mecánica del modelo (i.e., la secuencia de pasos a realizar) y los resultados numéricos obtenidos. Las consideraciones de Lyn acerca de la validez del modelo matemático están relacionadas con la capacidad del modelo para dar cuenta de la situación empírica, pero la alumna muestra dificultades para hacer evidente esta cuestión en sus explicaciones. Por su parte, Ellen no parece percibir esta relación y su papel en las explicaciones de Lyn. Sus intervenciones no logran ayudar a la alumna a plantear adecuadamente la cuestión y en cambio la identifican con una dificultad de redacción: describir con precisión una serie de pasos a seguir. Después de esta interacción con la profesora, Lyn no continúa con su línea argumentativa.

5.3. La gestión del profesor

En las secciones anteriores nos centramos en analizar las acciones de los alumnos y los procesos de validación de su producción matemática mientras trabajan en grupo y cuando interaccionan con el profesor. En esta sección nos centramos en la gestión por parte de los profesores de la interacción con los alumnos, en relación con procesos de construcción de la validez de la producción matemática de los distintos grupos.

Dividimos esta sección en dos partes, que dedicamos a cada profesor. Para cada uno, presentamos interacciones mantenidas tanto con toda la clase como con grupos particulares. Mediante el análisis de estas situaciones identificamos elementos relevantes de la gestión realizada por cada profesor y algunas consecuencias de esta gestión en el trabajo de los alumnos y en los productos de su actividad matemática.

5.3.1. El profesor Dan

Dan comienza la primera sesión hablando sobre el problema, mientras el investigador principal y el asistente reparten el enunciado a cada uno de los alumnos en tiras de papel. Los alumnos aún no han leído el enunciado mientras él hace la siguiente introducción:

Transcripción 42 (Dan-1-S1)

001_Dan	S'ha d'argumentar. No val dir: tal cosa. No, tal cosa per tal raó, per tal argument, per tal cosa. D'acord? No us deixeu emportar per la qüestió fàcil. Penseu. Feu esquemes, feu taules. Aprofiteu els procediments que

> ja havíem explicat abans. Aprofiteu tots els recursos que teniu, per intentar argumentar la resposta que donareu a aquest problema. D'acord? Penseu que les dues persones, els dos jugadors que diu aquí, saben moltes matemàtiques. Què significa? Que no es conformaran amb la proposta que doni un jugador o que doni l'altre. Per tant vosaltres heu de justificar la resposta que doneu.

La introducción de Dan enfatiza la necesidad de justificar las soluciones que se propongan. El profesor nos ha informado que sus alumnos están acostumbrados a resolver y discutir problemas y que él suele pedirles que justifiquen su producción matemática. Dan sabe que nos interesa registrar argumentos de los alumnos, de manera que el énfasis acerca de la justificación en la introducción del problema puede estar también motivado por su intención de colaborar con nuestro estudio. Su emisión, por otro lado, sugiere que el problema reviste cierta dificultad matemática; las frases "no se dejen llevar por la cuestión fácil", "aprovechen los procedimientos que hemos explicado antes", "todos los recursos que tienen", "piensen que los dos jugadores saben muchas matemáticas" y "no se conformarán con la propuesta que dé uno o que dé el otro", son indicadores de la dificultad del problema.

En los términos en que Dan se refiere a las justificaciones que espera de los alumnos, el elemento más destacado es la complejidad matemática de la solución. La necesidad de que la solución represente elementos empíricos de la situación planteada no es el foco de su emisión. Aunque podemos suponer que la necesidad de dar cuenta de la situación empírica está implícita en la solicitud de "razones" y "argumentos" y en la naturaleza misma del problema (modelado matemático), no resulta discernible en sus palabras.

En la Sección 5.1 (Transcripciones 2 y 3) destacamos la relevancia de esta intervención del profesor en las interacciones iniciales del grupo DB. La cláusula del contrato didáctico según la cual cualquier respuesta válida debe estar relacionada con actividades matemáticamente significativas, se ve reforzada por la introducción de Dan para conformar una condición de validez: 'la solución debe ser reconocible como matemáticamente valiosa'. Esta es una premisa que permite a los alumnos decidir sobre la validez de su producción matemática. Una solución aceptable al problema debe satisfacer las expectativas de los alumnos respecto a su desempeño y a la solución a obtener. Para el grupo DB, mostramos cómo la necesidad de producir una solución matemáticamente valiosa lleva a rechazar interpretaciones de la situación y soluciones al problema, en favor de otras que consienten satisfacer expectativas de los alumnos. Los alumnos de este grupo adaptan su marco interpretativo de modo que la tarea a realizar posibilite un desempeño matemático adecuado a las expectativas percibidas.

En la introducción de Dan, la necesidad de justificar la solución emerge del hecho de que “los dos jugadores saben muchas matemáticas” y por lo tanto “no se conformarán con cualquier respuesta”. Estos jugadores hipotéticos saben la respuesta correcta (o están en condiciones de saberla), la cual está basada en sus conocimientos matemáticos y es capaz de conformar a ambos jugadores. Si la respuesta ofrecida por los alumnos es incorrecta, alguno de los dos jugadores no se conformará con ella, pues recibiría menos dinero del que debe recibir. De este modo, la introducción de Dan sugiere que la respuesta numérica correcta es única; aunque no es claro que los alumnos puedan hacer esta interpretación inmediatamente. Estos elementos conforman la estrategia comunicativa del profesor en la gestión de la interacción con los grupos para orientar el trabajo de los alumnos y para validar los modelos matemáticos y las soluciones numéricas. En la Sección 5.2.2 hemos ejemplificado parcialmente la estrategia comunicativa de Dan y analizado algunas de sus consecuencias en el trabajo del grupo DC. A continuación retomamos el análisis de este grupo y lo complementamos con el análisis del grupo DA para ejemplificar y discutir la gestión que hace Dan de procesos de construcción de la validez de la producción matemática cuando interacciona con los alumnos.

Después de falsar el primer modelo matemático (0,75€ por punto obtenido) como lo mostramos en la Sección 5.1 (Transcripción 6), el grupo DA produce la solución 3,5€ y 2,5€ (7/12 de la apuesta para el jugador en ventaja y 5/12 para el otro jugador), repartiendo la apuesta proporcionalmente a los puntos obtenidos por jugador. Las alumnas deciden proponer esta solución al profesor, con quien mantienen la siguiente conversación:

Transcripción 43 (DA-1-S1)

080_Laura	Una cosa, amb aquest resultat es conformaran? [‘3,5€’ y ‘2,5€’]
081_Dan	No.
082_Alin	No?
083_Dan	Jo si porto set partides guanyades i l’altre tres... No és així, set i tres?
084_Alin	No, set i cinc.
085_Dan	Set i cinc. Jo no em conformaria. [se aleja]

086_Alin Ja, perquè aquest jo crec que hauria de voler més; perquè està més a prop.

Para comunicar sus resultados Laura utiliza una noción que usó Dan en su introducción (Transcripción 42), enfocando su pregunta en la capacidad de la solución numérica que proponen para “conformar” a los jugadores [80]. La adecuación del lenguaje a los términos y estrategias comunicativas del profesor indica la importancia de sus acciones en la construcción de las explicaciones de estas alumnas. El profesor provee palabras y modos de referirse a la situación que las alumnas incorporan en su actividad. La respuesta de Dan [81, 83 y 85] expresa que la solución numérica es incorrecta, a la vez que proporciona información acerca de la solución correcta: el jugador en ventaja debe recibir más dinero. Alin relaciona la respuesta del profesor con la situación planteada [86]; sin embargo su emisión es un parafraseo de la del profesor y no una reflexión sobre la representatividad del modelo matemático construido y su proceso de validación.

Al igual que en sus primeras interacciones con el grupo DC (Sección 5.2.2, Transcripciones 26 y 28), la respuesta de Dan se funda en su autoridad matemática, la cual se traslada a los jugadores que “saben muchas matemáticas” para rechazar la solución numérica propuesta por el grupo. Dan no propicia que las alumnas expliquen el proceso que las ha llevado a construir y validar el modelo matemático proporcional con el que han producido la solución, ni justifica su rechazo con elementos que permitan reflexionar acerca de este. Las acciones del profesor, en cambio, informan acerca de la solución correcta (el jugador en ventaja debe recibir más dinero) a la vez que refuerzan la indicación acerca de la unicidad de la respuesta (con la cual se conformarán ambos jugadores). Dan utiliza frecuentemente esta estrategia comunicativa en sus interacciones con los alumnos. En la situación analizada, las alumnas no intentan explicar sus procesos de resolución para justificar la validez de sus resultados. Es posible que esto se deba al rechazo inmediato de la solución por parte del profesor.

Esta interacción con el grupo DA lleva a Dan a dirigirse a la clase con nuevas indicaciones. La siguiente emisión tiene lugar a los trece minutos de haberse iniciado la primera sesión:

Transcripción 44 (Dan-2-S1)

002_Dan A veure si m’escolteu un moment. Aquests dos jugadors saben matemàtiques, i no es conformen amb qualsevol cosa. Vosaltres sou persones joves... joves; i mireu més al futur que no pas al passat. Al futur: què passarà. Més que no pas al que ha passat. Vinga! (...) Feu esquemes, feu gràfics. Mirant al futur.

Para Laura y Alin, del grupo DA, esta emisión confirma el rechazo de la solución proporcional (Transcripción 43). En esta ocasión, sin embargo, el profesor indica elementos que deben ser considerados para construir un modelo matemático válido: en lugar de dirigir la atención a "lo que ha pasado" los alumnos deben dirigirla a "lo que puede pasar". Aunque no es evidente cómo puede ser interpretada esta sugerencia por los alumnos, dirige su atención hacia el desarrollo hipotético del juego. Los alumnos del grupo DC tendrán dificultades para interpretar y operativizar esta sugerencia, de modo que en su siguiente interacción con el profesor insisten en la solución proporcional que el profesor había rechazado en su primera interacción con el grupo (Sección 5.2.2, Transcripción 26):

Transcripción 45 (DC-1-S1)

146_Tess	Però per què no val, Dan? [modelo proporcional y solución 3,5€ y 2,5€]
(…)	
149_Dan	Aquí què feu, una proporció?
150_Tess	Sí.
151_Dan	Perquè no. No és així. Perquè tu no has... No conta el que tu has fet fins ara, sinó el que queda per fer. Les possibilitats que queden per fer. En les possibilitats que queden per fer, ja està contemplat el que s'ha fet anteriorment. Perquè esclar, el de set ja surt amb set guanyades, per tant ja estan contemplades. Però tu has de veure el futur. Què passaria a partir del set? A partir del set, qui podria guanyar? Quines possibilitats té l'un? Quines possibilitats té l'altre? Feu esquemes, feu gràfics, feu coses. A veure.
152_Jay	Val.

Tess pone a discusión la solución proporcional sin aportar elementos para justificar su validez [146]. El profesor la rechaza nuevamente, esta vez proveyendo razones [149 y 151]. Aunque las razones que propone ("las partidas ganadas ya están contempladas") no resultan claras, pues desde el punto de vista probabilístico las partidas realizadas son irrelevantes, la intervención de Dan indica que un modelo matemático y una solución numérica válidos deben considerar los puntos que faltan para ganar y no los hechos hasta el momento. No es evidente que los alumnos puedan aprovechar esta indicación para reinterpretar y comprender la situación empírica, pero parece clara la dirección en la que deben trabajar:

construir un modelo matemático basado en los puntos a obtener para ganar y no en los puntos obtenidos.

Posiblemente la intención de Dan con su intervención dirigida a toda la clase (Transcripción 44) y aclaraciones posteriores [151] sea propiciar la reflexión acerca de la situación empírica; en particular acerca del hecho de que las posibilidades de ganar de uno y otro jugador dependen de los puntos que deberían obtener para ganar y son independientes de los puntos obtenidos. La reflexión en este sentido podría propiciar el entendimiento de las relaciones entre los elementos empíricos de la situación, formando la base para transitar del modelo proporcional al probabilístico. En ningún grupo observamos que los alumnos aprovechen la intervención de Dan y sus aclaraciones de este modo. En cambio, los tres grupos observados centran su atención en los puntos que los jugadores necesitan obtener para ganar la partida: un punto el jugador en ventaja y tres el contrincante. Intentan relacionar estos datos numéricos de maneras coherentes con elementos empíricos dentro de sus marcos interpretativos (e.g., los números mínimo y máximo de partidas que aún se pueden jugar) para producir una nueva solución numérica que satisfaga las indicaciones del profesor. Las alumnas del grupo DA, por ejemplo, construyen una nueva solución numérica manipulando los datos indicados por el profesor (los puntos que cada jugador necesita para ganar). Las alumnas dividen la apuesta proporcionalmente a los puntos que cada jugador necesita para ganar, obteniendo como solución 4,5€ para el jugador en ventaja y 1,5€ para el contrincante. Evalúan esta solución positivamente pues satisface otra indicación del profesor: el jugador en ventaja recibe una parte mayor respecto a la solución que presentaron antes (Transcripción 43). Sin embargo, las alumnas indican que el número máximo de partidas que aún se podrán disputar para que alguien gane es tres, de modo que dividir la apuesta entre cuatro (la suma de los puntos que ambos jugadores necesitan para ganar) no parece tener sentido. Sobre esta solución numérica comentan:

Transcripción 46 (DA-2-S1)

212_Laura	Si Dan ens diu que això està bé [4,5€ para el jugador en ventaja y 1,5€ para el contrincante], a partir d'aquí buscar un raonament.
213_Alin	Demana-li.
214_Laura	Em dirà, com l'has trobat.

El comentario de Laura [212] indica la importancia que tiene obtener el resultado correcto, aquel que satisfaga a Dan. Una vez que el profesor valide el resultado podrán buscar un razonamiento que lo asocie de modo coherente con la situación planteada. Las indicaciones del profesor son aprovechadas para deducir características que este espera en la respuesta y para producir una solución numérica que las satisfaga; la relación de esta solución con la situación empírica será consecuencia de la validez del resultado, la cual debe determinar el profesor. El ciclo de modelación matemática (Blum y Leiß, 2007) parece invertido, ya que la solución numérica no es un producto del entendimiento de las relaciones entre los elementos empíricos de la situación; son las relaciones entre estos elementos las que hay que adaptar para que arrojen la solución que el profesor espera. El modelo de la situación resulta así una consecuencia de la solución numérica correcta y no de la reflexión acerca de la situación empírica basada en las indicaciones del profesor. A pesar de que las alumnas reconocen la necesidad de justificar su producción matemática [214], esperan contar con la validación de la solución por parte del profesor para buscar, *a posteriori*, un modelo matemático mediante el cual producirla.

Hacia el final de la primera sesión, las alumnas presentan esta solución numérica a Dan. La interacción comienza con la solicitud de evaluación de la solución:

Transcripción 47 (DA-3-S1)

222_Laura	Dan? Quatre coma cinc i u coma cinc?
223_Dan	Jo no em conformaria. El que té set... Penso, eh!
224_Alin	Vol més?
225_Dan	Vol més. Perquè està a punt de guanyar.
226_Laura	Bueno, però l'altre...
227_Dan	Jo no sé si serà aquesta la solució. Però el que en té set està a punt. [se aleja]
228_Laura	Ja li estem donant quatre coma cinc. Què vol, que li donem cinc coma noranta nou?
(...)	
233_Alin	[calculadora] Vol cinc vint-i-cinc? [Dan se acerca]
234_Dan	Cinc vint-i-cinc... és ja una altra cosa.
235_Alin	I l'altre cero setanta-cinc?
236_Dan	Cinc vint-i-cinc... bé, jo no sé...

237_Alin	És el que ens ha sortit al principi.
238_Dan	No sé si sortirà, eh!
239_Alin	El primer que hem fet i ens ha sortit això.
240_Dan	Però quina proporció heu fet aquí?
241_Alin	Una regla de tres.
242_Dan	Una regla de tres? Bé, jo no sé si aquesta serà la solució. Penseu.

Las alumnas no exponen el modelo matemático construido ni el proceso reflexivo asociado, sino que se refieren directamente a la solución numérica obtenida [222]. Las dificultades del grupo para producir una interpretación consistente de la situación que les permita derivar de manera coherente la solución numérica, no son planteadas al profesor, ni este indaga al respecto. Dan utiliza la misma estrategia comunicativa [223, 225 y 227] observada antes para rechazar la primera solución presentada por este grupo (Transcripción 43): el jugador en ventaja no se conformará, debe recibir más dinero. Después del rechazo inicial del profesor, Alin trae a colación la primer solución numérica que han considerado (5,25€ para el jugador en ventaja y 0,75€ para el contrincante) [233], producida mediante un modelo matemático (basado en la razón 6:8,) que fue falsado al inicio de la sesión (Sección 5.1, Transcripción 6). Probablemente el valor de esta solución en este momento es que satisface la indicación del profesor, pues le otorga una suma mayor al jugador en ventaja. Durante el resto de la interacción la atención de las alumnas está en las expresiones del profesor, que parecen indicar que reconoce esta respuesta como la solución correcta [234-242]. A partir de esta interacción, las alumnas abandonan la reflexión sobre el modelo en el que estaban trabajando y dedican sus esfuerzos a manipular los datos numéricos con los que cuentan para intentar producir un modelo matemático que arroje esta solución numérica. Observamos nuevamente la inversión del ciclo de modelado: la solución numérica percibida como validada por el profesor impulsa la construcción de un modelo de la situación y de un modelo matemático a partir de los cuales tal solución es inferible.

En la Sección 5.2.2 (Transcripciones 29 y 30) mostramos cómo el grupo DC aprovecha las indicaciones del profesor para interpretar la situación y producir la solución numérica: 4,5€ para el jugador en ventaja y 1,5€ para el contrincante. Este grupo, a diferencia del grupo DA (Transcripción 46) realiza una interpretación de los datos numéricos indicados por el profesor (puntos que a cada jugador le faltan para ganar) que les permite construir la solución numérica de manera coherente: los posibles marcadores finales son cuatro, tres favorecen al jugador en ventaja y uno a su contrincante; de modo que la apuesta se repartirá proporcionalmente a estos marcadores. Esta solución satisface las condiciones de validez consideradas ('el jugador que ha obtenido más puntos debe recibir más dinero' y 'la respuesta es matemáticamente valiosa'), a la vez que satisface las indicaciones de Dan. El grupo DC presenta esta solución al inicio de la segunda sesión, solicitando al profesor su evaluación:

Trascripción 48 (DC-2-S2)

015_Tess	Dan, una cosa. Aquest estaria bé? ["6 x ¾ = 4,5€" y "6 x ¼ = 1,5€"]
016_Dan	Jo crec que no em conformaria amb això. Si fos aquest [jugador en ventaja].
017_Tess	Si fossis aquest?!
018_Dan	Sí.
019_Jay	Ens hem fixat en les tirades que li queden al final, no les que han fet.
020_Dan	Sí, els en queden. Feu una altra cosa. Feu un altre diagrama que sigui més visible.... Heu calculat així o no?
021_Tess	Això vol dir que. Aquí hi ha quatre possibles finals, com que tres li donen la solució al jugador u, doncs, o sigui, l'hem de multiplicar per tres quarts.
022_Dan	Però a veure. (…) No totes les possibilitats tenen la mateixa probabilitat. M'explico? Aquí hi ha tres i una, possibilitats, però penseu que les tres i la una no tenen les mateixes possibilitats. M'explico?
023_Jay	Per això. Aquest té més possibilitats de guanyar.
024_Tess	Té més possibilitats de guanyar que l'altre.
025_Dan	Sí, però no són tres i una. Bé, són tres i una, però la una... les tres i la una possiblement no tinguin el mateix pes. M'explico. [se va]
026_Jay	No tenen el mateix pes?
027_Tess	És que la cara pesa més que la creu. Aleshores, aquesta guanya perquè el més possible es que treguin cara.

Dan utiliza la estrategia comunicativa [16] observada antes para rechazar la solución numérica y proporcionar información sobre la respuesta que espera: el jugador en ventaja no se conformará, pues debe recibir más dinero. Jay defiende la solución presentada [19] argumentando que han seguido sus indicaciones. En su argumento no se refiere al modelo matemático construido y a cómo este representa la situación, cuestión clave que funda la certeza de los alumnos en relación con esta solución (Sección 5.2.2), sino al hecho de que este satisface condiciones indicadas por el profesor anteriormente (Transcripción 45). Tess intenta explicar la relación entre el modelo matemático construido y la situación, destacando el uso de la proporcionalidad [21]. La siguiente intervención de Dan [22] problematiza este planteamiento dando nuevos indicios acerca de la respuesta esperada: aunque son cuatro los marcadores finales posibles, “no tienen las mismas probabilidades” (no son equiprobables). Los alumnos no parecen entender el sentido de la réplica de Dan y asocian las posibilidades a los jugadores [23 y 24]: su modelo matemático refleja que un jugador tiene más posibilidades de ganar que el otro. Dan recurre a la metáfora del peso [25] para indicar que los marcadores finales no son equiprobables. Esta indicación del profesor parece no ser comprendida por los alumnos [26 y 27], que no logran interpretarla de un modo que les permita redirigir sus esfuerzos. Un minuto más tarde, Dan se acerca al grupo con nuevas indicaciones:

Trascripción 49 (DC-3-S2)

032_Dan	Feu un diagrama de possibilitats.
033_Tess	Un diagrama de possibilitats?
034_Jay	Dan, què es un diagrama de possibilitats?
035_Dan	Qualsevol diagrama, qualsevol representació. Vosaltres què teniu? A veure, què podria passar a la següent partida? Podrien passar dues coses, no? A veure. Feu un diagrama.
036_Jay	Que guanyés un o l’altre.
037_Dan	Esclar! Per això.
038_Tess	Estem aquí, val?
039_Dan	Així, vinga. Què podria passar? Dues branques.
040_Tess	Doncs, cap aquí. Ara ho he entès! Ara ho he entès!

La indicación del profesor [32] no es inicialmente comprendida por los alumnos [33 y 34]. Dan será más explícito y guiará a los alumnos hacia la producción de un diagrama de árbol [035, 037 y 39]. Esta vez, los alumnos logran seguir las indicaciones y comienzan a construir un diagrama de árbol para representar el desarrollo hipotético de la partida [36, 38 y 40]. El trabajo en el diagrama, junto con las indicaciones anteriores del profesor, les permitirá construir el modelo y la solución numérica probabilísticos esperados.

Dan no propicia la discusión de los modelos matemáticos y sus procesos de validación, sin embargo sus acciones resultan efectivas para guiar a los alumnos hasta la solución probabilística. La conversación siguiente ilustra cómo los alumnos del grupo DC llegan a esta solución después de esta última interacción con el profesor, en la que les fue indicado producir un diagrama de árbol (Figura 18):

Transcripción 50 (DC-4-S2)

057_Tess	El jota dos [jugador en desventaja] té el dotze coma cinc per cent de possibilitats de guanyar.
058_Jay	Com has arribat a això?
059_Tess	(Figura 18) El cinquanta per cent... El cinquanta per cent del cinquanta per cent és el vint-i-cinc per cent. El cinquanta per cent del vint-i-cinc per cent és el dotze coma cinc per cent. Doncs aquest té: cinquanta per cent més vint-i-cinc, setanta-cinc per cent. Més dotze coma cinc, té el vuitanta-cinc coma cinc per cent.
060_Jay	I si ho sumes tot, suma cent per cent?
061_Tess	Sí.
062_Dan	[Dan se acerca] Això ja m'agrada més.
063_Tess	Per tant el que hem de fer és multiplicar sis per vuitanta set coma cinc per cent... [calculadora]

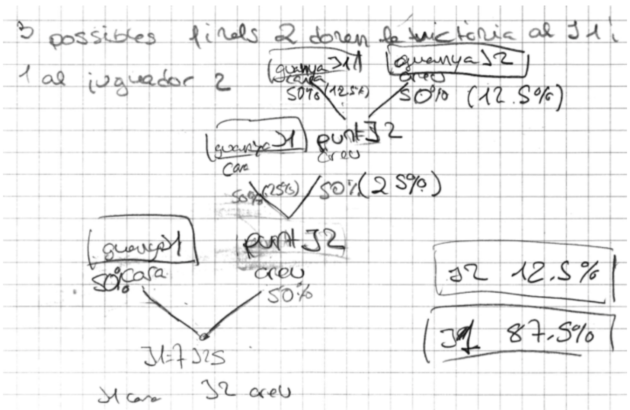


Figura 18; texto de Tess (3)

Los alumnos saben que obtener cara o cruz en un lanzamiento tiene la misma probabilidad; esta referencia acerca del juego emerge en sus descripciones de la situación y en sus argumentos. Tess utiliza esta referencia y el diagrama de árbol [59] para describir cómo evoluciona la probabilidad en cada lanzamiento (Figura 18). No sabemos si esta acción corresponde a su interpretación de la dinámica del juego o si está simplemente manipulando los datos numéricos ("el cincuenta por ciento del cincuenta por ciento es el veinticinco por ciento"); ahora bien, el modelo matemático que emerge parece satisfacer las indicaciones del profesor (Transcripción 48): el jugador en ventaja obtiene una parte mayor y cada uno de los marcadores finales tiene un "peso" distinto [63] (expresado como porcentaje). La intervención de Dan [62], cuando pasa y observa lo que los alumnos hacen, refuerza la percepción de validez a partir de la satisfacción de las indicaciones del profesor.

Más adelante los alumnos reflexionan acerca de la solución obtenida:

Transcripción 51 (DC-5-S2) 6:15 (13:41)

070_Jay	Però esclar, abans poden haver fet tantes tirades com tu vulguis.
071_Tess	Sí, sí, no importen les tirades que hagin fet abans. Només importen les que falten; però, llavors, tampoc importa el número al que arribis.
072_Jay	Eh?
073_Tess	Per exemple, si la teva meta es noranta-nou punts i un en porta noranta-vuit i l'altre en porta noranta-cinc, doncs no importa.
074_Jay	Llavors això que havíem fotut no és correcte [el modelo matemático anterior, el cual considera los marcadores finales como equiprobables].
075_Tess	No. Això és caca.
076_Jay	Jo no entenc per què no pot ser això també. Això perquè ho diu el Dan, però...
077_Tess	És que, o sigui, ho havíem fet diferent. Com, tira aquest, i surt cara... [Dan se acerca] És això.
078_Jay	Ara estarà content?
079_Dan	Però quant s'emporten? [Tess señala la respuesta: 5,25€ para el jugador en ventaja y 0,75€ para el otro] Us ha sortit això?
080_Jay	Sí. [Dan hace un gesto aprobatorio y se aleja]
081_Tess	Això vol dir que sí.
082_Jay	Sí, amb aquesta cara...

Los alumnos notan la independencia del modelo matemático de los lanzamientos hechos hasta el momento [70 y 71]; una característica importante del modelo probabilístico. Tess nota también que el modelo es independiente de los puntos totales necesarios para ganar el juego [71 y 73]. Desde el punto de vista de la construcción y formalización de la noción de probabilidad, estas observaciones resultan relevantes. Sin embargo, la duda expresada por Jay [74 y 76] sugiere que no tiene claros los motivos por los cuales debe considerar este modelo matemático como válido, pues atribuye la validez a las preferencias del profesor. Desde el punto de vista del modelado matemático, esta actuación de los alumnos es significativa: no es la exploración de cuestiones empíricas (e.g., la independencia de las posibilidades de ganar de los puntos conseguidos) para la construcción de un modelo de la situación lo que justifica la validez del modelo matemático mediante la verificación de su representatividad; es la validez del modelo matemático, garantizada por la autoridad del profesor, la que permite deducir relaciones empíricas entre elementos de la situación. En lugar de aprehender reflexivamente cuestiones empíricas de la situación para dirigir la construcción de un modelo matemático representativo, los alumnos imponen a la situación empírica relaciones que emergen deductivamente del modelo matemático y de la solución numérica validados por el profesor.

El intento de Tess por reflexionar acerca de las diferencias entre este modelo matemático y el que habían producido [77] se ve interrumpido por la llegada de Dan, quien confirma [79-82] la validez de la solución numérica y del modelo matemático. Los alumnos quedan satisfechos con la aprobación del profesor y no continúan reflexionando acerca del trabajo llevado a cabo.

La gestión que realiza Dan de procesos de construcción de la validez de la producción matemática cuando interacciona con sus alumnos resulta efectiva, en el sentido de lograr que los alumnos construyan la solución probabilística (los tres grupos observados lo hicieron). Los tres grupos justificaron la solución probabilística mediante razones en línea con la noción de probabilidad (Transcripción 50) y enunciaron cuestiones relevantes para su formalización (Transcripción 51) (e.g., las probabilidades de ganar dependen de los puntos que cada jugador debe obtener y son independientes de los puntos obtenidos y de los puntos totales necesarios para ganar el juego). En los tres grupos observamos cómo las intervenciones regulativas del profesor fueron aprovechadas por los alumnos para inferir características esperadas de la solución numérica correcta, a partir de las cuales construyeron el modelo probabilístico. Aunque no hay ninguna mención explícita de la unicidad de la respuesta, los tres grupos presentaron la solución probabilística como correcta y descartaron como incorrectas todas las otras soluciones.

Durante la puesta en común, Dan comienza solicitando a Troy que exponga y justifique la solución numérica que ha obtenido:

Transcripción 52 (DPC-1-S2)

001_Dan	A veure... Troy. Explica aquest últim raonament que has fet.
002_Troy	He tingut em compte un dels dos jugadors, el que fa... el que encerta set, i que set dels vuit que necessita per guanyar són vuitanta-set coma cinc per cent de la partida. Doncs li toca el vuitanta-set coma cinc per cent del pot. Que son cinc coma vint-i-cinc euros. Doncs a l'altre li donem la resta del pot.
003_Dan	Penseu que aquest raonament és vàlid?
004_Roy	Sí.
005_Dan	Sí? Per què?
006_Tom	Perquè ens ha donat el mateix!
007_Dan	Són vuit partides? A veure, vosaltres jutgeu el raonament pel resultat final? No! Aleshores a veure!
(…)	
012_Liz	Hem fet això mirant com si fos el que guanya set partides. Si fem els mateixos càlculs amb el què ha guanyat cinc, llavors el resultat ens dóna més de sis.
015_Dan	De manera que aquí hi ha una qüestió important, li ha donat un resultat i molta gent pensa que el resultat és l'argument que justifica això. No! No necessàriament ha de ser així. No necessàriament ha de ser així.

Troy utiliza implícitamente la razón 6:8 (relación entre el monto de la apuesta y puntos para ganar) [2] para otorgar al jugador en ventaja una parte proporcional de la apuesta (5,25€) y propone dar el resto al contrincante (0,75€). Expresa estas cantidades como porcentajes complementarios del total de la apuesta (87,5% y 12,5% respectivamente). Muchos alumnos, incluyendo los de los grupos DA y DB, valoran la respuesta de Troy positivamente. Ningún alumno manifiesta en este momento objeciones. Posiblemente esto se debe a que la solución numérica es la correcta y a que es expresada mediante porcentajes, una estrategia utilizada por varios grupos, por ejemplo los grupos DC (Transcripción 50) y DB. La respuesta de Tom [6] a la pregunta de Dan acerca de la validez del razonamiento [3 y 5] apoya esta interpretación.

Aunque los alumnos de los grupos DA (Sección 5.1, Transcripción 6), DC (Sección 5.2.2, Transcripción 24) y DB han considerado y desechado antes este razonamiento, sólo a partir de la intervención de Dan [7] algunos alumnos logran falsar el modelo matemático propuesto por Troy. Liz utiliza un argumento [12] similar a los esgrimidos por los tres grupos observados para evidenciar el uso incorrecto de la proporcionalidad por parte de Troy (el razonamiento debe ser aplicado al otro jugador también) y la incapacidad del modelo matemático corregido para satisfacer una condición de validez: 'la suma de los montos repartidos debe ser seis'. Dan aprovecha para destacar que la obtención de la solución numérica correcta no justifica la validez del modelo matemático mediante el cual fue construida [15].

Dan solicita a los alumnos del grupo DB que expongan su solución en la pizarra (el modelo probabilístico). Mediante un diagrama y una explicación similares a los de Tess (Transcripción 50), Tom comunica a todo el grupo el resultado, el cual será considerado válido por el profesor. Ningún alumno manifiesta dudas en relación con el modelo y la solución propuestos. Dan termina la puesta en común comentando:

Transcripción 53 (DPC-2-S2)

023_Dan	Mireu, alguna gent de vosaltres heu fet el raonament al revés. Al revés. S'ha de fer un raonament per arribar a la solució. Però no a partir de la solució justificar l'argument. M'explico, o no?

Dan retoma el comentario que hiciera antes (Transcripción 53, 15) para destacar que la solución al problema debe estar basada en "un razonamiento", el cual no debe ser inferido a partir de la solución. Posiblemente, el profesor se refiere así a que la validez del modelo matemático y de la solución numérica debe estar fundamentada por la reflexión acerca de la representatividad del modelo. Un modelo matemático válido debe representar las relaciones empíricas de la situación de manera satisfactoria. Sin embargo, en vista de las dudas de Jay acerca de la validez de la solución y del modelo construidos (Transcripción 51), no resulta claro que los alumnos aprecien la representatividad del modelo probabilístico y que interpreten la emisión del profesor en este sentido.

5.3.2. La profesora Ellen

Al inicio de la primera sesión, mientras el investigador principal y el asistente reparten el enunciado del problema en tiras de papel y hojas de trabajo a cada alumno, Ellen se refiere al problema en los siguientes términos:

Transcripción 54 (Ellen-1-S1)

001_Ellen: Es un problema que históricamente ha sido muy relevante. Después de que lo resolvamos, explicaremos cómo este problema, tanto Pascal como Fermat, en la discusión que tuvieron sobre este problema, resultó que surgió una rama de las matemáticas que es muy importante. (…) ¿Por qué nos están dando hojas? Porque quieren que nosotros escribamos aquí todos los razonamientos que van surgiendo. Lo que pasa siempre, ¿verdad?, que yo les digo que además de resolver el problema lo tenemos que explicar.

En su introducción Ellen destaca la relevancia histórica del problema y el hecho de que está en el origen de "una rama de las matemáticas muy importante". Comenta que fue materia de discusión entre dos matemáticos cuyos nombres (Pascal y Fermat) posiblemente son conocidos por algunos alumnos. Los comentarios de Ellen pueden sugerir la complejidad matemática del problema. Por otro lado, solicita que escriban "todos los razonamientos que van surgiendo", lo que inmediatamente relaciona con la necesidad de "explicar la resolución del problema". Mediante esta introducción la profesora solicita que los alumnos produzcan y comuniquen razones que justifiquen su producción matemática y además informa que son estas "explicaciones" lo que esperan obtener las personas que estarán registrando la sesión. Ellen nos ha explicado que sus alumnos están acostumbrados a resolver problemas en grupo y que ella suele pedir que justifiquen su producción.

Posteriormente, Ellen anuncia que en la siguiente sesión se deberá producir y entregar un trabajo escrito grupal con los resultados obtenidos:

Transcripción 55 (Ellen-2-S1)

002_Ellen Ese mismo trabajo que ustedes escribirán de cómo han resuelto el problema tendrá dos objetivos. Por un lado, para ellos, porque investigarán las producciones escritas pero, por otro lado, para mí, porque será nuestro trabajo de expresión escrita del segundo trimestre.

La profesora informa a los alumnos de que trabajarán dos sesiones con el problema, lo cual puede ser interpretado como confirmación de su complejidad matemática. Esta interpretación resulta confirmada en las interacciones iniciales de algunos grupos. Por ejemplo, después de obtener una primera solución numérica en los primeros minutos del trabajo en grupo, John (grupo EB) recuerda a sus compañeros que deben trabajar durante dos sesiones y sugiere que la solución debe ser incorrecta: "o estamos cayendo en una trampa o algo, pero tan fácil no puede ser". Como en el aula de Dan, la introducción de Ellen parece contribuir a formar expectativas en los alumnos acerca de la solución al problema, las cuales les permiten decidir acerca de la validez de su producción matemática. Observamos así la emergencia de una condición de validez ligada al contrato didáctico: 'la solución debe ser reconocible como matemáticamente valiosa'.

Por otro lado, Ellen informa a los alumnos de que deberán producir un texto escrito que será parte de la calificación trimestral; esto fue convenido con Ellen con la intención de contar con datos útiles para triangular interpretaciones del registro en video de las discusiones de los alumnos (Sección 4.4.1). Se esperaba que el hecho de que este texto vaya a ser calificado propicie que los alumnos se esfuercen por reportar sus procesos de resolución.

Después de otros comentarios técnicos acerca del desarrollo de la sesión, Ellen lee en voz alta el enunciado del problema y agrega las indicaciones siguientes para toda la clase:

Transcripción 56 (Ellen-3-S1)

003_Ellen	Y la gran pregunta es: ¿cuál es la manera justa de repartirse esos dineros? Y que, por supuesto, justifiquen la respuesta que han dado. (…) Lo que ustedes tienen que explicar es cuál consideran que es una manera justa de repartirse el dinero.

La profesora se refiere a "la manera justa de repartirse esos dineros"; el uso del singular puede sugerir la unicidad de la respuesta. Sin embargo, más delante se refiere a "cuál consideran que es una manera justa de repartirse el dinero"; esta frase no sólo sugiere la posibilidad de plantear distintas respuestas, sino que alude al papel de los alumnos en la justificación de la "manera justa. La profesora introduce así la noción de 'justicia' para referirse al reparto del dinero. La respuesta correcta al problema es aquella que pueda ser calificada como justa, calificación que debe ser justificada por los alumnos. En el aula de Dan, el resultado debía "conformar" a los jugadores, que evalúan el resultado según sus conocimientos matemáticos (la personificación de la autoridad matemática del profesor); en cambio en el aula de Ellen son los alumnos quienes deben juzgar los resultados como justos (o no) y exponer su criterio. Las introducciones al problema por parte de ambos profesores son distintas; cada profesor propone elementos particulares para referirse a potenciales soluciones del problema y a su validez. Dan solicita que los alumnos produzcan una respuesta aceptable para ambos jugadores (la solución correcta), mientras que Ellen solicita a los alumnos que produzcan una solución y expliquen por qué la consideran justa.

Las situaciones que presentamos a continuación permiten analizar la gestión realizada por Ellen de las dos sesiones de resolución del problema y, en particular, cómo la profesora implementa las líneas de actuación acordadas con el investigador principal (Sección 4.4.1.1) en la interacción con sus alumnos.

En la Sección 5.2.3 (Transcripción 34) analizamos la primera interacción de la profesora con el grupo EC enfocándonos en la construcción, por parte de los alumnos, de la validez del modelo matemático que discuten; ahora analizamos esta interacción enfocándonos en la gestión de la profesora:

Transcripción 57 (EC-1-S1) 12:8 (DC 13:35)

058_Tim	Jo dic... jo he repartit els dotze punts amb els sis euros, i llavors un guanya tres coma cinc i l'altre dos coma cinc (…) I seria just.
059_Lyn	Pero no tiene sentido, porque...
060_Ellen	A ver, ¿por qué no tiene sentido? Esa es una posible solución. Estoy de acuerdo. Un criterio para dividir el dinero es ese que acaba de decir en este momento Tim. Ahora, Lyn está diciendo que eso no tiene sentido y me tienes que dar un argumento por el cual no lo tiene.
061_Lyn	Porque estás... O sea... No, no... Porque los seis euros eran por ocho puntos. Y lo que está haciendo es coger los seis euros y repartiendo... y repartiéndolo entre todos los puntos que tiene...
062_Ellen	Pero él ha hecho eso justamente.
063_Lyn	No, no, no. Digo... Pero eso no es... O sea... no es como las normas que había.
064_Ellen	A ver, una de las posibilidades que tenemos es, para ver si nuestra solución es consistente lo que podemos hacer es... A ver, cambiemos como termina la partida. Imaginemos que... No sé, seis a dos. Van seis a dos cuando se interrumpe el partido. Veamos cómo se reparte el dinero. Y veamos si es justo o no.

Tim explica su modelo matemático evidenciando el uso de la proporcionalidad para su construcción y destacando el resultado numérico [58], al que califica como "justo", adoptando el término de Ellen en la introducción. Lyn dice que la propuesta de Tim no tiene sentido [59], señalando que el modelo propuesto está a discusión dentro del grupo. Con su intervención Ellen indica [60] que el modelo matemático de Tim debe ser considerado, pues es "una posible solución" y constituye "un criterio" para dividir la apuesta; para rechazarlo es necesario "dar un argumento". La profesora sugiere así que otras soluciones pueden ser consideradas y que se deben exponer razones para aceptarlas o rechazarlas. Aquí solicita a Lyn que justifique su rechazo. Lyn no articula sus ideas de modo que resulten inteligibles para Ellen [61-63]. La profesora se ciñe a las líneas de actuación convenidas y propone una estrategia para "ver si la solución es consistente" [64]: considerar variaciones numéricas del problema y evaluar si las reparticiones obtenidas resultan justas.

Cuando Ellen considera el modelo matemático expuesto por Tim como "un criterio para dividir el dinero", parece otorgarle un estatus epistémico positivo; sin embargo evita pronunciarse acerca de la validez de esta solución y traslada la responsabilidad de su validación (en sentido positivo o negativo) a los alumnos, destacando la necesidad de exponer razones y admitiendo la posibilidad de considerar distintas soluciones. Por otro lado, Ellen propone explorar variaciones numéricas como actividad relevante para justificar la validez del modelo matemático. Estos son dos elementos centrales de la estrategia comunicativa de Ellen con los distintos grupos al comienzo de la primera sesión. En su primera interacción con el grupo EA (Sección 5.2.1, Transcripciones 12 y 13), la profesora utiliza la misma estrategia comunicativa para dirigir el trabajo de los alumnos. De este modo la profesora relaciona la validez de los modelos matemáticos propuestos con su aceptabilidad en variaciones numéricas del problema. Según lo que dice en su interacción con el grupo EC [64], el modelo matemático es "consistente" (válido) si las soluciones que arroja en variaciones numéricas del problema pueden ser consideradas justas. Ellen establece así una relación entre la validez del modelo matemático en la situación del enunciado y su validez en variaciones numéricas del problema. Considerando la planeación realizada (Sección 4.4.1.1), sabemos que la profesora espera que los alumnos noten, utilizando sus referencias acerca del juego, que el modelo proporcional propuesto por Tim arroja resultados numéricos inadecuados en las variaciones numéricas problematizadoras (cuando el jugador en desventaja no ha obtenido ningún punto). Es decir, espera que los alumnos falsen el modelo a partir de la verificación de su inadecuación en variaciones numéricas particulares y que esto los lleve a reflexionar acerca de las relaciones entre elementos empíricos de la situación. La falta de elaboración acerca de esta cuestión por parte de Ellen en la interacción analizada, no permite saber cómo interpretan los alumnos su intervención. La noción de justicia no es explicada y no resulta evidente como es interpretada por los alumnos. La profesora tampoco cuestiona a Tim acerca de esta noción, la cual ha empleado para calificar la solución propuesta e indicar su validez. Al igual que en el aula de Dan, los alumnos de Ellen adecuan el lenguaje a los términos y estrategias comunicativas utilizados por la profesora. Los alumnos de Ellen deben producir una solución que pueda ser considerada como justa. En el grupo EA, según lo comentado en la entrevista, las alumnas subordinan la noción de justicia a la satisfacción de condiciones de validez; es decir, una repartición es justa si se satisfacen las condiciones de validez que son consideradas (Sección 5.2.1, Transcripción 14).

La interacción anterior con el grupo EC ilustra cómo la profesora implementa las líneas de actuación acordadas. La siguiente interacción con el grupo EB, formado por Joe, John, Kurt y Ron, es otro ejemplo de esto. Tras producir dos modelos matemáticos distintos mediante los cuales han obtenido dos soluciones numéricas distintas, el grupo EB interacciona con la profesora:

Transcripción 58 (EB-1-S1)

187_Kurt	Ellen, ¿se puede hacer con el tanto por ciento?
188_Ellen	A ver, ustedes tienen que intentar distintas posibilidades para analizarlas y quedarse con la que les parezca más justa.
189_Joe	¿Y si no dan lo mismo?
190_Ellen	Y si no les dan lo mismo es porque los criterios son diferentes. Tendrían que plantear por qué una les parece más justa que otra. ¿Y será que es más justa siempre o sólo para esta distribución? Ese es el tipo de cosas que hay que analizar.

Kurt busca la confirmación de la profesora acerca de la adecuación del uso de una noción matemática (tanto por ciento) para resolver el problema [187]. Ellen evita responder la pregunta [188] y, en cambio, traslada a los alumnos la tarea de evaluar su producción matemática. En su emisión indica que soluciones distintas deben ser comparadas y que se debe preferir la considerada "más justa", justificando esta calificación [190]. La noción de justicia se presenta, una vez más, como el calificativo adecuado para indicar la validez de la solución. La emisión de Joe [189] es posiblemente una indicación de que los alumnos no tienen claro cómo satisfacer la solicitud de la profesora. La siguiente emisión de Ellen [190] aclara qué es lo que la profesora espera del trabajo de los alumnos: deben comparar los "criterios" utilizados en cada repartición y determinar cuál es "más justo", para lo cual deberán considerar variaciones numéricas del problema.

Ellen no aclara a qué se refiere con la palabra "justicia"; el uso que hace del término sugiere que considera distintos grados de justicia (una solución puede ser "más justa que otra"). Esta utilización del término parece excluir su uso dicotómico (una solución es justa o no lo es), es decir, parece sugerir que no existe una única solución numérica calificable como justa, que permita distinguirla de cualquier otra solución (calificable como injusta). Este uso del término justicia sugiere que la solución al problema no es única. Este elemento relevante de la gestión realizada por Ellen apunta a una diferencia fundamental con la gestión de Dan: la estrategia comunicativa del profesor implica que la solución es única (la que conformará a ambos jugadores), en cambio, la estrategia de la profesora sugiere que puede haber distintas soluciones, las cuales varían en su grado de justicia. Esta interpretación resulta confirmada por los textos escritos producidos por los grupos y entregados al final de la segunda sesión. Los tres grupos observados en el aula de Ellen presentaron al menos dos modelos matemáticos y soluciones numéricas distintos; los cuales compararon utilizando el término justicia para indicar sus preferencias.

Durante la entrevista con el grupo EB, después de visionar la situación anterior (Transcripción 58), indagamos acerca de las interpretaciones por parte de los alumnos:

Transcripción 59 (EB-2-E)

124_Investigador	Aquí Ellen se acerca y les empieza a hacer algunas preguntas ¿A qué se refiere Ellen? ¿Por qué les plantea estas preguntas?
125_John	Para no darnos la solución.
126_Ron	Sí. Para que buscásemos más antes de decir que... antes de decir que estaba claro, buscásemos alguna más o profundizar más en esa que habíamos encontrado.

Con "buscar alguna más", Ron se refiere a proponer otros modelos matemáticos que consientan construir soluciones numéricas al problema [126]. Los alumnos interpretan que la intención de Ellen es no pronunciarse acerca de la validez de sus respuestas [125] y, en cambio, incentivar el trabajo autónomo del grupo y la producción de distintos modelos matemáticos y soluciones numéricas [126]. Esta interpretación se corresponde con las líneas de actuación acordadas con la profesora: evitar hacer indicaciones explícitas acerca de la validez de la producción matemática de los alumnos y promover la emergencia de modelos matemáticos en competencia para que sean discutidos.

Los tres grupos observados produjeron durante la primera sesión el modelo proporcional (repartir la apuesta proporcionalmente a los puntos obtenidos por jugador). Como estaba planeado, Ellen indicó a los tres grupos aplicar el modelo a variaciones numéricas del problema para decidir sobre su validez (Transcripción 57, Transcripción 58 y Sección 5.2.1, Transcripción 13). Según esta planeación, Ellen debía proponer variaciones numéricas problematizadoras para propiciar que los alumnos pusieran en duda la representatividad del modelo proporcional, reflexionaran sobre las relaciones entre elementos empíricos de la situación y construyeran modelos matemáticos alternativos. Sin embargo, la profesora sólo llega a proponer una variación numérica problematizadora al grupo EA (Sección 5.2.1, Transcripción 17). Esto posiblemente se deba a que en los grupos EB y EC emergen durante la primera sesión distintos modelos matemáticos por iniciativa de los alumnos.

El grupo EA no cuestiona el modelo proporcional a partir de la variación problematizadora propuesta por Ellen (Sección 5.2.1, Transcripción 17). Posiblemente porque no ven la solución obtenida como problemática, las alumnas del grupo EA no cuestionan la representatividad del modelo proporcional, ni aprovechan la ocasión para dirigir sus esfuerzos a la construcción de un modelo matemático alternativo. Será necesario que la profesora vuelva a intervenir para redirigir el trabajo de las alumnas:

Transcripción 60 (EA-1-S1)

270_Ellen	A ver, ¿cómo vamos? ¿Estamos atrancadas?
271_Anna	Es que no sabemos qué tenemos que hacer más.
272_Ellen	A ver, vamos a hacer una cosa. Pasemos una línea ahí y pensemos: si la partida continuara... en este momento va cinco a siete. Si la partida continuara, ¿cómo podría continuar la partida? Hemos pensado hasta ahora siempre en lo que pasaba y ahora... (…) A ver si analizando qué es lo que puede pasar después nos ayuda a entender cómo se puede repartir el dinero. ¿Sí?

Aunque Ellen no se manifiesta acerca de la validez del modelo proporcional, su intervención parece ponerla en duda, sugiriendo la consideración de nuevos elementos para construir un modelo matemático y una solución numérica [271]. La intervención de Ellen cambia el foco de atención de los puntos obtenidos por jugador (“lo que pasaba”) a los puntos que deben obtener para ganar (“lo que puede pasar”). Esto podría propiciar la reflexión de las alumnas acerca de la relación entre los puntos obtenidos, los puntos a obtener y las probabilidades de ganar el juego, con la intención de reflexionar acerca de la representatividad del modelo proporcional; sin embargo las alumnas no actúan de este modo. Según lo que comentan en la entrevista (Sección 5.2.1, Transcripción 19), asocian la intervención de la profesora con sus preferencias acerca de la solución del problema: deben construir un nuevo modelo matemático que satisfaga la solicitud de Ellen, basado en lo que aún puede pasar si continúa el juego. Las alumnas utilizan la intervención de la profesora para identificar características de la solución esperada y los datos numéricos a tener en cuenta para obtenerla. Esto las llevará a considerar los posibles marcadores finales del juego: tres a favor del jugador en ventaja y uno a favor del contrincante (Figura 19).

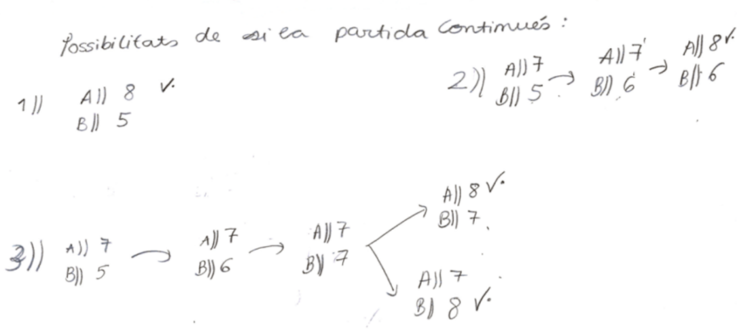


Figura 19; texto de Anna (3)

En su siguiente interacción con la profesora estas alumnas explican lo que han hecho:

Transcripción 61 (EA-2-S1)

321_Anna	Hemos hecho todas las posibilidades que hay (Figura 19).
322_Ellen	¡Ay, mira, qué bien! ¿Y qué?
(…)	
327_Ellen	¿Esta situación de aquí qué es?
328_Josy	Es cuando tiras y sale cara. Entonces el A gana porque ya tiene un punto más. Pero si sale cruz, van a ocho... ay, a siete seis. Y después, si sale cara van a ocho seis y gana cara. Pero si sale cruz van a empate y siete siete. Después puede ganar tanto uno como el otro.
329_Ellen	Muy bien. Entonces, eso no les puede... ¿Mirarlo de esa manera no puede permitir otra manera de repartir el dinero? Pensando en lo que sucedería después.

330_Josy	Pues todo para el primero.
331_Ellen	¿Sí? ¿Todo? ¿Pero no hay una posibilidad aquí? Esta es la posibilidad de que gane el B.
332_Josy	Pero el otro tiene tres y este sólo tiene una.
333_Ellen	Muy bien. ¿Y entonces eso no te puede generar alguna manera de dividir el dinero?
334_Anna	Dividirlo entre cuatro. Porque son las cuatro posibilidades que puede haber. O sea, el dinero entre cuatro, y después... Espera. Sis entre quatre?
335_Ellen	Seis entre cuatro, uno coma cinco.
336_Anna	Uno coma cinco. Vale. Uno coma cinco multiplicado por tres, cuatro coma cinco. Cuatro coma cinco y el otro uno coma cinco.
337_Ellen	Muy bien. Esto podría ser una manera que nosotros consideramos que podría ser justa de repartirlo. Lo que tenemos que hacer es, como siempre, mirar si cambiamos cómo está la partida, si seguimos obteniendo maneras justas.

Anna dice a la profesora haber considerado “todas las posibilidades que hay” [321]. Ellen posiblemente reconoce en la hoja de trabajo de Anna (Figura 19) que la alumna se refiere a los posibles marcadores finales y reacciona positivamente [322], solicitando a las alumnas que expliquen los diagramas [327]. La explicación de Josy confirma que las alumnas han considerado los posibles marcadores finales en caso de continuar la partida [328]. Las siguientes intervenciones de Ellen [329-335] guían hacia la construcción de un nuevo modelo matemático: repartir la apuesta proporcionalmente a los posibles marcadores finales favorables a cada jugador. La intervención de Ellen es directiva. Es ella quien sugiere considerar los posibles marcadores finales para realizar la repartición [329]. Es ella quien sugiere [331] la inadecuación de la respuesta de Josy [330] y dirige a Anna [333] a la concreción del modelo matemático [334-336]. Es también ella quien sugiere [337] que esta es una manera “que podría ser justa de repartirlo”. La intervención de la profesora parece adjudicar un estatus epistémico positivo tanto al modelo matemático como a la solución numérica construida. El hecho de que Ellen manifestara su insatisfacción con el modelo matemático proporcional (Sección 5.2.1, Transcripción 17) y de que se manifieste positivamente en relación con este nuevo modelo, sugiere una preferencia por el segundo.

En el grupo EA, la intervención de Ellen propicia la emergencia de un modelo matemático en competencia con el modelo proporcional. En cambio, durante la primera sesión, los grupos EB y EC producirán por sí mismos otros modelos matemáticos, mediante los cuales construyen distintas soluciones numéricas (para el grupo EC, Transcripciones 36-40, Sección 5.2.3). Posiblemente por este motivo, Ellen no llega a proponer ninguna variación numérica problematizadora a estos grupos. De modo que los únicos datos relacionados con la implementación de variaciones numéricas problematizadoras son los relativos al grupo EA, que hemos analizado (Sección 5.2, Transcripciones 17, 18 y 19).

Al inicio de la segunda sesión, los tres grupos observados han construido al menos dos modelos matemáticos distintos que proveen soluciones numéricas distintas al problema. Ellen comienza la sesión dirigiéndose a todo el grupo:

Transcripción 62 (Ellen-1-S2)

001_Ellen	La clase de hoy tiene tres partes. Tiene una primera parte donde lo que harán será escribir la solución a la que han llegado. Eso depende de las notas que tengan de ayer y de lo que hayan podido pensar en las veinticuatro horas que han pasado. Segunda parte... Perdón, la primera parte era entonces terminar de decidirla. La segunda parte es escribirlo. Y la última parte es que pondremos en común las soluciones que hemos encontrado. Por lo tanto vamos a tener hasta menos cinco, más o menos, para pensar cómo va la solución. Si ya la tienen totalmente decidida, la solución, comiencen a hacer el esquema de cómo lo van a escribir.

Al inicio de la segunda sesión, la profesora recuerda a la clase que deben presentar un trabajo escrito con las soluciones construidas. Aunque en esta introducción se refiere en singular a la solución del problema, en sus interacciones posteriores con los distintos grupos sugiere escribir acerca de los distintos modelos matemáticos producidos:

Transcripción 63 (EB-3-S2)

007_John	Tenemos tres métodos.
008_Ellen	Muy bien.
009_Joe	¿Qué hacemos?
010_Ellen	Discútanlos, decidan cuál van a poner como método uno, porque cuál les parece más...
011_Joe	¿Sólo uno?
012_Ellen	Los que ustedes quieran poner.
013_Joe	¿Podemos poner los tres?
014_Ellen	Si quieren poner los tres, fantástico. Profundicen en la discusión.

Ellen sugiere a los alumnos que incluyan los modelos matemáticos construidos en su trabajo escrito. De modo general, sugiere que “discutan” los distintos modelos y que “profundicen en la discusión”. Esta acción de la profesora refuerza la idea de que puede haber distintas soluciones al problema y deja en manos de los alumnos su validación. Más adelante en la sesión la profesora solicita a los grupos que incluyan en sus trabajos un comentario comparando las soluciones obtenidas. Se dirige al grupo EA del siguiente modo:

Transcripción 64 (EA-2-S2)

090_Ellen	¿Qué opciones han puesto?
091_Anna	Primero la de dividir el total de puntos que hay para averiguar cuánto es un punto y después multiplicarlo. Y lo de las posibilidades que hay si la partida continuara.
092_Ellen	(…) ¿Y les da el mismo dinero en las dos?
093_Anna	No.
094_Ellen	¿Cuál les parece más justa de las dos? Hacer un comentario final de que tienen dos soluciones. No saben en realidad cuál es la que está bien, pero que ustedes, digamos, piensan... Una de las dos, piensan que es mejor que la otra.

Anna comunica a la profesora que han incluido en su trabajo escrito los dos modelos matemáticos que han construido [91]. Ellen señala que las soluciones numéricas obtenidas utilizando ambos modelos son distintas [92]. Propone a las alumnas que comparen ambas soluciones en términos de cuál es más justa [94]. La emisión de Ellen invita a proponer razones en favor de una u otra solución, aunque no se tenga un criterio para decidir acerca de su validez con certeza (“no saben en realidad cuál es la que está bien”).

Cuando Ellen se dirige con una solicitud similar al grupo EC, lo hace del siguiente modo:

Transcripción 65 (EC-2-S2)

122_Ellen	Escuchen, ¿pusieron opinión de cuál les parece que es el mejor método de los dos que tienen?
123_Tim	No, tot són opcions.
124_Ellen	Pero como les dan diferentes, una frase final.
125_Tim	Ja, però tot són opcions. Són possibilitats. Totes poden ser bones o dolentes.
126_Ellen	Si ustedes jugaran, ¿por cuál preferirían que se repartiera el dinero?

Al igual que en la interacción con el grupo EA, la profesora llama la atención de los alumnos sobre las distintas soluciones numéricas obtenidas [124]; sugiere esta diferencia como motivación para comparar los "métodos" (modelos matemáticos) mediante los cuales fueron construidas. Tim sugiere que no es posible comparar los modelos matemáticos, pues dependiendo de la perspectiva asumida ambos pueden ser "buenos o malos" [123 y 125]. Esta respuesta indica que no dispone de un criterio para decidir acerca de la mayor o menor adecuación de los modelos matemáticos construidos. Conjeturamos que esta respuesta se relaciona con las acciones de la profesora, quien ha promovido la emergencia de distintas soluciones y ha dejado en manos de los alumnos la tarea de discutir y decidir acerca de su validez. En el caso del grupo EC, los alumnos tienen dificultades para establecer una discusión fructífera acerca de la representatividad y de la validez de los modelos matemáticos que producen (Sección 5.2.3, Transcripciones 33-37); de modo que para Tim la tarea del grupo se limita a describir los modelos matemáticos propuestos, sobre cuya validez (en términos de "qué método es mejor") no discuten.

Lo dicho por Tim ilustra una cuestión observada en los tres grupos: aunque la gestión de Ellen ha llevado a producir distintos modelos matemáticos y distintas soluciones numéricas, los alumnos no han aprovechado las indicaciones de la profesora para discutir acerca de la representatividad de los modelos como parte de procesos de validación. Esto se ve reflejado en los trabajos escritos de los grupos (Anexo 3). Los modelos matemáticos son descritos mediante procedimientos, consignando las manipulaciones numéricas a realizar con los datos del enunciado, sin relacionar estas con aspectos empíricos de la situación. El fragmento del trabajo escrito del grupo EC en la Figura 20, mediante el cual los alumnos consignan uno de los dos modelos matemáticos construidos, ejemplifica esta cuestión (para la emergencia de este modelo matemático, Sección 5.2.3, Transcripciones 33-41).

El primero que hubiera llegado a 8 puntos habría ganado los 6€.Hemos calculado cuántos puntos le faltaba a cada jugador para llegar a 8 puntos y entre los dos les faltan 4 puntos. Después, dividimos los 6€ entre los 4 puntos y obtenemos como resultado 1,5€. Multiplicamos el 1,5€ por la cantidad de puntos que le queda a cada jugador para llegar a los 8 puntos y restamos los resultados de cada uno a 6€. Eso nos da como tenemos que repartir el dinero entre los dos jugadores.

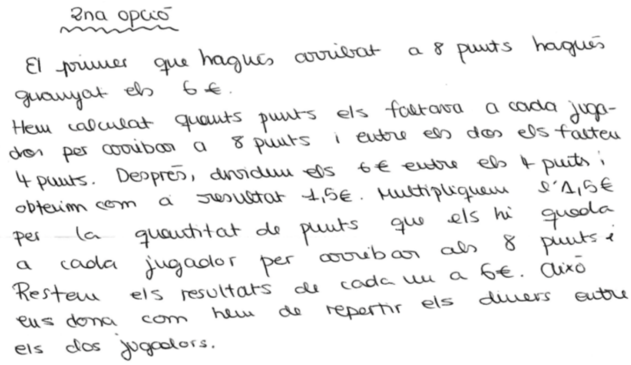
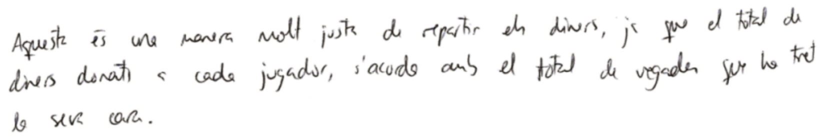

2na opció
El primer que hagués arribat a 8 punts hagués guanyat els 6€.
Hem calculat quants punts els faltava a cada jugador per arribar a 8 punts i entre els dos els falten 4 punts. Després, dividim els 6€ entre els 4 punts i obtenim com a resultat 1,5€. Multipliquem l'1,5€ per la quantitat de punts que els hi queda a cada jugador per arribar als 8 punts i Restem els resultats de cada un a 6€. Això ens dona com hem de repartir els diners entre els dos jugadors.

Figura 20; fragmento del trabajo escrito del grupo EC

A solicitud de la profesora (Transcripciones 64 y 65), los alumnos incluyen comentarios en su trabajo acerca de sus preferencias en relación con las soluciones propuestas. Tampoco en estos comentarios los alumnos establecen una relación clara entre validez de los modelos matemáticos y representatividad. Los textos de los grupos EC y EB ilustran esta cuestión.

En su trabajo escrito el grupo EB propone tres modelos matemáticos que implican dos soluciones numéricas distintas (Anexo 3). El primer y segundo modelos corresponden a la solución proporcional. Mediante su primer modelo, los alumnos presentan la solución como porcentajes: el jugador en ventaja ha ganado el 58,3% de los lanzamientos y el contrincante el 41,6%; de este modo se reparte la apuesta. En el segundo modelo, presentan la misma solución como monto a recibir por cada lanzamiento ganado: se dividen los 6€ entre los 12 lanzamientos; cada jugador obtiene 0,5€ por lanzamiento ganado. En su tercer modelo, los alumnos utilizan el método D'Hondt (técnica utilizada para repartir escaños en elecciones parlamentarias; actualmente en uso en España), visto y discutido en clase recientemente, para producir una repartición que considera los puntos obtenidos por jugador: 4€ para el jugador en ventaja y 2€ para el contrincante. Los alumnos califican los modelos matemáticos que proponen y las soluciones numéricas obtenidas utilizando la palabra justicia (Figuras 21-23).

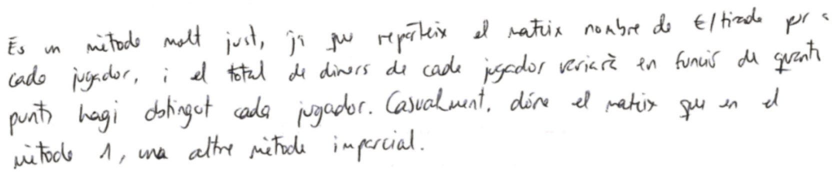
Esta es una manera muy justa de repartir el dinero, ya que el total de dinero dado a cada jugador se corresponde con el total de veces que ha sacado su cara.



Aquesta és una manera molt justa de repartir els diners, ja que el total de diners donats a cada jugador, s'acorda amb el total de vegades que ho tret lo seva cara.

Figura 21; comentario al primer modelo en el trabajo escrito del grupo EB

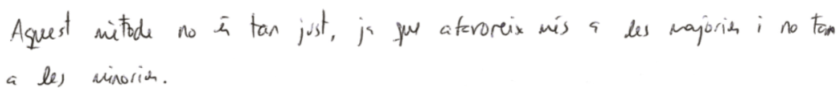
Es un método muy justo, ya que reparte el mismo número de euros por tirada para cada jugador, y el total de dinero de cada jugador variará en función de cuántos puntos haya obtenido cada jugador. Casualmente da lo mismo que en el método 1, otro método imparcial.



Es un mètode molt just, ja que reparteix el mateix nombre de €/tirada per a cada jugador, i el total de diners de cada jugador variarà en funció de quants punts hagi obtingut cada jugador. Casualment, dóna el mateix que en el mètode 1, una altra mètode imparcial.

Figura 22; comentario al segundo modelo en el trabajo escrito del grupo EB

Este método no es tan justo, ya que favorece a las mayorías y no tanto a las minorías.



Aquest mètode no és tan just, ja que afavoreix més a les majories i no tan a les minories.

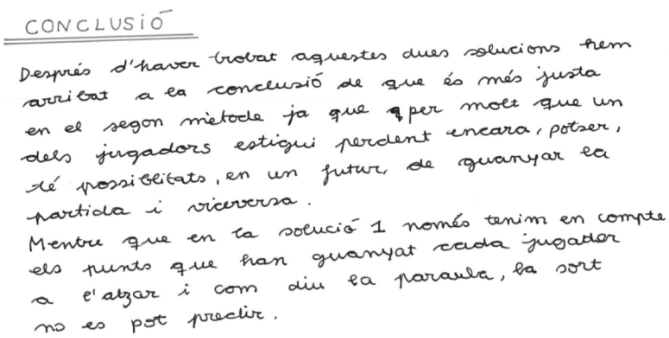
Figura 23; comentario al tercer modelo en el trabajo escrito del grupo EB

Los alumnos del grupo EB parecen no darse cuenta de que en los primeros dos "métodos" utilizan de la misma manera la proporcionalidad. Cuando comentan el segundo método (Figura 22), indican que haber obtenido la misma solución numérica que con el primero es casual. Durante la entrevista identifican esta cuestión como una confirmación de la validez del modelo proporcional (si dos métodos producen la misma solución numérica, esta debe ser correcta). En ambos casos, la calificación de "muy justo" que aplican al modelo se fundamenta en que la apuesta es repartida proporcionalmente a los puntos obtenidos por jugador (Figuras 17 y 18). La garantía del argumento subyacente es la misma: repartir proporcionalmente a los puntos realizados es "muy justo". Los alumnos asumen esta premisa sin justificarla en términos de los aspectos empíricos de la situación.

Cuando comentan el tercer modelo matemático (Figura 23), los alumnos indican que este “no es tan justo”. Saben, según lo indagado en la entrevista, que el método D’Hondt suele proporcionar a los partidos más votados en elecciones parlamentarias, un número de escaños mayor que el número que les tocaría proporcionalmente. Los alumnos parecen identificar esta diferencia en la distribución en favor de los partidos más votados (“las mayorías”) como una falta justicia. Esto parece ser el motivo por el que califican el modelo como “no tan justo”. De modo que la valoración de la validez del modelo matemático (su falta de justicia) se hace por analogía y no considerando su representatividad en la situación planteada.

El grupo EA ha producido dos modelos matemáticos distintos: el modelo proporcional y aquel que divide la apuesta proporcionalmente a los posibles marcadores finales (considerándolos equiprobables). Las alumnas han llegado al segundo modelo matemático guiadas por acciones de Ellen, lo cual las ha llevado a inferir la preferencia de la profesora por esta solución (Transcripción 61). Después de consignar ambos modelos matemáticos en su trabajo escrito, incluyen un párrafo para indicar sus preferencias (Figura 24).

Después de haber encontrado estas dos soluciones hemos llegado a la conclusión de que es más justa en el segundo método ya que por mucho que uno de los jugadores esté perdiendo todavía, puede ser, tiene posibilidades de ganar la partida y viceversa. Mientras que en la solución 1 nada más tenemos en cuenta los puntos que han ganado cada jugador al azar y como dice la palabra, la suerte no se puede predecir.


CONCLUSIÓ

Després d'haver trobat aquestes dues solucions hem arribat a la conclusió de que és més justa en el segon mètode ja que ~~q~~ per molt que un dels jugadors estigui perdent encara, potser, té possibilitats, en un futur, de guanyar la partida i viceversa.
Mentre que en la solució 1 només tenim en compte els punts que han guanyat cada jugador a l'atzar i com diu la paraula, la sort no es pot predir.

Figura 24; comentario a los modelos propuestos en el trabajo escrito del grupo EA

En el comentario de las alumnas (Figura 24), no resulta clara la relación entre la validez de los dos modelos matemáticos propuestos y el hecho de que el jugador en desventaja pueda ganar la partida. Ellen había objetado durante la primera sesión la solución proporcional a una variación numérica problematizadora, indicando que el jugador en desventaja aún podía ganar la partida y que, por lo tanto, entregar toda la apuesta al jugador en ventaja resultaba inadecuado (Sección 5.2.1, Transcripción 17). Posiblemente las alumnas recuerdan esto y lo parafrasean para argumentar en favor del modelo matemático que perciben como preferido por la profesora. Sin embargo no resulta claro que el comentario se refiera a la representatividad de los modelos matemáticos que están comparando. El segundo párrafo refuerza esta interpretación: ha sido la profesora quien ha sugerido (Transcripción 60) pasar de un modelo basado en los puntos obtenidos a otro basado en los puntos que aún se deben obtener para terminar la partida. Así, el hecho de que el primer modelo matemático "nada más tenga en cuenta los puntos que cada jugador ha ganado" es presentado como una razón en favor del segundo modelo. Tampoco aquí resulta clara la relación entre validez de los modelos comparados y representatividad.

Los alumnos del grupo EC han producido dos modelos matemáticos distintos: el modelo proporcional y otro que reparte la apuesta proporcionalmente a los posibles marcadores finales, cuya explicación se ve en la Figura 20. Acerca de estos modelos comentan:

Creemos que la opción 1 [el modelo proporcional] es más justa porque no se ha acabado la partida de manera que las probabilidades de ganar no son las mismas y repartir equitativamente es más adecuado.

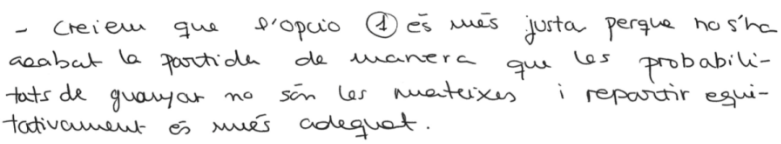

- Creiem que l'opció 1 és més justa perquè no s'ha acabat la partida de manera que les probabilitats de guanyar no són les mateixes i repartir equitativament és més adequat.

Figura 25; comentario a los modelos propuestos en el trabajo escrito del grupo EC

No resulta claro cuál es la relación entre la validez de los modelos y el hecho de que "las probabilidades de ganar no sean las mismas". Los alumnos indican que el modelo proporcional, una repartición "equitativa", es más adecuado en estas condiciones sin justificar esta afirmación.

Durante la puesta en común la profesora decide evitar pronunciarse acerca de la validez de las soluciones propuestas. Al inicio comenta:

Transcripción 66 (EPC-1-S2)

Ellen	La variedad de soluciones que hemos encontrado, en lo métodos que ustedes utilizan, son muchísimas. ¿De acuerdo? Vamos a ir analizándolas. Y no hablamos de soluciones correctas e incorrectas, sino de distintas soluciones.

Ellen se limita a consignar en la pizarra distintos modelos matemáticos y soluciones numéricas construidos por los grupos, sin indicar sus preferencias. Con la ayuda de los alumnos describe mecánicamente los modelos matemáticos propuestos y calcula las soluciones numéricas correspondientes. La profesora cierra la sesión informando que colgará en el blog del grupo distintas soluciones argumentadas al problema, desarrolladas por matemáticos a lo largo de la historia.

6. Resultados

En este capítulo presentamos de manera temática los resultados de nuestro estudio, siguiendo los principios que propone Van Manen (1990) y que explicamos en la Sección 4.5. Los resultados se organizan en tres secciones, alrededor de la consecución de los tres objetivos del estudio.

Los Temas que presentamos corresponden al esfuerzo realizado por dar sentido a los datos analizados. Estos integran distintos entendimientos logrados que se fundamentan en la perspectiva teórica asumida y en nuestros intereses investigativos. Es decir, expresan cuestiones cuya relevancia está ligada a la sensibilidad del investigador, a su punto de vista y a los objetivos de investigación. Es de este modo que conseguimos los tres objetivos planteados inicialmente para esta investigación.

6.1. Objetivo 1

En esta sección presentamos tres Temas, mediante los cuales caracterizamos procesos de construcción de la validez de la producción matemática en el trabajo en grupo de alumnos. Así conseguimos el primer objetivo de nuestro estudio.

6.1.1. Tema 1 - Condiciones de validez: raíces epistémicas y sociales de la validez en el aula de matemáticas

Desde el punto de vista teórico que hemos asumido (Sección 3.2.2.3), quien acepta las pretensiones de validez de su interlocutor, acepta que su legitimidad puede ser adecuadamente justificada (Habermas, 1998); es decir, que ciertas condiciones de validez pueden ser satisfechas. Estas condiciones de validez pueden ser estándares compartidos de un área de conocimiento (e.g., las matemáticas), pero pueden ser también constricciones emergentes mediante las cuales se acomodan elementos que son considerados relevantes para la evaluación de la validez en un contexto determinado. Quien ofrece argumentos para justificar la validez de su posición, no sólo pretende hacerla aceptable, sino evidenciar en términos intersubjetivos por qué debe ser aceptada (Krummheuer, 1995). Las condiciones de validez expresan lo que en un determinado contexto es intersubjetivamente considerado como buenas razones para justificar la validez. Así, mediante el análisis de la emergencia y satisfacción de condiciones de validez, damos cuenta en nuestro estudio de características de procesos de construcción de la validez de la producción matemática en el aula.

En las etapas iniciales del proceso de resolución del problema, en todos los grupos observamos la búsqueda de interpretaciones comunes basadas en referencias compartidas (Douek, 2005) acerca de la situación planteada. Ya sea de manera explícita, como en el caso del grupo EA (Sección 5.2.1), o implícita, como en el caso del grupo DC (Sección 5.2.2), los alumnos organizan de manera coherente referencias relacionadas con la situación para indicar sus puntos de vista a sus compañeros. Los alumnos indican, por ejemplo, que según las reglas del juego ningún jugador ha ganado, que el jugador que ha obtenido más puntos tiene más posibilidades de ganar aunque ambos jugadores pueden ganar aún, que las posibilidades de que en un lanzamiento salga cara son las mismas de que salga cruz y que si hay empate cada jugador debe recibir la mitad de la apuesta. Esto pone en evidencia referencias compartidas por los alumnos acerca del juego y su dinámica, las cuales aluden a su experiencia con juegos de azar y a conocimientos y creencias compartidos sobre estos. Estas referencias permiten a los alumnos conformar un modelo de la situación (Blum y Leiβ, 2007), es decir, identificar elementos empíricos y relaciones entre estos para interpretar la situación planteada. La conformación de este modelo de la situación suele ser tácita y se evidencia de manera implícita en las conversaciones del grupo y en las acciones de los alumnos.

Es a partir de la constitución de un marco interpretativo que, en todos los grupos, emergen condiciones de validez ligadas a la dimensión empírica del problema. Todos los grupos consideran que el jugador que ha obtenido más puntos tiene más posibilidades de ganar y, por lo tanto, debe recibir una parte mayor de la apuesta. Aunque no sepamos a qué se refieren los alumnos cuando hablan de las posibilidades de ganar de uno y otro jugador, pues no han estudiado formalmente teoría de la probabilidad, de este modo los alumnos describen un cierto estado de cosas en el mundo: tener más puntos implica tener más posibilidades de ganar y esto afecta la repartición del dinero en favor de quien tiene la ventaja. Esta interpretación de la situación les orienta en su trabajo: deben repartir el dinero en función de la ventaja que un jugador tiene sobre el otro; a la vez que les orienta sobre la validez de cualquier solución: una solución válida al problema deberá dar cuenta del modelo de la situación fundamentado en esta interpretación. Es así que emerge, en todos los grupos, la condición de validez que enunciamos como ‘el jugador que ha obtenido más puntos debe recibir más dinero’. Los alumnos utilizan esta condición de validez para decidir acerca de la validez de distintos modelos matemáticos explorados. En todos los grupos, cada vez que un modelo no satisface esta condición de validez, este se descarta; esto sugiere que los alumnos consideran esta como una condición de validez necesaria (aunque este estatus epistémico no se explicita). Es decir, cualquier modelo matemático válido debe necesariamente implicar que el jugador en ventaja reciba una parte mayor de la apuesta. Del mismo modo, en todos los grupos emerge otra condición de validez relacionada con aspectos empíricos de la situación: 'la suma de los montos repartidos debe ser seis euros'. Al igual que con la condición de validez anterior, en todos los grupos observamos la operativización de esta condición de validez para descartar modelos que no la satisfacen.

En las conversaciones que sostienen los alumnos de todos los grupos, las condiciones de validez mencionadas emergen a partir de sus referencias compartidas en relación con el juego y su dinámica. El establecimiento de constricciones, basadas en sus interpretaciones de la situación, les permite decidir acerca de la validez de los modelos que proponen con base en su representatividad; es decir, en la capacidad de estos modelos para dar cuenta de cuestiones empíricas consideradas. La emergencia y uso por parte de los alumnos de condiciones de validez ligadas a aspectos empíricos de la situación, sugiere la búsqueda abductiva de una solución al problema. Esta es una característica relevante de la dimensión epistémica del comportamiento racional de los alumnos y de los procesos de construcción de validez analizados: un modelo y una solución numérica válidos deben necesariamente dar cuenta de los aspectos empíricos de la situación considerados. Este posicionamiento, a su vez, da cuenta de la dimensión teleológica del comportamiento racional de los alumnos: el trabajo se orienta a la construcción de un modelo representativo que permita repartir la apuesta.

Hasta aquí no pretendemos sugerir que los alumnos proceden de manera abductiva a sabiendas de las implicaciones epistémicas de tal proceder (Lakatos, 1978). Sí pretendemos destacar que los alumnos relacionan la validez de los modelos que producen con su representatividad; es decir, realizan consideraciones acerca de la adecuada representación de elementos empíricos considerados como parte de procesos de validación.

Por otro lado, en todos los grupos observamos la preferencia de los alumnos por interpretaciones de la situación que consienten un tratamiento matemático del problema. Distintos grupos consideran y rechazan soluciones al problema que resultan matemáticamente irrelevantes. Soluciones como 'continuar la partida en otro momento', 'devolver a cada uno su parte de la apuesta' o 'dar el total de la apuesta al jugador en ventaja' son rechazadas a pesar de que no queden excluidas por el planteamiento del problema e incluso considerándolas adecuadas en caso de encontrarse realmente en tal situación (Sección 5.1, Transcripciones 2 y 3). Estas soluciones no son rechazadas mediante consideraciones relativas al contexto hipotético planteado en el problema; es decir, no es su falta de representatividad la que justifica el rechazo. A partir de nuestro análisis sugerimos que son rechazadas por cuestiones relativas al contexto en el que la actividad de los alumnos se desarrolla. En este contexto, la validez de los argumentos en favor de los modelos y las soluciones construidas es evaluada no sólo en relación con las condiciones expresadas por el enunciado del problema, sino también en relación con las condiciones contextuales relativas al desempeño esperado de los alumnos. Una cláusula común del contrato didáctico del aula de matemáticas indica que los problemas se resuelven mediante el uso de conocimientos matemáticos (D'Amore, 2008); por otro lado, las introducciones al problema de cada profesor (Sección 5.1, Transcripciones 4 y 5) sugieren su complejidad matemática, de modo que soluciones que no sean reconocibles como matemáticamente relevantes no pueden ser válidas. Hemos enunciado esta condición de validez, asociada al contrato didáctico del aula, como 'la respuesta debe ser matemáticamente valiosa'. En todos los grupos observamos cómo las expectativas de los alumnos en relación con su desempeño y con la solución al problema orientan sus acciones y les permiten decidir (en sentido positivo o negativo) acerca la validez de los modelos y soluciones que consideran.

Podemos hablar entonces de distintos tipos de condición de validez. Por un lado, hay condiciones relacionadas con la representación de aspectos empíricos de la situación y, por otro, hay condiciones relacionadas con requerimientos sociales sobre el desempeño esperado de los alumnos y del producto de su actividad matemática. La solución al problema no debe solamente representar de modo adecuado aspectos empíricos considerados, debe además ser socialmente reconocible como matemáticamente valiosa.

La preferencia de los alumnos por soluciones que puedan ser reconocibles como matemáticamente valiosas, orienta su actividad a la búsqueda de conocimientos matemáticos (percibidos como) adecuados y a la construcción de modelos matemáticos que permitan cuantificar los montos que cada jugador debe recibir. En todos los grupos observamos el uso de conocimientos sobre proporcionalidad para conformar los primeros modelos matemáticos y documentamos la emergencia del que llamamos 'modelo proporcional' (repartir la apuesta proporcionalmente a los puntos realizados por cada jugador; 3,5€ para el jugador en ventaja y 2,5€ para su contrincante). Esto ratifica las observaciones de García Cruz (2000), Fenaroli, Guala, Goizueta, Paola y Sanna (2014) y Paola (1998), que indican la emergencia de este modelo matemático en los grupos donde el problema es propuesto. Nuestro análisis sugiere que los alumnos asocian el problema con problemas comunes en este nivel escolar que se resuelven aplicando conocimientos de proporcionalidad. La formulación de la situación mediante frases habituales relacionadas con el uso de la proporcionalidad sugiere esta asociación. Tess, del grupo DC, evoca la proporcionalidad diciendo (Sección 5.2.2, Transcripción 24):

> Si con ocho lanzamientos ganadores seis euros, con siete lanzamientos ganadores, ¿cuántos euros?

Durante la entrevista con el grupo EB, que en su trabajo de grupo presenta el modelo proporcional como solución del problema, confirmamos esta interpretación. Según Joe (Sección 5.1, Transcripción 7):

> [El modelo proporcional] lo hemos calculado muchas veces, tanto en física como en matemáticas, como en... yo qué sé, tecnología. Porque otras cosas, otras variantes, pero siempre es dividir una cosa entre otra, te da una constante y esta constante multiplicarla por otra. Y entonces esto te da bien siempre.

Según este alumno muchos problemas se resuelven aplicando de este modo conocimientos de proporcionalidad, lo cual resulta adecuado para el problema propuesto. Es posible que una asociación similar lleve a todos los grupos a utilizar sus conocimientos sobre proporcionalidad para construir y proponer el modelo proporcional en la fase inicial de su trabajo.

En cinco de los seis grupos, los alumnos proponen inicialmente un modelo matemático basado en la razón 6:8 (total de la apuesta dividido por los puntos necesarios para ganar). Esto es consecuencia de la aplicación de la proporcionalidad a los datos numéricos del enunciado. Lo dicho por Tess (ver más arriba) ilustra el razonamiento que lleva a producir este modelo: si al obtener ocho puntos se ganan seis euros, por cada punto obtenido se deben ganar setenta y cinco céntimos. En los cinco grupos los alumnos indican que este razonamiento implica repartir más dinero (9 euros) que el dinero original de la apuesta (6 euros), lo cual los lleva a descartar este modelo matemático (caso del grupo EA, Sección 5.2.1, Transcripciones 9 y 10). Observamos cómo los alumnos operativizan una condición de validez relacionada con la representación de elementos empíricos de la situación para falsar un modelo matemático que no la satisface: la suma de los montos repartidos debe ser seis euros, de lo contrario el modelo no puede ser válido. Esto ilustra la búsqueda abductiva de un modelo matemático que represente aspectos empíricos de la situación y la relación entre la validez del modelo y la satisfacción de condiciones de validez identificadas.

A partir de la falsación de este modelo matemático, los cinco grupos construyen el modelo proporcional considerando la razón 6:12 (total de la apuesta dividido por los puntos obtenidos por ambos jugadores). Estos grupos comprueban que los montos repartidos mediante este modelo matemático suman seis euros y consideran esto como un indicador de la validez del modelo (casos de los grupos EA, DC y EC, Capítulo 5). Este es el único elemento que los alumnos consideran explícitamente para indicar la validez del modelo proporcional. De este modo los alumnos comprueban que el modelo proporcional no puede ser falsado como el modelo construido previamente.

Aunque algunas acciones de los alumnos corresponden a la búsqueda abductiva de un modelo matemático, cabe considerar también acciones no realizadas para tener una imagen más completa de los procesos de validación de los alumnos cuando trabajan en grupo. En general, un modelo matemático de un cierto fenómeno empírico, obtenido mediante un razonamiento abductivo, corresponde a una teoría falsable (Lakatos, op. cit.); es decir, una teoría cuya necesidad no es demostrable y cuya validez (falsable) es corroborada contrastándola con datos empíricos correspondientes al fenómeno modelado. Tal modelo es considerado válido mientras sea capaz de representar el fenómeno empírico y resulta falsado cuando no lo es. En el modelo matemático basado en la razón 6:8, por ejemplo, los alumnos constatan que los montos repartidos suman nueve euros, lo cual no se corresponde con la situación empírica, donde se deben repartir seis euros. Es así que este modelo resulta falsado. Ahora bien, en el caso de un modelador experto, que procede abductivamente para construir un modelo matemático que represente un cierto fenómeno empírico, cabe esperar la reflexión explícita acerca de las relaciones entre aspectos del fenómeno y la producción sistemática de datos empíricos que permitan verificar la validez del modelo. Es decir, se espera un control exhaustivo, en la medida de lo posible, de la representatividad del modelo propuesto. Este es un procedimiento habitual en la producción de teorías científicas. No observamos este tipo de acciones en ninguno de los seis grupos. Los modelos de la situación que emergen en las conversaciones de los grupos, no agotan aspectos empíricos de la situación que los alumnos podrían abordar a partir de las referencias compartidas que se ponen de manifiesto. Tampoco observamos la exploración autónoma y sistemática de variaciones numéricas del problema con la intención de validar el modelo matemático proporcional. El control de la representatividad del modelo se ve limitado, en todos los grupos, a la comprobación de que el jugador en ventaja obtiene un parte mayor de la apuesta y que los montos repartidos suman seis euros. Este control limitado de la representatividad del modelo sugiere que los alumnos no reconocen las implicaciones epistémicas del proceso mediante el cual este es construido.

En todos los grupos, en etapas iniciales de su actividad matemática, la validez del modelo proporcional recae, por un lado, en el control limitado de la representatividad del modelo y, por otro, en la percepción de que tanto el modelo como la solución numérica resultan matemáticamente valiosos. Aunque en ningún grupo resulta claro el estatus epistémico que asignan al modelo proporcional, los seis grupos presentan la solución numérica obtenida al profesor como solución al problema. Los alumnos posiblemente perciben el proceso de construcción y validación del modelo como adecuados a las expectativas que suponen al profesor en relación con su desempeño y con el producto matemático a obtener. Lyn, del grupo EC, es la única alumna que pone en discusión la validez del modelo haciendo consideraciones acerca de su representatividad (Tema 3).

Nuestro análisis de las etapas iniciales del proceso de resolución del problema confirma la complejidad de los procesos de construcción de la validez de la producción matemática en el trabajo en grupo de los alumnos. Observamos cómo aspectos sociales del contrato didáctico del aula, relacionados con expectativas de los alumnos acerca de su desempeño y del producto matemático a obtener, median la interpretación del problema y el trabajo hacia la construcción de un modelo matemático reconocible como matemáticamente valioso. Esta disposición hacia el uso de conocimientos matemáticos permite decidir acerca de la validez (en sentido positivo o negativo) de modelos matemáticos y soluciones numéricas considerados. Por otro lado, observamos el control de la representatividad de los modelos construidos a través de la emergencia y operativización de condiciones de validez relacionadas con aspectos empíricos de la situación. Sin embargo, este control es limitado y no se corresponde con la actuación esperada en un modelador experto. Estos resultados sugieren, en acuerdo con Steinbring (2005), la compleja relación entre la epistemología de las matemáticas del aula y aspectos sociales del contexto en el que la actividad matemática se desarrolla. Las condiciones de validez que identificamos, así como su uso en procesos de validación, son consecuencia, y por lo tanto evidencia, de esta relación. La dimensión epistémica del comportamiento racional de los alumnos está relacionada con el control que ejercen sobre sus acciones a partir de las condiciones de validez que consideran. La dimensión teleológica, por otra parte, está marcada por la necesidad de producir un modelo matemático representativo de los aspectos empíricos de la situación considerados, a la vez que socialmente reconocible como matemáticamente valioso.

6.1.2. Tema 2 - Validación inductiva y omisión del estatus epistémico de la producción matemática

Como mostramos en el Tema 1, el modelo proporcional emerge en todos los grupos en fases iniciales del proceso de resolución y es considerado por los alumnos como la solución al problema. Sólo en el grupo EC, sin que medie la intervención de la profesora, Lyn pone en duda la validez del modelo considerando su representatividad (Sección 5.2.3, Transcripción 33; ver también Tema 3). Como vimos en el Tema 1, la validez de esta solución se fundamenta en la satisfacción de ciertas condiciones de validez, que permiten a los alumnos controlar de manera limitada la representatividad del modelo a la vez que reconocerlo como matemáticamente valioso. Salvo el grupo EC, todos los demás presentan al profesor la solución proporcional como solución al problema. Dado que los alumnos no indican el estatus epistémico que asignan a esta solución, es difícil saber cuál es la certeza que tienen sobre ella. Sin embargo, el hecho de que presenten sus resultados como solución al problema es indicativo de un alto nivel de certeza acerca de su validez. En los distintos grupos, la satisfacción de las condiciones de validez consideradas parece ser motivo suficiente para fundamentar una fuerte certeza acerca de la validez del modelo proporcional.

En ambas aulas es por solicitud del profesor que los alumnos aplican los modelos matemáticos construidos a variaciones numéricas del problema. En el aula de Dan, el profesor sugiere reflexionar acerca de “casos más fáciles” como una estrategia para construir un modelo adecuado a la situación planteada en el enunciado. En el aula de Ellen, la profesora relaciona la validez de los modelos propuestos con la exploración de variaciones numéricas del problema. Para hacerlo, propone a los alumnos variaciones numéricas particulares y les sugiere reflexionar acerca de la validez de los resultados obtenidos mediante frases como: “verificar situaciones diferentes para ver si el razonamiento se mantiene”, “verificar la consistencia de la solución probándola en distintas situaciones” o “probar que la solución es consistente verificando que la repartición sea justa en distintas situaciones” (Sección 5.2.1, Transcripción 13 y Sección 5.2.2, Transcripción 34). Las sugerencias de cada profesor se refieren a cuestiones epistemológicas distintas. La sugerencia de Dan indica que un modelo válido producido mediante la reflexión sobre una variación numérica “más fácil” (se refiere a que los números implicados sean menores) puede ser generalizado para resolver el problema. La sugerencia de Ellen indica que la validez de un modelo propuesto debe ser puesta a prueba mediante su aplicación a variaciones numéricas del problema, considerando la validez de los resultados producidos. Dan promueve la reflexión acerca de las relaciones entre elementos empíricos de la situación, mientras que Ellen sugiere una estrategia para poder falsar el modelo proporcional con base en la verificación de su inadecuación en variaciones numéricas particulares del problema. Esta actuación por parte de Ellen corresponde a la implementación de la planeación realizada para las sesiones de resolución del problema junto con el investigador principal (Sección 4.4.1.1).

En ambas aulas, los distintos grupos consideran variaciones numéricas del problema siguiendo las sugerencias del profesor. Sin embargo, en todos los grupos las acciones de los alumnos se dirigen a la confirmación de la validez de los modelos matemáticos y no en los sentidos pretendidos por los profesores. Al aplicar el modelo proporcional a variaciones numéricas del problema, los alumnos comprueban que las condiciones de validez consideradas resultan satisfechas, lo cual parece reforzar la validez del modelo. En nuestro análisis, el caso del grupo EA (Sección 5.2.1) ejemplifica este tipo de actuaciones en los grupos. Tras realizar los cálculos necesarios para obtener una solución numérica, los alumnos verifican que los montos repartidos suman seis euros. Tanto en sus conversaciones como en sus protocolos escritos, esta es la única indicación explícita acerca de la validez de los resultados que obtienen. Los alumnos no parecen darse cuenta de que el hecho de que los montos repartidos sumen seis euros no garantiza la validez del modelo matemático (en sentido necesario). Comprueban la satisfacción de esta condición de validez como si comprobaran la representatividad del modelo empíricamente, sin darse cuenta de que esta comprobación *a posteriori* resulta redundante, pues es una consecuencia del uso que hacen de la proporcionalidad. Estas verificaciones sucesivas, en distintas variaciones numéricas del problema, de que los montos repartidos suman seis euros funcionan como refuerzo inductivo de la validez del modelo proporcional.

Aunque desde el punto de vista epistemológico la verificación inductiva de la validez (falsable) de un modelo matemático obtenido mediante un razonamiento abductivo es adecuada, la verificación de la representatividad del modelo reducida al hecho de que los montos repartidos suman seis euros resulta insuficiente. Los alumnos no parecen darse cuenta de la necesidad de generar nuevos datos empíricos que puedan ser contrastados con los resultados numéricos construidos mediante el modelo a fin de verificar o falsar su validez. No hay indicios, en ninguno de los grupos, de que se tenga en cuenta esta cuestión. Estos resultados apuntan a que los alumnos no reconocen la falsabilidad del modelo matemático proporcional; es decir, no reconocen la falsabilidad como característica epistémica en un modelo obtenido mediante un razonamiento abductivo (Lakatos, 1978) y, en cambio, parecen considerar la verificación inductiva como suficiente para justificar su validez (necesaria). Esta es una característica epistemológicamente relevante de los procesos de construcción de la validez de la producción matemática en los distintos grupos.

Durante la entrevista con el grupo EA (Sección 5.2.1, Transcripciones 14 y 18), comprobamos que, para estas alumnas, la verificación de las condiciones de validez consideradas en variaciones numéricas del problema permite "verificar que el método es correcto" (i.e., el modelo matemático es válido) y que, por tanto, los resultados obtenidos "son justos". Las alumnas se refieren de modo ambiguo a la necesidad de comprobar que las condiciones de validez son satisfechas en todas las posibles variaciones numéricas o si basta hacerlo para un conjunto finito. Sin embargo, sus acciones sugieren que obtienen una fuerte certeza acerca de la validez del modelo proporcional después de comprobar que las condiciones de validez consideradas son satisfechas en un par de variaciones numéricas del problema (Sección 5.2.1, Transcripciones 15 y 16). Después de trabajar con algunas variaciones, por sugerencia de la profesora, las alumnas consideran la variación problematizadora en la que el jugador en ventaja ha obtenido dos puntos, su contrincante ninguno y deben obtener ocho puntos para ganar el juego. Aplicando el modelo proporcional, las alumnas concluyen que el jugador en ventaja debe recibir el total de la apuesta; respuesta que presentan con convencimiento a la profesora como solución a esta variación numérica del problema (Sección 5.2.1, Transcripción 17).

Según la planeación realizada entre la profesora y el investigador principal (Sección 4.4.1.1), esperábamos que el trabajo con variaciones numéricas problematizadoras permitiera a los alumnos cuestionar la validez del modelo proporcional con base en referencias compartidas acerca del juego. A partir de la variación numérica propuesta al grupo EA, esperábamos que las alumnas juzgaran inadecuado que el jugador en ventaja obtenga el total de la apuesta e incluso que notaran que el reparto es independiente de esta ventaja cuando uno de los jugadores no ha obtenido ningún punto. En cambio, las alumnas del grupo EA no identifican el reparto obtenido como problemático. Posiblemente el proceso de emergencia y validación inductiva del modelo proporcional ha generado tal nivel de certeza, que las discrepancias con referencias sobre el juego son dejadas de lado en favor de los resultados obtenidos mediante un modelo considerado válido. Aunque no podemos descartar la posibilidad de que las alumnas no cuenten con referencias acerca del juego que entren en conflicto con el resultado obtenido, esto resulta poco plausible; Fenaroli, Guala, Goizueta, Paola y Sanna (2014) y Paola (1998) muestran que los alumnos suelen identificar los repartos proporcionales en variaciones numéricas de este tipo como problemáticos. En el caso del grupo EA, el proceso de validación inductivo parece proveer de un alto nivel de certeza en relación con la validez del modelo proporcional.

Dado que el grupo EA fue al único al que la profesora presentó una variación numérica problematizadora y que en ningún otro observamos la exploración autónoma de una de ellas, no contamos con datos que permitan verificar actuaciones similares o distintas por otros grupos en situaciones comparables.

Los resultados expuestos hasta aquí, se suman a los de otros estudios que sugieren que alumnos de matemáticas de distintas edades producen y aceptan argumentos no-deductivos como justificaciones de la validez (en sentido necesario) de sus producciones matemáticas (Harel y Sowder, 1998; Healy y Hoyles, 2000; Knuth, Chopin y Bieda, 2009). Estos estudios se refieren a situaciones en las que los alumnos deben justificar conjeturas relativas a contenidos matemáticos. Nuestros resultados sugieren que también en situaciones de modelado matemático, los alumnos utilizan argumentos no-deductivos para justificar, en sentido necesario, la validez de su producción matemática.

En relación con el estatus epistémico que los alumnos asignan a su producción matemática, una cuestión observada durante el análisis de datos resulta relevante. Mientras buscábamos acciones por parte los alumnos que confirmaran o refutaran el uso de razonamientos inductivos para justificar la validez de su producción matemática, observamos que los argumentos esgrimidos, ya sea de manera explícita o como actos de habla ilocutivos (Searle, 1969), no suelen estar claramente modalizados (Toulmin, 2007). Es decir, no suelen ir acompañados por partículas modales que indiquen el estatus epistémico de las conclusiones que pretenden apoyar. A lo largo de nuestro análisis hemos destacado esta cuestión, poniendo en evidencia la necesidad de interpretar lo que hacen y dicen los alumnos en relación con modelos matemáticos y soluciones numéricas que proponen para inferir el estatus epistémico que asignan; el cual no siempre puede ser determinado. Esta observación permite contrastar el desempeño de los alumnos de matemáticas de secundaria que participaron en nuestro estudio con el desempeño de un grupo de matemáticos profesionales estudiado por Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007). Ahí se documenta la capacidad y disposición de los matemáticos participantes para indicar el estatus epistémico de las conclusiones de sus argumentos. Estos matemáticos derivan de manera adecuada el estatus epistémico de sus conclusiones en función del tipo de argumento empleado (deductivo, inductivo, abductivo); es decir, identifican adecuadamente cuándo las razones aportadas son suficientes para inferir necesariamente la conclusión y cuándo no lo son. Por otro lado, utilizan partículas modales para indicar este estatus y, así, su nivel de certeza en relación con las conclusiones de sus argumentos. Los resultados de estos autores sugieren que los matemáticos utilizan argumentos no-deductivos de manera productiva en su actividad matemática y que, además, cuentan con conocimientos meta-matemáticos necesarios para derivar y expresar de manera adecuada el estatus epistémico de sus conclusiones. En cambio, en las conversaciones que hemos analizado en los distintos grupos, los alumnos no suelen utilizar partículas modales, por lo que el estatus epistémico que asignan a su producción matemática, y con él su nivel de certeza, no siempre resulta discernible. En general, no observamos disposición por parte de los alumnos a modalizar sus argumentos mientras trabajan en grupo; en el Tema 5 veremos que tampoco muestran disposición en este sentido en la interacción con el profesor.

No pretendemos sugerir que los resultados de Inglis et al. y los nuestros son comparables; lo que pretendemos es llamar la atención sobre diferencias que pueden indicar cuestiones epistemológicamente relevantes de la actividad matemática de los alumnos y que pueden constituir terreno fértil para futuras investigaciones. Los resultados de Inglis et al. sugieren que los matemáticos profesionales cuentan con conocimientos meta-matemáticos que les permiten relacionar adecuadamente los tipos de argumentos que emplean con el estatus epistémico de sus conclusiones y que, además, muestran disposición para indicarlo explícitamente a partir del uso de modalizadores. Nuestros resultados indican que los alumnos consideran argumentos no-deductivos como adecuados para justificar la validez (necesaria) de su producción matemática y que, por otro lado, no suelen hacer evidente el estatus epistémico de esta producción mediante el uso de partículas modales. A partir de nuestro estudio, limitado a la resolución del problema propuesto durante dos sesiones, no podemos afirmar que este sea un comportamiento habitual de los alumnos observados. Estos resultados pueden deberse al problema propuesto y a los contenidos matemáticos implicados. Un estudio más amplio, que incluya otro tipo de situaciones y otros contenidos matemáticos podría informar sobre si estas son características habituales de procesos de construcción de la validez de la producción matemática de los alumnos; es decir, si son características de la epistemología de las matemáticas del aula.

6.1.3. Tema 3 - Diversidad en posicionamientos epistémicos y teleológicos en la construcción de la validez en el aula

En el Tema 1 mostramos que los alumnos asocian inicialmente el problema propuesto con problemas que se resuelven utilizando conocimientos de proporcionalidad, comunes en esta edad escolar en el contexto institucional del sistema educativo catalán. A partir de esta asociación emergen, en etapas iniciales del proceso de resolución, el modelo y la solución proporcionales, la cual es propuesta por cinco de los seis grupos como solución al problema. Esto muestra que el enunciado del problema no basta, tal y como fue planteado y sin que medie la intervención del profesor, para generar entre los alumnos incertidumbre en alguno de los sentidos que propone Zaslavsky (2005) (Sección 4.2). Es decir, no observamos, en etapas iniciales del proceso de resolución, la emergencia de proposiciones basadas en conocimientos matemáticos o extra-matemáticos acerca de la situación que sugieran soluciones distintas al problema. Tampoco observamos, en general, que los alumnos muestren incertidumbre en relación con la solución proporcional y que esta incertidumbre los mueva a buscar justificaciones más adecuadas. Finalmente, tampoco observamos que los alumnos consideren insuficientes sus procedimientos para decidir sobre la validez de la solución que proponen. A pesar de que el razonamiento que justifica la validez del modelo proporcional es de carácter abductivo, los alumnos no muestran dudas en relación con la solución construida. El problema no es reconocido como novedoso, sino como uno que se puede resolver mediante el uso de conocimientos sobre proporcionalidad, siguiendo esquemas de resolución habituales para tipos de problemas conocidos. Esto está en línea con las observaciones de Brown (2014), que indica las dificultades de los alumnos para mantener una posición escéptica cuando cuentan con evidencias que sugieren la validez de su producción matemática, aunque esta no se apoye en razonamientos deductivos (Tema 2).

Lo comentado hasta aquí es un resultado general para el cual encontramos una excepción relevante. Esta excepción la constituye Lyn, una alumna del grupo EC (Sección 5.2.3). Cuando Tim, uno de sus compañeros, propone el modelo y la solución proporcionales, Lyn los rechaza indicando la falta de representatividad del modelo (Sección 5.2.3, Transcripciones 33 y 34). Sugiere, por ejemplo, que repartir proporcionalmente a los puntos realizados significa "olvidarse de las normas del juego", pues "los seis euros son por ocho puntos". Desde su punto de vista, el modelo proporcional no representa adecuadamente las reglas del juego y, por lo tanto, no puede ser válido. Estas consideraciones relativas a la falta de representatividad del modelo proporcional, llevarán a Lyn a construir y proponer un modelo matemático basado en los puntos que los jugadores deberían obtener para ganar el juego (equivalente a repartir la apuesta proporcionalmente a los posibles marcadores finales favorables a cada jugador). Notablemente, esta actuación de Lyn no es producto de intervenciones regulativas de la profesora, sino un intento autónomo por producir un modelo representativo de la situación (Sección 5.2.3, Transcripciones 36-40).

En los procesos de construcción y validación de los dos modelos matemáticos propuestos por el grupo EC, nuestro análisis muestra dos posiciones epistémicas y teleológicas distintas. Por un lado, Lyn considera la validez de los modelos en términos de su capacidad para representar adecuadamente aspectos empíricos de la situación. Por lo tanto, sus acciones se dirigen a falsar el modelo proporcional y a fundamentar el modelo que propone vinculándolo con elementos empíricos de la situación y sus relaciones. Lyn cuestiona permanentemente ambos modelos matemáticos y se muestra escéptica respecto a su representatividad y, de ahí, respecto a su validez. Por otro lado, Tim y Ely fundamentan la validez de los modelos propuestos en la satisfacción de algunas condiciones de validez consideradas (los montos repartidos suman seis euros y el jugador en ventaja recibe una parte mayor de la apuesta) y en el hecho de que son reconocibles como matemáticamente valiosos. Por lo tanto sus acciones se dirigen a identificar y aplicar conocimientos matemáticos compartidos, percibidos como adecuados. Si para Lyn este parece ser un problema novedoso que requiere una aproximación reflexiva, para sus compañeros es uno que se resuelve mediante el uso de conocimientos proporcionales según esquemas de resolución habituales, lo que sugiere una aproximación reproductiva. En este sentido, la posición de Tim y Ely y sus acciones son similares a las observadas en el resto de grupos para la producción del modelo proporcional.

Lyn es la única alumna en la que observamos disposición al escepticismo a pesar de las razones expuestas en favor de la validez de los modelos producidos por su grupo. Es también la única alumna que manifiesta incertidumbre en los tres sentidos que propone Zaslavsky (op. cit.), sin que para ello medien las intervenciones regulativas de la profesora. Es la incertidumbre en relación con la validez del modelo proporcional la que la lleva a producir un modelo alternativo, para lo cual utiliza referencias sobre el juego. Esta alumna evalúa y rechaza la validez de este nuevo modelo matemático considerando la falta de certeza en relación con su representatividad (Sección 5.2.3, Transcripciones 37-41). En distintas ocasiones manifiesta incertidumbre en relación con los conocimientos y procedimientos adecuados para resolver el problema; lo cual queda en evidencia mediante frases con las que se refiere a este indicando, por ejemplo, que "es muy raro (...) no lo resolveremos; no sabemos cómo hacer esto". Cuando indica la falta de representatividad del modelo matemático que ella misma propone, sugiere llamar a Ellen "para que ella lo desmonte. A ver cómo nos lo desmonta. Porque nosotros no sabemos hacerlo".

Sugerimos que el posicionamiento epistémico de Lyn, según el cual la validez de los modelos matemáticos está supeditada a la evaluación sistemática de su representatividad, propicia la incertidumbre acerca de las soluciones propuestas y la lleva a percibir el problema como novedoso y complejo. Lyn entiende que la solución al problema pasa por la construcción de un modelo matemático que represente adecuadamente la situación empírica, por lo que la reflexión acerca de esta (acerca de "las reglas del juego") es central al proceso de resolución.

Nuestro análisis muestra cómo posicionamientos epistémicos distintos pueden motivar distintas acciones de los alumnos; es decir, distintos posicionamientos teleológicos (Habermas, 1998). Consideraciones distintas acerca de cómo es que los modelos propuestos deben ser validados llevan a los alumnos a actuaciones distintas en procesos de validación de su producción matemática. En síntesis, pues, observamos que la diversidad epistémica a menudo parece residir en la base de la diversidad teleológica. Esta diversidad epistémica queda en evidencia como parte de las interacciones del grupo, donde distintas posiciones se confrontan (aunque sea de manera tácita) en algunas conversaciones.

Esto indica que en el diseño de intervenciones didácticas en las que se pretende propiciar situaciones de incertidumbre que impulsen el trabajo matemático, como propone Zaslavsky (op. cit.), las condiciones epistémicas específicas del aula deben ser tenidas en cuenta. Distintos posicionamientos epistémicos por parte de los alumnos pueden llevar a interpretaciones distintas acerca de un problema y de las acciones a realizar para resolverlo. Recíprocamente, las interpretaciones de los alumnos sobre problemas particulares, así como sus decisiones al construir posibles soluciones, pueden ser indicativos de posiciones epistémicas particulares en relación con la producción y validación de conocimientos matemáticos; es decir, indicativos de la epistemología de las matemáticas del aula.

Como mostramos en el análisis de las conversaciones del grupo EC, los alumnos no logran explicar unos a otros las bases a partir de las que fundamentan o cuestionan la validez de los modelos que proponen. Lyn, para quien la validez de los modelos matemáticos está ligada a su representatividad, no logra explicar a sus compañeros de manera inteligible su posicionamiento epistémico y, por tanto, por qué pone en duda la validez de los modelos producidos. Tim y Ely no parecen entender el posicionamiento de Lyn y, por tanto, la motivación de sus acciones. Por otro lado, estos alumnos tampoco logran explicar por qué la satisfacción de ciertas condiciones de validez resulta suficiente, desde su punto de vista, para validar los modelos propuestos.

Cuando interactúan con la profesora, Lyn no logra explicar su posicionamiento de manera inteligible y Ellen no parece identificar la diversidad de posicionamientos (epistémicos y teleológicos) de los alumnos y sus consecuencias en el trabajo matemático del grupo (Sección 5.2.3, Transcripciones 34 y 41). En sus interacciones, la profesora no logra ayudar a los alumnos a identificar el origen de sus discrepancias y a iniciar una discusión reflexiva sobre la construcción de la validez en el ámbito de las matemáticas. Nuestro análisis del grupo EC muestra que ni los alumnos ni la profesora logran identificar los distintos posicionamientos epistémicos puestos en juego, una condición necesaria para dar cuenta de manera crítica y reflexiva de las acciones propias y de las de otros. Lo que parece ser una oportunidad para reflexionar acerca de meta-conocimientos relativos a la validación en el dominio matemático, no se aprovecha en esta ocasión. Finalmente, las dificultades para plantear y discutir sus ideas con el grupo y con la profesora, llevan a Lyn a abandonar su línea argumentativa.

La excepcionalidad del posicionamiento de Lyn, de sus acciones y de la situación que se crea en el grupo EC, señala que tanto los alumnos como la profesora no siempre cuentan con los recursos para lidiar con la complejidad epistémica del conocimiento matemático producido en el aula, en particular con los recursos comunicativos para hablar al respecto de manera explícita.

A partir de nuestros resultados, coincidimos con Zaslavsky (op. cit.) en observar que, a pesar del potencial de la incertidumbre como motor del aprendizaje matemático, situaciones que pretendan explotarla deben ser planeadas e implementadas cuidadosamente para potenciar su aprovechamiento en el contexto de la actividad matemática. Como observa Movshovitz-Hadar (1993), situaciones de incertidumbre pueden conducir fácilmente a la frustración si no son adecuadamente manejadas. Coincidimos con Behr y Harel (1995) en observar que las intervenciones didácticas deben implicar un nivel de conflicto cognitivo adecuado, el cual consienta la resolución de situaciones conflictivas mediante la construcción de conocimientos consistentes con principios del dominio matemático. Esta cuestión requiere particular atención si esperamos que situaciones como las producidas en el trabajo del grupo EC puedan ser aprovechadas para la construcción reflexiva de conocimientos meta-matemáticos relativos a la construcción de la validez en el ámbito de las matemáticas.

6.2. Objetivo 2

En esta sección presentamos dos Temas, mediante los cuales caracterizamos procesos de construcción de la validez de la producción matemática en la interacción de grupos de alumnos con el profesor del aula. Así conseguimos el segundo objetivo de nuestro estudio.

6.2.1. Tema 4 - Aprovechamiento de las intervenciones del profesor para construir la validez de la producción matemática

Los tres Temas precedentes han permitido caracterizar procesos de construcción de la validez de la producción matemática en el trabajo en grupo de los alumnos. Hemos mostrado que, en etapas iniciales del proceso de resolución, la validez (en sentido positivo o negativo) de los modelos matemáticos y de las soluciones numéricas se fundamenta en la satisfacción de ciertas condiciones de validez consideradas. Estas condiciones de validez corresponden tanto al control limitado de la representatividad de los modelos, como a aspectos sociales del contrato didáctico del aula vinculados con expectativas de los alumnos en relación con su desempeño y con la solución a obtener (Temas 1 y 2). Durante el análisis de datos, hemos mostrado que otro elemento relevante para los alumnos en procesos de validación, es la satisfacción de las indicaciones hechas por el profesor en sus intervenciones. El contrato didáctico del aula indica que las intervenciones del profesor tienen propósitos didácticos, los cuales deben ser considerados e interpretados por los alumnos. Aunque Ellen y Dan utilizan estrategias comunicativas distintas, cuyas implicaciones epistémicas difieren (Tema 6), ambos profesores interactúan con los distintos grupos a fin de orientar su trabajo matemático.

En sus interacciones con los grupos, Dan suele referirse de manera evidente a la validez de las soluciones numéricas que le son propuestas mediante frases como “el jugador que tiene más partidas ganadas no se conformará” o “si yo fuese el jugador que más partidas ha ganado, no me conformaría” (Sección 5.2.2, Transcripción 26). Los alumnos de Dan aprovechan estas intervenciones del profesor para falsar y descartar modelos matemáticos mediante los cuales tales soluciones numéricas fueron construidas. En estas situaciones, en general, no observamos reflexiones sistemáticas por parte de los alumnos acerca de la validez de los modelos matemáticos que rechazan. La indicación del profesor acerca de la validez de la solución propuesta no sólo resulta suficiente para falsar el modelo matemático, sino que lleva a los alumnos a redirigir sus esfuerzos sin reflexionar acerca del modelo falsado. En particular, no observamos que estos procesos de falsación lleven a los alumnos a considerar o reconsiderar relaciones entre elementos empíricos de la situación planteada en el problema. La cuestión crucial, desde el punto de vista del modelado matemático, sobre qué aspectos empíricos de la situación no son adecuadamente representados por el modelo propuesto para que sea rechazado, no suele emerger en la reflexión de los alumnos después de estas intervenciones de Dan. Es posible que los alumnos no consideren que vale la pena reflexionar acerca de un modelo matemático que ha sido calificado como incorrecto por el profesor. Observamos que el escepticismo de los alumnos en relación con la validez de las soluciones que proponen no se fundamenta en su reflexión sobre el problema, sino en la deferencia hacia la autoridad matemática del profesor. Estas acciones de los alumnos no sólo ilustran la relevancia de las intervenciones del profesor en la construcción de la validez de su producción matemática, también aluden a modos específicos de implementar y aprovechar estas intervenciones.

Dan combina estas intervenciones con otras en las que sugiere, de manera más o menos evidente, elementos que deben ser considerados en la construcción del modelo matemático correcto. Por ejemplo, cuando el profesor se dirige a toda la clase diciendo:

> A veure si m'escolteu un moment. Aquests dos jugadors saben matemàtiques, i no es conformen amb qualsevol cosa. Vosaltres sou persones joves... joves; i mireu més al futur que no pas al passat. Al futur: què passarà. Més que no pas al que ha passat. Vinga! (...) Feu esquemes, feu gràfics. Mirant al futur.

Más adelante, mientras interactúa con el grupo DC, Dan aclara a qué se refiere:

> No conta el que tu has fet fins ara, sinó el que queda per fer. Les possibilitats que queden per fer. En les possibilitats que queden per fer, ja està contemplat el que s'ha fet anteriorment. Perquè esclar, el de set ja surt amb set guanyades, per tant ja estan contemplades. Però tu has de veure el futur. Què passaria a partir del set? A partir del set, qui podria guanyar? Quines possibilitats té l’un? Quines possibilitats té l’altre?

Como sugiere nuestro análisis (Sección 5.2.2, Transcripciones 27 y 28), con estas intervenciones Dan pretende propiciar la reflexión de los alumnos sobre la situación empírica planteada en el problema. Enesta interacción con el grupo DC, por ejemplo, la reflexión gira en torno a las posibilidades de cada jugador de ganar, de su dependencia con los puntos que a cada uno le falta obtener y de su independencia con los puntos obtenidos; lo cual es clave para la emergencia del modelo probabilístico. Él mismo sugiere esta reflexión, de manera más o menos clara, cuando se dirige a los alumnos. Estas intervenciones del profesor podrían propiciar la revisión crítico-reflexiva por parte de los alumnos del modelo de la situación (en el sentido de Blum y Leiß, 2007) con el que operan, pues las indicaciones resultan relevantes para entender la situación empírica. Sin embargo los alumnos no aprovechan de este modo estas intervenciones de Dan. En los distintos grupos, los alumnos las operativizan para inferir características específicas de la solución esperada por el profesor y para producir modelos y soluciones que las satisfagan. Las intervenciones citadas más arriba, por ejemplo, son aprovechadas por los alumnos para dirigir su atención a un nuevo conjunto de datos numéricos: los puntos que cada jugador debe obtener para ganar. En los tres grupos observados, los alumnos manipulan este nuevo conjunto de datos a fin de producir un nuevo modelo matemático y una nueva solución numérica que dé cuenta de las indicaciones del profesor y de las condiciones de validez consideradas (para el grupo DC ver Sección 5.2.2, Transcripción 29; ver también Tema 1).

Los anteriores son ejemplos de intervenciones habituales de Dan, las cuales son aprovechadas por sus alumnos para decidir acerca de la validez de las soluciones y modelos matemáticos construidos y para re-orientar su trabajo matemático. Los alumnos de Dan intentan construir modelos matemáticos que les permitan producir soluciones numéricas con las características esperadas por el profesor, según las interpretaciones de sus intervenciones (e.g., después de que el profesor indica que el jugador en ventaja no se conformará con la parte que recibe, una solución según la cual gane una parte mayor de la apuesta debe ser construida). En la producción de nuevos modelos matemáticos y soluciones numéricas, la adecuación a las indicaciones del profesor es percibida como indicador de validez. Así, a partir de las interacciones con el profesor, la satisfacción de las indicaciones recibidas emerge como una nueva condición de validez. En esta aula, la construcción de una solución que sea reconocida por el profesor como válida es una cuestión importante, que condiciona la producción matemática de los alumnos y sus acciones para validarla.

Estos resultados están en línea con Steinbring (2005), quien sugiere que es habitual en las interacciones entre profesor y alumnos que estos dejen de relacionar las intervenciones del profesor con los aspectos matemáticos del problema en cuestión y, en cambio, las interpreten como sugerencias y alusiones en el contexto de sus expectativas. Según el autor, este tipo de interacciones permite a los alumnos percibir su trabajo matemático como adecuado y al profesor percibir sus intervenciones como exitosas, en el sentido de ayudar a los alumnos en la construcción de conocimientos matemáticos. De ahí la compleja relación entre la construcción de la validez de la producción matemática y aspectos socio-interactivos del aula. Es posible que interacciones mediadas por el papel otorgado al profesor estén detrás de actuaciones observadas en los grupos del aula de Dan.

A partir del análisis de la interacción entre el profesor y los grupos DA y DC, hemos observado la “inversión” del ciclo de modelado en el trabajo de los alumnos. En el grupo DA, mediante la manipulación de los datos numéricos indicados por Dan, las alumnas construyen una solución numérica que satisface las expectativas del profesor (según son interpretadas por las alumnas); sin embargo tienen problemas para relacionar esta manipulación numérica de manera coherente con la situación y con referencias sobre el juego (Sección 5.3.1, Transcripción 46). Laura sugiere solicitar la validación de la solución por parte del profesor como condición previa a la búsqueda de un modelo matemático y de un modelo de la situación que les permitan obtener esta solución de manera coherente con la situación. Es así que el ciclo de modelado matemático aparece invertido: según las alumnas, en lugar de fundamentar la validez de la solución numérica en el entendimiento y matematización de relaciones entre elementos empíricos de la situación, la reflexión acerca de estas relaciones se debe orientar de modo que el resultado validado por el profesor sea inferible. El modelo de la situación resulta así una consecuencia de la validez de la solución, garantizada por el profesor, y no de la reflexión sobre la situación empírica. De este modo las alumnas proceden después de obtener confirmación de Dan de la validez de la solución 5,25€ para el jugador en ventaja y 0,75€ para el contrincante (Sección 5.3.1, Transcripción 47); solución que han obtenido mediante un uso que saben inadecuado de la proporcionalidad (Sección 5.1, Transcripción 6). La confirmación de Dan sobre la validez de la solución las lleva a dedicar sus esfuerzos a la construcción de un nuevo modelo matemático mediante el cual esta solución puede ser obtenida. Así las alumnas construyen el modelo probabilístico.

En el análisis del trabajo del grupo DC observamos acciones similares. Hemos mostrado cómo los alumnos aprovechan las intervenciones de Dan para falsar modelos que no satisfacen al profesor, para inferir elementos esperados en la solución correcta y, finalmente, para construir el modelo y la solución probabilísticos (Sección 5.2.2 y Sección 5.3.1, Transcripciones 48-51). Este proceso no se funda en la reflexión acerca de la situación empírica, sino en la operativización de las indicaciones del profesor para manipular los datos numéricos de maneras que éste reconoce como adecuadas. Sólo tras obtener la confirmación de Dan acerca de la validez de la solución, observamos que Tess reflexiona sobre el modelo y las relaciones entre elementos empíricos de la situación (Sección 5.3.1, Transcripción 51). La alumna nota que las probabilidades de ganar de cada jugador son independientes de los puntos obtenidos y solamente dependen de los puntos a obtener para ganar. Como consecuencia de ello, nota que el total de puntos a obtener para ganar el juego también es independiente de las probabilidades de ganar de los jugadores. Todo esto es relevante en la construcción de la noción de probabilidad y en la interpretación probabilística de la situación.

Observamos, también en este grupo, la inversión en el ciclo de modelado: no es la reflexión acerca de la dimensión empírica de la situación la que motiva la emergencia de un modelo de la situación y un modelo matemático acorde, el cual es validado en relación con su representatividad; es el modelo matemático construido, cuya validez es garantizada por el profesor, el que permite deducir relaciones empíricas de la situación. En lugar de aprehender reflexivamente aspectos empíricos de la situación para dirigir la construcción de un modelo matemático representativo, los alumnos imponen a la situación empírica relaciones que emergen deductivamente del modelo matemático y de la solución numérica validados por el profesor.

Vemos así que el ciclo de modelado que proponen Blum y Leiβ (op. cit.) se ve invertido: una vez que los alumnos cuentan con un modelo matemático validado por el profesor, relaciones empíricas de la situación son deducidas para conformar un modelo de la situación. Durante nuestro análisis hemos llamado a este tipo de actuación por parte de los alumnos ‘modelado *ex post facto*’: la validez del modelo matemático precede y fundamenta la conformación del modelo de la situación. No se da el proceso de matematización en el sentido propuesto por los autores, pues el modelo matemático no se origina en la aprehensión de elementos empíricos de la situación, sino en la adaptación, en términos matemáticos, de indicaciones específicas del profesor.

Posiblemente este modo de proceder por parte de los alumnos esté en la base de la falta de certeza que expresa Jay, del grupo DC, en relación con la validez del modelo probabilístico (Sección 5.3.1, Transcripción 51). El alumno comenta con su compañera que no entiende por qué este modelo es más adecuado que el construido antes (repartir la apuesta proporcionalmente a los posibles marcadores finales favorables a cada jugador). El alumno dice que el único motivo que encuentra es la preferencia del profesor por el modelo probabilístico. Esto apunta a la necesidad social de producir la respuesta esperada por el profesor y no a la necesidad intelectual de producir un modelo representativo como origen de la validez del modelo. Los alumnos no reflexionan sistemáticamente en relación con ambos modelos para justificar la validez del modelo probabilístico y tampoco plantean esta cuestión a Dan. La obtención de la solución esperada por el profesor es suficiente para los alumnos como producto de su trabajo matemático. La que parece ser una ocasión para discutir aspectos del modelo probabilístico, de la situación empírica y de la noción de probabilidad, así como para reflexionar sobre aspectos meta-matemáticos relativos a las condiciones para construir y validar un modelo matemático, no se aprovecha.

Dan no es ajeno al modelado *ex post facto* realizado por algunos grupos. Durante la puesta en común aprovecha la intervención de Troy, quien deriva la solución numérica correcta a partir de un uso inadecuado de la proporcionalidad (Sección 5.3.1, Transcripción 52), para comentar que la obtención del resultado numérico correcto no justifica la validez del modelo matemático mediante el cual fue construido. Más adelante, después de que el grupo DB presenta el modelo y la solución probabilísticos, Dan complementa lo dicho antes (Sección 5.3.1, Transcripción 53):

> Mireu, alguna gent de vosaltres heu fet el raonament al revés. Al revés. S'ha de fer un raonament per arribar a la solució. Però no a partir de la solució justificar l'argument. M'explico, o no?

El profesor destaca que la solución al problema debe estar basada en "un razonamiento", el cual no debe ser inferido a partir de la respuesta correcta. Dan se refiere así a que la validez del modelo matemático y de la solución numérica debe estar fundamentada en la reflexión acerca de la representatividad del modelo: un modelo matemático válido debe representar las relaciones empíricas de la situación de manera satisfactoria. En vista de los procesos de resolución de los alumnos, el comentario de Dan es relevante, sin embargo parece insuficiente para aclarar aspectos del modelado matemático. Los alumnos no comentan al respecto y no es claro que interpreten la intervención de Dan del modo pretendido. Aunque esta podría ser una ocasión para discutir acerca de aspectos meta-matemáticos del proceso de modelado, tampoco se aprovecha en este sentido.

Tanto el trabajo autónomo de los alumnos como las interacciones con el profesor, están dirigidos a la producción de la respuesta correcta; la reflexión acerca de la construcción y validación del conocimiento matemático parece estar en segundo plano. Nuestros resultados muestran, en acuerdo con lo dicho en el Tema 3, que tanto los alumnos como el profesor no siempre cuentan con instrumentos suficientes para tratar de manera deliberada y explícita aspectos epistemológicos del conocimiento matemático producido en el aula. Además sugieren que esta no es una cuestión prioritaria dentro de procesos de construcción de la validez de la producción matemática.

El análisis preliminar de la interacción entre alumnos y profesor en el aula de Dan, donde se puso de manifiesto la relevancia de su autoridad matemática en procesos de validación de todos los grupos, llevó a diseñar unas líneas de actuación para Ellen (Sección 4.4.1.1). Acordamos con la profesora que en sus intervenciones evitaría manifestarse acerca de la validez de los modelos propuestos por los alumnos y que propiciaría la emergencia de distintos modelos matemáticos en competencia. Se esperaba generar situaciones de incertidumbre (en el sentido de Zaslavski, 2005) que llevaran a los alumnos a comparar distintos modelos produciendo argumentos en favor o en contra de su validez. Para facilitar la reflexión sobre la validez de los modelos, Ellen propondría su aplicación a variaciones numéricas del problema. Se planearon variaciones numéricas problematizadoras que permitieran a los alumnos falsar modelos esperados, poniendo en conflicto las soluciones obtenidas con referencias comunes acerca del juego. Finalmente, sólo en el grupo EA una de estas variaciones fue propuesta por Ellen.

Siguiendo estas líneas de actuación, en su interacción con los grupos, Ellen intenta propiciar la emergencia de modelos en competencia y su comparación. Para ello utiliza frases como “ustedes tienen que intentar distintas posibilidades y quedarse con la que les parezca más justa” (Sección 5.3.2, Transcripción 58). De este modo Ellen traslada la tarea de la validación de los modelos y de los resultados a los alumnos; lo que se espera los lleve a argumentar en este sentido. La entrevista con los alumnos del grupo EB aclara cómo estos alumnos interpretan las intervenciones de la profesora. Según Ron, por ejemplo, Ellen espera “que busquemos más antes de decidir ... que busquemos alguna [solución] más o que profundicemos más en esa que habíamos encontrado” (Sección 5.3.2, Transcripción 59). Aunque no es claro a qué se refiere Ron con “buscar más” y con “profundizar”, su respuesta sugiere que los alumnos interpretan las solicitudes de la profesora en línea con la planeación: es su tarea producir distintos modelos y “profundizar” en ellos.

Tanto en el grupo EB como en el grupo EC, observamos la emergencia de modelos matemáticos distintos como parte de su trabajo autónomo (para el caso del grupo EC Sección 5.2.3). En el grupo EA será necesaria la intervención de Ellen para que las alumnas produzcan un nuevo modelo después de haber producido y validado el modelo proporcional.

Como mostramos en el Tema 2, la validación inductiva del modelo proporcional lleva a las alumnas del grupo EA a tener un alto grado de certeza en relación con su validez; lo cual las lleva, a su vez, a no reconocer como problemático el resultado obtenido en una variación numérica problematizadora (el jugador en ventaja se lleva el total de la apuesta). Al presentar este resultado, Ellen evidencia su insatisfacción y reflexiona acerca de la representatividad del modelo: “yo me quejaría, pues no es seguro que yo vaya a perder” (Sección 5.2.1, Transcripción 17). Ellen sugiere al grupo dejar de lado el modelo proporcional y “analizar cómo podría continuar la partida para entender cómo repartir el dinero” (Sección 5.2.1, Transcripción 20). De modo similar a las acciones de Dan, Ellen propone razones para dudar de la validez del modelo proporcional, a la vez que indica cuestiones que deben ser consideradas para producir la solución correcta. Aunque la intervención de la profesora podría propiciar la reflexión sobre la representatividad del modelo proporcional, pues llama la atención sobre aspectos empíricos de la situación, las alumnas no la aprovechan para esto. Al igual que lo observado en el aula de Dan, el grupo aprovecha la intervención de Ellen para descartar el modelo proporcional e identificar datos numéricos que deben ser manipulados para producir una solución que satisfaga a la profesora. En su siguiente interacción con este grupo (Sección 5.3.2, Transcripción 61), Ellen da nuevas indicaciones que permiten a las alumnas construir un nuevo modelo matemático (repartir la apuesta proporcionalmente a los posibles marcadores favorables a cada jugador).

Durante la entrevista con este grupo, corroboramos estos resultados. Al ser cuestionadas acerca de por qué no resulta convincente el modelo proporcional para la profesora, las alumnas indican que Ellen espera que la respuesta “esté basada en un futuro ... y no en lo que ha pasado” (Sección 5.2.1, Transcripción 19). El modelo proporcional no es válido porque no es la solución que espera la profesora. Esta repuesta confirma que las alumnas de este grupo aprovechan las intervenciones de Ellen para descartar el modelo que no satisface a la profesora y para inferir características del modelo esperado. Ni en sus acciones en el aula ni durante la entrevista las alumnas relacionan la validez del modelo con su capacidad para representar adecuadamente la situación empírica, más allá del control limitado que ejercen a partir de las condiciones de validez que consideran (Tema1).

Estos resultados son relevantes, pues muestran que actuaciones similares de ambos profesores motivan actuaciones similares de los alumnos. Las intervenciones de Ellen y Dan en las que se expresan acerca de la validez de los modelos matemáticos de los alumnos y evidencian características de la solución esperada, no son aprovechadas por los alumnos para reflexionar acerca de la dimensión empírica de la situación. En cambio, son aprovechadas para descartar modelos, inferir características esperadas en la solución correcta e identificar datos numéricos que deben ser manipulados para obtenerla. Esto confirma la relevancia de la autoridad matemática del profesor como condición de validez y la disposición de los alumnos a interpretar las intervenciones del profesor en relación con sus expectativas y no con aspectos matemáticos del problema (Steinbring, op. cit.). Aunque es posible que estos resultados se deban, en parte, a las especificidades del problema propuesto, apuntan a una epistemología de las matemáticas del aula ligada a aspectos socio-interactivos. Al menos en ciertas ocasiones, son las acciones del profesor y no la actividad matemática de los alumnos lo que garantiza la validez de su producción matemática. Queda por ver hasta qué punto esta disposición por parte de los alumnos y estas interacciones constituyen un obstáculo a una cultura de la argumentación en el aula acorde a principios del dominio matemático que se pretenden enseñar.

En sus interacciones con los grupos EB y EC, Ellen evita manifestarse sobre la validez de los modelos y las soluciones numéricas propuestas e indicar características esperadas en la solución correcta; en cambio promueve que los alumnos comparen sus modelos solicitando que decidan "cuál les parece más justo" o "cuál es el mejor" (Sección 5.3.2, Transcripciones 63-65). Con la excepción de Lyn (Tema 3), no observamos que ningún alumno relacione la validez de los modelos con su representatividad, más allá del control limitado que ejercen mediante las condiciones de validez que consideran (Tema 1). Consecuentemente, los alumnos no comparan los modelos que proponen en términos de su capacidad para representar aspectos empíricos de la situación.

Ellen solicita a los alumnos que consignen los distintos modelos y soluciones numéricas producidas en su trabajo escrito y que incluyan una reflexión acerca de cuál consideran "más justo". En sus trabajos, los tres grupos describen sus modelos de manera procedimental, consignando los cálculos que realizan para obtener la solución numérica (Sección 5.3.2, Figura 20; Anexo 3). Esto sugiere que evidenciar los cálculos hechos y los conocimientos matemáticos utilizados resulta relevante para los alumnos al reportar el trabajo realizado (Tema 5). En estos textos, la validez de las soluciones presentadas es indicada por el hecho de que los montos repartidos suman seis euros; cuestión que los alumnos destacan.

Para satisfacer la solicitud de Ellen, los alumnos manifiestan su preferencia por alguno de los modelos propuestos, sin embargo no producen argumentos adecuados para validarlos o falsarlosy se refieren a su validez de manera escueta. El grupo EB, por ejemplo, se refiere al modelo proporcional diciendo:

> Esta es una manera muy justa de repartir el dinero, ya que el total de dinero dado a cada jugador se corresponde con el total de veces que ha sacado su cara.

A pesar de los intentos de Lyn por falsarlo, los alumnos del grupo EC también prefieren el modelo proporcional:

> Creemos que la opción 1 es más justa porque no se ha acabado la partida de manera que las probabilidades de ganar no son las mismas y repartir equitativamente es más adecuado.

La gestión de Ellen, quien ha sugerido la posibilidad de considerar distintas soluciones al problema, ha propiciado la emergencia de modelos matemáticos en competencia. Sin embargo, los alumnos no argumentan en favor de la validez de uno u otro en relación con su representatividad, ni parecen considerar necesario rechazar alguno para finalmente optar por uno como la solución correcta. En cambio utilizan el término justicia, mencionado por Ellen recurrentemente, para calificar distintos modelos como más o menos justos, sin aportar argumentos adecuados para justificar este término.

Los alumnos no se implican de manera autónoma en procesos reflexivos con el fin de validar su producción matemática de modos esperados en la planeación (Sección 4.4.1.1). Lyn es la excepción observada; sin embargo las dificultades para exponer su punto de vista de modo inteligible, ocasionan que no se genere una discusión fructífera dentro del grupo (Tema 3). Estos resultados sugieren que las condiciones específicas en las cuales la incertidumbre puede ser explotada para propiciar la producción de argumentos adecuados y un acercamiento reflexivo al trabajo matemático, deben ser mejor comprendidas. En el Tema 6 abordamos esta cuestión a partir de la reflexión acerca de la gestión de cada profesor.

6.2.2. Tema 5 - Visibilidad de cuestiones epistemológicamente relevantes del trabajo matemático de los alumnos en la interacción con el profesor

Los Temas precedentes han puesto en evidencia la complejidad epistemológica de procesos de construcción de la validez de la producción matemática por parte de los alumnos mientras trabajan en grupo. Hemos mostrado que, en fases iniciales del proceso de resolución, se evocan referencias acerca del juego (Douek, 2007) que llevan a interpretaciones comunes sobre el problema, construcciones de modelos de la situación (Blum y Leiβ, 2007) y procedimientos abductivos para producir un modelo matemático que satisfaga condiciones de validez consideradas (Tema 1). Hemos mostrado que la fuerza de un determinado contrato didáctico lleva a los alumnos a preferir interpretaciones y soluciones que pueden ser reconocibles como matemáticamente valiosas (Tema 1). Hemos documentado la emergencia del modelo proporcional en todos los grupos y observado que los alumnos justifican la validez (necesaria) de este modelo de manera inductiva, aplicándolo a variaciones numéricas del problema (Tema 2). Hemos mostrado que las interacciones con el profesor son aprovechadas para inferir características de la solución correcta y que la necesidad de obtener soluciones que satisfagan al profesor orienta el trabajo matemático de los alumnos (Tema 4). En el aula de Ellen, los alumnos utilizan el término justicia, usado recurrentemente por la profesora, para calificar sus resultados e indicar su validez y, sin embargo, este término y su uso no se explican. Mediante el análisis de la entrevista con el grupo EA, hemos mostrado que estas alumnas subordinan la noción de justicia a las condiciones de validez consideradas; de modo que un resultado es calificado como justo si estas condiciones son satisfechas (Sección 5.2.1, Transcripción 14; Tema 2). En el aula de Dan, los alumnos del grupo DC aprovechan las intervenciones del profesor para validar el modelo y la solución probabilísticos; a partir de lo cual infieren deductivamente aspectos empíricos de la situación (Sección 5.3.1, Transcripción 51; Tema 4).

Estas son algunas cuestiones observadas en los distintos grupos que dan cuenta de la complejidad epistemológica del trabajo matemático de los alumnos. Aunque todo esto es relevante en la resolución del problema y podría ser motivo de reflexión sobre aspectos meta-matemáticos de la producción y validación de conocimientos en el aula, a lo largo de nuestro análisis hemos señalado que en las interacciones con el profesor los alumnos no las hacen visibles. En el aula de Ellen, los alumnos centran sus exposiciones en la descripción de procedimientos y en los resultados numéricos obtenidos. Así hacen evidentes los conocimientos matemáticos a los que recurren y su uso para obtener la solución numérica que proponen (para el grupo EA, Sección 5.2.1, Transcripciones 12, 16 y 18; para el grupo EC, Sección 5.2.3, Transcripciones 34 y 41). La explicación que Tim, del grupo EC, dirige a Ellen sobre el modelo proporcional ejemplifica estas actuaciones:

> Jo dic... jo he repartit els dotze punts amb els sis euros, i llavors un guanya tres coma cinc i l'altre dos coma cinc… I seria just.

En el aula de Dan, los alumnos suelen limitarse a proponer soluciones numéricas al profesor, esperando que dictamine sobre su validez y provea indicaciones para re-orientar el trabajo matemático (para el grupo DC, Sección 5.2.2, Transcripciones 26 y 31; para el grupo DA, Sección 5.3.1, Transcripción 47). La interacción entre Laura, del grupo DA, y el profesor ejemplifica estas actuaciones:

Laura	Dan? Quatre coma cinc i u coma cinc?
Dan	Jo no em conformaria. El que té set... vol més. Perquè està a punt de guanyar.

En ambas aulas, la única indicación explícita de la validez de los modelos y soluciones propuestas suele ser el hecho de que los montos repartidos suman seis euros; cuestión verbalizada por los alumnos o visible en cálculos escritos (Sección 5.2.1, Figuras 8-13; Sección 5.2.2, Figura 14). Otros elementos relevantes para la justificación de la validez de la producción matemática son sólo ocasionalmente esbozados y su reconocimiento es dejado al discernimiento del profesor. La explicación de Anna acerca de la solución proporcional ilustra esto (Sección 5.2.1, Transcripción 12):

> A ver, nosotras hemos pensado, si… Bueno, el jugador A ha hecho siete puntos y el B cinco puntos, ¿vale? Hemos pensado que si los dos hubieran hecho cuatro puntos, tres euros cada uno y el repartiment seria just. Vale. Entonces hemos hecho seis euros dividido entre ocho que son el total por cuantos puntos... ¿Sabes? O sea, un punto cuánto costaría, ocho puntos en total. Pero hemos dicho: no, no, no. Como han hecho doce puntos en total... y hemos multiplicado cada punto que han hecho por cero coma cinco que cuesta un punto y nos ha dado justo [en su hoja de trabajo: "jugador A: 3,5€ y jugador B: 2,5€" y "2,5 + 3,5 = 6"].

En esta explicación, las referencias mediante las cuales las alumnas interpretan la situación son omitidas. El uso de la palabra justicia no es explicado y el proceso de emergencia y falsación del primer modelo producido (basado en la razón 6:8) es apenas esbozado (Sección 5.2.1, Transcripciones 8-11). El razonamiento abductivo detrás del modelo proporcional, y con él el control de su representatividad, es sólo sugerido y su reconocimiento dejado al discernimiento de la profesora. La exposición de Anna está centrada en el uso de la proporcionalidad para obtener el resultado intermedio (0,5 céntimos por punto) y en la solución numérica que presenta. El único indicador de la validez del resultado es la frase "nos ha dado justo", que se refiere al hecho de que los montos repartidos suman seis euros. El uso de la proporcionalidad y la solución numérica producida son destacados por la alumna en su explicación y las acciones que apoyaron la construcción de la validez del modelo proporcional en el trabajo en grupo son dejadas de lado. Parece difícil que la profesora pueda inferir estas acciones a partir de los elementos de la exposición de Anna y, por lo tanto, los fundamentos de la validez de la solución que propone.

Estos resultados sugieren que el interés principal de los alumnos cuando comunican su trabajo al profesor es proponer una solución numérica y poner en evidencia el uso de conocimientos matemáticos. El hecho de que acciones durante el trabajo en grupo para justificar la validez de la solución no sean reportadas al profesor, sugiere que el proceso de validación no es una cuestión central para los alumnos en la comunicación de su producción matemática. La tarea de decidir acerca de la validez de la solución es dejada en manos del profesor, quien, sin embargo, no cuenta con elementos suficientes para considerar el trabajo de los grupos. La actuación de los alumnos en la interacción con el profesor parece quedar limitada a la identificación de conocimientos matemáticos adecuados y a su correcta ejecución para producir una solución numérica. La tarea de decidir sobre la validez de esta solución está en manos del profesor.

Esta interpretación de las acciones de los alumnos concuerda con el análisis de la entrevista con el grupo EA (Sección 5.2.1, Transcripciones 21 y 22). Las alumnas de este grupo relacionan su trabajo en el aula más con el uso de conocimientos matemáticos compartidos que con la validación de conocimientos en cuya construcción participan. Sus respuestas indican que los méritos de los alumnos se relacionan con el uso correcto de técnicas y conocimientos matemáticos que les son enseñados y, en cambio, es mérito de la profesora explicar y validar de manera convincente los conocimientos que introduce. La validez de la producción matemática de los alumnos, reducida a la aplicación de conocimientos, se fundamenta en la validez de los conocimientos matemáticos empleados, cuya validez garantiza la acción de la profesora. El mérito de los alumnos es identificar conocimientos adecuados a problemas y situaciones planteadas y utilizarlos con dominio. Este es el posicionamiento epistémico que sugieren las acciones de Tim y Ely, discutidas en el Tema 3, y que observamos en la mayoría de los alumnos.

Estas expectativas de los alumnos acerca de su desempeño, en la base de su posicionamiento epistémico, son una posible explicación acerca de por qué las acciones de los alumnos se dirigen a hacer visible el uso que de conocimientos matemáticos y sus resultados numéricos cuando interactúan con el profesor, y en cambio omiten elementos que justifican la validez de su producción matemática. Será el profesor, que conoce la respuesta al problema planteado y es la autoridad matemática del aula, quien determine si la solución propuesta es válida. Observamos que el modo en que los alumnos entienden su participación en la construcción y validación del conocimiento matemático en el aula (dimensión epistémica de su comportamiento racional) influye sus decisiones acerca de las acciones a emprender (dimensión teleológica) y, finalmente, indica aquello que debe ser comunicado al profesor (dimensión comunicativa).

Estos resultados sugieren que los alumnos no se perciben a sí mismos como capaces de decidir reflexiva y autónomamente acerca de la validez de su producción matemática y que tienen, en cambio, una percepción reproductiva de su actividad en el aula. En la entrevista con el grupo EB, John plantea esta cuestión. Al preguntarle cómo pueden hacer los alumnos para estar seguros, por sí mismos, de que lo que hacen en clase de matemáticas es válido, el alumno responde:

> No podemos saberlo si no tenemos el resultado. Si a ti no te han dicho que dos más dos son cuatro, nunca sabrás que dos más dos son cuatro. ¿Sabes? Si nunca te lo han dicho, tu irás por el mundo diciendo que dos más dos son cuatro, porque tú has investigado, ¿sabes? Pero si nunca te lo dicen tú nunca estarás seguro.

La respuesta de John no sólo indica que la validación de la producción matemática de los alumnos es responsabilidad del profesor sino, además, que ellos no tienen recursos para validar su trabajo matemático de manera autónoma; es necesaria una autoridad competente. Aprender matemáticas parece más el resultado del ejercicio prescriptivo de una autoridad en el tema que el resultado de la aprehensión intelectual de conocimientos construidos colectiva y reflexivamente. El alumno no reconoce la posibilidad de que el aprendizaje de las matemáticas posibilite que los alumnos participen en la construcción y validación de nuevos conocimientos matemáticos. Desde esta perspectiva, parece natural que los alumnos no se esfuercen por justificar la validez de su producción matemática y, en su lugar, traten de poner en evidencia los conocimientos utilizados y los resultados numéricos obtenidos; elementos a partir de los cuales el profesor decidirá sobre la validez. La omisión de elementos epistemológicamente relevantes del trabajo en grupo, cuando este es explicado al profesor, parece estar ligada a la cultura matemática del aula.

Estos resultados apoyan los obtenidos por Knuth, Choppin y Bieda (2009), quienes observan que la mayoría de un grupo de cuatrocientos alumnos de secundaria, no se ven a sí mismos capaces de decidir sobre la validez de su producción matemática; la cual supeditan al profesor o al libro de texto. Coincidimos con estos autores en que esta percepción se debe en gran medida a que los alumnos no tienen habitualmente experiencias escolares que les permitan participar en procesos de validación, ni experiencias dirigidas al aprendizaje de conocimientos meta-matemáticos necesarios para entender la relación entre razonamiento, argumentación y validez en el ámbito de la matemática escolar.

Dreyfus (1999) se pregunta con qué criterio pueden los profesores juzgar la producción matemática de los alumnos y la aceptabilidad de sus argumentos, y qué tan razonable es pretender que lo hagan en tiempo real en el aula. Nuestros resultados sugieren la relevancia de propiciar una cultura matemática del aula en la que la interacción de los alumnos con el profesor no se limite a la ejecución de técnicas conocidas y a la exposición de resultados numéricos. Una cultura según la cual evidenciar razonamientos implicados en la construcción de conocimientos y reflexionar acerca de estos razonamientos sea habitual en el trabajo de los alumnos y en la interacción con el profesor. Una cultura donde la obtención de la respuesta correcta no sea el principal (o el único) objetivo del trabajo matemático. Nuestros resultados muestran la complejidad epistemológica del trabajo en grupo; sin embargo resulta difícil pretender que el profesor evalúe la producción matemática de sus alumnos si aspectos relevantes de esta producción no se hacen visibles en la interacción.

La conformación de tal cultura matemática conlleva una compleja transición para los alumnos, de una visión computacional del conocimiento matemático a otra visión que lo concibe como un campo creativo, en el que una cuestión esencial es aprender meta-conocimientos necesarios para participar en la validación de conocimientos matemáticos construidos colectivamente. Coincidimos con Dreyfus (op. cit.) en que, como parte del desarrollo de tal cultura, los alumnos necesitan desarrollar nuevas y más sofisticadas formas de conocimiento. Futuras investigaciones deberán encargarse de explicar cómo esta transición puede ser facilitada en el aula a partir de intervenciones didácticas diseñadas a tal efecto.

6.3. Objetivo 3

En esta sección presentamos un Tema mediante el cual caracterizamos la gestión de procesos de construcción de la validez de la producción matemática a cargo de los dos profesores participantes. Así conseguimos el tercer objetivo de nuestro estudio.

6.3.1. Tema 6 - La gestión del profesor como condicionante de la producción matemática de los alumnos

En el desarrollo de los Temas anteriores hemos puesto en evidencia la relevancia de la gestión realizada por los profesores en el trabajo matemático de los alumnos y, en particular, en procesos de construcción de la validez de la producción matemática de los distintos grupos. Hemos visto que Dan y Ellen utilizan distintas estrategias comunicativas en sus interacciones de clase; proveen a los grupos con distinta información acerca del problema y su resolución, y realizan indicaciones distintas para guiar el trabajo matemático. Una diferencia importante entre los trabajos realizados por los alumnos en ambas aulas es que, finalmente, los grupos del aula de Dan presentaron la solución probabilística como la única solución al problema, mientras que los grupos del aula de Ellen presentaron distintas soluciones, entre las que no cuenta la probabilística.

En este Tema caracterizamos la gestión realizada por cada profesor para poner en evidencia cómo es que contribuyen a la producción de las soluciones de los alumnos. En particular, analizamos la relación entre la gestión del profesor y la interpretación, por parte de los alumnos, de la unicidad y validez de las soluciones propuestas.

En el Tema 1 mostramos que en sus introducciones, ambos profesores sugieren la complejidad matemática del problema. Dan, por ejemplo, sugiere a los alumnos "no dejarse llevar por la cuestión fácil" y "aprovechar todos los recursos disponibles" (Sección 5.3.1, Transcripción 42). Ellen destaca la relevancia histórica del problema y que está en el origen de "una rama de las matemáticas muy importante" (Sección 5.3.2, Transcripción 54). Por otro lado, ambos profesores insisten en la necesidad de que los alumnos justifiquen sus respuestas. Estas intervenciones refuerzan una cláusula común del contrato didáctico que indica que, en el aula de matemáticas, los problemas se resuelven mediante el uso de conocimientos matemáticos (D'Amore, 2008). De este modo, las expectativas de los alumnos en relación con la complejidad matemática de la solución y con su desempeño conforman la condición de validez que enunciamos como 'la respuesta debe ser matemáticamente valiosa'. Esta condición de validez lleva a los alumnos a preferir interpretaciones de la situación que consienten un tratamiento matemático del problema y a descartar soluciones que resultan matemáticamente irrelevantes, incluso considerándolas adecuadas si se hallaran en tal situación (e.g., devolver a cada jugador su parte de la apuesta) (Sección 5.1, Transcripciones 2 y 3, Figuras 4 y 5). Vemos así que el contrato didáctico, reforzado por acciones de los profesores, orienta el trabajo matemático de los alumnos y proporciona elementos para decidir acerca de la validez de su producción matemática.

En el Tema 2 hemos visto que ambos profesores sugieren a sus alumnos considerar variaciones numéricas del problema. Dan sugiere considerar situaciones más fáciles (en el sentido de que los números implicados sean menores) como estrategia para construir un modelo adecuado a la situación planteada en el enunciado. Así, Dan pretende promover la reflexión de sus alumnos sobre las relaciones entre elementos empíricos de la situación. Ellen, por su parte, relaciona la validez de los modelos propuestos con la exploración de variaciones numéricas del problema. La profesora sugiere una estrategia para falsar el modelo proporcional con base en la verificación de su inadecuación en variaciones numéricas del problema. En ambas aulas, sin embargo, los alumnos se limitan a verificar las condiciones de validez consideradas en variaciones numéricas del problema, a partir de lo cual refuerzan inductivamente la validez de sus modelos matemáticos. Estos resultados indican que las intervenciones del profesor no siempre son aprovechadas por los alumnos de la manera esperada. Por otro lado, en coincidencia con Brown (2014), también indican que los alumnos tienen dificultades para mantener una posición escéptica en relación con su producción matemática cuando observan elementos que justifican su validez; aunque estos elementos no sean suficientes para garantizarla.

En el Tema 4 mostramos que Dan se refiere habitualmente de manera evidente a la validez de las soluciones propuestas por sus alumnos mediante frases como "el jugador que tiene más partidas ganadas no se conformará" o "si yo fuese el jugador que más partidas ha ganado, no me conformaría". Estas intervenciones permiten a los alumnos falsar los modelos mediante los cuales tales soluciones fueron construidas con base en la autoridad matemática del profesor. Mediante nuestro análisis hemos mostrado que estas indicaciones de Dan también sugieren que la solución al problema es única: la que conformará a ambos jugadores (y por lo tanto al profesor) (Sección, Transcripciones 43, 47 y 48). Dan complementa estas intervenciones con otras en las que indica elementos específicos de la solución correcta (Transcripciones 44, 45 y 49; Tema 4), reforzando la percepción de la unicidad de la solución.

Los tres grupos observados aprovecharon las intervenciones de Dan para falsar distintos modelos matemáticos y para inferir características específicas de la solución correcta, a partir de las que construyeron el modelo probabilístico. A partir de las intervenciones del profesor, los tres grupos propusieron la solución probabilística como la solución al problema. Sin embargo, las dudas manifestadas por Jay, del grupo DC, acerca de esta solución ponen en evidencia que su validez se fundamenta en las preferencias del profesor y no en la reflexión sobre su representatividad. Este grupo había considerado otro modelo matemático: repartir la apuesta proporcionablemente a los posibles marcadores finales favorables a cada jugador. Jay presenta sus dudas a su compañera diciendo (Sección 5.3.1, Transcripción 51):

> Jo no entenc per què no pot ser això també. Això perquè ho diu el Dan, però...

Aunque la comparación de ambas soluciones en relación con su representatividad podría posibilitar la emergencia y reflexión acerca de la noción de equiprobabilidad, los alumnos no se implican en la comparación y discusión sistemáticas de ambos modelos ni plantean esta discusión al profesor. Tampoco en los otros dos grupos los alumnos comparan el modelo probabilístico con otros modelos que descartaron durante el proceso de resolución. De este modo, la oportunidad de reflexionar acerca de nociones básicas de la teoría de probabilidades a partir de la discusión de la representatividad de distintos modelos, no resulta aprovechada. Por otro lado, el hecho de que los alumnos no hagan visibles cuestiones epistemológicamente relevantes de su producción matemática, impide que el profesor logre detectar y aprovechar este tipo de situaciones (Tema 5). Estos resultados ponen de relieve la importancia que tiene en el trabajo del aula construir soluciones que satisfagan al profesor y, así, la relevancia de su autoridad matemática en procesos de validación. Producir la respuesta correcta es una parte fundamental del trabajo de los alumnos, en cambio la reflexión sobre aspectos meta-matemáticos del proceso de resolución queda, al menos en ciertas ocasiones, en segundo plano.

En el Tema 4, mostramos que algunos alumnos del aula de Dan infieren relaciones empíricas de la situación a partir de la solución validada por el profesor, invirtiendo así el ciclo de modelado (Blum y Leiß, 2007). Aunque estos alumnos infieren correctamente relaciones entre elementos empíricos de la situación, sus acciones llevan a preguntar hasta qué punto comprenden las bases de la validez del modelo probabilístico y hasta qué punto actúan por deferencia a la autoridad matemática del profesor. Nuestros resultados evidencian una relación compleja entre las intervenciones del profesor, su interpretación por parte de los alumnos, la reflexión acerca de la situación y la construcción de la validez de la producción matemática. No pretendemos decir que el modelado *ex post facto* observado entre los alumnos es, *per se*, inadecuado. Sin embargo, debemos preguntarnos si la deferencia a la autoridad matemática del profesor en procesos de validación puede constituir un obstáculo al aprendizaje de conocimientos meta-matemáticos si se convierte en una manera habitual de abordar problemas en el aula. Consideramos, como Knuth, Choppin y Bieda (2009), que experiencias en las que los alumnos se impliquen en la validación de su producción matemática son esenciales para que lleguen a entender la relación entre validez y argumentación en el ámbito de la matemática escolar.

Aunque las acciones de Dan sugieren la unicidad de la solución, no es evidente hasta qué punto son la causa de que los grupos presenten una única respuesta como correcta. Podría ser que las condiciones mismas del problema sugieran que sólo una respuesta es aceptable y que esto no haya quedado en evidencia en sus conversaciones o que esta evidencia no haya emergido en nuestro análisis. Lo ocurrido en el aula de Ellen arroja luz en este sentido.

En el Tema 4 hemos mostrado que, por consigna de la planeación (Sección 4.4.1.1), Ellen evita manifestarse en relación con la validez de las soluciones de sus alumnos y promueve la emergencia de distintos modelos matemáticos y su comparación. Para ello se refiere a distintas soluciones como “posibles criterios” o “posibles soluciones” (Sección 5.3.2, Transcripción 57) y utiliza frases como “ustedes tienen que intentar distintas posibilidades y quedarse con la que les parezca más justa” (Sección 5.3.2, Transcripción 58). Este uso del término justicia, recurrente en las intervenciones de la profesora, sugiere distintos grados de justicia (una solución puede ser más o menos justa que otra); de modo que su uso dicotómico (i.e., una solución es justa o no lo es) queda excluido. El uso de este término por la profesora sugiere que no hay una única solución correcta (calificable como justa) y distinguible del resto de soluciones (calificables como injustas). Así, las intervenciones de Ellen sugieren que distintas soluciones al problema son posibles.

Los tres grupos observados en el aula de Ellen producen dos soluciones numéricas basadas en distintos modelos matemáticos. Sin embargo, el hecho de contar con soluciones distintas no lleva a ningún grupo a la comparación sistemática y autónoma de las distintas soluciones a fin de decidir sobre su validez (Tema 4). Sólo por solicitud de la profesora, los alumnos hacen consideraciones al respecto en su trabajo escrito (Sección 5.3.2, Transcripciones 63, 64 y 65). Ahí se refieren a la validez de los modelos mediante frases como "esta es una manera muy justa de repartir el dinero", "este método no es tan justo", "es más justo el segundo método" o "creemos que la opción 1 es más justa" (Sección 5.3.2, Figuras 17, 18, 19 y 20). Sin embargo no producen argumentos para justificar estos posicionamientos en relación con la representatividad de los modelos propuestos ni en sus textos discuten aspectos empíricos de la situación (Tema 4). Los alumnos consignan distintas soluciones como posibles y no presentan argumentos para falsar unas y justificar la validez de otras. La respuesta de Tim, del grupo EC, a la solicitud de Ellen de decidir cuál de sus soluciones "es mejor" ejemplifica esto (Sección 5.3.2, Transcripción 65):

> Tot són opcions. Són possibilitats. Totes poden ser bones o dolentes.

La respuesta de Tim sugiere que el alumno no reconoce criterios que le permitan decidir sobre la validez de las soluciones que proponen (en sentido dicotómico: válida o no-válida); distintos puntos de vista pueden fundamentar la preferencia por una u otra solución de manera convencional.

La comparación entre ambas aulas señala que la interpretación de los alumnos en relación con la unicidad de la respuesta está condicionada por la gestión realizada por el profesor respectivo. La estrategia comunicativa de Dan, que permite a los grupos desechar soluciones como no-válidas, inferir elementos de la solución correcta y finalmente construir el modelo probabilístico, indica la unicidad de la solución. En cambio, la estrategia comunicativa de Ellen, que propicia la emergencia de modelos matemáticos en competencia y su comparación, lleva a los alumnos a pensar que distintas soluciones pueden ser adecuadas y que la preferencia por una u otra es convencional. Estos resultados ponen de manifiesto la relevancia de la gestión realizada por los profesores en la construcción de la validez de la producción matemática de los alumnos.

La gestión realizada por Dan durante las dos sesiones resulta exitosa, en el sentido de lograr que los alumnos produzcan la solución probabilística. Sin embargo, sus intervenciones propician el uso de su autoridad matemática para la validación (en sentido positivo o negativo) de los modelos construidos, en detrimento del trabajo autónomo de los grupos en este sentido. Esto arroja dudas acerca de la comprensión lograda por los alumnos acerca del modelo probabilístico, su relación con la situación empírica y las bases de su validez. La gestión de Ellen, quien deja en manos de los alumnos la tarea de decidir sobre la validez de las soluciones propuestas, propicia la emergencia de distintos modelos matemáticos, sin que los alumnos lleguen a producir la solución probabilística. Por otro lado, sus alumnos no producen argumentos adecuados para decidir acerca de la validez de los distintos modelos en relación con su representatividad.

En línea con Steinbring (2005) y con lo dicho en el Tema 4, estos resultados evidencian la compleja relación entre la epistemología de las matemáticas del aula y aspectos sociales de la interacción entre los participantes. Las distintas gestiones de los profesores tienen consecuencias relevantes en la construcción de la validez de la producción matemática de los alumnos. Sin embargo, estas consecuencias no siempre están en línea con los objetivos didácticos (e.g., ninguno de los profesores logra que los alumnos fundamenten la validez de su producción matemática en la reflexión sobre la representatividad de los modelos). La disposición que demuestran los alumnos para operativizar las intervenciones de los profesores en relación con sus expectativas sobre la respuesta, así como la actitud deferente hacia la autoridad matemática del profesor, limitan la emergencia de argumentos relevantes acerca de la validez de los modelos construidos. La atención de los alumnos está puesta en la producción de una solución (o varias) que satisfaga al profesor; en este recae la tarea de validarla. Estos resultados muestran, en acuerdo con Holster (2006), que propiciar el trabajo autónomo de los alumnos no siempre produce los resultados esperados y que la gestión del profesor resulta clave en aulas donde se pretende generar un ambiente investigativo.

Por otro lado, el hecho de que los alumnos no hagan visibles aspectos epistemológicamente relevantes de su producción matemática cuando presentan su trabajo (Tema 5), dificulta al profesor evaluar esta producción e intervenir facilitando la reflexión sobre procesos de validación del conocimiento matemático. Se pierden así oportunidades para trabajar conocimientos meta-matemáticos implicados en estos procesos.

Estos resultados sugieren la necesidad de propiciar en el aula una cultura matemática en la cual la visibilización de procesos de construcción y validación de conocimientos matemáticos sea parte relevante del desempeño de los alumnos. Tal cultura podría facilitar una gestión del profesor que propicie la reflexión sobre el uso de distintos tipos de argumentos y de sus alcances en procesos de validación.

7. Conclusiones

En este capítulo discutimos cómo es que la consecución de los objetivos ha permitido acercarse a la cuestión de investigación propuesta: ¿cómo se construye la validez de la producción matemática cuando se resuelven problemas en aulas de matemáticas?

En la primera sección del capítulo, presentamos distintos aspectos relevantes que se desprenden de los resultados del estudio y que permiten acercarse a la cuestión de investigación a partir de distintos puntos de vista. Esta sección recoge los aportes de nuestro estudio a la investigación en el área, así como su discusión en relación con otras investigaciones presentadas en la revisión de la literatura (Capítulo 2) y en el marco teórico (Capítulo 3). Organizamos los distintos aspectos mediante títulos que pretenden aportar cohesión y guiar su lectura, remitiendo a los resultados obtenidos para indicar su base empírica. Así se pone de relieve la relevancia de los resultados obtenidos, además de los conocimientos generados por nuestra investigación.

En la segunda sección presentamos reflexiones acerca del diseño metodológico del estudio, sus debilidades y fortalezas; discutimos así cómo es que otras investigaciones pueden aprovechar el trabajo realizado para abordar la cuestión de investigación. En la tercera sección discutimos implicaciones didácticas que se desprenden de los resultados y de su discusión, haciendo hincapié en aspectos que pueden apoyar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Finalmente, en la cuarta sección, proponemos nuevas discusiones y perspectivas que pueden ser abordadas en futuras investigaciones como prospectivas de este estudio.

7.1. Acerca de la cuestión de investigación

La cultura matemática del aula y la construcción de la validez de la producción matemática

Los resultados de nuestra investigación, vistos de manera conjunta, permiten observar la complejidad epistemológica del aula de matemáticas y señalan aspectos epistemológicamente relevantes de la cultura matemática del aula. Hemos mostrado que en procesos de construcción de la validez de la producción matemática en el trabajo en grupo, los alumnos implican conocimientos matemáticos y referencias extra-matemáticas y que utilizan distintos tipos de argumento (deductivos, inductivos y abductivos) en sus conversaciones (Temas 1 y 2). Hemos mostrado también que aspectos sociales del contrato didáctico contribuyen a formar criterios empleados por los alumnos en procesos de validación (Tema 1). Por otro lado, nuestros resultados ponen en evidencia el papel del profesor como autoridad matemática y la importancia para los alumnos de producir soluciones en línea con las expectativas que perciben (Tema 4). Este panorama general muestra la complejidad epistemológica del trabajo en grupo de los alumnos y, en acuerdo con Steinbring (2005), la compleja relación entre la epistemología de las matemáticas del aula y aspectos sociales de la interacción entre los participantes.

Ahora bien, aunque en el trabajo en grupo de los alumnos observamos procesos de validación y falsación complejos en los que se presentan argumentos de distinto tipo, nuestros resultados muestran que estos procesos y sus características epistémicas no se hacen visibles cuando se presenta el trabajo al profesor (Tema 5). En estas interacciones los alumnos destacan resultados numéricos obtenidos y evidencian técnicas matemáticas utilizadas en su producción. En la comunicación del trabajo realizado, la presentación de la solución correcta resulta central y en cambio la construcción de la validez de la producción matemática y su discusión quedan en segundo plano; al profesor corresponde decidir sobre la validez de las soluciones propuestas. Nuestros resultados muestran que estas son las interacciones más frecuentes entre alumnos y profesor. El hecho de que aspectos epistemológicamente relevantes de la producción matemática no se hagan visibles dificulta la evaluación de la producción matemática por el profesor y no propicia la discusión de los conocimientos meta-matemáticos implicados en procesos de validación.

Nuestros resultados sugieren que los alumnos no se ven capaces de construir conocimientos matemáticos y de decidir de manera autónoma y reflexiva sobre su validez; ven su participación en el aula más bien como reproductiva: su actividad se relaciona con la aplicación de técnicas y conocimientos que les han enseñado (Tema 5). El mérito de los alumnos está en la selección de conocimientos matemáticos y en su uso correcto según las prescripciones del profesor; la discusión de los criterios empleados para decidir acerca de la validez de la producción matemática no es central en su actividad en el aula. En cambio, es mérito del profesor explicar y justificar adecuadamente los conocimientos que introduce. Nuestros resultados indican, en línea con los de Knuth, Choppin y Bieda (2009), que este posicionamiento epistémico (i.e., posicionamiento relativo a la construcción y validación de conocimientos matemáticos) es habitual entre los alumnos, es parte de la cultura matemática del aula y se fundamenta en los distintos papeles de alumnos y profesor en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Esta característica de la cultura matemática del aula es una posible explicación para la falta de visibilidad de aspectos epistemológicamente relevantes de la producción matemática de los alumnos en la interacción con el profesor. Si los alumnos conciben su trabajo en el aula de manera reproductiva, parece natural que no se esfuercen por justificar la validez de sus producciones ante el profesor, se limiten a exponerlos e indiquen técnicas y conocimientos utilizados. Su trabajo consiste en producir un resultado mediante el uso de conocimientos matemáticos establecidos y no mostrar por qué tales conocimientos son pertinentes para justificar la validez del resultado; será el profesor quien decida al respecto.

Los alumnos que demuestran este posicionamiento epistémico no perciben el problema propuesto como novedoso ya que lo asocian con otros que se resuelven aplicando conocimientos de proporcionalidad. Estos alumnos realizan un control limitado de la representatividad de los modelos que proponen y centran su trabajo en la interpretación de las indicaciones del profesor para producir una solución satisfactoria (Temas 1 y 4). Hemos documentado de manera excepcional un posicionamiento epistémico distinto en una alumna. Esto nos ha permitido obtener evidencia empírica de que la diversidad de posicionamientos epistémicos está en la base de la diversidad en las acciones emprendidas para afrontar el problema propuesto (i.e., la dimensión teleológica del comportamiento racional) (Tema 3). Esta alumna considera la validez de los modelos construido por el grupo en términos de su capacidad para representar adecuadamente aspectos empíricos de la situación. Esto la lleva a cuestionar la validez del modelo proporcional con base en su falta de representatividad y a intentar producir un nuevo modelo mediante la consideración de aspectos empíricos de la situación. A diferencia de sus compañeros, esta alumna concibe el problema como novedoso, se mantiene escéptica en relación con las soluciones que se proponen y reflexiona sobre la utilidad de sus conocimientos matemáticos para modelar la situación. Esto muestra que en un mismo contexto de resolución de una tarea en clase es posible observar posicionamientos epistémicos diversos entre los alumnos.

Aunque el posicionamiento epistémico de esta alumna propicia la discusión sobre la validez de los modelos construidos, tanto en conversaciones del grupo como en interacciones con la profesora, observamos las dificultades de los alumnos para explicar unos a otros las bases a partir de las que fundamentan o cuestionan la validez de los modelos que proponen y, por lo tanto, el propósito de sus acciones. También observamos las dificultades de la profesora para identificar los distintos posicionamientos epistémicos y promover una discusión fructífera al respecto. Esto indica que tanto alumnos como profesores no siempre cuentan con recursos necesarios para lidiar con la complejidad epistémica del conocimiento matemático producido en el aula y, en particular, con recursos comunicativos para hablar al respecto de manera explícita.

La autoridad matemática del profesor en la construcción de la validez

Nuestros resultados ponen en evidencia el papel fundamental del profesor en la construcción de la validez de la producción matemática del aula. En particular, hemos podido documentar cómo las intervenciones del profesor son aprovechadas por los alumnos para orientar su trabajo matemático.

En el aula en que la gestión del profesor resulta más directiva (Tema 6), los alumnos aprovechan sus intervenciones para validar (en sentido positivo o negativo) los modelos que proponen y para inferir características esperadas por el profesor en la solución correcta. El trabajo matemático de los alumnos se dirige entonces a producir modelos que permitan construir soluciones con estas características, sin tener en cuenta la representatividad de estos modelos más allá las condiciones de validez que consideran (Tema 1). Las intervenciones del profesor no son aprovechadas para reflexionar acerca de aspectos empíricos de la situación, a pesar de que este propone ocasionalmente de manera explícita estas reflexiones (Tema 4). En esta aula el ciclo de modelado matemático resulta en algunos casos invertido: los alumnos no construyen modelos matemáticos sobre la base de la reflexión acerca de aspectos empíricos de la situación, mediante un proceso de matematización; en cambio, aspectos empíricos de la situación son inferidos deductivamente del modelo matemático validado por el profesor. Aunque los alumnos de esta aula producen la solución probabilística e infieren correctamente relaciones entre elementos empíricos de la situación, la validez del modelo se fundamenta en las preferencias del profesor. Esto arroja dudas sobre la comprensión por parte de los alumnos de las bases de la validez del modelo probabilístico y apunta a la deferencia hacia la autoridad matemática del profesor. A pesar de que en algunos grupos esta cuestión emerge de manera explícita, no llega a ser planteada. La necesidad social de producir una solución que satisfaga las expectativas del profesor aparece como elemento central en el trabajo de los alumnos y en la construcción de la validez de la producción matemática. La cuestión clave acerca de por qué la solución validada por el profesor resulta más adecuada que otras soluciones no se plantea, a pesar de ser considerada por algunos grupos.

En la otra aula, la profesora evita manifestarse acerca de la validez de las soluciones propuestas e impulsa la emergencia de soluciones diversas. Nuestros resultados muestran que la gestión de la profesora sugiere la posibilidad de distintas soluciones adecuadas al problema y que, de manera acorde, los alumnos presentan distintos modelos matemáticos y soluciones numéricas. Los alumnos no producen argumentos en favor o en contra de la validez de sus modelos teniendo en cuenta su representatividad y, en línea con la gestión de la profesora, no consideran la necesidad de compararlos para validar uno y falsar los otros. Estos resultados permiten observar, comparando ambas aulas, que la gestión del profesor condiciona la interpretación de los alumnos acerca de la unicidad de la respuesta (Tema 6) y que, en general, su actividad matemática se orienta a producir soluciones que resulten satisfactorias para el profesor.

Lo dicho hasta aquí no sólo muestra que los alumnos actúan con deferencia hacia la autoridad matemática del profesor, además ilustra que demuestran disposición a interpretar sus intervenciones en relación con sus expectativas sobre la respuesta correcta y no en relación con aspectos matemáticos y meta-matemáticos del problema. Coincidimos con Steinbring (2005) en que esta disposición es frecuente porque permite a los alumnos satisfacer las expectativas que perciben de manera relativamente fácil, a la vez que permite al profesor considerar satisfechos sus objetivos de instrucción. Esto permite concluir que en el trabajo matemático del aula la satisfacción de las expectativas del profesor resulta central y, por lo tanto, su gestión tiene consecuencias en la construcción de la validez de la producción matemática. Sin embargo, estas consecuencias no siempre se corresponden con los objetivos didácticos; vemos que las interpretaciones en términos epistemológicamente relevantes de los alumnos sobre indicaciones del profesor no siempre se corresponden con los estándares de validación pretendidos. En ambas aulas, por ejemplo, ninguno de los profesores logra que los alumnos fundamenten la validez de su producción matemática en la reflexión sobre la representatividad de los modelos.

Reconocemos, como Boero (2011) y Steinbring (2005), la importancia del papel del profesor como agente cultural en el aula y la importancia de su mediación entre la cultura matemática y los conocimientos en construcción mediante la selección de producciones de los alumnos. También consideramos, como Sfard (2001) y Brown (2014), que las acciones del profesor y su autoridad matemática son fundamentales en procesos de aculturación, en los que este introduce aspectos de la cultura matemática en el aula. Nuestros resultados añaden que, en ocasiones, la deferencia a la autoridad matemática del profesor y la relevancia social de producir soluciones satisfactorias pueden estar detrás de la pérdida de oportunidades para tratar de manera explícita conocimientos meta-matemáticos relacionados con la justificación de la validez de la producción matemática. Resulta imprescindible entender en qué contextos la autoridad matemática del profesor propicia la introducción de elementos deseables desde el punto de vista de la construcción de la cultura matemática del aula y en qué otros resulta un obstáculo a la emergencia de conocimientos meta-matemáticos.

Lo dicho hasta aquí confirma la compleja relación entre la epistemología de las matemáticas del aula y aspectos sociales de la interacción; en particular respecto a la diferencia de papeles de profesores y alumnos. Nuestro estudio ayuda a entender cómo es que procesos de construcción de la validez de la producción matemática dependen de la gestión que realiza el profesor. Sin embargo, para entender mejor este fenómeno, son necesarios otros estudios que consideren esta relación en distintas circunstancias y que permitan entender cómo es que la gestión del profesor contribuye a conformar la cultura matemática y, en particular, la epistemología de las matemáticas del aula.

La producción y evaluación de argumentos en el aula de matemáticas

Coincidimos con el National Governors Association Center for Best Practices y el Council of Chief State School Officers (2010) en que uno de los objetivos fundamentales de la educación matemática es que los alumnos sean capaces de producir y evaluar argumentos, explicar por qué son o no son adecuados al contexto y solicitar aclaraciones pertinentes. Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2005) muestran que los matemáticos profesionales utilizan argumentos de distinto tipo (deductivo, inductivo, abductivo) en su trabajo matemático y que utilizan de modo adecuado calificadores modales (posiblemente, necesariamente, etc.) para evidenciar el estatus epistémico de las conclusiones de estos argumentos y, así, su nivel de certeza. Los resultados de estos autores indican que los matemáticos profesionales cuentan con conocimientos meta-matemáticos necesarios para producir y evaluar argumentos de acuerdo con principios del ámbito de las matemáticas y que indicar esta evaluación es una tarea relevante del proceso de construcción de conocimientos matemáticos. Si pretendemos que la educación matemática permita a los alumnos producir y evaluar argumentos de acuerdo con principios disciplinares adecuados al nivel escolar, conocimientos meta-matemáticos acordes deben ser objeto de enseñanza en el aula.

Nuestros resultados muestran que los alumnos proceden abductivamente para construir modelos matemáticos que representen aspectos empíricos de la situación (Tema 1). Estos procesos resultan problemáticos en al menos dos sentidos. Por un lado, el control que ejercen sobre la representatividad de estos modelos se limita a la verificación de un conjunto insuficiente de condiciones de validez. Los alumnos no parecen darse cuenta de la necesidad de producir datos empíricos que les permitan comprobar sistemáticamente la representatividad de los modelos para apoyar su validez falsable (Lakatos, 1978). Por otro lado, los alumnos no utilizan calificadores modales para indicar su certeza sobre los modelos producidos. Esto sugiere que no reconocen la falsabilidad de los modelos construidos abductivamente; es decir, su estatus epistémico.

Los resultados de nuestro estudio también muestran que los alumnos producen argumentos inductivos para justificar la validez de su producción matemática (Tema 2). Esto confirma resultados de otras investigaciones con alumnos de distintos niveles (Harel y Sowder, 1998; Healy y Hoyles, 2000; Knuth, Chopin y Bieda, 2009; Selden y Selden, 2003). En la mayoría de estas investigaciones se solicita a los alumnos producir demostraciones de conjeturas sobre contenidos matemáticos mediante frases como “muestra que...”, demuestra que....” o “prueba que...”, o decidir si un cierto texto constituye una demostración. En todas ellas se observa que los alumnos producen, presentan y aceptan argumentos inductivos como justificaciones matemáticas adecuadas. Nuestros resultados evidencian que también en situaciones de modelado matemático los alumnos de secundaria producen argumentos inductivos y que estos argumentos les proveen de certeza. Esto corrobora los resultados de Brown (2014), quien muestra que los alumnos tienen dificultades para mantener el escepticismo cuando cuentan con evidencias de la validez de sus resultados, aunque esta evidencia sea insuficiente. Es decir, los alumnos tienen dificultades para establecer el estatus epistémico de su producción matemática de manera adecuada a la evidencia con la que cuentan.

Una diferencia relevante entre las situaciones propuestas en aquellos estudios y la que nosotros planteamos es la relativa al estatus epistémico que se pretende para las conclusiones que se apoyan. En la demostración de una conjetura matemática se pretende mostrar su necesidad en el marco de una teoría de referencia, para lo cual se requiere un argumento deductivo, a partir del cual la conjetura pasa a ser un teorema dentro de la teoría. En cambio, en una situación de modelado matemático de un fenómeno empírico mediante un razonamiento abductivo, se pretende mostrar la validez falsable del modelo; es decir, que el modelo representa adecuadamente el fenómeno empírico en todas las instancias en las que es puesto a prueba. Aquí proceder inductivamente resulta adecuado. Desde el punto de vista experto se espera que el modelador proceda sistemáticamente, probando el modelo en distintas situaciones, buscando deliberadamente instancias en las que pueda ser falsado. Este proceso sistemático apoya la validez falsable del modelo propuesto. Esta es la manera en que se construyen y justifican teorías científicas en el ámbito de las ciencias experimentales. Sin embargo, nuestros resultados indican que los alumnos no proceden de este modo; es sólo por solicitud del profesor que consideran variaciones numéricas del problema y utilizan los resultados que obtienen para validar inductivamente los modelos que proponen. Los alumnos demuestran certeza a partir de su aplicación en unas pocas variaciones numéricas del problema.

Lo dicho hasta aquí muestra que los alumnos, a diferencia de los matemáticos profesionales, no cuentan con conocimientos meta-matemáticos necesarios para el uso adecuado (desde el punto de vista de la matemática escolar) de argumentos abductivos e inductivos en el contexto del problema propuesto; es decir, para determinar los alcances de estos argumentos en relación con la validez de los modelos matemáticos que apoyan. Es posible que estos resultados estén relacionados con las especificidades del problema propuesto y que con otro problema sea posible observar otros usos de argumentos. Nuevas investigaciones centradas en procesos de validación en situaciones de modelado matemático, tal vez que impliquen conocimientos de otros dominios de las matemáticas, podrán confirmar o refutar nuestros resultados. Por otro lado, más investigaciones son necesarias para evaluar si este tipo de situaciones pueden ser aprovechadas para incluir aspectos meta-matemáticos de la construcción del conocimiento en el aula como objeto de aprendizaje.

7.2. Acerca del diseño metodológico

La reflexión retrospectiva sobre los métodos empleados en el trabajo de investigación resulta relevante para indicar fortalezas y debilidades del diseño metodológico y, por lo tanto, constituye también un importante aporte al área de estudio.

Un primer aspecto a destacar es la dificultad inherente a la investigación de procesos de construcción de la validez de la producción matemática y, en general, de aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas. Como muestran nuestros resultados y hemos destacado en la sección anterior, tanto alumnos como profesor no suelen referirse de manera explícita a la validez de su producción matemática ni discuten deliberadamente los estándares que utilizan para su justificación. Es decir, ni la validez ni su construcción suelen ser temas de conversación entre los participantes. Esto significa que sus posicionamientos al respecto no son simplemente accesibles a través de lo que dicen; resulta necesario interpretar sus argumentos y acciones para inferir las bases epistémicas sobre las que la validez de la producción matemática es construida. Coincidimos con Toulmin (1972) en que las decisiones prácticas de las personas revelan sus concepciones acerca de su situación epistémica, las cuales se vuelven accesibles a través del análisis pragmático de sus acciones. En nuestra investigación, el punto de vista teórico asumido, el cual fundamenta el análisis realizado, permitió interpretar en términos epistemológicamente significativos las acciones de aula.

Para dar plausibilidad a estas interpretaciones, resultó esencial la realización de dos entrevistas con grupos de alumnos. Estas permitieron corroborar o rechazar interpretaciones durante el análisis de datos de aula. En este sentido, destacamos la relevancia del uso de videoclips en las entrevistas. El visionado de videoclips con los alumnos permitió referirse directamente a acciones de alumnos y del profesor, a la vez que tener un elemento común y contrastable mediante el cual consensuar diferencias interpretativas durante la entrevista. Por otro lado, las entrevistas fueron importantes para indagar ulteriormente aspectos relevantes que emergieron durante el análisis de datos de aula. Al respecto, cabe mencionar que la semana dedicada al análisis de datos de aula, a partir de la cual se diseñó la entrevista, resultó un margen temporal insuficiente. Algunos aspectos observados en el aula que resultaron centrales, emergieron sólo posteriormente en el análisis, por lo que no fueron considerados en el diseño de la entrevista. Por ejemplo, la relevancia del posicionamiento epistémico excepcional de Lyn, el eje vertebrador del Tema 3, no fue apreciada durante la semana de análisis y planeación; de ahí que el grupo de esta alumna no fuera entrevistado. Seguramente tal entrevista hubiera permitido entendimientos más profundos sobre los posicionamientos epistémicos de los alumnos, sus bases y sus implicaciones en el trabajo matemático. No podemos afirmar, sin embargo, que dedicar un período mayor al diseño de la entrevista hubiera sido más adecuado, dado el riesgo de que la experiencia resultara lejana para los alumnos. En cambio, la sensibilidad del investigador en relación con el tema investigado y la familiaridad con el análisis de datos de aula desde la perspectiva asumida, son elementos importantes para enfrentar el diseño de entrevistas en tiempos breves. De modo que consideramos la experiencia ganada en esta investigación como una base relevante para encarar nuevas investigaciones en este ámbito que impliquen el diseño de entrevistas.

La decisión de recoger nuevos datos en una segunda aula se fundamentó en la necesidad de entender mejor cuáles eran las consecuencias de la gestión del profesor en procesos de construcción de la validez de la producción matemática. Esta fue la única cuestión considerada para realizar un muestreo teórico (Glaser y Strauss, 1965). Aunque hubiera sido posible considerar otras cuestiones relevantes observadas en el análisis para recoger nuevos datos, se decidió limitar el estudio a los datos obtenidos en estas dos aulas. Esta decisión resultó adecuada, pues permitió un equilibrio entre el volumen de datos a analizar, la profundidad del análisis realizado y la relevancia de los resultados obtenidos. Futuras investigaciones podrán dar continuidad a esta tomando en cuenta otras cuestiones relevantes observadas, u otras no consideradas, como criterios de muestreo teórico. Por ejemplo, los resultados de Knipping, Rott y Reid (en prensa), quienes utilizan una variante del mismo problema en dos institutos de educación secundaria alemanes, sugieren que la condición socio-económica de los alumnos puede estar detrás de diferencias observadas en su acercamiento al problema. Estamos de acuerdo con estos autores en que para entender la complejidad de procesos de validación en el aula y, en general, del desarrollo de competencias argumentativas, son necesarios estudios que aborden la cuestión desde diversos puntos de vista y niveles de análisis.

Finalmente, destacamos la utilidad que tuvo interpretar procesos de construcción de la validez de la producción matemática en términos de emergencia y satisfacción de condiciones de validez. Esto permitió establecer vínculos entre acciones de los alumnos y aspectos diversos del contexto. De este modo quedaron en evidencia los papeles jugados por referencias extra-matemáticas, intra-matemáticas y aspectos sociales del contrato didáctico en procesos de validación de la producción matemática. El análisis de la actividad matemática del aula en términos de condiciones de validez ha sido relevante para entender la diversidad de posicionamientos epistémicos entre los alumnos y, así, para entender mejor posibles obstáculos a la comunicación efectiva entre participantes. Ha permitido también entender mejor como es que la cultura matemática del aula, que otorga papeles distintos a profesores y alumnos, condiciona decisiones de los alumnos sobre lo que resulta relevante comunicar en la interacción con el profesor. Una visión del trabajo matemático del aula estructurada a partir del análisis de la emergencia y satisfacción de condiciones de validez, resulta de utilidad en investigaciones que pretendan indagar la epistemología de las matemáticas del aula, su conformación y su relación con aspectos sociales de la interacción.

7.3. Implicaciones didácticas

Para promover en el aula una cultura matemática en la que los alumnos participen en la construcción y validación de conocimientos matemáticos, nuestro estudio sugiere la necesidad de que justificar la validez de la producción matemática sea una actividad relevante del trabajo de los alumnos. Es decir, que sea reconocida socialmente como una actividad importante y constituyente de este trabajo.

De nuestros resultados se desprende que es importante que los procesos de validación se hagan visibles en la interacción con el profesor por al menos dos motivos: por un lado, para que este cuente con elementos para evaluar la producción matemática de sus alumnos y, por otro, para que conocimientos meta-matemáticos relativos a la validez de la producción matemática puedan emerger como objetos de aprendizaje. En procesos de construcción de la validez de la producción matemática, estos conocimientos meta-matemáticos deben permitir a los alumnos explicar su posicionamiento epistémico y entender los de otros, condición necesaria para dar cuenta de manera reflexiva de acciones propias y fundamentar la crítica de acciones ajenas. Estos conocimientos meta-matemáticos deben permitir a los alumnos evaluar los alcances de sus argumentos y, así, establecer y evidenciar de manera adecuada su nivel de certeza sobre las conclusiones que pretenden apoyar. La construcción de conocimientos meta-matemáticos mediante actividades adecuadas a la madurez matemática de los alumnos, debe ser un objetivo central de la educación matemática y la planificación de estas actividades una parte central del trabajo del profesor.

Conviene promover una cultura matemática del aula en la cual los alumnos se vean capaces de validar los conocimientos matemáticos que producen y donde esto no sea una actividad exclusiva del profesor. Coincidimos con Knuth, Choppin y Bieda (2009) en que para lograr esto es necesario que los alumnos participen en actividades significativas en las que tengan oportunidad de implicarse en procesos de validación de su producción matemática. Intervenciones didácticas diseñadas con este fin deben ser más habituales en las aulas de matemáticas. Coincidimos con Zaslavsky (2005) en que situaciones en las que se genere incertidumbre alrededor de la validez de la producción matemática pueden ser útiles en este sentido; sin embargo, nuestros resultados muestran, en acuerdo con Brown (2014), que no siempre es fácil generar situaciones de incertidumbre que puedan ser aprovechadas de manera productiva para discutir la validez de la producción matemática. Más investigación es necesaria para determinar contextos en los que situaciones de incertidumbre pueden ser aprovechadas para iniciar discusiones acerca de estándares de validación en el ámbito de las matemáticas.

Sugerimos que la tarea de justificar públicamente la validez de la producción matemática debe ser parte del contrato didáctico del aula. Es decir, los participantes deben compartir la expectativa de justificar la validez de la producción matemática. Coincidimos con Dreyfus (1999) en que esto implica una transición importante para los alumnos, de una visión computacional de las matemáticas a otra más reflexiva. La pregunta central no debe ser '¿cuál es el resultado?' sino '¿por qué tal resultado es válido?' Tal contrato didáctico permitiría abordar de manera explícita y deliberada aspectos epistemológicamente relevantes del conocimiento matemático de manera acorde al nivel escolar. Futuras investigaciones deberán explicar cómo es que esta transición puede ser promovida mediante intervenciones específicas en el aula y qué tipo de acciones del profesor pueden facilitarla. También cabe investigar qué criterios debe aplicar el profesor para juzgar los argumentos de sus alumnos según el nivel escolar y en qué principios pedagógicos y epistemológicos deben estar basados estos criterios y su desarrollo a lo largo de los distintos niveles.

La promoción de una cultura matemática como la que hemos descrito debe propiciar un acercamiento más reflexivo al proceso de modelado matemático. Conviene que los alumnos entiendan y aprecien la utilidad del conocimiento matemático para el entendimiento y modelado de fenómenos empíricos. Es decir, que aprecien el papel de las matemáticas en la construcción de teorías científicas y, en general, en la descripción del entorno. Nuestros resultados sugieren que el posicionamiento epistémico con el que los alumnos se acercan a tareas de modelado matemático puede resultar un obstáculo en este sentido; por lo que el desarrollo de una cultura matemática que promueva un ambiente investigativo en el aula resulta de gran importancia. El entendimiento del mundo a partir del conocimiento matemático no debe reducirse a su descripción a partir de teorías matemáticas validadas por la autoridad del profesor. Los alumnos deben participar del ejercicio de aprehender reflexivamente los fenómenos para describirlos matemáticamente. Si esperamos que las matemáticas sean un instrumento que permita a las personas reflexionar e incidir en su realidad, este ejercicio resulta necesario. La acción de las personas no se debe limitar al uso prescriptivo de técnicas y conocimientos, las bases de su validez deben ser comprendidas si esperamos que puedan actuar de manera crítica y reflexiva, tomando decisiones conscientes de manera autónoma.

En síntesis, estamos convencidos de que la formación de conocimientos meta-matemáticos necesarios para la producción y evaluación de argumentos según principios de la matemática escolar debe ser un objetivo central de la educación matemática. Estos conocimientos no sólo deben permitir a los alumnos producir y evaluar argumentos de manera adecuada a su madurez matemática, deben también permitirles entender la importancia epistemológica y social de participar en la validación de conocimientos construidos colectivamente en el aula como parte del trabajo matemático. Tales objetivos deben ir de la mano con la conformación de una cultura matemática del aula en la cual los alumnos sean partícipes de la construcción y validación de conocimientos matemáticos. Mientras la tarea de validar el conocimiento producido en el aula esté exclusivamente (o casi) en manos del profesor, tales objetivos difícilmente pueden ser más que buenas intenciones.

7.4. Prospectiva del estudio

Nuestros resultados contribuyen a entender cómo se construye la validez de la producción matemática cuando se resuelven problemas en el aula. Estos resultados fueron obtenidos en el contexto de la resolución de un problema de modelado matemático en el marco de la introducción de nociones sobre teoría de la probabilidad. De modo que una primera cuestión que futuras investigaciones deben considerar es si estos resultados son reproducibles en el marco del desarrollo de otros contenidos matemáticos y de otras actividades de aula. No podemos descartar que las especificidades del problema y los contenidos matemáticos seleccionados estén detrás de cuestiones aquí observadas. Futuras investigaciones que se centren en procesos de construcción de la validez en el aula de matemáticas deberán confirmar o refutar los actuales resultados.

Consideramos dos líneas principales de investigación. Por un lado, aunque nuestros resultados indican aspectos relevantes de la cultura matemática del aula y sus consecuencias en procesos de construcción de la validez de la producción matemática, no permiten entender cómo es que esa cultura se constituye en el largo plazo. Es decir, cómo es que los participantes construyen de manera interactiva esta cultura a través de sus acciones y de la negociación de significados matemáticos. En particular cómo es que la epistemología de las matemáticas del aula se conforma y se relaciona con aspectos sociales del contrato didáctico. Investigaciones que expliquen estos procesos son de gran importancia para la planeación sistemática de intervenciones didácticas dirigidas a propiciar la construcción de una cultura matemática del aula acorde a los principios disciplinares que se pretenden según la madurez matemática de los alumnos. Consideramos que esta es una línea de investigación esencial y una cuestión abierta en el ámbito de la educación matemática. Nuestro estudio sirve de base para el diseño de futuros estudios que pretendan investigar cómo es que se conforma a largo plazo la epistemología de las matemáticas del aula y, en general, la cultura matemática del aula.

Por otro lado, nuestros resultados ponen de relieve el papel central del profesor en procesos de construcción de la validez de la producción matemática, sin que el conocimiento del profesor haya sido considerado. Coincidimos con Dreyfus (1999) en que evaluar la aceptabilidad matemática de los argumentos de alumnos y tomar decisiones al respecto en tiempo real es una tarea demandante para el profesor. Tal actividad requiere conocimientos meta-matemáticos específicos y sofisticados que deben ser desarrollados en el marco de cursos formativos para futuros profesores. Aunque muchas investigaciones se refieren al conocimiento matemático del profesor y a su uso en procesos de enseñanza y aprendizaje, menos se centran en los conocimientos meta-matemáticos y, en particular, en los conocimientos meta-matemáticos necesarios para la enseñanza. Investigaciones que se centren en el profesor y su conocimiento meta-matemático son fundamentales para entender mejor su papel en procesos de construcción de la validez de la producción matemática en el aula y para diseñar estrategias de intervención acordes a objetivos didácticos relacionados con la formación de conocimientos meta-matemáticos entre los alumnos. Tales investigaciones deberán aportar resultados relevantes para el diseño de planes de estudio y actividades dirigidas a la formación de profesores de matemáticas.

8. Conclusions

In this chapter we discuss how the achievement of the objectives has allowed us to approach the proposed research issue: How is the validity of mathematical production constructed when problems are solved in mathematics classrooms?

In the first section of the chapter we advance a few distinct relevant aspects inferred from the results of the study, and which allow us to approach the research issue from different points of view. This section collects the contribution of our study to the research field, as well as its discussion regarding other research projects introduced on our review of the literature (Chapter 2) and the theoretical framework (Chapter 3). We organize the different aspects under titles so as to offer cohesion and guide the reader, making reference to the obtained results so as to point out their empirical base. In this way we highlight the relevance of the obtained results and of the knowledge generated through our research

In the second section we reflect on the methodological design of the study, its weaknesses and strengths; we discuss how other research projects can make the most of the fulfilled work to approach the research issue. In the third section we discuss didactic implications that stem from the results and their discussion, emphasizing aspects that may support the teaching and learning of mathematics. Finally, in the fourth section, we propose new discussions and perspectives that may be addressed in future research as an outlook for this study.

8.1. About the research issue

Mathematical culture in the classroom and the construction of the validity of mathematical production

The results of our research, viewed as a whole, allow for the observation of the epistemological complexity of the mathematics classroom and point to epistemologically relevant aspects of the mathematical classroom culture. We have shown that in construction processes of the validity of mathematical production in group work, students imply mathematical knowledge and extra-mathematical references and use different types of arguments (deductive, inductive and abductive) in their conversations (Themes 1 and 2). We have also showed that social aspects of the didactic contract contribute to form criteria used by the students in validation processes (Theme 1). On the other hand, our results make evident the role of the teacher as a mathematical authority and the importance for the students to produce solutions that are in line with their perceived expectations (Theme 4). This general outlook shows the epistemological complexity of the students' group work and, in accordance with Steinbring (2005), the complex relationship between the epistemology of classroom mathematics and social aspects of the interaction between the participants.

Even though we observed complex validation and falsification processes where different types of arguments are introduced when working in the students' group work, our results show that these processes and their epistemic characteristics do not become visible when the work is presented to the teacher (Theme 5). In these interactions the students emphasize the obtained numerical results and demonstrate the mathematical techniques used in their production. When communicating the finished work, presenting the correct solution is central and, in contrast, the construction of the validity of the mathematical production and its discussion fade into the background; the teacher must decide on the validity of the proposed solutions. Our results show that these are the most frequent interactions between the students and the teacher. The fact that epistemologically relevant aspects of the mathematical production are not made visible complicates the teacher's evaluation of mathematical production and does not propitiate discussion of the meta-mathematical knowledge implied in validation processes.

Our results suggest that students do not consider themselves capable of constructing mathematical knowledge and deciding on their validity in an autonomous, reflexive manner; their classroom participation is seen as mostly reproductive: their activity is related to the application of the techniques and knowledge they have been taught (Theme 5). The students' merits are in the selection of mathematical knowledge and its correct use in accordance with the teacher's prescriptions; the discussion of the criteria used to decide on the validity of mathematical production is not a central classroom activity. Conversely, it is the merit of the teacher to adequately explain and justify the knowledge he's introducing. Our results indicate that, in line with Knuth, Choppin and Bieda (2009), this epistemic stance (i.e., a stance relating to the construction and validation of mathematical knowledge) is habitual amongst students, it is part of the mathematical culture in the classroom, and it is based on the distinct roles of the students and the teacher in the teaching and learning process.

This characteristic of the classroom mathematical culture is a possible explanation for the lack of visibility of epistemologically relevant aspects of the mathematical production of the students in their interaction with the teacher. If the students conceive their classroom work in a reproductive way, it seems natural for them not to make an effort to justify the validity of their productions before the teacher, limiting themselves to presenting them and point out the techniques and knowledge they used. Their work consists on producing a result through the use of established mathematical knowledge and not showing why this knowledge is pertinent to justify the result's validity; the teacher will decide that.

The students who show this epistemic stance do not perceive the proposed problem as novel since they associate it with others that are solved applying knowledge about proportionality. These students perform a limited control of the representativeness of the models they propose and focus their work on interpreting the teacher's instructions so as to produce a satisfactory result (Themes 1 and 4). We documented the exceptional case of a different epistemic stance in one student. This has allowed us to obtain empirical evidence that the diversity of epistemic stances is at the basis of the diversity in the actions undertaken to face the proposed problem (i.e., the teleological dimension of rational behavior) (Theme 3). This student considers the validity of the models built by the group in terms of their capacity to adequately represent empirical aspects of the situation. This leads her to question the validity of the proportional model based on its lack of representativeness and to attempt the production of a new model by considering empirical aspects of the situation. In contrast with her classmates, this student conceives the problem as novel, she remains skeptical about the proposed solutions and reflects on the usefulness of their mathematical knowledge to model the situation. This shows that within the same context of resolution of a task in class it is possible to observe diverse epistemic stances between the students.

Although the epistemic stance of this student propitiated discussion about the validity of the constructed models, both in group conversations and in interactions with the teacher, we observed the trouble the students had in explaining to each other the foundations upon which they base or question the validity of the models they proposed and, therefore, the purpose of their actions. We also observed the teacher's trouble in identifying the different epistemic stances and promoting a fruitful discussion in their regard. This indicates that both students and teachers don't always have the necessary resources to cope with the epistemic complexity of the mathematical knowledge produced in the classroom and, especially, communication resources to talk about this in an explicit manner.

The teacher's mathematical authority in the construction of validity

Our results reveal the teacher's fundamental role in the construction of the validity of mathematical production in the classroom. In particular, we have been able to document how the students use the teacher's interventions to direct their mathematical work.

In the classroom in which the teacher's management is most authoritative (Theme 6), the students use his or her interventions to validate (in a negative or positive sense) the proposed models and to infer the characteristics the teacher expects for the correct solution. The mathematical work of the students, then, is oriented towards the production of models that may allow for the construction of solutions with these characteristics, with no consideration of the representativeness of these models beyond the considered validity conditions (Theme 1). The teacher's interventions are not used to reflect on the empirical aspects of the situation, even though he may occasionally propose explicitly this type of reflections (Theme 4). In this classroom the cycle of mathematical modeling is in some cases reversed: the students do not construct mathematical models on the basis of reflecting upon the empirical aspects of the situation, through a mathematization process; rather, the empirical aspects of the situation are deductively inferred from the mathematical model validated by the teacher. Although the students in this classroom produce the probabilistic solution and correctly infer relationships between the empirical elements of the situation, the validity of the model is based on the teacher's preferences. This raises questions about the students' comprehension of the bases for the validity of the probabilistic model and underscores their deference to the teacher's mathematical authority. Even though this issue emerges explicitly in some groups, it is never brought up. The social need to produce a solution that satisfies the teacher's expectations shows up as a central element in the students' work and in the construction of the validity of the mathematical production. The key question about why the solution that is validated by the teacher is more adequate than other solutions is not raised, even though it is contemplated by some groups.

In the other classroom, the teacher avoids expressing herself about the validity of the proposed solutions and impulses the emergence of diverse solutions. Our results show that the teacher's work suggests the possibility of different adequate solutions to the problem and that, accordingly, the students propose different mathematical models and numerical solutions. The students do not produced arguments in favor or against the validity of the models considering their representativeness and, in line with the teacher's management, they do not contemplate the need to compare them so as to validate one and falsify the others. Comparing the two classrooms, these results allow us to observe how the teacher's management conditions the students' interpretation regarding the uniqueness of the answer (Theme 6) and that, in general, their mathematical activity is oriented to produce solutions that are satisfactory for the teacher.

What has been said up to this point not only shows that the students act with deference towards the teacher's mathematical authority; it also illustrates how they display disposition to interpret his interventions based on their expectations about the correct answer and not on the mathematical and meta-mathematical aspects of the problem. We agree with Steinbring (2005) about this being a frequent situation because it allows the students to satisfy the expectations they perceive with relative ease, while allowing the teacher to consider his instruction objectives satisfied. This allows us to conclude that in the mathematical work in the classroom satisfying the teacher's expectations is of central importance and, thus, his or her work has consequences for the construction of the validity of the mathematical production. However, these consequences don't always coincide with the didactic objectives; we see that the students' interpretations of the teacher's instructions in epistemologically relevant terms don't always agree with the intended validation standards. For example, in the two classrooms none of the teachers gets the students to base the validity of their mathematical production on the reflection about the representativeness of the models.

Like Boero (2011) and Steinbring (2005), we acknowledge the importance of the teacher's role as a cultural agent in the classroom and the importance of his mediation between the mathematical culture and the knowledge under construction by selecting students' productions. Also, like Sfard (2001) and Brown (2014), we believe the activities and the mathematical authority of the teacher are fundamental in acculturation processes, where he or she introduces aspects of mathematical culture in the classroom. Our results add that, occasionally, this deference to the teacher's mathematical authority and the social relevance of producing satisfactory solutions may be behind the loss of opportunities to explicitly deal with the meta-mathematical knowledge related to the justification of the validity of the mathematical production. It is essential to understand in which contexts the mathematical authority of the teacher propitiates the introduction of desirable elements from the point of view of the construction of the mathematical culture in the classroom and in which others it becomes an obstacle for the emergence of meta-mathematical knowledge.

What we have said up to this point confirms the complex relationship between the epistemology of mathematics in the classroom and the social aspects of interaction; particularly regarding the different roles of teachers and students. Our study aids in understanding how the process of constructing the validity of the mathematical production depends on the teacher's management. However, to understand this phenomenon better, more studies are needed that take into consideration this relationship in different circumstances and that allow for understanding how the teacher's management contributes to shape the mathematical culture and, particularly, the epistemology of mathematics in the classroom.

The production and evaluation of argument in the mathematics classroom

We agree with the National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers (2010) in that one of the fundamental objectives of mathematical education is that the students be able to produce and evaluate arguments, explain why they are, or they are not, adequate to the context and request the appropriate clarifications. Inglis, Mejia-Ramos and Simpson (2005) demonstrate that professional mathematicians use different types of arguments (deductive, inductive, abductive) in their mathematical work and that they adequately use modal qualifiers (possibly, necessarily, etc.) to demonstrate the epistemic status of the conclusions of these arguments and, this way, their level of certainty. The results from these authors indicate that professional mathematicians have the necessary meta-mathematical knowledge to produce and evaluate arguments according to mathematical disciplinary principles and that stating this evaluation is relevant to the construction process of mathematical knowledge. If we expect mathematical education to allow the students to produce and evaluate arguments according to disciplinary principles that are adequate to their educational level, the appropriate meta-mathematical knowledge must be taught in the classroom.

Our results show that the students proceed abductively to construct mathematical models that represent empirical aspects of the situation (Theme 1). These processes are problematic in at least two ways. On the one hand, their control over the representativeness of these models is limited to the verification of an insufficient set of validity conditions. The students don't seem to realize the need to produce empirical data that may allow then to systematically test the representativeness of the models to support its falsifiable validity (Lakatos, 1978). On the other hand, the students don't use modal qualifiers to point out their certainty about the produced models. This suggests that they do not acknowledge the falsifiability of the models constructed abductively; that is, their epistemic status.

The results of our study also show that the students produce inductive arguments to justify the validity of their mathematical production (Theme 2). This confirms the results of other research with students from different levels (Harel and Sowder, 1998; Healy and Hoyles, 2000; Knuth, Chopin and Bieda, 2009; Selden and Selden, 2003). In most of this research the students are asked to produce proofs about mathematical content through phrases such as "show that...", "demonstrate that..." or "prove that...", or to decide if a specific text is a proof. These studies show that the students produce, present and accept inductive arguments as adequate mathematical justifications. Our results demonstrate that also in situations of mathematical modeling the secondary school students produce inductive arguments and that these arguments provide them with certainty. This corroborates the results of Brown (2014), who shows that the students have problems maintaining skepticism when they have evidence of the validity of their results, even if this evidence is insufficient. That is, the students have difficulty establishing the epistemic status of their mathematical production in accordance with the evidence they have.

A relevant difference between the situations proposed in those studies and ours is related to the epistemic status intended for the supported conclusions. When proving a mathematical conjecture the aim is to show its need in the framework of a theory of reference, for which a deductive argument is required; based upon which the conjecture becomes a theorem inside the theory. In contrast, when there is a mathematical modeling of an empirical phenomenon through abductive reasoning, the aim is to show the model's falsifiable validity; that is, that the model adequately represents the empirical phenomenon in all the instances in which it is put to the test. Here, it is adequate to proceed inductively. From an expert point of view the idea is for the modeler to proceed systematically, testing the model in different situations, deliberately looking for instances in which it may be falsified. This systematic process supports the falsifiable validity of the proposed model. This is how scientific theories are constructed and justified in the field of the experimental sciences. However, our results show that the students don't proceed in this way; only by the teacher's request do they consider numeric variations of the problem and use the obtained results to inductively validate the proposed models. The students show certainty based on their application on a few numeric variations of the problem.

What has been said to this point shows that, in contrast with professional mathematicians, the students do not have the necessary meta-mathematical knowledge for an adequate use (from the point of view of school mathematics) of abductive and inductive arguments in the context of the proposed problem; that is, to determine the scope of these arguments regarding the validity of the mathematical models they support. It is possible that these results are related to the specificities of the proposed problem and that with another problem it may be possible to observe other uses of the arguments. New research centered in validation processes in situations of mathematical modeling, which maybe imply knowledge from other mathematical areas may confirm or refute our results. On the other hand, more research is needed to evaluate if this type of situations may be used to include meta-mathematical aspects of the construction of mathematical knowledge in the classroom as a learning object.

8.2. About the methodological design

Retrospective reflection about the methods used in the research work is relevant to point out the strengths and weaknesses of the methodological design and is also an important contribution to the field of study.

A first aspect to point out is the difficulty inherent to the investigation of the processes of construction of the validity of mathematical production and, in general terms, of the epistemological aspects of argumentation in the mathematics schoolroom. As our results show and as we pointed out in the previous section, both students and teacher do not tend to make explicit reference to the validity of their mathematical production nor do they deliberately discuss the standards used for its justification. That is, neither the validity nor its construction tends to be conversation subjects between the participants. This means that their stances regarding this issue are not simply accessible through what they say; it's necessary to interpret their arguments and actions to infer the epistemic basis upon which the validity of the mathematical production is built. We agree with Toulmin (1972) in that the practical decisions of people reveal their understanding about their epistemic situation, which becomes accessible through a pragmatic analysis of their actions. In our research, the assumed theoretical point of view, in which data analysis is based on, allowed for an interpretation of the classroom activities in epistemologically significant terms.

To render these interpretations plausible, it was essential to perform two interviews with groups of students. They allowed us to corroborate or reject interpretations during the analysis of the classroom data. In this sense, we underscore the relevance of the use of video clips in the interviews. Watching the clips with the students allowed us to make direct reference to actions of the students and the professor, as well as to have a common and contrastable element through which to agree on interpretive differences during the interview. On the other hand, the interviews were important to subsequently inquire upon relevant aspects that emerged during the analysis of the schoolroom data. Regarding this, it is worth mentioning that the week assigned for the analysis of the classroom data, based upon which the interview was designed, turned out to be insufficient time. Some aspects observed in the classroom that turned out to be of central importance, emerged only after the analysis, and so they were not taken into consideration for the interview. For example, the relevance of Lyn's exceptional epistemic stance, the cornerstone of Theme 3, was not noticed during the week of analysis and planning; this student's group was not interviewed. Such interview surely would have allowed for deeper understandings of the epistemic stances of the students, their bases and implications in mathematical work. However, we cannot claim that dedicating more time to the design of the interview would have been adequate, due to the risk that the experience might turn out to be distant for the students. In contrast, the sensitivity of the researcher regarding the subject being investigated and his/her familiarity with the analysis of classroom data from the assumed perspective, are important elements when facing the design of interviews in a short time. So, we believe the experience gained in this research is a relevant basis to face new research in this field that implies the design of interviews.

The decision to gather new data in a second classroom was based in the need to better understand the consequences of the teacher's management in processes of construction of the validity of mathematical production. This was the only issue considered to carry out a theoretical sampling (Glaser and Strauss, 1965). Although it would have been possible to consider other relevant issues observed in the analysis to gather new data, we decided to limit the study to the data obtained in these two classrooms. This turned out to be the right decision, since it allowed for a balance between the volume of data to analyze, the deepness of the performed analysis and the relevance of the obtained results. Future research may give continuity to this, taking into account other relevant issues observed, and others that were not considered, as criteria for theoretical sampling. For example, the results of Knipping, Rott and Reid (in press), who use a variation of the same problem in two German secondary schools, suggest that the socio-economic condition of the students may be behind the differences observed in their approach to the problem. We agree with these authors in that to understand the complexity of validation processes in the classroom and, in general, the development of argumentative competencies, we need studies that approach this issue from different points of view and analysis levels.

Finally, we underscore the usefulness of interpreting processes of construction of the validity of mathematical production in terms of the emergence and fulfillment of validity conditions. This allowed for the establishment of links between the actions of the students and different aspects of the context. In this way the roles played by extra-mathematical, intra-mathematical and social aspects of the didactic contract in the processes of validation of the mathematical production became evident. The analysis of mathematical activity in the classroom in terms of validity conditions has been relevant to understand the diversity of epistemic stances between the students and, thus, to better understand possible obstacles to effective communication between the participants. This has also allowed us to understand better how the mathematical culture in the classroom, which grants distinct roles to teachers and students, conditions the students' decisions about what is relevant to communicate in their interactions with the teacher. A view of mathematical work in the classroom structured based in the analysis of the emergence and fulfillment of validity conditions, is useful in research that aims to inquire on the epistemology of mathematics in the classroom, the way it is shaped and its relationship with social aspects of interaction.

8.3. Didactic implications

To promote in the classroom a mathematical culture where the students participate in the construction and validation of mathematical knowledge, our study suggests the need that justifying the validity of mathematical production becomes a relevant activity in the work of students. That is, it must be socially acknowledged as an important and constituent activity in this work.

Our results show that it is important that the validation processes become visible in the interaction with the teacher for, at least, two reasons; on the one hand, so that the teacher may have elements to evaluate the mathematical production of his/her students and, on the other hand, so that the meta-mathematical knowledge regarding the validity of the mathematical production may emerge as a learning object. In the processes of construction of the validity of mathematical production, this meta-mathematical knowledge must allow the students to explain their epistemic stance and to understand that of others, a condition necessary to give account in a reflexive manner of their own actions and to base the criticism of the actions of others. This meta-mathematical knowledge must allow the students to evaluate the scope of their arguments and, thus, to adequately establish and make evident their level of certainty about the conclusions they intend to support. The construction of meta-mathematical knowledge through activities that are adequate to the level of mathematical maturity of the students must be a central objective for mathematical education and the planning of these activities must be a central part of the teacher's job.

It is convenient to promote a mathematical culture in the classroom in which the students feel capable of validating the mathematical knowledge they produce and where this activity is not performed exclusively by the teacher. We agree with Knuth, Choppin and Bieda (2009) in that to achieve this, the students must participate in significant activities where they have the chance to implicate themselves in processes of validation of their mathematical productions. Didactic interventions designed to this end must become more common in mathematics classrooms. We agree with Zaslavsky (2005) in that situations where uncertainty is generated about the validity of mathematical productions may be useful in this sense; however, our results show, similarly to Brown (2014), that it is not always easy to generate situations of uncertainty that may be used productively to discuss the validity of mathematical productions. More research is needed to determine the contexts in which situations of uncertainty may be useful to start discussions about validation standards in the field of mathematics.

We suggest that the task of publicly justifying mathematical productions must be part of the didactic contract in the schoolroom. That is, the participants must share the expectation of justifying the validity of mathematical production. We agree with Dreyfus (1999) in that this implies an important transition for the students, from a computational view of mathematics to a more reflexive one. The central questions shouldn't be: 'What is the result?, but rather, 'Why is this result valid?'. Such a didactic contract would allow an explicit and deliberate approach to epistemologically relevant aspects of mathematical knowledge in a way that's appropriate for the school level. Future research must explain how this transition may be promoted through specific interventions in the classroom and what type of actions by the teacher might facilitate this. It is also worth researching what criteria the teacher should apply to judge the arguments of the students according to the school level and on what pedagogic and epistemological principles to base these criteria and their developing throughout the different levels.

The promotion of a mathematical culture such as what we have described must propitiate a more reflexive approach to mathematical modeling. Students should understand and appreciate the usefulness of mathematical knowledge for the understanding and modeling of empirical phenomena. That is, they should appreciate the role of mathematics in the construction of scientific theories and, in general, the description of the environment. Our results suggest that the epistemic stance with which the students approach mathematical modeling tasks may become an obstacle in this sense, so it is very important to develop a mathematical culture that promotes an investigative environment in the classroom. Understanding the world on the basis of mathematical knowledge must not be limited to its description based on mathematical theories validated by the teacher. Students must participate in the exercise of reflectively capturing phenomena so as to describe them mathematically. If we expect mathematics to be an instrument that allows people to reflect upon and influence their reality, this is a necessary exercise. The actions of people should not be limited to the prescriptive use of techniques and knowledge; if we expect them to be able to act in a critical and reflective manner, the bases of their validity must be understood.

In short, we believe raising the necessary meta-mathematical knowledge for the production and evaluation of arguments according to the principles of school mathematics should be a central objective of mathematics education. This knowledge should not only allow the students to produce and evaluate arguments in accordance with their mathematical maturity; it should also allow them to understand the epistemological and social importance of participating in the validation of knowledge collectively constructed in the classroom as a part of the mathematical work. These objectives should go hand in hand with the production of a mathematical culture in the classroom where the students participate in the construction and validation of mathematical knowledge. As long as the task of validating the knowledge produced in the classroom is (almost) exclusively in the hands of the teacher, these objectives will hardly be more than good intentions.

8.4. Outlook for the study

Our results contribute to understand how the validity of mathematical production is constructed when problems are solved in the classroom. These results were obtained in the context of the solving of a mathematical modeling problem in the framework of the introduction of notions about probability theory. The first issue future research should take into account is whether these results can be reproduced in the context of the development of other mathematical content and other classroom activities. We cannot rule out that the specificities of the selected problem and mathematical content are behind the issues observed here. Future research focused in processes of the construction of validity in the mathematics classroom should confirm or refute the current results.

We considered two main lines for research. On the one hand, although our results point out relevant aspects of the mathematical culture in the classrooms and its consequences on process of construction of the validity of mathematical production, they don't allow for an understanding of how that culture is created in the long term. That is, how the participants interactively construct this culture through their actions and the negotiation of mathematical meanings; particularly, how is the epistemology of mathematics created in the classroom and how it gets related to social aspects of the didactic contract. Research explaining these processes is very important for the systematic planning of didactic interventions oriented to propitiating the construction of a mathematical culture in the classroom that responds to disciplinary principles in accordance with the mathematical maturity of the students. We consider this is an essential line of research and an open issue in the field of mathematics education. Our study works as the basis for the design of future studies that may investigate how the epistemology of mathematics in the classroom is created in the long run and, in general, how the classroom mathematical culture emerges.

On the other hand, our results underscore the central role of the teacher in the process of construction of the validity of mathematical production, without taking into account the teacher's knowledge. We agree with Dreyfus (1999) in that evaluating the mathematical acceptability of the students' arguments and making decisions about them in real time is a demanding task for the teacher. Such an activity requires specific and sophisticated meta-mathematical knowledge that must be developed on the context of educational courses for future teachers. Even though much of the research makes reference to the teacher's mathematical knowledge and its use in teaching and learning processes, less of it is focused in meta-mathematical knowledge and, particularly, in the meta-mathematical knowledge needed for teaching. Research centered in teachers and their meta-mathematical knowledge is fundamental to have a better understanding of their role in the process of construction of the validity of mathematical production in the classroom and to design intervention strategies in accordance with didactic objectives related to the creation of meta-mathematical knowledge amongst the students. This research should contribute results that are relevant for the design of curricula and activities oriented towards the education of mathematics teachers.

Resumen

Este trabajo de tesis doctoral “Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas” se inscribe en el área de estudio de la argumentación en clase de matemáticas. En él se aborda la cuestión de investigación: ¿Cómo se construye la validez de la producción matemática cuando se resuelven problemas en aulas de matemáticas? Para acercarse a esta cuestión se plantean tres objetivos:

Primer objetivo:

Caracterizar procesos de construcción de la validez de la producción matemática en el trabajo en grupo de alumnos.

Segundo objetivo:

Caracterizar procesos de construcción de la validez de la producción matemática en la interacción de grupos de alumnos con el profesor del aula.

Tercer objetivo:

Caracterizar la gestión de procesos de construcción de la validez de la producción matemática a cargo de dos profesores en el aula de matemáticas.

Se entiende el conocimiento matemático como producto cultural e histórico, cuya justificación implica la acción humana, por lo que no puede ser reducido a condiciones objetivas. Se sostiene que el conocimiento matemático incluye tanto conocimiento proposicional como conocimiento tácito compartido dentro de una comunidad y que ambos deben ser acomodados dentro de la epistemología de las matemáticas. Respecto a la argumentación, se utiliza a Ernest (1998) para presentarla como unidad epistemológica del conocimiento matemático y a Habermas (1998) para enmarcarla dentro del comportamiento racional de las personas. Describimos la argumentación como una práctica dirigida a justificar, reflexionar y persuadir, que acontece en situaciones de interacción y depende del contexto. Pueden estar implicadas una o varias personas, que se involucran ofreciendo razones para justificar o criticar sus posiciones o las de otros con la intención de modificar positiva o negativamente el valor epistémico de tales posiciones.

Siguiendo a Habermas (op. cit), la práctica argumentativa consta de tres dimensiones entrelazadas: una epistémica, relativa a las constricciones epistemológicas inherentes a la construcción y control de las proposiciones, justificaciones y validaciones; otra teleológica, relacionada con las intenciones, los objetivos y las decisiones estratégicas de los participantes; y una comunicativa, relativa a la selección de los registros lingüísticos e instrumentos semióticos apropiados para comunicarse dentro de la comunidad cultural de referencia.

Aceptar las pretensiones de validez de un interlocutor implica aceptar que ciertas condiciones de validez pueden ser satisfechas. Estas condiciones de validez expresan lo que en un determinado contexto de justificación es intersubjetivamente considerado como buenas razones para aceptar una proposición. De modo que la validez se relaciona con la aceptación basada en la satisfacción de condiciones de validez. De aquí que la validez no sea una mera propiedad de las proposiciones, sino que emerja de su contextualización.

Siguiendo a Steinbring (2005), se sostiene que la epistemología de las matemáticas del aulaes investigable a partir del análisis de la interacción entre los participantes del proceso de enseñanza y aprendizaje y, en particular, a partir de las prácticas argumentativas en clase.

Los métodos de investigación en este estudio se inscriben dentro del paradigma investigativo de la teoría fundamentada. El estudio es comparativo (en el sentido de Glaser y Strauss, 1965) ya que el análisis de datos se estructura alrededor del método de comparación constante. El análisis, de carácter interpretativo-inductivo, se organiza alrededor de la comparación constante de episodios similares. Para ello se realizan ciclos iterativos de codificación de datos hasta alcanzar el punto de saturación teórica (en el sentido de Strauss y Corbin, 1998). A partir de este análisis se generan categorías descriptivas y explicativas que dan cuenta de los datos analizados y, mediante un proceso de síntesis, de los objetivos de la investigación. Siguiendo a Van Manen (1990), los resultados se presentan en forma de temas narrativos que dan cuenta de manera articulada de los aspectos más relevantes aparecidos en el análisis.

Los datos de aula se obtuvieron a partir de la resolución de un problema de modelado matemático, ideado para introducir nociones básicas de teoría de la probabilidad, en dos aulas del cuarto curso de secundaria con dos profesores. El problema fue trabajado en dos sesiones, durante las cuales se obtuvieron video-registros del trabajo de tres grupos de alumnos por aula. Para una de estas aulas, dos grupos de alumnos fueron entrevistados. La entrevista fue semi-estructurada y basada en el visionado de videoclips del trabajo realizado en aula durante las sesiones de resolución del problema. Los datos de aula y los de entrevista constituyen el cuerpo de datos.

Se pone en evidencia la compleja relación entre la epistemología de las matemáticas del aula y aspectos sociales del contrato didáctico. Se observan así las raíces sociales de la construcción de la validez de la producción matemática en el aula y, en particular, la relevancia del papel del profesor y su gestión en estos procesos.

Los alumnos utilizan argumentos de distinto tipo (deductivos, abductivos e inductivos) durante el trabajo en grupo y producen, validan y falsan distintos modelos matemáticos. En estos procesos implican tanto conocimientos matemáticos como referencias extra-matemáticas, sin embargo no reconocen la falsabilidad de los modelos ni consideran sistemáticamente su representatividad como condición de validez. Por otro lado, en la interacción con el profesor, esta complejidad epistemológica no se hace visible; se privilegia la presentación de resultados numéricos y el uso de conocimientos y técnicas matemáticas conocidas. La justificación de la validez de la producción matemática queda en segundo plano. En estas interacciones no suelen utilizarse calificadores modales, de modo que el estatus epistémico de las soluciones que se proponen y el nivel de certeza alcanzado no resultan evidentes.

Nuestros resultados indican una cultura matemática del aula en la que los alumnos no se ven capaces de validar su producción matemática y en la que su actividad se relaciona con el uso de conocimientos prescritos por el profesor; es este quien tiene la tarea de decidir acerca de la validez de las respuestas de los alumnos. La gestión que realiza el profesor condiciona la producción matemática de los alumnos, sugiriendo, por ejemplo, ideas sobre la unicidad de la solución. En general, a partir de las intervenciones del profesor los alumnos infieren elementos esperados en la respuesta correcta y validan (positiva o negativamente) modelos matemáticos; estas intervenciones no son aprovechadas para reflexionar acerca de aspectos empíricos de la situación que permitan construir un modelo representativo. Al respecto, en algunos casos se observa la inversión del ciclo de modelado matemático (Blum y Leiß, 2007): los alumnos infieren deductivamente relaciones entre elementos empíricos de la situación a partir de un modelo matemático que ha sido validado por el profesor. En estos casos no se construye el modelo matemático a partir de la matematización del modelo de la situación, sino que este último es inferido a partir de un modelo matemático construido para satisfacer indicaciones del profesor.

Se observa que para propiciar una cultura matemática del aula en la que los alumnos se consideren capaces de validar el conocimiento matemático producido, es necesario que estos se impliquen de manera activa en procesos de validación.

En este sentido, resulta necesaria la planificación de intervenciones didácticas diseñadas con este fin.

Los resultados obtenidos indican que los alumnos no cuentan con conocimientos meta-matemáticos necesarios para producir y evaluar argumentos de acuerdo con principios disciplinares que se pretenden enseñar y que estas actividades no son centrales en el trabajo matemático del aula. Se sugiere que más atención debe ser dedicada a la producción de conocimientos meta-matemáticos que permitan a los alumnos participar, de acuerdo con su madurez matemática, en la producción y validación de conocimientos matemáticos. Se concluye que es necesario propiciar la visibilización de aspectos epistemológicamente relevantes de la producción matemática de los alumnos en las interacciones con el profesor. Esto debe permitir la evaluación de la producción matemática por el profesor, así como la emergencia de conocimientos meta-matemáticos como objeto de aprendizaje y discusión en el aula.

Finalmente, como prospectiva del estudio, se proponen dos líneas principales. Por un lado, se considera de gran importancia investigar cómo es que la cultura matemática del aula, y en particular la epistemología de las matemáticas del aula, se constituyen a largo plazo a partir de acciones de alumnos y profesores. Investigaciones orientadas en este sentido deben permitir explicar estos procesos y fundamentar decisiones pedagógicas que permitan promover una cultura matemática del aula adecuada a principios del ámbito de la matemática escolar y a la edad de los alumnos. Por otro lado, cabe investigar el conocimiento meta-matemático del profesor y, en particular, el conocimiento meta-matemático necesario para la enseñanza. Investigaciones orientadas en este sentido permitirán entender mejor el papel del profesor en la gestión de procesos de construcción de la validez de la producción matemática y, así, su papel en la formación de conocimientos meta-matemáticos entre los alumnos. Tales investigaciones deben ser relevantes en el diseño de planes de estudio y actividades dirigidas a la formación del profesorado de matemáticas.

Summary

This doctoral thesis "Epistemological aspects of argumentation in the mathematics classroom" falls under the area of study of argumentation in mathematics lessons. It addresses the issue under investigation: How is the validity of mathematical production constructed when mathematical problems are being solved in the classroom? In order to approach this matter, three objectives have been proposed:

First objective:

To characterize validity construction processes of mathematical production in students' group work.

Second objective:

To characterize validity construction processes of mathematical production in the interaction between groups of students and the teacher.

Third objective:

To characterize the management of validity construction processes of mathematical production by two teachers in the mathematics classroom.

Mathematical knowledge is considered a cultural and historical product resulting from human action, and may therefore not be reduced to objective conditions. It is argued that mathematical knowledge consists of both propositional knowledge and tacit knowledge shared by a community and that both of these play a role in the epistemology of mathematics. Concerning argumentation, Ernest (1998) is used to present it as an epistemological unit of mathematical knowledge, and Habermas (1998) in order to place it within the framework of human rational behavior. Argumentation is described as a practice aimed at justifying, reflecting and persuading, which occurs in interaction situations and depends on the context. This may involve one or more people providing reasons to justify or criticize their own or another person's view with the intention of either positively or negatively changing their epistemic value.

Following Habermas (op. cit.), argumentative practice consists of three intertwined dimensions: an epistemic one, relative to epistemic constrictions inherent in the

construction and control of propositions, justifications and validations; a teleological one, which is related to intentions, objectives and strategic decisions of those involved; and a communicative one, related to the selection of appropriate linguistic registers and semiotic instruments to communicate within the reference culture.

Accepting an interlocutor's validity claims entails accepting that certain conditions of validity may be fulfilled. These conditions of validity express what is intersubjectively considered good reason to accept a proposition in a particular context of justification. Thus, validity is related to acceptance based on the fulfillment of validity conditions. Therefore, validity is not a mere property of propositions put forward, but rather it is arrived at from contextualization.

Following Steinbring (2005), it is argued that classroom mathematical epistemology is able to be investigated based on the analysis of the interaction between the participants in the teaching and learning process, and, more specifically, based on the analysis of argumentative practices in the classroom.

The research methods in this study are in keeping with the investigative paradigm of the grounded theory. The study is comparative (in the sense of Glaser and Strauss, 1965) in that the data analysis is based on the constant comparison method. The interpretive-inductive analysis focuses on the constant comparison of similar events. To do so, iterative data encoding cycles are run until theoretical saturation point is reached (in the sense of Strauss and Corbin, 1998). Based on this process of analysis, descriptive and explanatory categories are created to account for the analyzed data and, through a process of synthesis, for the research objectives. Following Van Manen (1990), the results are presented in the form of narrative themes, which give an articulated account of the most relevant aspects of the analysis.

The classroom data were collected through the resolution of a mathematical modeling problem devised to introduce basic notions of probability theory in two secondary school fourth year classrooms. Over the course of two lessons, three groups of pupils in each classroom were recorded on video as they attempted to solve the problem. Two groups from one of these classrooms were interviewed. The interview was semi-structured and based on the video clips of the pupils working over the two sessions devoted to solving the mathematical problem. Classroom and interview data constitute the body of data of the study.

The complex relationship between the epistemology of classroom mathematics and the social aspects of the didactic contract is highlighted. The social roots in the construction of the validity of mathematical production in the classroom and, in particular, the relevance of the teacher's role in handling these processes were observed.

The students use various kinds of arguments (deductive, abductive and inductive) during the group work, as well as producing, validating and disproving different mathematical models. Both mathematical knowledge and extra-mathematical references are involved in these processes. However, they fail to recognize the falsifiability of the models and do not systematically consider their representativeness as a validity condition. On the other hand, this epistemological complexity is not apparent in the interaction with the teacher. The presentation of numerical results and the use of both mathematical knowledge and techniques are preferred. Modal qualifiers were not usually used in these interactions, which means that the epistemic status of the solutions presented and the level of certainty achieved are not clear.

Our results indicate a classroom mathematical culture in which the pupils do not feel able to validate their mathematical production and in which their activity is related to the use of knowledge prescribed by the teacher. It is the teacher who decides about the validity of students' answers. The teacher's management determines the student's mathematical production, suggesting, for example, ideas about the uniqueness of the solution. In general, the teacher's prompts allowed the students to infer several of the elements expected in the correct answer, as well as to validate (whether positively or negatively) mathematical models; these prompts are not used to reflect on the empirical aspects of the situation that allows for the construction of a representative model. To this regard, it was apparent in some cases that the mathematical modeling cycle (Blum and Leiß, 2007) was inverted: the students made deductions to infer relationships between empirical elements of the situation from the mathematical model that had been validated by the teacher. In these cases the mathematical model was in fact not constructed from the mathematization of the situation model, but inferred from a mathematical model built to satisfy the teacher's instructions.

It is pointed out that in order to facilitate a classroom mathematical culture in which students consider themselves as capable of validating mathematical knowledge, it is necessary that they actively engage in validation processes. The planning and implementation of didactical interventions devised for this purpose is thus necessary.

The results indicate that the students do not have the meta-mathematical knowledge to produce and evaluate arguments in line with disciplinary principles intended for them to learn, as well as the fact that these activities are not such an important aspect of mathematics in the classroom. It is suggested that more attention should be given to improving the students' meta-mathematical knowledge, which would allow them to participate in the production and validation of mathematical knowledge in keeping with their mathematical maturity. It is concluded that it is necessary to promote the visibility of epistemologically relevant aspects of students' mathematical production when they interact with the teacher. This should make it possible for the teacher to successfully evaluate the mathematical production and should also give rise to the emergence and discussion of meta-mathematical knowledge as a learning object in the classroom.

Finally, there are two possible pathways proposed for the execution of future studies. On the one hand, it is considered of great importance to investigate how mathematical culture in the classroom and, in particular, mathematical epistemology in the classroom, are established in the long-term based on the actions of both the students and the teacher. Research that takes this approach should make it possible to clarify these processes and make it possible to take pedagogical decisions to promote a mathematical classroom culture in keeping with school mathematical principles and students' age. On the other hand, the meta-mathematical knowledge of the teacher, as well as the meta-mathematical knowledge required for teaching, should be investigated. Research carried out in this way would allow for a better understanding of the teacher's role in leading processes of validity construction of the mathematical production and, thus, the teacher's role in the construction of meta-mathematical knowledge amongst the students. Such investigations should be relevant to the national school curriculum and to designing activities aimed at the education of future mathematics teachers.

Referencias bibliográficas

Argumentation. (2014). En *Merriam-Webster.com*. Consultado el 8 de noviembre, 2014, en http://www.merriam-webster.com/dictionary/argumentation.

Austin, J. L. (1962). *How to do things with words*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Balcheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate... *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.Mai/Juin 1999*. Consultado en http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html

Behr, M. y Harel, G. (1995).Students' errors, misconceptions and conflict in application of procedures.*Focus on Learning Problems in Mathematics 12*(3-4), 75-84.

Bermejo-Luque, L. (2010). Toulmin's model of argument and the question of relativism. En D. Hitchcock y B. Verheij (Eds.), *Arguing in the Toulmin model* (pp. 71-86). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Bernard, H. R., y Ryan, G. W. (2010). *Analyzing qualitative data: Systematic approaches*. Los Angeles, CA: Sage Publishers

Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? In: Haines, C. et al. (Eds), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester, Reino Unido: Horwood

Boeije, H. (2002). A purposeful approach to the constant comparative method of analysis of qualitative interviews.*Quality & Quantity, 36*, 391-409

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.Juillet/Août 1999.* Consultado en http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

Boero, P. (2006). Habermas' theory of rationality as a comprehensive frame for conjecturing and proving in school.En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.) *Proceedings of 30th International Conference of the*

Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp. 185-192). Praga, República Checa: PME.

Boero, P. (2011). Argumentation and proof: Discussing a "successful" classroom discussion. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.120-130). Rszéskow, Polonia: ERME.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F. y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En *Proceedings of 34thInternational Conference of the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 179-205). Belo Horizonte, Brasill: PME.

Boero, P., Douek, N., y Ferrari, P. L. (2002). Developing mastery of natural language: Approaches to theoretical aspects of mathematics. En L. D. English (Ed.), *International Handbook of Research in Mathematics Education* (pp. 241-268). Londres, Reino Unido: LEA.

Brousseau G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers (Springer).

Brown, S. (2014). On skepticism and its role in the development of proof in the classroom.*Educational Studies in Mathematics 86*, 311-335

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. Tesis Doctoral.Valencia: Universitat de València.

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide trough qualitative analysis*. Londres, Reino Unido: Sage.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (1995). The coordination of psychological and sociological perspectives in mathematics education.En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (pp. 1-16). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cyr, S., (2011).Development of beginning skills in proving and proof-writing by elementary school students. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 263-272). Rszéskow, Polonia: ERME.

D'Amore, B. (2008). Epistemology, didactics of mathematics and teaching practices.*Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education 7*(1), 1-22.

De Gamboa, G., Planas, N., & Edo, M. (2010).Argumentación matemática: Prácticas

escritas e interpretaciones. *SUMA 64*, 35-44.

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics.*Pythagoras, 24*, 17–24.

Douek, N. (2007). Some remarks about argumentation and proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 163-181). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics 38*, 85-109.

Duval, R. (1999).*Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?*Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2007).Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-162). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Education Committee of the European Mathematical Society (2011). What are the reciprocal expectations between teacher and students? Solid findings in mathematics education on didactical contract.*Newsletter of the European Mathematical Society, Issue 84*, June 2012, 53-55.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.

Fenaroli, G., Guala, E., Goizueta, M., Paola, D. y Sanna, G. (2014).Il problema delle parti per una introduzione al pensiero probabilistico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate 37*(6 A+B), 573-584.

Fischbein E. y Kedem I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking.In A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 128-131. Amberes, Bélgica: Universitaire Instelling Antwerpen.

Galbraith, P. (1981). Aspects of proving: a clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics 12*, 1-29.

García Cruz, J. (2000). Historia de un a prueba: El reparto de la apuesta. *Suma 33*, 25-36.

Garfinkel, H. (1967). *Studies in ethnomethodology.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. y Mariotti, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A Hypothesis about the cognitive unity of theorems.*Proceedings of 20th International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 113-120). Valencia: PME.

Gee, J. P. (1999). *An introduction to discourse analysis*. Londres, Reino Unido: Routledge.

Glaser, B. & Strauss, A. (1965).*The discovery of Grounded Theory: Strategies for qualitative research*. Nueva York, NY: Aldine.

Goizueta, M. (2014). The emergence of validity conditions in the secondary mathematics classroom: linking social and epistemic perspectives. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, y D. Allan (Eds.), *Joint Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 38) and the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education (PME-NA 36)*(Vol. 1, pp. 214-218). Vancouver, Canadá: PME.

Goizueta, M. y Mariotti M. A. (en prensa). Constructing validity in classroom conversations.En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.*

Goizueta, M., Mariotti M. A. y Planas, N. (2014). Validating in the mathematics classroom. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, y D. Allan (Eds.), *Joint Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 38) and the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education (PME-NA 36)* (Vol. 3, pp. 169-176). Vancouver, Canadá: PME.

Goizueta, M. y Planas, N. (2013a). El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores. *PNA, 7*(4), 155-170.

Goizueta, M. y Planas, N. (2013b). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias 31*(1), 61-78.

Goodnight, G. (2010). Complex cases and legitimation inference: Extending Toulmin model to deliberative argument in controversy. En D. Hitchcock y B. Verheij (Eds.), *Arguing in the Toulmin model* (pp. 39-48). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Govier, T. (1995). Replay to Massey. En H. V. Hansen y R. C. Pinto (Eds.), *Fallacies: Classical and contemporary readings* (pp. 172-180). University Park, PN: Pennsylvania State University Press.

Habermas, J. (2003). *Truth and justification*. Cambridge, MA: MIT Press.

Habermas, J. (1998). *On the pragmatics of communication*. Cambridge, MA: MIT Press.

Habermas, J. (1984). *The theory of communicative action.Reason and the rationalization of society*. Londres, Reino Unido: Heinemann Educational Books.

Hanna, G. y De Villiers, M., (2012).*Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics III* (pp. 234–282). Providence, RI: American Mathematical Society.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000).A study of proof conceptions in algebra.*Journal for Research in Mathematics Education 31*, 396–428.

Hersh, R. (1979). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics.*Advances in Mathematics 31,* 31-50.

Holster, T. (2006). Purposeful questioning in mathematics: A guiding framework. *ACE Papers 17*. Consultado en http://www.education.auckland.ac.nz/en/about/research/research-at-faculty/research-publications/ace-papers.html

Holton, J. (2007). The coding process and it challenges. In A. Bryant y K. Charmaz (Eds.), *The SAGE handbook of grounded theory* (pp. 265-290). Thousand Oaks, CA: Sage.

Inglis, M., Mejía-Ramos J. P. y Simpson, A. (2007).Modeling mathematical argumentation: The importance of qualification.*Educational Studies in Mathematics 66*, 3-21

Jahnke, H. N. (2005). A genetic approach to proof. En: M. Bosch. (ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 428-437). Sant Feliu de Guíxols, España: ERME.

Kirtcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentation in classroom proving processes.*ZDM-Mathematics Education 40*, 427-441.

Knipping, C., Rott, D. y Reid, D. (en prensa).Disparate arguments in mathematics classrooms.En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.*

Knuth, E., Choppin, J., & Bieda, K. (2009).Middle school students' productions of mathematical justifications. En M. Blanton, D. Stylianou, y E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 153–212). New York, NY: Routledge.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lakatos, I. (1978). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambrige, Reino Unido: Cambrige University Press.

Lovell, K. (1971). The development of the concept of mathematical proof in abler pupils. En M. Rosskopf, L. Steffe y S. Taback (Eds.), *Piagetian cognitive-development research and mathematical education* (pp. 66-80). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Mamona-Downs, J. y Downs, M. (2011). Proof: A game for pedants?. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 213-222). Rszéskow, Polonia: ERME.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp.173–204). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Martin, G. y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education 20*(1), 41-51.

Movshovitz-Hadar, N. (1993). The false coin problem, mathematical induction, and knowledge fragility. *Journal of Mathematical Behavior 12*, 253-268.

National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers (2010).*Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers

Paola D. (1998). Il problema delle parti. Prassi didattica e storia della matematica. *La didattica delle scienze 198*, 31–16.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics 66*, 23-41.

Perelman, C. y Olbrechts-Tyteca, L. (1969) *The new rhetoric. A treatise on argumentation*. Notre Dame, IN: University of Notre Dame Press.

Perry, P., Molina, O., Camargo, L. y Smaper, C. (2011). Analyzing the proving activity of a group of three students. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda

(Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 151-160). Rszéskow, Polonia: ERME.

Pfeiffer, K., (2010). A schema to analyse students' proof evaluations. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.192-201.) Rszéskow, Polonia: ERME.

Pinto, R. (2010).Evaluating inferences: The nature and role of warrants.En D. Hitchcock y B. Verheij (Eds.), *Arguing in the Toulmin model*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Planas, N., Font, V. y Edo, M. (2009). La confrontación de normas en la construcción de discursos de la matemática escolar. *Paradigma, 30*(2), 125-142.

Planas, N. y Civil, M. (2013).Language-as-resource and language-as-political: Tensions in the bilingual mathematics classroom. *Mathematics Education Research Journal, 25*(3), 361-378.

Polanyi, M. (1966).*The tacit dimension*. Londres, Reino Unido: Routledge and Keagan Paul.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Porteous, K. (1986). Children's appreciation of the significance of proof. En University of London Institute of Education (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 392-397). Londres, Reino Unido: PME.

Reichertz, J. (2007). Abduction: The logic of discovery of grounded theory. En A. Bryant y K. Charmaz (Eds.), *The SAGE handbook of grounded theory* (pp. 214-228). Thousand Oaks, CA: Sage.

Searle J. (1969). *Speech acts.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Selden, A. y Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tel whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education 34*(1), 4-36.

Sellars, W. (1953).Inference and meaning, *Mind 62*, 313-338.

Sfard, A. y Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking trough multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture and Activity, 8*(1), 42-76.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meet the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics 46*, 13-57.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. New York, NY: Cambrige University Press.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding mathematics. *For the Learning of Mathematics 10*(3), 24-36.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (vol. 4, pp. 827-876). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective.* New York, NY: Springer.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998).*Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing Grounded Theory*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Tilbury, D., & Walford, R. (1996). Defying the dominant paradigm in environmental education research. En M. Williams (Ed.), *Understanding geographical and environmental education: The role of research* (pp. 51-64). Londres, Reino Unido: Cassell Education.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Madrid: Península.

Toulmin, S. (1972).*Human understanding*. Princeton, MS: Princeton University Press.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry.En M. M. Lindquist y A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12, 1987 Year book* (pp. 17-31). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

van Manen, M. (1990). *Researching lived experience: Human science for an action sensitive pedagogy*. Londres, Reino Unido: Althouse.

Viholainen, A. (2011). The view of mathematics and argumentation. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.243-252). Rszéskow, Polonia: ERME.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Weber, K. y Mejía-Ramos J. P. (2011). Why and how mathematicians read proofs: An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics 76*, 329-344.

Weber, K. (2014). On proof. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, y D. Allan (Eds.), *Joint Meeting of the International Group for the Psychology of*

Mathematics Education (PME 38) and the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education (PME-NA 36) (Vol. 3, pp. 169-176). Vancouver, Canada: PME.

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education 39*, 431–459.

Wilensky, U. (1997). What is normal anyway? Therapy for epistemological anxiety.*Educational Studies in Mathematics 33*, 171-202.

Williams, E. (1980). An investigation of senior High school students' understanding of the nature of mathematical proof.*Journal for Research in Mathematics Education, 11*, 165-166.

Wittgenstein, L.(1953/2001).*Philosophical investigations*. Malden, MS: Blackwell.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 9–23). Utrecht, Países Bajos: PME.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics.*Journal for Research in Mathematics Education 27*(4), 458-477.

Yackel, E., Cobb, P. y Wood, T. (1991).Small group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics.*Journal for Research in Mathematics Education 2*(5), 390-408.

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics.*Educational Studies in Mathematics 60*, 297–321.