Problemas de módulos para una clase de foliaciones holomorfas.

David Marín

Dada una foliación holomorfa $\mathcal{F}_0$ en una superficie compleja S, el problema que se estudia es el de identificar el espacio de *módulos analíticos* en la clase de las foliaciones topológicamente conjugadas a $\mathcal{F}_0$. En otras palabras, se pretende responder a la pregunta de cuántas clases analíticas diferentes existen en una misma clase topológica. Se define pues el espacio de módulos de $\mathcal{F}_0$ como el conjunto de todas las foliaciones sobre S topológicamente conjugadas a $\mathcal{F}_0$, cocientado por la relación de equivalencia de ser analíticamente conjugadas.

Se han estudiado dos contextos diferentes: por una parte, el caso local, en el que $\mathcal{F}_0$ es un germen de foliación holomorfa en $\mathbb{C}^2$ con una singularidad aislada en el origen; y por otra parte, el caso global, en el que $\mathcal{F}_0$ es una foliación holomorfa singular en una superficie compleja compacta que es el espacio total de un fibrado localmente trivial sobre una curva compleja no singular.

La principal aportación de esta memoria se obtiene en el contexto local. Existen varios precedentes a este trabajo, entre los que podemos destacar los trabajos de D. Cerveau, X. Gómez-Mont, A. Lins Neto, F. Loray, J-F. Mattei, R. Moussu, M. Nicolau y P. Sad. La mayoría de estos estudios abordan un problema de módulos débil, debido a la utilización de deformaciones topológicamente triviales o despliegues.

En esta memoria se han obtenido resultados análogos y generalizaciones de los formulados por los autores anteriores en relación al problema débil. Entre ellos cabe destacar la rigidez genérica de las foliaciones definidas por 1-formas cuyo orden de anulación en la singularidad sea dos y la estructura de recubrimiento sobre $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ del espacio de módulos en el caso que el orden de anulación sea tres, así como la interpretación de su grupo fundamental en términos de *simetrías* de su representación de holonomía proyectiva. Las técnicas utilizadas también se adaptan al caso de gérmenes de foliaciones quasihomogéneas, obteniéndose resultados paralelos.

Respecto al contexto global se han obtenido resultados de rigidez sobre superficies fibradas, en la linea del Teorema de Ilyashenko sobre $\mathbb{CP}^2$. Se ha particularizado dicho estudio al caso de superficies regladas (en el que la fibra es la recta proyectiva $\mathbb{CP}^1$), donde se han estudiado también los espacios de módulos de algunas foliaciones no rígidas (foliaciones de Riccati).

Cabe destacar también que las técnicas utilizadas en ambos contextos tienen un punto en común: la existencia y estudio de una representación de holonomía que rige toda la dinámica de la foliación. Con la idea de generalizar esta técnica, en la última parte de la memoria se propone una noción de holonomía generalizada que puede desempeñar un papel similar para el caso de foliaciones en $\mathbb{CP}^2$ o $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ que no sean de Riccati. Este trabajo finaliza con un estudio detallado de dicha noción en un ejemplo explícito.