Capítol 3

Òrbites p-q ressonants

En aquest capítol estudiarem un tipus concret d'òrbites, les anomenades p-q ressonants. Són òrbites que "fan" p voltes al voltant del primari E en el sistema sideral, mentre que els primaris en fan q al voltant del seu centre de masses. Estudiarem com han de ser les condicions inicials del problema restringit per tal d'obtenir aquest tipus de solucions.

A la secció 3.3 establirem l'aplicació exterior: explicitarem la posició i velocitats aproximades a l'instant $t = t_2$ (temps en què retornem a $B(M, \mu^\alpha)$) per a òrbites p-q ressonants en termes de les seves condicions inicials.

3.1 Introducció

Hem vist fins ara que una òrbita que surti d'una bola de centre M i radi μ^α i que al cap d'un temps finit retorni a ella es pot aproximar per una de kepleriana durant aquest temps. D'una banda volem imposar que aquesta òrbita sigui d'un tipus concret i, de l'altra, utilitzar l'aproximació per l'òrbita kepleriana per a calcular, aproximadament, la posició i velocitat a l'instant de retorn a la bola $B(M, \mu^\alpha)$.

Definim les òrbites p-q ressonants.

Definició 3.1

Sigui $\mathbf{R}(t)$ *la solució de*

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{R}} \;=\; -(1-\mu)\dfrac{\mathbf{R}-\mathbf{R}_E}{R_1^3} - \mu\dfrac{\mathbf{R}-\mathbf{R}_M}{R_2^3}, \\ \quad \mathbf{R}(t_1) = \mathbf{R}_i, \qquad \dot{\mathbf{R}}(t_1) = \dot{\mathbf{R}}_i, \end{cases}$$

amb $|\mathbf{R}(t_1) - \mathbf{R}_M(t_1)| = \mu^\alpha$ i sigui t_2 tal que $|\mathbf{R}(t_2) - \mathbf{R}_M(t_2)| = \mu^\alpha$ (per tant $\mathbf{R}(t)$ és solució de (2.1)). Sigui $\mathbf{R}_{TB}(t)$ la solució del problema de dos cossos amb les mateixes condicions inicials que en el problema restringit, això és

$$\left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{R}} = -\dfrac{\mathbf{R}}{R^3}, \\ \mathbf{R}(t_1) = \mathbf{R}_i, \qquad \dot{\mathbf{R}}(t_1) = \dot{\mathbf{R}}_i, \end{array} \right.$$

(per tant, solució de (2.4)).

Llavors direm que $\mathbf{R}(t)$ és una òrbita p-q ressonant si

$$t_2 - t_1 = 2\pi q + \varepsilon\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}) = 2\pi p\tau + \delta\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}),$$

on $p, q \in \mathbb{N}$ són coprimers i $2\pi\tau$ és el període de $\mathbf{R}_{TB}$.

El que es demana amb aquesta condició és que, llevat de termes d'ordre μ^α, en el temps que el tercer cos triga en retrobar la bola $B(M, \mu^\alpha)$, l'òrbita kepleriana hagi fet p voltes i els dos primaris n'hagin fet q en el sistema sideral. L'objectiu d'aquesta secció serà trobar una relació entre ε, δ i les coordenades de la posició i velocitat inicials per tal de garantir que tenim una òrbita p-q ressonant.

Fixem una posició i velocitat de sortida, $\mathbf{r}_i$ i $\dot{\mathbf{r}}_i$, que en coordenades sinòdiques escrivíem com

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} \mu - 1 + \mu^\alpha \cos\varphi \cos\theta \\ \mu^\alpha \cos\varphi \sin\theta \\ \mu^\alpha \sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{r}}_i = v_i \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\psi \\ \cos\phi \sin\psi \\ \sin\phi \end{pmatrix},$$

(vegeu (1.5)) on (recordem (2.21))

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \Delta\phi\, \mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}), \\ \psi &= \psi_0 + \Delta\psi\, \mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}). \end{aligned}$$

Imposem la condició de tornar a estar a una distància μ^α del primari M a l'instant de temps t_2. Per tal de donar una aproximació del valor de la posició i de la velocitat del tercer cos a t_2, usarem que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}(t_2) \\ \dot{\mathbf{R}}(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{TB}(t_2) \\ \dot{\mathbf{R}}_{TB}(t_2) \end{pmatrix} + O(\mu^{1-\alpha})$$

(vegeu la secció 2.3). Així doncs, de la definició de t_2 i com que $\mu^{2\alpha} = O(\mu^{1-\alpha})$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(t_2) &= \mathbf{R}_{TB}(t_2) + O(\mu^{1-\alpha}) \\
&= \mathbf{R}_{TB}(t_1 + 2\pi p\tau + \delta\mu^\alpha) + O(\mu^{1-\alpha}) \\
&= \mathbf{R}_{TB}(t_1 + 2\pi p\tau) + \dot{\mathbf{R}}_{TB}(t_1 + 2\pi p\tau)\mu^\alpha\delta + O(\mu^{1-\alpha}) \\
&= \mathbf{R}_{TB}(t_1) + \dot{\mathbf{R}}_{TB}(t_1)\mu^\alpha\delta + O(\mu^{1-\alpha}) \\
&= \mathbf{R}(t_1) + \dot{\mathbf{R}}(t_1)\delta\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha}),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

on hem utilitzat que $2\pi\tau$ és el període de l'òrbita kepleriana. Anàlogament, com que 2π és el període dels primaris, tindrem

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_M(t_2) &= \mathbf{R}_M(t_1 + 2\pi q + \varepsilon\mu^\alpha) + O(\mu^{2\alpha}) \\
&= \mathbf{R}_M(t_1) + \dot{\mathbf{R}}_M(t_1)\varepsilon\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}).
\end{aligned}$$

Per tant, la condició d'estar a $B(M, \mu^\alpha)$ per a $t = t_2$ s'escriu

$$|\mathbf{R}(t_2) - \mathbf{R}_M(t_2)| = |\mathbf{R}(t_1) - \mathbf{R}_M(t_1) + \mu^\alpha(\dot{\mathbf{R}}(t_1)\delta - \dot{\mathbf{R}}_M(t_1)\varepsilon) + O(\mu^{1-\alpha})| = \mu^\alpha.$$

Fem servir l'expressió de les condicions inicials siderals donada a la secció 1.3 en termes de les coordenades esfèriques $\varphi, \theta, \phi, \psi$ i també que $v_i = \sqrt{3 - C_J} + O(\mu^{1-\alpha})$ (vegeu (1.7)):

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(t_1) - \mathbf{R}_M(t_1) + \mu^\alpha\Big(\dot{\mathbf{R}}(t_1)\delta - \dot{\mathbf{R}}_M(t_1)\varepsilon\Big) &= \\
= \mu^\alpha \left[\begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos(\theta + t_1) \\ \cos\varphi\,\sin(\theta + t_1) \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + (\delta - \varepsilon) \begin{pmatrix} -(\mu - 1)\sin t_1 \\ (\mu - 1)\cos t_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta v_i \begin{pmatrix} \cos\phi\,\cos(\psi + t_1) \\ \cos\phi\,\sin(\psi + t_1) \\ \sin\phi \end{pmatrix} \right] \\
= \mu^\alpha \left[\begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos(\theta + t_1) \\ \cos\varphi\,\sin(\theta + t_1) \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + (\delta - \varepsilon) \begin{pmatrix} \sin t_1 \\ -\cos t_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\
\left. + \,\delta\sqrt{3 - C_J} \begin{pmatrix} \cos\phi\,\cos(\psi + t_1) \\ \cos\phi\,\sin(\psi + t_1) \\ \sin\phi \end{pmatrix} \right] + O(\mu^{1-\alpha}) = \mu^\alpha\mathbf{w} + O(\mu^{1-\alpha}).
\end{aligned}$$

Així doncs, tenim que $|\mathbf{R}(t_2) - \mathbf{R}_M(t_2)| = \mu^\alpha|\mathbf{w}| + O(\mu^{1-\alpha})$, i el que ens cal és expressar $|\mathbf{w}|$

en potències de μ.

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{w}|^2 &= (\cos\varphi\,\cos(\theta+t_1) + (\delta-\varepsilon)\sin t_1 + \delta\sqrt{3-C_J}\cos\phi\,\cos(\psi+t_1))^2 \\
&\quad + (\cos\varphi\,\sin(\theta+t_1) - (\delta-\varepsilon)\cos t_1 + \delta\sqrt{3-C_J}\cos\phi\,\sin(\psi+t_1))^2 \\
&\quad + (\sin\varphi + \delta\sqrt{3-C_J}\sin\phi)^2 \\
&= 1 + (\varepsilon-\delta)^2 + (3-C_J)\delta^2 + 2(\varepsilon-\delta)\delta\sqrt{3-C_J}\,\cos\phi\,\sin\psi \\
&\quad + 2\delta\sqrt{3-C_J}\,(\cos\varphi\,\cos\phi\,\cos(\psi-\theta) + \sin\varphi\,\sin\psi) + 2(\varepsilon-\delta)\cos\varphi\,\sin\theta. \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Recordem d'una banda (1.8), que ens diu que

$$
\cos a = \cos\varphi\,\cos\phi\,\cos(\psi-\theta) \;+\; \sin\varphi\,\sin\phi,
$$

on a és l'angle que formen els vectors $\mathbf{r}_{2i}$ i $\dot{\mathbf{r}}_i$. D'altra banda recordem també que els angles ϕ i ψ estan expressats en potències de μ (vegeu (2.21)). Així doncs, de les relacions (2.22) podem escriure que

$$
\cos a = \cos\varphi\,\cos\phi_0\,\cos(\psi_0-\theta) \;+\; \sin\varphi\,\sin\phi_0 + O(\mu^\alpha) = \cos a_0 + O(\mu^\alpha). \qquad (3.3)
$$

Incorporant a (3.2) aquesta expressió i els desenvolupaments de $\cos\phi$ i $\sin\psi$ tindrem que

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{w}|^2 &= 1 + (\varepsilon-\delta)^2 + \delta^2(3-C_J) + \,2\,(\varepsilon-\delta)\cos\varphi\,\sin\theta \,+\, 2\delta\sqrt{3-C_J}\,\cos a_0 \\
&\quad + 2(\varepsilon-\delta)\delta\,\sqrt{3-C_J}\cos\phi_0\,\sin\psi_0 \,+\, O(\mu^\alpha) \\
&= |\mathbf{w_0}|^2 + O(\mu^\alpha).
\end{aligned}
$$

Resumint, el que ens queda és $|\mathbf{R}(t_2) - \mathbf{R}_M(t_2)| = \mu^\alpha|\mathbf{w_0}| + O(\mu^{1-\alpha})$ i la condició que imposem és

$$
|\mathbf{w_0}| \;=\; 1,
$$

això és,

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon-\delta)^2 + \delta^2(3-C_J) + \,2\,(\varepsilon-\delta)\cos\varphi\,\sin\theta \,+\, 2\delta\sqrt{3-C_J}\,\cos a_0& \\
+\, 2(\varepsilon-\delta)\delta\,\sqrt{3-C_J}\cos\phi_0\,\sin\psi_0 \;=\; 0.& \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Aquesta equació representa una el·lipse en el pla $(\delta, \varepsilon-\delta)$ (vegeu la figura 3.1), excepte en el cas en què el determinant de la part quadràtica de (3.4) s'anul·la. En aquest cas l'el·lipse degenera en dues rectes paral·leles. A la secció següent estudiarem amb més detall ambdós casos. Observem que els valors $\delta = 0$ i $\varepsilon - \delta = 0$ sempre verifiquen l'equació (3.4).

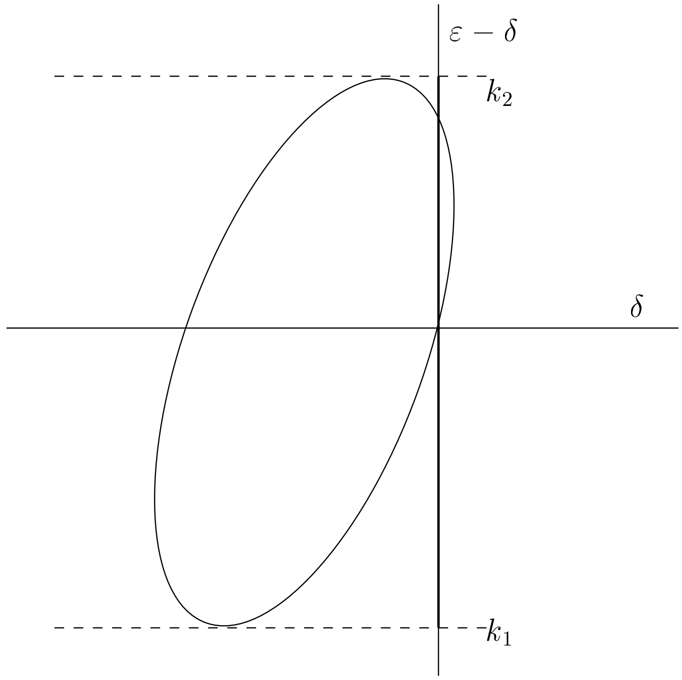

Figura 3.1: Representació qualitativa de la corba donada per l'equació (3.4) en el cas no degenerat. L'el·lipse dóna el rang de valors admissibles per a δ i $\varepsilon - \delta$. Noteu que aquesta el·lipse sempre passa per l'origen de coordenades.

3.2 Condicions per obtenir òrbites p-q ressonants

D'una banda, la igualtat (3.4) ens restringeix el rang de valors que poden tenir ε i δ. D'una altra, el període de l'òrbita el·líptica està relacionat amb aquests valors per la definició d'òrbita ressonant. Tot seguit usarem aquesta relació per escriure $\varepsilon - \delta$ en termes de les coordenades esfèriques de les condicions inicials i obtenir-ne una relació amb p i q. A més veurem com s'hi tradueix la condició (3.4).

Sabem que el període de l'òrbita el·líptica $\mathbf{R}_{TB}$ i la seva energia estan relacionats per la igualtat

$$\tau^{2/3} = \frac{1}{2|h|}.$$

Desenvoluparem en potències de μ cada un dels dos costats d'aquesta igualtat i n'igualarem els termes del mateix ordre.

Ja havíem calculat l'expressió de h en termes de potències de μ a (2.23). Com que l'energia és negativa, tindrem

$$\begin{aligned} 2|h| &= C_J - 2 + 2\sqrt{3 - C_J}\cos\phi_0 \,\sin\psi_0 - 2\Delta h \mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha}) \\ &= 2|h_0| - 2\Delta h \mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha}), \end{aligned}$$

essent

$$\begin{aligned} \Delta h = &\sqrt{3 - C_J}\left(\Delta\phi \,\sin\phi_0 \,\sin\psi_0 - \Delta\psi \,\cos\phi_0 \,\cos\psi_0 + \cos\varphi \,\cos\phi_0 \,\sin(\psi_0 - \theta)\right) \\ &- 2\,\cos\varphi \,\sin\theta. \end{aligned}$$

Invertim-ho i tindrem un dels desenvolupaments que buscàvem:

$$\frac{1}{2|h|} = \frac{1}{2|h_0|\left(1 - \dfrac{\Delta h}{|h_0|}\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha})\right)} = \frac{1}{2|h_0|}\left(1 + \frac{\Delta h}{|h_0|}\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha})\right). \tag{3.5}$$

Vegem què podem dir del període τ de l'òrbita kepleriana. Observem que de la condició de ressonància tenim que $2\pi\, q + \varepsilon\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}) = 2\pi\tau\, p + \delta\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha})$, de la qual es dedueix que

$$\tau = \frac{q}{p} + \frac{\varepsilon - \delta}{2\pi p}\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}),$$

i per tant

$$\begin{aligned} \tau^{2/3} &= \left(\left(\frac{q}{p}\right)^2 + \frac{q}{\pi p^2}(\varepsilon - \delta)\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha})\right)^{1/3} = \left(\frac{q}{p}\right)^{2/3} + \left(\frac{p}{q}\right)^{4/3}\frac{q}{3\pi p^2}(\varepsilon - \delta)\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}) \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{2/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{p}{q}\right)^{1/3}\frac{1}{\pi p}(\varepsilon - \delta)\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Finalment, igualant els termes del mateix ordre de les expressions (3.5) i (3.6), obtenim que:

a) $\left(\dfrac{q}{p}\right)^{2/3} = \dfrac{1}{2|h_0|}$ o, equivalentment, $2|h_0| = \left(\dfrac{p}{q}\right)^{2/3}$. Usant l'expressió de $2|h_0|$ en termes de C_J i els angles inicials, tindrem que

$$C_J - 2 + 2\sqrt{3 - C_J}\cos\phi_0 \,\sin\psi_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^{2/3}. \tag{3.7}$$

b) Dels termes d'ordre μ^α es té

$$\frac{1}{2|h_0|}\frac{\Delta h}{|h_0|} = \frac{1}{3}\left(\frac{p}{q}\right)^{1/3}\frac{1}{\pi p}(\varepsilon - \delta),$$

i, aïllant el terme $\varepsilon - \delta$, tindrem que

$$\varepsilon - \delta = 3\pi p \left(\frac{1}{2|h_0|}\right)^2 \left(\frac{q}{p}\right)^{1/3} 2\Delta h = 6\pi p \left(\frac{q}{p}\right)^{5/3} \Delta h = 6\pi q \left(\frac{q}{p}\right)^{2/3} \Delta h,$$

o, explícitament,

$$\begin{aligned} \varepsilon - \delta = 6\pi q \left(\frac{q}{p}\right)^{2/3} \Big(&\sqrt{3 - C_J}\big(\cos\varphi \, \cos\phi_0 \, \sin(\psi_0 - \theta) + \Delta\phi \, \sin\phi_0 \, \sin\psi_0 \\ &- \Delta\psi \, \cos\phi_0 \, \cos\psi_0\big) - 2 \, \cos\varphi \, \cos\theta\Big). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Observacions:

1. Teníem, com a condició perquè l'òrbita exterior aproximada (la solució del problema de Kepler (2.19)) sigui el·líptica, que l'energia fos negativa. Això ho havíem escrit a (2.24) com

$$\cos\phi_0 \, \sin\psi_0 \; > \; \frac{2 - C_J}{2\sqrt{3 - C_J}},$$

la qual cosa queda assegurada amb la condició (3.7).

2. De la mateixa igualtat (3.7) podem extreure diferents informacions. Per començar $(p/q)^{2/3} \leq C_J - 2 + 2\sqrt{3 - C_J} \leq 2$, d'on tindrem una restricció per a p i q que és

$$\frac{p}{q} \leq 2\sqrt{2}.$$

D'altra banda, observem que, per força,

$$\left| \frac{2 - C_J + \left(\frac{p}{q}\right)^{2/3}}{2\sqrt{3 - C_J}} \right| \leq 1,$$

condició que es pot escriure com

$$C_{J1} = \left(\frac{p}{q}\right)^{2/3} - 2\sqrt{2 - \left(\frac{p}{q}\right)^{2/3}} \leq C_J \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{2/3} + 2\sqrt{2 - \left(\frac{p}{q}\right)^{2/3}} = C_{J2}. \tag{3.9}$$

Això és, fixats p i q, el rang de valors admissibles per a C_J és $[C_{J1}, C_{J2}] \in (-2\sqrt{2}, 3)$ (vegeu la figura 3.2).

Finalment, recordem la condició (2.25), que fa referència al fet que l'òrbita kepleriana aproximada no sigui de col·lisió. Si $\phi_0 = 0$ (per exemple si l'òrbita és plana), cal exigir que $\sin\psi_0 \neq 1/\sqrt{3-C_J}$. En el supòsit que $\phi_0 = 0$, la condició (3.7) es pot escriure

$$\sin\psi_0 = \frac{2 - C_J + \left(\frac{p}{q}\right)^{2/3}}{2\sqrt{3-C_J}},$$

i demanar que l'òrbita no sigui de col·lisió equivaldrà a demanar $C_J \neq \left(\frac{p}{q}\right)^{2/3}$. Per tant, la condició de no-col·lisió serà

$$\phi_0 \neq 0, \qquad \text{o} \qquad C_J \neq \left(\frac{p}{q}\right)^{2/3} \tag{3.10}$$

3. Cal vigilar que $2h_0$ no s'acosti massa a zero per tal que els desenvolupaments de Taylor per a l'invers de l'energia siguin correctes. N'hi haurà prou amb demanar que $\frac{\mu^{2\alpha}}{2h_0} = O(\mu^{1-\alpha})$ com a mínim, o també (usant que $2|h_0| = (p/q)^{2/3}$)

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{2/3} > \mu^{3\alpha-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad p > q\mu^{(3\alpha-1)3/2}.$$

Això ens limita el rang de p i q segons els valors de μ. Per exemple, si $\alpha = 0.4$, els valors màxims de q en el cas $p = 1$ serien

μ	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
màxim q	7.943	15.84	31.6	63.09

La tria del valor 0.4 per a α no és arbitrària. Més endavant veurem que aquest és un bon valor.

4. $\varepsilon - \delta$ ha de verificar l'equació (3.4) que, com ja hem vist, representa una el·lipse al pla $(\delta, \varepsilon - \delta)$. Així doncs, caldrà que $k_1 < \varepsilon - \delta < k_2$, on k_i, $i = 1, 2$ són els valors màxims i mínims que es veuen a la figura 3.1.

Tot seguit trobarem els valors màxim i mínim de $\varepsilon - \delta$, k_2 i k_1, en termes de θ, φ, ψ_0, ϕ_0 i C_J. Per fer-ho haurem de distingir dos casos:

1. Cas no degenerat: l'equació (3.4) és, efectivament, la d'una el·lipse.

2. Cas degenerat: l'equació (3.4) representa dues rectes.

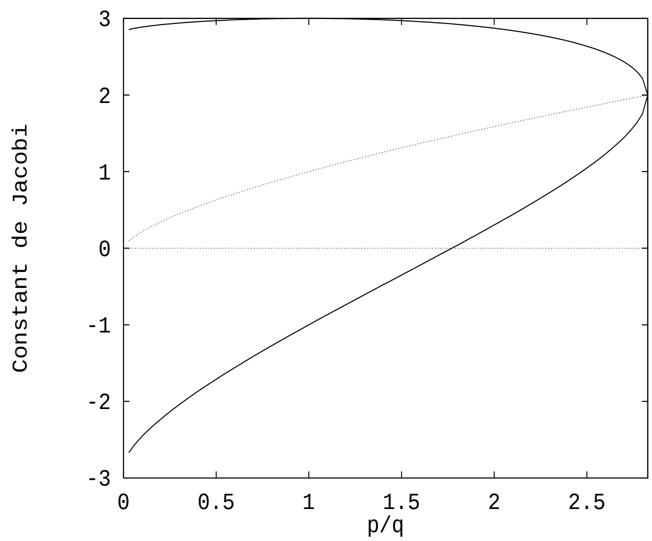

Figura 3.2: La regió delimitada per les parts superior i inferior de la corba contínua defineix el domini de valors admissibles per a C_J, (C_{J1}, C_{J2}), fixat un valor de p/q. La corba interior puntejada representa $C_J = \left(\frac{p}{q}\right)^{2/3}$, punts que cal excloure si $\phi_0 = 0$.

Per saber quan ens trobarem en cada cas calculem el determinant de la matriu associada a la part quadràtica de l'equació de l'el·lipse (3.4):

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 - C_J & \sqrt{3 - C_J}\cos\phi_0\,\sin\psi_0 \\ \sqrt{3 - C_J}\cos\phi_0\,\sin\psi_0 & 1 \end{vmatrix} = (3 - C_J)(1 - \cos^2\phi_0\,\sin^2\psi_0).$$

Aquest determinant serà zero si i només si $1 = \cos^2\phi_0\,\sin^2\psi_0$, o equivalentment, quan $\phi_0 = 0$ i $\psi_0 = \pi/2$ o $\psi_0 = 3\pi/2$. Aquests seran els casos en què tindrem dues rectes. Denotem momentàniament $x = \delta$ i $y = \varepsilon - \delta$. Llavors podem esciure l'equació (3.4) com

$$y^2 + (3 - C_J)x^2 + (2\sqrt{3 - C_J}\cos\phi_0\,\sin\psi_0)\,x\,y + \,(2\,\cos\varphi\,\sin\theta)\,y \\ +\,(2\sqrt{3 - C_J}\,\cos a_0)\,x = 0. \quad (3.11)$$

Estudiem aquests dos casos.

1. Cas degenerat: $1 = \cos^2\phi_0\,\sin^2\psi_0$. Suposem primer $\phi_0 = 0$ i $\psi_0 = \pi/2$ i per tant $\cos\phi_0\,\sin\psi_0 = 1$ i $\cos a_0 = \cos\varphi\,\sin\theta$. L'equació (3.11) s'escriurà

$$(3 - C_J)x^2 + 2\sqrt{3 - C_J}\,xy + y^2 + 2\cos\varphi\,\sin\theta\,(\sqrt{3 - C_J}\,x + y) \\ = (\sqrt{3 - C_J}\,x + y)(\sqrt{3 - C_J}\,x + y + 2\cos\varphi\,\sin\theta) = 0,$$

d'on obtenim les rectes

$$\begin{aligned} \varepsilon - \delta &= -\,\delta\sqrt{3 - C_J}\,, \\ \varepsilon - \delta &= -\,\delta\sqrt{3 - C_J} - 2\cos\varphi\,\sin\theta\,. \end{aligned}$$

En el cas $\phi_0 = 0$ i $\psi_0 = 3\pi/2$, tenim que $\cos\phi_0\,\sin\psi_0 = -1$ i $\cos a_0 = -\cos\varphi\,\sin\theta$ i l'equació (3.11) s'escriurà

$$\begin{aligned} (3 - C_J)x^2 - 2\sqrt{3 - C_J}\,xy + y^2 - 2\cos\varphi\,\sin\theta\,(\sqrt{3 - C_J}\,x - y) \\ = (\sqrt{3 - C_J}\,x - y)(\sqrt{3 - C_J}\,x - y - 2\cos\varphi\,\sin\theta) = 0, \end{aligned}$$

i en aquest cas les rectes seran

$$\begin{aligned} \varepsilon - \delta &= \delta\sqrt{3 - C_J}\,, \\ \varepsilon - \delta &= \delta\sqrt{3 - C_J} + 2\cos\varphi\,\sin\theta\,. \end{aligned}$$

En ambdós casos $k_1 = -\infty$ i $k_2 = +\infty$.

2. Cas no degenerat: $1 \neq \cos^2\phi_0\,\sin^2\psi_0$. Observem primerament que, en aquest cas, s'haurà de donar la desigualtat estricta a (3.9). Per tant, tindrem $C_J \in (C_{J1}, C_{J2})$.

   Busquem els valors mínim i màxim per a y: k_1 i k_2. Escrivim l'equació de l'el·lipse (3.11) com

   $$a_{11}x^2 + 2(a_{12}\,y + b_1)\,x + 2\,b_2 y + y^2 = 0,$$

   on $a_{11} = 3 - C_J$, $a_{12} = \sqrt{3 - C_J}\cos\phi_0\,\sin\psi_0$, $b_1 = \sqrt{3 - C_J}\,\cos a_0$ i $b_2 = \cos\varphi\,\sin\theta$. Les solucions d'aquesta equació seran

   $$\begin{aligned} x &= \frac{-2(b_1 + a_{12}y) \pm \sqrt{4(b_1 + a_{12}y)^2 - 4a_{11}(2b_2 y + y^2)}}{2a_{11}} \\ &= \frac{-b_1 - a_{12}y \pm \sqrt{b_1^2 + 2b_1 a_{12} y + a_{12}^2 y^2 - 2a_{11} b_2 y - a_{11} y^2}}{a_{11}} \\ &= \frac{-b_1 - a_{12}y \pm \sqrt{(a_{12}^2 - a_{11})y^2 + 2(b_1 a_{12} - a_{11} b_2)y + b_1^2}}{a_{11}}, \end{aligned}$$

   i el que cal demanar és que el discriminant sigui positiu. Els valors per als quals es faci zero seran els valors extrems per les a y. Així:

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \frac{-2(b_1 a_{12} - a_{11} b_2) \pm \sqrt{4(b_1 a_{12} - a_{11} b_2)^2 - 4b_1^2(a_{12}^2 - a_{11})}}{2(a_{12}^2 - a_{11})} \\ &= \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{12} \pm \sqrt{(b_1 a_{12} - a_{11} b_2)^2 + b_1^2(a_{11} - a_{12}^2)}}{a_{12}^2 - a_{11}}, \end{aligned}$$

i, per tant, aquests seran els dos valors buscats. Només hem de vigilar què passa en el cas $(b_1 a_{12} - a_{11} b_2)^2 + b_1^2(a_{11} - a_{12}^2) = 0$. Com que $a_{11} - a_{12}^2 > 0$, això només es pot donar si $b_1 = b_2 = 0$. Això implicaria $\cos a_0 = 0$, però com que tenim la condició

$$\cos a = \cos a_0 + O(\mu^\alpha) > 0,$$

podem excloure el cas $\cos a_0 = 0$. Per tant, ens assegurem que efectivament obtindrem dos valors diferents k_1 i k_2. Escrivim-los en termes dels coeficients de l'equació (3.4). D'una banda

$$\begin{aligned} &(b_1 a_{12} - a_{11} b_2)^2 + b_1^2(a_{11} - a_{12}^2) \\ &\qquad = \Big((3 - C_J)\, \cos a_0\, \cos\phi_0\, \sin\psi_0 - (3 - C_J)\cos\varphi\,\sin\theta\Big)^2 \\ &\qquad\quad + (3 - C_J)\cos^2 a_0 \Big((3 - C_J) - (3 - C_J)\cos^2\phi_0\, \sin^2\psi_0\Big) \\ &\qquad = (3 - C_J)^2 \Big((\cos a_0 - 2\cos\varphi\, \cos\phi_0\, \sin\theta\, \sin\psi_0)\cos a_0 + \cos^2\varphi\, \sin^2\theta\Big), \end{aligned}$$

i d'una altra $a_{11} b_2 - b_1 a_{12} = (3 - C_J)(\cos\varphi\, \sin\theta - \cos a_0\, \cos\phi_0\, \sin\psi_0)$. Això ens dóna finalment

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\cos a_0\, \cos\phi_0\, \sin\psi_0 - \cos\varphi\, \sin\theta - \sqrt{\Delta k}}{1 - \cos^2\phi_0\, \sin^2\psi_0}, \\ k_2 &= \frac{\cos a_0\, \cos\phi_0\, \sin\psi_0 - \cos\varphi\, \sin\theta + \sqrt{\Delta k}}{1 - \cos^2\phi_0\, \sin^2\psi_0}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

on $\Delta k = (\cos a_0 - 2\cos\varphi\, \cos\phi_0\, \sin\theta\, \sin\psi_0)\cos a_0 + \cos^2\varphi\, \sin^2\theta$ i $k_1 < 0$ i $k_2 > 0$.

Retornem ara a l'expressió de $\varepsilon - \delta$ en termes de les condicions inicials (3.8). El cas degenerat no s'estudiarà en la memòria, ja que implica que tant δ com $\varepsilon - \delta$ poden prendre qualsevol valor real i això ens diria que t_2 pot ser tan gran com vulguem, fet que no ens interessa. Centrem-nos, doncs, només en el cas no degenerat, en el qual la condició és

$k_1 \le \varepsilon - \delta \le k_2$. Denotem per $\lambda = 6\pi q \left(\frac{q}{p}\right)^{2/3}$ i

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= A(\varphi, \theta, \phi_0, \psi_0, \Delta\phi, \Delta\psi) \\
&= \lambda\sqrt{3 - C_J}(\cos\varphi \, \cos\phi_0 \, \sin(\psi_0 - \theta) + \Delta\phi \, \sin\phi_0 \, \sin\psi_0 - \Delta\psi \, \cos\phi_0 \, \cos\psi_0) \\
&\quad - 2\lambda \cos\varphi \, \cos\theta, \\
\mathbf{B} &= B(\varphi, \theta, \phi_0, \psi_0) \\
&= \frac{\cos a_0 \, \cos\phi_0 \, \sin\psi_0 - \cos\varphi \, \sin\theta}{1 - \cos^2\phi_0 \, \sin^2\psi_0}, \\
\mathbf{C} &= C(\varphi, \theta, \phi_0, \psi_0) \\
&= \frac{\sqrt{(\cos a_0 - 2\cos\varphi \, \cos\phi_0 \, \sin\theta \, \sin\psi_0)\cos a_0 + \cos^2\varphi \, \sin^2\theta}}{1 - \cos^2\phi_0 \, \sin^2\psi_0}
\end{aligned}$$

de manera que la condició per a $\varepsilon - \delta$ s'escriu

$$\begin{aligned}
B(\varphi, \theta, \phi_0, \psi_0) - C(\varphi, \theta, \phi_0, \psi_0) &\le A(\varphi, \theta, \phi_0, \psi_0, \Delta\phi, \Delta\psi) \\
&\le B(\varphi, \theta, \phi_0, \psi_0) + C(\varphi, \theta, \phi_0, \psi_0),
\end{aligned}$$

o, també,

$$|A(\varphi, \theta, \phi_0, \psi_0, \Delta\phi, \Delta\psi) - B(\varphi, \theta, \phi_0, \psi_0)| \le C(\varphi, \theta, \phi_0, \psi_0), \tag{3.13}$$

on ϕ_0 i ψ_0 estan lligades per la relació (3.7).

Observem que les condicions trobades en aquesta secció són les necessàries per assegurar l'existència d'òrbites p-q ressonants. Un estudi detallat d'aquestes òrbites en el cas pla es troba a [2].

3.3 Aplicació exterior per a òrbites p-q ressonants

Fins ara hem obtingut restriccions sobre les condicions inicials $\mathbf{r}_i$ i $\dot{\mathbf{r}}_i$ per tal de tenir una òrbita p-q ressonant (expressions (3.7) i (3.13)), que l'òrbita kepleriana aproximada sigui el·líptica i de no-col·lisió ((2.24) per a l'energia i (3.10) per al moment angular) i per garantir la sortida de la bola $B(M, \mu^\alpha)$ (condició (1.8)). Vegem ara com s'escriuen en termes de $\mathbf{r}_i$ i $\dot{\mathbf{r}}_i$ la posició i velocitat en què es troba l'òrbita a l'instant $t = t_2$ (que nomenarem posició i velocitat finals). En coordenades siderals, ja havíem vist al principi del capítol (vegeu (3.1)) que

$$\mathbf{R}(t_2) = \mathbf{R}(t_1) + \dot{\mathbf{R}}(t_1)\delta\,\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha}).$$

Per a la velocitat, usem de nou que l'òrbita kepleriana aproxima l'òrbita del problema restringit, la definició de t_2 i les equacions del problema de dos cossos (2.19). Tenim que

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}(t_2) &= \dot{\mathbf{R}}_{TB}(t_2) + O(\mu^{1-\alpha}) = \dot{\mathbf{R}}_{TB}(t_1 + 2\pi p\tau + \delta\mu^\alpha) + O(\mu^{1-\alpha}),\\ &= \dot{\mathbf{R}}_{TB}(t_1) + \ddot{\mathbf{R}}_{TB}(t_1)\delta\,\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha}) = \dot{\mathbf{R}}(t_1) - \frac{\mathbf{R}(t_1)}{R(t_1)^3}\delta\,\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha}).\end{aligned}$$

Així doncs, l'aplicació exterior queda definida per

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t_2) &= \mathbf{R}_i + \dot{\mathbf{R}}_i\delta\,\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha}),\\ \dot{\mathbf{R}}(t_2) &= \dot{\mathbf{R}}_i - \frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3}\delta\,\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha}).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Escriguem-la en coordenades sinòdiques. Comencem pel vector posició. Prenem la primera igualtat de (3.14) i usem el canvi de coordenades sinòdiques a siderals descrit a (1.1). Tenim que

$$\begin{aligned}G(t_2)\mathbf{r}(t_2) &= G(t_1)\mathbf{r}_i + \Big(G(t_1)\dot{\mathbf{r}}_i + \dot{G}(t_1)\mathbf{r}_i\Big)\delta\,\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha}),\\ \mathbf{r}(t_2) &= G^T(t_2)\Big(G(t_1)\mathbf{r}_i + \Big(G(t_1)\dot{\mathbf{r}}_i + \dot{G}(t_1)\mathbf{r}_i\Big)\delta\,\mu^\alpha\Big) + O(\mu^{1-\alpha}).\end{aligned} \tag{3.15}$$

D'una banda

$$\begin{aligned}G^T(t_2)G(t_1) &= \begin{pmatrix}\cos(t_2-t_1) & \sin(t_2-t_1) & 0\\ -\sin(t_2-t_1) & \cos(t_2-t_1) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\\ G^T(t_2)\dot{G}(t_1) &= \begin{pmatrix}\sin(t_2-t_1) & -\cos(t_2-t_1) & 0\\ \cos(t_2-t_1) & \sin(t_2-t_1) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3.16}$$

i de l'altra

$$\begin{aligned}\cos(t_2-t_1) &= \cos(2\pi q + \varepsilon\,\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha})) = 1 + O(\mu^{1-\alpha}),\\ \sin(t_2-t_1) &= \sin(2\pi q + \varepsilon\,\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha})) = \varepsilon\,\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha}).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Per tant, tornant a (3.15) tenim que la posició final en coordenades sinòdiques s'escriu com

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t_2) &= \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon\,\mu^\alpha & 0 \\ -\varepsilon\,\mu^\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \delta\,\mu^\alpha) + \begin{pmatrix} \varepsilon\,\mu^\alpha & -1 & 0 \\ 1 & \varepsilon\,\mu^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r}_i \delta\,\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & (\varepsilon-\delta)\mu^\alpha & 0 \\ -(\varepsilon-\delta)\mu^\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}_i + \delta\,\mu^\alpha \dot{\mathbf{r}}_i + O(\mu^{1-\alpha}). \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Prenem ara la segona igualtat de (3.14) i, usant el mateix canvi (1.1), tindrem

$$\begin{aligned}
G(t_2)\dot{\mathbf{r}}(t_2) + \dot{G}(t_2)\mathbf{r}(t_2) &= G(t_1)\dot{\mathbf{r}}_i + \dot{G}(t_1)\mathbf{r}_i - \frac{\delta\,\mu^\alpha}{r_i^3} G(t_1)\mathbf{r}_i + O(\mu^{1-\alpha}), \\
\dot{\mathbf{r}}(t_2) + G^T(t_2)\dot{G}(t_2)\mathbf{r}(t_2) &= G^T(t_2)\left(G(t_1)\dot{\mathbf{r}}_i + \dot{G}(t_1)\mathbf{r}_i - \frac{\delta\,\mu^\alpha}{r_i^3} G(t_1)\mathbf{r}_i \right) + O(\mu^{1-\alpha}). \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

D'una banda, usant (3.18), tenim que el segon sumand de l'esquerra de la igualtat (3.19) es pot escriure

$$G^T(t_2)\dot{G}(t_2)\mathbf{r}(t_2) = \frac{1}{2}A_3\mathbf{r}(t_2) = \begin{pmatrix} (\varepsilon-\delta)\mu^\alpha & -1 & 0 \\ 1 & (\varepsilon-\delta)\mu^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r}_i + \frac{\delta\,\mu^\alpha}{2} A_3 \dot{\mathbf{r}}_i + O(\mu^{1-\alpha}).$$

De l'altra, tornant a fer servir les igualtats (3.16) i (3.17), el terme de la dreta a (3.19) serà de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon\,\mu^\alpha & 0 \\ -\varepsilon\,\mu^\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}_i + \begin{pmatrix} \left(\varepsilon - \frac{\delta}{r_i^3}\right)\mu^\alpha & -1 & 0 \\ 1 & \left(\varepsilon - \frac{\delta}{r_i^3}\right)\mu^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\delta}{r_i^3}\mu^\alpha \end{pmatrix} \mathbf{r}_i + O(\mu^{1-\alpha}).$$

Introduïm les dues últimes expressions obtingudes a (3.19) i aillem $\dot{\mathbf{r}}_2$. Tindrem que la velocitat final en coordenades sinòdiques és

$$\dot{\mathbf{r}}(t_2) = \begin{pmatrix} \left(1-\dfrac{1}{r_i^3}\right)\delta\,\mu^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\dfrac{1}{r_i^3}\right)\delta\,\mu^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\delta}{r_i^3}\mu^\alpha \end{pmatrix}\mathbf{r}_i + \begin{pmatrix} 1 & (\varepsilon+\delta)\mu^\alpha & 0 \\ -(\varepsilon+\delta)\mu^\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\dot{\mathbf{r}}_i + O(\mu^{1-\alpha}).$$

Per acabar, en el càlcul de l'energia de l'òrbita kepleriana (secció 2.4) ja havíem vist que $1/R_i = 1 + O(\mu^\alpha)$. Com que les distàncies no canvien d'un sistema de referència a l'altre, tindrem que $1 - 1/r_i^3 = O(\mu^\alpha)$, i per tant la velocitat final es pot escriure

$$\dot{\mathbf{r}}(t_2) = \begin{pmatrix} 1 & (\varepsilon+\delta)\mu^\alpha & 0 \\ -(\varepsilon+\delta)\mu^\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\dot{\mathbf{r}}_i + O(\mu^{1-\alpha}). \tag{3.20}$$

Resumint, definim a partir de (3.18) i (3.20) l'aplicació exterior en coordenades sinòdiques com

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_e &= \left(I - \frac{(\varepsilon-\delta)}{2}\,\mu^\alpha A_3\right)\mathbf{r}_i + \delta\,\mu^\alpha\dot{\mathbf{r}}_i, \\ \mathbf{v}_e &= \left(I - \frac{(\varepsilon+\delta)}{2}\,\mu^\alpha A_3\right)\dot{\mathbf{r}}_i, \end{aligned} \tag{3.21}$$

(on I és la matriu identitat 3×3) i, per tant, el que hem vist és que

$$\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_e + O(\mu^{1-\alpha}), \qquad \dot{\mathbf{r}}(t_2) = \mathbf{v}_e + O(\mu^{1-\alpha}).$$

Volem especificar coordenada a coordenada aquesta aplicació exterior. Per això definim φ_e, θ_e, ϕ_e, ψ_e i v_e tals que

$$\mathbf{r}_e = \begin{pmatrix} \mu - 1 + r_{2e}\cos\varphi_e\,\cos\theta_e \\ r_{2e}\cos\varphi_e\,\sin\theta_e \\ r_{2e}\sin\varphi_e \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_e = v_e\begin{pmatrix} \cos\phi_e\,\cos\psi_e \\ \cos\phi_e\,\sin\psi_e \\ \sin\phi_e \end{pmatrix}.$$

Trobem, primerament, qui són r_{2e} i v_e en potències de μ. Comencem per la distància de la posició final al cos M:

$$\begin{aligned}
r_{2e}^2 &= |\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_M|^2 = \left| \mathbf{r}_{2i} - \frac{\varepsilon - \delta}{2}\, \mu^\alpha A_3 \mathbf{r}_i + \delta \mu^\alpha \dot{\mathbf{r}}_i \right|^2 \\
&= \mu^{2\alpha} - (\varepsilon - \delta)\mu^\alpha \langle \mathbf{r}_{2i}, A_3 \mathbf{r}_i \rangle + 2\delta\mu^\alpha \langle \mathbf{r}_{2i}, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle \\
&\quad + \frac{(\varepsilon - \delta)^2}{4}\, \mu^{2\alpha} \langle A_3 \mathbf{r}_i, A_3 \mathbf{r}_i \rangle - \delta(\varepsilon - \delta)\mu^{2\alpha} \langle A_3 \mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle + \delta^2 \mu^{2\alpha} v_i^2.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Usem les definicions de les condicions incials sinòdiques (1.5) i el desenvolupament per a v_i (1.7) per calcular cada un d'aquests productes escalars:

$$\begin{aligned}
\langle A_3 \mathbf{r}_i, A_3 \mathbf{r}_i \rangle &= \langle \mathbf{r}_i, A_3^T A_3 \mathbf{r}_i \rangle = 4(\mu - 1 + \mu^\alpha \cos\varphi \, \cos\theta)^2 + 4\mu^{2\alpha} \cos^2\varphi \, \sin^2\theta \\
&= 4(1 - 2\mu^\alpha \cos\varphi \, \cos\theta + O(\mu^{2\alpha})). \\
\langle \mathbf{r}_{2i}, A_3 \mathbf{r}_i \rangle &= \langle \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_M, A_3 \mathbf{r}_i \rangle = -\langle \mathbf{r}_M, A_3 \mathbf{r}_i \rangle = -2\mu^\alpha \cos\varphi \, \sin\theta + O(\mu^{1+\alpha}). \\
\langle A_3 \mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle &= 2(-\mu^\alpha \cos\varphi \, \sin\theta \, v_i \cos\phi \, \cos\psi \, + \, (\mu - 1 + \mu^\alpha \cos\varphi \, \cos\theta) v_i \cos\phi \sin\psi) \\
&= 2\sqrt{3 - C_J}\Big(- \cos\phi \, \sin\psi + \mu^\alpha \cos\varphi \, \cos\phi \, \sin(\psi - \theta)\Big) + O(\mu^{1-\alpha}), \\
\langle \mathbf{r}_{2i}, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle &= \mu^\alpha v_i \cos a = \mu^\alpha \sqrt{3 - C_J}\, \cos a \, + O(\mu).
\end{aligned}$$

En els dos últims productes escalars hi hem d'afegir el desenvolupament per a ϕ i ψ en potències de μ que tenim escrit a (2.21) i les relacions (2.22). D'una banda

$$\cos\phi \, \sin\psi = \cos\phi_0 \, \sin\psi_0 + \mu^\alpha(\Delta\psi \, \cos\phi_0 \, \cos\psi_0 - \Delta\phi \, \sin\phi_0 \, \sin\psi_0) + O(\mu^{2\alpha}), \tag{3.23}$$

i definim

$$\Lambda = \cos\varphi \, \cos\phi \, \sin(\theta - \psi) = \cos\varphi \, \cos\phi_0 \, \sin(\theta - \psi_0) + O(\mu^\alpha) = \Lambda_0 + O(\mu^\alpha). \tag{3.24}$$

Així doncs, tornant al tercer producte escalar de la llista anterior i incorporant els desenvolupaments (3.23) i (3.24), tindrem que

$$\begin{aligned}
\langle A_3 \mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle = &- 2\sqrt{3 - C_J} \cos\phi_0 \, \sin\psi_0 \\
&- 2\mu^\alpha \sqrt{3 - C_J}\Big(\Delta\psi \, \cos\phi_0 \, \cos\psi_0 - \Delta\phi \sin\phi_0 \, \sin\psi_0 + \Lambda_0\Big) + O(\mu^{1-\alpha}).
\end{aligned}$$

D'altra banda, recuperem $\cos a$ a (1.8) i trobem el seu desenvolupament fins ordre μ^α, que serà

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos\varphi\,\cos\phi_0\,\cos(\psi_0-\theta)+\sin\varphi\,\sin\phi_0\\ &\quad+\mu^\alpha\Big(\Lambda_0\Delta\psi+\Delta\phi\left(\sin\varphi\,\cos\phi_0-\cos\varphi\,\sin\phi_0\,\cos(\psi_0-\theta)\right)\Big)+O(\mu^{2\alpha})\\ &=\cos a_0+\mu^\alpha\Delta C+O(\mu^{2\alpha}),\end{aligned} \tag{3.25}$$

on hem usat (3.3). Per tant

$$\langle \mathbf{r}_{2i},\dot{\mathbf{r}}_i\rangle=\mu^\alpha\sqrt{3-C_J}\Big(\cos a_0+\mu^\alpha\Delta C\Big)+O(\mu^{1-\alpha}). \tag{3.26}$$

Tornem ara a l'expressió (3.22) de r_{2e}^2. Utilitzarem les expressions per als productes escalars que hem trobat, així com (1.6) i (3.4):

$$\begin{aligned}r_{2e}^2 &=\mu^{2\alpha}\Big[1+2(\varepsilon-\delta)\cos\varphi\,\sin\theta+2\delta\sqrt{3-C_J}\Big(\cos a_0+\mu^\alpha\Delta C\Big)\\ &\quad+2\delta(\varepsilon-\delta)\sqrt{3-C_J}\,\Big(\cos\phi_0\,\sin\psi_0+\mu^\alpha(\Delta\psi\,\cos\phi_0\,\cos\psi_0-\Delta\phi\sin\phi_0\,\sin\psi_0+\Lambda_0)\Big)\\ &\quad+(\varepsilon-\delta)^2(1-2\mu^\alpha\cos\varphi\,\cos\theta)+\delta^2(3-C_J)+O(\mu^{1-\alpha})\Big]\\ &=\mu^{2\alpha}\Big[1+2\mu^\alpha\delta\,\sqrt{3-C_J}\Big(\Delta C+(\varepsilon-\delta)(\Delta\psi\,\cos\phi_0\,\cos\psi_0-\Delta\phi\sin\phi_0\,\sin\psi_0+\Lambda_0)\Big)\\ &\quad-2\mu^\alpha(\varepsilon-\delta)^2\cos\varphi\,\cos\theta+O(\mu^{1-\alpha})\Big]\\ &=\mu^{2\alpha}\left[1+2\mu^\alpha\Delta r_e+O(\mu^{1-\alpha})\right].\end{aligned}$$

Així doncs,

$$r_{2e}=\mu^\alpha\left[1+\mu^\alpha\Delta r_e+O(\mu^{1-\alpha})\right], \tag{3.27}$$

on (usant la definició de ΔC de (3.25))

$$\begin{aligned}\Delta r_e &=\delta\sqrt{3-C_J}\Big[\Lambda_0(\varepsilon-\delta)+\Delta\psi\,\Big(\Lambda_0+(\varepsilon-\delta)\cos\phi_0\,\cos\psi_0\Big)\\ &\quad+\Delta\phi\,\Big(\sin\varphi\,\cos\phi_0-\cos\varphi\,\sin\phi_0\,\cos(\psi_0-\theta)-(\varepsilon-\delta)\sin\phi_0\,\sin\psi_0\Big)\Big]\\ &\quad-(\varepsilon-\delta)^2\cos\varphi\,\cos\theta.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Pel que fa al mòdul de la velocitat final, de (3.21) s'obté

$$\begin{aligned}v_e^2 &=\left|\dot{\mathbf{r}}_i-\frac{(\varepsilon+\delta)}{2}\mu^\alpha A_3\dot{\mathbf{r}}_i\right|^2\\ &=v_i^2+\frac{(\varepsilon+\delta)^2}{4}\mu^{2\alpha}\langle A_3\dot{\mathbf{r}}_i,A_3\dot{\mathbf{r}}_i\rangle-(\varepsilon+\delta)\mu^\alpha\langle\dot{\mathbf{r}}_i,A_3\dot{\mathbf{r}}_i\rangle=v_i^2(1+O(\mu^{2\alpha})),\end{aligned}$$

i, per tant,

$$v_e = v_i + O(\mu^{2\alpha}) = \sqrt{3 - C_J} + O(\mu^{1-\alpha}). \tag{3.29}$$

Finalment, establim l'aplicació exterior coordenada a coordenada. Recuperem la primera igualtat de (3.21) i igualem coordenades:

$$\begin{aligned}
r_{2e}\cos\varphi_e\,\cos\theta_e &= \mu^\alpha\cos\varphi\,\cos\theta + \mu^{2\alpha}(\varepsilon-\delta)\cos\varphi\,\sin\theta + \mu^\alpha\delta\,v_i\cos\phi\,\cos\psi,\\
r_{2e}\cos\varphi_e\,\sin\theta_e &= \mu^\alpha\cos\varphi\,\sin\theta - \mu^\alpha(\varepsilon-\delta)(\mu-1+\mu^\alpha\cos\varphi\,\cos\theta) + \mu^\alpha\delta\,v_i\cos\phi\,\sin\psi,\\
r_{2e}\sin\varphi_e &= \mu^\alpha\sin\varphi + \mu^\alpha\delta\,v_i\sin\phi.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Usem l'expressió trobada per a r_{2e}, (3.27), i els desenvolupaments per les raons trigonomètriques dels angles ϕ i ψ (2.22). Pel que fa a la primera igualtat de (3.30) tindrem

$$\begin{aligned}
\cos\varphi_e\,\cos\theta_e &= \Big(\cos\varphi\,\cos\theta + \delta\sqrt{3-C_J}(\cos\phi_0 - \Delta\phi\,\sin\phi_0\,\mu^\alpha)(\cos\psi_0 - \Delta\psi\,\sin\psi_0\,\mu^\alpha)\\
&\quad + \mu^\alpha(\varepsilon-\delta)\cos\varphi\,\sin\theta + O(\mu^{1-\alpha})\Big)(1-\mu^\alpha\Delta r_e + O(\mu^{1-\alpha}))\\
&= \cos\varphi\,\cos\theta + \delta\sqrt{3-C_J}\,\cos\phi_0\cos\psi_0\\
&\quad + \mu^\alpha\Big[(\varepsilon-\delta)\cos\varphi\,\sin\theta - \delta\sqrt{3-C_J}\Big(\Delta\phi\,\sin\phi_0\cos\psi_0 + \Delta\psi\,\sin\psi_0\,\cos\phi_0\Big)\Big]\\
&\quad - \mu^\alpha\Delta r_e\Big[\cos\varphi\,\cos\theta + \delta\sqrt{3-C_J}\,\cos\phi_0\cos\psi_0\Big] + O(\mu^{1-\alpha}).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Fem el mateix per a la segona relació de (3.30):

$$\begin{aligned}
\cos\varphi_e\,\sin\theta_e &= \Big(\cos\varphi\,\sin\theta + \delta\sqrt{3-C_J}(\cos\phi_0 - \Delta\phi\,\sin\phi_0\,\mu^\alpha)(\sin\psi_0 + \Delta\psi\,\cos\psi_0\,\mu^\alpha)\\
&\quad + (\varepsilon-\delta) - \mu^\alpha(\varepsilon-\delta)\cos\varphi\,\cos\theta + O(\mu^{1-\alpha})\Big)(1-\mu^\alpha\Delta r_e + O(\mu^{1-\alpha}))\\
&= \cos\varphi\,\sin\theta + \delta\sqrt{3-C_J}\,\cos\phi_0\,\sin\psi_0 + (\varepsilon-\delta)\\
&\quad - \mu^\alpha\Big[(\varepsilon-\delta)\cos\varphi\,\cos\theta - \delta\sqrt{3-C_J}\Big(\Delta\psi\,\cos\phi_0\,\cos\psi_0 - \Delta\phi\,\sin\psi_0\,\sin\phi_0\Big)\Big]\\
&\quad - \mu^\alpha\Delta r_e\Big[\cos\varphi\,\sin\theta + \delta\sqrt{3-C_J}\,\cos\phi_0\,\sin\psi_0 + (\varepsilon-\delta)\Big] + O(\mu^{1-\alpha}).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

I finalment, de l'última equació de (3.30):

$$\begin{aligned}
\sin\varphi_e &= \Big(\sin\varphi + \delta\sqrt{3-C_J}\,\Big(\sin\phi_0 + \Delta\phi\,\cos\phi_0\,\mu^\alpha\Big) + O(\mu^{1-\alpha})\Big)\cdot(1-\mu^\alpha\Delta r_e + O(\mu^{1-\alpha}))\\
&= \sin\varphi + \delta\sqrt{3-C_J}\sin\phi_0\\
&\quad + \mu^\alpha\Big[\delta\sqrt{3-C_J}\Delta\phi\,\cos\phi_0 - \Delta r_e\Big(\sin\varphi + \delta\sqrt{3-C_J}\sin\phi_0\Big)\Big] + O(\mu^{1-\alpha}).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Pel que fa a la velocitat, de la segona igualtat de (3.21) tindrem

$$\begin{aligned} v_e \cos\phi_e \cos\psi_e &= v_i \cos\phi \cos\psi + (\varepsilon+\delta)\mu^\alpha v_i \cos\phi \sin\psi, \\ v_e \cos\phi_e \sin\psi_e &= v_i \cos\phi \sin\psi - (\varepsilon+\delta)\mu^\alpha v_i \cos\phi \cos\psi, \\ v_e \sin\phi_e &= v_i \sin\phi, \end{aligned}$$

i, utilitzant (3.29), tindrem

$$\begin{aligned} \cos\phi_e \cos\psi_e &= \cos\phi\,(\cos\psi + \mu^\alpha(\varepsilon+\delta)\sin\psi) + O(\mu^{2\alpha}), \\ \cos\phi_e \sin\psi_e &= \cos\phi\,(\sin\psi - \mu^\alpha(\varepsilon+\delta)\cos\psi) + O(\mu^{2\alpha}), \\ \sin\phi_e &= \sin\phi + O(\mu^{2\alpha}). \end{aligned} \tag{3.34}$$

D'aquesta última igualtat es dedueix que $\phi_e = \phi + O(\mu^{2\alpha})$ i per tant $\cos\phi_e = \cos\phi + O(\mu^{2\alpha})$. Si $\cos\phi = 0$, llavors ψ_e queda indeterminat. En cas contrari podrem dir que

$$\begin{aligned} \cos\psi_e &= \cos\psi + \mu^\alpha(\varepsilon+\delta)\sin\psi + O(\mu^{2\alpha}) \\ &= \cos\psi_0 + \mu^\alpha \sin\psi_0\,((\varepsilon+\delta) - \Delta\psi) + O(\mu^{2\alpha}), \\ \sin\psi_e &= \sin\psi - \mu^\alpha(\varepsilon+\delta)\cos\psi + O(\mu^{2\alpha}) \\ &= \sin\psi_0 + \mu^\alpha \cos\psi_0\,(\Delta\psi - (\varepsilon+\delta)) + O(\mu^{2\alpha}). \end{aligned}$$

Resumint, si $\cos\phi \neq 0$ podem dir que

$$\begin{aligned} v_e &= v_i + O(\mu^{2\alpha}), \\ \phi_e &= \phi + O(\mu^{2\alpha}), \\ \psi_e &= \psi_0 + \big(\Delta\psi - (\varepsilon+\delta)\big)\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}). \end{aligned} \tag{3.35}$$

A [2] hi ha l'estudi detallat de les òrbites p-q ressonants planes així com les expressions de l'aplicació exterior per a aquest tipus d'òrbites.

Capítol 4

Solució interior

En aquest capítol volem estudiar com es comporta la solució del problema restringit definit a (2.1) quan ens la mirem dins de la bola $B(M, \mu^\alpha)$. Anomenarem a aquesta trajectòria solució interior. Per fer-ho partirem de la mateixa posició (a distància μ^α de M) i velocitat que en l'estudi de la solució exterior, però anirem enrera en el temps ($t < t_1$), de manera que estarem entrant dins aquest entorn. Sense pèrdua de generalitat, i per facilitar alguns càlculs, suposarem a partir d'ara que $t_1 = 0$.

Com que estem molt a prop del primari M i lluny de E, aquest últim serà vist com una pertorbació i serà M qui dictarà el comportament del tercer cos. Veurem que el moviment de P és, aproximadament, el d'una òrbita hiperbòlica mentre estigui dins d'aquest entorn de M.

Com que ens estem movent molt a prop d'un dels primaris, el que farem serà regularitzar les equacions. Utilitzant coordenades de Kustaanheimo-Stiefel, juntament amb un canvi d'escala, les equacions del moviment en coordenades sinòdiques (1.2), passaran a ser

$$\mathbf{u}'' = \frac{3 - C_J}{4}\mathbf{u} + O(\mu^\alpha).$$

Es pot comprovar (anàlogament a com ho fem a la secció 4.2) que l'error que es comet al prendre com a aproximació del problema restringit la solució de $\mathbf{u}'' = \frac{3-C_J}{4}\mathbf{u}$ és d'ordre μ^α. Aquest error en coordenades sinòdiques serà d'ordre $\mu^{2\alpha}$ per a la posició i d'ordre μ^α per a la velocitat (vegeu la subsecció 4.3). Ja que volem "enganxar" l'aplicació exterior amb la interior i que l'error trobat en la primera era d'ordre $\mu^{1-\alpha}$, aquesta aproximació per a la solució interior serà insuficient.

Per tal de poder trobar una solució aproximada que vagi bé (en el sentit que l'error sigui prou petit) seguirem la mateixa estratègia que en el problema pla estudiat a [2] per Font, Nunes i Simó.

4.1 Canvis de variable i regularització

Prenem les equacions del problema restringit en coordenades sinòdiques (1.2) amb condicions inicials les explicitades a (1.5), això és, $\mathbf{r}(t)$ és la solució de

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}} + A_3\dot{\mathbf{r}} = \nabla\Omega(\mathbf{r}), \\ \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_i,\ \dot{\mathbf{r}}(t_1) = \dot{\mathbf{r}}_i, \end{cases} \tag{4.1}$$

on $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $\Omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$.

Comencem per fer un canvi de posicions i velocitats a posicions i moments. Definim les noves variables $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)^T$ i $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)^T$ com

$$\mathbf{P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x-\mu+1 \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}A_3\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x - \mu + 1 \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

de manera que també hem introduït una translació i el primari M s'ha situat a l'origen. Vegem com s'escriuen les equacions del moviment en les noves coordenades. Les distàncies als primaris E i M seran

$$r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2 + z^2 = (P_1-1)^2 + P_2^2 + P_3^2, \qquad r_2^2 = (x-\mu+1)^2 + y^2 + z^2 = |\mathbf{P}|^2,$$

respectivament i, si denotem per $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T$, el terme de la dreta a les equacions de (4.1) s'escriurà

$$\begin{aligned} H(\mathbf{P}) = \nabla\Omega(\mathbf{r}) &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1-\mu}{r_1^3}\begin{pmatrix} x-\mu \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{\mu}{r_2^3}\begin{pmatrix} x-\mu+1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1-\mu}{r_1^3}(\mathbf{P} - \mathbf{e}_1) - \frac{\mu}{r_2^3}\mathbf{P} + (\mu-1)\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Les noves equacions seran

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}} &= \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q} - \frac{1}{2}A_3\mathbf{P}, \\
\dot{\mathbf{Q}} &= \ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}A_3\dot{\mathbf{r}} = \nabla\Omega(\mathbf{r}) - A_3\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}A_3\dot{\mathbf{r}} = H(\mathbf{P}) - \frac{1}{2}A_3\dot{\mathbf{P}} \\
&= H(\mathbf{P}) - \frac{1}{2}A_3\mathbf{Q} + \frac{1}{4}A_3^2\mathbf{P} \\
&= -\frac{1-\mu}{r_1^3}(\mathbf{P}-\mathbf{e}_1) - \frac{\mu}{r_2^3}\mathbf{P} - \frac{1}{2}A_3\mathbf{Q} + (\mu-1)\mathbf{e}_1,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ja que $A_3^2\mathbf{P} = -4(P_1, P_2, 0)^T$, i les condicions inicials del problema passaran a ser

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(0) &= \mathbf{P}_i = \mathbf{r}_{2i}, \\
\mathbf{Q}(0) &= \mathbf{Q}_i = \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2}A_3\mathbf{r}_{2i}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Ens caldrà tenir també l'expressió de la integral de Jacobi (1.3) en aquestes noves variables. Teníem que $\langle\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}\rangle = 2\Omega(\mathbf{r}) - C_J$, i com que

$$\begin{aligned}
2\Omega(\mathbf{r}) &= (P_1+\mu-1)^2 + P_2^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{|\mathbf{P}|} \\
&= (1-\mu)^2 - 2(1-\mu)P_1 + P_1^2 + P_2^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{|\mathbf{P}|}, \\
\langle\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}\rangle &= \langle\mathbf{Q},\mathbf{Q}\rangle - \langle\mathbf{Q},A_3\mathbf{P}\rangle + \frac{1}{4}\langle A_3\mathbf{P},A_3\mathbf{P}\rangle \\
&= |\mathbf{Q}|^2 - 2(P_1Q_2 - P_2Q_1) + P_1^2 + P_2^2,
\end{aligned}$$

la integral primera s'escriurà

$$|\mathbf{Q}|^2 - 2(P_1Q_2 - P_2Q_1) = (1-\mu)^2 - 2(1-\mu)P_1 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{|\mathbf{P}|} - C_J. \tag{4.5}$$

Seguint els mateixos pasos que a [2], introduïm ara la següent rotació

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{P}} &= G(t)\mathbf{P}, \\
\widetilde{\mathbf{Q}} &= G(t)\mathbf{Q},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

essent $G(t)$ la matriu de gir definida en el canvi de coordenades sinòdiques a siderals (1.1). Deduïm, a partir de (4.3), les equacions del moviment en aquestes noves variables. Usarem que $G(t)^{-1} = G(t)^T$, $2\,\dot{G}(t)G(t)^T = A_3$ i que $G(t)A_3 = A_3G(t)$: Comencem derivant la primera relació de (4.6).

$$\begin{aligned}\dot{\widetilde{\mathbf{P}}} &= \dot{G}(t)\mathbf{P} + G(t)\dot{\mathbf{P}} = \dot{G}(t)\mathbf{P} + G(t)\Big(\mathbf{Q} - \frac{1}{2}A_3\mathbf{P}\Big) = \\ &= \dot{G}(t)G(t)^T\widetilde{\mathbf{P}} + G(t)G(t)^T\widetilde{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2}G(t)A_3G(t)^T\widetilde{\mathbf{P}} \\ &= \frac{1}{2}A_3\widetilde{\mathbf{P}} + \widetilde{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2}A_3\widetilde{\mathbf{P}},\end{aligned}$$

i per tant, tenim $\dot{\widetilde{\mathbf{P}}} = \widetilde{\mathbf{Q}}$. Pel que fa a la resta d'equacions

$$\begin{aligned}\dot{\widetilde{\mathbf{Q}}} &= \dot{G}(t)\mathbf{Q} + G(t)\dot{\mathbf{Q}} = \\ &= \dot{G}(t)G(t)^T\widetilde{\mathbf{Q}} + G(t)\left(-\frac{1-\mu}{r_1^3}(\mathbf{P}-\mathbf{e}_1) - \frac{\mu}{r_2^3}\mathbf{P} - \frac{1}{2}A_3\mathbf{Q} + (\mu-1)\mathbf{e}_1\right) \\ &= \frac{1}{2}A_3\widetilde{\mathbf{Q}} - G(t)\left(\frac{1-\mu}{r_1^3}(\mathbf{P}-\mathbf{e}_1) + \frac{\mu}{r_2^3}\mathbf{P}\right) - \frac{1}{2}G(t)A_3G(t)^T\widetilde{\mathbf{Q}} + (\mu-1)G(t)\mathbf{e}_1 \\ &= -G(t)\left(\frac{1-\mu}{r_1^3}(\mathbf{P}-\mathbf{e}_1) + \frac{\mu}{r_2^3}\mathbf{P}\right) + (\mu-1)G(t)\mathbf{e}_1 \\ &= -\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right)\widetilde{\mathbf{P}} + (1-\mu)\left(\frac{1}{r_1^3} - 1\right)G(t)\mathbf{e}_1,\end{aligned}$$

on les distàncies r_1 i r_2 en termes de les noves variables són

$$\begin{aligned}r_1^2 &= (\widetilde{P}_1\cos t + \widetilde{P}_2\sin t - 1)^2 + (-\widetilde{P}_1\sin t + \widetilde{P}_2\cos t)^2 + \widetilde{P}_3^2 \\ &= |\widetilde{\mathbf{P}}|^2 + 1 - 2(\widetilde{P}_1\cos t + \widetilde{P}_2\sin t), \\ r_2 &= |\widetilde{\mathbf{P}}|.\end{aligned}$$

Així doncs, el moviment en coordenades $(\widetilde{\mathbf{P}}, \widetilde{\mathbf{Q}})$ vindrà descrit per

$$\begin{aligned}\dot{\widetilde{\mathbf{P}}} &= \widetilde{\mathbf{Q}}, \\ \dot{\widetilde{\mathbf{Q}}} &= -\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{|\widetilde{\mathbf{P}}|^3}\right)\widetilde{\mathbf{P}} + (1-\mu)\left(\frac{1}{r_1^3} - 1\right)G(t)\mathbf{e}_1,\end{aligned} \tag{4.7}$$

amb condicions incials $\widetilde{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_i$ i $\widetilde{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{Q}_i$. Per acabar aquest segon canvi de variables transformem l'expressió (4.5). Fent les substitucions següents

$$|\mathbf{P}| = |\widetilde{\mathbf{P}}|, \qquad |\mathbf{Q}| = |\widetilde{\mathbf{Q}}|,$$
$$P_1 = \widetilde{P}_1\cos t + \widetilde{P}_2\sin t \quad \text{i} \quad P_1Q_2 - P_2Q_1 = \widetilde{P}_1\widetilde{Q}_2 - \widetilde{P}_2\widetilde{Q}_1,$$

tindrem que la integral de Jacobi s'escriu

$$|\widetilde{\mathbf{Q}}|^2 = (1-\mu)^2 - 2(1-\mu)(\widetilde{P}_1\cos t + \widetilde{P}_2\sin t) + 2(\widetilde{P}_1\widetilde{Q}_2 - \widetilde{P}_2\widetilde{Q}_1) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{|\widetilde{\mathbf{P}}|} - C_J. \tag{4.8}$$

Fem l'últim canvi de coordenades. Volem regularitzar al voltant del primari M i alhora introduir un canvi d'escala per tal de passar d'un entorn de radi μ^α a un de radi 1. La regularització, això és, l'eliminació d'una de les singularitats de les equacions del moviment (en aquest cas la corresponent al primari M), consisteix en un canvi de coordenades més un canvi de temps. La transformació que farem servir és la de Kustaanheimo-Stiefel (transformació KS), que és la generalització a l'espai de la transformació de Levi-Civita al pla (vegeu [28]). Sabem que cal passar a $\mathbb{R}^4$, per la qual cosa afegirem als vectors de $\mathbb{R}^3$ una quarta component nul·la. El canvi ve donat per les relacions

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{P}} &= \mu^\alpha L(\mathbf{u})\mathbf{u} \\ \frac{dt}{ds} &= |\widetilde{\mathbf{P}}| \end{aligned} \tag{4.9}$$

on $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ i $L(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix}$. Observem que $L(\mathbf{u})^T L(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2$ i això implica que

$$|\widetilde{\mathbf{P}}| = \mu^\alpha \sqrt{\langle L(\mathbf{u})\mathbf{u}, L(\mathbf{u})\mathbf{u}\rangle} = \mu^\alpha |\mathbf{u}|^2.$$

Així doncs $|\widetilde{\mathbf{P}}| \le \mu^\alpha \Leftrightarrow |\mathbf{u}| \le 1$, i és en aquest entorn on estudiarem el moviment del tercer cos. Denotarem per $B^* = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4; \, |\mathbf{u}| \le 1\}$. A més, la relació entre $|\widetilde{\mathbf{P}}|$ i $|\mathbf{u}|$ ens permet escriure el canvi de temps com

$$\frac{dt}{ds} = \mu^\alpha |\mathbf{u}|^2,$$

o equivalentment,

$$t = -\mu^\alpha \int_s^0 |\mathbf{u}(\tau)|^2 d\tau. \tag{4.10}$$

Recordem que ens estem movent per temps negatius.

Desenvolupem les equacions del moviment en coordenades KS. Denotarem per $' = d/ds$, això és, $\mathbf{u}' = \dfrac{d\mathbf{u}}{ds}$. També tenim que $\dfrac{d}{ds}(L(\mathbf{u})) = L(\mathbf{u}')$. Abans de continuar ens faran falta les següents propietats (vegeu [28]):

Lema 4.1

Siguin $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$ *tals que* $l(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = u_1 w_4 - u_2 w_3 + u_3 w_2 - u_4 w_1 = 0$. *Llavors*

1. $L(\mathbf{u})\mathbf{w} = L(\mathbf{w})\mathbf{u}$

2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle L(\mathbf{w})\mathbf{w} - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle L(\mathbf{u})\mathbf{w} + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle L(\mathbf{u})\mathbf{u} = 0$

En el nostre cas, per poder utilitzar aquestes propietats, caldrà que es verifiqui

$$l(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = u_4' u_1 - u_3' u_2 + u_3 u_2' - u_4 u_1' = 0 \qquad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{u}'. \tag{4.11}$$

De fet, un cop obtingudes les equacions, es comprova que $l(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ és una integral primera del sistema i, per tant, només haurem de vigilar que les condicions inicials compleixin la propietat (4.11).

De moment, doncs, suposarem que és certa i utilitzem la primera de les propietats del Lema 4.1 per deduir, de la primera equació de (4.7), que

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{Q}} = \dot{\widetilde{\mathbf{P}}} = \frac{d\widetilde{\mathbf{P}}}{ds}\frac{ds}{dt} &= \frac{1}{\mu^\alpha |\mathbf{u}|^2}\, \mu^\alpha (L(\mathbf{u})\mathbf{u}' + L(\mathbf{u}')\mathbf{u}) \\ &= \frac{2}{|\mathbf{u}|^2}\, L(\mathbf{u})\mathbf{u}'. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Derivem aquesta igualtat i fem servir (4.10) i la segona propietat del Lema 4.1. Tindrem

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{\mathbf{Q}}} = \frac{d\widetilde{\mathbf{Q}}}{ds}\frac{ds}{dt} &= \frac{1}{\mu^\alpha |\mathbf{u}|^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{|\mathbf{u}|^2}\, L(\mathbf{u})\mathbf{u}'\right) \\ &= \frac{2\mu^{-\alpha}}{|\mathbf{u}|^2}\left(-\frac{2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle}{|\mathbf{u}|^4} L(\mathbf{u})\mathbf{u}' + \frac{1}{|\mathbf{u}|^2}(L(\mathbf{u}')\mathbf{u}' + L(\mathbf{u})\mathbf{u}'')\right) \\ &= \frac{2\mu^{-\alpha}}{|\mathbf{u}|^6}(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle L(\mathbf{u})\mathbf{u}' + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle L(\mathbf{u}')\mathbf{u}' + |\mathbf{u}|^2 L(\mathbf{u})\mathbf{u}'') \\ &= \frac{2\mu^{-\alpha}}{|\mathbf{u}|^6}(-|\mathbf{u}'|^2 L(\mathbf{u})\mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2 L(\mathbf{u})\mathbf{u}'') \\ &= \frac{2\mu^{-\alpha}}{|\mathbf{u}|^4}\left(L(\mathbf{u})\mathbf{u}'' - \frac{|\mathbf{u}'|^2}{|\mathbf{u}|^2} L(\mathbf{u})\mathbf{u}\right). \end{aligned} \tag{4.13}$$

D'altra banda haurem d'escriure en coordenades KS el terme de la dreta de la segona de les equacions de (4.7). Per a això prendrem alguns desenvolupaments en potències de μ. D'ara en endavantg usarem el fet que volem estudiar el moviment del tercer cos mentre aquest es mantè dins una bola de centre el primari M, això és, $|\mathbf{u}|$ es manté acotat (de fet $\mathbf{u} \in B^*$).

Considerem les següents observacions i notacions:

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\mathbf{P}}| &= \mu^\alpha |\mathbf{u}|^2,\\
\widetilde{P}_1 &= \mu^\alpha (u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2) = \mu^\alpha u_x,\\
\widetilde{P}_2 &= \mu^\alpha 2(u_1u_2 - u_3u_4) = \mu^\alpha u_y,\\
r_1^2 &= |\widetilde{\mathbf{P}}|^2 + 1 - 2(\widetilde{P}_1 \cos t + \widetilde{P}_2 \sin t) = 1 - 2\mu^\alpha (u_x \cos t + u_y \sin t) + \mu^{2\alpha}|\mathbf{u}|^4,\\
r_1 &= 1 - \mu^\alpha (u_x \cos t + u_y \sin t) + O(\mu^{2\alpha}),\\
\frac{1}{r_1^3} &= 1 + 3\mu^\alpha (u_x \cos t + u_y \sin t) + O(\mu^{2\alpha}).
\end{aligned}
$$

Recuperant la segona equació de (4.7), podrem escriure

$$
\begin{aligned}
\dot{\widetilde{\mathbf{Q}}} =& -(1-\mu)\Big(1 + 3\mu^\alpha (u_x \cos t + u_y \sin t) + O(\mu^{2\alpha})\Big)\mu^\alpha L(\mathbf{u})\mathbf{u} - \frac{\mu}{\mu^{3\alpha}|\mathbf{u}|^6}\mu^\alpha L(\mathbf{u})\mathbf{u}\\
&+ (1-\mu)\Big(3\mu^\alpha (u_x \cos t + u_y \sin t) + O(\mu^{2\alpha})\Big)G(t)\mathbf{e}_1\\
=& -\mu^\alpha L(\mathbf{u})\mathbf{u} - \frac{\mu^{1-2\alpha}}{|\mathbf{u}|^6} L(\mathbf{u})\mathbf{u} + 3\mu^\alpha (u_x \cos t + u_y \sin t) G(t)\mathbf{e}_1 + O(\mu^{2\alpha}),
\end{aligned}
$$

i igualant aquesta expressió a la que hem trobat a (4.13) tenim que

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{u})\mathbf{u}'' - \frac{|\mathbf{u}'|^2}{|\mathbf{u}|^2} L(\mathbf{u})\mathbf{u}&\\
&= \frac{\mu^\alpha}{2}|\mathbf{u}|^4 \left(-\frac{\mu^{1-2\alpha}}{|\mathbf{u}|^6} L(\mathbf{u})\mathbf{u} + \mu^\alpha \Big(-L(\mathbf{u})\mathbf{u} + 3(u_x \cos t + u_y \sin t)G(t)\mathbf{e}_1 \Big) \right).
\end{aligned}
$$

Això és, fins ordre $\mu^{2\alpha}$, tenim que

$$
L(\mathbf{u})\mathbf{u}'' - \frac{|\mathbf{u}'|^2}{|\mathbf{u}|^2} L(\mathbf{u})\mathbf{u} = -\frac{\mu^{1-\alpha}}{2|\mathbf{u}|^2} L(\mathbf{u})\mathbf{u} + O(\mu^{2\alpha}). \tag{4.14}
$$

Per acabar d'escriure les equacions ens caldrà tenir l'expressió, en coordenades KS, de la integral de Jacobi. Recuperem-la de (4.8) i vegem com s'escriu cada terme en les noves variables. Usarem (4.12) i les notacions introduïdes abans per a les components de $\widetilde{\mathbf{P}}$.

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\mathbf{Q}}|^2 = \langle \widetilde{\mathbf{Q}}, \widetilde{\mathbf{Q}} \rangle &= \frac{4}{|\mathbf{u}|^4}\langle L(\mathbf{u})\mathbf{u}', L(\mathbf{u})\mathbf{u}' \rangle = \frac{4}{|\mathbf{u}|^4}\langle \mathbf{u}', L(\mathbf{u})^T L(\mathbf{u})\mathbf{u}' \rangle = 4\frac{|\mathbf{u}'|^2}{|\mathbf{u}|^2},\\
\widetilde{Q}_1 &= \frac{2}{|\mathbf{u}|^2}(u_1u_1' - u_2u_2' - u_3u_3' + u_4u_4') = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2}u_x',\\
\widetilde{Q}_2 &= \frac{2}{|\mathbf{u}|^2}(u_2u_1' + u_1u_2' - u_4u_3' - u_3u_4') = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2}u_y',\\
\widetilde{P}_1\widetilde{Q}_2 - \widetilde{P}_2\widetilde{Q}_1 &= \frac{\mu^\alpha}{|\mathbf{u}|^2}(u_x u_y' - u_x' u_y).
\end{aligned}
$$

Substituint cada una d'aquestes expressions a (4.8) tenim que

$$
\begin{aligned}
4\frac{|\mathbf{u}'|^2}{|\mathbf{u}|^2} &= |\widetilde{\mathbf{Q}}|^2 = (1-\mu)^2 - 2(1-\mu)\mu^\alpha(u_x\cos t + u_y\sin t) + 2\frac{\mu^\alpha}{|\mathbf{u}|^2}(u_xu_y' - u_x'u_y) \\
&\quad + 2(1-\mu)\Big(1 + \mu^\alpha(u_x\cos t + u_y\sin t) + O(\mu^{2\alpha})\Big) + \frac{2\mu^{1-\alpha}}{|\mathbf{u}|^2} - C_J \\
&= 3 - C_J + 2\frac{\mu^\alpha}{|\mathbf{u}|^2}(u_xu_y' - u_x'u_y) + 2\frac{\mu^{1-\alpha}}{|\mathbf{u}|^2} + O(\mu^{2\alpha}).
\end{aligned}
$$

Així doncs, la integral de Jacobi s'escriu

$$
\frac{|\mathbf{u}'|^2}{|\mathbf{u}|^2} = \frac{3-C_J}{4} + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2|\mathbf{u}|^2} + \frac{\mu^\alpha}{2|\mathbf{u}|^2}(u_xu_y' - u_x'u_y) + O(\mu^{2\alpha}). \tag{4.15}
$$

Introduïm aquesta expressió a l'equació (4.14) i tindrem que

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{u})\mathbf{u}'' - \left(\frac{3-C_J}{4} + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2|\mathbf{u}|^2} + \frac{\mu^\alpha}{2|\mathbf{u}|^2}(u_xu_y' - u_x'u_y)\right)L(\mathbf{u})\mathbf{u} &= -\frac{\mu^{1-\alpha}}{2|\mathbf{u}|^2}L(\mathbf{u})\mathbf{u} + O(\mu^{2\alpha}), \\
L(\mathbf{u})\mathbf{u}'' - \left(\frac{3-C_J}{4} + \frac{\mu^\alpha}{2|\mathbf{u}|^2}(u_xu_y' - u_x'u_y)\right)L(\mathbf{u})\mathbf{u} &= O(\mu^{2\alpha}),
\end{aligned}
$$

de manera que obtenim l'expressió següent per a les equacions del moviment en coordenades KS fins ordre $\mu^{2\alpha}$:

$$
\mathbf{u}'' = \frac{3-C_J}{4}\mathbf{u} + \mu^\alpha\,\frac{u_xu_y' - u_x'u_y}{2|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u} + O(\mu^{2\alpha}).
$$

Finalment reescrivim el coeficient d'ordre μ^α. De les definicions de u_x, u_y, u_x' i u_y' tenim que

$$
\begin{aligned}
u_xu_y' - u_yu_x' &= 2(u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2)(u_1u_2' + u_1'u_2 - u_3'u_4 - u_3u_4') \\
&\quad - 4(u_1u_2 - u_3u_4)(u_1u_1' - u_2u_2' - u_3u_3' + u_4u_4') \\
&= (-2|\mathbf{u}|^2u_2 + 4u_4(u_2u_4 + u_1u_3))u_1' + (2|\mathbf{u}|^2u_1 - 4u_3(u_2u_4 + u_1u_3))u_2' \\
&\quad + (-2|\mathbf{u}|^2u_4 + 4u_2(u_2u_4 + u_1u_3))u_3' + (2|\mathbf{u}|^2u_3 - 4u_1(u_2u_4 + u_1u_3))u_4' \\
&= 2(-u_2u_1' + u_1u_2' - u_4u_3' + u_3u_4')|\mathbf{u}|^2 \\
&\quad + 4(u_2u_4 + u_1u_3)(u_4u_1' - u_3u_2' + u_2u_3' - u_1u_4') \\
&= 2f(\mathbf{u},\mathbf{u}')|\mathbf{u}|^2 + 4(u_2u_4 + u_1u_3)l(\mathbf{u},\mathbf{u}'),
\end{aligned}
$$

on $f(\mathbf{u},\mathbf{u}') = -u_2u_1' + u_1u_2' - u_4u_3' + u_3u_4'$. Recordem que $l(\mathbf{u},\mathbf{u}') = 0$ i, per tant,

$$
\frac{u_xu_y' - u_x'u_y}{2|\mathbf{u}|^2} = f(\mathbf{u},\mathbf{u}').
$$

Així doncs, les equacions del moviment en coordenades KS s'escriuen

$$\mathbf{u}'' = \frac{3 - C_J}{4}\mathbf{u} + \mu^\alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{u}')\mathbf{u} + O(\mu^{2\alpha}), \tag{4.16}$$

i, de l'expressió (4.15), la integral de Jacobi serà

$$\frac{|\mathbf{u}'|^2}{|\mathbf{u}|^2} = \frac{3 - C_J}{4} + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2|\mathbf{u}|^2} + \mu^\alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{u}') + O(\mu^{2\alpha}). \tag{4.17}$$

Ens queda per determinar qui són les condicions inicials. Prendrem com a $\mathbf{u}_i$ una solució qualsevol de

$$\widetilde{\mathbf{P}}_i = \mu^\alpha L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i. \tag{4.18}$$

(és un sistema amb 1 grau de llibertat) i, per (4.12), definim $\mathbf{u}'_i$ com

$$\mathbf{u}'_i = \frac{1}{2} L(\mathbf{u}_i)^T \widetilde{\mathbf{Q}}_i. \tag{4.19}$$

D'aquesta manera ens assegurem $l(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}'_i) = 0$, tal com volíem.

4.2 Primera aproximació

Anàlogament a com hem fet per a la solució exterior, volem trobar una solució propera a la del problema restringit a l'interior de B^*, i a més volem controlar l'error que fem. La primera aproximació la podem calcular a partir de la part lineal de les equacions (4.16), les quals ens donaran com a solució una òrbita hiperbòlica. Establim algunes notacions i definicions. Per començar $\mathbf{u}(s)$ serà la solució de

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}'' = c\mathbf{u} + \mu^\alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{u}')\mathbf{u} + O(\mu^{2\alpha}), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}'_i, \end{array} \right. \tag{4.20}$$

essent $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = -u_2 u'_1 + u_1 u'_2 - u_4 u'_3 + u_3 u'_4$ i

$$c = \frac{3 - C_J}{4}. \tag{4.21}$$

$\mathbf{u}_0(s)$ serà la solució de

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}'' = c\mathbf{u}, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}'_i. \end{array} \right. \tag{4.22}$$

Escrivim aquestes equacions com a sistemes de primer ordre. Sigui $\boldsymbol{\zeta}(s) = (\mathbf{u}(s), \mathbf{u}'(s))^T$ la solució de

$$\begin{cases} \boldsymbol{\zeta}' = C\boldsymbol{\zeta} + \mu^\alpha F(\boldsymbol{\zeta}) + O(\mu^{2\alpha}), \\ \boldsymbol{\zeta}(0) = \boldsymbol{\zeta}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}'_i \end{pmatrix}, \end{cases}$$

(això és, (4.20) escrit com a sistema d'ordre 1) amb

$$C = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ cI_4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(\boldsymbol{\zeta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\mathbf{u}, \mathbf{u}')\mathbf{u} \end{pmatrix},$$

i I_4 la matriu identitat 4×4. Sigui també $\boldsymbol{\zeta}_0(s) = (\mathbf{u}_0(s), \mathbf{u}'_0(s))^T$ la solució de

$$\begin{cases} \boldsymbol{\zeta}' = C\boldsymbol{\zeta}, \\ \boldsymbol{\zeta}(0) = \boldsymbol{\zeta}_i. \end{cases}$$

Aleshores es verifica

Teorema 4.1

Siguin $\boldsymbol{\zeta}(s)$ i $\boldsymbol{\zeta}_0(s)$ les definides anteriorment. Llavors

$$|\boldsymbol{\zeta}(s) - \boldsymbol{\zeta}_0(s)| \leq |s| K \mu^\alpha e^{\bar{c}|s|},$$

essent $\bar{c} = \max(1, c)$ i per a tot s a l'interval de temps en què estem dins la bola de centre l'origen i radi 1.

Per a la demostració d'aquest resultat ens farà falta un lema similar al de Gronwall (Lema 2.1).

Lema 4.2

1. *Sigui $g \in \mathcal{C}^1$ tal que $g(t) \geq 0$ i*

$$g(t) \leq K_0 t + K_1 \int_0^t g(\tau)\, d\tau \quad \text{per a } t \geq 0,$$

i $K_0, K_1 > 0$. Llavors $g(t) \leq K_0 t e^{K_1 t}$ per a tot $t \geq 0$.

2. *Sigui $g \in \mathcal{C}^1$, tal que $g(t) \geq 0$ i*

$$g(t) \leq K_0 |t| + K_1 \int_t^0 g(\tau)\, d\tau \quad \text{per a } t \leq 0,$$

i $K_0, K_1 > 0$. Llavors $g(t) \leq K_0 |t| e^{K_1 |t|}$, per a tot $t \leq 0$.

Provem aquest resultat. Prenem $h_\varepsilon(t) = (K_0+\varepsilon)te^{K_1 t}$ per a $\varepsilon > 0$ i $t \geq 0$, i observem que:

- $h_\varepsilon(0) = 0 = g(0)$.
- $h'_\varepsilon(t) = (K_0+\varepsilon)e^{K_1 t}(1+K_1 t)$ i per tant $h'_\varepsilon(0) = K_0+\varepsilon$.
- $g'(0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{g(t)}{t} \leq K_0 + \lim_{t\to 0} \dfrac{K_1 \int_0^t g(\tau)\,d\tau}{t} = K_0 + K_1 g(0) = K_0$.

Així doncs, $g'(0) < h'_\varepsilon(0)$, la qual cosa implica que $g'(t) < h'_\varepsilon(t)$ per a t propers a zero i per tant que $g(t) < h_\varepsilon(t)$ en un cert interval de temps. Voldríem veure que de fet és cert per a tot $t \geq 0$. Per a això suposem que existeix t_0 tal que $g(t_0) = h_\varepsilon(t_0)$. Llavors

$$\begin{aligned} g(t_0) &\leq K_0 t_0 + K_1 \int_0^{t_0} g(\tau)\,d\tau < K_0 t_0 + K_1 \int_0^{t_0} h_\varepsilon(\tau)\,d\tau \\ &= K_0 t_0 + K_1(K_0+\varepsilon)\int_0^{t_0} \tau e^{K_1\tau} d\tau = K_0 t_0 + \frac{K_0+\varepsilon}{K_1}\left(K_1 t_0 e^{K_1 t_0} - e^{K_1 t_0} + 1\right) \\ &= h_\varepsilon(t_0) + K_0 t_0 + \frac{K_0+\varepsilon}{K_1}(1 - e^{K_1 t_0}). \end{aligned}$$

Usant el desenvolupament de Taylor de la funció exponencial podem assegurar que $e^{K_1 t_0} > 1 + K_1 t_0$ i tornant a la desigualtat d'abans tindrem

$$\begin{aligned} g(t_0) &< h_\varepsilon(t_0) + K_0 t_0 + \frac{K_0+\varepsilon}{K_1}(1 - 1 - K_1 t_0) = h_\varepsilon(t_0) - \varepsilon t_0 \\ &< h_\varepsilon(t_0), \end{aligned}$$

que contradiu la suposició inicial. Per tant tindrem

$$g(t) < h_\varepsilon(t) = (K_0+\varepsilon)te^{K_1 t} \qquad \forall\, t \geq 0,$$

i fent tendir $\varepsilon \to 0$ arribem al resultat que volíem. Pel que fa a la segona part del Lema, tan sols cal aplicar la primera part a la funció $h(-t) = g(t)$, per a $t \leq 0$. ■

Demostrem el Teorema 4.1. Escrivim $\boldsymbol{\zeta}(s)$ i $\boldsymbol{\zeta}_0(s)$ en forma integral

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}(s) &= \boldsymbol{\zeta}_i + \int_s^0 (C\boldsymbol{\zeta}(\tau) + \mu^\alpha F(\boldsymbol{\zeta}(\tau)) + O(\mu^{2\alpha}))\,d\tau, \\ \boldsymbol{\zeta}_0(s) &= \boldsymbol{\zeta}_i + \int_s^0 C\boldsymbol{\zeta}_0(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Restem les dos expressions i prenem la norma de la diferència:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\zeta}(s)-\boldsymbol{\zeta}_0(s)| &\leq \int_s^0 |C(\boldsymbol{\zeta}(\tau)-\boldsymbol{\zeta}_0(\tau))|\,d\tau + \mu^\alpha \int_s^0 |F(\boldsymbol{\zeta}(\tau))|\,d\tau + K_0|s|\mu^{2\alpha}\\ &\leq \bar{c}\int_s^0 |\boldsymbol{\zeta}(\tau)-\boldsymbol{\zeta}_0(\tau)|\,d\tau + \mu^\alpha \int_s^0 |F(\boldsymbol{\zeta}(\tau))|\,d\tau + K_0|s|\mu^{2\alpha},\end{aligned}$$

on $\bar{c} = \|C\| = \max(1,(3-C_J)/4)$. El terme d'ordre μ^α estarà acotat per

$$|F(\boldsymbol{\zeta})| \leq |\mathbf{u}|^2|\mathbf{u}'| \leq K_1,$$

ja que estem estudiant el moviment dins B^* i, per la integral de Jacobi (4.17), tenim que si $\mathbf{u}$ està acotat la velocitat $\mathbf{u}'$ també ho està. Per tant, podem assegurar que

$$|\boldsymbol{\zeta}(s)-\boldsymbol{\zeta}_0(s)| \leq |s|K\mu^\alpha + \bar{c}\int_s^0 |\boldsymbol{\zeta}(\tau)-\boldsymbol{\zeta}_0(\tau)|\,d\tau$$

i, usant el Lema 4.2, arribem a la conclusió que volíem. ■

En particular, el Teorema 4.1 ens diu que, si el temps s en què estem dins la bola B^* no es fa arbitràriament gran, llavors l'error que cometem en aproximar $\boldsymbol{\zeta}$ per $\boldsymbol{\zeta}_0$ és d'ordre μ^α. Això és,

$$\boldsymbol{\zeta}(s) = \boldsymbol{\zeta}_0(s) + O(\mu^\alpha).$$

4.3 Error en coordenades sinòdiques

Volem veure quina serà la magnitud, en coordenades sinòdiques, de l'error que cometem en prendre $\boldsymbol{\zeta}_0$ com a aproximació de $\boldsymbol{\zeta}$. Denotem de moment per $\mathcal{E}$ l'error que cometem en coordenades KS. Això és, tenim que

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(s) &= \mathbf{u}_0(s) + O(\mathcal{E}),\\ \mathbf{u}'(s) &= \mathbf{u}_0'(s) + O(\mathcal{E}).\end{aligned}$$

Observem que aquestes igualtats són certes per a tot temps s en què $\mathbf{u}(s)$ es manté acotat (en particular quan estem dins la bola B^*). Això implica que $|\mathbf{u}_0|$ també es mantindrà acotat i, com que (4.22) té per integral primera $|\mathbf{u}'|^2 - c|\mathbf{u}|^2$, $|\mathbf{u}_0'|$ també ho estarà. Comencem a desfer els canvis de coordenades fets. De (4.9) i (4.12) tindrem

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{P}}(t) &= \mu^\alpha L(\mathbf{u}(s))\mathbf{u}(s) = \mu^\alpha L(\mathbf{u}_0(s) + O(\mathcal{E}))(\mathbf{u}_0(s) + O(\mathcal{E})) = \mu^\alpha L(\mathbf{u}_0(s))(\mathbf{u}_0(s)) + \mu^\alpha O(\mathcal{E}), \\
&= \widetilde{\mathbf{P}}_0(t) + \mu^\alpha O(\mathcal{E}), \\
\widetilde{\mathbf{Q}}(t) &= \frac{2}{|\mathbf{u}(s)|^2} L(\mathbf{u}(s))\mathbf{u}'(s) = \frac{2}{|\mathbf{u}_0(s)|^2 + O(\mathcal{E})} L(\mathbf{u}_0(s) + O(\mathcal{E}))(\mathbf{u}_0'(s) + O(\mathcal{E})) \\
&= \frac{2}{|\mathbf{u}_0(s)|^2} L(\mathbf{u}_0(s))\mathbf{u}_0'(s) + O(\mathcal{E}) = \widetilde{\mathbf{Q}}_0(t) + O(\mathcal{E}),
\end{aligned}$$

La segona de les igualtats només és certa per temps s en què $|\mathbf{u}_0(s)|$ no es fa arbitràriament petit. Per exemple, serà certa per a l'instant en què tornem a sortir de la bola B^*, moment en què volem descriure la posició i velocitat del tercer cos a partir de l'òrbita aproximada. Més endevant calcularem a quina distància de l'origen es troba el pericentre de l'òrbita hiperbòlica aproximada i veurem sota quines condicions podem assegurar que aquesta distància no es pot fer arbitràriament petita.

Desfem el gir (4.6). Si el temps s en què ens movem dins B^* està acotat, també ho estarà t, el temps que estem dins la bola de radi μ^α (per (4.10)). Suposem que estem en aquest cas. Podrem escriure

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) &= G(t)(\widetilde{\mathbf{P}}_0(t) + \mu^\alpha O(\mathcal{E})) = \mathbf{P}_0(t) + \mu^\alpha O(\mathcal{E}), \\
\mathbf{Q}(t) &= G(t)(\widetilde{\mathbf{Q}}_0(t) + O(\mathcal{E})) = \mathbf{Q}_0(t) + O(\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

Per acabar, retornant a posicions i velocitats sinòdiques

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0(t) + \mu^\alpha O(\mathcal{E}) = \mathbf{r}_{20}(t) + \mu^\alpha O(\mathcal{E}), \\
\dot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{Q}(t) - \frac{1}{2}A_3\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}_0(t) - \frac{1}{2}A_3\mathbf{P}_0(t) + O(\mathcal{E}) = \dot{\mathbf{r}}_0(t) + O(\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

Així doncs, si $\mathcal{E} = \mu^\alpha$, el que tenim és que l'error ha guanyat un ordre ($\mu^{2\alpha}$) pel que fa al vector posició i s'ha mantingut igual pel que fa al vector velocitat. Recordem que per a l'aplicació exterior havíem obtingut un error d'ordre $\mu^{1-\alpha}$. Com que el que volem és "enganxar" les dues aplicacions, pel que fa a $\dot{\mathbf{r}}$ no en fem prou amb aquesta aproximació. A la següent secció prendrem una nova aproximació que ens donarà un error més petit i a més veurem quines restriccions sobre les condicions incials obtenim d'imposar que el temps de pas per l'interior de B^* estigui acotat.

4.4 Segona aproximació

Per tal de millorar i fer més petit l'error que cometem en l'aproximació ens caldrà pendre un terme més en les equacions (4.20). El problema que tenim és que el terme d'ordre μ^α, $f(\mathbf{u},\mathbf{u}')\mathbf{u}$, no és lineal i no sabem trobar explícitament la solució de les equacions que ens queden. Per tal d'escriure les equacions del moviment en coordenades KS (4.20) de manera que el terme no lineal sigui tot d'ordre $\mu^{2\alpha}$, utilitzarem la primera aproximació trobada.

Com que $(\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_0')$ és la solució de (4.22), podem escriure-la explícitament en funció del temps, c i les condicions incials:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(s) &= \cosh(\sqrt{c}\,s)\,\mathbf{u}_i + \frac{\sinh(\sqrt{c}\,s)}{\sqrt{c}}\,\mathbf{u}_i', \\ \mathbf{u}_0'(s) &= \sqrt{c}\,\sinh(\sqrt{c}\,s)\,\mathbf{u}_i + \cosh(\sqrt{c}\,s)\,\mathbf{u}_i'. \end{aligned} \tag{4.23}$$

El fet decisiu és el següent:

Lema 4.3

Sigui $f(\mathbf{u},\mathbf{u}') = -u_2u_1' + u_1u_2' - u_4u_3' + u_3u_4'$ *i* $(\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_0')$ *la solució de*

$$\begin{cases} \mathbf{u}'' = c\mathbf{u} \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_i'. \end{cases}$$

Llavors $f(\mathbf{u}_0(s),\mathbf{u}_0(s)) = f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')\ \forall\, s$.

La demostració consisteix senzillament a escriure cada una de les components de $\mathbf{u}_0(s)$ i $\mathbf{u}_0'(s)$ usant (4.23) i substituir-les a l'expressió de f.

Vegem com utilitzem aquest resultat. Suposem que el temps d'estada a la bola B^* està acotat. Llavors l'error que cometem en la primera aproximació és, efectivament, $\mathcal{E} = \mu^\alpha$, i podem escriure

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(s) &= \mathbf{u}_0(s) + O(\mu^\alpha), \\ \mathbf{u}'(s) &= \mathbf{u}_0'(s) + O(\mu^\alpha), \end{aligned}$$

essent $(\mathbf{u}(s),\mathbf{u}'(s))$ la solució de (4.20). Això implica que

$$f(\mathbf{u}(s),\mathbf{u}'(s)) = f(\mathbf{u}_0(s),\mathbf{u}_0'(s)) + O(\mu^\alpha) = f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i') + O(\mu^\alpha),$$

i, per tant, recuperant les equacions del moviment (4.16) tindrem que

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'' &= c\mathbf{u} + \mu^{\alpha} f(\mathbf{u}, \mathbf{u}')\mathbf{u} + O(\mu^{2\alpha}) = c\mathbf{u} + \mu^{\alpha} f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')\mathbf{u} + O(\mu^{2\alpha}) \\ &= (c + \mu^{\alpha} f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i'))\mathbf{u} + O(\mu^{2\alpha}).\end{aligned}$$

Així doncs, podem dir que $(\mathbf{u}(s), \mathbf{u}'(s))$ és la solució de

$$\begin{cases} \mathbf{u}'' = c_{\alpha}\mathbf{u} + O(\mu^{2\alpha}), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_i', \end{cases}$$

on

$$c_{\alpha} = \frac{3 - C_J}{4} + \mu^{\alpha} f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i'). \tag{4.24}$$

i $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ la definida al Lema 4.3. D'aquesta forma la part no lineal, que despreciarem, serà d'ordre $\mu^{2\alpha}$. Similarment al que hem fet en la primera aproximació, definim $\mathbf{u}_h(s)$ com la solució de

$$\begin{cases} \mathbf{u}'' = c_{\alpha}\mathbf{u}, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_i'. \end{cases} \tag{4.25}$$

Com a sistemes de primer ordre tindrem que $\boldsymbol{\zeta}(s) = (\mathbf{u}(s), \mathbf{u}'(s))^T$ és la solució de

$$\begin{cases} \boldsymbol{\zeta}' = C_{\alpha}\boldsymbol{\zeta} + O(\mu^{2\alpha}), \\ \boldsymbol{\zeta}(0) = \boldsymbol{\zeta}_i, \end{cases}$$

amb $C_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ c_{\alpha} I_4 & 0 \end{pmatrix}$, i $\boldsymbol{\zeta}_h(s) = (\mathbf{u}_h(s), \mathbf{u}_h'(s))^T$ la solució de

$$\begin{cases} \boldsymbol{\zeta}' = C_{\alpha}\boldsymbol{\zeta}, \\ \boldsymbol{\zeta}(0) = \boldsymbol{\zeta}_i. \end{cases}$$

Ara el resultat que obtindrem (la demostració és totalment anàloga a la del Teorema 4.1) serà

Teorema 4.2

Siguin $\boldsymbol{\zeta}(s)$ i $\boldsymbol{\zeta}_h(s)$ les definides anteriorment. Suposem que el temps que $\mathbf{u}(s)$ triga a sortir de B^* està acotat inferiorment. Llavors

$$|\boldsymbol{\zeta}(s) - \boldsymbol{\zeta}_h(s)| \leq |s| K \mu^{2\alpha} e^{\bar{c}_{\alpha}|s|},$$

on $\bar{c}_{\alpha} = \max(c_{\alpha}, 1)$ i per a tot s a l'interval de temps en què estem dins l'entorn de l'origen de radi 1.

Observem que la hipòtesi que el temps de pas per B^* estigui acotat inferiorment (recordem que $s < 0$) és important perquè aquest resultat sigui vàlid. Si no fos així, l'error comès en la primera aproximació no seria d'ordre μ^α i llavors no seria cert que les equacions del moviment es poden escriure com $\mathbf{u}'' = c_\alpha \mathbf{u} + O(\mu^{2\alpha})$. Així doncs, es fa necessari imposar-ho com a hipòtesi.

A continuació, en les subsecions següents, veurem quines condicions s'obtenen a l'imposar que el temps d'estada dins B^* estigui acotat, calcularem la distància mínima a l'origen a què pot estar l'òrbita hiperbòlica aproximada (no pot ser arbitràriament petita, ho hem vist a la secció 4.3) i calcularem l'error que es comet en aquesta aproximació en coordenades sinòdiques.

4.4.1 Temps de pas per l'interior

Estem suposant que el temps de pas de $\mathbf{u}(s)$ per B^* està acotat inferiorment i, en conseqüència, també ho estarà el temps de pas de $\mathbf{u}_h(s)$. Tot seguit trobarem aquest temps, s_f, en termes de μ i de les condicions incials $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')$ i a veurem quines restriccions tindrem sobre aquestes condicions pel fet que s_f estigui acotat. Així doncs, busquem la solució de

$$|\mathbf{u}_h(s)| = 1.$$

Comencem escrivint explícitament $(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h')$ en funció del temps i les condicions incials. Com que $\mathbf{u}_h$ és la solució de (4.25), llavors tenim que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(s) &= \cosh(\sqrt{c_\alpha}\, s)\, \mathbf{u}_i + \frac{\sinh(\sqrt{c_\alpha}\, s)}{\sqrt{c_\alpha}}\, \mathbf{u}_i', \\ \mathbf{u}_h'(s) &= \sqrt{c_\alpha}\, \sinh(\sqrt{c_\alpha}\, s)\, \mathbf{u}_i + \cosh(\sqrt{c_\alpha}\, s)\, \mathbf{u}_i'. \end{aligned} \tag{4.26}$$

on c_α està definit a (4.24).

Calculem en quin instant de temps aquesta òrbita es troba a distància 1 de l'origen. És clar que un d'aquests moments és per a $s = 0$. N'hi haurà un altre, s_f, que és el que ens interesa. Per trobar-lo en termes de $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')$ utilitzarem (4.26) i les notacions següents:

1. $V_i = |\mathbf{u}_i'|$ serà el mòdul de la velocitat en el punt inicial.

2. η_i serà l'angle que formen els vectors $\mathbf{u}_i$ i $\mathbf{u}_i'$, i per tant, com que $|\mathbf{u}_i| = 1$, el producte

escalar entre la posició i la velocitat inicials serà

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}'_i \rangle = V_i \cos \eta_i.$$

Així doncs,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}_h(s)|^2 &= \cosh^2(\sqrt{c_\alpha}\, s)\langle \mathbf{u}_i(s), \mathbf{u}_i(s)\rangle + \frac{2}{\sqrt{c_\alpha}} \cosh(\sqrt{c_\alpha}\, s)\, \sinh(\sqrt{c_\alpha}\, s)\langle \mathbf{u}_i(s), \mathbf{u}'_i(s)\rangle \\
&\quad + \frac{\sinh^2(\sqrt{c_\alpha}\, s)}{c_\alpha}\langle \mathbf{u}'_i(s), \mathbf{u}'_i(s)\rangle \\
&= \frac{\cosh(2\sqrt{c_\alpha}\, s) + 1}{2} + \frac{\sinh(2\sqrt{c_\alpha}\, s)}{\sqrt{c_\alpha}} V_i \cos \eta_i + \frac{\cosh(2\sqrt{c_\alpha}\, s) - 1}{2 c_\alpha} V_i^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right) \cosh(2\sqrt{c_\alpha}\, s) + \frac{V_i \cos \eta_i}{\sqrt{c_\alpha}} \sinh(2\sqrt{c_\alpha}\, s) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right),
\end{aligned} \tag{4.27}$$

i trobar les solucions de $|\mathbf{u}_h(s)|^2 = 1$ serà equivalent a resoldre l'equació

$$\left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right) \cosh(2\sqrt{c_\alpha}\, s) + 2\frac{V_i \cos \eta_i}{\sqrt{c_\alpha}} \sinh(2\sqrt{c_\alpha}\, s) - \left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right) = 0.$$

Definim els coeficients següents:

$$m_\alpha = 1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}, \qquad n_\alpha = 2\frac{V_i \cos \eta_i}{\sqrt{c_\alpha}}, \tag{4.28}$$

i, per simplificar, $\tau = 2\sqrt{c_\alpha}\, s$. Amb aquestes notacions l'equació que hem de resoldre és

$$g(\tau) = m_\alpha \cosh \tau + n_\alpha \sinh \tau - m_\alpha = 0.$$

Trobem-ne la solució diferent de zero. Per simetria, entre els dos punts en què $|\mathbf{u}_0| = 1$, hi ha d'haver un punt a distància mínima de l'origen i s'haurà d'assolir en la meitat del temps que es triga a anar d'un extrem a l'altre (vegeu la figura 4.1). Busquem el temps que cal per arribar a aquest punt intermedi, que serà un mínim de la funció que acabem de definir. Derivem-la i igualem-la a zero.

$$g'(\tau) = m_\alpha \sinh \tau + n_\alpha \cosh \tau = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \tanh \tau = \frac{-n_\alpha}{m_\alpha},$$

i prenent la funció inversa de la tangent hiperbòlica tenim que

$$\tau = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - n_\alpha / m_\alpha}{1 + n_\alpha / m_\alpha}\right).$$

Així doncs, definim s_m com

$$s_m = \frac{1}{4\sqrt{c_\alpha}} \ln \left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha}\right). \tag{4.29}$$

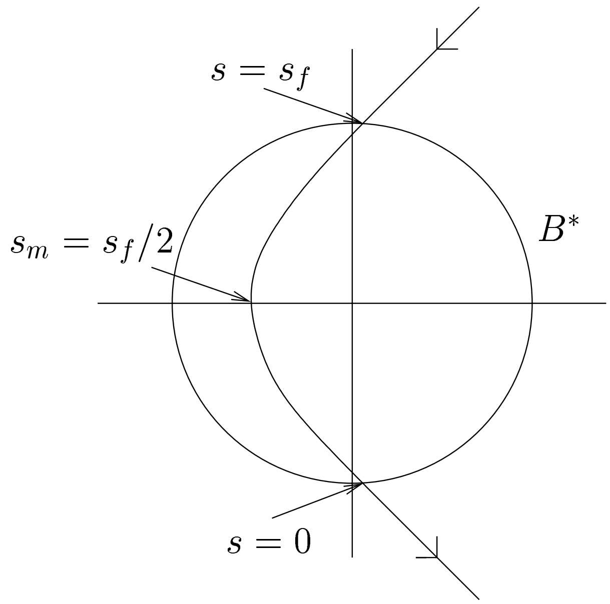

Figura 4.1: Representació qualitativa de la solució hiperbòlica. En $s = 0$ tenim el punt inicial i anem enrera en el temps fins a trobar el punt de sortida de la bola B^*, en què $s = s_f < 0$.

Observacions:

1. La resolució d'abans és correcta si $\tanh \tau \in [-1, 1]$. Com que $|n_\alpha| \leq \dfrac{2V_i}{\sqrt{c_\alpha}} \leq m_\alpha$, això queda garantit.

2. $s_f < 0$ si i només si $\dfrac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha} < 1$. N'hi haurà prou amb veure que $n_\alpha > 0$. Per comprovar-ho calcularem el producte escalar entre $\mathbf{u}_i$ i $\mathbf{u}_i'$ en termes de les condicions inicials en coordenades sinòdiques. Utilitzarem, en aquest ordre, (4.19), (4.18), (4.6) per t=0 i (4.4).

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i' \rangle &= \langle \mathbf{u}_i, \frac{1}{2} L(\mathbf{u}_i)^T \widetilde{\mathbf{Q}}_i \rangle = \frac{1}{2} \langle L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i, \widetilde{\mathbf{Q}}_i \rangle = \frac{1}{2\mu^\alpha} \langle \widetilde{\mathbf{P}}_i, \widetilde{\mathbf{Q}}_i \rangle \\ &= \frac{1}{2\mu^\alpha} \langle \mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i \rangle = \frac{1}{2\mu^\alpha} \langle \mathbf{r}_{2i}, \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} A_3 \mathbf{r}_{2i} \rangle = \frac{1}{2\mu^\alpha} \langle \mathbf{r}_{2i}, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle.\end{aligned}$$

Recordem que $\langle \mathbf{r}_{2i}, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle = \mu^\alpha v_i \cos a$, i per tant tenim la relació

$$V_i \cos \eta_i = \frac{1}{2} v_i \cos a. \tag{4.30}$$

Com que una de les condicions imposades en l'estudi de la solució exterior era $\cos a > 0$, assegurem que $\cos \eta_i > 0$, i per tant, també que $n_\alpha > 0$.

3. Es pot comprovar que s_m és un mínim de g i, per tant, aquest serà el temps en què estem a distància mínima de l'origen. El que volem comprovar ara és que el temps s_f de sortida de la bola B^* és el doble d'aquest: $s_f = 2s_m$. Per a això hem de veure que $g(2s_m) = 0$. Com que

$$\begin{aligned}
\cosh(2\sqrt{c_\alpha}\, s_f) &= \cosh\left(\ln\left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha} + \frac{m_\alpha + n_\alpha}{m_\alpha - n_\alpha}\right) \\
&= \frac{m_\alpha^2 + n_\alpha^2}{m_\alpha^2 - n_\alpha^2}, \\
\sinh(2\sqrt{c_\alpha}\, s_f) &= \sinh\left(\ln\left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha} - \frac{m_\alpha + n_\alpha}{m_\alpha - n_\alpha}\right) \\
&= \frac{-2m_\alpha n_\alpha}{m_\alpha^2 - n_\alpha^2},
\end{aligned} \tag{4.31}$$

llavors

$$g(s_f) = m_\alpha \cosh(2\sqrt{c_\alpha}\, s_f) + n_\alpha \sinh(2\sqrt{c_\alpha}\, s_f) - m_\alpha = \frac{m_\alpha(m_\alpha^2 + n_\alpha^2 - 2n_\alpha^2)}{m_\alpha^2 - n_\alpha^2} - m_\alpha = 0.$$

Així doncs, ja hem vist que el temps de pas de l'òrbita hiperbòlica $\mathbf{u}_h$ per l'interior de la bola B^* és

$$s_f = \frac{1}{2\sqrt{c_\alpha}} \ln\left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha}\right). \tag{4.32}$$

Desenvolupem aquesta expressió en potències de μ^α. Per a això primer ens caldrà trobar els desenvolupaments de c_α, V_i i $\cos\eta_i$.

1. Com que $c_\alpha = c + \mu^\alpha f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_\alpha} &= \frac{1}{c\left(1 + \dfrac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha\right)} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha})\right), \\
\frac{1}{\sqrt{c_\alpha}} &= \frac{1}{\sqrt{c}}\left(1 - \frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha})\right).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

2. Per obtenir el mòdul de la velocitat inicial, avaluem la integral de Jacobi (4.17) en el punt inicial $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')$:

$$\frac{|\mathbf{u}_i'|^2}{|\mathbf{u}_i|^2} = \frac{3 - C_J}{4} + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2|\mathbf{u}_i|^2} + \mu^\alpha f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i') + O(\mu^{2\alpha}).$$

Usant la definició de c (4.21) i que $|\mathbf{u}_i| = 1$, tindrem

$$\begin{aligned}
V_i^2 &= c + \mu^\alpha f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i') + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2} + O(\mu^{2\alpha}), \\
V_i &= \sqrt{c}\left(1 + \frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\right).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

3. Dividim les expressions anteriors per c_α i $\sqrt{c_\alpha}$:

$$\begin{aligned}\frac{V_i^2}{c_\alpha} &= 1 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha}),\\ \frac{V_i}{\sqrt{c_\alpha}} &= 1 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha}).\end{aligned} \tag{4.35}$$

4. Pel que fa a $\cos\eta_i$, hem de recuperar (4.30) i (1.7). Com que $3 - C_J = 4c$, tindrem:

$$\begin{aligned}\sqrt{c}\left(1 + \frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\right)\cos\eta_i &= \sqrt{c}\left(1 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\right)\cos a,\\ \cos\eta_i = \cos a\left(1 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\right)&\left(1 - \frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha - \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\right),\end{aligned}$$

   i per tant

$$\cos\eta_i = \cos a\left(1 - \frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha})\right). \tag{4.36}$$

Ara ja podem trobar els desenvolupaments per m_α i n_α. Substituint (4.35) i (4.36) a les expressions (4.28) obtenim:

$$\begin{aligned}m_\alpha &= 2 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha}),\\ n_\alpha &= 2\cos a\left(1 - \frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha})\right)\left(1 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\right)\\ &= 2\cos a\left(1 - \frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\right).\end{aligned} \tag{4.37}$$

D'aquestes tindrem, per a la seva suma,

$$\begin{aligned}m_\alpha + n_\alpha &= 2(1+\cos a) - 2\cos a\,\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + 2(1+\cos a)\,\frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\\ &= 2(1+\cos a)\left(1 - \frac{\cos a}{1+\cos a}\,\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\right),\end{aligned}$$

ja que $1 + \cos a \geq 1$. Pel que fa a la diferència

$$m_\alpha - n_\alpha = 2(1-\cos a) + 2\cos a\,\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + 2(1-\cos a)\,\frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha}).$$

Ara, però, no podem assegurar que $1 - \cos a$ no es faci zero. Haurem de distingir segons si aquest terme es manté lluny de zero o no i, en aquest últim cas, com a mínim demanarem que $\dfrac{\mu^{2\alpha}}{1-\cos a} = O(\mu^{1-\alpha})$. Veurem tres casos:

A$_1$: $1 - \cos a \geq \epsilon' > 0$, per a algun ϵ independent de μ.

$\mathbf{A}_2$: $1-\cos a = O(\mu^{3\alpha-1})$, per a $\alpha > 1/3$.

$\mathbf{A}_3$: $1-\cos a = O(\mu^{3\alpha-1+\kappa})$, per a alguna $\kappa > 0$, i $\alpha > 1/3$.

En els dos primers casos podrem escriure

$$m_\alpha - n_\alpha = 2(1-\cos a)\left(1 + \frac{\cos a}{1-\cos a}\,\frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha})\right),$$

i per tant, fins ordre $\mu^{1-\alpha}$ obtindrem

$$\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a}\left(1 + \frac{2\cos a}{\sin^2 a}\,\frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha})\right).$$

Examinem cada un dels casos anteriors i donem finalment per a cada un d'ells l'expressió per a s_f corresponent.

- Cas $\mathbf{A}_1$. Com que $1-\cos a$ no es pot fer arbitràriament petit, $\sin^2 a = 1-\cos^2 a$ tampoc es podrà acostar a zero i tindrem que

$$\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a} + O(\mu^\alpha).$$

Així doncs, a l'expressió de s_f (4.32) podrem escriure (usem el segon desenvolupament trobat a (4.33))

$$\begin{aligned} s_f &= \frac{1}{2\sqrt{c}}\left(1 - \frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha})\right)\ln\left(\frac{1-\cos a}{1+\cos a} + O(\mu^\alpha)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{c}}\ln\left(\frac{1-\cos a}{1+\cos a}\right) + O(\mu^\alpha), \end{aligned} \tag{4.38}$$

i per tant s_f és una quantitat acotada.

- Cas $\mathbf{A}_2$. En aquest cas $\sin^2 a = O(\mu^{3\alpha-1})$ i per tant

$$\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a} + O(\mu^{1-2\alpha}) = O(\mu^\nu),$$

on $\nu = \begin{cases} 3\alpha - 1, & \text{per a } 1/3 < \alpha \le 0.4 \\ 1-2\alpha, & \text{per a } 0.4 \le \alpha < 1/2 \end{cases}$ (vegeu la figura 4.2). Usant de nou les mateixes expressions que en el cas anterior, ara el temps s_f serà

$$s_f = \frac{1}{2\sqrt{c}}(1 + O(\mu^\alpha))\ln(O(\mu^\nu)) = \frac{1}{2\sqrt{c}}\ln(\mu^\nu) + O(\mu^\alpha). \tag{4.39}$$

la qual cosa ens diu que en aquest cas s_f no està acotat.

- Cas $\mathbf{A}_3$. Aquest serà similar a l'anterior i podrem escriure

$$\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha} = O(\mu^\nu),$$

on ara $\nu = \min(3\alpha - 1 + \kappa, 1 - 2\alpha + \kappa)$, i, per tant, s_f tampoc estarà acotat.

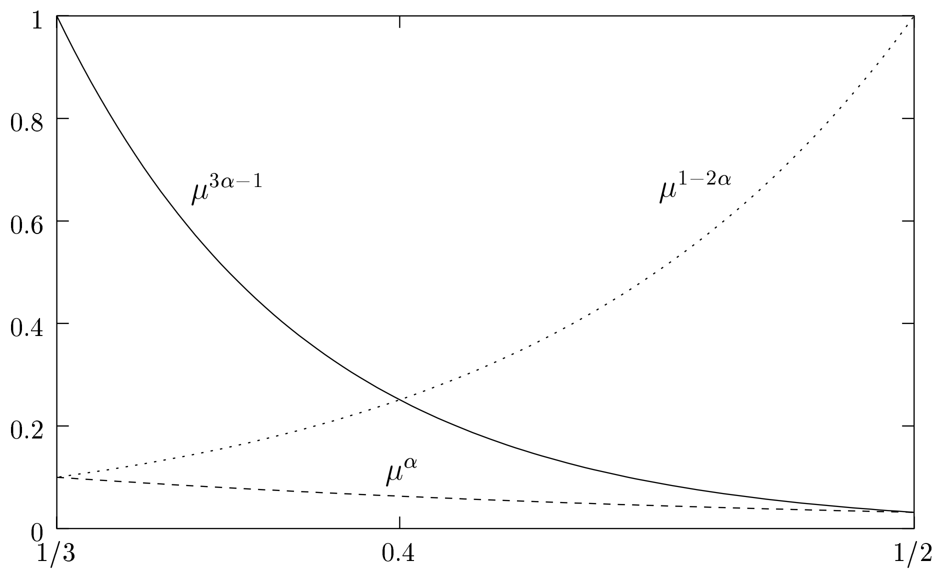

Figura 4.2: Representació, per a $\mu = 0.001$, de les funcions $\mu^{3\alpha-1}$, $\mu^{1-2\alpha}$ i μ^α. Les dues primeres sempre són més grans que la última. $\mu^{3\alpha-1} < \mu^{2\alpha-1}$ sempre que $\alpha > 0.4$.

Observem que per a $\alpha = 0.4$ és quan s'obtè l'error més petit en els dos últims casos. Malgrat que en aquesta memòria estudiarem només el cas en què $1 - \cos a$ està acotat, en els estudis numèrics que hem dut a terme hem pres sempre aquest valor pel paràmetre α.

4.4.2 Distància mínima de l'òrbita hiperbòlica a l'origen

Tal i com havíem observat, a l'hora de calcular l'error comès en coordenades sinòdiques (secció 4.3) hem de tenir en compte si la distància a l'origen del vector posició aproximat en coordenades KS ($\mathbf{u}_h$ en aquest cas) es fa arbitràriament petita o no. Si només ens preocupem de l'error que cometem en temps s_f, no tindrem cap problema ja que $|\mathbf{u}_h(s_f)| = 1$. Tot i que podem centrar-nos només en el que succeeix en temps s_f, calcularem la distància mínima de l'òrbita hiperbòlica a l'origen i veurem que, de fet, en el cas que s_f està acotat, la distància mínima a l'origen també ho està.

Haurem d'avaluar l'expressió per a $|\mathbf{u}(s)|^2$ (4.27) en l'instant s_m (donat per (4.29)). Ens faran falta les expressions següents:

$$\begin{aligned}\cosh(2\sqrt{c_\alpha}\, s_m) &= \cosh\left(\ln\left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha}\right)^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha}\right)^{1/2} + \left(\frac{m_\alpha + n_\alpha}{m_\alpha - n_\alpha}\right)^{1/2}\right) \\ &= \frac{m_\alpha}{\sqrt{m_\alpha^2 - n_\alpha^2}}, \\ \sinh(2\sqrt{c_\alpha}\, s_m) &= \sinh\left(\ln\left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha}\right)^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha}\right)^{1/2} - \left(\frac{m_\alpha + n_\alpha}{m_\alpha - n_\alpha}\right)^{1/2}\right) \\ &= \frac{-n_\alpha}{\sqrt{m_\alpha^2 - n_\alpha^2}}.\end{aligned} \tag{4.40}$$

Substituint-les en (4.27) tenim

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}_h(s_m)|^2 &= \frac{1}{2}\, m_\alpha \cosh(2\sqrt{c_\alpha}\, s_m) + \frac{1}{2}\, n_\alpha \sinh(2\sqrt{c_\alpha}\, s_m) + \frac{1}{2}\,(2 - m_\alpha) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{m_\alpha^2}{\sqrt{m_\alpha^2 - n_\alpha^2}} - \frac{n_\alpha^2}{\sqrt{m_\alpha^2 - n_\alpha^2}} + 2 - m_\alpha\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\,(m_\alpha - \sqrt{m_\alpha^2 - n_\alpha^2}).\end{aligned}$$

Expressem-ho en potències de μ, i fem-ho segons els casos vistos en la secció anterior.

- Cas $\mathbf{A}_1$. Com que $1 - \cos a \geq \epsilon' > 0$ de les expressions per a m_α i n_α trobades a (4.37) tindrem que

$$\begin{aligned}m_\alpha^2 - n_\alpha^2 &= \left(4 + 4\frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha})\right) - 4\cos^2 a\left(1 - \frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{c}\mu^\alpha + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha})\right) \\ &= 4\sin^2 a\left(1 + \cot^2 a\frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{c}\mu^\alpha + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha})\right).\end{aligned}$$

  Ens quedem fins ordre $\mu^{1-\alpha}$ i

$$\sqrt{m_\alpha^2 - n_\alpha^2} = 2|\sin a|\left(1 + \cot^2 a\frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{2c}\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha})\right),$$

  i en conseqüència

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}_h(s_m)|^2 &= 1 - \frac{1}{2}\left(2 - 2|\sin a| - |\sin a|\cot^2 a\frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{c}\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha})\right) \\ &= |\sin a| - |\sin a|\cot^2 a\frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{2c}\mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha}).\end{aligned}$$

  Així doncs, la distància a l'origen es manté acotada inferiorment (no s'acosta a zero) durant el pas per l'interior de la bola B^*.

- Casos $\mathbf{A}_2$ i $\mathbf{A}_3$. En aquests dos casos $1-\cos a = O(\mu^\nu)$, per a $\nu = 3\alpha-1$ o $\nu = 3\alpha-1+\kappa$, i per tant

  $$m_\alpha^2 - n_\alpha^2 = 4\sin^2 a + O(\mu^\alpha) = O(\mu^{\nu^*}),$$

  per a $\nu^* = \min(\alpha, 3\alpha - 1 + k)$. Així doncs

  $$|\mathbf{u}_h(s_m)|^2 = O(\mu^{\nu^*/2}),$$

  i en cap dels dos casos tindrem que la distància a l'origen es manté acotada inferiorment (en el sentit que es pot acostar a zero).

La conclusió final és que haurem d'imposar, com a condició sobre l'angle de sortida a, que

$$|a| \geq \epsilon > 0, \qquad \text{per a } \epsilon \text{ independent de } \mu \tag{4.41}$$

(garantim que $1 - \cos a$ i $\sin a$ no s'acostin a zero). El que estem evitant amb aquesta condició és que la sortida de la bola $B(M, \mu^\alpha)$ sigui en la direcció del radi vector ($a = 0$). Si prenguéssim aquesta direcció, a l'anar enrera i entrar en la bola aniríem de dret al centre de la bola, la qual cosa hem d'evitar (vegeu la figura 4.3).

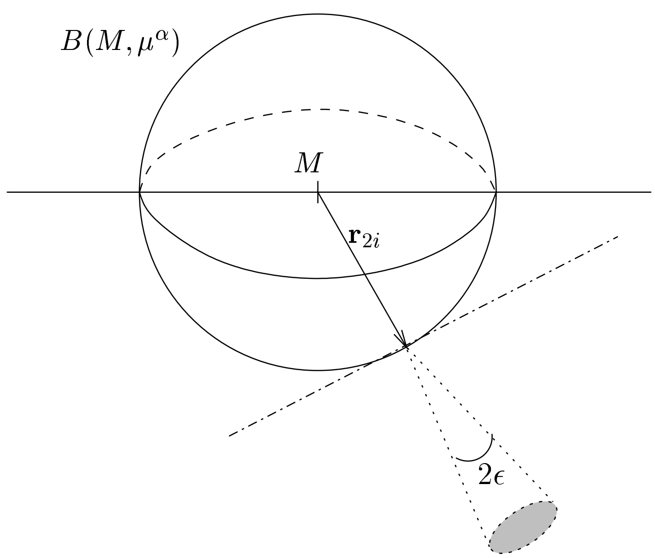

Figura 4.3: Angle inicial en coordenades sinòdiques. La regió marcada seria la no permesa per al vector $\dot{\mathbf{r}}_i$ ja que l'angle amb el vector posició $\mathbf{r}_{2i}$ seria proper a zero.

4.4.3 Error en coordenades KS i sinòdiques

Pel Teorema 4.2 l'error màxim que cometrem en l'aproximació per l'òrbita hiperbòlica $(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}'_h)$ serà

$$\mathcal{E} = O(\mu^{2\alpha}).$$

Observem que, com que estem suposant que el temps de pas per l'interior de B^* està acotat, la distància mínima a l'origen de l'òrbita hiperbòlica aproximada no es pot fer arbitràriament petita. Per tant, podem repetir el que hem fet a la secció 4.3 i tindrem l'error en coordenades sinòdiques. Això és, si

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \dot{\mathbf{r}}(t) \end{pmatrix} \underset{\text{a KS}}{\overset{\text{sinòdiques}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(s) \\ \mathbf{u}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h(s) + \mathcal{E} \\ \mathbf{u}'_h(s) + \mathcal{E} \end{pmatrix},$$

i la transformació inversa ens dóna

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_h(s) \\ \mathbf{u}'_h(s) \end{pmatrix} \underset{\text{sinòdiques}}{\overset{\text{KS}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_h(t) \\ \dot{\mathbf{r}}_h(t) \end{pmatrix}, \tag{4.42}$$

llavors

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \dot{\mathbf{r}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_h(t) + \mu^\alpha \mathcal{E} \\ \dot{\mathbf{r}}_h(t) + \mathcal{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_h(t) + \mu^{3\alpha} \\ \dot{\mathbf{r}}_h(t) + \mu^{2\alpha} \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Així doncs, amb aquesta aproximació no tindrem cap problema a l'hora "d'enganxar" l'aplicació exterior amb la interior.

4.5 Aplicació interior

Tal i com hem fet amb l'aplicació exterior, descriurem, en coordenades sinòdiques, la posició i velocitat amb què sortim de la bola $B(M, \mu^\alpha)$ després de passar-hi per dins. Usant l'òrbita hiperbòlica que aproxima la solució del problema restringit a l'interior de B, descriurem $(\mathbf{r}(t_f), \dot{\mathbf{r}}(t_f))$ en termes de $(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$, essent (de (4.10))

$$t_f = -\mu^\alpha \int_{s_f}^0 |\mathbf{u}(s)|^2 \, ds, \tag{4.44}$$

s_f definit a (4.32) i $\mathbf{u}(s)$ la solució del problema restringit en coordenades KS (solució de les equacions (4.16)).

Per (4.43) definirem la imatge de $(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$ per l'aplicació interior com

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_f \\ \dot{\mathbf{r}}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_h(t_f) \\ \dot{\mathbf{r}}_h(t_f) \end{pmatrix}.$$

Per (4.42), el que hem de fer és prendre $(\mathbf{u}_h(s_f), \mathbf{u}'_h(s_f))$ i desfer els canvis introduïts al principi d'aquest capítol per retornar a coordenades sinòdiques. Aquest procés és el que descrivim en la subsecció següent.

4.5.1 Canvi de coordenades KS a sinòdiques

L'objectiu d'aquesta secció és descriure $(\mathbf{r}_f, \dot{\mathbf{r}}_f)$ en termes de $(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$, a partir de la posició i velocitat finals en coordenades KS. Les expressions trobades són les que podeu veure a (4.65) i (4.66).

Prenem $(\mathbf{u}_h(s_f), \mathbf{u}'_h(s_f))$, que és el punt final en coordenades KS per a l'aplicació interior, i expressem-lo en termes de les condicions inicials també en KS. Per (4.26) tenim que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_f &= \mathbf{u}_h(s_f) = \cosh(\sqrt{c_\alpha}\, s_f)\, \mathbf{u}_i + \frac{\sinh(\sqrt{c_\alpha}\, s_f)}{\sqrt{c_\alpha}}\, \mathbf{u}'_i, \\ \mathbf{u}'_f &= \mathbf{u}'_h(s_f) = \sqrt{c_\alpha}\, \sinh(\sqrt{c_\alpha}\, s_f)\, \mathbf{u}_i + \cosh(\sqrt{c_\alpha}\, s_f)\, \mathbf{u}'_i. \end{aligned}$$

Com que $s_f = 2s_m$, podem aprofitar els càlculs fets a (4.40). Usant les definicions (4.28), tindrem

$$\begin{aligned} \cosh(\sqrt{c_\alpha}\, s_f) &= \frac{m_\alpha}{\sqrt{m_\alpha^2 - n_\alpha^2}} = \frac{1}{\Delta_\alpha}\left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right), \\ \sinh(\sqrt{c_\alpha}\, s_f) &= \frac{-n_\alpha}{\sqrt{m_\alpha^2 - n_\alpha^2}} = -\frac{2}{\Delta_\alpha}\frac{V_i \cos\eta_i}{\sqrt{c_\alpha}}, \end{aligned}$$

essent

$$\Delta_\alpha = \sqrt{m_\alpha^2 - n_\alpha^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)^2 - 4\frac{V_i^2 \cos^2\eta_i}{c_\alpha}}. \tag{4.45}$$

Així doncs, tindrem per a $(\mathbf{u}_f, \mathbf{u}'_f)$ les expressions següents:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_f &= \frac{1}{\Delta_\alpha}\left(\left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)\mathbf{u}_i - 2\frac{V_i\cos\eta_i}{c_\alpha}\,\mathbf{u}'_i\right), \\ \mathbf{u}'_f &= \frac{1}{\Delta_\alpha}\left(-2V_i\cos\eta_i\,\mathbf{u}_i + \left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)\mathbf{u}'_i\right). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Comencem desfent el tercer canvi introduït a la secció 4.1 a partir de les relacions (4.9) i (4.12). Denotarem per $(\widetilde{\mathbf{P}}_f, \widetilde{\mathbf{Q}}_f)$ els vectors associats a $(\mathbf{u}_f, \mathbf{u}'_f)$ per aquest canvi de coordenades. Com que s_f és el temps en què l'òrbita hiperbòlica $\mathbf{u}_h$ torna a estar a la frontera de la bola unitat B^*, $|\mathbf{u}_f| = 1$. Per tant

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{P}}_f &= \mu^\alpha L(\mathbf{u}_f)\mathbf{u}_f, \\ \widetilde{\mathbf{Q}}_f &= 2L(\mathbf{u}_f)\mathbf{u}'_f. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Usant la primera igualtat de (4.46), s'obté

$$L(\mathbf{u}_f) = \frac{1}{\Delta_\alpha}\left[\left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right) L(\mathbf{u}_i) - 2\frac{V_i \cos\eta_i}{c_\alpha} L(\mathbf{u}'_i)\right],$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}_f)\mathbf{u}_f = \frac{1}{\Delta_\alpha^2}\Bigg[& \left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)^2 L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i - 2\left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)\frac{V_i \cos\eta_i}{c_\alpha}\Big(L(\mathbf{u}'_i)\mathbf{u}_i + L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}'_i\Big) \\ & + 4\,\frac{V_i^2\cos^2\eta_i}{c_\alpha^2} L(\mathbf{u}'_i)\mathbf{u}'_i\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Donat que $l(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}'_i) = 0$, podem utilitzar les propietats enunciades al Lema 4.1. Recordem que $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}'_i\rangle = V_i \cos\eta_i$. Així doncs, tindrem que (4.48) s'escriu

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}_f)\mathbf{u}_f &= \frac{1}{\Delta_\alpha^2}\Bigg[\left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)^2 L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i - 4\left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)\frac{V_i \cos\eta_i}{c_\alpha} L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}'_i \\ &\qquad + 4\,\frac{V_i^2\cos^2\eta_i}{c_\alpha^2}\Big(2V_i\cos\eta_i L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}'_i - V_i^2 L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i\Big)\Bigg] \\ &= \frac{1}{\Delta_\alpha^2}\Bigg[\left(\left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)^2 - 4\,\frac{V_i^4\cos^2\eta_i}{c_\alpha^2}\right) L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i \\ &\qquad + 4\,\frac{V_i\cos\eta_i}{c_\alpha}\left(\frac{2V_i^2\cos^2\eta_i}{c_\alpha} - 1 - \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right) L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}'_i\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Prenem ara la segona igualtat de (4.46) i usem de nou el Lema 4.1:

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{u}_f)\mathbf{u}'_f &= \frac{1}{\Delta_\alpha^2}\Bigg[-2V_i\cos\eta_i\left(1+\frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i + \left(1+\frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)^2 L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}'_i \\
&\quad + 4\,\frac{V_i^2\cos^2\eta_i}{c_\alpha}\,L(\mathbf{u}'_i)\mathbf{u}_i - 2\frac{V_i\cos\eta_i}{c_\alpha}\left(1+\frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)L(\mathbf{u}'_i)\mathbf{u}'_i\Bigg] \\
&= \frac{1}{\Delta_\alpha^2}\Bigg[-2V_i\cos\eta_i\left(1+\frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i + \left(\left(1+\frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)^2 + 4\,\frac{V_i^2\cos^2\eta_i}{c_\alpha}\right)L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}'_i \\
&\quad - 2\frac{V_i\cos\eta_i}{c_\alpha}\left(1+\frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)\Big(2V_i\cos\eta_i\,L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}'_i - V_i^2 L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i\Big)\Bigg] \\
&= \frac{1}{\Delta_\alpha^2}\Bigg[-2V_i\cos\eta_i\left(1-\frac{V_i^4}{c_\alpha^2}\right)L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i + \left(\left(1+\frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)^2 - 4\,\frac{V_i^4\cos^2\eta_i}{c_\alpha^2}\right)L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}'_i\Bigg].
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

Definim els coeficients

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \left(1+\frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)^2 - 4\,\frac{V_i^4\cos^2\eta_i}{c_\alpha^2}, \\
T_2 &= 4\,\frac{V_i\cos\eta_i}{c_\alpha}\left(\frac{2V_i^2\cos^2\eta_i}{c_\alpha} - 1 - \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right), \\
T_3 &= -2V_i\cos\eta_i\left(1-\frac{V_i^4}{c_\alpha^2}\right).
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

Amb aquestes notacions, i usant les expressions (4.49) i (4.50), podrem escriure (4.47) com

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{P}}_f &= \frac{\mu^\alpha}{\Delta_\alpha^2}\Big(T_1 L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i + T_2 L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}'_i\Big), \\
\widetilde{\mathbf{Q}}_f &= \frac{2}{\Delta_\alpha^2}\Big(T_3 L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i + T_1 L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}'_i\Big),
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

essent Δ_α l'expressió definida a (4.45). Per acabar de desfer aquest canvi, de (4.18) i (4.19) recordem que

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i &= \mu^{-\alpha}\widetilde{\mathbf{P}}_i, \\
L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}'_i &= \frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{Q}}_i,
\end{aligned}
$$

i, de (4.6), $(\widetilde{\mathbf{P}}_i, \widetilde{\mathbf{Q}}_i) = (\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i)$. Per tant, (4.52) s'escriurà

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{P}}_f &= \frac{1}{\Delta_\alpha^2}\Big(T_1\mathbf{P}_i + \frac{\mu^\alpha}{2}T_2\mathbf{Q}_i\Big), \\
\widetilde{\mathbf{Q}}_f &= \frac{1}{\Delta_\alpha^2}\Big(2\mu^{-\alpha}T_3\mathbf{P}_i + T_1\mathbf{Q}_i\Big).
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

El segon canvi que hem de desfer és el gir definit a (4.6). Tindrem que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_f &= G(t_f)^T \widetilde{\mathbf{P}}_f, \\ \mathbf{Q}_f &= G(t_f)^T \widetilde{\mathbf{Q}}_f, \end{aligned} \tag{4.54}$$

i per tant ens cal especificar qui és $G(t_f)$. Recordem que el temps final t_f, definit a (4.44), depèn explícitament de $\mathbf{u}(s)$, solució del problema restringit en coordenades KS i que no coneixem. Així doncs, utilitzem de nou la solució aproximada $\mathbf{u}_h(s)$ per donar una estimació de t_f. Prenem l'integrand de (4.44) i, utilitzant els càlculs fets a (4.27), tindrem:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}(s)|^2 &= |\mathbf{u}_h(s)|^2 + O(\mu^{2\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)\cosh(2\sqrt{c_\alpha}\, s) + \frac{V_i \cos\eta_i}{\sqrt{c_\alpha}}\sinh(2\sqrt{c_\alpha}\, s) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right) + O(\mu^{2\alpha}). \end{aligned}$$

Substituïm aquesta igualtat a l'expressió de t_f (4.44):

$$\begin{aligned} t_f =& -\mu^\alpha \int_{s_f}^{0} |\mathbf{u}_h(s)|^2 ds \;+ O(\mu^{3\alpha}) \\ =& \frac{\mu^\alpha}{2}\left[\left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)\left[\frac{\sinh(2\sqrt{c_\alpha}\, s)}{2\sqrt{c_\alpha}}\right]_0^{s_f} + \frac{2V_i\cos\eta_i}{\sqrt{c_\alpha}}\left[\frac{\cosh(2\sqrt{c_\alpha}\, s)}{2\sqrt{c_\alpha}}\right]_0^{s_f} + \left(1 - \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right) s_f\right] \\ &+ O(\mu^{3\alpha}) \\ =& \frac{\mu^\alpha}{2}\left[\left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)\frac{\sinh(2\sqrt{c_\alpha}\, s_f)}{2\sqrt{c_\alpha}} + \frac{V_i\cos\eta_i}{c_\alpha}\Big(\cosh(2\sqrt{c_\alpha}\, s_f) - 1\Big) + \left(1 - \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right) s_f\right] \\ &+ O(\mu^{3\alpha}). \end{aligned}$$

Escrivim aquesta expressió en termes dels coeficients m_α i n_α definits a (4.28), i usem (4.31) i (4.32). Tindrem que

$$\begin{aligned} t_f &= \frac{\mu^\alpha}{2}\left[\frac{m_\alpha}{2\sqrt{c_\alpha}}\frac{-2m_\alpha n_\alpha}{m_\alpha^2 - n_\alpha^2} + \frac{n_\alpha}{2\sqrt{c_\alpha}}\Big(\frac{m_\alpha^2 + n_\alpha^2}{m_\alpha^2 - n_\alpha^2} - 1\Big) + \frac{2 - m_\alpha}{2\sqrt{c_\alpha}}\ln\left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha}\right)\right] + O(\mu^{3\alpha}) \\ &= \frac{\mu^\alpha}{4\sqrt{c_\alpha}}\left[\frac{-2m_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha^2 - n_\alpha^2} + \frac{2n_\alpha^3}{m_\alpha^2 - n_\alpha^2} + (2 - m_\alpha)\ln\left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha}\right)\right] + O(\mu^{3\alpha}) \\ &= \frac{\mu^\alpha}{4\sqrt{c_\alpha}}\left[-2n_\alpha + (2 - m_\alpha)\ln\left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha}\right)\right] + O(\mu^{3\alpha}). \end{aligned} \tag{4.55}$$

Finalment, expressem t_f en potències de μ. En la secció 4.4.1 hem vist que

$$\ln\left(\frac{m_\alpha - n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha}\right) = \ln\left(\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}\right) + O(\mu^\alpha).$$

Així doncs, usant (4.33) i (4.37), podrem escriure (4.55) com

$$
\begin{aligned}
t_f &= \frac{\mu^\alpha}{4\sqrt{c}}(1+O(\mu^\alpha))\Big[-4\cos a + (2-2+O(\mu^{1-\alpha}))\ln\left(\frac{1-\cos a}{1+\cos a}\right) + O(\mu^\alpha)\Big] + O(\mu^{3\alpha}) \\
&= -\mu^\alpha \frac{\cos a}{\sqrt{c}} + O(\mu^{2\alpha}).
\end{aligned}
$$

Aquesta igualtat implica que

$$
\begin{aligned}
\cos t_f &= 1 + O(\mu^{2\alpha}), \\
\sin t_f &= -\frac{\cos a}{\sqrt{c}}\,\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}),
\end{aligned}
$$

i, per tant, la matriu de gir $G(t_f)^T$ que apareix a l'expressió (4.54) s'escriurà

$$
G(t_f) = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\cos a}{\sqrt{c}}\,\mu^\alpha & 0 \\ \dfrac{\cos a}{\sqrt{c}}\,\mu^\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\mu^{2\alpha}) = I + \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\,\mu^\alpha A_3 + O(\mu^{2\alpha}).
$$

Tornem a (4.54). Utilitzant l'expressió trobada per a $G(t_f)$ i que $|\widetilde{\mathbf{P}}_f| = 1$, tindrem que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_f &= \left(I + \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\,\mu^\alpha A_3\right)\widetilde{\mathbf{P}}_f + O(\mu^{3\alpha}), \\
\mathbf{Q}_f &= \left(I + \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\,\mu^\alpha A_3\right)\widetilde{\mathbf{Q}}_f + O(\mu^{2\alpha}).
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

Si mirem les definicions (4.53) de $\widetilde{\mathbf{P}}_f$ i $\widetilde{\mathbf{Q}}_f$, veiem que aquests depenen dels coeficients Δ_α, T_1, T_2 i T_3, els quals alhora depenen de les condicions inicials $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}'_i)$ en coordenades KS. A continuació desenvoluparem aquests coeficients en potències de μ. Per a això, utilitzarem les expressions (4.35) i (4.36).

Comencem per trobar Δ_α^2. De la seva definició a (4.45) tindrem que

$$
\begin{aligned}
\Delta_\alpha^2 &= \left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)^2 - 4\frac{V_i^2\cos^2\eta_i}{c_\alpha} \\
&= \left(2 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha})\right)^2 - 4\left(1 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha})\right)\cos^2 a\left(1 - \frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}'_i)}{c}\,\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha})\right) \\
&= 4(1-\cos^2 a) + 4\cos^2 a\,\frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}'_i)}{c}\,\mu^\alpha + \frac{2(1-\cos^2 a)}{c}\,\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha}).
\end{aligned}
$$

Recordem que estem suposant $1-\cos a$ acotat inferiorment (no es pot acostar arbitràriament a zero). Per tant podem escriure que

$$
\Delta_\alpha^2 = 4(1-\cos^2 a)\left(1 + \cot^2 a\,\frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}'_i)}{c}\,\mu^\alpha + \frac{1}{2c}\,\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha})\right),
$$

i invertint aquesta igualtat tindrem que

$$\frac{1}{\Delta_\alpha^2} = \frac{1}{4\sin^2 a}\left(1 - \cot^2 a\,\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha - \frac{1}{2c}\,\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha})\right). \tag{4.57}$$

Prenem ara el coeficient T_1 definit a (4.51). Usant de nou els desenvolupaments (4.35) i (4.36) tenim que

$$\begin{aligned}
T_1 &= \left(1 + \frac{V_i^2}{c_\alpha}\right)^2 - 4\,\frac{V_i^4\cos^2\eta_i}{c_\alpha^2}\\
&= \left(2 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha})\right)^2 - 4\left(1 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha})\right)^2 \cos^2 a\left(1 - \frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha})\right)\\
&= 4(1-\cos^2 a) + 4\cos^2 a\,\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + \frac{2-4\cos^2 a}{c}\,\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha})\\
&= 4\sin^2 a\left(1 + \cot^2 a\,\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + \frac{1-2\cos^2 a}{2c\sin^2 a}\,\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha})\right),
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Pel que fa a T_2, també usarem (4.33):

$$\begin{aligned}
T_2 =& 4\frac{V_i\cos\eta_i}{c_\alpha}\left(\frac{V_i^2}{c_\alpha}(2\cos^2\eta_i - 1) - 1\right)\\
=& \frac{4\cos a}{\sqrt{c}}\left(1 - \frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha})\right)^2\left(1 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\right)\\
&\times\left(\left(1 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha})\right)\left(2\cos^2 a - 1 - 2\cos^2 a\,\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha})\right) - 1\right)\\
=& \frac{4\cos a}{\sqrt{c}}\left(1 - \frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\right)\\
&\times\left(2\cos^2 a - 2 - 2\cos^2 a\,\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + (2\cos^2 a - 1)\frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha})\right)\\
=& \frac{4\cos a}{\sqrt{c}}\left(2(\cos^2 a - 1) + 2(1-2\cos^2 a)\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + \frac{3\cos^2 a - 2}{2c}\,\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha})\right).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

L'últim coeficient que ens queda és T_3. Usarem els mateixos desenvolupaments i (4.34):

$$\begin{aligned}
T_3 =& -2V_i\cos\eta_i\left(1 - \frac{V_i^4}{c_\alpha^2}\right)\\
=& -2\sqrt{c}\left(1 + \frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\right)\cos a\left(1 - \frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{2c}\,\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha})\right)\\
&\times\left(1 - \left(1 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha})\right)^2\right)\\
=& -2\sqrt{c}\cos a\left(1 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\right)\left(1 - 1 - \frac{\mu^{1-\alpha}}{c} + O(\mu^{2\alpha})\right)\\
=& 2\cos a\left(\frac{\mu^{1-\alpha}}{\sqrt{c}} + O(\mu^{2\alpha})\right).
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Així doncs, utilitzant les expressions trobades a (4.57), (4.58), (4.59) i (4.60) tindrem que

$$
\begin{aligned}
\frac{T_1}{\Delta_\alpha^2} &= 4\sin^2 a \left(1 + \cot^2 a \,\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + \frac{1-2\cos^2 a}{2c\sin^2 a}\,\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha})\right)\\
&\quad\times \frac{1}{4\sin^2 a}\left(1 - \cot^2 a \,\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha - \frac{1}{2c}\,\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha})\right)\\
&= 1 - \frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha}),\\
\frac{T_2}{\Delta_\alpha^2} &= \frac{4\cos a}{\sqrt{c}}\left(-2\sin^2 a + 2(1-2\cos^2 a)\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + \frac{3\cos^2 a - 2}{2c}\,\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha})\right)\\
&\quad\times \frac{1}{4\sin^2 a}\left(1 - \cot^2 a \,\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha - \frac{1}{2c}\,\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha})\right)\\
&= \frac{\cos a}{\sqrt{c}\,\sin^2 a}\left(-2\sin^2 a + 2\sin^2 a\,\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + \cos^2 a\,\frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha})\right)\\
&= \frac{\cos a}{\sqrt{c}}\left(-2 + 2\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + \cot^2 a\,\frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha})\right),\\
\frac{T_3}{\Delta_\alpha^2} &= 2\cos a\left(\frac{\mu^{1-\alpha}}{\sqrt{c}} + O(\mu^{2\alpha})\right)\frac{1}{4\sin^2 a}\left(1 - \cot^2 a\,\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha - \frac{1}{2c}\,\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha})\right)\\
&= \frac{\cos a}{2\sin^2 a}\left(\frac{\mu^{1-\alpha}}{\sqrt{c}} + O(\mu^{2\alpha})\right).
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

Retornem a les expressions de $\widetilde{\mathbf{P}}_f$ i $\widetilde{\mathbf{Q}}_f$ donades a (4.53). Utilitzant les expressions anteriors (4.61) i que $|\mathbf{P}_i| = \mu^\alpha$, tindrem que $\widetilde{\mathbf{P}}_f$ i $\widetilde{\mathbf{Q}}_f$ s'escriuran

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{P}}_f &= \left(1 - \frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha}\right)\mathbf{P}_i + \frac{\mu^\alpha\cos a}{2\sqrt{c}}\left(-2 + 2\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + \cot^2 a\,\frac{\mu^{1-\alpha}}{2c}\right)\mathbf{Q}_i + O(\mu^{3\alpha}),\\
\widetilde{\mathbf{Q}}_f &= \frac{\cos a}{\sin^2 a}\,\frac{\mu^{1-\alpha}}{\sqrt{c}}\mu^{-\alpha}\mathbf{P}_i + \left(1 - \frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha}\right)\mathbf{Q}_i + O(\mu^{2\alpha}).
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Ara ja estem en condicions d'escriure $\mathbf{P}_f$ i $\mathbf{Q}_f$ en potències de μ. Prenem de (4.56) el vector posició i introduïm la primera igualtat de (4.62).

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_f &= \left(I + \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\,\mu^\alpha A_3\right)\left(1 - \frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha}\right)\mathbf{P}_i\\
&\quad + \left(I + \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\,\mu^\alpha A_3\right)\frac{\mu^\alpha\cos a}{\sqrt{c}}\left(-1 + \frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^\alpha + \cot^2 a\,\frac{\mu^{1-\alpha}}{4c}\right)\mathbf{Q}_i + O(\mu^{3\alpha})\\
&= \left(I + \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\,\mu^\alpha A_3 - \frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha} I\right)\mathbf{P}_i\\
&\quad + \frac{\cos a}{\sqrt{c}}\,\mu^\alpha\left(-I + \Big(\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,I - \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\,A_3\Big)\mu^\alpha + \frac{\cot^2 a}{4c}\,\mu^{1-\alpha} I\right)\mathbf{Q}_i + O(\mu^{3\alpha}).
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

Pel que fa al vector velocitat, de la segona igualtat de (4.56) i, usant també la segona igualtat de (4.62), tenim que

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_f &= \left(I + \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\,\mu^{\alpha} A_3\right)\left(\frac{\cos a}{\sin^2 a}\,\frac{\mu^{1-\alpha}}{\sqrt{c}}\mu^{-\alpha}\mathbf{P}_i + \left(1 - \frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha}\right)\mathbf{Q}_i\right) + O(\mu^{2\alpha}) \\ &= \left(\frac{\cos a}{\sin^2 a}\,\frac{\mu^{1-\alpha}}{\sqrt{c}}\right)(\mu^{-\alpha}\mathbf{P}_i) + \left(I + \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\,\mu^{\alpha} A_3 - \frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha} I\right)\mathbf{Q}_i + O(\mu^{2\alpha}). \qquad (4.64)\end{aligned}$$

Ens queda un últim canvi per desfer per arribar a coordenades sinòdiques, i és el definit a (4.2). Usem les relacions entre les condicions inicials donades a (4.4), les expressions (4.63) i (4.64) i que $|\mathbf{r}_{2i}| = \mu^{\alpha}$. Tindrem que

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{2f} &= \left(I + \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\,\mu^{\alpha} A_3 - \frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha} I\right)\mathbf{r}_{2i} \\ &\quad + \frac{\cos a}{\sqrt{c}}\,\mu^{\alpha}\left(- I + \left(\frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{c}\, I - \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\, A_3\right)\mu^{\alpha} + \frac{\cot^2 a}{4c}\,\mu^{1-\alpha} I\right)\left(\dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} A_3 \mathbf{r}_{2i}\right) \\ &\quad + O(\mu^{3\alpha}) \\ &= \left(1 - \frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha}\right)\mathbf{r}_{2i} + \frac{\cos a}{\sqrt{c}}\,\mu^{\alpha}\left(- 1 + \frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^{\alpha} + \frac{\cot^2 a}{4c}\,\mu^{1-\alpha}\right)\dot{\mathbf{r}}_i \\ &\quad - \frac{\cos^2 a}{2c}\,\mu^{2\alpha} A_3 \dot{\mathbf{r}}_i + O(\mu^{3\alpha}), \end{aligned} \qquad (4.65)$$

pel que fa a la posició final de P respecte del primari M. Pel que fa a la velocitat final, podem escriure

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_f &= \mathbf{Q}_f - \frac{1}{2} A_3 \mathbf{P}_f \\ &= \left(\frac{\cos a}{\sin^2 a}\,\frac{\mu^{1-\alpha}}{\sqrt{c}}\right)(\mu^{-\alpha}\mathbf{r}_{2i}) + \left(I + \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\,\mu^{\alpha} A_3 - \frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha} I\right)\left(\dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} A_3 \mathbf{r}_{2i}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} A_3 \left(I + \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\,\mu^{\alpha} A_3 - \frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha} I\right)\mathbf{r}_{2i} \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\cos a}{\sqrt{c}}\,\mu^{\alpha} A_3\left(- I + \left(\frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{c}\, I - \frac{\cos a}{2\sqrt{c}}\, A_3\right)\mu^{\alpha} + \frac{\cot^2 a}{4c}\,\mu^{1-\alpha} I\right)\left(\dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} A_3 \mathbf{r}_{2i}\right) \\ &\quad + O(\mu^{2\alpha}) \\ &= \left(\frac{\cos a}{\sin^2 a}\,\frac{\mu^{1-\alpha}}{\sqrt{c}}\right)(\mu^{-\alpha}\mathbf{r}_{2i}) + \left(I + \frac{\cos a}{\sqrt{c}}\,\mu^{\alpha} A_3 - \frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha} I\right)\dot{\mathbf{r}}_i + O(\mu^{2\alpha}). \qquad (4.66)\end{aligned}$$

Observem que, de fet, si només ens volem quedar amb termes d'ordre inferior a $\mu^{1-\alpha}$ a l'expressió (4.66), aquesta es pot escriure

$$\dot{\mathbf{r}}_f = \left(I + \frac{\cos a}{\sqrt{c}}\, \mu^{\alpha} A_3 \right) \dot{\mathbf{r}}_i + O(\mu^{1-\alpha}).$$

En conclusió, la imatge de $(\mathbf{r}_{2i}, \dot{\mathbf{r}}_i)$ per l'aplicació interior seran els vectors $(\mathbf{r}_{2f}, \dot{\mathbf{r}}_f)$ donats per les expressions (4.65) i (4.66).

4.5.2 Aplicació interior coordenada a coordenada

En aquesta secció especificarem coordenada a coordenada, com ja vam fer amb l'aplicació exterior, l'aplicació interior. Els resultats obtinguts els podeu veure a les expressions (4.72), (4.75), (4.76), (4.77) pel que fa a la posició i (4.73), (4.81) pel que fa a la velocitat.

Definim φ_f, θ_f, ϕ_f, ψ_f i v_f tals que

$$\mathbf{r}_f = \begin{pmatrix} \mu - 1 + r_{2f} \cos\varphi_f \, \cos\theta_f \\ r_{2f} \cos\varphi_f \, \sin\theta_f \\ r_{2f} \sin\varphi_f \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{r}}_f = v_f \begin{pmatrix} \cos\phi_f \, \cos\psi_f \\ \cos\phi_f \, \sin\psi_f \\ \sin\phi_f \end{pmatrix}, \tag{4.67}$$

essent $\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_{2f} + \mathbf{r}_M$ i $\mathbf{r}_{2f}$ i $\dot{\mathbf{r}}_f$ els definits a la subsecció anterior. Comencem per escriure qui és $|\mathbf{r}_{2f}| = r_{2f}$. Utilitzem l'expressió (4.65) i recordem que $|\mathbf{r}_{2i}| = \mu^{\alpha}$, $|\dot{\mathbf{r}}_i| = v_i$ i (1.8). Tindrem que

$$\begin{aligned} r_{2f}^2 = {} & \left(1 - \frac{\cot^2 a}{2c}\, \mu^{1-\alpha}\right)^2 \mu^{2\alpha} \\ & + 2\left(1 - \frac{\cot^2 a}{2c}\, \mu^{1-\alpha}\right) \frac{\cos a}{\sqrt{c}}\, \mu^{\alpha} \left(-1 + \frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{c}\, \mu^{\alpha} + \frac{\cot^2 a}{4c}\, \mu^{1-\alpha}\right) \mu^{\alpha} v_i \cos a \\ & + \mu^{2\alpha} \frac{\cos^2 a}{c} \left(-1 + \frac{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')}{c}\, \mu^{\alpha} + \frac{\cot^2 a}{4c}\, \mu^{1-\alpha}\right)^2 v_i^2 \\ & - 2\left(1 - \frac{\cot^2 a}{2c}\, \mu^{1-\alpha}\right) \frac{\cos^2 a}{2c}\, \mu^{2\alpha} \langle \mathbf{r}_{2i}, A_3 \dot{\mathbf{r}}_i \rangle + O(\mu^{4\alpha}). \end{aligned} \tag{4.68}$$

D'una banda, usant (1.5) i la definició (3.24) podem escriure

$$\langle \mathbf{r}_{2i}, A_3 \dot{\mathbf{r}}_i \rangle = 2\mu^{\alpha} v_i \cos\varphi \, \cos\phi \, \sin(\theta - \psi) = 2\mu^{\alpha} v_i \Lambda.$$

De l'altra, per (1.6) i (1.7), i recordant que $c = (3 - C_J)/4$, tenim que

$$\begin{aligned} \frac{v_i^2}{c} &= 4\left(1 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha})\right), \\ \frac{v_i}{\sqrt{c}} &= 2\left(1 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{4c} + O(\mu^{2\alpha})\right). \end{aligned} \tag{4.69}$$

Així doncs, tornant a (4.68), tindrem que

$$\begin{aligned}
r_{2f}^2 =&\mu^{2\alpha}\Bigg[1-\frac{\cot^2 a}{c}\,\mu^{1-\alpha}\\
&+4\cos^2 a\left(1+\frac{\mu^{1-\alpha}}{4c}+O(\mu^{2\alpha})\right)\left(-1+\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^{\alpha}+\frac{3\cot^2 a}{4c}\,\mu^{1-\alpha}+O(\mu^{2\alpha})\right)\\
&+4\cos^2 a\left(1+\frac{\mu^{1-\alpha}}{2c}+O(\mu^{2\alpha})\right)\left(1-2\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^{\alpha}-\frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha}+O(\mu^{2\alpha})\right)\\
&-\frac{\cos^2 a}{c}\left(1-\frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha}\right)2\mu^{\alpha}v_i\Lambda+O(\mu^{2\alpha})\Bigg]\\
=&\mu^{2\alpha}\Bigg[1-\frac{\cot^2 a}{c}\,\mu^{1-\alpha}+4\cos^2 a\left(-\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}\,\mu^{\alpha}+\frac{\cot^2 a}{4c}\,\mu^{1-\alpha}+\frac{\mu^{1-\alpha}}{4c}\right)\\
&-4\frac{\cos^2 a}{\sqrt{c}}\,\Lambda\,\mu^{\alpha}\left(1+\frac{\mu^{1-\alpha}}{4c}+O(\mu^{2\alpha})\right)\left(1-\frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha}\right)+O(\mu^{2\alpha})\Bigg]\\
=&\mu^{2\alpha}\left[1-4\cos^2 a\left(\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}+\frac{\Lambda}{\sqrt{c}}\right)\mu^{\alpha}+O(\mu^{2\alpha})\right].
\end{aligned}$$

Això és,

$$r_{2f}=\mu^{\alpha}\left[1-2\cos^2 a\left(\frac{f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')}{c}+\frac{\Lambda}{\sqrt{c}}\right)\mu^{\alpha}+O(\mu^{2\alpha})\right]. \tag{4.70}$$

Abans de continuar, ens queda per expressar $f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')$ en termes de les condicions inicials en coordenades sinòdiques. Recordem que

$$f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')=u_{i_1}u_{i_2}'-u_{i_2}u_{i_1}'+u_{i_3}u_{i_4}'-u_{i_4}u_{i_3}'.$$

Definim la matriu

$$J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},$$

i recordem que $\mathbf{u}_i'=\frac{1}{2}L(\mathbf{u}_i)^T\mathbf{Q}_i$, de manera que podem escriure

$$f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i')=\langle\mathbf{u}_i,J\mathbf{u}_i'\rangle=\frac{1}{2}\langle J^T\mathbf{u}_i,L(\mathbf{u}_i)^T\mathbf{Q}_i\rangle=\frac{1}{2}\langle L(\mathbf{u}_i)J^T\mathbf{u}_i,\mathbf{Q}_i\rangle.$$

D'una banda,

$$L(\mathbf{u}_i)J^T\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} -2(u_{i_1}u_{i_2} - u_{i_3}u_{i_4}) \\ u_{i_1}^2 - u_{i_2}^2 - u_{i_3}^2 + u_{i_4}^2 \\ 0 \\ -2(u_{i_1}u_{i_3} + u_{i_2}u_{i_4}) \end{pmatrix},$$

i de l'altra, tenim que

$$\mu^{-\alpha}\mathbf{P}_i = L(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} u_{i_1}^2 - u_{i_2}^2 - u_{i_3}^2 + u_{i_4}^2 \\ 2(u_{i_1}u_{i_2} - u_{i_3}u_{i_4}) \\ 2(u_{i_1}u_{i_3} + u_{i_2}u_{i_4}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant tindrem

$$f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i') = \frac{\mu^{-\alpha}}{2}(-P_{i_2}Q_{i_1} + P_{i_1}Q_{i_2}). \tag{4.71}$$

Per acabar aquest càlcul, usem (4.4) per a escriure

$$\mathbf{P}_i = \mu^\alpha \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\theta \\ \cos\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q}_i = v_i \begin{pmatrix} \cos\phi\,\cos\psi \\ \cos\phi\,\sin\psi \\ \sin\phi \end{pmatrix} + \mu^\alpha \begin{pmatrix} -\cos\varphi\,\sin\theta \\ \cos\varphi\,\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

i per tant, tornant a (4.71) ens quedarà

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i') &= \frac{1}{2}\Big(\cos\varphi\,\cos\theta\,(v_i\cos\phi\,\sin\psi\, + \mu^\alpha\cos\varphi\,\cos\theta) \\ &\quad - \cos\varphi\,\sin\theta\,(v_i\cos\phi\,\cos\psi\, - \mu^\alpha\cos\varphi\,\sin\theta)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(v_i\cos\varphi\,\cos\phi\,\sin(\psi-\theta) + \mu^\alpha\cos^2\varphi\Big). \end{aligned}$$

Per acabar recordem la definició de Λ a (3.24) i usem la primera igualtat de (4.69). Finalment obtenim que

$$f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i') = -\frac{\Lambda}{2}(2\sqrt{c} + O(\mu^{1-\alpha})) + O(\mu^\alpha) = -\Lambda\sqrt{c} + O(\mu^\alpha).$$

Tornem al càlcul de r_{2f} a (4.70) i incorporem l'expressió trobada per a $f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i')$. Tindrem que

$$r_{2f} = \mu^\alpha\Big(1 + O(\mu^{2\alpha})\Big). \tag{4.72}$$

Busquem ara, usant (4.66), el desenvolupament per a v_f:

$$\begin{aligned}
v_f^2 = & \left(\frac{\cos a}{\sin^2 a}\frac{\mu^{1-\alpha}}{\sqrt{c}}\right)^2 + 2\frac{\cos a}{\sin^2 a}\frac{\mu^{1-\alpha}}{\sqrt{c}}\left(1-\frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha}\right) v_i \cos a \\
& + 2\frac{\cos a}{\sin^2 a}\frac{\mu^{1-\alpha}}{\sqrt{c}}\frac{\cos a}{\sqrt{c}}\,\mu^\alpha\langle\frac{\mathbf{r}_{2i}}{\mu^\alpha}, A_3\dot{\mathbf{r}}_i\rangle + \left(1-\frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha}\right)^2 v_i^2 + O(\mu^{2\alpha}) \\
= & 2\frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}\Big(2+O(\mu^{1-\alpha})\Big)\mu^{1-\alpha} + \left(1-\frac{\cot^2 a}{c}\,\mu^{1-\alpha}\right)\Big(4c+2\mu^{1-\alpha}+O(\mu^{2\alpha})\Big) + O(\mu^{2\alpha}) \\
= & 4c + 2\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha}),
\end{aligned}$$

i, per tant,

$$v_f = 2\sqrt{c}\left(1+\frac{\mu^{1-\alpha}}{4c}+O(\mu^{2\alpha})\right). \tag{4.73}$$

Utilitzem les expressions trobades per a r_{2f} i v_f per especificar l'aplicació interior coordenada a coordenada. Comencem per la posició final $\mathbf{r}_f$. De la seva expressió en termes de les condicions inicials (4.65) i de (4.67) tindrem les igualtats següents:

$$\begin{aligned}
r_{2f}\cos\varphi_f\,\cos\theta_f = & \left(1-\frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha}\right)\mu^\alpha\cos\varphi\,\cos\theta \\
& + \mu^\alpha\frac{\cos a}{\sqrt{c}}\left(-1-\frac{\Lambda}{\sqrt{c}}\,\mu^\alpha+\frac{\cot^2 a}{4c}\,\mu^{1-\alpha}\right) v_i\cos\phi\,\cos\psi \\
& - \mu^{2\alpha}\frac{\cos^2 a}{2c}\Big(-2v_i\cos\phi\,\sin\psi\Big) + O(\mu^{3\alpha}), \\
r_{2f}\cos\varphi_f\,\sin\theta_f = & \left(1-\frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha}\right)\mu^\alpha\cos\varphi\,\sin\theta \\
& + \mu^\alpha\frac{\cos a}{\sqrt{c}}\left(-1-\frac{\Lambda}{\sqrt{c}}\,\mu^\alpha+\frac{\cot^2 a}{4c}\,\mu^{1-\alpha}\right) v_i\cos\phi\,\sin\psi \\
& - \mu^{2\alpha}\frac{\cos^2 a}{2c}\Big(2v_i\cos\phi\,\cos\psi\Big) + O(\mu^{3\alpha}), \\
r_{2f}\sin\varphi_f = & \left(1-\frac{\cot^2 a}{2c}\,\mu^{1-\alpha}\right)\mu^\alpha\sin\varphi \\
& + \mu^\alpha\frac{\cos a}{\sqrt{c}}\left(-1-\frac{\Lambda}{\sqrt{c}}\,\mu^\alpha+\frac{\cot^2 a}{4c}\,\mu^{1-\alpha}\right) v_i\sin\phi + O(\mu^{3\alpha}).
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Detallem una mica més aquests desenvolupaments. Del desenvolupament de r_{2f} (4.72) deduïm que

$$\frac{\mu^\alpha}{r_{2f}} = 1 + O(\mu^{2\alpha}).$$

D'altra banda sabem (per (4.69)) que

$$\frac{v_i}{\sqrt{c}} = 2 + \frac{\mu^{1-\alpha}}{2c} + O(\mu^{2\alpha}).$$

Introduint aquestes dues relacions a (4.74) i, desenvolupant fins a termes d'ordre $\mu^{1-\alpha}$, obtenim les igualtats següents:

$$\begin{aligned}
\cos\varphi_f\,\cos\theta_f &= \cos\varphi\,\cos\theta\,+2\cos a\left(-1-\frac{\Lambda}{\sqrt{c}}\,\mu^\alpha\right)\cos\phi\,\cos\psi\\
&\quad+2\mu^\alpha\frac{\cos^2 a}{\sqrt{c}}\,\cos\phi\,\sin\psi\,+O(\mu^{1-\alpha})\\
&=\cos\varphi\,\cos\theta\,-2\cos a\,\cos\phi\,\cos\psi\\
&\quad+2\mu^\alpha\frac{\cos a}{\sqrt{c}}\,\cos\phi\,(\cos a\,\sin\psi\,-\Lambda\cos\psi)+O(\mu^{1-\alpha}),\\
\cos\varphi_f\,\sin\theta_f &= \cos\varphi\,\sin\theta\,+2\cos a\left(-1-\frac{\Lambda}{\sqrt{c}}\,\mu^\alpha\right)\cos\phi\,\sin\psi\\
&\quad-2\mu^\alpha\frac{\cos^2 a}{\sqrt{c}}\,\cos\phi\,\cos\psi\,+O(\mu^{1-\alpha})\\
&=\cos\varphi\,\sin\theta\,-2\cos a\,\cos\phi\,\sin\psi\\
&\quad-2\mu^\alpha\frac{\cos a}{\sqrt{c}}\,\cos\phi\,(\cos a\,\cos\psi\,+\Lambda\sin\psi)+O(\mu^{1-\alpha}),\\
\sin\varphi_f &= \sin\varphi\,+2\cos a\left(-1-\frac{\Lambda}{\sqrt{c}}\,\mu^\alpha\right)\sin\phi\,+O(\mu^{1-\alpha})\\
&=\sin\varphi\,-2\cos a\,\sin\phi\,-2\mu^\alpha\frac{\cos a}{\sqrt{c}}\,\Lambda\sin\phi\,+O(\mu^{1-\alpha}).
\end{aligned}$$

Finalment, recordem que $\phi=\phi_0+\Delta\phi\,\mu^\alpha+O(\mu^{2\alpha})$ i $\psi=\psi_0+\Delta\psi\,\mu^\alpha+O(\mu^{2\alpha})$. Usem els desenvolupaments per a les seves raons trigonomètriques (2.22) i els de Λ i $\cos a$ especificats a (3.24) i (3.25). Les expressions que s'obtenen són:

$$\begin{aligned}
\cos\varphi_f\,\cos\theta_f &= \cos\varphi\,\cos\theta\,-2\cos a_0\,\cos\phi_0\,\cos\psi_0\\
&\quad+2\mu^\alpha\Big[\cos a_0\,(\Delta\psi\,\cos\phi_0\sin\psi_0+\Delta\phi\,\sin\phi_0\cos\psi_0)-\Delta C\,\cos\phi_0\cos\psi_0\\
&\quad+\frac{\cos a_0}{\sqrt{c}}\,\cos\phi_0\,(\cos a_0\sin\psi_0-\Lambda_0\cos\psi_0)\Big]+O(\mu^{1-\alpha}),
\end{aligned}\tag{4.75}$$

$$\begin{aligned}
\cos\varphi_f\,\sin\theta_f &= \cos\varphi\,\sin\theta\,-2\cos a_0\,\cos\phi_0\,\sin\psi_0\\
&\quad-2\mu^\alpha\Big[\cos a_0\,(\Delta\psi\,\cos\phi_0\cos\psi_0-\Delta\phi\,\sin\phi_0\sin\psi_0)+\Delta C\,\cos\phi_0\sin\psi_0\\
&\quad+\frac{\cos a_0}{\sqrt{c}}\,\cos\phi_0\,(\cos a_0\cos\psi_0+\Lambda_0\sin\psi_0)\Big]+O(\mu^{1-\alpha}),
\end{aligned}\tag{4.76}$$

$$\begin{aligned}
\sin\varphi_f &= \sin\varphi\,-2\cos a_0\sin\phi_0\\
&\quad-2\mu^\alpha\Big[\Delta\phi\,\cos a_0\cos\phi_0+\Delta C\,\sin\phi_0+\frac{\cos a_0}{\sqrt{c}}\,\Lambda_0\sin\phi_0\Big]+O(\mu^{1-\alpha}).
\end{aligned}\tag{4.77}$$

Pel que fa a la velocitat final, igualant terme a terme les expressions (4.66) i (4.67), tindrem que

$$\begin{aligned} v_f \cos\phi_f\ \cos\psi_f &= v_i \cos\phi\ \cos\psi\ + \mu^\alpha \frac{\cos a}{\sqrt{c}}\,(-2v_i\cos\phi\ \sin\psi) + O(\mu^{1-\alpha}),\\ v_f \cos\phi_f\ \sin\psi_f &= v_i \cos\phi\ \sin\psi\ + \mu^\alpha \frac{\cos a}{\sqrt{c}}\,(2v_i\cos\phi\ \cos\psi) + O(\mu^{1-\alpha}),\\ v_f \sin\phi_f &= v_i \sin\phi\ + O(\mu^{1-\alpha}). \end{aligned} \tag{4.78}$$

Observant les expressions (1.7) i (4.73), veiem que els mòduls de les velocitats inicial i final són iguals fins ordre $\mu^{2\alpha}$. Això és,

$$v_f = v_i + O(\mu^{2\alpha}), \tag{4.79}$$

i, introduint aquesta relació a les igualtats de (4.78) obtenim que

$$\begin{aligned} \cos\phi_f\ \cos\psi_f &= \cos\phi\ \left(\cos\psi\ - 2\mu^\alpha \frac{\cos a}{\sqrt{c}}\ \sin\psi\right) + O(\mu^{1-\alpha}),\\ \cos\phi_f\ \sin\psi_f &= \cos\phi\ \left(\sin\psi\ + 2\mu^\alpha \frac{\cos a}{\sqrt{c}}\ \cos\psi\right) + O(\mu^{1-\alpha}),\\ \sin\phi_f &= \sin\phi\ + O(\mu^{1-\alpha}). \end{aligned} \tag{4.80}$$

L'última de les equacions anteriors implica que $\phi_f = \phi + O(\mu^{1-\alpha})$ i, per tant, tindrem que $\cos\phi_f = \cos\phi\ + O(\mu^{1-\alpha})$. Si $\cos\phi = 0$, llavors ψ_f no estarà determinat. En cas contrari, usant de nou els desenvolupaments (2.22) per a $\cos\phi$, $\cos\psi$ i $\sin\psi$ i (3.25) per a $\cos a$, i les dues primeres igualtats de (4.80) tindrem que

$$\begin{aligned} \cos\psi_f &= \cos\psi\ - 2\mu^\alpha \frac{\cos a}{\sqrt{c}}\ \sin\psi\ + O(\mu^{1-\alpha})\\ &= \cos\psi_0 - \mu^\alpha \sin\psi_0 \left(\frac{2\cos a_0}{\sqrt{c}} + \Delta\psi\right) + O(\mu^{1-\alpha}),\\ \sin\psi_f &= \sin\psi\ + 2\mu^\alpha \frac{\cos a}{\sqrt{c}}\ \cos\psi\ + O(\mu^{1-\alpha})\\ &= \sin\psi_0 + \mu^\alpha \cos\psi_0 \left(\frac{2\cos a_0}{\sqrt{c}} + \Delta\psi\right) + O(\mu^{1-\alpha}). \end{aligned}$$

En conclusió tindrem que, si $\cos\phi \neq 0$ (anàlogament a l'aplicació exterior),

$$\begin{aligned} v_f &= v_i + O(\mu^{2\alpha}),\\ \phi_f &= \phi + O(\mu^{2\alpha}),\\ \psi_f &= \psi + \left(\Delta\psi + 2\,\frac{\cos a_0}{\sqrt{c}}\right)\mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}). \end{aligned} \tag{4.81}$$