Lògiques modals tetravalents

Miquel Rius Font

LÒGIQUES MODALS TETRAVALENTS

per

Miquel RIUS FONT

Memòria presentada per a optar al grau de Doctor
en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona.
Dirigida pel Dr.Josep Maria Font i Llovet.

Barcelona, febrer de 1992

Dedicat al meu avi en el seu 91 aniversari

INTRODUCCIÓ

El marc algebraic en què es situa la memòria (excepte el darrer capítol) és l'introduït per Brown i Suzko a [BS], marc que gira entorn la definició de lògica abstracta; una lògica abstracta L és una parella $(\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ formada per una àlgebra abstracta $\mathfrak{A}$ i un sistema clausura $\mathcal{C}$ sobre A, conjunt suport d'$\mathfrak{A}$. La noció clàssica de lògica com un conjunt de fórmules ben formades sobre les que es té un conjunt d'axiomes i unes regles d'inferència queda així com un cas particular, prenent com $\mathfrak{A}$ el conjunt de fórmules ben formades i com $\mathcal{C}$ la família de subconjunts d'A que contenen els axiomes i són tancats per les regles de deducció. Els elements de $\mathcal{C}$ s'anomenen tancats, si bé A. Monteiro i els seus seguidors els anomenen sistemes deductius.

La noció de lògica abstracta té l'encert de tractar la part algebraica, $\mathfrak{A}$, i la part lògica, $\mathcal{C}$, d'una lògica com un únic objecte matemàtic, i a més obre un ampli camp investigador a l'intentar relacionar classes de lògiques abstractes amb classes d'àlgebres. El primer treball en aquesta línia és l'estudi de la relació entre lògiques clàssiques (abstractes) i àlgebres de Boole fet per Blom i Brown a [BB], i a ell han seguit una llarga llista d'estudis del mateix tipus d'entre els que cal destacar, per la seva influència sobre aquesta memòria, els realitzats per J.M. Font i V. Verdú sobre la lògica dels reticles distributius, les lògiques de De Morgan i les lògiques modals S4 i S5.

L'objectiu de la present memòria, que també va en aquesta línia, és la definició i l'estudi, el més complet possible en aquesta perspectiva, d'una classe de lògiques que he anomenat lògiques modal tetravalents (LMTs). Les LMTs són un tipus de lògiques modals (amb operador modal $\Box$) sobre lògiques de De Morgan (i per tant tetravalorades) que mantenen una estreta relació amb la varietat de les àlgebres modals tetravalents (AMTs).

Les AMTs tenen el seu origen en l'estudi de la independència de la presentació de les àlgebres de Lukasiewicz trivalents (ALT) que es fa a [Mo]. Més concretament, les AMT es poden definir com reticles de De Morgan amb un element distingit (el màxim , 1, o el mínim 0) i una operació unària ($\Box$) caracteritzada per dues equacions:

$$(1) \qquad \neg\Box a \wedge a = \neg a \wedge a;$$

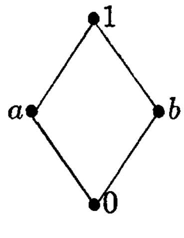
$$(2) \qquad \Box a \wedge \neg a = 0.$$

Si s'afegeix l'equació

$$(3) \qquad \neg\Box\neg(a \wedge b) = \neg\Box\neg a \wedge \neg\Box\neg b$$

(que sobre una AMT equival a la llei de Kleene $a \wedge \neg a \leq b \vee \neg b$) s'obté una ALT.

Les AMTs han estat extensament estudiades per Isabel Loureiro a la seva tesi [L1] i en els altres articles que apareixen en la bibliografia. En el capítol segon repassaré els resultats generals sobre aquestes àlgebres i establiré nous resultats que usaré en capítols posteriors. Anomenaré $\mathfrak{M}_4$ a l'àlgebra de De Morgan de quatre elements sobre el reticle



amb $(\neg a = a, \neg b = b, \neg 1 = 0, \neg 0 = 1)$. $\mathfrak{M}_4$ genera la varietat de les àlgebres de De Morgan, i si sobre ella defineixo l'operador $\Box$ com $\Box 1 = 1, \Box a = \Box b = \Box 0 = 0$ obtinc una AMT, que anomenaré $\mathfrak{M}_{4m}$, que genera la varietat de les AMTs.

Sobre les AMTs I. Loureiro hi defineix una operació binària, $\rightarrow$, per $a \rightarrow b = \neg\Box a \vee b$; demostra que satisfà el teorema de la deducció i que els filtres de reticle tancats per l'operador $\Box$ (filtres oberts) també són tancats per Modus Ponens respecte $\rightarrow$ (en el sentit que si $a \rightarrow b$ i b pertanyen a un mateix filtre obert aleshores b també hi pertany), és a dir són els "sistemes deductius" associats a $\rightarrow$ i a la regla Modus Ponens. A pesar que no és un dels objectius de la memòria l'estudi de les implicacions sobre les AMTs, la implicació anterior ha motivat l'elecció del tema d'aquesta memòria. Efectivament, l'origen de l'estudi de les LMTs cal començar-lo a buscar en els treballs de J.M. Font i V. Verdú, especialment en [FV2] on els autors obtenen una caracterització de les lògiques modals $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ tant sobre lògiques clàssiques com sobre lògiques intuïcionistes, de tipus S4 i S5 (de tipus S4 en les quals $\Box p \vee \Box\neg\Box p$ és teorema). En aquesta caracterització es consideren dues lògiques associades a L, $\mathsf{L}^- = (\mathfrak{A}^-, \mathcal{C})$ i $\mathsf{L}^+ = (\mathfrak{A}^+, \mathcal{C}^+)$ ($\mathcal{C}^+ = \{T \in \mathcal{C}\,;\, \Box T \subseteq T\}$, on L^- és la part no modal de la lògica (clàssica o intuïcionista) i $\mathfrak{A}^+$ és un reducte adequat de $\mathfrak{A}$ que fa que la relació d'equivalència associada a $\mathcal{C}^+$ sigui congruència, i s'estableix que els operadors $\mathbf{C}$ i $\mathbf{C}^+$ (associats a $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^+$ respectivament) satisfan $\mathbf{C}^+ = \mathbf{C} \circ \Box$ i, que pel cas S5, L^+ sempre és clàssica independentment de com sigui L^-. Situat en aquesta línia d'estudi J.M. Font durant una estada a Lisboa amb I. Loureiro, va comprovar que la implicació de les AMTs satisfà la llei de Peirce ($((a \to b) \to a) \to a = 1$) i que per tant la lògica associada a ella i als seus sistemes deductius (que resulta que correspon a la lògica L^+ de més amunt) és clàssica. Aquesta observació va donar peu a considerar que les AMTs són els models algebraics d'una classe de lògiques modals de tipus S5 sobre àlgebres de De Morgan i a iniciar un estudi en aquesta línia començant per definir de forma adequada l'operador $\Box$ que cal afegir a les lògiques de De Morgan per tal s'obtenir una lògica com les desitjades, és a dir una lògica que generalitzi la lògica formada per una AMT i tots els seus filtres.

La motivació de la definició de LMT neix de la demostració de la proposició 4 de [FV1] que en la memòria correspon a la proposició 4.1. Aquesta motivació es basa en suposar que de la mateixa manera que el quocient de l'àlgebra suport d'una lògica de De Morgan per la relació associada a la família $\{P, \Phi(P)\}$ d'elements de la base és una subàlgebra de $\mathfrak{M}_4$, el mateix quocient prenent ara l'àlgebra suport d'una LMT hauria de donar una subàlgebra de $\mathfrak{M}_{4m}$. En aquesta subàlgebra (com en el cas de De Morgan) $P \cap \Phi(P)$ serà el màxim i $A \setminus (P \cap \Phi(P))$ el mínim (i si són no buits, $P \setminus \Phi(P)$ i $\Phi(P) \setminus P$ els altres dos elements). La definició de $\Box$ ha de ser adequada per que la relació associada a la família sigui congruència i per què al passar l'operador al quocient (el designo igual) es tingui $\Box 1 = 1$ i $\Box b = \Box a = \Box 0 = 0$; aquestes darreres propietats s'obtenen exigint que:

(1) $P \cap \Phi(P)$ sigui tancat repecte $\Box$;

(2) $A \setminus (P \cap \Phi(P))$ sigui tancat repecte $\Box$ i

(3) $\Box x \in P \Leftrightarrow \Box x \in \Phi(P) \quad \forall x \in A$ i per tot P de la base.

Efectivament, la primera propietat assegura que $\Box 1 = 1$, la segona que $1 \notin \{\Box a, \Box b, \Box 0\}$ i la tercera que $\Box a \neq a, \Box b \neq b, \Box a \neq b$ i $\Box b \neq a$.

És fàcil veure que aquestes propietats fan que la relació d'equivalència associada a $\{P, \Phi(P)\}$ sigui congruència i a més que $\Box 1 = = 1, \Box a = \Box b = \Box 0 = 0$, és a dir que el quocient és una subàlgebra de $\mathfrak{M}_{4m}$.

Les dues primeres propietats equivalen a

(4) $x \in P \cap \Phi(P) \Leftrightarrow \Box x \in P \cap \Phi(P) \quad \forall x \in A$ i per tot P de la base

que juntament amb (3) determina com ha de ser $\Box$ sobre una lògica de De Morgan per obtenir una lògica com la que vull estudiar.

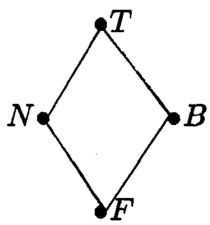
Per tant definiré una LMT com una lògica de De Morgan amb un operador unari $\Box$ que satisfà les propietats (3) i (4) anteriors. Seguint, però, el camí de [FV2] també es poden caracteritzar les propietats de l'operador $\Box$ que cal afegir a una lògica de De Morgan per obtenir una LMT a partir de la lògica associada $\mathbb{L}^+$; aquesta presentació va ser la utilitzada en [FR] com a definició i en la memòria, al final de capítol tercer, demostro que és equivalent a la del inici d'aquest paràgraf.

Hom pot buscar una motivació pragmàtica per l'estudi de les LMTs seguint la que dóna Belnap a [Bel]. Belnap interpreta els elements de l'àlgebra $\mathfrak{M}_4$ com les quatre possibles respostes que pot donar un ordinador al formular-li una pregunta sobre la informació que li ha estat introduïda; informació emmagatzemada possiblement per persones diferents durant varies èpoques i que pot contenir contradiccions. Els quatre elements (valors) de l'àlgebra queden interpretats així:

T: cert (true).

F: fals.
N: ni cert ni fals (none, falta informació, valor de veritat no definit, $\emptyset$).
B: cert i fals alhora (both, hi han informacions contradictòries, valor de veritat sobredefinit, $\{T, F\}$).

L'estructura reticular d'aquests elements és la donada per la relació $a < b$ si b és més cert que a o bé a és més fals que b, és a dir si b conté un valor cert (T) i a no o bé a contè un valor fals (F) i b no. Per exemple $\{T, F\} \wedge \emptyset$ és més fals (o menys cert) que ambdos; F és més fals que $\emptyset$ i també menys cert que $\{T, F\}$ i és l'únic valor amb aquesta propietat, per tant $B \wedge N = F$ ... Amb aquesta relació s'obté el reticle $\mathfrak{M}_4$:



La negació de cert és fals i la de fals, cert ($\neg T = F, \neg F = T$); la negació d'una proposició no definida és no definida ($\neg N = N$) i la d'una sobredefinida és sobredefinida ($\neg B = B$). En la construcció de les proposicions, a més de les conectives usuals (negació, conjunció i disjunció) puc considerar la conectiva de neccesitat, $\Box$, que la interpretaré com la confirmació de la Veritat (veritat clàssica, és a dir no acompanyada de falsedat); $\Box\phi$ es satisfà quan ϕ és certa i no falsa i no es satisfà en els demés casos (ϕ és no definida o és falsa). En l'àlgebra $\mathfrak{M}_4$ defineixo l'operador unari $\Box$ per $\Box T = T, \Box F = \Box N = \Box B = F$ amb l'adjunció del qual obtinc l'àlgebra $\mathfrak{M}_{4m}$.

Valorant sobre $\mathfrak{M}_{4m}$ (és a dir prenent homomorfismes des de l'àlgebra lliure de totes les proposicions a $\mathfrak{M}_{4m}$) l'ordinador pot donar valors de veritat a sentències compostes coneixent el valor de veritat de les seves parts atòmiques i pot treure conclusions a partir d'un conjunt de fórmules usant l'operador conseqüència $\models$ definit per $\Gamma_0 \models \phi$ ssi $\forall v$ valoració $\bigwedge_{\psi \in \Gamma_0} v(\psi) < v(\phi)$ per qualsevol fórmula ϕ i qualsevol conjunt finit de fórmules Γ_0. Per un conjunt qualsevol de fórmules, Γ, $\Gamma \models \phi$ ssi $\exists \Gamma_0 \subseteq \Gamma$, Γ_0 finit, tal que $\Gamma_0 \models \phi$. Veuré que la lògica així determinada sobre el conjunt de les fórmules coincideix amb la LMT més fina sobre l'àlgebra sentencial, la qual cosa confirma que la interpretació donada és adequada per les lògiques que estudio.

L'interès teòric per l'estudi de les LMTs està en la seva condició simultània de lògiques de De Morgan i de lògiques modals. És interessant comprovar com es relacionen aquests dos aspectes en especial la unicitat (mòdul la relació d'equivalència associada al sistema clausura) de l'operador modal $\Box$ degut a què com a màxim hi ha un operador que afegit a una àlgebra de De Morgan la fa AMT. Per altra banda, si es converteix la lògica de De Morgan sentencial suport d'una LMT en una lògica clàssica afegint-hi com axioma $p \vee \neg p$, aleshores la lògica obtinguda és una lògica clàssica en la qual l'operador modal és la identitat, motiu pel qual no es poden considerar les LMTs com l'anàleg de les lògigues intuïcionistas estudiades per J.M. Font en la seva tesi doctoral, ja que aquestes al convertir la lògica intuïcionista en clàssica esdevenen lògiques modals clàssiques, amb un operador modal de tipus S5.

Aquest últim comentari suggereix que una possible continuació d'aquest treball sigui la investigació i estudi d'estructures modals més febles sobre lògiques de De Morgan en les quals a l'afegir l'axioma clàssic $p \vee \neg p$ s'obtingui un sistema modal clàssic no degenerat.

Com que l'objectiu de la memòria és fer un estudi ampli, i alhora detallat, de les LMTs no es pot destacar un resultat o uns pocs teoremes que resumeixin els objectius a assolir. En la memòria he reservat el nom teorema per aquells resultats que per la seva importància permeten que amb la seva lectura hom pugui tenir una ràpida idea del treball investigador realitzat.

La memòria està dividida en cinc capítols; el primer està dedicat a introduir la notació que es farà servir i les nocions preliminars tant d'àlgebra universal com de lògiques abstractes. Recullo sense demostració tots aquells reultats que faré servir i que apareixen en diversos articles de la bibliografia, només incloc les demostracions en algun cas en el que no les he trobades explicitades.

En el segon capítol introdueixo la definició de AMT i enuncio les principals propietats d'aquests àlgebres. Segueixo una línia diferent de la de Isabel Loureiro buscant l'estudi d'aquelles propietats que puguin tenir més rellevància des d'un punt de vista lògic. Estudio especialment el sistema clausura associat als filtres i als filtres oberts i explicito la relació que aquests últims mantenen amb les congruències. Acabo trobant una relació entre els filtres primers (base del sistema clausura de tots els filtres) i l'operador $\Box$ (proposició 2.30) que caracteritza aquest i que em permetrà fer l'extensió d'aquest operador a àlgebres qualssevol en les que tingui definida una involució sobre una base del sistema clausura.

En el tercer capítol introdueixo la noció de LQMT (no necessàriament finitària) i de LMT (finitària) generalitzant les propietats de la proposició 2.30, tal com abans he exposat. Comprovo que les lògiques així definides es conserven per morfismes bilògics (teorema 3.5) i demostro (teorema 3.7) que hi ha un morfisme bilògic entre qualsevol LQMT i la lògica formada per una AMT dotada d'un sistema clausura amb una base de filtres primers Φ-tancada i que per tant les lògiques formades per una AMT i tots els seus filtres són les LMTs simples. En el teorema 3.14 demostro que les LMTs venen determinades pel seu més petit tancat, i el teorema 3.16 precisa que si l'àlgebra suport d'una LMT és una AMT aleshores el sistema clausura de la lògica està format per tots els filtres que contenen el més petit. El teorema 3.18 estableix un isomorfisme entre el reticle de les congruències d'una AMT i totes les possibles LMTs sobre la mateixa AMT. El capítol acaba (teorema 3.26) caracteritzant una LMTs (L) a partir de les lògiques associades L^+ i L^-.

En el capítol quart estudio les lògiques sobre una àlgebra abstracta $\mathfrak{A}$ projectivament generades per famílies d'homomorfismes des de la lògica formada per $\mathfrak{M}_{4m}$ i el sistema clausura de tots els seus filtres. Aquestes lògiques resultaran en general LQMT (teorema 4.2) i per algunes famílies determinades (les que estableix el teorema 4.6) resultarà que són, a més, finitàries. La LMT més fina sobre $\mathfrak{A}$, que pel teorema 4.4 és la generada per tots els homomorfismes, permet caracteritzar tots els operadors clausura sobre $\mathfrak{A}$ que donen LMTs i demostrar (teorema 4.11) que l'aplicació que associa a cada operador el seu més petit tancat és un isomorfisme entre el reticle de totes les LMTs sobre $\mathfrak{A}$ i els tancats, T, de la LMT més fina sobre $\mathfrak{A}$ que satisfan $\Box T \subseteq T$. Estudio detalladament el conjunt (reticle) de les congruències de l'àlgebra $\mathfrak{A}$ que en el quocient donen AMT i demostro que per aquestes congruències val la mateixa caracterització que per a les congruències de les AMTs. Acabo estudiant les relacions que satisfan els elements de la base de qualsevol sistema clausura d'una LMT i traslladant a les lògiques de De Morgan i a les LMTs la condició necessària i suficient (establerta per I. Loureiro) que ha de complir una àlgebra de De Morgan per admetre un operador que la faci AMT.

En el cinquè i últim capítol estudio les LMTs des d'una perspectiva més lògica (en contraposició a la perspectiva algebraica dels capítols anteriors). El teorema 5.1 dóna una presentació de les LMTs en la qual només intervenen propietats de l'operador clausura. Considero, a continuació, un càlcul de seqüents i demostro (teorema 5.5) que les lògiques model d'aquest càlcul (segons la definició de [FV3]) són precisament les LMTs, i que per a qualsevol àlgebra l'operador clausura associat a aquest càlcul és l'operador de la LMT més fina sobre l'àlgebra (teorema 5.6). Estudio com són les matrius i les matrius generalitzades del càlcul i quina relació hi ha entre aquestes últimes i les LMTs (teorema 5.18). Defineixo les lògiques modals tetravalents normals (LMTNs) afegint a les LMTs la condició (regla forta de la necessitat) que les conseqüències d'un conjunt de fórmules siguin tancades respecte $\Box$. Estudio les LMTNs amb les mateixes tècniques usades en l'estudi de les LMTs demostrant els anàlegs dels teoremes 3.7 i 4.6 (5.27 i 5.33 respectívament). Acabo introduint els conceptes de lògica algebraitzable ([BP2]) i lògica protoalgebraica ([BP1]) i demostrant que tant la classe de les LMTs com la de les LMTNs són protoalgebraiques i que aquesta última, a més, és algebraitzable, propietat de la que no gaudeixen les LMTs.

Les AMTS són un exemple de lògiques protoalgebraiques i **autoextensionals** (la relació associada al sistema clausura és congruència) i que en canvi no són algebritzables. Són també un exemple de lògiques no algebrizables que tenen associades una classe de lògiques (les normals) que si són algebritzables, situació similar (però dual) a la que es produeix en les àlgebres de Lukasiewicz infinit-valents estudiades per T.Torrens i V.Verdú, aquestes lógiques són algebritzables (amb semàntica algebraica equivalent les àlgebres de Wajsberg) i tenen una versió feble no algebritzable.

Les lògiques més estretament relacionades amb les AMTs són les LMTNs (les més febles) i potser són les lògiques que més propiament haurien de denominar-se LMTs, però aleshores les lògiques fortes haurien de ser anomenada LMTs no normals, denominació sens dubte adequada però incomoda, per tant, com heu vist, he preferit afegir l'adjectiu "normal" a les lògiques febles en lloc de "no normal" a les lògiques fortes.

Per acabar voldria comentar que el calificatiu "modal" en el nom de les lògiques estudiades és degut més a la intenció de batejar a les lògiques amb un nom semblant al de les AMTs que a la idea de destacar un discutible caràcter modal de les lògiques, discutible perquè l'operador modal és **veritatiu funcional**; el seu valor de veritat està completament determinat pel valor de veritat de l'expressió a la que afecta.

1. NOTACIÓ I PRELIMINARS

Suposo coneguts els conceptes bàsics d'àlgebra universal, com són el d'àlgebra, morfisme d'àlgebres, subàlgebra, congruència, àlgebra quocient per una congruència, producte subdirecte d'àlgebres i àlgebra subdirectament irreductible, tots ells exposats en qualsevol obra general d'àlgebra universal, com per exemple [BuS], [C] i [G].

Denotaré les àlgebres amb lletres gòtiques com $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}$ ... (sovint amb subíndexs); i en els respectius conjunts que les soporten amb les mateixes lletres però majúscules (A , B , M ...) amb subíndexs si s'escau. Donada una àlgebra $\mathfrak{A}$, denotaré per $Con(\mathfrak{A})$ el conjunt de les seves congruències. Si $\theta \in Con(\mathfrak{A})$, per expressar que dos elements $a, b \in A$ estan relacionats per θ escriuré $(a, b) \in \theta$ i denotaré per a_θ la classe de a per la relació θ. Anomenaré $\Delta_\mathfrak{A}$ a la relació diagonal sobre $\mathfrak{A}$ i $\nabla_\mathfrak{A}$ a la congruència màxima (si no hi pot haver confusió ometré el subíndex), i fent un abús de llenguatge denotaré les operacions de l'àlgebra quocient amb els mateixos símbols que les corresponents operacions sobre l'àlgebra original. Donades dues àlgebres $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$ del mateix tipus, denotaré per $Hom(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ el conjunt dels homomorfismes d'$\mathfrak{A}_1$ en $\mathfrak{A}_2$.

1.1 DEFINICIÓ. *Sigui A un conjunt qualsevol, un* **operador clausura** *sobre A és una aplicació $\mathbf{C} : P(A) \longrightarrow P(A)$, del conjunt de les parts d'A en ell mateix tal que*

(1) $X \subseteq \mathbf{C}(X) \quad \forall X \subseteq A$;
(2) *Si* $X \subseteq Y$ *aleshores* $\mathbf{C}(X) \subseteq \mathbf{C}(Y) \quad \forall X, Y \subseteq A$;
(3) $\mathbf{C}(\mathbf{C}(X)) = \mathbf{C}(X) \quad \forall X \subseteq A$.

Tot operador clausura $\mathbf{C}$ sobre un conjunt A indueix sobre aquest una relació d'equivalència, $\theta_\mathbf{C}$, definida per $(a, b) \in \theta_\mathbf{C}$ si i només si $\mathbf{C}(a) = \mathbf{C}(b)$.

1.2 DEFINICIÓ. *$X \subseteq A$ és un* **tancat** *de* $\mathbf{C}$ *si* $\mathbf{C}(X) = X$. *$\mathcal{C}$ és un* **sistema clausura** *sobre A si $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ i és tancat per interseccions arbitràries.*

Cada operador clausura, $\mathbf{C}$, sobre un conjunt A té associada la família $\mathcal{C}(\mathbf{C}) = \{X \subseteq A ; \mathbf{C}(X) = X\}$ que és un sistema clausura sobre A i tot sistema clausura , $\mathcal{C}$, sobre A té associat l'operador clausura $\mathbf{C}(\mathcal{C}) = \bigcap\{Y \in \mathcal{C} ; X \subseteq Y\}$; a més, com $\mathcal{C}(\mathbf{C}(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ i $\mathbf{C}(\mathcal{C}(\mathbf{C})) = \mathbf{C}$ hi ha una aplicació bijectiva entre els sistemes clausura i els operadors clausura sobre un conjunt A ; denotaré en aquests amb lletres negretes com $\mathbf{C}$,$\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^+$, $\mathbf{C}^+$ ... i els respectius sistemes clausura amb la mateixa lletra però itàlica, $\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{C}^+, \mathcal{F}^+$...

1.3 DEFINICIÓ. *Sigui $\mathcal{C}$ un sistema clausura i sigui $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ és una* **base** *de $\mathcal{C}$ si tot element de $\mathcal{C}$ es pot obtenir com una intersecció d'elements de $\mathcal{B}$. El* **sistema clausura generat** *per $\mathcal{B}$, $[\mathcal{B}]$, és el més petit sistema clausura que conté $\mathcal{B}$.*

1.4 DEFINICIÓ. *Un operador clausura $\mathbf{C}$ (i respectivament un sistema clausura $\mathcal{C}$) és* **algebraic o finitari** *si*

$$\mathbf{C}(X) = \bigcup\{\mathbf{C}(Y) ; Y \subseteq X \quad Y \text{ finit}\}.$$

1.5 TEOREMA. *Un sistema clausura és algebraic si i només si és tancat per unions de cadenes.* ■

1.6 DEFINICIÓ. *Una* **lògica abstracta** *(o simplement una lògica) és una parella $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ formada per una àlgebra $\mathfrak{A}$ i un operador clausura sobre A. Dues lògiques abstractes són del mateix tipus si ho són les seves respectives àlgebres. L és* **lògica trivial** *si $\mathcal{C} = \{A\}$.*

Degut a la bijecció entre sistemes clausura i operadors clausura sovint substituiré en la definició de lògica abstracta l'operador clausura pel sistema clausura associat.

1.7 DEFINICIÓ. *Sigui $\mathsf{L}_1 = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}_1)$ i $\mathsf{L}_2 = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}_2)$ dues lògiques sobre*

$\mathfrak{A}$. L_1 **és més fina** *que* L_2 ; $\mathsf{L}_1 \leq \mathsf{L}_2$, *si* $\mathbf{C}_1(X) \subseteq \mathbf{C}_2(X) \quad \forall X \subseteq A$ *o, equivalentment, si* $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$.

1.8 DEFINICIÓ. *Sigui* $\mathsf{L}_1 = (\mathfrak{A}_1, \mathbf{C}_1)$ *i* $\mathsf{L}_2 = (\mathfrak{A}_2, \mathbf{C}_2)$ *dues lògiques abstractes del mateix tipus, un* **morfisme lògic** *és una aplicació* $f : A_1 \longrightarrow A_2$ *tal que:*

(1) $f \in Hom(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$;
(2) *Per tot* $T \in \mathcal{C}_2 \quad f^{-1}(T) \in \mathcal{C}_1$.

Per indicar que f és un morfisme lògic entre L_1 i L_2 , escriuré $f : \mathsf{L}_1 \longrightarrow \mathsf{L}_2$ i diré que f és epimorfisme o isomorfisme lógic si ho és de les respectives àlgebres. $Hom(\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2)$ designarà el conjunt de tots els morfismes lògics entre L_1 i L_2 .

1.9 DEFINICIÓ. *Sigui* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$, $\mathsf{L}_i = (\mathfrak{A}_i, \mathbf{C}_i)$ *i* $h_i \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_i)$, *amb* $i \in I$ *conjunt no buit de subíndexs.* L *és* **projectivament generada** *des de* $\{\mathsf{L}_i\}_{i \in I}$ *per* $\{h_i\}_{i \in I}$ *si* $\mathcal{C}$ *és el sistema clausura més petit que conté* $\{h_i^{-1}(V) ; V \in \mathcal{C}_i, i \in I\}$.

1.10 PROPOSICIÓ. *Sigui* $\mathsf{L}_1 = (\mathfrak{A}_1, \mathbf{C}_1)$, $\mathsf{L}_2 = (\mathfrak{A}_2, \mathbf{C}_2)$ *i* $h \in Hom(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$, *aleshores són equivalents:*

(1) L_1 *és generada projectivament des de* L_2 *per* h ;
(2) $\mathcal{C}_1 = \{h^{-1}(T) ; T \in \mathcal{C}_2\}$;
(3) $\mathbf{C}_1(X) = h^{-1}(\mathbf{C}_2(h(X))) \quad \forall X \subseteq A_1$.■

1.11 DEFINICIÓ. $h \in Hom(\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2)$ *és* **morfisme bilògic,** *si* h *genera projectivament* L_1 *des de* L_2 *i és epimorfisme.*

Si h és un morfisme bilògic entre L_1 i L_2 , pel fet de ser L_1 projectivament generada per un sol homomorfisme és $\mathcal{C}_1 = h^{-1}(\mathcal{C}_2)$ i pel fet de ser h una aplicació epijectiva és $h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$, per tant, si h és un morfisme bilògic, indueix una aplicació bijectiva entre els sistemes clausura de L_1 i L_2 . Pel fet de ser h una aplicació epijectiva, a més de la relació 1.10.3 també es té $\mathbf{C}_2(h(X)) = h(\mathbf{C}_1(X)) \quad \forall X \subseteq A_1$ i $\mathbf{C}_2(X) = h(\mathbf{C}_1(h^{-1}(X))) \quad \forall X \subseteq A_2$.

1.12 DEFINICIÓ. *Sigui* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *una lògica abstracta,* θ *és una* **congruència lògica** *si:*

(1) $\theta \in Con(\mathfrak{A})$;

(2) $(a,b) \in \theta$ *implica* $\mathbf{C}(a) = \mathbf{C}(b)$ $\forall a, b \in A$.

1.13 PROPOSICIÓ. *Sigui* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *una lògica, si* $\theta_{\mathbf{C}} \in Con(\mathfrak{A})$, *aleshores* $\theta \in Con(\mathfrak{A})$ *és congruència lògica si i només si* $\theta \subseteq \theta_{\mathbf{C}}$.■

1.14 DEFINICIÓ. *Sigui* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *una lògica,* $\theta \in Con(\mathfrak{A})$ *i* $\pi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}/\theta$ *la projecció canònica. La lògica quocient de* L *per* θ *és la lògica* $\mathsf{L}/\theta = (\mathfrak{A}/\theta, \mathcal{C}/\theta)$ *amb* $\mathcal{C}/\theta = \{T \subseteq \mathfrak{A}/\theta \, ; \, \pi^{-1}(T) \in \mathcal{C}\}$.

Aquesta definició dota a $\mathfrak{A}/\theta$ de l'estructura lògica adequada que possibilita el següent

1.15 TEOREMA. *Sigui* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *una lògica i* θ *una congruència lògica aleshores* $\pi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}/\theta$ *és un morfisme bilògic entre* L *i* L/θ.■

1.16 DEFINICIÓ. *Un operador clausura,* $\mathbf{C}$, *sobre una àlgebra* $\mathfrak{A}$ *té:*

(1) **La propietat de la deducció (PDE)** *respecte d'una operació binària* $\rightarrow$ *ssi* $\forall X \subseteq A$, $\forall x, y \in A$, $x \rightarrow y \in$ $\in \mathbf{C}(X)$ *ssi* $y \in \mathbf{C}(X, x)$.

(2) **La propietat de la reducció a l'absurd (PRA)** *respecte d'una operació unaria* $\neg$ *ssi* $\forall X \subseteq A$, $\forall x \in A$ $x \in \mathbf{C}(X)$ *ssi* $\mathbf{C}(X, \neg x) = A$.

(3) **La propietat de la conjucció (PC)** *respecte d'una operació binària* $\wedge$ *ssi* $\forall x, y \in A$ $\mathbf{C}(x \wedge y) = \mathbf{C}(x, y)$.

(4) **La propietat de la disjunció (PD)** *respecte d'una operació binària* $\vee$ *ssi* $\forall X \subseteq A$ *i* $\forall x, y \in A$ $\mathbf{C}(X, x \vee$ $\vee y) = \mathbf{C}(X, x) \cap \mathbf{C}(X, y)$.

(5) *Un* **element inconsistent** *si existeix* $0 \in A$ *tal que* $\mathbf{C}(0) = A$.

(6) **La propietat de Birula-Rasiowa (PBR)** *si existeix una base* $\mathcal{E}$ *de* $\mathcal{C}$ *i una involució en* $\mathcal{E}$.

1.17 DEFINICIÓ. $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *amb* $\mathfrak{A} = (A, \rightarrow, \neg)$ *de tipus (2,1) és una* **lògica clàssica** *si* C *és àlgebraic i satisfà PDE i PRA.*

Es prou conegut que la propietat de ser lògica clàssica es traslladа per morfismes bilògics, però com que en les referències bibliogràfiques no es troba cap demostració que la PRA es conservi per aquest morfismes demostro el següent

1.18 TEOREMA. *Siguin* $\mathsf{L}_1 = (\mathfrak{A}_1, \mathbf{C}_1)$ *i* $\mathsf{L}_2 = (\mathfrak{A}_2, \mathbf{C}_2)$ *dues lògiques abstractes i* $h : \mathsf{L}_1 \longrightarrow \mathsf{L}_2$ *un morfisme bilògic, aleshores* L_1 *és una lògica clàssica si i només si* L_2 *ho és.*

DEMOSTRACIÓ: Que el caracter algebraic de l'operador clausura i PDE es preserven per morfismes bilògics està fet a [V]. Per la resta suposem que L_2 satisfà PRA, aleshores $x \in \mathbf{C}_1(X)$ ssi $h(x) \in h(\mathbf{C}_1(X)) = \mathbf{C}_2(h(X))$ ssi $\mathbf{C}_2(h(X), h(\neg x)) = A_2$ ssi $h^{-1}(\mathbf{C}_2(h(X), h(\neg x))) = A_1$ ssi $\mathbf{C}_1(X, \neg x) = A_1$. Suposem ara que L_1 satisfà PRA i sigui $x \in \mathbf{C}_2(X)$, existeixen $t \in A_1$ i $T \subseteq A_1$ tals que $x = h(t)$ i $X = h(T)$ i aleshores $x \in \mathbf{C}_2(X)$ ssi $h(t) \in \mathbf{C}_2(h(T))$ ssi $t \in h^{-1}(\mathbf{C}_2(h(T))) = \mathbf{C}_1(T)$ ssi $\mathbf{C}_1(T, \neg t) = A_1$ ssi $h(\mathbf{C}_1(h^{-1}(X), h^{-1}(\neg x))) = h(A_1)$ ssi $\mathbf{C}_2(X, \neg x) = A_2$.■

1.19 DEFINICIÓ. *Una àlgebra* $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee)$ *de tipus (2,2) és un* **reticle** *si* $\forall x, y, z \in A$;

(1) $x \vee y = y \vee x$;
(2) $x \wedge y = y \wedge x$;
(3) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
(4) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
(5) $x \vee x = x$;
(6) $x \wedge x = x$;
(7) $x = x \vee (x \wedge y)$;
(8) $x = x \wedge (x \vee y)$.

1.20 EXEMPLES:

* És fàcil comprovar que si $(A, \wedge, \vee)$ és un reticle i definim $a \leq b$ ssi $a \wedge b = a$, aleshores $(A, \leq)$ és un conjunt parcialment ordenat i, recíprocament, si en un conjunt ordenat $(A, \leq)$ existeixen l'ínfim i el suprem de cada parella d'elements, aleshores posant $a \wedge b = inf_{\leq}\{a, b\}$ i $a \vee b = sup_{\leq}\{a, b\}$, $(A, \wedge, \vee)$ és un reticle. $(A, \wedge, \vee)$ és un **reticle complet** si $\forall T \subseteq A$ existeixen $sup_{\leq} T = \bigvee T$ i $inf_{\leq} T = \bigwedge T$.

* Tot sistema clausura $\mathcal{C}$ és un reticle complet ja que si $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, aleshores $\bigwedge \mathcal{C}' = \bigcap \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$ i $\bigvee \mathcal{C}' = \mathbf{C}(\bigcup \mathcal{C}') \in \mathcal{C}$. Es fàcil veure que l'aplicació bijectiva entre els sistemes clausura de dues lògiques induïda per un morfisme bilògic és isomorfisme de reticles complets. En particular si h és un morfisme bilògic i T i P són dos tancats de la lògica de sortida $h(T \cap P) = h(T) \cap h(P)$.

* El conjunt de tots els sistemes clausura sobre un conjunt A és un reticle si definim $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ i $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 = \cap\{\mathcal{C} ; \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$ i $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}\} = \cap\{\mathcal{C} ; \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}\}$, és a dir el sistema clausura generat per $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Aquesta estructura reticular es traslläda de forma natural al conjunt de totes les lògiques sobre una àlgebra.

*El conjunt de tots els operadors clausura sobre un conjunt A és un reticle complet si definim $\forall X \subseteq A \quad (\mathbf{C}_1 \wedge \mathbf{C}_2)(X) = \mathbf{C}_1(X) \cap \mathbf{C}_2(X)$ i $(\mathbf{C}_1 \vee \mathbf{C}_2)(X) = \cap\{T \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 : X \subseteq T\}$.

* L'aplicació bijectiva que associa a cada sistema el seu operador és un isomorfisme d'ordre dual entre els dos reticles, és a dir que el morfisme respecta la inversió dels ordres dels reticles ($\mathbf{C}_1 \subseteq \mathbf{C}_2$ equival a $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$).

1.21 DEFINICIÓ. *Sigui $\mathfrak{A}$ un reticle, $F \subseteq A$ és un* **filtre** *si* $\forall a, b \in A$

(1) $F \neq \emptyset$;
(2) *Si* $a \in F$ *i* $a \leq b$ *aleshores* $b \in F$;
(3) *Si* $a, b \in F$ *aleshores* $a \wedge b \in F$.

Anomeno $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$ ($\mathcal{F}$ si no hi ha ambigüitata) el conjunt de tots els filtres sobre $\mathfrak{A}$. $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$ és un sistema clausura (algebraic) i dóna lloc a un operador clausura que denoto per $\mathbf{F}_{\mathfrak{A}}$ ($\mathbf{F}$ si no hi ha ambigüitat).

1.22 PROPOSICIÓ. *Si* $\mathfrak{A}$ *és un reticle i* $a, b \in A$, *aleshores* $a \leq b$ *si i només si* $\mathbf{F}(b) \subseteq \mathbf{F}(a)$, *és a dir si per qualsevol filtre* P $a \in P$ *implica* $b \in P$.■

1.23 DEFINICIÓ. $P \in \mathcal{F}$ *és un* **filtre primer** *si és propi* ($P \neq A$) *i* $a \vee b \in P$ *implica* $a \in P$ *o* $b \in P$.

Denoto per $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}$ ($\mathcal{P}$ si no hi ha ambigüitat) a la família de tots els filtres primers d'un reticle $\mathfrak{A}$. Observeu que degut a 1.21.2 tot filtre F compleix el recíproc de 1.21.3, és a dir que satisfà $a \wedge b \in F$ ssi $a \in F$ i $b \in F$, i a més també és cert el recíproc de 1.23 i si el filtre és primer es té $a \vee b \in F$ ssi $a \in F$ o $b \in F$.

La generalització natural de les definicions 1.21 i 1.23 és:

1.24 DEFINICIÓ. *En una àlgebra qualsevol* $(A, \wedge, \vee)$ *de tipus* $(2, 2)$, $P \subseteq A$ *és* $\wedge$**-filtre** *si* $P \neq \emptyset$ *i* $a \in P$ *i* $b \in P$ *implica* $a \wedge b \in P$. $P \subseteq A$ *és* $\vee$**-primer** *si* $P \neq A$ *i* $a \vee b \in P$ *implica* $a \in P$ *o* $b \in P$.

1.25 DEFINICIÓ. $(A, \wedge, \vee)$ *àlgebra de tipus (2,2) és un* **reticle distributiu** *si a més de ser reticle satisfà*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad \forall x, y, z \in A.$$

Com és sabut, aquesta propietat equival a

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad \forall x, y, z \in A.$$

1.26 TEOREMA. *([S] pàg. 160)Un reticle és distributiu, si i només si els filtres primers són base del sistema clausura* $\mathcal{F}$, *o sigui si* $\forall S \subseteq A$ *és* $\mathbf{F}(S) = \bigcap\{P \in \mathcal{P};\, S \subseteq P\}$.■

1.27 DEFINICIÓ. $(A, \wedge, \vee, 0)$ *àlgebra de tipus (2,2,0) és un* **reticle distributiu amb mínim** *0 si* $(A, \wedge, \vee)$ *és un reticle distributiu i a més*

$$x \vee 0 = x \qquad \forall x \in A.$$

1.28 DEFINICIÓ. $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee, \neg, 0)$ *àlgebra de tipus (2,2,1,0) és una* **àlgebra de De Morgan** *si* $(A, \wedge, \vee, 0)$ *és un reticle distributiu amb mínim 0, i l'operació unària,* $\neg$ *, satisfà* $\forall a, b \in A$

$$(1) \quad \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b\,;$$
$$(2) \quad \neg\neg a = a\,.$$

Designo per 1 *a la negació de l'element distingit (* $1 = \neg 0$ *).*
Una **àlgebra de Boole** *és una àlgebra de De Morgan que satisfà* $a \wedge \neg a = 0 \quad \forall a \in A$.

Més endavant usaré els teoremes següents que fan referència a propietats de les àlgebres de Boole.

1.29 TEOREMA. *[BB] La lògica formada per una àlgebra de Boole i tots els seus filtres és una lògica clàssica.* ■

La lògica descrita en el teorema anterior és la lògica clàssica més fina sobre una àlgebra de Boole; sobre una àlgebra del tipus adequat també existeix la lògica clàssica més fina i està relacionada amb una lògica qualsevol sobre la mateixa àlgebra pel següent teorema, adaptació del corol.lari 3.3 de [BB].

1.30 TEOREMA. *Sigui* $(\mathfrak{B}, \mathcal{C})$ *la lògica clàssica més fina sobre l'àlgebra* $\mathfrak{B}$ *, aleshores* $(\mathfrak{B}, \mathcal{D})$ *és una lògica clàssica si i només si* $\exists X \subseteq B$ *tal que* $\mathcal{D} = \{T \in \mathcal{C} : X \subseteq T\}$.■

1.31 TEOREMA. *En tota àlgebra de Boole hi ha un isomorfisme de reticle entre filtres i congruències.* ■

1.32 PROPIETATS DE LES ÀLGEBRES DE DE MORGAN.

(1) $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b \quad \forall a, b \in A$;

(2) $1 = \neg 0$ *és el màxim del reticle;*

(3) *Les àlgebres de De Morgan formen una varietat.* ■

A la vista de les equacions que es satisfan en una àlgebra de De Morgan, es pot donar una definició alternativa en la qual l'operació $\vee$

no aparegui en el tipus de l'àlgebra; aquesta nova definició és la que faré servir d'ara en endavant:

1.33 DEFINICIÓ. $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \neg, 0)$ *àlgebra de tipus (2,1,0) és* **àlgebra de De Morgan** *si definint* $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$, $\mathfrak{A}' = (A, \wedge, \vee, 0)$ *és un reticle distributiu amb mínim, 0, i satisfà* $\forall a, b \in A$:

(1) $\neg\neg a = a$;
(2) $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$;
(3) $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$.

1.34 DEFINICIÓ. *Sobre* $\mathfrak{A}$ *àlgebra de De Morgan, la* **transformació de Birula-Rasiowa** *a l'aplicació* $\Phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ *definida per* $\Phi(P) = \{x : \neg x \notin P\}$ $\forall P \in \mathcal{P}$.

1.35 PROPOSICIÓ.

(1) Φ *està ben definida, o sigui* $\Phi(P) \in \mathcal{P}$ $\forall P \in \mathcal{P}$;
(2) $\Phi^2 = \Phi$;
(3) $\Phi(P) = A \setminus (\neg P)$. ■

Sobre una àlgebra de De Morgan (3) i la definició de Φ són equivalents, en ser $\neg\neg x = x$; 1.35.3 és la definició original de Monteiro a [M2], usada també per I. Loureiro tant en la seva tesi com en els seus articles. Pendré, però, $\Phi(P) = \{x ; \neg x \notin P\}$ com la generalització de la transformació de Birula-Rasiowa a qualsevol àlgebra amb negació. Com es veurà, el comportament de Φ sobre $\mathcal{P}$ caracteritza les àlgebres que s'estudiaran en el pròxim capítol, i la generalització d'aquests comportament a àlgebres qualssevol permetrà definir l'estructura dels sistemes clausura de les LMTs.

1.36 PROPOSICIÓ. *Sobre una àlgebra de De Morgan* $\mathfrak{A}$ *sigui* $T \subseteq \mathcal{P}$ *una família de filtres primers* Φ *-tancada (o sigui, tal que* $P \in T \Rightarrow \Phi(P) \in T$ $\forall P \in \mathcal{P}$ *). Aleshores la relació* $\sim_T$ *definida en A per* $a \sim_T b$ *ssi* $(a \in P \Leftrightarrow b \in P \quad \forall P \in T)$ *és una relació de congruència.* ■

1.37 PROPOSICIÓ. *Sigui* $\theta \in Con(\mathfrak{A})$ *i sigui* $\pi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}/\theta$ *la projecció canònica. Sigui* $\mathcal{P}' = \{$*filtres primers d'*$\mathfrak{A}/\theta\}$ *, aleshores* $\{\pi^{-1}(P'); P' \in$

$\in \mathcal{P}'\}$ *és una família de filtres primers d'*$\mathfrak{A}$ Φ*-tancada i indueix la congruència* θ.■

Hi ha per tant una correspondència entre les congruències de l'àlgebra de De Morgan $\mathfrak{A}$ i les famílies de filtres primers Φ-tancades; més endavant (corol.lari 3.12), veuré que aquesta correspondència no és biunívoca.

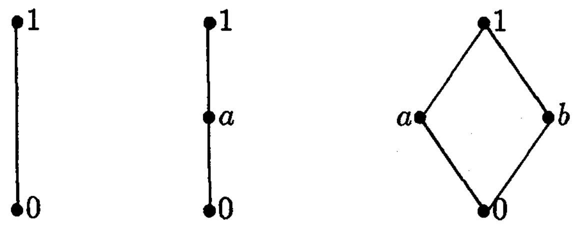
1.38 DEFINICIÓ.

(1) *Anomeno* $\mathfrak{B}_2$ *l'àlgebra de De Morgan amb dos elements, el màxim 1 i el mínim 0. És una àlgebra de Boole.*

(2) *Anomeno* $\mathfrak{M}_3$ *l'àlgebra de De Morgan que a més del màxim i del mínim té un tercer element* a *(necessàriament és* $\neg a = a$ *). És una àlgebra de Kleene.*

(3) *Anomeno* $\mathfrak{M}_4$ *l'àlgebra de De Morgan amb quatre elements, 1,0,* a *i* b*, en la qual* $\neg a = a$, $\neg b = b$, $a \vee b = 1$ *i* $a \wedge b = 0$.

Es immediat veure que $\mathfrak{B}_2$ i $\mathfrak{M}_3$ són subàlgebres de $\mathfrak{M}_4$.



$\mathfrak{B}_2$ $\mathfrak{M}_3$ $\mathfrak{M}_4$

1.39 TEOREMA. *La varietat de les àlgebres de De Morgan té tres àlgebres subdirectament irreductibles,* $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{M}_3$ *i* $\mathfrak{M}_4$ *i és generada per* $\mathfrak{M}_4$. *A més, les úniques subvarietats pròpies són la de les àlgebres de Boole, generada per* $\mathfrak{B}_2$, *i la de les àlgebres de Kleene, generada per* $\mathfrak{M}_3$. ■

1.40 DEFINICIÓ. *Sobre una àlgebra qualsevol* $\mathfrak{A}$ *amb al menys una operació binària* $\wedge$ *i un ordre* $\leq$, *una operació unària* $\Box$ *és un* **operador**

interior *si satisfà* $\forall a, b \in A$:

$$\begin{array}{ll} (1) & \Box a \leq a \ \textit{(contracció)}; \\ (2) & \Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b; \\ (3) & \Box^2 a = \Box a \ \textit{(idempotència)}. \end{array}$$

Sobre una àlgebra $\mathfrak{A}$ *amb al menys una operació binària* $\vee$ *i un ordre* $\leq$, *una operació unària* δ *és un* **operador clausura** *si satisfà* $\forall a, b \in$ $\in A$:

$$\begin{array}{ll} (1) & a \leq \delta a; \\ (2) & \delta(a \vee b) = \delta a \vee \delta b; \\ (3) & \delta^2 a = \delta a . \end{array}$$

1.41 DEFINICIÓ. *Un element* $b \in A$ *és* **obert** *repecte l'operador interior* $\Box$ *ssi* $\Box b = b$ *i és* **tancat** *repecte l'operador clausura* δ *ssi* $\delta b = b$. *Per* $B \subseteq A$ *anomeno* $\Box(B) = \{\Box b \,;\, b \in B\}$ *i* $\delta(B) = \{\delta b \,;\, b \in B\}$. $B \subseteq A$ *és* **obert** *ssi* $\Box(B) \subseteq B$ *i és* **tancat** *ssi* $\delta(B) \subseteq B$.

Si $\mathfrak{A}$ és un reticle, els operadors $\Box$ i δ determinen sobre A els conjunts $\Box(A)$ i $\delta(A)$ que fàcilment es comprova que són subreticles. Per altre banda, si $B \subseteq A$ és un subreticle **relativament supra-complet** (és a dir tal que $\forall a \in A$ existeix màx $\{b \in B \,;\, b \leq a\}$) indueix sobre A un operador interior, $\Box$, definit per $\Box a = \text{màx}\{b \in B \,;\, b \leq a\}$; dualment, si $T \subseteq A$ és un subreticle **relativament inf-complet** (és a dir tal que $\forall a \in A$ existeix mín $\{t \in T \,;\, a \leq t\}$) indueix un operador clausura, δ, definit per $\delta a = \text{mín}\{t \in T \,;\, a \leq t\}$.

2. Algebres modals tetravalents (AMT)

Aquest capítol comença amb la definició d'àlgebra modal tetravalent i amb l'enumeració de les principals propietats algebraiques d'aquestes estructures, la major part de les quals estan demostrades a [L1], [CM] i [B].

Estudio a continuació la peculiaritat de l'operador unari $\square$, operador interior que cal afegir a una àlgebra de De Morgan per tal d'obtenir una AMT, peculiaritat que es posa de manifest al comprovar que és únic i que la seva incorporació no redueix el nou reticle de congruències (proposició 2.6). Precisament degut a la unicitat de l'operador $\square$ és d'esperar que del coneixament que d'ell es pugui obtenir (en particular dels seus elements oberts) es dedueixin propietats globals de l'àlgebra. Demostro que els oberts formen una subàlgebra que a més és àlgebra de Boole (proposició 2.4) i que hi ha un lligam entre les congruències de l'AMT i les d'aquesta subàlgebra, lligam que explicito a partir de la definició d'un cert polinomi , $\dagger$ (definició 2.16), amb l'ús del qual es poden estendre les congruències de l'àlgebra dels oberts a tota l'AMT, la qual cosa permet demostrar que hi ha un isomorfisme entre el reticle de les congruències de l'AMT i una certa família de filtres de l'àlgebra (els filtres oberts). La caracterització de les congruències també permet demostrar directament la congruent-regularitat (teorema 2.25) i la propietat d'extensió de les congruències de les AMTs (teorema 2.27).

Al final del capítol dono dues propietats que depenen dels filtres primers i que caracteritzen l'operador $\square$ (proposició 2.30) i que en el capítol següent prendré com a definició de l'operador que farà el mateix paper que $\square$ en les lògiques modals tetravalents.

2.1. DEFINICIÓ. *$\mathfrak{A} = (A, \wedge, \neg, \square, 0)$ de tipus (2,1,1,0) és* **àlgebra modal tetravalent (AMT)** *si $\mathfrak{A}^- = (A, \wedge, \neg, 0)$ és àlgebra de De Morgan i l'operador $\square$ satisfà $\forall a \in A$:*

(1) $\quad \square a \wedge \neg a = 0\,;$

$$(2) \qquad \neg\Box a \wedge a = \neg a \wedge a\,.$$

Si afegeixo l'equació

$$(3) \qquad \neg\Box\neg(x \wedge y) = \neg\Box\neg x \wedge \neg\Box\neg y \quad \forall x, y \in A$$

a les equacions de la definició d'AMT obtinc una **àlgebra trivalent de Lukasiewicz (ATL)**. Precisament l'origen de les AMTs va estar motivat per la prova que Luiz Monteiro va fer de la independència d'una axiomatització de les ATL (a [M3]) en la qual apareix l'equació (3); l'àlgebra que dóna Luiz Monteiro com exemple per a demostrar la independència d'aquest últim axioma és precisament l'àlgebra que genera la varietat de les AMTs.

I. Loureiro a [L1] mostra de quina manera es pot obtenir una ATL a partir d'una AMT; demostra que la relació binària $\equiv$ definida en una AMT per $a \equiv b$ ssi $\Box a = \Box b$ i $\neg\Box\neg a = \neg\Box\neg b$ és una relació d'equivalència, i que l'àlgebra quocient per aquesta relació és una ATL.

Designo la negació de l'element distingit per 1 ($1_{\mathfrak{A}}$ si hi pot haver confusió) i com en el cas de les àlgebres de De Morgan puc definir la operació binària $\vee$ per $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$, aleshores tinc:

2.2. PROPIETATS. $\forall a, b \in A$ *es compleixen:*

(1) $\neg\Box a \vee a = 1$;

(2) $\Box a \vee \neg a = a \vee \neg a$;

(3) $\Box a \leq a$;

(4) $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$;

(5) $\Box 1 = 1$;

(6) $\Box 0 = 0$;

(7) $\Box(a \vee \Box b) = \Box a \vee \Box b$;

(8) $\Box\neg\Box a = \neg\Box a$;

(9) $\Box^2 a = \Box a$;

(10) $a \wedge \Box\neg a = 0$;

(11) *Les AMT formen una varietat.*

DEMOSTRACIÓ:

Des de (1) fins a (9) estan demostrades a [L1],[CM] i [B].

(10): Per (1) tenim que $\neg a \vee \neg\Box\neg a = 1$, i negant $a \wedge \Box\neg a = 0$.

(11): Immediat per la definició. ■

Gràcies a la dualitat entre $\wedge$ i $\vee$ puc dir que una àlgebra $\mathfrak{A} = (A, \vee, \Box, \neg, 0)$ de tipus (2,1,1,0) és AMT si $\mathfrak{A}^- = (A, \vee, \neg, 0)$ és àlgebra de De Morgan i l'operador $\Box$ satisfà 2.2.1 i 2.2.2.

2.3. PROPOSICIÓ. *L'operador $\Box$ és un operador interior i si defineixo l'operador δ per $\delta = \neg\Box\neg$ aleshores δ és un operador clausura i $\Box(A) = \delta(A)$.*

DEMOSTRACIÓ: Fet a [L1]. ■

Si anomeno B el conjunt $\Box(A)$ aleshores tinc:

2.4. PROPOSICIÓ. *$\mathfrak{B} = (B, \wedge, \neg, \Box, 0)$ és subàlgebra d'$\mathfrak{A}$ i és àlgebra de Boole.*

DEMOSTRACIÓ: Que és subàlgebra està fet a [L1], i per tal de comprovar que és àlgebra de Boole, és suficient comprovar $\Box a \wedge \neg\Box a = 0$, però $0 = \Box^2 a \wedge \neg\Box a = \Box a \wedge \neg\Box a$ per 2.1.1 i 2.2.9. ■

Una questió interessant sobre les AMTs és la seva estreta relació amb les àlgebres de De Morgan, en especial l'estudi de si sobre tota àlgebra de De Morgan es pot introduir un operador que la faci AMT, i en el cas que això no sigui possible, quines condicions, necessàries o suficients, ha de complir l'estructura reticular d'una àlgebra de De Morgan per ser suport d'una AMT.

La resposta a la primera pregunta és negativa; considereu la cadena de quatre elements $0 < b < a < 1$ amb $\neg b = a$ (i per tant $\neg a = b$). Si volem definir un operador, $\Box$, que la faci AMT, necessàriament $\Box 1 = 1$

i $\Box 0 = 0$. Com $\Box a \wedge \neg a = 0$ ha de ser $\Box a = 0$, però aleshores no es compleix 2.1.2, perquè $\neg\Box a \wedge a = a$ i $\neg a \wedge a = b$.

Pel que fa a la segona questió, Isabel Loureiro demostra a [L1] que sobre qualsevol àlgebra de De Morgan una condició necessària i suficient perquè pugui ser el suport d'una AMT és que els filtres primers compleixin la següent condició:

$$(*) \quad X \subseteq Y \Rightarrow (\Phi(X) = Y \text{ o } X = Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}$$

En la proposició següent demostro que d'existir un operador $\Box$ que faci d'una àlgebra de De Morgan una AMT, aquest és únic.

2.5. PROPOSICIÓ. *Sigui* $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \neg, \Box, 0)$ *i* $\mathfrak{A}' = (A, \wedge, \neg, \Box', 0)$ *dues AMTs sobre la mateixa àlgebra de De Morgan. Aleshores* $\Box = \Box'$

DEMOSTRACIÓ: Per 2.2.2 és $a \vee \neg a = \Box a \vee \neg a$ i $a \vee \neg a = \Box' a \vee \neg a$ d'on $\Box a \vee \neg a = \Box' a \vee \neg a$, intersecant amb $\Box a$ obtinc per la distributivitat i 2.1.1 $\Box a = \Box a \wedge \Box' a$. De la mateixa manera obtinc $\Box' a = \Box a \wedge \Box' a$ d'on $\Box a = \Box' a$. ■

L'operador $\Box$ no pot expressar-se com un polinomi en el qual intervinguin només les altres operacions de la AMT (si no, tota àlgebra de De Morgan seria AMT), però sobre les estructures que satisfan la propietat $(*)$ es comporta com si ho fos, més explícitament:

2.6. PROPOSICIÓ. *Si* $\mathfrak{A}$ *és AMT aleshores* $Con(\mathfrak{A}) = Con(\mathfrak{A}^-)$

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\theta \in Con(\mathfrak{A}^-)$. Si $(a, b) \in \theta$ aleshores $(\neg a, \neg b) \in$ $\in \theta$ d'on $(\Box a \vee \neg a, \Box a \vee \neg b) \in \theta$ i $(a \vee \neg a, b \vee \neg b) \in \theta$. Per 2.2.2 $(\Box a \vee \neg a, \Box b \vee \neg b) \in \theta$ i per la transitivitat $(\Box b \vee \neg b, \Box a \vee \neg b) \in \theta$, i intersecant amb $(\Box b, \Box b) \in \theta$ obtinc per la distributivitat i 2.1.1. $(\Box b, \Box a \wedge \Box b) \in \theta$. De la mateixa manera $(\Box a, \Box a \wedge \Box b) \in \theta$, d'on $(\Box a, \Box b) \in \theta$, o sigui $\theta \in Con(\mathfrak{A})$. ■

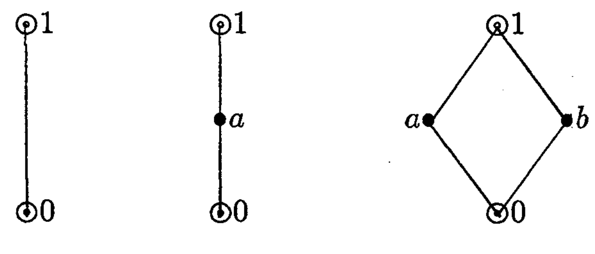
La condició de la proposició anterior no és suficient, per tenir la propietat (*), perquè si sobre qualsevol àlgebra de De Morgan defineixo l'interior trivial $\Box x = x \quad \forall x$, la condició es compleix i en canvi no tenim necessariament una AMT (de fet l'obtenim si i només si l'àlgebra de De Morgan és també de Boole), però sí és suficient per assegurar :

2.7 PROPOSICIÓ. *Les AMTs subdirectament irreductibles són les suportades per àlgebres de De Morgan subdirectament irreductibles i recíprocament, si sobre una àlgebra de De Morgan subdirectament irreductible podem afegir un interior que la faci AMT, aquesta serà subdirectament irreductible.* ■

2.8. PROPOSICIÓ. *Sobre $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{M}_3$ i $\mathfrak{M}_4$ podem definir operadors que satisfan 2.1.1 i 2.1.2.*

DEMOSTRACIÓ: Sobre totes elles podem definir $\Box 1 = 1$ i $\Box x = 0$ $\forall x \neq 1$, i una comprovació rutinària ens assegura que compleixen 2.1.1 i 2.1.2. ■

2.9. DEFINICIÓ. *Anomeno $\mathfrak{B}_{2m}$, $\mathfrak{M}_{3m}$ i $\mathfrak{M}_{4m}$ les úniques AMTs tals que* $\mathfrak{B}_{2m}^- = \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{M}_{3m}^- = \mathfrak{M}_3$ *i* $\mathfrak{M}_{4m}^- = \mathfrak{M}_4$



$\mathfrak{B}_{2m}$ $\mathfrak{M}_{3m}$ $\mathfrak{M}_{4m}$

En aquests diagrames els elements oberts estan representats per $\odot$.

Com que $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{M}_3$ i $\mathfrak{M}_4$ són àlgebres de De Morgan subdirectament irreductibles, per la proposició 2.7 també ho són $\mathfrak{B}_{2m}$, $\mathfrak{M}_{3m}$ i

$\mathfrak{M}_{4m}$, a més les dues primeres són subàlgebres de la tercera. Per tant, la varietat de les AMTs està generada per $\mathfrak{M}_{4m}$, i com a consequència d'aquest fet recordem que una equació serà vàlida en la varietat de las AMTs si i només si ho és en $\mathfrak{M}_{4m}$. La varietat generada per $\mathfrak{B}_{2m}$ és la varietat de les àlgebres de Boole considerada sobre àlgebres de tipus (2,2,1,1,0) amb operacions $(\wedge, \vee, \neg, \Box, 0)$ en les quals l'operador unari $\Box$ és del tot irrellevant pel fet de ser $\Box x = x \quad \forall x$. La varietat generada per $\mathfrak{M}_{3m}$ és la de les ATL, doncs és immediat comprovar que $\mathfrak{M}_{3m}$ satisfà l'equació $\neg\Box\neg(x \wedge y) = \neg\Box\neg x \wedge \neg\Box\neg y$. Per tant la varietat de les AMTs només té dues subvarietats pròpies, les àlgebres de Boole i les ATL.

Isabel Loureiro demostra a [L6] que $\mathfrak{M}_{4m}$ és quasiprimal i d'aquest fet se'n desprèn (per a més detalls consulteu [We]) que la varietat de les AMTs és **congruent regular** (o sigui que $\forall \theta, \phi \in Con(\mathfrak{A})$, si per algun $a \in A \quad a_\theta = a_\phi$ aleshores $\theta = \phi$) i que té la propietat **d'extensió de les congruències** (o sigui per a qualsevol $\mathfrak{S}$ subàlgebra d' $\mathfrak{A}$ i per a qualsevol $\theta \in Con(\mathfrak{S})$, $\exists \phi \in Con(\mathfrak{A})$ tal que $\phi \cap S^2 = \theta$ on S és el conjunt que suporta l'àlgebra $\mathfrak{S}$). Més endavant demostraré aquests dos resultats d'una forma constructiva, i aquest és un dels motius que justifica l'estudi del lligam entre les congruències i cert tipus de filtres de les AMTs, els filtres que poden ser la classe del màxim per alguna congruència. En els capítols següents això serà generalitzat a un isomorfisme entre els sistemes clausura de les lògiques que estudio en la memòria (cadascuna de les quals donarà lloc a una congruència) i els seus tancats més petits.

2.10 DEFINICIÓ. *$F \subseteq A$ és* **filtre obert** *si és filtre i si $a \in F$ implica $\Box a \in F$, $\forall a \in A$.*

Anomenaré $\mathcal{F}^+ = \{$ filtres oberts d' $\mathfrak{A}\}$, $\mathcal{F} = \{$ filtres d' $\mathfrak{A}\}$ i $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}} = \{$ filtres de $\mathfrak{B}\}$. Es immediat comprovar que aquests tres conjunts són sistemes clausura. Anomenaré $\mathbf{F}^+$, $\mathbf{F}$ i $\mathbf{F}_{\mathfrak{B}}$ els operadors clausura respectivament associats.

I. Loureiro introdueix en les AMTs una conectiva binària, $\rightarrow$, definida per $a \rightarrow b = \neg\Box a \vee b$ i demostra que els filtres oberts són precisament els **sistemes deductius** d'aquesta implicació, entenent per sistemes deductius els conjunts que contenen el màxim i són tancats per modus ponens. Per altra banda, A. Monteiro introdueix sobre les àlgebres de De Morgan una implicació, $\rightarrow'$, definida per $a \rightarrow' b = \neg a \vee b$ i també estudia quins són els seus sistemes deductius. És curiós observar que els sistemes deductius associats a $\rightarrow$ i $\rightarrow'$ sobre una AMT i sobre la seva àlgebra de De Morgan respectívament coincideixen amb els filtre oberts (vegeu 9.28 de [M2] i més endavant 3.22 d'on en particular es dedueix que en una AMT els filtres de la forma $P \cap \Phi(P)$ amb $P \in \mathcal{P}$ són base dels filtres primers).

2.11 PROPOSICIÓ. $\mathbf{F}^+$, $\mathbf{F}$, *i* $\mathbf{F}_{\mathfrak{B}}$ *són algebraics.*

DEMOSTRACIÓ: Trivialment la unió d'una cadena de filtres és un filtre, i si tots són oberts és un filtre obert, és a dir que els sistemes clausura són tancats per unions de cadenes i per tant (teorema 1.5) algebraics. ■

2.12 PROPOSICIÓ. *Sigui* $\mathfrak{A}$ *AMT i* $\theta \in Con(\mathfrak{A})$ *aleshores* 1_θ *és un filtre obert.*

DEMOSTRACIÓ:

(1) Si $a \in 1_\theta$ i $a \leq b$, intersecant $(a,1) \in \theta$ i $(b,b) \in \theta$ obtinc $(a \wedge b, b) \in \theta$, o sigui $(a,b) \in \theta$ i per tant $(b,1) \in \theta$.

(2) Si $a \in 1_\theta$ i $b \in 1_\theta$,$(a,1) \in \theta$ i $(b,1) \in \theta$ d'on $(a \wedge b, 1) \in \theta$.

(3) Si $(a,1) \in \theta$, per ser $\Box 1 = 1$, $(\Box a, 1) \in \theta$. ■

Més endavant associaré a cada filtre obert una congruència i demostraré que aquesta correspondència és biunívoca.

2.13 TEOREMA. $\mathbf{F}^+ = \mathbf{F} \circ \Box$

DEMOSTRACIÓ: Sigui $X \subseteq A$ qualsevol. $\mathbf{F}(\Box(X))$ és un filtre, conté X ja que $\Box a \leq a \quad \forall a \in A$, i és obert ja que $a \in \mathbf{F}(\Box(X)) \Leftrightarrow a = 1$ (d'on

$\Box a = \Box 1 = 1 \in \mathbf{F}(\Box(X)))$ o bé $\exists a_1....a_n \in X$ tals que $\Box a_1 \wedge ... \wedge \Box a_n \leq$ $\leq a$, d'on pel fet de ser $\Box$ un operador interior tinc $\Box a_1 \wedge .... \wedge \Box a_n \leq$ $\leq \Box a$, és a dir $\Box a \in \mathbf{F}(\Box(X))$. Sigui ara $F \in \mathcal{F}^+$ tal que $X \subseteq F$, aleshores, $\Box(X) \subseteq \Box(F) \subseteq F$, i per tant, $\mathbf{F}(\Box(X)) \subseteq \mathbf{F}(F) = F$. ∎

Aquesta relació entre l'operador clausura associat als filtres oberts i l'operador associat a tots els filtres és central en [FV2] on es dóna una definició de les lògiques modals clàssiques o intuïcionistes de tipus S4 o S5 en termes de dues lògiques associades amb operadors clausura $\mathbf{C}^+$ i $\mathbf{C}$ que satisfan $\mathbf{C}^+ = \mathbf{C} \circ \Box$. En el pròxim capítol obtindré un resultat en aquesta línia.

2.14 COROL.LARI. $\mathbf{F}^+(a) = \mathbf{F}^+(b)$ *ssi* $\Box a = \Box b$. ∎

2.15 TEOREMA. *Hi ha un isomorfisme d'ordre entre* $\mathcal{F}^+$ *i* $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$.

DEMOSTRACIÓ: Es suficient demostrar que les aplicacions

$$i : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{B}} \qquad i^{-1} : \mathcal{F}_{\mathfrak{B}} \longrightarrow \mathcal{F}^+$$
$$F \longrightarrow F \cap B \qquad G \longrightarrow \mathbf{F}(G)$$

estan ben definides, que una és la inversa de l'altra i que conserven l'ordre.

(1) <u>Estan ben definides</u>: Si $F \in \mathcal{F}^+$ pel fet de ser B tancat per $\wedge$, $F \cap B$ és filtre de $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$.

Si $G \in \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$ $\mathbf{F}(G)$ és filtre obert, perquè $G = \Box(G)$ i $\mathbf{F}(\Box(G)) = \mathbf{F}^+(G) \in \mathcal{F}^+$ pel teorema 2.13.

(2) <u>Les aplicacions i i i^{-1} són una inversa de l'altra</u>: $F \cap B \subseteq$ $\subseteq F$ i com que $\mathbf{F}(F) = F$, $\mathbf{F}(F \cap B) \subseteq F$. Per altra banda, si $a \in F \subseteq \mathcal{F}^+$, $\Box a \in F \cap B$, $\Box a \in \mathbf{F}(F \cap B)$ i per tant $a \in \mathbf{F}(F \cap B)$. O sigui $F \subseteq \mathbf{F}(F \cap B)$, i en definitiva, $\mathbf{F}(F \cap B) = F$.

Altrament, si $\Box a \in G$, aleshores $\Box a \in \mathbf{F}(G)$ i $\Box a \in B$ o sigui $G \subseteq \mathbf{F}(G) \cap B$. Si $a \in \mathbf{F}(G) \cap B$ és $a = \Box a$ i $\exists$ $\Box a_1.....\Box a_n \in G$ tals que $\Box a_1 \wedge ..... \wedge \Box a_n \leq \Box a$, o sigui $\Box a \in G$.

(3) <u>Conserven l'ordre</u>: trivialment. ∎

En l'àlgebra de Boole dels oberts cada filtre, que segons la proposició anterior és de la forma $F \cap B$ amb $F \in \mathcal{F}^+$, indueix una congruència, $\theta_{\mathfrak{B}}(F \cap B)$, de la forma habitual, o sigui $(a, b) \in \theta_{\mathfrak{B}}(F \cap B)$ ssi $(a \to b) \wedge (b \to a) \in F \cap B$ (o equivalentment $a \leftrightarrow b \in F \cap B$) $\forall a, b \in B$, on $\to$ és la implicació sobre una àlgebra de Boole, definida per $a \to b = \neg a \vee b$ (i $a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a)$).

La intenció és estendre aquesta congruència a l'àlgebra $\mathfrak{A}$ i considerar-la associada al filtre obert F. Anomenaré $\theta_{\mathfrak{A}}(F)$ a la congruència d'$\mathfrak{A}$ generada per $\theta_{\mathfrak{B}}(F \cap B)$ i demostraré que la primera és extensió de la segona. Per a caracteritzar $\theta_{\mathfrak{A}}(F)$ introduiré una operació, $\dagger$, que farà en $\mathfrak{A}$ el mateix paper que fa $\leftrightarrow$ en $\mathfrak{B}$, en el sentit que explicitarà el lligam entre les congruències i els filtres oberts d'$\mathfrak{A}$ de la mateixa manera que $\leftrightarrow$ ho fa entre les congruències i els filtres de $\mathfrak{B}$.

2.16 DEFINICIÓ [L6]. *En tota àlgebra* $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee, \neg, \Box)$ *de tipus (2,2,1,1) designo per* δ *l'expressió* $\neg\Box\neg$ *i defineixo el polinomi*

$$a \dagger b = (\neg\Box(a \vee b) \vee \Box(a \wedge b)) \wedge (\neg\delta(a \vee b) \vee \delta(a \wedge b))$$

La taula de $\dagger$ en $\mathfrak{M}_{4m}$ és:

$\dagger$	0	a	b	1
0	1	0	0	0
a	0	1	0	0
b	0	0	1	0
1	0	0	0	1

Totes aquelles propietats de $\dagger$ que siguin equacions seran vàlides en la varietat de les AMTs si ho són en $\mathfrak{M}_{4m}$, per tant serà suficient computar-les en la taula anterior.

Observeu que la taula de $\dagger$ és una generalització de la de $\leftrightarrow$ en el sentit que pren el valor 1 en la diagonal principal i 0 fora; sobre $\mathfrak{M}_{4m}$ $\dagger$ de dos valors és 1 si i només si són iguals: més endavant (corol.lari 2.22) veuré que això també es cert per a qualsevol AMT.

2.17 PROPIETATS. *En* $\mathfrak{M}_{4m}$ *per a qualsevols* x, y *es compleixen:*

$$\begin{array}{ll}
(1) & x \dagger y = 1 \Leftrightarrow x = y\,; \\
(2) & x \dagger y = y \dagger x\,; \\
(3) & x \dagger y = \neg x \dagger \neg y\,; \\
(4) & x \dagger x = 1\,; \\
(5) & \Box(x \dagger y) = x \dagger y\,; \\
(6) & x \dagger 1 = \Box x\,; \\
(7) & (x \dagger y) \wedge x = (x \dagger y) \wedge y\,.
\end{array}$$

DEMOSTRACIÓ: Totes elles es comproven avaluant-les en la taula de $\dagger$ en $\mathfrak{M}_{4m}$.■

2.18 LEMA. *Sigui* $F \in \mathcal{F}^+$, *si* (a, b) *pertany a una congruència d'* $\mathfrak{A}$ *que contingui* $\theta_{\mathfrak{B}}(F \cap B)$ *aleshores* $a \dagger b \in F' \cap B$ *per cert* $F' \supseteq F$, $F' \in \mathcal{F}^+$.

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\theta \in Con(frakA)$ amb $\theta_{\mathfrak{B}}(F \cap B) \subseteq \theta$ (i per tant $\theta_{\mathfrak{A}}(F) \subseteq \theta$). Si $(a, b) \in \theta$ aleshores $(a \wedge b, a \vee b) \in \theta$ d'on

$$(\Box(a \wedge b), \Box(a \vee b)) \in \theta \text{ i } (\delta(a \wedge b), \delta(a \vee b)) \in \theta \text{ i també}$$
$$(\Box(a \wedge b), \Box(a \vee b)) \in \theta \cap B^2 \supseteq \theta_{\mathfrak{B}}(F \cap B) \text{ i}$$
$$(\delta(a \wedge b), \delta(a \vee b)) \in \theta \cap B^2 \supseteq \theta_{\mathfrak{B}}(F \cap B)$$

pel fet de ser oberts. $\theta \cap B^2$ és congruència de $\mathfrak{B}$, i és consequència de 1.31 i 2.15 que $\theta \cap B^2$ sigui de la forma $\theta_{\mathfrak{B}}(F' \cap B)$ per cert $F' \supseteq F$, $F' \in \mathcal{F}^+$ Tenim per tant

$$[(\Box(a \wedge b) \to \Box(a \vee b)) \wedge (\Box(a \vee b) \to \Box(a \wedge b)) \wedge$$
$$\wedge\, (\delta(a \wedge b) \to \delta(a \vee b)) \wedge (\delta(a \vee b) \to \delta(a \wedge b))] \in F' \cap B,$$

però com $\Box(a \wedge b) \to \Box(a \vee b) = 1$ i $\delta(a \wedge b) \to \delta(a \vee b) = 1$ queda

$$[(\neg\Box(a \vee b) \vee \Box(a \wedge b)) \wedge (\neg\delta(a \vee b) \vee \delta(a \wedge b))] \in F' \cap B,$$

o sigui $a \dagger b \in F' \cap B$.■

Si bé la condició $a \dagger b \in F' \cap B$ equival a $a \dagger b \in F'$ pel fet de ser $a \dagger b$ obert, he usat la primera expressió perquè per una banda considero que explicita més gràficament el lligam que hi ha entre congruències d' $\mathfrak{A}$ i filtres de $\mathfrak{B}$ ($F' \cap B$ ho és per 2.15) i per altra banda és més coherent associar a una congruència de $\mathfrak{B}$ un filtre de $\mathfrak{B}$ en lloc d'associar-li un filtre obert d' $\mathfrak{A}$.

El teorema següent demostra que per cada $F \in \mathcal{F}^+$ la condició $a \dagger b \in F \cap B$, és suficient per definir una congruència en $\mathfrak{A}$, que aquesta congruència és la generada per $\theta_{\mathfrak{B}}(F \cap B)$ (la congruència que he anomenat $\theta_{\mathfrak{A}}(F)$) i que a més és la mínima extensió de $\theta_{\mathfrak{B}}(F \cap B)$, és a dir la mínima congruència θ que satisfà $\theta \cap B^2 = \theta_{\mathfrak{A}}(F)$. Aquest resultat serà generalitzat en la proposició 4.19 per a les congruències d'una àlgebra qualsevol que donen AMT en el quocient.

2.19 TEOREMA. *Sigui* $F \in \mathcal{F}^+$ *, aleshores tinc que* $(a, b) \in \theta_{\mathfrak{A}}(F)$ *si i només si* $a \dagger b \in F \cap B$.

DEMOSTRACIÓ:

A) $\underline{\{(a, b) ; a \dagger b \in F \cap B\}}$ és relació d'equivalència:
1) $a \dagger a = 1 \in F \cap B$.
2) $a \dagger b = b \dagger a$.
3) Si $a \dagger b \in F \cap B$ i $b \dagger c \in F \cap B$ aleshores $a \dagger c \in F \cap B$ perquè en general $(a \dagger b) \wedge (b \dagger c) \leq (a \dagger c)$ o sigui $(a \dagger b) \wedge (b \dagger c) \wedge (a \dagger c) = (a \dagger b) \wedge (b \dagger c)$ pel fet que en $\mathfrak{M}_{4m}$, si $a = b = c$ queda $1 = 1$ i en qualsevol altre cas $0 = 0$.

B) $\underline{\{(a, b) ; a \dagger b \in F \cap B\}}$ és congruència:
1) Es compatible amb $\Box$, o sigui $a \dagger b \in F \cap B \Rightarrow \Box a \dagger \Box b \in F \cap B$ perquè $a \dagger b \leq \Box a \dagger \Box b$ ssi $(a \dagger b) \wedge (\Box a \dagger \Box b) = (a \dagger b)$ i en $\mathfrak{M}_{4m}$, si $a = b$ queda $1 = 1$ i si $a \neq b$ queda $0 = 0$.
2) Es compatible amb $\neg$ per 2.17.3
3) Per veure la compatibilitat respecte $\wedge$ cal veure que si $a \dagger b \in F \cap B$ i $c \dagger d \in F \cap B$ aleshores $(a \wedge c) \dagger (b \wedge d) \in F \cap B$. Es suficient demostrar que $(a \dagger b) \wedge (c \dagger d) \wedge [(a \wedge c) \dagger (b \wedge d)] = (a \dagger b) \wedge (c \dagger d)$. En $\mathfrak{M}_{4m}$ tinc

que si $a = b$ i $c = d$ queda $1 = 1$ i en qualsevol altre cas $0 = 0$. Per tant, $\{(a,b)\,;\, a \dagger b \in F \cap B\} \cap B^2$ és congruència.

C) $\underline{\{(a,b)\,;\, a \dagger b \in F \cap B\} = \theta_{\mathfrak{A}}(F)}$.

He de veure que $\{(a,b)\,;\, a \dagger b \in F \cap B\} \cap B^2 = \theta_{\mathfrak{B}}(F \cap B)$ i que $\{(a,b)\,;\, a \dagger b \in F \cap B\}$ és la menor congruència amb aquesta propietat. $(\Box a, \Box b) \in \{(a,b)\,;\, a \dagger b \in F \cap B\} \cap B^2$ ssi $\Box a \dagger \Box b \in F \cap B$, i per la definició de $\dagger$, la definició de δ i les propietats de 2.2

$$
\begin{aligned}
&[\neg\Box(\Box a \vee \Box b) \vee \Box(\Box a \wedge \Box b)] \wedge [\neg\delta(\Box a \vee \Box b) \vee \delta(\Box a \wedge \Box b)] = \\
&= [\neg(\Box a \vee \Box b) \vee (\Box a \wedge \Box b)] \wedge [\neg(\Box a \vee \Box b) \vee (\Box a \wedge \Box b)] = \\
&= (\neg\Box a \wedge \neg\Box b) \vee (\Box a \wedge \Box b) = (\neg\Box a \vee \Box b) \wedge (\neg\Box b \vee \Box a) \in F \cap B,
\end{aligned}
$$

si i només si $(\Box a, \Box b) \in \theta_{\mathfrak{B}}(F \cap B)$. Per la proposició 2.18 donat que $\{(a,b)\,;\, a \dagger b \in F \cap B\}$ és congruència és l'extensió mínima de $\theta_{\mathfrak{B}}(F \cap B)$.■

2.20 COROL.LARI. *Tota congruència de $\mathfrak{B}$ es pot estendre a una congruència d'$\mathfrak{A}$.*

DEMOSTRACIÓ: Pel teorema anterior si tinc en compte que per 2.15 i pel teorema 1.31 totes les congruències de $\mathfrak{B}$ són de la forma $\theta_{\mathfrak{B}}(F \cap B)$ per cert $F \in \mathcal{F}^+$. ■

A partir d'aquí, si no hi ha confusió, ometré el subíndex en les expressions del tipus $\theta_{\mathfrak{A}}(F)$.

El primer resultat que necessitaré per a provar la congruent-regularitat és al mateix temps un clàssic isomorfisme entre les congruències d'una AMT i un cert tipus de subconjunts distingits, en aquest cas els filtres oberts (aquests tipus d'isomorfismes també apareixen en altres àlgebres lligades a l'estudi de les lògiques modals com les àlgebres de Boole o les de Heyting topològiques). Al final del capítol 4 donaré una generalització d'aquest resultat.

2.21 TEOREMA. *Hi ha un isomorfisme entre les congruències d'$\mathfrak{A}$ i els filtres oberts, més explícitament, les aplicacions*

$$\begin{array}{lcl} \psi : Con(\mathfrak{A}) \longrightarrow \mathcal{F}^+ & i & \psi^{-1} : \mathcal{F}^+ \longrightarrow Con(\mathfrak{A}) \\ \qquad\theta \longrightarrow 1_\theta & & \qquad F \longrightarrow \theta(F) \end{array}$$

són isomorfismes d'ordre un invers de l'altre.

DEMOSTRACIÓ: Recordeu que 1_θ és filtre obert segons la proposició 2.12, per tant ψ està ben definida. Per comprovar que és una aplicació bijectiva, demostraré que tant $\psi \circ \psi^{-1}$ com $\psi^{-1} \circ \psi$ són la identitat.

Tinc que $1_{\theta(F)} = F$ ja que $a \in 1_{\theta(F)}$ ssi $(a, 1) \in \theta(F)$ ssi $a \dagger 1 = \Box a \in F$ ssi $a \in F$ $(F \in \mathcal{F}^+)$.

Tinc que $\theta(1_\theta) = \theta$ ja que:

$\subseteq$) $(a, b) \in \theta(1_\theta)$ ssi $a \dagger b \in 1_\theta$ (1_θ és filtre obert), o sigui $(a \dagger b, 1) \in \theta$ d'on $((a \dagger b) \wedge a, a) \in \theta$ $((a \dagger b) \wedge b, b) \in \theta$, i per 2.17.7 i la transitivitat, $(a, b) \in \theta$.

$\supseteq$) Si $(a, b) \in \theta$ aleshores $(a \vee b, a \wedge b) \in \theta$, $(\Box(a \vee b), \Box(a \wedge b)) \in \theta$ i $(\neg\Box(a \vee b), \neg\Box(a \vee b)) \in \theta$. Si uneixo, $(1, \Box(a \wedge b) \vee \neg\Box(a \vee b)) \in \theta$ i de la mateixa manera $(1, \delta(a \wedge b) \vee \neg\delta(a \vee b)) \in \theta$. Intersecant, $(1, a \dagger b) \in \theta$ o sigui $a \dagger b \in 1_\theta$ i per 2.17.5 $a \dagger b \in 1_\theta \cap B^2$ o sigui $(a, b) \in \theta(1_\theta)$.

ψ és doncs bijecció i fàcilment es comprova que conserva l'ordre. ■

Observeu que en particular si $1_\theta = 1_{\theta'}$ aleshores $\theta = \theta'$ la qual cosa ens porta a demostrar els següents corol.laris:

2.22 COROL.LARI. *Sobre $\mathfrak{A}$ AMT, per qualssevol $a, b \in A$ $a \dagger b = 1 \Leftrightarrow a = b$.*

DEMOSTRACIÓ: $\{1\} \in \mathcal{F}^+$ i és el mínim, per tant per 2.21. té associada la congruència diagonal, d'on $a = b$ ssi $a \dagger b = 1$. ■

2.23 COROL.LARI. *Sigui $\mathfrak{A}$ AMT i $\mathfrak{B}$ la subàlgebra dels seus oberts, aleshores els reticles $Con(\mathfrak{A})$ i $Con(\mathfrak{B})$ són isomorfs i l'isomorfisme s'obté restringint les congruències d'$\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$.*

DEMOSTRACIÓ: Es suficient tenir present els següents isomorfismes: $Con(\mathfrak{A}) \approxeq \mathcal{F}^+$ (teorema 2.21), $\mathcal{F}^+ \approxeq \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$ (teorema 2.15) i $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}} \approxeq Con(\mathfrak{B})$ (teorema 1.31). ■

2.24 LEMA. *Per tot* $a, b \in A$ *i per tota* $\theta \in Con(\mathfrak{A})$, $\{a \dagger b \ ; (a,b) \in \theta\} = \Box(1_\theta)$

DEMOSTRACIÓ: ($\subseteq$) Trivialment, perquè de $(a,b) \in \theta$ tinc $a \dagger b \in 1_\theta$ i $a \dagger b$ és obert per 2.17.5.

($\supseteq$) Sigui $\Box b \in \Box(1_\theta)$, és suficient comprovar que existeixen $a, c \in A$ tals que $a \dagger c = \Box b$ (d'on serà per 2.19. $(a,c) \in \theta$). Considerem per qualsevol $a \in A$ $c = (a \wedge \Box b) \vee (\Box\neg a \wedge \neg b)$. És un càlcul rutinari el comprovar que $a \dagger c = \Box b$. ■

2.25 TEOREMA. (**Congruent regularitat**) *Siguin* $\theta, \theta' \in Con(\mathfrak{A})$. *Si per algun* $a \in A$ *es compleix* $a_\theta = a_{\theta'}$ *aleshores* $\theta = \theta'$.

DEMOSTRACIÓ: Segons he observat anteriorment, és suficient veure que $1_\theta = 1_{\theta'}$, que equival a demostrar que $\Box(1_\theta) = \Box(1_{\theta'})$ pel fet de tractar-se de filtres oberts (proposicions 2.12 i 2.13). Sigui $\Box b \in 1_\theta$, existeix c tal que $a \dagger c = \Box b$, o sigui $(a,c) \in \theta$ d'on $(a,c) \in \theta'$ i per tant $\Box b \in 1_{\theta'}$. ■

S'ha aconseguit per tant, provar que les AMTs són congruent-regulars, és a dir, que tota congruència ve determinada per una qualsevol de les seves classes d'equivalència. Per tal de provar la propietat d'extensió de les congruències recordeu primer el mecanisme que funciona a les àlgebres de Boole:

2.26 LEMA. *Sigui* $\mathfrak{B}'$ *subàlgebra de* $\mathfrak{B}$ *àlgebra de Boole. Tota congruència sobre* $\mathfrak{B}'$ *es pot estendre a una congruència sobre* $\mathfrak{B}$.

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\theta' \in Con(\mathfrak{B}')$, ve definida per $(a,b) \in \theta'$ ssi $a \leftrightarrow b \in 1_{\theta'}$ i es pot estendre a una congruència, θ, de $\mathfrak{B}$ definint $(a,b) \in \theta$ ssi $a \leftrightarrow b \in \mathbf{F}_{\mathfrak{B}}(1_{\theta'})$. ■

2.27 TEOREMA. (**D'extensió de les congruències.**) *Si $\mathfrak{A}'$ és subàlgebra d'$\mathfrak{A}$ i $\theta' \in Con(\mathfrak{A}')$, aleshores $\exists \theta \in Con(\mathfrak{A})$ tal que $\theta \cap (A')^2 = \theta'$*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\mathfrak{B}'$ la subàlgebra (de $\mathfrak{A}'$ i de $\mathfrak{B}$) dels oberts d'$\mathfrak{A}'$. θ' indueix una congruència sobre $\mathfrak{B}'$ (la seva restricció) que es pot estendre (pel lema anterior) a una congruència de $\mathfrak{B}$, i aquesta (pel teorema 2.19) s'estén a una congruència, θ, sobre $\mathfrak{A}$. Cal veure que $\theta \cap A'^2 = \theta'$ però es suficient comprovar (corol.lari 2.23) que aquestes dues congruències coincideixen sobre B', i aquest fet és immediat doncs $\theta' \cap B'^2 = (\theta \cap B^2) \cap B'^2 = \theta \cap B'^2$.■

Per 2.6, les congruències d'una AMT venen determinades, com en les àlgebres de De Morgan, per famílies de filtres primers Φ-tancades, per tant hi ha d'haver un lligam entre aquestes i els filtres oberts, en concret:

2.28 PROPOSICIÓ.

(1) *Si $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ és una família de filtres primers Φ- tancada, aleshores $\cap\mathcal{P}' \in \mathcal{F}^+$.*

(2) *Si $F \in \mathcal{F}^+$ aleshores $\mathcal{P}' = \{P \in \mathcal{P}; F \subseteq P\}$ és Φ-tancada i $\cap\mathcal{P}' = F$.*

DEMOSTRACIÓ:

(1) Per la proposició 1.35 $\mathcal{P}'$, al ser Φ-tancada, dóna lloc a una congruència , la classe de l'1 de la qual és $1_\theta = \cap\mathcal{P}'$, com aquesta congruència també ho és de l'AMT (proposició 2.6) $1_\theta \in \mathcal{F}^+$ (proposició 2.12)

(2) Pel fet de ser $\mathcal{P}$ base de $\mathcal{F}$, $\cap\mathcal{P}' = F$. Si $x \in F \subseteq P$ i $x \notin \Phi(P)$, aleshores $\exists y \in P$ tal que $x = \neg y$, com $x \in F$, i $F \in \mathcal{F}^+$, $\Box x = \Box\neg y \in F \subseteq P$ d'on per 2.2.10 $y \wedge \Box\neg y = 0 \in P$, absurd. ■

2.29 COROL.LARI. *Per tot $P \in \mathcal{P}$, $P \cap \Phi(P) \in \mathcal{F}^+$.*

DEMOSTRACIÓ: La família $\{P, \Phi(P)\}$ és Φ-tancada, per tant $P \cap \Phi(P)$ és un filtre obert per 2.28.1. ■

Observeu que les famílies més petites de filtres primers Φ-tancades són les de la forma $\{P, \Phi(P)\}$ amb $P \in \mathcal{P}$. A la vista de 2.28 és clar que tot filtre obert maximal (dins dels filtres oberts) serà de la forma $P \cap \Phi(P)$ per cert $P \in \mathcal{P}$, però el recíproc també és cert, és a dir $P \cap \Phi(P)$ és un filtre obert maximal $\forall P \in \mathcal{P}$ (aquesta afirmació és consequència del resultat més general exposat en la proposició 4.20) i per tant qualsevol família $\{P, \Phi(P)\}$ de filtres primers determinarà una congruència maximal (degut a l'isomorfisme d'ordre que estableix la proposició 2.21) i el quocient de l'àlgebra per ella serà una àlgebra simple de la varietat, i recíprocament, tota congruència maximal vindrà determinada per una família Φ-tancada de la forma $\{P, \Phi(P)\}$ és més, com l'expressió d'un filtre obert maximal com intersecció d'una família Φ-tancada de filtres primers és única (pel coro.lari 4.23) i les congruències queden determinades per la classe de l' 1, hi ha una bijecció entre les famílies de la forma $\{P, \Phi(P)\}$ i les congruències maximals. En canvi, (vegeu més endavant la proposició 3.12) la correspondència entre famílies de filtres primers Φ-tancades i congruències de l'àlgebra no és en general bijectiva.

Altres propietats d'interès que utilitzaré al capítol següent són:

2.30 PROPOSICIÓ. *Per tot* $P \in \mathcal{P}$ *i per tot* $a \in A$:

(1) $a \in P \cap \Phi(P)$ *ssi* $\Box a \in P \cap \Phi(P)$;

(2) $\Box a \in P$ *ssi* $\Box a \in \Phi(P)$.

DEMOSTRACIÓ:

(1) Si $\Box a \in P \cap \Phi(P)$, pel fet de ser $\Box a \leq a$, $a \in P \cap \Phi(P)$. Per 2.28 es compleix l'altra implicació.

(2) Si $\Box a \in P$ i $\Box a \notin \Phi(P)$, aleshores $\neg\Box a \in P$ d'on $\Box a \wedge \neg\Box a = 0 \in P$, absurd. ■

Comprovaré a continuació que aquestes dues propietats determinen completament l'únic operador unari $\Box$ que afegit a l'estructura d'una àlgebra de De Morgan que satisfaci (*) la converteix en AMT. En el cas particular de $\mathfrak{M}_{4m}$ tinc:

2.31 PROPOSICIÓ. *Si $\Box$ és un operador monari sobre M_4, que satisfà la proposició anterior, aleshores $\Box 1 = 1$, $\Box 0 = \Box a = \Box b = 0$.*

DEMOSTRACIÓ: Recordeu que en $\mathfrak{M}_4$ els filtres primers són $F_a = \{1, a\}$ i $F_b = \{1, b\}$, i que $\Phi(F_a) = F_b$ i $\Phi(F_b) = F_a$.

Per 2.30.1 com que $1 \in F_a \cap F_b$ ha de ser $\Box 1 \in F_a \cap F_b$ o sigui $\Box(1) = 1$. Per 2.30.2 com $a \in F_a, a \notin \Phi(F_a), b \in F_b$ i $b \notin \Phi(F_b)$, $\Box a \neq a$, $\Box a \neq b$, $\Box b \neq b$ i $\Box b \neq a$. Si $\Box a = 1$ o $\Box b = 1$ o $\Box 0 = 1$, per 2.30.1 s'arriba a contradicció, d'on necessàriament $\Box a = = \Box b = \Box 0 = 0$. ■

Sobre una àlgebra de De Morgan qualsevol tinc les proposicions següents:

2.32 PROPOSICIÓ. *Un operador monari $\Box$ sobre una àlgebra de De Morgan que satisfaci les dues condicions de 2.30 ha de ser contractiu.*

DEMOSTRACIÓ: $\Box a \leq a$ si per tot filtre primer P $\Box a \in P$ implica $a \in P$. Però $\Box a \in P$ ssi $\Box a \in P \cap \Phi(P)$ ssi $a \in P \cap \Phi(P)$ i en particular $a \in P$. ■

2.33 PROPOSICIÓ. *Sobre una àlgebra de De Morgan amb un operador contractiu $\Box$ són equivalents:*

(1) $a \in P \cap \Phi(P) \Leftrightarrow \Box a \in P \cap \Phi(P)$ *per qualsevol filtre primer P;*

(2) $\Box a \vee \neg a = a \vee \neg a \quad \forall a \in A$.

DEMOSTRACIÓ: 2) $\Rightarrow$ 1) Sigui $a \in P \cap \Phi(P)$, per hipòtesi $a \vee \neg a \in \in P$ ssi $\Box a \vee \neg a \in P$. Si $\neg a \in P$, $a \notin \Phi(P)$ absurd, per tant $\Box a \in P$. De la mateixa manera, en ser $a \vee \neg a \in \Phi(P)$ obtinc $\Box a \in$

$\in \Phi(P)$ o sigui $\Box a \in P \cap \Phi(P)$.
1) $\Rightarrow$ 2) Per tal de comprovar $a \vee \neg a \leq \Box a \vee \neg a$ sigui $a \vee \neg a \in P$ si $\neg a \in P$ aleshores $\Box a \vee \neg a \in P$ i si $a \in P$ i $\neg a \notin P$ aleshores $a \in \Phi(P)$ o sigui $a \in P \cap \Phi(P)$ d'on $\Box a \in P \cap \Phi(P)$ i $\Box a \vee \neg a \in P$. Per ser $\Box$ contractiu $\Box a \vee \neg a \leq a \vee \neg a$.■

Observeu que en la definició de AMT i gràcies a les propietats 2.2.3, 2.2.5, 2.2.7, 2.2.8, i 2.2.9 puc substituir l'equació $\neg \Box a \vee a = 1$ per $\neg \Box a \vee \Box a = 1$, equació que equival en cert sentit a la propietat 2.30.2 com veuré en la proposició 2.35. Comprovo primer que una àlgebra de De Morgan en la qual la transformació de Birula-Rasiowa és la identitat és una àlgebra de Boole.

2.34 LEMA. *Sobre una àlgebra de De Morgan $\mathfrak{A}$, per cada element $a \in A$ són equivalents:*

(1) $a \in P$ *ssi* $a \in \Phi(P)$ *per qualsevol* P *filtre primer;*
(2) $a \vee \neg a = 1$.

DEMOSTRACIÓ: 1) $\Rightarrow$ 2) Cal veure que per tot filtre primer P $a \vee \neg a \in$ $\in P$. Si $a \in P$ ja està i si $a \notin P$ per hipòtesi $a \notin \Phi(P)$ d'on $\neg a \in P$.

2) $\Rightarrow$ 1) Si $a \in P$ aleshores $\neg a \notin P$ però com que $a \vee \neg a =$ $= 1 \in \Phi(P)$ és $a \in \Phi(P)$. De la mateixa manera si $a \in \Phi(P)$ aleshores $a \in P$.■

En particular si tinc un operador unari $\Box$ i substitueixo l'element a de la proposició anterior per $\Box a$ tinc:

2.35 PROPOSICIÓ. *Per un operador unari $\Box$ sobre una àlgebra de De Morgan són equivalents:*

(1) $\Box a \in P$ *ssi* $\Box a \in \Phi(P)$ *per qualsevol* P *filtre primer;*
(2) $\Box a \vee \neg \Box a = 1 \quad \forall a \in A$.

Per tant les propietats de 2.30 caracteritzen l'únic operador $\Box$ que permet convertir una àlgebra de De Morgan adequada en AMT.

Com que són propietats que involucren una relació entre els elements de l'àlgebra i els filtres primers (que recordeu que són base del sistema clausura de tots els filtres) són fàcilment generalitzables prenent en lloc d'una àlgebra de De Morgan una àlgebra abstracta que sigui suport d'una lògica de De Morgan i substituint els filtres primers pels elements de la base de la lògica. L'estudi d'aquesta generalització serà l'objectiu del pròxim capítol.

Observeu per acabar que les dues condicions de 2.30 es poden combinar en una de sola:

PROPOSICIÓ 2.36. *Es satisfan les condicions de la proposició 2.30 si i només si es satisfà* $\Box a \in P \Leftrightarrow a \in P \cap \Phi(P) \quad \forall P \in \mathcal{P}$. ■

Malgrat això, mantindrem dues condicions separades en correspondència amb l'axiomàtica original de les AMTs amb dues equacions, axiomàtica que per altra banda és fàcil reduir a una única equació, efectivament:

PROPOSICIÓ 2.37. *Sobre* $\mathfrak{A}$ *àlgebra de De Morgan i per un operador unari* $\Box$ *és equivalent satisfer l'equació*

$$(1)\ (\Box b \wedge \neg b) \vee (\neg \Box a \wedge a) = a \wedge \neg a \quad \forall a, b \in A$$

a satisfer 2.1.1 i 2.1.2.

DEMOSTRACIÓ: Clarament si es satisfà 2.1.1 i 2.1.2 també es satisfà la primera equació.
Si es satisfà 2.37.1 $\forall a, b \in A$ aleshores en particular per $a = b = 0$ obtenim $\Box 0 \vee 0 = 0$ o sigui $\Box 0 = 0$, per $a = 0$ $\Box b \wedge \neg b = 0$ i per $b = 0$ $\neg \Box a \wedge a = a \wedge \neg a$.■

3. Lògiques modals tetravalents (LMT)

En aquest capítol introduexio la definició de lògica quasi modal tetravalent (LQMT, no necessàriament finitària) i de lògica modal tetravalent (LMT, finitària). Aquestes últimes són lògiques obtingudes a partir de les lògiques de De Morgan afegint una nova operació, $\Box$, a l'àlgebra i imposant que satisfaci les dues propietats de la proposició 2.30. L'exemple més senzill de LMT és la lògica formada per una AMT i tots els seus filtres, i en general la lògica formada per una AMT i un sistema clausura generat per qualsevol família de filtres primers $\Phi-$ tancada és una LQMT i si el sistema clausura és finitari una AMT.

Demostro a continuació que les definicions de LQMT i LMT es conserven per morfismes bilògics (teorema 3.5), la qual cosa permet caracteritzar-les (teoremes 3.7 i 3.8) com aquelles lògiques que a través d'un morfisme bilògic passen a ser com les descrites més amunt, com les més senzilles.

Com a corol.laris dels teoremes de caracterització s'obté que una AMT és l'àlgebra suport d'una LMT que només té una congruència lògica, la identitat, i un resultat algebraic: que en una AMT (i també en una àlgebra de De Morgan) la correspondència entre les famílies de filtres primers $\Phi-$ tancades i les congruències no és bijectiva.

Demostro a continuació que les LMT venen completament determinades pel seu més petit tancat i passo a estudiar com són les LMTs sobre una AMT, demostrant (teorema 3.16) que el seu sistema clausura està format pet tots els filtres que contenen en el més petit, el qual necessariament ha de ser un filtre obert.

Estudio en una LMT sobre una AMT com és l'estructura dels filtres del sistema clausura que a més són oberts; considero la relació θ^+ que identifica a tots aquells elements que pertanyen als mateixos filtres oberts del sistema clausura, i com sigui que aquesta no és una relació de congruència perquè no respecte l'operació $\vee$, introdueixo sobre les AMTs i en general sobre les àlgebres $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee, \neg, \Box)$ de tipus $(2,2,1,1)$ un reducte adequat, $\mathfrak{A}^+ = (A, \wedge, \overset{+}{\vee}, \overset{+}{\neg})$ sobre el qual θ^+ és d'equivalència. Anomeno $\mathcal{C}^+$ al sistema clausura format pels elements oberts del sistema $\mathcal{C}$ i demostro (teorema 3.23) la relació $\mathbf{C} \circ \Box = \mathbf{C}^+$. Si s'associa a cada LQMT $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ la lògica $\mathsf{L}^+ = (\mathfrak{A}^+, \mathbf{C}^+)$, aleshores resulta que aquesta darrera és una lógica clàssica (teorema 3.25) i si s'agrupen aquests últims resultats i s'afegeix només una única condició adicional (3.26.4) sobre una base del sistema clausura s'obté una definició alternativa de LMT (teorema 3.26) d'un estil diferent a la donada al principi del capítol.

Sobre una àlgebra qualsevol $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \neg, \Box, 0)$ de tipus (2,1,1,0) (amb element distingit 0) puc generalitzar la definició de la transformació de Birula- Rasiowa prenent per $X \subseteq A$ $\Phi(X) = \{x \in A : \neg x \notin X\}$ i també puc definir a partir de $\wedge$ i $\neg$ la conectiva $\vee$ de la forma habitual: $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b) \quad \forall a, b \in A$

3.1 Definició. $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ *és una* **lògica quasi modal tetravalent (LQMT)** *si i només si existeix* $\mathcal{E}$ *base de* $\mathcal{C}$ *tal que per tot* $P \in \mathcal{E}$ *:*

(1) P *és* $\wedge$ *-filtre (o sigui* $a \wedge b \in P$ *ssi* $a, b \in P$*) ;*
(2) $\Phi(P) \in \mathcal{E}$ *i* $\Phi^2(P) = P$ *;*
(3) $0 \notin P$ *;*
(4) $\Box a \in P$ *ssi* $\Box a \in \Phi(P) \quad \forall a \in P$ *;*
(5) $a \in P \cap \Phi(P)$ *ssi* $\Box a \in P \cap \Phi(P) \quad \forall a \in A$ *.*

L *és una* **lògica modal tetravalent (LMT)** *si a més el sistema clausura* $\mathcal{C}$ *és finitari.*

3.2 Proposició. *Sobre* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ *LQMT amb base* $\mathcal{E}$ *són certes les següents afirmacions:*

(1) $\neg a \in \Phi(P)$ *si només si* $a \notin P \quad \forall a \in A \quad \forall P \in \mathcal{E}$ *.*

(2) $\Box a \in P \Rightarrow a \in P \quad \forall a \in A \quad \forall P \in \mathcal{E}$ *i en particular si* $\Box X \subseteq X$ *aleshores* $\mathbf{C}(\Box X) = \mathbf{C}(X)$.

(3) $P \neq \emptyset \quad \forall P \in \mathcal{E}$.

(4) $\mathbf{C}(\emptyset) = \mathbf{C}(1)$ *(on* $1 = \neg 0$*).*

DEMOSTRACIÓ: (1) $a \in P$ ssi $a \in \Phi(\Phi(P))$ ssi $\neg a \notin \Phi(P)$ ssi $\neg\neg a \in P$ i per tant la definició original de Φ: $\neg a \in \Phi(P)$ ssi $\neg\neg a \notin P$ és pot escriure $\neg a \in \Phi(P)$ ssi $a \notin P$.
(2) Si $\Box a \in P$ aleshores $\Box a \in P \cap \Phi(P)$ i $a \in P \cap \Phi(P)$ d'on en particular $a \in P$. Si $\Box X \subseteq X$ aleshores $\mathbf{C}(\Box X) \subseteq \mathbf{C}(X)$ i per altra banda $\forall P \in \mathcal{E}$ si $\Box X \subseteq P$ és $X \subseteq P$ d'on $\mathbf{C}(X) \subseteq \mathbf{C}(\Box X)$.
(3) Si $P = \emptyset$ aleshors $0 \in \Phi(P) = A$, en contradicció amb 3.1.3.
(4) $0 \notin \Phi(P) \quad \forall P \in \mathcal{E}$ d'on $1 = \neg 0 \in \Phi^2(P) = P$.■

Podria haver obtingut una definició equivalent a 3.1 considerant una àlgebra $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \neg, \Box)$ de tipus (2,1,1) i eliminant 3.1.3, ja que les restants condicions són suficients per assegurar l'existència d'elements inconsistents, en particular, $\neg a \wedge \Box a$ ho és $\forall a \in A$, ja que si $\Box a \in P$ aleshores $\Box a \in \Phi(P)$ i per tant $a \in \Phi(P)$ o sigui $\neg a \notin P$, per altra banda, si $\neg a \in P$ aleshores $a \notin \Phi(P)$ d'on $\Box a \notin \Phi(P)$ i per tant (per 3.1.4) $\Box a \notin P$. He preferit usar la definció anterior perquè així la condició 3.1.3 ja designa en l'àlgebra un element inconsistent, la qual cosa posa ràpidament de manifest (3.2.4) que les L(Q)MT tindran teoremes.

El cas **trivial** de LMT l'obtinc quan $\mathcal{E} = \emptyset$, en aquest cas només hi ha un tancat, A, i les cinc condicions anteriors es satisfan trivialment.

3.3 EXEMPLES:

* L'exemple més senzill de LMT és $\mathbb{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{F})$ on $\mathfrak{A}$ és una AMT i $\mathcal{F}$ són tots els seus filtres. En efecte, els filtres primers d'una àlgebra de De Morgan satisfan 3.1.1, 3.1.2 (vejeu [FV1]) i 3.1.3, i per la proposició 2.30 es tenen 3.1.4 i 3.1.5, a més l'operador associat a tots els filtres és finitari.

* Un cas particular de l'exemple anterior és la lògica formada per $\mathfrak{M}_{4m}$ i tots els seus filtres, lògica que anomenaré L_{4m}.

* Observeu que qualsevol família de filtres primers Φ- tancada satisfà les condicions de la definició anterior i per tant, si la prenem com a base generarà una LQMT sobre $\mathfrak{A}$.

* Al capítol 5 veuré altres exemples de LMTs sobre àlgebres lliures.

* El següent exemple de LQMT no finitària està inspirat en el comentari final de [BB]. Sigui $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \dots$ on $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{M}_{4m}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ i sigui p_i la projecció de $\mathfrak{A}$ sobre la i-èssima coordenada. El sistema clausura, $\mathcal{C}$,de la lògica projectivament generada sobre $\mathfrak{A}$ per $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ té per base $\{p_i^{-1}(F_j) : i \in \mathbb{N}, j = 1,2\}$, és a dir els conjunts de la forma $T^{ij} = T_1 \times T_2 \times \dots$ on $T_n = M_{4m}$ si $i \neq n$ i $T_n = F_j$ ($j = 1,2$) si $i = n$. Sigui $a_k \in A$ amb $p_n(a_k) = a$ si $n \leq k$ i $p_n(a_k) = 1$ si $n > k$, aleshores és fàcil comprovar que $(a, a, \dots) \in \mathbf{C}(a_1, a_2, \dots)$ i que en canvi $(a, a, \dots) \notin \mathbf{C}(a_1, \dots, a_n)$ per qualsevol $n \in N$, la qual cosa demostra que $\mathbf{C}$ no és finitari. Per altra banda, el teorema 4.2 assegura que degut a la construcció que s'ha fet $(\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ és LQMT.

En [FV1] s'anomena **lògiques de De Morgan** a aquelles lògiques finitàries sobre àlgebres $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \neg,)$ de tipus (2,1) que satisfan 3.1.1 i 3.1.2, és a dir a les lògiques finitàries que satisfan PC i PBR.

És de destacar el fet que si $\mathfrak{A}$ és àlgebra de De Morgan (o AMT) i $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ és una lògica de De Morgan (o LMT o LQMT) amb base $\mathcal{E}$, la relació $\theta_{\mathbf{C}}$ associada a $\mathbf{C}$ coincideix amb la relació $\sim_{\mathcal{E}}$ associada a la base de $\mathcal{C}$, que recordeu que és una família $\Phi-$ tancada.

Si en la definició de LQMT en lloc de 3.1.4 i 3.1.5 s'exigeixen les condicions més fortes

$$(1) \quad a \in P \Leftrightarrow \neg a \notin P \text{ i}$$

$$(2) \quad a \in P \Leftrightarrow \Box a \in P.$$

s'obté la definició de lògica clàssica sobre àlgebres $(A, \wedge, \vee, \Box, 0)$ de tipus (2,2,1,0); la primera condició diu que Φ és la identitat i la segona defineix l'operador $\Box$ de tal manera que el sistema clausura no separa cap element del seu interior, motiu pel qual l'operador no té cap interès.

Si a la definició 3.1 s' hi afegeix la condició que $\forall P \in \mathcal{E}\ \ P$ i $\Phi(P)$ siguin comparables, s'obté una subclasse de les LQMTs que pel fet de mantenir amb les ATLs la mateixa relació que mantenen les LQMTs amb les AMTs anomenaré **lògiques (quasi) modals de Lukasiewicz trivalents (L(Q)MLT)**. És fàcil comprovar que els resultats que segueixen també són certs per les LQMLT prenent en els enunciats les ALT en lloc de les AMTs.

En [FV1] es demostra que si sobre l'àlgebra suport d'una lògica de De Morgan (i per tant també sobre les àlgebres suport d'una LQMT) es defineix una nova operació binària, $\vee$, per $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$ es té:

3.4 PROPOSICIÓ.

(1) *3.1.1 equival a PC;*
(2) *Tot $P \in \mathcal{E}$ és $\vee$− primer;*
(3) *Es satisfà PD.* ■

La definició de L(Q)MT és una definició adequada per una lògica abstracta en el sentit que es conserva per morfismes bilógics, és a dir:

3.5 TEOREMA. *Si L_1 i L_2 són dues lògiques abstractes i $h : \mathsf{L}_1 \longrightarrow \mathsf{L}_2$ és un morfisme bilògic, aleshores L_1 satisfà les condicions de la definició 3.1 si i només si L_2 les satisfà.*

DEMOSTRACIÓ: 3.1.1 per la proposició 2.5 de [FV2]. 3.1.2 per la proposició 3 de [FV1], 3.1.3 trivialment i la finitaritat pel corol.lari de la proposició 6 de [V].

Per 3.1.4 i 3.1.5 sigui $\mathsf{L}_1 = (\mathfrak{A}_1, \mathcal{C}_1)$ i $\mathsf{L}_2 = (\mathfrak{A}_2, \mathcal{C}_2)$ amb bases respectives $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$, i sigui $h : \mathsf{L}_1 \longrightarrow \mathsf{L}_2$ morfisme bilògic, aleshores es té que $\{h^{-1}(P)\,;\, P \in \mathcal{E}_2\}$ és base de $\mathcal{C}_1$, $\{h(P)\,;\, P \in \mathcal{E}_1\}$ és base de $\mathcal{C}_2$, $\Phi_1(h^{-1}(P)) = h^{-1}(\Phi_2(P))\ \ \forall P \in \mathcal{E}_2$ i $\Phi_2(h(P)) = h(\Phi_1(P))$ $\forall P \in \mathcal{E}_1$ on Φ_1 i Φ_2 són les transformacions de Birula-Rasiowa de les àlgebres $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$ respectivament [FV1].

Suposeu que $\mathbf{L}_1$ satisfà 3.1.4 i sigui $P \in \mathcal{E}_1$. Si $\Box a \in h(P)$, aleshores $\Box a = h(\alpha)$ per $\alpha \in P$. Sigui β amb $h(\beta) = a$, aleshores $h(\Box\beta) = h(\alpha)$ i per tant, $\Box\beta \in P$ (com h és morfisme bilògic, $\Box\beta$ i α han de partànyer als mateixos tancats). Per hipòtesi $\Box\beta \in \Phi_1(P)$ i $\Box a = h(\Box\beta) \in h(\Phi_1(P)) = \Phi_2(h(P))$. Igualment si $\Box a \in \Phi_2(h(P))$ s'obté $\Box a \in h(P)$, o sigui que $\mathbf{L}_2$ satisfà 3.1.4

Suposeu que $\mathbf{L}_1$ satisfà 3.1.5, si $a \in h(P) \cap \Phi_2(h(P)) = h(P \cap \Phi_1(P))$ (recordeu el primer exemple de 1.20), aleshores $\exists\alpha \in P \cap \Phi_1(P)$ amb $h(\alpha) = a$, però com $\Box\alpha \in P \cap \Phi_1(P)$ i $h(\Box\alpha) = \Box h(\alpha) = \Box a$, $\Box a \in h(P \cap \Phi_1(P)) = h(P) \cap \Phi_2(h(P))$. Si $\Box a \in h(P) \cap \Phi_2(h(P)) = h(P \cap \Phi_1(P))$, existeix $\alpha \in P \cap \Phi_1(P)$ amb $h(\alpha) = \Box a$; existeix β amb $h(\beta) = a$, i com $h(\Box\beta) = \Box a = h(\alpha)$, $\Box\beta$ i α pertanyen als mateixos tancats, o sigui $\Box\beta \in P \cap \Phi_1(P)$ i per hipòtesi $\beta \in P \cap \Phi_1(P)$ d'on $a \in h(P \cap \Phi_1(P)) = h(P) \cap \Phi_2(h(P))$. Per tant, $\mathbf{L}_2$ satisfà 3.1.5.

Suposeu que $\mathbf{L}_2$ satisfà 3.1.4 i sigui ara $P \in \mathcal{E}_2$. $\Box a \in h^{-1}(P)$ ssi $h\Box(a) = \Box h(a) \in P$ ssi $\Box h(a) = h\Box(a) \in \Phi_2(P)$ ssi $\Box a \in h^{-1}(\Phi_2(P))$, per tant, $\mathbf{L}_1$ satisfà 3.1.4.

Suposeu que $\mathbf{L}_2$ satisfà 3.1.5, $a \in h^{-1}(P) \cap \Phi_1(h^{-1}(P)) = h^{-1}(P \cap \Phi_2(P))$, ssi $h(a) \in P \cap \Phi_2(P)$ ssi $\Box h(a) = h\Box(a) \in P \cap \Phi_2(P)$, ssi $\Box a \in h^{-1}(P \cap \Phi_2(P)) = h^{-1}(P) \cap \Phi_1(h^{-1}(P))$. $\mathbf{L}_1$ satisfà, per tant 3.1.5. ■

3.6 COROL.LARI. *Sigui $\mathbf{L}_1$ i $\mathbf{L}_2$ dues lògiques abstractes tals que existeix un morfisme bilògic entre elles. Aleshores si una és LQMT o LMT l'altra també ho és.* ■

A la relació d'equivalència associada a $\mathbf{C}$ que fins ara denotava per $\theta_{\mathbf{C}}$, a partir d'ara la denotaré per θ si no hi ha ambigüitat. Quan tingui un morfisme bilògic entre dues lògiques que tinguin la propietat de Birula-Rasiowa, a totes dues transformacions les denotarem indistintament per la mateixa lletra Φ.

Els dos teoremes següents pertanyen a la classe dels teoremes col.loquilament coneguts per "teoremes del bilògic", els quals posen de manifest l'estreta relació entre classes de lògiques abstractes i les varietats d'àlgebres que tenen associades de forma natural.

3.7 TEOREMA. *Per tota lògica abstracta* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ *són equivalents:*

(1) L *és LQMT;*

(2) $\theta \in Con(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A}/\theta$ *és AMT i* $\mathcal{C}/\theta$ *és un sistema clausura amb una base de filtres primers* Φ *-tancada;*

(3) *Existeix un morfisme bilògic entre* L *i* $\mathsf{L}' = (\mathfrak{A}', \mathcal{F}')$ *on* $\mathfrak{A}'$ *és una AMT i* $\mathcal{F}'$ *és un sistema clausura sobre* $\mathfrak{A}'$ *amb una base de filtres primers* Φ *-tancada.*

DEMOSTRACIÓ: $(1) \Rightarrow (2)$: En [FV1] es demostra que $\theta \in Con(\mathfrak{A}^-)$, que $\mathfrak{A}^-/\theta$ és reticle de De Morgan i que $\mathcal{C}/\theta$ té una base de filtres primers Φ -tancada, és per tant suficient provar que $\theta \in Con(\mathfrak{A})$ i que $\mathfrak{A}/\theta$ és AMT.

Sigui $(a,b) \in \theta$ i suposeu que $\Box a \in P$, aleshores $\Box a \in P \cap \Phi(P)$ d'on $a \in P \cap \Phi(P)$ per 3.1.5 i per ser $(a,b) \in \theta$, $b \in P \cap \Phi(P)$ d'on $\Box b \in P \cap \Phi(P)$, en particular $\Box b \in P$, per tant $(\Box a, \Box b) \in \theta$ i $\theta \in Con(\mathfrak{A})$.

$\mathfrak{A}/\theta$ és reticle de De Morgan, i com per 3.1.3 0_θ és l'ínfim del reticle, aquest és àlgebra de De Morgan. Comprovo que, a més, és AMT, o sigui que es satisfan:

(2.1.1) $\Box a_\theta \wedge \neg a_\theta = 0_\theta \quad \forall a_\theta \in \mathfrak{A}/\theta$, i

(2.1.2) $a_\theta \wedge \neg a_\theta = a_\theta \wedge \neg \Box a_\theta \quad \forall a_\theta \in \mathfrak{A}/\theta$

Pel que fa a 2.1.1 tinc $\Box a_\theta \wedge \neg a_\theta \leq 0_\theta$ ssi $\forall P \in \mathcal{E} \quad \Box a \wedge \neg a \notin P$. Si $\Box a \in P$ aleshores $\Box a \in P \cap \Phi(P)$ d'on $a \in P \cap \Phi(P)$, però $a \in \Phi(P)$ ssi $\neg a \notin P$, o sigui $\Box a \wedge \neg a \notin P$; i si $\Box a \notin P$ aleshores $\Box a \wedge \neg a \notin P$ ja que P és un filtre.

Pel que fa a 2.1.2 $a_\theta \wedge \neg a_\theta \leq a_\theta \wedge \neg \Box a_\theta$ ssi $a \wedge \neg a \in P$ implica $a \wedge \neg \Box a \in P \quad \forall P \in \mathcal{E}$. Si $a \wedge \neg a \in P$ i $\neg \Box a \notin P$, aleshores $\Box a \in \Phi(P)$ d'on $\Box a \in P \cap \Phi(P)$, o sigui $\neg a \wedge \Box a \in P$ que pel paràgraf anterior és absurd, o sigui $\neg \Box a \in P$ i $a \wedge \neg \Box a \in P$.

$a_\theta \wedge \neg\Box a_\theta \leq a_\theta \wedge \neg a_\theta$ ssi $a \wedge \neg\Box a \in P$ implica $a \wedge \neg a \in P$ $\forall P \in \mathcal{E}$. Si $a \wedge \neg\Box a \in P$ i $\neg a \notin P$, aleshores $a \in \Phi(P)$ d'on $a \in P \cap \Phi(P)$ i $\Box a \in P \cap \Phi(P)$ que és absurd, perquè de $\neg\Box a \in P$ tinc $\Box a \notin \Phi(P)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Preneu $\mathsf{L}' = (\mathfrak{A}/\theta, \mathcal{C}/\theta)$. El morfisme bilògic és la projecció canònica.

(3) $\Rightarrow$ (1) Pel teorema 3.5 en ser L' LQMT. ■

3.8 TEOREMA. *Per tota lògica abstracta* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ *són equivalents:*

(1) L *és LMT;*

(2) $\theta \in Con(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A}/\theta$ *és AMT i* $\mathcal{C}/\theta$ *són tots els filtres d'*$\mathfrak{A}/\theta$*;*

(3) *Existeix un morfisme bilògic entre* L *i* $\mathsf{L}' = (\mathfrak{A}', \mathcal{F}')$ *on* $\mathfrak{A}'$ *és AMT i* $\mathcal{F}'$ *són tots els seus filtres.*

DEMOSTRACIÓ: Pel teorema anterior i pel teorema 3 de [FV1] a on es demostra pel cas de les lògiques de De Morgan que $\mathcal{C}/\theta$ és el conjunt de tots els filtres d' $\mathfrak{A}/\theta$; en aquesta demostració només s'usa la finitaritat de la lògica i PC i per tant és aplicable al cas que m'ocupa. ■

3.9 COROL.LARI. $\mathfrak{A}$ *és AMT ssi existeix un operador clausura,* $\mathbf{C}$, *sobre* A *tal que* $(\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *és LMT i* $\theta = \Delta_{\mathfrak{A}}$. ■

3.10 DEFINICIÓ. *[BS] Una lògica* L *és* **simple** *ssi l'única congruència lògica és* Δ. ■

3.11 COROL.LARI. $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ *LMT és simple ssi* $\mathfrak{A}$ *és AMT i* $\mathcal{C}$ *són tots els seus filtres.* ■

Un corol.lari purament algebraic dels teoremes 3.7 i 3.8 és:

3.12 PROPOSICIÓ. *En una AMT la correspondència entre congruències i famílies* Φ *-tancades de filtres primers no és sempre biunívoca.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ una LQMT no finitària sobre $\mathfrak{A}$ AMT amb una base de filtres primers $\mathcal{E}$. Hi ha un morfisme bilògic entre L i $\mathsf{L}/\theta = (\mathfrak{A}/\theta, \mathcal{C}/\theta)$ on $\mathcal{C}/\theta$ té una base de filtres primers Φ - tancada en la qual no estan tots els filtres primers. Sigui $\mathsf{L}'/\theta = (\mathfrak{A}/\theta, \mathcal{F}/\theta)$ on $\mathcal{F}/\theta$ és el sistema clausura de tots els filtres d'$\mathfrak{A}/\theta$. L'/θ genera projectivament una certa LMT, sigui $\mathcal{E}'$ la seva base. Clarament les famílies Φ-tancades $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}'$ tenen associada la mateixa congruència, θ, i en canvi són diferents, una és finitària i l'altra no. ■

Degut a l'isomorfisme entre les congruències d'una AMT i les de la corresponent àlgebra de De Morgan subjacent, la proposició anterior també és vàlida en aquesta última varietat d'àlgebres.

Com ja he comentat en el primer capítol, l'estructura reticular de tots els sistemes clausura sobre una àlgebra $\mathfrak{A}$ es traslladа a una estructura reticular en el conjunt de totes les lògiques sobre $\mathfrak{A}$; si $\mathsf{L}_i = (\mathfrak{A}, \mathcal{C}_i)$ $(i = 1,2,3)$ $\mathsf{L}_1 \vee \mathsf{L}_2 = \mathsf{L}_3$ ssi $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_3$ i $\mathsf{L}_1 \wedge \mathsf{L}_2 = \mathsf{L}_3$ ssi $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_3$. Naturalment, si l'estudi es centre sobre una determinada classe de lògiques sobre $\mathfrak{A}$ (LMT, LQMT etc...) es pot perdre aquesta estructura reticular si el suprem o l'ínfim de dues lògiques de la classe deixa de ser de la classe. En la proposció següent veuré que aquest no és el cas amb les LMT. El principal problema és demostrar que si L_i $(i = 1,2)$ són LMT aleshores $\mathsf{L}_1 \vee \mathsf{L}_2$ també ho és; la dificultat està en trobar una base (que compleixi la defineió de LMT) de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, ja que si $\mathcal{E}_i$ és base de $\mathcal{C}_i$ $(i = 1,2)$ aleshores clarament és $[\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2] \subseteq \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ però el recíproc no és en general cert. Més endavant (proposició 4.7) veuré que si L_i $(i = 1,2)$ són LMT aleshores $\mathsf{L}_1 \wedge \mathsf{L}_2$ també ho és i (proposició 4.23) que aleshores $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = [\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2]$. Donades aquestes dues proposicions per demostrades tinc:

3.13 PROPOSICIÓ. *El conjunt de les LMT sobre l'àlgebra* $\mathfrak{A}$ *és un reticle.*

DEMOSTRACIÓ: Siguin $(\mathfrak{A}, \mathcal{C}_1)$ i $(\mathfrak{A}, \mathcal{C}_2)$ dues LQMT. Com que les condicions de la definició 3.1 fan referència a propietats de cadascun dels elements de la base, i tant els elements de la base de $\mathcal{C}_1$ com els de la base de $\mathcal{C}_2$ els satisfan, també les satisfaran els elements de la unió (i trivialment els de la intersecció) de les bases i per tant $(\mathfrak{A}, \mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2)$ i $(\mathfrak{A}, \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$ són LQMT.

El fet que de ser $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ algebraics es dedueixi que tant $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2$ com $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ també ho són ($\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2$ per [Wo] apartat 1.5.7 i $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ fàcilment pel teorema 1.5) acaba la demostració. ∎

Donat que el sistema clausura d'una lògica clàssica $(\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ també ho és d'una LMT (amb suport l'àlgebra obtinguda a partir d' $\mathfrak{A}$ afegint l'operador $\Box$ definit per $\Box x = x \quad \forall x \in A$) obtinc com a coro.lari de la proposició anterior que el conjunt $\{$ lògiques clàssiques sobre $\mathfrak{A}\}$ és un reticle.

El teorema 3.8 i el fet que la varietat de les AMTs sigui congruent regular em permetrà demostrar en el pròxim teorema que les LMTs venen completament determinades pel seu més petit tancat, que ja he assenyalat que coincideix amb el tancat generat pel màxim de làlgebra. A més a més del seu interès intrínsec, aquest resultat l'usaré en la prova del teorema 4.6.

3.14 Teorema. *Si* $\mathbf{L}_1 = (\mathfrak{A}, \mathcal{C}_1)$ *i* $\mathbf{L}_2 = (\mathfrak{A}, \mathcal{C}_2)$ *són dues LMTs sobre la mateixa àlgebra* $\mathfrak{A}$ *tals que* $\mathbf{C}_1(\emptyset) = \mathbf{C}_2(\emptyset)$, *aleshores coincideixen.*

Demostració: Sigui $\mathbf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2)$; per 3.13 $\mathbf{L}$ és LMT. Siguin θ' i θ les relacions d'equivalència associades a $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2$ i $\mathcal{C}_2$ respectivament, aleshores $\theta' \subseteq \theta$ i $\mathfrak{A}/\theta'$ i $\mathfrak{A}/\theta$ són AMT per 3.7. Defineixo en $\mathfrak{A}/\theta'$ la congruència $\psi = \theta/\theta'$ per $(a_{\theta'}, b_{\theta'}) \in \psi$ ssi $(a,b) \in \theta$. La classe de $1_{\theta'}$ per la congruència ψ és $[1_{\theta'}]_\psi = \{a_{\theta'}\,;\,(a_{\theta'}, 1_{\theta'}) \in \psi\} = \{a_{\theta'}\,;\,(a,1) \in \in \theta\} = \{a_{\theta'}\,;\mathbf{C}_2(a) = \mathbf{C}_2(1)\}$. Pel fet de ser $\mathbf{C}_2(1) = \mathbf{C}_2(\emptyset) = (\mathbf{C}_1 \vee \vee \mathbf{C}_2)(\emptyset) = (\mathbf{C}_1 \vee \mathbf{C}_2)(1)$ tinc que $[1_{\theta'}]_\psi = \{1_{\theta'}\}$ per tant, per la congruent regularitat d' $\mathfrak{A}/\theta'$ (teorema 2.25) ψ és la diagonal, d'on $\theta = \theta'$ (si $(a,b) \in \theta$ i $(a,b) \notin \theta'$, tinc $(a_{\theta'}, b_{\theta'}) \in \psi$ i en canvi $a_\theta \neq b_\theta$), i per tant $\mathfrak{A}/\theta = \mathfrak{A}/\theta'$ i d'aquí dedueixo que $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ ja que hi ha un mateix isomorfisme entre cadascuna d'elles i tots els filtres del quocient. De la mateixa manera obtinc $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1$ d'on $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ i $\mathsf{L}_1 = \mathsf{L}_2$.■

La prova d'aquest teorema no és constructiva, és a dir no dóna el procediment per a, donat $\mathbf{C}(\emptyset)$, trobar tots els altres tancats, ni tampoc una caracterització de quins subconjunts d' A poden funcionar com a $\mathbf{C}(\emptyset)$. Això ho faré en dues etapes; primer sobre les AMTs i després, al capítol 4, en general. El primer pas és trobar totes les L(Q)MT sobre $\mathfrak{A}$ AMT.

3.15 LEMA. *Si* L *és una LQMT sobre* $\mathfrak{A}$ *AMT, es compleixen:*

(1) $\mathbf{C}(\emptyset)$ *és filtre obert d'* $\mathfrak{A}$;

(2) $\forall P \in \mathcal{P}$, $P \supseteq \mathbf{C}(\emptyset)$ *ssi* $\Phi(P) \supseteq \mathbf{C}(\emptyset)$, *és a dir la família de filtres primers que contenen* $\mathbf{C}(\emptyset)$ *és* Φ*-tancada.*

DEMOSTRACIÓ:

(1) Per ser L LQMT pel teorema 3.7 existeix un morfisme bilògic $\pi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}/\theta$ que a més és morfisme d'AMTs. Com $\pi(1) = 1_\theta$ i π identifica els elements que petanyen als mateixos tancats, $\pi^{-1}(1_\theta) = \mathbf{C}(1) = \mathbf{C}(\emptyset)$. Pel corol.lari 3.4 de [L7] l'antiimatge del màxim d'una AMT per una homomorfisme d'AMTs és un filtre obert, per tant $\mathbf{C}(\emptyset)$ ho és.

(2) Es conseqüència de (1) i de la proposició 2.28. ■

3.16 TEOREMA. *Si* $\mathfrak{A}$ *és AMT aleshores* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ *és LMT ssi existeix* $F_0 \in \mathcal{F}^+$ *tal que* $\mathcal{C} = \{ F \in \mathcal{F} ;\ F \supseteq F_0 \}$.

DEMOSTRACIÓ:

($\Rightarrow$) Hi ha un morfisme bilògic, h, entre L i $\mathsf{L}/\theta = (\mathfrak{A}/\theta, \mathcal{C}/\theta)$ on $\mathcal{C}/\theta$ són tots els filtres d' $\mathfrak{A}/\theta$ (pel teorema 3.8). Observeu que $h^{-1}(1_\theta) = \mathbf{C}(\emptyset) \in \mathcal{F}^+$ i que per la congruent regularitat, $\mathbf{C}(\emptyset)$ determina la congruència, que serà l'associada a la família $\{P$ filtres primers d' $\mathfrak{A}$; $\mathbf{C}(\emptyset) \subseteq P\}$ que és Φ-tancada (per la proposicició 3.15.)

Sigui F un filtre primer d' $\mathfrak{A}$ tal que $\mathbf{C}(\emptyset) \subseteq F$, comprovo a continuació que $F = h^{-1}(h(F))$; en general $F \subseteq h^{-1}(h(F))$, i per altra banda, si $a \in h^{-1}(h(F))$ aleshores $h(a) \in h(F)$, o sigui $h(a) = h(b)$ per algun $b \in F$, per tant $(a,b) \in \theta$ i per la caracterització de θ ($(a,b) \in \theta$ ssi ($a \in P$ ssi $b \in P$) $\forall P$ primer tal que $\mathbf{C}(\emptyset) \subseteq P$) $a \in F$. Per tant $F \in \{F \in \mathcal{F} : \mathbf{C}(\emptyset) \subseteq F\}$. Això prova que $\{F \in \mathcal{F} : \mathbf{C}(\emptyset) \subseteq F\} \subseteq \mathcal{C}$ i com l'altra inclusió és immedata, la implicació està provada.

($\Leftarrow$) Per les proposició 2.28 i l'exemple 3.3, i observant que si $(T_i)_{i \in I}$ (amb $T_i \in \mathcal{C}$) és una cadena, aleshores $\bigcup_{i \in I} T_i$ és un filtre i conté F_0, és a dir la lògica generada és finitària. ■

3.17 Corol.lari. *Si $\mathfrak{A}$ és AMT, aleshores la LMT més fina sobre $\mathfrak{A}$ és ($\mathfrak{A}, \mathcal{F}$).*

Demostració: En tota AMT $\Box 1 = 1$, per tant $\{1\}$ és filtre obert i obviament és el més petit. La LMT que li correspon segons el teorema 3.16, la de tots els filtres, és per tant la més fina. ■

3.18 Teorema. *Si $\mathfrak{A}$ és AMT, hi ha un isomorfisme entre el reticle de les congruències sobre $\mathfrak{A}$ i el de les LMT sobre $\mathfrak{A}$.*

Demostració: Donada una $\theta \in Con(\mathfrak{A})$, considereu $\mathcal{C}_\theta = \{T \in \mathcal{F} ; 1_\theta \subseteq T\}$. Aleshores les aplicacions:

$$\alpha : Con(\mathfrak{A}) \longrightarrow \{LMT \text{ sobre } \mathfrak{A}\}$$
$$\theta \longrightarrow \mathbf{L}_\theta = (\mathfrak{A}, \mathcal{C}_\theta)$$

$$\beta : \{LMT \text{ sobre } \mathfrak{A}\} \longrightarrow Con(\mathfrak{A})$$
$$\mathbf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}) \longrightarrow \theta_{\mathbf{C}}$$

Són una inversa de l'altra. En efecte:

$\alpha \circ \beta(\mathbf{L}) = \mathbf{L}$. Efectivament, $\alpha(\theta_{\mathbf{C}})$ té per sistema clausura $\mathcal{C}_{\theta_{\mathbf{C}}} = \{T \in \mathcal{F} ; 1_{\theta_{\mathbf{C}}} \subseteq T\} = \{T \in \mathcal{F} ; \mathbf{C}(\emptyset) \subseteq T\} = \mathcal{C}$ per 3.16

$\beta \circ \alpha(\theta) = \theta$. La classe de l'1 de $\beta(\mathsf{L}_\theta)$ és $\cap \mathcal{C}_\theta = 1_\theta$, i per la congruent regularitat la congruència associada és θ.

Trivialment conserven l'ordre. ∎

3.19 COROL.LARI. *Hi ha un isomorfisme entre el reticle de les LMTs sobre una AMT i els seus filtres oberts.*

DEMOSTRACIÓ: Per les proposicions 2.21 i 3.18. ∎

Al final del capítol 4 generalitzaré aquests tipus d'isomorfisme a àlgebres qualssevol. Naturalment en tal cas no obtindré totes les congruències de l'àlgebra, sinó un subreticle, i en comptes dels filtre oberts usaré uns subconjunts distingits adequats.

En la resta de la secció m'ocuparé de les propietats dels filtres oberts en les AMTs i, per extensió, dels tancats d'una LMT qualsevol que siguin oberts per l'operació $\Box$.

En una AMT $\mathfrak{A}$, denoto per θ^+ la relació d'equivalència associada a $\mathcal{F}^+$: $(a,b) \in \theta^+$, si i només si $\mathbf{F}^+(a) = \mathbf{F}^+(b)$ és a dir (corol.lari 2.14) si i només si $\Box a = \Box b$; per tant, θ^+ identifica els elements que tenen el mateix interior. En particular tinc $(a, \Box a) \in \theta^+$ i $(b, \Box b) \in \theta^+$ i en canvi no té perquè ser cert $(a \vee b, \Box a \vee \Box b) \in \theta^+$ doncs en general $\Box(a \vee b)$ és diferent de $\Box(\Box a \vee \Box b)$ al no complir-se en $\mathfrak{M}_{4m}$ l'equació $\Box(a \vee b) = \Box a \vee \Box b$. La relació θ^+ no respecta l'operació $\vee$ i per tant no és congruència d' $\mathfrak{A}$, per aquest motiu introduiré una nova estructura sobre A, adequada per fer que θ^+ sí sigui congruència. Resultarà que aquesta nova estructura té propietats lògiques interessants i permetrà trobar una caracterització alternativa del concepte de LMT.

3.20 DEFINICIÓ. *Si* $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee, \neg, \Box)$ *és una àlgebra qualsevol de tipus (2,2,1,1) defineixo les operacions* $a \overset{+}{\vee} b$ *i* $\overset{+}{\neg} a$ *per*

$$a \overset{+}{\vee} b = \Box a \vee \Box b \quad i \quad \overset{+}{\neg} a = \neg \Box a.$$

Anomenaré $\mathfrak{A}^+$ *a l'àlgebra* $(A, \wedge, \overset{+}{\vee}, \overset{+}{\neg}, 0)$.

Si $\mathcal{C}$ és un sistema clausura sobre $\mathfrak{A}$ anomenaré $\mathcal{C}^+$ al sistema clausura dels tancats que són oberts per $\Box$, és a dir $\mathcal{C}^+ = \{T \in \mathcal{C}\,;\, \Box T \subseteq T\}$, anomeraré $\mathbf{C}^+$ a l'operador clausura associat i si $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ anomenaré L^+ a la lògica $(\mathfrak{A}^+, \mathbf{C}^+)$.

3.21 PROPOSICIÓ. *Sigui $\mathfrak{A}$ AMT. La relació θ^+ associada a $\mathcal{F}^+$, és relació de congruència en $\mathfrak{A}^+$ i la lògica $(\mathfrak{A}^+, \mathcal{F}^+)$ és clàssica.*

DEMOSTRACIÓ: Recordeu que $\mathfrak{B}$ és àlgebra de Boole i a més subàlgebra d' $\mathfrak{A}$ (proposició 2.4). L'aplicació $\Box$ que fa correspondre a cada element el seu interior és un morfisme entre $\mathfrak{A}^+$ i $\mathfrak{B}$ doncs per 2.2.4, 2.2.6, 2.2.7 i 2.2.8 és $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$, $\Box 0 = 0$, $\Box(a \overset{+}{\vee} b) = \Box(\Box a \vee \Box b) = \Box a \vee \Box b$ i $\Box(\overset{+}{\neg} a) = \Box(\neg \Box a) = \neg \Box a$, i com que per 2.2.9 és $\Box(\Box a) = \Box a$ és, a més, epimorfisme. Com he observat abans θ^+ és el nucli del morfisme descrit anteriorment i per tant és congruència.

Si $F \in \mathcal{F}^+$, aleshores és immediat comprovar que $\Box(F) = F \cap B$, i pel teorema 2.15 tinc un isomorfisme de reticles entre $\mathcal{F}^+$ i $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$, o sigui que $\Box : \mathfrak{A}^+ \longrightarrow \mathfrak{B}$ és un morfisme bilògic, i com que la lògica $(\mathfrak{B}, \mathcal{F}_{\mathfrak{B}})$ és clàssica i aquesta propietat, pel teorema 1.18, es trasllada per morfismes bilògics, $(\mathfrak{A}^+, \mathcal{F}^+)$ és lògica clàssica. ■

La implicació associada a la lògica clàssica $(\mathfrak{A}^+, \mathcal{F}^+)$ és $a \overset{+}{\rightarrow} b = \overset{+}{\neg} a \overset{+}{\vee} b = \Box \neg \Box a \vee \Box b$ que sobre una AMT (per 2.28) és $\neg \Box \vee \Box b$ i com és sabut, per tractar-se d'una lògica clàssica, els elements del sistema clausura (els filtres oberts en aquest cas) són tancats per modus ponens respecte $\overset{+}{\rightarrow}$. Malgrat que en aquesta memòria no no estic interessat en l'estudi de les implicacions sobre una AMT, és destecable que sobre $\mathfrak{A}$ AMT hi ha tres implicacions: $a \overset{+}{\rightarrow} b = \neg \Box a \vee \Box b$, $a \rightarrow b = \neg \Box a \vee b$ i $a \rightarrow' b = \neg a \vee b$ (vegeu pàgina ???) cadascuna d'elles més feble que l'anterior però les tres amb els mateixos sistemes deductius, els filtres oberts.

3.22 PROPOSICIO. *Sigui $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ una LQMT, i sigui $\mathcal{E}$ la base de $\mathcal{C}$. Aleshores la família $\mathcal{E}^+ = \{P \cap \Phi(P)\,;\, P \in \mathcal{E}\}$ és una base de $\mathcal{C}^+$*

DEMOSTRACIÓ: Com $\mathcal{E}$ és base de $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^+ \subseteq \mathcal{C}$ per $\forall T \in \mathcal{C}^+$ és $T = \cap\{P \in \mathcal{E}\,;\, T \subseteq P\}$. Per comprovar que $\{P \cap \Phi(P)\,;\, P \in \mathcal{E}\}$ és base de $\mathcal{C}^+$ és suficient comprovar que si $T \subseteq P$ aleshores $T \subseteq \Phi(P)$. Sigui $T \subseteq P$ i sigui $a \in T$, aleshores $\Box a \in T \subseteq P$ d'on per 3.1.4 $\Box a \in \Phi(P)$, o sigui $\Box a \in P \cap \Phi(P)$ i per 3.1.5 $a \in P \cap \Phi(P)$, en particular $a \in \Phi(P)$. ∎

3.23 TEOREMA. *Sigui* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *una L(Q)MT, aleshores* $\mathbf{C} \circ \Box = \mathbf{C}^+$

DEMOSTRACIÓ: $\mathbf{C}(\Box(X)) =$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcap\{P \in \mathcal{E}\,;\, \Box(X) \subseteq P\} = \\
&= \bigcap\{P \cap \Phi(P)\,;\, P \in \mathcal{E} \text{ i } \Box(X) \subseteq P \cap \Phi(P)\} = \\
&= \bigcap\{P \cap \Phi(P)\,;\, P \in \mathcal{E},\, X \subseteq P \cap \Phi(P)\} = \mathbf{C}^+(X),
\end{aligned}
$$

perquè per 3.1.4, $\Box a \in P$ ssi $\Box a \in \Phi(P)$, i per 3.1.5. $a \in P \cap \Phi(P)$ ssi $\Box a \in P \cap \Phi(P)$. ∎

3.24 COROL.LARI. *Si* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *és una L(Q)MT aleshores* $\forall x \in A$ $x \in \mathbf{C}(\Box x)$.

DEMOSTRACIÓ: Com per 3.23 $\mathbf{C} \circ \Box$ és operador clausura es té $x \in \mathbf{C}^+(x) = \mathbf{C}(\Box x)$. ∎

3.25 TEOREMA. *Si* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *és LMT aleshores* $\mathsf{L}^+ = (\mathfrak{A}^+, \mathbf{C}^+)$ *és una lògica clàssica.*

DEMOSTRACIÓ: Si $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ és LMT aleshores és projectivament generada per un morfisme bilògic, π, a partir de l'AMT $\mathsf{L}/\theta = (\mathfrak{A}/\theta, \mathbf{C}/\theta)$. Si $(\mathsf{L}/\theta)^+ = ((\mathfrak{A}/\theta)^+, (\mathbf{C}/\theta)^+)$ és la lògica clàssica associada filtres oberts d' $\mathfrak{A}/\theta$ veuré que L^+ és projectivament generada per π a partir de $(\mathsf{L}/\theta)^+$; efectivament, π és morfisme per ser $a \overset{+}{\vee} b$ un polinomi en $\vee$ i $\Box$ i $\overset{+}{\neg}$ en $\neg$ i $\Box$. π indueix un isomorfisme entre $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}/\theta$, per tant només cal comprovar que si $P \in \mathcal{C}$ i $P = \pi^{-1}(T)$

amb $T \in \mathcal{C}/\theta$ és a dir si $\pi(P) = T$ aleshores $\Box(P) \subseteq P$ si i només si $\Box(T) \subseteq T$, la qual cosa és clara pel fet de ser π morfisme. Per tant L^+ és una lògica clàssica per ser projectivament generada a partir d'una lògica clàssica. ■

Aquest caràcter clàssic de L^+ és prou important per a caracteritzar, juntament amb el resultat del teorema 3.23, les LMTs. El següent teorema dóna una definició alternativa de les LMTs.

3.26 TEOREMA. L *és LMT ssi*

(1) $\mathsf{L}^- = (\mathfrak{A}^-, \mathbf{C})$ *és lògica de De Morgan amb base* $\mathcal{E}$ *;*

(2) $\mathbf{C} \circ \Box = \mathbf{C}^+$ *;*

(3) $\mathsf{L}^+ = (\mathfrak{A}^+, \mathbf{C}^+)$ *és clàssica;*

(4) $P \cap \Phi(P) \in \mathcal{C}^+ \quad \forall P \in \mathcal{E}$.

DEMOSTRACIÓ:

$\Rightarrow$) 3.26.1 per definició de LMT, 3.26.2 per la proposició 3.23, 3.26.3 pel teorema 3.25 i 3.26.4 per 3.1.5.

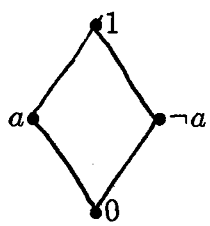
($\Leftarrow$ Per [FV1], en ser L^- una lògica de De Morgan, tinc que $\theta \in Con(\mathfrak{A}^-)$, $\mathfrak{A}^-/\theta$ és una àlgebra de De Morgan, i la projecció canònica π és un morfisme bilògic entre L^- i $(\mathfrak{A}^-/\theta, \mathcal{F})$, on $\mathcal{F}$ són tots els filtres del quocient, essent els primers les imatges de la base $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$. Però 3.26.3 implica que $\mathbf{C} \circ \Box$ és un operador clausura, i segons les proposicions 3.2, 3.6 i 3.7 de [FV2] resulta que $\theta \in Con(\mathfrak{A})$ i que en el quocient $\Box$ és un operador contractiu; a més $\mathbf{C}$ satisfà la Propietat de la Conjunció, per tant per 3.9, 3.11 i 3.12 de [FV2] dedueixo que $\Box$ és un operador interior. La projecció π és doncs morfisme respecte $\Box$, i per tant morfisme bilògic entre L i $(\mathfrak{A}/\theta, \mathcal{F})$. Segons 3.3 de [FV2] aleshores π és també morfisme bilògic entre L^+, lògica clàssica per hipòtesi, i $((\mathfrak{A}/\theta)^+, \mathcal{F}^+)$, essent $\mathcal{F}^+$ els filtres oberts del quocient. Com que aquesta darrera lògica també és clàssica, el seu quocient natural (per θ^+ associada a $\mathbf{F}^+$) és una àlgebra de Boole. Ara bé, es compleix també la propietat 3.26.2 en el quocient (es conserva per morfismes bilògics segons 3.4 de [FV2]) i per tant $\mathbf{F}^+(a) = \mathbf{F}^+(b) \Leftrightarrow \Box a = \Box b \quad \forall a, b \in A/\theta$, per tant $(\mathfrak{A}/\theta)^+/\theta^+$ és isomorf a $(B, \overset{*}{\vee}, \wedge, \overset{*}{\neg})$, on B és el conjunt d'oberts d' $\mathfrak{A}/\theta$, $\overset{*}{\neg}a = \Box\neg a$ i $a \overset{*}{\vee} b = \Box(\Box a \vee \Box b)$. Aquesta darrera àlgebra és per tant de Boole, i aleshores $\forall a \in A/\theta$, $a \vee \neg\Box a \geq \Box a \vee \Box\neg\Box a \geq \Box a \vee \Box\neg a \geq \Box(\Box a \vee \Box\neg a) = a \overset{*}{\vee} \overset{*}{\neg} a = 1$, cosa que prova juntament amb una llei de De Morgan 2.2.1. D'altra banda $\forall a \in \mathfrak{A}/\theta$ $\Box a \vee \neg a \leq a \vee \neg a$, i cal veure l'altra desigualtat. Sigui P un filtre primer tal que $a \vee \neg a \in P$, cal veure que $\Box a \vee \neg a \in P$: Si $\neg a \in P$ no hi ha res a provar; si $\neg a \notin P$, per ser P primer i $a \vee \neg a \in P$ resulta $a \in P$, i per la definició de Φ resulta $a \in \Phi(P)$, d'on $a \in P \cap \Phi(P)$. Per tant

$$\pi^{-1}(a) \in \pi^{-1}(P \cap \Phi(P)) =$$

$$= \pi^{-1}(P) \cap \pi^{-1}(\Phi(P)) = \pi^{-1}(P) \cap \Phi(\pi^{-1}(P)) \in \mathcal{F}^+$$

per 3.26.4, que també es conserva per morfismes bilògics; per tant $\pi^{-1}(\Box a) = \Box\pi^{-1}(a) \subseteq \pi^{-1}(P \cap \Phi(P))$, d'on $\Box a \in P \cap \Phi(P)$, i això implica $\Box a \vee \neg a \in P$, que juntament amb una llei de De Morgan dóna 2.2.2. En definitiva hem provat que $\mathfrak{A}/\theta$ és una àlgebra modal tetravalent. El teorema 3.8 acaba la demostració. ■

Observeu que la incòmoda propietat 3.26.4 no és conseqüència de les altres tres, com demostra l'exemple format per la lògica $\mathbf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ on $\mathfrak{A}$ és l'algebra de Boole de quatre elements



amb $\Box 1 = 1$ i $\Box a = \Box\neg a = \Box 0 = 0$ i $\mathcal{C}$ són tots els filtres; per tant $\mathcal{C}^+ = \{\{1, a, \neg a, 0\}, \{1\}\}$ i es compleixen 3.26.1 i 3.26.2 i 3.26.3 i no 3.26.4 doncs $\{a, 1\} = T = \Phi(T) = T \cap \Phi(T) \notin \mathcal{C}^+$.

4. Estudi de les LMTs com a lògiques tetravaluades

Recordeu que a la pàgina ??? he anomenat L_{4m} a la LMT no trivial sobre $\mathfrak{M}_{4m}$.

Sigui $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \neg, \Box, 0)$ una àlgebra de tipus (2,1,1,0) en la que defineixo l'operació binària $\vee$ per $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$. Anomeno $\mathsf{L}_{4m}(\mathfrak{A})$ a la lògica projectivament generada des de L_{4m} per $Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$, $\mathcal{C}_{4m}$ al sistema clausura de $\mathsf{L}_{4m}(\mathfrak{A})$, θ_{4m} a la relació associada a $\mathcal{C}_{4m}$ i $\mathcal{C}_{4m}^{+}$ als elements del sistema clausura que siguin tancats respecte l'operació $\Box$, és a dir $\mathcal{C}_{4m}^{+} = \{T \in \mathcal{C}_{4m}\,;\, \Box(T) \subseteq T\}$. Anomeno $\mathcal{E}_{4m}$ a la base de $\mathcal{C}_{4m}$ formada per les antiimatges dels dos filtres primers de $\mathfrak{M}_{4m}$, o sigui $\mathcal{E}_{4m} = \{h^{-1}(F_i) \quad i = 1, 2\,;\, h \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})\}$. De la mateixa manera anomeno $\mathcal{E}_{4m}^{+}$ a $\{h^{-1}(\{1\})\,;\, h \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})\}$ base de $\mathcal{C}_{4m}^{+}$.

En aquest capítol estudio les lògiques projectivament generades des de L_{4m} sobre una àlgebra abstracta $\mathfrak{A}$ del mateix tipus que $\mathfrak{M}_{4m}$ per famílies arbitràries d'homorfismes d' $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{M}_{4m}$. Estudio també la relació entre aquestes lògiques i les L(Q)MT sobre $\mathfrak{A}$. La proposició 4.1 dóna la clau d'aquesta relació al mostrar que els subconjunts d' A que poden ser elements d'una base d'una L(Q)MT són precisament les antiimatges per $h \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ dels filtres primers de $\mathfrak{M}_{4m}$. Demostro a continuació que qualsevol subconjunt de $Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ genera projectivament una LQMT sobre $\mathfrak{A}$ i que la més fina, $\mathsf{L}_{4m}(\mathfrak{A})$, és finitària. El teorema 4.6 precisa més la situació en determinar quines famílies d'homomorfismes són les que generen projectivament LMTs sobre $\mathfrak{A}$ i en demostrar que tota LMT sobre $\mathfrak{A}$ és generada per una d'aquestes famílies. A continuació trobo una caracterització dels operadors de les possibles LMT sobre $\mathfrak{A}$ en funció de $\mathbf{C}_{4m}$, l'operador més fi, la qual cosa posarà de manifest que el més petit tancat, que demostro que ha de ser obert, determina l'operador. Aquesta part del capítol acaba amb la demostració de l'isomorfisme que hi ha entre sis reticles, la meitat dels quals es refereixen a conceptes sobre una àlgebra abstracta $\mathfrak{A}$ (aquests reticles són $\mathcal{E}_{4m}^{+}$, el reticle de les LMTs sobre $\mathfrak{A}$, i el reticle de totes les congruències sobre $\mathfrak{A}$ que en el quocient donen AMT) i l'altra meitat considera els mateixos conceptes però sobre l'AMT obtinguda fent el quocient d' $\mathfrak{A}$ per la relació associada a $\mathcal{C}_{4m}$.

A continuació demostro que la mateixa caracterització de les congruències en una AMT (teorema 2.19) també caracteritza a les congruències sobre una àlgebra abstracta que en el quocient donin AMT (proposició 4.18), la qual cosa permet estudiar aquest tipus de relacions i les famílies Φ - tancades d'elements de $\mathcal{E}_{4m}$ que les determinen.

4.1 PROPOSICIÓ. *Si* L *és LQMT, amb base* $\mathcal{E}$ *aleshores per* $\forall P \in \mathcal{E}$, $\exists h \in Hom(\mathfrak{A}, \ \mathfrak{M}_{4m})$ *tal que* $P = h^{-1}(F_1)$ *o* $P = h^{-1}(F_2)$; *és a dir* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_{4m}$.

DEMOSTRACIÓ: Considereu per cada $P \in \mathcal{E}$ la LMT $\mathsf{L}_P = (\mathfrak{A}, \mathcal{C}_P)$ on $\mathcal{C}_P$ és el sistema clausura generat per $\{P, \Phi(P)\}$; anomeno θ_P a la relació associada a $\mathcal{C}_P$. La proposició 4 de [FV1] estudia l'estructura dels quocients $\mathfrak{A}^{-}/\theta_P$ en els tres cassos possibles que surgeixen de les posicions relatives de P i $\Phi(P)$, posicions que es demostra que només poden ser la igualtat, la inclusió d'un en l'altre i la incomparabilitat amb intersecció diferent del vuit. Queden així ja determinades les AMTs quocient $\mathfrak{A}/\theta_P$ ja que sobre les respectives $\mathfrak{A}^{-}/\theta_P$ només hi ha un operador $\Box$ que les fa AMT (proposició 2.5).

Cas 1 $P = \Phi(P)$. Segons [FV1] $\mathfrak{A}^{-}/\theta_p = \mathfrak{B}_{2m}^{-}$, d'on $\mathfrak{A}/\theta_p = \mathfrak{B}_{2m}$. Si anomenem i a la injecció de $\mathfrak{B}_{2m}$ en $\mathfrak{M}_{4m}$, aleshores $P = (i \circ \pi_p)^{-1}(F_1)$ (π_p és el pas al quocient).

Cas 2 $P \subsetneq \Phi(P)$ (o $\Phi(P) \subsetneq P$). Per [FV1] $\mathfrak{A}^{-}/\theta_p = \mathfrak{M}_{3m}^{-}$, per tant, $\mathfrak{A}/\theta_p = \mathfrak{M}_{3m}$ i si i és la injecció de $\mathfrak{M}_{3m}$ en $\mathfrak{M}_{4m}$ amb $i(a) = a$, aleshores $P = (i \circ \pi_p)^{-1}(F_2)$ ($P = (i \circ \pi_p)^{-1}(F_1)$ respectivament).

Cas 3 Si P i $\Phi(P)$ no són comparables, per [FV1] $\mathfrak{A}^{-}/\theta_p = \mathfrak{M}_{4m}^{-}$ d'on $\mathfrak{A}/\theta_p = \mathfrak{M}_{4m}$ i $P = \pi_p^{-1}(F_1)$ o bé $P = \pi_p^{-1}(F_2)$. Prenent $h = \pi_P$ he acabat. ■

Degut a la simetria de $\mathfrak{M}_{4m}$, per tot $h \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ existeix una $g \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ (que podriem anomonar el seu simètric) definit $\forall x \in A$ per: $g(x) = h(x)$ si $h(x) = 1$ o $h(x) = 0$, $g(x) = a$ si $h(x) = b$ i $g(x) = b$ si $h(x) = a$. Per la definició de g tinc que $h^{-1}(F_1) = g^{-1}(F_2)$ i $h^{-1}(F_2) = g^{-1}(F_1)$ i aquest fet permet precisar l'enunciat de la proposició 4.1 de la següent manera:

Si L és LQMT amb base $\mathcal{E}$ aleshores $\forall P \in \mathcal{E}$, $\exists h \in$ $\in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ tal que $P = h^{-1}(F_1)$.

Usaré aquest enunciat més precís en la segona part de la prova de 4.6.

4.2 TEOREMA. *Les següents propietats són equivalents:*

(1) $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ *és LQMT.*

(2) *Existeix una família* $\mathcal{D} \subseteq Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ *tal que* L *és projectivament generada des de* L_{4m} *per* $\mathcal{D}$.

(3) $\mathcal{C}$ *té una base formada per un subconjunt* Φ*-tancat de* $\mathcal{E}_{4m}$.

DEMOSTRACIÓ: 1) $\Rightarrow$ 2) Pel teorema 2 de [FV1] la família $\mathcal{D}$ d'homomorfismes de la proposició anterior genera projectivament la lògica L^- i per tant també genera projectivament la lògica L, ja que els sistemes clausura de les dues lògiques coincideixen.

2) $\Rightarrow$ 1) El mateix teorema demostra que L satisfà PC i PBR o sigui 3.1.1 i 3.1.2. Sigui $\mathcal{E} = \{h^{-1}(F_i) \quad i = 1,2 \quad h \in \mathcal{D}\}$ la base de L. Com per tot $h \in \mathcal{D}$ $h(0) = 0 \notin F_i$ tinc 3.1.3. Per 3.1.4 tinc que $\Box a \in h^{-1}(F_i)$ ssi $h(\Box a) = \Box h(a) \in F_i$ ssi $\Box h(a) = h(\Box a) \in \Phi(F_i)$ o sigui $\Box a \in h^{-1}(\Phi(F_i))$. Per 3.1.5 tinc que $a \in h^{-1}(F_i) \cap \Phi(h^{-1}(F_i))$ ssi $a \in h^{-1}(F_i \cap \Phi(F_i))$ ssi $h(a) \in F_i \cap \Phi(F_i)$ ssi $\Box h(a) = h(\Box a) \in$ $\in F_i \cap \Phi(F_i)$ ssi $\Box a \in h^{-1}(F_i) \cap \Phi(h^{-1}(F_i))$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sigui $\mathcal{E} = \{h^{-1}(F_i)\ i = 1,2 \ :\ h \in \mathcal{D}\}$ la base de L. $\mathcal{E}$ és una família Φ-tancada ($\Phi(h^{-1}(F_1)) = h^{-1}(F_2)$) i $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_{4m}$.

3) $\Rightarrow$ 2) Sigui ara $\mathcal{E}$ la base de $\mathcal{C}$; per la proposició 4.1 és $\mathcal{E} =$ $= \{h^{-1}(F_i)\ i = 1,2 \ :\ h \in \mathcal{D}\}$ per certa família $\mathcal{D} \subseteq Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$.■

4.3 COROL.LARI. $\mathbf{L}_{4m}(\mathfrak{A})$ *és la LQMT més fina sobre* $\mathfrak{A}$. ■

En prendre una família $\mathcal{D}$ arbitrària obtinc una LQMT qualsevol, ara bé, la més fina, la generada projectivament per tots els homomorfismes, té una propietat especial:

4.4 TEOREMA. $\mathbf{L}_{4m}(\mathfrak{A})$ *és una lògica finitària.*

DEMOSTRACIÓ: Per ser $\mathbf{L}_{4m}(\mathfrak{A})$ LQMT, i pel teorema 3.7 hi ha un morfisme bilògic entre ella i una AMT amb un sistema clausura que tindrà una base de filtre primers Φ-tancada. Si $\mathbf{L}_{4m}(\mathfrak{A})$ no és finitària no ho serà el sistema clausura citat, que serà, per tant, diferent del sistema clausura algebraic format per tots els filtres de l'AMT. Però el mateix morfisme bilògic sobre la mateixa AMT, prenent ara el sistema clausura de tots els filtres, genera projectivament una LMT sobre $\mathfrak{A}$ estrictament més fina que $\mathbf{L}_{4m}(\mathfrak{A})$, absurd. ■

4.5 COROL.LARI. $\mathbf{L}_{4m}(\mathfrak{A})$ *és la LMT més fina sobre* $\mathfrak{A}$. ■

Al teorema 4.2 he vist que les LQMT són exactament les projectivament generades per famílies qualsevols d'homomorfismes. Acabo de veure que si la família és la de tots els homomorfismes, resulta que la lògica projectivament generada és finitària. El següent teorema caracteritza totes les famílies d'homomorfismes que generen lògiques finitàries, un problema encara no resolt per les lògiques de De Morgan (vegeu [FV1]).

NOTACIÓ: Sigui $X \subseteq A$ qualsevol, posem $\mathcal{D}_X = \{\psi \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m}) : \psi(\Box X) \subseteq \{1\}\}$, i $\mathbf{L}_X = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}_X)$ on $\mathbf{C}_X$ és l'operador generat projectivament per $\mathcal{D}_X$ des de $\mathbf{L}_{4m}$.

4.6 TEOREMA. $\mathbf{L}$ *és LMT ssi* $\exists X \subseteq A$ *tal que* $\mathbf{L} = \mathbf{L}_X$.

DEMOSTRACIÓ: ($\Leftarrow$ Sigui $\mathcal{E} = \{P \in \mathcal{E}_{4m}\,; \Box X \subseteq P\}$ és un conjunt Φ-tancat, doncs per 3.1.4 $\Box X \subseteq P$ ssi $\Box X \subseteq \Phi(P)$ per qualsevol P

que pertanyi a una base d'una LQMT i $\mathcal{E}_{4m}$ ho és. $\mathcal{E}$ és una base de $\mathbf{L}$, doncs està formada per les antiimatges de F_1 i F_2 pels homomorfismes de $\mathcal{D}_X$; efectivament, si $\psi \in \mathcal{D}_X$ i $\psi^{-1}(F_1) = P$ aleshores $\Box X \subseteq \subseteq \psi^{-1}(\{1\}) \subseteq P$. Per altra banda, si $P \in \mathcal{E}$ és per exemple $P = = \psi^{-1}(F_1)$ i de $\Box X \subseteq P = \psi^{-1}(F_1)$ tinc $\psi(\Box X) = \Box\psi(X) \subseteq F_1$ i per tant $\psi(\Box X) = \Box\psi(X) \subseteq F_2$, és a dir $\psi(\Box(X)) \subseteq \{1\}$ o sigui $\psi \in \mathcal{D}$.

Pel teorema 3.8, existeix un morfisme bilògic , π , entre $\mathbf{L}_{4m}(\mathfrak{A})$ i $\mathbf{L}_{\mathfrak{H}} = (\mathfrak{H}, \mathcal{F})$ on $\mathfrak{H}$ és una AMT i $\mathcal{F}$ són tots els seus filtres. Anomeno $\mathcal{P}$ a la base formada per tots els filtres primers de $\mathcal{F}$.

Considero sobre $\mathfrak{H}$ el sistema clausura $\mathcal{F}_X$ amb base $\mathcal{P}_X = = \{P \in \mathcal{P}\,;\, \Box(\pi(X)) \subseteq P\}$. La lògica $\mathbf{L}_{\mathfrak{H}_X} = (\mathfrak{H}, \mathcal{F}_X)$ és LMT doncs $\Box(\pi(X)) \subseteq P$ equival a que el filtre generat per $\Box(\pi(X))$ estigui inclós dins P i aquest filtre, per 2.13, és un filtre obert i per 3.16 el sistema clausura de tots els filtres que contenen a un filtre obert dóna lloc a una LMT sobre l'àlgebra.

Per demostrar que $\pi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{H}$ és morfisme bilògic entre $\mathbf{L}$ i $\mathbf{L}_{\mathfrak{H}_X}$ és suficient demostrar (pel teorema 4 de [BS]) que $\mathcal{P}_X = \{\pi(P)\,;\, P \in \mathcal{E}\}$ i que $\pi^{-1}(\pi(P)) = P \ \ \forall P \in \mathcal{E}$. L'última afirmació és certa per ser π morfisme bilògic entre $\mathbf{L}_{4m}(\mathfrak{A})$ i $\mathbf{L}_{\mathfrak{H}}$. Sigui ara $P \in \mathcal{P}_X$; $\pi^{-1}(P) \in \in \mathcal{E}_{4m}$ i $\Box X \subseteq \pi^{-1}(P)$ d'on $\pi^{-1}(P) \in \mathcal{E}$, a més, $\pi(\pi^{-1}(P)) = P$. Per altra banda, si $P \in \mathcal{E}$, aleshores $P \in \mathcal{E}_{4m}$ i $\Box X \subseteq P$ d'on $\pi(P) \in \mathcal{P}$ i $\pi(\Box X) \subseteq \pi(P)$, o sigui $\pi(P) \in \mathcal{P}_X$.

Com que $\mathbf{L}_{\mathfrak{H}_X}$ és LMT, per teorema 3.8, $\mathbf{L}$ també.

$\Rightarrow$) Sigui $\mathbf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ una LMT i sigui $X = \mathbf{C}(\emptyset)$. Sigui $\mathbf{L}_X = = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}_X)$ la lògica generada per $\mathcal{D}_X$. Per l'altra implicació és LMT. En general tinc que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$, doncs si $T \in \mathcal{E}$, base de $\mathcal{C}$, per la proposició 4.1, existeix un morfisme $\psi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{M}_{4m}$ tal que $T = \psi^{-1}(F_1)$ i per tant $\Phi(T) = \psi^{-1}(F_2)$. Com que $\mathbf{C}(\emptyset) \subseteq T \cap \Phi(T) = = \psi^{-1}(F_1 \cap F_2) = \psi^{-1}(\{1\})$ tinc que $\psi(\mathbf{C}(\emptyset)) \subseteq \{1\}$ i com que $\Box\mathbf{C}(\emptyset) \subseteq \mathbf{C}(\emptyset)$ tinc $\psi(\Box\mathbf{C}(\emptyset)) \subseteq \{1\}$, o sigui $\psi \in \mathcal{D}_X$ i per tant $T \in \mathcal{C}_X$.

Si demostro que $\mathbf{C}_X(\emptyset) = \mathbf{C}(\emptyset)$, per la proposició 3.14, tindré que $\mathsf{L} = \mathsf{L}_X$. Com que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$ és $\mathbf{C}_X(\emptyset) \subseteq \mathbf{C}(\emptyset)$; per altra banda, si $x \in \mathbf{C}(\emptyset)$ aleshores $h(\Box x) \subseteq \{1\}$ per tot $h \in \mathcal{D}_X$, o sigui $\Box x \in \mathbf{C}_X(\emptyset)$ i per tant, $x \in \mathbf{C}_X(\emptyset)$ per 3.24. ■

4.7 PROPOSICIÓ. *Si* $\mathsf{L}_i = (\mathfrak{A}, \mathcal{C}_i)$ $(i = 1, 2)$ *són LMT aleshores* $\mathsf{L}_1 \vee \mathsf{L}_2$ *també ho és.*

DEMOSTRACIÓ: Pel teorema anterior és clar que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{T \in \mathcal{C}_{4m}\,;\ (\mathbf{C}_1 \wedge \mathbf{C}_2)(\emptyset) \subseteq T\}$ d'on novament per 4.6 $(\mathfrak{A}, \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$ és LMT. ■

Com heu pogut veure, a la prova del teorema anterior uso la relació entre una LMT qualsevol sobre $\mathfrak{A}$ i la més fina, $\mathsf{L}_{4m}(\mathfrak{A})$. En les proposicions tècniques que segueixen exploto més aquesta relació, per a poder provar els isomorfismes que seguiran després.

4.8 PROPOSICIÓ. $\forall T, X \subseteq A$, $\mathbf{C}_X(T) = \mathbf{C}_{4m}(\Box X \cup T)$, *en particular,* $\mathbf{C}_X(\emptyset) = \mathbf{C}_{4m}(\Box X)$ *i* $\mathcal{C}_X = \{T \in \mathcal{C}_{4m}\,;\ \mathbf{C}_X(\emptyset) \subseteq T\}$.

DEMOSTRACIÓ:

$$\mathbf{C}_X(T) = \bigcap_{\psi \in \mathcal{D}_X} \{\psi^{-1}(F_i)\,;\, T \subseteq \psi^{-1}(F_i) \quad i = 1, 2\} =$$

$$= \bigcap_{\psi \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})} \{\psi^{-1}(F_i)\,;\, \Box X \subseteq \psi^{-1}(F_i),\ T \subseteq \psi^{-1}(F_i) \quad i = 1, 2\} =$$

$$= \mathbf{C}_{4m}(\Box X \cup T).$$

Si $T \in \mathbf{C}_X$ $\ T = \mathbf{C}_X(T) = \mathbf{C}_{4m}(\Box X \cup T) \supseteq \mathbf{C}_{4m}(\Box x) = \mathbf{C}_X(\emptyset)$.
Si $T \in \mathcal{C}_{4m}$ i $\mathbf{C}_X(\emptyset) = \mathbf{C}_{4m}(\Box X) \subseteq T$ aleshores $T = \mathbf{C}_{4m}(T) = \mathbf{C}_{4m}(\Box X \cup T) = \mathbf{C}_X(T)$.■

4.9 COROL.LARI. *Si* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *és LMT, aleshores:*

(1) $\mathbf{C}(\emptyset) \in \mathcal{C}_{4m}^{+}$.

(2) $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\mathbf{C}(\emptyset)}$.

(3) *Si* $X \in \mathcal{C}_{4m}^{+}$ *aleshores* $\mathbf{C}_X(T) = \mathbf{C}_{4m}(X \cup T)$ *i* $\mathbf{C}_X(\emptyset) = X$.

DEMOSTRACIÓ: Per demostrar 4.9.1, pel teorema 4.6 tinc que existeix $X \subseteq A$ tal que L és L_X, aleshores $\mathbf{C}(\emptyset) = \mathbf{C}_X(\emptyset) = \mathbf{C}_{4m}(\Box X) \in \mathcal{C}_{4m}^+$ per 3.23.

4.9.2 és a la demostració del teorema 4.6.

Per provar 4.9.3; $\mathbf{C}_X(T) = \mathbf{C}_{4m}(\Box X \cup T) = \mathbf{C}_{4m}(\mathbf{C}_{4m}(\Box X) \cup$ $\cup T) = \mathbf{C}_{4m}(X \cup T)$ i en particular $\mathbf{C}_X(\emptyset) = \mathbf{C}_{4m}(X) = X$.■

4.10 COROL.LARI. *Si* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *és LMT, aleshores* $\forall T \subseteq A$ $\mathbf{C}(T) =$ $= \mathbf{C}_{4m}(\mathbf{C}(\emptyset) \cup T)$.

DEMOSTRACIÓ: Per 4.9 $\mathbf{C}(T) = \mathbf{C}_{\mathbf{C}(\emptyset)}(T)$ i $\mathbf{C}_{\mathbf{C}(\emptyset)}(T) = \mathbf{C}_{4m}(\mathbf{C}(\emptyset) \cup$ $\cup T)$.■

4.9.2 dóna un procediment constructiu de determinar el sistema clausura (algebraic) d'una LMT $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ quan es coneix el seu tancat més petit: efectivament, una base d'aquest sistema clausura és el conjunt format per totes les antiimatges de F_1 i F_2 per tots els $h \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ tals que $h(\mathbf{C}(\emptyset)) \subseteq \{1\}$.

Passo finalment a provar isomorfismes entre diferents reticles de LMTs i de congruències. La proposició que segueix estableix l'isomorfisme entre el reticle de totes les LMTs sobre una àlgebra $\mathfrak{A}$ i el de certs conjunts distingits ($\mathcal{C}_{4m}^+$). Tindré doncs una generalització del teorema 3.18 a àlgebres qualsevols, la qual diu que els elements de $\mathcal{C}_{4m}^+$ fan el mateix paper que els filtres oberts en les AMTs.

4.11 TEOREMA. *En tota àlgebra* $\mathfrak{A}$ *hi ha un isomorfisme d'ordre entre* $\mathcal{C}_{4m}^+$ *i el reticle de totes les LMT sobre* $\mathfrak{A}$.

DEMOSTRACIÓ: Les correspondències

$$\begin{array}{cc} \alpha : \mathcal{C}_{4m}^+ \longrightarrow \{LMT \text{ sobre } \mathfrak{A}\} & \beta : \{LMT \text{ sobre } \mathfrak{A}\} \longrightarrow \mathcal{C}_{4m}^+ \\ F \longrightarrow \mathsf{L}_F = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}_F) & \mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}(\emptyset) \end{array}$$

són una inversa de l'altra pel fet que:

(1) $\mathbf{C}_F(\emptyset) = F$ per 4.9.3.

(2) $\mathbf{C}_{\mathbf{C}(\emptyset)}(T) = \mathbf{C}(T)$ per 4.9.2.

α conserva l'ordre perquè $\forall F, F' \in \mathcal{C}_{4m}^{+}$ si $F \subseteq F'$ $\forall T \in A$, és $\mathbf{C}_F(T) = \mathbf{C}_{4m}(F \cup T) \subseteq \mathbf{C}_{4m}(F' \cup T) = \mathbf{C}_{F'}(T)$ o sigui $\mathsf{L}_F \leq \mathsf{L}_{F'}$

β conserva l'ordre, perquè si $\mathsf{L} \leq \mathsf{L}'$ aleshores $\mathbf{C}(\emptyset) \subseteq \mathbf{C}'(\emptyset)$.■

4.12 COROL.LARI. *Hi ha un isomorfisme entre* $\{LMT$ *sobre* $\mathfrak{A}/\theta_{4m}\}$ *i* $\{LMT$ *sobre* $\mathfrak{A}\}$

DEMOSTRACIÓ: Recordeu que hi ha un isomorfisme entre $\{LMT$ sobre $\mathfrak{A}/\theta_{4m}\}$ i $Con(\mathfrak{A}/\theta_{4m})$ (teorema 3.18) reticle que és isomorf a $(\mathcal{C}/\theta_{4m})^{+}$ pel teorema 2.21, i per la proposició 3.25 aquests filtres oberts són isomorfos a $\mathcal{C}_{4m}^{+}$, que és isomorf (pel teorema 4.11) a $\{LMT$ sobre $\mathfrak{A}\}$. ■

NOTACIÓ: Anomeno $Con_m(\mathfrak{A}) = \{\theta \in Con(\mathfrak{A})\,;\ \mathfrak{A}/\theta$ és AMT $\}$.

4.13 PROPOSICIÓ. *Si* $\theta \in Con_m(\mathfrak{A})$, *aleshores* $1_\theta \in \mathcal{C}_{4m}^{+}$.

DEMOSTRACIÓ: Considereu la projecció canònica $\pi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}/\theta$. Aquest epimorfisme genera projectivament a partir de tots els filtres del quocient una LMT sobre $\mathfrak{A}$ (el seu sistema clausura estarà per tant inclòs dins $\mathcal{C}_{4m}$). En particular l'antiimatge de $\{1\}$, és el més petit tancat de la lògica projectivament generada sobre $\mathfrak{A}$ i per tant és de $\mathcal{C}_{4m}^{+}$.■

4.14 PROPOSICIÓ. θ_{4m} *és la congruència mínima de* $Con_m(\mathfrak{A})$.

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\psi \in Con(\mathfrak{A})$, si $\mathfrak{A}/\psi$ és AMT, ψ és la relació d'equivalència associada a la lògica $\mathsf{L}_\psi = (\mathfrak{A}, \mathcal{C}_\psi)$ on $\mathcal{C}_\psi$ és el sistema clausura projectivament generat des de $\mathfrak{A}/\psi$ prenent tots els seus filtres, per tant, L_ψ és LMT. Com $\mathcal{C}_{4m}$ és el sistema clausura més fi, $\mathcal{C}_\psi \subseteq \mathcal{C}_{4m}$ i per tant $\mathbf{C}_{4m}(a) = \mathbf{C}_{4m}(b)$ implica $\mathbf{C}_\psi(a) = \mathbf{C}_\psi(b)$, $\forall a, b \in A$ o sigui $\theta_{4m} \subseteq \psi$. ■

4.15 PROPOSICIÓ. *Si $\psi \in Con(\mathfrak{A})$ és tal que $\theta_{4m} \subseteq \psi$ aleshores $\mathfrak{A}/\psi$ és AMT.*

DEMOSTRACIÓ: Pel segon teorema d'isomorfia (vegeu per exemple [BuS]) $\mathfrak{A}/\psi \cong (\mathfrak{A}/\theta_{4m})/(\psi/\theta_{4m})$, $\mathfrak{A}/\theta_{4m}$ és AMT, i el seu quocient per una congruència també ho és. ■

4.16 COROL.LARI. *$Con_m(\mathfrak{A})$ és el subreticle principal de $Con(\mathfrak{A})$ que està generat per θ_{4m}*

DEMOSTRACIÓ: Les proposicions 4.14 i 4.15 estableixen que $Con_m(\mathfrak{A})$ és el segment $[\theta_{4m}, \nabla_{\mathfrak{A}}]$ del reticle $Con(\mathfrak{A})$. En particular, aquest segment és un subreticle principal de $Con(\mathfrak{A})$.■

4.17 COROL.LARI. $Con_m(\mathfrak{A}) \cong Con(\mathfrak{A}/\theta_{4m})$

DEMOSTRACIÓ: Per un conegut resultat d'àlgebra universal (vegeu per exemple [BuS] pàgina 49) tenim que

$$\begin{aligned} \alpha : [\theta_{4m}, \nabla] &\longrightarrow Con(\mathfrak{A}/\theta_{4m}) \\ \psi &\longrightarrow \psi/\theta_{4m} \end{aligned}$$

és isomorfisme de reticles i $[\theta_{4m}, \nabla_{\mathfrak{A}}] = Con_m(\mathfrak{A})$ pel corol.lari anterior. ■

4.18 COROL.LARI. *Per una àlgebra $\mathfrak{A}$ qualsevol es té la següent cadena d'isomorfismes:*

$$C_{4m}^{+} \cong \{LMT \text{ sobre } \mathfrak{A}\} \cong \{LMT \text{ sobre } \mathfrak{A}/\theta_{4m}\} \cong Con_m(\mathfrak{A}) \cong$$

$$\cong Con(\mathfrak{A}/\theta_{4m}) \cong (C_{4m}/\theta_{4m})^{+}.$$■

Dono a continuació una caracterització de les congruències de l'àlgebra $\mathfrak{A}$ que donen en el quocient una AMT, caracterització que generalitza el teorema 2.19 i que permet extreure algún resultat sobre l'estructura de les bases de les LMTs.

4.19 PROPOSICIÓ. *Sigui* $\psi \in Con_m(\mathfrak{A})$, *aleshores* $(a,b) \in \psi$ *si i només si* $a \dagger b \in 1_\psi$.

DEMOSTRACIÓ: De $\psi \in Con_m(\mathfrak{A})$ i de la proposició 4.14 es segueix que és $\theta_{4m} \subseteq \psi$, i per definició $(a,b) \in \psi$ ssi $(a_{\theta_{4m}}, b_{\theta_{4m}}) \in \psi/\theta_{4m}$ que és una congruència en una AMT, d'on $a_{\theta_{4m}} \dagger b_{\theta_{4m}} \in 1_{\psi/\theta_{4m}}$ ssi $([a \dagger b]_{\theta_{4m}}, 1_{\theta_{4m}}) \in \psi/\theta_{4m}$ ssi $(a \dagger b, 1) \in \psi$ ssi $(a \dagger b) \in 1_\psi$. ■

4.20 COROL.LARI. *Dues famílies* Φ*-tancades* $\mathcal{T}$ *i* $\mathcal{T}'$ *de* $\mathcal{E}_{4m}$ *tals que* $\bigcap \mathcal{T} = \bigcap \mathcal{T}'$ *donen lloc a la mateixa congruència.*

DEMOSTRACIÓ: Una família Φ-tancada de $\mathcal{E}_{4m}$ genera un sistema clausura que dóna lloc a una LQMT, la qual té associada una congruència (la mateixa associada a la família) que pel teorema 3.7 és de $Con_m(\mathfrak{A})$ i que per la proposició anterior ve deteminada per $1_\theta = \mathbf{C}(\emptyset) = \bigcap \mathcal{T}$.■

Estudio a continuació de quina forma són els elements de $\mathcal{E}_{4m}$ i trobo en el corol.lari 4.22 que l'única possibilitat d'inclusió estricte entre dos elements de $\mathcal{E}_{4m}$ es dóna quan un és el transformat per Φ de l'altre.

4.21 PROPOSICIÓ. *Siguin* $P, T \in \mathcal{E}_{4m}$. *Si* $P \cap \Phi(P) \subseteq T \cap \Phi(T)$, *aleshores* $P = T$ *o* $P = \Phi(T)$.

DEMOSTRACIÓ: Considero els sistemes clausura que tenen per bases $\{P, T, \Phi(T), \Phi(P)\}$ i $\{P, \Phi(P)\}$ respectivament. Pel teorema 3.14 els dos sistemes clausura coincideixen. Si $P \neq T$ i $P \neq \Phi(T)$ aleshores ha de ser $T = P \cap \Phi(P)$ (pel fet de ser T un tancat del sistema clausura generat per la segona família) i $\Phi(T) = P \cap \Phi(P)$ (per la mateixa raó i la suposició feta), la qual cosa és impossible ja que en aplicar la definició de Φ i el fet que $T = P \cap \Phi(P)$ obtinc que $a \in \Phi(T)$ ssi $a \in P$ o $a \in \Phi(P)$.■

Per tant els elements de $\mathcal{C}^+$ de la forma $P \cap \Phi(P)$ amb $P \in \mathcal{E}_{4m}$ són maximals dins $\mathcal{C}^+_{4m}$ i com que $\mathcal{E}^+_{4m}$ és base de $\mathcal{C}^+_{4m}$ tot maximal de

$\mathcal{C}_{4m}^{+}$ és de la forma $P \cap \Phi(P)$ per cert $P \in \mathcal{E}_{4m}$.

4.22 PROPOSICIÓ. *Siguin $P, T \in \mathcal{E}_{4m}$, aleshores $P \subseteq T$ implica $T = P$ o $T = \Phi(T)$*

DEMOSTRACIÓ: Si $P \subseteq T$ aleshores $P \cap \Phi(P) \subseteq T$ i per 3.1.4 i 3.1.5 $P \cap \Phi(P) \subseteq \Phi(T)$ i per 4.21 $T = P$ o $T = \Phi(P)$.■

Per tant les famílies Φ-tancades amb dos elements estan formades per un element maximal i un element minimal i l'element de les famílies Φ-tancades unitàries és alhora maximal i minimal (sempre amb l'ordre restingit a $\mathcal{C}_{4m}$).

4.23 PROPOSICIÓ. *Siguin $\mathbf{L}_i = (\mathfrak{A}, \mathcal{C}_i)$ $(i = 1, 2)$ dues LMT i siguin $\mathcal{E}_i$ les seves respectives bases, aleshores $[\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2] = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$*

DEMOSTRACIÓ: $(\mathfrak{A}, \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$ és LMT (per 4.7) i per tant té una base formada per parelles $\{P, \Phi(P)\}$ amb $P \in \mathcal{C}_{4m}$ on P o $\Phi(P)$ són maximals (si $P = \Phi(P)$ aleshores també P és maximal). Tots els elements maximals (dins $\mathcal{C}_{4m}$) de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ estan en la base de la definició de LMT juntament amb els seus transformats per Φ, però aquest maximals han d'estar tant a la base de $\mathcal{E}_1$ com en la de $\mathcal{E}_2$ i recíprocament, tots els maximals que estiguin en $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ estaran en la base de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{E}_2$ d'on $[\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2] = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. ■

De la proposició 3.12 es desprèn que és possible trobar dues famílies diferents, Φ-tancades, de $\mathcal{E}_{4m}$ que tinguin associada la mateixa congruència. La proposició que segueix i el seu corol.lari demostren que aquesta família no pot ser finita.

4.24 COROL.LARI. *Sigui $\mathcal{T}$ una família finita Φ-tancada de $\mathcal{E}_{4m}$, i sigui $\mathcal{T}'$ una subfamília de $\mathcal{T}$ Φ-tancada tal que $\bigcap \mathcal{T} = \bigcap \mathcal{T}'$ aleshores $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.*

DEMOSTRACIÓ: Siguin $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ els sistemes clausura generats per $\mathcal{T}$ i

$\mathcal{T}'$ i L i L$'$ les corresponents lògiques, que pel fet de tenir els seus sistemes clausura finits seran finitàries.

Si $\mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T}$, $\exists T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'$. Per qualsevol $T_i \in \mathcal{T}'$ és $T \neq T_i$ i no pot ser $T \subsetneq T_i$ ja que aleshores seria, per exemple $T = \Phi(T_i)$ i $\Phi(T_i) \in \in \mathcal{T}'$ amb contradicció amb $t \notin \mathcal{T}'$. Per tant $\exists x_i \in T \setminus T_i \quad \forall T_i \in \mathcal{T}'$ i $x = \bigwedge x_i \in T \setminus T_i \quad \forall T_i \in \mathcal{T}'$ d'on $x \in T \setminus T_i \quad \forall T_i \in \mathcal{C}'$, o sigui $T \notin \mathcal{C}'$ d'on $\mathcal{C}' \subsetneq \mathcal{C}$.
Per hipòtesi els més petits tancats de $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ coincideixen, i per tant, pel teorema 3.14, $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, contradicció. ■

4.25 COROL.LARI. *Sigui $\mathfrak{A}$ finita i sigui $F \in \mathcal{C}^+_{4m}$. L'única família, $\mathcal{T}$, de $\mathcal{E}_{4m}$ tal que $\bigcap \mathcal{T} = F$ és $\mathcal{T} = \{T \in \mathcal{E}_{4m}\,;\, F \subseteq T\}$.*

DEMOSTRACIÓ: Per la proposició anterior en ser $\mathcal{T}$ finita. ■

Així doncs, en una àlgebra finita suport d'una LMT només hi ha una família d'elements de $\mathcal{E}_{4m}$ que tingui com a intersecció un element donat de $\mathcal{C}^+_{4m}$.

Totes aquelles propietats que facin referència a l'estructura reticular del sistema clausura $\mathcal{C}$ d'una LMT són també certes pels filtres d'una AMT ja que aquests juntament amb l'AMT forman una LMT. El morfisme bilògic del teorema 3.8 assegura que el recíproc també és cert; les propietats reticulars dels filtres d'una AMT són certes en el sistema clausura d'una LMT, en particular:

4.26 PROPOSICIÓ. *Si $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ és lògica de De Morgan amb element inconsistent 0 i base $\mathcal{E}$ tal que $\forall P, Q \in \mathcal{E} \quad P \subseteq Q \Rightarrow P = Q$ o $P = \Phi(Q)$, aleshores existeix un operador unari, $\Box$, en $\mathfrak{A}$ tal que si $\mathfrak{A}' = (A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0)$ és $(\mathfrak{A}', \mathcal{C})$ LMT.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\pi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}/\theta_{\mathcal{C}}$ el morfisme bilògic del teorema 1 de [FV1]. $\mathfrak{A}/\theta_{\mathcal{C}}$ és àlgebra de De Morgan (amb mínim $0_{\theta_{\mathcal{C}}}$) i els seus filtres primers satisfan $P \subseteq Q \Rightarrow P = Q$ o $P = \Phi(Q)$ ja que aquesta propietat es conserva per morfismes bilògics. La proposició 2.2.11 de [L1] assegura que existeix un operador unari, $\Box$, que afegit a l'estructura d'$\mathfrak{A}/\theta_{\mathbf{C}}$ la converteix en AMT. Sigui ara $a \in A$; defineixo $\Box a$ com un element qualsevol de $\pi^{-1}(\Box a/\theta_{\mathbf{C}})$. Sigui $\mathfrak{A}'$ l'àlgebra obtinguda a partir d'$\mathfrak{A}$ al afegir $\Box$. És fàcil comprovar que $\theta_{\mathbf{C}} \in Con(\mathfrak{A}')$ i com que π és també un morfisme bilògic entre $(\mathfrak{A}', \mathbf{C})$ i una AMT amb tots els seus filtres, $(\mathfrak{A}', \mathbf{C})$ és LMT.

5. LMT sentencials i lògiques normals.

En aquest darrer capítol dono una nova definició de LMT que només fa referència a propietats de l'operador clausura i que és equivalent a la del capítol 3. Centro l'estudi de les lògiques sobre l'àlgebra $\mathfrak{Fo}$, àlgebra absolutament lliure de tipus (2,2,1,1,0) amb operacions $(\wedge, \vee, \neg, \Box, 0)$ i faig una traducció de cadascuna de les propietats de la nova definició a un o dos seqüents, afegeixo la traducció de les propietats estructurals al càlcul de seqüents i obtinc un càlcul tipus Gentzen estretament relacionat amb les LMT: Efectivament, aquestes lògiques són model (segons la definició de model d'una presentació de [FV3]) del càlcul obtingut, i l'operador associat a aquest sobre una àlgebra qualsevol, $\mathfrak{A}$, de tipus (2,2,1,1,0) dóna la LMT més fina sobre $\mathfrak{A}$ i per tant coincideix amb la lògica projectivament generada des de L_{4m} per tots els homomorfismes.

Estudio com són les matrius i les matrius generalitzades del càlcul de seqüents sobre l'àlgebra sentencial $\mathfrak{Fo}$ i demostro que la família de les matrius formades per una AMT i un filtre com a conjunt ditigit és una semàntica de matrius. En l'estudi de les matrius generalitzades finitàries determino quines condicions cal afegi'ls-hi per tenir una LMT. Acabo l'estudi de les lògiques sentencials demostrant que sobre $\mathfrak{Fo}$ només hi ha tres LMT no trivials i estructurals.

Afegeixo al càlcul de les LMT una condició adequada (regla forta de la necessitat) per tal que les consequències de qualsevol conjunt de fórmules siguin tancades respecte de l'operador interior, així obtinc una classe de sublògiques de les LMTs que anomeno lògiques modals tetravalents normals (LMTN). Faig un ràpid estudi similar al fet per les LMTs en els capítols 3 i 4; obtinc el teorema "del bilògic" (teorema 5.27) i una caracterització de les LMTN a partir de la generació projectiva des de l'àlgebra $\mathfrak{M}_{4m}$ dotada d'un sistema clausura que la fa LMTN (teorema 5.30).

La memòria acaba amb un ràpid repàs els conceptes de lògica algebraizable i protoalgebraica (extrets de [BP1] i [BP2]) i amb la demostració que la LMT més fina sobre $\mathfrak{Fo}$ és protoalgebraica però no algebraizable i que la LMTN més fina sobre $\mathfrak{Fo}$ és algebraizable i protoalgebraica.

5.1 TEOREMA. *Sigui* $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \neg, \Box, 0)$ *àlgebra de tipus (2,1,1,0).* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *és LMT si i només existeix una operació binària,* $\vee$ *, tal que posant* $\mathfrak{A}' = (A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0)$ *la lògica* $\mathsf{L}' = (\mathfrak{A}', \mathbf{C})$ *satisfà les vuit condicions següents :*

(L'0)	L *és finitaria;*
(L'1)	$\mathbf{C}(a \wedge b) = \mathbf{C}(a, b)$;
(L'2)	$\mathbf{C}(X, a \vee b) = \mathbf{C}(X, a) \cap \mathbf{C}(X, b)$;
(L'3)	$\mathbf{C}(a) = \mathbf{C}(\neg\neg a)$;
(L'4)	$a \in \mathbf{C}(b) \;\Rightarrow\; \neg b \in \mathbf{C}(\neg a)$;
(L'5)	$\mathbf{C}(0) = A$;
(L'6)	$\mathbf{C}(a) \cap \mathbf{C}(\neg\Box a) = \mathbf{C}(\emptyset)$;
(L'7)	$\mathbf{C}(a, \neg\Box a) = \mathbf{C}(a, \neg a)$.

A més, es dóna $\mathbf{C}(a \vee b) = \mathbf{C}(\neg(\neg a \wedge \neg b))$.

DEMOSTRACIÓ: Si L és una LMT defineixo $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$; he vist que $\theta \in Con(\mathfrak{A})$ i que $\mathfrak{A}/\theta$ és una AMT. Però $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$ és un polinomi en $\vee$ i $\neg$, per tant $\theta \in Con(\mathfrak{A}')$. (L'1) equival a 3.1.1, (L'2) és 3.3.3 i les restants condicions són propietats vàlides (equacions o implicacions) en $\mathfrak{A}'/\theta$, per tant, valen en $\mathfrak{A}'$. L' satisfà per tant les vuit propietats anteriors. Observeu que (L'6) equival a $\mathbf{C}(a \vee \neg\Box a) = \mathbf{C}(\emptyset)$ per (L'2).

Recíprocament, per provar 3.1.1 i 3.1.2, observeu que la relació θ associada a $\mathbf{C}$ és congruència en $\mathfrak{A}'^{-} = (A, \wedge, \vee, \neg, 0)$ i $\mathfrak{A}'^{-}/\theta$ és un reticle distributiu (per (L'1) i (L'2)) (vejeu [FV1]) amb una negació forta (per (L'3) i (L'4)) i element mínim (per (L'5)) que fa que aquest quocient sigui àlgebra de De Morgan. Amb la mateixa tècnica que a la demostració del teorema 3 de [FV1] demostro que C/θ és el conjunt, $\mathcal{F}$, de tots els filtres d' $\mathfrak{A}'^{-}/\theta$; és suficient mostrar que els operadors clausura associats, $\mathbf{C}/\theta$, i $\mathbf{F}$ coincideixen. Sigui $X \subseteq A/\theta$ i $x \in A/\theta$, $x \in (\mathbf{C}/\theta)(X)$ ssi $x \in (\mathbf{C}/\theta)(\emptyset)$ o bé existeixen $x_1, \ldots, x_n \in X$ amb $x \in (\mathbf{C}/\theta)\{x_1, \ldots, x_n\}$, però $x \in (\mathbf{C}/\theta)(\emptyset)$ ssi $\pi^{-1}(x) \subseteq \mathbf{C}(\emptyset)$ ssi $y \leq x \quad \forall y \in A/\theta$, és a dir x pertany a tots els filtres del quocient o sigui $x \in \mathbf{F}(\emptyset)$. Per altra banda si $x \in (\mathbf{C}/\theta)\{x_1, \ldots, x_n\}$, per PC $x \in (\mathbf{C}/\theta)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)$ que equival a $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \leq x$, per tant $x \in \mathbf{F}(X)$. Així doncs $\mathcal{C}/\theta$ és el conjunt de tots els filtres d' $\mathfrak{A}/\theta$. En particular $\mathbf{L}'^{-}/\theta = (\mathfrak{A}'^{-}/\theta, \mathcal{C}/\theta)$ és una lògica de De Morgan i satisfà PC i PBR, condicions que es traslladen per morfismes bilògics i que també satisfaràn $\mathbf{L}'^{-}$ i $\mathbf{L}'$ (només depenen de $\wedge, \vee, \neg$).

Demostraré a continuació

$$\text{(L'8)} \quad \forall a \in A, \quad a \in \mathbf{C}(\Box a).$$

Efectivament, tinc $\mathbf{C}(\neg a) = \mathbf{C}(\neg a, a \vee \neg \Box a) = \mathbf{C}(\neg a, a) \cap \mathbf{C}(\neg a, \neg \Box a) = \mathbf{C}(a, \neg \Box a) \cap \mathbf{C}(\neg a, \neg \Box a) = \mathbf{C}(a \vee \neg a, \neg \Box a)$ fent servir (L'6), (L'2), (L'7) i (L'2) succesivament. Per tant, $\neg \Box a \in \mathbf{C}(\neg a)$ d'on per (L'4) i (L'3) obtinc (L'8).

3.1.3 equival a (L'5).

Per a provar 3.1.4 és suficient provar que si $\Box a \in P$ aleshores $\Box a \in \Phi(P)$ (ja que $\Phi^2(P) = P$). Per (L'8), si $\Box a \in P$ aleshores $a \in P$. Si $\Box a \notin \Phi(P)$ seria $\neg \Box a \in P$ d'on per (L'7) $\neg a \in P$ és a dir $a \notin \Phi(P)$. Però $\Phi(P) \in \mathcal{E}$ i per tant és $\vee$-primer, i (L'6) implica que $a \vee \neg \Box a \in \Phi(P)$ d'on $\neg \Box a \in \Phi(P)$ que equival a $\Box a \notin P$, contradicció.

Finalment provo 3.1.5: si $\Box a \in P \cap \Phi(P)$, per (L'8) resulta que $a \in P \cap \Phi(P)$. Recíprocament, observeu que (L'7) diu que si $a \in P$ aleshores $\neg a \in P$ ssi $\neg \Box a \in P$, o sigui, $a \in \Phi(P)$ ssi $\Box a \in \Phi(P)$; i també que si $a \in \Phi(P)$ aleshores $a \in P$ ssi $\Box a \in P$ (usant $\Phi^2(P) = P$). Per tant, si $a \in P \cap \Phi(P)$ aleshores $\Box a \in P \cap \Phi(P)$.

Com que el quocient per θ és AMT, tinc $a_\theta \vee b_\theta = \neg(\neg a_\theta \wedge \neg b_\theta)$ d'on $\mathbf{C}(a \vee b) = \mathbf{C}(\neg(\neg a \wedge \neg b))$. ■

5.2 DEFINICIÓ. *Anomeno* $\mathfrak{F}o = (Form, \wedge, \vee, \neg, \Box, \bot)$ *a l'àlgebra absolutament lliure de tipus (2,2,1,1,0) generada a partir d'un conjunt numerable de variables. Anomeno fórmules o sentències els elements de* $Form$.

Anomeno **seqüent** *sobre una àlgebra* $\mathfrak{A}$ *a tota parella de la forma* (Δ, ϕ) *on* $\Delta \subseteq A$, Δ *finit i* $\phi \in A$. *El seqüent* (Δ, ϕ) *el represento per* $\Delta \vdash \phi$.

5.3 DEFINICIÓ. *Anomeno* $(\mathfrak{A}, \vdash_S)$ *la lògica definida sobre* $\mathfrak{A}$ *per:* $\Delta \vdash_S \phi$ *si i només si existeix* Δ_0 *finit,* $\Delta_0 \subseteq \Delta$ *tal que* $\Delta_0 \vdash \phi$ *és derivable en el càlcul que té les regles i axiomes següents:*

(Axioma) $\alpha \vdash \alpha$ *(Axioma)* $\vdash \alpha \vee \neg\Box\alpha$

(Debilitació) $\dfrac{\Delta \vdash \alpha}{\Delta, \beta \vdash \alpha}$ *(Tall)* $\dfrac{\Delta \vdash \alpha \qquad \Delta, \alpha \vdash \beta}{\Delta \vdash \beta}$

$(\wedge \vdash)$ $\dfrac{\Delta, \alpha, \beta \vdash \gamma}{\Delta, \alpha \wedge \beta \vdash \gamma}$ $(\vdash \wedge)$ $\dfrac{\Delta \vdash \alpha \qquad \Delta \vdash \beta}{\Delta \vdash \alpha \wedge \beta}$

$(\vee \vdash)$ $\dfrac{\Delta, \alpha \vdash \gamma \quad \Delta, \beta \vdash \gamma}{\Delta, \alpha \vee \beta \vdash \gamma}$ $(\vdash \vee)$ $\dfrac{\Delta \vdash \alpha}{\Delta \vdash \alpha \vee \beta}$ $\dfrac{\Delta \vdash \beta}{\Delta \vdash \alpha \vee \beta}$

$(\neg\neg \vdash)$ $\dfrac{\Delta, \alpha \vdash \beta}{\Delta, \neg\neg\alpha \vdash \beta}$ $(\vdash \neg\neg)$ $\dfrac{\Delta \vdash \alpha}{\Delta \vdash \neg\neg\alpha}$

$(\bot)$ $\dfrac{\Delta \vdash \bot}{\Delta \vdash \alpha}$ $(\neg)$ $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\neg\beta \vdash \neg\alpha}$

$$(\Box\vdash)\quad \frac{\Delta,\alpha,\neg\alpha\vdash\beta}{\Delta,\alpha,\neg\Box\alpha\vdash\beta}\qquad (\vdash\Box)\quad \frac{\Delta\vdash\alpha\wedge\neg\alpha}{\Delta\vdash\alpha\wedge\neg\Box\alpha}$$

Per $\Delta\subseteq A$ *finit i* $\alpha,\beta\in A$. *En particular anomenaré* L_S *la lògica* $(Form,\vdash_S)$.

En [FV3] s'introdueix la noció de lògica model d'una presentació d'un càlcul sobre làlgebra de les fórmules de la forma del de la definició 5.3, és a dir d'un càlcul tipus Gentzen format per regles de la forma

$$\frac{\{\Gamma_i\vdash\phi_i\,:\,i\in I\}}{\Gamma\vdash\phi}\qquad (G)$$

on Γ_i, Γ són subconjunts de fórmules, ϕ és una fórmula i I és un conjunt finit. És fàcil veure que la definició donada en [FV3] és equivalent a la següent:

5.4 DEFINICIÓ. $\mathsf{L}=(\mathfrak{A},\mathbf{C})$ *és* **model d'un càlcul de tipus Gentzen** *si per cada regla del tipus (G) i* $\forall h\in Hom(\mathfrak{Fo},\mathfrak{A})$ $\; h(\phi_i)\in\mathbf{C}(h(\Gamma_i))$ $\forall i\in I$ *implica* $h(\phi)\in\mathbf{C}(h(\Gamma))$.

Com que $\mathfrak{Fo}$ és absolutament lliure els homorfismes de $\mathfrak{Fo}$ a $\mathfrak{A}$ són substitucions de les fórmules de $Form$ per elements d'A, per tant $\mathsf{L}=(\mathfrak{A},\mathbf{C})$ és model d'una presentació segons la definició anterior si $\mathbf{C}$ satisfà les regles al substituir formalment les fórmules per elements d'A.

5.5 TEOREMA. $\mathsf{L}=(\mathfrak{A},\mathbf{C})$ *és model de la presentació donada en 5.3 si i només si* L *és LMT.*

DEMOSTRACIÓ: El primer axioma, debilitació, tall i la definició de demostració equivalen a que $\mathbf{C}$ sigui operador clausura finitari. El segon axioma és (L'6), les regles estructurals juntament amb $(\wedge\vdash)$ i $(\vdash\wedge)$ equivalen a (L'1), juntament amb $(\vee\vdash)$ i $(\vdash\vee)$ equivalen a (L'2) etc... i pel teorema 5.1 L és LMT. ■

5.6 TEOREMA. *La lògica* $(\mathfrak{A},\vdash_S)$ *és la mínima LMT sobre* $\mathfrak{A}$.

DEMOSTRACIÓ: $(\mathfrak{A}, \vdash_S)$ és LMT pel teorema 5.5. Per tal de veure que $(\mathfrak{A}, \vdash_S)$ és la mínima LMT sobre $\mathfrak{A}$ cal comprovar que si $\mathbf{C}$ és un altre operador clausura tal que $(\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ és LMT aleshores $\forall X \subseteq A \quad \forall x \in A$ si $X \vdash_S x$ aleshores $x \in \mathbf{C}(X)$. Suposem X finit i l la longitud de la demostració del seqüent $X \vdash x$, si $l = 1$ aleshores $\{x\} = X$ o $x = y \vee \neg\Box y$ per cert $y \in A$ i per (L'6) $x \in \mathbf{C}(X)$. Si suposeu el resultat cert per tota demostració de longitud $l - 1$ i suposeu, per exemple, que l'última regla aplicada és:

$$(\wedge \vdash) \quad \frac{Y, a, b \vdash x}{X \vdash x} \quad (X \text{ serà } Y \cup \{a \wedge b\}).$$

Com que $Y, a, b \vdash x$ tindrà una longitud menor que l, $x \in \mathbf{C}(Y, a, b)$ i per (L'2) és $\mathbf{C}(Y, a, b) = \mathbf{C}(Y, a \wedge b) = \mathbf{C}(X)$. De la mateixa manera es procedeix en els cassos restants. ■

5.7 COROL.LARI. *Si $\mathfrak{A}$ és AMT aleshores $\vdash_S$ coincideix amb l'operador associat al sistema clausura de tots els filtres.* ■

5.8 TEOREMA (COMPLETESA). $(\mathfrak{A}, \vdash_S) = \mathbf{L}_{4m}(\mathfrak{A})$, *és a dir,* $\vdash_S = \mathbf{C}_{4m}$.

DEMOSTRACIÓ: Pel corol.lari 4.5 i el teorema 5.6. ■

En particular sobre l'àlgebra de les fórmules tenim $\mathbf{L}_S = \mathbf{L}_{4m}(\mathfrak{F}o)$.

5.9 COROL.LARI. *Per $\forall \Gamma \subseteq Form$ i $\forall \phi \in Form$*

$$\Gamma \vdash_S \phi \Leftrightarrow \forall h \in Hom(\mathfrak{F}o, \mathfrak{M}_{4m}) \quad \bigwedge h(\Gamma) \leq h(\phi) \quad \textit{o sigui}$$

$$h(\phi) \in \mathbf{F}(h(\Gamma)).$$

DEMOSTRACIÓ: És una conseqüència del teorema de completesa que $\Gamma \vdash_S \phi \Leftrightarrow \phi \in \mathbf{C}_{4m}(\Gamma) = \bigcap\{h^{-1}(F_i)\,;\, h \in Hom(\mathfrak{F}o, \mathfrak{M}_{4m}),\, h(\Gamma) \subseteq F_i\}$ ssi $\forall h \in Hom(\mathfrak{F}o, \mathfrak{M}_{4m})$ $h(\Gamma) \subseteq F_i$ implica $h(\phi) \in F_i$. Aquesta última condició equival a $\bigwedge h(\Gamma) \leq h(\phi)$ doncs:
Si $h(\Gamma) = \{1\} = F_1 \cap F_2$ aleshores $h(\phi) \in F_1 \cap F_2 = \{1\}$ i és

$\bigwedge h(\Gamma) = h(\phi) = 1$.
Si $h(\Gamma) = F_1$ aleshores $\bigwedge h(\Gamma) = a$ i com que $h(\phi) \in F_1$ $\bigwedge h(\Gamma) \leq h(\phi)$. De manera semblant es tracta el cas $h(\Gamma) = F_2$.
Si $0 \in h(\Gamma)$, $0 = \bigwedge h(\Gamma) \leq h(\phi)$ trivialment. ■

Si $\mathfrak{A}$ és una àlgebra del mateix tipus que $\mathfrak{Fo}$, $F \subseteq A$ és un **filtre per a L_S (L_S-filtre)** si $\Gamma \vdash_S \phi$ implica que per qualsevol $h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{A})$ si $h(\Gamma) \subseteq F$ aleshores $h(\phi) \in F$ $\forall\Gamma \subseteq Form$, $\phi \in$ $\in Form$. Una **matriu** per a L_S és una parella $(\mathfrak{A}, F)$ on $\mathfrak{A}$ és una àlgebra del mateix tipus que $\mathfrak{Fo}$ i F és un filtre per a L_S. Una família de matrius $\mathbf{M}_i = (\mathfrak{A}_i, F^i)$ és una **semàntica de matrius** per a L_S si $\forall\Gamma, \phi$ $\Gamma \vdash_S \phi$ si i només si $\forall h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{A}_i)$ $h(\Gamma) \subseteq F^i \Rightarrow$ $h(\phi) \in F^i \forall i$. El corol.lari 5.9 demostra que la família formada per les dues matrius $(\mathfrak{M}_{4m}, F_1)$ i $(\mathfrak{M}_{4m}, F_2)$ és una semàntica de matrius per a L_S. La proposició següent demostra que amb qualsevol de les dues matrius (per exemple la primera) ja és té una semàntica de matrius per a L_S.

5.10 PROPOSICIÓ. *La família formada unicament per la matriu* $\mathbf{M} = (\mathfrak{M}_{4m}, F_1)$ *és una semàntica de matrius per a* L_S.

DEMOSTRACIÓ: Pel corol.lari 5.9, si $\Gamma \vdash_S \phi$, $h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{M}_{4m})$ amb $h(\Gamma) \subseteq F_1$ aleshores $h(\phi) \in \mathbf{F}(h(\Gamma) = F_1$.
Per demostrar el recíproc, suposem que $\forall h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{M}_{4m})$ $h(\Gamma) \subseteq$ $\subseteq F_1 \Rightarrow h(\phi) \in F_1$ i que $\Gamma \not\vdash \phi$, aleshores degut al fet que $(\mathfrak{M}_{4m}, F_1)$ i $(\mathfrak{M}_{4m}, F_2)$ són una semàntica de matrius $\exists h \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ tal que $h(\Gamma) \subseteq F_2$ i $h(\phi) \notin F_2$. Considero ara l'automorfime, k, de $\mathfrak{M}_{4m}$ definit per $k(0) = 0, k(1) = 1, k(a) = b$ i $k(b) = a$; $k \circ h \in$ $\in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$, $k \circ h(\Gamma) \subseteq F_1$ i en canvi $k \circ h(\phi) \notin F_1$, contradicció. ■

5.11 PROPOSICIÓ. *La família de les matrius* $\{(\mathfrak{A}, P); \mathfrak{A} \in AMT, P \in$ $\in \mathcal{P}\}$ *és una semàntica de matrius per a* L_S.

DEMOSTRACIÓ: $\Rightarrow$) Pel lema 4.1 $\exists k \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ tal que $P =$

$= k^{-1}(F_1)$. Suposeu que existeix $h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{A})$; $h(\Gamma) \subseteq P$ i $h(\phi) \notin P$, aleshores $k \circ h(\Gamma) \subseteq F_1$ i en canvi $k \circ h(\phi) \notin F_1$. Com que $k \circ h \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$, per 5.10 $\Gamma \nvdash_S \phi$.
($\Leftarrow$ Per ser F_1 un filtre primer i $(\mathfrak{M}_{4m}, F_1)$ una semàntica de matrius per a L_S.■

Com és fàcil veure a partir de la demostració anterior, qualsevol família de matrius formada per AMTs i filtres primers que continguin la matrius $(\mathfrak{M}_{4m}, F_1)$ és una semàntica de matrius per a L_S.

5.12 COROL.LARI. *La família de matrius* $\{(\mathfrak{A}, F); \mathfrak{A}$ *és AMT i* $F \in \mathcal{F}\}$ *és una semàntica de matrius per a* L_S.

DEMOSTRACIÓ: Suposeu que $F = \bigcap P_i \;\; P_i \in \mathcal{P}$, $\Gamma \vdash_S \phi$ i $h \in$ $\in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{A})$ tal que $h(\Gamma) \subseteq F$, aleshores $h(\Gamma) \subseteq P_i \;\; \forall i$ d'on $h(\phi) \in P_i \;\; \forall i$ i per tant $h(\phi) \in F$.■

En general la família formada per una única AMT i un filtre no és una semàntica de matrius per a L_S, no ho és fins i tot si exigim que el filtre sigui primer; efectivament, és suficient considerar la matriu $(\mathfrak{B}_2, \{1\})$ i recordar que $\alpha \vdash \Box\alpha$ no és teorema de L_S i que a pesar d'això, si $h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{B}_2)$ aleshores $h(\alpha) \subseteq \{1\} \Rightarrow h(\Box\alpha) \subseteq \{1\}$. Tampoc és suficient exigir que el conjunt distingit en la matriu sigui un filtre primer no obert; efectivament, considereu la matriu $(\mathfrak{M}_{3m}, \{a, 1\})$ i el seqüent $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \beta \vee \neg\beta$, no demostrable en L_S; $\forall h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{M}_{3m})$ $h(\alpha \wedge \neg\alpha) = 1 \Rightarrow h(\beta \vee \neg\beta) = 1$ pel fet que $\mathfrak{M}_{3m}$ satisfà la desigualtat $\alpha \wedge \neg\alpha \leq \beta \vee \neg\beta$.
En definitiva, només es pot demostrar la següent

5.13 PROPOSICIÓ. *Sigui* $\mathfrak{A}$ *AMT sigui* $\{1, c, d, 0\} \subseteq A$ *el conjunt suport d'una subàlgebra d'*$\mathfrak{A}$ *isomorfa a* $\mathfrak{M}_{4m}$ *i sigui* T *un filtre amb* $c \in T$ *i* $d \notin T$ *aleshores* $\{(\mathfrak{A}, T)\}$ *és una semàntica de matrius per a* L_S.

DEMOSTRACIÓ: Per 5.10 és suficient demostrar que $\forall h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{A})$

$h(\Gamma) \subseteq T \Rightarrow h(\phi) \in T \Leftrightarrow \forall h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{M}_{4m})$ $h(\Gamma) \subseteq F_1 \Rightarrow h(\phi) \in$ $\in F_1$.

$\Rightarrow$) Sigui s la injecció de $\mathfrak{M}_{4m}$ en $\mathfrak{A}$. Si $h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{M}_{4m})$ amb $h(\Gamma) \subseteq F_1$, aleshores $s \circ h(\Gamma) \subseteq T$ i per hipòtesi $s \circ h(\phi) \in T$ d'on $h(\phi) \in F_1$.

($\Leftarrow$) Sigui $h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{A})$ amb $h(\Gamma) \subseteq T$ i sigui $k \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ tal que $k^{-1}(F_1) = T$, aleshores $k \circ h(\Gamma) \subseteq F_1$ d'on $k \circ h(\phi) \in F_1$ i $h(\phi) \in T$. ■

$\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ és una **matriu generalitzada (g-matriu)** per a L_S si i només si $\mathsf{L}_S \leq \mathsf{L}(\mathfrak{Fo})$, on $\mathsf{L}(\mathfrak{Fo})$ és la lògica projectivament generada des de L sobre $\mathfrak{Fo}$ per $Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{A})$, o equivalentment si $\Gamma \vdash_S \phi$ aleshores $h(\phi) \in \mathbf{C}(h(\Gamma))$ per tot $h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{A})$. Observeu que $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ és una g-matriu per a L_S si i només si $(\mathfrak{A}, F)$ per tot $F \in \mathcal{C}$ és una L_S-matriu. El teorema de completesa dóna el primer exemple de g-matriu per a L_S, la lògica L_{4m}; altres exemples els proporciona la següent proposició:

5.14 PROPOSICIÓ. *Si L és una LQMT aleshores és una g-matriu per a L_S.*

DEMOSTRACIÓ: Si L és LQMT pel teorema 4.2 L és generada projectivament des de L_{4m} per $\mathcal{D} \subseteq Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$. Tinc per tant que $\mathsf{L}(\mathfrak{Fo})$ és projectivament generada des de L_{4m} per $\{h \circ h'; h' \in$ $\in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{A}), h \in \mathcal{D}\} \subseteq Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{M}_{4m})$ i per tant $\mathsf{L}_S \leq \mathsf{L}(\mathfrak{Fo})$. ■

El recíproc de la proposició 5.14 és fals, la classe de les LQMT no esgota totes les g-matrius per a L_S ja que:

5.15 COROL.LARI. *Si $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ és una lògica més fina que L' i L és g-matriu per L_S aleshores L també ho és.*

DEMOSTRACIÓ: Si $\Gamma \vdash_S \phi$, aleshores $h(\phi) \in \mathbf{C}(h(\Gamma)) \subseteq \mathbf{C}'(h(\Gamma))$ per tot $h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{A})$. ■

Veuré a continuació quines de les propietats del teorema 5.1 satisfan totes les g-matrius,

5.16 PROPOSICIÓ. *Si* $\mathbf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *és g- matriu per* $\mathbf{L}_S$ *, aleshores satisfà L'1,* $\mathbf{C}(X, a \vee b) \subseteq \mathbf{C}(X, a) \cap \mathbf{C}(X, b)$ *L'3, L'5, L'7,* $\mathbf{C}(a \wedge (b \vee c)) = \mathbf{C}((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$ *i* $\mathbf{C}(\neg a \vee \neg b) = \mathbf{C}(\neg(a \wedge b))$ $\forall a, b, c \in A$ *i* $\forall X \subseteq A$

DEMOSTRACIÓ: Donats $a, b \in A$ i $X \subseteq A$, sigui $\alpha, \beta \in Form$, $\Delta \subseteq Form$ i $h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{A})$ tal que $h(\alpha) = a$, $h(\beta) = b$ i $h(\Delta) = X$.

En $\mathbf{L}_S$ tinc $\alpha, \beta \vdash_S \alpha \wedge \beta$ i $\alpha \wedge \beta \vdash_S \alpha, \beta$, i per ser $\mathbf{L}$ g- matriu, $h(\alpha \wedge \beta) = a \wedge b \in \mathbf{C}(h(\alpha), h(\beta)) = \mathbf{C}(a, b)$ i $h(\alpha), h(\beta) \in \mathbf{C}(h(\alpha \wedge \beta))$ o sigui $a, b \in \mathbf{C}(a \wedge b)$ per tant $\mathbf{C}(a, b) = \mathbf{C}(a \wedge b)$, (L'1).

En $\mathbf{L}_S$ és $\Delta, \alpha \vdash_S \Delta, \alpha \vee \beta$ i $\Delta, \beta \vdash_S \Delta, \alpha \vee \beta$ d'on $h(\Delta, \alpha \vee \beta) \in \mathbf{C}(h(\Delta, \alpha)) \cap \mathbf{C}(h(\Delta, \beta)) = \mathbf{C}(X, a) \cap \mathbf{C}(X, b)$ o sigui $\mathbf{C}(X, a \vee b) \subseteq \mathbf{C}(X, a) \cap \mathbf{C}(X, b)$.

Per (L'3), tinc $\alpha \vdash_S \neg\neg\alpha$ i $\neg\neg\alpha \vdash_S \alpha$ en $\mathbf{L}_S$ d'on $\mathbf{C}(a) = \mathbf{C}(\neg\neg a)$.

Per (L'5), com $\bot \vdash_S \alpha$ en $\mathbf{L}_S$, $a \in \mathbf{C}(0)$ $\forall a \in A$ d'on $\mathbf{C}(0) = A$.

Per (L'7), en $\mathbf{L}_S$ és $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash_S \alpha \wedge \neg\Box\alpha$ i $\alpha \wedge \neg\Box\alpha \vdash_S \alpha \wedge \neg\alpha$, o sigui $\mathbf{C}(a \wedge \neg a) = \mathbf{C}(a \wedge \neg\Box a)$.

Per la resta, observeu que en $\mathbf{L}_S$ és $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash_S\dashv \neg(\alpha \wedge \beta)$ i $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \vdash_S\dashv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in Form$. ∎

Com he comentat abans, tota sublògica d'una g-matriu ho és, i per altra banda obviament una LQMT té sublògiques que no són LQMT les quals donaran exemples de g-matrius que no satisfaran alguna de les propietats de 5.1. Demostro a continuació, mitjançant contraexemples, que les propietats de 5.1 que no estan recollides en la proposició anterior no són necesàriament satisfetes per tota g-matriu de $\mathbf{L}_S$.

$\mathbf{C}(X, a) \cap \mathbf{C}(X, b) \subseteq \mathbf{C}(X, a \vee b)$ no és sempre certa, ja que si considereu en $\mathfrak{M}_{4m}$ el sistema $\mathcal{C} = \{\{1\}, M_{4m}\}$, $\mathbf{C}(a) \cap \mathbf{C}(b) = M_{4m}$ i $\mathbf{C}(a \vee b) = \{1\}$ i $(\mathfrak{M}_{4m}, \mathcal{C})$ és g-matriu.

(L'4) no és necessàriament certa; sobre $(\mathfrak{M}_{4m}, \mathcal{C})$ amb $\mathcal{C} = \{F_1, M_{4m}\}$ tinc $a \in \mathbf{C}(1)$ i en canvi $\neg 1 = 0 \notin \mathbf{C}(\neg a)$.

Per refutar (L'6) considerem l'àlgebra de Boole de quatre elements, $B_4 = \{0, 1, a, \neg a\}$ i tots els elements oberts. Si la pensem com AMT i considerem el sistema clausura $\mathcal{C} = \{1, B_4\}$. La lògica resultant és g-matriu i en canvi, $\mathbf{C}(a \vee \neg \Box a) = \{1\}$ i $\mathbf{C}(a) \cap \mathbf{C}(\neg \Box a) = B_4$. Observeu però que com que en L_S és $\vdash_S \alpha \vee \neg \Box \alpha$ tinc $\mathbf{C}(a \vee \neg \Box a) = \mathbf{C}(\emptyset)$, però al no tenir tampoc (L'2) això no implica $\mathbf{C}(a) \cap \mathbf{C}(\neg \Box a) = \mathbf{C}(\emptyset)$.

5.17 TEOREMA. *Sigui* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *g-matriu finitària per a* L_S. *Si satisfà* $\forall X \subseteq A$ *i* $\forall a, b \in A$

$$(1) \quad \mathbf{C}(X, a) \cap \mathbf{C}(X, b) \subseteq (X, a \vee b) \ \text{ i}$$

$$(2) \quad a \in \mathbf{C}(b) \Rightarrow \neg b \in \mathbf{C}(\neg a).$$

aleshores L *és LMT.*

DEMOSTRACIÓ: Per la proposició anterior i el teorema 5.1, tenint en compte que en presència de (L'2) (L'6) equival a $\mathbf{C}(a \vee \neg \Box a) = \mathbf{C}(\emptyset)$. ■

5.18 TEOREMA. $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *és LMT si i només si és g-matriu finitària per a* L_S *i* $\theta_{\mathbf{C}}$ *és congruència.*

DEMOSTRACIÓ: Per tal de veure que si L és g-matriu finitària i $\theta_{\mathbf{C}}$ congruència aleshores L és LMT és suficient comprovar 5.17.1 i 5.17.2. Si $z \in \mathbf{C}(X, a) \cap \mathbf{C}(X, b)$, per ser $\mathbf{C}$ finitari $\exists x \in A$ tal que $z \in \mathbf{C}(x \wedge a) \cap \mathbf{C}(x \wedge b)$ d'on $\mathbf{C}(x \wedge a \wedge z) = \mathbf{C}(x \wedge a)$ i $\mathbf{C}(x \wedge b \wedge z) = \mathbf{C}(x \wedge b)$ i per ser $\theta_{\mathbf{C}}$ congruència $\mathbf{C}((x \wedge a \wedge z) \vee (x \wedge b \wedge z)) = \mathbf{C}((x \wedge a) \vee (x \wedge b))$ o sigui que per 5.16 $\mathbf{C}(z \wedge ((a \wedge x) \vee (b \wedge x)) = \mathbf{C}(x \wedge (a \vee b))$ i com que z pertany al tancat de l'esquerra, $z \in \mathbf{C}(X, a \vee b)$. Si $a \in \mathbf{C}(b)$ aleshores $\mathbf{C}(a \wedge b) = \mathbf{C}(b)$ i per ser $\theta_{\mathbf{C}}$ congruència $\mathbf{C}(\neg(a \wedge b)) = \mathbf{C}(\neg b)$ i per 5.16 $\mathbf{C}(\neg b) = \mathbf{C}(\neg a \vee \neg b) = \mathbf{C}(\neg a) \cap \mathbf{C}(\neg b)$, o sigui $\mathbf{C}(\neg b) \subseteq \mathbf{C}(\neg a)$ és a dir $\neg b \in \mathbf{C}(\neg a)$.

Les proposició 5.14 i 3.7 acaben la demostració. ■

5.19 PROPOSICIÓ. *Si* $\mathfrak{A}$ *és AMT aleshores* $(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$ *és la g-matriu per* a L_S *més fina sobre* $\mathfrak{A}$.

DEMOSTRACIÓ: Si $(\mathfrak{A}, T)$ és matriu per a L_S aleshores T és filtre d'$\mathfrak{A}$, doncs per (L'1) els L_S filtres són $\wedge$-filtres i a més, si $a \in T$ i $a \leq \leq b$, $b \in T$ doncs si $\alpha, \beta \in Form$ i $h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{A})$ tal que $h(\alpha) = a$ i $h(\beta) = b$, com que $\alpha \vdash_S \alpha \vee \beta$, per ser $(\mathfrak{A}, T)$ matriu $h(\alpha) \in T \Rightarrow h(\alpha \vee \beta) \in T$ o sigui $a \in T \Rightarrow a \vee b = b \in T$. Com que $(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$ és g-matriu i conté tots els filtres de l'àlgebra, és la g-matriu més fina. ■

5.20 DEFINICIÓ. *Una lógica* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *és* **estructural** *si* $\sigma(\mathbf{C}(X)) \subseteq \subseteq \mathbf{C}(\sigma(X))$ *per tot* $\sigma \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ *i tot* $X \subseteq A$.

5.21 PROPOSICIÓ [BS]. *Sigui* $\mathsf{L}_i = (\mathfrak{A}_i, \mathcal{C}_i)$ *per* $i = 1, 2$. *Si* L_1 *és generada projectivament des de* L_2 *per* $Hom(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ *aleshores* L_1 *és estructural.* ■

Com que $\mathsf{L}_S = \mathsf{L}_{4m}(\mathfrak{Fo})$ és la lògica projectivament generada des de L_{4m} per $Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{M}_{4m})$ tinc:

5.22 COROL.LARI. L_S *és estructural.* ■

5.23 DEFINICIÓ. θ *congruència de l'àlgebra* $\mathfrak{A}$ *és* **plenament invariant** *si per qualsevol* $\sigma \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ *i* $\forall x, y \in A$ $(x, y) \in \theta \Rightarrow (\sigma(x), \sigma(y)) \in \theta$.

5.24 PROPOSICIÓ. *Si* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ *és LQMT estructural aleshores* $\theta_{\mathbf{C}}$ *és una congruència plenament invariant.*

DEMOSTRACIÓ: $\theta_{\mathbf{C}}$ és congruència per 3.7, i per altra banda $(x, y) \in \in \theta_{\mathbf{C}}$ ssi $\mathbf{C}(x) = \mathbf{C}(y)$ ssi $x \in \mathbf{C}(y)$ i $y \in \mathbf{C}(x)$ ssi $\forall \sigma \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ $\sigma(x) \in \mathbf{C}(\sigma(y))$ i $\sigma(y) \in \mathbf{C}(\sigma(x))$ ssi $(\sigma(x), \sigma(y)) \in \theta_{\mathbf{C}}$. ■

El següent teorema demostra que la lògica sentencial L_S només té dues extensions pròpies que siguin alhora estructurals i LMT.

5.25 TEOREMA. *Hi ha exactament tres LMTs estructurals i no trivials sobre $\mathfrak{F}o$.*

DEMOSTRACIÓ: És un resultat conegut d'àlgebra universal que hi ha un isomorfisme dual entre el reticle de les varietats d'àlgebres d'un determinat tipus i les congruències plenament invariants de l'àlgebra dels termes del mateix tipus (capítol IV de [C]). La varietat associada a θ_{4m} és la de les AMTs ja que si $p,q \in Fo$, aleshores $(p,q) \in \theta_{4m}$ si i només si $\mathbf{C}_{4m}(p) = \mathbf{C}_{4m}(q)$ si i només si $\forall h \in Hom(Fo, \mathfrak{M}_{4m})$ $h(p) = h(q)$ si i només si l'equació $p \approx q$ és vàlida en $\mathfrak{M}_{4m}$. L'isomorfisme esmentat a l'inici de la demostració farà correspondre a les congruències plenament invariants de $[\theta_{4m}, \nabla]$ les subvarietats de les AMTs, que recordeu que són les mateixes AMTs, les àlgebres de Boole i les ATL, per tant només hi ha en $[\theta_{4m}, \nabla]$ tres congruències plenament invariants pròpies, que pel corol.lari 4.18 es corresponen amb tres LMTs que són respectivament les projectivament generades per tots els homomorfismes de Fo a $\mathfrak{M}_{4m}$, $\mathfrak{M}_{3m}$ i $\mathfrak{B}_2$ (prenent en les tres àlgebres el sistema clausura de tots els filtres) i per tant (proposició 5.21) són estructurals i a més sublògiques de $\mathbf{L}_S$.■

He vist que sobre $\mathbf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ LQMT $\mathbf{C}(\emptyset) \in \mathcal{C}^+_{4m}$, és a dir que si $\phi \in \mathbf{C}(\emptyset)$ aleshores $\Box\phi \in \mathbf{C}(\emptyset)$. La presentació d'aquesta propietat sobre les lògiques sentencials com una regla

$$\frac{\vdash_S \phi}{\vdash_S \Box\phi}$$

s'anomena **regla feble de la necessitat** i la seva lectura lògica és que si una proposició és **teorema** (consequència d'un conjunt buit de fórmules) aleshores la necessitat d'aquesta proposició també ho és. L'enfortiment natural de $\mathbf{C}(\emptyset) \in \mathcal{C}^+_{4m}$ és $\mathbf{C}(X) \in \mathcal{C}^+_{4m}$ $\forall X \in A$ (o bé $\Box\mathbf{C}(X) \subseteq \subseteq \mathbf{C}(X)$) que com a regla s'anomena **regla forta de la necessitat (N)** la qual no restringeix la seva aplicació als teoremes si no que es aplicable a les consequències de qualsevol conjunt, així doncs la regla forta de la necessitat és:

$$(N) \quad \frac{\Delta \vdash_S \phi}{\Delta \vdash_S \Box\phi}$$

Les LQMTs no satisfan aquesta regla, per exemple en L_{4m} es té que $a \in \mathbf{C}(a)$ i en canvi $0 = \Box a \notin \mathbf{C}(a)$.

El pròxim objectiu és trobar les lògiques que s'obtenen a l'afegir a les LQMT la regla (N). Aquestes lògiques les anomenaré **lògiques quasi modal tetravalents normals (LQMTN).**

5.26 DEFINICIÓ. *Sigui* $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ *LQMT amb base* $\mathcal{E}$ *i sigui* $\mathcal{D}$ *el sistema clausura generat per* $\mathcal{E}^+ = \{P \cap \Phi(P)\,;\, P \in \mathcal{E}\}$. *Anomeno lògica quasi modal tetravalent normal a la lògica* $\mathsf{L}^N = (\mathfrak{A}, \mathbf{D})$. *Si* $\mathbf{D}$ *és finitari diré que* L^N *és* **lògica modal tetravalent normal (LMTN).**

El sistema clausura $\mathcal{D}$ és l'introduït en la proposició 3.22 com $\mathcal{C}^+$. Com que $\Box\mathbf{C}^+(X) \subseteq \mathbf{C}^+(X)$, les LQMTN satisfan (N). Així doncs, sobre cada $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ tinc dues lògiques associades, $\mathsf{L}^+ = (\mathfrak{A}^+, \mathbf{C}^+)$ i $\mathsf{L}^N = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}^+)$ amb el mateix sistema clausura. Els enunciats que segueixen són el resultat d'un estudi paral.lel al fet per les LQMT referit ara a les LQMTN.

5.27 TEOREMA (DEL BILÒGIC). *Per una lògica* $\mathsf{L}^N = (\mathfrak{A}, \mathbf{D})$ *són equivalents:*

(1) $L^N = (\mathfrak{A}, \mathbf{D})$ *és LQMTN;*

(2) *Existeix un morfisme bilògic entre* L^N *i* $\mathsf{L}' = (\mathfrak{A}', \mathcal{F}')$ *on* $\mathfrak{A}'$ *és una AMT i* $\mathcal{F}'$ *és un sistema clausura generat per una família de filtres oberts maximals (maximals dins dels filtres oberts).*

DEMOSTRACIÓ: (1) $\Rightarrow$ (2) Per definició existeix una LQMTN $L = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ tal que $\mathbf{C}^+ = \mathbf{D}$. Pel teorema 3.7 existeix un morfisme bilògic, π, entre L i $\mathsf{L}'' = (\mathfrak{A}'', \mathcal{F}'')$ on $\mathfrak{A}''$ és AMT i $\mathcal{F}''$ està generada per una família de filtres primers Φ-tancada, $\mathcal{E}''$. Si prenc $\mathcal{F}'$ igual al sistema clausura generat per $\mathcal{E}' = \{P \cap \Phi(P)\,;\, P \in \mathcal{E}''\}$, aleshores π és també un morfisme bilògic entre L^N i $\mathsf{L}' = (\mathfrak{A}'', \mathcal{F}')$. Com que $\mathcal{E}'$ està formada per filtres oberts maximals (pel corol.lari 4.21) la demostració està acabada.

(2) $\Rightarrow$ (1) Pel corol.lari 4.21 la família de filtres oberts maximals $\mathcal{E}'$ que genera $\mathcal{F}'$ és un subconjunt de $\{P \cap \Phi(P)\,;\, P \in \mathcal{P}\}$ ($\mathcal{P}$ és el conjunt de tots els filtres primers d' $\mathfrak{A}$). Si sobre $\mathfrak{A}'$ considero el sistema clausura $\mathcal{F}''$ generat per la família Φ-tancada $\mathcal{E}'' = \{P \in \mathcal{P}\,;\, P \cap \Phi(P) \in \mathcal{E}'\}$ aleshores $\mathbf{L}'' = (\mathfrak{A}', \mathcal{F}'')$ és LQMT i genera projectivament a partir del mateix morfisme bilògic una lògica $\mathbf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ que serà LQMT (proposició 3.5) i que tindrà per base $\mathcal{E} = \{\pi^{-1}(P)\,;\, P \in \mathcal{E}''\}$. Com que $\mathcal{E}^+ = \{\pi^{-1}(P) \cap \Phi(\pi^{-1}(P))\,;\, P \in \mathcal{E}''\} = \{\pi^{-1}(T)\,;\, T \in \mathcal{E}'\}$ és una base de $\mathcal{D}$ he acabat. ■

La condició de maximalitat en la segona equivalència del teorema anterior és necessària; considereu l'exemple de la lògica $\mathbf{L}$ formada per l'àlgebra de Boole de quatre elements amb els sistema clausura $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{1, a, \neg a, 0\}\}$ i amb $\Box x = x \;\; \forall x$. La identitat és un morfisme bilògic que satisfà 5.27.2 si excloc la condició de maximalitat de la base, doncs $\mathcal{C}$ no té cap base de maximals, i en canvi $\mathbf{L}$ no és LMTN doncs en general sobre una àlgebra de Boole al ser $\Phi(P) = P$ per qualsevol filtre primer P tota LMTN és LMT i a l'inrevés; el sistema clausura anterior no fa de l'àlgebra de Boole de quatre elements una LMT, ja que la relació que té associada no és congruència doncs identifica 0 i a i no identifica les seves negacions.

Com és natural, si la lògica normal és finitària el morfisme bilògic ha de ser entre ella i una altra lògica finitària. El següent resultat és conseqüència immediata del teorema anterior i del teorema 3.8:

5.28 Teorema. *Per una lògica* $\mathbf{L}^N = (\mathfrak{A}, \mathbf{D})$ *són equivalents:*

(1) $L^N = (\mathfrak{A}, \mathbf{D})$ *és LMTN;*

(2) *Existeix un morfisme bilògic entre* $\mathbf{L}^N$ *i* $\mathbf{L}' = (\mathfrak{A}', \mathcal{F}')$ *on* $\mathfrak{A}'$ *és una AMT i* $\mathcal{F}'$ *són tots els filtres oberts.* ■

5.29 Proposició. *Si* $\mathbf{L}^N$ *és LQMT amb base* $\mathcal{E}^+$, *aleshores* $\forall T \in \mathcal{E}^+$, $\exists h \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$; $T = h^{-1}(\{1\})$.

Demostració: T és de la forma $P \cap \Phi(P)$ per algun $P \in \mathcal{E}$, i per la proposició 4.1 existeix $h \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ tal que $P = h^{-1}(F_1)$ d'on $\Phi(P) = h^{-1}(F_2)$ i per tant $P \cap \Phi(P) = h^{-1}(F_1 \cap F_2) = h^{-1}(\{1\})$.■

Anomeno L_{4mN} a la LMTN definida sobre $\mathfrak{M}_{4m}$ és a dir a la que té per sistema clausura $\{1, M_{4m}\}$. Tinc l'anàleg del teorema 4.2 referit a les lògiques normals:

5.30 TEOREMA. *$\mathsf{L}^N = (\mathfrak{A}, \mathbf{D})$ és LQMTN si i només si existeix $\mathcal{H} \subseteq$ $\subseteq Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ que genera L^N projectivament des de L_{4mN}.*

DEMOSTRACIÓ: Si $\mathsf{L}^N = (\mathfrak{A}, \mathbf{D})$ és LQMTN aleshores existeix $\mathsf{L} =$ $= (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ LQMT amb $\mathbf{C}^+ = \mathbf{D}$. Pel teorema 4.2 existeix $\mathcal{H} \subseteq$ $\subseteq Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ que genera projectivament L des de L_{4m} i per tant L^N des de L_{4mN}.

El mateix teorema 4.2 demostra que qualsevol $\mathcal{H} \subseteq Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ genera projectivament una LQMT $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ des de L_{4m}, i per tant des de L_{4mN} generarà $\mathsf{L}^N = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}^+)$ LQMTN. ■

5.31 PROPOSICIÓ. *L'aplicació*

$$N : \{LQMT \text{ sobre } \mathfrak{A}\} \longrightarrow \{LQMTN \text{ sobre } \mathfrak{A}\}$$
$$\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathsf{L}^N = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}^+)$$

és bijectiva.

DEMOSTRACIÓ: Per la definició de LQMTN l'aplicació N és epijectiva. Si $\mathsf{L} \neq \mathsf{L}'$ aleshores existixen, per exemple, P i $\Phi(P)$ que estan en la base de L i no en la base de L', però aleshores $P \cap \Phi(P)$ estarà en la base de L^N i no en la base de L'^N (doncs pel corol.lari 4.22 no pot ser $P \cap \Phi(P) = P' \cap \Phi(P')$ amb $P \neq P'$ i $\Phi(P) \neq \Phi(P')$) d'on $\mathsf{L} \neq \mathsf{L}'$ pel fet que les bases estan formades per elements maximals. ■

Si la família d'homomorfismes que genera $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ és adequada per obtenir una lògica finitària aleshores també fa que $\mathsf{L}^N = (\mathfrak{A}, \mathcal{C}^+)$ sigui LMTN, doncs el fet que $\mathcal{C}$ sigui algebraic implica que $\mathcal{C}^+$ també ho sigui (es segueix fàcilment del teorema 1.5). La següent proposició demostra que el conjunt $\{$ LMT sobre $\mathfrak{A}\}$ és un reticle, que és isomorf a $\{$ LMT sobre $\mathfrak{A}\}$ i en particular estableix el fet que si $\mathcal{C}^{+}$ és algebraic, aleshores també $\mathcal{C}$ ho és.

5.32 PROPOSICIÓ. *L'aplicació*

$$
\begin{aligned}
N: \{LMT \textit{ sobre } \mathfrak{A}\} &\longrightarrow \{LMTN \textit{ sobre } \mathfrak{A}\} \\
\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}) &\longrightarrow \mathsf{L}^{N} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}^{+})
\end{aligned}
$$

és un isomorfisme de reticles.

DEMOSTRACIÓ: Si $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ és LMT alehores L^{N} és una lògica finitària. Per altra banda si L^{N} és LMTN aleshores $\mathsf{L}^{+} = (\mathfrak{A}^{+}, \mathbf{C}^{+})$ és obviament finitària i també clàssica. Pel teorema 1.30 $\mathcal{C}^{+} = \{T \in \in \mathcal{C}_{4m}^{+} \,;\, \mathbf{C}^{+}(\emptyset) \subseteq T\}$ d'on $\mathcal{C} = \{T \in \mathcal{C}_{4m} \,;\, \mathbf{C}(\emptyset) \subseteq T\}$ ja que els tancats oberts d'aquest conjunt són els elements de $\mathcal{C}^{+}$ (per 4.9.1 $\mathbf{C}^{+}(\emptyset) = = \mathbf{C}(\emptyset)$) i per la proposició anterior només hi ha un sistema clausura amb aquesta propietat. El fet de ser $\mathcal{C}$ algebraic (teorema 4.6) completa la demostració que N és una aplicació bijectiva.

Per tal de demostrar que N és morfisme de reticles és suficient comprovar que si $\mathsf{L}_{i} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C}_{i})$ $(i = 1,2)$ són LMT aleshores $(\mathbf{C}_{1} \wedge \mathbf{C}_{2})^{+} = \mathbf{C}_{1}^{+} \wedge \mathbf{C}_{2}^{+}$ i $(\mathbf{C}_{1} \vee \mathbf{C}_{2})^{+} = \mathbf{C}_{1}^{+} \vee \mathbf{C}_{2}^{+}$ amb la qual cosa també es demostra que $\{$ LMTN sobre $\mathfrak{A}\}$ és un reticle. Pel fet de ser $(\mathfrak{A}, \mathbf{C}_{1} \vee \mathbf{C}_{2})$ i $(\mathfrak{A}, \mathbf{C}_{1} \wedge \mathbf{C}_{2})$ LMTs, $(\mathfrak{A}^{+}, (\mathbf{C}_{1} \vee \mathbf{C}_{2})^{+})$ i $(\mathfrak{A}^{+}, (\mathbf{C}_{1} \wedge \mathbf{C}_{2})^{+})$ són lògiques clàssiques. Per altra banda, pel fet que $\mathsf{L}_{i} = (\mathfrak{A}^{+}, \mathbf{C}_{i}^{+})$ $(i = 1,2)$ siguin lògiques clàssiques també ho són $(\mathfrak{A}^{+}, \mathbf{C}_{1}^{+} \wedge \mathbf{C}_{2}^{+})$ i $(\mathfrak{A}^{+}, \mathbf{C}_{1}^{+} \vee \mathbf{C}_{2}^{+})$ (vegeu el comentar després de 3.13) i per acabar la demostració és suficient comprovar que $(\mathbf{C}_{1}^{+} \vee \mathbf{C}_{2}^{+})(\emptyset) = (\mathbf{C}_{1} \vee \mathbf{C}_{2})^{+}(\emptyset)$ i $(\mathbf{C}_{1}^{+} \wedge \mathbf{C}_{2}^{+})(\emptyset) = (\mathbf{C}_{1} \wedge \mathbf{C}_{2})^{+}(\emptyset)$ però

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{C}_{1}^{+} \vee \mathbf{C}_{2}^{+})(\emptyset) = \mathbf{C}_{4m}^{+}(\mathbf{C}_{1}^{+}(\emptyset) \cap \mathbf{C}_{2}^{+}(\emptyset)) = \mathbf{C}_{4m}(\mathbf{C}_{1}^{+}(\emptyset) \cap \mathbf{C}_{2}^{+}(\emptyset)) = \\
&= \mathbf{C}_{4m}(\mathbf{C}_{1}(\emptyset) \cap \mathbf{C}_{2}(\emptyset)) = (\mathbf{C}_{1} \vee \mathbf{C}_{2})(\emptyset) = (\mathbf{C}_{1} \vee \mathbf{C}_{2})^{+}(\emptyset) \quad \text{i} \\
&(\mathbf{C}_{1}^{+} \wedge \mathbf{C}_{2}^{+})(\emptyset) = \mathbf{C}_{1}^{+}(\emptyset) \cap \mathbf{C}_{2}^{+}(\emptyset) = \mathbf{C}_{1}(\emptyset) \cap \mathbf{C}_{2}(\emptyset) = (\mathbf{C}_{1} \wedge \mathbf{C}_{2})(\emptyset) = \\
&= (\mathbf{C}_{1} \wedge \mathbf{C}_{2})^{+}(\emptyset)
\end{aligned}
$$

pel fet de ser $\mathbf{C}_i^+(\emptyset) = \mathbf{C}_i(\emptyset)$ $(i = 1,2)$ i $\mathbf{C}_{4m}^+(\Box X) = \mathbf{C}_{4m}(X)$ si $\Box X \subseteq X$ (que es dedueix fàcilment de 3.2.2 pel fet de ser $\mathbf{C}_{4m}^+(\Box X) =$ $= \mathbf{C}_{4m}^+(X)$).■

5.33 PROPOSICIÓ. $\mathsf{L}^N = (\mathfrak{A}, \mathbf{D})$ *és LMTN si i només si* $\exists X \subseteq A$ *tal que* $\mathbf{D} = \mathbf{C}_X^+$.

DEMOSTRACIÓ: Si L^N és LMTN aleshores $\mathbf{D} = \mathbf{C}^+$ per cert operador $\mathbf{C}$ sobre $\mathfrak{A}$ i $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \mathbf{C})$ és LMT (proposició anterior) d'on $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\mathbf{C}(\emptyset)}$ i $\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}_{\mathbf{C}(\emptyset)}^+$.
El recíproc és per definició de LMTN i pel fet que $\mathbf{C}_X$ (i per tant $\mathbf{C}_X^+$) és finitàri. ■

Si anomeno $\mathsf{L}_{4mN}(\mathfrak{A})$ a la lògica projectivament generada des de L_{4mN} per $Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$ tinc:

5.34 PROPOSICIÓ. $\mathsf{L}_{4mN}(\mathfrak{A})$ *és la LQMTN més fina sobre* $\mathfrak{A}$, *i a més és finitària i per tant és també la LMTN més fina sobre* $\mathfrak{A}$. ■

Observeu que la mera adjunció de la regla (N) com un nou seqüent als de la definció 5.3 no dóna un càlcul per a L_{4mN} ja que, com és prou conegut, $(\wedge \vdash_S)$ i $(\vdash_S \wedge)$ equivalen a PD i L_{4mN} no té aquesta propietat (en l'AMT lliure resultat de fer el quocient de $Form$ per la relació associada a C_{4m}^+ l'equació $\Box(a \vee b) = \Box a \vee \Box b$ no és sempre vàlida). El fet que l'operador $\mathbf{C}^+$ d'una LMTN estigui associat a l'operador $\mathbf{C}$ de la respectiva LMT per la relació $\mathbf{C}^+ = \mathbf{C} \circ \Box$ motiva la següent

5.35 DEFINICIÓ. *Anomeno* $\mathsf{L}_{SN} = (\mathfrak{Fo}, \vdash_N)$ *a la lògica definida sobre* $\mathfrak{Fo}$ *per* $\Delta \vdash_N \phi$ *si i només si existeix* Δ_0 *finit,* $\Delta_0 \subseteq \Delta$ *tal que* $\Box\Delta_0 \vdash \phi$ *és derivable en el càlcul de seqüents de* L_S *de la definició 5.3 per* $\Delta \subseteq Form$ *i* $\phi \in Form$.

5.36 TEOREMA. $(\mathfrak{A}, \vdash_N)$ *és la mínima LMTN sobre* $\mathfrak{A}$.

DEMOSTRACIÓ: Per definició $X \vdash_N x$ si i només si $\Box X \vdash_S x$ si i només si $x \in \mathbf{C}_{4m}(\Box X) = \mathbf{C}_{4m}^+(X)$ i com que $\mathbf{C}_{4m}$ dóna lloc a la LQMT més fina, $\mathbf{C}_{4m}^{+}$ dóna lloc a la LQMTN més fina, que en particular és LMTN. ■

5.37 COROL.LARI. $\mathsf{L}_{SN} = \mathsf{L}_{4mN}(\mathfrak{F}o)$ *i* $\mathsf{L}_{SN} = (\mathsf{L}_S)^N$.

DEMOSTRACIÓ: Pel teorema 5.36, la proposició 5.34 i el teorema 5.8 ■

Puc enunciar resultats anàlegs als de les proposicions 5.10, 5.11 i 5.13 referents ara a les semàntiques de matrius per a L_{SN} ; les demostracions són similars a les ja fetes.

5.38 PROPOSICIÓ. *La família de matrius* $\{(\mathfrak{A}, \{1_{\mathfrak{A}}\})\}$ *és una semàntica de matrius per a* L_{SN}.■

5.39 PROPOSICIÓ. *La família formada unicament per la matriu* $\{(\mathfrak{M}_{4m}, \{1\})\}$ *és una semàntica de matrius per a* L_{SN}.■

5.40 PROPOSICIÓ. *Sigui* $\mathfrak{A}$ *AMT i* $\{0, c, d, 1\} \subseteq A$ *el conjunt suport d'una subàlgebra d'*$\mathfrak{A}$ *isomorfa a* $\mathfrak{M}_{4m}$ *i sigui* $T \in \mathcal{P}$ *amb* $c \in T$ *i* $d \notin T$, *aleshores la família* $\{(\mathfrak{A}, T \cap \Phi(T))\}$ *és una semàntica de matrius per a* L_{SN}.■

A continuació introdueixo breument els conceptes de lògica algebrizable ([BP2]) i de lògica protoalgebraica ([BP1]) i comprovo que les lògiques L_S i L_{SN} són protoalgebraiques, i que la segona, a més, és algebrizable mentre que la primera no.

5.41 DEFINICIÓ ([BP2]). *Sigui* K *una classe d'àlgebres del mateix tipus.* $\models_{\mathsf{K}}$ *és la relació que es compleix entre un conjunt* Γ *d'equacions i una equació* $\phi \approx \psi$, *simbolicament* $\Gamma \models_{\mathsf{K}} \phi \approx \psi$, *si i només si per qualsevol* $\mathfrak{A} \in \mathsf{K}$ *i tota interpretació* $\bar{a}$ *de les variables de* $\Gamma \cup \{\phi \approx \psi\}$ *com a elements d'*$\mathfrak{A}$ $\xi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = \eta^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$ *per tota* $\xi \approx \eta \in \Gamma$ *implica* $\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$ *(on* $\psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$ *és l'element d'*$\mathfrak{A}$ *resultant d'interpretar les variables de* ψ *per* $\bar{a}$ *).*

5.42 DEFINICIÓ ([BP2]). *Sigui* $\mathsf{L} = (\mathfrak{F}o, \vdash)$ *una lògica estructural i* K *una classe d'àlgebres.* K *és una* **semàntica algebraica** *per a* L *si existeix un nombre finit d'equacions* $\delta_i(p) \approx \epsilon_i(p)$, $i < n$ *amb una variable lliure* p *tal que per tota* $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq Form$ *i per cada* $j < n$

$$\Gamma \vdash \phi \Leftrightarrow \{[\delta_i[\psi/p] \approx \epsilon_i[\psi/p] \ : \ i < n \ \psi \in \Gamma\} \models_{\mathsf{K}} \delta_j[\phi/p] \approx \epsilon_j[\phi/p]$$

(On $\delta_i[\psi/p]$ *és la fórmula obtinguda a partir de* δ_i *canviant totes les aparicions de* p *per* ψ *).*
El conjunt $\{\delta_i \approx \epsilon_i, \, i < n\}$ *s'anomena conjunt d'equacions definitòries per* $\vdash$ *i* K.

5.43 TEOREMA ([BP2]). *Sigui* $\mathsf{L} = (\mathfrak{F}o, \vdash)$ *una lògica estructural,* K *una classe d'àlgebres i* $\delta_i(p) \approx \epsilon_i(p)$ *un sistema d'equacions en una variable. Són equivalent:*

(1) K *és una semàntica algebraica per a* L *amb equacions definitòries* $\delta_i(p) \approx \epsilon_i(p)$.

(2) *La classe* $\mathbf{M} = \{(\mathfrak{A}, F_{\mathfrak{A}}^{\delta \approx \epsilon}) \ : \ \mathfrak{A} \in \mathsf{K})\}$ *és una semàntica de matrius per a* L *on* $F_{\mathfrak{A}}^{\delta \approx \epsilon} = \{a \in A \ : \ \delta^{\mathfrak{A}}(a) = = \epsilon^{\mathfrak{A}}(a)\}$.■

5.44 PROPOSICIÓ. *La varietat de les AMTs és una semàntica algebraica per a* L_{SN} *amb equació definitòria* $p \approx \top$ *on* $\top = \neg\bot$.

DEMOSTRACIÓ: Si $\mathfrak{A}$ és una AMT qualsevol aleshores $F_{\mathfrak{A}}^{p \approx \top} = \{1_{\mathfrak{A}}\}$ i per la proposició 5.38 la família de matrius $(\mathfrak{A}, \{1_{\mathfrak{A}}\})$ és una semàntica de matrius per a L_{SN} la qual cosa equival, pel teorema 5.43, a dir que la varietat de les AMTs és una semàntica algebraica per a L_{SN} amb equació definitòria $p \approx \top$.■

5.45 DEFINICIÓ ([BP2]). *Sigui* $\mathsf{L} = (\mathfrak{F}o, \vdash)$ *una lògica estructural i* K *una semàntica algebraica per a* L *amb equacions definitòries* $\{\delta_i \approx \epsilon_i \quad i < n\}$. K *és una* **semàntica algebraica equivalent** *per a* L *si existeix un sistema finit* $\Delta_j(p, q)$ *amb* $j < m$ *de fórmules amb dues variables tal que per qualsevol equació* $\phi \approx \psi$ *i qualsevols* $j < m$, $i < n$

(1) $\phi \approx \psi \models_{\mathsf{K}} \delta_i(\phi \Delta_j \psi) \approx \epsilon_i(\phi \Delta_j \psi)$;

$$(2) \qquad \delta_i(\phi\Delta_j\psi) \approx \epsilon_i(\phi\Delta_j\psi) \models_{\mathbf{K}} \phi \approx \psi$$

El conjunt Δ_j, $j < m$ *s'anomena sistema de fórmules d'equivalència per a* L *i* K.

5.46 DEFINICIÓ ([BP2]). *Una lògica* $\mathsf{L} = (\mathfrak{Fo}, \vdash)$ *és* **algebrizable** *si té una semàntica algebraica equivalent.*

El corol.lari 4.8 de [BP2] estableix que una condició suficient per a que una lògica $\mathsf{L} = (\mathfrak{A}, \vdash)$ sigui algebrizable és que existeixi un sistema $\Lambda_i \quad 0 < i < n$ de fórmules en dues variables que satisfaci per tot $i < n$:

i) $\vdash \phi\Lambda_i\phi$;
ii) $\phi\Lambda_i\psi \vdash \psi\Lambda_i\phi$;
iii) $\phi\Lambda_i\psi, \psi\Lambda_i\nu \vdash \phi\Lambda_i\nu$;
iv) $\phi_0\Lambda_i\psi_0, ., \phi_{n-1}\Lambda_i\psi_{n-1} \vdash \omega(\phi_0, ., \phi_{n-1})\Lambda_i\omega(\psi_0, ., \psi_{n-1})$ per cada conectiva ω d'ordre n ;
v) $\phi, \phi\Lambda_i\psi \vdash \psi$;
vi) $\phi, \psi \vdash \phi\Lambda_i\psi$.

En aquestes condicions, Λ_i i $p \approx p\Lambda_i p$ són les fórmules d'equivalència i les equacions definitòries respectivament.

5.47 TEOREMA. L_{SN} *és algebrizable prenent* $\Lambda = \{\dagger\}$.

DEMOSTRACIÓ: $\mathbf{C}_{4m}$ i $\mathbf{C}^+_{4m}$ són els operadors clausura de L_S i L_{SN} respectivament, com que $\mathbf{C}^+_{4m}(X) = \mathbf{C}_{4m}(\Box X)$ tinc $X \vdash_N \phi$ si i només si $\Box X \vdash_S \phi$ si i només si per tot $h \in Hom(\mathfrak{Fo}, \mathfrak{M}_{4m})$ $h(\phi) \in \in \mathbf{F}(h(\Box X)) = \mathbf{F}(\Box h(X)) = \mathbf{F}^+(h(X))$. Si $h(\phi) = \alpha$, $h(\psi) = \beta$ i $h(\nu) = \gamma$ aleshores i), ii) i iii) equivalen a $\alpha \dagger \alpha = 1$, $\alpha \dagger \beta = \beta \dagger \alpha$ i $(\alpha \dagger \beta) \wedge (\beta \dagger \gamma) \leq (\alpha \dagger \gamma)$ que apareixen en l'apartat A de la demostració 2.19. iv) es redueix a comprovar les equacions que apareixen en l'apartat B) de la mateixa demostració. v) i vi) són consequència del fet que $\Box a \wedge (a \dagger b) \leq b$ i $\Box a \wedge \Box b \leq a \dagger b$ que es poden comprovar immediatament a partir de la taula de $\dagger$. Per tant $\{\dagger\}$ és la fórmula d'equivalència i $p \approx (p \dagger p)$ l'equació definitòria. ■

En la demostració he usat el fet que $\alpha \dagger \beta$ és obert en $\mathfrak{M}_{4m}$ i que en L_S tenen les mateixes consequències $\Box\phi$ i $\Box(\Box\phi)$ per qualsevol fórmula ϕ (degut al fet que en una AMT $\Box^2 = \Box$). Observeu que $p \approx p \dagger p$ i $p \approx \top$ són equivalents sobre la classe de les AMTs en el sentit que per qualsevol interpretació de la variable p com un element α d'una AMT, $\alpha = \alpha \dagger \alpha$ si i només si $\alpha = 1$ (1 és la interpretació de $\top$ en l'AMT), per tant l'equació definitòria de L_{SN} la puc escriure $p \approx \top$.

Observeu que pel fet de ser $\alpha \dagger \beta = \Box(\alpha \dagger \beta)$ les condicions i), ii), iii) i iv) es compleixen posant $\vdash_S$ en lloc de $\vdash_N$. També és cert que $\phi, \phi \dagger \psi \vdash_S \psi$ doncs per 2.17 $(\alpha \dagger \beta) \wedge \alpha = (\alpha \dagger \beta) \wedge \beta$ o sigui $(\alpha \dagger \beta) \wedge \beta \leq \alpha$, però en canvi $\phi, \psi \vdash_S \phi \dagger \psi$ no és cert doncs en $\mathfrak{M}_{4m}$ és $0 = 1 \dagger a \notin \mathbf{F}(a \wedge 1) = \{a, 1\}$, de fet:

5.48 PROPOSICIÓ. L_S *no és algebrizable i per tant en particular la varietat de les AMTs no és una semàntica algebraica equivalent per a* L_S.

Per a la demostració necessito la definició d'operador de Leibniz:

5.49 DEFINICIÓ. $\theta \in Con(\mathfrak{A})$ *és compatible amb* $F \subseteq A$ *si* $a \in F$ *i* $(a,b) \in \theta$ *implica* $a \in F$. *La* **congruència de Leibniz** *en* $\mathfrak{A}$ *sobre* F, $\Omega_{\mathfrak{A}} F$, *és la més gran congruència d'*$\mathfrak{A}$ *compatible amb* F. **L'operador de Leibniz,** $\Omega_{\mathfrak{A}}$ *és l'aplicació de* $\mathcal{P}(A)$ *en* $Con(\mathfrak{A})$ *que associa a cada* $F \subseteq A$ *la seva congruència de Leibniz.*

DEMOSTRACIÓ: Pel teorema 5.1 de [BP2] una quasivarietat K és una semàntica algebraica equivalent per a L_S si i només si per a qualsevol àlgebra $\mathfrak{A}$ l'operador de Leibniz $\Omega_{\mathfrak{A}}$ és un isomorfisme entre els L_S-filtres d'$\mathfrak{A}$ i les K- congruències d'$\mathfrak{A}$. Considereu l'àlgebra $\mathfrak{M}_{4m}$ i recordeu que només té dues congruències, la identitat i $\nabla_{M_{4m}}$. F_1 i F_2 són L_S-filtres i $\Omega_{\mathfrak{A}}(F_1) = \Omega_{\mathfrak{A}}(F_2) = \Delta_{M_{4m}}$, la identitat, és a dir $\Omega_{\mathfrak{A}}$ no és injectiva. ■

5.50 DEFINICIÓ ([BP1]). *Sigui* $\Gamma \subseteq Form$. *Dues fórmules* α *i* β *són* Γ**- equivalents** *si per qualsevol* $\gamma \in Form$ *i per qualsevol variable* x

de γ es té $\Gamma \vdash \gamma[\alpha/x]$ si i només si $\Gamma \vdash \gamma[\beta/x]$.

Intuitivament, dues fórmules són Γ-equivalents si no poden ser distingides des de Γ.

5.51 DEFINICIÓ ([BP1]). *Dues fórmules α i β són* **Γ-interderivables** *si $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ si i només si $\Gamma, \beta \vdash \alpha$.*

5.52 DEFINICIÓ ([BP1]). *Una lògica $(\mathfrak{Fo}, \vdash)$ és protoalgebraica si i només si per tot $\Gamma \subseteq Form$, qualsevol parella de fórmules Γ-equivalents són Γ-interderivables.*

Es demostra en [BP1] que tota lògica algebrizable és protoalgebraica, per tant L_{SN} ho és.

En el lema 2.9 de [BP1] es demostra que una condició necessària per a que una lògica $(\mathfrak{Fo}, \vdash)$ sigui protoalgebraica és que existeixi un nombre finit $\Lambda_i(x,y)$ $i = 0, \ldots, n-1$ de fórmules en dues variables que satisfacin les següents propietats:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \vdash \Lambda_i[\alpha/x, \alpha/x], \quad i = 0, \ldots, n-1; \\ \text{ii)} & \alpha, \{\Lambda_i[\alpha/x, \beta/y] : i = 0, \ldots, n-1\} \vdash \beta \end{array}$$

per qualsevol $\alpha, \beta \in Form$. Posteriorment, W. Blok ha provat que aquesta condició és suficient si admetem $\Lambda \neq \emptyset$ (comunicació al seminari de lògica).

5.53 PROPOSICIÓ. *$\mathsf{L}_S = (\mathfrak{Fo}, \vdash_S)$ és protoalgebraica.*

DEMOSTRACIÓ: $\Lambda(x,y) = x \dagger y$ satisfà les dues condicions anteriors, doncs en $\mathfrak{M}_{4m}$ és $x \dagger x = 1$ i $x \wedge (x \dagger y) \leq y$ $\forall x, y \in M_{4m}$ per 2.17.4 i 2.17.7. ■

Les AMTS són un exemple de lògiques protoalgebraiques i **autoextensionals** (la relació associada al sistema clausura és congruència) i que en canvi no són algebrizables. Són també un exemple de lògiques no algebrizables que tenen associades una classe de lògiques (les normals) que si són algebrizables, situació similar (però dual) a la que es produeix en les àlgebres de Lukasiewicz infinit-valents estudiades per T.Torrens i V.Verdú, aquestes lógiques són algebrizables (amb semàntica algebraica equivalent les àlgebres de Wajsberg) i tenen una versió feble no algebrizable.

Les lògiques més estretament relacionades amb les AMTs són les LMTNs (les més febles) i potser són les lògiques que més propiament haurien de denominar-se LMTs, però aleshores les lògiques fortes haurien de ser anomenada LMTs no normals, denominació sens dubte adequada però incomoda, per tant, com heu vist, he preferit afegir l'adjectiu "normal" a les lògiques febles en lloc de "no normal" a les lògiques fortes.

Per acabar voldria comentar que el calificatiu "modal" en el nom de les lògiques estudiades és degut més a la intenció de batejar a les lògiques amb un nom semblant al de les AMTs que a la idea de destacar un discutible caràcter modal de les lògiques, discutible perquè l'operador modal és **veritatiu funcional**; el seu valor de veritat està completament determinat pel valor de veritat de l'expressió a la que afecta.

BIBLIOGRAFIA

[B] **D.Becchio** Sur les definitions des algèbres trivalentes de Łukasiewicz données par A. Monteiro *Logique et Analyse,* 16 (1978) 339-344.

[BB] **Bloom,S.L. - Brown,D.J.** Classical Abstract Logics. *Dissertationes Mathematicae*, 102 (1973) 43-51.

[BD] **Balbes,R. - Dwinger,P.** *Distributive laticces.* University of Missouri Press, Columbia (Missouri),1974.

[Be1] **Belnap, N.D. (jr)** A useful four-valued logic, in: **J.M.Dunn and G. Epstein** (eds.), Modern Uses of Multiple-Valued Logic (D. Reidel, 1977) 8-37.

[Be2] **Belnap, N.D. (jr)** How a computer should think, in: **G.Ryle** (ed.), Contemporany Aspects of Philosophy. (Oriel Press,1976) pp. 30-56

[BP1] **Blok,W.J. - Pigozzi,D.** Protoalgebraic Logics. *Studia Logica* XLV,4 (1986) 337-369.

[BP2] **Blok,W.J. - Pigozzi,D.** Algebraizable Logics, *Memoirs of the American Mathematical Society*, 396 (1989).

[BP3] **Blok,W.J. - Pigozzi,D.** Local Deduction Theorems in Algebraic Logics, en **H.Andréka, J.D. Monk and I. Németi,** (eds.), *Algebraic Logic. Proceedings of Budapest 1988 Conference.* (Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, North Holland, Amsterdam, 1990) to appear.

[BP4] **Blok,W.J. - Pigozzi,D.** The Deduction Theorem in Algebraic Logic,*manuscript* to appear.

[BP5] **Blok,W.J. - Pigozzi,D.** Alfred Tarski's work on general metamathematics, *The Journal of Symbolic Logic* 53 (1988), pp 36-50

[BS] **Brown,D.J. - Suszko,R.** Abstracts Logics.*Dissertationes Mathematicae*, 102 (1973) 9-42.

[BuS] **Burris,S.-Sankappannavar,H.P.** *A course in Universal Algebra*, Springer-Verlag,New York,1981.

[C] **Cohn,P.M.** *Universal Algebra*,Harper and Row, New York, London, 1965

[CM] **Cignoli,R. - Monteiro,A.** Boolean elements in Łukasiewicz algebras II *Proc. Japan Acad,* 41 (1965) 676- 680.

[F1] **Fitting,M** Bilattices and the semantics of logic programming. *Journal of Logic Programming* to appear

[F2] **Fitting,M** Bilattices and the theory of truth. *Journal of Philosophical Logic,* 18 (1989) 225-256

[Fo1] **Font,J.M.** Monadicity in topological pseudo-Boolean algebras, in:**Müller,G-Richter,M** (eds.) *Models and sets.* (Lecture Notes in Mathematics, vol 1103, Springer-Verlag, Berlin, 1984) 169-192

[Fo2] **Font,J.M.** On some congruence lattices on a topological Heyting lattice, in:**Czermack-Eigenthaler-Kaiser-Müller- Nobauer** (eds.) *Contributions to General Algebra 5* (Verlag Hölder-Pichler-Tempski, Wien and Teubner Verlag, Stutgart, 1987) 129-137

[FPV] **Font,J.M. - Plà,J. - Verdú,V.** Lògica algebraica: algunos métodos i algunas aplicaciones.*Actas del II Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales.* (Blanes, 1986)

[FR] **Font,J.M. - Rius,M.** A four-valued modal logic arising from Monteiro's last algebras. *Proceedings of the 20th International Symposium on Multiple-Valued logic* (Charlotte, 1990) 85-92

[FV1] **Font,J.M. - Verdú,V.** Abstract characterization of a four-valued logic, in:*Proceedings of the 18th International Symposium on Multiple-Valued Logic.* (Palma de Mallorca, 1988) 389-396.

[FV2] **Font,J.M. - Verdú,V.** A first approach to abstract modal logics. *The Journal of Symbolic Logic,* 54 (1989) 1042-1062.

[FV3] **Font,J.M. - Verdú,V.** Algebraic Logic for classical conjunction and disjunction. Studia Logica, 50 (1991) to appear.

[G] **Grätzer,G.** *Universal Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[L1] **Loureiro,I.** *Àlgebras modais tetravalentes.* Tesi Doctoral, Universitat de Lisboa, 1983.

[L2] **Loureiro,I.** Axiomatitation et propiétés des algebrés modales tétravalentes. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris, Série I,* 295 (1982) 555-557.

[L3] **Loureiro,I.** Prime spectrum of a tetravalent modal algebra. *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 24 (1983) 389- 394.

[L4] **Loureiro,I.** Finitely generated free tetravalent modal algebras. *Discretra Mathematics,* 46 (1983) 41-48.

[L5] **Loureiro,I.** Finite tetravalent modal algebras. *Revista de la Unión Matemática Argentina,* 31 (1984) 187-191.

[L6] **Loureiro,I.** Principal congruences of tetravalent modal algebras. *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 26 (1985) 76- 80.

[L7] **Luoreiro,I.** Homomorfism kernels of a tetravalent modal algebra. *Portugaliae Mathematica,* 39 (1980)

[M1] **Monteiro,A.** Conjuntos graduados de Zadeh. *Técnica*,40 (1978) 11-43.

[M2] **Monteiro,A.** *Álgebras de De Morgan (Curso de Àlgebra de la Lógica III).* 74pp. Unpublished manuscript, Bahía Blanca (Argentina) 1966.

[Mo] **Monteiro,L.** Axiomes indépendants pour les algebres de Łukasiewicz trivalentes.*Bulletin de la Societé des Sciences Mathématiques et Physiques de la R.P. Roumanie,* Nouvelle Série, vol. 7,num.55 (1963) 199-202

[R] **Rasiowa,H.** *An algebraic approach to non-classical logics.* North-Holland, Amsterdan, 1974

[RS] **Rasiowa,H. - Sikorski,R.** *The mathematics of the metamathematics.* P.W.N., Warszawa, 1970

[S] **Szász,G.** Théorie des tréillis.*Monographies Universitaires de Mathématiques,* 36, Dunod, Paris, 1971.

[V] **Verdú,V.** Logics projectively generated from $M = (F_4, \{1\})$ by a set of homomorfisms. *Zeitschrift für Mathematische Logikm und Grundlagen der Mathematik,* 33 (1987) 235-241.

[We] **Werner,H.** *Discriminator Varieties.* (Studien Zur Algebra und ihre Anwendungen, 6) Akademie Verlag, Berlin, 1978.

[Wo] **Wójcicki,R.** *Theory of Logical Calculi. Basic Theory of Consequence Operations.* (Synthese Library, vol. 199) Reidel, Dordrecht 1988.

ÍNDEX