

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de Doctorat: Automàtica, Robòtica i Visió

Aportació al disseny de sistemes de control
basats en models intervalars

Tesi doctoral

Ramon Comasòlivas Font

23/02/2011

Directors: Joseba Quevedo Casin i Teresa Escobet Canal

Índex de continguts

Capítol 1	Introducció.....	7
1.1	Motivació	7
1.2	Objectius.....	8
1.3	Estructura de la memòria.....	9
1.4	Recull de contribucions	10
Capítol 2	Fonaments	11
2.1	Models intervalars	11
2.1.1	Justificació de l'ús de models intervalars	11
2.1.2	Una perspectiva de l'anàlisi intervalar	12
2.1.3	Aproximació a conjunts i les seves propietats	13
2.2	<i>Quantitative Feedback Theory</i> (QFT).....	16
2.2.1	Perspectiva històrica de la tècnica QFT	16
2.2.2	Fonaments de la QFT	16
2.2.2.1	Model de la planta, generació de plantilles i planta nominal	18
2.2.2.2	Definició d'especificacions	20
2.2.2.3	Creació de contorns $B(j\omega)$: bounds	22
2.2.2.4	Síntesi del controlador $G(j\omega)$: loop-shaping	27
2.2.2.5	Síntesi del prefiltrer $F(j\omega)$	28
2.2.2.6	Validació del disseny.....	29
2.2.3	Sistemes discrets.....	30
2.2.4	Resum del control QFT. Temes oberts.....	30
Capítol 3	Especificacions de control.....	35
3.1	Especificacions temporals i freqüencials.....	35
3.1.1	Especificacions en el domini temporal.....	35
3.1.2	Compromís entre les especificacions en el domini freqüencial	38
3.1.3	Relacions entre especificacions temporals i freqüencials.....	39
3.2	Conversió d'especificacions del domini temporal al freqüencial.....	43
3.2.1	Tècnica de Krishnan i Cruickshanks	43

3.2.2	Aplicació de la tècnica a un cas il·lustratiu	47
3.2.3	Aplicació de la tècnica a un segon exemple	51
3.3	Metodologia per a la integració d'especificacions de <i>tracking</i> al disseny de controladors amb la tècnica QFT	57
Capítol 4	Existència del controlador	59
4.1	Antecedents: estudi sobre l'existència del controlador	59
4.2	Metodologia proposada per esbrinar l'existència del controlador.....	61
4.2.1	Aritmètica intervalar: representació mitjançant <i>mosaics</i>	61
4.2.2	Una aplicació de l'aritmètica intervalar a la recerca de l'espai de paràmetres del controlador	62
4.2.3	Aplicació de l'aritmètica intervalar a la QFT	64
4.2.4	Aplicació al cas de l'apartat 3.2.2	66
4.2.5	Algunes consideracions sobre el procediment emprat	70
Capítol 5	Disseny automàtic del regulador	73
5.1	Disseny automàtic (ALS) en el marc de la QFT	73
5.2	Metodologia de disseny automàtic del controlador robust basada en optimització	74
5.2.1	Especificacions estudiades de disseny automàtic de la QFT	75
5.2.2	Proposta de disseny automàtic per minimitzar l'energia de l'esforç de control.....	75
5.2.3	Programació del disseny automàtic del controlador (ALS).....	77
5.2.3.1	Algunes definicions.....	77
5.2.3.2	Problemes d'optimització: convex i no convex.....	78
5.2.4	Paquets d'optimització escollits: Optimization Toolbox, Tomlab	80
5.2.5	Operativa pràctica de l'Algorisme 5.1 utilitzant <i>Tomlab</i> i <i>Matlab</i>	81
5.2.6	Exemple en què s'aplica l'Algorisme 5.1 per trobar el controlador.....	81
5.3	Quadre resum del procediment de disseny	84
Capítol 6	Aplicacions.....	85
6.1	Aplicació a un model interferomètric.....	85
6.1.1	Contextualització de l'aplicació interferomètrica.....	86
6.1.2	Descripció del sistema.....	92
6.1.2.1	Modelització dels components del sistema	93
6.1.2.2	Caracterització del soroll.....	94

6.1.3 Disseny d'un controlador continu per l'aplicació interferomètrica.....	96
6.1.4 Aplicació de la QFT al disseny d'un controlador discret per a l'aplicació interferomètrica.....	99
6.2 Aplicació a un model d'helicòpter de laboratori	106
6.2.1 Descripció del <i>benchmark</i>	106
6.2.1.1 Equacions físiques del model de l'angle de capcineig	107
6.2.1.2 Model experimental de l'angle α de capcineig.....	108
6.2.2 Formulació d'un primer cas d'estudi: cas 1	109
6.2.2.1 Objectius de disseny	109
6.2.2.2 Especificacions freqüencials escollides.....	111
6.2.2.3 Resultats obtinguts i validació.....	111
6.2.2.4 Comprovacions addicionals.....	114
6.2.2.5 Proves amb l'estructura de control modificada, en el cas 1	117
6.2.3 Disseny per a un nou cas d'estudi, cas 2	119
6.2.3.1 Formulació del cas 2.....	119
6.2.3.2 Resultats obtinguts i validació.....	119
6.2.3.3 Comprovacions addicionals.....	120
Capítol 7 Conclusions i treball futur	123
7.1 Resum de la tesi i remarca de les aportacions fetes.....	123
7.2 Treball futur.....	125
Referències bibliogràfiques	129
ANNEX A: Operativa de resolució de l'Algorisme 5.1 mitjançant <i>Tomlab</i>	137
ANNEX B: Nomenclatura i glossari general	139

Capítol 1 Introducció

En aquest capítol introductori es fa una aproximació a la contribució de la tesi, o sigui al disseny de sistemes de control basats en models intervalars. A l'apartat de motivació es planteja una problemàtica de control dels sistemes, el comportament dels quals és descrit acceptablement per un model. Al segon apartat del capítol es plantegen els objectius de contribució en els aspectes bàsics de la recerca de l'espai de paràmetres del controlador, l'automatització del disseny i la seva aplicació. Finalment, en el tercer apartat del capítol es presenta l'organització de la memòria i el contingut de la resta de capítols.

1.1 Motivació

Per aconseguir un bon control de qualsevol procés, és imprescindible disposar d'un model que en descriu raonablement la dinàmica o el comportament. Però el model que descriu el sistema que s'ha de controlar pot presentar imprecisions degudes a molt diversos motius. D'entrada, alguns fenòmens són difícilment identificables i, si es poden identificar, sovint sorgeixen imprecisions en els paràmetres. A més, encara que es pugui conèixer amb precisió la dinàmica d'un sistema, sovint cal simplificar-lo per reduir-ne la complexitat. Per aplicar molts dels procediments de disseny de controladors, és corrent utilitzar models lineals, que en alguns casos són el resultat de la linealització de models no lineals, al voltant d'un punt de treball, assumint desviacions de les variables no gaire grans respecte dels valors del punt de treball o d'equilibri. Fins i tot acceptant com a bona la linealització, alguns dels paràmetres poden no ser constants o poden variar en el temps o segons el punt d'operació. Les raons d'aquestes variacions poden ser molt diverses, com ara el desgast físic dels components, el fregament de parts mecàniques, la fatiga i el canvi de propietats per l'envelliment dels materials, etc. Si es coneix l'origen de les imprecisions, se sol parlar de models amb incertesa estructurada o paramètrica. Si hi ha imprecisions de caràcter més desconegut, associades per exemple a dinàmiques no modelitzades o al truncament de modes d'alta freqüència, etc., es parla de models amb incertesa no paramètrica o no estructurada.

Les incerteses en el model es poden descriure de maneres molt diverses, per exemple restringint els paràmetres d'un model lineal, afiant valors en el domini freqüencial, etc. Sovint, per tenir en compte les incerteses del model, se suposa que la dinàmica de la planta o el procés que s'ha de controlar és descrita per un conjunt de models lineals, en comptes d'un únic model. Quan es tracta de dissenyar controladors per a tota una família de plantes, donades unes especificacions de funcionament del sistema controlat, es pot parlar de tècniques de control robust. Tot i que són diverses, i que s'hi treballa des de fa uns quants anys, algunes problemàtiques del control robust estan obertes i no s'han resolt definitivament, excepte en algunes situacions particulars que no poden considerar-se com a generals.

1.2 Objectius

En aquesta tesi es treballa en la tècnica freqüencial de control robust QFT, *Quantitative Feedback Theory* (Horowitz 1979), que consisteix en dissenyar controladors lineals que assoleixen unes especificacions freqüencials per a tot un conjunt de plantes descrites per un model lineal amb incertesa. Després d'una cinquantena d'anys, malgrat tot el que s'ha avançant, alguns aspectes encara no estan completament solucionats.

Una qüestió prèvia al mateix disseny del regulador és el fet que, fixats uns objectius o especificacions de funcionament de la planta, el disseny ha d'ésser possible. Per a això cal que les diverses especificacions siguin compatibles i assolibles, i, en cas que no ho siguin, caldrà relaxar-les adequadament. Partint d'una estructura de control clàssica de llaç tancat, amb realimentació negativa, es pot plantejar de quin ordre pot ser el controlador. Normalment és recomanable escollir un ordre baix, si amb aquest controlador s'assoleixen els objectius de control prefixats, i accions de control assolibles físicament. Un primer objectiu bàsic de la tesi és la contribució per aconseguir trobar la regió dels paràmetres possibles d'un controlador de baix ordre predefinit, com a una aplicació d'aritmètica intervalar.

Amb la QFT es pot comprovar, utilitzant el diagrama de Nichols, si amb un controlador concret es compleixen o no la totalitat de les especificacions per a qualsevol planta que pertanyi a una família de plantes donada. Però sovint, en cas que existeixi el controlador que faci possible el compliment de totes les especificacions per a qualsevol planta, aquest controlador no sol ser únic. Hi ha treballs de diversos autors orientats al disseny automàtic per a l'obtenció d'un controlador concret que, complint-se la totalitat de les especificacions fixades, sigui el que optimitzi algun índex prefixat; però, malgrat això, no és una qüestió resolta de forma general. Un segon objectiu principal de la tesi és la contribució a un disseny automàtic (*Automatic Loop Shaping, ALS*) en el marc de la QFT. Per a aquest disseny es tindrà en consideració un criteri de minimització energètica, concretament es minimitza l'energia impulsional del controlador, per a controladors amb una estructura de baix ordre prefixada. Aquest disseny s'ha utilitzat per sintonitzar els controladors de dos processos representats per models amb incerteses paramètriques.

En el desenvolupament de la tesi s'ha treballat només amb models monovariables (*Single Input - Single Output, SISO*), lineals invariants en el temps (*Linear Time Invariant, LTI*). Malgrat això, el fet de considerar-los amb paràmetres incerts permet incloure en aquesta incertesa la possibilitat del desconeixement complet de l'estructura del model, possibles no linealitats, variacions lentes de paràmetres, etc.

1.3 Estructura de la memòria

La memòria s'organitza en vuit capítols. A part del primer capítol introductori, en el qual se situa la problemàtica que s'ha d'abordar i els objectius bàsics que s'han d'assolir, seguidament s'esmenta el que es tracta a la resta de capítols:

El Capítol 2 comença amb una introducció als models intervalars i a la manera com es poden utilitzar per descriure de forma aproximada la incertesa de sistemes físics reals. S'esmenta la problemàtica del *wrapping* en fer operacions sobre conjunts intervalars. També es descriu de forma genèrica la tècnica freqüencial de disseny de controladors robustos QFT, que s'il·lustra amb algun exemple.

El Capítol 3 tracta de les especificacions d'un sistema de control. S'hi veuen les dificultats de trobar equivalències entre especificacions temporals i freqüencials. Es tracta el cas particular d'un tipus d'especificació temporal de seguiment de trajectòria o *tracking* per al qual, sota determinades hipòtesis, alguns autors s'atreveixen a proposar una equivalència freqüencial. S'il·lustra amb algun exemple.

Al Capítol 4 s'introdueix l'estudi de l'existència de controlador. Primerament s'analitza la compatibilitat de les diverses especificacions i, seguidament, atesa l'orientació de la tesi cap a la tècnica de la QFT, es concreta l'estudi en les especificacions de tipus freqüencial. En aquest capítol també es proposa una metodologia que, utilitzant tècniques intervalars i per a controladors d'ordre baix, permeti trobar l'espai de paràmetres del controlador que satisfaci la totalitat d'especificacions freqüencials.

El Capítol 5 tracta la qüestió del disseny automàtic del controlador. Comença amb la presentació d'una panoràmica general del treball fet per diversos autors i seguidament es proposa un mètode en què s'aplica un criteri de minimització energètica de l'energia impulsional del controlador.

El Capítol 6 mostra com s'han aplicat les metodologies proposades en un parell d'exemples d'aplicació. El primer exemple és el d'un interferòmetre real, utilitzat per al posicionament d'uns segments de mirall en un telescopi, en què la problemàtica bàsica és l'existència de pertorbacions mecàniques. El segon exemple és el d'un model simplificat de l'angle de *capcineig* d'un helicòpter de laboratori, amb incertesa estructurada.

Al Capítol 7 es recullen les principals conclusions, així com possibles línies de futur, com a continuació del present treball.

Un darrer apartat inclou les referències bibliogràfiques que s'han anat esmentant al llarg de la memòria.

El criteri de notació seguit normalment en aquesta memòria és l'ús de minúscules per a designar els senyals en el domini temporal, majúscules quan es tracten el domini transformat —de Laplace, z , o freqüencial—, i majúscules també per als sistemes.

1.4 Recull de contribucions

A la *Revista Iberoamericana de Sistemas, Cibernética e Informática* es va publicar un article sobre l'aplicació real d'un interferòmetre (Comasòlivas, Escobet y Quevedo 2004). En aquest article, un cop trobat un model incert senzill de baix ordre i fixades unes especificacions de funcionament a llaç tancat, s'aplicava la tècnica de la QFT per a dissenyar el controlador del llaç. Aquest treball s'havia presentat prèviament a la *2a Conferència Iberoamericana en Sistemas, Cibernética e Informática* (Orlando, Florida, EEUU, 2003)

Al *7th International QFT Symposium*, celebrat a Kansas, EEUU, Comasòlivas *et al.* (2005) presentaven una ponència on s'enriquia el procés de disseny en l'aplicació interferomètrica esmentada mitjançant la recerca del controlador òptim a partir de criteris de minimització energètica. En la mateixa ponència també es presentava el treball fet en recerca de paràmetres del controlador, de baix ordre i estructura prefixada.

A les *XXVIII Jornadas de Automática* de Huelva (Comasòlivas, Escobet y Quevedo 2007), es proposava aplicar l'algorisme de minimització energètica a un model simplificat de l'angle de capcineig d'un helicòpter de laboratori, amb l'objectiu d'aconseguir un controlador òptim.

En altres fòrums també s'han presentat treballs relacionats amb les aplicacions esmentades de l'interferòmetre i de l'helicòpter de laboratori — per exemple en AVR'06 (*2es. Jornades UPC de Recerca en Automàtica, Visió i Robòtica*, UPC, 2006), i també en una xarxa temàtica de control ("*Ingeniería de Control*" sobre *Control Robusto*, Madrid, desembre del 2003) —.

La tesis s'ha desenvolupat en el marc de les línies d'investigació del grup de Sistemes Avançats de Control (SAC) de la UPC i ha sigut finançada amb les següents CICYTS:

- “Control actiu de pertorbacions mecàniques” CICYT TAP99-0748 (1999-2002)
- “Desenvolupament i integració de tècniques de control tolerant a fallades en processos complexes” CICYT DPI2002-03500 (2002-2005)
- “Control tolerant a fallades de sistemes basats en piles de combustible” CICYT DPI2005-05415 (2006-2008),
- “Noves metodologies de diagnosi, tolerància a fallades i manteniment predictiu emprant tècniques i sistemes híbrids” CICYT ref. DPI2008-01996, (2009-2011).

Capítol 2 Fonaments

En aquest capítol es presenta una visió general del disseny de controladors robustos per a plantes incertes utilitzant la tècnica freqüencial QFT (*Quantitative Feedback Theory*). Tot i que la temàtica que es pretén abordar a la tesi és l'aprofundiment d'una millora del disseny del control en si mateix, també s'han de tenir en compte altres aspectes importants, com ara la qüestió de la modelització. Així, s'ha considerat convenient incloure en aquesta introducció les bases del desenvolupament de l'aritmètica intervalar com a eina que s'utilitza i es fa un repàs dels principis bàsics en què es fonamenta la tècnica de la QFT.

2.1 Models intervalars

2.1.1 Justificació de l'ús de models intervalars

Sovint s'utilitzen models lineals simplificats per descriure la dinàmica de sistemes. Però la dinàmica dels sistemes reals sol presentar un comportament més complex, en què la incertesa és un factor que cal tenir en compte en el procés de modelització. Amb l'objectiu d'obtenir models lineals simplificats, sovint cal assumir simplificacions com ara:

- el menyspreu de determinats fenòmens físics difícilment identificables o predictibles;
- la simplificació de determinades dinàmiques conegudes però complexes (per exemple, característiques no lineals de les plantes considerades), i
- la variació de paràmetres físics en funció del temps, l'envelliment, la fatiga o les condicions i els punts d'operació...

Les incerteses es poden considerar des de diverses òptiques, però en destaca el tractament des d'un punt de vista estadístic o bé des d'una òptica determinista. Des del primer enfocament, una variable o un paràmetre queda representat per una distribució de probabilitat. En el segon enfocament, la variable queda representada per un interval de possibles valors, per la qual cosa se sol parlar d'*incertesa afitada*. En comparar ambdues aproximacions, l'enfocament estadístic suposa una riquesa descriptiva més gran, però per fer-ne la formulació cal plantejar hipòtesis que sovint s'aparten de la realitat (per exemple, una distribució normal centrada en un punt concret). D'altra banda, l'aproximació determinista dóna una informació menys precisa; la informació que cal és la de les fites superior i inferior de les variables incertes, la qual cosa és força fàcil de satisfer a la pràctica: sempre es poden trobar fites per a les variables, malgrat que en el pitjor dels casos poden ser poc restrictives i s'obtinguin conjunts de paràmetres sobredimensionats.

Les diferències entre el comportament del sistema físic real i el del model simplificat també poden atribuir-se, en part, a l'existència de perturbacions i de soroll, els quals, si no es modelitzen de forma alternativa, poden incorporar-se a la incertesa del model.

A la tesi s'adopta la descripció de la realitat simplificada amb l'enfocament determinista dels models incerts intervalars. Segons Bhattacharyya, Chapellat i Keel (1995), una planta incerta pot ser descrita mitjançant un model intervalar:

$$P(\theta, s) = \frac{B(\theta, s)}{A(\theta, s)} \quad (2.1)$$

on B i A són polinomis en el domini s , i θ és el vector de paràmetres incerts de dimensió p , els valors dels quals estan compresos dins un conjunt compacte $\theta \in \Theta$ d'una caixa tipus, *i.e.*, $\Theta = \{ \theta \in R^p \mid \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta} \}$, on $\underline{\theta}$ i $\bar{\theta}$ representen les fites inferior i superior, respectivament, del vector de paràmetres incerts θ .

En treballar amb models intervalars, se sol utilitzar aritmètica intervalar, com es detalla breument a continuació.

2.1.2 Una perspectiva de l'anàlisi intervalar

L'anàlisi intervalar va néixer amb l'objectiu de tenir en compte i delimitar els errors d'arrodoniment produïts en la implementació d'algorismes numèrics sobre computadors digitals.

Es defineix un interval X com l'interval real tancat $X = [a, b]$. Consisteix, per tant, en el conjunt $x = \{x: a \leq x \leq b\}$ de nombres reals entre a i b , ambdós inclosos. Així, els nombres intervalars són una extensió dels nombres reals. El nombre real x serà un cas particular d'interval, anomenat interval degenerat:

$$x = [x, x].$$

L'aritmètica intervalar és una aritmètica definida sobre un conjunt d'intervalos que permet calcular funcions racionals tenint en compte truncaments i arrodonint convenientment. Tot i que hi ha antecedents més antics, les idees sobre computació intervalar apareixen a la tesi doctoral d'R.E. Moore (1962), presentada a Stanford, en què s'estudia l'error provocat pel truncament i l'arrodoniment en les operacions aritmètiques fetes amb ordinadors. La primera monografia d'anàlisi intervalar, també de Moore (1966), suposa el naixement de l'anàlisi intervalar.

Els dos grans centres de desenvolupament de l'aritmètica intervalar són als EUA i a Alemanya. Es poden trobar bones introduccions a l'anàlisi intervalar als llibres d'Alefeld i Herzberger (1983), o també del mateix Moore (1979).

Es defineixen una sèrie d'operacions aritmètiques (suma, resta, multiplicació, divisió) amb intervals, amb les quals s'arriba a unes regles aritmètiques que tenen en compte els extrems reals dels intervals. Es

demostra que es compleixen algunes propietats com ara l'associativa i la commutativa per a la suma i per al producte, però que la distributiva no sempre es compleix. De fet, l'aritmètica intervalar es pot considerar com una generalització de l'aritmètica per als nombres reals. En cas que s'operi amb intervals degenerats, les operacions i les propietats algebraiques són les mateixes que les de l'aritmètica amb nombres reals.

És habitual en l'anàlisi intervalar treballar amb funcions intervalars. Podem definir una funció intervalar com una funció d'una o més variables intervalars. La principal limitació de l'aritmètica intervalar és que no compleix algunes de les regles de l'aritmètica real, com ara la propietat distributiva. Quan les variables apareixen una única vegada en l'expressió funcional, es pot avaluar el rang exacte de la funció simplement aplicant-hi les regles de l'aritmètica intervalar. El problema sorgeix en avaluar funcions en les quals alguna variable hi és més d'una vegada, fet conegut com a *multi-incidència*. En aquests casos el resultat de la funció intervalar serà sobredimensionat. L'avaluació d'aquest tipus de funcions serà bàsicament un problema d'optimització global.

La recerca en aritmètica intervalar ha donat com a fruit tècniques numèriques i algebraiques per avaluar el màxim i el mínim d'una funció. El seu atractiu més gran és que garanteixen el resultat: es garanteix trobar els límits d'una funció amb precisió arbitrària sense el risc de perdre cap de les solucions factibles. Algunes de les tècniques per avaluar el rang d'una funció són els algorismes numèrics (Hansen 1992), l'anàlisi modal (Gardeñes, Mielgo and Trepas 1985), les tècniques algebraiques (Ratscheck and Rokne 1984) i els polinomis de Bernstein (Garloff 1993).

Les aplicacions de l'aritmètica intervalar són molt diverses, nombrosos grups de recerca la utilitzen com a eina des de fa força temps, i és la base de diversos treballs entre els quals hi ha tesis doctorals. Esmement, només com a exemple i per la seva proximitat, treballs en control robust i en l'anàlisi de sistemes amb incertesa com els que s'han desenvolupat a la Universitat de Girona (Vehí 1998), (Armengol 2000), o en detecció de fallades a la Universitat Politècnica de Catalunya (Tornil 2006).

Pel que fa a la representació i propagació d'incerteses, diversos treballs de diferents autors, entre els quals hi ha Jaulin, Kieffer *et al.* (2001), han tractat tècniques de representació i d'incertesa afitada basades en la utilització de l'anàlisi intervalar, i també s'han implementat eines i algorismes diversos d'aquestes tècniques (Tornil 2006). Sovint l'elevat cost computacional és una limitació pràctica d'aquestes eines.

2.1.3 Aproximació a conjunts i les seves propietats

Com ja s'ha dit, el coneixement dels sistemes físics no està exempt d'incertesa. En alguns casos, aquesta incertesa fa inviable el coneixement exacte dels valors dels paràmetres del model. Així, la utilització d'observacions i del model pot formalitzar-se com una qüestió de manipulació de conjunts. D'entre les

característiques d'aquesta formalització, esmentarem com a destacables les *operacions entre conjunts*, la *dependència entre variables*, diferents formes de *representació de conjunts* i el fenomen del *wrapping*.

Operacions entre conjunts. D'acord amb Jaulin (2000), es distingeixen dos tipus d'operacions entre conjunts: les operacions *pures* (unió, intersecció, diferència, producte cartesià, projecció, inclusió i igualtat) i les operacions *esteses*, que són operacions definides per a cadascun dels elements dels conjunts i en què la definició s'estén a tot el conjunt (suma, producte escalar...) Les operacions *esteses* prenen sentit en l'ús de conjunts per a la representació de variables incertes i, de fet, són útils en la manipulació de la incertesa, tot i l'ús està subjecte al fenomen de la *multi-incidència*, que es dona, com ja s'ha dit, quan una mateixa variable presenta més d'una ocurrència en una expressió. La *multi-incidència* o *pèrdua de dependència* comporta un sobredimensionament dels resultats obtinguts. L'aplicació d'operacions esteses suposa un tractament com a *variables diferents* en cada una de les diverses ocurrències. Això suposa una relaxació que condueix a obtenir conjunts que, tot i que contenen la solució buscada, poden estar sobredimensionats. Per il·lustrar el problema de la multi-incidència, seguidament es presenta un senzill exemple numèric.

Exemple: es plantegen dues operacions, "aparentment" equivalents, amb les mateixes variables incertes, x i y , definides intervalarment,

$$x=[0,1], y=[-1,1]:$$

$$\text{Operació 1: } x + xy$$

$$\text{Operació 2: } x(1 + y)$$

Els resultats d'ambdues operacions és diferent, com es pot comprovar:

$$\text{Operació 1: } x + xy = [0,1] + [0,1][-1,1] = [0,1] + [-1,1] = [-1,2]$$

$$\text{Operació 2: } x(1 + y) = [0,1](1 + [-1,1]) = [0,1][0,2] = [0,2]$$

A l'operació 1, la variable x apareix més d'una vegada, x és *multi-incident*. Cada vegada que apareix x es tracta com a variable independent (per tant es pot parlar de *pèrdua de dependència*). Això fa que el resultat de l'operació 1 sigui sobredimensionat, tot i que el resultat de l'operació 2 conté el resultat de l'operació 1.

Representació de conjunts. Tot i que podem trobar diferents formes de representació de conjunts en R^n , el mateix autor (Jaulin 2000) proposa com a més utilitzades la representació per equacions i inequacions, la representació per boira de punts i la representació per aproximació. En la representació per equacions i inequacions, el conjunt X queda caracteritzat per un conjunt d'equacions i d'inequacions que en delimiten la frontera o l'interior: aquesta representació permet una descripció exacta dels conjunts, però en dificulta les manipulacions més elementals. En la representació per boira de punts, un conjunt queda caracteritzat

per un nombre finit de punts que hi són continguts i que poden ser obtinguts per exploració aleatòria (mètodes de Montecarlo) o determinista (graella); aquest tipus de representació té com a avantatge que és fàcil de manipular, però presenta l'inconvenient que els resultats que se n'obtenen són arbitraris i perden les característiques del càlcul formal. En la representació per aproximació, es disposa d'un tipus de conjunts anomenats *recipients*, fàcils de manipular i de representar, que s'utilitzen per aproximar els conjunts d'incertesa, els quals en un cas general poden presentar tot tipus de formes, com ara *el·lipsoides*, *politops* i *zonotops*. La representació per recobriment sol ser la més corrent, en què un determinat conjunt d'incertesa queda representat per un *recipient* que el recobreix de la forma més ajustada possible; amb aquest tipus de representació es mantenen algunes característiques interessants, com ara la que ens assegura que si el *recipient* és buit, aleshores el conjunt aproximat també ho és.

Wrapping. En l'aproximació per recobriment d'un determinat conjunt utilitzant un tipus de *recipients*, es triarà sempre el conjunt més petit que contingui el conjunt que s'hagi de representar. En general, el recipient no adoptarà la forma exacta del conjunt que interessa, sinó que en suposarà una representació sobredeterminada. El *wrapping* (Jaulin, Kieffer, et al. 2001) és el nom pel qual es coneix el fenomen de l'increment de la imprecisió deguda a la resolució limitada que tenen els recipients que s'utilitzen per a la representació (Neumaier 1993). I sobretot quan es manipula amb el recipient i no amb el conjunt exacte de la solució, el conjunt recipient resultant queda en general molt sobredimensionat respecte del conjunt real (vegeu la Figura 2.1).

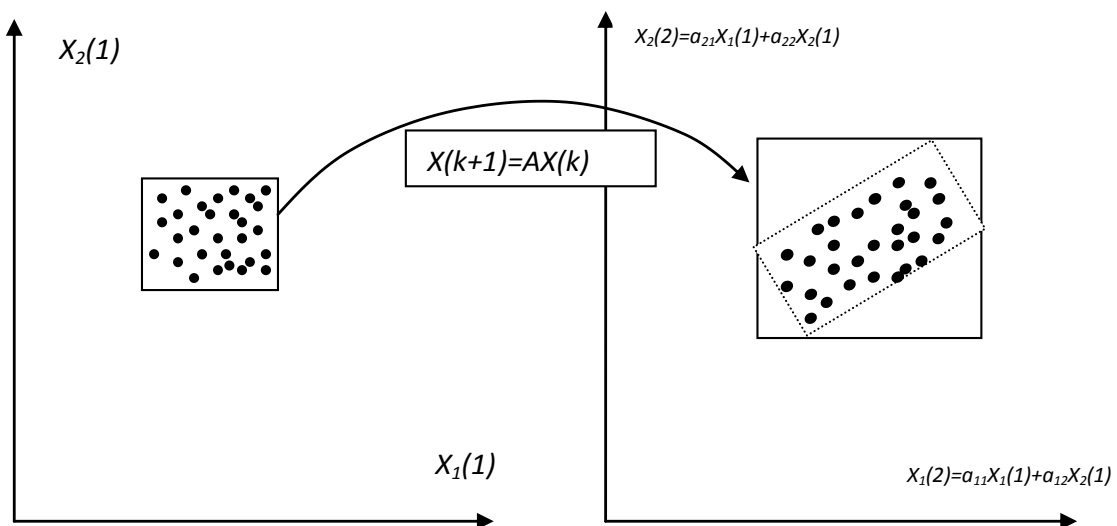


Figura 2.1 Fenomen del wrapping

Per evitar la problemàtica associada a la representació de conjunts i els problemes que comporta quant a multi-incidència i *wrapping*, el mètode adoptat en aquesta tesi per representar els conjunts utilitza una boira de punts i les operacions es realitzen de forma determinista (graella).

2.2 Quantitative Feedback Theory (QFT)

2.2.1 Perspectiva històrica de la tècnica QFT

Isaac M. Horowitz, aleshores científic sènior de la companyia *Hughes Aircraft* (Culver City, California), va afegir el concepte de quantitatiu a les idees principals de Bode en un article titulat “Fundamental theory of automatic linear feedback control systems” (1959), en què presentava la necessitat de quantificar el disseny del controlador d’acord amb unes especificacions determinades i la incertesa de la planta. És l’inici del control quantitatiu en el domini de la freqüència. La seva tesi principal és la constatació que la funció de sensibilitat, $S = (1 + L)^{-1}$, definida per Bode és insensible al soroll, concepte que Horowitz engloba en la seva famosa frase “*the cost of feedback*”.

Serà precisament l’any 1972, coincidint amb la introducció del diagrama de Nichols com a eina de treball, que Horowitz i l’aleshores doctorant seu Marcel Sidi utilitzin el nom de QFT (*Quantitative Feedback Theory*) per primera vegada (Horowitz and Sidi 1972),(Horowitz 1973).

Des del 1973 i durant més de 20 anys, Horowitz ha col·laborat estretament amb Constantine H. Houpis, investigador i responsable de l’àrea de control automàtic de Wright-Patterson (Dayton, Ohio). És en aquesta època que es fixarien definitivament els fonaments inicials de la metodologia QFT: síntesi de controladors, sistemes no lineals, sistemes multivariables, QFT digital, sistemes amb paràmetres distribuïts, sistemes de fase no mínima, sistemes multi-llaç, aplicacions aeronàutiques, etc.

Des d’aleshores fins a l’actualitat, la teoria QFT ha estat ampliada extraordinàriament i s’ha aplicat amb èxit al control de sistemes lineals i no lineals, plantes SISO i MIMO, processos de fase mínima i no mínima, sistemes amb paràmetres distribuïts i concentrats, etc. Un estudi més detallat sobre la història de la QFT pot trobar-se a diversos articles de referència: (Horowitz 1992),(Horowitz 1999), (Horowitz 2002), (C. Houpis 2002) i (García-Sanz 2001). Encara més recentment, l’esmentat García-Sanz (2005) ha publicat sobre la QFT un interessant *survey*, en què s’inclouen multitud de referències agrupades segons la temàtica. I, amb una periodicitat aproximada de dos anys, se celebra una conferència internacional sobre la QFT anomenada International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods, que agrupa més de 50 experts que presenten noves contribucions de teoria i aplicacions de la QFT.

2.2.2 Fonaments de la QFT

La QFT és un mètode d’enginyeria de control que proposa explícitament l’ús de la realimentació per reduir simultàniament els efectes de la incertesa de la planta i satisfer les especificacions de

comportament fixades. El mètode es basa en el control freqüencial proposat per Bode. Es fonamenta en l'observació que la realimentació només cal quan existeix incertesa en el model de la planta o quan hi ha pertorbacions no mesurades que hi actuen.

A la Figura 2.2 es mostra l'estructura genèrica de treball de la QFT (*Quantitative Feedback Theory*).

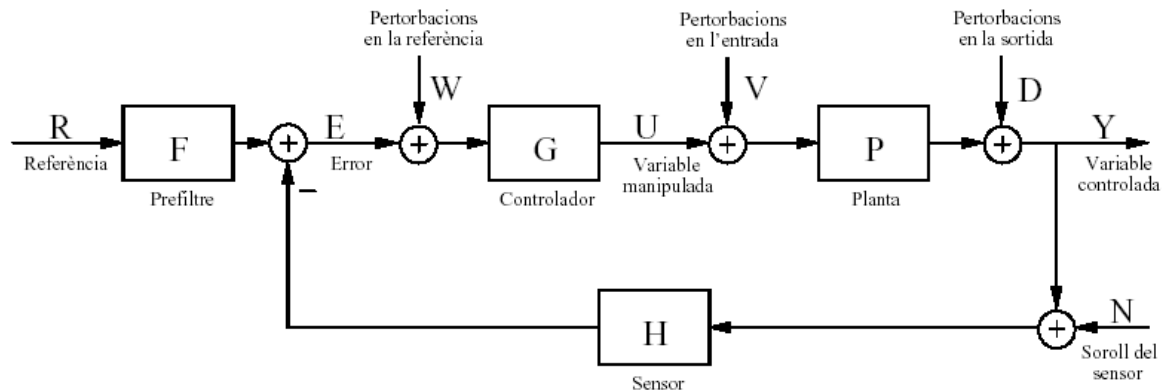


Figura 2.2 Estructura de control clàssica de la QFT

El sistema de control de dos graus de llibertat definit a la Figura 2.2 inclou la planta $P(j\omega)$, el controlador $G(j\omega)$ i el pre-filtre $F(j\omega)$ que s'ha dissenyar, i la dinàmica del sensor $H(j\omega)$. Les entrades al sistema són: la referència $R(j\omega)$, les pertorbacions $W(j\omega)$, $V(j\omega)$, $D(j\omega)$ i el soroll $N(j\omega)$. La variable que cal controlar és $Y(j\omega)$, l'error és $E(j\omega)$ i el senyal de control $U(j\omega)$. A causa de la incertesa de la planta, en realitat es treballa amb un conjunt de plantes incertes, $\mathfrak{P}(j\omega)$.

En definitiva, el principal objectiu de la QFT sol ser la síntesi (*loop-shaping*) d'un controlador el més simple possible, que satisfaci el conjunt d'especificacions fixades per qualsevol planta dins de la incertesa. Els principals passos del mètode són:

- Modelització de la planta que inclogui la incertesa, generació de plantilles i planta nominal $P_0(j\omega)$.
- Definició d'especificacions.
- Creació de contorns $B(j\omega)$.
- Síntesi del controlador $G(j\omega)$.
- Síntesi del pre-filtre $F(j\omega)$.
- Validació del disseny.

En els apartats següents es detallen els passos del mètode.

2.2.2.1 Model de la planta, generació de plantilles i planta nominal

La QFT permet la descripció del model dinàmic de la planta, amb incertesa paramètrica i no paramètrica. A la pràctica, la incertesa és inevitable en el procés de modelització de la dinàmica d'una planta. Una forma de considerar la incertesa és suposar que es coneix l'estructura del model de la planta: aleshores es parla d'*incertesa estructurada*. En el cas de la incertesa estructurada, s'anomena *incertesa paramètrica* quan els diversos paràmetres del model de la planta, d'estructura pre-fixada, estan sotmesos a la incertesa. Malgrat això, aquesta incertesa ha d'estar afitada, per exemple, entre un valor màxim i un valor mínim, que es consideren extrems d'un interval. Els models amb incertesa paramètrica es representen segons (2.1), en què tots o alguns dels paràmetres del model són variables o desconeguts però afitats. Els sistemes amb incertesa no paramètrica es poden modelitzar amb un soroll que pot ser additiu o multiplicatiu, que cal afegir a la sortida o a l'entrada de la planta, i que són simbolitzats pels senyals $D(j\omega)$ i $V(j\omega)$, respectivament. De fet, qualsevol forma de representar la incertesa és una manera de considerar el model de la planta amb algunes desviacions respecte a un model nominal; en aquesta incertesa es poden incloure tant errors de modelització com efectes de pertorbacions i de soroll i altres fenòmens.

En la QFT, els models es traslladen al domini de la freqüència, de manera que es genera en el diagrama de Nichols, en cada una de les freqüències que interessin, $\omega_i \in \Omega$, un conjunt de punts (nombres complexos dels quals es dona la magnitud en dB i l'argument com a angle, ϕ), un per cada planta dins de l'espai d'incertesa.

Aquest conjunt de punts per a cada freqüència s'anomena plantilla (*template*) i és representat per $\Im P(j\omega_i)$:

$$\Im P(j\omega_i) = \{P(j\omega_i), \omega_i \in \Omega\} \quad (2.2)$$

En el cas paramètric i estructurat, l'equació (2.1) també es pot escriure de la manera següent:

$$P(\theta, s) = \frac{B(\theta, s)}{A(\theta, s)} = \frac{\sum_{i=0}^m p_i(\theta) s^i}{\sum_{i=0}^n q_i(\theta) s^i} \quad (2.3)$$

on θ és un vector de paràmetres incerts $\theta \in \Theta \subset R^p$, en què Θ és un conjunt compacte de p paràmetres variables, que es defineixen de la manera següent:

$$\Theta = \left\{ \theta \in R^p \mid \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta} \right\} \quad (2.4)$$

Cadascun dels p paràmetres incerts varia de manera independent dins de l'interval de variació definit.

Del conjunt de possibles plantes de la família de plantes se seleccionarà un conjunt de paràmetres de referència arbitrari, θ_0 , el mateix per a totes les freqüències, que determinarà la planta nominal $P_0(s)$, $P_0(j\omega)$ en el domini freqüencial:

$$P_0(s) = P(\theta_0, s) \quad (2.5)$$

Per clarificar el significat de les plantilles i la planta nominal, es considera la planta incerta de segon ordre amb un retard pur,

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} e^{-\tau s}, \text{ amb } k = 0.27, \zeta \in [0.039, 0.097], \omega_n \in [1.90, 2.28], \tau = 0.4$$

A la Figura 2.3 es pot veure la graella dels valors que prenen els paràmetres incerts de ζ (coeficient d'esmoreïment) i ω_n (freqüència natural) de la planta incerta de l'exemple, on se suposa que els únics paràmetres incerts són ζ i ω_n . Com que s'han pres 40 valors diferents per a cadascun dels dos paràmetres incerts, en resulta un conjunt d'un total de 1600 plantes. Cadascun dels 1600 punts representats a la Figura 2.3 representa una de les 1600 plantes.

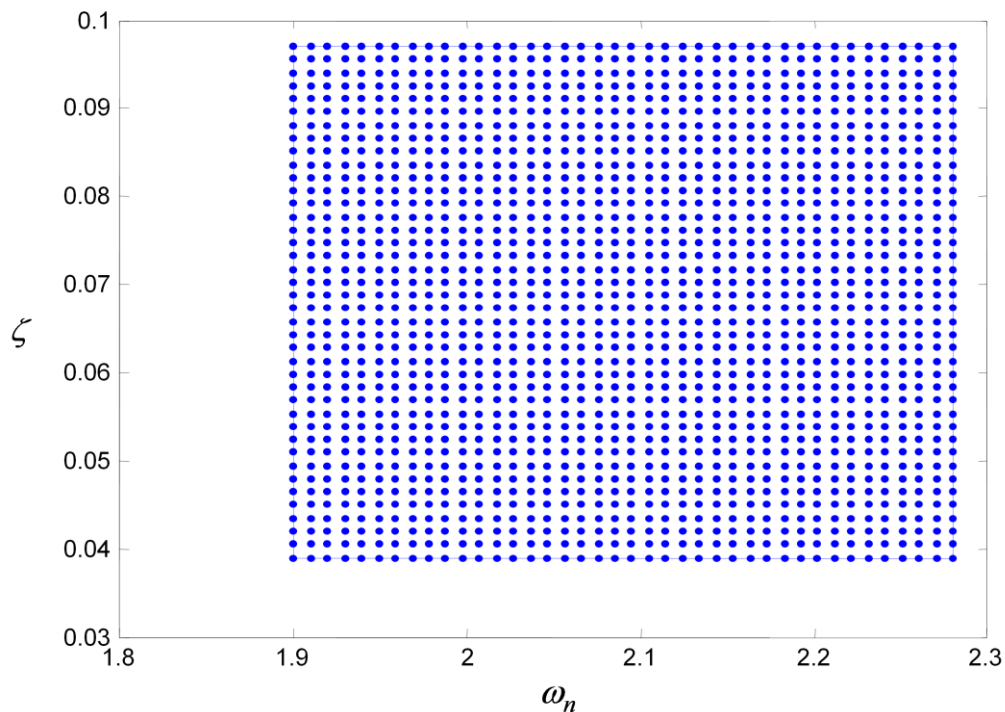


Figura 2.3 Conjunt finit de valors presos per ζ i per ω_n ($40 \times 40 = 1600$ plantes)

A la Figura 2.4 es pot veure la plantilla (*template*) a $\omega = 2$ rad/seg. de la planta. Cal remarcar que la freqüència de 2 rad/seg. és constant per al *template* de la figura i, en canvi, els paràmetres del model — en aquest cas ζ i ω_n —, són variables dins de l'interval corresponent. A una altra freqüència, s'obtidria un altre núvol de punts en el diagrama de Nichols, evidentment amb forma lleugerament diferent i situada en una altra posició en el diagrama.

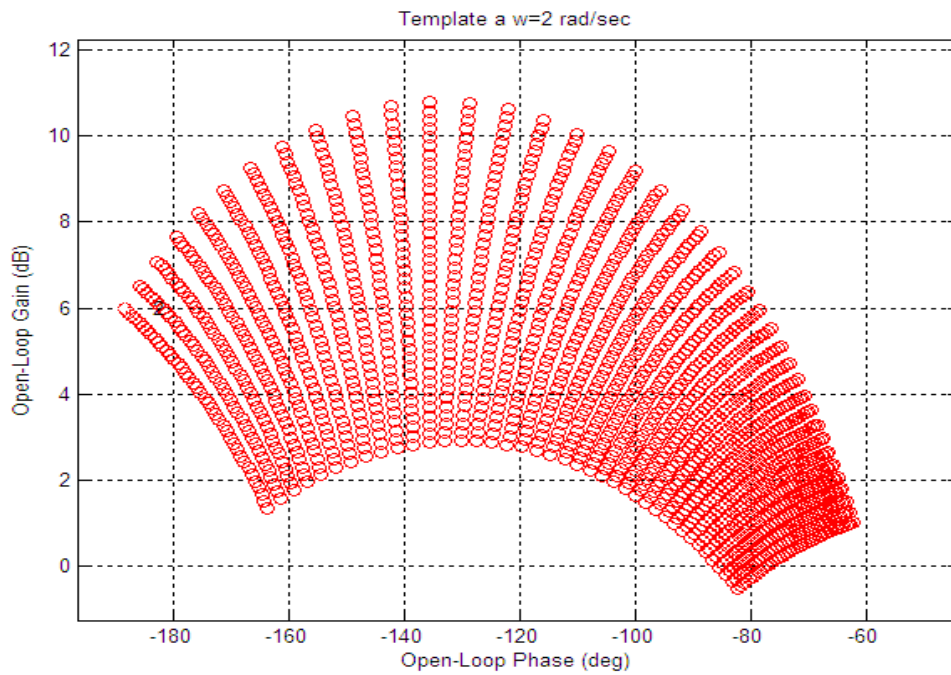


Figura 2.4 Plantilla per $\omega = 2$ rad/sec.

Com s'ha dit, QFT treballa amb la planta nominal, que és definida com un conjunt de paràmetres (vector), i que serà el mateix per a qualsevol freqüència. Això pot ser així perquè tant les especificacions com la incertesa es tindran en compte per al càlcul d'unes línies límit, anomenades *bounds*. A l'exemple de la Figura 2.3 no s'ha indicat la planta nominal, però podria correspondre a qualsevol de les 1600 plantes, o sigui que seria un punt qualsevol de la Figura 2.4 de la plantilla, en aquest cas representada a la freqüència de 2 rad/seg.

Malgrat els 50 anys de rodatge de la tècnica QFT, hi ha treballs més recents de millora en l'eficiència computacional a l'hora de generar els *templates*. Es pot esmentar, per exemple, la tesi doctoral de S. Sheela (2002), dirigida pel professor Nataraj, de l'IIT Bombay, a l'Índia.

2.2.2.2 Definició d'especificacions

De la Figura 2.2 es poden extreure les equacions (2.6) a (2.8), que relacionen les entrades amb la variable controlada, el senyal de control i l'error, respectivament.

$$Y = \frac{1}{1+PGH}D + \frac{P}{1+PGH}V + \frac{PG}{1+PGH}(W+FR) - \frac{PGH}{1+PGH}N \quad (2.6)$$

$$U = \frac{G}{1+PGH}(W+FR) - \frac{GH}{1+PGH}(N+D+PW) \quad (2.7)$$

$$E = -\frac{H}{1+PGH}D + \frac{PH}{1+PGH}V + \frac{PGH}{1+PGH}W + \frac{1}{1+PGH}FR - \frac{H}{1+PGH}N \quad (2.8)$$

Seguidament, s'esmenten les especificacions freqüencials clàssiques emprades per al disseny de controladors. En alguns casos s'expressen també a partir dels conceptes de sensitivitat $S(s)$ i sensitivitat complementària $T(s)$, tractats més endavant a l'apartat 3.1.2.

- a) Especificació d'estabilitat robusta, *Robust Stability Specification*: el sistema a llaç tancat,

$$|T(j\omega, \theta)| = \left| \frac{L(j\omega, \theta)}{1+L(j\omega, \theta)} \right| < \delta_1(\omega) \quad (2.9)$$

$T(j\omega, \theta)$ ha de ser estable, $\forall \theta \in \Theta$, on

$$L(j\omega, \theta) = P(j\omega, \theta)G(j\omega) \quad (2.10)$$

és la funció de transferència a llaç obert, assumint que $H(j\omega) = 1$, sense pèrdua de generalitat.

- b) Rebuig de perturbacions a la sortida de la planta, *sensitivity specification*: per a qualsevol planta $P \in \{\mathfrak{I}P(j\omega)\}$, la funció de transferència que relaciona la sortida Y de la planta amb la perturbació D (a la sortida de la planta) està limitada superiorment en mòdul per una funció $\delta_s(\omega)$:

$$\left| \frac{Y}{D} \right| = \left| \frac{1}{1+L(j\omega)} \right| = |S(j\omega)| < \delta_s(\omega) \quad (2.11)$$

- c) El rebuig de perturbacions a l'entrada de la planta, *plant input disturbance rejection*: per a qualsevol planta $P \in \{\mathfrak{I}P(j\omega)\}$, la funció de transferència que relaciona la sortida Y de la planta amb la perturbació V (a l'entrada de la planta) està limitada superiorment en mòdul per una funció $\delta_p(\omega)$:

$$\left| \frac{Y}{V} \right| = \left| \frac{P(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| = |P(j\omega)S(j\omega)| < \delta_p(\omega) \quad (2.12)$$

- d) *Model matching specification*: per a qualsevol planta $P \in \{\mathfrak{I}P(j\omega)\}$, la distància de la funció de transferència que relaciona la sortida Y de la planta amb la consigna de referència R , a una funció de transferència desitjada $F_m(j\omega)$, està limitada superiorment en mòdul per una funció $\delta_m(\omega)$:

$$\left| \frac{Y}{R} - F_m \right| = \left| \frac{PGF(j\omega)}{1+L(j\omega)} - F_m(j\omega) \right| = |T(j\omega)F(j\omega) - F_m(j\omega)| < \delta_m(\omega) \quad (2.13)$$

- e) Especificació de seguiment, *tracking specification*: per a qualsevol planta $P \in \{\mathfrak{I}P(j\omega)\}$, l'amplitud de la funció de transferència que relaciona la sortida Y de la planta amb la consigna de referència R està limitada en mòdul inferiorment i superiorment per $\alpha(\omega)$ i $\beta(\omega)$:

$$\alpha(\omega) < \left| \frac{Y}{R} \right| = \left| \frac{PGF(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| = |T(j\omega)F(j\omega)| < \beta(\omega) \quad (2.14)$$

- f) Especificació de rebuig de soroll, *noise rejection specification*: per a qualsevol planta $P \in \{\mathfrak{I}P(j\omega)\}$, l'amplitud de la funció de transferència que relaciona la sortida Y de la planta amb el soroll a la sortida del sensor W està limitada superiorment en mòdul per $\delta_n(\omega)$:

$$\left| \frac{Y}{W} \right| = \left| \frac{PG(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| = |T(j\omega)| < \delta_n(\omega) \quad (2.15)$$

- g) Especificació d'esforç de control, *control effort specification*: per a qualsevol planta $P \in \{\mathfrak{I}P(j\omega)\}$, l'amplitud de la funció de transferència que relaciona l'entrada de la planta U amb el soroll a la sortida del sensor W , està limitada superiorment en mòdul per $\delta_c(\omega)$:

$$\left| \frac{U}{W} \right| = \left| \frac{G(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| = |G(j\omega)S(j\omega)| < \delta_c(\omega) \quad (2.16)$$

La Taula 2.1 mostra un resum de les especificacions que normalment s'utilitzen en la QFT.

2.2.2.3 Creació de contorns $B(j\omega)$: bounds

Un cop escollida la planta nominal $P_0(j\omega)$, les especificacions esmentades han de traduir-se a uns certs límits (*bounds*) per a la funció de transferència nominal,

$$L_0(s) = P_0(s)G(s) \quad (2.17)$$

que mostrin gràficament en el diagrama de Nichols les equivalències entre especificacions i robustesa en cada freqüència. A partir de les especificacions a laç tancat i la incertesa de la planta, s'estableix aquest conjunt de corbes de restricció o contorns $B(j\omega)$ (*Horowitz-Sidi bounds*) per a cada una de les freqüències que interressi $\omega_i \in \Omega$, dibuixades sobre el diagrama de Nichols. Cal remarcar que un enorme avantatge de dissenyar amb QFT és que l'elecció de la planta nominal $P_0(j\omega)$ és arbitrari i no afecta al disseny (Horowitz 1993).

Taula 2.1 Especificacions de control clàssic amb la QFT

Especificació	Aplicació
$\left \frac{Y(j\omega)}{N(j\omega)} \right = \left \frac{U(j\omega)}{V(j\omega)} \right = \left \frac{PGH(j\omega)}{1+PGH(j\omega)} \right < \delta_1(\omega)$	Estabilitat robusta, incloent-hi la dinàmica del sensor
$\left \frac{Y(j\omega)}{D(j\omega)} \right = \left \frac{1}{1+PGH(j\omega)} \right < \delta_s(\omega)$	Reducció de sensibilitat
$\left \frac{Y(j\omega)}{V(j\omega)} \right = \left \frac{P(j\omega)}{1+PGH(j\omega)} \right < \delta_p(\omega)$	Rebuig de pertorbacions a l'entrada de la planta
$\left \frac{U(j\omega)}{W(j\omega)} \right = \left \frac{G(j\omega)}{1+PGH(j\omega)} \right < \delta_c(\omega)$	Limitació de l'esforç de control
$\left \frac{U(j\omega)}{N(j\omega)} \right = \left \frac{GH(j\omega)}{1+PGH(j\omega)} \right < \delta_{c2}(\omega)$	Limitació de l'esforç de control, incloent-hi la dinàmica del sensor
$\left \frac{Y(j\omega)}{W(j\omega)} \right = \left \frac{PG(j\omega)}{1+PGH(j\omega)} \right < \delta_n(\omega)$	Afitament de l'amplada de banda
$\alpha(\omega) < \left \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \right = \left \frac{PGF(j\omega)}{1+PGH(j\omega)} \right < \beta(\omega)$	Seguiment (<i>tracking</i>)
$\left \frac{E(j\omega)}{N(j\omega)} \right = \left \frac{H(j\omega)}{1+PGH(j\omega)} \right < \delta_h(\omega)$	Rebuig de pertorbacions a la sortida de la planta
$\left \frac{E(j\omega)}{V(j\omega)} \right = \left \frac{PH(j\omega)}{1+PGH(j\omega)} \right < \delta_{ph}(\omega)$	Rebuig de pertorbacions a l'entrada de la planta, incloent-hi la dinàmica del sensor

Aquesta gran síntesi d'informació (especificacions més incertesa) en un conjunt de corbes simples (els contorns o *bounds*) permetrà posteriorment el disseny del controlador utilitzant només una única planta nominal $P_0(j\omega)$, la qual cosa suposa una gran simplificació del procés de síntesi.

Segons l'especificació, els contorns o *bounds* poden consistir en corbes obertes o tancades. Els *bounds* defineixen en cada freqüència, per a la planta nominal, el límit o frontera de la regió en què es compleix l'especificació, en el diagrama de Nichols. A la Figura 2.5, la Figura 2.6 i la Figura 2.7 es representen com a exemple els tres tipus de *bounds* habituals en una freqüència concreta, en què s'ha acolorit la regió

no permesa. Per a les línies s'ha adoptat el mateix criteri de representació que en la *QFT toolbox* de Borghesani, Chait i Yaniv (1994), de manera que un *bound* en forma de línia contínua implica que la zona en què es compleix l'especificació queda per sobre de la línia (*bound* tipus **n**), mentre que si el *bound* és discontinu, la zona en què es compleix l'especificació queda per sota (*bound* tipus **u**), a la freqüència concreta. Un tercer tipus de *bound*, anomenat tipus **o**, és el que delimita una regió tancada dins la qual es troba la zona en què no es compleix l'especificació.

Gil-Martínez i García-Sanz (2003) fan un estudi més exhaustiu de les tipologies **n**, **u** i **o** dels *bounds*.

Per al càlcul dels límits, contorns o *bounds*, Zhao i Jayasuriya (1994) proposen un mètode general. Moreno, Baños i Montoya (1997) ho estenen al cas multi-valorat; Nataraj i Sardar (2000b), i Nataraj (2002) el generen des de l'òptica intervalar.

En cada una de les freqüències que interessin, per obtenir els *bounds* s'utilitzen les inequacions obtingudes amb la combinació de les especificacions i la incertesa de la planta. La intersecció dels *bounds* es fa tenint en compte sempre el cas més restrictiu.

Com a eina software de suport, a la present tesi s'ha utilitzat principalment la *QFT Control Design Toolbox* per a *Matlab* de Borghesani, Chait i Yaniv (1994), en la versió 2.0 del 2002.

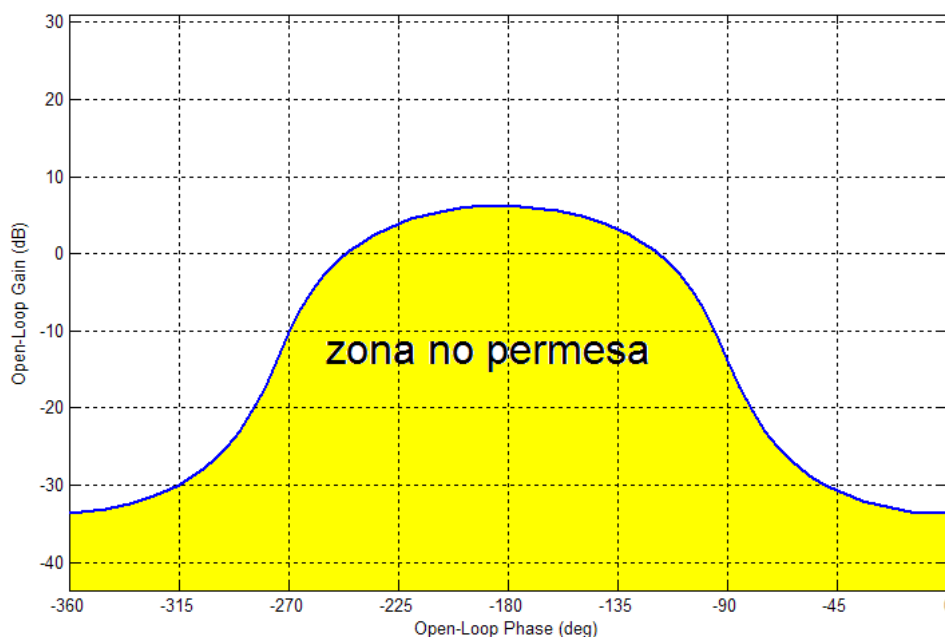


Figura 2.5 Bound tipus n

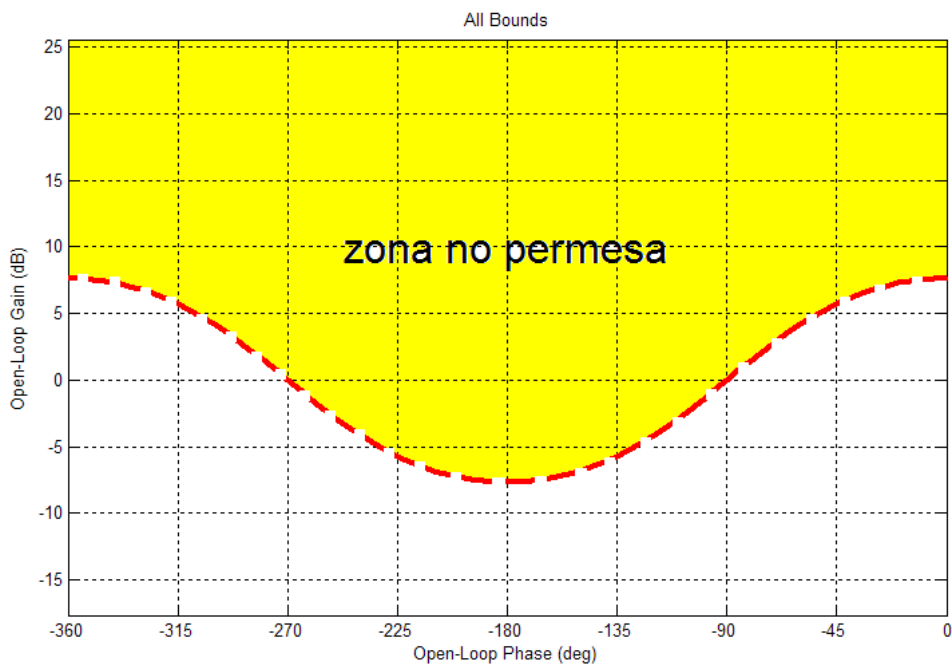


Figura 2.6 Bound tipus u

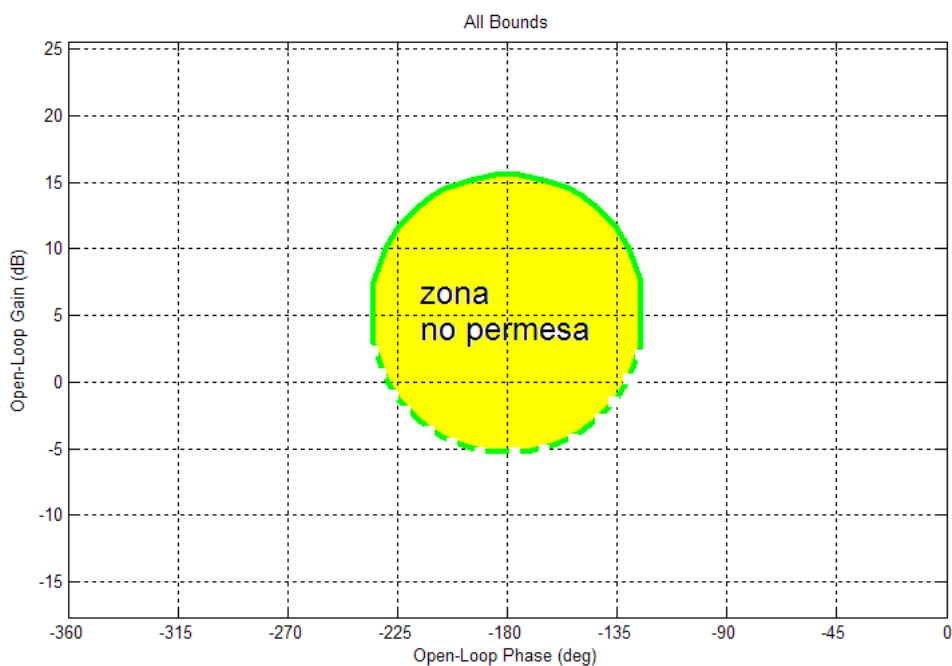


Figura 2.7 Bound tipus o

A la Figura 2.8 s'ha representat, com a exemple, el conjunt dels *bounds* d'un cas típic amb dues especificacions, prenent un conjunt de quatre freqüències (de valors mostrats a la llegenda de la part dreta superior de la figura). A la Figura 2.9 s'ha representat el conjunt de *bounds* que s'utilitzarà per al disseny,

després d'haver fet la intersecció dels *bounds* de la figura anterior i prenent el cas més desfavorable per a cada freqüència. S'observa que els *bounds* que es conserven com a resultat de la intersecció són els *bounds* tipus 'n'.

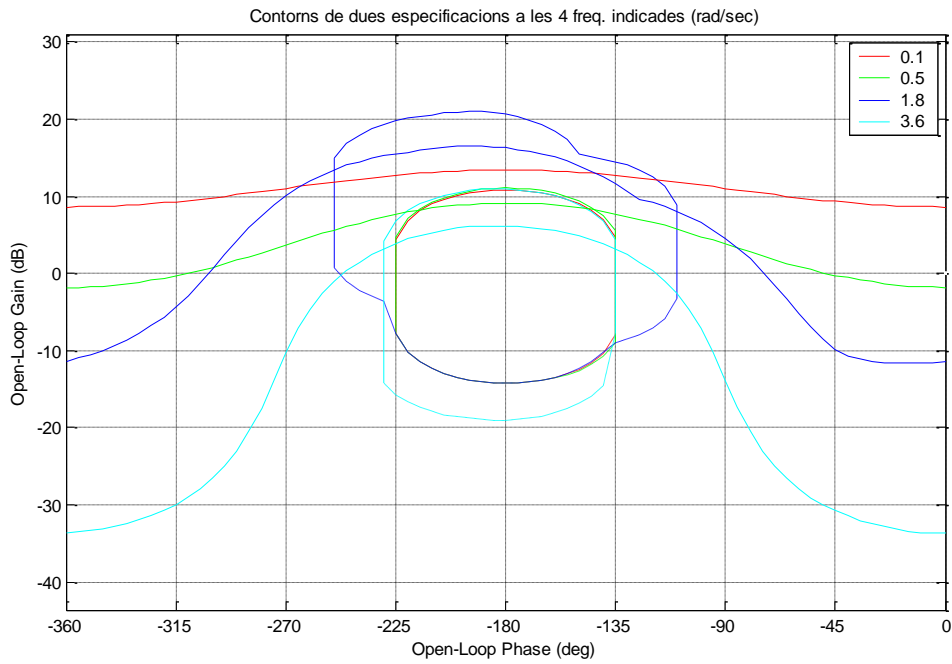


Figura 2.8 Contorns de dues especificacions: estabilitat — en cercles centrals — i sensibilitat — línies entre 0° i 360°

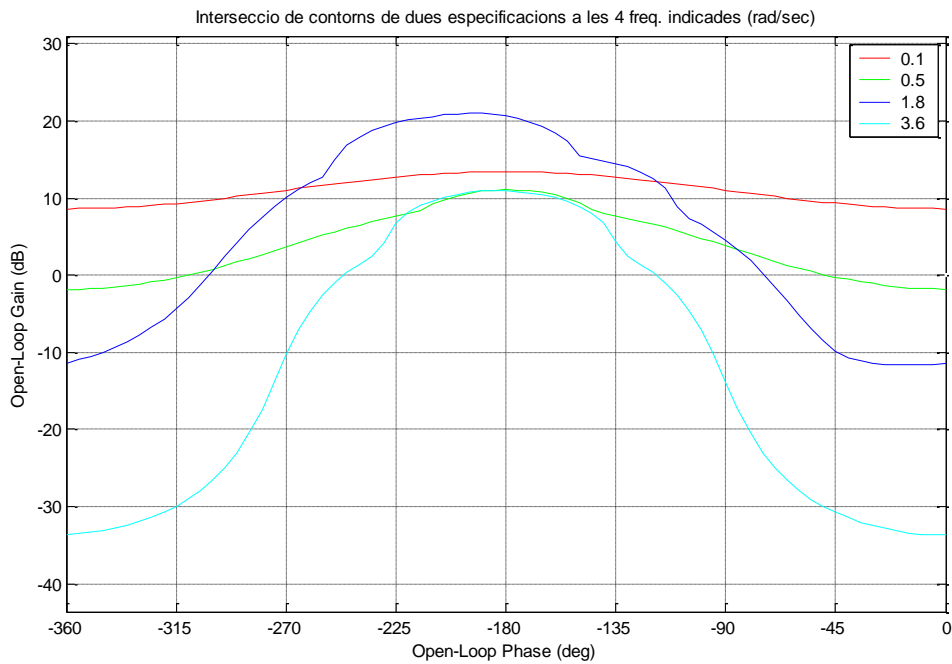


Figura 2.9 Intersecció dels contorns

2.2.2.4 Síntesi del controlador $G(j\omega)$: loop-shaping

El regulador $G(s)$ genèricament es pot considerar amb la forma següent:

$$G(s) = k_G \frac{\prod_{i=1}^{n_z} \left(\frac{s}{z_i} + 1 \right) \prod_{j=1}^{n_{z2}/2} \left(\frac{s^2}{|z_j|^2} + \frac{2 \operatorname{Re}(z_j)}{|z_j|^2} s + 1 \right) \dots}{s^r \prod_{k=1}^{m_p} \left(\frac{s}{p_k} + 1 \right) \prod_{q=1}^{m_{p2}/2} \left(\frac{s^2}{|p_q|^2} + \frac{2 \operatorname{Re}(p_q)}{|p_q|^2} s + 1 \right) \dots} \quad (2.18)$$

Un cop determinats els límits (*bounds*) de l'especificació de la QFT, cal dissenyar la funció de transferència de laç nominal, equació (2.17), afegint a $G(s)$ apropiats pols i zeros, i preservant en tot moment l'estabilitat del laç tancat, així com el compliment de la resta d'especificacions, és a dir, satisfent tots els límits (*bounds*) de l'especificació en el diagrama de Nichols. S'ha de complir que la funció $L_0(s)$ es trobi en cada freqüència dins de les àrees superiors a les línies contínues (*bounds* tipus **n**) i inferiors a les línies discontinües (*bounds* tipus **u**). A la Figura 2.10 es representa una funció $L_0(s)$, juntament amb els *bounds* de la Figura 2.9. Es comprova que es compleixen les condicions esmentades per als contorns, i, per tant, també es compleixen les especificacions.

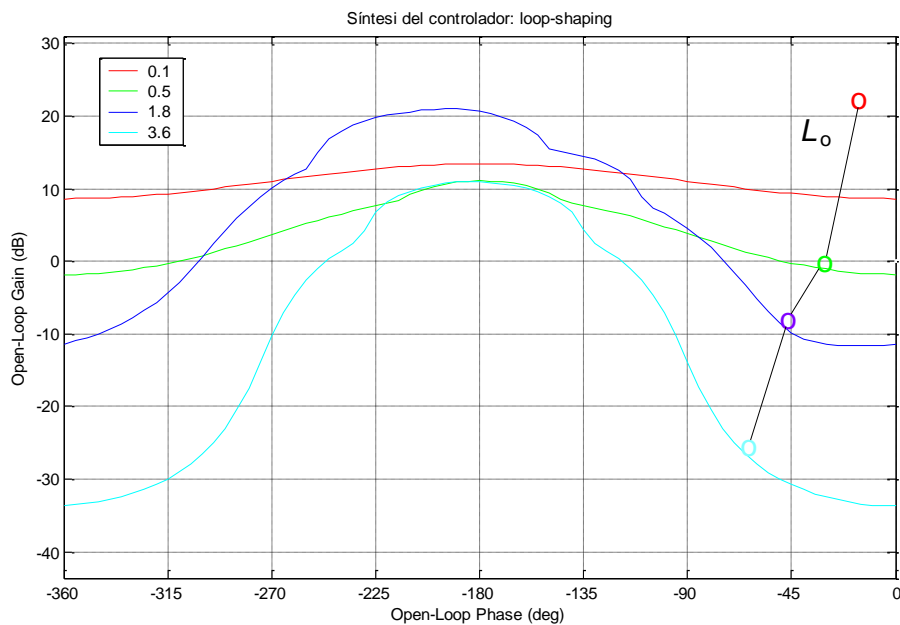


Figura 2.10 Síntesi del controlador: loop-shaping

En aquest exemple particular, cal fer una observació. Tal com es mostrava a la Figura 2.8 i a la Figura 2.9, en intersecar els *bounds* i considerar el cas més desfavorable en cada una de les freqüències que interessin, només s'han de considerar *bounds* del tipus **n**. Per tant, les freqüències d'interès de la línia

$L_0(s)$ s'han de situar a l'àrea que hi ha per sobre dels *bounds* corresponents. En general, es pot donar el cas de trobar-nos simultàniament amb *bounds* tipus **n**, tipus **u** i també tipus **o** (àrees tancades no permeses) en el mateix diagrama de Nichols.

El controlador òptim serà, tal com van demostrar Gera i Horowitz (1980), el controlador que, tenint el guany mínim, aconsegueixi que $L_0(s)$ descansi sobre els contorns (*bounds*) en cada una de les freqüències que tenen interès. El criteri d'òptim seguit pels autors esmentats —i molts d'altres— és la minimització del “guany” k de la funció de transferència a llaç obert $L_0(s)$ a altes freqüències, que té una expressió que es pot aproximar a la forma k/s^e , on e és l'excés de pols sobre zeros.

Com s'ha mostrat, la metodologia de la QFT permet treballar amb un vector concret de paràmetres de referència arbitrari, que dóna lloc a una planta nominal. Amb l'ajuda d'unes línies límit en el diagrama de Nichols, anomenades *bounds*, calculades a partir de les especificacions i de la incertesa de la planta, el procés de síntesi es pot realitzar gràficament i d'una manera relativament senzilla.

2.2.2.5 Síntesi del prefiltre $F(j\omega)$

Si el sistema de control requereix especificacions de seguiment (*tracking*), aleshores caldrà també el disseny d'un prefiltre $F(j\omega)$. Així, mentre que l'objectiu bàsic de $G(j\omega)$ és reduir la incertesa i assolir objectius d'estabilitat i rebuig de pertorbacions, etc., l'objectiu del prefiltre és el compliment de les especificacions de *tracking*.

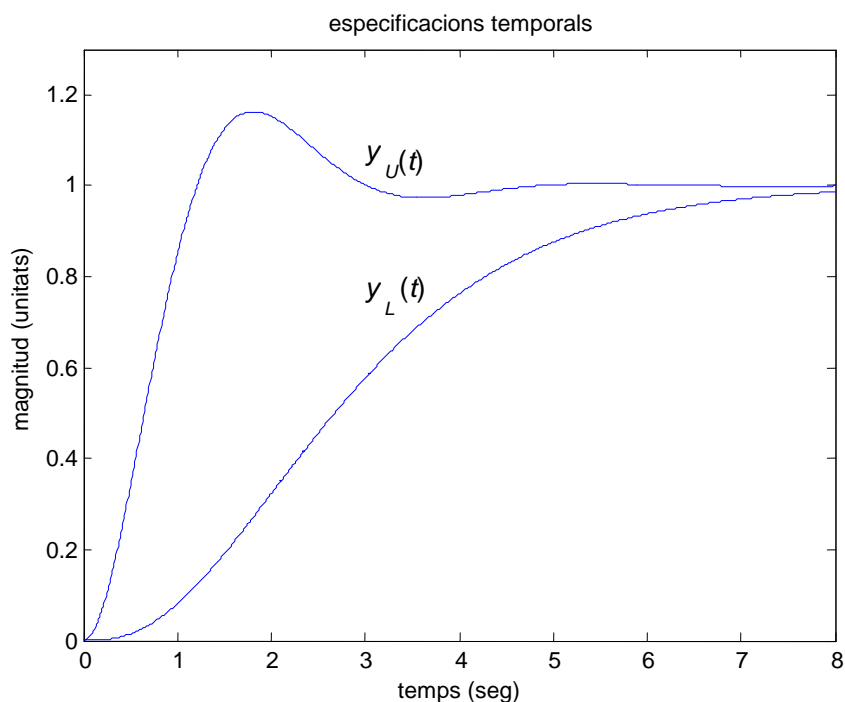


Figura 2.11 Especificacions de *tracking* temporals

Seguidament s'explica l'efecte del prefiltr. Amb una especificació de *tracking* determinada, la sortida del sistema $y(t)$ — resposta davant d'una entrada graó $r(t)$ — ha d'estar entre els senyals $y_U(t)$ i $y_L(t)$, Figura 2.11. Això implica que la seva resposta freqüencial es trobi entre les corbes marcades com a $T_U(\omega)$ i $T_L(\omega)$, Figura 2.12. L'ús de la QFT permet dissenyar un controlador que situa la planta dins de l'àrea delimitada entre $B_U(\omega)$ i $B_L(\omega)$. El prefiltr $F(\omega)$ mourà l'àrea entre $B_U(\omega)$ i $B_L(\omega)$ per situar-la entre $T_U(\omega)$ i $T_L(\omega)$.

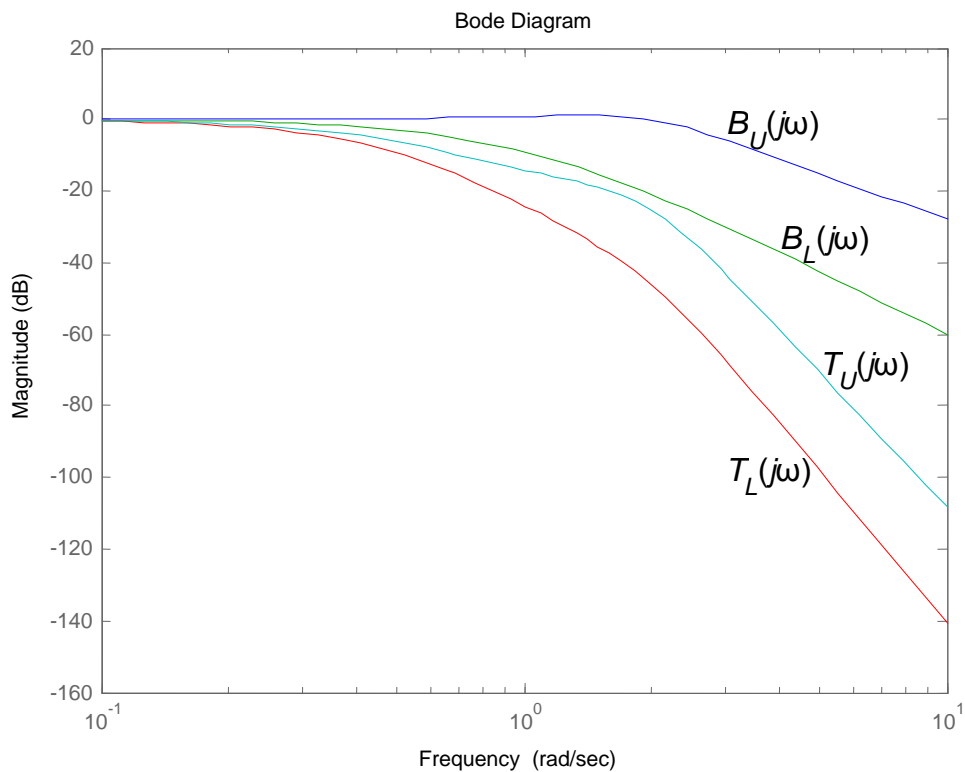


Figura 2.12 Especificacions de *tracking* freqüencials

2.2.2.6 Validació del disseny

Un cop s'ha finalitzat el disseny del controlador — $G(j\omega)$ i $F(j\omega)$ —, cal analitzar-ne el comportament davant les especificacions determinades, tant en el domini de la freqüència com sobretot en el domini del temps, i enfront dels casos més desfavorables de la incertesa de la planta. Cal observar que, com a mètode en el domini de la freqüència, la QFT és rigorosa en sentit estricte només enfront de les especificacions freqüencials.

2.2.3 Sistemes discrets

Gairebé tots els sistemes de control s'implementen avui dia digitalment. Però la QFT fou inicialment desenvolupada en el domini continu. El 1986, Horowitz va presentar un desenvolupament paral·lel de la QFT en el domini discret. Horowitz i Liao (1984), i també Houpis i Lamont (1985) presenten treballs sobre aquest tema.

Un ús corrent de l'ordinador en control fa que, en moltes aplicacions, el sistema s'hagi de tractar com a discret. És habitual que la sortida contínua del procés es mostregi i no és estrany que es filtri digitalment. Així mateix, la sortida del controlador digital requereix una transformació D/A, normalment amb un mantenidor d'ordre zero, per aplicar el senyal de control al sistema. A la pràctica, per tant, es pot parlar de models de planta discrets. Aleshores, la variable de Laplace $s = j\omega$ és substituïda per l'equivalència $z = e^{j\omega T}$. Si el període de mostreig és T , la banda de freqüència que interessa és $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{T}\right]$. Pel que fa al disseny, la majoria de qüestions són similars al procediment que s'empra en sistemes continus, tot i que s'han de tenir en compte certes particularitats dels sistemes discrets Borghesani, Chait i Yaniv (1994).

2.2.4 Resum del control QFT. Temes oberts

Com a resum, la QFT és una tècnica de control robust en què es treballa en el domini freqüencial i que presenta avantatges i inconvenients respecte d'altres tècniques. Les especificacions en la QFT són també freqüencials, o sigui que si es plantegen les especificacions en el domini temporal, cal fer l'esforç de cercar l'equivalència en el domini de la freqüència.

La QFT permet treballar amb plantes amb incertesa. La QFT treballa amb un conjunt de plantes i amb un conjunt de freqüències, i, un cop fet el disseny, permet comprovar que cada una de les plantes compleixen les especificacions per a qualsevol de les freqüències d'entre una graella amb una granularitat escollida. Evidentment, això no deixa de ser un conjunt limitat de plantes i de freqüències, per extens que sigui, i aquesta podria ser una crítica a la tècnica, ja que, en cas que no s'escullin adequadament, podrien haver-hi plantes de l'hipotètic conjunt infinit inicial per a les quals no es complís alguna de les especificacions.

Un gran avantatge de la QFT és que el disseny es fa utilitzant una planta nominal, que és una única planta d'entre les infinites del conjunt inicial. El disseny en el diagrama de Nichols es fa amb l'ajuda dels *bounds*, línies que inclouen informació de la incertesa de la planta i de les especificacions per a cada una de les freqüències escollides. Amb un correcte disseny QFT en el diagrama de Nichols es garanteix el compliment de la totalitat d'especificacions per al conjunt de plantes i de freqüències escollides. Però normalment, quan el disseny del controlador és possible, múltiples controladors fan possible que es compleixin les especificacions. En funció dels requeriments del sistema de control, s'haurien d'aplicar criteris d'optimització per escollir el controlador òptim.

En un antic treball de Gera i Horowitz (1980) es descriu un procés de semi-automatització del procés de disseny. En l'article esmentat, s'assigna *a priori* un excés e de pols respecte a zeros en la funció de transferència en llaç obert, $L(j\omega) = P(j\omega)G(j\omega)$, de manera que $L(s) \rightarrow k/s^e$ quan $s \rightarrow \infty$. Aleshores, el controlador òptim és el que satisfaci les restriccions, amb el valor mínim de k . Els autors proposen tres maneres per trobar el controlador òptim: explícitament, numèricament i iterativament, i en tots tres casos utilitzen la integral de Bode amb l'ajuda de la imatge de Hilbert (*Hilbert boundary*). Aquest mateix criteri d'optimització ja s'esmentava a l'apartat 2.2.2.4. Com a defecte en la metodologia proposada, els mateixos autors remarquen que el dissenyador ha d'acordar un compromís entre l'ordre de $L(j\omega)$ i l'amplada de banda.

Molts altres autors, a partir d'aquest treball pioner, han treballat en la línia d'aproximar-se a un disseny automàtic. Podem destacar, més recentment els treballs de Fransson *et al.* (2002), que proposen un mètode d'optimització no convexa per dissenyar controladors tipus PID amb especificacions de tipus QFT, per a sistemes amb incertesa, LTI i SISO. En l'article de Fransson *et al.* (2002), s'hi proposa una combinació d'algorismes d'optimització global i local; la funció que suggereixen minimitzar és la norma infinit de la funció sortida del procés quan es té una pertorbació que es manté constant a l'entrada del procés, en el diagrama clàssic de llaç tancat amb realimentació negativa. La idea bàsica és que per a l'ajust de paràmetres del controlador PID es formulen criteris diferents segons que es treballi a baixa, mitjana o alta freqüència. Per buscar el controlador òptim s'utilitzen paquets comercials d'optimització, com ara *Tomlab*. Els autors apliquen les metodologies proposades a un sistema mecànic amb incertesa, modelitzat com a segon ordre amb un zero estable, i en destaquen alguns bons resultats, amb una important reducció del cost computacional comparat amb la tècnica de *H-inf*.

En una tesi doctoral més recent de Tharewal (2005), s'hi utilitzen tècniques intervalars d'optimització global, per a la recerca del controlador òptim, en què la funció objectiu que s'ha de minimitzar és simplement el guany a alta freqüència del controlador. S'hi proposen també, entre altres aspectes, el disseny automàtic de controladors d'ordre fraccional, així com la verificació computacional de l'existència o no existència de controlador LTI QFT. També es proposa l'automatització del disseny de prefiltres mitjançant algorismes clàssics segons estratègies *branch and bound*. L'estructura del prefiltre s'ha de donar.

Alguns autors s'han especialitzat en aspectes concrets de la tècnica QFT, així com en la possibilitat d'extendre-la a casos més generals. Un bon resum amb perspectiva històrica del control QFT està recollit en (García-Sanz 2005). Per exemple, les plantes de fase no mínima (*nmp*) limiten els potencials beneficis de la realimentació. En el cas SISO, un zero de la planta en el semiplà real positiu imposa a la funció de transferència resultant en llaç obert un zero en la mateixa posició. Aquest fet implica una limitació física del sistema, en redueix els marges de guany i de fase, i produeix en el transitori una resposta temporal inversa, com van estudiar Horowitz i Liao (1984). Horowitz va proposar una metodologia per al disseny,

tant en plantes de fase no mínima amb incertesa (Horowitz and Sidi 1978) com en plantes de fase no mínima inestables (Horowitz 1979b), (Horowitz, Oldak and Yaniv 1986): a causa d'un incompliment del teorema de Bode (1945) que relaciona la magnitud i la fase en cada freqüència, amb la metodologia QFT cal un desplaçament dels contorns en el diagrama de Nichols.

Pel que fa a les plantes no lineals (NL) i a les plantes variables en el temps (LTV), en la QFT es redueixen de forma rigorosa a un conjunt de problemes lineals, invariants en el temps, LTI. Horowitz proposa diverses tècniques en diversos treballs (Horowitz 1976), (Horowitz 1981a). Bàsicament, Horowitz planteja dues tècniques. En la primera, se substituiria la planta original no lineal per un conjunt de plantes LTI, tot i que aquest conjunt de plantes lineals s'obtidria només per a un rang limitat de sortida. La segona tècnica es pot considerar més general i consisteix en la substitució de les no-linealitats per un conjunt equivalent de perturbacions i per un conjunt de plantes LTI.

Més endavant, Horowitz (1983) i Horowitz i Liao (1986b) proposaren també un tractament especial per a no-linealitats tipus saturacions. En els articles esmentats, com que la no-linealitat de la saturació no és invertible, es proposen tècniques específiques en el mode saturat, però només vàlides per a la planta nominal.

Oldak, Baril i Gutman (1994) també treballaren tècniques per altres no-linealitats, considerades *hard-nonlinearities* com ara friccions, histèresis, zones mortes, etc. El tractament específic proposat pels autors esmentats per a aquests tipus de no-linealitats és mitjançant la descomposició en una planta LTI més un conjunt de perturbacions delimitades; i aleshores s'hi aplicaria la segona tècnica proposada per Horowitz per a plantes no lineals.

Baños i Barreiro (2000) i Baños *et al.* (2002), han estudiat l'estabilitat en la QFT per a sistemes no lineals. Els autors esmentats tracten l'estabilitat per a tot tipus de no-linealitats, incloent-hi les esmentades *hard-nonlinearities*. La idea bàsica és considerar l'efecte que té sobre la sortida qualsevol tipus d'entrada possible. Des del punt de vista realista, cal tenir en compte que podria donar-se el cas que una perturbació que no s'esperava podria inestabilitzar el sistema. Només des de certes hipòtesis es pot garantir estabilitat aplicant el concepte *Bounded-Input Bounded-Output* (BIBO) estès de forma *quantitativa* a sistemes amb incertesa. Es tracta d'estudiar en quins casos desviacions afitades respecte a les perturbacions o entrades preses com a referències podrien provocar en les sortides desviacions també afitades. Més detalls quant aquest tema es poden trobar a (Baños and Horowitz 2004) i (Baños 2007).

Altres autors que han treballat en el disseny de plantes inestables i de fase no mínima són, per exemple, Chen i Balance (1998), o el mateix Horowitz (1986).

Yaniv i Boneh (1997) plantegen un mètode linealitzant la planta LTV SISO per trams, de manera que es crea un conjunt de plantes LTI: es dissenya un controlador QFT per a cada tram, i es commuta segons una

estratègia de *schedulling*. Yaniv (1999b) amplia el mètode per abordar també casos multivariables MIMO (*multi-input multi-output systems*).

García-Sanz i Guillen (1999) treballaren en processos amb grans retards variables i incertesa. Per a això plantegen una estructura tipus predictor de Smith i sintonitzen el controlador mitjançant tècniques QFT.

El control de sistemes multivariables MIMO amb incertesa en la planta és encara un complex problema de control. Són destacables diversos treballs sobre el tema, entre els quals són dignes de menció els de García-Sanz i Egaña (2002) i el de García-Sanz *et al.* (2005a).

Entre altres autors, García-Sanz, Huarte i Asenjo (2005b), (2005c), plantegen un mètode de disseny de controladors QFT per a sistemes amb paràmetres distribuïts amb incertesa i diferents tipologies de control. La idea del mètode és la consideració que un sistema amb paràmetres distribuïts i incert alhora podria ser considerat com una extensió de la QFT, en què la distribució espacial es consideraria un nou paràmetre amb incertesa.

En el llibre *Load Sharing Control* d'Eitelberg (1999) diversos controladors governen la mateixa sortida, en presència de pertorbacions. Alguns conceptes i peculiaritats del llibre els introdueix i els explica amb posterioritat el mateix autor en un article (Eitelberg 2003).

Malgrat el que s'ha avançat en la cinquantena d'anys de vida de la tècnica de la QFT, la majoria de qüestions plantejades inicialment no estan definitivament tancades i queden multitud de reptes que esperen ser resolts. En la present tesi es pretén centrar l'atenció en un parell de temàtiques obertes; d'una banda, mitjançant una aportació a la qüestió de l'existència o no d'algun possible controlador *feedback* que permeti el compliment d'un conjunt d'especificacions, i, de l'altra, si existeix aquest controlador, també es fa una aportació al que s'anomena *automatic loop shaping*, o disseny automàtic del controlador, atenent a un criteri d'optimització determinat.

Capítol 3 Especificacions de control

Com s'ha introduït en el Capítol 2, la primera etapa en el disseny de controladors és la de definir les especificacions de funcionament o els objectius de control. En teoria de control s'utilitzen especificacions en el domini del temps o en el domini de la freqüència en funció de les eines emprades per al disseny. L'objectiu d'aquest capítol és estudiar la problemàtica genèrica de les equivalències d'especificacions entre els dominis temporal i freqüencial. Un dels motius d'aquesta inquietud per trobar l'equivalència entre ambdós dominis és el fet que algunes metodologies de disseny, com ara la QFT, són en el domini freqüencial, si bé a la pràctica sol ser força comú avaluar la validesa d'un disseny des del punt de vista de les respostes temporals dels senyals del llaç de control com a resposta a entrades concretes (consigna, pertorbació, soroll).

Com a exemple d'equivalència d'especificacions entre els dominis freqüencial i temporal, en el capítol també es veu la tècnica de Krishnan i Cruickshanks (1977) —que proposen una equivalència entre ambdós dominis—, que s'il·lustra amb un exemple de disseny a partir d'una especificació de seguiment de consigna.

3.1 Especificacions temporals i freqüencials

3.1.1 Especificacions en el domini temporal

Les especificacions en el domini temporal d'un sistema realimentat es descriuen habitualment en termes de senyals d'entrada i de sortida. Aquestes han de ser limitades perquè, si el sistema funciona dins d'una regió de treball, doni la resposta que se n'espera en el temps. Es mostren seguidament alguns exemples:

1. La sortida de la planta s'ha de mantenir propera al zero si la consigna és nul·la (resposta no forçada) després d'un cert temps transitori. Les especificacions podrien ser de la forma donada a la Figura 3.1, o, alternativament, a la Figura 3.2.
2. La sortida de la planta ha de seguir una consigna determinada en què, a causa de la incertesa de la planta, la sortida es limita entre dues funcions temporals donades, l'una que limita superiorment i l'altra inferiorment, com es veu a la Figura 3.3, cas típic d'especificació de seguiment de consigna (*tracking*).
3. L'entrada de la planta o acció de control, per un soroll donat del sensor, i/o per una pertorbació donada, o per un seguiment donat, és limitada per una funció del temps donada. A la Figura 3.4 se'n mostra un exemple, que podria assimilar-se a una limitació d'acció de control.

Especificacions clàssiques en el domini temporal com ara els paràmetres de resposta temporal al graó (temps de creixement, temps de pic, temps d'establiment, sobre-impuls màxim, error...), podem considerar-les com a casos especials dels exemples anteriors. També es podria especificar l'ample de banda de l'acció de control, que vindria a ser l'equivalent a una limitació de la seva derivada temporal.

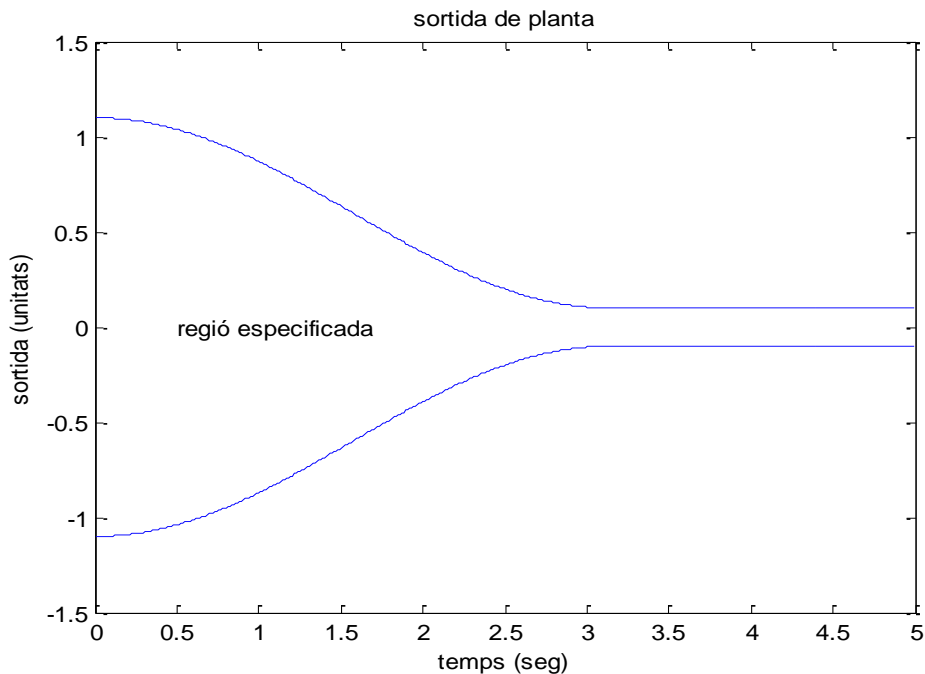


Figura 3.1 Exemple d'especificació temporal per sortida, amb sortida nul·la després d'un transitori

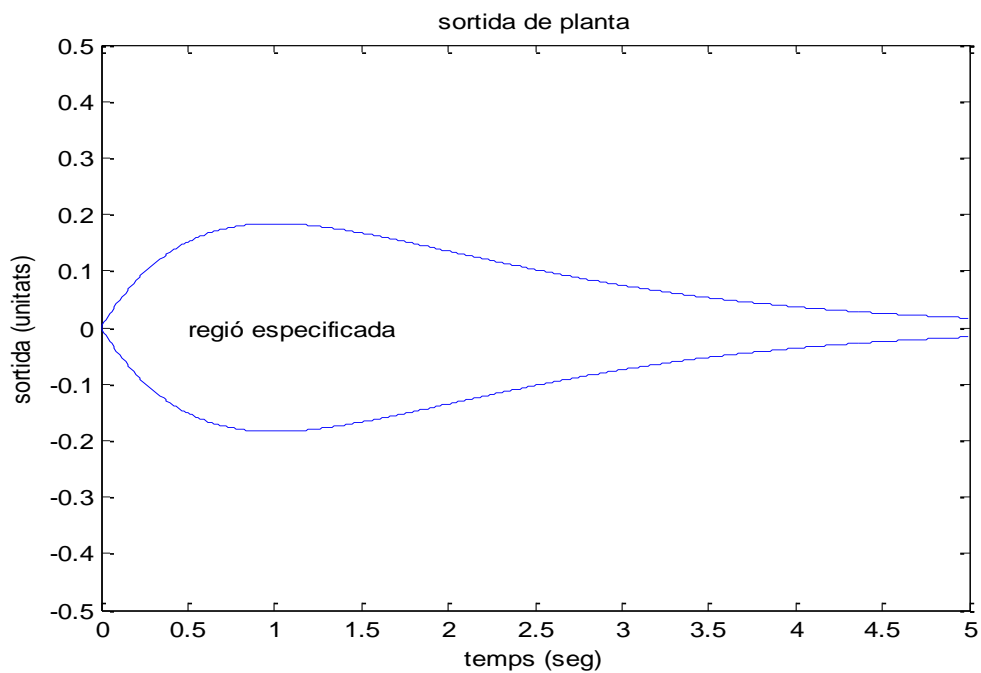


Figura 3.2 Exemple d'especificació temporal per sortida, amb sortida nul·la a l'inici i al final d'un transitori

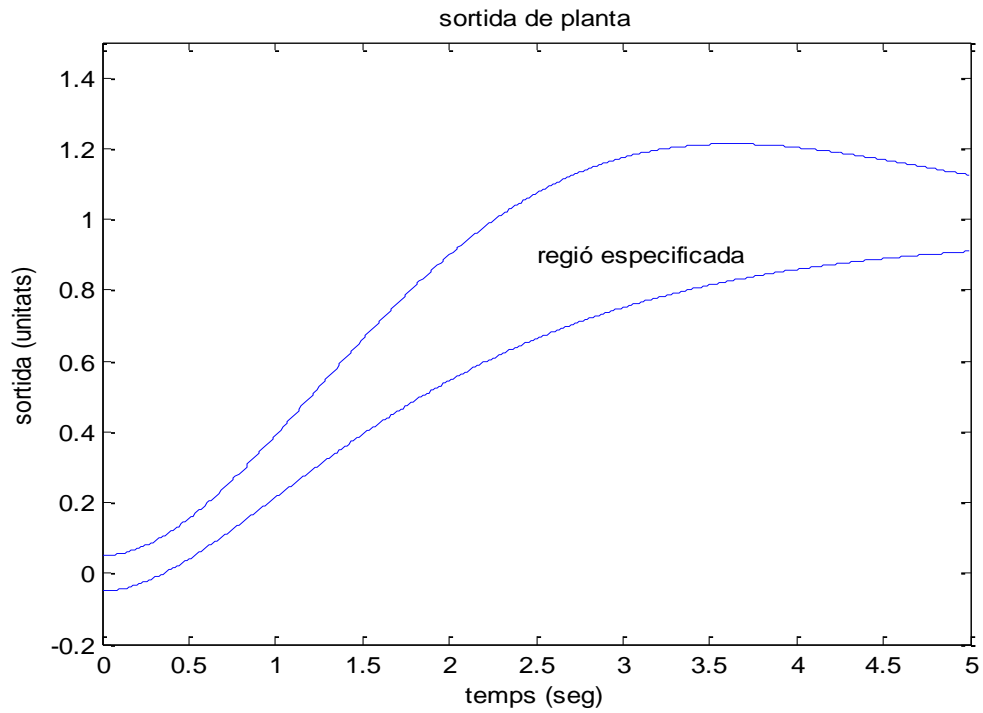


Figura 3.3 Exemple d'especificació temporal per sortida, delimitació de l'evolució de la sortida amb valor final unitari

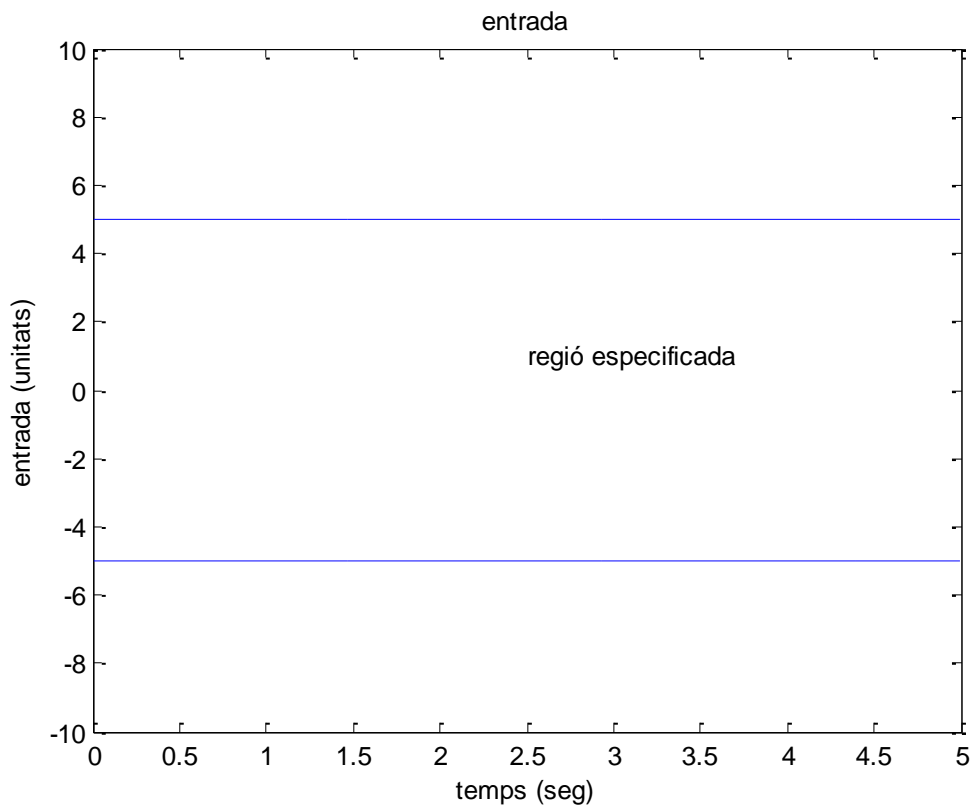


Figura 3.4 Exemple d'especificació temporal per entrada, limitació de l'acció de control

3.1.2 Compromís entre les especificacions en el domini freqüencial

Les especificacions a llaç tancat del sistema de la Figura 2.2 se solen descriure típicament en termes de desigualtats de les funcions de transferència. Normalment usarem la notació emprada en el Capítol 2 (Figura 2.2), amb funció de transferència en llaç obert $L = PGH$. Les entrades són R, W, V, D, N . Qualsevol altre senyal del llaç es pot considerar que té interès com a sortida: $Y, U, E...$

És força habitual definir especificacions freqüencials com les que ja s'han esmentat que tenen un ús comú en la QFT (apartat 2.2.2).

Idealment, el que es pretén en un sistema controlat és el seguiment perfecte de consignes, i alhora un rebuig perfecte de perturbacions. A la pràctica, el que s'ha d'adoptar és un compromís entre les diverses especificacions, ja que un compliment més gran d'un tipus d'especificació pot implicar un pitjor compliment d'alguna altra de les especificacions. Un exemple prou il·lustratiu d'aquesta afirmació es pot comprovar a partir de la coneguda expressió general (Bhattacharyya, Chapellat and Keel 1995) que relaciona la sensibilitat $S(s)$ amb la sensibilitat complementària $T(s)$,

$$S(s) + T(s) = I \quad (3.1)$$

en què la sensibilitat i la sensibilitat complementària es defineixen de forma general i respectivament mitjançant les expressions

$$S(s) = [I + G(s)P(s)]^{-1} \quad (3.2)$$

$$T(s) = [I + G(s)P(s)]^{-1} G(s)P(s) \quad (3.3)$$

que en sistemes SISO tenen l'equivalent respecte en les expressions següents:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)P(s)} \quad (3.4)$$

$$T(s) = \frac{G(s)P(s)}{1 + G(s)P(s)} \quad (3.5)$$

Aleshores, sempre amb una estructura de control realimentat com el de la Figura 2.2 i assumint que $H(s) = 1$ sense pèrdua de generalitat, es pot veure clarament que la relació (3.1) ens limita la pretensió d'un compliment simultani d'especificacions en el sentit de limitar superiorment tant com sigui possible el mòdul d'ambdues funcions de transferència, que en sistemes SISO podem re-escriure com

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (3.6)$$

Per a les especificacions en el domini freqüencial, es podria destacar que:

- Si es pretén un bon rebuig de perturbacions, cal una sensibilitat $S(j\omega)$ baixa.
- Si es pretén disminuir la sensibilitat als errors de modelització, també cal una $S(j\omega)$ baixa.
- Per millorar els marges d'estabilitat, s'ha de mantenir la sensibilitat complementària $T(j\omega)$ baixa.
- Per disminuir la sensibilitat al soroll del sensor, s'ha de reduir $T(j\omega)$.

- En qualsevol cas, la relació entre sensitivitat i sensitivitat complementària és:

$$S(j\omega) + T(j\omega) = 1 \quad (3.7)$$

Com a exemple il·lustratiu, si es prenen les especificacions (2.11) i (2.15) definides anteriorment en l'apartat 2.2.2.2, $\left| \frac{Y}{D} \right| = \left| \frac{1}{1+L(j\omega)} \right| < \delta_s(\omega)$ i $\left| \frac{Y}{W} \right| = \left| \frac{PG(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| < \delta_n(\omega)$, es veuen clarament afectades per la relació esmentada entre sensitivitat $S(j\omega)$ i sensitivitat complementària $T(j\omega)$. Aleshores, en virtut de la igualtat (3.6), el compliment simultani d'especificacions implica que els límits $\delta_s(\omega), \delta_n(\omega)$ també han de complir unes restriccions determinades, ja que, si no les complien, es podria afirmar que les dues especificacions esmentades són “incompatibles”. La solució en aquest supòsit, en general, implica canvis en alguna —o algunes— de les especificacions. És el que es coneix amb el nom de *relaxament* d'especificacions fins que s'aconsegueix que no siguin incompatibles.

Tot i que per il·lustrar còmodament la possible incompatibilitat d'especificacions s'han pres les especificacions (2.11) i (2.15), aquest fenomen d'incompatibilitat pot donar-se sigui quina sigui l'especificació en consideració. Per exemple, si s'analitza l'especificació $\left| \frac{Y}{W} \right| = \left| \frac{PG(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| < \delta_n(\omega)$,

s'observa que es pot “reconvertir” en una altra de les especificacions, concretament en una de similar a la $\left| \frac{U}{W} \right| = \left| \frac{G(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| < \delta_c(\omega)$ si s'aprofita que $\frac{G}{1+L} = \frac{L/P}{1+L}$. Com a conclusió, un bon disseny del llaç

comporta que abans que res es fixin unes especificacions adequades, per exemple procurant que les especificacions (2.11) a (2.14) es puguin satisfer bé, amb unes especificacions del tipus (2.15) i (2.16) no excessivament exigents.

3.1.3 Relacions entre especificacions temporals i freqüencials

Típicament, les especificacions es donen en el domini temporal o bé en el domini freqüencial, segons que es relacioni la sortida amb l'entrada en el domini temporal o bé en el domini freqüencial, respectivament.

La possibilitat de traduir especificacions d'un domini a l'altre és molt important, ja que algunes tècniques de disseny (per exemple, la QFT) són en el domini freqüencial, mentre que la forma habitual d'avaluar el comportament d'un sistema controlat es fa en el domini temporal.

Una possible manera de fixar especificacions temporals és establint uns límits extrems, que podem anomenar *envoltants*; d'aquesta manera, el que es desitja és que en cap cas la resposta a una entrada determinada surti de la regió compresa entre els dos límits. Pot ocórrer que dues respostes temporals (a una entrada en graó concreta, per exemple) no tinguin cap punt d'intersecció a partir de l'instant inicial i, per tant, defineixin una regió: aquestes respostes temporals es podrien considerar com a valors extrems de les respostes temporals, i es podrien utilitzar com a envoltants, i, per tant, com a especificació. Però pot donar-se el cas que, en representar freqüencialment els dos sistemes que han donat lloc a aquestes

respostes temporals, hi hagi alguna intersecció entre les corbes de guany i aleshores perdi sentit utilitzar-les com a envoltants en el domini freqüencial. Per tant, el compliment estricte de l'especificació temporal es traduiria en l'obligació que totes les respostes freqüencials del sistema incert controlat passessin obligatòriament per un mateix punt (guany i freqüència del punt d'intersecció), la qual cosa és pràcticament impossible d'aconseguir, de manera que no es podria traduir de forma estricta l'especificació temporal en freqüencial. Seguidament, se'n veuen alguns exemples i contra-exemples il·lustratius.

Aquests exemples es basen en el fet de que definim unes especificacions de seguiment en el domini temporal i volem analitzar com seria l'especificació freqüencial, per tal d'assolir l'especificació donada per:

$$\alpha(\omega) < \left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \left| \frac{PGF(j\omega)}{1+PGH(j\omega)} \right| < \beta(\omega) \quad (3.8)$$

Anomenem $\alpha(\omega)$ i $\beta(\omega)$ els l·lindars inferior i superior, respectivament, de l'especificació de seguiment en el domini freqüencial. Aquesta especificació, presa com a exemple, ja s'havia definit anteriorment en (2.14). Així mateix, es consideren les funcions Sys_1 Sys_2 com a funcions de transferència en s , per avaluar si les especificacions temporal tenen o no transformació directa a especificacions freqüencials. En alguns dels casos següents es veu com les funcions Sys_1 i Sys_2 es podrien utilitzar com a l·lindars inferior i superior respectivament de l'especificació (3.8), mentre que en altres casos no seria possible.

Cas A. Les respostes temporals dels sistemes Sys_1 i Sys_2 al graó unitari no es tallen i en el domini freqüencial les representacions del guany dels sistemes tampoc es tallen; en aquest cas ambdues funcions es poden emprar com a l·lindars superior i inferior, $Sys_{up} = Sys_1$ i $Sys_{lo} = Sys_2$ (*upper* i *lower*, respectivament). A la Figura 3.5 s'ha representat un cas determinat per dos sistemes de 1r ordre:

$$Sys_{up}(s) = \frac{1.1}{0.1s+1}; Sys_{lo}(s) = \frac{0.9}{0.2s+1}$$

Cas B. Les respostes temporals dels sistemes Sys_1 i Sys_2 al graó unitari es tallen i en el domini freqüencial les representacions del guany dels sistemes també es tallen. Evidentment, no ens serveixen com a límits d'especificació: no les utilitzarem en el domini temporal, ni en el freqüencial. A la Figura 3.6 s'ha representat un cas determinat per dos sistemes de 2n ordre: $Sys_1(s) = \frac{4.8}{s^2+3.2s+4}; Sys_2(s) = \frac{7.2}{s^2+3s+9}$.

Cas C. Les respostes temporals dels sistemes Sys_1 i Sys_2 al graó unitari es tallen, tot i que en el domini freqüencial les representacions del guany dels sistemes no es tallen. Evidentment, les respostes temporals no ens serveixen com a límits d'especificació. A la Figura 3.7 s'ha representat un cas determinat per dos sistemes de 2n ordre: $Sys_1(s) = \frac{13.5}{s^2+0.6s+9}; Sys_2(s) = \frac{2.8}{s^2+1.6s+4}$.

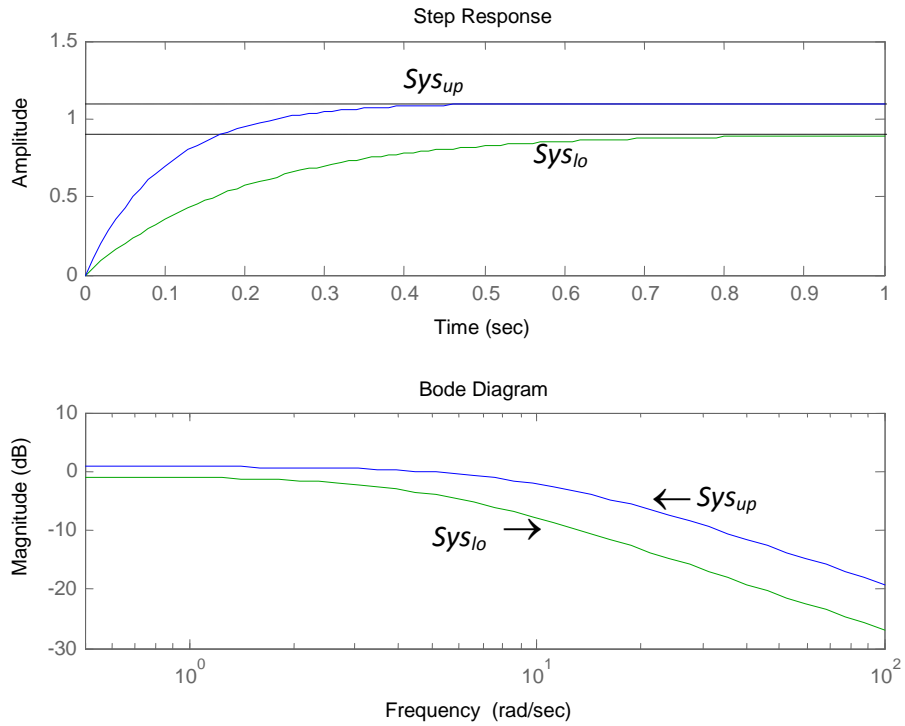


Figura 3.5 Exemple de respostes temporal i freqüencial, cas A

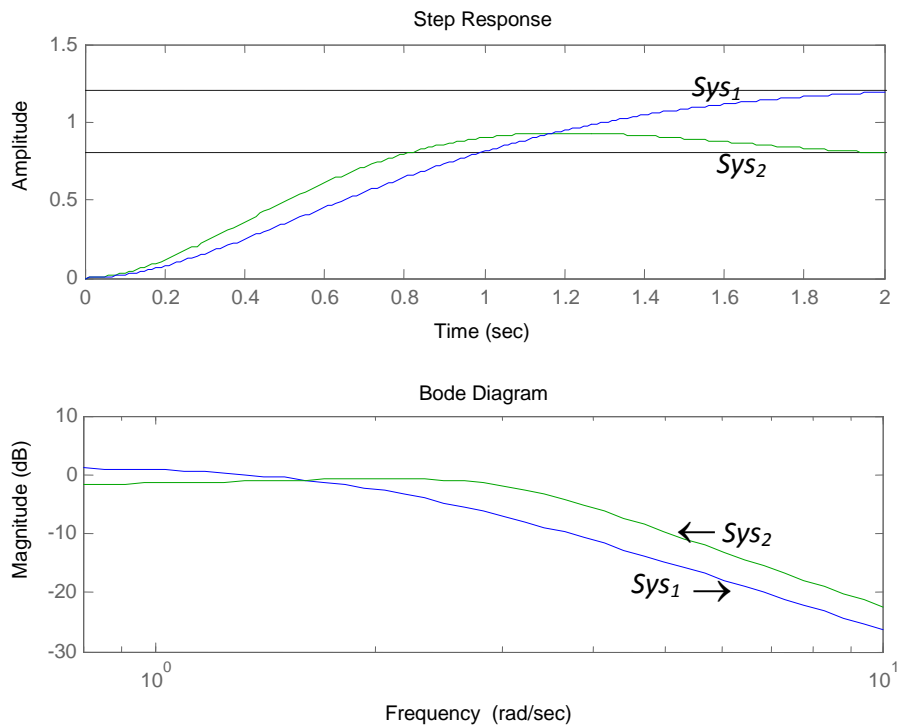


Figura 3.6 Exemple de respostes temporal i freqüencial, cas B

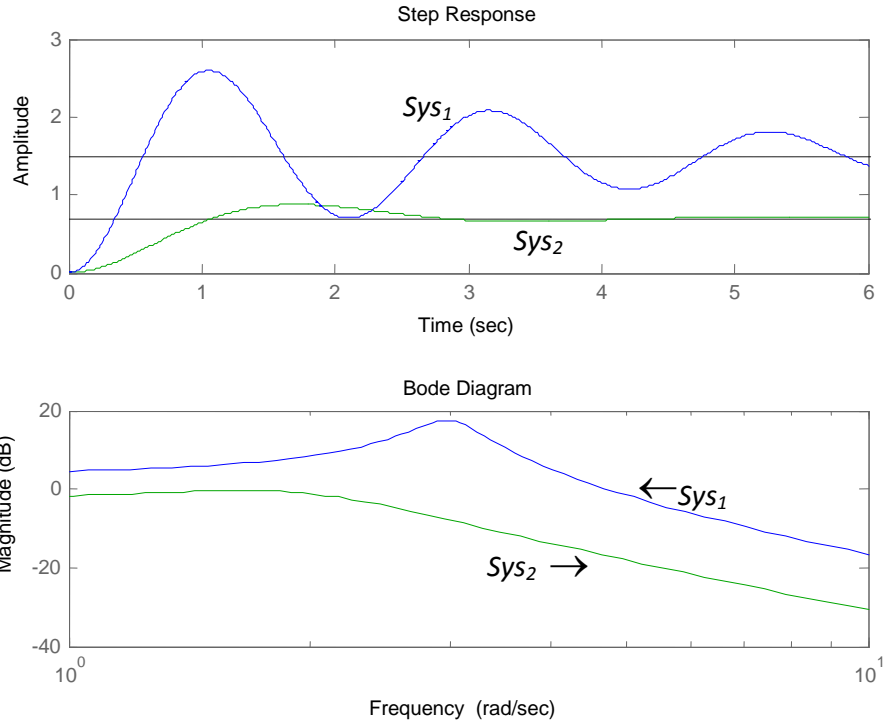


Figura 3.7 Exemple de respostes temporal i freqüencial, cas C

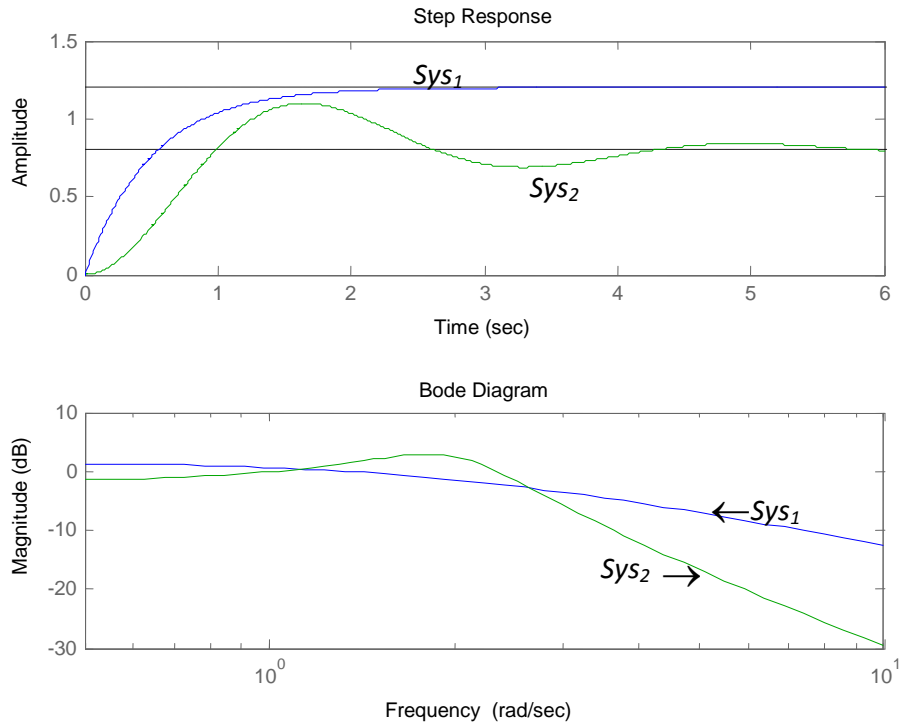


Figura 3.8 Exemple de respostes temporal i freqüencial, cas D

Cas D. Finalment, veiem un cas oposat a l'anterior. Les respostes temporals dels sistemes S_{ys_1} i S_{ys_2} al graó unitari no es tallen, però sí que es tallen en el domini freqüencial les representacions del guany dels sistemes. A la Figura 3.8 s'ha representat un cas determinat per un sistema de 1r i un de 2n ordre:

$$S_{ys_1}(s) = \frac{1.2}{0.5s+1}; S_{ys_2}(s) = \frac{3.2}{s^2+1.2s+4}.$$

Amb els exemples i contra-exemples anteriors s'il·lustra el fet que s'ha de tenir cura en la translació d'especificacions d'un domini a l'altre, i que, en general, és arriscat donar afirmacions d'equivalència d'especificacions. En tot cas cal evitar especificacions semblants als cassos B, C i D.

3.2 Conversió d'especificacions del domini temporal al freqüencial

No hi ha una única traducció del domini temporal al freqüencial. Des d'un punt de vista pràctic, hi ha diverses bones traduccions; seguidament se n'esmenten un parell. Malgrat que les tècniques que es presenten donen bons resultats, si el dissenyador no n'està prou satisfet, pot iterar, per exemple, simplement modificant a voluntat les especificacions freqüencials, fins que s'aconsegueixi assolir els resultats que es volen aconseguir.

Per traduir del domini temporal al freqüencial alguns autors (Yaniv 1999) destaquen dues tècniques: una *tècnica basada en model*, i una altra basada en la limitació energètica, anomenada *tècnica de Krishnan i Cruickshanks*.

La *tècnica basada en model* es fonamenta en l'assumpció d'un model per a la planta i per al controlador (el nombre de zeros i de pols de la planta i del controlador són coneguts). Així, per a una entrada determinada, el model es pot calcular per les especificacions donades. La idea és trobar els paràmetres dels models assumits de la planta i del controlador, i aleshores utilitzar el màxim o el mínim de l'amplitud de la funció de transferència resultant en l'eix $j\omega$ com a especificació en el domini freqüencial.

La *tècnica de Krishnan i Cruickshanks* (1977) consisteix en aprofitar una condició que els autors anomenen *feble* com a condició suficient que permet relacionar els dominis temporal i freqüencial, tenint en compte criteris energètics. Diversos autors en treballs de la QFT esmenten la tècnica de Krishnan i Cruickshanks (Horowitz 2001), (Samadi-Bokharaie and Khaki-Sedigh 2006). Seguidament es passa a analitzar la tècnica esmentada, i s'il·lustra amb un exemple de disseny.

3.2.1 Tècnica de Krishnan i Cruickshanks

S'assumeix que les especificacions en el domini temporal tenen la forma

$$|y(t) - m(t)|^2 \leq v^2(t), \forall t \in [0, \infty) \quad (3.9)$$

on $y(t)$ és el senyal de sortida a llaç tancat; $m(t)$ el comportament desitjat de la sortida, és a dir, el seguiment de la consigna, i $v(t)$, l'error màxim acceptable de seguiment; $m(t)$ i $v(t)$ són funcions temporals que es donen com a especificacions. Segons això, $y(t)$ no es pot desviar de $m(t)$ més que $v(t)$. Una condició menys restrictiva que l'anterior, ja que s'avalua el comportament acumulat al llarg d'un interval de temps t , en comptes d'avaluar-lo per a cada instant de temps, és considerar només la integral de (3.9):

$$\int_0^t |y(t) - m(t)|^2 dt \leq \int_0^t v^2(t) dt, \forall t \geq 0 \quad (3.10)$$

Això vol dir que en comptes d'estar limitada $|y(t) - m(t)|$ superiorment per $v(t)$ per a cada instant de t , s'avalua si l'energia del senyal en l'interval temporal $[0, t]$ està limitada superiorment per l'energia del senyal $v(t)$ en el mateix interval, per a qualsevol temps t . Krishnan i Cruickshanks suggereixen utilitzar aquesta condició com a suficient en el domini freqüencial, corresponent a la desigualtat (3.10):

$$|Y(j\omega) - M(j\omega)| \leq |V(j\omega)| \quad (3.11)$$

Detalls d'aplicació de la tècnica: considerem un sistema com el de la Figura 2.2, estructura SISO de control clàssica, i unes especificacions de seguiment (*tracking*) en el domini temporal per a la sortida de la planta $y(t)$:

$$a(t) \leq y(t) \leq b(t) \quad (3.12)$$

on $a(t)$, $b(t)$ són donades a la Figura 3.9. Aquesta especificació és clarament equivalent a

$$|y(t) - m(t)| \leq v(t); m(t) = \frac{a(t) + b(t)}{2}, v(t) = \frac{b(t) - a(t)}{2} \quad (3.13)$$

Que també es pot expressar de la manera següent:

$$a(t) \leq y(t) \leq b(t); b(t) = m(t) + v(t); a(t) = m(t) - v(t) \quad (3.14)$$

que a més ha de complir la condició que no es creuin $a(t)$ i $b(t)$, excepte en valors extrems, casos $t \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, t \geq 0$, o casos $\omega \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty, \omega \geq 0$. Aquesta condició equival a

$$v(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \quad (3.15)$$

Tot seguit, es comprova com l'especificació de *tracking* —donada per (3.12)— pot convertir-se en una especificació de sensitivitat:

Com que la sortida $Y(j\omega)$ és determinada per l'expressió (3.16) següent:

$$Y(j\omega) = \frac{PGF \cdot R(j\omega)}{1 + PG(j\omega)} \quad (3.16)$$

l'expressió de l'especificació en el domini freqüencial (3.11) es converteix en:

$$\left| \frac{PGF \cdot R(j\omega)}{1+PG(j\omega)} - M(j\omega) \right| \leq |V(j\omega)| \quad (3.17)$$

A més, si s'escull el prefiltrer propi, és a dir, que el grau del numerador no superi el del denominador, de manera que, a més,

$$F(s) \cdot R(s) = M(s) \quad (3.18)$$

l'especificació (3.11) es converteix en la (3.19) següent:

$$\left| \frac{M(j\omega)}{1+PG(j\omega)} \right| \leq |V(j\omega)| \quad (3.19)$$

Demostració:

La deducció de l'expressió (3.19) a partir de les expressions (3.17) i (3.18) és immediata. Substituint (3.18) en (3.17), es pot reescriure i desenvolupar el primer terme de l'expressió (3.17) i s'obté l'expressió següent (3.20):

$$\left| \frac{PG \cdot M(j\omega)}{1+PG(j\omega)} - M(j\omega) \right| = \left| \frac{PG \cdot M(j\omega)}{1+PG(j\omega)} - \frac{1+PG(j\omega)}{1+PG(j\omega)} M(j\omega) \right| = \left| \frac{-M(j\omega)}{1+PG(j\omega)} \right| = \left| \frac{M(j\omega)}{1+PG(j\omega)} \right| \quad (3.20)$$

Per tal de representar les respostes freqüencials dels sistemes que donen lloc a les respostes de $m(t)$ i $v(t)$, en general es considera que les seves entrades són un graó unitari, és a dir $1/s$ en Laplace, per la qual cosa és fàcil transformar les respostes de les sortides en funcions de transferència multiplicant per s , o per $j\omega$ en el domini freqüencial. Així, la Figura 3.10 mostra el valor absolut de les funcions de transferència $M(j\omega)$ i $V(j\omega)$, en comptes de $M(j\omega)$ i $V(j\omega)$.

Si es passa $M(j\omega)$ de l'equació (3.19) al segon terme, es pot reescriure clarament com l'especificació de sensibilitat clàssica (3.21):

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{D(j\omega)} \right| = \left| \frac{1}{1+PG(j\omega)} \right| \leq \left| \frac{V(j\omega)}{M(j\omega)} \right| = \delta_s(\omega) \quad (3.21)$$

El fet que una especificació de *tracking* quedi aproximada per una altra de sensibilitat simplifica el disseny. Entre altres motius pel fet que, mentre que en una especificació de *tracking* es donen explícitament els límits superior i inferior del mòdul, en una especificació de sensibilitat només hi ha un límit superior. Si a més de l'especificació de *tracking*, es dona una altra especificació pròpiament de sensibilitat, de les dues especificacions de sensibilitat (l'una pròpiament de sensibilitat i l'altra que prové d'una especificació de *tracking*) en resultarà una única especificació, la més restrictiva, la qual cosa redunda en la simplificació esmentada del procés de disseny. Tot seguit es passa a aplicar, mitjançant un parell d'exemples, la tècnica que es pot utilitzar per convertir especificacions temporals de *tracking* en especificacions freqüencials de sensibilitat. L'aplicació d'aquesta tècnica no està exempta de limitacions; en l'apartat 3.3, es fa una síntesi de la tècnica i d'alguns inconvenients que pot presentar.

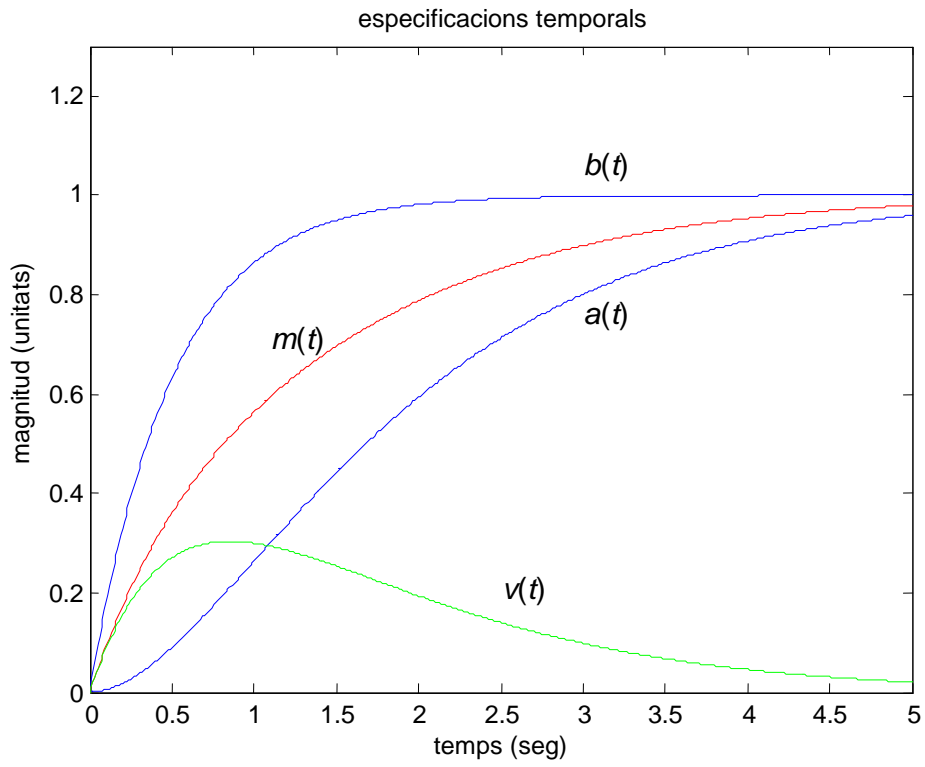


Figura 3.9 Exemple d'especificació en el domini temporal

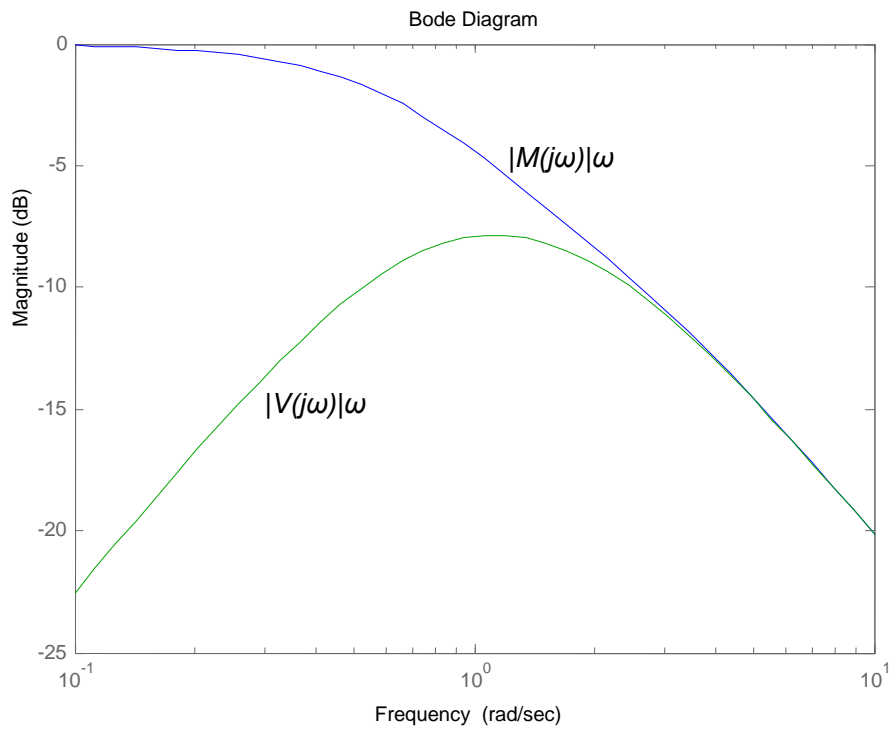


Figura 3.10 Representació freqüencial de $|V(j\omega)\omega|$ i $|M(j\omega)\omega|$

3.2.2 Aplicació de la tècnica a un cas il·lustratiu

Seguidament es veu en un cas pràctic, amb valors numèrics, com una especificació temporal de *tracking* o seguiment (3.12) es converteix en una especificació freqüencial de sensitivitat, a partir de la qual es farà el disseny del controlador $G(s)$ per a una planta $P(\theta,s)$ incerta, tal que $a(t) \leq y(t) \leq b(t), \forall \theta \in \Theta, \forall t \geq 0$, segons (3.12), on θ és qualsevol vector de paràmetres de la planta, dins del conjunt Θ dels possibles.

Per il·lustrar la tècnica mitjançant un exemple, s'han pres dues funcions temporals que serveixin d'envoltants. Les expressions en el domini s de les funcions temporals utilitzades per les envoltants $b(t)$ i $a(t)$ són:

$$B(s) = \frac{1}{0.5s+1} \frac{1}{s}; A(s) = \frac{1}{s^2+2s+1} \frac{1}{s} \quad (3.22)$$

i les funcions envoltants $b(t)$ i $a(t)$ estan representades a la Figura 3.9. S'han escollit les funcions de transferència de manera que ambdues tenen guany estàtic unitari, i les respostes respectives al graó no es tallen excepte en els extrems $t \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, t \geq 0$. La funció de transferència amb què s'ha creat $B(s)$ té una dinàmica més ràpida (pol en $s = -2$) que la de $A(s)$, que té un pol doble a $s = -1$. A més, la resposta temporal al graó en el sistema de primer ordre té derivada no nul·la a l'origen, a diferència de la del sistema de segon ordre, per la qual cosa és presumible, abans de la representació, que les respostes $a(t)$ i $b(t)$ no es tallaran, tal com efectivament es comprova en la representació gràfica de la Figura 3.9. En el cas que es partís de les envoltants gràfiques $a(t)$ i $b(t)$, si es requereixen les expressions analítiques de $a(t)$ i $b(t)$, s'escollirien preferiblement funcions d'ordre baix que englobessin satisfactòriament les envoltants gràfiques.

Amb les funcions $b(t)$ i $a(t)$, utilitzant l'expressió (3.13), es calculen les funcions $m(t)$ i $v(t)$, que són respectivament la "funció que s'ha de seguir" i l'"error de seguiment admès". Les respectives expressions en el domini s de les funcions temporals $m(t)$ i $v(t)$ són:

$$M(s) = \frac{(s^2 + 2.5s + 2)}{(s+2)(s+1)^2} \frac{1}{s}; V(s) = \frac{s(s+1.5)}{(s+2)(s+1)^2} \frac{1}{s} \quad (3.23)$$

Les funcions $m(t)$ i $v(t)$ es representen també a la Figura 3.9. Evidentment s'hauria pogut fer el plantejament a la inversa: començar definint unes funcions $m(t)$ i $v(t)$, respectivament la "funció que s'ha de seguir" i l'"error de seguiment admès", i a partir d'aquestes deduir les envoltants $a(t)$ i $b(t)$ corresponents.

Amb les especificacions anteriors i per a una planta incerta $P(\theta,s)$ de 1r ordre,

$$P(\theta,s) = \frac{k}{Ts+1}, k \in [1,5], T \in [0.08,0.12] \quad (3.24)$$

es pot comprovar que amb el controlador de llaç tipus PI, $G(s)$, ajustat de forma manual

$$G(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right), k_p = 0.5, T_i = 0.3 \quad (3.25)$$

es compleix l'especificació de sensibilitat (3.19), reconvertible a la (3.21), com s'observa a la Figura 3.11 del *loop-shaping* en la carta de Nichols, en el rang de freqüències utilitzat:

$$\omega = [0.001 \ 0.0077 \ 0.021 \ 0.059 \ 0.46 \ 1.3 \ 1.8 \ 2.5 \ 3.6 \ 10 \ 50 \ 100] \text{ rad/sec}$$

A la Figura 3.11 es comprova el compliment d'especificacions, tal com s'explicava en l'apartat genèric de la QFT del Capítol 2: les línies del gràfic són *bounds* tipus **n**, i tots els punts de la línia $L_o(s)$ representatius de les freqüències preses compleixen amb la condició imposada, ja que en aquest cas es troben “per sobre” del *bound* corresponent. La funció utilitzada per a la generació de la figura és *lpshape*, de la *QFT toolbox* de *Matlab* (Borghesani, Chait and Yaniv 1994), que utilitza com a arguments d'entrada —entre d'altres— el vector de freqüències, els *bounds* generats a partir dels *templates* previs i la planta nominal escollida.

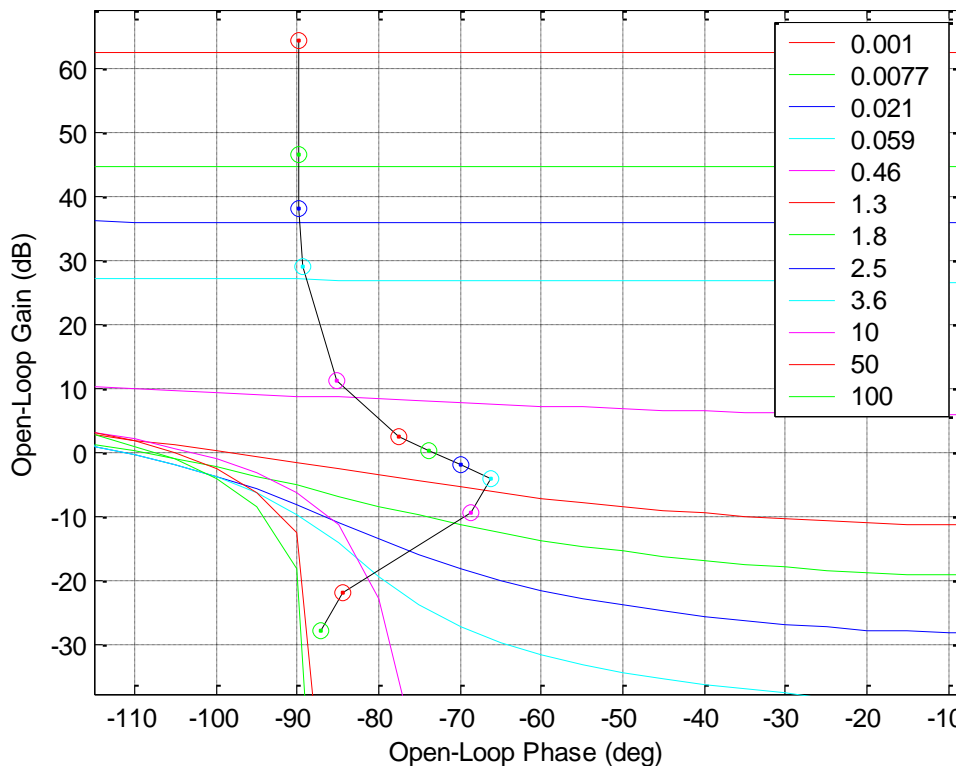


Figura 3.11 Representació del *loop-shaping* amb el controlador $G(s)$

El compliment de l'especificació de sensibilitat es mostra, de forma redundant, a la Figura 3.12. Per a crear aquesta figura s'ha invocat la funció *chksiso* d'anàlisi, també amb els arguments corresponents, i representa el diagrama de Bode en mòdul de l'especificació — de sensibilitat, en aquest cas—. En línia discontinua s'hi veu representat el límit superior que dona l'especificació. En continu es representa la línia de la resposta freqüencial de sensibilitat; de fet, és una línia obtinguda prenent sempre el cas més

desfavorable de planta. En la representació es comprova el compliment de l'especificació, en quedar la línia del "pitjor cas" per sota de la de l'especificació. Per a la representació gràfica de la figura d'anàlisi, es recomana densificar el nombre de plantes, és a dir, utilitzar més plantes que les que s'empren per al càlcul dels *bounds*.

Atès que $F(s) \cdot R(s) = M(s)$, segons (3.18), l'expressió del prefiltrer $F(s)$ es correspon amb la de la funció de transferència a partir de la qual s'ha obtingut la seva resposta temporal al graó, $m(t)$, deduïble a partir de l'expressió $M(s)$ de (3.23):

$$F(s) = \frac{M(s)}{R(s)} = \frac{(s^2 + 2.5s + 2)}{(s+2)(s+1)^2} \quad (3.26)$$

Evidentment, la representació temporal de l'efecte que fa el filtre $F(s)$ —per a una entrada graó $R(s)=1/s$ — és la funció $m(t)$, representada a la Figura 3.9.

A la Figura 3.13 i a la Figura 3.14 s'observen respectivament les respostes temporal i freqüencial de *tracking* del sistema a llaç tancat, amb els controladors de llaç $G(s)$ i prefiltrer $F(s)$ dissenyats. A les figures es representen també les respostes temporal i freqüencial dels límits superior i inferior, és a dir, de les envoltants de *tracking* que s'utilitzen com a especificació de seguiment $b(t)$ i $a(t)$ en el domini temporal i $|B(j\omega)\omega|$ i $|A(j\omega)\omega|$ en el domini freqüencial.

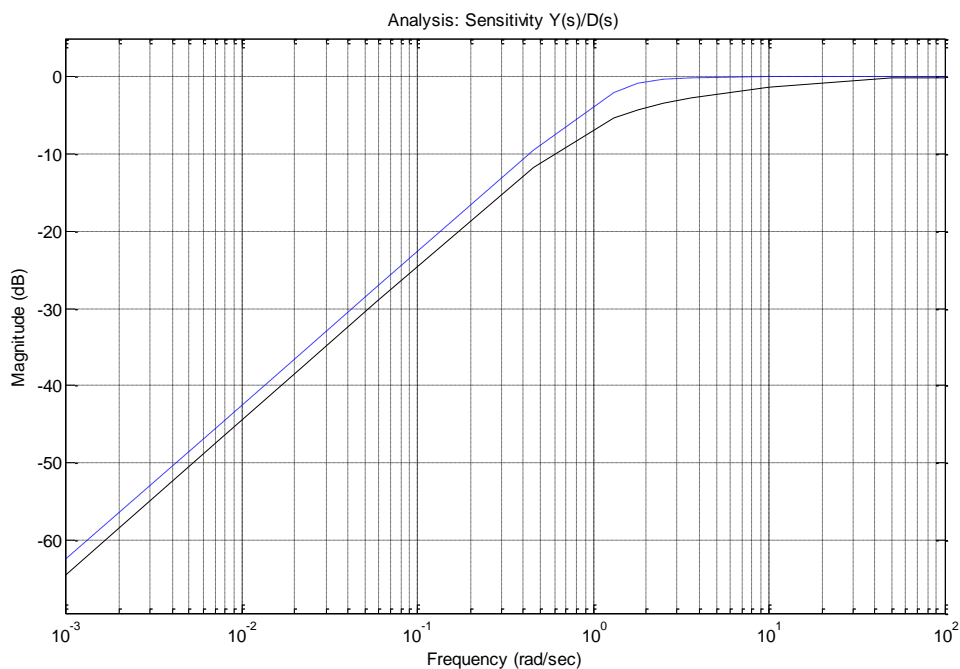


Figura 3.12 Anàlisi: comprovació de compliment d'especificació de sensibilitat

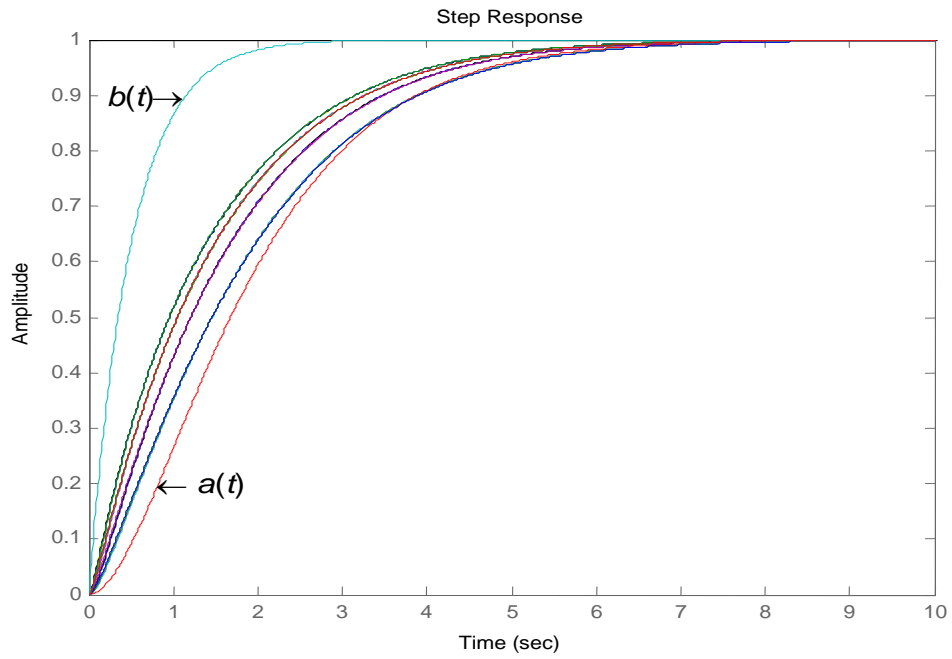


Figura 3.13 Resposta temporal d'una família de plantes i les seves envoltants

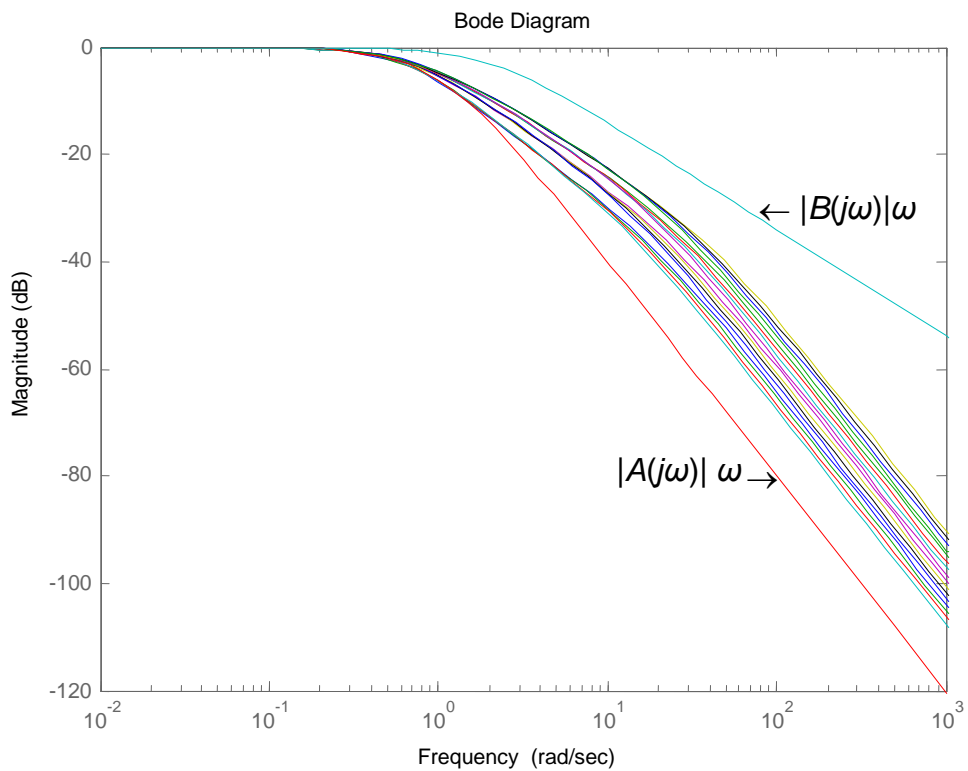


Figura 3.14 Resposta freqüencial d'una família de plantes i les seves envoltants

A la Figura 3.13 i a la Figura 3.14 s'observa que els resultats obtinguts són prou satisfactoris. De fet, només en un rang de freqüències baixes es comprova que alguna de les plantes possibles podria no complir les especificacions freqüencials, amb la consegüent traducció en el domini temporal: en acostar-se al règim permanent alguna de les respostes temporals també travessaria una de les envoltants. Suposant que aquest fet fos rellevant i calgués evitar-lo, s'hauria de redissenyar el controlador $G(s)$ del llaç. Això es podria aconseguir amb una granularitat més fina en el vector de freqüències utilitzat, prenent més valors a baixes freqüències. Es pot fer servir novament la figura del *loop-shaping* amb la carta de Nichols si s'opta per dissenyar amb la QFT. En aquest exemple concret, una millora del comportament esmentat podria aconseguir-se amb la mateixa estructura de controlador PI, mitjançant més acció integral (disminució de T_i), combinada o no amb un augment de l'acció proporcional (augment de k_p).

3.2.3 Aplicació de la tècnica a un segon exemple

Seguidament es planteja un exemple en què es donen dues envoltants com a especificació de *tracking*. L'envoltant superior es dona mitjançant dues característiques de resposta transitòria: el sobreimpuls màxim M_p del 10 % i el temps de pic t_p igual a 0.5 seg. L'envoltant inferior es dona també mitjançant dos paràmetres de règim transitori: temps d'establiment t_s ($\pm 5\%$) —o durada del transitori fins a l'assoliment del 95 % del valor del règim permanent— igual a 1.2 seg, i sobreimpuls màxim del 0 %. A més, es toleraria fins a un màxim del $\pm 5\%$ d'oscil·lació en règim permanent respecte al valor que es dona com a consigna.

Diverses vies són possibles, però el que sembla més pràctic és trobar les funcions de transferència d'ordre baix (per exemple, de segon ordre) les respostes respectives de les quals a un graó donen les funcions envoltants $b(t)$ i $a(t)$.

Es proposa aproximar els sistemes respectius a un segon ordre esmorteït (el que presenta un sobreimpuls com a resposta al graó) i a un segon ordre críticament esmorteït (el que no té cap sobreimpuls).

Els models que cal aplicar en cada cas seran els següents —s'indiquen també les equacions que s'hi han aplicat, després de fer un estudi de les respostes temporals.

Envoltant $b(t)$: s'obté a partir d'un sistema de segon ordre subesmorteït. La seva transformada de Laplace és $B(s)$:

$$B(s) = \frac{k_b \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \quad (3.27)$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, 0 < \xi < 1 \quad (3.28)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.29)$$

Valors numèrics:

$$\left. \begin{array}{l} k_b = 1.05 \\ t_p = 0.5 \\ M_p = 0.1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0.5912 \\ \omega_n = 7.7901 \text{ rad/sec} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

$B(s)$ amb valors numèrics:

$$B(s) = \frac{k_b \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} = \frac{63.72}{s^2 + 9.21s + 60.69} \frac{1}{s} \quad (3.31)$$

Envoltant $a(t)$: s'ha obtingut com a resposta al graó unitari, a partir d'un sistema de segon ordre críticament esmorteït, amb pol doble en $s = -p$. La transformada de Laplace de $a(t)$ és $A(s)$:

$$A(s) = \frac{k_a \cdot p^2}{(s+p)^2} \frac{1}{s}, \quad a(t) = k_a \left[1 - e^{-pt} (1+pt) \right], t \geq 0 \quad (3.32)$$

La funció temporal $a(t)$ presenta una resposta que s'ha comprovat que assoleix el nivell del 95 % del valor de règim permanent en un temps d'establiment $t_s(\pm 5\%) = 4.75/p$. Aquest valor es dedueix a partir de l'expressió temporal de $a(t)$ (3.32), resolent el valor de $t_s(\pm 5\%)$ que compleix la condició indicada:

$$a(t_s) = 0.95 * k_a \Rightarrow t_s(\pm 5\%) = \frac{4.75}{p} \quad (3.33)$$

Valors numèrics:

$$\left. \begin{array}{l} k_a = 0.95 \\ t_s = 1.2 \text{ sec} \end{array} \right\} \Rightarrow p = 3.958 \quad (3.34)$$

$A(s)$, transformada de Laplace de $a(t)$, amb valors numèrics:

$$A(s) = \frac{k_a \cdot p^2}{(s+p)^2} \frac{1}{s} = \frac{14.885}{(s+3.958)^2} \frac{1}{s} \quad (3.35)$$

Les representacions gràfiques de les funcions envoltants $b(t)$ i $a(t)$ es mostren a la Figura 3.15.

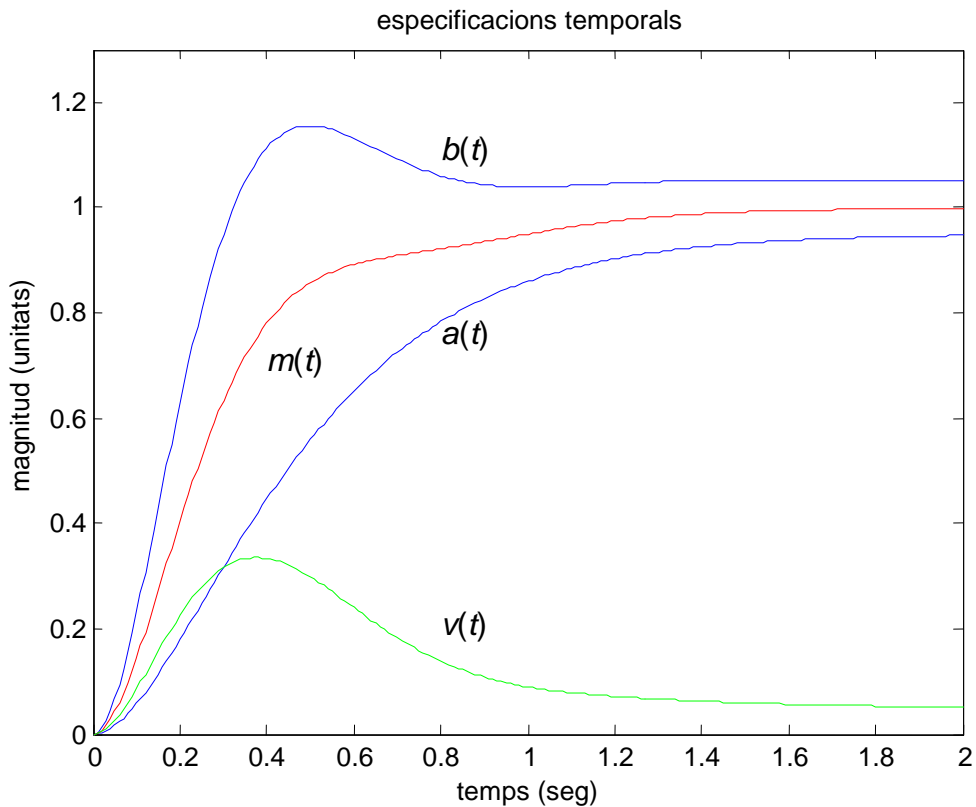


Figura 3.15 Funcions envoltants $a(t)$ i $b(t)$, de seguiment d'especificació $m(t)$ i d'error màxim permès de seguiment $v(t)$

A la Figura 3.15 s'hi han afegit les funcions de seguiment d'especificació $m(t)$ i d'error màxim permès de seguiment $v(t)$, obtingudes aplicant l'equació (3.13). Les funcions de transferència mitjançant les quals s'obtenen $m(t)$ i $v(t)$ són ambdues de quart ordre, ja que les funcions de transferència mitjançant les quals es trobaren $b(t)$ i $a(t)$ no tenen cap pol en comú. Les expressions en el domini de Laplace de les funcions $M(s)$ i $V(s)$ són, respectivament:

$$M(s) = \frac{39.3026 (s^2 + 8.162s + 24.19)}{(s^2 + 9.21s + 60.69)(s + 3.958)^2} \frac{1}{s} \quad (3.36)$$

$$V(s) = \frac{24.4177 (s+7.254) (s+0.2684)}{(s^2 + 9.21s + 60.69)(s + 3.958)^2} \frac{1}{s} \quad (3.37)$$

Amb les especificacions anteriors i per a una planta incerta $P(\theta, s)$ de primer ordre,

$$P(\theta, s) = \frac{k}{Ts + 1}, k \in [6, 18], T \in [0.08, 0.18] \quad (3.38)$$

es pot comprovar que amb el controlador de llaç següent tipus PI, $G(s)$, ajustat per prova i error

$$G(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right), k_p = 1.1, T_i = 1 \quad (3.39)$$

es compleix l'especificació de sensibilitat (3.19) o (3.21), com s'observa a la Figura 3.16 del *loop-shaping* en la carta de Nichols, en el rang de freqüències utilitzat:

$$\omega=[0.01 \ 0.02 \ 0.05 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.5 \ 1 \ 2 \ 5 \ 10 \ 30] \text{ rad/sec}$$

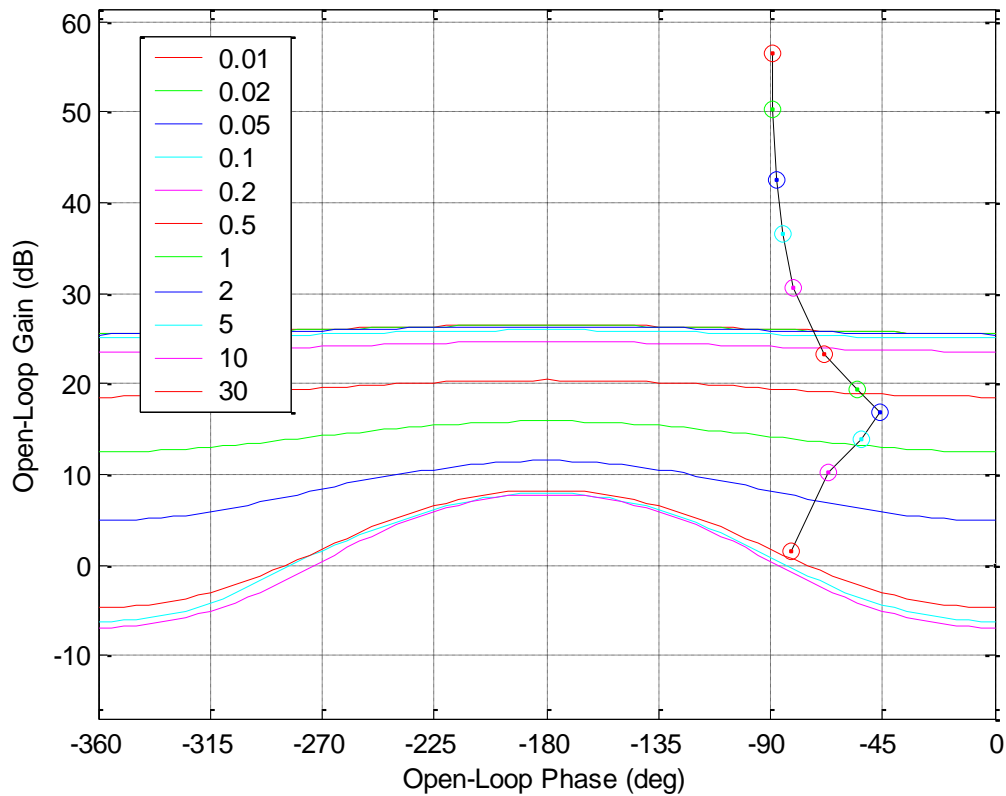


Figura 3.16 Representació del *loop-shaping* de l'exemple 2, amb el controlador $G(s)$

A la Figura 3.16 es comprova el compliment d'especificacions, tal com s'explicava en l'apartat genèric de la QFT del Capítol 2: les línies del gràfic són *bounds* tipus n i tots els punts de la línia $L_0(s)$ representatius de les freqüències preses compleixen la condició imposada, ja que en aquest cas es troben "per sobre" del *bound* corresponent.

Igual com s'ha fet amb l'exemple de l'apartat 3.2.2., utilitzant la *QFT toolbox* de *Matlab* (Borghesani, Chait and Yaniv 1994) es comprova de forma redundant el compliment de l'especificació de sensibilitat, Figura 3.17 d'anàlisi, en què es representa el mòdul en diagrama de Bode. En discontinu es representa la "frontera" de l'especificació de sensibilitat. En continu es representa la línia de la resposta freqüencial de sensibilitat; de fet, és una línia obtinguda prenent sempre el cas més desfavorable de planta.

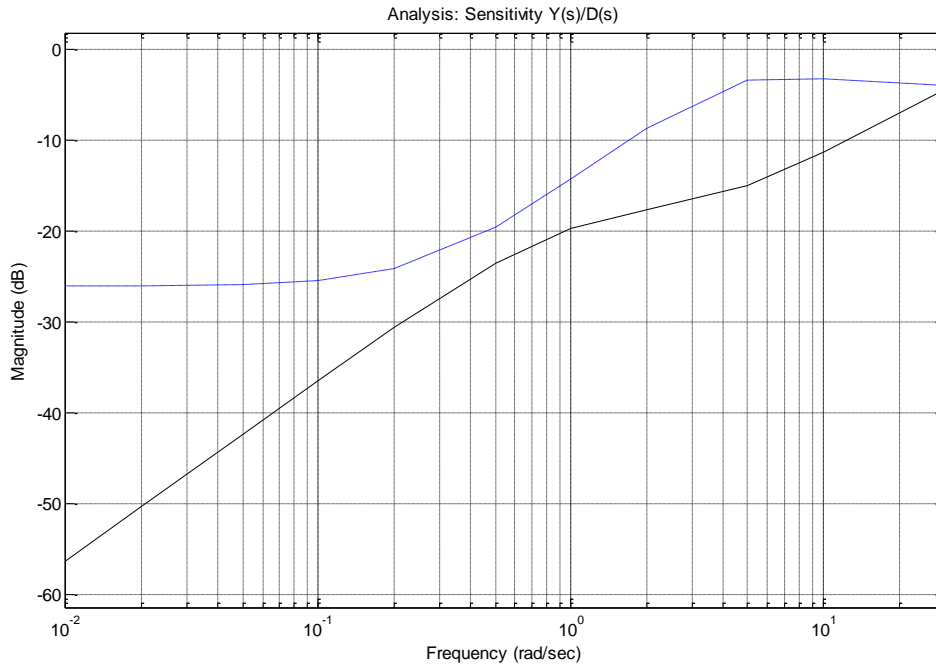


Figura 3.17 Comprovació de compliment d'especificació de sensibilitat

L'especificació de sensibilitat es dedueix de l'equació (3.19) i, per tant, el límit superior en mòdul, $\delta_s(\omega)$, val el valor especificat per l'expressió següent (3.40):

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{D(j\omega)} \right| = \left| \frac{1}{1 + PG(j\omega)} \right| \leq \left| \frac{V(j\omega)}{M(j\omega)} \right| = \frac{0.62127(s + 7.254)(s + 0.2678)}{(s^2 + 8.161s + 24.19)} = \delta_s(\omega) \quad (3.40)$$

Atès que $F(s) \cdot R(s) = M(s)$, segons (3.18), l'expressió del prefiltre $F(s)$ es correspon amb la de la funció de transferència a partir de la qual se n'ha obtingut la resposta temporal al graó, $m(t)$, i es pot obtenir fàcilment de l'expressió (3.36):

$$F(s) = \frac{M(s)}{R(s)} = \frac{39.3026(s^2 + 8.162s + 24.19)}{(s^2 + 9.21s + 60.69)(s + 3.958)^2} \quad (3.41)$$

La representació temporal de l'efecte que fa el filtre $F(s)$ —per a una entrada graó $R(s) = 1/s$ — és la funció $m(t)$, representada a la Figura 3.15. La seva expressió analítica s'obté transformant l'expressió (3.36).

A la Figura 3.18 i a la Figura 3.19 s'observen respectivament les respostes temporal i freqüencial de *tracking* del sistema a llaç tancat, prenent un total de 16 plantes, amb els controladors de llaç $G(s)$ i prefiltre $F(s)$ dissenyats. A les figures es representen també les respostes temporal i freqüencial dels límits superior i inferior, és a dir, de les envoltants de *tracking* que s'utilitzen com a especificació de seguiment: $b(t)$ i $a(t)$ en el domini temporal, i $|B(j\omega)\omega|$ i $|A(j\omega)\omega|$ en el domini freqüencial.

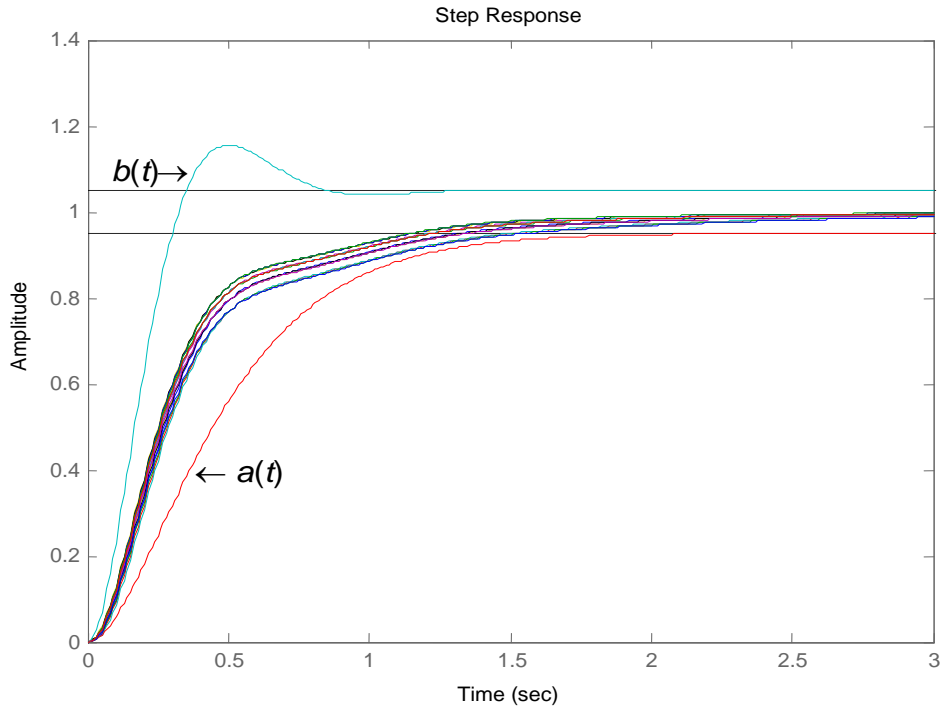


Figura 3.18 Resposta temporal d'una família de 16 plantes i les seves envoltants

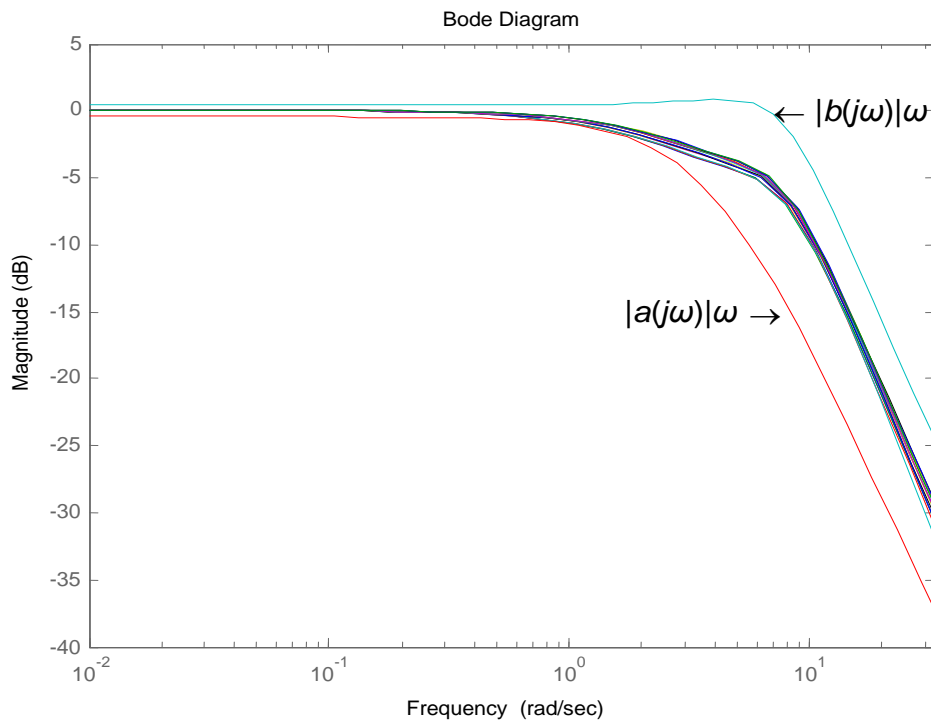


Figura 3.19 Resposta freqüencial d'una família de 16 plantes i les seves envoltants

A la Figura 3.18 i a la Figura 3.19 s'observa que els resultats obtinguts són prou satisfactoris, en el rang de treball previst de freqüències.

Cal remarcar que, en els dos exemples precedents, per al disseny només s'ha tingut en compte l'especificació de *tracking*. Altres especificacions imprescindibles, com ara l'estabilitat del llaç tancat, s'ha pressuposat que es complien. Però a la pràctica, s'ha de dissenyar tenint en compte el conjunt global d'especificacions.

3.3 Metodologia per a la integració d'especificacions de *tracking* al disseny de controladors amb la tècnica QFT

En resum, el que s'acaba de proposar —i il·lustrar amb un parell d'exemples— és com es pot convertir una especificació de seguiment al graó o *tracking* en el domini temporal en una especificació de *tracking* en el domini freqüencial, i d'aquí en una especificació freqüencial de sensibilitat. Així, els dos límits de resposta temporal al graó, $b(t)$ i $a(t)$ en el domini temporal, o les seves funcions de transferència respectives $|B(j\omega)\omega|$ i $|A(j\omega)\omega|$ (el factor ω es deu al fet que l'entrada és un graó unitari) en el domini freqüencial, quedarien integrats en una nova especificació (de sensibilitat) que substituiria l'original (de seguiment). Al mateix temps, el mètode ens dona el disseny del prefiltre de forma immediata.

Com a ajut d'orientació per aplicar del mètode proposat, seguidament es donen de forma esquemàtica una sèrie de consideracions que cal tenir en compte:

- Com a requisit previ per aplicar el mètode, cal abans que res escollir les especificacions adequadament, de forma que ni les respostes temporals (al graó) de les funcions límit o envoltants, ni les corresponents freqüencials, no es tallin, com a mínim dins de l'interval de freqüències que interessin $\omega \in \Omega$. En el cas més estricte, en què el conjunt de freqüències que interessin fos $\Omega = [0, \infty)$, es tractaria que ni les respostes temporals ni les freqüencials es tallessin excepte com a màxim en valors extrems (casos $t \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, t \geq 0$ o casos $\omega \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty, \omega \geq 0$).
- Això equival a definir els límits de forma que es compleixen les desigualtats següents estrictament: $b(t) > a(t), \forall t > 0$.
- La línia de la mitjana temporal entre les funcions $a(t)$ i $b(t)$ defineix la funció temporal que s'ha de seguir, $m(t)$, o del *tracking*, i també quedaria definida la funció d'error de seguiment acceptable, $v(t)$, que equival a la distància entre la funció de seguiment $m(t)$ i qualsevol de les dues envoltants, $a(t)$ o $b(t)$.

- Utilitzant la condició de Krishnan i Cruickshanks com a suficient, es poden considerar les funcions $|B(j\omega)\omega|$ i $|A(j\omega)\omega|$ com les envoltants corresponents en el domini freqüencial, de manera que $|B(j\omega)\omega| > |A(j\omega)\omega|, \forall \omega > 0$.
- Amb la hipòtesi $F(s) \cdot R(s) = M(s)$, on $R(s)$ és la consigna graó, l'expressió del prefiltr $F(s)$ és la de la funció de transferència a partir de la qual se n'ha obtingut la resposta temporal al graó, $m(t)$, i, per tant, és immediata.
- Qualsevol mètode de disseny en el domini freqüencial, per exemple la QFT, es pot utilitzar per dissenyar el controlador $G(s)$ del llaç, sota la nova consideració de sensibilitat especificada en (3.21).

En el mètode proposat cal, però, tenir en compte que Krishnan i Cruickshanks utilitzen les funcions envoltants en el domini freqüencial com a substitutòries de les envoltants en el domini temporal. Per poder aplicar el mètode, s'ha de comprovar que les envoltants freqüencials corresponents no es creuin. Tot i que no es creuin les envoltants freqüencials, un cop fet el disseny caldria validar-lo mitjançant una simulació per comprovar-ne el compliment temporal. Pel fet d'utilitzar una condició considerada com a suficient, la metodologia de Krishnan i Cruickshanks no només presenta la limitació del possible encreuament d'envoltants, sinó que podria donar-se el cas que les corbes considerades com a envoltants no envoltessin el 100 % de les respostes.

Capítol 4 Existència del controlador

Un aspecte que cal tenir en compte en el moment de fixar les especificacions és que, si aquestes són molt exigents, poden portar-nos a un disseny en què les prestacions exigides per al control són poc realistes des de la pràctica. O, en un cas extrem, també podria donar-se que el disseny no fos possible, per exemple en el cas que es plantegessin especificacions incompatibles o inassolibles per al sistema controlat. En ambdues situacions caldria un relaxament d'especificacions per arribar a un disseny factible.

Un cop plantejades unes especificacions adequades que facin possible el control, cal plantejar quina estructura ha de tenir el controlador o si es pot permetre certa llibertat a aquesta estructura. Si el control és possible amb una estructura de controlador prefixada, és interessant trobar l'espai de paràmetres dels controladors possibles que fan viable un disseny que compleixi totalment les diverses especificacions. Com a aplicació d'aritmètica intervalar, en aquest capítol es fa una proposta per aconseguir trobar la regió dels paràmetres possibles d'un controlador de baix ordre.

4.1 Antecedents: estudi sobre l'existència del controlador

En analitzar les condicions d'existència del controlador, es poden considerar diferents nivells, ordenats seguint un criteri de facilitat de comprovació:

- Compatibilitat d'especificacions.
- Existència del controlador donades unes especificacions i una estructura de control fixa amb paràmetres acotats.
- Existència del controlador donades unes especificacions.

Les condicions d'existència del controlador han estat estudiades rigorosament per Horowitz (1979), Nwokah, Thompson i Pérez (1990), Jayasuriya i Zhao (1994) i Gil-Martínez i García-Sanz (2003).

En el treball de Gil-Martínez i García-Sanz (2003) s'analitza la compatibilitat de les especificacions del sistema controlat, estudiant-ne els requeriments i traduint-los a un mapa de *bounds* en el diagrama de Nichols. L'anàlisi es fa sobre la base de cada especificació particular, tenint en compte les incerteses del model, tot i que acaba concretant-se en les tres categories tipològiques descrites en l'apartat 2.2.2. Amb aquesta base, s'arriben a donar unes indicacions de caire pràctic (relaxació d'especificacions, si cal) per garantir la compatibilitat dels *bounds* abans de dissenyar el controlador.

La garantia de la compatibilitat de les diverses especificacions és imprescindible com a tràmit previ al procés de disseny del controlador, i, de fet, qualsevol paquet de software d'ajuda en el procés de disseny mitjançant ordinador l'hauria de tenir en compte. Per exemple, la *QFT toolbox* de (Borghesani, Chait and Yaniv 1994), incorpora els algorismes necessaris que permeten determinar (i representar gràficament) els *bounds*, així com les interseccions dels *bounds*, i també donen a l'usuari el missatge d'avís en cas que hi

hagi alguna incompatibilitat d'especificacions. En aquest cas d'incompatibilitat d'especificacions, la funció corresponent de la *toolbox* esmentada retorna una indicació de les freqüències en què hi ha incompatibilitat, informació que facilita a l'usuari el replantejament del problema mitjançant un relaxament de les especificacions.

Si les especificacions són incompatibles, l'usuari ha de modificar ("relaxar") convenientment les especificacions fins que totes siguin compatibles entre si, en el rang de les freqüències que es consideren. Acceptem, per tant, que s'ha assegurat la compatibilitat d'especificacions. Malgrat això, cal remarcar que, en casos límit concrets, fins i tot podria esdevenir-se que una única especificació no es complís i que cap controlador no pogués assolir l'especificació. Alguns autors (K. J. Astrom 2000) il·lustren aquest cas extrem amb exemples.

Quant a la forma d'operar per trobar els *bounds*, i per determinar-ne la incompatibilitat si n'hi ha, es donen algunes idees en l'article de Gil-Martínez i García-Sanz (2003). Aquest article comença expressant els requeriments generals de la robustesa de la realimentació i la seva traducció a un mapa de *bounds* QFT, mitjançant desigualtats quadràtiques. Resoltes les desigualtats quadràtiques, s'hi introdueixen les diverses tipologies de *bounds*. S'hi classifiquen les especificacions generals de la QFT, i se'n discuteix la possible simultaneïtat. Finalment s'hi il·lustren alguns problemes de compatibilitat de *bounds*. En l'article es descriu com la QFT trasllada les especificacions del llaç tancat i dels *templates* generats per les incerteses de la planta a *bounds* (Houpis and Rasmussen 1999), referits a un controlador i a una planta nominal, i, per tant, referits a una funció de transferència nominal en llaç obert. Chait i Yaniv (1993) desenvoluparen un algorisme per computar els *bounds* basat en desigualtats quadràtiques que suposa un gran pas endavant respecte a la forma tradicional de computar els *bounds*. Per arribar a les desigualtats quadràtiques esmentades, cada planta finita i el controlador s'expressen de forma polar.

Malgrat això, la informació de la compatibilitat d'especificacions no dóna "pistes" respecte a l'estructura del controlador, ni respecte als valors dels paràmetres del controlador, un cop escollida una estructura. Es pot escaure que, amb una estructura de controlador predeterminada, no siguin assolibles els objectius marcats per les diverses especificacions. I també es podria donar el cas que, tot i que les especificacions es puguin assolir amb una estructura de controlador concreta, els valors dels paràmetres estiguin fora dels rangs físicament admissibles.

Precisament la present tesi també ha explorat en aquest àmbit, utilitzant l'aritmètica intervalar, amb l'objectiu d'aconseguir trobar la regió dels paràmetres possibles d'un controlador de baix ordre. En l'apartat següent es fa una descripció del procediment proposat i en un capítol posterior s'il·lustra amb una aplicació. L'elecció del controlador òptim, a partir d'un criteri energètic, s'estudia al capítol posterior, Capítol 5.

4.2 Metodologia proposada per esbrinar l'existència del controlador

El mètode que es proposa en el present treball per esbrinar l'existència del controlador es basa en la utilització de *mosaics*, conjunts utilitzats en l'aritmètica intervalar. La metodologia que es proposa per esbrinar l'existència d'una certa estructura de controlador, per la qual és possible el compliment de les especificacions, consisteix en determinar l'espai de paràmetres del controlador pels quals es compleixen unes condicions derivades d'unes especificacions de funcionament. Si l'espai de paràmetres fos un conjunt buit, implicaria que la solució no existiria per a l'estructura prefixada de controlador. Aquest espai de paràmetres es calcula mitjançant la utilització de mosaics.

Seguidament, es fa un repàs de caire general del concepte de mosaic i posteriorment es concreta la proposta per trobar l'espai de paràmetres del controlador. Tot això s'il·lustra amb un exemple.

4.2.1 Aritmètica intervalar: representació mitjançant *mosaics*

Un *mosaic* en \mathbb{R}^n és un conjunt format a partir de la unió de caixes (n -dimensionals) no encavalcades. Aquestes caixes tenen els interiors disjunts, tot i que poden tenir fronteres comunes, i, per tant, intersecció no nul·la. Tot i que en teoria es pot tenir un conjunt de caixes tan gran com es vulgui i, per tant, les caixes poden ser molt petites, en la pràctica se n'ha de definir una mida mínima, amb el doble objectiu d'emmagatzemar un nombre limitat de caixes i a la vegada disminuir el temps de processament per al càlcul d'aquests conjunts. D'aquesta manera s'aconsegueixen aproximacions no exactes, però sí més precises que si s'utilitzés una única caixa. Així mateix, la manipulació de *mosaics* es fonamenta en l'anàlisi intervalar, cosa que permet conservar-ne la generalitat.

Com a **exemple** de la capacitat descriptiva dels mosaics, s'ha pres el cas d'una inequació parabòlica: $\mathbb{C} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2 - 2 \in [0, 3]\}$. O sigui: \mathbb{C} és el conjunt de punts $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, del pla, que compleixen la condició $x_1^2 + x_2 - 2 \in [0, 3]$. Observem que el conjunt \mathbb{C} definit és una regió compresa entre dues paràboles: $x_2 = 2 - x_1^2$ i $x_2 = 2 - x_1^2 + 3 = 5 - x_1^2$. Aquest conjunt \mathbb{C} es representa a la Figura 4.1, obtinguda mitjançant l'algoritme implementat per Luc Jaulin en *Proj2D* (Jaulin, Braems, et al. 2002), (Dao 2005). *Proj2D* permet projectar en dues dimensions un conjunt definit mitjançant diverses restriccions unides amb els operadors “ \wedge (i)”. Cal esmentar que un paràmetre ε permet deturar el procés de dissecció de les caixes, un costat de les quals té una mida inferior a aquest valor ε . D'aquesta manera es fixa la precisió de l'aproximació obtinguda. En l'exemple representat, s'han fet variar els valors de x_1 i de x_2 en l'interval de $[-5, +5]$, i el valor de ε és de 0.1. L'eina *Proj2D* representa en color vermell la zona que compleix la restricció imposada (o, en general, les restriccions unides per operadors “ \wedge ”); en blau es representa la zona que no la compleix, i en groc, la zona que no està encara decidida. Si es disminueix el valor del paràmetre ε , es pot aconseguir minimitzar la zona marcada amb color groc. És clar que, en la

pràctica, una disminució del valor ε implica un temps més gran de còmput. En el cas que $\varepsilon \rightarrow 0$, la convergència de la funció inclusió assegura que el conjunt representat convergeixi al conjunt que es cerca.

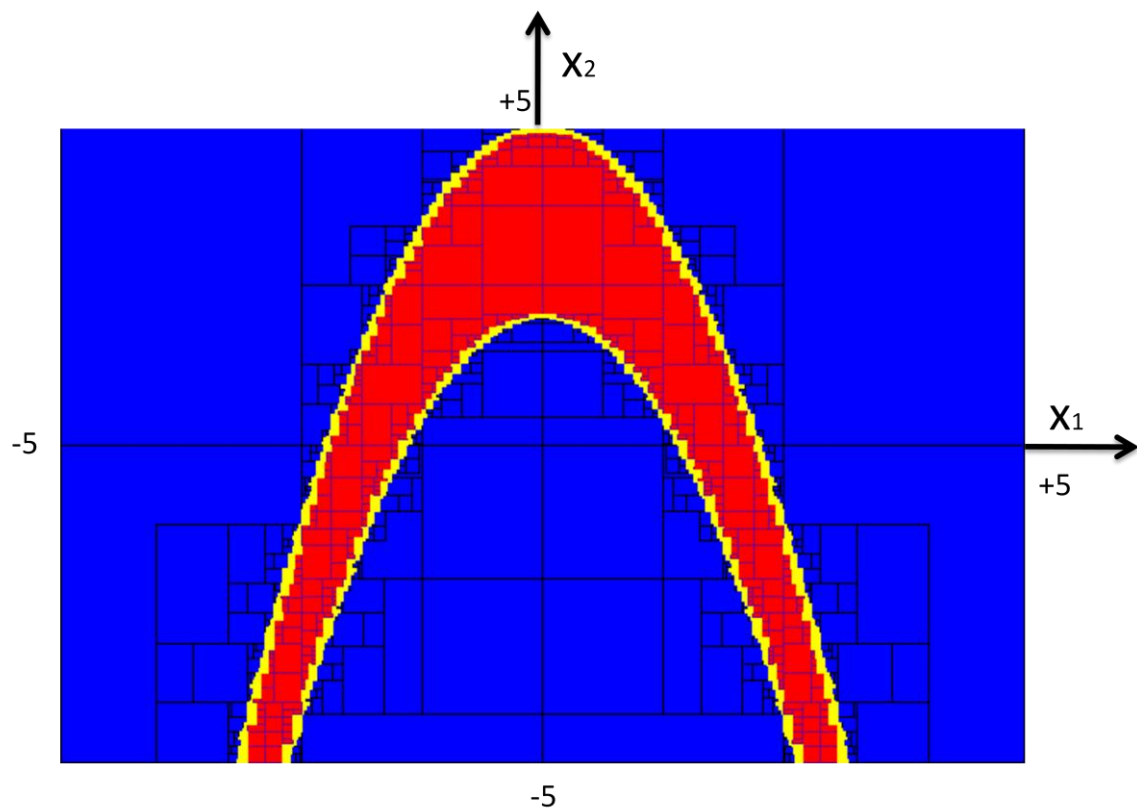


Figura 4.1 *Mosaic* exemple d'inequació parabòlica, representat amb *Proj2D*

En la tesi doctoral de Tornil (2006) s'hi troba una descripció més extensa de tècniques per a la representació i propagació d'incerteses basades en l'anàlisi intervalar. Les tècniques esmentades han estat desenvolupades per diversos autors, alguns d'ells clàssics, per exemple en el llibre de Moore (1966), però també hi trobem referenciats els treballs més recents, com ara el de Jaulin, Kieffer *et al.* (2001).

4.2.2 Una aplicació de l'aritmètica intervalar a la recerca de l'espai de paràmetres del controlador

Seguidament veiem una aplicació dels *mosaics* al problema de la recerca de l'espai de paràmetres del controlador.

Prèviament al procés que es proposa per al disseny automàtic del controlador del llaç (*Automatic Loop Shaping*, ALS) desenvolupat en el capítol següent, s'ha d'abordar la problemàtica de la recerca de la regió admissible dels paràmetres del controlador amb estructura predefinida que satisfan totes les restriccions. Aquesta informació complementària és útil per saber si la solució òptima està en una regió gran o petita en què es compleixen totes les restriccions, i fins i tot si és buida i, per tant, no existeix cap solució.

Seguidament es veu com es poden utilitzar eines de l'aritmètica intervalar adreçades precisament a aquest objectiu previ al procés de disseny del controlador, que és la recerca de la regió admissible dels paràmetres del controlador.

D'acord amb Dorato, Li *et al.* (2000), el disseny de controladors amb una estructura donada fixa per a plantes amb incertesa intervalar pot ser formulada com un conjunt de fórmules Booleanes:

$$\forall (\theta \in \Theta) [v_1(\theta, k_c) \leq 0 \wedge \dots \wedge v_n(\theta, k_c) \leq 0] \quad (4.1)$$

on:

- \forall denota l'operador lògic "per tot" i " \wedge " denota l'operador lògic "i"
- Les funcions $v_k(\theta, k_c)$ són funcions polinòmiques multivariables en els components dels vectors θ i k_c .
- θ és el vector de paràmetres incerts de la planta. $\theta \in \Theta$, on Θ és el conjunt total de les plantes possibles.
- k_c és el vector de paràmetres del controlador. $k_c \in KC$, on KC és el conjunt inicial limitat de paràmetres del controlador, $KC = \{k_c \in \mathfrak{R}^g \mid \underline{k}_c \leq k_c \leq \overline{k}_c\}$

Aquesta formulació constitueix un sistema quantificat de desigualtats polinòmiques multivariables (*MPI*), referenciada per diferents autors sota el nom de *Generalized or Quantified Constraints Satisfaction Problem –QCSP–* (Benhamou and Goualard 2000).

El problema matemàtic és aleshores trobar el conjunt $KC^* \subset KC$ pel qual (4.1) és cert. Qualsevol vector de paràmetres del controlador $k_c \in KC^*$ és una solució del problema de disseny de la realimentació. L'objectiu, per tant, és trobar el conjunt KC^* .

En la literatura veiem com aquest tipus de problemes s'han solucionat utilitzant diversos mètodes: mètodes simbòlics (Dorato, Abdallah and Famularo 1998) algorismes *branch and bound* basats en intervals (Malan, Milanese and Taragna 1997) o mètodes probabilístics (Vidyasagar 1998).

El conjunt de paràmetres del controlador KC^* que proporciona estabilitat robusta i compleix les especificacions és el conjunt:

$$KC^* = \{k_c \in KC \mid \forall (\theta \in \Theta) [v_1(\theta, k_c) \leq 0 \wedge \dots \wedge v_n(\theta, k_c) \leq 0]\} \quad (4.2)$$

Aquest conjunt pot no ser computable fàcilment a causa de la presència del quantificador universal \forall , tal com s'explica a (Dorato, Li, et al. 2000). Hi ha aproximacions per intentar substituir tal quantificador per un quantificador existencial. Per tant, una forma de substituir el quantificador \forall per \exists és utilitzant l'operador negació \neg , de manera que s'obté l'expressió equivalent a (4.2) següent, (4.3):

$$KC^* = \{k_c \in KC \mid \neg(\exists \theta \in \Theta)[v_1(\theta, k_c) > 0 \vee \dots \vee v_n(\theta, k_c) > 0]\} \quad (4.3)$$

on “ \vee ” denota l’operador lògic “o”.

Aleshores, definim el conjunt complementari de KC^* , KC^*_c :

$$KC^*_c = \{k_c \in KC \mid (\exists \theta \in \Theta)[v_1(\theta, k_c) > 0 \vee \dots \vee v_n(\theta, k_c) > 0]\} \quad (4.4)$$

El conjunt KC^*_c ens dóna els valors de $k_c \in \mathfrak{R}^s$ que no són solució, és a dir, els que no garanteixen el compliment de l’especificació: $\forall(\theta \in \Theta)[v_1(\theta, k_c) \leq 0 \wedge \dots \wedge v_n(\theta, k_c) \leq 0]$.

Aquest conjunt KC^*_c , complementari al que cerquem, pot ser computable utilitzant el concepte de projecció del conjunt, usant l’algoritme implementat per Luc Jaulin en *Proj2D* (Jaulin, Braems, et al. 2002), (Dao 2005). Aquest algoritme es basa en els principis de satisfacció de restriccions. *Proj2D* permet projectar en dues dimensions un conjunt definit mitjançant diverses restriccions unides amb els operadors “ \wedge ”. Malgrat això, el conjunt KC^*_c es defineix mitjançant diverses restriccions unides mitjançant operadors “ \vee ”. Aquest conjunt de restriccions amb unions “o” pot transformar-se en una restricció simple, utilitzant l’operador “max”. Aleshores, el conjunt KC^*_c pot ser computat com

$$KC^*_c = \{k_c \in KC \mid (\exists \theta \in \Theta)[\max(v_1(\theta, k_c), \dots, v_n(\theta, k_c)) > 0]\} \quad (4.5)$$

amb un cert grau de precisió seleccionat amb un paràmetre ε .

4.2.3 Aplicació de l’aritmètica intervalar a la QFT

En el cas d’un problema de disseny de controlador utilitzant la metodologia QFT, el conjunt de restriccions vindrà donat per $v_k(\theta, k_c, \omega)$, expressió que inclou una nova variable ω que requereix un nou quantificador $\forall \omega \in \Omega$, on Ω és el conjunt total de les freqüències possibles.

En aquest cas, les equacions (4.2) i (4.5) quedarien, respectivament, de la manera següent:

$$KC^* = \{k_c \in KC \mid (\forall(\theta \in \Theta) \wedge \forall(\omega \in \Omega))[v_1(\theta, k_c, \omega) \leq 0 \wedge \dots \wedge v_n(\theta, k_c, \omega) \leq 0]\} \quad (4.6)$$

$$KC^*_c = \{k_c \in KC \mid (\exists \theta \in \Theta \wedge \exists \omega \in \Omega)[\max(v_1(\theta, k_c, \omega), \dots, v_n(\theta, k_c, \omega)) > 0]\} \quad (4.7)$$

En l’Algoritme 4.1 es mostra una forma de calcular els conjunts derivats de les equacions (4.6) i (4.7). En aquest algoritme s’han considerat només tres tipus d’especificacions, tot i que es podria generalitzar.

Donada la funció de transferència nominal en llaç obert com $L(\theta, j\omega) = P(\theta, j\omega)G(j\omega)$ — vegeu (2.10)

— i assumint el prefiltru unitari, $F(s) = 1$, les especificacions concretes que s’utilitzen són les següents:

- Especificació d’estabilitat robusta, que s’expressa com:

$$|T(\theta, j\omega)| = \left| \frac{L(\theta, j\omega)}{1 + L(\theta, j\omega)} \right| \leq \delta_1(\omega) \quad (4.8)$$

on $\delta_1(\omega)$ és la magnitud màxima de la funció de transferència de seguiment (*tracking*).

- Especificació d'atenuació de perturbacions a la sortida de la planta, que s'expressa com:

$$|T_D(\theta, j\omega)| = \left| \frac{1}{1+L(\theta, j\omega)} \right| \leq \delta_s(\omega) \quad (4.9)$$

on $\delta_s(\omega)$ és la magnitud del límit superior del rebuig de la perturbació.

- Especificació d'esforç de control, que s'expressa com:

$$|T_U(\theta, j\omega)| = |G(j\omega)T_D(\theta, j\omega)| \leq \delta_c(\omega) \quad (4.10)$$

on $\delta_c(\omega)$ és la magnitud de l'esforç de control, o sigui, el límit superior de la magnitud de la funció de transferència $\frac{U(j\omega)}{W(j\omega)}$, seguint la nomenclatura dels senyals de la Figura 2.2.

Algorisme 4.1 Conjunt de paràmetres del controlador

Pas 1. Donada una regió inicial KC de recerca pels paràmetres del controlador k_c , cal computar la regió admissible KC^* definida mitjançant les expressions:

$$\forall \omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}], \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$$

$$\left. \begin{aligned} |T(\theta, \omega, k_c)| &\leq \delta_1(\omega) \\ |T_D(\theta, \omega, k_c)| &\leq \delta_s(\omega) \\ |G(\omega)T_D(\theta, \omega, k_c)| &\leq \delta_c(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Computant el seu complementari, d'acord amb (4.7)

$$\exists \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}], \exists \omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}] \max \begin{bmatrix} |T(\theta, \omega, k_c)| - \delta_1(\omega), \\ |T_D(\theta, \omega, k_c)| - \delta_s(\omega), \\ |G(\theta, \omega, k_c)T_D(\theta, \omega, k_c)| - \delta_c(\omega) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.12)$$

Pas 2. Si la solució no es troba, cal relaxar les especificacions i tornar al **pas 1**.

L'avaluació de $\forall \omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}], \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ cal fer-la partint tots dos conjunts en un nombre finit d'elements.

Com a resum de les aportacions fetes en aquest apartat, és destacable:

- El tractament que es fa de les diverses especificacions: són manipulades per poder ser tractades com a restriccions en forma de desigualtats polinomials.
- La presència dels operadors lògics “per tot” (\forall), i “i” (\wedge) poden dificultar el còmput del conjunt solució. Per salvar aquest escull s'ha cercat el conjunt complementari, que es pot computar més fàcilment, unint adequadament les expressions mitjançant operadors “o” (\vee).
- En una primera expressió per al còmput del conjunt complementari, apareixen els operadors “negació” (\neg) i “existeix” (\exists).

- En una expressió més depurada, per al còmput del conjunt complementari, el conjunt de restriccions —transformades en desigualtats polinomials— unides per l'operador “o” (\vee) és substituït per l'operador “màxim” (max). Amb aquesta transformació és més fàcil l'ús de paquets comercials d'optimització.
- Les especificacions del problema són no lineals i el problema d'optimització és no convex. Per aquest motiu es proposa utilitzar algorismes una mica més complicats d'optimització global (per exemple emprant *branch and bound*), en comptes d'opcions d'optimització local.

Per il·lustrar l'aplicació del mètode proposat, seguidament es veu un exemple numèric concret.

4.2.4 Aplicació al cas de l'apartat 3.2.2

Es pren el cas del primer exemple vist al Capítol 3, model de planta $P(\theta, s)$ lineal de primer ordre amb incertesa, $P(\theta, s) = \frac{k}{Ts+1}$, vegeu (3.24), i es vol determinar el rang de valors d'un controlador de tipus proporcional-integral (PI), $G(s)$:

$$G(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right), k_p \in [0, 5], k_i \in [0, 5]; T_i = k_p / k_i \quad (4.13)$$

que ha de permetre assolir l'especificació de *tracking* següent: la línia que es pretén seguir és la $m(t)$, que té com a transformada de Laplace $M(s)$, i la màxima desviació respecte a aquesta línia la dona la funció temporal $v(t)$ amb transformada de Laplace $V(s)$, donades per l'expressió (3.23) del Capítol 3.

L'especificació de sensitivitat equivalent, aplicant la tècnica de Krishnan i Cruickshanks, la dona l'equació (3.21) del Capítol 3. Això equival, en substituir el controlador $G(s)$ i la planta amb estructura pre-fixada $P(\theta, s)$, a l'equació

$$|T_D(\theta, j\omega)| = \left| \frac{(T\omega j + 1)\omega j}{kk_i - T\omega^2 + j\omega + jkk_p\omega} \right| \leq \left| \frac{2\omega^2 - 3\omega j}{2\omega^2 - 4 - 5\omega j} \right| \quad (4.14)$$

que és resultat de resoldre el valor absolut al quadrat, mitjançant la fórmula

$$\left(\left| \frac{aj+b}{cj+d} \right| \right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} \quad (4.15)$$

En operar utilitzant l'equació (4.14), s'obté l'expressió:

$$\frac{(\omega^4 T^2 + \omega^2)}{(\omega^2 + 2\omega^2 k k_p + \omega^2 k^2 k_p^2 + T^2 \omega^4 - 2T\omega^2 k k_i + k^2 k_i^2 + k^2 k_p^2 \omega^2)} \leq \frac{(4\omega^4 + 9\omega^2)}{(4\omega^4 + 9\omega^2 + 16)} \quad (4.16)$$

que es converteix en la desigualtat polinomial següent:

$$16\omega^4 T^2 + 16\omega^2 + 18T\omega^4 k k_i + 8T\omega^6 k k_i - 9k^2 k_i^2 \omega^2 - 4k^2 k_i^2 \omega^4 - 18k k_p \omega^4 - 8k k_p \omega^6 - 9k^2 k_p^2 \omega^4 - 4k^2 k_p^2 \omega^6 \leq 0 \quad (4.17)$$

Aleshores la funció que s'ha d'avaluar és f , a partir de la qual es trobarà el conjunt complementari al que interessa:

$$f = 16\omega^4 T^2 + 16\omega^2 + 18T\omega^4 k k_i + 8T\omega^6 k k_i - 9k^2 k_i^2 \omega^2 - 4k^2 k_i^2 \omega^4 - 18k k_p \omega^4 - 8k k_p \omega^6 - 9k^2 k_p^2 \omega^4 - 4k^2 k_p^2 \omega^6 > 0 \quad (4.18)$$

Amb el programa *Proj2Dv4* (Jaulin, Braems, et al. 2002), (Dao 2005), s'avalua la funció f en l'interval $[0.001, 10000]$, prenent com a límits de les variables els extrems dels intervals següents: k en $[1,5]$; T en $[0.08,0.12]$; ω en $[0.01,100]$; k_i en $[0,5]$; k_p en $[0,5]$.

La gràfica que s'obté és la que es mostra a la Figura 4.2, on es representen les regions en funció dels dos paràmetres k_p i k_i del controlador. El conjunt complementari al que interessa està en color vermell. Així, qualsevol punt dins de la zona vermella no compleix la restricció de l'enunciat; qualsevol punt dins de la zona blava sí que la compleix, i els punts situats en la zona groga no està decidit si la compleixen o no.

Per obtenir la Figura 4.2 s'ha pres un valor ε de 0.1, i el temps de còmput total ha estat de 12 959 segons, és a dir, una mica menys de 4 hores. Dades de l'ordinador utilitzat: Intel® Core(TM)2 Duo CPU T7500, 2.20 GHz, 2.00 GB de RAM.

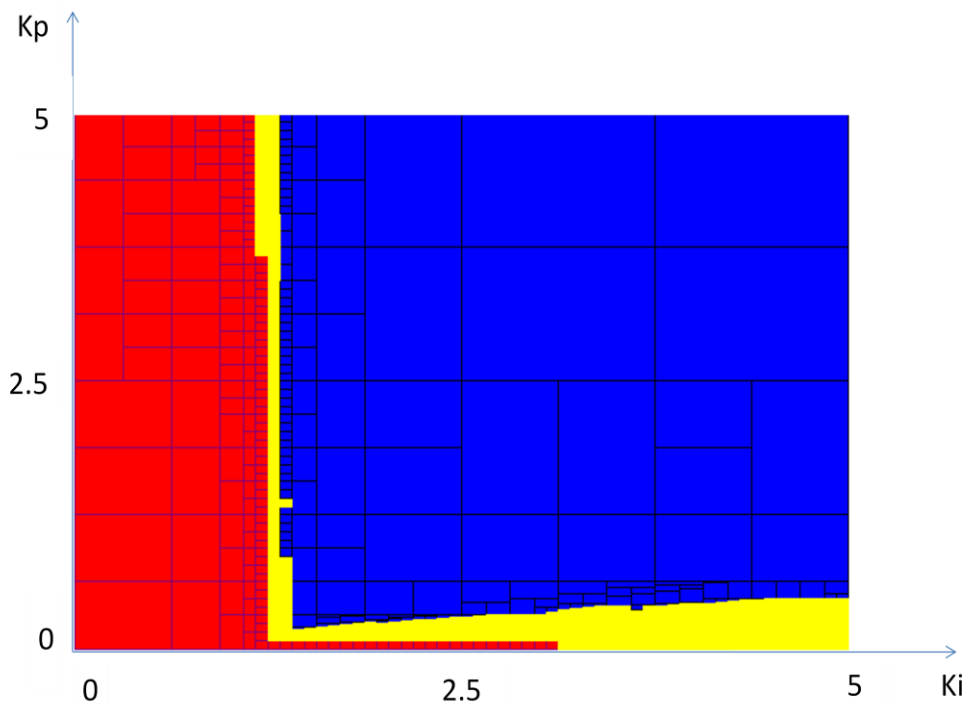


Figura 4.2 Representació amb *Proj2D* de l'espai en què es compleixen les especificacions en funció dels paràmetres del controlador PI

Per il·lustrar millor que es compleixen o no les especificacions, es mostren les respostes freqüencials de dos controladors, corresponents a dos punts, un dels quals compleix l'especificació i l'altre no. En primer lloc es pren un punt qualsevol de la zona blava (s'hi compleix l'especificació), per exemple el punt

corresponent a $k_p = 2.5$ i $k_i = 2.5$, al centre geomètric de la Figura 4.2. En el gràfic de Nichols de la Figura 4.3 es veu el *loop-shaping*, en què es comprova que es compleixen amb escreix les restriccions a qualsevol de les diverses freqüències preses. Efectivament, tots els *bounds* són tipus **n** i cadascun dels punts de la línia que representa la funció de transferència a llaç obert, L_0 , es troba per sobre de la línia de *bound* corresponent.

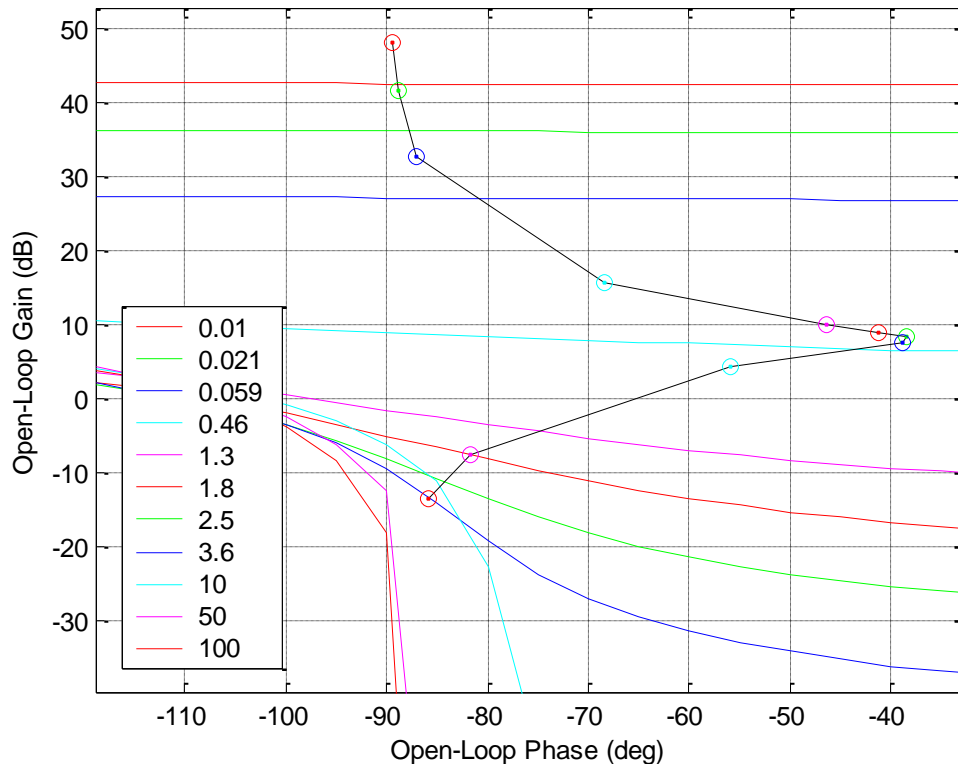


Figura 4.3 Diagrama de Nichols amb el *loop-shaping* corresponent als valors $k_p = 2.5$ i $k_i = 2.5$ del controlador PI

Per a aquest mateix punt, corresponent als valors $k_p = 2.5$ i $k_i = 2.5$ del controlador PI, i encara que es tracti d'informació redundant, a la Figura 4.4 es dóna la gràfica de mòdul del diagrama de Bode, en què es representa en blau discontinu la línia d'especificació i en negre el cas més desfavorable de totes les plantes preses, un total de 16 en aquest cas. El compliment de l'especificació és comprovable gràficament: tota la línia negra s'ha de trobar (i s'hi troba, com es comprova en el gràfic) per sota de la blava discontinua. La graella escollida és de 4 valors per a cadascun dels dos paràmetres de la planta (guany estàtic i constant de temps): s'han pres els valors extrems de l'interval de cada paràmetre i dos valors intermedis de cada un, espaiats logarítmicament. S'ha pres la mateixa graella de freqüències ω , que ja ha estat utilitzada a la Figura 4.3:

$$\omega = [0.01 \quad 0.021 \quad 0.059 \quad 0.46 \quad 1.3 \quad 1.8 \quad 2.5 \quad 3.6 \quad 10 \quad 50 \quad 100] \text{ rad/sec}$$

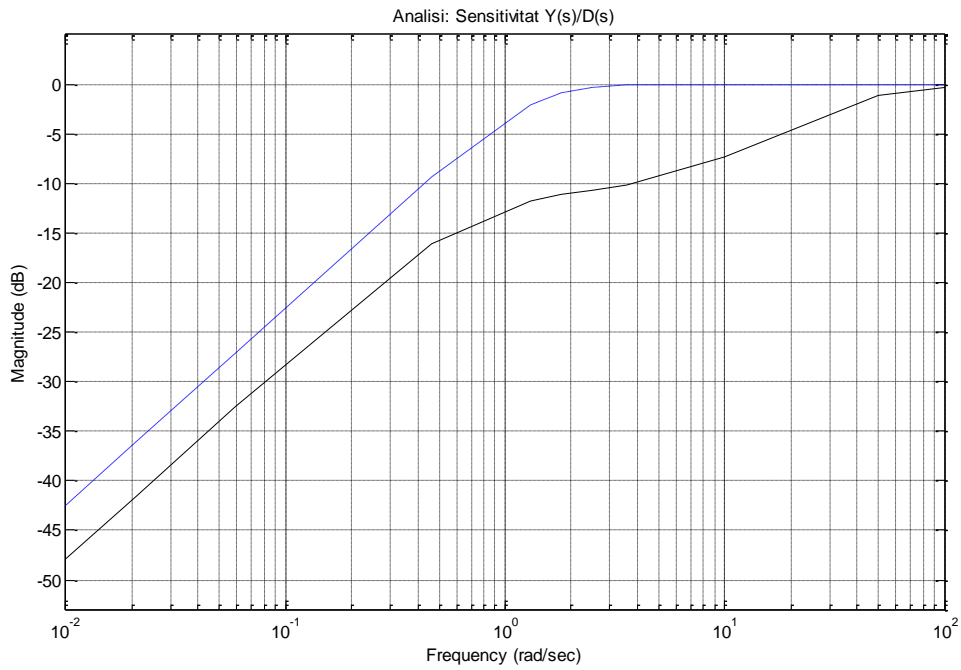


Figura 4.4 Anàlisi del compliment de l'especificació, corresponent als valors $k_p = 2.5$ i $k_i = 2.5$

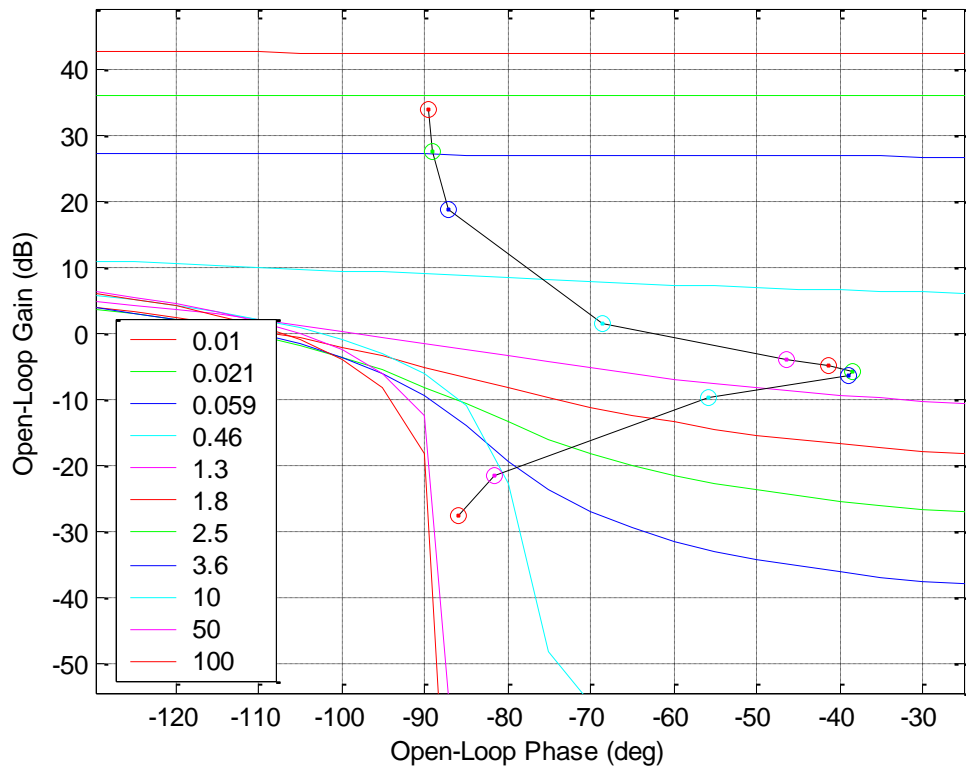


Figura 4.5 Diagrama de Nichols amb el *loop-shaping* corresponent als valors $k_p = 0.5$ i $k_i = 0.5$ del controlador PI, que no compleix especificació

Per il·lustrar que no es compleixen les especificacions, el punt escollit és el corresponent als valors $k_p = 0.5$ i $k_i = 0.5$ del PI, que està situat en plena “zona roja” de la Figura 4.2 obtinguda amb *Proj2D*, més proper al vèrtex inferior esquerre de la figura. Per a aquest punt de no compliment, es mostren la Figura 4.5 i la Figura 4.6, en diagrama de Nichols i de mòdul del diagrama de Bode, respectivament. En la zona de baixes freqüències de les figures esmentades, concretament per $\omega \leq 0.46$ rad/sec s’hi observa que no es compleixen les especificacions.

Només s’acceptaria el controlador mitjançant el qual el compliment d’especificacions fos total, és a dir, per a tot el rang de freqüències previst en l’especificació i per qualsevol planta. Per tant, no s’acceptaria el controlador PI amb valors $k_p = 0.5$ i $k_i = 0.5$, ja que, com es comprova en aquestes darreres figures, amb el controlador esmentat no s’aconseguiria un comportament com el que s’especifica a baixes freqüències, malgrat que el comportament a altes freqüències és millor.

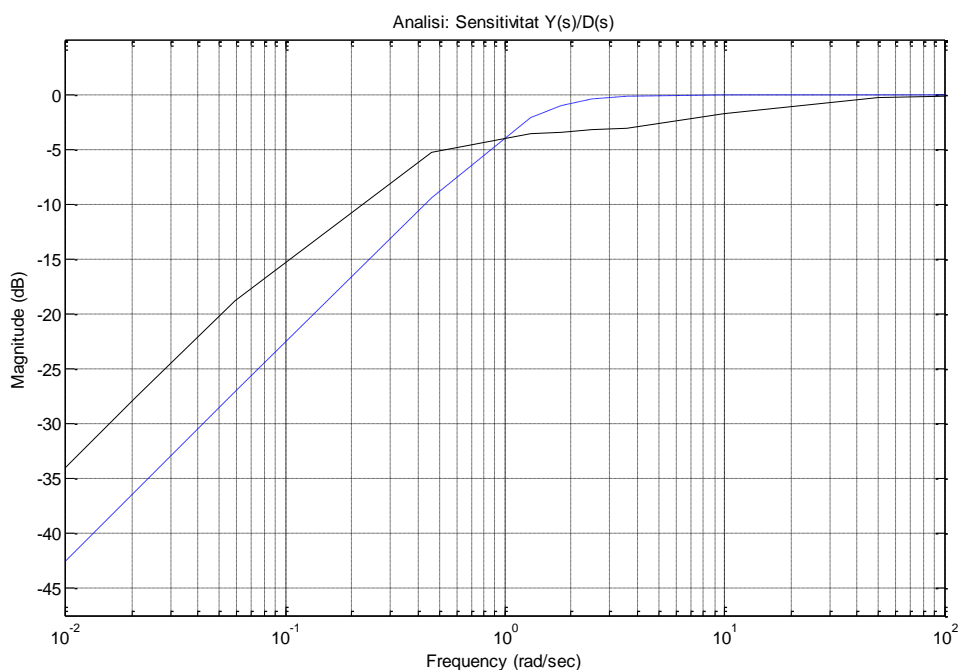


Figura 4.6 Anàlisi de no compliment de l’especificació, corresponent als valors $k_p = 0.5$ i $k_i = 0.5$

4.2.5 Algunes consideracions sobre el procediment emprat

Amb el procediment exposat es pot arribar a computar el conjunt de paràmetres del controlador, sempre que les especificacions siguin compatibles i que a més es puguin complir amb una estructura de control escollida. Com a resum del procediment, s’esmenten seguidament algunes característiques que cal destacar:

- L’estructura del controlador i de la planta ja està fixada, però s’admet la incertesa a la planta.

- Les expressions de mòdul s'han de manipular adequadament per convertir-les en desigualtats polinòmiques. Aquest procés pot ser laboriós, malgrat que hi pugui ajudar l'ús d'alguna eina que permeti la manipulació simbòlica de les expressions.
- Amb el software que s'ha utilitzat per avaluar la funció, *proj2D*, el còmput pot ser lent, sobretot si l'estructura del controlador i/o de la planta és més complexa.
- Donada una planta incerta i prefixada i un controlador d'estructura també prefixada, una manera de minimitzar el temps de còmput podria ser delimitant tant com sigui possible els rangs de treball del controlador, així com el rang de freqüències habitual de treball, si es disposa d'aquestes informacions.
- Una altra manera de rebaixar el cost computacional és mitjançant el valor del paràmetre ε . S'ha de tenir en compte que, en disminuir-ne la mida, tot i que es millora la definició del conjunt, també s'incrementa el temps computacional. Això en cas que hi hagi alguna solució, és clar.
- El procediment queda limitat a la recerca de controladors d'ordre baix que tinguin 2 paràmetres lliures (per exemple controladors de tipus PI o també de tipus PID si hi ha una equació que lligui alguns dels seus paràmetres) ja que els resultats de *Proj2D* es representen en un pla, de dues dimensions.

Capítol 5 Disseny automàtic del regulador

En aquest capítol s'aporta una metodologia per automatitzar el disseny del regulador. Es comença amb una panoràmica general del treball de diversos autors orientat al disseny automàtic, per a l'obtenció d'un controlador concret que, complint totes les especificacions fixades, sigui el que optimitzi algun índex prefixat. Un cop vistes les generalitats i opcions proposades per diversos autors, es proposa un algorisme de disseny automàtic (*Automatic Loop Shaping*, ALS) en el marc de la QFT, en què es té en consideració un criteri de minimització energètica de l'energia impulsional del controlador. Per validar la metodologia proposada, en el capítol següent es veuran alguns exemples d'aplicació.

5.1 Disseny automàtic (ALS) en el marc de la QFT

El disseny automàtic és sovint el punt clau en el procés de disseny del controlador. Malgrat que amb la pràctica es pot guanyar habilitat, el *loop shaping* no és fàcil, cal estar-hi familiaritzat. D'altra banda, en casos complicats pot ser difícil fins i tot per a algú que estigui acostumat a "l'art". L'*automatic loop shaping* (ALS) fa més eficient el procés de disseny i ofereix la possibilitat que l'expert aconseguixi trobar un controlador millor més ràpidament.

Les tècniques ALS poden dividir-se en dues grans categories: (i) les que es basen en algorismes d'optimització, com ara convexos, no convexos i algorismes genètics (GAs), i (ii) les basades en el càlcul d'un dens conjunt de controladors, per als quals es pot trobar l'òptima solució. La primera aproximació permet més llibertat en el sentit que l'estructura del controlador no és fixada. En la segona aproximació, l'estructura del controlador és fixada i el disseny consisteix a seleccionar els valors dels paràmetres que ofereixen comportament òptim i satisfan les restriccions, com les descrites per Yaniv i Nagurka (2004) i (2005).

Un esforç primerenc cap a l'assoliment d'un algorisme ALS fou l'aportació de Gera i Horowitz (1980). En l'article es descriu un procés de semiALS, una aproximació iterativa en la qual el dissenyador afegeix seqüencialment un element en la funció de transferència en llaç obert per forçar-la a passar una línia determinada en la carta de Nichols. Sent semiautomàtic, el resultat pot ser un controlador d'ordre alt i la solució pot ser lluny de l'òptima. La tècnica fou automatitzada per Balance i Gawthrop (1991). Chait i altres (1999) ofereixen un algorisme ALS alternatiu. Presenten una condició suficient per convertir el problema en una formulació d'optimització convexa. El principal inconvenient d'aquesta tècnica és que els pols del controlador són fixos i no formen part del procés d'optimització. Thompson i Nwokah (1994) proposen una aproximació restringida mitjançant la programació no lineal, de dimensió finita, que comença amb l'assumpció d'un controlador QFT inicial. La tècnica fou estesa per Thompson (1998) als *bounds* de la QFT per combinació d'incertesa paramètrica i no paramètrica, i pel pes del control d'esforç. García-Sanz i Guillen (2000) proposen un GA per a ALS, amb l'avantatge respecte a l'anterior treball que

no cal un controlador inicial. Malgrat això, experimenta els desavantatges dels GA, com ara la demanda computacional (els GA són inherentment algorismes paral·lels i, per tant, adequats per utilitzar-los en màquines amb multi-processadors); a més, no garanteix un òptim global sense un esforç computacional il·limitat i un usuari esforçat (l'usuari ha d'estar atent a quines dades del problema s'han de canviar si es vol aconseguir una solució millor).

Algorismes ALS de la segona categoria els proposen, entre d'altres, autors com ara Zolotas i Halikias (1999), i Besson i Shenton (2000). Zolotas i Halikias descriuen un mètode ALS per controladors proporcional-integral-derivatiu (PID) basat en la recerca d'un gran conjunt de controladors. Aquesta tècnica és eficient per a controladors amb dos paràmetres i un petit nombre de *bounds*. Fransson *et al.* (2002) adopten un mètode d'optimització no convexa per dissenyar controladors tipus PID per a problemes de tipus QFT, considerant especificacions a baixes, mitjanes i altes freqüències.

Yaniv i Nagura (1999) també s'aproximen a un ALS de la segona categoria. Es basa en una solució no iterativa per dissenyar un controlador de dos paràmetres. Aquest disseny es pot estendre a més paràmetres, però el mètode implica en la pràctica que només se'n deixin lliures dos, o sigui que els altres són fixos. El procés es repeteix per a un raonable rang de valors dels paràmetres que són fixats.

Nataraj i Tharewal (2005) també han treballat tant en la línia de l'existència de controlador com en l'automatització del disseny del controlador del llaç i del prefiltrer, utilitzant tècniques intervalars d'optimització global.

Altres aspectes relacionats amb el disseny automàtic del controlador també s'han esmentat anteriorment, en l'apartat 2.2.4.

5.2 Metodologia de disseny automàtic del controlador robust basada en optimització

Com ja es deia en el Capítol 2, segons Bhattacharyya, Chapellat i Keel (1995), una planta incerta pot ser descrita mitjançant un *model intervalar*, per exemple mitjançant el model lineal però incert, que té l'expressió genèrica indicada per (2.1).

En la tècnica de la QFT, l'estructura de control és normalment la que es veu a la Figura 2.2. Un problema clàssic en la QFT – (Horowitz 1993); (Houpis and Rasmussen 1999); (Yaniv 1999) – és sintetitzar el controlador de la realimentació, $G(s)$, i el prefiltrer $F(s)$, com estrictament propis, racionals i estables, per als quals les especificacions se satisfan, mentre l'amplada de banda del controlador es manté tan baixa com sigui possible, malgrat que hi hagi incerteses. En general, el controlador de la realimentació es podrà expressar de la manera següent:

$$G(k_c, s) = \frac{B_c(k_c, s)}{A_c(k_c, s)} \quad (5.1)$$

on B_c i A_c són polinomis en el domini s , i k_c és el vector de paràmetres del controlador, de dimensió g .

En l'apartat anterior, 5.1, s'hi esmenten alguns mètodes per dissenyar automàticament un controlador robust per a plantes incertes, pel qual es minimitza el cost de la realimentació i se satisfan l'estabilitat robusta i les especificacions.

5.2.1 Especificacions estudiades de disseny automàtic de la QFT

En l'apartat 2.2.2.2, s'hi definien un conjunt d'especificacions clàssiques, que s'utilitzen normalment per al disseny amb la QFT. Sense perdre generalitat, es poden definir tres tipus d'especificacions bàsiques: minimització de l'*esforç de control*, *estabilitat robusta* i *atenuació de perturbacions*.

Donada la funció de transferència nominal en llaç obert $L(\theta, j\omega) = P(\theta, j\omega)G(j\omega)$ i prenent el prefiltrer com a unitari, $F(s) = 1$, l'especificació de l'*esforç de control* pot expressar-se de la manera següent:

$$|T_U(\theta, j\omega)| = |G(j\omega)T_D(\theta, j\omega)| \leq \delta_c(\omega) \quad (5.2)$$

on $T_D(\theta, j\omega) = \frac{1}{1+L(\theta, j\omega)}$ i $\delta_c(\omega)$ és la magnitud de l'esforç de control, o sigui, el límit superior de la magnitud de la funció de transferència $\frac{U(j\omega)}{W(j\omega)}$.

D'altra banda, l'especificació de l'*estabilitat robusta* es pot expressar com:

$$|T(\theta, j\omega)| = \left| \frac{L(\theta, j\omega)}{1+L(\theta, j\omega)} \right| \leq \delta_1(\omega) \quad (5.3)$$

on $\delta_1(\omega)$ és el límit de la magnitud de la funció de transferència en llaç tancat.

Finalment, una especificació de l'*atenuació de perturbacions* a la sortida de la planta podria expressar-se de la manera següent:

$$|T_D(\theta, j\omega)| \leq \delta_s(\omega) \quad (5.4)$$

on $\delta_s(\omega)$ és la magnitud del rebuig de la perturbació.

5.2.2 Proposta de disseny automàtic per minimitzar l'energia de l'esforç de control

Es proposa un nou algorisme per al *loop shaping* automàtic basat en la minimització de l'energia de la resposta impulsional de l'esforç de control, donada per l'equació (5.2). En el cas particular que es

consideri una planta amb un valor particular de θ i controlador k_c , l'energia de la resposta impulsional de l'esforç de control té l'expressió:

$$E(\theta, k_c) = \int_0^{\infty} |T_U(\theta, \omega, k_c)|^2 d\omega \quad (5.5)$$

Algorisme 5.1 Disseny automàtic del controlador robust

Pas 1. Escollir la discretització per a les freqüències $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{nw}$ i per al conjunt de paràmetres incerts de la planta $\Theta = \{\theta_i | \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{np}\}$.

Pas 2. Resoldre el problema d'optimització següent: per a cada freqüència $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{nw}$ i per a tot el conjunt de paràmetres de la planta Θ , la solució òptima de paràmetres del controlador $k_c \in KC$, on KC és el conjunt inicial limitat de paràmetres del controlador, $KC = \{k_c \in \mathbb{R}^g | \underline{k}_c \leq k_c \leq \overline{k}_c\}$, es determina mitjançant:

$$\min_{k_c} \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{nw} |T_U(\theta_i, \omega_j, k_c)|^2 \Delta\omega \Delta\theta \quad (5.6)$$

Subjecte a:

per $i=1, \dots, np$

per $j=1, \dots, nw$

$$|T(\theta_i, \omega_j, k_c)| \leq \delta_1(\omega_j) \quad (5.7)$$

$$|T_D(\theta_i, \omega_j, k_c)| \leq \delta_s(\omega_j) \quad (5.8)$$

$$|G(\omega_j)T_D(\theta_i, \omega_j, k_c)| \leq \delta_c(\omega_j) \quad (5.9)$$

Fi

Fi

$$\underline{k}_c \leq k_c \leq \overline{k}_c$$

Pas 3. Si no es troba la solució, s'han de relaxar les especificacions i tornar al **pas 1**.

Tenint en consideració una família de plantes, l'energia esmentada, integrada per la família sencera de plantes, es podria expressar de la manera següent:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} E(\theta, k_c) d\theta = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_0^{\infty} |T_U(\theta, \omega, k_c)|^2 d\omega d\theta \quad (5.10)$$

Una aproximació discreta de (5.10), donada una graella discreta de freqüències $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{nw}$ i una graella de paràmetres incerts de la planta $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{np}$, podria ser:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} E(\theta, k_c) d\theta \cong \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{nw} |T_U(\theta_i, \omega_j, k_c)|^2 \Delta\omega\Delta\theta \quad (5.11)$$

on np i nw són el nombre de plantes i freqüències considerades, respectivament.

La proposta de disseny automàtic consisteix a trobar un controlador que minimitzi aquest índex i que tingui en consideració la família de les plantes. Aquesta família de plantes pertany al conjunt incert de totes les possibles plantes. El controlador, a més a més, ha de complir totes les especificacions indicades pel dissenyador.

L'aproximació esmentada (5.11) permet definir l'Algorisme 5.1, per trobar aquest controlador que minimitzi l'índex proposat.

5.2.3 Programació del disseny automàtic del controlador (ALS)

Per resoldre el **pas 2** de l'anterior Algorisme 5.1 s'ha de resoldre un problema d'optimització, això és trobar el *mínim* (o, si escau, *màxim*) d'una *funció objectiu* (o *funció criteri*) subjecta a unes *restriccions*.

5.2.3.1 Algunes definicions

Matemàticament, un problema d'optimització pot formular-se de la manera següent:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } f(\mathbf{x}) \\ & \text{subjecte a } \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ per } i = 1, \dots, m \\ & \quad \quad \quad h_j(\mathbf{x}) = 0 \text{ per } j = 1, \dots, p \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \in X \end{aligned} \quad (5.12)$$

on les funcions $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p$ són funcions definides sobre un espai n -dimensional E_n , X és un subconjunt de E_n , i \mathbf{x} és un vector de n components x_1, x_2, \dots, x_n .

Resoldre el problema d'optimització consisteix a trobar x_1, x_2, \dots, x_n que satisfacin les restriccions i a la vegada que minimitzin la funció f .

La funció $f(\mathbf{x})$ és la *funció objectiu* o *funció criteri*. Cadascuna de les restriccions $g_i(\mathbf{x})$ s'anomena *restricció de desigualtat* i cadascuna de les restriccions $h_j(\mathbf{x})$ s'anomena *restricció d'igualtat*. El conjunt X especifica els límits inferiors i superiors de les variables x_1, x_2, \dots, x_n .

Un vector $\mathbf{x} \in X$ que satisfaci totes les restriccions es considera una solució possible. La col·lecció de totes les solucions possibles determina la regió possible. Així, la solució al problema d'optimització consisteix a trobar el punt \mathbf{x}_s tal que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_s), \forall \mathbf{x} \in X$. El punt \mathbf{x}_s s'anomena *solució* al problema d'optimització.

Quan la *funció objectiu* i les *restriccions* al problema són funcions lineals, es diu que el problema és d'*optimització lineal*. Matemàticament, les tècniques que s'utilitzen per resoldre aquest tipus de problema es coneixen com a tècniques de *programació lineal*. En canvi, si la *funció objectiu* o les *restriccions*, o ambdues, són funcions no lineals, es considera que el problema és d'*optimització no lineal*, i les tècniques associades es coneixen com a tècniques de *programació no lineal*.

La *programació no lineal* es pot subdividir en *programació convexa* i *programació no convexa*.

Definició: *regió convexa* és la regió de l'espai en què unint dos punts qualssevol mitjançant un segment, els punts del segment queden totalment dins de la regió.

A la Figura 5.1 s'il·lustra la convexitat o no convexitat d'una regió amb un parell d'exemples.

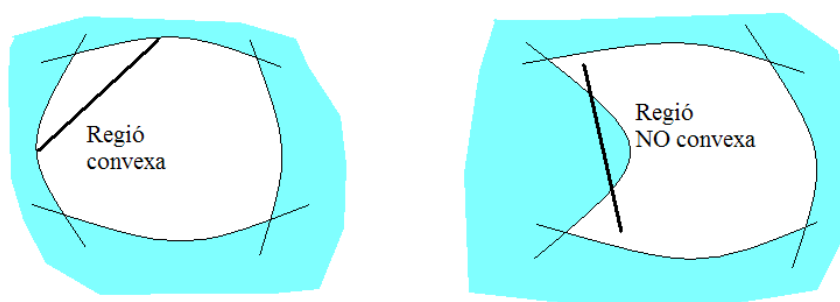


Figura 5.1 Exemple de regió convexa i de regió no convexa

Definició: una funció $f(x)$ s'anomena *funció convexa* si el conjunt de punts (x,y) de tal manera que $y \geq f(x)$, formen una regió convexa.

En el cas de funcions d'una variable, la funció $f(x)$ és convexa sobre el conjunt X convex si i només si la segona derivada és positiva en tot el conjunt, $f''(x) \geq 0, \forall x \in X$.

5.2.3.2 Problemes d'optimització: convex i no convex

Un problema d'optimització convex és el que implica la minimització d'una funció convexa sobre una regió de solucions també convexa. En aquest cas, existeix un únic mínim local, per la qual cosa qualsevol mínim local del problema és la solució.

En canvi, en problemes no convexos pot haver-hi més d'un mínim local. Aquest fet comporta que, per trobar el mínim global, es requereixin algorismes més complicats.

Exemple: a la Figura 5.2 es representa la funció convexa $f(x)=x^4+2x^3+2x^2+1$ en l'interval $x \in [-2,1]$, on es comprova que hi ha un mínim local A (que és a la vegada global) en el punt $x = 0$.

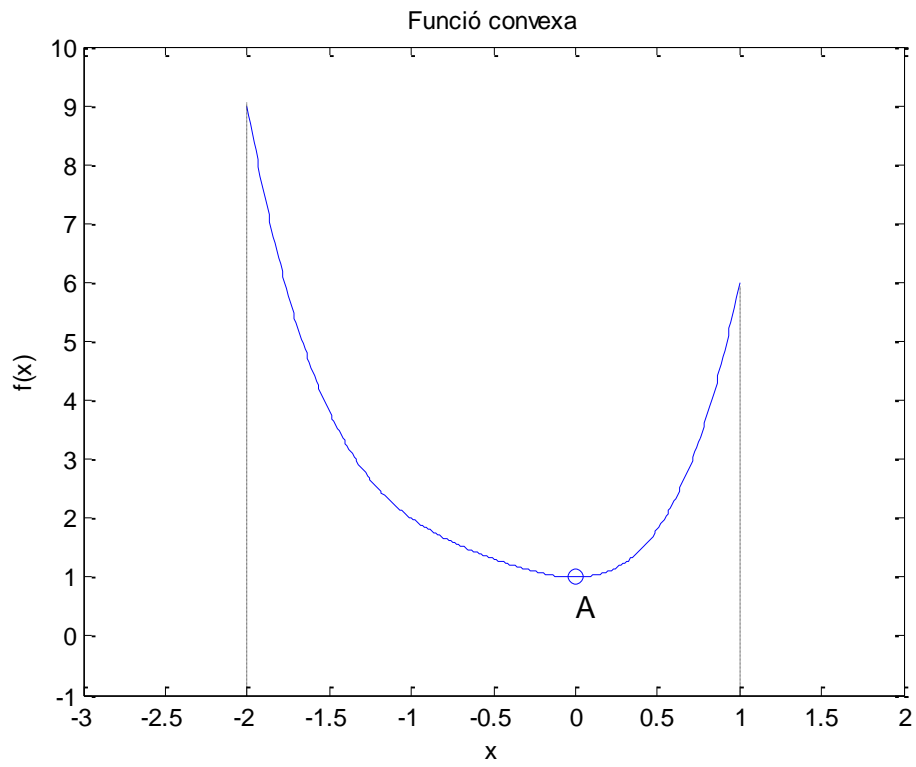


Figura 5.2 Exemple de funció convexa

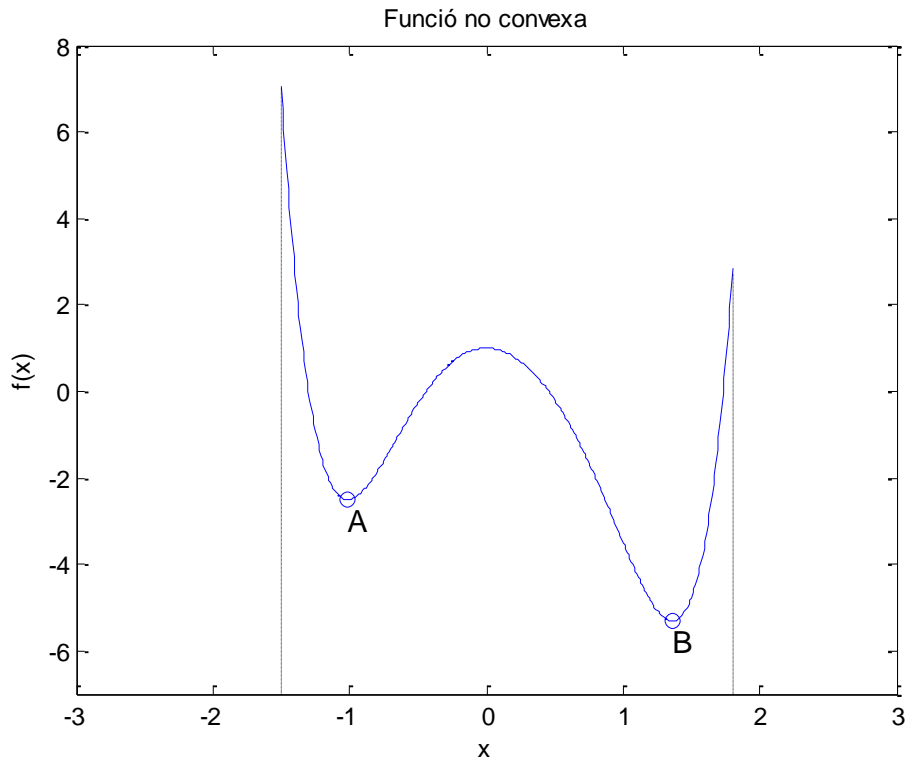


Figura 5.3 Exemple de funció no convexa

Així mateix, a la Figura 5.3 es representa la funció $f(x)=x^6-x^5+0.5x^3-5x^2+1$ en l'interval $x \in [-1.5, 1.8]$, on es comprova que hi ha dos mínims, A i B, dels quals només B és global.

L'Algorisme 5.1 ha de permetre resoldre funcions no convexes.

5.2.4 Paquets d'optimització escollits: Optimization Toolbox, Tomlab

Com a suport per a la recerca del controlador òptim s'han provat diversos paquets d'optimització. Inicialment es van fer unes proves utilitzant *Optimization Toolbox* (Mathworks 2007). La funció bàsica utilitzada d'aquesta llibreria és *fmincon*, la qual avalua el vector \mathbf{x} de paràmetres que fa mínima una funció $f(\mathbf{x})$, subjecta a un conjunt de restriccions lineals i no lineals. Però bàsicament s'ha provat el paquet comercial d'optimització global *Tomlab* (Holmström, Göran and Edvall 2007) —basat en algorismes de *separació i fitació*, altrament anomenats algorismes *ramificació i poda*, però encara més coneguts mitjançant la terminologia anglesa *branch and bound*—, amb el qual s'han obtingut resultats millors. El motiu d'aquesta elecció enfront d'altres opcions d'optimització local és que les especificacions del problema són no lineals i el problema d'optimització generalment és no convex.

La idea bàsica del mecanisme dels algorismes *branch and bound* consisteix en el que s'explica seguidament. Molts problemes es poden representar amb l'ajuda d'arbres o grafs, que solen ser un esquema de representació general i potent. En general, la resolució de problemes basats en el recorregut de grafs tenen un cost computacional alt, a causa de la gran quantitat de branques que s'han d'explorar. Els algorismes de *branch and bound* es basen en el recorregut d'arbres o grafs, i es poden utilitzar en un problema d'optimització en què hi hagi una funció que es vol optimitzar. La particularitat del *branch and bound* en la resolució d'un problema d'optimització és que el valor d'aquesta funció es pot utilitzar per deixar de recórrer algunes branques de l'arbre de candidats que es pugui assegurar que donaran lloc a solucions pitjors a la que s'ha obtingut fins a aquell moment. Aquest procés es pot anar repetint fins a arribar a la solució òptima.

Tomlab és un entorn sobre *Matlab* (Mathworks 2007) que facilita la resolució d'una àmplia gamma de problemes d'optimització i possibilitza un ús senzill d'un gran nombre de *solvers*. *Tomlab* té implementats més de 65 algorismes per a l'optimització (lineal, no lineal, discret...). Hi ha diverses formes de resoldre problemes d'optimització amb *Tomlab*: cridant directament un *solver* o bé utilitzant rutines *multi-solver*, o també interactivament, utilitzant un sistema de menú —*Graphical User Interface*, GUI.

5.2.5 Operativa pràctica de l'Algorisme 5.1 utilitzant Tomlab i Matlab

La formulació del problema que s'ha de solucionar és la següent: trobar els paràmetres d'un controlador d'estructura pre-fixada per als quals una funció objectiu és mínima i que es compleixin unes restriccions determinades, que depenen de les especificacions, i en un rang de freqüències donat, independentment de la planta de què es tracti, dins d'un conjunt d'incertesa predefinit. La funció que s'ha de minimitzar és la que defineix (5.6) i les restriccions són de la (5.7) a la (5.9) de l'Algorisme 5.1.

A la pràctica, s'acaba treballant amb un conjunt finit de plantes, ja que es prenen un conjunt finit de valors de cada paràmetre (incertesa paramètrica) i també un conjunt discret de freqüències.

Com s'ha dit a l'apartat 5.2.4, l'eina utilitzada en l'optimització és Tomlab(2007), en un entorn sobre Matlab(Mathworks 2007). Seguidament es passa a descriure esquemàticament com s'ha treballat amb l'eina esmentada.

El problema d'optimització que s'ha de resoldre és l'anomenat *global mixed-integer nonlinear programming* (glc). La formulació del problema glc és la següent:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ & \text{subjecte a } \begin{cases} -\infty < \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U < \infty \\ \mathbf{b}_L \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_U \\ \mathbf{c}_L \leq \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{c}_U \end{cases} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$\mathbf{b}_L, \mathbf{A}, \mathbf{b}_U$ són restriccions lineals. En aquest cas, no n'hi ha i es defineixen com a conjunt buit. Amb notació Matlab: $\mathbf{A}=[]; \mathbf{b}_L=[]; \mathbf{b}_U=[];$

$\mathbf{c}_L, \mathbf{c}(\mathbf{x}), \mathbf{c}_U$ són restriccions no lineals. Els límits respectius per sota i per sobre en totes les restriccions no lineals són els mateixos, ja que les expressions polinomials s'han manipulat prèviament per obligar que siguin negatives. Com que es tracta d'un conjunt de restriccions, es tracten vectorialment, amb un índex m . Amb notació Matlab: $\mathbf{c}_L(m) = -\text{inf}; \mathbf{c}_U(m) = 0;$

La funció f a minimitzar és funció del vector \mathbf{x} , en què cada paràmetre del controlador és un component del vector \mathbf{x} . A l'Annex A hi ha una explicació més detallada de com s'ha treballat amb Tomlab, utilitzant Matlab.

5.2.6 Exemple en què s'aplica l'Algorisme 5.1 per trobar el controlador

Es pren el mateix exemple vist en el Capítol 3 i el Capítol 4, amb un model de planta $P(\theta, s)$ lineal de

primer ordre amb incertesa, $P(\theta, s) = \frac{k}{Ts+1}$, vegeu (3.24), i es pretén determinar el controlador "òptim"

de tipus PI, $G(s)$, donat per (4.13) que ha de permetre assolir la mateixa especificació de *tracking* donada en l'apartat 3.2.2 del Capítol 3.

S'opta doncs per la mateixa estructura de controlador i amb el mateix rang de valors per als paràmetres que en (3.24). Es prenen dues especificacions, l'una d'estabilitat robusta del llaç, de forma que el mòdul de $|Y/R| < 2$ dB, i l'altra de *tracking*, donada per les envoltants definides en (3.22) com a respostes al gràfic. Aquesta especificació de *tracking* es converteix en una especificació de sensibilitat, d'acord amb la tècnica de Krishnan i Cruickshanks vista en 3.2.1. S'hi aplica l'operativa indicada en 5.2.5, amb el vector de freqüències donat en 4.2.4, o sigui:

$$\omega = [0.01 \quad 0.021 \quad 0.059 \quad 0.46 \quad 1.3 \quad 1.8 \quad 2.5 \quad 3.6 \quad 10 \quad 50 \quad 100] \text{ rad/sec}$$

S'escull una graella de plantes de 16 punts, amb totes les permutacions possibles de 4 valors pel guany estàtic k , i 4 valors més per a la constant de temps T de la planta $P(\theta, s)$, escalats linealment.

Els resultats obtinguts mitjançant *Tomlab* (2007) són: , $k_p = 0.149$ i $k_i = 1.334$.

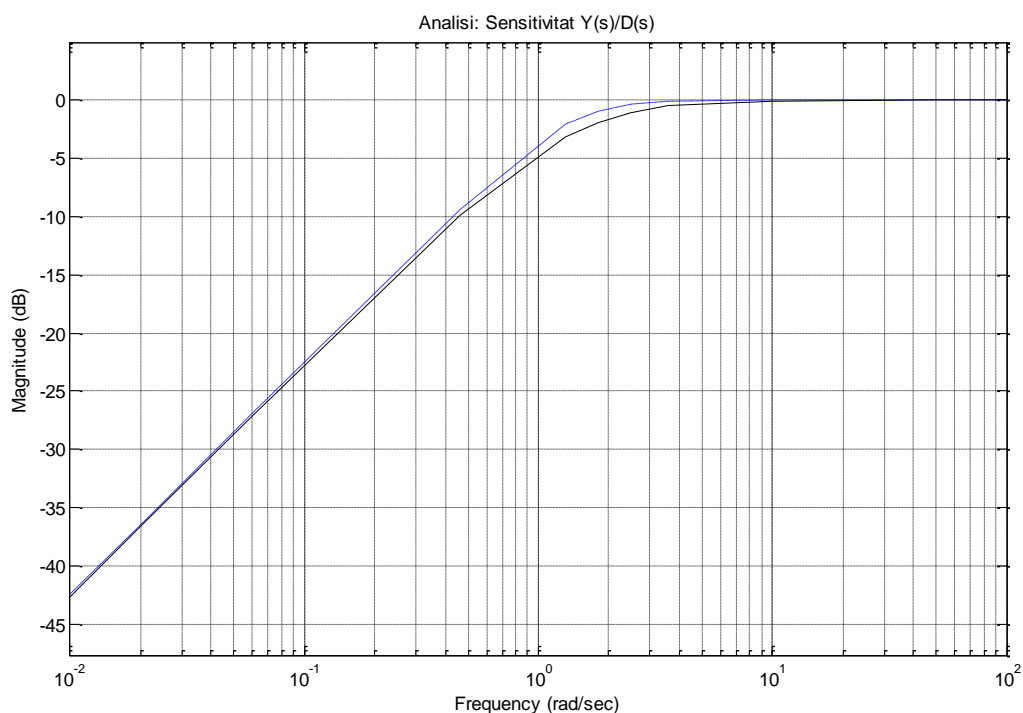


Figura 5.4 Anàlisi del compliment de l'especificació

Es comprova mitjançant la *QFT toolbox* (Borghesani, Chait and Yaniv 1994) que es compleixen ambdues especificacions, la d'estabilitat robusta del llaç amb escreix i també l'especificació de sensibilitat corresponent a l'equivalent de la de *tracking*. A la Figura 5.4 s'observa aquest compliment de l'especificació més crítica, la de sensibilitat, en un gràfic del mòdul (diagrama de Bode): una línia blava discontinua marca la línia límit definida per l'especificació de sensibilitat, mentre que com una línia negra marca el cas més desfavorable del conjunt de les plantes possibles. El compliment de l'especificació

implica que la línia negra contínua s'ha de trobar per sota de la línia blava discontinua, com s'observa que passa a la figura.

D'alta banda, a l'apartat 4.2.4 s'havia pres el mateix exemple de planta, estructura de controlador i especificació de *tracking*: s'havia cercat el conjunt de paràmetres del controlador per al qual es compleix la mateixa especificació de *tracking*. Es comprova que el controlador trobat es troba dins del conjunt, representat a la Figura 4.2. El fet que es trobi en el límit de la regió de compliment s'explica pel fet que el que es cerca és el controlador òptim, cosa que pot implicar en determinats casos la localització dels paràmetres prop de la "frontera" entre el conjunt de solucions possibles i el de les no possibles.

De forma redundant, es fa una comprovació gràfica addicional a la Figura 5.5. Es representa la funció que s'ha de minimitzar en funció dels dos paràmetres, k_p i k_i , en els intervals indicats: $k_p \in [0,5], k_i \in [0,5]$. S'ha pres una graella de 101 x 101 punts. El salt abrupte que es veu es deu a la inclusió de les especificacions. L'especificació més restrictiva és la de sensibilitat, equivalent a la de *tracking*. S'observa una coherència del gràfic amb els resultats obtinguts amb *Tomlab*: el mínim de la funció avaluada per *Tomlab* és $f_{min} = 30.135$, que correspon al punt $k_p = 0.149$ i $k_i = 1.334$.

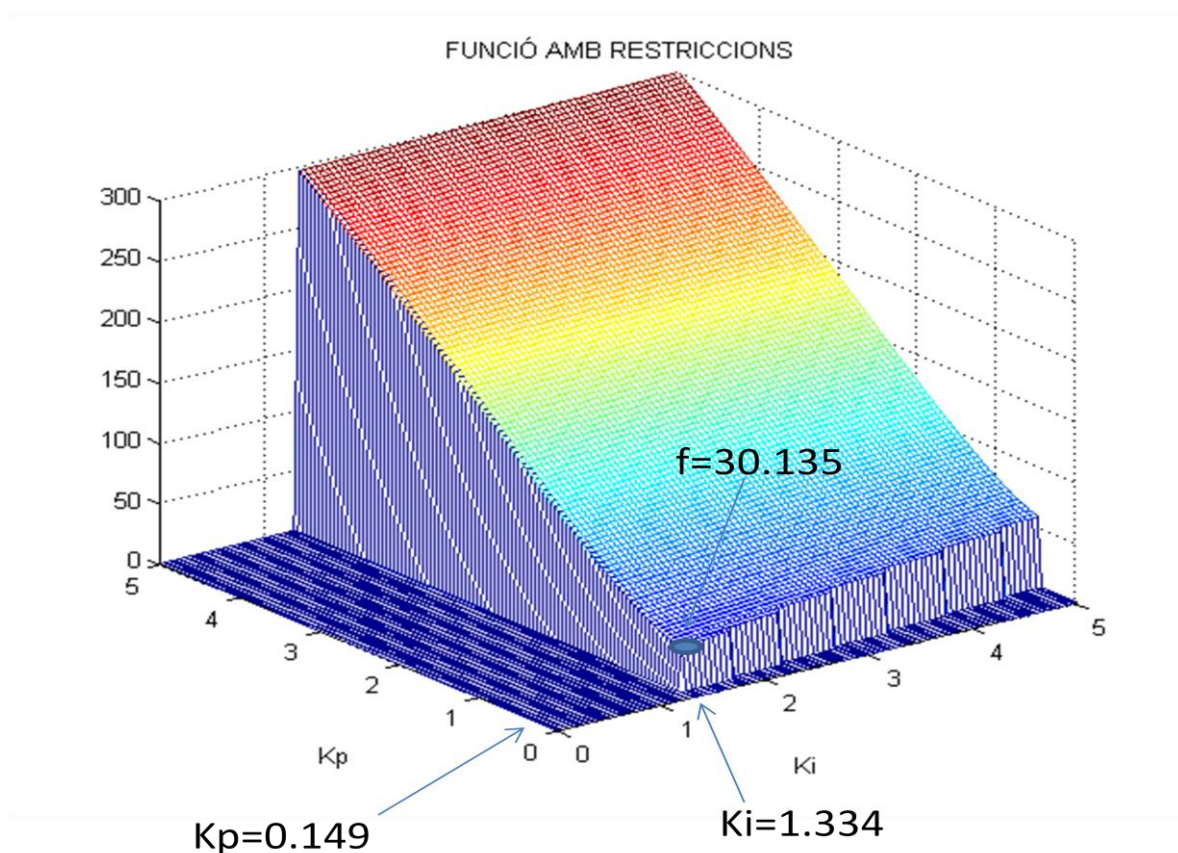


Figura 5.5 Representació de la funció a minimitzar, amb restriccions

5.3 Quadre resum del procediment de disseny

A manera de resum del procediment de disseny, síntesi del Capítol 3, el Capítol 4 i el Capítol 5, a la Figura 5.6 es mostra un quadre esquemàtic. En aquest quadre s'ha fet èmfasi en el procediment de disseny a partir d'especificacions de *tracking* o seguiment, vistes en el Capítol 3. Com a dades es tenen el model incert de la planta i les especificacions. Com que al Capítol 3 s'ha desenvolupat una proposta per convertir una especificació de *tracking* temporal en una de "quasi-equivalent" freqüencial, s'ha separat aquesta especificació de la resta d'especificacions. A la pràctica, l'especificació temporal de *tracking* acaba convertint-se en una especificació més en el domini freqüencial, per al disseny mitjançant la QFT. Per avaluar l'existència o no de controlador s'hi podria aplicar l'Algorisme 4.1, i per al disseny del regulador se suggereix utilitzar l'Algorisme 5.1 de disseny automàtic (ALS) proposat.

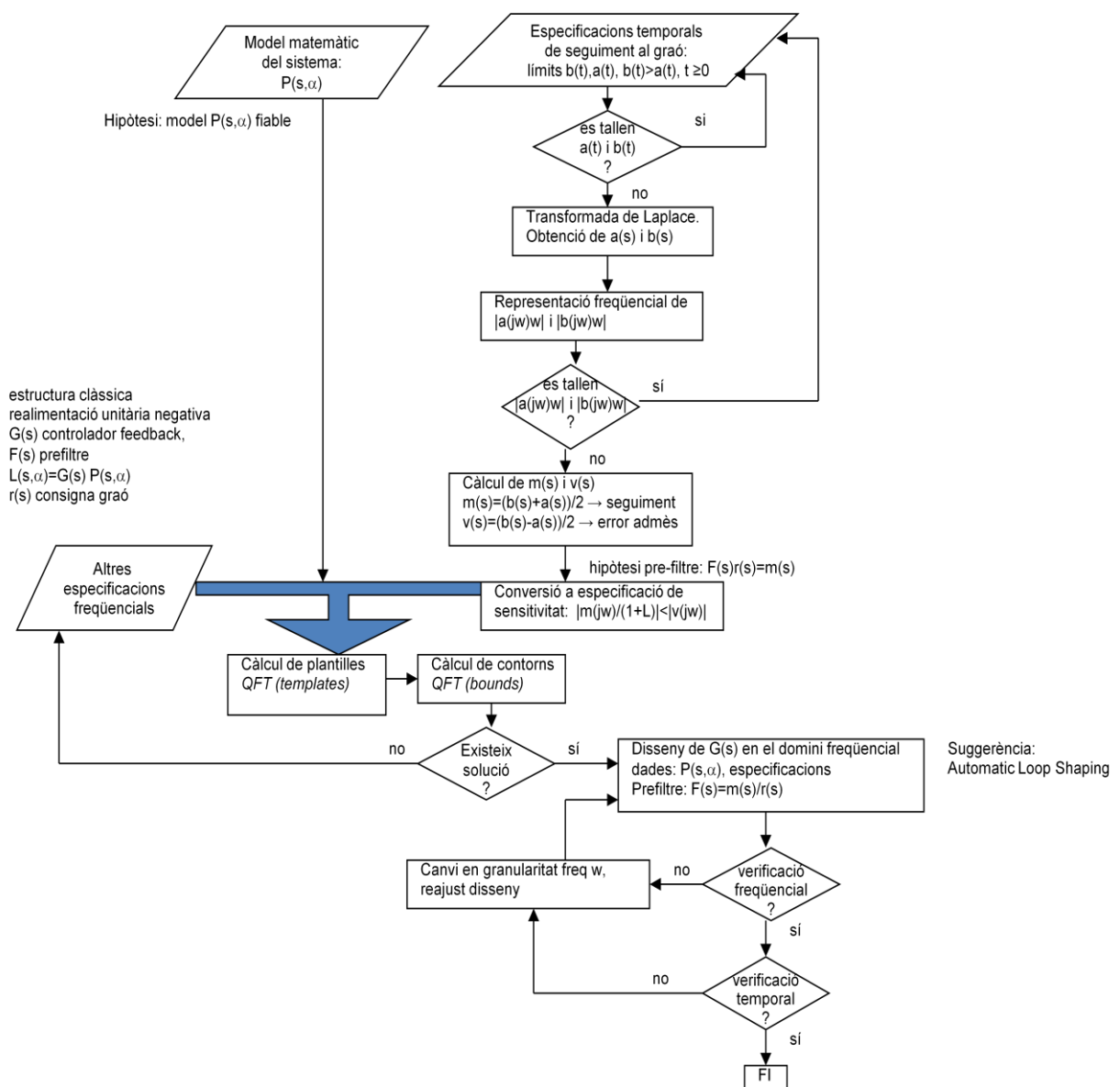


Figura 5.6 Quadre esquemàtic del procés de disseny proposat, que inclou especificacions de *tracking*

Capítol 6 Aplicacions

Com a exemples concrets de les propostes fetes en capítols anteriors, en aquest capítol es presenta l'aplicació de les tècniques proposades en dos casos amb models obtinguts d'aplicacions reals. En el primer cas s'ha treballat en una aplicació real d'interferometria. En el segon cas s'ha treballat al nivell de simulació i es presenten els resultats obtinguts sobre un model extret d'un helicòpter de laboratori.

6.1 Aplicació a un model interferomètric

En el camp de la metrologia de precisió, els efectes associats a l'existència de vibracions mecàniques, inestabilitats tèrmiques o turbulències aerodinàmiques són un problema no resolt que mereix una atenció especial.

En aquest context, es pot constatar que en el mercat hi ha una demanda d'innovacions que permeten resoldre aplicacions metroloògiques sense contacte mecànic amb les superfícies que s'han de fabricar o inspeccionar i, en aquest camp, una de les tècniques utilitzades habitualment i amb més potencial és la interferometria òptica.

La interferometria proporciona la sensibilitat de les longituds d'ona òptiques i actualment, amb el desenvolupament d'aplicacions informàtiques per al processament automàtic d'interferogrames, s'assoleixen resolucions perfilomètriques inferiors a 0.1 nm, és a dir, de les dimensions atòmiques. No obstant això, aquesta sensibilitat elevada també implica una gran fragilitat davant l'existència de perturbacions com ara vibracions o turbulències atmosfèriques que modifiquen la diferència de camí òptic i, per aquest motiu, la utilització de la interferometria habitualment ha estat restringida a les mesures que poden realitzar-se sobre taules antivibratòries o que permeten fer servir il·luminacions polsades molt intenses i càmeres d'alta velocitat, amb què es "congela" el moviment dels interferogrames.

Però també en aquest camp s'està incrementant la demanda per a aplicacions que han de realitzar-se fora dels bancs òptics i en condicions d'il·luminació convencional. Per exemple, en l'entorn industrial podem esmentar les mesures dutes a terme sobre màquines que tenen components òptics o bé superfícies d'alta precisió dels moderns microdispositius. En l'entorn científic cada vegada s'estén més l'ús d'interferòmetres en sensors de camp, aerotransportats o embarcats en missions espacials. Finalment cal esmentar, com a aplicació que té interès per al present treball, el control de posició dels miralls segmentats dels telescopis de grans dimensions (Pizarro, et al. 2002). En totes aquestes aplicacions, les franges d'interferència experimenten un moviment a causa de les variacions de la diferència de camí òptic. Com a conseqüència, la visibilitat en els interferogrames observats visualment, enregistrats en un interval de temps mitjançant una càmera, disminueix dràsticament.

Per tant, l'estabilització de les franges en un interferòmetre òptic sotmès a pertorbacions mecàniques constitueix un tema de treball amb un enorme interès, tant des del punt de vista científic com de l'industrial. Una possible solució a aquest problema és el disseny de tècniques de control actiu aplicat a la diferència de camins òptics per eliminar els components de baixa freqüència.

L'apartat següent, de contextualització, s'inclou per facilitar la comprensió del treball fet en el marc d'un projecte tecnològic més ampli.

Se segueix amb la descripció dels components constitutius del sistema de control actiu que s'han desenvolupat per a l'interferòmetre i es presenta l'obtenció d'un model matemàtic amb incertesa paramètrica. Amb el model obtingut de l'interferòmetre, s'ha aplicat la tècnica de control robust QFT per al rebuig de pertorbacions. Finalment es presenten els resultats obtinguts en simulació i en experimentació.

6.1.1 Contextualització de l'aplicació interferomètrica

El treball efectuat en l'aplicació interferomètrica s'ha dut a terme en col·laboració amb membres del *Centre de Desenvolupament de Sensors, Instrumentació i Sistemes* (CD6), i per desenvolupar-lo ha rebut ajuts del *Ministerio de Industria, Turismo y Comercio* (MITYC). Cal esmentar la tesi de (Pintó 2002), feta en el marc de la col·laboració amb el *Gran Telescopio Canarias* (GTC), tesi que es va elaborar a partir del contracte amb la companyia responsable de la construcció d'aquest gran telescopi (*Grantecan S.A.*). Algunes de les imatges i figures d'aquesta secció s'han extret del web del GTC mitjançant l'enllaç de l'*Instituto de Astrofísica de Canarias*, IAC (2001).

Per a més detalls sobre la introducció als miralls segmentats, es pot consultar la tesi esmentada. Les raons principals per a l'ús de miralls segmentats en comptes d'un únic mirall monolític, format per una única peça, són de caire tecnològic i econòmic. Quan el mirall primari té unes grans dimensions, de diàmetre de 8 metres o més, és més econòmic, tant des del punt de vista de la construcció com de l'estructura que l'ha de suportar, adoptar la solució del mirall segmentat. El GTC és del tipus clàssic reflector Cassegrain, amb dos miralls en una configuració anomenada de Ritchey-Chrétien. L'aspecte exterior del telescopi es reflecteix a la Figura 6.1.

El subsistema del mirall primari del telescopi està format per 36 miralls independents de patró hexagonal, la separació entre els quals és de 3 mm. A la Figura 6.2 se'n mostra la disposició conjunta. El costat de cada hexàgon fa 936 mm. La forma de cada mirall és circular, amb un radi de curvatura que té un diàmetre 10 m. formant globalment una figura hiperbòlica amb unes característiques geomètriques concretes per al desenvolupament de la funció òptica.



Figura 6.1 Aspecte exterior del Gran Telescopio de Canarias (GTC)

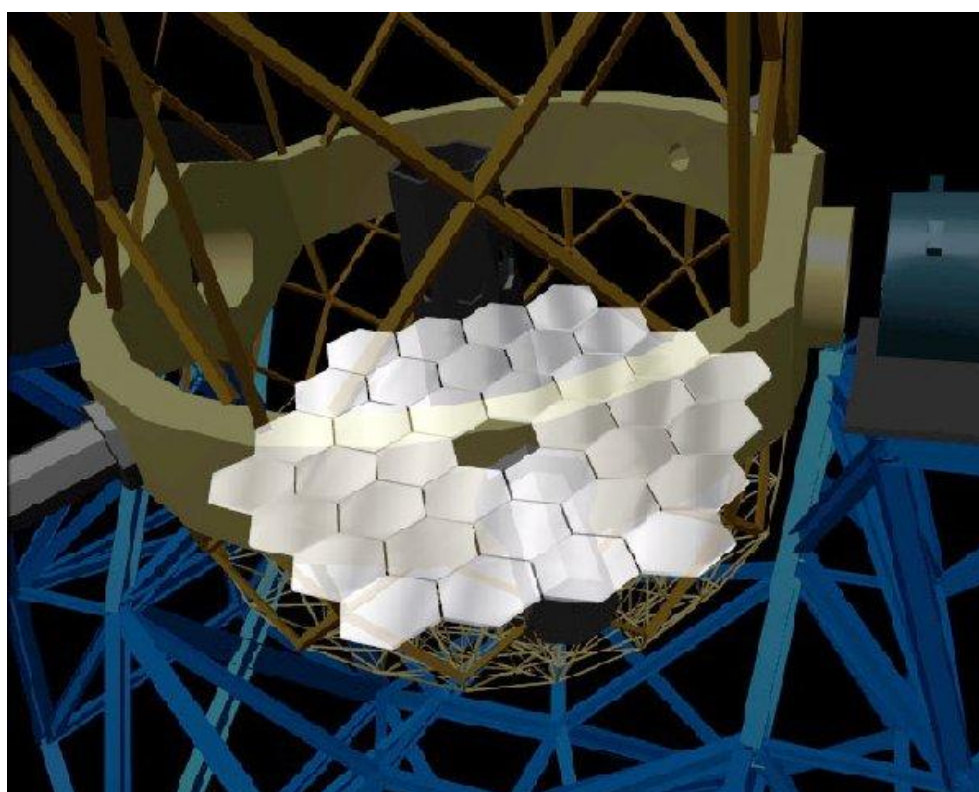


Figura 6.2 Mosaic de 36 miralls que s'han de comportar com un únic mirall

Els alineaments de cada segment de mirall es poden corregir mitjançant 3 posicionadors. A més, la posició relativa entre els segments es pot ser mesurar mitjançant sensors a les arestes adjacents dels segments, tal com es pot observar esquemàticament a la Figura 6.3. Per corregir la deformació dels segments s'ha previst un sistema de correcció. Aquests errors poden ser deguts a la fabricació o a deformacions de dimensions degudes a causes de tipus tèrmic, etc.

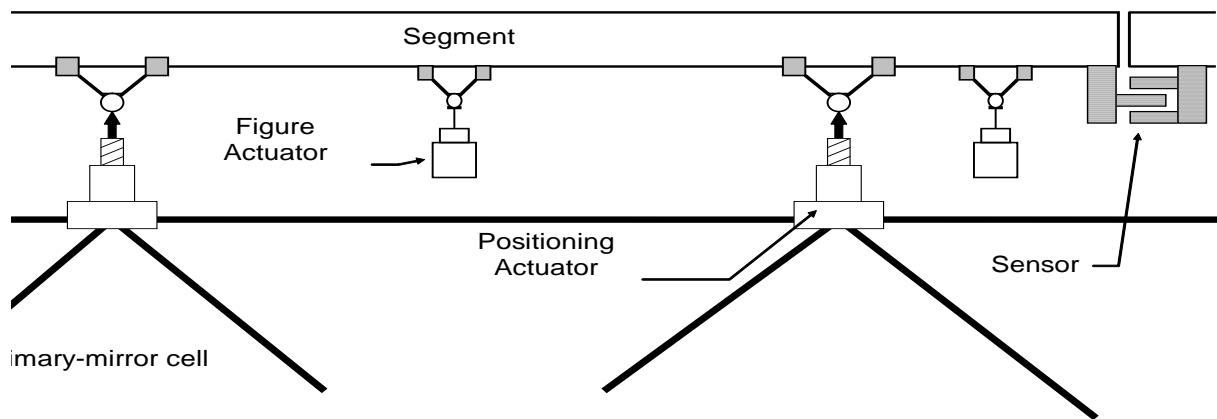


Figura 6.3 Mosaic: detall dels actuadors i sensors de posició, amb ajust a zero periòdic

La Figura 6.4 i la Figura 6.5 il·lustren els dos tipus de desalineaments habituals. En el desalineament angular, Figura 6.4, cada segment de mirall produeix una imatge individual en el pla imatge. A la Figura 6.5 es veu el cas del desalineament vertical, que es dona quan el desplaçament (*pistó*) supera els 100 nm. Si s'eviten els desalineaments angular i vertical, es pot aconseguir que tots els segments es comportin com un únic mirall.



Figura 6.4 Detall de desalineament angular dels miralls (*tip & tilt*)



Figura 6.5 Detall de desalineament lineal dels miralls (*pistö*)

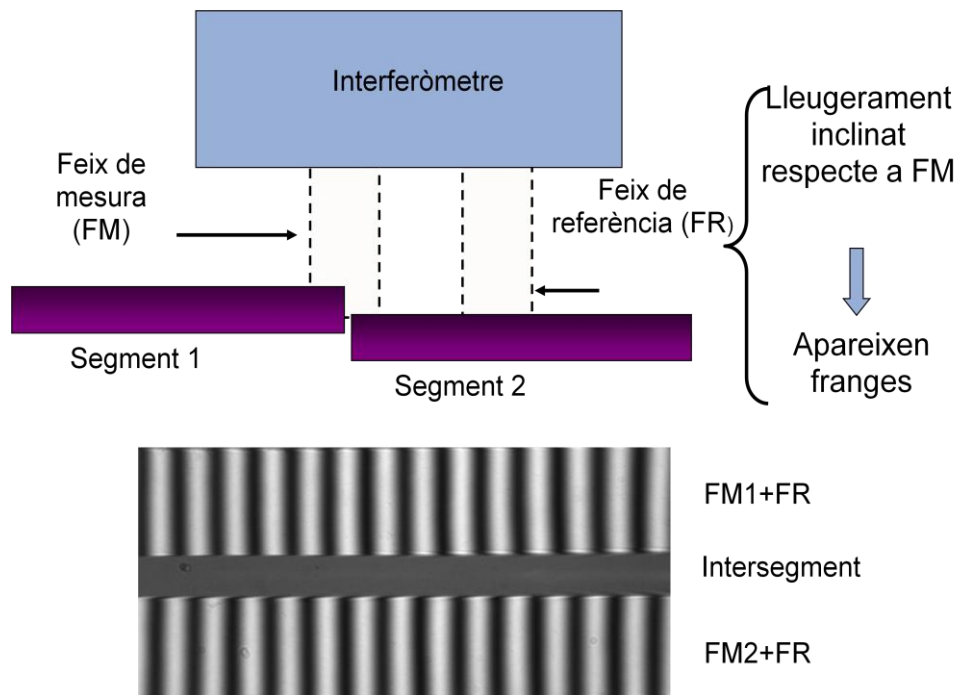


Figura 6.6 Esquema per a l'alineament dels miralls, comparant el posicionament de les franges

Per a l'alineament dels miralls s'utilitza l'interferòmetre. De forma esquemàtica i simplificada, la Figura 6.6 mostra com s'utilitzen dues franges, l'una de referència (FR) i l'altra de mesura (FM). Per ampliar els

detalls respecte al procediment, es pot consultar la tesi doctoral esmentada (Pintó 2002). Per a la comparació del posicionament de les franges, es poden alinear els segments consecutius del mirall.

Interferogrames perfectament monocromàtics

Segments Alineats

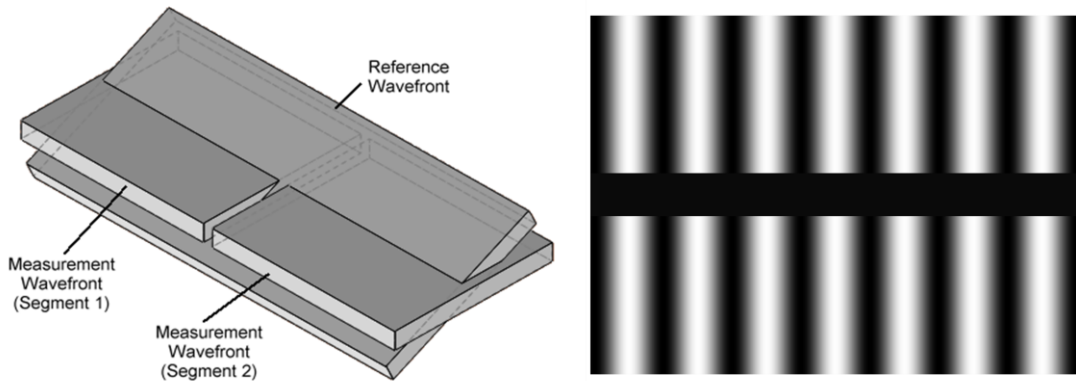
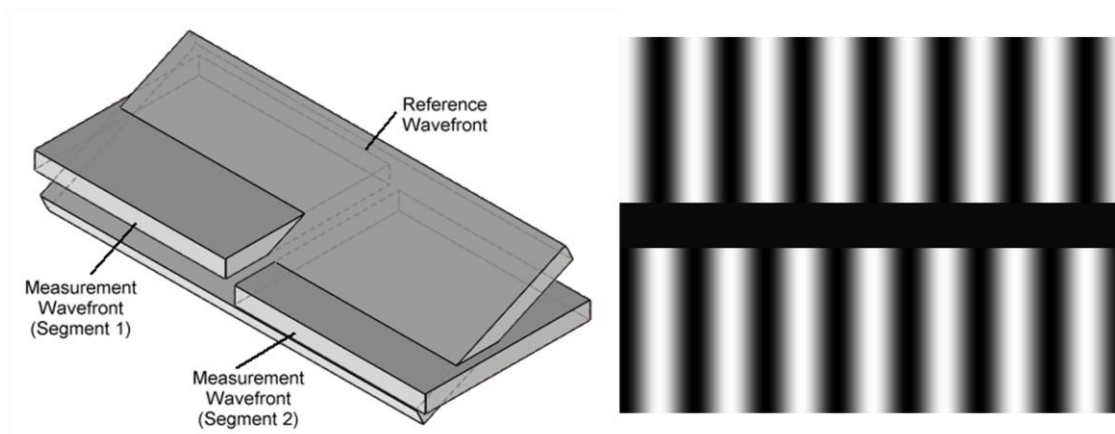


Figura 6.7 Alineament dels miralls, franges alineades

A la Figura 6.7 i a la Figura 6.8 es mostren interferogrames perfectament monocromàtics, que permeten comprovar l'alineament dels segments. A la Figura 6.7 es mostra el cas d'un alineament perfecte, mentre que a la Figura 6.8 s'observa un desalineament degut a un error "de pistó" que s'haurà de corregir amb l'ajuda dels posicionadors a aquest efecte.

Interferogrames perfectament monocromàtics

Error de pistó



Error de pistó: $\lambda/4$

Figura 6.8 Alineament dels miralls, error de pistó

El punt clau per obtenir interferogrames perfectament monocromàtics és que l'interferòmetre que es mostra esquemàticament a la Figura 6.6 estigui en una posició estacionària i estable. En el laboratori aquesta situació es pot garantir fàcilment, però no passa el mateix quan l'interferòmetre s'utilitza en el telescopi real. Tal com es mostra a la Figura 6.9, l'interferòmetre en la posició efectiva real es troba situat a l'extrem d'un braç de longitud D , que pot ser d'uns quants metres ateses les dimensions del mirall primari i que, per tant, pot estar sotmès a pertorbacions.

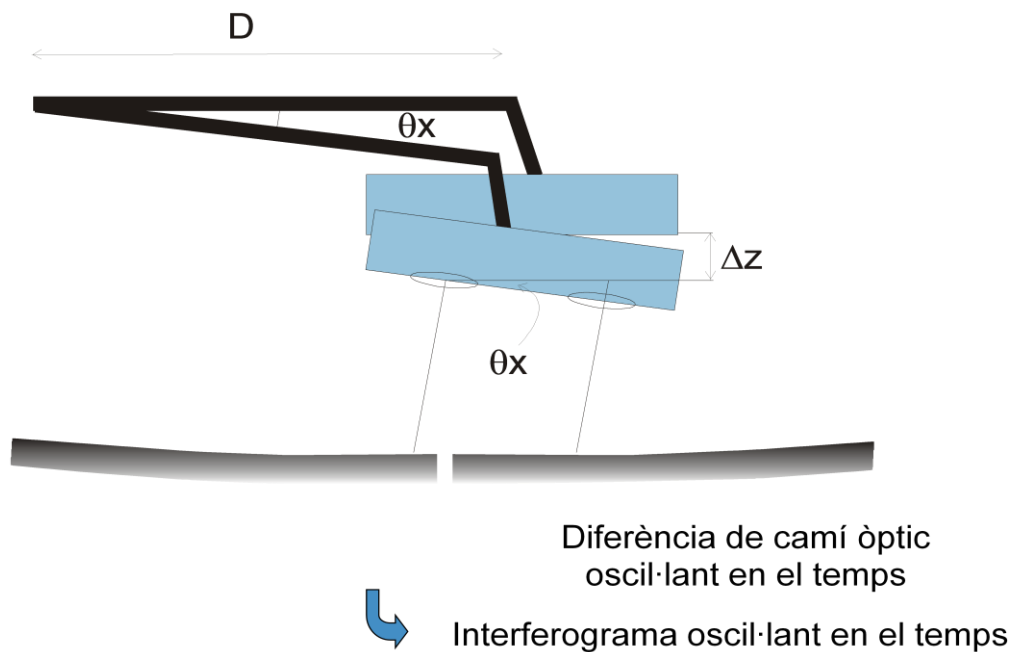


Figura 6.9 L'interferòmetre es troba a l'extrem d'un braç de longitud D : vibra

A la Figura 6.10 es mostren dos efectes sobre les franges de l'interferograma en cas que l'interferòmetre vibri. Aquestes franges poc definides dificultarien el posterior processament de l'imatge. És precisament en l'àmbit de la minimització de l'efecte de les pertorbacions sobre l'interferòmetre que s'ha treballat a la present tesi, tal com es detalla a l'apartat següent.

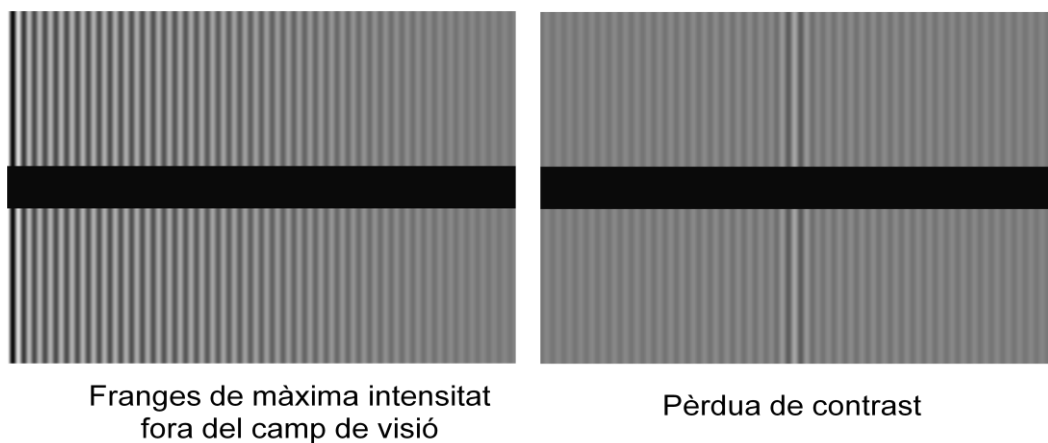


Figura 6.10 Efecte de les vibracions: franges poc definides, cal un control que rebutgi les pertorbacions

6.1.2 Descripció del sistema

El control actiu de les pertorbacions en un interferòmetre es basa en la detecció del moviment de l'interferograma i en la realimentació mitjançant un actuator —en el nostre cas un actuator piezo-elèctric— de la posició d'un mirall de manera que es minimitzi la variació de la diferència de camins òptics provocada per la pertorbació. A la Figura 6.11 es mostra l'aspecte del sistema real de control de l'interferòmetre i a la Figura 6.12 es mostra el diagrama de blocs del sistema de control.

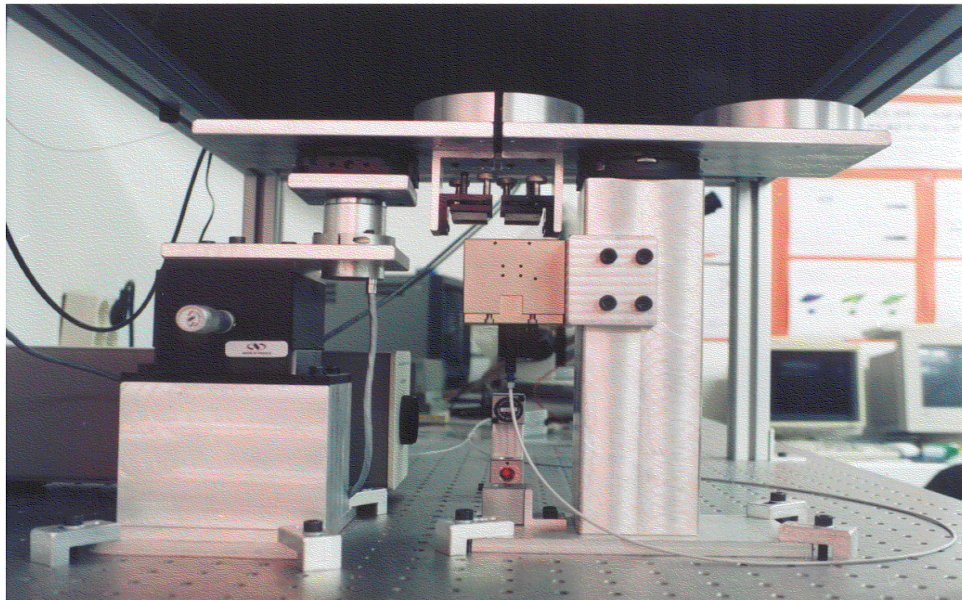


Figura 6.11 Aspecte del sistema real de control de l'interferòmetre

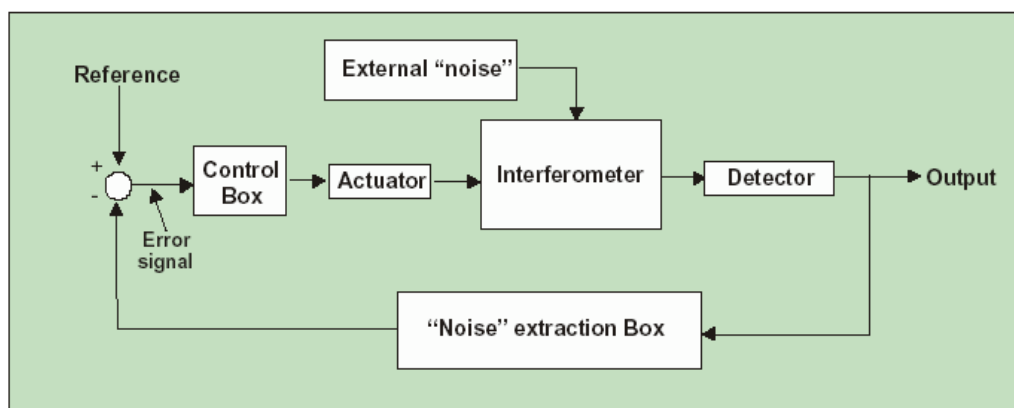


Figura 6.12 Diagrama de blocs del sistema de control actiu de l'interferòmetre

Les pertorbacions a què estarà sotmès el conjunt oscil·len entre 0.5 i 1.4 Hz, i es pretén que en aquest rang de freqüències el control actiu sigui capaç de reduir en 1/50 el moviment de l'interferograma.

L'interferòmetre és de tipus convencional de divisió d'amplitud (del tipus Michelson) amb un mirall de referència intern. La detecció del moviment es fa mitjançant un nou seguidor de franges més flexible que es pot utilitzar amb independència de l'orientació de l'interferograma i del valor de la interfranja (imprescindible en entorns que no siguin de laboratori) i consta d'una càmera CCD i un algoritme software d'extracció de la variable del procés (Pintó, Laguarda and Artigas 2001), (Pintó 2002), que permet seguir el moviment de les franges.

S'utilitza un transductor piezo-elèctric PZT per controlar el camí òptic OPD. L'actuador piezo-elèctric utilitzat és capaç de generar un desplaçament del mirall entre 0-30 μm en ser excitat per un senyal de control que varia de 0 a 10 volts. Aquest tipus d'actuadors presenten un comportament pràcticament estàtic però no lineal, ja que s'aprecia un fenomen important d'histèresi que afecta el control del sistema.

Sobre l'actuador piezo-elèctric actua un controlador proporcional-integral (PI) per eliminar en règim permanent l'efecte de pertorbacions constants. Els paràmetres del PI seran sintonitzats utilitzant la tècnica de control robust QFT.

6.1.2.1 Modelització dels components del sistema

Per dissenyar el controlador robust ens cal disposar d'un model que representi el comportament del sistema, dins del rang de freqüència que interessa. Per a això s'han utilitzat tècniques freqüencials que a la vegada han permès identificar la freqüència del soroll que hi ha en el sistema.

El conjunt d'interferòmetre, càmera lineal i extractor es comporta com un guany pràcticament unitari per al rang de freqüències que interessa. Les possibles dinàmiques o no linealitats les dona l'actuador.

Els experiments per modelitzar l'actuador i identificar les característiques del soroll han consistit en l'excitació del sistema en llaç obert amb diferents senyals sinusoidals amb un rang de freqüència dins de l'interval [0.5, 6] Hz i amplitud dins de [0.5, 10] μm . Degut a les característiques del banc de proves, sols va ser possible utilitzar la tècnica de resposta freqüencial per identificar-ne el seu model de comportament. A la Figura 6.13 es mostra el guany de l'actuador en funció de l'amplitud i la freqüència de la variable de control.

Amb els resultats experimentals s'observa que:

- La fase no presenta grans variacions respecte a l'amplitud-freqüència
- El guany, relació sortida-entrada de l'actuador, presenta poca variació respecte a la freqüència, però sí que s'hi observa una variació respecte a l'amplitud del senyal d'excitació.

L'actuador s'ha modelitzat com un guany no lineal, que serà funció de l'amplitud del senyal d'excitació. S'ha ajustat el model afegint-hi un pol i un zero per tenir en compte la disminució del guany i la fase a les

altes freqüències, dins el rang que interessa. La funció de transferència lineal que representa el comportament del sistema s'aproxima per:

$$P_1(\theta, s) = \frac{k(T_1 s + 1)}{T_2 s + 1} \quad (6.1)$$

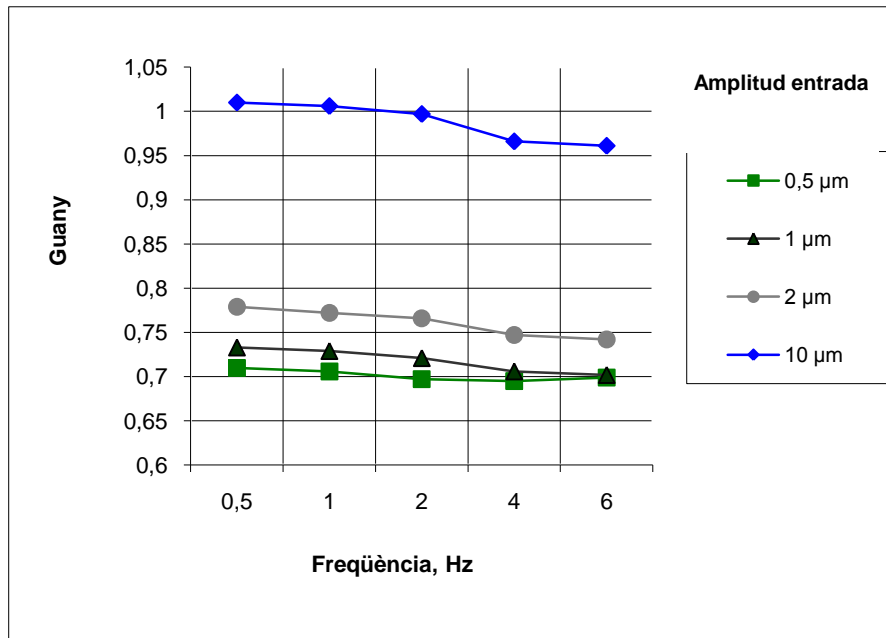


Figura 6.13 Guany de l'actuador en funció de les característiques del senyal d'excitació

L'únic paràmetre que s'ha considerat incert en el model és el guany k , que té incertesa paramètrica: $k \in [0.7, 1.05]$. Els altres dos paràmetres, T_1 i T_2 , tenen un valor determinat per les posicions del zero i del pol del model en llaç obert. S'ha estimat que T_1 i T_2 tenen els valors de $1/8$ i $1/7.5$ s, respectivament. La probable no linealitat i altres incerteses del model real, s'han considerat acceptablement descrites pel model lineal, amb incertesa en el paràmetre k . Si es prenen els dos extrems de l'interval considerat del guany k i es representen freqüencialment, s'obtenen dues línies entre les quals es troben la totalitat dels punts, obtinguts experimentalment, indicats en la Figura 6.13.

6.1.2.2 Caracterització del soroll

El conjunt càmera lineal i sensor software introdueix un soroll en el sistema (Figura 6.14). Les característiques d'aquest soroll s'han avaluat mitjançant un estudi freqüencial. La Figura 6.15 mostra la resposta freqüencial estimada avaluant les sortides del sensor software a les freqüències d'excitació 0.5, 1 i 2 Hz, en què s'observa que a partir de 20 Hz el component soroll és important.

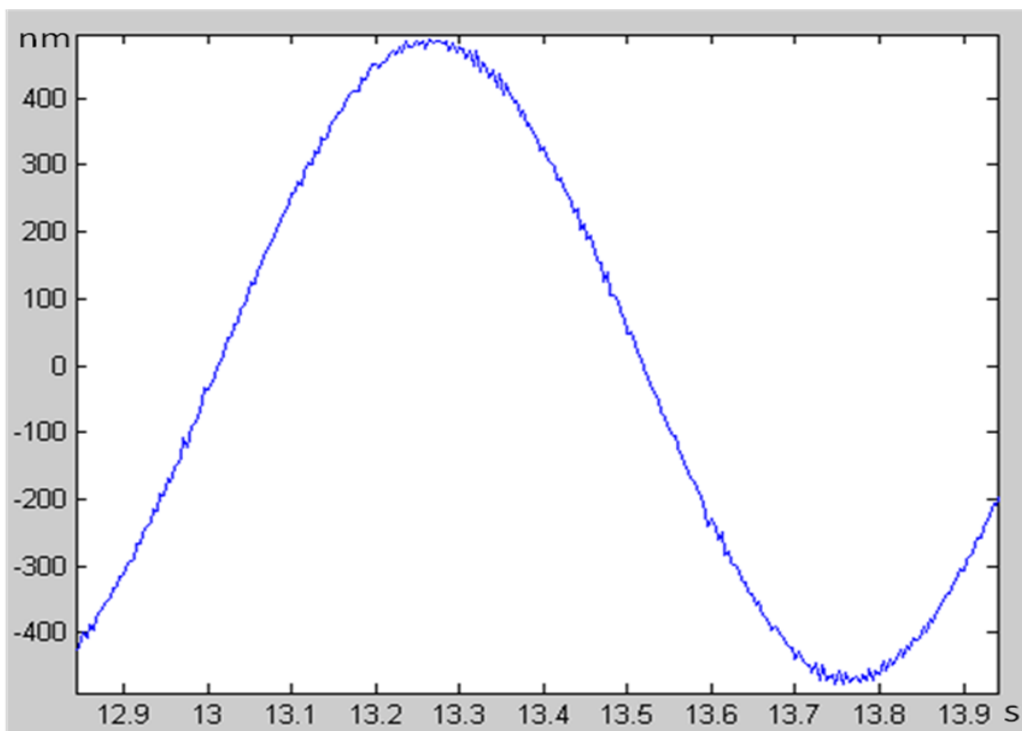


Figura 6.14 Sortida del sensor software

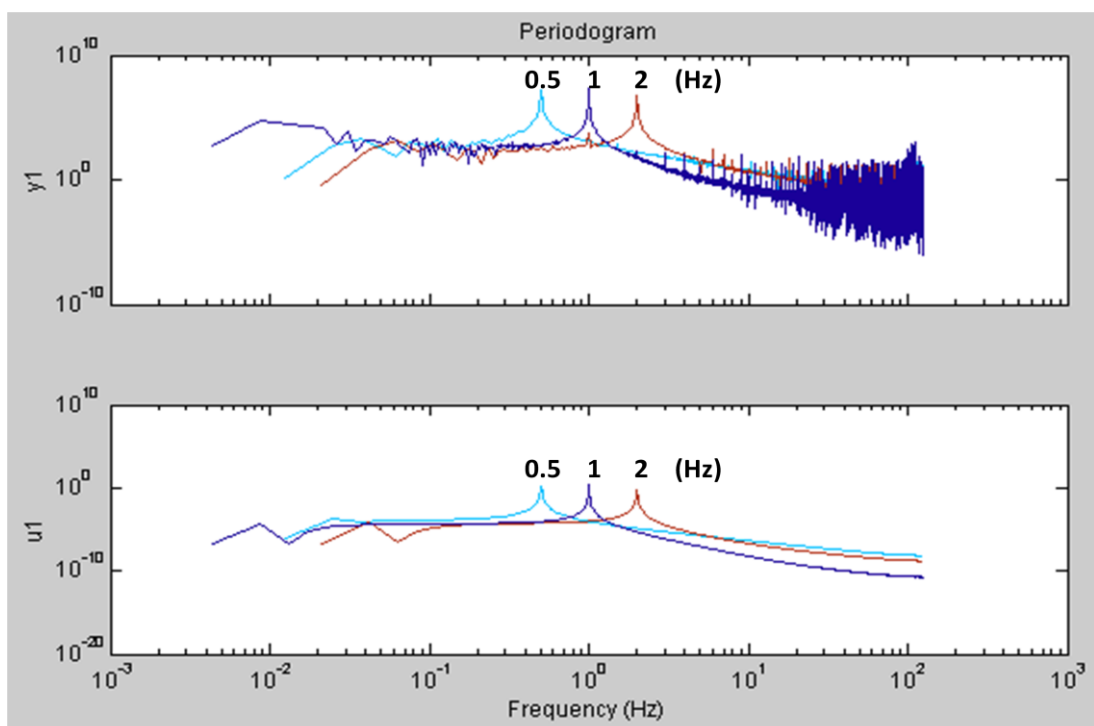


Figura 6.15 Estimació de la resposta freqüencial

6.1.3 Disseny d'un controlador continu per l'aplicació interferomètrica

En l'article de Comasòlivas, Quevedo *et al.* (2005) es presenta el disseny d'un controlador continu en l'aplicació de l'interferòmetre òptic, representat pel model continu (6.1).

En aquest exemple s'utilitza la tècnica exposada en l'Algorisme 4.1 per generar automàticament la regió o l'espai dels paràmetres dels controladors possibles, amb una estructura determinada i simple (PI), basada en la metodologia exposada en l'apartat 4.2. En un treball previ s'havia treballat en un disseny per a un model més simplificat (Comasòlivas, Escobet y Quevedo 2004).

L'objectiu final és cancel·lar les pertorbacions de baixa freqüència en una aplicació interferomètrica per a la posada en fase dels miralls segmentats en un gran telescopi. El control haurà de compensar les vibracions en el sistema de posicionament de l'interferòmetre UPC-ZEBRA (Pizarro, et al. 2002), construït específicament per mesurar la posició dels segments en un gran telescopi segmentat. El propòsit és mesurar la posició relativa del segment localment, per a la qual cosa cal un braç de robot que el posi seqüencialment. Ateses les característiques mecàniques dels sistemes de posicionament actualment disponibles, cal esperar que l'interferòmetre oscil·li respecte al mirall segmentat, la qual cosa dificulta les mesures interferomètriques.

El model lineal de la planta amb què es treballa és el que s'especifica a (6.1), de l'apartat 6.1.2.1.

Estructura del controlador i rang dels paràmetres

Es considera un controlador tipus PI,

$$G(s) = k_p + k_i/s \quad (6.2)$$

on el vector de paràmetres incerts és $k_c = [k_p, k_i]$, amb un conjunt inicial de

$$k_p \in [0, 500], \quad k_i \in [0, 5000] \quad (6.3)$$

Especificacions

Les especificacions del sistema de control robust s'han fixat a partir d'un funcionament desitjat proposat pels tècnics experts del *Centre de Desenvolupament de Sensors, Instrumentació i Sistemes* (CD6), i per les que s'han tingut en compte els límits de l'actuador piezomètric i el rang de les pertorbacions de l'entorn. Els límits superiors de les especificacions (4.8) a (4.10) considerades són les que es mostren a continuació:

- estabilitat robusta: $\delta_1(\omega) = 3dB$

- rebuig de pertorbacions a la sortida del sistema (moviment de l'interferograma): $\delta_s(\omega) = -34dB$

- esforç màxim de control de l'actuador: $\delta_c(\omega) = 14dB$

En tots els casos, $\omega \in [3, 37]$ rad/sec

Disseny

Substituint les expressions de la planta i el controlador i els valors dels límits de les especificacions en el cas que ens ocupa, les especificacions d'estabilitat robusta (4.8), d'atenuació de la pertorbació (4.9) i d'esforç de control (4.10) es poden expressar respectivament de la manera següent:

$$|T(\theta, j\omega)| = \left| \frac{k(T_1\omega j + 1)(k_p\omega j + k_i)}{(-T_2 - kT_1k_p)\omega^2 + kk_i + (1 + kT_1k_i + kk_p)\omega j} \right| \leq 3dB \quad (6.4)$$

$$|T_D(\theta, j\omega)| = \left| \frac{(T_2\omega j + 1)\omega j}{(-T_2 - kT_1k_p)\omega^2 + kk_i + (1 + kT_1k_i + kk_p)\omega j} \right| \leq -34dB \quad (6.5)$$

$$|T_U(\theta, j\omega)| = \left| \frac{(k_p\omega j + k_i)(T_2\omega j + 1)}{(-T_2 - kT_1k_p)\omega^2 + kk_i + (1 + kT_1k_i + kk_p)\omega j} \right| \leq 14dB \quad (6.6)$$

Elevant al quadrat el mòdul i desenvolupant les equacions (6.4) a (6.6) s'arriba respectivament a les expressions següents:

$$\frac{k^2(k_i^2 + k_p^2\omega^2)(\omega^2T_1^2 + 1)}{(T_2^2\omega^4 + 2T_2\omega^4kT_1k_p - 2T_2\omega^2kk_i + k^2T_1^2\omega^4k_p^2 + k^2k_i^2 + \omega^2 + 2kT_1\omega^2k_i + 2k\omega^2k_p + k^2T_1^2\omega^2k_i^2 + k^2k_p^2\omega^2)} \leq 10^{3/10} \quad (6.7)$$

$$\frac{\omega^2(T_2^2\omega^2 + 1)}{(T_2^2\omega^4 + 2T_2\omega^4kT_1k_p - 2T_2\omega^2kk_i + k^2T_1^2\omega^4k_p^2 + k^2k_i^2 + \omega^2 + 2kT_1\omega^2k_i + 2k\omega^2k_p + k^2T_1^2\omega^2k_i^2 + k^2k_p^2\omega^2)} \leq 10^{-34/10} \quad (6.8)$$

$$\frac{(k_i^2 + k_p^2\omega^2)(T_2^2\omega^2 + 1)}{(T_2^2\omega^4 + 2T_2\omega^4kT_1k_p - 2T_2\omega^2kk_i + k^2T_1^2\omega^4k_p^2 + k^2k_i^2 + \omega^2 + 2kT_1\omega^2k_i + 2k\omega^2k_p + k^2T_1^2\omega^2k_i^2 + k^2k_p^2\omega^2)} \leq 10^{14/10} \quad (6.9)$$

A partir de les expressions (6.7) a (6.9), multiplicant pels denominadors i operant, s'arriba a desigualtats polinòmiques del tipus (4.1).

$$k^2(k_i^2 + k_p^2\omega^2)(\omega^2T_1^2 + 1) - 10^{3/10}(T_2^2\omega^4 + 2T_2\omega^4kT_1k_p - 2T_2\omega^2kk_i + k^2T_1^2\omega^4k_p^2 + k^2k_i^2 + \omega^2 + 2kT_1\omega^2k_i + 2k\omega^2k_p + k^2T_1^2\omega^2k_i^2 + k^2k_p^2\omega^2) \leq 0 \quad (6.10)$$

$$\omega^2(T_2^2\omega^2 + 1) - 10^{-34/10}(T_2^2\omega^4 + 2T_2\omega^4kT_1k_p - 2T_2\omega^2kk_i + k^2T_1^2\omega^4k_p^2 + k^2k_i^2 + \omega^2 + 2kT_1\omega^2k_i + 2k\omega^2k_p + k^2T_1^2\omega^2k_i^2 + k^2k_p^2\omega^2) \leq 0 \quad (6.11)$$

$$(k_i^2 + k_p^2\omega^2)(T_2^2\omega^2 + 1) - 10^{14/10}(T_2^2\omega^4 + 2T_2\omega^4kT_1k_p - 2T_2\omega^2kk_i + k^2T_1^2\omega^4k_p^2 + k^2k_i^2 + \omega^2 + 2kT_1\omega^2k_i + 2k\omega^2k_p + k^2T_1^2\omega^2k_i^2 + k^2k_p^2\omega^2) \leq 0 \quad (6.12)$$

Resultats obtinguts

Se cerca el conjunt complementari al que interessa, mitjançant el compliment que el màxim de les tres expressions anteriors ha de ser positiu, segons (4.5).

Aleshores, el conjunt complementari dona la regió admissible dels paràmetres del control k_p i k_i . Utilitzant l'eina *Proj2D* (Jaulin, Braems, et al. 2002), (Dao 2005), la regió cercada és una àrea com la que està marcada en blau a la Figura 6.16. Fora d'aquesta àrea blava, hi ha una regió en groc dins la qual no es garanteix el compliment.



Figura 6.16 Regió admissible dels paràmetres del controlador k_p i k_i en la planta de l'interferòmetre

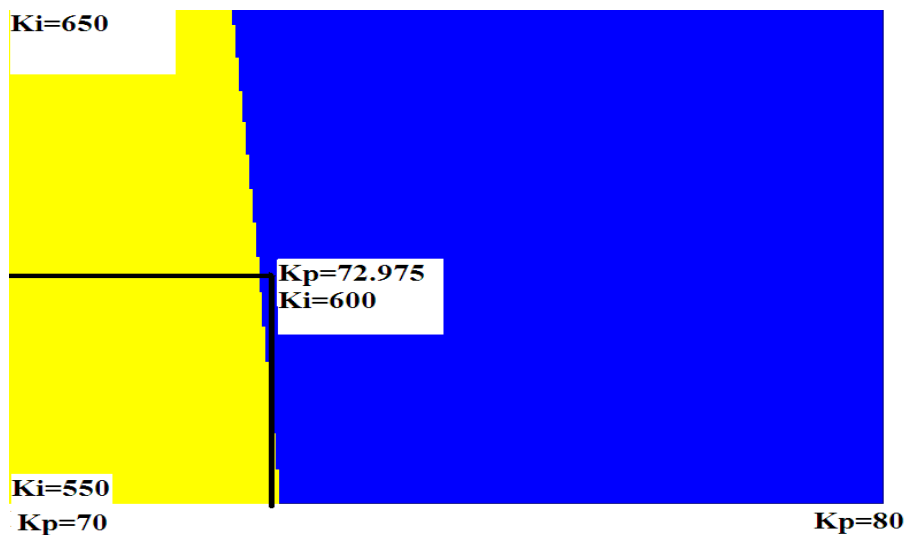


Figura 6.17 Zoom de la regió admissible dels paràmetres del controlador k_p i k_i

A la Figura 6.17 es mostra un *zoom* de la regió admissible de paràmetres del controlador k_p i k_i en la planta de l'interferòmetre. El controlador compleix les especificacions i té paràmetres amb els valors indicats, $k_p = 72.975$ i $k_i = 600$. Per obtenir aquests paràmetres del controlador, s'ha aplicat l'Algorisme 5.1, amb una graella discreta de freqüències $\omega = 2\pi[0.5, 1, 2, 4, 6]$ rad/s (5 valors), i una graella discreta per al paràmetre considerat incert de la planta amb 8 valors: $k = [0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1.0, 1.05]$. S'han obtingut els valors indicats de k_p i k_i en 9 iteracions, fent servir les eines i la metodologia descrites en el Capítol 5, amb l'objectiu final de trobar el controlador òptim. S'han utilitzat, a més, els següents conjunts restringits de rangs per als dos paràmetres del controlador: $k_p \in [40, 80]$ i $k_i \in [600, 1200]$.

Aquesta solució, $k_p = 72.975$ i $k_i = 600$, es verifica en la carta de Nichols, utilitzant el suport de la *Matlab QFT Toolbox* (Borghesani, Chait and Yaniv 1994), i es comprova que totes les especificacions se satisfan (Figura 6.18).

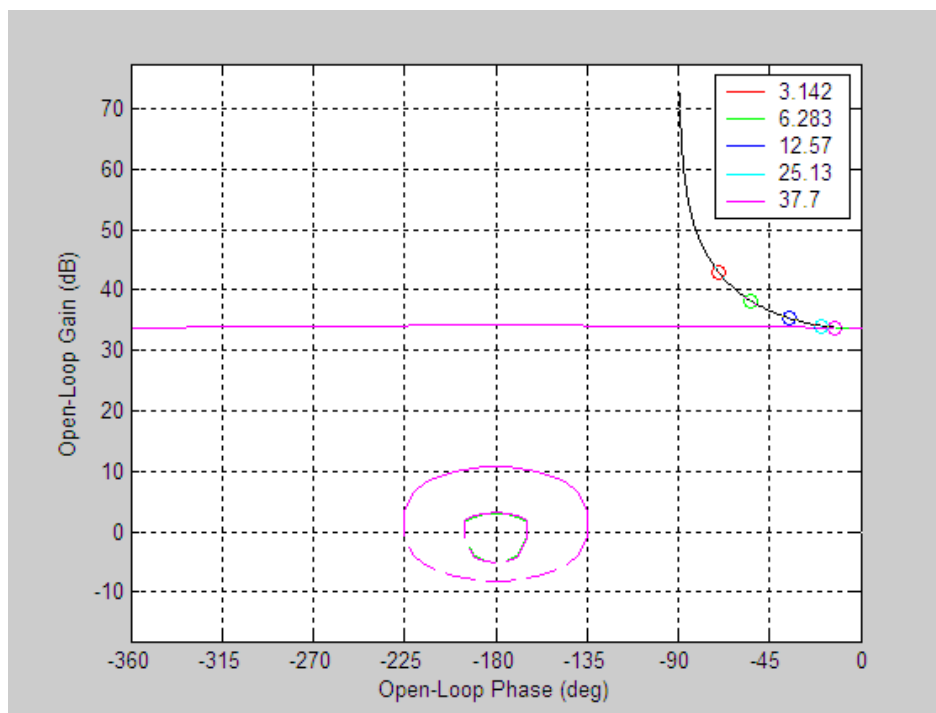


Figura 6.18 Comprovació en la QFT del disseny del control PI

A la pràctica, l'ús de l'eina *Proj2D* en aquesta aplicació ha resultat útil, però ha requerit un gran cost de temps per al còmput, en aquesta ocasió més de 48 hores. Aquest temps es pot disminuir incrementant el paràmetre ϵ , però aleshores la precisió del còmput també disminueix i s'incrementa la zona en groc, dins la qual no queda decidit el compliment d'especificacions.

6.1.4 Aplicació de la QFT al disseny d'un controlador discret per a l'aplicació interferomètrica

Així com a l'apartat anterior, 6.1.3, es dissenyava un controlador continu per al model de planta continu, encara que incert, de l'interferòmetre, ara se cerca un controlador discret per poder-lo implementar digitalment amb un ordinador. Aquesta aproximació es podria considerar més propera al cas real, ja que el control de l'interferòmetre es fa mitjançant un ordinador, i la sortida del procés es mostreja i filtra digitalment. A la pràctica, per tant, es pot treballar amb un model de planta discret i, un cop definides les especificacions de funcionament freqüencials en el rang adequat de freqüències, dissenyar un controlador discret. Cal esmentar que en el procés de disseny d'aquest cas concret no s'ha aplicat el procediment d'automatització proposat al Capítol 5, sinó que s'han utilitzat els procediments clàssics, cercat un

controlador amb el qual es complien totes les especificacions de l'enunciat, per la planta incerta, amb l'ajuda de les funcions de la *QFT toolbox* de *Matlab* (Borghesani, Chait and Yaniv 1994).

Filtre digital

Tal com s'esmenta a l'apartat 6.1.2, s'observa que a partir de 20 Hz el component soroll és important. Per aquest motiu, s'ha dissenyat un filtre digital $FI(z)$, capaç de reduir més de 10 vegades el soroll present a 16 Hz (100 rad/sec). El filtre escollit és de segon ordre amb una pulsació de tall de 5 Hz (31 rad/sec), la funció de transferència discreta del qual és:

$$FI(z) = \frac{0.003622z^2 + 0.07243z + 0.003622}{z^2 - 1.823z + 0.8372} \quad (6.13)$$

amb un període de mostreig $T = 0.004$ s.

Model discret de la planta de l'interferòmetre

El model incert discret de la planta de l'interferòmetre és donat pel conjunt interferòmetre $P_1(\theta, s)$, tractat a l'apartat 6.1.2 anterior, i filtre $FI(z)$, a partir de les respectives equacions (6.1) i (6.13). En la conversió D/A s'utilitza un mantenidor d'ordre zero (ZOH), i el període de mostreig és $T = 0.004$ s. El model discret de l'interferòmetre es pot expressar de la manera següent:

$$P_1(\theta, z) = \frac{k(Az + B)}{z - C}, \text{ amb } \begin{cases} k \in [0.7, 1.05] \\ T_1 = 1/8 \\ T_2 = 1/7.5 \\ A = T_1/T_2 \\ C = e^{-T/T_2} \\ Bp = (1 - A)(1 - C) \\ B = Bp - AC \end{cases} \quad (6.14)$$

El model de planta a considerar, que inclou el conjunt interferòmetre i filtre, serà:

$$P(\theta, z) = P_1(\theta, z)FI(z) \quad (6.15)$$

i es pren realimentació unitària negativa, $H(z) = 1$.

En el cas que s'hagués considerat un model més complex on hagués aparegut la incertesa en més d'un paràmetre, s'operaria de la mateixa manera, però apareixeria el fenomen de la multi-incidència, tractat en l'apartat 2.1.3. L'esmentat fenomen de la multi-incidència mena normalment a un disseny sobredimensionament.

Especificacions en el disseny del controlador discret

Les especificacions bàsiques són les mateixes que s'han emprat per al disseny del controlador continu i els valors numèrics també són els mateixos, però s'hi afegeix una quarta especificació:

- estabilitat robusta $\delta_1(z) = 3dB$

- rebuig de perturbacions a la sortida del sistema (moviment de l'interferograma): $\delta_s(z) = -34dB$

- esforç màxim de control de l'actuador: $\delta_c(z) = 14dB$

I una quarta especificació:

- robustesa en la derivada de l'acció de control:

$$\left| \frac{G(z) \frac{z-1}{Tz}}{1+L(z,k)} \right| < 40dB, \forall k \in [0.7, 1.05] \quad (6.16)$$

on L és la funció de transferència a llaç obert, similar a la que s'havia definit en (2.10), $L(\theta, z) = P(\theta, z)G(z)$, on $P(\theta, z)$ és la planta discreta, que depèn, en general, del vector θ de paràmetres incerts, i que en el cas particular de l'interferòmetre, com s'ha enunciat en (6.1), s'ha pres un únic paràmetre k com a incert.

La darrera especificació és equivalent a pretendre que la derivada de l'acció de control respecte al temps valgui com a màxim 100 V/sec.; en el cas més desfavorable es preveuen perturbacions d'1 V d'amplitud màxima.

Per a les quatre especificacions anteriors, $z = e^{j\omega T}$, $\omega \in [0, 25]$ rad/sec

Procediment de disseny

En aquesta aplicació concreta s'ha utilitzat un vector de freqüències de quatre elements, dins del rang previst de variació, per representar vuit plantes diferents, tot fent variar el paràmetre k dins de l'interval d'incertesa definit, i s'ha obtingut la representació de *templates* que es mostra a la Figura 6.19. Cada *template* a una freqüència determinada és una línia de punts, en què cada punt representa una planta d'entre les infinites possibles. El fet que a cada freqüència totes les plantes estiguin sobre una línia, és un cas particular, atès que en aquesta aplicació el paràmetre incert és el guany i això no modifica la fase.

Procediment particular del disseny: les tres primeres especificacions fan referència a relacions entre senyals del llaç i entrades pertorbació al sistema. En canvi, la quarta especificació fa referència a la relació entre la derivada d'un senyal del llaç i una pertorbació. Per això s'ha separat el disseny en dues fases diferents. A la primera fase es fa el disseny per a la planta incerta, tenint en compte les tres primeres especificacions. En una segona fase es comprova si el disseny fet compleix la quarta especificació. Si no la compleix, s'haurà d'iterar fins a aconseguir que compleixi les quatre especificacions.

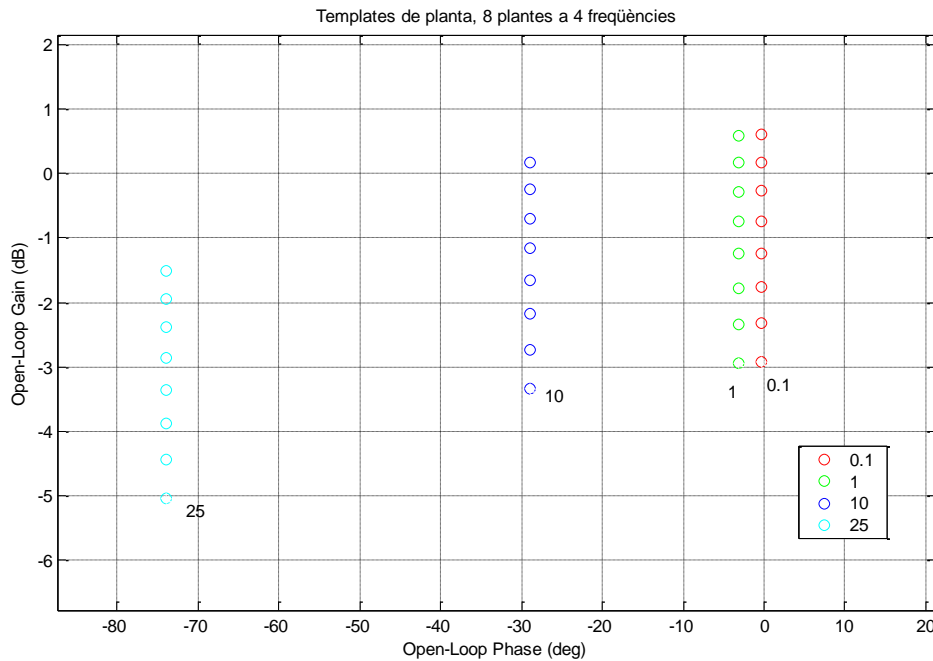


Figura 6.19 Representació dels *templates*

El procés de disseny seguit és de “prova i error”, per la qual cosa en aquest cas no s’han aplicat criteris d’optimització per minimitzar cap índex, i, per tant, en el procés de disseny s’ha tingut en compte el compliment de les especificacions, per obtenir un guany raonablement baix del controlador a baixes freqüències.

Resultats obtinguts i validació

L’estructura del controlador es proposa que sigui simple. Es comprova que amb un PI (controlador Proporcional – Integral) es compleixen bé les especificacions. En la versió discreta, el PI es pot expressar de la manera següent:

$$G(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - 1} \quad (6.17)$$

Així, mitjançant el controlador $G(z)$, podem modificar l’equivalent discret de la funció de transferència en llaç obert, (2.17), en la seva versió discreta $L_0(z) = P_0(z)G(z)$, on $P_0(z)$ és la planta nominal escollida.

Amb l’estructura de PI discret, s’afegeix un guany i un zero, a més del pol a $z=1$ que implica que hi hagi una acció integral del controlador.

A la gràfica de la Figura 6.20 es representen la planta nominal i els *bounds* del sistema en la carta de *Nichols*. S’ha activat l’opció d’entorn interactiu gràfic que permet representar les línies de fase constant i de guany constant a llaç tancat.

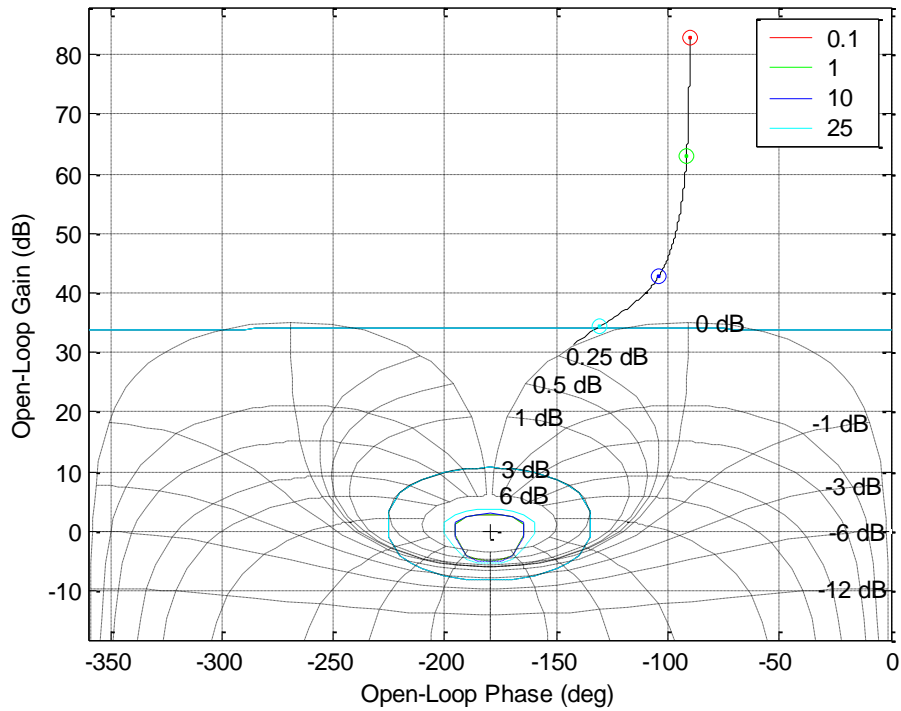


Figura 6.20 Disseny amb la QFT, control PI

Els *bounds* representats corresponen al sistema discret per a les tres primeres especificacions. Per trobar els *bounds* ja s'ha tingut en compte la incertesa en el model, cosa que permet treballar només amb la planta nominal en el moment de dissenyar. Per definir la planta nominal s'ha pres $k = 0.7$. Com que l'especificació més crítica és de rebuig de perturbacions, la planta nominal s'ha dissenyat de forma que cada punt de la planta corresponent a una freqüència donada no quedi per sota del *bound* corresponent a aquesta freqüència, amb la qual cosa s'ha obtingut una possible síntesi de controlador: $\alpha = 61.43$; $\beta = 52.83$.

Substituint els valors numèrics trobats de α i β en l'expressió (6.17), s'arriba al següent controlador discret:

$$G(z) = \frac{61.43(z - 0.86)}{z - 1} = \frac{61.43z - 52.83}{z - 1} \quad (6.18)$$

Amb el controlador dissenyat per a aquestes tres especificacions s'ha comprovat que es compleix la quarta especificació. Aquesta comprovació s'ha fet també amb el suport de la *QFT toolbox* de *Matlab* (Borghesani, Chait and Yaniv 1994), però amb les modificacions adients per poder-la utilitzar, ja que no es preveu treballar directament amb aquest tipus d'especificació.

En la **simulació**, en la carta de Nichols, Figura 6.20, s'hi comprova el compliment de les tres primeres especificacions del disseny. Encara que sigui redundant, s'ha representat a la Figura 6.21 el diagrama de

Bode de la relació entre la sortida $Y(z)$ i la pertorbació $D(z)$, $T_D(z) = \frac{Y(z)}{D(z)}$, amb $z = e^{j\omega T}$, que, segons

la informació donada a la Figura 6.20, és l'especificació de compliment més crític, i es comprova que les pertorbacions són rebutjades segons el que s'ha previst, tant per a les altes com per a les baixes freqüències, dins de l'interval de freqüències fixat.

A la Figura 6.21 s'han representat en vermell fins a un total de vuit plantes possibles, a més de l'especificació, en verd.

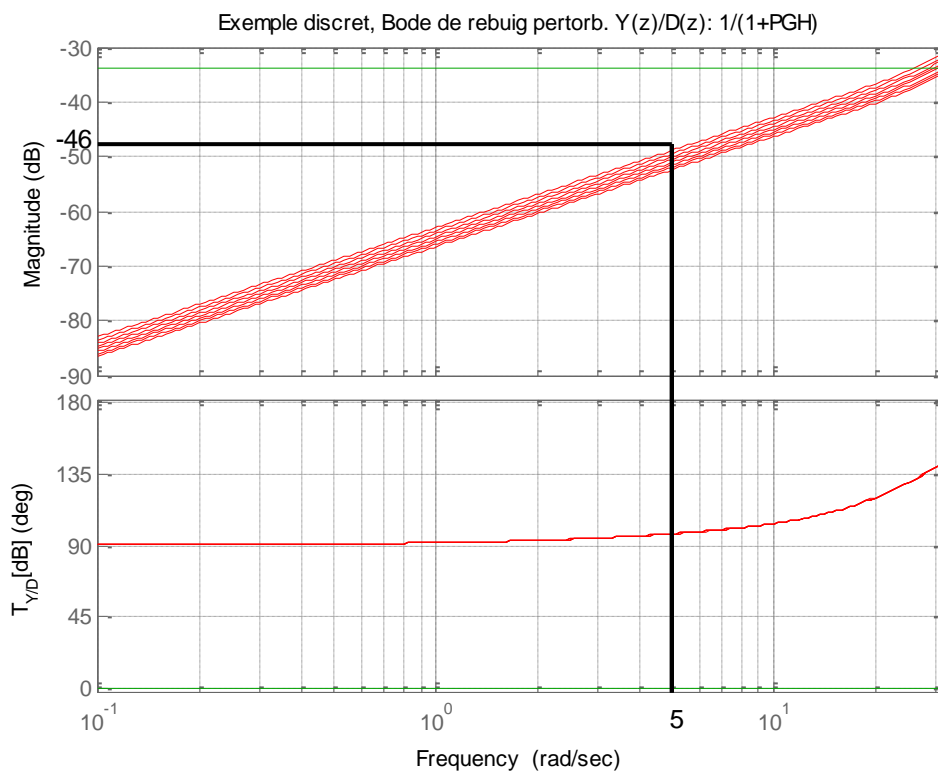


Figura 6.21 Diagrama de Bode Y/D amb control PI

Resultats experimentals: a l'interferòmetre real (Arasa, et al. 2000), (Pizarro, et al. 2002) s'ha implementat el sistema de control actiu de les pertorbacions mecàniques. A la Figura 6.11 es mostrava l'aspecte dels equips. Amb l'objecte de validar el control dissenyat, s'hi han aplicat diferents pertorbacions sinusoidals inferiors a 1.5 Hz (9.4 rad/s) i d'una amplitud de 3 000 nm.

La Figura 6.22 presenta el resultat de l'atenuació assolida en aplicar experimentalment una pertorbació sinusoidal de 5 rad/seg. A la figura es compara l'escenari del muntatge de llaç obert amb el de llaç tancat amb el controlador dissenyat. S'aprecia que el valor de l'amplitud de la sortida del sistema a llaç tancat i controlat és aproximadament de 15 nm, i que, per tant, s'assoleix una atenuació d'un factor 1/200, és a dir, d'uns -46 dB.

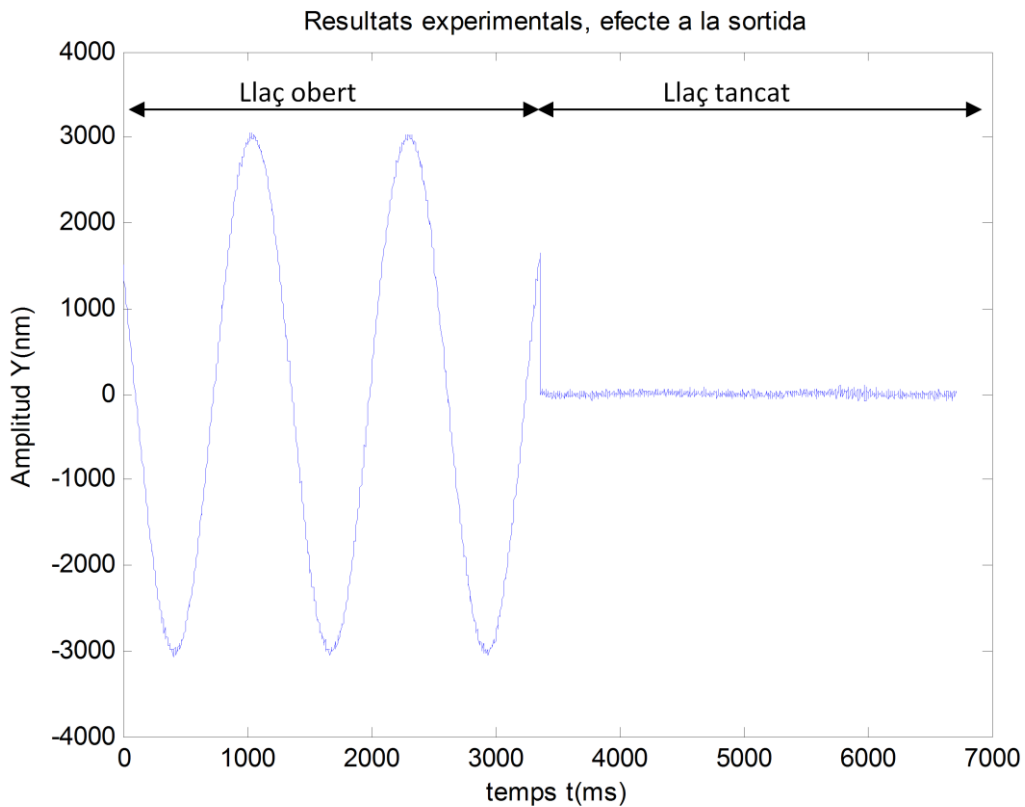


Figura 6.22 Resultats experimentals del control QFT de l'interferòmetre

Si es comparen aquests resultats amb els obtinguts per disseny, el resultat és molt similar, -46 dB experimentalment respecte a uns -48 dB, en el cas més desfavorable, en la simulació. Resultats semblants s'han obtingut per a pertorbacions en altres freqüències dins del rang especificat, per la qual cosa es valida indirectament el model seleccionat del sistema i la tècnica de disseny de control robust QFT utilitzada, i es justifica l'interès per a la recerca automàtica i òptima dels paràmetres del controlador.

6.2 Aplicació a un model d'helicòpter de laboratori

En aquest apartat es proposa aplicar el mètode per al disseny automàtic de controladors robustos *Quantitative Feedback Theory* (QFT) – *QFT automatic loop shaping* – basat en el criteri de minimització energètica de l'esforç de control presentat en capítols anteriors. S'hi inclou un exemple d'aplicació del mètode proposat per al model de l'angle de *capcineig* (castellà: *cabeceo*, anglès: *pitch*) (SLT 2009) d'un helicòpter de laboratori, amb incertesa estructurada, model que ha estat proposat com a *benchmark* de disseny de sistemes de control, publicat en *RIAI* (García-Sanz, Elso y Egaña 2006). El model d'aquest *benchmark* es va ampliar posteriorment en la mateixa *RIAI* (García-Sanz and Elso 2007).

Pel que fa a l'aplicació, es tracta del model d'un helicòpter de dos rotors paral·lels a escala de laboratori dissenyat per *Quanser Consulting* (2009). Aquest mateix cas s'havia proposat anteriorment en diverses ocasions com a exemple a estudiants de l'assignatura Control Automàtic a la Universidad Pública de Navarra. En l'article esmentat es descriuen amb més detall les característiques de l'helicòpter, així com les equacions de la física del model que permetien arribar a un model lineal invariant en el temps (LTI) de l'angle de *capcineig* mitjançant un procés previ de linealitzacions i simplificacions adequades, i finalment es facilitava un model LTI de segon ordre amb incertesa paramètrica i estructurada, obtingut a partir de dades experimentals. En alguns articles anteriors (Egaña, et al. 2001), (García-Sanz, Egaña and Castillejo, et al. 2002), ja s'havia presentat la maqueta de l'helicòpter, amb els tres graus de llibertat que són els angles de *balanceig* (castellà: *alabeo*, *balanceo*, anglès: *roll*), de *capcineig* i de *guinyada* (castellà: *guiñada*, anglès: *yaw*) (SLT 2009), complementat amb el treball efectuat pels estudiants per fer-ne el control.

En un primer cas, centrem l'interès en l'aspecte de proposar una automatització en el disseny del controlador (*loop-shaping*), feta sobre la base del criteri de minimitzar l'energia de l'esforç de control, utilitzant llibreries d'optimització. La tècnica proposada s'aplica al disseny d'un controlador *feedback* en el model descrit de l'angle de *capcineig*.

El segon cas és una modificació del primer cas. Es planteja amb el mateix model i amb gairebé les mateixes especificacions freqüencials del cas anterior, però incrementant els graus de llibertat dels paràmetres del controlador.

6.2.1 Descripció del *benchmark*

El sistema que s'ha de controlar és l'helicòpter (Quanser 2009), maqueta de laboratori de dos rotors paral·lels. L'aspecte general es mostra a la Figura 6.23. L'helicòpter té tres graus de llibertat, mesurats mitjançant tres *encoders* absoluts. L'helicòpter es governa des d'un ordinador mitjançant una targeta d'adquisició de dades i amb l'aplicació *Real Time Workshop* de *Matlab*, capaç de llegir les dades dels sensors i transmetre ordres als actuadors de planta des d'un entorn *Simulink*(Mathworks 2007).



Figura 6.23 Aspecte general de l'helicòpter 3 DOF de Quanser

Els actuadors són dos motors elèctrics de corrent continu, acoblats a cada costat de l'eix longitudinal i que accionen les dues hèlixs de l'helicòpter, amb una força proporcional a la tensió d'entrada. Les hèlixs i els motors formen el cos del sistema, unit mitjançant una barra a un punt fix al voltant del qual es permet el gir. A més, es disposa d'un contrapès per evitar un esforç excessiu dels motors. Partim del model del *benchmark* ampliat de l'helicòpter (2n ordre), sense tenir en compte el retard, model proposat per García-Sanz i Elso (2007).

6.2.1.1 Equacions físiques del model de l'angle de capcineig

El prototipus bascula respecte a l'eix perpendicular al pla de la Figura 6.24, segons l'angle α .

Les dues hèlixs, accionades per sengles motors elèctrics, actuen sobre el sistema mitjançant les forces F_1 i F_2 . Com a sortida del sistema, es pren l'angle de capcineig α . El model matemàtic resultant d'un estudi de la dinàmica del sistema és el següent:

$$(F_1 + F_2)l_1 - m \cdot g \cdot [(h + d) \cdot \sin \alpha + l_1 \cdot \cos \alpha] + M \cdot g \cdot (l_2 + l_3 \cdot \cos \theta) \cdot \cos \alpha + M \cdot g \cdot (l_3 \cdot \sin \theta - h) \cdot \sin \alpha - b_e \cdot \alpha' = J_e \cdot \alpha'' \quad (6.19)$$

On h , d , l_1 , l_2 , l_3 són longituds de braços; m és la suma de la massa dels dos motors, i M la massa del contrapès; b_e és el fregadís dinàmic del capcineig; g és l'acceleració de la gravetat, i θ un angle fix de construcció.

Per obtenir una funció de transferència lineal explícita, es linealitza l'expressió (6.19) al voltant de l'angle de capcineig $\alpha = 0$,

$$(F_1 + F_2)l_1 = J_e \cdot \alpha'' + b_e \cdot \alpha' + \alpha \cdot [m \cdot g \cdot (h + d) + M \cdot g \cdot (h - l_3 \cdot \sin \theta)] \quad (6.20)$$

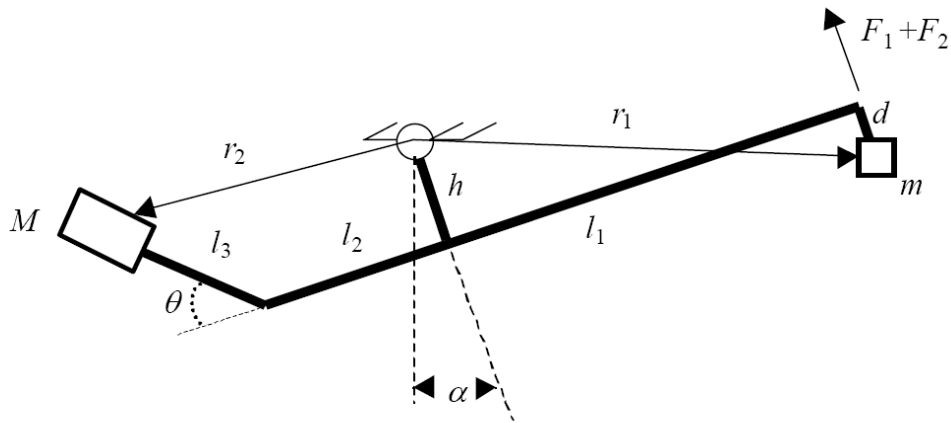


Figura 6.24 Angle α de capcineig de l'helicòpter

A partir de l'equació (6.20) es dedueix la funció de transferència que relaciona en el domini de Laplace l'angle de sortida α amb la suma de les forces, $F_{suma} = F_1 + F_2$,

$$\frac{\alpha(s)}{F_{suma}(s)} = \frac{\frac{l_1}{J_e}}{s^2 + \frac{b_e}{J_e} \cdot s + \frac{m \cdot g \cdot (h+d) + M \cdot g \cdot (h - l_3 \cdot \sin \theta)}{J_e}} \quad (6.21)$$

Sabent que la suma de les forces fetes per les dues hèlixs és proporcional a la tensió elèctrica v aplicada als motors, a través de la constant k_m , es dedueix l'equació següent:

$$\frac{\alpha(s)}{v(s)} = \frac{k_m \cdot l_1}{J_e \cdot s^2 + b_e \cdot s + [m \cdot g \cdot (h+d) + M \cdot g \cdot (h - l_3 \cdot \sin \theta)]} \quad (6.22)$$

que és la funció de transferència que relaciona l'angle de capcineig $\alpha(s)$, en radians, amb la tensió aplicada $v(s)$, en volts, que és de segon ordre i que es pot generalitzar de la manera següent:

$$\frac{\alpha(s)}{v(s)} = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.23)$$

6.2.1.2 Model experimental de l'angle α de capcineig

A partir de les dades experimentals en llaç obert i amb tècniques d'identificació adients, els autors García-Sanz i Elso (2007) estimen els paràmetres del model lineal, en què s'ha tingut en compte la incertesa paramètrica. Per considerar altres aspectes, referents sobretot a no linealitats, en l'ampliació del model del *benchmark* es considera un cert retard temporal que ajudaria a interpretar una caiguda de fase en el diagrama de Bode i que explicaria una facilitat més gran a la inestabilitat quan es tanca el llaç. Malgrat aquesta observació, el model amb què es treballa és l'experimental de 2n ordre donat pel *benchmark*, però sense tenir en compte el retard, és a dir, que és un model amb una estructura similar a la donada per

l'anterior equació (6.23). A l'equació (6.24) s'indica el model adoptat, així com la variació intervalar dels paràmetres del model:

$$P(\theta, s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \begin{cases} k \in [0.07, 0.12] \\ \zeta \in [0.1, 0.16] \\ \omega_n \in [0.55, 0.60] \end{cases} \quad (6.24)$$

Cal observar que el model $P(\theta, s)$ utilitzat per al disseny és conservatiu, ja que els tres paràmetres incerts considerats s'han obtingut de paràmetres físics en què hi pot haver multiincidència: un mateix paràmetre físic pot afectar a més d'un paràmetre del model $P(\theta, s)$, com es pot comprovar per simple observació, per exemple, de les equacions (6.21) i (6.22). Amb el model $P(\theta, s)$ conservatiu considerat, el disseny estarà sobredimensionat i, per tant, les especificacions es compliran amb escreix en el model real.

Així mateix, cal destacar també que la proposta feta a la tesi no es limita al cas conservatiu, ja que s'hi poden introduir noves restriccions per abordar el cas de paràmetres multiincidents.

6.2.2 Formulació d'un primer cas d'estudi: cas 1

6.2.2.1 Objectius de disseny

En el primer cas es planteja com a objectiu dissenyar un controlador que tingui una estructura senzilla predeterminada que permeti fer un seguiment "raonable" d'una consigna de referència donada a la gràfica de la Figura 6.25 i que rebutgi acceptablement una pertorbació a l'entrada de la planta donada també gràficament segons mostra la Figura 6.26. El diagrama de blocs del sistema controlat s'indica a la Figura 6.27.

Com a controlador, se n'escull un amb estructura senzilla de PID amb filtre en el derivador (PIDf), l'estructura del qual es pot expressar mitjançant la següent funció de transferència:

$$G(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_f s + 1} \right) \quad (6.25)$$

Els paràmetres del controlador són k_p , T_i , T_d , T_f . Per facilitar una visualització posterior dels resultats en 3D, es proposa fer l'ajust automàtic dels paràmetres k_p i T_i , mantenint les relacions següents:

$$T_d = T_i / 4; T_f = 0.1 * T_d \quad (6.26)$$

D'altra banda, es pren un ampli ventall de variació per als paràmetres:

$$k_p \in [10, 300], T_i \in [1, 20], T_d \in [0.25, 5], T_f \in [0.025, 0.5] \quad (6.27)$$

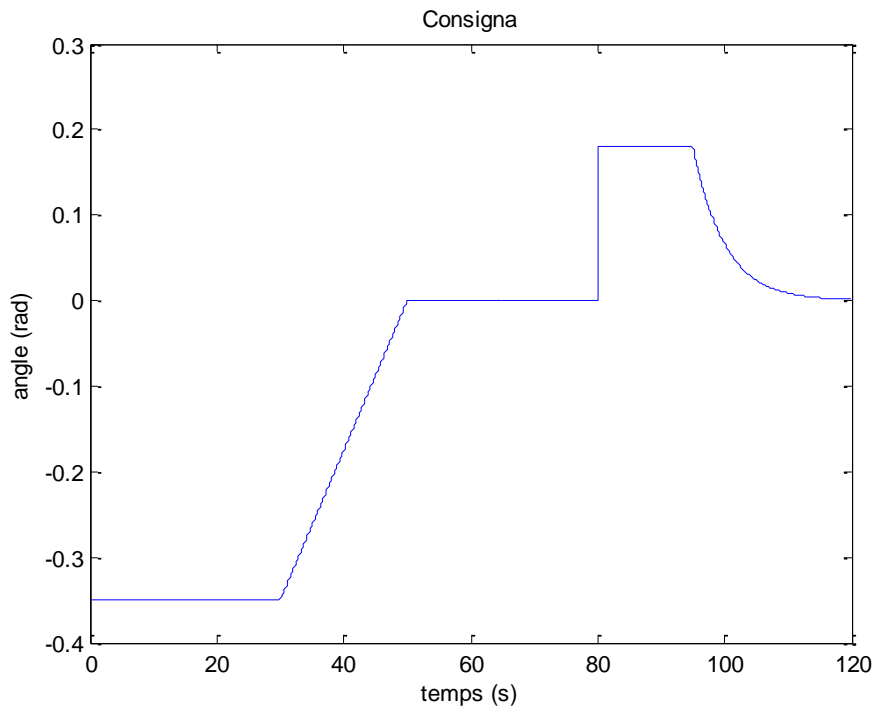


Figura 6.25 Consigna que s'ha de seguir

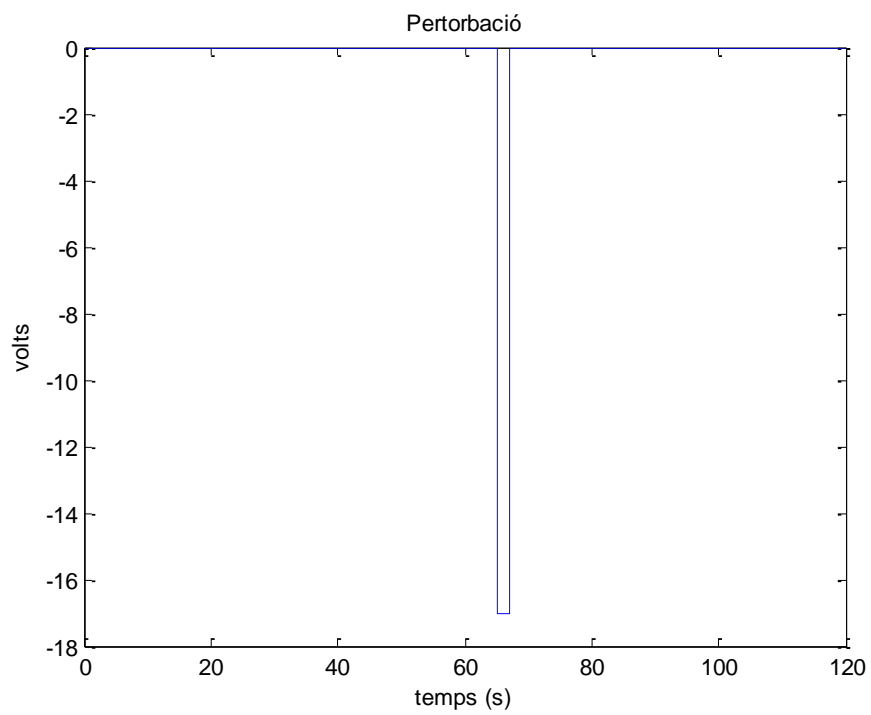


Figura 6.26 Pertorbació d que cal rebutjar

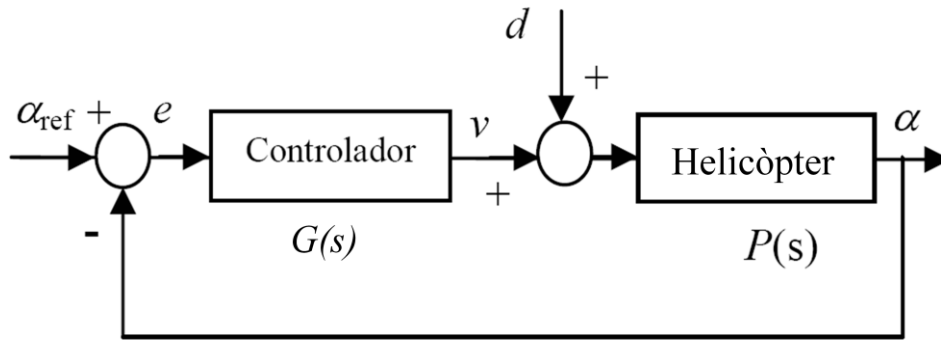


Figura 6.27 Diagrama de blocs del sistema de control de l'helicòpter

6.2.2.2 Especificacions freqüencials escollides

Tot i que es validarà el comportament des del punt de vista temporal, es farà un disseny fixant unes especificacions freqüencials. Les especificacions freqüencials escollides fan referència a l'estabilitat robusta del sistema realimentat, a la sensibilitat i a l'esforç de control.

- Pel que fa a l'estabilitat robusta, s'escull la condició que, en tot el rang freqüencial de treball, el quocient entre sortida i entrada consigna tingui una relació de mòduls inferior a 2:

$$\left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \right| \leq \delta_1(\omega) = 2 \quad (6.28)$$

- L'especificació de sensibilitat s'obté per prova i error i s'escull de forma que la relació entre la sortida i la pertorbació tingui un guany petit en el rang baix de freqüències de treball. La relació analítica es pot expressar mitjançant la següent equació (6.29). Es representa en el domini freqüencial més endavant, a la Figura 6.29, quan es comprova el compliment d'especificacions.

$$\left| \frac{Y(j\omega)}{D(j\omega)} \right| \leq \delta_s(\omega) = \frac{2(j\omega + 0.01)(j\omega + 0.3)}{((j\omega)^2 + 4j\omega + 4)} \quad (6.29)$$

- L'especificació d'esforç de control s'escull de forma que s'admet en tot el rang de freqüències de treball un valor de relació entre mòduls de l'acció de control respecte a un senyal a l'entrada del controlador, de valor constant:

$$\left| \frac{U(j\omega)}{W(j\omega)} \right| \leq \delta_c(\omega) = 5000 \quad (6.30)$$

El rang de freqüències de treball escollit en tots els casos és de $\omega \in [0.1, 100] \text{ rad/sec}$

6.2.2.3 Resultats obtinguts i validació

Per a la planta incerta $P(\theta, s)$ indicada en (6.24), amb l'estructura clàssica de control *feedback* de la Figura 2.2, amb les especificacions (6.28) a (6.30), amb els valors dels paràmetres del controlador dins els rangs indicats en (6.27), amb les dependències entre els paràmetres indicades a (6.26), i sempre amb l'estructura

de controlador predefinida, expressada a (6.25), s'aplica l'algorisme de disseny automàtic (Algorisme 5.1) indicat al Capítol 5. En la discretització necessària prèvia a l'aplicació de l'algorisme, per facilitar-ne el còmput s'han pres només els dos valors extrems per cada paràmetre del model $P(\theta,s)$, així com les 7 freqüències indicades: $\omega = [0.1 \ 1 \ 2.5 \ 5 \ 10 \ 50 \ 100]$ rad/sec.

Els resultats obtinguts amb *Tomlab* (estructura PIDf), aplicant l'algorisme proposat, són els següents:

$$k_p = 222.22; \quad T_i = 2.37; \quad (6.31)$$

Consegüentment, segons (6.26):

$$T_d = 0.592; \quad T_f = 0.0592; \quad (6.32)$$

L'ideal seria prendre una granularitat més fina, com més fina millor, per als paràmetres del model. I així s'ha fet: també s'ha assajat l'algorisme amb altres granularitats diferents de la indicada, per als paràmetres del model. Els resultats no són diferents de manera rellevant, però, en canvi, s'incrementa enormement el temps de còmput. Com passa sovint, s'han acabat acceptant simplificacions raonables de la complexitat del problema, en benefici de resultats coherents, amb un cost de còmput adient.

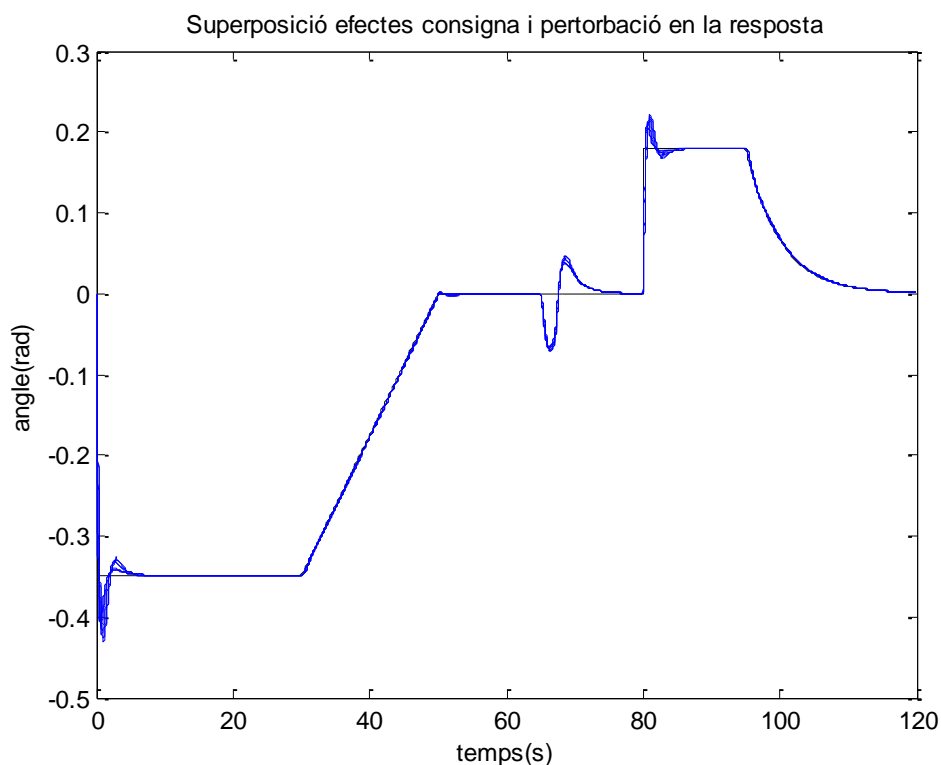


Figura 6.28 Resposta en llaç tancat de 8 plantes amb PIDf, cas 1, amb pertorbació

Com a primera comprovació, s'observa que els valors obtinguts (6.31) i (6.32) estan dins els rangs previstos per (6.27).

En segon lloc, en el domini temporal, es comprova el comportament temporal en llaç tancat per a una família de 8 plantes, i es representa a la Figura 6.28. La consigna i la pertorbació són les que es defineixen en el *benchmark*, que abans havien estat establertes gràficament a la Figura 6.25 i a la Figura 6.26, respectivament.

A la Figura 6.29 es representa el diagrama de Bode de la magnitud de la funció sensitivitat. Hi ha representades 8 plantes i també la línia de l'especificació de sensitivitat, que és la línia superior, de color verd. Gràficament es comprova que es compleix l'especificació en tot el rang de freqüències fixat. Les 8 plantes representades són les 8 possibles permutacions prenent els extrems d'interval de cada paràmetre.

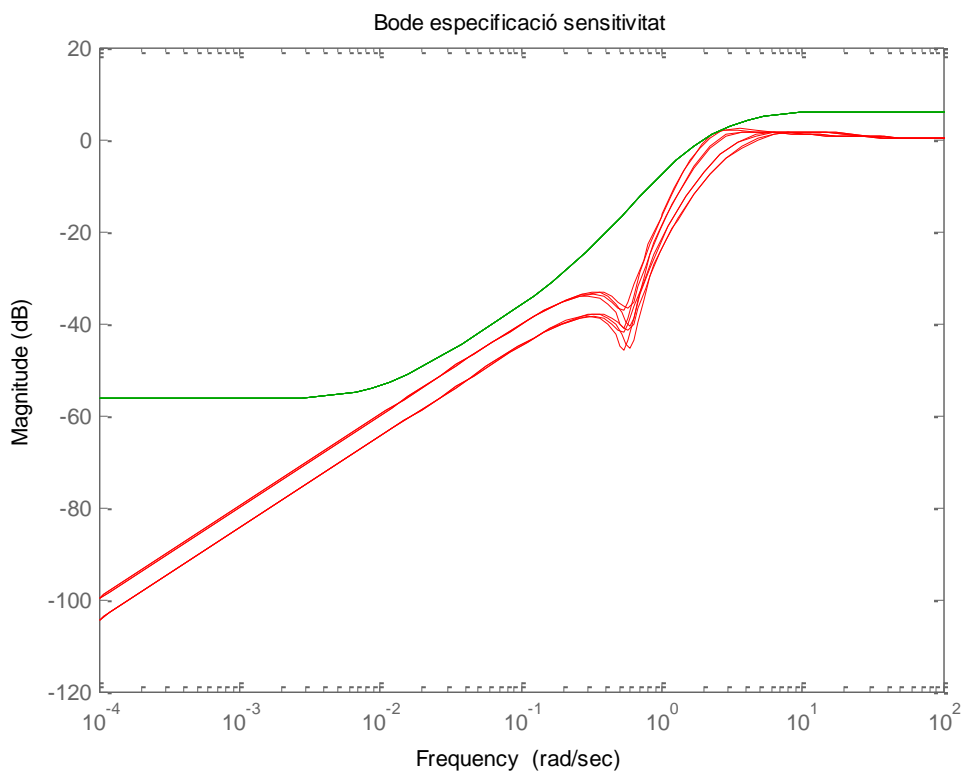


Figura 6.29 Diagrama de Bode, guany de la funció sensitivitat, llaç tancat de 8 plantes amb PIDf, cas 1

D'altra banda, a la Figura 6.30 es representa en un diagrama de Nichols la gràfica del *loop-shaping*, en què també s'han inclòs les altres dues especificacions, i en què es comprova el compliment de totes les especificacions en les freqüències escollides. Per comprendre millor el gràfic, el lector es pot adreçar al Capítol 2, en què s'expliquen els principis de la QFT. Resumidament, els *bounds* representats en cada freqüència són la intersecció de les diverses especificacions (totes compatibles entre si) a cada freqüència concreta. La representació de la planta nominal es fa mitjançant un punt "o" a cada una de les freqüències escollides, que s'uneixen mitjançant trams rectes. Tal com ja s'anunciava en el capítol de la QFT, es comprova el compliment d'especificacions a les freqüències escollides, ja que cada punt "o" de la planta

nominal està a cada freqüència per fora del *bound* tancat corresponent, per sobre del *bound* continu corresponent o per sota del *bound* discontinu corresponent.

Com a índex per minimitzar s'ha pres l'indicat en l'Algorisme 5.1 del Capítol 5 d'aquesta tesi; el valor mínim d'aquest índex que dóna l'optimitzador és $2.5358e + 007$.

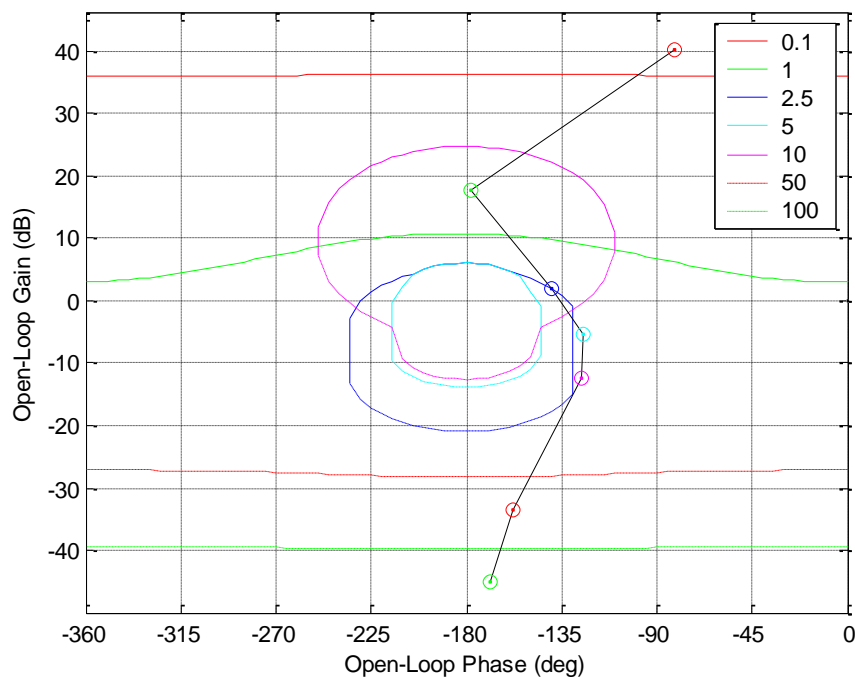


Figura 6.30 Diagrama de Nichols: *loop-shaping*, que inclou les tres especificacions, amb el controlador de disseny, cas 1

6.2.2.4 Comprovacions addicionals

Per observar la forma de la funció dins del rang dels paràmetres, es representa la funció que s'ha de minimitzar en funció de dos dels paràmetres, k_p i T_i , en els intervals indicats: $k_p \in [100, 300]$, $T_i \in [1, 20]$. L'òptim queda dins d'aquests intervals. Els valors de T_d i T_f són funció dels paràmetres k_p i T_i . La funció es representa a la Figura 6.31, prenent una graella de 101 x 101 punts, i no s'hi han afegit les restriccions donades per les especificacions.

Seguidament es comprova el compliment de cadascuna de les tres especificacions en el mateix rang de paràmetres, de forma que es generen les tres figures següents (Figura 6.32, Figura 6.33 i Figura 6.34). A cada figura s'indica com a valor 1 la zona de compliment d'especificació, mentre que es manté el valor 0 on no es compleix.

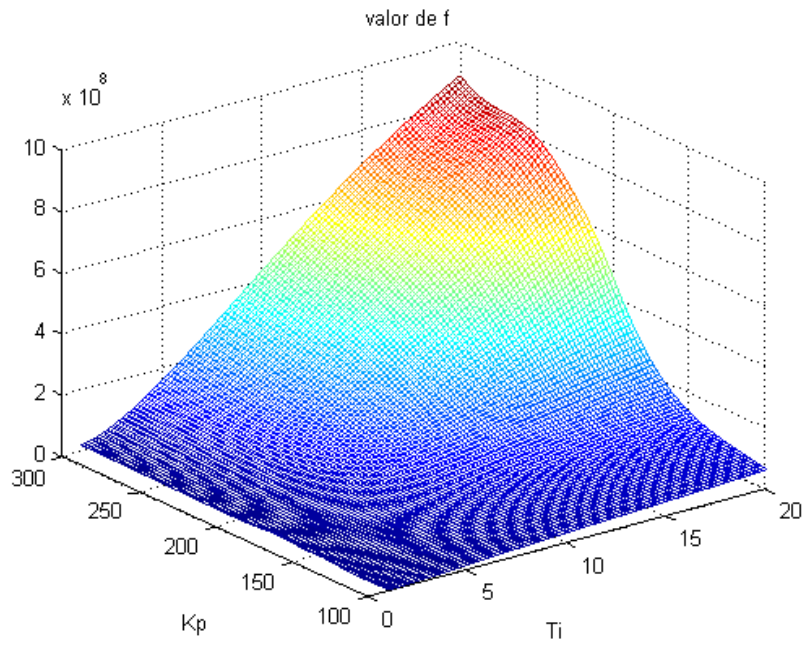


Figura 6.31 Representació de la funció que s'ha de minimitzar, sense restriccions, en funció de dos paràmetres, cas 1

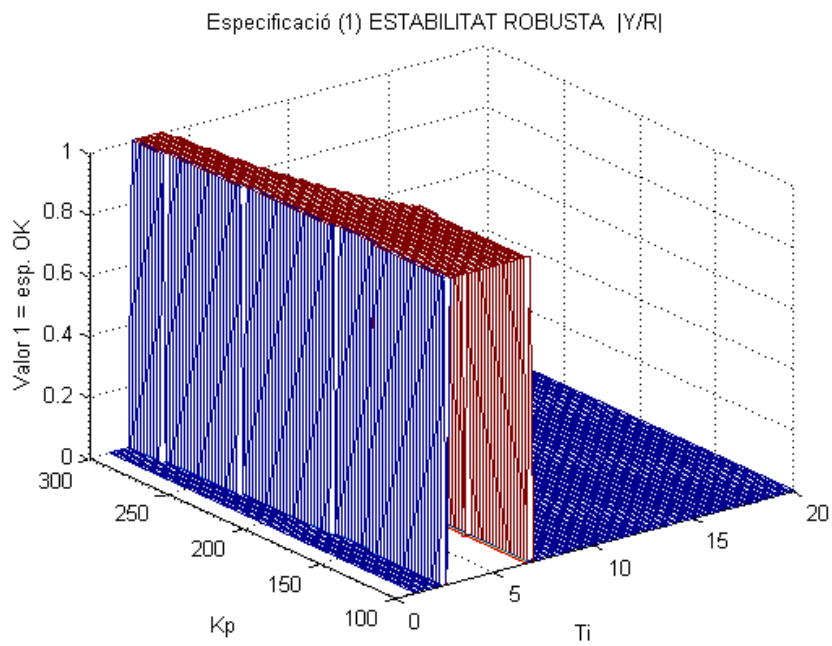


Figura 6.32 Representació del compliment de l'especificació 1 d'estabilitat robusta Y/R, cas 1

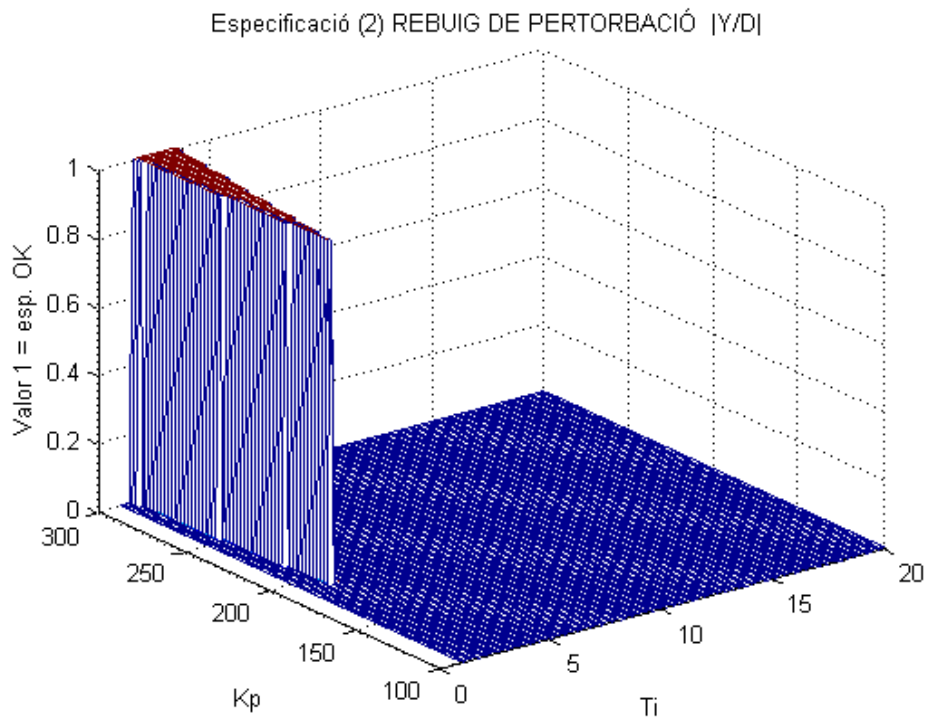


Figura 6.33 Representació del compliment de l'especificació 2 de rebuig de perturbació Y/D — sensitivitat—, cas 1

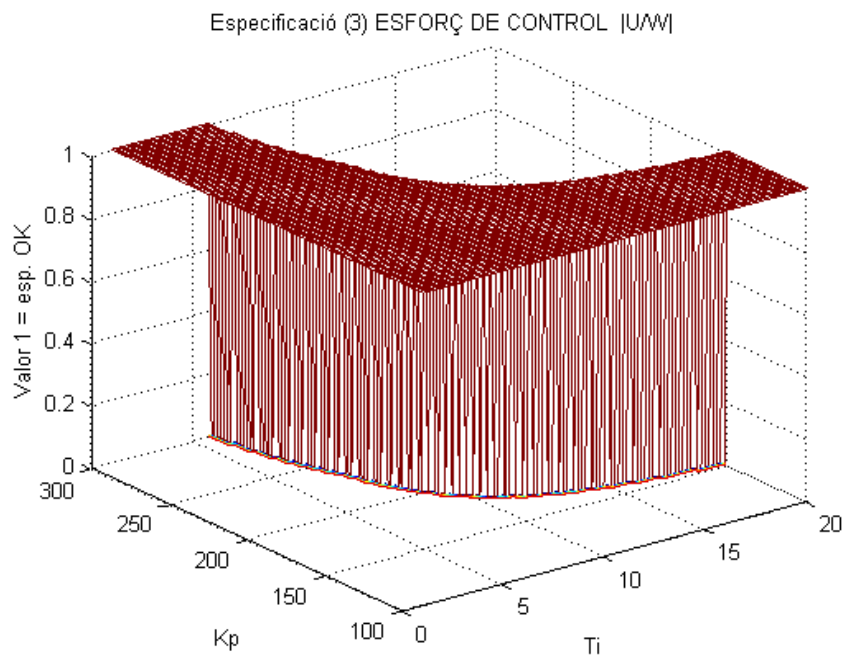


Figura 6.34 Representació del compliment de l'especificació 3 d'esforç de control U/W , cas 1

S'observa que l'especificació més restrictiva és la segona, corresponent a la sensitivitat.

A la Figura 6.35 següent es contempla el valor de la funció en què s'hi han afegit el compliment simultani de les restriccions donades per les especificacions i es comprova el valor del mínim gràfic, que coincideix aproximadament amb el mínim donat per l'optimitzador *Tomlab*.

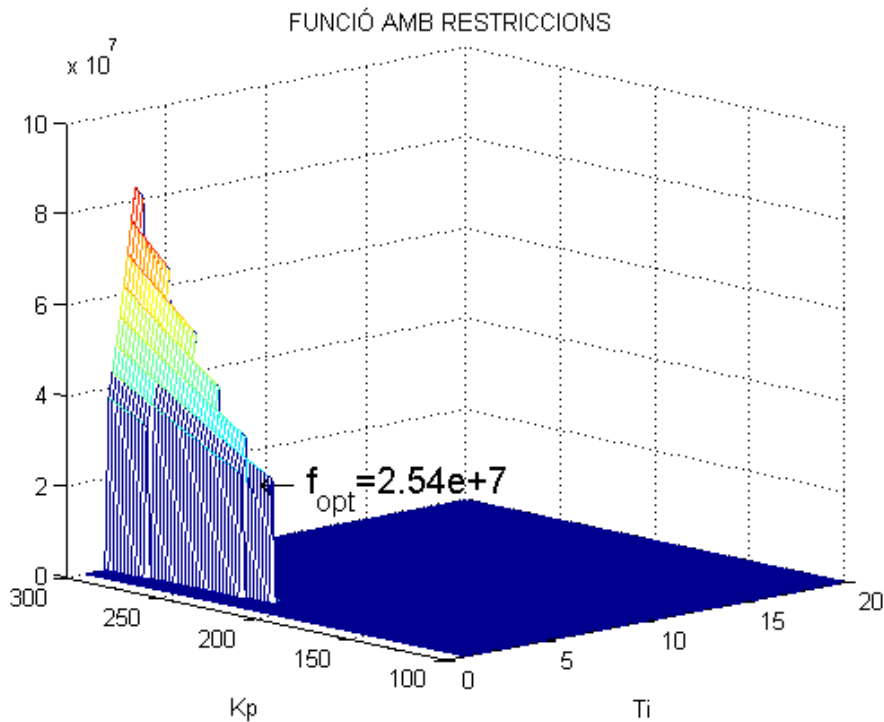


Figura 6.35 Representació de la funció que s'ha de minimitzar, amb restriccions, en funció de dos paràmetres. cas 1

6.2.2.5 Proves amb l'estructura de control modificada, en el cas 1

Un inconvenient de l'estructura de control clàssica utilitzada és que pot presentar variacions brusques de l'acció de control si hi ha canvis bruscos de consigna, ja que l'acció derivativa és respecte al senyal d'error. Per assajar el control amb estructures alternatives que podrien millorar alguna de les prestacions, per exemple l'esforç de control esmentat, s'ha provat amb l'estructura alternativa proposada per Astrom i Hägglund (1995). Tenint com a referència l'esquema de control de la Figura 2.2, i assumint que el prefiltrer és unitari, la proposta dels autors esmentats consisteix en modificar l'acció de control segons la llei següent:

$$u(t) = Kp \left(e_p(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de_d(t)}{dt} \right) \quad (6.33)$$

on l'error a la part proporcional és $e_p(t) = b \cdot r(t) - y(t)$, l'error a la part derivativa és $e_d(t) = c \cdot r(t) - y(t)$ i l'error a la integral és l'error clàssic $e(t) = r(t) - y(t)$.

Ponderant els valors dels paràmetres b i c , es tenen estructures diferents. En particular, l'estructura de control clàssic *feedback* és amb els valors de $b = 1$ i $c = 1$. Si $b = 0$ i $c = 0$, l'estructura de control és l'anomenada I-PDf, en què les accions proporcional i derivativa filtrada tenen en compte la sortida $y(t)$, en comptes de l'error clàssic $e(t)$. I si $b = 1$ i $c = 0$, l'estructura de control és l'anomenada PI-Df, en què l'acció derivativa es fa respecte a la sortida, mentre que les altres accions (P i I) es fan respecte a l'error clàssic $e(t)$.

Si es comparen en simulació el comportament de les diverses estructures de control assajades, es comprova que amb el control PIDf clàssic s'obté una rapidesa més gran, però a costa d'uns sobreimpulsos que poden situar-se al voltant del 20 % en els casos més desfavorables quan hi ha un canvi bruscat de consigna. També amb el control PIDf clàssic s'observa en general un esforç de control més gran.

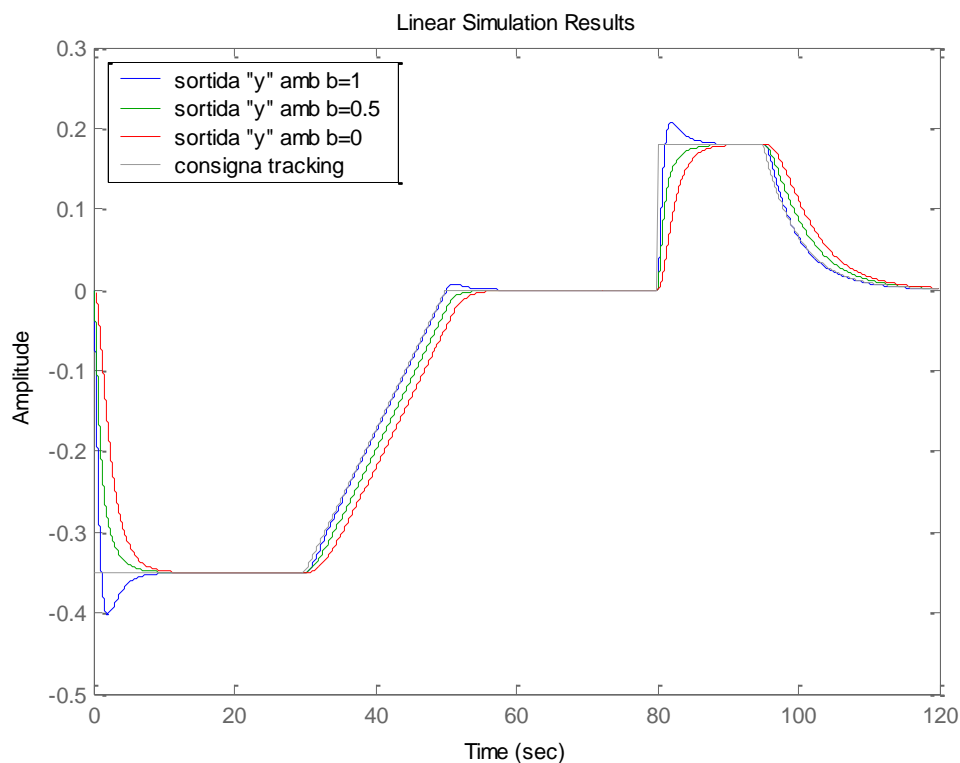


Figura 6.36 Resposta de *tracking* en llaç tancat del sistema controlat, amb els paràmetres $b = 1$, $b = 0.5$ i $b = 0$

A la Figura 6.36 es representa el comportament temporal de seguiment de la consigna de *tracking* per a una qualsevol de les plantes de totes les possibles dins la família, escollida a l'atzar. S'han representat tres situacions diferents, per a $b = 0$, per a $b = 0.5$, i per a $b = 1$, sempre amb $c = 0$. La planta escollida és

$$P(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.0363}{s^2 + 0.11s + 0.3025} \quad (6.34)$$

En observar el comportament del sistema en llaç tancat i controlat, es veu que és més ràpid si $b = 1$, que equival a l'estructura de control PI-Df, en què l'acció derivativa es fa respecte a la sortida, i les altres accions (P i I) es fan respecte a l'error clàssic $e(t)$, tot i que presenta un sobreimpuls important per canvis de consigna bruscos.

Si $b = 0$, equivalent a l'estructura de control I-PDf, en què les accions proporcional i derivativa filtrada tenen en compte la sortida $y(t)$, en comptes de l'error clàssic $e(t)$, i la integral es fa respecte a l'error clàssic $e(t)$, la sortida és més lenta i, amb la dinàmica del procés escollit, per canvis bruscos de consignes no presenta sobreimpulsos.

6.2.3 Disseny per a un nou cas d'estudi, cas 2

6.2.3.1 Formulació del cas 2

Es formula un segon cas d'estudi, amb lleugeres modificacions respecte al primer cas. Es planteja amb el mateix model i amb gairebé les mateixes especificacions freqüencials del cas anterior, però incrementant els graus de llibertat dels paràmetres del controlador. També s'ha canviat lleugerament el rang de freqüències de treball.

- Nova especificació d'estabilitat robusta, més restrictiva respecte al cas 1:

$$\left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \right| \leq \delta_1(\omega) = 1.4 \quad (6.35)$$

- Com a límits dels intervals respectius per als paràmetres del controlador, es prenen els valors indicats:

$$k_p \in [200, 300], T_i \in [1, 10], T_d \in [0.25, 2.5], T_f \in [0.025, 0.25] \quad (6.36)$$

- Relacions entre paràmetres del controlador:

$$T_d \leq T_i / 4; T_f \leq T_d / 10 \quad (6.37)$$

La graella de freqüències és

$$\omega = [0.1 \ 1 \ 2 \ 2.5 \ 3 \ 5 \ 10] \text{ rad/sec} \quad (6.38)$$

6.2.3.2 Resultats obtinguts i validació

Els resultats *Tomlab* (Tomlab 2007) amb estructura PIDf, aplicant l'algorisme proposat, són els següents:

$$k_p = 200.89; T_i = 2.327; T_d = 0.581; T_f = 0.0251; \quad (6.39)$$

Com a índex a minimitzar s'ha pres l'indicat en l'Algorisme 5.1 del Capítol 5 d'aquesta tesi, i el valor mínim d'aquest índex que dóna l'optimitzador és $1.7914e + 007$.

Es comprova que per al controlador trobat com a òptim per *Tomlab* es compleixen les especificacions. El *solver* utilitat ha estat *ego* (Jones, Schonlau and Welsch 1998). Cal observar que l'òptim es dóna per a valors propers als extrems inferiors dels paràmetres k_p i T_f .

Tot i que s'ha comprovat que es compleixen les especificacions utilitzant els fitxers d'optimització de *Tomlab*, a la Figura 6.37 es representa un diagrama de Nichols amb la gràfica del *loop-shaping*, en què es comprova de forma redundat que es compleixen totes les especificacions en les freqüències escollides.

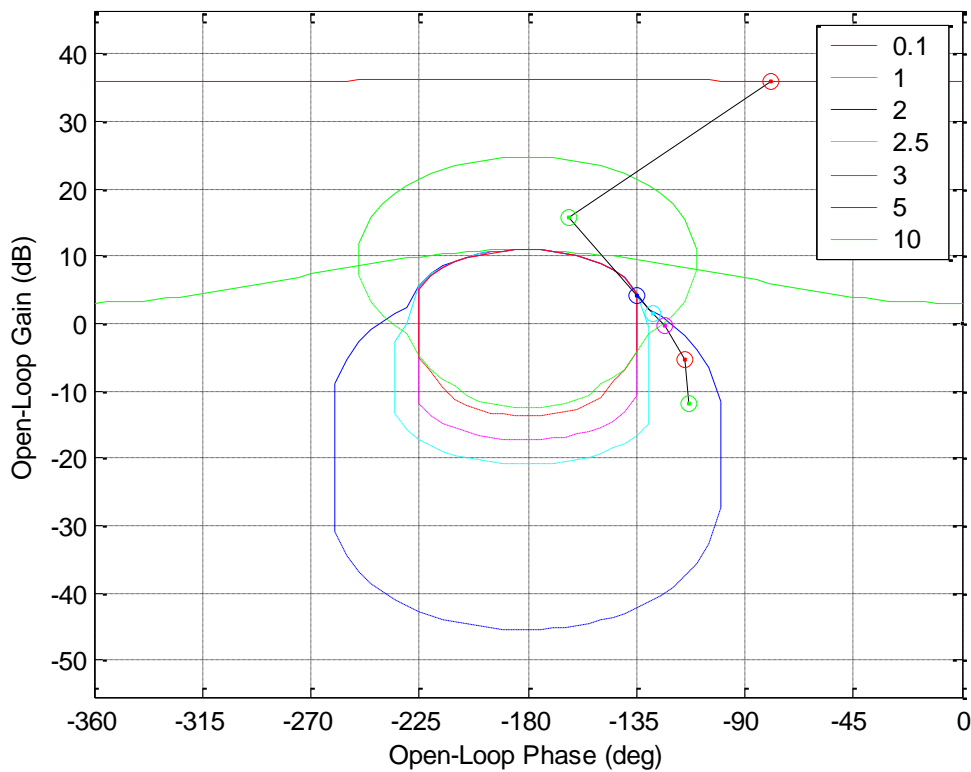


Figura 6.37 Diagrama de Nichols: *loop-shaping*, que inclou les tres especificacions, amb el controlador de disseny, cas 2

6.2.3.3 Comprovacions addicionals

Per observar la forma de la funció dins del rang dels paràmetres, es representa la funció que s'ha de minimitzar en funció de dos dels paràmetres, k_p i T_i , prenent com a valors fixos els altres dos paràmetres T_d i T_f . Com a valors fixos de T_d i T_f s'han pres els que dóna l'optimitzador *Tomlab*. La funció es representa a la Figura 6.38, en què no s'hi consideren les restriccions donades per les especificacions.

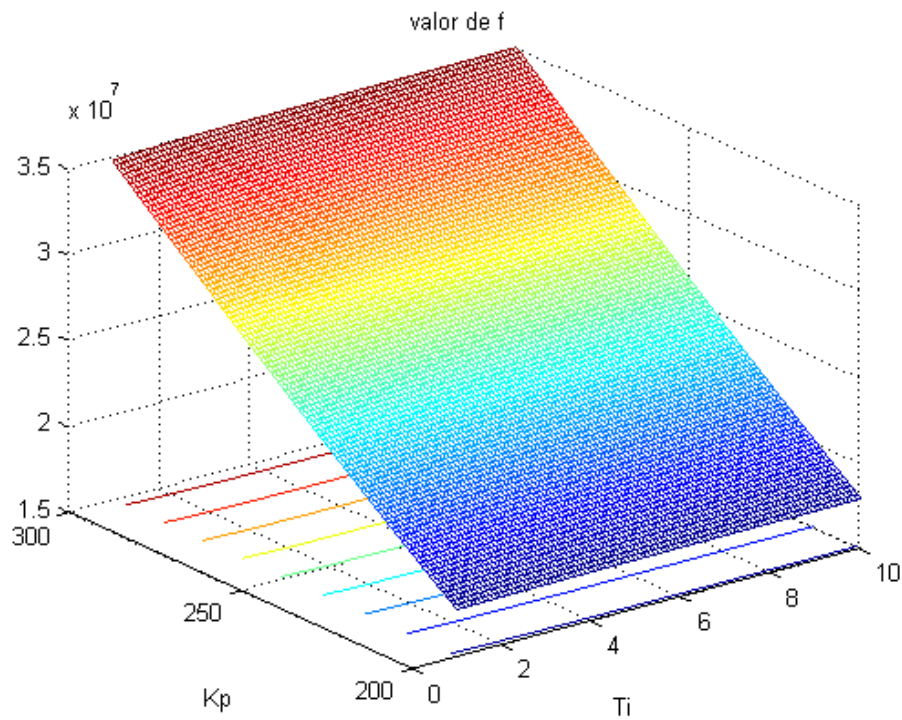


Figura 6.38 Representació de la funció que s'ha de minimitzar, sense restriccions, en funció de dos paràmetres, cas 2

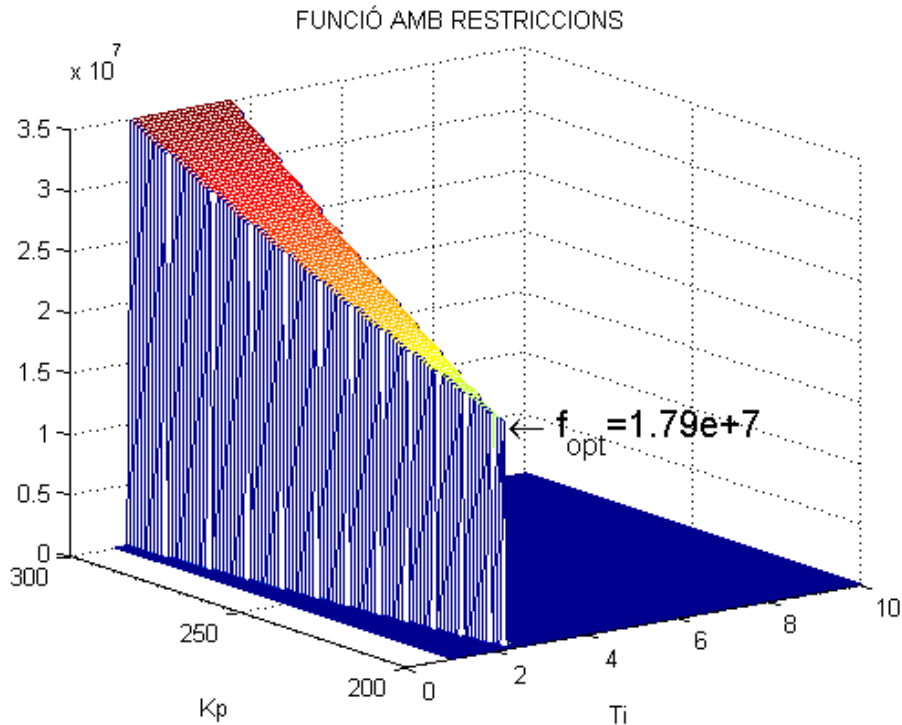


Figura 6.39 Representació de la funció que s'ha de minimitzar, amb restriccions, en funció de dos paràmetres, cas 2

S'ha procedit com en el cas 1 i el resum es pot veure a la Figura 6.39, en què s'han afegit les restriccions donades per les especificacions. Es comprova el valor del mínim gràfic, que coincideix aproximadament amb el mínim que dona l'optimitzador *Tomlab*.

Capítol 7 Conclusions i treball futur

Com a objectiu definitori bàsic de la tesi s'havia fixat la contribució al disseny de sistemes de control basats en models intervalars. En aquest capítol es presenten, a manera de conclusió, les principals contribucions de la tesi, tot emfatitzant-ne les aportacions originals. També s'hi indiquen les línies d'un futur treball com a continuació de la recerca feta.

7.1 Resum de la tesi i remarca de les aportacions fetes

Després d'un primer capítol introductori, en el Capítol 2 s'ha justificat la utilització de models amb paràmetres intervalars per a la descripció de la incertesa dels sistemes físics reals. S'hi ha presentat l'aritmètica intervalar com a eina que, a més de facilitar la representació d'incerteses, permet la implementació de tècniques d'anàlisi i de disseny que es poden utilitzar per al control robust de sistemes. També s'han plantejat alguns dels problemes que comporta operar amb intervals, com ara el *wrapping* i la multiincidència, ja estudiats per altres autors. Com ja s'esmenta al Capítol 2, per evitar la problemàtica associada a la representació de conjunts i els problemes que comporta quant a multiincidència i *wrapping*, el mètode adoptat en aquesta tesi per representar els conjunts utilitza una boira de punts i les operacions es fan de forma determinista (graella).

En el mateix Capítol 2 s'ha mostrat la tècnica freqüencial de control robust *Quantitative Feedback Theory* (QFT), que, malgrat els seus més de 50 anys d'existència, manté alguns temes encara no resolts definitivament. Un parell de qüestions "obertes" a què la present tesi ha contribuït per millorar o complementar la tècnica QFT han estat, d'una banda, el treball en la recerca de l'espai de paràmetres del controlador d'ordre baix prefixat, i, de l'altra, el treball en l'automatització del disseny, proposant la minimització d'un índex associat a l'esforç de control, que, previ estudi de l'estat de l'art, no s'havia proposat abans. Una altra qüestió remarcable és la proposta de transformació d'una especificació temporal de seguiment en una de freqüencial. La proposta esmentada aporta un procediment que pot simplificar el conjunt inicial d'especificacions, amb la consegüent simplificació del procés de síntesi del controlador. Seguidament es descriuen una mica més detalladament aquestes contribucions.

Al Capítol 3, malgrat que no existeixi una equivalència genèrica entre especificacions temporals i freqüencials, s'ha explorat la qüestió i s'ha fet una proposta de transformació d'una especificació de seguiment de consigna (*tracking*) temporal en una especificació freqüencial, i d'aquesta, sota determinades condicions, en una especificació freqüencial de sensitivitat, amb un prefiltre definit. En aquest aspecte s'han aprofitat les aportacions prèvies de Krishnan i Cruickshanks (1977).

La proposta de conversió d'una especificació de *tracking* temporal en una de sensitivitat representa una aportació de simplificació del procés de disseny mitjançant la tècnica de la QFT, remarcable en dos aspectes:

- D'una banda, una nova especificació (de sensitivitat) substituiria l'original (de seguiment). Aleshores, si hi havia una especificació addicional pròpiament de sensitivitat, ambdues quedarien integrades en una única especificació de sensitivitat, de manera que se simplificaria la resolució del problema.
- A la vegada, el mètode dóna el disseny del prefiltrer de forma immediata.

Al Capítol 4 s'ha fet una aportació a la recerca de l'espai de paràmetres del controlador, aprofitant el concepte de projecció d'un conjunt, aplicant-hi conceptes d'aritmètica intervalar i utilitzant com a eines els algorismes implementats en el programa *Proj2D* (Jaulin, Braems, et al. 2002), (Dao 2005), basats en els principis de satisfacció de restriccions. Per poder utilitzar l'eina, s'han hagut de manipular les diverses especificacions i tractar-les com a desigualtats polinomials. D'altra banda, l'existència d'operadors lògics “per tot” (\forall) i “i” (\wedge) en les expressions poden dificultar el còmput del conjunt solució; per salvar aquest escull s'hi ha contribuït suggerint treballar amb el conjunt complementari, que es pot computar més fàcilment, unint adequadament les expressions mitjançant operadors “o” (\vee). La formalització del mètode i la concreció en una aplicació es recullen en la publicació de Comasòlivas, Quevedo *et al.* (2005).

Al Capítol 5 es fa una aportació al disseny automàtic del controlador. L'originalitat de la proposta és que es fa una aproximació de l'energia de la resposta impulsional de l'esforç de control i, a partir d'aquest concepte, se'n defineix la funció objectiu, amb una proposta d'algorisme en què les diverses especificacions freqüencials es consideren com un conjunt de restriccions. S'han provat diverses eines d'optimització, bàsicament l'*Optimization Toolbox* de *Matlab*, i el *Tomlab* (2007), tot i que els resultats més satisfactoris s'han obtingut mitjançant aquest darrer. Els autors Comasòlivas, Escobet i Quevedo (2007) mostren alguns resultats en l'aplicació d'un model d'helicòpter de laboratori. L'algorisme formulat és prou genèric per admetre la incorporació d'especificacions com la multiincidència dels paràmetres.

Al Capítol 6 s'han presentat dos casos en què s'han aplicat algunes de les tècniques proposades als capítols anteriors. En la primera aplicació, s'han aplicat les tècniques esmentades en un interferòmetre real, mentre que en una segona aplicació s'ha treballat a nivell de simulació sobre un model d'helicòpter de laboratori. S'han plantejat problemes diferents de disseny i en ambdues aplicacions s'han assolit resultats prou satisfactoris.

Finalment, se subratllen algunes característiques particulars que incideixen en el desenvolupament de la tesi:

- La utilització de models senzills d'estructura per a la planta i d'una estructura pre-fixada de baix ordre per al controlador han estat necessaris per requeriments de caire pràctic, amb l'objectiu d'obtenir resultats satisfactoris en un temps de còmput raonable, amb les eines a l'abast.
- Per calcular les desigualtats polinomials en què es converteixen les especificacions, construir les funcions que permetin trobar l'espai de paràmetres del controlador i fer un disseny automàtic del

controlador (Capítol 4, Capítol 5), s'han utilitzat diverses eines (*Maple, Matlab, Tomlab, Proj2D*). Cadascuna d'aquestes eines té una sintaxi concreta, que ha calgut traduir i revisar d'una eina a una altra, per què el codi es pogués executar sense que es generessin errors.

- Una limitació o crítica que es podria fer a les metodologies emprades és que, al capdavall, s'acaba treballant amb un nombre finit de plantes i de freqüències, després d'un procés de discretització. Per tant, no es garanteix la solució per a tots els valors del interval, malgrat que sempre es podria prendre un malla més densa en la granularitat de les discretitzacions, tant pel que fa als paràmetres de la planta, com a les freqüències.
- La contrapartida de prendre una malla més densa per a les discretitzacions és que, com més valors es prenen de la planta i de la freqüència per aconseguir una garantia més gran de compliment, també s'incrementa la complexitat de càlcul, amb la consegüent lentitud del procés per arribar en un temps prudent a un resultat correcte. A la pràctica, l'elecció de la granularitat de la discretització s'acaba prenent en funció d'un compromís entre la complexitat (lentitud del càlcul) i la descripció "raonable" prou fidel del model intervalar de la planta, i del rang de freqüències de treball.

7.2 Treball futur

Com a possibles tasques de futur, es podria suggerir el treball en alguns dels aspectes a millorar, que s'han intentat agrupar en tres grups temàtics, tot i que no s'haurien de considerar com a compartiments estancs:

a) Disseny de controladors

- Ordre més alt de controlador i de planta. A la tesi, els models utilitzats tant de la planta com del controlador són d'ordre baix. Un aspecte a treballar en el futur podria ser la recerca sobre com aconseguir bons resultats amb un temps de còmput raonable utilitzant models d'ordre més alt que puguin descriure la dinàmica del sistema real amb més detall, i dissenyar controladors també d'ordre més alt i, per tant, més rics en matisos freqüencials.
- Introducció d'especificacions noves amb aprofitament de resultats previs. A la tesi s'ha treballat amb poques especificacions (estabilitat robusta, rebuig de pertorbacions a la sortida del sistema, seguiment de consignes, esforç de control). En un futur es podria explorar com treballar amb més i noves especificacions que enriqueixin el disseny.
- Utilització d'altres índexs d'optimització. A la tesi s'ha utilitzat un únic índex, associat a l'energia impulsional del controlador.
- Comparació amb altres tècniques de control robust. A la tesi, l'única tècnica de control robust utilitzada ha estat la QFT. Les prestacions dels controladors dissenyats es podrien comparar amb les d'altres dissenyats mitjançant altres tècniques. Per facilitar la comparació dels resultats

obtinguts mitjançant les tècniques proposades, respecte a resultats obtinguts mitjançant altres tècniques i procediments, es podrien proposar uns índexs, per exemple els IAE (suma de valors absoluts), ISE (suma de quadrats de l'error), ISU (suma de quadrats de l'acció de control)...

- Per al procés d'automatització del disseny, ALS, en aquesta tesi s'ha proposat com a aportació una funció objectiu associada a l'energia de la resposta impulsional de l'esforç de control. En treballs recents d'ALS, per exemple el de Nataraj i Tharewal (2007), es proposava una funció objectiu que era simplement el guany a altes freqüències del controlador. Un treball futur interessant podria ser la discussió sobre altres funcions objectiu alternatives, i comparar-ne els resultats.

b) Complexitat de les plantes

- A la tesi s'han utilitzat models intervalars de plantes que tenen una estructura senzilla, amb incertesa paramètrica, però amb coeficients que no es depenien del temps. Podria ampliar-se l'estudi sobre com aplicar-ho a sistemes amb paràmetres variants en el temps (*linear parameter varying*, LPV).
- Per validar tècniques i comprovar resultats, s'han utilitzat diverses aplicacions concretes (interferòmetre, helicòpter...). Podria ampliar-se aquest ventall d'aplicacions, incidint en casos concrets de plantes reals (vehicles aeris no tripulats, *Unmanned Aerial Vehicles* UAVs, per exemple).
- En el desenvolupament de la tesi s'ha treballat només amb models monovariables (*Single Input - Single Output*, SISO), lineals invariants en el temps (*Linear Time Invariant*, LTI), amb paràmetres incerts, la qual cosa ha fet possible incloure en aquesta incertesa el coneixement incomplet de l'estructura del model, possibles no linealitats, variacions lentes de paràmetres, etc. Una línia de futur podria ser una continuació del treball fet, per a sistemes multivariables (*Multi Input - Multi Output*, MIMO).
- Com considerar dinàmiques no lineals. En el transcurs de la tesi s'ha treballat amb models incerts, amb incertesa estructurada paramètrica, malgrat que la incertesa pot incloure no linealitats, canvis reals dels paràmetres del model, pertorbacions...

c) Integració d'eines i millora dels algorismes

- Algorismes més ràpids. Una limitació dels paquets de software utilitzats és la seva relativa lentitud en l'obtenció de resultats.
- A la tesi, per a l'automatització del disseny, (*automatic loop shaping*, ALS) s'ha utilitzat l'Algorisme 5.1 proposat. Les expressions utilitzades per les funcions programades (funció a minimitzar i restriccions) per poder emprar *Tomlab* s'han obtingut amb el suport d'eines simbòliques com ara *Maple*(2010), i després s'han manipulat per adequar-les al format adaptat a

la sintaxi concreta utilitzada pel software optimitzador. Una millora substancial i un possible treball futur podria ser avançar perquè aquest procés sigui en el seu conjunt més automatitzat.

- Integrar ALS en la *QFT toolbox*. A la tesi, en el procés d'automatització del disseny (*automatic loop shaping*, ALS) per a la recerca del controlador amb el qual s'acompleixin la totalitat d'especificacions freqüencials i que a més sigui l'òptim s'utilitzen paquets d'optimització, que han tingut bons resultats obtinguts mitjançant *Tomlab*. Una vegada obtingut el controlador òptim, es comprova que es compleixen les especificacions mitjançant la *QFT toolbox* de *Matlab*. Es treballaria més còmodament si s'hagués programat una funció que, des de la *QFT toolbox*, cridés rutines d'optimització i que donés com a resultat el controlador òptim.
- També convindria estar amatent a les noves eines d'optimització global que sorgeixin, per poder comparar-ne l'ús amb el paquet utilitzat de *Tomlab*.
- Quant a la implementació, el llenguatge *Matlab* en facilita la programació, però també convindria ser receptiu a altres llenguatges compilats l'execució dels quals fos més eficaç.
- Una altra opció, encara emprant *Matlab*, podria ser treballar amb *mex-files*, que permetria l'ús de codi precompilat, amb una probable major eficiència d'execució.
- En la mateixa línia de millorar el software, es podria treballar en el disseny d'una interfície d'usuari que integrés les diverses eines utilitzades a la tesi i en facilités l'ús.
- Per avançar en les anteriors propostes de treball futur, es podrien cercar altres eines i algorismes utilitzats. En aquest sentit, podria ser convenient una eina substitutòria del software *Proj2D*, que millori l'eficiència dels algorismes de projecció en dues dimensions, tant pel que fa al temps de còmput com en l'obtenció del conjunt solució.

Referències bibliogràfiques

- Alefeld, G., and J. Herzberger. *Introduction to Interval Computations*. Academic Press, 1983.
- Arasa, J., F. Laguarda, C. Pizarro, and N. Tomàs. "Design of an interferometric system for piston measurements in segmented primary mirrors." *Current developments in lens design and optical systems engineering, SPIE Proceedings*. 2000.
- Armengol, J. "Application of modal interval analysis to the simulation of the behaviour of dynamic systems with uncertain parameters". Girona: Tesi doctoral, UdG, 2000.
- Astrom, K. J. "Limitations on Control Systems Performance." *European Journal of Control*, 2000: 6:1, pp 2-20, January.
- Astrom, K., and T. Hägglund. *PID controllers: Theory, Design, and Tuning*. 2nd ed., Research Triangle Park, N.C.: Instrument Society of America, 1995.
- Balance, D. J., and P.J. Gawthrop. "Control System Design Via a Quantitative Feedback Approach." *Proc. of the IEE Conference Control-91*. Heriot- Watt University Edinburgh U.K., 1991. 476-480.
- Baños, A. "Nonlinear quantitative feedback theory." *Int. J. Robust Nonlinear Control (John Wiley & Sons)*, 2007: 17, pp. 181-202.
- Baños, A., A. Barreiro, F. Gordillo, and J. Aracil. "A QFT framework for nonlinear robust stability." *Int. J. Robust Nonlinear Control, Vol. 12, Núm. 4*, 2002: pp. 357-372.
- Baños, A., and A. Barreiro. "Stability of non-linear QFT designs based on robust absolute stability criteria." *Int. Journal of Control, Vol. 73, Núm. 1*, 2000: pp. 74-88.
- Baños, A., and I.M. Horowitz. "Nonlinear quantitative stability." *Int. J. Robust Nonlinear Control (John Wiley & Sons, Ltd)*, 2004: 14, pp. 289-306.
- Benhamou, F., and F. Goualard. "Universally quantified interval constraints." *In 6th International Conference of Principles of Constraint Programming*. 2000.
- Besson, V., and A. T. Shenton. "Interactive Parameter Space Design for Robust Performance of MISO Control Systems." *IEEE Trans. Autom. Control* 45, no. 10 (2000): 1917-1924.
- Bhattacharyya, S.P., H. Chapellat, and L.H. Keel. *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice Hall, 1995.
- Borghesani, C., Y. Chait, and O. Yaniv. *Quantitative Feedback Theory Toolbox, User's Guide, for Use with Matlab*. 1994.

- Chait, Y., and O. Yaniv. "Multi-input/single-output computer aided control design using the Quantitative Feedback Theory." *International Journal of Robust and Non-linear Control*, 3, 1993: 47-54.
- Chait, Y., Q. Chen, and C. V. Hollot. "Automatic Loop-Shaping of QFT Controllers Via Linear Programming." *ASME J. Dyn. Syst., Meas., Control*, 121, 1999: 351-357.
- Chen, W., Balance, D. «QFT design for uncertain non-minimum phase and unstable plants.» *American Control Conference*. Philadelphia, Pennsylvania, 1998. pp 2486-2490.
- Comasòlivas, R., J. Quevedo, V. Puig, i T. Escobet. «Active control design facilities for vibration attenuation in interferometers based on QFT.» *7th International Symposium Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Methods*. University of Kansas, USA, 2005. 1-6.
- Comasòlivas, R., T. Escobet, i J. Quevedo. «Aplicación de la técnica de la QFT para el control activo de perturbaciones mecánicas en un interferómetro óptico.» *Revista iberoamericana de sistemas, cibernética e informática*, 1 (1), 2004: 1-6.
- Comasòlivas, R., T. Escobet, y J. Quevedo. «Diseño de un controlador robusto óptimo QFT del ángulo de cabeceo en un helicóptero de laboratorio.» *XXVIII Jornadas de Automática*. Huelva: CEA, 2007. p. 1-6.
- Dao, M. *Proj2D Solver*. 2005. Available at www.istia.univ-angers.fr/~dao/Proj2DV5.zip (últim accés: 2008).
- Dorato, P., C.T. Abdallah, and D. Famularo. "On the design of non-fragile compensators via symbolic quantifier elimination." *Proc. World Automation Cong., May 9-14.*, Anchorage, AK, 1998. pp. 363-368.
- Dorato, P., Kun Li, E.B. Kosmatopoulos, P.A. Ioannou, i H. Ryaciotaki-Boussalis. «Quantified multivariate polynomial inequalities. The mathematics of practical control design problems.» *Control Systems Magazine, IEEE, Volume 20, Issue 5, October 2000*, 2000: pp 48-58.
- Egaña, I., et al. "Control Robusto QFT de un Helicóptero de 3 GDL." *XXII Jornadas de Automática*, Barcelona, 2001.
- Eitelberg, E. *Load Sharing Control*. Durban, South Africa: NOYB Press, 1999.
- Eitelberg, E. "Some peculiarities of Load Sharing Control ." *Int. J. Robust Nonlinear Control. Vol. 13, John Wiley & Sons, Ltd*, 2003: pp. 607-618.
- Fransson, C. M., B. Lennartson, T. Wik, K. Holmstrom, M. Saunders, i P. O. Gutman. «Global Controller Optimization Using Horowitz Bounds.» *IFAC World Congress*. Barcelona, Spain, 2002.
- García-Sanz, M. «Control Robusto cuantitativo QFT: historia de una idea.» *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, RIAI, Vol.2, Núm. 3, julio*, 2005: pp 25-38.

García-Sanz, M. "QFT international symposia: past, present and future." *Editorial del 5th Int. Symp. on QFT and Robust Frequency Domain Methods*. Pamplona, Spain, 2001.

García-Sanz, M., A. Huarte, and A. Asenjo. "One point feedback robust control for distributed parameter systems." *16th IFAC World Congress*. Praga, 2005b.

García-Sanz, M., A. Huarte, and A. Asenjo. "QFT approach to control one-point feedback distributed parameter systems." *7th International Symposium on Quantitative Feedback Theory QFT and Robust Frequency Domain Methods, August 2005*. Lawrence, Kansas, USA, 2005c.

García-Sanz, M., and I. Egaña. "Quantitative Non-diagonal Controller Design for Multivariable Systems with Uncertainty." *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 12, núm. 4, 2002: pp. 321-333.

García-Sanz, M., and J. C. Guillen. "Automatic Loop Shaping of QFT Controllers Via Genetic Algorithm." *Proceedings of the 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design (RO-COND 2000)*, Kidlington, UK, Vol. 2. New York: Elsevier Science, 2000. pp. 603–608.

García-Sanz, M., and J. C. Guillen. "Smith Predictor For Uncertain Systems In The QFT Framework." *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 243. *Progress in System and Robot Analysis and Control Design. Chapter 20*. Ed. Springer Verlag, 1999. pp. 243-250.

García-Sanz, M., and J. Elso. "Ampliación del benchmark de diseño de controladores para el cabeceo de un helicóptero." *RIAI*, vol. 4, núm. 1, enero, 2007: pp. 107-110.

García-Sanz, M., I. Egaña, and M. Barreras. "Design of quantitative feedback theory non-diagonal controllers for use in uncertain multiple-input multiple-output systems. ." *IEE Control Theory and Applications*, Vol. 152, núm. 02, 2005a: pp. 177-187.

García-Sanz, M., I. Egaña, J. Castillejo, and M. Barreras. "Torneo de loop-shaping en el control de un helicóptero de laboratorio." *XXIII Jornadas de Automática*. La Laguna, Tenerife, Spain, 2002.

García-Sanz, M., J. Elso, and I. Egaña. «Control del ángulo de cabeceo de un helicóptero como benchmark de diseño de controladores.» *RIAI*, vol. 3, núm. 2, abril, 2006: pp. 111-116.

Gardeñes, E., H. Mielgo, and A. Trepát. "Modal Intervals: Reason and Ground Semantics." *Interval Mathematics*, Springer, Heidelberg (Germany), 1985.

Garloff, J. «The Bernstein Algorithm.» *Interval Computations*. 2, 1993: pp 154-168.

Gera, A., and I. Horowitz. "Optimization of the Loop Transfer Function." *Int. J. of Control*, 31, 1980: pp. 389-398.

Gil-Martínez, M., and M. García-Sanz. «Simultaneous Meeting of Robust Control Specifications in QFT.» *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 13, Núm. 7, 2003: pp. 643-656.

- Hansen, E. *Global Optimization Using Interval Analysis*. New York: Marcel Dekker, 1992.
- Holmström, K., A.O. Göran, and M.M. Edvall. *User's Guide for Tomlab. Tomlab Optimisation*. <http://tomopt.com/tomlab/>, 2007.
- Horowitz, I.M. "A synthesis theory for a class of saturating systems." *Int. J. Control*, Vol. 38, núm. 1, 1983: pp 169-187.
- Horowitz, I.M. "Design of feedback systems with non-minimum phase unstable plants." *Int. J. Systems Science*, Vol. 10, 1979b: pp. 1025-1040.
- Horowitz, I.M. "Frequency response in control. Plenary." *4th Int. Symp. on QFT and Robust Frequency Domain Methods*. Durban, South Africa, 1999. pp. 233-239.
- Horowitz, I.M. «Fundamental Theory of automatic linear feedback control systems.» *I.R.E. Transactions on Automatic Control*, Vol. 4, December, 1959: pp. 5-19.
- Horowitz, I.M. «It was not easy: a personal view.» *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 12, Núm. 4, 2002: pp. 289-293.
- Horowitz, I.M. «Optimum loop transfer function in single-loop minimum-phase feedback systems.» *Int. J. Control*, Vol. 18, Núm. 1, 1973: pp. 97-113.
- Horowitz, I.M. «QFT – Past, present and future. Plenary address. .» *1st Int. Symp. on QFT and Robust Frequency Domain Methods*. Dayton, Ohio, USA, 1992. pp. 9-14.
- Horowitz, I.M. *Quantitative Feedback Design Theory (QFT)*. QFT publications, 1993.
- Horowitz, I.M. "Quantitative synthesis of uncertain multiple input-output feedback systems." *Int. J. Control*, Vol. 30, No. 1, 1979: pp. 81-106.
- Horowitz, I.M. "Quantitative Synthesis of uncertain non-linear feedback systems with non-minimum phase inputs." *Int. J. Systems Science*, Vol. 1, Núm 12, 1981a: pp 55-76.
- Horowitz, I.M. «Survey of quantitative feedback theory (QFT).» *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 11, 2001: pp. 887-921.
- Horowitz, I.M. «Synthesis of feedback systems with non-linear time-varying uncertain plants to satisfy quantitative performance specifications.» *IEEE Proc.*, Vol.64, 1976: pp.123-130.
- Horowitz, I.M. «The singular G-method for unstable non-minimum phase plants.» *Int. J. Control*, Vol. 44, No. 2, 1986: pp. 533-541.
- Horowitz, I.M., and M. Sidi. "Optimum synthesis of non-minimum phase systems with plant uncertainty." *Int. J. Control*, Vol. 27, Núm. 3, 1978: pp. 361-386.

- Horowitz, I.M., and M. Sidi. "Synthesis of feedback systems with large plant ignorance for prescribed time-domain tolerances." *Int. J. Control*, Vol. 16, Núm. 2, 1972: pp. 287-309.
- Horowitz, I.M., and Y. Liao. "Limitations on non-minimum phase feedback systems." *Int. J. of Control*, vol 40, Num. 5, 1984: pp. 1003-1015.
- Horowitz, I.M., and Y. Liao. "Quantitative non-linear compensation design for saturating unstable uncertain plants." *Int. J. Control*, Vol. 44, 1986b: pp. 1137-1146.
- Horowitz, I.M., S. Oldak, and O. Yaniv. "An important property of non-minimum phase multi-inputs multi-outputs feedback systems." *Int. J. of Control*, vol 44, Num. 3, 1986: pp. 677-688.
- Houpis, C. H., and B.G. Lamont. *Digital Control Systems: theory, hardware, software*. New York: McGraw Hill, 1985.
- Houpis, C.H. "Horowitz: bringing the gap." *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 12, Núm. 4, 2002: pp. 293-302.
- Houpis, C.H., and S.J. Rasmussen. *Quantitative Feedback Theory: Fundamentals and Applications*. NY, USA: Marcel Dekker, 1999.
- IAC. *Instituto de Astrofísica de Canarias, IAC*. 2001. <http://www.iac.es> (últim accés: 3 / febrer / 2010).
- Jaulin, L. *Le calcul ensembliste par analyse par intervalles. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Sud, Orsay, France*. 2000. Available at: <http://www.istia.univ-angers.fr/~jaulin/hdrjaulin.zip> (accessed 2008).
- Jaulin, L., I. Braems, M. Kieffer, and E. Walter. "Interval methods for nonlinear identification and robust control." *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control/ (CDC 2002)*. Las Vegas, USA, 2002.
- Jaulin, L., M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. *Applied Interval Analysis, with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*. London: Springer-Verlag, 2001.
- Jayasuriya, S., and Y. Zhao. "Stability of Quantitative Feedback Designs and the Existence of Robust QFT Controllers." *Int. J. Robust Nonlinear Control*. Vol. 13, No. 7. 1994. pp. 643-656.
- Jones, D. R., M. Schonlau, and W.J. Welsh. "Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions." *Journal of Global Optimazation*. Vol. 13. Netherland: Kluwer Academics Publishers, 1998. pp. 455-492.
- Krishnan, K.R., and A. Cruikshanks. "Frequency Domain Design of Feedback Systems for Specified insensitive for time-domain response to parameter variation, ." *Int. J. of Control*, 25, 1977: pp. 609-620.

- Malan, S., S M. Milanese, and M. Taragna. "Robust analysis and design of control systems using interval arithmetic." *Automatica*, vol. 33, 1997: pp. 1364-1372.
- Maple. *Maplesoft*. 2010. <http://www.maplesoft.com/> (accessed juliol 20, 2010).
- Mathworks. *Matlab- Simulink*. 2007. <http://www.mathworks.com/> (últim accés: 2 / febrer / 2010).
- Moore, R.E. *Interval Analysis*. Prentice-Hall series in automation comp. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1966.
- Moore, R.E. *Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing* . PhD Thesis, Stanford University, 1962.
- Moore, R.E. *Methods and application of interval analysis*. Philadelphia: SIAM studies in applied mathematics. 2, 1979.
- Moreno, J.C., A. Baños, and J.F. Montoya. "An algorithm for computing QFT multiple-valued performance bounds." *Int. Symp. on QFT and Robust Frequency Domain Methods*. Scotland, 1997. pp. 29-34.
- Nataraj, P.S.V. «Interval QFT: a mathematical and computational enhancement of QFT.» *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 12, Núm. 4, 2002: pp. 385-402.
- Nataraj, P.S.V., and G. Sardar. "Computation of QFT bounds for robust sensitivity and gain-phase margin specifications." *Trans. of the ASME*, Vol. 122, 2000b: pp. 528-534.
- Nataraj, P.S.V., and S. Tharewal. "An Interval Analysis Algorithm for Automated Controller Synthesis in QFT Designs." *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, ASME, vol 129, May 2007, 2007: 311-321.
- Neumaier, A. "The wrapping effect, ellipsoid arithmetic, stability and confidence regions ." *Computing Supplementum*, 9, 1993: pp. 175-190.
- Nwokah, O.D.I., D.F. Thompson, and R.A. Pérez. "On some existence conditions for QFT controllers." *DSC*, Vol. 4, No 1, 1990: pp. 21-46.
- Oldak, S., C. Baril, and P.O. Gutman. "Quantitative design of a class of nonlinear systems with parameter uncertainty." *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 4, 1994: pp. 101-117.
- Pintó, A. *Nueva técnica interferométrica para la medida del error de piston y puesta en fase de espejos segmentados*. Tesis doctoral UPC, 2002.

- Pintó, A., F. Laguarda, and R. Artigas. "New interferometric technique for piston measurement in segmented mirrors." *Proceedings of ODIMAP III, 3rd topical meeting on optoelectronic distance and measurement and applications*. 2001. páginas 13-19.
- Pizarro, C., J. Arasa, F. Laguarda, N. Tomas, and Pintó A. "Design of an interferometric system for the measurement of phasing errors in segmented mirrors." *Applied Optics* 41, 2002: páginas 4562-4570.
- Quanser. *Quanser Consulting*. 2009. <http://www.quanser.com> (últim accés: 18 / gener / 2010).
- Ratscheck, H., and J. Rokne. "Computer Methods for the Range of Functions." *Mathematics and its Applications*. Ellis Hordwood, 1984.
- Samadi-Bokharaie, V., and A. Khaki-Sedigh. "An LMI approach to automatic loop-shaping of QFT controllers." *Int. Control Conf., Glasgow, Scotland, UK*, 2006.
- Sheela, S. *An Interval Analysis Approach to Quantitative Feedback Theory*. Bombai, India: doctoral Thesis, Indian Institute of Technology Bombai, India, 2002.
- SLT. *Servei de Llengües i Terminologia de la Universitat Politècnica de Catalunya*. 2009. <http://www.upc.edu/slt/upcterm/> (últim accés: 18 / gener / 2010).
- Tharewal, S. *Automated Synthesis of QFT Controllers and Prefilters using Interval Global Optimization Techniques*. Bombai: Doctoral These, Indian Institute of Technology, 2005.
- Thompson, D. F. "Gain-Bandwidth Optimal Design for the New Formulation Quantitative Feedback Theory." *ASME J. Dyn. Syst., Meas., Control* 120, 1998: pp. 401-404.
- Thompson, D. F., and O. D. I. Nwokah. "Analytic Loop Shaping Methods in Quantitative Feedback Theory." *ASME J. Dyn. Syst., Meas., Control*, 116, 1994: pp. 169-177.
- Tomlab. *Tomlab*. 2007. <http://tomopt.com/tomlab/> (accessed febrer 3, 2010).
- Tornil, S. *Detecció robusta de fallos utilizando análisis intervalar*. Barcelona: Tesi doctoral, UPC, 2006.
- Vehí, J. *Anàlisis i Disseny de Controladors Robustos mitjançant Intervals Modals*. Tesi doctoral, Universitat de Girona, 1998.
- Vidyasagar, M. "Statistical learning and randomized algorithms for control." *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 18, 1998: pp. 69-85.
- Yaniv, O. *Quantitative Feedback Design of Linear and Non-linear Control Systems*. Kluwer Academic Publ., 1999.

Yaniv, O. "Robust LTV feedback synthesis for nonlinear MIMO plants." *Trans. Of the ASME Vol. 121*, 1999b: pp. 226-232.

Yaniv, O., and M. Nagurka. "Automatic Loop Shaping of Low Order QFT Controllers." *IEEE*, 2004.

Yaniv, O., and M. Nagurka. "Automatic Loop Shaping of Structured Controllers Satisfying QFT Performance ." *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME, vol 127, September, 2005*: pp. 472-477.

Yaniv, O., and R. Boneh. "Robust LTV feedback synthesis for SISO nonlinear plants." *Int. J. Robust Nonl. Control, Vol. 7*, 1997: pp 11-28.

Zhao, Y., and S. Jayasuriya. "On the generation of QFT bounds for general interval plants." *Trans. of the ASME, Vol. 116*, 1994: pp. 618-627.

Zolotas, A. C., and G. D. Halikias. "Optimal Design of PID Controllers Using the QFT Method." *IEE Proc.: Control Theory Appl. 146_6_*, 1999: pp. 585–589.

ANNEX A: Operativa de resolució de l'Algorisme 5.1 mitjançant *Tomlab*

A l'apartat 5.2.5 s'explicava de forma general com, a partir de la formulació del problema d'optimització que s'ha de solucionar, s'utilitzaven unes eines determinades —*Tomlab* (2007), *Matlab* (Mathworks 2007)— per trobar els paràmetres d'un controlador d'estructura prefixada, per als quals una funció objectiu és mínima, de manera que a més es complissin unes restriccions determinades. Les restriccions depenen de les especificacions i la solució ha d'ésser vàlida en un rang de freqüències determinat, qualsevol que sigui la planta, dins d'un conjunt d'incertesa predefinit. La funció a minimitzar és la definida per (5.6) i les restriccions, provinents de les especificacions, són les que defineixen (5.7) a (5.9) de l'Algorisme 5.1.

A la memòria també s'esmenta que, a la pràctica, s'acaba treballant amb un conjunt finit de plantes, prenent un conjunt finit de valors de cada paràmetre (incertesa paramètrica), i que es pren un conjunt discret de freqüències.

La forma en què s'ha operat utilitzant *Tomlab* sobre *Matlab* és la següent:

- En un primer fitxer generador de dades, *crea_dades.m*, es defineixen els valors de les variables numèriques. D'una banda, les del procés, això és, el conjunt discret de valors paramètrics de la planta incerta. D'altra banda, el vector de freqüències que s'ha d'utilitzar, que estan incloses en el rang intervalar. A més, es defineixen els valors dels límits de les restriccions. Totes aquestes dades es desen mitjançant la instrucció *save* en un fitxer de dades *dades.mat*. Aquestes dades es recuperaran posteriorment i es carregaran al *workspace* de *Matlab*, o bé en la funció en què calguin, mitjançant la instrucció *load*.
- Mitjançant un segon fitxer *restriccions.m* es crea una funció de *Matlab* amb les restriccions $c(x)$. Aquestes restriccions són funció del vector x de paràmetres del controlador i s'han creat com a desigualtats polinòmiques adequades, a partir de les restriccions predefinides en l'enunciat del problema. També s'hi inclouen com a restriccions les interdependències entre paràmetres, si n'hi ha.
- Un altre fitxer *func.m* serveix per crear la funció que cal minimitzar, $f(x)$. Aquesta funció també depèn del vector x de paràmetres del controlador.
- S'utilitza un darrer fitxer de comandes, *resolucio.m*, per arrencar el procés d'optimització amb *Tomlab*. Les dues comandes bàsiques d'aquest fitxer podrien tenir una sintaxi similar a la següent:

```
Prob=glcAssign('func',x_L,x_U,Name,A,b_L,b_U,'restriccions',c_L,c_U,[]);
Result=tomRun('ego',Prob);
```

Mitjançant la funció `glcAssign` es crea l'estructura `Prob` del problema *global mixed-integer nonlinear programming (glc)*, en el format *Tomlab*. Les variables que apareixen en la funció

`glcAssign` són les definides anteriorment, a més de la variable `Name`, amb el nom de la funció que s'ha de minimitzar.

Mitjançant la funció `tomRun` s'obté l'estructura `Result`, que inclou els resultats de l'optimització. En la funció esmentada s'han utilitzat com a arguments d'entrada el *solver* utilitzat ('`ego`') i l'estructura `Prob`, generada prèviament amb la funció `glcAssign`.

L'estructura `Result` conté, entre altres resultats, els valors dels paràmetres del controlador pels quals és mínima la funció $f(x)$. Concretament el vector x òptim de paràmetres es podria obtenir amb la dada `Result.x_k`.

Per il·lustrar una informació útil que es pot obtenir de la dada `Result.x_k`, centrem-nos en un cas pràctic: el disseny d'un controlador que té una estructura PID amb filtre en el derivador per al model d'helicòpter, de l'apartat 6.2. Un cop generada l'estructura `Result` amb la metodologia descrita, els valors òptims del controlador es podrien obtenir mitjançant el codi següent:

```
kp=Result.x_k(1,1);  
Ti=Result.x_k(2,1);  
Td=Result.x_k(3,1);  
Tf=Result.x_k(4,1);
```

Tot i que *Tomlab* admet i s'han provat diversos *solvers*, amb el que s'han obtinguts resultats millors, contrastats amb altres mètodes, és '`ego`' (Jones, Schonlau and Welsch 1998)

ANNEX B: Nomenclatura i glossari general

Sense pretensió de ser exhaustiu ni complet, en aquest annex es recullen alguns dels termes i simbologies utilitzats al llarg del text de la memòria de la tesi. Tot i que no se segueix un ordre rigorós, s'ha seguit cert ordre atenent a l'ordre en què es fan servir els termes en els capítols corresponents.

La intencionalitat d'aquest annex és facilitar la comprensió de la terminologia emprada mitjançant una consulta ràpida.

(Capítol 2:)

Intervals:

$$P(\theta, s) = \frac{B(\theta, s)}{A(\theta, s)} \quad \text{planta incerta}$$

X interval real tancat $X = [a, b]$. Consisteix per tant en el conjunt $x = \{x: a \leq x \leq b\}$ de nombres reals entre a i b , ambdós inclosos.

El nombre real x serà un cas particular d'interval, anomenat interval degenerat: $x = [x, x]$

R^n Espai n -dimensional, cada dimensió real

QFT:

$P(\theta, s)$	planta incerta, amb incertesa paramètrica, θ vector de paràmetres incerts
s	variable de Laplace, complexa
t	variable temporal, temps
θ	vector de paràmetres incerts de dimensió p amb els seus valors compresos dins un conjunt compacte $\theta \in \Theta$ d'una caixa tipus, i.e., $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^p \mid \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}\}$, on $\underline{\theta}$ i $\bar{\theta}$ representen les cotes inferior i superior respectivament
j	variable complexa imaginària pura de mòdul unitari
ω	pulsació, domini freqüencial
$P_0(j\omega)$	planta nominal
$B(j\omega)$	contorns, <i>bounds</i> , <i>Horowitz-Sidi bounds</i>
$G(j\omega)$	controlador del llaç
$F(j\omega)$	prefiltre
$H(j\omega)$	sensor amb dinàmica
ω_i	freqüència que interès $\omega_i \in \Omega$
Ω	conjunt de freqüències
$\mathfrak{P}(j\omega_i)$	plantilla de planta, <i>template</i> , $\mathfrak{P}(j\omega_i) = \{P(j\omega_i), \omega_i \in \Omega\}$
Θ	conjunt compacte de paràmetres variables $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^p \mid \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}\}$
$\theta_i (i=1, \dots, p)$	paràmetre incert, pot variar de manera independent en l'interval $[\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$
θ_0	vector de paràmetres de referència, que es considera nominal
$P_0(s) = P(\theta_0, s)$	planta nominal

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} e^{-\tau s} \text{ planta exemple}$$

k	guany estàtic
ζ	coeficient d'esmoreïment
ω_n	pulsació natural
τ	retard temporal

Senyals del sistema: $R(j\omega)$, $W(j\omega)$, $V(j\omega)$, $D(j\omega)$, $N(j\omega)$. La variable que s'ha de controlar és $Y(j\omega)$, l'error és $E(j\omega)$, i el senyal de control, $U(j\omega)$.

$R(j\omega)$ senyal de referència

$W(j\omega)$, $V(j\omega)$, $D(j\omega)$, $N(j\omega)$ perturbacions (incloent-hi el soroll $N(j\omega)$)

$Y(j\omega)$ variable que s'ha de controlar

$E(j\omega)$ error

$U(j\omega)$ senyal de control

$T(j\omega, \alpha)$ funció de transferència del sistema enllaç tancat, $T(j\omega, \theta) = \frac{L(j\omega, \theta)}{1 + L(j\omega, \theta)}$

$L(j\omega, \alpha)$ funció de transferència del sistema enllaç obert, $L(j\omega, \alpha) = P(j\omega, \alpha)G(j\omega)$

$L = PGH$, funció de transferència del sistema enllaç obert, tenint en compte H , cas més general

$L_0(s) = P_0(s)G(s)$ funció de transferència del sistema enllaç obert, amb la planta nominal, o sigui:

$$L_0(j\omega, \alpha_0) = P_0(j\omega, \alpha_0)G(j\omega)$$

$\delta_s(\omega)$ límit superior del mòdul de l'especificació de sensitivitat (*sensitivity specification*),

$$\left| \frac{Y}{D} \right| = \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| < \delta_s(\omega)$$

$\delta_p(\omega)$ límit superior del mòdul de l'especificació de rebuig de perturbacions a l'entrada de la

$$\text{planta (plant input disturbance rejection), } \left| \frac{Y}{V} \right| = \left| \frac{P(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| < \delta_p(\omega)$$

$\delta_m(\omega)$ límit superior del mòdul de l'especificació distància entre la funció de transferència que relaciona la sortida Y i la referència R , i una funció de transferència desitjada $F_m(j\omega)$ (*Model matching specification*)

$$\left| \frac{Y}{R} - F_m \right| = \left| \frac{PGF(j\omega)}{1 + L(j\omega)} - F_m(j\omega) \right| < \delta_m(\omega)$$

$F_m(j\omega)$ funció de transferència òptima o desitjada, entre la sortida Y i la referència R

$\alpha(\omega)$ límit inferior del mòdul de l'especificació de seguiment de consignes o *tracking specification*

$\beta(\omega)$ límit superior del mòdul de l'especificació de seguiment de consignes o *tracking specification*

$$\alpha(\omega) < \left| \frac{Y}{R} \right| = \left| \frac{PGF(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| < \beta(\omega)$$

$\delta_n(\omega)$ límit superior del mòdul de l'especificació que relaciona la sortida de la planta amb el

$$\text{soroll (noise rejection specification), } \left| \frac{Y}{W} \right| = \left| \frac{PG(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| < \delta_n(\omega)$$

$\delta_c(\omega)$	límit superior del mòdul de l'especificació de l'esforç de control (<i>control effort specification</i>) $\left \frac{U}{W} \right = \left \frac{G(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right < \delta_c(\omega)$
u, o, n	tipologia dels <i>bounds</i>
$y(t)$	resposta temporal del sistema
$r(t)$	consigna temporal del sistema
$y_U(t)$	límit per sobre de la resposta temporal del sistema
$y_L(t)$	límit per sota de la resposta temporal del sistema
$T_U(\omega)$	límit per sobre, en mòdul, de la resposta freqüencial del sistema
$T_L(\omega)$	límit per sota, en mòdul, de la resposta freqüencial del sistema
$B_U(\omega)$	límit per sobre, en mòdul, de la resposta freqüencial del sistema, abans d'aplicar-hi el prefiltre.
$B_L(\omega)$	límit per sota, en mòdul, de la resposta freqüencial del sistema, abans d'aplicar-hi el prefiltre

(Capítol 3:)

Especificacions de *tracking*, la mateixa notació que al cap. 2.

$Sys_{up}(s); Sys_{lo}(s); Sys_1(s); Sys_2(s)$ nom dels sistemes en diversos casos, en els exemples motivadors

$S(s)$	sensitivitat, $S(s) = [I + G(s)P(s)]^{-1}$
$T(s)$	sensitivitat complementària, $T(s) = [I + G(s)P(s)]^{-1} G(s)P(s)$
	$S(s) + T(s) = I$

Tècnica de Krishnan i Cruiskshank:

$y(t)$	resposta temporal del sistema
$r(t)$	consigna temporal del sistema
$m(t)$	comportament desitjat de la resposta temporal
$v(t)$	error màxim acceptable de seguiment, domini temporal
$a(t), b(t)$	límits inferior i superior del <i>tracking</i> , domini temporal

$Y(s), R(s), M(s), V(s), A(s), B(s)$ transformades de *Laplace* de les funcions temporals anteriors.

En el domini freqüencial ω : s'hi han canviat a majúscules, igual que en qualsevol domini transformat (en s o en z)

M_p	en sistemes de segon ordre subesmorteïts, sobreimpuls de la sortida en tant per u per a entrades en graó, $M_p = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, 0 < \xi < 1$
t_p	en sistemes de segon ordre subesmorteïts, temps del pic de la sortida, per a entrades en graó, $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$
k, T	guany estàtic i constant de temps per a sistemes de 1r ordre.
k_p, T_i	paràmetres d'un controlador tipus "proporcional-integral" (PI), $G(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_i s})$

PIDf controlador tipus “proporcional-integral-derivatiu, amb filtre en l’acció derivativa”,

$$G(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_f s + 1} \right)$$
 k_p, T_i, T_d, T_f Paràmetres d’un controlador de tipus PIDf

(Capítol 4:)

Existència del controlador, aritmètica intervalar:

\mathbb{R}^n espai n -dimensional
 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ conjunt de punts del pla, \mathbb{R}^2
 $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^2$ conjunt de punts del pla, \mathbb{R}^2
 ε valor numèric petit, idealment $\varepsilon \rightarrow 0$
 \forall operador lògic “per tot”
 \in operador lògic “pertany” (a un conjunt)
 \subset operador lògic “està contingut” (en un conjunt)
 \exists operador lògic “existeix”
 $|$ operador lògic “tal que”
 \wedge operador lògic “i”
 \vee operador lògic “o”
 \neg operador lògic “negació”
 \max operador lògic “màxim de”
 \min operador lògic “mínim de”
 $v_k(\theta, k_c)$ funció polinòmica multivariable en els components dels vectors θ i k_c .
 θ vector de paràmetres incerts de la planta, $\theta \in \Theta$
 Θ conjunt total de les plantes possibles
 k_c vector de paràmetres del controlador
 KC conjunt (limitat) de paràmetres possibles pel controlador, $KC = \{k_c \in \mathbb{R}^g \mid \underline{k}_c \leq k_c \leq \overline{k}_c\}$
 $\underline{k}_c; \overline{k}_c$ vectors que contenen els extrems intervalars límits per sota i per sobre respectivament dels paràmetres del vector de paràmetres del controlador k_c , $\underline{k}_c \leq k_c \leq \overline{k}_c$
 \mathbb{R}^g espai g -dimensional dels paràmetres del controlador.
 KC^* conjunt solució del problema QCSP, $KC^* \subset KC$. Qualsevol $k_c \in KC^*$ és una solució del problema de satisfacció simultània de restriccions.
 KC^*_c conjunt complementari al conjunt de paràmetres que se cerca, KC^*

$P(s) = \frac{k(T_1 s + 1)}{T_2 s + 1}$ model lineal simplificat planta interferòmetre

$G(s) = k_p + k_i/s$ regulador tipus PI

$\delta_c(\omega)$, $\delta_1(\omega)$ i $\delta_s(\omega)$ valors màxims dels mòduls en les especificacions d’esforç de control, d’estabilitat robusta i de rebuig de pertorbacions a la sortida de la planta

$|T(\theta, j\omega)|$, $|T_D(\theta, j\omega)|$, $|T_U(\theta, j\omega)|$ expressions de les funcions de transferència de l’estabilitat absoluta, per al rebuig de pertorbacions i per a l’esforç de control.

k_p, k_i paràmetres del controlador PI en les figures de Proj2D

(Capítol 5:)

Disseny automàtic del regulador, ALS

$$P(\theta, s) = \frac{B(\theta, s)}{A(\theta, s)} \quad \text{planta incerta}$$

$$\theta \in \Theta \quad \text{vector de paràmetres incerts de la planta, } \Theta = \{ \theta \in \mathbb{R}^p \mid \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta} \}$$

$$G(k_c, s) = \frac{B_c(k_c, s)}{A_c(k_c, s)} \quad \text{controlador}$$

$$k_c \quad \text{vector de paràmetres incerts del controlador}$$

$$L(\theta, j\omega) = P(\theta, j\omega)G(j\omega) \quad \text{funció de transferència nominal en llaç obert}$$

$$|T_U(\theta, j\omega)| = |G(j\omega)T_D(\theta, j\omega)| \leq \delta_c(\omega) \quad \text{especificació d'esforç de control}$$

$$T_D(\theta, j\omega) = \frac{1}{1+L(\theta, j\omega)}, \quad |T_D(\theta, j\omega)| \leq \delta_s(\omega) \quad \text{especificació d'atenuació de perturbacions a la sortida de la planta}$$

$$|T(\theta, j\omega)| = \left| \frac{L(\theta, j\omega)}{1+L(\theta, j\omega)} \right| \leq \delta_1(\omega) \quad \text{especificació d'estabilitat robusta}$$

$$E(\theta, k_c) = \int_0^\infty |T_U(\theta, \omega, k_c)|^2 d\omega \quad \text{energia de la resposta impulsional de l'esforç de control}$$

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} E(\theta, k_c) d\theta = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \int_0^\infty |T_U(\theta, \omega, k_c)|^2 d\omega d\theta \quad \text{energia per a la família sencera de plantes}$$

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} E(\theta, k_c) d\theta \approx \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{nw} |T_U(\theta_i, \omega_j, k_c)|^2 \Delta\omega \Delta\theta \quad \text{aproximació discreta de l'energia per a la família sencera de plantes}$$

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{nw} \quad \text{conjunt discret de freqüències}$$

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{np} \quad \text{conjunt discret de paràmetres incerts de la planta}$$

$$\Theta = \{ \theta_i \mid \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{np} \}$$

$$KC = \{ k_c \in \mathbb{R}^g \mid \underline{k}_c \leq k_c \leq \bar{k}_c \} \quad \text{conjunt inicial limitat de paràmetres del controlador}$$

$$\min_{k_c} \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{nw} |T_U(\theta_i, \omega_j, k_c)|^2 \Delta\omega \Delta\theta \quad \text{expressió resultat de la discretització, que cal minimitzar}$$

$$|T(\theta_i, \omega_j, k_c)| \leq \delta_1(\omega_j) \quad \text{restricció corresponent a l'especificació d'estabilitat robusta}$$

$$|T_D(\theta_i, \omega_j, k_c)| \leq \delta_s(\omega_j) \quad \text{restricció corresponent a l'especificació de sensibilitat}$$

$$|G(\omega_j)T_D(\theta_i, \omega_j, k_c)| \leq \delta_c(\omega_j) \quad \text{restricció corresponent a l'especificació de l'acció de control limitada}$$

$$\underline{k}_c \leq k_c \leq \bar{k}_c \quad \text{restricció per als paràmetres del controlador, dins d'un rang predeterminat}$$

Panoràmica de l'optimització

$$f(\mathbf{x}) \quad \text{funció que s'ha d'optimitzar}$$

$$g_i(\mathbf{x}) \quad (i=1, \dots, m) \quad \text{funcions restriccions de desigualtat: } g_i(\mathbf{x}) \leq 0$$

$$h_j(\mathbf{x}) \quad (j=1, \dots, p) \quad \text{funcions restriccions d'igualtat: } h_j(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{x} \in X$$

$$f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p \quad \text{funcions definides sobre un espai } n\text{-dimensional } E_n$$

X	subconjunt de E_n . El conjunt X especifica els límits inferiors i superiors de les variables x_1, x_2, \dots, x_n
\mathbf{x}	vector d' n components x_1, x_2, \dots, x_n
\mathbf{x}_s	punt solució al problema d'optimització, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_s), \forall \mathbf{x} \in X$

(Capítol 6:)

Aplicació a l'interferòmetre:

$FI(z)$	filtre digital de l'interferòmetre
$P(\theta, z)$	model de planta digital de l'interferòmetre
$ T(z, k) $	especificació d'estabilitat, amb paràmetre variable k del model $ T(z, k) = \left \frac{L(z, k)}{1 + L(z, k)} \right < 3dB$
$ T_D(z, k) $	especificació de rebuig de pertorbacions (sensitivitat), amb paràmetre variable k del model $ T_D(z, k) = \left \frac{1}{1 + L(z, k)} \right < -34dB$
$ T_U(z, k) $	especificació de robustesa en l'esforç de control, $ T_U(z, k) = \left \frac{G(z)}{1 + L(z, k)} \right < 14dB$
$\left \frac{G(z) \frac{z-1}{T_z}}{1 + L(z, k)} \right < 40dB$	especificació de limitació de la derivada
T	període de mostreig
z	variable complexa de la transformada z
$G(z)$	controlador digital

Aplicació a l'helicòpter de laboratori:

$\left \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \right \leq \delta_1(\omega) = 2$	
$\left \frac{Y(j\omega)}{D(j\omega)} \right \leq \delta_s(\omega) = \frac{2(j\omega + 0.01)(j\omega + 0.3)}{((j\omega)^2 + 4j\omega + 4)}$	
$\left \frac{U(j\omega)}{W(j\omega)} \right \leq \delta_c(\omega) = 5000$	
$k_p \in [10, 300], T_i \in [1, 20], T_d \in [0.25, 5], T_f \in [0.025, 0.5]$	$u(t) = k_p \left(e_p(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de_d(t)}{dt} \right)$
PI-Df	estructura alternativa del controlador, l'acció derivativa degudament filtrada (Df) és respecte a la sortida, i les altres accions (P i I) es fan respecte a l'error clàssic $e(t)$
I-PDf	estructura alternativa de controlador, en què les accions proporcional (P) i derivativa filtrada (Df) tenen en compte la sortida $y(t)$, en comptes de l'error clàssic $e(t)$, i la integral es fa respecte a l'error clàssic $e(t)$
$y(t)$	resposta temporal del sistema
$r(t)$	consigna temporal del sistema

$u(t)$ acció de control del sistema, variable temporal
 $e(t)$ error del sistema, variable temporal

Acrònims, abreviacions, glossari (tota la memòria):

QFT *Quantitative Feedback Theory*
PID *Proportional Integral Derivative Controller*
PIDf *Proportional Integral Derivative Controller with a filter in the derivative action*
ALS *Automatic Loop Shaping*
LTI *Linear Time Invariant System*
Wrapping
Branch and Bound = separació i fitació = ramificació i poda
Tracking = seguiment de consigna
pitch català: *capcineig*, castellà: *cabeceo*
roll català: *balanceig*, castellà: *alabeo, balanceo*
yaw català: *guinyada*, castellà: *guiñada*

Interval
Incertesa
Bounds
Templates
Loop-shaping
Robust Stability Specification
Sensitivity Specification
Plant Input Disturbance Rejection
Model Matching Specification
Tracking Specification
Noise Rejection specification
Control Effort Specification

MPIS *Multi Polynomial Inequalities*, desigualtats polinòmiques multivariables
QCSP *Quantified Constrains Satisfaction Problem*, problema de satisfacció generalitzada o quantificada de restriccions.

GA algorisme genètic

$|T(\theta, j\omega)|$, $|T_D(\theta, j\omega)|$, $|T_U(\theta, j\omega)|$ expressions de les funcions de transferència de l'estabilitat absoluta, per al rebuig de perturbacions a la sortida de la planta i per a l'esforç de control.