



Universitat Autònoma de Barcelona

**ADVERTIMENT.** L'accés als continguts d'aquesta tesi queda condicionat a l'acceptació de les condicions d'ús establertes per la següent llicència Creative Commons:  [http://cat.creativecommons.org/?page\\_id=184](http://cat.creativecommons.org/?page_id=184)

**ADVERTENCIA.** El acceso a los contenidos de esta tesis queda condicionado a la aceptación de las condiciones de uso establecidas por la siguiente licencia Creative Commons:  <http://es.creativecommons.org/blog/licencias/>

**WARNING.** The access to the contents of this doctoral thesis it is limited to the acceptance of the use conditions set by the following Creative Commons license:  <https://creativecommons.org/licenses/?lang=en>



Universitat Autònoma de Barcelona

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE  
LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

Doctorat en DIDÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES I DE LES  
CIÈNCIES

**Aprenentatge i comprensió dels nombres  
enters: Estudi de significats construïts  
per alumnes de 15 i 16 anys**

Doctorand:

Josep Maynou i Terri

Directora: Dra. Núria Planas Raig

Bellaterra, juny de 2017

Dra. Núria Planas Raig, professora del Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, amb seu a la Facultat de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona.

FAIG CONSTAR QUE:

La Investigació realitzada sota la direcció de la signant pel Llicenciat Josep Maynou i Terri, amb el títol *Aprenentatge i comprensió dels nombres enters: Estudi de significats construïts per alumnes de 15 i 16 anys*, reuneix tots els requisits científics, metodològics i formals exigits per la legislació vigent per a la seva Lectura i Defensa pública davant la corresponent Comissió, per a l'obtenció del Grau de Doctor en Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències per la Universitat Autònoma de Barcelona. Per tant, considerem procedent autoritzar la seva presentació.

Bellaterra, 20 de juny de 2017

Signat:

Signat:

Dra. Núria Planas Raig

Josep Maynou i Terri





# Agraïments

En el moment de fer una mirada cap enrere per tal de recordar tots aquells que han contribuït, de maneres molt diverses, a l'elaboració d'aquesta tesi se'm fa difícil no passar per alt ningú. M'agradaria ser just a l'hora d'esmentar tothom i no deixar-me cap de les persones que m'han acompanyat en aquest camí. En cap cas tampoc seguiré cap tipus d'ordre en funció de la importància de les aportacions. Tots han estat essencials en el procés.

Penso que en primer lloc he d'esmentar la UAB, que m'ha permès realitzar aquesta tesi sota el seu aixopluc. En particular vull esmentar el grup GIPEAM i personalitzar-ho en totes aquelles persones que de manera directa m'ha acompanyat, aconsellat i guiat. En primer lloc vull agrair al Dr. Josep Maria Fortuny el seu acolliment i acompanyament en la primera fase de la recerca. Als Doctors Romà Pujol i Lluís Bibiloni per les seves indicacions i pel temps que van dedicar per guiar-me en els camins que em van portar a endinsar-me en els nombres enters, la seva evolució històrica, el seu ensenyament i l'aprenentatge. En aquest punt tampoc em vull oblidar del professorat i dels companys de màster del curs 2012-13. Finalment vull agrair a la Dra. Núria Planas la seva paciència, el seu acompanyament i totes les correccions i idees que han portat a poder realitzar aquest treball de tesi. Crec que la seva aportació ha estat definitiva per poder arribar a port.

En segon lloc vull agrair a la direcció de l'Escola Pia de Mataró, en especial als directors pedagògics que des del curs 2011-12 han estat els responsables de la Secundària: la senyora Nerea Briongos, que també ha il·lustrat la portada. La senyora Sandra Mañé i el senyor Lluís Ballarín, que han facilitat la meua investigació, tant permetent recollir dades a la pròpia escola com facilitant-me la possibilitat d'assistir a seminaris, entrevistes i seguiments relacionats amb la tesi. En aquest punt tampoc vull oblidar als dos gerents de l'escola que també han estat receptius a les meves peticions, els senyors David Gallemí i Toni Aguilar. I no seria just oblidar tots els meus companys i companyes, que han cobert les meves absències, sempre amb un somriure.

Per acabar no voldria acabar sense fer esments dels meus pares i els valors que m'han donat. Del meu pare les ganes de treballar sense esperar res a canvi només esperant la satisfacció de la feina ben feta; i el no defallir davant de les dificultats. De la meua mare les ganes d'aprendre, de saber, de gaudir de tot allò que em podia fer créixer intel·lectualment. Des d'aquestes pàgines els voldria enviar l'abraçada més tendra que sigui capaç de brindar. Finalment cal recordar la Begoña, la meua dóna, i la Daniela, la meua filla, que va néixer en ple procés de construcció d'aquesta tesi. La Begoña ha estat qui em va donar l'empenta necessària per reprendre el que havia abandonat feia anys, continuar la meua formació. La Daniela ha estat un nou incentiu i una nova il·lusió per treballar cada dia.

De tot cor, gràcies a tots.



# Resum

La recerca de tesi doctoral, “Aprentatge i comprensió dels nombres enters: Estudi de significats construïts per alumnes de 15 i 16 anys”, s’inscriu en l’àrea de coneixement d’educació matemàtica, dins del domini d’estudis sobre l’aprenentatge matemàtic dels estudiants. El context de la recerca és un grup d’estudiants d’una escola catalana de secundària en el seu procés d’aprenentatge dels nombres enters. Aquest és un context empíric proper que serveix per comprendre els significats que els estudiants d’aquestes edats construeixen al voltant dels nombres enters, les seves propietats i operacions.

La pregunta que guia la recerca és la següent: “Com comprenen els nombres enters un grup d’alumnes de tercer d’educació secundària obligatòria?” Per tal de donar resposta a la pregunta, es planteja una estratègia d’anàlisi centrada en l’assoliment dels següents objectius: 1) Identificar significats atribuïts als nombres enters atenent a la seva estructura i a la polisèmia del signe  $-$ ; 2) Relacionar alguns d’aquests significats mitjançant la construcció de patrons de comprensió. S’infereix la rellevància donada a la diversitat de significats del signe  $-$ , d’una banda, i a la caracterització d’aspectes de la comprensió dels estudiants, de l’altra. L’estratègia d’anàlisi segueix una lògica qualitativa en la interpretació de respostes a qüestionaris i a entrevistes basades en qüestionaris.

Els supòsits per al disseny de qüestionaris i d’entrevistes es prenen de la literatura en l’àmbit de l’ensenyament i aprenentatge dels nombres enters. Es té també en compte el coneixement de la trajectòria curricular seguida pels alumnes participants fins el moment de la recollida de dades, molt particularment dels continguts vinculats a la introducció dels nombres enters i a la seva progressiva consolidació. Amb tot, es pensen preguntes que ajudin a refinar, a confirmar i eventualment a rebatre les expectatives sobre el grau de comprensió d’aquests continguts. En aquest punt, doncs, el disseny dels instruments de recollida de dades és una fase clau de la recerca.

Després de l’anàlisi específica de qüestionaris i d’entrevistes i de l’anàlisi creuada i global posterior, s’obtenen resultats sobre aspectes dels nombres enters que semblen especialment difícils de comprendre. Hi ha, per exemple, estudiants que desenvolupen maneres de re-significar nombres enters negatius a nombres naturals no enters a fi de simplificar tècniques d’operació, amb el corresponent risc de pèrdua del significat original de la tasca. En general, hi ha una tendència a no utilitzar llenguatge algebraic en aquelles tasques on els nombres enters es poden representar així. També hi ha una tendència generalitzada a un ús matemàticament ambigu del zero. Aquests i d’altres resultats són el punt de partida de l’elaboració de patrons de comprensió.

La caracterització de patrons de comprensió dels nombres enters és la principal aportació de la recerca. Per a l’elaboració de patrons, es combinen fonamentadament resultats preliminars sobre la comprensió de continguts específics vinculats als nombres enters (origen, signe  $-$ , llenguatge algebraic, etc.). S’arriba a un total de 12 patrons que informen sobre 12 estats dins de trajectòries d’aprenentatge. Malgrat que els patrons són un retrat situat en un temps concret, esdevenen una eina teòrica útil a l’hora d’entendre la varietat d’estats possibles en l’aprenentatge dels nombres enters.





# Abstract

The PhD Dissertation “Learning and understanding integers: Study of the meanings constructed by students aged 15 and 16”, is situated in the area of mathematics education research, particularly in the domain of student mathematics learning. The research context is a group of students of a Catalan secondary school in their processes of learning integers. The undertaken premise is that through such an empirical close context, we can examine the diverse meanings that students of these ages produce for the numerical set of integers, their properties and their operations.

The guiding question of the investigation is as follows: “How do 9th graders understand integers?” In order to answer it, an analytical strategy is carried out on the basis of two objectives: 1) To identify meanings related to the set of integers according to their structure and the polysemy of the minus sign; 2) To put these meanings into relation by building, when possible, patterns of understanding. It is inferred the relevance given to the plurality of meanings for the minus sign, and on the other hand, the examination of issues concerning student understanding. The analytical strategy follows a qualitative logic of inquiry in the interpretation of the answers to questionnaires and questionnaire-based interviews.

The assumptions in the design of questionnaires and interviews draw on specific literature in the field of teaching and learning integers. It is also taken into account the curricular path followed by the participant students, specially of the taught contents during the introduction and development of integers at school. Nonetheless, the final questions are thought of as coherent within the 9th grade in that they are expected to help clarify, confirm and eventually produce new insights into student understanding. Hence, the data collecting tools are fundamental.

Following the analysis of questionnaires and interviews as well as the successive cross and global analyses, we come to findings about difficulties in the learning of integers. There are, for example, students who develop ways to redefine negative integer numbers into natural non-integer numbers in order to simplify operating techniques, with the consequent risk of losing the meanings in the original task. More generally, there is a tendency to avoid algebraic language in the research tasks where integers can be represented in this language. Another tendency is the use of the number zero in the middle of ambiguous languages. The totality of findings are the point of departure for the development of patterns of understanding.

The characterization of patterns of understanding integers is the main contribution of the research. To develop the patterns, preliminary findings about the meanings for specific contents related to integers (origin, minus sign, algebraic language, etc.), are grounded combined. At the end, twelve patterns are constructed which respectively correspond to twelve positions in the students processes of learning. Even though the patterns are a concrete position of a specific time in the learning, they become a useful theoretical tool in the comprehension of the variety of possible positions along the student learning processes of integers.



# Índex

<b>Introducció</b>	<b>1</b>
<b>1 Marc teòric</b>	<b>7</b>
1.1 Epistemologia històrica dels nombres enters . . . . .	7
1.1.1 Contextualització . . . . .	7
1.1.2 Breu situació cronològica . . . . .	9
1.1.3 Models d'ensenyament dels nombres enters . . . . .	10
1.1.4 Significats atribuïbles al signe $-$ . . . . .	16
1.1.5 El zero a la recta numèrica . . . . .	17
1.2 Aprenentatge i ensenyament dels nombres enters . . . . .	18
1.2.1 Arcavi i Bruckheimer (1981) . . . . .	18
1.2.2 Bruno i Martínón (1999) . . . . .	22
1.2.3 Pujol (2008) . . . . .	29
1.2.4 Vlassis (2008) . . . . .	47
1.2.5 Bofferding (2014) . . . . .	50
<b>2 Qüestionaris, entrevistes i recollida de dades</b>	<b>57</b>
2.1 Supòsit i procediment de disseny de qüestionaris . . . . .	57
2.2 Disseny, resolució i implementació dels qüestionaris . . . . .	58
2.2.1 Enters . . . . .	58
2.2.2 Cronologia de Catalunya . . . . .	60
2.2.3 Creuament de qüestionaris . . . . .	62
2.2.4 Qüestionari Enters . . . . .	64
2.2.5 Respostes del qüestionari Enters . . . . .	65
2.2.6 Qüestionari Cronologia de Catalunya . . . . .	67
2.2.7 Respostes del qüestionari Cronologia de Catalunya . . . . .	69
2.3 Recollida de dades principals . . . . .	70
2.4 Recollida de dades complementàries . . . . .	73
2.4.1 Disseny i selecció d'entrevistats . . . . .	73
2.4.2 Implementació d'entrevistes . . . . .	73
<b>3 Respostes dels qüestionaris i anàlisi</b>	<b>75</b>
3.1 Resultats qualitius i discussió . . . . .	76
3.1.1 Sobre els Enters . . . . .	76
3.1.2 Sobre la Cronologia de Catalunya . . . . .	102
3.2 Resultats quantitius i discussió . . . . .	119

---

<b>4</b>	<b>Respostes de les entrevistes i anàlisi creuada</b>	<b>123</b>
4.1	Respecte al qüestionari dels Enters . . . . .	123
4.1.1	Organització de les respostes de les entrevistes pel grup 3A . . . . .	124
4.1.2	Organització de les respostes de les entrevistes pel grup 3E . . . . .	145
4.1.3	Revisió i contrast de resultats . . . . .	164
4.2	Respecte al qüestionari de la Cronologia de Catalunya . . . . .	165
4.2.1	Organització de les respostes de les entrevistes pel grup 3A . . . . .	165
4.2.2	Organització de les respostes de les entrevistes pel grup 3E . . . . .	182
4.2.3	Revisió i contrast de resultats . . . . .	197
<b>5</b>	<b>Patrons de comprensió dels estudiants</b>	<b>199</b>
5.1	Resultats de l'anàlisi creuada dels Enters . . . . .	199
5.2	Resultats de l'anàlisi creuada de la Cronologia de Catalunya . . . . .	222
5.3	Construcció de patrons de comprensió . . . . .	247
<b>6</b>	<b>Conclusions i implicacions</b>	<b>249</b>
6.1	Conclusions . . . . .	249
6.2	Prospectiva i implicacions . . . . .	255
6.2.1	Prospectiva de recerca . . . . .	255
6.2.2	Implicacions didàctiques . . . . .	256
	<b>Referències bibliogràfiques</b>	<b>259</b>

# Figures

1.1	Rectangles de Klein. . . . .	15
1.2	Recta numèrica. . . . .	17
1.3	Enters Operacionss. . . . .	17
1.4	Dedució del producte per negatiu. . . . .	20
2.1	Edifici de 27 pisos: 20 sobre terra i 7 subterranis. . . . .	65
2.2	Part de la recta numèrica on representem l'origen i dues dates simètriques. . . . .	70
3.1	Respostes del qüestionari Enters, graf de la Pregunta 1. . . . .	77
3.2	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 2a. . . . .	79
3.3	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 2b. . . . .	80
3.4	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 2c. . . . .	80
3.5	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 2d. . . . .	81
3.6	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 2e. . . . .	81
3.7	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 3a. . . . .	84
3.8	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 3b. . . . .	85
3.9	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 3c. . . . .	85
3.10	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 3d. . . . .	86
3.11	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 3e. . . . .	86
3.12	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 3f. . . . .	87
3.13	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 4a. . . . .	89
3.14	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 4b. . . . .	90
3.15	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 4c. . . . .	91
3.16	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 4d. . . . .	92
3.17	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 5. . . . .	94
3.18	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 6a. . . . .	97
3.19	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 6b. . . . .	99
3.20	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 6c. . . . .	100
3.21	Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 6d. . . . .	101
3.22	Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 1. . . . .	103
3.23	Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 2. . . . .	104
3.24	Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 3. . . . .	105
3.25	Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 4a. . . . .	108
3.26	Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 4b. . . . .	108
3.27	Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 5a. . . . .	110
3.28	Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 5b. . . . .	111
3.29	Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 5c. . . . .	112

3.30	Part de la recta numèrica on representem l'origen i dues dates simètriques. . . . .	112
3.31	Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 5d. . . . .	113
3.32	Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 6a. . . . .	115
3.33	Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 6b. . . . .	116
3.34	Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 6c. . . . .	117
3.35	Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 7. . . . .	118
5.1	Evidència P1 . . . . .	200
5.2	Evidència P2 . . . . .	201
5.3	Evidència P3 . . . . .	203
5.4	Evidència P4 . . . . .	204
5.5	Evidència P4(I) . . . . .	205
5.6	Evidència P4(II) . . . . .	206
5.7	Evidència P4(III) . . . . .	207
5.8	Evidència P4(IV) . . . . .	208
5.9	Evidència P6(I) . . . . .	209
5.10	Evidència P6(II) . . . . .	211
5.11	Evidència P6(III) . . . . .	212
5.12	Evidència P6(IV) . . . . .	213
5.13	Evidència P6(V) . . . . .	214
5.14	Evidència P1 . . . . .	215
5.15	Evidència P5(I) . . . . .	217
5.16	Evidència P5(II) . . . . .	218
5.17	Evidència P5(III) . . . . .	220
5.18	Evidència P5(IV) . . . . .	221
5.19	Evidència P5C(I) . . . . .	223
5.20	Evidència P5C(II) . . . . .	223
5.21	Evidència P5C(III) . . . . .	223
5.22	Evidència P5C(IV) . . . . .	224
5.23	Evidència P5C(V) . . . . .	225
5.24	Evidència P5C(VI) . . . . .	225
5.25	Evidència P5C(VII) . . . . .	226
5.26	Evidència P5C(VIII) . . . . .	226
5.27	Evidència P12C(I) . . . . .	228
5.28	Evidència P12C(II) . . . . .	228
5.29	Evidència P5C(III) . . . . .	228
5.30	Evidència P3C(I) . . . . .	230
5.31	Evidència P3C(II) . . . . .	230
5.32	Evidència P3C(III) . . . . .	230
5.33	Evidència P3C(IV) . . . . .	231
5.34	Evidència P3C(V) . . . . .	231
5.35	Evidència P3C(VI) . . . . .	231
5.36	Evidència P3C(VII) . . . . .	231
5.37	Evidència P4C(I) . . . . .	236
5.38	Evidència P4C(II) . . . . .	236
5.39	Evidència P4C(III) . . . . .	236
5.40	Evidència P4C(IV) . . . . .	236
5.41	Evidència P4C(V) . . . . .	237
5.42	Evidència P7C(I) . . . . .	239

---

5.43	Evidència P7C(II)	239
5.44	Evidència P7C(III)	239
5.45	Evidència P7C(IV)	240
5.46	Evidència P6C(I)	241
5.47	Evidència P6C(II)	242
5.48	Evidència P6C(III)	242
5.49	Evidència P6C(IV)	242
5.50	Evidència P6C(V)	243
5.51	Evidència P6C(VI)	243
5.52	Evidència P6C(VII)	244
5.53	Evidència P6C(VIII)	244
6.1	Context teòric de comprensió de $\mathbb{Z}$ .	250
6.2	Context teòric de comprensió de l'aprenent de $\mathbb{Z}$ .	253





# Taules

1.1	Classificació dels alumnes segons el grau de comprensió. . . . .	29
1.2	Significats atribuïbles al signe “-”. . . . .	48
1.3	Resultats de les entrevistes de Vlassis. . . . .	49
2.1	Propòsits de cada pregunta al qüestionari Enters. . . . .	63
2.2	Propòsits de cada pregunta al qüestionari Cronologia de Catalunya. . . . .	63
3.1	Ventall de respostes a la pregunta 1 del qüestionari Enters. . . . .	77
3.2	Ventall de respostes a la pregunta 2 del qüestionari Enters. . . . .	79
3.3	Ventall de respostes a la pregunta 3 del qüestionari Enters. . . . .	83
3.4	Ventall de respostes a la pregunta 4 del qüestionari Enters. . . . .	89
3.5	Ventall de respostes a la pregunta 5 del qüestionari Enters. . . . .	93
3.6	Ventall de respostes a la pregunta 6 del qüestionari Enters. . . . .	96
3.7	Ventall de respostes a la pregunta 1 del qüestionari Cronologia. . . . .	102
3.8	Ventall de respostes a la pregunta 2 del qüestionari Cronologia. . . . .	103
3.9	Ventall de respostes a la pregunta 3 del qüestionari Cronologia. . . . .	105
3.10	Ventall de respostes a la pregunta 4 del qüestionari Cronologia. . . . .	107
3.11	Ventall de respostes a la pregunta 5 del qüestionari Cronologia. . . . .	110
3.12	Ventall de respostes a la pregunta 6 del qüestionari Cronologia. . . . .	114
3.13	Ventall de respostes a la pregunta 7 del qüestionari Cronologia. . . . .	118
3.14	Resultats quantitius Enters. . . . .	120
3.15	Resultats quantitius Cronologia. . . . .	121
3.16	Resultats quantitius comparats. . . . .	122
4.1	G.3A_G1_A1 . . . . .	125
4.2	G.3A_G2_A1 . . . . .	128
4.3	G.3A_G3_A1 . . . . .	131
4.4	G.3A_G4_A1 . . . . .	133
4.5	G.3A_G5_A1 . . . . .	136
4.6	G.3A_G6_A1 . . . . .	139
4.7	G.3A_G7_A1 . . . . .	141
4.8	G.3A_G8_A1 . . . . .	144
4.9	G.3E_G1_A1 . . . . .	147
4.10	G.3E_G2_A1 . . . . .	150
4.11	G.3E_G3_A1 . . . . .	153
4.12	G.3E_G4_A1 . . . . .	156
4.13	G.3E_G5_A1 . . . . .	159
4.14	G.3E_G6_A1 . . . . .	161

---

4.15	G.3E_G7_A1	163
4.16	G.3A_G1_A2_C	166
4.17	G.3A_G2_A2_C	169
4.18	G.3A_G3_A1_C	171
4.19	G.3A_G4_A2_C	173
4.20	G.3A_G5_A1_C	176
4.21	G.3A_G6_A1_C	178
4.22	G.3A_G7_A1_C	179
4.23	G.3A_G8_A1_C	181
4.24	G.3E_G1_A2_C	184
4.25	G.3E_G2_A1_C	186
4.26	G.3E_G3_A1_C	188
4.27	G.3E_G4_A2_C	190
4.28	G.3E_G5_A2_C	193
4.29	G.3E_G6_A2_C	194
4.30	G.3E_G7_A2_C	196





# Introducció

El motiu principal per tal d'arrencar una investigació sobre l'aprenentatge dels nombres enters i els procediments que els involucren rau en l'observació dels alumnes de secundària i batxillerat, de l'Escola Pia Santa Anna de Mataró a qui he fet classe durant els últims vint anys. Vaig començar donant classe, principalment, a alumnes de 3r ESO, 4t ESO, 1r BAT i 2n BAT. Tot i haver estat dos anys, a l'inici de la meua carrera docent a 1r i 2n ESO, el pas per aquests cursos va ser anecdòtic i no va despertar en mi cap tipus d'atenció especial en els processos d'ensenyament i aprenentatge ni en la valoració del que aprenien els alumnes. Això no respon a manca d'interès ni d'entusiasme per transmetre ni per motivar als meus alumnes en aquella època sinó per la meua manca de perspectiva a l'hora de valorar la durabilitat i la qualitat del que els alumnes havien treballat a l'aula en relació als nombres enters.

Uns deu anys després vaig tenir l'oportunitat de treballar un parell d'anys combinant els quatre cursos d'ESO i els de Batxillerat. És en aquest moment que em començo a plantejar que una part important dels alumnes no consoliden els conceptes i procediments que fan referència a l'ús dels nombres enters. Vaig començar a observar que els alumnes a 1r d'ESO mostraven força dificultats a l'hora de fer operacions amb nombres enters, especialment a l'hora de sumar negatius amb negatius i negatius amb positius. Aquestes dificultats s'incrementaven quan restaven nombres i finalment la confusió que, en alguns d'ells, produïa la famosa regla dels signes.

Tots aquests aspectes, lluny de millorar a mida que passaven els cursos, es reproduïen quan l'ús dels nombres enters pren un paper secundari. Per exemple en les operacions combinades amb nombres racionals, les expressions algebraïques i les equacions. Tot i que una part de l'alumnat sí anava assolint el seu ús, una altra part no ho feia. Tenint la seguretat que tots havien treballat de manera similar la matèria, el seu assoliment era força divers i des del meu punt de vista poc satisfactori. Això em va portar a qüestionar, d'una banda, la manera de treballar-los i, d'una altra, si realment hi havia algun motiu potent darrera dels enters que els feia difícils d'assolir per a una bona part de l'alumnat.

Primer em vaig plantejar el fet de proposar alguna activitat més lúdica per treballar-los, després, si la introducció dels enters planteja un punt més d'abstracció que és complicat d'assolir per una bona part dels nois i noies. Durant el treball de màster previ a aquesta investigació vaig treballar aquests aspectes, Maynou (2013). Els resultats no van ser conclouents però el treball em va permetre prendre contacte amb bibliografia sobre l'aprenentatge i l'ensenyament dels enters. Aquest contacte em va portar a conèixer els treballs d'Abraham Arcavi, Lluís Bibiloni, Alicia Bruno, Eva Cid, Jordi Deulofeu, Bernardo Gómez, Cecilia Kilhamn, Morris Kline, Romà Pujol i d'altres autors recollits a la bibliografia. De la lectura dels seus treballs he pogut constatar que l'aprenentatge i ensenyament dels nombres enters no és una qüestió trivial sinó que és un problema real des dels seus orígens. Fins a finals del segle XIX molts matemàtics de prestigi no consideraven vàlids els resultats negatius de determinades equacions i problemes. La introducció dels nombres negatius als currículums de matemàtiques va resultar complex i controvertit. En

la seva Tesi doctoral Romà Pujol (2008) afirma que l'ensenyament dels nombres enters "és un problema no resolt". Al llarg d'aquests anys de recerca he constatat que per la majoria del professorat amb qui convisc, dia a dia, no ho veuen com un problema sinó com quelcom que anirà caient pel seu propi pes. Per la meua part, penso que, estem davant d'un problema que cal afrontar, analitzar i seguir treballant per aconseguir que els nostres alumnes assoleixin un grau de comprensió suficient per poder afrontar tots els cursos de secundària i els post-obligatoris que decideixin fer. La investigació s'emmarca dins de les línies citades per Gómez (2014) en relació a la didàctica de les matemàtiques i a la controvèrsia que genera.

Un cop començada la recerca, les indicacions de la meua directora de tesi, la Doctora Núria Planas, em van conduir a donar un nou enfocament a la recerca. Més des del punt de vista de l'aplicació, dels nombres enters, a la interpretació i resolució de problemes centrats en la vida quotidiana. Això em permetia encarar amb més precisió alguns dels fets subjacents en l'ús que les noies i els nois fan dels enters:

- El paper del zero.
- La transformació de problemes que es poden plantejar en termes de nombres negatius, només en termes de nombres naturals especificant el significat dels resultats de forma verbal.
- La polisèmia del signe "-".

Els dos qüestionaris dissenyats per tal de recollir la informació, Enters i Cronologia de Catalunya, van en la direcció d'obtenir informació relacionada amb aquests punts abans d'abordar el plantejament de problemes en termes algebraics utilitzant els nombres enters. La pregunta d'investigació que ens plantegem respondre és:

### **"Com comprenen els nombres enters un grup d'alumnes de tercer d'ESO?"**

En el moment de procedir a l'anàlisi de dades cal establir una sèrie d'elements que ens permetin fer-ne un estudi ordenat i tan objectiu com sigui possible. En aquest sentit sembla coherent establir una pauta de respostes "correctes", és a dir, aquelles que a priori s'havien pensat com a matemàticament adequades quan es van elaborar els qüestionaris. Això no vol dir que, parlant en funció dels resultats, altres respostes es puguin considerar correctes però en el nostre estudi no responen a un ús matemàtic dels nombres enters i dels conceptes que els involucren. De tota manera afegirem els comentaris oportuns en cada una de les valoracions de les respostes donades en cada pregunta i en cada apartat, aclarint perquè no es dona un cent per cent de valoració a la resposta. En aquesta línia un exemple del que podem considerar un recurs per evitar una manipulació purament matemàtica dels nombres enters és el fet d'afegir dC o aC a un nombre en lloc dels signes + i/o -, o bé de fer un ús d'operacions de suma o resta de negatius evitant posar el signe i donant la qualificació del resultat. A la vida quotidiana aquesta manera de fer és plenament vàlida. Però quan parlem de l'assoliment de domini respecte l'ús dels nombres enters, aquesta manera de fer pot provocar conflicte quan introduïm situacions on s'involucre l'àlgebra. Al llarg d'aquesta investigació volem aprofundir sobre el grau de comprensió, a càrrec dels alumnes, dels nombres enters a l'aula de secundària.

Les preguntes dels dos qüestionaris estan orientades a saber quin és el grau de comprensió que mostren els alumnes de 3r ESO, de l'Escola Pia Santa Anna de Mataró, dels conceptes relatius als nombres enters després del tercer any de treballar-los. Se'ls introdueixen a 1r ESO (exemples quotidians, significat, representació gràfica, operacions bàsiques (+, -, ·, /), manipulació de signes i problemes senzills. Es repassen a 2n ESO tots aquests aspectes i s'incorporen operacions combinades més complexes, potències enteres, fraccions amb operacions

enteres i finalment aplicació a l'àlgebra i equacions de primer grau amb una incògnita. A 3r ESO no es treballen específicament però cal aplicar conceptes relatius als nombres enters en moltes ocasions: expressions algebraiques, equacions, polinomis ...

En els capítols següents desenvoluparem l'anàlisi de les dades obtingudes en els qüestionaris per tal de valorar el grau de comprensió, que els grups participants mostren, dels conceptes relatius als nombres enters en situacions on es poden utilitzar. En el segon capítol descriurem els dos qüestionaris utilitzats (Enters i Cronologia de Catalunya), el tipus de dades que es volia recollir amb cadascuna de les preguntes i la metodologia utilitzada a l'aula per tal d'obtenir les dades. En un segon capítol establirem les respostes esperades i les respostes obtingudes. Els qüestionaris s'adjunten com a documentació complementària, que s'organitza mitjançant dos instruments principals d'anàlisi. Un primer instrument d'anàlisi en la línia de les xarxes sistèmiques on es donarà cabuda a totes les respostes, de manera resumida però, que permetrà observar la varietat de respostes i el número de grups participants que s'engloben a cada una. I un segon instrument d'anàlisi on s'agruparan les respostes més generals però fent avinents matisos i correccions posteriors. En un tercer capítol valorarem les entrevistes fetes per tal de poder aclarir alguns detalls de les respostes escrites i les correccions posteriors a la intervenció del professor a l'aula. En un quart capítol analitzarem el grau de comprensió observat a partir de la informació recollida i analitzada en els capítols anteriors. En un últim capítol passarem a analitzar punts on es pugui considerar un aprenentatge o desaprenentatge. Amb desaprenentatge ens referim a situacions en les que una primera resposta correcta matemàticament se substitueix per una resposta incorrecta. El terme desaprenentatge ve motivat per contraposició al terme aprenentatge que, segons podem trobar al diccionari, significa:

- Segons el diccionari de l'IEC, <http://mdlc.iec.cat>:
  - **1** 1 m. [LC] [SO] [PE] Acció d'aprendre.
  - **1** 2 m. [SO] [PE] Procés pel qual un individu o una col·lectivitat adquireixen coneixements, habilitats, trets o pautes culturals, com el llenguatge, els prejudicis, les normes, les creences, les regles de conducta.
  - **1** 4 [PE] **aprenentatge significatiu** Aprenentatge en què l'alumnat relaciona els nous coneixements amb els coneixements previs.
- Segons el diccionari de la RAE, <http://dle.rae.es>:
  - **1.** . m. Acción y efecto de aprender algún arte, oficio u otra cosa.
  - **3.** . m. *Psicol.* Adquisición por la práctica de una conducta duradera.

Aquestes definicions, però, són poc precises en el marc que ens ocupa. Amb major precisió, com aprenentatge prenem la noció clàssica de Kolb (1984), segons la qual l'aprenentatge és un procés cíclic en espiral que recorre diversos moments, alguns dels quals són especialment rellevants per a avançar. És en aquest sentit on el terme desaprenentatge pren especial sentit ja que pot marcar els moments des d'on es pot tornar a refer el camí.

Aquesta anàlisi es farà a partir tant de la discussió entre alumnes com després de la breu intervenció del professor al final de la recollida de dades.

D'acord amb la pregunta de la investigació i l'estratègia per a l'anàlisi, s'estableixen dos objectius principals:

- Identificar significats diversos atribuïts als nombres enters atenent a la seva estructura i a la polisèmia del signe  $-$ .
- Relacionar alguns d'aquests significats mitjançant la construcció de patrons de comprensió.





# Capítol 1

## Marc teòric

Comencem amb l'explicació dels contextos històric, matemàtic i didàctic de la investigació. En un primer bloc atenem la contextualització i la situació històrica fent especial atenció als principals models d'ensenyament dels nombres enters (Gómez, 2001). Aquí posem de manifest la diversitat de significats atribuïbles al signe  $-$  i al paper del zero en la seva representació a la recta numèrica. En un segon bloc analitzem els treballs de diversos autors sobre l'aprenentatge i ensenyament dels nombres enters. Hem posat especial atenció als treballs d'Arcavi i Bruckheimer (1981), Bruno i Martínón (1999), Pujol (2008), Vlassis (2008) i Bofferding (2014).

### 1.1 Epistemologia històrica dels nombres enters

#### 1.1.1 Contextualització

Hi ha una gran quantitat de treballs sobre l'evolució històrica dels nombres enters, però només se'n farà un breu apunt que ajudarà a situar la nostra investigació. Podrem referenciar els continguts matemàtics, que hem plantejat com a objecte d'estudi, en relació a diferents moments de controvèrsia en la seva acceptació com a objectes matemàtics vàlids i mereixedors de ser incorporats a l'ensenyament. En aquesta línia trobem:

- a) La interpretació del zero com a absència de quantitat o bé com a origen, essent el punt de referència per situar els nombres positius i negatius ordenats sobre un eix. Com a conseqüència podem fer la representació ordenada dels enters sobre una recta numèrica.
- b) La interpretació del signe  $-$  com a qualificador, indicador de la resta o simètric respecte la suma, és a dir la polisèmia del signe.
- c) La regla dels signes, que tot i ser motiu de conflicte a l'hora d'operar, és al treballar les expressions algebraïques quan més dificultats provoca als estudiants.
- d) I finalment l'extensió dels naturals als enters, que sovint permet evitar treballar només operant amb els primers i explicitant posteriorment el significat del resultat. Això és especialment utilitzat en els casos més quotidians, com són dates i moviments.

Així doncs, comencem el nostre passeig històric.

Malgrat que l'aparició dels nombres enters en els sistemes educatius és força recent, finals del segle XIX, hi ha referències a les matemàtiques de la Grècia clàssica, xineses i hindús de la utilització de nombres negatius. Com ja hem comentat farem un lleuger desenvolupament

cronològic d'aquesta evolució des d'algunes de les primeres referències fins al que s'inclou als currículums actuals.

Cal tenir en compte que sovint utilitzarem la terminologia nombre enter, per extensió, però en realitat són els nombres negatius els que han estat objecte de discussió, pel que fa a la seva utilització, mentre que els nombres positius (naturals) no han estat motiu de debat, des del punt de vista que sempre se'ls ha pogut donar significat. De tota manera preferim mantenir la terminologia de nombres enters atenent a dues raons. La primera és que en l'actualitat incloem els positius, el zero i els negatius sota aquesta denominació i la segona és que quan fem operacions es generen resultats negatius tot i haver utilitzat només nombres positius, per exemple en restes de l'estil  $2 - 4$ .

Al llarg de tot el treball ens trobem amb una altra ambigüïtat que és la provocada per com fer referència al caràcter  $-$ . En ocasions podem utilitzar la denominació de signe i en d'altres la de símbol. Si ens adrecem al diccionari per tal de veure quins són els significats de cada una d'aquestes paraules:

### Signe:

- Segons el diccionari de l'IEC, <http://dlc.iec.cat>:
  - **1** 1 m. [LC] [MT] [AF] [MU] Allò amb què quelcom és representat, generalment una forma gràfica el valor de la qual pot ésser normalitzat o codificat.
  - **1** 8 [MT] **signe matemàtic** Signe gràfic que serveix per a indicar una operació matemàtica.
  - **1** 9 [MT] **signe negatiu** Signe que designa els nombres negatius i les magnituds negatives.
- Segons el diccionari de la RAE, <http://dle.rae.es>:
  - **3** . m. Señal o figura que se emplea en la escritura y en la imprenta.
  - **8** . m. *Mat.* Señal o figura que se usa en los cálculos para indicar la naturaleza de las cantidades y las operaciones que se han de ejecutar con ellas.

### Símbol:

- Segons el diccionari de l'IEC:
  - **3** 1 m. [LC] [QU] En formalització científica, lletra o conjunt de lletres usades per a representar magnituds, quantitats, unitats, operacions, etc. El símbol del metre és m.
- Segons el diccionari de la RAE:
  - **3** . m. *Ling.* Tipo de abreviación de carácter científico o técnico, constituida por signos no alfabetizables o por letras, y que difiere de la abreviatura en carecer de punto; p. ej., N, He, km y \$ por Norte, helio, kilómetro y dólar, respectivamente.
  - **símbolo algébrico 1** . m. Letra o figura que representa un número variable o bien cualquiera de los entes para los cuales se ha definido la igualdad y la suma.

A la vista de les diverses definicions extretes dels diccionaris esmentats, sobretot de les definicions de l'IEC, l'ús d'una o altra terminologia queda justificat. De tota manera com a decisió personal hem volgut distingir l'ús del  $-$  com a símbol quan fa referència al qualificador del nombre com a negatiu i com a signe en el cas específic de l'operació. En aquesta línia de puntualització del " $-$ " també trobem l'estudi de Bofferding (2014, p.196):

*With the introduction of negative numbers, the “-” symbol takes on three meanings: unary (negative), binary (subtraction), and symmetric (opposite)—see Table 1 for examples (Barber, 1925, 1926; Gallardo & Rojano, 1994). In this article, I use the term minus generically to refer to the “-” symbol, subtraction sign to refer to the binary meaning of the minus sign, and negative sign to refer to the unary meaning of the minus sign.*

### 1.1.2 Breu situació cronològica

Retornant a l'evolució històrica de l'aparició i acceptació dels nombres negatius, les primeres notícies que tenim de l'ús de quantitats negatives les podem trobar a les matemàtiques xineses. Datan de la dinastia Han, 200 AC al 200 DC, sempre en l'àmbit de la comptabilitat i en el sentit de guanys o deutes. S'utilitzava un codi de colors per indicar aquestes dues possibilitats posant en negre els deutes. També tenim notícies del coneixement dels negatius a les matemàtiques de la Grècia clàssica, Diofant en feia ús però només en el procés de resolució d'equacions, mai com a nombres aïllats. De fet l'associació del nombre amb elements geomètrics propis dels matemàtics grecs no afavorien donar significat als nombres negatius.

Una altra referència la tenim a l'Índia cap el segle VIIè de la nostra era. En aquest cas els negatius van lligats al descobriment del zero. Bramaghupta establia la següent regla de càlcul:

Un deute menys *shunya* (zero) és un deute  
 Una fortuna menys *shunya* és una fortuna  
*Shunya* menys *shunya* és *shunya*  
 Un deute substret de *shunya* és una fortuna  
 Una fortuna substreta de *shunya* és un deute  
 El producte de *shunya* multiplicat per un deute o una fortuna és *shunya*  
 El producte de *shunya* multiplicat per *shunya* és *shunya*

Aquí el deute el podem associar a un nombre negatiu i una fortuna a un positiu. Aleshores en terminologia actual podríem escriure:

$$(-n) - 0 = (-n)$$

$$n - 0 = n$$

$$0 - 0 = 0$$

$$0 - (-n) = n$$

$$0 - n = (-n)$$

$$0 \cdot n = 0$$

$$0 \cdot (n) = 0$$

$$0 \cdot 0 = 0$$

Els nombres negatius han estat, històricament, una pedra a la sabata en l'ensenyament de les matemàtiques, en el sentit que apunta Vlassis (2008, p.556):

*Analysis of the historical texts (Glaeser, 1981; Gallardo, 2002) reveals that negative numbers emerged at the end of a long and painstaking process.*

Tot i el coneixement que se'n tenia i l'ús que se n'havia fet anteriorment no és fins al segle XVII que se'n fa un reconeixement. En una interessant aproximació històrica a l'evolució dels nombres negatius, en la seva tesi, Kilhamm (2011) cita una seqüència de fets, extreta d'Arcavi i Bruckheimer (1983), de com s'incorpora el nombre negatiu a les matemàtiques occidentals:

- Segle XVI:
  - Stifel proposa l'ús dels negatius per simplificar les solucions de l'equació quadràtica a un únic cas.
  - No es reconeixen els nombres negatius (Viète)
  - Notació actual utilitzant els símbols  $+$  i  $-$  (Stevin)
- Segle XVII: Es reconeixen els nombres negatius com arrels d'equacions (Descartes) i se'n dóna una interpretació geomètrica (Girard)
- Finals segle XVII i principis del segle XVIII: s'utilitzen els negatius amb reserves a causa de les contradiccions que provenen del seu ús (Arnauld, Wallis)
- Segle XVIII:
  - ús lliure dels negatius i introducció als llibres de text, però sense definició matemàtica (Saunders, Euler)
  - Oposició als negatius (Frend, Masères)
- Segle XIX: Intents per donar una fonamentació matemàtica als nombres negatius (Peacock, de Morgan, Hamilton)
- Finals del segle XIX: Definició matemàtica formal dels nombres negatius (Hankel i el Principi de permanència de les lleis formals)

La reflexió que podem fer, creiem que és clara. Si al llarg de la història l'acceptació i l'ús dels nombres negatius ha estat tan complicada dins del propi àmbit de les matemàtiques, com no ha de ser quan volem introduir-los a nois i noies de 12 a 14 anys? Sovint, a aquesta edat, tot just estan començant a interpretar les operacions i les seves aplicacions quan, el temari establert, introdueixen paral·lelament els nombres enters i els primers conceptes d'àlgebra (equacions i expressions algebraïques).

### 1.1.3 Models d'ensenyament dels nombres enters

A l'hora de portar a l'aula els nombres enters actualment es segueixen diferents estratègies que sovint es combinen. A grans trets, segons Arcavi i Bruckheimer (1981, pp 31-33).

- Repetició de models d'operacions: es defineixen les regles d'operativitat i s'apliquen sense justificació de cap mena. La repetició rutinària de les operacions es considera que és el camí cap a l'aprenentatge.
- Procediments inductius: basats en la descoberta i extensió (extrapolació) de patrons.

- Procediments deductius: fonamentats en el principi de permanència de les lleis formals (Peacock, Hankel). Suposem que les lleis d'operativitat vàlides pels nombres naturals han de romandre vàlides en el sistema numèric estès. Això implica mantenir les propietats en aquest sistema.
- Procediments sustentats en models referits a la vida quotidiana com poden ser moviments, desplaçaments vectorials, ...
- Presentació axiomàtic-formal: a partir de la definició dels enters com a classes d'equivalència de parells ordenats de nombres naturals.

Segons Arcavi i Bruckheimer (1981) cap de les estratègies anteriors és determinant a l'hora d'aconseguir un millor aprenentatge per part de l'alumnat, com diuen a l'article citat:

*To our surprise, after allowing (statistically) for initial differences between classes there was no (significant) difference in achievement between students learning by the various approaches. Overall, all classes reached mastery (80% and above on the post-test). Further, no significant differences in attitude to the topic were found.*(p. 32)

De fet l'ensenyament dels nombres enters, especialment la multiplicació d'un negatiu per un negatiu, sempre ha estat objecte de dificultats d'ensenyament, justificació i demostració com apunta Gómez (2001). Aquest autor classifica la justificació de la regla en sis categories que situa en el temps i a través de diversos matemàtics:

- La regla sense justificació. A l'època de Diofant (segle III) hi ha constància de l'aparició de nombres negatius tot i que ell mateix els rebutjava. Les equacions del tipus  $x + 4 = 0$  no les considerava resolubles. De tota manera, sí enuncia una regla dels signes pel producte de dues diferències:

*El que és el que falta multiplicat pel que és el que falta dóna el que és positiu; mentre que el que és el que falta multiplicat pel que és positiu, dóna el que falta (Diofant, llibre I).*  
(Gómez, 2001, p.291)

En la mateixa línia del que hem apuntat anteriorment de Bramaghupta (628) que ja utilitzava els negatius, el zero i explicita les regles per operar amb negatius. Però els àrabs només consideraven solucions positives; tot i conèixer les regles per operar amb negatius, només les aplicaven a restes indicades amb solució positiva.

- La justificació de la regla en el marc de les restes indicades amb solució positiva. Durant el Renaixement els matemàtics mostren diferents maneres d'afrontar els càlculs amb negatius. En aquesta època els càlculs amb negatius encara s'associaven, bàsicament, a les restes indicades amb justificació negativa. En aquest context s'emmarca la *Justificació per doble comprovació de Stevin* (1625). Consisteix en enunciar la regla, aplicar-la a un exemple i veure que per un altre camí s'arriba al mateix resultat. Stevin ho completa amb una interpretació geomètrica de la regla dels signes a partir de la descomposició d'un rectangle gran en diversos de més petits.

**Teorema**

*Més multiplicat per més, dóna com a producte més; menys multiplicat per menys, dóna producte més; més multiplicat per menys o menys multiplicat per més, dóna producte menys.*

- La justificació de la regla en el marc de les quantitats negatives aïllades. Aquest tipus de justificacions apareixen cap al segle XVII quan l'ús generalitzat de l'àlgebra fa que es treballi de manera més habitual amb quantitats negatives aïllades. En aquest marc podem situar les justificacions següents:

- Justificació per eliminació d'Euler (*Elements d'Àlgebra*, 1770). L'argumentació parteix d'interpretar els negatius com a deutes, considerar que la multiplicació de quantitats amb signe és commutativa i raonar per eliminació:  $-a$  per  $-b$  serà  $ab$  perquè no pot ser  $-ab$  que és el resultat de  $-a$  per  $b$ .
- Justificació en coherència amb la propietat distributiva de Mac-Laurin (*Tractat d'àlgebra*, 1748). L'argumentació parteix de si

$$a - a = 0$$

per coherència amb la propietat distributiva

$$0 = n(a - a) \Rightarrow 0 = na - na$$

per tant cal que al multiplicar  $n \cdot a = na$  sigui l'Operacions de  $n \cdot -a = -na$  perquè es mantingui el resultat. En aquest cas és important ressaltar l'ús de raonaments formals.

- Justificació en coherència amb la propietat distributiva de Laplace (llicions de *l'École normale de l'any III* (1795, p. 62)). Manté la interpretació dels negatius en termes de deutes però introdueix aspectes formals en la seva justificació, recorrent a la conservació de la coherència de les operacions suma, multiplicació i la propietat distributiva del producte respecte de la suma.

*En cuanto al signo del producto, debe ser positivo si los signos del multiplicando y del multiplicador son los mismos, si son diferentes, el signo del producto debe ser negativo. Esta regla presenta algunas dificultades: cuesta concebir que el producto de  $-a$  por  $-b$  sea el mismo que el de  $a$  por  $b$ . Para hacer sensible esta identidad, observaremos que el producto de  $-a$  por  $+b$ , es  $-ab$ , ya que este producto no es mas que  $-a$  repetido tantas veces como unidades hay en  $b$ . En seguida observaremos que el producto de  $-a$  por  $+b - b$  es nulo, al ser nulo el multiplicador; así siendo  $-ab$  el producto de  $-a$  por  $+b$ , el producto de  $-a$  por  $-b$ , debe ser de un signo contrario, o igual a  $+ab$ , para destruirlo. (Gómez, 2011, p. 297)*

- Justificació a partir de la definició de producte dels signes de Cauchy (*Curs d'Anàlisi*. 1<sup>a</sup> (1821, pp. 2 i 403)). Partint de la distinció entre quantitats algebraïques (les que anaven acompanyades d'un signe que fa d'adjectivador) i quantitats aritmètiques (les que únicament assignaven un valor numèric) fa una argumentació introduint la idea de producte de signes: "Multiplicar un signo por otro, es formar su producto." (Gómez, op.cit., p.297) i d'aquí enuncia i demostra el següent teorema:

*"El producto de dos signos semejantes es siempre +, y el producto de dos signos opuestos es siempre -."(Gómez, op.cit., p. 297)*

- v) Justificació des de la definició del producte per un nombre negatiu de Wentworth i Smith (*sèrie per a escolars de 1900*). Manté la interpretació dels nombres positius i negatius en el context de guanys i deutes. Basant-se en la conservació de la coherència de la propietat commutativa obté la regla dels signes. Basa el seu raonament en que si algú deu 3 euros, és a dir  $-3$  i duplica el seu deute tindrem

$$-3 \cdot 2$$

que haurà de ser el mateix que el resultat de

$$2 \cdot -3$$

- vi) Justificació en coherència amb la propietat distributiva, sense fer cap suposició sobre què són els nombres negatius de Crowley i Dunn (*Mathematics Teacher*, 1985). Entre d'altres demostracions hi ha una alternativa formal a la demostració de Laplace:

$$\begin{aligned} (-1)(-1) &= (-1)(-1) + (0)(1) = (-1)(-1) + ((-1 + 1)(1)) = \\ &= (-1)(-1) + (-1)(1) + (1)(1) = (-1)(-1 + 1) + (1)(1) = \\ &= (-1)(0) + (1)(1) = (1)(1) \quad (\text{Gómez, p.298}). \end{aligned}$$

L'ús alternatiu de la propietat distributiva i de l'extracció de factor comú porten a concloure que  $(-1)(-1) = (1)(1)$  i en conseqüència  $- \cdot -$  és  $+$ .

- La justificació de la regla en el marc en què s'eviten les quantitats negatives aïllades. Aquest tipus de justificacions es centren en el fet que els nombres negatius són quantitats que cal restar evitant la interpretació que són quantitats més petites que zero.

- Justificació a partir de la definició de multiplicació per negatiu de D'Alembert (*a l'article Negatiu aparegut a l'enciclopèdia de Diderot, s.XVIII*). Parteix del fet que les quantitats negatives indiquen quantitats positives però en un problema mal formulat. Multiplicar per una quantitat negativa, per ell, és restar tantes vegades com indica la quantitat. Raonant en aquesta direcció justifica la regla dels signes (Gómez, op.cit., p.299).
- Justificació a partir de la definició de multiplicació per negatiu de Lacroix (*Curs complet elemental de Matemàtiques Pures, 6a edició, 1846*). Parteix de la idea que la multiplicació algebraica i l'aritmètica és el mateix i que les quantitats negatives són el resultat de restar una quantitat més gran de la que es té. Treballa amb productes del tipus

$$(a - b)(c - d) \quad (\text{Gómez, op.cit., p.300}).$$

- Justificació a partir de la definició de multiplicació algebraica de Vallejo (*Tratado Elemental de Matemáticas, 1841, pp.185-199*). Basa la seva justificació en dos punts:
  - "Las cantidades negativas son una manera de ser de las cantidades algebraicas contraria al propósito que se propone en la cuestión."
  - "Multiplicar en Álgebra es tomar una cantidad tantas veces como diga otra; y tomarla del mismo modo que se diga se debe tomar."

L'aplicació d'aquests dos punts li permet justificar la regla dels signes (Gómez, op.cit., pp. 300, 301). Diversos autors espanyols, com Picatoste (1907), Miguel i González (1931) i Mataix (1941), van utilitzar aquest model.



- La justificació de la regla en el marc de la teoria de parells ordenats. S'emmarca en el procés d'evolució de les matemàtiques amb la conseqüent re-definició dels conceptes de número i operacions, independents de la realitat física. En aquesta línia tenim Roanes (*Didáctica de las Matemáticas*, 1976, pp. 274-293), que argumenta a partir de la definició de nombres enters com a classes d'equivalència de parells ordenats a  $\mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}$ . En aquest conjunt defineix la relació d'equivalència

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$

i les operacions:

1. Suma:  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
2. Multiplicació:  $(a, b) \times (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$

La regla dels signes és conseqüència de l'estructura construïda:

$$(\mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}) / \sim \equiv \mathbb{Z},$$

on  $(p, 0)$  i  $(r, 0)$  són representants canònics de nombres positius i  $(0, t)$  i  $(0, q)$  és el representant canònic d'un nombre negatiu, els seus productes

$$(p, 0) \cdot (r, 0) = (p \cdot r + 0 \cdot 0, p \cdot 0 + 0 \cdot r) = (pr, 0)$$

és el representant d'un nombre positiu,

$$(p, 0) \cdot (0, q) = (p \cdot 0 + 0 \cdot q, p \cdot q + 0 \cdot 0) = (0, pq)$$

és el representant d'un nombre negatiu,

$$(0, q) \cdot (0, t) = (0 \cdot 0 + q \cdot t, 0 \cdot t + t \cdot 0) = (qt, 0)$$

és el representant d'un nombre positiu i,

$$(0, q) \cdot (p, 0) = (0 \cdot p + q \cdot 0, 0 \cdot 0 + q \cdot p) = (0, qp)$$

és el representant d'un nombre negatiu.

Per tant tenim la regla dels signes en termes de parells ordenats que es pot estendre a l'ús dels nombres enters.

- La justificació de la regla en el marc de les modelitzacions intuïtives. Durant el segle XX es van utilitzar justificacions més lligades a les modelitzacions física, geomètrica o numèrica que permetessin trobar relacions més properes a les experiències personals dels estudiants.
  - i) Justificació des de la modelització geomètrica sobre rectangles de Klein (*Matemática elemental desde un punto de vista superior*, 1908.)

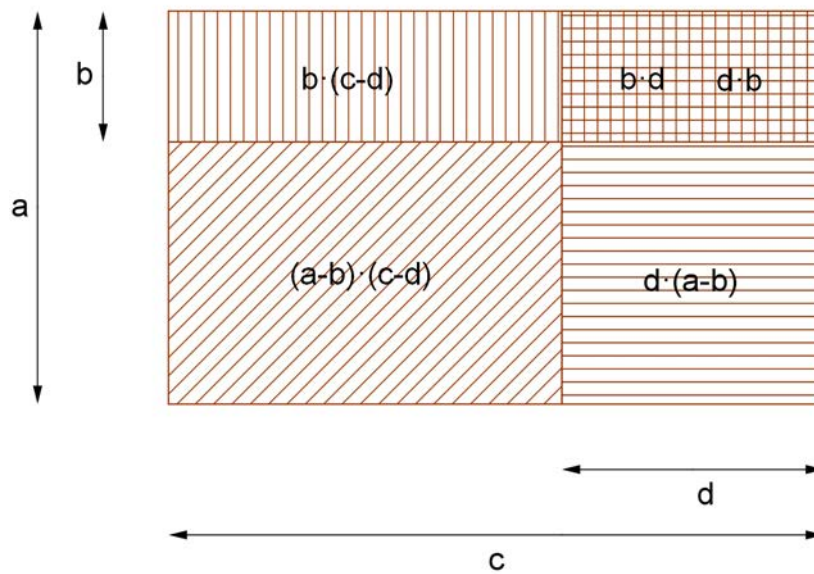


Figura 1.1: Rectangles de Klein.

La imatge de la Figura 1.1 ens mostra gràficament la justificació. Si a partir del rectangle de costats  $a$  i  $c$  considerem el de costats  $a - b$  i  $c - d$ , aquest nombre representen una quantitat positiva que correspon a l'àrea  $(a - b) \cdot (c - d)$ . Per recuperar aquesta àrea a partir del rectangle original restem les àrees  $b \cdot c$  i  $a \cdot d$ , al fer-ho hem restat dues vegades l'àrea  $b \cdot d$ . Aleshores per recuperar l'àrea desitjada cal tornar a sumar  $b \cdot d$ , que és l'àrea resultant de dues quantitats que restaven als costats  $a$  i  $c$ . En conseqüència el producte de dos negatius és un positiu. Aquesta justificació va en la línia de la de Stevin (Gómez, op.cit., pp. 303 i 304).

- ii) Justificació des de la modelització física sobre desplaçaments de Rey Pastor i Puig Adam (*Nociones de álgebra y trigonometria*, 1946, pp. 19 i 20). Basen la seva justificació en el desplaçament d'un objecte o persona situat sobre el zero en una recta graduada: un moviment a l'esquerra es considera negatiu i a la dreta positiu; el temps passat es considera negatiu i el futur positiu (Gómez, op.cit., pp. 304 i 305). La regla dels signes apareix a l'hora d'estudiar diferents situacions en aquest model.
- iii) Justificació des de la modelització geomètrica sobre la línia numèrica de "El obrero mecánico" (1938, pp. 263-266). Es modelitzen els nombres enters sobre una recta numèrica, eix, a partir d'un punt origen i el producte per  $-1$  converteix un nombre en el seu simètric. Les operacions amb segments sobre la recta numèrica justifiquen la regla dels signes (Gómez, op.cit., pp. 305 i 306).
- iv) Justificació des de la modelització numèrica, Crowley i Dunn (*Mathematics Teacher*, 1985). Consisteix en entrenar un patró numèric que permeti anar descobrint les regles d'operativitat amb positius i negatius (Gómez, op.cit., p. 306) en la línia que proposa Arcavi (1981) d'entrenament de les operacions.

### 1.1.4 Significats atribuïbles al signe $-$

En base a la investigació és important centrar els objectius als que ens volem apropar. En aquest sentit és essencial fixar els possibles significats que es poden atribuir al signe  $-$ . En general des dels primers cursos escolars s'identifica el signe  $-$  amb l'operació resta. En aquest sentit és un símbol binari, és a dir fa de lligam entre dues quantitats. Però en el moment en què associem aquest signe als nombres es converteix en un qualificador d'aquests i podem considerar que es tracta d'un símbol unari. Encara, però, podem assignar un tercer significat, també unari, al símbol  $-$ , que és el que fa referència a l'indicador de l'invers d'un número respecte de l'operació suma. Així doncs, en la línia descrita a l'apartat anterior podem separar els següents significats atribuïbles al signe  $-$ .

- (a) El signe  $-$  com a operador binari: és l'ús que li donen per indicar l'operació resta. Des dels primers anys de l'ensenyament als nostres alumnes se'ls familiaritza amb operacions del tipus

$$6 - 4$$

per indicar que a una determinada quantitat n'hi traiem una altra. En aquesta introducció, quasi sempre, s'evita introduir expressions del tipus

$$4 - 6$$

argumentant que aritmèticament no té sentit, no podem treure una quantitat superior a la que tenim.

- (b) El signe  $-$  com a qualificador: quan s'introdueixen els nombres negatius el signe  $-$  s'utilitza per donar un significat diferent a la quantitat considerada. En aquesta línia trobem les interpretacions dels números fent referència a temperatures, deutes i guanys, nivells per sobre i per sota del mar, dates situades sobre l'eix temporal. Aquestes interpretacions s'utilitzen habitualment com a models introductoris dels nombres enters.
- (c) El signe  $-$  com a operador binari per indicar l'element simètric respecte de la suma: en aquest cas permet re-qualificar qualsevol nombre donant-li el significat Operacions que podia tenir en origen.

Aquesta polisèmia del signe  $-$  abastament comentada està en l'origen de les dificultats que els estudiants troben a l'hora d'incorporar els nombres enters al seu coneixement matemàtic. Els coneixements previs d'aquests estudiants provoca conflicte entre el que saben (Pujol, Bibiloni i Deulofeu, 2011) i els nous usos que s'introdueixen. En aquest punt la investigació de Bofferding (2014) aporta un nou punt de vista plantejant la introducció dels negatius durant els primers anys de primària, aprofitant els coneixements dels alumnes basats en les experiències del que viuen en els seus entorns habituals. Aquesta introducció aporta noves perspectives a l'hora de plantejar la introducció a l'àmbit escolar dels nombres enters. En la nostra investigació hem plantejat diverses de les preguntes del qüestionari per tal d'obtenir informació de com els alumnes participants interpreten aquests significats. Al qüestionari *Enters* les 5 primeres preguntes van en aquesta direcció, la sisena pregunta va més adreçada a l'ús dels nombres enters en expressions algebraïques. Al qüestionari *Cronologia* totes les preguntes van orientades en aquesta direcció, excepte la pregunta 4a que fa referència a la utilització dels enters en combinació amb les expressions algebraïques.

Utilitzarem les notacions:

- Per les preguntes del qüestionari *Enters*: EP1; EP2(a), EP2(b), EP2(c), EP2(d), EP2(e); EP3(a), EP3(b), EP3(c), EP3(d), EP3(e), EP3(f); EP4(a), EP4(b), EP4(c), EP4(d); EP5; EP6(a), EP6(b), EP6(c), EP6(d).

→ Per les preguntes del qüestionari *Cronologia*: CRP1; CRP2: CRP3; CRP4(a), CRP4(b); CRP5(a), CRP5(b), CRP5(c), CRP5(d); CRP6(a), CRP6(b), CRP6(c); CRP7.

A continuació detallarem quines preguntes corresponen a cada significat.

- a) Qualificador: EP1, EP2(a,b,c,d), EP3(e,f), EP4(c,d), EP5, EP6(a,b,c,d), CRP1, CRP2, CRP3, CRP4(a,b), CRP5(a,c) i CRP6(a,b,c).
- b) Signe de restar: EP3(a,b,c,d,e,f), EP4(d), EP5, EP6(a,b,c,d), CRP3, CRP4(a) i CRP6(a,b,c).
- c) Simètric: EP4(a,b,c,d), EP5, CRP5(a,b,c,d) i CRP6(a,b,c).

I a les preguntes EP3(e,f), EP4(d), EP5 i CRP6(a,b,c) es pretén recollir informació directa sobre el fet de reconèixer la diferència de significat del signe – en els qüestionaris. Dit això, dels detalls analítics sobre els instruments de recollida de dades en parlarem al capítol corresponent.

### 1.1.5 El zero a la recta numèrica

Tot i que el zero és l'últim dels nombres incorporats, la seva aparició data de prop del segle VIII a l'Índia i s'incorpora al món occidental cap al segle XII amb Leonardo da Pisa (Fibonacci). És a partir de la normalització de l'ús dels nombres negatius quan adquireix una major diversitat de significats.

A primera vista queda clar que el zero indica l'absència de quantitat o de magnitud. En l'escriptura posicional és essencial per indicar l'absència d'una unitat determinada i amb la incorporació dels enters passa a ser l'origen a partir d'on es comença a comptar. En aquest sentit la representació a la recta numèrica clarifica molt el seu estatus. Tant pel que fa referència als desplaçaments, els deutes o guanys i la direcció d'aplicació d'una magnitud, el zero passa a ser el punt de referència que ens permet interpretar un número determinat.

Com ja hem fet palès en les diferents argumentacions per justificar la *regla dels signes* la recta numèrica és bàsica en vàries d'elles. La seva ubicació com a origen permet reconèixer la relació de simetria que s'estableix entre un enter i el seu Opositat, com podem observar a la Figura 1.2 i a la Figura 1.3.

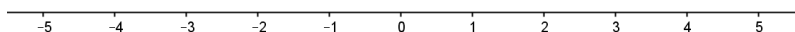


Figura 1.2: Recta numèrica.



Figura 1.3: Enters Opositat.

El fet que el zero sigui l'origen no ha estat un fet clar en el procés d'incorporació dels nombres enters dins les matemàtiques. Killmann (2011, pp. 31-32) recorda que Descartes només utilitzava nombres positius en el sistema de coordenades i que tant Farenheit com Celsius, a finals del segle XVII, van crear les seves escales de mesura de la temperatura on només utilitzaven nombres positius. El fet de situar nombres a un costat i a l'altre del zero, és a dir, ordenar-los utilitzant-lo com a origen és un altre dels punts que fins que no es justifiquen d'una manera estructurada els nombres enters no pren consistència. En la investigació de Bofferding (2014) destaca el fet que quan s'introdueixen els nombres positius a alumnes dels primers cursos de primària l'ordenació que fan de positius i negatius, sovint, manté el zero per sota de tots els altres números.

*“Integer research findings that focus specifically on number and operations conflict in terms of what students understand about negative numbers across the grades. Based on interviews of students, Peled, Mukhopadhyay, and Resnick (1989) reported that third graders ordered negative numbers correctly, but first graders ordered negative numbers next to their positive counterparts (e.g., 1, -1, 2, 3, -3) or treated them as zero.”* (Bofferding, 2014, p. 195)

A partir d'aquestes consideracions a la nostra recerca les preguntes següents, seguint amb la notació de l'apartat anterior, EP1, EP2(a), EP5, EP6(a,b,c,d), CRP4(a,b), CRP5(a,b,c,d) van orientades a obtenir informació sobre com els alumnes preguntats entenen el zero com a origen.

## 1.2 Aprenentatge i ensenyament dels nombres enters

En aquest apartat farem referència a estudis amb dades d'aula referents a l'aprenentatge i ensenyament dels nombres enters. Parant especial atenció en els aspectes en els que hem incidit al llarg de la nostra investigació. El desenvolupament s'ha fet a partir de treballs realitzats per diversos autors ordenats cronològicament. La tria dels autors ha estat motivada a partir de les primeres referències consultades, quan ens vam començar a interessar per l'estudi de com els alumnes aprenien els conceptes referents als nombres enters. En aquesta línia les primeres referències són els treballs d'Arcavi i Bruckheimer (1981) i Pujol (2008). Posteriorment i de manera força casual els treballs de Killmann (2011) i Ozdoğan i Altıparnak (2010) que van caure a les nostres mans fent recerca sobre enters per internet. Els seus estudis ens van semblar molt propers al que estàvem proposant amb un enfocament molt similar. La lectura d'aquests dos treballs va dirigir-nos cap a Vlassis (2008) que aportava més punts de vista sobre l'estudi plantejat. Finalment a partir de les orientacions rebudes pels directors del treball de màster i de la directora de tesi, vam incorporar, en primera instància, els treballs de Cid (2002 i 2003), Bruno i Martín (1999) i, finalment, Bofferding (2014). Som conscients que hi ha molt altres treballs que aborden l'estudi de l'ensenyament i aprenentatge dels nombres enters als alumnes de secundària però els escollits aporten una base consistent per a la nostra investigació. A continuació donem les línies generals d'alguns treballs esmentats que pel seu contingut aporten una base per treballar en la nostra investigació.

### 1.2.1 Arcavi i Bruckheimer (1981)

Centren el seu estudi en comparar diversos mètodes de presentar i ensenyar la multiplicació de nombres negatius perquè troben a faltar valoracions sobre l'efectivitat dels utilitzats.

*“Minus times minus gives plus” is often a dangerous stumbling block. This particular operation is usually one of the first non-intuitive concepts met by students in school.*  
(Klein, 1924, pp. 23-28)

Arcavi i Bruckheimer comencen fent una revisió i classificació dels principals mètodes emprats per introduir la multiplicació de nombres enters per a partir d'un estudi posterior, realitzat amb estudiants de Grau 7, comparar-los i veure si algun ha estat més efectiu que els altres. La seva classificació el porta a distingir cinc categories, fixant-se sobretot en els conceptes essencials que es treballen i en l'estructura didàctica, sense fer cas dels detalls que poden introduir-se. Aquestes categories estan basades en:

1. Ús de rutines: El procediment consisteix en definir les regles de multiplicació, sense motivació ni justificació

$$+ \cdot + = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot + = -$$

$$- \cdot - = +$$

els alumnes memoritzen les regles i les entrenen fent exercicis. En aquest punt es pregunten:

- (a) La presentació d'una regla per repetició, afecta l'actitud de l'estudiant cap a les matemàtiques?
  - (b) El principal objectiu d'aprendre, "*menys per menys és més*", és només el domini de les habilitats de càlcul, o hi ha més en joc?
  - (c) Hi ha d'altres implicacions matemàtiques, en la manera en què un contingut s'aprèn?
2. Inducció: En aquest cas el principi bàsic d'aquest mètode consisteix en el descobriment i extensió de patrons. En aquest cas separen tres variants:

- 2.1 Basats en l'isomorfisme entre els nombres positius i els naturals. S'elabora una seqüència de productes que porta a la multiplicació de dos negatius. Per exemple:

$$(+4) \cdot (+2) = \quad (+3) \cdot (+4) = \quad (-3) \cdot (+4) =$$

$$(+3) \cdot (+2) = \quad (+3) \cdot (+3) = \quad (-3) \cdot (+3) =$$

$$(+2) \cdot (+2) = \quad (+3) \cdot (+2) = \quad (-3) \cdot (+2) =$$

$$(+1) \cdot (+2) = \quad (+3) \cdot (+1) = \quad (-3) \cdot (+1) =$$

$$(-1) \cdot (+2) = \quad (+3) \cdot (-1) = \quad (-3) \cdot (-1) =$$

$$(-2) \cdot (+2) = \quad (+3) \cdot (-1) = \quad (-3) \cdot (-2) =$$

Aquest mètode apareix en força textos del segle XVIII i XIX, Saunderson (1741) i Euler (1828), i també a Peterson (1972).

- 2.2 Una variació consisteix en utilitzar les taules de multiplicar enlloc de les seqüències de productes. L'alumne va completant quatre regions corresponents als quatre casos que es poden donar al multiplicar nombres enters. Per cada una de les regions n'extreuen patrons que poden estendre en els seus veïnats. Aquest model es pot trobar a MME (1974) Midlands Mathematical Experiment i Sicklick (1975).
- 2.3 Fent ús dels eixos de coordenades cartesianes. Lliga la intuïció dels alumnes i la inducció: ha d'inferir les regles per extensió de patrons que ell mateix ha trobat i posteriorment generalitzar des dels exemples numèrics a les regles generals. Com es mostra a la Figura 1.4.

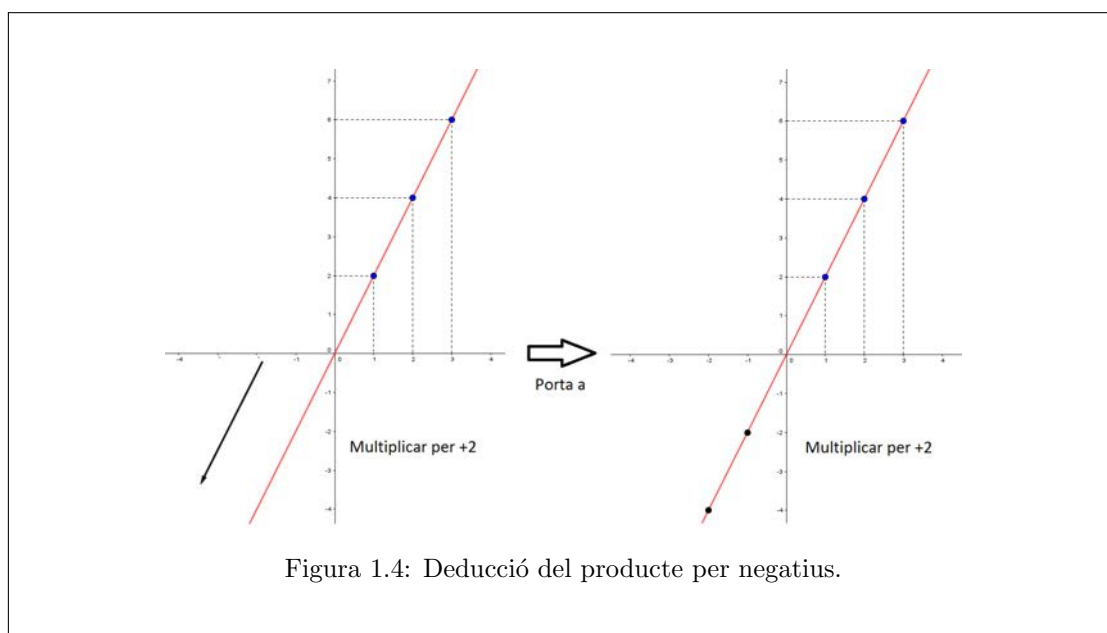


Figura 1.4: Deducció del producte per negatiu.

Segons Arcavi i Bruckheimer aquest acostament té força característiques comunes a l'activitat matemàtica genuïna que Polya (1973) anomena *raonament heurístic*. Els avantatges d'aquest acostament queden paleses en aquest text:

*... it's easier to understand than the physical analogies and is readily teachable to all age and ability levels, with only minor modifications. Moreover, the student uses the study of number patterns and relations to discover a new result. He does not resort to reasoning about non-mathematical entities to discover a mathematical relation. Third, the student has the opportunity to gain some insight into the process of mathematical creation ... Last and by no mean least, the student is forced to practice his arithmetical skills to complete the table.* (Dubisch, 1963, pp. 31-33)

3. Deducció: Aquesta aproximació es fonamenta en el *Principi de Permanència de les lleis formals*: ... *by virtue of which we are involuntarily inclined to employ rules under circumstances more general than are warranted by the special cases under which the rules are derived and have validity.* (Klein, 1924, pp. 23-28) Les propietats observades pels naturals s'han de conservar vàlides pels enters i d'aquí se'n dedueixen les regles. Euler (1828) comença amb el model de deutes i raona de forma semi-deductiva a través de la propietat commutativa i de les lleis de cancel·lació, sense fer-ne referència explícita. Concloent que  $- \cdot - = +$ .

També comenten que Dubisch (1963) utilitza un argument similar però modernitzant l'argument. El procés que segueix és:

- Defineix la multiplicació com a repetició de sumes.
- Utilitza la propietat commutativa.
- Utilitza la llei de cancel·lació i dóna les regles d'operativitat.

Per acabar apunten que es pot fer prenent com a base la propietat distributiva:

$$(+2) \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} (+2) \cdot [(+3) + (-3)] &= 0 \\ (+2) \cdot (+3) + (+2) \cdot (-3) &= 0 \\ (+6) + ? &= 0 \end{aligned}$$

i per tant ? només pot ser  $-6$ , en aquest procés també es té amb compte la unicitat. Aquest mètode és utilitzat per SMSG - School Mathematics Study Group- (1960) i Skemp (1970).

4. Models: Comenten que, tot i ser molt utilitzat en els llibres de text, no hi ha un model que cobreixi totes les propietats dels enters de forma clara. Pel que fa a la multiplicació, que és el que Arcavi i Bruckheimer treballen en aquest article, detallen tres tipus de models:

- I. Models que treballen amb els signes sense cap tipus de relació convincent cap a la multiplicació. Per exemple, “en una ciutat hi ha bones (+) i males (-) persones, a la ciutat poden entrar (+) o sortir (-)”, aleshores,

bona persona (+)	entra (+)	→	(+)
bona persona (+)	surt (-)	→	(-)
mala persona (-)	entra (+)	→	(-)
mala persona (-)	surt (-)	→	(+)

- II. Models que treballen amb el signe i el valor absolut del resultat. Per exemple, tenim un projector que pot anar endavant (+) o endarrere (-) i un dipòsit amb una bomba que permet posar (+) o treure (-) aigua. A més sabem que la bomba mou 3 litres d'aigua per minut. Aleshores, si gravem durant dos minuts i fem anar la pel·lícula endavant i endarrere

posar aigua (+)	projectar endavant (+)	→	augmenta 6 litres (+)
posar aigua (+)	projectar endarrere (-)	→	disminueix 6 litres (-)
treure aigua (-)	projectar endavant (+)	→	disminueix 6 litres (-)
treure aigua (-)	projectar endarrere (-)	→	augmenta 6 litres (+)

Aquest model el podem trobar a Gardner (1977) i Peterson (1972).

- III. Models que utilitzen la recta numèrica i vectors que representen els números (desplaçaments). En aquest cas,

- I. multiplicar per un positiu és allargar mantenint la direcció,  
 II. multiplicar per un negatiu és allargar en direcció contrària.

Model implementat per SMP (1966) School Mathematics Study Group i Cable (1971).

5. Presentació axiomàtica-formal: Aquest procediment s'implementa, sobretot, en l'àmbit universitari tot i que apunta a diferents autors que també l'han aplicat a secundària, Coltharp (1966), Mandsfield i Thompson (1967) i Fletcher (1976), sempre emmarcats en el context de l'aplicació de l'anomenada *Matemàtica moderna* a l'educació matemàtica dels anys 60's del segle XX. Aquesta introducció es fonamenta en la representació dels nombres enters com a parells ordenats relacionats per la relació d'equivalència:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$



i es defineix la multiplicació

$$(a, b) \times (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

la regla dels signes n'és, directament, una conseqüència formal.

Apunta que una altra aproximació matemàtica feta amb rigor es pot trobar a Landau (1951). A l'hora de fer l'estudi només van utilitzar els quatre primers mètodes per introduir la multiplicació d'enters.

L'estudi es va realitzar durant els anys 1979 i 1980. Arcavi i Bruckheimer van preparar un estudi per valorar quin dels quatre primers mètodes aportava millors resultats en l'aprenentatge de la multiplicació d'enters. Per això van preparar quatre unitats didàctiques, una amb cada mètode, per fer la introducció a 32 classes de setè grau. Cada aproximació es va valorar a partir de qüestionaris d'assoliment i d'actitud. Per a sorpresa dels investigadors, inclús atenent a la diversitat inicials entre classes, no hi havia diferència significativa en l'assoliment dels objectius prOperacionss entre els estudiants que havien treballat la multiplicació dels enters a partir dels diferents acostaments. En general, més d'un 80% aconseguien superar el test al final de l'aprenentatge, sense haver apreciat diferències significatives entre l'actitud dels estudiants a l'aula. La primera conclusió, que van estar temptats a fer, va ser que l'aproximació era irrellevant i que es podia escollir a gust del professor. De tota manera ells mateixos apuntaven que aquesta valoració podria ser precipitada i que caldria un estudi més profund per poder-la fer. En una segona anàlisi, conclouïen que, potser la presentació feta quedava invalidada pels exercicis prOperacionss al final de la unitat, que eren molt extensos i els mateixos per a tots els estudiants. Per tant, podien fer una segona hipòtesi, que amb uns exercicis apropiats la manera de presentar la multiplicació d'enters era irrellevant. Un test que es va passar als alumnes 4 mesos després donava resultats similars. Com a conclusió final deien que, potser, com a desenvolupadors de currículum no cal ser tan rígids sobre les opinions formulades respecte a unes o d'altres aproximacions.

### 1.2.2 Bruno i Martínón (1999)

Bruno i Martínón parteixen de la base que l'aprenentatge dels nombres, durant la vida escolar, consisteix a anar estenent els conjunts numèrics. Des dels naturals fins als reals, que això provoca una gran confusió entre els alumnes perquè segons Bruno i Martínón els sistemes numèrics es treballen com de manera aïllada, sense una perspectiva única del que són els nombres. Tot i que hi ha diversos autors que ja han plantejat l'ensenyament dels conjunts numèrics des d'una perspectiva que els englobi i relacioni. En aquesta línia citen Freudenthal (1983) que tot i considerar els avantatges de treballar diferents conjunts numèrics no en fa una visió unificada, Skemp (1971) que posa l'èmfasi en mantenir les propietats de les operacions en les extensions numèriques donant una idea més global, Semanedi (1984) que formula una "concreció del principi de permanència", que per l'aritmètica es pot resumir com, *el significat concret atribuït a una operació en un conjunt numèric ha de ser el mateix en un sistema més ampli*. L'estudi, de Bruno i Martínón, es centra en l'ensenyament dels nombres des d'una perspectiva unificada de la multidimensionalitat del coneixement numèric i de les seqüències d'extensions numèriques. Prenent com a referència les *dimensions del coneixement numèric* de Peled (1991) per fer referència als conceptes, procediments, representacions i usos connectats amb la noció de nombre. Tot i que Peled, en el seu treball sobre nombres enters, parla de dues dimensions, la quantitativa i la recta numèrica, Bruno i Martínón n'estudien tres: l'abstracta, la contextual i la recta numèrica. Són conscients, però, que el coneixement numèric no només implica aquestes dimensions sinó les relacions que es poden establir entre elles.

- a) Dimensió abstracta: la manera més abstracta de conèixer els nombres, les formes d'escriure'ls, les operacions, l'ordre i els algorismes.
- b) Dimensió contextual: fa referència al *sentit numèric* esmentat per Greeno (1991, NCTM (1989) National Council of Teachers of Mathematics i Arcavi (1994). Ser capaç de descriure numèricament situacions i esdeveniments, per exemple, estats, variacions i comparacions d'estats.
- c) Dimensió de la recta numèrica: fa referència a la doble representació dels nombres mitjançant punts i vectors a la recta numèrica. Utilitzant els punts pels estats i vectors per les variacions i comparacions. En aquesta dimensió, apunten que, Carr i Katters (1981) analitzen les dificultats dels alumnes de primària a l'hora sumar i restar nombres positius utilitzant la recta numèrica i posen en dubte la idoneïtat del model.

Afirmen que les extensions numèriques són crucials en l'ensenyament dels nombres i els camins per fer-ho són diversos:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{Z}_+ & \xrightarrow{(q)} & \mathbb{Q}_+ & \xrightarrow{(c)} & \mathbb{R}_+ \\
 \downarrow \widehat{\cong} & & \downarrow \widehat{\cong} & & \downarrow \widehat{\cong} \\
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{(q)} & \mathbb{Q} & \xrightarrow{(c)} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

Centren la investigació en el procés d'extensió per diferència dels conjunts numèrics  $A = (\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+)$  cap a  $dA = (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ . Aquesta extensió es pot realitzar de maneres diferents i el seu objectiu és fer-la sempre endavant. Prenen com a referència el sistema educatiu espanyol on la seqüència de l'extensió no sempre va endavant, cap als  $\mathbb{R}$ , sinó que sovint retrocedeix:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{Z}_+ & \xrightarrow{(5^{\text{è}} \text{ primària})} & \mathbb{Q}_+ & & \\
 \downarrow (1^{\text{r}} ESO) & & \downarrow (2^{\text{n}} ESO) & & \\
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{(2^{\text{n}} ESO)} & \mathbb{Q} & \xrightarrow{(3^{\text{r}} ESO)} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

perquè en aquesta seqüència després d'introduir  $\mathbb{Q}_+$  a partir de  $\mathbb{Z}_+$  es fa la introducció de  $\mathbb{Z}$  a partir de  $\mathbb{Z}_+$ , per posteriorment introduir  $\mathbb{Q}$  a partir de  $\mathbb{Z}$ . Aquest és el procés que també seguim amb els estudiants que han estat objecte de la nostra investigació. Però per Bruno i Martínón no només és important la seqüència sinó la manera en què s'ensenya. En el procés d'aprenentatge consideren que es pretén cobrir les tres dimensions, tenint en compte les extensions numèriques i posant especial atenció en les relacions entre elles.

- a) Dimensió abstracta: La introducció formal dels sistemes numèrics és comú en textos universitaris tot i que també s'ha utilitzat a secundària en alguns països. Aquest procediment canvia radicalment la naturalesa dels nombres a vista d'un estudiant. El nombre enter 2 passa a ser una classe d'equivalència,  $(2, 0), (3, 1), (4, 2), \dots$ , en una extensió per diferència; el nombre racional 2 una classe d'equivalència,  $(2, 1), (4, 2), (6, 3), \dots$ , en una extensió per quocient; finalment el nombre real 2 és el límit de totes les successions racionals que tenen límit 2. Per molts estudiants és complicat veure 2 des d'aquests punts de vista. Bruno i Martínón opten per introduir-los per un procés, que anomenen, d'*adjunció* que consisteix senzillament en afegir els nous nombres als vells introduint-los a partir de com s'escriuen.

- b) Dimensió contextual: els nombres d'un sistema es corresponen amb una abscissa a la recta numèrica. A mida que s'introdueixen nous nombres, més punts de la recta tenen abscissa. Quan s'arriba als reals la recta numèrica es completa.
- c) Dimensió de la recta numèrica: en base al principi de Semanedi (1984) es consideren tots els usos comuns als nombres reals. L'ús dels nombres com a cardinals només és comú a  $\mathbb{Z}_+$ , per tant no pot ser un element unificador. Però la mesura de quantitats de magnituds escalars relatives és comú a tots els nombres de  $\mathbb{Z}_+$  fins  $\mathbb{R}$  i pot servir de guia per l'ensenyament dels nombres.

La introducció dels nombres enters comporta l'extensió per diferència del sistema

$$A(= \mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+)$$

cap al sistema

$$dA(= \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$$

Si només volem considerar camins cap endavant només podem tres seqüències:

$$\begin{array}{l} (1) \quad \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (2) \quad \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (3) \quad \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

Hi hauria d'altres possibilitats entre la (2) i la (3) afegint inversos d'irracionals coneguts ( $\sqrt{2}$  i d'altres). A partir de les tres seqüències descrites es poden identificar els aspectes següents:

Dimensió abstracta. S'afegeixen els nous nombres adjuntant el signe  $-$  al davant dels vells ( $1 \rightarrow -1$ ). Com a conseqüència cada nombre té el seu invers per la suma i per tant,  $a + (-b) = a - b$ .

Dimensió contextual. S'introdueixen els nombres negatius per expressar situacions similars a les expressades pels positius. Bruno i Martínón les consideren des de tres punts de vista, que es detallen a continuació.

- a) Expressar estats: tinc un euro, 1; dec un euro,  $-1$ .
- b) Expressar variacions: guanyo dos euros, 2; perdo dos euros,  $-2$ .
- c) Expressar comparacions: la Joana té tres euros més que en Pere, 3; en Pere té tres euros menys que la Joana,  $-3$ .

Dimensió de la recta numèrica. La introducció dels nombres negatius assignant  $-a$  a l'abscissa del punt simètric al punt  $a$  respecte del 0. Comenten que alguns autors, com Küchemann (1984), decideixen abandonar la recta numèrica quan s'ensenyen els nombres negatius perquè la representació de la resta és complicada pels alumnes.

Identificació de la suma i la resta. En el sistema numèric inicial la suma i la resta tenen significats Operacionss: sumar és afegir i restar és treure. En el sistema estès les operacions tenen el mateix significat:

$$\begin{array}{ll} \text{"Tinc 2 €"} & \iff \text{"dec } -2 \text{ €"} \\ \text{"Guanyo 2 €"} & \iff \text{"perdo } -2 \text{ €"} \\ \text{"Tinc 2 €, me'n donen 3", } 2 + 3 & \iff \text{"tinc 2 €, me'n prenen } -3", 2 - (-3). \\ \text{"Tinc 3 €, i me'n prenen 2", } 3 - 2 & \iff \text{"tinc 3 €, me'n donen } -2", 3 + (-2). \end{array}$$

Entorns. Les situacions que es poden resoldre numèricament estan situades en entorns interessants per l'ensenyament. Bruno i Martínón treballen en sis entorns: *tenir-deure*, *edifici amb plantes*, *temperatura*, *cronologia*, *nivell del mar* i *carretera*. Dos d'aquests entorns són els que han estat base de les qüestions plantejades en la nostra investigació (edifici de plantes i cronologia).

Problemes additius. La identificació entre la suma i la resta es pot observar a través dels problemes additius relatius a *estats*, *variacions* i *comparacions*. De l'estudi dels problemes additius amb nombres negatius es pot obtenir informació sobre:

- a) Tipus d'estructures i dificultats a l'entorn tenir-deure.
- b) La influència dels signes dels nombres en relació al grau de dificultat.
- c) El raonament d'acord amb les estructures i els entorns.
- d) Els processos per resoldre problemes amb estructura de variacions d'estat o variacions combinades.

Encara queden d'altres qüestions importants sense resoldre entre les respostes dels estudiants. Comenten que fins el moment l'únic estudi fet sobre com els estudiants resolen i entenen aquests problemes és de Bell (1986).

Les principals preguntes d'investigació de Bruno i Martínón són:

- I. Identificació de la suma i la resta. Determinar el nivell d'identificació que els alumnes assoleixen entre la suma i la resta quan l'ensenyament es centra en aquesta identificació a través de la resolució de problemes additius.
- II. Resolució de problemes additius. A l'hora de resoldre problemes additius, determinar el grau de dificultat, les estratègies utilitzades i el paper que juga la recta numèrica, d'acord a l'entorn on se situa el problema, l'estructura i la posició de la indeterminada.
- III. La recta numèrica. Determinar les imatges conceptuals que tenen els alumnes, a les dimensions abstracta i conceptual, de les representacions a la recta numèrica i si apareixen els mateixos problemes que amb els positius. La investigació es va fer amb estudiants de 12-13 anys, 1r ESO, que és el moment on, d'acord amb el currículum, s'introdueixen els enters a l'estat espanyol. Es tracta d'un estudi d'aula qualitatiu on les dades principals es van obtenir de les entrevistes fetes a uns quants estudiants i que els tests es van tenir en compte de forma descriptiva. Els materials es van elaborar específicament per a la investigació atenent a les característiques descrites de les extensions numèriques. Es van elaborar perquè treballessin individualment i les activitats estaven presentades en situacions concretes i en els entorns detallats anteriorment. Les operacions feien referència a resolució de problemes, la identificació entre suma i resta s'havia de fer en situacions concretes i la representació a la recta numèrica. El material es va dividir en dues parts. La primera només amb nombres positius (enters, decimals i racionals). La segona només amb negatius i seguint la seqüència: concepte de nombre negatiu, ordre, Operacions, suma i resta, multiplicació i divisió (aquestes dues últimes no es van tenir en compte a la recerca. El material es va elaborar en dues versions: una només amb enters (extensió curta) i l'altra amb racionals, no-enters i irracionals (extensió llarga). Es van escollir 5 grups de tres escoles diferents, S1 (privada i urbana), S2 (pública a la perifèria de la ciutat) i S3 (pública i urbana):
  - Grup G1 (23 alumnes): materials d'extensió llarga. L'activitat dirigida per Bruno i amb la presència del professor titular a l'aula.

- Grups G2 (23 alumnes) i G3 (24 alumnes): materials d'extensió llarga a G2 i curta a G3. El professor titular va dirigir l'activitat a l'aula.
- Grups G4 i G5 (33 alumnes cada grup): el professor titular va dirigir l'activitat. Als dos grups es va fer l'extensió curta a través d'activitats del llibre de text, amb modificacions per tal de poder recollir activitats comunes amb els altres grups relacionades amb els entorns i per treballar amb més profunditat els problemes additius.

L'estudi es va realitzar en quatre fases:

- 1) Fase 1. Durant dues setmanes els grups G1, G2 i G3 van fer activitats del material elaborat corresponents a nombres positius, els grups G4 i G5 van fer activitats dels seus llibres de text complementades amb activitats elaborades per la investigació. Al final de les activitats se'ls va passar un test.
- 2) Fase 2. Durant unes 8 o 9 setmanes els alumnes van realitzar activitats dels material corresponents als nombres negatius. Els grups G4 i G5 van fer activitats del seu llibre de text. Es van passar tests corresponents a conceptes relacionats amb nombres negatius.
- 3) Fase 3. Es van analitzar els tests i es van seleccionar 11 alumnes dels grups G1, G2 i G3 que van ser entrevistats sobre diversos aspectes dels nombres negatius.
- 4) Fase 4. Es va passar un test a tots els grups quatre mesos després de l'experiment.

La informació es va recollir a través dels tests escrits i de les entrevistes enregistrades en vídeo. Es van passar 8 tests escrits, 3 d'ells amb nombres racionals (G1 i G2) i els altres amb enters que es van passar a tots el grups. Els tests van utilitzar-se per valorar les idees dels estudiants dels diferents grups, independentment de la introducció feta, i per escollir els estudiants per entrevistar. Les respostes dels estudiants es van valorar com a correctes per tal d'obtenir-ne les mitjanes. La informació obtinguda sobre el coneixement dels alumnes i l'anàlisi feta dels test només era descriptiva. Els resultats dels test es van valorar sobre 10 i es van classificar els alumnes en 5 grups:

- I. Nivell baix (L): puntuació de 5 o menys a la majoria dels tests. D'aquest nivell es van triar 2 alumnes, un de G2 i un de G3.
- II. Nivell intermedi-baix (LI): puntuació de menys de 5 en alguns tests. D'aquest nivell es van triar 2 alumnes, un del G1 i un del G2.
- III. Nivell intermedi (I): puntuació de 5 a 7 a tots els tests. D'aquest nivell es van triar 3 alumnes corresponents a G1.
- IV. Nivell intermedi-alt (HI): puntuació de 5 a 7 en alguns tests i més de 7 en els altres. D'aquest nivell es va triar un estudiant de G3.
- V. Nivell alt (H): puntuació de més de 7 en tots els tests. D'aquest nivell es van triar 3 alumnes, dos de G1 i un de G2.

Les entrevistes van fer-se semi-estructurades, les primeres preguntes eren les mateixes per a tots però després venien determinades per les primeres respostes que havien donat. Els alumnes tenien a la seva disposició paper amb rectes numèriques per si els volien utilitzar. Totes les preguntes estaven relacionades amb els diferents elements, relatius als nombres enters, estudiats a l'experiment. Un cop transcrites les entrevistes, es va analitzar cada pregunta en relació als tipus de respostes i a les justificacions o criteris utilitzats pels alumnes. Els principals elements analitzats van ser:

- 1) Comprensió de la identificació entre la suma i la resta en situacions concretes. Les respostes obtingudes es poden classificar en:
- Nivell 1. No identifiquen les dues operacions: mantenen l'associació sumar-afegir, restar-treure que van aprendre al treballar només amb els nombres positius.
  - Nivell 2. Identifiquen les operacions a nivell operacional, és a dir saben les regles per operar, però no mantenen l'associació entre sumar-augmentar i restar-disminuir.
  - Nivell 3. Saben identificar les operacions pel seu significat: són capaços d'identificar les dues operacions tant a nivell operatiu com contextual. Poden posar exemples que sumar no va sempre lligat a augmentar i que restar no sempre va lligat a disminuir.
- 2) Tipus de representacions fetes a la recta numèrica per situacions concretes, números i operacions. Classifiquen els alumnes en tres nivells segons l'habilitat d'utilitzar les quatre transferències entre les dimensions: *de la recta numèrica a l'abstracta*, *de la recta numèrica a la contextual* i *de l'abstracta a la recta numèrica de la contextual a la recta numèrica*. Tot i que la classificació podria matisar-se perquè hi ha alumnes que tot i estar en un nivell per molt poc, una resposta correcta, podria situar-se al nivell superior, la que acaben fent és:
- Nivell 1. Dificultats en tres o quatre transferències.
  - Nivell 2. Dificultats en una o dues transferències.
  - Nivell 3. No tenen dificultats a les transferències.
- 3) Resolució de problemes additius: dificultats, utilització de la recta numèrica i estratègies de resolució de problemes. Els resultats dels tests escrits els van portar a les següents conclusions:
- (1) Les dificultats venen més arran de la posició de la incògnita que de l'estructura o de l'entorn.
  - (2) L'ús de la recta numèrica depèn de l'entorn i de la posició de la incògnita més que de l'estructura.

Aquests resultats es van analitzar més acuradament a les entrevistes, on es determina el raonament dels alumnes, les estratègies i les dificultats. Per fer-ho es van valorar els següents paràmetres:

- Els tipus de problemes analitzats a les entrevistes (14 problemes atenent als diferents contextos, estructura i posició de les incògnites).
- L'estudi de les respostes inicials dels entrevistats abans de la intervenció de l'entrevistador.
- Les estratègies de solució.
- La influència del context, l'estructura i la posició de la incògnita.
- La influència de l'estudiant, sense que depengui del nivell. La utilització, per exemple, de la recta numèrica és variable dependent de l'entrevistat més que del tipus o estructura del problema.
- L'estudi realitzat després de la intervenció de l'entrevistador.
- L'ordre de les dades, alguns alumnes posen els números en el mateix ordre que apareixen als enunciats.
- L'adaptació de l'operació a la recta numèrica. Correspon a alumnes que primer resolen el problema sobre la recta numèrica i després busquen l'operació que s'adapti al resultat obtingut.

- L'ús de nombres positius. Correspon a alumnes que resolen els problemes utilitzant només nombres positius i interpretant el resultat. Mostra que hi ha alumnes que no tenen la necessitat d'utilitzar nombres negatius o que han trobat la manera d'evitar-los.
- Els procediments de resolució utilitzats pels alumnes, que podem resumir en:
  - (a) L'ordre de les dades.
  - (b) L'adaptació de l'operació a la recta numèrica.
  - (c) La utilització de nombres positius (amb o sense recta numèrica).

A partir de l'anàlisi dels resultats de les entrevistes fan la següent classificació dels alumnes:

- Nivell 1. Alumnes que utilitzen el procediment (a) per a qualsevol tipus de problema. Si en algun moment després de seguir aquest procés el resultat no concorda amb el que poden obtenir a partir de la recta numèrica passen a utilitzar (b). Cap utilitza nombres positius.
- Nivell 2. Es distingeixen per utilitzar el procediment (c), independentment de la incògnita. De vegades fan una representació del problema a la recta numèrica i d'altres vegades sembla que intueixin el resultat. Alguns barregen els procediments (a) i (c) però a diferència dels de l'anterior nivell mai l'ordre de les dades, però utilitzen nombres positius i la recta numèrica. Habitualment arriben al resultat correcte.
- Nivell 3. Utilitzen l'ordre de les dades pels problemes que ho permeten i busquen els càlculs necessaris pels altres problemes. De vegades utilitzen nombres positius. Apunten que aquests estudiants tenen un altre nivell de comprensió dels problemes que els permet escollir l'estratègia depenent del problema.

Tot i que la recerca està emmarcada en la introducció dels nombres negatius en un ensenyament unificat dels nombres, la recerca s'ha centrat en la suma i resta amb nombres negatius. Malgrat les particularitats de cada un dels punts d'estudi mostren un punt de connexió comú en l'estudi dels canvis que es produeixen en els conceptes de suma i resta quan s'introdueixen els negatius. Els resultats finals mostren diferents maneres d'assimilar aquests canvis i l'objectiu de la investigació es centra en com l'ensenyament de la suma i resta de negatius provoca en els estudiants diferents maneres d'entendre-ho. En cada un dels aspectes estudiats (identificació de la suma i la resta, recta numèrica i resolució de problemes additius) es fa una gradació dels encerts (Bruno i Martínón, 1999, p. 806) a les preguntes i mostra el nivell dels estudiants a cada un dels aspectes estudiats. Els resultats mostren que la majoria dels alumnes es mantenen en el mateix nivell de comprensió. I això ho atribueixen a l'ús de la recta numèrica en el procés d'ensenyament. A la Taula 1.1 es mostren els alumnes entrevistats classificats per nivells:

Els alumnes que es mantenen al nivell 1 no mostren comprensió de la diferència entre la suma i la resta. Mostren dificultats en la resolució de problemes additius. Només calculen bé operacions amb els dos primers termes coneguts i sense parèntesi. Mostren persistència en mantenir les idees referents als nombres positius. Els alumnes del nivell 2 mostren una millora respecte dels anterior. Reconeixen les dues operacions però no són capaços de contextualitzar-les ni d'utilitzar-les per resoldre problemes. Quan els conceptes referents a nombres negatius els impedeixen resoldre problemes agafen els nombres positius per fer-los. No assolixen els objectius completament, però mostren una millor comprensió de les situacions, de la recta numèrica i de les operacions. Els alumnes situats al nivell 3 han modificat les seves idees respecte de la suma i de la resta i saben com justificar-les en situacions concretes. Utilitzen la recta numèrica com una eina essencial i són flexibles a l'hora de resoldre problemes amb el procediment que utilitzen. de tota manera no consideren

	Identificació suma i resta	Recta numèrica	Resolució de problemes additius
S2	1	1	1
S4	1	1	1
S1	2	1	1
S6	2	2	1
S7	2	2	1
S3	1	2	2
S8	2	2	2
S5	3	2	2
S9	3	3	3
S10	3	3	3
S11	3	3	3

Taula 1.1: Classificació dels alumnes segons el grau de comprensió.

que cap alumne hagi assolit completament els objectius plantejats en l'ensenyament perquè inclús aquests últims alumnes dubten a l'hora d'interpretar situacions del tipus  $a - (-b)$  tot i obtenir resultats correctes. Veient que alguns alumnes havien modificat les seves idees no podien constatar, però, que el canvi fos durador en el temps. Per confirmar-ho apunten a estudiar un progrés més llarg en el temps. Respecte dels tres objectius plantejats:

- I. Identificació de la suma i de la resta. Afirmen que el que saben d'aquestes operacions està supeditat al que van aprendre amb els nombres positius. Una identificació d'aquestes operacions requeriria d'un treball molt meticulós a l'aula.
- II. Resolució de problemes additius. L'estudi mostra les dificultats a l'hora de resoldre problemes additius depenent de quin és el terme que estem buscant. Problemes additius que no presentaven dificultats només amb números positius esdevenen difícils d'afrontar i entendre quan es formulen amb nombres negatius. Diuen que cal un treball intens per tal de poder millorar aquest aspecte. La recta numèrica esdevé una eina útil en aquest treball. Finalment apunten que el treball realitzat en aquest punt complementa resultats previs (Conné, 1985) però que aporta una visió diferent al fer un seguiment del raonament que els alumnes fan en la resolució d'aquests problemes.
- III. La recta numèrica. Comenten que l'experiment mostra les dificultats dels estudiants a l'hora de fer representacions a la recta numèrica, per exemple "*isolated representation of numbers*", fent referència a situar sobre la recta els nombres que intervenen al problema i la solució sense fer referència al què significa cada nombre. De tota manera apunten que alguns estudiants sí que han aprofitat la recta numèrica a l'hora de resoldre problemes i que la seva utilització els ajuda.

### 1.2.3 Pujol (2008)

En el marc de la tesi doctoral, "*Una reconsideració dels nombres enters per a l'ensenyament obligatori*", Pujol (2008, pp. 47 i 48), proposa els següents objectius d'investigació:

- 1) Diagnosticar el coneixement matemàtic relatiu al nombre enter de l'alumne que inicia els estudis de batxillerat.



- 2) Conèixer la incidència en l'aprenentatge de l'alumne d'un ensenyament deductiu del nombre enter.
- 3) Explicar les dificultats que tenen els alumnes davant de l'ensenyament deductiu del nombre enter a través de la resolució de problemes.

La investigació es va realitzar amb dos grups d'alumnes de 1r curs de batxillerat, 16 o 17 anys, un grup de 27 alumnes (15 nois i 12 noies), que cursaven Matemàtiques i un de 23 alumnes (10 nois i 13 noies) que cursaven Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. La intervenció es realitzà en tres fases:

- Fase de diagnosi. Permet obtenir informació relativa al punt de partida de cada alumne respecte d'uns indicadors delimitats. Aquesta fase de diagnosi la vertebrava sobre tres eixos:
  1. El caràcter instrumental del nombre enter. Se suposa que els alumnes que arriben al batxillerat els han treballat i els coneixen. Els objectius que es volen testar són l'ordenació, la suma, el producte i en quines situacions l'alumne decideix utilitzar els nombres enters.
  2. El tractament real i formal del nombre enter. Sovint abans del batxillerat s'introdueix a partir de situacions properes però cal veure si l'alumne és capaç de desvincular-los de models concrets. Els objectius que es volen testar són diagnosticar si abandona el situacions reals per interpretar els nombres negatius, si interpreta suma-augment i resta-disminució, si multiplica o divideix com en els naturals, si treballa correctament amb els signes, si treballa correctament amb l'ordre dels enters i si té presents els nombres enters quan treballa.
  3. Els problemes additius amb nombres negatius. Els objectius que es volen testar són poder trobar els models concrets que permeten obtenir millors resultats quan es resolen problemes relatius als nombres negatius i saber la proporció d'alumnes que utilitza la recta numèrica per resoldre problemes.

Aquesta intervenció es realitza des d'un punt de vista descriptiu, atenent únicament als coneixements previs dels participants.

- Fase d'intervenció. Permet obtenir informació relativa a les dificultats i a l'aprenentatge de l'alumne que prové de la intervenció a l'aula. Prèviament es donen unes orientacions pautades per treballar unes activitats que porten a l'assoliment d'un coneixement. La fase d'intervenció l'estructura en sis parts:
  - Plantejament del problema dels nombres consecutius. Els objectius són:
    1. Saber si acaba el problema o manifesta que necessita més temps. En cas de donar resposta analitzar-la.
    2. Estudiar les experimentacions dels estudiants depenent de si sumen consecutius i valoren els resultats o si agafen nombres i intenten descompondre'ls com a suma de consecutius.
  - Informe de resolució dels participants. Els objectius són:
    1. Indicar si l'alumne es pregunta sobre el nombre de possibles descomposicions quan el volem escriure com a suma de consecutius.
    2. Examinar si l'alumne relaciona la quantitat de sumands d'una descomposició amb els divisors del nombre que volem descompondre.

3. Examinar si l'alumne relaciona la quantitat de descomposicions possibles amb els divisors.
  4. Posar de manifest si l'alumne utilitza nombres negatius en les descomposicions.
- Introducció del nombre enter a partir del problema dels nombres consecutius. Els objectius són:
    1. Explicar el nivell de familiaritat amb el procediment que permet obtenir la suma de nombres consecutius a partir de la descomposició factorial del nombre.
    2. Examinar com denoten els nous nombres que cal incorporar per resoldre el problema dels nombres consecutius.
    3. Discernir els raonaments i dificultats per identificar i acceptar que parells ordenats diferents fan referència a un mateix nombre.
  - Concepcions de nombre: magnitud, mesura, quantitat i nombre. Els objectius són:
    1. Distingir les definicions espontànies que donen de nombre.
    2. Saber les utilitats que els alumnes associen als nombres.
    3. Determinar el coneixement que tenen sobre la construcció de nombres.
    4. Discernir si els alumnes diferencien entre els aspectes ordinal i cardinal d'un nombre.
  - Estructura additiva del nombre enter. Els objectius són:
    1. Copsar si utilitzen parell diferents per fer referència a un mateix nombre.
    2. Explicar les dificultats per sumar enters, representats per parells, com se sumen els naturals.
    3. Conèixer l'acceptació per acceptar la notació coneguda pels enters a partir de la suma d'enters.
  - Estructura multiplicativa del nombre enter. Els objectius són:
    1. Diagnosticar les dificultats, a partir d'activitats que només necessiten de l'estructura additiva, per traduir els nombres donats per parells a la notació simplificada i a l'inrevés.
    2. Explicar les propostes que fan respecte a la quantitat de descomposicions que admet un nombre determinat.
    3. Conèixer les dificultats que tenen per multiplicar enters en forma de parells, respecte de la mateixa operació feta amb parelles que representen naturals.
  - Fase de valoració. Permet obtenir informació, directament de l'estudiant, sobre l'impacte que ha tingut la proposta de treball i la disposició del participant davant de l'estil d'ensenyament implementat. L'objectiu final és recollir l'opinió dels participants.

Analitzem en detall cada una de les tres fases, els qüestionaris i les anàlisis que se'n deriven. Comencem amb la fase de diagnosi. La investigació s'inicia amb una recerca quantitativa que permet establir els punts de partida dels participants i la recerca qualitativa permet comprendre i interpretar fenòmens que incideixen en els participants. La investigació combina aquestes dues metodologies de recerca. En els qüestionaris van combinar preguntes obertes i tancades, les primeres tot i ser més difícils de quantificar (són en essència qualitatives) permeten obtenir molta informació sobre el que els alumnes pensen a l'hora de resoldre problemes. Es van passar tres qüestionaris per grup amb una setmana de decalatge entre cada un.

- I. El primer qüestionari està orientat a obtenir informació sobre el que els alumnes saben, en referència al que s'estudia a Secundària, sobre el nombre enter. Utilització, dificultats a l'hora d'operar i interpretació del nombre enter.

- II. El segon qüestionari s'orienta a obtenir informació sobre el tractament real i formal del nombre enter. Les dificultats, també històriques, que afloren quan no es pot lligar el nombre enter a la noció de quantitat.
- III. El tercer qüestionari s'orienta a obtenir informació sobre els problemes additius amb nombres negatius. El disseny d'aquest qüestionari, segons Pujol, està inspirat en Bruno i Martínón (1994a). Fa referència a l'ús que els estudiants fan de la recta numèrica segons els problema que se'ls planteja.

Amb això s'acaba la fase de diagnosi i comença la fase d'intervenció, introduint el problema que servirà per introduir els nombres enters amb una metodologia deductiva. Tot i que com es remarca al llarg de la tesi acaba sent una metodologia híbrida combinant la metodologia deductiva amb la constructiva. El primer pas en aquesta fase és l'enunciat del problema dels "nombres consecutius", que s'enuncia de la següent manera:

Quins són els nombres naturals que es poden escriure com a suma de nombres consecutius?

S'evita escriure nombres naturals en la segona part de l'enunciat perquè l'objectiu és aprofitar el problema per introduir els nombres negatius. Un cop plantejat el problema només considerant els nombres naturals, apareix la dificultat per trobar una forma general per expressar qualsevol nombre natural com a suma de nombres consecutius. És fàcil expressar els nombres senars com a suma de nombres consecutius, però pel que fa als nombres parells el problema es complica. Per a les potències de 2 sembla que no sigui possible i pels altres parells no sempre sembla immediat. La recerca d'una generalització, atenent a la descomposició en factors, és el que porta a introduir els nombres negatius com a parells ordenats de nombres naturals,  $(a, b)$ , on  $b$  és el nombre que cal restar a  $a$  i podem recuperar els nombres enters amb la notació habitual a partir de  $a - b$ . Si  $a > b$  tenim els nombres positius i si  $a < b$  tenim els nombres negatius. L'aparició d'aquests nombres surt fruit del raonament inductiu a l'hora d'analitzar el problema. Posteriorment en una fase següent de la intervenció es construeix l'estructura additiva i multiplicativa dels nombres enters. És en aquest punt on es fa palesa la introducció híbrida, a partir de la metodologia inductiva apareixen uns nous nombres als que podem dotar de l'estructura algebraica corresponent als nombres enters mantenint totes les propietats dels naturals. Això és, conseqüent amb el *principi de permanència de les lleis formals* de Hankel. Com a conseqüència tenim una solució general al problema dels nombres consecutius. Les dades obtingudes a cada una de les fases, aporten informacions molt diferents. A l'hora d'analitzar-les s'ha combinat una anàlisi quantitativa amb una anàlisi qualitativa per tal d'obtenir el màxim d'informació útil per a la recerca. En l'anàlisi de dades s'ha fet una separació per grups (Matemàtica i Matemàtica Aplicada a les Ciències Socials) i per gènere. Però Pujol (2008, p. 276) comenta que la utilitat d'aquesta separació és limitada a les conclusions i que bàsicament s'ha atès als resultats globals. Respecte dels qüestionaris prOperacions per a la fase de diagnosi es va atendre a quatre objectius:

I. Primer qüestionari. Sobre el caràcter instrumental del nombre enter.

- 1) Valorar com ordenen nombres enters. De les dades recollides conclou que els alumnes *ordenen correctament nombres enters* (Pujol, 2008, p. 285).
- 2) Valorar com sumen nombres enters. De les dades recollides conclou que *poc més de la meitat dels alumnes sumen amb èxit nombre enters. Les noies obtenen millors resultats que els nois i els estudiants de Matemàtiques es troben per sobre dels estudiants de Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials* (Pujol, 2008, p. 286).
- 3) Valorar com multipliquen nombres enters. De les dades recollides conclou que *més del 80% dels alumnes multiplica bé. I amb poca diferència les noies obtenen millors resultats*

*que els nois i els alumnes de Matemàtiques millors que els de Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials* (Pujol, 2008, p.288).

- 4) Valorar quines són situacions concretes que tria l'alumne per utilitzar el nombre enter. En aquest cas es va formular un pregunta oberta:

“Escriu l'enunciat d'un problema sobre nombres negatius”.

Els resultats respecte aquest problema són més complicats d'analitzar pel gran i divers ventall de respostes. En general la majoria d'estudiants es decanten per un model de guanys i pèrdues, 80%; pel model de l'ascensor, 11.4%; i pel de temperatures, 8.6%.

- II. Segon qüestionari. Sobre el tractament real i formal del nombre enter. Els objectius principals que, a partir d'aquest qüestionari, es proposa diagnosticar són:

- a) El real com a obstacle.
- b) La imposició del formal com a obstacle.

I això s'abordarà a partir de sis objectius que s'analitzaran a partir de preguntes escollides.

- 1) Si l'alumne abandona els models reals per interpretar els nombres negatius. Per tal d'obtenir respostes a aquest objectiu es proposa la pregunta “Pots trobar una situació real en la que tingui sentit  $-(-3)$ ?”. Aquí estableix cinc categories de respostes:
  1. Diu que mai s'ho havia plantejat.
  2. No en troba cap.
  3. Tractament algebraic desvinculat de tot fenomen real.
  4. Sí, dóna un exemple.
  5. Diu que en la realitat no existeixen els nombres negatius.
- 2) Si l'alumne interpreta la suma i la resta de nombres enters com un augment o una disminució. Es plantegen dues preguntes, una per la suma i l'altra per la resta i s'estableixen tres categories de resposta per cada una:
  - “Pots trobar un nombre que sumat a 5 doni 2?” Les categories de resposta són:
    1. Troba solució. El real no és un obstacle. Realitza l'operació matemàtica desvinculada de la realitat.
    2. Interpreta la suma com un augment.
    3. Realitza càlculs erronis.
  - “És possible trobar un nombre que restat a 7 doni 10?” Les categories de resposta són:
    1. Troben solució. El real no és un obstacle. Realitza l'operació matemàtica desvinculada de la realitat.
    2. Interpreta la resta com una disminució.
    3. Realitza càlculs erronis.
- 3) Si l'alumne multiplica i divideix els nombres enters tal com ho faria amb nombres naturals. Es plantegen dues preguntes, una per al producte i l'altra per a la divisió i s'estableixen les categories de resposta per cada una d'elles:
  - “És possible trobar un múltiple de 5 menor que 3 i diferent de zero?” Les categories de resposta són:
    1. Sí, és possible. L'alumne respon correctament.

2. Sí, és possible. L'alumne respon incorrectament.
  3. No és possible.
  4. L'alumne diu que no ho sap.
  - “*És correcta la següent divisió? Dividend=3, divisor=4, quocient=4 i residu=-1.*”  
Les categories de resposta són:
    1. Sí, és correcta
    2. No, perquè el dividend ha de ser major que el divisor.
    3. No, perquè el residu ha de ser nul o positiu.
    4. No, no dóna cap motiu.
- 4) Si l'alumne dóna un tractament correcte als signes. Es plantegen una pregunta i s'estableixen tres categories de resposta:
- “*-7 graus a Moscú, -3 a Budapest. Si algú hagués viatjat de Moscú a Budapest, hauria notat una pujada o una baixada de temperatura?*” Les categories de resposta són:
    1. És competent en el treball de nombres amb signe.
    2. Mira d'interpretar els nombres amb signe però comet errors.
    3. Ignora el signe.
  - “*Si a és positiu i b és negatiu, a-b és un nombre positiu.*” Les categories de resposta són:
    1. El símbol literal pot fer referència a un nombre positiu o negatiu.
    2. El símbol literal fa referència a un nombre positiu.
    3. Presenta confusions diverses
- 5) Si l'alumne dóna un tractament correcte a l'ordre dels nombres enters. Es plantegen dues preguntes, per tali d'examinar si l'alumne trasllada als enters l'ordre dels naturals i s'estableixen les mateixes categories de resposta per ambdues:
- “*Quin és el nombre major en una unitat a -3?*”
  - “*En la llista dels 40 principals, el disc preferit d'en Joan estava 3 llocs més avall del que havia estat la setmana anterior. L'antiga posició era la 3, quina és la nova?*”  
Les categories de resposta són:
    1. Utilitza correctament l'ordre en els enters.
    2. Comet errors que poden provenir de traslladar als enters l'ordre dels naturals.
  - “*En Pere té 5 bales més que en Joan i en Joan té 3 bales més que l'Enric. Sabent que en Pere té 26 bales, quantes bales té l'Enric?*”
  - “*L'ordinador de l'Eva va costar 120 euros més que el de l'Alexandre. El de l'Eva va costar 520 euros, quant va costar el de l'Alexandre?*” Les categories de resposta són:
    1. Tracta correctament la reversibilitat de l'ordre.
    2. Presenta dificultats en la reversibilitat de l'ordre.
  - “*La Sara va gastar ahir en laminadures 8 euros més que avui. Ahir va gastar 35 euros. Quants n'ha gastat avui?*”
  - “*El senyor Ruiz té 56 anys i el seu fill 29. Quan l'edat del pare és el doble que la del fill?*” Les categories de resposta són:
    1. Els alumnes cometen errors en el tractament temporal amb nombres negatius.
    2. Els alumnes utilitzen correctament els nombres negatius en el tractament temporal.

- “*Quin nombre precedeix en 7 unitats a  $-3$ ?*” Les categories de resposta són:
    1. Encerta la resposta.
    2. Presenta errors.
    3. No comprèn la pregunta.
- 6) Si l'alumne té presents els nombres enters en les seves solucions. Es plantegen tres preguntes i quatre categories de resposta:
- “*Quin nombre sumat a 5 dóna 3?*”
  - “*Pots trobar un múltiple de 5 menor que 3 i diferent de zero?*”
  - “*Quin nombre restat de 7 dóna 10?*” Les categories de resposta són:
    1. Ús adequat del càlcul aritmètic entre nombres enters.
    2. Presenta errors en una de les tres qüestions.
    3. Presenta errors en dues de les tres qüestions.
    4. Presenta errors en les tres qüestions.

L'anàlisi dels resultats d'aquest segon qüestionari és més complexa que la del primer i aquí en farem un extracte resumit, per més detalls consultar Pujol (2008, pp. 303-318). Diferenciarem l'anàlisi respecte els sis objectius plantejats.

- (a) Respecte del primer objectiu: Les dades porten a conjeturar que els nois busquen més que les noies justificacions a partir de la realitat quotidiana. Valorant per grups els del Social són els qui més cerquen explicacions en situacions del món real, mentre que els altres busquen més explicacions dins de la matemàtica. L'estudi per grup i gènere porta a concloure que quasi un 42% de les noies del grup que fa Matemàtiques diu que en la realitat no existeixen els nombres negatius i busquen explicació en la matemàtica. D'altra banda cap dels nois del Social es posiciona en aquesta opció.
- (b) Respecte del segon objectiu. No pot concloure que els alumnes vinculin la suma d'enters a un augment. Però, de les dades sí que s'aprecia, en poc més de la meitat dels alumnes, l'esmentada vinculació entre la resta i l'acció de treure. Les dades porten a conjeturar que són els alumnes que cursen el Social són els que més vinculen la resta a una disminució. Dues tercers parts dels que cursen Matemàtiques no mantenen aquesta vinculació.
- (c) Respecte del tercer objectiu. Conclou que en la meitat dels alumnes de primer de batxillerat s'aprecia una vinculació entre la multiplicació i la divisió d'enters i les corresponents accions que van justificar la introducció d'aquestes operacions entre els naturals.
- (d) Respecte del quart objectiu. Conclou que la utilització del nombre enter davant de situacions vinculades amb el món real (temperatures) és correcta en els alumnes de primer de batxillerat. Però la utilització de símbols literals que fan referència a nombres positius o negatius presenta dificultats en més de la meitat dels estudiants sobretot en els nois.
- (e) Respecte del cinquè objectiu. Conclou que l'ordre dels nombres enters està correctament après per la majoria dels estudiants.
- (f) Respecte del sisè objectiu. Més de la meitat dels alumnes no tenen en compte els nombres enters en la seva resolució de problemes. Apunta, però, que podria ser fruit del cansament a l'etapa final del qüestionari.

III. Tercer qüestionari. Sobre els problemes additius amb nombres negatius. Pretén obtenir informació sobre l'ús que fan els alumnes de la recta numèrica en la resolució de problemes i del tractament de l'estructura additiva del nombre enter. Fixa dos objectius que complementen els objectius generals de la investigació:

- 1) Distingir els models concrets que proporcionen millors resultats en la resolució de problemes relacionats amb el nombre negatiu.
- 2) Saber la proporció d'alumnes que utilitza la recta numèrica per resoldre problemes segons cada model.

L'instrument utilitzat és un qüestionari amb 12 preguntes. Les preguntes formulades fan referència als models de temperatures, guanys i pèrdues, nivell del mar, temps i carretera. A les preguntes destinades a obtenir informació sobre el segon objectiu sempre es demana fer ús de la recta numèrica com a suport per resoldre el problema. Les categories de resposta s'estableixen per a cada pregunta i a cada qüestionari per separat.

I. Model de les temperatures. Comparació de dos estats. Les categories atenent a cada objectiu són:

- Respecte de l'objectiu 1.
  - (1) Interpreta i resol correctament el model de les temperatures que condueix a la comparació d'estats.
  - (2) No interpreta i no resol correctament el model de les temperatures que condueix a la comparació de dos estats.
- Respecte de l'objectiu 2.
  - (1) Utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'un problema basat en el model de les temperatures que condueix a la comparació de dos estats.
  - (2) No utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'un problema basat en el model de les temperatures que condueix a la comparació de dos estats.

II. Model de les temperatures. Suma de dues variacions. Les categories atenent a cada objectiu són:

- Respecte de l'objectiu 1.
  - (1) Interpreta i resol correctament el model de les temperatures que condueix a la suma de dues variacions.
  - (2) No interpreta i no resol correctament el model de les temperatures que condueix a la suma de dues variacions.
- Respecte de l'objectiu 2.
  - (1) Utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en el model de les temperatures que condueix a la suma de dues variacions.
  - (2) No utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en el model de les temperatures que condueix a la suma de dues variacions.

III. Model de guanys i pèrdues. Suma de dos estats que tenen per resultat un estat. Les categories atenent a cada objectiu són:

- Respecte de l'objectiu 1.
  - (1) Interpreta i resol correctament el model de guanys i pèrdues que condueix a la suma de dos estats que té per resultat un estat.

- (2) No interpreta i no resol correctament el model de guanys i pèrdues que condueix a la suma de dos estats que té per resultat un estat.
  - Respecte de l'objectiu 2.
    - (1) Utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model de guanys i pèrdues que condueix a la suma de dos estats i que té per resultat un estat.
    - (2) No utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model de guanys i pèrdues que condueix a la suma de dos estats i que té per resultat un estat.
- IV. Model concret en el nivell del mar. Suma d'un estat inicial amb una variació que té per resultat un estat final. Les categories atenent a cada objectiu són:
- Respecte de l'objectiu 1.
    - (1) Interpreta i resol correctament el model prOperacions i basat en el nivell del mar que condueix a la suma d'un estat amb una variació.
    - (2) No interpreta i resol correctament el model prOperacions i basat en el nivell del mar que condueix a la suma d'un estat amb una variació.
  - Respecte de l'objectiu 2.
    - (1) Utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model relacionat amb el nivell del mar que condueix a la suma d'un estat amb una variació i que té per resultat un estat.
    - (2) No utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model relacionat amb el nivell del mar que condueix a la suma d'un estat amb una variació i que té per resultat un estat.
- V. Model basat en el pas del temps. Diferència de dos estats que té per resultat una variació. Les categories atenent a cada objectiu són:
- Respecte de l'objectiu 1.
    - (1) Interpreta i resol correctament el model basat en el pas del temps que condueix a la diferència de dos estats i que té per resultat una variació.
    - (2) No interpreta i no resol correctament el model basat en el pas del temps que condueix a la diferència de dos estats i que té per resultat una variació.
  - Respecte de l'objectiu 2.
    - (1) Utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model relacionat amb el pas del temps que condueix a la diferència de dos estats i que té per resultat una variació.
    - (2) No utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model relacionat amb el pas del temps que condueix a la diferència de dos estats i que té per resultat una variació.
- VI. Model basat en els recorreguts per una carretera. Suma d'un estat inicial amb una variació que té per resultat un estat final. Les categories atenent a cada objectiu són:
- Respecte de l'objectiu 1.
    - (1) Interpreta i resol correctament el model basat en els recorreguts en una carretera que condueix a la suma d'un estat amb una variació que té per resultat un estat.
    - (2) No interpreta i no resol correctament el model basat en els recorreguts en una carretera que condueix a la suma d'un estat amb una variació que té per resultat un estat.



- Respecte de l'objectiu 2.
  - (1) Utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model relacionat amb els desplaçaments en una carretera que condueix a la suma d'un estat amb una variació que té per resultat un estat.
  - (2) No utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model relacionat amb els desplaçaments en una carretera que condueix a la suma d'un estat amb una variació que té per resultat un estat.

Després d'una anàlisi exhaustiva les conclusions respecte del primer objectiu es poden resumir com: *“El model concret que més bons resultats dona entre els alumnes participants és el del nivell del mar. Aquest es caracteritza per provocar una situació que condueix a la suma d'una variació a un estat que té per resultat un estat. El segon model que més bons resultats dona en virtut de les dades recollides és el model de guanys i pèrdues.”* (Pujol, 2008, p. 335) I les conclusions respecte del segon objectiu: *“La recta numèrica com a recurs per a la resolució de les activitats proposades ha estat utilitzada de manera ben diferent segons el model que considerem. Mentre que en el model concret de guanys i pèrdues no ha estat emprada per cap alumne, en els models concrets de desplaçament de la forma  $e_i + v = e_f$  ha estat utilitzada per una proporció d'alumnat proper a la meitat”.* (Pujol, 2008, p. 336)

Continuem amb la fase d'intervenció. Aquesta fase es desenvolupa en dos blocs cada un d'ells implementat en activitats formatives. La informació obtinguda és bàsicament qualitativa.

Fase d'intervenció I.

- (a) Intervenció 1 (fulls de resolució). Es va plantejar el problema dels nombres consecutius. Els objectius que pretenen completar els objectius generals són:
1. Saber si l'alumne conclou el problema o si manifesta que necessita més temps. En cas que doni resposta analitzar-la.
  2. Discernir les experimentacions dels estudiants segons si sumen consecutius i examinen els resultats o si intenten descompondre'ls com a suma de consecutius.

Les categories de resposta que s'estableixen, classificades per objectius són:

a) Respecte del primer objectiu.

P.1 Pel que fa al tractament inicial:

- (1) No responen a la pregunta.
- (2) Conjecturen que tots els nombres naturals es poden escriure com a suma de consecutius excepte les potències de 2.
- (3) Conjecturen que tots els nombres naturals es poden escriure com a suma de consecutius. Però no té en compte descomposicions amb negatius ni que pot ser suma d'un sol sumand.
- (4) Diuen que tots els nombres naturals es poden escriure com a potències de dos excepte un nombre finit de potències de 2.
- (5) Diuen que es poden escriure com a suma de consecutius els naturals que són senars, múltiples de 3, etc. Exposen part dels nombres que es poden expressar com a suma de consecutius.

P.2 Sobre la suma de dos nombres consecutius:

- (1) Conjecturen que la suma de dos consecutius és un nombre senar.

- (2) Els alumnes que no descobreixen aquesta conjectura tenen l'ítem en blanc.
- P.3 Sobre la suma de quatre nombres consecutius:
- (1) Conjecturen que la suma de quatre nombres consecutius és un nombre parell. També s'inclouen els que diuen que una suma d'una quantitat parella de nombres és un nombre parell.
- (2) Els alumnes que no descobreixen aquesta conjectura tenen l'ítem en blanc.
- P.4 Sobre la suma de tres nombres consecutius:
- (1) Conjecturen que la suma de tres nombres consecutius és un múltiple de 3.
- (2) Els alumnes que no descobreixen aquesta conjectura tenen l'ítem en blanc.
- P.5 Sobre la suma de cinc nombres consecutius:
- (1) Conjecturen que la suma de cinc nombres consecutius és un múltiple de 5.
- (2) Els alumnes que no descobreixen aquesta conjectura tenen l'ítem en blanc.
- b) Respecte del segon objectiu.
- P.6 Sobre les experimentacions realitzades pels alumnes:
- (1) Sumen nombres consecutius i examinen el resultat.
- (2) Consideren naturals i intenten descompondre'ls en suma de consecutius.
- (3) Tenen en compte els dos procediments anteriors.
- (4) No experimenten.
- (5) Experimenten sobre la recta numèrica.

L'anàlisi porta, resumidament, a les conclusions següents: *“L'experimentació i la cerca d'una solució facilita l'assoliment de conjectures parcials però, a la vista de les dades recollides, no facilita un resultat conjectural global del problema prOperacions. Els alumnes del grup B, és a dir els que cursen la matèria de Matemàtiques, experimenten més que els del grup A i això els facilita més resultats parcials però, en canvi, els dificulta el descobriment de resultats generals.”* (Pujol, 2008, p. 352)

- (b) Lliurament de l'informe de resolució. Tenint en compte que per fer el problema dels nombres consecutius els estudiants podien necessitar més temps se'ls va deixar una setmana per fer-lo i presentar-lo posteriorment. En aquest punt és on pretén obtenir informació sobre els descobriments de l'alumne en la resolució del problema. Els objectius a valorar van ser:
- 1) Indicar si l'alumne es pregunta per la quantitat de possibles descomposicions.
  - 2) Examinar si l'alumne valora la quantitat de sumands d'una descomposició amb els divisors del nombre a descompondre.
  - 3) Examinar si l'alumne relaciona la quantitat de descomposicions possibles amb els divisors del nombre descompost.
  - 4) Posar de manifest si l'alumne utilitza nombres negatius en les descomposicions.

Novament es plantegen, d'inici, una sèrie de paràmetres per tal d'analitzar els objectius prOperacionss. Aquests paràmetres, com a la part de resolució a l'aula tot i haver-se plantejat a priori són suficients per tal de classificar les respostes donades pels estudiants.

- a) Respecte del primer objectiu.

P.1 Sobre les descomposicions dels nombres primers:

- (1) Conjecturen que els primers senars tenen una única descomposició com a suma de consecutius.

- (2) Els qui no descobreixen la conjectura tenen l'ítem d'aquest indicador en blanc.
- P.2 Sobre la quantitat de descomposicions:
- (1) Descobreixen que hi ha nombres que tenen més d'una descomposició com a suma de consecutius.
  - (2) No descobreixen la conjectura exposada.
- P.3 Sobre el tractament experimental considerat:
- (1) Sumen nombres consecutius i examinen el resultat.
  - (2) Consideren nombres naturals i intenten descompondre'ls en suma de nombres consecutius.
  - (3) Tenen en compte els dos procediments.
  - (4) No experimenten.
- b) Respecte del segon objectiu.
- P.4 Sobre la relació entre la quantitat de sumands de les descomposicions d'un nombre i els seus divisors:
- (1) Observen que a vegades hi ha tants sumands en la descomposició com algun divisor del nombre considerat.
  - (2) No descobreixen aquesta regularitat.
- c) Respecte del tercer objectiu.
- P.5 Sobre la relació entre la quantitat de descomposicions d'un nombre i els seus divisors:
- (1) Relacionen la quantitat de descomposicions d'un nombre amb els seus divisors.
  - (2) No descobreixen la relació.
- d) Respecte del quart objectiu.
- P.6 Sobre la utilització de nombres negatius en les descomposicions:
- (1) Consideren nombres negatius en la descomposició d'un nombre com a suma de consecutius.
  - (2) Els que no consideren nombres negatius tenen aquest indicador en blanc.

L'anàlisi d'aquesta part deixa diverses informacions interessants:

- Només dos alumnes diuen que els primers senars es poden escriure com a suma de consecutius.
  - Quasi el 45% descobreix que hi ha números amb més d'una descomposició.
  - Onze estudiants observen que hi ha tants sumands a la descomposició com algun dels divisors del nombre considerat.
  - Només dos participants relacionen la quantitat de descomposicions amb els seus divisors.
  - Només un alumne considera nombres negatius en la descomposició.
  - Un 34% suma nombres consecutius i examina els resultats i el 60% mira de descompondre'ls. Dos estudiants utilitzant els dos procediments i un no fa cap experimentació.
- (c) Intervenció 2. Introducció del nombre enter. L'objectiu fonamental és aprofitar el treball fet i en especial la relació que es pot establir entre una descomposició factorial del nombre considerat i la seva descomposició en suma de consecutius. Els objectius concrets que es pretenen assolir són:

- (a) Explicar el nivell amb el que s'ha familiaritzat l'alumne amb el procediment que li permet obtenir la suma de nombres consecutius a partir de la descomposició factorial del nombre.
- (b) Examinar com denoten els participats en la fase empírica de la recerca els nous nombres que cal incorporar per tal de resoldre el problema dels nombres consecutius.
- (c) Discernir els raonaments i les dificultats que tenen els estudiants per identificar i acceptar que els parells que identifiquen els nous nombres a vegades són diferents però en canvi fan referència a un mateix nombre.

Una vegada més es plantegen, d'inici, una sèrie de paràmetres per tal d'analitzar els objectius prOperacions. Aquests paràmetres, com a la part de resolució a l'aula tot i haver-se plantejat a priori són suficients per tal de classificar les respostes donades pels estudiants.

a) Respecte del primer objectiu.

P.1 Sobre la utilització del procediment de descomposició:

- (1) L'alumne empra el procediment d'expressar un nombre com a producte de dos factors on un d'ells és senar per aconseguir escriure'l com a suma de nombres consecutius.
- (2) L'alumne no empra l'esmentat procediment.

P.2 Sobre les potències de dos a través del procediment:

- (1) L'alumne empra el procediment expressat en l'ítem anterior i l'aprofita per argumentar que les potències de 2 no es poden escriure com a suma de nombres consecutius.
- (2) L'alumne no ho argumenta.

P.3 Sobre la utilització de nombres negatius en el procediment de descomposició:

- (1) L'alumne utilitza nombres negatius en les descomposicions.
- (2) L'alumne no utilitza nombres negatius en les descomposicions.

b) Respecte del segon objectiu.

P.4 Sobre la terminologia emprada per denotar els nous nombres:

- (1) Utilitza la notació amb nombres negatius que ja coneix.
- (2) Utilitza una notació pròpia, és a dir, proposada pel participant.
- (3) No utilitza cap notació.

c) Respecte del tercer objectiu.

P.5 Sobre la identificació de parells representants equivalents a través d'exemples:

- (1) L'alumne identifica a través d'exemples els parells que fan referència a un mateix nombre.
- (2) L'alumne no els identifica.

P.6 Sobre l'expressió general entre parells equivalents:

- (1) L'alumne identifica una expressió general entre els parells que fan referència a un mateix nombre.
- (2) L'alumne no la identifica.

De l'anàlisi dels tres fulls de resposta, un per cada objectiu, les conclusions són les següents:

- Respecte del primer objectiu:

- Quasi la totalitat dels alumnes utilitzen correctament el procediment per expressar un nombre com a suma de consecutius a partir de la seva descomposició com a producte de dos factors on un d'ells és senar.
- Només el 22% dels alumnes aprofita aquest procediment per argumentar la impossibilitat d'expressar les potències de 2 com a suma de nombres consecutius.
- Només un 4% utilitzen nombres negatius.
- Respecte del segon objectiu:
  - Tot i que els estudiants de batxillerat coneixen la terminologia pròpia dels nombres enters el problema dels nombres consecutius els situa en una posició que pot fer *brollar terminologies que són del nostre interès* (Pujol, 2008, p. 382).
- Respecte del tercer objectiu:
  - Quasi la totalitat dels alumnes participants identifiquen com són els parells que fan referència a un mateix nombre.
  - Però només el 16% presenta una expressió general entre els parells. Comenta que la manca d'un domini de l'àlgebra els complica aquest procés.

#### Fase d'intervenció II.

(a) Qüestionari obert sobre el concepte de nombre. Els objectius que es marquen són:

1. Distingir les definicions espontànies de nombre que donen els participants a la recerca.
2. Saber les utilitats que els participants associen amb els nombres.
3. Diagnosticar el coneixement que tenen els participants sobre la construcció dels nombres.
4. Discernir si els participants diferencien els aspectes ordinal i cardinal del nombre.

Aquests quatre objectius estan directament lligats al segon objectiu de la recerca ( “*conèixer la incidència en l'aprenentatge de l'alumne d'un ensenyament deductiu del nombre enter*”). El qüestionari utilitzat és de Sotos (2004). S'estableixen les categories de resposta a priori i aquí les classifiquem respecte dels objectius d'aquest qüestionari.

a) Respecte del primer objectiu.

- P.1 Quantitat. El participant expressa la idea de nombre com a quantitat.
- P.2 Símbol. El participant expressa la idea de nombre com a grafia simbòlica.
- P.3 Codi o etiqueta. El participant associa el nombre a una funció utilitària, com per exemple el número d'una casa.
- P.4 Mesura. El participant associa la idea de nombre com la mesura de quantitats de magnitud.
- P.5 Altres.

b) Respecte del segon objectiu.

- P.6 Comptar. El participant expressa la funció quantitativa del nombre tant en l'aspecte ordinal com cardinal.
- P.7 Codificar o etiquetar. El participant expressa la funció simbòlica del nombre que permet distingir objectes però sense contingut matemàtic, per exemple els documents d'identitat o els codis de barres.
- P.8 Mesurar. El participant expressa la funció de quantificar magnituds mesurables.
- P.9 Operar. El participant expressa la funció que permet operar amb nombres sense cap vinculació a comptar, a codificar ni a mesurar.

P.10 Altres.

c) Respecte del tercer objectiu.

P.11 Quin és el coneixement dels participants sobre la construcció de nombres. Aquí estableix dues categories de resposta:

- (1) Sí. Expressa algun coneixement relatiu a la construcció de nombres.
- (2) No. No expressa cap coneixement relatiu a la construcció de nombres.

d) Respecte del quart objectiu.

P.12 Quin és el nivell de comprensió entre els aspectes ordinal i cardinal:

- (1) Sí. El participant distingeix entre els aspectes ordinal i cardinal.
- (2) No. El participant no distingeix entre els aspectes ordinal i cardinal.

En els resultats de l'anàlisi global d'aquests qüestionaris podem observar respecte dels objectius prOperacionss:

- Respecte del primer objectiu:
  - Les dues terceres parts dels participants associa el nombre amb el cardinal o l'ordinal.
  - Quasi la totalitat identifica el nombre amb el símbol.
  - Quasi ningú amb una etiqueta.
  - Un 6% amb la mesura de magnituds.

Comenta que les respostes anteriors no són excloents.

- Respecte del segon objectiu:
  - Les dues terceres parts els utilitzen per comptar.
  - Un 54% per operar.
  - Una cinquena part per etiquetar.
  - Un 18% per mesurar.
- Respecte del tercer objectiu.
  - Només respon una quarta part de l'alumnat.
  - La resta no respon, no ho sap o no s'ho ha plantejat mai.
- Respecte del quart objectiu:
  - El 78% coneix la diferència entre cardinal i ordinal.

(b) Intervenció 3. Introducció de l'estructura additiva. Reprenent les intervencions a l'aula, s'introdueix l'estructura additiva dels nombres enters. S'aprofita el problema dels nombres consecutius i la seva resolució general per fer-ho. Els objectius en aquesta fase són:

1. Copsar si els estudiants proposen diferents parells per fer referència a un mateix nombre natural.
2. Explicar les dificultats que tenen quan se'ls demana que sumin nombres enters, representats per parells.
3. Conèixer la plausibilitat amb que els alumnes accepten la notació coneguda pels nombres enters negatius a partir de la suma d'enters.

Tots aquests objectius estan lligats al segon objectiu general de la recerca, és a dir, *conèixer la incidència en l'aprenentatge de l'alumne d'un ensenyament deductiu del nombre enter*. Va dissenyar tres instruments per tal de recollir informació atenent als tres objectius d'aquesta fase i la justificació, que es poden consultar a Pujol (2008, pp. 581-583 i pp. 421-423). A continuació es detallen les categories de resposta classificades per objectius. En aquest cas es van anar establint a mida que es feia l'anàlisi de les respostes.

a) Respecte del primer objectiu.

P.1 Identificació entre parells representants i notació simplificada.

- (1) L'alumne proposa diferents parells representants per un mateix nombre natural tant quan se li demana per un nombre concret com per un nombre expressat en forma literal.
- (2) L'alumne proposa diferents parells representants per un mateix nombre natural quan se li demana per un nombre concret però no quan se li demana per un nombre expressat en forma literal.
- (3) L'alumne no proposa cap parell representant en cap dels dos casos demanats però identifica els parells amb la seva notació simplificada.
- (4) L'alumne no proposa cap parell representant en cap dels dos casos demanats i tampoc identifica els parells amb la seva notació simplificada.

b) Respecte del segon objectiu.

P.2 Suma de nombres donats pels seus representants canònics (una component 0).

- (1) L'alumne suma correctament nombres naturals expressats en forma de parells ordenats donats en la seva forma canònica.
- (2) L'alumne no els suma correctament.

P.3 Suma de nombres donats per representants que no són necessàriament els canònics.

- (1) L'alumne suma correctament nombres naturals expressats en forma de parells ordenats donats no necessàriament en la seva forma canònica.
- (2) L'alumne no els suma correctament.

P.4 Extensió de la suma de nombres naturals a la suma de nombres enters.

- (1) L'alumne proposa la suma d'enters a partir de la seva expressió amb parells ordenats per extensió de la suma de nombres naturals prèviament realitzada.
- (2) L'alumne no proposa estendre la suma dels naturals i no proposa cap alternativa.

P.5 Dependència de la suma del representant escollit.

- (1) L'alumne considera que els resultat sí depèn dels representants escollits.
- (2) L'alumne considera que els resultat no depèn dels representants escollits.
- (3) Diu que no ho sap.

c) Respecte del tercer objectiu.

P.6 Nivell d'acceptació que donen els alumnes a la terminologia emprada.

- (1) L'alumne considera que la notació simplificada queda plenament justificada a partir de l'addició.
- (2) L'alumne accepta la notació perquè ja la coneixia però no veu cap justificació que provingui de l'enunciat.
- (3) L'alumne no comprèn la notació emprada o no l'accepta.

En els resultats de l'anàlisi global d'aquests qüestionaris podem observar respecte dels objectius prOperacionss:

- Respecte del primer objectiu:
  - La meitat de l'alumnat proposa diferents parells per representar un nombre natural donat, tant en cas d'un nombre concret com d'un expressat en forma literal.
  - L'altra meitat no ho fa quan se li demana en forma literal.
- Respecte del segon objectiu:
  - Més de les tres quartes parts dels participants suma correctament naturals expressats en parells en forma canònica.
  - Quan s'utilitzen representants no expressats en forma canònica la proporció es redueix.
  - L'extensió de la suma en forma de parells a tots els nombres és proposada pel 94% dels participants.
  - No arriba a la meitat la proporció dels qui considerem que el resultat no depèn dels resultats escollits.
  - Una cinquena part pensa que sí depèn dels representants.
- Respecte del tercer objectiu.
  - Un 74% considera que la notació simplificada que da plenament justificada.
  - Una cinquena part l'accepta perquè ja la coneixia però no veu cap motiu que la justifiqui.
  - Un 6% no la comprèn o no l'accepta.

Per acabar fa una anàlisi per grup i gènere i tracta alguns casos particulars (Pujol, 2008, pp. 430-436).

- (c) Intervenció 4. Introducció de l'estructura additiva. Aquesta intervenció es va realitzar en dues sessions. Seguint amb la terminologia, en forma de parells, es vol generar un aprenentatge deductiu que porti a incorporar l'estructura multiplicativa dels enters. Per tal de fer-ne, a continuació, una introducció constructiva. Aprofitant el treball fet en les sessions anteriors es pretén que l'alumne descobreixi una regla per multiplicar naturals donats en forma de parells i passar a acceptar aquest producte per tots els enters. Es fa ús implícit del *principi de permanència de les lleis formals*. Per a Pujol (2006, p. 437) l'habilitat en l'ús de l'àlgebra serà un punt clau en aconseguir-ho. Els objectius són:

1. Diagnosticar les dificultats dels participants, a través de les activitats que només requereixen de l'estructura additiva, per traduir els nombres que venen donats en forma de parells a la notació simplificada i a l'inrevés.
2. Explicar les propostes dels participants respecte del problema plantejat d'inici incidint en la cerca de la quantitat de descomposicions que admet un nombre qualsevol.
3. Conèixer les dificultats que tenen els estudiants quan se'ls demana que facin el producte d'enters, representats per parells, tal com es multipliquen els nombres naturals representats per parells.

Com en totes les fases d'intervenció aquests objectius venen donats de cara a assolir els objectius generals de la recerca. El primer i el tercer objectius d'aquesta intervenció van lligats al segon objectiu general (“conèixer la incidència en l'aprenentatge de l'alumne d'un ensenyament deductiu del nombre enter”) i el segon de la fase al tercer general (“explicar les dificultats dels alumnes davant un ensenyament deductiu a través de la resolució de problemes”). Els instruments dissenyats i utilitzats per recollir la informació que permeti valorar l'assoliment dels objectius està descrita a Pujol (2008, pp. 439-441). Les categories de resposta classificades per objectius són les que es detallen a continuació.



- a) Respecte del primer objectiu.
- P.1 Conversió de parells a forma simplificada a través d'activitats que impliquen l'estructura additiva.
- (1) L'alumne suma els nombres representats per parells expressant tant els sumands com el resultat emprant la notació simplificada correctament.
  - (2) L'alumne suma els nombres representats per parells expressant els sumands i el resultat amb algun error.
  - (3) L'alumne suma els nombres representats per parells expressant tant els sumands com el resultat incorrectament en forma simplificada.
- b) Respecte del segon objectiu.
- P.2 Sobre la quantitat de descomposicions com a suma de nombres consecutius que admet un nombre.
- (1) L'alumne determina correctament la quantitat de descomposicions que té un nombre natural donat. A més, apunta una estratègia que facilita un apropament significatiu cap a la determinació de la quantitat demanada pel cas general.
  - (2) L'alumne determina correctament la quantitat de descomposicions que té un nombre natural donat. Però, no aborda el cas general o ho fa sense cap pla.
  - (3) L'alumne comet múltiples errors en el tractament dels casos particulars.
- c) Respecte del tercer objectiu.
- P.3 Producte de nombres donats pels seus representants canònics.
- (1) L'alumne multiplica correctament nombres naturals expressats en forma de parells donats en la seva forma canònica.
  - (2) L'alumne no els multiplica correctament.
- P.4 Producte de nombres donats per representants que no són necessàriament els canònics.
- (1) L'alumne multiplica correctament nombres naturals expressats en forma de parells quan aquests no venen donats en la seva forma canònica.
  - (2) L'alumne no els multiplica correctament.
- P.5 Extensió del producte de nombres naturals al de nombres enters.
- (1) L'alumne proposa el producte d'enters a partir de la seva expressió amb parells per extensió del producte de nombres naturals prèviament utilitzat.
  - (2) L'alumne no proposa estendre el producte de nombres naturals i no proposa cap altra alternativa.
- P.6 Dependència del producte del representant escollit.
- (1) L'alumne considera que el resultat sí depèn dels representants escollits.
  - (2) L'alumne considera que el resultat no depèn dels representants escollits.
  - (3) Diu que no ho sap
- P.7 Conversió de parells a forma simplificada a través d'activitats que impliquen l'estructura multiplicativa.
- (1) L'alumne multiplica els nombres representats per parells expressant tant els factors com el resultat utilitzant la notació simplificada correctament.
  - (2) L'alumne multiplica els nombres representats per parells expressant els factors i el resultat amb algun error.
  - (3) L'alumne multiplica els parells ordenats expressant tant els factors com el resultat en forma simplificada.

Una anàlisi global dels resultats ordenada pels objectius de la intervenció permet observar:

- Respecte del primer objectiu:
  - Poc més de la meitat dels participants suma els nombres representats per parells expressant els sumands i el resultat correctament en notació simplificada.
  - Un 38% comet errors en el procés.
- Respecte del segon objectiu:
  - Pràcticament tots els participants, determinen correctament la quantitat de descomposicions.
  - És difícil trobar participants que facin un apropament significatiu al cas general.
- Respecte del tercer objectiu:
  - Multipliquen correctament naturals donats per parells en la seva forma canònica.
  - Només el 14% ho fa bé amb representants donats per parells en una forma no canònica.
  - Un 70% proposa estendre la multiplicació dels naturals als enters però molts participants tenen dificultats per obtenir una regla general de multiplicació.
  - La meitat considera que el producte depèn dels representants escollits sense cap reflexió sobre la plausibilitat d'aquesta afirmació.
  - Un 40% no es manifesta en el fet de la dependència dels representants.

Acabem amb la fase de valoració. L'objectiu primordial d'aquesta fase és conèixer el nivell d'acceptació i satisfacció dels participants per cada un dels punts rellevants a la fase d'intervenció. Un resum, que apunta Pujol (2008, p. 463), és que els resultats més rellevants assenyalen les majors o menors dificultats dels estudiants a l'hora d'utilitzar: un tractament algebraic per veure que la suma de consecutius mai és una potència de 2; la descomposició de nombres com a suma de nombres consecutius; la representació dels nombres a través de parells i el treball amb parells; la introducció de l'estructura additiva i, l'acceptació de la notació que s'utilitza habitualment per denotar els nombres enters.

#### 1.2.4 Vlassis (2008)

A l'hora de comentar aquest estudi començarem citant una reflexió del propi Vlassis:

*My analysis shows that the problems raised by the presence of negatives in the equations are attributable to students' very restricted and often inadequate use of the minus sign, which prevents them from finding a negative solution or making sense of it.* (Vlassis, 2008, p. 555)

Més endavant posa èmfasi en el fet que la dificultat dels alumnes de vuitè grau, equivalent al nostre 2n ESO, per resoldre equacions de primer grau tradicionalment s'atribuïa als problemes que tenien a l'hora de comprendre els nombres negatius. Vlassis (2008), però, defensa que l'ús que fan del signe “-” posa en evidència la comprensió que tenen dels negatius i de l'ús de les operacions que els involucren.

*The idea I'm defending is that the way in which students use the minus sign reveals their understanding of the negatives and of operations using these numbers.* (Vlassis, 2008, p. 556)

Aquest és un dels punts que també es plantegen com a objecte d'estudi en la nostra investigació. En moltes ocasions els alumnes eviten plantejar equacions en termes d'enters per tal d'evitar la complexitat que els suposa treballar amb signes negatius amb significats diferents. Vlassis

pren el terme “negativitat” per tal de fer referència en els diferents significats que es poden atribuir al signe “-”. Prenent com a referència Gallardo i Rojano (1994) que van establir les funcions *unària*, *binària* i com a *simètric* del signe “-” i Sfard (2000) que classifica els símbols en *significadors estructurals*, els que representen objectes matemàtics com els nombres, i en *significadors operacionals*, els que fan referència a les operacions. A la Taula 1.2 es detalla el plantejament de Vlassis (2008, p. 361):

Triple nature of minus sign		
Unary Structural signifier	Binary Operational signifier	Symmetric Operational signifier
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relative Number</li>   <li>• Solution-number</li> <li>• Result-number</li> <li>• Formal negative number</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Subtracting in arithmetic <i>Taking away</i> <i>Completing</i> <i>Establishing a difference</i> <i>between two numbers</i></li>   <li>• Subtracting in algebra <i>Subtracting an integer is</i> <i>equivalent to adding the</i> <i>opposite of that number</i></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Taking the opposite of a number</li> </ul>

Taula 1.2: Significats atribuïbles al signe “-”.

L'estudi que es centra en estudiants de 13 - 14 anys. La mostra d'alumnes l'extreu de dues escoles amb característiques ben diferents una és una escola privilegiada i l'altra no privilegiada (com ell les anomena), fent referència a la situació socio-cultural dels alumnes. després d'una prova inicial d'equacions feta a vuit grups, quatre de cada escola. L'elecció de la mostra es va fer prèvia realització d'una test on es demanava que resolguessin equacions. A partir dels resultats de la prova els alumnes es van classificar en tres grups:

- I. Nivell alt d'habilitat (mitjana del 80% o superior)
- II. Nivell mitjà d'habilitat (mitjana entre 50% i 70%)
- III. Nivell baix d'habilitat (mitjana inferior al 50%)

Va escollir 17 alumnes per entrevistar-los i comentar els procediments seguits. Es van triar tenint en compte les escoles d'origen per tal de tenir una mostra el més diversa possible. Finalment es van entrevistar 8 alumnes de nivell baix d'habilitat, 5 de nivell mitjà i 4 de nivell alt. El fet d'escollir més alumnes de nivell baix ve motivat per tal d'obtenir la màxima informació possible dels errors que cometien els alumnes. A la Taula 1.3 es mostra de manera simplificada el test i un resum dels resultats per la mostra dels 17 entrevistats:

A les conclusions Vlassis (2008) apunta que des del re-descobriments del treball de Vygotsky en Educació Matemàtica els apropaments socio-culturals mostren una estreta relació entre la utilització dels símbols i la formació i consolidació de conceptes. Des del segle XIX la conceptualització dels nombres negatius està lligada a l'ús del signe “-”, que ha passat a de ser un signe operacional, binari, a ser un signe que també pot actuar com a qualificador del nombre, unari. Vlassis apunta que és important interpretar correctament els diversos significats del signe i utilitzar-los de manera adequada a cada situació. En particular en aquest estudi es centra en el seu ús en processos relacionats amb l'àlgebra com és la resolució d'equacions. Acaba distingint, amb matisos dos tipus de dificultats:

nº	Equació	Solució	Estructura	Correcta	Incorrecta	No respon
1	$4 - x = 5$	Negativa	Additiva	8	7	2
2	$-6x = 24$	Negativa	Multiplicativa	3	14	-
3	$-x = 7$	Negativa	Multiplicativa	10	2	5
4	$12 - x = 7$	Positiva	Additiva	12	5	-
5	$-32 = -8y$	Positiva	Multiplicativa	6	11	-
5	$5x = 40$	Positiva	Multiplicativa	14	3	-

Taula 1.3: Resultats de les entrevistes de Vlassis.

- I. La primera dificultat fa referència a les situacions que *involucren dos signes “-” successius*. Això es pot observar especialment en equacions multiplicatives, com poden ser  $-6x = 24$  o  $-x = 7$ . Vlassis explica que, tot i que, en alguns casos els procediments mecànics de resolució d'equacions apresos permeten, als alumnes, arribar a la solució correcta, no són capaços de fer correctament la comprovació del resultat. Ell atribueix aquesta dificultat al fet que en casos del tipus  $-6 \cdot -4$ , primera equació, no són capaços d'identificar el signe de la solució  $-4$  com a unari. A la segona equació succeeix una cosa semblant quan volen comprovar que la solució és  $-7$ . S'enfronten a l'expressió  $- - 7$  i altra vegada es troben amb dos signes seguits que no saben interpretar perquè no són capaços d'interpretar els significats de cada un d'ells: el primer  $-$  com a simètric i el segon com a part del nombre enter que és solució,  $-7$ . En aquest punt Vlassis suggereix que la utilització dels parèntesis pot afavorir la comprensió de la situació,  $-(-7)$ .
- II. La segona dificultat ve derivada per la *manca d'habilitat per entendre que el mateix signe, “-”, pot desenvolupar papers diferents*. En aquest cas això es fa palès en transformacions del tipus:

- $4 - x = 5 \longrightarrow x = 5 - 4$
- $12 - x = 7 \longrightarrow x = 7 - 12$

en ambdós casos el signe “-” davant  $x$  és perd, segons Vlassis perquè en el pas de tenir un significat binari, com a resta, a un significat unari lligat a  $x$  la pèrdua d'operació fa que els alumnes no el tinguin en consideració. Apunta, després de comentar els procediments realitzats pels alumnes, que no es tracta d'un descuit sinó d'una manca d'interpretació.

Acaba aquest estudi amb una reflexió que pensem està molt lligada a la investigació que estem realitzant sobre l'ensenyament i aprenentatge dels nombres enters que mostren els alumnes de 3r ESO, 14-15 anys. A continuació ens permetem transcriure-la:

*Students' difficulties can no longer be summed up as the obstacle of the concept of negative numbers as abstract mathematical objects but rather relate to the use of symbols and in particular of the minus sign. The capacity to take account, according to the context, of the unary, binary and symmetric dimensions and to display considerable flexibility in doing so is vital to students' ability to make sense of those numbers which, above all, obey various formal rules.* Vlassis (2008, p. 569)

És a dir, la comprensió i utilització de la polisèmia del signe “-” són bàsiques en el procés de comprendre i treballar amb els nombres enters.

### 1.2.5 Bofferding (2014)

Tot i que el treball de Bofferding (2014) va més orientat a alumnes “First Graders”, és a dir alumnes de primària del nostre sistema educatiu, el plantejament que fa apunta als mateixos objectius de la nostra investigació. La polisèmia del signe  $-$ , l'ús de la recta numèrica i la funció del zero com a origen de la recta numèrica són, en aquest estudi alguns dels objectius bàsics per una comprensió dels enters i les operacions que els involucren. La investigació es centra en els processos d'aprenentatge dels alumnes de primària quan se'ls instrueix en el aspectes referents als nombres enters i, a més dels punts anteriors, també apunta cap a la comprensió i l'aprenentatge de les operacions amb enters com a magnituds amb direcció. Aquest estudi posa en evidència qüestions que segueixen presentant dificultats a una part de l'alumnat durant la secundària i de vegades més enllà. Bofferding va treballar amb 61 estudiants de primària i la seqüència que es va dur a terme consisteix en:

- I. Pre-test, és a dir, un qüestionari inicial.
- II. Instrucció, és a dir, explicació de conceptes i procediments.
- III. Post-test, és a dir un qüestionari posterior a la instrucció.

Aquesta estructura anava destinada a

*“... to identify students' mental models of integers and investigate how these models change based on instruction on the unary and/or binary meanings of the “-”.”*  
(Bofferding, 2014, p. 194)

*“... I conjecture that instruction designed to highlight multiple meaning of the minus sign could support students developing mental models of negative numbers.”*  
(Bofferding, 2014, p. 199)

L'objectiu de la recerca és detallar els models mentals que els alumnes de primària tenen dels nombres negatius i investigar com l'ensenyament en els diferents significats del signe “ $-$ ” recolza o limita el que pensen sobre els nombres negatius. Les preguntes de recerca són:

- 1) Quins són els models de nombres enters que tenen els alumnes de primària
  - a) per l'ordenació dels enters i els seus valors,
  - b) per les magnituds amb direcció.
- 2) Com canvien aquests models en funció de la instrucció rebuda en els diferents significats, unari i binari, del signe “ $-$ ”.

Les principals bases teòriques que aplica al disseny de l'estudi són:

1. La teoria del canvi conceptual (Vosniadou, 1994). Perquè el canvi conceptual inclou la revisió i l'enriquiment de les estructures conceptuais que tenen els alumnes per acomodar-les a nous coneixements.
2. I la teoria de les estructures conceptuais centrals per nombres, CCSN (Case, 1996) que proporciona una bona perspectiva teòrica. Perquè ajuda a explicar com es desenvolupa i coordina la comprensió, per part dels alumnes, de diversos conceptes numèrics com són: l'ordre, el valor, les operacions i la notació.

Ambdues teories proporcionen un marc adequat pels canvis en els estudiants a través de la instrucció, que és part important en la investigació. D'acord amb Vosniadou i Brewer (1992) els estudiants desenvolupen un model mental inicial basat en les seves experiències directes i que els genera un conjunt de regles (*“framework theory”*). Respecte dels conceptes numèrics són:

1. Els nombres són per comptar.
2. Els nombres són discrets.
3. Hi ha un nombre que és el més petit (0 o 1).
4. Els nombres es poden ordenar per la seva posició al comptar, els nombres més allunyats de zero són més grans.
5. Els nombres amb més dígits són més grans.
6. La suma fa més gran.
7. La resta fa més petit.
8. Cada número només té una representació.

Aquest model els serveix fins que es troben amb els nombres negatius, com es constata a l'extracte de l'entrevista a un alumne de quart grau (Bofferding, 2014, p. 194). Case (1996) proporciona un escenari adequat per valorar com evoluciona la comprensió d'aquests principis per part dels alumnes en relació a un model mental basat en la recta numèrica per a tots els nombres. Segons Case els nois passen per tres etapes en el procés d'assolir el model adequat:

1. El nivell pre-dimensional, dels 3 als 5 anys, compten o valoren la quantitat global.
2. El nivell uni-dimensional, dels 5 als 7 anys, coordinen les dues capacitats anteriors. Això els proporciona un model mental basat en la recta numèrica, però lligat a l'ordenació i l'addició.
3. El nivell bi-dimensional, al voltant dels 8 anys, poden treballar simultàniament amb models mentals basats en dues rectes numèriques que els permeten trobar la diferència entre dos nombres. A partir dels 10 anys, aproximadament, poden treballar amb aquest model de manera més generalitzada.

Aquest model permet explicar com els alumnes poden fer la transició d'un model basat en nombres positius cap un model que incorpori els negatius. Vosniadou i Brewer descriuen un marc de canvi conceptual que permet expressar la transició. En aquesta línia identifiquen tres categories, útils per explicar el canvi conceptual:

1. Models mentals inicials, en aquest cas els alumnes poden resoldre qüestions relatives a nombres negatius utilitzant les regles dels positius, només associen el signe  $-$  a la resta i ordenen els negatius com si fossin positius.
2. Models mentals sintètics, en aquest cas accepten l'existència dels negatius i els identifiquen com a més petits que zero, també són capaços de coordinar més o menys amb direccions positiva i/o negativa a la recta numèrica però manca consistència.
3. Models mentals formals, els alumnes entenen els significats unari i binari del signe  $-$  i saben moure's adequadament sobre la recta numèrica en els dos sentits i tant en la branca positiva com en la negativa.

Els participants a l'estudi són alumnes que volten els 6 anys. L'estudi es va realitzar en una escola de Califòrnia. A l'estudi hi havia participants de diferents grups culturals i lingüístics. L'elecció d'alumnes d'aquestes edats venia motivada perquè habitualment estan al nivell uni-dimensional. El fet que l'estudi es realitzés al final del curs assegurava que havien rebut instrucció en sumes i restes d'una xifra. Bofferding apunta que tot i que aquest alumnat no tenen coneixement formal dels enters amb la instrucció adequada podien ordenar i determinar el valor relatiu dels enters. Dels 79 alumnes que constava el curs només 61 van participar a la investigació. L'estudi es va realitzar en tres etapes:

1. Pre-test, és a dir, un test previ.
2. Instrucció, és a dir, dinàmiques d'ensenyament-aprenentatge amb els alumnes, mitjançant la intervenció a l'aula.
3. Post-test, un test posterior a la instrucció. El mateix test amb algunes modificacions.

El test contenia preguntes en dues direccions:

1. Qüestions sobre l'ordre als enters i el valor.
  - Comptar enrere.
  - Situar en una recta numèrica.
  - Ordenar enters (major/menor).
  - Trobar l'enter més gran (comparar enters).
  - Interpretar el significat dels nombres (significat unari del signe  $-$ ).
2. Qüestions sobre el model mental de magnituds amb direcció.
  - Interpretar amunt/avall.
  - Identificar els sentits positiu i negatiu dels nombres.

Posteriorment a la realització del pre-test es van separar els alumnes per nivells atenent a dos criteris. El primer respecte al sentit dels nombres que els seus professors valoraven ( van classificar els alumnes en nivells baix, mitjà i alt depenent de la seva habilitat en calcular i ordenar ) i l'altre a partir dels resultats obtinguts en el pre-test i valorat per l'autor de la investigació. Com a resultat es van formar quatre categories:

- a) Alt sentit numèric, mig-alt coneixement dels enters.
- b) Alt sentit numèric, mig-baix coneixement dels enters.
- c) Sentit numèric mitjà, mig-baix coneixement dels enters.
- d) Sentit numèric baix, baix coneixement dels enters.

Es van assignar, de forma aleatòria, alumnes de cada categoria per formar els tres grups d'instrucció, intentant respectar els criteris d'equilibri entre sexes i procedència dels alumnes respecte de les quatre categories establertes. Aquests van ser:

1. Instrucció unària (ordre, valors i símbols corresponents als enters negatius).
2. Instrucció binària (magnituds dirigides i sumes i restes a través de moviments sobre la recta numèrica).

### 3. Instrucció combinada (les dues anteriors a la vegada).

La instrucció es va realitzar en 8 sessions de 45 minuts fora de l'aula ordinària, en parelles a través de treballar o jugar amb els conceptes introduïts d'inici i discutits en gran grup. Els resultats finalment els va separar en tres seccions. A les seccions 1 i 2 es caracteritzen les respostes dels alumnes atenent a l'ordre, al valor i a les magnituds amb direcció. A la secció 3 es para atenció en els models mentals que s'observen del pre al post-test. A continuació es detallen els aspectes que hem considerat importants:

1. Secció 1. En relació als models mentals referents als valors enters i a l'ordre.
  - I. Models mentals inicials: valors no distingeixen els signes “+” i “-”, ignoren els signes.
  - II. Models mentals de transició I: valors conflictius. Poden, de vegades, dir quin enter és més gran o més petit sobretot si es comparen un positiu i un negatiu. Però tracten de manera incorrecta els negatius com equivalents al seu homòleg positiu o al zero. En aquest estadi els alumnes no es mantenen només en els principis relatius als naturals però encara no són capaços de tractar de manera consistent els negatius de manera diferent als positius. Aquest és el motiu de considerar-los en un estat de transició cap als models mentals sintètics relatius als enters.
  - III. Models mentals sintètics: magnitud. En aquest estadi els alumnes comprenen bé que els negatius són més petits que zero però no ordenen correctament els nombres negatius entre sí, tot i fer la resta d'ordenacions (positiu-positiu, positiu-zero, negatiu-zero, negatiu-positiu) correctament.
  - IV. Models mentals de transició II. En aquest estadi es caracteritzen dues vies de pensament: el valor doble i l'enter inestable. Els estudiants que es caracteritzen dins del model mental del valor doble compten correctament i situen els negatius a la recta numèrica però en una proporció del 50% no ordenen bé els negatius entre ells i d'altres tot i ordenar bé un conjunt no ho fan bé quan els comparen per parells. Només dos estudiants es classifiquen dins el model de l'enter inestable, un d'ells tot i comptar bé amb negatius no els situa sobre la recta numèrica i tot i ordenar els negatius per sobre els positius després sap quin és més gran i quin més petit. L'altre tot i respondre correctament les qüestions referents a l'ordre i el valor dels enters no situa el zero a la recta numèrica. Aquests alumnes per tant es situen en un altre nivell de transició.
  - V. Models mentals formals: enters. Corresponen als alumnes que responen correctament a totes les preguntes relatives a l'ordre i al valor. Són capaços de raonar que els negatius més propers a zero són més grans que els negatius més allunyats.
2. Secció 2. En relació als models mentals referents a magnituds amb direcció. S'analitzen les preguntes corresponents a magnituds amb direcció a la llum de les categories de models mentals de Vosniadou i Brewer (1992) i es caracteritzen les següents:
  - I. Models mentals inicials. Els alumnes només interpreten situacions unidireccionals (especialment al pre-test) o associen els moviments a posicions fixes (cas d'un alumne).
  - II. Model mental sintètic: consciència de magnitud. Interpreten correctament enunciats com *més amunt*, *menys amunt* i *més avall* però els costa interpretar *menys avall*.
  - III. Model mental formal: magnitud amb direcció. Interpreten correctament tots els enunciats anteriors i en alguns casos saben justificar les diferències.



### 3. Secció 3.

Les influències de la instrucció en els models mentals es poden resumir de la forma següent:

1. Instrucció unària: els aspectes a destacar són els que es detallen a continuació.
  - Ajuda a diferenciar entre el signe  $-$  com a qualificador del nombre i com a operació resta.
  - Millora la capacitat per distingir entre nombres positius i negatius i el zero com a punt que divideix la recta real.
  - Permet que la majoria dels estudiants pugui ordenar enters i determinar quin és més gran (en contra de l'estudi de Peled et al., 1989).
  - Pocs alumnes entenen les magnituds amb direcció i que *menys positiu* és diferent de *més negatiu*.
  - Interpreten les magnituds dirigides com a posicions respecte un punt mig.
2. Instrucció binària: els aspectes que cal ressaltar són els que s'apunten aquí.
  - La majoria dels alumnes distingeixen bé els moviments *més positiu*, *menys positiu*, *més negatiu*, *menys negatiu*. Els alumnes interpreten bé els moviments a la recta numèrica on el signe de restar indica un moviment en una direcció i el signe negatiu la direcció de referència.
  - Es confirmen els estudis de Thompson i Dreyfus (1988), demostrant que el alumnes més joves poden entendre moviments dirigits lligats a sumes i restes.
  - El significat del signe de restar pren consistència amb el fet de tenir menys en contrast amb la instrucció habitual dels enters on restar significa anar endarrere (Liebeck, 1990) o anar a l'esquerra (Moreno i Mayer, 1999), i el signe menys interpretat com a Operacions.
  - No aporta ajuda a l'hora d'ordenar i donar valor als nombres enters.
3. Instrucció combinada: es tradueix en una millora global de tots els aspectes.

Els resultats de l'estudi detallen els models mentals sobre els enters, dels estudiants dels primers cursos de primària, i mostra com la instrucció, en els significats unari i/o binari del signe  $-$ , dóna consistència al seu pensament sobre els nombres negatius. Els estudiants, en aquest estudi, desenvolupen canvis conceptuals importants en la concepció dels enters. Aquests canvis mostren els que han de fer fins arribar a assolir models mentals formals:

1. Models mentals inicials: la interpretació dels enters està molt supeditada al seu marc teòric dels naturals (Vosniadou i Brewer, 1992). Enfoquen el significat del signe  $-$  des d'una perspectiva positiva i consideren que el zero és el més petit. Mostren dificultats per acceptar nombres més petits que 0 i ordenen els negatius al costat dels positius, com apuntaven Peled et al (1989). Ignoren el signe  $-$  o l'interpreten com a resta. Els problemes els interpreten des d'una perspectiva positiva, com ja apuntaven Whitacre et al (2012b).
2. Models mentals sintètics: tot i saber situar els nombres correctament en una recta numèrica els costa molt entendre que els negatius més allunyats del zero, és a dir amb valor absolut més gran, són més petits que els propers a zero.
3. Models mentals formals: aquests models fan palesa la transició dels nombres naturals als nombres enters. Els alumnes entenen bé el zero com a origen, ordenen correctament els nombres enters i també entenen la suma i la resta com a moviments sobre la recta numèrica.

Per acabar reescriuim el següent retall de l'article, on s'exposa la intenció última de la investigació, amb l'objectiu d'introduir i familiaritzar els alumnes en l'ús dels enters des de molt més petits.

*... a late introduction to negative numbers can leave students feeling frustrated with having to relearn addition and subtraction with a new set of numbers. Even if older students learn the difference between the unary and binary meanings of the minus sign, they may resist applying the knowledge to situations long-engrained in their practice, such as always subtracting with the larger number first (Murray, 1985). Some people will resort to memorizing and using rules for solving integer problems, despite not knowing why they work.*

(Bofferding i Richardson, 2013, pp. 111-118)



## Capítol 2

# Qüestionaris, entrevistes i recollida de dades

En aquest capítol detallem l'elaboració i aplicació dels instruments amb els que realitzem la investigació. El capítol es distribueix en quatre apartats. En el primer plantejem el supòsit de treball, els objectius previs per respondre a la pregunta de recerca. En el segon apartat detallem els qüestionaris, les respostes que es consideren correctes de cada pregunta. En el tercer apartat ens centrem en explicar el procés que seguim per a la recollida de dades principals a partir dels qüestionaris. Acabem amb l'apartat on es detalla el procediment de disseny de les entrevistes, s'explica el criteri de selecció d'estudiants i el procediment d'implementació de les entrevistes.

### 2.1 Supòsit i procediment de disseny de qüestionaris

El supòsit bàsic de treball és que mitjançant qüestionaris es pot accedir als processos continus d'aprenentatge dels nombres enters en què estan involucrats els alumnes de secundària obligatòria. D'altra banda aquest és el propòsit que es deriva de la pregunta de recerca establerta: **Com comprenen els nombres enters un grup d'alumnes de tercer d'ESO?** És un propòsit pel qual, a més, s'han establert dos objectius d'assoliment progressiu:

- Identificar significats atribuïts als nombres enters i a les seves propietats i operacions.
- Relacionar alguns d'aquests significats mitjançant la construcció de patrons de comprensió.

En aquest moment som set professors de matemàtiques treballant a secundària i batxillerat a l'escola. Dels set, actualment, dos ensenyem a primer i segon d'ESO, dos més ho fan a tercer i quart i els altres tres ho fan bàsicament a batxillerat, tot i que en ocasions hi ha mobilitat. La finalitat de la investigació, com ja s'ha comentat abastament a la Introducció rau en la percepció que força alumnes no aprenen allò que els cal, per seguir amb comoditat les matemàtiques, al llarg del seu pas per la secundària. La població amb la que s'ha treballat són els alumnes de secundària de l'Escola Pia de Mataró, en particular els alumnes de tercer d'ESO. De les cinc línies de l'escola s'ha treballat amb tres d'elles, cada línia consta aproximadament de 30 alumnes. Els alumnes d'una de les línies van ser triats per tal de fer el pilotatge dels primers qüestionaris que es van elaborar. La primera intervenció a les aules va permetre detectar preguntes ambigües o poc clares que dificultaven la comprensió i la resposta. Així es van poder ajustar les preguntes per tal d'obtenir una informació més fiable. En definitiva el qüestionari es van passar a dos

grups de tercer, és a dir, uns seixanta alumnes. Els dos grups van ser escollits tenint en compte que no havien tingut com a professor durant els dos primers anys de l'ESO a l'autor d'aquesta investigació. Amb aquesta elecció es pretenia millorar l'objectivitat en la investigació. Prèviament a la recollida final de dades, a través dels qüestionaris, es va fer l'activitat de pilotatge a partir d'un model inicial. Aquest pilotatge es va fer amb un grup de 30 alumnes de tercer d'ESO diferent dels que després van realitzar els qüestionaris definitius.

## 2.2 Disseny, resolució i implementació dels qüestionaris

Els qüestionaris es van dissenyar amb uns propòsits prioritaris que consistien en obtenir informació sobre:

- L'ús del zero.
- L'ús dels enters per descriure situacions quotidianes.
- El reconeixement de la polisèmia del signe  $-$ .
- L'ús de les operacions que involucren nombres enters per descriure situacions concretes.
- L'ús dels enters dins d'expressions algebraiques.

A continuació es detallen els continguts sobre els que es vol obtenir informació per cada pregunta de cada qüestionari.

### 2.2.1 Enters

*Imaginem un edifici de 20 nivells sobre terra i 7 nivells soterranis.*

#### Pregunta 1

*Feu un dibuix de l'edifici numerant cada planta adequadament.*

Pretenem obtenir informació sobre l'ús dels enters en una situació quotidiana on prenem un objecte com a referència, en aquest cas, la línia de terra. I, ímplicitament, de la frontera que marca el zero entre els nombres positius i negatius. En el cas de l'edifici la planta zero provoca, en força ocasions, confusió en referència al zero situat a la recta numèrica. El zero és només un punt de la recta però quan dibuixem un edifici tots tenim clar que la planta que està en contacte amb el terra és la planta baixa i com el primer pis serà la planta 1, l'hem d'anomenar planta 0. Més endavant tornarem sobre aquest fet.

#### Pregunta 2

- Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa?*
- Com expressaries que ets al tercer soterrani?*
- Com expressaries que ets al quart pis?*
- Quins símbols matemàtics has utilitzat, o pots utilitzar, per indicar que estàs per sobre o per sota de la planta baixa? Explica-ho amb detall.*
- Quin tipus de nombres, que tinguin característiques semblants records haver utilitzat a classe de matemàtiques?*

En aquesta pregunta insistim en l'expressió dels nombres enters per tal de descriure situacions quotidianes. En els tres primers apartats es pretén que els alumnes descriuïn numèricament una posició determinada, per tant es representa la situació plantejada en termes de nombres enters. En l'apartat (d) se'ls insta a detallar quin és el símbol que permet descriure la situació de manera adequada i s'acaba plantejant-los que ho relacionin amb allò que s'ha explicat a classe de matemàtiques els dos últims cursos. És a dir, l'objectiu fonamental és fer-los reflexionar sobre l'escriptura i l'ús dels enters, emfatitzant quin és l'element determinant en aquesta representació.

### Pregunta 3

- a) *Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?*
- b) *Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos?*
- c) *Quines operacions has utilitzat per expressar els dos enunciats anteriors?*
- d) *Quins símbols matemàtics has utilitzat per expressar aquestes operacions?*
- e) *Els símbols utilitzats per fer les activitats 1 i 2 són iguals que els utilitzats per fer els primers apartats d'aquesta activitat?*
- f) *Aquests símbols representen el mateix?, és a dir, símbols que s'escriuen igual sempre representen el mateix? Explica-ho amb detall.*

Aquí, primer, es pretén aconseguir que posin l'atenció en una altra aplicació dels enters, que no es tracta de descriure una situació concreta sinó d'expressar un moviment entre plantes, és a dir, un canvi. Aquest objectiu es concreta als quatre primers apartats i fa referència a les operacions amb nombres enters. Posteriorment, als apartats (e) i (f) se'ls convida a analitzar si el significat del signe  $-$  és el mateix en l'ús que se n'ha fet a les preguntes 1 i 2 i posteriorment a la 3. L'objectiu és que s'adonin de la polisèmia dels signes  $-$  i  $+$ , en especial la del  $-$  ja que la del signe  $+$  es fa menys palesa en la seva aplicació.

### Pregunta 4

- a) *Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?*
- b) *Com podries expressar, que fas el contrari de baixar dos pisos?*
- c) *Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar?*
- d) *Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?*

A través dels apartats d'aquesta pregunta es vol fer avinent l'altre significat que es pot atribuir al signe  $-$  que és el d'expressar el contrari o Operacions. En el cas d'un moviment, l'aplicació del signe  $-$  permet descriure el moviment Operacions, sovint anomenat contrari en llenguatge quotidià. A l'últim apartat es vol fer reflexionar sobre la nova interpretació que podem assignar al signe  $-$ , comparant-la amb les que ja havíem fet en les preguntes anteriors. En aquest qüestionari no s'ha volgut fer èmfasi en l'ús del signe  $-$  per descriure la posició simètrica respecte al zero, perquè quedava implícita en les dues primeres preguntes. De tota manera sí que se'n farà referència explícita en el qüestionari de la Cronologia de Catalunya.

Pregunta 5

*Quins són els significats que pots atribuir als símbols  $+$  i  $-$ , a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?*

Aquí es pretén fer un resum de tots els significats que hem atribuït al signe  $-$  al llarg de les quatre primeres preguntes. L'objectiu principal és que els alumnes explicitin de manera clara tots els significats que hem anat observant de l'ús del signe  $-$ .

Pregunta 6

*Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:*

- a) *Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?*
- b) *Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?*
- c) *Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?*
- d) *Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?*

L'objectiu principal d'aquesta pregunta és comprovar si els alumnes són capaços de combinar el que saben de nombres enters per descriure situacions que requereixen expressions algebraiques. Es vol comprovar en quin grau tenen assolits els nombres enters. Per poder utilitzar-los en el plantejament d'equacions, senzilles, que permetin obtenir informacions diverses respecte de canvis associats a situacions quotidianes.

### 2.2.2 Cronologia de Catalunya

Aquest qüestionari, com ja s'ha explicat en la metodologia de la recollida de dades, s'ha passat amb una setmana de decalatge respecte de l'altre. Però amb l'objectiu d'obtenir la mateixa informació a partir d'una altra situació on es poden utilitzar els nombres enters.

*A partir de la cronologia anterior responeu a les preguntes següents:*

Pregunta 1

*Quin número enter utilitzaríeu per expressar l'any en què els grecs arriben a Catalunya?*

Estem demanant si saben utilitzar els nombres enters a l'hora de descriure situacions relacionades amb la situació cronològica d'un esdeveniment. Per tant l'objectiu és valorar l'ús del signe  $-$  com a qualificador.

Pregunta 2

*Quin número enter utilitzaríeu per expressar l'any de la revolta d'Indíbil i Mandoni?*

En aquesta pregunta volem obtenir la mateixa informació que a la pregunta 1, amb l'objectiu de preparar el terreny per a la tercera pregunta.

Pregunta 3

*Com expressaríeu, en llenguatge matemàtic, els càlculs necessaris per tal de saber quants anys han passat entre aquests dos fets, utilitzant una única expressió.*

En aquesta pregunta estem demanant informació d'un canvi temporal. Aquí l'objectiu principal és obtenir informació sobre el signe – com a operador binari associat a la resta.

#### Pregunta 4

- a) *Si un personatge mor l'any 45 i ha viscut 62 anys, escriuiu una sola expressió algebraica que englobi els càlculs necessaris per saber l'any que va néixer?*
- b) *Quin esdeveniment de la cronologia donada s'esdevingué pels voltants del seu naixement?*

En aquesta pregunta, en primer terme, es demana altra vegada per un canvi temporal però en aquest cas es vol incorporar l'ús de l'àlgebra. Es vol obtenir informació de com es combina l'ús de l'operador resta amb l'àlgebra. En el segon apartat, (b), es vol obtenir informació de la representació i ordenació dels enters sobre la recta numèrica.

#### Pregunta 5

*Si imagineu els fets situats sobre una línia recta que representi el temps,*

- a) *quin fet va passar en l'any simètric al 27 després de Crist respecte de l'any que prenem com a origen?*
- b) *Amb quin número expresseu l'any que prenem com a origen?*
- c) *Amb quins símbols matemàtics podeu expressar l'any corresponent al fet demanat a l'apartat a)?*
- d) *Representeu una part de la línia temporal que ens permeti visualitzar clarament tot el que s'ha demanat en aquesta pregunta.*

A l'apartat (a) es pretén obtenir informació sobre l'ús del signe – per denominar l'element simètric respecte la suma o Operacions. A l'apartat (b), en la mateixa línia del (a), volem saber si reconeixen l'origen de la recta numèrica respecte del que es determina el simètric d'un nombre. A l'apartat (c) es vol obtenir informació sobre l'ús del signe – com a operador simètric. Finalment a l'apartat (d) es demana una representació gràfica que resumeixi tot el que s'ha reflexionat als tres primers apartats.

#### Pregunta 6

- a) *En els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb significats diferents?*
- b) *Expliqueu quin és.*
- c) *Expresseu en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu, el més clarament possible, la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat.*

En els tres apartats d'aquesta pregunta es pretén reflexionar sobre l'ús del signe – en les diferents situacions que es descriuen a les preguntes anteriors. A l'apartat (a) es vol fer reflexionar sobre l'ús del signe menys i al (b) que s'especifiqui quin és el seu significat. Finalment a l'apartat (c) es demana que detallin la diferència que es manifesta en el seu ús en les situacions de qualificador, operador resta i operador per simètric.



### Pregunta 7

*Quin tipus de nombres heu estat utilitzant per descriure les situacions anteriors?*

Se'ls convida a explicitar el tipus de nombres que s'estan utilitzant per tal de descriure les situacions plantejades al llarg del qüestionari.

### 2.2.3 Creuament de qüestionaris

A partir dels propòsits, per cada qüestionari elaborem una taula on es posin de manifest les preguntes que, en ambdós qüestionaris, estiguin destinades a obtenir la mateixa informació. Per tal de fer-ho d'una manera més sintètica i visual elaborem la Taula 2.1 on les entrades són d'una banda les preguntes i de l'altra els continguts matemàtics sobre els quals pretenem obtenir informació. EP1, EP2, EP3, EP4, EP5 i EP6 són les preguntes del qüestionari Enters. EP1 es refereix a la primera pregunta de qüestionari Enters i de manera anàloga amb la resta d'acrònims. CRP1, CRP2, CRP3, CRP4, CRP5, CRP6 i CRP7 són les preguntes del qüestionari Cronologia de Catalunya, essent CRP1 la primera pregunta i així successivament.

Pel que fa als continguts matemàtics tenim:

- **Ori** és l'abreviatura d'*Origen*. Fa referència a obtenir informació sobre la utilització del zero com a origen de la recta numèrica i com a referència pels nombres enters.
- **Qua** és l'abreviatura de *Qualificador*. Fa referència a recollir informació sobre l'ús dels signes + i – com a qualificadors d'un nombre i que permeten donar significat al número que volem utilitzar. Per exemple a l'hora de dir si un pis està a sobre o a sota de la línia terra o si una data correspon a abans o després del naixement de Crist.
- **Ope** és l'abreviatura d'*Operacions*. Fa referència a recollir informació sobre la utilització del signe – per indicar l'Operacions d'un nombre.
- **Sim** és l'abreviatura de *Simètric*. Fa referència a recollir informació sobre l'ús del signe – com a operador simètric.
- **Alg** és l'abreviatura d'*Algebraic*. Fa referència a recollir informació sobre la utilització de l'àlgebra i les expressions algebraïques per descriure processos que es poden descriure en termes de nombres enters.
- **Rep** és l'abreviatura de *Representació*. Fa referència a recollir informació sobre com representen situacions que es poden descriure en termes de nombres enters, fent ús de la recta numèrica.
- **Pol** és l'abreviatura de *Polisèmia*. Fa referència a recollir informació sobre els diferents significats que podem atribuir al signe –.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  és la manera d'indicar l'extensió de l'ús dels naturals quan introduïm els enters. Fa referència a recollir informació sobre si els alumnes reconeixen els nombres enters com entitats que estenen els naturals a l'hora de descriure determinades situacions.

Pregunta		Continguts matemàtics							
		Ori	Qua	Ope	Sim	Àlg	Rep	Pol	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
EP1	P1	X	X				X		
EP2	P2(a)	X	X						
	P2(b)		X						
	P2(c)		X						
	P2(d)		X						
	P2(e)								X
EP3	P3(a)			X					
	P3(b)			X					
	P3(c)			X					
	P3(d)			X					
	P3(e)		X	X				X	
	P3(f)		X	X				X	
EP4	P4(a)				X				
	P4(b)				X				
	P4(c)		X		X				
	P4(d)		X	X	X			X	
EP5	P5	X	X	X	X			X	
EP6	P6(a)	X	X	X		X			
	P6(b)	X	X	X		X			
	P6(c)	X	X	X		X			
	P6(d)	X	X	X		X			

Taula 2.1: Propòsits de cada pregunta al qüestionari Enters.

Pregunta		Continguts matemàtics							
		Ori	Qua	Ope	Sim	Àlg	Rep	Pol	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
CRP1	P1		X						
CRP2	P2		X						
CRP3	P3		X	X					
CRP4	P4(a)	X	X	X		X			
	P4(b)	X	X				X		
CRP5	P5(a)	X	X		X		X		
	P5(b)	X			X				
	P5(c)	X	X		X				
	P5(d)	X			X		X		
CRP6	P6(a)		X	X	X			X	
	P6(b)		X	X	X			X	
	P6(c)		X	X	X			X	
CRP7	P7								X

Taula 2.2: Propòsits de cada pregunta al qüestionari Cronologia de Catalunya.

A la vista de les Taules 2.1 i 2.2 que identifiquen els propòsits de cada pregunta observem que n'hi ha alguns que sembla que no hagin estat objecte de prou atenció. Al primer qüestionari, Enters, només hi ha una pregunta que faci referència específica als continguts *Representació* i  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ . A aquest últim es limita a un sol apartat de la segona pregunta. Al segon qüestionari,

Cronologia de Catalunya,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  també es valora a partir d'una única pregunta. Ambdós continguts estan presents, de manera implícita, a tot el qüestionari i en aquestes preguntes se'n fa referència directa. La representació dels nombres enters rau tant en l'estructura d'un edifici com en una línia temporal ja que la identificació d'una planta o d'un any implica la seva situació sobre la recta numèrica. D'altra banda, en referència a  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ , tot el que expressem amb nombres enters exigeix la necessitat d'anar més enllà d'allò que podem expressar únicament amb els nombres naturals.

### 2.2.4 Qüestionari Enters

Imaginem un edifici de 20 nivells sobre terra i 7 nivells soterranis.

1. Feu un dibuix de l'edifici numerant cada planta adequadament.
2.
  - (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa?
  - (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani?
  - (c) Com expressaries que ets al quart pis?
  - (d) Quins símbols matemàtics has utilitzat, o pots utilitzar, per indicar que estàs per sobre o per sota de la planta baixa? Explica-ho amb detall.
  - (e) Quin tipus de nombres, que tinguin característiques semblants recordes haver utilitzat a classe de matemàtiques?
3.
  - (a) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?
  - (b) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos?
  - (c) Quines operacions has utilitzat per expressar els dos enunciats anteriors?
  - (d) Quins símbols matemàtics has utilitzat per expressar aquestes operacions?
  - (e) Els símbols utilitzats per fer les activitats 1 i 2 són iguals que els utilitzats per fer els primers apartats d'aquesta activitat?
  - (f) Aquests símbols representen el mateix?, és a dir, símbols que s'escriuen igual sempre representen el mateix? Explica-ho amb detall.
4.
  - (a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?
  - (b) Com podries expressar, que fas el contrari de baixar dos pisos?
  - (c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar?
  - (d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?
5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols  $+$  i  $-$ , a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?
6. Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:
  - (a) Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?
  - (b) Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?
  - (c) Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?
  - (d) Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?

### 2.2.5 Respostes del qüestionari Enters

Imaginem un edifici de 20 nivells sobre terra i 7 nivells soterranis.

Pregunta 1)

Feu un dibuix de l'edifici numerant cada planta adequadament.

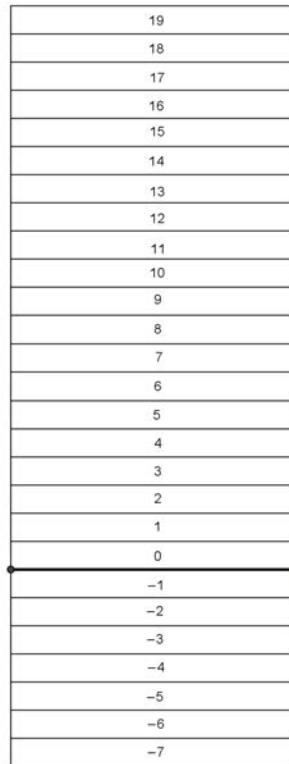


Figura 2.1: Edifici de 27 pisos: 20 sobre terra i 7 soterranis.

Pregunta 2)

a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa?

**0**

b) Com expressaries que ets al tercer soterrani?

**-3**

c) Com expressaries que ets al quart pis?

**+4**

d) Quins símbols matemàtics has utilitzat, o pots utilitzar, per indicar que estàs per sobre o per sota de la planta baixa? Explica-ho amb detall.

**+ indica que estem per sobre la planta baixa i – indica que estem per sota.**

e) Quin tipus de nombres, que tinguin característiques semblants recordes haver utilitzat a classe de matemàtiques?

**Els enters.**

Pregunta 3)

a) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?  
 $(+1)+4$

b) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos?  
 $(+1)-5$

c) Quines operacions has utilitzat per expressar els dos enunciats anteriors?  
**Suma i resta.**

d) Quins símbols matemàtics has utilitzat per expressar aquestes operacions?  
 $+$  i  $-$

e) Els símbols utilitzats per fer les activitats 1 i 2 són iguals que els utilitzats per fer els primers apartats d'aquesta activitat?  
**Sí.**

f) Aquests símbols representen el mateix?, és a dir, símbols que s'escriuen igual sempre representen el mateix? Explica-ho amb detall.

**No, en un cas indiquen si la planta està per sobre o per sota terra i en l'altre si pugem (sumar) o baixem (restar).**

Pregunta 4)

a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?  
 $-(+5)$

b) Com podries expressar que fas el contrari de baixar dos pisos?  
 $-(-2)$

c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar?  
**El signe  $-$**

d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?  
**No, indiquen fer l'acció contrària.**

Pregunta 5)

Quins són els significats que pots atribuir als símbols  $+$  i  $-$ , a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

**Podem trobar tres significats:**

- **Qualificador**
- **Operació**
- **Simètric (contrari)**

Pregunta 6)

Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:

a) Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?  
 $+3+x=-5 \Rightarrow x=-8$

b) Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?  
 $+4+x=-2 \Rightarrow x=-6$

c) Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?

$$-1+x=+4 \implies x=+5$$

d) Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?

$$-2+x=-5 \implies x=-3$$

## 2.2.6 Qüestionari Cronologia de Catalunya

### Alguns fets rellevants

Breu cronologia de Catalunya

- Primers indicis de pobladors fa aproximadament 1200000 anys
- Primeres troballes anatòmiques fa uns 450000 anys (Cova de l'Aragó, Talteüll, Rosselló)
- Mandíbula Banyoles fa 100000 anys
- Catalunya esdevé habitable després de la Glaciació de Wurm (darrera) fa entre 90000 i 10000
- Reescalfament i grans canvis fa uns 10000 anys
- Inici de l'agricultura a Catalunya (al Neolític) fa uns 7500 anys
- Canvis jeràrquics-socials (a l'inici de l'Edat del Metalls) fa uns 4500 anys
- Introducció de la metal·lúrgia a Catalunya (fenicis) pels voltants del segle VIII aC
- Fundació Empúries (grecs) cap a l'any 580 aC
- Fundació de Rodhes uns 100 anys més tard, aproximadament
- Ocupació romana cap a l'any 218 aC
- Revolta íbera (Indíbil i Mandoni, ilergets) el 206 aC
- Rendició ilergets l'any 198 aC
- Tarraco esdevé ciutat imperial l'any 27 aC (August)
- **Naixement de Jesucrist (any que nosaltres utilitzem de referència a la línia del temps)**
- Saqueig de Tarraco (francs) l'any 260
- Edicte de Milà (cristianisme) el 313
- Invasions bàrbares (origen estats medievals europeus) cap al segle IV
- Ataulf s'instal·la a Barcelona el 415
- Musulmans a Catalunya cap el 720
- Guifré el Pilós inicia la dinastia catalana l'any 878
- Abat Oliba del 971 fins el 1043

- Fundació de Montserrat l'any 1023
- Jaume I des de 1214 fins 1276
- Conquesta Sardenya el 1323
- Pesta Negra el 1348
- Consolat del Mar l'any 1370
- Mor Martí l'Humà el 1410
- Compromís de Casp (Ferran I) l'any 1412
- Descobriment d'Amèrica: 1492
- Carles I del 1516 fins el 1556
- La Guerra dels Trenta Anys comença el 1618
- La Guerra dels Segadors començà l'any 1640
- Tractat dels Pirineus (pèrdua Rosselló i la Cerdanya) l'any 1659
- Felip V del 1714 fins el 1746
- Decret de Nova Planta (castellà única llengua oficial) l'any 1715
- La Revolució Francesa comença el 1789
- Inici de la Renaixença cap a l'any 1844
- Primer ferrocarril (Mataró - Barcelona) el 1848
- Primera República l'any 1873
- L'Exposició Universal a Barcelona va ser el 1888
- La Setmana Tràgica l'any 1909
- Primera Guerra Mundial des del 1914 fins el 1918
- Dictadura de Primo de Rivera del 1923 fins el 1930
- Segona República l'any 1931
- Estatut d'Autonomia de Núria el 1932
- Mor Francesc Macià el dia de Nadal de 1933
- Guerra Civil Espanyola de l'any 1936 fins l'any 1939
- Segona Guerra Mundial del 1939 fins el 1945
- Mor de Franco el 1975
- Segon Estatut d'Autonomia de Catalunya l'any 1979
- Jocs Olímpics de Barcelona l'estiu de 1992

A partir de la cronologia anterior responeu a les preguntes següents:

1. Quin número enter utilitzaríeu per expressar l'any en què els grecs arriben a Catalunya?
2. Quin número enter utilitzaríeu per expressar l'any de la revolta d'Indíbil i Mandoni?
3. Com expressaríeu, en llenguatge matemàtic, els càlculs necessaris per tal de saber quants anys han passat entre aquests dos fets, utilitzant una única expressió.
4. (a) Si un personatge mor l'any 45 i ha viscut 62 anys, escriviu una sola expressió algebraica que englobi els càlculs necessaris per saber l'any que va néixer?  
(b) Quin esdeveniment de la cronologia donada s'esdevingué pels voltants del seu naixement?
5. Si imagineu els fets situats sobre una línia recta que representi el temps,
  - (a) quin fet va passar en l'any simètric al 27 després de Crist respecte de l'any que prenem com a origen?
  - (b) Amb quin número expresseu l'any que prenem com a origen?
  - (c) Amb quins símbols matemàtics podeu expressar l'any corresponent al fet demanat a l'apartat a)?
  - (d) Representeu una part de la línia temporal que ens permeti visualitzar clarament tot el que s'ha demanat en aquesta pregunta.
6. (a) En els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb significats diferents?  
(b) Expliqueu quin és.  
(c) Expresses en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu, el més clarament possible, la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat.
7. Quin tipus de nombres heu estat utilitzant per descriure les situacions anteriors?

### 2.2.7 Respostes del qüestionari Cronologia de Catalunya

Pregunta 1)

Quin número enter utilitzaríeu per expressar l'any en què els grecs arriben a Catalunya?

**-580**

Pregunta 2)

Quin número enter utilitzaríeu per expressar l'any de la revolta d'Indíbil i Mandoni?

**-206**

Pregunta 3)

Com expressaríeu, en llenguatge matemàtic, els càlculs necessaris per tal de saber quants anys han passat entre aquests dos fets, utilitzant una única expressió.

**-206-(-580)**

Pregunta 4)



a) Si un personatge mor l'any 45 i ha viscut 62 anys, escriuiu una sola expressió algebraica que englobi tots els càlculs necessaris per saber l'any que va néixer.

$$45-x=62 \implies x=-17$$

b) Quin esdeveniment de la cronologia donada s'esdevingué pels voltants del seu naixement?

**Tarraco esdevé ciutat imperial.**

Pregunta 5) Si imagineu els fets situats sobre una línia recta que representi el temps,

a) Quin fet va passar en l'any simètric al 27 després de Crist respecte l'any que prenem com a origen?

**Tarraco esdevé ciutat imperial (-27).**

b) Amb quin número expresseu l'any que prenem com a origen?

**0**

c) Amb quins símbols matemàtics podeu expressar l'any corresponent al fet demanat a l'apartat a)?

**-27**

d) Representeu una part de la línia temporal que ens permeti visualitzar clarament tot el que s'ha demanat en aquesta pregunta.

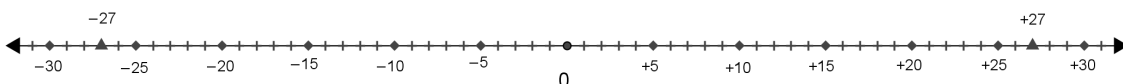


Figura 2.2: Part de la recta numèrica on representem l'origen i dues dates simètriques.

Pregunta 6)

a)

b) Expliqueu quin és.

**El - .**

c) Expresses en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu, el més clarament possible, la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat.

**Els diferents usos del signe - els podem trobar en les següents situacions:**

- \* **-580**  $\implies$  indica que l'any és "abans de Crist".
- \* **45-x**  $\implies$  indica l'operació resta, per trobar el temps transcorregut entre dues dates.
- \* **-27o-(+27)**  $\implies$  indica l'Operacions de +27.

Pregunta 7)

Quin tipus de nombres heu estat utilitzant per descriure les situacions anteriors?

**Els nombres enters.**

## 2.3 Recollida de dades principals

Després d'haver presentat els instruments principals de recollida d'informació, passem a explicar la intervenció a l'aula que acompanya l'aplicació d'aquests instruments. Juntament amb l'explicació de la intervenció, en descrivim parts del disseny i de la planificació.

### 1. Introducció

Aquesta és una activitat destinada a valorar l'aprenentatge, en referència a l'ús i al significat, que els alumnes han adquirit a 1r i 2n ESO, en relació als nombres enters i als significats que podem atribuir al signe  $-$  en contextos de matemàtiques escolars. En aquests dos cursos se'ls ha:

- (a) introduït el concepte de nombre enter,
- (b) mostrat les situacions on es poden i/o és necessari utilitzar-los i,
- (c) instruït en el càlcul amb nombres enters.

### 2. Material

El material que cal per realitzar l'activitat és:

- (a) Bolígraf blau o negre i vermell o verd.
- (b) Full/s.
- (c) Fulls d'activitats.
- (d) Pissarra tradicional o digital.

### 3. Participants

Els participants són els alumnes de dos dels cinc grups de tercer d'ESO de l'Escola Pia Santa Anna de Mataró. Han de treballar els qüestionaris en grups de 4 alumnes. Al final de la recollida s'obtenen 15 grups de respostes.

### 4. Desenvolupament

L'activitat va ser programada per realitzar-se de manera simultània. No tant temporalment sinó quant a seqüenciació, a dues classes de 3r ESO. El treball es va dur a terme en grups d'uns quatre alumnes (en funció del número d'alumnes a cada aula).

A cada classe van realitzar-se dues sessions de treball, en grup, que es van gravar en vídeo, sempre evitant l'aparició de cares d'alumnes i del professor, centrant la gravació en com es desenvolupa la realització i discussió de cada activitat. El grup de recerca GIPEAM va proporcionar el material i el suport tècnic per fer les gravacions. Al final de cada sessió es va entrevistar un alumne de cada grup per tal de comentar algunes de les respostes.

A la primera sessió cada grup d'alumnes va rebre uns fulls d'activitats que s'havien de realitzar conjuntament, amb la intenció de fer aparèixer els nombres enters i els diferents significats del signe  $-$ . En aquests fulls hi havia sis activitats, algunes d'elles amb subapartats, destinades a explicitar la presència i l'ús dels nombres enters així com els diferents significats que es poden atribuir al signe  $-$  i a la interpretació de resultats que es poden obtenir quan la solució d'una equació és un nombre negatiu. A la segona sessió a cada grup se li van lliurar uns altres fulls d'activitats que també havien de realitzar en condicions similars. En aquest cas, però, les activitats venien contextualitzades sobre una cronologia, que se'ls va facilitar, d'alguns fets rellevants de la història de Catalunya.

### 5. Temporització

Les dues sessions que es van realitzar a cada grup van estar espaiades aproximadament una

setmana. L'objectiu d'això era valorar, sense que hi hagués una continuïtat en les tasques, el grau d'interiorització i d'aplicació que els alumnes havien aconseguit en referència al coneixement dels nombres enters.

A cada sessió es va dividir el temps de treball en cinc fases:

- (a) 5 minuts per organitzar els grups, repartir l'activitat i comentar-la.
- (b) 20 minuts per fer-la en grup.
- (c) 20 minuts per posar-la en comú i discutir-la en gran grup.
- (d) 5 minuts perquè el professor explicités 3 significats que es poden atribuir al signe - (com a indicador de l'operació resta, com a qualificador del nombre enter i com a operador invers) i tothom els pugui sentir detallats.
- (e) 5 minuts perquè cada grup afegís, en vermell o verd, el que li pugués semblar oportú, posteriorment a la intervenció del professor.

## 6. Rols a l'aula

Els papers a l'aula de tots els participants en l'activitat eren els següents:

- (a) Alumnes

Primer, els alumnes van treballar en grups de 4 (en funció de com era el grup classe) i la seva feina va ser discutir i respondre les activitats proposades. Havien d'utilitzar bolígraf blau o negre.

Segon, es van discutir en gran grup els resultats obtinguts.

Tercer, van afegir en vermell o verd al final de l'activitat el que van considerar oportú després de la intervenció del professor.

Quart, van lliurar els fulls d'activitats.
- (b) Professor

Primer, presentació i entrega de les activitats, distribució en grups i animar a treballar. En aquesta primera fase (25 primers minuts) el professor no havia de fer cap aportació matemàtica en relació a la solució de les activitats.

Segon, moderador, convidant a la participació, en la posada en comú en gran grup. Calia que incités a participar, les aportacions dels alumnes van enriquir el resultat de l'activitat. En aquesta fase el professor tampoc havia d'intervenir, només havia de ser qui recollia les respostes i les organitzava.

Tercer, en aquest apartat calia diferenciar les actuacions depenent de si estem a la primera o a la segona sessió.

  - i. Al final de la primera sessió el professor havia d'explicitar els tres significats que podem atribuir al signe  $-$  i assegurar-se que tots els alumnes ho han sentit.
  - ii. Al final de la segona sessió el professor havia d'assegurar-se de relacionar i lligar els resultats obtinguts amb el que s'havia conclòs a la primera sessió.

Cal reiterar la importància de la no intervenció del professor/a en les primeres fases i en limitar les seves intervencions a animar a la participació aprofitant les idees aportades pels alumnes, per afavorir situacions d'aprenentatge.

## 7. Objectius didàctics

Com a resultat final de l'activitat els objectius que volíem aconseguir eren:

- (a) Utilitzar els nombres enters per descriure situacions quotidianes.
- (b) Descriure diferents significats del signe  $-$ .
- (c) Utilitzar el llenguatge algebraic (equacions) per descriure situacions quotidianes.
- (d) Interpretar els resultats enters de les equacions.

## 2.4 Recollida de dades complementàries

### 2.4.1 Disseny i selecció d'entrevistats

Un cop realitzada la recollida d'informació, a partir dels qüestionaris resposts a l'aula, s'ha escollit un membre de cada grup.

El principal criteri seguit per a l'elecció ha estat bàsicament a partir de l'observació a l'aula, triant els alumnes que han estat més participatius dins de cada grup de treball, però sense que això fos un criteri rígid. En alguns grups els alumnes entrevistats han estat voluntaris.

En cap cas la condició de gènere o de condició social o situació socio-econòmica ha representat un punt rellevant a estudiar. Tot i que en algun moment en l'elaboració del marc teòric s'ha fet referència a algun d'aquests aspectes, no han estat paràmetres tinguts en compte a l'hora d'elaborar els qüestionaris, de recollir la informació o d'analitzar i valorar els resultats de la nostra investigació.

Les entrevistes es van realitzar de manera individualitzada i amb l'objectiu de valorar i aclarir el perquè de cada resposta. Principalment es volia que els alumnes entrevistats comentessin què els havia fet decidir a l'hora de donar una resposta o una altra. També se'ls demanava quin era el motiu de no haver respost una pregunta o perquè havien canviat la resposta inicial, tant en el decurs de la realització del qüestionari com després de la posada en comú i de la intervenció del professor. Així es poden constatar situacions d'aprenentatge o desaprenentatge d'acord amb la interpretació que li hem donat a desaprenentatge en aquesta recerca.

Les entrevistes es van realitzar de manera individual per a cada alumne d'un grup de treball i es van enregistrar en àudio. Cada alumne va comentar les respostes dels dos qüestionaris: el dels Enters i el de la Cronologia de Catalunya.

### 2.4.2 Implementació d'entrevistes

Després de lliurar el primer qüestionari que el grup havia respost, el dels Enters, l'entrevistador demanava a l'alumne que repassés les respostes i les comentés des de diversos aspectes:

- Verbalitzar el que havien escrit.
- Explicar si els havia costat posar-se d'acord a l'hora d'escriure la resposta.
- Comentar si després de la posada en comú, en gran grup, i de la intervenció del professor havien fet modificacions.

L'entrevistador només escoltava i animava a parlar i comentar l'alumne sense dirigir-lo, corregir-lo o orientar-lo. El seu paper era d'observador i intentava no influir en les respostes ni valoracions. Posteriorment es va procedir de manera anàloga en referència al qüestionari de la Cronologia de Catalunya. Per tant, els qüestionaris són els instruments principals de recollida de dades i les entrevistes es pensen com instruments secundaris que hauran d'ajudar a triangular dades durant l'anàlisi.



## Capítol 3

# Respostes dels qüestionaris i anàlisi

El capítol es distribueix en dues seccions. La primera correspon a l'anàlisi qualitativa de les respostes dels dos qüestionaris. La secció es distribueix en dues subseccions, una pels Enters i l'altra per a la Cronologia. La segona correspon a una anàlisi quantitativa de les respostes dels dos qüestionaris.

A continuació procedirem a analitzar les respostes donades pels grups d'alumnes. En aquest capítol trobarem dos elements: d'una banda totes les respostes donades pels grups amb els matisos aportats i el nombre de grups que han donat cada resposta. De l'altra els diagrames en forma de grafs on s'agrupen tipus de respostes i els matisos que en alguns casos es donen. S'utilitzen colors per donar valor a canvis i/o quantificacions. En el cas dels ventalls de respostes en vermell trobem els canvis realitzats en els últims minuts de cada sessió després de la posada en comú i dels comentaris dels professors. En verd s'apunta el nombre de grups que donen cada una de les respostes. Es detallen en format de xarxa sistèmica totes les respostes que els grups han donat en els qüestionaris. Posteriorment en format de graf es reorganitzen aquestes respostes de manera més visual. En el cas dels diagrames els cercles blaus corresponen als tipus de respostes, els rombes corresponen al matisos i els quadres vermells als canvis posteriors a les intervencions a l'aula.

Abans de començar a recollir les respostes per fer-ne l'anàlisi és important retornar al concepte de desaprenentatge que introduíem a l'inici de la tesi. Amb desaprenentatge volem fer referència a dos aspectes diferents. D'una banda, podem considerar desaprenentatge negatiu, al fet que en algunes de les respostes els alumnes havien respost correctament en primera instància però després de la intervenció del professor i posada en comú de les respostes modifiquen la seva resposta i en donen una d'incorrecta. D'altra banda també podem parlar de desaprenentatge en positiu, quan observem que posteriorment a la intervenció del professor i a la posada en comú milloren la seva resposta. És a dir, canvien una resposta errònia per una correcta. En ambdós casos es parteix d'un coneixement i hi ha una transformació.

## 3.1 Resultats qualitius i discussió

### 3.1.1 Sobre els Enters

Imaginem un edifici de 20 nivells sobre terra i 7 nivells soterranis.

Pregunta 1)

Feu un dibuix de l'edifici numerant cada planta adequadament. A continuació es detallen tots els tipus de resposta que s'han donat a la primera pregunta. En primer terme, Taula 3.1, tenim el nombre de nivells que dibuixen els alumnes:

- 5 grups dibuixen un edifici amb 27 nivells. En aquest cas,
  - \* 1 grup dibuixa els nivells soterranis numerats de  $-1$  a  $-7$  i els nivells per sobre la línia de terra de 0 a 19, això s'indica a la Taula 3.1 amb la terminologia següent  $[-1 -7 0 19 (1)]$ . Aquesta és l'única resposta correcta.
  - \* 1 grup dibuixa els nivells soterranis numerats de  $-1$  a  $-7$  i els nivells per sobre la línia de terra de 0 a 19. Però després de la posada en comú modifiquen el dibuix i afegeixen el nivell 20. Això invalida la correcció de la resposta i en aquest punt podem considerar que ens trobem davant d'una situació de desaprenentatge. És a dir, una situació en la que una primera resposta correcta matemàticament se substitueix per una resposta incorrecta. Interpreten incorrectament els comentaris.
  - \* 1 grup dibuixa els nivells soterranis numerats de  $-1$  a  $-7$  i els nivells per sobre la línia de terra de 1 a 20. Tot i dibuixar el nombre correcte de nivells no els numeren adequadament. No tenen en compte el zero com un número vàlid per indicar un nivell.
  - \* 2 grups dibuixen els nivells soterranis numerats de  $-1$  a  $-7$  i els nivells per sobre la línia de terra de 1 a 20 i situen el zero per indicar només la línia de terra però no per indicar un nivell.
- 8 grups dibuixen un edifici amb 28 nivells. En aquest cas,
  - \* 5 grups dibuixen els nivells soterranis numerats de  $-1$  a  $-7$  i els nivells per sobre la línia de terra de 0 a 20.
  - \* 1 grup dibuixa els nivells soterranis numerats de  $-1$  a  $-7$  i els nivells per sobre la línia de terra de 0 a 20 però després de la posada en comú modifiquen el dibuix i numeren les plantes per sobre terra de 0 a 19. Recondueixen a la resposta correcta.
  - \* 1 grup dibuixa els nivells soterranis numerats de  $-1$  a  $-7$  i els nivells per sobre la línia de terra de 0 a 20. Després de la posada en comú treuen la planta 20. La situació és similar al cas anterior, és a dir, després de la posada en comú recondueixen a la resposta correcta.
  - \* 1 grup dibuixa els nivells soterranis numerats de  $-1$  a  $-7$  i els nivells per sobre la línia de terra de 0 a 20. Després de la posada en comú treuen el zero. Ens tornem a trobar davant d'una situació de desaprenentatge.
- 1 grup dibuixa un edifici amb 25 nivells sense numerar amb 5 plantes soterrànies i 20 sobre la línia de terra.
- 1 grup dibuixa un eix vertical amb 7 plantes soterrànies i 20 sobre la línia de terra.

En el diagrama de format graf de la Figura 3.1 es destaquen les tres respostes que determinen el nombre de nivells detallats abans (dins d'el·lipses blaves) i els matisos de cada resposta dins els rombes. Si els matisos han vingut motivats per la posada en comú s'assenyala amb els rectangles vermells. En aquest cas la resposta corresponent a l'eix vertical, indicada amb E.V.

Imaginem un edifici de 20 nivells sobre terra i 7 soterranis.

1. Feu un dibuix de l'edifici numerant cada pis adequadament.

→ 27N:	-1 -7 0 19		(1)
	-1 -7 0 19	Posen 20	(1)
	-1 -7 1 20		(1)
	-1 -7 1 20 i 0 línia de terra		(2)
→ 28N:	-1 -7 0 20		(5)
	-1 -7 0 20	(0 19)	(1)
	-1 -7 0 20	(Treure 0)	(1)
	-1 -7 0 20 i 0	(Treuen 20)	(2)
→ 25N:	no numerats (5S i 20A)		
→ EV:	0 línia de terra (7S i 20A)		
			(1)

Taula 3.1: Ventall de respostes a la pregunta 1 del qüestionari Enters.

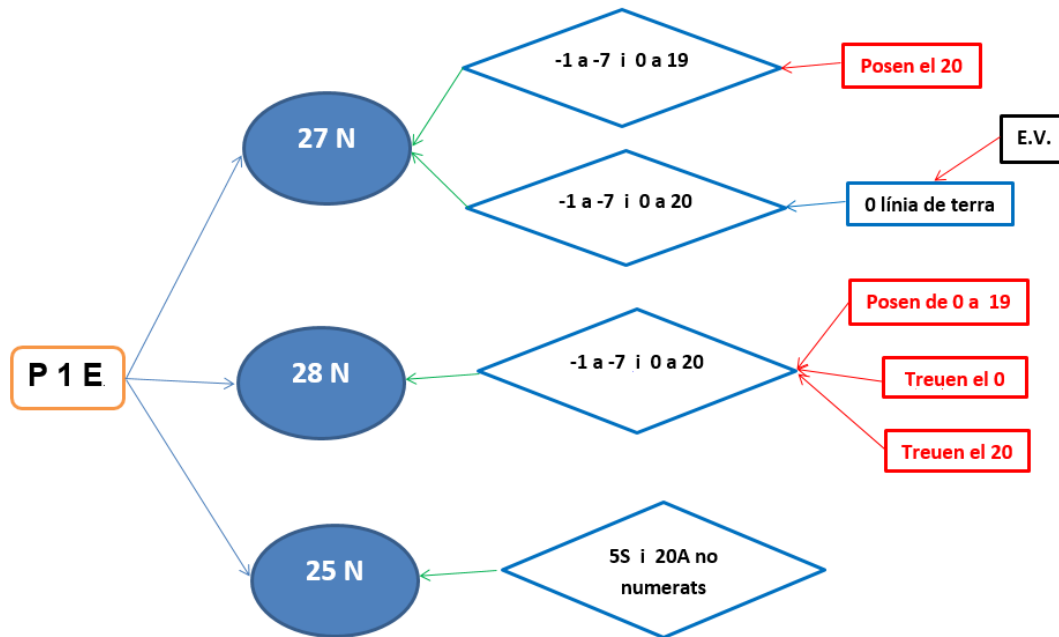


Figura 3.1: Respostes del qüestionari Enters, graf de la Pregunta 1.

dins un quadre negre, s'inclou a la de 27 nivells. Així, doncs, en aquesta primera pregunta podem distingir tres respostes.

- A la primera diuen que hi ha i dibuixen 27 nivells, que és la resposta correcta. Però quan prenem atenció en com s'ha donat la resposta podem veure que no sempre han fet una interpretació correcta del problema. Si considerem els matisos, a part de la resposta



correcta tenim:

- \* Un grup que després de donar una resposta correcta, arran de la intervenció a l'aula i la posada en comú modifiquen la seva resposta i posen un vintè pis. En aquest cas tenim un exemple clar de desaprenentatge, tal i com l'hem definit anteriorment.
  - \* Un altre grup, tot i dibuixar les 19 plantes sobre terra les numera de 1 a 20 eludint posar el zero a la planta baixa. En aquest cas podem constatar les dificultats en l'ús i la interpretació del zero com a número i com a origen.
  - \* Un tercer grup també dibuixa 19 plantes numerades de l'1 al 20 però afegixen el 0, no com a la planta baixa sinó sobre la línia de terra. En un dels casos el dibuix consisteix, només, en un eix vertical amb el zero al nivell de terra. En aquest bloc seguim detectant dificultats en l'ús del 0 com a número. I en l'últim cas l'eix mostra confusió entre plantes i punts.
- A la segona diuen que hi ha i dibuixen 28 nivells, que no és una resposta correcta. L'error sempre ve motivat per interpretar que sobre terra cal arribar al nivell 20, sense tenir en compte que la planta baixa, numerada amb 0 ja és un primer pis i que només cal dibuixar i numerar fins el 19. En aquest cas, a part de la resposta tipus, les plantes soterrànies de  $-1$  a  $-7$  i les plantes sobre terra de 0 a 20, també podem considerar matisos:
- \* Un grup refà el dibuix, fent les plantes de 0 a 19, després de la intervenció i la posada en comú. En aquest cas ens trobem davant d'una situació d'aprenentatge, tal i com s'entén en el marc teòric elaborat.
  - \* Un altre grup es limita a treure el 20 després de la intervenció i posada en comú. En aquest cas tornem a estar davant d'una situació d'aprenentatge al esmenar la resposta inicial traient l'últim nivell sobre terra.
  - \* Un segon grup es limita a treure el 0 després de la intervenció del professor i la posada en comú.
- A la tercera diuen que hi ha 25 pisos i els dibuixen. Només en consideren 5 de soterranis i no en numeren cap. És com si no haguessin pogut o no sabessin acabar el dibuix. L'entrevistat reconeix que segurament es van despistar “*perquè xerràvem molt*”. Estem davant una resposta que no aporta una informació rellevant però sí que podria ser objecte d'un altre estudi: “com s'enfronten a un problema de matemàtiques els alumnes d'ESO”.

Continuem la descripció de les respostes. A la segona pregunta detallarem la descripció per cada apartat, valorant les diferents respostes i els matisos que hi hem detectat. Tant en el moment de respondre als qüestionaris com a les modificacions fetes després de la intervenció del professor i de la posada en comú.

Començarem a partir del ventall de respostes de la Taula 3.2 únic per tots els apartats de la pregunta i continuarem a partir dels diagrames tipus grafs, de les Figures 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 i 3.6, que seran específics per a cada apartat.

Pregunta 2)

2.  
 (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa?  
 (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani.  
 (c) Com expressaries que ets al quart pis?  
 (d) Quins són els símbols matemàtics que has utilitzat, o pots utilitzar, per indicar que estàs per sobre o per sota de la planta baixa?  
 (e) Quins tipus de nombres, que tinguin característiques semblants, recordes haver utilitzat a classe de matemàtiques?

- |     |  |                                    |      |
|-----|--|------------------------------------|------|
| (a) | → 0  |                                    | (12) |
|     | → en negatiu   |                                    | (1)  |
|     | → $x \mid 0$   |                                    | (1)  |
|     | → $-i(0)$  |                                    | (1)  |
| (b) | → -3   |                                    | (15) |
| (c) | → 4  |                                    | (9)  |
|     | → $4t$   |                                    | (3)  |
|     | → +4   |                                    | (3)  |
| (d) | → -(SubT) i RES (UpT)  |                                    | (2)  |
|     | → pos i neg  |                                    | (2)  |
|     | → + (UpT) i - (SubT)   |                                    | (5)  |
|     | → $-x$ (SubT) i $x$ (UpT)  |                                    | (1)  |
|     | → + i -  |                                    | (2)  |
|     | → + sobre 0 i - sota 0   |                                    | (3)  |
| (e) | → Enters   |                                    | (6)  |
|     | → Enters $-\text{inf} \dots -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 \dots \text{inf}$ |                                    | (1)  |
|     | → $\emptyset$  | (enters)                           | (2)  |
|     | → equacions, exp. algebraiques, polinomis                                | sumes i restes                     | (1)  |
|     | → Positius, negatius, fraccionaris (ratllen decimals)                    | enters                             | (1)  |
|     | → Positius, negatius (llenguatge algebraic)                              | ratllen lleng. alg. i posen enters | (1)  |
|     | → Nombres negatius i positius i nombres enters                           |                                    | (1)  |
|     | → Nombres naturals   | esmenen nombres enters             | (1)  |
|     | → Nombres enters i llenguatge algebraic                                  |                                    | (1)  |

Taula 3.2: Ventall de respostes a la pregunta 2 del qüestionari Enters.

a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa?

0

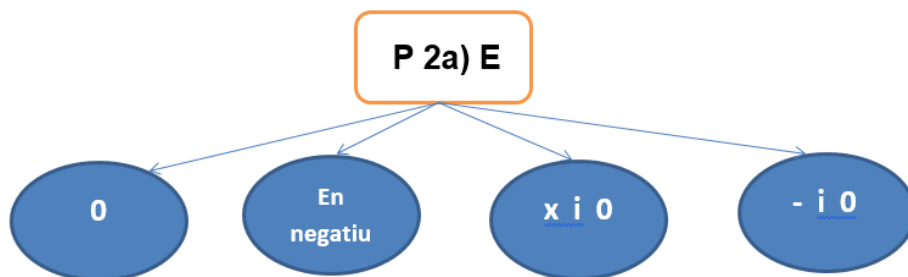


Figura 3.2: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 2a.

En aquest apartat les respostes obtingudes es poden agrupar en quatre tipus.

- \* La majoria dels grups, 12, donen la resposta correcta, 0 és la manera d'expressar que ets a la planta baixa.
- \* Un grup que diu  $x i 0$ . Sembla que vulguin complementar la seva resposta amb un matís algebraic, que és el que dóna  $x$ , que és innecessari donada la pregunta.
- \* Un grup que diu *en negatiu*. En aquest cas la resposta és incorrecta i no es mostra cap esmena posterior.
- \* I un últim grup que diu  $- i 0$ . En aquest altre cas sembla que mostrin inseguretats i necessiten afegir el  $-$ . Això invalida la resposta donada a la pregunta.

b) Com expressaries que ets al tercer soterrani?

**-3**



Figura 3.3: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 2b.

En aquest apartat la resposta és unànime i correcta.

c) Com expressaries que ets al quart pis?

**+4** En aquest apartat tot i que s'entén un coneixement clar de la situació i que no podem



Figura 3.4: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 2c.

titllar d'incorrecta cap de les respostes sí que és interessant aturar-se un moment a comentar els matisos.

- \* Tres grups responen  $+4$ , que és la resposta considerada correcta a l'hora d'elaborar el qüestionari. Fan palès l'ús dels nombres enters per descriure la situació.
- \* La majoria de grups, 9, responen el 4, que no seria la resposta esperada en termes de nombres enters on el signe del nombre detalla la posició. De tota manera és acceptable pel fet que s'acostuma a obviar el signe  $+$ .
- \* Tres grups responen el 4t. Aquí tot i identificar el nivell i la posició utilitzen un ordinal per descriure la situació en lloc de nombres enters.

En cap cas hi ha canvis ni esmenes després de la intervenció i posada en comú.

d) Quins símbols matemàtics has utilitzat, o pots utilitzar, per indicar que estàs per sobre o per sota de la planta baixa? Explica-ho amb detall.

**+ indica que estem per sobre la planta baixa i - indica que estem per sota.** En

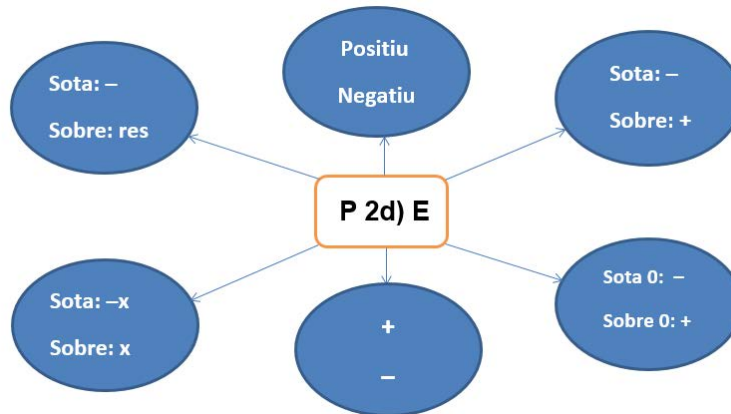


Figura 3.5: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 2d.

aquest apartat les respostes giren al voltant de maneres diverses d'expressar el mateix:

- \* Cinc grups responen que + serveix per indicar sobre terra i - sota terra.
- \* Dos grups diuen que per indicar sobre terra no cal signe però sí cal el - per indicar sota terra.
- \* Tres grups que + indica sobre 0 i - sota 0.
- \* Un grup afegeix la  $x$  al signe per indicar el mateix; amb això es dona un cert significat algebraic al primer tipus de resposta.
- \* Dos grups responen, només, + i - sense especificar què indiquen. I dos grups més ho fan posant *positiu* i *negatiu* enlloc dels signes però no hi ha diferència en el sentit de la resposta.

Tots els grups responen de manera adequada i àmplia, a la pregunta. No tots, però, detallen la resposta.

e) Quin tipus de nombres, que tinguin característiques semblants records haver utilitzat a classe de matemàtiques?

**Els enters.**



Figura 3.6: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 2e.

En aquesta pregunta obtenim una diferència de respostes àmplia però després de la intervenció i de la posada en comú la resposta on s'han utilitzat els nombres enters és majoritària.

- \* Sis grups donen la resposta concisa, *enters*, de primeres.

- \* Un grup ho acompanya d'una recta numèrica.
- \* Un grup especifica que utilitza els *positius i negatius* i afegeix *enters*.
- \* Un altre grup també comença dient *positius i negatius* i esmenta el *llenguatge algebraic*, abans d'acabar esmenant i posant *enters*.
- \* Dos grups no responen i després de la intervenció per part del professor i de la posada en comú l'esmenen.
- \* Un grup respon *naturals*. Esmenen la resposta a posteriori.
- \* Un dels grups comença dient *positius i negatius* però afegeixen *fraccionaris* per acabar fent l'esmena adequada.
- \* Un altre dels grups comença dient *positius i negatius* però afegeixen *expressions algebraiques* i acaben fent l'esmena.
- \* Un últim grup respon *equacions, expressions algebraiques, polinomis* i després de la intervenció i la posada en comú esmenen posant *sumes i rectes*.

Tenim diverses situacions d'aprenentatge, és a dir, després de donar respostes errònies o incompletes acaben donant la resposta correcta després de la intervenció del professor o de la posada en comú per part de tots els grups.

També podem considerar una situació de no-aprenentatge l'últim cas. Perquè ni d'inici ni després de les intervencions arriben a donar la resposta correcta. Es pot considerar un situació no concloent quant a l'aprenentatge perquè la primera resposta tampoc era correcta. Per tant estem davant d'una situació diferent que caldria catalogar entremig de les considerades d'inici.

### Pregunta 3)

A partir del ventall de respostes, de la Taula 3.3, detallarem els matisos de resposta que podem observar a cada apartat, a partir de les grafs de les Figures 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 i 3.12.

- 3.
- (a) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?
  - (b) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos?
  - (c) Quines operacions has utilitzat per expressar els dos enunciats anteriors?
  - (d) Quins símbols matemàtics has utilitzat per expressar aquestes operacions?
  - (e) Els símbols utilitzats per fer les activitats 1 i 2 són iguals que els utilitzats per fer els primers apartats d'aquesta activitat?
  - (f) Aquests símbols representen el mateix? És a dir, símbols que s'escriuen igual sempre representen el mateix?

- |     |                                       |               |      |
|-----|---------------------------------------|---------------|------|
| (a) | → $1 + 4$                             |               | (9)  |
|     | → Vaig del pis 1 al pis 5 ( $1 + 4$ ) |               | (1)  |
|     | → $1 + 4 = 5$ pis                     | (Ratllen pis) | (1)  |
|     | → $+1 + 4$                            |               | (1)  |
|     | → $1 + 4 = 5$                         |               | (2)  |
|     | → $(+1) + (+4)$                       |               | (1)  |
| (b) | → $1 - 5$                             |               | (10) |
|     | → $1 - 5 = -4$ pis                    | (Ratllen pis) | (1)  |
|     | → $+1 - 5$                            |               | (1)  |
|     | → $1 - 5 = -4$                        |               | (2)  |
|     | → $(+1) - (-5)$                       | (+1 - 5)      | (1)  |

(c)	→	Suma i resta	(10)
	→	$\emptyset$	(1)
	→	Restes i sumes ( $+ - = -$ , $++ = +$ )	(1)
	→	Equacions (Ho ratllen i escriuen sumes i restes)	(1)
	→	Suma i resta de nombres enters	(2)
(d)	→	$+ i -$	(13)
	→	Positiu (+) i negatiu (-)	(2)
(e)	→	Sí	(14)
	→	Sí, però l'aparença és diferent, a la 1a act ens diu si està Sup o Up 0, ara fem operacions	(1)
(f)	→	Sí	(2)
	→	Sí, representen el mateix perquè el $-$ representa que baixa d'un punt $-5$ representa que baixes 5 punts respecte el 0 igual que $1 - 5$ que baixa 1 respecte 5. Amb el signe $+$ també passa perquè $+4$ representa que pugues $+4$ punts respecte el 0, igual que $1 + 4$ que puja 4 respecte 1. (En el primer cas s'utilitzen per expressar la posició i aquí per pujar i baixar.)	(1)
	→	Sí	(Ho ratllen i escriuen: No. Poden indicar si els nombres són positius o negatius i també poden expressar suma i resta.) (1)
	→	Sí	(El ratllen i escriuen: No, tenen significats diferents perquè poden significar 3 coses, per exemple.) (1)
	→	$\emptyset$	(No, però tenen relació: 1) Uns expressen posició 2) Els altres es fan servir per pujar i baixar.) (1)
	→	No, uns representen suma i altres resta.	(1)
	→	No, el $-$ pot voler dir que baixes plantes o que restes.	(1)
	→	No, depèn del moment.	(Ho ratllen) (1)
	→	No, per exemple el $-$ pot indicar la resta o negatiu.	(1)
	→	No, pot representar: 1) Suma i resta; 2) Nombres positius i negatius;	3) Contraris (1)
	→	No, ja que no és el mateix $-3$ i $3 - 1$	(1)
	→	No, no sempre representen el mateix	(1)
	→	No $+$ per pujar, $-$ per baixar	(1)
	→	No, perquè un suma valors i l'altra disminueix	expressen per sobre o sota terra (1)

Taula 3.3: Ventall de respostes a la pregunta 3 del qüestionari Enters.

a) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?  $(+1)+4$

En aquest apartat trobem, bàsicament, tres tipus de resposta:

- \* Nou grups responen  $1 + 4$ . En aquest cas hi ha dos grups més que afegeixen el resultat  $1 + 4 = 5$ , un grup que afegeix *pis* al resultat, que després de la intervenció ratllen. Un últim grup explica que va del pis 1 al 5 abans d'escriure l'expressió inicial.
- \* Un grup respon  $+1 + 4$ .
- \* Un grup respon  $(+1) + (+4)$ .

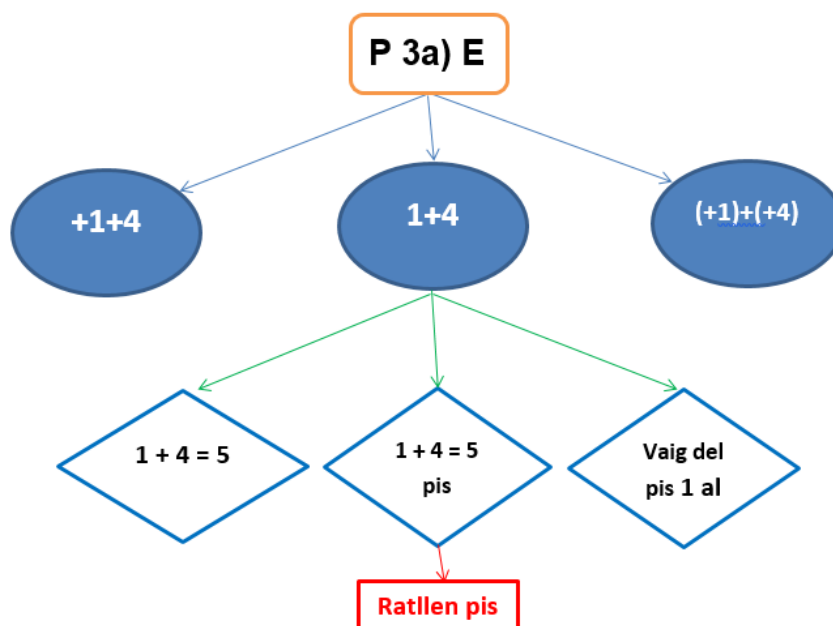


Figura 3.7: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 3a.

En aquest apartat la resposta considerada correcta no s'aconsegueix en cap dels casos. Tot i que el resultat és el mateix des d'un punt de vista numèric en aquest apartat s'apuntava a la descripció d'un canvi. A partir del pis 1, que descrit en termes de nombres enters és  $+1$  pugem quatre pisos, és a dir, sumem 4, que indica el canvi de pujar quatre pisos més. Ens trobem davant el que Bruno i Martínón (1999) anomenen la dimensió contextual, que implica la capacitat de descriure situacions i esdeveniments com són els estats, variacions i comparacions d'estats. En aquest cas estem davant d'una variació d'estats. Pels alumnes aquesta descripció no necessita de l'especificació del nombre positiu,  $+1$ , per indicar que som al primer pis. Això pot ser motivat pel fet que habitualment obviem el signe en els nombres positius.

b) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos?

$(+1)-5$

Aquest apartat rep tres respostes, algunes d'elles reben certs matisos (rombes blaus) i canvis (rectangles vermells) :

- \* Deu dels grups responen  $1 - 5$ , dos grups més afegixen el resultat,  $1 - 5 = -4$ , i un altre  $1 - 5 = -4$  *pis*. Aquest últim acaba fent l'esmena consistent en ratllar pis.
- \* Un grup respon  $+1 - 5$ .
- \* Un altre grup  $(+1) - (-5)$ , aquest acaba modificant la resposta després de la intervenció posant  $+1 - 5$

En aquest apartat repeteixen el que ja havien fet a l'apartat *a*, evitant l'ús del signe  $+$  per fer referència a nombres positius. És important ressaltar que a l'últim grup hi ha una situació de desaprenatge. Tot i que la resposta ja era equivocada d'inici quan fan la correcció, posterior a la intervenció, apliquen malament la regla dels signes. Posen  $-5$  quan  $-(-5)$  hauria de ser  $+5$ . Possiblement tenien clar que calia restar 5 i no van parar atenció al que havien escrit.

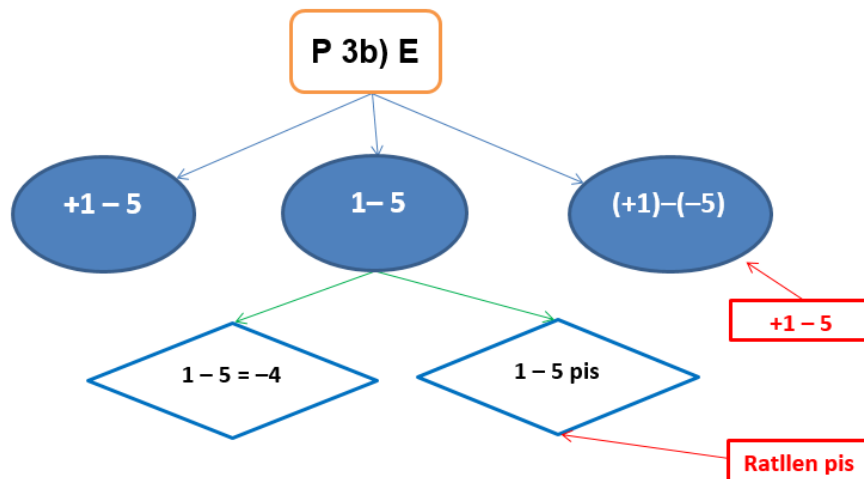


Figura 3.8: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 3b.

Aquesta seria una possible explicació però una altra explicació seria que no saben operar amb els signes.

c) Quines operacions has utilitzat per expressar els dos enunciats anteriors?

**Suma i resta.** En aquest apartat podem separar tres tipus de respostes:

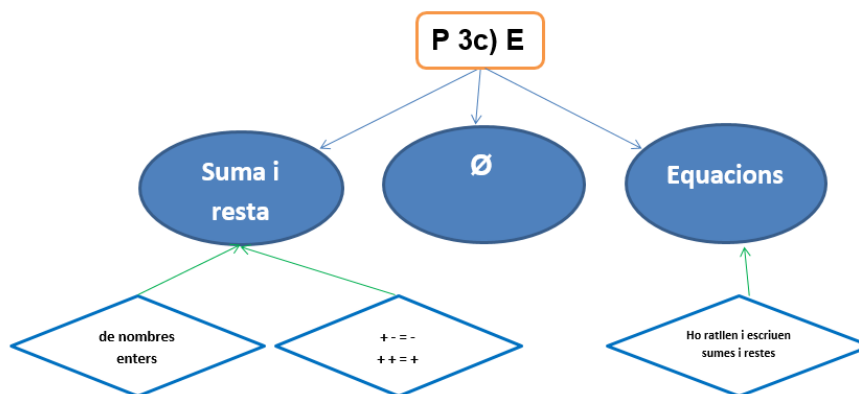


Figura 3.9: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 3c.

- \* Deu grups responen senzillament *suma i resta*. Dos grups matisen que es tracta de *suma i resta d'enters*. Un grup afegeix  $+- = -$  i  $++ = +$ .
- \* Un grup no respon, ni esmena res després de les intervencions.
- \* Un últim grup respon *equacions*, però abans de les intervencions ho canvien per *sumes i restes*.

En aquest cas podem observar un cas d'aprenentatge previ a les intervencions.

d) Quins símbols matemàtics has utilitzat per expressar aquestes operacions?

$+ i -$  Aquí podem distingir dues respostes:



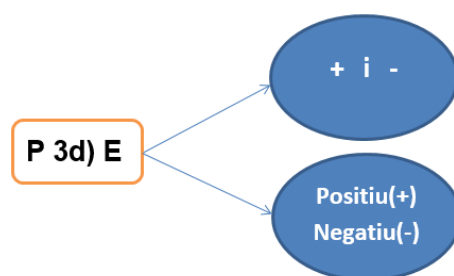


Figura 3.10: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 3d.

- \* Tretze grups responen + i -, que és la resposta tipus prevista.
- \* Dos grups responen *positiu (+)* i *negatiu (-)*.

A la segona resposta podem observar la confusió entre els diferents significats dels signes, la polisèmia dels signes, Bruno i Martín (1999), Pujol (2008) i Vlassis (2008).

e) Els símbols utilitzats per fer les activitats 1 i 2 són iguals que els utilitzats per fer els primers apartats d'aquesta activitat?

**Sí.** En aquest apartat la resposta és quasi unànime, tots els grups responen *sí*. Catorze dels

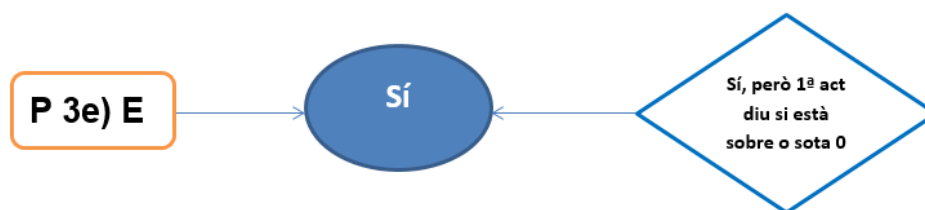


Figura 3.11: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 3e.

grups responen amb un simple *sí*, només un grup comenta i matisa la resposta. La manera de fer-ho no és la més precisa però sí que mostra la diferència entre els significats que podem associar als signes. Comenten que *l'aparença és diferent, a la primera activitat ens diu si la planta està sobre o sota la planta zero, ara fem operacions*. Estan fent esment de la polisèmia del signe -. Altra vegada en la línia de Bruno i Martín (1999), Pujol (2008) i Vlassis (2008). En la primera part de la resposta fan referència a l'ús del signe com a qualificador, funció unària, per indicar la posició respecte el zero. A la segona part de la resposta en el seu ús com operador binari, indica les operacions que permeten descriure canvis d'estat (Bruno i Martín, 1999).

De fet avancen la resposta a la pregunta formulada a l'apartat *f*. És interessant observar, com veurem a les respostes del proper apartat, que tot i que estan utilitzant els mateixos signes, no sempre són capaços de distingir la diferència de l'ús que se'n fa.

f) Aquests símbols representen el mateix?, és a dir, símbols que s'escriuen igual sempre representen el mateix? Explica-ho amb detall.

**No, en un cas indiquen si la planta està per sobre o per sota terra i en l'altre si pugem (sumar) o baixem (restar).**

Les respostes a l'apartat *f* s'agrupen bàsicament en tres grans blocs però en aquesta pregunta,

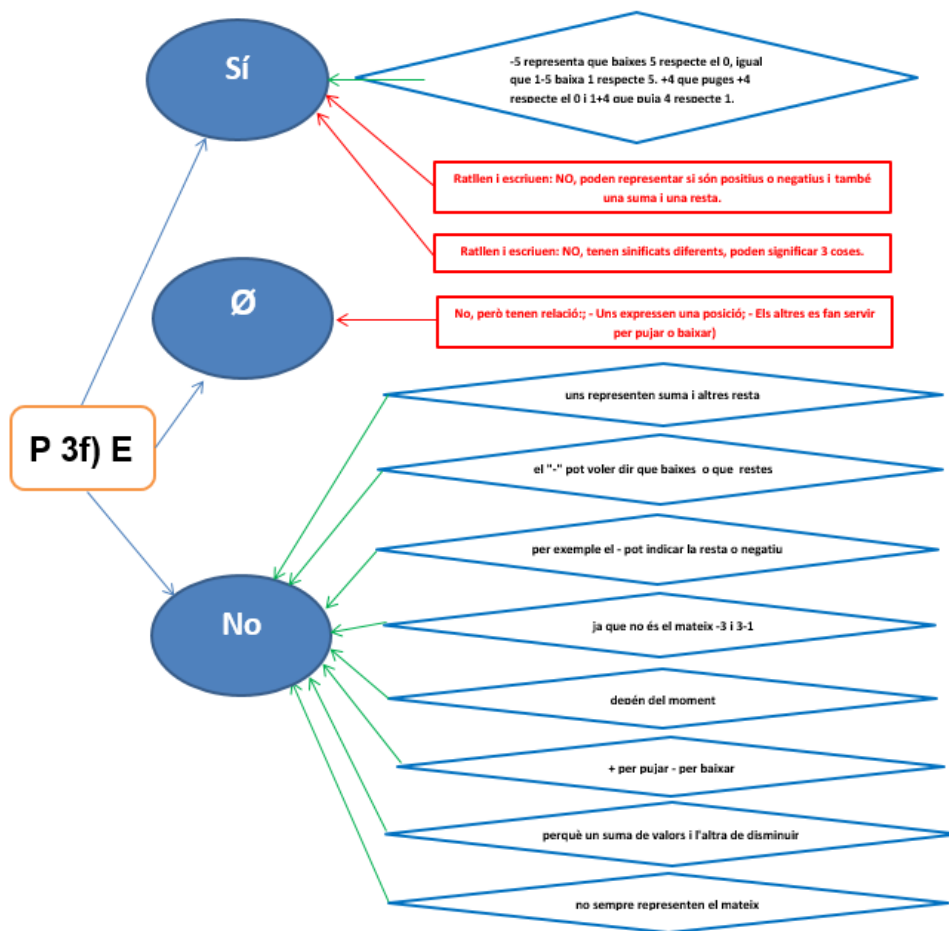


Figura 3.12: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 3f.

quasi bé, cada resposta va acompanyada d'un matís i, força d'elles d'una correcció posterior a la intervenció del professor i de la posada en comú. Les respostes s'agrupen en:

- \* Sí.
  - Dos dels grups responen simplement sí.
  - Un grup justifica la resposta repassant les respostes dels apartats anteriors, acaben però, fent esment que en uns casos indica la posició i en els altres si pugen o baixen. En aquest cas la resposta és contradictòria entre la resposta inicial i el comentari final. Tot i la diferència d'edats en l'estudi mostra l'evolució en el canvi conceptual que apareix a Bofferding (2014).
  - Dos grups esmenen la seva resposta després de la intervenció. En aquest punt podem considerar que estem davant d'una situació d'aprenentatge.
- \* No responen. També esmenen la seva resposta després de la intervenció i per tant també estem davant d'una situació d'aprenentatge.
- \* No. Dels vuit grups que donen aquesta resposta, podem agrupar els matisos en tres grups:
  - Els que insisteixen en sumar i restar associats a pujar i baixar, quatre grups. Un dels grups

afegeix la possibilitat de l'ús del signe per indicar la posició respecte l'origen després de la intervenció. Aquí també trobem una situació d'aprenentatge.

- Els que creuen que no representen el mateix, un grup. O els que creuen que depèn del moment, un altre grup, que després de la intervenció deixen, simplement, un no.
- Els que diferencien l'ús del signe com a qualificador i com a operador binari, tres grups. Dels tres només un afegeix, després de la intervenció del professor, afegeixen que també podria utilitzar-se el signe  $-$  per indicar el contrari. En aquest cas podem tornar a considerar una situació d'aprenentatge.

En aquest apartat, malgrat la varietat de respostes aproximadament la meitat dels grups són capaços de diferenciar els usos dels signes  $+$  i  $-$  a l'hora d'utilitzar-los per descriure situacions. Els és més difícil, però, explicar de manera detallada quins són aquests usos. Altra vegada la polisèmia dels signes, en especial del signe  $-$  és una de les complicacions amb les que els alumnes de secundària s'enfronten quan comencen a treballar amb els nombres enters.

Tot i que en aquest exercici només es parava atenció a dos dels significats:

- El signe com a qualificador, per indicar una posició respecte l'origen.
- El signe com a operador binari per indicar canvis d'estat, operacions.

A l'exercici 4 s'incorpora l'ús del signe  $-$  per indicar el contrari o simètric respecte de l'origen. La Taula 3.4 mostra tot el ventall de respostes que els participants han donat. A les Figures 3.13, 3.14, 3.15 i 3.16 tenim els grafs que matisen les respostes donades a cada apartat.

Pregunta 4)

- 4.
- (a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?  
 (b) Com podries expressar, que fas el contrari de baixar dos pisos?  
 (c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar?  
 (d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?

- |     |                               |               |      |
|-----|-------------------------------|---------------|------|
| (a) | → $-5$                        |               | (12) |
|     | → $-5$ (el ratlla) $-(+5)$    |               | (1)  |
|     | → $-(+5)$                     |               | (1)  |
|     | → $-(+5x)$                    | (Treuen la x) | (1)  |
| (b) | → $+2$                        |               | (9)  |
|     | → $2$                         |               | (3)  |
|     | → $-(-2)$                     |               | (1)  |
|     | → $-(-2x)$                    | (Treuen la x) | (1)  |
| (c) | → $+, -$                      |               | (6)  |
|     | → El signe contrari           |               | (4)  |
|     | → Positiu (+), negatiu (-)    |               | (1)  |
|     | → Canviar el signe            |               | (1)  |
|     | → Pujar (-) i baixar (+)      |               | (1)  |
|     | → Signes (+ i -) i parèntesis |               | (1)  |
|     | → La resta $-$                |               | (1)  |

- (d) → Sí, perquè no és cap operació, només expressa si és positiu o negatiu. (1)
- Sí, perquè estem pujant i baixant pisos. (Ho ratllen i escriuen: (1)  
No, perquè – resta;  
– negatiu; – contrari)
- Sí és el mateix perquè segueixes pujant o baixant. (2)
- Sí, perquè també s'utilitza per indicar a quina planta estàs. (1)
- Sí, perquè depèn del signe que posis, baixaràs o pujaràs. (1)
- Sí, perquè estàs restant o sumant els pisos que estàs pujant o restant. (1)
- Sí, tenen el mateix significat perquè – s'utilitza per representar els nivells sota 0 i el + els nivells superiors a 0. I són contraris. (En aquest cas s'utilitza (1)  
per expressar el contrari)
- Sí, hem utilitzat els mateixos símbols, encara que el significat no és el mateix ja que a l'activitat anterior s'expressa per restar i en aquesta activitat es fa servir per expressar el contrari. (1)
- És lo mateix perquè tots dos indiquen sumar algo o baixar. (No, anteriors indiquen (1)  
sobre o sota 0.)
- En part sí, perquè seguim expressant com pujar i baixar pisos. Però tampoc és ben bé així perquè no és la mateixa expressió (subratllat en vermell) dir que estàs en aquell pis, que puges o baixes. (1)
- No, perquè en aquest cas significa negatiu i a l'altre menys. (1)
- No, perquè no és el mateix fer  $-3$  que  $-(-3)$  (1)
- No, perquè en aquest cas ha canviat el significat. (1)
- No, els nombres han canviat, però els signes són iguals. (1)

Taula 3.4: Ventall de respostes a la pregunta 4 del qüestionari Enters.

a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?  
 $-(+5)$

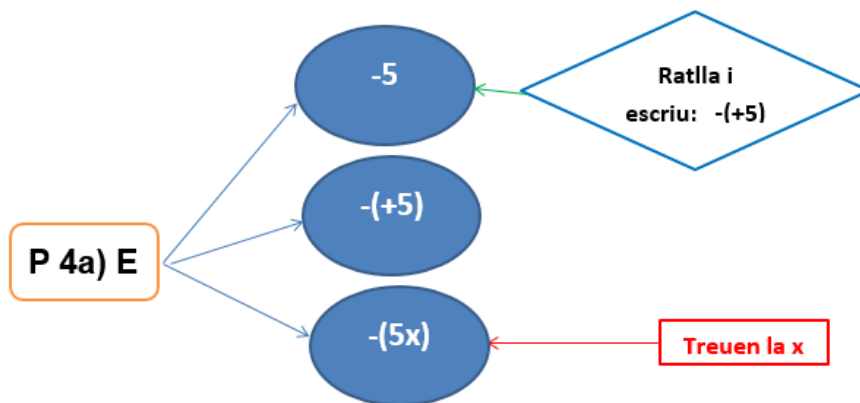


Figura 3.13: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 4a.

Les respostes a aquest primer apartat es poden agrupar en tres grans blocs:

- \* Els grups que responen  $-5$ . Dotze grups opten senzillament per aquesta resposta i un altre grup, abans de la intervenció, ho canvia per  $-(+5)$ .
- \* Els que responen  $-(+5)$ . Només un grup dona aquesta resposta d'inici. Aquesta és la resposta proposada com a correcta.
- \* Els que responen  $-(5x)$ . Aquesta resposta la dona un grup, que després de la intervenció la canvia traient la  $x$ .

La majoria de grups han optat per respondre de manera senzilla, és a dir sense fer ús dels diferents significats dels signes. Pujar cinc pisos es pot representar  $+5$  i el contrari el podem indicar afegint el signe  $-$  al davant:  $-(+5)$ . El que gran part de grups respongui simplement  $-5$  pot venir motivat per dos fets, ja esmentats anteriorment:

- \* Que s'hagi obviat l'ús del  $+$  com a qualificador pels nombres positius. Això és força habitual quan es treballa amb enters.
- \* Que s'hagi optat per fer ús de la regla dels signes  $-+ = -$ .

En ambdós casos la resposta coincideix amb la majoritària. Pel que fa a l'últim bloc tornem a trobar-nos amb un ús forçat de l'àlgebra que s'esmena després de la intervenció.

b) Com podries expressar que fas el contrari de baixar dos pisos?

**-(-2)** La situació plantejada és similar a l'apartat anterior: les respostes són força semblants

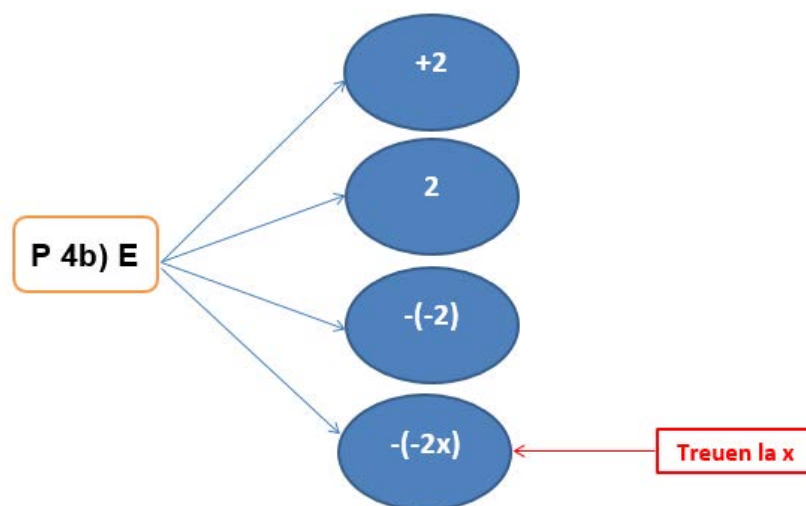


Figura 3.14: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 4b.

ja que seguim demanant com expressar el contrari d'un canvi. Però, en aquest apartat, hem augmentat els tipus de respostes:

- \* Nou grups responen  $+2$ .
- \* Tres grups,  $2$ .
- \* Un grup respon  $-(-2)$ .
- \* Un grup  $-(-2x)$ , en aquest cas després de la intervenció, treuen la  $x$ .

En aquest cas els dos primers blocs sumen el mateix nombre de grups que el primer bloc de l'apartat anterior. El que ara hi hagi dues respostes ve donat pels mateixos motius de l'apartat anterior, obviar el signe  $+$  i operar amb els signes  $-- = +$ . Feta aquesta observació els dos apartats responen a un mateix patró de resposta.

c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar?

**El signe –**

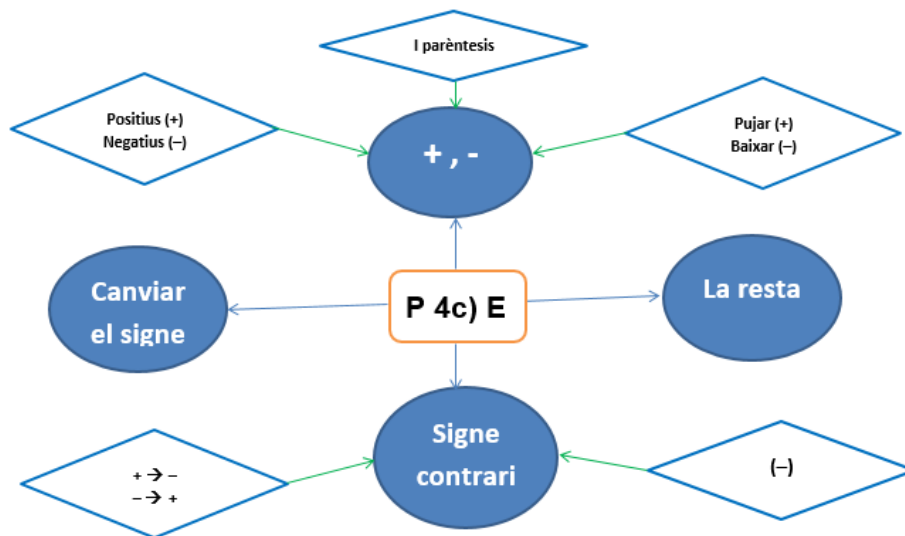


Figura 3.15: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 4c.

En aquest apartat es pretén fer reflexionar als alumnes que responen sobre què han utilitzat per indicar el contrari d'una acció. Obtenim quatre tipus de respostes:

- \* Dels nou grups que responen +, -. Dins d'aquest tipus de resposta s'apunten tres matisos:
  - Un grup especifica que també els parèntesis.
  - Un grup concreta positius (+) i negatius (-).
  - Un grup limita l'ús dels signes a pujar (+) i baixar (-).
- \* Dels quatre grups que responen *el signe contrari*. Dins d'aquest tipus trobem dos matisos:
  - Un grup concreta que és el -.
  - Un altre grup detalla: + → - i - → +.
- \* Els que responen *canviar de signe*. Un sol grup opta per aquesta resposta.
- \* Els que responen *la resta*. També un sol grup respon això.

En aquest apartat és important parar atenció que només els sis grups que fan responen *el contrari* i el que diu *canviar de signe* estan en la línia de la resposta al que es demanava. La resta insisteixen en utilitzar els signes com a qualificador o en el cas del grup que respon *la resta* no distingeix entre l'ús unari i el binari del signe -.

d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?

**No, perquè ara indiquen fer l'acció contrària.**

En aquest cas les respostes van bàsicament, com era d'esperar, en dues direccions la del sí i la del no. Tot i això hi ha una gamma de matisos que cal detallar. També trobem una resposta que convida a condicionar el sí o el no.

- \* Sí. En aquest cas, els nou grups que responen així, presenten tres matisos :

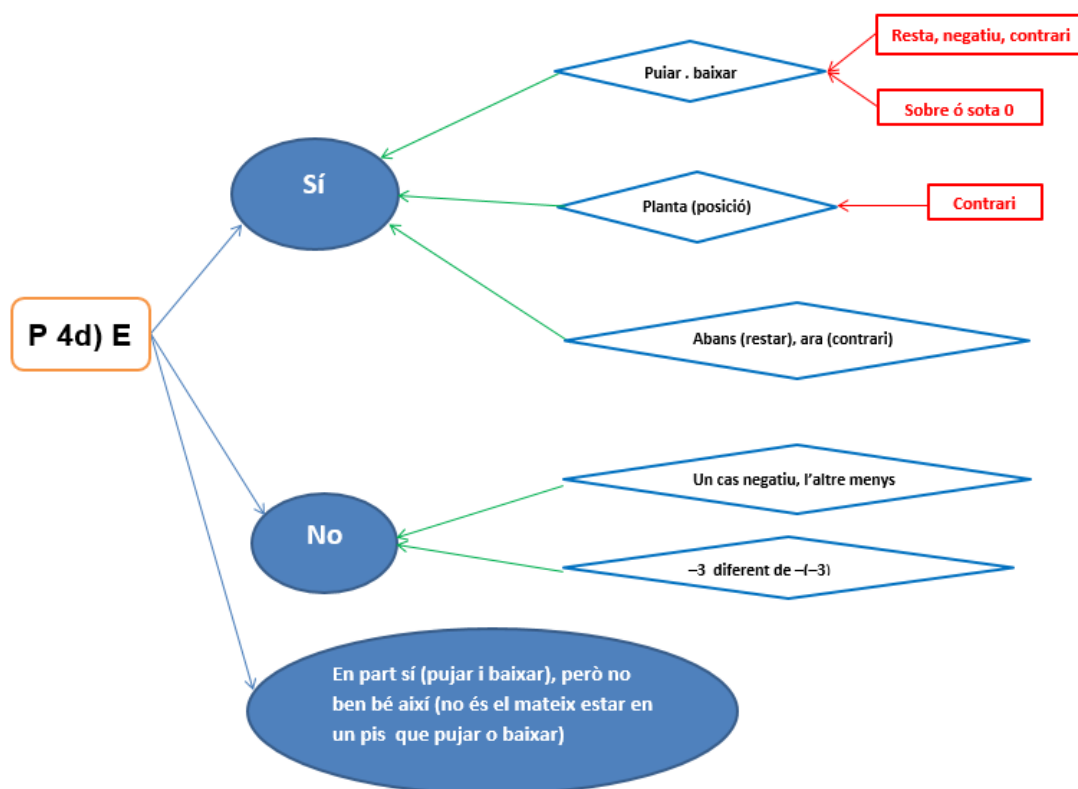


Figura 3.16: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 4d.

- En cinc de les respostes només tenen en compta el fet de pujar o baixar depenent del signe. En un dels casos després de la intervenció i posada en comú esmenen i diuen *No, perquè podria indicar resta, negatiu o contrari*. En aquest cas tornem a trobar una situació d'aprenentatge.
- Tres dels grups fan esment, només, que indica la posició. Un dels grups, però, després de la intervenció, esmena: diu que, a la pregunta que ens ocupa, també s'utilitza per expressar el contrari.
- Tot i respondre que sí l'explicació que afegeixen mostra la diferència entre el fet que abans, el signe  $-$ , indicava restar i ara indica el contrari. En aquest cas, segurament, no han entès ben bé com estava formulada la pregunta i el primer sí no és rellevant.
- \* No. Quatre grups opten per aquesta resposta i poden observar dos matisos:
  - Un dels grups detalla que en un cas significa negatiu i en l'altre menys. Identifiquen la diferència entre el qualificador i l'operació però no com a operador simètric.
  - Expliquen que  $-3$  és diferent de  $-(-3)$ . En aquest cas sí hi ha implícita a la resposta la idea de simètric.
- \* En part sí (pujar o baixar), però no ben bé així (perquè no és el mateix estar en un pis que pujar o baixar).

La Taula 3.5 mostra el ventall de respostes a la cinquena pregunta que estava orientada a obtenir informació dels significats que es poden atribuir als símbols  $+$  i  $-$ .

Pregunta 5)

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

→ Poden ser nombres positius i negatius i també operacions (sumar, restar)	i també són signes contraris	(2)
→ + → és positiu i vol dir pujar (sumar); → és negatiu i vol dir baixar (restar)		(1)
→ + augmenta, - disminueix	- negatiu, - contrari	(1)
→ Que serveixen per indicar posició (+, -)		(1)
→ Suma i resta,	positiu i negatiu	(1)
→ ∅		(1)
→ *negatiu, positiu; *suma i resta;	*contraris	(1)
→ +: sumar, el mateix que, funció "positiu"; -: restar, el contrari de, funció "negatiu".		(1)
→ 1) Et diuen a quin lloc del pis estàs; 2) sumar i restar;	(contrari);	(1)
→ 3) expressar nombres positius i negatius	4) crear equacions	
→ + pot significar	1) per expressar una posició (per sobre; per sota); 2) per pujar o baixar; 3) per expressar el contrari	(1)
→ Posant - o + davant d'una expressió pot arribar a canviar completament el significat.		(1)
→ 1) Per indicar si està o no per sobre de zero;		(1)
→ 2) per sumar o restar;		
→ 3) Per expressar que es queda igual o que és contrari.		
→ + pot significar pujar un pis o que un pis està sobre terra i el - baixar o un pis sota terra (soterrani)	i dir contrari	(1)
→ + = el nombre és positiu, indica que està per sobre el 0;		(1)
→ - = el nombre és negatiu, indica que està per sota el 0		

Taula 3.5: Ventall de respostes a la pregunta 5 del qüestionari Enters.

Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

**Podem trobar tres significats:**

- **Qualificador**
- **Operació**
- **Simètric (contrari)**

Aquesta pregunta presenta una gamma de respostes molt més oberta que les anteriors, com podem observar a la Figura 3.17. El fet d'obrir la resposta a fer una revisió de totes les preguntes que s'ha anat responent obre el ventall de respostes de manera considerable. Després



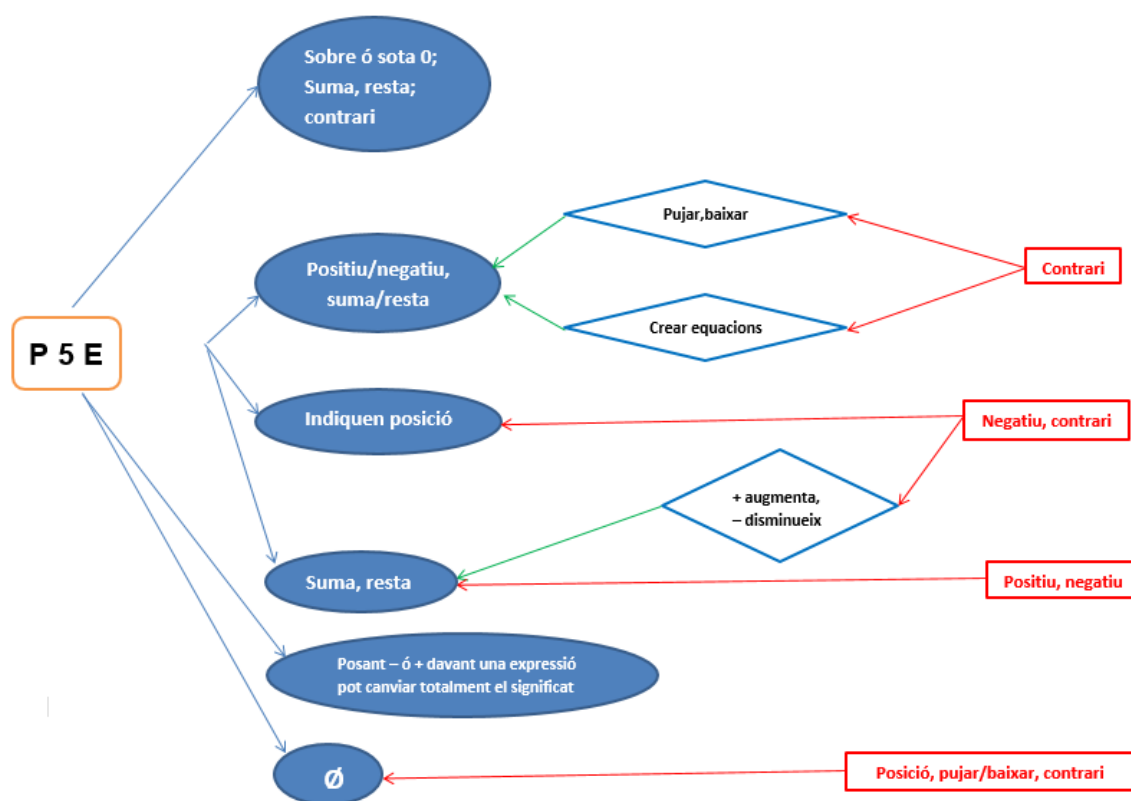


Figura 3.17: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 5.

de diverses lectures les hem agrupat en sis grans línies que a la vegada aporten diversos matisos i esmenes posteriors a la intervenció i a la posada en comú.

- \* Un sol grup respon identificant els tres significats que podem donar al signe  $-$ : posició, operació i simètric.
- \* Set grups responen que indiquen positiu, negatiu i suma i resta. És a dir identifiquen les funcions de qualificador i d'operador binari. Dos dels grups també especifiquen que indiquen pujar, baixar i un grup que permeten crear equacions. Tres dels grups fan una esmena després de la intervenció i afegeixen que també permeten indicar el contrari. Aquests últims grups mostren una situació d'aprenentatge.
- \* Dos dels grups només indiquen que permeten indicar una posició, tot i que un dels grups especifica la simetria respecte de l'origen.
- \* Dos grups queden emmarcats en aquesta opció. Un dels quals després de la intervenció afegeix que poden indicar si és positiu i negatiu. L'altre grup afegeix que sumar i restar també expressen augment i disminució. Aquest segon grup després de la intervenció fa l'esmena d'indicar que el signe  $-$  també permet indicar negatiu i contrari. Aquest últim grup també mostra una situació d'aprenentatge.
- \* Un grup explica que "posant  $-$  o  $+$  davant d'una expressió li pot arribar a canviar completament el significat".

\* En aquesta línia de resposta podem situar dos grups. Un grup no respon la pregunta. Després de la intervenció tampoc aporta cap canvi. Un altre grup esbossa una resposta començant + *pot significar...*, però no escriu res fins després de la intervenció on afegeix els tres significats que podem atorgar al signe -: posició, desplaçament i contrari. En aquest darrer cas també podem considerar una situació d'aprenentatge.

Arran de les respostes observades veiem que no tots els grups són capaços d'identificar totes les funcions que pot fer el signe -. També veiem que s'observen situacions d'aprenentatge, després de la intervenció i de la posada en comú, per sota de la meitat dels grups.

La sisena pregunta apunta en una nova direcció, respecte de les cinc primeres. Fins ara hem estat demanant recollint informació respecte de la polisèmia dels signe negatiu. Dels seus usos i de les aplicacions que tenen a l'hora de descriure i representar una posició o una situació, de descriure canvis o moviments i d'expressar el contrari d'una posició o d'un canvi. Ara volem recollir informació de com expressar algebraicament situacions on es poden involucrar els nombres enters.

Al final del capítol podem veure a la Taula 3.14, de Resultats quantitius dels Enters, que pràcticament cap grup respon correctament a les preguntes d'aquesta activitat. A la Taula 3.6 tenim tot el ventall de respostes i a les Figures 3.18, 3.19, 3.20 i 3.21 els gràfs que mostren els matisos de cada resposta.

Pregunta 6)

6. Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:

- (a) Quants pisos he de pujar, o baixar, per arribar al cinquè soterrani?  
 (b) Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?  
 (c) Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?  
 (d) Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?

(a)	→	$x = 3 + 5$	$(x = -3 - 5)$	(1)
	→	$x = +8$		(2)
	→	$-8$	$(+3 - x = 8; +3 - 8 = -5)$	(1)
	→	$x - 8$		(1)
	→	Has de baixar 8 pisos	$(x + 8 = 5)$	(1)
	→	$3 - 8 = -5$		(1)
	→	$3 - (-5)$	$(x = -8)$	(1)
	→	$3 + 5 = x \rightarrow 7$		(1)
	→	$3 - 8 = -5$	$(\text{canvien el } 8 \text{ per } x)$	(1)
	→	$3 + x = -5$		(1)
	→	$\emptyset$	$(3 + x = -5)$	(1)
	→	$3 - x = -5$		(1)
	→	$-3 + x = -5$		(1)
	→	$-(+3) - 5$	$x$ (Posen a nivell de comentari: "Ens pensàvem que es tenia que fer sense $x$ . I es té que fer amb $x$ )".	(1)

Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:

(b)	→	$x = 4 + 2$	$(x = -4 - 2)$	(1)
	→	$x = +6$		(1)
	→	6 pisos		(1)
	→	6 pisos	$4 - x = -2$	(1)
	→	$x = 2$		(1)
	→	-6	$(+4 - x = -2, +4 - 6 = -2)$	(1)
	→	$x + 6$		(1)
	→	$4 - 2 = 2$		(1)
	→	$+4 - (-2)$	$(x = -6)$	(1)
	→	$4 + 2 =$	$x$	(1)
	→	$4 - 6 = -2$	(canvien el 6 per $x$ )	(1)
	→		$4 + x = 2$	(1)
	→	$-(+4) - 2$	$(x)$	(1)
	→		$4 - x = -2$	(1)
	→		$4 + x = 2$	(1)
(c)	→	$x = 1 + 4$		(1)
	→	$x = 5$		(1)
	→	+5	$(-1 + x = +4, -1 + 5 = +4)$	(1)
	→	+5		(1)
	→	5 pisos	$(-1 + 5 = x)$	(1)
	→	$x + 5$		(1)
	→	De pujada		(1)
	→	Pujar		(1)
	→	$-1 + 4$	$\rightarrow -1 + x = 4$	(1)
	→	$-1 + 5 = 4$	(canvien el 5 per $x$ )	(1)
	→	$-(-1) + 4$	$x$ (ho acaben ratllant tot)	(1)
	→	$\emptyset$	$(-1 + x = 4)$	(3)
	→	$x - 1 = 3$		(1)
(d)	→	$x = 3 + 5$	$(x = -3 - 5)$	(1)
	→	$x = +8$		(2)
	→	-8	$(+3 - x = -8, +3 - 8 = -5)$	(1)
	→	$x - 8$		(1)
	→	Has de baixar 8 pisos	$(x + 8 = 5)$	(1)
	→	$3 - 8 = -5$		(1)
	→	$3 - 8 = -5$	(canvien el 8 per $x$ )	(1)
	→	$3 - (-5)$	$(x = 8)$	(1)
	→	$3 + 5 = x \rightarrow 7$		(1)
	→	$3 + x = -5$		(1)
	→	$-(+3) - 5$	$(x)$ "Ens pensàvem que es tenia que fer sense $x$ . I es té que fer amb $x$ ."	(1)
	→	$\emptyset$	$(3 + x = -5)$	(1)
	→	$3 - x = -5$		(1)
	→	$-3 + x = -5$		(1)

Taula 3.6: Ventall de respostes a la pregunta 6 del qüestionari Enters.

a) Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?  
 $+3+x=-5 \implies x=-8$

La varietat de respostes a aquesta pregunta és molt àmplia, fent una ullada a la gràfica anterior

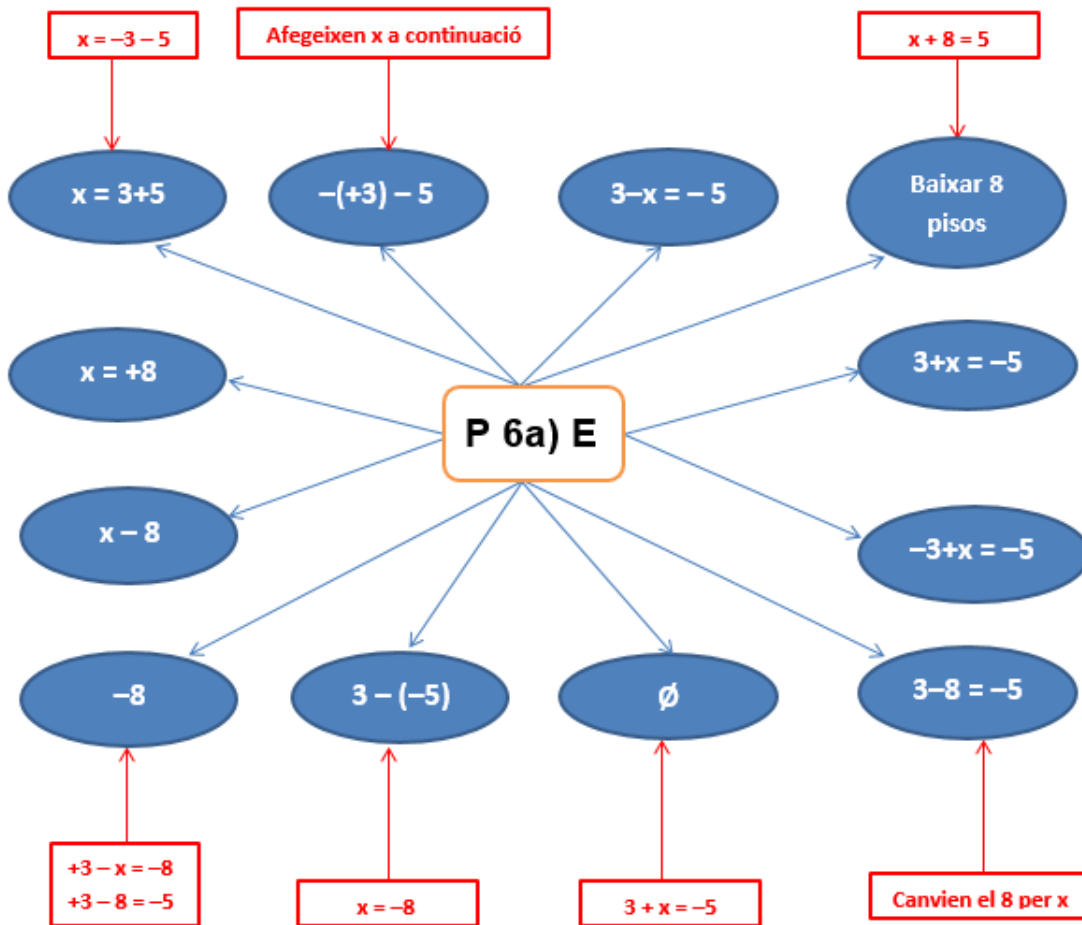


Figura 3.18: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 6a.

distingim 12 tipus de resposta.

- \* Un grup respon  $3 + x = -5$  i un altre  $3 - x = -5$ . Aquestes dues respostes són les úniques que responen a l'enunciat de la pregunta. Tot i semblar diferents el fet de sumar o restar  $x$  només reflexa el fet de considerar que pot ser un nombre enter o natural. La utilització de la suma generalitza l'enunciat deixant als càlculs i a la resolució de l'equació la determinació de com serà el moviment. L'ús de la resta implica saber o suposar que cal baixar per anar del tercer pis al cinquè soterrani.
- \* Un grup respon  $-3 + x = -5$ , caldrà esperar a poder contrastar a les entrevistes quin és el motiu d'escriure  $-3$ , quan el pis és el tercer i pràcticament tots els grups saben expressar en termes de nombres enters una posició.
- \* Un grup no respon a la pregunta però després de la intervenció i de la posada en comú escriuen  $3 + x = -5$ . Aquí podem considerar que ens trobem davant una situació d'aprenentatge.
- \* Dos grups responen  $3 - 8 = -5$ . Aquests grups pensen en la solució i escriuen una expressió numèrica que descriu la situació però no fan ús de l'àlgebra. Un dels dos grups, després de la intervenció, canvia 8 per  $x$ . Aquí podem considerar una altra situació d'aprenentatge.

- \* Un grup respon  $3 - (-5)$ , aquesta resposta només coincideix amb el valor absolut de la correcta. És a dir, busquen la solució per altres camins i intenten escriure una expressió que s'adeqüi al resultat obviant que si baixen el resultat és negatiu. Després de la intervenció escriuen  $x = -8$ , esmenant el signe però no l'expressió algebraica. En aquest cas podem considerar un cas de desaprenentatge perquè tot i modificar el resultat del canvi no escriuen l'expressió algebraica que és la resposta a la pregunta.
- \* Dos grups responen  $x = +8$  que va en la línia de la resposta anterior, fixant l'atenció només en el valor absolut del canvi i no tenim en compte com es realitza.
- \* Un grup respon  $x = 3 + 5$  i un altre  $3 + 5 = x$ . En el fons és la mateixa resposta que al cas anterior però volent afegir la  $x$  per donar el toc algebraic a la resposta. El primer grup, després de la intervenció, escriu  $x = -3 - 5$  i el segon 7. La primera esmena respon més a la correcció del sentit del moviment que no a la correcció de estricta de la resposta a l'enunciat. En aquest sentit sí podem parlar d'una situació de desaprenentatge. La segona esmena sembla respondre només a un error i no es podria emmarcar com una situació de desaprenentatge, més aviat sembla un error per manca d'atenció. L'entrevista pot aportar aclariments sobre aquest punt.
- \* Un grup respon  $-8$  i un altre *has de baixar 8 pisos*. Ambdues respostes van en la mateixa línia donant la resposta numèrica i indicant, un grup simbòlicament i l'altre textualment, el sentit del moviment. Després de la correcció ambdós grups fan esmenes. El primer escriu  $+3 + x = 8$  i  $3 - 8 = -5$  acumulant errors en la correcció. El segon grup esmena escrivint  $x + 8 = 5$ , que tampoc respon a la pregunta formulada. Ens trobem davant de dos casos de desaprenentatge.
- \* Un grup respon  $x - 8$  que en cap cas respon a la pregunta formulada. L'aparició del  $-8$  fa intuir que han pensat en la resposta des d'un punt de vista pràctic però que no han sabut expressar-ho de manera algebraica. La  $x$  afegida mostra una preocupació per incorporar l'àlgebra a la resposta però el resultat no respon a la situació demanada.
- \* Un altre grup respon  $-(+3) - 5$ , que porta a la solució correcta però no a la descripció de la situació. Després de la intervenció afegeixen  $x$  a continuació i comenten *Ens pensàvem que es tenia que fer sense  $x$ . I es té que fer amb  $x$* . Però no esmenen la resposta, aquest cas també el podem considerar com una situació de desaprenentatge tal i com l'hem definit.

b) Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?

$$+4 + x = -2 \implies x = -6$$

Altra vegada trobem una varietat àmplia de respostes, en la mateixa línia que a l'apartat anterior. El fet d'haver d'expressar de manera algebraica una situació representa un problema afegit quan s'involucren els nombres enters. Cap grup dona l'expressió algebraica correcta, que descriu la situació.

- \* Tres grups deixen la pregunta sense resposta però després de la intervenció i posada en comú afegeixen diverses respostes:
  - Dos grups escriuen  $4 + x = -2$ , que és la resposta correcta. Ens trobem davant de dues situacions d'aprenentatge.
  - Un altre grup escriu  $4 - x = -2$  que, com a l'apartat *a*, inclou el desplaçament negatiu dins la resta i no dins el valor de  $x$ . També podem considerar que estem davant d'una situació d'aprenentatge.
- \* Dos grups responen 6 pisos i un dels dos, després de la intervenció, esmena i escriu  $4 - x = -2$ . També podem considerar que hi ha una situació d'aprenentatge. Malgrat tot en cap dels casos utilitzen els enters sinó que suposen com és el moviment i el resultat es limita al valor absolut del moviment.

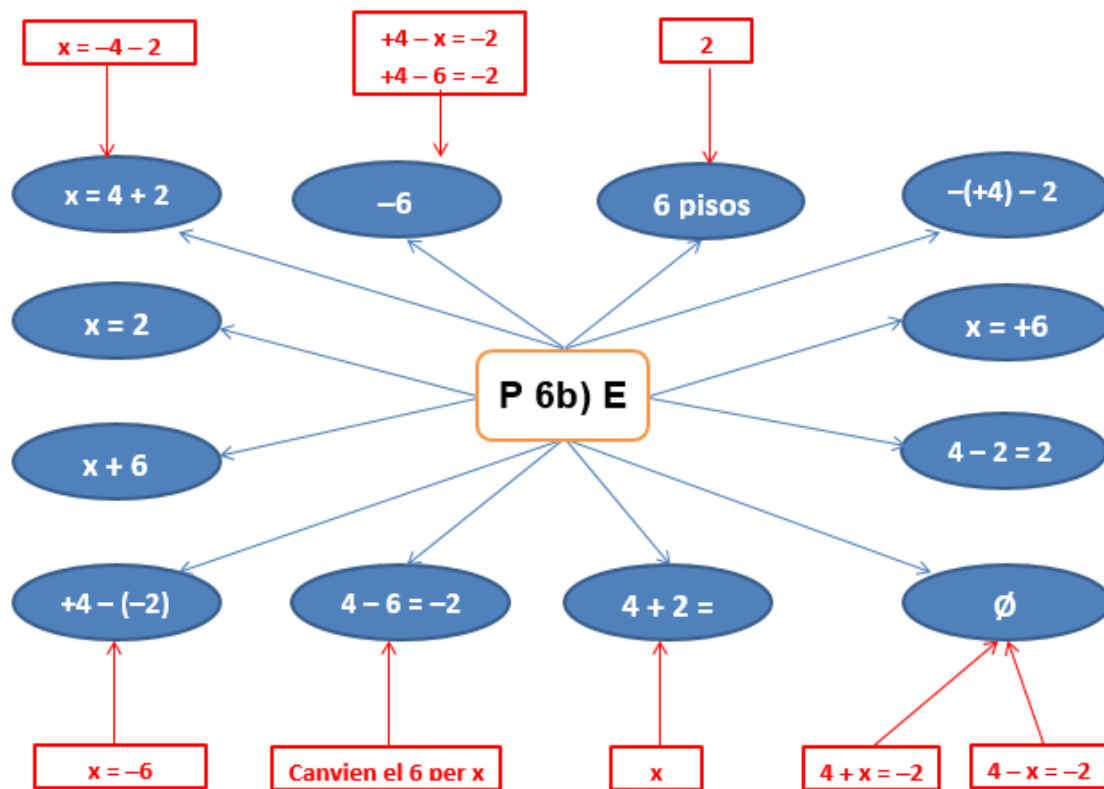


Figura 3.19: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 6b.

- \* Un grup respon  $x = +6$  i, tot i la diferència d'expressió i a petits canvis que fan després de la intervenció, en aquest bloc podem incloure els grups que responen:  $+4 - (-2)$ ,  $x = 4 + 2$  (aquest grup fa l'esmena  $x = -4 - 2$ ) i  $4 + 2 =$  (afegeix  $x$ ). En tots els casos només consideren el moviment sense donar el sentit de manera simbòlica. Només en un cas es fa una esmena però no implica un canvi en relació al que demanava la pregunta.
- \* Dos grups responen en relació al resultat del moviment expressat amb un nombre negatiu:  $-(+4) - 2$  (aquest grup acaba afegint una  $x$ , després de la intervenció, segurament per donar un toc algebraic) i  $-6$ . En aquest darrer cas, després de la intervenció, esmenen posant  $+4 - x = -2$  i  $+4 - 6 = -2$  que implica una situació d'aprenentatge.
- \* Un grup respon  $4 - 6 = -2$ , descriu la situació numèricament però no algebraica. Després de la intervenció esmenen i escriuen  $4 - x = -2$ , on sí podem considerar que hi ha un aprenentatge.
- \* Un grup respon  $x + 6$ , que com a l'apartat  $a$  al  $+6$  que és el valor absolut del moviment li dona el toc algebraic afegint  $x$ .
- \* Un grup respon  $4 - 2 = 2$  on apareixen el 4 i el  $-2$  que representen les plantes que surten a l'enunciat però ni descriuen ni donen resposta a la situació plantejada.
- \* Un grup respon  $x = 2$ , que no mostra relació ni amb l'enunciat ni amb la resposta.

c) Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?

$$-1 + x = +4 \implies x = +5$$

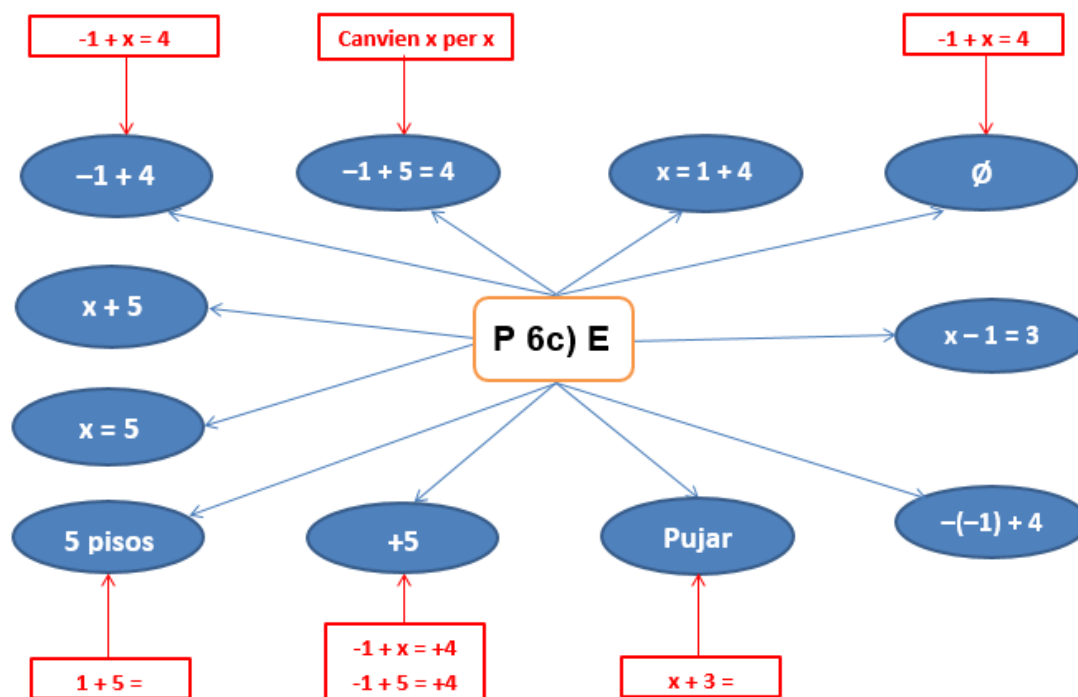


Figura 3.20: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 6c.

Com als apartats *a* i *b* cap grup dona una resposta correcta a la pregunta que es fa, només quatre grups després de la intervenció i posada en comú fa les esmenes adequades.

- \* Tres grups no donen resposta a la pregunta i després de la intervenció escriuen  $-1 + x = 4$ . En aquests casos podem considerar situacions d'aprenentatge.
- \* Cinc dels grups responen de manera equivalent tot i utilitzar expressions diferents. Tots ells donen com a resposta 5 però hi ha diversos matisos:
  - Un dels grups escriu  $x = 1 + 4$ , volent donar estructura algebraica a la resposta.
  - Un altre grup, en la mateixa línia, escriu  $x = 5$ .
  - Dos grups responen, simplement,  $+5$ . Un d'ells, després de la intervenció afegeix l'esmena  $-1 + x = 4$  i  $-1 + 5 = +4$ ; en aquest cas podem considerar una situació d'aprenentatge.
  - Un altre grup respon 5 *pisos* i després de la intervenció fa l'esmena  $-1 + 5 = x$  volent donar estructura algebraica a la resposta però només incorpora la solució a l'expressió i no la descriu a partir de l'enunciat. Per tant no podem considerar que hi hagi un aprenentatge.
- \* Un grup respon  $-1 + 5 = 4$ , que és una expressió numèrica que inclou el resultat a la situació però no la descripció. Després de la intervenció canvien el 5 per  $x$  i en aquest cas sí podem considerar una situació d'aprenentatge.
- \* Un grup respon  $x + 5$ , que tot i incorporar el desplaçament resultant no descriu la situació.
- \* Dos grups responen *de pujada* i *pujar*. En aquest cas descriuen verbalment el canvi però no algebraicament.

- \* Un grup respon  $-1 + 4$ , que no respon a la descripció de la situació, només incorpora els nombres que descriuen els pisos però no el canvi. Després de la intervenció fan l'esmena  $-1 + x = 4$  i, aquí sí, que estem davant d'una situació d'aprenentatge.
- \* Un grup respon  $-(-1) + 4$ , que tot i incorporar els nombres enters que representen les plantes no descriu algebraicament la situació.
- \* Un grup respon  $x - 1 = 3$ , que no respon a res del que es plantejava a l'exercici. Amb les dades del qüestionari no es pot clarificar aquesta resposta.

Tot i poder comprovar que no hi ha cap resposta estrictament correcta, cap grup dona d'inici la resposta algebraica, sí que s'observen algunes situacions d'aprenentatge després de la intervenció i posada en comú. De tota manera, seguim en la línia dels apartats *a* i *b*, la traducció a llenguatge algebraic utilitzant els nombres enters presenta una dificultat afegida pels alumnes participants.

d) Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?

$$-2 + x = -5 \implies x = -3$$

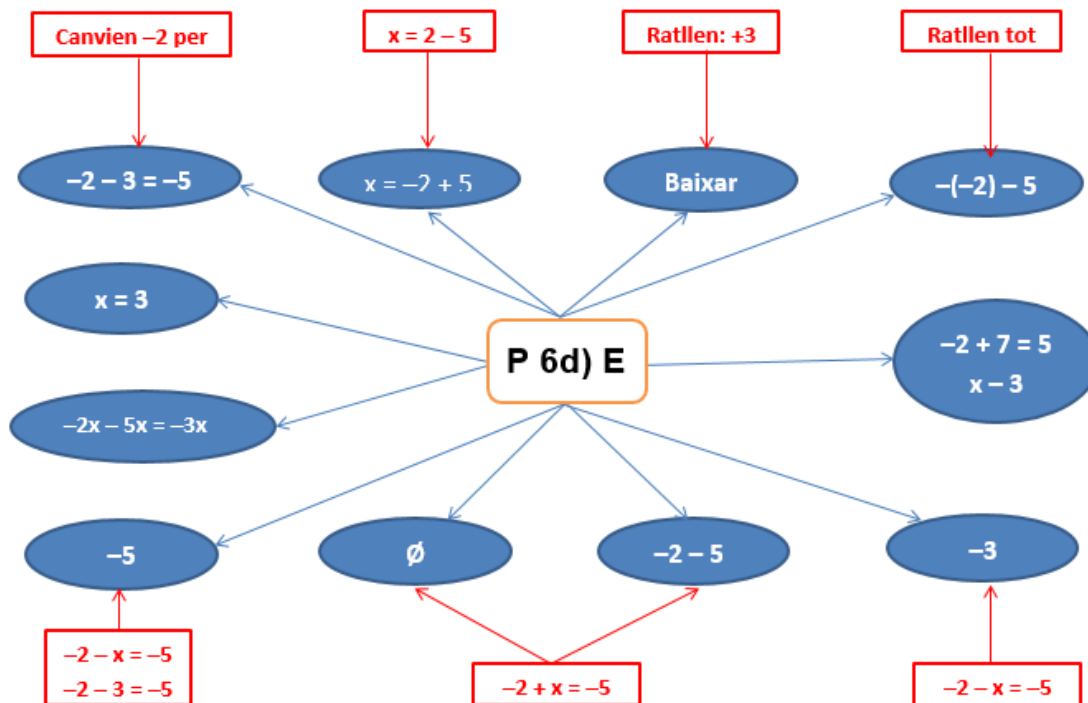


Figura 3.21: Respostes del qüestionari Enters, Pregunta 6d.

A l'últim apartat ens trobem amb una situació similar a la que hem trobat als tres apartats anteriors. Hi ha una varietat àmplia de respostes sense que cap d'elles permeti descriure algebraicament la situació plantejada a l'enunciat.

- \* Quatre grups deixen la pregunta sense respondre però després de la intervenció i la posada en comú donen dues respostes diferents:
  - Tres dels quatre grups escriuen  $-2 + x = -5$ , que és la resposta correcta. Estem davant situacions d'aprenentatge.



- Un dels grups respon *Ens pensàvem que es tenia que fer sense  $x$ . I es té que fer amb  $x$ . És a dir, no acaben responent res.*
- \* Quatre grups donen per resposta  $-3$ , que és la descripció del canvi resultant de la situació descrita, però no l'expressió algebraica que la descriu. Els matisos que podem veure són:
  - Tres grups responen simplement  $-3$  i dos d'ells acaben completant la resposta després de la intervenció posant  $-2 - x = -5$ . Tot i que incorporen el signe  $-$  per indicar el moviment d'inici podem considerar-les situacions d'aprenentatge. El tercer grup no fa cap modificació.
  - El quart grup respon  $x = -2 + 5$  i després de la intervenció ho esmenen posant  $x = 2 - 5$ . Només esmenen el resultat per indicar que és negatiu, però no milloren a l'hora de descriure la situació algebraicament.
- \* Dos grup indiquen que *baixen*. Una vegada més descriuen verbalment el moviment però no fan una descripció algebraica de la situació plantejada. Un dels grups, després de la intervenció, escriu  $+3$ . Tampoc aporta cap millora cap a la descripció algebraica.
- \* Un grup respon  $3 = x$ , donen un toc algebraic afegint  $x$ , però no aporta res a la descripció de la situació plantejada.
- \* Un altre grup respon  $-2 - 3 = -5$  i després ho esmenen posant  $+2 - 3 = -5$ . Malgrat no aportar res a la resposta de com descriure la situació plantejada algebraicament, sí que mostra una situació de desaprenentatge perquè la segona expressió numèrica no és correcta.
- \* Un grup respon  $-2x - 5x = -3x$ , sembla que afegixin  $x$  a tot arreu per donar consistència al que ha de ser una expressió algebraica, però ni descriu la situació plantejada ni és correcta.
- \* Un grup respon  $-2 + 7 = +5$  i  $x - 3$ . Tot i que a la segona expressió  $-3$  té a veure amb la resposta a la situació plantejada, la primera expressió no és algebraica ni respon a les dades del problema.
- \* Un grup respon  $-2 - 5$  que incorpora la situació de les dues plantes esmentades a l'enunciat però que no respon ni al fet de ser una expressió algebraica ni al resultat de la situació descrita. Esmenen després de la intervenció, posant  $-3 + x = -5$ , que no respon a la situació descrita. Sembla més un error, per haver-se despistat, que a una mala interpretació.

### 3.1.2 Sobre la Cronologia de Catalunya

A partir de la cronologia anterior responeu a les preguntes següents:

Pregunta 1)

1. Quin número utilitzaríeu per expressar l'any en què els grecs arriben a Catalunya?

- $-580$  (13)
- $-580$ ; Els grecs funden la ciutat d'Empúries. (aC) ratllen aC (1)
- $580$  aC (1)

Taula 3.7: Ventall de respostes a la pregunta 1 del qüestionari Cronologia.

Quin número enter utilitzaríeu per expressar l'any en què els grecs arriben a Catalunya?  
**-580**

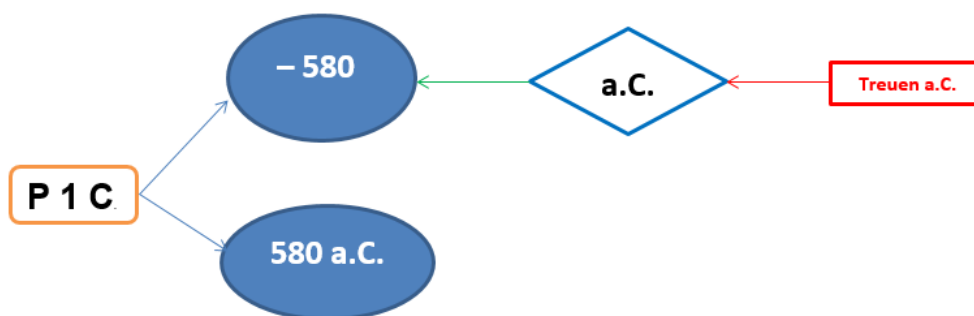


Figura 3.22: Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 1.

Les respostes a la primera pregunta, detallades a la Taula 3.7, no presenten dificultats i s'agrupen entorn de dos models, Figura 3.22, amb pocs matisos:

- \* Catorze grups responen  $-580$ . Un dels grups, després de la intervenció i posada en comú, afegeix i treu aC. Aquesta és la resposta prevista per expressar per mitjà dels nombres enters la data demanada.
- \* Un grup respon 580 aC. Eviten utilitzar els nombres enters i prefereixen l'explicació textual.

De manera majoritària no tenen cap dificultat per expressar una data utilitzant els nombres enters.

Pregunta 2)

2. Quin número utilitzaríeu per expressar l'any de la revolta d'Indíbil i Mandoni?

→	-206		(12)
→	Revolta fbera l'any -206 aC	Ratllen aC	(1)
→	206 aC		(1)
→	-206 aC		(1)

Taula 3.8: Ventall de respostes a la pregunta 2 del qüestionari Cronologia..

Quin número enter urilitzaríeu per expressar l'any de la revolta d'Indíbil i Mandoni?  
**-206**

Les respostes a aquesta segona pregunta, Taula 3.8, estan en la línia de la primera. El que es demana fer és el mateix a les dues preguntes. Com ja hem comentat el fet de posar aquestes dues preguntes, que pretenen assolir el mateix objectiu, ve motivat per preparar el terreny per plantejar la tercera pregunta. Podríem haver posat aquestes dues preguntes com apartats d'una única però, a l'inici del qüestionari volíem fer èmfasi en posar atenció a la descripció de les dates a partir dels nombres enters. Com a l'apartat anterior, bàsicament tenim dos tipus de resposta amb algun matís més, Figura 3.23, que abans:

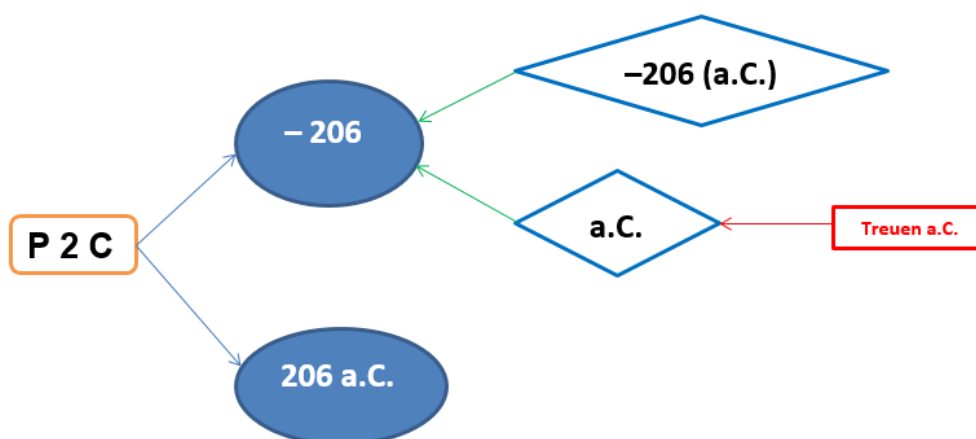


Figura 3.23: Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 2.

- \* Catorze grups responen  $-206$ . Dos dels grups afegeixen aC i un d'ells ho esmena, esborrant-ho, després de la intervenció. Aquí podem considerar una situació d'aprenentatge.
- \* Un grup respon 206 aC. Novament, eviten els nombres enters en favor d'una explicació textual.

Confirmem que les respostes són pràcticament idèntiques a les obtingudes a la primera pregunta.

Pregunta 3)

La Taula 3.9 mostra la varietat de respostes a aquesta tercera pregunta i el graf de la Figura 3.24 tots els matisos que s'aprecien.

Com expressaríeu, en llenguatge matemàtic, els càlculs necessaris per tal de saber quants anys han passat entre aquests dos fets, utilitzant una única expressió.

**-206-(-580)**

Aquesta tercera pregunta, que demana un canvi entre dates negatives, ja aporta una gamma àmplia de respostes i matisos per part dels grups participants:

- \* Un grup opta per donar una resposta que involucra l'àlgebra:  $-580 + x = -206$ ,  $x = -206 + 580 = 374$ .
- \* Sis grups responen  $580 - 206$ . Aquests grups eviten l'ús de negatius reduint la resposta al canvi entre els valors absoluts dels nombres que representen els anys. Alguns dels matisos que observem són:
  - Quatre dels sis grups afegeixen el resultat de l'operació  $= 374$ .
  - Un dels grups s'equivoca operant i escriu  $= 354$
  - L'altre grup no escriu el resultat de l'operació.
- \* Un grup respon, en la mateixa línia dels anteriors,  $x = 580 \text{ aC} - 260 \text{ aC}$ . En aquest cas afegeix l'expressió aC per especificar que es tracta d'anys anteriors al 0.
- \* Quatre grups responen  $-580 - (-206)$ , anomenant els anys amb enters però invertint l'ordre del canvi en el temps. En aquest cas trobem dos matisos de resposta:
  - Un grup escriu  $= -374$ , que indica un canvi en el temps negatiu i que no és el resultat del canvi demanat.

3. Com expressaríeu, en llenguatge matemàtic, els càlculs necessaris per tal de saber quants anys han passat entre aquests dos fets, utilitzant una única expressió

- $-580 - (-206) = -374$  (1)
- Utilitzarem una expressió com la següent (1)  
 $(x = 580aC - 206aC)$  per trobar els anys que han passat entre els dos fets. Per tant, vol dir que fem servir l'operació de la resta (-)
- $580 - 206 = 374$  (4)
- $-580 - (-206) = +374$  (1)  
Afegeixen un - i un parèntesi al -580.  
 Ratllen el parèntesi i el signe de (-206).  
 Ratllen -374 i posen x; afegeixen  $x = -374$
- $-580 + 206 = -374$  (1)  
-580 + x = -206 (3)  
 -580 + x = -206 (1)
- $-580 - (-206)$  (1)
- $-580 - 206 = 374$  (1)
- $-580 + x = -206; x = -206 + 580 = 374$  (1)
- $580 - = 354$  (1)
- $580 - 206$  (1)

Taula 3.9: Ventall de respostes a la pregunta 3 del qüestionari Cronologia..

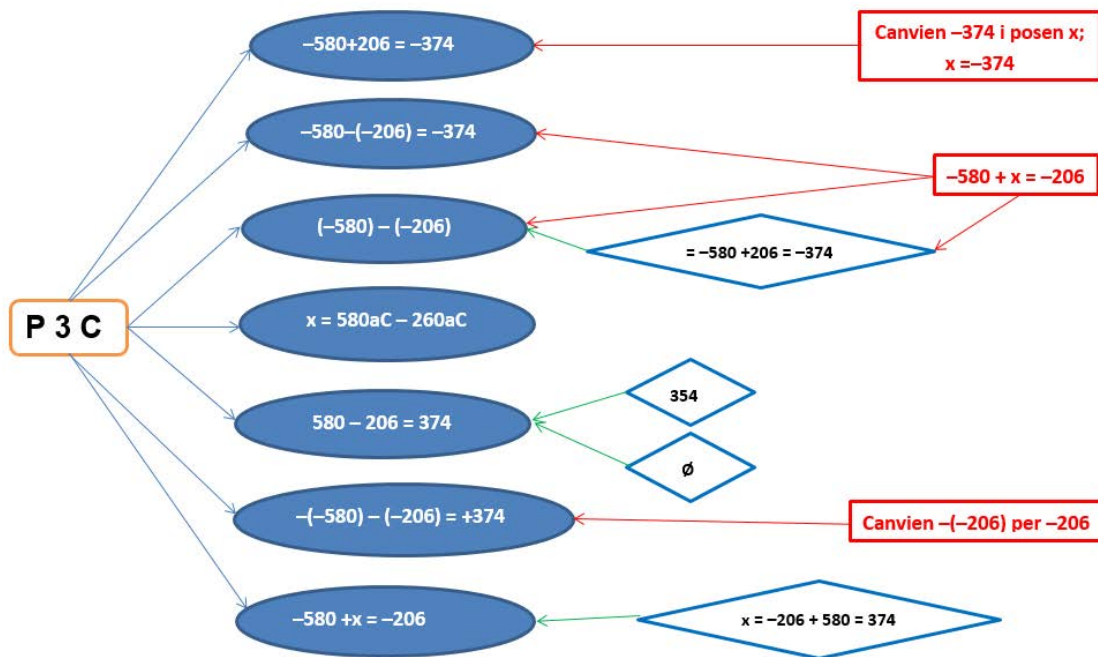


Figura 3.24: Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 3.

- Tres dels grups després de la intervenció i posada en comú esmenen i escriuen  $-580 + x = -206$ . Tot i ser una resposta que involucra l'àlgebra, sense ser necessària, la podem considerar una situació d'aprenentatge.
- \* Un grup respon  $-580 + 206 = -374$ . Aquesta resposta és una variant de l'anterior aplicant la regla dels signes  $- \cdot - = +$ . Després de la intervenció i posada en comú ratllen  $-374$ , posen  $x$  i afegeixen  $x = -374$ . En aquesta correcció hi veiem un intent de donar una expressió algebraica però sense que aquesta expressió descriu el canvi demanat. Podem considerar que estem davant d'una situació de desaprenentatge.
- \* Un grup respon  $-580 - 206 = 374$ . Forcen una expressió que contingui les dues dates donades i la igualen al resultat que intueixen però no verifiquen la validesa de l'operació. Després de la intervenció ho esmenen posant  $-580 + x = -206$ , que mostra una situació d'aprenentatge.
- \* Un grup respon  $-580 - (-206) = +374$  després de la intervenció afegeixen  $-(-580) - 206 = +374$ . Aquí també podem considerar una situació d'aprenentatge.

Les respostes mostren que tot i que la majoria de grups saben donar el resultat del canvi, de vegades obviant el signe i la utilització dels enters i les operacions, tenen dificultats per donar una expressió numèrica que els descriu. En alguns casos, pensem que pel fet de recordar el que s'havia fet al final del qüestionari d'Enters, pregunta 6, intenten resoldre-ho utilitzant una expressió que involucri l'àlgebra.

Pregunta 4)

La Taula 3.10 mostra totes les respostes a la quarta pregunta i els grafs de les Figures 3.25 i 3.26 els matisos de cada un dels apartats.

- a) Si un personatge mor l'any 45 i ha viscut 62 anys, escriu una sola expressió algebraica que englobi tots els càlculs necessaris per saber l'any que va néixer.

$$45 - x = 62 \implies x = -17$$

Les respostes d'aquest primer apartat les podem agrupar en tres grans blocs dins cada un dels quals hi podem considerar certs matisos.

- \* Deu grups donen respostes que podem resumir en  $x + 62 = 45$ , tot i que la majoria de grups la formulen, únicament en termes numèrics, de la forma  $45 - 62$ . Si tenim en compte els matisos:
  - Quatre grups opten per un tipus de resposta a partir de  $45 - 62 = -17$  afegint, tres d'ells algun altre matis,  $17$  aC o  $-17$ aC, com si necessitessin refermar la seva resposta. Un dels grups després de la intervenció afegeix  $45 - 62 = x$ , amb la idea d'incorporar l'àlgebra a la resposta.
  - Quatre grups més fan la incorporació, com abans, de l'àlgebra de bon començament. Escriuen  $x + 62 = 45$  i/o  $45 - 62 = x$ . Dos d'ells acaben fent l'operació per donar el resultat  $-17$ , un no fa res més i el quart afegeix aC.
- \* Tres grups responen  $x + 45 = 62$ . Fent un ús clar dels valors absoluts dels anys de vida del personatge, és a dir, considerant els anys viscuts després de 0 i els viscuts abans de 0. En aquest cas eviten l'ús dels nombres negatius per descriure la situació i de la resta per indicar el pas del temps. Un dels tres grups es limita a donar aquesta resposta però els altres dos grups aporten matisos i correccions:
  - Un dels grups, després de la intervenció, afegeix a mode d'esmena  $45 - 62 = -17$  després de ratllar la primera resposta. En aquest cas podem considerar un aprenentatge pel fet d'haver esmenat amb el resultat correcte però no donen cap expressió algebraica que descriu la situació plantejada.

- 4.
- (a) Si un personatge mor l'any 45 i ha viscut 62 anys, escriu una sola expressió algebraica que englobi els càlculs necessaris per saber l'any que va néixer?
- (b) Quin esdeveniment de la cronologia donada s'esdevingué pels voltants del seu naixement?

- (a) →  $x + 62 = 45$ ;  $x = 45 - 62 = -17$  (2)
- $x = 1945 - 62 = 1883$  (1)
- $1945 - 62 = x$   $x =$  quan va néixer  $x = 1883$  (1)
- $x = 45 - 62 = -17$   $x = -17$  (2)
- $x + 45 = 62$  (Ho ratllen i escriuen)  $45 - 62 = -17$  (1)
- $45 - 62 = -17$  (1)
- $45 - 62 = -17$ ; 17aC (1)
- $45 - 62 = -17$ aC (1)
- $x + 45 = 62$ ;  $x = 62 - 45$ ;  $x = 7$  (1)
- $45 - 62 = -17$  (17aC) (1)
- $45 - 62 = x$  (1)
- $x + 45 = 62$  (1)
- $45 - 62 = x$  aC (1)
- (b) → Tarraco esdevé ciutat imperial (27 aC) (6)
- $x = 62 - 45$ ;  $x = -17$ ; Tarraco esdevé ciutat imperial. (1)
- Exposició Universal, Barcelona el 1888. (Ho ratllen i escriuen: Tarraco esdevé ciutat imperial l'any 27. (2)
- Tarraco esdevé ciutat imperial l'any 27 aC naixement de Jesucrist. (3)
- El naixement de Jesucrist en l'any 0. (2)
- Naixement de Crist. (Tarraco esdevé ciutat imperial. (1)

Taula 3.10: Ventall de respostes a la pregunta 4 del qüestionari Cronologia..

- Un altre grup havia afegit a la resposta inicial  $x = 62 - 45$  i  $x = 7$ , donant a entendre que resol l'equació plantejada d'inici. Cal observar que s'equivoquen a l'hora de donar el resultat. Aquest mateix grup després de la intervenció i posada en comú afegeix  $x + 62 = 45$ , que tot i ser una equació equivalent a la resposta considerada correcta sembla força forçada ja que, en certa manera, ha de pressuposar que  $x$  és negativa.
- \* Dos grups entenen per l'any 45 el 1945. Caldrà veure si a partir de les entrevistes es pot aclarir aquesta confusió. De tota manera sembla clar veure que és deguda a la manera de fer referència als anys que utilitzem a la vida quotidiana. Un dels grups després de la intervenció fa una esmena escrivint  $x = 45 - 62 = -17$ , aquí podem considerar una situació d'aprenentatge.

A la vista de les respostes observem, una vegada més, que la majoria de grups són capaços de donar la resposta al canvi però que mostren dificultats per incorporar els nombres enters i sobretot per donar una expressió algebraica que els involucri.

b) Quin esdeveniment de la cronologia donada s'esdevingué pels voltants del seu naixement?  
**Tarraco esdevé ciutat imperial.**

Aquesta pregunta anava destinada a valorar com situaven, sobre la recta numèrica, diferents esdeveniments donats a partir de nombres enters. Les respostes giren al voltant del següents models, que descriurem en quatre blocs, amb els seus matisos corresponents.

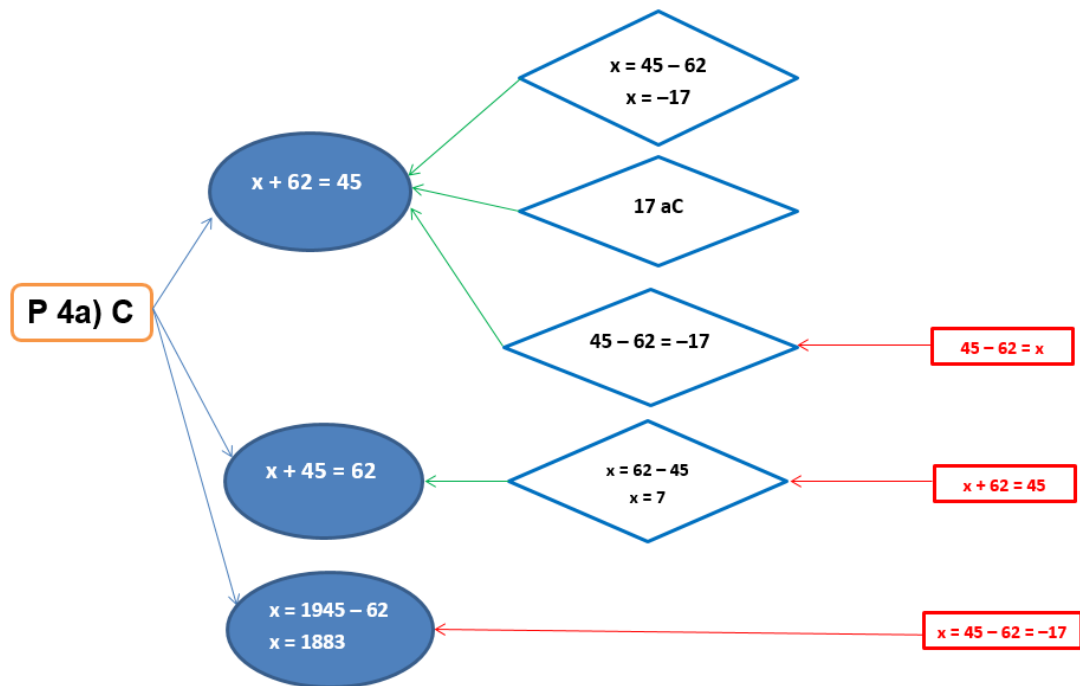


Figura 3.25: Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 4a.

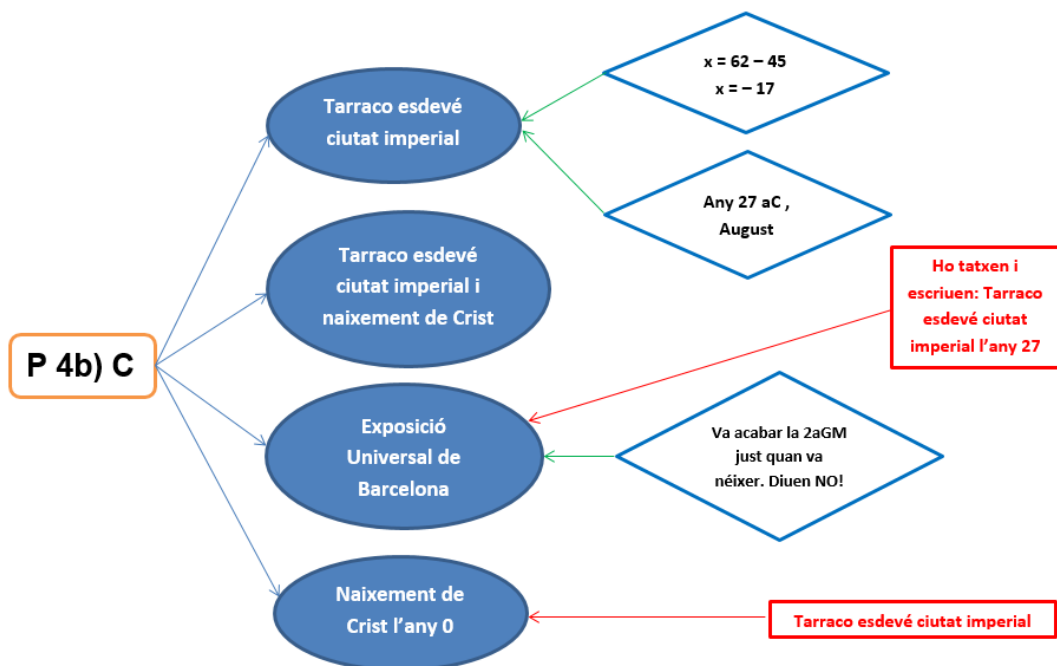


Figura 3.26: Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 4b.

- \* Set grups responen *Tarraco esdevé ciutat imperial*. Un dels grups acompanya la resposta posant  $x = 62 - 45$  i  $x = -17$ .
- \* Tres grups responen *El naixement de Jesucrist*. Dos grups ho acompanyen posant que és l'any 0 i un altre grup, després de la intervenció i posada en comú escriu *Tarraco esdevé ciutat imperial*. En aquest cas podem considerar que hi ha una situació d'aprenentatge.
- \* Tres grups responen *Tarraco esdevé ciutat imperial l'any 27 aC i el naixement de Jesucrist*.
- \* Dos grups, els que van considerar l'any 1945 en lloc del 45, responen *l'Exposició Universal, Barcelona el 1888*. Després de la intervenció esmenen i escriuen *Tarraco esdevé ciutat imperial l'any 27 aC*. En aquest cas no podem considerar que sigui una situació d'aprenentatge en relació als nombres enters.

A la vista de les respostes podem observar que aproximadament la meitat dels grups són capaços de situar un nombre determinat a la recta numèrica. Els altres grups mostren dificultats en identificar el número més proper a un donat, si és negatiu. El fet de respondre el naixement de Jesucrist indica que busquen la resposta en nombres més grans o que dubten de com fer-ho.

Pregunta 5)

La Taula 3.11 mostra totes les respostes a la cinquena pregunta i els grafs de les Figures 3.27, 3.28, 3.29 i 3.31 els matisos de cada un dels apartats.

5. Si imagineu els fets situats sobre una línia recta que representi el temps.

- (a) Quin fet va passar en l'any simètric al 27 després de Crist respecte de l'any que prenem com a origen?
- (b) Amb quin número expresseu l'any que prenem com a origen?
- (c) Amb quins símbols matemàtics podeu expressar l'any corresponent al fet demanat a l'apartat a)?
- (d) Representeu una part de la línia temporal que ens permeti visualitzar clarament tot el que s'ha demanat en aquesta pregunta.

- |     |  |      |
|-----|--|------|
| (a) | → Tarraco esdevé ciutat imperial (l'any 27).                 | (13) |
|     | → Tarraco pateix un saqueig (francs) l'any 260.              | (1)  |
|     | → Musulmans cap a Catalunya.                                 | (1)  |
|     | <span style="color: red;">Ratllen musulmans.</span>          | (1)  |
|     | <span style="color: red;">Els romans estan a Tarraco.</span> | (1)  |
| (b) | → 1200000  | (1)  |
|     | → 0  | (7)  |
|     | → 1  | (5)  |
|     | → 1 aC   | (1)  |
|     | → Any 1  | (1)  |
|     | <span style="color: red;">→ any 0</span>                     | (1)  |
| (c) | → -  | (8)  |
|     | → -27  | (3)  |
|     | → -27  | (1)  |
|     | <span style="color: red;">El ratllen.</span>                 | (1)  |
|     | → + o >  | (1)  |
|     | → Amb el - perquè és abans deCrist (-27).                    | (1)  |
|     | → -27  | (1)  |
|     | <span style="color: red;">(Correcció: -)</span>              | (1)  |



- (d) →  $\underline{\quad 1200000aC \quad \quad \quad 27aC \quad \quad \quad}$  (1)  
 →  $\underline{-27 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 27}$  (1)  
 (escriuen origen al 0)  
 →  $\underline{\quad -17 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 260 \quad \quad}$ ; (7)  
 Indiquen el naixement del personatge  
 l'any -17 i els francs a Tarraco.  
 →  $\underline{\quad -27aC \quad \quad \quad 1dC \quad \quad \quad 720dC \quad \quad}$  (1)  
 →  $\underline{\quad -27 \quad \quad \quad -1 \quad \quad 1 \quad \quad \quad 27 \quad \quad}$  (4)  
 (Indiquen Tarraco ciutat imperial i  
 naixement de Crist.)  
 →  $\underline{27aC \quad \quad \quad 1dC \quad \quad \quad 27dC}$  **Posen "o 0" al costat de 1dC.** (1)  
 (Especifiquen que està a escala.)

Taula 3.11: Ventall de respostes a la pregunta 5 del qüestionari Cronologia.

Si imagineu els fets situats sobre una línia recta que representi el temps,

a) Quin fet va passar en l'any simètric al 27 després de Crist respecte l'any que prenem com a origen?

**Tarraco esdevé ciutat imperial (-27).**

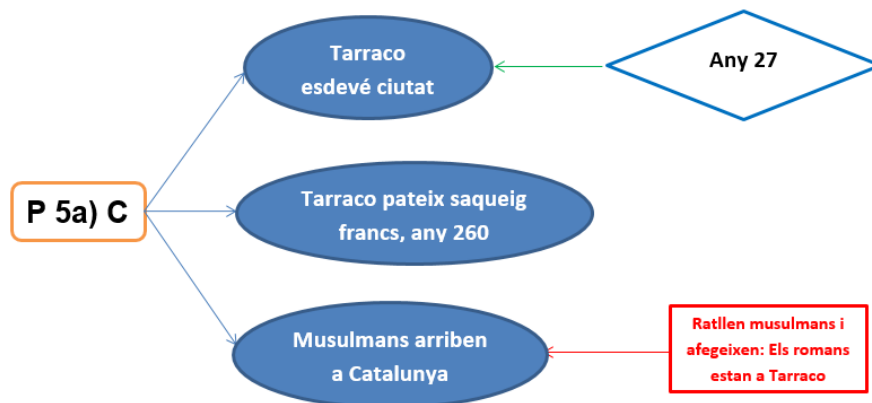


Figura 3.27: Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 5a.

Aquest primer apartat va dirigit a valorar si saben localitzar i expressar el simètric d'un nombre. Prenem com a referència el 27 després de Jesucrist. En aquest cas podem diferenciar tres respostes, amb algun matís.

- \* Tretze grups responen *Tarraco esdevé ciutat imperial*. Un dels grups afegeix *l'any 27*, que pot mostrar una situació de desaprenentatge ja que no es correspon l'any amb l'esdeveniment que diuen.
- \* Un grup respon *Tarraco pateix un saqueig (francs) l'any 260*.
- \* Un grup respon *Musulmans cap a Catalunya*. Després de la intervenció i posada en comú ratllen musulmans i afegeixen *Els romans estan a Tarraco*.

Veient les respostes donades la gran majoria de grups sap situar el simètric d'un nombre a la recta numèrica i identificar-ho amb una data concreta. De tota manera hi ha dues respostes sorprenents: una que l'any 260 és el simètric del 27 després de Crist i l'altra que el simètric és l'any que els musulmans arriben a Catalunya, és a dir, el 720 després de Crist.

b) Amb quin número expresseu l'any que prenem com a origen?

0

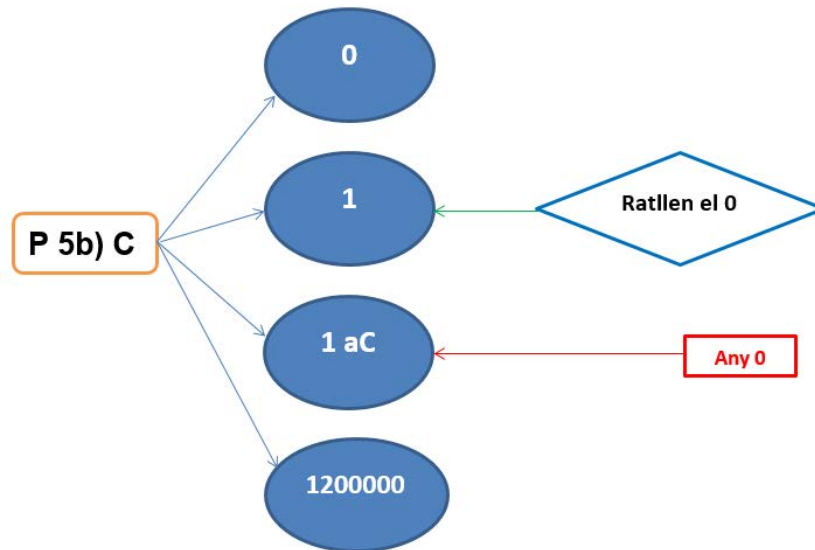


Figura 3.28: Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 5b.

Amb aquesta pregunta volem valorar si els alumnes identifiquen el 0 com a origen de la recta numèrica i punt de simetria respecte de nombres Operacions. En aquest cas podem agrupar les respostes en quatre blocs que presenten alguns matisos.

- \* Set grups responen 0.
- \* Sis grups 1, un dels grups després de la intervenció canvia *Any 1* per *Any 0*. I aquí podem considerar una situació d'aprenentatge.
- \* Un grup respon 1 *aC*.
- \* Un grup respon 1200000, segurament perquè és el primer any que apareix a la cronologia.

Sorprèn el fet que menys de la meitat dels grups identifiqui el 0 com a origen i llevat de l'última resposta, que sembla té un motiu clar i és que prenen l'origen al primer any esmentat a la cronologia. Caldrà esperar a la revisió de les entrevistes per aclarir les altres respostes.

c) Amb quins símbols matemàtics podeu expressar l'any corresponent al fet demanat a l'apartat a)?

$-(+27)$

Aquest apartat està pensat per valorar si els alumnes saben que el signe  $-$  permet indicar el simètric i són capaços de fer-ho explícit. Diferenciem quatre tipus de respostes, que possiblement es podrien reduir a tres, però que per qüestions de matís hem volgut separar.

- \* Set grups responen amb el  $-$ , un d'ells, però, acaba aclarint *perquè és abans de Crist* ( $-27$ ).
- \* Cinc grups responen amb  $-27$ . Un d'ells però escriu  $-(+27)$ , segurament volent ressaltar el fet del simètric. Dos grups, després de la intervenció i de la posada en comú, canvien el resultat. Un simplement el ratlla i l'altre el canvia per  $-$ . Podem considerar que ens trobem davant de dues situacions de desaprenentatge.
- \* Un grup respon *amb negatiu*.

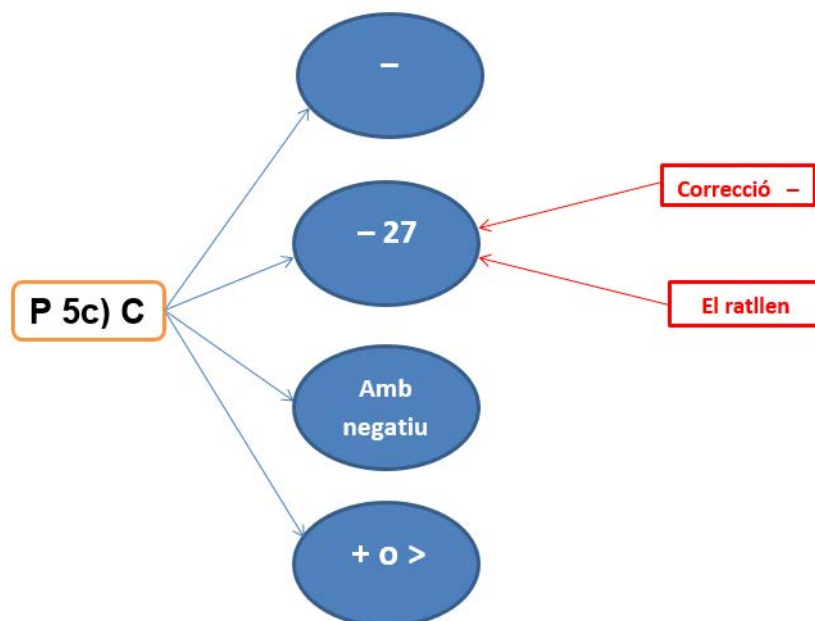


Figura 3.29: Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 5c.

\* Un grup respon  $+ 0 >$  i un altre grup amb  $+$ .

A la vista de les respostes podem considerar que la majoria de grups saben utilitzar el signe  $-$  per indicar el simètric d'un enter respecte l'origen. De tota manera menys de la meitat són capaços de respondre a la pregunta de forma correcta.

d) Representeu una part de la línia temporal que ens permeti visualitzar clarament tot el que s'ha demanat en aquesta pregunta.

A la Figura 3.30 tenim representada la resposta.

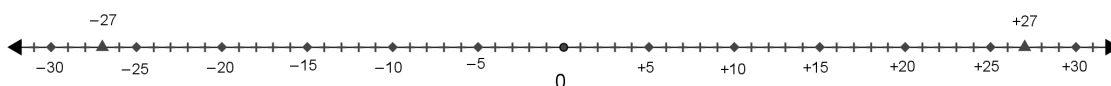


Figura 3.30: Part de la recta numèrica on representem l'origen i dues dates simètriques.

En aquest apartat està destinat a valorar si saben representar sobre la recta numèrica unes dates donades o trobades, situant correctament l'origen. En aquest apartat poden distingir vuit tipus de resposta, amb diversos matisos:

\* Set grups responen posant el 0 a l'origen i el  $-27$  i el  $27$  situats de manera simètrica a esquerra i dreta del 0. Alguns grups afegeixen petits comentaris o explicacions que no varien el sentit de la resposta. Alguns exemples d'aquestes variacions són:

- Un grup escriu  $-(+27)$ , volem fer palès l'ús del  $-$  per indicar el simètric i especifica que  $+27$  és el simètric.
- Un grup especifica que el 0 és l'origen.

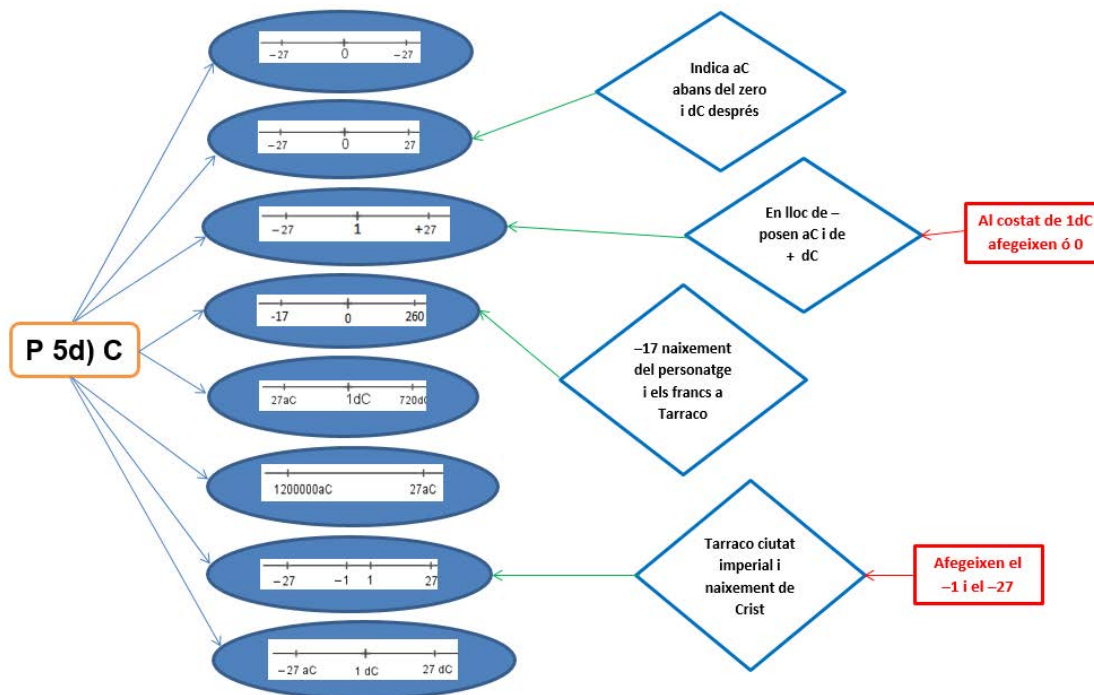


Figura 3.31: Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 5d.

- Tres grups detallen que a l'esquerra del 0 correspon a la notació *aC* i a la dreta *dC*.
- Dos grups utilitzen de manera parcial o total la denominació textual en lloc de la numèrica.
- \* Tres grups situen el 1 a l'origen  $-27$  a l'esquerra i  $27$  a la dreta.
- \* Un grup situa el 1 al centre amb el  $-27$  i el  $27$  a esquerra i dreta però, després de la intervenció i posada en comú afegeix un  $-1$  a l'esquerra de l'1. En aquest cas ens trobem amb una situació de desaprenentatge perquè obvien el 0 tot i deixar un espai entre el  $-1$  i l'1.
- \* Un grup situa el  $-1$  centrat,  $-27$  a l'esquerra i  $+27$  a la dreta. Després de la intervenció i la posada en comú afegeixen al costat del  $-1$  o 0. En aquest cas podríem parlar d'una situació d'aprenentatge però el fet d'afegir el 0 no permet fer aquesta apreciació.
- \* Un grup posa el 1 dC al centre, 27 aC a la dreta i 720 dC a l'esquerra.
- \* Un grup situa el 0 centrat al tros de recta, a la seva esquerra  $-17$  (naixement del personatge, pregunta anterior) i 260 a la dreta (francs a Tarraco).
- \* Un grup situa 1200000 aC a l'extrem esquerra de la recta numèrica i 27 aC a la dreta, no posen cap altra número sobre la recta.

Veient les respostes podem concloure que hi ha força grups que tenen dificultats per fer una representació correcta de la situació descrita, sobretot per no saber situar l'origen a 0. La revisió de les entrevistes pot ajudar a aclarir el fet de situar l'origen a 1.

#### Pregunta 6)

La Taula 3.12 mostra totes les respostes a la sisena pregunta i els grafs de les Figures 3.32, 3.33 i 3.34 els matisos de cada un dels apartats.

- 6.
- (a) En els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb significats diferents?
- (b) Expliqueu quin és.
- (c) Expresses en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu, el més clarament possible, la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat.

(a)	→ Sí		(9)
	→ $\emptyset$		(3)
	→ $\emptyset$	- Resta; - contrari;	(1)
		- nombre negatiu.	
	→ -580; -62		(1)
	→ El -		(1)
(b)	→ El -		(5)
	→ $\emptyset$		(3)
	→ El positiu.		(1)
	→ El menys, resta i negatiu.	(Ratllen els dos últims.)	(1)
	→ La resta, que pot fer d'operació o de nombre negatiu.		(1)
	→ L'hem utilitzat per expressar anys abans de Crist i per fer les operacions també per fer el simètric.		(1)
	→ Expressa negativitat i enrere en el temps, - = aC.		(1)
	→ + després de Crist; - abans de Crist.		(1)
	→ -27 i 27 aC.		(1)
(c)	→ En alguns casos indicava que el nombre era negatiu, el contrari, o resta.		(2)
	→ $\emptyset$		(1)
	→ Ho podem utilitzar en operacions (per restar), per dir que és un número negatiu o que està per sota del 0; -7; $8 - 7 = 1$ ; $8 - 9 = -1$		(1)
	→ $\emptyset$	(Per nombres negatius i operacions).	(1)
		(En vermell indica (que és la c en lloc de a b. Ratllen més.	(1)
		Ratllen positiu.	
	→ Al primer és un any aC i l'altre és per restar.		(1)
	→ 1) Més, menys, + -, $x - x$ ;		
	2) negatiu, positiu, - +, -x, +x;		
	3) contrari.		
	→ 1) Resta (operació): La podem utilitzar quan volem restar dos nombres;		(1)
	2) Resta (nombre negatiu): és per indicar que és un nombre que està per sota del 0.		
	→ Per expressar els anys → 1 i 2. Diem que són abans de la data de referència; per sumar i restar → 4. Per saber els anys que ha viscut una persona. Per indicar el contrari i simètric → 5.		(1)
	→ Un significat pot ser que posem el menys per representar que el fet va passar abans de l'any 0. Llavors, és negatiu.		(1)
	→ Els nombres (anys) positius són els que van després del naixement de Crist i els nombres negatius (anys) són els que van passar abans del naixement de Crist.		(1)
	→ El -, perquè depèn d'on el posis pot canviar el signe final.		(1)
	→ Un (1r) l'hem fet servir per expressar (aC, dC) i el (2n) l'hem expressat per fer els contraris.		(1)
	→ $\emptyset$	- contrari; - posició;	(1)
		- operació.	
	→ -27 → significa que hi ha 27 nombres abans del 0; 27dC → hi ha 27 nombres després del 0.		(1)

Taulela 3.12: Ventall de respostes a la pregunta 6 del qüestionari Cronologia.

a) En els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb significats diferents?

Sí.

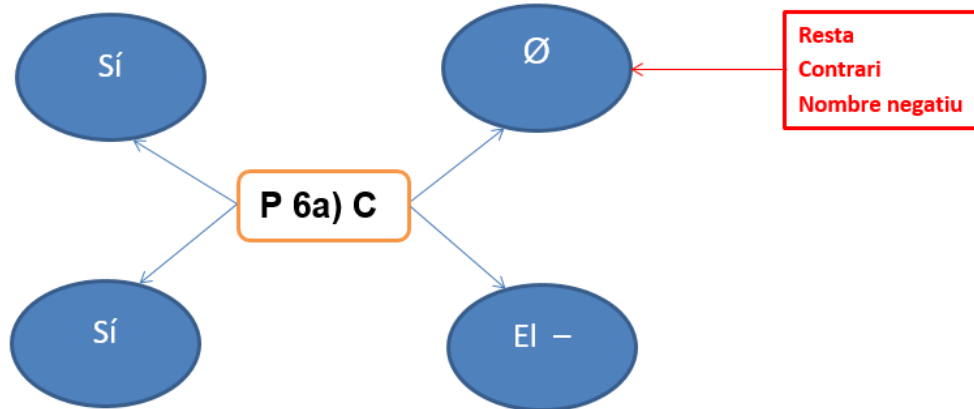


Figura 3.32: Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 6a.

Aquest apartat vol valorar si els alumnes identifiquen la polisèmia del signe  $-$ . En aquest cas la resposta és molt senzilla i no hauria d'haver mostrat massa opcions, així i tot podem distingir quatre respostes tipus:

- \* Nou grups responen que sí han utilitzat algun símbol que s'escriu igual però que té significats diferents.
- \* Un grup respon el  $-$ . No respon a la pregunta demanada però identifica el símbol que s'utilitza.
- \* Un grup respon  $-580$  i  $-62$  però no aclareix perquè. Potser la revisió de les entrevistes pot aportar alguna explicació a aquesta resposta.
- \* Quatre grups no responen a la pregunta. Un dels quatre després de la intervenció i la posada en comú identifica els diferents significats:  $-$  resta;  $-$  contrari;  $-$  nombre negatiu, però no respon estrictament a la pregunta que es demanava.

Els resultats mostren que la majoria, malgrat la manera de respondre, reconeixen la polisèmia del signe  $-$ .

b) Expliqueu quin és.

El  $-$ .

Aquesta pregunta demanava explicitar el símbol que s'utilitza amb diferents significats. Les respostes a aquesta pregunta són més variades i també van acompanyades de certs matisos.

- \* Vuit grups responen el  $-$ . En aquest cas podem matisar:
  - Cinc dels grups no fan cap comentari.
  - Un grup fa referència a que ja ha donat la resposta  $-$  a l'apartat anterior i afegeix *l'hem utilitzat per expressar anys abans de Crist i per fer les operacions també per fer el simètric.*
  - Un grup respon *expressa negativitat i enrere en el temps:  $- = aC$ .*
  - Un grup respon *el menys, resta i negatiu.* Després de la intervenció i la posada en comú ratllen resta i negatiu. Aquí podem considerar un situació d'aprenentatge.

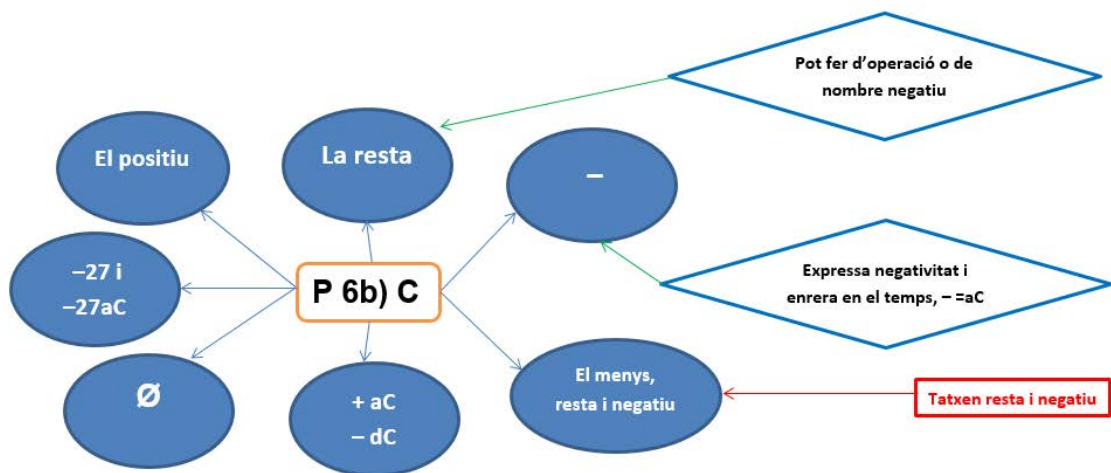


Figura 3.33: Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 6b.

- \* Tres grups no responen aquesta pregunta ni fan cap tipus d'esmena després de la intervenció i la posada en comú.
- \* Un grup respon *la resta*.
- \* Un grup respon  $+ dC$  i  $- aC$ .
- \* Un grup respon  $-27$  i  $27 aC$ .
- \* Un grup respon *el positiu*.

Globalment la majoria de grups responen correctament a la pregunta i identifiquen el  $-$  com el símbol que pot aportar diferents significats. Les quatre últimes respostes tot i poder semblar equivocades responen a idees fixades a priori. La identificació del signe  $-$  amb la resta és un fet molt arrelat entre els estudiants. I les identificacions amb moments temporals també, en aquest cas incorporen la idea de positiu com a símbol polisèmic ja que pot indicar  $dC$  o l'operació suma.

c) Expressieu en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu, el més clarament possible, la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat.

**Els diferents usos del signe  $-$  els podem trobar en les següents situacions:**

- \*  $-580 \Rightarrow$  indica que l'any és "abans de Crist".
- \*  $45-x \Rightarrow$  indica l'operació resta, per trobar el temps transcorregut entre dues dates.
- \*  $-27o-(+27) \Rightarrow$  indica l'Operacions de  $+27$ .

Aquest apartat demanava la identificació dels diferents significats del signe  $-$  a les anteriors preguntes del qüestionari. La varietat de respostes també és àmplia i presenta matisos.

- \* Quatre grups responen indicant que els significats del signe  $-$  són: indicar que un nombre és negatiu, l'operació resta i per indicar el contrari.
  - Només un grup detalla a quins exercicis trobem cada un d'aquests usos.
  - Un altre grup ho expressa de forma poc clara i fa alguna esmena després de la intervenció i posada en comú. Havien escrit *més, menys*;  $+ -$ ,  $x - x$ ; *negatiu, positiu; contrari*. L'esmena que fan consisteix en ratllar *més* i *positiu*.
  - Els altres dos grups no fan cap matís ni cap esmena.

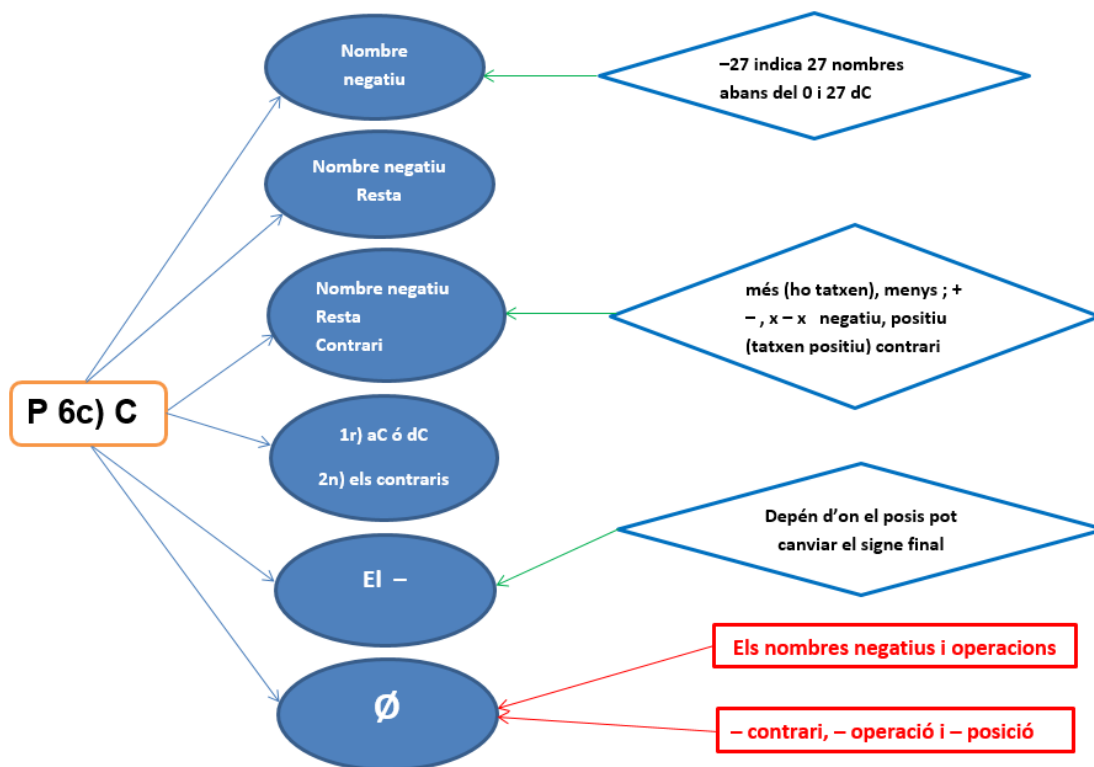


Figura 3.34: Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 6c.

- \* Tres grups responen indicant que pot utilitzar-se per representar un nombre negatiu i una operació.
- \* Tres grups responen que només s'utilitza per indicar un nombre negatiu i, en algun cas, fan referència a la situació respecte el 0 o a indicar aC o dC. En aquest cas els matisos de cada resposta són:
  - *Un significat pot ser que posem el menys per representar que el fet va passar abans de l'any 0, llavors és negatiu.* Sembla que deixin a l'aire d'altres significats però no en fan cap referència.
  - *Els nombres (anys) positius són els que van després del naixement de Crist i els nombres negatius (anys) són els que van ocórrer abans de Crist.* Només fan referència a l'ús com a qualificador per les dates sense parar atenció en cap altra possibilitat.
  - *-27 → significa que hi ha 27 nombres abans del 0; 27 dC → significa que hi ha 27 nombres després del 0.* La resposta sembla anar en la mateixa línia que el cas anterior, és a dir, sense parar atenció en altres possibilitats.
- \* Tres grups no responen a la pregunta. Després de la intervenció i la posada en comú fan alguns canvis.
  - Un dels grups afegeix els tres usos que li podem atribuir. En aquest cas podem considerar que hi ha una situació d'aprenentatge
  - Un altre que permet indicar nombres negatius i operacions. En aquest cas hi ha una situació d'aprenentatge parcial.
  - Un altre grup no fa cap esmena.



- \* Un grup respon que primer s'utilitza per indicar abans o després de Jesucrist i després per indicar els contraris.
- \* Un grup respon el  $-$  i matisa que *depèn d'on el posis pot canviar el resultat final*.

Les respostes ens porten a considerar que pocs grups, quatre, són capaços d'identificar els tres significats del signe  $-$ . De tota manera més de la meitat dels grups, incloent els quatre anteriors, identifiquen la polisèmia del signe  $-$  de manera parcial. La intervenció i posada en comú no aporta, tampoc, una millora significativa a l'hora de fer esmenes a les respostes.

Pregunta 7)

La Taula 3.13 mostra totes les respostes a la setena pregunta i els graf de la Figura 3.35 els matisos que es poden observar.

7. Quin tipus de nombres heu estat utilitzant per descriure les situacions anteriors?

- |                             |   |      |
|-----------------------------|---|------|
| → Enters                    |   | (12) |
| →                           | Enters; $-$ resta; $-$ negatiu; $-$ contrari. | (1)  |
| → Nombres negatius, enters. |   | (1)  |
| → Enters, algebraics.       | (Diuen algebraics, no.)                       | (1)  |

Taula 3.13: Ventall de respostes a la pregunta 7 del qüestionari Cronologia.

Quin tipus de nombres heu estat utilitzant per descriure les situacions anteriors?

**Els nombres enters.**

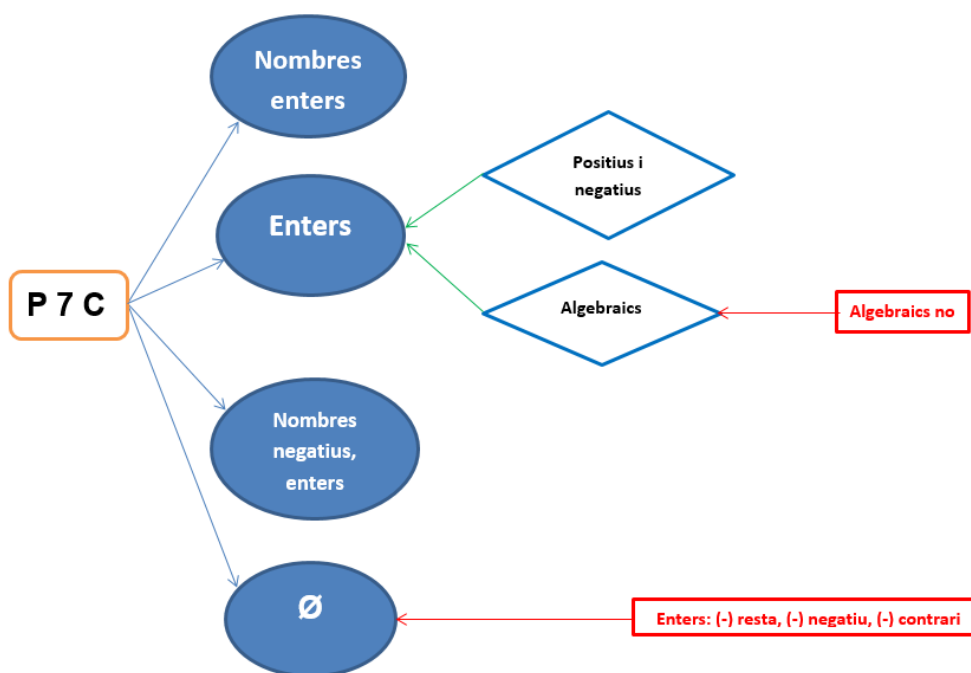


Figura 3.35: Respostes del qüestionari Cronologia, Pregunta 7.

L'objectiu d'aquesta pregunta és obtenir informació del tipus de nombres utilitzats per descriure les situacions plantejades. Parant atenció a la utilització dels negatius. En aquest cas podem diferenciar quatre tipus de resposta amb alguns matisos concrets.

- \* Dotze grups responen que han utilitzat els nombres enters.
- \* Un grup respon que han utilitzat nombres negatius, enters.
- \* Un grup respon que han utilitzat enters, algebraics. Després de la intervenció i de la posada en comú diuen que algebraics no. Aquí podem considerar que hi ha una situació d'aprenentatge.
- \* Un grup no respon però després de la intervenció i posada en comú escriu: *Enters, (-) resta; (-) negatiu; (-) contrari. Aquí també podem considerar que hi ha una situació d'aprenentatge però que quan amplien la resposta afegeixen elements que no són nombres i acaba esdevenint un desaprenentatge.*

La gran majoria de grups identifiquen els nombres enters i en saben fer un ús adequat malgrat que de vegades intenten evitar-los. Aquest fet es pot relacionar directament amb els canvis conceptuals que estableix Bofferding (2014). Els alumnes mantenen un nivell on es senten còmodes i no prenen el risc de situar-se en un nivell on encara dubten.

## 3.2 Resultats quantitativs i discussió

Tot i que la recerca té una orientació qualitativa, convé donar idea de la freqüència de certes respostes. No volem mesurar res, només indicar quin és el ventall de respostes i quines es repeteixen amb més assiduitat. Això ens permetrà establir els Patrons de Comprensió més endavant. De fet la repetició de respostes i creuar-les amb les dels dos qüestionaris seran l'eina bàsica per establir patrons que indiquin similituds i concretar-los.

A la vista de la Taula 3.14, on es reflecteixen les respostes del qüestionari dels Enters, podem fer-ne una primera anàlisi. Des d'un punt de vista, que només es fixi en l'acumulació de tics podem observar que a les preguntes 1, 3f, 4b, 4d, 5 i 6, no hi ha pràcticament respostes correctes. Dels 15 grups de treball (8 de l'A i 7 de l'E), només un, dos o tres són capaços de respondre correctament. Si ens aturem a fer-ne una anàlisi més acurada podem veure que:

A la pregunta 1, només un grup respon de manera correcta, sense matisos. És a dir només un grup dibuixa l'edifici correctament.

A la pregunta 2 pràcticament tots els grups responen correctament als apartats *a*, *b*, *c* i *d*. Aquestes preguntes fan referència a l'ús dels nombres enters per expressar la posició, és a dir la utilització dels signes + i - per indicar si s'està per sobre o per sota de la planta baixa. Però només vuit dels quinze grups, poc més de la meitat, recorden com s'anomena el tipus de nombres que estan utilitzant. Tot i haver-los treballat a classe de matemàtiques.

A la pregunta 3 ens trobem amb una situació similar. Pràcticament tots els grups responen correctament als apartats *a*, *b*, *c*, *d* i *e*. Són les preguntes relatives a l'ús de les operacions que determinen els moviments de pujada i baixada entre plantes i els símbols que s'utilitzen per expressar-les. Però només dos grups responen de manera correcta a l'apartat *f*. En aquest apartat es demana que expliquin amb detall el fet que símbols iguals no representen el mateix, és a dir, la polisèmia del signe -. Aquest fet ja es planteja i analitza als treballs de Bruno i Martínón (1999), Pujol (2008) i Vlassis (2008).

		A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
EP1	P1	✓														
EP2	P2(a)	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓
	P2(b)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	P2(c)	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
	P2(d)	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	P2(e)	✓	✓	✓	✓			✓	✓				✓	✓		
EP3	P3(a)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	P3(b)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	P3(c)	✓	✓		✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	P3(d)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	P3(e)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	P3(f)						✓	✓								
EP4	P4(a)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓
	P4(b)								✓					✓		
	P4(c)					✓	✓			✓		✓		✓		
	P4(d)								✓				✓	✓		
EP5	P5							✓						✓		
EP6	P6(a)											✓			✓	
	P6(b)															
	P6(c)															
	P6(d)															
TE	21	12	10	9	10	11	11	11	13	11	9	12	10	15	10	10
%	100	57	48	43	48	52	52	52	62	52	43	57	48	71	48	48

Taula 3.14: Resultats quantitativs Enters.

A la pregunta 4, la gran majoria dels grups, 14 dels 15, responen correctament a l'apartat *a* i una tercera part, 5 grups, a la *c*. La primera fa referència a expressar el contrari de pujar i la segona a què ens permet indicar el contrari de pujar o de baixar. A la *b* i la *d* només dos i tres grups responen correctament. Aquestes preguntes fan referència al contrari de baixar i a explicar la diferència de significats que pot tenir un mateix signe respectivament. De fet es demana si saben utilitzar i entenen l'ús del signe  $-$  com a operador simètric. És a dir s'insisteix en la polisèmia del signe  $-$ , en la línia de Vlassis (2008).

A la pregunta 5 només dos grups grups responen de manera correcta. Aquesta pregunta pretén que els alumnes sintetitzin la informació obtinguda a les preguntes anteriors i detallin els diferents usos dels signes  $+$  i  $-$ . Els grups que responen correctament són els mateixos grups que van respondre correctament la 4*b*. I dos dels tres que van respondre correctament la 4*d*.

A la pregunta 6, només dos grups responen de manera correcta a l'apartat *a*. I cap grup respon de manera correcta als apartats *b*, *c* i *d*. En aquesta pregunta es vol aconseguir informació sobre l'ús dels enters a l'hora d'expressar en terminologia algebraica situacions quotidianes, en la línia que apunta Vlassis (2008).

Només hi ha coincidència de respostes correctes a les preguntes 4*b*, 4*d* i 5. I a la vista d'aquests resultats, podem concloure que l'aplicació en situacions que requereixen o que es poden afrontar a través de l'àlgebra queda lluny de les alternatives que preveuen els alumnes.

		A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
CRP1	P1	✓		✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
CRP2	P2	✓		✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
CRP3	P3													✓		
CRP4	P4(a)	✓										✓				
	P4(b)	✓			✓	✓		✓	✓	✓	✓			✓	✓	✓
CRP5	P5(a)	✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	P5(b)		✓	✓		✓		✓	✓		✓			✓	✓	✓
	P5(c)												✓		✓	✓
	P5(d)			✓					✓		✓			✓		
CRP6	P6(a)	✓		✓	✓	✓		✓	✓				✓	✓		✓
	P6(b)	✓		✓	✓			✓			✓		✓	✓		
	P6(c)	✓			✓					✓						
CRP7	P7	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓
TCR	13	9	2	8	7	5	3	8	8	6	8	5	6	10	6	6
%	100	69	15	62	54	38	23	62	62	46	62	38	46	77	46	46

Taula 3.15: Resultats quantitius Cronologia.

Una primera anàlisi de la Taula 3.15, on es mostren les respostes del qüestionari de la Cronologia, en les mateixes condicions que la que hem fet pel qüestionari d'Enters mostra que:

A les preguntes 1 i 2 pràcticament tots els grups responen de manera correcta, tretze i dotze respectivament. En aquests dos casos es demana utilitzar els nombres enters per anomenar un moment concret a la línia del temps. Les dues preguntes es podrien haver deixat en una sola.

A la pregunta 3, on es demana expressar en llenguatge matemàtic un canvi temporal, com també proposa Pujol (2008), només un grup de treball respon correctament.

A la pregunta 4, només dos grups responen correctament l'apartat *a* i deu a l'apartat *b*. Al primer apartat, novament, la resposta involucra l'àlgebra i com passava al qüestionari d'Enters això esdevé una dificultat afegida. Al segon només demana situar un esdeveniment puntual i, com ja s'ha vist anteriorment, no presenta dificultat per la majoria dels alumnes.

A la pregunta 5, l'apartat *a* demana informació sobre com anomenar el simètric d'un nombre, el *b* sobre com s'expressa l'origen, el *c* demana quins símbols permeten expressar el simètric i el *d* com es representa gràficament un punt i el seu simètric respecte de l'origen. Tretze grups responen correctament a l'apartat *a*, set al *b*, només tres al *c* i quatre al *d*. En la línia plantejada per Bruno i Martín (1999), Pujol (2008) i Bofferding (2014).

A la pregunta 6, els tres apartats estan orientats a revisar la polisèmia del signe  $-$  i a explicar detalladament quins són els diferents significats i en quins casos s'han utilitzat, al respondre el qüestionari. L'apartat *a* el responen correctament nou dels grups, l'apartat *b* set i només tres grups responen correctament l'apartat *c*.

A la pregunta 7, la majoria de grups responen correctament, tretze dels quinze. En aquesta pregunta es demana si saben que estan utilitzant els nombres enters.

Com al qüestionari anterior les preguntes que demanen l'expressió de canvis, l'ús de l'àlgebra o l'explicació de la polisèmia del signe  $-$  són els principals esculls amb els que es troben els alumnes. Aquestes dificultats també venien descrites en el marc teòric.

A la Taula 3.16 es mostren el total de respostes correctes, per apartats, de cada un dels grups que han participat.  $A_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ;  $E_j$ ,  $j=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  representen els grups participants de cada grup-classe. TE indica el total de respostes correctes al qüestionari d'enters i, TCR el total de respostes correctes al qüestionari de la Cronologia. TOT indica el total de respostes correctes per grup i l'última fila el percentatge de respostes correctes.

		A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
TE	21	12	10	9	10	11	11	11	13	11	9	12	10	15	10	10
TCR	13	9	2	8	7	5	3	8	8	6	8	5	6	10	6	6
TOT	34	21	12	17	17	16	14	19	21	17	17	17	16	25	16	16
%	100	62	35	50	50	47	41	56	62	50	50	50	47	74	47	47

Taula 3.16: Resultats quantitius comparats.

Les dades dels qüestionaris es complementen amb les de les entrevistes.

## Capítol 4

# Respostes de les entrevistes i anàlisi creuada

En aquest capítol, després de transcriure les entrevistes, escollim els fragments que aporten informació rellevant en relació a la comprensió matemàtica dels alumnes. La transcripció s'organitza atenent, primer, a cada un dels qüestionaris. Comencem amb el d'Enters i després amb el de la Cronologia de Catalunya.

Transcrivim atenent als grups classe on es va intervenir, primer el grup A i després el grup E. Les Taules 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 i 1.8 corresponen a les entrevistes a alumnes del grup A i les Taules 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14 i 1.15. Finalment, dins de cada grup hem anat seleccionant els fragments que són rellevants, és a dir, que aporten matisos o informació addicional a les respostes dels qüestionaris. Cada alumne ve identificat per una codificació de l'estil **G\_3A\_G1\_A1**. On G\_3A indica que estem al grup-classe A de tercer d'ESO, G1 indica que dins d'aquest grup-classe ens fixem en el grup d'alumnes etiquetat amb el número1 i A1 indica l'alumne seleccionat. Pel que fa al qüestionari de la Cronologia de Catalunya la codificació grup-classe, grup d'alumnes, alumne escollit és idèntica. Si en alguna ocasió apareix A2, fa referència al fet que s'ha seleccionat un alumne diferent pel segon qüestionari.

En la selecció es ressalten els fragments on es troba informació rellevant en referència als continguts matemàtics establerts en el Capítol 2. A les entrevistes, les entrades que comencen per **A**, corresponen a les respostes dels alumnes i **E** a les intervencions de l'entrevistador.

### 4.1 Respecte al qüestionari dels Enters

Hem separat aquesta secció en tres blocs. El primer detalla les transcripcions dels alumnes entrevistats del grup-classe A respecte al qüestionari d'Enters. El segon detalla les transcripcions dels alumnes entrevistats del grup-classe E respecte al mateix qüestionari. En cada transcripció ressaltem amb colors la informació rellevant. Al tercer bloc fem una revisió dels resultats. Per tal de poder organitzar de manera més eficient les respostes al qüestionari d'Enters, poder revisar i contrastar la informació rellevant hem utilitzat una gamma de colors. De la primera a la sisena pregunta, hem ressaltat les respostes respectivament amb violeta, verd, vermell, blau, morat i taronja. Si en algun cas no apareix un color és perquè l'entrevistat no comenta la pregunta o incorpora dues preguntes en una resposta. Només hem parat atenció a la informació que permet aclarir dubtes plantejats a l'hora de revisar els qüestionaris o que aporten algun punt de vista diferent a les respostes recollides en el Capítol 3. Hem afegit al costat de les transcripcions una

columna que indica, en blau, la pregunta i els continguts matemàtics presents.

#### 4.1.1 Organització de les respostes de les entrevistes pel grup 3A

##### G\_3A\_G1\_A1

E: M'expliques com... com vau pensar aquest... aquesta primera activitat, quan vau decidir fer el dibuix.

A: Doncs vam pensar que com hi havia 20 nivells sota terra havíem de posar 20 plantes a sobre la terra. Llavors vam posar la 0 que comptava com a una i llavors 19 més. I les que sota terra vam posar... pues fins a  $-7$ , de  $-1$  a  $-7$  i ja està.

**Pregunta 1**

Origen

Qualificador

Representació

E: La següent doncs... Tothom estava d'acord amb aquesta activitat o... ?

A: A la primera ens va costar una mica, però sí. Vam arribar a l'acord a l'acord de que sí, que havíem de posar fins el pis 19.

E: Vale, perfecte. O sigui que al final tots vau estar d'acord.

A: Sí.

E: Bé la segona pregunta, val. Quines dificultats vau tenir a l'hora de resoldre aquests apartats.

**Pregunta 2**

Origen

Qualificador

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

A: No ens va costar aquesta.

E: No... Algun dels apartats us va costar una mica més que els altres.

A: No aquests no.

E: No vau tenir dificultats. Vau estar d'acord amb tot.

A: Sí amb aquesta sí.

E: Molt bé. Doncs passem a la següent, ràpid. En aquí, I en aquest apartat?

A: En el... fins el  $d$  i el  $e$  sí, aquests bé. I llavors el  $f$ ... mmm... o sigui...ens va costar perquè jo deia que no i elles deien que sí i com que no ens posàvem d'acord i elles eren dues doncs vam acabar dient que sí sense explicar ni res. Llavors després a l'hora de corregir com que tothom deia el que deia jo doncs és lo que vam posar.

**Pregunta 3**

Qualificador

Operacions

Polisèmia

E: Per tant aquí us va costar... Però la dificultat que estava en la resposta o en entendre què ens estaven preguntant?

A: No, bueno en la resposta.

E: En la resposta... no, si no m'expliques res més passem a la següent. A la 4, en aquí, quines dificultats vau tenir o ...

A: Mmm a les primeres res, perquè... o sigui al contrari ho vam entendre fàcil i llavors a la  $d$ ... era bastant semblant a l'altra però al final vam com arribar a l'acord de que sí.

**Pregunta 4**

Qualificador

Operacions

Simètric

Polisèmia

E: De que sí què.

A: De que... bueno, vam posar sí perquè no és cap operació només expressa si és positiu o negatiu.

E: Val, aleshores... al final aquí vau arribar també a un acord amb facilitat sense...

A: Sí.

E: Val, doncs passem a la següent. La següent pregunta.

A: Llavors aquí només o sigui només vam pensar amb positius i negatius i sumar i restar i ens vam descuidar lo del signes contraris.

**Pregunta 5**

Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Aha! Però lo altre ho teníeu clar lo de positius i negatius.

A: Sí.

E: Sumar i restar.

A: Però després ho vam corregir, ens vam donar compte que ens ho havíem deixat.

E: Vale, perfecte. Vale! I l'últim?

A: No, aquest ens va costar bastant. I... tampoc... no sé... no ens havia donat molt de temps i ho vam fer bastant ràpid... també. I... bueno es que no estem segures perquè o sigui... vam com al final com arribar a l'acord de què si havia de donar negatiu si baixàvem i positiu si pujàvem. Llavors doncs calculàvem els pisos mentalment diguéssim llavors intentàvem fer una operació que donés el resultat.

**Pregunta 6**

Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic

E: O sigui primer intentàveu fer una previsió...

A: Sí.

E: ... de quin seria el resultat i a partir d'aquí buscàveu una expressió algebraica que s'adeqüés amb això?

A: Sí.

E: Val. Bueno. alguna cosa més?

A: Mmm...

E: Sobre aquestes coses...

A: No.

E: No?

A: Va anar bé.

E: Val pues, perfecte.

Taula 4.1: G\_3A\_G1\_A1



## G\_3A\_G2\_A1

E: Mires la primera?

A: Sí.

E: A l'hora de fer aquesta activitat, quines dificultats us van sorgir? Tots vau estar d'acord? Veig que vau fer correccions.

A: Sí.

E: M'ho expliques una mica?

A: Sí, primer vam pensar de fer del  $-1$  al  $-7$  i de  $1$  al  $20$  però llavors vam trobar que el zero també hi havia de ser perquè era la planta baixa i llavors... doncs... no sabíem si ficar el  $20$  o no ficar-lo. I llavors... al final el vam ficar i a la correcció vam veure que no.

**Pregunta 1**

Origen

Qualificador

Representació

E: Vau estar tots d'acord en què havíem de treure el  $20$  o no?

A: Sí.

E: Molt bé. Alguna cosa més sobre aquesta...

A: No.

E: No, doncs... passem a la següent. Quines dificultats vau tenir a l'hora de respondre als apartats?

**Pregunta 2**

Origen

Qualificador

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

A: Bueno, a les primeres... en el... bueno... en el de com expressaries en llenguatge matemàtic no en vam tenir gaires.

E: Mmm...

A: Després en l'última no vam entendre molt bé com fer-ho i... bueno... vam fer una recta numèrica i... bueno... vam ficar ells positius, els negatius i el zero i tot això... Però després vam veure que eren els enters i els vam ficar també.

E: O sigui que primer vau fer el dibuix i després vau afegir la resposta...

A: Sí.

E: O sigui, quan vau fer el dibuix us vau adonar que això eren els números enters?

A: Sí.

E: Bueno... no. Molt bé, perfecte. Alguna cosa més d'aquesta pregunta?

A: No.

E: Molt bé, doncs... Fem un salt.

A: He... mmm... En aquesta pregunta... o sigui vam... primer vam pensar en ficar "vaig del pis tal al pis tal" i després, al cap d'una estona vam corregir, en ves de ficar això fer-ho tot en números i fer les sumes i les restes necessàries.

**Pregunta 3**

Qualificador

Operacions

Polisèmia

E: Això ho vau fer al mateix temps, vull dir, abans de les correccions i abans de...

A: Sí.

E: Ah! molt bé.

A: I després, en aquesta vam dir... bueno... a l'última vam dir que sí. Però llavors, no ho vam tenir clar però... bueno... vam deixar ensenyar-nos la correcció i vam corregir que no i, ... bueno... vam ficar la correcció.

E: Tothom ho va veure clar després de la correcció? Que... la resposta no era sí, sinó que era que no.

A: Sí.

E: O va ser que algú va tenir la idea lluminosa i diu...

A: Bueno... vam ser dos i l'altre anava seguint això...

E: Mmm... el vostre grup era de tres persones, no?

A: Sí.

E: Molt bé, perfecte. Bueno... doncs... passem a la següent pregunta, si no tens res més a dir sobre aquesta. Passem a la següent!

A: Mmm... bueno.... aquest el vam trobar bastant fàcil. I primer... vam ficar... bueno... vam ficar bé i després en aquesta, a l'última, no ens vam aclarir del tot i ens vam liar i no...

**Pregunta 4**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Per què us va liar? Perquè...

A: Perquè, o sigui, era com... no enteníem ben bé com posar-ho. Llavors ens vam... com estressar i al final vam dir que sí.

E: Bueno, molt bé! Després, veig que va fer una correcció.

A: Sí.

E: Val. I la va tenir clara, la correcció?

A: Sí.

E: O la va fer perquè el professor l'estava comentant?

A: Sí ho va comentar i llavors ho vam entendre i després d'entendre-ho vam dir "vale, sí!, és per això" i llavors ho vam ficar.

E: Molt bé, moltes gràcies. La cinquena pregunta, a veure...

A: Mmm... aquesta, doncs, la vam tenir bastant fàcil.

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Mmm... ahà!

A: I, bé... en realitat només vam pensar en contestar una pregunta, la de positius i negatius, però llavors, sense saber perquè, vam ficar també les altres dues. La suma i la resta i llavors vam veure que estava bé i, ...

E: Però aquí, la suma i la resta ho heu posat entre parèntesis, no?

A: Sí, aquí sí. no ho vam tenir en compte.

E: No ho va tenir en compte. Però, això ho va fer mentre estàveu fent l'activitat.

A: Sí.

E: Però, a veure... primer positiu, el més de positiu i després també vol dir que pugem i... aquí va dir, ostres!, a l'hora de pujar el que estic fent és això...

A: Sumar.

E: Molt bé, perfecte! Doncs... si no hi ha res més passem a la següent.

A: Mmm... en aquesta..., no, en aquesta ho va dir... ho va dir un nen perquè... o sigui... jo i l'altre nen no sabíem ben bé com fer-ho. I, bueno... ens ho va com explicar una mica i... llavors vam començar a entendre-ho i ho vam...

**Pregunta 6**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic

E: Mmm...

A: ...ho vam indicar.

E: Quina era la dificultat que hi trobàveu?

A: Que no sabíem, ben bé, com buscar la forma algebraica. I... mmm... bueno... llavors ho vam intentar i vam fer això més o menys.

E: Val. Aquí el que veig és que va respondre  $x = 8$  en el primer,  $x = 6$ , o sigui... diguem que és com si donéssiu el resultat?

A: Sí.

E: Val. El procés el va fer vosaltres a la vostra manera...

A: Sí.

E: I lo que va escriure va ser “el resultat és aquest d’aquí”?

A: Sí.

E: Molt bé, doncs... moltes gràcies.

A: Merci! De res.

E: Moltes gràcies a tu, per tot.

---

Taula 4.2: G.3A\_G2\_A1

## G\_3A\_G3\_A1

A: Comencem.

A: ... llavors vam ficar els números de les plantes dels edificis i vam ficar la planta 0, que ens vam equivocar, i vam ficar les plantes subterrànies ficant el menys al davant.

**Pregunta 1**  
Origen  
Qualificador  
Representació

E: Aquí quan dieu treure zero... treure el zero, què vol dir que començaríeu al 1?

A: Bé no, en teoria com que diu 20 nivells, haurien de ser 19 perquè ja compta el 1 no?, diguéssim el zero ja és un nivell, en teoria.

E: En realitat en això que vau posar aquí...

A: Sí, sí és el 20 que hem de treure.

E: Bueno... Tothom ho tenia clar quan vau fer la correcció? Perquè, clar, vosaltres vau optar per una resposta... veig que després vau fer la correcció aquesta.

A: Sí, bueno... mmm... més ho menys ho vam fer-ho així, directament i no vam pensar-hi gaire però després ens vam adonar. Sí, que era veritat, que era fins el dinou.

E: Tothom hi estava d'acord en el grup, més o menys?

A: Sí, sí.

E: Val perfecte, doncs molt bé. Passem a la segona pregunta. En aquesta segona pregunta vau tenir dificultats, tots els apartats...

**Pregunta 2**  
Origen  
Qualificador  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

A: Aquí... no. No vam dubtar gaire perquè la  $a$  “Com escriuries en llenguatge matemàtic que ... és a la planta... ah!... a la planta baixa...” vam ficar el zero. Aquí “com expressaries que ets al tercer subterrani”, menys 3, que està bé, no? “Quins símbols matemàtics has utilitzat o pots utilitzar per indicar que estàs per sobre o per sota de la planta baixa? Explica-ho amb detall”. I El més perquè està sobre el terra i el menys perquè està a sota del nivell de terra, sí. I “quin tipus de nombres que tenen característiques semblants recordes haver utilitzat a classe de matemàtiques?” He ficat nombres enters.

E: Molt bé. o sigui aquí no vau tenir dificultats entre la gent del grup a l'hora de respondre això...

A: Bueno a la última ens vam quedar un rato pensant però... era... bastant obvi, no?... Però no, no vam tenir gaires dificultats aquí.

E: Bueno, molt bé. La tercera pregunta. A la tercera ens demanava...

A: Aaaah!... Bueno... hi havien sis apartats i la primera... “quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?” I vam ficar  $1 + 4$  que.... mmm... aquí no sé què diu, pis?... “Quina expressió permetria representar que ets al primer pis i pugues 4 pisos?” Doncs el 1, que és el pis en el que està, més quatre que són els que pugues ... sí! això estava bé, no? ... Vale, vale!

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions  
Polisèmia

E: El meu objectiu, no és en aquest moment valorar si la resposta... sinó com heu respost i perquè heu respost això.

A: Val... , i “quines expressió permetrien representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos?” Pues aquí també vam fer el mateix plantejament... aaah... “quines operacions has utilitzat per expressat els dos enunciats anteriors?” Pues, sumes i restes, no? perquè... aaah... mmm... és quan pugues quatre pisos pues els sumes i quan baixes cinc pisos els restes.

I la  $e$  els símbols utilitzats per fer les activitats 1 i 2 són iguals que els utilitzats per fer els primers apartats d'aquesta activitat? Sí bueno... aaah el  $f$ . "Aquests símbols representen el mateix, és a dir, símbols que s'escriuen igual sempre representen el mateix? Explica-ho amb detall". Eee... aquí fica no uns es representen suma i altres resta ah! Sí,... bueno... és... no... que la suma representa que està per sobre del zero i la resta per sota, eee... això.

E: Aquí... tu fixat en una cosa, realment la vostra resposta respon a la pregunta que es feia?

A: A la  $e$ ?

E: A la última, la  $f$ .

A: A la meva... aquests símbols representen el mateix... mmm...

E: Aquí a mi em dóna la impressió que feu la diferència entre la suma i la resta, evidentment, si hi ha més hem de sumar i si hi ha .. Però la pregunta, aquí, anava més dirigida al fet de dir, aquí hem fet servir el signe més per indicar que estem pujant mentre que en altres apartats el signe + no era un signe de pujar que ens indicava el pis on estàvem.

A: Sí que es poden utilitzar de diferents maneres ...

E: Exacte.

A: Vale, vale... és això no?

E: Una miqueta el valorar això.

A: Val ara t'ho diré. A la quarta, "com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?" Doncs, baixar-los hehehe ... "Com podries expressar que fas el contrari de baixar dos pisos?" Bueno, això és... és bastant fàcil aquesta pregunta,, és clar. "Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o baixar?" Pues... mmm... més o menys és el contrari de cada cosa. I, "si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat a les activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?" Jo he ficat "sí, és el mateix perquè segueix pujant o baixant". Mmm...

A: Mmm... .. Mmm... Xicooo, és el igual que el que m'has comentat abans, no?, es pot utilitzar d'altres maneres, també. I... "quins són els significats que pots atribuir als símbols + i - a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?" Bueno... aquí ho vam fer-ho per sobre, la veritat. I... o sigui, es poden utilitzar... de moltes més maneres, però bueno...

E: Però això... això és una reflexió teva, ara més...

A: Sí, sí ...

E: ... més que no pas una reflexió de grup en el moment de fer-ho, no?

A: Sí. Vam ficar augmenta i disminueix. Que era l'única que havíem fet en el... en el darrer exercici aquest... i llavors és negatiu i contrari.

"Com expressaries en terminologia algebraica les situacions següents?",  $a$ , "quants pisos he de pujar o baixar per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?" Mmm... bueno, aquí era... directament... si tu estàs en el tercer pis, diu que quant has de... d'arribar al  $-5$ . Llavors és... és molt fàcil no? Vam fer mmm... la  $x$  que és el... el... lo que fas al baixar... el recorregut que fas al baixar, quants pisos has baixat. Que era... això... pues... pues... menys 8. La  $b$ , "quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani? ... "quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?". Pues aquí ens vam equivocar, hehe... Sis pisos, o sigui que és molt fàcil. Bueno, bueno... no... no estàvem gaire per lo que estàvem... eh! "Si era al tercer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?"

**Pregunta 4**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

**Pregunta 6**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic

Pues... he pujat... a veure... quin és... era al tercer soterrani... al quart pis...  
Pues... has pujat... mmm... 7 pisos no? I aquí hem ficat tres. E: Aquí, jo, el que veig és que a més heu posat  $x - 1 = 3$ .

A: Sí, sí, sí... Ai, ai... bueno... hehehe. “Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?” Al segon soterrani... doncs vaig baixar tres pisos,  $-2x - 5x = -3x$ . Home no, jo crec que no fa falta ficar tanta complicació, la veritat, però bueno...

E: Aquí jo crec que vau voler forçar l'expressió algebraica i...

A: Sí, hehehe...

E: ...i no... doncs bueno. Moltes gràcies.

---

Taula 4.3: G\_3A\_G3\_A1

## G\_3A\_G4.A1

E: Les vostres... les respostes, no. El que vau fer.

A: Bueno, lo que vam fer és primer... primer tots vam donar una idea i la vam raonar... la vam... aquesta idea dels pisos lo que vam fer, lo que vam fer va ser comparar-ho amb els que hi ha a tot arreu. I per exemple hi havia idees de com el pis zero no comptar-lo, però clar, al haver-hi soterranis sí que s'havia de comptar. Ho vam, o sigui... vam dir totes les idees i la que al final va semblar més lògica la vam... la vam ficar. Com el cas aquest de fer vint-i-vuit pisos i comptar la planta zero com un d'ells.

E: Mmm... mmm... mmm...

A: Després, les altres pàgines, també he de dir...

E: Sí, sí, sí anem passant, quan acabis amb una pregunta tu... tu mateix.

A: Després lo que anàvem fent és que uns anaven... ens deien vèries preguntes i també lo que anàvem fent és que uns anaven fent unes i al final un ho escrivia.

**Pregunta 1**  
Origen  
Qualificador  
Representació

E: I en aquesta, per exemple, alguna...

A: En el cas la  $d$  no la vam..., la  $d$  està aquí i la  $e$  està aquí.

E: Sí, però a l'hora per... de respondre hi ha alguna que us hagués plantejat més dificultats que les altres en aquest...

A: No, home. Allà el grupet era prou bo en això de les matemàtiques. Però si hi ha alguna dificultat... poder hi ha algun error però em sembla que no... no n'hi havia cap.

E: Jo el que no vull, a veure no vull valorar els vostres errors. Senzillament, el que vull, una miqueta, no?... aquí el que diu és quins símbols matemàtics has utilitzat o pots utilitzar per indicar les... estàs a sobre o a sota de la planta baixa. Aquí veig que teniu..., bueno, la resposta diu...

A: Més i menys.

E: Signe positiu si estem per sobre...

A: Sí... jo en aquest cas... clar... per sobre i per sota, però també jo també... si estem per sobre... entre cometes com al mig... o sigui, a peu de terra, ficar el zero, jo hagués ficat també això, no? vam, vam ficar... cada un... feia una pregunta i al final ho vam ficar tot.

E: Molt bé.

A: No vaig ser jo qui ho va escriure sinó això no s'entendria.

E: Bueno, això... l'escriure no és el més important. Molt bé! seguim... La tercera.

A: Després, en això, aquí els càlculs... o sigui jo, jo... estava revisant alguna de les altres preguntes, o sigui... vam tornar-nos, vam fer com dos grups, saps? els dos de baix, jo i en González i la Jimena i en Recio. I ens vam partir i anàvem corregint i anàvem fent, bàsicam... alguns anaven en algunes preguntes etcètera... si?

**Pregunta 2**  
Origen  
Qualificador  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions  
Polisèmia

E: I en aquí, en aquesta pregunta en concret mmm... mmm... els que estaven mirant aquestes preguntes, les respostes eren clares o van tenir dificultats?

A: No, no masses. No masses dificultats... mmm... home hi havia la... clar que... no era fàcil, evidentment, però que tampoc era allò que començaves a suar. Però estava bé, estava bé... no, no hi havia tampoc massa dificultats.

E: Bueno, seguim, doncs. La següent pregunta. Aquesta d'aquí...

A: Home, pues... és que bàsicament... en totes les preguntes vam anar fent el mateix. Ens anàvem partint les feines i al final... també, o sigui... això de comprovar-ho, saps? Un deia un resultat i llavors el que feiem era comprovar-ho i això pràcticament amb totes.

E: Però, per exemple, aquí a l'última més que donar un resultat era..., era...

A: Donar una resposta

E: Era una resposta i un perquè.

A: I també igual que a les anteriors o en algunes que també hi ha una resposta més llarga o més curta.

E: I en aquí, tots estàveu d'acord amb el que estàveu responent?

A: Home... algun cop hi havia alguna dificultat perquè... algú... allò de que.es pensa... de vegades es pensa que les idees són art, no? Però, de vegades el feiem entrar en raó i ja està!

E: En aquestes, en concret, per exemple l'última pregunta, que són les més de raonar. Diu, si has utilitzat un símbol del mateix tipus dels que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què? Aquí diu: "Sí perquè també s'utilitza per indicar..."

**Pregunta 4**

Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

A: A quina planta estàs.

E: ... a quina planta estàs, val? Però, per exemple, aquí el que se us demanava és valorar una miqueta si has utilitzat el signe menys en uns llocs determinats.

A: Ah! Allò que vam fer de mesura, de resta, etcètera... Ah! val! és que jo vaig veure que els signes... jo estava mirant-ho i no... ben bé no entenia a quina pregunta anava dirigit.

E: Mmm... bueno. En aquest d'aquí...

A: A veure, quins són els significats de... Aquest, pues... aquesta... no la vaig fer jo, però sí que la vam comentar.

**Pregunta 5**

Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Val! I l'últim.

**Pregunta 6**

Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic

A: Pues aquest... mmm... bastant malament va anar.

E: El que veig és que després dels comentaris del professor i de la posta en comú va escriure varies coses.

A: Sí.

E: Mmm... mmm... A veure, això... va ser idea de tots?, va ser algú que va veure la llum en aquell moment?

A: A veure jo... la veritat, això de corregir i tot va ser la Jimena.

A: Mmm... suposo que devia veure l'error o que el procediment etcètera... i devia fer-ho bé. això sí que, això sí que... jo hi era, però jo ho vaig mirar, però no va ser on m'hi vaig ficar més.

E: Val.

A: A l'última part... no sé... no m'hi vaig ficar més jo.



## G\_3A\_G5\_A1

E: Comencem.

A: Vaig fer servir el sentit comú.

E: Val! A veure la primera pregunta, a l'hora de fer aquest dibuix vau estar tots d'acord?

A: A veure, hi havia dues persones que no és que no és que van participar molt però... també van fer algu. I jo ... bueno vam pensar de fer, si diu que hi ha 20 nivells per sobre, doncs, com fer 20 nivells i per sota  $-7$ . I així vam anar dibuixant... i doncs, ens va donar 20, 20 per sobre i  $-7$  per sota.

E: Aquí veig que comenceu per l'u per sobre...

A: Ah! sí.

E: ... i al  $-1$  per sota.

A: Això, això... crec que no ho vam fer bé perquè hauríem d'haver posat un 0 però... bueno ens vam equivocar no me n'he adonat.

E: I la resta de la construcció l'hauries fet exactament igual afegint el zero aquí?

A: Sí.

E: Val.

A: Et llegeixo les preguntes?

E: Mmm... a veure, el que m'agradaria saber en aquestes preguntes si a totes vau estar d'acord a l'hora de respondre. N'hi ha alguna que va plantejar més dificultats? més problemes?

A: Aaah ... potser les que... bueno aquestes... les primeres preguntes no van plantejar gaires problemes, més que res perquè eren de sentit comú i no s'havia de... o sigui, no s'havia de pensar molt sobre coses que havies estudiat o coses així. I sí, bueno vam estar d'acord, majoritàriament l'Egor i jo perquè en Pau i l'Othman no van fer pràcticament res. Però l'Egor i jo, que érem potser els que vam fer més. Doncs sí, vam estar d'acord i vam respondre, sí ho vam respondre... i creiem que està bé.

E: Lo que veig... que a l'última pregunta aquí no vau... no la vau respondre.

A: No, no la vam fer. No, no... Jo no me'n recordava de cap i li vaig preguntar a l'Egor. Bueno... sí, sí que me'n recordava del que hem fet però que... no sabia què posar i dic: "Egor, tu saps algu?", i va dir que tampoc. I vam dir... bueno... la deixem en blanc i ja ... la respondrem després.

E: Veig que després sí que vau posar...

A: Sí quan vam... sí perquè amb les respostes de l'altra gent vam averiguar que eren enters.

E: Bueno, seguim...

A: Mmm... bueno... aquí també... va bueno... va ser el sentit comú perquè al... si posàvem l'expressió, que dius... si està al primer pis i puges quatre, o sigui és positiu més quatre i ens donava cinc, bueno, sentit comú crec jo. I així les vam fer. Les operacions que ens deien només feien servir sumes i restes, no havíem de fer servir res més i... aquí, que al principi, també havíem posat sumes i restes però abans d'entregar-lo em vaig adonar eren més i més i vaig canviar. I aquestes dos, que les va fer l'Egor, que diu: "si els utilitzats per això a 1 i 2 són els mateixos... eee... que... que, o sigui, els símbols si eren els mateixos", nosaltres vam respondre que sí. Perquè no vam fer servir res més que suma i resta. I l'última pregunta: "que si representaven el mateix". No sé. L'Egor va respondre que no. Depèn del moment. Jo no vaig entendre-ho així. Però, va dir, "Sí, sí, deixem-ho així." I al final, jo crec que està malament.

**Pregunta 1**

Origen

Qualificador

Representació

**Pregunta 2**

Origen

Qualificador

 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ **Pregunta 3**

Qualificador

Operacions

Polisèmia

E: Tu, què creus que havia...

A: Vam creure... l'Egor també ho va creure i ho vam tatxar. No vam saber què posar.

E: Bueno...

A: A la quarta, bueno era el mateix, sentit comú. I... si el contrari de + és -, posàvem com es podria fer el contrari de pujar cinc pisos. Si puges, +; restar -, -5. La segona era el mateix però amb negatiu. I... la  $c$ , ah!... doncs, explicava... com... que en el que havíem fet. Com van els signes. Mmm... bueno, això ho vaig respondre jo... vaig respondre: "Sí, sí, perquè depenent del signe dels pisos pujaràs o baixaràs". Més que res perquè si a tu et posen -5, tu saps que baixes, no que puges. No sé. Sí bueno i el signe ficat no canvia: + és + i - és -.

E: I sempre... penses que sempre té el mateix significat, el + i el -?

A: Sí, no? Bueno...

E: En els llocs on l'has utilitzat sempre tenia el mateix significat?

A: Sí, si és + és positiu, si és - és negatiu.

E: Només?

A: A no ser que vagi amb - amb parèntesi, -5 que....

E: Mmm...

A: ...que bueno, en lloc... donaria... 5 pues jo crec que sí.

E: Mmm... Molt bé.

A: El significat que poden arribar a tenir el signe + i -. Jo vaig posar suma i resta perquè més de sumar i menys de restar. Però després ens vam adonar, amb les altres respostes dels altres companys, també era positiu i negatiu.

**Pregunta 4**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Ehem!

A: Aquí, que això ho vam fer entre l'Egor... eren expressions algebraiques i... vam... en ves de posar... bueno... vam voler posar  $x$  en ves de números normals, no sé... per fer l'expressió algebraica i bueno... jo crec que...

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Tu creus, per exemple, que la primera resposta de... "quants pisos..." El que et demana és l'expressió algebraica que descriu les situacions següents. Diu, "quants pisos has de pujar o baixar per..."

A: "... anar al cinquè soterrani des del tercer pis?"

E: Aquesta expressió reflexa aquest enunciat?

A: Bueno, ara que m'hi fixo, bé... bueno... Si poses un zero de  $x$ .

E: Sí, però aquí reflexa que t'has mogut des del cinquè soterrani fins al tercer pis?

A: No, no, perquè això està malament.

E: Aquí intenteu reflexar el resultat però no descriu la situació.

A: Mmm...

E: Et fixes... o sigui, una cosa és descriure una situació i una altra cosa és donar un resultat.

A: Ehem!

E: Són dues coses diferents. Val, aleshores... bueno... és important això, no? adonar-se de que en un moment determinat una és la resposta i l'altra és el que estem fent.

A: Ehem!

**Pregunta 6**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic

E: Per exemple aquí, que veig un 2 més 7 igual...  $-2 + 7$  igual a  $+5$ ... no sé, suposo que la resposta *d*. Però aquí, sí que podria descriure una situació d'un moviment entre pisos, val? De pujada, de baixada estem a... la primera, la segona... però clar, vosaltres escriviu un número que vol ser el resultat però no descriu la situació. Sí?

A: Sí, sí!

---

Taula 4.5: G.3A\_G5\_A1

## G\_3A\_G6\_A1

E: Quan vulguis... pots començar.

A: Aquí vam fer aquest dibuix perquè...

E: Aquest era el dels edificis, no? El primer.

A: L'edifici que diu lo de 20 nivells a sobre i 20 nivells a sota, pues, aquesta ratlla és el terra i llavors aquests són els pisos subterranis i aquí, pues, els pisos que estan a sobre. I bueno, la porta és la planta baixa i llavors els pisos es compten a partir del primer pis i la planta baixa no... no compta.

E: Ehem!

A: I bueno, aquests els hi hem posat els números negatius perquè als ascensors surt així i tot, perquè estan... com si la planta baixa fos el zero, pues, aquests estan sota el zero.

E: Molt bé.

A: Ja està. Bé, passo a la següent?

E: Sí, sí, quan tu... quan tu ho creguis oportú...

A: Val! Aquí, com abans no? Diu "com expressaries la planta baixa?" és un zero perquè és el pis zero i el tercer soterrani és  $-3$ . Bueno, el quart pis és el 4.

**Pregunta 1**  
Origen  
Qualificador  
Representació

E: Amb això vas estar tots d'acord o vas tenir dificultats?

A: Sí, sí amb això ens vam posar d'acord ràpid perquè...

E: Ehem!

A: Aquestes eren preguntes com... que estàvem tots d'acord.

E: Molt bé. A les següents?

A: Mmm, aquí... ens vam posar d'acord però... vam discutir una mica. A veure si havíem de posar positiu perquè quan estàs en un ascensor o quan et diuen el número de planta no et diu  $+2$ , et diu simplement el 2. Però bueno... al final vam decidir posar-ho així, com en els números.

E: O sigui, que dubtàveu entre posar el  $+$  i el  $-$  o deixar només el  $-$ , no?

A: Sí.

E: Ehem!

E: I aquí que deia quin tipus de nombres, veig que heu afegit...

A: Sí, però vam posar això. Però aquí no teníem massa clar a què es referia la pregunta i vam posar això equacions, expressions i polinomis però... vam... cm quan vam explicar les preguntes dels altres, doncs, vam veure que eren sumes i restes i ja està.

E: Vale. Però aquí us demanava tipus de números.

A: Ja, i llavors... havíem d'haver escrit que eren nombres primers, no? Bé... jo crec que sí.

E: Ehem!

A: Bueno, no ho sé.

E: Val. amb sumes i restes no... no respon, no?

A: No.

E: Bueno... a l'exercici... a l'apartat... l'activitat 3, vull dir...

A: Pues això que diu... "Quina expressió et permetria representar el fet de pujar quatre pisos?" Doncs, estàs en el pis  $u$ , no? i poses més quatre perquè pugues quatre pisos. I aquesta, que és lo mateix però baixes cinc pisos,  $-5$ .

**Pregunta 2**  
Origen  
Qualificador  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions  
Polisèmia

E: Val. Senzillament perquè en un pugues i l'altre estàs baixant, no?

A: Sí.

E: Molt bé.

A: I llavors les operacions, doncs, sumes i restes, no? Perquè... en un pugues quatre pisos per tant sumes quatre pisos i l'altre restes. Lo mateix, doncs, aquí et pregunten quins símbols? Doncs, el símbol de més i el símbol de menys.

E: Mmm... aquí sí hi havien símbols que s'escrivien iguals? no?

A: Sí. Vam escriure que sí. I aquí a sobre, l'apartat f, deia lo de...

E: Si es representaven amb el mateix...

A: Com ho expliqueu? I llavors vam dir que sí perquè pot ser... vam dir que no perquè per exemple el  $-$  pot representar una resta o un nombre negatiu. Aquí sí que vam estar tots d'acord, tot i que falta la resposta que també pot representar el contrari.

E: I això del contrari ho vau estar parlant o és debut a la posta en comú...

A: No, no... Sí, quan en Pep ho va explicar i ens vam... donar compte.

E: Perdona...

A: I això de com el contrari de pujar cinc pisos, doncs, com el contrari també és el símbol  $-$ , doncs  $-5$ .

**Pregunta 4**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Aha!

A: I... la següent pregunta és el contrari de baixar, doncs,  $+2$ .

E: Aha!

A: Però aquí falta el  $+$ .

E: Ah! bueno, ehem! Heu posat només 2, no?

A: Sí, i llavors... bueno... aquí diu que com ho faríeu? doncs, canviant el signe.

Si hem de pujar, pues, posant un  $-$  i... al revés també.

E: Aleshores, aquí deia si utilitzàvem el mateix símbol?

A: Sí, llavors diu que no perquè en un representa negatiu i a l'altre representa resta. Bueno, representa menys.

E: Ehem!

A: Aquí diu que, "quins són els significats de  $+$  i  $-$ ?" I pot representar sumar, restar i positiu i negatiu.

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Val. En tot això hi estàveu tots d'acord?

A: Sí, sí.

E: Molt bé.

A: Aquesta va ser difícil de... perquè... no sabíem...

**Pregunta 6**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic

E: El 6, el 6 és el que va ser difícil?

A: Crec que sí, perquè havíem d'escriure això de les  $x$  i això i, aquí estava tot malament. Perquè, quants pisos has de pujar? Aquí n'has de baixar vuit, però és clar saps?, aquí ho deien algebraica i ho vam escriure amb una frase.

E: Vau fer el càlcul i vau donar la resposta en lloc d'expressar-ho.

A: Sí, en comptes d'escriure-ho... d'escriure-ho algebraicament.

He de comentar totes les preguntes o... vull dir...

E: Home, per sobre. Si hi ha alguna cosa en especial...

A: Pues que ha sigut com tot el grup, saps? que està aquí que... aquesta part no està... està... en comptes de fer-ho de manera algebraica, està en dir-ho amb una frase.

E: Bueno, vosaltres, vau optar per fer-ho amb una frase. Veig que després de la posada en comú heu modificat alguna cosa.

A: Sí, sí, perquè clar vam llegir... sí, no vam llegir l'enunciat sinó que vam llegir només la pregunta, saps?

E: Bueno.

---

Taula 4.6: G\_3A\_G6\_A1

## G\_3A\_G7\_A1

E: Endavant! quan tu vulguis.

A: Al primer exercici, de dibuixar l'edifici, vam pensar que la planta zero, la vam comptar com una i llavors vam fer vint a dalt perquè com era vint sobre. Llavors hem fet set cap a baix però després vam pensar que si pensàvem la planta zero com a planta u calia que poséssim dinou perquè serien vint.

E: Ehem! Perquè us deia que l'edifici, en total, havia de tenir...

A: Vint plantes superiors.

E: Molt bé! Perfecte! Seguim!

A: Llavors en el 2... mmm... com és planta baixa i normalment les plantes baixes tenen un  $-$  al davant, pues vam posar que... o sigui, que la part de baix sigui  $-$  i qualsevol número. I llavors ho expressem de forma negatiu.

**Pregunta 1**  
Origen  
Qualificador  
Representació

E: Mmm... val!

A: I pel tercer soterrani, pues, posaríem un 3 i al davant un negatiu, perquè seria  $-3$ .

E: Estàveu tots d'acord en aquestes coses?

A: Sí. Llavors el quart pis com és positiu, bueno és cap amunt és per sota del zero, un 4 normal perquè no cal posar el  $+$ . I el símbol que vam utilitzar seria el  $+ i -$  perquè... per indicar si està sota zero o per sobre del zero, que és la planta inicial. I hem utilitzat números enters perquè no hi havia decimals.

E: Molt bé. Tothom d'acord amb això?

A: Sí, sí, amb això sí.

E: Anàveu tots a una?

A: Sí. Llavors, per representar que podíem pujar del pis u al quatre sumariem. Si estem al pis u, quatre pisos més i arribaríem a la planta 5. I per baixar, pues, restaríem. Restaríem cinc menys u, donaria menys quatre que arriba al soterrani. I hem utilitzat la suma i la resta perquè sumem o restem i el símbol, pues, el  $+$  i el  $-$  perquè seria el signe negatiu de la resta.

E: Ehem!

A: Llavors hem estat tots d'acord. I els símbols que hem utilitzat són iguals. Bueno, a la 1 i a la 2 perquè ens donen  $+$  i  $-$ . I, si representen el mateix, hem posat que no perquè hi ha símbols que representen la resta i no és el mateix que dir  $1 - 5$  que..., o sigui,  $-1 + 5$ . No ens donaria el mateix, llavors un és per la resta. O per exemple aquest, si poses  $-4$  no és lo mateix que dir  $-4$  menys una altra cosa.

E: Ehem! I això, tothom... veig que aquí vas afegir una cosa en vermell.

A: Vam posar que també seria el contrari. O sigui, més menys, menys més. I després...

E: Això us vas adonar després de la posada en comú?

A: Sí, sí, quan ho vam posar, bueno... vam dir que ens faltava aquest, que faríem el contrari.

E: Bueno.

A: Mmm... si fem el contrari de pujar cinc pisos, serien restar, llavors serien cap al soterrani, serien  $-5$  perquè restem i llavors el contrari de baixar uns pisos seria sumar perquè pugem. Llavors hem utilitzat el  $-$  perquè és  $-5$  i per baixar, pues,  $+$  perquè és el contrari. Llavors hem utilitzat el mateix símbol perquè si estàs restant o sumant els pisos, pugem o baixes és lo mateix que si restes.

E: Ehem!

**Pregunta 2**  
Origen  
Qualificador  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions  
Polisèmia

**Pregunta 4**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

A: Més o menys.

E: I en tot això, tots d'acord? Vull dir...

A: Sí, sí... és això, vam posar tots en comú perquè són idees que vam tenir conjuntament.

E: Conjuntament...?

A: Sí perquè abans d'escriure vam donar idees i després vam dir la que era més adequada.

E: Molt bé.

A: Els significats... bueno, a les activitats que hem fet seria el negatiu i el positiu perquè hem fet el contrari de cada cosa. Hem fet... hem sumat i hem restat i vam afegir, també, quan vam posar en comú, els contraris perquè variava el contrari d'una resta o el contrari d'una suma i llavors ho vam afegir perquè ens ho vam deixar.

**Pregunta 5**

Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Bueno. I, bueno perquè pensàveu que era correcte?

A: Sí, perquè com van dir... vam dir, bueno sí, ho vam pensar... i vam fer el contrari d'una resta. Seria una suma i llavors vam dir: "Cal posar-ho".

E: Ehem!

A: Llavors, a l'activitat 6, a... les algebraiques hem posat... per arribar al cinquè soterrani serien tres... no, sí, .... des del tercer pis, pues, restes  $3-8$  que arribaries al  $-5$  o sigui, sota el zero perquè seria  $3 - x = -5$ . Llavors hem fet l'operació, ho hem calculat. I després, des de...

**Pregunta 6**

Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic

E: Però, en canvi, aquí només va escriure l'operació. No... la part aquesta que diu d'utilitzar la  $x$ ...

A: No, perquè hem pensat i hem dit: "bueno... no posem la  $x$  i posem el resultat directe". Llavors hem calculat amb la calculadora i hem dit això... I des del quart pis fins al segon, pues és lo mateix,  $4 - 2$ , que ens donaria 2. I... per fer el moviment de baix... pujar del soterrani cap amunt hem posat el baixar... i el contrari seria..., o sigui, pujar i el contrari seria baixar.

E: Ehem!

A: I tots en comú.

Taula 4.7: G\_3A\_G7\_A1



## G\_3A\_G8\_A1

E: Doncs, endavant!

A: Bueno, primer, a la primera activitat vam dibuixar aquest edifici que mmm..., bueno, primer vam fer el número començant del del u. Però després vam pensar que potser era millor posar el zero abans, no? I... res, el vam... el vam...

**Pregunta 1**  
Origen  
Qualificador  
Representació

E: Al principi us demanava que dibuixéssiu... quantes plantes, a l'edifici?

A: Mmm... bueno, vint plantes per dalt i set plantes per baix.

E: I... a l'edifici que heu dibuixat esteu d'acord en que hi havia vint plantes per dalt i...

A: Sí, bueno, en realitat hi havia vint-i-una. Però clar el zero és com la porta, com la planta baixa. No? No sé...

E: Mmm... Molt bé.

A: I ara...

E: Segona pregunta.

A: Mmm... Val, la planta baixa que nosaltres vam pensar que era el zero, o sigui... perquè vam imaginar un edifici i, no sé...

**Pregunta 2**  
Origen  
Qualificador  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

E: I, estàveu tots d'acord?

A: Sí.

E: Molt bé.

A: Mmm... bueno i després vam... vam discutir i bueno, aquestes preguntes van ser bastant fàcils perquè... o sigui, el quart pis, pues, seria el 4, no? i... no sé... aquí...

E: Espera, espera, espera...

A: Ah! Vale!

E: ... en aquesta pregunta, en aquí, en aquestes preguntes... clar, a l'última deia: "quins tipus de nombres que tinguin característiques semblants... recordes?"

A: Bueno sí, els nombres enters, o sigui, nosaltres... ens va costar una mica aquesta pregunta perquè no la vam entendre molt bé. Però després, vam pensar que eren els nombres enters que havíem utilitzat de petits.

E: Molt bé, molt bé. Perfecte. Tercera pregunta, aquí...

A: Mmm... Val, nosaltres ens vam basar molt en +1, +, -. O sigui, posar signes a tots els números, no? I... bueno, doncs... fer servir molt això... i... i...

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions  
Polisèmia

E: Al final, bueno... les primeres preguntes eren una miqueta de... de veure com es movien i a l'última era una miqueta de reflexionar, no?

A: Sí.

E: Sobre el que demanaven.

A: En aquesta vam discutir bastant perquè, o sigui... no sabíem molt bé que posar, però al final ens vam decidir per això.

E: Si...

A: Que no és el mateix  $-3$  que  $3-1$ , per exemple. O sigui, fan funcions diferents.

E: O sigui que... al signe menys li veieu funcions diferents tot i veure's igual, no?

A: Sí!

E: Molt bé. Bueno... doncs aquesta pregunta...

A: També...

E: La terce... la quarta?

A: Ah! Sí. En aquesta pregunta...

E: La quarta? no?

A: Sí! Bueno... vam posar...no, aquesta pregunta no ens va costar molt, en realitat. O sigui, o sigui vam parlar totes i vam... o sigui, ho vam fer bastant ràpid.

**Pregunta 4**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: En aquest cas us demanava “com expressaries que fas el contrari de pujar cinc pisos?”

A: Sí!

E: Veig que escriviu...

A:  $-(+5)$  pisos.

E: Aha!

A: I... bueno... i fer el contrari de baixar dos pisos,  $-(-2)$  pisos.

E: Per tant, vosaltres heu... aquí diu... “què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o baixar?”

A: Que els signes + o - perquè clar pujar senz... ai! El + seria com pujar, com positiu i el -... bueno... i els parèntesis també.

E: Aha! I l'últim... Espera't un segon...

A: Ah! Vale.

E: Al final de tot, què us deia? “Si has utilitzat un mateix símbol ah!... del tipus que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix?”

A: No..., bueno, vam dir que no perquè... no és el mateix..., bueno... com hem dit abans...,  $-3$  que  $-(-3)$ .

E: No vau especificar quina diferència hi veieu.

A: Bueno... que, o sigui... - i - és+ i... tot allò...

E: Bueno...

A: I també... Ah! Sí! en aquesta...mmm...

E: Aquesta és la cinquena?

A: En aquesta mmm... quan ho vam corregir vam... ens vam sentir molt contentes perquè vam ser les úniques que vam dir les tres funcions.

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Quines funcions hi vèieu?

A: Bueno... el +, la suma i el “mateix que” i la funció de negatiu i de restar. Restar, el “contrari de” i funció de negatiu ai!... en realitat, positiu.

E: Ehem!

A: I... bueno...

E: O sigui, que vau estar totes d'acord amb això?

A: Sí!

E: I que després vau veure que...

A: Sí, bueno... nosaltres amb lo del “mateix que” i “el contrari que”, pues, vam dir... pues... no sé si aquesta és una funció però al final es van decidir per posar-ho. I, bueno... I... aquesta...

E: Sisena pregunta.

A: Ah, sí! Aquesta ens va costar bastant. No me'n recordava molt bé.

E: Aquí us demanava una terminologia algebraica.

**Pregunta 6**

Origen

Qualificador

Operacions

Algebraic

A: Sí! Val.

E: Et sembla que la vau utilitzar?

A: Psss... No! eee... Bueno... no sé... No, perquè no vam posar ni  $x$  ni res...

E: Ehem! Vau optar per posar una operació de números enters.

A: Sí, perquè no ens va donar molt de temps en acabar-ho i ho vam fer, així, una mica ràpid.

E: Aha!

A: Llavors, no ens va... no ho vam pensar molt, en realitat.

E: Veig que vau fer alguna correcció aquí, després, en vermell.

A: Sí, sí.

E: Aquí sí que apareix alguna  $x$ ...

A: Sí...

E: Molt bé.

A: Bueno.

---

Taula 4.8: G\_3A\_G8\_A1

## 4.1.2 Organització de les respostes de les entrevistes pel grup 3E

G\_3E\_G1\_A1

E: Ja estic. Perfecte.

A: Bueno doncs, aquí a la primera activitat vam decidir que fem. Si eren vint nivells sobre terra, doncs, hi hauria com la planta baixa, que seria el zero. I doncs, començant des d'aquí, doncs, vint més perquè cada pis que pugés seria una i bueno, vam decidir fer vint perquè el zero no comptava com a una. I per la mateixa raó fer-ne set cap avall. De zero, doncs, una cap a sota sense comptar la... aquesta que seria la planta baixa.

E: Però aquí veig que el zero el vau col·locar.

A: Sí, però... bueno era més com per orientar-nos una mica al principi i... bueno... però ja vam anar comptant...

E: Vale.

A: ...simplement per això.

E: Tots vau estar d'acord a l'hora de fer aquesta activitat? No...

A: Sí, sí.

E: Val. Perfecte. Doncs, passem a la segona pregunta. Algun apartat us va presentar més dificultat que els altres?

A: Bueno doncs, a l'últim apartat, o sigui... vam tenir molt clar tot al principi, que com ho expressariem perquè, doncs..., és el que estàvem treballant en aquell moment. Però a l'última que diu: "Quin tipus de nombres que tinguin característiques semblants recordes haver utilitzat?" Doncs... no sabíem ben bé què havíem de buscar i per això vam posar, doncs... positius, negatius, fraccionaris. Vam posar tot el que havíem treballat sense saber ben bé què havíem de posar.

E: Veig que després vau apuntar enters en vermell.

A: Sí això mmm... això ho va apuntar el meu company. em va dir que ho apuntés perquè són els positius i negatius que era el que treballàvem més cap aquí.

E: I ho vau veure clar, la resta, o seguïu, encara, dubtant?

A: No, sí, sí. Un cop... doncs... ho vam haver comentat tota la classe junta, doncs, vam veure per on anava tot.

E: Perfecte. No va haver-hi més dificultats, en aquesta pregunta?

A: No.

E: Doncs, perfecte. Anem a la següent pregunta.

A: Doncs aquí, sí, ho vam tenir molt clar. Al principi tot i que alguns dubtàvem de la  $e$  i la  $f$ , de si eren el mateix... si representaven el mateix o no. Doncs... però... també ens vam posar d'acord i vam pensar que seria... eee... s'utilitzaven de maneres diferents i no igual.

E: Aquí veig que vau fer com una única resposta a la  $e$  i la  $f$  o...

A: Sí, perquè vam començar... vam escriure la  $e$  i ens vam anar esplaïant i llavors vam veure que la  $f$  contestava... preguntava el que havíem contestat a la  $e$ . Perquè la  $e$  pregunta una pregunta de sí o no, més o menys, o una mica més. I l'altra diu que ho expressis amb detall i ho vam fer a la  $e$ .

E: O sigui, això seria com el sí, seria la resposta a la  $e$  i la resta seria l'explicació que correspondria a la  $f$ , més o menys?

A: Sí.

E: Val. Perfecte.

**Pregunta 1**  
Origen  
Qualificador  
Representació

**Pregunta 2**  
Origen  
Qualificador  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions  
Polisèmia

A: I va, ja ho vam tenir bé quan ho vam comentar o sigui que...

E: Molt bé.

A: I a la quatre, mmm... també es va entendre bé. També vam pensar que podríem aquí, a la... a “ com podries expressar el cas contrari?” Podríem expressar amb 5 o  $+(-5)$ , entre parèntesi. Que es va comentar a la classe que es podia expressar de les dues maneres però, també ho havíem comentat. Però ho vam posar directament així i, que havíem posat el símbol contrari.

E: I com ho havíeu posat en lloc de posar  $-5$  sol? Com? La manera que havíeu...

A: Crec que era mmm... menys més... entre parèntesis més 5 perquè diu el contrari de pujar.

E: Ehem!

A: I la  $d$  que era d'explicar, era com l'exercici anterior. També ens va fer dubtar una mica i... però... llavors vam veure que no era la mateixa expressió sinó que s'utilitzava per tres maneres diferents que... aquí era que ens indicava si pujàvem o baixàvem, bueno, el cas contrari.

E: I d'això us en vau adonar abans de fer la posada en comú i que el professor us donés...?

A: Sí. I aquí ho ressaltem en vermell perquè és tot el que dèiem en comú.

E: Molt bé. Perfecte. Si no hi ha res més, seguim!

A: Ee... I llavors, doncs, aquí a l'exercici 5 que els significats... vam posar els tres que vam dir a la classe en comú després. Però en vam posar un quart, que era crear equacions que ja vindria a ser el... vam pensar que vindria a ser el mateix de dir expressar nombres positius i negatius. I en la manera que ho vam fer, doncs..., es veia després a l'activitat següent. Que sí que et diuen “expressa-ho en equacions com representaries que pugues o baixes”, i aquí ens vam com avançar... ja.

E: O sigui, això ho vau fer abans de mirar la pregunta següent?

A: Sí... i... creiem que sí, era així. I aquí a l'activitat  $b$  diu: “com ho expressaríeu en terminologia algebraica?”. La primera i la segona les vam fer... no vam tenir temps d'acabar-ho bé. Però ens vam posar molt d'acord en que la primera i la segona estaven bé, no està acabat, ho vam acabar en vermell i en canvi a les dues últimes, la  $c$  i la  $d$  no... no hi vam caure en que podria haver estat... era... el resultat ja estava posat i quan ho vam posar en comú, doncs... llavors... ho vam veure tot.

E: Ho vau veure clar? Vull dir si...

A: Sí.

E: Aquí hi ha una cosa... la primera de les respostes,  $3 + 5 = x$  i un  $7$ ?

A: Sí, mm... és que vam fer l'equació del... dels... pisos. doncs, si estem al tercer pis, baixar cap al cinquè i la  $x$ . Llavors seria com que vam resoldre-ho... amb fletxeta.

E: Però el fet que en lloc de ser 8 doni 7? És un error de càlcul o...

A: Segurament. És que...

E: No, no. A veure, ho dic que... no sé, féssiu una expressió i que després, com que veig que vau dibuixar al costat. Que a l'hora de comptar no us dongués el que us ha de donar...

A: No, sí. Crec que va ser un error de càlcul. Sí.

E: Perquè aquí, clar, jo el que veig aquí... el zero no el teniu posat. Com que no hi ha planta zero si tu comptes plantes només hi ha set plantes.

A: En lloc de... sí.

E: Si hi hagués la planta zero...

**Pregunta 4**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

**Pregunta 6**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic

---

A: Haguéssim comptat la...

E: Hi havien hagut les vuit, que és el que surt de la suma.

A: Sí.

E: Val. Que això és el que es pot lligar amb el primer... amb el primer dels apartats.

A: Amb el primer exercici.

E: El fet que la planta zero és una planta que compta com a planta, no com una cosa més.

A: Sí.

E: Val, mol bé. alguna cosa més?

A: Doncs no.

---

Taula 4.9: G\_3E\_G1\_A1

## G\_3E.G2.A1

E: Comencem.

A: Però, què dic?

E: Doncs, em comentes els resultats.

A: Vale doncs. Aquí mmm... hem fet aquest edifici perquè així seria més fàcil de visualitzar mmm... els pisos que té en total són vint-i-set i per no equivocar-nos ni res els hem volgut dibuixar.

**Pregunta 1**  
Origen  
Qualificador  
Representació

E: Ehem... El que veig és que heu posat el pis 1, el pis  $-1$ ...

A: Sí, perquè vam mirar, per exemple, a l'escala, que el primer pis que és quan entres, ja és primer pis i a baix és  $-1$ . I llavors vam partir del zero però que el primer pis era 1... Aquí... mmm... bueno a la  $a$  vam ficar un zero... Dic per què?

E: Sí, una miqueta, a veure, i... la dificultat que vau tenir. Si estàveu d'acord tots, si vau tenir discrepàncies...

A: Sí, sí. Vam... bueno al principi dèiem si era 1 o 0 però al final vam acabar tots d'acord de ficar 0... i...

E: Però això anava en contra de lo que havíeu dibuixat abans?

A: Ja.

E: No?

A: Sí, sí. Però al final en Ferran ens va... ens va com... donar la seva raó. Llavors tots vam acabar ficant el 0. Vam dir que sí que...

E: Ja.

A: I al  $b$ , "com expressaries que ets al tercer soterrani?" Doncs, ficant  $-3$  perquè si baixes tres pisos i partim del zero és... ens donaria el  $-3$ .

**Pregunta 2**  
Origen  
Qualificador  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

E: I aquí estàveu tots d'acord?

A: Sí.

E: Molt bé.

A: A tot això?

E: I al  $c$ ?

A: Al  $c$  vam ficar quart. Perquè, "com expressaries que ets al quart pis?" Doncs, partint de zero pujant quatre pisos...

E: Ehem!

A: Al quart... i al  $d$ , mmm... Vam dir, que també, partint del zero, si estàs a més a baix fiques  $-$ . O sigui, si baixes pisos fiques  $-$  perquè estàs més a baix de zero i si pugues, com que pugues i és més de zero... mmm... En tot cas és més gran que zero.

E: És positiu.

A: Sí, és positiu. I la  $e$ , "quin tipus de nombres que tinguin característiques semblants recordes haver utilitzat a classe de matemàtiques?" Doncs... els nombres enters, encara que havíem ficat el llenguatge algebraic. Però, és veritat, ens vam donar compte de que eren nombres enters.

E: Molt bé. Seguim, tercera pregunta, a l'hora de respondre aquesta vau... se us van plantejar dubtes?, vau tenir discrepàncies...?

A: No, perquè, o sigui, com que jo ho anava escrivint, anava donant la meva... el meu punt de vista i m'anaven donat la raó. A vegades no. I quan... quan no em donaven la raó m'explicaven el perquè i...

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions  
Polisèmia

E: Ehem!

A: ... quedava d'acord amb ells. Bueno, la  $a$ , “quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?” Doncs, si ets al primer pis, que és el primer, total és 1 i en pugues quatre. Bueno... al principi havíem ficat  $1 + 3$  però és  $1 + 4$ , és 4 no 3. I la  $b$ ...

E: Sí, sí. Segueix.

A: La  $b$ , bueno... el mateix que a la primera. Però en negatiu perquè parteixen del primer pis i com que en baixes 5, doncs  $1 - 5$ , aquests són els que baixes. I el  $c$ ... Bueno, la suma i la resta és l'expressió que vam utilitzar per respondre la pregunta  $a$  i  $b$  perquè... perquè és, pugues o baixes. I llavors la  $d$ , hem utilitzat el  $+$  i el  $-$  per indicar si estem pujant o baixant. I la  $d$ , bueno... la  $e$ . Sí que hem utilitzat els mateixos símbols perquè tot el rato pujàvem o baixàvem pisos i... aquí... també. Llavors hem... ehem... bueno que són els mateixos... la  $f$ . Sí també...

E: Aquí preguntaven si aquests símbols representaven el mateix. E: O sigui, aquí... ah! què diu?... Per fer les activitats 1 i 2 va utilitzar els símbols  $-$  i  $+$  per fer l'activitat... quina era... bueno, això, diu: “Aquests símbols representen el mateix?” És a dir, símbols similars, mirant-nos els dos primers. Els apartats... els exercicis que has respost abans. Aquí has utilitzat els símbols de sumar i de restar i, en els anteriors també havies utilitzat el signe  $+$  i el signe  $-$ .

A: Sí.

E: Sí? Val, perfecte.

A: Sí...

E: Estàveu tots d'acord amb això?

A: Sí.

E: Val, endavant, seguim. Cap problema.

A: Mmm...

E: Aquí a la 4, bueno... això... expliques una miqueta...

A: Bueno que si fas el contrari de pujar cinc pisos, que seria  $+5$ , el contrari és  $-5$ .

**Pregunta 4**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Aha!

A: I la  $b$ ... el mateix. Que si en baixes dos, el seu contrari és pujar-ne dos. Llavors  $+2$ , encara que 2 també estaria bé.

E: Bueno...

A: Mmm... Al  $c$  hem utilitzat el signe  $+$  i el signe  $-$ . El  $+$  perquè pugues i és positiu i el  $-$  perquè baixes i és negatiu...

E: Ehem... A: El  $+$  hem quedat tots d'acord que era positiu o sumar. I el  $-$  negatiu o restar... per expressar el contrari, que ho vam apuntar en vermell.

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Això ho va afegir després?

A: Sí.

E: Perquè... no va pensar que...

A: Perquè ho van dir els altres grups oral i pensàvem que estàvem d'acord i ho vam ficar.



E: Molt bé, perfecte.

A: Sí.

E: O sigui, us ho havíeu deixat vosaltres...

A: Sí.

E: ...a l'hora de valorar-ho.

A: El sis, mmm...

E: Aquí veig que vau fer molts canvis.

**Pregunta 6**

Origen

Qualificador

Operacions

Algebraic

A: Sí.

E: Després de la posada en comú.

A: Sí, perquè pensàvem que havíem de buscar un nombre que... que restant tres donés  $-5$ . Però després de... bueno parlar-ho amb els altres grups oralment vam quedar que no. Que era  $3 - x = -5$ .

E: I aquest canvi que vau fer?

A: Mmm... Perquè com que els altres grups ho van dir vam quedar d'acord. Llavors vam parlar entre nosaltres i...

E: Però, només perquè els altres grups ho van dir? O...

A: Sí.

E: O vau veure que hi havia un motiu perquè diguéssiu això?

A: És que com ho estàvem fent ens va semblar com raro i... i llavors...

E: O sigui, no ho vau discutir? Ni parlar-ho?

A: bueno, al principi, jo que estava apuntant i tot, li vaig preguntar en Ferran perquè se li donen bastant bé les mates que... ell què ficaria i tot perquè jo no estava, o sigui no estava segur si ficar vuit o què ficar. Llavors ell em va dir que ficaria vuit i tot. Però després com que els altres ho van dir vam quedar d'acord que sí, que podria ser  $x$ .

E: Ehem!

A: I el  $b$  igual, igual que aquest però baixant ... però baixant al quart pis. I ja està.

E: Ja estan aquestes. Doncs parem.

## G\_3E.G3.A1

E: Quan vulguis m'expliques... com vau elaborar aquesta...

A: Bueno... primer aquí... bueno primer vam fer el quadre, diguéssim, i aleshores... bueno vam discutir una estona per si havíem de ficar zero o no ade... bueno i al final vam decidir posar-lo.

**Pregunta 1**  
Origen  
Qualificador  
Representació

E: Quin dubte teníeu amb el zero?

A: No sabíem si... com si diguéssim... com és zero doncs, zero és res diguéssim, saps? I... llavors, bueno... no sabíem si pintava o no, diguéssim. I aleshores vam fer fins el 19, perquè vam pensar que el zero ja representava un nivell. Però bueno, ho vam fer malament perquè... i després d'altra banda...

E: N'esteu segurs que ho vau fer malament?

A: Ah!

E: L'enunciat, quantes plantes, deia, que tenia l'edifici?

A: Vint, vint nivells.

E: Quants?

A: Vint.

E: I... vint nivells?

A: Sí.

E: Com? Eee... uuum.

A: Sobre terra... Ah! vale...i, vale.

E: I en aquest cas, quants n'hi ha sobre terra?

A: Ara no... O sigui, vint, si no haguéssim posat aquest. O sigui, que ja ho havíem fet bé. Hahaha. Ah! vale.

E: No, no passa res. A veure eee... es tracta d'això, no?

A: Sí.

E: Vull dir... Us va entrar el dubte i vau discutir. Primer havíeu fet una cosa i quan vau fer... vau sentir els comentaris dels companys en vau fer una altra.

A: Exacte.

E: Molt bé. No passa res. Endavant. Seguim. Segona pregunta. Us va costar tot, respondre, igual? Va haver-hi alguna part que era més difícil?

A: Sí, bueno. Lo del final no... Això no ho vam entendre.

E: No, no... vull dir... del segon, del segon.

A: Del segon mmm... a veure sí... a la planta baixa vam posar zero... perquè... bueno... aquí...?? Del dibuix vam posar... que el primer pis a sobre terra era el zero. Mmm... El tercer sota zero, vam posar  $-3$ , perquè representava que sota del zero, llavors, tots els números eren negatius i el quart pis, vam posar  $4$  perquè sobre el zero eren positius. I vam... bueno vam dir que amb el  $+$  significava els pisos que estan per sobre terra i el  $-$ , els que estaven per sota. I aquí ens vam equivocar que vam posar que vam utilitzar nombres naturals i eren nombres enters.

**Pregunta 2**  
Origen  
Qualificador  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

E: Ho vau veure clar un cop vau fer...

A: Sí.

E: Molt bé.

A: Després, sí, aquí bueno... preguntava que... si que, si estaves al primer pis i en pujaves quatre, tants cops... en números,  $1 + 4$ . Això sí que ho vam fer i aquí sí que estaves en el pis 1. I... baixaves cinc pisos, doncs,  $1 - 5$  mmm... I vam ... bueno que... fer servir la... a operacions. O sigui, com a signes la suma i la resta, aquí el mateix.

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions  
Polisèmia

E: Amb tot això, vau estar d'acord?

A: Sí.

E: No vau tenir discussions?

A: Sí, fins aquí sí. Aleshores, aquí no. Perquè no vam entendre el que preguntava. Bueno sí, aquest sí. Que si es feien servir els mateixos signes. I vam dir que sí. Aquí... veus aquí, hi ha un "fix" molt gran. Però llavors, quan la Lorena ho va comentar tot, en veu alta i tot...

E: Què, no vau entendre? Aquí...

A: ...ho vam entendre.

E: Aquí dóna aquests nombres, representen...

A: Sí, no sabíem si ens preguntaven. O sigui si la suma i la resta representaven el mateix. O sigui... Si volia dir el mateix sumar que restar i vam posar que...Sí, no sé...és que no entenc què vam fer. I després, bueno vam entendre que ens preguntaven que si servien pel mateix en uns casos que en uns altres. I vam posar que en alguns casos servien per sumar i restar. I en altres casos servien per saber si estaves en el pis de baix o en el pis de dalt, com si diguéssim.

E: O sigui que ho vau tenir clar un cop es va fer la posada en comú? Ho vau tenir clar?

A: Un cop ho vam parlar amb tota la classe, ho vam entendre i aleshores ens va sortir bé. Mmm...

Aquí lo del contrari, que també es fa servir per el contrari, doncs... El contrari de 5, vam posar que era  $-5$ . I el contrari de  $-2$ , vam posar que era  $+2$ ... Mmm... I per indicar el contrari de pujar o baixar vam fer servir el signe contrari. Hehehe.

**Pregunta 4**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Hehehe.

A: I després, aquesta pregunta, que tornava a preguntar el mateix que l'altra; que tampoc ho vam entendre fins que no ho vam comentar amb la Lorena.

E: Però veig que vau respondre... Dius que no ho vau entendre?

A: Sí.

E: Però veig una resposta.

A: Sí, però, sí... a més és una resposta que... que no té res a veure.

E: No... Però vosaltres què vau respondre?

A: Doncs, que s'utilitzen per al mateix. Que al final vam veure que no. Dèiem que s'utilitzava per sumar i per restar nivells i, però, en realitat es podia utilitzar per sumar, restar, per dir a quina posició estaves o per fer el contrari.

E: Ho vau veure clar? Un cop...

A: Sí.

E: Molt bé.

A: I aquí, doncs, és el mateix això per les tres coses que s'utilitza: per la posició, per pujar o baixar o per expressar el contrari.

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Ehem!

A: I aquí... bueno tampoc... bueno aquesta no la vam acabar perquè no ens va donar temps i, llavors vam corregir en vermell.

E: És a dir, que la 5, pràcticament, no us va donar temps de fer-la. I només la vau fer al final, després de posa-ho en comú. Molt bé! N'hi havia una altra,no?

A: Ah! sí.

E: Aquí sí que vau respondre alguna cosa, a la sisena.

A: Sí, vam respondre alguna cosa. A la primera, mmm... Bueno sí, que preguntava, “quants pisos has de pujar o baixar per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?”. Doncs, si estàs al tercer pis, menys més  $x$ , que és lo que has de pujar o baixar. És igual a  $-5$  que és el cinquè soterrani.

**Pregunta 6**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic

E: I això ho vau veure bé, tots?

A: Sí.

E: Vull dir, vau estar-hi totes d'acord?

A: Sí, bueno, primer ho vam discutir una mica. vam tenir diferents idees però al final vam decidir que aquesta era la més correcta.

E: Ehem!

A: Després, a les altres no ens va donar temps de contestar-les. I aleshores ho vam corregir quan ho vam posar en comú tots ... Aleshores ens preguntava: “quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?”. Doncs, si estaves al quart pis, doncs, més el número que has de pujar o baixar és igual al segon soterrani, mm... Totes, més o menys, pensàvem el mateix.

E: Tot això ho vau fer després? Però ho vau fer vosaltres mentres...

A: Sí ho vam fer més tard amb el boli vermell perquè no ens havia donat temps.

E: Molt bé. Perfecte.

A: Per corregir només.

---

Taula 4.11: G\_3E\_G3\_A1

## G\_3E.G4.A1

E: Endavant.

A: Puc llegir l'enunciat?

E: Com vulguis. Sí, tu mateix.

A: A veure, mmm... Vam posar... el zero perquè era com..., o sigui, perquè actués com a planta baixa perquè en tots els edificis. O sigui, a part dels set pisos, per exemple, que pot haver-hi, o vuit. Sempre hi ha a part la planta zero i vam... la vam decidir posar-la. Perquè creiem que com que s'hi pot baixar en aquella planta, doncs, comptaria com una més. I vam posar els menys set pisos amb el símbol  $-$  perquè era com si fos negatiu, com si el... o sigui, el punt intermig fos la planta del terra del carrer.

E: Ehem! Tothom va estar d'acord amb lo que feieu?

A: Sí, bueno sí. Els del grup sí.

E: Ehem!

A: Mmm... "Com expressaries en llenguatge matemàtic que ets a la planta baixa?" Vam posar el zero, però també vam posar la  $x$  com si fos per... si ho féssim amb nombres algebraics, també. I després, "com expressaries que ets al tercer soterrani?" Vam posar el  $-3$  com de la planta que hem posat, ara, al pis de baix. "Com expressaries que ets al quart pis?" Amb el 4 perquè és cap a dalt i això ho hem donat que era com positiu.

E: Aquí vau estar tots d'acord? No vau tenir problemes?

A: En aquests de moment no.

E: Molt bé.

A: Mmm... "Quins símbols matemàtics has utilitzat o pots utilitzar per indicar que estàs per sobre per sota de la planta baixa?" Vam decidir posar el símbol  $-$  o  $+$ , el negatiu o el positiu perquè són els que normalment, en aquests casos es fan servir.

I, "quin tipus de nombres, que tinguin característiques semblants recordes haver utilitzat a classe de matemàtiques?" Mmm... Vam posar... això. No sabem si estava bé. Els nombres negatius i positius, els nombres enters.

E: Molt bé. Veiem la pregunta 3.

A: "Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?" Nosaltres vam posar  $1 + 4$ .

E: Ehem!

A: Mmm... "Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos?"  $1 - 5$ . Vale, però, araestic veient que, crec que... està malament i que és zero. Perquè sinó, això donaria menys quatre. No sé, crec, no?

E: Mmm...

A: No ho saps. Vale, mm... "quines operacions has utilitzat per expressar els dos enunciats anteriors?" Vam posar més i menys...

E: De totes maneres perquè dius que no estaria bé això?

A: A lo... no sé, però que... a lo millor... no estaria bé perquè com que tu dius que vols baixar 5 pisos, si tu a 1... a 1 positiu li restes 5 és  $-4$ . Llavors no baixes cinc pisos, seria com si baixessis 4. No sé...

E: Bueno...

**Pregunta 1**  
Origen  
Qualificador  
Representació

**Pregunta 2**  
Origen  
Qualificador  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions  
Polisèmia

A: Val, però va  $1 - 5$ . Llavors, “quins símbols matemàtics has utilitzat per expressar aquestes operacions?” El símbol  $+$  i el símbol  $-$ . “Els símbols utilitzats per fer les activitats 1 i 2 són iguals que els utilitzats per fer els primers apartats d’aquesta activitat?” Hem posat que sí. “I aquests símbols representen el mateix? És a dir, símbols que s’escriuen igual sempre representen el mateix? Explica-ho amb detall.” Hem posat mmm... que el símbol  $+$  l’havíem fet servir com per pujar per l’edifici i el símbol  $-$  per baixar a les plantes subterrànies.

E: I el símbol  $+$  i el  $-$  no... no vau veure que l’havíeu fet servir per cap altra cosa, que no fos això?

A: Sí, o sigui... com per expressar que estaves en... o sigui com que diguéssim que la planta baixa a 0 era el punt intermig.

E: Mmm...

A: Com que estaves per sota. Val? Ho vam fer per això. Llavors, mmm... “com podries expressar que...”

E: Això és a la pregunta 4? No? Val.

A: “Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?” Vam posar menys més cinc, entre parèntesis  $+5$ ... per canviar-li el significat al  $+5$ . I, “com podries expressar que fas el contrari de baixar dos pisos?” Vam posar  $-$  entre parèntesi  $-2$ ...

**Pregunta 4**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: I abans... hi havíeu posat una  $x$ . Per què li havíeu posat una  $x$ ?

A: Sí, vam posar també una  $x$  perquè com que en principi havíem posat... mmm... 0 o  $x$ , no? Vam interpretar com si fessin la mateixa funció, o sigui, com si fos el mateix. I llavors, “què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o baixar?” Mmm... La resta. Llavors, “si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix?” Nosaltres vam interpretar que aquesta pregunta ens demanava que... per exemple, si el  $-$  podria tenir diferents significats. Vam posar que tenia diferents significats perquè el... o sigui perquè el  $-$  depèn de com l’utilitzis pot canviar el significat del que tu vols dir. Com per exemple, aquí  $-$  entre parèntesis  $+5$ , que llavors és  $-5$ .

E: Però aquí no vau especificar . Només vau dir... no perquè...

A: No... perquè el  $-$  podria canviar el significat de l’operació.

E: Molt bé.

A: Ja està.

E: Cinquena pregunta.

A: “Quins són els significats que pots atribuir als símbols  $+$  i  $-$ , a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?” Hem posat que el símbol  $-$  mmm... el significat que pot tenir és negatiu, vale...? Però també el podem utilitzar per canviar el significat d’una altra... d’una operació.

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Però aquí només heu posat que...

A: Aquí vam posar que el  $-$  o el  $+$ , davant d’una expressió pot arribar a canviar completament el significat... o deixar-lo igual.

Sisena pregunta: “Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents? Quants pisos he de pujar o baixar per arribar al cinquè soterrani del tercer pis?” Aquesta... vam posar  $-$ , entre parèntesis  $+3$  i  $-5$ . Que aquí ens vam equivocar, perquè... o sigui, a classe no?, si no recordo malament, crec que van dir  $-3 - 5$  o una cosa així. O no sé si van dir això o era en una altra?

Però, o sigui, nosaltres el que vam volguer fer, en lloc de posar  $-3$  i  $-5$ , va ser posar entre parèntesis, el  $+3$  perquè mm..., o sigui, com que diguéssim que està en el tercer pis. Doncs, o sigui, vam entendre que era el tercer pis positiu. O sigui, per sobre del 0.

**Pregunta 6**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic

E: Aha!

A: Llavors, tu, fins arribar al zero, baixes tres pisos. Positius que diguéssim, no?

E: Aha!

A: Llavors, per això, vam posar  $-$  els més tres pisos positius.

E: Aha!

A: Llavors, després el  $-5$  ho vam ficar... ho vam posar així perquè son els pisos subterrànics. I llavors, ja són negatius... que diguéssim. Per això vam posar el  $-$ , entre parèntesis  $+3$ . "I quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?" Lo mateix. Vam posar  $-$ , entre parèntesis,  $+4$  més...  $-2$ . I, "si era el primer soterrani i he anat al quart pis. Quin ha estat el meu moviment?" Vam posar  $-$ , entre parèntesis  $-1$  i més quatre. I, "si he anat del seg..."

E: Però això ho va tatxar després...

A: Sí, perquè... ens vam... aquí vam veure que... o sigui que la classe deia que era una altra cosa i va ser quan vaig entendre que... no vaig entendre bé. I em pensava que es tenia que tatxar.

E: Bueno...

A: Vale.

E: Vau discutir molt? Estàveu d'acord?

A: Sí, sí, vam discutir una mica...A: Vam discutir una mica depèn... o sigui, en algunes preguntes perquè... o sigui... perquè hi havia gent que tenia altres opinions, no? ... Però, també, no vam discutir tampoc perquè tampoc hi havia gent grup... hi havia gent del grup que no aportava... per tant...

E: Molt bé. De moment paro.

## G\_3E\_G5\_A1

E: Endavant.

A: Molt bé. Bueno, la primera activitat era... que era... aquesta de les plantes. Nosaltres vam decidir, pues, vint plantes... Bueno, sí, vint plantes més el zero cap amunt i set plantes cap avall. O sigui, del  $-7$  al  $20$  afegint el zero perquè... a la pregunta ens formulaven vint nivells sobre terra. El zero el vam considerar el terra i per tant vam dir, vale! Comencem a fer el nivell 1 sobre terra fins el nivell 20. I per sota de terra en vam fer set i vam escriure  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ ,  $-4$ ,  $-5$ ,  $-6$ ,  $-7$ . Perquè el  $-$  el vam considerar per sota de zero, per tant per sota de terra.

E: Però si jo em miro això... pregunta els...

A: Sí.

E: Vau comptar quantes plantes tenia aquest edifici? Un cop ho vau fer?

A: Vint-i-vuit, diria...

E: Aha!

E: I l'enunciat us deia...

A: Vint nivells sobre terra i set nivells soterranis.

E: Aha!

A: Vam considerar que no ens deia res sobre una planta baixa.

E: Ehem!

A: Per tant la vam marcar, bueno... no és ben bé una planta baixa. Simplement és un lloc... no sé com explicar-ho. Mmm... El zero el tenim com a el nivell del terra, no el tenim com a nivell sobre terra.

E: Bueno...

A: Per això...

E: Tots vau estar-hi d'acord? O vau discutir sobre això?

A: Vam tenir una mica de temps per... per aclarir si ho feiem... O sigui, si afegíem un zero o no.

E: Ehem!

A: I al final ens vam convèncer per afegir-lo.

E: Vale. Doncs, endavant. Seguim!

A: A veure...

E: En aquesta segona, vau tenir discrepàncies? Tots vau estar d'acord amb les respostes? Alguna pregunta...

A: Sí home, clar. Com que primer vam haver de fer el 1, casi bé que, al discutir l'1 ja vam acabar discutint tota la pàgina següent. Aleshores, la  $a$  la vam discutir ... aquí i quan vam acabar vam... i vam passar la pàgina. Vam veure... vam respondre ràpid que era el zero. La  $b$  la vam respondre com a  $-3$  guiant-nos de... guiant-nos d'aquesta pàgina. Tres plantes sota terra és la planta  $-3$ . I aquesta del quart pis, vam tornar a mirar i, el mateix.

E:Aha!

A: "Quins símbols matemàtics has utilitzat?" Sí..., després el que he dit ... és de que vam considerar que zero estav... era el nivell de terra. Per tant, el que estava per sobre de terra era el signe  $+$  i el que estava per sota de terra era el signe  $-$ .

A: I... el... lo dels... nombres enters més que res és perquè ens sonava aquest nom i... bah! Va ser primer que ens va venir al cap i ens sonava bastant de que... de que era això que... el nombre que es referia a signes positius i negatius i al zero.

**Pregunta 1**  
Origen  
Qualificador  
Representació

**Pregunta 2**  
Origen  
Qualificador  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$



E: Ehem! Molt bé.

A: Res més.

E: No, no. Tu.

A: Hehehe.

E: Decideixes, tu, el que em vols explicar.

A: A la 3. Sí, a la 3, bueno... simplement eren operacions, mmm... Ets al primer pis, per tant pis 1, i en puges quatre. El pujar el vam considerar el + i, quatre pisos. Per tant,  $1+4$ . Vam fer-ho així. I amb la  $b$ , mm... com que diu que baixes, baixes el vam considerar un  $-$ , i vam fer  $1-5$  perquè ens demana del primer i en baixes cinc... I les operacions, bueno... sí, és mirar els exercicis de dalt i te n'adones que has fet servir la suma i la resta, mmm... I que... i que tot i que vam fer servir la suma i la resta tant en aquest com en aquest, o sigui a l'exercici 2, els havíem fet servir per coses diferents. Perquè unes deien la posició, si estava per sobre del terra o per sota. Molt alt o molt baix i els altres, en canvi, els altres eren per sumar o restar pisos. O sigui, per pujar o baixar.

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions  
Polisèmia

E: Ehem!

A: Mmm... A la 4 vam escriure... primer de tot vam escriure que fas el contrari de pujar 5 pisos, vam escriure-hi  $-5$ .

**Pregunta 4**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Ehem!

A: Després ens ho vam mirar per... bueno vam seguir... i en el  $b$  vam escriure  $+2$ . Que era, en realitat, el resultat final. I al... quan vam arribar a la  $c$ : "Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o baixar?" Ens vam adonar de que havíem utilitzat dos signes, no un. I ens deia "què has utilitzat?" No, "quins has utilitzat?" Aleshores, vam mirar-nos l' $a$  i el  $b$  altra vegada i vam pensar de que, d'aquesta manera, era millor perquè en realitat el què expressa el signe contrari és el  $-$ . El contrari de  $+5$  és  $-5$  i el contrari de  $-2$  és  $+2$ .

E: Clar.

A: Per això vam preferir-ho escriure-ho així.

E: A la primera resposta, diguéssim, que ja havíeu fet una operació de signes...

A: Sí!

E: ... mentres que aquí estaves veient què feies amb els signes.

A: Sí, sí.

E: Molt bé.

A: O sigui, a la primera vam respondre directament el resultat que dona això. I en canvi, quan... mmm... vam arribar a la  $c$ , ens vam adonar que podíem fer-ho així perquè és més clar.

E: Ehem!

A: I a la  $d$  vam explicar això de que a les altres activitats havíem utilitzat diferents símbols. Ai! Els mateixos símbols però... però per significats diferents. Primer per pujar o baixar. Després per expressar la posició i en aquí per expressar el contrari d'una cosa.

E: Ehem!

<p>A: Mmm... La 5. Ah! Val! Aquest sí, ens pregunta sobre el + i el - i, principalment és el que t'acabo de dir. De que el vam fer servir per tres coses diferents. Per si està sobre 0, per sumar i restar...</p>	<p><b>Pregunta 5</b>  Origen  Qualificador  Operacions  Simètric  Polisèmia</p>
<p>E: Vale!</p> <p>A: I el 6, en aquí no vam poder-hi arribar i després ho vam corregir en vermell ràpidament. Però... o sigui, no sé si també ho hauríem pogut fer per nosaltres sols. Vam... bueno, són... són, com es diu? Aah! Ara m'he quedat en blanc. Bueno, són problemes que no són massa difícils però que també has de plantejar. Del + i el -. Que has de saber posar la <math>x</math> en el lloc correcte, per després aïllar-la, també, correctament. De tenir un resultat amb lògica. Com que no vam poder-los arribar a fer no et puc dir res de si els vam comentar o no. Perquè no vam arribar-hi...</p> <p>E: Les respostes, que les vau agafar d'un altre grup o... a partir de lo que vau sentir...</p> <p>A: No, a partir del que vam sentir vam apuntar-ho.</p> <p>E: Vau apuntar-ho?</p> <p>A: I també vam mirar una mica si estava bé o no. O sigui no vam...</p> <p>E: O sigui, no vau escriure res que no crèieu que tingués sentit?</p> <p>A: No, clar. Sí, sí.</p> <p>E: Val. Perfecte. Molt bé.</p> <p>A: Sí, vam... o sigui, aquí hi han... hi ha apuntades les operacions i després el que vam fer va ser, fer com el procediment després d'haver d'aïllar la <math>x</math> i que féssim <math>-3 - 5</math>, dóna <math>-8</math>. Per tant, <math>x = -8</math>. Vam substituir-ho per comprovar-ho. Per acabar de mirar a veure si... l'operació que havíem fet estava bé.</p> <p>E: Però no ho vau escriure...</p> <p>A: Però no vam poder-ho escriure perquè ho vam fer els últims cinc minuts...</p> <p>E: Vale.</p> <p>A: ...i ja està. Hehehe.</p>	<p><b>Pregunta 6</b>  Origen  Qualificador  Operacions  Algebraic</p>

Taula 4.13: G\_3E\_G5\_A1

## G\_3E.G6.A1

E: Va endavant.

A: Doncs, el primer... Doncs hem fet el terra, primer de tot. Llavors com que són vint nivells sobre terra hem començat a fer els vint pisos.

**Pregunta 1**  
Origen  
Qualificador  
Representació

E: Ehem!

A: I els set nivells soterranis també els hem fet allà.

E: Ehem!

A: A sota ter... a sota la línia que hem fet abans.

E: Vau comprovar el que havíeu fet?

A: Sí.

E: Sí? Perquè, què ens deia l'enunciat de la...?

A: Imaginem un edifici de vint nivells sobre terra i set nivells soterranis.

E: Ehem!

A: Però va dir...

E: I què més deia?

A: Numerar cada planta adequadament. Ah!

E: Ah! Això no m'ho vau fer? No?

A: No, segurament.

E: Us vau despistar?

A: Suposo, perquè xerràvem bastant.

E: Bueno. No passa res. Endavant.

A: En el primer...

E: Aquí vau estar d'acord a l'hora de donar respostes? Us va costar?

A: Bueno... alguns van dir el 0 i els altres el guionet, el signe  $-$ .

**Pregunta 2**  
Origen  
Qualificador  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

E: Aha!

A: Llavors al final, bueno... vam votar quina era i quina no.

E: Democràticament o ...

A: Sí.

E: Molt bé.

A: I al segon... tercer soterrani. Com que era el tercer. doncs, vam posar el signe  $-$ . ja que si fos cap amunt seria un  $+$ . I aquí també seria lo mateix. Aquí no me'n recordo perquè hi havia aquesta  $t$ .

E: Quart, no?

A: Sí, suposo. A la  $d$ , doncs, normalment fem servir el  $-$  i el  $-$ . Però normalment no fem servir el  $+$  perquè, ja, si no poses ja es nota que és una... sobre el pis i els... I aquí, doncs, vam tenir una ja... no ens sortia el nom, llavors... llavors si no ens sortia el nom dels nombres enters. llavors no vam posar res.

E: Però després ho vau afegir, no?

A: Sí, en vermell.

E: Molt bé.

A: Doncs, el primer... ho vam fer com que estàs al primer pis. Doncs, serà  $1 + 4$  i estaries al pis 5. La  $b$ , doncs, seria un pis. Estàs al primer i si baixes 5, doncs, seria  $-5$ . I hem utilitzat sumes i restes aquí. Que hem utilitzat les sumes, els símbols  $+$  i  $-$ . Bueno no, aquí ens hem equivocat i no són ben bé iguals perquè hi ha en el primer...

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions  
Polisèmia

E: Els símbols de les activitats 1 i 2 són iguals que els utilitzats als primers apartats?

A: Ah, sí!

E: Els símbols només.

A: Els símbols, sí. Però els... no els representen el mateix ja que els primers representen la posició que estan. Si estan a sobre o a sota i aquests per fer les operacions.

E: I vosaltres què... què havíeu decidit posar?

A: Bueno. Hem posat no, perquè una suma de valor i l'altre el disminueix.

E: I després heu afegit en vermell...

A: Sí.

E: després de la posada en comú. Molt bé.

A: A la 4. Ah! Contrari apujar cinc pisos seria baixar cinc pisos. Que en aquest cas seria  $-5$ . I el contrari de baixar dos pisos seria  $+2$ .

**Pregunta 4**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Aha!

A: I hem utilitzat els símbols  $+$  i  $-$ . Hem utilitzat els mateixos símbols però... representen diferents coses. I en aquest cas, representen que és el contrari del altres.

E: Molt bé. Algu més en aquesta pregunta?

A: No. Mmm... no!

E: No. tots van estar d'acord, més o menys? Els que...

A: Sí, més o menys vam estar d'acord però no ho vam encertar del tot...

E: Mmm... això no em preocupa.

A: I aquí...

E: A veure, anem a la pregunta 5. Sí.

A: I aquí lo que pots atribuir als símbols  $+$  i  $-$  és que pots fer les operacions, la posició que estan. Si estan sota terra, sota en... en el zero. Bueno... a partir del zero i dir el contrari de quins són els números.

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Molt bé. Pregunta 6.

A: I aquí ens vam equivocar una mica. perquè no vam utilitzar algebraica. Bueno, només al primer sí.

**Pregunta 6**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic

E: Al primer sí. No?

A: Sí, a la primera sí. I era  $3 - x$  entre  $-5$  que donava  $-5$ . Ja que, no saps quants pisos has pujat. Bueno, no saps quants pisos has de pujar per arribar... al soterrani 5.

E: Ehem!

A: I al  $b$ , bé aquí l'hem respost directament i... però hauria de ser  $4 - x$  i donaria que estàs al soterrani 2. Bueno... i els altres són més o menys el mateix.

E: Molt bé. Molt bé.

## G\_3E.G7.A1

E: Endavant.

A: Doncs...

E: Què vau fer per fer això?

A: Aquí vam marcar amb una línia com si fos la planta zero que, quan entres és quan trobes la planta zero. Llavors diu que hi han vint nivells sobre terra. Llavors vam fer que la planta zero, el nivell zero, sigués el terra. I vam fer vint nivells cap a dalt i els set nivells soterranis. Doncs igual, el nivell zero, doncs set cap avall. I bueno... i ho vam dibuixar així!

E: Vale. Vau assegurar-vos? Quantes plantes havia de tenir aquest edifici, en total?

A: Mmm... En total, comptant amb la zero, vint-i-vuit.

E: I en principi, per l'enunciat?

A: Vint-i-set.

E: Uuuf! No us va provocar cap conflicte això? Ningú...

A: No,no.

E: Molt bé. Seguiu endavant.

A: Mmm...

E: En aquesta mmm... segona pregunta...

A: La segona?

E: Eh! No, la pregunta 2, vau tenir dificultats?

A: Mmm... O sigui, la primera planta baixa com en totes és la planta 0. Llavors que és el tercer soterrani, cm està sota zero, seria negatiu i com és el tercer, doncs  $-3$ . I que ets al quart pis, com no et fica que ets al soterrani sinó cap a dalt, fiques  $+4$ .

E: Aha!

A: Al  $d$ , quins... Doncs, hem utilitzat el  $+$  i el  $-$ . El  $-$  per si estàs sobre la planta zero i el  $-$  com per dir que estàs al soterrani, que estàs per sota la planta zero. I hem utilitzat números enters i el... llenguatge algebraic.

E: Tercera pregunta. Aquí havies de...

A: Vale. Mmm... Com que ens diu que ets al primer pis i puges quatre pisos. Doncs, hem ficat el 1, del primer pis, i com puges quatre, doncs, sumes quatre pisos,  $1 + 4$ . Al  $b$  fica que ets al primer pis, doncs un 1. I com baixes cinc, doncs,  $-5$  plantes. Mmm... en el... bueno en el  $a$  i en el  $b$ , hem utilitzat les operacions de suma i de resta. Suma i resta lo que he dit abans. Aaah! Els... igual que abans hem utilitzat la suma i la resta mmm... "Els signes ... són igual?" Sí, sí que són iguals perquè és la suma i la resta. I... sí, sí que... bueno... representa lo mateix, però... la suma, resta. Que el  $+$  que està per sobre la planta 0 i el  $-$  per... o sigui per baixar o estar a sota i el  $+$  per pujar o que estava sobre la planta zero. Saps?

E: Llavors... pensàveu tots que el significat era el mateix?

A: Sí, però no ho vam apuntar.

E: Aha! A: Mmm... doncs, el contrari de que sumes cinc pisos, mmm... si sumes..., si puges cinc pisos, seria  $+5$ . Llavors el contrari seria  $-5$ . I el contrari de baixar dos pisos, igual. Si en baixes dos, seria  $-2$  però el contrari  $+2$ . Mmm... El que hem utilitzat per indicar el contrari de de pujar o baixar és per... O sigui, el contrari de pujar seria el  $-$  i el contrari de baixar seria el  $+$ . Mmm... bueno doncs no, no hem utilitzat els mateixos perquè... o sigui... els nombres han canviat però els signes són igual. La suma i la resta. E: Amb això tots vau estar totalment d'acord?

**Pregunta 1**

Origen

Qualificador

Representació

**Pregunta 2**

Origen

Qualificador

 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ **Pregunta 3**

Qualificador

Operacions

Polisèmia

**Pregunta 4**

Qualificador

Operacions

Simètric

Polisèmia

A: Sí.

E: Anàveu tots a la una en el grup?

A: Sí.

E: Molt bé.

A: Mmm... “Quins són els significats que pots atribuir als...?” El  $+$ ... o sigui... mmm... lo del nombre positiu que indica que estàs per sobre la planta 0. I el negatiu que és el nombre... o sigui, el  $-$ , que és el nombre negatiu que... o sigui, diu que estàs per sota la planta zero en el soterrani i tot això...

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: I no vau trobar-li cap altre significat?

A: Mmm... o sigui sí però ara no... És el que va dir l’Ona en veu alta... però ara no me’n recordo.

E: Aquí havíem de... la pregunta 6... en terminologia algebraica. Utilitzant expressions algebraiques.

**Pregunta 6**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic

A: Mmm... “Quants pisos he pujat o baixat per... arribar al cinquè... mmm...?” Doncs... en el cinquè... doncs si és al tercer pis ... mm... Fiques el 3 al tercer pis i sumes  $x$  perquè no saps quant has de pujar o baixar. Llavors, és igual a  $-5$ , que és el cinquè soterrani.

E: Aha!

A: En el  $b$ , “quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?” Doncs, al quart pis li sumes  $x$  perquè no saps quant has de pujar o baixar. Llavors, és igual al  $-2$ , que és el segon soterrani. Era al primer soterrani i he anat al quart pis. Quants...?

E: Tots aquests... a part del primer. els vau fer tots després de la posada en comú, no?

A: Què? Sí.

E: No us va donar temps? O...

A: No, no ho sabíem.

E: Vale. Cof, cof... I després vau veure-ho bé?

A: Sí, sí.

E: En canvi, el primer sí que l’havíeu fet? Vosaltres, l’apartat  $a$  l’havíeu fet abans de la posada en comú.

A: Ja, però... no sé . És que no sé si no ens va donar temps... o sigui... veus que vam ficar  $x$ , és igual...

E: Sí.

A: Llavors, no ens en vam ensortir. Però aquest sí. No sé...

E: Bueno.

A: La  $c$ , ...mmm... “si estic al primer soterrani”, que és  $-1$ , “i he anat al quart pis. Quant ha estat el moviment?” Com que pugues, li sumes  $x$  que, els pisos que has sumat és igual a  $+4$ , la planta quatre. “I si...?” Doncs, mmm... li... o sigui, és igu... més  $x$ ... Clar, els pisos que has pujat o baixat ... mmm... que és igual a  $-5$ , a la planta que estàs ara.

E: Aha! I ja està. Aquesta és la primera part.

### 4.1.3 Revisió i contrast de resultats

- P1. A la primera pregunta, la dificultat més repetida ha estat si posar la planta 0 i com posar-la. Tot i que quan els alumnes fan la reflexió s'adonen que cal posar el zero per marcar la frontera entre positius i negatius no tots els grups tenen clar que correspon a una planta. Alguns només el representen com la línia de terra.
- P2. A la segona pregunta la gran majoria ratifiquen la validesa i correcció dels quatre primers apartats, però, hi ha diversos grups que mostren dificultats per identificar i explicitar que fan ús dels nombres enters.
- P3. A la tercera pregunta arran de les observacions fetes pels alumnes entrevistats podem valorar el fet que, la majoria de grups no van tenir dificultat a l'hora d'expressar, utilitzant nombres enters, els moviments entre plantes. És a dir utilitzen els signes  $+$  i  $-$  com a qualificadors i per fer operacions. Només dos dels entrevistats confirmen les dificultats, en els seus respectius grups, per entendre el que es demana als cinc primers apartats. A l'hora de respondre a l'últim apartat manifesten dificultats per identificar els diferents significats de símbols que s'escriuen idènticament i, en alguns casos, fins després de la posada en comú no identifiquen els diferents significats que se'ls hi poden atribuir.
- P4. A la quarta pregunta les observacions apuntades pels entrevistats confirmen que utilitzen els signes  $+$  i  $-$  de manera adequada per indicar posicions i inclús per indicar el contrari d'un moviment però els és difícil reconèixer la polisèmia. Molt pocs dels 15 grups van ser capaços de identificar l'ús de símbols del mateix tipus per fer referència a significats diferents. Una part important dels grups diuen que els significats dels símbols és el mateix i alguns grups no entenen la pregunta 4d. Pocs grups identifiquen la diferència de significats d'un mateix símbol. Inclús després de la intervenció a l'aula no ho esmenen de manera clara.
- P5. A la cinquena pregunta la majoria de grups són capaços d'identificar la utilització dels signes  $+$  i  $-$  per indicar una posició i per indicar un canvi, és a dir per sumar i restar. Costa més trobar grups que identifiquessin l'ús del signe  $-$  per indicar el simètric. De tota manera arran de les entrevistes podem confirmar que identifiquen la polisèmia dels signes, tot i no fer-ho en tots els aspectes.
- P6. A la sisena pregunta pensem que cal tenir en compte diferents tipus de resposta:
- Grups que trobaven difícil la pregunta i que no sabien com respondre.
  - Grups que justifiquen no respondre o respondre sense llegir amb detall la pregunta, per manca de temps.
  - Grups que només responien a la pregunta de forma numèrica, sense fer ús de l'àlgebra.
  - Grups que forcen l'aparició de lletres però que no utilitzen l'àlgebra per descriure la situació plantejada.
  - Grups que comencen responent bé el primer apartat però que no ho fan als altres. De vegades justificat per la manca de temps i d'altres per la manca de seguretat d'estar-ho fent bé.

En alguns casos, després de la intervenció del professor i de la posada en comú, fan correccions adequades. Això es pot observar, sobretot, en els últims tipus de resposta.

## 4.2 Respecte al qüestionari de la Cronologia de Catalunya

Hem separat aquesta secció en tres blocs. El primer detalla les transcripcions dels alumnes entrevistats del grup-classe A respecte al qüestionari de la Cronologia de Catalunya. El segon detalla les transcripcions dels alumnes entrevistats del grup-classe E respecte del mateix qüestionari. En cada transcripció ressaltem amb colors la informació rellevant. Al tercer bloc fem una revisió dels resultats. Com a la Secció 4.1, per tal de poder organitzar de manera més eficient les respostes al qüestionari de la Cronologia de Catalunya, poder revisar i contrastar la informació rellevant, hem utilitzat una gamma de colors. De la primera a la sisena pregunta, hem ressaltat les respostes respectivament amb violeta, verd, vermell, blau, morat, taronja i marró.

Si en algun cas no apareix un color és perquè l'entrevistat no comenta la pregunta o incorpora dues preguntes en una resposta. Només hem parat atenció a la informació que permet aclarir dubtes plantejats a l'hora de revisar els qüestionaris o que aporten algun punt de vista diferent a les respostes recollides al Capítol 3. També hem afegit al costat de les transcripcions una columna que indica, en blau, la pregunta i els continguts matemàtics presents.

### 4.2.1 Organització de les respostes de les entrevistes pel 3A

G\_3A\_G1.A2\_C

E: Doncs explica'm com vas fer-ho per respondre les preguntes aquestes? Estàveu tots d'acord, o no?

A: Bueno, primer, en algunes preguntes vam tenir una mica de discussió. Perquè vam haver de mirar, abans, si donava bé el resultat perquè alguns dèiem: “no era així” o, “no, era d'una altra manera”, com la 3.

E: A mida que vagis... d'això... em vas explicant a quina recordes...

A: Sí.

E: A la primera pregunta, aquesta...

A: La 1 i a la 2 van ser fàcils perquè vam estar tots d'acord. Perquè en substituir l'edat de Crist pel  $-$ , perquè és anterior, i llavors seria com un número negatiu.

**Pregunta 1**

Qualificador

**Pregunta 2**

Qualificador

Però a la 3 ens vam discutir perquè hi havia gent que deia, en el grup, que no, que era  $-580 - 206$ . Però això el que feia és sumar-ho i llavors donava set-cents i algu. I llavors, vam pensar que no. Que s'havia de ficar amb parèntesis i llavors,  $-580 - (-206)$  perquè donés el resultat.

**Pregunta 3**

Qualificador

Operacions

E: I dóna el resultat que heu posat?

A: Sí.

E: N'estàs segura?

A: Sí.

E: N'estàs segura?

A: Jo crec que dóna això.

E: Sí?

A: Siiiiii.

E: A veure.

A: Com, que a veure-ho?

E: A veure com ho faries això!



A: Jo ho he fet amb la calculadora. Hehehe.

E: Aaaaa! I a mà?

A: Pues...

E: Sí, sí que dóna. Molt bé. Perfecte.

A: Ah! Vale.

E: Hehehe... Seguim. Amb això vau estar tots d'acord?

A: No va haver-hi problemes. Mmm... en aquestes dues sí, en aquesta, no!

E: Val. Aquí us donava un número negatiu, no us... presentava cap problema?

A: No.

E: No? Molt bé. Endavant.

A: Mmm... Bueno aquí, com que ens va dir que escrivísim una expressió algebraica. Pues, vam dir, doncs ha d'haver una  $x$  que seria els... els... l'any que va néixer i llavors vam fer  $x + 62 = 45$ . I a la  $b$ , ja vam fer el càlcul, que dóna  $-17$ . I per saber l'esdeveniment, pues, vam pensar que hauria de ser el de més aprop. I vam ficar el de Tarraco.

**Pregunta 4**

Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic  
Representació

E: Molt bé. Perfecte.

A: I a la 5 no vam tenir cap dubte. Però sí que vam fer una... vam ficar a la  $b$  una cosa que... bueno... un número que no va ficar ningú. Perquè nosaltres vam interpretar que es referia a l'any que prenem com a origen, pues, des de que va aparèixer l'ésser humà i vam ficar l'1200000. I l'altra gent va ficar, pues, un altre perquè es pensava que era l'origen d'això.

**Pregunta 5**

Origen  
Qualificador  
Simètric  
Representació

E: Aha!

A: I a la  $c$  vam modificar-ho perquè, no sé perquè, vam ficar  $-27$  i era només el  $-$ . I a la línia del temps, doncs, vam col·locar les dades i ja està. Amb això sí que vam estar tots d'acord.

E: Però aquí, fixa't què demanava en la línia del temps, què ens demanava? Representeu...

A: "Una part de la línia temporal que ens permeti visualitzar, clarament, tot el què s'ha demanat en aquesta pregunta." Vam ficar Tarraco.

E: Aha!

A: I no vam ficar ni l'any 1 ni res.

E: I, però aquí, no feia referència a dos esdeveniments, aquesta pregunta?

A: Sí.

E: I només en vau posar un, vosaltres?

A: No!

E: Sí, el de l'any 27 i el de l'any  $-27$ , no?

A: No, nosaltres vam ficar el del 27 i el del origen de...

E: Val, val. Perfecte. Molt bé.

A: Mmm... I en aquestes ja no vam tenir cap dubte. Perquè a la 7 ja, sí tots vam dir: "hem utilitzat els nombres enters".

**Pregunta 7**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

I aquí... doncs... mmm... estàvem d'acord en què havíem utilitzat el mateix símbol, però que li hem donat diferents significats. Ja que pot significar el contrari, o sigui, el menys pot significar que un nombre és negatiu, el contrari o que estem restant. I aquí, sí que vam estar tots d'acord perquè a l'anterior ja ens vam

**Pregunta 6**

Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Molt bé, doncs. Alguna cosa més?

A: No

## G\_3A\_G2\_A2\_C

E: On eres?

A: Bueno... mmm... a la primera activitat vam llegir que teníem de buscar una dada en concret. Llavors vam... anar a...l llistat de dades que... on d'anys que hi havia a les dos pàgines anteriors.

E: Aha!

A: I com que ens demanava l'edat dels... grecs, doncs, vam mirar... doncs això, la vam buscar i vam... vam ficar... la... l'any i el... el... i la...

E: L'esdeveniment.

A: Sí, l'esdeveniment.

E: Val.

A: Llavors, el mateix a l'activitat 2, que ens demanava la... l'edat d'una revolta que va haver-hi entre els Indíbil i Mandoní.

E: Aquí lo que veig és que vau fer canvis, no? Després de la posada en comú, en aquesta activitat?

A: Sí,... mmm... ens vam confondre i en comptes de ficar els nombres enters ho vam ficar com si fossin en anys a geografia. Vam ficar abans de Crist en els dos casos quan tindria que haver sigut en nombres enters... amb nombres amb el signe de... de negatiu.

E: I això, us en vau adonar i ho vau modificar posteriorment?

A: Sí.

E: Molt bé. En aquesta activitat d'aquí, la número 3. Ah!... Sí, que ens deia...

A: Sí, el temps...

E: ... el temps que havia passat entre els dos esdeveniments.

**Pregunta 1**  
Qualificador

**Pregunta 2**  
Qualificador

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions

A: Llavors, aquí vam... vam... entre els quatre vam decidir que la dada que ens demanaven no la sabíem. Per tant... vam utilitzar una expressió de  $y$ ... de  $x$ , que era la dada que ens... de la primera pregunta, la restem a la de la segona. Llavors, aquí també ens vam confondre i vam... bueno... vam ficar la d'abans de Crist i... bueno... aquí no ho vam rectificar però tindria d'estar rectificat. Però, tindrien que ser símbols negatius.

E: Tots estàveu d'acord, en aquesta...?

A: Sí.

E: Perfecte. Doncs, anem per la quarta.

A: A l'activitat 4..., ens deia que un personatge havia mort l'any 45. Llavors instintivament vam... tots vam acceptar que es referia a l'any 1945. Per... les... de la tira dels anys 20. Això de... ens havíem quedat amb això... però en realitat... mmm... es referia a l'any 45 després de Crist.

**Pregunta 4**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic  
Representació

E: Això ho vau modificar posteriorment, veig... quan...

A: Sí... sí.

E: Després de la posada en comú vau...

A: Sí.

E: Molt bé.

A: I llavors que... a l'apartat  $b$ , de la mateixa pregunta ens deia que... quin esdeveniment tenia pels voltants. Llavors, com que... a l'haver... llavors a l'haver ficat un resultat erroni, doncs, van tindre que modificar, també, l'esdeveniment.

E: Primer havíeu posat l'exposició universal de Barcelona i després vau posar lo de Tarraco.

A: Sí,,, sí.

E: Molt bé. Tots hi estàveu d'acord? Vull dir, quan vau fer les correccions, tothom ho veia clar?

A: Sí... Sí, sí. Bueno, al principi va costar, aixins, una miqueta de... de... que no acabàvem d'entendre de perquè havíem posat el 1945 i no el 45 o aixins... però després ho vam entendre tots...

E: Vale. Molt bé.

A: Llavors a l'activitat 5 ens... mm... Estava dividida en quatre parts i teníem que dir el... quin esdeveniment va passar en una dada concreta. I llavors, vam... ens deia... ens ficava un número positiu i llavors vam entendre que l'any simètric es referia a l'oposat. Per tant, vam agafar l'any 27 abans de Crist.

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Simètric  
Representació

E: Aha!

A: Que és... l'esdeveniment... és que Tarraco esdevé ciutat imperial.

E: Aha!

A: A l'apartat *b*, quin any l'expressem com a origen? Llavors... vam agafar...l'any 0 com a origen.

E: Aha! Veig que vau fer modificacions. Per això, també, vam dubtar la... Veig que aquí teniu una cosa tatxada. Vau dubtar o...?

A: No... la Marta va voler escriure un zero però sense voler va escriure una *o*.

E: Ah! No passa res.

A: Llavors... vam agafar com a origen l'any 0... com si fos el naixement de Crist. Però, després, a la posada en comú, vam veure que altres grups havien ficat aquests orígens. Com a l'origen de la crisi de l'Univers o també de l'origen de l'escriptura.

Llavors, a l'apartat *c* ens deien amb quin símbol... bueno amb quin símbol expressariem el... la dada de l'apartat *a*. Llavors, el símbol negatiu.

E: Aha!

A: I el *d*, vam representar una, bueno, ens deien que representéssim amb una línia temporal les preguntes de... bueno, els apartats anteriors. Llavors... vam fer una recta numèrica que no la vam acabar a temps. Llavors, vam ficar al centre d'aquesta recta... vam ficar el 0 com a origen i a la... a la part dreta del... d'aquest origen... positiu... l'any 27 després de Crist, +27, i a la part esquerra el -27.

E: Bueno.

A: Llavors a la... pregunta *b*, ens demanava, dels apartats anteriors quins símbols havíem utilitzat per escriure. I llavors havíem ficat el símbol negatiu com a... pam... vam utilitzar el mateix símbol per tres parts: com a resta, com a nombre contrari i com nombre negatiu.

**Pregunta 6**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Aha!

A: Llavors a la... activitat 7, el mateix, que havíem utilitzat nombres enters i...

**Pregunta 7**  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Llavors no la vam acabar de corregir. Que vam ficar els... els tres motius pels que vam ficar el símbol de resta i negatiu i contrari i ens faltava ficar la... dels positius. Que en aquest cas no els havíem ficat.

E: Bueno... Aquestes dues activitats... veig que, estan en vermell. No us va donar temps d'acabar-les?

A: Sí, no ens va donar temps d'acabar-les perquè vam estar discutint amb... les respostes amb els altres. Perquè, en principi, no tots estàvem d'acord i llavors, vam estar discutint...

E: Se us va fer llarg.

A: Sí!

E: Bueno. Moltes gràcies, doncs.

E: Alguna cosa més que em vulguis dir?

A: No, bueno que... l'activitat aquesta, que ens ha semblat correcta. Aixins que... és una bona manera de repassar el que s'ha treballat aquests anys.

---

Taula 4.17: G\_3A\_G2\_A2\_C

## G\_3A\_G3\_A1\_C

E: Val. Doncs ja podem començar. Quan vulguis.

A: Eh! Bueno, aquí preguntava “quin número enter utilitzaríeu per expressar l’any en què els grecs arriben a Catalunya?” Nosaltres vam fer  $-580$ ... perquè... bueno... és com si fos abans de Crist però amb el menys. Expressat aixins.

**Pregunta 1**  
Qualificador

E: AHa!

A: Aquí... bueno... igual.

**Pregunta 2**  
Qualificador

Mmm... “com expressaríeu, en llenguatge matemàtic, els càlculs necessaris per tal de saber quants anys han passat entre aquests dos fets, utilitzant una única expressió?” Bueno, pues..., és una resta normal. Mmm... les dues dates restades i lo que queda... vamos...

E: Aquí les dues dates eren negatives i, en canvi, la resta que heu fet vosaltres era entre números positius.

A: Perquè et pregunta... els anys que han passat... però...  $-374$  seria una data.

E: Aha!. Vale. Perfecte. No, no... només preguntava... a l’haver fet la resta...

A: No? Però si són anys que han passat, no seria negatiu? No? Ah! Espera, però ho he fet bé? Sí.

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions

E: Sí.

A: Mmm... “Si un personatge mor l’any 45 i ha viscut 62 anys, escriviu una sola expressió algebraica que englobi els càlculs necessaris per saber l’any que va néixer?” Bueno... aquí vam... mmm... vam fer... a veure... aquí és igual  $45 - 62$  igual a  $-17$ . Pues, bueno, hehe... pues això, vam fer una resta i ja està.

**Pregunta 4**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic  
Representació

E: I directament el que us donava és...

A:  $-17$ .

E: Que és l’any que...

A: Que va néixer... sí.

E: Vale, perfecte.

A: “Quin esdeveniment de la cronologia donada esdevingué pels voltants del seu naixement?” Pues, pels voltants del naixement, vam ficar... el naixement de Jesucrist en el any 0. Bueno... que alguns diuen l’any 1, però no ho sé, bueno...

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Simètric  
Representació

A: Sí... a veure... “quin fet va passar en l’any simètric al 27 després de Crist respecte l’any que prenem com a origen?” Tarraco esdevé ciutat imperial per... perquè... bueno aquí vam fer al revés de 27,  $-27$ .

E: Aha!

A: Amb quin número expresseu l’any...

E: Això ho vau tenir clar, tots? de que el simètric del 27 era el... ?

A: Sí!... sí! “Amb quin número expresseu l’any que prenem com a origen?” El 0. Bueno... que és... el número entre el  $-$  i el  $+$ .

E: Aha!

A: I... “amb quins símbols matemàtics podeu expressar l’any corresponent al fet demanat a l’apartat  $a$ ?” Bueno, pues amb  $-27$ , pues amb el  $-$  no?

E: Aha!

A: “Representeu amb...” Bueno... hauríem de ficar la línia temporal i vam ficar el...  $-27$ , després... abans dde 0.

E: Molt bé. Perfecte. Sense cap problema? Tots estàveu d’acord? Tothom?

A: Sí... sí.

E: No vau tenir dificultats a l'hora de... ?

A: Pues no, no. Ho vam fer-ho...

E: Molt bé.

A: Molt ràpid, sí. Mmm... “ en els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb els significats diferents?” Aquí, no... no enteníem molt bé la pregunta. Però... vam entendre... mmm... si es referia al + seria el -, no? Però... clar, cada un té... mmm... diferents significats i vam ficar... sí, el -.

E: Ehem! Aquí no... no vau interpretar , per exemple, de que fèiem referència a només el signe - en diferents situacions? O sigui, vau pensar el +, el - i així...

A: En diferents situacions com podem... dir el -.

E: Clar!

A: Això és això!

E: Aha! Vale.

A: I vam ficar-ho que són... que eren tres. No? Doncs, ho podem utilitzar en operacions per restar, per dir que és un número negatiu o que està per sota del zero. Bueno... més o menys, no sé si era així, dit bé... però era la idea, no?

E: És el que vosaltres vau expressar... això...

A: Bueno... i els exemples...

E: Aha!

A: “ Quin tipus de nombres heu estat utilitzant per descriure les situacions anteriors?” Pues, els nombres enters, vam ficar.

E: Molt bé. perfecte. No vau tenir dificultats especials ni...?

A: No, per res. Per res.

E: Us va semblar més còmode aquest que l'anterior?

A: Sí, sí... a mi em va resultar més fàcil i directe . totes les preguntes més fàcils i...

**Pregunta 6**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

**Pregunta 7**  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Taula 4.18: G\_3A\_G3\_A1\_C

## G\_3A\_G4.A2\_C

E: Vale. Ai, espera't! Ja està, endavant!

A: Bueno, a la primera activitat vam pensar en... una mica en la recta numèrica. Aquella del 0 i els menys. Pues, vam fer com un eix cronològic però amb això. Llavors vam decidir que con estàvem per sota de l'any 0, que és quan va néixer Crist, pues... vam... ficar  $-580$

i vam fer lo mateix amb el segon exercici. Però com estàvem per sobre del 0 vam ficar  $-206$ .

Aquí ens vam liar una mica i com veus... ho vam fer una mica malament...

**Pregunta 1**  
Qualificador

**Pregunta 2**  
Qualificador

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions

E: No, malament...vosaltres vau... Després de la posta en comú veig que vau fer canvis.

A: Sí.

E: Bueno.

A: I vam arreglar això perquè ens vam equivocar en el lloc on vam posar el parèntesis.

E: Bueno... No passa res, d'això es tractava.

A: Sí. Aquí, bueno... com fica fer una expressió algebraica ens vam equivocar i vam posar  $x + 45 = 62$ . Però a l'hora de posar-ho en comú vam veure que ens vam equivocar.

**Pregunta 4**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic  
Representació

E: En què us vau equivocar?

A: Perquè, mmm... no sabíem on ficar la  $x$  i, ... mmm... en ves de ficar 1945 vam pensar que era el 45. Llavors, des de que vam pensar que era el 45 ja ens vam liar i no sabíem on ficar ben bé la  $x$ .

E: Aha!

A: I... i arrel de que no sabíem ficar la  $x$ , vam ficar Tarraco que era... Perquè en el  $-17$  s'acosta. En teoria era el  $-17$  que s'acostava més a Crist però estava més prop de Tarraco. I llavors vam ficar l'esdeveniment de Tarraco, la ciutat imperial de l'any 27 abans de Crist.

E: Molt bé.

A: Mmm... el cinquè exercici vam fer... mmm... "quin fet va passar en un any simètric..." mmm... pateix un... bueno, vam fer lo mateix... però a lo contrari. Vam fer aban... després de Crist i era el que més s'apropava al Tarraco... que va fer un saqueig a França. I...

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Simètric  
Representació

E: Com? Com ho vau pensar això?

A: Perquè... diu això de... "quin fet va passar l'any simètric a 27 de Crist i llavorans no sabíem... l'haviem entès correctament i com aquest s'aproximava més a l'any 27 després de Crist vam ficar aquest.

E: Aha!

A: I a la  $b$ ...

E: I 260? Jo lo que no veig és que al 260...

A: Sí, perquè és que a l'eix que vam ficar al principi és el que s'acosta més a l'any 27 després de Crist.

E: O sigui, que a lo que vau anar va ser a l'esdeveniment proper en quant a...

A: Sí.

E: Vale, vale, vale. Perfecte.

A: Llavorans a la  $b$  vam fer lo que més o menys ens...sonava de lo que ens van explicar a història. Que és el 1, és l'any que es fica com origen de com va néixer Crist. Es fica com a any 1. Llavorans, bueno vam ficar el + perquè és després de Crist, mmm... ho vam fer com la línia aquella. Llavors vam fer amb lo que t'he dit de la línia. Vam ficar el 0 al mig i, que és com el dia, l'any que va néixer Crist. Com si partíssim de l'inici i llavors vam ficar l'any... que va néixer i l'esdeveniment després de Crist.

E: De totes maneres aquí vau posar com a origen l'1 i veig que a la...

A: Sí, perquè per expressar una línia no podem ficar com a origen 1 i llavorans vam ficar el 0.

E: Vale.

A: Mmm... en els... bé... mmm... com en els altres apartats vam utilitzar molt el símbol  $-$ . Pues... mmm... ens pensàvem que es referia al  $-$ . Llavors vam utilitzar el contrari per fer l'operació de menys menys cinc-cents... menys entre parèntesis  $-580$  més  $206$  perquè ens donés la diferència. Llavors el negatiu per lo mateix... per fer el negatiu del  $-580$  i la resta per restar el  $508$  entre  $206$ .

I... els números enters perquè en tots aquests exercicis sempre hem tractat amb números enters. Perquè no n'hi ha de decimals ni això...

E: Molt bé. Tots estàveu d'acord amb això? En aquesta part?

A: Sí, la part que ens va liar més va ser la primera pàgina. Perquè no estàvem d'acord en les restes i vam discutir una mica, però, al final ens vam ficar d'acord.

E: Molt bé. Moltes gràcies.

**Pregunta 6**

Qualificador

Operacions

Simètric

Polisèmia

**Pregunta 7**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Taula 4.19: G\_3A\_G4\_A2\_C



## G\_3A\_G5\_A1\_C

E: Comencem.

A: Bueno, nosaltres en ves de fer servir menys, o sigui  $-206$  anys, a part... o sigui, fixant-nos en el 0 que era... l'any del naixement de Jesucrist. Vam voler posar abans de Crist que per nosaltres comptava com un menys i després de Crist que per nosaltres comptava com un més.

E: Aha!

A: Ho vam fer així. Per exemple, la primera pregunta, “quin és l'any que els grecs arriben a Catalunya”. Nosaltres vam trobar el 580 abans de Crist, o sigui, també es podria dir  $-580$  però nosaltres ho vam trobar més apropiat fer-ho així.

E: Però aquí... us demanava un número enter a l'hora de...

A: Ja, però, no sé... com sempre s'ha expressat abans de Crist, després de Crist. Vam voler posar-ho així.

E: Vale.

A: Sí, tampoc ho vam comptar això.

E: Bueno, no passa res. És el que va fer vosaltres. Perfecte.

A: “Quin número...”, la segona pregunta... la bueno... va ser la mateixa que la primera però amb diferents dates i vam respondre el mateix: 206 abans de Crist. Que en ves de posar-ho menys, vam posar, abans de Crist.

E: Vale.

A: I la tercera... no sé, no m'hi vaig matar. Ah! Sí, vam fer una resta. Bueno, ens vam dir quants anys havien passat entre els dos fets: l'arribada dels grecs a Catalunya i l'any de la revolta. I vam posar  $580 - 206$  que són... els... o sigui... els anys. Podríem dir...

E: Aquí veig que havíeu escrit una altra cosa, primer.

A: Sí, perquè vam voler posar abans de Crist amb menys. Però ens vam adonar que no, que era més fàcil fer-ho tot a més i clar. Total... ha sigut el mateix que... ens donava el mateix resultat. I vam decidir-ho fer així. Perquè, no sé, vam voler treure abans de Crist, deixar el número enter  $580 - 206$  i ens va donar ”374” que... bueno... són el que ens va donar la diferència.

E: Molt bé.

A: En la quarta pregunta. bueno... ens deia, més o menys, el personatge que mor l'any 45 i ha viscut 62 anys. Hi havia gent que ho va interpretar de diferents formes, alguna gent del 1900. Nosaltres... l'Egor va proposar-ho fer-lo del 1900 però jo vaig dir que no. perquè si és l'any 45... o sigui... si ens basem en el zero, és el naixement de Jesucrist és l'any 45 quan Jesucrist tenia 45 anys. I, bueno jo... ens vam voler basar al final amb això.

E: Aquí va tenir discussió, però, entre el 1945 i l'any 45.

A: Sí, sí. Però bueno... que va... o sigui va... va cedir. O sigui, va dir que sí, que...

E: Hahaha. El vas convèncer ràpid. Hahaha.

A: Sí, amb això bastant ràpid.

E: Molt bé.

A: I bueno, vam... vam...

E: De totes maneres, aquí us demanava una expressió algebraica...

A: Pues ho vam fer malament, la veritat.

E: Bueno, malament no.

A: Però...

E: El resultat... el resultat, en principi, és correcte, no? Lo que aquí...

**Pregunta 1**  
Qualificador

**Pregunta 2**  
Qualificador

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions

**Pregunta 4**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic  
Representació

A: Però no vam fer el que ens van...

E: Ho vam fer numèricament. No passa res.

A: I l'any... què va passar... pels voltants del naixement de Jesucrist. Nosaltres vam posar... Tarraco esdevé ciutat imperial. Que va ser l'any 27 abans de Crist, o sigui, 27 anys abans de que naixés Crist i el naixement. Perquè també... va ser el que va passar... vamos! ... en el moment.

E: Molt bé.

A: Mm... A la cinquena. Sí, a la primera pregunta, també sobre les dades, no? A aquestes preguntes... només s'ha de mirar la taula.

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Simètric  
Representació

E: Mmm... Bueno... però... hi havia una pista de... aquí a... a l'enunciat...

A: Ah! Sí, que et deia el 27 després de Crist, que per nosaltres, ja com et vaig dir era com +27...

E: Aha!

A: Ens ho vam... deia respecte l'any que prenem com a origen, l'any simètric que era el  $-27$ .

E: Això ho vam interpretar bé? Vull dir, sense problemes.

A: Sí, sí, va ser molt fàcil.

E: Molt bé.

A: I Tarraco esdevé ciutat imperial que és el mateix que havíem posat aquí dalt.

E: Aha!

A: I tenim la data. I... l'any que prenem com a origen... és el... vam posar 0. Però jo crec que era 1. Perquè... o sigui... no, no! Sí... bueno... no, no, sí! Segueixo amb el zero, millor.

E: A veure, aquí hi ha una cosa clara, no? Si els dos anys són simètrics, si l'origen està en el 1. Hi ha la mateixa distància del 1 al  $-27$  que del 1 al 27?

A: No...

E: Per tant...

A: Per tant és el 0. Sí, sí... Ho vam fer bé, ho vam fer bé.

E: Però bueno... que teníeu dubtes de...

A: Sí, sí. Vam tenir...

E: Però perquè vam... vam tenir aquest dubte? Què us generava el dubte?

A: Ah! No sé... que, o sigui, el zero... va ser... va ser entre els dos... va ser l'Egor i jo vam dir és 0 o 1? No sabíem, no sabíem... al final ens vam acabar decidint bé.

A: I bueno... no sé, no sé què ens va provocar el dubte.

E: Bueno, no passa res.

A: I, "quins símbols matemàtics... al fet corresponent a l'apartat *a*. Doncs, com bé t'he dit abans, nosaltres després vam posar després de Crist. Per nosaltres era un menys. I aquí, bueno... hem contestat menys.

E: Abans no? Vols dir?

A: Sí, sí, o sigui, abans. Ai! Després, perdó! És que estava llegint la...

E: No passa res. Tranquil.

A: Doncs, abans ho comptem com un  $-$  i després com un  $+$ . Doncs... i vam posar  $-$ . I per últim havíem de fer una taula de... i representar el 27 i el 0. Nosaltres vam representar 0 al mig, meitat. 27 en +27 després de Crist, que per nosaltres és +27 i 27 abans de Crist, que és com  $-27$ . I vam representar. Les mides no són molt iguals però...

E: No, però està bé...

A: És el que vam...

E: Però vosaltres li teniu una mica de mania, no?, als signes negatius?

A: No, però no sé com, que ja vam agafar des del primer exercici: després de Crist o abans de Crist.

E: Aha!

A: I també, no sé, nosaltres ho trobem més fàcil que anar posant —.

E: Vale.

A: Més que res no et lies. bueno, per nosaltres era més liós anar posant menys.

E: Molt bé, molt bé. Cap problema.

A: Mm... A això vam... a la pregunta 6. Ah, sí! a l'apartat 6, a la pregunta, vam respondre que sí. Perquè... o sigui, per nosaltres com abans de Crist... Sí, a veure... no sé explicar-me molt bé, eh!... S'escriu de manera idèntica però amb significats diferents... Sí, sí al... al +27 per exemple per posar una data, eh! Nosaltres, clar... o sigui... posàvem, ai!... És que no sé explicar-ho. Al 27 després de Crist posa. Nosaltres li posàvem... clar, si tu ho veus allò, dius +27 després de Crist. Però per nosaltres era un menys perquè després de Crist ho traduïm a un menys i menys més dona menys. O sigui, nosaltres fem servir el + però ho interpretàvem com un —.

Ah! mira, i aquí ens diu explica quin és? Pues és el positiu.

E: Aha!

A: La c no la vam saber fer i a través dels comentaris de l'altra gent la vam... fer però amb boli vermell. Mmm...

E: Però lo que vau escriure, estàveu d'acord? Us sembla, després de la posada en comú que... aquí veig que diu...

A: No sé, perquè vam veure les respostes de la gent i vam dir jo crec que aquesta és correcta i l'Egor va coincidir amb mi.

E: Aha!

A: Bueno, en Pau no... va fer gaire. Però... també va dir que era correcta i vam... la vam apuntar.

E: I la última... la 7?

A: La 7, els nombres enters. Aquí, crec que vam coincidir tota la classe. va ser la única pregunta que vam coincidir tots. Que quins tipus de nombres heu utilitzat per descriure les situacions? Nosaltres, ara me n'adono que, no només vam fer servir... bueno, vam fer servir els enters però també el després de Crist i l'abans de Crist. Que no se li podria considerar enter però que... que per nosaltres també... saps?

**Pregunta 6**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

**Pregunta 7**  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

## G\_3A\_G6\_A1\_C

E: Un i dos. Endavant.

A: Pues... aquí, que diu...que quin número utilitzaríem per expressar un any que és abans de Crist. Llavors vam escriure menys perquè és com que Crist és... com... si fos el 0, no?

**Pregunta 1**  
Qualificador

E: Aha!

A: Llavors tot lo que estigui abans és negatiu i lo que està després és positiu. I, això... la següent pregunta també vam tornar a posar lo del signe negatiu.

**Pregunta 2**  
Qualificador

E: Aha!

A: I aquí... ho vam fer malament la... això... perquè era... havíem de sumar-ho en comptes de... o sigui, els dos eren símbols negatius i aquí vam posar un positiu, saps? Llavors...

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions

E: I?

A: Quan ho vam posar positiu va donar  $-374$ .

E: Sí!

A: I hauria hagut de donar... 686... menys.

E: Per què creus que havia de donar...?

A: Perquè havíem de sumar dos anys negatius.

E: Aha! Bueno.

A: Aquí lo del personatge no ens va quedar clar perquè deia l'any 45 i no sabíem si volia dir el 1945 o el 45. Vam discutir una mica i al final vam posar el 1995, ai! el 1945 i bueno, doncs, vam restar els 62 anys que havia viscut i va sortir quan va néixer.

**Pregunta 4**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic  
Representació

E: I per què vas pensar en el 1945?

A: Perquè és com una manera de parlar. Hi ha gent que diu  $j$ , per exemple, el 62 i o es refereix a l'any 62 sinó al 1962.

E: Vale.

A: Després, això de l'esdeveniment, doncs vam posar que... el seu naixement va succeir l'Exposició de Barcelona i ... perquè estava prop de dates més o menys.

E: Aha!

A: I llavors... aquí, primer vam posar-ho com...

E: Això? Què és? La pregunta 5, ara ja.

A: Sí, la pregunta 5. Diu "imagineu els fet sobre una línia que representi el temps... L'any simètric de 27, és que tots ens vam quedar com que no sabíem què era exactament. Llavors vam escriure...

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Simètric  
Representació

E: No entenieu la paraula sim... la paraula simètric?

A: Sí, sé què vol simètric però no sabíem que... que vol dir un any simètric, i ... vam posar que els romans arriben a Tarraco perquè... va ser el 27 després de Crist... que... o sigui...

E: Aha!

A: L'any que prenem com a origen ho vam pensar com, més o menys, com a origen religiós no que estem a l'any 2000 del calendari perquè... Representa que l'any 1 és quan va néixer Crist i llavors, pues... vam posar que era l'any 1. No com aquell grup que va posar un milió i pico... I llavors, els símbols matemàtics, doncs... més i més gran que, però això no ho sé perquè... ho vam posar així.

E: Per això, però, vau escriure vosaltres més i més gran que?

A: Sí, sí. Però no ho sé. I representant a la línia temporal... doncs... hem... posat els anys aquí que preguntava les preguntes.

E: Quins anys heu posat?

A: Hem posat el 27 i el 720 després de Crist.

E: I el 720?

A: Eh!... No... no sé... és que aquesta pregunta, eh!... Bueno... ens anàvem passant el full i llavors aquesta pregunta, crec que la va fer en Carles o en Salva. I no... no sé com... no vam participar tots en aquesta.

E: Us vau distribuir la feina?

A: Sí. I llavors aquí, els apartats... ja és la pregunta 6. En els apartats anteriors he utilitzat símbols... Llavors aquí, vam, bueno..., escriure-ho sense explicar-ho. Vam escriure  $-580$  i  $-62$ , que als exercicis anteriors el  $-580$  vol dir que és abans de crist i el  $-62$  vol dir que restes els anys, no? Llavors...

**Pregunta 6**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Ah vale!

A: No està explicat però... està...

E: Volíeu dir això?

A: Sí, és el que vam pensar.

E: En un cas volíeu dir  $-580$  i en l'altre cas la resta que havíeu fet?

A: Exacte. I després... explicar. És aquí on ho vam explicar una miqueta. Que diu que un és abans de Crist i l'altre és per restar.

E: Aha!

A: Aquest, l'apartat  $c$ , no el vam fer perquè és com... que... és com seguir el mateix i... no ho vam saber explicar-ho més i no la vam fer.

I llavors això del final, de l'exercici 7, diu que quins nombres hem fet servir. I han sigut els nombres enters.

**Pregunta 7**  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

E: Molt bé.

A: I ja està.

Taula 4.21: G\_3A\_G6\_A1\_C

## G.3A.G7.A1.C

E: Doncs, avantí!

A: Aquí, a la pregunta 1, ens diu que quin número utilitzaríem per expressar l'any que els romans van arribar a Catalunya. I, com és abans de Crist i és abans del zero, és un nombre negatiu. Llavors hem posat  $-580$  perquè si fos després del zero posaríem un nombre positiu.

**Pregunta 1**  
Qualificador

I... com que la revolta que va passar també és abans de Crist, l'any 206, també he posat un menys al davant, en forma de negatiu.

**Pregunta 2**  
Qualificador

I per expressar els càlculs... hem restat dos-cents... no...  $580 - 206$  que ens ha donat 374. Perquè com tots aquests anys eren abans de Crist no calia... sumar... posar cap positiu.

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions

E: Aha!

A: En aquest, ens mmm... ha dit que si un personatge ha mort a l'any 45 i que ha viscut 62 anys. Pues, hem fet  $45 - 62$ , que són els que ha viscut. I ens donaria  $-17$ . Perquè com... bé, a part de que és un nombre negatiu, com que també és abans del zero és un nombre contrari.

**Pregunta 4**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic  
Representació

E: Aha!

A: Bueno i aquí són els esdeveniments que vam posar nosaltres. Que és, un abans de Crist i llavors, el naixement de l'any Crist, que és l'any 0, que és un signe positiu.

E: Aha!

A: Llavors, el 5... Hem fet un fris i llavors hem posat el zero al mig i hem posat  $-27$  cap al costat esquerre i el  $+27$  cap al costat dret. I el  $-27$  l'hem escrit amb signe negatiu i el  $+27$  no hem posat res perquè... és com si fos...

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Simètric  
Representació

E: I amb això de l'origen, veig que l'heu tatxat. Vau tenir discussió sobre quin era l'origen?

A: Sí, perquè no sabíem si posar l'any 1 o l'any 0. Llavors com hem fet el fris, hem dit que millor posar l'any 0 perquè ens guiaríem més, si és positiu o negatiu.

E: Però, va ser només per una qüestió de guiar-se?

A: Sí, sí i ja està. I llavors no hem tingut cap problema.

E: Bueno.

A: Aquí hem canviat coses. Perquè... ens diu si hem utilitzat símbols diferents. O sigui, si s'utilitzaven de manera diferent. Jo pensava que sí i seria el  $-$ , però vam tatxar la resta i el negatiu perquè no tenien sentit. O sigui, no... no era lo mateix. O sigui, vam estar pensant i hem dit que si expliquem el menys, com és menys, no calia fer restes ni el negatiu, lo que és lo mateix. No sé, és que ens vam liar molt en aquest exercici, llavors...

**Pregunta 6**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Aha!

A: I aquí, ... mmm... a cada significat, també ho vam tatxar perquè no hem utilitzat cap signe positiu i només va ser el negatiu i el menys. Llavors, pues, ho vam tatxar perquè ens vam liar molt. I em diuen ho deixem aquí.

I aquí només hem utilitzat nombres enters...

**Pregunta 7**  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

E: Molt bé, doncs.

Taula 4.22: G.3A.G7.A1.C

## G\_3A\_G8\_A1\_C

E: Anem-hi.

A: Vale... vale... En aquesta ens va costar bastant trobar... o sea, aquesta ens va costar bastant, més que la primera fitxa. I... primer no vam entendre molt bé lo dels fets de Catalunya, però després, mirant les preguntes ja vam entendre perquè servien les primeres pàgines, no?

**Pregunta 1**  
Qualificador

E: Aha!

A: I... mmm... aquesta va costar bastant...

E: Quina és aquesta?

A: Mmm...

E: La 3, no?

A: Sí, "com expressaríeu...?"

E: En aquestes dues, la primera i la segona, de posar els anys...

**Pregunta 2**  
Qualificador

A: No, no...

E: Això de posar el signe negatiu a l'any...

A: Sí.

E: Vau estar ràpidament...

A: Sí... bueno, perquè clar, vam pensar... menys... O sigui ens vam imaginar una línia del temps amb el zero al mig.

E: Aha!

A: I el menys tirar... cap, o sigui, abans de Crist i el més seria després de Crist.

E: Molt bé.

A: Llavors vam fer això.

E: I a la tercera, que us demanava...

A: A la tercera... mmm... vam pensar  $-580$  o sigui  $+580 - 206$ , perquè... o sigui, primer... mmm... no sabem com fer-ho. I vam dir, bueno pues, si els dos són menys els convertim a més i... o sigui...traiem tots els signes. Però, després vam discutir i no sabem si ho teníem molt bé, però al final vam coincidir tots al mateix número.

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions

E: Bueno... quan va haver-hi la posta en comú, el resultat era el mateix...

A: Sí, sí...

E: ... que havíeu obtingut vosaltres? Encara que es fes d'una altra manera.

A: Sí, exacte. Mmm... Aquest en va costar, també, molt.

E: Aquest, quin era? El del senyor que mor l'any 45 i que havia viscut 62 anys.

**Pregunta 4**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic  
Representació

A: Sí! Ja, és que no sabíem si era el 1945 o si era l'any 45, o sigui... 45.

E: Per què dubtàveu entre el 1945 i el 45?

A. Bueno, no ho sé perquè jo deia... o potser és l'any 45. Però hi havien altres nenes que deien que no. llavors vam dir, bueno pues, ho provem de les dues maneres, a veure quin dóna. I aquí, vam optar per aquest. I també ens va costar perquè no... O sigui, ens vam imaginar la línia del temps i no sabíem molt bé com fer perquè ens donés el resultat, saps?

E: Al final... veig que heu optat per fer una resta.

A: Sí.

E: I esteu contentes del resultat?

A: Sí

E: Hehehe. Molt bé.

A: Hehehe. I... aquesta, bueno... o sigui... Aquesta vam dubtar perquè primer vam buscar a la primera pàgina si hi havia algun esdeveniment a l'any -17 però hem pensat... o sigui, hem dit... Vam veure que no. Llavors també, o sigui, ens va fer dubtar. Però després vam dir no, crec que és això i vam posar: Tarraco esdevé ciutat imperial.

E: Aha!

A: I en aquesta... Ah,sí! Aquesta ens va ser bastant fàcil de fer.

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Simètric  
Representació

E: Sí? Aquí a l'hora d'escollir l'origen, totes, van coincidir?

A: Sí, sí. jo crec que sí.

E: Teníeu clar que era el 0, l'origen?

A: Sí, sí, vam entendre que sí.

E: Molt bé... molt bé.

A: I, bueno, aquesta també ens va ser bastant fàcil de fer.

E: Anem, ja , per la sisena.

A: Què hi farem! Mmm... Ah, sí! Bueno aquesta... també vam dir les diferents funcions de la resta i aquí també... O sigui, aquesta ens va costar una mica perquè no sabíem què posar perquè s'entengués bé. Però després...

**Pregunta 6**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Us va costar expressar-ho.

A: Sí. Però després vam estar contentes amb el resultat.

E: Aquí, en el fet, hi havia tres preguntes. Veig, almenys així... com a resposta sembla que n'hi hagin dues...

A: Ja, perquè no... hehe... perquè, bueno, no sé. No me'n recordo perquè ho vam fer així.

E: Aquí sembla que la resposta al 6 sigui la primera...

A: Ja.

E: ... i que això sigui com l'explicació de la segona.

A: Sí, exacte.

E: Molt bé, perfecte. I aquesta us va costar d'expressar.

A: Sí, d'expressar.

E: Però, estàveu d'acord amb els significats?

A: Sí, sí. O sigui, quan vam propos... o sigui, quan vam dir tots els resultats vam pensar que sí que estava bé.

E: Molt bé.

A: I... bueno... Aquest dels nombres enters. Pues... que... són els únics que vam fer servir. En realitat, no vam fer servir ni decimals ni res.

**Pregunta 7**  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

E: Molt bé. Doncs, moltes gràcies.



## 4.2.2 Organització de les respostes de les entrevistes pel grup 3E

G\_3E\_G1\_A2\_C

E: Va no, mmm... Passem a la segona. Va, si vols explicar algu de la primera, també, no hi ha cap problema. Però ara m'interessava una mica... la segona. Diguem.

A: Doncs bueno, el primer exercici, que preguntava que “quin número enter utilitzaríem per expressar un any on els grecs arriben a Catalunya?” Doncs, hem triat el número... 150. Però, llavors, com que aquest any va ser abans de Crist, o aquest esdeveniment va passar abans de Crist i l'any de Crist és com si fos un any del que partim. nosaltres, doncs, hem posat un  $-580$ .

E: Ehem!

A: Després... mmm... ens pregunta quin... quin nombre utilitzaríem per expressar l'any de la revolta d'Indíbill i Mandoni. I com que també és un any... també és un fet que va tenir lloc abans de Crist, doncs, hem posat, també, un menys i 206, que és l'any que va passar.

E: Ehem!

A: Mm... Després ens pregunta, “com expressaríeu en llenguatge matemàtic, els càlculs necessaris per tal de saber quants anys han passat entre aquests dos fets”. Mm... llavors nosaltres, mm... vam... hem agafat el... el  $-580$ , que és una... una... una... de les dates. Llavors, mmm... més  $x$ , que seria... mmm... els anys. O sigui, la  $x$ , les  $x$  seria... no... mmm... si sumem aquest... l'any. Aquesta data més la  $x$ , llavors tindríem com a resultat els 206 anys.

E: Aha! Però això ho vau fer després, perquè la primera resposta que vau posar...

A: Ah!

E: ...va ser una altra.

A: Sí, mmm... aquí... bueno... Ara te dic la resposta que hem decidit entre tots. Però nosaltres vam...ens pensàvem que si sum... restàvem mmm... els  $-580$  menys el  $-206$ , doncs, ens quedaria la diferència i llavors mmm... seria el resultat.

E: I entre això que em dius ara i el que heu corregit al final. Què és el que deies abans mmm... hi ha molta diferència? Hi vàieu molta diferència? O...

A: Bueno... mm... bueno... mm... com... amb l'aspecte veiem que això és una expressió algebraica perquè hi ha una incògnita, que és la  $x$ . I aquell, nosaltres ens havíem... o sigui, ens havíem centrat en fer una operació normal i corrent.

E: Aha! I tu què creus que és millor, la segona o la primera?

A: Bueno clar, com que nosaltres hem pensat això, doncs clar, nosaltres quan ho vam fer pensàvem que aquesta era la correcta i era la millor que es podia fer. Però clar, quan... quan hem vist que també es podien fer aquesta, doncs, hem de dir, que clar, que aquesta era millor.

E: El resultat, vau verificar que fos lo mateix amb una expressió i amb l'altra?

A: Mmm... bueno no. El... és que no, o sigui, no vam comprovar.

E: Ehem! Però si et fixes amb la primera. Quant donaria la primera?

A: Buf!

E: Aproximadament. Escriu-ho.

A: O sigui... sóc, diguéssim... un patata. Eh! O sigui...

E: Tú tranquil.

A: Mmm...

**Pregunta 1**  
Qualificador

**Pregunta 2**  
Qualificador

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions

E: Tens aquí, si vols escriu aquí.

A: Mmm... sí, mmm...

E: No et preocupis. Tampoc passa res. Però fixat... una cosa. El resultat d'aquesta primera expressió m'és igual. Com seria?

A: Mmm... el... si seria positiu o negatiu? Mmm... negatiu.

E: I aquest?

A: Negatiu, també... no?

E: Si resols l'equació...

A: Mmm... negat... mmm... Sí perquè això passa sumant. Aquí doncs... Ah! Positiu, positiu.

E: Aha... segons... el valor numèric serà el mateix però el signe d'una i de l'altra...

A: Canviarà.

E: Canviarà. No? No passa res, només era perquè... bé a l'hora de fer-ho que hi havia una petita diferència, no? Bueno, seguim, seguim!

A: Mmm... després en el 4 ens... ens preguntava que si un personatge moria l'any 45 i havia viscut 62 anys, que escrivíssim una sola expressió algebraica que englobés tots els càlculs necessaris per saber l'any que va néixer. Mmm... nosaltres, aquí... mmm... vam fer que la  $x$  eren els anys que va néixer i llavors si els hi sumàvem els 45 llavors donaria el 62.

E: Ehem!

A: I llavors lo que vam fer va ser aïllar la  $x$  i fer  $62 - 45$ . I llavors ens va donar era... 17. Però llavors, quan ho vam comentar a classe i... i la opció... o sigui la opció bona seria que en comptes de fer  $x + 45$  s'havia de fer  $x + 62$ . I llavors, el resultat seria 45 i llavors donarà el 17 però negatiu.

E: Aha!

A: Després ens preguntava que quin esdeveniment de la cronologia donada mmm... es va esdevenir pels voltants del seu naixement. Aquí vam posar un dels exemples, com per exemple... mmm... mmm... que Tarraco esdevé una ciutat imperial i que... el naixement de Jesús.

E: Aha!

A: després en el següent exercici... mmm... ens... mmm... ens vam haver... hem hagut de fer... una línia numèrica. I en aquesta línia numèrica... mmm... mmm... vam haver... vam haver de representar els fets... mm... que van passar l'any simètric al 23 després de Crist, que seria el... el 27 abans de Crist. I... vam... vam arribar a la conclusió de que seria la de Tarraco esdevé una ciutat imperial. Que llavors hauríem de fer, o sigui, posat en número seria el  $-27$ . Després, "amb quin número expressaríeu l'any que... prenem com a origen?" Nosaltres vam posar l'1. Però, sí, hi ha hagut com moltes discussions i així per... perquè... no sabíem si seria l'1 o el 0.

E: I a tu, què et sembla que seria?

A: Bueno, jo... crec que seria l'1. Perquè, o sigui, tot lo que hem... a part de les mates, tot lo que hem estudiat en altres assignatures, doncs, partim sempre de l'any 1. I de l'any 0 no, o sigui... no sé...

A: Mm... Després ens demanen amb quins símbols matemàtics podríem expressar l'any corresponent amb el fet demanat a l'apartat  $a$ . I, bueno, nosaltres hem dit amb el menys, com ja t'he dit abans, perquè representa que és un any abans de Crist. Després havíem de representar en una línia... temporal... que... el que ens permetia... que ens permetés visualitzar clarament tot el que s'havia demanat en aquesta pregunta.

#### Pregunta 4

Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic  
Representació

#### Pregunta 5

Origen  
Qualificador  
Simètric  
Representació

I vam fer... vam fer una línia que... uneix. I vam posar el 27 abans de Crist, que seria... quan Tarragona es... esdevé una ciutat imperial. I després vam posar l'any 1, que nosaltres creiem que era l'1. I després vam posar l'any 27 després de Crist.

E: Aha!

A: Mm... Després, a la pregunta número 6, ens preguntava que en els apartats anteriors havíem utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica i quins significats diferents tenia. Mm... després que expliquéssim quin és. i després que expresséssim amb paraules quin és el significat... el significat en cada cas. Mmm... Nosaltres, o sigui..., vam... hem utilitzat el menys i després l'hem utilitzat per expressar... anys abans de Crist. Ja que bastant com de... abans del nombre de... que fem servir com a partició, punt de partida. Per fer les operacions i també per fer el simètric, seria com el contrari. Després hem utilitzat aquest símbol menys per expressar alguns anys, com per exemple l'activitat 1 i 2 i... que diem que diem que són abans de... de la data de referència. Mm... Després per sumar i restar com, per exemple a l'activitat 4, per saber els anys que ha viscut una persona. I després, per indicar el contrari i simètric a l'activitat 5. Després a l'última pregunta ens preguntava quin tipus de nombres havíem utilitzat per descriure les situacions anteriors. Nosaltres hem dit els enters, que són els positius i els negatius.

E: Molt bé, perfecte. Doncs, gràcies.

**Pregunta 6**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

**Pregunta 7**  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Taula 4.24: G\_3E\_G1\_A2\_C

## G\_3E.G2.A1.C

E: Comentar-me al començament. Aquí no hi ha res a comentar. Això és la referència...

A: Sí.

E: Aquestes preguntes eren molt curtetes, les primeres, no?

A: Sí. Bé... "quin número enter utilitzaríeu per expressar els anys en els que els grecs arriben a Catalunya?" Bueno... ho hem mirat i... era 580 abans de Crist i partim del zero que va ser quan... quan va néixer Crist. Pues, vam ficar  $-580$ .

E: Aquí, vau tenir discrepàncies?

A: No, en aquesta no.

E: Val, perfecte. I en l'última pr... en la tercera, us va costar una mica més... posar-vos d'acord. Veig que vau fer canvis respecte del que havíeu fet.

A: Sí, perquè vam fica... mmm... entre parèntesis  $-580$ , tanca parèntesis, menys. obrir parèntesis menys 206 i tancar parèntesis. Però vam veure que no... que no era així. Bé, hem vist que no és així. I llavors vam quedar tots d'acord que era  $-580 + x = -206$ .

E: I penseu que la primera era totalment incorrecta?

A: No, bueno...

E: Que ho havíeu fet malament? o senzillament ho heu canviat perquè... no sé..., us semblava...

A: No, crèiem que ho havíem fet malament perquè donava negatiu i crèiem que havia de donar positiu.

E: El primer donava negatiu i el segon donava positiu.

A: Sí.

E: I per aquest motiu heu fet el canvi que semblava més interessant.

A: Sí.

E: Bé, doncs, endavant, endavant.

A: Mmm...

E: Aquí, la quarta pregunta. Aquí també es tractava de donar una expressió algebraica... no?

A: Sí i vam... bueno... a la pregunta hem mirat qui era el... el...

E: Veig que heu fet un canvi.

A: Sí.

E: A veure, entre el que vosaltres havíeu posat aquí i el que heu posat aquí, només hi ha una diferència. No?

A: Sí.

E: Què hi heu afegit? El què?

A: La  $x$ .

E: La  $x$ , saps per què heu decidit canviar?

A: Mmm...no.

E: No? Bueno, no passa res. Tranquil·la.

A: I la  $b$ ... Bueno... la cronologia que... estava més... més aprop del seu... de quan va néixer ell, la persona aquesta que va morir. Era..., Tarraco que va esdevenir la ciutat imperial...

**Pregunta 1**  
Qualificador

**Pregunta 2**  
Qualificador

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions  
Polisèmia

**Pregunta 4**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

E: Molt bé.

A: ... l'any 27 abans de Crist.

E: Perfecte.

A: Mmm...

A: I... bueno... dic això, també?

E: Sí, a veure... sí. En aquesta pregunta us demanava, lo primer de tot, que quin fet ...

A: Sí... Quin fet va passar l'any simètric al 27...

**Pregunta 5**

Origen

Qualificador

Simètric

Representació

E: Vau entendre bé què volia dir simètric? Tots?

A: Sí.

E: I a l'hora de decidir el... a l'hora de decidir l'any de l'origen. L'apartat *b*, us demanava quin any preniem com a origen. Heu posat el 0, veig, no?

A: Sí.

E: Vau tenir discussions? Ho vau tenir, tots, clar?

A: No, estàvem tots clars. I vam fer... Hem ficat el menys perquè abans...

Ah sí! Perquè quan va passar era abans de Crist. Llavors, per això hem ficat el menys perquè era abans de zero. I la *b*... bueno... mm... Hem fet una... una cronologia partint al mig de zero i ficant el 27 abans de Crist, en negatiu, cap a l'esquerra. I el 27 positiu cap a la dreta.

E: Molt bé, perfecte. Ja en tinc prou. I en aquí, en aquest, la sisena pregunta. Aquí costava una mica més, potser, de respondre?

**Pregunta 6**

Qualificador

Operacions

Simètric

Polisèmia

A: Sí ens va costar. Aquesta, són els que vam tindre més dubtes.

E: Més dubtes. Ja m'ho suposo. Vau discutir molt?

A: Sí, hehehe

E: La primera era mirar si hi havia algun símbol, eh!, del mateix tipus però que pogués significar coses diferents.

A: El menys.

E: El menys. tots hi estàveu d'acord?

A: Sí. El *b*, bé... "expliqueu quin és". I que, hem quedat d'acord que expressa negativitat i enrere... enrere en el temps.

E: Quan dieu negativitat... quan dieu negativitat mmm...

A: Mmm... O sigui, negatiu. I el *c*... bueno, això que he dit ara, que un significat pot ser que posem el menys per representar que el fet va passar abans de l'any 0. Llavors és negatiu.

E: Perfecte.

A: I... hem utilitzat els nombres negatius per utilitzar... aquestes situacions.

**Pregunta 7**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

E: Només els negatius?

A: I els enters.

E: I els enters... veig que...

A: Més els negatius.

## G\_3E.G3.A1.C

E: Doncs, endavant.

A: Primer preguntava que... mmm...per expressar l'any... "Quin número posaríeu per expressar l'any que els grecs van arribar a Catalunya?". I com era un any que era abans de Crist vam decidir posar un menys,  $-580$ . Perquè representa que si és abans de Crist és com abans de què comencés tot, diguéssim. I és després del zero.Mmm...

en el 2 és el mateix. Lo únic que preguntava, l'any de la revolta d'Indíbil i Mandoni, i era l'any  $-206$ .

Aleshores al 3 et pr... et deia que com... ah! sí, que quants anys han passat entre els dos fets. I primer ho vam expressar malament perquè ens va donar un resultat negatiu i, com que representa que són els anys que passen d'un any a l'altre, no pot tenir un resultat negatiu. Nosaltres havíem posat  $-580 - (-206)$  i ens havia donat  $-374$ . Però en realitat no es podia fer així, perquè donava negatiu. Aleshores, quan ho hem mirat a la pissarra... mmm... era, al final,  $-580 + x = -206$ . I... llavors aïlles la  $x$  i et donava positiu.

E: I això ho teníeu... ho vau veure clar que era així? No vau discutir?

A: No.

E: No hi havia ningú que digués...

A: Al principi ho vam veure clar, com si fos el que havíem pensat que era. Però, llavors, quan ho hem comentat amb tothom hem trobat lògic que no podia quedar un resultat negatiu.

Aquí, preguntava que... bueno, un home mmm... va morir a l'any 45 i havia viscut 62 anys, mm... aleshores havies de dir quants anys... mm... quin any havia nascut. I hem fet  $x$ , que és l'any que havia nascut, menys 62 és igual a 45. I bueno, hem aïllat la  $x$ , i al final ens ha donat  $-17$ . O sigui, havia nascut el 17 abans de Crist.

E: Això us va costar molt de veure-ho? O...

A: Nooo... Aquest el vam trobar bastant fàcil.

E: O sigui... tothom hi estava d'acord?

A: Sí, sí. Mm... Aquí, després, preguntava que a la cronologia... quin era l'esdeveniment més important que... havia passat prop d'aquest.

E: Ho sento, eh!

A: No, no passa res.

E: Bueno, doncs, au seguim.

A: Doncs, dèiem que... quins esdeveniments cronològics van passar per aquella època. Nosaltres hem dit, el naixement de Crist. Mmm... però en realitat estava més aprop quan Tarraco va esdevenir una ciutat imperial. Mmm... Aleshores vam apuntar també, amb vermell però, els dos esdeveniments estan aprop. Això no vam tenir gaire dubte.

E: Molt bé.

A: Mm... Després, mm... sí. Preguntaven que mmm... que a l'any contrari del 27, quin... quin esdeveniment va passar. Vam posar que era el  $-27$  i que Tarraco va esdevenir una ciutat imperial. Aleshores, aquí mmm... pregunta que quin any expressaríem l'origen. I, nosaltres hem posat que a l'any 1. I després quan ho hem comentat a classe, doncs, al final hem entès que era a l'any 0. Mmm... perquè... bueno sí... tot i que... és com si no existís. Però també és un número enter, el zero. I llavors... com si diguéssim, s'havia de tenir en compte. Mmm... després...

**Pregunta 1**  
Qualificador

**Pregunta 2**  
Qualificador

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions

**Pregunta 4**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic  
Representació

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Simètric  
Representació

A: Ah, sí! Que preguntava que quin any va ser el fet de l'apartat  $a$  i hem posat que l'any  $-27$  o el  $27$  abans de Crist. Després, a la taula aquesta, tampoc hem posat el  $0$  perquè... com aquí havíem respost que començava per l' $1$ . Mm... bueno no ho hem arreglat al final. I després hem posat el  $-27$ , que és quan Tarraco va estar ciutat imperial.

E: Aquí em sembla curiós que aquí, entre el  $-1$  i el  $1$ , heu deixat com un espai.

A: Sí.

E: Dient que aquí hi ha algu i... no?

A: Sí, però no sé... és que la Maria no... no ho ha vist clar.

E: Segueix sense veure-ho clar. Hahaha.

A: Sí.

E: Val. Val. Està bé això. Us ha provocat conflictes.

A: Sí. Aquí també hem posat que el  $+$  vol dir l'època després de Crist i el  $-$  l'època abans de Crist. Mm... Sí, aquí, explica el mateix però, això... que... els nombres positius són els que van després de Crist i els negatius els que van abans.

Mmm...I aquí, que preguntava quins números hem... mmm... hem utilitzat, doncs, hem posat els enters... que aquí ja.

E: Molt bé.

**Pregunta 6**

Qualificador

Operacions

Simètric

Polisèmia

**Pregunta 7**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Taula 4.26: G\_3E\_G3\_A1\_C

## G\_3E\_G4\_A2\_C

E: Segon test. Va, primera pregunta.

A: A partir de la cronologia anterior responeu a les preguntes següents: “Quin número enter utilitzaríeu per expressar l’any en que els grecs arriben a Catalunya?” –580.

E: Aha!

A: Perquè... perquè era abans de Crist.

E: Tots d’acord amb això? Sense problemes?

A: “Quin número enter utilitzaríeu per expressar l’any de la revolta d’Indíbil i Mandoni?” El –206 perquè és abans de Crist.

3. “Com expressaríeu en llenguatge matemàtic els càlculs necessaris per tal de saber quants anys han passat entre aquests dos fets, utilitzant una única expressió”. Aquí... vam posar  $-580 - 206...$  o sigui... aquí ens vam equivocar a l’escriure-ho. Perquè el que volíem posar era  $-580$  entre parèntesis menys dos... menys menys 206. Però després, vam pensar que el que estaria millor seria  $-580 + x = -206$ .

4. “Si un personatge mor l’any 45 i ha viscut 62 anys escriu una sola expressió algebraica que englobi els càlculs necessaris per saber l’any que va néixer”...  $45 - 62 = x$  “Quin esdeveniment de la cronologia donada s’esdevingué pels voltants del seu... naix... del seu naixement?”. Vam posar el naixement de Jesucrist. I després no... el meu company s’ha oblidat d’escriure-ho, però també vam pensar que era el del  $-27$  i el del  $+27$ .

E: Aha!

A: 5. “Si imagineu els fets situats sobre una línia recta que representi el temps, quin fet va passar en l’any simètric al 27 després de Crist respecte l’any que prenem com a origen?” Mmm... Tarraco esdevé ciutat imperial. “Amb quin número expresseu l’any que prenem com a origen?” Vam posar l’1. Mmm... perquè... nosaltres creiem... o sigui, més o menys, aquí sí... en aquesta pregunta sí que vam discutir dins del grup perquè uns deien que... o sigui, l’any d’origen era el zero. Perquè el zero sempre, normalment, és el que marca... és el punt mig entre els positius i els negatius. Però, també, jo i algú més del grup vam decidir l’1. Perquè, per exemple en alguns anys anteriors, com per exemple a Socials, sempre ens havien dit que l’any 0 no existia. Perquè... era com si no hagués existit res, saps? Llavors vam decidir, finalment, vam decidir escollir l’1. I, “amb quins símbols matemàtics podeu expressar l’any corresponent al fet demanat a l’apartat  $a$ . Va... hem posat menys més 27, o sigui,  $-(+27)$ . La  $d$ , “representeu una part de la línia temporal que ens permeti visualitzar, clarament, tot el que s’ha demanat en aquesta pregunta”. Vam posar en el punt mig com a 1, perquè a la  $b$  havíem escollit l’1. Després, més o menys a la mateixa distància, perquè no ho hem fet amb regla, el... el 27 positiu i el  $-27$  negatiu. Que seria lo de Tarraco esdevé ciutat imperial.

E: Aquí, jo tinc una pregunta, val? Així, visualment, dius... més o menys l’he fet a la mateixa distància.

A: Sí, sí.

E: Però ara pensa, des d’un punt de vista numèric. Des de l’1 al  $-27$ , hi ha la mateixa distància que des de l’1 fins al 27?

A: No, no. Perquè... perquè no... no ho hem fet amb regla. Ho hem fet...

E: No, no,no... No et pregunto... a veure...

**Pregunta 1**  
Qualificador

**Pregunta 2**  
Qualificador

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions

**Pregunta 4**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic  
Representació

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Simètric  
Representació



A: Ah! Vale.

E: Tu imagina't...

A: No, no hi ha el mateix.

E: ... que ho haguessis fet amb regle, ben fet, i tot ben posat.

A: No.

E: Des de l'1 fins al 27 hi ha la mateixa distància que des de l'1 fins al  $-27$ ?

A: No, perquè tindria que ser el zero. Sí, sí. Mm...

Pregunta número 6, "en els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb significats diferents?" He posat que sí. "Explica... bé... explica quin és." He posat el símbol  $-c$ . "Expresseu en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu el més clarament possible la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat". He posat el  $-$  perquè depèn d'on el posis pot canviar el... pot canviar el resultat del signe final. Mm... Llavors, quin tipus de..., 7.

"Quin tipus de nombres heu estat utilitzant per descriure les situacions anteriors?" Mmm... hem posat enters. I aquí hi ha hagut una petita discussió en el grup. Entre que uns deien algebraics, perquè no tenien molt clar lo que eren. I després, jo i un altre hem dit que només enters perquè els algebraics eren els que contenien lletres i... Però, bueno, al final ha volgut escriure algebraics i hem decidit posar també algebraics.

E: Molt bé. Per la meva part res més.

**Pregunta 6**  
 Qualificador  
 Operacions  
 Simètric  
 Polisèmia

**Pregunta 7**  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

## G\_3E\_G5\_A2\_C

E: I dues.

A: A veure. Sí, això, principalment era, primer vam haver de mirar a les pàgines anteriors i vam mirar, a veure, grecs arriben a Catalunya, vam buscar grecs i vam veure 580 abans de Crist. I aquí ja vam començar a tenir problemes. Perquè el primer que vam recordar és, ostres! Hem llegit en webs de que el Crist es considera any 1 i en canvi hi ha d'altres webs que Crist es considera any 0. Quin de... dels dos... per quin dels dos ens decantem, bueno... Webs i pàgines i llibres i coses d'aquestes... No sabíem ben bé... Primer havíem pensat en l'any 1, però, després ens vam decantar per l'any 0. Ja ho explicaré després... O sigui, que... vam escriure  $-580$  perquè el... el... 580 abans de Crist. Si Crist és l'any 0, 580 no... bueno... 580 per sota de zero és  $-580$ .

I amb el 2 el mateix, 206 abans de Crist i sortia... mmm... per tant... abans de Crist és abans de 0,  $-206$ . De la mateixa manera ho vam fer.

“Com expressaríeu en llenguatge matemàtic els càlculs necessaris...” I aquí, ja aterràvem amb les equacions. Però com que ja anàvem preparats de l'altre dia, que ho havíem fet. Ja vam tenir... ja vam tenir pràctica... bueno... hem tingut més pràctica i ho hem fet ràpid. Vam... vam... mirar una manera de que fos lògica i que el resultat que et donés, després, substituint la  $x$  pel... pel... bueno... la  $x$  o la incògnita. Que és el que ens preguntaven, substituint-ho et donés el que volies. I vam fer  $-580 + x$  dona  $-206$  perquè així el resultat donava positiu que era, principalment, el que... el que... bueno la... la... cosa lògica. Primer ens havia donat negatiu i això... o sigui... donar-nos negatiu no podia ser. Perquè el que ens demanaven era una... quantitat de... bueno, entre... com ho diuen? Per saber quants anys han passat entre dos fets.

E: Aha!

A: La quantitat d'anys que han passat entre dos coses no pot ser negativa. Per tant vam buscar... aïllant la  $x$ ,  $x$  és igual a  $-206 + 580$  i dona 374.

E: Molt bé.

A: També vam tenir una mica de discussions...

E: També vau tenir discussions?

A: Sí, sí, bueno. No massa... no massa grans, també, per això que ja ho havíem fet l'altre dia. Però, però sí. Una mica sí.

E: Molt bé.

A: El 4, bueno, el 4... ve a ser... semblant a... a l'altre. “Si un personatge mor l'any 45 i ha viscut 62 anys...”,  $45 - 62 = x$ , aquesta... no hem tingut... no vam... bueno, no hem hagut de pensar gaire per... per respondre-la.

A: Perquè, bé... la  $x$  ja quasi que no cal ni posar-la, és simplement  $45 - 62$ , quant dona? I ja està, ens ha donat  $-17$ . Per tant  $-17$  seguint la norma que havíem fet abans, significa que està abans de Crist, 17 abans de Crist. I... la  $b$ , principalment era... mirar, altra vegada, en els fulls del principi. “Esde... pels voltants del naixement”. L'únic que havies de tenir... en compte és de saber la  $a$ . Si la  $a$  és 17 abans de Crist. També hem mirat el que estava més aprop... que era el 27 abans de Crist i hem posat que Tarraco esdevé ciutat imperial. Principalment perquè 274 està més aprop que 0. Hehehe...

**Pregunta 1**  
Qualificador

**Pregunta 2**  
Qualificador

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions

**Pregunta 4**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic  
Representació

A: I en el 5, mmm... la  $a$  acaba siguent la mateixa pregunta... que la  $4b$ , que és... Tarraco esdevé la ciutat imperial. I la  $b$ , ens pregunten... “amb quin número expressen l’any que prenem com a origen?” O sigui, l’any en que va néixer Crist. I en aquí han tornat a haver-hi discussions de si l’1, de si el 0. Hi havia un de la... del grup que pensava l’1, els altres pensàvem el 0. Intentàvem explicar el perquè però... no ens conveníem entre nosaltres. I ens hem acabat decantant pel zero per algunes raons, com que... després al dibuixar la... la taula... la taula... ai! La taula... el... com el fris... no sé com...

A: La línia temporal...

E: La recta numèrica.

A: Ens havíem trobat de que si posàvem 1, no sabíem com marcar el, el... com marcar un número positiu i un número negatiu que estiguessin a igual distància.

E: Aha!

A: Perquè posar dos números mmm..., o sigui, mmm... ens diu l’any que prenem com a origen. Si l’any que prenem com a origen és 1 no pot ser  $-1$ , tampoc. Per tant, ens hem acabat decantant pel zero, principalment per això. Perquè posar dos anys d’origen, no... no... ho trobàvem lògic. Per tant la  $b$  l’hem posat 0. I la  $c$ , ens pregunten, “amb quins símbols matemàtics podem expressar l’any corresponent...” L’apartat  $a$  ens... ens diu... mmm... 27... mm... després de Crist. Per tant... no! espera... quin... ah! L’any simètric al 27 després de Crist que ve a ser el 27 abans de Crist. He! Per tant el... signe és el  $-$ . Per això, perquè és abans de Crist. I a la  $d$  ens demanen que fem aquesta taula numèrica i com que ... hem acabat... ens hem acabat decidint... pel zero, no hem tingut masses problemes. Hem acabat posant el 27 en un costat i més o menys a la mateixa distància, el  $-27$ , o 27 abans de Crist.

E: Aha! Molt bé. Bueno...

A: Com que ha sigut això, com que teníem el zero no... no... hi ha hagut problemes de distància... o sigui...

E: I la persona que no hi estava d’acord, es va convèncer de que...?

A: Sí, sí. Hehehe... La vam acabar convencent... Ha... ha trigat... en el 5, encara tenia una mica de... d’esperança de que dos 1 i no 0. Però quan hem acabat tot ja l’hem acabat convencent. Hehehe.

E: No, l’últim és el 7.

A: Ah! Clar, però està a l’altra pàgina... Sí, ens pregunta, “en els apartats anteriors hem utilitzat algun símbol..., si l’hem utilitzat i l’hem fet servir amb... significats diferents”. Perquè... això... també hi ha hagut discussions, hehehe... Principalment ens hem trobat en que l’havíem fet servir per... el... mateix símbol però per significats iguals, pensàvem. No havíem trobat res que hi ha diferent perquè, en aquí, havíem escrit  $-27$ , en aquí... o sigui... el menys que és el que... que nosaltres hem trobat com a... com a signe diferent, ens semblava que feia la mateixa funció a tots els llocs. Però després ens ho hem estat mirant bé i hem vist que aquí, per exemple, podíem escriure igual que amb la... amb el primer full que és  $-(+27)$  perquè l’any simètric el teníem com el contrari de..., o sigui, també es podia veure així. I el contrari... el contrari l’expressàvem amb un  $-$ . Per això, aquí també hem rectificat i hem posat  $-$  entre parèntesis,  $+27$ . Per tant, ja hem trobat una diferència, que és, de que en un hem... l’hem fet servir per expressar si estava abans o després de Crist. I a l’altra, l’hem fet servir, per expressar el contrari o mmm... l’any simètric a.

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Simètric  
Representació

**Pregunta 6**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia

I ara sí, l'última pregunta, és la de... "quin tipus de nombres hem utilitzat per descriure les situacions anteriors?" I com que ja ho havíem respost a l'altra ens ha sigut fàcil. Que és que els enters, pel mateix, perquè ens... ens... és... els enters agafen els nombres positius, els negatius i el zero.

E: Aha!

A: Per això són els números que havíem fet servir i per tant ens ha semblat la resposta correcta.

E: Molt bé.

**Pregunta 7**  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

---

Taula 4.28: G\_3E\_G5\_A2\_C

## G\_3E.G6.A2\_C

A: Doncs, el primer, l'any que els grecs van arribar. Doncs, ho hem buscat i era el... 580 abans de Crist.Llavors, ho podríem posar abans de Crist o el signe $-$ , ja que és a partir del zero.	<b>Pregunta 1</b> Qualificador
A: El segon, també és el mateix però amb la revolta d'Indíbil i Mandoni, llavors seria... és el 206.	<b>Pregunta 2</b> Qualificador
A: I aquí el 3. Els càlculs per... saber els anys que han passat, doncs, hem fet $580 - 206$ . Ja que tots dos són abans de Crist i... no has de sumar ni restar... bueno... has de restar aquí, però no has de fer tants càlculs per saber si és després de Crist o no. Ja que... només has de saber els anys que han passat.	<b>Pregunta 3</b> Qualificador Operacions
E: Molt bé. Val.	
A: Doncs aquí, hem posat $x + 45$ perquè... bueno, no sabíem si... de... parlava de quants anys tenia o de quan va morir. Llavors... si... sumem la... el 45 a la $x$ ens dona 62 anys.	<b>Pregunta 4</b> Origen Qualificador Operacions Algebraic Representació
A: I aquí, doncs... és la mateixa, bueno... estava més aprop de... mmm... Tarraco esdevé ciutat imperial ja que és $-17$ .	
E: Aquí, de totes maneres...	
A: Bueno... aquí ho havíem de passar, per aquí.	
E: Sí, no? Però quan resolou aquesta equació $62 - 45$ ...	
A: Dóna 17, però, ho hauríem de passar, per aquí, a l'altra banda perquè els números quedessin negatius. però no ens quedava gaire temps i llavors... clar.	
E: Bueno, bueno... O sigui, sabíeu que havia de donar negatiu i... per tant va escriure el resultat sense acabar d'escriure...	
A: Sí.	
E: Molt bé, molt bé... bueno.	
A: Doncs, el 5. Doncs... mmm... l'any simètric al 27. Llavors seria el contrari, que era l'any $-27$ . Llavors és el Tarraco esdevé la ciutat imperial i l'any que prenem... prenem com a origen seria el... vam posar l'1. Perquè vam pensar... bueno, a Socials, els llibres posaven que era l'1 després de Crist però... llavors, clar, comencem a comptar des d'allà.	<b>Pregunta 5</b> Origen Qualificador Simètric Representació
E: I tots estàveu d'acord amb això?	
A: Sí, tots vam estar d'acord. I el símbol matemàtic que... vam utilitzar va ser el $-$ . El signe $-$ , ja que és el contrari del 27. E: Aha!	
I aquí vam representar... la línia. Aquí hi havia l'1 però després, amb la discussió i tot això ens vam adonar que potser no havíem d'haver posat el zero en comptes de l'1. I aquí, no ens va donar temps però... vam... perdre una mica... Però, no ens va donar temps d'escriure i vam fer el $t - 7$ . Doncs en els apartats anteriors hem utilitzat els... signes $+$ i, $-$ i que... els hem utilitzat, però, per coses diferents. Significats diferents... com el contrari, la posició que estan... o l'any i... la... per fer les operacions de la resta.	<b>Pregunta 6</b> Qualificador Operacions Simètric Polisèmia
E: Mmm... aquest no us va donar temps i ho va afegir després de la posta en comú.	
A: Sí. Llavors, com aquest era el més fàcil del test, doncs, el nombre que hem utilitzat són els nombres enters.	<b>Pregunta 7</b> $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Taula 4.29: G\_3E.G6.A2\_C

## G\_3E.G7.A2.C

E: Endavant.

A: Doncs... aquí ens diuen a quin any els grecs arriben a Catalunya. Doncs, el... bueno... Aquí, a les dades del principi, a les pàgines ficava, en el cinc... en el 580 abans de Crist. Llavors, com és abans de Crist mmm... negatiu i vam ficar -580.

**Pregunta 1**  
Qualificador

I aquí, igual, mmm... la revolta d'Indíbil... d'Indíbil... en el... 206 abans de Crist. Doncs, -206 i aquí, ho havia de tatxar ara, abans de Crist.

**Pregunta 2**  
Qualificador

E: Aha! O sigui, primer va posar, també, abans de Crist i lo que va fer va ser...

A: Sí, bueno, vam ficar -206 abans de Crist i després ja no calia, perquè com és abans doncs... negatiu.

E: Aha! Molt bé. Tots estàveu d'acord amb això? O...

A: Sí.

E: Molt bé.

A: Doncs... per saber quants han passat restàvem 580 - 206, que són els dos anys i saber la diferència d'anys que hi havien entre els dos.

E: Aha! Aquí no va tenir cap tipus de...

A: Bueno, aquí vam pensar que -580 era negatiu, també, però després... mmm... no sé, vam decidir que no era, però... ara no recordo perquè ho vam decidir. Bé... era aquest dubte de si els dos eren negatius o només un.

**Pregunta 3**  
Qualificador  
Operacions

E: Vale.

A: Mmm... vale. Aquí, com diu, va morir l'any 45 i va viscut... bueno, va viure 62 anys. Llavors vam fer 45 anys, que és l'edat que va morir menys 62, que són els anys que havia viscut, que és igual a  $x$ . Que els anys mmm... que havia... O sigui, l'any que va néixer. I... bueno..., aquí, la pregunta de... un esdeveniment que s'aproximés al voltant del seu naixement. Vam trobar Tarraco aquest, el 27 abans de Crist.

**Pregunta 4**  
Origen  
Qualificador  
Operacions  
Algebraic  
Representació

E: Aquí veig... el resultat no el va posar, no?

A: No.

E: El devíeu calcular-ho i no el va posar?

A: No.

E: Cap problema.

A: Doncs, aquí també, igual al 27, això de Tarraco...

**Pregunta 5**  
Origen  
Qualificador  
Simètric  
Representació

I aquí, bueno, l'any... de 0 a 1.

E: Aquí va tenir alguna dificultat per interpretar això de...

A: No.

E: ... de l'any simètric...

A: No.

E: Vau veure-ho clar.

A: Sí, sí.

E: Molt bé.

A: Aquí, bueno, de l'any 1 i l'any 0 que... és any 0, no?, al final o...

E: ???

A: Nooo! Hehehe.

- E: Mmm... Quan va fer la discussió en grup...
- A: Ja.
- E: ...va sortir això, no? Però...
- A: Bueno.
- E: Vosaltres, veig... que us decantàveu per l'any 1.
- A: Sí. Hehehe.
- E: ???
- A: Eren tots, menys el grup aquell d'en Lluç i en Pau i aquests.
- E: Aha!
- A: Bueno, doncs, aquí l'any... en llenguatge matemàtic, l'any 27 abans de Crist, doncs,  $-27$ , en negatiu. Com és abans de Crist.
- E: Aha!
- A: Doncs en negatiu...
- E: En aquí... tu em deies, dubtàveu entre el 0 i el 1. Oi que sí?
- A: Sí.
- E: Si tu poses el 1 com a punt de referència...
- A: Llavors, aquest, està més aprop. Sí, és que ho vam ficar-ho pensant, només, que era l'any 1, l'any 1 i bueno... doncs això... igual. Vam ficar el  $-27$  abans de Crist en... un extrem l'1. Perquè pensàvem que era... o sigui, el mig i... després a l'altre extrem el 27 després de Crist, perquè... el zero...
- E: I ara què hi penses?
- A: El zero.
- E: Bueno.
- A: En aquí... bueno... fica... si hem utilitzat símbols diferents. Doncs, sí. El negatiu i el positiu per... expressar... mm... abans de Crist i després de Crist. Mm... bueno, mm... "quins dos heu fet servir?" El  $-27$  i el  $+27$  positiu.
- Pregunta 6**  
Qualificador  
Operacions  
Simètric  
Polisèmia
- E: Aquí, el que us demanava era si havíeu fet servir signes iguals, no?
- A: Iguals?
- E: Sí, no.
- A: I... algun símbol... que... Ah!
- E: Símbols idèntics, diu.
- A: No, no, hem... fet servir el negatiu i el positiu que no són iguals. Bueno... aquest, els qui... bueno això.
- A: Mmm... En el  $-27$  significa que hi han 27 nombres abans de zero.
- A: I el 27 després, que hi han 27 nombres després del zero.
- E: Aha!
- A: I... "quin tipus de nombres ..." Aquí vam ficar enters però, no eren enters. O sigui, vam dir un altre nombre però no me'n recordo quin era. Però enters no era, era aquest i un altre. I ara no...
- Pregunta 7**  
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- E: O sigui, creus que això d'enters no és el que hauríeu d'haver escrit?
- A: O sigui, ho vam escriure per algu però no me'n recordo... o sí. Si me'n recordo però... com van dir un altre número ens va fer dubtar si eren o no.
- E: Tu pensa quins són els números enters, sabries...
- A: Sí, els positius i els negatius aquests. Llavors... sí, són enters, però, van dir un altre nombre. Sí, van dir un altre... però no me'n recordo.
- E: Bueno... doncs, moltes gràcies per tot. Eh!

### 4.2.3 Revisió i contrast de resultats

P1 i P2. Agrupem la resposta a les dues primeres preguntes en una sola valoració perquè les dues preguntes van orientades en la mateixa direcció. Els continguts matemàtics als que es fa referència són els mateixos. S'han plantejat així estan motivats per obtenir dues dades negatives que ens permetin plantejar la tercera pregunta.

P3. Les entrevistes per valorar aquesta pregunta ens permeten concloure que la majoria dels grups saben com ha de ser el resultat. És a dir, els anys que han passat s'expressen amb un nombre positiu. Com que el fet d'haver de treballar amb dos nombres negatius, en general, els resulta problemàtic opten per seguir dos camins:

- Expressar-ho amb una resta de positius, evitant així utilitzar els negatius.
- Expressar-ho a partir d'una expressió algebraica, on la incògnita representa els anys que passen. En aquest cas sovint estan influenciats per la posada en comú després del qüestionari d'Enters.

P4. La majoria dels grups són capaços de trobar l'any que va néixer el personatge i també saben trobar a la cronologia l'esdeveniment proper a l'any d'aquest naixement, però cap grup és capaç de trobar l'expressió algebraica que descriu aquest problema. De tota manera l'anàlisi de les respostes deixa matisos que cal remarcar:

- La majoria de grups visualitzen la solució a partir de la recta numèrica i busquen l'operació que s'adequa al resultat. Quasi bé sempre amb restes que només involucren positius. Posteriorment afegeixen el signe perquè saben que ha de ser una data anterior al naixement de Jesucrist.
- En alguns casos busquen l'esdeveniment proposat, només, cap a la part positiva de la recta numèrica. Això justifica que l'any més proper al  $-17$  és el  $0$  i no el  $-27$ .
- Alguns alumnes associen l'expressió "l'any 45" al 1945. El motiu principal rau en expressions típiques del llenguatge habitual.

El primer dels matisos, com podem extreure de les entrevistes, està molt generalitzat. Els altres dos matisos són menys habituals.

P5. A partir de les entrevistes observem que la majoria dels grups són capaços de trobar i expressar, en termes de nombres enters, el simètric d'un nombre. Però també s'observen certs detalls que cal ressaltar:

- Poc més de la meitat dels entrevistats manifesten que no han tingut dificultats per dir que l'origen es representa amb el  $0$ . La resta d'entrevistats reconeixen que en alguns casos han tingut dubtes i discussions entre representar l'origen amb el  $0$  o amb l' $1$ . En força ocasions es decanten per l' $1$ , el motiu és el que han après a Socials i Religió.
- Un dels entrevistats justifica que hagin escollit el  $1200000$  perquè és la primera data que es dona a la cronologia.
- També és important observar que poc menys dels entrevistats manifesten que el símbol que permet expressar l'any simètric al  $+27$  sigui el  $-$ .
- En alguns casos manifesten que prefereixen utilitzar la notació "aC" i "dC" en lloc de  $+$  i  $-$ . Expliquen que només és una qüestió de sentir-se més còmodes amb la notació.

Aquests matisos justifiquen que només una tercera part, aproximadament, dels grups facin una representació adequada de les dates i l'origen sobre una recta numèrica.



- P6. Els alumnes entrevistats mostren que, de manera majoritària, són capaços d'identificar la utilització de símbols iguals amb significats diferents. La gran majoria de grups identifiquen l'ús del signe com a qualificador i com a operador binari, per sumar i restar, però pocs grups són capaços de verbalitzar l'ús del signe – com a operador simètric, I només un dels grups es capaç d'associar aquests usos amb les activitats on s'utilitzen.
- P7. Les entrevistes ens permeten observar que la majoria de grups reconeixen que els nombres que han estat utilitzant, durant totes les activitats del qüestionari són els enters. Hi ha alguns casos on es plantegen dubtes que mostren una manca de fluïdesa en el coneixement dels conjunts numèrics. Aquests dubtes es concreten en respostes on han posat: “nombres algebraics”, dubtaven de si havien de posar “aC” i “dC”, els costava identificar els negatius com enters o que són enters perquè “no hi ha decimals”.

## Capítol 5

# Patrons de comprensió dels estudiants

A partir dels ítems considerats a les Taules 2.1 i 2.2 establirem els Patrons de Comprensió, que són instruments de representació conjunta de resultats per a la caracterització del fenomen de l'aprenentatge i la comprensió dels nombres enters.. Ens aproximarem als patrons, primer atenent a les respostes donades a cada qüestionari, creuant-les i donant els patrons definitius. Al primer apartat, a partir de la informació recollida al qüestionari d'Enters, establím uns patrons de comprensió preliminars. Al segon també establím patrons preliminars a partir del qüestionari de la Cronologia de Catalunya. Al tercer apartat, a partir de creuar i comparar aquests patrons preliminars, establím els patrons de comprensió definitius.

Així doncs, en aquest capítol presentem els resultats relatius a l'assoliment del segon objectiu principal de la investigació. L'assoliment d'aquest objectiu no hauria estat possible sense haver obtingut i organitzat els resultats relatius al primer objectiu en els dos capítols previs. Les Figures mostren respostes dels qüestionaris. Les notacions  $\mathbf{AG}_i$  i  $\mathbf{EG}_j$ , amb  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  i  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  que apareixen a les Figures fan referència, amb les lletres  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{E}$ , al grup-classe on s'ha passat el qüestionari i amb  $\mathbf{G}_i$ ,  $\mathbf{G}_i$  al grup de treball dins del grup-classe.

En el proper apartat avancem cap a la preparació dels patrons de comprensió dels estudiants. D'acord amb les anàlisis del primer qüestionari i de les entrevistes associades, arribem a identificar patrons preliminars específics d'aquesta part de les dades. Això es complementa amb el contingut de l'apartat 5.2, on es posa de relleu la important relació de similitud amb els patrons preliminars específics construïts a partir de la resta de dades.

### 5.1 Resultats de l'anàlisi creuada dels Enters

#### 1. Origen:

En relació al contingut que hem anomenat "Origen", de l'anàlisi creuada dels Enters, emergeix un patró preliminar de comprensió amb les dues característiques següents:

- Identificació correcta del 0 com a origen.
- Confusió entre el zero com a número i com a planta.

En la imatge següent podem observar la representació de tres tipus de resposta a la Pregunta 1 d'aquest qüestionari on es pot constatar millor l'ús que els alumnes fan del zero com a origen. Això es referma en les respostes a l'apartat (a) de la Pregunta 2 on la majoria de grups responen que el 0 correspon a la planta baixa. Sembla que tenen clar que el zero és el canvi d'estar sobre o sota terra, però no tots tenen clar com numerar la planta que toca a la línia de terra. Aquesta mateixa imatge ens

permet valorar la dificultat en representar situacions que es poden descriure utilitzant nombres enters per sobre i per sota de zero, com valorarem més endavant.

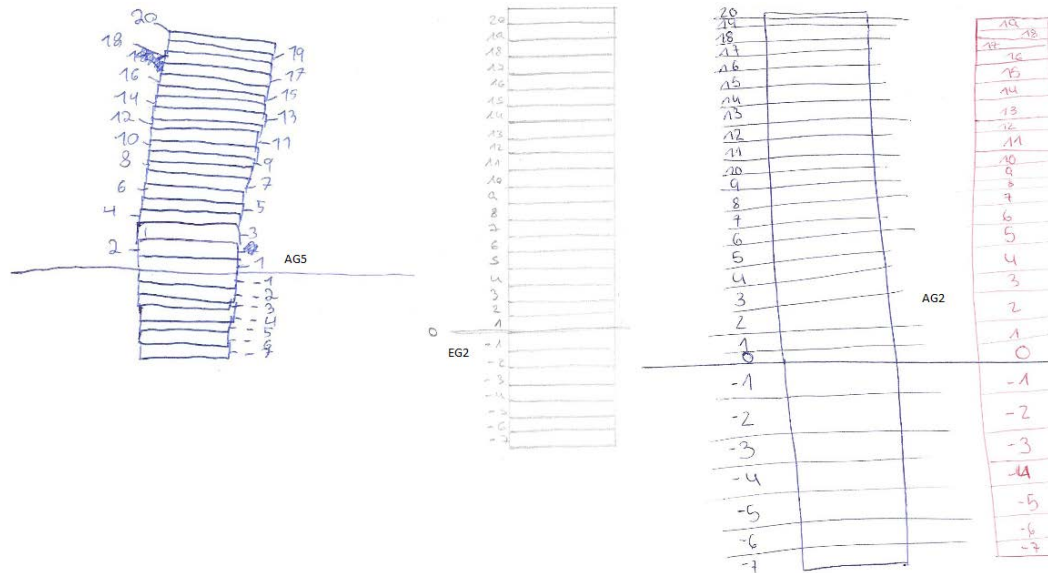


Figura 5.1: Evidència P1

De la revisió de les entrevistes corroborem la interpretació donada a les respostes del qüestionari de la Figura 5.1. Les respostes corresponents a **AG5** i **EG2** es confirmen a partir de les respostes de les entrevistes a dos dels membres dels grups corresponents:

A: A veure, hi havia dues persones que no és que van participar molt però... també van fer algu. I jo ... bueno vam pensar de fer, si diu que hi ha 20 nivells per sobre, doncs, com fer 20 nivells i per sota -7. I així vam anar dibuixant... i doncs, ens va donar 20, 20 per sobre i -7 per sota.

E: Aquí veig que comenceu per l'u per sobre...

A: Ah! sí.

E: ... i al -1 per sota.

A: Això, això... crec que no ho vam fer bé perquè hauríem d'haver posat un 0 però... bueno ens vam equivocar no me n'he adonat.

E: I la resta de la construcció l'hauries fet exactament igual afegint el zero aquí?

A: Sí.

A: Vale doncs. Aquí mmm... hem fet aquest edifici perquè així seria més fàcil de visualitzar mmm... els pisos que té en total són vint-i-set i per no equivocar-nos ni res els hem volgut dibuixar. E: Ehem... El que veig és que heu posat el pis 1, el pis -1...

A: Sí, perquè vam mirar, per exemple, a l'escala, que el primer pis que és quan entres, ja és primer pis i a baix és -1. I llavors vam partir del zero però que el primer pis era 1... Aquí... mmm... bueno a la a vam ficar un zero... Dic per què?

E: Sí, una miqueta, a veure, i... la dificultat que va tenir. Si estàveu d'acord tots, si va tenir discrepàncies...

A: Sí, sí. Vam... bueno al principi dèiem si era 1 o 0 però al final vam acabar tots E: Però això anava en contra de lo que havíeu dibuixat abans?

A: Ja.

E: No?

A: Sí, sí. Però al final en Ferran ens va... ens va com... donar la seva raó. Llavors tots vam acabar fiant el 0. Vam dir que sí que...

La resposta corresponent a **AG2** es confirma a partir de l'entrevista a un dels membres del grup com podem veure a la transcripció següent:

A: Sí, primer vam pensar de fer del  $-1$  al  $-7$  i de l' $1$  al  $20$  però llavors vam trobar que el zero també hi havia de ser perquè era la planta baixa i llavors... doncs... no sabíem si ficar el  $20$  o no ficar-lo. I llavors... al final el vam ficar i a la correcció vam veure que no.

E: Vau estar tots d'acord en què havíem de treure el  $20$  o no?

A: Sí

## 2. Qualificador:

En relació al contingut que hem anomenat "Qualificador", de l'anàlisi creuada emergeix un patró preliminar de comprensió amb la següent característica principal:

- Comprensió de l'ús dels nombres enters i en concret del signe  $-$  com a qualificador, per tal de descriure situacions.

2. (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa? 0  
 (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani? -3  
 (c) Com expressaries que ets al quart pis? 4 AG1

2. (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa? ~~0~~ *Sóc a la planta 0.*  
 (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani? *Sóc a la planta -3 planta 0.*  
 (c) Com expressaries que ets al quart pis? *Sóc a la planta 4* AG2

a) 0 b) -3 c) 4 + AG3

2. (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa? *Amb un "0"*  
 (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani? -3  
 (c) Com expressaries que ets al quart pis? +4 AG4

2. (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa? 0  
 (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani? -3  
 (c) Com expressaries que ets al quart pis? 4 AG5

2. (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa? 0  
 (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani? -3  
 (c) Com expressaries que ets al quart pis? 4 AG6

2. (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa? *amb negatiu*  
 (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani? -3  
 (c) Com expressaries que ets al quart pis? 4 AG7

2. (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa? 0  
 (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani? -3  
 (c) Com expressaries que ets al quart pis? 4 AG8

2. (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa? 0  
 (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani? -3  
 (c) Com expressaries que ets al quart pis? 4 EG1

a) ~~0~~ b) -3 c) 4 + EG2

2. (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa?  
 (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani? -3  
 (c) Com expressaries que ets al quart pis? 4 EG3

2. (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa? ~~0~~  
 (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani? -3  
 (c) Com expressaries que ets al quart pis? 4 EG4

2. (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa?  
 (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani? -3  
 (c) Com expressaries que ets al quart pis? 4 EG5

2. (a) Com expressaries, en llenguatge matemàtic, que ets a la planta baixa? *Amb un signe 0*  
 (b) Com expressaries que ets al tercer soterrani? -3  
 (c) Com expressaries que ets al quart pis? 4 + EG6

A) Planta 0 B) -3 C) +4 EG7

Figura 5.2: Evidència P2

Les entrevistes confirmen la interpretació donada a les respostes del qüestionari de la Figura 5.2. En primer lloc la majoria d'alumnes no tenen dificultats per utilitzar el signe  $-$  com a qualificador. Per exemple la resposta de l'entrevistat del grup **AG5**:

A: Aaah ... potser les que... bueno aquestes... les primeres preguntes no van plantejar

*gaires problemes, més que res perquè eren de sentit comú i no s'havia de... o sigui, no s'havia de pensar molt sobre coses que havies estudiat o coses així.*

En segon lloc que no utilitzen el signe + per indicar els positius, com expressa l'entrevistat del grup **AG6**:

*A: Mmm, aquí... ens vam posar d'acord però... vam discutir una mica. A veure si havíem de posar positiu perquè quan estàs en un ascensor o quan et diuen el número de planta no et diu +2, et diu simplement el 2. Però bueno... al final vam decidir posar-ho així, com en els números.*

*E: O sigui, que dubtàveu entre posar el + i el - o deixar només el -, no?*

*A: Sí.*

En tercer lloc, alguns grups han utilitzat utilitzant ordinals en lloc de nombres. Per exemple a l'entrevista del membre del grup **EG6**:

*E: Aquí vau estar d'acord a l'hora de donar respostes? Us va costar?*

*A: Bueno... alguns van dir el 0 i els altres el guionet, el signe -.*

*E: Aha!*

*A: Llavors al final, bueno... vam votar quina era i quina no.*

*E: Democràticament o ...*

*A: Sí.*

*E: Molt bé.*

*A: I al segon... tercer soterrani. Com que era el tercer. doncs, vam posar el signe -. ja que si fos cap amunt seria un +. I aquí també seria lo mateix. Aquí no me'n recordo perquè hi havia aquesta t.*

En aquest últim fragment també apareix una referència als dubtes que alguns alumnes tenen sobre com fer referència al zero:

*alguns van dir el 0 i els altres el guionet, el signe -.*

### 3. Operacions:

En relació al contingut que hem anomenat "Operacions", de l'anàlisi creuada dels Enters emergeix un patró preliminar de comprensió amb la característica següent:

- Comprensió a l'hora de relacionar els canvis de pujar i baixar amb les operacions de sumar i baixar.

Les entrevistes aporten la confirmació de l'enunciat d'aquests patrons preliminars que hem extret del qüestionari dels enters, com podem veure a la Figura 5.3. De l'entrevista al representant del grup **AG2** veiem que tot i començar indicant verbalment el moviment, acaben expressant-ho amb números i signes:

*A: He... mmm... En aquesta pregunta... o sigui vam... primer vam pensar en ficar "vaig del pis tal al pis tal" i després, al cap d'una estona vam corregir, en ves de ficar això fer-ho tot en números i fer les sumes i les restes necessàries.*

De l'entrevista amb el grup **EG5** també obtenim una nova evidència de l'ús de les operacions suma i resta per indicar els moviments de pujar i baixar:

A: A la 3. Sí, a la 3, bueno... simplement eren operacions, mmm... Ets al primer pis, per tant pis 1, i en pugues quatre. El pujar el vam considerar el + i, quatre pisos. Per tant,  $1 + 4$ . Vam fer-ho així. I amb la b, mm... com que diu que baixes, baixes el vam considerar un -, i vam fer  $1 - 5$  perquè ens demana del primer i en baixes cinc... I les operacions, bueno... sí, és mirar els exercicis de dalt i te'n adones que has fet servir la suma i la resta...

3. (a) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?  $1+4$   
 (b) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos?  $1-5$   
 (c) Quines operacions has utilitzat per expressar els dos enunciats anteriors? Suma i resta. AG1

3. (a) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos? Vaig del pis 1 al pis 5 ( $1+4$ )  
 (b) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos? Vaig del pis 1 al pis  $-4$  ( $1-5$ )  
 (c) Quines operacions has utilitzat per expressar els dos enunciats anteriors? suma (+) i resta (-) AG2

a)  $1+4 = \boxed{5}$  / p/s.  
 b)  $1-5 = \boxed{-4}$  / p/s.  
 c) sumes i restes. AG3

3. (a) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?  $+1+4$   
 (b) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos?  $+1-5$   
 (c) Quines operacions has utilitzat per expressar els dos enunciats anteriors? Restes i sumes ( $+ = +$ ,  $- = -$ ). AG4

3. (a) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?  $\cancel{1}+4$   $1+4=5$   
 (b) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos?  $1-5=-4$   
 (c) Quines operacions has utilitzat per expressar els dos enunciats anteriors? Suma i resta. AG5

3. (a) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?  $1+4$   
 (b) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos?  $1-5$   
 (c) Quines operacions has utilitzat per expressar els dos enunciats anteriors? Operacions Sumes i restes. AG6

3. (a) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?  $1+4 \cdot 5$   
 (b) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos?  $1-5 \cdot -4$   
 (c) Quines operacions has utilitzat per expressar els dos enunciats anteriors? Suma i resta. AG7

3. (a) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i pugues quatre pisos?  $(+1)+(+4)$   
 (b) Quina expressió ens permetria representar el fet que ets al primer pis i que baixes cinc pisos?  $(+1)-(-5)$   $+1-5$   
 (c) Quines operacions has utilitzat per expressar els dos enunciats anteriors? Suma i Resta de nombres enters. AG8

Figura 5.3: Evidència P3

#### 4. Simètric:

En relació al contingut que hem anomenat “Simètric”, de l’anàlisi creuada dels Enters emergeix un patró preliminar de comprensió amb les dues característiques següents:

- Comprensió del canvi de signe per indicar el contrari d’una acció (pujar, baixar).

A partir de les entrevistes als grups confirmem la construcció d’aquest patró preliminar i la interpretació donada a la resposta de la Figura 5.4. Per exemple de l’entrevista al grup **AG8**:

A: Sí! Bueno... vam posar...no, aquesta pregunta no ens va costar molt, en realitat. O sigui, o sigui vam parlar totes i vam... o sigui, ho vam fer bastant ràpid.

E: En aquest cas us demanava “com expressaries que fas el contrari de pujar cinc pisos?”

A: Sí!

E: Veig que escriviu...

A:  $-(+5)$  pisos.

E: Aha!

A: I... bueno... i fer el contrari de baixar dos pisos,  $-(-2)$  pisos.

E: Per tant, vosaltres heu... aquí diu... “què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o baixar?”

I de l'entrevista al grup **EG5**:

A: Mmm... A la 4 vam escriure... primer de tot vam escriure que fas el contrari de pujar 5 pisos, vam escriure-hi  $-5$ .

E: Ehem!

A: Després ens ho vam mirar per... bueno vam seguir... i en el b vam escriure  $+2$ . Que era, en realitat, el resultat final. I al... quan vam arribar a la c: “Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o baixar?” Ens vam adonar de que havíem utilitzat dos signes, no un. I ens deia “què has utilitzat?” No, “quins has utilitzat?” Aleshores, vam mirar-nos l'a i el b altra vegada i vam pensar de que, d'aquesta manera, era millor perquè en realitat el què expressa el signe contrari és el  $-$ . El contrari de  $+5$  és  $-5$  i el contrari de  $-2$  és  $+2$ .

E: Clar.

A: Per això vam preferir-ho escriure-ho així.

E: A la primera resposta, diguéssim, que ja havíeu fet una operació de signes...

A: Sí!

E: ... mentres que aquí estaves veient què feies amb els signes.

A: Sí, sí.

E: Molt bé.

A: O sigui, a la primera vam respondre directament el resultat que dona això. I en canvi, quan... mmm... vam arribar a la c, ens vam adonar que podíem fer-ho així perquè és més clar.

4. (a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?  $-5$   $-(+5)$   
 (b) Com podries expressar, que fas el contrari de baixar dos pisos?  $-(-2)$   
 (c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar? Signes  $(+/-)$  i parèntesis.  
 (d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?  
 No, perquè no és el mateix fer  $-3$  que  $-(-3)$  **AG8**
4. (a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?  $-(+5)$   
 (b) Com podries expressar, que fas el contrari de baixar dos pisos?  $-(-2)$   
 (c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar? el signe contrari  $(-)$   
 (d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?  
 Si, hem utilitzat els mateixos símbols, encara que el significat no és el mateix ja que a l'activitat anterior s'expressa per notar i en aquesta activitat es fa servir per expressar el contrari. **EG5**

Figura 5.4: Evidència P4

- Eviten indicar el contrari avantposant el signe  $-$  a l'acció proposada. De l'entrevista al grup **AG6** obtenim justificació a les evidències de les Figures 5.5,

5.6, 5.7 i 5.8:

A: I això de com el contrari de pujar cinc pisos, doncs, com el contrari també és el símbol  $-$ , doncs  $-5$ .

E: Aha!

A: I... la següent pregunta és el contrari de baixar, doncs,  $+2$ .

E: Aha!

A: Però aquí falta el  $+$ .

E: Ah! bueno, ehem! Heu posat només 2, no

4. (a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?  $-5$   
 (b) Com podries expressar, que fas el contrari de baixar dos pisos?  $+2$   
 (c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar?  $+$ ,  $-$   
 (d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?  
 No, perquè ~~la seva utilitat és en els casos anteriors és~~  
 sí, perquè no és cap operació, només expressa  
 si és positiu o negatiu. AG1

4. (a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?  $-5$   
 (b) Com podries expressar, que fas el contrari de baixar dos pisos?  $+2$   
 (c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar? positiu(+), negatiu(-)  
 (d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?  
 Sí, perquè estem pujant i baixant pisos.  
 No, perquè: AG2

Positiu

Negatiu

contrari

a)  $-5$

b)  $+2$

c)  $+$  o  $-$

d) Sí es el mateix perquè segeixes positiu o baixant.

AG3

Figura 5.5: Evidència P4(I)



4. (a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?  $-5$   
 (b) Com podries expressar, que fas el contrari de baixar dos pisos?  $+2$   
 (c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar?  $-, +$   
 (d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?  
 (H) Si, perquè també s'utilitza per indicar a quina planta estàs.  
 AG4
4. (a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?  $-5$   
 (b) Com podries expressar, que fas el contrari de baixar dos pisos?  $+2$   
 (c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar? Posar el signe ~~el~~ contrari.  
 (d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?  
 Si, perquè depèn del signe que posis baixeres o pujades.  
 AG5
4. (a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?  $-5$   
 (b) Com podries expressar, que fas el contrari de baixar dos pisos?  $2$   
 (c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar? Canviar el signe  
 (d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?  
 No, perquè en aquest significu negativu i a l'altre menys  
 AG6
4. (a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?  $-5$   
 (b) Com podries expressar, que fas el contrari de baixar dos pisos?  $+2$   
 (c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar? Pujar(-) i baixar(+)  
 (d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?  
 Si, perquè estas restant o sumant els pisos que estas pujant o baixant  
 AG7

Figura 5.6: Evidència P4(II)

a)  $-5 \rightarrow$  baixari cinc pisos.

b)  $+2 \rightarrow$  pujar dos pisos.

c) el símbol contrari ( $+ \rightarrow -$   $- \rightarrow +$ )

d) En part m, perquè sempre expresant com pujar i

baixar pisos. Però temps es ben bé així perquè

no és la mateixa expressió sin que entés en aquell

ps, que puja o baixa.

EG1

a)  $-5$

b)  $+2$

c) el signe "+" o el signe "-".

d) m, perquè sempre puja o baixa.

EG2

4. (a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?  $-5$

(b) Com podries expressar, que fas el contrari de baixar dos pisos?  $+2$

(c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar? El signe contrari

(d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?

Si, ~~no~~ no en el mateix significat perquè el "+" s'utilitza per representar els nivells sobre 0; el "-" els nivells sota 0. I són contraris.

EG3

En aquest cas s'utilitza per expressar el contrari.

Figura 5.7: Evidència P4(III)

4. (a) Com podries expressar que fas el contrari de pujar cinc pisos?  $-5$   
 (b) Com podries expressar, que fas el contrari de baixar dos pisos?  $+2$   
 (c) Què has utilitzat per indicar el contrari de pujar o de baixar? Signes  $+$  i  $-$   
 (d) Si has utilitzat un símbol del mateix tipus que els que has utilitzat en activitats anteriors, creus que el significat és el mateix? Per què?
- Es es mouer perquè té de baixar quan arriba a baixar*  
*No, perquè arriba a pujar o a baixar 0*
- EG6
- A)  $-5$   
 B)  $+2$   
 C)  $-$  i  $+$
- D) No, els nombres han canviat, però els signes són iguals.
- EG7

Figura 5.8: Evidència P4(IV)

Alguns exemples més d'entrevistes que confirmen les operacions de signes prèvies a donar la resposta al com s'expressa el contrari són les següents. Del grup **EG6**:

A: A la 4. Ah! Contrari apujar cinc pisos seria baixar cinc pisos. Que en aquest cas seria  $-5$ . I el contrari de baixar dos pisos seria  $+2$ .

Del grup **EG7**:

A: Mmm... doncs, el contrari de que sumes cinc pisos, mmm... si sumes..., si puges cinc pisos, seria  $+5$ . Llavors el contrari seria  $-5$ . I el contrari de baixar dos pisos, igual. Si en baixes dos, seria  $-2$  però el contrari  $+2$ . Mmm... El que hem utilitzat per indicar el contrari de de pujar o baixar és per... O sigui, el contrari de pujar seria el  $-$  i el contrari de baixar seria el  $+$ .

## 5. Àlgebra:

En relació al contingut que hem anomenat "Àlgebra", de l'anàlisi creuada dels Enters emergeix un patró preliminar de comprensió amb les dues característiques següents:

- Dificultat per utilitzar expressions algebraiques per descriure situacions, en particular,

si involucren enters.

De les entrevistes podem obtenir la ratificació d'aquest patró preliminar. A continuació transcrivim els fragments de la Figura 5.9. Primer el corresponent a l'entrevistat del grup **EG6**:

A: I aquí ens vam equivocar una mica. perquè no vam utilitzar algebraica. Bueno, només al primer sí.

E: Al primer sí. No?

A: Sí, a la primera sí. I era  $3 - x$  entre  $-5$  que donava  $-5$ . Ja que, no saps quants pisos has pujat. Bueno, no saps quants pisos has de pujar per arribar... al soterrani 5.

E: Ehem!

A: I al b, bé aquí l'hem respost directament i... però hauria de ser  $4 - x$  i donaria que estàs al soterrani 2. Bueno... i els altres són més o menys el mateix.

6. Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:

(a) Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?  $3 - x = -5$

(b) Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani? ~~6 pisos~~  $4 - x = -2$

(c) Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment? ~~6 pisos~~  $-1 + x = +4$

(d) Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment? ~~-3~~  $-2 - x = -5$

EG6

6. Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:

(a) Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?

(b) Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?

(c) Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?

(d) Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?

A)  $-3 + x = -5$  ✓

B) ~~x~~  $4 + x = -2$

C) ~~x~~  $-1 + x = +4$

D) ~~x~~  $-2 + x = -5$

EG7

Figura 5.9: Evidència P6(I)

I després el corresponent a l'entrevistat del grup **EG7**:

*E: Aquí havíem de... la pregunta 6... en terminologia algebraica. Utilitzant expressions algebraiques.*

*A: Mmm... "Quants pisos he pujat o baixat per... arribar al cinquè... mmm...?"  
Doncs... en el cinquè... doncs si és al tercer pis ... mm... Fiques el 3 al tercer pis i sumes  $x$  perquè no saps quant has de pujar o baixar. Llavors, és igual a  $-5$ , que és el cinquè soterrani.*

*E: Aha!*

*A: En el b, "quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?" Doncs, al quart pis li sumes  $x$  perquè no saps quant has de pujar o baixar. Llavors, és igual al  $-2$ , que és el segon soterrani. Era al primer soterrani i he anat al quart pis. Quants...?*

*E: Tots aquests... a part del primer. els va fer tots després de la posada en comú, no?*

*A: Què? Sí.*

- Respostes que donen el resultat o l'operació que hi porta, no l'expressió algebraica.

Les entrevistes també confirmen l'aparició d'aquest patró preliminar. Les transcripcions de les entrevistes següents ratifiquen la interpretació que hem donat a les respostes dels qüestionaris recollides a les Figures 5.10, 5.11, 5.12 i 5.13. De l'entrevista al representant del grup **AG1** tenim:

*A: No, aquest ens va costar bastant. I... tampoc... no sé... no ens havia donat molt de temps i ho vam fer bastant ràpid... també. I... bueno es que no estem segures perquè o sigui... vam com al final com arribar a l'acord de què si havia de donar negatiu si baixàvem i positiu si pujàvem. Llavors doncs calculàvem els pisos mentalment diguéssim llavors intentàvem fer una operació que donés el resultat.*

*E: O sigui primer intentàveu fer una previsió...*

*A: Sí.*

*E: ... de quin seria el resultat i a partir d'aquí buscàveu una expressió algebraica que s'adeqüés amb això?*

*A: Sí.*

De l'entrevista al representant del grup **AG2** tenim:

*A: Mmm... en aquesta..., no, en aquesta ho va dir... ho va dir un nen perquè... o sigui... jo i l'altre nen no sabíem ben bé com fer-ho. I, bueno... ens ho va com explicar una mica i... llavors vam començar a entendre-ho i ho vam...*

*E: Mmm...*

*A: ...ho vam indicar.*

*E: Quina era la dificultat que hi trobàveu?*

*A: Que no sabíem, ben bé, com buscar la forma algebraica. I... mmm... bueno... llavors ho vam intentar i vam fer això més o menys.*

*E: Val. Aquí el que veig és que va respondre  $x = 8$  en el primer,  $x = 6$ , o sigui... diguem que és com si donéssiu el resultat?*

*A: Sí.*

6. Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:

- (a) Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?  $x = 3 + 5$   $x = -3 - 5$
- (b) Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?  $x = 4 - 2$   $x = -4 - 2$
- (c) Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?  $x = 1 + 4$
- (d) Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?  $x = -2 + 5$   $x = 2 - 5$

AG1

6. Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:

- (a) Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?  $x = +8$
- (b) Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?  $x = +6$
- (c) Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?  $x = 6$
- (d) Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?  $3 = x$

AG2

$$a) x = +8$$

$$b) x = 2$$

$$c) x = 3$$

$$d) -2x - 5x = -3x$$

AG3

6. Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:

- (a) Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?  $-8$   $+3 - x = -8$   $+3 - 8 = -5$
- (b) Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?  $+4x = -2$   $4 - 6 = -2$
- (c) Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?  $+5$   $-1x = +4$   $-1 + 5 = +4$
- (d) Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?  $-5$   $-2 - x = -5$   $-2 - 3 = -5$

AG4

Figura 5.10: Evidència P6(II)



6. Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:

- Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?
- Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?
- Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?
- Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?

$$3 + 5 = x \rightarrow 7$$

$$4 + 62 = x$$

$$-1 + 4 \rightarrow -1 + x = 4$$

$$-2 - 5 \quad -3 + x = -5$$



EG1

6. Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:

- Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?
- Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?
- Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?
- Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?

$$a) 3 - 8 = -5$$

$$b) 4 - 6 = -2$$

$$c) -1 + 5 = 4$$

$$d) +2 - 3 = -1$$

EG2

Figura 5.12: Evidència P6(IV)



6. Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:

(a) Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?  $3 + x = -5$

(b) Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?  $4 + x = -2$

(c) Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?  $-1 + x = 4$

(d) Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?  $-2 + x = -5$

EG3

6. Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:

(a) Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?  $-(+3) - 5 \times$

(b) Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?  $-(+4) - 2 \times$

(c) Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?  $x(+1) - 4$

(d) Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?

$$-(+2) - 5$$

Un pensavem que es tenia que per sempre  $\times$ . I es te que per amb  $\times$ .

EG4

6. Com expressaries, en terminologia algebraica, les situacions següents:

(a) Quants pisos he de pujar o baixar, per arribar al cinquè soterrani des del tercer pis?  $3 + x = -5$

(b) Quants pisos cal baixar per anar del quart pis al segon soterrani?  $4 - x = -2$

(c) Si era al primer soterrani i he anat al quart pis, quin ha estat el meu moviment?  $-1 + x = 4$

(d) Si he anat del segon soterrani al cinquè soterrani, quin ha estat el meu moviment?  $-2 + x = -5$

EG5

Figura 5.13: Evidència P6(V)

## 6. Representació:

En relació al contingut que hem anomenat “Representació”, de l’anàlisi creuada dels Enters emergeix un patró preliminar de comprensió amb la característica següent:

- Dificultats de representar l’edifici per la dificultat d’interpretació del zero com a número i la seva aplicació en aquest cas.

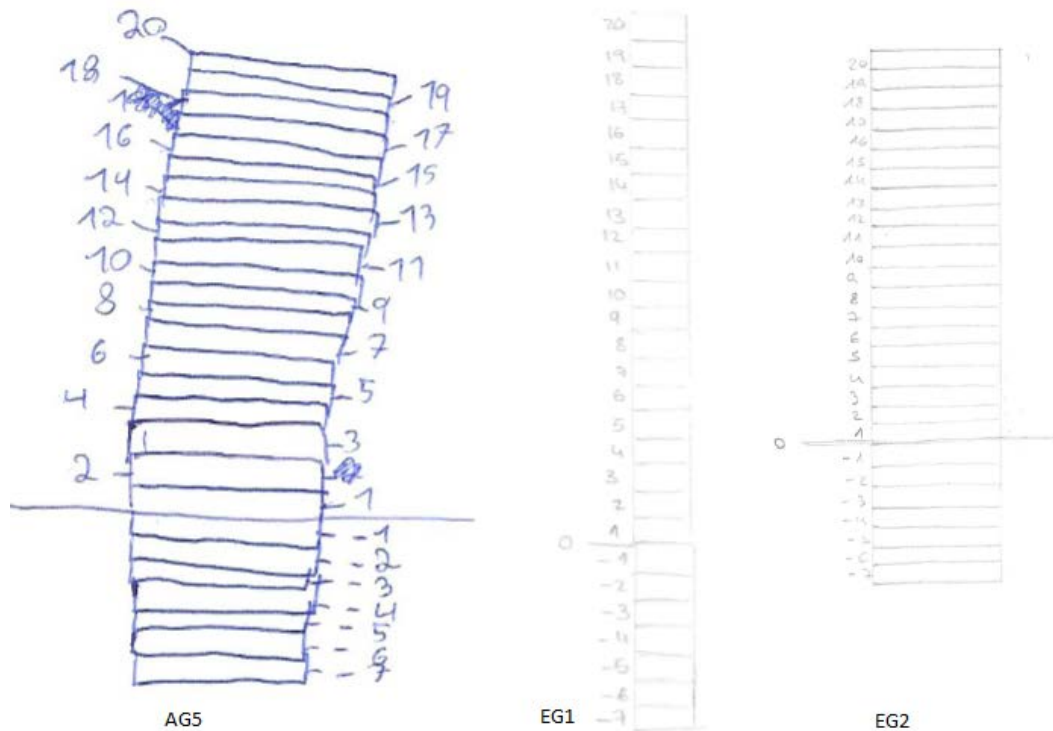


Figura 5.14: Evidència P1

A la Figura 5.14 podem veure tres respostes on a l'hora de fer la representació de les plantes descrites els estudiants no assignen la planta baixa al número 0. Aquesta seria la planta baixa. Assignen 1 a la planta baixa i -1 al primer soterrani i el 0 només correspon a la línia de terra. De la revisió de les entrevistes podem extreure fragments que reforcen la interpretació que hem donat a les respostes del qüestionari. Per exemple de l'entrevista al grup **AG5** tenim:

A: Vaig fer servir el sentit comú.

E: Val! A veure la primera pregunta, a l'hora de fer aquest dibuix vas estar tots d'acord?

A: A veure, hi havia dues persones que no és que no és que van participar molt però... també van fer algu. I jo ... bueno vam pensar de fer, si diu que hi ha 20 nivells per sobre, doncs, com fer 20 nivells i per sota -7. I així vam anar dibuixant... i doncs, ens va donar 20, 20 per sobre i -7 per sota.

E: Aquí veig que comenceu per l'u per sobre...

A: Ah! sí.

E: ... i al  $-1$  per sota.

A: Això, això... crec que no ho vam fer bé perquè hauríem d'haver posat un 0 però... bueno ens vam equivocar no me n'he adonat.

E: I la resta de la construcció l'hauries fet exactament igual afegint el zero aquí?

A: Sí.

De l'entrevistat del grup **EG1** també obtenim informació en la mateixa línia:

A: Bueno doncs, aquí a la primera activitat vam decidir que fem. Si eren vint nivells sobre terra, doncs, hi hauria com la planta baixa, que seria el zero. I doncs, començant des d'aquí, doncs, vint més perquè cada pis que pugés seria una i bueno, vam decidir fer vint perquè el zero no comptava com a una. I per la mateixa raó fer-ne set cap avall. De zero, doncs, una cap a sota sense comptar la... aquesta que seria la planta baixa.

E: Però aquí veig que el zero el vau col·locar.

A: Sí, però... bueno era més com per orientar-nos una mica al principi i... bueno... però ja vam anar comptant...

E: Vale.

A: ...simplement per això.

E: Tots vau estar d'acord a l'hora de fer aquesta activitat? No...

A: Sí, sí.

I finalment de l'entrevista al grup **EG2** obtenim informació similar a la de les transcripcions anteriors. Posant en evidència la dificultat de situar el 0 en el dibuix que representa l'edifici:

A: Vale doncs. Aquí mmm... hem fet aquest edifici perquè així seria més fàcil de visualitzar mmm... els pisos que té en total són vint-i-set i per no equivocar-nos ni res els hem volgut dibuixar.

E: Ehem... El que veig és que heu posat el pis 1, el pis  $-1$ ...

A: Sí, perquè vam mirar, per exemple, a l'escala, que el primer pis que és quan entres, ja és primer pis i a baix és  $-1$ . I llavors vam partir del zero però que el primer pis era 1... Aquí... mmm... bueno a la a vam ficar un zero... Dic per què?

E: Sí, una miqueta, a veure, i... la dificultat que vau tenir. Si estàveu d'acord tots, si vau tenir discrepàncies...

A: Sí, sí. Vam... bueno al principi dèiem si era 1 o 0 però al final vam acabar tots d'acord de ficar 0... i...

E: Però això anava en contra de lo que havíeu dibuixat abans?

A: Ja.

E: No?

A: Sí, sí. Però al final en Ferran ens va... ens va com... donar la seva raó. Llavors tots vam acabar ficant el 0. Vam dir que sí que...

Aquests fragments mostren les dificultats per interpretar de manera clara el 0.

## 7. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ :

En relació al contingut que hem anomenat " $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ", de l'anàlisi creuada dels Enters emergeix un patró preliminar de comprensió amb les dues característiques següents:

- Saben que estan utilitzant nombres enters.
- Els costa identificar l'ús que s'està donant al signe  $-$ .

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

Poden fer nombres positius i negatius i també operacions (sumar, restar) i també són signes contraris

AG1

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

+ → és positiu i vol dir pujar (sumar)  
- → és negatiu i vol dir baixar (restar)

AG2

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

a) + augmenta - disminueix  
- negatiu  
- Contrari

AG3

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

Que serveixen per indicar posius (+, -).

AG4

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

Suma i resta, positiu i negatiu

AG5

Figura 5.15: Evidència P5(I)

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols  $+$  i  $-$ , a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

Sumar / restar

positiu / negatiu

AG6

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols  $+$  i  $-$ , a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

o negatiu, positiu

o suma i resta

o contraris

AG7

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols  $+$  i  $-$ , a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

$+$  : sumar, el més gran que, fins a "positiu".

$-$  : restar, el contrari de, fins a "negatiu".

AG8

Figura 5.16: Evidència P5(II)

A partir de les respostes que estan representades a les Figures 5.15 i 5.16 observem que, de primeres al grup-classe A, cap dels grups identifica la funció d'operador simètric del signe  $-$ . Quasi bé tots identifiquen la funció de qualificador dels signes  $+$ ,  $-$  i més de la meitat amb les operacions suma i resta. De la revisió de les entrevistes obtenim confirmació de la interpretació que hem fet d'aquestes respostes. Per exemple, de l'entrevista al grup **AG1** veiem que identifiquen la funció de qualificador i d'operador binari però, fins després de la intervenció i de la posada en comú no identifiquen la funció d'operador simètric:

A: Llavors aquí només o sigui només vam pensar amb positius i negatius i sumar i restar i ens vam descuidar lo del signes contraris.

E: Aha! Però lo altre ho teníeu clar lo de positius i negatius.

A: Sí.

E: Sumar i restar.

A: Però després ho vam corregir, ens vam donar compte que ens ho havíem deixat.

De l'entrevista al grup **AG2** podem veure que identifiquen la funció de qualificador i que relacionen la suma i la resta amb canvis d'estat, pujar i baixar, però en cap

moment fan referència a l'operador simètric:

A: *I, bé... en realitat només vam pensar en contestar una pregunta, la de positiu i negatiu, però llavors, sense saber perquè, vam ficar també les altres dues. La suma i la resta i llavors vam veure que estava bé i, ...*

E: *Però aquí, la suma i la resta ho heu posat entre parèntesis, no?*

A: *Sí, aquí sí. no ho vam tenir en compte.*

E: *No ho va tenir en compte. Però, això ho va fer mentre estàveu fent l'activitat.*

A: *Sí.*

E: *Però, a veure... primer positiu, el més de positiu i després també vol dir que pugem i... aquí va dir, ostres!, a l'hora de pujar el que estic fent és això...*

A: *Sumar.*

El grup **AG7** respon de manera similar al grup **AG2**. El grup **AG3** només associa, al principi, la suma i la resta amb l'augment i la disminució:

*dots es pot utilitzar d'altres maneres, també. I... "quins són els significats que pots atribuir als símbols + i - a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?" Bueno... aquí ho vam fer-ho per sobre, la veritat. I... o sigui, es poden utilitzar... de moltes més maneres, però bueno...*

E: *Però això... això és una reflexió teva, ara més...*

A: *Sí, sí ...*

E: *... més que no pas una reflexió de grup en el moment de fer-ho, no?*

A: *Sí. Vam ficar augmenta i disminueix. Que era l'única que havíem fet en el... en el darrer exercici aquest... i llavors és negatiu i contrari.*

El grup **AG4** no comenta la seva resposta a aquesta pregunta i el grup **AG5** respon en la mateixa línia que el grup **AG3**. Els grups **AG6** i **AG8** identifiquen les funcions de qualificador i d'operador binari però no fan referència a la d'operador simètric en cap moment:

A: *Aquí diu que, "quins són els significats de + i -?" I pot representar sumar, restar i positiu i negatiu.*

A: *En aquesta mmm... quan ho vam corregir vam... ens vam sentir molt contentes perquè vam ser les úniques que vam dir les tres funcions.*

E: *Quines funcions hi vèieu?*

A: *Bueno... el +, la suma i el "mateix que" i la funció de negatiu i de restar. Restar, el "contrari de" i funció de negatiu ai!... en realitat, positiu.*

E: *Ehem!*

A: *I... bueno...*

E: *O sigui, que va estar totes d'acord amb això?*

A: *Sí!*

E: *I que després va veure que...*

A: *Sí, bueno... nosaltres amb lo del "mateix que" i "el contrari que", pues, vam dir... pues... no sé si aquesta és una funció però al final es van decidir per posar-ho.*

Les Figures 5.17 i 5.18 mostren les respostes dels grups de treball corresponents al grup-classe *E*. Les respostes són similars, amb alguns matisos, a les del grup-classe

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

- et diuen a quin costat del pis estan.

- sumes i restes

- expressar nombres positius i negatius (contrari).

\* - crear equacions.

EG1

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

+ : positiu o suma

- : negatiu o resta.

per expressar el contrari

EG2

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

"+" pot significar un

- per expressar una posició < per sobre  
per sota

- per pujar o baixar

- per expressar el contrari

EG3

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

Posant - o + davant d'una expressió pot arribar a canviar completament el significat.

EG4

Figura 5.17: Evidència P5(III)

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

- Per indicar si està o no per sobre de zero  
 - Per a sumar o restar  
 - Per expressar que es queda igual o que és contrari

EG5

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

+ pot significar pujar un pas o que un pas està sobre zero i se baixa o un pas està baix (descendi) i dos passos

EG6

5. Quins són els significats que pots atribuir als símbols + i -, a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?

+ : el nombre és positiu, indica que està per sobre el 0  
 - : el nombre és negatiu, indica que està per sota el 0

EG7

Figura 5.18: Evidència P5(IV)

A. Com a mostra de respostes que aporten matisos diferents transcrivim algunes de les entrevistes. De l'entrevista al grup **EG1** veiem que afegeixen una funció completament diferent de les considerades, utilitzar els signes per “crear equacions”:

A: Eee... I llavors, doncs, aquí a l'exercici 5 que els significats... vam posar els tres que vam dir a la classe en comú després. Però en vam posar un quart, que era crear equacions que ja vindria a ser el... vam pensar que vindria a ser el mateix de dir expressar nombres positius i negatius. I en la manera que ho vam fer, doncs..., es veia després a l'activitat següent. Que sí que et diuen “expressa-ho en equacions com representaries que puges o baixes”, i aquí ens vam com avançar... ja.

El grup **EG3** només respon a la pregunta després de la intervenció i posada en comú, explicant que els hi ha mancat temps:

A: I aquí, doncs, és el mateix això per les tres coses que s'utilitza: per la



*posició, per pujar o baixar o per expressar el contrari.*

*E: Ehem!*

*A: I aquí... bueno tampoc... bueno aquesta no la vam acabar perquè no ens va donar temps i, llavors vam corregir en vermell.*

*E: És a dir, que la 5, pràcticament, no us va donar temps de fer-la. I només la vam fer al final, després de posa-ho en comú.*

Una altra de les respostes aportades per les entrevistes que reproduïm és la del grup **EG4**, perquè apunten només a l'ús del signe  $-$  com a operador simètric:

*A: "Quins són els significats que pots atribuir als símbols  $+$  i  $-$ , a la vista del que has pogut observar en totes les activitats anteriors?" Hem posat que el símbol  $-$  mmm... el significat que pot tenir és negatiu, vale...? Però també el podem utilitzar per canviar el significat d'una altra... d'una operació.*

*E: Però aquí només heu posat que...*

*A: Aquí vam posar que el  $-$  o el  $+$ , davant d'una expressió pot arribar a canviar completament el significat... o deixar-lo igual.*

I per acabar, transcrivim l'entrevista al grup **EG5**, que és l'únic grup que ha identificat les tres funcions en els qüestionaris:

*Després per expressar la posició i en aquí per expressar el contrari d'una cosa.*

*Ah! Val! Aquest sí, ens pregunta sobre el  $+$  i el  $-$  i, principalment és el que t'acabo de dir. De que el vam fer servir per tres coses diferents. Per si està sobre 0, per sumar i restar.*

## 5.2 Resultats de l'anàlisi creuada de la Cronologia de Catalunya

Seguint amb l'organització donada a l'apartat anterior, ara resumim els patrons preliminars específics derivats de l'anàlisi de les respostes del segon qüestionari i de les entrevistes associades. Com es farà notar, aquests patrons comparteixen diversos aspectes comuns amb els donats a l'apartat 5.1 i constitueixen una font de confirmació de certs aspectes identificats sobre la comprensió que els estudiants tenen dels nombres enters.

### 1. Origen:

En relació al contingut que hem anomenat "Origen", de l'anàlisi creuada de la Cronologia de Catalunya, emergeix un patró preliminar de comprensió amb la següent característica principal:

- Dificultats per identificar el 0 com a origen.

A les Figures que van de la 5.19 a la 5.26 es poden veure les respostes dels qüestionaris que ens permeten inferir aquest patró preliminar. A continuació contrastarem amb les entrevistes les respostes dels qüestionaris.

A partir de les entrevistes realitzades obtenim confirmació de resultats de l'anàlisi de respostes del qüestionari.

De l'entrevistat del grup **AG1** tenim la transcripció que confirma la nostra interpretació de les respostes del qüestionari del grup representades a la Figura 5.19:

*A: I a la 5 no vam tenir cap dubte. Però sí que vam fer una... vam ficar a*

5. Si imagineu els fets situats sobre una línia recta que representi el temps,

- (a) quin fet va passar en l'any simètric al 27 després de Crist respecte de l'any que prenem com a origen? *Tàrraco endevé ciutat imperial*
- (b) Amb quin número expressen l'any que prenem com a origen? *120000*
- (c) Amb quins símbols matemàtics podeu expressar l'any corresponent al fet demanat a l'apartat a)? *-*
- (d) Representeu una part de la línia temporal que ens permeti visualitzar clarament tot el que s'ha demanat en aquesta pregunta.

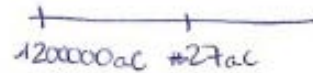


Figura 5.19: Evidència P5C(I)

5. Si imagineu els fets situats sobre una línia recta que representi el temps,

- (a) quin fet va passar en l'any simètric al 27 després de Crist respecte de l'any que prenem com a origen? *Tàrraco pateix un saqueig (francs) l'any 260.*
- (b) Amb quin número expressen l'any que prenem com a origen? *1*
- (c) Amb quins símbols matemàtics podeu expressar l'any corresponent al fet demanat a l'apartat a)? *+*
- (d) Representeu una part de la línia temporal que ens permeti visualitzar clarament tot el que s'ha demanat en aquesta pregunta.

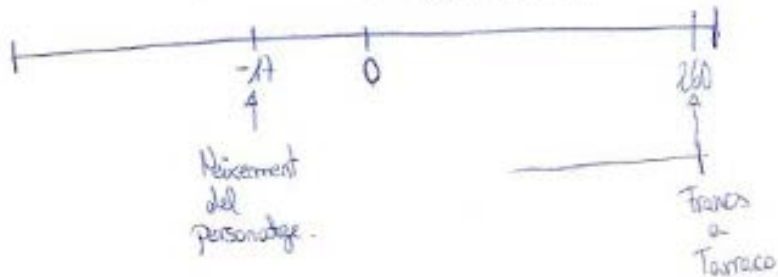


Figura 5.20: Evidència P5C(II)

5. Si imagineu els fets situats sobre una línia recta que representi el temps,

- (a) quin fet va passar en l'any simètric al 27 després de Crist respecte de l'any que prenem com a origen? *Murderià cap a Catalunya) Els romans etc*
- (b) Amb quin número expressen l'any que prenem com a origen? *1 d.C*
- (c) Amb quins símbols matemàtics podeu expressar l'any corresponent al fet demanat a l'apartat a)? *+ < >*
- (d) Representeu una part de la línia temporal que ens permeti visualitzar clarament tot el que s'ha demanat en aquesta pregunta.



Figura 5.21: Evidència P5C(III)

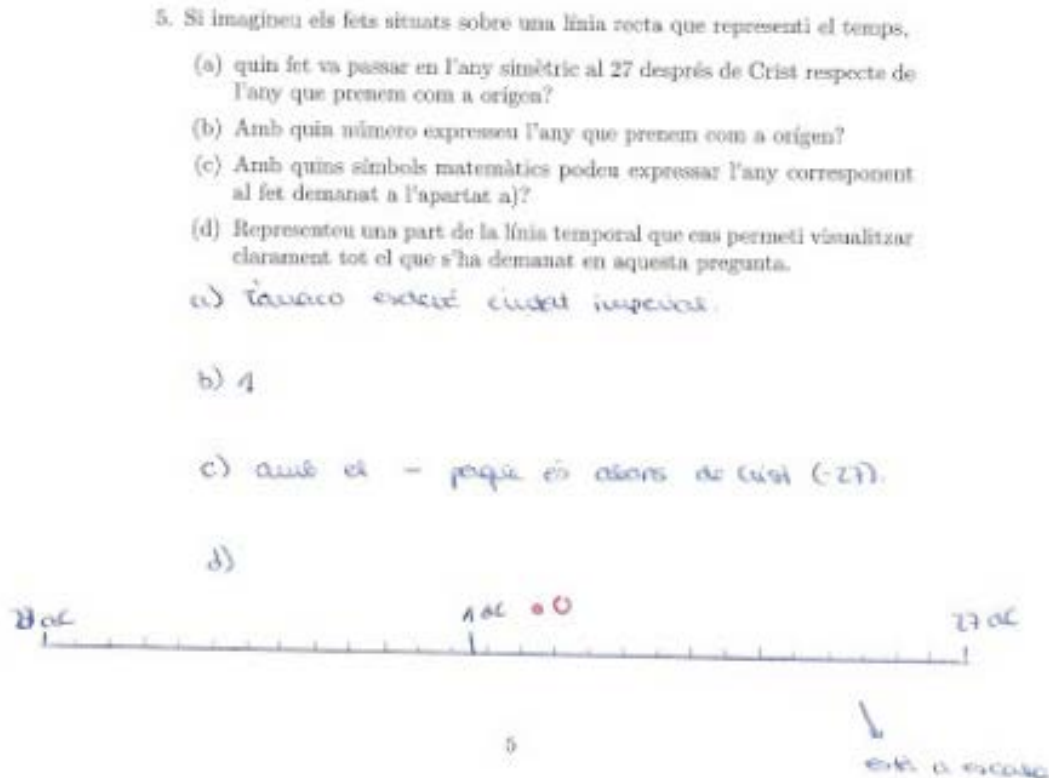


Figura 5.22: Evidència P5C(IV)

la b una cosa que... bueno... un número que no va ficar ningú. Perquè nosaltres vam interpretar que es referia a l'any que prenem com a origen, pues, des de que va aparèixer l'ésser humà i vam ficar l'1200000. I l'altra gent va ficar, pues, un altre perquè es pensava que era l'origen d'això.

Aquesta primera entrevista aclareix l'interrogant que presenta la resposta del qüestionari quan posen com a origen l'any 1200000. De l'entrevistat del grup **AG4** tenim la transcripció que confirma la nostra interpretació de les respostes del qüestionari de la Figura 5.20:

A: Llavors a la b vam fer lo que més o menys ens...sonava de lo que ens van explicar a història. Que és el 1, és l'any que es fica com origen de com va néixer Crist. Es fica com a any 1. Llavors, bueno vam ficar el + perquè és després de Crist, mmm... ho vam fer com la línia aquella. Llavors vam fer amb lo que t'he dit de la línia. Vam ficar el 0 al mig i, que és com el dia, l'any que va néixer Crist. Com si partíssim de l'inici i llavors vam ficar l'any... que va néixer i l'esdeveniment després de Crist.

E: De totes maneres aquí vau posar com a origen l'1 i veig que a la...

A: Sí, perquè per expressar una línia no podem ficar com a origen 1 i llavors vam ficar el 0.

5. Si imagineu els fets situats sobre una línia recta que representi el temps,
- quin fet va passar en l'any simètric al 27 després de Crist respecte de l'any que prenem com a origen? *Touces creure unia impicid*
  - Amb quin número expresseu l'any que prenem com a origen? *0*
  - Amb quins símbols matemàtics poden expressar l'any corresponent al fet demanat a l'apartat a)? *-27 =*
  - Representeu una part de la línia temporal que ens permeti visualitzar clarament tot el que s'ha demanat en aquesta pregunta.

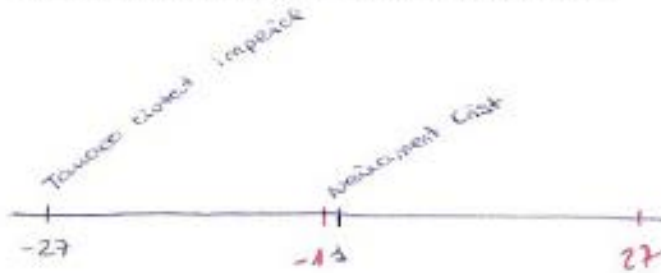


Figura 5.23: Evidència P5C(V)

5. Si imagineu els fets situats sobre una línia recta que representi el temps,
- quin fet va passar en l'any simètric al 27 després de Crist respecte de l'any que prenem com a origen? *Touces endre unia impicid*
  - Amb quin número expresseu l'any que prenem com a origen? *1*
  - Amb quins símbols matemàtics poden expressar l'any corresponent al fet demanat a l'apartat a)? *-(+27)*
  - Representeu una part de la línia temporal que ens permeti visualitzar clarament tot el que s'ha demanat en aquesta pregunta.

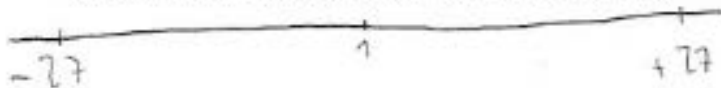


Figura 5.24: Evidència P5C(VI)

De l'entrevistat del grup **AG6** tenim la transcripció que confirma la nostra interpretació de les respostes del qüestionari de la Figura 5.21:

*A: L'any que prenem com a origen ho vam pensar com, més o menys, com a origen religiós no que estem a l'any 2000 del calendari perquè... Representa que l'any 1 és quan va néixer Crist i llavors, pues... vam posar que era l'any 1. No com aquell grup que va posar un milió i pico... I llavors, els símbols matemàtics, doncs... més i més gran que, però això no ho sé perquè... ho vam posar així.*

De l'entrevistat del grup **EG1** tenim la transcripció que confirma la nostra interpretació de les respostes del qüestionari de la Figura 5.22:

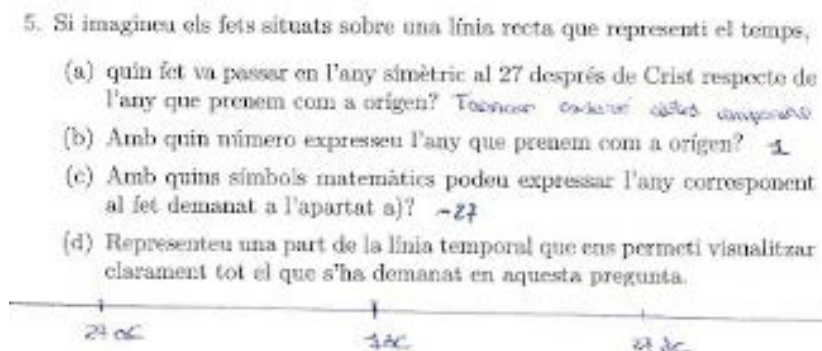


Figura 5.25: Evidència P5C(VII)

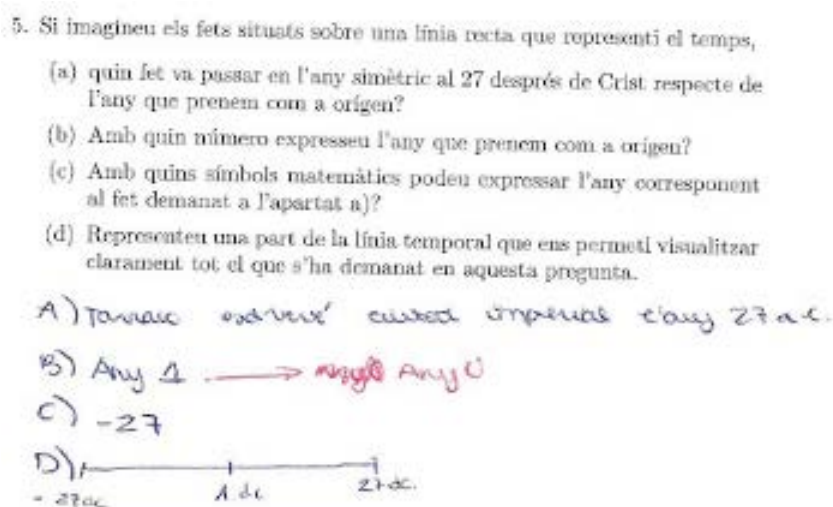


Figura 5.26: Evidència P5C(VIII)

Després, “amb quin número expressaríeu l'any que... prenem com a origen?” Nosaltres vam posar l'1. Però, sí, hi ha hagut com moltes discussions i així per... perquè... no sabíem si seria l'1 o el 0.

E: I a tu, què et sembla que seria?

A: Bueno, jo... crec que seria l'1. Perquè, o sigui, tot lo que hem... a part de les mates, tot lo que hem estudiat en altres assignatures, doncs, partim sempre de l'any 1. I de l'any 0 no, o sigui... no sé...

De l'entrevistat del grup **EG3** tenim la transcripció que confirma la nostra interpretació de les respostes del qüestionari de la Figura 5.23:

*Aleshores, aquí mmm... pregunta que quin any expressaríem l'origen. I, nosaltres hem posat que a l'any 1. I després quan ho hem comentat a classe, doncs, al final hem entès que era a l'any 0. Mmm... perquè... bueno sí... tot i que... és com si*

*no existís. Però també és un número enter, el zero. I llavors... com si diguéssim, s'havia de tenir en compte.*

De l'entrevistat del grup **EG4** tenim la transcripció que confirma la nostra interpretació de les respostes del qüestionari de la Figura 5.24:

*“ Amb quin número expresseu l'any que prenem com a origen?” Vam posar l'1. Mmm... perquè... nosaltres creiem... o sigui, més o menys, aquí sí... en aquesta pregunta sí que vam discutir dins del grup perquè uns deien que... o sigui, l'any d'origen era el zero. Perquè el zero sempre, normalment, és el que marca... és el punt mig entre els positius i els negatius. Però, també, jo i algú més del grup vam decidir l'1. Perquè, per exemple en alguns anys anteriors, com per exemple a Socials, sempre ens havien dit que l'any 0 no existia. Perquè... era com si no hagués existit res, saps? Llavors vam decidir, finalment, vam decidir escollir l'1.*

De l'entrevistat del grup **EG6** tenim la transcripció que confirma la nostra interpretació de les respostes del qüestionari de la Figura 5.25:

*i l'any que prenem... prenem com a origen seria el... vam posar l'1. Perquè vam pensar... bueno, a Socials, els llibres posaven que era l'1 després de Crist però... llavors, clar, comencem a comptar des d'allà.*

*E: I tots estàveu d'acord amb això?*

*A: Sí, tots vam estar d'acord.*

De l'entrevistat del grup **EG7** tenim la transcripció que confirma les respostes del qüestionari del grup, representades a la Figura 5.26:

*A: Aquí, bueno, de l'any 1 i l'any 0 que... és any 0, no?, al final o...*

Aquestes transcripcions mostren que aquests alumnes no tenen clar quin és l'origen que cal prendre per fer una representació sobre la recta numèrica. La majoria de grups pensen que l'origen ha d'estar a l'1, tot i que al fer la representació s'adonen que hauria de ser el 0. Alguns grups expliquen que aquesta manera d'interpretar el temps sobre la recta numèrica és conseqüència del que han après en cursos anterior a Socials o Religió. Altres grups, tot i haver pres el 0 com origen també manifesten que han dubtat a l'hora de triar el 0 o l'1 com a origen. S'observa a l'entrevista del grup **AG5**:

*A: I tenim la data. I... l'any que prenem com a origen... és el... vam posar 0. Però jo crec que era 1. Perquè... o sigui... no, no! Sí... bueno... no, no, sí! Segueixo amb el zero, millor.*

I de l'entrevista al grup **AG5**:

*E: I amb això de l'origen, veig que l'heu tatxat. Vau tenir discussió sobre quin era l'origen?*

*A: Sí, perquè no sabíem si posar l'any 1 o l'any 0. Llavors com hem fet el fris, hem dit que millor posar l'any 0 perquè ens guiariem més, si és positiu o negatiu.*

## 2. Qualificador:

En relació al contingut que hem anomenat “Qualificador”, de l'anàlisi creuada de la Cronologia de Catalunya, emergeix un patró preliminar de comprensió amb la següent característica principal:

- Comprensió de l'ús del signe – com a qualificador, per tal de descriure situacions.

En aquest cas la majoria dels grups han respost de manera correcta als qüestionaris i no hi ha grans diferències entre les respostes. La Figura 5.27 mostra un exemple de la majoria de respostes als qüestionaris. La Figura 5.28 mostra un exemple de resposta on en lloc d'utilitzar els enters indiquen els anys anteriors a 0 utilitzant la terminologia *aC* i *dC*. A la Figura 5.29 combinen les dues notacions, l'entera i la literal.

1. Quin número enter utilitzarien per expressar l'any en què els grecs arriben a Catalunya?  
-580
2. Quin número enter utilitzarien per expressar l'any de la revolta d'Indíbil i Mandoni? -206

Figura 5.27: Evidència P12C(I)

1. Quin número enter utilitzarien per expressar l'any en què els grecs arriben a Catalunya? 580 a.C.
2. Quin número enter utilitzarien per expressar l'any de la revolta d'Indíbil i Mandoni? 206 a.C.

Figura 5.28: Evidència P12C(II)

1. Quin número enter utilitzarien per expressar l'any en què els grecs arriben a Catalunya?  
El -580, ja que es va produir abans de Crist.
2. Quin número enter utilitzarien per expressar l'any de la revolta d'Indíbil i Mandoni?  
El -206, ja que es va produir abans de Crist.

Figura 5.29: Evidència P5C(III)

Arran de les entrevistes, confirmem i refinem la nostra interpretació de les respostes del qüestionari. Per exemple de l'entrevistat al grup **AG1**:

*A: La 1 i a la 2 van ser fàcils perquè vam estar tots d'acord. Perquè en substituir l'edat de Crist pel -, perquè és anterior, i llavors seria com un número negatiu.*

De l'alumne entrevistat del grup **AG5**, obtenim la justificació que ens permet entendre perquè no utilitzen la notació entera per expressar els anys:

*A: Bueno, nosaltres en ves de fer servir menys, o sigui -206 anys, a part... o sigui, fixant-nos en el 0 que era... l'any del naixement de Jesucrist. Vam voler posar abans de Crist que per nosaltres comptava com un menys i després de Crist que per nosaltres comptava com un més.*

*E: Aha!*

*A: Ho vam fer així. Per exemple, la primera pregunta, "quin és l'any que els grecs arriben a Catalunya". Nosaltres vam trobar el 580 abans de Crist, o sigui, també es podria dir -580 però nosaltres ho vam trobar més apropiat fer-ho així.*

*E: Però aquí... us demanava un número enter a l'hora de...*

*A: Ja, però, no sé... com sempre s'ha expressat abans de Crist, després de Crist. Vam voler posar-ho així.*

*E: Vale.*

*A: Sí, tampoc ho vam comptar això.*

*E: Bueno, no passa res. És el que vau fer vosaltres. Perfecte.*

*A: "Quin número...", la segona pregunta... la bueno... va ser la mateixa que la primera però amb diferents dates i vam respondre el mateix: 206 abans de Crist. Que en ves de posar-ho menys, vam posar, abans de Crist.*

Finalment de l'entrevista del grup **AG8** tenim l'explicació de l'ús combinat de les dues notacions:

*E: En aquestes dues, la primera i la segona, de posar els anys...*

*A: No, no...*

*E: Això de posar el signe negatiu a l'any...*

*A: Sí.*

*E: Vau estar ràpidament...*

*A: Sí... bueno, perquè clar, vam pensar... menys... O sigui ens vam imaginar una línia del temps amb el zero al mig.*

*E: Aha!*

*A: I el menys tirar... cap, o sigui, abans de Crist i el més seria després de Crist.*

### 3. Operacions:

En relació al contingut que hem anomenat "Operacions", de l'anàlisi creuada de la Cronologia de Catalunya, emergeix un patró preliminar de comprensió amb les dues característiques següents:

- Respostes correctes però evitant operacions amb nombres enters.
- Dificultats a l'hora d'utilitzar la resta com a eina per determinar el temps que ha passat entre dues dates donades amb nombres enters.

A l'exercici 3, del qüestionari de la Cronologia, es demana que expressin en llenguatge matemàtic els càlculs necessaris per saber quants anys han passat entre l'any -580 i -206. A partir de les respostes dels qüestionaris podem visualitzar d'on emergeix el patró preliminar de comprensió amb les característiques enunciades. De fet l'expressió matemàtica hauria de respondre a:

$$data\_final - data\_inicial = temps\_transcorregut.$$



3. Com expressariem, en llenguatge matemàtic, els càlculs necessaris per tal de saber quants anys han passat entre aquests dos fets, utilitzant una única expressió.

$$580 - 206 = 374$$

Han passat 374 anys

Figura 5.30: Evidència P3C(I)

3. Com expressariem, en llenguatge matemàtic, els càlculs necessaris per tal de saber quants anys han passat entre aquests dos fets, utilitzant una única expressió.

Anys que els grecs van viure —

$$(\cancel{580} - \cancel{206}) = 580 - 206 = 374$$

Figura 5.31: Evidència P3C(II)

3. Com expressariem, en llenguatge matemàtic, els càlculs necessaris per tal de saber quants anys han passat entre aquests dos fets, utilitzant una única expressió.

Utilitzariem una expressió com la següent  $(x = 580 \text{ aC} - 206 \text{ aC})$  per trobar els anys que han passat entre els dos fets.

Per tant, vol dir que fem servir l'operació de la resta (-).

Figura 5.32: Evidència P3C(III)



Després de revisar les entrevistes podem confirmar i matisar la nostra interpretació de les respostes dels qüestionaris. De l'entrevista al representant del grup **AG3** obtenim l'explicació de la resposta de la Figura 5.30:

A: Aquí... bueno... igual. Mmm... “com expressaríeu, en llenguatge matemàtic, els càlculs necessaris per tal de saber quants anys han passat entre aquests dos fets, utilitzant una única expressió?” Bueno, pues..., és una resta normal. Mmm... les dues dates restades i lo que queda... vamos...

E: Aquí les dues dates eren negatives i, en canvi, la resta que heu fet vosaltres era entre números positius.

A: Perquè et pregunta... els anys que han passat... però...  $-374$  seria una data.

E: Aha!. Vale. Perfecte. No, no... només preguntava... a l'haver fet la resta...

A: No? Però si són anys que han passat, no seria negatiu? No? Ah! Espera, però ho he fet bé? Sí.

L'entrevista al representant del grup **AG5** explica la resposta de la Figura 5.31:

A: I la tercera... no sé, no m'hi vaig matar. Ah! Sí, vam fer una resta. Bueno, ens vam dir quants anys havien passat entre els dos fets: l'arribada dels grecs a Catalunya i l'any de la revolta. I vam posar  $580 - 206$  que són... els... o sigui... els anys. Podríem dir...

E: Aquí veig que havíeu escrit una altra cosa, primer.

A: Sí, perquè vam voler posar abans de Crist amb menys. Però ens vam adonar que no, que era més fàcil fer-ho tot a més i clar. Total... ha sigut el mateix que... ens donava el mateix resultat. I vam decidir-ho fer així. Perquè, no sé, vam voler treure abans de Crist, deixar el número enter  $580 - 206$  i ens va donar “374” que... bueno... són el que ens va donar la diferència.

De l'entrevista del representant del grup **AG2** justifiquem la nostra interpretació de la resposta de la Figura 5.32:

E: ... el temps que havia passat entre els dos esdeveniments.

A: Llavors, aquí vam... vam... entre els quatre vam decidir que la dada que ens demanaven no la sabíem. Per tant... vam utilitzar una expressió de  $y$ ... de  $x$ , que era la dada que ens... de la primera pregunta, la restem a la de la segona. Llavors, aquí també ens vam confondre i vam... bueno... vam ficar la d'abans de Crist i... bueno... aquí no ho vam rectificar però tindria d'estar rectificat. Però, tindrien que ser símbols negatius.

E: Tots estàveu d'acord, en aquesta...?

A: Sí.

De l'entrevista al representant del grup **AG1** tenim:

A: (...) Però a la 3 ens vam discutir perquè hi havia gent que deia, en el grup, que no, que era  $-580 - 206$ . Però això el que feia és sumar-ho i llavors donava set-cents i algu. I llavors, vam pensar que no. Que s'havia de ficar amb parèntesis i llavors,  $-580 - (-206)$  perquè donés el resultat.

E: I dóna el resultat que heu posat?

A: Sí.

E: N'estàs segura?

A: Sí.

E: N'estàs segura?

A: Jo crec que dóna això.

(...)

E: ... Següim. Amb això vau estar tots d'acord?

A: No va haver-hi problemes. Mmm... en aquestes dues sí, en aquesta, no!

E: Val. Aquí us donava un número negatiu, no us... presentava cap problema?

A: No.

Que justifica el que veiem a la Figura 5.33. I l'entrevista al representant del grup **AG4** justifica la correcció que veiem a la Figura 5.34, on després de la intervenció fan una modificació que els permet obtenir el resultat correcte:

*Aquí ens vam liar una mica i com veus... ho vam fer una mica malament...*

E: No, malament...vosaltres vau... Després de la posta en comú veig que vau fer canvis.

A: Sí.

E: Bueno.

A: I vam arreglar això perquè ens vam equivocar en el lloc on vam posar el parèntesis.

L'entrevista al representant del grup **AG6** vol explicar la resposta de la Figura 5.35 però la resposta de l'entrevistat no aclareix ni la resposta ni la correcció després de la intervenció:

*A: I aquí... ho vam fer malament la... això... perquè era... havíem de sumar-ho en comptes de... o sigui, els dos eren símbols negatius i aquí vam posar un positiu, saps? Llavors...*

E: I?

A: Quan ho vam posar positiu va donar  $-374$ .

E: Sí!

A: I hauria hagut de donar... 686... menys.

E: Per què creus que havia de donar...?

A: Perquè havíem de sumar dos anys negatius.

L'entrevista al representant del grup **EG1** permet aclarir la resposta de la Figura 5.36:

*A: Mm... Després ens pregunta, "com expressaríeu en llenguatge matemàtic, els càlculs necessaris per tal de saber quants anys han passat entre aquests dos fets". Mm... llavors nosaltres, mm... vam... hem agafat el... el  $-580$ , que és una... una... una... de les dates. Llavors, mmm... més  $x$ , que seria... mmm... els anys. O sigui, la  $x$ , les  $x$  seria... no... mmm... si sumem aquest... l'any. Aquesta data més la  $x$ , llavors tindríem com a resultat els 206 anys.*

E: Aha! Però això ho vau fer després, perquè la primera resposta que vau posar...

A: Ah!

E: ...va ser una altra.

A: Sí, mmm... aquí... bueno... Ara te dic la resposta que hem decidit entre tots. Però nosaltres vam...ens pensàvem que si sum... restàvem mmm... els  $-580$  menys el  $-206$ , doncs, ens quedaria la diferència i llavors mmm... seria el resultat.

E: I entre això que em dius ara i el que heu corregit al final. Què és el que deies abans mmm... hi ha molta diferència? Hi vèieu molta diferència? O...

A: Bueno... mm... bueno... mm... com... amb l'aspecte veiem que això és una expressió algebraica perquè hi ha una incògnita, que és la  $x$ . I aquell, nosaltres ens havíem... o sigui, ens havíem centrat en fer una operació normal i corrent.

E: Aha! I tu què creus que és millor, la segona o la primera?

A: Bueno clar, com que nosaltres hem pensat això, doncs clar, nosaltres quan ho vam fer pensàvem que aquesta era la correcta i era la millor que es podia fer. Però clar, quan... quan hem vist que també es podien fer aquesta, doncs, hem de dir, que clar, que aquesta era millor.

E: El resultat, vau verificar que fos lo mateix amb una expressió i amb l'altra?

A: Mmm... bueno no. El... és que no, o sigui, no vam comprovar.

E: Ehem! Però si et fixes amb la primera. Quant donaria la primera?

A: Buf!

E: Aproximadament. Escriu-ho.

A: O sigui... sóc, diguéssim... un patata. Eh! O sigui...

E: T'ú tranquil.

A: Mmm...

E: Tens aquí, si vols escriu aquí.

A: Mmm... sí, mmm...

E: No et preocupis. Tampoc passa res. Però fixat... una cosa. El resultat d'aquesta primera expressió m'és igual. Com seria?

A: Mmm... el... si seria positiu o negatiu? Mmm... negatiu.

E: I aquest?

A: Negatiu, també... no?

E: Si resols l'equació...

A: Mmm... negat... mmm... Sí perquè això passa sumant. Aquí doncs... Ah! Positiu, positiu.

E: Aha... segons... el valor numèric serà el mateix però el signe d'una i de l'altra...

A: Canviarà.

E: Canviarà. No? No passa res, només era perquè... bé a l'hora de fer-ho que hi havia una petita diferència, no?

Hem triat una mostra, de fragments, de cada una de les respostes diferents a la pregunta que ens permet obtenir informació sobre els patrons preliminars de comprensió del contingut "Operacions".

#### 4. Simètric:

En relació al contingut que hem anomenat "Simètric", de l'anàlisi creuada de la Cronologia de Catalunya, emergeix un patró preliminar de comprensió amb les dues característiques següents:

- Responen bé a l'hora de trobar una data simètrica i saben expressar-la correctament en terminologia de nombres enters.
- Dificultats a l'hora de saber que el signe  $-$  pot fer la funció d'operador simètric, tot i interpretar-lo bé com a qualificador.

Les respostes a la pregunta 5 del qüestionari de la Cronologia de les Figures 5.19, 5.20, 5.21, 5.22, 5.23, 5.24, 5.25 i 5.26 il·lustren aquest patró preliminar. La revisió de les entrevistes ens permet confirmar-lo. L'entrevista al grup **EG4** permet confirmar l'única resposta que fa ús del signe  $-$  com a operador simètric, a la Figura 5.24:

*I, “amb quins símbols matemàtics podeu expressar l’any corresponent al fet demanat a l’apartat a. Va... hem posat menys més 27, o sigui,  $-(+27)$ .”*

D’altres grups descriuen correctament la situació demanada amb el nombre enter adequat,  $-27$ . Però l’ús del signe  $-$  s’utilitza com a qualificador. L’entrevista al grup **EG7** ens permet confirmar-ho:

*A: Bueno, doncs, aquí l’any... en llenguatge matemàtic, l’any 27 abans de Crist, doncs, en negatiu. Com és abans de Crist.*

A les Figures 5.19 i 5.23 la resposta al qüestionari és la mateixa,  $-27$ , però els alumnes l’esmenen, i deixen només el signe  $-$ . De l’entrevista al grup **AG1** ho podem veure:

*A: I a la c vam modificar-ho perquè, no sé perquè, vam ficar  $-27$  i era només el  $-$ .*

En aquest cas tampoc podem considerar que assignin l’ús de simètric al signe  $-$ , sinó que l’utilitzen com a qualificador. A les Figures 5.20 i 5.21 les respostes al qüestionari són més sorprenents. En el primer cas assignen la funció al signe  $+$  i en el segon als signes  $+$  i  $>$ , però en cap cas les entrevistes aporten explicació a la resposta. En el cas de la primera figura, el grup **AG4** no comenta l’apartat *c*, que és on es demanava els símbols que permetien expressar l’apartat *a*. I en el cas de la segona figura el grup **AG6** no aclareix res:

*A: I, “quins símbols matemàtics... al fet corresponent a l’apartat a. Doncs, com bé t’he dit abans, nosaltres després vam posar després de Crist. Per nosaltres era un menys. I aquí, bueno... hem contestat menys.*

*E: Abans no? Vols dir?*

*A: Sí, sí, o sigui, abans. Ai! Després, perdó! És que estava llegint la...*

*E: No passa res. Tranquil.*

*A: Doncs, abans ho comptem com un  $-$  i després com un  $+$ . Doncs... i vam posar  $-$ .*

## 5. Àlgebra:

En relació al contingut que hem anomenat “Àlgebra”, de l’anàlisi creuada de la Cronologia de Catalunya, emergeix un patró preliminar de comprensió amb dues característiques:

- Dificultat per utilitzar expressions algebraiques per descriure situacions, en particular, si involucren enters.
- Respostes donen el resultat o l’operació que hi porta, no l’expressió algebraica que descriu la situació.

Pel que fa a aquest patró preliminar les respostes al qüestionari ens aporten diverses modalitats de resposta. A continuació mostrem un extracte representatiu de les respostes que posteriorment contrastarem amb la informació que aporten les entrevistes:

A partir de les entrevistes confirmem la nostra interpretació de les anteriors respostes. De l’entrevista al grup **AG1** tenim:

*A: Mmm... Bueno aquí, com que ens va dir que escrivíssim una expressió algebraica. Pues, vam dir, doncs ha d’haver una  $x$  que seria els... els... l’any que va néixer i llavors vam fer  $x + 62 = 45$ . I a la  $b$ , ja vam fer el càlcul, que dona  $-17$ . I per saber l’esdeveniment, pues, vam pensar que hauria de ser el de més aprop. I vam ficar el de Tarraco.*

4. (a) Si un personatge mor l'any 45 i ha viscut 62 anys, escriu una sola expressió algebraica que englobi els càlculs necessaris per saber l'any que va néixer?  $x + 62 = 45$
- (b) Quin esdeveniment de la cronologia donada s'esdevingué pels voltants del seu naixement?
- $$x = 45 - 62 = -17$$
- Tarraco ~~est~~ esdevé ciutat imperial

Figura 5.37: Evidència P4C(I)

4. (a) Si un personatge mor l'any 45 i ha viscut 62 anys, escriu una sola expressió algebraica que englobi els càlculs necessaris per saber l'any que va néixer?  $x + 45 = 62 \Rightarrow 45 - 62 = -17$
- (b) Quin esdeveniment de la cronologia donada s'esdevingué pels voltants del seu naixement?
- "Tarraco esdevé ciutat imperial l'any 27 a.C"

Figura 5.38: Evidència P4C(II)

4. (a) Si un personatge mor l'any 45 i ha viscut 62 anys, escriu una sola expressió algebraica que englobi els càlculs necessaris per saber l'any que va néixer?  $x = 45 - 62 = -17$
- (b) Quin esdeveniment de la cronologia donada s'esdevingué pels voltants del seu naixement?
- Exposició Universal a Barcelona va ser el 1888.
- Tarraco esdevé ciutat imperial.

Figura 5.39: Evidència P4C(III)

4. (a) Si un personatge mor l'any 45 i ha viscut 62 anys, escriu una sola expressió algebraica que englobi els càlculs necessaris per saber l'any que va néixer?
- (b) Quin esdeveniment de la cronologia donada s'esdevingué pels voltants del seu naixement?
- A)  $45 - 62 = x \text{ a.C}$
- B) Tarraco esdevé ciutat imperial l'any 27 a.C (August)

Figura 5.40: Evidència P4C(IV)

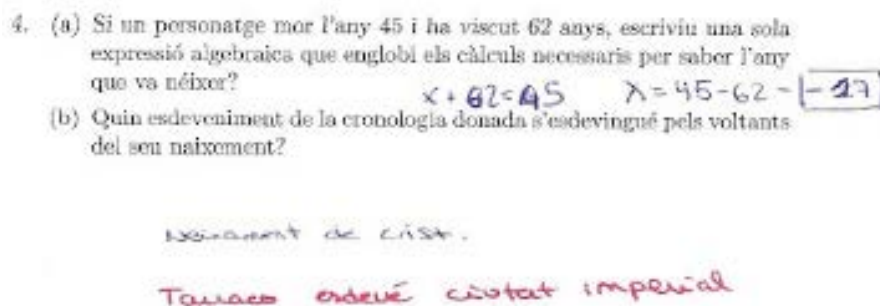


Figura 5.41: Evidència P4C(V)

I del grup **EG3**:

*Aquí, preguntava que... bueno, un home mmm... va morir a l'any 45 i havia viscut 62 anys, mm... aleshores havies de dir quants anys... mm... quin any havia nascut. I hem fet  $x$ , que és l'any que havia nascut, menys 62 és igual a 45. I bueno, hem aïllat la  $x$ , i al final ens ha donat  $-17$ . O sigui, havia nascut el 17 abans de Crist.*

*E: Això us va costar molt de veure-ho? O...*

*A: Nooo... Aquest el vam trobar bastant fàcil.*

*E: O sigui... tothom hi estava d'acord?*

*A: Sí, sí.*

Tenim els comentaris de les Figures 5.37 i 5.41, respectivament. En ambdós casos l'expressió algebraica utilitzada per descriure i resoldre la situació plantejada és  $x + 62 = 45$ . Tot i que l'expressió és equivalent, si ens donen l'any de la mort d'algú,  $M$  i els anys que va viure  $V$ , seria natural pensar que  $M - V$ , ens donaria l'any del naixement,  $N$ . El fet que l'any de naixement sigui negatiu els porta a buscar una expressió equivalent de resolució més senzilla.

En el cas de la resposta de la Figura 5.38, tot i donar la mateixa resposta d'abans no n'estan segurs i després de la intervenció i posada en comú la canvien i posen només l'expressió numèrica  $45 - 62 = -17$ . En aquest cas ens trobem davant d'una situació de desaprenentatge. Recordem que, en el context d'aquesta recerca, el terme desaprenentatge s'utilitza per designar una acció puntual de modificació d'una resposta matemàticament correcta a una de matemàticament incorrecta; tot i que això no implica, necessàriament, que un cert aprenentatge no estigui assolit, es pot interpretar com un senyal de dubte de la validesa d'un coneixement. A continuació transcrivim el fragment corresponent al grup **AG4**, on es comenta aquesta resposta:

*A: Sí. Aquí, bueno... com fica fer una expressió algebraica ens vam equivocar i vam posar  $x + 45 = 62$ . Però a l'hora de posar-ho en comú vam veure que ens vam equivocar.*

*E: En què us van equivocar?*

*A: Perquè, mmm... no sabíem on ficar la  $x$  i, ... mmm... en ves de ficar 1945 vam pensar que era el 45. Llavors, des de que vam pensar que era el 45 ja ens vam liar i no sabíem on ficar ben bé la  $x$ .*

*E: Aha!*

*A: I... i arrel de que no sabíem ficar la  $x$ , vam ficar Tàrraco que era... Perquè en el*



–17 s'acosta. En teoria era el –17 que s'acostava més a Crist però estava més prop de Tarraco. I llavors vam ficar l'esdeveniment de Tarraco, la ciutat imperial de l'any 27 abans de Crist.

A la Figura 5.40 tenim un altre model de resposta que és molt comú a la resta de qüestionaris 45 – 62, en aquest cas, però, afegeixen igual a  $x$ , donant a l'expressió el matís algebraic. De l'entrevista al representant del grup **EG7** tenim el següent fragment que explica la situació:

A: Mmm... vale. Aquí, com diu, va morir l'any 45 i va visc... bueno, va viure 62 anys. Llavors vam fer 45 anys, que és l'edat que va morir menys 62, que són els anys que havia viscut, que és igual a  $x$ . Que els anys mmm... que havia... O sigui, l'any que va néixer. I... bueno..., aquí, la pregunta de... un esdeveniment que s'aproximés al voltant del seu naixement. Vam trobar Tarraco aquest, el 27 abans de Crist.

E: Aquí veig... el resultat no el vau posar, no?

A: No.

E: El devíeu calcular-ho i no el vau posar?

A: No.

Finalment tenim la resposta de la Figura 5.39 que dona una visió completament diferent del problema. En aquest cas, que correspon al grup **AG2** i no és l'únic, es planteja el dubte de si quan es diu l'any 45 es fa referència al 1945. De l'entrevista al representant del grup veiem l'explicació:

A: A l'activitat 4..., ens deia que un personatge havia mort l'any 45. Llavors instintivament vam... tots vam acceptar que es referia a l'any 1945. Per... les... de la tira dels anys 20. Això de... ens havíem quedat amb això... però en realitat... mmm... es referia a l'any 45 després de Crist.

E: Això ho vau modificar posteriorment, veig... quan...

A: Sí... sí.

E: Després de la posada en comú vau...

A: Sí.

E: Molt bé.

A: I llavors que... a l'apartat b, de la mateixa pregunta ens deia que... quin esdeveniment tenia pels voltants. Llavors, com que... a l'haver... llavors a l'haver ficat un resultat erroni, doncs, van tindre que modificar, també, l'esdeveniment.

E: Primer havíeu posat l'exposició universal de Barcelona i després vau posar lo de Tarraco.

A: Sí,, sí.

E: Molt bé. Tots hi estàveu d'acord? Vull dir, quan vau fer les correccions, tothom ho veia clar?

A: Sí... Sí, sí. Bueno, al principi va costar, aixins, una miqueta de... de... que no acabàvem d'entendre de perquè havíem posat el 1945 i no el 45 o aixins... però després ho vam entendre tots...

## 6. Representació:

En relació al contingut que hem anomenat “Representació”, de l’anàlisi creuada de la Cronologia de Catalunya, emergeix un patró preliminar de comprensió amb la següent característica principal:

- Dificultats per situar 0 com a origen.

L’apartat *d* de l’activitat 5, que podem veure a les Figures 5.19, 5.20, 5.21, 5.22, 5.23, 5.24, 5.25 i 5.26 mostra les dificultats de força grups per situar el 0 a l’origen com ja vam veure i justificar en el contingut “Origen”.

#### 7. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ :

En relació al contingut que hem anomenat “ $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ ”, de l’anàlisi creuada de la Cronologia de Catalunya, emergeix un patró preliminar de comprensió amb les característiques:

- Identifiquen l’ús de nombres enters per descriure situacions on els naturals no són suficients.
- Dificultats a l’hora de saber expressar les funcions del signe  $-$ :
  - L’identifiquen com a qualificador
  - L’identifiquen com a operador resta.
  - Els costa identificar-lo com a operador simètric.

7. Quin tipus de nombres heu estat utilitzant per descriure les situacions anteriors?

enters

Figura 5.42: Evidència P7C(I)

7. Quin tipus de nombres heu estat utilitzant per descriure les situacions anteriors?

Enters (positius i negatius).

Figura 5.43: Evidència P7C(II)

7. Quin tipus de nombres heu estat utilitzant per descriure les situacions anteriors?

Enters  
 (-) realc  
 (-) negatiu  
 (-) contrari

Figura 5.44: Evidència P7C(III)

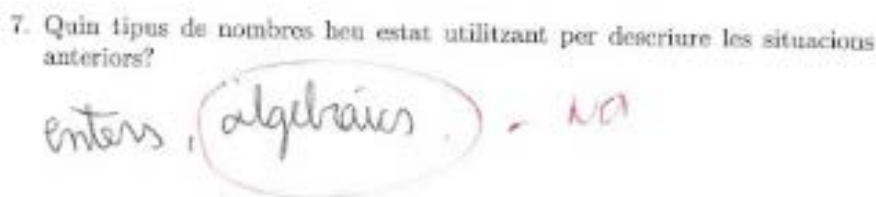


Figura 5.45: Evidència P7C(IV)

De la majoria de les entrevistes podem extreure fragments on es confirma la nostra interpretació del que els alumnes han respost als qüestionaris en relació a la primera part del patró preliminar. Per exemple, de l'entrevista al grup **AG1** veiem que tenen clar que han estat utilitzant els nombres enters per descriure les situacions plantejades:

*A: Mmm... I en aquestes ja no vam tenir cap dubte. Perquè a la 7 ja, sí tots vam dir: "hem utilitzat els nombres enters".*

Justifica la resposta de la Figura 5.42. En aquesta línia tenim la respostes de la majoria de grups que no detallarem perquè estan en la mateixa línia. A les Figures 5.43, 5.44 i 5.45 hem mostrat les respostes que mostren diferències respecte de la resposta més generalitzada, que és la representada al fragment anterior.

A la Figura 5.43 no han respost de primeres però després de la intervenció i de la posada en comú donen la resposta representada. De l'entrevista al representant del grup **AG2** podem veure la justificació:

*A: Llavors a la... activitat 7, el mateix, que havíem utilitzat nombres enters i... Llavors no la vam acabar de corregir. Que vam ficar els... els tres motius pels que vam ficar el símbol de resta i negatiu i contrari i ens faltava ficar la... dels positius. Que en aquest cas no els havíem ficat.*

*E: Bueno... Aquestes dues activitats... veig que, estan en vermell. No us va donar temps d'acabar-les?*

*A: Sí, no ens va donar temps d'acabar-les perquè vam estar discutint amb... les respostes amb els altres. Perquè, en principi, no tots estàvem d'acord i llavors, vam estar discutint...*

De les entrevistes als grups **AG4** i **AG8** veiem que no sempre el raonament que porta a donar la resposta "Nombres Enters", no sempre és el més adequat:

*I... els números enters perquè en tots aquests exercicis sempre hem tractat amb números enters. Perquè no n'hi ha de decimals ni això...*

*A: I... bueno... Aquest dels nombres enters. Pues... que... són els únics que vam fer servir. En realitat, no vam fer servir ni decimals ni res.*

El fet que no hi hagi decimals és condició necessària però no suficient perquè siguin enters, podrien ser naturals. De l'entrevista al grup **AG5**, tot i respondre que són els enters i comentar que tota la classe hi coincidia aporten un matís diferent:

*A: La 7, els nombres enters. Aquí, crec que vam coincidir tota la classe. va*

*ser la única pregunta que vam coincidir tots. Que quins tipus de nombres heu utilitzat per descriure les situacions? Nosaltres, ara me n'adono que, no només vam fer servir... bueno, vam fer servir els enters però també el després de Crist i l'abans de Crist. Que no se li podria considerar enter però que... que per nosaltres també... saps?*

De l'entrevista al grup **EG1** podem justificar la resposta de la Figura 5.44, on detallen que els nombres enters són els positius i els negatius:

*Després a l'última pregunta ens preguntava quin tipus de nombres havíem utilitzat per descriure les situacions anteriors. Nosaltres hem dit els enters, que són els positius i els negatius.*

De l'entrevista al grup **EG2** també podem veure aquesta necessitat d'especificar que es treballa amb els negatius com nombres a part dels enters:

*A: I... hem utilitzat els nombres negatius per utilitzar... aquestes situacions.*

*E: Només els negatius?*

*A: I els enters.*

*E: I els enters... veig que...*

*A: Més els negatius.*

De l'entrevista al grup **EG4** confirmem la nostra interpretació de la resposta de la Figura 5.45:

*“Quin tipus de nombres heu estat utilitzant per descriure les situacions anteriors?”  
Mmm... hem posat enters. I aquí hi ha hagut una petita discussió en el grup. Entre que uns deien algebraics, perquè no tenien molt clar lo que eren. I després, jo i un altre hem dit que només enters perquè els algebraics eren els que contenien lletres i... Però, bueno, al final ha volgut escriure algebraics i hem decidit posar també algebraics.*

Respecte de la segona part del patró considerat, les Figures 5.46, 5.47, 5.48, 5.49, 5.50, 5.51, 5.52 i 5.53 mostren les respostes donades als qüestionaris que podem justificar a partir de les entrevistes.

6. (a) En els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb significats diferents?
- (b) Expliqueu quin és.
- (c) Expressen en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu, el més clarament possible, la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat.

*En alguns casos indicava que el membre era negatiu, el contrari, o rosta.*

Figura 5.46: Evidència P6C(I)

6. (a) En els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb significats diferents?  
 (b) Expliqueu quin és.  
 (c) Expressen en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu, el més clarament possible, la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat.

Si, el -  
 Ho podem utilitzar en operacions  
 (per restar), per dir que és un  
 número negatiu o que està  
 per sota del 0.  
 $-7$   
 $8-7=1$   
 $8-9=-1$

Figura 5.47: Evidència P6C(II)

6. (a) En els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb significats diferents?  
 (b) Expliqueu quin és. El positiu.  
 (c) Expressen en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu, el més clarament possible, la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat.

Per nombres negatius i operacions

Figura 5.48: Evidència P6C(III)

6. (a) En els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb significats diferents?  $-580/-62$   
 (b) Expliqueu quin és. a el primer és un any AC i a l'altre és restar }  
 (c) Expressen en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu, el més clarament possible, la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat.

Figura 5.49: Evidència P6C(IV)

6. (a) En els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb significats diferents?  $\text{S}^1$
- (b) Expliqueu quin és. *el menys, resta, i negatiu.*
- (c) Expressu en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu, el més clarament possible, la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat.
- *més, menys*  $+ - \times - \times$
  - *negatiu, positiu*  $- + - \times + \times$
  - *contrari*

Figura 5.50: Evidència P6C(V)

6. (a) En els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb significats diferents?
- (b) Expliqueu quin és.
- (c) Expressu en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu, el més clarament possible, la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat.
- a) el  $-$
- b) l'heu utilitzat per expressar anys abans de crist i per fer les operacions. També per fer el mínim.
- c) per expressar els anys  $\rightarrow$  1 i 2. Dies que són abans de la data de l'episcopi.
- per minuts i restes  $\rightarrow$  4. Per saber els anys que ha viscut una persona.
- per indicar el contrari i mínim  $\rightarrow$  5.

Figura 5.51: Evidència P6C(VI)

6. (a) En els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb significats diferents?
- (b) Expliqueu quin és.
- (c) Expressau en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu, el més clarament possible, la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat.
- a) sí, el -
- b) expressa negativitat i avors en el temps.  
- = a <
- c) Un significat pot ser que posem el menys per representar que el fet va passar abans de l'any 0, llavors, es negatiu.

Figura 5.52: Evidència P6C(VII)

6. (a) En els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica però amb significats diferents?  Sí
- (b) Expliqueu quin és.  $\ominus$ .
- (c) Expressau en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu, el més clarament possible, la pregunta i l'apartat on podeu situar cada significat.
- $\ominus$ , perquè després de zero el positiu pot començar el nombre a final.

Figura 5.53: Evidència P6C(VIII)

De les entrevistes podem obtenir justificació i matisos a les respostes de les Figures anteriors. Per exemple, de l'entrevista al representant del grup **AG1** obtenim la justificació a la resposta de la Figura 5.46:

*I aquí... doncs... mmm... estàvem d'acord en què havíem utilitzat el mateix símbol, però que li hem donat diferents significats. Ja que pot significar el contrari, o sigui, el menys pot significar que un nombre és negatiu, el contrari o que estem restant. I aquí, sí que vam estar tots d'acord perquè a l'anterior ja ens vam discutir.*

De l'entrevista al grup **AG3** podem entendre la resposta detallada a la Pregunta 5.47:

*A: Molt ràpid, sí. Mmm... “ en els apartats anteriors heu utilitzat algun*

*símbol que s'escriu de manera idèntica però amb els significats diferents?" Aquí, no... no enteníem molt bé la pregunta. Però... vam entendre... mmm... si es referia al + seria el -, no? Però... clar, cada un té... mmm... diferents significats i vam ficar... sí, el -.*

*E: Ehem! Aquí no... no vau interpretar, per exemple, de que fèiem referència a només el signe - en diferents situacions? O sigui, vau pensar el +, el - i així...*

*A: En diferents situacions com podem... dir el -.*

*E: Clar!*

*A: Això és això!*

*E: Aha! Vale.*

*A: I vam ficar-ho que són... que eren tres. No? Doncs, ho podem utilitzar en operacions per restar, per dir que és un número negatiu o que està per sota del zero. Bueno... més o menys, no sé si era així, dit bé... però era la idea, no?*

*E: És el que vosaltres vau expressar... això...*

*A: Bueno... i els exemples...*

L'entrevista al grup **AG5** explica la resposta que donen a la Figura 5.48, on expressen que el signe al que es fa referència és el +:

*A: Mm... A això vam... a la pregunta 6. Ah, sí! a l'apartat 6, a la pregunta, vam respondre que sí. Perquè... o sigui, per nosaltres com abans de Crist... Sí, a veure... no sé explicar-me molt bé, eh!... S'escriu de manera idèntica però amb significats diferents... Sí, sí al... al +27 per exemple per posar una data, eh! Nosaltres, clar... o sigui... posàvem, ai!... És que no sé explicar-ho. Al 27 després de Crist posa. Nosaltres li posàvem... clar, si tu ho veus allò, dius +27 després de Crist. Però per nosaltres era un menys perquè després de Crist ho traduïm a un menys i menys més dona menys. O sigui, nosaltres fem servir el + però ho interpretàvem com un -. Ah! mira, i aquí ens diu explica quin és? Pues és el positiu.*

*E: Aha!*

*A: La c no la vam saber fer i a través dels comentaris de l'altra gent la vam... fer però amb boli vermell. Mmm...*

*E: Però lo que vau escriure, estàveu d'acord? Us sembla, després de la posada en comú que... aquí veig que diu...*

*A: No sé, perquè vam veure les respostes de la gent i vam dir jo crec que aquesta és correcta i l'Egor va coincidir amb mi.*

*E: Aha!*

*A: Bueno, en Pau no... va... Però... també va dir que era correcta i vam... la vam apuntar.*

De l'entrevista al grup **AG6** podem confirmar la resposta de la Figura 5.49, on només identifiquen dues de les funcions del signe -:

*A: Sí. I llavors aquí, els apartats... ja és la pregunta 6. En els apartats anteriors he utilitzat símbols... Llavors aquí, vam, bueno..., escriure-ho sense explicar-ho. Vam escriure -580 i -62, que als exercicis anteriors el -580 vol dir que és abans de crist i el -62 vol dir que restes els anys, no? Llavors... E: Ah vale!*

*A: No està explicat però... està...*

*E: Volíeu dir això?*

*A: Sí, és el que vam pensar.*



*E: En un cas volíeu dir -580 i en l'altre cas la resta que havíeu fet?*

*A: Exacte. I després... explicar. És aquí on ho vam explicar una miqueta. Que diu que un és abans de Crist i l'altre és per restar.*

*E: Aha!*

*A: Aquest, l'apartat c, no el vam fer perquè és com... que... és com seguir el mateix i... no ho vam saber explicar-ho més i no la vam fer.*

De l'entrevista al grup **AG7** podem confirmar la resposta de la Figura 5.50:

*A: Aquí hem canviat coses. Perquè... ens diu si hem utilitzat símbols diferents. O sigui, si s'utilitzaven de manera diferent. Jo pensava que sí i seria el -, però vam tatxar la resta i el negatiu perquè no tenien sentit. O sigui, no... no era lo mateix. O sigui, vam estar pensant i hem dit que si expliquem el menys, com és menys, no calia fer restes ni el negatiu, lo que és lo mateix. No sé, és que ens vam liar molt en aquest exercici, llavors...*

*E: Aha!*

*A: I aquí, ... mmm... a cada significat, també ho vam tatxar perquè no hem utilitzat cap signe positiu i només va ser el negatiu i el menys. Llavors, pues, ho vam tatxar perquè ens vam liar molt. I em diuen ho deixem aquí.*

De l'entrevista al grup **EG1** podem confirmar la resposta de la Figura 5.51. En aquest cas tenen clars els tres significats i a quins exercicis els han utilitzat:

*A: Mm... Després, a la pregunta número 6, ens preguntava que en els apartats anteriors havíem utilitzat algun símbol que s'escriu de manera idèntica i quins significats diferents tenia. Mm... després que expliquéssim quin és. i després que expresséssim amb paraules quin és el significat... el significat en cada cas. Mmm... Nosaltres, o sigui..., vam... hem utilitzat el menys i després l'hem utilitzat per expressar... anys abans de Crist. Ja que bastant com de... abans del nombre de... que fem servir com a partició, punt de partida. Per fer les operacions i també per fer el simètric, seria com el contrari. Després hem utilitzat aquest símbol menys per expressar alguns anys, com per exemple l'activitat 1 i 2 i... que diem que diem que són abans de... de la data de referència. Mm... Després per sumar i restar com, per exemple a l'activitat 4, per saber els anys que ha viscut una persona. I després, per indicar el contrari i simètric a l'activitat 5.*

De l'entrevista al grup **EG2** podem confirmar la resposta de la Figura 5.52, on només identifiquen dos dels significats després de reconèixer la dificultat que els ha suposat la pregunta:

*E: Molt bé, perfecte. Ja en tinc prou. I en aquí, en aquest, la sisena pregunta. Aquí costava una mica més, potser, de respondre?*

*A: Sí ens va costar. Aquesta, són els que vam tindre més dubtes.*

*E: Més dubtes. Ja m'ho suposo. Vau discutir molt?*

*A: Sí, hehehe*

*E: La primera era mirar si hi havia algun símbol, eh!, del mateix tipus però que pogués significar coses diferents.*

*A: El menys.*

*E: El menys. tots hi estàveu d'acord?*

A: Sí. El b, bé... “expliqueu quin és”. I que, hem quedat d’acord que expressa negativitat i enrere... enrere en el temps.

E: Quan dieu negativitat... quan dieu negativitat mmm...

A: Mmm... O sigui, negatiu. I el c... bueno, això que he dit ara, que un significat pot ser que posem el menys per representar que el fet va passar abans de l’any 0. Llavors és negatiu.

De l’entrevista al grup **EG4** podem confirmar la resposta de la Figura 5.53:

*Pregunta número 6, “en els apartats anteriors heu utilitzat algun símbol que s’escriu de manera idèntica però amb significats diferents?” He posat que sí. “Explica... bé... explica quin és.” He posat el símbol  $-$ . c. “Expresseu en paraules quin és el significat en cada cas. Especifiqueu el més clarament possible la pregunta i l’apartat on podeu situar cada significat”. He posat el  $-$  perquè depèn d’on el posis pot canviar el... pot canviar el resultat del signe final.Mm... Llavors, quin tipus de...*

### 5.3 Construcció de patrons de comprensió

A partir de l’anàlisi dels patrons preliminars identificats als dos apartats anteriors i després de comparar-los i agrupar-los, estem en condicions de donar els següents patrons de comprensió. Associem a cada un dels continguts establerts, els patrons que hem identificat respectivament.

#### 1. Origen.

[Or1] Identifiquen el zero com origen sobre la recta numèrica.

[Or2] Els costa identificar el zero com a origen temporal.

[Or3] Els costa relacionar el zero com a número i la seva interpretació en una situació concreta.

#### 2. Qualificador:

[Q1] Comprenen l’ús del signe  $-$  com a qualificador a l’hora de descriure situacions.

#### 3. Operacions:

[Op1] Operen evitant l’ús d’enters: busquen el resultat i afegeixen el que representa.

[Op2] Interpreten les operacions com a canvis d’estat per pujar i baixar.

[Op3] Els costa interpretar les operacions com a canvis temporals.

#### 4. Simètric:

[S1] Interpreten el simètric per indicar la posició respecte de l’origen tant per moviments com per canvis temporals.

[S2] Tenen dificultats a l’hora d’utilitzar el signe  $-$  com a operador simètric.

#### 5. Àlgebra:

[A1] Eviten, en general, les expressions algebraïques per modelitzar situacions.

6. Representació:

**[R1] Tenen dificultats a l'hora de situar el zero com a origen.**

7.  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ :

**[Z1] Reconeixen l'ús dels enters.**

**[Z2] Reconeixen de manera feble la polisèmia del signe  $-$ . Els costa molt verbalitzar les diverses funcions que pot exercir.**

La construcció d'aquests patrons ha de servir per la identificació d'estats de comprensió del coneixement matemàtic vinculat als nombres enters. Es tracta de patrons estructurats a partir dels continguts curriculars sobre aquest coneixement seleccionats en aquesta recerca. La diversitat de fonts de dades i el creuament d'aquestes fonts durant l'anàlisi fa que siguin patrons fortament validats en un context empíric específic. D'altra banda, malgrat que són patrons derivats de respostes, es poden pensar com patrons de comprensió i d'aprenentatge des de la perspectiva de què tota comunicació escrita o oral és per si mateixa una manifestació de com es pensa i es comprèn.

## Capítol 6

# Conclusions i implicacions

En aquest últim capítol podem distingir tres blocs diferenciats. En el primer detallem els resultats que aporten construcció de nou coneixement al llarg de la nostra investigació; així es fa palesa la consecució d'uns patrons de comprensió que permeten refinar les caracteritzacions de l'alumnat que s'esmenten al marc teòric. Expliquem 12 combinacions factibles de patrons de comprensió i considerem aquestes combinacions com la principal aportació teòrica d'aquest treball de tesi. No es tracta de combinacions que cobreixin la totalitat d'estats en els processos de comprensió dels nombres enters, però sí són combinacions que posen de manifest la complexitat i diversitat d'aquests estats. Al segon bloc plantegem propostes per poder continuar la investigació en aquesta línia de treball. I a l'últim bloc, comentem les implicacions didàctiques que poden derivar-se d'aquesta investigació.

### 6.1 Conclusions

Recordem que el nostre objectiu és respondre la pregunta de recerca: **Com comprenen els nombres enters un grup d'alumnes de tercer d' ESO?** Per fer-ho hem establert dos objectius d'assoliment progressiu:

- Identificar significats diversos atribuïts als nombres enters i a les seves propietats i operacions.
- Relacionar alguns d'aquests significats mitjançant la construcció de patrons de comprensió.

Hem assolit el primer objectiu a partir de l'anàlisi de les respostes dels qüestionaris i de les entrevistes al llarg dels capítols 3 i 4. De l'anàlisi de les respostes escrites i del contrast d'aquestes amb les entrevistes hem pogut anar elaborant els patrons de comprensió previs. Al capítol 5 hem recollit aquests patrons de comprensió previs i a partir d'ells hem construït els patrons definitius. Aquests patrons de comprensió definitius donen resposta a com els alumnes de tercer d'ESO, comprenen els nombres enters. Aquests patrons són, només, fruit de l'anàlisi de les respostes donades pels alumnes de la mostra triada. Si prenguéssim una altra mostra d'alumnes podríem obtenir patrons diferents. Però, els patrons de comprensió construïts no només ens aporten informació sobre els grups d'alumnes que han estat estudiats. Ens permeten també esbossar models que descriuïn estudiants tipus basant-nos en aquells patrons de comprensió que podem anar combinant atenent a cada un dels continguts establerts a la investigació:

1. Origen: 3 patrons construïts, **Or1**, **Or2** i **Or3**.

2. Qualificador: 1 patró construït, **Q1**.
3. Operacions: 3 patrons construïts, **Op1**, **Op2**, **Op3**.
4. Simètric: 2 patrons construïts, **S1**, **S2**.
5. Àlgebra: 1 patró construït, **A1**.
6. Representació: 1 patró construït, **R1**.
7.  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ : 2 patrons construïts, **Z1**, **Z2**.

A la Figura 6.1 que segueix il·lustrem el context teòric de comprensió dels nombres enters. Aquest context teòric, que mostra una complexitat d'interseccions entre conceptes, és una conclusió important de la recerca.

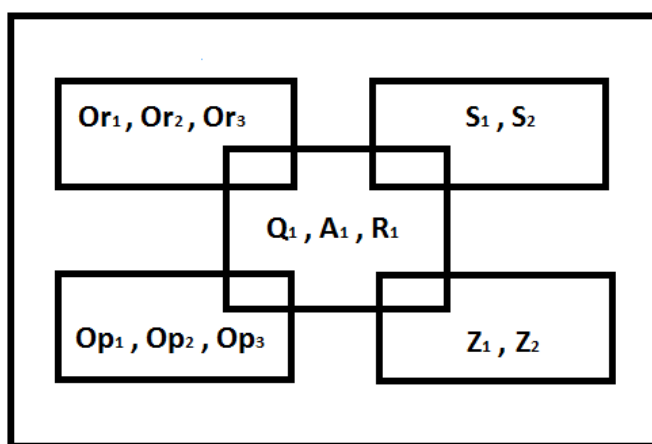


Figura 6.1: Context teòric de comprensió de  $\mathbb{Z}$ .

A partir dels patrons associats als continguts matemàtics establerts quan es van dissenyar els qüestionaris de recollida d'informació observem que pel que fa als continguts Qualificador, Àlgebra i Representació només hem establert un patró per a cada un d'ells: **Q1**, **A1** i **R1**. Aquests patrons ens mostren diferents nivells de comprensió dels continguts matemàtics. En el cas de **Q1** no mostren dificultats per reconèixer l'ús del signe  $-$  com a qualificador per descriure situacions que es poden descriure en termes de nombres enters, plantes d'un edifici per sobre i sota terra o anys abans i després de Crist. Pel que fa als patrons **A1** i **R1**. Respecte al primer hi ha una tendència general a evitar la utilització d'expressions algebraiques i busquen alternatives que els permetin resoldre els problemes sense fer-ne ús. Respecte del segon evidencien dificultats d'origen divers, com hem pogut constatar al llarg de l'anàlisi de les respostes i que abordem posteriorment a les Implicacions didàctiques. Aquests tres continguts, amb el seus patrons associats, necessiten dels altres continguts a l'hora de poder valorar com comprenen els nombres enters aquests alumnes de secundària. D'aquí, el context teòric representat a la Figura 6.1.

Aquest context teòric de comprensió dels enters és, en certa manera, un model pràctic per estudiar l'assoliment de continguts matemàtics vinculats a la construcció dels nombres enters. Cadascun dels elements d'aquest context s'ha d'examinar doblement: com un contingut per si sol i com un contingut necessàriament articulat amb la resta. Entenem que per accedir, com a

recercadors, a la lògica de comprensió dels enters ens cal rastrejar la comprensió de continguts específics que són interdependents. Per tant, adoptem una visió sistèmica on la comprensió dels nombres enters és el resultat de la comprensió de continguts matemàtics específics i de la comprensió de les relacions matemàtiques entre aquests continguts. D'acord amb aquesta visió sistèmica, es pot pensar que l'aprenentatge dels nombres enters segueix una lògica de comprensió progressiva de certs continguts matemàtics i de relacions matemàtiques entre ells.

Les interseccions entre els continguts Origen, Simètric, Operacions i  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  i els patrons associats, representen que aquests continguts són bàsics per tal de poder comprendre i utilitzar els centrals. La identificació de l'origen i la interpretació del simètric permet resoldre les dificultats a l'hora de representar situacions que es poden descriure en termes de nombres enters. Reconèixer els enters, la polisèmia del signe  $-$  i la seva utilització del simètric simètrica són fonamentals per poder utilitzar els nombres enters per utilitzar-los com a qualificadors. Si afegim l'habilitat per operar i expressar les operacions en termes d'enters permet fer el salt per tal d'expressar en termes algebraics problemes que involucren nombres enters.

L'escenari plantejat proporciona el context adequat per poder respondre a la pregunta d'investigació. La combinació d'aquests patrons construïts ens portarà a l'elaboració de perfils d'alumnes atenent quins patrons segueixen. El nombre de patrons construïts combinats porta d'entrada a la possibilitat d'elaborar:

$$3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 36,$$

36 perfils d'alumnes que ens permetran ser més precisos a l'hora de caracteritzar els aprenentatges assolits. Aquests perfils proporcionen nou coneixement a fi de refinar els perfils descrits en el marc teòric: Arcavi i Bruckheimer (1981), Bruno i Martínón (1999), Vlassis (2008) i Bofferding (2014).

- Arcavi i Bruckheimer (1981) conclouen, tot i que de manera oberta, que la manera com s'instrueix als alumnes no determina el nivell d'assoliment de les operacions que involucren nombres enters.
- Bruno i Martínón (1999) fan una classificació en tres nivells, dels alumnes atenent a com utilitzen tres procediments per resoldre els problemes plantejats. Centrant-se sobretot en els procediments de suma i resta.
- Pujol (2008) estudia i analitza els processos que porten d'una situació prèvia cap a una posterior a partir de la intervenció a l'aula dirigint l'aprenentatge que els alumnes comencen per sí sols.
- Vlassis (2008) dóna una classificació, de tres nivells, dels alumnes. Segons la seva habilitat a l'hora de treballar amb els nombres enters. I acaba distingint, com podem llegir al marc teòric, dos tipus de dificultats a l'hora d'assolir l'habilitat.
- Bofferding (2014) acaben donant una classificació dels alumnes atenent a tres models mentals que permeten identificar en quin punt de l'evolució, cap a la comprensió dels enters, es troben.

En el transcurs de la nostra investigació, els patrons de comprensió construïts, porten a obtenir una classificació més acurada a les caracteritzacions dels estudis inclosos al marc teòric.

En aquest treball de recerca s'ha fet una aposta clara per seleccionar uns pocs autors i treballs, estudiar-los en profunditat i utilitzar-los com a font d'inspiració teòrica i analítica. En aquest punt de les conclusions, és especialment pertinent valorar si la selecció de la literatura ha estat suficient i adequada. Al llarg del procés d'investigació, la literatura escollida ha permès aclarir

idees i generar suposicions sobre alguns dels significats que els alumnes podien estar utilitzant en les seves respostes, escrites i parlades. Aquest fet ens porta a concloure que la selecció ha estat adequada. Tanmateix, davant de l'elaboració del context teòric de comprensió dels nombres enters de la Figura 6.1, no podem concloure amb la mateixa intensitat sobre si la selecció ha estat suficient. Els treballs examinats són certament suficients per arribar a construir aquest context teòric, però hi ha matisos en les relacions matemàtiques entre els continguts de la Figura 6.1 que molt possiblement han estat investigats a l'àrea i que no hem incorporat, amb la corresponent pèrdua de discussió sobre aquestes relacions.

Cal tenir en compte la franja de població de la investigació, alumnes de tercer ESO, que ja ha estat instruïda durant dos anys en el treball i aplicació dels nombres enters. En cas de franges de població de primer, segon i quart d'ESO potser es podrien construir d'altres patrons, això augmentaria el nombre de perfils a tenir en compte. A continuació descrivim alguns perfils. Alumnes que:

- Identifiquen el zero com origen sobre la recta numèrica.
- Comprenen l'ús del signe  $-$  com a qualificador a l'hora de descriure situacions.
- Interpreten les operacions com a canvis d'estat per pujar i baixar.
- Interpreten el simètric per indicar la posició respecte de l'origen tant per moviments com per canvis temporals.
- Eviten, en general, les expressions algebraïques per modelitzar situacions.
- Tenen dificultats a l'hora de situar el zero com a origen.
- Reconeixen l'ús dels enters.

Aquest perfil el podem designar per:  $P_{1121111} \rightarrow [\mathbf{Or1}, \mathbf{Q1}, \mathbf{Op2}, \mathbf{S1}, \mathbf{A1}, \mathbf{R1}, \mathbf{Z1}]$ . D'altra banda, la construcció d'aquest perfil té sentit independentment del fet de si hi ha un o més alumnes de la recerca empírica que s'hi ajustin. Aquesta observació és especialment rellevant. Considerem que el salt que porta de la descripció analítica de resultats empírics a la producció de conclusions d'abast teòric s'ha d'identificar amb claredat.

Prenent aquests perfils com a base es poden agrupar els alumnes de poblacions de característiques similars (edat, curs) a les estudiades.

Si analitzem els patrons de comprensió d'una manera més precisa podem assegurar que el patró **Or1** i el patró **R1** no es probable que es donin a la vegada ja que si identifiquen el zero com l'origen és coherent pensar que el representaran adequadament. Això fa que els perfils que combinin aquests dos patrons es puguin eliminar. És a dir, tots els perfils que tenen 1 a les posicions 1 i 6 són molt poc probables que es puguin trobar. Per tant eliminem fins a 12 perfils que considerem que surten de combinacions falses de patrons. Això ens permet reduir a 24 possibles perfils. En aquest punt novament cal insistir en què la valoració dels perfils poc raonables de ser identificats a la pràctica es produeix des del coneixement teòric i, per tant, no s'ha de vincular a les evidències empíriques obtingudes en el decurs d'aquesta investigació.

Si continuem analitzant els patrons de comprensió construïts podem considerar que els perfils que combinen el patró **Or2** i el patró **R1** responen a una mateixa tipologia d'alumnes. Per tant podem deixar un únic perfil que identifiqui aquest perfil d'alumnat. Això vol dir que tots els perfils que tinguin un 2 a la primera posició i un 1 a la sisena els podem considerar equivalents als que tenen un 3 a la primera posició i un 1 a la sisena. És a dir, ens podem quedar només amb els perfils:

$$P_{2111111} \rightarrow [\mathbf{Or2}, \mathbf{Q1}, \mathbf{Op1}, \mathbf{S1}, \mathbf{A1}, \mathbf{R1}, \mathbf{Z1}]$$

$$P_{2111112} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op1}, \text{S1}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z2}]$$

$$P_{2112111} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op1}, \text{S2}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z1}]$$

$$P_{2112112} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op1}, \text{S2}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z2}]$$

$$P_{2121111} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op2}, \text{S1}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z1}]$$

$$P_{2121112} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op2}, \text{S1}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z2}]$$

$$P_{2122111} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op2}, \text{S2}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z1}]$$

$$P_{2122112} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op2}, \text{S2}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z2}]$$

$$P_{2131111} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op3}, \text{S1}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z1}]$$

$$P_{2131112} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op3}, \text{S1}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z2}]$$

$$P_{2132111} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op3}, \text{S2}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z1}]$$

$$P_{2132112} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op3}, \text{S2}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z2}]$$

Perquè els perfils d'alumnes  $P_{2\dots\dots 1}$  responen a una tipologia similar als perfils d'alumnes  $P_{3\dots\dots 1}$ . Aquells que no tenen clara la utilització del zero com a origen o com a número. Aleshores reduïm els perfils d'alumnes que teníem a aquests dotze últims.

De la mateixa manera que hem produït un context teòric de comprensió dels nombres enters, hem arribat també a produir un context teòric de comprensió de l'aprenent dels nombres enters. D'una banda, els patrons posen de relleu elements i interseccions que han d'examinar-se a l'hora d'estudiar el fenomen de la comprensió dels nombres enters. D'altra banda, els perfils posen de relleu elements i interseccions per a l'estudi dels processos experimentats per l'aprenent dels nombres enters. La Figura 6.2 (que es complementa amb la Figura 6.1) il·lustra aquest segon context teòric creat en el decurs d'aquest treball de tesi.

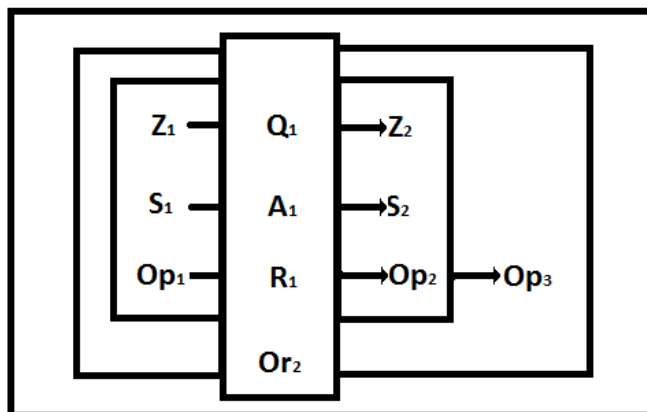


Figura 6.2: Context teòric de comprensió de l'aprenent de  $\mathbb{Z}$ .

Les Figures 6.1 i 6.2 són un intent de representar els dos contextos teòrics principals sorgits d'aquesta recerca: el context teòric de comprensió dels nombres enters i el de comprensió de l'aprenent dels nombres enters. Al llarg de tota la investigació hem considerat la comprensió i



l'aprenentatge com dues cares inseparables d'un mateix fenomen, posant alternativament l'èmfasi més en una o en l'altra en funció del moment de l'anàlisi. Hem fins i tot adoptat una llicència una mica arriscada al parlar de situacions de "des-aprenentatge", per referir-nos a evidències d'una comprensió fràgil de certs continguts matemàtics relatius als nombres enters. Certament no hi ha desaprenentatge possible a la pràctica ja que el que les persones experimentem sempre és constituït d'aprenentatge, encara que el que s'apregui no respongui a les intencions del que s'ensenya. És per tot això que els elements de la Figura 6.2, que intervenen en la comprensió de l'aprenent dels nombres enters, s'han pensat des de la perspectiva ideal d'una comprensió també ideal d'un tema matemàtic.

En el cas del context teòric de l'aprenent dels nombres enters i els processos i operacions que els involucren podem establir un marc que ens permeti observar l'evolució que un determinat alumne pot mostrar al llarg de l'aprenentatge. De la figura 6.2 podem veure que a partir d'uns estats inicials, en el procés de comprensió, representats pels patrons **Z1**, **S1** i **Op1** el procés de canvi que porta respectivament als patrons **Z2**, **S2** i **Op2** representa un pas endavant en el procés d'aprenentatge. Que s'estén en el cas de les operacions fins el patró **Op3**.

En aquest procés de canvi en la comprensió dels continguts plantejats trobem l'aplicació a d'altres aspectes, representada pels patrons centrals que es van enriquint a mida que hi ha un creixement en els altres, **Q1**, **A1**, **R1** i **Or2**.

La desaparició del patró **Or1** ve motivada pel fet que sigui poc probable que es donin a la vegada com ja hem comentat abans.

Una vegada refinats els perfils, a tall d'exemple, anem a descriure quina tipologia d'alumnat es pot associar a un d'aquests perfils. En triem un de manera totalment aleatòria, per exemple  $P_{2111111} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op1}, \text{S1}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z1}]$ . Recordem els patrons de comprensió construïts que determinen aquest perfil:

**[Or2]** Els costa identificar el zero com a origen temporal.

**[Q1]** Comprenen l'ús del signe  $-$  com a qualificador a l'hora de descriure situacions.

**[Op1]** Operen evitant l'ús d'enters: busquen el resultat i afegeixen el que representa.

**[S1]** Interpreten el simètric per indicar la posició respecte de l'origen tant per moviments com per canvis temporals.

**[A1]** Eviten, en general, les expressions algebraïques per modelitzar situacions.

**[R1]** Tenen dificultats a l'hora de situar el zero com a origen.

**[Z1]** Reconeixen l'ús dels enters.

Aquest perfil correspon a un tipus d'alumnat que ha assolit alguns dels conceptes matemàtics associats als enters. Reconeixen l'ús dels enters, saben utilitzar-los per descriure situacions i saben interpretar el simètric per indicar una posició respecte de l'origen però els costa identificar el zero com a origen. Això provoca confusió a l'hora de fer representacions sobre una recta numèrica. A més, eviten l'ús dels enters a l'hora de fer operacions, i també eviten les expressions algebraïques per modelitzar situacions. Si féssim un estudi fixant una evolució en el temps, respecte de l'aprenentatge d'un alumne determinat, podríem observar els canvis que es donen respecte d'un perfil concret. Això ens portaria a veure si hi ha una evolució en l'aprenentatge. Partint d'un alumne que respongués al perfil escollit es podrien observar els canvis que experimenta. En aquest sentit si es constatés una millora en el contingut referent a operacions l'alumnat observat podria situar-se en un perfil  $P_{2121111} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op2}, \text{S1}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z1}]$  o  $P_{2131111} \rightarrow [\text{Or2}, \text{Q1}, \text{Op3}, \text{S1}, \text{A1}, \text{R1}, \text{Z1}]$ .

Les conclusions aquí presentades donen resposta a la pregunta principal que va originar i ha guiat aquesta recerca. Atès que hem anat discutint la idoneïtat dels mètodes de la recerca en capítols anteriors, no ens aturem en formular conclusions relatives al marc analític. Convé, però, recordar que els mètodes combinats d'anàlisi de contingut de qüestionaris i d'entrevistes han

esdevingut útils per al propòsit d'assolir uns objectius que, a la vegada, han esdevingut útils per al propòsit de situar la pregunta principal en un context teòric i empíric suficient.

## 6.2 Prospectiva de recerca i implicacions didàctiques

### 6.2.1 Prospectiva de recerca

Durant la investigació realitzada ens adonem que hi ha força aspectes en els que es pot aprofundir i apareixen noves preguntes que poden ser objecte de posteriors investigacions. Abans de tancar aquesta tesi és important fer-ne esment i mostrar línies que es poden abordar en el futur. En aquest sentit fem esment d'aquelles que veiem més clares.

Un primer aspecte que podria ser objecte d'estudi consistiria en contrastar els contextos representats a les Figures 6.1 i 6.2, de les conclusions, a partir de la consulta de literatura més específica que permetés fer-ne una discussió més profunda. La representació d'aquests contextos ha estat motivada pels patrons construïts en aquest treball de tesi a partir de les dades empíriques recollides i analitzades. Però un aprofundiment en treballs d'altres autors podria confirmar o ampliar els contextos representats.

Tenint en compte que els patrons de comprensió construïts ho han estat a partir d'un tipus d'alumnat específic seria interessant poder fer estudis similars en altres tipologies d'alumnes per tal de contrastar, refinar i ampliar els patrons i perfils construïts. Aquesta línia de treball permetria aprofundir en els processos d'aprenentatge i en la practica docent. Seria, també, interessant poder estudiar les trajectòries d'aprenentatge de grups d'alumnes durant els quatre cursos de secundària obligatòria, estudiant els canvis en la utilització dels enters, les operacions que els involucren i la seva aplicació a l'àlgebra. Des de la introducció dels nombres enters al primer curs de la secundària obligatòria, als 12 anys aproximadament, fins al final de la secundària obligatòria, als 16 anys. La comprensió dels nombres enters, els processos relatius a aquests i les operacions que els involucren van evolucionat de maneres molt diverses depenent dels estudiants. Els patrons de comprensió que poden construir-se segur que poden ser molt variats i enriquidors a l'hora de poder estudiar els processos d'aprenentatge.

Seria productiu estudiar si es podrien relacionar els patrons de comprensió i com van evolucionant al llarg dels cursos i del temps. Si estan lligats amb els resultats que obtenen els estudiants i si es poden establir seqüències de patrons lligades a nivells d'aprenentatge.

Una idea que ens preocupa des del punt de vista docent i des del punt de vista de la investigació podria abordar-se és si la introducció dels nombres enters és un punt d'inflexió rellevant pels estudiants de secundària. És a dir si el canvi conceptual que provoquen genera una dificultat que per alguns estudiants esdevé insalvable. La nostra opinió és que molts dels problemes que posteriorment apareixen amb la introducció de l'àlgebra venen motivats per una manca de domini dels processos i significats que involucren els nombres enters. És clar que no és l'únic motiu però des del nostre punt de vista és un motiu de pes. A l'origen d'aquest treball de tesi aquesta idea estava implícita i podria ser una de les línies a seguir a partir dels patrons de comprensió.

Durant la investigació fem referència a desaprenentatge per referir-nos a situacions en les que una primera resposta correcta matemàticament es canvia per una altra resposta que no és correctament matemàticament. Estudiar i descriure aquestes situacions permetria conèixer més profundament els mecanismes d'aprenentatge i trobar noves vies per poder millorar l'ensenyament. Tot i que com s'explica a les conclusions no hi hagi desaprenentatge, si mirem l'evolució de l'aprenentatge d'un estudiant. Si ens centrem en un contingut matemàtic les situacions on els alumnes donen una primera resposta i la canvien a causa d'un coneixement feble, que els porta a modificar la seva resposta inicial que podia ser correcta, per una que no ho sigui el situem dins d'aquest terme. Pensem que seria molt interessant poder identificar en quins continguts i en

quins moments del procés d'aprenentatge es poden localitzar. El fet de poder identificar quins són els motius que porten a canviar una resposta per una altra i quins són els elements que ho provoquen podria millorar l'ensenyament i l'aprenentatge, tant dels nombres enters com d'altres conceptes matemàtics

Un altre dels aspectes en els que es podria aprofundir és en com entenen el zero els alumnes de secundària i com canvia la seva interpretació al llarg de la seva trajectòria educativa. Posar atenció als diferents usos i interpretacions que es pot fer del zero podria ser una nova via d'aprofundiment en el camp dels nombres enters. Sovint donem per suposat que tots els alumnes i tots els docents comprenem què és el zero i els diferents significats que pot adquirir, és a dir, la seva polisèmia. Però una ullada a les respostes dels qüestionaris i a les entrevistes ens permet constatar que no és així, almenys en el grup d'estudiants que han estat objecte d'estudi. Les dades recollides posen en evidència una manca de coneixement matemàtic de tots els usos i significats que li podem assignar. Aprofundir en el coneixement d'aquest fet podria enriquir tant l'ensenyament com la formació del professorat que utilitza les matemàtiques o conceptes i procediments matemàtics en els seus àmbits.

Una última proposta per continuar el treball endegat va en la línia d'estudiar com afronten els problemes, per part dels alumnes de secundària, que involucren l'ús dels enters. Aquí fem referència a l'estudi de les situacions on els alumnes transfereixen problemes que, a priori, estan pensats en termes de nombres enters, al domini dels nombres naturals. Com afecta, aquesta transferència, a la comprensió dels nombres enters i posteriorment a la incorporació d'aquests nombres als plantejaments que involucren l'àlgebra. Poder generar situacions d'aprenentatge adequades perquè els estudiants incorporin els nous conceptes apresos als seus mecanismes i dinàmiques de treball sense evitar-los o obviar-los.

### 6.2.2 Implicacions didàctiques

Un cop acabada la investigació cal parar atenció en alguns aspectes que cal tenir en compte per tal de poder millorar els processos d'ensenyament-aprenentatge. En el nostre cas hi ha diversos aspectes sobre els quals cal incidir de forma clara.

En primer lloc hem vist que a les entrevistes s'ha posat de manifest que una part dels alumnes dubtaven a l'hora d'utilitzar el 0. Ells mateixos han manifestat que a d'altres matèries els havien explicat que el zero no existia. En aquest punt es posa de manifest un ús erroni de la recta numèrica a l'hora de situar les dates d'una cronologia. La recta numèrica és un instrument matemàtic que s'aplica de manera òptima en l'elaboració de frisos cronològics però cal utilitzar-la de manera adequada, és a dir, tenint en compte la seva estructura intrínseca on el zero és un element indispensable. En aquest sentit el temps que va del moment que prenem com a origen, 0, fins el 1 correspon a l'any 0. Un nen no compleix l'any fins que ha passat tot el temps des del naixement fins que han passat els 365 dies. En aquest cas el període de temps entre 0 i 1 serien les fraccions de l'any 0. El fet que al nostre voltant la cultura d'herència cristiana consideri l'any que correspon al naixement de Crist sigui el primer any de la nostra era no implica que sigui l'any 1. Des d'un punt de vista matemàtic si assignem als anys la seva posició en una successió el primer any correspondria al subíndex 0. És important que la formació del professorat sigui prou acurada perquè quan s'utilitzin conceptes matemàtics, en matèries que els incorporin, no comuniquin idees que puguin provocar confusió i contradicció als alumnes.

És doncs, molt important que la formació sigui adequada i específica per a tots aquells docents que utilitzen elements i procediments matemàtics en els seus àmbits. Això també s'ha de fer extensiu als professors de matemàtiques per tal que siguin molt clars en l'ensenyament dels conceptes i procediments que imparteixen.

En segon lloc és essencial crear oportunitats per tal de crear situacions que generin

oportunitats d'aprenentatge matemàtic en la línia que es proposa a Ferrer, Fortuny i Morera (2014). Tot i que l'article no va en la línia dels nombres enters és plenament transferible al que volem proposar. Hem pogut veure, al llarg de la investigació, que els alumnes intenten evitar la utilització dels nombres enters transferint el problema al domini dels nombres naturals. Per exemple si volem saber quants anys han passat des de l'any del naixement, 1935, fins l'any de la mort, 2017? El plantejament de resolució natural seria,  $2017 - 1935$ . Quan es planteja el mateix problem amb dos anys que es representin amb nombres negatius, per exemple, quants anys han passat des de l'any de naixement,  $-85$ , fins el de la mort  $-22$ ? En lloc de fer el mateix plantejament, és a dir,  $(-22) - (-85)$  transfereixen el problema a  $85 - 22$ . Tot i que el resultat és el mateix si posem l'objectiu en els processos d'aprenentatge s'ha perdut l'oportunitat d'incorporar nous elements de coneixement matemàtic. Aquesta manera d'actuar pot limitar les possibilitats d'afrontar altres problemes on aquesta transferència no sigui clara. En particular, pot dificultar el plantejament de problemes que involucrin expressions algebraïques. Per tant, insistint amb el plantejament de Ferrer, Fortuny i Morera cal generar oportunitats que afavoreixin la utilització dels nombres enters, les operacions i els processos que els involucren, per tal de poder utilitzar-los de manera directa sense girs ni transferències.



# Referències bibliogràfiques

- [1] Altıparmak, K.; & Özdoğan, E. (2010): A study on the teaching of the concept of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(1), 31-47.
- [2] Arcavi, A.; & Bruckheimer, M. (1981): How shall we teach the multiplication of negative numbers?. *Mathematics in School*, 10(5), 31-33.
- [3] Arcavi, A. (1994): Symbol Sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- [4] Bellos, A. (2011): Alex en el país de los números. España: Grijalbo.
- [5] Bofferding, L. (2014): Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *Journal for research in mathematics education*, 45(2), 194-245.
- [6] Bruno, A.; & Martínón, A. (1999): The teaching of numerical extensions: the case of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30:6, 789-809.
- [7] Cid, E. (2002): Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. Zaragoza: *Actas de las X Jornadas para el aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, 2, 529-542.
- [8] Cid, E. (2004): La investigación didáctica sobre los números negativos: Estado de la cuestión. A.E. Palacián (Ed.), *Algunos cambios en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp. 35-80). Zaragoza: ICE-Universidad de Zaragoza.
- [9] Das, R.; LeFevre, J-A.; & Penner-Wilger, M. (2010): Negative numbers in simple arithmetic. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 63(10), 1943-1952.
- [10] Ferrer, M.; Fortuny, J.M.; & Morera, L. (2014): Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(3), 385-405.

- [11] Gómez, B. (2001): La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿por qué menos por menos es más? Universidad de Valencia, 18, 289-309.
- [12] Gómez, B. (2016): Contextualización específica de la didáctica de las matemáticas. Revista Perspectivas Educativas, 1.
- [13] Heffer, A. (2011): Historical objections against the number line. Science & Education, 20:9, 863-880.
- [14] Iriarte, M.; Jimeno, M.; & Vargas-Machuca, I. (1991): Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. SUMA, 7, 13-18.
- [15] Killhamn, C. (2011): Making sense of negative numbers?. Doktorsavhandlingar Institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Universitat de Goteborg.
- [16] Kline, M. (1976): El fracaso de la matemática moderna. Madrid: Siglo XXI.
- [17] Kolb, D.A. (1984): Experiential learning: experience as the source of learning and development. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- [18] Pujol, R. (2008). Una reconsideració dels nombres enters per a l'ensenyament postobligatori. Treball de Tesi Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.
- [19] Pujol; R., Bibiloni; & L., Deulofeu, J., (2011, gener). Polisemia del signo – en la introducción del número entero. DIDAC [en línia], No.56. Disponible en <http://www.iberopublicaciones.com> [2012, 11 de desembre].
- [20] Schindler, M.; & Hußmann, S. (2013): About students' individual concepts of negative integer – in terms of the order relation. IEEM, Technische Universität Dortmund.
- [21] Tzelgov, J.; Ganor-Stern, D.; & Maymon-Schreiber, K. (2009): The representation of negative numbers: Exploring the effects of mode of processing and notation. The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 62(3), 605-624.
- [22] Vlassis, J. (2008): The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of minus. Philosophical Psychology, 21(4), 555-570.