



Universitat Autònoma de Barcelona

ADVERTIMENT. L'accés als continguts d'aquesta tesi queda condicionat a l'acceptació de les condicions d'ús establertes per la següent llicència Creative Commons:  http://cat.creativecommons.org/?page_id=184

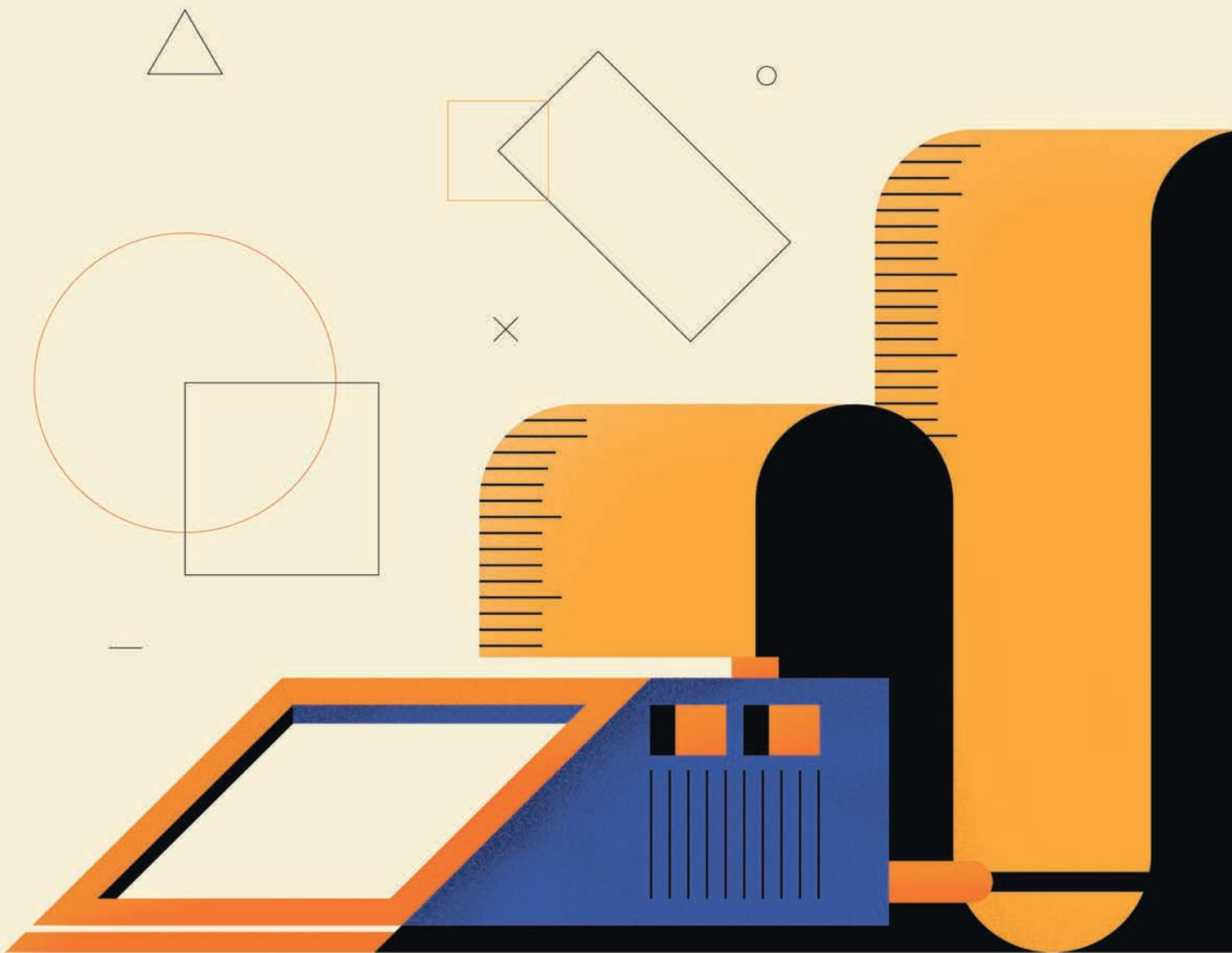
ADVERTENCIA. El acceso a los contenidos de esta tesis queda condicionado a la aceptación de las condiciones de uso establecidas por la siguiente licencia Creative Commons:  <http://es.creativecommons.org/blog/licencias/>

WARNING. The access to the contents of this doctoral thesis it is limited to the acceptance of the use conditions set by the following Creative Commons license:  <https://creativecommons.org/licenses/?lang=en>

Tesis Doctoral

Caracterización del contenido matemático subyacente al libro de texto en medida.

Elena Mengual Bretón



Tesis Doctoral

Caracterización del contenido
matemático subyacente al libro
de texto en medida.

Elena Mengual Bretón

DIRECTORES DE TESIS:

Lluís Albarracín Gordo y Núria Gorgorió Solà

Septiembre 2017



Universitat Autònoma de Barcelona

Doctorat en Educació

Departament de didàctica de la matemàtica
i de les ciències experimentals

Dra. Núria Gorgorió Solà, Catedrática del Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, con sede en la Facultad de Ciencias de la Educación de la universidad Autónoma de Barcelona.

Dr. Lluís Albarracín Gordo, profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, con sede en la Facultad de Ciencias de la Educación de la universidad Autónoma de Barcelona.

HACEMOS CONSTAR QUE:

La investigación realizada bajo la dirección de los firmantes por la Licenciada ELENA MENGUAL BRETÓN, con título, CARACTERIZACIÓN DEL CONTENIDO MATEMÁTICO SUBYACENTE AL LIBRO DE TEXTO EN MEDIDA, reúne todos los requisitos científicos, metodológicos y formales exigente por la legislación vigente para su Lectura y Defensa pública delante de la correspondiente Comisión, para la obtención del Grado de Doctor en Educación por la Universidad Autónoma de Barcelona, por consiguiente consideramos procedente autorizar su presentación.

Bellaterra,

Firmado:

Dra. Núria Gorgorió Solà

Dr. Lluís Albarracín Gordo

Esta investigación es parte del proyecto: “Caracterización del conocimiento disciplinar en matemáticas para el Grado de Educación Primaria: matemáticas para maestros” (Ref. I+D EDU2013-4683-R). La autora y los directores de la misma son miembros del Grupo de Investigación *Educació Matemàtica i Context: Competència Matemàtica (EMiC:CoM)* reconocido y financiado por la Direcció General de Recerca, Generalitat de Catalunya (Ref. 2014 SGR 00723).

A mis padres y a mi hermano

AGRADECIMIENTOS

El final de esta etapa educativa es un buen momento para volver la vista atrás y agradecer a todos aquellos que me han apoyado y ayudado a conseguir este sueño.

En primer lugar deseo expresar mi eterno agradecimiento a los directores de esta tesis doctoral, el Dr. Lluís Albarracín y la Dra. Núria Gorgorió, por darme la oportunidad de comenzar este trabajo del que tanto he aprendido. Gracias Lluís, por tu calidad humana, por haber hecho fácil este proceso a pesar de las dificultades que encontramos por el camino. Gracias por tus consejos, tu orientación y por tu capacidad para motivarme en todo momento. Gracias Núria por tu ayuda y tu apoyo académica y personalmente. A ambos, *moltes gràcies per aquesta aventura.*

En segundo lugar no podría olvidarme de mi familia, los tres pilares que sustentan mi vida. Gracias papá y mamá por haberme inculcado la constancia y el trabajo, por vuestro apoyo, vuestros ánimos y por vuestra confianza plena en mí. Por enseñarme a ser valiente y luchar por lo que quiero. Porque sois un ejemplo para mí. Por escucharme, comprenderme y aconsejarme encontrando siempre las palabras correctas. Todo lo que soy os lo debo a vosotros. A ti papa, espero que, al atardecer de la vida cuando nos volvamos a encontrar sigas estando orgulloso de mí. Gracias Fran, no podría tener mejor hermano y compañero, me ayudas a crecer día a día y sin tu apoyo y tu cariño nunca habría llegado tan lejos.

Por último, tengo la suerte de estar rodeada de gente extraordinaria que me ha enseñado qué es lo que hacen buenas a las personas. Gracias a mis amigos de Huesca, en especial a Silvia, Reyes y Elena por su capacidad de escucha inagotable. A Ángela, mi alma gemela en este proceso y que ha estado conmigo en todo momento, siempre te llevaré en mi corazón. Gracias a mis amigos de matemáticas y compañeros de la facultad. Gracias a mis compañeros de trabajo del colegio Salesiano San Bernardo por enseñarme tanto, en especial a Marta y a Julio por todo lo compartido. Gracias Eli y Mateo por vuestra fantástica portada. Gracias Josan por haberme animado a embarcarme en este proyecto, sin tu confianza no habría sido posible.

A las personas que, aunque no aparecen aquí con nombres y apellidos, han estado presentes de alguna forma durante el desarrollo de este trabajo, gracias de corazón.

SÍNTESIS

Presentamos un estudio de la propuesta de enseñanza de la medida presente en los libros de texto de matemáticas de la etapa de Educación Primaria (6-12 años) de una de las editoriales más utilizadas en España. Realizamos un análisis cualitativo de las actividades de medida que estructuran la propuesta didáctica del libro. El análisis se basa en una jerarquización de tareas matemáticas que nos permite caracterizar los contenidos de medida que se trabajan. Asimismo, se cuantifican las frecuencias con las que aparecen determinados tipos de actividades que pone de manifiesto la existencia de una incidencia desigual de los contenidos de medida tratados en el libro de texto, que tiende a presentar la medida de forma aritmetizada. Por tanto, los aspectos conceptuales y procedimentales propios de este contenido quedan en un segundo término. El estudio propone un método para el análisis de los libros de texto extrapolable para analizar las propuestas de otras editoriales o materiales de aula.

Del trabajo desarrollado en el contexto de esta tesis doctoral se derivan las siguientes publicaciones:

- Mengual, E., Gorgorió, N., y Albarracín, L. (2013). Validación de un instrumento para la calificación de exámenes de Matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XVII*, 367-381.
- Mengual, E., Gorgorió, N., y Albarracín, L. (2014). Variabilidad en la corrección de pruebas matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 28, 353-360.
- Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2016). The Mathematical Textbook as an obstacle in the learning of measure. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, 25(2), 175-183.
- Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2016). Las actividades de medida en el libro de texto: un estudio de caso. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 345-354). Málaga: SEIEM.
- Mengual, E., Gorgorió, N., y Albarracín, L. (2017). Análisis de las actividades propuestas por un libro de texto: el caso de la medida. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education*, 6(2), 136-163.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. El libro de texto.....	3
1.1.1. La importancia e influencia de libros de texto.....	3
1.1.2. El libro de texto como parte del currículo.....	6
1.2. La medida.....	8
1.2.1. Importancia e historia de la medida.....	8
1.2.2. La importancia de la medida dentro de la matemática y otras disciplinas.....	9
1.2.3. Informes, organismos e investigaciones que recalcan la importancia de la medida.....	10
1.2.3.1. El informe Cockcroft.....	10
1.2.3.2. National Council of Teacher of Mathematics (NCTM).....	12
1.2.3.3. Las pruebas PISA.....	12
1.2.3.4. COPIRELEM.....	12
1.2.4. La medida en el currículo.....	13
1.3. Relevancia científica y social de la investigación.....	15
1.4. Estructura del proyecto.....	16
2. MARCO TEÓRICO	19
2.1. Medida.....	21
2.1.1. Conceptualización de la Medida.....	21
2.1.1.1. Magnitud.....	21
2.1.1.2. Cantidad de Magnitud.....	23
2.1.1.3. Medir y unidad de medida.....	23
2.1.1.4. La medida y su naturaleza aproximativa.....	24
2.1.1.5. Propiedades fundamentales en la medida.....	28
2.1.2. Tipos de medida.....	29
2.1.3. Concepto matemático de medida.....	29
2.1.4. Estimación.....	30
2.1.4.1. Estrategias de Estimación.....	31
2.1.4.2. Tipos de tareas para realizar una estimación.....	33

2.1.5. Investigación sobre la medida en educación.....	33
2.1.5.1. Piaget.....	33
2.1.5.2. Inskip.....	35
2.1.5.3. El Método Ruso.....	36
2.1.5.4. Lehrer.....	37
2.1.5.5. Chamorro y Belmonte.....	38
2.1.5.6. National Council of Teacher of Mathematics (NCTM).....	41
2.1.5.7. Callís.....	43
2.1.5.8. Outhred, Mitchelmore, McPhail y Gould.....	46
2.1.5.9 Szilágyi, Clements y Sarama.....	46
2.1.6. Estado de la enseñanza y aprendizaje de la medida.....	48
2.1.7. La medida en los libros de texto.....	53
2.2. El libro de texto.....	56
2.2.1. Concepto de libro de texto.....	56
2.2.2. Investigaciones previas sobre libros de texto.....	59
2.2.3. Metodologías de análisis de libros de texto.....	64
2.2.3.1. González y Sierra.....	64
2.2.3.2. Monterrubio y Ortega.....	65
2.2.3.3. López, Guerrero, Carrillo y Contreras.....	67
2.3. Tareas matemáticas su jerarquización.....	69
2.3.1. Tareas matemáticas.....	69
2.3.2. Jerarquización de tareas propuesta por Gairín, Muñoz y Oller.....	70
2.4. Conocimiento conceptual y procedimental.....	71
2.4.1. Hiebert y Lefevre.....	72
2.4.1.1. Definición de conocimiento conceptual y procedimental propuesto por Hiebert y Lefevre.....	73
2.4.4.2. Relación entre el conocimiento conceptual y procedimental.....	74
2.4.2. Rittle-Johnson y Alibali.....	75
2.4.3. Star y Stylianides.....	76
2.4.4. Baroody, Feil y Johnson.....	76
2.4.5. Crooks y Alibali.....	78

3. PANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS	79
3.1. Planteamiento del problema.....	81
3.2. Objetivos de la investigación.....	83
4. MARCO METODOLÓGICO	85
4.1. Perspectiva metodológica.....	87
4.1.1 Cualitativa.....	87
4.1.2. Interpretativa.....	87
4.1.3. Estudio de casos.....	88
4.1.3.1. Definición del estudio de casos.....	89
4.1.3.2. Tipos de estudios de casos.....	89
4.1.3.3. Características del estudio de casos.....	91
4.3.1.4 El proceso de investigación de un estudio de casos.....	92
4.2. Selección de la muestra y justificación.....	93
4.2.1. Justificación de la muestra seleccionada.....	93
4.2.2. Formato de los datos.....	96
4.3. Validación de la investigación.....	98
4.4. Análisis del contenido.....	99
4.4.1. Definición y característica del análisis del contenido.....	99
5. ANÁLISIS	101
5.1. FASE I: primera aproximación al análisis.....	103
5.2. FASE II: análisis descriptivo del ciclo superior.....	105
5.3. FASE III: análisis definitivo.....	107
5.3.1. EJEMPLO 1. Suma de expresiones complejas de tiempo.....	108
5.3.2. EJEMPLO 2. Paso de una expresión compleja a una incompleja.....	111
5.3.3. EJEMPLO 3. Calcular área.....	115
6. RESULTADOS	121
6.1. Esquemas de conocimiento.....	123
6.1.1. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 1. Calcular área.....	124
6.1.2. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 2. Calcular hora de otra ciudad con los husos horarios.....	125
6.1.3. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 3. Calcular lado.....	126

6.1.4. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 4. Calcular perímetro.....	129
6.1.5. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 5. Calcular peso de un objeto a partir de las medidas de las pesas utilizadas para medirlo.....	131
6.1.6. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 6. Calcular radio o diámetro de una circunferencia a partir del diámetro o el radio.....	132
6.1.7. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 7. Calcular volumen.....	133
6.1.8. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 8. Cambio de unidades.....	134
6.1.9. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 9. Comparar.....	139
6.1.10. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 10. Dar significado a la parte entera y decimal de una medida.....	142
6.1.11. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 11. Dibujar medida.....	142
6.1.12. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 12. Elegir unidad de medida adecuada según el contexto.....	144
6.1.13. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 13. Elegir medida adecuada según el contexto.....	145
6.1.14. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 14. Estimar.....	145
6.1.15. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 15. Explicar uso de instrumento de medida.....	147
6.1.16. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 16. Interpretar calendario.....	147
6.1.17. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 17. Medir amplitud angular de forma directa.....	148
6.1.18. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 18. Medir longitud de forma directa.....	149
6.1.19. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 19. Obtener el peso de un objeto con la escala de una báscula.....	152
6.1.20. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 20. Obtener la medida de la longitud de un objeto a partir de la longitud de otro objeto.....	152
6.1.21. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 21. Obtener la longitud de un objeto con el instrumento de medida dibujado o una cuadrícula.....	153
6.1.22. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 22. Ordenar de forma directa.....	155
6.1.23. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 23. Ordenar de forma indirecta...	157
6.1.24. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 24. Pasar una expresión compleja a una incompleja.....	159
6.1.25. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 25. Pasar una expresión incompleja a una compleja.....	160
6.1.26. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 26. Relacionar expresiones iguales.....	161

6.1.27. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 27. Suma o resta de expresiones complejas de tiempo.....	163
6.2. Clasificación de actividades por su tarea principal.....	164
6.2.1. Frecuencias por tipo de tarea principal.....	168
6.2.2. El valor económico como magnitud.....	172
6.3. La propuesta del libro de texto vs. La propuesta teórica.....	173
6.3.1. Piaget.....	174
6.3.2. Chamorro y Belmonte.....	177
6.3.3. NCTM.....	179
6.3.4. Szilágyi, Clements y Sarama.....	180
7. CONCLUSIONES	183
REFERENCIAS	195
ANEXO	211

1. INTRODUCCIÓN

1.1. EL LIBRO DE TEXTO

La educación es una actividad humana demasiado complicada para verse reflejada en los libros de texto

H. Freudenthal

Coincidimos con Freudenthal en que es imposible identificar todos los aspectos involucrados en la educación recurriendo exclusivamente al libro de texto. Sin embargo, sí que es posible estudiar ciertos aspectos que tienen lugar en el aula. Veamos Muniesa (1995), resalta la importancia de la investigación basada en los libros de texto debido a los diferentes aspectos que es posible identificar a partir de su análisis, como, por ejemplo, los contenidos y su ordenación, las orientaciones pedagógicas, el lenguaje matemático utilizado, el predominio de unos contenidos sobre otros, etc. En nuestro estudio, nos centramos en el conocimiento matemático sobre la medida que recoge el libro de texto y, por ende, qué tratamiento de la medida ofrece.

1.1.1. LA IMPORTANCIA E INFLUENCIA DE LIBROS DE TEXTO

En relación con los orígenes del libro de texto, Martínez (2006), recoge que fue el resultado de la concreción de una pedagogía que surgió en monasterios de la Edad Media y que se generalizó más tarde con el capitalismo, las revoluciones burguesas y la creación de los estados nacionales. Estos orígenes también tienen relación con la forma en la que el ser humano ha transmitido la información de generación en generación formando el conocimiento y la cultura de nuestros días. Dicha transmisión ha experimentado una evolución exponencial.

Al principio, esta evolución fue lenta debido a que la transmisión se hacía de forma oral o mediante la escritura en documentos únicos y de reproducción manual. Esta situación dio un vuelco con la aparición de la imprenta que revolucionó todas las formas de conocimiento (Eisenstein, 1994; López, Guerrero, Carrillo y Conteras, 2015). Con la

imprensa se instauró el libro de texto en la escuela sirviendo de mediador entre las directrices curriculares y el proceso de enseñanza-aprendizaje (Villella y Contreras, 2005).

Schubring (1987), puso de manifiesto que son los libros de texto los que determinan la enseñanza de un país por encima de los decretos dictaminados por los diferentes gobiernos debido a que en las clases de matemáticas este recurso era el encargado de implementar el plan de estudios (Sowder, 1988). Por tanto, los libros de texto constituyen un elemento central en el proceso de transmisión cultural (Stray, 1994). Otro autores como Azcárate y Serradó (2006), Haggarty y Pepin (2002), Jones y Tarr (2007), Nicol y Crespo (2006), Pepin, Guedet y Trouche (2013), Pino y Blanco (2008) Rodríguez (2007), o Vincent y Stacey (2008) ponen de manifiesto el papel que juega el libro de texto dentro del aula de matemáticas al ser el recurso más utilizado por los maestros. En esta misma línea, el informe Cockcroft (1985), afirma que “los libros de texto son una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula” (p.114). Además, estudios internacionales como el TIMSS (*Third International Mathematics and Science Study*), que se centra en medir los conocimientos de matemáticas y ciencia de los estudiantes de cuarto y octavo grado en todo el mundo, recogen que la mayoría de los maestros de matemáticas utiliza el libro de texto como fuente principal escrita cuando se seleccionan los recursos para la enseñanza (Alajmi, 2012; Plianram y Inprasitha, 2012).

Desde una perspectiva teórica, el libro de texto forma parte del tetraedro didáctico propuesto por Rezat (2006) y Rezat y Sträßer (2012). Este modelo modifica el triángulo didáctico que sirve para conceptualizar la enseñanza y aprendizaje dentro del aula de matemáticas formado por los estudiantes, el profesor y el contenido representados, cada uno, en un vértice (Goodchild y Sriraman, 2012). Rezat (2006) y Rezat y Sträßer (2012) añaden un nuevo vértice a este triángulo didáctico que simboliza los recursos utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje como, por ejemplo, los libros de texto. De esta manera, el triángulo didáctico se convierte en un tetraedro didáctico tal y como se recoge a continuación:

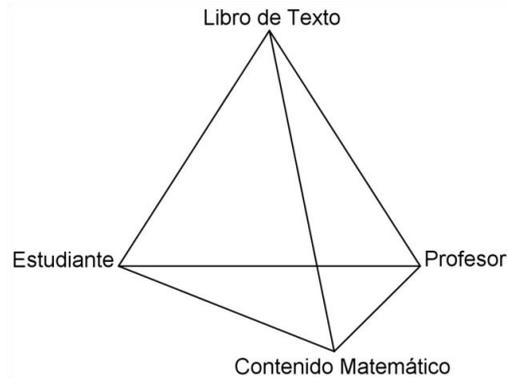


Figura 1. Tetraedro didáctico (Rezat, 2006, p.413)

Este modelo incluye todas las interacciones posibles entre el estudiante, el profesor, el contenido matemático y el libro de texto. Nuestro estudio está centrado en la relación entre el libro de texto y el contenido matemático que propone. Ahora bien, no podemos perder de vista que esta interacción se verá afectada por el estudiante o el profesor según la perspectiva que tomemos.

Aunque la importancia y la influencia del libro de texto es un hecho, Goodchild y Sriraman (2012), señalan también la importancia de las tareas que llevadas a cabo dentro del aula de matemáticas. Dado que el libro de texto es el principal recurso del profesorado, la mayoría de las tareas que se realizan están contenidas en el libro de texto.

Con todo lo expuesto no es de extrañar que el libro de texto haya sido objeto de diversas investigaciones internacionales desde distintas perspectivas y se haya convertido en un foco de atención debido a los problemas de calidad en la enseñanza (Azcárate y Serradó, 2006). Dentro de los diferentes campos de investigación en el ámbito de la educación matemática, la investigación sobre los libros de texto ha sido una de las más desarrolladas en los últimos años (Fan, 2013).

Incluso en tiempos en los que los contenidos digitales han entrado en las aulas y el impacto de la tecnología es un hecho evidente, el libro de texto todavía ocupa un lugar central en la relación entre la cultura, la política educativa y la práctica curricular (Pepin, et al., 2013). Actualmente los recursos digitales sirven como material de apoyo y consulta que motivan el aprendizaje (Ruiz de Gauna, Dávila, Etxeberría, y Sarasua, 2013). Como nexo de unión entre estas dos realidades han comenzado a surgir versiones o propuestas digitalizadas de los libros de texto.

1.1.2. EL LIBRO DE TEXTO COMO PARTE DEL CURRÍCULO

Diversos autores y estudios internacionales han abordado el currículo definiendo lo que entienden por éste y qué tipos hay. En adelante se recogen algunos de estos enfoques.

El NCTM (1991), afirma que el currículo es:

Un plan operativo que detalla qué matemáticas necesitan conocer los alumnos, cómo deben alcanzar estos objetivos curriculares, qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen su conocimiento matemático y el contexto en el que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje (p.1).

Pepin y Haggarty (2001), recogen que el estudio TIMSS diferencia entre el currículo propuesto, el currículo implementado y el currículo alcanzado. Esta distinción plantea interrogantes sobre el papel y la función de los libros de texto de matemáticas dentro de los diferentes tipos de currículo.

Por otro lado, Alsina (2000), identifica cuatro tipos de currículo que se desarrollan en diferentes contextos y lugares entre los cuales el libro de texto está integrado: el oficial, el potencial, el impartido y el aprendido. Este autor (Alsina, 2000) entiende el currículo oficial como el conjunto de documentos oficiales propuestos por las autoridades educativas que elaboran los programas de las diferentes asignaturas, señalando los contenidos, objetivos, criterios de evaluación, etc. El currículo potencial está determinado en diversas publicaciones docentes y materiales, donde se encuentran los libros de texto, y desarrolla el currículo oficial desde un punto de vista teórico y práctico. En tercer lugar, el currículo impartido es el que desarrolla el profesor a lo largo del curso y, por último, el currículo aprendido es el adquirido por el alumnado.

Torres (1991), identificó las diferentes fases existentes entre la construcción del currículo hasta su desarrollo y evaluación en las aulas. Dichas fases vienen reflejadas en la siguiente figura:

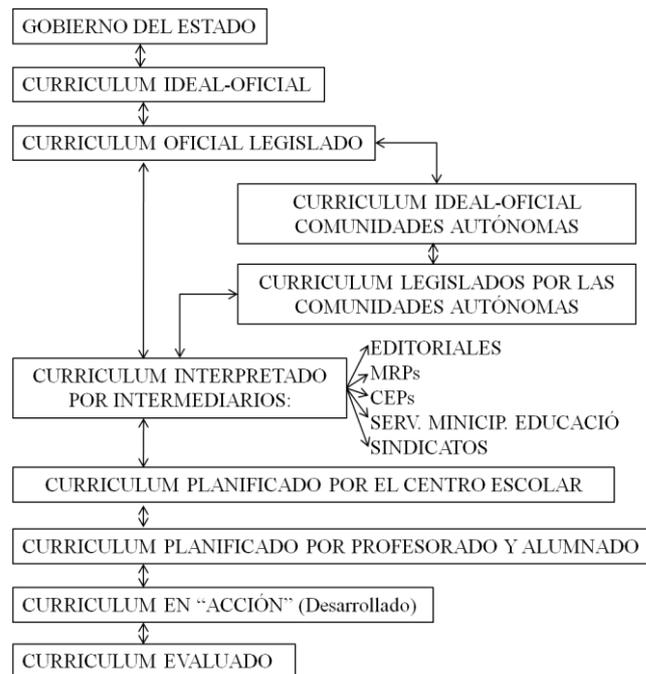


Figura 2. Fases del currículo (Torres, 1991, p.206).

El libro de texto se encontraría según este autor (Torres, 1991) dentro del currículo interpretado por intermediarios. Por tanto, la finalidad de las editoriales es plasmar las propuestas educativas en proyectos para su puesta en marcha en la práctica educativa. Haggarty y Pepin (2002), afirman que la idea de que el libro de texto refleja los objetivos del currículo está ampliamente documentada en la literatura.

De acuerdo con Torres (1991) y Alsina (2001), el libro de texto sirve de nexo de unión entre la parte legislativa y la práctica educativa e influye directamente en lo que Torres (1991) denomina currículo real, que son los aprendizajes logrados al final de todo este proceso, que coincide con la noción de currículo aprendido propuesto por Alsina (2001).

Esta investigación se enmarca dentro del currículo potencial propuesto por Alsina (2001) y del currículo interpretado por intermediarios propuesto por Torres (1991). Queremos analizar el conocimiento subyacente al libro de texto para compararlo con el currículo oficial correspondiente a la publicación del libro de texto analizado. Por otro lado, centrados en el tópico de la medida y el currículo oficial, Chamorro (2001), recoge que tanto las unidades de medida usuales como el conocimiento y el uso de instrumentos de medida comunes que han estado siempre incluidos en los currículos a lo largo de diferentes épocas.

1.2. LA MEDIDA

La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles.

René Descartes

1.2.1. IMPORTANCIA E HISTORIA DE LA MEDIDA

La medida constituye una de las principales actividades humanas a partir de la cual se desarrolla la matemática puesto que nos permite comparar, ordenar, estimar o calcular, con más o menos precisión, distintas magnitudes; por lo que no es de extrañar que haya estado presente desde las civilizaciones más antiguas (Luelmo, 2001; Bishop, 1999). De este modo, la necesidad de medir ha sido y es inherente a un importante número de actividades humanas (Frías, Gil y Moreno, 1989) debido a que cuantificar las propiedades de los objetos ha sido una de las primeras necesidades del ser humano (González y Gómez, 2011). De hecho, la existencia de la medida debe remontarse al quehacer humano puesto que no se puede ajustar la cuerda a un arco, ni el hacha a un mango, sin medir (Kula, 1980).

De esta forma, en la antigüedad, los objetos a ajustar se comparaban directamente entre sí; pero tan pronto como las operaciones industriales se hicieron más complicadas, resultó más conveniente comparar cada parte con un patrón (Del Olmo, Moreno, y Gil, 1989). Como consecuencia, a lo largo de la historia cada grupo social ha utilizado sus propias unidades de medida, adaptándolas a sus necesidades y a la tarea a la que estuviesen destinadas (Frías, Gil y Moreno, 1989). La evolución de las transacciones comerciales y las facilidades de comunicación provocaron la necesidad de adoptar unidades de medida convencionales; que fueron impuestas a los grupos sociales por ley y su utilización se ha compatibilizado con el de unidades de medida más arraigado y tradición de cada zona (Frías, Gil y Moreno, 1989).

Los sistemas de medida y las estrategias para medir han tenido una evolución muy distinta dependiendo del tipo de magnitud considerada. Si nos centramos en la evolución de

medidas empleadas se suelen distinguir tres periodos, el periodo antropométrico, en el que las unidades son partes del cuerpo; el periodo ergométrico, donde se toman las unidades de las condiciones, objetos y resultados del trabajo del hombre; y el periodo convencional (González y Gómez, 2011; del Olmo, Moreno y Gil, 1989; Kula, 1980).

Desde el Renacimiento el ser humano ha buscado patrones universales para realizar mediciones, es decir, de unidades estandarizadas e inmutables. Esta búsqueda dio lugar al periodo convencional que concluyó con la adopción y el establecimiento del Sistema Métrico Decimal y del Sistema Internacional de Unidades gracias a la Revolución Francesa. Asimismo, el manejo de unidades de medida evolucionó paralelamente con los instrumentos de medida utilizados, cada vez más precisos y sofisticados.

A los alumnos les ha sido vedado el desarrollo histórico de la medida, y por tanto, no son conscientes de la necesidad de medir ni de cómo emergió (Dickson, Brown y Gibson, 1991).

1.2.2. LA IMPORTANCIA DE LA MEDIDA DENTRO DE LA MATEMÁTICA Y OTRAS DISCIPLINAS.

En la Antigua Grecia, la medida era una de las ramas que componían la matemática, junto con el cálculo, la lógica y la geometría (Callís, 2002). Prueba de la importancia de esta rama en aquella época son dos famosos problemas que emergieron: el problema de la cuadratura del círculo, donde se pretendía encontrar un cuadrado cuya área fuera la misma que la de un círculo; y el problema de la duplicación del volumen de un cubo.

Dentro de la matemática, el estudio de la medida ha tenido y tiene profundas implicaciones porque no solo brinda la oportunidad de aprender y de aplicar otros contenidos matemáticos permitiendo establecer conexiones entre diversas partes de las matemáticas, sino que también permite establecer conexiones entre las matemáticas y otras disciplinas (Godino, 2004).

De este modo, la medida es un tópico de gran riqueza donde confluyen aspectos geométricos, aritméticos, estadísticos, de proporcionalidad, del concepto del número racional, del concepto de función, de resolución de problemas y, además, desarrolla

habilidades y destrezas entre las que se encuentran la creatividad y la habilidad de pensar (Callís, 2002; Del Olmo, Moreno y Gil, 1989; Escolano y Gairín, 2005 y Godino, 2004).

Además, cuando trabajamos la medida, también desarrollamos el razonamiento y lógica (Stephan y Clements; 2003 y Clements y Sarama; 2009). De esta manera, el dominio y la comprensión de la medida no es una tarea trivial para los alumnos de la etapa de Educación Primaria, se necesita un conjunto de destrezas prácticas (Godino, 2004).

Es necesario hacer una mención especial a la relación existente de la medida con la aritmética y la geometría (SAEM Thales, 2003; Godino, 2004). La medida se encuentra relacionada con la aritmética en la construcción de los sistemas numéricos y con la geometría en el estudio de propiedades de formas y figuras. Estas relaciones dan lugar a: la idea de fracción, la necesidad de seguir subdividiendo, la idea de infinito, la idea de los irracionales, o la necesidad de medir contornos irregulares o curvos.

1.2.3. INFORMES, ORGANISMOS E INVESTIGACIONES QUE RECALCAN LA IMPORTANCIA DE LA MEDIDA.

Actualmente, la importancia del estudio de la medida está justificada debido a su aplicabilidad en gran cantidad de actividades cotidianas.

1.2.3.1. EL INFORME COCKCROFT

El informe Cockcroft (1985), es el resultado del trabajo de una comisión organizada por el gobierno británico que hace referencia a la situación educativa relativa a aquella época en Inglaterra y Gales. En 1985 el Ministerio de Educación y Ciencia realizó una traducción de este documento debido a que los problemas educativos que recogía eran análogos a los de España. Este informe justifica la importancia del estudio de la medida desde las necesidades del mundo laboral y de la vida adulta donde, a diario, se realizan cantidad de mediciones (Cockcroft, 1985).

En esta línea, el informe Cockcroft (1985), afirma creer que se pueden resumir las necesidades matemáticas en el trabajo y en la vida adulta como “sentido de la medida”. La medida implica “un conocimiento de la naturaleza y utiliza de la medida, de los diferentes

métodos de medida y de las situaciones en que se usa cada uno” (Cockcroft, 1985, p.32) así como la interpretación de las medidas expresadas de distintas formas. En lo referente al uso de instrumentos de medida el informe Cockcroft (1985), señala que la habilidad de medir se encuentra dentro de este sentido de la medida y es necesario ser consciente del grado de precisión que se requiere en la medida para lo cual hay que saber elegir y usar el instrumento de medida más adecuado. Ahora bien, aunque el trabajo de la medida esté presente de una u otra forma en el trabajo no tiene por qué estar directamente relacionado con el uso de instrumentos de medida sino que se debe ser consciente del significado de las medidas.

Por otro lado, dentro de la enseñanza y el aprendizaje de la medida, el informe Cockcroft (1985), recoge algunas de las ideas citadas anteriormente. La medida constituye un medio natural para el desarrollo de conceptos numérico y es aplicable a distintos campos. Los alumnos tras comprender mediante la práctica a ordenar distintas medidas aprenderán a emplear unidades no convencionales como cucharadas o puñados para, seguidamente, emplear unidades de medida estandarizadas para medir cantidades continuas (Cockcroft, 1985).

Asimismo, este informe (Cockcroft, 1985), subraya la importancia de enseñar la naturaleza aproximativa de la medida estimulando a los alumnos a que realicen medidas indicando dentro de qué intervalo están. De esta forma los alumnos deducen la necesidad de subdividir la unidad de medida lo que da lugar a la precisión y la idea de margen de error (Cockcroft, 1985).

Cabe destacar que este informe (Cockcroft, 1985), recoge que la enseñanza de la medida debe estar basada en la práctica con la finalidad de familiarizar a al alumno con el uso de instrumentos de medida y otras herramientas de dibujo. Esta práctica debe ir asociada a la realización de estimaciones para que los alumnos creen referentes del tamaño de las unidades y su relación con objetos cotidianos (Cockcroft, 1985).

Por otro lado, la medida tiene que ir ligada con el trabajo numérico poniendo de manifiesto la relación entre las unidades de medida y el sistema de numeración decimal lo que favorece la comprensión del valor posicional que los alumnos deben desarrollar también durante su escolarización (Cockcroft, 1985).

1.2.3.2. NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMATICS (NCTM)

Por otro lado, informes como el National Council of Teacher of Mathematics (NCTM), en una de sus publicaciones anuales, concretamente en el *Yearbook* de 1976, dedica un capítulo a resaltar los avances tecnológicos conseguidos gracias a la precisión de las mediciones (Godino, 2004).

1.2.3.3. LAS PRUEBAS PISA

Evaluaciones internacionales como, por ejemplo, las pruebas PISA incluyen en sus bloques de contenido aspectos relacionados con la medida. Los contenidos de la evaluación de competencia matemática de las pruebas PISA abarcan, entre otros, problemas de cantidad. Se define la noción de cantidad como el aspecto matemático más dominante y esencial para involucrarse con y funcionar en el mundo (OCDE, 2013).

Dicha involucración con el mundo versa sobre la cuantificación del mismo, lo que conlleva comprender las medidas, los conteos, las magnitudes, las unidades, los indicadores, el tamaño relativo, las tendencias numéricas y los patrones. La alfabetización matemática en esta área nos permite aplicar el conocimiento de los números y sus operaciones en una amplia variedad de situaciones y entornos (OCDE, s.f.; Caraballo, Rico y Lupiáñez, 2013).

1.2.3.4. COPIRELEM

El COPIRELEM, del Comité Permanente del IREM (*Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques*) de Educación Primaria fue creado en 1975. Reúne a una veintena de representantes de diferentes IREM interesadas en la Educación Primaria.

La mayoría de sus miembros son maestros en IUFM (*Institut universitaire de formation des maîtres*) responsables de la formación matemática de los maestros de escuela. Muchos se dedican a la investigación en la enseñanza de las matemáticas.

1.2.4. LA MEDIDA EN EL CURRÍCULO

Consideramos importante incluir en este punto los contenidos matemáticos, relativos al bloque de medida, recogidos en el Decreto 142/2007, de 26 de junio, por el cual se establece la ordenación de la enseñanza de Educación Primaria en Cataluña. Dentro del marco legislativo de este currículo se elaboraron los libros de texto que analizamos en este estudio. Los contenidos del bloque de medida se dividen en la comprensión de las magnitudes medibles, de las unidades y del proceso de medir, y en la aplicación de técnicas e instrumentos adecuados para medir.

Dentro del bloque de comprensión de las magnitudes, de las unidades y del proceso de medir, encontramos en el ciclo inicial el reconocimiento, en contextos significativos, de las magnitudes de longitud, capacidad, masa y tiempo. A estas magnitudes se unen el área y la amplitud de ángulos en el ciclo medio y el volumen en el ciclo superior. Sólo en el ciclo inicial se contempla la diferenciación entre las magnitudes discretas y continuas relacionadas con el uso de los números. En los tres ciclos se contempla la comparación de medidas, matizando que en el ciclo inicial estas comparaciones se realicen tanto directamente como indirectamente, en el ciclo medio la comparación directa sólo se contempla en el caso de la amplitud de los ángulos y las áreas y en el ciclo superior, aparte de estas dos últimas, también se comparan volúmenes. En cuanto a la ordenación de magnitudes se nombra explícitamente en los ciclos inicial y superior.

Dentro del bloque relativo al proceso de medir, sólo en el ciclo inicial se utilizan tanto unidades convencionales como no convencionales para medir, utilizando una unidad de forma repetida para hallar la medida de la magnitud y un instrumento adecuado. A lo largo de toda la etapa de Educación Primaria debe trabajarse la selección de la unidad y del instrumento adecuado, de acuerdo con la magnitud a medir. Además, en toda esta etapa el alumno debe poder describir el proceso de medida y el de estimación. Por tanto, en el ciclo inicial y en el ciclo medio el alumno debe desarrollar referentes comunes que faciliten la comparación y la estimación. Se deja para el último ciclo que los alumnos contrasten estimaciones con las mediciones reales.

En el ciclo inicial el alumno debe expresar mediante pictogramas y tablas diferentes medidas tomadas, así como leer y escribir medidas en contextos reales. En el ciclo medio

comienza la comprensión de la medida como aproximación y de ahí el uso de múltiplos y submúltiplos, contexto en el que aparecen el uso de los decimales y fracciones como números que permiten aproximar una medida, que también se trabaja en el ciclo superior. Por otro lado, en el último ciclo, el alumno debe trabajar la anticipación e interpretación del error de una medida.

En el ciclo medio y el superior se comienza a usar las unidades más comunes del sistema internacional, la equivalencia de unidades y la interpretación de la equivalencia en el uso de diferentes unidades de medida. En este punto también se trabaja la analogía entre el sistema de numeración decimal y el sistema internacional de medida.

En el ciclo medio encontramos, dentro del estudio de las magnitudes geométricas, el uso de la medida y de los números para investigar propiedades geométricas y la relación perímetro-longitud y área-superficie. En el ciclo superior se especifica como contenido el cálculo de las áreas del rectángulo, el cuadrado y el triángulo, y del volumen del cubo. Asimismo, se analizan las relaciones entre la superficie y el volumen de una figura y se interpreta la fórmula del área del círculo y del perímetro de la circunferencia.

Más recientemente se ha publicado el Decreto 119/2015, de 23 de junio, de ordenación de la enseñanza de Educación Primaria en Cataluña. Los contenidos correspondientes al bloque de medida recogidos en este Decreto son prácticamente los mismos que con el Decreto anterior. Uno de los cambios más notables es la introducción del uso de las unidades más comunes del entorno digital como el bit, el byte o el pixel.

Aunque bien es cierto que en el currículo no aparece el dinero como magnitud, algunos autores así lo consideran en sus estudios como Dickson, Brown y Gibson (1991) y Chamorro (2001). De esta forma, incluimos el valor económico de bienes como magnitud de medida en el estudio presentado en este artículo para ver qué tipo de tratamiento recibe.

1.3. RELEVANCIA CIENTÍFICA Y SOCIAL DE LA INVESTIGACIÓN

La educación matemática de la población tiene implicaciones a nivel social y a nivel económico. Tiene implicaciones para la productividad; puede facilitar la entrada de algunos en la economía y provocar inclusión a la vez que exclusión. Una educación matemática que facilite que todos los alumnos alcancen las competencias matemáticas básicas puede contribuir al desarrollo de una sociedad más cohesionada. En particular, la falta del dominio de la medida puede impedir el entendimiento del entorno natural, social y profesional debido a que el dominio de ésta permite a cada ser humano (Callís, 2002):

- **Integrarse como ciudadano en el contexto y entorno que uno vive.** El dominio de la medida posibilita entender situaciones y realidades que nos rodean y que están presentes en el quehacer diario.
- **Integrarse a las raíces culturales de su propia cultura e historia.** La medida está ligada a un contexto social e histórico donde ha ido evolucionando hasta nuestros días. Además, la medida ha estado y está presente en los últimos avances tecnológicos.
- **Dominar o comprender multitud de campos matemáticos.** Tal y como hemos señalado anteriormente, la medida es un tópico de gran riqueza donde confluyen aspectos geométricos, aritméticos, estadísticos, de proporcionalidad, del concepto del número racional, del concepto de función, de resolución de problemas.
- **Dominar estrategias mentales.** En la medida se desarrollan estrategias de aproximación, tanteo y estimación.
- **Potenciar la integración en el mundo de la tecnología y el trabajo.** La medida está presente en los diferentes sectores laborales y la tecnología no podía seguir evolucionando sin la medida.

Las investigaciones centradas en la rama matemática de la medida son escasas tal y como se constata en diferentes estudios de revistas especializadas (Callís, 2002) y comunicaciones en congresos nacionales e internacionales. Por tanto, se trata de un campo poco trabajado y con un marco teórico poco definido que no es reflejo de la situación de la medida dentro de los currículos de todo el mundo donde se trabaja de forma cíclica a lo largo de toda la enseñanza obligatoria (Callís, 2002).

1.4. ESTRUCTURA DEL PROYECTO

En este documento se presenta el informe de investigación “Caracterización del contenido matemático subyacente al libro de texto en medida”, desarrollada en el marco del Programa de Doctorado en Educación, en el ámbito de didáctica de las matemáticas y las ciencias, de la Universidad Autónoma de Barcelona.

El estudio presentado tiene como objetivo fundamental determinar la forma en la que el libro plantea el aprendizaje de la medida a partir de un análisis de las actividades que propone para la etapa de Educación Primaria.

Esta memoria de tesis está organizada en 7 capítulos. En este primer capítulo hemos introducido al lector en la investigación destacando la relevancia de la medida educación matemática y la importancia del libro de texto dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje.

En el segundo capítulo, Marco Teórico, se compone de 4 apartados. Los dos bloques más importantes corresponden a las investigaciones llevadas a cabo en el campo de la didáctica de la medida y a las investigaciones sobre los libros de texto. Por otro lado, en este capítulo también se describen las investigaciones dentro del campo del conocimiento conceptual y procedimental y la aportación teórica de Gairín, Muñoz y Oller (2012), a partir de la cual realizamos el análisis.

Una vez realizada esta revisión podemos describir el planteamiento del problema y los objetivos de investigación en el Capítulo 3 que realizaremos dentro del marco metodológico descrito en el Capítulo 4. En el Marco Metodológico se recoge el paradigma de la investigación así como la muestra seleccionada y la justificación de la misma.

En el Capítulo 5, Análisis, describimos el proceso realizado para dar respuesta a los objetivos planteados en el Capítulo 3 y basado en el análisis del contenido del libro de texto referente a la medida a partir de una jerarquización de tareas. En el Capítulo 6, Resultados, describimos los diferentes resultados que hemos obtenido a partir del análisis realizado entre los que destaca la caracterización de las principales actividades de medida y la cuantificación de un fenómeno denominado aritmetización de la medida.

Finalmente, en el Capítulo 7, Conclusiones, presentar los resultados más importantes relacionándolos con la revisión de la literatura realizada en el Capítulo 2. Asimismo, se plantean nuevos interrogantes y posibles líneas de investigación abiertas.

2. MARCO TEÓRICO

Presentamos aquí algunos de los aspectos teóricos y conceptuales necesarios para desarrollar la investigación que queremos presentar en esta Tesis. En este apartado detallaremos las referencias teóricas en las cuales nos apoyaremos para llevar a cabo el estudio. Se abarcan tres grandes bloques: la medida, los libros de texto y la naturaleza de las actividades matemáticas.

2.1. MEDIDA

La investigación realizada abarca las distintas magnitudes que se trabajan durante la etapa de Educación Primaria según el Decreto 119/2015, de 23 de junio, por el cual se establece la ordenación de la enseñanza de Educación Primaria en Cataluña. Estas magnitudes son: longitud, capacidad, masa, tiempo, amplitud de ángulos, área y volumen.

Por este motivo, en este capítulo no se abarca la noción de recuento donde cada una de las unidades individuales corresponde a una entidad distinta y separable a la cual se le asigna un número, sino que se centra en las nociones relativas a las magnitudes continuas recogidas en el párrafo anterior.

Este capítulo se ocupa de las nociones de medida así como de las aportaciones teóricas sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje.

2.1.1. CONCEPTUALIZACIÓN DE LA MEDIDA

A parte de la literatura encontrada en relación con esta temática, en los siguientes apartados recogemos las definiciones incluidas en el Vocabulario Internacional de Metrología (MINETUR, 2012).

2.1.1.1. Magnitud

En el Vocabulario Internacional de Metrología (MINETUR, 2012) se recoge la siguiente definición de magnitud: “propiedad de un fenómeno, cuerpo o sustancia, que puede expresarse cuantitativamente mediante un número y una referencia” (p. 15).

La posibilidad de medir una cualidad de un objeto conlleva tratamiento numérico de ésta considerando los diferentes comportamientos que pueden presentar (Frías, Gil y Moreno, 2001). El concepto de magnitud ha sido estudiado desde diferentes enfoques. Tal y como recogen Frías, Gil y Moreno (2001) para Aristóteles una magnitud es una cantidad que puede medirse; Descartes clasificó las cualidades que presentan los objetos en primarias y secundarias según se deriven de la realidad fundamental de los objetos o son sentimientos; Bertrand Russell añadió al concepto de magnitud los conceptos de orden y divisibilidad, por este motivo las magnitudes se puede ordenar y según la divisibilidad serán intensivas o extensivas; por último, Fiol y Fortuny (citado en Frías, Gil y Moreno, 2001) recogieron varias definiciones de otros autores para el concepto de magnitud:

- Todo lo que es capaz de aumento o disminución
- Las magnitudes son entes abstractos entre los cuales se puede definir la igualdad y la suma.
- La cualidad común de un conjunto de entes u objetos materiales que les hace igualables y sumables.
- Semimódulo ordenado sobre un semianillo de los números reales positivos.

Las magnitudes extensivas son aditivas y se pueden ordenar, por lo que tienen un comportamiento similar al de los números (Frías, Gil y Moreno, 2001).

La medida comienza con la percepción de una cualidad en un objeto y diferenciarla de otras que podamos percibir en el (Frías, Gil y Moreno, 2001). Según Frías, Gil y Moreno (2001), una vez que se ha percibido una cualidad en un objeto estamos en condiciones de poder compararla. En la práctica, podemos comparar dos objetos directamente, cuando es posible superponerlos, o indirectamente recurriendo a un intermediario, es decir, el valor numérico de esa cualidad, es decir, la medida. Además, para comparar dos objetos es necesario identificar la invarianza de la cualidad cuando se somete a diversas transformaciones, es decir, a las dos propiedades fundamentales: la conservación y la transitividad (Frías, Gil y Moreno, 2001), las cuales se desarrollan posteriormente.

2.1.1.2. Cantidad de Magnitud

El proceso de medida comienza con la percepción de la cualidad que se quiere medir y continúa con la comparación que da lugar a la cantidad y la asignación de un número a dicha cantidad. Para Frías, Gil y Moreno (2001) una cantidad de magnitud es una clase que agrupa a todos los objetos que coinciden en la cualidad, es decir, son iguales respecto a una cualidad determinada. Godino, Batanero y Roa (2004), siguiendo con la línea del apartado anterior donde observaron las sutilezas del lenguaje según el contexto, recogen que, para las ciencias experimentales y el quehacer diario, la cantidad de magnitud es “un aspecto por el que se diferencian entre sí las porciones de una misma cosa o los conjuntos de la misma clase de cosas, por el cual esas porciones o esos conjuntos se pueden medir o contar” (Godino, Batanero y Roa, 2004, p.295).

2.1.1.3. Medir y unidad de medida

Para Dickson, Brown y Gibson (1991), la acción de medir comporta la repetición de unidad de medida sobre la extensión de la magnitud considerada de forma que el intervalo a medir esté cubierto o lleno por la unidad sin huecos ni superposiciones. Por tanto, este proceso conlleva la noción de la subdivisión de una cierta unidad de medida.

Algunos de los rasgos característicos del proceso de medida consisten en la posibilidad de utilizar diferentes unidades para medir una misma cantidad y en la comprensión de la relación entre el tamaño de la unidad y el número necesario para medir una cantidad dada: esto es que cuanto menor sea la unidad de medida, tantas más veces será preciso repetirla (Dickson, Brown y Gibson, 1991). Según Frías, Gil y Moreno (2001) medir es asignar un número a una cantidad de magnitud. Este proceso comienza a partir de la elección de una cantidad fija denominada unidad de medida que se compara con la cantidad de magnitud que se quiere medir averiguando el número de veces que la unidad está contenida en la cantidad de medir.

Godino, Batanero y Roa (2004) recogen que medir es la acción de asignar un código identificativo a las distintas modalidades o grados de una característica de un objeto o fenómeno perceptible, que puede variar de un objeto a otro, o ser coincidente en dos o más objetos.

Dentro de la acción de medir encontramos elementos perceptibles que comprenden los objetos materiales de la cualidad que se mide, unidades de medida e instrumentos de medida y los objetos lingüísticos o la notación empleada para expresar una medida (Godino, Batanero y Roa, 2004). Por otro lado, tal y como afirman Godino, Batanero y Roa (2004) la acción de medir conlleva el dominio de una técnica que depende de los instrumentos de medida. Piaget y Szminska (1964) afirman que cuantificar una cualidad es medirla. Para ello, debemos recurrir a instrumentos de medida o a la medida constituida sobre relaciones físicas. Esto último conlleva la práctica y la experiencia de realizar mediciones de una determinada magnitud.

Por otro lado, se pueden considerar dos posibles representaciones de la magnitud (Frías, Gil y Moreno, 2001; Corberán, 1996; Godino, 2004):

- **Geométrica:** Se maneja la magnitud sin hacer referencia a datos cuantitativos.
- **Numérica:** A través de la comparación de una cantidad de magnitud con una unidad de medida se identifica la cantidad de magnitud con un número, que será la medida.

Por tanto, podemos considerar que el tratamiento geométrico de la magnitud se corresponde con la percepción y comparación directa de la magnitud. De esta forma, hablaremos de medida directa o medida indirecta. La medida directa se obtiene reiterando sucesivamente la unidad de medida, con sus múltiplos y submúltiplos, hasta completar la cantidad de magnitud que se disponga. La medida indirecta surge cuando no podemos obtener una medida por comparación directa de una unidad, sino que aplicamos alguna fórmula o realizamos alguna operación matemática.

2.1.1.4. La medida y su naturaleza aproximativa

Según Frías, Gil y Moreno (2001), la medida es precisamente el número de veces que la unidad está contenida en la cantidad de medir y, por tanto, depende de la unidad de medida elegida. Al realizar mediciones de magnitudes continuas cometemos errores provenientes del propio procedimiento de medir, por errores sistemáticos del instrumento (defectos de fabricación, variaciones en la temperatura, humedad, etc.) o por fallos humanos (Godino, Batanero y Roa, 2004). Por tanto, el valor obtenido al realizar una medición es aproximado

y el error es parte inherente del proceso de medir. Conscientes de este hecho es conveniente intentar reducirlo en la medida de lo posible para que la medición sea lo más precisa posible. A la hora de seleccionar una unidad de medida estamos estimando el tipo de error que podemos cometer al efectuar la medida con esa unidad.

Un instrumento de medida será más preciso cuantas más cifras significativas podamos obtener (Godino, Batanero y Roa, 2004). En este punto intervienen las expresiones complejas e incomplejas de medida. Cuando utilizamos varias unidades para aumentar la precisión hablamos de una expresión compleja de tiempo (Godino, Batanero y Roa, 2004).

El proceso de medida conlleva una toma de decisiones específica, entre las que se encuentran la elección de una unidad de medida y el nivel de precisión deseado. En concreto, la elección de la unidad de medida es arbitraria pero ha de ser de la misma clase de atributo que va a medir. El tamaño de la unidad de medida más apropiada dependerá del tamaño del objeto y de la precisión con la que se desea medir. SAEM Thales (2003), recoge que en los ciclos medio y superior de la etapa de Educación Primaria, es necesario hacer hincapié en la naturaleza aproximativa de la medida y en la estimación del error que se comete al realizar una medición, aunque entienden que la mayoría de las actividades deben centrarse en el uso de los conceptos y destrezas para resolver problemas que requieran la medición. En este sentido, Callís (2002) mantiene que la medida está ligada a la realidad que nos rodea, por ese motivo, la exactitud no es un factor determinante en el estudio de la medida.

Dickson, Brown y Gibson (1991) recogen que Piaget afirma que los alumnos desarrollan los conceptos de medida lineal, superficial y capacidad concurrentemente. Sin embargo, el concepto de la medida del volumen es más tardío. Además, sostiene que las nociones de longitud y área son las primeras en desarrollarse y que lo hacen a la edad de los 6 o 7 años. Sin embargo, Carpenter (1976) pone en duda que el desarrollo de ambos conceptos se produzca de forma simultánea. Asimismo, Dickson, Brown y Gibson (1991) recogen algunas indicaciones sobre la medida de las distintas magnitudes que recogemos a continuación:

LONGITUD

La mayoría de las longitudes se miden a través de instrumentos conocidos por los estudiantes como, por ejemplo, la regla. Sin embargo, en el proceso de medición es necesario saber utilizar correctamente este instrumento antes de poder tomar una lectura de la medida de dicho objeto. Asimismo, el tipo de mediciones acostumbra a ser rectilíneas, en particular en un estudio llevado a cabo (Dickson, Brown y Gibson, 1991) mostró que a algunos estudiantes les resultaba prácticamente imposible creer que se pudiese medir una línea curva.

ÁREA

La unidad de medida por excelencia para la medida del área es el cuadrado. Por tanto, el trabajo de la medida de esta magnitud consiste en la división de la superficie en cuadrados para su recuento. Este tipo de mediciones son experiencias necesarias en el estudio de esta magnitud. En muchas de las actividades propuestas sobre áreas en el ámbito didáctico se facilitan datos de las dimensiones lineales sin que la superficie esté dividida en unidades cuadradas.

Por otro lado, está altamente constatada la confusión relativa al área y perímetro (Dickson, Brown y Gibson, 1991). El cálculo del área y del perímetro suele venir acompañado de fórmulas y, además, es probable que los alumnos no dispongan de oportunidades suficientes para la exploración de los fundamentos espaciales relativos a estos dos conceptos y de la relación entre ambos.

ÁNGULOS

Existe poca literatura que abarque la medición angular y las dificultades relativas ésta. Para poder realizar actividades prácticas de construcciones geométricas, es necesario poner en práctica actividades de medida que requieren de la comprensión espacial y del conocimiento de cómo se utilizan los instrumentos de medida para esta magnitud (Dickson, Brown y Gibson, 1991).

PESO

Piaget y Szminska (1964) afirman que el peso es un atributo de una materia y, por tanto, para comprender la conservación del peso es necesario poseer previamente el concepto de la conservación de la materia. Debemos de tener en cuenta que transformaciones como la dilatación o la compresión de la materia altera el volumen pero no el peso (Piaget y Szminska, 1964). Por este motivo, Piaget y Szminska (1964) sugieren que el estudio del peso antes que el volumen está dictado por razones lógicas.

CAPACIDAD Y VOLUMEN

Dickson, Brown y Gibson (1991) recogen que la capacidad consiste en la facultad de un envase para alojar algo mientras que la palabra volumen se utiliza en dos sentidos: el volumen interno y externo. El volumen interno de un hueco es lo mismo que la capacidad pero utilizamos unidades de medida distintas para cada magnitud mientras que el volumen externo es la cantidad de espacio que un objeto toma para sí mismo. Para estos autores la mayoría de las experiencias cotidianas están relacionadas con el volumen interno y la capacidad y con el llenado total o parcial de formas huecas. La capacidad de un recipiente es sencillamente el volumen líquido que puede contener.

Dickson, Brown y Gibson (1991) recogen una posible secuencia sobre el trabajo de la capacidad y el volumen para el intervalo de edades de 5 a 11 años que se enmarca dentro de la etapa de Educación Primaria y que tiene en cuenta la sugerencia de Piaget poniendo en relación el peso con estas magnitudes:

1. Comparación de la capacidad de distintos recipientes. Ordenación de los recipientes en función de su capacidad. Llenado y medición de la capacidad expresada en unidades no convencionales.
2. Recolección de recipientes con la misma capacidad.
3. División de una cantidad en porciones iguales.
4. Construcción de objetos con una capacidad o volumen determinado.
5. Observación del volumen de sólidos. División del mismo y comprobación de la igualdad de las partes mediante una medición, como pesándolas.

6. Utilizar distintas sustancias para llenar con un mismo volumen jarras idénticas. Comparación de los pesos.
7. Trabajar la relación entre área de la superficie y volumen (a nivel informal).
8. Comparación entre costo y capacidad, por ejemplo, que detergente es más caro.
9. Introducción de las medidas patrón, construyendo cubos de distintos tamaños.
10. Mediciones más elaboradas de la relación ente volumen y superficie, lo mismo que en, pero utilizando medidas patrón en lugar de aproximaciones a ojo.

Esta secuencia atiende a todas las dificultades que los alumnos experimentan en lo relación a las magnitudes de volumen y capacidad. Consiste sobre todo en actividades prácticas necesarias para que los niños aprecien debidamente la naturaleza aproximativa de a medida.

2.1.1.5. Propiedades fundamentales en la medida

Podemos hablar de dos propiedades fundamentales de la medida: la conservación y la transitividad.

Para Godino, Batanero y Roa (2002), la conservación es “la capacidad que tienen algunas características de los cuerpos, de no cambiar aunque se les manipule y se produzcan cambios de situación en los mismos, que perceptivamente puede llevar a engaño” (p. 637). El reconocimiento de los elementos invariantes de una situación es crucial para el desarrollo del proceso de medida (Dickson, Brown y Gibson, 1991). En este sentido, Godino, Batanero y Roa (2002) afirman que un niño ha adquirido la capacidad de conservación si no se deja llevar por su percepción.

Piaget y Szminska (1964) se percataron del problema de la conservación de la materia puesto que es la condición y el resultado de la cuantificación. Esta propiedad surge, según Piaget y Szminska (1964), durante el desarrollo intelectual del niño y se consigue compaginando la actividad mental con la experiencia.

Por otro lado, Dickson, Brown y Gibson (1991) ilustran lo que se entiende por transitividad con un ejemplo. Estos autores proponen la siguiente situación: imaginemos que se le pide a un niño que construya una torre a una cierta distancia de otra construida con bloques y

ladrillos. El niño cuenta con los bloques o los ladrillos y una cierta vara cuya longitud es al menos, la altura de la torre. Si para construir la nueva torre el niño hace uso de la vara, realizando una marca donde se encuentra la altura y construyendo la nueva hasta alcanzar dicha marca, es que está desarrollando la idea de transitividad. Dicho de otro modo, si la altura de la torre construida es A y la longitud sobre la vara es B, entonces $A=B$. Si la longitud de la torre que construye el niño con la medida marcada sobre la vara (B) es C, entonces $B=C$, de lo que sigue que $A=C$. Por tanto, cuando utilizamos un instrumento de medida sobre el que descansa un significado, la idea de transitividad está presente (Dickson, Brown y Gibson; 1991). Por otro lado, esta idea no tiene en cuenta la naturalización aproximativa de la medida (Dickson, Brown y Gibson; 1991).

Aunque la conservación y la transitividad son elementos comunes de toda medición, no se tiene claro en qué forma puede afectar la adquisición de tales conceptos en un sistema de medida al desarrollo de los correspondientes a otro sistema (Dickson, Brown y Gibson, 1991).

2.1.2. TIPOS DE MEDIDA

Godino, Batanero y Roa (2004) distinguen entre escala nominal, escala ordinal, magnitudes intensivas y magnitudes extensivas. La escala nominal nos permite clasificar objetos y fenómenos según ciertas características que no se pueden ordenar, agregar o separar (por ejemplo, el color). La escala ordinal nos permite ordenar magnitudes pero, al igual que con la escala nominal, no se puede agregar. En las magnitudes intensivas existen rasgos para los que tiene sentido agregar los objetos que los soportan pero la cantidad del rasgo en el objeto agregado no es proporcionalmente aditiva. Y, por último, las magnitudes extensivas se pueden describir como proporcionalmente agregables y la escala de medida correspondiente se dice que es de razón. Por tanto, las magnitudes que estudiamos son extensivas y no intensivas puesto que se pueden sumar (González y Gómez, 2011).

2.1.3. CONCEPTO MATEMÁTICO DE MEDIDA

Callís (2002) hace distinción entre lo que se entendía como magnitud en la matemática clásica y como se entiende en la matemática actual. Para la matemática clásica, una

magnitud es algo que se puede medir y expresar por medio de una cantidad. Por otro lado, para la matemática actual, la magnitud es un conjunto en el que se encuentra definida una relación de equivalencia que da lugar al conjunto cociente dotado de una operación aditiva (semigrupo aditivo conmutativo con elemento neutro) y una relación de orden compatible con esta operación. Ahora bien, siguiendo a Frías, Gil y Moreno (2001):

La medida de magnitudes es cualquier método por el que se establezca y la correspondencia única y recíproca entre todas o algunas de las cantidades de un tipo o todos o algunos de los números enteros, racionales o reales, en su caso. (p. 490)

En esta misma línea, Godino, Batanero y Roa (2004) recogen que la magnitud se asocia a un conjunto de objetos abstractos, que son las cantidades, dotado de una cierta estructura algebraica, donde el isomorfismo entre esta estructura y un subconjunto de números reales es la medida. Podemos decir que, matemáticamente, la medida es un aplicación que asocia a cada cantidad un número real (Castillo, 2012). A partir de lo anterior entendemos que al medir una magnitud se establece una correspondencia única y recíproca entre una cantidad de magnitud y un número, ya sean los reales no negativos o los naturales y el cero.

2.1.4. ESTIMACIÓN

Una parte importante de la medida es la estimación. Dentro de la estimación podemos encontrar diferentes tipos:

- **La estimación numérica:** “habilidad de estimar visualmente un número de objetos dispuestos en un plano durante un tiempo limitado” (Pizarro y Albarracín, 2015, p. 29).
- **La estimación computacional:** “el proceso de transformar números exactos en aproximaciones y calcular mentalmente con estos números para obtener una respuesta razonablemente próxima al resultado exacto de un cálculo” (Sowder, J., 1988, p. 82).

- **La estimación métrica:** habilidad perceptiva de estimar diferentes magnitudes en objetos comunes (Hogan y Brezinski, 2003).

En este estudio cuando hablamos de estimación nos referiremos a la estimación métrica. Esta estimación involucra distintas habilidades como la comprensión del concepto de unidad, la imagen mental de la unidad y la selección y el uso de estrategias para hacer estimaciones (Hildret, 1983). Con todo esto, la estimación métrica es una actividad compleja que está menos desarrollada la numérica (Callís, 2002). Castillo, Segovia, Castro y Molina (2011) identificaron un conjunto de componentes de la estimación de la medida que intervienen en la creación del conocimiento relativo a la estimación:

- Comprender la cualidad que se va a estimar o medir.
- Percibir lo que va a ser medido o estimado.
- Comprender el concepto de unidad de medida.
- Tener una imagen mental de la unidad de medida que se va a usar en la tarea de estimación.
- Tener una imagen mental de referentes que se van a usar en las tareas de estimación.
- Adecuar la unidad de medida a utilizar con lo que se va a medir o estimar.
- Conocer y utilizar términos apropiados de la estimación en medida.
- Seleccionar y usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones.
- Verificar la adecuación de la estimación.

2.1.4.1. Estrategias de Estimación

La literatura sobre las estrategias de estimación de medida es escasa y está centralizada en magnitudes como longitudes o superficies. En este apartado, recogemos las propuestas por Hidreth (1983) y Chamorro y Belmonte (1988) así como las destrezas previas necesarias para realizar una estimación propuestas por Segovia, Castro, Castro y Rico (1989).

Hildreth (1983) propone distintas estrategias de estimación entre las que encontramos:

1. Iteración de la unidad: Iterar mentalmente la unidad de medida.
2. Subdivisión del objeto a estimar: Subdividir la magnitud de acuerdo a algún punto de localización, y se estima una de las subdivisiones para posteriormente obtener las demás.
3. Uso del conocimiento previo sobre el objeto o la unidad (por ejemplo, la medida del lado de una baldosa para estimar la longitud de la pared)
4. Comparación del objeto con otro del que se posee información.
5. Descomponer mentalmente la cantidad de magnitud en partes iguales para realizar la estimación.
6. Acotación de las medidas: encontrar un intervalo para el valor de la medida.
7. Longitud por anchura para estimar el área de una superficie.
8. Descomposición y reestructuración: descomponer el área a estimar con el fin de encontrar un área conocida.

Por otro lado, Chamorro y Belmonte (1988) recogieron cuatro estrategias para la estimación de una longitud:

1. “Visualizar la unidad que se va a usar en la estimación y repetirla mentalmente sobre el objeto a medir.
2. Comparar la longitud a medir con la longitud de un objeto conocido.
3. Servirse de objetos regularmente distribuidos a lo largo de una longitud.
4. Hallar mitades”. (p. 74-75)

Ahora bien, de acuerdo con Segovia, Castro, Castro y Rico (1989), hay destrezas previas a la estimación métrica que facilitan su realización que consisten:

- La interiorización de las unidades de medida: consiste en las referencias perceptivas que posee cada sujeto respecto de las principales unidades de medida.
- La apropiación de referentes: consiste en conocer la medida de ítems familiares como las partes del cuerpo u objetos cotidianos.
- Técnicas indirectas: uso de fórmulas para medir magnitudes bidimensionales o tridimensionales (área y volumen) o el uso del Teorema de Pitágoras para el cálculo de una longitud de forma indirecta, por ejemplo.

2.1.4.2. Tipos de tareas para realizar una estimación

De acuerdo con Pizarro y Albarracín (2015), al estimar podemos utilizar referentes auxiliares o propios. Hablaremos de referente propio cuando tenemos interiorizada una unidad de medida mientras que en un referente auxiliar tenemos una imagen física de la unidad a utilizar para estimar la magnitud.

Pizarro y Albarracín (2015) distinguieron tres tipos de estimación métrica:

1. **Estimación con referentes propios:** Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad de medida a una magnitud por medio de referentes propios.
2. **Estimación con referentes auxiliares:** asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad de medida a una magnitud por medio de una comparación no directa con algún objeto.
3. **Estimación indirecta:** Asignar un valor por medio de una modelización en base a la estimación de una o de más cantidades.

2.1.5. INVESTIGACIÓN SOBRE LA MEDIDA EN EDUCACIÓN

Debido a la importancia de la medida de las magnitudes dentro de los contenidos básicos de la formación matemática en la escuela, distintos investigadores han realizado estudios sobre esta rama que recogemos en el siguiente apartado.

2.1.5.1. Piaget

Uno de los grandes referentes en la investigación en educación es, precisamente, Jean Piaget. Además, la mayoría de las investigaciones acerca del desarrollo de las nociones de medida tiene su punto de partida en los estudios llevados a cabo por Piaget. En este estudio nos centraremos en su aportación teórica sobre el aprendizaje de la medida y los estadios de desarrollo de la comprensión del proceso de medida en el niño. Piaget y Szminska (1964), en su obra *“La génesis del número en el niño”* intentan descubrir cómo construyen los niños las nociones numéricas a partir de operaciones lógicas de clases de equivalencias. Dickson, Brown y Gibson (1991) sostienen que la escuela Piagetana se basa en la

comprensión que el niño tiene de la noción de número para formar sobre ella las nociones de medida. Piaget y Szminska (1964) en su obra distinguen los siguientes estadios para el desarrollo de la comprensión del concepto de medida:

1. Primer estadio: Ausencia de conservación.

Como su propio nombre indica, en este estadio el niño no ha adquirido la idea de conservación y se apoya principalmente en estimaciones visuales. Asimismo, no concibe la idea de la reiteración de una unidad o de la subdivisión en secciones de igual tamaño o fraccionamiento de la unidad de medida. Este primer estadio está caracterizado por la ausencia de transformaciones (Piaget y Szminska, 1964). Este primer estadio se experimenta en los años de preescolar (Dickson, Brown y Gibson, 1991).

2. Segundo estadio: En el que comienzan a emerger la conservación y la transitividad.

El niño comienza a desarrollar las ideas de conservación y de transitividad utilizando como instrumento de medición partes de su propio cuerpo, es decir, comienza a utilizar unidades de medida antropométricas. Sin embargo, en este punto el niño todavía no comprende la necesidad de que todas las unidades de medida sean del mismo tamaño ni consigue coordinar medidas en todas las direcciones (Dickson, Brown y Gibson, 1991).

3. Tercer estadio: Caracterizado por el inicio de la conservación operacional y la transitividad.

Según Piaget, esta etapa se alcanza a los 7 u 8 años de edad. En ella, los alumnos han adquirido la idea de la transitividad y, por ejemplo, es capaz de construir una torre de una altura similar a otra que ha medido con una vara cuya longitud es mayor que la torre, puesto que el niño todavía no sabe utilizar un instrumento de medida más corto que el objeto a medir, que se alcanza en el siguiente estadio. En este estadio el niño comienza a apreciar la medición bidimensional y es capaz de coordinar las dos dimensiones. En este sentido el niño es consciente de la conservación de cantidades materiales como, por ejemplo, una cantidad (Dickson, Brown y Gibson, 1991).

4. Cuarto estadio: Estadio en el que se capta la idea de unidad de medida más pequeña que el objeto a medir.

Según Piaget, esta etapa se alcanza entre los 8 y los 10 años de edad. En esta etapa el niño comprende el proceso de medición mediante la reiteración de una unidad más pequeña que el objeto a medir. Hasta este estadio el niño ha utilizado la técnica del tanteo basada en el ensayo y error.

5. Quinto estadio: La etapa final en el desarrollo de las nociones de medida.

Piaget denomina a esta etapa como pensamiento operacional formal. Cuando el niño se adentra en esta etapa se puede decir que ha alcanzado una comprensión operativa de las nociones de medida y es capaz de mediar operaciones bidimensionales y tridimensionales mediante cálculos basados en dimensiones lineales. Para Piaget esta etapa se alcanza a los 11 o 12 años de edad, sin embargo otros estudios situaban esta fase mucho más tarde por circunstancias sociales que obligaba a los niños a abandonar la escuela.

Piaget afirma que un signo distintivo de esta etapa es la comprensión por parte del niño de que el espacio es un continuo que contiene un conjunto infinito y continuo de puntos y, por tanto, se hayan formado los conceptos de infinitud y continuidad (Dickson, Brown y Gibson, 1991).

Chamorro y Belmonte (1988) indican que para Piaget la adquisición de las magnitudes de longitud, masa y capacidad puede ser comprendida entre los 6 y los 8 años. La superficie y el tiempo entre los 7 y los 8, mientras que el volumen y la amplitud angular entre los 10 y los 12.

2.1.5.2. *Inskeep*

Inskeep explica que la medición involucra una serie de destrezas sensoriales y perceptivas con aspectos de geometría y aritmética. La medición también permite al estudiante apreciar el sistema de medición, la idea es secuenciar desde la percepción a la comparación para posteriormente aplicar un estándar de medida o referente. A continuación hacemos un resumen de sus componentes:

- La medición como percepción: Dado que el primer paso es la percepción de lo que debe ser medido, la percepción es el primer paso. Por ejemplo, cuando el niño realiza una marca que exprese su altura sobre una escala.
- La medición como comparación: Lo que sigue a la percepción es la comparación, dado que tras haber percibido una magnitud en algún objeto, podemos compararlo con otro que tenga la misma propiedad.
- La medición como búsqueda de referente: si hacemos comparaciones es para comprobar equivalencias o no equivalencias. Cuando esta comparación no es del todo fidedigna, necesitamos algún estándar de medida que sea eficiente, eficaz y usado por todo el mundo. Los estándares de medida tienen como mínimo dos funciones importantes: Permiten comunicar medidas en formas directas y abreviadas. Permiten medidas consistentes y precisas en diferentes áreas.
- La medición como sistema: El sistema internacional brinda un sistema de medidas estándares que han sustituido ampliamente a los estándares locales arbitrarios.
- La medición como actividad afectiva: capacidad de realizar mediciones por si mismos y de apreciar la importancia de la medida a nivel personal y social.
- La medición como una actividad: la medición debe tener acción, no ser una rutina de memoria e intelecto. Los estudiantes deben tener experiencias en todas las áreas básicas de la medición, dado que éstas exigen precisión y consistencia.

2.1.5.3. El Método Ruso

La postura tomada por la escuela Piagetana es contraria a la mantenida por la investigación rusa, que forman las nociones de medida a partir de procesos propios del concepto de medida y, por tanto, es reflejo del desarrollo histórico de la misma, tal y como recogen Dickson, Brown y Gibson (1991). Estas investigaciones rusas sostienen que la enseñanza tradicional basada en nociones numéricas dificulta el reconocimiento de las unidades de medida por los niños. Un ejemplo del plan de estudios para un curso de 6-7 años de edad, con este método, basado en la noción de unidad de medida viene dado por, en primer lugar la introducción de destrezas básicas y las nociones necesarias para efectuar una medición,

en segundo lugar se introducía la noción de número y, para finalizar, el descubrimiento de la relación inversa entre el tamaño de la unidad utilizada y el número de unidades de medida (es decir, cuanto mayor es la unidad de medida, menos serán las unidades necesarias).

2.1.5.4. Lehrer

La investigación que realizó sobre el desarrollo del entendimiento de la medida fue considerada en los Principios y Estándares de la Matemática Escolar de la *National Council of Teachers of Mathematics* que abordamos en el apartado 2.1.5.6. En su estudio, Lehrer (2003), recoge los ocho componentes que, a su entender, dan lugar a la apropiación de la capacidad de medida en los estudiantes:

1. Relación unidad-atributo: Es la correspondencia entre los atributos medidos y las unidades de magnitud. Para seleccionar una unidad de medida es necesario un razonamiento lógico que involucra el espacio medido y las herramientas disponibles para medir.
2. Iteración (repetición): Consiste en la repetición de las unidades a partir de una acumulación con el fin de obtener una cantidad de medida. De esta forma, entendemos una medida como una magnitud que puede ser subdividida, donde una unidad de medida puede acumularse y acomodarse.
3. Embaldosado (relleno de espacio con figuras): Rellenar espacios es un proceso complejo donde se encuentra implícita la subdivisión de magnitudes. En particular, esta no es una tarea fácil cuando abarcamos el volumen puesto que pueden quedar huecos.
4. Unidades idénticas: Si utilizamos unidades idénticas y las contamos obtenemos la medida.
5. Estandarización: Estandarizar las unidades de medida favorecen la comunicación. Un ejemplo de esto son los sistemas de medida como el Sistema Internacional de Medidas.
6. Proporcionales: Existe una relación inversamente proporcional entre la medida y las unidades de medida utilizadas. Utilizar unidades de medida de distintos tamaños conllevan mediciones distintas aunque pueden representar la misma medida.

7. Aditividad: En el espacio las unidades se pueden componer y descomponer. Lo importante es la distancia total entre dos puntos, porque que la distancia es la suma de las distancias de cualquier conjunto arbitrario de segmentos que subdividan al segmento lineal.
8. Origen (punto cero): Algunas mediciones pueden involucrar el desarrollo de una escala. En el espacio euclidiano las medidas son razones, por consiguiente, cualquier localización puede servir como origen.

2.1.5.5. Chamorro y Belmonte

Debido a la amplia investigación realizada por Chamorro en colaboración con otros investigadores, en este apartado se recogen aquellas más significantes sobre la enseñanza y el aprendizaje de la medida.

Chamorro (2001), en el capítulo *“Las dificultades de la enseñanza aprendizaje de las magnitudes en Educación Primaria y E.S.O.”* revisa el tratamiento que realiza el currículo sobre las magnitudes, la presencia de la medida de las magnitudes en los libros de texto sobre el que se profundiza en un apartado específico de esta tesis, y recoge distintas evaluaciones sobre medida realizadas por alumnos en cursos equivalentes a la enseñanza primaria y secundaria. Asimismo (Chamorro, 2001) estudia el origen de algunos obstáculos en el aprendizaje de las diferentes magnitudes relacionados con las propiedades fundamentales de la medida.

Chamorro y Belmonte (1988) afirman que medir una magnitud no es una acción fácil y espontánea: “Esta dificultad se debe a que la realización del acto de medir requiere de una gran experiencia en la práctica de estimaciones, clasificaciones y seriaciones, una vez establecido el atributo o la magnitud con la cual se va a medir” (p.15). Por tanto, es necesario que los alumnos trabajen la identificación de magnitudes físicas desde pequeños (Chamorro y Belmonte, 1988). Para poder apropiarse de una magnitud, estos autores identificaron cuatro estadios:

1. Considerar y percibir una magnitud como una propiedad de una colección de objetos, dejando las otras propiedades de la colección de lado con el fin de centrarse sólo en ella. Por ejemplo, cuando un alumno tiene una plastilina en sus

manos, una idea sería que sólo considera su peso, no su color, ni su textura ni su tamaño.

2. Considerar que aunque el objeto cambie de forma, posición, tamaño u otra propiedad, la cantidad de magnitud permanece constante. A esto le llamamos conservación de una magnitud. Por ejemplo, sabe que si su plastilina se deforma seguirá pesando lo mismo.
3. Ordenar una colección de objetos respecto de una magnitud. Por ejemplo, ordena distintas plastilinas según un peso, sin que importe la forma, el color, el olor, etc.
4. Establecer una relación entre una magnitud y un número. Por ejemplo, establece que la plastilina pesa 100 gramos.

Al finalizar este proceso, el estudiante debería ser capaz de medir de acuerdo con su desarrollo psicológico y donde él sea el protagonista de su aprendizaje. Dentro de la acción de medir, estos autores definieron sus etapas principales tomando como referencia a los estadios piagetianos del desarrollo evolutivo de la medida y que recogidos en el apartado de Piaget. Estas etapas son:

1. Comparación perceptiva directa: se utiliza única y exclusivamente la percepción sin recurrir a una medida común o a desplazamientos de los objetos comparables. En este estadio se pueden distinguir dos fases:

Primera: La estimación es directa y el estudiante realiza un trabajo conciso y sincrético gracias a su percepción visual.

Segunda: Utiliza la percepción visual, corporal y manual en forma mucho más analítica que la anterior, trabajando de un modo más cercano a lo que es realmente medir.

2. Desplazamiento de Objetos: En este estadio se traslada uno de los objetos de la etapa anterior o interviene un término medio que el alumno tiene apropiado en su conocimiento empírico. En este estadio todavía no está presente la transitividad y, el igual que en el estadio anterior, hay dos fases:

Primera: se desplazan los objetos y se colocan juntos para poder compararlos.

Segunda: el estudiante utiliza un término medio que aún no es una medida común (por ejemplo, una parte del cuerpo). Comienza así su primer avance

para construir una unidad de medida. Al finalizar este estadio las medidas antropométricas cuerpo van desapareciendo dando lugar al uso de términos medios simbólicos.

3. Operación de la propiedad transitiva: Gracias un nuevo término operatorio B, se puede deducir que si $A=B$ y $B=C$ entonces $A=C$. Este estadio sólo se apropiará si hay una conservación de la magnitud. Además, el estudiante debe comprender la relación entre el término B, cuanto menor sea, más precisa será la medida y el error disminuirá. Esta comprensión debe sostenerse a través de la práctica.

En el tercer estadio el término B desarrolla la idea de unidad de medida, pero para constituirse se necesita de cinco pasos.

1. Ausencia de unidad: La primera medida es visual y comparativa, sin utilizar un tercer objeto.
2. Unidad objetual: Objeto como unidad de medida que esté claramente relacionado con una la magnitud, por ejemplo utilizar el largo de lápiz para medir el largo del escritorio. En este caso, el objeto y la unidad están estrechamente ligados. Se puede utilizar este objeto como unidad para medir otros objetos pero esto no es un indicativo de que el estudiante haya adquirido la idea de unidad.
3. Unidad situacional: Hay una relación estrecha entre la unidad y el objeto. La unidad de medida depende del objeto a medir, pero es cambiada para otros objetos en función de la relación existente entre los mismos. Es decir, para medir objetos pequeños se utilizan unidades pequeñas y para medir objetos grandes se utilizan unidades mayores que las anteriores.
4. Unidad figural: La unidad en esta etapa va perdiendo la relación con el objeto a medir, incluso en el orden de magnitud. Se tiende a medir objetos pequeños con unidades pequeñas y objetos grandes con unidades grandes. La adecuación de la unidad a la magnitud de lo medible (condición no indispensable) hace que el avance hacia la consecución de la unidad sea importante.
5. Unidad propiamente dicha: La unidad es libre del objeto en forma y en tamaño, dado que es interfigural.

Observamos que el desarrollo de la idea de unidad de medida se perfecciona a medida que los estadios avanzan. Al principio, la unidad de medida está completamente ligada al

objeto a medir (intraobjeto) hasta llegar a ser una unidad independiente del objeto a medir (interobjeto). Una vez finalizados estos estadios obtenemos un número junto a una unidad de medida como resultado de la medición. Esta situación se enriquece al medir con la misma unidad otros objetos.

2.1.5.6. National Council of Teacher of Mathematics (NCTM)

En el documento SAEM Thales (2003) aparece una traducción de los Estándares de 1989 del NCTM. En él se indican diferentes puntos en los cuales la educación matemática debería prestar más y menos atención. Dentro de la rama de la medida, encontramos que deberían tener una mayor presencia los siguientes aspectos:

- El proceso de medición.
- Los conceptos relacionados con unidades de medida.
- Mediciones en sí.
- Estimación de mediciones.
- Uso de mediciones e ideas geométricas a través del currículo.
- Hacer estimaciones y realizar mediciones para resolver problemas.

De la misma manera, los puntos que deberían recibir una menor atención dentro de la medida son:

- Memorización de equivalencias entre unidades de medida.
- Conversión interna y entre varios sistemas de medida.
- Memorizar y manipular fórmulas.

SAEM Thales (2003), señala que los alumnos, al terminar el ciclo inicial de Educación Primaria deberían ser capaces de:

- Entender los atributos de longitud, capacidad, peso, área, volumen, tiempo, temperatura y ángulo.
- Desarrollar el proceso de medición y los conceptos relacionados con las unidades de medida.
- Hacer estimaciones de medida y utilizarlas.

- Hacer estimaciones y utilizarlas en la resolución de problemas y situaciones cotidianas.

Es muy importante que en el ciclo inicial se establezca una base firme con los conceptos de medición básicos y subyacentes, lo que implica comprender el atributo que se va a medir y el proceso de medición (SAEM Thales, 2003). Esto último no se puede concebir sin la experiencia de comparar objetos de forma directa, la utilización de distintas unidades y el recuento de las mismas (SAEM Thales, 2003). Lo ideal sería que alumno, al terminar este ciclo, estuviese capacitado para utilizar cualquier sistema de medidas. El uso precipitado de fórmulas o instrumentos de medida dificultará que los niños adquieran las estructuras conceptuales necesarias para resolver problemas de medida.

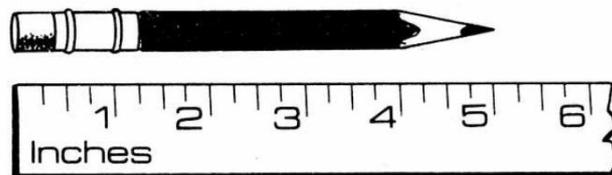
Es aconsejable que las primeras experiencias con la medida sean con unidades no convencionales de forma que los alumnos se den cuenta de la necesidad de las unidades estandarizadas para poder comunicarse (SAEM Thales, 2003). Asimismo, el alumno comprenderá la utilidad de la medida si se enfrenta a situaciones donde deba realizar mediciones de objetos reales, o la construcción de objetos de un determinado tamaño, así como la estimación de mediciones. Por este motivo, el currículo debería introducir continuamente experiencias de medición y no que aparezcan de forma puntual en algunas lecciones del libro de texto. La SAEM Thales (2003), es contundente en este sentido afirmando que: “los libros de texto no pueden sustituir aquellas actividades que utilicen la medición para resolver cuestiones sobre problemas reales” (p.53).

Por otro lado, los alumnos al terminar la etapa educativa correspondiente a la Educación Primaria debería, según la SAEM Thales (2003), ser capaces de:

- Ampliar su comprensión del proceso de medición.
- Hacer estimaciones, realizar mediciones y usar las medidas para describir y comparar fenómenos.
- Seleccionar unidades y herramientas adecuadas a la medición al nivel de exactitud que se requiera en una situación en concreto.
- Entender la estructura y el uso de los sistemas de medidas.
- Ampliar su comprensión de los conceptos de perímetro, área, volumen, medida de ángulos, capacidad, peso y masa.

- Adquirir los conceptos de proporción y de otras medidas derivadas e indirectas.
- Desarrollar fórmulas y procedimientos para determinar medidas en la resolución de problemas.

Por otro lado, es necesario hacer hincapié en que, tal y como se afirma en SAEM Thales (2003), actividades como la que se presenta en la Figura 3. no es una actividad apropiada para comprobar si el alumno es capaz de medir una longitud o una distancia.



¿Cuánto mide el lápiz?

Figura 3. Actividad no apropiada para comprobar destrezas de medición

2.1.5.7. Callís

Callís (2002) sugiere que la medida nos permite entender y controlar el entorno que nos rodea, por este motivo, liga la enseñanza de la medida a la adquisición del número y el espacio. Sin embargo, Callís (2002) pone de manifiesto que el proceso de enseñanza – aprendizaje de la medida se ha visto reducido a la consecución de un dominio aritmético y mecánico, donde se realizan operaciones correctas y exactas, necesario para la realización de actividades relacionadas con el cambio de unidades o el paso de una expresión compleja a incompleja. Contrario a esta posición reduccionista, Callís (2002) considera que la capacidad de medir descansa en la adquisición del espacio y del número y, además, tiene su propia evolución desarrollada a partir de la adquisición conjunta de magnitud, medida y unidad. De esta forma “la medida no es calculo sino acción” (Callís, 2002, p. 24). Desde este posicionamiento, es imposible entender la medida sin el contacto con la realidad y la realización de comparaciones directas. Por este motivo, el tratamiento de la medida en la escuela debe realizarse de forma activa y significativa desde la práctica y la estimación y no exclusivamente desde la aritmética.

Callís (2002) recoge cuatro etapas necesarias para la interiorización de la magnitud al igual que Chamorro y Belmonte (1988) que son:

1. Identificación y discriminación magnitudinal: Es necesario diferenciar cada propiedad como algo diferente de las otras.
2. Conservación de la magnitud: Aunque se modifiquen las apariencias, la magnitud sigue siendo la misma.
3. Ordenación de la magnitud: la capacidad de ordenar objetos en base a una misma magnitud.
4. Relación magnitud-número: asignación de un valor numérico a una magnitud a partir de un proceso de comparación con una cantidad de magnitud.

En la adquisición de la unidad, se toma como referencia los estadios propuestos por Chamorro y Belmonte (1988) pero integra estadios intermedios: objetal, situacional y figural, nominándolo como Unidad Dependiente. El estadio objetal es reemplazado por el figural puesto que, según este autor, el nombre es ambiguo debido a que en todos los casos las unidades son objetos o unidades antropométricas. Al último estadio lo denomina como Unidad independiente porque, en esta fase, se tiene la capacidad de adquirir el dominio de la medida.

Con lo expuesto anteriormente, la capacidad de medir se desarrolla en base a una serie de etapas:

1. Identificación y reconocimiento de la magnitud.
2. Identificación y reconocimiento de unidades.
3. Selección de la unidad más adecuada.
4. Control y aplicación tecnológica de la medición
5. Operatividad y cuantificación

Como consecuencia a la adquisición de estas cinco etapas se establecen interconexiones que desarrollan la capacidad de discriminación magnitudinal, la integración de la unidad, la adquisición del sistema magnitudinal y la capacidad de precisión y estimación. De este modo estas cuatro frases se pueden concretar en tres niveles de maduración de la medida:

1. Identificación-reconocimiento
2. Operación-composición-descomposición
3. Relación-ordenación-comparación

Basándose en la medida de una longitud, Callís (2002) refleja su reflexión sobre el génesis de la medida en el siguiente esquema y que es extrapolable a otras la medida de otras magnitudes:

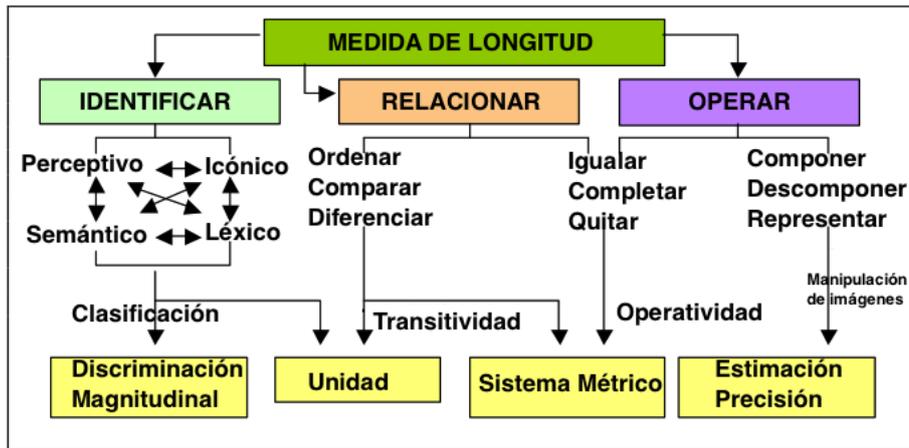


Figura 4. Estructura lógica y adquisición de la medida

Callís (2002) resumió el origen de la adquisición de la capacidad de medida con el siguiente esquema:

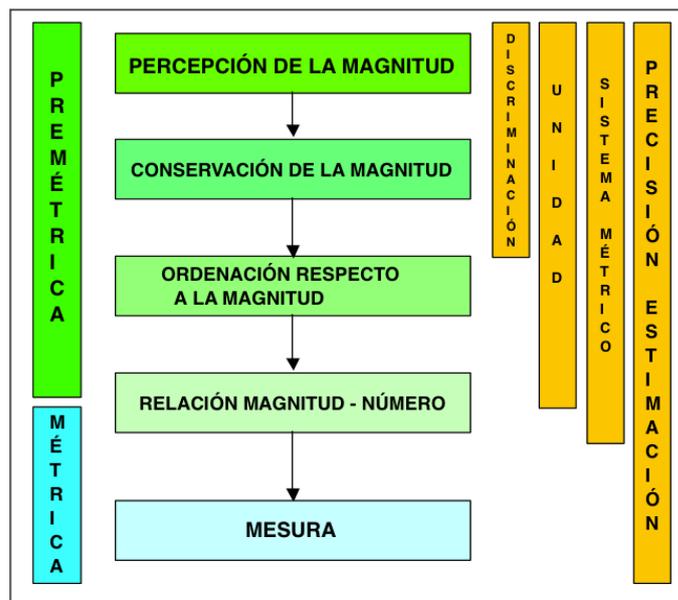


Figura 5. Génesis de la medida

2.1.5.8. Outhred, Mitchelmore, McPhail y Gould

Estos autores (Outhred, Mitchelmore, McPhail y Gould; 2003) establecieron tres estadios para la enseñanza de las unidades formales que recogen en su trabajo “Count Me Into Measurement: A program for the early elementary school”:

- Primera etapa: los estudiantes identifican el atributo espacial.
- Segunda etapa: los estudiantes aprenden a medir de manera informal.
- Tercera etapa: los estudiantes aprenden las estructuras de las unidades formales.

2.1.5.9 Szilágyi, Clements y Sarama

Estos autores (Szilágyi, Clements y Sarama; 2013) estudiaron cómo se desarrollan en los estudiantes las ideas relativas a la medida de longitudes desde infantil hasta 2º grado, que equivale a 2º de primaria en la enseñanza en España. Elaboraron lo que denominan trayectorias de aprendizaje que son descripciones del desarrollo del pensamiento y aprendizaje de los niños en un dominio matemático específico y el conjunto de tareas diseñadas para generar esos procesos mentales o acciones para dirigir a los niños a través de una progresión en el desarrollo de niveles de pensamiento (Szilágyi, Clements y Sarama, 2013).

Estas trayectorias se van haciendo más complejas conforme aumenta la complejidad, abstracción y generalización del objeto matemático. Hay que tener en cuenta que, según Szilágyi, Clements y Sarama (2013) el conocimiento no es algo intermitente sino que se va integrando lentamente conforme avanza el proceso de aprendizaje.

Piaget y sus colaboradores definieron el concepto de medida de la longitud como una síntesis de subdivisión y cambio de posición que incluye tomar una parte del total y repetir una unidad a lo largo de este total. A parte de esto, es necesario tener en cuenta el atributo que vamos a medir, la igualdad de las unidades, la relación entre las distintas unidades, la partición, la iteración de la unidad de medida, el origen, la transitividad, la conservación, la acumulación de distancia, la proporcionalidad y la relación entre el número o la aritmética con la medida (Szilágyi, Clements y Sarama, 2013).

Para Szilágyi, Clements y Sarama (2013), la progresión del desarrollo de la medida viene dada por la siguiente secuencia:

1. Reconocer una cantidad de longitud: Identificar una longitud o distancia como un atributo. Es decir, se trata de reconocer las relaciones de longitud entre una pareja de objetos que ya están alineados (de forma paralela y uno de sus extremos coincidentes sobre la línea perpendicular a las longitudes), pero el conocimiento en relación con la necesidad de dicha alineación en el establecimiento de relaciones de longitud está ausente o es inestable.
2. Comparación directa de longitudes: Se alinean dos objetos para determinar cuál es más largo o si tienen la misma longitud. A pesar de este conocimiento puede no estar disponible en todos los contextos, los niños son capaces de alinear dos objetos para visualizar la diferencia entre las longitudes.
3. Comparación indirecta de longitudes: Comparar la longitud de dos objetos representándola con un tercer objeto. Cuando pedimos que midan la longitud de un objeto suelen intentar adivinarla o cuentan unidades (de distinta medida) que van moviendo a lo largo del objeto. Aunque sean capaces de medir con una regla podrían tener un desconocimiento o habilidad sobre lo que hay que hacer, por ejemplo no posicionando correctamente el origen en el cero. En esta fase entre la propiedad de la transitividad de las medidas aunque los alumnos no lleguen a comprenderlo como tal si que comprenden que pueden representar la longitud de un objeto sobre otro.
4. Ordenar series de 1 a 6 unidades: Ordenar longitudes con las unidades marcadas. Se requiere que los niños entiendan el orden completo de los objetos como un objeto mental, para lo cual cada objeto de la serie es más largo que los que le proceden. Esta comprensión parece basarse en la aplicación sucesiva de transitividad. Este paso se debe desarrollar a la vez que el siguiente: medir de extremo a extremo.
5. Medir de extremo a extremo: Extender las unidades de extremo a extremo. Puede no reconocer la necesidad de utilizar unidades de la misma longitud. La capacidad de los niños para formar una imagen mental de la longitud como la distancia cubierta implica que la colocación de unidades no debe dejar espacios, con lo que el revestimiento es continuo. Se trata de una comprensión intuitiva de la aditividad de la longitud.

6. Repetición de la unidad de longitud. En este punto se ve la capacidad de aplicar las medidas resultantes en situaciones de comparación. Se trata de medir usando la repetición de la misma unidad.
7. Relación de la unidad de medición. Relaciona el tamaño y el número de unidades explícitamente. Reconocer que utilizar una unidad de medida distinta dará una medida distinta y que es necesario utilizar unidades idénticas, al menos de forma intuitiva. Utilizar regla con una mínima graduación.

Por tanto, estos dos últimos niveles de pensamiento requieren el desarrollo de tres subdominios de conocimiento: La aditividad de la longitud, la relación entre el tamaño de las unidades y la cantidad, y la iteración de la unidad.

8. Medidor de longitud: medir conociendo la necesidad utilizar unidades idénticas, la relación entre distintas unidades, el origen en el instrumento de medida (regla), y la acumulación de distancia. Comenzar a realizar estimaciones.
9. Regla medidora conceptual: Poseer una herramienta interna de medición. Mover la unidad de medición a lo largo del objeto o segmentarlo y contar los segmentos mentalmente. opera aritméticamente sobre las medidas. Estima con precisión.

2.1.6. ESTADO DE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MEDIDA

Los referentes teóricos mostrados ponen de manifiesto que actualmente no existe un acuerdo unánime sobre cuál es el proceso de enseñanza más adecuado para la medida. Si bien en teoría el profesorado y los investigadores reconocen las ventajas de determinados enfoques, las prácticas del aula y los libros de texto reflejan posturas muy diferentes. Si tomamos un libro de texto, tanto de primaria como de secundaria, y observamos alguno de los temas de medida encontraremos actividades que conllevan casi exclusivamente cálculos. Existe una escasez de actividades de composición y recomposición de figuras, de medición directa con unidades no convencionales, de estimación, y mucho menos de problemas complejos e interesantes que podrían aumentar la motivación del alumnado.

En primaria se aborda superficialmente la definición de unidades de medida para centrarse rápidamente en la manipulación numérica, donde prevalece la *aritmización* de la medida (Chamorro y Belmonte, 1988). En Secundaria la situación es parecida añadiendo manipulaciones algebraicas. Por tanto, no es de extrañar que, tal y cómo señala Chamorro y Belmonte (1988):

En la mayoría de los casos se identifica el aprendizaje de las magnitudes y su medida con el conocimiento y dominio del SMD y se considera que ha alcanzado los objetivos propuestos cuando el alumno efectúa conversiones con seguridad y rapidez. (p.40)

Con esta situación, el alumnado llega a Secundaria con serias dificultades al carecer de conceptos y procedimientos básicos relativos a la medida que son necesarios en otras situaciones. Podemos afirmar que existe una clara sustitución de saberes, donde los problemas de medida se sustituyen por problemas aritméticos, los procesos de medición por el uso de fórmulas y las conversiones, que ocupan más de la mitad del tiempo que se dedica en el aula a la medida. En el caso particular de la medida de superficies, la enseñanza se limita a la aplicación de fórmulas que permiten hallar el área de las diferentes figuras (Corberán, 1996; Pérez y Guillén, 2007).

Además, las actividades prácticas, como pueden ser las mediciones, son casi inexistentes y se realizan con muchos obstáculos de materiales y de gestión del aula (Chamorro, 2003 a). La escuela considera que el alumno aprenderá a medir de forma práctica por su cuenta a través de experiencias sociales o familiares (Chamorro, 2003 a). Sin embargo, esto es falso, antiguamente gracias al comercio, los alumnos tenían oportunidades de aprendizaje en este sentido, pero en la actualidad esta práctica ha disminuido.

En relación con la superficie, se continúa sin utilizar actividades que conlleven el pavimentado, únicamente se utilizan cuadrículas y además para resolver actividades que están en un nivel muy elevado en comparación con las capacidades de los alumnos (Chamorro, 2001). Además, se utilizan en contextos alejados de la vida real pues no se pide a los alumnos que midan la superficie de objetos cotidianos familiares (Chamorro, 2001).

Como principales consecuencias de este tipo de enseñanza se producen obstáculos didácticos que refuerzan obstáculos epistemológicos constatados y tipificados. El uso de objetos idealizados matematizados, en particular en el caso de la superficie, dificulta el reconocimiento en la realidad de la magnitud correspondiente y la estimación. Por otra parte, es habitual la presentación de superficies dibujadas y no recortadas, lo que constituye un obstáculo didáctico que favorece la identificación del perímetro y superficie. El cambio de unidades utiliza un procedimiento algorítmico basado en la memorización alejando el concepto de cambio de unidades. Para superar dichos obstáculos es conveniente recurrir a la medición real de diversos objetos del entorno cotidiano y actividades de manipulación que aseguren la comprensión y el descubrimiento de las relaciones entre unidades, tanto en el marco aritmético como geométrico.

Por otro lado, Chamorro y Belmonte (1988), señalan distintos errores atribuibles a este tipo de metodología:

- **Uso erróneo de los sentidos.** En la enseñanza tradicional, el uso de los sentidos es considerado una pérdida de tiempo. Además es provechoso que los niños utilicen sus sentidos para explorar y adquirir una base sensorial imprescindible para la formación de los conceptos de longitud, masa, capacidad, etc.
- **Uso de instrumentos inadecuados y mal manejo de los instrumentos.** La elección de un instrumento de medida inadecuado en ocasiones está relacionado con una mala apreciación sensorial. También puede favorecer este fenómeno la reducción de los instrumentos de medida a los convencionales o las contadas ocasiones en las que el alumno debe medir. A este respecto, se producen errores a la hora de efectuar las mediciones, por ejemplo, que el 0 no coincida con el extremo.
- **Errores cometidos en la medición debido a los malos procedimientos empleados o a la elección de una unidad inadecuada.** Elegir una unidad adecuada para hacer una medida supone hacer una estimación que compare la cantidad a medir con la magnitud elegida.
- **Errores de apreciación de la cantidad y posibilidad de autocorrección. Confusión entre magnitudes.**

- **Resolución de problemas que contienen datos erróneos o no reales.** Se presentan enunciados que contiene datos irreales y que atentan contra el sentido común. Estos enunciados dificultan la estimación y la autocorrección.
- **Abuso de la exactitud en las medidas. Encuadramientos.**
- **Escrituras erróneas o sin sentido.** Ejemplo:

$$7 m \times 4 m = 28 m^2$$

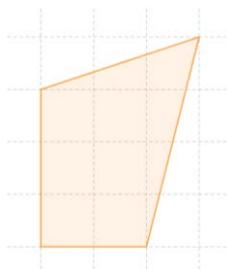
$$\frac{625}{5} = 125 = 125 cm$$

- **Carencia de estrategias para efectuar medidas de objetos comunes.** Las superficies y los volúmenes que se calculan son de forma regular, alejado de cuestiones prácticas que el alumno encontrará en la vida real.

Aparte de estos errores y dificultades, Escolano y Gairín (2005) señalan que la medida no sólo aporta significado al racional, sino que la ausencia de la medida directa y su expresión por parte del alumnado supone un impedimento para articular los significados del número racional.

En el estudio de la superficie, Del Olmo, Moreno y Gil (1989) señalan que los alumnos presentan algunas dificultades en el cálculo de áreas cuando:

- Las figuras son más complicadas que el rectángulo.
- Las figuras no aparecen pavimentadas.
- Hay una proporcionalidad inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida (por ejemplo baldosas de 0,5 cm x 0,5 cm). Es decir, cuando cambiamos la unidad por otra mayor la medida de un mismo objeto respecto a esta unidad será menor (Frías, Gil y Moreno, 2001).
- Las unidades de pavimentada no están enteras. Por ejemplo:



Pero sobre todo, en este apartado cabe señalar el obstáculo didáctico que supone la “relación” entre área y perímetro (Del Olmo, Moreno y Gil, 1989; Corberán, 1996; Segovia, Castro y Flores, 1996; Chamorro, 2001; D’Amore y Fandiño, 2007). Este error, tal y como señalan Frías, Gil y Moreno (2001), está ampliamente constatado y supone un error frecuente entre los estudiantes. Lo más probable es que los alumnos no hayan realizado actividades que pusiesen de manifiesto la diferencia entre estos conceptos.

En general, los alumnos tienden a pensar que si dos figuras tienen la misma área entonces tienen el mismo perímetro (Del Olmo, Moreno y Gil, 1989). Frías, Gil y Moreno (2001), proponen diferentes actividades enfocadas a romper el obstáculo entre el área y el perímetro. Dichas actividades deben mostrar figuras que a pesar de sus dimensiones lineales tengan la misma área o figuras que presentando coincidencias en sus dimensiones lineales, tengan distinta área (Frías, Gil y Moreno, 2001).

En algunos casos, tal y como recogen Del Olmo, Moreno y Gil (1989), cuando los alumnos tienen que calcular el área y el perímetro asignan el resultado mayor al área y el menor al perímetro. En otros estudios llevados a cabo como el de Wagman (Del Olmo, Moreno y Gil, 1989), se observó que una tercera parte de los sujetos que participaron confundían el perímetro con el área.

Por otro lado, D’Amore y Fandiño (2007) señalan que este obstáculo surge de diferentes decisiones didácticas tomadas por los profesores:

- Se usan siempre y sólo figuras convexas.
- Se usan siempre figuras estándar.
- Casi nunca se ponen explícitamente en relación el área y el perímetro de una misma figura geométrica.
- Casi nunca se hacen transformaciones sobre figuras de forma que se conserven o se modifiquen área o perímetro.

Chamorro (2003 a, b), señala otro obstáculo epistemológico que hace que los alumnos identifiquen el área con la forma, es decir, creen que el cambio de forma lleva aparejado el cambio del área. Reconocer que la cantidad de superficie puede ser la misma en dos figuras cuya forma es diferente no es un conocimiento trivial.

2.1.7. LA MEDIDA EN LOS LIBROS DE TEXTO

La medida, desde la creación de la escuela elemental como institución, ocupa un papel importante dentro de la enseñanza de las matemáticas debido a sus múltiples aplicaciones tanto sociales como científicas (Chamorro, 1996; Segovia, Castro y Martínez, 1996).

Tal y como señala Luelmo (2001), no existe un acuerdo unánime sobre cuál es el proceso de enseñanza más adecuado para desarrollar el trabajo de la medida. Si bien en teoría el profesorado y los investigadores reconocen las ventajas de determinados enfoques, las prácticas del aula y los libros de texto reflejan posturas muy diferentes. En este sentido, Chamorro (2001), pone de manifiesto el fenómeno de la *aritmización* de la medida en la enseñanza, es decir, la *colonización de la medida por parte de la aritmética*. Los libros de texto, tanto de primaria como de secundaria, incluyen casi exclusivamente cálculos aritméticos para los temas de medida, y existe una escasez de actividades de composición y recomposición de figuras, de medición directa con unidades no convencionales, de estimación, y mucho menos de problemas complejos e interesantes que podrían aumentar la motivación del alumnado.

En la etapa educativa correspondiente a la Educación Primaria se aborda superficialmente la definición de unidades de medida para centrarse rápidamente en la manipulación numérica, donde prevalece la *aritmización* de la medida (Luelmo, 2001) Con esta situación no es de extrañar que, tal y cómo señalan Chamorro y Belmonte (1988):

En la mayoría de los casos se identifica el aprendizaje de las magnitudes y su medida con el conocimiento y dominio del Sistema Métrico Decimal y se considera que ha alcanzado los objetivos propuestos cuando el alumno efectúa conversiones con seguridad y rapidez. (p.40)

Por tanto, se puede afirmar que hay una clara sustitución de saberes, donde los problemas de medida se sustituyen por problemas aritméticos, los procesos de medición por el uso de fórmulas y las conversiones, que ocupan más de la mitad del tiempo que se dedica en el aula a la medida (Chamorro, 2001).

Por otro lado, las actividades prácticas, como pueden ser las mediciones, son casi inexistentes y se realizan con muchos obstáculos materiales y de gestión del aula (Chamorro, 2003). En relación con la superficie, se continúa sin utilizar actividades que conlleven el pavimentado, únicamente se utilizan cuadrículas y además para resolver actividades que están en un nivel muy elevado en comparación con las capacidades de los alumnos y, además, se utilizan en contextos alejados de la vida real pues no se pide a los alumnos que midan la superficie de objetos cotidianos familiares (Chamorro, 2001).

Una de las principales referencias nacionales en este ámbito es Chamorro. En particular, en el capítulo “*Las dificultades en la enseñanza aprendizaje de las magnitudes en Educación Primaria*” del libro “*Dificultades del aprendizaje de las matemáticas*”, Chamorro (2001), abarca un apartado exclusivo donde recoge cual es la transposición didáctica estándar de la medida de las magnitudes propuesta por el libro de texto.

No hay definición de las distintas las magnitudes sino que se recurre a casos particulares que carecen de la generalidad inherente a una definición. Además, la mayoría de los objetos soporte de la magnitud son objetos dibujados y en muy pocos manuales, se presentan actividades o ejercicios en los que hay que acudir a objetos reales. Dado que los objetos de la vida real aparecen dibujados no se pueden tener en cuenta las peculiaridades de los mismos. Aun más, si los objetos de la vida real son dibujados sin tener en cuenta su tamaño real obtenemos objetos de órdenes de magnitud bien diferenciados igualados en tamaño. Una consecuencia directa de este hecho es la destrucción del orden de magnitud y la imposible estimación posterior.

Por otro lado, no aparecen reflejados los aspectos relativos a la constitución de la magnitud por lo que no puede haber un descubrimiento de criterios de equivalencia, determinante en magnitudes bidimensionales y tridimensionales, ya que su conceptualización y comprensión está estrechamente ligada a estos aspectos.

El trabajo de la conservación de la magnitud, que es una de las propiedades fundamentales de la medida, no aparece.

El trabajo de la equivalencia de dos objetos se hace en general por medio de la medida. De esta forma, se traslada la comparación al campo numérico y este trabajo queda reducido a

la ordenación de números que no tiene en consideración el criterio cantidad de magnitud. Con las ordenaciones sucede lo mismo, el trabajo se sustituye por el trabajo numérico, convirtiéndose en el ejercicio de una ficción.

Además, la clase de equivalencia, la cantidad de magnitud, está identificada con objetos concretos difuminando la comprensión de equivalencia de magnitud.

La estructura matemática de la magnitud no es considerada en su totalidad. Alguno de los libros de texto que consultó plantea ejercicios aislados en los que hay que agrupar o determinar los objetos que tienen la misma longitud o el mismo peso. En realidad no se trabaja la equivalencia de magnitud, ya que la relación de igualdad se establece a partir de la medida de objetos, con lo que la comparación es meramente numérica.

El tipo de comparaciones directas propuestas son de carácter intuitivo lo que convierte esta tarea en algo irrelevante e innecesario donde los objetos a comparar son dibujados, no de la vida real. En aquellos casos en los que se habla de objetos de igual magnitud, solo con la longitud, se utiliza un criterio de tipo perceptivo donde los objetos son muy diferenciados haciendo innecesaria la comparación.

El trabajo de conversiones es el trabajo estrella a lo largo de la escolaridad obligatoria que no es más que un ejercicio enmascarado de numeración decimal. Los aspectos que priman en estos ejercicios de conversiones son de tipo formal, se busca la aplicación de procesos algoritmizados, dados a través de tablas, escaleras u otras presentaciones.

Dentro de la medida encontramos, para cada magnitud, distintas afirmaciones. En la medida de longitudes, los objetos que aparecen son segmentos y líneas poligonales cerradas o abiertas, así como líneas curvas. La mayoría de las mediciones son sobre líneas rectas lo que indica la existencia de una concepción de la longitud ligada a la línea recta. La medición del tiempo se hace de forma indirecta, bien sirviéndose de otras magnitudes o de instrumentos de medida. No se calcula el área de una superficie de objetos de la vida real. Además, la medida de una superficie o volumen pasa por el producto de dimensiones, por lo que no hay un tratamiento unidimensional (no se utiliza en pavimentado por ejemplo).

Las medidas son siempre de tipo concreto, con número y unidad con la que se ha medido y dan soporte a la mayoría de las actividades puesto que permite sustituir las prácticas de medida por operaciones aritméticas elementales o ejercicios de ordenación de números, ya sea para clasificar y ordenar objetos, según una magnitud o para resolver problemas propuestos.

Los problemas planteados no están conceptualmente ligados con la medida. Para resolverlos son necesarios los siguientes conocimientos: Conocer las unidades de medida y las equivalencias entre ellas, realizando conversiones con facilidad y rapidez; ordenar números naturales y decimales; hacer operaciones de suma y resta de números naturales y decimales, multiplicación y división de números naturales, multiplicación o división de un número decimal por un número natural.

Los problemas tienen en sus enunciados medidas a efectuados, es decir, medidas concretas que han de ser sumadas, restadas, o bien multiplicadas o divididas por un número natural. Además, los enunciados de problemas aritméticos aditivos no requieren para su solución otros conocimientos de medida que el uso de unidades y conversión entre ellas, ya que muchas veces los datos del problema vienen dados en una misma unidad de medida.

Por otro lado, la mayoría de los problemas donde es necesario multiplicar o dividir versan sobre magnitudes pluridimensionales como la superficie o el volumen, y se reducen también a enunciados clásicos correspondientes al producto de medidas.

2.2. EL LIBRO DE TEXTO

2.2.1. CONCEPTO DE LIBRO DE TEXTO

Antes de comenzar debemos dejar claro qué se entiende por libro de texto. En el Real Decreto 1744/1998 (España) se define por libro de texto como el material impreso, de carácter duradero y autosuficiente, destinado a ser utilizado por los alumnos y que desarrolla, atendiendo a las orientaciones metodológicas y criterios de evaluación correspondientes, los contenidos establecidos por la normativa académica vigente para el área o materia y el ciclo o curso de que en cada caso se trate.

Si buscamos la definición en el Diccionario de la Lengua Española encontramos:

libro de texto

1. m. **libro** que sirve en las aulas para que estudien por él los escolares.

Por otro lado, investigaciones llevadas a cabo dentro de esta misma temática proponen otras definiciones. Danisova (2006) numera 4 afirmaciones sobre lo que se entiende por libro de texto (p. 65):

- Una publicación para ayudar al profesor, con un contenido metódicamente adaptado y limitado por el currículum nacional.
- Un medio fundamentalmente didáctico que ayuda a desarrollar un proceso educacional.
- Una producción que integra fuentes de información en el largo plazo, accesibles para todos los alumnos y profesores.
- Un instrumento que colabora a implementar el control y la evaluación del proceso de aprendizaje del alumno.

En esta investigación entendemos por libro de texto aquel que utilizan los profesores y alumnos a lo largo de un curso escolar, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un área de conocimiento (González, 2002; Conejo, Arce y Ortega, 2014).

Todas las definiciones citadas sitúan al libro de texto dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje. Como este proceso abarca muchas fases, a continuación situamos el libro de texto dentro del currículo.

Alsina (2000) define cuatro tipos de currículo que se desarrollan en diferentes contextos y lugares. Llamamos currículo oficial al conjunto de documentos oficiales propuestos por las autoridades educativas que elaboran los programas de las diferentes asignaturas, señalando los contenidos, objetivos, criterios de evaluación, etc. El currículo potencial está determinado en diversas publicaciones docentes y materiales como pueden ser los libros de texto. En tercer lugar, el currículo impartido es el que desarrolla el profesor a lo largo del curso y, por último, el currículo aprendido es el adquirido por el alumnado.

Ahora bien, Foxman (1999) recoge un modelo de currículum formado por tres niveles y que es adoptado por el TIMSS. Estos tres niveles están centrados en el sistema educativo, el colegio y sus aulas y el estudiante. Estos tres niveles son: el currículum previsto o planeado, el currículum implementado y el currículum conseguido. El currículum previsto o planteado es aquel que aparece en los documentos oficiales, el currículum implementado es aquel que tiene lugar en el aula y, por último, el currículum conseguido es el relativo al conocimiento, las habilidades, la comprensión y las actitudes demostradas por el alumno y que han adquirido en clase o por otros medios (Foxman, 1999). Este modelo recogido por Foxman (1999) se asemeja al propuesto por Alsina (2000) pero sin tener en cuenta el currículum potencial. Ahora bien, este autor (Foxman, 1999) pone de manifiesto que los libros de texto juegan un rol dentro del currículum planeado e implementado y, por tanto, sirve de intermediario para implementar las intenciones institucionales (Foxman, 1999).

Van Dormolen (1986) señala que hay distintos tipos de libros de texto. Existen libros de texto que contienen exclusivamente problemas o ejercicios y que no contienen explicaciones, reglas, generalizaciones, etc. En este tipo de libros de texto los teoremas, las definiciones o las demostraciones deben ser realizados por el profesor o por el estudiante con la ayuda, o no, del profesor. Otro tipo de libro de texto es aquel que contiene explicaciones, generalizaciones, reglas, etc. y que cuenta con el desarrollo del contenido por un lado y los ejercicios y problemas por el otro. En este tipo de libro, las explicaciones y los problemas o ejercicios están perfectamente separadas. Por último, están los libros de texto que son una mezcla de estos dos anteriores donde las observaciones, aclaraciones, generalizaciones, reglas, etc. están intercaladas con problemas, ejercicios u otras tareas. Los libros de texto analizados en este estudio se encontrarían dentro del último tipo descrito por Van Dormolen (1986) puesto que se va intercalando los problemas o ejercicios con definiciones, reglas, ejemplos, etc.

Por otro lado, González y Sierra (2004) realizaron un análisis de libros de texto que les permitió clasificarlos en las siguientes modalidades:

1. **Expositivo:** En estos libros de texto el conocimiento matemático es un conjunto de enunciados, reglas y procedimientos aislados y relativamente inconexos y desconectados de la realidad. Ahora bien, tienen una estructura prescriptiva donde

se parte de las definiciones de los conceptos, se deducen teoremas y se presentan algunos ejemplos.

2. **Tecnológico:** En este tipo de libros de texto la matemática esta entendida como una organización lógica de enunciados, reglas y procedimientos aplicables a distintas situaciones. En particular, se hace más énfasis en la memorización de reglas que mas adelante de aplican en ejercicios o problemas. Las ramas de las matemáticas aparecen desconectadas.
3. **Comprensivo:** Estos libros de texto comprende la matemática como un instrumento para interpretar la realidad. El tipo de enseñanza promovido es la del descubrimiento permitiendo la construcción de redes conceptuales. Los conceptos matemáticos emergen de situaciones reales que dan lugar a la construcción de conceptos y reglas.

Chamorro (2001) recoge que tanto las unidades de medida usuales como el conocimiento y el uso de instrumentos de medida comunes que han estado siempre incluidos en los currículos a lo largo de diferentes épocas.

2.2.2. INVESTIGACIONES PREVIAS SOBRE LIBROS DE TEXTO

El estado de la investigación centrada en el libro de texto de matemáticas ha cambiado considerablemente en las últimas tres décadas, en las cuales ha recibido una atención creciente por parte de la comunidad internacional de investigación. No obstante, el estudio y análisis del libro de texto de matemáticas, como campo de investigación, no está tan desarrollado como otros campos en educación matemática (Fan, 2013).

Pepin y Haggarty (2001) realizaron una síntesis de la literatura existente en este campo e identificaron cuatro áreas principales según las cuales se han analizado los libros de texto en función de su contenido y estructura:

1. **Las intenciones matemáticas:** Esta área está compuesta por tres subdominios, el contenido matemático, las creencias sobre la naturaleza de la matemática que implícita en el libro de texto y forma de presentar el conocimiento matemático.
2. **Las intenciones pedagógicas:** En esta área se encuentran las formas en las cuales el libro de texto ayuda al estudiante a alcanzar los conocimientos matemáticos que

propone. Dentro de este propósito se numeran tres subdominios: la ayuda que ofrece el texto (introducción y adaptación de los contenidos al estudiante de forma que le permita manejar el libro sin ayuda), los métodos incluidos en los libros de texto (secuenciación de los contenidos, idioma, ideología o valores recogidos en el texto) y la voz retórica del texto (metadiscurso utilizado por el autor).

3. **Los contextos sociológicos:** Abarcan las diferencias en el contenido, los niveles de abstracción, el tratamiento de los temas, las expectativas y las aspiraciones del público al que van dirigido. Estas diferencias coinciden, en una gran medida, con los estereotipos dentro de la cultura. De hecho, es posible identificar los diversos contextos textuales a partir del análisis de las proporciones de las representaciones icónicas (imágenes, dibujos, fotografías); de las representaciones matemáticas (tablas, gráficos); y de las representaciones simbólicas.
4. **Las tradiciones culturales representadas:** Los libros de texto reflejan los objetivos curriculares nacionales y, además, reflejan y legitiman las tradiciones educativas y del entorno cultural.

Dentro de esta clasificación, este estudio se situaría dentro del área de las intenciones matemáticas del libro de texto puesto que nos centramos en el contenido matemático sobre medida presente en la etapa de Educación Primaria.

Recientemente, el estudio llevado a cabo por Fan (2013), establece cuatro categorías en las cuales se pueden clasificar las publicaciones sobre los temas de investigación, en su caso el libro de texto matemáticas:

1. **Investigaciones descriptivas:** La cuestión fundamental para este tipo de pregunta es describir cómo son las cosas.
2. **Investigaciones correlacionales:** La cuestión fundamental para este tipo de pregunta de investigación es como se relacionan dos o más cosas.
3. **Investigaciones causales:** La cuestión fundamental para este tipo de pregunta de investigación es si existe una relación causal entre dos cosas.
4. **Otras investigaciones:** para cubrir todas las demás preguntas de investigación que no se pueden clasificar en el esquema anterior.

Las publicaciones centradas en el libro de texto son en su mayoría de carácter descriptivo, ante lo cual, Fan (2013) sugiere que los investigadores deberían ampliar sus temas de investigación para responder preguntas de carácter correlacional y causal. Este autor considera al libro de texto como una variable intermedia en el contexto de la educación, que se ve afectada por unas variables independientes (factores que afectan al desarrollo del libro de texto) y a su vez influyen en otras variables dependientes (factores afectados por los libros de texto). Dado que se puede considerar al libro de texto como una variable intermedia en el contexto de educación, se puede relacionar al libro de texto con otros factores en la educación. Usando este marco, Fan (2013) identifica los temas sobre la investigación centrada en el libro de texto de matemáticas en tres áreas:

1. Cuestiones sobre los propios libros de texto.
2. Cuestiones acerca de cómo diferentes factores afectan al desarrollo o la producción del libro de texto.
3. Cuestiones acerca de cómo otros factores se ven afectados por los libros de texto.

Fan, Zhu y Miao (2013) llevaron a cabo una revisión acerca del estado del desarrollo de la investigación sobre el libro de texto de matemáticas e indicaron posibles direcciones que podría tomar este campo de investigación. Las fuentes que analizaron las clasificaron en cuatro categorías: el papel del libro de texto en el proceso de enseñanza y aprendizaje, el análisis y la comparación del libro de texto, el uso del libro de texto en el proceso de enseñanza aprendizaje y la investigación del libro de texto en otras áreas. Dentro de la categoría de análisis del libro de texto, estos autores proponen cinco aspectos a analizar en los libros de texto de matemáticas:

1. Contenidos y temas matemáticos
2. Cognición y pedagogía
3. Género, etnia, equidad, cultura y valor
4. Comparación de diferentes libros de texto
5. Cuestiones de conceptualización y metodología

Serradó, Bayés y Cardeñoso (2006) agruparon diferentes investigaciones sobre libros de texto dependiendo de la perspectiva que toman. Estos grupos se centran en:

1. La influencia de los libros de texto en la aplicación del currículo en las aulas.
2. Los aspectos didácticos de los libros de texto.
3. La forma con la que material curricular está elaborado y cómo éste determina gran parte de la escolarización.

El primer bloque tiene característica central el papel que juega el libro de texto como vínculo entre las disposiciones curriculares y la acción, por ejemplo, entre las disposiciones curriculares y los profesores o la influencia que tienen en el proceso de enseñanza – aprendizaje. Boostrom (2001) entiende que el libro de texto apoya la instrucción y tiene como objeto crear situaciones de aprendizaje. El segundo bloque se centra en el análisis del discurso, las ilustraciones, la estética o los valores implícitos como el sexismo, racismo, etc. que aparecen a lo largo del libro de texto.

Atendiendo al análisis del conocimiento matemático de los libros de texto, Van Dormolen (1986) sugiere que en dicho análisis se podría buscar la medida en la que tiene cada libro de texto de los siguientes aspectos:

- **Teórico:** teoremas, definiciones y axiomas.
- **Algorítmico:** explicitando “cómo hacer”.
- **Lógico:** reglas sobre cómo podemos o no utilizar la teoría.
- **Metodológico:** “cómo hacer” desde un punto de vista más heurístico como, por ejemplo, la inducción.
- **Comunicativo:** por ejemplo, sobre cómo argumentar.

Smith y Stein (1998) y Stein y Smith (1998), proponen centrar el análisis del libro de texto de las actividades planteadas evaluando la demanda cognitiva que supone para los estudiantes resolverlos. Para ello, estos autores clasifican los problemas según cuatro tipos de demanda que, de menor a mayor dificultad, son:

1. Memoria.
2. Procedimientos sin conexión a conceptos o significados.
3. Procedimientos con conexión a conceptos o significados.
4. Hacer matemáticas.

Brändström (2005) analiza las tareas planteadas en los libros de texto como elementos de organización de los temas y las clasifica según su dificultad. Esta autora calcula la dificultad de las tareas valorando diferentes elementos intrínsecos e independientes de los resolutos presentes en su enunciado y en su resolución, concretamente:

1. La presencia de figuras y su papel en el enunciado.
2. Las operaciones necesarias, su tipo y cantidad.
3. Los procesos cognitivos necesarios de recordar, comprender, analizar, aplicar, etc.
4. La demanda cognitiva según los tipos de Smith y Stein mencionados antes.

En sus conclusiones, esta autora (Brändström, 2005) destaca que los libros de texto organizan las actividades de cada tema por niveles de dificultad, pero que la mayoría de ellas tienen una dificultad muy baja, incluso las de los niveles superiores, por lo que el uso exclusivo de esos libros de texto redundaría en que los estudiantes de mayor capacidad matemática tienen muy pocas oportunidades de aprender matemáticas con la intensidad adecuada a su capacidad.

Ruíz de Gauna, Dávila, Etxeberria y Sarasua (2013), analizaron un conjunto de libros de texto de matemáticas de bachillerato para observar la evolución de diferentes categorías que abarcan el tratamiento didáctico del contenido, el lenguaje gráfico-simbólico, los problemas y ejercicios y las innovaciones metodológicas y modelo de enseñanza-aprendizaje, desde una perspectiva formal, formativa y de contenido.

Dentro del análisis de los contenidos y temas matemáticos, la mayoría de los estudios se han centrado en cuestiones sobre cómo han sido tratados o presentados los diferentes contenidos o temas matemáticos en el libro de texto. Haggarty y Pepin (2002) analizaron los libros de texto de matemáticas y la forma en la que son utilizados por los profesores en los primeros cursos de secundaria en Inglaterra, Francia y Alemania. Concluyeron que los alumnos tenían diferentes oportunidades y diferentes contenidos matemáticos dependiendo del país en el que vivían, ambos aspectos están influenciados por el libro de texto y el profesor.

2.2.3. METODOLOGÍAS DE ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Dentro de los diferentes estudios que se han realizado utilizando los libros de texto como los datos de la investigación, autores como González y Sierra (2004), Ortega (1996), Monterrubio y Ortega (2011), Cañadas y Gómez (2012), Bodí y Valls (2002) realizaron diferentes tipologías de análisis que se pueden extrapolar a otros estudios sobre libros de texto o a temas específicos. Algunas de las investigaciones que recogemos a continuación describen el libro de texto en base a categorías.

2.2.3.1. González y Sierra

Estos autores (González y Sierra, 2004) proponen un instrumento para el análisis de libros de texto que se basado en cuatro categorías: sintáctica, semántica, pragmático-didáctica y sociocultural. Definieron 5 dimensiones para cada una de estas categorías y, a su vez, en cada dimensión se consideraron 3 modalidades que permitieron clasificar los libros de texto según su modalidad dominante. En la siguiente tabla se muestra el análisis propuesto por estos autores:

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	1	Estructura del problema	Clásica	Aplicación	Explicación
	2	Descripciones teóricas	Formales	Formales-intuitivas	Intuitivas
	3	Símbolos utilizados en las tablas	Sin tablas	Con símbolos matemáticos	Con iconos
	4	Símbolos utilizados en las gráficas	Literal	Utilización de números	Elementos explicativos
	5	Tipos de expresiones simbólicas	Familias	Específicas	Variadas
Semántica	6	Fenomenología	Matemáticas	Realistas	Reales
	7	Tipos de descripciones	De conceptos	De reglas	De relaciones
	8	Tipos de tablas	Sin tablas	Descripción local	Cuadros de variación
	9	Tipos de gráficas	Ideogramas	Ábacos	Mensajes topológicos
Pragmático - didáctica	10	Significado de las expresiones simbólicas	Objeto	Regla	Proceso
	11	Función de los ejercicios	Rutinarios	Aplicación	Deducción
	12	Papel de las definiciones	Estructurales-teóricas	Aplicación a problemas	Interpretación
	13	Actividades relacionadas con las tablas	Sin tablas	Construcción	Interpretación/ Construcción
	14	Actividades gráficas	Visualización	Construcción	Interpretación/ Construcción
Socio-cultural	15	Papel de las expresiones simbólicas	Ejemplificación	Escolar	Social
	16	Influencia social y adaptación al currículo	No hay	Contexto intemporal	Contexto actual
	17	Influencias didácticas	Clásica	Adaptada al currículo	Novedosa
	18	Aplicación de las tablas	Sin tablas	Elemento auxiliar	Categoría de objeto
	19	Presentación de las gráficas (estática/ dinámica)	Descontextualizada	Impresa	Nuevas tecnologías
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas	Clásicas	Sencillas	Complejas

Tabla 1. Análisis del libro de texto propuesto por González y Sierra (2004, p. 394)

Este modelo de análisis de libros de texto difiere del objetivo propuesto en este estudio.

2.2.3.2. Monterrubio y Ortega

Monterrubio y Ortega (2011) elaboraron distintos modelos para el análisis y la valoración de libros de texto con el objetivo de ponerlos a disposición de profesores que les permitiese decir el libro de texto más apropiado para su práctica educativa. Además, también pueden considerarse para la elaboración de materiales curriculares por parte del profesorado e indicadores de calidad profesional. Para ello, estos autores se basaron en distintas aportaciones teóricas sobre los aspectos que tener presente un libro de texto y la forma de analizar manuales escolares.

A continuación recogemos el modelo de análisis exhaustivo que se centra en estudiar los siguientes puntos:

- **“Objetivos:** presentación, presencia, adecuación al nivel.
- **Contenidos:** presentación, presencia, selección, secuenciación, organización, adecuación de los contenidos a los objetivos y al nivel educativo, procedimientos teóricos, fundamentación, claridad de la exposición, teoría demostrada, rigor, actualidad, ejemplos, razonamiento matemático, temas transversales, educación en la atención a la diversidad, resolución de problemas como contenido.
- **Conexiones:** dentro de las matemáticas, con la historia de las matemáticas, con otras disciplinas y con la vida real.
- **Actividades:** adecuación de las actividades a los objetivos, a los contenidos y al nivel educativo, secuenciación de las actividades en orden de dificultad, temporalización de la secuenciación de actividades, actividades propuestas, ejercicios propuestos, ejercicios resueltos, cuestiones propuestas, uso de construcciones geométricas, razonamiento matemático, temas transversales, educación en la atención a la diversidad, resolución de problemas como actividad.
- **Metodología:** aspectos metodológicos, justificación de la opción metodológica adoptada, aspectos sociales-afectivos, uso y construcción de materiales didácticos, temporalización de los contenidos y sus actividades correspondientes, metodología de la evaluación, enseñanza personalizada, estimular la creatividad, educación en la atención a la diversidad como metodología, resolución de problemas como metodología.
- **Lenguaje:** uso del lenguaje habitual, lenguaje motivador, comunicación matemática, uso del lenguaje simbólico específico, lenguaje descriptivo, argumentativo, explicativo, imperativo e interrogativo, lenguaje coherente con un tratamiento en temas transversales.
- **Ilustraciones:** cantidad, colores, tipología, finalidad, calidad estética, adecuación de las ilustraciones a los alumnos, a los objetivos, a los contenidos, al contexto y al modelo, claridad, ilustraciones motivadoras, ilustraciones coherentes con un tratamiento en temas transversales.

- **Motivación:** motivación mediante el humor, el juego, las conexiones de las matemáticas y a través de un marco de resolución de problemas, ilustraciones y lenguaje motivadores.
- **Tecnologías de la información y de la comunicación:** propuesta de tareas con la calculadora, con el ordenador y a través de internet; adecuación de las tareas al nivel, a los objetivos y a los contenidos.
- **Evaluación:** evaluación en función de los objetivos de la programación, momento, objetivos, contenidos evaluados, instrumentos, autoevaluación, criterios, evaluación de los aspectos sociales y afectivos.
- **Enfatización:** empleo de recursos gráficos, apartado de resumen, síntesis, afianzamiento de aprendizajes.
- **Aspectos formales:** precio, encuadernación, formato y papel, número de colores utilizados en el texto.
- **Recursos generales:** otras fuentes, material manipulativo, material audiovisual.
- **Entorno:** flexibilidad, destinatario, adecuación, informes externos.” (Monterrubio y Ortega, 2011, p.114-115).

En nuestro estudio pretendemos profundizar en el conocimiento que demandan las actividades propuestas por el libro de texto, por ese motivo, de las dimensiones que proponen Ortega y Monterrubio (2011) nos quedaríamos sólo en la dimensión de las actividades pero con un análisis más profundo de lo que estos autores proponen.

2.2.3.3. López, Guerrero, Carrillo y Contreras

Estos autores (López, Guerrero, Carrillo y Contreras, 2015) analizan el papel de la resolución de problemas en los libros de texto. Para ello, López, Guerrero, Carrillo y Contreras (2015) proponen un instrumento de análisis que contempla las siguientes dimensiones:

1. Tipos de problemas: En esta dimensión se diferencia entre ejercicio y problema y, además, los problemas se clasifican en distintos tipos: Problemas de palabra, problemas para demostrar, problemas para descubrir, problemas de la vida real, problemas de aplicación y problemas de la práctica matemática.

2. Contexto: En esta dimensión se identifica si los ejercicios o problemas están relacionados con un contexto personal, laboral o educativo, social, científico o es puramente matemático. A parte de estos contextos López, Guerrero, Carrillo y Contreras (2015) también distinguen entre contexto de datos realistas o no realistas viendo si los enunciados de los problemas contienen datos acordes con la vida real o no. Además consideran la conexión que establecen con otras ramas de las matemáticas, con otras disciplinas, con la historia matemática y sin conexión.

3. Formulación: Esta dimensión se centra en la forma en la que se presentan los problemas atendiendo a la ilustración (decorativa, representativa, informativa, motivadora o sin ilustración), el número de cuestiones del problema desde el punto de vista sintáctico o semántico (simple: una sola cuestión, agrupada: más de una cuestión, sencilla: una sola estrategia cognitiva, o compleja: más de una estrategia cognitiva) , la información proporcionada (suficiente, insuficiente o excesiva) las representaciones y los recursos empleados (exclusivamente verbal, con recurso de tabla, con recurso de una expresión algebraica, utilizando una gráfica de una función o verbal con ilustración). López, Guerrero, Carrillo y Contreras (2015) consideran que también es necesario considerar si los problemas incluían algún recurso motivador que sirva de guía y de apoyo para los estudiantes. Dentro de este tipo de recursos se encuentran: materiales manipulativos, nuevas tecnologías o ningún recurso extra.

4. Tarea matemática: Esta dimensión tiene en cuenta los requerimientos que un ejercicio o problema le exige al estudiante para resolverlo. Diferenciamos entre identificación y aplicación, razonamiento elemental o complejo e investigación.

- **Identificación y aplicación:** “problemas familiares, que demandan básicamente la identificación y el empleo de conceptos sencillos y la aplicación de procedimientos rutinarios tales como los algoritmos.” (López, Guerrero, Carrillo y Contreras, 2015, p. 86)
- **Razonamiento elemental:** Va más allá de la repetición de algoritmos, es necesario utilizar el razonamiento matemático y establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien la conexión entre distintos aspectos.

- **Razonamiento complejo:** se tratan de los problemas a los de investigación donde predomina el razonamiento matemático donde es necesario establecer relaciones más complejas que en las tareas de razonamiento simple. Suelen tener una única respuesta que es exacta.
- **Investigación:** son problemas cuya resolución exigen cierta comprensión y reflexión así como creatividad para identificar conceptos y enlazar conocimientos y procesos matemáticos. Por tanto, este tipo de problemas requieren investigación, descubrimiento, generalización, manipulación para descubrir regularidades o verificar conjeturas y explicación o justificación de los resultados. Puede tratarse de problemas abiertos o sin respuesta única.

5. Solución: Esta dimensión tiene en cuenta el resultado esperable y distingue entre: respuesta cerrada y abierta, representaciones pedidas en las respuestas, unicidad y exactitud de la solución y necesidad de toma de decisión.

En este tipo de metodología, nos fijamos en la dimensión de tarea matemática. Estos autores (López, Guerrero, Carrillo y Contreras, 2015) definen la tarea matemática como los requerimientos para la resolución de una determinada actividad. En nuestro estudio nos centramos en los conocimientos necesarios para realizar dichas actividades. En el siguiente apartado profundizamos en lo que entendemos como tarea matemática y la jerarquización de tareas propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012) que utilizamos para analizar el libro de texto en la rema de medida.

2.3. TAREAS MATEMÁTICAS SU JERARQUIZACIÓN

2.3.1. TAREAS MATEMÁTICAS

De acuerdo con Henningsen y Stein (1997), las tareas matemáticas constituyen un elemento clave para el aprendizaje de los estudiantes debido a que transmiten mensajes acerca de lo que es la matemática y lo que conlleva hacer matemáticas (Brändstöm, 2005).

Henningsen y Stein (1997) propusieron un modelo basado en las diferentes tareas que tenían lugar hasta el aprendizaje de las matemáticas (Figura 6). Estos autores (1997)

definieron una tarea matemática como una actividad de clase cuyo propósito es captar la atención de los estudiantes sobre un concepto específico, una idea o una habilidad.

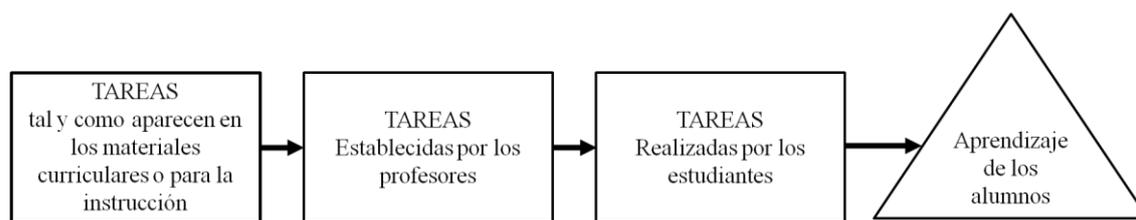


Figura 6. El marco teórico propuesto por Henningsen y Stein (1997, p.529).

Según este modelo, las tareas tienen tres fases que se encuentran dentro del proceso de aprendizaje de matemáticas (Brändstöm, 2005).

La definición propuesta por Henningsen y Stein (1997) es demasiado amplia, por ese motivo, en este estudio entendemos la tarea matemática como el concepto dado por López, Guerrero, Carrillo y Contreras (2015) y que se ajusta al modelo de jerarquización de tareas propuesto por Gairín, Muñoz y Oller (2012) y que se explica en el siguiente apartado.

2.3.2. JERARQUIZACIÓN DE TAREAS PROPUESTA POR GAIRÍN, MUÑOZ Y OLLER

La aportación teórica de Gairín, Muñoz y Oller (2012) se basa en la detección de unos fenómenos que producían variabilidad en la corrección de las pruebas. A partir de estos fenómenos se propusieron una tipología y jerarquización de tareas que nos permite reflejar que tipo de acciones son necesarias para la resolución de un determinado ejercicio o problema. Aunque esta propuesta fue originalmente creada para proponer un modelo de calificación que permitiese disminuir la variabilidad existente en las calificaciones de las pruebas de acceso a la universidad, también nos permite identificar los conocimientos implicados en la resolución de las actividades propuestas por el libro de texto.

La propuesta de Gairín, Muñoz y Oller (2012) plantea hacer una distinción entre las tareas principales y auxiliares. Asimismo, dentro de las tareas auxiliares podemos encontrar aquellas que son específicas o generales. A continuación se recoge lo que se entiende por cada tipo de tarea así.

- **Tareas Principales:** tareas que claramente constituyen el objetivo principal de la calificación.

- **Tareas auxiliares:**

o **Tareas auxiliares específicas:** Son aquellas tareas que juegan un papel instrumental para alcanzar la solución de un problema en el que aparecen tareas principales sobre contenidos específicos.

o **Tareas auxiliares generales:** Tareas matemáticas que ha realizado el alumno a lo largo de su formación matemática anterior (de tipo aritmético, geométrico, gráfico y de representación).



Figura 7. Propuesta teórica de Gairín, Muñoz y Oller (2012) sobre la jerarquización de tareas.

2.4. CONOCIMIENTO CONCEPTUAL Y PROCEDIMENTAL

A lo largo de los años, el debate y discusión entre el significado del conocimiento conceptual y procedimental ha sido un hecho. Principalmente, tal y como afirma Hiebert (1986), este debate y discusión entre diversos investigadores en educación matemática han intentado dar respuesta a cuestiones sobre cómo aprenden los alumnos la matemática y cómo deberían ser enseñadas, lo que deriva a preguntarse sobre qué conocimiento es más importante o dónde se encuentra en equilibrio entre estos dos tipos. En la literatura encontramos diversas aportaciones que definen ambos tipos de conocimiento y que intentan explicar cómo se desarrollan e interactúan estos dos tipos de conocimientos. En este capítulo recopilamos algunos de sus principales referentes.

En el campo de la educación matemática, se ha abordado la temática del conocimiento conceptual y procedimental en diferentes ámbitos como la aritmética, el álgebra, la estadística, la resolución de problemas, el cálculo mental y la estimación (Castro, Prat y Gorgorió, 2016). Los estudios realizados sobre estimación por LeFevre, Greenham y Waheed (1993) y Star y Rittle-Johnson (2009) abarcan exclusivamente el tipo de estimación computacional que consiste en la transformación de un número exacto en una aproximación (Sowder, 1988) por lo que no lo consideramos en esta sección al no tratarse de la estimación métrica. Dado que no se ha estudiado esta temática en el ámbito de la medida, nos quedamos dentro de la teoría general sobre el conocimiento conceptual y procedimental.

Las diferentes perspectivas de las aportaciones teóricas donde se proponen tareas para medir los distintos tipos de conocimiento no siempre son acorde a las definiciones propuestas sobre estos conocimientos (Crooks y Alibali, 2014). Esto dificulta la comprensión de cómo se relacionan el conocimiento conceptual y procedimental lo que concuerda con que ambos conocimientos forman parte de un continuo y no siempre pueden separarse (Hiebert y Lefevre, 1986 y Rittle-Johnson y Alibali, 1999).

La distinción entre el conocimiento conceptual y procedimental sirve para entender la adquisición de conocimiento (Hiebert, 1986). En nuestro caso, nos interesa conocer el conocimiento sobre medida que se pone en juego a lo largo de la Educación Primaria.

2.4.1. HIEBERT Y LEFEVRE

Una de las aportaciones teóricas más reconocidas y he interpretadas a través de los años ha sido la propuesta por Hiebert y Lefevre (Castro, Prat y Gorgorió, 2016). En su investigación, Hiebert y Lefevre (1986) recoge los posicionamientos de diferentes investigadores en educación matemática en este tema, como Piaget, Tulving o Anderson, y observó que las distinciones entre estas teorías en el énfasis que en la clase o categoría.

Aunque la distinción entre el conocimiento conceptual y procedimental nos permite comprender el aprendizaje de las matemáticas, la relación entre ambos tipos de conocimiento no está muy clara (Hiebert y Lefevre, 1986).

2.4.1.1. Definición de conocimiento conceptual y procedimental propuesto por Hiebert y Lefevre

Hiebert y Lefevre (1986), propone las siguientes definiciones para cada tipo de conocimiento:

Conocimiento conceptual: Conocimiento caracterizado por la riqueza de sus relaciones, red conectada de conocimiento donde cada una de estas relaciones es tan importante como cada parte separada de información. Una unidad de conocimiento conceptual no puede ser una pieza aislada de información, sólo puede ser parte del conocimiento conceptual si el individuo es capaz de reconocer sus relaciones con otras partes de la información.

Dentro de este conocimiento, Hiebert y Lefevre (1986) distingue dos niveles entre los que se pueden establecer relaciones entre las distintas partes del conocimiento matemático:

Nivel principal: Las relaciones se forman en el mismo nivel de abstracción donde se encuentra la información. Ejemplo: En la suma de números decimales se espera que los alumnos sean capaces de sumar decenas con decenas, centenas con centenas, etc. Si los alumnos ven esa relación, habrán avanzado en su comprensión de la suma.

Nivel reflexivo: Las relaciones se construyen en un nivel más alto de abstracción donde se encuentra la conexión de la información de las piezas por separado.

Conocimiento procedimental: está compuesto por dos partes distintas:

1ª. Compuesta por el lenguaje formal y representación simbólica de la matemática. Esta parte no incluye un conocimiento sobre el significado del lenguaje matemático.

2º. Algoritmos o reglas para completar tareas matemáticas. Es decir, el procedimiento para resolver tareas matemáticas. Es decir, una secuenciación de instrucciones que se realizan de forma lineal.

Una característica aquí importante es que en el sistema procedimental, los procedimientos están jerárquicamente dispuestos de forma que algunos procedimientos están incrustados

en otro como sub-procedimiento (Hiebert y Lefevre, 1986). Esta afirmación coincide con la aportación teórica propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012) donde se describe una jerarquización de tareas para la resolución de actividades matemáticas.

La mayor diferencia entre estos dos tipos de conocimiento, según Hiebert y Lefevre (1986), es la que la relación principal en el conocimiento procedimental es la secuenciación lineal de los procedimientos (Figura 8.) Mientras que, por otro lado, el conocimiento conceptual se satura con relaciones de muchos tipos (Figura 9.).



Figura 8. Conocimiento procedimental

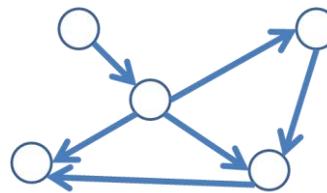


Figura 9. Conocimiento conceptual

La distinción entre estos dos tipos de conocimiento está asociada, según Hiebert y Lefevre (1986), con el aprendizaje significativo y memorístico. En este sentido, Hiebert y Lefevre (1986) defiende que el conocimiento conceptual no puede ser generado exclusivamente mediante el aprendizaje memorístico, mientras que el conocimiento procedimental puede ser o no aprendido con significado y sentido. Es decir, aquellos procedimientos que se aprendan significativamente son los que están ligados al conocimiento conceptual.

Los que se aprende de memoria no permite generar una red conceptual de conocimiento pero, más adelante, el aprendiz puede reconocer y establecer relaciones entre lo que ha aprendido de memoria dándole el significado que tiene.

2.4.4.2. Relación entre el conocimiento conceptual y procedimental

Según Hiebert y Lefevre (1986), no todo el conocimiento se puede clasificar como conceptual o procedimental, puede encontrarse en ambos puesto que no está claro donde empieza uno y acaba el otro. Por otra parte, estos autores (Hiebert y Lefevre, 1986) consideran que el conocimiento matemático en toda su extensión incluye relaciones significativas y fundamentales entre el conocimiento conceptual y procedimental. Las

conexiones entre el conocimiento conceptual y procedimental facilitan la adquisición y uso del conocimiento procedimental.

Consideramos que dentro del conocimiento matemático encontramos tanto conocimiento conceptual como procedimental y coincidimos con Hiebert y Lefevre (1986) que si no existen conexiones entre el procedimiento y el conocimiento conceptual, la mecanización del procedimiento se deteriora y no podrá ser recordado o estarán combinadas con otros subprocedimiento de forma inapropiada.

2.4.2. RITTLE-JOHNSON Y ALIBALI

Estas autoras (Rittle-Johnson y Alibali, 1999) recogen en su investigación las siguientes definiciones de conocimiento conceptual y procedimental:

Conocimiento conceptual: Es la comprensión explícita o implícita de los principios que gobiernan un campo y de las interrelaciones entre las partes del conocimiento en dicho campo.

Conocimiento procedimental: Acciones secuenciadas con la finalidad de resolver un problema.

Para Rittle-Johnson y Alibali (1999), estos dos tipos de conocimiento no se desarrollan de forma independiente, sino que, afirman que es probable que el conocimiento conceptual influya en los procedimientos utilizados, tal y como respaldan diversas teorías sobre la adquisición de conocimiento que sugieren que la generación de los procedimientos está basado en la comprensión conceptual.

Por otro lado, la existencia de una relación interactiva entre ambos tipos de conocimiento que implica que si aumenta uno de los dos tipos de conocimiento, podría mejorar el otro tipo de conocimiento, que, de nuevo, volverá a conducir un aumento mayor en el primero (Rittle-Johnson y Alibali, 1999).

En ocasiones, los alumnos aprenden antes un procedimiento y, más adelante, desarrollan la comprensión de los conceptos subyacentes. Ahora bien, el conocimiento procedimental sólo puede llevar a un mayor conocimiento conceptual en determinadas circunstancias,

como por ejemplo, tras una ejercitación extensa del procedimiento o cuando la relación entre el procedimiento y entre los conceptos es obvia (Rittle-Johnson y Alibali, 1999).

2.4.3. STAR Y STYLIANIDES

Star (2000, 2005) y Star y Stylianides (2013) recogen en sus investigaciones la siguiente conceptualización del conocimiento conceptual y procedimental:

Conocimiento conceptual: conocimiento de los principios o los conceptos, que implican relaciones pero no necesariamente ricas. Este conocimiento abarca no sólo los conceptos sino también la forma en que los conceptos pueden ser conocidos (Star y Stylianides, 2013).

Conocimiento procedimental: conocimiento de los procedimientos, incluidas las secuencias de acción y los algoritmos utilizados en la resolución de problemas (Star y Stylianides, 2013).

Star (2005) define estos dos tipos de conocimiento separando ambas dimensiones basándose en que ambos conocimientos pueden tener una calidad profunda o superficial. Ahora bien, este autor (Star, 2000) su artículo sobre la “reconceptualización” del conocimiento procedimental nos recuerda que la comprensión en matemáticas es la síntesis del saber y el hacer, no la realización de uno en la ausencia del otro. Para este autor (Star, 2000) el alumno ha adquirido los conocimientos cuando comprende, conoce los hechos o principios y los utiliza para realizar tareas como reconocer, identificar, explicar, evaluar, juzgar, crear, inventar, comparar y elegir. Por otra parte, el alumno ha adquirido los procedimientos cuando es capaz de utilizarlos con fluidez y está automatizado.

2.4.4. BAROODY, FEIL Y JOHNSON

Estos autores (Baroody, Feil y Johnson, 2007) siguiendo la propuesta de Star (2005) recogen en su investigación las siguientes definiciones de conocimiento conceptual y procedimental:

Conocimiento conceptual: conocimiento acerca de los hechos, generalizaciones y principios.

Conocimiento procedimental: acciones o manipulaciones mentales que incluyen reglas, estrategias y algoritmos para completar una tarea.

Estos autores sugieren que aunque pueda existir en cierta manera un conocimiento conceptual superficial y un conocimiento procedimental superficial, un conocimiento procedimental profundo no puede existir, hasta cierto punto, sin un conocimiento conceptual profundo o viceversa.

En este sentido, estos autores (Baroody, Feil y Johnson, 2007) proponen el siguiente esquema que refleja la relación entre el conocimiento conceptual y procedimental que propuso Star (2005) en su marco teórico:

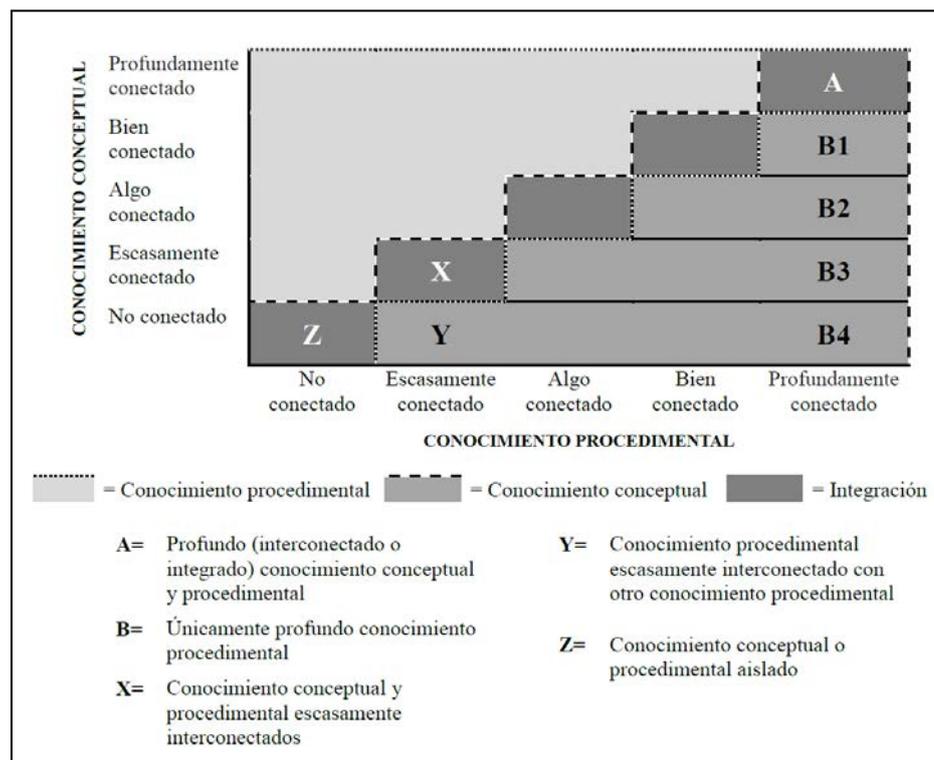


Figura 10. Relación entre el conocimiento procedimental y conceptual propuesto en Star (2005) y representado por Baroody, Feil y Johnson (2007) (p.122)

2.4.5. CROOKS Y ALIBALI

Estas autoras (Crooks y Alibali, 2014) recogieron en su investigación cómo se define el conocimiento conceptual en la literatura de pensamiento matemático:

Conocimiento conceptual: Para estas autoras el conocimiento conceptual tiene dos dimensiones:

1. Conocimiento de los principios generales que incluye el conocimiento de las reglas, definiciones, conexiones y aspectos de la estructura del dominio.
2. Conocimiento de los principios subyacentes a los procedimientos. Este conocimiento implica saber por qué funcionan ciertos procedimientos para la resolución de un problema, cuál es el propósito de cada paso en un procedimiento, conocer las conexiones entre estos pasos y sus fundamentos conceptuales.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS

3.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el año 2014 los responsables del Programa de *Millora i Innovació en la Formació de Mestres* (MIF) propusieron una Prueba de Aptitud Personal para el acceso a los Grados de Educación Primaria (GEP) y Educación Infantil (GEI) de todas las universidades públicas y privadas de Catalunya con el objetivo de mejorar el nivel de los alumnos que ingresan en la carrera docente.

Ante esta situación, el grupo de investigación EMiC:COM, reconocido y financiado por la Direcció General de Recerca, Generalitat de Catalunya (Ref. 2014 SGR 00723), preguntó cuál era el conocimiento disciplinar en matemáticas necesario para seguir con aprovechamiento las materias de Matemáticas y de Didáctica de las Matemáticas del Grado en Educación Primaria. A este conocimiento lo denominamos como conocimiento matemático fundamental (CMF) en una comunicación del congreso de la SEIEM XVIII (Castro, Mengual, Prat, Albarracín, y Gorgorió, 2014).

En este contexto, el objetivo inicial de la investigación presentada en esta memoria era identificar cuál era el conocimiento matemático subyacente a los libros de texto puesto que consideramos que este conocimiento debía ser parte del conocimiento matemático fundamental necesario para ejercer como maestro de matemáticas. No obstante, al llevar a cabo una primera aproximación al análisis observamos que el conocimiento necesario para realizar las actividades propuestas por el libro de texto no se adecuaba a lo que entendemos como conocimiento matemático fundamental. Tras esta primera aproximación al análisis donde se realizó un análisis de todas las actividades propuestas en el libro de texto, decidimos realizar un análisis más exhaustivo de la rama de la medida que es la parte fundamental recogida en esta memoria de tesis.

Por tanto, en la investigación actual sobre Didáctica de la Matemática, nos ubicamos en una línea prioritaria en el campo de las indagaciones sobre libros de texto. Aunque la mayoría de los estudios centrados en los libros de texto tienen como objetivo la realización de un análisis global, en los últimos años se realizado diversas investigaciones tomando contenidos específicos en distintos cursos educativos (Pino y Blanco 2008). En este estudio nos hemos centrado en las actividades propuestas por el libro de texto de la editorial Vicens Vives en la rama de la medida.

Desde los inicios de la educación obligatoria, la implementación y el uso del libro de texto en el aula de matemáticas ha sido un hecho. Además, juega un papel importante en el aula debido a que la mayoría de los profesores utiliza el recurso del libro de texto la mayor parte del tiempo (Azcárate y Serradó, 2006; Jones y Tarr, 2007; Nicol y Crespo, 2006; Pepin, et al., 2013; Vincent y Stacey, 2008).

Por este motivo, el libro de texto ha sido objeto de investigaciones internacionales desde distintas perspectivas debido a su participación en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Las primeras investigaciones se centraron en describir su estructura, es decir, el diseño del material, las características del texto o la ilustración, la amenidad o facilidad para la comprensión lectora, entre otras (Azcárate y Serradó, 2006). Incluso en tiempos de digitalización, donde el impacto de la tecnología es un hecho evidente, el libro de texto todavía ocupa un lugar central dentro de los distintos recursos docentes para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje (Pepin, Gueudet y Trouche, 2013).

La resolución de problemas como eje vertebrador de la enseñanza de las matemáticas ha propiciado que diversos investigadores en educación matemática hayan valorado la calidad de las propuestas de enseñanza de las matemáticas reflejadas en los libros de texto, en función de la calidad de los ejercicios o problemas que contienen (Gutiérrez y Jaime, 2013). Dado que no es un objetivo prioritario en este estudio la diferenciación entre ejercicio o problema propuesto por el libro de texto, nos referiremos a las actividades propuestas. De hecho, Grugnetti and Jaquet (2005) sugieren que no existe en la literatura una definición completamente consensuada sobre qué actividades pueden considerarse un problema de matemáticas debido a las diferentes concepciones existentes sobre lo que son las matemáticas.

Por otro lado, desde hace muchos años, el currículo propone una enseñanza de las matemáticas en espiral donde se abordan los mismos temas matemáticos a lo largo de los diferentes cursos, en los cuales se profundiza o se aumenta la complejidad de los mismos. La justificación de esta propuesta es ayudar o facilitar a los estudiantes la creación de redes de conocimiento cada vez más complejas a medida que van avanzando de curso y van profundizando en estos temas (Gutiérrez y Jaime, 2013).

Luelmo (2001) observó que en la etapa de Educación Primaria el trabajo de la medida se centra rápidamente en la manipulación numérica donde prevalece el fenómeno de la

aritmización propuesto por Chamorro. En el apartado 2.5.7. recogemos las observaciones que realizó Chamorro (2001) sobre el tratamiento de la medida propuesta por los libros de texto.

3.2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Dado que el libro de texto es el recurso más ampliamente utilizado en las clases de matemáticas en la etapa de Educación Primaria y distintos autores (Chamorro, 2001; Luemo, 2001) ponen de manifiesto las dificultades del tratamiento de la medida en esta etapa, nuestro objetivo principal es:

“Determinar la forma en la que el libro plantea el aprendizaje de la medida a partir de un análisis de tareas propuestas.”

Para dar respuesta a este objetivo general nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

OE1: Desarrollar un tipo de análisis basado en la jerarquización de tareas propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012) para identificar tareas propuestas por el libro.

El tipo de análisis de contenido matemático basado en la jerarquización de tareas ha sido utilizado en estudios previos sobre la calificación de pruebas matemáticas (Mengual y Albarracín, 2013; Mengual, Gorgorió y Albarracín, 2013) y ha mostrado su potencialidad para estructurar contenidos matemáticos. Por este motivo, nuestro primer objetivo es trasladar este tipo de análisis a las actividades propuestas por el libro de texto.

OE2: Caracterizar las tareas de medida propuestas por el libro de texto.

A partir del análisis de las actividades se han caracterizado las tareas de medida propuestas y se han realizado esquemas de conocimiento. En este sentido, se han presentado estos resultados en congresos: Mengual, Gorgorió y Albarracín (2015) y Mengual, Gorgorió y Albarracín (2016) y en la revista REDIMAT (*Journal of Research in Mathematics Education*): Mengual, Gorgorió, y Albarracín (2017). Con este objeto pretendemos mostrar el conocimiento necesario para realizar las actividades de medida propuestas por el libro de texto.

OE3: Identificar el tipo de tratamiento de la medida propuesto por el libro de texto.

La realización de los objetivos anteriores nos permite identificar el tipo de tratamiento propuesto por el libro de texto y comprobar si continúa el fenómeno de aritmetización de la medida propuesto por Chamorro (2001). Además, se estudia que parte del total de las actividades recogidas por el libro de texto se encuentran aritmetizadas. Por último, dentro de este objeto comparamos el tratamiento de la medida propuesto por el libro de texto con distintas aportaciones teóricas recogidas en el marco teórico.

4. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se recoge la perspectiva metodológica en la que se enmarca el presente estudio así como la muestra seleccionada y la justificación de la misma. Asimismo, se recoge en un apartado qué se entiende por análisis del contenido en investigación ya que vamos a analizar el contenido de los libros de texto de matemáticas de la editorial Vicens Vives para la etapa de Educación Primaria en la rama de la medida.

4.1. PERSPECTIVA METODOLÓGICA

4.1.1. CUALITATIVA

El tipo de objetivos que nos hemos propuesto en el siguiente estudio requieren un marco metodológico cualitativo ya que, tal y como afirma Sandín (2003), la investigación cualitativa es “una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimiento.” (p.123)

Para Pérez (1994) una investigación cualitativa es “un proceso activo, sistemático y riguroso de indagación dirigida en el cual se toman decisiones sobre lo investigable.” (p.46)

Además, la investigación cualitativa no implica exclusivamente aplicar un instrumento a unos datos y obtener resultados, sino, de ir reelaborando dicho instrumento y categorías según lo requiera el objetivo de estudio y las demandas (Pérez, 1994).

A lo largo de la investigación realizada se han tomado decisiones para mejorar los resultados de la misma para dar respuesta a los objetivos marcados para este estudio.

4.1.2. INTERPRETATIVA

Tal y como afirma Sandín (2003), las definiciones sobre qué es una investigación cualitativa son variadas, todas tienen rasgos esenciales atribuibles a este tipo de investigación que son el carácter *interpretativo*, *constructivista* y *naturalista*.

Según Stake (1998), la interpretación es una parte fundamental de cualquier investigación puesto que, el investigador, debe realizar una interpretación fundamentada tomando una postura objetiva y asertiva.

Para llevar a cabo este estudio se pretende realizar una investigación cualitativa desde una perspectiva interpretativa (Bisquerra, 2004). Lograr este objetivo requiere hacer un análisis cualitativo de contenido de los libros de texto desde la perspectiva del conocimiento matemático implicado.

4.1.3. ESTUDIO DE CASOS

El estudio de casos es método ampliamente utilizado en las ciencias sociales y humanas, y tiene como objetivo la comprensión en profundidad una realidad social y educativa (Sandín, 2003; Bisquerra, 2004). En nuestro estudio pretendemos realizar un estudio de caso que, siguiendo a Rodríguez Gómez et al. (1996), implica un proceso de indagación caracterizado por un análisis detallado, exhaustivo, sistemático y en profundidad del libro de texto. Bisquerra (2004), afirma que el estudio de casos puede abarcar tanto estudios de un único caso como de múltiples casos.

En nuestro estudio abarcamos la complejidad de un caso particular, una editorial de libros de texto donde la justificación de su elección viene recogida en el apartado 4.2. En este sentido, Stake (1998), afirma que el estudio de un caso singular busca comprender su actividad en circunstancias importantes, en nuestro estudio, el tratamiento de la medida en el libro de texto, medio utilizado como vehículo de conocimiento en el aula.

Bisquerra (2004) y Sandín (2003), recogen que para algunos autores el estudio de casos no es una metodología en sí sino una estrategia que permite seleccionar el tipo de estudio y donde encontrar la fuente de información apropiada. Nosotros nos fundamentamos en las características que según los siguientes autores son propios del estudio de casos.

4.1.3.1. Definición del estudio de casos

En esta apartado recogemos algunas de las definiciones existentes del estudio de casos:

- Yin (1989): Descripción y análisis detallado de unidades sociales o entidades educativas únicas.
- Stake (1998): Estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas.
- Simons (2001): Investigación de la particularidad, la unicidad, del caso singular.
- Merriam (1988): Es una descripción y un análisis, intensivos y holísticos de una entidad, un fenómeno o una unidad social. (Citado en Simons, 2011, p. 41)
- Para Pérez (1994), supone analizar con intensidad el fenómenos con el objetivo de establece generalizaciones acerca de una población más amplia.
- Para Bisquerra (2004), los casos son “situaciones o entidades sociales únicas que merecen interés en investigación” (p.311).

Pretendemos que, tal y como señala Stake (1998), este estudio de caso abarque la complejidad de un caso particular, es decir, de los libros de texto de una de las editoriales más ampliamente utilizadas en Cataluña y España a lo largo de toda la etapa de Educación Primaria; para comprender todo el conocimiento matemático del bloque de medida que se trabaja en el aula partiendo de que el libro de texto es el material de apoyo más demandado por los profesores.

4.1.3.2. Tipos de estudios de casos

Yi (1989), distingue tres tipos de métodos de estudio de casos atendiendo al tipo de objetivos que persigue:

- **Exploratorio.** Sus resultados sirven para formular preguntas de investigación más precisas o hipótesis que puedan ser probadas.
- **Descriptivo.** Que buscan describir un caso particular.
- **Explicativo.** Facilita la interpretación de las estrategias o procesos que aparecen en un evento o fenómeno específico.

En segundo lugar, Stake (1998) identifica tres tipos de estudio de casos que varía en función del objetivo de investigación:

- **Estudio intrínseco de casos.** Se desea lograr una mayor comprensión del caso objeto de estudio. Se elige el caso porque hay un interés intrínseco en él y no busca la generalización de una teoría. El resultado final tiene un carácter descriptivo.
- **Estudio instrumental de casos.** Se desea lograr una mayor comprensión de un tema o refinar una teoría. Esto implica que el caso juega un papel secundario y sirve de instrumento para alcanzar otro objetivo más allá del mismo.
- **Estudio colectivo de casos.** Se desea realizar un estudio intensivo de varios casos con el objetivo de indagar en un fenómeno, población o condición general.

Dentro de esta clasificación nuestro estudio se enmarcaría en el estudio instrumental de casos puesto que pretendemos comprender el tratamiento de la medida que ofrecen los libros de texto en la etapa de Educación Primaria. Además, tal y como señala Stake (1998), en un estudio instrumental es importante el caso seleccionado puesto que no todos sirven de la misma manera. En nuestro estudio buscamos que sea lo más representativo posible utilizando como caso una de las editoriales de texto más ampliamente utilizadas en España y en Cataluña.

Por último, Merriam (1988, citado por Bisquerra, 2004 y Pérez, 1994), distingue tres tipos atendiendo a la naturaleza del resultado final.

- **Estudio de casos descriptivo.** El resultado final es un informe descriptivo sin fundamentación teórica ni hipótesis previas.
- **Estudio de casos interpretativo.** El resultado final incluye descripciones densas y ricas con el objetivo de interpretar y teorizar sobre el caso.
- **Estudio de casos evaluativo.** No solo busca realizar una descripción y una explicación del objeto estudiado sino que, además, orienta a la formulación de juicios de valor que sirvan de punto de partida para la toma de decisiones.

En nuestro estudio nos posicionaríamos en un estudio de casos evaluativo porque no sólo se pretende realizar una descripción del libro de texto sino que los resultados son orientativos para cambiar parte de la enseñanza de la medida.

4.1.3.3. Características del estudio de casos

Tal y como afirma Bisquerra (2004), una de las características principales del estudio de casos es su fundamentación y su carácter interpretativo. Las características de este tipo de estudio las recoge Pérez (1994), y son las siguientes:

- **Particularista:** En cuanto a que se centran en una situación, evento, programa o fenómeno particular. El caso es importante por lo que revela acerca del fenómeno y lo que pueda representar.
- **Descriptivo:** El resultado de este tipo de investigaciones es una descripción rica y “densa” (entendiendo densa como completa y literal) del fenómeno objeto de estudio, lo que implica una comprensión global y profunda del caso.
- **Heurístico:** Ilumina la comprensión del lector del fenómeno objeto de estudio: puede descubrirle nuevos significados, ampliar su experiencia o confirmar lo que ya se sabe.
- **Inductivo:** Se basan en el razonamiento inductivo para formular hipótesis y descubrir relaciones y conceptos a partir de un análisis detallado de los datos, que permite realizar generalizaciones.

Siguiendo a Bisquerra (2004), este último punto, la característica inductiva del proceso ha recibido numerosas críticas debido a que no es posible realizar generalizaciones a partir de un caso singular. Para Stake (1998), el estudio de casos sí que debería permitir realizar generalizaciones puesto que, sea uno o varios casos, se estudian en profundidad. Las generalizaciones que se pueden realizar a partir de un estudio de casos como “generalizaciones menores” (Stake, 1998). Sin embargo, sí que es posible preguntarse qué sucede en otros casos de forma que permita realizar dichas generalizaciones.

Como se ha señalado antes, nuestro estudio se centra en una de las editoriales con más demanda en Cataluña y España. Pretendemos lograr una descripción exhaustiva y rica del conocimiento matemático en la rama de medida que está presente en el aula a través de los libros de texto y generalizar, a partir de este análisis, esquemas de conocimiento que reflejen la evolución de los mismos a lo largo de la etapa de Educación Primaria curso a curso.

4.3.1.4 El proceso de investigación de un estudio de casos

Aunque Stake (1998), afirma que es complicado estructurar el procedimiento para realizar una investigación con este método, Montero y León (citado en Bisquerra, 2004), define unos pasos delimitados y secuenciados para el desarrollo de este método e identifica 5 fases:

1. La selección y definición del caso.

En este paso se selecciona el caso indicando los campos en los que es relevante el estudio. Esta parte está definida en el Capítulo 3. donde se define el problema de investigación.

2. La elaboración de una lista de preguntas.

Una vez identificado el problema de investigación nos planteamos unos objetivos que guíen esta investigación y la selección y recogida de datos. Estos objetivos se encuentran recogidos en el Capítulo 3.

3. La localización de las fuentes de datos.

La justificación y la selección de la muestra la detallamos en el siguiente apartado 4.2. Selección de la muestra y justificación de este capítulo.

4. El análisis y la interpretación.

El análisis cualitativo de las actividades presentes en el libro de texto se desarrollará a partir de la jerarquización de tareas matemáticas propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012) explicado en el Capítulo 1. Consideramos esta propuesta como una guía que nos debería permitir elaborar una jerarquización adaptada al tipo de actividades que se encuentran en el libro de texto de matemáticas de Educación Primaria.

5. La elaboración del informe.

A lo largo del Capítulo 5. Análisis, se detalla minuciosamente y de forma cronológica el procedimiento seguido. Asimismo, se busca facilitar la comprensión del análisis utilizando la jerarquización de tareas matemáticas propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012) mediante ejemplos.

Otras recopilaciones literarias sobre el estudio de casos como la elaborada por Pérez (2004) describen otras fases que se encontrarían incluidas en la anterior, por ese motivo, hemos reflejado en esta memoria la propuesta por Montero y León al ser más detallada.

4.2. SELECCIÓN DE LA MUESTRA Y JUSTIFICACIÓN

Con todo lo expuesto anteriormente, la selección y justificación del caso objeto de estudio constituye una de las cuestiones fundamentales dentro de este tipo de investigación (Sandín, 2003). En el apartado se recoge cual es la muestra escogida para este estudio y la justificación de la misma.

4.2.1. Justificación de la muestra seleccionada

La “*Panorámica de la edición española de libros*” lleva realizando estudios estadísticos de la producción editorial española desde 1988. Por tanto, este recurso constituye una importante fuente de información así como una herramienta de consulta que nos permite conocer, analizar y valorar la realidad del sector del libro en nuestro país y de la evolución en la producción del sector editorial. Los últimos estudios llevados a cabo en los años 2013 y 2014 (MEC, 2014; 2015) encontramos una clasificación de las empresas del sector de edición de libros de texto a partir del número de títulos publicados. A continuación recogemos las tablas correspondientes al año 2013 y 2014 que corresponden al momento de la selección de la muestra y donde se puede comprobar que la editorial Vicens Vives esta en el segundo y tercer puesto:

La información editorial (Las 25 empresas editoras)				Materia 08 Enseñanza. Educación.	
Nº de orden	Nombre de la editorial	Nº ISBN inscritos	% respecto del total de ISBN en la materia	Nº de títulos inscritos	% respecto del total de títulos en la materia
1	Anaya	2.224	15,8	2.224	16,5
2	Editorial Vicens-Vives, S.A.	1.272	9,1	1.272	9,4
3	Ediciones SM	1.048	7,5	1.048	7,8
4	Editorial Mad, S.L.	575	4,1	434	3,2
5	Edebé	565	4,0	565	4,2
6	McGraw-Hill Interamericana de España, S.L.	446	3,2	446	3,3
7	Editorial Editex	398	2,8	389	2,9
8	Pearson Alhambra	384	2,7	384	2,8
9	Editorial Teide, S.A.	367	2,6	367	2,7
10	Planeta Grandes Obras, S.A.	292	2,1	292	2,2

Tabla 2. Clasificación empresas edición libros de texto 2013 extraída del MEC (2014, p. 136).

La información editorial (Las 25 empresas editoras)				Materia 08 Enseñanza. Educación.	
Nº de orden	Nombre de la editorial	Nº ISBN inscritos	% respecto del total de ISBN en la materia	Nº de títulos inscritos	% respecto del total de títulos en la materia
1	Anaya	2303	13,7	2303	14,3
2	Santillana	1433	8,5	1433	8,9
3	Editorial Vicens-Vives, S.A.	865	5,2	865	5,4
4	Edebé	656	3,9	656	4,1
5	Editorial Editex	610	3,6	610	3,8
6	Ediciones SM	492	2,9	492	3,0
7	Voramar	480	2,9	480	3,0
8	Editorial Casals, S.A.	383	2,3	383	2,4
9	Editorial Everest, S.A.	364	2,2	364	2,3
10	Editorial Mad, S.L.	349	2,1	268	1,7

Tabla 3. Clasificación empresas edición libros de texto 2014 extraída del MEC (2015, p. 132).

Asimismo, en las siguientes tablas se recogen qué editoriales son las principales en la edición en catalán en los años 2013 y 2014, de lo que se extrae que Vicens-Vives es una de las principales editoriales de la edición en catalán.

PRINCIPALES EDITORIALES DE LA EDICIÓN EN CATALÁN AÑO 2013					
Nº de orden	Editorial	Nº ISBN inscritos	% respecto del total de ISBN	Nº de títulos	% respecto del total de títulos
1	Edebé	409	5,2	409	5,2
2	Editorial Vicens-Vives, S.A.	383	4,8	383	4,9
3	Editorial Barcanova, S.A.	343	4,3	343	4,4
4	Labutxaca	286	3,6	286	3,6
5	Editorial Teide, S.A.	235	3,0	235	3,0
6	Estrella Polar	209	2,6	209	2,7
7	Susaeta Ediciones, S.A.	196	2,5	196	2,5
8	Columna Edicions, Llibres i Comunicació, S.A.	187	2,4	187	2,4
9	La Galera, S.A.U.	177	2,2	177	2,3
10	Universitat Autònoma de Barcelona	170	2,1	170	2,2

Tabla 4. Principales editoriales en catalán en el 2013 (MEC 2014, p.108).

PRINCIPALES EDITORIALES DE LA EDICIÓN EN CATALÁN AÑO 2014					
Nº de orden	Editorial	Nº ISBN inscritos	% respecto del total de ISBN	Nº de títulos	% respecto del total de títulos
1	Edebé	361	4,3	361	4,4
2	Editorial Barcanova, S.A.	322	3,9	322	3,9
3	Santillana, S.L.	277	3,3	277	3,4
4	Vorammar	275	3,3	275	3,3
5	Enciclopèdia Catalana, S.A.	274	3,3	264	3,2
6	Estrella Polar	273	3,3	273	3,3
7	Editorial UOC, S.L.	271	3,3	271	3,3
8	Susaeta Ediciones, S.A.	212	2,6	212	2,6
9	Anaya	210	2,5	210	2,6
10	Editorial Vicens-Vives, S.A.	203	2,4	203	2,5

Tabla 5. Principales editoriales en catalán en el 2013 (MEC 2014, p.105).

El primer paso consistió en describir las tareas que requería cada ejercicio para dar solución al mismo. Es decir, una pequeña “transcripción” de la información en forma de tareas, lo que nos permitió tener una primera visión de la información recogida en los libros de texto.

Observamos que el conocimiento más rico y más interesante, aunque no fue una sorpresa, se encontraba en el ciclo superior. Decidimos comenzar haciendo un análisis descriptivo más detallado de las tareas que requerían unas pocas actividades del bloque de medida. Tomamos el tema del tiempo y el sistema sexagesimal y seleccionamos las actividades referentes a una sección este tema.

Una vez hecho el análisis lo validamos con un comité de expertos para ver si era este el camino que debíamos seguir. Aceptamos este nuevo tipo de análisis más detallado por generar una perspectiva más rica del conocimiento matemático subyacente al libro de texto de matemáticas.

Con esta perspectiva analizamos todas las actividades contenidas en los temas de medida correspondientes al ciclo superior de Educación Primaria. Gracias a este análisis obtuvimos un instrumento que nos permitió analizar el resto de actividades de medida a lo largo de los dos ciclos restantes que quedaban por analizar, el ciclo medio y el ciclo inicial.

4.2.2. FORMATO DE LOS DATOS

El currículo que siguen los libros de Vicens Vives analizados es el recogido en el Decreto 142/2007, de 26 de junio, por el cual se establece la ordenación de la enseñanza de Educación Primaria en Cataluña. En este currículo los contenidos del bloque de medida se dividen en la comprensión de las magnitudes medibles, de las unidades y del proceso de medir, y en la aplicación de técnicas e instrumentos adecuados para medir.

En nuestro estudio analizamos las diferentes actividades relacionadas con la medida que aparecen en los libros de texto a lo largo de los tres ciclos. En total se han analizado 1912 actividades: 1002 del ciclo superior, 766 del ciclo medio y 144 del ciclo inicial.

A continuación describimos la forma en la que se presentan los contenidos de matemáticas en los libros de texto correspondientes a los tres ciclos de Educación Primaria en la propuesta editorial de Vicens Vives.

En cada curso del ciclo inicial se dispone de 3 libros por curso, uno por cada trimestre, que contienen 4 temas cada uno. Las actividades del bloque de medida se trabajan de forma transversal a lo largo de estos 12 temas. En particular, esta editorial junta los contenidos de medida y de espacio y forma dentro de un mismo bloque. La introducción de los temas se basa en el planteamiento de diferentes ejercicios acompañados de una ilustración que introducen los conceptos básicos que se desarrollan a lo largo del tema. Los contenidos de cada tema se introducen a través de ejemplos y actividades que, en su mayoría, aportan un soporte gráfico o visual que facilita la resolución de las mismas. Al final de cada trimestre aparece una sección llamada “recuerda lo que has aprendido” donde se plantean actividades cuya finalidad es practicar y repasar lo que se ha aprendido en los temas anteriores. Seguidamente, se plantean actividades enfocadas a practicar las competencias básicas llamada “practico competencias básicas”. Por último se ofrece un taller con diferentes curiosidades y manualidades relacionadas con los conocimientos adquiridos.

En el ciclo medio, a diferencia del ciclo inicial, los alumnos trabajan con un único libro durante todo el curso académico y que comprende 12 temas. Al igual que en el ciclo inicial, en el ciclo medio las actividades de medida se tratan transversalmente a lo largo de todo el curso. La introducción de cada tema abarca ilustraciones y curiosidades relacionadas con las matemáticas, además incluye actividades relativas a los contenidos del tema y de otros temas extramatemáticos. En el transcurso del tema se presentan los diferentes conceptos a través de ejemplos y con ayuda de esquemas, dibujos o fotografías. A continuación, se practica y refuerza dichos contenidos por medio de ejercicios. Al final de cada tema se proponen actividades que conllevan la práctica, aplicación y refuerzo de lo que se ha aprendido, además al final se plantean actividades de razonamiento matemático. Posteriormente, encontramos un apartado de repaso y otro de resolución de problemas relacionados no sólo con el tema anterior sino con otros ya aprendidos durante su etapa educativa previa. Al final de cada trimestre encontramos una propuesta de evaluación de competencias básicas y ejercicios para repasar contenidos, cuya finalidad es consolidar los conceptos matemáticos trabajados durante el trimestre.

El ciclo superior cuenta con un libro por curso que abarca un total de 15 temas. A diferencia de los ciclos anteriores, en este ciclo el trabajo de la medida se hace en temas concretos y no de forma transversal. La introducción del tema sigue el mismo planteamiento que en el ciclo medio. Dentro de cada tema encontramos conceptos y procedimientos que se presentan a través de situaciones reales y con soporte gráfico. A continuación, se plantean actividades que ejercitan y refuerzan los contenidos aprendidos. Al final de cada tema encontramos un apartado de competencias básicas donde encontramos tres subapartados de ejercicios. El primer subapartado (denominado “practica”) plantea problemas de repaso y refuerzo, el segundo subapartado (denominado “aplica”) se basa en la resolución de problemas y, por último, el subapartado “profundiza” plantea problemas más complejos. Tras este apartado encontramos otro llamado “razona y explica” donde se plantean actividades de cálculo mental, ingenio, mediante el ordenador o internet y problemas. Después de cada 2 o 3 temas se recopila un apartado de repaso donde se plantean actividades relacionadas con lo que se ha aprendido en los temas anteriores. Asimismo, en otro tema donde no hay repaso se evalúan las competencias básicas útiles para el quehacer diario del estudiante. Por último se plantean talleres de informática donde se resuelven problemas utilizando diferentes aplicaciones informáticas.

4.3. VALIDACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Pérez (1994) y Stake (1998), proponen como método para asegurar la validez y la rigurosidad del estudio de casos la triangulación con el fin de reducir al mínimo las falsas representaciones o interpretaciones. Una posible estrategia de triangulación propuesta por Stake (1998) versa en la presentación de las observaciones con nuestra interpretación a una comisión de investigadores o expertos que propongan interpretaciones alternativas. Así, en la medida en que se esté de acuerdo sobre el trabajo realizado, la interpretación estará triangulada.

Los diferentes pasos y el análisis detallado que se ha llevado a cabo en el presente estudio se ha presentado en distintos seminarios organizados por el grupo EMiC:COM. Asimismo, se han presentado comunicaciones en congresos nacionales e internacionales. En el congreso de la CIEAEM 67 se presentó una comunicación con el título “*The Mathematical Textbook as an obstacle in the learning of measure* (Mengual, Gorgorió, y Albarracín,

2015) y en el congreso de la SEIEM XX se presentó una comunicación con el título “*Las actividades de medida en el libro de texto: un estudio de caso*” (Mengual, Gorgorió, y Albarracín, 2016). En ambos congresos se mostró la forma en la que se ha llevado a cabo el análisis de las actividades de medida presentes en el libro de texto.

Por último, se publicó un artículo donde también se explica este proceso en la revista de Educación REDIMAT con el título “*Análisis de las actividades propuestas por un libro de texto: El caso de la medida*” (Mengual, Gorgorió, y Albarracín, 2017) donde se explica más en profundidad el análisis realizado y donde se muestran más ejemplos que en las comunicaciones anteriores.

4.4. ANÁLISIS DEL CONTENIDO

Dado que vamos a analizar el contenido del libro de texto creemos necesario citar en este apartado qué se entiende por análisis del contenido en la literatura. De hecho, Zapico (2007) señaló que en la actualidad las investigaciones sobre la evaluación de los libros adoptan una metodología de análisis de contenido o análisis del discurso.

Este análisis es una de las técnicas de uso más frecuente en gran parte de las ciencias sociales que ha ido adquiriendo más relevancia con la instrucción de procedimientos informáticos (Piñuel, 2002). Aunque el análisis del contenido fue desarrollado principalmente por especialistas en comunicación para poder aplicarlo a sus problemas, no hay duda de su relevancia en otros campos. El interés de esta técnica no reside en la descripción de los contenidos, sino en lo que puede enseñarnos una vez tratados (López, 2002).

4.4.1. Definición y característica del análisis del contenido.

Uno de los primeros autores en este campo es Berelson (1971), el cual definió el análisis del contenido como una técnica de investigación para la descripción objetiva, sistemática y cuantitativa del contenido manifiesto de la comunicación. Para llevar a cabo esta técnica es necesario establecer unas categorías que sean (Bardin, 1986):

- Homogéneas (no mezclar cosas)
- Exhaustivas (agotar la totalidad del texto)
- Exclusivas (un mismo elemento del contenido no puede ser clasificado de otra manera aleatoria en dos categorías diferentes)
- Objetivas: dos codificadores diferentes deben llegar a los mismos resultados
- Adecuadas o pertinentes: adaptada al contenido y al objetivo.

De los diferentes usos que se pueden dar a esta técnica, Berelson (1971) observó que permitía estudiar el desarrollo de algún elemento escolar, como, por ejemplo, los libros de texto. Zapico (2007) afirma que este estudio permite no sólo obtener inferencias sobre el material analizado sino también sobre los efectos que puede tener sobre sus destinatarios: el alumnado y profesorado principalmente.

Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008), utilizaron el Análisis del Contenido como una herramienta que permite analizar u organizar los diferentes significados de las matemáticas escolares que sirve a los profesores para diseñar y planificar distintas unidades didácticas. Es decir, para estos autores, el análisis del contenido es el estudio de los diversos significados de los conceptos matemáticos estructurados mediante diversos organizadores del currículo.

Estos autores (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008), revisaron los contenidos desde una perspectiva cognitiva, basándose en la distinción de conocimiento conceptual y procedimental que revisamos en este estudio. Así, realizan mapas conceptuales de conceptos, estableciendo nexos entre estos tipos de conocimiento.

Entre las diferentes ventajas que recogen estos autores de este tipo de representaciones tenemos: se establece una jerarquía de las nociones dentro de cada concepto, conecta diferentes nociones, es un esquema que nos permite entender e interpretar una estructura conceptual determinada (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). Los mapas mentales constituyen una herramienta que nos permite estudiar la estructura conceptual de un tópico matemático. Estos autores consideran que estos mapas son el punto de partida del análisis de contenido de un tema, sin embargo, en nuestra investigación, los mapas que realizamos son el resultado de un análisis de contenido basado en las tareas necesarias para resolver la actividad planteada.

5. ANÁLISIS

En este capítulo exponemos el proceso de análisis de esta investigación así como las decisiones que se han ido tomando a lo largo de este proceso. Tal y como se recoge en el Capítulo 3, comenzamos mirando el conocimiento matemático subyacente al libro de texto para lo cual hicimos una primera aproximación al análisis que se recoge en el apartado 5.1. A partir de ese momento nos centramos en la parte de la medida que queda expuesto en los apartados 5.2 y 5.3.

Tal y como se ha señalado en diferentes apartados de este estudio, para llevar a cabo el análisis nos valemos de la aportación teórica propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012), que nos sirve de guía para desgranar las diferentes tareas involucradas en la resolución de cada actividad.

5.1. FASE I: PRIMERA APROXIMACIÓN AL ANÁLISIS

El objetivo de esta primera aproximación al análisis era obtener una primera visión de la información recogida en los libros de texto. Dado que los datos de esta investigación están en un documento escrito, era necesario ver cómo estaba dispuesta la información recogida en los libros de texto. Para ello, este primer análisis consistió en describir las tareas que requerían cada ejercicio para dar solución al mismo. Es decir, una pequeña “transcripción” de la información en forma de tareas.

En primer lugar, tomamos como referencia el Decret 142/2007, de 26 de junio, por el cual se establece la ordenación de la enseñanza de Educación Primaria en Cataluña, para tener un primer acercamiento de la información recogida en los libros de texto puesto que el libro de texto es el medio por el cual el currículo entra en el aula. De este documento tomamos los 5 bloques que aparecen en Educación Primaria:

- Numeración y cálculo
- Medida
- Espacio y forma
- Estadística y azar
- Relaciones y cambio

En segundo lugar, tomamos los libros de texto comenzando desde primero hasta sexto puesto que consideramos que era el proceso más natural puesto que es el orden de los conocimientos presentados.

Para el análisis, elaboramos una tabla que contenía por cada ejercicio el tema: el apartado del tema (si estaba dividido en apartados, sino no), el número del ejercicio, el bloque de contenido según el currículo, el número de tareas, las tareas implicadas y la relación entre estas tareas. Ejemplo:

Tema	Apartado	Nº de actividad	Bloque de contenido	Nº de tareas	Tareas	Relación entre las tareas
4	5	3	Numeración y Cálculo	2	- Interpretar imagen - Escribir la representación simbólica de una fracción a partir de su representación gráfica.	Secuenciales

Tabla 6. Ejemplo de la primera aproximación al análisis.

Encontramos tres tipos de relación entre las tareas (cuando son 2 o más): secuenciales, conjuntas y separadas. Son secuenciales cuando es necesario hacer todos los pasos para dar respuesta al ejercicio aunque necesariamente en el orden expuesto. En algún ejercicio como en el ejemplo anterior es necesario interpretar la imagen antes de continuar con el ejercicio, pero en otras la secuenciación no está vinculada al orden de las mismas. Las conjuntas son aquellas en las que el enunciado del ejercicio te pide que lo resuelvas dos formas distintas, entonces te puedes apoyar entre las tareas para encontrar su relación. Por último, las separadas son aquellas en las que el ejercicio te pide hacer más de una cosa pero no existe relación entre ellas, se resuelven por separado. Por tanto en un mismo ejercicio se pueden encontrar varias relaciones de tareas ya que si, por ejemplo, el ejercicio demanda dos cosas separadas, cada una de ellas puede tener tareas cuya relación sea secuencial.

Con todo esto, encontramos 148 tareas distintas en el ciclo inicial, 371 en el ciclo medio y 422 en el ciclo superior. Las ordenamos por orden alfabético y en grupos según el verbo imperativo de lo que exigía cada tarea (ejemplo: Comparar unidades).

Tras realizar esta primera aproximación barajamos los distintos estudios que podíamos llevar a cabo de los cuales elegiríamos uno. Estas opciones de estudios fueron:

- Observar que tareas permanecen en los tres ciclos, cuales “desparecen” y cuales se crean nuevas.
- Analizar a partir de aquí que conocimientos requiere cada tarea.
- Analizar más editoriales de texto y hacer un análisis más profundo de las actividades.
- Analizar menos editoriales de texto e ir a ver si los profesores serían capaces de hacer las actividades que proponen los libros de texto, para poder concluir si podrían hacer un uso eficiente e indicar a las universidades que puntos son los más “flojos” para que puedan adaptar sus programas de formación.

Observamos que el conocimiento más rico y más interesante se encontraba en el ciclo superior. Por tanto, antes de tomar una la decisión de cuál de los diferentes estudios íbamos a realizar, decidimos volver a hacer un análisis de los libros de texto con el propósito de ver donde se encontraba el horizonte del conocimiento matemático de cada bloque de contenido.

5.2. FASE II: ANÁLISIS DESCRIPTIVO DEL CICLO SUPERIOR

Comenzamos esta fase haciendo un análisis descriptivo más detallado de las tareas que requerían unas pocas actividades del bloque de medida. Tomamos el tema del tiempo y el sistema sexagesimal y seleccionamos las actividades referentes a una sección este tema.

Una vez hecho el análisis lo validamos con un comité de expertos, del que formaban parte Muñoz y Oller (autores que propusieron la jerarquización de tareas recogida en el apartado 2.3.2.) con el objetivo de validar el análisis realizado y ver si era este el camino que debíamos seguir. Aceptamos este nuevo tipo de análisis más detallado por generar una perspectiva más rica del conocimiento matemático subyacente al libro de texto de matemáticas.

En primer lugar agrupamos las actividades según cuál fuese su tarea principal, es decir, el objetivo propio de la actividad. A continuación, tomando cada uno de los bloques se

describían las tareas auxiliares específicas y las tareas auxiliares generales tal y cómo muestra el siguiente ejemplo:

2. Suma:

$$\begin{array}{r}
 28 \text{ min } 36 \text{ s} \\
 + 12 \text{ min } 52 \text{ s} \\
 \hline
 49 \text{ min } 56 \text{ s} \\
 + 38 \text{ min } 25 \text{ s} \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1 \text{ h } 42 \text{ min} \\
 + 2 \text{ h } 38 \text{ min} \\
 \hline
 2 \text{ h } 30 \text{ min } 49 \text{ s} \\
 + 3 \text{ h } 43 \text{ min } 27 \text{ s} \\
 \hline
 \end{array}$$

Figura 11. Actividad suma de expresiones complejas de tiempo de 6° EP¹

Una vez realizado el análisis detallado de las tareas que requería cada actividad observamos la existencia de unos patrones que nos indicaban el conocimiento subyacente a la medida presente en los libros de texto. Es decir, para una tarea principal las tareas auxiliares, específicas y generales, que requerían las actividades eran prácticamente las mismas.

Siguiendo con el ejemplo anterior de la Figura 11., donde el objetivo principal es la suma de expresiones complejas de tiempo, elaboramos un esquema que pretende reflejar el conocimiento matemático implicado que mostramos en la Figura 12.

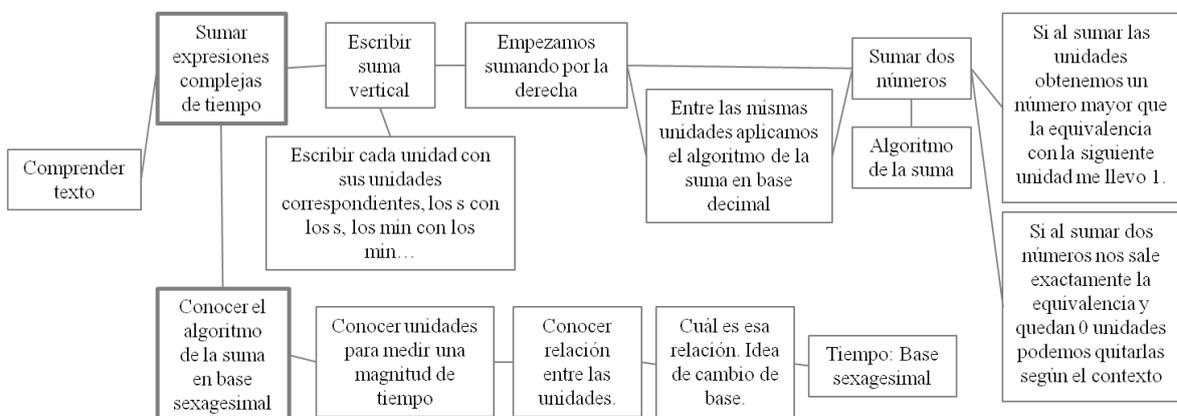


Figura 12. Esquema boceto de la suma de expresiones complejas de tiempo.

Este esquema surge de la interpretación de los patrones identificados para la tarea principal de sumar expresiones complejas de tiempo. Las tareas auxiliares específicas para resolver esta actividad son el conocimiento de unidades para medir una magnitud de tiempo, el conocimiento de la relación entre las unidades, cuál es esa relación, la idea de cambio de

¹ Abreviamos Educación Primaria como EP.

base sexagesimal y aplicar el algoritmo de la suma en base decimal entre las mismas unidades.

Las tareas auxiliares generales de esta actividad son la escritura de la suma vertical, la suma de dos números, el algoritmo de la suma, si al sumar dos números nos sale exactamente la equivalencia y quedan 0 unidades podemos quitarlas según el contexto y nos llevamos una si la suma obtenida dentro de las mismas unidades es superior a la unidad.

Dado que este tipo de análisis es costoso se decidió continuar la investigación centrada en la rama de la medida para la etapa de Educación Primaria. Por tanto, decidimos analizar en profundidad los que conocimientos requiere cada actividad propuesta por los libros de texto.

5.3. FASE III: ANÁLISIS DEFINITIVO

Para describir el tipo de análisis realizado utilizaremos distintos ejemplos que han dado lugar a los esquemas de conocimiento que son uno de los resultados de este estudio. En este análisis, resolvimos cada una de las actividades identificando los pasos necesarios para la solución de las mismas y los diferentes tipos de tareas implicadas a partir de la aportación teórica de Gairín, Muñoz y Oller (2012).

Una vez realizado este análisis, nuestro segundo paso consistió en agrupar las diferentes actividades según su objetivo, es decir, según su tarea principal. Este último paso nos permitió general esquemas para cada tipo de tarea principal presente en el libro de texto donde se muestra el conocimiento conceptual y procedimental que se pone en juego para la realización de las actividades asociadas a esa tarea principal.

A continuación mostramos varios ejemplos de cómo se ha realizado el análisis que ha dado lugar a los esquemas de conocimiento.

5.3.1. EJEMPLO 1. Suma de expresiones complejas de tiempo.

El primer ejemplo que mostramos parte del ejemplo utilizado en el apartado 5.2. en la Figura 2. donde el objetivo principal de la actividad es la suma de expresiones complejas de tiempo. Este tipo de actividad la encontramos en el libro de texto de 6º de primaria donde el alumno debe realizar una suma de expresiones complejas de tiempo.

Resolver esta actividad requiere rescatar contenidos que se han tratado en cursos anteriores. El primer paso es el dominio de una operación aritmética básica, la suma. Desde el primer curso de Educación Primaria los alumnos se enfrentan a actividades cuyo objetivo principal es la realización esta operación aritmética. En la siguiente figura se recoge una de las actividades del libro de texto donde el objetivo principal es la realización de una suma:

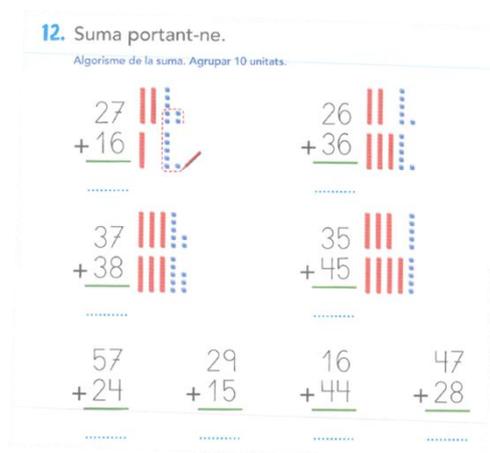


Figura 13. Actividad de 1º de EP propuesta por el libro de texto.

La siguiente fase consiste en la suma de dos expresiones incomplejas de una medida. Para poder realizar la operación es necesario que las medidas que vamos a sumar estén expresadas en la misma unidad.

26. Escriu al teu quadern quants litres hi ha:

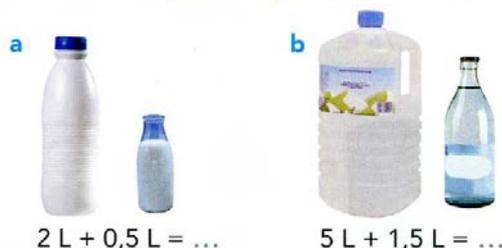


Figura 14. Actividad de 4º de EP propuesta por el libro de texto.

Cuando el alumno llega a enfrentarse a actividades donde debe sumar o restar expresiones complejas de tiempo, debe dominar la suma o resta de dos números naturales cualesquiera y la suma o resta de expresiones incomplejas de tiempo. De esta manera, en la Figura 15. se muestra cómo, la aportación teórica de Gairín, Muñoz y Oller se aplica en este tipo de análisis. Asimismo, se muestra en detalle del proceso para realizar esta actividad y todas aquellas en las que se ven involucrados cálculos con expresiones complejas de una medida. Este esquema se lee de izquierda a derecha y describe un posible procedimiento para la realización de la actividad donde se van realizando las diferentes tareas para dar solución al mismo. Los pasos que se describen dentro del recuadro en el que se enmarca cada tarea es el conocimiento procedimental. Por otro lado, el conocimiento conceptual se sitúa fuera estos marcos. Las tareas según la jerarquización propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012) se ve reflejada en los cuadros que las contienen, de esta forma, la tarea principal es la que aparece al lado de TP., las tareas auxiliares específicas son las que aparecen en el recuadro de las TAE., y por último las tareas auxiliares generales son las que aparecen en el recuadro de las TAG.

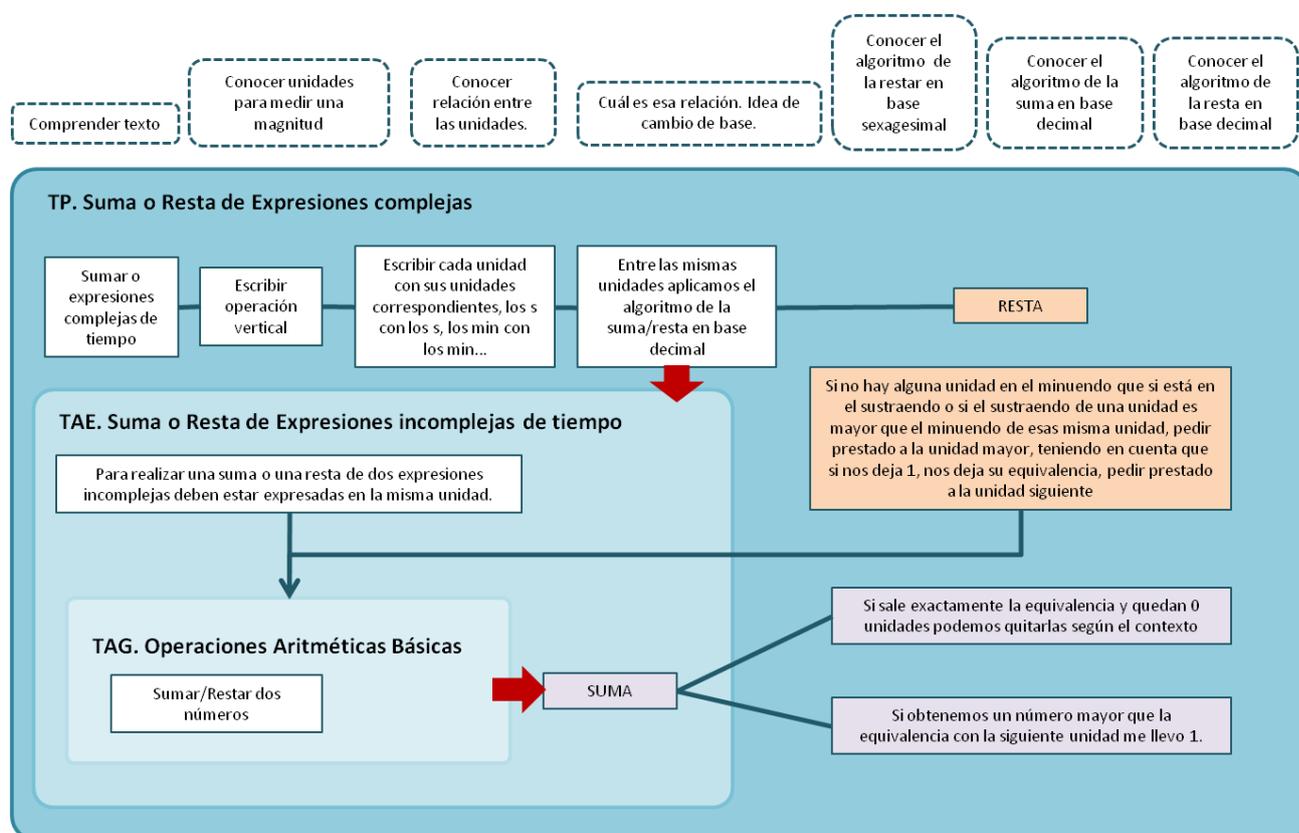


Figura 15. Esquema de resolución propuesto para la actividad de la Figura 11. que permite caracterizar las diferentes tareas necesarias para la resolución.

En la parte superior del esquema podemos observar diferentes bloques: comprender el texto, conocer unidades para medir magnitud, conocer relación entre las unidades, cuál es esa relación y la idea de cambio de base, conocer el algoritmo de la resta y de la suma en base decimal y sexagesimal. Estos bloques corresponden a lo que entendemos como conocimiento conceptual implicado en la resolución de este tipo de actividades.

En el cuadro aparece el proceso que seguimos en la resolución de este tipo de actividades teniendo en cuenta que es distinto para la suma que para la resta. En el caso de la resta debemos pedir prestado una unidad a otra mayor para poder restar en el caso de que el minuendo sea 0 o menor que el sustraendo. Una vez realizado este paso ya podemos realizar la resta de dos expresiones complejas de tiempo, puesto que nos centramos en cada unidad por separado. El siguiente paso es la suma de dos números en base decimal, que es nuestra tarea auxiliar general. En el caso de la suma, una vez que hemos sumado y tenemos el resultado debemos observar si es posible expresar la medida de una manera más adecuada dejando en cada unidad una cantidad inferior a la equivalencia con la unidad anterior.

Este esquema permite establecer la caracterización de las diferentes tareas necesarias para resolver la actividad. En concreto, la tarea principal de esta actividad y por tanto, el objetivo de la misma, es sumar expresiones complejas de tiempo. La tarea auxiliar específica es la suma de expresiones incomplejas y la tarea auxiliar general se corresponde con una tarea de tipo aritmético donde hay que realizar una suma. Ambas tareas tienen asociado tanto el conocimiento conceptual como procedimental. Para resolver la suma de expresiones complejas de tiempo, es necesario conocer las unidades para medir una magnitud de tiempo, la relación entre las unidades y cuál es esa relación, la idea de cambio de base sexagesimal y es por tanto, el conocimiento conceptual, el algoritmo de la suma en base decimal entre las mismas unidades.

5.3.2. EJEMPLO 2. Paso de una expresión compleja a una incompleja.

El ejemplo seleccionado para ilustrar el proceso de análisis es una actividad de 6° de primaria donde el alumno debe realizar el cambio de una expresión compleja a incompleja que se muestra en la Figura 16. Para resolver esta actividad, el alumno debe combinar y coordinar diversos conceptos y procedimientos trabajados anteriormente en otras actividades propuestas por el libro de texto.

3. Copia i completa aquestes equivalències:

- a) 8 dam 5 m = ... m
- b) 12 hm 50 m = ... km
- c) 2 km 500 m = ... hm

Figura 16. Actividad de 6° de EP propuesta por el libro de texto.

Para pasar de una expresión compleja a incompleja es necesario cambiar de unidades y dejar las diferentes unidades que aparecen en la misma unidad para después sumarlas. Un ejemplo de una actividad cuya tarea principal es el cambio de unidades corresponde a la Figura 17.

4. Copia i completa al teu quadern:

- | | |
|--------------|---------------|
| 4 m = ... cm | 5 cm = ... mm |
| 2 m = ... dm | 3 m = ... mm |
| 6 m = ... cm | 7 cm = ... mm |
| 5 m = ... dm | 3 cm = ... mm |
| 8 m = ... cm | 9 m = ... dm |

Figura 17. Actividades relacionadas con el cambio de unidades de 4° de EP.

La Figura 18. y la Figura 19. muestran los dos caminos posibles que los alumnos pueden utilizar para resolver la actividad: mediante una operación (Figura 18) o atendiendo al valor posicional de las decenas, centenas, unidades, etc. (Figura 19).

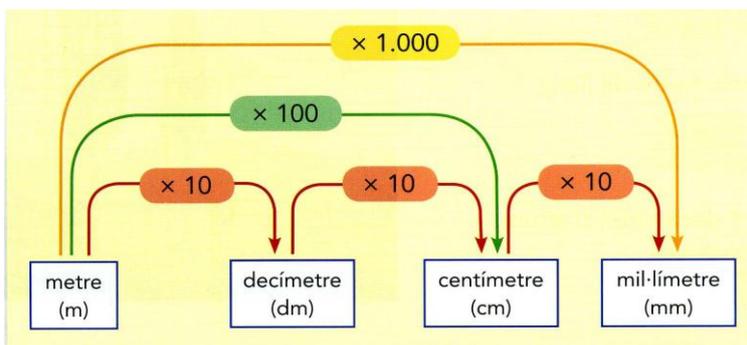


Figura 18. Cambio de unidades mediante operación.

Un metre equival a:			
m	dm	cm	mm
1			
1	0		
1	0	0	
1	0	0	0

Figura 19. Cambio de unidades atendiendo al valor posicional.

Para que los alumnos puedan realizar un cambio de unidades a partir de una operación deben ser capaces de multiplicar o dividir la cantidad de medida por la equivalencia correspondiente. Además, en el caso del paso de una expresión compleja a incompleja el alumno debe ser capaz de sumar varios números. Los alumnos se enfrentan a este tipo de tareas desde el ciclo inicial, prueba de ello son las Figuras 20, 21 y 22, que se recogen a continuación.

12. Suma portant-ne.

Algorisme de la suma. Agrupar 10 unitats.

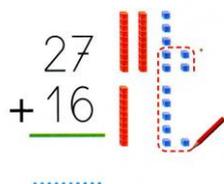


Figura 20. Suma de dos números de 1º de EP.

3. Multiplica.

$$\begin{array}{ll}
 4 \times 8 = \dots\dots & 4 \times 3 = \dots\dots \\
 6 \times 5 = \dots\dots & 8 \times 2 = \dots\dots \\
 7 \times 3 = \dots\dots & 5 \times 3 = \dots\dots
 \end{array}$$

Figura 21. Multiplicación de dos números de 2º de EP.

3. Dibuixa i completa la divisió.

Resolució gràfica de les divisions.

- Reparteix 12 bales en 3 parts.

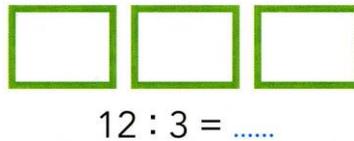


Figura 22. Divisió de dos números de 2º de EP.

Ahora bien, si el alumno quiere realizar el cambio de unidades atendiendo al valor posicional debe valerse de otros dominios aritméticos y saber identificar en un número cuales son las unidades, las decenas, las centenas, etc. Para ilustrar que estos alumnos se enfrentan a este tipo de actividades desde el ciclo inicial se muestra la Figura 23. La Figura 24. muestra este tipo de actividad en el ciclo superior.

16. Escriu el nombre i completa.

Dictat de nombres de tres xifres.

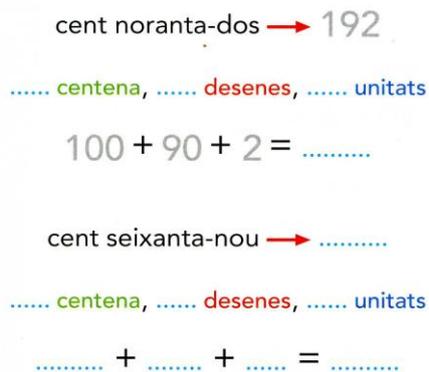
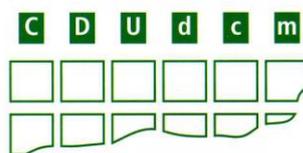


Figura 23. Suma de dos números de 1º de EP.

1. Copia al quadern una taula de numeració:



- a) A la taula, escriu-hi els nombres decimals següents:

7,05	14,70	5,012
312,6	18,020	0,500
1,008	1,250	140,3

Figura 24. Multiplicación de dos números de 5º de EP.

De esta manera, en la Figura 25., mostramos la caracterización de las tareas a realizar para resolver la actividad de la Figura 17., a partir de la jerarquización de tareas propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012). Se muestra en detalle el proceso para realizar esta actividad y todas aquellas tareas que se ven involucradas en el paso de una expresión compleja a incompleja. Este esquema se lee de izquierda a derecha y describe un posible procedimiento para la realización de la actividad donde se van realizando las diferentes tareas para dar solución al mismo. Los pasos que se describen dentro del recuadro en el que se enmarca cada tarea es el conocimiento procedimental. Por otro lado, el conocimiento conceptual se sitúa fuera estos marcos.

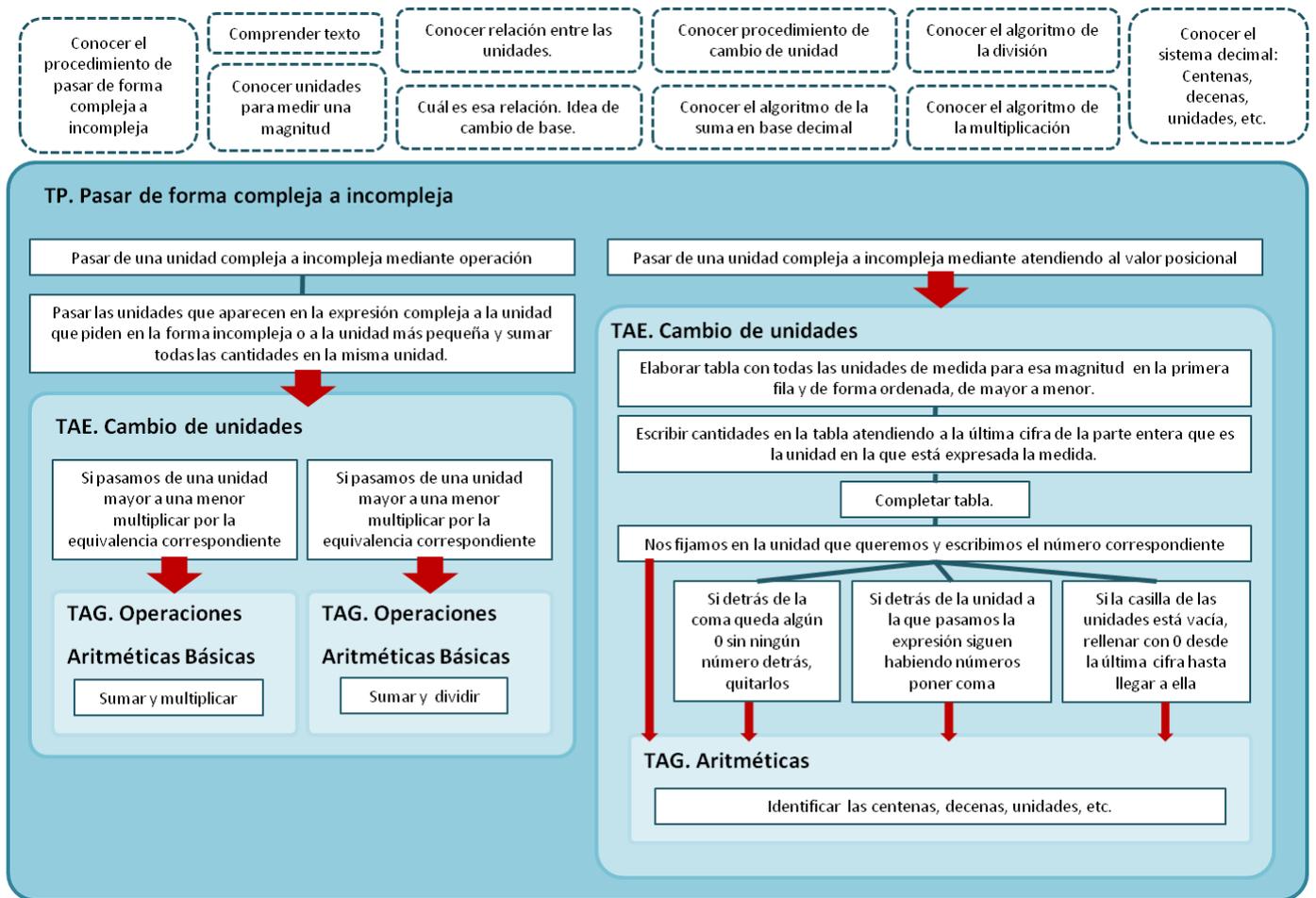


Figura 25. Esquema de resolución propuesto para la actividad de la Figura 17. que permite caracterizar las diferentes tareas necesarias para la resolución.

Este esquema permite establecer la caracterización de las diferentes tareas necesarias para resolver la actividad. En concreto, la tarea principal de esta actividad y por tanto, el objetivo de la misma, es el paso de una expresión compleja a incompleja. La tarea auxiliar específica es el cambio de unidades y la tarea auxiliar general se corresponde con una tarea de tipo aritmético. Ambas tareas tienen asociado tanto el conocimiento conceptual como procedimental. Para resolver el paso de una expresión compleja a incompleja es necesario conocer las unidades para medir una magnitud, la relación entre las unidades y cuál es esa relación, la idea de cambio de base, el procedimiento de cambio de unidad, conocer el algoritmo de la suma, multiplicación y división; conocer el sistema decimal y es por tanto, el conocimiento conceptual.

5.3.3. EJEMPLO 3. Calcular área.

La primera y única actividad que tiene como tarea principal calcular un área en el ciclo inicial la encontramos en 2º de Educación Primaria. A continuación mostramos esta actividad que pretende ser una aproximación al concepto de área.

12. Quants quadrats tapa cada figura?

Aproximació al concepte d'àrea.

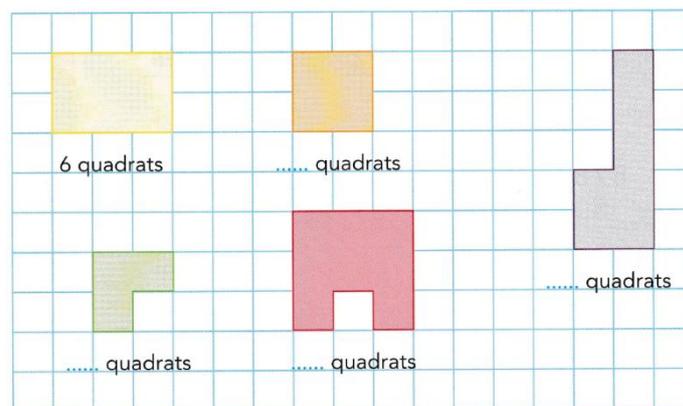


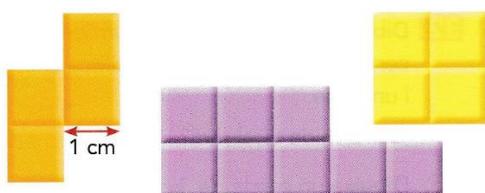
Figura 26. Primera actividad sobre medida de una superficie en el libro de texto de 2º EP.

Como se puede observar, al alumno únicamente debe contar el número de cuadrados que componen las distintas figuras apoyándose en el mallado que hay detrás.

En el ciclo medio, el cálculo del área con ayuda del mallado continúa y aparecen actividades donde se prescinde de este mallado aunque las unidades de medida están marcadas. Es decir, en ambas situaciones el alumno debe contar el número de unidades de

medida (cuadrados de un cm^2). A modo de ejemplo se presentan las siguientes actividades de 3° de EP:

6. Troba la superfície i el perímetre de les figures següents:



9. Quina és la superfície i el perímetre d'aquestes postals?

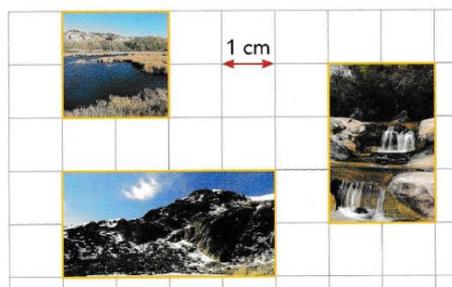


Figura 27. Actividades cálculo de área 3° de EP.

Es, precisamente en este curso (3° de Educación Primaria) donde se introduce la medida indirecta de una superficie gracias al producto de magnitudes lineales. Para realizar esta transición el libro de texto propone actividades como la que se muestra a continuación:

21. Calcula la superfície i el perímetre de cada figura:

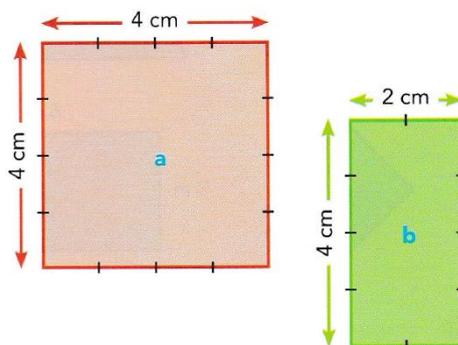


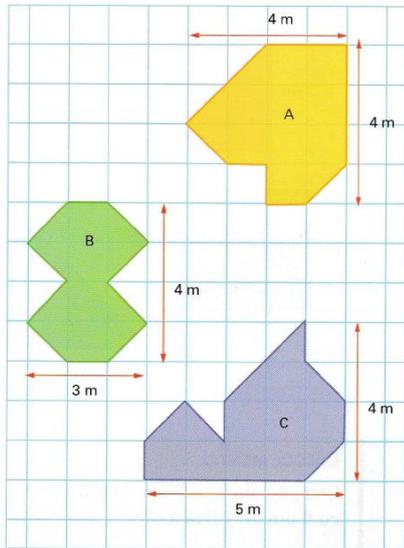
Figura 28. Actividad introductoria a la medida indirecta de rectángulos o cuadrados de 3° EP.

Como se muestra, cada lado está dividido en la unidad de medida lineal, de esta forma, al alumno puede dibujar los cuadrados que son la unidad de medida de la superficie y ver que coincide el número de cuadrados que hay en cada uno con el resultado de multiplicar la longitud de la base por la longitud de la altura.

En 4° de Educación Primaria seguimos encontrando actividades de cálculo de áreas de forma directa pero, en esta ocasión, las figuras no se pueden descomponer en la unidad de medida que indica el libro de texto. Estas figuras aparecen con un mallado o con una

descomposición que ayude al alumno a calcular el área. A continuación mostramos dos actividades de lo expuesto:

1. Els quadrats d'aquesta quadrícula mesuren un metre quadrat. Quina és la superfície de cada figura?



2. Calcula la superfície de les figures A i B. Com pots expressar la superfície de la figura C?

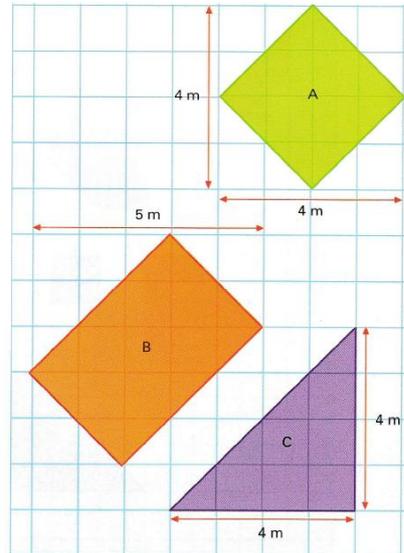


Figura 29. Actividades sobre el cálculo de una superficie de forma directa 4º de EP.

4. Calcula la superficie de cada figura:

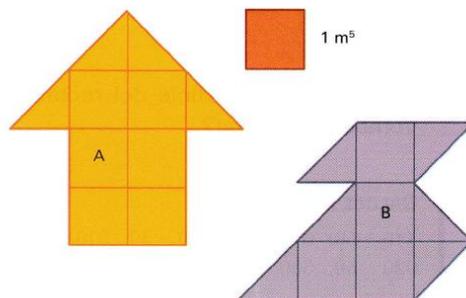


Figura 30. Actividad sobre el cálculo de una superficie de forma directa 4º de EP.

Al igual que en 3º de Educación Primaria, en este curso se trabaja el cálculo de superficies de forma indirecta. Únicamente se calcula el área de figuras cuadradas o triangulares y en contextos significativos para el alumnado (calcular el área de una pista de fútbol, billete, etc.).

Por último, en el ciclo superior se introduce la medida indirecta del área de figuras geométricas. A continuación se muestra una actividad de 6º de Educación Primaria cuyo objetivo el cálculo de la superficie de diferentes polígonos:

1. Troba la superfície d'aquestes figures:

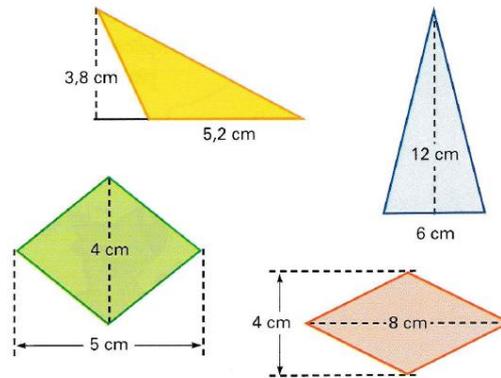
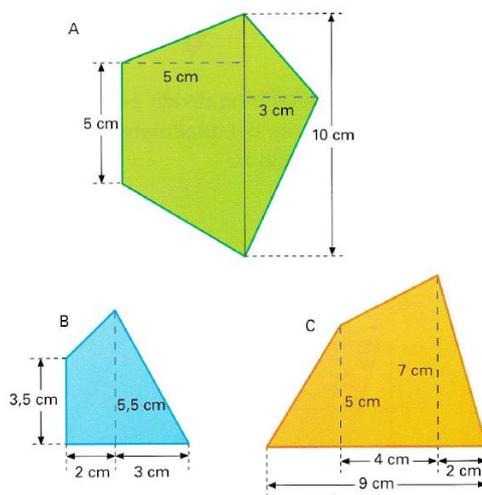


Figura 31. Actividad de cálculo de superficies de 6º EP.

En este ciclo, los alumnos no sólo deben ser capaces de calcular la superficie de un polígono que conocen sino que deben recurrir a otras técnicas como la descomposición de una figura plana en otras de las cuales sepamos calcular su área, recortar y recolocar una superficie, o completar una superficie con otras que nos faciliten el cálculo de la original (González y Gómez, 2011).

3. Els polígons següents s'han descompost en triangles i trapezis. Troba l'àrea de cada polígon:



3. Troba l'àrea de les zones acolorides. Totes les mesures són en centímetres:

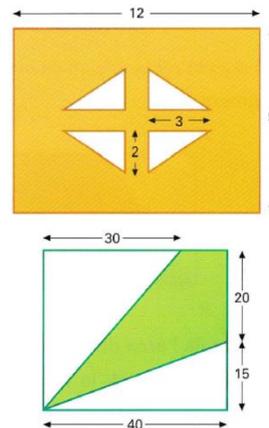


Figura 32. Actividades de cálculo de superficies de 6º EP.

Además, cabe destacar, que en 5º de Educación Primaria, en el libro de texto se propone una actividad de medición de una superficie con una unidad de medida distinta a las trabajadas hasta el momento para medir de forma directa.

8. Hem construït una figura amb les peces del Tangram:

- Quantes unitats triangulars necessitem per cobrir tota la figura?
- Quina fracció de la figura representa el triangle groc?

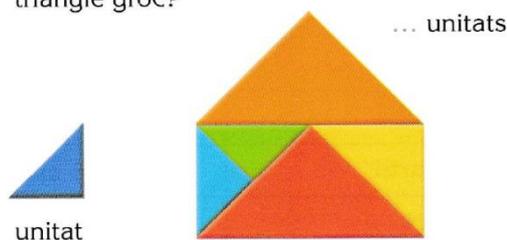


Figura 33. Actividad medida directa de superficie con unidad de medida triangular.

De esta forma, las mediciones de superficies se basan en técnicas de superposición y descomposición, así como la aplicación de fórmulas conocidas que permiten el cálculo indirecto de la superficie de polígonos conocidos.

Con todo esto, el cálculo del área se puede hacer de forma directa o indirecta. En la medida directa, como las figuras vienen, en su mayoría con la ayuda de una cuadrícula o malla, basta con contar el número de unidades que rellenan la superficie. En el caso de que haya una unidad dividida, ver a qué parte corresponde de una unidad (la mitad). Si la figura no tiene una cuadrícula o una malla, tendremos que dividir la superficie sin dejar huecos o hacer superposiciones. Lo natural es utilizar las señales que aparecen y que dan lugar a una cuadrícula que parece estar “borrada”.

Para el cálculo de una medida indirecta, lo primero que tenemos que hacer es identificar si es una figura plana conocida. Si lo es, aplicamos las fórmulas tras identificar las medidas que necesitamos en la figura. Si tenemos todas las medidas, basta con aplicar la fórmula, sino es necesario calcularla a partir de otras conocidas. En el caso de que la figura no sea una figura plana conocida podré utilizar distintas estrategias como la descomposición, recortar y recolocar o completar una superficie.

En la Figura 34., mostramos la caracterización de las tareas a realizar para resolver la actividad de medir una superficie a partir de la jerarquización de tareas propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012). De nuevo, este esquema se lee de izquierda a derecha y describe un posible procedimiento para la realización de la actividad donde se van

realizando las diferentes tareas para dar solución al mismo. Los pasos que se describen dentro del recuadro en el que se enmarca cada tarea es el conocimiento procedimental. Por otro lado, el conocimiento conceptual se sitúa fuera estos marcos.

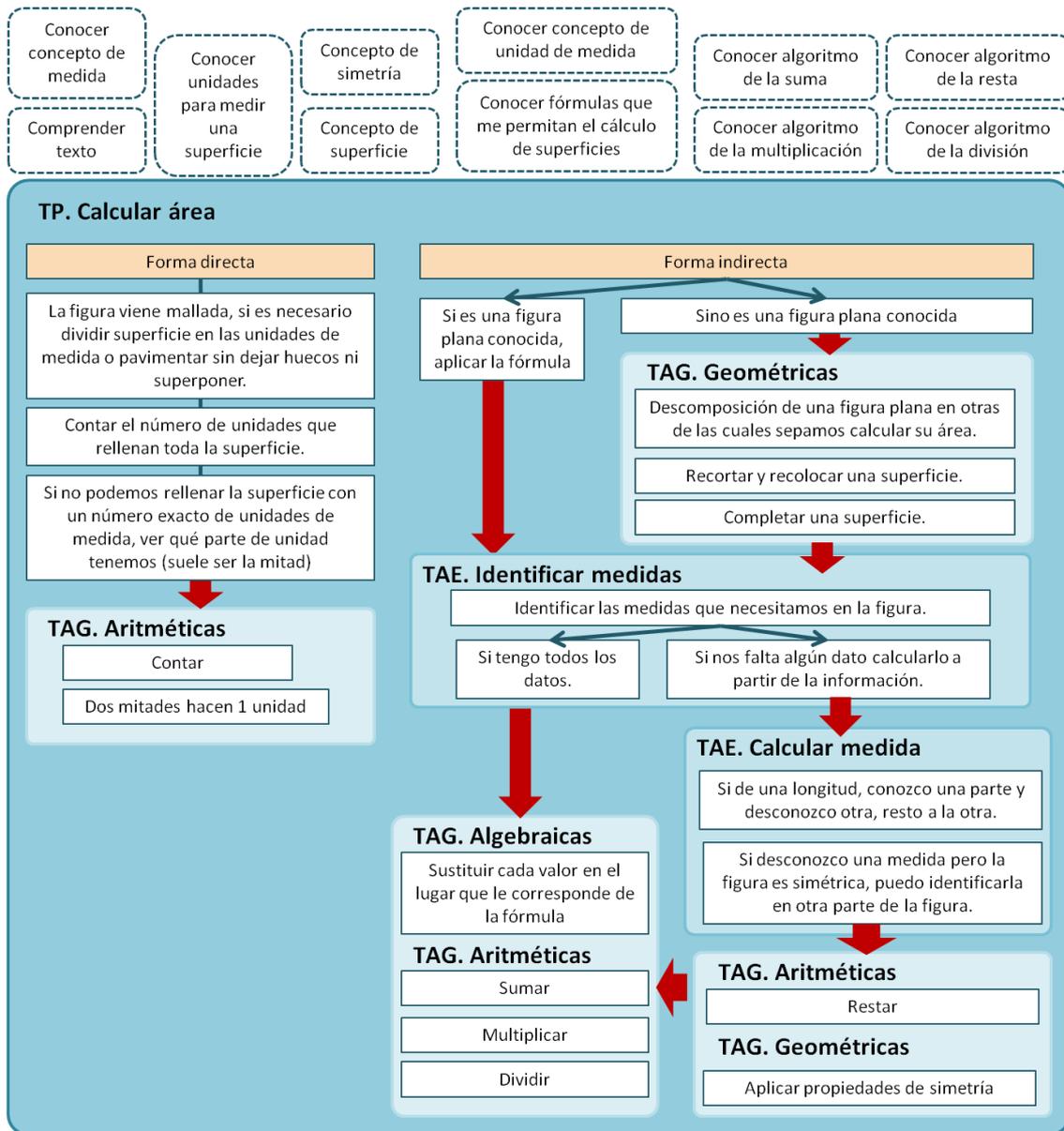


Figura 34. Esquema de resolución propuesto para la actividad de calcular una superficie que permite caracterizar las diferentes tareas necesarias para la resolución.

6. RESULTADOS

A continuación presentamos los diferentes tipos de resultados obtenidos a partir del análisis de las tareas matemáticas promovidas en las actividades de medida de los libros de texto escogidos.

En primer lugar obtenemos los esquemas de conocimiento generados a partir del modelo de jerarquización de tareas. En este capítulo, recogemos los esquemas cuyas tareas principales están más ligadas a la medida. Por este motivo, en el anexo I se pueden consultar los esquemas boceto que se realizaron en la Fase II del análisis recogida en el apartado 5.2. y que es previa a la realización de los esquemas definitivos presentados en el apartado 5.3. Las tareas principales que no aparecen en este apartado están más ligadas a la aritmética, donde las tareas principales son sumar, restar, multiplicar, dividir, elegir sumando que falta, etc.

En segundo lugar, se han clasificado las tareas principales puesto que entendemos que esta caracterización es un segundo tipo de resultados en el sentido que nos permite determinar el tipo de trabajo matemático que conforma el currículo potencial propuesto por el libro de texto. De esta forma, obtenemos un análisis estadístico de la frecuencia con la que aparecen distintas tareas principales por bloques.

Por último, se compara la propuesta del libro de texto con algunas de las teorías sobre el aprendizaje de la medida recogidas en el apartado 2.1.5. del marco teórico.

6.1. ESQUEMAS DE CONOCIMIENTO

En el siguiente apartado recogemos los esquemas de conocimiento que hemos elaborado a partir de las actividades propuestas en el libro de texto atendiendo a su tarea principal. En este punto recogemos los esquemas de conocimiento más trabajados durante la etapa de Educación Primaria tal y como se recoge en el apartado 6.2. Algunos de los esquemas los hemos dejado en esquema boceto y los recogemos en el anexo.

6.1.1. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 1. Calcular área.

La elaboración de este esquema aparece en el apartado 5.3.3.

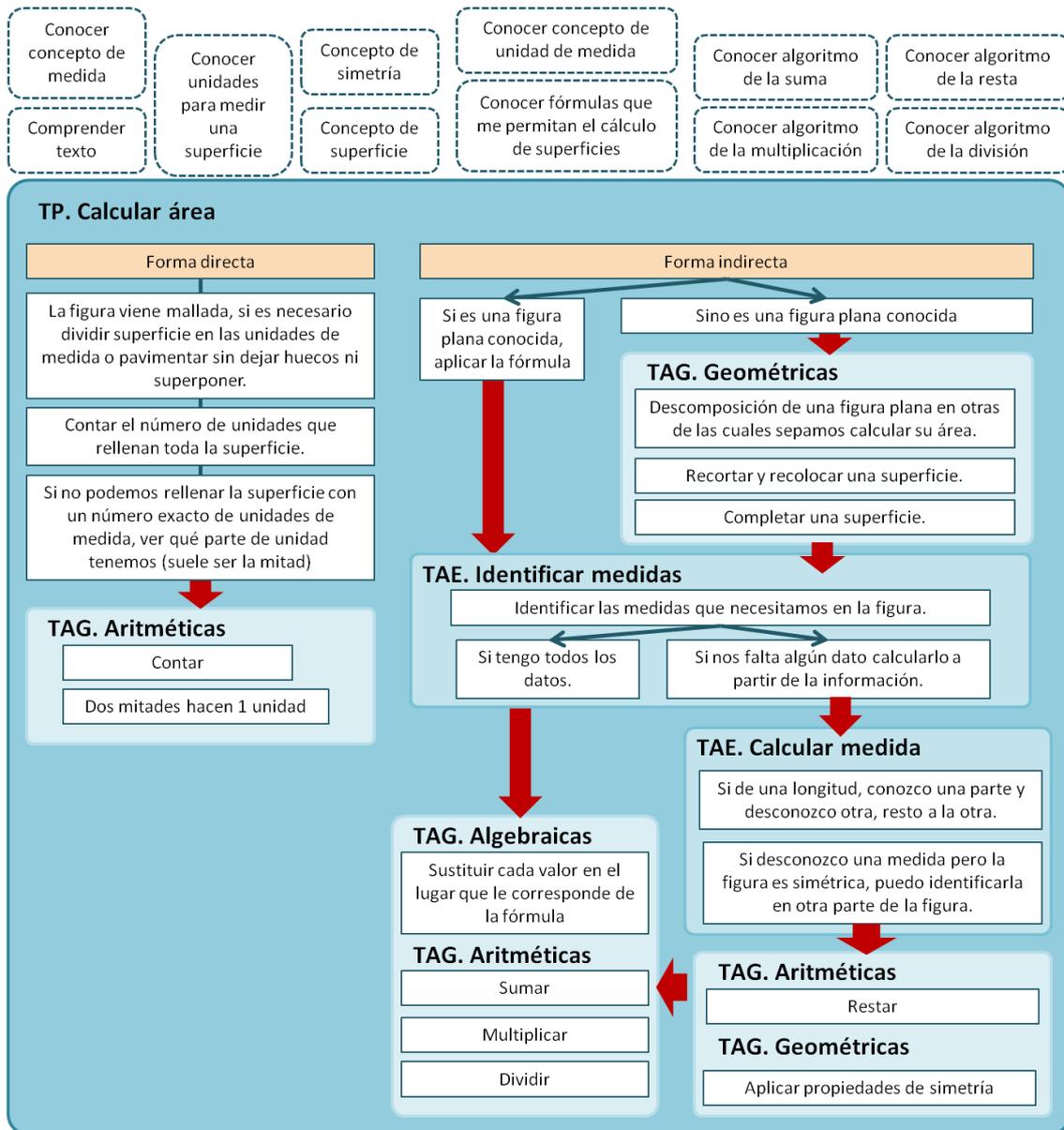


Figura 35. Esquema de conocimiento calcular área.

6.1.2. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 2. Calcular hora de otra ciudad con los husos horarios.

En este tipo de actividades se pide a los alumnos que calculen la hora de una ciudad a partir de la hora de otra atendiendo a los husos horarios. En el caso de se produzca un desplazamiento, también se pide que se calcule la hora de llegada o salida atendiendo a la diferencia horario. En este segundo caso es necesario sumar o restar expresiones complejas de tiempo. De análisis de las actividades surge le siguiente esquema de conocimiento:

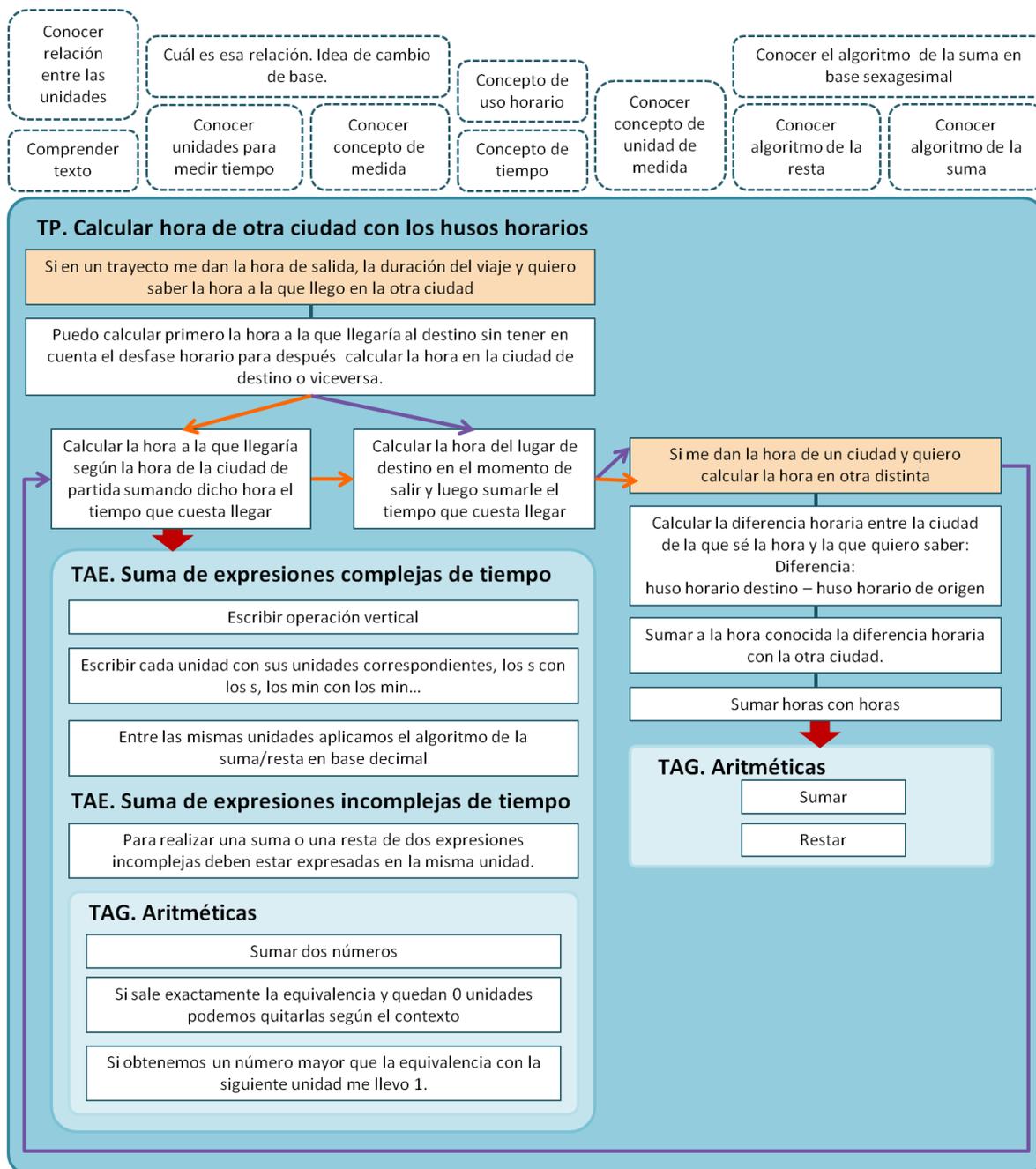


Figura 36. Esquema de conocimiento calcular hora de otra ciudad con los husos horarios.

En el caso en el que tuviésemos que calcular la hora de llegada podemos, o bien calcular la hora de llegada en la ciudad de destino y luego sumarle la duración del trayecto (camino morado) o bien sumarle a la hora de salida de la ciudad de origen la duración del trayecto para calcular la hora a la que se llegaría a la ciudad de destino según la referencia horario de la ciudad de origen para luego ajustar la hora a la ciudad del destino (camino naranja).

6.1.3. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 3. Calcular lado.

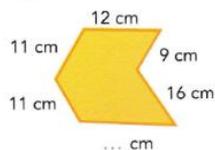
Las actividades que tienen como tarea principal calcular el lado de un polígono conocida el área o el perímetro aparecen en el ciclo medio y en el ciclo superior. Para resolver este tipo de actividades es necesario tener muy claro el concepto de perímetro y de área como producto de dos medidas lineales.

Podemos calcular el lado de un polígono si conocemos el perímetro y el resto de los lados. Esta información puede estar presente de forma indirecta y, por tanto, es necesario acudir a aquellos conocimientos de geometría necesarios para poder descifrar dicha información.

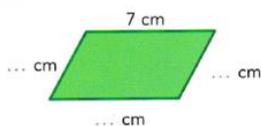
Algunas de las actividades de esta tarea principal se muestran a continuación:

2. Fixa't en el perímetre de cada polígon i calcula la longitud dels costats que manquen:

Perímetre: 78 cm



Perímetre: 24 cm



7. El perímetre d'un triangle isòsceles fa 87 cm.

Si el costat desigual fa 25 cm, quant mesuren els dos altres costats?

Figura 37. Actividades calculo de lado 4º EP.

2. A aquestes figures els falta un tros. Coneixent-ne la superfície, calcula l'altura de cadascuna:

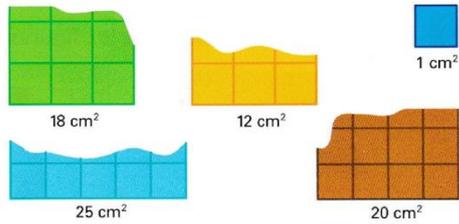


Figura 38. Actividad calculo de lado 5º EP.

21. Si una habitació quadrada té 169 rajoles, quantes rajoles té en un dels seus costats?

Figura 39. Actividad calculo de lado 6º EP.

La información necesaria para resolver la actividad puede estar en el enunciado o bien en los dibujos asociados.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal cuyo objetivo es calcular el lado de una figura:

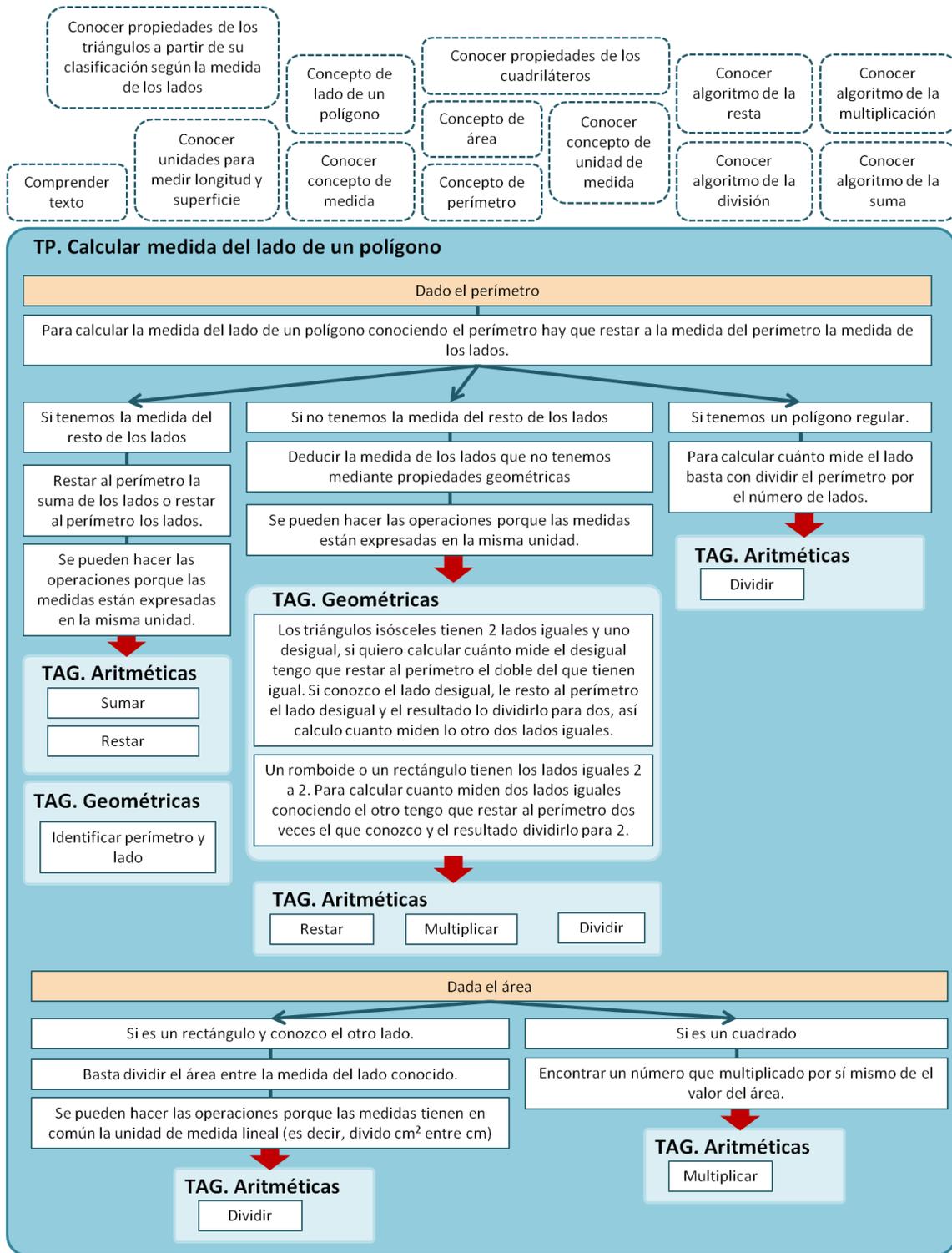


Figura 40. Esquema de conocimiento calcular lado.

6.1.4. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 4. Calcular perímetro.

En el caso del cálculo del perímetro podemos encontrar distintas actividades. En un principio (ciclo inicial) se pide a los alumnos que calculen el perímetro de una figura dibujada sobre una malla o cuadrícula por lo que, solo es necesario contar las unidades contorno de la figura, o contar el número de unidades que hay en cada lado y sumarlas.

Si aparecen las medidas de todos los lados basta con sumar sus longitudes. Para ello, debemos tener en cuenta que tienen que estar expresadas en las mismas unidades. En el caso de que no lo estén podemos o pasar las expresiones de forma compleja a incompleja antes de sumarlas (teniendo en cuenta que todas las longitudes deben estar expresadas en la misma unidad) o sumar las expresiones complejas y dar la solución expresada de forma compleja.

En el caso de que no aparezcan las medidas de los lados, será necesario medir. Esta acción requiere elegir y utilizar un instrumento de medida adecuado, por norma general la regla.

En el caso de que no aparezcan todas las medidas pero podamos deducirlas a partir de ciertas propiedades geométricas de las figuras planas como el romboide, el rectángulo o los polígonos regulares.

Atendemos en este apartado el cálculo de la longitud de una circunferencia, para lo cual es necesario conocer la fórmula que me permite calcular dicha longitud a partir del radio o diámetro.

Por último, en otras actividades nos piden calcular de forma aproximada el perímetro, para lo cual lo primero que hay que hacer es redondear un número.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal cuyo objetivo es calcular el perímetro:

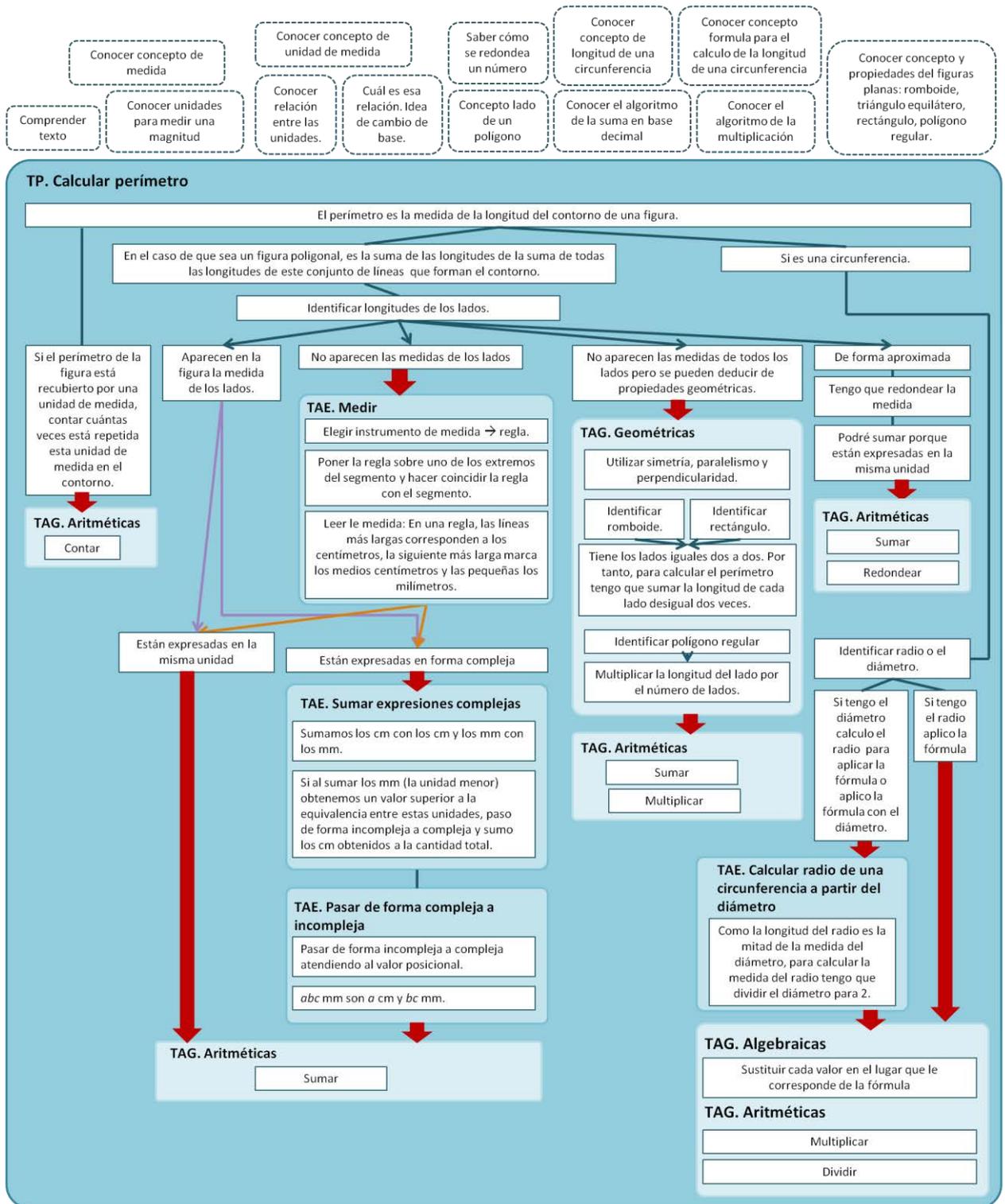


Figura 41. Esquema de conocimiento calcular perímetro.

6.1.5. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 5. Calcular peso de un objeto a partir de las medidas de las pesas utilizadas para medirlo.

En este tipo de ejercicios encontramos objetos junto a unas pesas. Para calcular el peso de dichos objetos hay que sumar la cantidad de magnitud representada en cada una de estas pesas.

Este tipo de actividades requiere un conocimiento sobre que es $\frac{1}{2}$ kilogramo y $\frac{1}{4}$ de kilogramo. Como salen las equivalencias de los pesos podemos o sumar el valor de cada pesa o agrupar sabiendo que 2 pesas de $\frac{1}{2}$ kilogramo, que 4 pesas de $\frac{1}{4}$ de kilogramo hacen 1 kilogramo o que 2 pesas de $\frac{1}{4}$ de kilogramo hacen $\frac{1}{2}$ kilogramo.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal cuyo objetivo es calcular peso de un objeto a partir de las medidas de las pesas utilizadas para medirlo:

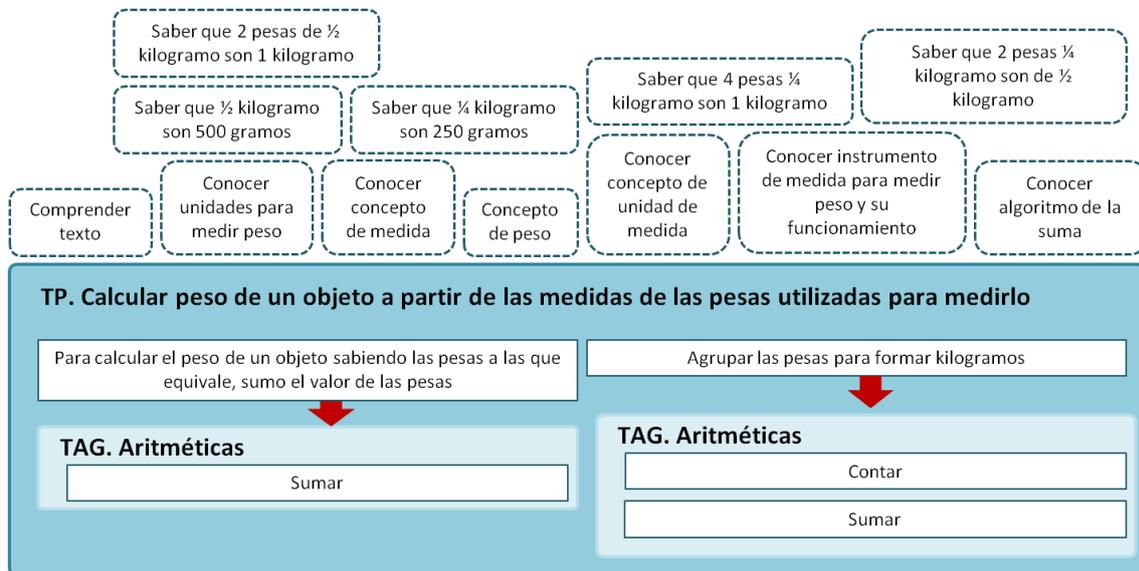


Figura 42. Esquema de conocimiento calcular peso de un objeto a partir de las medidas de las pesas utilizadas para medirlo.

6.1.6. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 6. Calcular radio o diámetro de una circunferencia a partir del diámetro o el radio.

Este tipo de actividad se pide hallar la medida del radio de una circunferencia a partir del radio o viceversa. Para ello, es necesario conocer ambos conceptos y la relación que existe entre el radio y el diámetro.

Cabe destacar que en este tipo de actividades, en ocasiones, se pide el resultado en una unidad diferente por lo que, es necesario realizar un cambio de unidades.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal cuyo objetivo es calcular el radio o el diámetro de una circunferencia a partir del diámetro o del radio:

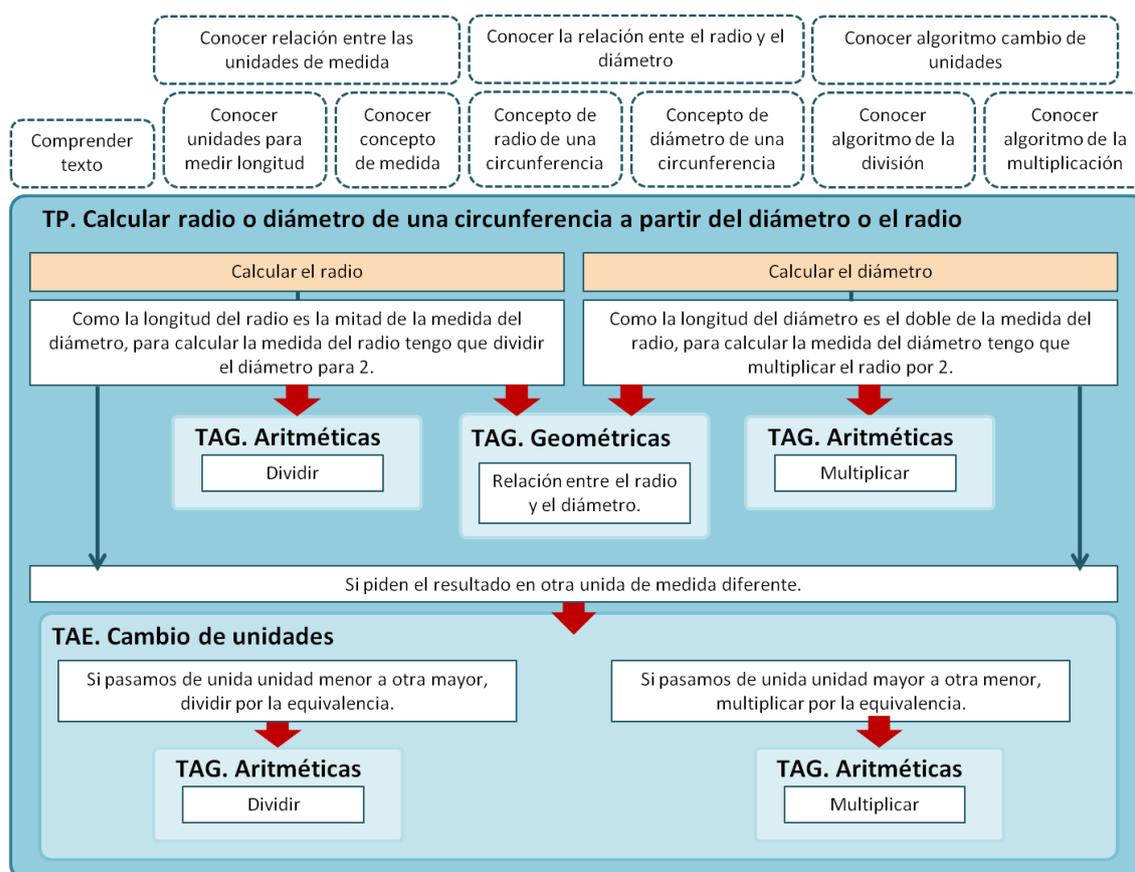


Figura 43. Esquema de conocimiento calcular el radio o el diámetro de una circunferencia a partir del diámetro o del radio.

6.1.7. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 7. Calcular volumen.

Los alumnos se enfrentan por primera vez a un ejercicio de cálculo del volumen de una figura en 4º de EP. Desde este momento hasta 6º de EP las actividades abarcan la medición del volumen de forma directa y con unidades de medida no convencionales (como pueden ser cubos), hasta introducir las unidades de medida convencionales. A continuación se muestran tres ejemplos de actividades con la tarea principal: calcular volumen.

13. Quants cubs hi ha a cada figura?

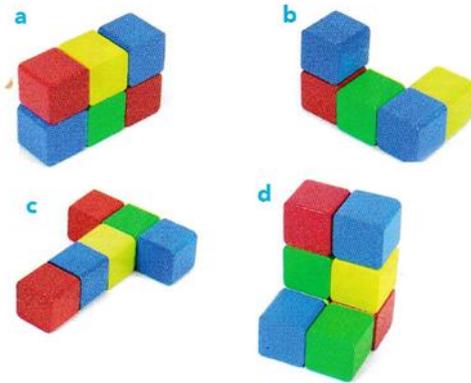


Figura 44. Actividad calculo de un volumen de 4º EP.

3. Calcula el volum d'aquestes figures:

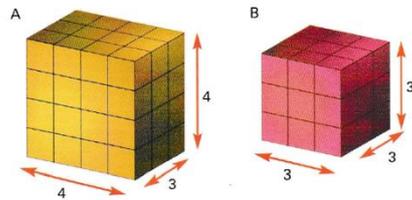


Figura 45. Actividad calculo de un volumen de 5º EP.

2. Si cada cub petit fa 1 m^3 , quin és el volum de cada figura?

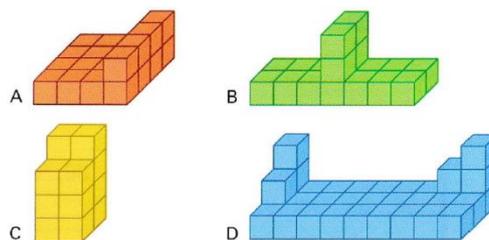


Figura 46. Actividad calculo de un volumen de 6º EP.

En las figuras anteriores podemos comprobar que el alumno podría descomponer la figura para calcular el volumen por partes y luego sumar el volumen total.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal cuyo objetivo es calcular el volumen de una figura:

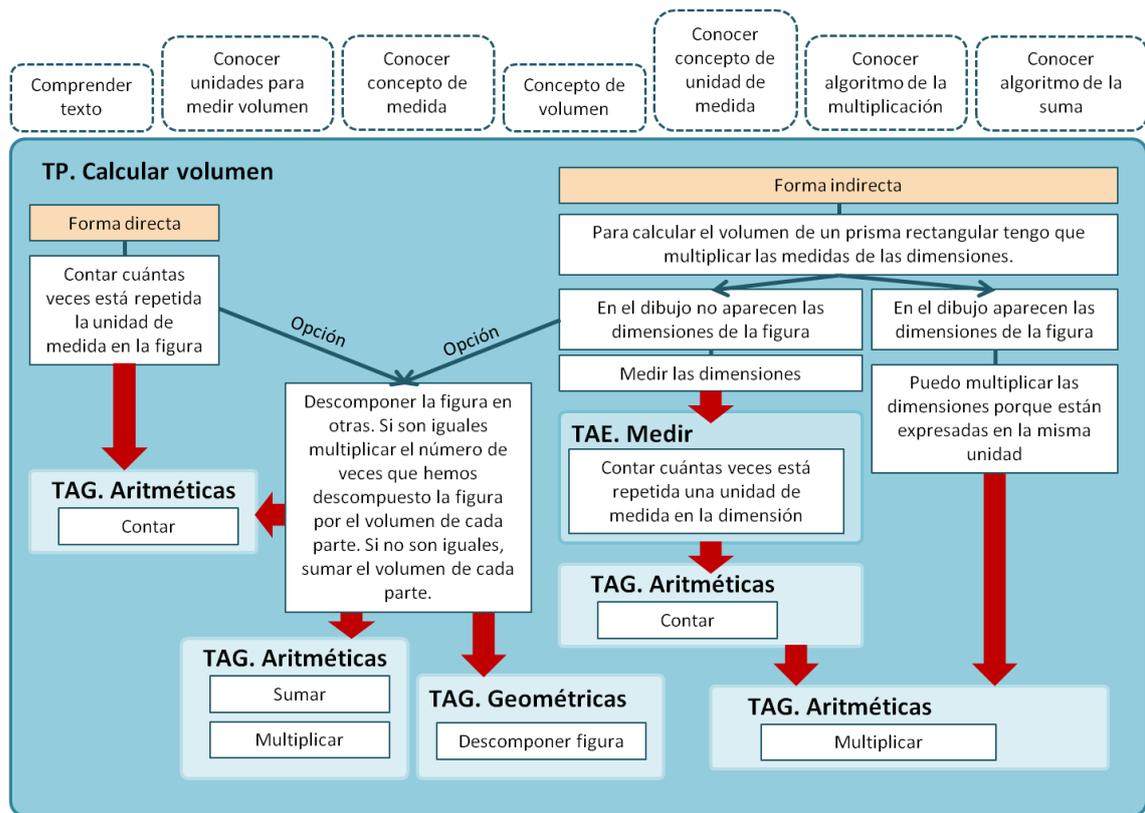


Figura 47. Esquema de conocimiento calcular volumen.

6.1.8. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 8. Cambio de unidades.

Tal y como se verá más adelante, el cambio de unidades es una tarea con un peso muy importante en el trabajo de la medida. Muchas de las tareas principales requieren de este tipo de tarea como tarea auxiliar específica para su resolución. Es a partir del ciclo medio cuando aparecen este tipo de actividades.

Las actividades cuyo objetivo principal es el cambio de unidades aparece en el ciclo medio, en el curso de 3º de EP y su presencia es significativa desde este momento hasta el final de la etapa educativa.

Los cambios de unidades entre distintas magnitudes se realizan atendiendo principalmente a dos estrategias. La primera consiste en calcular una medida en una unidad de medida distinta a partir de la relación existente entre dichas unidades mediante operaciones

aritméticas. La segunda consiste en la relación existente entre el sistema de numeración decimal y las unidades de medida en base decimal, de 100 en 100 o de 1000 en 1000.

Dentro de este tipo de tarea principal encontramos actividades con tres objetivos distintos tal y como se observa en el esquema. En primer lugar, tenemos las actividades que piden expresar una medida en una unidad de medida distinta. Este tipo de actividades se pueden resolver con las dos estrategias señaladas en el apartado anterior. En las siguientes figuras podemos observar un ejercicio de este tipo en cada uno de los cursos donde aparece.

19. Copia i completa les equivalències al teu quadern:

1 dm = 10 cm	1 m = 10 dm
2 dm = ... cm	2 m = ... dm
9 dm = ... cm	5 m = ... dm
14 dm = 140 cm	13 m = 130 cm
20 dm = ... cm	25 m = ... cm

Figura 48. Actividad cambio de unidades 3ºEP.

2. Completa les igualtats:

2 kg = g	13 g = kg
8 hg = g	250 g = kg
7,32 kg = g	500 g = kg
1,8 hg = g	150 dag = kg
32 dag = g	34 hg = kg

Figura 49. Actividad cambio de unidades 4ºEP.

1. ESCRIU LES CAPACITATS SEGÜENTS PRESENT COM A UNITAT:

a) el m³:

14.600 l 750 hl 15.000 dm³ 18,5 kl

b) el l:

4,9 m³ 70,6 hl 0,5 m³ 2.500 ml

Figura 50. Actividad cambio de unidades 6ºEP.

En segundo lugar, en vez de darnos las nuevas unidades de medida, nos dan la parte numérica y hay que hallar las unidades en las que está expresada. En la siguiente figuramos ejemplificamos una de estas actividades:

3. ESCRIU LES UNITATS QUE HI FALTEN:

7,413 hm = 741,3 ...

951,5 cm = 9,515 ...

81,6 dm = 8,16 ...

Figura 51. Actividad cambio de unidades 6º EP.

Por último, encontramos actividades donde el cambio de unidades tiene un fin concreto, como quitar la coma decimal o los ceros a la derecha. Estos dos últimos tipos de actividades se resuelven utilizando la estrategia de la analogía entre las unidades de medida (de base decimal, de 100 en 100 y de 1000 en 1000) y el sistema de numeración decimal de las magnitudes. En la siguiente figuramos ejemplificamos una de estas actividades:

4. Canvia d'unitat per expressar les capacitats següents sense decimals:

75,35 m ³	0,5 l	1,25 l
1,78 hl	7,5 cl	2,5 dl

Figura 52. Actividad cambio de unidades 6° EP.

Estos dos últimos tipos de actividades se abordan únicamente desde la estrategia del cambio de unidades atendiendo al valor posicional y aparecen solo en el ciclo superior.

La mayoría de las actividades cuya tarea principal es cambiar de unidades una medida son del primer tipo, es decir, te dan la nueva unidad de medida a la que tienes que transformar la medida. No es hasta el ciclo superior en 6° de EP cuando aparecen las actividades de tipo 2 y tipo 3 de cambio de unidades. Asimismo, el cambio de unidades en la magnitud de volumen y entre la magnitud de volumen y la magnitud de capacidad no se trabaja hasta 6° de EP.

En este último curso se pierde el cambio de unidades entre medidas de tiempo y se enfatiza en trabajo con las expresiones complejas e incomplejas de tiempo y que se detallan en el apartado correspondiente.

Con esta tarea principal también encontramos actividades con unidades de medida antiguas y su relación entre ellas y con el sistema internacional de medidas. Por tanto, no se trabajan únicamente el cambio de unidades entre las unidades de medida convencionales y que tienen relacionan con el sistema de numeración decimal sino que, además, se trabajan otros cambios menos frecuentes como, por ejemplo, con unidades de medidas antiguas.

35. El barril és la unitat de mesura en la producció de petroli i equival a 193 L. Si un pou produeix 3.895 barrils de petroli al dia, quants litres produeix?

Figura 53. Actividad cambio de unidades 4°EP.

Ahora bien, se conoce o se tiene la información de la relación de estas unidades de medida con otra intermedia, por ejemplo, si sabemos que 1 pie son 30 cm y que 100 cm es 1 metro, podemos realizar el cambio de pies a metros, calculando la equivalencia o pasando de una unidad a otra en 2 pasos.

- 15.** Els cristalls naturals més grans que es coneixen es troben a la cova Naica de Mèxic. Són cristalls de guix transparent. Mesuren 36 peus de longitud i pesen 50 tones:



- a) Un peu equival a uns 30 cm. Quants metres mesura un cristall?

Figura 54. Actividad cambio de unidades 5°EP.

La información sobre la relación entre distintas las unidades de medida suele estar presente en el enunciado o en recogida en alguna tabla. Además, en algunas actividades no es posible saber la relación directa entre dos unidades de medida como, por ejemplo, entre el pie y el metro o entre unidades de peso antiguas y kilogramos. En el caso del pie nos piden el resultado en m, así que habrá que hacer otro cambio de unidad.

La relación entre el volumen y la capacidad aparece sin la explicación del significado de ambas magnitudes y la relación que tienen.

Distintos autores (Chamorro, 2001; Luemo, 2001) observaron que este tipo de tarea conlleva un tratamiento *aritmético* de la medida donde el trabajo principal consiste en el manejo numérico.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal cuyo objetivo es realizar un cambio de unidades:

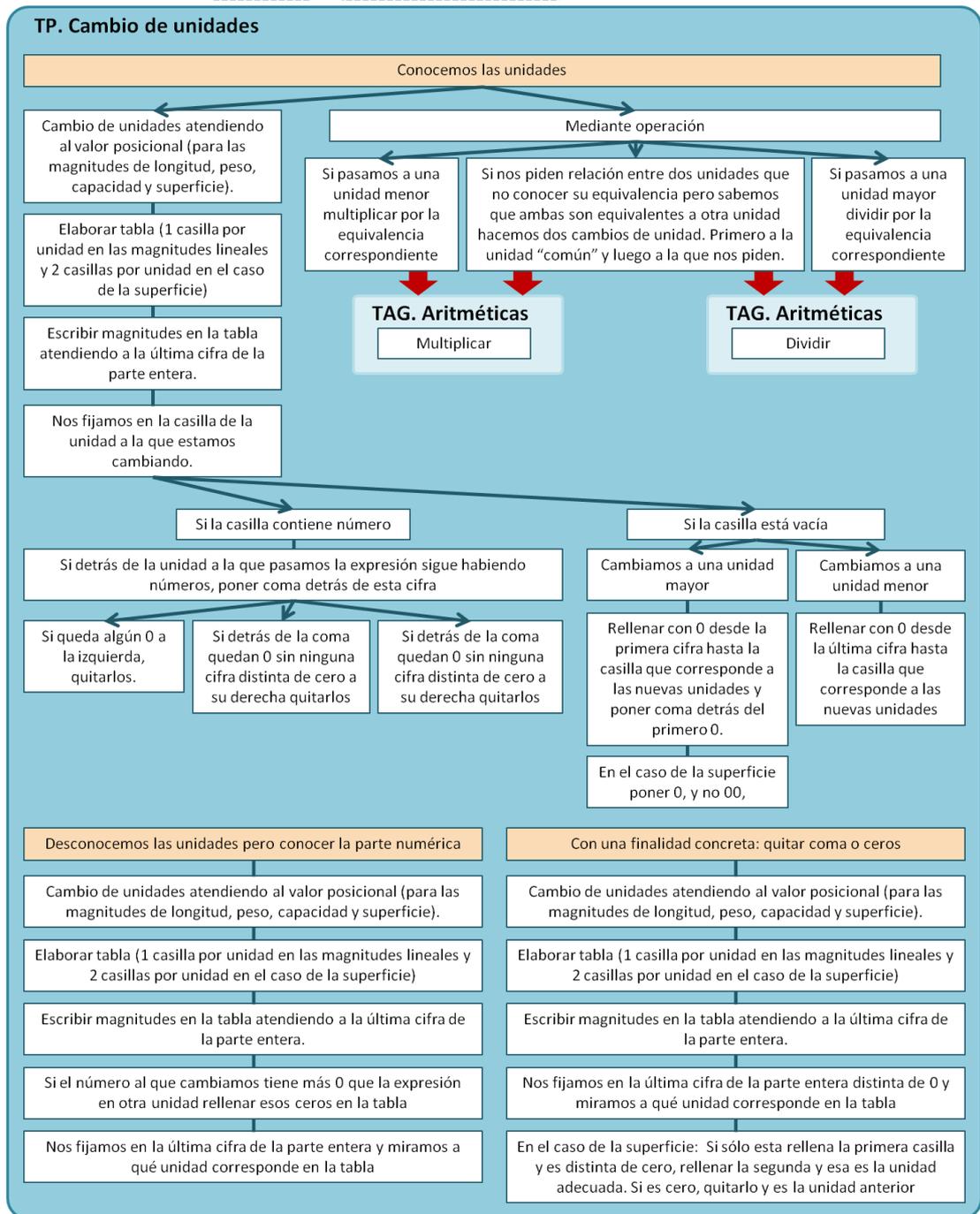
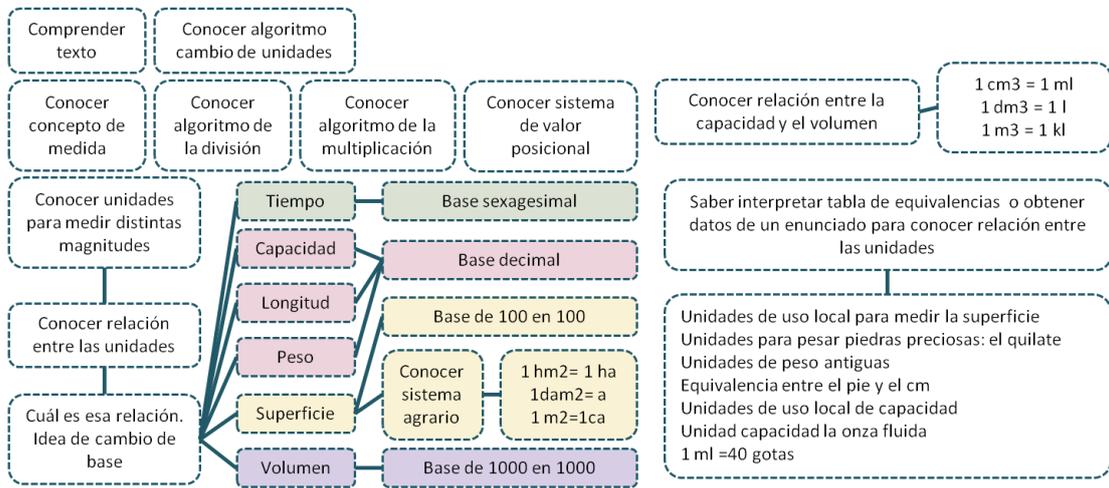


Figura 55. Esquema de conocimiento cambio de unidades.

6.1.9. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 9. Comparar.

En el ciclo inicial encontramos actividades de comparación de longitudes, pesos y capacidades. La primera actividad que aparece con esta tarea principal explica qué procedimiento seguir para comparar longitudes:

22. Fixa-t'hi: comparem longituds.

Procediment per comparar longituds.



Figura 56. Explicación procedimiento para comparar longitudes 1ºEP.

Esta explicación conlleva la idea de transitividad de la medida puesto que estamos reflejando la medida de un lápiz sobre un papel. Además, podemos observar que de forma indirecta esta explicación conlleva que uno de los dos extremos coincida. A continuación, mostramos una actividad para cada magnitud (longitud, peso y capacidad) que aparecen en este primer ciclo:

23. Encercla els que tenen la mateixa mida que el tornavís.

Procediment per comparar longituds.



Figura 57. Comparación de longitudes 1ºEP.

11. Completa.

Utilitzar la balança per comparar pesos.



El meló pesa d'1 quilo.



El tomàquet pesa d'1 quilo.

Figura 58. Comparación de pesos 2º EP.

2. Encercla la galleda en la qual cap menys aigua i completa les frases.

Comparar capacitats.



A la galleda vermella, hi cap aigua que a la verda.

A la galleda blava, hi cap aigua que a la vermella.

A la galleda verda, hi cap aigua que a la blava.

Figura 59. Comparación de capacidades 1º EP.

En el tipo de actividades anteriores se pide a los alumnos que comparen en base a la percepción de las dimensiones de los objetos o por la interpretación de un instrumento de medida como es el caso del peso con la balanza. En el caso de la comparación de longitudes se puede utilizar un instrumento intermedio lo que lleva asociada la idea de la transitividad de la medida.

A partir del ciclo medio estas actividades pasan a estar colonizadas por la aritmética tal y como se recoge en el siguiente apartado 6.2. El tipo de actividades de comparación son de tipo numérico donde tenemos que expresar todas las medidas en la misma unidad para, a continuación, compararlas numéricamente. Por este motivo surgen como tareas auxiliares específicas el paso de una expresión compleja a incompleja y el cambio de unidades. Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal cuyo objetivo comparar:

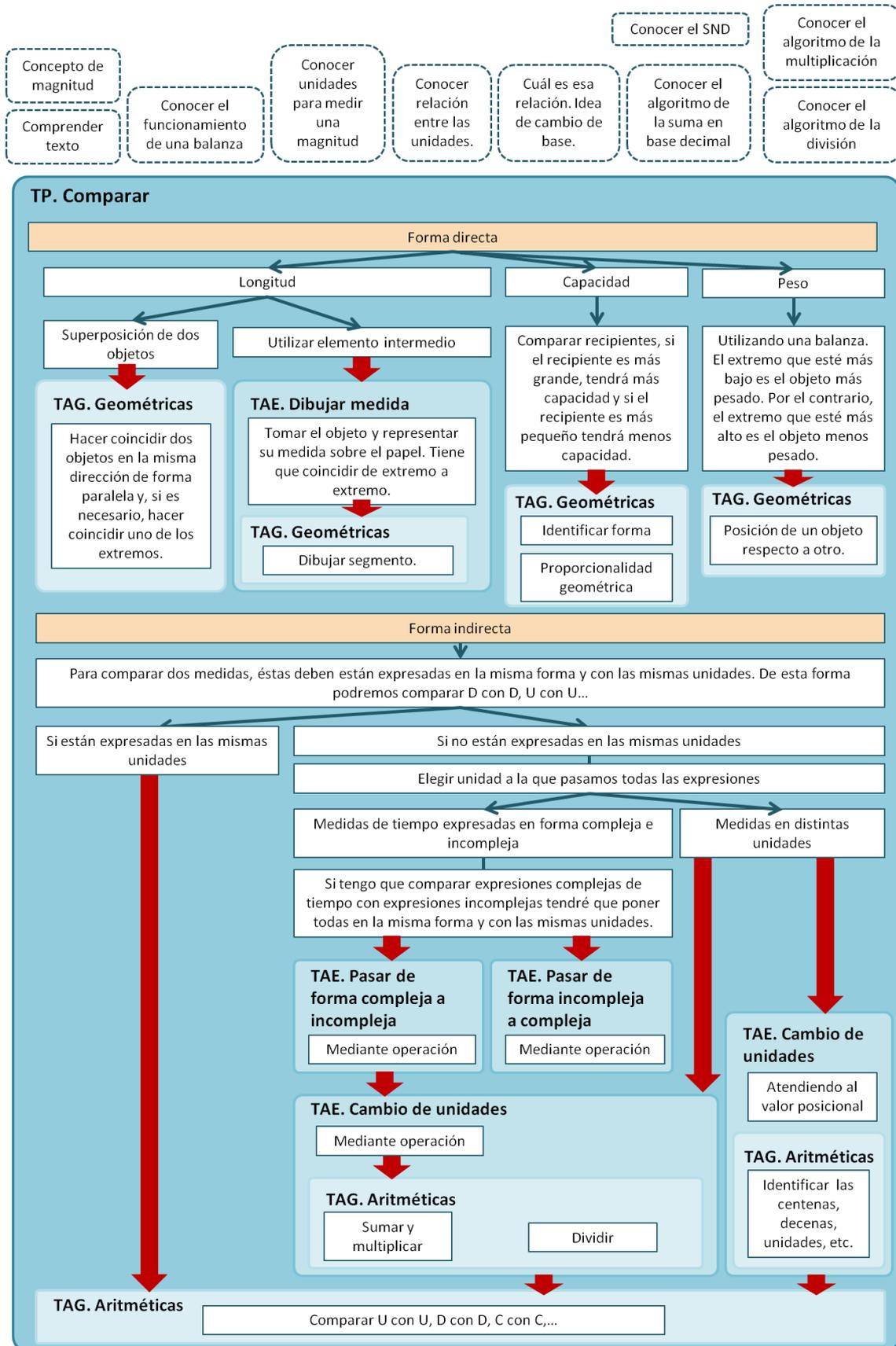


Figura 60. Esquema de conocimiento comparar.

6.1.10. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 10. Dar significado a la parte entera y decimal de una medida.

En este tipo de actividades se pide a los alumnos que, dada una medida, expresen qué es la parte entera y la parte decimal de acuerdo a las unidades de medida en las que está expresada.

Para dar respuesta a esta tarea principal debemos tener en cuenta que la parte entera son las veces que la unidad de medida está de forma completa. Para dar significado a la parte decimal es necesario cambiar de unidades esa parte atendiendo al valor posicional.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal dar significado a la parte entera y decimal de una medida:

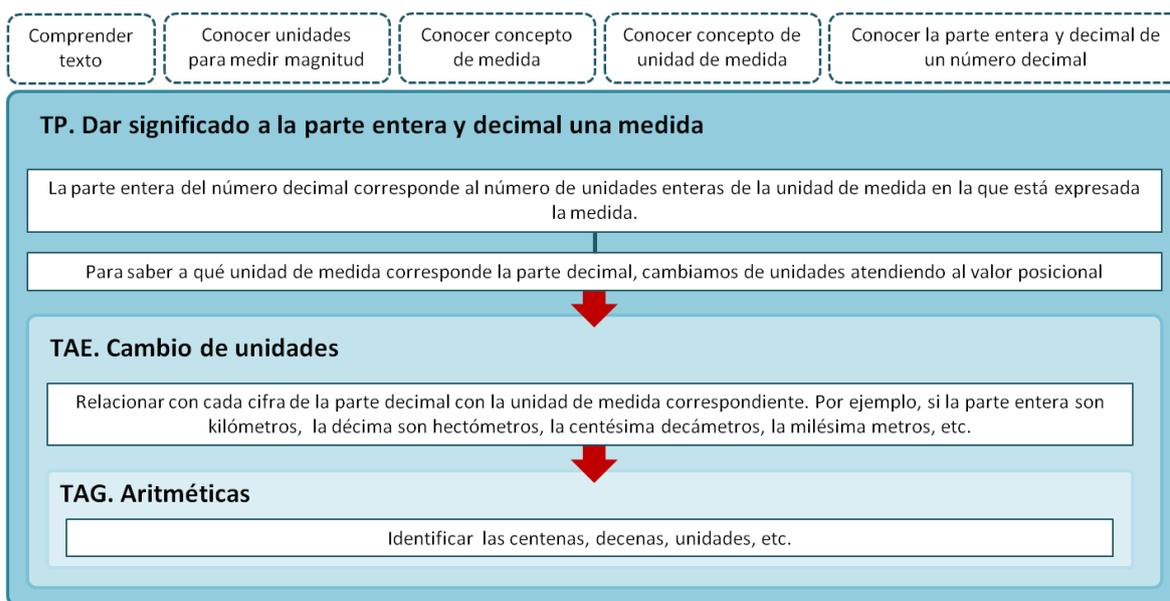


Figura 61. Esquema de conocimiento dar significado a la parte entera y decimal de una medida.

6.1.11. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 11. Dibujar medida.

El tipo de medidas que piden dibujar están asociadas a la longitud, la amplitud angular o el área. En 2º de Educación Primaria encontramos una actividad en la cual se pide a los alumnos que dibujen figuras con un área determinada utilizando la unidad de medida que

proponen (cuadrado). Hay que tener en cuenta que esta figura no puede presentar huecos ni solapamientos de las unidades de medida.

Esta tarea principal adquiere más fuerza desde mitad del ciclo medio hasta el final de la etapa. En 4° de Educación Primaria los alumnos deben dibujar segmentos de distintas longitudes mientras que, en 5° y 6° de Educación Primaria, este tipo de actividades están enfocadas al dibujo de ángulos de una determinada medida y de segmentos pero con un fin geométrico. Para dibujar una longitud o una amplitud angular el alumno debe elegir y utilizar los instrumentos de medida adecuados.

En este tipo de actividades también aparece la tarea de cambio de unidades puesto que si nos dan la medida a dibujar en una unidad de medida no representada en el instrumento de medida tengo que cambiar de unidades para saber qué dibujar.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal dibujar una medida:

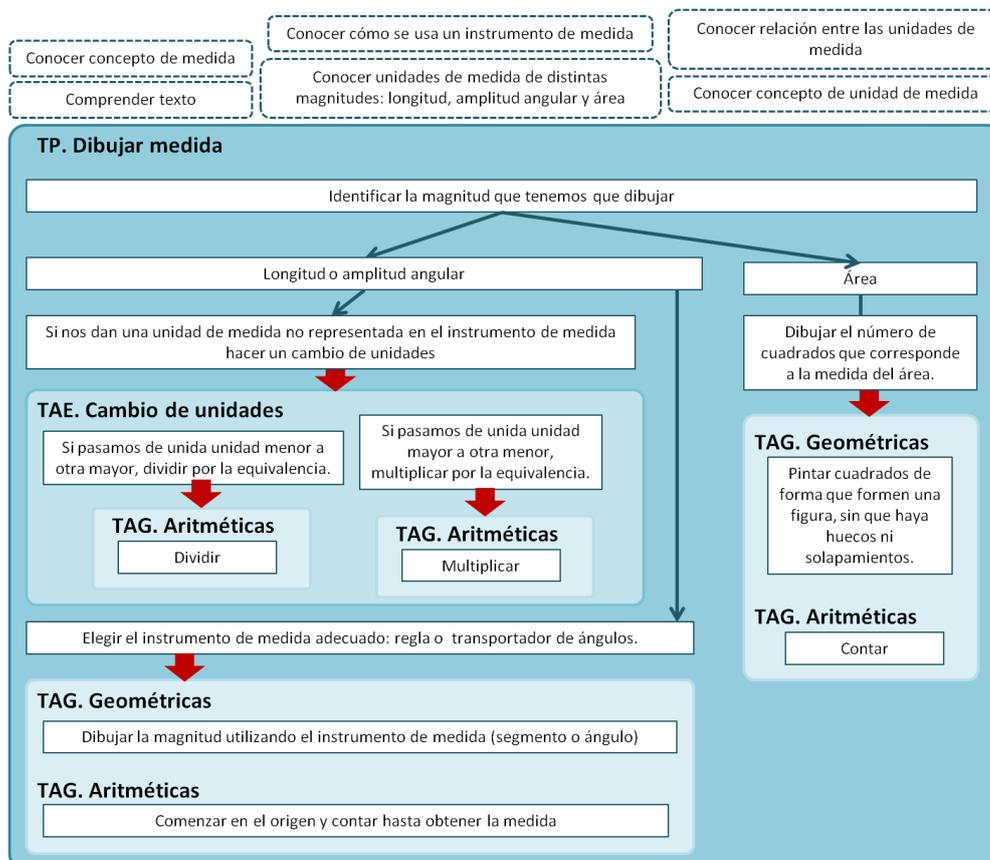


Figura 62. Esquema de conocimiento dibujar medida.

6.1.12. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 12. Elegir unidad de medida adecuada según el contexto.

Esta tarea principal se encuentra en el ciclo medio y en el ciclo superior. Para poder dar respuesta a esta tarea principal es necesario tener una representación de los objetos o situaciones presentadas en el libro de texto. Asimismo, necesitamos tener una representación de la unidad de medida utilizada. Por tanto, necesitamos estimar, en base a nuestra percepción, la unidad de medida correcta para el objeto o la situación presentada.

Si el objetivo de la actividad es expresar la medida en la unidad más adecuada según el contexto deberemos realizar un cambio de unidades. De nuevo, este tipo de tarea aparece asociada a una tarea principal.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal elegir unidad de medida adecuada según el contexto:

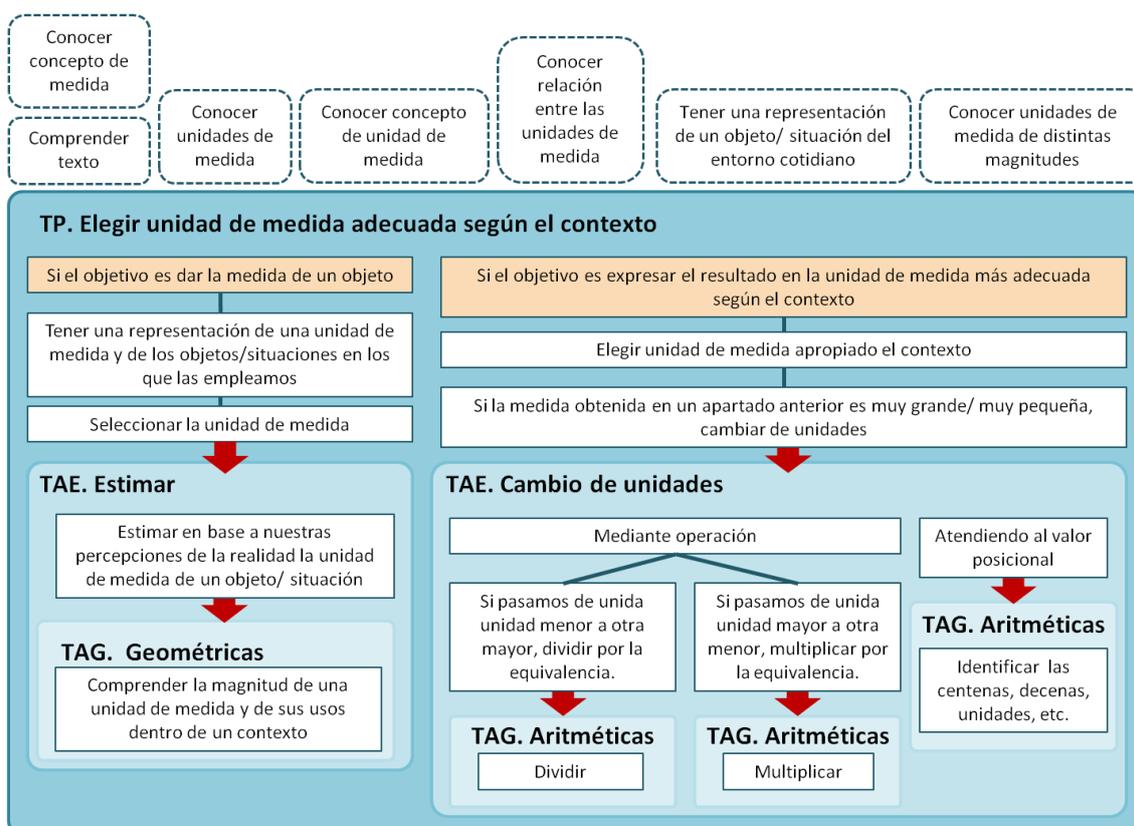


Figura 63. Esquema de conocimiento elegir unidad de medida adecuada según el contexto.

6.1.13. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 13. Elegir medida adecuada según el contexto.

La diferencia entre esta tarea principal y la anterior es que en esta debemos elegir entre distintas medida para un objeto dibujado o una situación. Al igual que en el apartado anterior, debemos estimar, en base a nuestra percepciones de la realidad la medida de un objeto o una situación.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal elegir medida adecuada según el contexto:

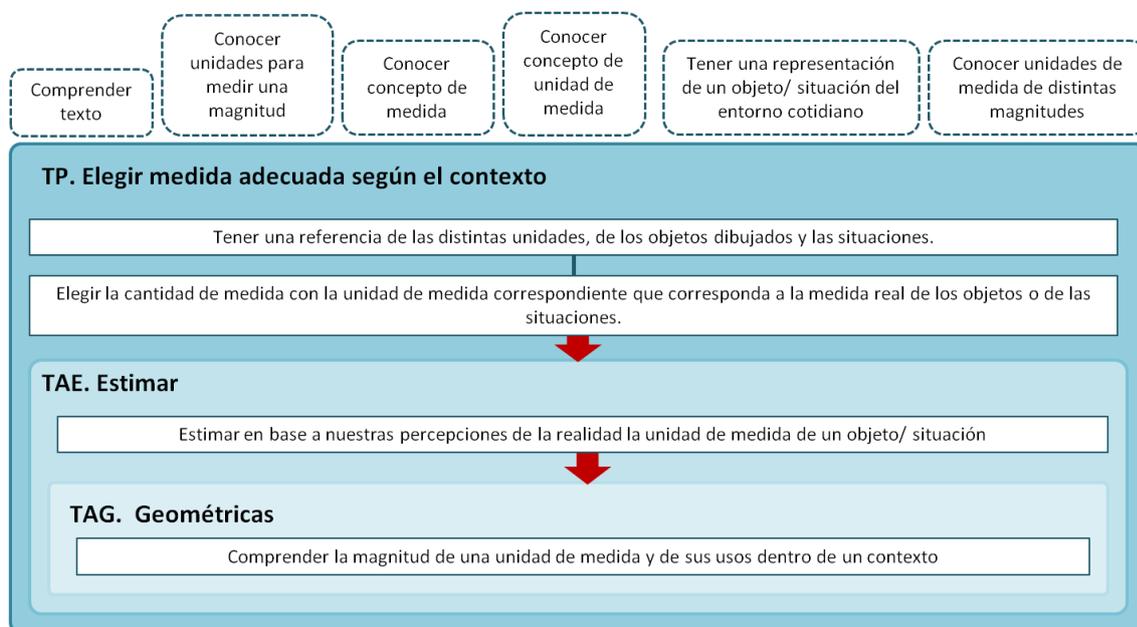


Figura 64. Esquema de conocimiento elegir unidad de medida adecuada según el contexto.

6.1.14. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 14. Estimar.

Aunque este tipo de actividades aparecen en todos los cursos la etapa educativa, las actividades cuyo objetivo principal es la estimación de una medida son escasas tal y como se puede apreciar en el siguiente apartado de resultados 6.2.

El tipo de actividades propuestas por el libro de texto conllevan una comparación o bien con la referencia que tenemos de las diferentes unidades o bien con la ayuda de un objeto dispuesto al lado del objeto del cual debemos estimar la medida. Tal y como se puede

observan en el apartado 2.4.1. se abordan sólo dos de las estrategias de estimación propuestas por Hildreth (1983), las relativas a la comparación del objeto con otro del que se posee información y al uso del conocimiento previo sobre el objeto o la unidad.

Según Chamorro y Belmonte (1988) se abordan 2 de las cuatro estrategias que proponen, la visualización de la unidad que se va a usar en la estimación y repetirla mentalmente sobre el objeto a medir y la comparar la longitud a medir con la longitud de un objeto conocido.

Del análisis de este tipo de actividades y considerando la propuesta de Pizarro y Albarracín (2015), sobre los distintos tipos de estimación métrica surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal estimar:

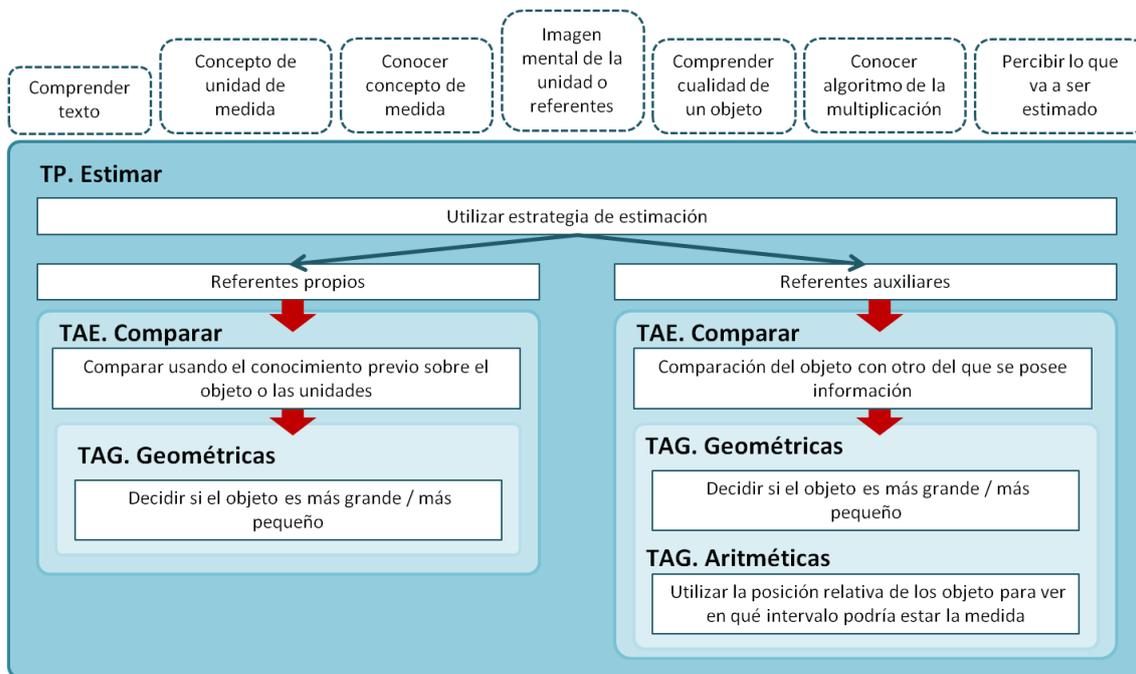


Figura 65. Esquema de conocimiento estimar.

6.1.15. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 15. Explicar uso de instrumento de medida.

Solo encontramos una actividad en este sentido en 4° de Educación Primaria y está asociada al funcionamiento de un reloj digital. Es necesario saber que la cifra que está antes de los dos puntos son las horas y la cifra que está detrás los minutos. Lo más significativo es el cambio de día. Como el día tiene 24 horas, cuando cambiamos de día el reloj pasa de marcar 23:59 a 00:00.

Del análisis de esta actividad surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal explicar uso de instrumento de medida:

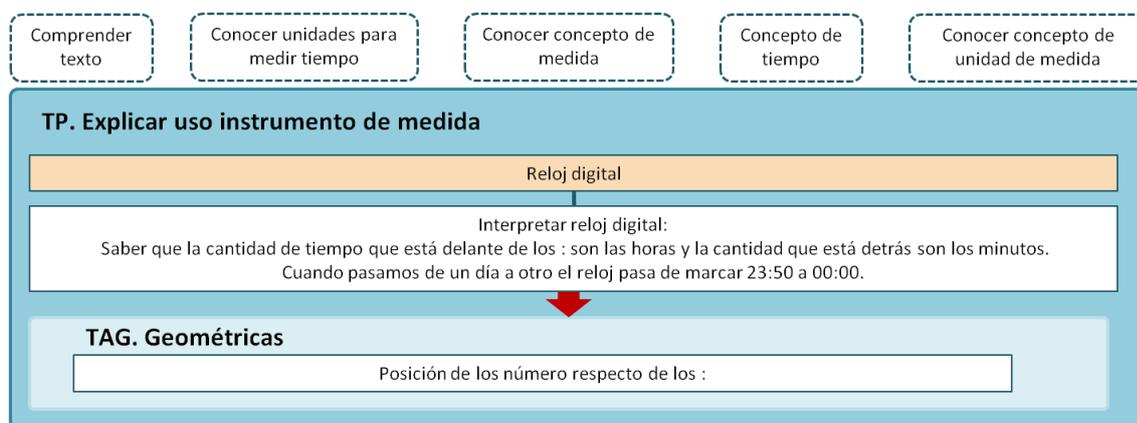


Figura 66. Esquema de conocimiento explicar uso de instrumento de medida.

6.1.16. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 16. Interpretar calendario.

Durante los tres primeros cursos de Educación Primaria, el libro de texto recoge actividades relativas a la interpretación del calendario tal y como lo conocemos hoy en día.

El tipo de actividades relativas a esta tarea principal tienen que ver con identificar el día de la semana que es un día concreto, a partir de un día concreto ver qué días has delante y detrás u obtener información del calendario.

Este tipo de tareas conllevan tanto tareas aritméticas como geométricas. Es necesario conocer el orden de los números para saber qué día es antes o después de una fecha

señalada así como contar cuántos días hay en una semana o cuántos días de la semana hay en un mes determinado.

Por otro lado, las tareas geométricas están asociadas a la locación de un número en el calendario y la referencia con los días de la semana que aparecen escritos.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal interpretar calendario:

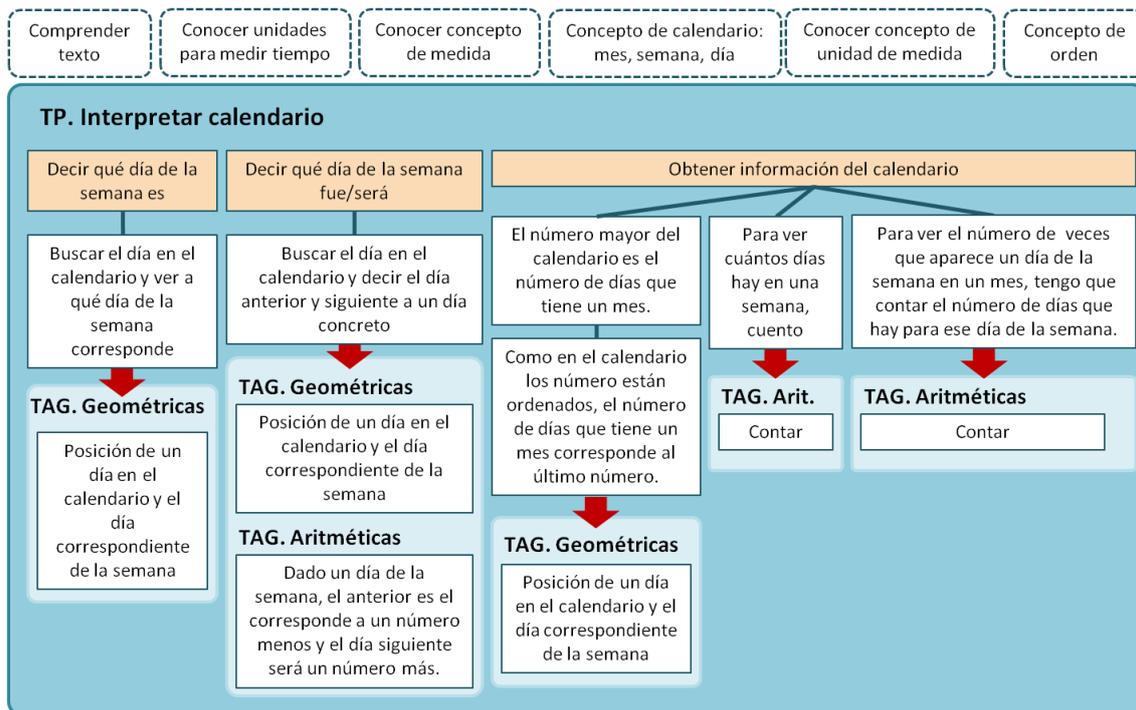


Figura 67. Esquema de conocimiento interpretar calendario.

6.1.17. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 17. Medir amplitud angular de forma directa.

Las principales actividades de medición están centradas en la medida de longitudes y amplitudes angulares. Asimismo, el calculo de medidas geométricas también comportan una medición que, en la mayoría de los casos es indirecta. Por tanto, podemos decir que las actividades que conllevan el uso de un instrumento de medida están relacionadas con la medición de longitudes y amplitudes angulares. Se ha elaborado un esquema para cada una

de estas dos magnitudes. Queda visible como el libro de texto se ve sujeto a su formato al no proponer actividades de medida de capacidad y peso.

Para medir un ángulo es necesario comprender el concepto de ángulo, de amplitud angular y de las partes del ángulo. A diferencia de la medición de la longitud de un objeto, para la medida de un ángulo podemos utilizar un transportador con escala interior y exterior. Por tanto, medir un ángulo implica conocer cómo se utiliza el transportador de ángulos.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal medir amplitud angular de forma directa:

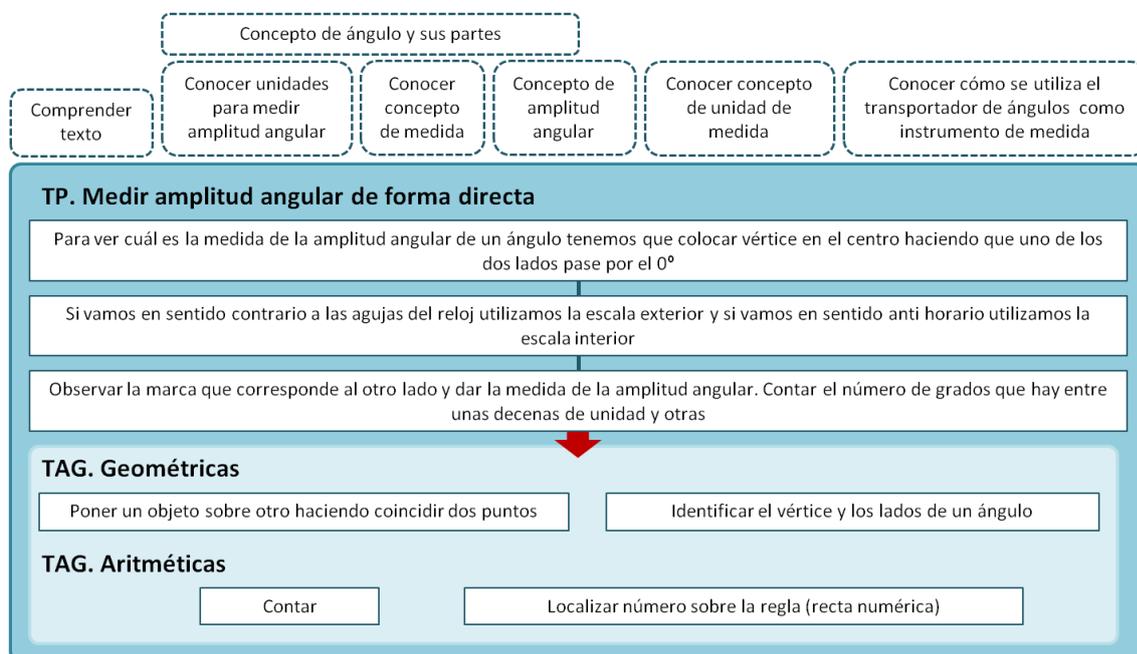


Figura 68. Esquema de conocimiento medir amplitud angular de forma directa.

6.1.18. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 18. Medir longitud de forma directa.

Encontramos cinco tipos de actividades que tienen como objetivo principal la medir una longitud de forma directa. En primer lugar, encontramos objetos dibujados donde se marca el inicio y el final de la longitud tal y como muestra la siguiente figura:

4. Mesura amb el regle de dits (retallable).

Unitats corporals de longitud: el dit.

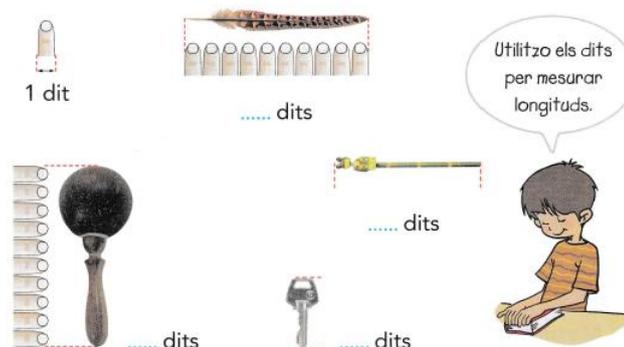


Figura 69. Ejemplo de actividad de medida con unidades no convencionales de 1º EP.

Se facilita a los alumnos recortables para que puedan ponerlo en la longitud marcada y donde aparecen las unidades de medida alineadas, una detrás de otra, sin hucos ni superposiciones. De esta forma, los alumnos hacen coincidir el origen del objeto con el inicio de estas unidades hasta el final del mismo que está marcado. En este punto se cuenta el número de veces que está contenida dicha unidad de medida en la longitud.

Este tipo de actividades evolucionan en el mismo formato pero utilizando unidades de medida convencionales. Se dibuja un objeto con la longitud limitada por una marca inicial y final. Para calcular su medida es necesario recurrir a un instrumento de medida que viene representado por la regla. Hacemos coincidir el origen de la regla con la marca inicial y leemos la medida en la marca final. Para ello, es necesario saber que las marcas grandes de la regla nos indican los centímetros y las pequeñas los milímetros. Para facilitar el conteo, la regla lleva marcada una línea en el medio de cada centímetro que no es tan larga como las líneas que marcan los centímetros no tan cortas como la de los milímetros. Ahora bien, el enunciado nos puede pedir que expresemos el resultado de esta medida de forma compleja o incompleja.

Por último encontramos actividades en las que el alumno debe ser capaz de medir una longitud, de un objeto, de un segmento o el radio o diámetro de una circunferencia. Para ello, debe seleccionar el instrumento de medida que le permita medir dicha magnitud.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal medir longitud de forma directa:

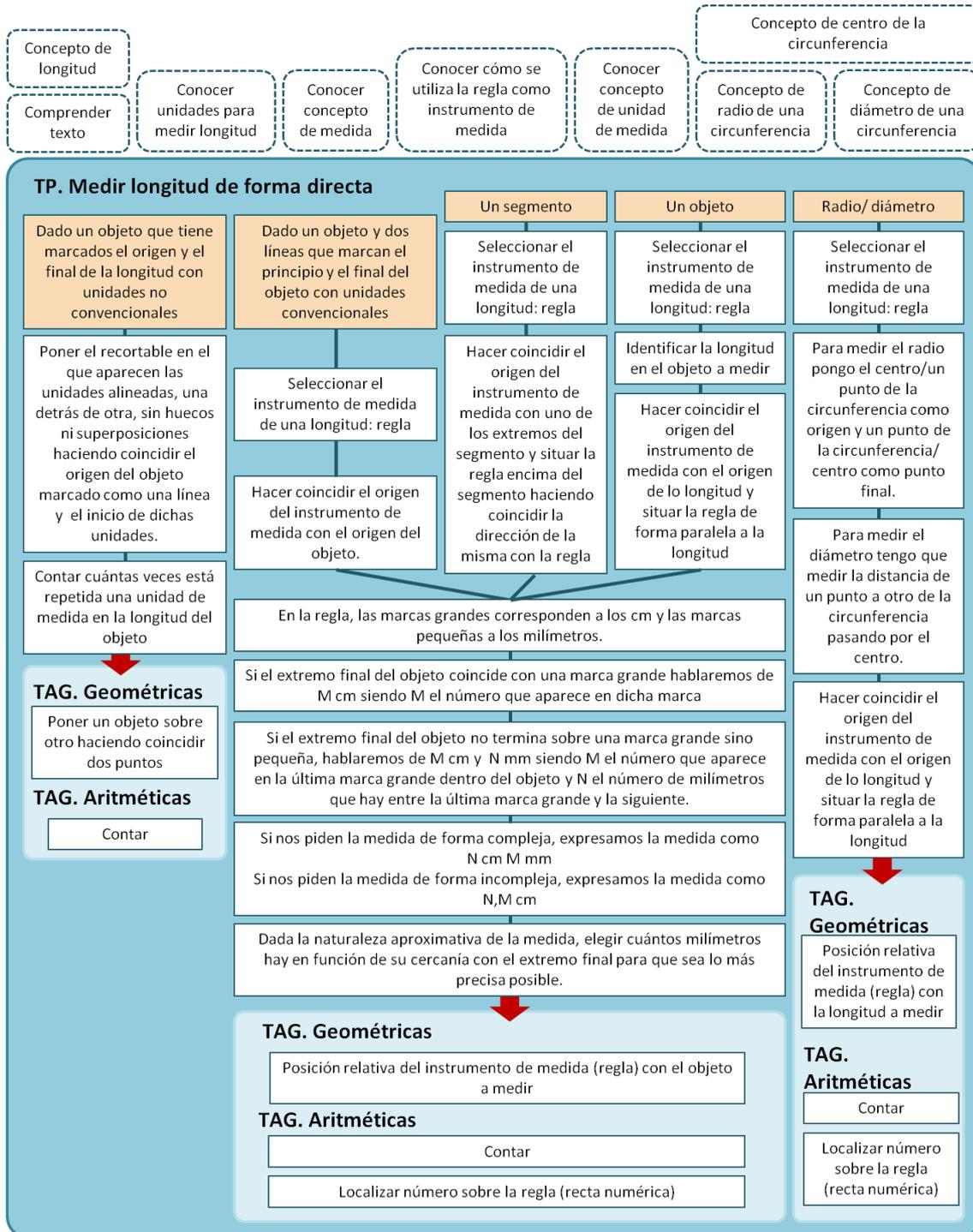


Figura 70. Esquema de conocimiento medir longitud de forma directa.

6.1.19. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 19. Obtener el peso de un objeto con la escala de una báscula.

Las actividades cuya tarea principal parece estar enfocada a la medición de un peso se basan en la lectura de una escala de una báscula. En este caso es necesario ver en cuántas partes está dividida cada unidad para poder dar respuesta al ejercicio. Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal obtener el peso de un objeto con la escala de una báscula:

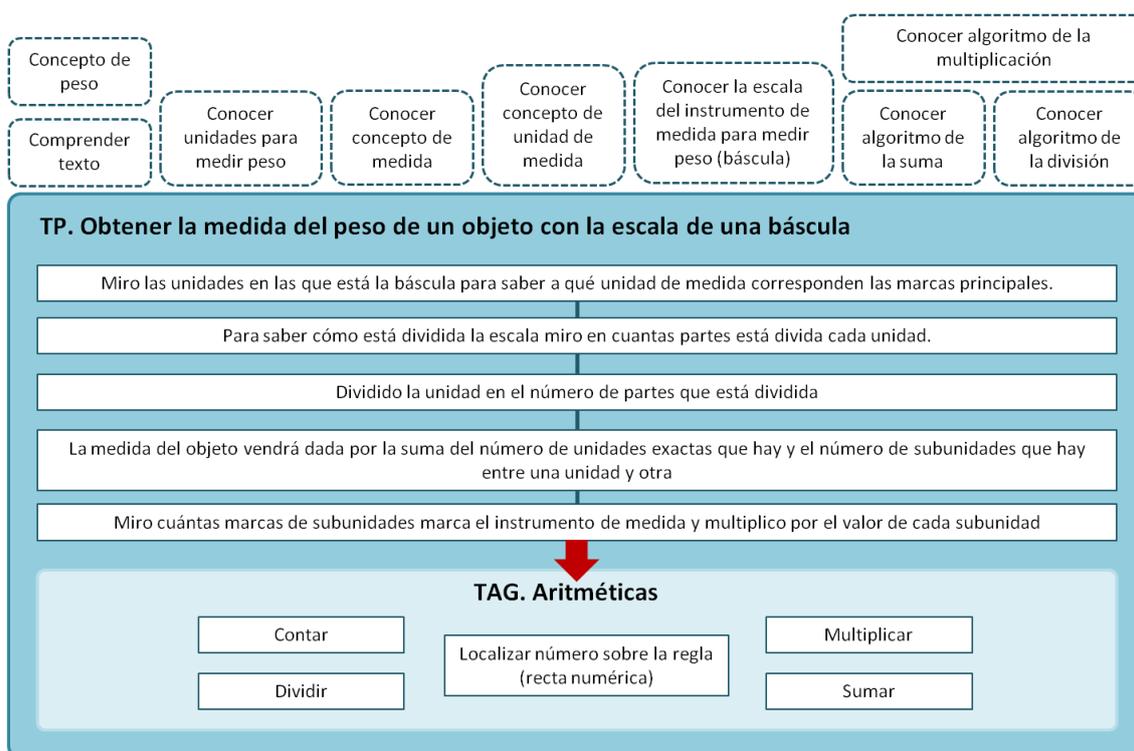


Figura 71. Esquema de conocimiento obtener el peso de un objeto con la escala de una báscula.

6.1.20. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 20. Obtener la medida de la longitud de un objeto a partir de la longitud de otro objeto.

Otra de las actividades de medida consiste en calcular la longitud de un objeto a partir de la medida de otro. En este tipo de actividades aparecen dos objetos alineados, conocemos la medida de uno de ellos que está dividida en parte iguales. Para hallar la longitud de este objeto tenemos el objeto del que conocemos la medida dividir en partes iguales y, el otro objeto, cubre exactamente varias de estas partes. Por tanto, para hallar la longitud del

objeto desconocida, tenemos que calcular cual es la medida de cada parte para luego multiplicar por el número de veces que está incluida esa parte en la medida. Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal obtener la medida de la longitud de un objeto a partir de la longitud de otro objeto:

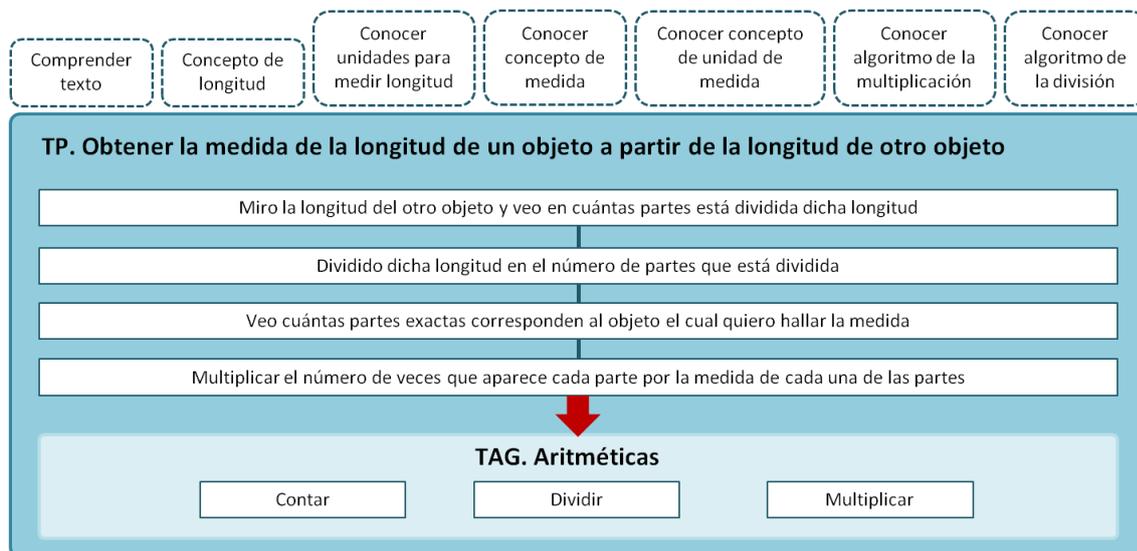


Figura 72. Esquema de conocimiento obtener la medida de la longitud de un objeto a partir de la longitud de otro objeto.

6.1.21. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 21. Obtener la longitud de un objeto con el instrumento de medida dibujado o una cuadrícula.

En algunas de estas actividades la acción de medir viene dada por la lectura de una escala. En este tipo de actividades tenemos que observar si la longitud del objeto comienza en el origen del instrumento de medida que, en la mayoría de los casos, está representado con una regla. En el caso de que no comience en el origen deberemos calcular la longitud atendiendo a la distancia que hay desde el origen hasta el inicio del objeto y la medida que marca el final del extremo. También aparecen actividades donde los objetos están dibujados sobre una cuadrícula. En esta cuadrícula, cada lado del cuadrado mide un cm por lo que, para calcular la medida únicamente necesitamos contar el número de veces que está contenida dicha unidad en el objeto. En este tipo de actividades el objeto comienza en el mismo punto que una unidad de medida, es decir, el número de unidades de medida es

exacto. Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal obtener medida de la longitud de un objeto con el instrumento de medida o una cuadrícula:

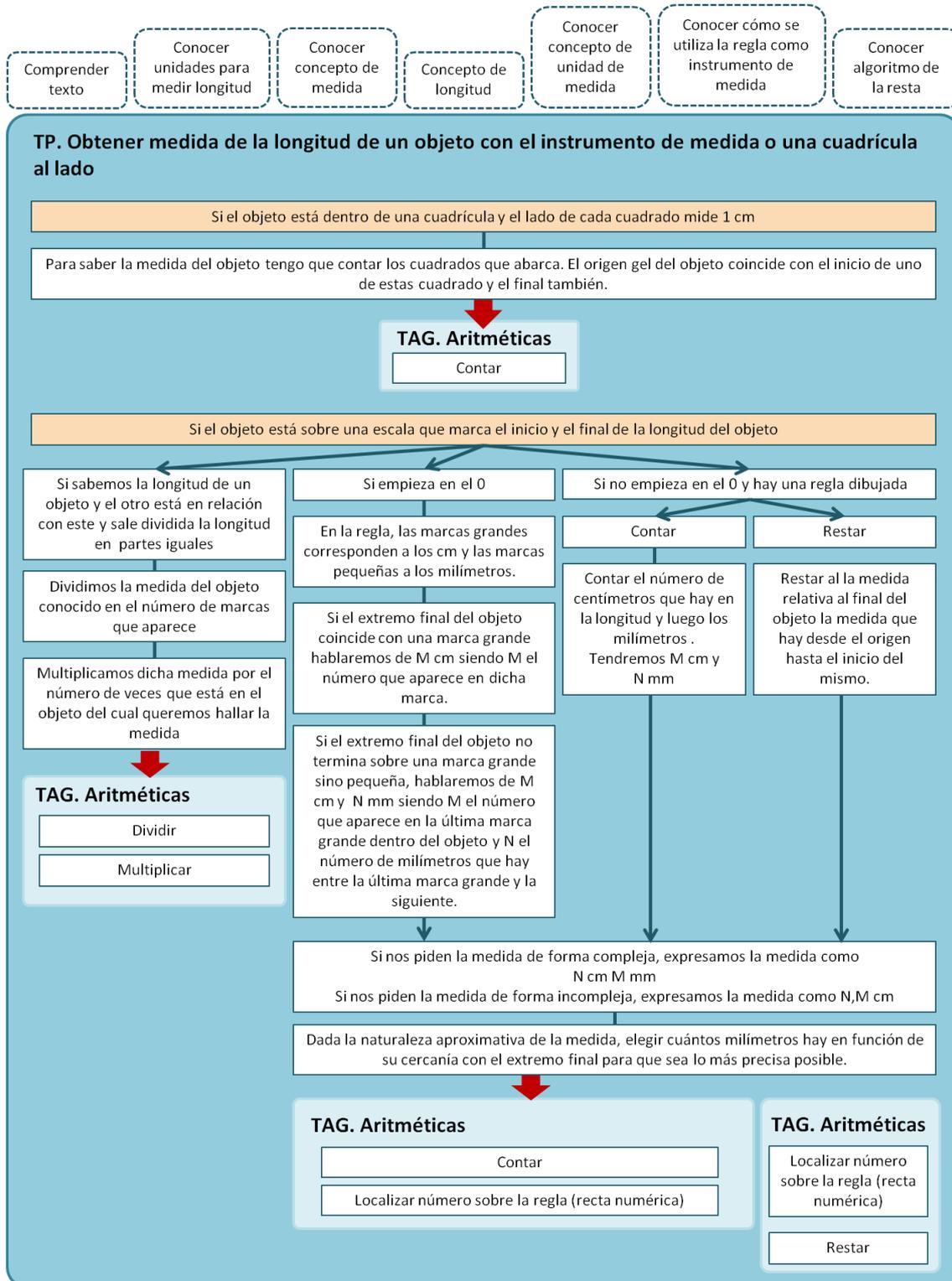


Figura 73. Esquema de conocimiento obtener medida de la longitud de un objeto con el instrumento de medida o una cuadrícula.

6.1.22. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 22. Ordenar de forma directa.

Para poder ordenar objetos en función de su medida es necesario comparar de forma directa o de forma indirecta. Dado que este esquema era muy grande se decidió dividirlo en dos atendiendo a si ordenamos de forma directa o indirecta.

Ordenar de forma directa implica realizar comparaciones directas que conllevan tareas auxiliares geométricas y aritméticas. Este tipo de actividades abarca las magnitudes de longitud, capacidad, peso, amplitud angular y tiempo. En el caso de la magnitud de tiempo, necesito conocer la secuencia de los meses para poder ordenarlos.

Para ordenar medidas es necesario comparar, por ese motivo, la tarea auxiliar específica asociada a este tipo de tarea principal es comparar. En el caso de la longitud, para ordenar podemos superponer dos objetos o utilizar un elemento intermedio. Si utilizamos un elemento intermedio estamos trabajando la transitividad. Para la amplitud angular, ocurre lo mismo, o podemos ordenar a partir de la percepción o debemos superponerlos para ver cuál es más amplio.

Las actividades que conllevan la ordenación directa de capacidades se basan en el tamaño de los recipientes por lo que, basta con comparar el tamaño de los objetos para ver cuál podrá contener más o menos cantidad.

Las actividades que conllevan la ordenación directa de pesos se basan en básculas dibujadas de forma que podemos ver qué objeto es más pesado que otro e ir ordenándolos progresivamente.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal ordenar de forma directa:

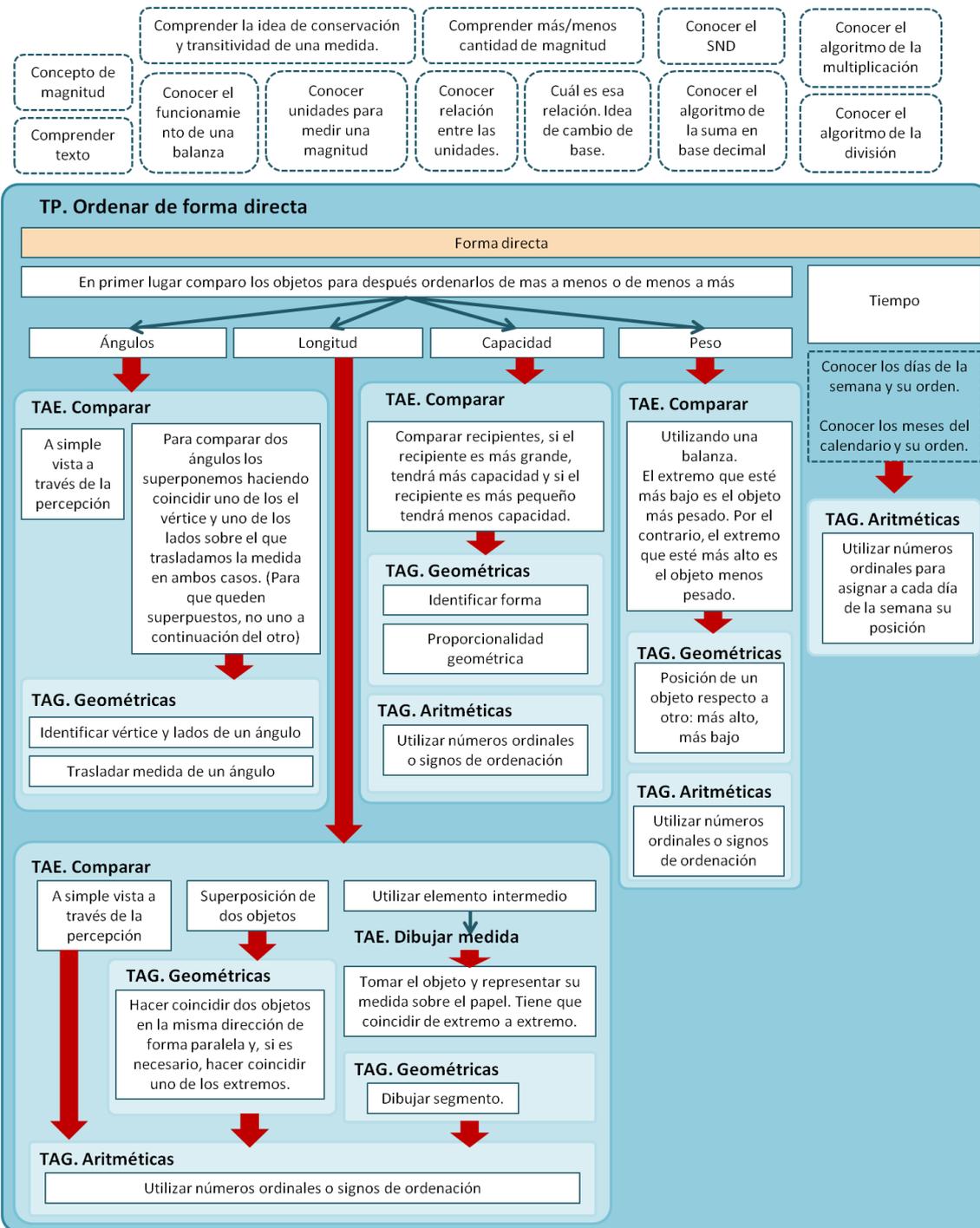


Figura 74. Esquema de conocimiento ordenar de forma directa.

6.1.23. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 23. Ordenar de forma indirecta.

A diferencia de la ordenación de medidas de forma directa, para ordenar de forma indirecta es necesario comparar de forma directa, lo que conlleva tareas más aritméticas puesto que es necesario cambiar de unidades o pasar de expresiones complejas incomplejas. Una vez que tengo todas las medidas en las mismas unidades ya es posible compararlas y ordenarlas.

Para poder ordenar las medidas de forma directa tenemos que recurrir a tareas aritméticas que conforman las tareas auxiliares específicas como: pasar de forma compleja a incompleja, pasar de forma incompleja a compleja o el cambio de unidades. Este tipo de tareas nos permiten expresar las medidas en las mismas unidades de medida.

También encontramos actividades de ordenar esferas en función de la medida de su radio o diámetro. En este tipo de actividades tenemos que decidir si comparar los radios o los diámetros, ver cuál es el radio o el diámetro de todas las esferas que están expresadas en la misma unidad para después compararlas numéricamente.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal ordenar de forma indirecta:

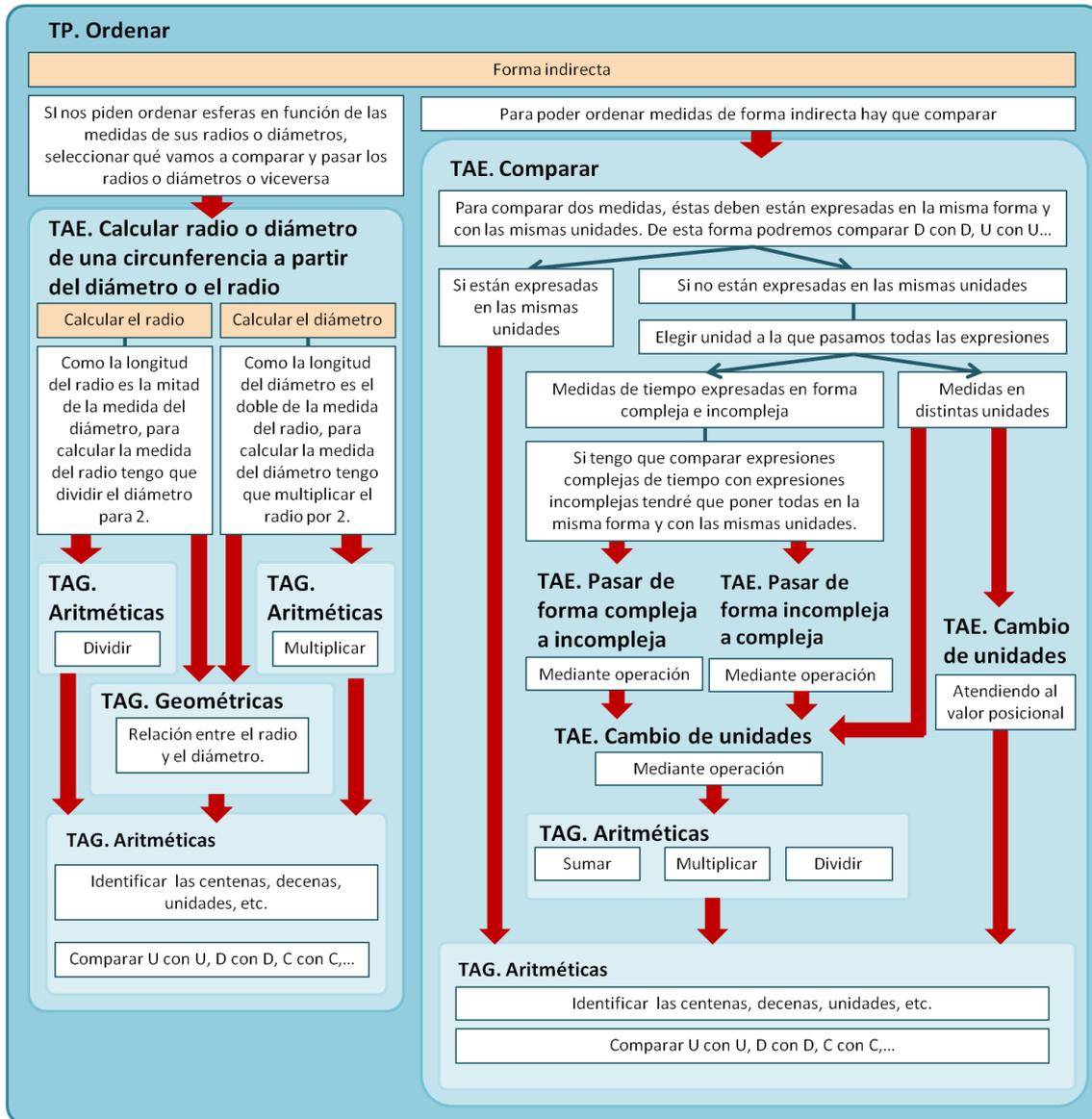
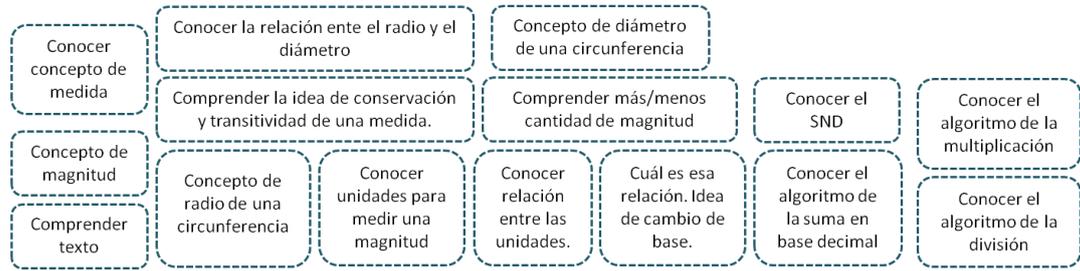


Figura 75. Esquema de conocimiento ordenar de forma indirecta.

6.1.24. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 24. Pasar una expresión compleja a una incompleja.

La elaboración de este esquema aparece en el apartado 5.3.2.

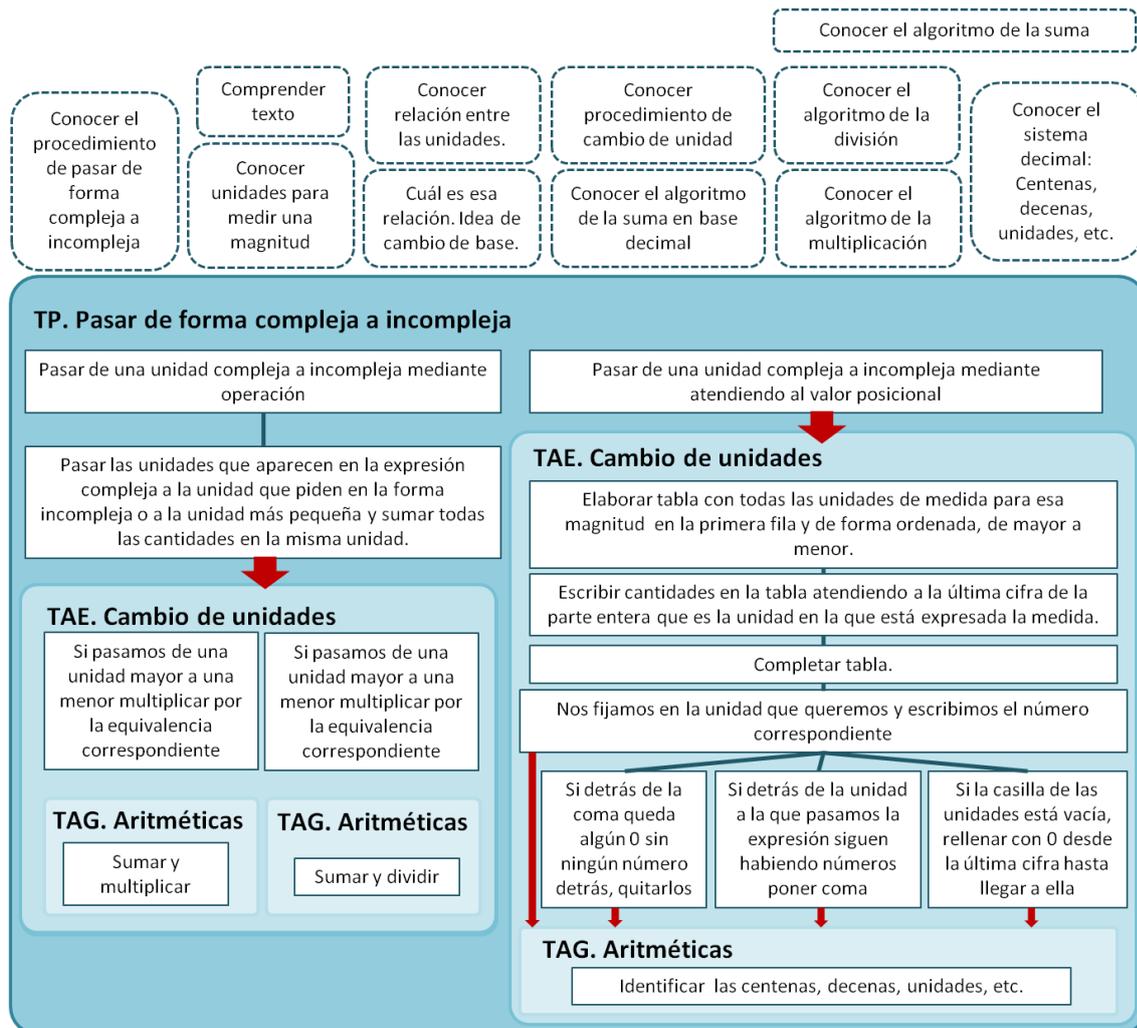


Figura 76. Esquema de conocimiento pasar una expresión compleja a una incompleja.

6.1.25. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 25. Pasar una expresión incompleja a una compleja.

Al contrario que en el anterior esquema, en este tipo de tareas se pide pasar una expresión incompleja a compleja. Para ello, podemos utilizar el sistema de numeración decimal para las unidades de medida basadas en el sistema decimal o podemos utilizar la equivalencia entre las unidades de medida y operar.

Como pasamos de una expresión incompleja a compleja, vamos a pasar a una unidad mayor, por ese motivo, si utilizamos la equivalencia entre las unidades, tendremos que dividir. El cociente serán las nuevas unidades y el resto las unidades originales.

Si pasamos de forma incompleja a compleja atendiendo al valor posicional nos tendremos que ayuda de sistema decimal. Al igual que sucede en el esquema de conocimiento anterior, elaboramos una tabla con las unidades de medida. Si nos piden unas unidades de medida concretas tendremos que ver si la casilla está vacía o no. Si lo está tendremos que rellenar con 0 desde la última cifra hasta esta unidad. Si la expresión incompleja es decimal, tendremos que tener en cuenta que las unidades las marca la última cifra de la parte entera. Si al escribir las unidades nos queda algún 0 a la izquierda no significativo, lo quitaremos.

Del análisis de este tipo de actividades surge el siguiente esquema de conocimiento asociado a la tarea principal pasar una expresión incompleja a una compleja:

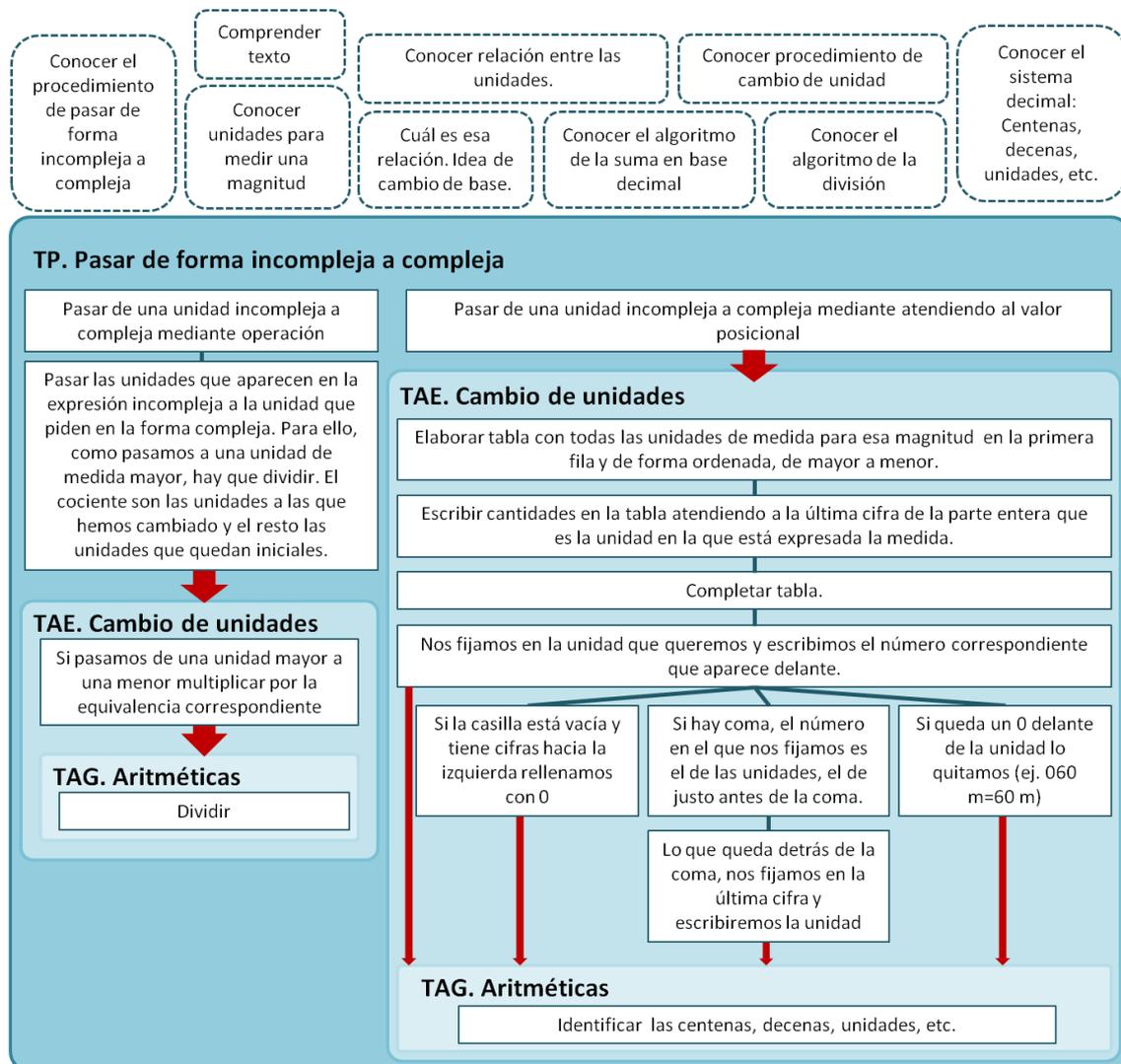


Figura 77. Esquema de conocimiento pasar una expresión incompleja a una compleja.

6.1.26. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 26. Relacionar expresiones iguales.

En este tipo de actividades la tarea principal consiste en relacionar medidas iguales que están expresadas de forma distinta. Encontramos actividades donde tenemos o bien expresiones incomplejas en distintas unidades o bien expresiones complejas e incomplejas.

En magnitudes donde la base es decimal, si encontramos expresiones incomplejas de podemos observar la parte numérica y las unidades en las que está expresada para ver si pueden ser iguales o no. En el caso de que las expresiones tengan la misma parte numérica pero que las unidades no sean la misma, no podrán ser iguales. Además, el orden de las

cifras debe de ser el mismo, sino no pueden ser iguales. Por último, si dos expresiones tienen la misma unidad de medida pero la parte numérica no coincide, no pueden ser iguales. Cuando no podemos tener en cuenta estos criterios, deberemos realizar un cambio de unidades. El cambio de unidades se puede realizar mediante operación o atendiendo al valor posicional.

Ahora bien, si tenemos que relacionar expresiones complejas e incomplejas, pasamos las expresiones complejas a incomplejas y tenemos en cuenta el conocimiento requerido para relacionar dos expresiones incomplejas.

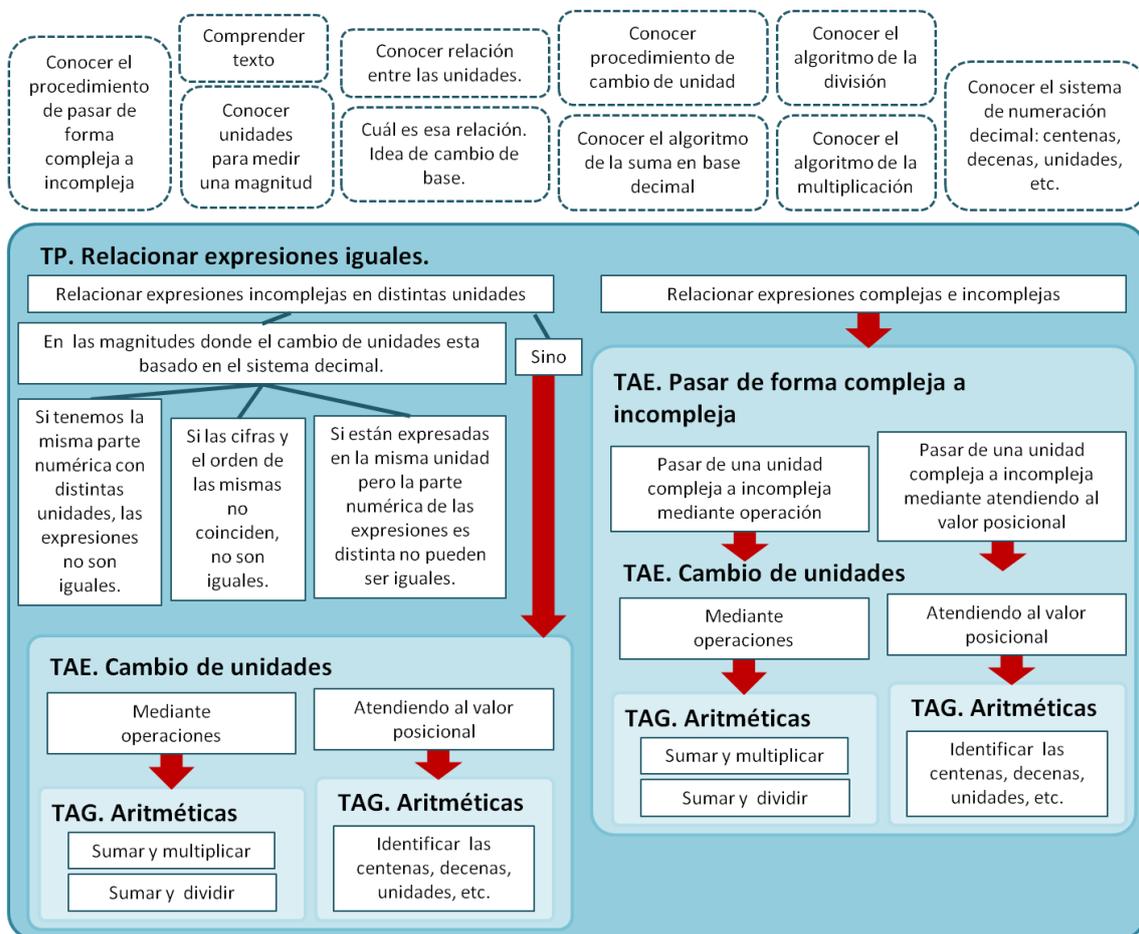


Figura 78. Esquema de conocimiento relacionar expresiones iguales.

6.1.27. ESQUEMA DE CONOCIMIENTO 27. Suma o resta de expresiones complejas de tiempo.

La elaboración de este esquema aparece en el apartado 5.3.1.

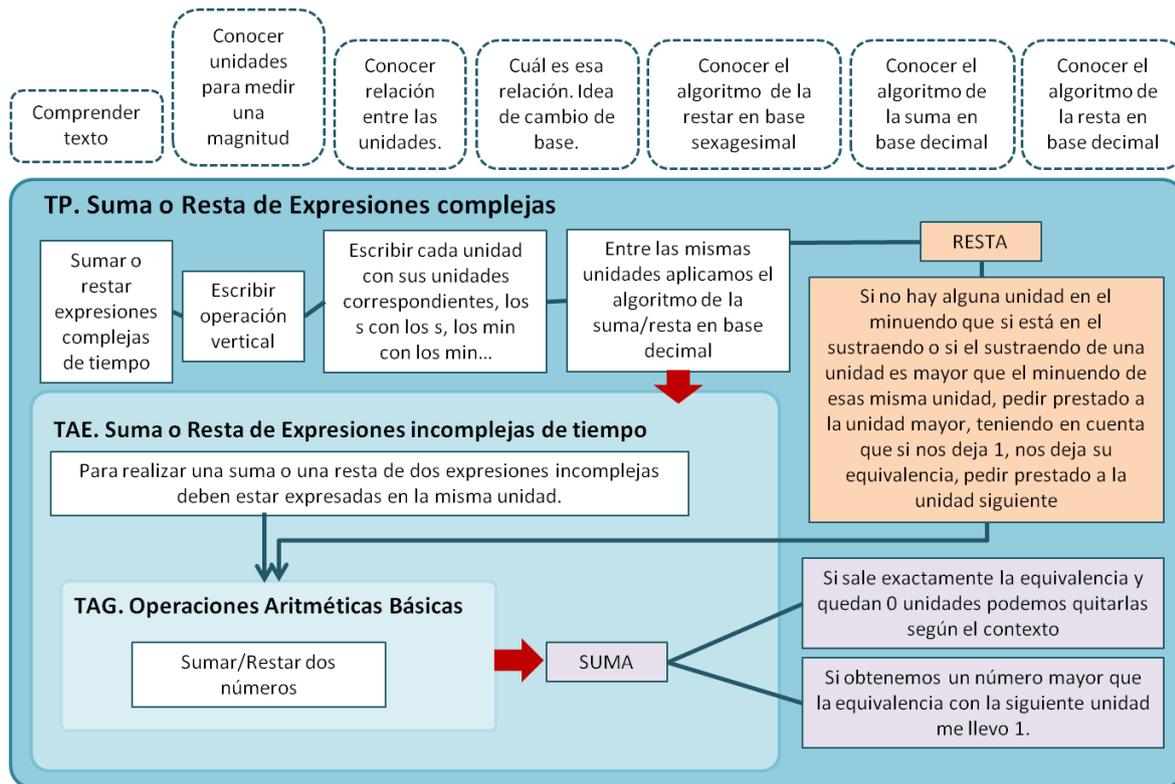


Figura 79. Esquema de conocimiento suma o resta de expresiones complejas de tiempo.

6.2. CLASIFICACIÓN DE ACTIVIDADES POR SU TAREA PRINCIPAL

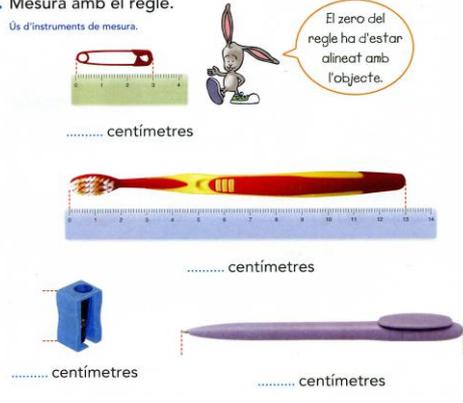
A continuación presentamos resultados obtenidos a partir del análisis de las tareas matemáticas promovidas en las actividades de medida de los libros de texto escogidos. Ofrecemos una clasificación de las tareas principales identificadas y los resultados referentes a su presencia en el libro de texto.

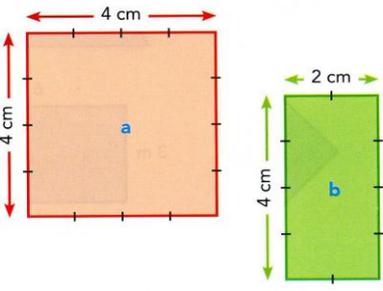
A partir de la categorización de las diferentes tareas principales que se tratan en los libros de texto analizados, encontramos una caracterización de las tareas promovidas en las actividades de medida. Entendemos que esta caracterización es un primer tipo de resultados en el sentido que nos permite determinar el tipo de trabajo matemático que conforma el currículo potencial propuesto por el libro de texto. Agrupamos las tareas principales identificadas en bloques de contenido que hemos extraído del currículo oficial y señalamos en la Tabla 7. los ciclos donde se abordan estos bloques para poder compararlo al final con el currículo potencial.

CONTENIDO	ETAPA		
	INICIAL	MEDIA	SUPERIOR
Magnitudes y selección de unidad	X	X	X
Comparación y ordenación de medidas	X	X	X
Medir	X	X	X
Leer y escribir medidas	X	X	X
Cambio de unidades (equivalencia, múltiplos y submúltiplos)		X	X
Medidas Geométricas		X	X
Estimación	X	X	X
Escalas		X	X

Tabla 7. Bloques de contenido extraídos a partir del currículo.

En la Tabla 8. recogemos un listado exhaustivo de las tareas principales identificadas agrupadas en bloques de contenido de acuerdo con la tabla anterior, junto con un ejemplo de cada una de ellas, para que ilustrar el significado atribuido a cada bloque.

	Bloque de contenido	Tareas principales	Ejemplo
MU	Magnitudes y selección de unidad.	Identificar magnitudes y medidas en un texto. Elegir la unidad o medida más apropiada.	<p>33. Estima la longitud que correspon a cada objecte:</p>  <p>Figura 80. Ejemplo de MU (3° EP).</p>
CO	Comparación y ordenación de medidas	Ordenar diferentes medidas Comparar diferentes medidas	<p>2. Ordena les capacitats següents de més gran a més petita:</p> <p>a) 25 ml 4,5 cl 0,3 l 650 ml</p> <p>b) 51 da l 2,5 hl 13 l 0,05 kl</p> <p>Figura 81. Ejemplo de CO (5° EP).</p>
MED	Medir	Medir longitud de forma directa. Medir amplitud angular de forma directa. Dibujar medida. Explicar uso de instrumento de medida.	<p>10. Mesura amb el regle. Ús d'instruments de mesura.</p>  <p>Figura 82. Ejemplo de MED (1° EP).</p>
EST	Estimar	Estimar una medida.	<p>12. Estima la longitud dels tornavisos A i B de la imatge:</p>  <p>Figura 83. Ejemplo de EST (5° EP).</p>

	Bloque de contenido	Tareas principales	Ejemplo
CUO	Cambio de unidades y operaciones	<p>Proceso de cambio de unidades.</p> <p>Relacionar expresiones.</p> <p>Cambiar la expresión una medida de forma compleja a incompleja y de forma incompleja a compleja.</p> <p>Suma y resta de expresiones complejas de tiempo.</p> <p>Calcular hora de otra ciudad con los husos horarios.</p>	<p>1. Completa les igualtats següents:</p> <p>$50 \text{ cl} = \dots \text{ l}$ $4 \text{ dl} = \dots \text{ cl}$</p> <p>$250 \text{ ml} = \dots \text{ cl}$ $1,5 \text{ l} = \dots \text{ dl}$</p> <p>$5 \text{ l} = \dots \text{ ml}$ $50 \text{ dl} = \dots \text{ l}$</p> <p>Figura 84. Ejemplo de CUO (6° EP).</p>
EX	Leer y escribir medidas.	<p>Obtener la medida de la longitud de un objeto a partir de la longitud de otro objeto.</p> <p>Obtener medida de la longitud de un objeto con el instrumento de medida o una cuadrícula.</p> <p>Calcular peso de un objeto a partir de las medidas de las pesas utilizadas para medirlo</p> <p>Interpretar calendario.</p> <p>Dar significado a la parte entera y decimal de una medida.</p>	<p>3. Quin pes indica la balança?</p>  <p>..... kg kg</p> <p>Figura 85. Ejemplo de EX (2° EP).</p>
MMG	Medidas Geométricas	<p>Calcular área.</p> <p>Calcular lado.</p> <p>Calcular perímetro.</p> <p>Calcular el radio o el diámetro de una circunferencia a partir del diámetro o del radio.</p> <p>Calcular volumen.</p>	<p>21. Calcula la superfície i el perímetre de cada figura:</p>  <p>Figura 86. Ejemplo de MMG (4° EP).</p>

	Bloque de contenido	Tareas principales	Ejemplo
ESC	Proporciones y Escalas	Uso de proporciones y escalas entre valores numéricos de medidas.	<p>2. La maqueta d'un cotxe s'ha construït a escala 1:43.</p> <p>La maqueta fa 10,5 cm de llargada.</p> <p>Pregunta:</p> <p>Operacions:</p> $10,5 \times 43 = 451,5$ $451,5 : 100 = 4,515$ <p>Resultat:</p> <p>Figura 87. Ejemplo de ESC (6° EP).</p>
PCM	Problemas contextualizados en la medida	Sumar, restar (de forma directa o calculando un sumando para que se cumpla una igualdad), multiplicar, dividir y comprobar el resultado de operaciones. Redondear. Escribir una fracción mixta como un número decimal. Elegir objetos cuya suma sea una medida establecida.	<p>22. En una ferreteria tenen un cabdell de corda de 8 metres de llargada.</p> <p>Si en venen 20 decímetres, quants metres de corda queden?</p>  <p>Figura 88. Ejemplo de PCM (3° EP).</p>
OTRAS	Introducción al álgebra	Tareas relacionadas con la introducción de procedimientos algebraicos.	<p>4. La balança està equilibrada. Indica el valor de les peses blanques. Justifica la resposta.</p>  <p>Figura 89. Ejemplo de OTRAS (4° EP).</p>

Tabla 8. Listado de tareas principales identificadas en el análisis agrupadas por bloques de contenido.

A partir de la tabla, observando los contenidos concretos de medida cubiertos, notamos importantes ausencias: el uso de unidades no estándares para medir, la elección de instrumentos de medida adecuados, el trabajo dirigido a mostrar la naturaleza de la medida

como una aproximación, y la anticipación e interpretación del error. También debemos destacar la ausencia de actividades que promuevan la lectura de tablas y escalas de medida como las utilizadas en la vida cotidiana.

6.2.1. Frecuencias por tipo de tarea principal.

Presentamos en este apartado los resultados de frecuencia relativa de las tareas principales identificadas en las actividades de medida para poder mostrar poder caracterizar los libros de texto analizados desde la perspectiva de su propuesta para la enseñanza de la medida. Para simplificar la presentación de los datos, agrupamos las diferentes tareas en los bloques de contenido presentados en la Tabla 7. En concreto, la Tabla 9. y la Figura 90. muestran las frecuencias relativas de los bloques de contenidos de las tareas principales identificadas en las actividades de medida del libro de texto separadas por ciclo.

	INICIAL	MEDIO	SUPERIOR
CO	22,78%	11,98%	3,63%
CUO	2,53%	27,88%	35,88%
ESC	5,06%	4,38%	4,01%
EST	2,53%	1,38%	0,38%
EX	6,33%	3,23%	2,10%
MED	40,51%	12,21%	6,68%
MMG	8,86%	8,76%	21,18%
MU	11,39%	3,92%	1,53%
PCM	0,00%	25,35%	21,95%
OTROS	0,00%	0,92%	2,67%

Tabla 9. Frecuencia de actividades de cada bloque por ciclos.

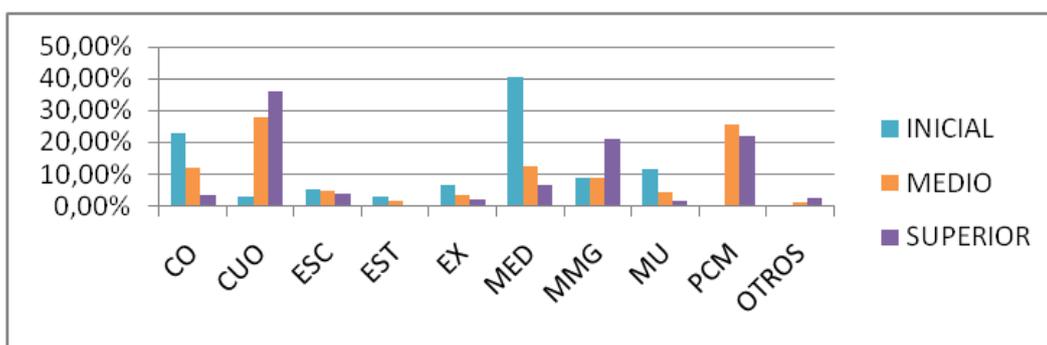


Figura 90. Porcentajes de las tareas principales de medida identificadas agrupadas por bloques de medida y separadas por ciclo.

Los resultados mostrados evidencian un tratamiento desigual de los diferentes procesos y conceptos asociados a los contenidos de medida. En concreto, podemos observar que la identificación de magnitudes y la elección de unidades, que podemos entender como uno de los aspectos clave para la fundamentación de la medida, tiene una presencia escasa y que disminuye progresivamente durante la etapa de Educación Primaria. Las actividades de este bloque tienen un mayor tratamiento en el ciclo inicial, en el que representa un 11,39% de las tareas principales, y disminuye en los ciclos posteriores ocupando sólo un 3,92% de las tareas principales en el ciclo medio y un 1,53% de las tareas en el ciclo superior. Es destacable la práctica ausencia de actividades en las que se promueva la estimación de medida, que aparece en la literatura como un aspecto clave para la interiorización del concepto de unidad de medida (Clements y Sarama, 2009). La frecuencia para cada uno de los ciclos de actividades de estimación de medida es del 2,53% en el ciclo inicial, 1,38% en el ciclo medio y del 0,38% en el ciclo superior.

En contraposición, la propuesta del libro de texto para el aprendizaje de la medida parece basarse en aspectos como la comparación y ordenación de medidas y en aspectos instrumentales como el cambio de unidades. La frecuencia de aparición de las actividades de cambio de medidas es del 2,53% en el ciclo inicial, 27,88% en el ciclo medio y del 35,88% en el ciclo superior. Los procesos de medición directa tienen una alta incidencia en el primer ciclo pero su presencia disminuye en los ciclos medio y superior. El porcentaje de incidencia de las tareas principales de este bloque varía del 40,51% en el ciclo inicial al 12,21% en el ciclo medio y al 6,68% en el ciclo superior. En las dos últimas etapas se observa una alta presencia de actividades de medida contextualizadas en forma de problema para los alumnos, pero si observamos en detalle la forma de estas actividades podemos observar que el tipo de trabajo matemático promovido va en la línea del trabajo aritmético.

Observamos que algunos de los bloques de contenidos con mayor presencia en los libros analizados son los que presentan los índices más altos de actividades de medida que han sido aritmetizadas, como serían las relacionadas con los cambios de unidades o los problemas contextualizados. Ahora bien, dentro de los diferente bloques de medida encontramos actividades cuya donde prima el dominio de conceptos y procedimientos

aritméticos. Nos hemos centrado en los bloques de medida de magnitudes geométricas (MMG) y en el bloque de comparación y ordenación (CO).

En el bloque de medidas con contenido geométrico (MMG), la medida indirecta de figuras geométricas resulta un ejemplo claro de actividades aritmetizadas, puesto que los procedimientos requeridos en estas actividades son exclusivamente aritméticos. Un ejemplo de este tipo de actividades de medidas indirectas se muestra en la Figura 91.



Figura 91. Actividad de 4º de EP cuya tarea principal es la medida indirecta de una superficie.

Aunque es importante considerar también esta parte de la medida no debemos perder de vista la importancia que les brinda el libro de texto, donde el porcentaje de actividades de medición indirecta en cada ciclo es el que se muestra en la Tabla 4.

C. INICIAL	C. MEDIO	C. SUPERIOR
0%	85,42%	62,86%

Tabla 9. Porcentaje de actividades de medida indirecta en el bloque MMG

Por tanto, un 7,48% del total de las actividades del ciclo medio y un 13,31% del total de las actividades del ciclo superior se basan en la aplicación de una fórmula.

En el bloque de cambio y ordenación (CO) se experimenta una evolución que comienza con el tratamiento geométrico o perceptivo de comparación de medidas (Figura 92.) y finaliza con un tratamiento numérico (Figura 93.). Consideramos que el propósito de la actividad de la Figura 93. es puramente numérico donde se busca la realización de tareas auxiliares específicas como el cambio de unidad.

23. Encercla els que tenen la mateixa mida que el tornavís.

Procediment per comparar longituds.



Figura 92. Actividad de 2º de EP.

2. Ordena les capacitats següents de més gran a més petita:

- a) 25 ml 4,5 cl 0,3 l 650 ml
b) 51 daℓ 2,5 hl 13 l 0,05 kl

Figura 93. Actividad de 5º EP.

Esta evolución del paso del tratamiento geométrico al numérico lo recogemos en la Tabla 10., donde mostramos el porcentaje de actividades de comparación de medidas basadas en el tratamiento numérico en cada ciclo:

C. INICIAL	C. MEDIO	C. SUPERIOR
0%	62,5%	100%

Tabla 10. Porcentaje de actividades con un tratamiento numérico en el bloque CO.

Podemos extender este análisis a otros de los bloques de contenidos de medida que han sido aritmetizados, como son los bloques de CUO, MMG y CUO. La Tabla 11. recoge los porcentajes de actividades para cada uno de estos bloques en cada ciclo. Dado que una parte de las actividades han sido categorizadas como actividades aritmetizadas, mostramos también el porcentaje que estas ocupan sobre el total de actividades de cada ciclo.

	C. INICIAL		C. MEDIO		C. SUPERIOR	
	% sobre el total	% de las aritmetizadas sobre el total	% sobre el total	% de las aritmetizadas sobre el total	% sobre el total	% de las aritmetizadas sobre el total
CO	22,78%	0,00%	11,98%	7,49%	3,63%	3,63%
CUO	2,35%	2,53%	27,88%	27,88%	35,88%	35,88%
MMG	8,86%	0,00%	8,76%	7,48%	21,18%	13,31%
PCM	0,00%	0,00%	25,35%	25,35%	21,95%	21,95%
TOTAL	33,99%	2,53%	73,97%	68,20%	82,64%	73,77%

Tabla 11. Porcentaje de actividades aritmetizadas en cada ciclo por bloques.

Observamos una evolución del tratamiento propuesto de la medida en el libro de texto analizado en la que se incrementa progresiva y notablemente el porcentaje de actividades aritmetizadas hasta llegar al el 73,77% en el ciclo superior. En este sentido, el salto más

grande se produce del ciclo inicial al ciclo medio donde pasamos de tener un porcentaje muy bajo de actividades aritmetizadas (2,35%) en el Ciclo Inicial al Ciclo Medio en el que más de dos terceras partes del trabajo de la medida se hace desde la perspectiva numérica. Si consideramos los datos totales incluyendo todas las actividades de medida de los libros de texto para toda la etapa, nos encontramos que el 66,01% de las actividades están aritmetizadas.

6.2.2. El valor económico como magnitud.

Dado que el currículo oficial que guía el diseño de los libros de texto analizados no contempla el valor económico como magnitud, en el grueso de este estudio no la hemos tenido en cuenta. Ahora bien, autores como Dickson, Brown y Gibson (1991) y Chamorro (2001) sí que consideran que el dinero es una magnitud más. Por ese motivo, hemos elaborado el mismo tipo de resultados presentados en la sección anterior pero incluyendo las actividades que están relacionadas con el dinero y el valor económico.

En concreto se añaden un total de 507 actividades, 69 en el ciclo inicial, 192 en el ciclo medio y 246 en el ciclo superior, que representan un 26,53% de las actividades analizadas. Si tenemos en cuenta el tipo de actividades relacionadas con el dinero y las añadimos al estudio de frecuencias, el gráfico de la Figura 90. se convierte en el gráfico recogido en la Figura 94.:

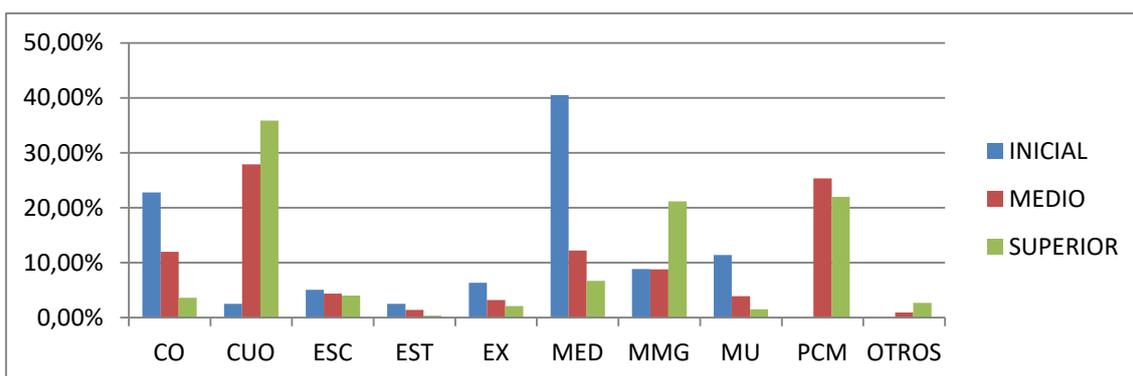


Figura 94. Porcentajes de las tareas principales de medida identificadas agrupadas por bloques de medida y separadas por ciclo. Se incluye el valor económico como magnitud.

Como se puede observar, la consideración de las actividades relacionadas con la moneda incrementa la incidencia de los cálculos aritméticos en los procesos de medida propuestos

por los libros de texto analizados, especialmente en el caso del ciclo inicial de Educación Primaria, en el que la incidencia de este tipo de tareas era menor al no considerar el valor económico como magnitud. De esta forma, observamos que el bloque relativo a operaciones aritméticas preside a lo largo de toda la etapa educativa.

6.3. LA PROPUESTA DEL LIBRO DE TEXTO VS. LA PROPUESTA TEÓRICA.

En este apartado comparamos la propuesta del libro de texto con aportaciones teóricas relevantes dentro de la investigación en educación matemática. Recogemos los aspectos en los que coinciden o no la propuesta del libro de texto sobre el estudio de la medida en Educación Primaria a los distintos enfoques teóricos y a la edad que proponen para el desarrollo de la medida.

En primer lugar, comparamos la propuesta del libro de texto con la aportación teórica de Jean Piaget por ser uno de los grandes referentes en la educación y, en particular, la mayoría de las investigaciones sobre el desarrollo de las nociones de medida parten de los estudios llevados a cabo por este investigador. Estos autores (Piaget y Szminska, 1964) en su obra distinguen cinco estadios para el desarrollo de la comprensión del concepto de medida. Partimos del segundo estadio puesto que el primero tiene lugar en educación infantil. En este primero estado el niño todavía no ha adquirido la idea de conservación y se apoya en estimaciones visuales. No concibe la idea de medida en cuanto a la reiteración de una unidad de medida ni de la necesidad de la subdivisión en secciones de igual tamaño.

En segundo lugar, comparamos la propuesta del libro de texto con la aportación teórica sobre la acción de medir de Chamorro y Belmonte (1988) en la que definieron sus etapas principales tomando como referencia a los estadios piagetianos del desarrollo evolutivo de la medida. Estas etapas son: Comparación perceptiva directa, desplazamiento de objetos, y la operación de la propiedad transitiva.

En tercer lugar comparamos la propuesta del libro de texto con los estándares propuestos por el NCTM en 1989 que se recogen traducidos en el documento SAEM Thales (2003). En este documento se indican diferentes puntos en los cuales la educación matemática debería prestar más y menos atención para llevar a cabo el estudio de la medida. En

particular, señalan como uno de los puntos más relevantes la capacidad para realizar una medición en sí mediante el desarrollo del proceso de medición y los conceptos relacionados con las unidades de medida.

Por último, comparamos la propuesta del libro de texto con un enfoque teórico más actual propuesto por Szilágyi, Clements y Sarama (2013), la progresión del desarrollo de la medida de longitudes viene dada por una secuencia de ocho pasos: reconocer una cantidad de longitud, comparación directa de longitudes, comparación indirecta de longitudes, ordenar series de 1 a 6 unidades, medir de extremo a extremo, repetición de la unidad de longitud, medidor de longitud y regla medidora conceptual.

6.3.1. PIAGET

El ciclo inicial corresponde al segundo estadio propuesto por Piaget donde comienzan a desarrollarse las ideas de conservación y transitividad. Para ello, el niño utiliza unidades de medida antropométricas que le permite dar una medida de un objeto pero todavía no comprende la necesidad de que todas las unidades de medida sean del mismo tamaño.

El libro de texto, en el ciclo inicial, propone actividades en las que el alumno debe medir con partes del cuerpo siguiendo el proceso propuesto por Jean Piaget. Ahora bien, consideramos que debido al formato del propio material, las actividades propuestas están, en su mayoría (todas salvo una), deshumanizadas. El libro de texto en este tipo de actividades o bien proporciona los palmos, pies, etc. dibujados o pide a los alumnos que utilicen un recortable. Este tipo de actividades priven al niño de la práctica de la medida con unidades de medida no convencionales y, en especial, utilizando medidas antropométricas propias. Un ejemplo de este tipo de actividades la ilustramos en la Figura 95. En esta actividad el alumno debe tomar la ristra de dedos que aparece en la Figura 96. (en otras actividades se utilizan palmos, pies o clips) y colocarla sobre el objeto para, a continuación, contar el número de veces que la unidad de medida no convencional se repite en la medida. Como ayuda, el libro de texto señala la magnitud sobre el objeto, es decir, indica el punto inicial y el final.

4. Mesura amb el regle de dits (retallable).

Unitats corporals de longitud: el dit.

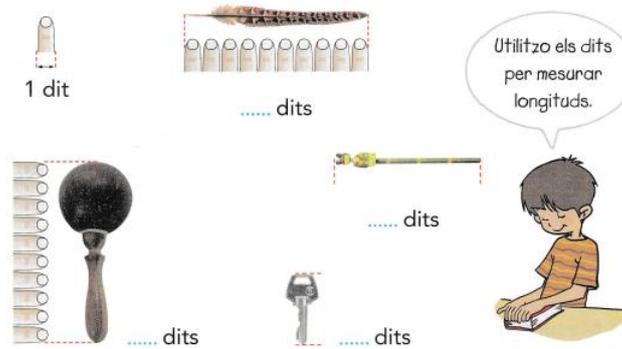


Figura 95. Actividad medida con unidades de medida antropométricas de 1ºEP.

Tema 10 | Pàg. 158 | Activitat 4



Figura 96. Recortable asociado a la actividad anterior.

Por otra parte, el libro de texto incluye desde primero de Educación Primaria unidades de medida convencionales. Así, en primero de Educación Primaria se trabaja con la regla como instrumento de medida, utilizando sólo los centímetros como unidad de medida. En segundo ya no se trabaja con unidades de medida antropométricas, sólo con centímetros y se introduce el metro aunque no se midan objetos con esta unidad. Un ejemplo de este tipo de actividades la ilustramos con la Figura 97.

2. Mesura amb el regle i escriu.

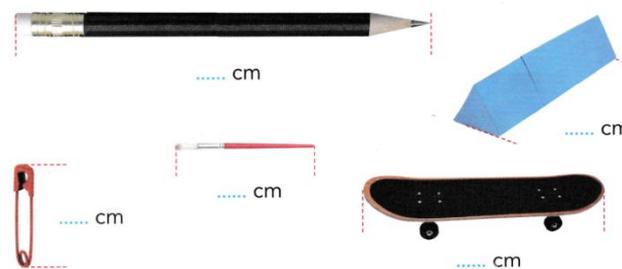


Figura 97. Actividad de medida de 1º EP.

Aunque en este estadio los alumnos no comprenden la necesidad de que todas las unidades de medida sean del mismo tamaño, la experiencia que tendrán es que sí lo son. Al facilitar las unidades de medida dibujadas o en recortables se prescinde la necesidad de que todas las unidades de medida tengan el mismo tamaño.

El tercer estadio propuesto por Piaget (1970) también tiene lugar en este ciclo inicial, en particular en segundo de Educación Primaria. Los alumnos a esta edad han adquirido la idea de transitividad. En este sentido el libro de texto propone actividades de representación de una medida (por ejemplo, dibujar un segmento que tenga la misma longitud que un objeto determinado). Ahora bien, el libro de texto no propone ninguna actividad de construcción en la que el alumno tenga que representar una medida utilizando un objeto intermedio en este ciclo. Encontramos actividades en este sentido en el ciclo medio, en 3º de EP, donde se pide a los alumnos que comparen la medida de dos segmentos, tal y como se muestra en la siguiente figura:

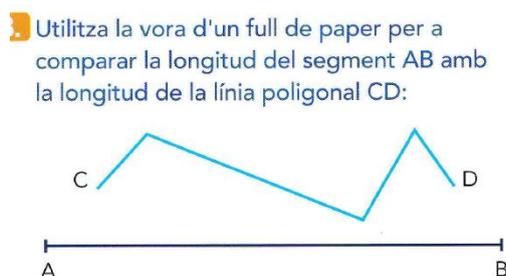


Figura 98. Actividad comparación 3º EP.

Para realizar esta actividad es necesario que el alumno represente las medidas del segmento y de la línea poligonal. Para ello, debe utilizar el borde de un papel que sirve como objeto intermedio. Por tanto, podemos decir que en este punto la idea de transitividad aunque es imprescindible para realizar una medición con un instrumento de medida y esta acción se realiza ya en el ciclo inicial.

El cuarto estadio se situaría en el ciclo medio de Educación Primaria según Piaget (1970) y en él, el alumno entiende que la medición es la reiteración de una unidad de medida menor que el objeto a medir. Como se han introducido la regla como instrumento de medida para las longitudes, el transportador de ángulos para la medida de su amplitud, y el mallado para la medida de superficies, no podemos asegurar que el alumno haya comprendido que la

unidad e medida es menor que el objeto a medir. Piaget (1970) recoge que la unidad de medida por excelencia para la medida del área es el cuadrado y son el tipo de actividades que propone el libro de texto para la medida directa de superficies y que, a su vez, son experiencias necesarias para el trabajo de esta magnitud. En este ciclo las actividades prácticas no son tan numerosas como en el ciclo inicial. De hecho, por el formato del libro de texto, las actividades donde se mide abarcan las magnitudes de longitud, amplitud de ángulos y superficies.

Por último, el quinto estadio propuesto por Piaget (1970) tendría lugar en el ciclo superior de Educación Primaria. En esta etapa el alumno realiza actividades de medida indirecta a partir de operaciones bidimensionales y tridimensionales para el cálculo de áreas y volúmenes respectivamente. Por tanto, el libro de texto es coherente con esta aportación así como el currículo.

6.3.2. CHAMORRO Y BELMONTE

Para estos autores (Chamorro y Belmonte, 1988), en el primer estadio se realizan comparaciones perceptivas directas donde se hace uso única y exclusivamente de la percepción sin recurrir a una medida común o a desplazamientos de los objetos comparables. Chamorro y Belmonte (1988), proponen dentro de este estadio dos fases.

La primera fase consiste en la estimación directa a partir de la percepción visual. En este sentido, el libro de texto propone actividades donde se pide al alumno estimar la medida de la longitud de un objeto a partir de la medida de otros objetos que se encuentran alineados con él o la relación de un objeto con expresiones como: casi 6 cm, un poco más de 6 cm, unos 3 cm, etc. No solo se comparan longitudes sino que también se comparan capacidades a partir de los nuestros conocimientos previos o utilizando la percepción visual relacionando la capacidad a la forma del recipiente.

9. Hi cap més o menys d'un litre?

Estimar capacitats.

Pinta:
més d'1 litre
menys d'1 litre



Figura 99. Actividad estimación 2º EP.

La segunda fase de este primer estadio consiste en utilizar la percepción visual, corporal y manual de una forma más analítica y que es más cercana al proceso de medir. Esta segunda fase es más práctica y es sustituida en el libro de texto por la primera fase, es decir, se utiliza sólo la percepción visual sin necesidad de utilizar elementos propios del proceso de medición.

El segundo estadio propuestos por estos autores (Chamorro y Belmonte, 1988) abarca el desplazamiento de objetos. En este estadio se traslada uno de los objetos de la etapa anterior o interviene un término medio que el alumno tiene apropiado en su conocimiento empírico. En este estadio todavía no está presente la transitividad y, el igual que en el estadio anterior, hay dos fases.

En la primera fase para comparar objetos utilizamos el desplazamiento y así observarlos conjuntamente. De esta manera, esta fase conlleva la manipulación de objetos que el libro de texto por su formato no es capaz de abarcar y pasa directamente a la segunda fase donde es necesario utilizar un término medio como por ejemplo, una parte del cuerpo. Dentro de este proceso, las unidades de medida antropométricas se van sustituyendo por las unidades de medida convencionales. El libro de texto, como se recoge en el apartado de Piaget si que atiende a esta fase en el ciclo inicial y un poco en el ciclo medio donde se proponen actividades de representación de una medida o comparar de forma directa.

Por último, en su tercer estadio, aparece ya la transitividad de la medida que sólo se apropiará si hay una comprensión de la conservación de la magnitud. Asimismo, esto no puede darse sin la práctica. Las actividades propuestas desde el ciclo inicial hasta el ciclo superior son escasas y sesgadas puesto que no se trabajan todas las magnitudes de forma directa. En particular, la medida directa de superficies aparece a partir de 2º de Educación Primaria de forma introductoria mientras que el volumen aparece a partir de 4º de Educación Primaria, es decir, en el ciclo superior.

6.3.3. NCTM

Desde el NCTM recalcan la importancia de que se establezcan desde el ciclo inicial una base sólida con los conceptos de medición básicos y subyacentes: comprender el atributo que se va a medir y el proceso de medición (SAEM Thales, 2003). La comprensión del proceso de medición tiene asociada necesariamente la experiencia de comparar objetos de forma directa, la utilización de distintas unidades y del recuento de las mismas (SAEM Thales, 2003).

El NCTM aconseja que las primeras experiencias con la medida sean con unidades no convencionales de forma que los alumnos se den cuenta de la necesidad de las unidades estandarizadas para poder comunicarse (SAEM Thales, 2003). En este sentido el libro de texto abarca actividades de medida con unidades de medida antropométricas aunque aparecen en su mayoría dibujadas tal y como se aprecia en la Figura 95. El hecho de que el libro de texto facilite las unidades de medida dibujadas imposibilita que los alumnos comprendan la necesidad de que las unidades de medida sean estandarizadas.

Asimismo, la SAEM Thales (2003), sugiere que al terminar el ciclo inicial, donde tienen lugar las primeras experiencias de medida, sería ideal que el alumno estuviese capacitado para poder utilizar cualquier sistema de medida. Para ello, recomienda no hacer un uso precipitado de fórmulas o de instrumentos de medida puesto que pueden dificultar que los niños adquieran las estructuras conceptuales necesarias para resolver problemas de medida. Hemos encontrado actividades con la regla como instrumento de medida para medir longitudes desde el ciclo inicial por lo que creemos que el libro de texto se anticipa según el posicionamiento del NCTM.

Por otro lado, la SAEM Thales (2003), apuntan la necesidad de abarcar en el ciclo medio y superior la naturaleza aproximativa de la medida y la estimación del error. En este sentido el libro de texto no se ajusta mucho a esta recomendación sino que se centran en el uso de conceptos y destrezas para resolver problemas de medida. La SAEM Thales (2003), entiende que el trabajo se centre en los problemas que requieren la medición, en la mayor parte de los problemas propuestos por el libro de texto en estos ciclos los datos de las mediciones vienen proporcionados por lo enunciados.

Dentro del documento SAEM Thales (2003) encontramos diferentes puntos en los cuales la educación de la medida debería prestar más y menos atención. Los puntos que deberían recibir una menor atención dentro de la medida son: la memorización de equivalencias entre unidades de medida, la conversión interna y entre varios sistemas de medida y la memorización y manipulación de fórmulas. Esto está ligado a la aritmetización que propuso Chamorro (2001) y que hemos corroborado en el segundo apartado de resultados 6.2. El trabajo de estos puntos implica que no sea posible el trabajo de otros puntos como: el proceso de medición, los conceptos relacionados con unidades de medida o la estimación, que son los bloques trabajados con menor frecuencia tal y como se recoge en el apartado 6.2.

6.3.4. SZILÁGYI, CLEMENTS Y SARAMA

La propuesta de Szilágyi, Clements y Sarama (2013), es la que propone una progresión más específica para el desarrollo de la medida de longitudes. Sin conocer esta propuesta, es complicado que el libro de texto se ajuste a las sugerencias que propone.

Para este apartado nos centramos en la magnitud de la longitud que es la más trabajada de forma directa por el libro de texto. Según Szilágyi, Clements y Sarama (2013), la medida de la longitud comienza con el reconocimiento de una cantidad de longitud, es decir, cuando el alumno identifica una longitud como un atributo. Este estadio, al igual que el primer estadio de Piaget, tiene lugar antes del ciclo inicial. Por tanto, podemos decir que la propuesta de Szilágyi, Clements y Sarama (2013) comienza en Educación Primaria a partir de su segundo paso, la comparación directa de longitudes. En este sentido, el libro de texto propone actividades de comparación de longitudes antes de realizar medidas. Este tipo de comparaciones se hacen a través de la percepción tal y como hemos mostrado en la Figura

98. Ahora bien, estos autores (Szilágyi, Clements y Sarama, 2013) proponen en este paso que el alumno sea capaz de alinear los objetos para visualizar la diferencia entre las longitudes. Encontramos en este ciclo que las actividades de comparación de longitudes de forma directa, los objetos aparecen ya alineados por lo que el alumno no necesita hacer coincidir uno de los extremos.

En este mismo ciclo, los alumnos deben ser capaces de comparar longitudes de forma indirecta, es decir, aplicando la propiedad fundamental de la transitividad. Tal y como hemos señalado en los apartados anteriores, el libro de texto abarca este tipo de actividades que también aparecen, de forma más puntual, en el ciclo medio.

El tercer paso consiste en ordenar series de 1 a 6 unidades donde las unidades están marcadas. Consideramos que este paso es muy específico y que es natural que el libro de texto no contemple este tipo de actividades aunque tengan una finalidad concreta como es la aplicación sucesiva de la transitividad.

El cuarto paso consiste en la medición de extremo a extremo sin dejar espacios, haciendo un revestimiento continuo de la longitud y sin la necesidad de que todas las unidades tengan el mismo tamaño. De nuevo, como la mayoría de las actividades traen las unidades de medida dibujadas, la necesidad de que todas las unidades sean del mismo tamaño queda desvanecida. Consideramos que el libro de texto propone actividades en este sentido en el ciclo inicial con unidades de medida no convencionales.

El quinto paso conlleva la repetición de la unidad de longitud para realizar una medición. El libro de texto trabaja este paso en el ciclo inicial con unidades de medida convencionales y no convencionales, donde la medida de la longitud de un objeto o un segmento viene dado por el recuento de las unidades. En particular, a partir de 2º de Educación Primaria se realizan mediciones con la regla como instrumento de medida.

El sexto paso relaciona el tamaño de la unidad de medida con el número de unidades que revestirán la longitud. El libro de texto trabaja este paso desde 2º de Educación Primaria a través de la medida de objetos o segmentos con la regla y, por tanto, utilizando la relación que existe entre los centímetros y milímetros aunque no se especifique explícitamente.

Esto sucede gracias a que el libro de texto pide a los alumnos que expresen una medida en varias unidades distintas.

El séptimo paso consiste en realizar mediciones conociendo la necesidad utilizar unidades idénticas, la relación entre distintas unidades, el origen en el instrumento de medida (regla), y la acumulación de distancia. Este paso está ligado al anterior y a las actividades que propone el libro de texto donde se realizan medidas de longitudes utilizando la regla. En este mismo paso comienzan las actividades de estimación. El libro de texto propone a partir de 2º de primaria actividades de estimación de longitudes tal y como recogemos en la siguiente figura:



Figura 100. Actividad estimación 2º EP.

Por último, el octavo paso que proponen estos autores (Szilágyi, Clements y Sarama, 2013), requiere una comprensión de los conceptos de medida y de las dimensiones de las unidades de medida que permite tener referentes internos para realizar mediciones y estimaciones con precisión. Asimismo, en este paso aparecen las operaciones aritméticas con las medidas. Para llegar a este último paso es necesario haber realizado muchas actividades prácticas y de medición. Aunque la longitud es la magnitud más trabajada en esta etapa, la mayoría de las actividades de hacen sobre el libro, lo que no nos permite tener referentes internos que nos permitan realizar mediciones o estimaciones con la precisión requerida en este punto. Creemos que la mayoría de los pasos que proponen estos autores tienen lugar casi de forma simultánea y se van trabajando a lo largo de la etapa aunque en menor medida conforme avanzan los cursos.

7. CONCLUSIONES

En este capítulo detallamos las conclusiones que se derivan del trabajo de tesis doctoral presentado. Con el propósito de determinar la forma en la que el libro plantea el aprendizaje de la medida se ha realizado un análisis de las actividades propuestas en base a las tareas que emergen para su resolución, y que dan respuesta tres objetivos específicos que nos propusimos.

En primer lugar desarrollamos un tipo de análisis basado en la jerarquización de tareas propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012) para identificar tareas propuestas por el libro de texto en la rama de la medida. Aunque esta jerarquización de tareas fue creada originalmente por sus autores (Gairín, Muñoz y Oller, 2012) para calificar pruebas de matemáticas, hemos podido extrapolar esta propuesta teórica a la caracterización del contenido de medida en un libro de texto.

A partir de los resultados obtenidos en este trabajo, constatamos que la herramienta de análisis desarrollada permite una descripción de gran detalle de las actividades presentadas en el libro de texto. Por tanto, este tipo de análisis no sirve únicamente para generar guías que orienten la calificación de exámenes, sino que podemos utilizarlo para caracterizar cualquier contenido de matemáticas incluido en el libro de texto. De esta forma, el estudio desarrollado podría extenderse a las propuestas de otras editoriales e incluso a otros tipos de materiales, como los que elaboran los maestros en los centros en los que el libro de texto no es la referencia principal.

De la misma forma, consideramos que el presente estudio puede complementarse con el análisis de la evolución de los conceptos de medida durante la etapa de Educación Primaria presentes en las diferentes propuestas didácticas para analizar si se adecúa a las propuestas de aprendizajes de medida marcados en el currículo.

En segundo lugar, caracterizamos las tareas de medida propuestas por el libro de texto que nos permitió crear los esquemas de conocimiento e identificar el conocimiento conceptual y procedimental subyacente a las actividades propuestas. Conocer cómo crean los niños el conocimiento ayuda y guía a los profesores en la elección de las actividades oportunas para que los alumnos aprendan de forma progresiva (Szilágyi, Clements y Sarama, 2013) con lo que la caracterización de las tareas de medida realizada es una herramienta que puede ser utilizada en la formación de maestros.

Dada la importancia contrastada del libro de texto en las aulas (Pepin, Gueudet y Trouche, 2013), la forma en la que se presentan los contenidos de medida en el libro de texto es muy influyente en el tipo de actividades que acabarán desarrollando los alumnos. Estos esquemas nos permiten ver cómo se plantea el trabajo de la medida y puede ser un recurso para el profesorado dado que puede identificar qué partes no se trabajan y plantear actividades complementarias. Aunque los esquemas desarrollados podrían presentarse en un formato distinto, nos sirven para estructurar el conocimiento que subyace a esta rama durante la etapa de Educación Primaria en la editorial de libros de texto analizados.

Entendemos que los maestros son los encargados de elegir tanto el libro de texto utilizado en sus cursos como las actividades concretas a desarrollar. Esto nos llevaría a pensar que la propuesta del libro de texto analizado, dada su popularidad, es un reflejo del trabajo en las aulas y del conocimiento didáctico de la medida que poseen los maestros. En este sentido, desde la perspectiva del conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas, es necesario relacionar el tratamiento de la medida en los libros de texto con el trabajo desarrollado en realidad en las aulas. En esta dirección, el trabajo aquí presentado aporta directrices claras para identificar conocimientos de medida y de didáctica de la medida que vertebran el Conocimiento Matemático Fundamental (Castro, Mengual, Prat, Albarracín, y Gorgorió, 2014) que los maestros no promueven en las aulas de Educación Primaria y que, por lo tanto, no podemos esperar que posean los alumnos que ingresen al Grado de Educación Primaria.

Por último, hemos identificado el tipo de tratamiento de la medida propuesto por el libro de texto a partir del análisis realizado. Los resultados de nuestro estudio confirman que el trato que ofrece el libro de texto al trabajo de medida está orientado hacia un trabajo aritmético, con lo que se produce una desnaturalización de los objetivos de medida a trabajar. Por tanto, corroboramos la afirmación de Chamorro (2001) sobre la aritmetización de la medida en los libros de texto y la ampliamos ofreciendo una cuantificación de este fenómeno para el libro de texto estudiado. En concreto, un 68,20% de las actividades en el ciclo medio y un 73,77% en el ciclo superior se encuentran aritmetizadas, frente a un 2,54% del ciclo inicial. Estos porcentajes ofrecen una perspectiva del alcance de la aritmetización de la medida en los libros de texto y nos permiten afirmar que se evidencian diferencias entre los contenidos aparentes del libro de texto y los aprendizajes reales

promovidos. En esta misma línea corroboramos también la afirmación de Callís (2002), donde el tratamiento de la medida se había visto reducida a la consecución de un dominio aritmético y mecánico, donde se realizan operaciones correctas y exactas, involucradas en la realización de actividades relacionadas con el cambio de unidades o el paso de una expresión compleja a incompleja.

Si atendemos a los diferentes objetivos y contenidos que aparecen en el currículo autonómico de Cataluña para el bloque de la medida y lo comparamos con el currículo potencial promovido por el libro de texto analizado, observamos que no tratan todos los contenidos con la misma intensidad. El libro de texto analizado sigue fielmente las directrices del currículo oficial en algunos aspectos, como es el caso del ciclo medio y las tareas relacionadas con los bloques de magnitudes y unidades de medida, de relación, de expresiones de medida, de cambio de unidades. En cambio, otros aspectos curriculares no se desarrollan con la intensidad que propone el currículo oficial.

Aunque hayamos identificado actividades en las que se propone que los alumnos trabajen la medida desde el punto de vista conceptual o procedimental, hemos confirmado que el libro de texto no presenta una propuesta orientada a que los alumnos realicen una descripción oral, gráfica o escrita de la medida de las distintas magnitudes ni a que contrasten y analicen diversas estrategias de medida, a pesar de que son contenidos que forman parte del núcleo del trabajo de medida en el currículo oficial para los tres ciclos.

Nuestros datos coinciden con las observaciones de Chamorro (2001) en que no se trabaja el concepto de magnitud en el contenido del libro de texto. No se define en ningún momento y las oportunidades de realizar mediciones, comparaciones u ordenaciones son escasas o anecdóticas. Una muestra es que uno de los bloques con más presencia dentro del libro de texto es el de la medida de magnitudes geométricas, las cuales se realizan, en su mayoría a través de fórmulas y algoritmos.

Asimismo, las mediciones directas se realizan exclusivamente dentro de las magnitudes de longitud y área, por lo que no es de extrañar que, tal y como señala Balbuena (2002), los instrumentos de medición no tengan una presencia relevante en las aulas. Por este motivo, el currículo debería introducir continuamente experiencias de medición y no que aparezcan de forma puntual en algunas lecciones del libro de texto. La SAEM Thales (2003), es contundente en este sentido afirmando que: *“los libros de texto no pueden sustituir*

aquellas actividades que utilicen la medición para resolver cuestiones sobre problemas reales” (p.53). Es necesario, pues, que el libro de texto sea complementado por otro tipo de actividades que demanden la práctica de la medición de diferentes magnitudes en contexto de aula o reales.

En los siguientes párrafos nos centramos en las diferencias entre el tratamiento de la medida esperado para poder cumplir con los objetivos de aprendizaje del currículo y el aprendizaje promovido por el libro de texto analizado.

En el currículo autonómico, una de las técnicas que se requieren es seleccionar con criterio los instrumentos y las técnicas apropiadas para medir con una cierta precisión, sin embargo, el libro de texto en su mayoría indica el instrumento de medida a utilizar o lo dibuja, impidiendo que el alumno elija de forma crítica el instrumento de medida que va a utilizar pertinente con la magnitud y la precisión adecuada. Quizás la escasez de actividades en las que el proceso de medida se propone en el libro de texto se deba a que este tipo de actividades requieren un mayor control y gestión del aula por parte del maestro. Ahora bien, no podemos perder de vista que la realización de actividades manipulativas y la medición con instrumentos adecuados favorece la conceptualización por parte de los alumnos a partir de su propia experiencia (Chamorro, 2001). Además, permite que los alumnos aprendan de forma activa y se sientan más motivados ante tema tan importante dentro del currículo de matemáticas (Casas, Luengo y Sánchez, 1997).

En las actividades propuestas, la mayoría de las longitudes se miden a través de instrumentos conocidos por los estudiantes como, por ejemplo, la regla. Sin embargo, en el proceso de medición es necesario saber utilizar correctamente este instrumento antes de poder tomar una lectura de la medida de dicho objeto. Asimismo, el tipo de mediciones son rectilíneas y no se pide a los alumnos que midan una línea curva, tal y como Dickson, Brown y Gibson (1991) recogieron en su estudio.

En el caso de la medida de superficies, la unidad de medida por excelencia para la medida del área es el cuadrado. El libro de texto sigue las directrices de Dickson, Brown y Gibson (1991), que señalan que el trabajo de la medida de esta magnitud consiste en la división de la superficie en cuadrados para su recuento y que dichas mediciones son experiencias necesarias en el estudio de esta magnitud. En contraposición, Chamorro (2001), detectó que no se proponen actividades que conlleven el pavimentado sino que se utilizan

cuadrículas y, además, estas actividades no conllevan la medida de la superficie de objetos cotidianos.

Ante esta situación, interpretamos que el libro de texto desnaturaliza el tratamiento didáctico de la medida a partir de un conjunto de fenómenos que van más allá del fenómeno de la aritmetización, ya que diversas de las tareas identificadas se concretan de forma específica simplificando la toma de decisiones a los alumnos o substituyendo actividades complejas por otras más simples. Entendemos que esta desnaturalización proviene de las limitaciones del formato papel de libro de texto en primera instancia, pero también de la elección de la forma en la que se plantean las actividades.

Una de las características fundamentales de la medida es su naturaleza aproximativa. La anticipación e interpretación del error de una medida apenas aparece en las tareas analizadas y, en la mayoría de los casos, se hace desde la perspectiva de la interpretación del error obtenido. Dado que el error en la medida es inherente al proceso de medición, podemos intuir que la acción de medir se presenta de forma irreal. Este tratamiento presenta una forma sesgada e incompleta de la medida, ya que proporciona la falsa creencia de que los procesos de medida siempre son exactos.

El uso de las expresiones complejas e incomplejas de medida debería estar asociado a la idea de precisión en una medida puesto que, al utilizar varias unidades mejoramos la aproximación (Godino, Batanero y Roa, 2004). El trabajo con este tipo de expresiones recae en el paso de una expresión a otra o en operar con este tipo de expresiones. En esta línea, el informe (Cockcroft, 1985) subraya la importancia de enseñar la naturaleza aproximativa de la medida estimulando a los alumnos a que realicen medidas indicando dentro de que intervalo están.

A la hora de seleccionar una unidad de medida estamos estimando el tipo de error que podemos cometer al efectuar la medida con esa unidad. En las actividades propuestas por el libro de texto donde se pide al alumno que elija una unidad de medida, aparece el valor numérico de ésta, lo que implica que este conocimiento está más ligado al contexto de la medida a efectuar y a la concepción del tamaño de la unidad que al error que se comete al efectuar la medición.

Por otro lado, observamos que el tratamiento de las diferentes magnitudes a estudiar es desigual. La medida de capacidades debe comenzar con la comparación de la capacidad de

distintos recipientes, continuar con la ordenación de los recipientes en función de su capacidad, y llenar y medir la capacidad expresada en unidades no convencionales (Dickson, Brown y Gibson, 1991). El libro de texto sí que propone actividades de comparación y ordenación de capacidades basadas en la percepción visual. Sin embargo, no se proponen actividades donde se midan capacidad en unidades de medida no convencionales como podría ser un vaso.

A parte de todo lo recogido hasta este punto, detectamos dos grandes ausencias en la propuesta del libro de texto: la construcción de los conceptos de magnitud y de unidad de medida y el uso de la estimación de medidas en el aula.

La estimación vuelve a ser uno de los temas olvidados en el tratamiento de la medida en el libro de texto. Tal y como argumentan Callís, Fiol, De Luca y Callís (2006), la estimación de medida no ha tenido el recibido la atención necesaria dentro de la investigación en didáctica de las matemáticas, entre otros motivos, por la escasa presencia de materiales para trabajarla. La escasez de actividades de estimación de medida se suma al desconocimiento generalizado de los maestros de propuestas para proponer su trabajo en las aulas. Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, y Subrahmanyam (2005) muestran que cuando se solicita a un maestro que proponga actividades de estimación de medida a sus alumnos, las tareas solicitadas son adivinanzas en vez de estimaciones de medida, ya que los docentes no proporcionan el contexto o la información necesaria para crear el ambiente de trabajo que se requiere. De esta forma, sería deseable que el libro de texto de matemáticas proporcionara muestras de actividades de estimación de medida para complementar el conocimiento del maestro.

Como principales consecuencias de este tipo de enseñanza se producen obstáculos didácticos que refuerzan obstáculos epistemológicos constatados y tipificados. El uso de objetos idealizados matematizados, en particular en el caso de la superficie, dificulta el reconocimiento en la realidad de la magnitud correspondiente y la estimación. Con esta situación, el alumnado llega a la etapa de Educación Secundaria con serias dificultades al carecer de conceptos y procedimientos básicos relativos a la medida que son necesarios en otras situaciones. Asimismo, Escolano y Gairín (2005) señalan que la medida no sólo aporta significado al racional, sino que la ausencia de la medida directa y su expresión por

parte del alumnado supone un impedimento para articular los significados del número racional.

Ante esta situación, entendemos que la elección de las actividades presentes en el libro de texto analizado tiene como finalidad apoyar el trabajo individual en el aula, sobre el soporte del papel, con lo que difícilmente pueden trabajarse de igual forma todos los contenidos de medida especificados en el currículo. Además, hemos observado una evolución en el tratamiento de la medida promoviendo inicialmente un trabajo más manipulativo y práctico para acabar siendo en su mayoría numérico. Así, en el ciclo inicial todavía se trabaja en el dominio de lo experimental y lo práctico, siguiendo las tendencias actuales en Educación Infantil, pero en los ciclos siguientes, se tiende a un trabajo aritmético, realizado íntegramente sobre papel y más cercano a la concepción de lo que será la etapa de Educación Secundaria.

En referencia a los contenidos de medida, el libro de texto podría centrarse en tratar aspectos dirigidos a su comprensión conceptual, proponiendo actividades relacionadas con la diferenciación de magnitudes o la elaboración y elección de unidades de medida, presentando la medida como un proceso de aproximación. Otra opción sería presentar la medida desde el punto de vista procedimental, promoviendo el trabajo práctico e incidiendo en aspectos como el tratamiento del error, procesos de medición directa e indirecta, uso de instrumentos, etc. En cambio, observamos que la presencia de actividades que muestran contenidos de medida en los que el trabajo promovido se sustenta en procesos aritméticos es muy alta. De esta forma, interpretamos que el estilo de presentación de la medida por el libro de texto es el aritmético, incidiendo de una forma menor en las opciones conceptual y procedimental.

Tal y como esta presentada la medida en el libro de texto es necesario que se complemente para poder trabajarla de forma adecuada. El libro de texto invita a la utilización de instrumentos de medida en momentos muy puntuales y escasos. Quizás esto se deba a que este tipo de actividades requieren un mayor control y gestión del aula por parte del maestro. Sin embargo, la realización de actividades manipulativas y la medición con instrumentos adecuados favorece la conceptualización por parte de los alumnos a partir de su propia experiencia (Burgués, 2000; Chamorro, 2001).

A medida que se avanza en la etapa de Educación Primaria es difícil encontrar materiales manipulativos en el aula (Burgués, 2000). Los diferentes argumentos relacionados con la escasa presencia de estos materiales están relacionados con la falta de tiempo, la indisciplina y la falta de nivel de abstracción de las actividades (Burgués, 2000). Además, permite que los alumnos aprendan de forma activa y se sientan más motivados en este tema tan importante dentro del currículo de matemáticas (Casas, Luengo y Sánchez, 1997).

Por otro lado, los libros de texto han ido evolucionando con las exigencias de la sociedad. Actualmente el impacto de la tecnología permite una mayor interacción entre los libros digitales y al alumno. Tal y como señalan Ruíz de Gauna, Dávila, Etxbarria y Sarasua (2013) este recurso didáctico tomará un rol cada vez más central donde la enseñanza de la matemática se acercará a los diversos intereses de los alumnos. Con esta perspectiva, no es de extrañar que la investigación centrada en los libros de texto digitales tome cada vez más fuerza dentro de la investigación en educación matemática.

Stray (1994) puso de manifiesto que los libros de texto son los referentes en la transmisión cultural. Dado que la enseñanza y aprendizaje de la medida no ha variado a pesar de que autores como Chamorro (2001) y Callís (2002) hayan puesto de manifiesto el tratamiento aritmetizado de la medida, estos autores esperan que el alumno aprenderá a medir por su cuenta a través de experiencias sociales o familiares (Chamorro, 2003a). En el caso que los aprendizajes de medida se realicen de forma autónoma y fuera del contexto escolar puede llevar a la imagen de que las matemáticas son una actividad humana desligada de las prácticas reales de las personas. El tratamiento aritmetizado de la medida lleva implícito una imagen que permite asociar las actividades matemáticas con el trabajo sobre el papel y alejando la concepción de que los conocimientos matemáticos permiten explicar nuestro entorno y pueden ser utilizadas para tratar de representarlo o entenderlo.

Finalmente, recordamos que en la práctica educativa se da una débil importancia a los documentos oficiales, un enorme impacto del profesorado (para bien o para mal) y unos resultados sorprendentemente dispares en el alumnado (Alsina, 2000). A modo de prospectiva de este trabajo nos preguntamos cuál es el currículo impartido y aprendido dentro del bloque de medida atendiendo a la situación presentada en esta tesis doctoral. Si el libro de texto no se aleja (aparentemente) en exceso del currículo ¿por qué los alumnos obtienen dichos resultados? ¿pasará lo mismo con otros contenidos? ¿y utilizando otras

editoriales? ¿dispone el profesorado en activo del conocimiento adecuado para valorar y validar el progreso de los alumnos en medida? Ciertamente, para corroborar cual es el tratamiento de la medida real en el aula debería complementarse este trabajo con el análisis de otros materiales, de las prácticas de aula, y con entrevistas a profesores y alumnos que pudieran recoger evidencias sobre el trabajo realmente promovido.

Esperamos que este trabajo proporcione a la comunidad educativa una nueva forma de analizar libros de texto para fundamentar las posibles orientaciones y decisiones que se pueden tomar en base a los resultados obtenidos. Esta herramienta puede ser útil para los profesores a la hora de seleccionar un libro de texto si en su formación se les muestra como identificar contenidos matemáticos subyacentes a las actividades presentadas. Consideramos que este estudio debería ampliarse para abarcar todos los bloques del currículo, así como el estudio de otras editoriales para definir el conocimiento subyacente al libro de texto para obtener una visión general que permitiera identificar fenómenos educativos que pudieran explicar algunas de las concepciones que tienen los estudiantes y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas con las que se encuentran.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

- Alajmi, A. H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*, 79 (2), 239–261.
- Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En J.M. Goñi (Ed.). *El currículo de matemáticas en los inicios de siglo XXI*. Barcelona: Graó.
- Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.
- Balbuena, L. (2002). La medida del tiempo a través del tiempo. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8 (30), 31-40.
- Bardin, L. (1986). *Análisis del contenido*. Madrid: Ediciones Akal.
- Baroody, A., Feil, Y., & Johson, A. (2007). An Alternative Reconceptualization of Procedural and Conceptual Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, pp. 115-131.
- Berelson, B. (1971). *Content analysis in communication research*. New York: Hafner Publishing.
- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural* (Vol. 49). Barcelona: Paidós.
- Bisquerra, R. (Coord.). (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla.
- Bodí, S. D., Valls, J. (2002). Análisis del bloque curricular de números en los libros de texto de matemáticas. En M.C. Penalva, G.Torregosa y J.Valls (Eds.), *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*, (pp. 301-312). Alicante: Universidad de Alicante.

- Boostrom, R. (2001). Whither textbooks?. *Journal of Curriculum Studies*, 33(2), pp. 229-243.
- Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks. An analysis of the levels of difficulty*, Licentiate Thesis, Department of Mathematics, Luleå University of Technology, Luleå, Sweden. Retrieved January 30, 2016, from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.399.8342&rep=rep1&type=pdf>
- Burgués, C. (2000). El currículum de primaria. En J.M. Goñi (Coord.), *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI* (pp.59-66). Barcelona: Grao.
- Callís, J. (2002). *Estimació de mesures longitudinals rectilínies y curvalínies. Procediments, recursos i estratègies*. Memoria para optar al Grado de Doctor, Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.
- Callís, J., Fiol, M. L., Luca, C., y Callís, C. (2006). Estimación métrica longitudinal en la Educación Primaria. Factores implícitos en la capacidad estimativa métrica. *Uno: Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, 43, 91-110.
- Cañadas, M.C., y Gómez, P. (2012). *Análisis de contenido* [versión electrónica]. Colombia: Universidad de los Andes. Recuperado el 30 de enero de 2016 de: http://funes.uniandes.edu.co/1983/1/Apuntes_Modulo2.pdf
- Caraballo, R.M., Rico, L., Lupiáñez, J.L. (2013). Cambios conceptuales en el marco competencial de pisa: El caso de las Matemáticas. *Revista de curriculum y formación del profesorado*, 17(2), 225-241. Recuperado el 19 de mayo de 2015 de: <http://www.ugr.es/~recfpro/rev172COL1.pdf>
- Carpenter, T.P. (1976). Analysis and synthesis of existing research on measurement. In R.A. Lesh (Ed.), *Number and Measurement* (pp. 47–83). ERIC/SMEAK Science, Mathematics, and Environmental Education Information Analysis Center.

- Casas, L.M., Luengo, R., y Sánchez, C. (1997). Recuperación de instrumentos y unidades de medida tradicionales en Extremadura como motivación al estudio de la medida. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 25, 97-112.
- Castro, A., Prat, M., y Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación*, 374, 43-68.
- Castillo, J.J. (2012). *Estimación de cantidades continuas: longitud y superficie*. Tesis para optar al Grado de Doctor, Departamento de Didáctica de la Matemáticas. Universidad de Granada, Granada, España.
- Castillo, J.J., Segovia, I., Castro, E. y Molina, M. (2011). Estudio sobre la Estimación de Cantidades Continuas: Longitud y Superficie. En J.L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática – 2011* (pp. 165-172). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de Educación Primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.
- Chamorro, M. C. y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis.
- Chamorro, M. C. (1996). El currículum de medida en Educación Primaria y ESO y las capacidades escolares. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 10, 43-62.
- Chamorro, M. C. (Coord.) (2001). *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: MEC.
- Chamorro, M. C. (2003 a). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En M.C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp.221-244). Madrid: Pearson.

- Chamorro, M. C. (2003 b). Las magnitudes multilineales: la superficie y el volumen. En M.C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas* (pp.245-272). Madrid: Pearson.
- Clements, D. & Sarama, J. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
- Cockcroft, W.H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: MEC.
- Conejo, L., Arce, M., Ortega, T. (2014). Justificación de las reglas de derivación en libros de texto de cuatro editoriales desde LGE hasta LOE. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp.257-266). Salamanca: SEIEM.
- Corberán, R. (1996). El área: Recursos Didácticos Para Su Enseñanza En Primaria. O. Mourut, *Procesos de transferencia de resultados de investigación de aula: El caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas* (págs. 1-87). Distrito Federal: CINVESTAV.
- Crooks, N., & Alibali, M. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*, 34(4), pp. 344-377
- Danisova E. (2006). Política para la publicación de libros de texto en la República de Eslovaquia. *Primer seminario internacional de textos escolares*. Mineduc. Santiago.
- D'Amore, B., y Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10 (1), 39-68.
- Del Olmo, M. A., Moreno, F. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen*. Madrid: Síntesis.
- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Labor.
- Eisenstein, E. (1994). *La revolución de la imprenta en la edad moderna europea*. Madrid: Akal.

- Escolano, R. y Gairín, J.M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (1), 17-35.
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, 45(5), 765-777.
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, 45(5), 633-646.
- Foxman, D. (1999). *Mathematics textbooks across the world: some evidence from the third international mathematics and science study (TIMSS)*. Slough: National Foundation for Educational Research.
- Frías, A., Gil, F. y Moreno, M. F. (2001). Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (p.447-502). Madrid: Síntesis.
- Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM.
- Generalitat de Catalunya. (2007). *Decret 142/2007 de 26 de juny, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària*. Barcelona: DOGC 4915.
- Generalitat de Catalunya. (2015). *Decret 119/2015 de 23 de juny, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària*. Barcelona: DOGC 6990.
- Godino, J.D. (Director) (2004). *Matemáticas para maestros* [versión electrónica]. España: Universidad de Granada. Recuperado el 1 de agosto de 2017 de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/8_matematicas_maestros.pdf

- Godino, J.D., Batanero, C. y Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros* [versión electrónica] España: Universidad de Granada. Recuperado el 1 de agosto de 2017 de: https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf
- Godino, J.D., Batanero, C. y Roa, R. (2004). Magnitudes. En J.D, Godino (Director), para maestros (pp. 287-331) [versión electrónica]. España: Universidad de Granada. Recuperado el 1 de agosto de 2017 de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/8_matematicas_maestros.pdf
- González, M.T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca.
- González, M.J. y Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros* (pp. 351-374). Madrid: Pirámide.
- González, M. T., y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (3), 389-408.
- Goodchil, S. & Sriraman, B. (2012). Revisiting the didactic triangle: from the particular to the general. *ZDM Mathematics Education*, 44 (5), 581-585.
- Grugnetti, L., & Jaquet, F. (2005). A mathematical competition as a problem solving and a mathematical education experience. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 373-384.
- Gutiérrez, A. & Jaime, A. (2013). Análisis de la adecuación de libros de texto de E. Primaria a la enseñanza a estudiantes de altas capacidades matemáticas. *Da Investigação às Práticas*, 3(2), 53-74.
- Haggarty, L. & Pepin, B. An Investigation of Mathematics Textbooks and their use en English, French and German Classroom: Who Gets an Opportunity to Learn What? *British Educational Research Journal*, 28 (4), 567-590.

- Henningsen, M. & Stein, M.K. (1997). Mathematical task and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549.
- Hildreth, D.J. (1983). The use of strategies in estimating measurements. *The Arithmetic Teacher*, 30 (5), 50-54.
- Hiebert, J. (Ed.) (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of mathematics* (pp.1-28). New York: Routledge.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of mathematics* (pp.1-28). New York: Routledge.
- Hogan, T. P., y Brezinski, K.L. (2003). Quantitative estimation: One, two or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 259-280.
- Jones, D. L., & Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grades mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 4-27.
- Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., y Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(1), 4-23.
- Kula, W. (1980). *Las medidas y los hombres*. Madrid: Siglo XXI.
- Lefevre, J.A., Greenham, S.L. & Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction*, 11(2), pp. 95-132.
- Lehrer, R. (2003). Developing Understanding of Measurement. In J. Kilpatrick, W.G. Martin and D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 179-192). Reston, VA: NCTM.

- López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación*, 4, 167-179.
- López, E.M., Guerrero, A.C., Carrillo, J., Contreras, L.C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: Un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 73-94
- Love, E. & Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts, en A.Bishop, K.Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Loberde. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 371-410. Dordrecht: Kluwer.
- Luelmo, M.J. (2001). Medir en secundaria: algo más que fórmulas. X Jornada para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Actas del X JAEM. Ponencia 83. Zaragoza. España. Septiembre 2001. Vol II, pp. 727-737.
- Martínez, J. (2006). ¿De qué hablamos cuando hablamos de libros de texto? *Primer Seminario internacional de textos escolares* (pp.429-436). Santiago de Chile: Ministerio de Educación.
- MEC (2014). *Panorámica de la Edición Española de Libros 2013*. Madrid: MEC.
- MEC (2015). *Panorámica de la Edición Española de Libros 2014*. Madrid: MEC.
- MINETUR (2012). *Vocabulario Internacional de Metrología Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados*. Madrid: MINETUR.
- Mengual, E., Albarracín, L. (2013). *Validación empírica de un instrumento para la calificación de exámenes de matemáticas*. Universitat Autònoma de Barcelona, España.
- Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2013). *Validación de un instrumento para la calificación de exámenes de matemáticas*. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 367-381). Bilbao: SEIEM.

- Mengual, E., Gorgorió, N. & Albarracín, L. (2015). The Mathematical Textbook as an obstacle in the learning of measure. In Di Paola, B., Fazio., *Teaching and learning mathematics: resources and obstacles, Proceedings of CIEAEM 67*, Quaderni di ricerca diddattica, 25-2, (pp. 157-165). Aosta.
- Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2016). Las actividades de medida en el libro de texto: un estudio de caso. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 345-354). Málaga: SEIEM.
- Mengual, E., Gorgorió, N. & Albarracín, L. (2017). Análisis de las actividades propuestas por un libro de texto: El caso de la medida. *REDIMAT*, 6(2), 136-163.
- Merriam, S. (1988). *Case study research in education. A qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA*, 5(3), 105-127.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Nicol, C. C., & Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational studies in mathematics*, 62(3), 331-355.
- OCDE (2013). *PISA 2015 Draft mathematics framework*. Recuperado el 20 de mayo de 2015 de <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Mathematics%20Framework%20.pdf>
- OCDE (s.f.). *El programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve*. Recuperado el 21 de mayo de 2015 de <http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf>
- Ortega, T. (1996). Modelo de valoración de textos matemáticos. *Números*, 28, 4- 12.

- Outhred, L., Mitchelmore, M., McPhail, D. & Gould, P. (2003). Count Me into Measurement. In: N.C.T.M. *Learning and Teaching measurement, 2003 Yearbook* (pp.81-99). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice: two contrasted case studies in France and Norway. *ZDM Mathematics Education*, 45 (5), 685-698.
- Pérez, G. (1994). *Investigación Cualitativa. Retos e Interrogante. I Técnicas y Análisis de Datos*. Madrid: La Muralla.
- Pérez, S. y Guillén, G. (2008). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de contenidos geométricos y de medición en secundaria. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M. y Blanco, L.J. (eds). *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Badajoz, pp. 307-319.
- Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *ZDM Mathematics Education*, 33 (5), 158-175.
- Piaget, J. (1970). *Structuralism*. New York: Basic Book.
- Piaget, J. y Szminska, A. (1964). *Génesis del número en el niño*. Argentina: Buenos Aires.
- Pino y Blanco (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, pp. 63-88.
- Piñuel, J. L. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. *Estudios de Sociolingüística*, 3(1), 1-42.
- Pizarro, N. y Albarracín, L. (2015). *Estimación de medida: el conocimiento didáctico del contenido de los maestros de primaria..* Memoria para optar al Grado de Doctor, Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.

- Pizarro, N., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2016). Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes. *Números*, 91, 91-103.
- Pizarro, N., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2017). Irrupción de un concepto en el currículo: profesores de primaria definen y aplican el concepto de estimación de medida. *Dilemas contemporáneos: Educación, Política y Valores*, 5(1), artículo 17, 1-27.
- Plianram, S., & Inprasitha, M. (2012). Exploring Elementary Thai Teachers' Use of Mathematics Textbook. *Creative Education*, 3(6), 692-695.
- Real Decreto 1744/1998, de 31 de julio, sobre uso y supervisión de libros de texto y demás material curricular correspondientes a las enseñanzas de Régimen General. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 4 septiembre 1998, núm. 212, pp. 30005-30007.
- Rezat, S. (2006). A Model of Textbook Use. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. a. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 409-416). Prague: Charles University, Faculty of Education.
- Rezat, S., & Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the sociodidactical tetrahedron: Artifacts as fundamental constituents of the didactical Situation. *ZDM Mathematics Education*, 44(5), 641-651.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J.L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *SUMA*, 58, 7-23.
- Rittle-Johnson, B. & Alibali, M.W. (1999). Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other? *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175-189.
- Rodríguez, J. (2007). La investigación sobre los libros de texto y materiales curriculares. *Primer Seminario internacional de textos escolares* (pp.185-191). Santiago de Chile: Ministerio de Educación.

- Rodríguez G., Gil, J. y García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Granada: Aljibe.
- Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberría, J. y Sarasua, J. (2013). Los libros de texto de Matemáticas del Bachillerato en el periodo 1970 - 2005. *RELIME*, 16 (2), 245-276.
- SAEM Thales (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en educación*. Madrid: McGraw-Hill.
- Schubring, G. (1987). On the Methology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7 (3), 41-51.
- Segovia, I., Castro, E., Castro, E., y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.
- Segovia, I., Castro, E. y Flores, P. (1996). El área del rectángulo, *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (10), 63-67.
- Serradó, A., Azcárate, P., y Cardeñoso, J.M. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya. Revista de Investigación e Innovación Educativa*, 38, 91-112.
- Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Madrid: Morata.
- Smith, M.S. & Stein, M.K. (1998). Selecting and creating mathematicak tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344-350.
- Stein, M.K. & Smith, M.S. (1998). Mathematical task as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.
- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Star, J.R. (2000). On the Relationship Between Knowing and Doing in Procedural Learning. In B. Fishman & S. O'Connor-Divelbiss (Eds.), *Fourth International Conference of the Learning Sciences* (pp. 80-86). Mahwah, NJ: Erlbaum.

- Star, J.R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404-411.
- Star, J.R., & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare : An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102(4), 408-426.
- Star, J.R., & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(2), 169–181.
- Stephan, M. & Clements, D.H. (2003). Linear and Area Measurement in Prekindergarten to Grade 2. En: N.C.T.M. *Learning and Teaching Measurement, 2003 Yearbook* (pp. 3-16). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stray, C. (1994). Paradigms regained: towards a historical sociology of the textbook. *Journal of Curriculum Studies*, 26, 1-26.
- Swoder, L. (1988). *Concept-Driven Strategies for Solving Problems in Mathematics*. San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hibert and M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Szilágyi, J., Clements, D. H. & Sarama, J. (2013). Young Children’s Understanding of Length Measurement: Evaluating a Learning Trajectory. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44 (3), 581–620.
- Torres, J. (1991). *El curriculum oculto*. Madrid: Morata.
- Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 141-171). Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

- Vea Muniesa, F. (1995). *Las matemáticas en la Enseñanza Secundaria en España en el siglo XIX*. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.
- Vicent, J. & Stacey, K. (2008). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMMS video study criteria to Australian eight-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal*, 20(1), 82-107.
- Villella, J.A. y Contreras, L.C. (2005). La selección y uso de libros de texto. Un desafío para el profesional de la enseñanza matemática. *La Gaceta de la RSME*, 8(2), 419-433.
- Yin, R. (1989). *Case of study research, Design and methods*. Londres: Sage.
- Zapico, M. H. (2007). Interrogantes acerca del análisis de contenido y del discurso en en los textos escolares. *Primer Seminario internacional de textos escolares* (pp.185-191). Santiago de Chile: Ministerio de Educación

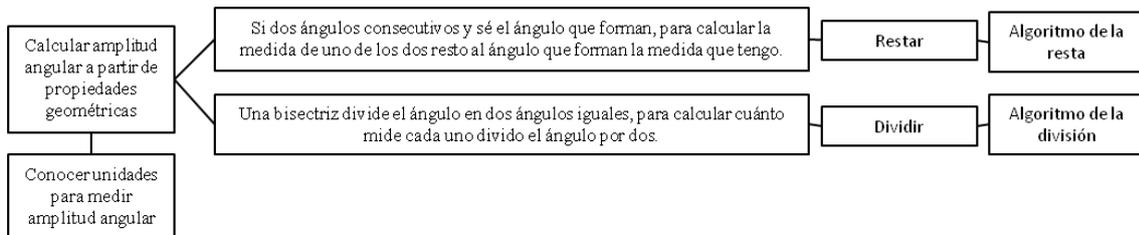
LIBROS DE TEXTO ANALIZADOS:

- Fraile, J. (2012). *Xifres 1.1. Matemàtiques*. España: Vincens Vives.
- Fraile, J. (2012). *Xifres 1.2. Matemàtiques*. España: Vincens Vives.
- Fraile, J. (2012). *Xifres 1.3. Matemàtiques*. España: Vincens Vives.
- Fraile, J. (2012). *Xifres 2.1. Matemàtiques*. España: Vincens Vives.
- Fraile, J. (2012). *Xifres 2.2. Matemàtiques*. España: Vincens Vives.
- Fraile, J. (2012). *Xifres 2.3. Matemàtiques*. España: Vincens Vives.
- Fraile, J. (2012). *Xifres 3. Matemàtiques*. España: Vincens Vives.
- Fraile, J. (2012). *Xifres 4. Matemàtiques*. España: Vincens Vives.
- Fraile, J. (2012). *Matemàtiques 5*. España: Vincens Vives.
- Fraile, J. (2012). *Matemàtiques 6*. España: Vincens Vives.

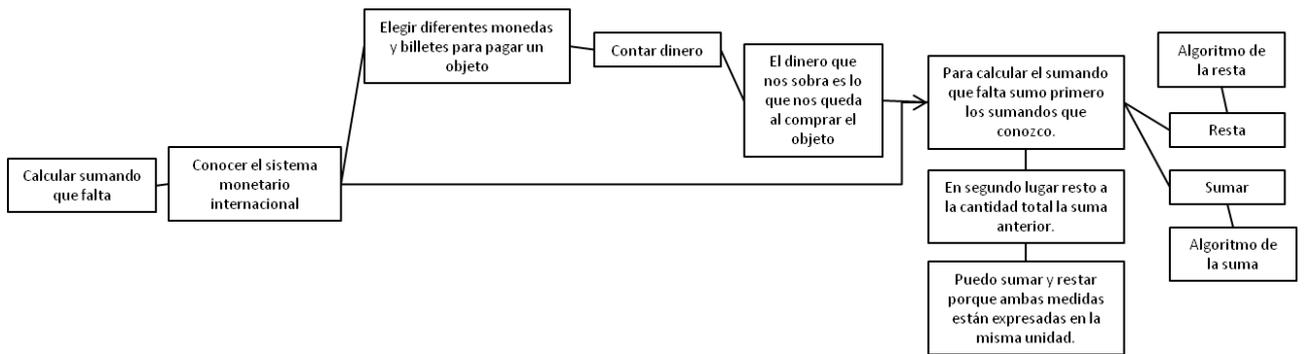
ANEXO

ANEXO

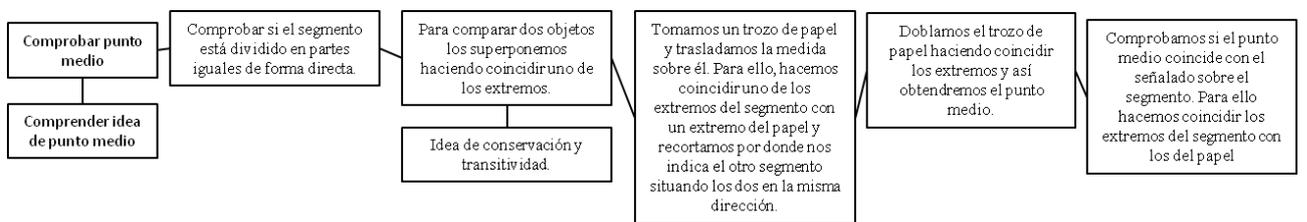
ESQUEMA BOCETO. Calcular amplitud angular a partir de propiedades geométricas



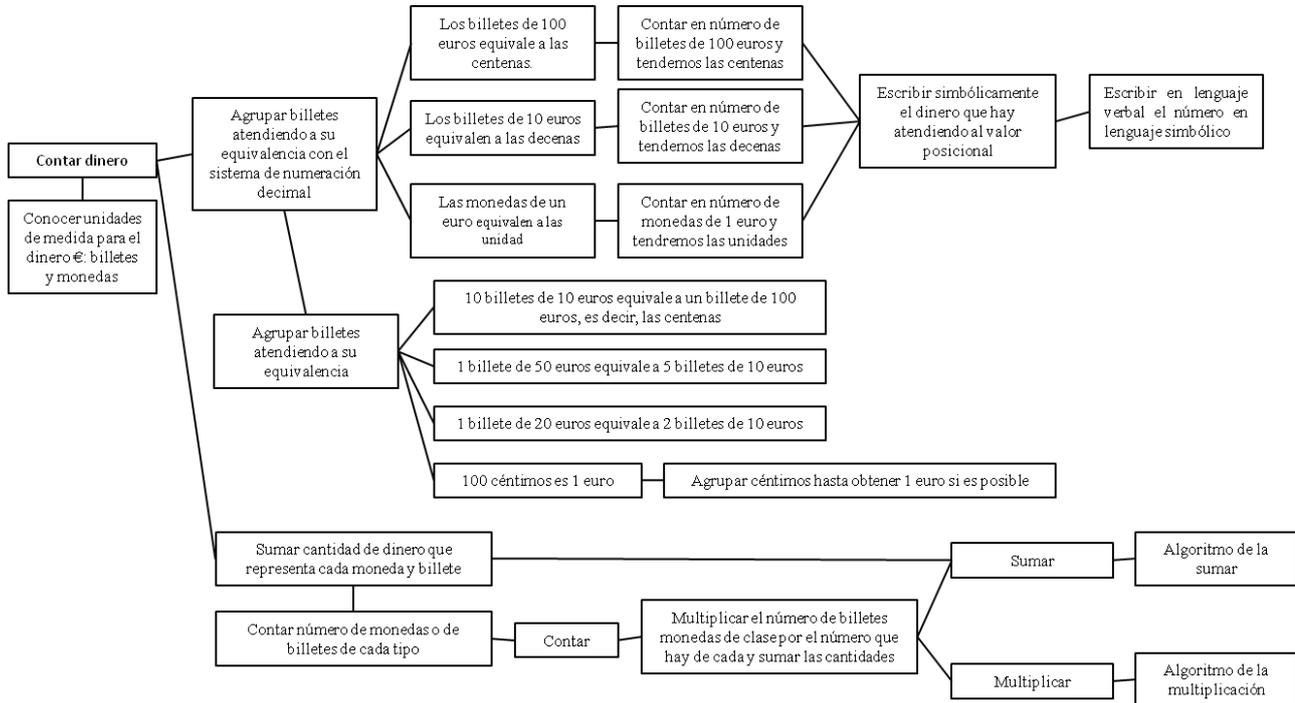
ESQUEMA BOCETO. Calcular sumando que falta



ESQUEMA BOCETO. Comprobar punto medio

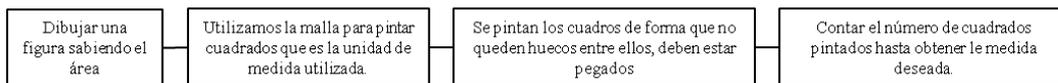


ESQUEMA BOCETO. Contar dinero



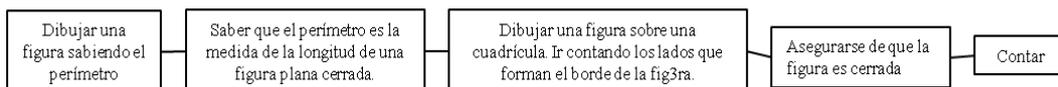
ESQUEMA BOCETO. Dibujar figura sabiendo el área.

Estas actividades aparecen en el ciclo inicial.

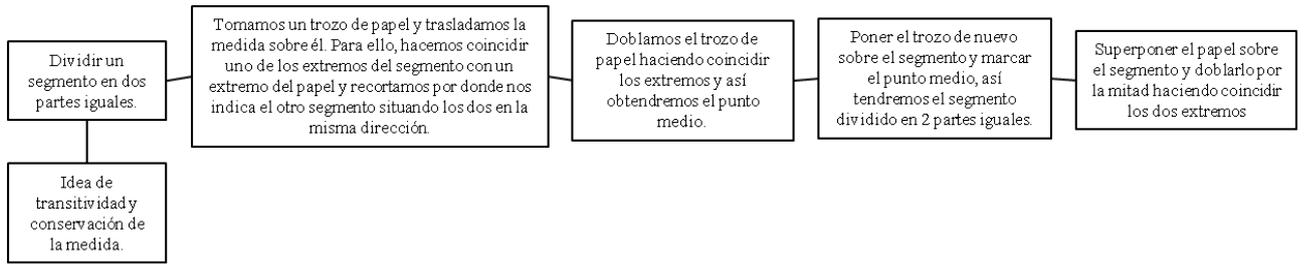


ESQUEMA BOCETO. Dibujar figura sabiendo el perímetro.

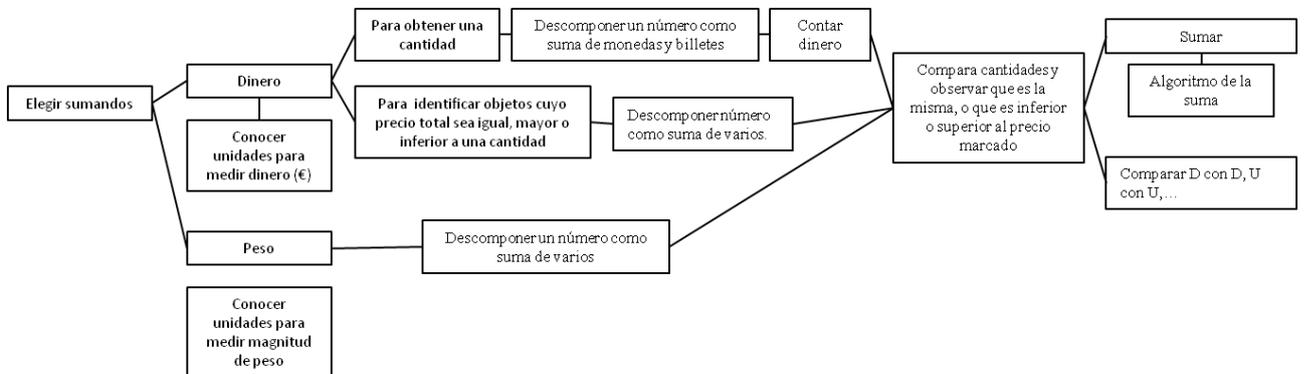
Estas actividades aparecen en el ciclo inicial.



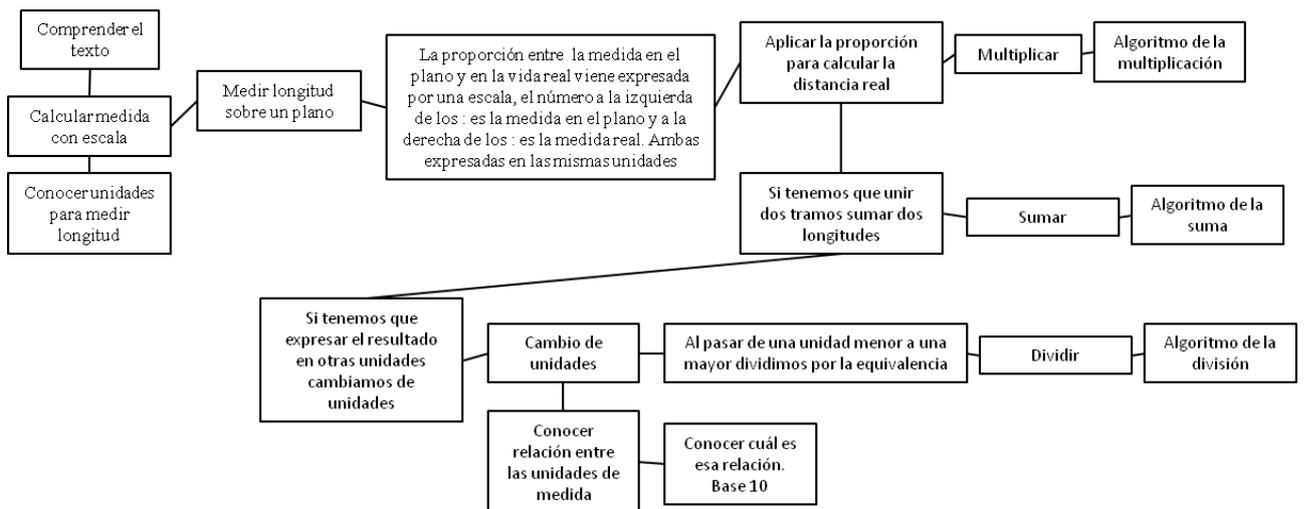
ESQUEMA BOCETO. Dividir un segmento en dos partes iguales.



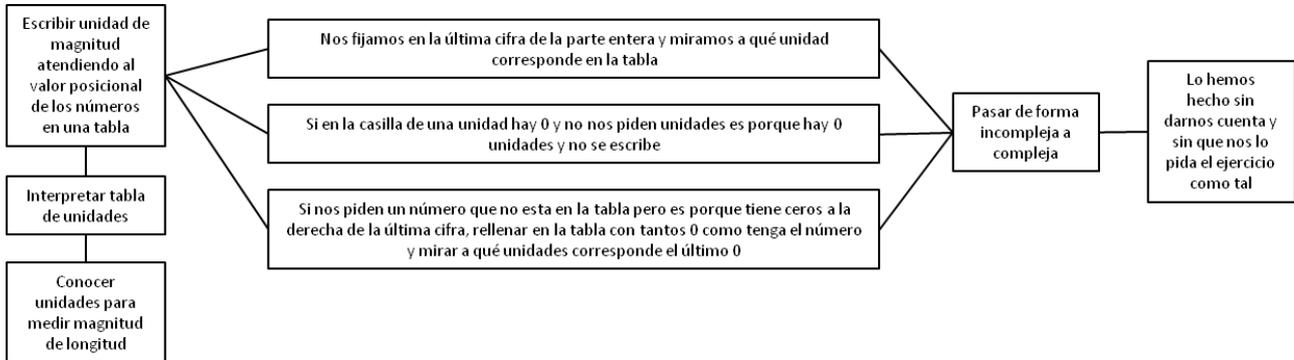
ESQUEMA BOCETO. Elegir sumandos



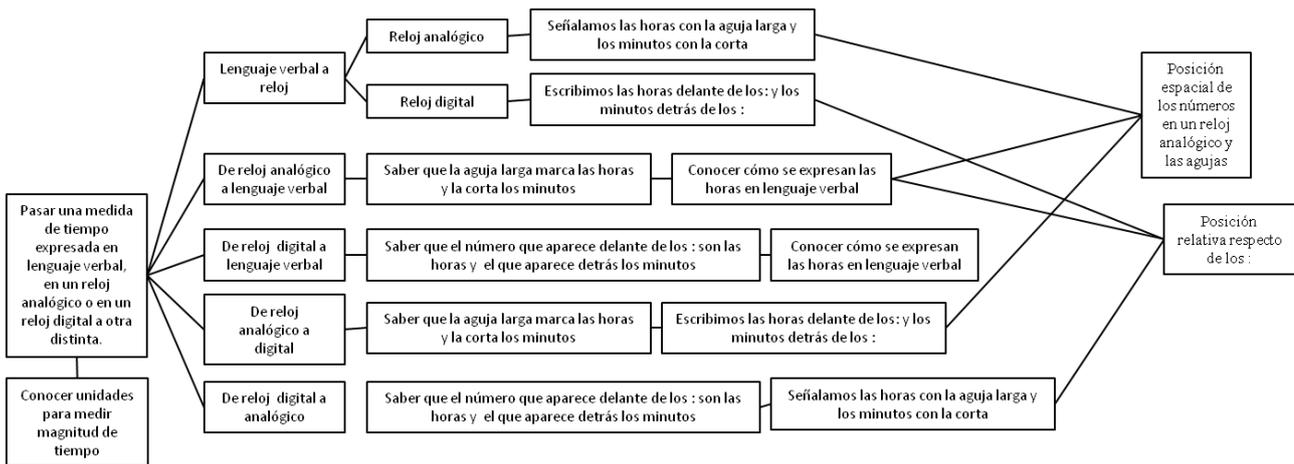
ESQUEMA BOCETO. Escalas



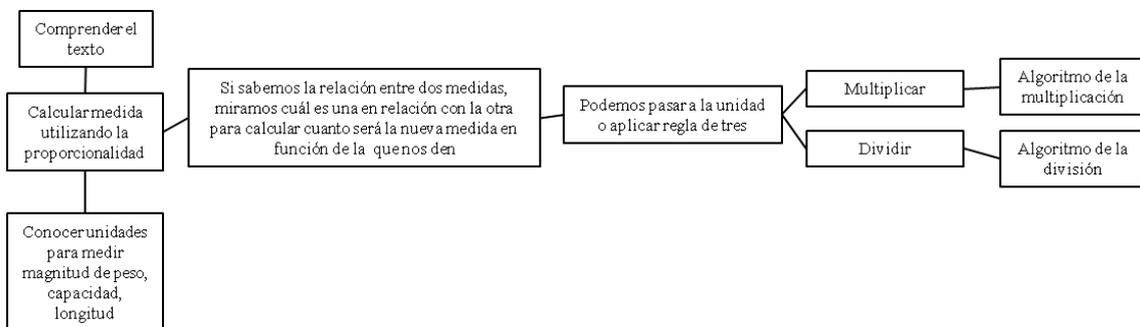
ESQUEMA BOCETO. Escribir unidad de magnitud atendiendo al valor posicional de los números en una tabla.



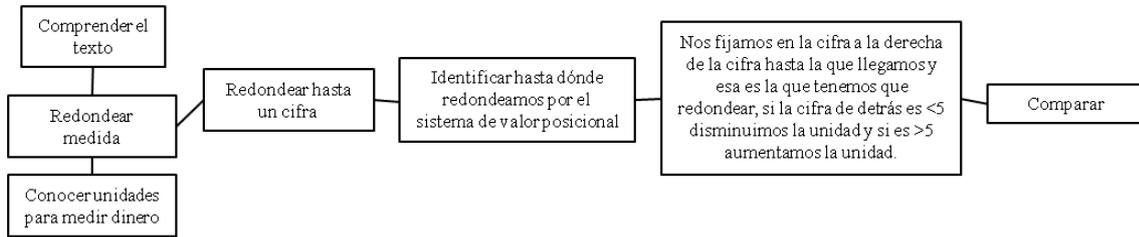
ESQUEMA BOCETO. Pasar una medida de tiempo expresada en lenguaje verbal, en un reloj analógico o en un reloj digital a otra distinta.



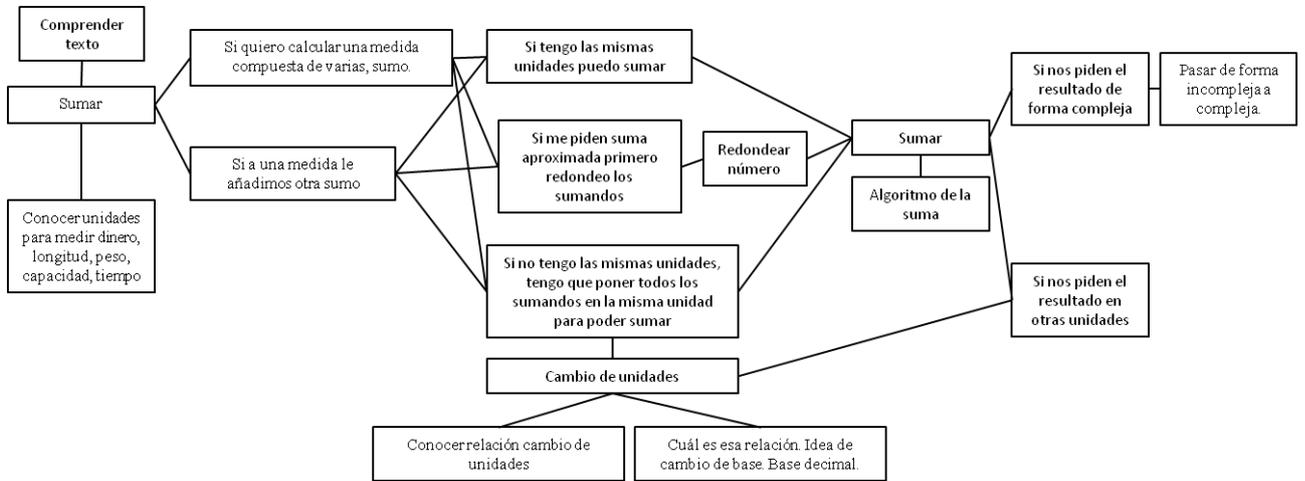
ESQUEMA BOCETO. Proporcionalidad



ESQUEMA BOCETO. Redondear medida



ESQUEMA BOCETO. Sumar



ESQUEMA BOCETO. Restar

