

Capítulo 5:

Variabilidad cuando Y depende de 1 factor

ruido: Comparación entre métricas de

variabilidad

5 Variabilidad cuando Y depende de 1 factor ruido: Comparación entre métricas de variabilidad

En este capítulo mantenemos las mismas hipótesis respecto al modelo que sigue la respuesta Y , es decir, un polinomio en cuya parte asociada a los factores ruido aparece un único factor ruido interaccionando con más de un factor de control, y compararemos los resultados que se obtienen al trabajar con 3 métricas diferentes asociadas a la variabilidad: $\sigma^2(Y)$, $\sigma(Y)$ y $\log(\sigma)$.

Nosotros presentaremos el estudio con 2 factores de control ya que es más sencilla la representación gráfica de las superficies, pudiéndose generalizar los resultados a más de 2 factores.

$$Y = \mu + \theta Z + \delta_1 X_1 Z + \delta_2 X_2 Z + \varepsilon \quad (5.1)$$

Los objetivos de este capítulo son:

- Mostrar que a igual que ocurría con la superficie $\sigma_Z^2(Y)$, las superficies $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma_Z)$ también necesitan ser aproximadas por modelos más complejos en términos de los factores de control X_i que la superficie Y ;
- Comparar los efectos significativos que surgen con los modelos asociados a estas superficies, comparar los factores involucrados en estos y comparar estos factores con los factores que aparecen interaccionando con los factores ruido en el modelo para Y .

Notar que hemos cambiado la notación de $V(Y)$ por $\sigma^2(Y)$ para así poder utilizar $\sigma(Y)$ y $\log(\sigma)$.

A igual que en los capítulos anteriores introduciremos la problemática a partir de ejemplos de modelos para la respuesta Y . Estos ejemplos tienen en común que involucran, en la parte asociada a la variabilidad, a 1 factor ruido y a 2 factores de control.

El método seguido para obtener las expresiones de $\sigma(Y)$ y $\log(\sigma)$ ha sido diferente a cuando estudiábamos la superficie $\sigma^2(Y)$ en el capítulo anterior ya que en este caso se podía lograr directamente la expresión de $\sigma^2(Y)$ a partir del modelo para Y . En la situación actual los modelos para $\sigma(Y)$ y $\log(\sigma)$ se obtendrán, como veremos más adelante, por estimación directa a partir de datos generados según la respuesta Y .

Así, el problema que planteamos es el siguiente: Dada una superficie Y que puede ser representada en función de 2 factores de control, X_1 y X_2 , y un único factor ruido, Z , por un modelo como en (5.1):

- ¿Qué efectos aparecen significativos en cada una de las tres métricas? ¿Son los mismos?;
- ¿Cómo son de complejas las superficies $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma_Z)$?;
- ¿Qué ocurre si se experimenta con diseños factoriales a 2 niveles?. ¿Qué validez tienen superficies obtenidas a partir de estos diseños? ¿Ocurre lo mismo que lo que presentamos para $\sigma_Z^2(Y)$ en el capítulo anterior?.

5.1 Efectos significativos en cada métrica

En este apartado pretendemos ilustrar los aspectos más interesantes del problema con 4 ejemplos seleccionados a tal fin, y en el capítulo 7 se planteará la generalización. Estos ejemplos no pretenden abarcar de forma exhaustiva los posibles escenarios sino acercar al entendimiento del problema.

Los 4 ejemplos seleccionados siguen la estructura en (5.1) y se ha optado por hacer nula la parte donde no intervienen los factores ruido ya que esta parte no afecta al análisis de la variabilidad; por lo tanto son modelos con $E(Y) = \mu = 0$ para cualquier condición de los factores de control.

Tabla 5.1 Modelos para el análisis del comportamiento de $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma_Z)$

	θ	δ_1	δ_2	$\theta - \delta_1 - \delta_2$	Ecuación
Modelo 1	0	1	1	-2	$Y = 0Z + X_1Z + X_2Z + \varepsilon$
Modelo 2	1	1	1	-1	$Y = Z + X_1Z + X_2Z + \varepsilon$
Modelo 3	2	1	1	0	$Y = 2Z + X_1Z + X_2Z + \varepsilon$
Modelo 4	4	1	1	1	$Y = 4Z + X_1Z + X_2Z + \varepsilon$

La diferencia fundamental entre cada modelo es la magnitud relativa del efecto principal del factor ruido Z con relación al resto de efectos: Esto se ha realizado así de

forma deliberada ya que, como ya se ha visto en el capítulo anterior, este hecho tiene una gran influencia, tanto en la estructura de los modelos resultante en el análisis de la variabilidad, como en la selección de condiciones robustas.

Para cada ejemplo, aproximaremos las superficies $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma_Z)$ mediante polinomios de segundo orden con y sin términos cuadráticos puros. Para mantener la notación del capítulo anterior, a los primeros modelos les denominamos modelos “Q” y “L” a los últimos.

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_Z^2(Y) &= \underbrace{\beta_{0i} + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{12} X_1 X_2}_L + \underbrace{\beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2}_Q + \varepsilon \\ \hat{\sigma}_Z(Y) &= \underbrace{\beta^*_0 + \beta^*_1 X_1 + \beta^*_2 X_2 + \beta^*_{12} X_1 X_2}_L + \underbrace{\beta^*_{11} X_1^2 + \beta^*_{22} X_2^2}_Q + \varepsilon^* \\ \log(\hat{\sigma}_Z) &= \underbrace{\beta^{**}_0 + \beta^{**}_1 X_1 + \beta^{**}_2 X_2 + \beta^{**}_{12} X_1 X_2}_L + \underbrace{\beta^{**}_{11} X_1^2 + \beta^{**}_{22} X_2^2}_Q + \varepsilon^{**}\end{aligned}\tag{5.2}$$

Los modelos los estimaremos a partir de datos generados por diseños en forma de matriz producto donde en la parte de los factores de control se encuentra un “diseño central compuesto” y en la parte de los factores ruido un diseño factorial a 2 niveles.

$$\begin{aligned} \text{Matriz Producto} &= \text{Diseño Central Compuesto} \times \text{Diseño Factorial a 2 niveles} \\ &\quad || \\ &= (2^2 + \text{Punto Central} + 4 \text{ Puntos Estrella}) \times 2 \\ &\quad || \\ &= 18 \text{ condiciones experimentales} \end{aligned}$$

El diseño central compuesto permite estimar modelos de segundo orden en los factores de control, no siendo necesario aumentar la complejidad del diseño para el factor ruido. Hemos seleccionado este diseño porque al poderse ejecutar de forma secuencial partiendo de diseños factoriales a 2 niveles es la ampliación “natural” de estos últimos.

Las respuestas se han generado, sin introducir error experimental. Para cada una de las 9 condiciones experimentales en los factores de control existen 2 valores de respuesta, una para cada nivel del factor ruido, con los que se obtienen los valores de las distintas medidas de variabilidad, tal y como se pueden ver en la Tabla 5.2. La varianza y desviación típica calculadas son las de la población ya que se trata de modelos sin error experimental.

Tabla 5.2 Valores de las respuestas para los 5 modelos y medidas de variabilidad
(se ha tomado $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma_Z)$ de la población)

X ₁	X ₂	Z(-1)	Z(+1)	σ_1^2	σ_1	Log(σ_1)	Z(-1)	Z(+1)	σ_2^2	σ_2	Log(σ_2)
-1	-1	2	-2	4	2	0,69	1	-1	1	1	0
+1	-1	0	0	0	0	*	-1	1	1	1	0
-1	+1	0	0	0	0	*	-1	1	1	1	0
+1	+1	-2	2	4	2	0,69	-3	3	9	3	1,10
$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	2	1,41	0,35	0,41	-0,41	0,17	0,41	-0,88
$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	1,41	0,35	-2,41	2,41	5,83	2,41	0,88
0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	2	1,41	0,35	0,41	-0,41	0,17	0,41	-0,88
0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	1,41	0,35	-2,41	2,41	5,83	2,41	0,88
0	0	0	0	0	0	*	1	1	1,00	1,00	0,00

X ₁	X ₂	Z(-1)	Z(+1)	σ_3^2	σ_3	Log(σ_3)	Z(-1)	Z(+1)	σ_4^2	σ_4	Log(σ_4)
-1	-1	0	0	0	0	*	-1	1	1	1	0
+1	-1	-2	2	4	2	0,69	-3	3	9	3	1,10
-1	+1	-2	2	4	2	0,69	-3	3	9	3	1,10
+1	+1	-4	4	16	4	1,39	-5	5	25	5	1,61
$-\sqrt{2}$	0	-0,59	0,59	0,34	0,59	-0,53	-1,59	1,59	0,34	0,59	-0,53
$\sqrt{2}$	0	-3,41	3,41	11,66	3,41	1,23	-4,41	4,41	11,66	3,41	1,23
0	$-\sqrt{2}$	-0,59	0,59	0,34	0,59	-0,53	-1,59	1,59	0,34	0,59	-0,53
0	$\sqrt{2}$	-3,41	3,41	11,66	3,41	1,23	-4,41	4,41	11,66	3,41	1,23
0	0	-2	2	4	2	0,69	-3,00	3,00	4,00	2,00	0,69

Ajuste de modelos a los datos y comentarios sobre el contenido de la tabla

Para la aproximación a las superficies $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma_Z)$ con polinomios de segundo orden completos, modelos “Q”, se han tomado las 9 condiciones experimentales en los factores de control; mientras que para los modelos sin términos cuadráticos puros, modelos “L”, se ha trabajado, tal y como se haría en la mayoría de las situaciones prácticas, únicamente con las 4 condiciones que representan el diseño factorial 2^2 .

El hecho de que las condiciones experimentales de partida sean diferentes afecta levemente a la estimación de los coeficientes de primer orden, ya que los puntos estrella intervienen en el cálculo de los efectos principales de los modelos “Q”, pero no así al coeficiente de la interacción. El hecho de que la constante sea diferente es un problema de falta de ajuste del modelo “L” ya que recoge la influencia cuadrática del modelo teórico que no se puede ajustar ($E(b_0) = \beta_0 + \beta_{11} + \beta_{22}$).

Tabla 5.3 Estimación de los modelos para $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma_Z)$ a partir de polinomios de segundo orden.

(“Q” representa el modelo completo y “L” el modelo sin términos cuadráticos puros. Para el modelo completo, entre paréntesis aparecen los coeficientes estandarizados)

$Y=0Z + X_1Z + X_2 Z$		b_0	b_1	b_2	b_{12}	b_{11}	b_{22}
Varianza (σ_Z^2) ($R^2=100\%$; $R^2\text{-aj}=100\%$)	Q	0 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (4)	1 (1.70)	1 (1.70)
	L	2	0	0	2		
Desv. Típica (σ_Z) ($R^2=94\%$; $R^2\text{-aj}=84\%$)	Q	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (2)	0.604 (1.03)	0.604 (1.03)
	L	1	0	0	1		
Loge (σ_Z)		--	--	--	--	--	--
		--	--	--	--		

$Y= Z + X_1 Z + X_2 Z$		b_0	b_1	b_2	b_{12}	b_{11}	b_{22}
Varianza (σ_Z^2)	Q	1 (1)	2 (5.66)	2 (5.66)	2 (4)	1 (1.70)	1 (1.70)
	L	3	2	2	2		
Desv. Típica (σ_Z) ($R^2=97\%$; $R^2\text{-aj}=93\%$)	Q	1 (1)	0.60 (1.71)	0.60 (1.71)	0.5 (1)	0.23 (0.39)	0.23 (0.39)
	L	1.5	0.5	0.5	0.5		
Loge (σ_Z) ($R^2=85\%$; $R^2\text{-aj}=59\%$)	Q	0 (0)	0.45 (1.27)	0.45 (1.27)	0.28 (0.55)	0.069 (0.12)	0.069 (0.12)
	L	0.28	0.28	0.28	0.28		

$Y=2Z + X_1 Z + X_2 Z$		b_0	b_1	b_2	b_{12}	b_{11}	b_{22}
Varianza (σ_Z^2) ($R^2=100\%$; $R^2\text{-aj}=100\%$)	Q	4 (4)	4 (11.31)	4 (11.31)	2 (4)	1 (1.70)	1 (1.70)
	L	6	4	4	2		
Desv. Típica (σ_Z) ($R^2=100\%$; $R^2\text{-aj}=100\%$)	Q	2 (2)	1 (2.83)	1 (2.83)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	L	2	1	1	0		
Loge (σ_Z)		--	--	--	--	--	--
		--	--	--	--		

$Y=4Z + X_1 Z + X_2 Z$		b_0	b_1	b_2	b_{12}	b_{11}	b_{22}
Varianza (σ_Z^2) ($R^2=100\%$; $R^2\text{-aj}=100\%$)	Q	16 (16)	8 (22.63)	8 (22.63)	2 (4)	1 (1.70)	1 (1.70)
	L	18	8	8	2		
Desv. Típica (σ_Z) ($R^2=100\%$; $R^2\text{-aj}=100\%$)	Q	4 (4)	1 (2.83)	1 (2.83)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	L	4	1	1	0		
Loge (σ_Z) ($R^2=100\%$; $R^2\text{-aj}=100\%$)	Q	1.386 (1.386)	0.268 (0.76)	0.268 (0.76)	-0.072 (-0.14)	-0.04 (-0.06)	-0.04 (-0.06)
	L	1.314	0.275	0.275	-0.072		

En los modelos completos “Q” se ha trabajado con 9 observaciones y se han estimado 6 parámetros, por lo tanto quedan 3 g. l. que son utilizados para estimar un error que en este caso no es “error experimental” (ya que no se ha introducido error experimental) sino “error por falta de ajuste”. Los valores de “ R^2 ” y “ R^2 -ajustada” nos dan una idea de la bondad de ajuste de los modelos cuadráticos; no podemos hacer lo mismo con los modelos sin términos cuadráticos porque no tenemos grados de libertad para estimar el error ya que el modelo tiene 4 parámetros y se parte de 4 condiciones experimentales.

Como los coeficientes en el modelo “Q” tienen diferente error estándar hemos incorporado el valor estandarizado de los coeficientes a falta de dividir por el error experimental. Este valor se halla a partir de,

$$Cov(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1} \sigma^2 \quad \text{con X la matriz del diseño y } \sigma \text{ el error experimental}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.344 & 0.219 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.219 & 0.344 \end{pmatrix}; \quad \text{Coeficientes Estandarizados} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1/\sqrt{0.125} \\ b_2/\sqrt{0.125} \\ b_{12}/\sqrt{0.25} \\ b_{11}/\sqrt{0.344} \\ b_{22}/\sqrt{0.344} \end{pmatrix}$$

Interpretación de resultados

Con una situación de partida en la que los modelos para la respuesta Y contenían los efectos asociados a 1 factor ruido y sus interacciones con 2 factores de control, la mayoría de experimentadores esperarían encontrar en los modelos para la variabilidad únicamente los efectos principales de los factores X_1 y X_2 pero tal y como se puede observar en la Tabla 5.4 esto no es siempre así.

Tabla 5.4 Efectos significativos para los modelos asociados a la variabilidad

	Y= $X_1Z + X_2Z$		Y= $Z + X_1Z + X_2Z$		Y= $2Z + X_1Z + X_2Z$		Y= $4Z + X_1Z + X_2Z$	
	“L”	“Q”	“L”	“Q”	“L”	“Q”	“L”	“Q”
$\sigma^2(Y)$	b_{12}	b_{12} b_{11}, b_{22}	b_1, b_2 b_{12}	b_1, b_2, b_{12} b_{11}, b_{22}	b_1, b_2 b_{12}	b_1, b_2, b_{12} b_{11}, b_{22}	b_1, b_2 b_{12}	b_1, b_2, b_{12} b_{11}, b_{22}
$\sigma(Y)$	b_{12}	b_{12} b_{11}, b_{22}	b_1, b_2 b_{12}	b_1, b_2, b_{12} b_{11}, b_{22}	b_1, b_2	b_1, b_2	b_1, b_2	b_1, b_2
Log(σ)	---	---	b_1, b_2 b_{12}	b_1, b_2, b_{12} b_{11}, b_{22}	---	---	b_1, b_2 b_{12}	b_1, b_2, b_{12} b_{11}, b_{22}

Basándonos en los modelos completos “Q” observamos que si se selecciona una métrica los efectos significativos no son los mismos para cada modelo en Y :

- La superficie $\sigma_Z^2(Y)$ siempre es cuadrática con los términos cuadráticos puros no nulos y en ocasiones (ejemplo $Y = X_1Z + X_2Z$) los efectos principales se anulan;
- La superficie $\sigma_Z(Y)$ puede aparecer como una función cuadrática con y sin efectos principales ($Y = Z + X_1Z + X_2Z$ y $Y = X_1Z + X_2Z$ respectivamente) y también admite expresiones muy simplificadas con sólo efectos principales;
- En los dos ejemplos estudiados la superficie $\log(\sigma)$ aparece representada por un modelo de segundo orden completo.

Además, dado un modelo fijo para la respuesta Y , los efectos significativos para cada métrica pueden ser diferentes. Por ejemplo si $Y = 4Z + X_1Z + X_2Z$, en los modelos “Q” para $\sigma_Z^2(Y)$ y $\log(\sigma)$ aparecen todos los términos de segundo orden mientras que en el modelo “Q” para $\sigma_Z(Y)$ sólo los efectos principales.

Por otra parte cuando se ajustan las superficies por modelos “L” al no poder estimar los términos cuadráticos puros se sobrestima la constante del modelo. Estos modelos si pueden estimar el término de segundo orden debido a la interacción entre X_1 y X_2 y lo estiman adecuadamente.

Por lo tanto:

- Las superficies $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma)$ son en general más complejas que lo que en la práctica se presupone necesitando polinomios de segundo orden para aproximarlas;
- Cuando se aproximan estas superficies por polinomios de primer orden como los que hemos denominado “L”, aparecerá con mucha frecuencia el término de la interacción X_1X_2 y en ocasiones puede aparecer este término sin los efectos principales. La presencia de este término puede ser una señal de la necesidad de ajustar un modelo más complejo;
- El modelo que cabría esperar para este tipo de superficies, conteniendo sólo los efectos principales de aquellos factores que interaccionan con el factor ruido en el modelo para Y , parece ser poco frecuente; de hecho sólo lo hemos podido obtener para la superficie $\sigma_Z(Y)$;

Que para un modelo fijo los coeficientes significativos sean diferentes dependiendo de la métrica utilizada es un hecho que no debiera sorprender ya que esta propiedad ha sido extensamente utilizado a la hora de simplificar modelos con el uso de transformaciones (Atkinson (1982), Box and Fung (1983) y Fung (1986)).

Otro hecho que desconcierta es que partiendo de modelos para Y muy similares, $\sigma_Z(Y)$ se aproxime en ocasiones a superficies de segundo orden, en ocasiones a superficies de primer orden y por último hay situaciones en que coincide exactamente con una superficie de primer orden. En el primer caso se necesitaría haber experimentado con diseños de segundo orden para aproximar la superficie adecuadamente mientras que en los dos últimos casos bastaría con los diseños factoriales a 2 niveles que se utilizan habitualmente.

Por lo tanto nos preguntamos sobre las condiciones bajo las cuales $\sigma_Z(Y)$ admite una representación sencilla por polinomios de primer orden.

5.1.1 Condiciones bajo las cuales $\sigma_Z(Y)$ se aproxima por planos

Ya vimos en el capítulo anterior que la superficie $\sigma_Z^2(Y)$ asociada a modelos para Y como los estudiados admite una representación exacta por polinomios de segundo orden. Si $\sigma_Z(Y)$ es la raíz cuadrada positiva de $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ se podrá expresar como un modelo simple exacto si $\sigma_Z^2(Y)$ admite una raíz positiva de este tipo; en caso contrario, la superficie $\sigma_Z^2(Y)$ no coincidirá con el cuadrado de $\sigma_Z(Y)$.

Si el modelo para Y tiene la siguiente estructura,

$$Y = \mu + \theta Z + \delta_1 X_1 Z + \delta_2 X_2 Z + \varepsilon$$

el modelo para la superficie $\sigma_Z^2(Y)$ puede ser expresado como una potencia al cuadrado de un polinomio de primer orden,

$$\sigma_Z^2(Y) = V(\theta Z + \delta_1 X_1 Z + \delta_2 X_2 Z) = (\theta + \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2)^2 \quad (5.4)$$

y para que la expresión entre paréntesis corresponda con $\sigma_Z(Y)$ ha de estar definida positiva; en tal caso

$$\sigma_Z(Y) = \sqrt{\sigma_Z^2(Y)} = \theta + \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 \quad \text{si } \theta + \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 \geq 0 \quad (5.5)$$

La Tabla 5.5 contiene para los 4 ejemplos anteriores el valor de esta expresión: se puede ver como en los primeros casos surgen valores negativos en las condiciones de la parte factorial y en algunas de las condiciones de la “estrella”.

Es evidente que el valor de la expresión “ $\theta + \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2$ ” depende de la magnitud de los coeficientes en el modelo para Y y de la región donde se experimenta. Por lo tanto si conocemos esta región, podemos encontrar las condiciones, para los coeficientes del

modelo para Y, bajo las cuales $\sigma_Z^2(Y)$ tiene raíz positiva. Para ello obligaremos a que el valor mínimo de alguna de las dos raíces de $\sigma_Z^2(Y)$, $\pm (\theta + \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2)$, sea positivo.

Tabla 5.5 Valor de la expresión “ $\theta + \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2$ ” para los 4 ejemplos de la Tabla 5.1

X_1	X_2	$X_1 + X_2$	$1 + X_1 + X_2$	$2 + X_1 + X_2$	$4 + X_1 + X_2$
-1	-1	-2,00	-1,00	0,00	2,00
1	-1	0,00	1,00	2,00	4,00
-1	1	0,00	1,00	2,00	4,00
1	1	2,00	3,00	4,00	6,00
-1,41	0	-1,41	-0,41	0,59	2,59
1,41	0	1,41	2,41	3,41	5,41
0	-1,41	-1,41	-0,41	0,59	2,59
0	1,41	1,41	2,41	3,41	5,41
0	0	0,00	1,00	2,00	4,00

Supongamos $|\delta_1| = \text{máximo}(|\delta_1|, |\delta_2|)$

Si $\theta \geq 0$

$$\text{mín.}(\theta + \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2) = \text{mín.}(\theta - |\delta_1| - |\delta_2|, \theta - 1,41|\delta_1|)$$

Si se cumple

- * $\theta \geq |\delta_1| + |\delta_2|$ cuando $|\delta_2| \geq 0,41 |\delta_1|$
- * $\theta \geq 1,41 |\delta_1|$ cuando $|\delta_2| < 0,41 |\delta_1|$

$(\theta + \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2)$ es una raíz positiva de $\sigma_Z^2(Y)$

Si $\theta < 0$

$$\text{mín.}(-\theta - \delta_1 X_1 - \delta_2 X_2) = \text{mín.}(-\theta - |\delta_1| - |\delta_2|, -\theta - 1,41|\delta_1|) =$$

Si se cumple:

- * $-\theta \geq |\delta_1| + |\delta_2|$ cuando $|\delta_2| \geq 0,41 |\delta_1|$
- * $-\theta \geq 1,41 |\delta_1|$ cuando $|\delta_2| < 0,41 |\delta_1|$

$(-\theta - \delta_1 X_1 - \delta_2 X_2)$ es una raíz positiva de $\sigma_Z^2(Y)$

De aquí podemos deducir las condiciones para que $\sigma_Z^2(Y)$ tenga raíz positiva dependiendo de la región experimental.

Diseño central compuesto	Diseño factorial a 2 niveles
Condiciones para que exista raíz positiva: * $ \theta \geq \delta_1 + \delta_2 $ cuando $ \delta_2 \geq 0,41 \delta_1 $ * $ \theta \geq 1,41 \delta_1 $ cuando $ \delta_2 < 0,41 \delta_1 $	Condición para que exista raíz positiva: * $ \theta \geq \delta_1 + \delta_2 $
$\sigma_Z(Y) = \sqrt{\sigma^2(Y)} = \begin{matrix} \theta + \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 & \theta \geq 0 \\ -\theta - \delta_1 X_1 - \delta_2 X_2 & \theta < 0 \end{matrix}$	

Notar que las condiciones anteriores implican que el efecto del factor ruido domine sobre los efectos asociados a las interacciones. En tales situaciones, el modelo teórico para

$\sigma_Z(Y)$ es exactamente un plano en la zona de experimentación y puede ser aproximado mediante diseños factoriales a 2 niveles. Fuera de esta zona no se asegura el ajuste por planos.

5.2 Geometría de las superficies asociadas a la variabilidad

En el apartado anterior hemos visto que los modelos resultantes al aproximar las superficies $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma_Z)$ por polinomios “Q” y “L” difieren en el valor estimado de la constante y en la presencia de términos cuadráticos puros en los modelos “Q”.

En este apartado, utilizando los mismos ejemplos presentados anteriormente, vamos a representar gráficamente las superficies asociadas a la variabilidad bajo los modelos “Q” y “L” con el objetivo de ilustrar cómo las diferencias entre los modelos estimados afectan en la práctica dependiendo de la métrica que se escoja.

Recordemos que cuando en el capítulo anterior se estudiaba $\sigma_Z^2(Y)$ habíamos determinado la ecuación de la zona de mínima varianza teórica, la distancia de esta zona al centro de la experimentación y las diferencias entre los valores estimados por “Q” y “L” cuando se trabajaba con la métrica $\sigma_Z^2(Y)$.

$$\text{Zona mínima varianza} \quad \delta_1 X_{1Q} + \delta_2 X_{2Q} + \theta = 0$$

$$d((X_{1Q}, \delta X_{2Q}), (0,0)) = \frac{\theta}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}}$$

$$Q_{\sigma^2} - L_{\sigma^2} = \delta_1^2 (X_1^2 - 1) + \delta_2^2 (X_2^2 - 1)$$

Como la diferencia entre los valores previstos por “Q” y “L” cuando se trabaja con $\sigma_Z^2(Y)$ no depende del coeficiente θ , que es el que modificamos en los ejemplos que siguen, los errores de estimación cuando se trabaja con esta métrica son los mismos en cada ejemplo, a pesar de que la forma de “Q” y “L” varían notablemente.

Sin embargo cuando se trabaja con las métricas $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma_Z)$ la diferencia entre los valores de “Q” y “L” no es igual en cada ejemplo.

$$\underline{Y = X_1 Z + X_2 Z}$$

La Figura 5.1 contiene la representación de las superficies $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$ para el caso en que la relación de la respuesta Y con los factores es del tipo: $Y = X_1 Z + X_2 Z$, es decir, el

efecto principal del factor ruido es nulo. (La función $\log(\sigma_Z)$ no está definida en todos los puntos del diseño y por ello no se ha representado.)

Las superficies teóricas contienen una zona de mínima varianza pasando por el centro (0, 0). Se trata de una recta determinada por las condiciones X_1, X_2 que cumplen,

$$X_{1Q} + X_{2Q} = 0 \quad d[(X_{1Q}, X_{2Q}), (0,0)] = 0$$

La forma de las superficies “Q” para las dos métricas $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$ son muy similares; lo mismo ocurre con las aproximaciones “L”. Sin embargo las superficies “Q” y “L” para una misma métrica son muy diferentes: “L” se adapta de forma ineficiente a la curvatura existente en la zona de experimentación mediante una “silla de montar” que se eleva en el centro. Esto provoca que el experimentador que se guía de este modelo “L”:

- No identifica la zona de condiciones robustas e interpreta esta zona como si se tratara de una dirección por la que se logra reducir la variabilidad si se la sigue alejándose del centro de la experimentación;
- Realiza una estimación errónea de la variabilidad. En la región experimental el error de estimación es más acusado en el centro.

$$\underline{Y = Z + X_1Z + X_2Z}$$

Si aumentamos ligeramente el efecto principal del factor ruido y tomamos el modelo $Y = Z + X_1Z + X_2Z$ surgen las superficies representadas en la Figura 5.2.

En este caso la zona de mínima varianza para las superficies teóricas cumple,

$$X_{1Q} + X_{2Q} + 1 = 0 \quad d[(X_{1Q}, X_{2Q}), (0,0)] = 1/\sqrt{2}$$

Esta recta está ligeramente desviada del centro (0, 0) aunque pasa por el interior del cubo delimitado por $X_1 = \pm 1, X_2 = \pm 1$.

Comparando este caso con el anterior, ahora la forma de la superficie teórica “Q” se “aplana” dentro de la región experimental y por lo tanto la forma de “L” se acomoda mejor a “Q”.

Sin embargo, las superficies “L” para las 3 métricas siguen sin identificar la zona de condiciones robustas que queda algo más apartada de la región experimental;

La diferencia entre los valores previstos por “Q” y “L” en la zona central de la región experimental se va reduciendo para las métricas $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma_Z)$ (para $\sigma_Z^2(Y)$ se mantiene constante en todos los ejemplos).

$$\underline{Y = 2Z + X_1Z + X_2Z} \text{ y } \underline{Y = 4Z + X_1Z + X_2Z}$$

Las gráficas asociadas a estas superficies se pueden encontrar en la Figura 5.3 y en la Figura 5.4. Las superficies “Q” y “L” para $\sigma(Y)$ son idénticas en ambos casos ya que “Q” es una superficie de primer orden (ver Tabla 5.3) y por esto no se han representado.

En el caso del modelo $Y = 2Z + X_1Z + X_2Z$ no se ha representado la superficie $\log(\sigma_Z)$ por no estar definida en algunas condiciones. En este caso, la zona de mínima varianza teórica corresponde con la recta que pasa por (-1, -1):

$$X_{1Q} + X_{2Q} + 2 = 0 \quad d[(X_{1Q}, X_{2Q}), (0,0)] = \sqrt{2}$$

Si $Y = 4Z + X_1Z + X_2Z$, la zona de mínima varianza está más alejada de la zona de experimentación ya que no tiene ningún punto en común:

$$X_1 + X_2 + 4 = 0 \quad d[(X_{1Q}, X_{2Q}), (0,0)] = 2\sqrt{2}$$

Podemos observar que las superficies “Q” y “L” no difieren apenas en forma, aunque se siguen observando diferencias en cuanto a los valores previstos. En los dos casos, las aproximaciones “L” a $\sigma_Z(Y)$ son exactas en la región experimental por lo que el experimentador puede interpretar que la variabilidad disminuye de forma continua más allá de esta región cosa que no es cierto; de hecho en uno de los ejemplos la zona de mínima varianza pasa por una de las condiciones experimentales por lo que si se experimenta más allá de este punto la variabilidad comienza a aumentar.

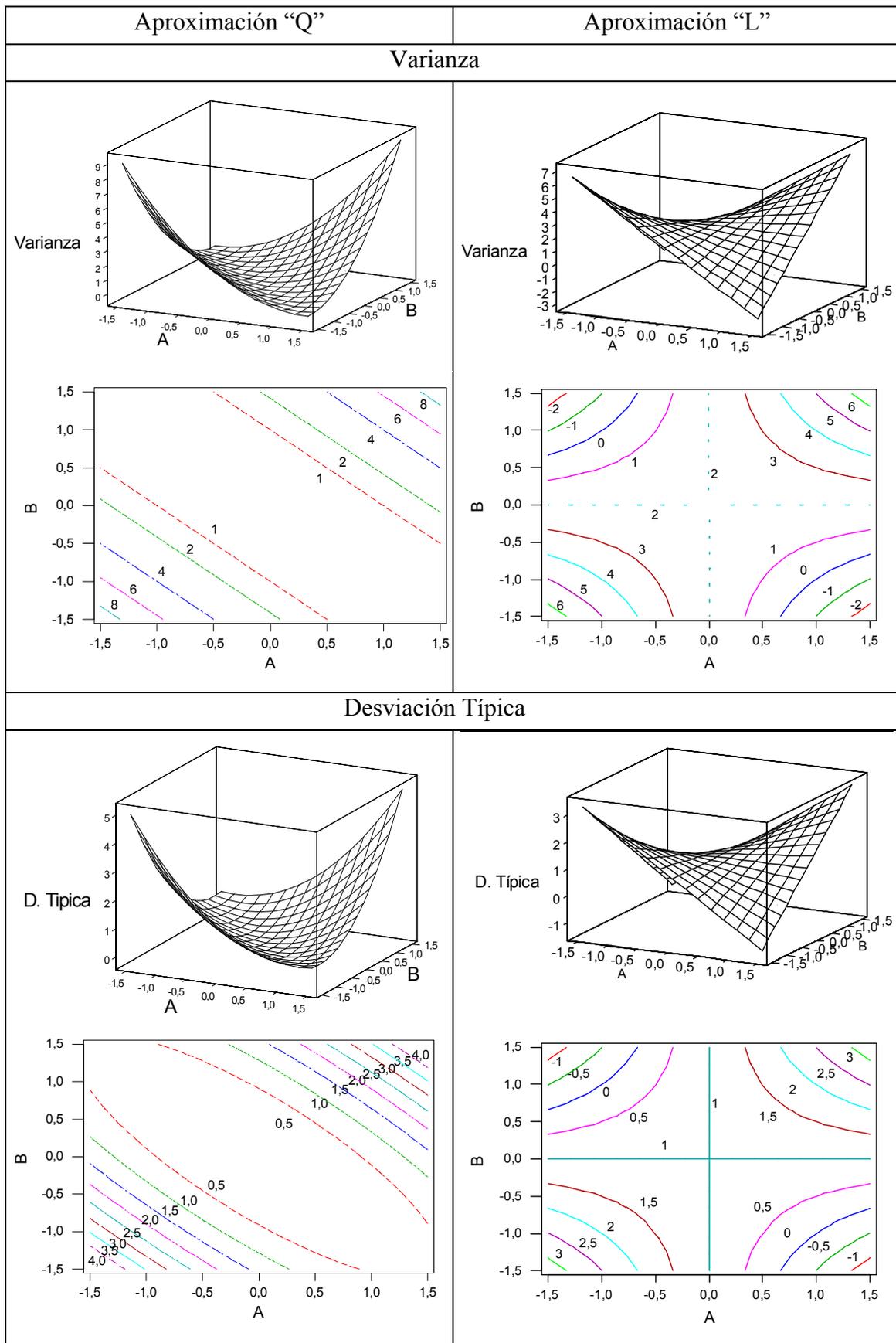


Figura 5.1 Representación de $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$ a partir de polinomios de segundo orden con ("Q") y sin ("L") términos cuadráticos puros. $Y = X_1Z + X_2Z$

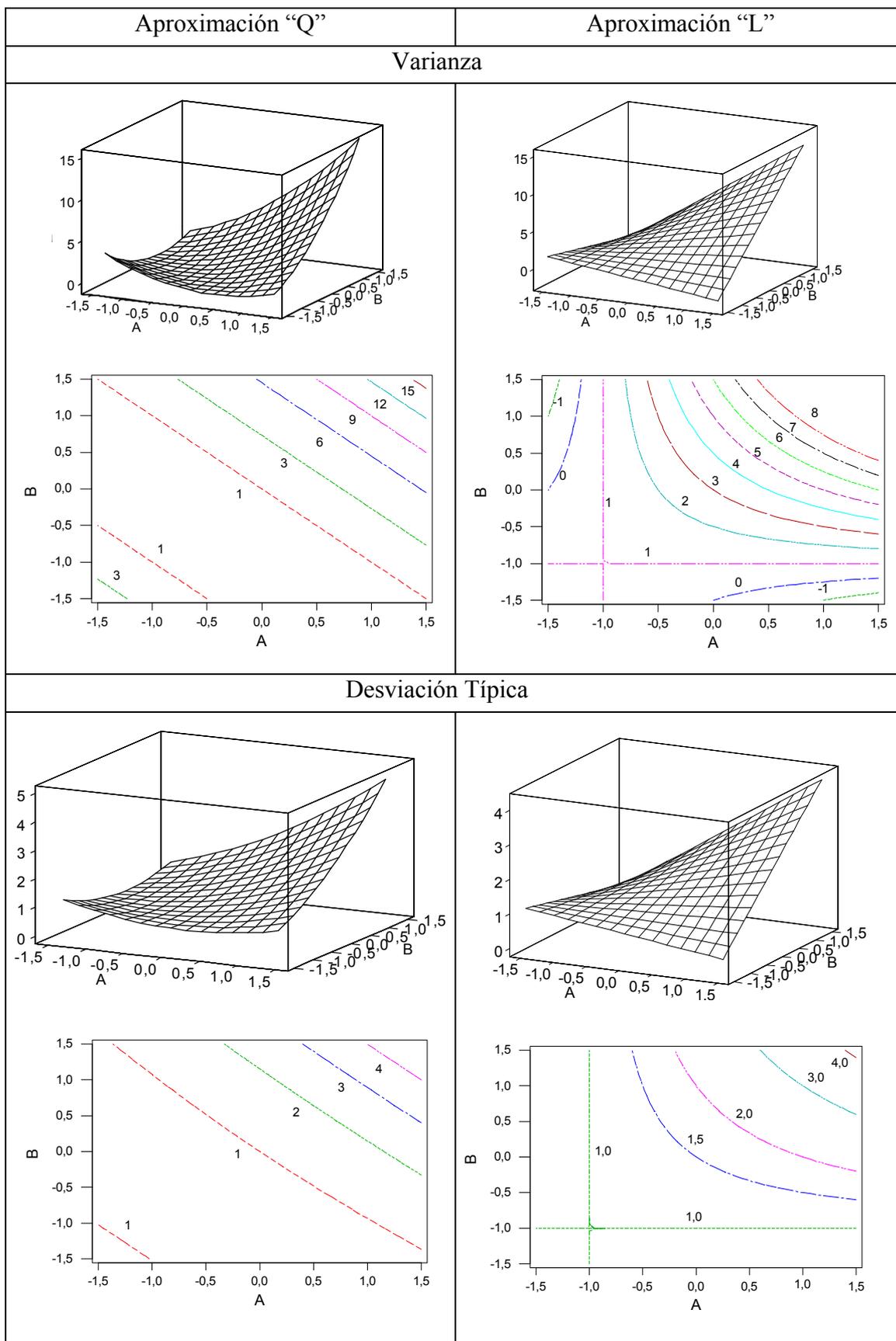


Figura 5.2 Representación de $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$ a partir de polinomios de segundo orden con ("Q") y sin ("L") términos cuadráticos puros. $Y = Z + X_1Z + X_2Z$

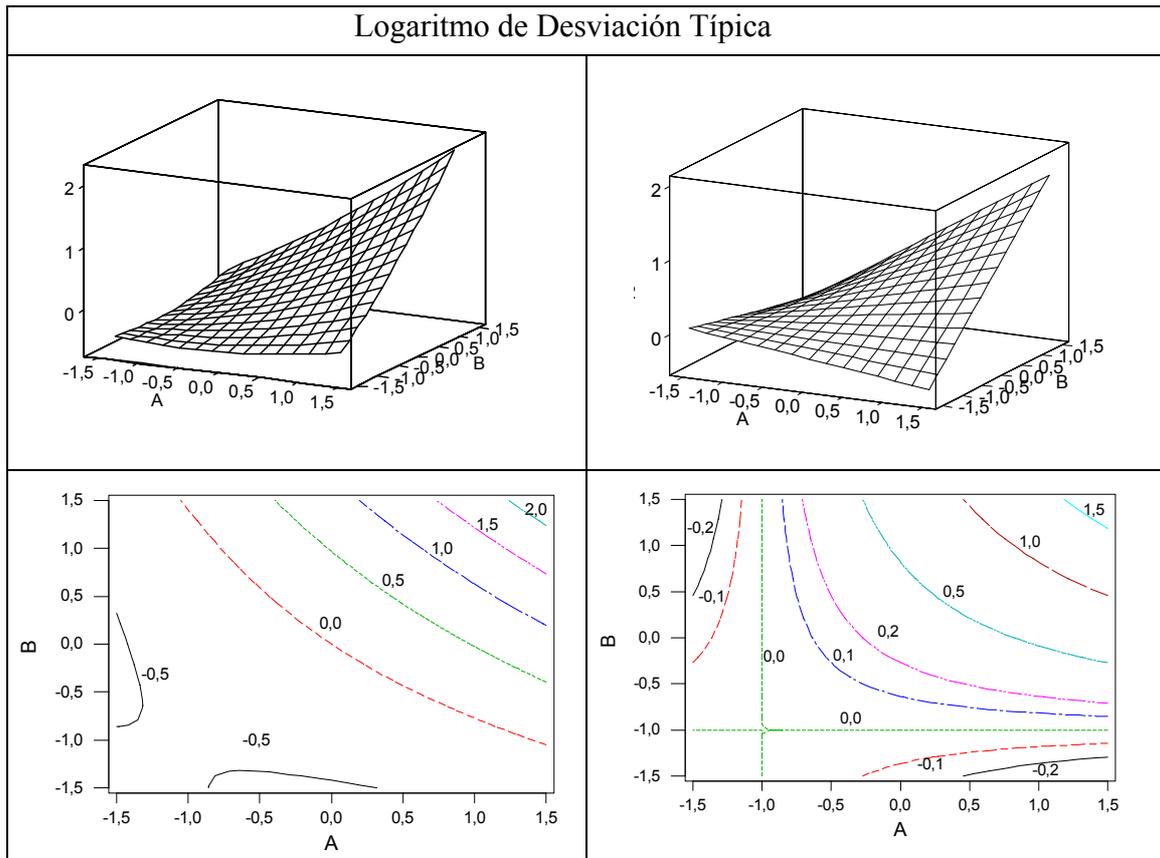


Figura 2.2 (Continuación) Representación de $\log(\sigma_z)$ a partir de polinomios de segundo orden con (“Q”) y sin (“L”) términos cuadráticos puros. $Y = Z + X_1Z + X_2Z$

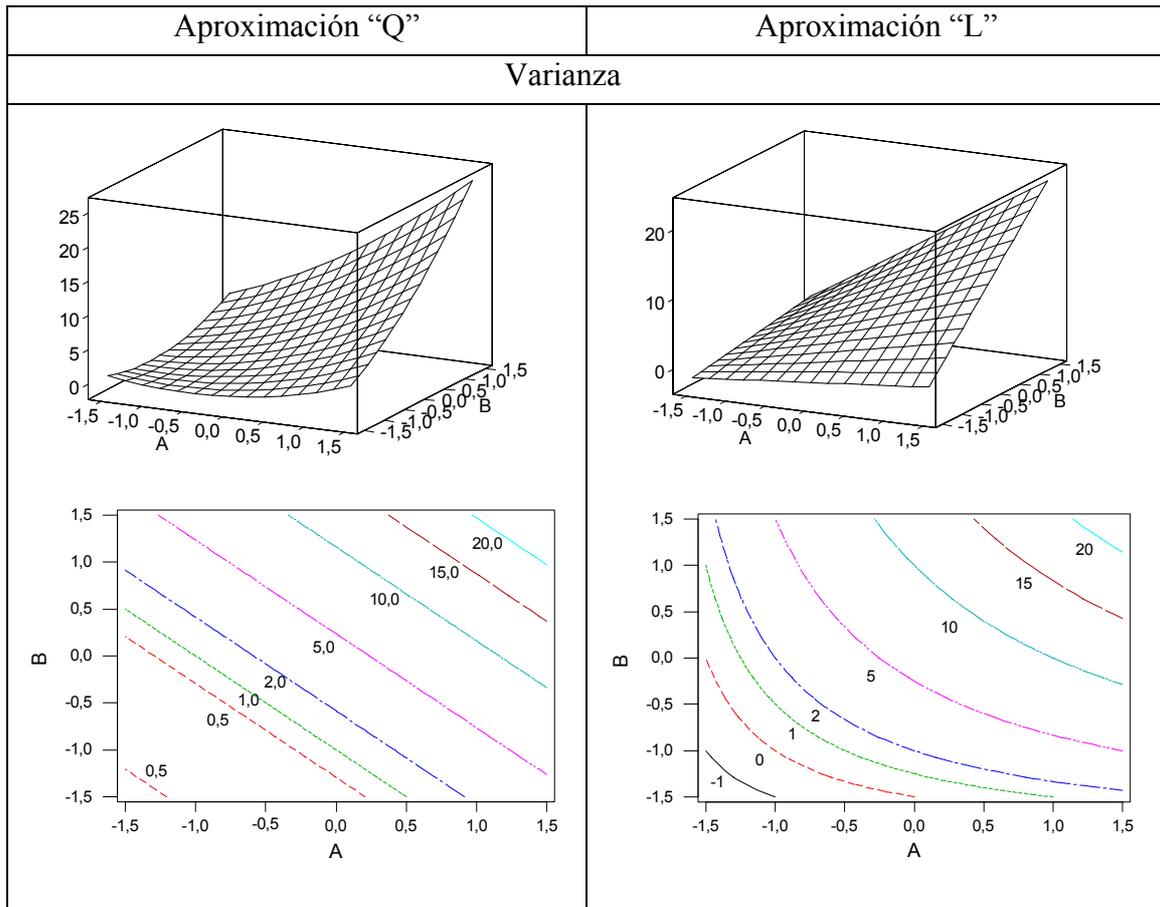


Figura 5.3 Representación de $\sigma_Z^2(Y)$ a partir de polinomios de segundo orden con ("Q") y sin ("L") términos cuadráticos puros. $Y = 2Z + X_1Z + X_2Z$

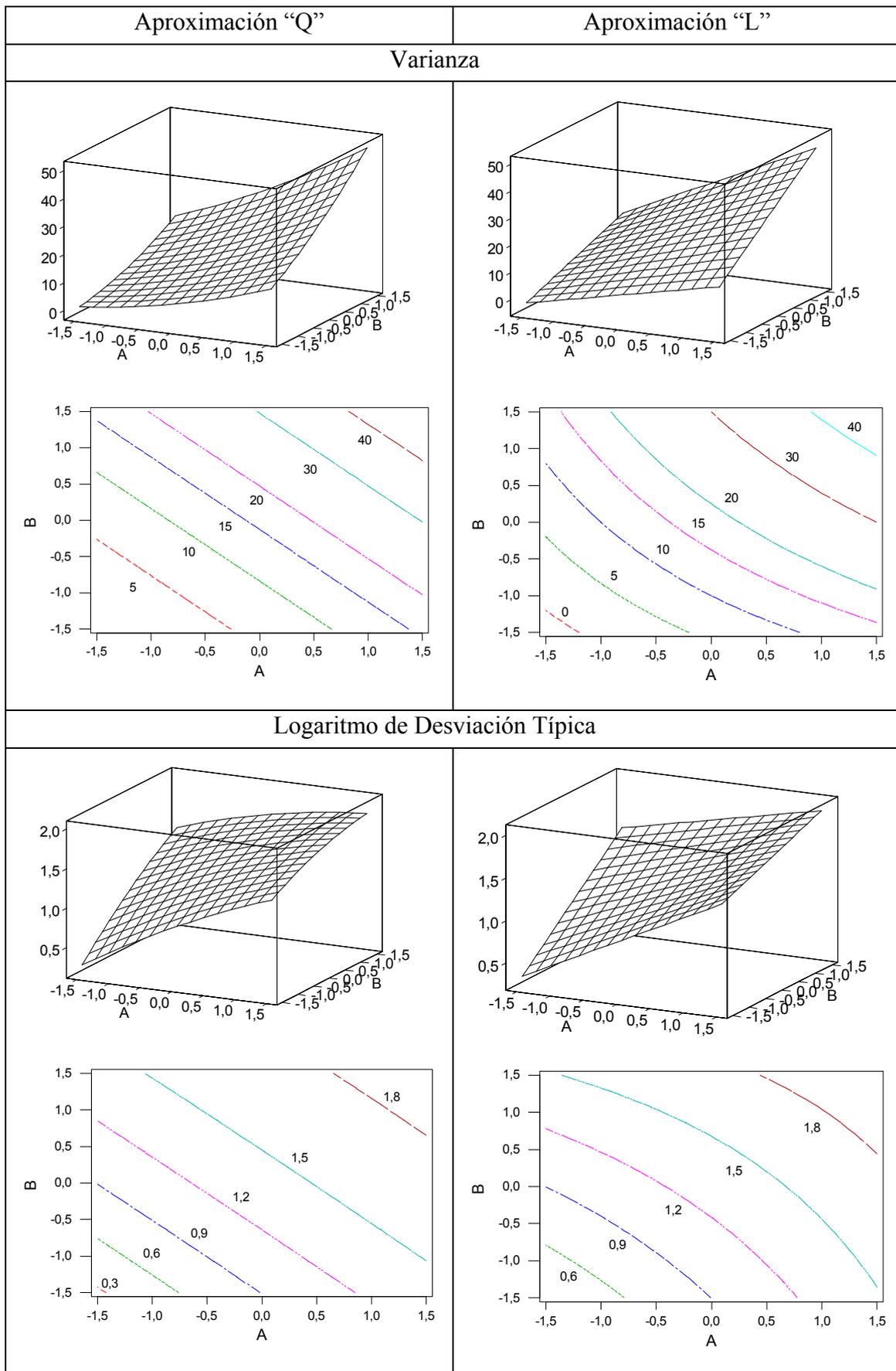


Figura 5.4 Representación de $\sigma_Z^2(Y)$ y $\log(\sigma_Z)$ a partir de polinomios de segundo orden con ("Q") y sin ("L") términos cuadráticos puros. $Y = 4Z + X_1Z + X_2Z$

5.3 Conclusiones

Suponiendo que la característica a estudio Y puede expresarse como un polinomio de primer orden con a lo sumo términos cruzados, implicando a un único factor ruido, Z , y su interacción con “ k ” factores de control, X_i , hemos estudiado la superficie asociada a la variabilidad transmitida por este factor ruido a la respuesta a través de 3 métricas: $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma)$. Sin pérdida de generalidad el estudio se ha realizado para $k = 2$ factores de control.

Las superficies teóricas tienen una zona de mínima varianza determinada por la ecuación:

$$\theta + \delta_1 X_{1Q} + \delta_2 X_{2Q} = 0$$

que está a una distancia del centro de la zona experimental de:

$$d((X_{1Q}, X_{2Q}), (0,0)) = \theta / \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$$

Del estudio realizado hemos obtenido las siguientes conclusiones:

- Los modelos polinómicos que aproximan las superficies $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma)$ tienen estructuras más complicadas en los factores de control que el modelo de partida para Y . Si el modelo para Y contiene interacciones de los factores X_1 y X_2 con el factor ruido, los modelos para las métricas $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma)$ frecuentemente tienen términos de segundo orden en los factores de control: β_{12} , β_{11} y β_{22} ;
- Como era de esperar, la complejidad de los modelos que aproximan $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma)$ depende de la estructura original de Y así como de la región experimental seleccionada para realizar la aproximación;
- En aquellos casos donde $\sigma_Z(Y)$ es representada por polinomios de primer orden se logra un modelo más sencillo con esta métrica que si se trabaja con $\sigma_Z^2(Y)$ o con $\log(\sigma_Z)$ pero no siempre es así (notemos que $\sigma_Z^2(Y)$ es exactamente un polinomio de segundo orden y que las aproximaciones a $\sigma_Z(Y)$ o a $\log(\sigma_Z)$ por polinomios de segundo orden pueden no resultar apropiadas);
- La representación local de $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma)$ en torno a $(0, 0)$ puede simplificarse si la zona de mínima varianza está alejada; en este caso, se pueden aproximar las superficies por polinomios de primer orden: “L”;

- Si la zona de mínima varianza está próxima a la región experimental, las superficies $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma)$ no son de primer orden en esta región por lo que las aproximaciones por modelos “L” que se realizan habitualmente a partir de diseños factoriales a 2 niveles no son adecuadas. (Un signo de esta falta de ajuste puede estar en el hecho de tener al efecto “ β_{12} ” como significativo);
- En la anterior situación, la zona de mínima varianza no queda bien identificada al trabajar con los modelos “L” en cualesquiera de las tres métricas: $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma)$. Los modelos “L” confunden esta zona con una dirección de reducción de variabilidad por lo que erróneamente inducen a alejarse de la región experimental;
- Conforme la magnitud relativa del efecto principal asociado al factor ruido, θ , comienza a dominar ocurre que:
 - La zona de mínima varianza se aleja de la zona de experimentación;
 - Las superficies $\sigma_Z^2(Y)$ y $\log(\sigma_Z)$ reducen la curvatura en la zona de experimentación y pueden ser aproximadas en ocasiones por modelos “L”;
 - La superficie $\sigma_Z(Y)$ puede ser representada de forma exacta por un polinomio de primer orden en la región determinada por el diseño factorial si $|\theta| \geq (|\delta_1| + |\delta_2|)$;
- Si la aproximación por modelos “L” no es exacta, “L” estimará adecuadamente la variabilidad en los puntos del diseño experimental, la sobrestimaré en el interior de la región experimental y la subestimaré fuera. En ocasiones se pueden obtener valores negativos de variabilidad lo cual es un signo de falta de ajuste del modelo;
- Existe una situación en la que las tres superficies: $\sigma_Z^2(Y)$, $\sigma_Z(Y)$ y $\log(\sigma_Z)$, pueden ser representadas por polinomios conteniendo sólo términos de segundo orden. Esto ocurre si $\theta = 0$ y en este caso $(0, 0)$ es una condición robusta. En este caso, si se utiliza las aproximaciones por polinomios “L” en los modelo sólo aparecerá el efecto β_{12} asociado a la interacción entre X_1 y X_2 y no los efectos principales, β_1 y β_2 .

En vista de los comentarios anteriores, es razonable suponer que las situaciones en las que se necesiten términos de segundo orden (interacciones o términos cuadráticos puros) para aproximar las superficies asociadas a la variabilidad van a ser numerosas y por lo tanto nos permitimos plantear algunas recomendaciones.

