

Capítulo 6:

Variabilidad cuando Y depende de 2 factores

ruido

6 Variabilidad cuando Y depende de 2 factores ruido

En este capítulo ampliaremos el estudio llevado a cabo en los dos capítulos anteriores y analizaremos el comportamiento de las superficies $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$ ante la presencia de 2 factores ruido. Finalmente, en el siguiente capítulo realizaremos una generalización del problema.

Estudiaremos la complejidad de estas superficies y cómo afecta el hecho de que sean aproximadas a partir de diseños factoriales a 2 niveles tal y como se hace habitualmente en la práctica experimental.

Como no queda suficientemente clara la necesidad de utilizar la transformación “logaritmo” por sistema y por otra parte resulta complicado obtener una relación entre el modelo para $\log(\sigma)$ y el modelo para Y , no vamos a extraer conclusiones particulares para esta métrica. (Entendemos que su uso puede justificarse por otros criterios como la distribución teórica de la componente del error en los modelos que se ajusten, pero incluso en estos casos, si el número de condiciones experimentales es bajo es difícil encontrar mejoras con su uso.)

6.1 Expresión para la Varianza a partir del modelo para la respuesta Y

Cuando en un estudio aumentamos el número de factores ruido manteniendo los mismos factores de control, aumenta la dimensión del espacio donde se encuentra la superficie Y pero no la del espacio donde se encuentra la superficie $\sigma_Z^2(Y)$ que sólo depende de los factores de control.

Para el caso de 2 factores de control y 2 factores ruido asumimos que el modelo en Y puede ser representado por un polinomio de primer orden con a lo sumo términos cruzados,

$$Y = \mu + \theta_1 Z_1 + \theta_2 Z_2 + \theta_{12} Z_1 Z_2 + \delta_{11} X_1 Z_1 + \delta_{12} X_1 Z_2 + \delta_{21} X_2 Z_1 + \delta_{22} X_2 Z_2 + \varepsilon \quad (6.1)$$

con “ ε ” independiente del resto de la expresión.

Asumiendo que todos los factores están codificados entre -1 y 1 y que los factores ruido son independientes con igual variabilidad en este rango de trabajo, podemos suponer $\sigma^2(Z_i) = 1$. Además, sin pérdida de generalidad en un problema de estudio de la estructura y geometría de $\sigma^2(Y)$ en función de los factores de control, se puede asumir $\theta_{12} = 0$.

De esta forma, $\sigma^2(Y)$ puede descomponerse, teniendo en cuenta las fuentes de variación, en una parte asociada a los factores ruido y que depende de los factores de control X_1 y X_2 , $\sigma_Z^2(Y)$; y en otra parte que no implica a los factores de control, $\sigma_\varepsilon^2(Y)$:

$$\sigma^2(Y) = \sigma^2(Z_1)(\theta_1 + \delta_{11}X_1 + \delta_{21}X_2)^2 + \sigma^2(Z_2)(\theta_2 + \delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2)^2 + \sigma^2(\varepsilon)$$

$$\sigma^2(Y) = \sigma_Z^2(Y) + \sigma_\varepsilon^2(Y) \quad (6.2)$$

$$\text{con } \sigma_Z^2(Y) = (\theta_1 + \delta_{11}X_1 + \delta_{21}X_2)^2 + (\theta_2 + \delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2)^2$$

Ahora en la expresión para $\sigma_Z^2(Y)$ tenemos dos sumandos al cuadrado (uno por cada factor ruido) y no uno como ocurría los dos capítulos anteriores.

Desarrollando la ecuación (6.2) se logra expresar $\sigma_Z^2(Y)$ como un polinomio de segundo orden completo donde los coeficientes dependen de los coeficientes del modelo en Y según se indica,

$$\sigma_Z^2(Y) = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_{12}X_1X_2 + \beta_{11}X_1^2 + \beta_{22}X_2^2$$

$$\text{con } \beta_0 = \theta_1^2 + \theta_2^2 \quad \beta_1 = 2(\theta_1\delta_{11} + \theta_2\delta_{12}) \quad \beta_2 = 2(\theta_1\delta_{21} + \theta_2\delta_{22}) \quad (6.3)$$

$$\beta_{12} = 2(\delta_{11}\delta_{21} + \delta_{12}\delta_{22}) \quad \beta_{11} = (\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2) \quad \beta_{22} = (\delta_{21}^2 + \delta_{22}^2)$$

La zona de mínima varianza asociada a esta superficies no es tan sencilla de expresar como cuando aparece un único factor ruido. Ahora la podemos definir a partir de un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} (\delta_{11}\theta_1 + \delta_{12}\theta_2) + (\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2)X_1 + (\delta_{21}\delta_{11} + \delta_{22}\delta_{12})X_2 = 0 \\ (\delta_{21}\theta_1 + \delta_{22}\theta_2) + (\delta_{11}\delta_{21} + \delta_{12}\delta_{22})X_1 + (\delta_{21}^2 + \delta_{22}^2)X_2 = 0 \end{cases}$$

Podemos ver que si θ_1 y θ_2 se anulan la zona de mínima varianza pasa por el centro de la región experimental pero no es una condición necesaria.

A igual que en las situaciones estudiadas en los capítulos anteriores nos preguntamos sobre la complejidad de las superficies asociadas a las métricas que estudian la variabilidad y sobre los efectos que surgen significativos cuando se trabaja con modelos de segundo orden, planteándonos la conveniencia o no de experimentar con diseños de segundo orden.

Las preguntas que nos hacemos son:

- ¿Qué circunstancias se han de dar para que al aproximar las superficies $\sigma_Z^2(Y)$ o $\sigma_Z(Y)$ por polinomios se necesiten que estos tengan por lo menos términos de segundo orden?;
- ¿Es posible aproximar localmente la superficie $\sigma_Z(Y)$ por un plano? ¿Qué condiciones se han de dar?;
- ¿En qué situaciones en los modelos que aproximan $\sigma_Z^2(Y)$ o $\sigma_Z(Y)$ desaparecen los términos de primer orden, β_1 y β_2 , quedando únicamente los de segundo: β_{12} , β_{11} y β_{22} ?;
- ¿De qué depende el grado de significación de β_{12} ?
- ¿Qué ocurre cuando $\sigma_Z^2(Y)$ o $\sigma_Z(Y)$ son aproximadas por modelos obtenidos a partir de diseños de primer orden?

Motivados por los resultados obtenidos en el capítulo anterior hemos creído apropiado atacar primero el problema de encontrar las condiciones bajo las cuales $\sigma_Z(Y)$ puede ser expresada localmente como un polinomio de primer orden. Lo haremos en 2 pasos:

- Primero expresaremos $\sigma_Z^2(Y)$ como una potencia al cuadrado de una expresión candidata a representar a $\sigma_Z(Y)$;
- A continuación determinaremos las condiciones para que la expresión anterior sea positiva, como lo ha de ser $\sigma_Z(Y)$.

En el caso de encontrar solución a este problema, $\sigma_Z(Y)$ podrá ser expresada de forma exacta como un polinomio de primer orden.

En los demás casos en que $\sigma_Z(Y)$ no admite una representación exacta por un polinomio la aproximaremos por polinomios de segundo orden. En esta situación un caso particular es el que se obtiene al aproximar $\sigma_Z(Y)$ sólo con términos de segundo orden. También habrá situaciones en las que al considerar negligibles los términos de segundo orden $\sigma_Z(Y)$ se aproxime por sólo términos de primer orden

6.2 Expresión de la superficie *Desv. Típica(Y)* como un plano

Con el objetivo de contestar a las preguntas anteriores, buscamos las condiciones que han de cumplir los coeficientes del modelo original en Y, expresado en la ecuación (6.1), para que la superficie $\sigma_Z^2(Y)$, en (6.3), pueda ser representada en la región experimental "R" por una potencia al cuadrado de un polinomio de primer orden definido positivo.

Es decir,

$$\sigma_Z^2(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 = (\beta_0^* + \beta_1^* X_1 + \beta_2^* X_2)^2 \quad (6.4)$$

$$\text{con } (\beta_0^* + \beta_1^* X_1 + \beta_2^* X_2) \geq 0 \quad \text{ó} \quad -(\beta_0^* + \beta_1^* X_1 + \beta_2^* X_2) \geq 0 \quad (X_1, X_2) \in R \quad (6.5)$$

$\sigma_Z^2(Y)$ como potencia al cuadrado

$$\text{Si } \beta_0 \neq 0 \quad (\theta_1 \neq 0 \text{ o } \theta_2 \neq 0)$$

Para que se verifique la condición en (6.4) ha de existir la siguiente relación entre los coeficientes del polinomio que ajusta la superficie $\sigma_Z^2(Y)$

$$i) \beta_{11} = \frac{\beta_1^2}{4\beta_0} \quad ; \quad ii) \beta_{22} = \frac{\beta_2^2}{4\beta_0} \quad ; \quad iii) \beta_{12} = \frac{\beta_1 \beta_2}{2\beta_0} \quad (6.6)$$

$$\text{Si } \beta_0 = 0 \quad (\theta_1 = \theta_2 = 0)$$

En este caso el polinomio que ajusta la superficie $\sigma_Z^2(Y)$ sólo tiene términos de segundo orden y la única condición que se ha de cumplir para que se pueda expresar como una potencia al cuadrado es,

$$i^*) \beta_{12} = 2\sqrt{\beta_{11}}\sqrt{\beta_{22}} \quad (6.7)$$

Si las condiciones i), ii), iii) y i*) se expresan en términos de los coeficientes del modelo en Y dan lugar a las expresiones

Si $\beta_0 \neq 0$ ($\theta_1 \neq 0$ o $\theta_2 \neq 0$)

$$i)(\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2) = \frac{[(\theta_1 \delta_{11} + \theta_2 \delta_{12})]^2}{(\theta_1^2 + \theta_2^2)}; \quad ii)(\delta_{21}^2 + \delta_{22}^2) = \frac{[(\theta_1 \delta_{21} + \theta_2 \delta_{22})]^2}{(\theta_1^2 + \theta_2^2)}; \quad (6.8)$$

$$iii)(\delta_{11} \delta_{21} + \delta_{12} \delta_{22}) = \frac{(\theta_1 \delta_{11} + \theta_2 \delta_{12})(\theta_1 \delta_{21} + \theta_2 \delta_{22})}{(\theta_1^2 + \theta_2^2)}$$

Si $\beta_0 = 0$ ($\theta_1 = \theta_2 = 0$)

$$i^*)(\delta_{11} \delta_{21} + \delta_{12} \delta_{22})^2 = (\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2)(\delta_{21}^2 + \delta_{22}^2) \quad (6.9)$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene una expresión sencilla que han de cumplir los coeficientes del modelo de la superficie Y para que la superficie $\sigma_Z^2(Y)$ se pueda expresar como una potencia al cuadrado:

- ($\beta_0 \neq 0$) Si $\theta_1 \neq 0$ y $\theta_2 \neq 0$

$$\frac{\delta_{11}}{\delta_{12}} = \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad (6.10)$$

Si se calcula a partir del modelo para Y el cociente entre las interacciones de un factor de control con los dos factores ruido, el valor resultante ha de ser igual en los dos factores de control, y además ha de coincidir con la que se obtiene al hallar el cociente entre los efectos principales de los factores ruido.

En este caso la expresión para la varianza queda, según se exprese en función de unos u otros coeficientes, de la siguiente forma:

$$\sigma_Z^2(Y) = \left[\sqrt{\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{\theta_2^2}} (\theta_2 + \delta_{12} X_1 + \delta_{22} X_2) \right]^2 = \left[\sqrt{\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{\theta_1^2}} (\theta_1 + \delta_{11} X_1 + \delta_{21} X_2) \right]^2 \quad (6.11)$$

Esta expresión se minimiza en una región representada por:

$$\theta_2 + \delta_{12} X_{1Q} + \delta_{22} X_{2Q} = 0 \quad o \quad \theta_1 + \delta_{11} X_{1Q} + \delta_{21} X_{2Q} = 0 \quad (6.12)$$

cuya distancia al centro del diseño depende directamente de θ_i a través de la expresión:

$$d((X_{1Q}, X_{2Q}), (0,0)) = \frac{\theta_i}{\sqrt{(\delta_{1i}^2 + \delta_{2i}^2)}} \quad (6.13)$$

- ($\beta_0 \neq 0$) Si $\theta_1 = 0$ ó $\theta_2 = 0$ pero no a la vez

$$\delta_{11} = \delta_{21} = 0 \text{ (si } \theta_1 = 0) \quad \text{o} \quad \delta_{12} = \delta_{22} = 0 \text{ (si } \theta_2 = 0) \quad (6.14)$$

Esto implica que no han de existir interacciones entre los factores de control y el factor ruido Z_i cuyo efecto principal es nulo, equivalente a reducir en una dimensión el espacio de los factores ruido a estudio, lo cual no tiene sentido si hemos partido de 2 factores ruido.

- ($\beta_0 = 0$) Si $\theta_1 = \theta_2 = 0$

$$\frac{\delta_{11}}{\delta_{12}} = \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}} \quad (6.15)$$

Si se calcula a partir del modelo para Y el cociente entre las interacciones de un factor de control con los dos factores ruido, el valor resultante ha de ser igual en los dos factores de control.

En este caso, la expresión para la varianza queda

$$\sigma_Z^2(Y) = \left[\sqrt{\frac{\delta_{21}^2 + \delta_{22}^2}{\delta_{21}^2}} (\delta_{11}X_1 + \delta_{21}X_2) \right]^2 = \left[\sqrt{\frac{\delta_{21}^2 + \delta_{22}^2}{\delta_{22}^2}} (\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2) \right]^2 \quad (6.16)$$

Esta expresión se minimiza en una zona que incluye al centro de la región experimental (0, 0):

$$\delta_{11}X_{1Q} + \delta_{21}X_{2Q} = 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad \delta_{12}X_{1Q} + \delta_{22}X_{2Q} = 0 \quad (6.17)$$

Raíz positiva

Si alguna de las “raíces polinómicas” de $\sigma_Z^2(Y)$ es positiva en la región de interés, la superficie $\sigma_Z(Y)$ coincidirá con ella. Las raíces de $\sigma_Z^2(Y)$ son:

$$\left. \begin{aligned} \text{R1} : & \sqrt{\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{\theta_i^2}} (\theta_i + \delta_{1i} X_1 + \delta_{2i} X_2) \\ \text{R2} : & \sqrt{\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{\theta_i^2}} (-\theta_i - \delta_{1i} X_1 - \delta_{2i} X_2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{si } \theta_1 \neq 0 \text{ y } \theta_2 \neq 0 \\ \text{sustituyendo } i = 1 \text{ ó } i = 2 \text{ en R1 y R2} \end{array} \quad (6.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{R1} : & \sqrt{\frac{\delta_{21}^2 + \delta_{22}^2}{\delta_{21}^2}} (+\delta_{11} X_1 + \delta_{21} X_2) \\ \text{R2} : & \sqrt{\frac{\delta_{21}^2 + \delta_{22}^2}{\delta_{21}^2}} (-\delta_{11} X_1 - \delta_{21} X_2) \end{aligned} \right\} \text{Si } \theta_1 = \theta_2 = 0$$

Si restringimos la región de aproximación a la más utilizada en la práctica y que corresponde por la acotada por un diseño factorial (con $|X_1| \leq 1$ y $|X_2| \leq 1$), forzaremos a que el valor mínimo de alguna de las raíces sea positivo.

- Si $\theta_1 \neq 0$ y $\theta_2 \neq 0$ el valor mínimo de las dos raíces se obtiene en,

$$\text{mín}(R1) = \sqrt{\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{\theta_i^2}} (\theta_i - |\delta_{1i}| - |\delta_{2i}|) \quad \text{mín}(R2) = \sqrt{\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{\theta_i^2}} (-\theta_i - |\delta_{1i}| - |\delta_{2i}|)$$

Si $\theta_i > 0$ para algún i ($i = 1$ o $i = 2$), el valor mínimo de R2 es negativo siempre, y por lo tanto R2 no es una raíz admisible. En cambio el valor mínimo de R1 puede ser positivo, y por lo tanto R1 ser una raíz positiva si se verifica que,

$$\theta_i \geq |\delta_{1i}| + |\delta_{2i}|$$

Si $\theta_{i^*} < 0$ para algún i^* ($i^* = 1$ o $i^* = 2$), el valor mínimo de R1 es negativo siempre, y por lo tanto R1 no es una raíz admisible. En cambio el valor mínimo de R2 puede ser positivo, y por lo tanto R2 ser una raíz positiva si se verifica que,

$$-\theta_{i^*} \geq |\delta_{1i^*}| + |\delta_{2i^*}|$$

Por lo tanto si

$$|\theta_1| \geq |\delta_{11}| + |\delta_{21}| \quad y \quad |\theta_2| \geq |\delta_{12}| + |\delta_{22}| \quad (6.19)$$

$\sigma_Z(Y)$ puede ser expresada como un polinomio de primer orden cuya forma depende del signo de θ_i . Las dos expresiones para $\sigma_Z(Y)$ como polinomio de primer orden son equivalentes debido a la relación existente entre los coeficientes (ver 6.10).

$$\sigma(Y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{\theta_i^2}} (\theta_i + \delta_{1i} X_1 + \delta_{2i} X_2) & (\text{si } \theta_i > 0) \\ \sqrt{\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{\theta_i^2}} (-\theta_i - \delta_{1i} X_1 - \delta_{2i} X_2) & (\text{si } \theta_i < 0) \end{cases} \quad i = 1,2 \quad (6.20)$$

- Si $\theta_1 = \theta_2 = 0$

Las dos raíces R1 y R2 pueden adoptar valores negativos en R ya que,

$$\min(R1) = \sqrt{\frac{\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2}{\delta_{12}^2}} (-|\delta_{12}| - |\delta_{22}|) \leq 0 \quad \min(R2) = \sqrt{\frac{\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2}{\delta_{12}^2}} (-|\delta_{12}| - |\delta_{22}|) \leq 0$$

y por lo tanto $\sigma_Z(Y)$ no puede ser expresada como un polinomio de primer orden.

Por lo tanto hemos encontrado una serie de condiciones para los coeficientes en el modelo para Y que, en caso de cumplirse, hacen que $\sigma_Z(Y)$ adopte una forma que coincide exactamente con la superficie representada por un polinomio de primer orden.

Se ha de verificar

$$\theta_1 \neq 0 \quad y \quad \theta_2 \neq 0$$

$$\frac{\delta_{11}}{\delta_{12}} = \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad (6.21)$$

$$|\theta_1| \geq |\delta_{11}| + |\delta_{21}| \quad y \quad |\theta_2| \geq |\delta_{12}| + |\delta_{22}|$$

Así como la representación de $\sigma_Z^2(Y)$ por polinomios de segundo orden es exacta, cualquier representación de $\sigma_Z(Y)$ por polinomios será una aproximación, excepto en el caso que $\sigma_Z^2(Y)$ posea raíz positiva en la región de interés y por lo tanto la superficie $\sigma_Z(Y)$ se represente de forma exacta por un polinomio de primer orden.

En ocasiones algunas de las aproximaciones a $\sigma_Z(Y)$ también se pueden corresponder con polinomios de primer orden. Estas se obtendrán al ajustar la superficie con polinomios de segundo orden y donde sólo los términos de primer orden surgen significativos. Para que esto ocurra, una condición necesaria es que $\sigma_Z^2(Y)$ sea monótona en la región de interés pero esta condición no es suficiente.

La Figura 6.1 muestra 2 ejemplos en los que $\sigma_Z^2(Y)$ tiene un único punto de mínima varianza en el borde de la región experimental y por lo tanto es monótona en la región. Los gráficos muestran las superficies $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$ aproximadas por polinomios de segundo orden (modelos “Q”).

En el primer ejemplo, la aproximación de la superficie $\sigma_Z(Y)$ por un plano sería buena pero no podemos decir lo mismo en el segundo. En el primer ejemplo el eje de simetría de mayor pendiente de la superficie $\sigma_Z^2(Y)$ atraviesa la zona por su zona central creando una región de crecimiento monótono y similar, mientras que en el segundo vemos que es el eje de simetría de menor pendiente el que corta la región, creando una región no monótona en crecimiento y que posteriormente provoca que la superficie $\sigma_Z(Y)$ adopte la forma de una “silla de montar”. (En el siguiente apartado, se analizarán con más detalle las aproximaciones por polinomios de primer orden y se volverá sobre estos ejemplos.)

Por lo tanto concluimos que manteniendo las hipótesis sobre la estructura del modelo Y , es muy probable encontrar términos de segundo orden (interacciones o términos cuadráticos puros) en las aproximaciones a la superficie $\sigma_Z(Y)$. Nos atrevemos a decir que lo mismo ocurrirá con cualquier transformación de $\sigma_Z^2(Y)$ siempre y cuando la región de mínima varianza esté muy próxima a la región experimental.

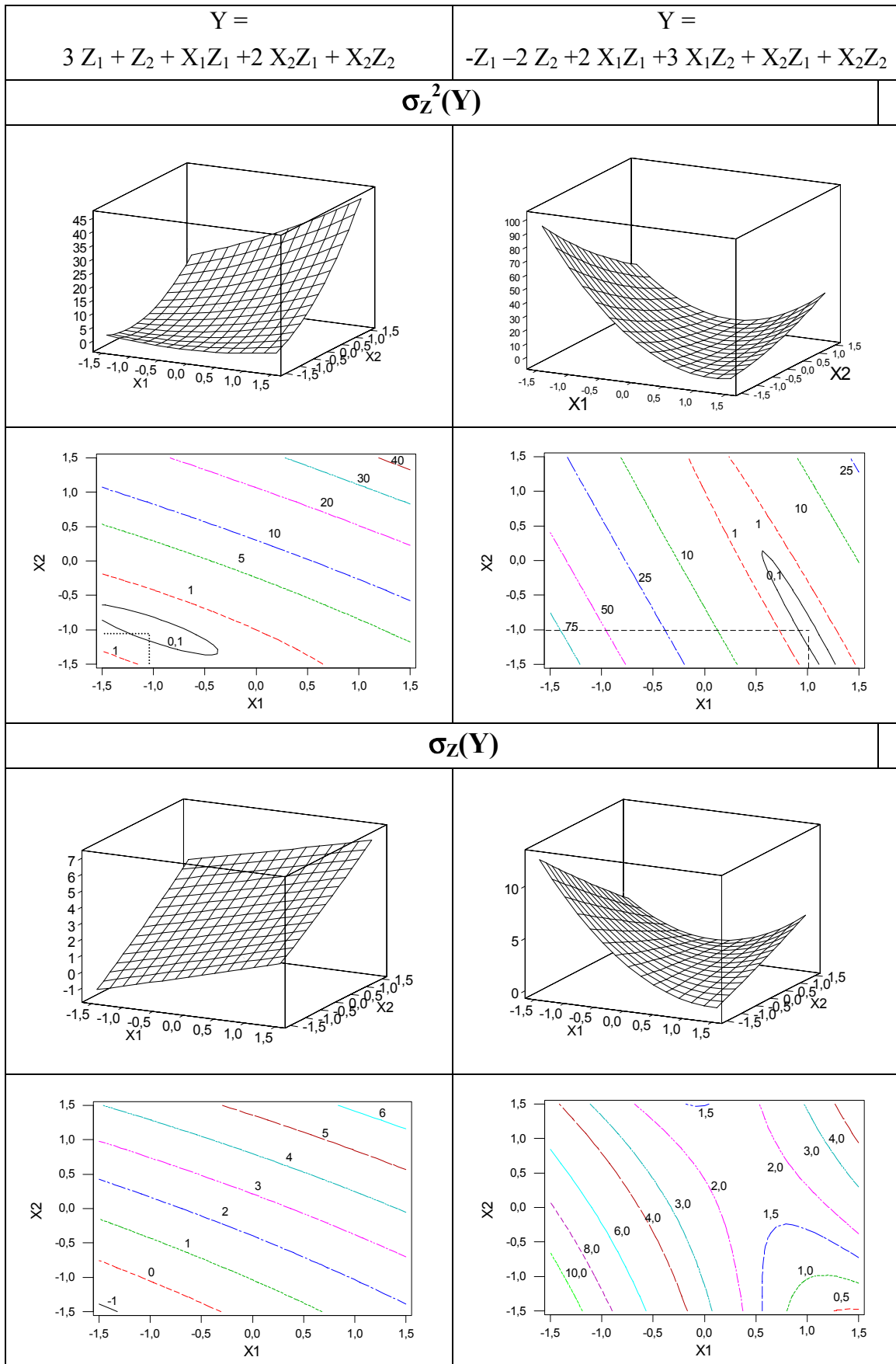


Figura 6.1 Comparación entre $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$ para dos modelos diferentes de Y

6.3 Aproximaciones a la Varianza(Y) y Desv. Típica(Y) partiendo de diseños factoriales a 2 niveles.

Ya vimos en el capítulo anterior que cuando se experimenta con diseños factoriales a 2 niveles, los modelos que pueden ser estimados a partir de estos diseños no aproximan bien las superficies $\sigma_z^2(Y)$ y $\sigma_z(Y)$ cuando éstas son claramente cuadráticas.

En este capítulo volvemos a reflejar este hecho a partir de 6 ejemplos. Para ello hemos tomado 6 superficies para Y que reflejan diferentes situaciones tratadas previamente en este capítulo. A partir del modelo teórico de partida se han generado datos (sin introducir error experimental) según una matriz producto compuesta por un “diseño central compuesto” en los factores de control y un diseño factorial a 2 niveles en los factores ruido. A partir de los datos se han estimado los modelos para las superficies $\sigma_z^2(Y)$ y $\sigma_z(Y)$ utilizando polinomios de segundo orden completos: A las superficies obtenidas las hemos denominado “Q”.

También, en un intento de reproducir las situaciones más frecuentes en la práctica, se han estimado modelos de primer orden con términos cruzados utilizando únicamente la parte factorial del diseño central compuesto de la matriz producto: A las superficies obtenidas por este método las hemos denominado “L”.

La Tabla 6.1 contiene los modelos seleccionados para la respuesta Y , las condiciones que cumplen los coeficientes de estos modelos, la localización de la representación gráfica de las superficies $\sigma_z^2(Y)$ y $\sigma_z(Y)$ asociadas a estos modelos, así como un resumen de las características principales de éstas superficies.

La Tabla 6.2 contiene los resultados de las estimaciones de los modelos para las superficies “Q” y “L”, es decir, para las aproximaciones a $\sigma_z^2(Y)$ y $\sigma_z(Y)$ por medio de polinomios completos de segundo orden o por polinomios sin términos cuadráticos puros.

En los dos primeros ejemplos la zona de mínima varianza pasa por el centro, por lo que $\sigma_z^2(Y)$ es claramente cuadrática dentro de la región experimental, y no son válidas las aproximaciones a $\sigma_z(Y)$ por polinomios de primer orden, “L”. Si se estimarán los modelos “L” a partir de diseños factoriales a 2 niveles, sólo surgiría significativo el efecto de la interacción “ β_{12} ” y no los efectos principales. La interpretación geométrica de la superficie sería inadecuada ya que se tomaría la zona de mínima varianza como una dirección de reducción de la variabilidad, induciendo al experimentador de forma equivocada a alejarse de la región experimental.

El tercer ejemplo corresponde a un modelo en Y cuyos coeficientes cumplen las condiciones (6.21) y por lo tanto $\sigma_z(Y)$ admite una representación exacta por un plano en la región del experimento factorial. En el siguiente ejemplo la región de mínima varianza no pasa por la región experimental pero al no cumplirse totalmente las condiciones (6.21) la aproximación a $\sigma_z(Y)$ por un plano es válida pero no exacta (ver

Tabla 6.2). En ambos casos el estudio del comportamiento de la variabilidad a partir de los modelos “L” es válido dentro de la región experimental pero no se interpreta adecuadamente lo que ocurre fuera de ella ya que se asume una reducción continua de la variabilidad en determinada dirección y esto no es así. (En la práctica siguiendo esta dirección fuera de la región experimental se obtendrían valores negativos de variabilidad, signo inequívoco de que la aproximación no es válida en esa zona).

En los dos últimos ejemplos no se cumplen las condiciones para que $\sigma_Z(Y)$ se aproxime exactamente por un plano y el único punto de mínima varianza está en los dos casos en el borde de la región experimental. En uno de los casos la aproximación a $\sigma_Z(Y)$ por planos es muy aceptable pero no en el otro. Podemos ver en el *Anexo 1* el estudio canónico de ambas superficies.

Tabla 6.1 Descripción de los ejemplos estudiados.

Modelo para Y	Parámetros	Condiciones	Localización	Descripción $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$ en el cubo
$Y = X_1Z_1 + X_1Z_2 + X_2Z_1 + X_2Z_2$	$\theta_1 = 0 = \theta_2$ $\delta_{11} = \delta_{12} = 1$ $\delta_{21} = \delta_{22} = 1$	$\delta_{11}/\delta_{12} = \delta_{21}/\delta_{22}$ $ \theta_1 < \delta_{11} + \delta_{21} $ $ \theta_2 < \delta_{12} + \delta_{22} $	Figura 6.2:	Superficies Cuadráticas con zona de mínima varianza una <u>recta</u> pasando por (0,0)
$Y = X_1Z_1 + 3 X_1Z_2 + 2 X_2Z_1 + 4 X_2Z_2$	$\theta_1 = 0 = \theta_2$ $\delta_{11} = 1; \delta_{12} = 3$ $\delta_{21} = 2; \delta_{22} = 4$	$\delta_{11}/\delta_{12} \neq \delta_{21}/\delta_{22}$ $ \theta_1 < \delta_{11} + \delta_{21} $ $ \theta_2 < \delta_{12} + \delta_{22} $	Figura 6.3	Superficies Cuadráticas con zona de mínima varianza el <u>punto</u> (0,0)
$Y = 6 Z_1 - 3 Z_2 - 2 X_1Z_1 + X_1Z_2 + 4 X_2Z_1 - 2 X_2Z_2$	$\theta_1 = 6; \theta_2 = -3$ $\delta_{11} = -2; \delta_{12} = 1$ $\delta_{21} = 4; \delta_{22} = -2$	$\theta_1/\theta_2 = \delta_{11}/\delta_{12} = \delta_{21}/\delta_{22}$ $ \theta_1 = \delta_{11} + \delta_{21} $ $ \theta_2 = \delta_{12} + \delta_{22} $	Figura 6.4	$\sigma_Z^2(Y)$ es cuadrática con una <u>recta</u> de mínima varianza por (1, -1). $\sigma_Z(Y)$ es un plano
$Y = 4 Z_1 + 4 Z_2 + X_1Z_1 + 2 X_1Z_2 + X_2Z_1 + 2 X_2Z_2$	$\theta_1 = 4; \theta_2 = 4$ $\delta_{11} = 1; \delta_{12} = 2$ $\delta_{21} = 1; \delta_{22} = 2$	$\theta_1/\theta_2 \neq \delta_{11}/\delta_{12} = \delta_{21}/\delta_{22}$ $ \theta_1 = \delta_{11} + \delta_{21} $ $ \theta_2 = \delta_{12} + \delta_{22} $	Figura 6.5	$\sigma_Z^2(Y)$ es cuadrática con zona de mínima varianza una <u>recta</u> que no pasa la región $X_1 = \pm 1, X_2 = \pm 1$ $\sigma_Z(Y)$ se puede “aproximar” por un plano
$Y = 3 Z_1 + Z_2 + X_1Z_1 + 2 X_2Z_1 + X_2Z_2$	$\theta_1 = 3; \theta_2 = 1$ $\delta_{11} = 1; \delta_{12} = 0$ $\delta_{21} = 2; \delta_{22} = 1$	$\delta_{11}/\delta_{12} \neq \delta_{21}/\delta_{22}$ $ \theta_1 = \delta_{11} + \delta_{21} $ $ \theta_2 = \delta_{12} + \delta_{22} $	Figura 6.6	$\sigma_Z^2(Y)$ es cuadrática con zona de mínima varianza el <u>punto</u> (-1,-1) $\sigma_Z(Y)$ se puede “aproximar” por un plano
$Y = - Z_1 - 2 Z_2 + 2 X_1Z_1 + 3 X_1Z_2 + X_2Z_1 + X_2Z_2$	$\theta_1 = -1; \theta_2 = -2$ $\delta_{11} = 2; \delta_{12} = 3$ $\delta_{21} = 1; \delta_{22} = 1$	$\delta_{11}/\delta_{12} \neq \delta_{21}/\delta_{22}$ $ \theta_1 < \delta_{11} + \delta_{21} $ $ \theta_2 < \delta_{12} + \delta_{22} $ $\theta_1 = \delta_{11} - \delta_{21}$ $\theta_2 = \delta_{12} - \delta_{22}$	Figura 6.7	$\sigma_Z^2(Y)$ es cuadrática con zona de mínima varianza el <u>punto</u> (1,-1) $\sigma_Z(Y)$ no se “aproxima” bien por un plano

Tabla 6.2 Estimación de $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$ a partir de polinomios de segundo orden "Q" y "L". (Para "Q", entre paréntesis aparecen los coeficientes estandarizados)

$Y = X_1Z_1 + X_1Z_2 + X_2Z_1 + X_2Z_2$		β_0	β_1	β_2	β_{12}	β_{11}	β_{22}
σ_Z^2		0	0	0	4	2	2
	Q	(0)	(0)	(0)	(8)	(3.4)	(3.4)
	L	4	0	0	4		
σ_Z ($R^2 = 93.9\%$; $R^2\text{-aj} = 83.8\%$)		0	0	0	$\sqrt{2}$	0.85	0.85
	Q	(0)	(0)	(0)	(2.83)	(1.45)	(1.45)
	L	$\sqrt{2}$	0	0	$\sqrt{2}$		

$Y = X_1Z_1 + 3X_1Z_2 + 2X_2Z_1 + 4X_2Z_2$		β_0	β_1	β_2	β_{12}	β_{11}	β_{22}
σ_Z^2		0	0	0	28	10	20
	Q	(0)	(0)	(0)	(56)	(17)	(34)
	L	30	0	0	28		
σ_Z ($R^2 = 97.6\%$; $R^2\text{-aj} = 93.6\%$)		0	0	0	3.10	2.02	2.94
	Q	(0)	(0)	(0)	(6.20)	(3.43)	(5)
	L	4.515	0	0	3.101		

$Y = 6Z_1 - 3Z_2 - 2X_1Z_1 + X_1Z_2 + 4X_2Z_1 - 2X_2Z_2$		β_0	β_1	β_2	β_{12}	β_{11}	β_{22}
σ_Z^2		45	-30	60	-20	5	20
	Q	(45)	(-84.9)	(169.8)	(-40)	(8.5)	(34)
	L	70	-30	60	-20		
σ_Z ($R^2 = 100\%$; $R^2\text{-aj} = 100\%$)		6.71	-2.24	4.47	0	0	0
	Q	(6.71)	(-6.33)	(12.66)	(0)	(0)	(0)
	L	6.708	-2.236	4.472	0		

$Y = 4Z_1 + 4Z_2 + X_1Z_1 + 2X_1Z_2 + X_2Z_1 + 2X_2Z_2$		β_0	β_1	β_2	β_{12}	β_{11}	β_{22}
σ_Z^2		32	24	24	10	5	5
	Q	(32)	(67.92)	(67.92)	(20)	(8.5)	(8.5)
	L	42	24	24	10		
σ_Z ($R^2 = 100\%$; $R^2\text{-aj} = 99.9\%$)		5.66	2.04	2.04	0.17	0.07	0.07
	Q	(5.66)	(5.77)	(5.77)	(0.34)	(0.12)	(0.12)
	L	5.828	2	2	0.172		

$Y = 3Z_1 + Z_2 + X_1Z_1 + 2X_2Z_1 + X_2Z_2$		β_0	β_1	β_2	β_{12}	β_{11}	β_{22}
σ_Z^2		10	6	14	4	1	5
	Q	(10)	(16.98)	(39.62)	(8)	(1.7)	(8.5)
	L	16	6	14	4		
σ_Z ($R^2 = 99.9\%$; $R^2\text{-aj} = 99.7\%$)		3.16	0.95	2.14	-0.04	-0.01	0.09
	Q	(3.16)	(2.69)	(6.06)	(-0.08)	(-0.01)	(0.15)
	L	3.20	0.96	2.20	-0.04		

$Y = -Z_1 - 2Z_2 + 2X_1Z_1 + 3X_1Z_2 + X_2Z_1 + X_2Z_2$		β_0	β_1	β_2	β_{12}	β_{11}	β_{22}
σ_Z^2		5	-16	-6	10	13	2
	Q	(5)	(-45.28)	(-16.98)	(20)	(22.1)	(3.4)
	L	20	-16	-6	10		
σ_Z ($R^2 = 92.3\%$; $R^2\text{-aj} = 79.6\%$)		2.24	-1.89	-0.60	1.392	1.40	0.07
	Q	(2.24)	(-5.35)	(-1.70)	(2.78)	(2.38)	(0.12)
	L	3.628	-2.214	0.022	1.392		

Conclusiones

Cuando la zona de mínima varianza está fuera de la región experimental, los modelos “L” se aproximan a la superficie $\sigma_Z(Y)$ mejor que a la superficie $\sigma_Z^2(Y)$, es decir, la transformación “√” todavía “aplana” más la superficie.

Las conclusiones las hacemos para $\sigma_Z(Y)$ pero son igual de válidas para $\sigma_Z^2(Y)$.

Si no se dan las condiciones adecuadas para aproximar $\sigma_Z(Y)$ por modelos de primer orden, los modelos “L” que se obtienen a partir de diseños factoriales a dos niveles:

- Pueden tener como significativo el término de la interacción “ β_{12} ”;
- No aproximan bien la superficie teórica;
- Sobrestiman la variabilidad en la región experimental y la subestiman fuera;
- La región de mínima varianza que está muy próxima no es identificada. Además inducen al experimentador a alejarse de la región experimental.

Cuando las aproximaciones por modelos “L” son adecuadas, estos modelos se pueden utilizar para obtener la variabilidad en la región experimental. Sin embargo, no detectarán la posible cercanía de la zona de mínima varianza.

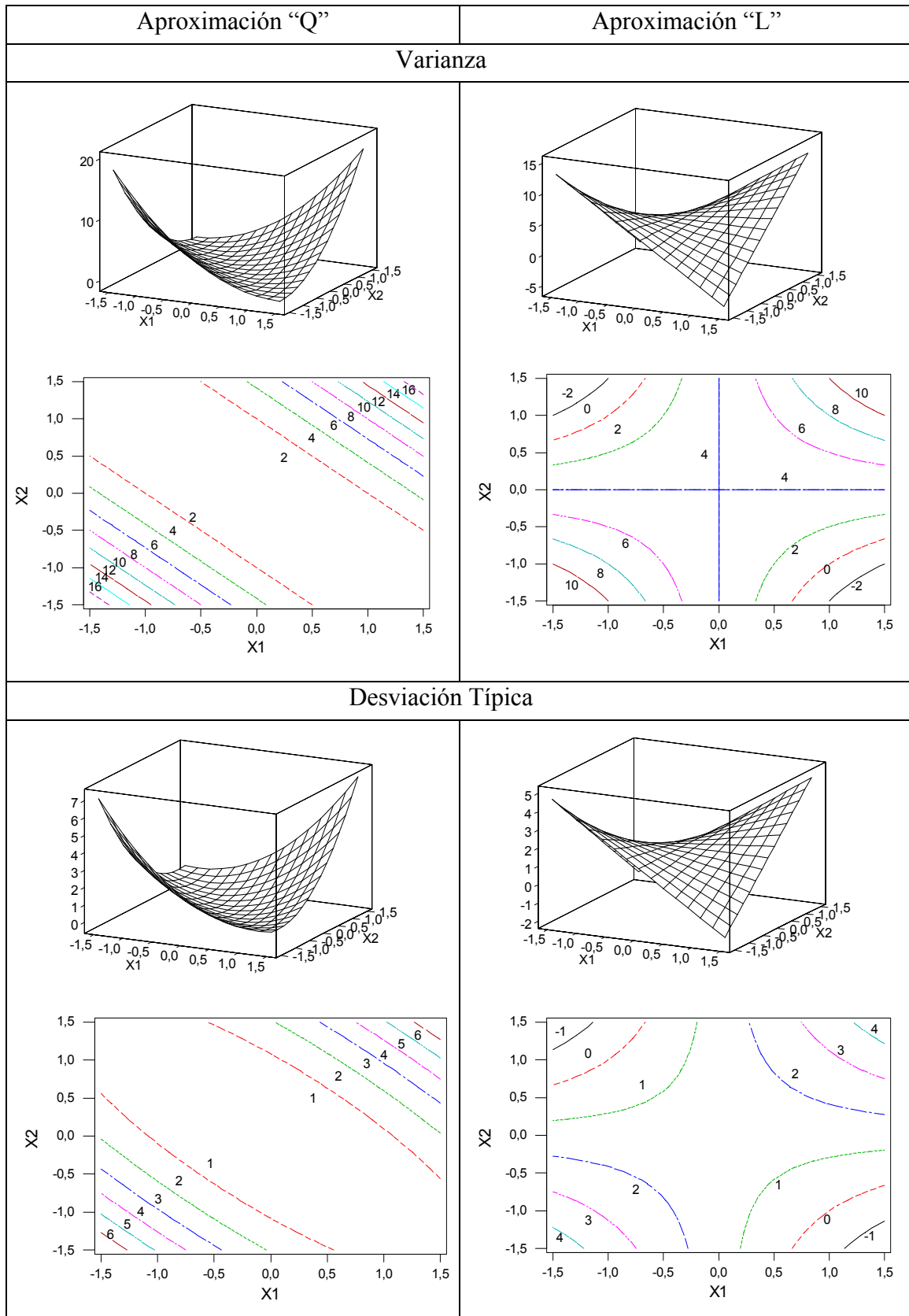


Figura 6.2 Representación gráfica de $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$

$$Y = X_1Z_1 + X_1Z_2 + X_2Z_1 + X_2Z_2$$

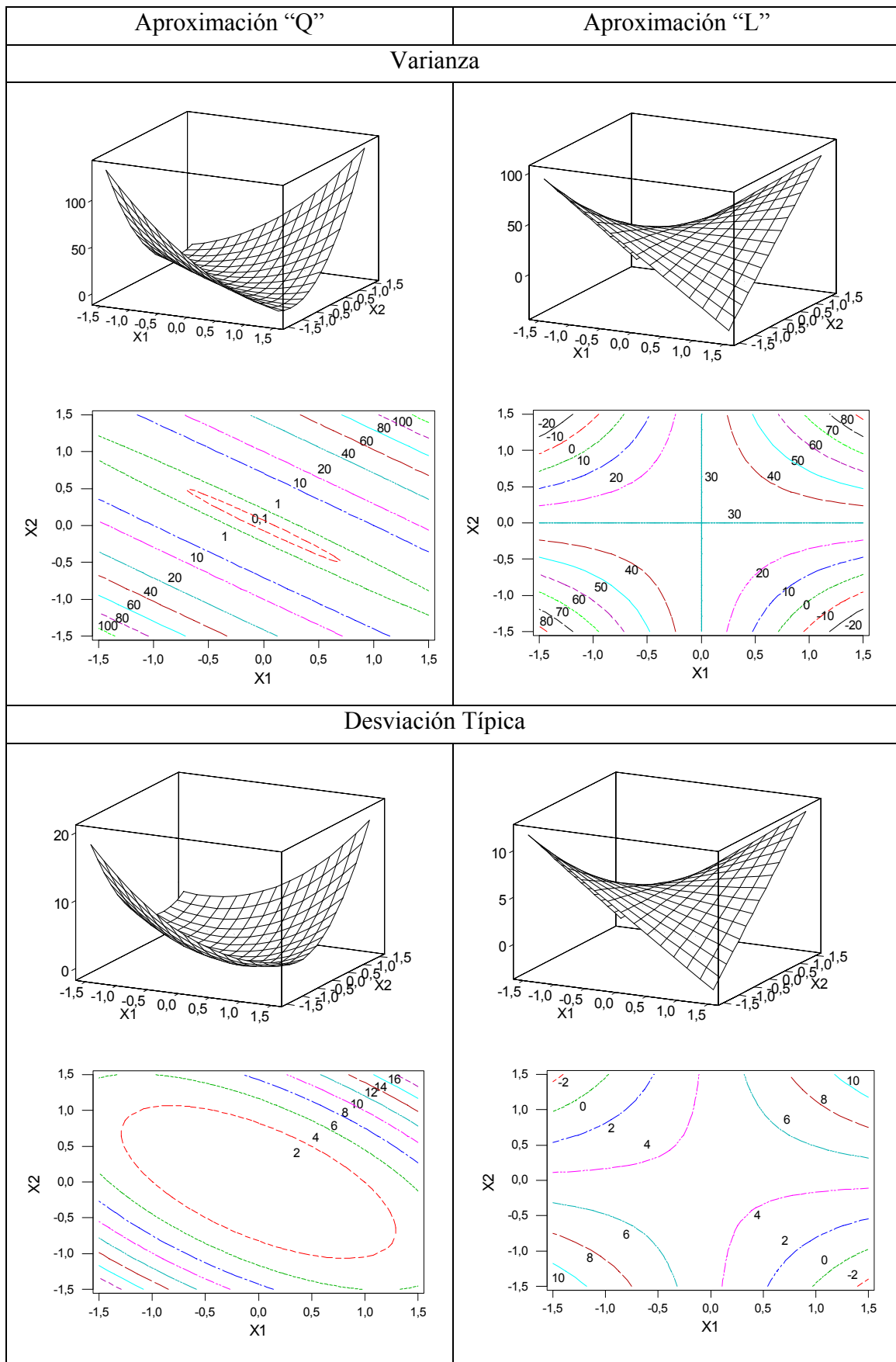


Figura 6.3 Representación gráfica de $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$

$$Y = X_1 Z_1 + 3 X_1 Z_2 + 2 X_2 Z_1 + 4 X_2 Z_2$$

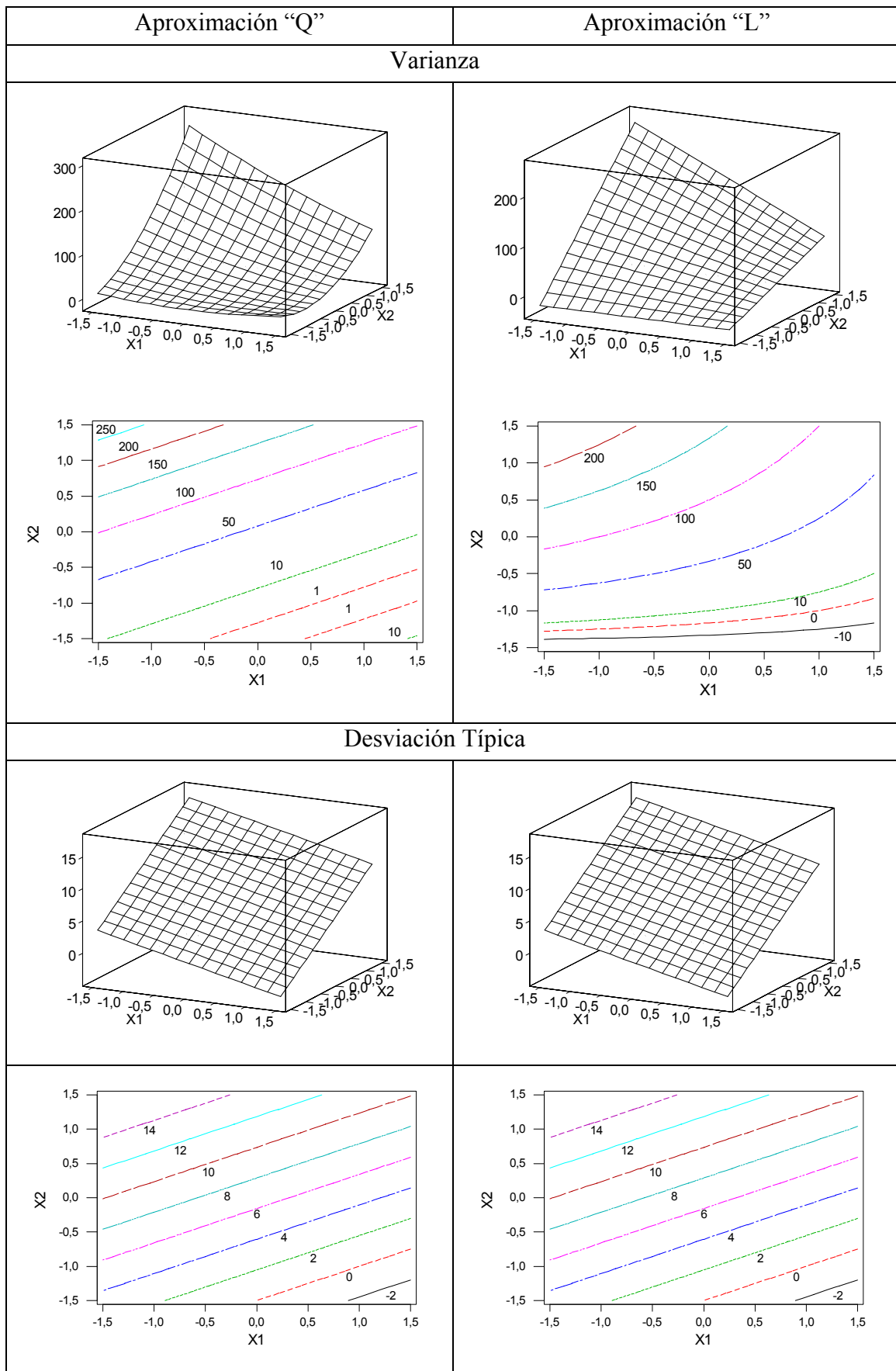


Figura 6.4 Representación gráfica de $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$

$$Y = 6 Z_1 - 3 Z_2 - 2 X_1 Z_1 + X_1 Z_2 + 4 X_2 Z_1 - 2 X_2 Z_2$$

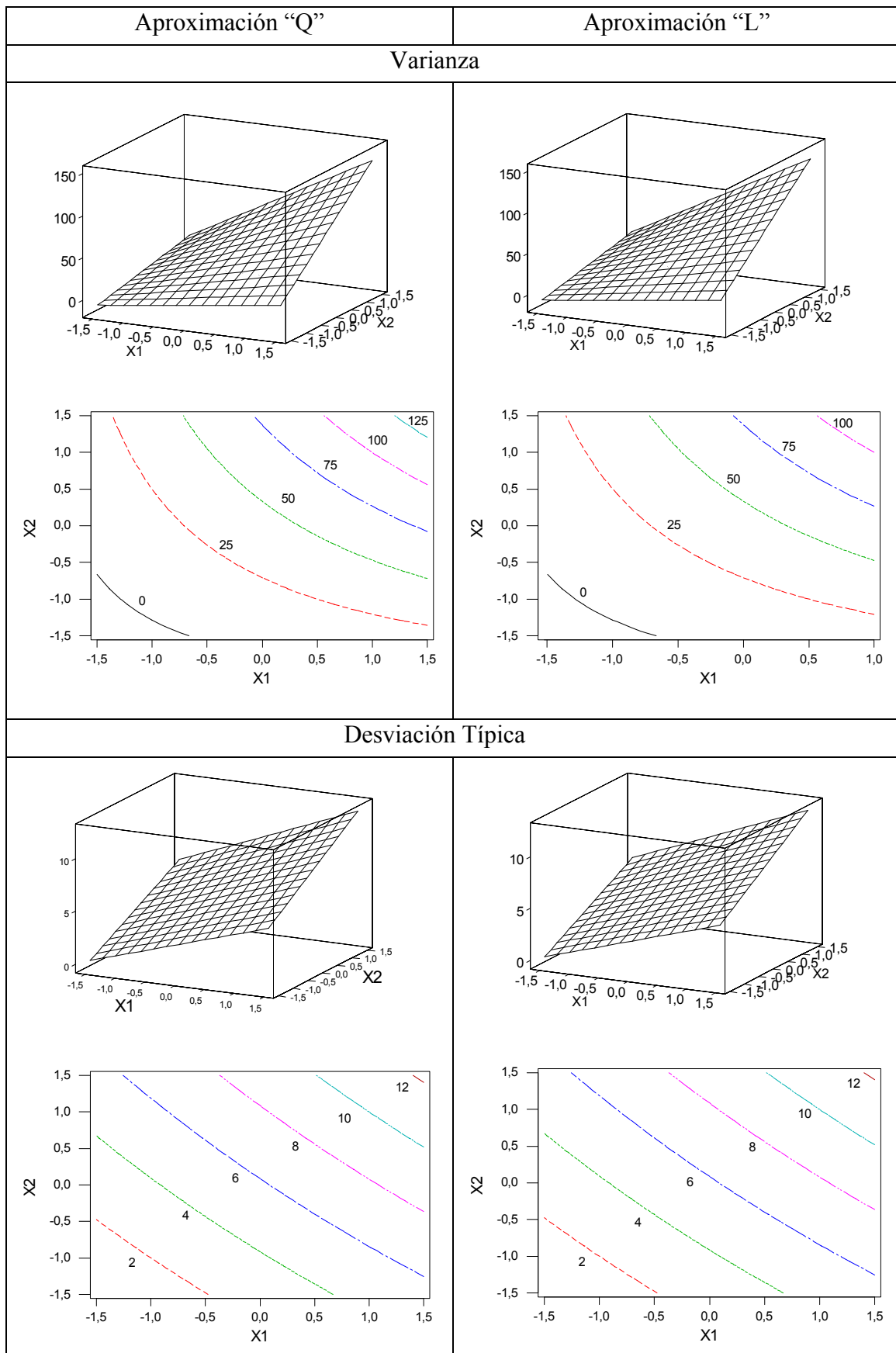


Figura 6.5 Representación gráfica de $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$

$$Y = 4 Z_1 + 4 Z_2 + X_1 Z_1 + 2 X_1 Z_2 + X_2 Z_1 + 2 X_2 Z_2$$

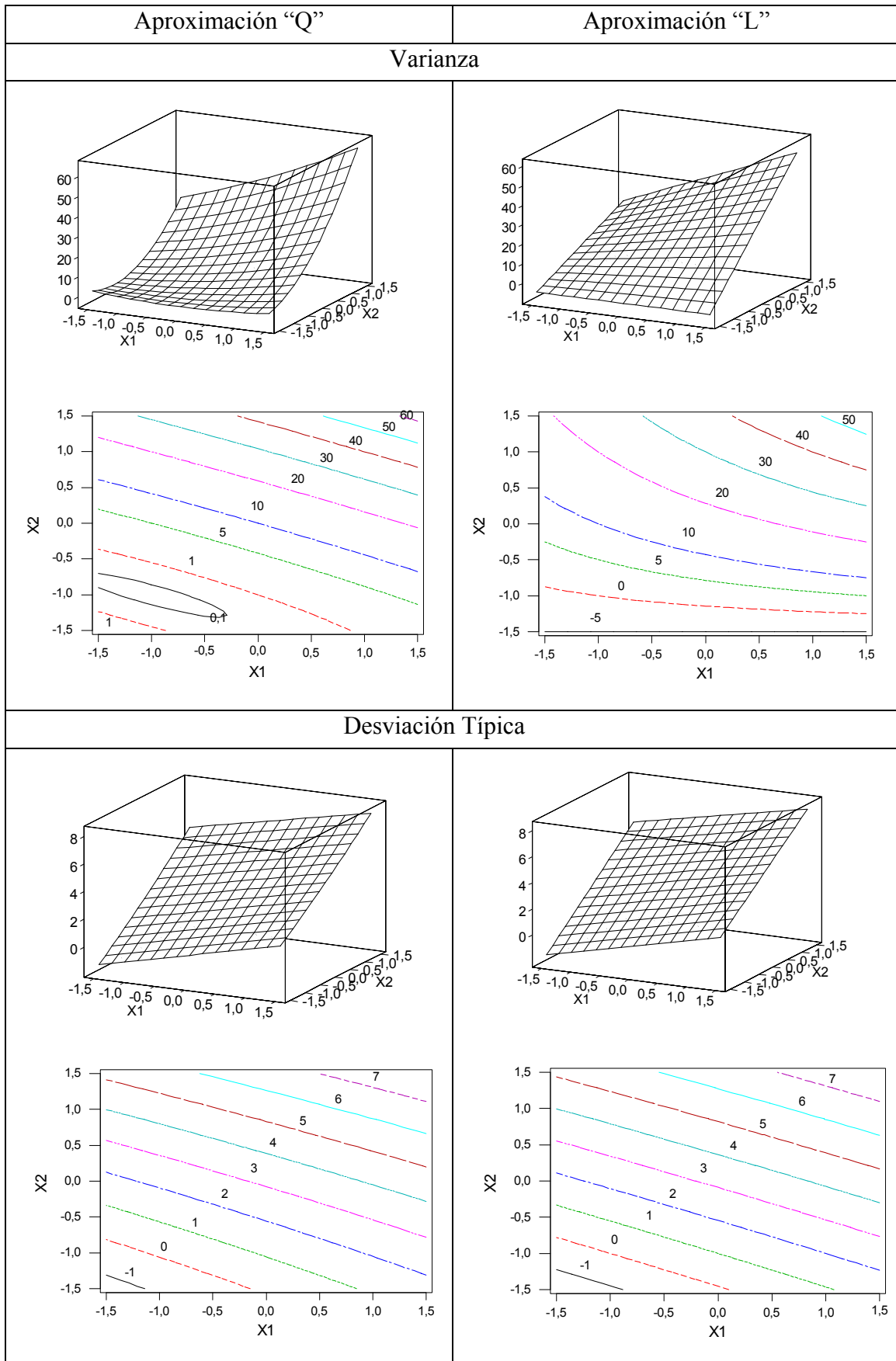


Figura 6.6 Representación gráfica de $\sigma_z^2(Y)$ y $\sigma_z(Y)$

$$Y = 3 Z_1 + Z_2 + X_1 Z_1 + 2 X_2 Z_1 + X_2 Z_2$$

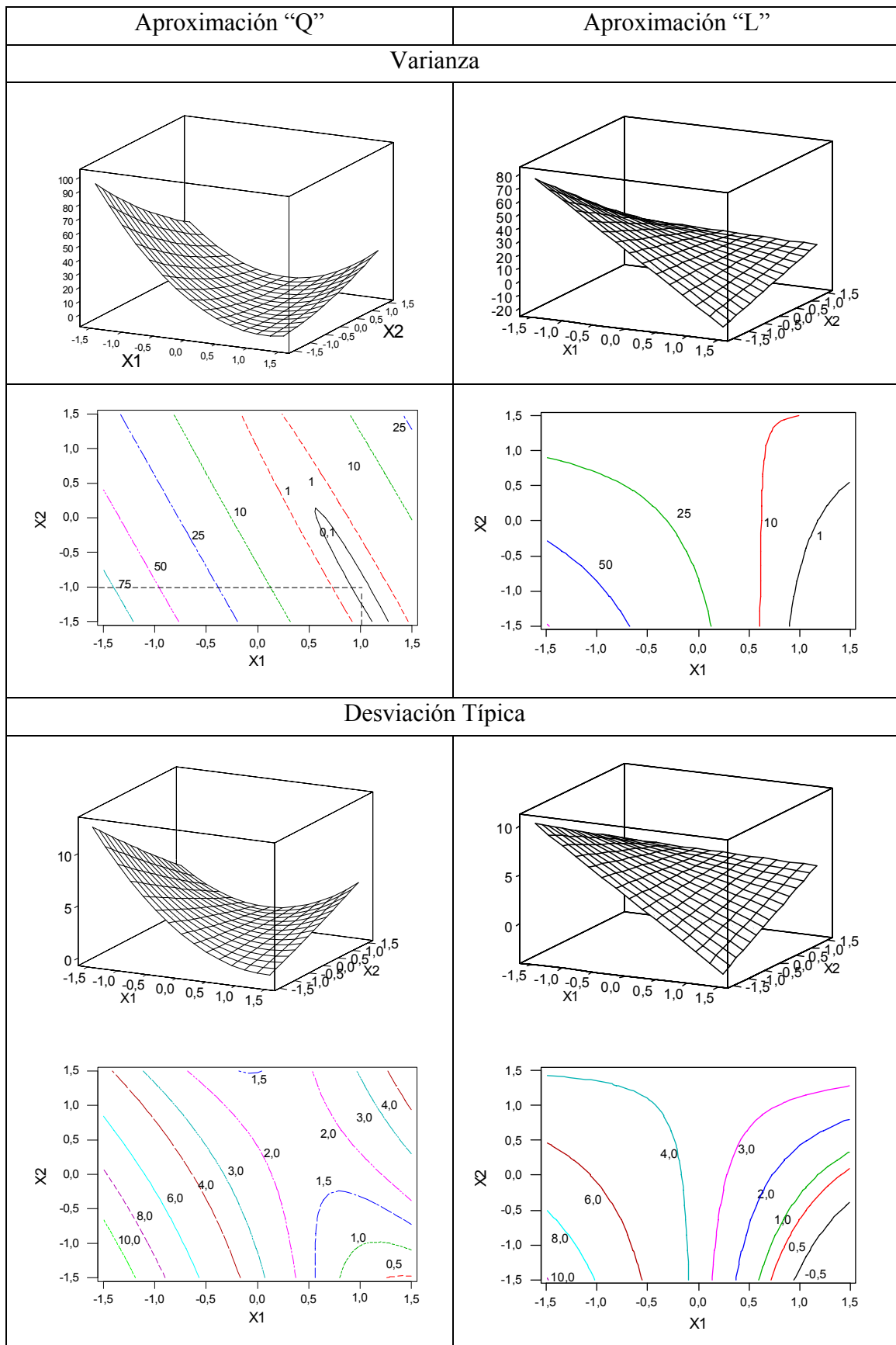


Figura 6.7 Representación gráfica de $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$

$$Y = -Z_1 - 2Z_2 + 2X_1Z_1 + 3X_1Z_2 + X_2Z_1 + X_2Z_2$$

6.4 Comparación entre las 3 expresiones de la Desv. Típica(Y)

En aquellas situaciones donde $\sigma_z^2(Y)$ admite una raíz positiva, es decir, se puede ver como un “plano cuadrático”, $\sigma_z(Y)$ admite una expresión polinómica exacta y, en tal caso, se puede pasar de una a otra superficie simplemente haciendo la raíz cuadrada (o elevando al cuadrado). Sin embargo, cuando no existe raíz positiva para $\sigma_z^2(Y)$, el modelo polinómico obtenido para $\sigma_z(Y)$ resulta ser una aproximación a la superficie y no coincide exactamente con una raíz de $\sigma_z^2(Y)$.

Las aproximaciones a $\sigma_z(Y)$ que se hacen habitualmente se realizan a partir de modelos “L” (partiendo de diseños factoriales a 2 niveles) o modelos “Q” (partiendo de diseños de segundo orden como el diseño central compuesto).

Por lo tanto tenemos 3 formas de estimar el valor de $\sigma_z(Y)$ en un punto (X_1, X_2) :

- A partir de $\sqrt{\sigma_z^2(Y)}$;
- A partir de la aproximación “L”;
- A partir de la aproximación “Q”

Si $\sigma_z^2(Y)$ es localmente un “plano cuadrático”, el valor que se obtiene a partir de $\sigma_z(Y)$, “Q” y “L” coinciden, y si no es así pueden existir diferencias notables entre ellos.

Hemos querido reflejar este hecho seleccionando 3 de los ejemplos tratados anteriormente y plasmando en un mismo gráfico las diferencias existentes. Para ello, partimos de un rango de valores de $(0, r)$ en torno al valor mínimo “0” de $\sigma_z^2(Y)$ y obtenemos la región en (X_1, X_2) asociada a estos valores que contendrá a la zona de mínima varianza. Esta región iría asociada a la función $\sqrt{\sigma_z^2(Y)}$. A continuación tomamos el rango de valores $(0, \sqrt{r})$ y obtenemos las regiones en (X_1, X_2) asociadas a estos valores para las superficies “Q” y ”L”. Los resultados se encuentran en la Figura 6.8.

$$\underline{Y = X_1Z_1 + X_1Z_2 + X_2Z_1 + X_2Z_2}$$

Ya vimos en el apartado anterior que $\sigma_z^2(Y)$ era una superficie cuya zona estacionaria de mínima varianza pasaba por $(0, 0)$ y que la superficie $\sigma_z(Y)$ no admitía una expresión polinómica exacta aunque la aproximación “Q” era bastante acertada; en cuanto a la aproximación “L”, difería substancialmente de la superficie teórica.

Hemos tomado el rango de valores $(0, 2)$ para $\sigma_z^2(Y)$ y se ha obtenido la región en (X_1, X_2) que da lugar a valores comprendidos en este rango: una zona situada entre 2 líneas paralelas simétricas respecto el eje $X_1 = -X_2$ y en la que el punto $(0,0)$ está en el

centro. Tomando el rango $(0, \sqrt{2})$ para los modelos “Q” y “L”, la región seleccionada por “Q” es ligeramente más amplia que la región teórica anterior pero con similar forma. En cambio, la región seleccionada por “L” no contiene parte de la zona central y abarca otras zonas que las otras dos aproximaciones no recogían.

$$Y = -Z_1 - 2Z_2 + 2X_1Z_1 + 3X_1Z_2 + X_2Z_1 + X_2Z_2$$

En este caso la superficie $\sigma_z^2(Y)$ tenía un único punto de mínima varianza, $(1,-1)$, coincidente con un punto del diseño factorial, y $\sigma_z(Y)$ no se aproximaba bien por la superficie “L”, necesitando ampliar el modelo a uno como “Q”. Hemos tomado el rango de valores $(0,10)$ para $\sigma_z^2(Y)$ y la región en (X_1, X_2) asociada a este rango es similar en forma a la del ejemplo anterior pero desplazada. Tomando el rango $(0, \sqrt{10})$ para los modelos “Q” y “L”, la región seleccionada por “Q” es ligeramente más amplia que la región teórica anterior y un poco más curva. Una vez más la región seleccionada por “L” es muy diferente a las 2 anteriores: no contiene una gran región común a las dos regiones anteriores, en cuyo interior está el punto de mínima varianza, y abarca otras zonas que las otras dos aproximaciones no recogían.

$$Y = 3Z_1 + Z_2 + X_1Z_1 + 2X_2Z_1 + X_2Z_2$$

Ahora la superficie $\sigma_z^2(Y)$ también tiene un único punto de mínima varianza en el diseño factorial, $(-1,-1)$, pero en este caso $\sigma_z(Y)$ se aproximaba bien por la superficie “L”. Al tomar el rango de valores $(0, 5)$ para $\sigma_z^2(Y)$ y $(0, \sqrt{5})$ para “Q” y “L”, las 3 regiones asociadas son prácticamente idénticas.

Una vez más hemos mostrado lo diferente que puede llegar a ser el conocimiento adquirido por aproximaciones “L” de la realidad. Creemos que estos ejemplos gráficos dan fe de ello de una manera muy clara.

Por lo tanto insistimos una vez más en la importancia de aproximar las superficies asociadas a la variabilidad por polinomios de segundo orden.

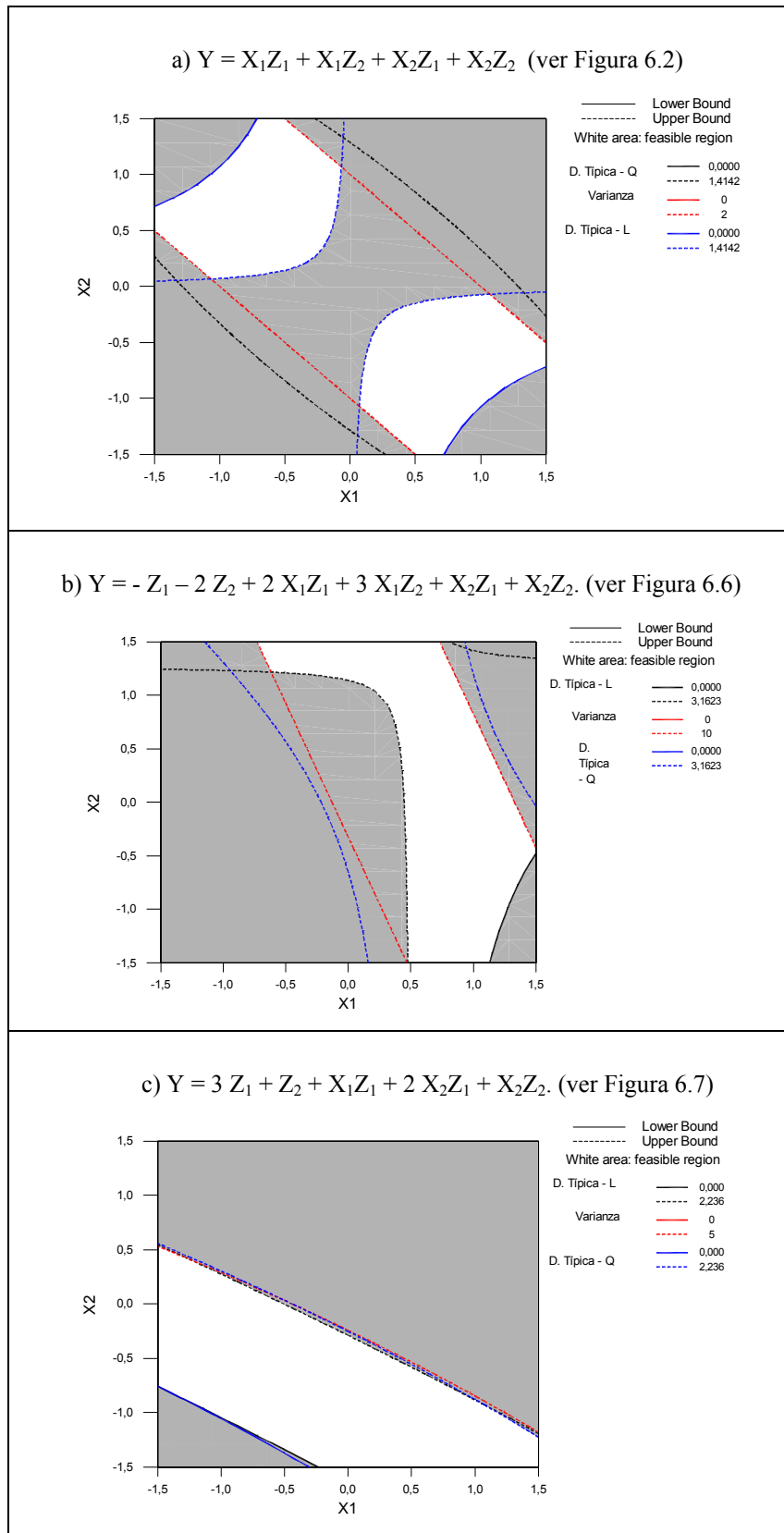


Figura 6.8 Representación gráfica de los contornos comunes a las superficies: $\sqrt{\sigma_Z^2}$ teórica y las aproximaciones por medio de “Q” y “L”

6.5 Conclusiones

Suponiendo que la característica a estudio Y puede expresarse como un polinomio de primer orden con a lo sumo términos cruzados, implicando a 2 factores ruido, Z_1 y Z_2 , y sus interacciones con “k” factores de control, X_i , hemos estudiado la superficie asociada a la variabilidad transmitida por estos factores ruido a la respuesta a través de las métricas $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$. Sin pérdida de generalidad el estudio se ha realizado para $k = 2$ factores de control.

Del estudio llevado a cabo se han obtenido las siguientes conclusiones:

- Las superficies $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$ son en general más complejas en términos de X_1 y X_2 que la superficie de partida Y . La superficie $\sigma_Z^2(Y)$ admite una representación exacta por un polinomio de segundo orden en todo el dominio (X_1, X_2) . La superficie $\sigma_Z(Y)$ admite en ocasiones ser representada localmente por polinomios de primer grado de forma exacta aunque es muy probable que se tenga que recurrir a polinomios de segundo orden para aproximarla;
- En particular si $\theta_1 = \theta_2 = 0$, la zona de mínima varianza contiene al punto $(0, 0)$ y en este caso $\sigma_Z^2(Y)$ y $\sigma_Z(Y)$ se aproximan por polinomios de segundo orden sin términos de primer orden, es decir, $\beta_1 = \beta_2 = 0$.
- Si se toma la región en (X_1, X_2) tal que $|X_i| \leq 1$, la superficie $\sigma_Z(Y)$ puede ser representada exactamente por un plano siempre y cuando se verifiquen una serie de condiciones sobre los coeficientes del modelo en Y ; en tal situación, al analizar $\sigma_Z(Y)$ sólo aparecen como significativos los efectos β_1 y β_2 . Las condiciones son:

$$\frac{\delta_{11}}{\delta_{12}} = \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

$$|\theta_2| \geq |\delta_{12}| + |\delta_{22}| \quad y \quad |\theta_1| \geq |\delta_{11}| + |\delta_{21}|$$

(Por lo tanto es más difícil que $\sigma_Z(Y)$ sea plana trabajando con un factor ruido que trabajando con dos.)

- Existen otros escenarios donde la superficie $\sigma_Z(Y)$ puede ser aproximada por un plano. Una condición necesaria aunque no suficiente es que la zona de mínima varianza de $\sigma_Z^2(Y)$ no caiga en el interior de la región a estudio aunque aun así es posible que se necesite del término β_{12} para aproximar la superficie $\sigma_Z(Y)$;

Cuando se selecciona como región de interés la acotada por las condiciones (X_1, X_2) tales que $|X_i| \leq 1$, y se experimenta con diseños factoriales a 2 niveles para aproximar una superficie $\sigma_Z(Y)$ que no es plana:

- Los modelos “L” pueden contener el término β_{12} ;
- Los modelos “L” pueden ser utilizados para discriminar las condiciones experimentales de acuerdo a la robustez, pero no son recomendables para estimar la variabilidad en otros puntos dentro de la región, ni para ayudar a seleccionar las condiciones experimentales de la siguiente etapa;
- Los modelos “L” superestiman la variabilidad dentro de la región de interés y la subestiman fuera, dependiendo el error de estimación de la curvatura de la superficie en la zona, “a mayor curvatura mayor error”.

Las superficies asociadas a la variabilidad cuando se trabaja con 2 factores ruido también necesitarán polinomios de segundo orden o superior para aproximarlas sobre todo si la zona de mínima varianza está próxima. Por lo tanto si la aproximación a estas superficies se va a realizar a partir de métricas resumen se necesitará experimentar con diseños adecuados.

Anexo 1: Estudio canónico de dos superficies

Sea Y una característica de calidad que se puede expresar en función de los factores X_i como un polinomio de segundo orden. De forma matricial lo expresamos como

$$Y = \beta_0 + X' \beta + X' B X \quad (6.22)$$

donde

$$\beta_0 = E(Y / X_i = 0); \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_k \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_k \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \frac{1}{2}\beta_{12} & \dots & \frac{1}{2}\beta_{1k} \\ \frac{1}{2}\beta_{12} & \beta_{22} & \dots & \frac{1}{2}\beta_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}\beta_{1k} & \frac{1}{2}\beta_{2k} & \dots & \beta_{kk} \end{bmatrix}$$

B es la matriz asociada a los términos de segundo orden. Llamamos m_1, m_2, \dots, m_k y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ a los vectores propios normalizados y los valores propios de B respectivamente. Si M es la matriz cuyas columnas coinciden con estos vectores m_i tenemos,

$$Bm_i = m_i \lambda_i \quad \text{con } m_i' m_i = 1; \quad M' M = I$$

$$BM = M\Lambda; \quad M' BM = \Lambda$$

donde M = matriz con columnas los vectores propios de B (normalizados);
 Λ = Matriz diagonal conteniendo los valores propios de B . $\Lambda_{ii} = \lambda_i$

Podemos escribir la ecuación (6.22) de la forma,

$$Y = \beta_0 + (X' M)(M' \beta) + (X' M)M' BM(M' X) \quad (6.23)$$

si hacemos un cambio de coordenadas de tal forma que,

$$X^* = M' X; \quad MX^* = X$$

y llamamos a los nuevos parámetros de la siguiente forma

$$\theta = M' \beta; \quad M\theta = \beta$$

entonces la ecuación en (6.22) puede expresarse de la siguiente forma

$$Y = \beta_0 + X^{*'}\theta + X^{*'}\Lambda X^* \quad (6.24)$$

$$Y = \beta_0 + \theta_1 X_1^* + \theta_2 X_2^* + \dots + \theta_k X_k^* + \lambda_1 X_1^{*2} + \lambda_2 X_2^{*2} + \dots + \lambda_k X_k^{*2}$$

que se denomina forma canónica A (Box y Draper, 1987) y no es más que una expresión de la superficie en función de unos ejes nuevos obtenidos X^* a partir de los antiguos X por medio de una rotación determinada por la matriz M . Esta rotación tiene la propiedad especial que elimina los términos cruzados en el modelo para Y tal y como se puede ver en la ecuación (6.24).

También se puede obtener la forma canónica B consistente en una expresión de Y donde sólo aparecen términos cuadráticos puros. Para ello se ha de hacer una traslación del sistema de coordenadas y tomar como centro de referencia el punto estacionario,

$$X_{is}^* = \frac{-\theta_i}{2\lambda_i}$$

Llegar a expresar Y en su forma canónica B sólo tiene sentido en la práctica cuando el punto estacionario está situado cerca de la zona donde se ha experimentado ya que si no la extrapolación no tiene sentido.

La forma canónica B adquiere la siguiente forma,

$$Y = Y_s + \tilde{X}'\Lambda\tilde{X} = Y_s + \lambda_1 \tilde{X}_1^2 + \lambda_2 \tilde{X}_2^2 + \dots + \lambda_k \tilde{X}_k^2$$

con (6.25)

$$\tilde{X} = X^* - X_s^* = M'X - M'X_s = M'(X - X_s)$$

Ejemplo 1:

Si la respuesta Y se puede expresar en términos de los factores de control y ruido como $Y = 3 Z_1 + Z_2 + X_1 Z_1 + 2 X_2 Z_1 + X_2 Z_2$, la expresión para $\sigma_Z^2(Y)$ es de la forma

$$\sigma_Z^2(Y) = 10 + 6 X_1 + 14 X_2 + 4 X_1 X_2 + X_1^2 + 5 X_2^2$$

Esta superficie tienen un punto de mínima varianza localizado en (-1, -1) y la varianza en este punto es $\sigma_Z^2(Y) = 0$. El punto está en la región de experimentación por lo tanto damos la superficie en forma canónica B.

Si mantenemos la misma notación utilizada anteriormente en la ecuación (6.22), tenemos

$$\hat{\beta}_0 = 0; \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}; \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

y a partir de los vectores propios normalizados de la matriz B y sus valores propios construimos M y Λ ,

$$M = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.92 \\ 0.92 & -0.38 \end{bmatrix}; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 5.83 & 0 \\ 0 & 0.17 \end{bmatrix}$$

Así, podemos expresar $\sigma_Z^2(Y)$ en su forma canónica B mediante

$$\sigma_Z^2(Y) = 5.83 X_1^{*2} + 0.17 X_2^{*2} \tag{6.26}$$

$$X_1^* = 0.38 X_1 + 0.92 X_2 - 1.3; \quad X_2^* = 0.92 X_1 - 0.38 X_2 - 0.54$$

Si representamos la superficie $\sigma_Z^2(Y)$ con los nuevos ejes de coordenadas (ver Figura 6.9) podemos ver los ejes X_i^* coincidiendo con los ejes de simetría de la superficie siendo el eje X_1^* ($X_2^* = 0$), asociado al valor propio $\lambda_1 = 5.83$, la dirección de máxima pendiente. Esta dirección atraviesa la región donde se está experimentando provocando un crecimiento rápido de la superficie similar a la de un plano. (La dirección X_2^* queda fuera de la región experimental y a lo largo de ella la superficie apenas varía).

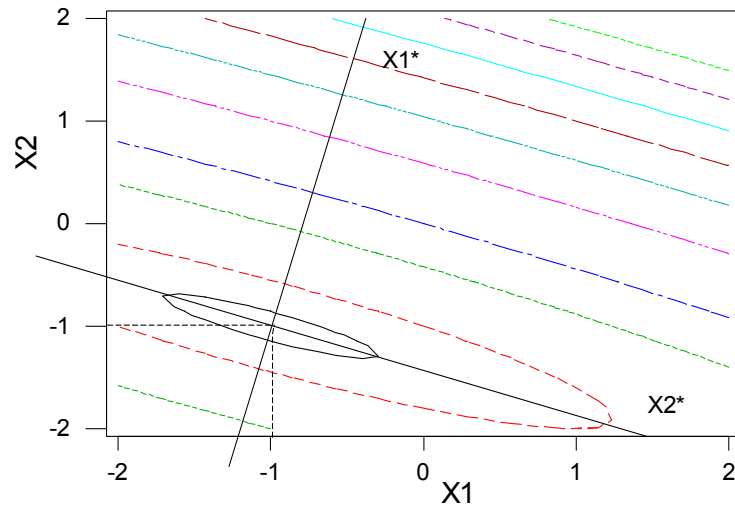


Figura 6.9 Representación gráfica de $\sigma_Z^2(Y)$ con los ejes de simetría

$$Y = 3 Z_1 + Z_2 + X_1 Z_1 + 2 X_2 Z_1 + X_2 Z_2$$

$$\sigma_Z^2(Y) = 10 + 6 X_1 + 14 X_2 + 4 X_1 X_2 + X_1^2 + 5 X_2^2$$

Ejemplo 2:

Si la respuesta Y se puede expresar en términos de los factores de control y ruido como $Y = -Z_1 - 2 Z_2 + 2 X_1 Z_1 + 3 X_1 Z_2 + X_2 Z_1 + X_2 Z_2$, la expresión para $\sigma_Z^2(Y)$ es de la forma,

$$\sigma_Z^2(Y) = 5 - 16 X_1 - 6 X_2 + 10 X_1 X_2 + 13 X_1^2 + 2 X_2^2$$

Esta superficie tienen un punto de mínima varianza localizado en (1, -1) y la varianza en este punto es $\sigma_Z^2(Y) = 0$. El punto está en la región de trabajo por lo tanto damos la superficie en forma canónica B.

Si mantenemos la misma notación utilizada anteriormente en la ecuación (6.22), tenemos

$$\hat{\beta}_0 = 0; \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}; \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} -16 \\ -6 \end{bmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

y a partir de los vectores propios normalizados de la matriz B y sus valores propios construimos M y Λ ,

$$M = \begin{bmatrix} 0.93 & -0.36 \\ 0.36 & 0.93 \end{bmatrix}; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 14.93 & 0 \\ 0 & 0.07 \end{bmatrix}$$

Así, podemos expresar $\sigma_Z^2(Y)$ en su forma canónica B mediante

$$\sigma_Z^2(Y) = 14.93X_1^{*2} + 0.07X_2^{*2} \tag{6.27}$$

$$X_1^* = 0.93X_1 + 0.36X_2 + 0.57; \quad X_2^* = -0.36X_1 + 0.93X_2 - 1.3$$

Si representamos la superficie $\sigma_Z^2(Y)$ con los nuevos ejes de coordenadas (ver Figura 6.9) podemos ver los ejes X_i^* coincidiendo con los ejes de simetría de la superficie siendo el eje X_1^* ($X_2^* = 0$), asociado al valor propio $\lambda_1 = 14.93$, la dirección de máxima pendiente. Esta vez es la dirección X_2^* la que corta la región experimental. Esta dirección tiene de valor propio asociado un valor muy cercano a 0 por lo que podemos hablar de una “teja” atravesando la región.

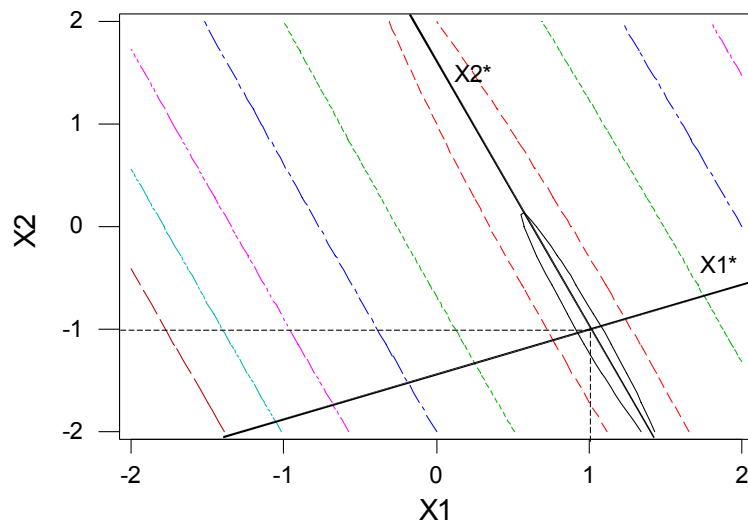


Figura 6.10 Representación gráfica de $\sigma_Z^2(Y)$ con los ejes de simetría

$$Y = -Z_1 - 2Z_2 + 2X_1Z_1 + 3X_1Z_2 + X_2Z_1 + X_2Z_2$$

$$\sigma_Z^2(Y) = 10 + 6X_1 + 14X_2 + 4X_1X_2 + X_1^2 + 5X_2^2$$

Comparación entre las dos superficies

Podemos ver que aunque las dos superficies teóricas tienen un único punto de mínima varianza y este coincide con un punto de las condiciones experimentales, la naturaleza de la superficie es muy diferente dentro de la región experimental. En el primer caso se podría pensar en aproximaciones de primer orden a la superficies pero no así en el segundo.

Por lo tanto, para que las aproximaciones a superficies de variabilidad por polinomios de primer orden sean válidas no es suficiente con que la zona de mínima varianza este fuera de la región experimental. Los ejes de la superficie han de tener una disposición especial.