

CRITERIOS NUMERICOS EN LA RESOLUCION
DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR
EN FENOMENOS DE CONVECCION

Tesis Doctoral presentada en la
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES DE TERRASSA
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CATALUNYA

por

Carlos David PEREZ SEGARRA

para la obtención del
Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Terrassa, Noviembre de 1987

a Fina Opi

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi gratitud:

A mi director, el Profesor Assensi Oliva, inspirador y motor de esta tesis, por el periodo más formativo, motivador e interesante de mi vida académica. Agradecerle también su constante apoyo y confianza durante todo el proceso de elaboración de la tesis.

Al Profesor Joan Fernandez, por su ayuda en multitud de problemas de tipo matemático que me he ido encontrando a lo largo de esta tesis.

Al Profesor Jordi Pujol, especialmente por su colaboración en la confección del Apéndice A del Capítulo 2.

Al Director del Departamento de Termoenergética, el Profesor Ramón Carreras, y a los demás compañeros del Departamento, por el soporte y ayuda prestados.

A los compañeros del Centro de Cálculo, Taller Mecánico, Servicio de Mecanografiado, Oficina Técnica y Centro de Documentación de la ETSIIT por su colaboración y también por su paciencia.

A todas aquellas personas que directa o indirectamente me han ayudado a avanzar en esta etapa de mi vida.

A mi mujer, padres y hermanos que me hacéis sentir bien conmigo mismo.

Esta tesis ha sido desarrollada en el ámbito del proyecto de investigación: "Modelización de fenómenos de transferencia de calor y de masa", subvencionado por la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica (ref. no. 1937).

I N D I C E

RESUMEN GENERAL DE LA TESIS

CAP. 1: INTRODUCCION

Preámbulo	1
Ecuaciones características	1
Problemática de resolución	2
Planteamiento y objetivos	6
Nomenclatura	9
Referencias bibliográficas	10

CAP. 2: RESOLUCION NUMERICA DE FLUJOS POTENCIALES SUBSONICOS COMPRESIBLES

Resumen	13
2.1 Introducción: Ecuaciones características. Mallas adaptables a los contornos	13
2.2 RESOLUCION NUMERICA DE FLUJOS POTENCIALES SUBSONICOS COMPRESIBLES MEDIANTE LA UTILIZACION DE LA FUNCION DE CORRIENTE	19
2.2.1 Integración numérica en base a coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos	20
2.2.1a Ecuaciones de discretización para los puntos interiores del dominio	21
2.2.1b Ecuaciones de discretización para los puntos del contorno	29
2.2.1c Resolución del sistema de ecuaciones discretas. Análisis de la convergencia	33
2.2.1d Determinación de la velocidad. Componentes covariantes y contravariantes	34
2.2.2 Integración numérica en base a coordenadas rectangulares	38
2.3 RESOLUCION NUMERICA DE FLUJOS POTENCIALES SUBSONICOS COMPRESIBLES MEDIANTE LA UTILIZACION DEL POTENCIAL DE VELOCIDAD	42
2.3.1 Integración numérica en base a coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos	43
2.3.1a Ecuaciones de discretización para los puntos interiores del dominio	43
2.3.1b Ecuaciones de discretización para los puntos del contorno	48
2.3.1c Resolución del sistema de ecuaciones discretas	52
2.3.1d Determinación de la velocidad. Componentes covariantes y contravariantes	52
2.3.2 Integración numérica en base a coordenadas rectangulares	54
2.4 Ejemplos de resolución numérica. Contrastación de resultados	58
2.4.1 Flujo potencial alrededor de un cilindro	58
2.4.2 Flujo potencial a través de una tobera convergente	62
2.4.3 Resultados numéricos	63
2.5 Conclusiones	100
Apéndice A: Coordenadas curvilíneas	102
Nomenclatura	109
Referencias bibliográficas	111

CAP.3: RESOLUCION DE LAS CAPAS LIMITES HIDRODINAMICAS Y TERMICAS

	Resumen	113
3.1	Introducción	113
3.2	Ecuaciones gobernantes	114
	Evaluación de los coeficientes de transporte turbulento	116
	Transición de la capa límite laminar a la turbulenta	118
3.3	Resolución numérica de las ecuaciones de la capa límite	119
3.4	Ejemplos de resolución numérica	122
3.5	Conclusiones	132
	Apéndice A: Ecuaciones discretas de la capa límite	133
	Nomenclatura	134
	Referencias bibliográficas	136

CAP.4: RESOLUCION CONJUNTA DE LA ZONA POTENCIAL Y DE LAS CAPAS LIMITES

	Resumen	138
4.1	Introducción	138
4.2	Flujo a través de una canalización	139
4.3	Resultados numéricos. Contrastación experimental	144
4.4	Conclusiones	161
	Apéndice A: Características generales de la instalación de soplado empleada en la contrastación experimental.	163
	Apéndice B: Propiedades físicas del aire	165
	Nomenclatura	166
	Referencias bibliográficas	168

CAP.5: RESOLUCION DE LA ECUACION DE LA ENERGIA

	Resumen	169
5.1	Introducción	169
5.2	Ecuación gobernante e integración numérica	170
5.3	Ejemplos de resolución numérica. Contrastación de resultados	176
5.4	Conclusiones	184
	Nomenclatura	185
	Referencias bibliográficas	187

	CONCLUSIONES GENERALES Y ACTUACIONES FUTURAS	188
--	--	-----

RESUMEN GENERAL DE LA TESIS

La finalidad de esta tesis es la obtención de las distribuciones de velocidades, presiones y temperaturas en la convección forzada de flujos compresibles en situaciones bidimensionales y de estabilización. Es a partir de estos valores que se determina la fricción y la transferencia de calor entre el fluido y el contorno o canalización.

La tesis consta de cinco capítulos. En el primero, de carácter introductorio, se plantea la problemática de resolución de las ecuaciones que describen el comportamiento del flujo. Se analizan dos niveles de modelización: 1) En base al concepto de capa límite introducido por Prandtl, se divide el dominio por el que circula el flujo en dos zonas: unas delgadas regiones próximas a los contornos sólidos en las que la fricción y la transferencia de calor son factores condicionantes, y el resto del dominio en el que el flujo puede considerarse como no viscoso pudiéndose desprestigiar los efectos de la fricción y de la transferencia de calor; 2) Resolución directa de las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía en todo el dominio.

Los capítulos segundo, tercero y cuarto están dedicados al primer nivel de modelización indicado. En el segundo capítulo se resuelve el flujo potencial compresible en base a la discretización del dominio mediante la generación de sistemas de coordenadas curvilíneas que se adaptan a los contornos; se analizan diferentes criterios de discretización de las ecuaciones, siendo los resultados numéricos obtenidos contrastados entre sí y con los que se derivan del empleo de mallas de discretización rectangulares.

El tercer capítulo trata de la resolución de las capas límites hidrodinámicas y térmicas mediante la integración numérica de las ecuaciones de conservación. Para el análisis de las capas límites turbulentas se ha utilizado los conceptos de viscosidad turbulenta y conductividad térmica turbulenta, empleándose expresiones semiempíricas para la descripción de dichas cantidades turbulentas. Se estudian diversas situaciones contrastándose los resultados numéricos obtenidos con los que se derivan de estudios semiempíricos o de resultados experimentales obtenidos por diferentes autores.

En el cuarto capítulo se efectúa la resolución conjunta de la zona potencial y de las capas límites en el marco de un algoritmo global. A modo ilustrativo se ha realizado el estudio del flujo de aire en una canalización, analizándose aspectos tales como la compresibilidad del flujo y la transferencia de calor entre el fluido y los contornos limitantes. Los resultados que se derivan de la resolución numérica, supuestos los contornos adiabáticos, son contrastados con los obtenidos experimentalmente en una unidad de soplado disponible en el Laboratorio.

En el quinto y último capítulo se aborda el segundo nivel de modelización arriba indicado, únicamente en lo que se refiere a la ecuación de la energía. Así, partiendo de una distribución de velocidades y densidades dada, se realiza la resolución de la ecuación de la energía en base a la generación de un sistema de coordenadas curvilíneas coincidente con las propias líneas de corriente del flujo y con sus ortogonales. La precisión y zonas de aplicación del método numérico es puesta de manifiesto en situaciones singulares de solución analítica conocida. Los resultados obtenidos son satisfactorios en un amplio rango de números de Peclet, y superiores a los que se derivan del empleo de mallas de discretización rectangulares.

Cap. 1: INTRODUCCION

CAP. 1 INTRODUCCION

Preámbulo

El progreso en numerosos campos de la ingeniería en general, y en el de la ingeniería mecánica térmica en particular, está condicionado en gran medida a la capacidad de predecir, en la forma más precisa posible, los procesos de transferencia de calor y de masa que los caracteriza [1][2].

En la mayor parte de los procesos térmicos y energéticos, uno de los puntos críticos (en general el más crítico) es el de la resolución de la fenomenología de la transferencia de calor en las zonas de convección. Ello comporta la resolución de las ecuaciones características que describen el fenómeno, las cuales resultan de los principios de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía [3].

En esta tesis se incide en técnicas numéricas concretas para la resolución de la convección forzada de flujos subsónicos compresibles en situaciones bidimensionales y de estabilización.

En este capítulo de introducción plantearemos, a grandes rasgos, la problemática existente para una correcta predicción de estos fenómenos, indicando así mismo la línea de actuación y objetivos seguidos en esta tesis.

Ecuaciones características

Las ecuaciones características de la fenomenología de la convección, formuladas por Navier (1827) y Stokes (1845), expresan los principios de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía, empleando en su formulación las leyes básicas de la viscosidad de Stokes y de la conducción de calor de Fourier. Dichas ecuaciones de conservación, para fluidos newtonianos, toman la forma [4]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + B_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial (\rho H)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j H)}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij} - \dot{q}_j)$$

siendo:

$$\tau_{ij} = \zeta \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\dot{q}_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

$$H = h + \frac{1}{2} u_i u_i$$
(1.2)

Aceptando la validez de estas ecuaciones tanto para flujos en régimen laminar como en régimen turbulento, la evolución temporal y espacial de las condiciones del flujo (distribución de velocidades, presiones, temperaturas,...) corresponderían a la solución de dicho sistema de ecuaciones de conservación para unas condiciones iniciales y de contorno prefijadas.

Problemática de resolución

En este apartado haremos referencia a la problemática existente en la integración de las ecuaciones de conservación, así como a las metodologías de trabajo normalmente empleadas.

Debido a la notable dificultad de integración del sistema de ecuaciones (1.1), la resolución en forma analítica de dichas ecuaciones solo ha podido realizarse para situaciones específicas (flujos laminares bajo hipótesis sumamente restrictivas, cf. [5][6]). Es por ello que ha sido, y es aún, preciso recurrir a técnicas empírico-teóricas basadas en criterios de análisis dimensional y de teoría de modelos [7].

En las últimas décadas, la aparición de computadores digitales con gran rapidez de cálculo y capacidad de memoria está potenciando la resolución de las ecuaciones mediante criterios numéricos, constituyendo ello un importante avance en el dominio de los fenómenos de transferencia de calor y de masa [1][8][9].

Antes de comentar las posibilidades y limitaciones propias de los métodos numéricos normalmente empleados, es conveniente plantear la problemática en la resolución de flujos turbulentos, situación a la cual corresponden la mayoría de los flujos reales.

La resolución numérica directa de las ecuaciones para el caso de flujos turbulentos parece poco menos que inviable. Aún para las geometrías más sencillas, la naturaleza tridimensional y transitoria del flujo turbulento, así como las escalas de longitud y de tiempo características de estos flujos, obligan a unas densidades de malla tales que el tiempo de cálculo es, para la mayoría de situaciones prácticas, prohibitivo [4][10]. Si bien las tentativas de resolución directa de las ecuaciones están actualmente limitadas a situaciones muy específicas [11], es previsible la notable incidencia que tendrá en un futuro esta línea de investigación para una mejor comprensión física del fenómeno de la turbulencia.

El procedimiento usual para el análisis del flujo turbulento consiste en considerar no el comportamiento instantáneo del flujo, sino el comportamiento

promedio sobre un período suficiente de tiempo. En las ecuaciones de conservación, las cantidades instantáneas son reemplazadas por unas cantidades medias más las correspondientes de fluctuación [12]; así por ejemplo, para una variable cualquiera θ ($\theta = u_i, p, T, \rho, \dots$):

$$\theta(x_i, t) = \overline{\theta(x_i)} + \theta'(x_i, t) \quad (1.3)$$

La cantidad média temporal es definida por:

$$\overline{\theta(x_i)} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \theta(x_i, t) dt \quad (1.4)$$

en donde $\Delta t \rightarrow \infty$ indica que el intervalo de tiempo es lo suficientemente grande comparado con la duración de las fluctuaciones.

De expresar en las ecuaciones (1.1) las cantidades instantáneas según (1.3), y de efectuar el promedio temporal a cada una de las ecuaciones resultantes, las ecuaciones de conservación quedan expresadas en la forma [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j + \overline{\rho' u'_j}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{u}_i + \overline{\rho' u'_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{\bar{u}_i \rho' u'_j}) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \bar{u}_j \overline{\rho' u'_i} - \bar{\rho} \overline{u'_i u'_j} - \overline{\rho' u'_i u'_j}) + \bar{B}_i \quad (1.5) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{H} + \overline{\rho' H'}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{H} + \overline{\rho' u'_j H'}) &= \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i \tau_{ij}} - \bar{q}_j - \overline{\rho u'_j H'} - \bar{u}_j \overline{\rho' H'} - \overline{\rho' u'_j H'}) \end{aligned}$$

en donde, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{ij} &= \bar{\zeta} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \zeta' \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu' \left(\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_i} \right) \\ \bar{q}_j &= - \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \lambda' \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_j} \quad (1.6) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones presentan, respecto a la versión inicial (1.1), la ventaja de tratar con cantidades medias del flujo; no obstante el sistema de ecuaciones es incompleto por cuanto existen más incógnitas que ecuaciones. Ello es debido a la aparición de los términos representados por correlaciones entre

cantidades de fluctuación. El análisis de la turbulencia a partir de las ecuaciones de conservación promediadas, se encuentra con la dificultad de precisar en que forma se relacionan los términos de fluctuación turbulenta con las cantidades medias temporales del flujo; ello ha dado lugar a diferentes aproximaciones o modelos de turbulencia [13][14][15].

Los modelos de turbulencia más ampliamente utilizados en la ingeniería, emplean en la evaluación de los términos de fluctuación turbulenta los conceptos de viscosidad turbulenta y conductividad térmica turbulenta, definidos en la forma [16]:

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = -\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} (\mu_t \operatorname{div} \vec{v} + \bar{\rho} k) \delta_{ij} \quad (1.7)$$

$$\overline{\rho u'_i T'} = -\lambda_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$$

La teoría de la longitud de mezcla de Prandtl constituye uno de los primeros modelos propuestos para el análisis de la turbulencia; en dicho modelo se introducen, para la evaluación de la viscosidad turbulenta, expresiones algebraicas de tipo semiempírico [13].

Modelos de carácter más general emplean ecuaciones diferenciales, en las que las variables dependientes son cantidades turbulentas (e.g., la energía cinética turbulenta). De entre estos, uno de los más populares es el k- ϵ [17]; en este modelo la viscosidad turbulenta se obtiene a partir de la expresión $\mu_t = C_\mu \rho k^2/\epsilon$, mientras que la energía cinética turbulenta k y la energía de disipación turbulenta ϵ son obtenidas de la resolución de dos ecuaciones diferenciales que describen el proceso de convección, difusión, generación y disipación de k y ϵ respectivamente.

La conductividad térmica turbulenta es evaluada, en general, de suponer un valor uniforme para el número de Prandtl turbulento ($Pr_t = \mu_t/\lambda_t$).

Los modelos mencionados presentan una importante limitación por cuanto consideran una viscosidad turbulenta isotrópica. Modelos más sofisticados introducen ecuaciones diferenciales de transporte para los diferentes términos de fluctuación turbulenta [18][19].

Todos estos modelos de turbulencia utilizan en mayor o menor medida coeficientes de tipo empírico que ajusten las ecuaciones resultantes, lo cual limita la generalidad de dichos modelos.

En cualquier caso, la descripción matemática del proceso físico se traduce en un sistema de ecuaciones diferenciales, ec. (1.5), en donde los términos de fluctuación turbulenta (nulos para situaciones de flujo laminar) son evaluados según un modelo determinado. La resolución numérica del sistema de ecuaciones indicado presenta grandes dificultades debido a la no linealidad de las mismas, a los errores de truncamiento y redondeo inherentes a los métodos numéricos, y a la insuficiencia en cuanto a velocidad de cálculo de los actuales ordenadores [20][21][22].

Para el análisis numérico es conveniente el empleo de una ecuación que exprese de forma general los diferentes principios de conservación; esta ecuación, denominada ecuación de la convección-difusión, tiene la forma [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + S_\phi \quad (1.8)$$

en donde ϕ es la variable dependiente general (e.g., componentes de la velocidad, entalpia ó temperatura, energía cinética turbulenta, etc), mientras que Γ_ϕ y S_ϕ son, respectivamente, el coeficiente de difusión y el término fuente asociados a dicha variable dependiente. Estos valores resultan de reordenar convenientemente cada una de las ecuaciones de conservación (1.5), previa introducción de (1.7).

La problemática se plantea en dos aspectos: - resolución en forma general de la ecuación de la convección-difusión; - obtención de la distribución de velocidades del flujo.

Para el primero de los aspectos anteriormente enumerados, resolución de la ecuación de la convección-difusión, se han desarrollado una gran variedad de esquemas numéricos (e.g. [1][23][24][25][26]). La problemática se plantea en conseguir esquemas numéricos precisos y estables. Criterios numéricos del tipo 'upwind difference' superan la problemática de la inestabilidad numérica, introduciendo en contrapartida errores de truncamiento (denominados de falsa difusión) que desvirtúan la solución obtenida; ello obliga al empleo de mallas de discretización de gran densidad. El estudio comparativo realizado por Smith y Hutton [27], de entre diferentes esquema numéricos, demuestra que ninguno de los métodos ensayados es completamente satisfactorio.

Puesto que las componentes de la velocidad están gobernadas por las ecuaciones de la cantidad de movimiento, y estas ecuaciones representan un caso especial de la ecuación de la convección-difusión, podría pensarse que el segundo de los aspectos anteriormente enumerados queda englobado en el primero. La problemática se plantea en el término del gradiente de presión que aparece en las ecuaciones de cantidad de movimiento, siendo necesario para su evaluación del empleo de la ecuación de continuidad. Patankar y Spalding propusieron el método SIMPLE ('Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations') [28][1] para la resolución conjunta de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de continuidad; en la discretización de las ecuaciones de la cantidad de movimiento se aplican criterios numéricos de carácter general, desarrollados para la resolución de la ecuación de la convección-difusión. Diferentes variantes del método SIMPLE han sido propuestas, entre otros, por Patankar [29][1], Raithby y Schneider [30], Van Doormaal y Raithby [31] y Latimer y Pollard [32].

Para el caso más general de flujos con propiedades físicas variables, la resolución de las ecuaciones de conservación debe realizarse conjuntamente. Así, de la resolución de las ecuaciones cantidad de movimiento y de continuidad se obtendrá la distribución de velocidades y presiones en el flujo determinandose, a partir de dichos valores y mediante la resolución de la ecuación de la energía, la distribución de temperaturas. Dicho proceso de resolución conjunta tiene un carácter iterativo.

Para ciertas situaciones de flujos es posible simplificar las ecuaciones de conservación haciéndolas más abordables. Así, para flujos permanentes y bidimensionales el método de la función de corriente-vorticidad (cf. Gosman et al. [33]) permite eliminar el término de presión de las ecuaciones de la cantidad de movimiento reduciendo, además, las dos ecuaciones de la cantidad de movimiento y la de continuidad a dos ecuaciones. Aplicaciones de este método a la resolución de problemas de convección han sido realizadas, entre otros, por Runchal et al. [34], J.T.Han [35] y Oliva et al. [36].

Otro tipo de aproximación consiste en dividir, cuando sea posible, el dominio de análisis en zonas en las que el flujo presenta un comportamiento característico. Entre los modelos de tipo zonal destaca, por su posibilidad de aplicación a situaciones prácticas de gran interés, el basado en el concepto de capa límite [37]. Son numerosos los estudios efectuados en esta línea, siendo ejemplos recientes los trabajos sobre el flujo alrededor de perfiles aerodinámicos realizados por Longo et al. [38] y Dvorak et al. [39], y el trabajo sobre el flujo a través de una tobera realizado por Mikhail [40]. La aplicación de este tipo de modelos al caso de flujos confinados ha sido uno de los objetivos de esta tesis; en el próximo apartado se realizará una explicación más detallada del mismo.

---- o ----

De los aspectos comentados en este apartado se concluye que, el avance en la modelización de la transferencia de calor y de masa está fuertemente condicionado por: - disponer de modelos matemáticos que impliquen un nivel de cálculo razonable, y que sean capaces de describir con suficiente generalidad procesos tales como la turbulencia; - el logro de esquemas numéricos basados en criterios de discretización adecuados, que sorteen los errores de redondeo y truncamiento inherentes a los métodos numéricos; - el desarrollo de computadores con mayor capacidad de memoria y velocidad de cálculo.

Gran parte del esfuerzo investigador está dedicado al segundo de los aspectos anteriormente enumerados, modelización numérica, siendo dentro de esta línea en la que se ha orientado ésta tesis.

Planteamiento y objetivos de esta tesis

En este apartado describiremos las dos líneas de actuación que han orientado esta tesis: por un parte la resolución de la convección forzada en flujos subsónicos compresibles mediante el empleo del concepto de capa límite (Cap. 2 al 4); de otra parte la elaboración de un método de resolución de la ecuación de la energía escrita en la forma de la ecuación de la convección-difusión (Cap. 5).

Con el fin de hacer más abordable el sistema de ecuaciones presentado es admisible, en ciertas situaciones, aplicar la simplificación propuesta por Prandtl basada en el concepto de capa límite [37][41], según el cual es posible dividir el dominio por el que circula el flujo en dos zonas: - unas delgadas regiones próximas a los contornos sólidos, denominadas capas límites, en las que la fricción y la transferencia de calor son factores condicionantes; - y el resto del dominio en el que el flujo puede ser considerado como no viscoso, pudiéndose despreciar los efectos de la fricción y de la transferencia de calor.

Para esta situación, las ecuaciones de conservación (1.5) pueden ser simplificadas notablemente. Así, para la región de flujo no viscoso dichas ecuaciones quedan reducidas a las de Euler:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i \quad (i=1,2,3) \quad (1.9) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho H) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j H) &= \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned}$$

En estas ecuaciones las variables son realmente valores medios, puesto que el flujo en dicha región es turbulento (se entiende que el grado de turbulencia de la corriente es bajo). No obstante, se ha evitado indicarlo explícitamente dado que el modelo de flujo ideal (i.e., flujo no viscoso) no considera esta posibilidad.

Las regiones del flujo próximas a los contornos (capas límites) se caracterizan por ser de delgado espesor, lo cual permite simplificar las ecuaciones de conservación en base a análisis de órdenes de magnitud. Para la capa límite tridimensional de un flujo permanente con fuerzas másicas despreciables, dichas ecuaciones toman la forma [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{w}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{v} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{w} \bar{u}) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\rho} \overline{u'v'}) \\ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u} \bar{w}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{v} \bar{w}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{w}^2) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\mu} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \bar{\rho} \overline{w'v'}) \quad (1.10) \\ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u} \bar{H}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{v} \bar{H}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{w} \bar{H}) &= \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \bar{\rho} \overline{v'h'}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} [\bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\bar{u}^2 + \bar{w}^2}{2}) - \bar{\rho} \overline{u'v'u'} - \bar{\rho} \overline{v'w'}] \end{aligned}$$

siendo:

$$\overline{\rho v} = \bar{\rho} \bar{v} + \overline{\rho' v'}, \quad \bar{H} = \bar{h} + \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{w}^2) \quad (1.11)$$

Como indicamos al inicio de este apartado, un objetivo fundamental de esta tesis, ha sido la resolución conjunta de la región de flujo no viscoso y de las capas límites en flujos internos subsónicos compresibles.

En una primera parte, se ha abordado de forma separada la resolución de ambas zonas. Así, en el Cap. 2 se estudia la resolución numérica de la región de flujo no viscoso, con especial incidencia en técnicas de discretización de dominios irregulares, basadas en la generación de un sistema de coordenadas curvilíneas adaptable a los contornos. El análisis realizado ha permitido poner de manifiesto aspectos tales como: influencia en la precisión del esquema numérico del tipo de malla generada; contrastación entre diferentes criterios de discretización de las ecuaciones gobernantes; criterios de evaluación de los coeficientes métricos; etc. También se analiza, de forma sucinta, la resolución de las ecuaciones en base a la discretización del dominio por mallas rectangulares.

En el Cap. 3 se efectúa el análisis y resolución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales de la capa límite. Para las capas límites turbulentas se ha empleado el concepto de viscosidad turbulenta y conductividad térmica turbulenta; la formulación de dichos coeficientes de transporte turbulento se ha realizado según el modelo propuesto por T. Cebeci [4], basado en el empleo de expresiones algebraicas de tipo semiempírico. La discretización de las ecuaciones ha sido realizada según el esquema numérico propuesto por H.B.Keller [42]. El método empleado es aplicado a diversas situaciones, con el fin de constatar su validez.

La integración conjunta de ambas zonas es realizada en el Cap. 4. Debido al carácter de interdependencia de las dos regiones, el proceso de resolución es de naturaleza iterativa, modificando a cada iteración la geometría de la región de flujo no viscoso. Es esta una de las razones que aconsejan el empleo de mallas de discretización adaptables a los contornos; ello ha permitido el desarrollo de un software de carácter general, fácilmente adaptable a diferentes configuraciones de flujos. La puesta a punto del algoritmo desarrollado se ha realizado para el caso del flujo compresible en una canalización con transferencia de calor en los contornos. La contrastación experimental se ha realizado, para el caso de paredes adiabáticas, en una unidad de soplado disponible en el Laboratorio. El algoritmo desarrollado es aplicable a casos de flujo bidimensional o bien con ligeras modificaciones, al caso de flujos tridimensionales axialsimétricos.

En el Capítulo 5 de esta tesis se aborda la resolución de la ecuación de la energía, escrita en la forma de la ecuación de la convección-difusión, mediante un método numérico [43] basado en la discretización de dicha ecuación sobre volúmenes de control coincidentes con las líneas de corriente del flujo y con sus ortogonales. Los errores de truncamiento que ocasionan la falsa difusión son reducidos notablemente respecto a los que se derivan, con criterios numéricos análogos para la discretización de las ecuaciones, del empleo de mallas de discretización rectangulares.

NOMENCLATURA

B_i	Fuerzas másicas por unidad de volumen en la dirección x_i .
C_μ	Constante del modelo de turbulencia.
H	Entalpía total.
h	Entalpía específica.
k	Energía cinética turbulenta por unidad de masa, $k=1/2 u'_i u'_i$.
p	Presión.
\dot{q}	Flujo de calor por unidad de superficie.
S_ϕ	Término fuente de la variable ϕ .
T	Temperatura
t	Tiempo.
u, v, w	Componentes de la velocidad en las direcciones x, y, z respectivamente.
u_i	Componente de la velocidad en la dirección x_i .
\vec{v}	Vector velocidad.
x, y, z	Coordenadas cartesianas.
x_i	Coordenadas cartesianas ($x_1= x, x_2= y, x_3= z$).
Γ_ϕ	Coefficiente de difusión de la variable ϕ .
δ_{ij}	Delta de Kronecker; toma el valor 1 si $i=j$ y 0 si $i \neq j$.
ϵ	Energía de disipación turbulenta.
ζ	Segundo coeficiente de la viscosidad (para un gas monoatómico $\zeta=-2/3\mu$).
λ	Conductividad térmica.
λ_t	Conductividad térmica turbulenta.
μ	Viscosidad dinámica.
μ_t	Viscosidad dinámica turbulenta.
ν	Viscosidad cinemática
ρ	Densidad.
τ_{ij}	Tensor de tensiones.
ϕ	Variable dependiente en la ecuación de la convección-difusión (1.11)

Superíndices

'	Cantidades de fluctuación turbulenta.
—	Cantidades medias temporales.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] S.V.PATANKAR, 'Numerical Heat Transfer and Fluid Flow', Hemisphere Publishing Corporation, Washinton, 1980.
- [2] R.H.SABERSKY, 'Heat Transfer in the Last Decade', Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 10, No. 2, 1983.
- [3] E.R.G.ECKERT, R.M.DRAKE, 'Analysis of Heat and Mass Transfer', McGraw-Hill, New York, 1972.
- [4] T.CEBECI, A.M.O.SMITH, 'Analysis of Turbulent Boundary Layers', Academic Press, New York, 1974.
- [5] E.ECKERT, 'Die Berechnung des Wärmeübergangs in der Laminaren Grenzschicht Umstromter Körper', VDI-Forschungsh. 416, 1942.
- [6] S.LEYS, 'Heat Transfer to Constant-Property Laminar Boundary Layer Flows with Power-Function Free-Stream Velocity and Wall-Temperature Variation', J. Aeron. Sci. 19:341, 1952.
- [7] E.R.G.ECKERT, 'Contributions to Our Knowledge of Convective Heat Transfer', Journal of Heat Transfer, Vol. 103, August 1981.
- [8] R.H.PLETCHER, S.V.PATANKAR, 'Computers in Analysis and Design', Mechanical Engineering, June 1983.
- [9] R.A.GRAVES, 'Computational Fluid Dynamics. The Coming Revolution', Astronautics Aeronautics, March 1982.
- [10] U.SCHUMANN, G.GROTZBACH, L.KLEISER, 'Direct Numerical Simulation Turbulence', Prediction Methods for Turbulent Flows, Ed. W.KOLLMANN, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
- [11] R.S.ROGALLO, 'Numerical Experiments in Homogeneous Turbulence', NASA TM-81315, Sept. 1981.
- [12] O.REYNOLDS, 'On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion', Philos. Trans. R. Soc., London Ser. A, Vol. 186, 1895.
- [13] J.O.HINZE, 'Turbulence', 2nd. edition, McGraw-Hill, New York, 1975.
- [14] B.E.LAUNDER, D.B.SPALDING, 'Mathematical Models of Turbulence', Academic Press, London, 1972.
- [15] W.RODI, 'Examples of Turbulence Models for Incompressible Flows', AIAA Journal, Vol. 20, No. 7, July 1982.
- [16] B.E.LAUNDER, D.B.SPALDING, 'The Numerical Computation of Turbulent Flow', Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, 1974.

- [17] W.RODI, D.B.SPALDING, 'A Two-Parameter Model of Turbulence, and Its Application to Free Jets', 'Warme- und Stoffubertragung Bd. 3 S, 1970.
- [18] F.H.HARLOW, C.W.HIRT, 'Generalised Transport Equations of Anisotropic Turbulence', Los Alamos Sci. Lab. Univ. California, Rep LA 4086, 1969.
- [19] B.A.KOLAVANDIN, I.A.VATUTIN, 'On the Statistical Theory of Non-Uniform Turbulence', Int. Seminar of Heat and Mass Transfer, Herceg Novi, Yugoslavia, 1969.
- [20] D.R.CHAPMAN, 'Computational Aerodynamics Development and Outlook', AIAA Journal, Vol. 17, No. 12, Dec. 1979.
- [21] P.KUTLER, 'A Perspective of Theoretical and Applied Computational Fluid Dynamics', AIAA Journal, Vol. 23, No. 3, March 1985.
- [22] C.W.BOPPE, 'Computational Flow Simulation. Aerospace's Cae Middleman', Mechanical Engineering, August 1984.
- [23] G.D.RAITHBY, 'Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow', Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 9, 1976.
- [24] B.P.LEONARD, 'A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure based on Quadratic Upstream Interpolation', Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 19, 1979.
- [25] G.D.STUBLEY, G.D.RAITHBY, A.B.STRONG, 'Proposal for a New Discrete Method based on an Assessment of Discretization Errors', Numerical Heat transfer, Vol. 3, 1980.
- [26] B.R.BALIGA, 'A New Finite-Element Formulation for Convection Diffusion Problems', Numerical Heat Transfer, Vol. 3, 1980.
- [27] R.W.SMITH, A.G.HUTTON, 'The Numerical Treatment of Advection: a Performance Comparison of Current Methods', Numerical Heat Transfer, Vol. 5, 1982.
- [28] S.V.PATANKAR, D.B.SPALDING, 'A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows', Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, 1972.
- [29] S.V.PATANKAR, 'A Calculation Procedure for Two-Dimensional Elliptic Situations', Numerical Heat Transfer, Vol. 4, 1981.
- [30] G.D.RAITHBY, G.E.SCHNEIDER, 'Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow: Treatment of the Velocity-Pressure Coupling', Numerical Heat Transfer, Vol. 2, 1979.
- [31] J.P.Van DOORMAAL, G.D.RAITHBY, 'Enhancements of the Simple Method for Predicting Incompressible Fluid Flows', Numerical Heat Transfer, Vol. 7, 1984.

- [32] B.R.LATIMER, A.POLLARD, 'Comparison of Pressure-Velocity Coupling Solution Algorithms', Numerical Heat Transfer, Vol. 8, 1985.
- [33] A.D.GOSMAN, W.M.PUN, A.K.RUNCHAL, D.B.SPALDING, M.WOLFSTEIN, 'Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows', Academic Press, New York, 1969.
- [34] A.K.RUNCHAL, M.WOLFSTEIN, 'Numerical Integration Procedure for the Steady State Navier-Stokes Equations', Journal Mech. Eng. Sci., Vol. 11, 1969.
- [35] J.T.HAN, 'A Computational Method to Solve Nonlinear Elliptic Equations for Natural Convection in Enclosures', Numerical Heat Transfer, Vol. 2, 1979.
- [36] A.OLIVA, C.D.PEREZ SEGARRA, J.CENDRA, 'Resolución por criterios de diferencias finitas de la convección natural en colectores solares planos', Solar 1983 International Solar Energy Symposium, Mallorca, 2-6 Octubre 1983.
- [37] L.PRANDLT, 'Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung', Proc. Third Intern. Math. Congress, Heidelberg, 1904.
- [38] J.M.LONGO, W.SCHMIDT, A.JAMESON, 'Viscous Transonic Airfoil Flow Simulation', Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 7, 1983.
- [39] F.A.DVORAK, D.H.CHOI, 'Separation Model for Two-Dimensional Airfoils in Transonic Flow', AIAA Journal, Vol. 22, No. 8, 1984.
- [40] M.N.MIKHAIL, 'Optimum Design of Wind Tunnel Contractions', AIAA Journal, Vol. 17, No. 5, 1979.
- [41] H.SCHLICHTING, 'Boundary-Layer Theory', McGraw-Hill, New York, Sixth Ed., 1968.
- [42] H.B.KELLER, T.CEBECI, 'Accurate Numerical Methods for Boundary-Layer Flows. II: Two-Dimensional Turbulent Flows', AIAA Journal, September 1972.
- [43] C.D.PEREZ SEGARRA, A.OLIVA, R.CARRERAS, 'Método numérico para la resolución de la ecuación de la energía por elementos finitos', Anales de Ingeniería Mecánica, no. 1, pp. 143-150, Diciembre 1983.

Cap. 2:

RESOLUCION NUMERICA DE FLUJOS
POTENCIALES SUBSONICOS COMPRESIBLES

CAP. 2 RESOLUCION NUMERICA DE FLUJOS POTENCIALES SUBSONICOS COMPRESIBLES

RESUMEN

En este capítulo se analizan y contrastan diferentes criterios numéricos para la resolución de flujos potenciales subsónicos compresibles. El estudio se ha referido a flujos isentrópicos de gases perfectos en régimen permanente y en situaciones bidimensionales.

El tema ha sido estructurado en dos apartados. En una primera parte se aborda el análisis mediante la utilización de la función de corriente, mientras que en una segunda parte se emplea el potencial de velocidad.

Los dominios son discretizados en base a mallas adaptables a los contornos. Las ecuaciones de discretización son obtenidas a partir de la ecuación diferencial, de la función de corriente o del potencial de velocidad, escrita en coordenadas curvilíneas o bien, de efectuar el balance apropiado sobre los elementos finitos en que se discretiza el dominio.

Se analiza sucintamente la resolución numérica del flujo potencial en base a mallas adaptables a los contornos.

A modo de ejemplo y para el análisis numérico, se estudian dos situaciones concretas de flujos confinados: a) flujo potencial alrededor de un cilindro; b) flujo potencial a través de una tobera convergente. Los resultados presentados ponen de manifiesto la influencia de los diferentes criterios y parámetros que intervienen en la resolución numérica: discretización del dominio (mallas adaptables al contorno, mallas rectangulares); integración de las ecuaciones en las zonas interiores y en los contornos; evaluación de los coeficientes métricos; métodos iterativos de resolución del sistema de ecuaciones discretas, etc. Para el caso del flujo incompresible alrededor de un cilindro los resultados obtenidos numéricamente son contrastados con la solución analítica de las ecuaciones.

2.1 INTRODUCCION: ECUACIONES CARACTERISTICAS. MALLAS ADAPTABLES A LOS CONTORNOS.

Las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía, para el caso de un flujo en el cual es posible ignorar los efectos de fricción (flujo no viscoso) y de transmisión de calor, toman la forma:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \vec{\bar{v}} \cdot (\bar{\rho} \vec{\bar{v}}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\bar{\rho} \frac{D\vec{\bar{v}}}{Dt} + \vec{\bar{v}} \bar{p} = 0 \quad (2.2)$$

$$\bar{\rho} \frac{D\bar{H}}{Dt} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

La guión encima de la variables indica que éstas son dimensionales.

De la ecuación de cantidad de movimiento (2.2) y de la relación termodinámica $\bar{T}d\bar{s} = d\bar{h} - (1/\bar{\rho})d\bar{p}$ se deduce que:

$$\bar{T} \vec{\bar{v}} \bar{s} + \vec{\bar{v}} \times \vec{\bar{\omega}} = \vec{\bar{v}} \bar{h}^* + \partial \vec{\bar{v}} / \partial t \quad (2.4)$$

siendo:

$$\vec{\bar{\omega}} = \vec{\bar{v}} \times \vec{\bar{v}} \quad (2.5)$$

De la expresión (2.4) se sigue que para un flujo permanente, irrotacional e isoentrópico, la entalpia específica de estancamiento es uniforme, es decir:

$$\bar{H} = \bar{h} + \frac{\bar{v}^2}{2} = C \quad (2.6)$$

siendo C una constante. Nótese que, para las hipótesis especificadas, la expresión anterior satisface la ecuación de la energía (2.3).

Si el fluido se comporta como un gas perfecto se verifica:

$$\bar{p} = \bar{\rho} \bar{R} \bar{T} \quad (2.7)$$

$$d\bar{h} = \bar{c}_p d\bar{T} \quad (2.8)$$

$$\bar{R} = \bar{c}_p - \bar{c}_v \quad (2.9)$$

$$k = \bar{c}_p / \bar{c}_v \quad (2.10)$$

En estas circunstancias, de las ecuaciones (2.6) a (2.10) y de la relación entre las propiedades isoentrópicas para un gas perfecto, $\bar{p}/\bar{\rho}^k = \text{constante}$, se obtiene:

$$\frac{\bar{p}}{\bar{p}_0} = \left[1 - \frac{(k-1)M_0^2}{2} \left(\frac{\bar{v}^2}{\bar{v}_0^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (2.11)$$

La expresión (2.11) junto con la ecuación de conservación de la masa (2.1) y la ecuación de la irrotacionalidad [(2.5) con $\vec{\bar{\omega}} = 0$] configuran un nuevo sistema de ecuaciones, suficiente para la determinación del comportamiento del flujo permanente, irrotacional e isoentrópico de un gas perfecto.

Función de corriente y potencial de velocidad

Bajo ciertas hipótesis es factible la descripción del flujo mediante el empleo de funciones escalares de punto, tales como la función de corriente o la función potencial de velocidad (o más brevemente potencial de velocidad). De esta forma se consigue reducir la ecuación de continuidad y la de la irrotacionalidad del flujo a una única ecuación diferencial escrita en base a dichas funciones escalares.

Para flujos permanentes y bidimensionales es posible definir una **función de corriente** $\bar{\psi}$ [1] tal que satisfaga la ecuación de continuidad (2.1). Dicha función viene definida, en coordenadas cartesianas, según:

$$\bar{v}_x = \frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \quad \bar{v}_y = - \frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \quad (2.12)$$

La ecuación (2.5), en términos de la función de corriente (2.12) y para flujos irrotacionales, toma la forma:

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \quad (2.13)$$

Para flujos irrotacionales la velocidad puede derivarse de un **potencial de velocidad** $\bar{\phi}$, definido por $\bar{v} = \bar{\nabla} \bar{\phi}$, tal que satisfaga la ecuación de la irrotacionalidad (efectivamente, $\bar{\nabla} \times \bar{v} = 0$). Para situaciones bidimensionales y en coordenadas cartesianas:

$$\bar{v}_x = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \quad \bar{v}_y = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} \quad (2.14)$$

La ecuación de conservación de la masa (2.1), en términos del potencial de velocidad (2.14) y para el caso de flujos permanentes y bidimensionales, toma la forma:

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2} = - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} \quad (2.15)$$

En este capítulo efectuaremos la resolución numérica del flujo subsónico compresible de un gas perfecto en el supuesto de que sea permanente, bidimensional, irrotacional e isoentrópico. En estas condiciones, el análisis puede realizarse indistintamente mediante el empleo de la función de corriente o del potencial de velocidad.

Para el primer caso, la resolución de las ecuaciones (2.13) y (2.11), introduciendo en esta última la velocidad en términos de de la función de corriente (2.12), nos proporciona la distribución de $\bar{\psi}$ y $\bar{\rho}$ en el dominio; de (2.12) se determina, finalmente, el mapa de velocidades. Para el segundo caso, de (2.15) y (2.11), expresando en esta última la velocidad en términos del potencial de velocidad (2.14), se obtiene la distribución de $\bar{\phi}$ y $\bar{\rho}$ en el dominio; de (2.14) se determina el mapa de velocidades.

A pesar de que para las hipótesis especificadas la resolución del flujo compresible no viscoso puede realizarse por cualquiera de los dos métodos indicados, aplicaremos ambos por cuanto:

- a) Si bien la utilización de la función de corriente está limitada a flujos permanentes y bidimensionales (o tridimensionales axialsimétricos) permite, no obstante, el tratamiento de flujos rotacionales [2]. De otra parte, la utilización del potencial de velocidad esta limitada a flujos irrotacionales, sin embargo permite el tratamiento de flujos tridimensionales y/o en régimen transitorio [3][4].
- b) La integración numérica de las ecuaciones (2.13) o (2.15) presenta una problemática distinta. Para la función de corriente las condiciones de contorno son esencialmente de Dirichlet, mientras que para el potencial de velocidad son esencialmente de Neuman.

En lo que sigue nos referiremos a la ecuación de la irrotacionalidad (2.13) escrita en términos de la función de corriente como "ecuación diferencial de la función de corriente", y a la ecuación de conservación de la masa (2.15) escrita en términos del potencial de velocidad como "ecuación diferencial del potencial de velocidad". Ambas ecuaciones en derivadas parciales son no lineales y, en el caso de flujos subsónicos, de tipo elíptico.

Mallas adaptables a los contornos del dominio

El análisis anterior nos ha conducido, para las hipótesis enumeradas, a unas ecuaciones diferenciales cuya resolución numérica es el objetivo de este capítulo. Para ello se genera sobre el dominio a analizar una malla de discretización, de la que resultan un conjunto de puntos coincidentes con los nodos de dicha malla y con las intersecciones de la misma con los contornos.

La ecuación diferencial es transformada, para cada punto de la malla, en un conjunto de ecuaciones algebraicas denominadas ecuaciones de discretización. Estas ecuaciones resultan de sustituir las derivadas de la ecuación diferencial por cociente de incrementos o bien, de realizar el balance apropiado sobre volúmenes finitos asignados a cada punto de la malla.

La malla de discretización puede ser generada mediante coordenadas cartesianas, cilíndricas, esféricas o, en general, mediante coordenadas curvilíneas. Para el caso de dominios irregulares, la utilización de coordenadas curvilíneas presenta un gran interés si se hacen coincidir los contornos del dominio con superficies coordenadas [5].

Así pues, para situaciones bidimensionales, la generación de las coordenadas curvilíneas $\epsilon = \epsilon(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ tales que los contornos coincidan con líneas $\epsilon = \text{constante}$ o $\eta = \text{constante}$, hacen que una geometría irregular especificada en el plano físico (x, y) (Fig. 1a), adquiera una forma regular en el plano transformado (ϵ, η) (Fig. 1b). Las ecuaciones características, escritas en las coordenadas curvilíneas (ϵ, η) , se resuelven numéricamente de forma más conveniente en el plano transformado y según criterios de diferencias o incrementos finitos.

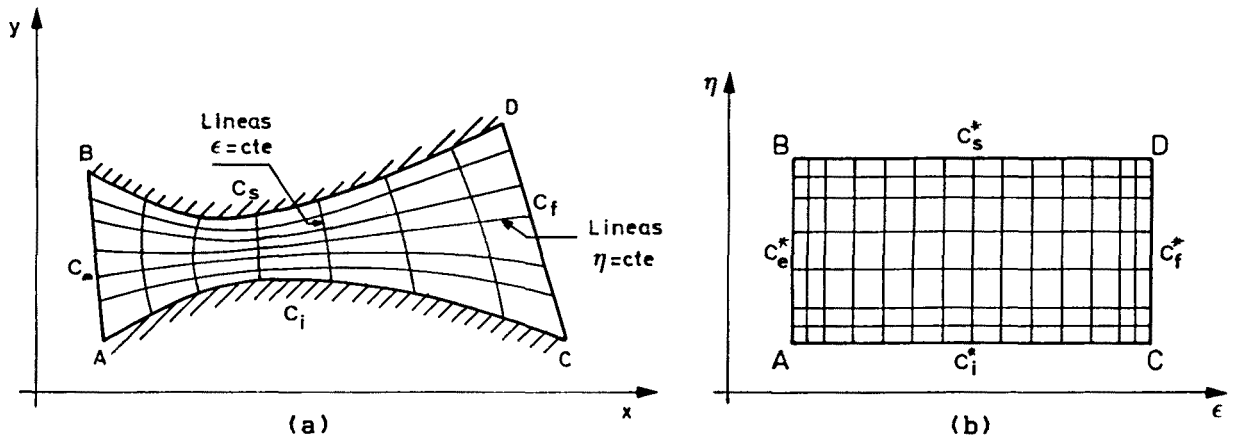


Fig. 1 (a) Plano físico (x,y); (b) Plano transformado (ϵ, η).

Las técnicas empleadas en la generación de coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos son esencialmente de dos tipos: 1) las coordenadas se generan mediante la resolución de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales [6][7][8]; 2) las coordenadas se generan por métodos algebraicos de interpolación [9][10]. En el apartado 2.4, referente a la resolución de situaciones concretas se indican, para su posterior aplicación, algunos criterios de generación de coordenadas curvilíneas y pertenecientes a los dos grupos enumerados.

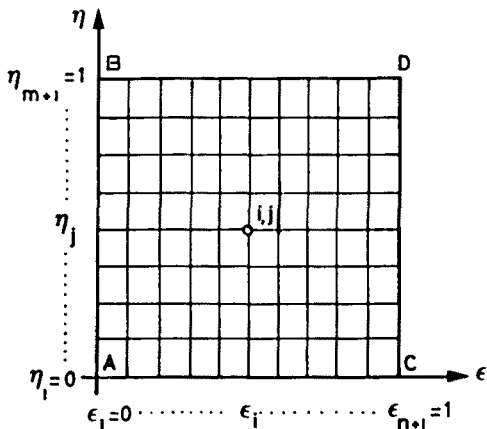


Fig. 2 Malla de discretización rectangular y uniformemente distribuida en el plano transformado.

Los valores asignados a las coordenadas dentro del dominio son, en principio, arbitrarios; no obstante, y siempre que no se haga advertencia de lo contrario, los supondremos uniformemente distribuidos entre 0 y 1. Así, para una malla constituida por $N+1$ líneas $\epsilon = cte$ y $M+1$ líneas $\eta = cte$ será:

$$\epsilon_i = (i-1)/N \quad i = 1, 2, \dots, N+1 \quad (2.16)$$

$$\eta_j = (j-1)/M \quad j = 1, 2, \dots, M+1$$

De esta forma, la geometría irregular indicada en la Fig. 1a es convertida en un dominio cuadrado, con una malla de discretización rectangular y uniformemente distribuida, en el plano transformado (Fig. 2).

La complicación adicional que representa la integración de las ecuaciones características escritas en coordenadas curvilíneas (ec. 2.22), respecto a su equivalente en coordenadas cartesianas (ec. 2.17), se ve compensada por la ventaja que se deriva de la eliminación de los problemas inherentes al tratamiento de contornos irregulares: intersecciones malla-contorno;

aproximación numérica de las derivadas en el contorno; funciones de interpolación; etc.

El empleo de mallas adaptables a los contornos del dominio puede facilitar la concentración de la misma en las zonas de mayores gradientes. No obstante, el control de la malla en el interior del dominio no siempre es fácil, pudiendo requerir el tipo de problema a resolver y la geometría implicada un estudio específico.

En lo que sigue indicaremos los valores ligados a las coordenadas ϵ y η mediante los subíndices o superíndices 1 y 2 respectivamente; así por ejemplo, las componentes contravariantes de la velocidad en la dirección ϵ y η se representan, respectivamente, por V^1 y V^2 . Para indicar la potencia n -ésima de un valor se utilizará, si existe ambigüedad, paréntesis; así por ejemplo, el cuadrado de V^2 se indicará por $(V^2)^2$. Finalmente, las derivadas de las coordenadas (ϵ, η) respecto de las coordenadas cartesianas (x, y) y viceversa se indicarán, indistintamente, mediante la notación: $\partial \epsilon / \partial x$ o ϵ_x ; $\partial x / \partial \epsilon$ o x_ϵ ; $\partial^2 \epsilon / \partial x^2$ o ϵ_{xx} ; etc.

En el apéndice A se realiza una síntesis de resultados referentes a coordenadas curvilíneas y que son de utilidad para el desarrollo de este capítulo.

---- o ----

En lo que sigue se hará un análisis de la problemática de resolución numérica de flujos potenciales subsónicos compresibles, en base al empleo de la función de corriente y del potencial de velocidad.

El estudio realizado hace especial énfasis en la discretización del dominio en base a mallas adaptables a los contornos físicos (apartados 2.2.1 y 2.3.1), indicándose diferentes criterios para la obtención de las ecuaciones de discretización.

De forma sucinta y con el fin de contrastar resultados, se efectúa la resolución numérica en base a mallas rectangulares (apartados 2.2.2 y 2.3.2), indicándose igualmente diferentes criterios para la obtención de las ecuaciones de discretización.

En el apartado 2.4 se proponen y analizan dos situaciones específicas de flujos confinados: a) flujo potencial alrededor de un cilindro y b) flujo potencial a través de una tobera convergente. Se contrastan los resultados obtenidos para diferentes mallas y según los distintos esquemas numéricos propuestos.

2.2 RESOLUCION NUMERICA DE FLUJOS POTENCIALES SUBSONICOS COMPRESIBLES MEDIANTE LA UTILIZACION DE LA FUNCION DE CORRIENTE

El comportamiento del flujo permanente, bidimensional, irrotacional e isoentrópico de un gas perfecto es descrito, mediante la utilización de la función de corriente, por las ecuaciones (2.13) y (2.11). De introducir en esta última el módulo de la velocidad en términos de la función de corriente (ec. 2.12) y de expresar dichas ecuaciones en forma adimensional, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (2.17)$$

$$\rho = \left[1 - \frac{(k-1)M_0^2}{2} \left(\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 - 1 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (2.18)$$

siendo las variables adimensionales de la forma:

$$\Psi = \frac{\bar{\Psi}}{\bar{v}_0 L}, \quad \rho = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}, \quad v = \frac{\bar{v}}{\bar{v}_0}, \quad x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad y = \frac{\bar{y}}{L} \quad (2.19)$$

Las condiciones de contorno necesarias para la integración de las ecuaciones indicadas, para un flujo confinado dado (Fig. 3), son del tipo:

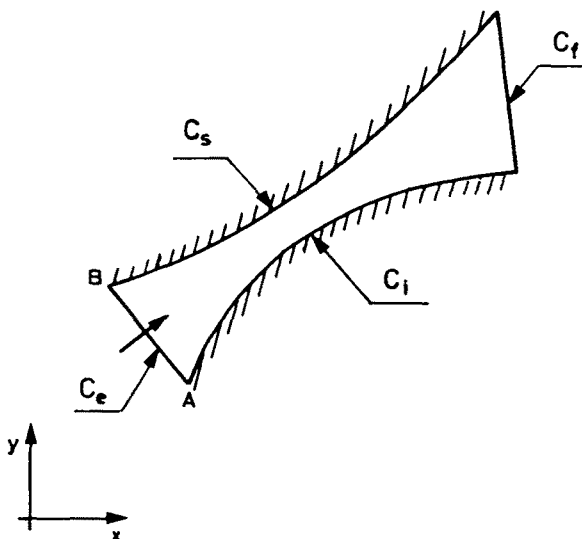
	$\begin{aligned} v(x,y) \in C_e & \quad \Psi(x,y) = \Psi_e(x,y) \\ v(x,y) \in C_i & \quad \Psi(x,y) = \Psi_i \\ v(x,y) \in C_s & \quad \Psi(x,y) = \Psi_s \\ v(x,y) \in C_f & \quad \Psi(x,y) = \Psi_f(x,y), \\ & \quad \text{ó } \frac{\partial \Psi}{\partial n} = f(x,y) \end{aligned} \quad (2.20)$
---	---

Fig. 3 Flujo a través de una canalización de contornos C_i y C_s . La zona de entrada y salida del flujo se representa por C_e y C_f respectivamente.

C_e representa la zona de entrada del flujo. En dicha zona se supone conocida la distribución de velocidades. El valor de la función de corriente, $\psi_e(x,y)$, se obtiene por integración de la velocidad a lo largo de C_e .

Las líneas C_i y C_s simbolizan un contorno o canalización y coinciden, por tanto, con líneas de corriente del flujo. La función $\psi_e(x,y)$ en los puntos A y B determina el valor de ψ_i y ψ_s en el contorno inferior y superior respectivamente.

En (2.20) se indican dos posibles situaciones para el contorno de salida C_f : a) condición de contorno de Dirichlet: se supone conocida la distribución de velocidades (es suficiente la componente normal al contorno); la función de corriente $\psi_f(x,y)$ se obtiene, directamente, por integración de la velocidad a lo largo de C_f ; b) condición de contorno de Neuman: se supone conocida la componente tangencial de la velocidad en C_f ; así por ejemplo, si la velocidad es normal al contorno la componente tangencial será nula y, por tanto, $f(x,y)=0$ en C_f .

La condición de contorno para la densidad es la propia ecuación (2.18). Es por ello que, a excepción de las zonas en donde la velocidad es conocida (por ejemplo, en el contorno C_e), dicha condición de contorno será de tipo Neuman.

En el apartado 2.2.1 se analiza la resolución numérica de las ecuaciones en base a la discretización del dominio mediante la generación de un sistema de coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos. En el apartado 2.4 se comentan algunos métodos de generación de estas coordenadas.

En el apartado 2.2.2 se efectúa la integración numérica de las ecuaciones en base a coordenadas rectangulares.

En ambos casos (discretización del dominio en base a mallas adaptables a los contornos o en base a mallas rectangulares) se proponen diferentes criterios numéricos para la integración de las ecuaciones y de sus condiciones de contorno.

2.2.1 Integración numérica en base a coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos.

Como ya indicamos anteriormente, la discretización de la región del flujo en base a coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos nos permite pasar de una geometría irregular en el plano físico (Fig. 1a) a una geometría regular en el plano transformado (Fig. 1b).

La integración numérica de las ecuaciones, escritas en función de las variables independientes ϵ y η se realiza, por tanto, en el plano transformado. En el apartado 2.2.1a se procede a la obtención de las ecuaciones de discretización de la función de corriente y de la densidad para los puntos interiores de la malla. El tratamiento de los puntos del contorno es analizado en el apartado 2.2.1b.

De todo ello resulta un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas. Para la función de corriente tendremos $N_x(M-1)$ ecuaciones, mientras que para la densidad serán $N_x(M+1)$. En el apartado 2.2.1c se comentan las técnicas empleadas en la resolución de dicho sistema de ecuaciones algebraicas, además de ciertas particularidades del algoritmo iterativo.

Una vez calculada la función de corriente y la densidad en cada nodo de la malla se determinan, numéricamente, las componentes de la velocidad en coordenadas cartesianas y/o en coordenadas curvilíneas (apartado 2.2.1d).

La distribución de presiones y temperaturas en el dominio se calculan en base a las relaciones entre las propiedades isoentrópicas para un gas perfecto. Así, para la presión y temperatura adimensional tendremos $p = \rho^k$ y $T = \rho^{k-1}$.

A menos que se indique lo contrario, supondremos que las coordenadas curvilíneas toman los valores indicados en (2.16). Así pues, en el plano transformado la malla será rectangular y uniformemente distribuida (Fig. 2).

2.2.1a Ecuaciones de discretización para los puntos interiores del dominio.

Las ecuaciones de discretización, para las zonas interiores del dominio, son obtenidas según tres criterios distintos:

- Esquema numérico FC-1: Las ecuaciones discretas son obtenidas por integración numérica de la ecuación diferencial de la función de corriente escrita en coordenadas curvilíneas. Dicha ecuación se determina a partir de la ecuación diferencial de la función de corriente escrita en coordenadas cartesianas (ec. 2.17), efectuando los correspondientes cambios de variable.
- Esquema numérico FC-2: A diferencia del esquema anterior, la ecuación diferencial de la función de corriente, en coordenadas curvilíneas, es obtenida de aplicar la condición de irrotacionalidad del flujo a elementos diferenciales tomados en base a las coordenadas curvilíneas. Si bien la ecuación diferencial así obtenida es idéntica matemáticamente a la deducida en FC-1, los esquemas numéricos que se derivan de ambas son distintos.
- Esquema numérico FC-3: Las ecuaciones de discretización son obtenidas de aplicar la condición de irrotacionalidad a volúmenes de control finitos asignados a cada nodo de la malla.

Esquema numérico FC-1

Para el desarrollo de este primer esquema numérico partiremos de la ecuación de la función de corriente, (2.17), expresando los diferentes términos de las derivadas parciales en función de las variables independientes $\epsilon = \epsilon(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$. Así por ejemplo, para las derivadas en 'x' tendremos:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \epsilon_x + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \eta_x \quad (2.21a)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon^2} \epsilon_x^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \epsilon_{xx} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon \partial \eta} \epsilon_x \eta_x + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \eta_{xx} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \eta_x^2 \quad (2.21b)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = \frac{\partial \ln \rho}{\partial \epsilon} \epsilon_x + \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} \eta_x \quad (2.21c)$$

De proceder en forma análoga para las derivadas en 'y', sustituir en (2.17) y reordenar adecuadamente, obtendremos la ecuación diferencial diferencial de la función de corriente en coordenadas curvilíneas:

$$g^{11} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon^2} + \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + 2g^{12} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon \partial \eta} + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + g^{22} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} =$$

$$= \left[g^{11} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \epsilon} + g^{12} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + \left[g^{21} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \epsilon} + g^{22} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$$
(2.22)

en la que, los coeficientes métricos de la transformación (cf. apéndice A) son:

$$g^{11} = \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 \quad g^{12} = \epsilon_x \eta_x + \epsilon_y \eta_y \quad \alpha = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}$$

$$g^{21} = g^{12} \quad g^{22} = \eta_x^2 + \eta_y^2 \quad \beta = \eta_{xx} + \eta_{yy}$$
(2.23)

La integración numérica de la ecuación (2.22) la realizaremos en el plano transformado y en base a una malla de discretización rectangular y uniformemente distribuida (Fig. 2).

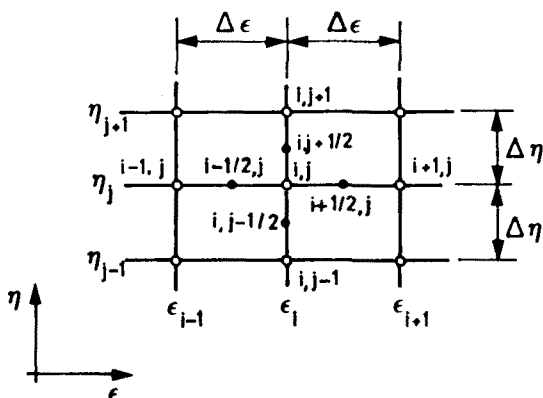


Fig. 4 Elemento discreto, en el plano transformado, de la zona interior del dominio.

La aproximación numérica de las derivadas de la ecuación diferencial (2.22) la efectuaremos mediante desarrollos en series de Taylor, considerando hasta los términos de segundo orden. El error de truncamiento será, por tanto, del orden de $(\Delta \epsilon)^2$ o $(\Delta \eta)^2$. A modo de ejemplo se indican algunas de estas aproximaciones realizadas sobre el elemento discreto de la Fig. 4:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \right)_{i,j} \approx \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2\Delta \epsilon}$$
(2.24a)

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon^2} \right)_{i,j} \approx \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j}}{(\Delta \epsilon)^2}$$
(2.24b)

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon \partial \eta} \right)_{i,j} \approx \frac{\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1} - \Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i-1,j-1}}{4\Delta \epsilon \Delta \eta}$$
(2.24c)

De sustituir en (2.22) y de reagrupar adecuadamente los términos, se obtiene una ecuación de discretización del tipo:

$$a_{i,j} \Psi_{i,j} = a_{i+1,j} \Psi_{i+1,j} + a_{i-1,j} \Psi_{i-1,j} + a_{i,j+1} \Psi_{i,j+1} + a_{i,j-1} \Psi_{i,j-1} + a_R \quad (2.25)$$

siendo:

$$a_{i+1,j} = \frac{2g^{11} - \Delta\epsilon \left[g^{11} \frac{\ln(\rho_{i+1,j} / \rho_{i-1,j})}{2\Delta\epsilon} + g^{12} \frac{\ln(\rho_{i,j+1} / \rho_{i,j-1})}{2\Delta\eta} - \alpha \right]}{(\Delta\epsilon)^2}$$

$$a_{i,j+1} = \frac{2g^{22} - \Delta\eta \left[g^{21} \frac{\ln(\rho_{i+1,j} / \rho_{i-1,j})}{2\Delta\epsilon} + g^{22} \frac{\ln(\rho_{i,j+1} / \rho_{i,j-1})}{2\Delta\eta} - \beta \right]}{(\Delta\eta)^2}$$

$$a_R = \frac{g^{12} (\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1} - \Psi_{i-1,j+1} + \Psi_{i-1,j-1})}{\Delta\epsilon \Delta\eta} \quad (2.26)$$

$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1}$$

Para los coeficientes ' $a_{i-1,j}$ ' y ' $a_{i,j-1}$ ' las expresiones son las escritas para ' $a_{i+1,j}$ ' y ' $a_{i,j+1}$ ', respectivamente, sustituyendo en éstas ' $-\Delta\epsilon$ ' y ' $-\Delta\eta$ ' por ' $+\Delta\epsilon$ ' y ' $+\Delta\eta$ '.

La densidad se calcula, en el nodo (i,j) de la malla y en el plano transformado, mediante la expresión (2.18) convenientemente escrita en función de las variables independientes ϵ y η . Así pues, de efectuar los cambios de variables pertinentes (cf. 2.21a) se obtiene:

$$\rho = \left[1 - \frac{(k-1)M_o^2}{2} \left(\frac{g^{11}}{\rho^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \right)^2 + \frac{2g^{12}}{\rho^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{g^{22}}{\rho^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)^2 - 1 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (2.27)$$

Esta ecuación es discretizada al aproximar numéricamente las derivadas de la función de corriente según el criterio indicado en (2.24a). Como el proceso de resolución del sistema de ecuaciones discretas es iterativo, la densidad en cada nodo de la malla se evalúa introduciendo, dentro del paréntesis, la densidad calculada en la iteración anterior.

Los coeficientes métricos (g^{ij} , α , β) empleados en (2.26) y (2.27) se evalúan en cada nodo (i,j) de la malla, previamente al proceso iterativo de resolución de las ecuaciones discretas.

El cálculo de dichos coeficientes se efectúa, de forma más sencilla, en el plano transformado mediante las expresiones (2.A32) y (2.A33/34) dadas en el apéndice A. La evaluación numérica de estos coeficientes se realiza por criterios análogos a los indicados en (2.24). A modo de ejemplo efectuaremos al cálculo de g^{12} ; de (2.A32) y (2.A26):

$$g^{12} = - \frac{g_{21}}{D^2} = - \frac{x_\epsilon x_\eta + y_\epsilon y_\eta}{(x_\epsilon y_\eta - x_\eta y_\epsilon)^2} \quad (2.28)$$

en donde las derivadas son aproximadas numéricamente de forma análoga a la efectuada en (2.24a). Así, por ejemplo, para x_ϵ y x_η será:

$$x_\epsilon \approx \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2 \Delta\epsilon} \quad x_\eta \approx \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2 \Delta\eta} \quad (2.29)$$

Esquema numérico FC-2

Procederemos, en primer lugar, a la obtención de la ecuación diferencial, escrita en las coordenadas (ϵ, η) , de la función de corriente. Como indicamos al inicio de este apartado, la deducción se basa en aplicar la condición de irrotacionalidad a elementos diferenciales de las coordenadas curvilíneas.

Según el teorema de Stokes, la integral de superficie de la componente normal del rotacional de la velocidad sobre cualquier area A cuyo contorno sea la trayectoria cerrada C, debe ser igual a la integral curvilínea de la componente del vector velocidad alrededor de dicha trayectoria, es decir:

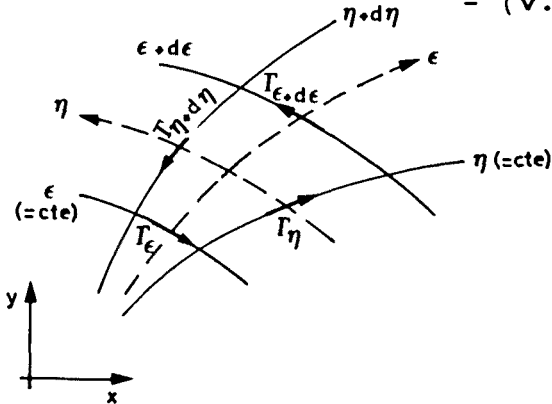
$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (2.30)$$

Para flujos irrotacionales ($\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$) se deduce, de la ecuación anterior, que la circulación Γ alrededor de cualquier trayectoria cerrada C es nula:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.31)$$

Consideremos el elemento diferencial, de las coordenadas curvilíneas (ϵ, η) , de la Fig. 5. El vector $d\vec{l}$, tangente a las líneas del contorno, se puede expresar, mediante los vectores de la base local (cf. apéndice A), en la forma $\pm \vec{e}_i dq^i$ ($q^1 = \epsilon, q^2 = \eta$); el signo + o - es función del sentido elegido para la circulación. De aplicar la integral curvilínea (2.31), a dicho elemento diferencial, se tiene:

$$- \vec{v} \cdot \vec{e}_2 d\eta + \vec{v} \cdot \vec{e}_1 d\epsilon + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial(\vec{v} \cdot \vec{e}_2)}{\partial \epsilon} d\epsilon) d\eta - (\vec{v} \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial(\vec{v} \cdot \vec{e}_1)}{\partial \eta} d\eta) d\epsilon = 0 \quad (2.32)$$



La circulación se ha considerado positiva en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Fig. 5 Elemento diferencial en las coordenadas curvilíneas ϵ, η .

Los productos escalares $\vec{v} \cdot \vec{e}_i$ son las componentes covariantes de la velocidad (V_i) en la base local (cf. apartado 2.2.1d). Así pues, de desarrollar la expresión anterior se tiene:

$$\frac{\partial V_2}{\partial \epsilon} - \frac{\partial V_1}{\partial \eta} = 0 \quad (2.33)$$

Expresando, en la ecuación anterior, las componentes covariantes de la velocidad en términos de la función de corriente y en las coordenadas ϵ, η (ec. 2.70) y reordenando adecuadamente, se obtiene finalmente la siguiente ecuación diferencial de la función de corriente en coordenadas curvilíneas:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{g^{11}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{12}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{g^{21}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{22}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (2.34)$$

En la expresión anterior, las derivadas de las componentes covariantes de la velocidad en el nodo (i, j) de la malla las aproximaremos numéricamente en base al valor de las mismas en: a) los puntos $(i-1/2, j)$, (i, j) , $(i+1/2, j)$ para la derivada en ϵ y b) los puntos $(i, j-1/2)$, (i, j) , $(i, j+1/2)$ para la derivada en η .

Los puntos $(i \pm 1/2, j \pm 1/2)$ se hallan centrados, en el plano transformado, entre el nodo (i, j) y los nodos adyacentes (Fig. 4). De aplicar un criterio numérico análogo al empleado en (2.24a) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta \epsilon} \left[- \left[\frac{g^{11}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{12}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right]_{i+1/2, j} + \left[\frac{g^{11}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{12}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right]_{i-1/2, j} \right] - \\ & - \frac{1}{\Delta \eta} \left[\left[\frac{g^{21}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{22}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right]_{i, j+1/2} - \left[\frac{g^{21}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{22}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right]_{i, j-1/2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

En la evaluación de los derivadas de la función de corriente de la expresión anterior utilizaremos nuevamente un criterio análogo al indicado en (2.24a). Así por ejemplo, para las derivadas en $(i-1/2, j)$ será:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \right)_{i-1/2, j} = \frac{\Psi_{i, j} - \Psi_{i-1, j}}{\Delta \epsilon} \quad (2.36a)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_{i-1/2, j} = \frac{(\Psi_{i-1, j+1} - \Psi_{i, j+1}) - (\Psi_{i-1, j-1} - \Psi_{i, j-1})}{4 \Delta \eta} \quad (2.36b)$$

Procediendo de forma análoga para los restantes términos, sustituyendo en la expresión (2.35) y reagrupando según la ecuación de discretización (2.25) tendremos:

$$\begin{aligned}
a_{i+1,j} &= \frac{\Delta\eta}{\Delta\epsilon} \left(\frac{g^{11}}{\rho J} \right)_{i+1/2,j} & a_{i-1,j} &= \frac{\Delta\eta}{\Delta\epsilon} \left(\frac{g^{11}}{\rho J} \right)_{i-1/2,j} \\
a_{i,j+1} &= \frac{\Delta\epsilon}{\Delta\eta} \left(\frac{g^{22}}{\rho J} \right)_{i,j+1/2} & a_{i,j-1} &= \frac{\Delta\epsilon}{\Delta\eta} \left(\frac{g^{22}}{\rho J} \right)_{i,j-1/2} \\
a_{i,j} &= a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} \\
a_R &= - \left(\frac{g^{12}}{\rho J} \right)_{i-1/2,j} \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i-1,j-1}}{4} + \\
&+ \left(\frac{g^{21}}{\rho J} \right)_{i,j+1/2} \frac{\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i-1,j+1} + \Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{4} + \\
&+ \left(\frac{g^{12}}{\rho J} \right)_{i+1/2,j} \frac{\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1} + \Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{4} - \\
&- \left(\frac{g^{21}}{\rho J} \right)_{i,j-1/2} \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i+1,j-1} - \Psi_{i-1,j-1}}{4}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

La densidad en los puntos $(i\pm 1/2, j\pm 1/2)$ puede calcularse promediando las obtenidas, en la forma indicada en FC-1, en los nodos adyacentes de la malla. Así por ejemplo:

$$(\rho)_{i-1/2,j} \approx \frac{(\rho)_{i-1,j} + (\rho)_{i,j}}{2} \tag{2.38}$$

En la evaluación numérica de los coeficientes métricos en los puntos $(i\pm 1/2, j\pm 1/2)$ se han considerado dos criterios distintos:

- a) Se promedian los obtenidos en los nodos adyacentes y según el criterio indicado en el esquema numérico FC-1 (cf. ec. 2.28). Así, por ejemplo, para g^{12} en $(i-1/2, j)$ tendremos:

$$(g^{12})_{i-1/2,j} \approx \frac{(g^{12})_{i-1,j} + (g^{12})_{i,j}}{2} \tag{2.39}$$

- b) Se calculan según el mismo esquema numérico utilizado para la evaluación de las derivadas de la función de corriente (2.36). Para el caso indicado anteriormente será:

$$(g^{12})_{i-1/2,j} = - \left(\frac{g_{21}}{D^2} \right)_{i-1/2,j} = - \left(\frac{x_\epsilon y_\eta + y_\epsilon y_\eta}{(x_\epsilon y_\eta - x_\eta y_\epsilon)^2} \right)_{i-1/2,j} \tag{2.40}$$

aproximándose numéricamente las derivadas en la forma:

$$\begin{aligned} (x_\epsilon)_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{x_{i,j} - x_{i-1,j}}{\Delta\epsilon} \\ (x_\eta)_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1} + x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j-1}}{4\Delta\eta} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Esquema numérico FC-3

Este tercer esquema numérico se basa en aplicar directamente sobre volúmenes de control (V.C.) finitos, asignados a cada nodo de la malla, la condición de irrotacionalidad del flujo. Los V.C. están formados por líneas coordenadas del sistema de coordenadas curvilíneas generado (Fig.6a). Las caras del V.C. se hallan centradas, en el plano transformado, entre el nodo en cuestión y los nodos adyacentes (Fig.6b).

De (2.30) se deduce que la condición de irrotacionalidad del flujo queda satisfecha si la circulación a lo largo de cualquier curva cerrada es nula. Así pues, aplicando la expresión (2.31) al contorno delimitado por el V.C. de la Fig.6a, se verifica:

$$-\int_{\epsilon_{i-\frac{1}{2}},\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\epsilon_{i-\frac{1}{2}},\eta_{j+\frac{1}{2}}} \vec{v} \cdot \vec{e}_2 \, d\eta - \int_{\epsilon_{i-\frac{1}{2}},\eta_{j+\frac{1}{2}}}^{\epsilon_{i+\frac{1}{2}},\eta_{j+\frac{1}{2}}} \vec{v} \cdot \vec{e}_1 \, d\epsilon + \int_{\epsilon_{i+\frac{1}{2}},\eta_{j+\frac{1}{2}}}^{\epsilon_{i+\frac{1}{2}},\eta_{j-\frac{1}{2}}} \vec{v} \cdot \vec{e}_2 \, d\eta + \int_{\epsilon_{i+\frac{1}{2}},\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\epsilon_{i-\frac{1}{2}},\eta_{j-\frac{1}{2}}} \vec{v} \cdot \vec{e}_1 \, d\epsilon = 0 \quad (2.42)$$

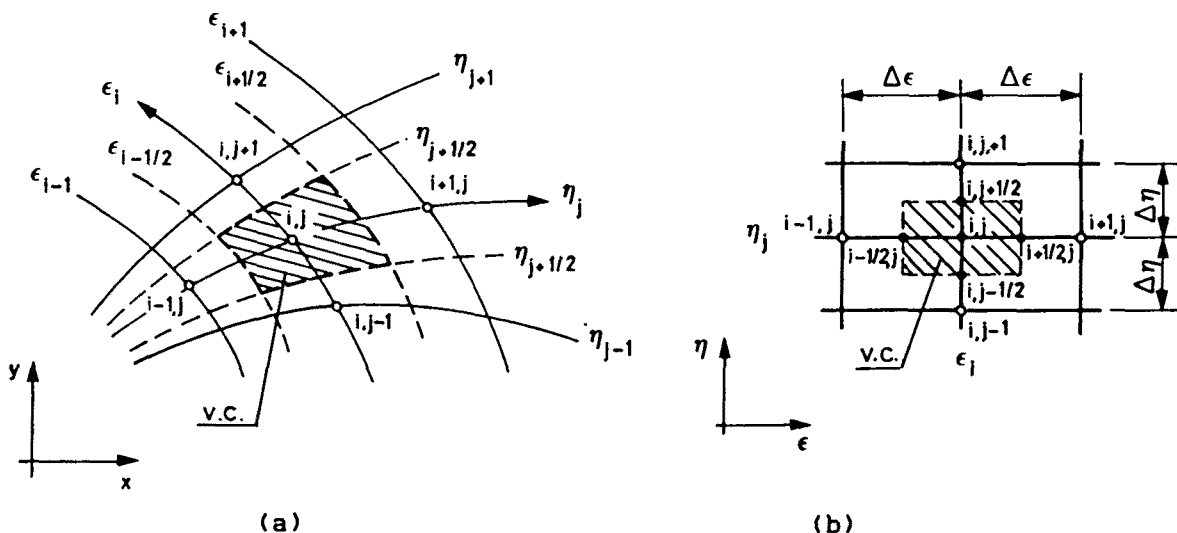


Fig. 6 Volumen de control (V.C.) finito asignado al nodo (i,j) de la malla en: a) plano físico; b) plano transformado.

De proceder en la forma:

- Expresar las componentes covariantes de la velocidad en la base local, en términos de la función de corriente y en coordenadas curvilíneas. Así por ejemplo, de (2.70b):

$$\int_{\epsilon_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\epsilon_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j+\frac{1}{2}}} \vec{v} \cdot \vec{e}_2 \, d\eta = - \int_{\epsilon_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\epsilon_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{g^{11}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{12}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right] d\eta \quad (2.43)$$

- Aproximar numéricamente las integrales suponiendo que la componente covariante de la velocidad se mantiene constante a lo largo de la cara correspondiente del V.C. Así, para la integral anterior será:

$$\approx - \left[\frac{g^{11}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{12}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right]_{(i-1/2, j)} \Delta \eta \quad (2.44)$$

- Aproximar numéricamente las derivadas de la función de corriente según el criterio indicado en (2.36).

Finalmente, de sustituir en (2.42) se obtiene una ecuación de discretización (del tipo indicado en 2.25) que resulta ser equivalente a la obtenida anteriormente según el esquema numérico FC-2. Es por ello que omitiremos su reproducción.

La densidad y los coeficientes métricos en las caras del V.C., se obtienen de la misma manera que la indicada en FC-2 para los puntos $(i\pm 1/2, j\pm 1/2)$.

----- o -----

En este apartado se han indicado tres esquemas numéricos para el tratamiento de los puntos interiores del dominio. Los dos primeros, FC-1 y FC-2, son de tipo diferencial mientras que el tercero, FC-3, es de tipo integral.

Consecuencia del empleo de mallas uniformemente distribuidas (en el plano transformado) y de los criterios utilizados en la aproximación numérica de las derivadas e integrales, se ha constatado que los esquemas FC-2 y FC-3 dan unas ecuaciones de discretización equivalentes.

De los tres esquemas numéricos presentados, el FC-3 es el que permite (seguido del FC-2) una más fácil interpretación física de los criterios numéricos adoptados. También permite, como se verá en el siguiente apartado, un tratamiento más conveniente de condiciones de contorno del tipo Neumann. Para el tratamiento de posibles puntos singulares (discontinuidades en el contorno, discontinuidades en puntos interiores de la malla generada,...) el esquema más adecuado es el FC-3.

2.2.1b Ecuaciones de discretización para los puntos del contorno

En la zona de entrada del flujo (Fig. 3, contorno Ce) se supone conocida la distribución de velocidades. A partir de la componente normal de la velocidad al contorno se obtiene, por integración a lo largo de Ce, la distribución de la función de corriente. Así pues, de (2.66a) y (2.76):

$$\Psi_{(i=1,j)} - \Psi_{(i=1,j=1)} = \int_{\epsilon_1, \eta_1}^{\epsilon_1, \eta_j} \frac{\rho \sqrt{g} l l u^p l}{J} d\eta \quad (2.45)$$

Si $\psi(\epsilon, \eta)$ es solución de la ecuación diferencial de la función de corriente, también lo será $\psi(\epsilon, \eta) + K$, siendo K una constante arbitraria. Por tanto, es posible fijar el valor de la función de corriente en un punto cualquiera y referenciar el resto a dicho valor. En los ejemplos para la contrastación de resultados (apartado 2.4) se ha tomado $\psi = 0$ en el punto $(i=1, j=1)$.

Los contornos laterales Ci y Cs representan zonas impermeables al flujo coincidiendo, por tanto, con líneas de corriente ($\psi = cte$). El valor de la función de corriente en Ci y Cs se obtiene de (2.45). Así, para el contorno inferior $\psi_i = \psi_e(1, 1)$, mientras que para el superior $\psi_s = \psi_e(1, M+1)$.

La densidad en los contornos laterales se determina, en los nodos correspondientes de la malla, mediante la ecuación (2.27). Para la discretización de dicha ecuación, la derivada de la función de corriente en la dirección ϵ es aproximada numéricamente según la expresión (2.24a). La derivada en la dirección η se ha evaluado en base a ajustes polinómicos de la función de corriente ($\psi = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + \dots$) a los puntos adyacentes del contorno. Se han ensayado ajustes polinómicos de primer y de segundo grado. Así por ejemplo, para el contorno inferior (Fig. 7a) el ajuste a dos puntos conduce a:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)_{i,j=1} = \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j}}{\Delta \eta} \quad (2.46a)$$

Para el caso de que el ajuste se realice a tres puntos será:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)_{i,j=1} = \frac{-3\Psi_{i,j} + 4\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j+2}}{2 \Delta \eta} \quad (2.46b)$$

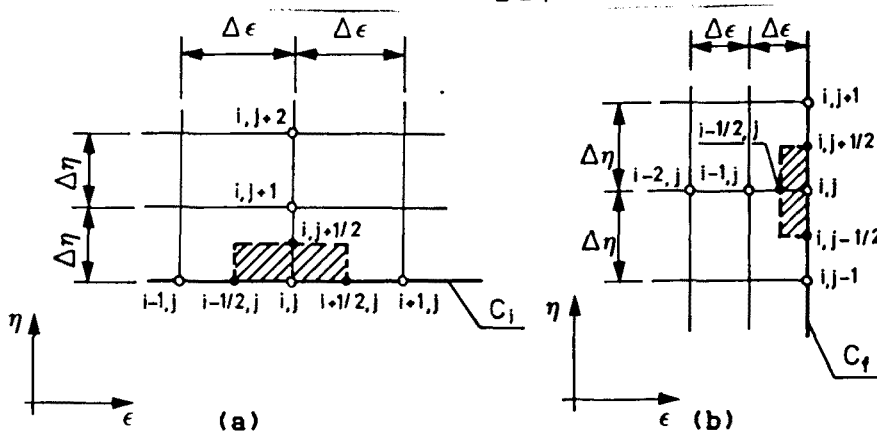


Fig. 7 Detalle de un elemento discreto del: (a) contorno lateral Ci ($i, j=1$); b) contorno de salida Cf ($i=N+1, j$).

Los coeficientes métricos en los puntos de los contornos laterales se determinan en base a las expresiones (2.A32)(2.A26) del apéndice A. La aproximación numérica de x_ϵ e y_ϵ se realiza según un criterio análogo al efectuado con la función de corriente en (2.24a). Los valores de x_η e y_η se han determinado en base a aproximaciones numéricas del tipo indicado en (2.46a) o (2.46b).

Para la zona de salida (contorno Cf) indicaremos dos posibles situaciones según se trate de contorno de Dirichlet o de Neuman:

a) Se supone conocida la distribución de velocidades. El valor de la función de corriente se determina por integración de la componente normal de la velocidad al contorno, de forma análoga a la indicada para Ce, a lo largo de Cf.

b) Se supone conocida la componente tangencial de la velocidad en Cf. Para el caso de que dicha componente sea nula (flujo normal al contorno), también lo será la componente covariante de la velocidad (cf. 2.74), es decir:

$$V_{2(i=N+1,j)} = 0 \quad (j=1,2,\dots,M+1) \quad (2.47)$$

El análisis de esta condición de contorno la efectuaremos según dos criterios numéricos:

b1) Un primer criterio numérico se obtiene al discretizar la ecuación (2.47) convenientemente expresada en términos de la función de corriente. Así, de introducir (2.70b) en dicha ecuación se tiene:

$$\left[g^{11} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + g^{12} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right]_{i=N+1,j} = 0 \quad (2.48)$$

La aproximación numérica de las derivadas la efectuaremos de manera similar a la indicada para los contornos laterales. Para la malla de la Fig. 7b, la derivada en η se expresa en la forma:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_{i=N+1,j} \approx \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2 \Delta \eta} \quad (2.49)$$

Para la derivada en ϵ emplearemos ajustes polinómicos a dos puntos o a tres puntos, es decir:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \right)_{i=N+1,j} \approx \frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j}}{\Delta \epsilon} \quad (2.50a)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \right)_{i=N+1,j} \approx \frac{3\Psi_{i,j} - 4\Psi_{i-1,j} + \Psi_{i-2,j}}{2 \Delta \epsilon} \quad (2.50b)$$

Sustituyendo las aproximaciones numéricas de las derivadas en la expresión (2.48) y reordenando convenientemente, se obtiene una ecuación de discretización para la función de corriente del tipo indicado en (2.25). Si se emplea en las derivadas en la dirección ϵ ajustes a dos puntos, ec. (2.50a), los coeficientes de discretización serán:

$$\begin{aligned}
 a_{i+1,j} &= 0 & a_{i-1,j} &= g^{11}/\Delta\epsilon \\
 a_{i,j+1} &= -g^{12}/(2\Delta\eta) & a_{i,j-1} &= g^{12}/(2\Delta\eta) \\
 a_{i,j} &= g^{11}/\Delta\epsilon & a_R &= 0
 \end{aligned} \tag{2.51a}$$

Para el caso de ajustes a tres puntos, ec. (2.50b), tendremos:

$$\begin{aligned}
 a_{i+1,j} &= 0 & a_{i-1,j} &= 4g^{11}/\Delta\epsilon \\
 a_{i,j} &= 3g^{11}/\Delta\epsilon & a_R &= -g^{11}\psi_{i-2,j}/\Delta\epsilon \\
 a_{i,j+1} &= -g^{12}/\Delta\eta & a_{i,j-1} &= g^{12}/\Delta\eta
 \end{aligned} \tag{2.51b}$$

b2) Un segundo criterio numérico es obtenido al aplicar la condición de irrotacionalidad a volúmenes de control (V.C.) asignados a los nodos de la malla en el contorno de salida (Fig. 7b). El proceso que se seguirá para la obtención de las ecuaciones de discretización es análogo al realizado para los puntos interiores según el esquema FC-3. Así, de aplicar (2.31) a dicho V.C. se tiene:

$$\int_{S_{i-1/2,j}} \vec{v} \cdot \vec{e}_2 \, d\eta + \int_{S_{i,j+1/2}} \vec{v} \cdot \vec{e}_1 \, d\epsilon - \int_{S_{i,j}} \vec{v} \cdot \vec{e}_2 \, d\eta - \int_{S_{i,j-1/2}} \vec{v} \cdot \vec{e}_1 \, d\epsilon = 0 \tag{2.52}$$

en donde, por ejemplo, $S_{i-1/2,j}$ indica que la integral se realiza a lo largo de la cara del V.C. correspondiente al punto $(i-1/2, j)$. La circulación se ha considerado positiva en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Los productos escalares de la velocidad con los vectores de la base local son las componentes covariantes de la velocidad en dicha base. Así pues, de la condición expresada en (2.47) se sigue que la integral curvilínea a lo largo de la cara $S_{i,j}$ del V.C. es nula.

De introducir en (2.52) las componentes covariantes de la velocidad en términos de la función de corriente, ec. (2.70), y de aproximar las integrales resultantes según el criterio indicado en (2.44) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{g^{11}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{12}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right]_{(i-1/2,j)} \Delta\eta + \left[\frac{g^{21}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{22}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right]_{(i,j+1/2)} \frac{\Delta\epsilon}{2} - \\
 - \left[\frac{g^{21}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{22}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right]_{(i,j-1/2)} \frac{\Delta\epsilon}{2} = 0
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Finalmente, de sustituir las derivadas por cociente de incrementos (cf. 2.36) y de reordenar según la ecuación de discretización (2.25) se obtiene:

$$\begin{aligned}
a_{i+1,j} &= 0 & a_{i-1,j} &= \frac{\Delta \eta}{\Delta \epsilon} \left(\frac{g^{11}}{\rho J_{i-\frac{1}{2},j}} \right) \\
a_{i,j+1} &= \frac{\Delta \epsilon}{2\Delta \eta} \left(\frac{g^{22}}{\rho J_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) & a_{i,j-1} &= \frac{\Delta \epsilon}{2\Delta \eta} \left(\frac{g^{22}}{\rho J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right) \\
a_{i,j} &= a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} & & (2.54) \\
a_R &= - \left(\frac{g^{12}}{\rho J_{i-\frac{1}{2},j}} \right) \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1} + \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}}{4} + \\
&+ \left(\frac{g^{21}}{\rho J_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{4} - \\
&- \left(\frac{g^{21}}{\rho J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right) \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j-1} - \psi_{i-1,j-1}}{4}
\end{aligned}$$

Nótese que ψ_ϵ en $(i, j \pm 1/2)$ se han obtenido de promediar las derivadas, según el criterio numérico indicado en (2.50a), en los nodos (i, j) e $(i, j \pm 1)$.

Las densidades y los parámetros métricos en las caras del V.C. se evalúan de forma análoga a la efectuada según el esquema FC-3 para los puntos interiores.

Este segundo criterio numérico unifica, a diferencia del primero, la condición impuesta en (2.47) con la condición de irrotacionalidad del flujo. La mayor información implícita en las ecuaciones de discretización hace que este esquema sea, en general, superior al primero.

Un esquema numérico equivalente al expuesto puede ser obtenido a partir de la ecuación diferencial (2.34) de la función de corriente. Para ello, las derivadas de las componentes covariantes de la velocidad (cf. ec. 2.33) son aproximadas numéricamente en la forma:

$$\frac{V_2(i,j) - V_2(i-\frac{1}{2},j)}{\Delta \epsilon/2} - \frac{V_1(i,j+\frac{1}{2}) - V_1(i,j-\frac{1}{2})}{\Delta \eta} = 0 \quad (2.55)$$

De considerar la condición (2.47) y de expresar las componentes covariantes de la velocidad en términos de la función de corriente, obtendremos una ecuación equivalente a la indicada en (2.53).

En el caso de ser conocida la velocidad en el contorno Cf, la densidad se obtiene directamente de (2.11). Para la situación indicada en b (contorno Neuman), la densidad se obtiene de (2.27) al aproximar numéricamente las derivadas de la función de corriente. Los criterios numéricos utilizados son los ya indicados en (2.49) y en (2.50a) si el ajuste es a dos puntos o (2.50b) si es a tres puntos.

Los coeficientes métricos en los puntos del contorno C_f se determinan en base a las expresiones (2.A32)(2.A26). En la aproximación de las derivadas se emplean criterios análogos a los utilizados para la función de corriente en (2.49) y en (2.50a) o (2.50b).

2.2.1c Resolución del sistema de ecuaciones discretas. Análisis de la convergencia.

En los apartados 2.2.1a y 2.2.1b se han obtenido, para cada nodo de la malla de discretización, dos tipos de ecuaciones discretas: a) la de la función de corriente (ec. 2.25), en la que los coeficientes de discretización dependen del punto de la malla, interior/contorno, y del esquema numérico adoptado; b) la de la densidad (ec. 2.27) previa sustitución de las derivadas por cociente de incrementos.

De esta forma se ha obtenido un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales de igual número de ecuaciones e incógnitas. La resolución de dicho sistema la efectuamos por métodos iterativos del tipo:

- a) Gauss-Seidel
- b) Gauss-Seidel con resolución directa de las ecuaciones columna a columna por un TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) [11];
- c) Idem aplicando el TDMA fila a fila;
- d) Idem aplicando el TDMA alternativamente fila a fila y columna a columna.

Con el fin de acelerar la convergencia del método iterativo, se emplean técnicas de sobrerrelajación para la función de corriente.

Durante el proceso iterativo puede ocurrir que en ciertos puntos de la malla se den situaciones físicamente imposibles. Esto sucede cuando al calcular la densidad mediante la ec. (2.27), la temperatura ($\rho = T^{1/k-1}$) toma valores negativos. Ello es debido a que en la evaluación numérica del término que representa el módulo de la velocidad (cf. 2.62), este toma valores excesivamente elevados. La probabilidad de que aparezcan puntos en donde la temperatura sea menor que cero aumenta al aumentar el número de Mach Mo y la densidad de la malla. Otros factores que influyen son la geometría del flujo, los valores supuestos de ψ y ρ para el inicio de las iteraciones, criterios de discretización de la ecuaciones, etc.

Para evitar que al aparecer puntos con $T < 0$ el proceso iterativo se interrumpa, la densidad en dichos puntos se evalúa promediando la obtenida en los nodos adyacentes. Este criterio por sí solo no asegura la convergencia del método iterativo; es por ello que ha sido necesario emplear factores de subrelajación, fv ($0 < fv < 1$), para las velocidades.

A continuación realizaremos el análisis de la convergencia del método iterativo de Gauss-Seidel para las ecuaciones discretas obtenidas según el esquema numérico FC-1 y para la situación de flujo incompresible. En este caso las ecuaciones son lineales.

La ecuación de discretización (2.25) puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}
 a_{i,j} \psi_{i,j} \equiv & a_{i+1,j} \psi_{i+1,j} + a_{i-1,j} \psi_{i-1,j} + a_{i,j+1} \psi_{i,j+1} + \\
 & + a_{i,j-1} \psi_{i,j-1} + a'_R (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1})
 \end{aligned}
 \tag{2.56}$$

siendo $a'_R = g^{12} / (\Delta\epsilon\Delta\eta)$.

En el transcurso del proceso iterativo y para la iteración k , tendremos:

$$a_{i,j} \psi_{i,j}^k \approx a_{i+1,j} \psi_{i+1,j}^k + a_{i-1,j} \psi_{i-1,j}^k + \dots \quad (2.57)$$

El valor de la función de corriente que satisface las ecuaciones de discretización (2.56) es igual al valor de la función de corriente en la iteración k del proceso iterativo más el correspondiente orden de error:

$$\psi_{i,j} = \psi_{i,j}^k + O(\psi_{i,j}) \quad (2.58)$$

De sustituir (2.58) en (2.56) y de introducir (2.57) en la ecuación resultante se obtiene:

$$a_{i,j} O(\psi_{i,j}) \approx a_{i+1,j} O(\psi_{i+1,j}) + a_{i-1,j} O(\psi_{i-1,j}) + a_{i,j+1} O(\psi_{i,j+1}) + a_{i,j-1} O(\psi_{i,j-1}) + a'_R [O(\psi_{i+1,j+1}) - O(\psi_{i+1,j-1}) - O(\psi_{i-1,j+1}) + O(\psi_{i-1,j-1})] \quad (2.59)$$

Suponiendo que los ordenes de error de los puntos adyacentes al nodo (i,j) sean iguales en magnitud y del mismo signo (situación más desfavorable), tendremos:

$$O(\psi_{i,j}) \approx \left(1 + \frac{\Delta\epsilon \Delta\eta g^{12}}{\Delta\eta^2 g^{11} + \Delta\epsilon^2 g^{22}} \right) O(\psi_{i\pm 1, j\pm 1}) \quad (2.60)$$

Del análisis de la expresión anterior se deduce que, para el caso de coordenadas ortogonales, $g^{12} = 0$, la convergencia del proceso iterativo está asegurada. En la situación general de coordenadas no ortogonales, la convergencia se verá favorecida cuanto más pequeño sea el término:

$$\frac{\Delta\epsilon \Delta\eta g^{12}}{\Delta\eta^2 g^{11} + \Delta\epsilon^2 g^{22}}$$

Para las ecuaciones de discretización obtenidas según el esquema numérico FC-2 o el FC-3, y en el caso de flujo incompresible, el análisis de convergencia sería análogo.

La consideración de la compresibilidad conduce a unas ecuaciones de discretización no lineales, lo cual complica considerablemente el estudio. No obstante la metodología del análisis sería similar.

2.2.1d Determinación de la velocidad. Componentes covariantes y contravariantes.

Una vez que se han obtenido los valores de la función de corriente y de la densidad en cada nodo de la malla, se procede a la determinación de las velocidades. En este apartado obtendremos las expresiones que definen las componentes de la velocidad en términos de la función de corriente tanto en coordenadas cartesianas como en coordenadas curvilíneas.

La determinación numérica de dichas componentes se realiza de forma más conveniente en el plano transformado. Por ello, las derivadas serán expresadas en función de las variables independientes ϵ y η . Dichas derivadas son sustituidas por cociente de incrementos según criterios análogos a los empleados en los apartados 2.2.1a y 2.2.1b para los puntos interiores de la malla y para los puntos del contorno. En la evaluación de los parámetros métricos, las derivadas son aproximadas numéricamente según criterios similares a los empleados para la función de corriente.

Las componentes cartesianas de la velocidad, en términos de ψ y en función de las variables independientes ϵ y η , las obtendremos de adimensionalizar la expresión (2.12) y de efectuar los correspondientes cambios de de variable (cf. ec. 2.21a):

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \epsilon_y + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \eta_y \right) \\ v_y &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \epsilon_x + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \eta_x \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

De las componentes cartesianas de la velocidad se obtiene la siguiente expresión para el módulo de la velocidad:

$$v = \frac{1}{\rho} \left[g^{11} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right)^2 + 2g^{12} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + g^{22} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.62)$$

En el apéndice A definimos las componentes contravariantes y covariantes de un vector en una base dada. A continuación procederemos a la determinación de las componentes contravariantes y covariantes del vector velocidad en la base local y en la base recíproca. Dichas componentes se expresarán en términos de ψ y en función de las variables independientes ϵ y η .

a) Las componentes contravariantes V^i , en la base local, del vector velocidad \vec{v} están definidas por:

$$\vec{v} = V^1 \vec{e}_1 + V^2 \vec{e}_2 \quad (2.63)$$

En (2.A9) demostramos que las componentes contravariantes de un vector en una base dada coinciden con las componentes covariantes del mismo en la base recíproca, por tanto:

$$V^i = \vec{v} \cdot \vec{e}^i \quad (i = 1, 2) \quad (2.64)$$

De efectuar el producto escalar del vector velocidad $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ con los vectores de la base recíproca (2.A25) se obtiene:

$$\begin{aligned} V^1 &= \epsilon_x v_x + \epsilon_y v_y \\ V^2 &= \eta_x v_x + \eta_y v_y \end{aligned} \quad (2.65)$$

Finalmente, de sustituir (2.62) en la expresión anterior:

$$V^1 = \frac{J}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (2.66a)$$

$$V^2 = - \frac{J}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \quad (2.66b)$$

b) Las componentes contravariantes de la velocidad en la base recíproca las representamos por V_i y están definidas por la expresión:

$$\vec{v} = V_1 \vec{e}^1 + V_2 \vec{e}^2 \quad (2.67)$$

Los valores de V_i coinciden con las componentes covariantes de la velocidad en la base local, por tanto:

$$V_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.68)$$

De la expresión anterior, introduciendo (2.A24) y (2.A31), tenemos:

$$V_1 = x_\epsilon v_x + y_\epsilon v_y = \frac{1}{J} (\eta_y v_x - \eta_x v_y) \quad (2.69)$$

$$V_2 = x_\eta v_x + y_\eta v_y = - \frac{1}{J} (\epsilon_y v_x - \epsilon_x v_y)$$

Finalmente, de sustituir (2.62):

$$V_1 = \frac{g^{21}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{22}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (2.70a)$$

$$V_2 = - \frac{g^{11}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} - \frac{g^{12}}{\rho J} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (2.70b)$$

Las componentes contravariantes de la velocidad en una base dada no coinciden, en general, con las componentes que resultan de descomponer el vector velocidad en las direcciones definidas por los vectores de dicha base. De igual forma, las componentes covariantes de la velocidad en una base dada no coinciden, en general, con la proyecciones ortogonales de la velocidad en las direcciones definidas por los vectores de dicha base. Ello es debido a que ni la base local ni la base recíproca son bases normalizadas.

Nótese que en general las componentes contravariantes y covariantes no tienen, desde un punto de vista dimensional, un sentido de velocidad.

A continuación relacionaremos las componentes físicas (es decir, componentes sobre vectores unitarios) del vector velocidad, con las correspondientes componentes contravariantes y covariantes:

- a) Las componentes de la velocidad sobre las direcciones definidas por los vectores de la base local las representaremos por v^i (Fig. 8a). Si indicamos por \vec{b}_i a los vectores normalizados de dicha base, se verifica que:

$$\vec{v} = v^1 \vec{b}_1 + v^2 \vec{b}_2 = \frac{v^1}{|\vec{e}_1|} \vec{e}_1 + \frac{v^2}{|\vec{e}_2|} \vec{e}_2 \quad (2.71)$$

De (2.63) y de (2.A14):

$$v^i = |\vec{e}_i| V^i = \sqrt{g_{ii}} V^i \quad (i = 1, 2) \quad (2.72)$$

La proyección ortogonal de \vec{v} sobre la dirección definida por el vector \vec{e}_i de la base local la representaremos por v_{pi} (Fig. 8a). Se verifica que:

$$v_{pi} = \vec{v} \cdot \vec{b}_i = \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_i}{|\vec{e}_i|} \quad (i = 1, 2) \quad (2.73)$$

De (2.68), (2.A14):

$$v_{pi} = \frac{V_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (i = 1, 2) \quad (2.74)$$

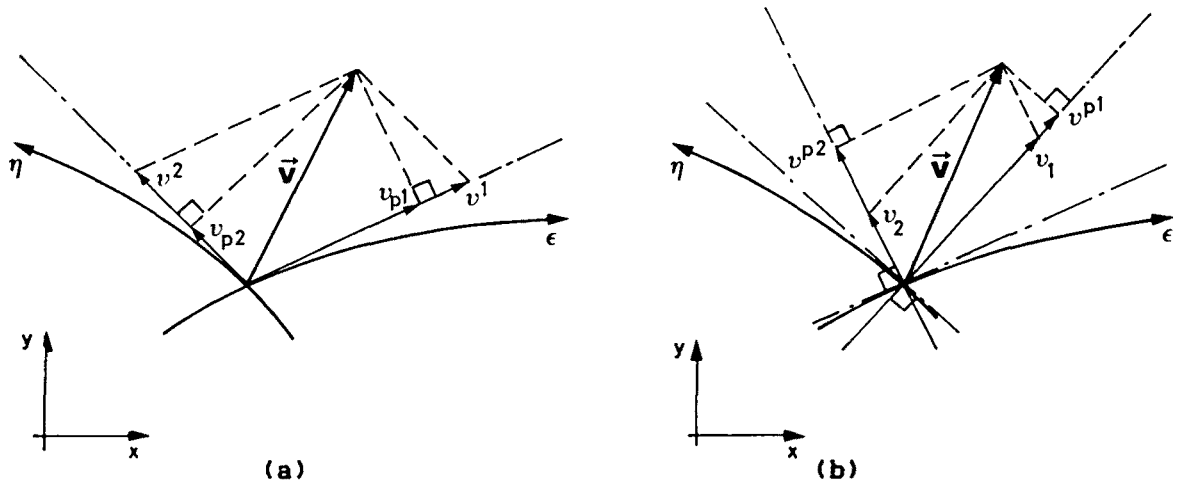


Fig. 8 Componentes y proyecciones ortogonales de la velocidad en las direcciones definidas por los: a) vectores de la base local; b) vectores de la base recíproca.

- b) Sean v_i las componentes de la velocidad en las direcciones definidas por los vectores de la base recíproca, y v^{pi} la proyección ortogonal de \vec{v} en la dirección definida por el vector \vec{e}^i de la base recíproca (Fig. 8b). De proceder de forma análoga a la indicada anteriormente se tiene:

$$v_i = \sqrt{g^{ii}} V_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.75)$$

$$v^{pi} = \frac{V^i}{\sqrt{g^{ii}}} \quad (i = 1, 2) \quad (2.76)$$

2.2.2 Integración numérica en base a coordenadas rectangulares

En este apartado indicaremos los criterios utilizados en la resolución numérica del flujo potencial compresible mediante el empleo de la función de corriente y en base a mallas de discretización rectangulares [14].

Para los puntos interiores de la malla y para los puntos cercanos al contorno, indicaremos dos criterios para la obtención de las ecuaciones de discretización: a) por sustitución, en la ecuación diferencial de la función de corriente, de las derivadas por cociente de incrementos, b) mediante la aplicación de la condición de irrotacionalidad a volúmenes de control finitos:

a) Para el primer criterio, la aproximación numérica de las derivadas la efectuamos en base a desarrollos en series de Taylor hasta los términos de segundo orden. Así por ejemplo, para la malla representada en la Fig. 9a:

$$\psi_{+i} = \psi_{i,j} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{i,j} d_{+i} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_{i,j} d_{+i}^2 \quad (2.77)$$

$$\psi_{-i} = \psi_{i,j} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{i,j} d_{-i} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_{i,j} d_{-i}^2$$

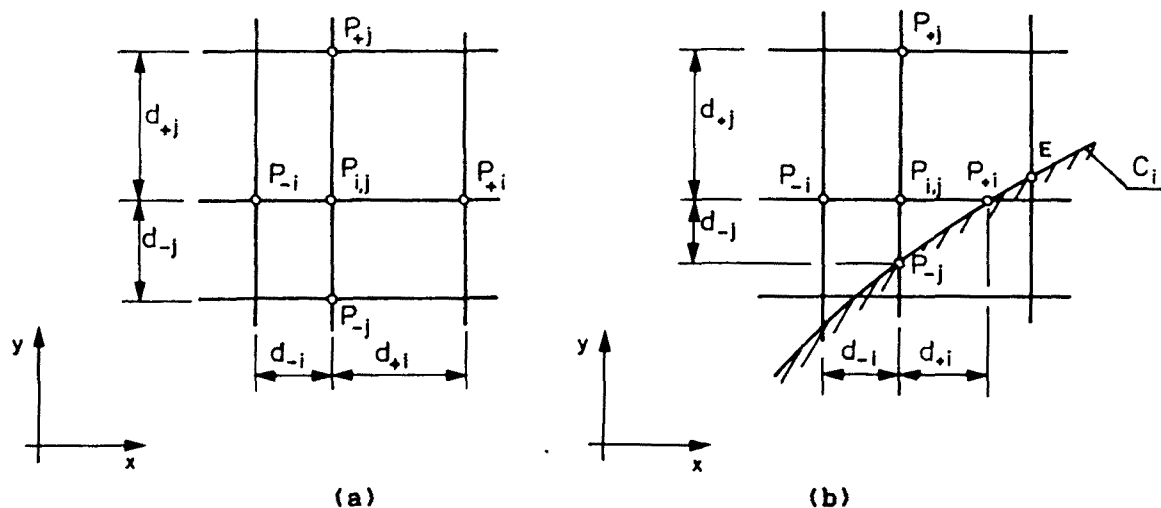


Fig. 9 Detalle de la discretización en base a mallas rectangulares: a) puntos interiores del dominio; b) puntos cercanos a contornos irregulares.

Despejando de las expresiones anteriores la derivada primera y segunda, se obtiene:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{(\Psi_{+i} - \Psi_{i,j})d_{-i}^2 - (\Psi_{-i} - \Psi_{i,j})d_{+i}^2}{d_{-i}d_{+i}(d_{-i} + d_{+i})} \quad (2.78a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)_{i,j} = 2 \cdot \frac{(\Psi_{+i} - \Psi_{i,j})d_{-i} + (\Psi_{-i} - \Psi_{i,j})d_{+i}}{d_{-i}d_{+i}(d_{-i} + d_{+i})} \quad (2.78a)$$

De proceder de forma análoga para las derivadas en 'y', y de sustituir en la ecuación de la función de corriente (2.17), se obtiene la siguiente ecuación de discretización:

$$a_{i,j} \Psi_{i,j} = a_{+i} \Psi_{+i} + a_{-i} \Psi_{-i} + a_{+j} \Psi_{+j} + a_{-j} \Psi_{-j} \quad (2.79)$$

en la que:

$$\begin{aligned} a_{+i} &= \frac{1}{d_{+i}(d_{+i} + d_{-i})} \left[2 - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x}\right)_{i,j} d_{-i} \right] \\ a_{-i} &= \frac{1}{d_{-i}(d_{+i} + d_{-i})} \left[2 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x}\right)_{i,j} d_{+i} \right] \\ a_{+j} &= \frac{1}{d_{+j}(d_{+j} + d_{-j})} \left[2 - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial y}\right)_{i,j} d_{-j} \right] \\ a_{-j} &= \frac{1}{d_{-j}(d_{+j} + d_{-j})} \left[2 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial y}\right)_{i,j} d_{+j} \right] \\ a_{i,j} &= a_{+i} + a_{-i} + a_{+j} + a_{-j} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Las derivadas del logaritmo neperiano de la densidad son aproximadas numéricamente según el criterio indicado en la expresión (2.78a).

Las ecuaciones de discretización así obtenidas son válidas tanto para los puntos interiores de la malla (aun en el caso de mallas rectangulares no uniformemente distribuidas, Fig. 9a) como para los puntos cercanos a contornos irregulares (Fig. 9b).

Para la determinación de la densidad, ec. (2.18), las derivadas de la función de corriente se han aproximado numéricamente según el criterio indicado en (2.78a).

- b) Un segundo criterio para la obtención de las ecuaciones de discretización se tiene de aplicar la condición de irrotacionalidad a volúmenes de control finitos (Fig. 10):

$$\int_a^b v_y dy + \int_b^c v_x dx - \int_c^d v_y dy - \int_d^a v_x dx = 0 \quad (2.81)$$

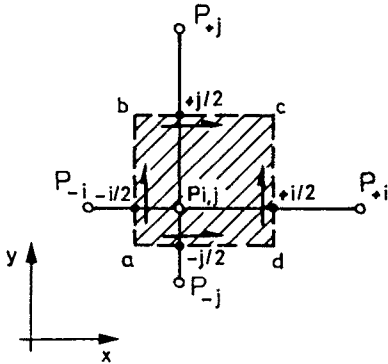


Fig. 10 Volumen de control asignado al punto (i,j) y centrado entre puntos adyacentes.

En la aproximación numérica de las integrales supondremos que en las caras del volumen de control la componente correspondiente de la velocidad se mantiene uniforme. La velocidad se calcula en el punto medio entre nodos de la malla (suponemos que el volumen de control está centrado entre nodos, Fig. 10) y en términos de la función de corriente (ec. 2.8 adimensionalizada). Así por ejemplo:

$$\int_a^b v_y dy = (v_y)_{-i/2} \cdot \frac{d_{+j} + d_{-j}}{2} = \frac{1}{\rho_{-i/2}} \frac{\psi_{i,j} - \psi_{-i}}{d_{-i}} \cdot \frac{d_{+j} + d_{-j}}{2} \quad (2.82)$$

De proceder de forma análoga para las restantes integrales y reordenando según la ecuación de discretización (2.79), se obtienen los siguientes coeficientes de discretización:

$$\begin{aligned} a_{+i} &= \frac{1}{\rho_{+i/2}} \frac{d_{+j} + d_{-j}}{d_{+i}} & a_{-i} &= \frac{1}{\rho_{-i/2}} \frac{d_{+j} + d_{-j}}{d_{-i}} \\ a_{+j} &= \frac{1}{\rho_{+j/2}} \frac{d_{+i} + d_{-i}}{d_{+j}} & a_{-j} &= \frac{1}{\rho_{-j/2}} \frac{d_{+i} + d_{-i}}{d_{-j}} \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$a_{i,j} = a_{+i} + a_{-i} + a_{+j} + a_{-j}$$

Las densidades en las caras del volumen de control son obtenidas promediando las calculadas en los nodos adyacentes.

Nótese que para la situación particular de flujo incompresible ($M=0$), las ecuaciones de discretización obtenidas según el primer criterio y las obtenidas de este segundo criterio, son equivalentes.

Para los puntos situados en los contornos se procede en la forma indicada en el apartado 2.2. Para el contorno de salida Cf (Fig. 3), y en el caso de no ser conocida la distribución de velocidades, será necesario indicar alguna condición respecto a la misma. Si suponemos, al igual que se hizo en el apartado 2.2.1b, que la velocidad a la salida es normal al contorno y que éste

es vertical, se tiene que $v_y = 0$. De aplicar la condición de irrotacionalidad al volumen de control de la Fig. 11, teniendo en cuenta la condición anterior, se obtiene una ecuación de discretización del tipo indicado en (2.79), en la que:

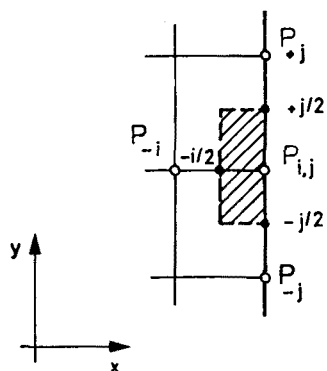


Fig. 11 Volumen de control finito situado en el contorno de salida Cf.

$$\begin{aligned}
 a_{+i} &= 0 \\
 a_{-i} &= \frac{1}{\rho_{-i/2}} \frac{d_{+j} + d_{-j}}{d_{-i}} \\
 a_{+j} &= \frac{1}{\rho_{+j/2}} \frac{d_{-i}}{d_{+j}} \\
 a_{-j} &= \frac{1}{\rho_{-j/2}} \frac{d_{-i}}{d_{-j}} \\
 a_{i,j} &= a_{-i} + a_{+j} + a_{-j}
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

La densidad se calcula mediante la ec. (2.18), siendo las derivadas de la función de corriente aproximadas numéricamente mediante ajustes polinómicos de primer grado.

Excepcionalmente y para los puntos obtenidos de la intersección del contorno con líneas horizontales de la malla, la densidad se calcula por interpolación lineal entre los valores más próximos del contorno. Así por ejemplo, para el punto P_{+i} (Fig. 9b) la interpolación lineal se realiza con los valores de la densidad obtenidos en los puntos P_{-j} y E.

--- o ---

Como consecuencia de las discretizaciones propuestas, resulta un sistema de ecuaciones algebraicas de igual número de ecuaciones que de incógnitas. La resolución de dicho sistema se realiza en base a los criterios y métodos comentados en el apartado 2.2.1c.

2.3 RESOLUCION NUMERICA DE FLUJOS POTENCIALES SUBSONICOS COMPRESIBLES MEDIANTE LA UTILIZACION DEL POTENCIAL DE VELOCIDAD

El comportamiento del flujo permanente, bidimensional, irrotacional e isoentrópico de un gas perfecto es descrito, mediante la utilización del potencial de velocidad, por las ecuaciones (2.15) y (2.11). De introducir en esta última el módulo de la velocidad en términos del potencial de velocidad (ec. 2.14) y de expresar dichas ecuaciones en forma adimensional, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.85)$$

$$\rho = \left[1 - \frac{(k-1)M_0^2}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - 1 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (2.86)$$

siendo las variables adimensionales de la forma:

$$\phi = \frac{\bar{\phi}}{\bar{v}_0 \bar{L}}, \quad \rho = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0}, \quad x = \frac{\bar{x}}{\bar{L}}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{L}}, \quad v = \frac{\bar{v}}{\bar{v}_0} \quad (2.87)$$

Las condiciones de contorno necesarias para la integración del sistema de ecuaciones arriba indicado, y en el caso de un flujo confinado dado (Fig. 3), son del tipo:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in C_e & \quad \phi(x, y) = \phi_e(x, y) \\ \forall (x, y) \in C_i & \quad \partial \phi / \partial n = 0 \\ \forall (x, y) \in C_s & \quad \partial \phi / \partial n = 0 \\ \forall (x, y) \in C_f & \quad \partial \phi / \partial n = f(x, y) \\ & \quad \text{y/o } \partial \phi / \partial s = g(x, y) \end{aligned} \quad (2.88)$$

en donde 'n' y 's' representan la dirección normal y tangencial, respectivamente, al contorno.

El conjunto presenta, así pues, condiciones de contorno de Neuman a excepción de la zona de entrada C_e , en la que las condiciones son de Dirichlet.

La condición de contorno para la densidad es la propia ecuación (2.86). Así pues, a excepción de las zonas en donde la velocidad es conocida (por ejemplo en el contorno C_e), dicha condición de contorno será de Neuman.

En el apartado 2.3.1 se analiza la resolución numérica de las ecuaciones, en base a discretizar el dominio mediante la generación de un sistema de coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos. En el apartado 2.3.2 se analiza la resolución numérica en base a la discretización del dominio por mallas rectangulares. En ambos casos se hace especial énfasis en el tratamiento de las condiciones de contorno.

Para el desarrollo de estos apartados se seguirá un proceso similar al efectuado en 2.2.1 y 2.2.2 con la función de corriente.

2.3.1 Integración numérica en base a coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos.

En este apartado se proponen diferentes criterios numéricos para la resolución del flujo potencial subsónico compresible, todo ello, en base a discretizar el dominio mediante la generación de coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos.

Las ecuaciones de discretización del potencial de velocidad y de la densidad son obtenidas, según diferentes esquemas numéricos, para los puntos interiores del dominio (apdo. 2.3.1a) y para los puntos del contorno (apdo. 2.3.1b). Resulta, así pues, un sistema de $2 \times N \times (M+1)$ ecuaciones e incógnitas. En el apdo. 2.3.1c se indican los métodos iterativos empleados para su resolución.

Una vez que han sido obtenidos los valores del potencial de velocidad y de la densidad, en cada punto de la malla, se procede a la determinación numérica de las componentes de la velocidad en coordenadas cartesianas y/o en coordenadas curvilíneas (apdo. 2.3.1d).

La distribución de presiones y temperaturas son obtenidas a partir de las relaciones isoentrópicas para un gas perfecto.

Al igual que se hizo en el apdo. 2.2.1, supondremos que las coordenadas curvilíneas generadas toman los valores indicados en (2.16). Así pues, en el plano transformado la malla de discretización será rectangular y uniformemente distribuida (Fig. 2).

2.3.1a Ecuaciones de discretización para los puntos interiores del dominio.

Las ecuaciones de discretización para los puntos interiores serán obtenidas según tres esquemas numéricos: los dos primeros de tipo diferencial mientras que el tercero es de tipo integral. Los esquemas propuestos son:

- Esquema numérico PV-1: Las ecuaciones discretas son obtenidas por integración numérica de la ecuación diferencial del potencial de velocidad escrita en coordenadas curvilíneas. Dicha ecuación es obtenida a partir de la ecuación diferencial del potencial de velocidad en coordenadas cartesianas, efectuando los cambios de variable pertinentes.
- Esquema numérico PV-2: A diferencia del esquema anterior, la ecuación diferencial del potencial de velocidad, en coordenadas curvilíneas, es obtenida de aplicar la condición de conservación de la masa a elementos diferenciales tomados en base de dichas coordenadas. Si bien la ecuación diferencial obtenida es idéntica matemáticamente a la deducida en PV-1, los esquemas numéricos que se derivan de ambas son distintos.
- Esquema numérico PV-3: Las ecuaciones de discretización son obtenidas de aplicar la condición de conservación de la masa a volúmenes de control finitos asignados a cada nodo de la malla.

Esquema numérico PV-1

Para la obtención de este esquema numérico se seguirá un proceso similar al efectuado, en el apdo. 2.2.1a, en FC-1:

- De la ecuación del potencial de velocidad en coordenadas cartesianas (2.85) y de efectuar los correspondientes cambios de variable (cf. ec. 2.21), se obtiene la siguiente ecuación diferencial del potencial de velocidad en coordenadas curvilineas:

$$g^{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon^2} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} + 2g^{12} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon \partial \eta} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + g^{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = \quad (2.89)$$

$$- \left[g^{11} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \epsilon} + g^{12} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} - \left[g^{21} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \epsilon} + g^{22} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \phi}{\partial \eta}$$

en la que g^{ij}, α, β son los coeficientes metricos (ec. 2.23).

- La integracion numérica de dicha ecuación es realizada en el plano transformado (Fig. 4). De aproximar numéricamente las derivadas según el criterio indicado en (2.24), sustituir en la ecuación anterior y reordenar adecuadamente, se obtiene la siguiente ecuación de discretización:

$$a_{i,j} \phi_{i,j} = a_{i+1,j} \phi_{i+1,j} + a_{i-1,j} \phi_{i-1,j} + a_{i,j+1} \phi_{i,j+1} + a_{i,j-1} \phi_{i,j-1} + a_R \quad (2.90)$$

siendo:

$$a_{i+1,j} = \frac{2g^{11} + \Delta \epsilon \left[g^{11} \frac{\ln(\rho_{i+1,j}/\rho_{i-1,j})}{2\Delta \epsilon} + g^{12} \frac{\ln(\rho_{i,j+1}/\rho_{i,j-1})}{2\Delta \eta} + \alpha \right]}{(\Delta \epsilon)^2}$$

$$a_{i,j+1} = \frac{2g^{22} + \Delta \eta \left[g^{21} \frac{\ln(\rho_{i+1,j}/\rho_{i-1,j})}{2\Delta \epsilon} + g^{22} \frac{\ln(\rho_{i,j+1}/\rho_{i,j-1})}{2\Delta \eta} + \beta \right]}{(\Delta \eta)^2} \quad (2.91)$$

$$a_R = \frac{g^{12} (\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j-1})}{\Delta \epsilon \Delta \eta}$$

$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1}$$

Las expresiones para los coeficientes $a_{i-1,j}$ y $a_{i,j-1}$ resultan al sustituir en $a_{i+1,j}$ y $a_{i,j+1}$ '+ $\Delta \epsilon$ ' y '+ $\Delta \eta$ ' por '- $\Delta \epsilon$ ' y '- $\Delta \eta$ ' respectivamente.

La densidad se determina, en el nodo (i,j) de la malla y en el plano transformado, en base a la ecuación (2.86) convenientemente escrita en función de las variables independientes ϵ y η . De efectuar los correspondientes cambios

de variables, se obtiene:

$$\rho = \left[1 - \frac{(k-1)M_0^2}{2} \left(g^{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \right)^2 + g^{12} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + g^{22} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 - 1 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (2.92)$$

La ecuación discretizada de la densidad es obtenida, así pues, de sustituir en la ecuación anterior las derivadas por cociente de incrementos según el criterio numérico empleado en (2.24a).

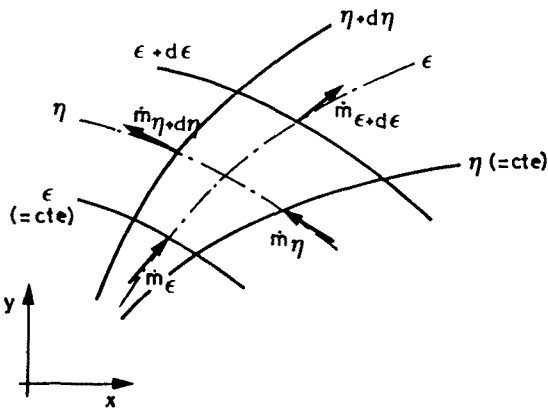
Los coeficientes métricos son evaluados, en el nodo (i,j) de la malla, en la forma indicada en FC-1.

Esquema numérico PV-2

Este segundo esquema numérico se basa en la integración numérica de la ecuación diferencial del potencial de velocidad en coordenadas curvilíneas, obtenida de aplicar la condición de conservación de la masa a elementos diferenciales en dichas coordenadas.

Para el caso de un flujo en régimen permanente, de aplicar la condición de conservación de la masa al elemento diferencial de la Fig. 12 se obtiene:

$$\dot{m}_\epsilon - \dot{m}_{\epsilon+d\epsilon} + \dot{m}_\eta - \dot{m}_{\eta+d\eta} = 0 \quad (2.93)$$



en donde \dot{m} representa el flujo másico por unidad de altura que atraviesa las superficies del elemento diferencial.

De desarrollar la expresión anterior:

$$\frac{\partial \dot{m}_\epsilon}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \dot{m}_\eta}{\partial \eta} = 0 \quad (2.94)$$

Fig. 12 Elemento diferencial en las coordenadas curvilíneas (ϵ, η).

Los flujos máxicos a través de las caras del elemento diferencial se expresan en la forma:

$$\dot{m}_\epsilon = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}^1 \quad \dot{m}_\eta = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}^2 \quad (2.95)$$

en donde $d\vec{S}^i$ representa el vector diferencial de superficie por unidad de altura. La dirección de dicho vector coincide con la de los vectores de la base recíproca y el sentido es hacia el exterior del elemento diferencial. Así pues, considerando (2.A16):

$$d\vec{S}^i = - \frac{\vec{e}^i}{|\vec{e}^i|} dS^i = - \frac{dS^i}{\sqrt{g^{ii}}} \vec{e}^i \quad (2.96)$$

De sustituir el módulo del vector diferencial de superficie (2.A21) en la expresión anterior y de introducir (2.A32) se tiene:

$$d\vec{S}^1 = - \frac{\sqrt{g_{11}} dn}{\sqrt{g^{11}}} \vec{e}^1 = - \frac{dn}{J} \vec{e}^1 \quad d\vec{S}^2 = - \frac{\sqrt{g_{22}} d\epsilon}{\sqrt{g^{22}}} \vec{e}^2 = - \frac{d\epsilon}{J} \vec{e}^2 \quad (2.97)$$

El producto escalar de la velocidad con los vectores de la base recíproca define las componentes covariantes V^i de la velocidad en dicha base. Así, de sustituir (2.97) en (2.95) y las expresiones resultantes en (2.94) se tiene:

$$\frac{\partial \rho V^1/J}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \rho V^2/J}{\partial \eta} = 0 \quad (2.98)$$

Expresando V^i en términos del potencial de velocidad y en función de las variables independientes ϵ y η (2.126) y sustituyendo en (2.98), obtendremos la siguiente ecuación diferencial del potencial de velocidad en coordenadas curvilíneas:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\rho g^{11}}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} + \frac{\rho g^{12}}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho g^{21}}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} + \frac{\rho g^{22}}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (2.99)$$

Para la integración numérica de esta ecuación, en base a elementos discretos del tipo del de la Fig. 4, procederemos de forma análoga a la desarrollada para la función de corriente según el esquema numérico FC-2 (apartado 2.2.1a):

- Sustitución, en (2.99), de las derivadas de las componentes covariantes de la velocidad por cociente de incrementos (cf. 2.35).
- Evaluación numérica de las derivadas del potencial de velocidad según criterios análogos a los indicados en las ec. (2.36).

De reordenar la expresión resultante según la ecuación (2.90), se obtienen los siguientes coeficientes de discretización:

$$\begin{aligned} a_{i+1,j} &= \frac{\Delta \eta}{\Delta \epsilon} \left(\frac{\rho g^{11}}{J} \right)_{i+\frac{1}{2},j} & a_{i-1,j} &= \frac{\Delta \eta}{\Delta \epsilon} \left(\frac{\rho g^{11}}{J} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \\ a_{i,j+1} &= \frac{\Delta \epsilon}{\Delta \eta} \left(\frac{\rho g^{22}}{J} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} & a_{i,j-1} &= \frac{\Delta \epsilon}{\Delta \eta} \left(\frac{\rho g^{22}}{J} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \\ a_{i,j} &= a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} & & (2.100) \\ a_R &= - \left(\frac{\rho g^{12}}{J} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j-1}}{4} + \\ &+ \left(\frac{\rho g^{21}}{J} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{4} + \\ &+ \left(\frac{\rho g^{12}}{J} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{4} - \\ &- \left(\frac{\rho g^{21}}{J} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j-1}}{4} \end{aligned}$$

En la evaluación de las densidades y de los parámetros métricos en los puntos $(i\pm 1/2, j\pm 1/2)$, se han considerado los mismos criterios expuestos para el esquema numérico FC-2 del apto. 2.2.1a.

Esquema numérico PV-3

Este esquema numérico se basa en realizar el balance másico a volúmenes de control (V.C.) finitos asignados a cada nodo de la malla. Para el V.C. de la Fig. 6a y en el supuesto de que el flujo sea permanente, la condición de conservación de la masa se expresa en la forma:

$$\int_{S.C.} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.101)$$

Esta integral se extiende a todas las superficies del volumen de control. El vector superficie (por unidad de altura) $d\vec{S}^i$ es normal a las caras del V.C. y está dirigido hacia el exterior del mismo. De otra parte, las caras del V.C. están delimitadas por superficies coordenadas, por tanto, de (2.96):

$$d\vec{S}^i = \pm (dS^i / \sqrt{g^{ii}}) \vec{e}^i \quad (2.102)$$

El signo positivo o negativo dependerá de que el sentido del vector de superficie coincida o no con el de las líneas coordenadas.

De desarrollar (2.101) para las diferentes caras del V.C. y de introducir la expresión anterior se tiene:

$$-\int_{S_{i-1/2,j}} \rho \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}^1}{\sqrt{g^{11}}} dS^1 + \int_{S_{i,j+1/2}} \rho \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}^2}{\sqrt{g^{22}}} dS^2 + \int_{S_{i+1/2,j}} \rho \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}^1}{\sqrt{g^{11}}} dS^1 - \int_{S_{i,j-1/2}} \rho \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}^2}{\sqrt{g^{22}}} dS^2 = 0 \quad (2.103)$$

en donde, por ejemplo, $S_{i-1/2,j}$ indica que la integral se realiza a lo largo de la cara del V.C. correspondiente al punto $(i-1/2, j)$.

A modo ilustrativo desarrollaremos una de las integrales de la expresión anterior:

- De (2.64) y (2.126a):

$$\int_{S_{i-1/2,j}} \rho \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^1}{\sqrt{g^{11}}} dS^1 = \int_{S_{i-1/2,j}} \rho \frac{v^1}{\sqrt{g^{11}}} dS^1 = \int_{S_{i-1/2,j}} \left(\frac{g^{11}}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{12}}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) dS^1 \quad (2.104)$$

- Suponiendo que la componente covariante de la velocidad en la base recíproca (o contravariante en la base local) se mantiene uniforme a lo largo de la cara del V.C., la integral anterior se puede aproximar en la forma:

$$= \left(\frac{g^{11}}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{12}}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) S_{-i/2} \quad (2.105)$$

$(i-\frac{1}{2}, j)$

en donde el valor de la superficie (por unidad de altura) en dicha cara se obtiene de (2.A21) y (2.A32), en la forma:

$$S_{-i/2} = \int_{S_{i-\frac{1}{2},j}} dS^1 = \int_{S_{i-\frac{1}{2},j}} \frac{\sqrt{g^{11}}}{J} d\eta = \left(\frac{\sqrt{g^{11}}}{J} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \Delta \eta \quad (2.106)$$

- Las derivadas del potencial de velocidad en (2.105) son evaluadas numéricamente, en el plano transformado y en el punto medio $(i-1/2, j)$, en base a criterios del tipo indicado en (2.36).

De proceder de forma análoga para las restantes caras del V.C. y de sustituir en (2.103), obtendríamos unas ecuaciones de discretización que resultan ser equivalentes a las que se derivan del esquema numérico PV-2.

2.3.1b Ecuaciones de discretización para los puntos del contorno.

En la zona de entrada del flujo (Fig. 3, contorno C_e), el potencial de velocidad se obtiene por integración de la componente tangencial de la velocidad, v_{p2} , al contorno. Así, de (2.74), (2.127b) y (2.A32), se tiene:

$$\phi_{(i=1,j)} - \phi_{(i=1,j-1)} = \int_{\epsilon_1, \eta_1}^{\epsilon_1, \eta_j} \frac{\sqrt{g^{11}}}{J} v_{p2} d\eta \quad (2.107)$$

Si $\phi(\epsilon, \eta)$ es solución de la ecuación del potencial de velocidad, también lo será $\phi(\epsilon, \eta) + K$, siendo K una constante arbitraria. Es posible, por tanto, fijar el valor del potencial de velocidad en un punto cualquiera y referenciar el resto a dicho valor. En los ejemplos para la contrastación de resultados (apdo. 2.4) se ha tomado $\phi = 0$ en el punto $(i=1, j=1)$.

Nótese que si la velocidad en C_e es normal al contorno, $v_{p2}=0$, de (2.107) se sigue que dicho contorno corresponde a una línea equipotencial.

En los contornos laterales C_i y C_s , la velocidad es tangente al contorno y por tanto, la componente normal de la velocidad es nula. De (2.76) se sigue que la componente covariante de la velocidad, en la base recíproca, es también nula; es decir:

$$v^2 = 0 \quad (2.108)$$

A continuación se indican dos criterios numéricos para el tratamiento de los puntos de los contornos laterales:

- a) Un primer criterio numérico es obtenido al discretizar la ecuación anterior, convenientemente expresada en términos del potencial de velocidad. Así, de introducir (2.126b) en (2.108) se tiene:

$$g^{21} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} + g^{22} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 \quad (2.109)$$

La aproximación numérica de las derivadas la efectuaremos de forma análoga a la indicada en el apdo. 2.2.1b para la función de corriente. Así por ejemplo, para el contorno inferior (Fig. 7a) la derivada en ϵ será:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \approx \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2 \Delta \epsilon} \quad (2.110)$$

Para la derivada en η utilizaremos ajustes polinómicos a dos o a tres puntos. Las aproximaciones numéricas son respectivamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \approx \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta \eta} \quad (2.111a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \approx \frac{4\phi_{i,j+1} - 3\phi_{i,j} - \phi_{i,j+2}}{2 \Delta \eta} \quad (2.111b)$$

Sustituyendo las aproximaciones numéricas de las derivadas en la ec. (2.109) y reordenando de forma conveniente, se obtiene una ecuación de discretización del tipo indicado en (2.90). En el caso de emplear para la derivada en η la aproximación numérica correspondiente al ajuste polinómico a dos puntos, ec. (2.111a), los coeficientes de discretización son:

$$\begin{aligned} a_{i+1,j} &= g^{21}/(2 \Delta \epsilon) & a_{i-1,j} &= -g^{21}/(2 \Delta \epsilon) & a_R &= 0 \\ a_{i,j+1} &= g^{22}/\Delta \eta & a_{i,j-1} &= 0 & a_{i,j} &= g^{22}/\Delta \eta \end{aligned} \quad (2.112)$$

En el caso de emplear el ajuste polinómico a tres puntos, ec. (2.111b), los coeficientes de discretización serán:

$$\begin{aligned} a_{i+1,j} &= g^{21}/\Delta \epsilon & a_{i-1,j} &= -g^{21}/\Delta \epsilon & a_R &= -g^{22} \cdot \phi_{i,j+2}/\Delta \eta \\ a_{i,j+1} &= 4g^{22}/\Delta \eta & a_{i,j-1} &= 0 & a_{i,j} &= 3g^{22}/\Delta \eta \end{aligned} \quad (2.113)$$

Para el contorno superior C_s , el proceso de obtención de las ecuaciones de discretización es análogo. A diferencia del contorno C_i , las derivadas indicadas en (2.111a) y (2.111b) serían de la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \approx \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta \eta} ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \approx \frac{4\phi_{i,j-1} - 3\phi_{i,j} - \phi_{i,j-2}}{2 \Delta \eta} \quad (2.114)$$

- b) El segundo criterio numérico se basa en la aplicación de la ecuación de conservación de la masa a V.C. finitos asignados a los puntos del contorno. El proceso es análogo al efectuado para los puntos interiores del dominio según el esquema PV-3.

A modo de ejemplo indicaremos el proceso seguido para el contorno inferior. De aplicar (2.101) al V.C. de la Fig. 7a se tiene:

$$-\int_{S_{-i/2}} \frac{\rho V^1}{\sqrt{g^{11}}} dS^1 + \int_{S_{+j/2}} \frac{\rho V^2}{\sqrt{g^{22}}} dS^2 + \int_{S_{+i/2}} \frac{\rho V^1}{\sqrt{g^{11}}} dS^1 - \int_{S_{i,j}} \frac{\rho V^2}{\sqrt{g^{22}}} dS^2 = 0 \quad (2.115)$$

El flujo másico a través de la cara del V.C. correspondiente al punto (i,j) es, según (2.108), nulo y por tanto:

$$\int_{S_{i,j}} \frac{\rho V^2}{\sqrt{g^{22}}} dS^2 = 0 \quad (2.116)$$

Para las restantes integrales el proceso a seguir es similar al realizado en PV-3. Así, el cálculo del flujo másico a través de la cara correspondiente al punto (i,j+1/2) es idéntico al realizado para los puntos interiores. En lo que se refiere a las caras correspondientes a los puntos (i±1/2,j), existen ligeras variantes. Por ejemplo:

- para la integral expresada en (2.104) y aproximada numéricamente en (2.105), las derivadas son evaluadas en la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta \epsilon}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j} + \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j}}{2 \Delta \eta} \quad (2.117)$$

- de otra parte, la superficie $S_{i-1/2,j}$ del V.C. correspondiente al punto (i-1/2,j) sería, a diferencia de la calculada para los puntos interiores en (2.106), de la forma:

$$S_{-i/2} = \frac{\Delta \eta}{2} \left(\frac{\sqrt{g^{11}}}{J} \right)_{i-1/2,j} \quad (2.118)$$

De desarrollar la expresión (2.115) en base a los criterios indicados y de reordenar según la ecuación (2.90), se obtendrían finalmente los siguientes coeficientes de discretización:

$$\begin{aligned} a_{i+1,j} &= \frac{\Delta \eta}{\Delta \epsilon} \left(\frac{\rho g^{11}}{J} \right)_{i+1/2,j} & a_{i-1,j} &= \frac{\Delta \eta}{\Delta \epsilon} \left(\frac{\rho g^{11}}{J} \right)_{i-1/2,j} \\ a_{i,j+1} &= \frac{2 \Delta \epsilon}{\Delta \eta} \left(\frac{\rho g^{22}}{J} \right)_{i,j+1/2} & a_{i,j-1} &= 0 \\ a_{i,j} &= a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} \\ a_R &= - \left(\frac{\rho g^{12}}{J} \right)_{i-1/2,j} \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j} + \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j}}{2} + \\ &+ \left(\frac{\rho g^{12}}{J} \right)_{i+1/2,j} \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j} + \phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j}}{2} + \\ &+ \left(\frac{\rho g^{21}}{J} \right)_{i,j+1/2} \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1}}{2} \end{aligned} \quad (2.119)$$

A partir de la ecuación diferencial del potencial de velocidad (2.99), aproximando numéricamente las derivadas de las componentes covariantes de la velocidad (cf. 2.98) en la forma:

$$\frac{(\rho V^1/J)_{i+\frac{1}{2},j} - (\rho V^1/J)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta \epsilon} + \frac{(\rho V^2/J)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\rho V^2/J)_{i,j}}{\Delta \eta/2} = 0 \quad (2.120)$$

y procediendo de manera análoga a la desarrollada en PV-2 teniendo en cuenta la condición indicada en (2.108), resultan unas ecuaciones de discretización equivalentes a las obtenidas anteriormente.

Para el contorno superior Cs el proceso a seguir es similar.

La densidad se determina en base a la ecuación (2.92). La aproximación numérica de las derivadas así como la evaluación de los coeficientes métricos se realiza según los criterios ya indicados para la función de corriente en el apdo. 2.2.1b.

Para la zona de salida Cf y aun en el caso de ser conocida la distribución de velocidades, el valor de ϕ no es obtenible directamente. De forma análoga a la desarrollada para la función de corriente, indicaremos dos posibles situaciones:

a) Se supone conocida la distribución de velocidades. Las ecuaciones de discretización pueden obtenerse de aplicar la ecuación (2.103) a V.C. situados en Cf (Fig. 7b), teniendo en cuenta que las componentes contravariantes de la velocidad en la base local son conocidas en todo Cf.

b) Se supone que la componente tangencial de la velocidad en Cf es nula, es decir, el flujo es normal al contorno. Para esta situación se ha realizado el siguiente análisis:

- De proceder de forma análoga a la efectuada en (2.107) para el contorno de entrada se sigue que, para $v_{p2}=0$, el contorno Cf corresponde a una línea equipotencial y por tanto $\phi(\epsilon, \eta) = \phi_f = \text{cte}$.

- El flujo másico total, \dot{m}_T , que atraviesa Cf puede determinarse a partir de las condiciones del flujo a la entrada, es decir:

$$\dot{m}_T = - \int_{C_e} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

- Para el contorno de salida será:

$$\dot{m}_T = \int_{C_f} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{C_f} \rho \frac{g^{11} v_1}{J} d\eta = \int_{C_f} \frac{\rho g^{11}}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} d\eta \quad (2.121)$$

- De aproximar numéricamente la integral anterior y de sustituir la derivada por cociente de incrementos se tiene:

$$\dot{m}_T = \sum_{j=1}^{M+1} \left(\frac{\rho g^{11}}{J} \right)_{N+1,j} \frac{\phi_f - \phi_{N,j}}{\Delta \epsilon} \cdot \Delta \quad (2.122)$$

- Finalmente, como ϕ_f es uniforme en todo Cf es posible extraerlo del sumatorio, por tanto:

$$\phi_f = \frac{\dot{m}_T + \sum_{j=1}^{M+1} \frac{\Delta \cdot b_j \cdot \phi_{N,j}}{\Delta \epsilon}}{\sum_{j=1}^{M+1} \frac{\Delta \cdot b_j}{\Delta \epsilon}} \quad (2.123)$$

en donde $b_j = (\rho g^{11}/J)_{N+1,j}$.

La densidad y los coeficientes métricos se evalúan según los criterios numéricos indicados en el apto. 2.2.1b.

2.3.1c Resolución del sistema de ecuaciones discretas.

En los apartados anteriores (2.3.1a y 2.3.1b) se ha obtenido, para cada nodo de la malla y según los diferentes esquemas y criterios numéricos, dos ecuaciones de discretización. Dichas ecuaciones son consecuencia de la representación numérica de la ecuación de conservación de la masa y de la ecuación de la densidad.

Tenemos pues, un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales de $2 \times N \times (M+1)$ ecuaciones e incógnitas. La resolución de dicho sistema de ecuaciones es efectuada en base a los criterios y métodos indicados en el apto. 2.2.1c.

Como quiera que las condiciones en el contorno son de Neuman (a excepción del contorno C_e), la convergencia de los métodos iterativos es considerablemente más lenta que para el caso de la función de corriente [12].

2.3.1d Determinación de las velocidades. Componentes covariantes y contravariantes.

En lo que sigue daremos las expresiones de las componentes de la velocidad en términos del potencial de velocidad, tanto en coordenadas cartesianas como en coordenadas curvilíneas.

La determinación numérica de dichas componentes se efectúa, una vez calculada la distribución de ϕ y ρ en todo el dominio, de forma más conveniente en el plano transformado. Es por ello que las derivadas son expresadas en función de las variables ϵ y η . La aproximación numérica de las derivadas de la función de corriente así como las que aparecen en los coeficientes métricos, se realizan en base a los criterios empleados en los apdos. 2.3.1a y 2.3.1b.

Las componentes cartesianas de la velocidad en términos del potencial de velocidad y en función de las variables (ϵ, η) se obtienen de adimensionalizar (2.14) y de efectuar los correspondientes cambios de variables, es decir:

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \epsilon_x + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \eta_x \\
 v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \epsilon_y + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \eta_y
 \end{aligned}
 \tag{2.124}$$

De las componentes cartesianas de la velocidad se obtiene la siguiente expresión para el módulo de la velocidad:

$$v = \left[g^{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \right)^2 + g^{12} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + g^{22} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \tag{2.125}$$

Las componentes contravariantes V^i de la velocidad en la base local (o covariantes en la base recíproca) se obtienen, en términos del potencial de velocidad, de la expresión dada en (2.65) e introduciendo (2.124):

$$V^1 = g^{11} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} + g^{12} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \tag{2.126a}$$

$$V^2 = g^{21} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} + g^{22} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \tag{2.126b}$$

Las componentes covariantes V_i de la velocidad en la base local (o contravariantes en la base recíproca) se obtienen, en términos del potencial de velocidad, de (2.69) introduciendo (2.124):

$$V_1 = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \tag{2.127a}$$

$$V_2 = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \tag{2.127b}$$

La relación entre las componentes físicas de la velocidad (Fig. 8) y las correspondientes componentes contravariantes y covariantes, son las indicadas en las expresiones (2.71) a (2.76).

2.3.2 Integración numérica en base a coordenadas rectangulares

En este apartado se indicarán diversos criterios utilizados en la resolución numérica del flujo potencial subsónico compresible, mediante el empleo del potencial de velocidad y en base a mallas de discretización rectangulares [14].

Para los puntos interiores de la malla y para los puntos cercanos a los contornos (Fig. 9), indicaremos dos criterios numéricos para la obtención de las ecuaciones de discretización: a) por sustitución, en la ecuación diferencial del potencial de velocidad, de las derivadas por cociente de incrementos; b) mediante la aplicación de la condición de conservación de la masa a volúmenes de control finitos.

a) Para el primer criterio, de aproximar numéricamente las derivadas de la ecuación diferencial del potencial de velocidad (2.85) de forma análoga a la desarrollada en el apartado 2.2.2, se obtiene la siguiente ecuación de discretización:

$$a_{i,j} \phi_{i,j} = a_{+i} \phi_{+i} + a_{-i} \phi_{-i} + a_{+j} \phi_{+j} + a_{-j} \phi_{-j} \quad (2.128)$$

en la que, las expresiones de los coeficientes de discretización son idénticas a las indicadas en (2.80), sustituyendo en éstas ρ por $(1/\rho)$.

Para la determinación de la densidad, ec. (2.86), las derivadas del potencial de velocidad se aproximan numéricamente según el criterio indicado en (2.78a).

b) Un segundo criterio para la obtención de las ecuaciones de discretización se obtiene de realizar balances máxicos a V.C. finitos asignados a los nodos de la malla. Así pues, para el V.C. de la Fig. 10 se tiene:

$$\int_{S_{-i/2}} \rho v_x d_y - \int_{S_{+j/2}} \rho v_y d_x - \int_{S_{+i/2}} \rho v_x d_y - \int_{S_{-j/2}} \rho v_y d_x = 0 \quad (2.129)$$

En la aproximación numérica de las integrales supondremos que la velocidad se mantiene uniforme a lo largo de la cara del V.C. considerado. Dicha velocidad se evalúa en el punto medio entre nodos de la malla y en términos del potencial de velocidad. Así por ejemplo:

$$\int_{S_{-i/2}} \rho v_x d_y = (\rho v_x)_{-i/2} \frac{d_{+j} + d_{-j}}{2} = \rho_{-i/2} \frac{\phi_{i,j} - \phi_{-i}}{d_{-i}} \frac{d_{+j} + d_{-j}}{2} \quad (2.130)$$

Operando de forma análoga para las restantes caras del V.C. y reordenando según la ecuación (2.128), se obtienen unas expresiones para los coeficientes de discretización que resultan ser idénticas a las indicadas en (2.83) si se sustituyen en éstas ρ por $(1/\rho)$.

Las densidades en las caras del V.C. se obtienen promediando las

calculadas en los puntos adyacentes.

Para el caso de flujo incompresible, las ecuaciones de discretización que resultan de ambos criterios, a1) y b1), son equivalentes.

Para los puntos situados en los contornos laterales, la velocidad en la dirección normal 'n' al contorno es nula y por tanto:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (2.131)$$

A continuación indicaremos tres posibles criterios para el tratamiento de dichos contornos:

a2) Un primer criterio se obtiene de desarrollar en serie de Taylor el potencial de velocidad en la dirección normal al contorno (Fig. 13). Así pues:

$$\phi_N = \phi_P + \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_P d_{PN} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2}\right)_P d_{PN}^2 + \dots \quad (2.132)$$

Si consideramos únicamente hasta los términos de primer orden e introducimos (2.131), se tiene:

$$\phi_P \approx \phi_N \quad (2.133)$$

El valor de ϕ_N es determinado por interpolación lineal entre los valores del potencial de velocidad en los puntos adyacentes, por tanto:

$$\phi_P = \phi_A + \frac{d_{AN}}{d_{AN} + d_{BN}} (\phi_B - \phi_A) \quad (2.134)$$

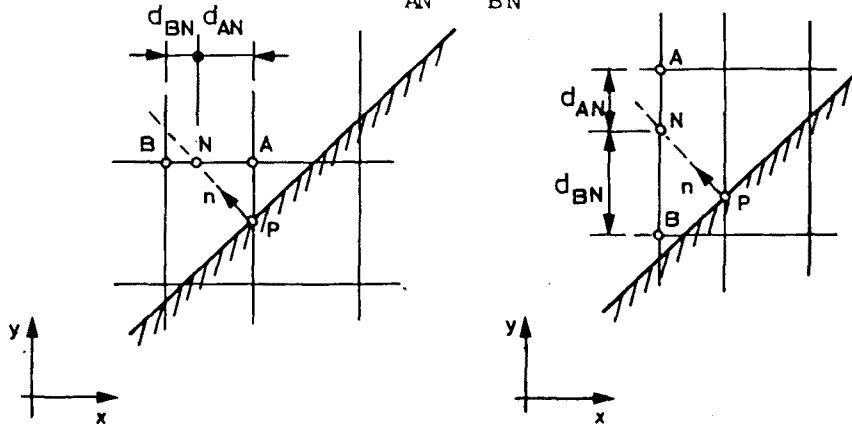


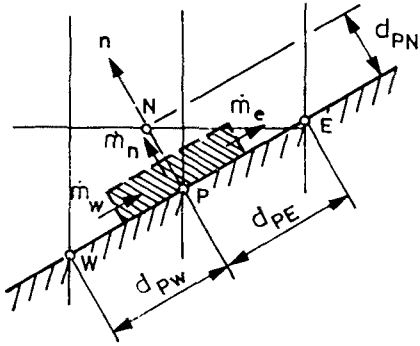
Fig. 13 Detalle de la malla de discretización en el contorno lateral.

b2) Un segundo criterio se obtiene de realizar balances másicos sobre V.C. asignados a los puntos del contorno. Así, para el V.C. representado en la Fig. 14, y de proceder de forma análoga a la indicada en (2.130), se tiene:

$$\rho_w \frac{\phi_P - \phi_W}{d_{PW}} S_w - \rho_e \frac{\phi_E - \phi_P}{d_{PE}} S_e - \rho_n \frac{\phi_N - \phi_P}{d_{PN}} S_n \approx 0 \quad (2.135)$$

Reordenando términos en la ecuación anterior se obtiene finalmente:

$$\phi_P = \frac{\frac{\rho_w S_w}{d_{PW}} \phi_W + \frac{\rho_e S_e}{d_{PE}} \phi_E + \frac{\rho_n S_n}{d_{PN}} \phi_N}{\frac{\rho_w S_w}{d_{PW}} + \frac{\rho_e S_e}{d_{PE}} + \frac{\rho_n S_n}{d_{PN}}} \quad (2.136)$$

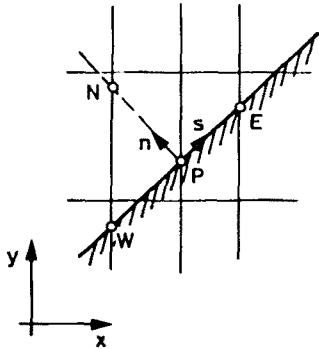


en donde S_i representa la superficie (por unidad de altura) de la cara del V.C. correspondiente al punto "i" de la malla. Así, $S_w = S_e = d_{PN}/2$ y $S_n = (d_{PE} + d_{PW})/2$.

Fig. 14 Volumen de control asignado al punto P del contorno lateral.

c2) La ecuación del potencial de velocidad en la coordenadas cartesianas (s, n) , cuyo origen esté situado en el punto P y de direcciones tangente y normal al contorno en dicho punto (Fig. 15), es de la forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (2.137)$$



La derivada en la dirección normal al contorno es, de (2.131), nula. La derivada segunda en dicha dirección se obtiene del desarrollo en serie de Taylor considerando hasta los términos de segundo orden. Así, de (2.132):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = 2 \frac{\phi_N - \phi_P}{d_{PN}^2} \quad (2.138)$$

Fig. 15 Contorno lateral.

En la dirección tangencial al contorno, las derivadas se han obtenido en base a los criterios indicados en (2.78).

De sustituir las aproximaciones numéricas en la ec. (2.137) se tiene finalmente:

$$\phi_P = (a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N) / (a_E + a_W + a_N) \quad (2.139)$$

siendo:

$$a_E = \frac{2 - \alpha d_{PW}}{d_{PE} (d_{PE} + d_{PW})} \quad a_W = \frac{2 + \alpha d_{PE}}{d_{PW} (d_{PE} + d_{PW})} \quad a_N = \frac{2 - \beta d_{PN}}{d_{PN}^2}$$

$$\alpha = -\frac{d_{PW}^2 \ln(\rho_E/\rho_P) - d_{PE}^2 \ln(\rho_W/\rho_P)}{d_{PE} d_{PW} (d_{PE} + d_{PW})} \quad \beta = -\frac{\ln(\rho_N/\rho_P)}{d_{PN}} \quad (2.140)$$

En la situación de flujo incompresible, las ecuaciones de discretización obtenidas según el criterio b2 y c2 son equivalentes. Nótese que en ambos casos se ha considerado la malla de discretización lo suficientemente densa como para poderse desprestigiar la curvatura del contorno.

Para los puntos situados en el contorno de salida, en el caso de que la velocidad sea normal al contorno (cf. apdo. 2.2.2), el potencial de velocidad será uniforme en todo el contorno. En el supuesto de que dicho contorno sea vertical, por tanto $v_y=0$, procediendo de forma similar a la indicada en el apdo. 2.3.1b se obtiene:

$$\phi_f = \frac{\dot{m}_T d_{-i} + \sum_{k=1}^{r+1} \rho_k S_k \phi_{N,k}}{\sum_{k=1}^{r+1} \rho_k S_k} \quad (2.141)$$

siendo $S_k = (d_{+k} + d_{-k})/2$ en $k=2,3,\dots,r$; en los extremos será $S_1 = d_{+1}/2$ y $S_{r+1} = d_{-(r+1)}/2$.

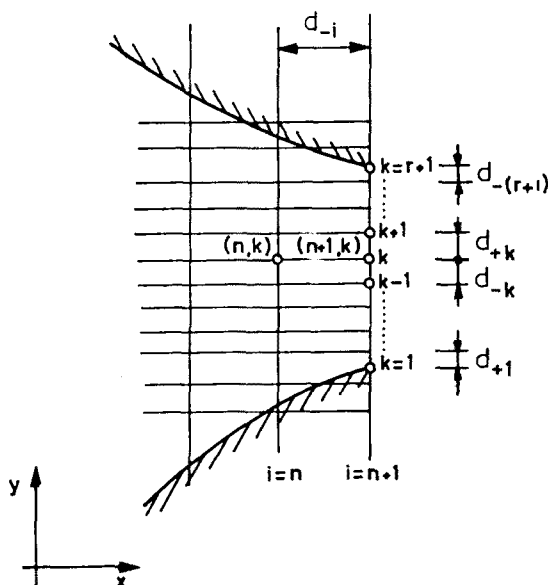


Fig. 16 Puntos situados en el contorno de salida del flujo.

La densidad en los puntos del contorno lateral y en los puntos del contorno de salida del flujo, se ha obtenido de (2.86) aproximando las derivadas según los criterios indicados en el apdo. 2.2.2.

--- o ---

Como consecuencia de las discretizaciones propuestas resulta un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas. La resolución de dicho sistema de ecuaciones algebraicas se realiza en base a los criterios y métodos indicados en el apdo. 2.2.1c.

2.4 EJEMPLOS DE RESOLUCION NUMERICA. CONTRASTACION DE RESULTADOS.

Con el fin de contrastar los resultados que se derivan de los diferentes esquemas numéricos considerados, se han propuesto dos ejemplos de resolución numérica de flujos potenciales: a) flujo alrededor de un cilindro; b) flujo a través de una tobera convergente.

En los apartados 2.4.1 y 2.4.2 se especifican la geometria, las condiciones de contorno y las mallas de discretización empleadas. En el apartado 2.4.3 se exponen y comentan los resultados numéricos obtenidos.

2.4.1 Flujo potencial alrededor de un cilindro

El primer caso seleccionado corresponde al flujo representado en la Fig. 17. Lo denominamos "flujo alrededor de un cilindro" puesto que los contornos laterales, inferior C_i y superior C_s , corresponden a líneas de corriente del flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro con velocidad uniforme aguas arriba [1][13]. Las expresiones que definen dichos contornos son:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq H_e \quad y = 0 \\ x > H_e \quad (x-H_t)^2 + y^2 = 1 \end{array} \right\} (x,y) \in C_i \quad (2.142)$$

$$y - \frac{y}{(x-H_t)^2 + y^2} - V_e \left(1 - \frac{1}{H_t^2 + V_e^2} \right) = 0 \quad (x,y) \in C_s$$

Las variables y parámetros adimensionales toman como longitud de referencia el radio del cilindro, de esta forma la geometria del flujo queda especificada por los valores de H_e y V_e . Los resultados numéricos presentados corresponden a $H_e=1.00$ y $V_e=0.25$.

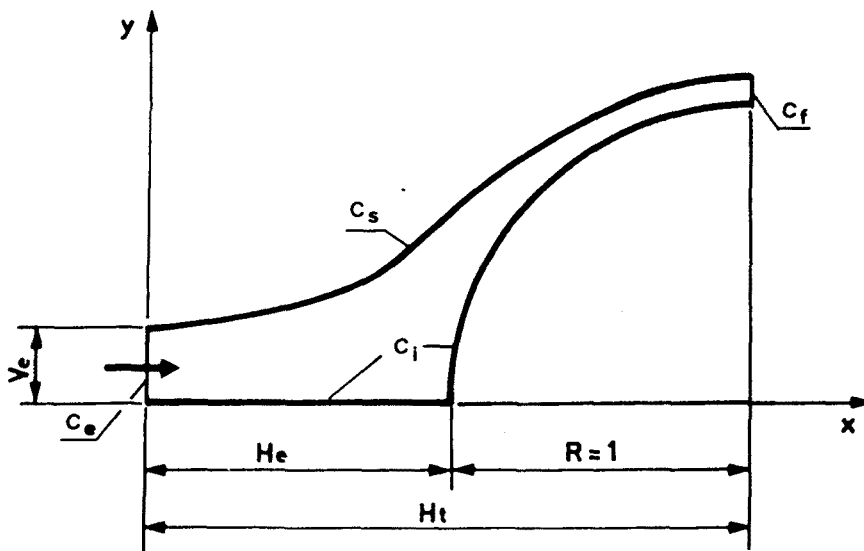


Fig.17 Geometría seleccionada para el primer caso de resolución numérica: flujo alrededor de un cilindro ($H_e=1.00$, $V_e=0.25$).

Para el caso de que el flujo se comporte como incompresible, si en las zonas de entrada C_e y de salida C_f las condiciones del flujo son las que corresponden al flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro, la solución analítica de las ecuaciones es conocida. Así, para la referencia cartesiana indicada en la Fig. 17 se verifica que:

$$V_x = 1 - \frac{(x-H_t)^2 - y^2}{[(x-H_t)^2 + y^2]^2} \quad V_y = \frac{2y(x-H_t)}{[(x-H_t)^2 + y^2]^2} \quad (2.143)$$

De la función de corriente o del potencial de velocidad se obtiene, por derivación, las siguientes expresiones para las componentes cartesianas de la velocidad:

$$\psi = y - \frac{y}{(x-H_t)^2 + y^2} \quad \phi = x + \frac{x - H_t}{(x-H_t)^2 + y^2} + \frac{1}{H_t} \quad (2.144)$$

Las variables han sido adimensionalizadas en base a las propiedades del flujo (v_o, T_o, \dots) en las zonas alejadas del cilindro.

A pesar de la restricción referente a la incompresibilidad del flujo, esta situación es de utilidad por cuanto nos permitirá contrastar los resultados obtenidos numéricamente con los que se derivan de la solución exacta de las ecuaciones.

Así pues, para el caso de flujo incompresible ($M=0$) las condiciones de contorno son las que se derivan de la solución exacta. Por tanto, de (2.144) se tiene:

$$V_x = 1 - \frac{H_t^2 - y^2}{(H_t^2 + y^2)^2} \quad V_y = - \frac{2H_t y}{(H_t^2 + y^2)^2} \quad (x, y) \in C_e \quad (2.145)$$

$$V_y = 0 \quad (x, y) \in C_f$$

En la situación de flujo compresible no se dispone de la solución exacta de las ecuaciones. Para este caso hemos supuesto que las condiciones del flujo son uniformes en la zona de entrada. Las variables han sido adimensionalizadas en base a las propiedades del flujo en dicha zona. Para el contorno de salida se ha supuesto que la componente tangencial de la velocidad es nula. Así pues:

$$V_x = 1.0 \quad V_y = 0 \quad (x, y) \in C_e \quad (2.146)$$

$$V_y = 0 \quad (x, y) \in C_f$$

Generación de coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos

En la resolución numérica del flujo potencial mediante mallas de discretización adaptables a los contornos, se han empleado diferentes criterios de generación de coordenadas curvilíneas. Estos han sido:

- a) Las coordenadas curvilíneas son generadas mediante la resolución del siguiente sistema de ecuaciones elípticas [7][16]:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} &= P(\epsilon, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\epsilon, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (2.147)$$

en donde las funciones $P(\epsilon, \eta)$ y $Q(\epsilon, \eta)$ tienen como objeto el permitir un control del espaciado de la malla de discretización en el interior del dominio [15].

Para la resolución numérica del sistema de ecuaciones indicado, se especifican los valores de ϵ y η en todo el contorno (contorno de Dirichlet). Para el tipo de dominios considerados (Fig. 1a), estas condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0 & \eta &= \eta(x, y) & (x, y) &\in C_e \\ \epsilon &= \epsilon_1 & \eta &= \eta(x, y) & (x, y) &\in C_f \\ \epsilon &= \epsilon(x, y) & \eta &= \eta_0 & (x, y) &\in C_i \\ \epsilon &= \epsilon(x, y) & \eta &= \eta_1 & (x, y) &\in C_s \end{aligned} \quad (2.148)$$

La integración numérica del sistema de ecuaciones indicado y de sus condiciones de contorno se realiza, de forma más conveniente, en el plano transformado. En dicho plano las ecuaciones (2.147) toman la forma:

$$\begin{aligned} g_{22} x_{\epsilon\epsilon} - 2g_{12} x_{\epsilon\eta} + g_{11} x_{\eta\eta} &= -D^2 (P x_{\epsilon} + Q x_{\eta}) \\ g_{22} y_{\epsilon\epsilon} - 2g_{12} y_{\epsilon\eta} + g_{11} y_{\eta\eta} &= -D^2 (P y_{\epsilon} + Q y_{\eta}) \end{aligned} \quad (2.149)$$

siendo las condiciones de contorno:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\epsilon_0, \eta) \\ y(\epsilon_0, \eta) \end{pmatrix}, (\epsilon_0, \eta) \in C_e^* ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\epsilon_1, \eta) \\ y(\epsilon_1, \eta) \end{pmatrix}, (\epsilon_1, \eta) \in C_f^* \quad (2.150)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\epsilon, \eta_0) \\ y(\epsilon, \eta_0) \end{pmatrix}, (\epsilon, \eta_0) \in C_i^* ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\epsilon, \eta_1) \\ y(\epsilon, \eta_1) \end{pmatrix}, (\epsilon, \eta_1) \in C_s^*$$

Los valores de ϵ y η correspondientes a la malla de discretización, se han tomado uniformemente distribuidos entre 0 y 1 (ec. 2.16). De esta manera, la integración de la ec. (2.149) la efectuaremos en un dominio cuadrado y

con una malla de discretización rectangular y uniformemente distribuida. Las condiciones de contorno, (2.150), vienen determinadas por los valores de las coordenadas (x, y) de los puntos del contorno, correspondientes a la distribución deseada de las coordenadas curvilíneas en dichos contornos.

El resultado de la integración numérica de las ecuaciones y de sus condiciones de contorno es una matriz de valores (x, y) , correspondientes a los puntos de intersección de las coordenadas curvilíneas.

Para la geometría especificada en este primer ejemplo de resolución (Fig. 17), la malla generada según la distribución fijada de puntos en los contornos se ha representado en la Fig. 19a. Dicha malla corresponde al caso de $P(\epsilon, \eta) = Q(\epsilon, \eta) = 0$.

La resolución numérica de las ecuaciones se ha realizado mediante el método iterativo de Gauss-Seidel apoyado en un TDMA (cf. apdo. 2.2.1c). Se han empleado factores de sobrerrelajación a fin de acelerar la convergencia.

Una característica inherente a este método de generación de malla es la de que proporciona una distribución de líneas 'suave' en el interior del dominio.

- b) Las curvas correspondientes a las coordenadas curvilíneas vienen definidas por las expresiones [16]:

$$C_1 = \frac{x}{Ht} \quad C_2 = \frac{y - y_i(x)}{y_s(x) - y_i(x)} \quad (2.151)$$

en donde C_1 y C_2 son constantes paramétricas que definen la familia de líneas $\epsilon = \text{cte}$ y $\eta = \text{cte}$ respectivamente.

Los valores de las variables ϵ y η correspondientes a las coordenadas curvilíneas podrían ser las mismas constantes paramétricas, es decir, $\epsilon = C_1$ y $\eta = C_2$ o bien, unos valores arbitrarios tales como los indicados en (2.16). Para el primer caso, los coeficientes métricos pueden ser obtenidos analíticamente; de otra parte, la malla de discretización no estará, en general, uniformemente distribuida en el plano transformado.

La malla generada mediante la expresión anterior se ha representado en la Fig. 19b. La distribución de líneas es tal que los valores de las coordenadas, correspondientes a la malla de discretización, cumplen la expresión (2.16) además de verificar que $\epsilon = C_1$ y $\eta = C_2$.

Estos métodos algebraicos tienen la ventaja, respecto a métodos del tipo indicado anteriormente, de que la generación de las coordenadas curvilíneas se realiza con mínimo esfuerzo computacional. No obstante nótese que, a diferencia del método anterior, la discontinuidad del contorno es propagada al interior de la malla.

- c) Las coordenadas curvilíneas son generadas de forma que coinciden con líneas de corriente del flujo, supuesto este incompresible, y con sus

ortogonales. En general, la obtención de las líneas de corriente se realizaría mediante la resolución de la ec. (2.17), para el caso de $\rho = \text{cte}$, junto con las correspondientes condiciones de contorno, (2.20). El haz de curvas ortogonales podría contruirse mediante métodos algebraicos y según la distribución de líneas deseada.

Para el caso que nos ocupa, la ecuación paramétrica de las líneas de corriente y de sus ortogonales es conocida, ec. (2.143). La construcción de las coordenadas la realizaremos a partir de dichas expresiones. Los valores asignados a las coordenadas curvilíneas correspondientes a la malla de discretización son los que se derivan de la ec. (2.16).

Para el estudio numérico hemos generado, basandonos en el criterio indicado, tres tipos de coordenadas curvilíneas ortogonales. En todos ellos, las líneas $\eta = \text{cte}$, correspondientes a las líneas de corriente, están distribuidas de forma que $\eta = \psi / \psi_s$. Para el haz de curvas ortogonales, $\epsilon = \text{cte}$, se han ensayado tres criterios:

- c1) Las líneas parten del contorno inferior C_i en puntos distribuidos según el criterio: la distancia, medida sobre dicho contorno, entre dos puntos consecutivos es constante. La malla generada se representa en la Fig. 19c.
- c2) Las líneas se distribuyen de forma que $\epsilon = \phi / \phi_f$. La malla así generada se representa en la Fig. 19d. Nótese que esta malla, para la distribución dada de líneas en el contorno, resultaría de la resolución del sistema de ecuaciones elípticas (2.147) con $P=Q=0$.
- c3) Las líneas parten del contorno inferior C_i en puntos distribuidos según el criterio: la distancia, medida sobre el eje x , entre dos puntos consecutivos es constante. La malla generada es representada en la Fig. 19e.

Las mallas generadas son ortogonales geoméricamente no obstante, en la evaluación numérica de los coeficientes métricos, el valor de g^{ij} no es, en general, nulo para $i \neq j$.

2.4.2 Flujo potencial a través de una tobera convergente

El segundo caso seleccionado se refiere al flujo a través de la tobera convergente de la Fig. 18. La simetría del conjunto permite tomar como dominio para la resolución numérica el definido por el contorno inferior y por la línea de simetría. La geometría de la tobera, así definida, es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_e \geq x & y = 0 \\ H_e < x < H_e + H_{tb} & y = -0.03372 \cdot (x-H_e)^3 + 0.19724 (x-H_e)^2 \end{array} \right. \quad (x,y) \in C_i \quad (2.152)$$

$$H_e + H_{tb} \leq x \quad y = 1.0 \quad (x,y) \in C_s$$

La geometría del conjunto queda especificada por los valores de H_e , H_s y V_e . Los resultados numéricos presentados corresponden al caso de $H_e=1.00$, $H_s=1.00$ y $V_e=1.50$.

Para las condiciones de contorno se ha supuesto que la velocidad en la zona de entrada era uniforme, mientras que en la zona de salida la componente tangencial de la velocidad es nula. Estas condiciones de contorno son las mismas que las supuestas en (2.146) para el caso del flujo compresible alrededor de un cilindro.

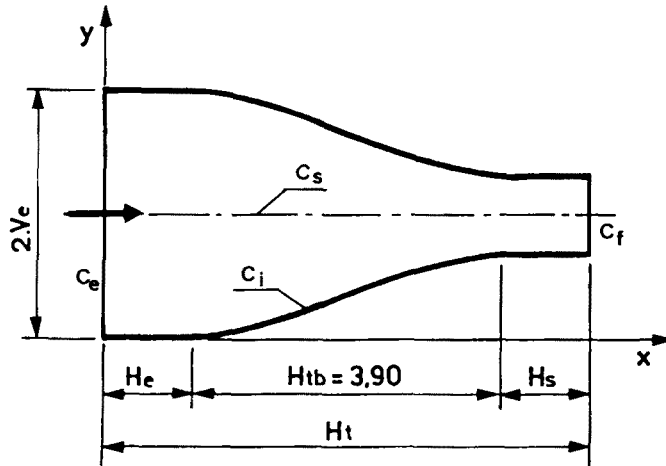


Fig.18 Geometría seleccionada para el segundo ejemplo de resolución: flujo a través de una tobera convergente ($H_e=H_s=1.00$, $V_e=1.50$).

En la Fig. 19f se representa las coordenadas curvilíneas generadas para la resolución del flujo potencial. Dichas coordenadas han sido obtenidas de forma análoga a la indicada anteriormente para el flujo alrededor de un cilindro en el apdo. b).

En la resolución numérica del flujo potencial mediante coordenadas rectangulares, las mallas de discretización se han generado uniformemente distribuidas a lo largo del eje x ($0 \leq x \leq H_t$) y del eje y ($0 \leq y \leq V_e$).

2.4.3 Resultados numéricos

Para indicar los diferentes criterios numéricos empleados en la resolución del flujo potencial, mediante mallas adaptables a los contornos, se ha utilizado la siguiente terminología:

- a) Criterios de discretización de los puntos interiores de la malla:
- I-1 Función de corriente: esq. num. FC-1 (apdo. 2.2.1a).
Potencial de velocidad: esq. num. PV-1 (apdo. 2.3.1a).
 - I-2a Función de corriente: esq. num. FC-2 o FC-3 (apdo. 2.2.1a).
Potencial de velocidad: esq. num. PV-2 o PV-3 (apdo. 2.3.1a).
En ambos casos, los coeficientes métricos en las caras del V.C. se determinan promediando los obtenidos en los nodos (cf. ec. 2.39).
 - I-2b Idem que I-2a excepto en que los coeficientes métricos en las caras del V.C. se determinan numéricamente evaluando las derivadas en dichas caras (cf. ec. 2.41 y 2.42).

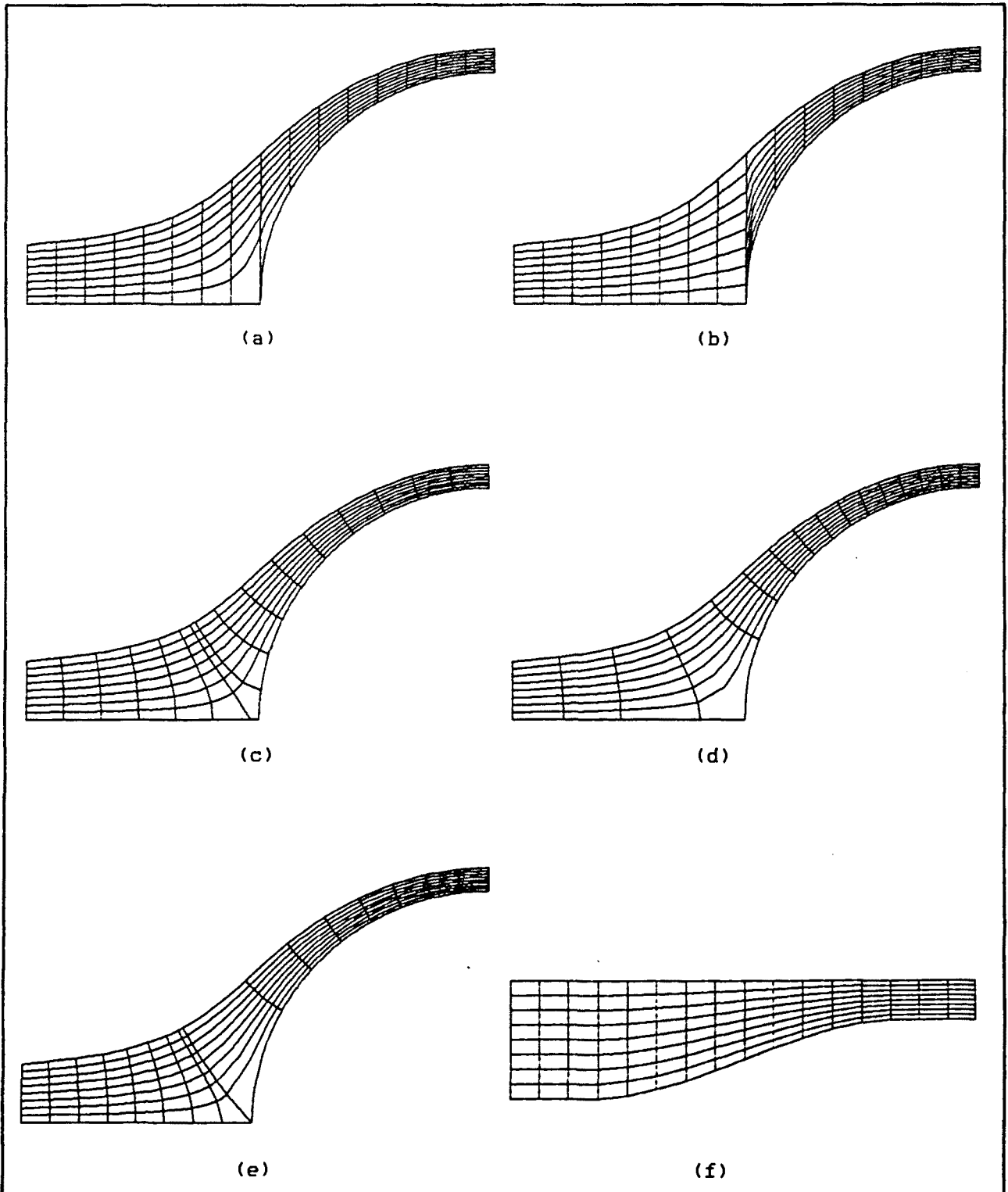


Fig. 19 Coordenadas curvilíneas generadas para la resolución del flujo potencial alrededor de un cilindro (Fig. 17), y del flujo potencial a través de una tobera (Fig. 18).

- b) Criterios de discretización de los puntos del contorno:
- C-1a Función de corriente en contorno Cf: criterio b1 (apdo. 2.2.1b).
Potencial de velocidad en contornos Ci y Cs: criterio a (apdo. 2.3.1b).
En ambos casos, las derivadas en la dirección normal al contorno (en el plano transformado) se evalúan por ajustes polinómicos a dos puntos (cf. 2.50a o 2.111a).
 - C-1b Idem que C-1a, excepto en que la evaluación de las derivadas en la dirección normal al contorno se realiza por ajustes polinómicos a tres puntos (cf. 2.50b o 2.111b).
 - C-2a Función de corriente en contorno Cf: criterio b2 (apdo. 2.2.1b)
Potencial de velocidad en contornos Ci y Cs: criterio b (apdo. 2.3.1b).
Los coeficientes métricos en las caras del V.C. se evalúan de la forma indicada en I-2a.
 - C-2b Idem que C-2a excepto en que la evaluación de los coeficientes métricos se realiza según el criterio indicado en I-2b.
- c) Determinación de la velocidad en los puntos del contorno:
- V-1 Las derivadas (de ψ o ϕ o las correspondientes a los coeficientes métricos) en la dirección normal al contorno se realizan por ajustes polinómicos a dos puntos (por ej. 2.46a, 2.50a).
 - V-2 Las derivadas en la dirección normal se evalúan mediante ajustes polinómicos a tres puntos (por ej. 2.46b, 2.50b).
- d) Coordenadas curvilíneas generadas:
- ZUEX Generación mediante resolución de ec. elípticas (Fig. 19a).
 - YUEX Generación por métodos algebraicos (Fig. 19b y Fig. 19f).
 - XULT Coordenadas ortogonales (Fig. 19c).
 - XUFI Coordenadas ortogonales (Fig. 19d).
 - XUEX Coordenadas ortogonales (Fig. 19e).

Para el caso de mallas rectangulares, se indican los distintos criterios numéricos según la siguiente terminología:

- a) Criterios de discretización de los puntos interiores de la malla:
- I-1 Función de corriente: criterio a (apdo. 2.2.2).
Potencial de velocidad: criterio a1 (apdo. 2.3.2)
 - I-2 Función de corriente: criterio b (apdo. 2.2.2)
Potencial de velocidad: criterio b1 (apdo. 2.3.2)
Para el caso de comportamiento incompresible del flujo, las ecuaciones de discretización obtenidas de ambos criterios son equivalentes.
- b) Criterios de discretización de los puntos del contorno:
- C-0 Potencial de velocidad: criterio a2 (apdo. 2.3.2)
 - C-1 Potencial de velocidad: criterio b2 (apdo. 2.3.2)
 - C-2 Potencial de velocidad: criterio c2 (apdo. 2.3.2).
Para el caso de comportamiento incompresible, las ecuaciones de discretización obtenidas según C-1 o C-2 son equivalentes.

Flujo potencial alrededor de un cilindro (Fig. 17)

Los resultados numéricos indicados en las Tablas I a VII han sido obtenidos para el caso de comportamiento incompresible del flujo. Las condiciones de contorno empleadas son las indicadas en (2.145). La Tabla VIII y las Fig. 20 y 21 corresponden al caso de flujo potencial compresible. Las condiciones de contorno empleadas en la integración numérica de las ecuaciones son las indicadas en (2.146). Todos estos resultados han sido obtenidos en base a la discretización del dominio por mallas adaptables a los contornos.

En la Tabla I y Tabla II se indican los resultados obtenidos numéricamente en función del tipo de discretización empleado para los puntos interiores del dominio (I-1, I-2a), del tipo de malla y de la densidad de la malla. Para los puntos del contorno se han empleado los criterios C-2a y V-1.

En general, el incremento de densidad de malla implica una mayor exactitud en los resultados numéricos. Nótese que para la malla XUEX, los resultados obtenidos numéricamente mediante la función de corriente y según el criterio I-1, tienden a converger hacia una solución incorrecta al incrementarse la densidad de la malla. Ello es debido, presumiblemente, a errores de truncamiento ocasionados por la distribución irregular de líneas $\epsilon = \text{cte}$ que parten de las zonas proximas al punto $(x=H\epsilon, y=0)$. El esquema numérico I-2a resuelve esta situación proporcionando, para este caso, unos resultados mucho más precisos.

Los resultados numéricos obtenidos mediante el empleo de la función de corriente indican, a excepción de la malla XUFI, una superioridad del criterio de discretización I-2a respecto del I-1.

Los resultados obtenidos mediante el empleo del potencial de velocidad indican superioridad del esquema I-2a/C-2a respecto del I-1/C-2a.

En ambos casos, función de corriente y potencial de velocidad, los resultados obtenidos en base al empleo de coordenadas curvilíneas ortogonales ha sido superiores a los que se derivan del empleo de mallas no ortogonales.

En la Tabla III se indican, para el caso de flujo incompresible, la distribución de velocidades en el contorno de salida Cf. Para el caso de la función de corriente los resultados obtenidos según el criterio C-2a/V-2 o C-1b/V-2 son los más precisos. El criterio C-1a/V-1 da unos resultados muy imprecisos si bien, tienden a corregirse al aumentar la densidad de la malla.

En lo que se refiere al potencial de velocidad, el criterio de discretización propuesto para la zona Cf proporciona, para los diferentes tipos de mallas ensayadas, una distribución de velocidades muy proxima a la solución exacta.

En la Tabla IV se indica la distribución de velocidades en los contornos laterales Ci y Cs obtenidas según distintos criterios numéricos.

Para la función de corriente, las velocidades en el contorno obtenidas de emplear el criterio V-2 son, en general, más precisas que las obtenidas en la Tabla II según el criterio V-1. No obstante, para la malla ZUEX el criterio I-2a/V-1 ha dado mejores resultados que el I-2a/V-2.

Para el caso del potencial de velocidad se indican diferentes tratamiento de

los puntos del contorno. El esquema que ha proporcionado unos resultados más precisos ha sido el I-2a/C-2a; para dicho esquema, la superioridad del criterio V-2 respecto al V-1 ha dependido del tipo de malla. El esquema I-1/C-1b/V-2 proporciona mejores resultados que el I-1/C-1a/V-1.

En la Tabla V se indican algunos resultados referentes a la evaluación numérica de los coeficientes métricos. En los apdos. 1 y 3 se representan los valores de Dmax obtenidos, mediante el empleo de la función de corriente o del potencial de velocidad, para diferentes tipos de malla y densidades.

De contrastar estos resultados con los indicados en la Tabla I se observa, para el caso de la función de corriente, la superioridad del esquema I-2b/C-2b respecto del esquema I-2a/C-2a. Para el potencial de velocidad el criterio más adecuado ha dependido del tipo de malla empleada.

En el apdo. 2 se representan los valores de Dmax obtenidos para la función de corriente y según el esquema I-1. La resolución de la ecuación de la función de corriente se realiza para una malla de 16x8; los coeficientes métricos relativos a los puntos de dicha malla son obtenidos numéricamente en base a mallas de igual o de mayor densidad. Para la malla XUFI se tienen expresiones algebraicas de las líneas coordenadas, lo cual ha permitido la obtención analítica de los coeficientes métricos.

Para las mallas XULT y XUFI los resultados numéricos son más exactos cuanto más densa es la malla por medio de la cual se evalúan los coeficientes métricos. En el caso de emplear la solución analítica de dichos coeficientes para la malla XUFI, el mapa de obtenido se corresponde con la solución exacta. Nótese que en esta situación, los valores de las coordenadas generadas se corresponden con la propia variable a determinar. Para las mallas YUEX y XUEX, los resultados obtenidos son más imprecisos a medida que la densidad de la malla para el cálculo de los coeficientes métricos se hace más densa. Para la malla XUEX se llega incluso a provocar la divergencia del método iterativo a pesar del empleo de bajos factores de subrelajación.

Los resultados presentados ponen de manifiesto la importancia del criterio utilizado en la evaluación de los coeficientes métricos. En general parece más apropiado emplear coeficientes métricos evaluados numéricamente para la malla en cuestión y, según el mismo criterio de aproximación de las derivadas que el empleado para la variable dependiente.

En la Tabla VI se indica el número de iteraciones requerido para obtener una determinada precisión del método iterativo. Los resultados numéricos obtenidos toman como mapa inicial de ψ o ϕ el correspondiente a la solución analítica.

La convergencia de los métodos iterativos para el potencial de velocidad (contorno Neumann), es considerablemente más lenta que para la función de corriente. En ambos casos, el número de iteraciones empleado por el método de Gauss-Seidel o por el TDMA_i son del mismo orden. La convergencia del método TDMA_j es mucho más rápida que la de los dos anteriores; ello es debido al valor de los coeficientes en las ecuaciones de discretización al ser $a_{i,j\pm 1} \gg a_{i\pm 1,j}$.

Para la malla XUFI y para el caso de la función de corriente, el número de iteraciones requerido según los esquemas I-1/C-2a o I-2a/C-2a son similares.

Para la malla ZUEX (Tabla VII) el número de iteraciones requerido según ambos esquemas es idéntico sin embargo, para la malla XULT la convergencia del método numérico según el esquema I-1/C-2a es más lenta que con el esquema I-2a/C-2a.

Para el potencial de velocidad y para la malla XUFI, la convergencia de los métodos iterativos según el esquema I-2a/C-2a es más rápida que con el esquema I-1/C-2a.

Los resultados indicados ponen de manifiesto la influencia del factor de sobrerrelajación f en la rapidez de convergencia del método iterativo. En los apdos. 2 y 3 se indican algunos resultados en función del método iterativo, densidad de malla y tipo de esquema numérico. En el apdo. 3 se ensayan, para el potencial de velocidad y en base al método iterativo de Gauss-Seidel, factores de relajación diferenciados para los puntos del contorno lateral (f_{cl}) y para los puntos del contorno de salida (f_{cs}). Para los puntos interiores de la malla se ha empleado un valor constante de f .

En la Tabla VII se indica, para la función de corriente, el valor de D_{max} y el número de iteraciones requerido por el método iterativo TDMA_j a diferentes precisiones ϵ_0 . Se observa la mayor rapidez de convergencia del método iterativo para la malla ZUEX que para la malla XULT.

En la Tabla VIII se indica, para el caso de flujo compresible con $Mo=0.225$, el número de iteraciones requerido en función del factor de subrelajación f_c empleado (cf. apdo. 2.2.1c) y para diferentes mallas. El empleo de valores de f_v adecuados reduce el número de iteraciones. Los resultados presentados toman para el inicio de las iteraciones el mapa de ψ y ρ correspondiente a la solución numérica del flujo a $Mo=0.001$. El empleo de mapas iniciales arbitrarios y el incremento de la densidad de malla dificulta la convergencia del método iterativo.

En las Fig. 20 y Fig. 21 se representan la distribución de v y C_p en los contornos laterales del flujo compresible alrededor de un cilindro. Los resultados han sido obtenidos numéricamente mediante la función de corriente, según el criterio numérico I-2b/C-2b/V-2 y con una malla del tipo XULT de densidad 128×64 . La precisión del método iterativo ha sido de $.000001$. En el contorno lateral C_i , la velocidad en el punto ($x=H_e, y=0$) es nula. Con el fin de realizar la gráfica se ha introducido este valor conocido de la velocidad.

Flujo potencial a través de una tobera (Fig.18)

Los resultados numéricos presentados en las Tablas X a XIII y las Fig. 22, 23 y 24, han sido obtenidos en base a la discretización del dominio mediante coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos. La malla empleada es la indicada en la Fig. 19f. En la Tabla XIV se indican los resultados obtenidos mediante mallas rectangulares.

En la Tabla X se representa la distribución de velocidades en los contornos laterales C_i y C_s . Los resultados han sido obtenidos numéricamente, para $Mo=0.001$ y $Mo=0.19$, mediante la función de corriente. El criterio numérico empleado ha sido el I-2b/C-2b/V-1, con una densidad de malla de 128×64 .

En la Tabla XI se representa, para distintas densidades de malla y según los

critérios indicados anteriormente, la velocidad en los contornos laterales así como la diferencia en tanto por ciento respecto a los valores indicados en la Tabla X. Nótese que los resultados numéricos obtenidos para diferentes densidades de malla tienden, a medida que aumenta la densidad de la malla, a los valores indicados en la Tabla X. Es por ello que estos resultados han sido tomados como referencia correcta de la distribución de velocidades.

En la Tabla XII se indican las velocidades obtenidas en los contornos laterales según diferentes criterios numéricos.

Para el caso de la función de corriente, los resultados obtenidos con $Mo=0.001$ y $Mo=0.19$ presentan un grado de error similar. No aparecen diferencias significativas entre los criterios I-2b/C-2b y I-1/C-2a. El esquema numérico I-2a/C-2a ha dado resultados algo menos precisos.

Para el potencial de velocidad, los resultados obtenidos con $Mo=0.001$ han sido más precisos que para el caso de $Mo=0.19$. En la situación de comportamiento incompresible del flujo ($Mo=0.001$), los esquemas numéricos I-2b/C-2b y I-2a/C-2a proporcionan unos resultados similares; la precisión del esquema I-1/C-2a es algo inferior. Para el caso de $Mo=0.19$, no aparecen diferencias significativas entre los resultados obtenidos según los esquemas numéricos I-2b/C-2b y I-2a/C-2a.

En la Tabla XIII se expone la distribución de ϕ , ψ , ρ , v , M y C_p , para $Mo=0.19$ $k=1.4$, correspondiente a los puntos de la malla cuyas coordenadas se especifican. El potencial de velocidad y la función de corriente han sido obtenidos con una densidad de malla de 64×32 y según el esquema numérico I-2b/C-2b/V-1. La precisión exigida para finalizar las iteraciones fue de $.000001$. La distribución de velocidades (y por tanto de M y C_p) ha sido obtenida mediante la función de corriente.

En las Fig. 22, Fig. 23 y Fig. 24 se representa la distribución de v , C_p y M en los contornos laterales a diferentes Mo . Estos resultados han sido obtenidos numéricamente mediante la función de corriente, según el esquema numérico I-2b/C-2b/V-1, malla de 128×64 , y con una precisión del método iterativo de $.000001$.

En la Tabla XIV se indican los resultados obtenidos de discretizar el dominio mediante mallas rectangulares. Se representan las velocidades en los contornos laterales y la diferencia en tanto por ciento respecto a las velocidades de referencia indicadas en la Tabla X.

Para el caso de la función de corriente los resultados obtenidos son muy precisos, tanto para el caso de $Mo=0.001$ como para $Mo=0.19$. No se observan diferencias significativas entre los esquemas numéricos I-1 e I-2.

Para el caso del potencial de velocidad los resultados numéricos obtenidos son bastante imprecisos, no obstante la situación mejora al incrementarse la densidad de malla. El error en la determinación de las velocidades es superior para $Mo=0.19$ que para $Mo=0.001$. Los esquemas numéricos I-1/C-1 y I-2/C-2 (idénticos para el caso de comportamiento incompresible del flujo) dan unos resultados similares y más precisos que los obtenidos con I-1/C-0.

TABLA I: Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro (Fig.17). Se indica: - el valor absoluto de la diferencia máxima entre los valores de ψ o ϕ obtenidos numéricamente y los que se derivan de la solución exacta; el punto (i,j) de la malla en donde se produce dicha diferencia máxima, - el valor medio de las diferencias, en valor absoluto, entre los resultados numéricos y la solución exacta. Téngase presente que $0.00 \leq \psi \leq 0.1885$ y $0.00 \leq \phi \leq 2.50$. Discret. ptos. cont.: C-2a. $\epsilon_0 = .000001$

Función de corriente

Tipo de malla	Discretización ptos.int.	Densidad malla		
		16x8	32x16	64x32
ZUEX	I-1	.015183 (9,3) .001131	.006263 (17,3) .000330	.002718 (33,2) .000079
	I-2a	.020257 (9,3) .001575	.008660 (17,3) .000452	.003088 (33,2) .000102
YUEX	I-1	.020399 (9,5) .002247	.012637 (17,9) .000943	.009072 (33,16) .000502
	I-2a	.028761 (9,5) .001884	.017406 (17,9) .000772	.010695 (34,22) .000294
XULT	I-1	.003768 (8,3) .000627	.002458 (14,5) .000354	.000779 (25,6) .000105
	I-2a	.001434 (7,3) .000253	.000765 (33,9) .000088	.000411 (65,17) .000026
XUFI	I-1	.001792 (5,4) .000184	.002149 (7,3) .000116	.000802 (14,2) .000021
	I-2a	.007337 (4,4) .000633	.002356 (7,7) .000189	.002167 (14,6) .000066
XUEX	I-1	.021776 (9,3) .002569	.022632 (17,5) .002268	.025197 (33,9) .002361
	I-2a	.011099 (9,3) .000910	.005160 (17,3) .000286	-

Potencial de velocidad

Tipo de malla	Discretización ptos. int.	Densidad malla	
		16x8	32x16
ZUEX	I-1	.317462 (9, 2) .216512	.284155 (17, 2) .203089
	I-2a	.032985 (10, 4) .013362	.019998 (18, 4) .008305
XULT	I-1	.113287 (16, 9) .072508	.051665 (31, 1) .033100
	I-2a	.026997 (11, 9) .014531	.012694 (20, 17) .007196
XUFI	I-1	.029969 (16, 1) .018844	.022618 (32, 1) .015641
	I-2a	.019201 (4, 1) .003902	.008315 (7, 1) .001344

TABLA II: Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro. Se representan las velocidades obtenidas numéricamente en los contornos laterales, C_i y C_s , correspondientes a los casos indicados en la Tabla I. Los resultados referentes al contorno C_s se han señalado con un asterisco. Entre paréntesis se indica el tanto por ciento de error respecto de la solución exacta. Criterios discret.: $C-2a/V-1$. $\epsilon_0=.000001$

1. Función de corriente. Malla ZUEX

coord x	sol. exacta vel.	16x8		32x16	
		I-1	I-2a	I-1	I-2a
0.00	0.7500	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)
0.25	0.6735	0.6737 (0.04%)	0.6727 (0.11%)	0.6736 (0.01%)	0.6733 (0.03%)
0.50	0.5556	0.5582 (0.46%)	0.5539 (0.30%)	0.5565 (0.17%)	0.5553 (0.04%)
0.75	0.3600	0.3793 (5.37%)	0.3677 (2.14%)	0.3681 (2.24%)	0.3636 (0.99%)
0.88	0.2099	0.2558 (21.9%)	0.2562 (22.1%)	0.2328 (10.9%)	0.2226 (6.06%)
1.13	0.9682	1.1586 (19.7%)	0.9853 (1.76%)	0.9603 (0.82%)	0.9469 (2.21%)
1.25	1.3229	1.3142 (0.66%)	1.3099 (0.98%)	1.3343 (0.86%)	1.3238 (0.07%)
1.50	1.7321	1.7325 (0.02%)	1.7310 (0.06%)	1.7320 (0.01%)	1.7319 (0.01%)
1.75	1.9365	1.9277 (0.46%)	1.9312 (0.27%)	1.9319 (0.24%)	1.9342 (0.12%)
2.00	2.0000	2.0246 (1.23%)	2.0232 (1.16%)	2.0218 (1.09%)	2.0187 (0.94%)
*0.00	0.7638	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)
*0.25	0.7038	0.7013 (0.35%)	0.7039 (0.02%)	0.7025 (0.19%)	0.7036 (0.04%)
*0.50	0.6392	0.6314 (1.23%)	0.6380 (0.20%)	0.6352 (0.63%)	0.6379 (0.21%)
*0.75	0.6592	0.6137 (6.91%)	0.6060 (8.06%)	0.6402 (2.88%)	0.6367 (3.41%)
*0.88	0.7730	0.6748 (12.7%)	0.6550 (15.3%)	0.7430 (3.88%)	0.7382 (4.50%)
*1.13	1.1576	1.2589 (8.75%)	1.3380 (15.6%)	1.1505 (0.61%)	1.1463 (0.97%)
*1.25	1.3414	1.3381 (0.25%)	1.3165 (1.86%)	1.3392 (0.16%)	1.3433 (0.14%)
*1.50	1.6187	1.6246 (0.37%)	1.6245 (0.36%)	1.6207 (0.13%)	1.6203 (0.10%)
*1.75	1.7771	1.7857 (0.48%)	1.7835 (0.36%)	1.7813 (0.24%)	1.7795 (0.14%)
*2.00	1.8285	1.8102 (1.00%)	1.8112 (0.94%)	1.8098 (1.02%)	1.8125 (0.87%)

2. Función de corriente. Malla YUEX

coord x	sol. exacta vel.	16x8		32x16	
		I-1	I-2a	I-1	I-2a
0.00	0.7500	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)
0.25	0.6735	0.6738 (0.05%)	0.6734 (0.02%)	0.6737 (0.03%)	0.6735 (0.00%)
0.50	0.5556	0.5591 (0.64%)	0.5566 (0.19%)	0.5577 (0.38%)	0.5560 (0.09%)
0.75	0.3600	0.3826 (6.28%)	0.3626 (0.73%)	0.3741 (3.92%)	0.3622 (0.60%)
0.88	0.2099	0.2575 (22.7%)	0.1928 (8.12%)	0.2393 (14.0%)	0.2044 (2.59%)
1.13	0.9682	1.1828 (22.2%)	1.0123 (4.55%)	0.9720 (0.39%)	0.9636 (0.48%)
1.25	1.3229	1.3084 (1.09%)	1.3427 (1.50%)	1.3252 (0.17%)	1.3335 (0.80%)
1.50	1.7321	1.7323 (0.01%)	1.7343 (0.13%)	1.7321 (0.00%)	1.7324 (0.02%)
1.75	1.9365	1.9274 (0.47%)	1.9272 (0.48%)	1.9318 (0.24%)	1.9318 (0.24%)
2.00	2.0000	2.0265 (1.33%)	2.0246 (1.22%)	2.0263 (1.32%)	2.0217 (1.08%)
*0.00	0.7638	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)
*0.25	0.7038	0.7011 (0.38%)	0.7020 (0.26%)	0.7023 (0.21%)	0.7027 (0.16%)
*0.50	0.6392	0.6291 (1.58%)	0.6326 (1.03%)	0.6329 (0.98%)	0.6356 (0.58%)
*0.75	0.6592	0.5976 (9.34%)	0.6091 (7.60%)	0.6211 (5.78%)	0.6365 (3.44%)
*0.88	0.7730	0.6400 (17.2%)	0.6510 (15.8%)	0.7008 (9.34%)	0.7242 (6.31%)
*1.13	1.1576	1.3351 (15.3%)	1.4726 (27.2%)	1.1743 (1.44%)	1.1290 (2.47%)
*1.25	1.3414	1.3589 (1.30%)	1.3199 (1.60%)	1.3410 (0.03%)	1.3387 (0.20%)
*1.50	1.6187	1.6251 (0.39%)	1.6246 (0.37%)	1.6208 (0.13%)	1.6208 (0.13%)
*1.75	1.7771	1.7855 (0.47%)	1.7865 (0.54%)	1.7812 (0.23%)	1.7812 (0.23%)
*2.00	1.8285	1.8083 (1.10%)	1.8098 (1.02%)	1.8056 (1.25%)	1.8096 (1.03%)

3. Función de corriente. Malla XULT

coord x	sol. exacta vel.	16x8		32x16	
		I-1	I-2a	I-1	I-2a
0.00	0.7500	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)
0.32	0.6451	0.6455 (0.06%)	0.6425 (0.40%)	0.6454 (0.04%)	0.6444 (0.11%)
0.48	0.5660	0.5681 (0.38%)	0.5622 (0.68%)	0.5673 (0.23%)	0.5648 (0.20%)
0.64	0.4572	0.4659 (1.89%)	0.4561 (0.23%)	0.4622 (1.10%)	0.4558 (0.30%)
0.80	0.3016	0.3340 (10.7%)	0.3177 (5.32%)	0.3183 (5.55%)	0.3028 (0.38%)
1.01	0.2488	0.3093 (24.3%)	0.2804 (12.7%)	0.2808 (12.9%)	0.2575 (3.51%)
1.10	0.8629	0.8554 (0.87%)	0.8475 (1.78%)	0.8588 (0.47%)	0.8572 (0.66%)
1.28	1.3886	1.3771 (0.82%)	1.3826 (0.43%)	1.3828 (0.42%)	1.3857 (0.21%)
1.54	1.7721	1.7609 (0.63%)	1.7676 (0.25%)	1.7664 (0.32%)	1.7696 (0.14%)
1.84	1.9742	1.9642 (0.50%)	1.9518 (1.13%)	1.9689 (0.27%)	1.9703 (0.20%)
2.00	2.0000	2.0381 (1.91%)	2.0371 (1.86%)	2.0338 (1.69%)	2.0306 (1.53%)
*0.00	0.7638	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)
*0.30	0.6912	0.6865 (0.68%)	0.6903 (0.13%)	0.6887 (0.37%)	0.6904 (0.11%)
*0.44	0.6532	0.6432 (1.52%)	0.6473 (0.90%)	0.6479 (0.82%)	0.6508 (0.37%)
*0.70	0.6371	0.5961 (6.44%)	0.6300 (1.11%)	0.6111 (4.07%)	0.6365 (0.09%)
*0.80	0.6965	0.6681 (4.08%)	0.6712 (3.63%)	0.6827 (1.99%)	0.6871 (1.35%)
*0.92	0.8325	0.8258 (0.81%)	0.8333 (0.09%)	0.8291 (0.41%)	0.8327 (0.02%)
*1.18	1.2483	1.2550 (0.54%)	1.2525 (0.33%)	1.2515 (0.25%)	1.2498 (0.12%)
*1.33	1.4447	1.4529 (0.56%)	1.4475 (0.19%)	1.4488 (0.28%)	1.4461 (0.09%)
*1.49	1.6077	1.6166 (0.55%)	1.6103 (0.16%)	1.6122 (0.28%)	1.6091 (0.09%)
*1.82	1.8034	1.8117 (0.46%)	1.8218 (1.02%)	1.8078 (0.24%)	1.8060 (0.14%)
*2.00	1.8285	1.8033 (1.38%)	1.8040 (1.34%)	1.8002 (1.55%)	1.8029 (1.40%)

4. Función de corriente. Malla XUFI

coord x	sol. exacta vel.	16x8		32x16	
		I-1	I-2a	I-1	I-2a
0.00	0.7500	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)
0.22	0.6854	0.6841 (0.18%)	0.6770 (1.22%)	0.6850 (0.06%)	0.6834 (0.29%)
0.46	0.5766	0.5710 (0.97%)	0.5480 (4.96%)	0.5738 (0.49%)	0.5655 (1.92%)
0.81	0.2975	0.3111 (4.56%)	0.3854 (29.5%)	0.2801 (5.86%)	0.3362 (13.0%)
1.06	0.6960	0.6604 (5.11%)	0.5995 (13.8%)	0.6785 (2.51%)	0.6505 (6.53%)
1.14	1.0227	1.0035 (1.88%)	0.9834 (3.84%)	1.0147 (0.78%)	1.0135 (0.90%)
1.30	1.4221	1.4097 (0.88%)	1.4170 (0.36%)	1.4161 (0.42%)	1.4195 (0.18%)
1.53	1.7667	1.7550 (0.66%)	1.7617 (0.28%)	1.7608 (0.33%)	1.7640 (0.15%)
1.77	1.9443	1.9327 (0.60%)	1.9388 (0.28%)	1.9385 (0.30%)	1.9415 (0.14%)
1.84	1.9754	1.9642 (0.57%)	1.9688 (0.34%)	1.9697 (0.29%)	1.9725 (0.15%)
2.00	2.0000	2.0273 (1.37%)	2.0246 (1.23%)	2.0226 (1.13%)	2.0170 (0.85%)
*0.00	0.7638	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)
*0.20	0.7171	0.7156 (0.21%)	0.7229 (0.81%)	0.7159 (0.16%)	0.7186 (0.20%)
*0.42	0.6572	0.6556 (0.24%)	0.6643 (1.08%)	0.6562 (0.16%)	0.6622 (0.76%)
*0.66	0.6280	0.6099 (2.89%)	0.5574 (11.3%)	0.6255 (0.40%)	0.6052 (3.64%)
*0.85	0.7447	0.7511 (0.86%)	0.7765 (4.28%)	0.7458 (0.14%)	0.7575 (1.67%)
*0.99	0.9416	0.9494 (0.83%)	0.9718 (3.20%)	0.9439 (0.24%)	0.9500 (0.89%)
*1.10	1.1244	1.1318 (0.65%)	1.1343 (0.88%)	1.1273 (0.26%)	1.1271 (0.24%)
*1.48	1.6025	1.6115 (0.56%)	1.6062 (0.23%)	1.6070 (0.28%)	1.6045 (0.13%)
*1.74	1.7742	1.7837 (0.54%)	1.7786 (0.25%)	1.7790 (0.27%)	1.7765 (0.13%)
*1.83	1.8045	1.8138 (0.51%)	1.8101 (0.31%)	1.8092 (0.26%)	1.8069 (0.13%)
*2.00	1.8285	1.8060 (1.23%)	1.8083 (1.10%)	1.8090 (1.07%)	1.8140 (0.79%)

5. Función de corriente. Malla XUEX

coord x	sol. exacta vel.	malla 16x8		malla 32x16	
		I-1	I-2a	I-1	I-2a
0.00	0.7500	0.7501 (0.01%)	0.7501 (0.01%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)
0.25	0.6735	0.6747 (0.18%)	0.6728 (0.10%)	0.6746 (0.17%)	0.6733 (0.03%)
0.50	0.5556	0.5685 (2.32%)	0.5568 (0.23%)	0.5686 (2.33%)	0.5561 (0.09%)
0.75	0.3600	0.4424 (22.9%)	0.3882 (7.82%)	0.4430 (23.1%)	0.3707 (2.97%)
0.88	0.2099	0.3883 (85.0%)	0.2838 (35.2%)	0.3855 (86.7%)	0.2494 (18.8%)
1.13	0.9682	0.9663 (0.20%)	0.8799 (9.12%)	0.9656 (0.27%)	0.9449 (2.41%)
1.25	1.3229	1.3082 (1.11%)	1.3089 (1.06%)	1.3163 (0.50%)	1.3200 (0.22%)
1.50	1.7321	1.7203 (0.68%)	1.7291 (0.17%)	1.7262 (0.34%)	1.7299 (0.13%)
1.75	1.9365	1.9251 (0.59%)	1.9317 (0.25%)	1.9307 (0.30%)	1.9340 (0.13%)
2.00	2.0000	2.0349 (1.74%)	2.0335 (1.67%)	2.0303 (1.51%)	2.0262 (1.31%)
*0.00	0.7638	0.7631 (0.09%)	0.7631 (0.09%)	0.7634 (0.05%)	0.7634 (0.05%)
*0.23	0.7090	0.7042 (0.67%)	0.7072 (0.25%)	0.7059 (0.43%)	0.7080 (0.15%)
*0.45	0.6495	0.6282 (3.28%)	0.6395 (1.54%)	0.6316 (2.75%)	0.6457 (0.58%)
*0.68	0.6324	0.5047 (20.2%)	0.5923 (6.34%)	0.5035 (20.3%)	0.6251 (1.16%)
*0.97	0.9021	0.9044 (0.25%)	0.9387 (4.06%)	0.8987 (0.37%)	0.9208 (2.08%)
*1.15	1.1894	1.1990 (0.81%)	1.2044 (1.26%)	1.1931 (0.31%)	1.1924 (0.25%)
*1.30	1.4074	1.4166 (0.65%)	1.4096 (0.16%)	1.4116 (0.30%)	1.4084 (0.07%)
*1.59	1.6867	1.6961 (0.56%)	1.6885 (0.11%)	1.6914 (0.28%)	1.6879 (0.07%)
*1.86	1.8132	1.8211 (0.43%)	1.8301 (0.93%)	1.8174 (0.23%)	1.8159 (0.15%)
*2.00	1.8285	1.8021 (1.44%)	1.8031 (1.39%)	1.8024 (1.43%)	1.8059 (1.23%)

6. Potencial de velocidad. Malla ZUEX

coord x	sol. exacta vel.	malla 16x8		malla 32x16	
		I-1	I-2a	I-1	I-2a
0.00	0.7500	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)
0.25	0.6735	1.0287 (52.8%)	0.6710 (0.37%)	0.9947 (47.7%)	0.6727 (0.12%)
0.50	0.5556	0.8454 (52.2%)	0.5462 (1.68%)	0.8256 (48.6%)	0.5535 (0.38%)
0.75	0.3600	0.5192 (44.2%)	0.3144 (12.6%)	0.5584 (55.1%)	0.3490 (3.05%)
0.88	0.2099	0.3969 (89.1%)	0.2447 (16.6%)	0.3061 (45.8%)	0.1675 (20.1%)
1.13	0.9682	0.7240 (25.2%)	0.6921 (28.5%)	0.8733 (9.80%)	0.9167 (5.32%)
1.25	1.3229	1.2167 (8.03%)	1.2797 (3.27%)	1.3001 (1.72%)	1.3091 (1.04%)
1.50	1.7321	1.7064 (1.48%)	1.7240 (0.46%)	1.7233 (0.51%)	1.7299 (0.12%)
1.75	1.9365	1.9305 (0.31%)	1.9332 (0.17%)	1.9334 (0.16%)	1.9348 (0.09%)
2.00	2.0000	1.9999 (0.00%)	1.9999 (0.01%)	1.9992 (0.04%)	1.9992 (0.04%)
*0.00	0.7638	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)
*0.25	0.7038	1.0828 (53.8%)	0.7065 (0.38%)	1.0414 (47.9%)	0.7041 (0.03%)
*0.50	0.6392	0.9767 (52.8%)	0.6577 (2.89%)	0.9343 (46.2%)	0.6427 (0.54%)
*0.75	0.6592	0.8794 (33.4%)	0.6747 (2.36%)	0.8415 (27.7%)	0.6494 (1.48%)
*0.88	0.7730	0.8509 (10.1%)	0.7215 (6.66%)	0.8348 (8.00%)	0.7236 (6.39%)
*1.13	1.1576	1.0799 (6.71%)	1.1238 (2.91%)	1.1487 (0.76%)	1.1597 (0.18%)
*1.25	1.3414	1.3134 (2.09%)	1.3627 (1.58%)	1.3324 (0.67%)	1.3402 (0.09%)
*1.50	1.6187	1.6021 (1.03%)	1.6152 (0.22%)	1.6121 (0.41%)	1.6172 (0.09%)
*1.75	1.7771	1.7711 (0.34%)	1.7727 (0.25%)	1.7743 (0.16%)	1.7752 (0.10%)
*2.00	1.8285	1.8266 (0.10%)	1.8266 (0.10%)	1.8273 (0.06%)	1.8273 (0.06%)

7. Potencial de velocidad. Malla XULT

coord x	sol. exacta vel.	malla 16x8		malla 32x16	
		I-1	I-2a	I-1	I-2a
0.00	0.7500	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)
0.32	0.6451	0.5636 (12.8%)	0.6384 (1.04%)	0.6088 (5.64%)	0.6436 (0.23%)
0.48	0.5660	0.4892 (13.6%)	0.5522 (2.44%)	0.5323 (5.95%)	0.5626 (0.60%)
0.64	0.4572	0.3885 (15.0%)	0.4575 (6.50%)	0.4274 (6.52%)	0.4497 (1.64%)
0.80	0.3016	0.2418 (19.9%)	0.2617 (13.2%)	0.2753 (8.75%)	0.2818 (6.57%)
1.01	0.2488	0.2578 (3.62%)	0.2646 (6.37%)	0.2275 (8.57%)	0.2189 (11.9%)
1.10	0.8629	0.7984 (7.47%)	0.8383 (2.84%)	0.8360 (3.12%)	0.8572 (0.66%)
1.28	1.3886	1.3457 (3.08%)	1.3882 (0.03%)	1.2462 (1.77%)	1.3887 (0.01%)
1.54	1.7721	1.7568 (0.86%)	1.7738 (0.09%)	1.7645 (0.43%)	1.7725 (0.02%)
1.84	1.9742	1.9734 (0.04%)	1.9755 (0.06%)	1.9736 (0.03%)	1.9745 (0.02%)
2.00	2.0000	2.0012 (0.06%)	2.0012 (0.06%)	2.0003 (0.02%)	2.0003 (0.02%)
*0.00	0.7638	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)
*0.30	0.6912	0.6067 (12.2%)	0.6890 (0.33%)	0.6527 (5.57%)	0.6924 (0.15%)
*0.44	0.6532	0.5706 (12.6%)	0.6429 (1.57%)	0.6147 (5.89%)	0.6524 (0.20%)
*0.70	0.6371	0.6388 (0.27%)	0.7814 (22.7%)	0.7018 (10.2%)	0.7677 (16.1%)
*0.80	0.6965	0.6228 (10.6%)	0.6212 (10.8%)	0.6672 (4.21%)	0.6835 (2.85%)
*0.92	0.8325	0.7802 (6.28%)	0.8206 (1.42%)	0.8073 (3.02%)	0.8357 (0.02%)
*1.18	1.2483	1.2112 (2.97%)	1.2513 (0.24%)	1.2311 (1.38%)	1.2499 (0.06%)
*1.33	1.4447	1.4188 (1.80%)	1.4454 (0.04%)	1.4324 (0.85%)	1.4453 (0.01%)
*1.49	1.6077	1.5920 (0.98%)	1.6074 (0.02%)	1.6001 (0.48%)	1.6077 (0.01%)
*1.82	1.8034	1.8007 (0.15%)	1.8026 (0.04%)	1.8023 (0.06%)	1.8029 (0.01%)
*2.00	1.8285	1.8277 (0.04%)	1.8277 (0.04%)	1.8283 (0.01%)	1.8283 (0.01%)

8. Potencial de velocidad. Malla XUFI

coord x	sol. exacta vel.	malla 16x8		malla 32x16	
		I-1	I-2a	I-1	I-2a
0.00	0.7500	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)
0.22	0.6854	0.6781 (1.07%)	0.6833 (0.30%)	0.6736 (1.73%)	0.6816 (0.55%)
0.46	0.5766	0.5029 (12.8%)	0.4917 (14.7%)	0.5521 (4.25%)	0.5672 (1.60%)
0.81	0.2975	0.4672 (57.1%)	0.4460 (49.9%)	0.3698 (24.3%)	0.3450 (15.9%)
1.06	0.6960	0.5191 (25.4%)	0.5405 (22.3%)	0.5787 (16.9%)	0.6386 (8.24%)
1.14	1.0227	0.8929 (12.7%)	0.9871 (3.47%)	0.9858 (3.61%)	1.0174 (0.52%)
1.30	1.4221	1.3801 (2.96%)	1.4242 (0.15%)	1.4044 (1.25%)	1.4226 (0.03%)
1.53	1.7667	1.7512 (0.88%)	1.7680 (0.07%)	1.7597 (0.40%)	1.7670 (0.02%)
1.77	1.9443	1.9412 (0.16%)	1.9450 (0.04%)	1.9430 (0.07%)	1.9445 (0.01%)
1.84	1.9754	1.9743 (0.06%)	1.9761 (0.03%)	1.9748 (0.03%)	1.9756 (0.01%)
2.00	2.0000	2.0007 (0.03%)	2.0006 (0.03%)	2.0002 (0.01%)	2.0002 (0.01%)
*0.00	0.7638	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)
*0.20	0.7171	0.7270 (1.38%)	0.7336 (2.30%)	0.7076 (1.32%)	0.7150 (0.28%)
*0.42	0.6572	0.6610 (0.58%)	0.6491 (1.23%)	0.6500 (1.10%)	0.6626 (0.82%)
*0.66	0.6280	0.6372 (1.46%)	0.6121 (2.53%)	0.6240 (0.65%)	0.6113 (2.66%)
*0.85	0.7447	0.7145 (4.04%)	0.7397 (0.67%)	0.7252 (2.62%)	0.7527 (1.08%)
*0.99	0.9416	0.8896 (5.52%)	0.9679 (2.77%)	0.9174 (2.57%)	0.9503 (0.92%)
*1.10	1.1244	1.0769 (4.23%)	1.1359 (1.02%)	1.1035 (1.86%)	1.1264 (0.18%)
*1.48	1.6025	1.5867 (0.98%)	1.6019 (0.04%)	1.5959 (0.41%)	1.6023 (0.01%)
*1.74	1.7742	1.7701 (0.23%)	1.7738 (0.03%)	1.7724 (0.10%)	1.7741 (0.01%)
*1.83	1.8045	1.8024 (0.16%)	1.8041 (0.02%)	1.8038 (0.04%)	1.8044 (0.01%)
*2.00	1.8285	1.8281 (0.02%)	1.8281 (0.02%)	1.8284 (0.01%)	1.8284 (0.01%)

TABLA III: Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro. Se representan las velocidades obtenidas numéricamente, según distintos criterios numéricos, en los puntos $(x=Ht, y)$ del contorno de salida Cf. Entre paréntesis se indica el tanto por ciento de error respecto de la solución exacta. $\epsilon_0 = .000001$.

Funcion de corriente. Malla XULT, 16x8. Discret. ptos. int.: I-1.

y	sol. exacta vel.	C-1a/ V-1	C-1b/ V-2	C-2a/ V-1	C-2a/ V-2
1.099	1.8285	0.7526 (58.8%)	1.8011 (1.49%)	1.8033 (1.37%)	1.8296 (0.06%)
1.073	1.8686	1.5035 (19.5%)	1.8683 (0.01%)	1.8541 (0.77%)	1.8693 (0.04%)
1.048	1.9104	1.7492 (8.44%)	1.9105 (0.00%)	1.9155 (0.27%)	1.9105 (0.00%)
1.024	1.9542	1.5431 (21.0%)	1.9547 (0.02%)	1.9804 (1.34%)	1.9535 (0.03%)
1.000	2.0000	5.1548 (157.%)	2.0293 (1.46%)	2.0381 (1.91%)	1.9981 (0.10%)

Funcion de corriente. Malla XULT, 32x16. Discret. ptos. int.: I-1.

y	sol. exacta vel.	C-1a/ V-1	C-1b/ V-2	C-2a/ V-1	C-2a/ V-2
1.099	1.8285	1.1211 (38.7%)	1.8250 (0.19%)	1.8002 (1.54%)	1.8287 (0.01%)
1.073	1.8686	1.8360 (1.74%)	1.8684 (0.01%)	1.8535 (0.81%)	1.8687 (0.01%)
1.048	1.9104	1.9011 (0.49%)	1.9104 (0.00%)	1.9113 (0.05%)	1.9104 (0.00%)
1.024	1.9542	1.9556 (0.07%)	1.9543 (0.01%)	1.9724 (0.93%)	1.9541 (0.01%)
1.000	2.0000	3.4277 (71.4%)	2.0037 (0.19%)	2.0338 (1.69%)	1.9996 (0.02%)

Potencial de velocidad. Criterios numéricos: I-2a/ C-2a/ V-1. Malla: 16x8.

x	sol. exacta vel.	XULT	XUFI
1.099	1.8285	1.8277 (0.04%)	1.8280 (0.02%)
1.073	1.8686	1.8681 (0.03%)	1.8680 (0.01%)
1.048	1.9104	1.9104 (0.00%)	1.9101 (0.00%)
1.024	1.9542	1.9547 (0.03%)	1.9542 (0.01%)
1.000	2.0000	2.0012 (0.06%)	2.0006 (0.03%)

x	ZUEX
1.099	1.8266 (0.10%)
1.074	1.8666 (0.02%)
1.049	1.9087 (0.03%)
1.025	1.9531 (0.03%)
1.000	1.9999 (0.00%)

TABLA IV: Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro. Se representan las velocidades obtenidas numericamente en los contornos laterales, C_i y C_s , y el tanto por ciento de error respecto de la solución exacta. La velocidad en C_s se indica con un asterisco.

1. Función de corriente. Malla ZUEX. Esq. num.: A=I-1/V-2; B=I-2a/V-2.

coord x	sol. exacta vel.	16x8		32x16	
		A	B	A	B
0.00	0.7500	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)
0.25	0.6735	0.6734 (0.02%)	0.6730 (0.07%)	0.6735 (0.00%)	0.6734 (0.01%)
0.50	0.5556	0.5573 (0.31%)	0.5561 (0.11%)	0.5563 (0.13%)	0.5569 (0.24%)
0.75	0.3600	0.3774 (4.83%)	0.3758 (4.40%)	0.3672 (2.00%)	0.3735 (3.76%)
0.88	0.2099	0.2520 (20.1%)	0.2825 (34.6%)	0.2318 (10.4%)	0.2401 (14.4%)
1.13	0.9682	1.0141 (4.74%)	0.8337 (13.9%)	0.8944 (7.63%)	0.8853 (8.56%)
1.25	1.3229	1.2599 (4.76%)	1.2610 (4.67%)	1.3164 (0.49%)	1.3110 (0.90%)
1.50	1.7321	1.7315 (0.03%)	1.7293 (0.16%)	1.7319 (0.01%)	1.7316 (0.02%)
1.75	1.9365	1.9369 (0.02%)	1.9360 (0.02%)	1.9366 (0.01%)	1.9365 (0.00%)
2.00	2.0000	1.9994 (0.03%)	1.9995 (0.02%)	2.0000 (0.00%)	2.0005 (0.03%)
*0.00	0.7638	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7500 (0.00%)
*0.25	0.7038	0.7039 (0.00%)	0.7052 (0.19%)	0.7038 (0.00%)	0.7041 (0.04%)
*0.50	0.6392	0.6373 (0.30%)	0.6370 (0.34%)	0.6383 (0.14%)	0.6370 (0.35%)
*0.75	0.6592	0.6305 (4.35%)	0.5878 (10.8%)	0.6495 (1.46%)	0.6261 (5.02%)
*0.88	0.7730	0.7029 (9.06%)	0.6326 (18.2%)	0.7581 (1.93%)	0.7321 (5.29%)
*1.13	1.1576	1.2897 (11.4%)	1.3929 (20.3%)	1.1598 (0.19%)	1.1506 (0.60%)
*1.25	1.3414	1.3454 (0.30%)	1.3152 (1.96%)	1.3447 (0.24%)	1.3464 (0.37%)
*1.50	1.6187	1.6229 (0.26%)	1.6240 (0.33%)	1.6197 (0.07%)	1.6199 (0.08%)
*1.75	1.7771	1.7778 (0.04%)	1.7787 (0.09%)	1.7773 (0.01%)	1.7775 (0.02%)
*2.00	1.8285	1.8286 (0.00%)	1.8285 (0.00%)	1.8285 (0.00%)	1.8280 (0.03%)

2 Función de corriente. Malla XULT. Esq. num.: A=I-1/V-2; B=I-2a/V-2.

coord x	sol. exacta vel.	16x8		32x16	
		A	B	A	B
0.00	0.7500	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)
0.32	0.6451	0.6444 (0.11%)	0.6423 (0.44%)	0.6451 (0.00%)	0.6444 (0.12%)
0.48	0.5660	0.5658 (0.04%)	0.5613 (0.84%)	0.5667 (0.13%)	0.5648 (0.21%)
0.64	0.4572	0.4590 (0.40%)	0.4523 (1.07%)	0.4604 (0.70%)	0.4556 (0.36%)
0.80	0.3016	0.3111 (3.13%)	0.3035 (0.63%)	0.3090 (2.44%)	0.2979 (1.23%)
1.01	0.2488	0.2798 (12.5%)	0.2594 (4.24%)	0.2613 (5.01%)	0.2453 (1.39%)
1.10	0.8629	0.8627 (0.02%)	0.8522 (1.23%)	0.8636 (0.09%)	0.8602 (0.31%)
1.28	1.3886	1.3882 (0.03%)	1.3884 (0.01%)	1.3885 (0.01%)	1.3886 (0.00%)
1.54	1.7721	1.7725 (0.02%)	1.7732 (0.06%)	1.7722 (0.01%)	1.7724 (0.02%)
1.84	1.9742	1.9747 (0.02%)	1.9747 (0.03%)	1.9744 (0.01%)	1.9744 (0.01%)
2.00	2.0000	1.9981 (0.10%)	1.9981 (0.10%)	1.9996 (0.02%)	1.9996 (0.02%)
*0.00	0.7638	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)
*0.30	0.6912	0.6911 (0.02%)	0.6932 (0.29%)	0.6910 (0.03%)	0.6919 (0.10%)
*0.44	0.6532	0.6509 (0.34%)	0.6508 (0.37%)	0.6518 (0.21%)	0.6529 (0.05%)
*0.70	0.6371	0.6099 (4.26%)	0.6396 (0.41%)	0.6172 (3.12%)	0.6414 (0.68%)
*0.80	0.6965	0.6777 (2.70%)	0.6733 (3.33%)	0.6880 (1.23%)	0.6894 (1.03%)
*0.92	0.8325	0.8273 (0.62%)	0.8345 (0.24%)	0.8305 (0.24%)	0.8337 (0.15%)
*1.18	1.2483	1.2481 (0.01%)	1.2506 (0.19%)	1.2482 (0.00%)	1.2488 (0.05%)
*1.33	1.4447	1.4445 (0.01%)	1.4446 (0.01%)	1.4447 (0.00%)	1.4447 (0.01%)
*1.49	1.6077	1.6074 (0.02%)	1.6068 (0.06%)	1.6077 (0.00%)	1.6075 (0.02%)
*1.82	1.8034	1.8031 (0.02%)	1.8025 (0.05%)	1.8033 (0.00%)	1.8031 (0.02%)
*2.00	1.8285	1.8296 (0.06%)	1.8296 (0.06%)	1.8287 (0.01%)	1.8287 (0.01%)

3. Potencial de velocidad. Esq. num.: A=I-1, B=I-2a

coord x	sol. exacta vel.	Malla ZUEX, 16x8.			
		A/C-1a/V-1	A/C-1b/V-2	A/C-2a/V-2	B/C-2a/V-2
0.00	0.7500	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)
0.25	0.6735	0.8834 (31.2%)	0.7481 (11.1%)	0.7586 (12.7%)	0.6711 (0.36%)
0.50	0.5556	0.7192 (29.5%)	0.6178 (11.2%)	0.6222 (12.0%)	0.5440 (2.08%)
0.75	0.3600	0.4946 (37.4%)	0.4159 (15.5%)	0.3743 (3.98%)	0.2960 (17.8%)
0.88	0.2099	0.1821 (13.2%)	0.1569 (25.2%)	0.2547 (21.4%)	0.1799 (14.3%)
1.13	0.9682	0.5471 (43.5%)	0.5893 (39.1%)	0.6086 (37.1%)	0.7699 (20.5%)
1.25	1.3229	1.0342 (21.8%)	1.1484 (13.2%)	1.1720 (11.4%)	1.3248 (0.14%)
1.50	1.7321	1.6189 (6.53%)	1.7102 (1.26%)	1.7121 (1.15%)	1.7311 (0.06%)
1.75	1.9365	1.9081 (1.47%)	1.9335 (0.15%)	1.9337 (0.14%)	1.9370 (0.03%)
2.00	2.0000	2.0003 (0.02%)	2.0002 (0.01%)	1.9998 (0.01%)	1.9992 (0.04%)
*0.00	0.7638	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)
*0.25	0.7038	0.9231 (31.1%)	0.7843 (1.43%)	0.7969 (13.2%)	0.7075 (0.51%)
*0.50	0.6392	0.7986 (24.9%)	0.7045 (0.21%)	0.7217 (12.9%)	0.6657 (4.13%)
*0.75	0.6592	0.6511 (1.21%)	0.6370 (3.35%)	0.6694 (1.56%)	0.7158 (8.60%)
*0.88	0.7730	0.6200 (19.8%)	0.6427 (6.86%)	0.6765 (12.5%)	0.7871 (1.83%)
*1.13	1.1576	0.9017 (22.1%)	0.9916 (4.33%)	1.0144 (12.4%)	1.1783 (1.79%)
*1.25	1.3414	1.1769 (12.3%)	1.2899 (3.84%)	1.3011 (3.01%)	1.3765 (2.61%)
*1.50	1.6187	1.5365 (5.07%)	1.6065 (0.75%)	1.6079 (0.66%)	1.6202 (0.09%)
*1.75	1.7771	1.7545 (1.28%)	1.7734 (0.21%)	1.7734 (0.21%)	1.7758 (0.07%)
*2.00	1.8285	1.8272 (0.07%)	1.8300 (0.08%)	1.8266 (0.10%)	1.8295 (0.06%)

4. Potencial de velocidad.

coord x	sol. exacta vel.	Malla XULT, 16x8.			
		A/C-1a/V-1	A/C-1b/V-2	A/C-2a/V-2	B/C-2a/V-2
0.00	0.7500	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)	0.7500 (0.00%)
0.32	0.6451	0.4999 (22.5%)	0.5928 (8.11%)	0.6101 (5.43%)	0.6428 (0.36%)
0.48	0.5660	0.4336 (23.4%)	0.5190 (8.31%)	0.5323 (5.95%)	0.5570 (1.59%)
0.64	0.4572	0.3456 (24.4%)	0.4198 (8.18%)	0.4262 (6.77%)	0.4347 (4.92%)
0.80	0.3016	0.2021 (33.0%)	0.2587 (14.2%)	0.2681 (11.1%)	0.2734 (9.37%)
1.01	0.2488	0.2034 (18.3%)	0.2646 (6.36%)	0.2848 (14.5%)	0.2840 (14.1%)
1.10	0.8629	0.7521 (12.8%)	0.8513 (1.34%)	0.8467 (1.87%)	0.8555 (0.85%)
1.28	1.3886	1.3039 (6.10%)	1.3909 (0.17%)	1.3912 (0.19%)	1.4008 (0.88%)
1.54	1.7721	1.7384 (1.90%)	1.7893 (0.97%)	1.7885 (0.93%)	1.7851 (0.73%)
1.84	1.9742	1.9714 (0.14%)	1.9969 (1.15%)	1.9962 (1.11%)	1.9920 (0.90%)
2.00	2.0000	2.0013 (0.07%)	2.0234 (1.17%)	1.9976 (0.12%)	2.0284 (1.42%)
*0.00	0.7638	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)	0.7638 (0.00%)
*0.30	0.6912	0.5351 (22.6%)	0.6381 (7.69%)	0.6581 (4.79%)	0.6939 (0.39%)
*0.44	0.6532	0.4973 (23.9%)	0.6029 (7.69%)	0.6233 (4.58%)	0.6499 (0.50%)
*0.70	0.6371	0.5013 (21.3%)	0.6190 (2.84%)	0.7079 (11.1%)	0.8236 (29.3%)
*0.80	0.6965	0.5741 (17.6%)	0.6875 (1.29%)	0.6760 (2.95%)	0.6520 (6.38%)
*0.92	0.8325	0.7231 (13.1%)	0.8272 (0.64%)	0.8309 (0.19%)	0.8399 (0.88%)
*1.18	1.2483	1.1725 (6.07%)	1.2515 (0.26%)	1.2524 (0.33%)	1.2625 (1.14%)
*1.33	1.4447	1.3912 (3.71%)	1.4538 (0.63%)	1.4537 (0.62%)	1.4559 (0.77%)
*1.49	1.6077	1.5753 (2.02%)	1.6215 (0.86%)	1.6208 (0.81%)	1.6176 (0.62%)
*1.82	1.8034	1.7989 (0.25%)	1.8222 (1.04%)	1.8215 (1.01%)	1.8177 (0.79%)
*2.00	1.8285	1.8278 (0.04%)	1.8543 (1.41%)	1.8305 (0.11%)	1.8586 (1.65%)

TABLA V: Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro. Estudio de los coeficientes métricos. Se indica: - la diferencia máxima entre los valores obtenidos numéricamente, de ψ o ϕ , y la solución exacta; - el punto (i,j) de la malla en donde se produce dicha diferencia. $\epsilon_0 = .0000001$.

1. Función de corriente. Criterio discretización: I-2b/C-2b.

	16x8	32x16
ZUEX	0.015790 (9,3)	0.006646 (17,3)
YUEX	0.014749 (9,5)	0.006839 (17,8)
XULT	0.002426 (7,2)	0.000785 (13,2)
XUFI	0.003042 (5,4)	0.002116 (8,4)
XUEX	0.010490 (9,2)	0.004998 (17,2)

2. Función de corriente. Criterio discretización: I-1. La resolución de ψ se realiza para una malla de 16x8. Los coeficientes métricos relativos a los puntos de la malla indicada son obtenidos numéricamente de distintas densidades de malla o de la solución exacta.

	Coeficientes métricos de malla:				sol. exacta
	16x8	32x16	64x32	128x64	
XUFI	.001792 (5,4)	.001873 (4,2)	.000795 (4,2)	.000147 (4,2)	.000000
XULT	.003769 (8,3)	.002179 (7,3)	.001274 (7,4)	.000322 (7,4)	-
YUEX	.020399 (9,5)	.021015 (9,7)	.069043 (9,8)	.139352 (9,8)	-
XUEX	.021777 (9,3)	.022339	.043081	div.	

3. Potencial de velocidad. Criterio discretización: I-2b/C-2b.

	16x8	32x16
ZUEX	0.079403 (17,1)	0.031354 (33,1)
XULT	0.011105 (15,9)	0.002773 (29,17)
XUFI	0.026647 (4,1)	0.019362 (8,1)

TABLA VI: Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro. Se indica el número de iteraciones requerido para $\epsilon_0 = .0000001$, según los distintos métodos numéricos y factores de sobrerelajación utilizados. El mapa de ψ o ϕ empleado para el inicio de las iteraciones es el correspondiente a la solución analítica.

1. Función de corriente. Malla XUFI. $A=I-1/C-2a$. $B=I-2a/C-2a$.

		Gauss-Seidel, f:			TDMA _i , f:			TDMA _j , f:			
		1.00	1.40	1.80	1.00	1.40	1.80	1.00	1.10	1.20	1.25
A	16x8	46	18	44	45	17	43	6	9	15	33
	8x16	183	84	47	183	84	47	4	13	49	div
	32x16	142	66	39	139	64	42	10	14	div	
B	16x8	48	19	52	48	18	47	6	10	17	37
	8x16	182	83	47	182	83	47	4	13	43	div
	32x16	138	65	43	136	63	43	10	16	div	

2. Potencial de velocidad. Malla XUFI. Esq. num.: $A=I-1/C-2a$; $B=I-2a/C-2a$.

		Gauss-Seidel, f:					TDMA _j , f:					
		1.00	1.60	1.70	1.80	1.90	1.00	1.05	1.10	1.125	1.130	1.40
A	16x8	18461	6183	4654	3181	div	913	673	444	348	-	div
	32x16	46984	18028	13858	9688	-	2764	1831	892	div		
B	16x8	13386	4913	3755	2611	div	781	580	386	296	450	div
	32x16	-	8444	7085	5410	div	1849	1270	650	div		

3. Potencial de velocidad. Factores de sobrerelajación en contornos. Malla XUFI, 16x8. Esq. num.: $I-1/C-2a$. Gauss-Seidel. $f=1.60$ (ptos. int.).

fcl	fcs	it	fcl	fcs	it	fcl	fcs	it
1.40	1.60	6628	1.60	1.40	6188	1.40	1.40	6632
1.60		6138		1.60	6138	1.60	1.60	6138
1.80		5831		1.80	6179	1.80	1.80	5827
1.90		5681						

TABLA VII: Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro. Resultados numéricos a diferentes precisiones ϵ_0 . Se indica: a) diferencia máxima entre el valor numérico de ψ y el valor exacto; b) punto (i,j) donde se produce dicha diferencia; c) número de iteraciones. Mallas 32x16; TDMAj; inicio iteraciones $\psi=1.0$; discr. cont.: C-2a.

1. Función de corriente

ϵ_0	XULT		ZUEX	
	I-1	I-2a	I-1	I-2a
.1	.85771 (13,8) It = 4	.78866 (13,8) 5	.31070 (13,8) 6	.30778 (13,8) 6
.01	.13020 (13,9) 33	.09717 (13,9) 29	.02611 (12,9) 15	.02603 (12,9) 15
.001	.01534 (13,8) 65	.00983 (13,9) 54	.00673 (17,3) 23	.01404 (17,3) 23
.0001	.00350 (13,7) 98	.00124 (11,7) 79	.00631 (17,3) 31	.01359 (17,3) 31
.00001	.00256 (14,5) 130	.00076 (33,9) 104	.00627 (17,3) 39	.01355 (17,3) 39
.000001	.00248 (14,5) 163	.00077 (33,9) 129	.00626 (17,3) 47	.01355 (17,3) 47
.0000001	.00247 (14,5) 195	.00077 (33,9) 154	.00626 (17,3) 55	.01355 (17,3) 55

TABLA VIII: Flujo potencial compresible alrededor de un cilindro. Se indica el número de iteraciones en función del factor de subrelajación f_v empleado. Los valores de ψ y ρ empleados para el inicio de las iteraciones, corresponden a la solución numérica obtenida para $M_\infty=0.001$.

1. Función de corriente. $M_\infty=0.225$; mallas 32x16; TDMAj; $\epsilon_0=0.0000001$; esq. num: I-2a/C-2a.

	f_v				
	1.00	.75	.50	.25	.10
XUFI	371	43	41	58	175
XULT	no conv.	62	60	80	179
ZUEX	-	57	41	79	176

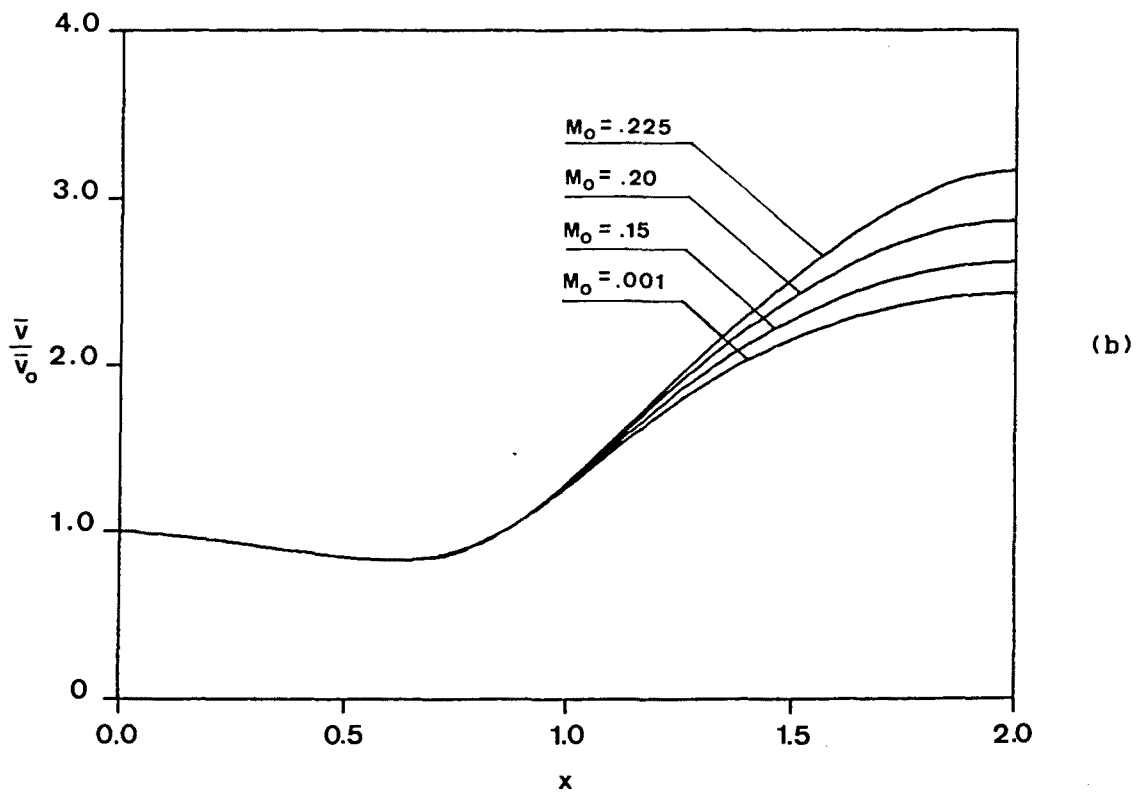
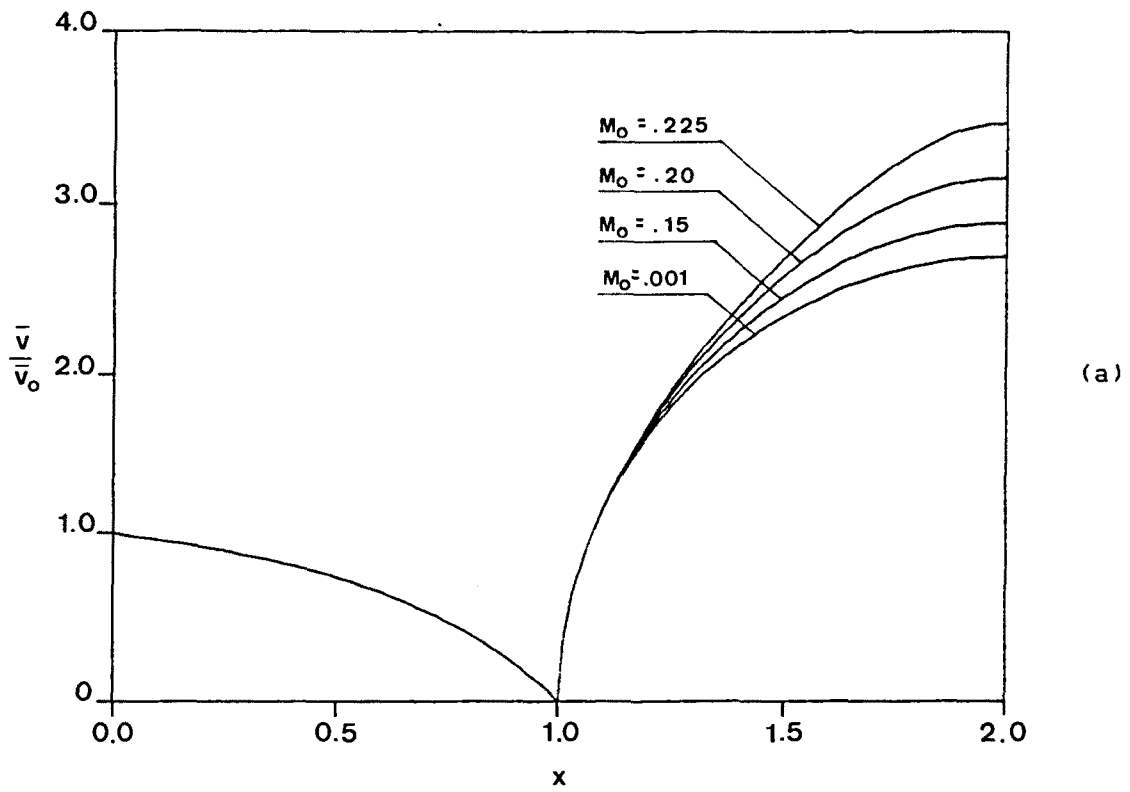


Fig. 20 Flujo potencial compresible alrededor de un cilindro (Fig. 17). Velocidad adimensional a diferentes M_0 en: a) contorno lateral Ci; b) contorno lateral Cs.

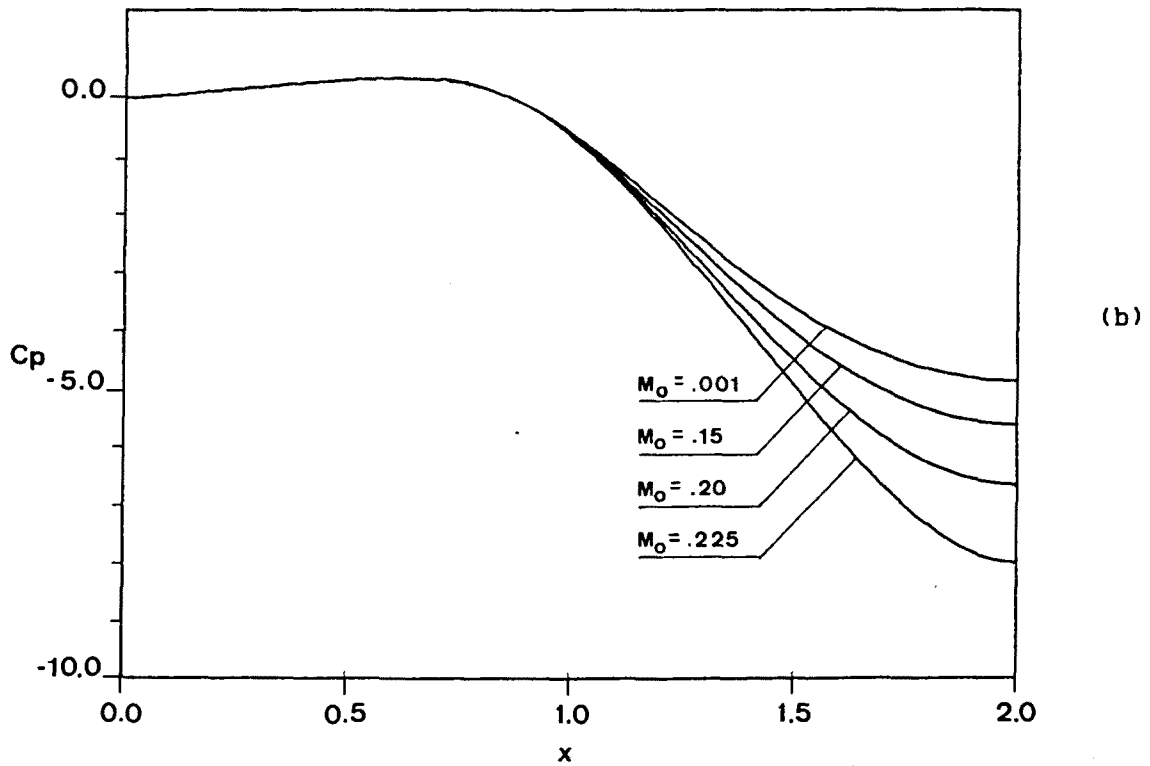
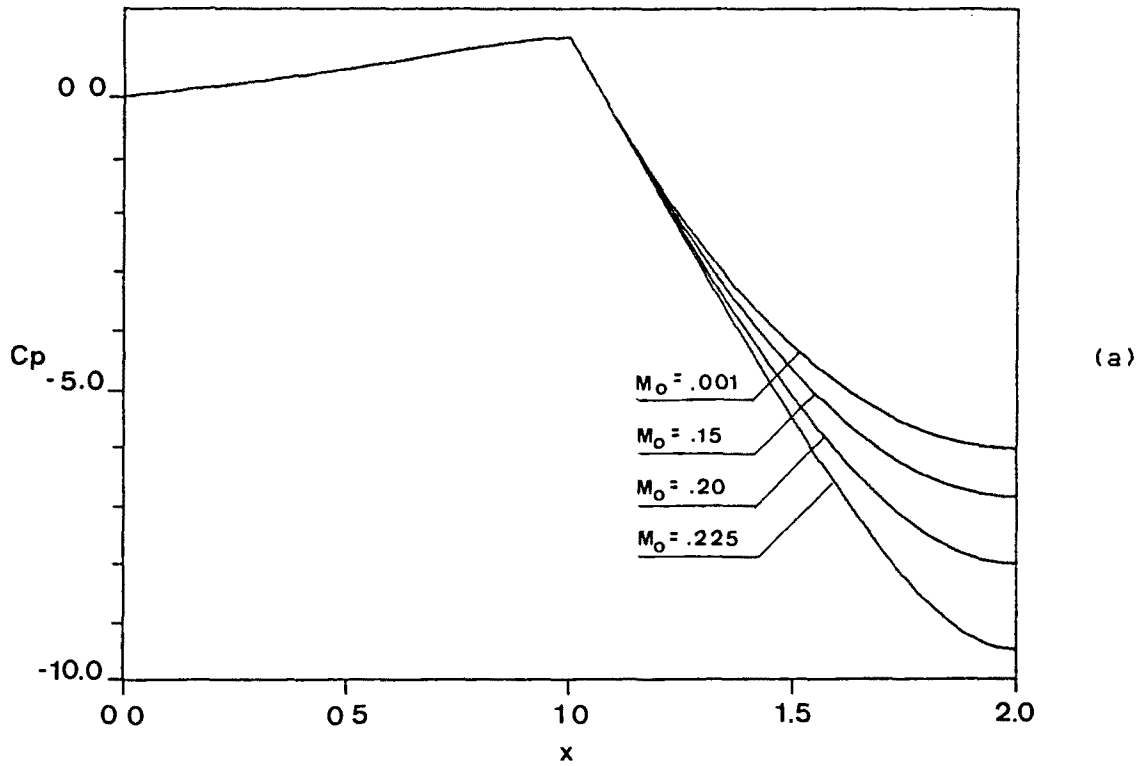


Fig. 21 Flujo potencial compresible alrededor de un cilindro (Fig. 17). Coeficiente de presión a diferentes M_o en: a) contorno lateral C_i ; b) contorno lateral C_s .

TABLA X: Flujo potencial a través de una tobera (Fig. 18). Velocidades obtenidas en los contornos laterales mediante la utilización de la función de corriente. Esq. num.: I-2b/C-2b/V-1. Malla YUEX 128x64. $\epsilon_0 = .000001$.

x	Mo=.001, k=1.4		Mo=.190, k=1.4	
	Vi	Vs	Vi	Vs
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.369	0.9884	1.0099	0.9886	1.0098
0.738	0.9665	1.0245	0.9667	1.0245
1.106	0.8974	1.0496	0.8969	1.0503
1.475	0.9112	1.0916	0.9115	1.0940
1.844	0.9834	1.1574	0.9860	1.1633
2.213	1.0979	1.2537	1.1050	1.2661
2.581	1.2559	1.3875	1.2718	1.4120
2.950	1.4656	1.5670	1.4991	1.6139
3.319	1.7388	1.7999	1.8083	1.8891
3.688	2.0846	2.0887	2.2293	2.2597
4.056	2.4923	2.4176	2.7947	2.7459
4.425	2.8971	2.7299	3.5090	3.3355
4.794	3.1275	2.9296	4.1585	3.8550
5.162	3.0107	2.9905	3.9922	3.9828
5.531	3.0010	2.9990	3.9875	3.9873
5.900	3.0002	2.9998	3.9874	3.9874

TABLA XI: Flujo potencial a través de una tobera (Fig. 18). Velocidades en los contornos laterales C_i y C_s . Se indica, entre paréntesis, la diferencia en tanto por ciento respecto a las velocidades dadas en la tabla X. Esq. num.: I-2b/C-2b/V-1; malla YUEX; $\epsilon_0 = .000001$.

1. Función de corriente, $M_0 = .001$ $k = 1.4$.

x	16x8	32x16	64x32	96x48
0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
0.369	0.9884 (0.00%)	0.9885 (0.01%)	0.9885 (0.01%)	0.9885 (0.01%)
0.738	0.9673 (0.08%)	0.9666 (0.01%)	0.9666 (0.01%)	0.9666 (0.01%)
1.106	0.9224 (2.79%)	0.9087 (1.26%)	0.9014 (0.45%)	0.8987 (0.14%)
1.475	0.9350 (2.61%)	0.9215 (1.13%)	0.9147 (0.38%)	0.9124 (0.13%)
1.844	1.0064 (2.34%)	0.9934 (1.02%)	0.9868 (0.35%)	0.9846 (0.12%)
2.213	1.1209 (2.09%)	1.1080 (0.92%)	1.1013 (0.31%)	1.0991 (0.11%)
2.581	1.2792 (1.86%)	1.2661 (0.81%)	1.2594 (0.28%)	1.2571 (0.10%)
2.950	1.4886 (1.57%)	1.4757 (0.69%)	1.4690 (0.23%)	1.4667 (0.08%)
3.319	1.7595 (1.19%)	1.7480 (0.53%)	1.7419 (0.18%)	1.7398 (0.06%)
3.688	2.0993 (0.71%)	2.0912 (0.32%)	2.0868 (0.11%)	2.0853 (0.03%)
4.056	2.4952 (0.12%)	2.4938 (0.06%)	2.4928 (0.02%)	2.4924 (0.00%)
4.425	2.8808 (0.56%)	2.8906 (0.22%)	2.8950 (0.07%)	2.8964 (0.02%)
4.794	3.0848 (1.37%)	3.1098 (0.57%)	3.1221 (0.17%)	3.1258 (0.05%)
5.162	3.0153 (0.15%)	3.0121 (0.05%)	3.0109 (0.01%)	3.0108 (0.00%)
5.531	3.0019 (0.03%)	3.0012 (0.01%)	3.0011 (0.00%)	3.0010 (0.00%)
5.900	3.0005 (0.01%)	3.0003 (0.00%)	3.0002 (0.00%)	3.0002 (0.00%)
*0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
*0.369	1.0096 (0.03%)	1.0097 (0.02%)	1.0098 (0.01%)	1.0098 (0.01%)
*0.738	1.0238 (0.07%)	1.0242 (0.03%)	1.0244 (0.01%)	1.0244 (0.01%)
*1.106	1.0481 (0.14%)	1.0491 (0.05%)	1.0494 (0.02%)	1.0495 (0.01%)
*1.475	1.0895 (0.19%)	1.0910 (0.05%)	1.0914 (0.02%)	1.0915 (0.01%)
*1.844	1.1550 (0.21%)	1.1567 (0.06%)	1.1572 (0.02%)	1.1573 (0.01%)
*2.213	1.2512 (0.20%)	1.2530 (0.06%)	1.2535 (0.02%)	1.2536 (0.01%)
*2.581	1.3850 (0.18%)	1.3869 (0.04%)	1.3873 (0.01%)	1.3875 (0.00%)
*2.950	1.5645 (0.16%)	1.5664 (0.04%)	1.5669 (0.01%)	1.5670 (0.00%)
*3.319	1.7975 (0.13%)	1.7993 (0.03%)	1.7998 (0.01%)	1.7999 (0.00%)
*3.688	2.0867 (0.10%)	2.0893 (0.02%)	2.0886 (0.00%)	2.0887 (0.00%)
*4.056	2.4167 (0.04%)	2.4174 (0.01%)	2.4175 (0.00%)	2.4176 (0.00%)
*4.425	2.7318 (0.07%)	2.7303 (0.01%)	2.7300 (0.00%)	2.7299 (0.00%)
*4.794	2.9351 (0.19%)	2.9305 (0.03%)	2.9298 (0.01%)	2.9297 (0.00%)
*5.162	2.9888 (0.06%)	2.9899 (0.02%)	2.9914 (0.00%)	2.9904 (0.00%)
*5.531	2.9983 (0.02%)	2.9988 (0.01%)	2.9990 (0.00%)	2.9990 (0.00%)
*5.900	2.9998 (0.01%)	2.9997 (0.00%)	2.9998 (0.00%)	2.9998 (0.00%)

(*) Velocidad en contorno superior C_s .

2. Función de corriente. $Mo=0.19$ $k=1.4$.

x	16x8	32x16	64x32
0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
0.369	0.9885 (0.01%)	0.9886 (0.00%)	0.9886 (0.00%)
0.738	0.9673 (0.06%)	0.9667 (0.00%)	0.9668 (0.01%)
1.106	0.9217 (2.77%)	0.9081 (1.25%)	0.9008 (0.43%)
1.475	0.9351 (2.59%)	0.9217 (1.12%)	0.9149 (0.37%)
1.844	1.0088 (2.31%)	0.9959 (1.00%)	0.9894 (0.34%)
2.213	1.1282 (2.10%)	1.1152 (0.92%)	1.1085 (0.32%)
2.581	1.2957 (1.88%)	1.2823 (0.83%)	1.2754 (0.28%)
2.950	1.5234 (1.62%)	1.5098 (0.71%)	1.5028 (0.25%)
3.319	1.8314 (1.28%)	1.8185 (0.56%)	1.8118 (0.19%)
3.688	2.2484 (0.86%)	2.2378 (0.38%)	2.2321 (0.13%)
4.056	2.8050 (0.37%)	2.7992 (0.16%)	2.7962 (0.05%)
4.425	3.5036 (0.15%)	3.5069 (0.06%)	3.5083 (0.02%)
4.794	4.0919 (1.60%)	4.1339 (0.59%)	4.1527 (0.14%)
5.162	4.0022 (0.25%)	3.9947 (0.06%)	3.9926 (0.01%)
5.531	3.9881 (0.02%)	3.9876 (0.00%)	3.9875 (0.00%)
5.900	3.9875 (0.00%)	3.9874 (0.00%)	3.9874 (0.00%)
*0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
*0.369	1.0096 (0.02%)	1.0097 (0.01%)	1.0097 (0.01%)
*0.738	1.0239 (0.06%)	1.0243 (0.02%)	1.0244 (0.01%)
*1.106	1.0488 (0.14%)	1.0498 (0.05%)	1.0501 (0.02%)
*1.475	1.0919 (0.19%)	1.0934 (0.05%)	1.0938 (0.02%)
*1.844	1.1609 (0.21%)	1.1626 (0.06%)	1.1630 (0.03%)
*2.213	1.2636 (0.20%)	1.2654 (0.06%)	1.2659 (0.02%)
*2.581	1.4095 (0.18%)	1.4113 (0.05%)	1.4118 (0.01%)
*2.950	1.6112 (0.17%)	1.6132 (0.04%)	1.6137 (0.01%)
*3.319	1.8864 (0.14%)	1.8884 (0.04%)	1.8889 (0.01%)
*3.688	2.2571 (0.12%)	2.2590 (0.03%)	2.2595 (0.01%)
*4.056	2.7434 (0.09%)	2.7453 (0.02%)	2.7458 (0.00%)
*4.425	3.3345 (0.03%)	3.3352 (0.01%)	3.3354 (0.00%)
*4.794	3.8722 (0.45%)	3.8585 (0.09%)	3.8557 (0.02%)
*5.162	3.9778 (0.13%)	3.9811 (0.04%)	3.9825 (0.01%)
*5.531	3.9868 (0.01%)	3.9872 (0.00%)	3.9873 (0.00%)
*5.900	3.9873 (0.00%)	3.9874 (0.00%)	3.9874 (0.00%)

(*) Velocidad en contorno superior C_s .

TABLA XII: Flujo a través de una tobera. Velocidades en los contornos laterales Ci y Cs. Contrastación entre diferentes criterios numéricos. Malla YUEX, $\epsilon_0 = .000001$.

1. Función de corriente. $Mo = .001$ $k = 1.4$.

x	I-2a/C-2a		I-1/C-2a	
	16x8	32x16	16x8	32x16
0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
0.738	0.9608 (0.59%)	0.9639 (0.27%)	0.9673 (0.08%)	0.9666 (0.01%)
1.475	0.9413 (3.30%)	0.9230 (1.29%)	0.9352 (2.63%)	0.9126 (1.14%)
2.213	1.1225 (2.24%)	1.1084 (0.96%)	1.1210 (2.10%)	1.1080 (0.92%)
2.950	1.4899 (1.66%)	1.4761 (0.72%)	1.4886 (1.57%)	1.4757 (0.69%)
3.688	2.1003 (0.75%)	2.0915 (0.33%)	2.0994 (0.71%)	2.0912 (0.32%)
4.056	2.4944 (0.08%)	2.4937 (0.06%)	2.4954 (0.12%)	2.4938 (0.06%)
4.425	2.8692 (0.96%)	2.8890 (0.28%)	2.8812 (0.55%)	2.8908 (0.22%)
4.794	3.0653 (1.99%)	3.0925 (1.12%)	3.0852 (1.35%)	3.1101 (0.56%)
5.162	3.0327 (0.73%)	3.0185 (0.26%)	3.0153 (0.15%)	3.0121 (0.05%)
5.531	3.0050 (0.13%)	3.0017 (0.02%)	3.0019 (0.03%)	3.0012 (0.01%)
5.900	3.0012 (0.03%)	3.0004 (0.01%)	3.0003 (0.01%)	3.0003 (0.00%)
*0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
*0.738	1.0256 (0.11%)	1.0248 (0.03%)	1.0237 (0.08%)	1.0242 (0.03%)
*1.475	1.0865 (0.47%)	1.0903 (0.12%)	1.0895 (0.19%)	1.0910 (0.05%)
*2.213	1.2501 (0.29%)	1.2527 (0.08%)	1.2511 (0.21%)	1.2530 (0.06%)
*2.950	1.5637 (0.21%)	1.5662 (0.05%)	1.5670 (0.17%)	1.5664 (0.04%)
*3.688	2.0864 (0.11%)	2.0881 (0.03%)	2.0867 (0.10%)	2.0882 (0.02%)
*4.056	2.4178 (0.01%)	2.4175 (0.00%)	2.4166 (0.04%)	2.4173 (0.01%)
*4.425	2.7385 (0.32%)	2.7317 (0.07%)	2.7316 (0.06%)	2.7303 (0.01%)
*4.794	2.9451 (0.53%)	2.9363 (0.23%)	2.9350 (0.18%)	2.9304 (0.03%)
*5.162	2.9801 (0.35%)	2.9870 (0.12%)	2.9888 (0.06%)	2.9899 (0.02%)
*5.531	2.9961 (0.10%)	2.9984 (0.02%)	2.9983 (0.02%)	2.9988 (0.01%)
*5.900	2.9989 (0.03%)	2.9996 (0.01%)	2.9995 (0.01%)	2.9997 (0.00%)

(*) Velocidad en contorno superior Cs.

2. Potencial de velocidad. $M_0 = .001$ $k = 1.4$.

	x	I-2b/C-2b	I-2a/C-2a	I-1/C-2a
16x8	0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
	0.738	0.9508 (1.62%)	0.9510 (1.60%)	0.9480 (1.91%)
	1.475	0.9270 (1.73%)	0.9281 (1.85%)	0.9240 (1.40%)
	2.213	1.1039 (0.55%)	1.1070 (0.83%)	1.0998 (0.17%)
	2.950	1.4702 (0.31%)	1.4798 (0.97%)	1.4644 (0.08%)
	3.688	2.0826 (0.10%)	2.1017 (0.82%)	2.0758 (0.42%)
	4.056	2.4756 (0.67%)	2.4953 (0.12%)	2.4698 (0.90%)
	4.425	2.8422 (1.89%)	2.8557 (1.43%)	2.8387 (2.02%)
	4.794	3.0339 (2.99%)	3.0389 (2.83%)	3.0330 (3.02%)
	5.162	3.0360 (0.84%)	3.0366 (0.86%)	3.0360 (0.84%)
	5.531	3.0055 (0.15%)	3.0054 (0.15%)	3.0055 (0.15%)
	5.900	3.0013 (0.04%)	3.0012 (0.03%)	3.0013 (0.04%)
	*0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
	*0.738	1.0301 (0.55%)	1.0304 (0.58%)	1.0270 (0.24%)
	*1.475	1.0969 (0.49%)	1.0980 (0.59%)	1.0931 (0.14%)
	*2.213	1.2597 (0.48%)	1.2642 (0.84%)	1.2548 (0.09%)
	*2.950	1.5720 (0.32%)	1.5835 (1.05%)	1.5658 (0.08%)
	*3.688	2.0838 (0.23%)	2.1034 (0.70%)	2.0777 (0.53%)
	*4.056	2.3991 (0.77%)	2.4179 (0.01%)	2.3942 (0.97%)
	*4.425	2.6939 (1.32%)	2.7055 (0.89%)	2.6910 (1.42%)
	*4.794	2.8935 (1.23%)	2.8971 (1.11%)	2.8926 (1.26%)
	*5.162	2.9767 (0.46%)	2.9772 (0.44%)	2.9767 (0.46%)
	*5.531	2.9960 (0.10%)	2.9961 (0.10%)	2.9960 (0.10%)
	*5.900	2.9988 (0.03%)	2.9989 (0.03%)	2.9988 (0.03%)
32x16	0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
	0.738	0.9597 (0.70%)	0.9595 (0.72%)	0.9589 (0.79%)
	1.475	0.9118 (0.07%)	0.9119 (0.08%)	0.9109 (0.03%)
	2.213	1.0969 (0.09%)	1.0975 (0.04%)	1.0957 (0.20%)
	2.950	1.4643 (0.09%)	1.4665 (0.06%)	1.4625 (0.21%)
	3.688	2.0826 (0.10%)	2.0874 (0.13%)	2.0804 (0.20%)
	4.056	2.4880 (0.17%)	2.4932 (0.04%)	2.4861 (0.25%)
	4.425	2.8866 (0.36%)	2.8900 (0.25%)	2.8853 (0.41%)
	4.794	3.0893 (1.22%)	3.0905 (1.18%)	3.0890 (1.23%)
	5.162	3.0194 (0.29%)	3.0193 (0.29%)	3.0194 (0.29%)
	5.531	3.0017 (0.02%)	3.0017 (0.02%)	3.0017 (0.02%)
	5.900	3.0004 (0.01%)	3.0004 (0.01%)	3.0004 (0.01%)
	*0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
	*0.738	1.0278 (0.32%)	1.0278 (0.32%)	1.0270 (0.24%)
	*1.475	1.0933 (0.16%)	1.0935 (0.17%)	1.0923 (0.06%)
	*2.213	1.2552 (0.12%)	1.2563 (0.21%)	1.2539 (0.02%)
	*2.950	1.5683 (0.08%)	1.5711 (0.26%)	1.5665 (0.03%)
	*3.688	2.0876 (0.05%)	2.0926 (0.19%)	2.0856 (0.15%)
	*4.056	2.4129 (0.19%)	2.4178 (0.01%)	2.4112 (0.26%)
	*4.425	2.7204 (0.35%)	2.7234 (0.24%)	2.7194 (0.38%)
	*4.794	2.9199 (0.33%)	2.9205 (0.31%)	2.9196 (0.34%)
	*5.162	2.9870 (0.12%)	2.9870 (0.12%)	2.9870 (0.12%)
	*5.531	2.9984 (0.02%)	2.9984 (0.02%)	2.9984 (0.02%)
	*5.900	2.9996 (0.01%)	2.9996 (0.01%)	2.9997 (0.00%)

(*) Velocidad en contorno superior C_s .

3. Función de corriente. $M_0=0.19$ $k=1.4$.

x	I-2a/C-2a		I-1/C-2a	
	16x8	32x16	16x8	32x16
0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
0.738	0.9606 (0.63%)	0.9640 (0.28%)	0.9673 (0.06%)	0.9667 (0.00%)
1.475	0.9415 (3.29%)	0.9232 (1.28%)	0.9353 (2.61%)	0.9217 (1.12%)
2.213	1.1298 (2.24%)	1.1156 (0.96%)	1.1283 (2.11%)	1.1152 (0.92%)
2.950	1.5249 (1.72%)	1.5102 (0.74%)	1.5234 (1.62%)	1.5098 (0.71%)
3.688	2.2501 (0.93%)	2.2382 (0.40%)	2.2482 (0.85%)	2.2377 (0.38%)
4.056	2.8055 (0.39%)	2.7995 (0.17%)	2.8045 (0.35%)	2.7991 (0.16%)
4.425	3.4888 (0.58%)	3.5059 (0.09%)	3.5038 (0.15%)	3.5068 (0.06%)
4.794	4.0570 (2.44%)	4.0991 (1.43%)	4.0944 (1.54%)	4.1352 (0.56%)
5.162	4.0331 (1.02%)	4.0049 (0.32%)	4.0012 (0.23%)	3.9941 (0.05%)
5.531	3.9917 (0.11%)	3.9878 (0.01%)	3.9871 (0.01%)	3.9870 (0.01%)
5.900	3.9878 (0.01%)	3.9874 (0.00%)	3.9864 (0.03%)	3.9868 (0.02%)
*0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
*0.738	1.0258 (0.13%)	1.0249 (0.04%)	1.0238 (0.07%)	1.0243 (0.02%)
*1.475	1.0887 (0.48%)	1.0926 (0.13%)	1.0918 (0.20%)	1.0934 (0.05%)
*2.213	1.2625 (0.28%)	1.2651 (0.08%)	1.2635 (0.21%)	1.2654 (0.06%)
*2.950	1.6104 (0.22%)	1.6130 (0.06%)	1.6112 (0.17%)	1.6132 (0.04%)
*3.688	2.2563 (0.15%)	2.2588 (0.04%)	2.2572 (0.11%)	2.2591 (0.03%)
*4.056	2.7438 (0.08%)	2.7452 (0.03%)	2.7436 (0.08%)	2.7453 (0.02%)
*4.425	3.3425 (0.21%)	3.3363 (0.02%)	3.3345 (0.03%)	3.3352 (0.01%)
*4.794	3.8882 (0.86%)	3.8707 (0.41%)	3.8707 (0.41%)	3.8580 (0.08%)
*5.162	3.9623 (0.51%)	3.9759 (0.17%)	3.9773 (0.14%)	3.9809 (0.05%)
*5.531	3.9845 (0.07%)	3.9870 (0.01%)	3.9864 (0.02%)	3.9871 (0.01%)
*5.900	3.9870 (0.01%)	3.9874 (0.00%)	3.9870 (0.01%)	3.9873 (0.00%)

(*) Velocidad en contorno superior Cs.

4. Potencial de velocidad. $M_0=0.19$ $k=1.4$.

x	I-2b/C-2b		I-2a/C-2a	
	16x8	32x16	16x8	32x16
0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
0.738	0.9517 (1.55%)	0.9598 (0.71%)	0.9519 (1.53%)	0.9598 (0.71%)
1.475	0.9288 (1.90%)	0.9123 (0.09%)	0.9299 (2.02%)	0.9125 (0.11%)
2.213	1.1131 (0.73%)	1.1042 (0.07%)	1.1163 (1.02%)	1.1050 (0.00%)
2.950	1.5089 (0.65%)	1.4986 (0.03%)	1.5197 (1.37%)	1.5012 (0.14%)
3.688	2.2450 (0.70%)	2.2307 (0.06%)	2.2703 (1.84%)	2.2371 (0.35%)
4.056	2.8002 (0.20%)	2.7967 (0.07%)	2.8302 (1.27%)	2.8048 (0.36%)
4.425	3.4155 (2.66%)	3.4939 (0.43%)	3.4407 (1.95%)	3.5010 (0.23%)
4.794	3.8481 (7.46%)	4.0086 (3.60%)	3.8610 (7.15%)	4.0121 (3.52%)
5.162	3.9761 (0.40%)	3.9991 (0.17%)	3.9796 (0.32%)	3.9993 (0.18%)
5.531	3.9831 (0.11%)	3.9867 (0.02%)	3.9835 (0.10%)	3.9868 (0.02%)
5.900	3.9871 (0.01%)	3.9873 (0.00%)	3.9870 (0.01%)	3.9873 (0.00%)
*0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
*0.738	1.0311 (0.64%)	1.0277 (0.31%)	1.0313 (0.66%)	1.0278 (0.32%)
*1.475	1.1009 (0.63%)	1.0957 (0.16%)	1.1020 (0.73%)	1.0960 (0.18%)
*2.213	1.2750 (0.70%)	1.2680 (0.15%)	1.2798 (1.08%)	1.2692 (0.24%)
*2.950	1.6255 (0.72%)	1.6164 (0.15%)	1.6388 (1.54%)	1.6197 (0.36%)
*3.688	2.2710 (0.50%)	2.2625 (0.12%)	2.2975 (1.67%)	2.2693 (0.42%)
*4.056	2.7387 (0.26%)	2.7456 (0.01%)	2.7679 (0.80%)	2.7536 (0.28%)
*4.425	3.2532 (2.47%)	3.3133 (0.67%)	3.2756 (1.80%)	3.3197 (0.47%)
*4.794	3.6756 (4.65%)	3.7843 (1.83%)	3.6863 (4.38%)	3.7868 (1.77%)
*5.162	3.9009 (2.06%)	3.9641 (0.47%)	3.9042 (1.97%)	3.9646 (0.46%)
*5.531	3.9740 (0.33%)	3.9868 (0.01%)	3.9747 (0.32%)	3.9869 (0.01%)
*5.900	3.9876 (0.01%)	3.9875 (0.00%)	3.9876 (0.01%)	3.9875 (0.00%)

(*) Velocidad en contorno superior Cs.

TABLA XIII: Flujo potencial a través de una tobera (Fig. 18). Se representa la matriz de resultados numéricos de ϕ , ψ , ρ , v , M y C_p para el caso de $Mo=.19$ $k=1.4$; esq. num.: I-2b/C-2b/V-1; densidad malla: 64x32; $\epsilon_0=.000001$. La velocidad ha sido obtenida de la función de corriente. Las tablas de resultados corresponden a los puntos de la malla (cf. Fig. 19f) de coordenadas:

Coordenada x:

0.0000 0.7375 1.4750 2.2125 2.9500 3.6875 4.4250 5.1625 5.9000

Coordenada y:

1.5000 1.5000 1.5000 1.5000 1.5000 1.5000 1.5000 1.5000 1.5000
 1.3125 1.3125 1.3176 1.3412 1.3750 1.4088 1.4324 1.4375 1.4375
 1.1250 1.1250 1.1352 1.1825 1.2500 1.3175 1.3648 1.3750 1.3750
 0.9375 0.9375 0.9528 1.0237 1.1250 1.2263 1.2972 1.3125 1.3125
 0.7500 0.7500 0.7704 0.8649 1.0000 1.1351 1.2296 1.2500 1.2500
 0.5625 0.5625 0.5881 0.7062 0.8750 1.0438 1.1619 1.1875 1.1875
 0.3750 0.3750 0.4057 0.5474 0.7500 0.9526 1.0943 1.1250 1.1250
 0.1875 0.1875 0.2233 0.3886 0.6250 0.8614 1.0267 1.0625 1.0625
 0.0000 0.0000 0.0409 0.2299 0.5000 0.7701 0.9591 1.0000 1.0000

Potencial de velocidad:

0.0000 0.7496 1.5272 2.3893 3.4374 4.8420 6.8792 9.6601 12.560
 0.0000 0.7488 1.5248 2.3853 3.4329 4.8381 6.8770 9.6601 12.560
 0.0000 0.7465 1.5178 2.3736 3.4194 4.8264 6.8706 9.6600 12.560
 0.0000 0.7429 1.5064 2.3541 3.3970 4.8069 6.8598 9.6599 12.560
 0.0000 0.7383 1.4909 2.3273 3.3658 4.7795 6.8445 9.6597 12.560
 0.0000 0.7333 1.4717 2.2934 3.3261 4.7441 6.8246 9.6595 12.560
 0.0000 0.7284 1.4496 2.2528 3.2781 4.7008 6.7998 9.6594 12.560
 0.0000 0.7247 1.4252 2.2062 3.2221 4.6494 6.7697 9.6593 12.560
 0.0000 0.7232 1.3990 2.1540 3.1586 4.5899 6.7342 9.6593 12.560

Función de corriente:

1.5000 1.5000 1.5000 1.5000 1.5000 1.5000 1.5000 1.5000 1.5000
 1.3125 1.3082 1.3014 1.3014 1.3042 1.3088 1.3135 1.3126 1.3125
 1.1250 1.1168 1.1038 1.1038 1.1092 1.1180 1.1268 1.1252 1.1250
 0.9375 0.9264 0.9083 0.9084 0.9158 0.9278 0.9400 0.9377 0.9375
 0.7500 0.7374 0.7159 0.7163 0.7247 0.7386 0.7528 0.7502 0.7500
 0.5625 0.5502 0.5277 0.5284 0.5368 0.5508 0.5653 0.5627 0.5625
 0.3750 0.3650 0.3448 0.3458 0.3528 0.3648 0.3774 0.3752 0.3750
 0.1875 0.1818 0.1684 0.1693 0.1737 0.1810 0.1890 0.1876 0.1875
 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

Densidad:

1.0000	0.9991	0.9965	0.9892	0.9713	0.9275	0.8271	0.7530	0.7524
1.0000	0.9992	0.9966	0.9893	0.9714	0.9276	0.8269	0.7529	0.7524
1.0000	0.9993	0.9969	0.9896	0.9717	0.9276	0.8260	0.7528	0.7524
1.0000	0.9995	0.9974	0.9902	0.9722	0.9278	0.8246	0.7526	0.7524
1.0000	0.9999	0.9981	0.9910	0.9729	0.9280	0.8225	0.7524	0.7524
1.0000	1.0002	0.9991	0.9921	0.9739	0.9283	0.8199	0.7521	0.7524
1.0000	1.0006	1.0002	0.9933	0.9750	0.9288	0.8166	0.7519	0.7524
1.0000	1.0010	1.0016	0.9946	0.9763	0.9293	0.8127	0.7518	0.7524
1.0000	1.0012	1.0029	0.9959	0.9774	0.9297	0.8082	0.7517	0.7524

Módulo de la velocidad:

1.0000	1.0244	1.0938	1.2659	1.6137	2.2595	3.3354	3.9825	3.9874
1.0000	1.0231	1.0911	1.2632	1.6119	2.2592	3.3381	3.9828	3.9874
1.0000	1.0192	1.0831	1.2553	1.6065	2.2582	3.3460	3.9838	3.9874
1.0000	1.0128	1.0697	1.2422	1.5974	2.2563	3.3594	3.9854	3.9874
1.0000	1.0041	1.0506	1.2239	1.5847	2.2535	3.3781	3.9873	3.9874
1.0000	0.9936	1.0256	1.2005	1.5682	2.2495	3.4024	3.9892	3.9874
1.0000	0.9820	0.9940	1.1721	1.5478	2.2439	3.4324	3.9910	3.9874
1.0000	0.9716	0.9552	1.1391	1.5236	2.2364	3.4682	3.9922	3.9874
1.0000	0.9668	0.9149	1.1085	1.5028	2.2321	3.5083	3.9926	3.9874

Número de Mach:

0.1900	0.1947	0.2080	0.2410	0.3084	0.4358	0.6583	0.8009	0.8020
0.1900	0.1944	0.2075	0.2405	0.3080	0.4358	0.6588	0.8009	0.8020
0.1900	0.1937	0.2059	0.2390	0.3070	0.4355	0.6605	0.8012	0.8020
0.1900	0.1925	0.2033	0.2365	0.3052	0.4352	0.6634	0.8015	0.8020
0.1900	0.1908	0.1997	0.2330	0.3027	0.4346	0.6674	0.8019	0.8020
0.1900	0.1888	0.1949	0.2285	0.2995	0.4338	0.6727	0.8024	0.8020
0.1900	0.1866	0.1889	0.2230	0.2956	0.4327	0.6791	0.8028	0.8020
0.1900	0.1846	0.1814	0.2167	0.2909	0.4312	0.6869	0.8031	0.8020
0.1900	0.1836	0.1737	0.2108	0.2868	0.4303	0.6956	0.8032	0.8020

Coefficiente de presión:

0.0000	-0.0494	-0.1960	-0.5991	-1.5809	-3.9556	-9.2335	-12.973	-13.002
0.0000	-0.0468	-0.1902	-0.5925	-1.5753	-3.9542	-9.2481	-12.975	-13.002
0.0000	-0.0388	-0.1729	-0.5729	-1.5584	-3.9499	-9.2920	-12.981	-13.002
0.0000	-0.0258	-0.1441	-0.5404	-1.5302	-3.9422	-9.3657	-12.990	-13.002
0.0000	-0.0083	-0.1037	-0.4956	-1.4907	-3.9305	-9.4698	-13.002	-13.002
0.0000	0.0129	-0.0518	-0.4393	-1.4400	-3.9136	-9.6051	-13.013	-13.002
0.0000	0.0357	0.0119	-0.3726	-1.3783	-3.8902	-9.7728	-13.024	-13.002
0.0000	0.0561	0.0877	-0.2967	-1.3058	-3.8589	-9.9740	-13.031	-13.002
0.0000	0.0654	0.1631	-0.2282	-1.2441	-3.8414	-10.201	-13.034	-13.002

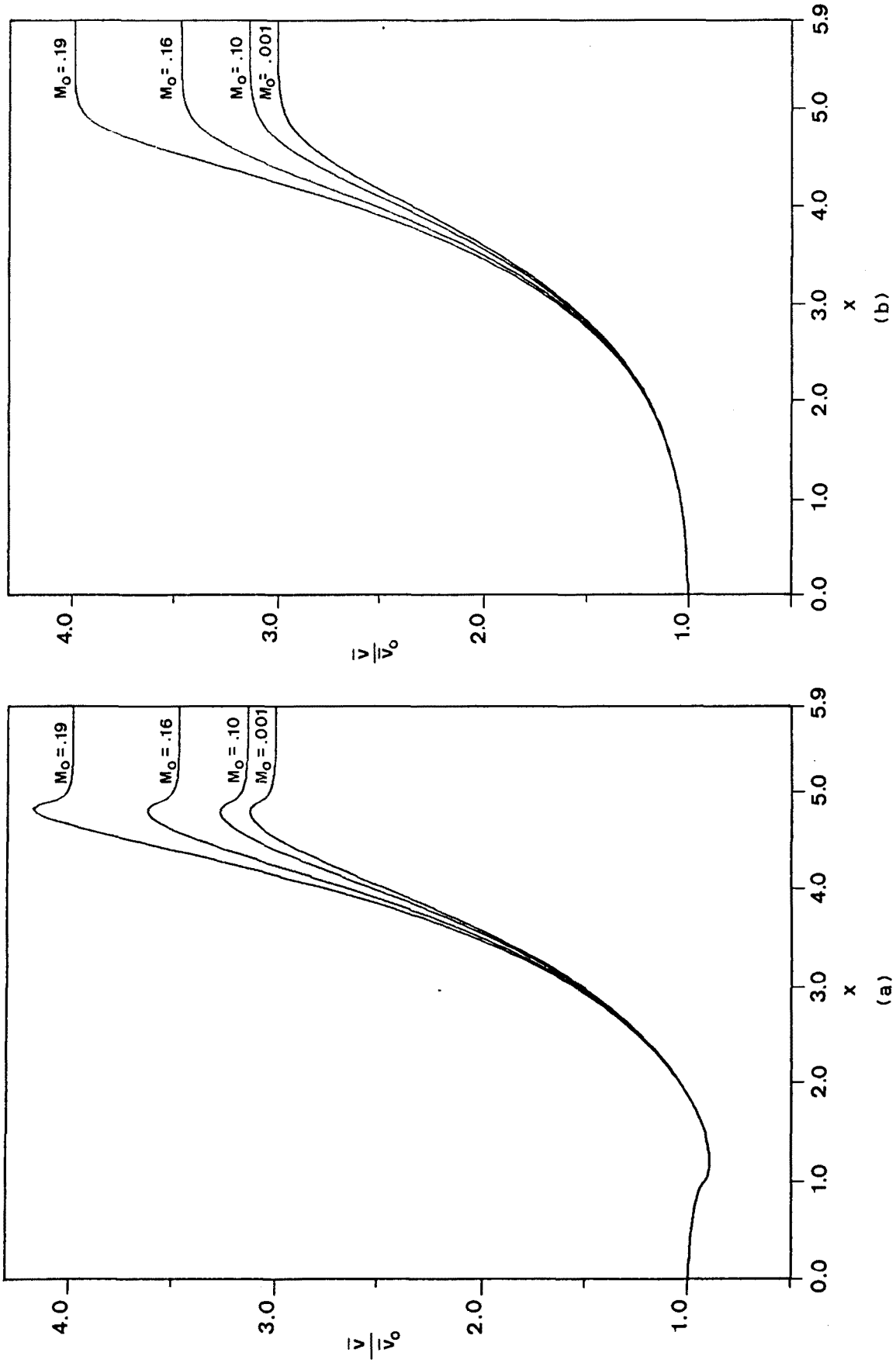


Fig. 22 Flujo potencial a través de una tobera (Fig. 18). Velocidad adimensional a diferentes M_0 en: a) contorno lateral C_i ; b) contorno lateral C_s .

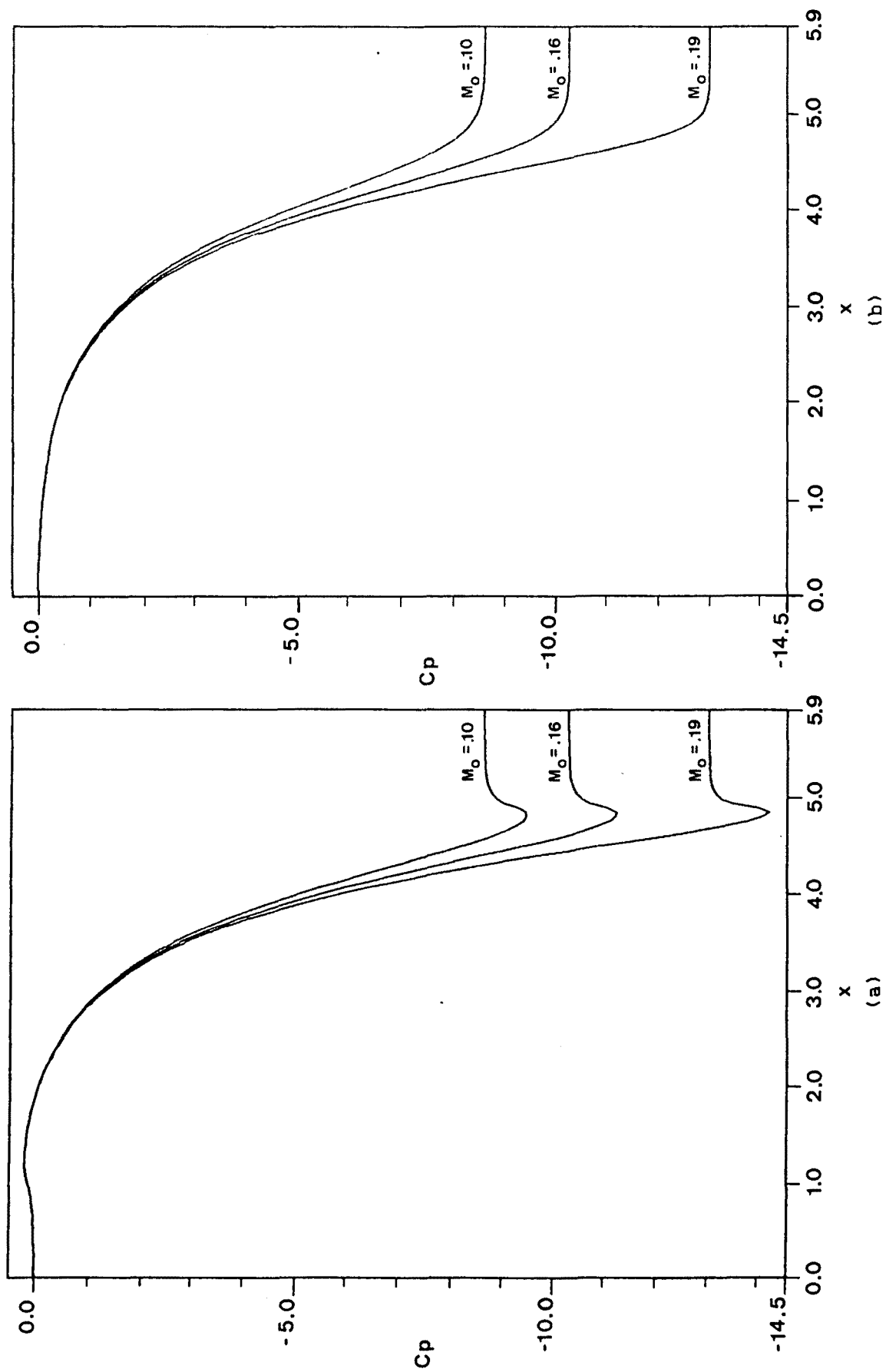


Fig. 23 Flujo potencial a través de una tobera (Fig. 18). Coeficiente de presión a diferentes M_o en: a) contorno lateral C_i ; b) contorno lateral C_s .

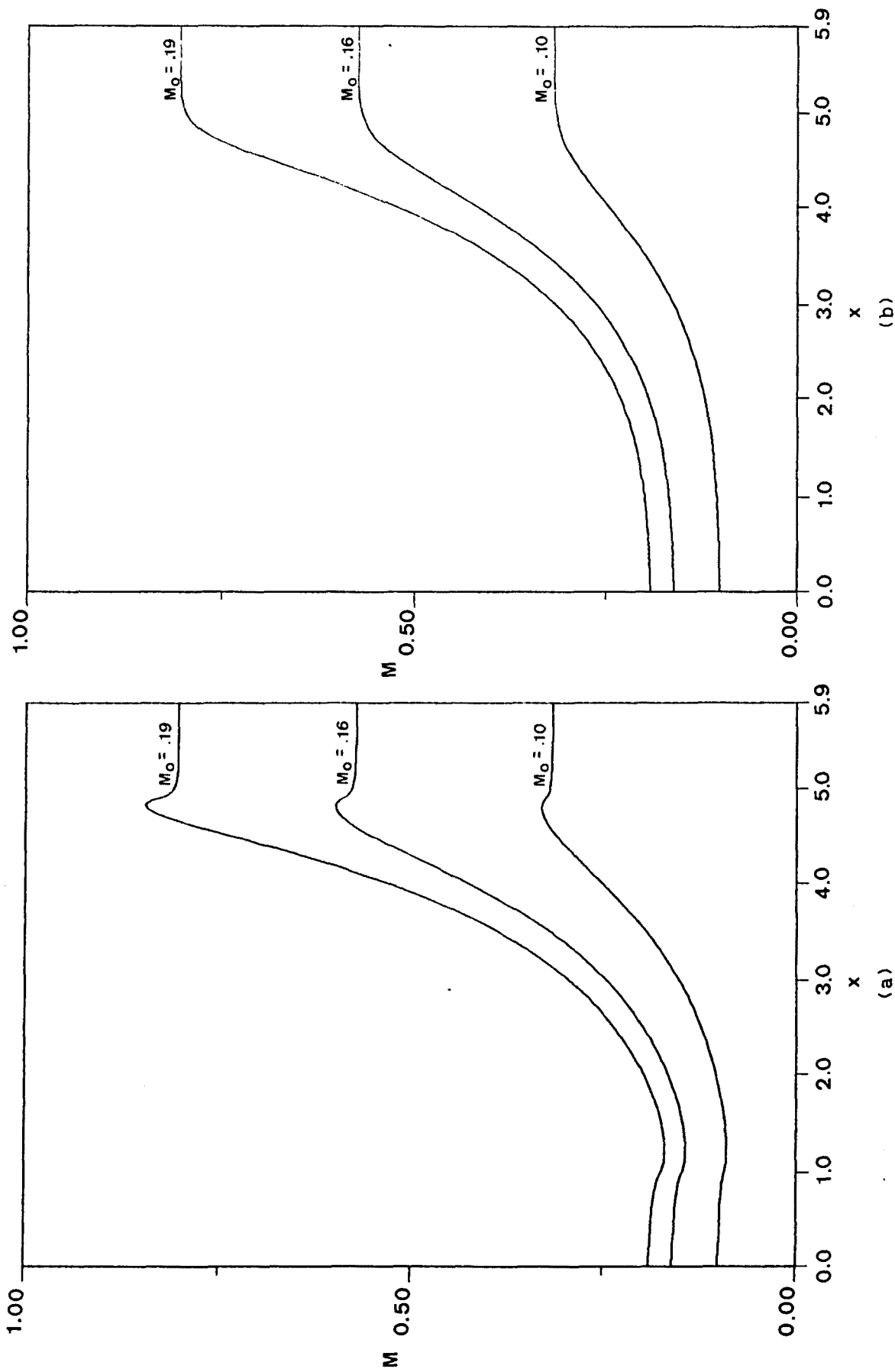


Fig. 24 Flujo potencial a través de una tobera (Fig. 18). Numero de Mach a diferentes M_0 en: a) contorno lateral Ci; b) contorno lateral Cs.

TABLA XIV: Flujo potencial a través de una tobera (Fig. 18). Velocidades obtenidas en los contornos laterales mediante la discretización del dominio por mallas rectangulares. Se representa, entre paréntesis, la diferencia en tanto por ciento respecto a las velocidades indicadas en la tabla X. $\epsilon_0 = .000001$.

1. Función de corriente. $Mo = .001$ $k = 1.4$.

x	I-1/2		
	16x8	32x16	64x32
0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
0.738	0.9668 (0.04%)	0.9665 (0.01%)	0.9667 (0.03%)
1.475	0.9216 (1.13%)	0.9116 (0.03%)	0.9068 (0.49%)
2.213	1.1011 (0.29%)	1.0944 (0.32%)	1.0910 (0.63%)
2.950	1.4516 (0.96%)	1.4627 (0.20%)	1.4591 (0.44%)
3.688	2.0932 (0.41%)	2.0816 (0.07%)	2.0823 (0.11%)
4.056	2.4858 (0.26%)	2.4922 (0.00%)	2.4907 (0.06%)
4.425	2.8719 (0.87%)	2.8887 (0.29%)	2.8966 (0.01%)
4.794	3.0742 (1.65%)	3.1160 (0.32%)	3.1153 (0.34%)
5.162	3.0135 (0.08%)	3.0117 (0.02%)	3.0108 (0.01%)
5.531	3.0018 (0.03%)	3.0012 (0.01%)	3.0011 (0.00%)
5.900	3.0005 (0.01%)	3.0003 (0.00%)	3.0002 (0.00%)
*0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
*0.738	1.0241 (0.05%)	1.0243 (0.03%)	1.0243 (0.03%)
*1.475	1.0905 (0.10%)	1.0913 (0.03%)	1.0914 (0.02%)
*2.213	1.2521 (0.12%)	1.2532 (0.03%)	1.2535 (0.01%)
*2.950	1.5644 (0.17%)	1.5664 (0.04%)	1.5668 (0.01%)
*3.688	2.0850 (0.18%)	2.0878 (0.04%)	2.0885 (0.01%)
*4.056	2.4163 (0.05%)	2.4172 (0.02%)	2.4175 (0.00%)
*4.425	2.7359 (0.22%)	2.7314 (0.05%)	2.7303 (0.01%)
*4.794	2.9418 (0.40%)	2.9324 (0.08%)	2.9303 (0.01%)
*5.162	2.9903 (0.00%)	2.9903 (0.00%)	2.9905 (0.01%)
*5.531	2.9985 (0.02%)	2.9988 (0.01%)	2.9990 (0.00%)
*5.900	2.9996 (0.01%)	2.9997 (0.00%)	2.9998 (0.00%)

(*) Velocidad en contorno superior Cs.

2. Función de corriente. $M_0=0.19$ $k=1.4$.

x	I-1		I-2	
	16x8	32x16	16x8	32x16
0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
0.738	0.9668 (0.01%)	0.9666 (0.01%)	0.9668 (0.01%)	0.9666 (0.01%)
1.475	0.9216 (1.11%)	0.9118 (0.03%)	0.9216 (1.10%)	0.9118 (0.03%)
2.213	1.1079 (0.26%)	1.1012 (0.34%)	1.1078 (0.25%)	1.1012 (0.34%)
2.950	1.4843 (0.99%)	1.4960 (0.21%)	1.4838 (1.02%)	1.4960 (0.21%)
3.688	2.2431 (0.62%)	2.2327 (0.15%)	2.2431 (0.62%)	2.2327 (0.15%)
4.056	2.7879 (0.24%)	2.7988 (0.15%)	2.7905 (0.15%)	2.7994 (0.17%)
4.425	3.5151 (0.17%)	3.5151 (0.17%)	3.5164 (0.21%)	3.5163 (0.21%)
4.794	4.1036 (1.32%)	4.1461 (0.30%)	4.1058 (1.27%)	4.1524 (0.15%)
5.162	4.0024 (0.26%)	3.9945 (0.06%)	4.0019 (0.24%)	3.9944 (0.06%)
5.531	3.9883 (0.02%)	3.9873 (0.01%)	3.9880 (0.01%)	3.9876 (0.00%)
5.900	3.9876 (0.01%)	3.9872 (0.01%)	3.9874 (0.00%)	3.9874 (0.00%)
*0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
*0.738	1.0242 (0.03%)	1.0244 (0.01%)	1.0242 (0.03%)	1.0244 (0.01%)
*1.475	1.0928 (0.11%)	1.0936 (0.04%)	1.0929 (0.10%)	1.0936 (0.04%)
*2.213	1.2645 (0.13%)	1.2656 (0.04%)	1.2646 (0.12%)	1.2656 (0.04%)
*2.950	1.6111 (0.17%)	1.6131 (0.05%)	1.6113 (0.16%)	1.6132 (0.05%)
*3.688	2.2545 (0.23%)	2.2583 (0.06%)	2.2545 (0.23%)	2.2583 (0.06%)
*4.056	2.7409 (0.18%)	2.7445 (0.05%)	2.7408 (0.19%)	2.7445 (0.05%)
*4.425	3.3373 (0.05%)	3.3359 (0.01%)	3.3370 (0.04%)	3.3358 (0.01%)
*4.794	3.8809 (0.67%)	3.8617 (0.17%)	3.8813 (0.68%)	3.8621 (0.18%)
*5.162	3.9782 (0.12%)	3.9809 (0.05%)	3.9781 (0.12%)	3.9811 (0.04%)
*5.531	3.9866 (0.02%)	3.9870 (0.01%)	3.9864 (0.02%)	3.9872 (0.00%)
*5.900	3.9871 (0.01%)	3.9872 (0.01%)	3.9867 (0.02%)	3.9874 (0.00%)

(*) Velocidad en contorno superior Cs.

3. Potencial de velocidad. $Mo=,001$ $k=1.4$.

	x	16x8	32x16	64x32
I-1/2	0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
	0.738	0.8428 (12.8%)	0.9193 (4.87%)	0.9434 (2.38%)
	1.475	0.7657 (16.0%)	0.8521 (6.50%)	0.8806 (3.37%)
	2.213	0.9181 (16.4%)	1.0175 (7.32%)	1.0654 (2.96%)
	2.950	1.2122 (17.3%)	1.3528 (7.70%)	1.4116 (3.68%)
	3.688	1.7113 (17.9%)	1.9272 (7.55%)	2.0020 (3.96%)
	4.056	2.1369 (14.3%)	2.3103 (7.30%)	2.4213 (2.85%)
	4.425	2.5053 (13.5%)	2.7179 (6.18%)	2.8378 (2.04%)
	4.794	3.0084 (3.76%)	3.0837 (1.35%)	3.1213 (0.15%)
	5.162	3.0581 (1.56%)	3.0174 (0.21%)	3.0118 (0.03%)
	5.531	3.0017 (0.02%)	3.0014 (0.01%)	3.0009 (0.00%)
	5.900	3.0002 (0.00%)	3.0001 (0.00%)	3.0001 (0.00%)
	C-0	*0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
*0.738		0.8779 (14.3%)	0.9665 (5.67%)	0.9978 (2.62%)
*1.475		0.9347 (14.4%)	1.0282 (5.81%)	1.0612 (2.78%)
*2.213		1.0828 (13.6%)	1.1862 (5.38%)	1.2211 (2.59%)
*2.950		1.3749 (12.2%)	1.4979 (4.41%)	1.5330 (2.17%)
*3.688		1.9130 (8.41%)	2.0286 (2.88%)	2.0605 (1.35%)
*4.056		2.2760 (5.86%)	2.3714 (1.91%)	2.3991 (0.77%)
*4.425		2.6550 (2.75%)	2.7074 (0.83%)	2.7252 (0.18%)
*4.794		2.9151 (0.51%)	2.9293 (0.03%)	2.9333 (0.11%)
*5.162		2.9919 (0.05%)	2.9917 (0.05%)	2.9922 (0.06%)
*5.531		2.9992 (0.01%)	2.9993 (0.01%)	2.9993 (0.01%)
*5.900		2.9999 (0.00%)	2.9999 (0.00%)	2.9999 (0.00%)
I-1/2		0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
	0.738	1.0460 (8.24%)	1.0119 (4.71%)	0.9888 (2.32%)
	1.475	0.9746 (6.95%)	0.9460 (3.81%)	0.9272 (1.74%)
	2.213	1.1383 (3.68%)	1.1213 (2.13%)	1.1126 (1.34%)
	2.950	1.4607 (0.33%)	1.4673 (0.12%)	1.4667 (0.08%)
	3.688	1.9691 (5.54%)	2.0333 (2.46%)	2.0544 (1.45%)
	4.056	2.3253 (6.70%)	2.3975 (3.80%)	2.4522 (1.61%)
	4.425	2.6785 (7.54%)	2.7799 (4.04%)	2.8471 (1.72%)
	4.794	3.0211 (3.35%)	3.0864 (1.26%)	3.1161 (0.31%)
	5.162	3.0553 (1.47%)	3.0224 (0.38%)	3.0146 (0.12%)
	5.531	3.0062 (0.17%)	3.0022 (0.04%)	3.0004 (0.02%)
	5.900	3.0010 (0.03%)	3.0003 (0.00%)	3.0002 (0.00%)
	C-1/2	*0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
*0.738		1.1025 (7.60%)	1.0703 (4.46%)	1.0489 (2.37%)
*1.475		1.1695 (7.14%)	1.1366 (4.12%)	1.1145 (2.10%)
*2.213		1.3316 (6.22%)	1.2995 (3.66%)	1.2767 (1.84%)
*2.950		1.6361 (4.41%)	1.6111 (2.81%)	1.5888 (1.39%)
*3.688		2.1323 (2.09%)	2.1193 (1.47%)	2.1043 (0.75%)
*4.056		2.4364 (0.78%)	2.4341 (0.68%)	2.4274 (0.41%)
*4.425		2.7231 (0.25%)	2.7319 (0.07%)	2.7337 (0.14%)
*4.794		2.9121 (0.61%)	2.9263 (0.13%)	2.9299 (0.01%)
*5.162		2.9824 (0.26%)	2.9885 (0.06%)	2.9901 (0.01%)
*5.531		2.9969 (0.07%)	2.9985 (0.02%)	2.9989 (0.00%)
*5.900		2.9990 (0.03%)	2.9997 (0.00%)	2.9998 (0.00%)

(*) Velocidad en contorno superior Cs.

4. Potencial de velocidad. $M_0=0.19$ $k=1.4$.

	x	I-1/C-0	I-1/C-1	I-2/C-2	
16x8	0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	
	0.738	0.8519 (11.9%)	1.0615 (9.81%)	1.0639 (10.0%)	
	1.475	0.7741 (15.1%)	0.9891 (8.51%)	0.9914 (8.76%)	
	2.213	0.9318 (15.7%)	1.1615 (5.11%)	1.1641 (5.35%)	
	2.950	1.2435 (17.0%)	1.5122 (0.87%)	1.5166 (1.17%)	
	3.688	1.8040 (19.1%)	2.1072 (5.48%)	2.1129 (5.22%)	
	4.056	2.3363 (16.4%)	2.5841 (7.54%)	2.5954 (7.13%)	
	4.425	2.8741 (18.1%)	3.1247 (11.0%)	3.1226 (11.0%)	
	4.794	3.3968 (11.1%)	3.7479 (9.87%)	3.7463 (9.91%)	
	5.162	3.9623 (0.75%)	3.9752 (0.43%)	3.9744 (0.45%)	
	5.531	3.9707 (0.42%)	3.9813 (0.16%)	3.9812 (0.16%)	
	5.900	3.9872 (0.01%)	3.9869 (0.01%)	3.9869 (0.01%)	
	*0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	
	*0.738	0.8873 (13.4%)	1.1169 (9.02%)	1.1194 (9.26%)	
	*1.475	0.9463 (13.5%)	1.1863 (8.44%)	1.1890 (8.68%)	
	*2.213	1.1029 (12.9%)	1.3609 (7.49%)	1.3641 (7.74%)	
	*2.950	1.4217 (11.9%)	1.7045 (5.61%)	1.7087 (5.87%)	
	*3.688	2.0671 (8.52%)	2.3383 (3.48%)	2.3441 (3.74%)	
	*4.056	2.5687 (6.45%)	2.7992 (1.94%)	2.8027 (2.07%)	
	*4.425	3.1762 (4.69%)	3.3158 (0.59%)	3.3160 (0.58%)	
	*4.794	3.6913 (4.25%)	3.7289 (3.27%)	3.7281 (3.29%)	
	*5.162	3.9196 (1.59%)	3.9240 (1.48%)	3.9235 (1.49%)	
	*5.531	3.9776 (0.24%)	3.9785 (0.22%)	3.9784 (0.22%)	
	*5.900	3.9876 (0.01%)	3.9875 (0.00%)	3.9874 (0.00%)	
	32x16	0.000	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)
		0.738	0.9234 (4.48%)	1.0200 (5.51%)	1.0229 (5.81%)
1.475		0.8560 (6.09%)	0.9535 (4.60%)	0.9562 (4.90%)	
2.213		1.0272 (7.04%)	1.1369 (2.89%)	1.1401 (3.18%)	
2.950		1.3840 (7.68%)	1.5105 (0.76%)	1.5150 (1.06%)	
3.688		2.0447 (8.28%)	2.1763 (2.38%)	2.1832 (2.07%)	
4.056		2.5471 (8.86%)	2.6693 (4.49%)	2.6778 (4.18%)	
4.425		3.1973 (8.88%)	3.2993 (5.98%)	3.2992 (5.98%)	
4.794		3.9513 (4.98%)	3.9672 (4.60%)	3.9669 (4.61%)	
5.162		3.9948 (0.07%)	4.0052 (0.33%)	4.0050 (0.32%)	
5.531		3.9863 (0.03%)	3.9868 (0.02%)	3.9868 (0.02%)	
5.900		3.9874 (0.00%)	3.9870 (0.01%)	3.9870 (0.01%)	
*0.000		1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	1.0000 (0.00%)	
*0.738		0.9705 (5.27%)	1.0779 (5.21%)	1.0810 (5.51%)	
*1.475		1.0344 (5.45%)	1.1470 (4.84%)	1.1503 (5.15%)	
*2.213		1.2018 (5.08%)	1.3218 (4.40%)	1.3256 (4.70%)	
*2.950		1.5452 (4.26%)	1.6718 (3.59%)	1.6767 (3.89%)	
*3.688		2.1919 (3.00%)	2.3105 (2.25%)	2.3171 (2.54%)	
*4.056		2.6846 (2.23%)	2.7831 (1.35%)	2.7895 (1.59%)	
*4.425		3.2838 (1.55%)	3.3403 (0.14%)	3.3439 (0.25%)	
*4.794		3.7983 (1.47%)	3.8071 (1.24%)	3.8080 (1.22%)	
*5.162		3.9718 (0.28%)	3.9713 (0.29%)	3.9713 (0.29%)	
*5.531		3.9873 (0.00%)	3.9875 (0.01%)	3.9875 (0.01%)	
*5.900		3.9875 (0.00%)	3.9876 (0.01%)	3.9876 (0.01%)	

(*) Velocidad en contorno superior Cs.

CONCLUSIONES

Los resultados numéricos obtenidos en base a la discretización del dominio por mallas adaptables a los contornos ponen de manifiesto:

- La mayor precisión en los resultados obtenidos para el caso del flujo a través de una tobera que para el caso del flujo alrededor de un cilindro. Ello es consecuencia de la geometría mucho más irregular de este último. No obstante, los resultados obtenidos para el caso del flujo alrededor de un cilindro han permitido poner más claramente de manifiesto las diferencias existentes entre los criterios numéricos empleados.
- En la resolución del flujo potencial mediante el empleo de la función de corriente, el esquema numérico que ha dado los resultados más precisos ha sido el I-2b/C-2b.

Para el flujo a través de una tobera, los resultados obtenidos según el esquema I-1/C-2a son comparables a los obtenidos según I-2b/C-2b y algo mejores que los que se derivan de I-2a/C-2a.

Para el flujo alrededor de un cilindro el esquema I-2a/C-2a proporciona, en general, resultados más precisos que I-1/C-2a. Para la malla XUEX, al incrementar la densidad de malla los resultados numéricos que se derivan del esquema I-1/C-2a convergen a una solución incorrecta. Ello es atribuible a errores de truncamiento del método, consecuencia de la distribución irregular de las líneas de la malla.

- Para el potencial de velocidad, los resultados obtenidos según los esquemas I-2a/C-2a y I-2b/C-2b han sido los más precisos.

En el caso del flujo a través de una tobera, ambos esquemas han dado resultados parecidos. Las velocidades calculadas en el contorno presentan un orden de error similar al obtenido mediante la función de corriente.

En el caso del flujo alrededor de un cilindro, la superioridad del esquema I-2a/C-2a sobre el esquema I-2b/C-2b ha dependido del tipo de malla empleada. Las velocidades calculadas en el contorno presentan, en general, un mayor grado de error que las calculadas mediante la función de corriente.

- Para el caso del flujo alrededor de un cilindro, los resultados numéricos obtenidos ponen de manifiesto la influencia de la malla de discretización generada. El empleo de mallas con discontinuidades (YUEX) o con una distribución irregular de líneas (XUEX) incrementa el orden de error del esquema numérico utilizado. El empleo de mallas ortogonales ha proporcionado resultados numéricos más precisos que los obtenidos con mallas no ortogonales.
- La convergencia de los métodos iterativos es considerablemente más rápida para el caso de la función de corriente que para el potencial de velocidad.

El empleo del método de Gauss-Seidel apoyado en un TDMA en la dirección de los coeficientes de discretización mayores (en nuestro caso la dirección η), junto con la utilización factores de sobrerrelajación f adecuados, reduce de manera sensible el número de iteraciones necesario.

A medida que aumenta el número de Mach pueden darse, durante el proceso iterativo, valores negativos de la temperatura. En estos casos la densidad en el nodo en cuestión se evalúa como promedio de la obtenida en los nodos adyacentes. Este criterio ha provocado en ciertas ocasiones inestabilidades numéricas, siendo preciso recurrir al empleo de factores de subrelajación f_v para las velocidades. Para unas condiciones del flujo dadas, la dificultad de convergencia debido a este hecho aumenta con la densidad de la malla. El inicio del proceso iterativo con valores de las variables a determinar próximos a la solución buscada, y el empleo de factores f_v adecuados, reducen el número de iteraciones y evitan la posibilidad de la no convergencia del proceso.

Los resultados obtenidos mediante la discretización del dominio por mallas rectangulares, en el caso del flujo a través de una tobera, ponen de manifiesto:

- Para el caso de la función de corriente se han obtenido unos resultados muy precisos, siendo comparables a los que se derivan del empleo de mallas adaptables a los contornos. No se han observado diferencias significativas entre los esquemas numéricos ensayados (I-1 e I-2).
- Los resultados obtenidos mediante el potencial de velocidad presentan un grado de error muy superior que los que se derivan del empleo de la función de corriente. Los esquemas numéricos I-1/C-1 y I-2/C-2 han dado unos resultados similares. El esquema I-1/C-0 es el que presenta unos resultados más imprecisos.

Para este caso, el empleo de mallas de discretización adaptables a los contornos proporciona unos resultados más precisos que los obtenidos mediante mallas rectangulares.

APENDICE A: COORDENADAS CURVILINEAS

En este apéndice realizamos una síntesis de resultados referentes a coordenadas curvilíneas y que son de utilidad para el desarrollo de este capítulo. Se indican las expresiones que relacionan, en el espacio tridimensional euclídeo, la referencia cartesiana (x^1, x^2, x^3) con un sistema de coordenadas curvilíneas (q^1, q^2, q^3) . En un último apartado se dan las expresiones que resultan de aplicar lo expuesto al caso bidimensional.

Para una mayor información consúltese la obra de carácter general de Wylie [A1] o bien, si se desea profundizar en este tema, las obras específicas sobre análisis tensorial y geometría diferencial de Synge y Schild [A2] o Lichnerowicz [A3].

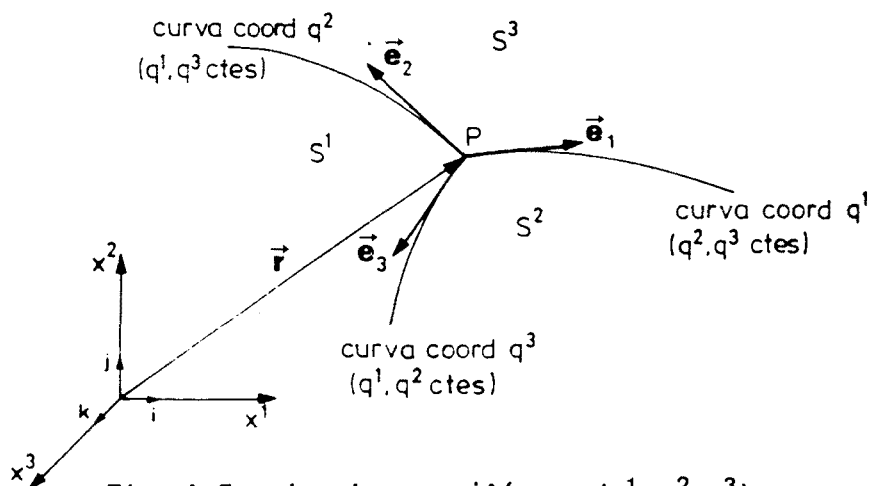
Introducción

En un espacio puntual euclídeo tridimensional designaremos por $r = x^1 i + x^2 j + x^3 k$ al vector posición de un punto genérico P en una referencia cartesiana con vectores de base unitarios (i, j, k) . Sean las funciones de variables q^1, q^2, q^3 :

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(q^1, q^2, q^3) \\ x^2 &= x^2(q^1, q^2, q^3) \\ x^3 &= x^3(q^1, q^2, q^3) \end{aligned} \tag{2.A1}$$

Si en un cierto dominio R' de variación de las q^i las funciones (2.A1) establecen una correspondencia biunívoca entre los puntos de R' y los puntos de la región R de sus imágenes (dominio de variación de las x^i), diremos que la transformación (2.A1) define, en la región R, el sistema de coordenadas curvilíneas (q^1, q^2, q^3) .

La posición de un punto P de R está definida por la terna de valores (q^1, q^2, q^3) correspondientes a la intersección de las tres superficies coordenadas S^i ($i=1, 2, 3$). Estas superficies representan el lugar geométrico de los puntos en los que uno de los parámetros q^i es constante. Las superficies coordenadas se cortan dos a dos según líneas coordenadas, a lo largo de las cuales únicamente varía una de las coordenadas q^i (Fig. 1).

Fig. 1 Coordenadas curvilíneas (q^1, q^2, q^3) .

Denominaremos jacobiano de la transformación (2.A1) al determinante D de la matriz jacobiana de esta transformación, es decir:

$$D = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(q^1, q^2, q^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial q^1} & \frac{\partial x^1}{\partial q^2} & \frac{\partial x^1}{\partial q^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial q^1} & \frac{\partial x^2}{\partial q^2} & \frac{\partial x^2}{\partial q^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial q^1} & \frac{\partial x^3}{\partial q^2} & \frac{\partial x^3}{\partial q^3} \end{vmatrix} \quad (2.A2)$$

Supondremos que la transformación (2.A1) es diferenciable con continuidad y que $D \neq 0$ en R' . En este supuesto se demuestra que la transformación inversa:

$$\begin{aligned} q^1 &= q^1(x^1, x^2, x^3) \\ q^2 &= q^2(x^1, x^2, x^3) \\ q^3 &= q^3(x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \quad (2.A3)$$

es diferenciable con continuidad en R y que su matriz jacobiana es la inversa de la que corresponde a (2.A1). Si designamos por J al jacobiano de la transformación (2.A3), es decir:

$$J = \frac{\partial(q^1, q^2, q^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial x^1} & \frac{\partial q^1}{\partial x^2} & \frac{\partial q^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial q^2}{\partial x^1} & \frac{\partial q^2}{\partial x^2} & \frac{\partial q^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial q^3}{\partial x^1} & \frac{\partial q^3}{\partial x^2} & \frac{\partial q^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \quad (2.A4)$$

se verifica, como consecuencia de que ambas matrices jacobianas son inversas, que:

$$D.J = 1 \quad (2.A5)$$

Por comodidad supondremos en lo sucesivo que, además de $D \neq 0$, se cumple que $D > 0$, lo cual no resta generalidad.

Componentes contravariantes y covariantes de un vector

Sea $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ una base del espacio vectorial euclideo tridimensional. Cualquier vector de este espacio puede ser expresado como combinación lineal de los vectores de la base.

Se denominan componentes contravariantes, en la base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, de un vector \vec{w} a los valores w^i tales que:

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^3 w^i \vec{a}_i \quad (2.A6)$$

Las componentes covariantes de \vec{w} en dicha base son, por definición, los valores w_i tales que:

$$w_i = \vec{w} \cdot \vec{a}_i \quad (2.A7)$$

Dos bases $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ y $(\vec{a}_1^*, \vec{a}_2^*, \vec{a}_3^*)$ se denominan reciprocas si se verifica que:

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j^* = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.A8)$$

Como veremos seguidamente las componentes covariantes de un vector en una base dada coinciden con las componentes contravariantes del mismo en la base reciproca. Si denominamos w_i^* a las componentes covariantes de \vec{w} en la base \vec{a}_i^* , será:

$$w_i^* = \vec{w} \cdot \vec{a}_i^* = \left(\sum_{j=1}^3 w^j \vec{a}_j \right) \cdot \vec{a}_i^* = \sum_{j=1}^3 w^j \delta_{ij} = w^i \quad (2.A9)$$

Por comodidad en la notación se escribirán, en lo que sigue, dos bases reciprocas como $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ y $(\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{a}^3)$.

Base local y base recíproca

En el sistema de coordenadas curvilíneas q^i dado por (2.A1), los vectores \vec{e}_i definidos por:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.A10)$$

se denominan vectores de la base local y son tangentes a las líneas coordenadas. Notese que el determinante de los vectores $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de la base local en el punto P es igual al determinante jacobiano D de la transformación (2.A1), y que la no anulacion de D asegura que dichos vectores forman efectivamente una base.

Se demuestra que los vectores de la base recíproca \vec{e}^i vienen expresados por:

$$\vec{e}^i = \vec{\nabla} q^i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.A11)$$

y son, por tanto, normales a las superficies coordenadas S^i . El determinante de los vectores $(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3)$ de la base recíproca en P es igual al determinante jacobiano J de la transformación (2.A3).

Tensor métrico covariante y tensor métrico contravariante

La diferencial del vector posición \vec{r} en P es:

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} dq^i = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i dq^i \quad (2.A12)$$

El cuadrado de la longitud ds del vector diferencial dr sera:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^3 \vec{e}_i dq^i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \vec{e}_j dq^j \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) dq^i dq^j = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dq^i dq^j \end{aligned} \quad (2.A13)$$

De la expresión anterior se sigue que la medida de distancias en el dominio R de variación de las x^i y en las coordenadas curvilíneas q^i es función de los productos escalares $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) los cuales determinan la matriz simétrica:

$$G = \|\|g_{ij}\|\| = \|\|\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\|\| \quad (2.A14)$$

Dicha matriz define, por tanto, la métrica del espacio en el sistema de coordenadas curvilíneas considerado. La matriz G se denomina tensor métrico o mas explícitamente tensor métrico covariante.

Las componentes del tensor métrico G se expresan, de (2.A10), según:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j} \quad (2.A15)$$

En el caso de coordenadas ortogonales $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

La inversa de la matriz G se denomina tensor métrico contravariante y la designaremos por $G^{-1} = \|\|g^{ij}\|\|$. Se demuestra que las componentes de dicho tensor se pueden expresar mediante los vectores de la base recíproca en la forma:

$$G^{-1} = \|\|g^{ij}\|\| = \|\|e^i \cdot e^j\|\| \quad (2.A16)$$

De (2.A11):

$$g^{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial q^i}{\partial x^k} \frac{\partial q^j}{\partial x^k} \quad (2.A17)$$

Nótese que el jacobiano de la transformación (2.A1) y (2.A3) y el determinante del tensor métrico covariante y contravariante están relacionados según:

$$D = \sqrt{|G|} \quad J = \sqrt{|G^{-1}|} \quad (2.A18)$$

Elemento de arco, elemento de superficie y elemento de volumen

De (2.A13), el elemento de arco ds a lo largo de la línea coordenada q^i será:

$$ds^i = \sqrt{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i} dq^i = \sqrt{g_{ii}} dq^i \quad (2.A19)$$

El elemento de superficie dS^i determinado por los vectores $\vec{e}_j dq^j$, $\vec{e}_k dq^k$ (i, j, k permutación circular de 1, 2, 3) vendrá dado por:

$$dS^i = \sqrt{|\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k|} dq^j dq^k \quad (2.A20)$$

El cuadrado del módulo del producto vectorial de dos vectores \vec{a} y \vec{b} se puede expresar en la forma: $(\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$. De sustituir este resultado en la expresión anterior, teniendo en cuenta (2.A15), se sigue:

$$dS^i = \sqrt{g_{jj} g_{kk} - g_{jk}^2} dq^j dq^k \quad (2.A21)$$

siendo i, j, k una permutación circular de 1, 2, 3. Nótese que el término afectado por la raíz cuadrada es el determinante de la matriz adjunta del elemento g_{ij} de G .

El elemento de volumen dV determinado por los vectores $\vec{e}_1 dq^1$, $\vec{e}_2 dq^2$, $\vec{e}_3 dq^3$ viene dado por su determinante, es decir:

$$dV = |\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3| dq^1 dq^2 dq^3 \quad (2.A22)$$

Como ya indicamos el determinante de los vectores de la base local es igual al jacobiano D de la transformación. Además, de (2.A18):

$$dV = D dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{|G|} dq^1 dq^2 dq^3 \quad (2.A23)$$

Por la transformación (2.A1), el elemento de volumen $dV' = dq^1 dq^2 dq^3$ de la región R' del espacio de las q^i se aplica al elemento de volumen dV de la región R del espacio de las x^i . De la expresión anterior es $dV/dV' = \sqrt{|G|} = D$. Este resultado nos permite interpretar geoméricamente el jacobiano de la transformación, y por tanto la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico G , como un factor de dilatación de volumen correspondiente a dicha transformación.

De igual manera los términos $\sqrt{g_{jj} g_{kk} - g_{jk}^2}$ y $\sqrt{g_{ii}}$ de las expresiones (2.A22) y (2.A19) podrían interpretarse como factores de dilatación de superficie y de longitud respectivamente.

Caso bidimensional

A continuación indicaremos las expresiones que se derivan de aplicar los resultados obtenidos anteriormente a la transformación bidimensional entre las coordenadas cartesianas (x^1, x^2, x^3) y las coordenadas curvilíneas (q^1, q^2, q^3) . Si dicha transformación se define entre los planos (x^1, x^2) y (q^1, q^2) , será $q^3 = x^3$.

Por conveniencia nos referiremos a las coordenadas cartesianas por (x, y, z) en lugar de (x^1, x^2, x^3) . Las coordenadas curvilíneas las indicaremos por (ϵ, η, z) en lugar de (q^1, q^2, q^3) . Los subíndices o superíndices 1 y 2 hacen referencia a las coordenadas curvilíneas ϵ y η respectivamente.

- Vectores de la base local, de (2.A10):

$$\vec{e}_1 = x_\epsilon i + y_\epsilon j \quad \vec{e}_2 = x_\eta i + y_\eta j \quad \vec{e}_3 = k \quad (2.A24)$$

- Vectores de la base recíproca, de (2.A11):

$$\vec{e}^1 = \epsilon_x i + \epsilon_y j \quad \vec{e}^2 = \eta_x i + \eta_y j \quad \vec{e}^3 = k \quad (2.A25)$$

- Componentes del tensor métrico covariante, de (2.A15):

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_\epsilon^2 + y_\epsilon^2 & g_{12} &= x_\epsilon x_\eta + y_\epsilon y_\eta & g_{13} &= 0 \\ g_{21} &= g_{12} & g_{22} &= x_\eta^2 + y_\eta^2 & g_{23} &= 0 \\ g_{31} &= 0 & g_{32} &= 0 & g_{33} &= 1 \end{aligned} \quad (2.A26)$$

- Componentes del tensor métrico contravariante, de (2.A17):

$$\begin{aligned} g^{11} &= \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 & g^{12} &= \epsilon_x \eta_x + \epsilon_y \eta_y & g^{13} &= 0 \\ g^{21} &= g^{12} & g^{22} &= \eta_x^2 + \eta_y^2 & g^{23} &= 0 \\ g^{31} &= 0 & g^{32} &= 0 & g^{33} &= 1 \end{aligned} \quad (2.A27)$$

- El jacobiano de la transformación (2.A1) o (2.A3) pueden determinarse de la expresión (2.A2) o (2.A4) respectivamente:

$$D = x_\epsilon y_\eta - x_\eta y_\epsilon \quad J = \epsilon_x \eta_y - \epsilon_y \eta_x \quad (2.A28)$$

o bien, de (2.A18):

$$D = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}} \quad J = \sqrt{g^{11} g^{22} - g^{12} g^{21}} \quad (2.A29)$$

- Del hecho de que son inversas las matrices jacobianas correspondientes a transformaciones inversas, es decir:

$$\begin{pmatrix} x_\epsilon & x_\eta \\ y_\epsilon & y_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.A30)$$

se sigue:

$$\epsilon_x = \frac{Y_\eta}{D} \quad \epsilon_y = -\frac{x_\eta}{D} \quad \eta_x = -\frac{Y_\epsilon}{D} \quad \eta_y = \frac{x_\epsilon}{D} \quad (2.A31)$$

- De igual forma, del hecho de que las matrices $\|g_{ij}\|$ y $\|g^{ij}\|$ son inversas, se sigue:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{D^2} \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{D^2} \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{D^2} \quad (2.A32)$$

- En la ecuación diferencial en coordenadas curvilíneas de la función de corriente (2.22) o del potencial de velocidad (2.89) aparecen, además de los coeficientes métricos g^{ij} , los parámetros $\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}$ y $\eta_{xx} + \eta_{yy}$. Al igual que hicimos en (2.A32) es conveniente expresar estos parámetros mediante términos que involucren derivadas parciales respecto a las coordenadas curvilíneas en lugar de las coordenadas cartesianas. Así por ejemplo, de la ecuación matricial (2.A30) y por derivación respecto de la variable 'x' se obtiene ϵ_{xx} y η_{xx} . Para el cálculo de ϵ_{yy} y η_{yy} se procede de forma análoga por derivación de (2.A30) respecto de la variable 'y'. De sumar los términos correspondientes resulta:

$$\alpha = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} = -\frac{1}{D^3} \begin{vmatrix} g_{22} x_{\epsilon\epsilon} + 2g_{12} x_{\epsilon\eta} + g_{11} x_{\eta\eta} & x_\eta \\ g_{22} Y_{\epsilon\epsilon} + 2g_{12} Y_{\epsilon\eta} + g_{11} Y_{\eta\eta} & Y_\eta \end{vmatrix} \quad (2.A33)$$

$$\beta = \eta_{xx} + \eta_{yy} = \frac{1}{D^3} \begin{vmatrix} g_{22} x_{\epsilon\epsilon} + 2g_{12} x_{\epsilon\eta} + g_{11} x_{\eta\eta} & x_\epsilon \\ g_{22} Y_{\epsilon\epsilon} + 2g_{12} Y_{\epsilon\eta} + g_{11} Y_{\eta\eta} & Y_\epsilon \end{vmatrix}$$

La deducción de la ecuación de la irrotacionalidad del flujo en términos de la función de corriente ha sido realizada de dos formas distintas, lo cual nos ha conducido a las ecuaciones diferenciales, idénticas matemáticamente, (2.22) y (2.34). Una segunda forma para determinar los parámetros α y β en términos de g_{ij} se tiene de desarrollar convenientemente (2.34) y comparar la expresión resultante con (2.22). De esta forma, de aplicar además (2.A32), se obtiene:

$$\alpha = J \left(\frac{\partial g^{11}/J}{\partial \epsilon} + \frac{\partial g^{12}/J}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial g_{22}/D}{\partial \epsilon} - \frac{\partial g_{12}/D}{\partial \eta} \right) \quad (2.A34)$$

$$\beta = J \left(\frac{\partial g^{21}/J}{\partial \epsilon} + \frac{\partial g^{22}/J}{\partial \eta} \right) = -\frac{1}{D} \left(\frac{\partial g_{21}/D}{\partial \epsilon} - \frac{\partial g_{11}/D}{\partial \eta} \right)$$

NOMENCLATURA

A	Area característica.
$a_{i,j}$	Coefficientes de las ecuaciones de discretización (2.25), (2.79), (2.90) y (2.128).
\vec{b}^1, \vec{b}^2	Vectores unitarios de la base recíproca.
\vec{b}_1, \vec{b}_2	Vectores unitarios de la base local.
Ce, Cf, Ci, Cs	Contorno de entrada, salida, inferior y superior, respectivamente, del dominio en el plano físico.
$C_e^*, C_f^*, C_i^*, C_s^*$	Idem en el plano transformado.
c_p	Calor específico a presión constante.
c_v	Calor específico a volumen constante.
Cp	Coefficiente de presión, $C_p = (\bar{p} - \bar{p}_0) / (.5 \bar{\rho}_0 \bar{v}_0^2) = (p-1) / (.5 k M_0^2)$.
D	Jacobiano de la transformación (2.A1).
Dmax	Valor absoluto de la diferencia máxima entre los resultados obtenidos numéricamente, de ψ o ϕ , y los que se derivan de la solución exacta.
Dmed	Media aritmética de los valores absolutos de la diferencia entre los resultados numéricos, de ψ o ϕ , y la solución exacta.
d	Distancia entre puntos.
\vec{e}^1, \vec{e}^2	Vectores de la base recíproca.
\vec{e}_1, \vec{e}_2	Vectores de la base local.
f	Factor de relajación para la función de corriente o el potencial de velocidad; $\xi^k = f \cdot \xi^{k-1} - (f-1) \cdot \xi^{k-1}$, $\xi = \psi$ o ϕ .
fv	Factor de relajación para las velocidades.
g_{ij}	Componentes del tensor métrico contravariante.
g_{ij}	Componentes del tensor métrico covariante.
h	Entalpia específica.
H	Entalpia específica de estancamiento.
J	Jacobiano de la transformación (2.A3).
k	Relación entre los calores específicos, $k = c_p / c_v$.
L	Longitud característica.
M	Número de Mach, $M = \bar{v} / \sqrt{k \bar{R} \bar{T}} = M_0 v / \sqrt{T}$.
\dot{m}	Flujo másico adimensional (por unidad de altura), $\dot{m} = \dot{m} / (\bar{\rho}_0 \bar{v}_0 \bar{L})$.
\dot{m}_T	Flujo másico adimensional total que entra en el dominio.
NxM	Densidad de la malla. N indica el no. de tramos en la dirección i; M idem en dirección j.
p	Presión adimensional, $p = \bar{p} / \bar{p}_0$.
(q^1, q^2)	Coordenadas curvilíneas: $q^1 = \epsilon$, $q^2 = \eta$.
R	Constante del gas.
r	Vector posición
S	Superficie característica adimensional por unidad de altura, $S = \bar{S} / \bar{L}$.
s	Entropia específica.
T	Temperatura adimensional, $T = \bar{T} / \bar{T}_0$.
t	Tiempo.
TDMAi	Método iterativo de Gauss-Seidel apoyado en un TDMA en la dirección "i".
TDMAj	Idem en dirección "j".
TDMAi/j	Idem pero alternativamente en la dirección "i" y "j".
\vec{v}	Vector velocidad.
v_x, v_y	Componentes cartesianas de la velocidad.
V_i	Componentes covariantes de la velocidad en la base local ($i=1,2$).

v^i	Componentes contravariantes de la velocidad en la base local ($i=1,2$).
v_i	Componentes de la velocidad en las direcciones definidas por los vectores de la base local ($i=1,2$).
v_i	Idem en direcciones definidas por los vectores de la base recíproca ($i=1,2$).
v_{pi}	Proyecciones de la velocidad en las direcciones definidas por los vectores de la base local ($i=1,2$).
v^{pi}	Idem en direcciones definidas por los vectores de la base recíproca ($i=1,2$).
(x, y)	Coordenadas cartesianas.
$y_i(x)$	Función que define el contorno lateral C_i .
$y_s(x)$	Función que define el contorno lateral C_s .
Γ	Circulación.
δ_{ij}	Delta de Kronecker, $\delta_{ij}=1$ si $i=j$, $\delta_{ij}=0$ si $i \neq j$.
$\Delta\epsilon, \Delta\eta$	Incrementos de la malla en las direcciones 'i' y 'j' en el plano transformado.
(ϵ, η)	Coordenadas curvilíneas.
ϵ_0	Precisión exigida para finalizar las iteraciones: $\max \xi^k - \xi^{k-1} < \epsilon_0$. $\xi = \psi$ o ϕ .
ρ	Densidad.
ϕ	Función potencial.
ψ	Función de corriente.
$\psi_{i,j}^k$	Valor de ψ en el punto (i,j) de la malla y en la iteración k .
ω	Vector vorticidad.

Nota: El guión encima de las variables indica que estas son dimensionales.

Los valores v_o, T_o, M_o , etc. son los correspondientes a un punto arbitrario 'o' del dominio; en general indica aguas arriba o la zona de entrada del flujo al dominio.

La terminología referente a los criterios numéricos empleados, I-1/C-la, está comentada al inicio del apdo. 2.4.3.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] A.H.SHAPIRO, 'The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow', The Ronald Press Company, New York, Vol. I, 1953.
- [2] M.HAFEZ, D.LOVELL, 'Numerical Solution of Transonic Stream Function Equation', AIAA Journal, Vol. 21, No. 3, March 1983.
- [3] V.SHANKAR, 'Conservative Full Potential, Implicit Marching Scheme for Supersonic Flows', AIAA Journal, Vol. 20, No. 11, Nov. 1982.
- [4] J.B.MALONE, N.L.SANKAR, 'Numerical Simulation of Two-Dimensional Unsteady Transonic Flows Using the Full-Potential Equation. AIAA Journal, Vol. 22, No. 8, Aug. 1984.
- [5] J.F.THOMPSON, 'Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics', AIAA Journal, Vol. 22, No. 11, Nov. 1984.
- [6] Z.U.A.WARSI, 'Basic Differential Models for Coordinate Generation', Numerical Grid Generation, ed. J.F.Thompson, North-Holland, 1982.
- [7] J.F.THOMPSON, 'Elliptic Grid Generation', Numerical Grid Generation, ed. J.F.Thompson, North-Holland, 1982.
- [8] J.F.THOMPSON, Z.U.A.WARSI, C.W.MASTIN, 'Boundary-Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Parcial Differential Equations. A Review', Journal of Computational Physics, Vol. 47, 1982.
- [9] R.E.SMITH, 'Algebraic Grid Generation', Numerical Grid Generation, ed. J.F.Thompson, North-Holland, 1982.
- [10] P.R.EISEMAN, 'Automatic Algebraic Coordinate Generation', Numerical Grid Generation, ed. J.F.Thompson, North-Holland, 1982.
- [11] P.J.ROACHE, 'Computational Fluid Dynamics', Hermosa Publishers, Albuquerque, 1972.
- [12] A.OLIVA, C.D.PEREZ SEGARRA, 'Resolución numérica de la transmisión de calor por conducción en condiciones de estabilización y con contornos de Neumann', Tecno-Ciencia, ETSII de Terrassa, Vol. 8, no. 27, Dc. 1983, pp. 119-134.
- [13] I.H.SHAMES, 'La mecánica de los fluidos', Ed. Castillo S.A., 1967, Madrid.
- [14] A.OLIVA, 'Resolución sistemática por métodos numéricos de la transmisión de calor por conducción y convección en condiciones subsónicas y de estabilización', Tesis Doctoral, ETSIIT, UPB, Terrassa, 1982.

- [15] P.D.THOMAS, J.F.MIDDLECOFF, 'Direct Control of the Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations', Vol. 18, No. 6, June 1980.
- [16] M.FAGHRI, E.M.SPARRROW, A.T.PRATA, 'Finite-Difference Solutions of Convection-Difussion Problems in Irregular Domains, Using a Nonorthogonal Coordinate Transformation', Numerical Heat Transfer, Vol. 7, 1984.
- [17] J.F.THOMPSON, F.C.THAMES, C.S.MASTIN, 'Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing any Number of Arbitrary Two Dimensional Bodies', Journal of Computational Physics, Vol. 15, 1974.

- [A1] C.R.WYLIE, 'Matemáticas Superiores para Ingenieria', Cap. 13, McGraw-Hill, Panamá, 1969.
- [A2] J.L.SYNGE, A.SCHILD, 'Tensor Calculus', University of Toronto Press, Toronto, 1960.
- [A3] A.LICHNEROWICZ, 'Eléments de Calcul Tensoriel', A Collin, Paris, 1960.

Cap. 3:

RESOLUCION DE LAS CAPAS
LIMITES HIDRODINAMICAS Y TERMICAS

CAP. 3 RESOLUCION DE LAS CAPAS LIMITES HIDRODINAMICAS Y TERMICAS

RESUMEN

Se efectua la resolución numérica de las ecuaciones de la capa límite laminar y turbulenta en situaciones de flujo compresible, permanente y bidimensional. El análisis de la capa límite turbulenta se ha realizado en base a los conceptos de viscosidad turbulenta y conductividad térmica turbulenta, formulándose estos coeficientes de transporte turbulento mediante expresiones semiempíricas de tipo algebraico. La integración de las ecuaciones de la capa límite se realiza mediante un esquema numérico de tipo implícito propuesto por H.B.Keller. Con el objeto de corroborar la validez del método empleado se resuelven numéricamente diversas situaciones de flujos, en los que se supone conocida la distribución de velocidad, presión y temperatura en el contorno exterior de la capa límite.

3.1 INTRODUCCION

La finalidad de este capítulo es la resolución del flujo en las zonas contiguas al contorno en las que, a diferencia de la región de flujo potencial, los efectos de la fricción y de la transferencia de calor no pueden despreciarse debido a los acentuados gradientes de velocidad y temperatura.

Estas zonas, denominadas capas límites, se caracterizan por ser de delgado espesor, lo cual permite simplificar, en base a análisis de órdenes de magnitud, las ecuaciones de conservación (continuidad, cantidad de movimiento y energía). Las ecuaciones resultantes de estas simplificaciones, denominadas ecuaciones de la capa límite, presentan características distintas de las originales; así, mientras que las ecuaciones iniciales de conservación son de tipo elíptico, las ecuaciones de la capa límite son de tipo parabólico. Este hecho tiene una gran importancia en el momento de desarrollar un algoritmo numérico de resolución, posibilitando la aplicación de esquemas numéricos del tipo de los empleados en situaciones de régimen transitorio (esquemas explícito, implícito, Crank-Nicolson,....) [5].

Para la integración de las ecuaciones de la capa límite es necesario especificar la distribución de velocidades, presiones y temperaturas en el contorno exterior de la capa límite (contorno potencial). Tal y como se indicó en el primer capítulo, la obtención de dichos valores se realiza a partir de la resolución de la región de flujo potencial (cap. 2), debiéndose efectuar la integración conjunta zona potencial-capas límites en el marco de

un algoritmo global de resolución (cap. 4). En este capítulo centraremos el estudio en la resolución de las capas límites, suponiendo unos valores conocidos de la velocidad, presión y temperatura en el contorno potencial.

El análisis de las capas límites turbulentas se realiza en base a los conceptos de viscosidad turbulenta y conductividad térmica turbulenta, utilizándose expresiones semiempíricas de tipo algebraico para la formulación de dichas cantidades turbulentas; el modelo de turbulencia empleado se debe a T.Cebeci y A.M.O.Smith [1]. Para la integración de las ecuaciones de la capa límite se ha utilizado el esquema numérico de tipo implícito, denominado "box-method", propuesto por H.B.Keller [2].

La validez del método utilizado es puesta de manifiesto en diversas situaciones de flujo laminar y turbulento. Se estudian aspectos tales como la compresibilidad del flujo, los gradientes de presión, la transferencia de calor entre el fluido y las paredes limitantes, etc. En ocasiones los resultados numéricos obtenidos son contrastados con los que se derivan de estudios semiempíricos o con los resultados experimentales obtenidos por diferentes autores.

3.2 ECUACIONES GOBERNANTES

Las ecuaciones de la capa límite para situaciones de régimen permanente, bidimensional y con fuerzas másicas despreciables son [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}\bar{v}) &= 0 \\ \bar{\rho}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= - \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\rho}\overline{u'v'} \right] \\ \bar{\rho}\bar{u} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - c_p \bar{\rho}\overline{T'v'} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{u} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\rho}\overline{u'v'} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Estas ecuaciones han sido escritas para el caso de flujo turbulento, no obstante son válidas para flujo laminar si anulamos los términos que involucran velocidades y/o temperaturas de fluctuación. Por comodidad se ha empleado la notación $\overline{\rho v}$ para indicar $\bar{\rho}\bar{v} + \overline{\rho'v'}$.

Las condiciones de contorno a considerar en la integración de las ecuaciones de la capa límite son:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x,0) &= 0 \\ \bar{v}(x,0) &= 0 \\ \bar{T}(x,0) &= \bar{T}_w(x) \quad \text{ó} \quad -\left(\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right)_{(x,0)} = \dot{q}_w(x) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \bar{u}(x,y) &= \bar{u}_e(x) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \bar{T}(x,y) &= \bar{T}_e(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Las ecuaciones de la capa límite son de tipo parabólico; es por ello que, además de las condiciones de contorno indicadas en (3.2), deben explicitarse las distribuciones iniciales de velocidades y temperaturas en alguna localización arbitraria $x = x_0$. En particular podría emplearse como condiciones iniciales, las correspondientes al punto $x_0 = 0$ de inicio de la capa límite.

Para la integración del sistema de ecuaciones (3.1) y de sus condiciones de contorno (3.2) es necesario dar una información adicional respecto a los términos turbulentos $\overline{u'v'}$ y $\overline{T'v'}$. El problema se plantea en la forma con que se relacionan estas cantidades turbulentas con las distribuciones medias de velocidades y temperaturas del flujo. El modelo de turbulencia empleado se basa en el concepto de viscosidad/conductividad térmica turbulenta introducido por Boussinesq [4], según el cual:

$$\begin{aligned} -\overline{u'v'} &= \epsilon_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ -\overline{T'v'} &= \epsilon_h \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\epsilon_m}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.3)$$

De introducir estas expresiones en las ecuaciones (3.1), y de reemplazar el gradiente de presión por el de velocidad mediante la ecuación de Euler ($dp/dx + \rho_e u_e du_e/dx = 0$), las ecuaciones de la capa límite quedan en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{v}) &= 0 \\ \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \bar{\rho}_e \bar{u}_e \frac{d\bar{u}_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\bar{\mu} + \bar{\rho} \epsilon_m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \\ \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\bar{\mu}}{Pr} + \bar{\rho} \frac{\epsilon_m}{Pr_t} \right) \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{u} \left(\bar{\mu} + \bar{\rho} \epsilon_m - \frac{\bar{\mu}}{Pr} - \bar{\rho} \frac{\epsilon_m}{Pr_t} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Estas ecuaciones pueden ser escritas de una forma más conveniente mediante la transformación de Levy-Lees (cf. [1]):

$$d\eta = \sqrt{\frac{u_e}{y_e x}} \frac{\rho}{\rho_e} dy \quad (3.5)$$

$$f(x, \eta) = \Psi(x, y) / \sqrt{\rho_e \mu_e u_e x}$$

en donde la función de corriente ψ está definida de forma que satisfaga la ecuación de continuidad, esto es:

$$\bar{\rho} \bar{u} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \bar{\rho} \bar{v} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.6)$$

De introducir en (3.4), además de las variables indicadas, la variable dependiente $g(x, \eta) = H(x, y)/He(x)$, dichas ecuaciones toman la forma:

$$x(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x}) = (bf'')' + m(c - f'f') + m_1 f f'' \quad (3.7a)$$

$$x(f' \frac{\partial g}{\partial x} - g' \frac{\partial f}{\partial x}) = (eg' + df'f'')' + m_1 f g' \quad (3.7b)$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 b &= C (1 + \epsilon_m^+), & d &= \frac{Cu_e^2}{H_e} \left(1 + \epsilon_m^+ - \frac{1}{Pr} - \frac{\epsilon_m^+}{Pr_t} \right) \\
 e &= C \left(\frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_m^+}{Pr_t} \right), & c &= \frac{\rho_e}{\rho}, \quad C = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e}, \quad \epsilon_m^+ = \frac{\epsilon_m}{\nu} \\
 m &= \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx}, & m_1 &= \frac{1}{2} \left(1 + m + \frac{x}{\rho_e \mu_e} \frac{d}{dx} (\rho_e \mu_e) \right)
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Con estas nuevas variables las condiciones de contorno (3.2) quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 f(x, 0) = 0, \quad f'(x, 0) = 0, \quad g(x, 0) = g_w(x) = \frac{H_w}{H_e} \quad \text{ó} \\
 g'(x, 0) = - \left(\frac{c_p}{\rho \lambda} \right)_{(x, 0)} \frac{\rho_e x}{\sqrt{R_x} He(x)} \dot{q}_w(x) \\
 \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(x, \eta) = 1 \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} g(x, \eta) = 1
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

La transformación de las ecuaciones de la capa límite en la forma expresada en (3.7), presenta las siguientes ventajas: 1) el sistema de ecuaciones diferenciales es reducido de tres a dos ecuaciones; 2) se elimina la singularidad en el punto $x = 0$ de inicio de la capa límite; 3) la coordenada $\eta_e(x)$, correspondiente al contorno exterior de la capa límite, varía con x mucho menos que la coordenada $\eta_e(x) = \delta(x)$.

Evaluación de los coeficientes de transporte turbulento

El modelo de turbulencia empleado, basado en el concepto de viscosidad turbulenta y conductividad térmica turbulenta, utiliza expresiones semiempíricas de tipo algebraico para la evaluación de estos coeficientes de transporte turbulento.

Debido al diferente comportamiento del flujo turbulento a través de la capa límite, es usual considerar que ésta se halla dividida en dos regiones: a) una región próxima a la pared, denominada "inner region", cuyo espesor se sitúa entre un 10 y un 20% del espesor total de la capa límite y b) una región exterior, denominada "outer region", cuyo espesor es un 80 a un 90% del espesor total de la capa límite.

Para la "inner region", la expresión de ϵ_m es obtenida de aplicar la teoría de la longitud de mezcla de Prandtl [4], con una longitud de mezcla modificada según la aproximación de Van Driest [6] a fin de considerar el efecto de la subcapa límite laminar. La generalización de estas teorías semiempíricas al caso de flujos compresibles fue realizada por T. Cebeci [7], dando como resultado la siguiente expresión:

$$(\epsilon_m)_i = (ky)^2 [1 - e^{-y/A}]^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \gamma_{tr} \quad 0 \leq y \leq y_c \quad (3.10)$$

siendo:

$$k = .40 \quad A = .26 \frac{v}{N} \frac{1}{u_\tau} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_w}} \quad (3.11)$$

$$N = \sqrt{1 - 11.8 \left(\frac{\mu_w}{\mu_e}\right) \left(\frac{\rho_e}{\rho_w}\right)^2 p^+} \quad p^+ = \frac{v_e u_e}{u_\tau^3} \frac{du_e}{dx}$$

Para la "outer region" se emplea una viscosidad turbulenta definida en la forma [1]:

$$(\epsilon_m)_o = \alpha \int_0^\infty (u_e - u) dy \mid \gamma_{tr} \gamma \quad Y_c \leq Y \leq \delta \quad (3.12)$$

El valor de α es función de $R\delta_2$, y está dado por la siguiente formula empirica [1]:

$$R\delta_2 > 5000 \quad \rightarrow \quad \alpha = .0168 \quad (3.13)$$

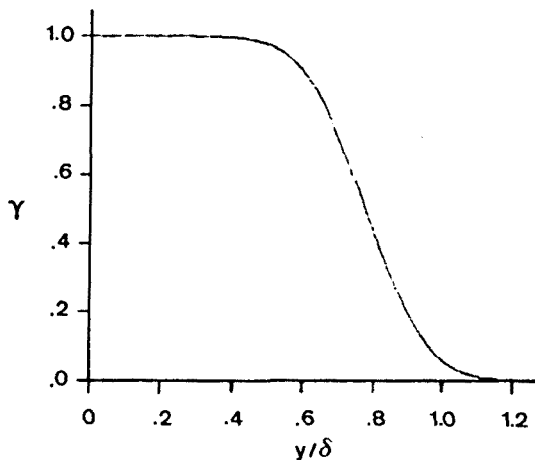
$$425 < R\delta_2 < 5000 \rightarrow \alpha = .0168 \frac{1.55}{1+\pi}$$

siendo:

$$\pi = .55 [1 - \exp(-.243 \sqrt{z_1} - .298 z_1)], \quad z_1 = \frac{R\delta_2}{425} - 1 \quad (3.14)$$

El parámetro γ es el factor de intermitencia de Klebanoff [8] y considera el hecho de que en la "outer region", debido al efecto de la corriente libre, el flujo es turbulento de forma intermitente, i.e., solo una fracción γ del tiempo el flujo es turbulento. Este factor de intermitencia viene dado por la expresión:

$$\gamma = \frac{1}{2} [1 - \operatorname{erf} 5 \left(\frac{y}{\delta} - 0.78 \right)] \quad (3.15)$$



En la Fig. 1 se ha representado esta función. La zona de intermitencia se extiende de $y/\delta = 0.4$ a 1.20 . Para una determinación más sencilla del factor de intermitencia, T.Cebeci [7] propone la aproximación:

$$\gamma = \frac{1}{1 + 5.5 (y/\delta)^6} \quad (3.16)$$

Fig. 1 Distribución del factor de intermitencia de Klebanoff a través de la capa límite, según ec. (3.15).

El parámetro γ_{tr} es un factor de intermitencia obtenido por K.Chen y N.Thyson [9], con el fin de considerar la región de transición de flujo laminar a flujo turbulento. Dicho factor viene expresado por:

$$\gamma_{tr} = 1 - \exp \left(- G_{x_{tr}} \int_{x_{tr}}^x \frac{dx}{u_e} \right) \quad (3.17)$$

en donde x_{tr} indica la coordenada correspondiente al inicio de la transición. El parámetro $G_{x_{tr}}$ es evaluado en el punto de transición mediante la expresión:

$$G_{x_{tr}} = \frac{1}{1200} \frac{u_e^3}{v_e} R_x^{-1.34} \quad (3.18)$$

La expresión indicada en (3.17) no considera el efecto de la transmisión de calor entre el fluido y los contornos, es por ello que su validez está condicionada por el grado de adiabaticidad del flujo.

La coordenada y_c , que separa la "inner region" de la "outer region", corresponde al punto en que $(\epsilon_m)_i = (\epsilon_m)_o$. En la Fig. 2 se representa la relación entre la viscosidad turbulenta y la molecular vs. y/δ ; esta gráfica ha sido obtenida numéricamente de la resolución del flujo longitudinal en una placa lisa, con unos valores de $R_x = 5.5 \times 10^6$ y $R_{\delta_2} = 8500$.

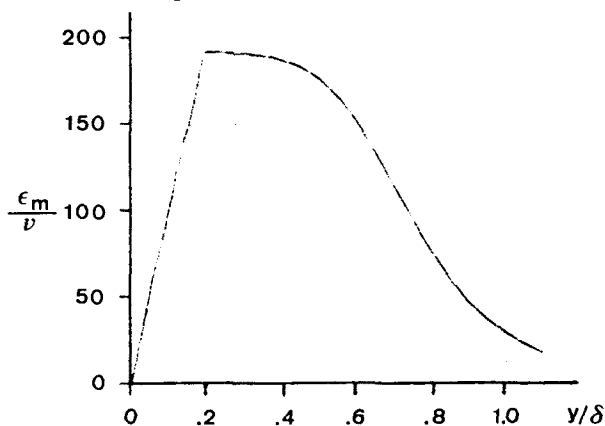


Fig. 2 Distribución de ϵ_m obtenida del flujo longitudinal en una placa, con $R_x = 5.5 \times 10^6$ y $R_{\delta_2} = 8500$.

La conductividad térmica turbulenta se ha determinado de suponer un número de Prandtl turbulento constante. En estas condiciones la conductividad térmica turbulenta resulta proporcional a la viscosidad turbulenta. Para el caso de que el fluido sea aire, resulta adecuado un valor de $Pr_t = 0.90$ [3].

Transición de la capa límite laminar a la turbulenta.

Un aspecto fundamental para el cálculo de la capa límite es la predicción de la transición del régimen laminar al turbulento. Además del número de Reynolds, el inicio de la turbulencia se ve fuertemente afectada por: el grado de turbulencia y el gradiente de presión de la corriente exterior, la transferencia de calor entre el fluido y la pared, la compresibilidad del flujo, la rugosidad de las superficies, etc. Dado el gran número de parámetros que influyen en este fenómeno, es muy difícil predecir con exactitud el inicio de la transición. A continuación indicaremos dos métodos, de carácter empírico, para la predicción de la zona de transición en flujos incompresibles y con un bajo grado de turbulencia en la corriente exterior:

- 1) Método de Michel [10]: experimentalmente obtuvo una curva que relaciona el número de Reynolds referido al espesor de cantidad de movimiento en el punto de transición, con el número de Reynolds referido a la coordenada longitudinal. Cebeci et al. [11] ajustaron a la curva obtenida por Michel la siguiente expresión:

$$(R\delta_2)_{tr} = 1.174 \left(1 + \frac{22400}{R_x} \right) R_x^{0.46} \quad 10^5 \leq R_x \leq 4 \times 10^7 \quad (3.19)$$

- 2) Método de Granville [12]: experimentalmente obtuvo una curva que relaciona $(R\delta_2)_{tr} - (R\delta_2)_{in}$ con el parámetro medio de Pohlhausen [4]:

$$\bar{k} = \frac{1}{x - x_{in}} \int_{x_{in}}^x k \, dx \quad (3.20)$$

estando k definido en la forma: $k = (\delta_2^2/\nu) du_e/dx$.

Previamente al cálculo del punto de transición debe determinarse el punto de inestabilidad laminar x_{in} . Dicho punto indica aquella posición a partir de la cual ciertas perturbaciones en el flujo laminar son susceptibles de amplificarse; este punto se determina teóricamente mediante la resolución de la ecuación de Orr-Sommerfeld, suponiendo ajustes polinómicos de sexto grado para el perfil de la velocidad (cf. [4]). Los resultados obtenidos fueron ajustados por Gorodia (cit. en ref. [13]) mediante la expresión:

$$(R\delta_2)_{in} = \exp \left(\sum_{i=1}^4 A_i k^i \right), \quad -.1567 \leq k \leq .0767 \quad (3.21)$$

en donde $A_0 = 5.46963$, $A_1 = 43.37458$, $A_2 = 218.28$, $A_3 = -1934.6$ y $A_4 = -23980$.

Para grados de turbulencia elevados de la corriente exterior ($Tu = .02 + .03$), el punto de transición coincide con el punto de inestabilidad. A medida que disminuye Tu el punto de transición se aleja aguas abajo del punto de inestabilidad laminar.

Los resultados experimentales de Granville corresponden a grados de turbulencia muy bajos de la corriente exterior ($Tu = .0008$); dichos resultados fueron ajustados por Gorodia (cit. en ref. [13]) mediante la expresión:

$$(R\delta_2)_{tr} - (R\delta_2)_{in} = \sum_{i=1}^3 B_i \bar{k}^i, \quad -.05 \leq \bar{k} \leq .0767 \quad (3.22)$$

en donde $B_0 = 825.45$, $B_1 = 28183.5$, $B_2 = 721988$ y $B_3 = 6317380$.

Estos dos métodos son aplicables a flujos compresibles en el caso de números de Mach moderados y en ausencia de intercambio calorífico entre la pared y el fluido (cf. [4]).

3.3 RESOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES DE LA CAPA LIMITE

La resolución de las ecuaciones de la capa límite y de sus condiciones de contorno se ha realizado mediante el denominado "box-method" de H. B. Keller [2]. En este apartado describiremos brevemente los puntos más destacados del método, no obstante para un seguimiento más detallado consúltese cualquiera de las referencias [1], [2] o [3].

Una idea fundamental del método consiste en transformar el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de la capa límite, en un sistema de

ecuaciones de primer orden. Con este fin son definidas las siguientes variables dependientes:

$$u(x, \eta) = f'(x, \eta) \tag{3.23a}$$

$$v(x, \eta) = u'(x, \eta) \tag{3.23b}$$

$$p(x, \eta) = g'(x, \eta) \tag{3.23c}$$

Introduciendo las nuevas variables en las ecuaciones de la capa límite (3.7), estas toman la forma:

$$x(u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial f}{\partial x}) = (bv) + m(c-u^2) + m_1 fv \tag{3.23d}$$

$$x(u \frac{\partial g}{\partial x} - p \frac{\partial f}{\partial x}) = (ep + duv) + m_1 fp \tag{3.23e}$$

mientras que las condiciones de contorno (3.9) serán:

$$f(x, 0) = 0; u(x, 0) = 0; g(x, 0) = g_w(x) = Hw(x)/He(x) \quad \sigma$$

$$p(x, 0) = p_w(x) = -\left(\frac{c_p}{\rho \lambda}\right)_w \frac{\rho_e x}{\sqrt{Rx} He(x)} \dot{q}_w(x) \tag{3.24}$$

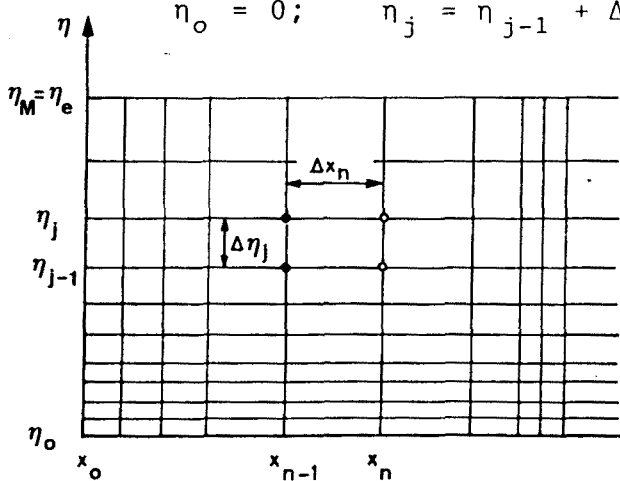
$$u(x, \eta_e) = 1; g(x, \eta_e) = 1$$

además de las condiciones iniciales en x_0 , en donde debe explicitarse los valores de f, u, v, g, p .

En la discretización del dominio se han empleado $N+1$ puntos en la dirección 'x' y $M+1$ puntos en la dirección η . Las coordenadas correspondientes a los puntos de discretización serán:

$$x_0 = 0; \quad x_n = x_{n-1} + \Delta x_n, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$\eta_0 = 0; \quad \eta_j = \eta_{j-1} + \Delta \eta_j, \quad j = 1, 2, \dots, M \tag{3.25}$$



en donde los incrementos en ambas direcciones son tomados arbitrariamente (Fig. 3).

Fig. 3 Ejemplo de malla de discretización a emplear en la resolución numérica.

La naturaleza parabólica de las ecuaciones respecto de la coordenada x caracteriza un flujo cuyas condiciones en una posición dada x no son afectadas por lo que ocurre aguas abajo. La integración numérica de las ecuaciones se realiza avanzando incremento a incremento, y en la dirección del

flujo, a lo largo de la coordenada x ; para ello, partiendo de unos valores conocidos de $[f, u, v, g, p]$ en x_{n-1} se determinan los valores de dichas variables en la posición inmediatamente anterior x_n .

La discretización de las ecuaciones (3.23) la realizaremos sobre el elemento discreto determinado por las coordenadas x_{n-1} , x_n , η_{j-1} y η_j (cf. Fig.3), en la forma:

- Las derivadas son aproximadas numéricamente, en $\eta_{j-1/2} = (\eta_{j-1} + \eta_j)/2$, mediante cociente de incrementos; así, si ϕ indica una variable cualquiera ($\phi = u, f, g, bv, ep$ ó duv), se tiene:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{j-1/2} \approx \frac{\phi_{j-1/2}^n - \phi_{j-1/2}^{n-1}}{\Delta x_n}; \quad [\phi']_{j-1/2}^n \approx \frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta \eta_j}; \quad [\phi']_{j-1/2}^{n-1} \approx \frac{\phi_j^{n-1} - \phi_{j-1}^{n-1}}{\Delta \eta_j} \quad (3.26)$$

- Los restantes términos de las ecuaciones se determinan en $\eta_{j-1/2}$ y, a excepción de las derivadas en x , pueden ser evaluados en cualquier posición entre $n-1$ y n . En general y para la variable genérica ϕ ($\phi = u, v, (bv)', mc, m_1fv$, etc) será:

$$[\phi]_{j-1/2} \approx \omega [\phi]_{j-1/2}^{n-1} + (1-\omega)[\phi]_{j-1/2}^n \quad (3.27)$$

en donde ω representa un factor de interpolación que define el tipo de formulación empleada; así, una formulación de tipo explícito, implícito o Crank-Nicolson emplearían valores uniformes de ω e iguales a 1, 0 y 0.5 respectivamente.

El método propuesto por H.B.Keller toma un valor de $\omega=0$ para las ecuaciones (3.23a), (3.23b) y (3.23c), mientras que para las ecuaciones (3.23d) y (3.23d) emplea $\omega=0.50$. Así por ejemplo, la discretización de las ecuaciones (3.23a) y (3.23d) según los criterios indicados será:

$$\begin{aligned} u_{j-1/2}^n &= (f_j^n - f_{j-1}^n) / \Delta \eta_j \\ x_{n-1/2} \left(u_{j-1/2}^{n-1/2} \frac{u_{j-1/2}^n - u_{j-1/2}^{n-1}}{\Delta x_n} - v_{j-1/2}^{n-1/2} \frac{f_{j-1/2}^n - f_{j-1/2}^{n-1}}{\Delta x_n} \right) &= \quad (3.28) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(bv)_j - (bv)_{j-1}}{\Delta \eta_j} \right)^{n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{(bv)_j - (bv)_{j-1}}{\Delta \eta_j} \right)^n \\ &+ \frac{1}{2} [m(c-u^2) + m_1fv]_{j-1/2}^{n-1} + \frac{1}{2} [m(c-u^2) + m_1fv]_{j-1/2}^n \end{aligned}$$

en donde $x_{n-1/2} = (x_n + x_{n-1})/2$; los valores de las diferentes variables en $n-1/2$ y/o $j-1/2$ se obtienen promediando las correspondientes a los nodos adyacentes; así por ejemplo:

$$u_{j-1/2}^{n-1/2} = \frac{u_{j-1/2}^n + u_{j-1/2}^{n-1}}{2}; \quad u_{j-1/2}^n = \frac{u_j^n + u_{j-1}^n}{2}; \quad u_{j-1/2}^{n-1} = \frac{u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{2} \quad (3.29)$$

- De proceder de forma análoga para las restantes ecuaciones se obtiene para cada nodo (x_n, η_j) cinco ecuaciones discretas (cf. Apéndice A). Estas ecuaciones, conjuntamente con las condiciones de contorno (3.24), configuran un sistema de $5(M+1)$ ecuaciones algebraicas no lineales con $5(M+1)$ incógnitas: $f_j^n, u_j^n, v_j^n, g_j^n, p_j^n$ ($j=0, 1, \dots, M$).

La resolución de dicho sistema de ecuaciones discretas se efectúa iterativamente mediante un TDMA de bloques, previa linearización de las ecuaciones por el método de Newton (cf. Ref. [1:3]). El inicio del proceso iterativo se realiza suponiendo unos valores de las variables en x_n iguales a los calculados en x_{n-1} . El proceso iterativo finaliza cuando, en la iteración k , se satisface el siguiente criterio de convergencia sugerido por Cebeci y Smith [1]:

$$\left| (v_w^n)^k - (v_w^n)^{k-1} \right| \leq \epsilon \quad (3.30)$$

en donde $v_w^n = v(x_n, \eta_0) = f''(x_n, \eta_0)$, mientras que ϵ indica la precisión exigida.

Las condiciones iniciales en $x_0=0$ son generadas a partir de la resolución numérica de las ecuaciones (3.23). Nótese que en las ecuaciones (3.23d) y (3.23e) los términos de la izquierda desaparecen, quedando un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. El método de resolución empleado es el anteriormente descrito particularizado a esta situación.

3.4 EJEMPLOS DE RESOLUCION NUMERICA

En este apartado presentamos diferentes resultados obtenidos de aplicar los criterios anteriormente indicados, al análisis de las capas límites. Con ello se pretende corroborar la validez del método empleado, así como poner de manifiesto algunos detalles del mismo.

La concentración de los puntos de la malla a través de la capa límite se ha realizado mediante la expresión [14]:

$$\eta_j = \Delta\eta_1 \frac{K^j - 1}{K - 1} \quad (3.31)$$

en donde $\Delta\eta_1$ es el incremento inicial de la malla y K es una constante igual al cociente entre dos incrementos consecutivos cualesquiera de la malla. Para la resolución de la capa límite laminar resulta adecuada una distribución uniforme de puntos (en este caso $K = 1$), siendo 0.1 un valor apropiado de $\Delta\eta_1$. Para la capa límite turbulenta es conveniente densificar la malla en las zonas próximas a la pared (en este caso $K > 1$), siendo 0.005 y 1.10 unos valores apropiados de $\Delta\eta_1$ y K respectivamente.

En general, el valor de $\eta_e(x)$ se mantiene prácticamente constante para la capa límite laminar, mientras que para la capa límite turbulenta aumenta con x . El fijar a priori un valor de $\eta_e(x)$ constante y que englobe en todas las posiciones a la capa límite, comporta la realización de cálculos innecesarios;

es por ello que dicho valor es estimado, en cada posición x_n , incrementándose el número de puntos de la malla si ello fuese necesario. Así, una vez calculadas las distintas variables en la posición x_n , se comprueba que $|v_M^n| < 10^{-3}$ [15]; si se satisface este criterio entonces $\eta_e(x_{n+1}) = \eta_e(x_n)$, en caso contrario el número de puntos en x es incrementado (lo cual comporta, de (3.31), un nuevo valor $\eta_e(x_n)$), efectuándose de nuevo el cálculo de las variables en dicha posición.

En las ecuaciones de discretización de la capa límite (cf. Apéndice A), los parámetros m y m_1 deben evaluarse en cada posición x_n . En general y para distribuciones arbitrarias de velocidad, presión y temperatura en el contorno exterior de la capa límite, los valores du_e/dx y $d(\rho_e \mu_e)/dx$ que aparecen en dichos parámetros, son evaluados numéricamente derivando el polinomio de interpolación de Lagrange a los valores de la variable en la posición dada y en las adyacentes. Así por ejemplo, para todas las posiciones 'n', excepto la de los extremos, será:

$$\left(\frac{du_e}{dx}\right)_n \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1})} u_e^{n+1} + \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{(x_{n+1} - x_n)(x_n - x_{n-1})} u_e^n - \frac{x_{n+1} - x_n}{(x_n - x_{n-1})(x_{n+1} - x_{n-1})} u_e^{n-1} \quad (3.32)$$

Los ejemplos numéricos presentados han sido realizados para aire seco, evaluándose las propiedades físicas en la forma indicada en el Apéndice B del Cap. 4.

En todos los casos presentados, excepto los correspondientes a la Fig. 7, se ha supuesto la siguiente distribución de velocidades en el contorno exterior de la capa límite:

$$u_e(x) = C_2 x^{m_2} \quad (3.33)$$

Para flujos laminares con propiedades físicas constantes, la anterior distribución potencial de velocidad da soluciones semejantes de las ecuaciones de la capa límite. De esta forma, la ecuación (3.7a) es reducida a una ecuación diferencial ordinaria (ecuación de Falkner-Skan [4]), de cuya resolución se tiene:

$$Cf = \frac{\beta_0}{\sqrt{Rx}} \quad ; \quad \frac{\delta_1}{x} = \frac{\beta_1}{\sqrt{Rx}} \quad ; \quad \frac{\delta_2}{x} = \frac{\beta_2}{\sqrt{Rx}} \quad ; \quad \frac{\delta}{x} = \frac{\beta_3}{\sqrt{Rx}} \quad (3.34)$$

en donde los coeficientes β_i son función del parámetro m_2 ; Cebeci y Bradshaw [3] dan la siguiente tabulación de dichos coeficientes:

Tabla I:	m_2	β_0	β_1	β_2	β_3
	1	1.23259	0.64791	0.29234	
	1/3	0.75745	0.98536	0.42900	
	0	0.33206	1.72074	0.66412	5.30
	-0.05	0.21351	2.11740	0.75148	

Los resultados numéricos obtenidos para el caso de capa límite laminar, son

los indicados en las Tablas II, III, IV y en las Fig. 4, 5 y 6. En todos ellos se ha empleado una distribución potencial de velocidad del tipo indicado en (3.33).

En las Tablas II, III y IV, los resultados numéricos corresponden a un número de Mach lo suficientemente bajo como para poder considerar un comportamiento incompresible del flujo. En las Tablas II y III los resultados ponen de manifiesto, para el caso de paredes adiabáticas, la influencia de la densidad de malla y el efecto del parámetro m_2 respectivamente; dichos resultados son contrastados con los que se derivan de las expresiones (3.34), en donde los coeficientes β_i son evaluados según se indica en la Tabla I. En la Tabla IV se indica el número de Nusselt obtenido numéricamente para el caso del flujo longitudinal ($m_2=0$) en una placa isoterma, a diferentes valores de R_x ; dichos resultados son contrastados con los que se derivan de la expresión [18]:

$$\tilde{Nu}_x = 0.332 \tilde{R}_x^{\frac{1}{2}} \tilde{Pr}^{-1/3} \quad (3.35)$$

en donde \sim indica que las propiedades físicas son evaluadas a la temperatura promedio entre la temperatura de la pared (T_w) y la temperatura del flujo en el contorno exterior de la capa límite (T_e).

En las Fig. 5, 6 y 7, se representan algunas distribuciones típicas de velocidades y temperaturas a través de la capa límite laminar [4]. La Fig. 5 corresponde al caso del flujo laminar, con comportamiento incompresible, en una placa adiabática, considerando diferentes valores del parámetro m de la distribución potencial de velocidad. En las Fig. 6 y 7 se representa, a diferentes números de Mach, el caso del flujo laminar a través de una placa adiabática e isoterma respectivamente; en ambos casos queda de manifiesto el efecto del calor generado por fricción en la capa límite.

En la Tabla V se indican algunos resultados obtenidos, para diferentes valores del parámetro m_2 de la distribución de velocidad potencial (3.33), según los distintos criterios de transición de la capa límite laminar a la turbulenta. Además de los criterios de Granville y Michel, aplicables al caso de corrientes con un bajo grado de turbulencia, se ha indicado también el punto de inestabilidad laminar, el cual aplicable al caso de corrientes con un alto grado de turbulencia. Nótese que para $m_2=1/3$ los resultados obtenidos de aplicar el criterio de Michel están fuera de su zona de validez.

En la Fig. 6 se representan los valores de C_f y H_{12} correspondientes al flujo laminar y turbulento en una placa de $L=1$ m, con una distribución potencial de velocidad de la forma [4]:

$$u_e(x) = u_\infty [1 - C_3(x/L)^{m_3}] \quad (3.36)$$

con un valor de $m_3=1$ (caso de un canal con paredes convergente ($C_3<0$) ó divergentes ($C_3>0$)). El criterio de transición empleado ha sido el de Michel. En dichas figuras se observa el efecto de los diferentes gradientes de presión. Nótese que un ligero gradiente de presión favorable retrasa considerablemente el punto de transición; para el caso de gradientes de presión desfavorables el punto de transición se adelanta. Para $C_3=.75$ se produce, en $x/L=.68$, la separación de la capa límite turbulenta. En estas figuras es puesta de manifiesto la influencia del factor γ_{tr} , ec. (3.17), en

la evaluación de la viscosidad turbulenta en la zona de transición.

Finalmente, en las Tablas VI, VII, VIII y en las Fig. 8 y 9 se representan los resultados correspondientes al caso del flujo turbulento en una placa, con una distribución de velocidades uniforme ($m=0$) en el contorno exterior de la capa límite.

En las Tablas VI y VII se indican los resultados numéricos obtenidos, para el caso de una placa adiabática, a diferentes precisiones y densidades de malla respectivamente.

En las Fig. 8 y 9 se representan los resultados numéricos obtenidos, para el caso del flujo turbulento en una placa adiabática, de considerar o no en la evaluación de las viscosidades turbulentas, el factor de intermitencia γ . En la Fig. 8 se representa, en función de R_x , la distribución del coeficiente C_f ; en la Fig. 9 se representa la distribución de velocidad a través de la capa límite en dos posiciones x dadas. Conjuntamente con los resultados numéricos se representan los resultados experimentales obtenidos por P.S.Klebanoff (cf. [14]) para unas situaciones similares.

En la Tabla VIII se indican los valores numéricos de Nu_x para el caso de la capa límite turbulenta en una placa isoterma con flujo longitudinal ($m_2=0$), y para diferentes situaciones de enfriamiento y calentamiento del flujo. Se indica igualmente, para unas condiciones análogas del flujo, los valores de Nu_x que se derivan de diferentes expresiones semiempíricas. Estas expresiones corresponden al caso de la capa límite turbulenta de un gas en una placa isoterma; las expresiones seleccionadas son:

- De W.C.Reynolds et al. [16]:

$$Nu_x = 0.0296.Rx^{0.8} Pr^{0.60} . (T_e/T_w)^{0.40} \quad (3.37)$$

- De V.P.Isachenko et al. [17]:

$$Nu_x = \frac{0.0296 Rx^{0.8} Pr}{0.93 + 2.151 Rx^{-0.1} (Pr^{2/3} - 1)} \left(\frac{T_e}{T_w}\right)^q \quad (3.38)$$

Para casos de calentamiento del flujo ($T_w > T_e$) $q = .25$; a falta de otra información se ha empleado este mismo valor para el caso de enfriamiento del flujo.

- De H.Y.Wong [18]:

$$\tilde{Nu}_x = 0.029.\tilde{R}x^{0.8} \tilde{P}r^{1/3} \quad (3.39)$$

- De E.R.G.Eckert [19]:

$$\tilde{Nu}_x = \frac{0.0297 \tilde{R}x^{0.8} \tilde{P}r}{1 + 1.48 \tilde{R}x^{-0.1} \tilde{P}r^{1/6} (\tilde{P}r - 1)} \quad (3.40)$$

TABLA II: Capa límite laminar en una placa. Resultados numéricos obtenidos con una malla uniformemente distribuida ($K=1$), a diferentes $\Delta\eta_1$. Entre paréntesis se indica la diferencia, en tanto por ciento, entre la solución numérica y la que se deriva de (3.34)-Tabla I. $M_\infty = .01$, $m_2 = 0$, $Rx = 2.18 \times 10^5$, $\epsilon_1 = 1 \times 10^{-6}$.

$\Delta\eta_1$	NP	$C_f (x10^3)$	$\delta/x (x10^2)$	$\delta_1/x (x10^3)$	$\delta_2/\bar{x} (x10^3)$	H_{12}
0.4	21	1.4147 (.44%)	1.1982 (5.7%)	3.6960 (.37%)	1.4146 (.45%)	2.6128 (.84%)
0.3	27	1.4152 (.41%)	1.1554 (1.9%)	3.6841 (.06%)	1.4152 (.41%)	2.6032 (.47%)
0.2	41	1.4156 (.38%)	1.1554 (1.9%)	3.6756 (.17%)	1.4156 (.38%)	2.5965 (.21%)
0.1	81	1.4158 (.37%)	1.1340 (.00%)	3.6705 (.31%)	1.4158 (.36%)	2.5925 (.06%)
.05	161	1.4159 (.36%)	1.1340 (.00%)	3.6692 (.34%)	1.4158 (.36%)	2.5916 (.02%)

TABLA III: Capa límite laminar. Resultados numéricos obtenidos para diferentes valores del parámetro m_2 , y en distintas posiciones x . Entre paréntesis se indica la diferencia, en tanto por ciento, entre la solución numérica y la que se deriva de (3.34)-Tabla I. $M_\infty = .01$, $T_\infty = 300$ K, $\Delta\eta_1 = .2$, $K=1$, $\epsilon_1 = 1 \times 10^{-6}$.

m_2	x (m)	$C_f (x10^3)$	$\delta_1/x (x10^3)$	$\delta_2/x (x10^3)$	H_{12}
1	0.1	52.401 (.66%)	13.914 (.37%)	6.1438 (1.8%)	2.2647 (2.2%)
	1.0	5.2404 (.65%)	1.3914 (.37%)	0.6144 (1.8%)	2.2647 (2.2%)
1/3	0.1	14.974 (.47%)	9.7882 (.02%)	4.2243 (.85%)	2.3171 (.88%)
	1.0	3.2261 (.47%)	2.1088 (.02%)	0.9101 (.85%)	2.3171 (.88%)
0	0.1	4.4765 (.38%)	11.623 (.17%)	4.4765 (.38%)	2.5964 (.21%)
	1.0	1.4156 (.38%)	3.6756 (.17%)	1.4156 (.38%)	2.5965 (.21%)
-.05	0.1	2.7178 (.36%)	13.498 (.20%)	4.7846 (.33%)	2.7178 (.36%)
	1.0	0.9104 (.36%)	4.5211 (.21%)	1.6026 (.33%)	2.8211 (.12%)

TABLA IV: Capa límite laminar en una placa isoterma. Se representa el número de Nusselt, Nux , obtenido a diferentes Rx , para el caso de calentamiento ($g_w > 1$) o de enfriamiento del flujo ($g_w < 1$). Entre paréntesis se indica la diferencia, en tanto por ciento, entre la solución numérica y la que se deriva de la expresión (3.35). $M_\infty = .05$, $m_2 = 0$, $Pr = .70$, $\Delta\eta_1 = .1$, $K=1$, $\epsilon_1 = 1 \times 10^{-6}$.

g_w	Rx				
	2.403×10^5	4.805×10^5	7.208×10^5	9.611×10^5	1.201×10^6
.50	147.8 (.46%)	208.8 (.57%)	255.7 (.61%)	295.2 (.62%)	330.0 (.63%)
2.0	135.7 (1.0%)	192.3 (.81%)	235.7 (.75%)	272.2 (.71%)	304.4 (.69%)

TABLA V: Número de Reynolds en el punto de transición de la capa límite laminar a la turbulenta, según distintos criterios y para el caso de $u_e(x) = C_2 x^{m_2}$. Se supone flujo incompresible y pared adiabática.

Criterios		$m_2 = -.05$	$m_2 = 0$	$m_2 = 1/3$
Pto. inestab. ec. (3.21)	Rx	$.12912 \times 10^5$	$.12776 \times 10^6$	$.67260 \times 10^8$
	$R \delta_1$	$.24060 \times 10^3$	$.61505 \times 10^3$	$.80811 \times 10^4$
	$R \delta_2$	$.85391 \times 10^2$	$.23738 \times 10^3$	$.35183 \times 10^4$
Michel ec. (3.19)	Rx	$.34155 \times 10^6$	$.20197 \times 10^7$	$.85168 \times 10^{11}$
	$R \delta_1$	$.12375 \times 10^4$	$.24455 \times 10^4$	$.28756 \times 10^6$
	$R \delta_2$	$.43918 \times 10^3$	$.94383 \times 10^3$	$.12520 \times 10^6$
Granville ec. (3.22)	Rx	$.53268 \times 10^6$	$.25612 \times 10^7$	$.57074 \times 10^9$
	$R \delta_1$	$.15454 \times 10^4$	$.27538 \times 10^4$	$.23540 \times 10^5$
	$R \delta_2$	$.54847 \times 10^3$	$.10628 \times 10^4$	$.10249 \times 10^5$
$k_2 = \bar{k}_2 =$		- .028236	0.0	.061347

TABLA VI: Capa límite turbulenta sobre una placa adiabática. Se indican los valores de C_f , H_{12} y el número de iteraciones requeridas, a diferentes precisiones ϵ_t . $M_\infty = .05$, $m_2 = 0$, $\Delta\eta_1 = .001$, $K = 1.075$.

ϵ_t	$Rx = 1.2013 \times 10^6$, NP=97			$Rx = 1.2013 \times 10^7$, NP=113		
	$C_f (x10^3)$	H_{12}	It	$C_f (x10^3)$	H_{12}	It
10^{-1}	3.5197	1.4672	2	2.2863	1.3289	2
10^{-2}	3.5771	1.4512	3	2.2802	1.3293	3
10^{-3}	3.5774	1.4518	4	2.2825	1.3293	6
10^{-4}	3.5781	1.4515	11	2.2832	1.3293	24
10^{-5}	3.5784	1.4515	23	2.2834	1.3292	52
10^{-6}	3.5784	1.4515	39	2.2834	1.3292	113
10^{-7}	3.5785	1.4515	63	2.2836	1.3293	142

TABLA VII: Capa límite turbulenta sobre una placa adiabática. Se indican los valores de C_f , H_{12} y el número puntos de la malla, para diferentes valores del parámetro K . $M_\infty = .05$, $m_2 = 0$, $\Delta\eta_1 = .001$, $\epsilon_t = .00005$.

K	Rx=1.2013x10 ⁶			Rx=1.2013x10 ⁷		
	Cf (x10 ³)	H ₁₂	NP	Cf (x10 ³)	H ₁₂	NP
1.150	3.6030	1.4410	59	2.2892	1.7370	65
1.100	3.5976	1.4447	77	2.2850	1.3286	91
1.075	3.5783	1.4515	97	2.2832	1.3293	113
1.050	3.5804	1.4518	135	2.2802	1.3315	159
1.025	3.5831	1.4516	237	2.2773	1.3344	281
1.020	3.5800	1.4526	283	2.2762	1.3350	339
1.015	3.5801	1.4528	357	2.2739	1.3358	431
1.0125	3.5768	1.4537	412	2.2745	1.3360	500
1.010	3.5776	1.4537	492	2.2740	1.3363	600

TABLA VIII: Capa límite turbulenta sobre una placa. Se indica el número de Nusselt obtenido numéricamente y el que se deriva de diferentes expresiones semiempíricas, a distintos Rx y g_w . $M_\infty = .20$, $Pr = .70$, $m_2 = 0$, $\Delta\eta_1 = .005$, $K = 1.075$, $\epsilon_t = .0001$.

Rx	g_w	sol. num.	ec. (3.37)	ec. (3.38)	ec. (3.39)	ec. (3.40)
2.68x10 ⁶	0.6	3522	4060	3950	4129	3717
	0.8	3401	3618	3676	3823	3451
	1.5	2780	2814	3141	3079	2798
	2.0	2568	2508	2923	2726	2487
6.71x10 ⁶	0.6	7690	8450	8132	8593	7660
	0.8	7377	7531	7568	7958	7109
	1.5	5976	5857	6467	6408	5759
	2.0	5473	5220	6018	5674	5118
1.34x10 ⁷	0.6	14015	14712	14052	14962	13244
	0.8	13421	13113	13077	13855	12289
	1.5	10735	10198	11175	11156	9952
	2.0	9835	9089	10400	9879	8841
3.35x10 ⁷	0.6	30960	30622	28982	31141	27335
	0.8	29631	27293	26971	28838	25360
	1.5	23548	21225	23049	23220	20526
	2.0	21404	18918	21449	20561	18229

Fig. 4 Distribuciones de velocidad en la capa límite laminar con $u_e(x) = C_2 x^{m_2}$, a diferentes valores del parámetro m_2 . $M_\infty = .05$, $\Delta\eta_1 = .10$, $K=1$, $\epsilon_1 = 1 \times 10^{-6}$.

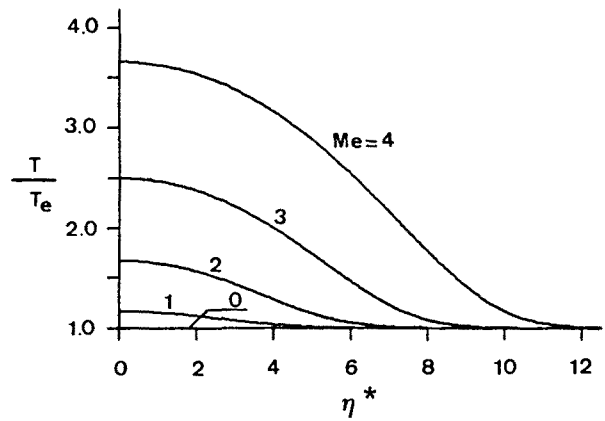
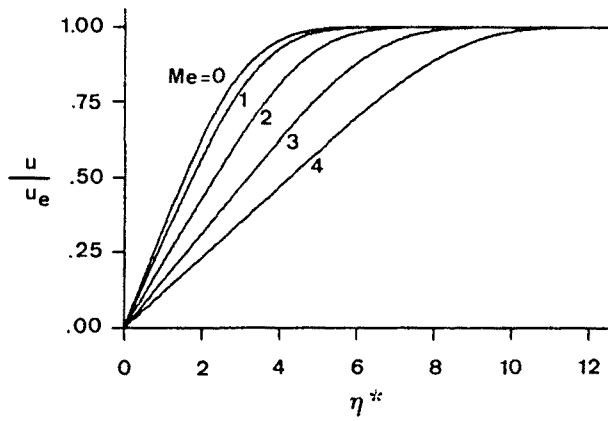
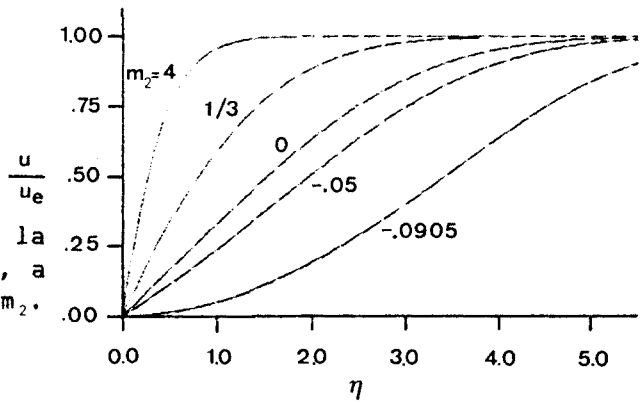


Fig.5 Distribuciones de velocidad y temperatura en la capa límite laminar de una placa adiabática, a diferentes números de Mach. $Pr = .70$, $m_2 = 0$, $\Delta\eta_1 = .10$, $K=1$, $\epsilon_1 = 1 \times 10^{-6}$.

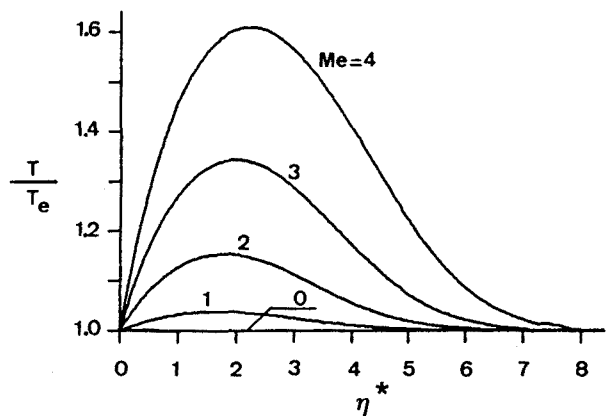
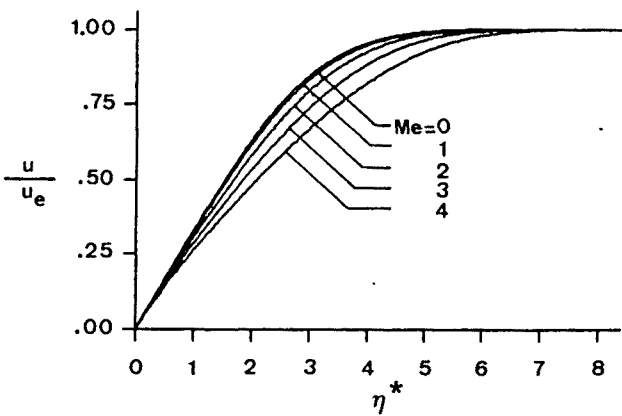


Fig.6 Distribuciones de velocidad y temperatura de la capa límite laminar de una placa isoterma, con $T_w = T_e$, a diferentes números de Mach. $Pr = .70$, $m_2 = 0$, $\Delta\eta_1 = .10$, $K=1$, $\epsilon_1 = 1 \times 10^{-6}$.

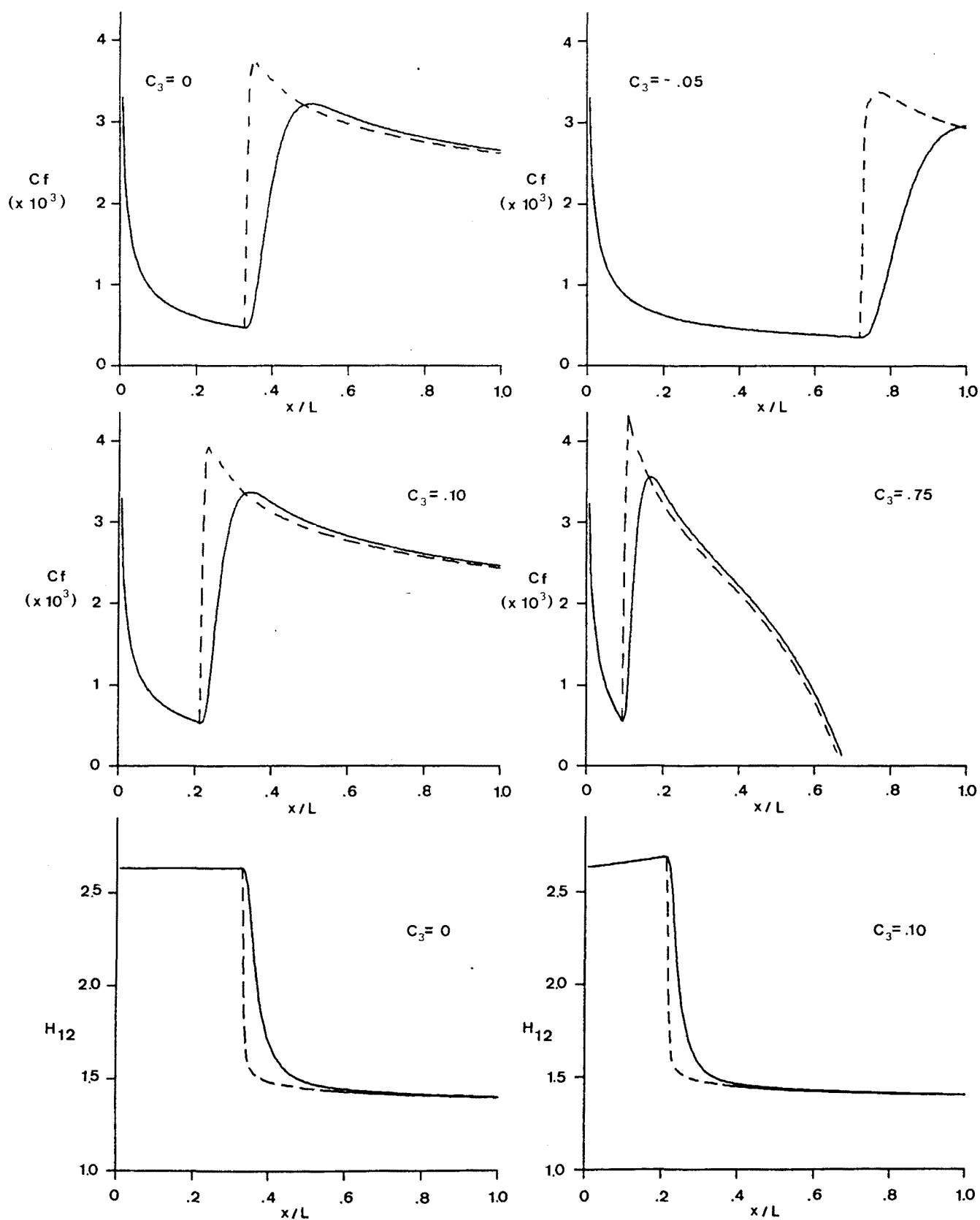


Fig.7 Valores del coeficiente de rozamiento superficial C_f y del factor de forma H_{12} , para el caso de la capa límite laminar y turbulenta con corriente potencial del tipo $u_e(x) = u_\infty[1 - C_3(x/L)]$. El punto de transición se ha estimado según el criterio de Michel, ec. (3.19). Línea continua: según expresión (3.17); línea a trazos: $\chi_{tr} = 1.0$. $M_\infty = .25$, $T_\infty = 300$ K, $\Delta\eta_1 = .001$, $K = 1.075$, $\epsilon_l = 1 \times 10^{-6}$, $\epsilon_t = 1 \times 10^{-3}$.

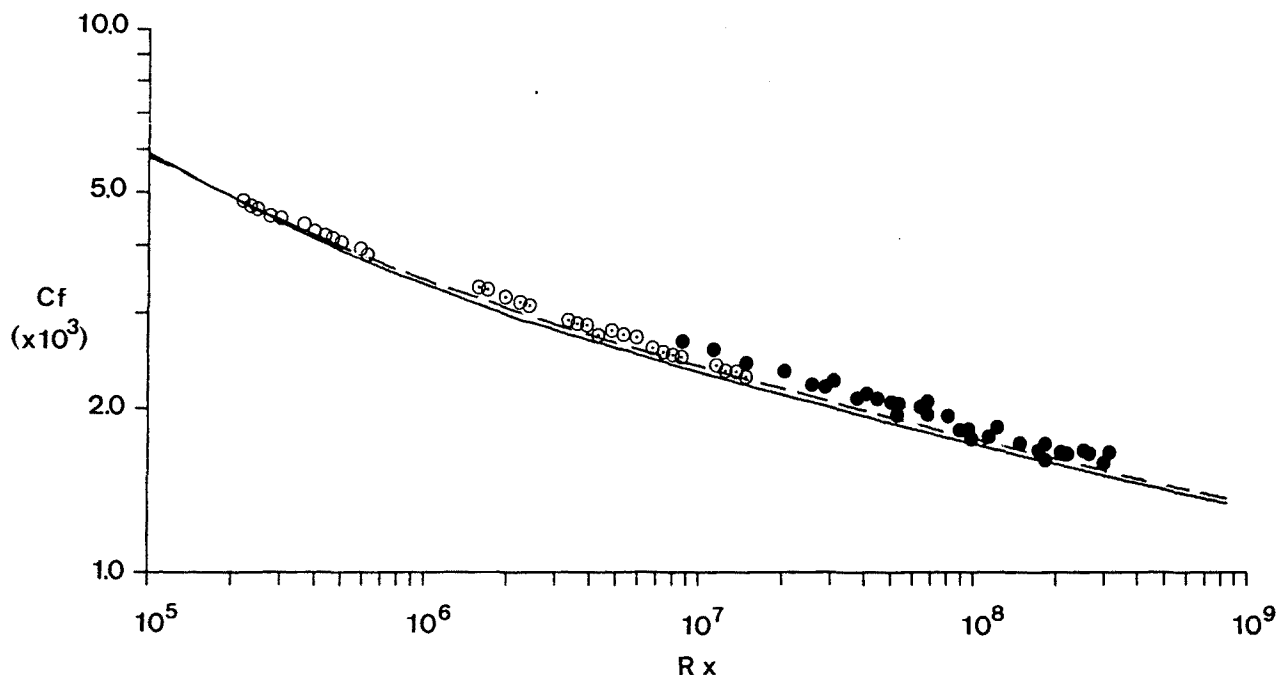


Fig.8 Coeficiente de fricción superficial para el caso de capa límite turbulenta en una placa. Línea continua: según expresión (3.16); línea a trazos: $\gamma = 1.0$; \circ, \odot, \bullet : valores experimentales según P.S.Klebanoff (cit. en [14]); $M_\infty = .05$, $m_2 = 0$, $\Delta\eta_1 = .001$, $K = 1.10$, $\epsilon_t = 1 \times 10^{-4}$.

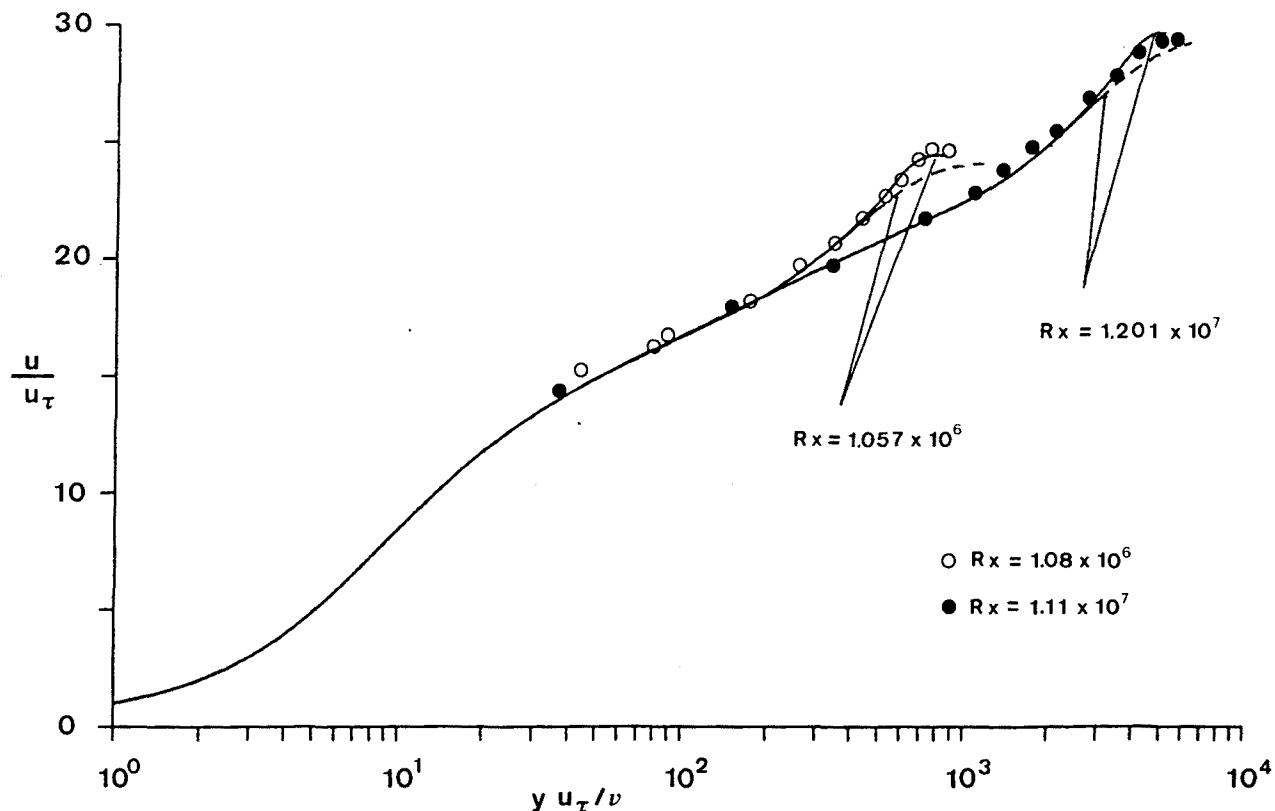


Fig.9 Distribución de velocidad a través de la capa límite turbulenta en una placa. Línea continua: según expresión (3.16); línea a trazos: $\gamma = 1.0$; \circ, \bullet : valores experimentales según P.S.Klebanoff (cit. en [14]); $M_\infty = .05$, $m_2 = 1.0$, $\Delta\eta_1 = .001$, $K = 1.05$, $\epsilon_t = 1 \times 10^{-4}$.

3.5 CONCLUSIONES

El método empleado es bastante general por cuanto permite el tratamiento de la capa límite laminar y turbulenta en flujos con propiedades físicas variables, con distribuciones arbitrarias de velocidades y temperaturas en el contorno exterior de la capa límite, y con distribuciones arbitrarias de temperaturas y/o flujos caloríficos en la pared.

El esquema numérico presenta una rápida convergencia y proporciona unos resultados suficientemente precisos, con mallas relativamente poco densas y valores relativamente bajos de la precisión exigida para finalizar las iteraciones.

Los resultados obtenidos numericamente del coeficiente C_f , para el caso de capa límite turbulenta en una placa adiabática, son ligeramente inferiores a los obtenidos experimentalmente; la no consideración del factor de intermitencia de Klebanoff en las expresiones de la viscosidad turbulenta, aproximan la solución numérica a la experimental. En lo que se refiere al perfil de velocidad a través de la capa límite, el ajuste entre los resultados numéricos y los obtenidos experimentalmente es superior cuando se considera dicho factor de intermitencia.

Para el caso del flujo en una placa isoterma, de la contrastación entre los resultados numéricos y los que se derivan de expresiones semiempíricas se tiene: - para el caso de capa límite laminar, el grado de ajuste es notable; - para el caso de capa límite turbulenta existe un cierto grado de dispersión no solo entre los resultados numéricos y los correspondientes a las diferentes expresiones sino también entre éstas mismas; a bajos R_x los valores numéricos tienden a situarse, en general, por debajo de los correspondientes a las expresiones semiempíricas mientras que a elevados R_x sucede lo contrario.

APENDICE A: ECUACIONES DISCRETAS DE LA CAPA LIMITE.

La discretización de las ecuaciones (3.23) según los criterios indicados en el apdo. 3.3 conduce, para cada nodo (x_n, η_j) de la malla, al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$(f_j^n - f_{j-1}^n) / \Delta \eta_j - u_{j-1/2}^n = 0$$

$$(u_j^n - u_{j-1}^n) / \Delta \eta_j - v_{j-1/2}^n = 0$$

$$(g_j^n - g_{j-1}^n) / \Delta \eta_j - p_{j-1/2}^n = 0$$

$$[(bv)_j^n - (bv)_{j-1}^n] / \Delta \eta_j + (m_1^n + \alpha_n) (fv)_{j-1/2}^n - (m^n + \alpha_n) (u^2)_{j-1/2}^n + \alpha_n (v_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n - f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^n) = R_{j-1/2}^{n-1}$$

$$[(ep)_j^n - (ep)_{j-1}^n] / \Delta \eta_j + [(duv)_j^n - (duv)_{j-1}^n] / \Delta \eta_j +$$

$$+ (m_1^n + \alpha_n) (fp)_{j-1/2}^n - \alpha_n [(ug)_{j-1/2}^n + u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^n - g_{j-1/2}^{n-1} u_{j-1/2}^n +$$

$$+ f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2}^n - p_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n] = T_{j-1/2}^{n-1}$$

siendo:

$$\alpha_n = x_{n-1/2} / \Delta x_n$$

$$R_{j-1/2}^{n-1} = - [(bv)_j^{n-1} - (bv)_{j-1}^{n-1}] / \Delta \eta_j - m_1^{n-1} (fv)_{j-1/2}^{n-1} - m^{n-1} [c_{j-1/2}^{n-1} - (u^2)_{j-1/2}^{n-1}] + \alpha_n [(fv)_{j-1/2}^{n-1} - (u^2)_{j-1/2}^{n-1}] - m^n c_{j-1/2}^n$$

$$T_{j-1/2}^{n-1} = - [(ep)_j^{n-1} - (ep)_{j-1}^{n-1}] / \Delta \eta_j - [(duv)_j^{n-1} - (duv)_{j-1}^{n-1}] / \Delta \eta_j - m_1^{n-1} (fp)_{j-1/2}^{n-1} + \alpha_n [(fp)_{j-1/2}^{n-1} - (ug)_{j-1/2}^{n-1}]$$

Para los puntos del contorno, $j=0$ y $j=M$, se verifica:

$$f_0^n = 0 \quad ; \quad u_0^n = 0 \quad ; \quad g_0^n = g_w(x_n) \quad \text{ó} \quad p_0^n = p_w(x_n)$$

$$u_M^n = 1 \quad ; \quad g_M^n = 1$$

NOMENCLATURA

c	Velocidad del sonido
Cf	Coefficiente de rozamiento superficial, $Cf = \tau_w / (\rho_e u_e^2 / 2)$
c_p, c_v	Calor específico a presión y volumen constante respectivamente.
C_2, C_3	Coefficientes en las ec. (3.33) y (3.36) respectivamente.
erf(x)	Función error.
exp(z)	Notación para indicar e^z .
f	Función de corriente adimensional, ec. (3.5).
g	Relación entre entalpías específicas totales, $g = H/H_e$.
h	Entalpia específica.
H	Entalpia específica total, $H = h + u_e^2 / 2$.
H_{12}	Factor de forma del perfil de velocidad, $H_{12} = \delta_1 / \delta_2$.
It	Número de iteraciones requeridas para obtener la precisión ϵ .
k	Parámetro de Pohlhausen, $k = (\delta_2^2 / \nu) du_e / dx$; relación entre capacidades caloríficas, $k = c_p / c_v$; número de iteración.
K	Relación entre dos intervalos de η consecutivos, ec. (3.31).
m, m_1	Parámetros de la corriente exterior, ec. (3.8)
m_2, m_3	Parámetros en las ecuaciones (3.33) y (3.36) de velocidad potencial.
M	Número de Mach, $M = u/c$.
Nu	Número de Nusselt local, $Nu = q_w x / (T_w - T_e) / \lambda_e$.
NP	Número de puntos de la malla en la dirección η .
p	Presión.
Pr	Número de Prantl, $Pr = \mu c_p / \lambda$.
Pr_t	Número de Prantl turbulento, $Pr_t = \epsilon_m / \epsilon_h$.
\dot{q}	Flujo de calor por unidad de superficie.
Rx	Número de Reynolds, $Rx = u_e x / \nu_e$.
$R\delta_2$	Número de Reynolds, $R\delta_2 = u_e \delta_2 / \nu_e$.
St	Número de Staton, $St = Nu / (Rx \cdot Pr)$.
T	Temperatura absoluta.
Tu	Grado de turbulencia de la corriente libre.
u_∞	Velocidad del flujo aguas arriba, $u_\infty = M_\infty \sqrt{c_p (k-1) T_\infty}$
u, v	Componentes de la velocidad en la dirección x e y respectivamente.
x, y	Coordenadas cartesianas; la coordenada x es medida desde el punto de inicio de la capa límite. En caso de superficies curvas, la coordenada x se toma en la dirección del flujo y a lo largo de la superficie.
ρ	Densidad.
ν	Viscosidad cinemática.
μ	Viscosidad dinámica.
η	Coordenada 'y' transformada, ec. (3.5).
η^*	Coordenada 'y' transformada, $\eta^* = y \sqrt{u_\infty / \nu_\infty} x$.
$\Delta\eta_1$	Incremento inicial de la malla de discretización en la dirección η , ec. (3.31).
λ	Conductividad térmica.
ϵ	Precisión exigida para finalizar el proceso iterativo, ec. (3.30). Indicaremos por ϵ_l la precisión si flujo laminar, y por ϵ_t si turbulento.
ϵ_m	Viscosidad turbulenta.
ϵ_m^+	Viscosidad turbulenta adimensional, $\epsilon_m^+ = \epsilon_m / \nu$.
ϵ_h	Conductividad térmica turbulenta.
δ	Espesor de la capa límite correspondiente a $u = 0.995 u_e$.
δ_1	Espesor de desplazamiento, $\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy$

δ_2	Espesor de la cantidad de movimiento, $\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$
δ	Factor de intermitencia de Klebanoff, ec. (3.15).
δ_{tr}	Factor de intermitencia de Chen y Thyson, ec. (3.17).
μ_τ	Velocidad de fricción, $u_\tau = (\tau_w / \rho_w)^{1/2}$.
ψ	Función de corriente, ec. (3.6).
τ	Tensión cortante.

Subíndices

e	Contorno exterior de la capa límite o contorno potencial.
∞	Condiciones aguas arriba.
i	"Inner region".
in	Punto de inestabilidad laminar.
o	"Outer region".
tr	Inicio de la transición del régimen laminar al turbulento.
w	Pared ($y=0$).

Superíndices

'	Indica cantidades de fluctuación turbulenta [ec. (3.1) y (3.3)], o bien diferenciación con respecto a la variable independiente η .
—	Indica cantidades medias temporales.
~	Indica que las propiedades físicas han sido evaluadas a una temperatura de referencia, igual a la media aritmética entre la temperatura de la pared (T_w) y la temperatura del fluido (T_e) en el contorno exterior de la capa límite.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] T.CEBECI, A.M.O.SMITH, 'Analysis of Turbulent Boundary Layers', Academic Press, New York, 1974.
- [2] H.B.KELLER, T.CEBECI, 'Accurate Numerical Methods for Boundary-Layer Flows. II: Two-Dimensional Turbulent Flows', AIAA Journal, September 1972.
- [3] T.CEBECI, P.BRADSHAW, 'Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer', Springer-Verlag, New York, 1984.
- [4] H.SCHLICHTING, 'Boundary-Layer Theory', McGraw-Hill, New York, Sixth Ed., 1968.
- [5] P.J.ROACHE, 'Computational Fluid Dynamics', Hermosa Publishers, Albuquerque, 1972.
- [6] E.R.VAN DRIEST, 'On Turbulent Flow Near a Wall', Journal of the Aerospace Sciences, Vol. 23, No. 11, Nov. 1956.
- [7] T.CEBECI, 'Calculation of Compressible Turbulent Boundary Layers with Heat and Mass Transfer', AIAA Journal, Vol. 9, No. 6, June 1971.
- [8] P.S.KLEBANOF, 'Characteristics of Turbulent in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient', Technical Note 3178, NACA, July 1954.
- [9] K.CHEN, N.THYSON, 'Extension of Emmons' Spot Theory to Flows on Blunt Bodies', AIAA Journal, Vol. 9, No. 5, May 1971.
- [10] R.MICHEL, 'Détermination du Point de Transition et Calcul de la Trainée des Profils d'Ailes en Incompressible', Le Recherche Aéronautique, no. 24, 1951.
- [11] T.CEBECI, G.J.MOSINSKIS, A.M.O.SMITH, 'Calculation of Viscous Drag and Turbulent Boundary Layer Separation on Two-Dimensional and Axisymmetric Bodies in Incompressible Flows', Rep. No. MDC J0973-01, Dougrals Aircraft Co., Long Beach, California, 1970.
- [12] P.S.GRANVILLE, 'The Calculation of Viscous Drag of Bodies of Revolution', Navy Departement. The David W. Taylor Model Basin, Rep. No. 849, 1953.
- [13] G.M.BRUNE, J.W.MANKE, 'An Improved of the Nasa-Lockheed Multielement Airfoil Analysis Computer Program', NASA CR-145323, March 1978.
- [14] A.M.O.SMITH, T.CEBECI, 'Numerical Solution of the Turbulent Boundary Layer Equations', Report No. DAC 33735, Douglas Aircraft Co., Long Beach, May 1967.
- [15] P.BRADSHAW, T.CEBECI, J.H.WHITELAW, 'Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow', Academic Press, London, 1984.

- [16] W.C.REYNOLDS, W.M.KAYS, S.J.KLINE, 'Heat Transfer in the Turbulent Incompressible Boundary Layer. I. Constant Wall Temperature', NASA MEMO 12-1-58W, 1958.
- [17] V.P.ISACHENKO, V.A.OSIPOVA, A.S.SUKOMEL, 'Heat Transfer', Mir Publishers, Moscow, 1980.
- [18] H.Y.WONG, 'Heat Transfer for Engineers', Longmann, London, 1977.
- [19] E.R.G.ECKERT, R.M.DRAKE, 'Analysis of Heat and Mass Transfer', McGraw-Hill, New York, 1972.

Cap. 4:

RESOLUCION CONJUNTA DE LA ZONA
POTENCIAL Y DE LAS CAPAS LIMITES

CAP. 4 RESOLUCION CONJUNTA DE LA ZONA POTENCIAL Y DE LAS CAPAS LIMITES

RESUMEN

En este capítulo se describe un método numérico para la integración conjunta de la zona potencial y de las capas límites en flujos internos subsónicos compresibles. La aplicación numérica del esquema desarrollado se ha realizado para el caso del flujo a través de una canalización de sección transversal rectangular. Se han obtenido los resultados numéricos correspondientes a diferentes situaciones con el objeto de poner de manifiesto la influencia de la compresibilidad del flujo y de la transferencia de calor entre el fluido y las paredes del conducto. Para ciertos casos los resultados que se derivan de la resolución numérica son contrastados con los obtenidos experimentalmente en una unidad de soplado disponible en el Laboratorio.

4.1 INTRODUCCION

El objetivo de este capítulo es la obtención de la distribución de velocidades, presiones y temperaturas en flujos subsónicos compresibles en situaciones bidimensionales y en régimen de estabilización. Para ello se ha empleado el concepto de capa límite introducido por Prandtl [1], el cual se basa en dividir el dominio por el que circula el flujo en dos regiones: a) una región en la que el fluido puede tratarse como no viscoso, siendo los efectos de la fricción y de la transferencia de calor despreciables, y b) una delgada región próxima a los contornos sólidos, en donde los gradientes de velocidad y temperatura son tales que los efectos de fricción y de transferencia de calor deben ser considerados.

Esta aproximación al comportamiento del flujo permite simplificar notablemente las ecuaciones de conservación. Así, para la región no viscosa las ecuaciones gobernantes son las de Euler, mientras que para las zonas próximas a los contornos sólidos las ecuaciones gobernantes son las de la capa límite.

Para la región no viscosa se ha supuesto que el flujo es irrotacional, o potencial, e isoentrópico. Las ecuaciones gobernantes, escritas en términos de la función de corriente o del potencial de velocidad, son las indicadas en (2.17)-(2.18) o (2.85)-(2.86) respectivamente. La integración de dichas ecuaciones se efectúa sobre un dominio delimitado por contornos ficticios los cuales se hallan desplazados, respecto a los contornos sólidos, una distancia igual al espesor de desplazamiento de la capa límite en cada punto. La integración numérica de las ecuaciones se realiza en base a la generación de

un sistema de coordenadas curvilíneas adaptables a dichos contornos (cf. cap. 2). Esta técnica de discretización del dominio se muestra muy eficaz sobre todo teniendo en cuenta que durante el proceso iterativo la geometría de esta región irá variando.

Para las zonas próximas a los contornos sólidos las ecuaciones gobernantes son las de la capa límite; en el supuesto de fuerzas másicas despreciables dichas ecuaciones son las indicadas en (3.1). El modelo de turbulencia utilizado para la formulación de las cantidades turbulentas así como los criterios empleados en la discretización y resolución numérica de las ecuaciones, son los descritos en el tercer capítulo.

La resolución de la región de flujo potencial y de las capas límites se realiza en el marco de un algoritmo global. Así, mientras que la resolución de la zona potencial proporciona la distribución de velocidades, presiones y temperaturas en la zona exterior de la capa límite, la resolución de las capas límites proporciona los espesores de desplazamiento que condicionan el dominio de la región de flujo potencial. Debido al carácter de interdependencia existente entre las dos regiones, el proceso de resolución conjunta es de naturaleza iterativa.

La puesta a punto de la metodología comentada se ha concretado al flujo a través de una canalización de sección transversal rectangular (Fig. 1). Para las zonas de análisis el flujo no se halla aún completamente desarrollado siendo adecuado, por tanto, el tratamiento efectuado de zona potencial-capas límites. Los resultados numéricos obtenidos ponen de manifiesto la influencia de la compresibilidad del flujo y de la transferencia de calor entre el fluido y los contornos. Para el caso de contornos supuestos adiabáticos, los resultados que se derivan de la resolución numérica son contrastados con los obtenidos experimentalmente en una unidad de soplado disponible en el Laboratorio [2].

4.2 FLUJO A TRAVÉS DE UNA CANALIZACIÓN

La situación seleccionada para la puesta a punto y verificación de los criterios empleados, corresponde al flujo de aire a través de una canalización de sección transversal rectangular. La geometría del canal se ha representado en la Fig. 1; los perfiles correspondientes a los contornos laterales C_0 y C_s son definidos por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in C_0, \quad Y_0(x) &= 0.0 \\
 \\
 (x, y) \in C_s \quad \left\{ \begin{array}{l}
 Y_s(x) = L_e \quad x \leq He \\
 Y_s(x) = L_e - 4.93097(x-He)^2 + 21.0725(x-He)^3 \quad (4.1) \\
 \quad \quad \quad He < x < He + H_{tb} \\
 Y_s(x) = L_s \quad x \geq He + H_{tb}
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

estando las coordenadas x e y expresadas en m.

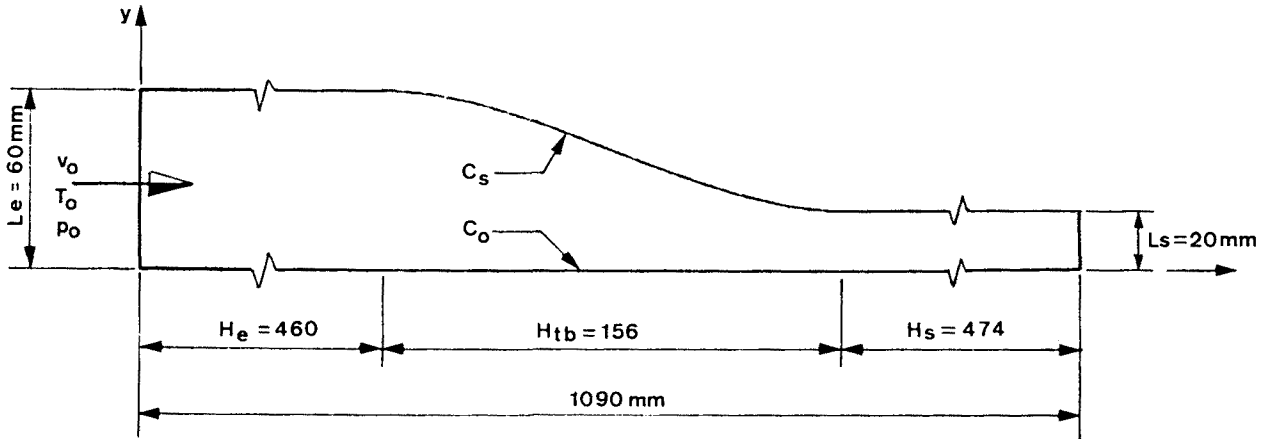


Fig. 1 Geometría correspondiente a la canalización de ensayo.

Proceso de resolución conjunta zona potencial-capas límites

En la introducción de este capítulo indicamos las líneas generales del algoritmo empleado en la resolución conjunta de la zona potencial y de las capas límites. A continuación pasaremos a detallar los pasos seguidos así como los criterios utilizados en el proceso iterativo:

- 1) Al inicio del proceso iterativo se supone que en todo el dominio el flujo se comporta como potencial. La resolución numérica se realiza mediante el empleo de la función de corriente ψ o del potencial de velocidad ϕ , y en base a la discretización del dominio por un sistema de coordenadas curvilíneas (ϵ, η) adaptables a los contornos. Las ecuaciones de discretización son obtenidas de aplicar la condición de irrotacionalidad a volúmenes de control finitos asignados a cada punto de la malla; en el cap. 2 se empleó la notación I-2b/C-2b para designar a dicho esquema numérico (cf. apdo. 2.4.3).

La malla de discretización generada consta de $N+1$ líneas $\epsilon = \text{cte}$ y $M+1$ líneas $\eta = \text{cte}$; los valores de dichas coordenadas se suponen uniformemente distribuidos entre 0 y 1. La malla de discretización empleada es de tipo algebraico (Fig.2).

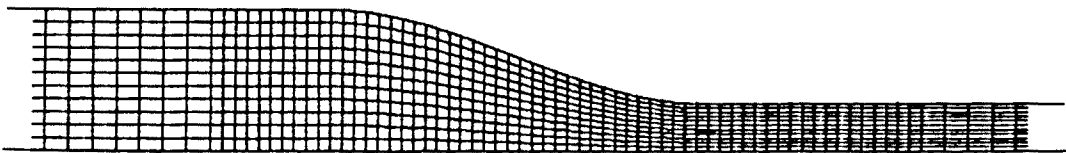


Fig. 2 Coordenadas curvilíneas empleadas, al inicio del proceso iterativo, para la resolución de la región de flujo potencial.

La coordenada $\epsilon = \text{cte}$ corresponde a las líneas verticales, las cuales se hallan distribuidas arbitrariamente según una función dada $\epsilon = f(x)$; la coordenada $\eta = \text{cte}$ se ha definido de forma que $\eta = y/y_s(x)$.

- 2) La resolución del flujo potencial proporciona los valores de velocidad, presión y temperatura en la zona exterior de las capas límites formadas en los contornos laterales Co y Cs .

La resolución numérica de las capas límites hidrodinámicas y térmicas en dichos contornos se efectúa de acuerdo con los criterios ya expuestos en el Cap. 3.

Nótese que el contorno Cs corresponde a una superficie curva, por lo que las ecuaciones de la capa límite allí indicadas no son estrictamente válidas. No obstante y para casos como el presente en que $\delta/R \ll 1$, el error que ello introduce no es de consideración (cf. [3][4]). Las coordenadas (x,y) indicadas en el cap. 3 las designaremos, para evitar confusiones, por (s,n) ; la coordenada s es medida a lo largo de la superficie en la dirección del flujo mientras que la coordenada n es normal, en cada punto, a la superficie en cuestión. Para el contorno Co es evidente que dichas coordenadas (s,n) coinciden con las (x,y) indicadas en la Fig. 1.

- 3) La resolución de las capas límites proporciona, para cada punto del contorno Co y Cs , los valores del espesor de desplazamiento $\delta_{10}(x)$ y $\delta_{1s}(x)$ correspondientes a la dirección normal 'n' a dichos contornos, condicionando un nuevo dominio para la región de flujo potencial.

La resolución numérica de esta región se efectúa según los criterios ya indicados en el punto 1. Para la discretización del dominio emplearemos el siguiente sistema de coordenadas:

$$\epsilon = f(x), \quad \eta = \frac{y - \bar{\delta}_{10}(x)}{y_s(x) - (\bar{\delta}_{10}(x) + \bar{\delta}_{1s}(x))} \quad (4.2)$$

en la que $\bar{\delta}_{10}(x)$ y $\bar{\delta}_{1s}(x)$ indican el espesor de desplazamiento correspondiente a la dirección vertical en los contornos Co y Cs respectivamente. Para el contorno Co la coordenada n coincide con la dirección vertical, por lo que $\delta_{10}(x) = \bar{\delta}_{10}(x)$.

La distribución de líneas $\epsilon = \text{cte}$ se mantiene a lo largo del proceso iterativo conjunto, mientras que las líneas $\eta = \text{cte}$ son modificadas con el fin de adaptarlas a las geometrías que asume la región de flujo potencial en cada iteración.

- 4) El proceso iterativo es repetido desde el apartado 2) hasta que se verifique en la iteración k que:

$$\max |\bar{\delta}_1^k(x) - \bar{\delta}_1^{k-1}(x)| \leq \epsilon_c \quad (4.3)$$

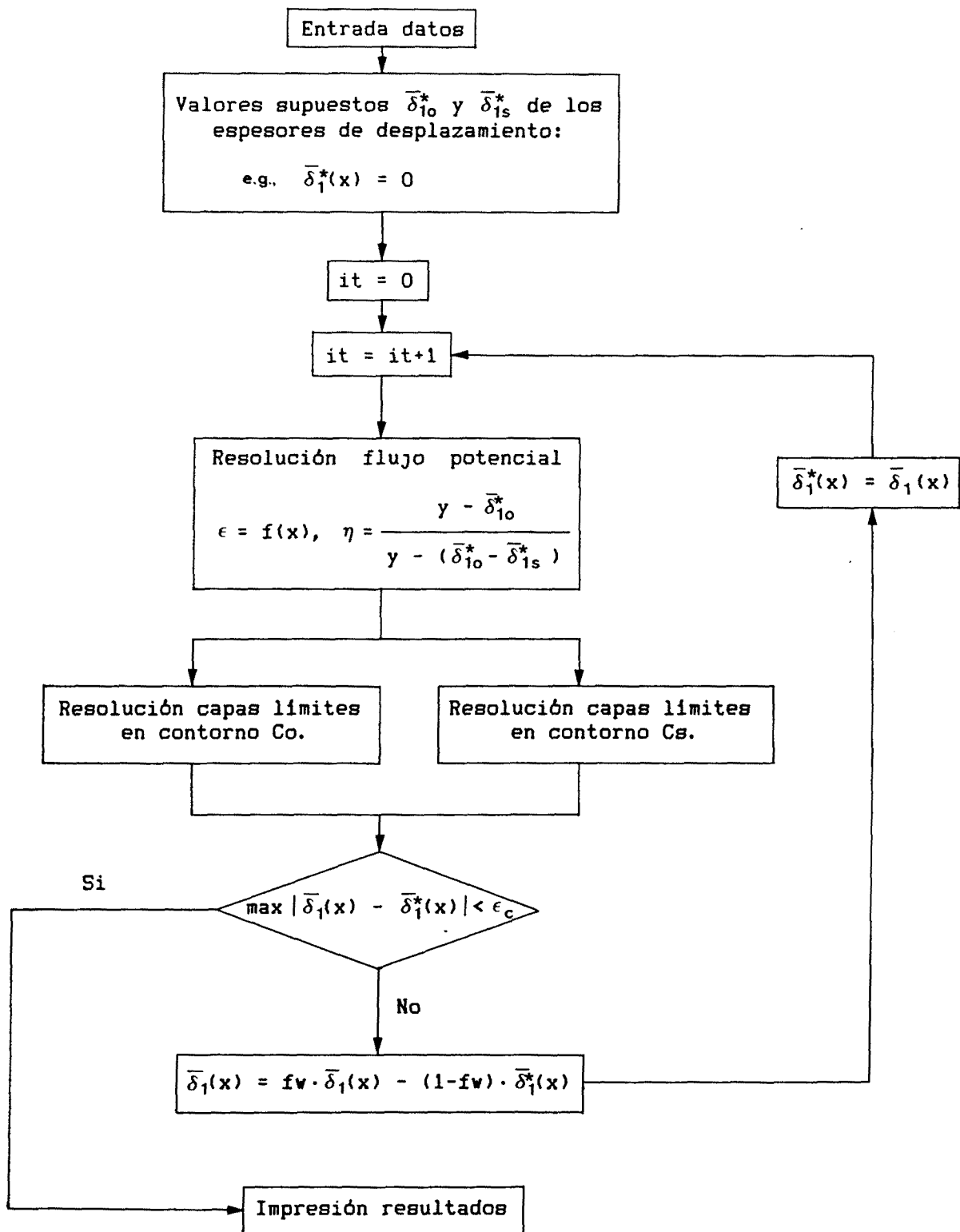
Nótese que en el esquema numérico descrito, los valores de $\delta_1(x)$ tendrán tendencia a aproximarse a los valores "correctos" (i.e., aquellos a los que convergería el proceso iterativo), oscilando alrededor de los mismos. Así por ejemplo si en la iteración k , y de la resolución de la zona potencial, se han obtenido unos valores $u_e(x)$ inferiores a los correctos, los valores de $\delta_1(x)$ que se obtendrán de la resolución de las capas límites serán superiores a los correctos, por lo que en la siguiente iteración $u_e(x)$ aumentará con la consiguiente disminución de $\delta_1(x)$.

En general el proceso iterativo es convergente. Se ha observado que cuanto mayores son los espesores de desplazamiento a los que ha de converger la solución, mayor es el número de iteraciones requerido. Para acelerar la convergencia del método podría pensarse en efectuar promedios ponderados entre los valores de $\delta_1(x)$ de una iteración dada con los obtenidos en la iteración anterior. Esta idea nos conduce al empleo de factores de subrelajación fw para los espesores de desplazamiento:

$$\bar{\delta}_1^k(x) = fw \cdot \bar{\delta}_1^k(x) - (fw-1) \bar{\delta}_1^{k-1}(x) \quad (4.4)$$

Un factor de subrelajación adecuado corrige los valores de los espesores de desplazamiento obtenidos de la resolución de las capas límites, procurando una aproximación gradual a los valores de convergencia. De esta forma se consigue la disminución del número de iteraciones requerido así como la convergencia de ciertas situaciones que resultan divergentes con $fw=1$.

El proceso iterativo descrito se ha representado esquemáticamente en el siguiente organigrama:



4.3 RESULTADOS NUMERICOS. CONTRASTACION EXPERIMENTAL

En este apartado se presentan los resultados que se derivan de aplicar, para la canalización de la Fig. 1, el esquema numérico descrito. El estudio se ha realizado para dos situaciones características:

- 1) Situación A: Se supone que la altura de la canalización es lo suficientemente grande como para que el efecto de las tapas sea despreciable, siendo admisible la hipótesis de bidimensionalidad del flujo. Para este caso se han obtenido diferentes resultados con el objeto de poner de manifiesto la influencia de la compresibilidad del flujo y de la transferencia de calor entre el fluido y los contornos de la canalización. Se presentan algunos resultados ilustrativos de la convergencia del método en diversos casos.
- 2) Situación B: En la unidad de soplado disponible en el Laboratorio [2], la altura de la canalización es del mismo orden de magnitud que la anchura del canal condicionando, por tanto, una estructura de flujo tridimensional. Para este caso y con el fin de considerar las capas límites desarrolladas en las tapas, se ha realizado un modelo simplificado basado en el esquema numérico descrito. Los resultados numéricos así calculados, supuestos los contornos adiabáticos, son contrastados con los obtenidos experimentalmente en la unidad de soplado.

En ambas situaciones los resultados numéricos presentados se han obtenido para la región del flujo comprendida entre las coordenadas $x = 0.0$ y $x = .91$ m. En la zona de entrada del canal se consideran condiciones uniformes para la velocidad, presión y temperatura. Se ha supuesto que las capas límites que se inician en ambos bordes de ataque son laminares, convirtiéndose a turbulentas a una corta distancia de los mismos. En la zona de salida se ha considerado, en lo que se refiere al cálculo de la zona potencial, que la componente de la velocidad en la dirección 'y' es nula; por tanto, $\partial\psi/\partial x = 0$ o bien $\partial\phi/\partial y = 0$. En los resultados presentados (a menos que se indique lo contrario) la región de flujo potencial ha sido calculada, debido a la mayor rapidez de convergencia, mediante el empleo de la función de corriente.

Los resultados numéricos han sido obtenidos empleando, para la región de flujo potencial, una malla de discretización de 122x41 puntos. En la dirección las líneas se han distribuido uniformemente en tres zonas: $x = 0 \div .41$ m, $\Delta x = 10$ mm; $x = .41 \div .71$ m, $\Delta x = 5$ mm; $x = .71 \div .91$ m, $\Delta x = 10$ mm. En la dirección η las líneas son distribuidas según la expresión indicada en (4.2). Para las capas límites, los contornos se han discretizado de forma que la distribución de puntos coincida con la distribución de líneas $\epsilon = \text{cte}$ del flujo potencial; la densidad de malla en la dirección normal al contorno se ha obtenido según el criterio indicado en la expresión (3.31), haciendo $\Delta\eta = .005$ y $K = 1.075$.

Las propiedades físicas del aire se han determinado según las expresiones indicadas en el Apéndice B.

Situación A

La influencia de la compresibilidad del flujo, para el caso de contornos adiabáticos ($p_w = 0$), es puesta de manifiesto en la Fig. 4. En esta figura se representa, para diferentes valores del número de Mach a la entrada del canal, la distribución de M , u_e/v_o , C_p , C_f , δ_1/Le y δ_2/Le en los contornos C_s y C_o . Los cálculos se han realizado para el caso de: $p_o = 110.000 \text{ N/m}^2$, $T_o = 300 \text{ K}$, $h = 0$, $Pr = .70$, $k = 1.4$. En la Tabla I se indica el número de iteraciones globales requerido, a diferentes Mo y fw , para la obtención de la precisión exigida.

La influencia de la transferencia de calor entre el fluido y los contornos, para el caso de contornos isoterms ($g_w = \text{cte}$), es puesta de manifiesto en la Fig. 5. En dicha figura se representa, para diferentes valores de g , la distribución de C_p , Nu , St , C_f , δ_1/Le y δ_2/Le en los contornos C_s y C_o . Los cálculos han sido realizados para el caso de: $p_o = 110000 \text{ N/m}^2$, $T_o = 400 \text{ K}$, $h = 0$, $Pr = .70$, $Mo = .140$ y $k = 1.4$. Como quiera que las velocidades no son elevadas, el caso de $g_w = 1.0$ es equivalente al de pared adiabática ($p_w = 0$); valores de $g_w > 1.0$ indican calentamiento del flujo ($T_w > T_e$) mientras que el caso de $g_w < 1.0$ indica enfriamiento del flujo ($T_w < T_e$). En la Tabla II se indican el número de iteraciones necesarios, a diferentes valores de g_w y fw , para obtener la precisión exigida.

Situación B. Verificación experimental

En este apartado efectuaremos la contrastación entre los resultados obtenidos experimentalmente en la unidad de soplado (cf. Apéndice A) y los que resultan de la modelización numérica. Dado que la altura del canal es de 31.1 mm, la influencia de los contornos superior e inferior (tapas) debe considerarse en la modelización efectuada; para ello se han introducido ciertas correcciones en el modelo descrito basadas en las siguientes hipótesis:

- a) Se supone que la variación de la altura de la zona potencial en la dirección del flujo es moderada, siendo admisible el considerar que la velocidad, presión, etc, son funciones únicamente de las coordenadas (x, y) .
- b) Para los contornos laterales C_o y C_s y para los contornos superior e inferior, se supone que los espesores de desplazamiento en una sección transversal cualquiera se mantienen uniformes en cada una de las caras del contorno correspondientes a dicha sección transversal.

Basados en el esquema de calculo descrito en el apdo 4.2 y en las hipótesis comentadas, se indican a continuación dos posibles modelos para la descripción del flujo en la canalización:

- 1) Modelo C-1: Se determina la distribución de velocidades $v(x, y)$, correspondientes a la región de flujo potencial, sin considerar la influencia de las capas límites desarrolladas en las tapas. En estas condiciones la altura de la región potencial sería uniforme en todo el dominio, con un valor Lz correspondiente a la altura de la canalización. Si en una determinada sección transversal disminuimos la altura de esta región potencial hasta un valor Lz' , y suponemos que al efectuar este proceso la distribución del flujo másico y la dirección del vector velocidad no varían, se verificará para la nueva distribución de

velocidades $v'(x, y)$ que:

$$\rho v Lz = \rho' v' Lz' \quad (4.5)$$

Si dicho proceso es isoentrópico se cumplirá que:

$$\rho' = \rho_0 \left[1 - \frac{(k-1)M_0^2}{2} \left(\left(\frac{v'}{v_0} \right)^2 - 1 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (4.6)$$

Para el espesor de desplazamiento en las tapas supondremos un valor promedio a los obtenidos, en cada sección transversal, en los contornos C_0 y C_s . Así pues:

$$Lz'(x) = Lz - (\bar{\delta}_{10}(x) + \bar{\delta}_{1s}(x)) \quad (4.7)$$

El proceso de calculo es exactamente el descrito en el apdo. 4.2, excepto en que las velocidades calculas en la zona potencial son modificadas, en cada iteración, de acuerdo con las expresiones (4.5) (4.6) y (4.7).

- 2) Modelo C-2: La velocidad en la zona potencial se determina numéricamente mediante el empleo del potencial de velocidad y según un esquema numérico análogo al PV-3 descrito en el apdo. 2.3.1a. A diferencia de dicho esquema numérico, en este modelo las ecuaciones de discretización han sido obtenidas de efectuar los balances másicos sobre volúmenes de control (V.C.), cuyas caras tienen asignada una altura Lz' definida por la expresión (4.7). Como en las caras superior e inferior de los V.C. el flujo másico es nulo, el proceso de obtención de las ecuaciones de discretización es similar al descrito en el esquema PV-3, multiplicando la superficie por unidad de altura de cada cara del V.C. (cf. 2.106) por la altura correspondiente.

Indicaremos mediante la notación C-3 la modelización correspondiente de considerar únicamente las capas límites laterales (situación A). La modelización correspondiente de considerar toda la región del flujo como zona potencial se indicará mediante la notación C-4.

De las pruebas experimentales realizadas se han seleccionado dos situaciones características. La primera, que denominaremos Prueba A, corresponde a un flujo con velocidades relativamente bajas, siendo los valores del no. de Mach a la entrada y salida de la zona de ensayo de .0818 y .2880 respectivamente; la segunda, que denominaremos Prueba B, corresponde al máximo caudal obtenido en la instalación de soplado, con unos valores de .1227 y .4590 para el no. de Mach a la entrada y salida de la zona de ensayo respectivamente.

En la Tabla III se indican, para la Prueba A y la Prueba B, los valores de las diferencias de presión, respecto a un punto de referencia dado, obtenidos experimentalmente y los que se derivan de los diferentes modelos numéricos empleados: C-1, C-2, C-3 y C-4. En dicha tabla se indica la localización de los puntos de lectura de presión.

En la Fig. 6 y Fig. 7 se representan gráficamente, para la Prueba A y la Prueba B respectivamente, la distribución de velocidad adimensional y coeficientes de presión, en los contornos C_0 y C_s , correspondientes a los modelos numéricos C-1, C-3 y C-4.

En la Fig. 8 y Fig. 9 se representa, para la Prueba A y la Prueba B respectivamente, la distribución de velocidades adimensionales y del coeficiente de presión, en los contornos C_0 y C_s , correspondientes al esquema numérico C-1 y a los valores obtenidos experimentalmente (*).

Finalmente en la Fig. 10 se representan, para ambas pruebas y según el modelo C-1, los valores de C_f , δ_1/Le y δ_2/Le correspondientes a los contornos C_0 y C_s .

Los resultados numéricos presentados han sido obtenidos de suponer contornos adiabáticos ($g_w=1.0$). Para el caso de que la temperatura de la pared del canal fuese igual a la del ambiente (situación más desfavorable), el valor de g_w correspondiente a la Prueba A y a la Prueba B sería de 0.99 y 0.97 respectivamente. Aún para este caso, el efecto de la transferencia de calor no es importante siendo admisible, por tanto, la hipótesis de adiabaticidad.

TABLA I: Número de iteraciones globales requerido a diferentes Mo y fw para el caso de contornos adiabáticos; $\epsilon_c = .000001$.

Mo	fw					
	1.0	.90	.70	.50	.30	.10
.05	-	202	22	17	16	33
.14	14	12	9	12	11	30
.18	11	11	16	13	12	31

TABLA II: Número de iteraciones globales requerido a diferentes g_w y fw ; contornos isoterms; $\epsilon_c = .000001$.

g_w	fw					
	1.0	.90	.70	.50	.30	.10
1.50	-	-	22	8	13	29
1.00	-	21	8	8	13	29
.65	10	10	6	9	12	24

(*) Los valores de la velocidad han sido estimados a partir de la distribución de presiones obtenida experimentalmente (cf. Tabla III).

TABLA III: Valores de las diferencias de presión $\Delta p_j = p_j - p_{pref}$, obtenidas experimentalmente y según los distintos modelos numéricos, a lo largo de los contornos C_s y C_o ; p_{pref} es la correspondiente al punto 1 del contorno C_s . Entre paréntesis se representan, en valor absoluto, los valores de $(\Delta p_j)_{exp} - (\Delta p_j)_{num}$.

PRUEBA A: $p_o = 10712 \text{ Kp/m}^2$
 $T_o = 289 \text{ K}$
 $\dot{m} = .06460 \text{ Kg/s}$
 $v_o = 27.48 \text{ m/s}$
 $h = .00669 \text{ Kg vapor agua/Kg aire seco}$

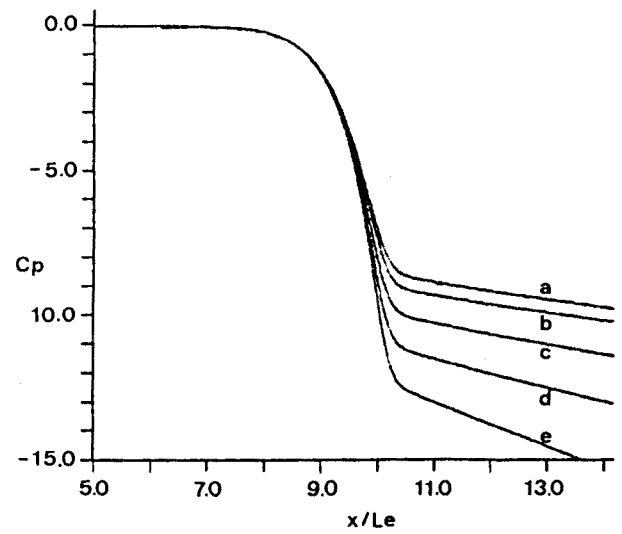
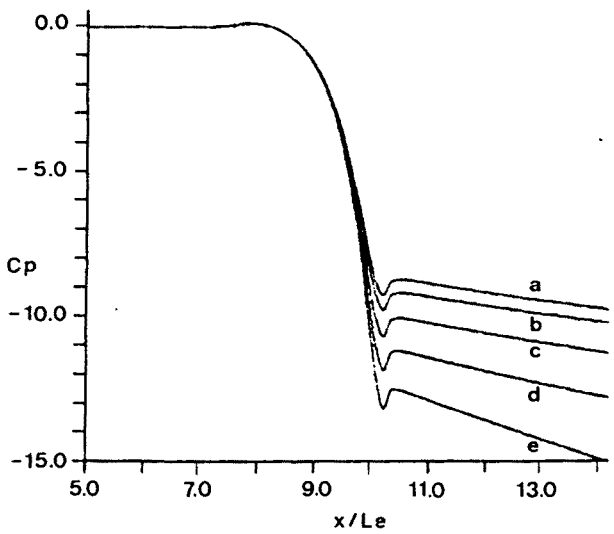
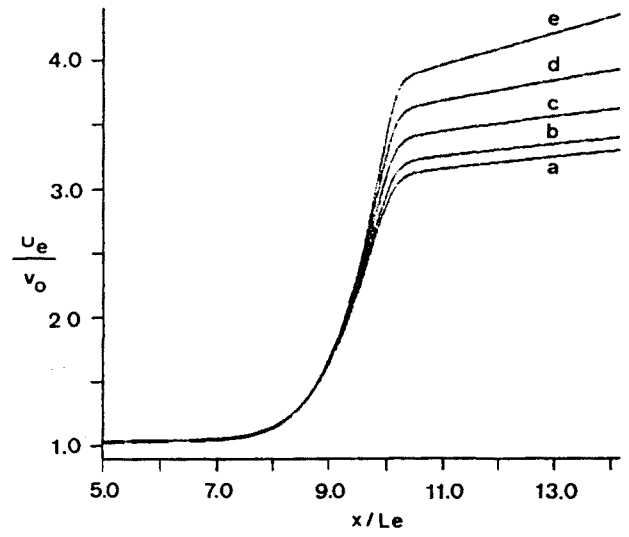
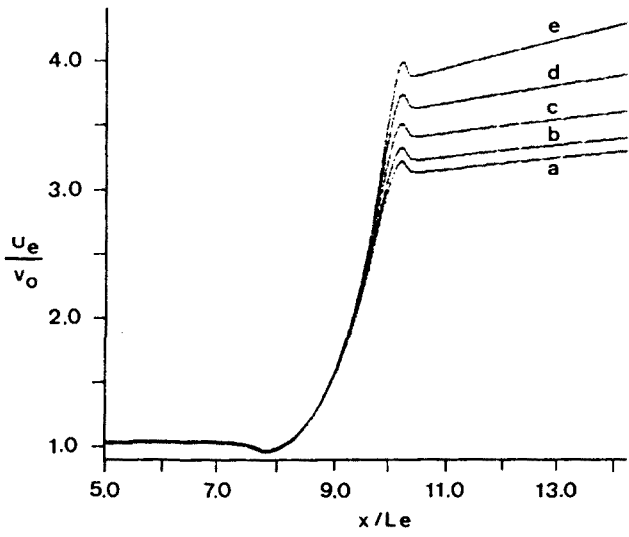
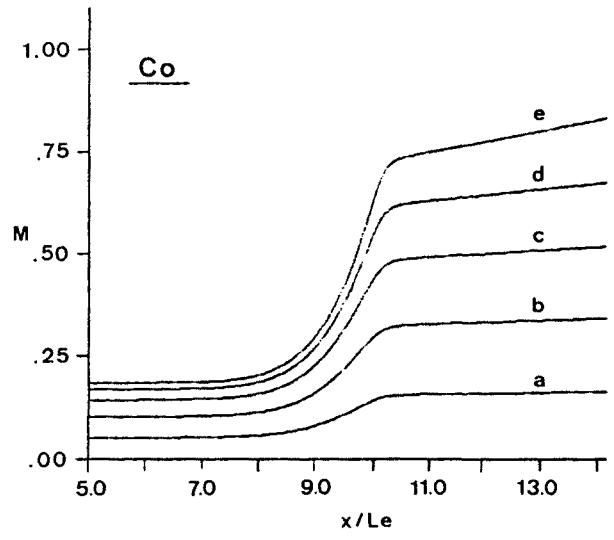
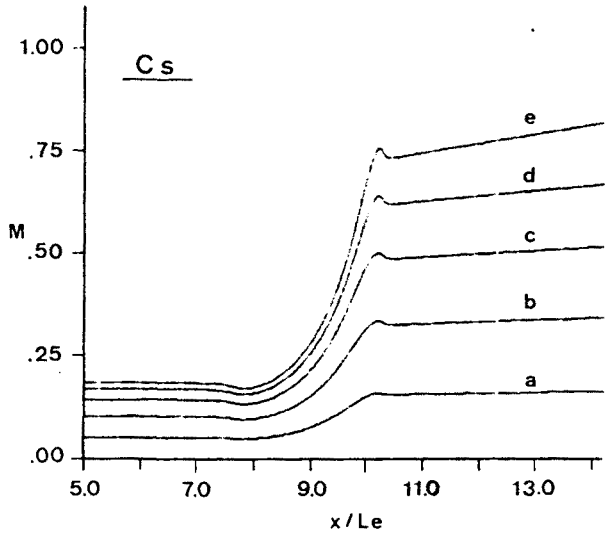
Cont	Pto J	Coord x (m)	Δp_j exp. (Kp/m ²)	Δp_j (Kp/m ²) según los modelos:			
				C-4	C-3	C-2	C-1
Cs	1	.3597	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	.4468	2.0	1.7 (0.3)	2.3 (0.2)	1.2 (0.8)	1.5 (0.5)
	3	.4690	6.5	8.1 (1.6)	6.7 (0.2)	6.1 (0.4)	6.6 (0.1)
	4	.4928	1.5	0.3 (1.2)	0.3 (1.2)	-0.6 (2.1)	0.0 (1.5)
	5	.5253	-30.0	-32.4 (2.4)	-32.8 (2.8)	-33.4 (3.4)	-33.0 (3.0)
	6	.5414	-65.0	-65.6 (0.6)	-66.7 (1.7)	-66.8 (1.8)	-67.0 (2.0)
	7	.5573	-119.5	-118.2 (1.3)	-120.6 (1.1)	-120.1 (0.6)	-121.1 (1.6)
	8	.5530	-201.0	-198.6 (2.4)	-202.9 (1.9)	-202.0 (1.0)	-204.2 (3.2)
	9	.5892	-322.0	-313.4 (8.6)	-321.0 (1.0)	-320.3 (1.7)	-324.0 (2.0)
	10	.6049	-438.5	-423.6 (15.)	-435.6 (2.9)	-435.4 (3.1)	-441.1 (2.6)
	11	.6109	-462.5	-444.8 (18.)	-457.8 (4.7)	-455.3 (7.2)	-463.0 (0.5)
	12	.6170	-459.5	-428.3 (31.)	-445.8 (14.)	-451.2 (8.3)	-455.5 (4.0)
	13	.6302	-437.0	-409.5 (28.)	-431.2 (5.8)	-438.3 (1.3)	-441.1 (4.1)
	14	.7217	-480.5	-407.8 (73.)	-452.9 (28.)	-477.0 (3.5)	-477.0 (3.5)
	15	.7966	-509.0	-407.8 (101)	-469.6 (39.)	-504.9 (4.1)	-503.9 (5.1)
Co	1	.3593	0.0	-0.0 (.02)	-0.0 (.06)	-0.1 (0.1)	-0.1 (0.1)
	2	.4648	-7.0	-3.2 (3.8)	-5.9 (1.1)	-9.8 (2.8)	-9.7 (2.7)
	3	.5105	-30.0	-29.2 (0.8)	-31.2 (1.2)	-33.7 (3.7)	-34.0 (4.0)
	4	.5557	-124.0	-120.6 (3.4)	-123.2 (0.8)	-122.9 (1.1)	-124.2 (0.2)
	5	.5855	-270.0	-261.9 (8.1)	-268.4 (1.6)	-266.8 (3.2)	-270.2 (0.2)
	6	.6156	-415.0	-394.7 (20.)	-410.6 (4.4)	-411.6 (3.4)	-416.7 (1.7)
	7	.6407	-436.0	-407.6 (29.)	-432.4 (3.6)	-440.6 (4.6)	-444.0 (8.0)
	8	.6511	-446.0	-407.8 (38.)	-435.5 (10.)	-446.1 (0.1)	-449.0 (3.0)
	9	.6708	-455.0	-407.8 (47.)	-440.8 (14.)	-455.3 (0.3)	-457.5 (2.5)
	10	.7203	-482.0	-407.8 (74.)	-452.9 (29.)	-476.5 (5.5)	-477.0 (5.0)
	11	.7943	-511.0	-407.8 (103)	-469.5 (42.)	-504.1 (6.9)	-503.8 (7.2)

.../.

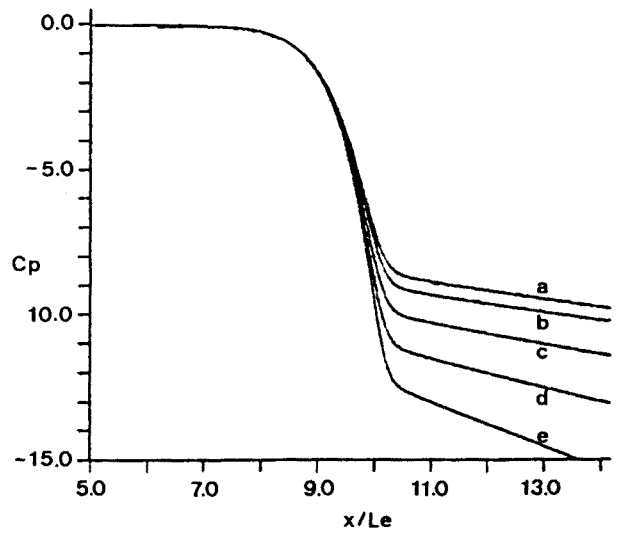
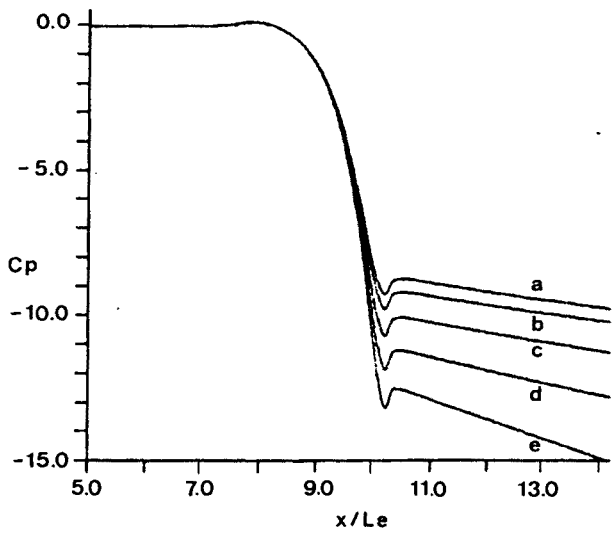
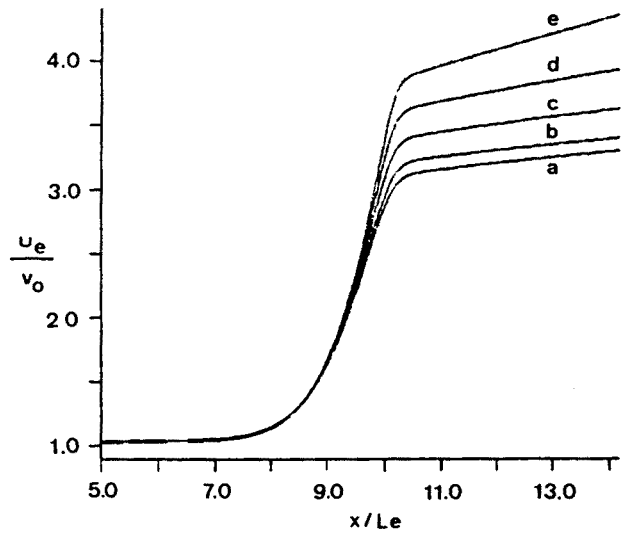
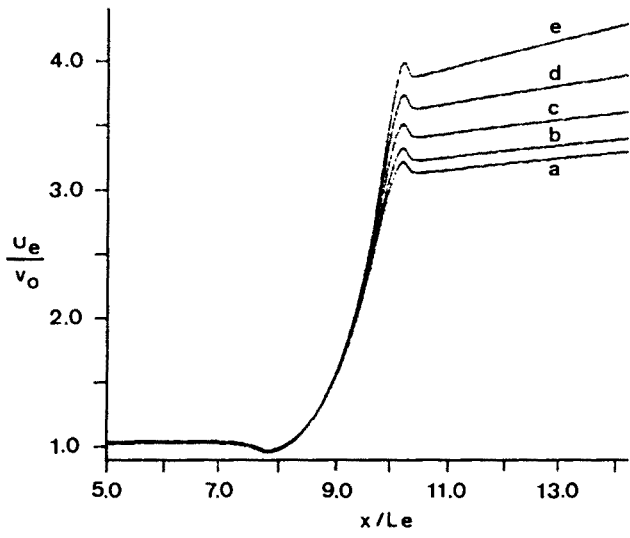
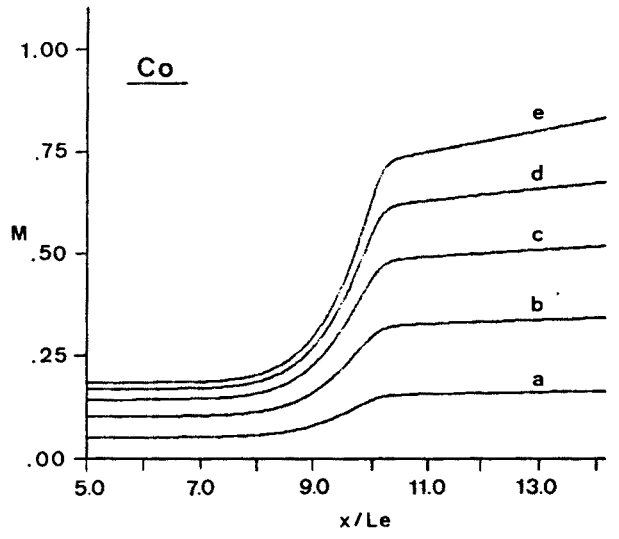
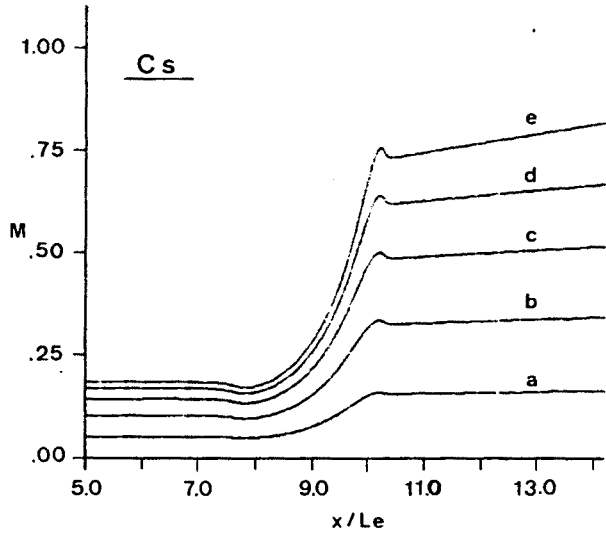
.../.

PRUEBA B: $p_0 = 11787 \text{ Kp/m}^2$
 $T_0 = 297 \text{ K}$
 $\dot{m} = .10556 \text{ Kg/s}$
 $v_0 = 41.93 \text{ m/s}$
 $h = .00814 \text{ Kg vapor agua/Kg aire seco}$

Cont	Pto j	Coord x (m)	Δp_j exp. (Kp/m ²)	Δp_j (Kp/m ²) según los modelos:			
				C-4	C-3	C-2	C-1
Cs	1	.3597	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	.4468	5.0	4.3 (0.7)	6.2 (1.2)	3.7 (1.3)	4.2 (0.8)
	3	.4690	17.0	20.2 (3.2)	18.0 (1.0)	16.2 (0.8)	17.1 (0.1)
	4	.4928	4.5	0.7 (3.8)	1.4 (3.1)	-0.8 (5.3)	-0.3 (4.2)
	5	.5253	-76.5	-81.7 (5.2)	-82.4 (5.9)	-83.5 (7.0)	-83.0 (6.5)
	6	.5414	-162.5	-166.0 (3.5)	-168.7 (6.2)	-168.7 (6.2)	-169.2 (6.7)
	7	.5573	-300.0	-301.0 (1.0)	-306.7 (6.7)	-305.6 (5.6)	-307.8 (7.8)
	8	.5530	-512.0	-510.8 (1.2)	-521.3 (9.3)	-519.7 (7.7)	-524.3 (12.)
	9	.5892	-832.0	-818.8 (13.)	-837.7 (5.7)	-836.9 (4.9)	-845.1 (13.)
	10	.6049	-1146.0	-1125. (20.)	-1156. (10.)	-1156. (10.)	-1171. (25.)
	11	.6109	-1216.0	-1186. (30.)	-1221. (5.2)	-1214. (2.2)	-1235. (19.)
	12	.6170	-1211.0	-1144. (67.)	-1190. (21.)	-1205. (5.6)	-1216. (5.2)
	13	.6302	-1165.0	-1095. (70.)	-1152. (13.)	-1172. (7.1)	-1178. (13.)
	14	.7217	-1285.0	-1091. (194)	-1211. (74.)	-1277. (8.1)	-1276. (8.5)
	15	.7966	-1365.0	-1091. (274)	-1257. (108)	-1354. (11.)	-1351. (14.)
Co	1	.3593	0.0	0.0 (.04)	-0.2 (.23)	-0.2 (0.2)	-0.2 (0.2)
	2	.4648	-16.0	-8.0 (8.0)	-15.8 (0.2)	-23.4 (7.4)	-23.3 (7.3)
	3	.5105	-78.0	-73.5 (4.5)	-78.6 (0.6)	-83.7 (5.7)	-84.5 (6.5)
	4	.5557	-313.0	-308.3 (4.7)	-314.2 (1.2)	-314.0 (1.0)	-316.5 (3.5)
	5	.5855	-694.0	-685.4 (8.6)	-701.3 (7.3)	-698.7 (4.7)	-706.1 (12.)
	6	.6156	-1100.0	-1057. (43.)	-1098. (2.2)	-1102. (2.1)	-1115. (15.)
	7	.6407	-1161.0	-1091. (70.)	-1155. (5.8)	-1179. (18.)	-1187. (26.)
	8	.6511	-1195.0	-1091. (104)	-1164. (31.)	-1194. (1.3)	-1201. (5.8)
	9	.6708	-1217.0	-1091. (126)	-1178. (39.)	-1218. (1.5)	-1224. (6.8)
	10	.7203	-1289.0	-1091. (198)	-1211. (79.)	-1275. (14.)	-1277. (12.)
	11	.7943	-1367.0	-1091. (276)	-1256. (111)	-1351. (15.)	-1351. (16.)



.../.



.../.

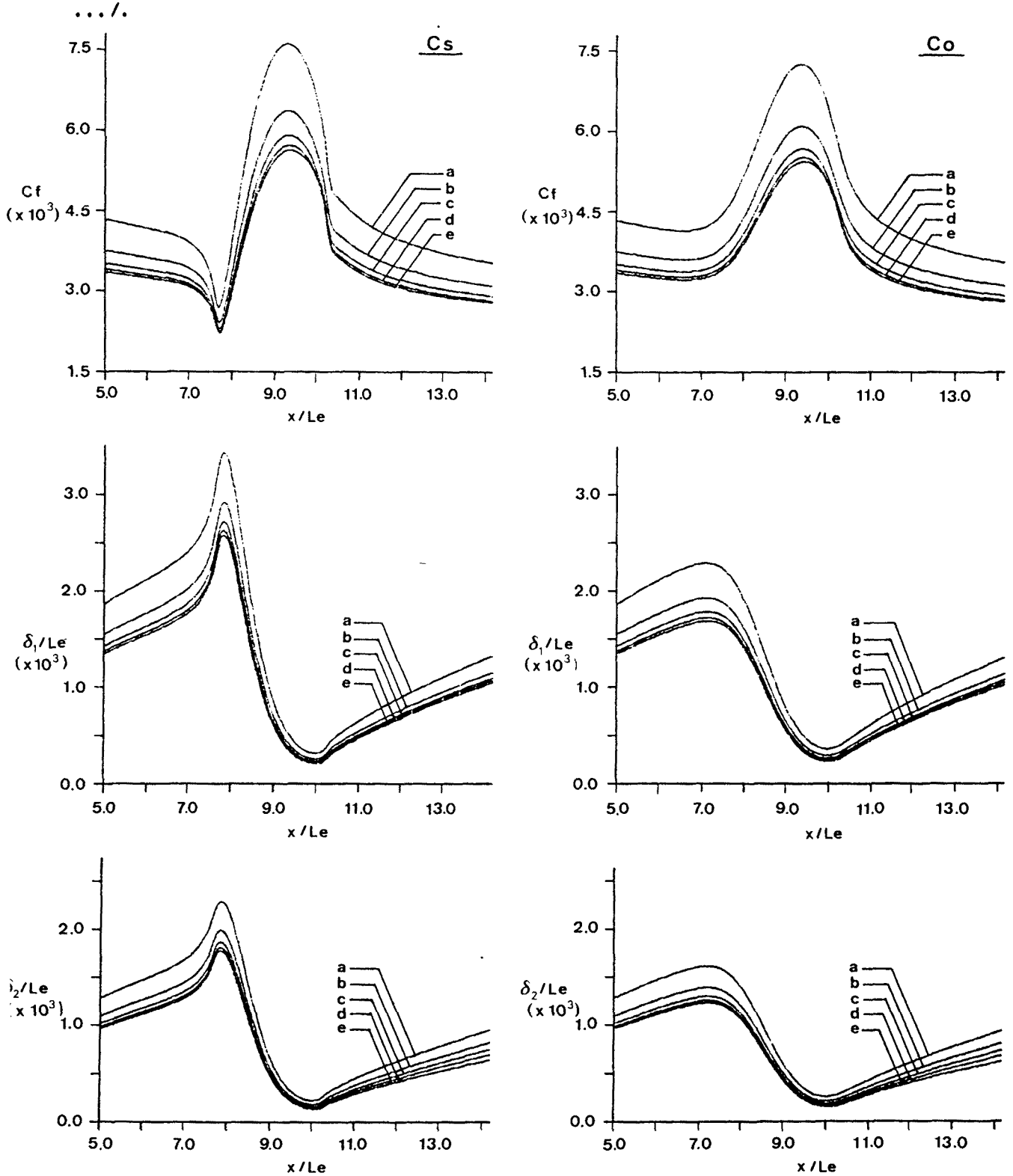
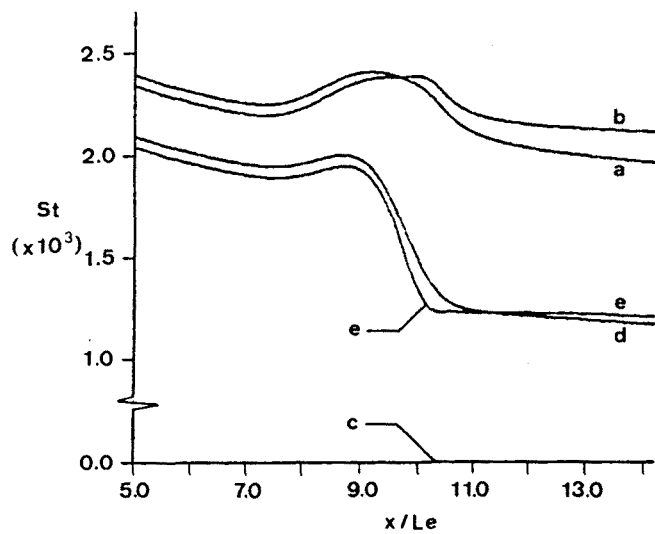
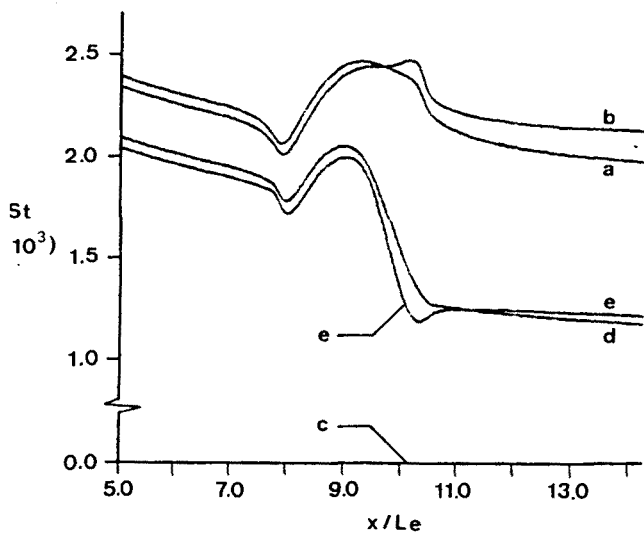
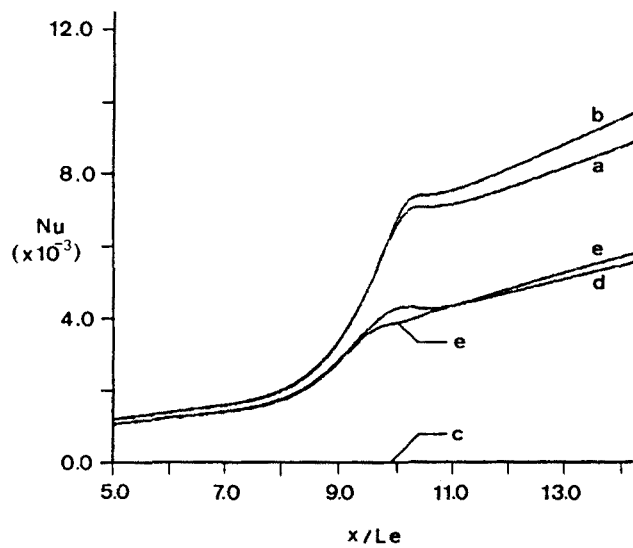
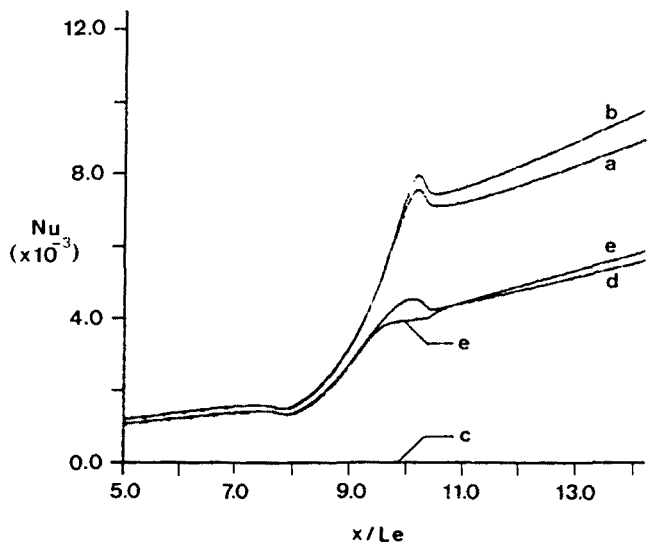
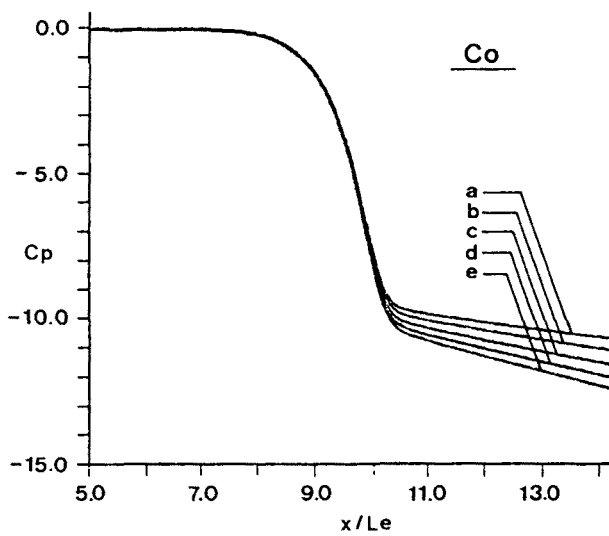
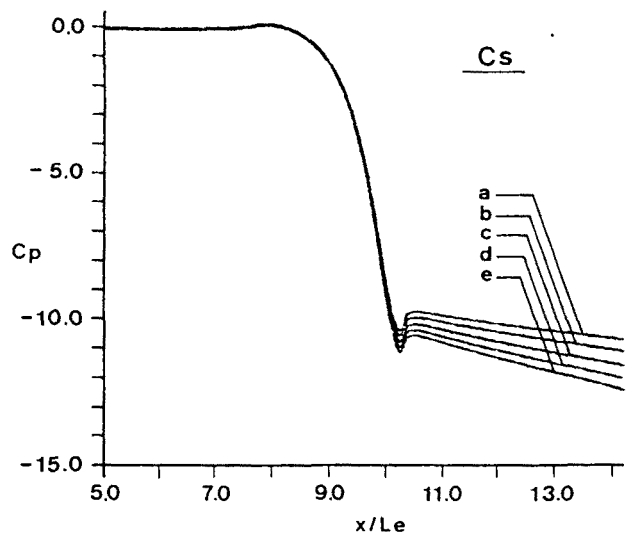


Fig. 4 Distribución de M , u_e/v_o , C_p , C_f , δ_1/Le y δ_2/Le en los contornos Cs y Co, supuestos adiabáticos, a diferentes Mo : (a) $Mo = .050$; (b) $Mo = .100$; (c) $Mo = .140$; (d) $Mo = .165$; (e) $Mo = .180$.



.../.

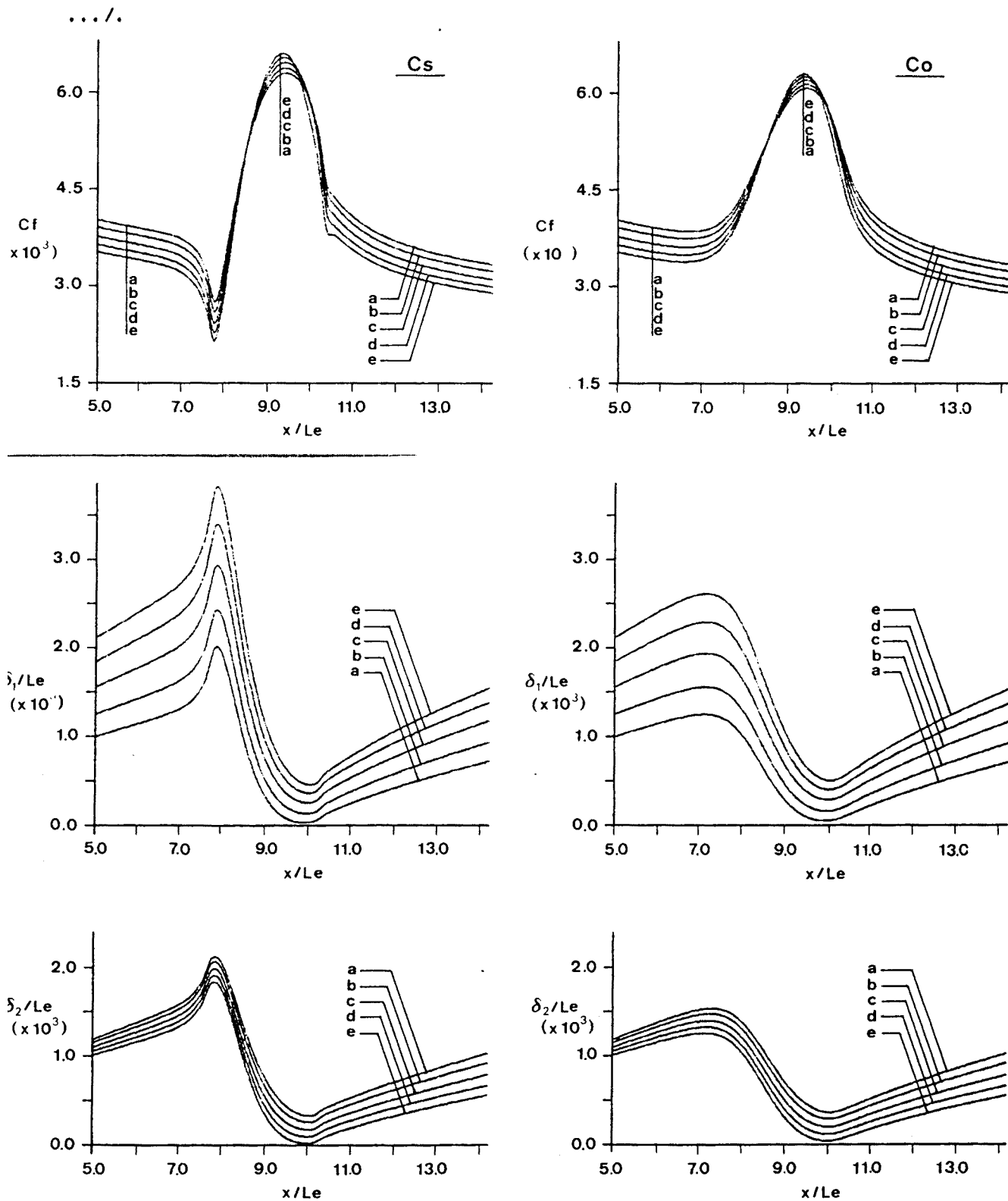


Fig. 5 Distribución de C_p , Nu , St , C_f , δ_1/Le y δ_2/Le en los contornos Cs y Co, supuestos isoterms, con $Mo=0.140$ y a diferentes g_w : (a) $g_w = 0.65$; (b) $g_w = 0.80$; (c) $g_w = 1.00$; (d) $g_w = 1.20$; (e) $g_w = 1.40$.

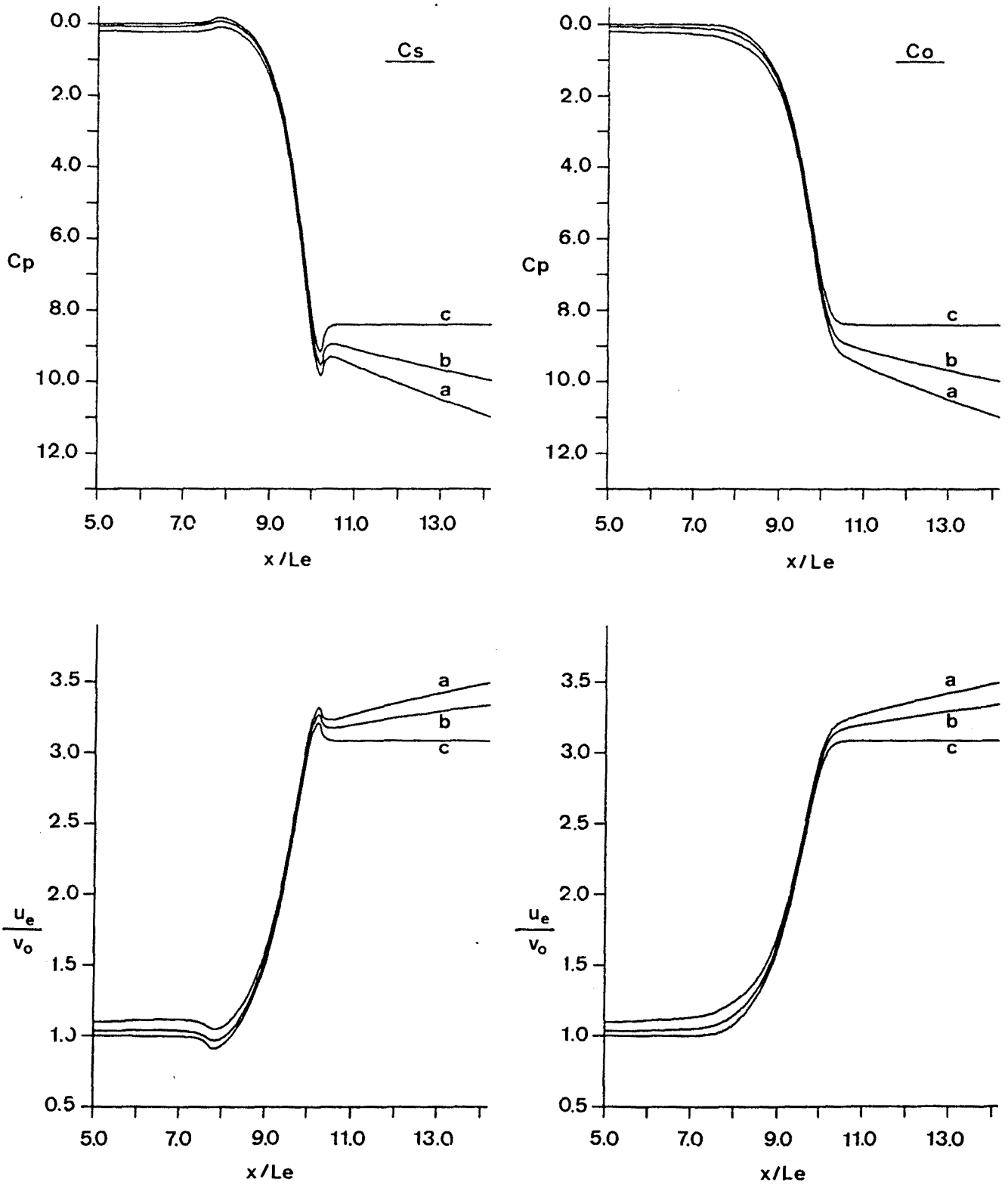


Fig. 6 Distribución de la velocidad adimensional y del coeficiente de presión en los contornos C_o y C_s , correspondientes a las condiciones del flujo de la Prueba A y según los modelos: (a) C-1; (b) C-3; (c) C-4.

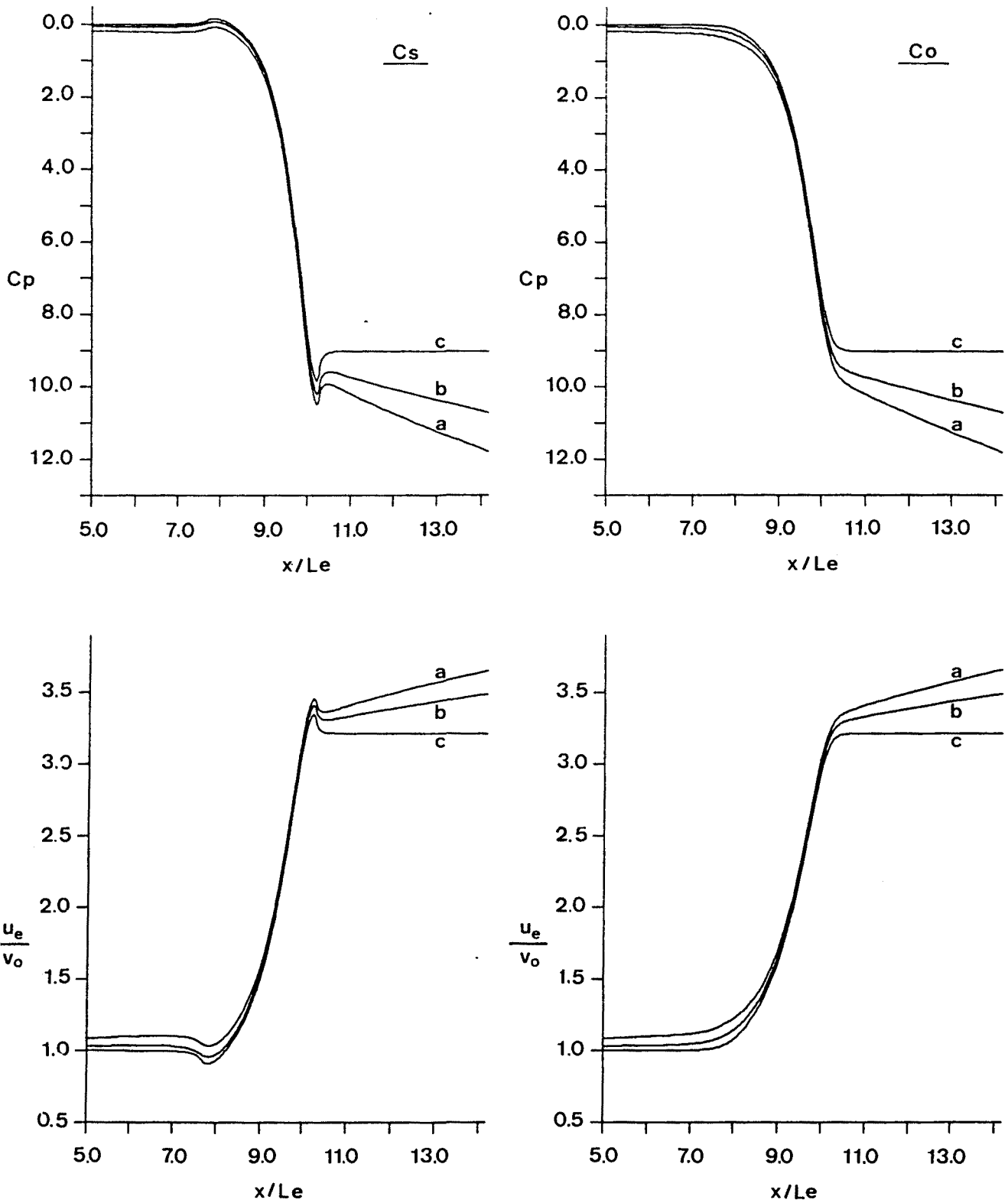
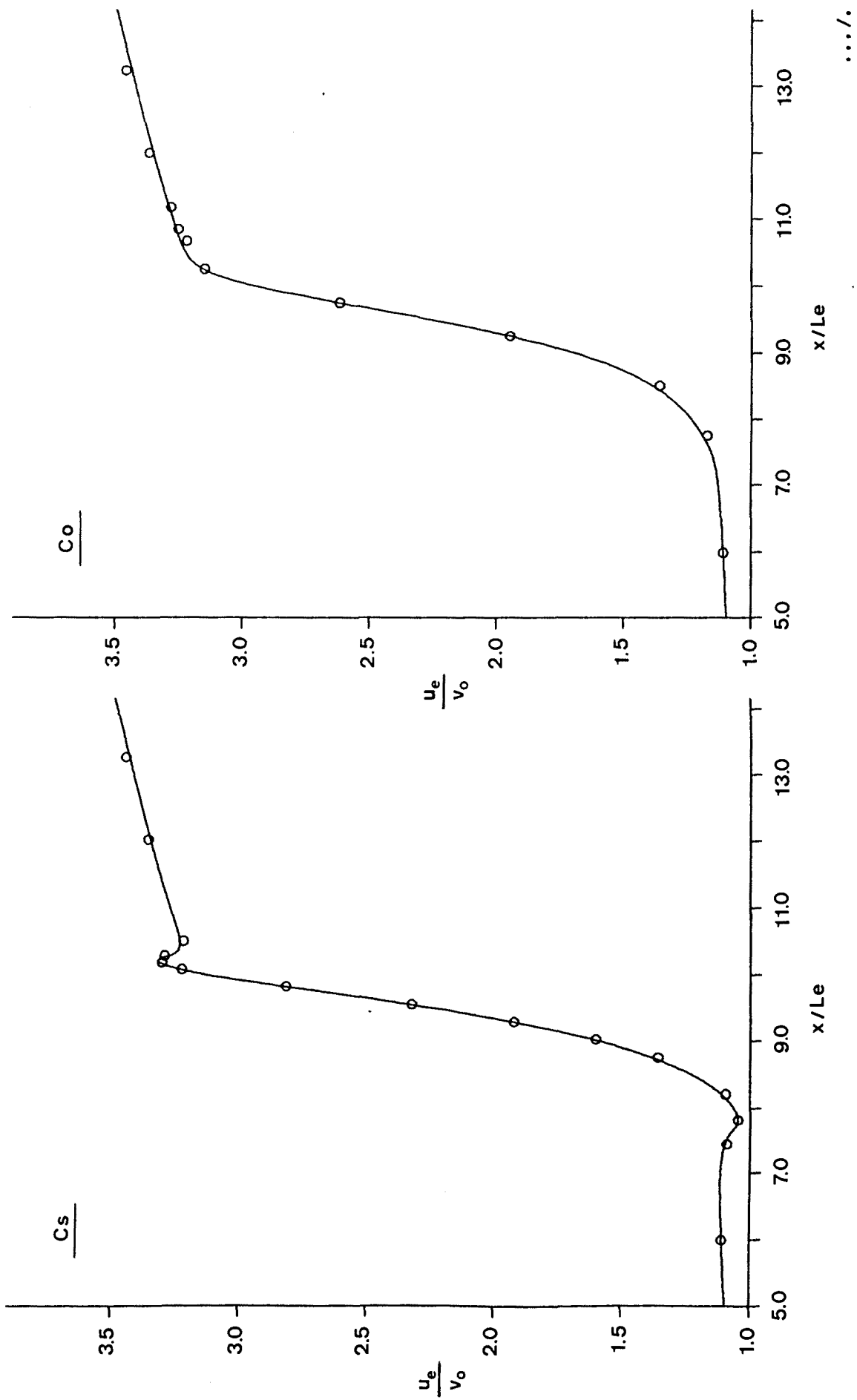


Fig. 7 Distribución de la velocidad adimensional y del coeficiente de presión en los contornos C_o y C_s , correspondientes a las condiciones del flujo de la Prueba B y según los modelos: (a) C-1; (b) C-3; (c) C-4.



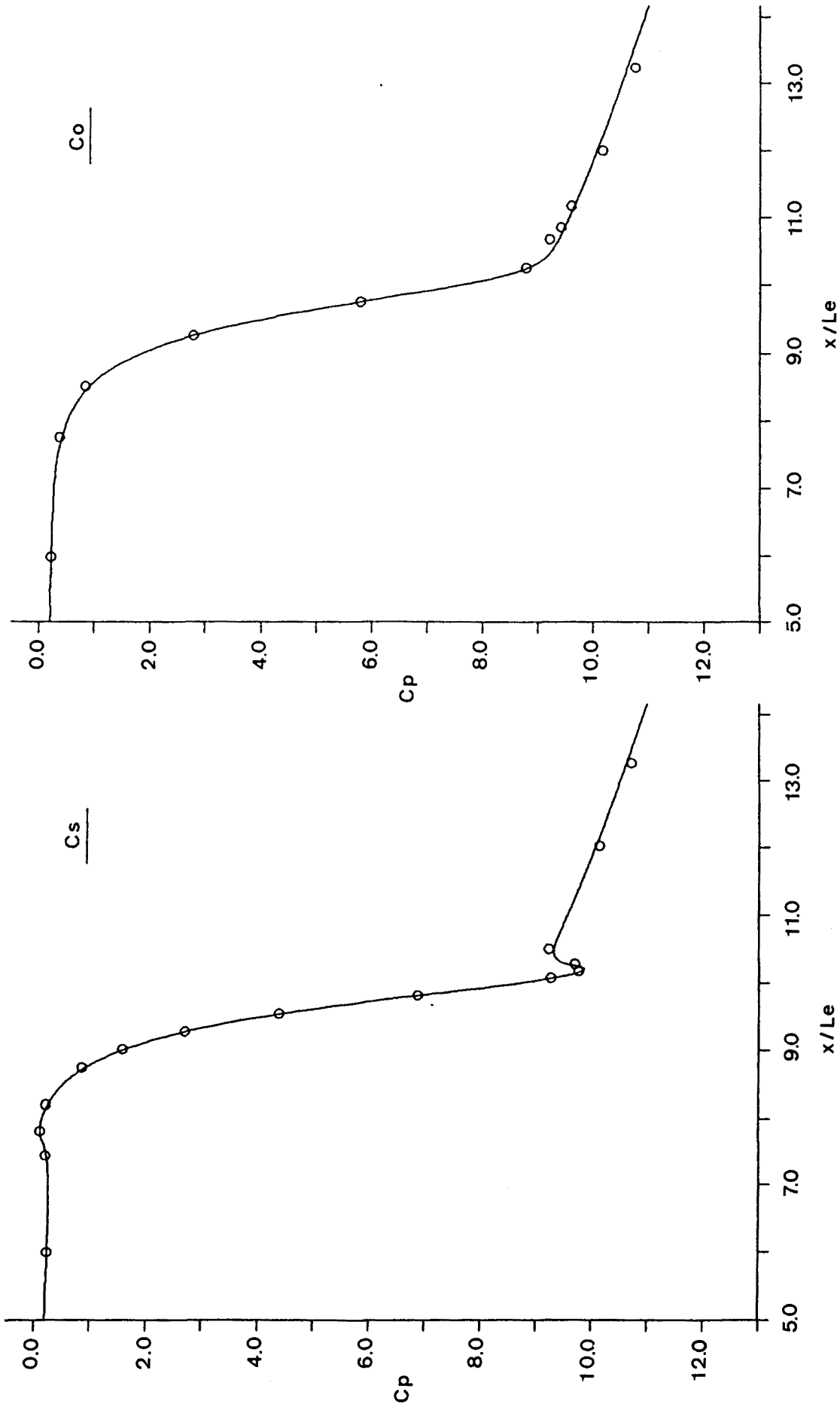
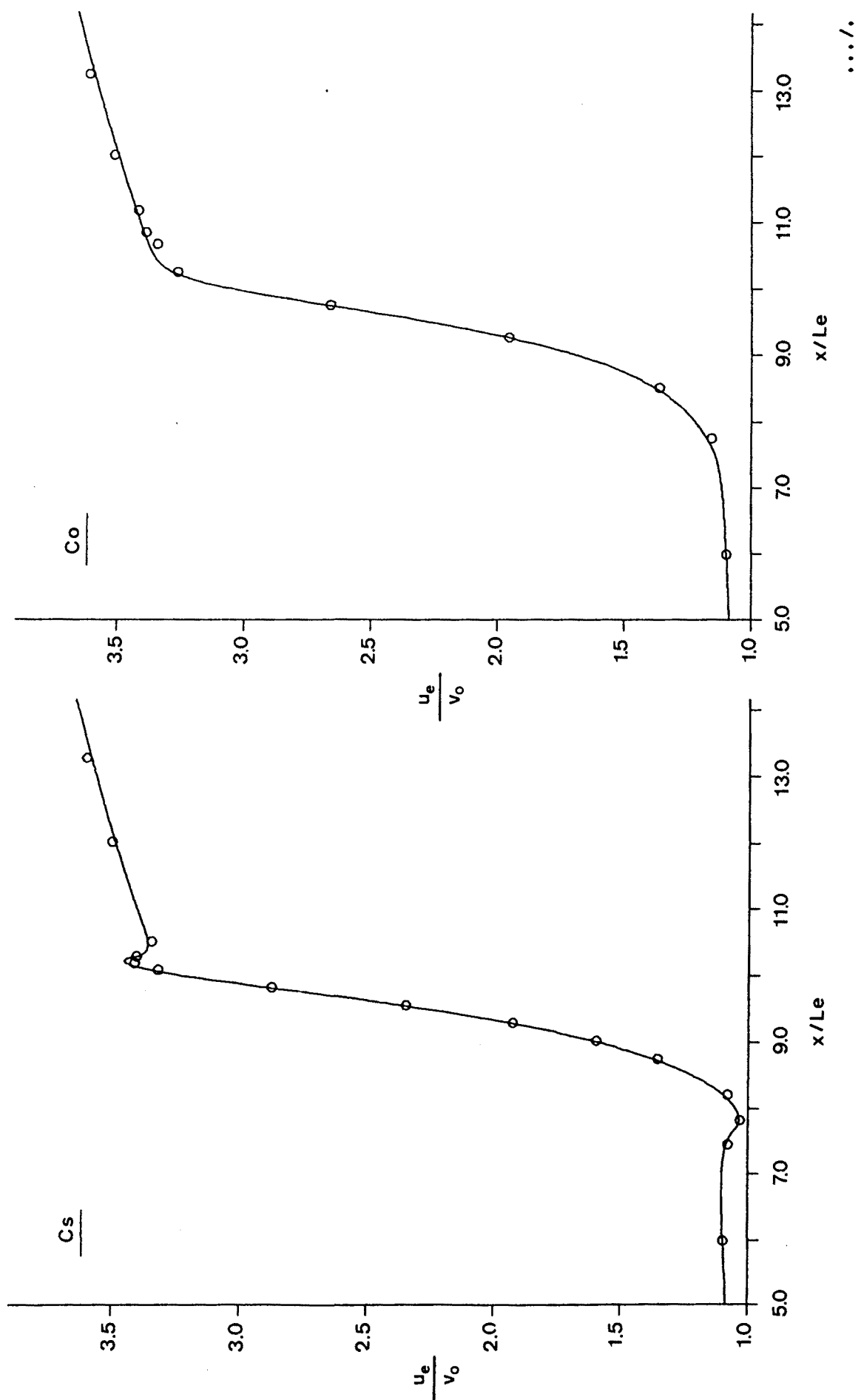


Fig. 8 Distribución de la velocidad adimensional y del coeficiente de presión, en los contornos C_o y C_s , para a las condiciones del flujo de la Prueba A. Los puntos corresponden a los valores experimentales, mientras que la línea continua ha sido obtenida mediante el modelo C-1.

..../.



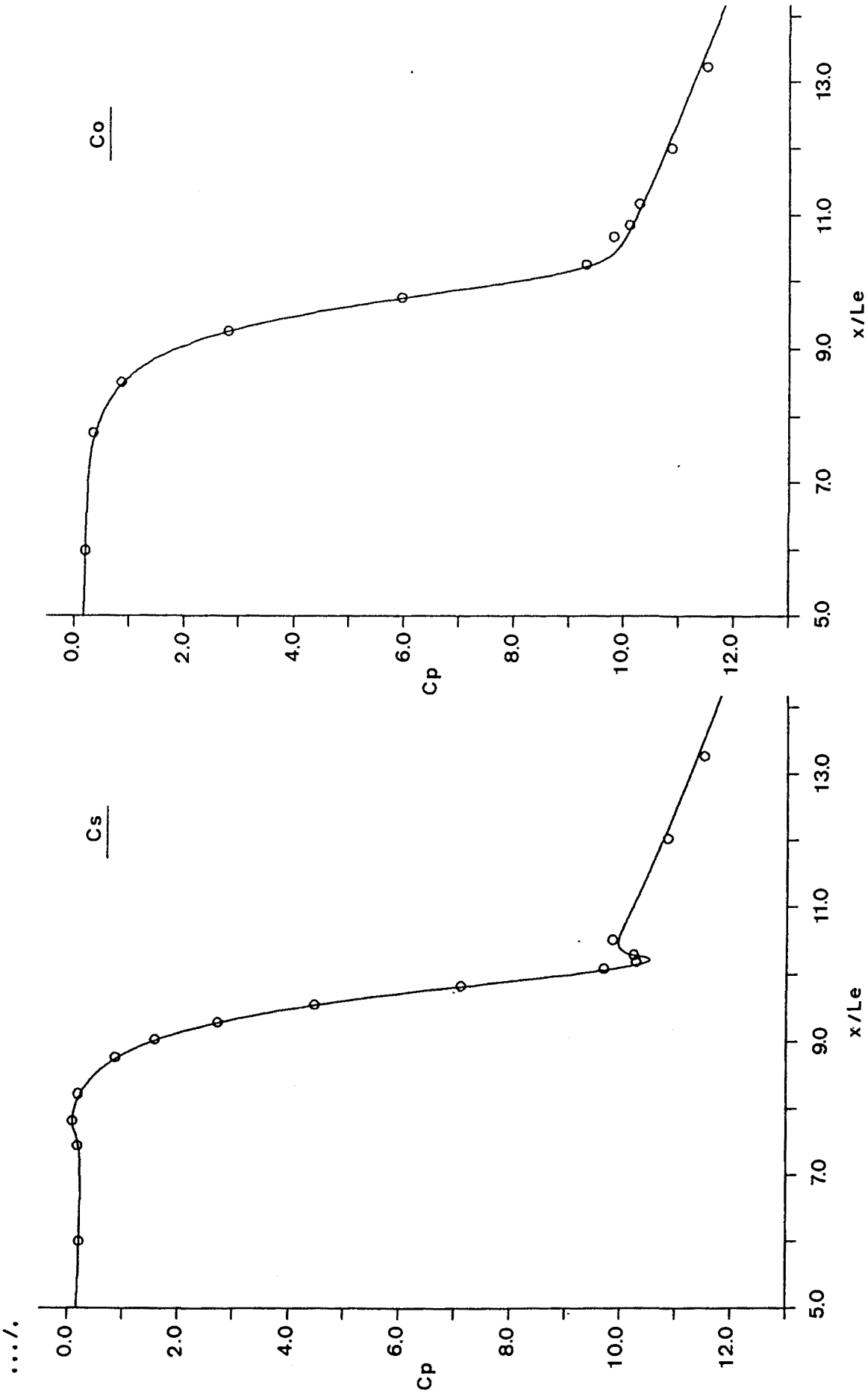


Fig. 9 Distribución de la velocidad adimensional y del coeficiente de presión, en los contornos C_o y C_s , para a las condiciones del flujo de la Prueba B. Los puntos corresponden a los valores experimentales, mientras que la línea continua ha sido obtenida mediante el modelo C-1.

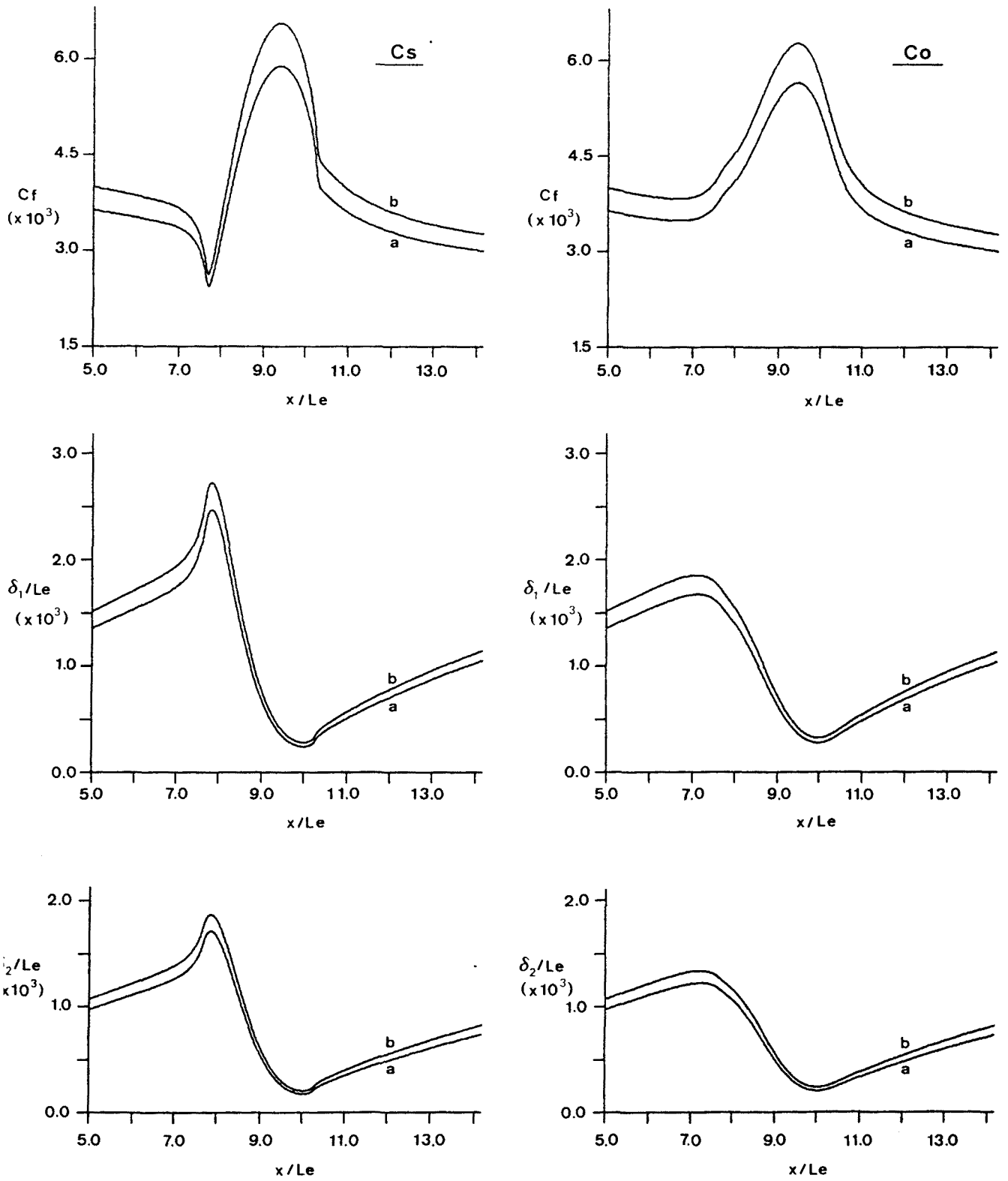


Fig 10 Distribución de C_f , δ_1/Le y δ_2/Le en los contornos Co y Cs, correspondientes a las condiciones del flujo en: (a) Prueba A; (b) Prueba B.

CONCLUSIONES

Referentes al esquema numérico:

- El método resulta potente por cuanto permite la obtención de la distribución de velocidades, presiones y temperaturas en todo el dominio del flujo; ello posibilita la determinación de la fricción y de la transferencia de calor en los contornos.
- La resolución de la región de flujo potencial mediante la generación de coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos, confiere gran flexibilidad al esquema numérico; esta característica ha permitido el desarrollo de un software de carácter general, fácilmente adaptable a diferentes configuraciones de flujos.
El sistema de coordenadas curvilíneas empleado en la discretización del dominio (cf. ec. (4.2)), es aplicable a la mayoría de las geometrias de flujos que normalmente se presentan, y para las cuales es adecuada una formulación como la indicada. Este tipo de coordenadas, además de proporcionar una adecuada discretización del dominio, permiten una fácil y rápida generación.
- Debido al tipo de interacción que se establece entre la zona potencial y las capas límites durante el proceso iterativo de resolución, el empleo de adecuados factores de subrelajación para la evaluación de los espesores de desplazamiento acelera la convergencia del método (cf. Tabla I y II).

Referentes a los resultados del caso de flujo bidimensional (Situación A):

- La aplicación del esquema numérico al flujo bidimensional a través de una canalización (Fig. 1), ha permitido poner de manifiesto la influencia de la compresibilidad del flujo (Fig. 4) y de la transferencia de calor entre el fluido y los contornos, supuestos estos isotermos (Fig. 5).
Así, se observa una disminución de los valores de δ_1 , δ_2 y C_f en los contornos a medida que aumenta Mo (con g_w constante).
Los resultados obtenidos a diferentes g_w (con Mo constante), reflejan unos valores de δ_1 inferiores para el caso de enfriamiento del flujo que para el de calentamiento, mientras que δ_2 , Nu y St son mayores en el primer caso que en el segundo; el coeficiente C_f presenta un comportamiento similar a estos últimos, a excepción de una zona donde invierte esta característica (cf. Fig. 5).

Referentes a los resultados correspondientes al caso con verificación experimental (Situación B):

- En la Tabla III y en las Fig. 6 y 7, queda reflejada la superioridad de los esquemas numéricos que consideran la formación de las capas límites (C-1/C-2/C-3), respecto de aquel que supone un comportamiento potencial del flujo en todo el dominio (C-4). Las diferencias de presiones en la zona recta de salida ($x > He+Htb$), son más satisfactoriamente interpretadas por los modelos que consideran las capas límites desarrolladas en las tapas (C-1/C-2).
El modelo C-1 presenta la ventaja, respecto al C-2, de una más rápida convergencia en la resolución de la zona potencial, puesto que permite el empleo de la función de corriente. El modelo C-2 es, no obstante, más general; de hecho, la situación analizada no es sino un caso particular de resolución tridimensional, con una malla de un solo tramo en la dirección z .

- El grado de ajuste entre los resultados numéricos (modelo C-1 y C-2) y los obtenidos experimentalmente es notable (Fig. 8 y 9); para las velocidades los errores han resultado inferiores al 2%. No obstante, cabría esperar un nivel de correlación más elevado, de haberse podido realizar las pruebas en una canalización realmente bidimensional.
- Para la situación analizada, un mayor grado de ajuste entre los resultados numéricos y los experimentales requeriría de: - una modelización que considerase la naturaleza tridimensional del flujo (especialmente las capas límites desarrolladas en las esquinas); - una adecuada instrumentación para una mejor estimación de las condiciones del flujo (distribuciones de velocidades a la entrada del dominio; formación de las capas límites; inicio de las capas límites turbulentas; grado de turbulencia de la corriente; etc.).

APENDICE A: CARACTERISTICAS GENERALES DE LA INSTALACION DE SOPLADO EMPLEADA PARA LA CONTRASTACION EXPERIMENTAL DE RESULTADOS.

Los resultados experimentales obtenidos en el caso del flujo a través de un canal de sección transversal rectangular (Fig. 1), han sido realizados en una instalación de soplado existente en el Laboratorio. Dicha instalación, concebida inicialmente como unidad de ensayo de rejilla de álabes [2], se ha adaptado para el ensayo de la canalización indicada.

La instalación es de circuito abierto y está constituida por los siguientes elementos:

- Compresor a lóbulos con capacidad de caudales hasta 22 Kg/min y de presión absoluta máxima de 2.1 atm. El accionamiento del compresor se realiza por un motor Diesel de 70 CV.
- Depósito de 1.15 m para el amortiguamiento del flujo pulsatorio producido por el compresor.
- Zona de ensayo propiamente dicha. El plano xy de la canalización (cf. Fig. 1) está dispuesto horizontalmente con tapas inferior y superior distantes 31.1 mm.
- Elementos auxiliares de regulación y control, y elementos de medida.

La medida del caudal de aire se ha realizado mediante una placa orificio de 55.21 mm de diámetro, colocada en una tubería de 158 mm de diámetro. El diseño de dicha placa se ha efectuado según la norma BS-1042 [5]. El flujo másico ha sido determinado, según los criterios indicados por E.Ower y R.C.Pankhurst [6], mediante la expresión:

$$\dot{m} = \alpha \epsilon A_2 \sqrt{\frac{2 \rho_1 (p_1 - p_2)}{1 - n^2}} \quad (4.A1)$$

siendo:

$$n = D_2^2 / D_1^2; \quad A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}; \quad Re_2 = \frac{v_2 D_2}{\nu_2}$$

$$\alpha = .5959 + .0312 n^{1.05} - .1840 n^4 + .0029 n^{1.25} \left(\frac{10^6 \sqrt{n}}{Re_2} \right)^{.75}$$

$$\epsilon = 1 - \beta \left(1 - \frac{p_2}{p_1} \right)$$

n	.50	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70
β	.31	.31	.32	.33	.35	.37	.40	.45

En la medición de presiones absolutas y diferencias de presiones se han empleado columnas de mercurio y agua respectivamente. La localización en los contornos laterales de las diferentes sondas de presión se indican en la Tabla III. Para el estudio realizado la precisión derivada del empleo de columnas ha resultado suficiente.

Para la medición de la temperatura del aire en la placa orificio y en la zona de ensayo, se han empleado termopares tipo Chromel-Alumel; para las condiciones de trabajo, los posibles errores producidos por el intercambio energético entre la sonda termométrica y el medio circundante se han determinado como despreciables [7].

APENDICE B: PROPIEDADES FISICAS DEL AIRE

Para la evaluación de las propiedades termodinámicas y de transporte del aire se han empleado las siguientes expresiones:

- a) Densidad; de la ecuación de los gases ideales:

$$\rho = \frac{p \cdot M_{ah}}{R \cdot T}$$

- b) Viscosidad dinámica; de la formula de Sutherland:

$$\mu = 1.4818 \cdot 10^{-6} \frac{T^{3/2}}{T + 166}$$

en donde la temperatura debe expresarse en grados Kelvin, resultando la viscosidad dinámica en Kg/ms.

- c) Calor específico: se ha supuesto un valor de c_p constante e igual a 1010 J/Kg.K.
- d) Número de Prandtl: se supone constante e igual a 0.69. En estas condiciones la conductividad térmica resulta proporcional a la viscosidad dinámica.

De comparar los valores experimentales de las propiedades físicas del aire a la presión atmosférica (cf. [8]), con los que se derivan de las expresiones anteriores se tiene:

- Para la viscosidad dinámica los errores cometidos en un intervalo de temperaturas de 250 K a 1000 K son inferiores al 1%.
- Para el calor específico, los errores son menores al 1% en el intervalo de temperaturas de 250 K a 450 K; a medida que aumenta la temperatura el error aumenta siendo, por ejemplo, de un 4% a 600 K y de un 12% a 1000 K.
- Para el número de Prandtl, el error es inferior al 1.6% en un intervalo de temperaturas de 350 K a 1000 K; a temperaturas inferiores el error aumenta, así por ejemplo, a 300 K el error es del 2.5%.
- Para la conductividad térmica el error es del orden del 2.5% en un intervalo de temperaturas de 250 K a 450 K; a medida que aumenta la temperatura el error aumenta siendo, por ejemplo, del 3.6% a 450 K y del 11% a 1000 K.

Para el intervalo de temperaturas de trabajo, la precisión en la evaluación de las propiedades físicas obtenida de las expresiones anteriores es suficiente; no obstante a temperaturas elevadas sería conveniente emplear expresiones más ajustadas para el calor específico y para la conductividad térmica.

NOMENCLATURA

C_f	Coefficiente de rozamiento superficial, $C_f = \tau_w / (\rho_e u_e^2 / 2)$.
Co, Cs	Contornos laterales de la canalización (Fig. 1).
c_p	Capacidad calorífica a presión constante.
C_p	Coefficiente de presión, $C_p = (p - p_o) / (\rho_o v_o^2 / 2)$.
D_1, D_2	Diámetro interior de la tubería correspondiente a la placa orificio y diámetro de la placa orificio, respectivamente.
f_w	Factor de subrelajación para los espesores de desplazamiento.
g_w	Relación entre entalpías específicas totales, ec. (3.24).
h	Humedad en masa (Kg. de vapor de agua/Kg aire seco).
He, Htb	Dimensiones características de la canalización (Fig. 1).
k	Relación entre calores específicos, $k = c_p / c_v$.
K	Parámetro de densidad de malla de la capa límite, ec. (3.31).
Le, Ls	Dimensiones características de la canalización (Fig. 1).
\dot{m}	Flujo másico.
M	Número de Mach, $M = u/c$.
Mo	Número de Mach a la entrada de la canalización.
Mah	Peso molecular del aire húmedo, $Mah = (1+h) / [(1/Mas) + (h/Mv)]$.
Mas	Peso molecular del aire seco, $Mas = 28.9653$ gr/mol.
Mv	Peso molecular del vapor de agua, $Mv = 18.0153$ gr/mol.
Nu	Número de Nusselt, $Nu = \dot{q}_w s / (T_w - T_e) / \lambda_e$.
p	Presión.
p_1, p_2	Presión a la entrada y salida respectivamente de la placa orificio.
p	Presión a la entrada de la canalización.
Pr	Número de Prandtl, $Pr = \mu c_p / \lambda$.
p_w	Variable representativa del flujo de calor en la pared, ec. (3.24).
\dot{q}	Flujo de calor por unidad de superficie.
R	Radio de curvatura del contorno.
R'	Constante universal de los gases, $R' = 8.31432$ J/K.mol.
Re	Número de Reynolds a la salida de la placa orificio.
Rs	Número de Reynolds referido a la coordenada s , $Rs = u_e s / \nu_e$.
St	Número de Staton, $St = Nu / (Rs.Pr)$.
s, n	Coordenadas curvilíneas; el eje s es medido a lo largo del contorno y en la dirección del flujo, el eje n es normal en cada punto a dicho contorno.
T	Temperatura absoluta.
To	Temperatura a la entrada de la canalización.
u_e, T_e	Velocidad y temperatura en el contorno exterior de la capa límite.
v	Módulo de la velocidad.
v_o	Velocidad a la entrada de la canalización.
x, y	Coordenadas cartesianas.
$y_o(x)$	Función que define el contorno lateral Co , ec. (4.1).
$y_s(x)$	Función que define el contorno lateral Cs , ec. (4.1).
δ	Espesor de la capa límite.
δ_1	Espesor de desplazamiento (cf. nomenclatura cap.3). De no indicar expresamente que se trata del contorno Cs (δ_{1s}) o Co (δ_{1o}), entenderemos que se refiere indistintamente a ambos.
$\bar{\delta}_1$	Espesor de desplazamiento correspondiente a la dirección de la coordenada y .
δ_1^*	Valor supuesto, o correspondiente a la iteración anterior, del espesor de desplazamiento durante el proceso iterativo.

δ_2	Espesor de la cantidad de movimiento (cf. nomenclatura cap.3).
$\Delta\eta_1$	Incremento inicial de la malla en la capa límite (cf. cap. 3)
ϵ, η	Coordenadas curvilíneas empleadas en la resolución de la región de flujo potencial (ec. 4.2).
ϵ_c	Precisión exigida para la finalización del proceso iterativo de resolución conjunta zona potencial-capas límites.
λ	Conductividad térmica.
μ	Viscosidad dinámica.
ν	Viscosidad cinemática.
ρ	Densidad
τ	Tensión cortante.
ϕ	Potencial de velocidad.
ψ	Función de corriente.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] L.PRANDLT, 'Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung', Proc. Third Intern. Math. Congress, Heidelberg, 1904 (según referencia H. Schlichting [3]).
- [2] A.OLIVA, 'Resolución sistemática por métodos numéricos de la transmisión de calor por conducción y convección en condiciones subsónicas y de estabilización', Tesis Doctoral, ETSIIT, UPB, Terrassa, 1982.
- [3] H.SCHLICHTING, 'Boundary-Layer Theory', McGraw-Hill, New York, Sixth Ed., 1968.
- [4] T.CEBECI, A.M.O.SMITH, 'Analysis of Turbulent Boundary Layers', Academic Press, Orlando, 1974.
- [5] BS 1042 : Part 1 : 1964, 'Orifice Plate with Corner Tappings', British Standards Institution, Section seven, 1964.
- [6] E.OWER, R.C.PANKHURST, 'The Measurement of Air Flow', Pergamon Press, 5th ed., Oxford, 1977.
- [7] C.D.PEREZ SEGARRA, A.OLIVA, 'Análisis de errores en la determinación de temperaturas en gases', I Coloquio de Técnicas Experimentales e Instrumentación en el Estudio de Motores Térmicos, Dc. 1983, Edita ETSII de Terrassa, 1984.
- [8] E.R.G.ECKERT, R.M.DRAKE, 'Analysis of Heat and Mass Transfer', McGraw-Hill, New York, 1972.