

CRITERIOS NUMERICOS EN LA RESOLUCION  
DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR  
EN FENOMENOS DE CONVECCION

Tesis Doctoral presentada en la  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES DE TERRASSA  
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CATALUNYA

por

Carlos David PEREZ SEGARRA

para la obtención del  
Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Terrassa, Noviembre de 1987

Cap. 5:

RESOLUCION DE LA ECUACION  
DE LA ENERGIA

## CAP. 5 RESOLUCION DE LA ECUACION DE LA ENERGIA

### RESUMEN

Se efectua la resolución numérica de la ecuación de la energía escrita en la forma de la ecuación de la convección-difusión. El estudio se ha concretado para situaciones bidimensionales y de estabilización, partiendo de una distribución de velocidades y densidades conocida. La integración numérica se realiza en concordancia con los esquemas clásicos "central difference", "upwind difference" y "exponential difference", y mediante la generación de un sistema de coordenadas curvilíneas coincidentes con las líneas de corriente del flujo y con sus ortogonales. La precisión y zonas de aplicación del método son analizadas para situaciones singulares de solución analítica conocida. Los resultados obtenidos son satisfactorios en un amplio rango de números de Peclet, siendo superiores a los que se derivan del empleo de mallas de discretización rectangulares.

### 5.1 INTRODUCCION

Muchas de las formulaciones empleadas en la resolución de la ecuación de la energía, ven afectados sus resultados a causa de la denominada falsa difusión o difusión numérica [1][4], tal que cuando es del mismo orden o superior a la difusión real se producen serios errores. Esta problemática se acentua al aumentar el número de Peclet del flujo.

En este capítulo se efectua la resolución numérica de la ecuación de la energía escrita en la forma de la ecuación de la convección-difusión. El método se basa en la discretización del dominio mediante volúmenes de control (V.C.) coincidentes con las líneas de corriente del flujo y con sus ortogonales [6]. La discretización de la ecuación de la convección-difusión se ha realizado mediante criterios numéricos propios de técnicas de diferencias finitas: "central difference", "upwind-difference" [2] y "exponential difference" [3].

Las ventajas del método empleado radican en: reduce los errores de truncamiento debidos a la falsa difusión; la discretización de las ecuaciones sobre V.C. permite una más facil interpretación física de los criterios numéricos adoptados; al adaptarse estos V.C. al fluido en su movimiento se evitan los problemas inherentes al tratamiento de contornos irregulares mediante mallas de discretización regulares; la información de los contornos es más ventajosamente transmitida al interior del dominio.

La problemática se plantea en la generación de las mallas de discretización, pues para ello es necesario el conocimiento de la distribución de velocidades y densidades del flujo. Para el caso de fluidos con propiedades físicas variables, la resolución de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento se realiza conjuntamente con la ecuación de la energía requiriéndose, a cada iteración conjunta, la determinación de la correspondiente malla de discretización. Para el caso de fluidos con propiedades físicas constantes la malla debe generarse una única vez por cuanto la resolución de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento es independiente de la ecuación de la energía. En este capítulo se plantea únicamente la resolución de la ecuación de la energía, suponiéndose predeterminadas o conocidas la distribución de velocidades y presiones.

Con el fin de contrastar entre si los resultados obtenidos de aplicar los criterios numéricos "central, upwind and exponential difference" a mallas de discretización coincidentes con las líneas de corriente del flujo, así como los que se derivan del empleo de mallas de discretización rectangulares [5], se han escogido diferentes situaciones singulares de flujos con solución analítica conocida.

## 5.2 ECUACION GOBERNANTE E INTEGRACION NUMERICA

La ecuación de la energía en forma general adopta la siguiente expresión [7]:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \text{div} (\lambda \text{grad } T) + \frac{Dp}{Dt} + q_v + \phi^* \quad (5.1)$$

Esta ecuación puede ser escrita en la forma más compacta de la ecuación de la convección-difusión [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \text{div } \vec{J} = F \quad (5.2)$$

en la que  $\phi$  representa la entalpia específica,  $F$  es el término fuente y  $\vec{J}$  el término combinado de convección-difusión. Este último se expresa en la forma:

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \phi - \Gamma \text{grad } \phi \quad (5.3)$$

siendo  $\Gamma$  el coeficiente de difusión.

En lo que sigue nos ocuparemos de la resolución, en situaciones bidimensionales y de estabilización, de la ecuación de la convección-difusión (5.2). La integración numérica de dicha ecuación se realizará en base a la generación de un sistema de coordenadas curvilíneas  $(\epsilon, \eta)$  coincidentes con las líneas de corriente del flujo y con sus ortogonales respectivamente (Fig. 1). El empleo de sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales simplifica notablemente el proceso de obtención de las ecuaciones de discretización; así, el realizar dicho proceso directamente en el plano físico, permite una más fácil interpretación de los criterios numéricos adoptados.

Para el caso de régimen permanente, la ecuación (5.2) integrada al volumen de

control V.C. de la Fig. 1 es:

$$\int_{V.C.} \text{div } \vec{J} \, dV = \int_{V.C.} F \, dV \quad (5.4)$$

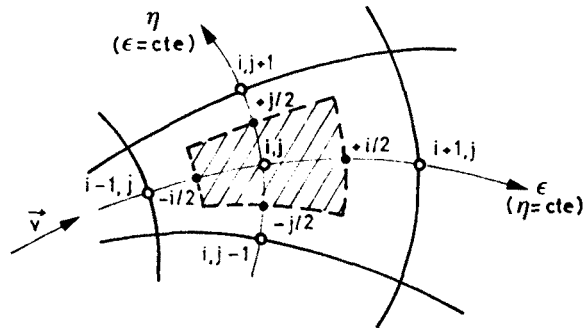


Fig. 1 Coordenadas curvilíneas y volumen de control empleados en la resolución numérica de la ec. (5.2).

De aplicar el teorema de la divergencia, la expresión anterior toma la forma:

$$\int_{S.C} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{V.C} F \, dV \quad (5.5)$$

Descomponiendo los vectores  $\vec{J}$  y  $d\vec{S}$  en las direcciones definidas por las líneas tangentes a las coordenadas  $(\epsilon, \eta)$ :

$$\begin{aligned} \vec{J} &= J_1 \vec{b}_1 + J_2 \vec{b}_2 \\ d\vec{S} &= dS^1 \vec{b}_1 + dS^2 \vec{b}_2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

siendo  $\vec{b}_i$  el vector unitario tangente en cada punto a la línea coordenada  $q^i$  ( $q^1 = \epsilon, q^2 = \eta$ ).

Introduciendo (5.6) en (5.5) y desarrollando la integral de superficie a las diferentes caras del V.C. se tiene:

$$-\int_{S_{-i/2}} J_1 \, dS^1 + \int_{S_{+j/2}} J_2 \, dS^2 + \int_{S_{+i/2}} J_1 \, dS^1 - \int_{S_{-j/2}} J_2 \, dS^2 = \int_{V_{i,j}} F \, dV \quad (5.7)$$

De expresar en (5.3) la velocidad en sus componentes en las direcciones definidas por los vectores  $\vec{b}_i$ , y de expresar el término del gradiente en función de las coordenadas  $(\epsilon, \eta)$ , se tiene:

$$\vec{J} = \rho (v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2) \phi - \Gamma \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \vec{b}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \vec{b}_2 \right) \quad (5.8)$$

en donde  $h_i$  son los factores de escala, los cuales están relacionados con las componentes del tensor métrico contravariante en la forma:  $h_i = \sqrt{g_{ii}}$ .

De (5.8) se obtienen los siguientes valores para las componentes del vector  $\vec{J}$  en las direcciones definidas por  $\vec{b}_i$ :

$$J_1 = \vec{J} \cdot \vec{b}_1 = \rho v_1 \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{h_1 \partial \epsilon} \quad (5.9)$$

$$J_2 = \vec{J} \cdot \vec{b}_2 = \rho v_2 \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{h_2 \partial \eta}$$

Como quiera que la coordenada  $\epsilon$  representa las líneas de corriente, el flujo másico normal a las mismas es nulo. Es por ello que la componente  $J_2$  únicamente posee término de difusión al ser  $v_2 = 0$ ; así, de sustituir (5.9) en (5.7) teniendo en cuenta esta última condición, se tiene:

$$-\int_{S_{-i/2}} (\rho v_1 \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{h_1 \partial \epsilon}) dS^1 + \int_{S_{+i/2}} (\rho v_1 \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{h_1 \partial \epsilon}) dS^1 + \quad (5.10)$$

$$+ \int_{S_{+j/2}} (-\Gamma \frac{\partial \phi}{h_2 \partial \eta}) dS^2 - \int_{S_{-j/2}} (-\Gamma \frac{\partial \phi}{h_2 \partial \eta}) dS^2 = \int_{V_{i,j}} F dV$$

Para la aproximación numérica de la integral de volumen de la expresión anterior, supondremos que el valor del término fuente  $F$  en el punto  $(i,j)$  se mantiene uniforme en todo el V.C. Si además linealizamos dicho término según el criterio indicado en [1] se tiene:

$$\int_{V_{i,j}} F dV \approx F_{i,j} V_{i,j} = (a + b \phi_{i,j}) V_{i,j} \quad (5.11)$$

en donde los coeficientes  $a$  y  $b$  son, en general, dependientes de  $\phi$  y escogidos de forma que  $b$  sea siempre menor o igual que cero.

Para la aproximación numérica de las integrales de superficie se ha supuesto que, para el caso de una superficie cualquiera  $S_{k/2}$ , el valor de  $J_i$  se mantiene uniforme a lo largo de dicha superficie e igual al valor que le corresponde en el punto  $k/2$ . A modo de ejemplo desarrollaremos dos de las integrales de superficie de la expresión (5.10):

$$\int_{S_{+i/2}} (\rho v_1 \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{h_1 \partial \epsilon}) dS^1 \approx \left[ \rho v_1 \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{h_1 \partial \epsilon} \right]_{+i/2} S_{+i/2} \quad (5.12a)$$

$$\int_{S_{+j/2}} (-\Gamma \frac{\partial \phi}{h_2 \partial \eta}) dS^2 \approx - \left[ \Gamma \frac{\partial \phi}{h_2 \partial \eta} \right]_{+j/2} S_{+j/2} \quad (5.12b)$$

En estas expresiones, la evaluación numérica del término combinado de convección-difusión la realizaremos en base a los criterios numéricos 'central-difference', 'upwind-difference' [2] y 'exponential-difference' [3]. Nos referiremos a dichos criterios, ya adaptados a la malla de discretización indicada, mediante la notación CDS\*, UDS\* y EDS\*. Así pues:

- a) Criterio CDS\*: supone para el término convectivo que  $\phi$  varía linealmente a lo largo de la longitud correspondiente a la coordenada  $\epsilon$ . Para el término de difusión supone igualmente una variación lineal de  $\phi$  a lo largo de la coordenada correspondiente. Así:

$$\left[ \rho u_1 \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{h_1 \partial \epsilon} \right]_{+i/2} S_{+i/2} \approx \dot{m}_{i,j} (\phi_{i,j} + (\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) \frac{d_{+i/2}}{d_{+i}}) - \Gamma_{+i/2} \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{d_{+i}} S_{+i/2} \quad (5.13a)$$

$$- \left[ \Gamma \frac{\partial \phi}{h_2 \partial \eta} \right]_{+j/2} S_{+j/2} \approx - \Gamma_{+j/2} \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{d_{+j}} S_{+j/2} \quad (5.13b)$$

en donde  $\dot{m}_{i,j}$  representa el flujo másico, que atraviesa las caras  $+i/2$  y  $-i/2$  del V.C., asignado al punto  $(i,j)$  de la malla. El valor de dicho flujo másico será:

$$\dot{m}_{i,j} = \int_{S_{+i/2}} \rho u_1 dS^1 \approx (\rho u_1)_{-i/2} S_{-i/2} \approx (\rho u_1)_{+i/2} S_{+i/2} \quad (5.14)$$

Nótese que las derivadas de  $\partial \phi / h_i \partial q^i$  se han aproximado directamente en el plano físico, puesto que  $h_i dq^i$  representa la longitud diferencial a lo largo de la línea coordenada  $q^i$  (cf. expresión 2.A19).

- b) Criterio UDS\*: supone una variación escalonada para el término convectivo, i.e., supone que el valor de  $\phi$  en la cara correspondiente del V.C. es igual al que tiene en el punto inmediatamente anterior según la dirección del flujo, esto es  $\phi_{+i/2} = \phi_{i,j}$  y  $\phi_{-i/2} = \phi_{i-1,j}$ . Para el término de difusión supone, al igual que el esquema anterior, una variación lineal de  $\phi$ . Así, la expresión (5.12a) es aproximada en la forma:

$$\left[ \rho u_1 \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{h_1 \partial \epsilon} \right]_{+i/2} S_{+i/2} \approx \dot{m}_{i,j} \phi_{i,j} - \Gamma_{+i/2} \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{d_{+i}} S_{+i/2} \quad (5.15)$$

La aproximación numérica de la expresión (5.12b) se realiza en la forma indicada en (5.13b).

- c) Criterio EDS\*: La ecuación de la convección-difusión (5.2), para el caso de que el término fuente sea nulo y el régimen sea permanente, adopta la siguiente expresión:  $\text{div } \vec{J} = 0$ . Si además  $\vec{J}$  es función únicamente de la coordenada  $\epsilon$ , esta expresión adopta la forma:

$$\frac{d}{d\epsilon} (h_2 J_1) = 0 \quad (5.16)$$

Introduciendo (5.9) y teniendo en cuenta que  $dS^i = h_i dq^i$  (2.A21) se tiene:

$$\frac{d}{d\epsilon} (\rho v_1 S^1 \phi - \Gamma S^1 \frac{d\phi}{h_1 d\epsilon}) = 0 \quad (5.17)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria es fácilmente integrable si suponemos que  $\dot{m} = \rho v_1 S^1$ ,  $\Gamma$  y  $S^1$  son uniformes. En estas condiciones se verifica:

$$\phi = C_0 + C_1 \cdot \exp(\dot{m}l / \Gamma S^1) \quad (5.18)$$

en donde  $C_0$  y  $C_1$  son constantes de integración y  $l$  representa una coordenada de longitud a lo largo de la línea coordenada  $\epsilon$ .

La expresión (5.12a) la aproximaremos numéricamente utilizando una función de interpolación del tipo indicado en (5.18). Las constantes de integración se obtienen ajustando dicha función a los valores de  $\phi$  en los nodos adyacentes, i.e.,  $l=0$ ,  $\phi = \phi_{i,j}$ ;  $l=d_{+i}$ ,  $\phi = \phi_{i+1,j}$ . Si suponemos que  $\dot{m} = \dot{m}_{i,j}$ ,  $S^1 = S_{+i/2}$  y  $\Gamma = \Gamma_{+i/2}$ , introducimos la función resultante en (5.12a) y reordenamos adecuadamente, se tiene:

$$\left[ \rho v_1 \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{h_1 \partial \epsilon} \right]_{+i/2} S_{+i/2} \approx \dot{m}_{i,j} \left[ \phi_{i,j} - \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\exp(\text{Pe}_{+i/2}) - 1} \right] \quad (5.19)$$

siendo:

$$\text{Pe}_{+i/2} = \frac{\dot{m}_{i,j} d_{+i}}{\Gamma_{+i/2} S_{+i/2}}$$

Procediendo de forma análoga para las integrales de superficie en  $-i/2$  y  $-j/2$ , sustituyendo en (5.10) y reordenando la ecuación de discretización resultante se obtiene una expresión del tipo:

$$\begin{aligned} a_{i,j} \phi_{i,j} = & a_{i+1,j} \phi_{i+1,j} + a_{i-1,j} \phi_{i-1,j} + \\ & + a_{i,j+1} \phi_{i,j+1} + a_{i,j-1} \phi_{i,j-1} + a_F \end{aligned} \quad (5.20)$$



en donde los coeficientes de discretización son:

$$\begin{aligned}
 a_{i+1,j} &= \frac{1}{Pe_{+i/2}} - \frac{d_{+i/2}}{d_{+i}} j \\
 a_{i-1,j} &= \frac{1}{Pe_{-i/2}} - \left(1 - \frac{d_{-i/2}}{d_{-i}}\right) j + 1 \\
 a_{i,j+1} &= \frac{1}{Pe_{+j/2}} \\
 a_{i,j-1} &= \frac{1}{Pe_{-j/2}} \\
 a_F &= a V_{i,j} / \dot{m}_{i,j} \\
 a_P &= a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} - b V_{i,j} / \dot{m}_{i,j}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Si  $j = 1$  los coeficientes de discretización corresponden al criterio CDS\*, mientras que si  $j = 0$  dichos coeficientes corresponden al criterio UDS\*. Para el criterio EDS\* los coeficiente de discretización son los arriba indicados excepto:

$$\begin{aligned}
 a_{i+1,j} &= \frac{1}{\exp(Pe_{+i/2}) - 1} \\
 a_{i-1,j} &= \frac{1}{\exp(Pe_{-i/2}) - 1}
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

### 5.3 EJEMPLOS DE RESOLUCION NUMERICA. CONTRASTACION DE RESULTADOS

Con el fin de contrastar entre si los diferentes esquemas numéricos obtenidos de discretizar el dominio en la forma indicada en el apartado anterior, así como de comparar estos resultados con los que se derivan del empleo de mallas de discretización rectangulares, se ha ensayado la resolución de tres situaciones singulares de flujos.

La distribución de velocidades de los ejemplos seleccionados son las correspondientes al flujo potencial en un vórtice, flujo potencial en un manantial y flujo potencial alrededor de un cilindro. En los tres casos escogidos, la distribución de velocidades es posible expresarla mediante expresiones algebraicas; ello ha permitido una fácil generación de la malla de discretización así como la posibilidad de integración analítica, para situaciones singulares, de la ecuación de la convección difusión.

La resolución de los casos presentados se ha realizado suponiendo que las propiedades físicas son constantes y que el término fuente es nulo.

#### 5.3.1 Primer ejemplo: flujo en un vórtice

El flujo potencial en un vortice viene representado por la siguiente distribución de velocidades [8]:

$$v_{\theta} = \frac{\Lambda}{2\pi r} \quad v_r = 0 \quad (5.23)$$

Las líneas de corriente correspondientes a dicha distribución de velocidades están definidas por círculos concéntricos, mientras que las ortogonales son líneas dispuestas radialmente. En la Fig. 2 se especifica la geometría empleada en la resolución numérica así como las coordenadas  $(\epsilon, \eta)$  generadas.

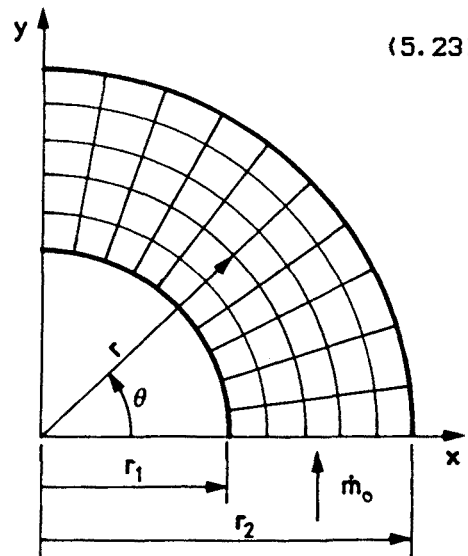


Fig. 2 Geometría y coordenadas  $(\epsilon, \eta)$  del primer ejemplo de resolución (vórtice).

La resolución numérica de este caso se ha realizado para dos situaciones diferenciadas:

#### a) Caso de solución analítica conocida

La ecuación de la convección difusión expresada en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta)$  y para las hipótesis especificadas al inicio de este apartado, toma la forma:

$$\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r \phi) + \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_{\theta} \phi) = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (5.24)$$

Para la distribución de velocidades (5.23), la expresión

$$\phi = C_1 \ln r + C_2 e^{P\theta} + C_3 \quad (5.25)$$

obtenida de suponen que la variable dependiente  $\phi$  puede expresarse en la forma  $\phi(r, \theta) = \phi_r(r) + \phi_\theta(\theta)$ , siendo  $\phi_r$  y  $\phi_\theta$  funciones únicamente de  $r$  y  $\theta$  respectivamente, es solución de la ecuación diferencial (5.24) si los valores de  $\phi$  en el contorno se corresponden con los de la expresión (5.25) una vez determinadas las constantes de integración  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ .

Para el dominio de la Fig. 2, dichas constantes se han obtenido de fijar el valor de  $\phi$  en los siguientes puntos del contorno:

$$\begin{aligned} (r=r_1, \theta=0) &\longrightarrow \phi = \phi_1 \\ (r=r_2, \theta=0) &\longrightarrow \phi = \phi_2 \\ (r=r_1, \theta=\pi/2) &\longrightarrow \phi = \phi_3 \end{aligned} \quad (5.26)$$

De introducir dichas condiciones en (5.25) y de reordenar adecuadamente se tiene:

$$\phi = \phi_3 \frac{1 - \exp(\theta P)}{1 - \exp(\pi P/2)} + \frac{\ln R}{\ln R_2} \quad (5.27)$$

siendo el parámetro adimensional  $P$  y las variables adimensionales  $\phi$  y  $R$  de la forma:

$$\phi = \frac{\phi - \phi_1}{\phi_2 - \phi_1}, \quad R = \frac{r}{r_1}, \quad P = Pe \frac{R_2 - 1}{\ln R_2} \quad (5.28)$$

El número de Peclet  $Pe$  que aparece en el parámetro  $P$  se ha definido en la forma:

$$Pe = \frac{\dot{m}_o r_1}{\Gamma S_o} \quad (5.29)$$

siendo  $\dot{m}_o$  el flujo másico total que atraviesa la sección transversal del flujo  $S_o$  ( $S_o = r_1 - r_2$ ).

La resolución numérica se ha efectuado para diferentes valores del número de Peclet,  $Pe$ , con  $R_2 = 2.0$  y  $\phi_3 = 0.5$ . En los contornos se ha fijado la distribución de  $\phi$  correspondiente a los valores de la función (5.27) en dichos contornos; de esta forma, las condiciones de contorno son de Dirichlet.

La resolución numérica del sistema de ecuaciones discretas (5.20) se ha realizado mediante la técnica iterativa de Gauss-Seidel con el empleo de factores de sub o sobrerrelajación; la solución numérica se considera que ha convergido cuando, en la iteración  $k$  y para todos los puntos de la malla, se verifica que:

$$\max \left| \phi_{i,j}^k - \phi_{i,j}^{k-1} \right| < .000001 \quad (5.30)$$

En la Fig. 5 se representa, en función del número de Peclet  $Pe$  y según los distintos criterios numéricos, el tanto por ciento de error de la solución numérica respecto de la solución analítica (5.27). Para el caso de mallas de discretización coincidentes con las líneas de corriente del flujo (criterios CDS\*, UDS\*, EDS\*), el porcentaje de error se refiere al punto de coordenadas  $(R=1.5, \theta = \pi/4)$ ; los resultados numéricos se han obtenido con una malla de  $21 \times 11$  puntos (231 en total de los cuales 60 corresponden a puntos del contorno).

En esta misma figura se ha representado, para el caso de mallas de discretización rectangulares (criterios CDS, UDS, EDS), el porcentaje de error de la solución numérica respecto de la analítica en el punto de coordenadas  $(R=1.56, \theta = \pi/4)$ ; los resultados numéricos se han obtenido con una malla de  $21 \times 21$  puntos (de los cuales 259 puntos son del dominio; de estos 63 corresponden a puntos del contorno). Los posibles errores derivados del tratamiento de contornos irregulares son evitados al tomar como puntos del contorno (valor de  $\phi$  conocido) los más próximos a las fronteras y situados en los nodos de la malla.

En la Fig. 6 se representa el porcentaje de error que se deriva del empleo de los criterios numéricos CDS\*, UDS\* y EDS\* en el punto de coordenadas  $(R=1.5, \theta = \pi/4)$ . A diferencia de la Fig. 5, los resultados numéricos han sido obtenidos con una malla de discretización de  $11 \times 6$  puntos.

Como ya era de esperar, el rango de convergencia de los esquemas CDS y CDS\* es muy limitado ( $Pe < 30$ , cf. Fig. 5 y 6), a pesar del empleo de factores de subrelajación.

#### b) Variación escalonada de $\phi$ a la entrada del dominio

En el apartado anterior la resolución de la ecuación de la convección difusión se realizó para las condiciones de contorno que se derivan de la expresión (5.27). En este apartado emplearemos las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}
 (R=1.0 \div 1.5, \theta=0) &\longrightarrow \phi = 0.0 \\
 (R=1.5 \div 2.0, \theta=0) &\longrightarrow \phi = 1.0 \\
 (R=1.0, \theta=0 \div \pi/2) &\longrightarrow \phi = 0.0 \\
 (R=2.0, \theta=0 \div \pi/2) &\longrightarrow \phi = 1.0
 \end{aligned}
 \tag{5.31}$$

Para esta situación no se dispone de la solución analítica de la ecuación, excepto si el coeficiente de difusión  $\Gamma$  es nulo; en este caso se verificará que  $\phi = 0.0$  para  $(R=1.0 \div 1.5, \theta = 0 \div \pi/4)$  y  $\phi = 1.0$  para  $(R=1.5 \div 2.0, \theta = 0 \div \pi/4)$ .

En las Fig. 7a, Fig. 7b y Fig. 7c se representan los valores de  $\phi$  obtenidos según los distintos esquemas numéricos, en los puntos de coordenadas  $(R=1.0 \div 2.0, \theta = \pi/4)$ . Dichas figuras corresponden a valores del número de Peclet (definido según la expresión 5.29) de 50, 500 y al caso de  $\Gamma=0$  respectivamente.

En las Fig. 7a y Fig. 7b las líneas continuas se han obtenido

numéricamente mediante el esquema EDS\* y con una malla de discretización de 65x34 puntos; en la Fig. 7c la línea continua corresponde, como se indicó anteriormente, a la propia solución analítica. En las tres figuras, los valores puntuales de  $\Phi$  han sido obtenidos numéricamente con mallas de discretización de idéntica densidad que la empleada para los resultados de la Fig. 5.

### 5.3.2 Segundo ejemplo: flujo en un manantial

Este segundo ejemplo corresponde al flujo representado en la Fig. 3, en donde la distribución de velocidades está definida en la forma [8]:

$$v_r = \frac{\Lambda}{2\pi r}, \quad v_\theta = 0 \quad (5.32)$$

A diferencia del ejemplo anterior las líneas de corriente están distribuidas radialmente, mientras que las ortogonales están formadas por círculos concéntricos.

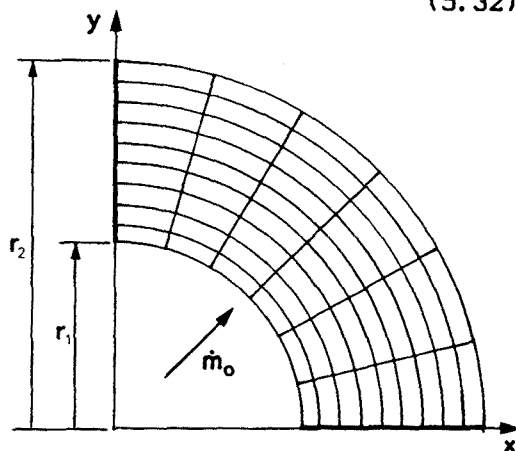


Fig. 3 Geometría y coordenadas  $(\epsilon, \eta)$  del segundo ejemplo de resolución (manantial).

De proceder de forma análoga a la indicada en el apdo. 5.3.1a se obtiene una función del tipo:

$$\phi = C_1 r^{1/Pe} + C_2 \theta + C_3 \quad (5.33)$$

la cual, para la distribución de velocidades (5.32) y para unas condiciones de contorno adecuadas, es solución de la ecuación diferencial (5.24). De emplear las condiciones de contorno expresadas en (5.26), la ecuación (5.33) toma la forma:

$$\phi = \frac{1 - R^{Pe}}{1 - R_2^{Pe}} + \frac{2\theta}{\pi} \phi_3 \quad (5.34)$$

en donde las variables adimensionales  $\Phi$  y  $R$ , y el parámetro  $Pe$  se han definido en la forma indicada en (5.28) y (5.29).

La integración numérica se ha efectuado para unos valores de  $\Phi_3 = .5$  y  $R_2 = 2.0$ ; las condiciones de contorno son las que se derivan de la propia expresión (5.34).

En la Fig. 8 se representa el porcentaje de error, en función del número de Peclet  $Pe$  y según los distintos criterios numéricos, en el punto de

coordenadas ( $R=1.55, \theta = \pi/4$ ). Los resultados referentes a los criterios CDS\*, UDS\* y EDS\* han sido obtenidos con una malla de discretización de  $11 \times 21$  puntos, mientras que para los resultados correspondientes a los esquemas numéricos CDS, UDS y EDS las mallas de discretización utilizadas fueron de  $21 \times 21$  puntos. La técnica iterativa de resolución de las ecuaciones discretas así como el criterio de convergencia son los indicados en el apdo. 5.3.1a.

### 5.3.3 Tercer ejemplo: flujo alrededor de un cilindro

El flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro se caracteriza por una distribución de velocidades de la forma [8]:

$$v_x = v_0 \left[ 1 - \frac{r_1^2 (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] \quad v_y = - \frac{2v_0 r_1 xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (5.35)$$

siendo  $r_1$  el radio del cilindro y  $v_0$  la velocidad del flujo en las zonas alejadas del cilindro.

Las líneas de corriente y sus ortogonales, correspondientes a dicha distribución de velocidades, son las representadas en la Fig. 4. Las condiciones de contorno elegidas para la resolución numérica de este caso son similares a las empleadas en el apdo. 5.3.1b; dichas condiciones son:

$$(x=0, y=1.5 \div 2.0) \rightarrow \phi = 0.0; \quad (x,y) \in C_i \rightarrow \phi = 0.0$$

$$(x=0, y=2.0 \div 2.5) \rightarrow \phi = 1.0; \quad (x,y) \in C_s \rightarrow \phi = 1.0$$

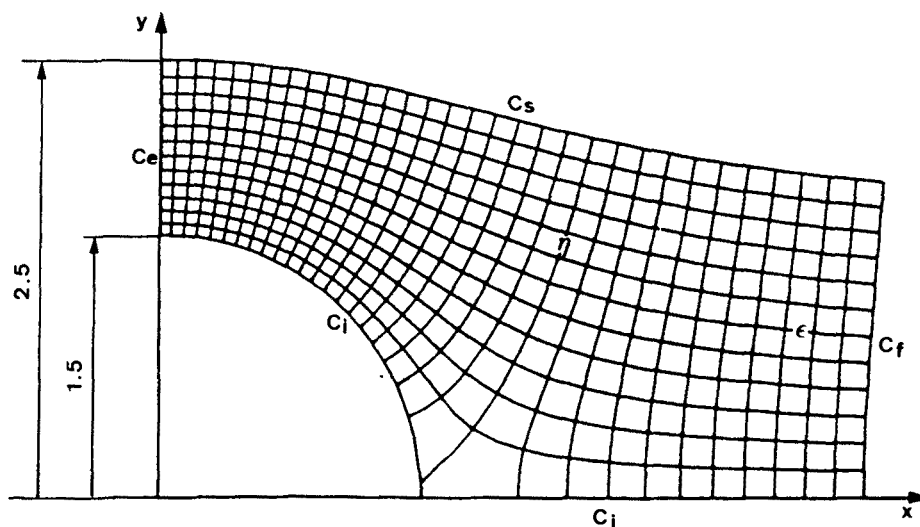


Fig. 4 Geometría y coordenadas  $(\epsilon, \eta)$  del tercer ejemplo de resolución (flujo alrededor de un cilindro).

Para el caso de coeficiente de difusión nulo, el valor de  $\Phi$  se mantiene constante a lo largo de cada línea de corriente. En la Fig. 9 se representa, para el caso de  $\Gamma = 0$ , los valores de  $\Phi$  obtenidos numéricamente según los esquemas UDS\* y EDS\*. La malla de discretización generada fue de  $33 \times 13$  puntos. La línea continua representa la solución exacta.

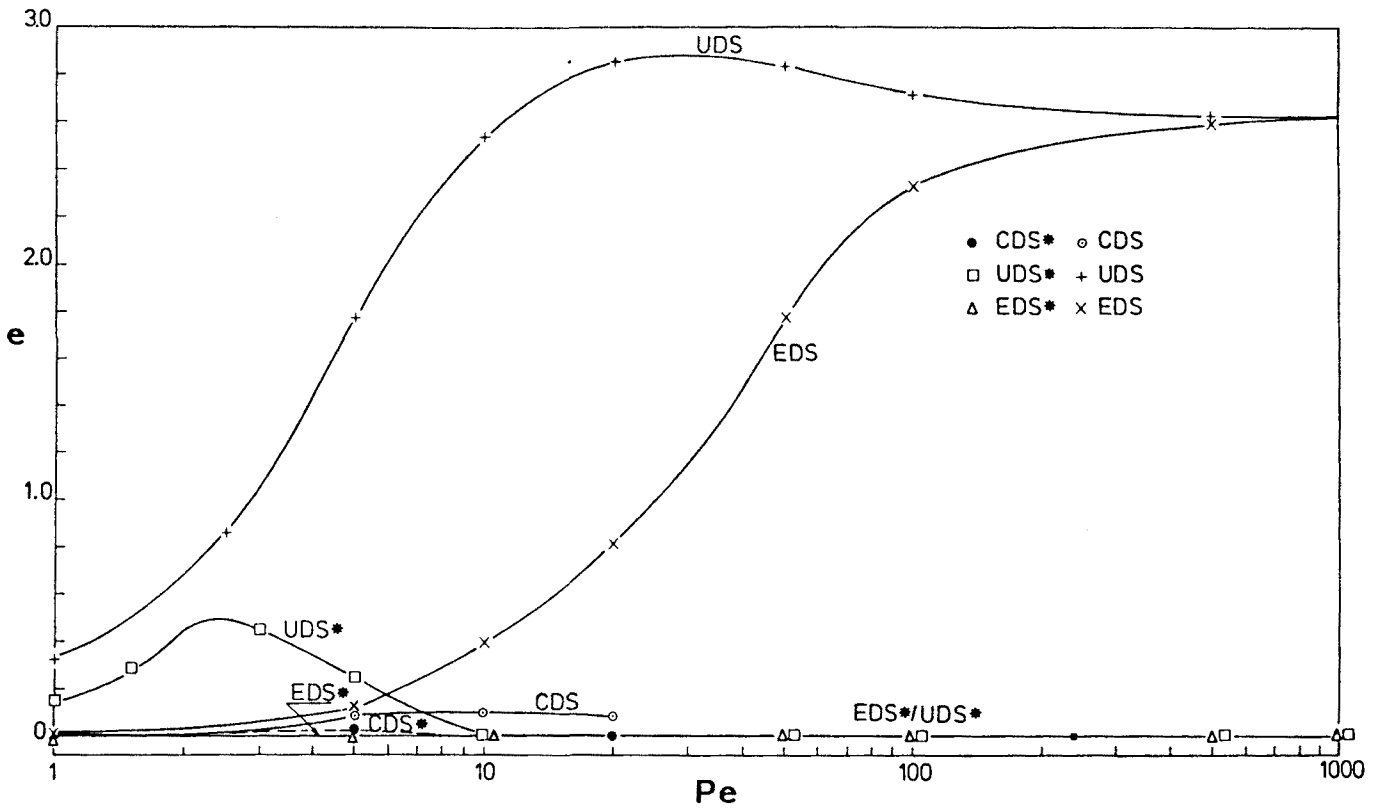


Fig. 5 Porcentaje de error, según los distintos criterios numéricos, en el primer ejemplo de resolución (vórtice).

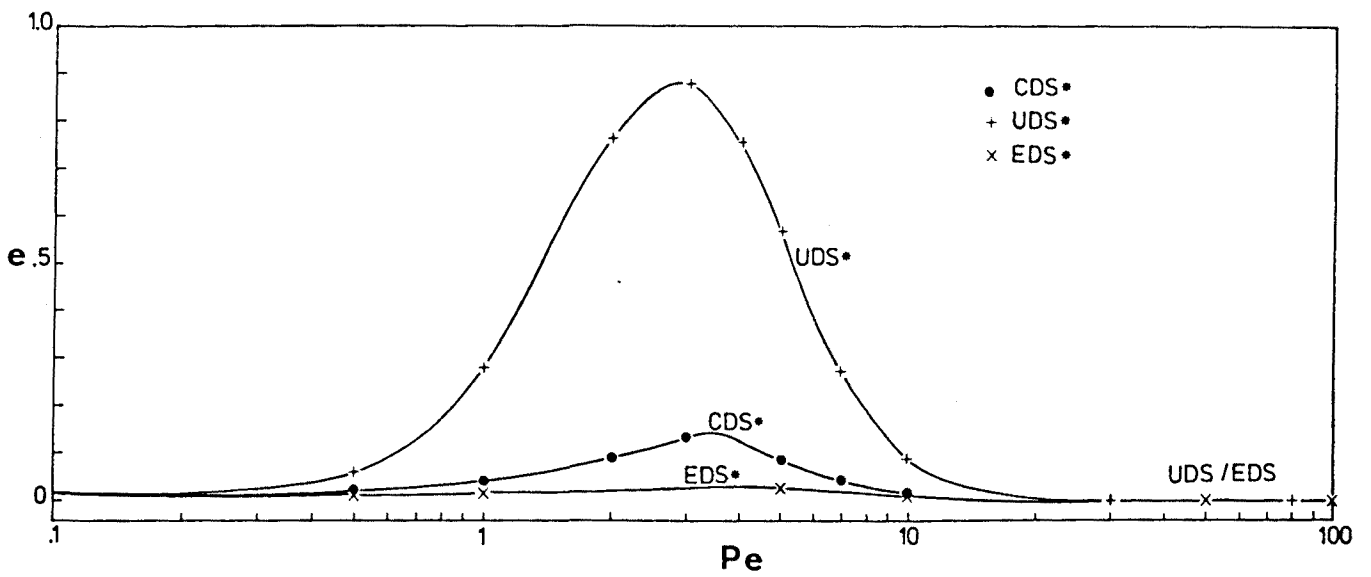


Fig. 6 Porcentaje de error, según los criterios numéricos CDS\*, UDS\* y EDS\*, en el primer ejemplo de resolución (vórtice).

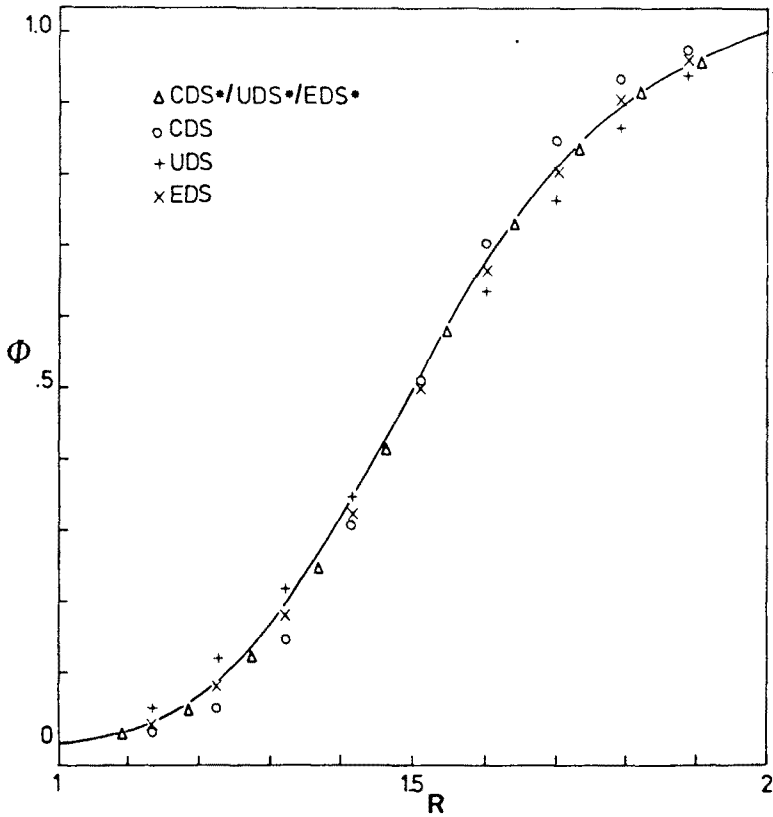


Fig. 7a Valores de la variable  $\Phi$ , correspondientes a los puntos situados en  $(R, \theta = \pi/4)$  y para  $Pe=50$ , en el primer ejemplo de resolución (vórtice).

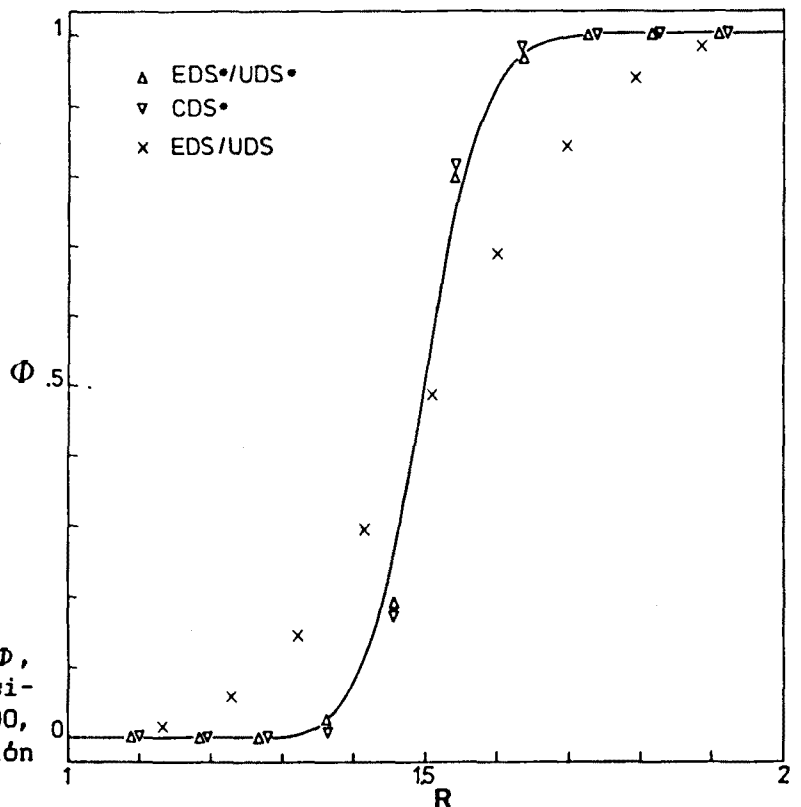


Fig. 7b Valores de la variable  $\Phi$ , correspondientes a los puntos situados en  $(R, \theta = \pi/4)$  y para  $Pe=500$ , en el primer ejemplo de resolución (vórtice).



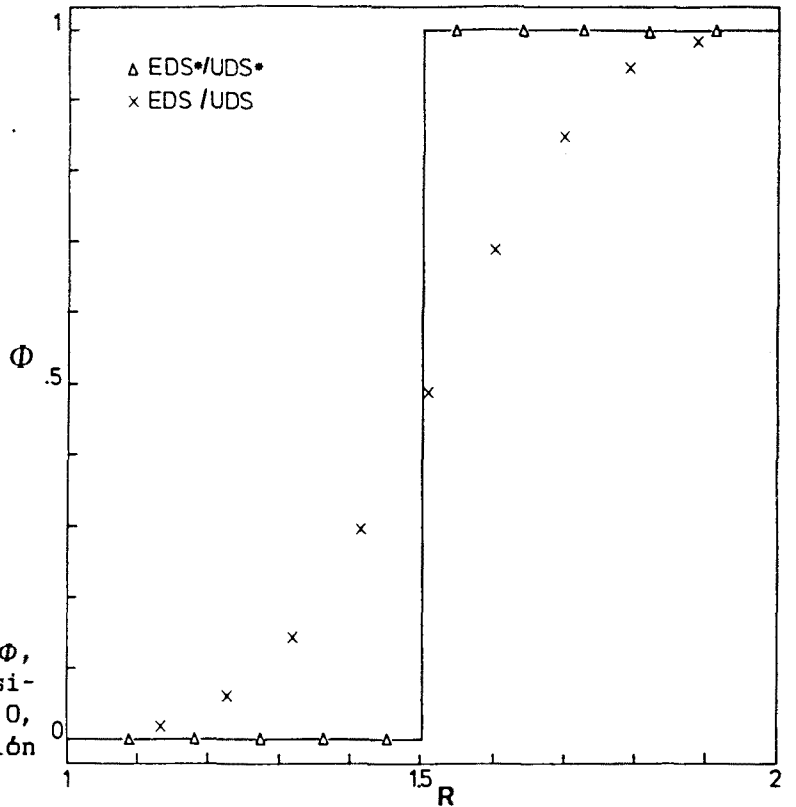


Fig. 7c Valores de la variable  $\Phi$ , correspondientes a los puntos situados en  $(R, \theta = \pi/4)$  y para  $\Gamma = 0$ , en el primer ejemplo de resolución (vórtice).

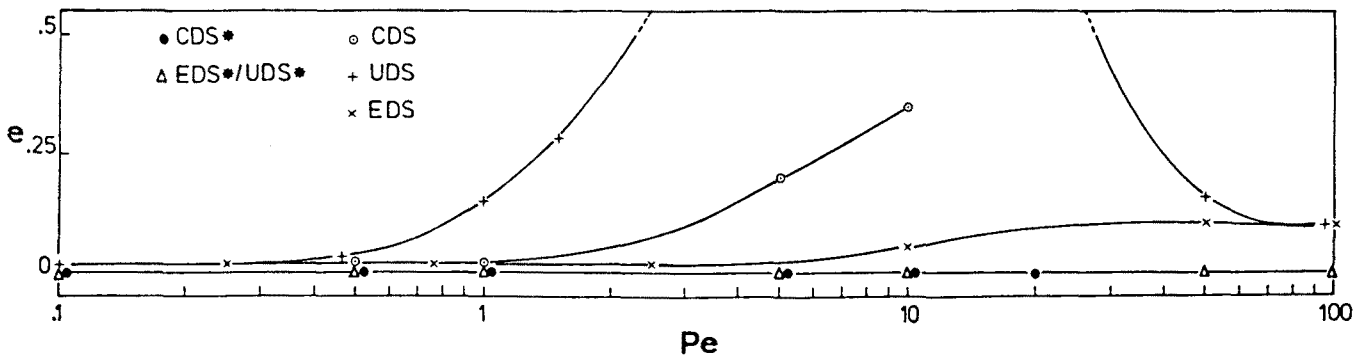


Fig. 8 Porcentaje de error, según los diferentes criterios numéricos, para el segundo ejemplo de resolución (manantial).

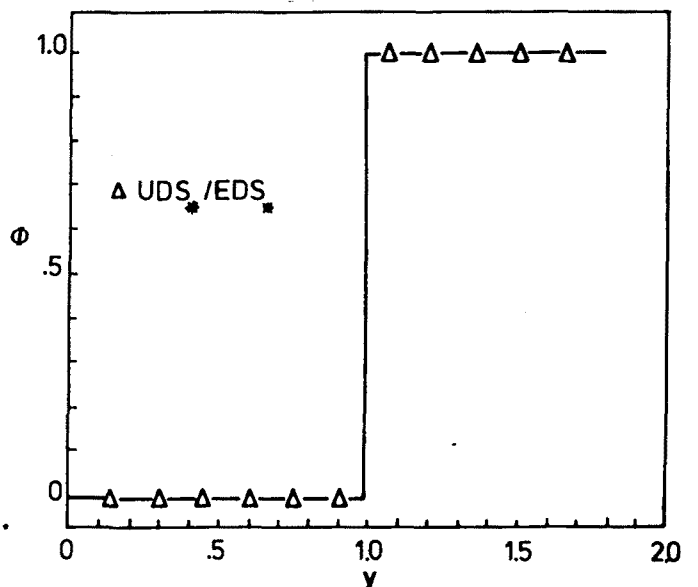


Fig. 9 Valores de  $\Phi$ , en la zona de salida Cf, en el tercer ejemplo de resolución (flujo alrededor de un cilindro).

## CONCLUSIONES

De la contrastación de los esquemas numéricos indicados se desprenden las siguientes conclusiones:

- La precisión de los resultados obtenidos según los tres criterios numéricos adaptados a mallas de discretización coincidentes con las líneas de corriente del flujo, ha sido superior a la que se consigue empleando mallas de discretización rectangulares. Se constata que los errores de truncamiento asociados con dichos criterios numéricos son reducidos al emplear determinados tipos de mallas de discretización.
- El esquema CDS\* es muy preciso en su rango de convergencia (bajos números de Peclet), si bien el esquema EDS\* presenta un mismo orden de precisión e incluso superior. De otra parte, mientras los esquemas UDS\* y EDS\* son incondicionalmente estables, el CDS\* está sujeto a inestabilidades numéricas siendo preciso recurrir a técnicas de subrelajación a fin de obtener soluciones convergentes en un rango más amplio de números de Peclet.
- A elevados números de Peclet los esquemas UDS\* y EDS\* se han comportado de manera idéntica, proporcionando unos resultados muy precisos.
- Para los ejemplos ensayados, de los tres criterios numéricos (CDS\*, UDS\* y EDS\*) el más apropiado ha resultado ser el EDS\*, dando unos resultados muy precisos en un amplio rango de números de Peclet. Ello, de otra parte, no es sorprendente teniendo en cuenta que las hipótesis establecidas (cf. inicio apdo. 5.3) favorecen la precisión de dicho esquema numérico.

## NOMENCLATURA

$a_{i,j}$	Coefficientes en ecuación de discretización (5.20).
$\vec{a}, \vec{b}$	Coefficientes de linearización del término fuente, ec. (5.11).
$\vec{b}_1, \vec{b}_2$	Vectores unitarios tangentes en cada punto a las líneas coordenadas $\epsilon$ y $\eta$ respectivamente
$d_{-i}, d_{+i}$	Distancia, medida sobre la coordenada $\epsilon$ , entre los puntos $(i-1, j)-(i, j)$ y $(i, j)-(i+1, j)$ respectivamente.
$d_{-j}, d_{+j}$	Distancia, medida sobre la coordenada $\eta$ , entre los puntos $(i, j-1)-(i, j)$ y $(i, j)-(i, j+1)$ respectivamente.
$d_{-i/2}, d_{+i/2}$	Distancia, medida sobre la coordenada $\epsilon$ , entre los puntos $(-i/2)-(i, j)$ y $(i, j)-(+i/2)$ respectivamente.
$d_{-j/2}, d_{+j/2}$	Distancia, medida sobre la coordenada $\eta$ , entre los puntos $(-j/2)-(i, j)$ y $(i, j)-(+j/2)$ respectivamente.
$e$	Porcentaje de error de la solución numérica respecto a la analítica, $e = 100 \cdot  \Phi_{\text{num}} - \Phi_{\text{ana}}  / \Phi_{\text{ana}}$ .
$\exp(z)$	Notación equivalente a $e^z$ .
$F$	Término fuente.
$g_{ij}$	Componentes del tensor métrico contravariante. Si coordenadas curvilíneas ortogonales $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$ .
$h$	Entalpia específica.
$h_1, h_2$	Factores de escala, $h_i = \sqrt{g_{ii}}$ .
$\vec{J}$	Término combinado de convección-difusión, ec. (5.3).
$J_1, J_2$	Componentes del vector $\vec{J}$ en las direcciones definidas por los vectores unitarios $\vec{b}_i$ .
$\dot{m}$	Flujo másico.
$p$	Presión.
$Pe$	Número de Peclet, ec. (5.29).
$Pe_{k/2}$	Número de Peclet correspondiente al punto $k/2$ de la malla; $k = +i, -i, +j, -j$ .
$q^i$	Coordenadas curvilíneas; $q^1 = \epsilon$ , $q^2 = \eta$ .
$S_{k/2}$	Superficie de la cara correspondiente al punto $k/2$ del V.C., $k = +i, -i, +j, -j$ .
$t$	Tiempo.
$T$	Temperatura
$\vec{v}$	Vector velocidad.
$v_x, v_y$	Componentes cartesianas de la velocidad.
$v_r, v_\theta$	Componente radial y tangencial de la velocidad en coordenadas cilíndricas.
$v_1, v_2$	Componentes de la velocidad en las direcciones definidas por los vectores unitarios $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ respectivamente.
$V_{i,j}$	Volumen de control asociado al punto $(i, j)$ de la malla.
$x, y$	Coordenadas cartesianas.
$q_v$	Calor generado por focos internos.
$r, \theta$	Coordenadas cilíndricas.
$R$	Radio adimensional, ec. (5.28).
$\Gamma$	Coefficiente de difusión.
$\epsilon, \eta$	Coordenadas curvilíneas ortogonales.
$\lambda$	Conductividad térmica.
$\Lambda$	Intensidad del vórtice o del manatial.
$\rho$	Densidad.

- $\Phi$  Variable  $\phi$  en forma adimensional, ec. (5.28).
- $\phi$  Variable dependiente en la ec. de la convección-difusión (5.2).
- $\phi^*$  Función de disipación.

Nota: Los criterios numéricos "central, upwind and exponential difference" adaptados a mallas de discretización coincidentes con las líneas de corriente del flujo y con sus ortogonales, se indican mediante la notación CDS\*, UDS\* y EDS\*.

La aplicación normal de dichos criterios a mallas de discretización rectangulares se ha indicado por la notación CDS, UDS y EDS.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] S.V.PATANKAR, 'Numerical Heat Transfer and Fluid Flow', Hemisphere Publishing Corporation, Washington D.C., 1980.
- [2] R.COURANT, E.ISAACSON, M.REES, 'On the Solution of Non-Linear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences', Comm. Pure Appl. Math., Vol. 5, 1952.
- [3] G.D.RAITHBY, K.E.TORRANCE, 'Upstream-Weighted Differencing Schemes and their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow', Comput. Fluid, Vol. 2, 1974.
- [4] R.W.SMITH, A.G.HUTTON, 'The Numerical Treatment of Advection: a Performance Comparison of Current Methods', Numerical Heat Transfer, Vol. 5, 1982.
- [5] A.OLIVA, 'Resolución sistemática por métodos numéricos de la transmisión de calor por conducción y convección en condiciones subsónicas y de estabilización', Tesis Doctoral, ETSIIT, UPB, Terrassa, 1982.
- [6] C.D.PEREZ SEGARRA, A.OLIVA, R.CARRERAS 'Método numérico para la resolución de la ecuación de la energía por elementos finitos', II Congreso de Ingeniería Mecánica, Sevilla, 1983.
- [7] E.R.G.ECKERT, R.M.DRAKE, 'Analysis of Heat and Mass Transfer', McGraw-Hill, New York, 1972
- [8] I.J.SHAMES, 'La mecánica de los fluidos', Ed. del Castillo S.A., Madrid, 1967.

CONCLUSIONES GENERALES

Y

ACTUACIONES FUTURAS

## CONCLUSIONES GENERALES

En lo que se refiere a la resolución de la región de flujo potencial (cap. 2):

- En la resolución numérica de flujos a través de dominios de geometría irregular, la discretización del dominio por mallas adaptables a los contornos posibilita un tratamiento más sencillo y general que el que se deriva del empleo de mallas de discretización rectangulares.

La precisión de los resultados obtenidos está condicionada por el tipo de malla generada y por los esquemas numéricos utilizados en la discretización de las ecuaciones. El empleo de mallas con discontinuidades o con una distribución irregular de líneas, incrementa el orden de error del método numérico. De entre los esquemas numéricos probados, resulta aconsejable el empleo de esquemas de tipo integral (i.e. las ecuaciones de discretización son obtenidas de efectuar el balance apropiado sobre volúmenes de control finitos), pues de esta forma se consigue una mejor interpretación física de los criterios numéricos adoptados así como un tratamiento más sencillo de las condiciones de contorno.

Los coeficientes métricos, a pesar de que puedan ser conocidos analíticamente, es conveniente que sean evaluados numéricamente y según criterios de aproximación de las derivadas análogos a los empleados para la variable dependiente.

- En situaciones en donde sea posible utilizar el potencial de velocidad o la función de corriente, es aconsejable el empleo de esta última por cuanto la rapidez de convergencia es muy superior y, en general, la precisión en los resultados es mayor.
- A medida que aumenta el número de Mach pueden presentarse problemas de convergencia, siendo conveniente el empleo de adecuados factores de subrelajación para las velocidades.

En lo que se refiere al cálculo de las capas límites (Cap. 3):

- El método empleado es bastante general, permitiendo el análisis de la capa límite laminar y turbulenta en flujos con propiedades físicas variables. También permite considerar la posibilidad de distribuciones arbitrarias de velocidad y temperatura en el contorno exterior de la capa límite, así como distribuciones arbitrarias de temperaturas y/o flujos caloríficos en la pared.
- El esquema numérico presenta una rápida convergencia y proporciona unos resultados suficientemente precisos con mallas relativamente poco densas.

En lo referente a la resolución conjunta zona potencial-capas límites (Cap. 4):

- El método resulta potente por cuanto permite la obtención de la distribución de velocidades, presiones y temperaturas en todo el dominio del flujo; ello posibilita la determinación de la fricción y de la transferencia de calor en los contornos.

- La resolución de la región de flujo potencial mediante la generación de coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos, confiere gran flexibilidad al esquema numérico; esta característica ha permitido el desarrollo de un software de carácter general, fácilmente adaptable a diferentes configuraciones de flujos.
- Debido al tipo de interacción que se establece entre la zona potencial y las capas límites durante el proceso iterativo de resolución, el empleo de adecuados factores de subrelajación para la evaluación de los espesores de desplazamiento acelera la convergencia del método.

Referentes a la resolución de la ecuación de la energía escrita en la forma de la ecuación de la convección difusión (Cap.5):

- La precisión de los resultados obtenidos según los tres criterios numéricos CDS, UDS y EDS, adaptados a mallas de discretización coincidentes con las líneas de corriente del flujo, ha sido superior a la que se consigue empleando mallas de discretización rectangulares. Se constata que los errores de truncamiento asociados con esos criterios numéricos son reducidos al emplear determinados tipos de mallas de discretización.



## ACTUACIONES FUTURAS

A medio plazo se han previsto las siguientes líneas de actuación:

- Generalización de la resolución de flujos potenciales, mediante el empleo del potencial de velocidad y en base a la generación de coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos, a situaciones de flujo tridimensional. Cabe pensar que la experiencia adquirida en el estudio de los diferentes criterios de discretización de las ecuaciones para el caso bidimensional, será directamente extrapolable al caso tridimensional; es por ello que el esfuerzo en este sentido se centrará, probablemente, en las técnicas de generación de mallas de discretización tridimensionales.
- Puesta a punto, para el caso de capas límites bidimensionales, de modelos de turbulencia que empleen una ecuación diferencial (en la que la variable dependiente sea una cantidad turbulenta, e.g., modelo k-L), o bien dos ecuaciones diferenciales (e.g., modelo k- $\epsilon$ ). Los resultados obtenidos se contrastarán entre si y con los que se derivan del modelo de turbulencia empleado en el capítulo 3.
- Resolución de las capas límites tridimensionales, laminares y turbulentas, en base a criterios numéricos y modelos de turbulencia análogos a los empleados en el capítulo 3.
- Resolución directa de las ecuaciones de conservación en todo el dominio para flujos laminares y turbulentos. En una primera fase se partirá de la experiencia ya adquirida en la resolución directa de las ecuaciones de la función de corriente-vorticidad (cf. ref. [36] en Cap.1), generalizándose el estudio a flujos turbulentos mediante la aplicación de modelos del tipo k- $\epsilon$ . En una segunda fase se realizará la puesta a punto de los algoritmos numéricos SIMPLE ('Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations') y SIMPLER ('SIMPLE Revised') de Patankar y Spalding, generalizados a mallas de discretización adaptables a los contornos. Se aplicará el criterio de resolución de la ecuación de la energía indicado en el capítulo 5. El análisis de la turbulencia se realizará en base a modelos tipo k- $\epsilon$ .
- Resolución y verificación experimental del ejemplo del flujo en una canalización (cf. apdo. 4.3, Situación B) considerando la naturaleza tridimensional del flujo. El estudio se efectuará mediante la resolución conjunta zona potencial-capas límites. Una vez superado este estadio, se intentará la resolución directa de las ecuaciones en todo el dominio en base a los criterios anteriormente comentados.
- Para una más precisa verificación experimental, deberá completarse la instrumentación actualmente existente en la unidad de ensayo; ello permitirá realizar una mejor estimación de las condiciones del flujo: distribución de velocidades a la entrada del dominio, formación de las capas límites, localización experimental del punto de transición, grado de turbulencia de la corriente, etc. De otra parte, se hace necesaria una adecuada automatización en la recogida de datos, dado el previsible incremento de puntos de lectura.

M M M M  
1 M M M M  
M M M M

