

Índice General

Agradecimientos

Introducción	iii
1 Variedades discretas	1
1.1 Estructura geométrica	2
1.2 Espacios de funciones	10
1.3 Campos sobre una variedad discreta	14
1.3.1 Campos de vectores y de covectores	14
1.3.2 Campos de aplicaciones bilineales	19
2 Cálculo en diferencias sobre variedades Riemannianas discretas	35
2.1 Variedades Riemannianas discretas	36
2.2 Operadores en diferencias	44
2.3 La cohomología de una variedad discreta	69
3 Integración sobre variedades Riemannianas discretas	77
3.1 Integración sobre curvas	78
3.2 El Teorema de la Divergencia	90
3.3 Identidades de Green	92
4 Problemas de Contorno Discretos	103
4.1 Problemas de contorno autoadjuntos	104

4.2	Operadores de Green, de Robin y de Poisson	120
4.3	Núcleos de Green, de Robin y de Poisson	129
5	Solución de problemas de contorno mediante medidas de equilibrio	151
5.1	Teoría del Potencial en espacios finitos	152
5.2	El núcleo asociado a los operadores en diferencias autoadjuntos	156
	Conclusiones y desarrollos futuros	183
	Bibliografía	187
	Índice de materias	191

Introducción

En este trabajo se desarrolla un cálculo vectorial sobre estructuras discretas, análogo al de los modelos continuos. Para alcanzar este fin, se considera como espacio subyacente un multigrafo finito dotado de una estructura Riemanniana. Esto permite construir los operadores en diferencias básicos y plantear problemas de contorno, que formalmente son el equivalente discreto de problemas de contorno sobre variedades Riemannianas compactas. Además de estudiar la resolubilidad de tales problemas, se construyen los operadores integrales que proporcionan su solución y se analizan las propiedades de los correspondientes núcleos. Asimismo, para un extensa familia de problemas de contorno, se obtienen fórmulas explícitas de tales núcleos integrales, en términos de las soluciones de los denominados problemas de equilibrio, que están íntimamente relacionados con las propiedades geométricas de la estructura Riemanniana discreta.

El tema planteado en este trabajo tiene conexiones con diferentes áreas de la Matemática, como son la Geometría Diferencial, en la medida en que se construye un cálculo diferencial e integral sobre una variedad discreta y el operador fundamental es el operador de Laplace-Beltrami asociado a la estructura Riemanniana, y la Teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales y más concretamente con los problemas de contorno autoadjuntos para operadores elípticos de segundo orden. Por otra parte, son innegables las conexiones existentes con la Combinatoria, con la teoría de Redes Eléctricas y con los Métodos de Aproximación, fundamentalmente con los esquemas en diferencias finitas para la resolución de problemas de contorno. Finalmente, debemos remarcar la especial conexión que este trabajo mantiene con la Teoría del Potencial. Aunque inicialmente dicha relación pueda parecer natural, ya que la Teoría de Formas de Dirichlet es una herramienta fundamental en el tratamiento de problemas de contorno sobre variedades Riemannianas y sobre redes infinitas, el enfoque que presentamos aquí es diferente y está enmarcado en el contexto de la Teoría del Potencial respecto de un núcleo. Para aclarar el sentido de este planteamiento, será ilustrativo hacer una breve reflexión sobre sus antecedentes.

El punto de partida lo constituye la obtención de potenciales de equilibrio en espacios abstractos y respecto de un núcleo general. Una metodología de resolución de tal problema consiste en utilizar exclusivamente medidas discretas y construir su solución como límite de una sucesión de medidas discretas cuyos puntos soporte están localizados por propiedades de optimalidad. Éste es un método clásico de resolución del problema que tuvo sus orígenes en los trabajos pioneros de M. Fekete, G. Polya y G. Szegő sobre la determinación del Diámetro

Transfinito de un conjunto y su culminación con los de O. Frostman, que marcan el comienzo de lo que se ha dado en llamar Teoría Moderna del Potencial. A lo largo de los años estas técnicas, agrupadas bajo la denominación de *método de Puntos Extremales*, se han aplicado a problemas de distinto carácter, tanto de índole teórica como aplicada. Así por ejemplo, los puntos extremales han sido utilizados para resolver problemas de Dirichlet sobre compactos de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 y también en problemas de los ámbitos de la Teoría de la Aproximación y de los Polinomios Ortogonales. Todos los resultados anteriores se basan en la construcción de medidas discretas cuyos puntos de soporte se obtienen mediante procesos de optimización y con igual masa en cada uno de ellos. El hecho de que la función objetivo en el proceso de optimización sea no lineal, hace que el cálculo explícito de los puntos extremales sea muy complicado, hasta tal punto que recientemente S. Smale ha propuesto la búsqueda de puntos extremales sobre la esfera como uno de los retos matemáticos para el siglo XXI, en el contexto de la complejidad computacional.

La idea clave de nuestra aportación en la resolución del problema de equilibrio, estriba en la incorporación de la distribución de masa como una variable más a tener en cuenta en el proceso de obtención de la sucesión de medidas discretas que convergen a la solución. Esta metodología ha sido denominada *método de Cargas Extremales*. Si bien la incorporación de la optimización de la masa no introduce nuevas complicaciones técnicas, desde un punto de vista operativo, fijar adecuadamente los puntos de soporte y optimizar la distribución de masa sobre ellos, es un problema de optimización lineal cuya solución es una aproximación de la medida de equilibrio. Cuando el espacio subyacente es finito, el problema de equilibrio sigue estando bien planteado mientras que la búsqueda de los puntos extremales carece de sentido. Por tanto, la única herramienta disponible para resolver el problema de equilibrio es el método de cargas extremales que establece así un puente entre los métodos de los casos continuo y discreto.

Sin duda, entre las estructuras finitas más relevantes figuran los multigrafos. En este caso, su matriz Laplaciana es la que posee mayor información sobre el multigrafo y un gran número de trabajos se centran en el estudio de sus propiedades. Como en un espacio finito las matrices cuadradas, cuyo orden es el cardinal del espacio, están identificadas de forma natural con los núcleos, nuestro planteamiento en el estudio de este tipo de estructuras discretas, consiste en considerar la matriz Laplaciana como un núcleo en el contexto de la Teoría del Potencial Discreto, aunque en este ámbito los núcleos con signo como el Laplaciano no habían merecido suficiente atención. No obstante, el núcleo Laplaciano satisface principios relevantes que, en particular, permiten resolver el problema de equilibrio, de manera que el método de cargas extremales tiene viabilidad en este marco.

Por otra parte, un problema de equilibrio sobre un conjunto es un problema de Dirichlet particular, muy conectado con los problemas de Dirichlet que caracterizan a la función de Green del conjunto y esta conexión nos ha permitido expresarla fácilmente en términos de medidas de equilibrio. Esta vía de resolución de algunos problemas de contorno nos ha conducido a construir el marco de problemas de contorno discretos cuya solución puede ser expresada en términos de medidas de equilibrio. Tales problemas resultan ser el análogo discreto de los problemas de contorno autoadjuntos relativos a operadores elípticos de segundo

orden con condiciones de contorno mixtas.

Una de las principales aportaciones del presente trabajo consiste en presentar la formulación de los aludidos problemas de contorno, dotando al espacio subyacente de estructura de variedad Riemanniana discreta, de manera que la parte principal del operador en diferencias es el operador de Laplace-Beltrami relativo a la estructura métrica considerada. Esta metodología extiende el tratamiento de problemas de contorno sobre multigrafos y redes realizado hasta la fecha, que en nuestra terminología correspondería a la elección de una estructura Riemanniana sobre el multigrafo cuyo campo de matrices asociado es diagonal. La noción fundamental para llevar a cabo esta formulación es la de espacio tangente a un punto, que nosotros definimos en términos de adyacencia. Una vez establecido este concepto, el guión proporcionado por la Geometría Diferencial nos permitirá construir un cálculo vectorial sobre un multigrafo, cuya culminación es la formulación y análisis de resolubilidad de problemas de contorno relativos al operador asociado a la estructura Riemanniana.

Además de su posible interés teórico, la consideración de métricas generales sobre los multigrafos tiene consecuencias desde el punto de vista de las aplicaciones. Por una parte, los esquemas en diferencias finitas para la resolución de problemas de contorno elípticos pueden ser vistos como problemas de contorno discretos relativos a operadores de Laplace-Beltrami asociados a determinadas métricas. A modo de ejemplo, en este trabajo se obtienen las métricas que corresponden a los esquemas en diferencias consistentes con el operador de Laplace sobre retículas uniformes. Por otra parte, los problemas formulados con una Ley de Ohm generalizada en el ámbito de los circuitos eléctricos, quedan naturalmente recogidos al utilizar este tipo de métricas.

En otro orden de cosas, debemos señalar que en este trabajo se obtienen expresiones de las funciones de Green asociadas a los diferentes problemas de contorno, lo que representa quizá la herramienta más operativa para el análisis de este tipo de problemas.

Este trabajo se ha estructurado en cinco capítulos y en él se han mantenido las notaciones del modelo continuo con el propósito de simplificar la presentación y de hacer patente la analogía con el caso continuo.

En el primer capítulo se describe la estructura local de un multigrafo. Las nociones geométricas como vértice, rama, adyacencia y frontera de un conjunto son las habituales en este contexto. Para hacer más patente el propósito de este trabajo, en lo sucesivo los multigrafos se denominarán variedades discretas. El concepto fundamental introducido es el de espacio tangente en un vértice de la variedad, que consiste en el espacio generado por las combinaciones formales de las ramas incidentes en el vértice. Aunque la construcción del espacio tangente es similar a la realizada en el caso continuo por medio de los vectores tangentes a las curvas coordenadas, la naturaleza discreta de nuestro caso, hace aflorar aquí la mayor discrepancia entre ambas situaciones: La ausencia de sistemas coordenados que parametrizen la variedad discreta hace que la dimensión del espacio tangente cambie de un vértice a otro. No obstante, el comportamiento formal de las variedades discretas responde a la situación unidimensional, como queda patente en el desarrollo del presente trabajo. La noción de espacio tangente permite introducir de forma natural los conceptos locales

habituales en el caso diferencial. De esta manera, damos las nociones de campos vectoriales, de formas, de campos de aplicaciones lineales y bilineales y de campos de matrices. Una característica del caso discreto, que será importante en la construcción de los operadores en diferencias, reside en el hecho de que todo campo puede ser descompuesto de forma única como suma de un campo simétrico y de otro antisimétrico.

El segundo capítulo comienza introduciendo el concepto de variedad Riemanniana discreta asignando a una variedad una estructura métrica, consistente en un campo de bilineales simétricas definidas positivas y un peso que regula la importancia de cada vértice y que en cierta forma emula el papel del determinante de la métrica en el caso continuo. El siguiente paso consiste en la introducción de un producto interno en el espacio de campos sobre la variedad y también de un producto interno con peso en el espacio funciones sobre los vértices. Una vez establecido el marco adecuado, abordamos la construcción de un cálculo en diferencias sobre la variedad. Para ello tomamos la derivada como operador básico y a partir de él se definen el gradiente y la divergencia en términos de dualidad respecto de los productos internos establecidos. La composición del gradiente con la divergencia da lugar al operador de Laplace-Beltrami o Laplaciano de la variedad. La consideración de campos y métricas generales tiene su reflejo en las propiedades de los operadores en diferencias: el hecho de que el soporte de la parte simétrica o de la parte antisimétrica de un campo contenga los vértices adyacentes al soporte del campo, determina que tanto el gradiente como la divergencia son operadores de primer orden, mientras que el Laplaciano es de segundo orden, lo que es compatible con ser composición de dos operadores de primer orden. Esta propiedad tiene como consecuencia que la expresión del Laplaciano de una función en un vértice involucra no sólo a los vértices adyacentes, sino también a los vértices a distancia 2. Cuando se consideran métricas generales sobre retículas en el espacio euclídeo, se obtienen expresiones del Laplaciano que formalmente son idénticas a los esquemas en diferencias para el operador de Laplace, construidos mediante plantillas que involucran a los nodos a distancia menor o igual que 2 del punto de evaluación. En particular, mostramos que todos los esquemas en diferencias de tipo positivo sobre retículas uniformes y consistentes con el operador de Laplace, coinciden con el operador de Laplace-Beltrami asociado a métricas uniformes sobre la retícula. La última parte del capítulo está destinada a reproducir en el caso discreto la construcción de los grupos de cohomología de De Rham. Para ello, atendiendo a la estructura estrictamente unidimensional de la variedad, consideramos que el espacio de n -formas, $n \geq 1$, coincide con el de las formas y se define el complejo de De Rham considerando como operadores las proyecciones simétrica y antisimétrica alternativamente. Esta elección recupera la característica de Euler de la variedad por medio de la suma alternada de los números de Betti y al trabajar en dualidad permite definir el Laplaciano de Hodge sobre las formas o los campos. Obtenemos así un teorema de descomposición de campos, análogo al teorema de descomposición de Hodge.

El cálculo integral en variedades Riemannianas discretas es el objetivo del tercer capítulo. Nuevamente seguimos el guión que nos proporciona la Geometría Diferencial y por ello comenzamos elaborando el concepto de curva sobre la variedad, que debe ser el análogo de la noción de curva diferenciable. Recuperamos las operaciones habituales con curvas y en particular establecemos las condiciones para que el producto o composición de curvas

tenga sentido. A continuación, definimos la noción de circulación de un campo a lo largo de una curva y a partir de ella obtenemos la contrapartida discreta del Teorema de Stokes-Ampère. También caracterizamos los campos conservativos y en particular mostramos que los únicos campos irrotacionales y conservativos son los campos gradiente. Nuestro estudio de curvas concluye con la definición de longitud y de geodésica y el estudio de algunas de sus propiedades. Para abordar los resultados de integración sobre un conjunto es necesario precisar los conceptos de frontera y de campo normal. Una vez establecidos ambos se demuestra un teorema de la Divergencia mimético al del caso continuo. Este resultado permite establecer directamente las identidades de Green para el caso de métricas ortogonales. Para desarrollar el caso general, es necesario describir en detalle la expresión del operador de Laplace-Betrami cuando se aplica a funciones soportadas en una subvariedad. Obtenemos que, sobre estas funciones, el Laplaciano se expresa como suma de un operador de segundo orden, su parte principal, y de otro de orden 0. La hipótesis de positividad del coeficiente de la parte principal, permite identificar ésta con un operador de Laplace-Beltrami asociado a una métrica ortogonal y reducir la demostración de las Identidades de Green al caso anterior. El estudio llevado a cabo es lo suficientemente general como para permitir incluir en la formulación variaciones no tangenciales de las funciones involucradas.

En el capítulo cuarto, utilizamos los conceptos y técnicas desarrollados en los anteriores para plantear problemas de contorno sobre subvariedades. Los problemas abordados son los análogos de los problemas de contorno elípticos autoadjuntos y de segundo orden del caso continuo. Aunque en el caso discreto cabe la posibilidad de contemplar términos de primer orden sin perder el carácter autoadjunto, con vistas a seguir conservando, en la medida de lo posible, la analogía con el caso continuo, nos restringimos aquí a trabajar con operadores en diferencias que son suma del operador de Laplace-Betrami y un término de orden 0. La aplicación de las Identidades de Green sobre una subvariedad conduce a la descripción de las condiciones de contorno que pueden considerarse para que el correspondiente problema sea autoadjunto. El problema de contorno que trataremos será por tanto el denominado problema Mixto Dirichlet-Robin con derivada oblicua, que contiene como casos particulares a los problemas de contorno clásicos y también a la ecuación de Poisson para una componente conexa de la variedad. La hipótesis básica que es preciso asumir es la de la positividad de la función coeficiente de la estructura Riemanniana, esto es, de los coeficientes del operador de Laplace-Beltrami. Esta hipótesis es necesaria para aplicar la técnica de integración por partes y puede interpretarse como la contrapartida discreta de la condición de elipticidad uniforme. Asumiéndola se pueden determinar resultados de existencia y unicidad de soluciones y también permite, en muchas circunstancias, presentar una formulación variacional de todos los problemas de contorno planteados. Nuestro tratamiento de los problemas de contorno discretos presenta algunas particularidades respecto del efectuado en el caso continuo. La primera de ellas concierne al análisis del término de orden 0, que permite introducir una relajación de las condiciones de existencia y unicidad de soluciones. Si bien para el problema de Dirichlet, esta técnica puede asimilarse a la relajación del término de orden cero que proporciona la constante de Poincaré en el caso continuo, no parece existir un equivalente para el resto de problemas. Otra peculiaridad de nuestro planteamiento, que tiene relación implícita con la anterior, consiste en que los problemas de contorno pueden ser reformulados

para dar lugar a un nuevo problema que incorpora las condiciones de Robin al operador. Resulta así que todo problema de contorno es equivalente, o bien a un problema de Dirichlet, o bien a una ecuación de Poisson definidos sobre una nueva variedad Riemanniana y cuyo operador en diferencias tiene como parte principal el operador de Laplace-Betrami asociado a esa nueva variedad. Esta metodología es por tanto similar a la habitual en el tratamiento de los esquemas en diferencias, con los cuales mantenemos una estrecha relación como se ha observado anteriormente. De hecho, nuestro enfoque permitiría aplicar el cálculo vectorial en diferencias desarrollado aquí a esquemas definidos sobre redes completamente irregulares. Este planteamiento tiene además la ventaja de contener un tratamiento sistemático de las condiciones de contorno que, en el contexto de los esquemas en diferencias, siempre es un problema delicado. Una vez analizadas las condiciones de existencia y unicidad de soluciones de los problemas planteados, nos preocupamos de la obtención de los operadores lineales que pueden ser considerados como inversos de los problemas semihomogéneos asociados a un problema de contorno. Siguiendo la analogía con el caso continuo, tales operadores serán tratados como operadores integrales e incluyen las versiones discretas de los operadores de Green y de Poisson. Naturalmente, cuando se satisfacen las condiciones de existencia y unicidad de soluciones, tales operadores están unívocamente determinados, mientras que en general no son más que inversos a la derecha de la restricción de los operadores en diferencias sobre determinados subespacios. Siguiendo la nomenclatura clásica, la situación se corresponde con la construcción de operadores de Green generalizados. El capítulo finaliza con la descripción de los núcleos de los anteriores operadores integrales. En particular, interpretándolos desde el punto de vista del álgebra lineal, resulta que los núcleos asociados a los operadores integrales no son más que matrices inversas a la derecha de la matriz de coeficientes del sistema lineal correspondiente al problema de contorno. En este sentido, los resultados finales del capítulo pueden interpretarse en términos de la obtención de todas las matrices inversas a la derecha de las matrices de coeficientes de los sistemas lineales asociados a problemas de contorno, lo que incluye además la caracterización de aquellas que poseen propiedades adicionales como por ejemplo, la de simetría.

En el último capítulo se aborda la resolución efectiva de los problemas de contorno tratados en el capítulo anterior. Para ello, se utiliza nuevamente la hipótesis de positividad del coeficiente de la estructura Riemanniana y dado que en estas circunstancias, todo problema de contorno es equivalente a un problema de Dirichlet o a una ecuación de Poisson, estudiamos sólo estos casos. El resultado fundamental consiste en la obtención de expresiones explícitas de las funciones de Green correspondientes y con este fin planteamos el problema desde el contexto de la Teoría del Potencial. Por una parte nos preocupamos de demostrar que el operador en diferencias que define el problema de contorno, es decir el operador de Laplace-Beltrami más un término de orden 0, es un operador monótono o, de forma equivalente, satisface el principio del mínimo. Esta propiedad, que en términos de los esquemas en diferencias es más general que la de ser de tipo positivo, puede ser usada para establecer nuevamente las condiciones de existencia y de unicidad de soluciones de los problemas de contorno y para resolver el denominado problema de condensadores. Desde el punto de vista de la Teoría del Potencial, estos resultados suelen estar relacionados con el uso de las técnicas de Formas de Dirichlet. Nosotros adoptamos aquí otro enfoque a partir de la observación de

que en el caso finito dimensional todo operador lineal puede interpretarse como un operador integral y tiene asociado un núcleo integral, lo que no es más que una interpretación de que todo endomorfismo sobre un espacio vectorial de dimensión finita tiene asociada una matriz, una vez fijada una base. Con esta idea, el operador que define el problema de contorno, puede interpretarse como un núcleo sobre el espacio de vértices de la variedad. Nos preocupamos entonces de mostrar que, interpretado como núcleo, dicho operador satisface los principios de energía y del máximo, que son suficientes para asegurar la resolubilidad del problema de equilibrio para cualquier subconjunto propio de vértices. Aplicamos entonces los resultados de Teoría del Potencial respecto de un núcleo que se exponen al comienzo del capítulo. En particular, resulta que las soluciones del problema de equilibrio, las medidas de equilibrio, pueden hallarse mediante algoritmos de programación lineal. Además, las características especiales del núcleo Laplaciano implican que el soporte de la medida de equilibrio de un conjunto es el propio conjunto. Esta propiedad, que también es una consecuencia de la monotonía del operador en diferencias, resulta transcendental para poder expresar la solución de cada problema de contorno en términos exclusivamente de medidas de equilibrio. Nuevamente, los resultados son válidos sin necesidad de exigir que el término de orden 0 sea positivo. En particular, interpretado desde el punto de vista de los esquemas en diferencias, la metodología que desarrollamos puede aplicarse cuando la matriz del sistema lineal correspondiente es una matriz de Stieltjes, sin que sea necesaria la hipótesis de dominancia en la diagonal. Abordamos también el problema de encontrar la función de Green para la ecuación de Poisson cuando el problema homogéneo tiene soluciones no triviales, o en el lenguaje de los esquemas, cuando la matriz del sistema correspondiente es singular. La resolución de este problema nos permite generalizar a variedades Riemannianas discretas generales el concepto de resistencia efectiva entre dos vértices. Obtenemos que son válidos los resultados habituales para la resistencia efectiva, entre los que se encuentran el Teorema de Foster y la expresión de la función de Green del complementario de cada vértice en términos de las resistencias efectivas entre los vértices.

Capítulo 1

Variedades discretas

El objetivo final de este trabajo, consistente en resolver problemas de contorno sobre estructuras Riemannianas discretas, requiere el desarrollo de un gui3n proporcionado por la Geometr3a Diferencial sobre Variedades Riemannianas.

La consideraci3n de los multigrafos, y m3s generalmente de las redes el3ctricas, como la contrapartida discreta de las Variedades Riemannianas, est3 totalmente consolidada en la literatura sobre el tema. No obstante, las herramientas b3sicas de car3cter diferencial e integral suelen estar descritas en el contexto de la Topolog3a Algebraica, de manera que son habituales conceptos como cadenas, co-cadenas, borde y co-borde. En este trabajo, sustituiremos conceptos como los anteriores por los habituales en Geometr3a Diferencial, como por ejemplo, campos, formas, m3tricas, gradiente y divergencia. Como se intentará demostrar a lo largo de esta memoria, este punto de vista es m3s operativo desde el momento que permite tratar sistem3ticamente problemas sobre redes, planteados de forma an3loga a los del continuo, por ejemplo, caracterizaci3n de campos conservativos, Identidades de Green, problemas de contorno mixtos, funciones de Green y de Poisson.

En este cap3tulo se introduce la estructura local sobre un multigrafo finito, previa a la consideraci3n de los an3logos discretos de los operadores diferenciales. Por tanto, el concepto fundamental a introducir es el de espacio tangente en un v3rtice. Para ello, es preciso no hacer transcender el car3cter unidimensional que tiene todo grafo cuando se considera como complejo simplicial, pues en tal caso el espacio tangente deber3a ser tambi3n unidimensional, lo que conducir3a a una p3rdida de informaci3n sobre la conexi3n de un v3rtice con el resto del grafo. En consecuencia, la dimensi3n del espacio tangente en un v3rtice estar3 dada por el n3mero de ramas incidentes en 3l y por tanto, en general, variar3 de un v3rtice a otro. 3sta es de hecho la diferencia m3s sustancial entre los casos discreto y continuo. A pesar de ello, todas las herramientas construidas sobre el espacio tangente son consistentes con sus an3logos del caso continuo, en el sentido de que formalmente verifican las mismas propiedades.

Un modelo adecuado para el espacio tangente, permite considerar m3tricas generales sobre la variedad discreta, descritas localmente de forma an3loga al caso continuo. El an3lisis de

las transformaciones lineales asociadas a tales métricas, requiere la introducción de espacios de funciones más ricos que los que son habitualmente considerados en este contexto. Concretamente, aparecen de forma natural funciones que dependen conjuntamente de vértices y ramas, lo que conduce directamente a la noción de función componente de un campo y de una forma.

1.1 Estructura geométrica

En esta sección introducimos la estructura geométrica básica determinada por un multigrafo finito. Dado que uno de los objetivos fundamentales es establecer sobre estos objetos un cálculo en diferencias y un cálculo integral, pasaremos a denominar variedades discretas a tales multigrafos. Como la topología natural de estas estructuras es la topología discreta, evitaremos el tratamiento topológico y lo sustituiremos por una lectura geométrica de algunos conceptos topológicos básicos. Aunque también cabe situar estas estructuras discretas dentro del marco de la Topología Algebraica, nuestro tratamiento de los problemas seguirá un modelo más acorde con las herramientas de la Geometría Riemanniana y de hecho, los conceptos y métodos desarrollados en este trabajo intentan ser la contrapartida discreta de nociones y técnicas de Geometría Diferencial.

Dado que en el modelo discreto las cuestiones dimensionales dejan de ser relevantes, una de las diferencias más notables entre los modelos continuo y discreto radica en el concepto de frontera de un conjunto. Hemos optado por definir frontera de un conjunto como el conjunto de puntos no pertenecientes al conjunto y adyacentes a él y por tanto, la frontera de un conjunto no coincide jamás con la frontera de su complementario. La utilidad de esta elección se hará patente en capítulos posteriores. Además, aparece un nuevo tipo de frontera asociada a un conjunto, la frontera de ramas, que justamente pone en relación la frontera de un conjunto con la de su complementario. Un hecho remarcable, que diferencia los casos discreto y continuo, es que en general, un conjunto está estrictamente contenido en su adherencia. Esta propiedad de naturaleza claramente geométrica, permitirá introducir más adelante el concepto de orden de los operadores en diferencias.

Por otra parte, nuestro tratamiento también tiene diferencias con el realizado habitualmente en combinatoria. En esta sección la más importante es el concepto de camino, que para nosotros responde a la contrapartida discreta del concepto de camino continuo en Geometría.

Fijado un conjunto no vacío V , denotaremos por $V^{(2)}$ al subconjunto de $\wp(V)$ constituido por los subconjuntos de V con exactamente dos elementos. La nomenclatura fundamental empleada en esta sección es estándar y coincide, por ejemplo, con la utilizada en [10], [11] y [56].

Denominaremos *multigrafo* a una terna $\Gamma = (V, E, \theta)$ donde V y E son conjuntos no vacíos y θ es una aplicación $\theta: E \rightarrow V^{(2)}$. Cada elemento de V será denominado *vértice*

de Γ y representado de forma genérica por x, y ó z . Cada elemento de E será denominado *rama* de Γ y representado de forma genérica por e ó e' . En general, si $x, y \in V$ con $x \neq y$, el conjunto $\theta^{-1}(\{x, y\})$ puede constar de más de un elemento (ramas), lo que justifica la denominación de multigrafo para Γ .

Dos vértices distintos, $x, y \in \Gamma$, se denominan *adyacentes*, y lo representaremos por $x \sim y$, si $\theta^{-1}(\{x, y\}) \neq \emptyset$, es decir si existe una rama e tal que $\theta(e) = \{x, y\}$. En este caso, las ramas en $\theta^{-1}(\{x, y\})$ y los vértices x, y se denominan *incidentes*. Dos ramas e y e' de Γ se denominan *adyacentes* si $\theta(e) \cap \theta(e') \neq \emptyset$, es decir, si existe al menos un vértice incidente con ambas.

Para cada vértice $x \in V$, denotaremos por E_x al conjunto de ramas incidentes con x y denominaremos *grado de x* a $k(x)$, el cardinal de E_x . Si $k(x) = 0$, x se denominará *vértice aislado*. Diremos que Γ es un multigrafo *localmente finito* si para cada $x \in V$, $k(x) < \infty$, es decir, si cada vértice de Γ tiene una cantidad finita de ramas incidentes con él. En particular, esto implica que para cada vértice, el conjunto de vértices adyacentes a él es también finito. Diremos que Γ es *regular de grado k* si es localmente finito y para cada $x \in V$, $k(x) = k$.

Si $x, y \in V$, denotaremos por E_{xy} al conjunto de ramas incidentes con x e y y por $\kappa(x, y)$ al cardinal de E_{xy} . Es claro que se satisface que $E_{xy} = E_{yx}$, $E_x = \bigcup_{y \in V} E_{xy}$, $\kappa(x, y) > 0$ sii $x \sim y$ y $k(x) = \sum_{y \in V} \kappa(x, y)$.

Diremos que Γ es un *multigrafo numerable* si V y E son conjuntos numerables. En particular, diremos que Γ es un *multigrafo finito* cuando V y E sean finitos. Observar que si Γ no tiene puntos aislados, cuando E es numerable, necesariamente V también lo es y lo mismo ocurre si E es finito. Cuando Γ es finito, los enteros $|V|$, $|E|$ y $\chi(\Gamma) = |V| - |E|$ se denominan *orden*, *tamaño* y *característica de Euler de Γ* , respectivamente. Además, se satisface que $\sum_{x \in V} k(x) = 2|E|$ y, en particular, si Γ es regular de grado k , se tiene que $k|V| = 2|E|$, lo que también implica que $\chi(\Gamma) = \frac{|V|}{2}(2 - k)$.

Diremos que Γ es un *grafo* si la aplicación θ es inyectiva, es decir, si dos vértices distintos de Γ sólo pueden ser incidentes con una rama. En este caso, si $x \sim y$, $\kappa(x, y) = 1$, la única rama incidente con x e y puede ser identificada con el conjunto $\{x, y\}$ y el valor $k(x)$ representa también el cardinal del conjunto de vértices adyacentes a x . Por tanto, cuando Γ es un grafo finito se tiene que $|E| \leq \frac{1}{2}|V|(|V| - 1)$.

Denominaremos *grafo subyacente a Γ* al grafo $\Gamma^\# = (V^\#, E^\#, \theta^\#)$, donde $V^\# = V$, $E^\# = \{\{x, y\} \in V^{(2)} : x \sim y\}$ y $\theta^\#$ es la inclusión de $E^\#$ en $V^{(2)}$. Por supuesto, $\Gamma^\#$ coincide con Γ sii Γ es un grafo. Además, si $k^\#(x)$ denota el grado de x en $\Gamma^\#$, resulta que $k^\#(x) \leq k(x)$ con igualdad en todo vértice sii $\Gamma = \Gamma^\#$. En particular $\Gamma^\#$ es localmente finito si Γ lo es. Obsérvese que un grafo dado es el grafo subyacente de una gran cantidad de multigrafos diferentes y que $\chi(\Gamma) \leq \chi(\Gamma^\#)$, con igualdad sii $\Gamma = \Gamma^\#$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ y consideramos el conjunto $I(n) = \{0, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$, un *camino de longitud n*

en Γ es una aplicación $c: I(n) \longrightarrow V$ tal que para cada $j = 0, \dots, n-1$, $c(j) \sim c(j+1)$. Se denominan *extremos de c* a los vértices $c(0)$ y $c(n)$ y *vértices interiores de c* a los vértices $c(1), \dots, c(n-1)$. Un camino cuyos extremos coinciden se denomina *camino cerrado*. Un camino cuyos vértices interiores son diferentes entre sí y diferentes de los extremos se denomina *internamente disjunto*. En particular, todo camino de longitud 1 es internamente disjunto.

Si c es un camino, denominaremos *traza de c* , $\text{tr } c$, a la imagen de c .

Si c es un camino de longitud n , se denomina *camino opuesto a c* al camino $-c$ dado por $-c(j) = c(n-j)$, $j = 0, \dots, n$. Claramente, $-c$ tiene la misma traza, los mismos extremos y la misma longitud que c . Además, $-c$ es cerrado sii c lo es.

Si c_1 y c_2 son caminos de longitudes n y m respectivamente y satisfacen que $c_1(n) = c_2(0)$, se denomina *producto* de ambos a $c_1 * c_2$, el camino de longitud $n+m$, dado por la asignación $(c_1 * c_2)(j) = c_1(j)$ cuando $j = 0, \dots, n$ y por $(c_1 * c_2)(j) = c_2(j-n)$ cuando $j = n+1, \dots, n+m$. Claramente, se satisface que $\text{tr}(c_1 * c_2) = \text{tr } c_1 \cup \text{tr } c_2$. Si c_1, c_2 y c_3 son caminos tales que tienen sentido los productos $c_1 * c_2$ y $c_2 * c_3$, entonces los productos $(c_1 * c_2) * c_3$ y $c_1 * (c_2 * c_3)$ tienen sentido y además $(c_1 * c_2) * c_3 = c_1 * (c_2 * c_3)$. Esta propiedad permitirá designar por $c_1 * c_2 * c_3$ al camino $(c_1 * c_2) * c_3$. Más generalmente, si los productos sucesivos tienen sentido, al producto de los caminos c_1, \dots, c_m lo denotaremos por $c_1 * \dots * c_m$. Es claro que todo camino puede ser expresado como producto de caminos e incluso de caminos internamente disjuntos. Por ejemplo, si c es un camino de longitud n , entonces c puede expresarse como producto de n caminos de longitud 1.

Es claro que si dos vértices distintos x, y de Γ pueden ser unidos por un camino de longitud n , es decir existe un camino de longitud n cuyos extremos son precisamente x e y , entonces existe un camino internamente disjunto de longitud menor o igual a n que une x e y .

La relación definida sobre V como

$$x \mathcal{R} y \text{ sii existe un camino de extremos } x \text{ e } y,$$

es una relación de equivalencia sobre V , cuyas clases son las *componentes conexas* (o simplemente componentes) de Γ . Un multigrafo Γ se denomina *conexo* sii consta de una única componente conexa, es decir, sii cualesquiera de sus vértices pueden ser unidos por un camino. Sobre cada componente de Γ definimos la *distancia* entre dos de sus vértices, $x \neq y$, como

$$d(x, y) = \inf\{m : \text{existe un camino de longitud } m \text{ que une } x \text{ e } y\}.$$

Claramente, tal ínfimo es de hecho un mínimo. Denominaremos *camino corto entre x e y* a cualquier camino que una x e y y cuya longitud sea mínima, es decir, igual a $d(x, y)$. Desde luego, todo camino corto es internamente disjunto. Por otra parte, si para cada $x \in V$, designamos $d(x, x) = 0$, y definimos $d(x, y) = +\infty$ cuando x e y pertenecen a diferentes componentes conexas de Γ , entonces la aplicación d es una distancia sobre V , cuya topología inducida no es otra que la topología discreta. Cuando Γ es un multigrafo

finito, denominaremos *diámetro de* Γ a $d(\Gamma) = \max \{d(x, y) : x \mathcal{R} y\}$, es decir al mayor de los diámetros de las componentes conexas de Γ .

Si Γ es un multigrafo finito y conexo, entonces $\chi(\Gamma) \leq 1$. Por tanto, si Γ es finito y tiene m componentes conexas, se satisface que $\chi(\Gamma) \leq m$. Diremos que un multigrafo finito Γ con m componentes conexas es un *bosque* si $\chi(\Gamma) = m$, lo que en particular implica que Γ es un grafo. Cada componente conexa de un bosque se denomina *árbol*. Por tanto un grafo finito es un árbol sii es conexo y además $\chi(\Gamma) = 1$, (ver [46]). Es conocido que un grafo finito Γ es un bosque sii no posee caminos cerrados internamente disjuntos de longitud mayor o igual a 3. En particular, esto implica que en un árbol, dos vértices distintos cualesquiera pueden ser unidos por un único camino internamente disjunto.

Denominaremos *variedad discreta* a todo multigrafo finito. En particular, denominaremos *variedad discreta simple* a todo grafo finito. Si Γ es una variedad discreta, $\Gamma^\#$ se denominará *variedad discreta simple subyacente a* Γ . Por simplicidad en el lenguaje habitualmente eliminaremos el término discreta en las definiciones anteriores.

Sea pues $\Gamma = (V, E, \theta)$ una variedad discreta. Para cada $x \in V$ y para cada $j \in \mathbb{N}$ denotaremos por $S_j(x)$ y por $B_j(x)$ a la *esfera y la bola de centro x y radio j* , es decir, a los conjuntos $S_j(x) = \{y \in V : d(x, y) = j\}$ y $B_j(x) = \{y \in V : d(x, y) \leq j\}$. Es claro que para cada $x \in V$ se satisface que $S_0(x) = \{x\}$, que $S_1(x)$ es el conjunto de vértices adyacentes a x y que $B_j(x) = \bigcup_{i=0}^j S_i(x)$, para cada $j \in \mathbb{N}^*$. Además, para cada $x \in V$ el conjunto $\bigcup_{j=0}^{\infty} B_j(x)$ coincide con la componente conexa que contiene a x y para cada $j > d(\Gamma)$, $S_j(x) = \emptyset$ y por tanto $B_j(x) = B_{d(\Gamma)}(x)$.

Fijado un subconjunto F de vértices de Γ , denotaremos por F^c a su complementario en V y consideraremos también los siguientes subconjuntos de vértices y de ramas asociados a F (ver [15], [40], [54] y [56]):

- i) *Interior de F* : $\overset{\circ}{F} = \{x \in V : B_1(x) \subset F\}$.
- ii) *Frontera de vértices de F* : $\delta(F) = \{x \in F^c : B_1(x) \cap F \neq \emptyset\}$.
- iii) *Adherencia de F* : $\bar{F} = F \cup \delta(F)$.
- iv) *Exterior de F* : $\text{Ext}(F) = (\bar{F})^c$.
- v) *Frontera de ramas de F* : $\partial(F) = \{e \in E : \theta(e) \cap F \neq \emptyset \text{ y } \theta(e) \cap F^c \neq \emptyset\}$.

Debe observarse que con excepción del concepto de frontera de ramas de un subconjunto de vértices, todas las nociones y propiedades anteriores son relativas a la variedad simple subyacente a Γ y por tanto son idénticas para cualquier par de variedades discretas Γ_1, Γ_2 tales que $\Gamma_1^\# = \Gamma_2^\#$. En la siguiente figura se ilustran los conceptos anteriores sobre una variedad discreta simple.

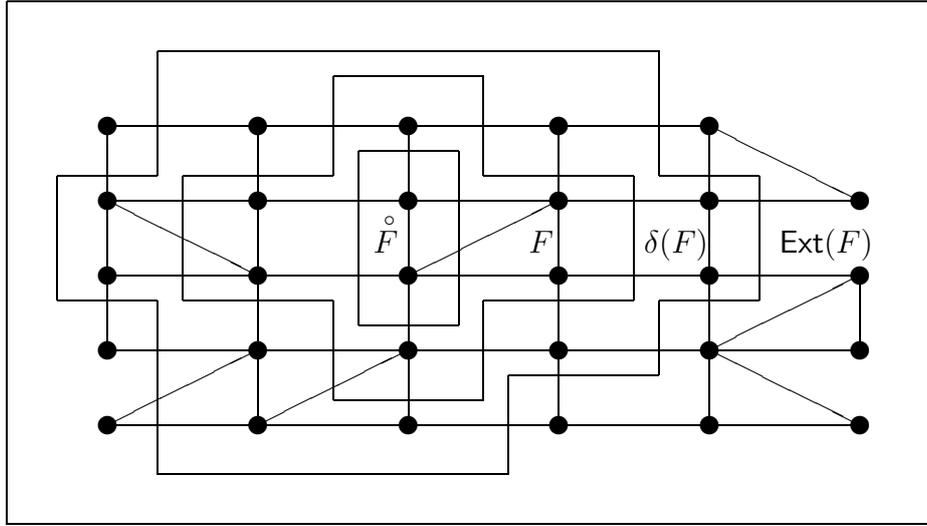


Figura 1.1: Ejemplo de variedad simple

Por otra parte, las nociones de componente conexa de una variedad discreta y de interior, adherencia, frontera y exterior de un conjunto son de naturaleza exclusivamente geométrica o combinatoria y no de naturaleza topológica, puesto que todo espacio discreto es totalmente desconectado, es decir sus componentes conexas son los puntos del espacio y en la topología discreta, el interior y la adherencia de un conjunto coinciden con él, mientras que la frontera de todo conjunto es vacía. Las siguientes propiedades, cuya comprobación es prácticamente inmediata, establecen algunas de las analogías y algunas de las diferencias entre las nociones geométricas y sus correspondientes topológicas.

Lema 1.1.1 *Si Γ es una variedad discreta, se satisfacen las siguientes propiedades:*

- i) Si $x \in V$ y $j \in \mathbb{N}$, entonces $\delta(B_j(x)) = \delta(B_{j+1}^c(x)) = S_{j+1}(x)$, $\bar{B}_j(x) = B_{j+1}(x)$, $\text{Ext}(B_j(x)) = \bigcup_{i=j+2}^{\infty} S_i(x)$ y $B_j(x) \subset \overset{\circ}{B}_{j+1}(x)$.
- ii) Si $F \subset V$, entonces $\bar{F} = \bigcup_{x \in F} B_1(x)$, $\delta(\text{Ext}(F)) \subset \delta(F)$ y $F \subset \text{Ext}(\text{Ext}(F))$. Además, se satisface que $\delta(F) = \{x \in V : d(x, F) = 1\}$, $\bar{F} = \{x \in F : d(x, F) \leq 1\}$ y $\delta(\bar{F}) = \{x \in V : d(x, F) = 2\}$.
- iii) Si F es conexo, entonces cada subconjunto $F_1 \subset V$ tal que $F \subset F_1 \subset \bar{F}$ es también conexo. En general $\overset{\circ}{F}$ no es conexo cuando F lo es.
- iv) Si $F_1, F_2 \subset V$ y $F_1 \subset F_2$, entonces $\overset{\circ}{F}_1 \subset \overset{\circ}{F}_2$, $\bar{F}_1 \subset \bar{F}_2$ y $\text{Ext}(F_2) \subset \text{Ext}(F_1)$.
- v) Si $F_i \subset V$, $i \in I$, entonces $\delta(\bigcup_i F_i) \subset \bigcup_i \delta(F_i)$, $\overset{\circ}{\bigcap}_i F_i = \bigcap_i \overset{\circ}{F}_i$ y $\overline{\bigcup}_i F_i = \bigcup_i \bar{F}_i$.

- vi) Si $\emptyset \neq F \subset V$, entonces F es unión de componentes conexas de V sii ocurre una, y por tanto todas, las identidades $\delta(F) = \emptyset$, $\delta(F^c) = \emptyset$, $\bar{F} = F$, $\overset{\circ}{F} = F$. En particular, $\delta(V) = \emptyset$ y $\overset{\circ}{V} = V = \bar{V}$.
- vii) Si $F \subset V$, entonces $\partial(F) = \partial(F^c)$, $\partial(F) = \{e \in E : \theta(e) \cap F \neq \emptyset \text{ y } \theta(e) \cap \delta(F) \neq \emptyset\}$, $\overset{\circ}{\delta(F)} = \emptyset$, $\delta(\overset{\circ}{F}) \subset \delta(F^c)$, $\overset{\circ}{F} \cap \delta(F^c) = \emptyset$, $F = \overset{\circ}{F} \cup \delta(F^c)$, $\bar{\overset{\circ}{F}} \subset F \subset \bar{\overset{\circ}{F}}$, $\overline{F^c} = (\overset{\circ}{F})^c$ y $\bar{\overset{\circ}{F}^c} = (\bar{F})^c$.

Diremos que una variedad discreta $\Gamma' = (V', E', \theta')$ es una *subvariedad* de Γ si se verifica que $V' \subset V$, $E' \subset E$ y θ' es la restricción de θ sobre E' . Si además Γ' es una variedad simple, entonces será denominada *subvariedad simple* de Γ .

Si $\Gamma_1 = (V_1, E_1, \theta_1)$ y $\Gamma_2 = (V_2, E_2, \theta_2)$ son subvariedades de Γ , diremos que $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ sii Γ_1 es un subvariedad de Γ_2 , o de forma equivalente sii $V_1 \subset V_2$ y $E_1 \subset E_2$. Dada una familia de subvariedades de Γ , $\{\Gamma_j = (V_j, E_j, \theta_j)\}_{j \in J}$, denominaremos *subvariedad unión de la familia* a la subvariedad de Γ , $\bigcup_{j \in J} \Gamma_j = (V', E', \theta')$ dada por $V' = \bigcup_{j \in J} V_j$, $E' = \bigcup_{j \in J} E_j$, y por θ' , la restricción de θ sobre E' .

Si $F \subset V$, denominaremos *variedad generada o inducida por F* a $\Gamma(F)$, la subvariedad de Γ cuyo conjunto de vértices es F y cuyo conjunto de ramas es $E(F) = \{e \in E : \theta(e) \subset F\}$. Obsérvese que si E' es un subconjunto arbitrario de ramas y consideramos $F = \bigcup_{e \in E'} \theta(e)$, entonces la subvariedad generada por F tiene a E' como conjunto de ramas. Diremos que F es *conexo* si la subvariedad inducida por F es conexa, es decir, si dos vértices cualesquiera de F pueden ser unidos por un camino cuya traza está totalmente contenida en F . Es claro que cada componente conexa de Γ es un conjunto conexo y de hecho, cualquier camino de extremos en una componente conexa tiene también la traza contenida en tal componente.

Si $F \subset V$, denominaremos *variedad frontera de F* a $\Gamma(\delta(F))$, la subvariedad generada por $\delta(F)$ y *variedad adherencia de F* a $\bar{\Gamma}(F)$, la subvariedad de Γ cuyo conjunto de vértices es \bar{F} y cuyo conjunto de ramas es $\bar{E}(F) = \{e \in E : \theta(e) \cap F \neq \emptyset\}$, es decir, $\bar{E}(F) = E(F) \cup \partial(F)$.

La siguiente figura muestra los grafos $\Gamma(F)$, $\Gamma(\delta(F))$, $\Gamma(\bar{F})$ y $\bar{\Gamma}(F)$ para el subconjunto F del ejemplo construido en la Figura 1.1.

Más generalmente, si $\Gamma' = (V', E', \theta')$ es una subvariedad de Γ , denominaremos *frontera de Γ'* a la subvariedad $\text{Fr}(\Gamma') = \Gamma(\delta(V'))$ y *adherencia de Γ'* a $\bar{\Gamma}' = (\bar{V}', E' \cup \partial(V'), \theta')$.

Lema 1.1.2 *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

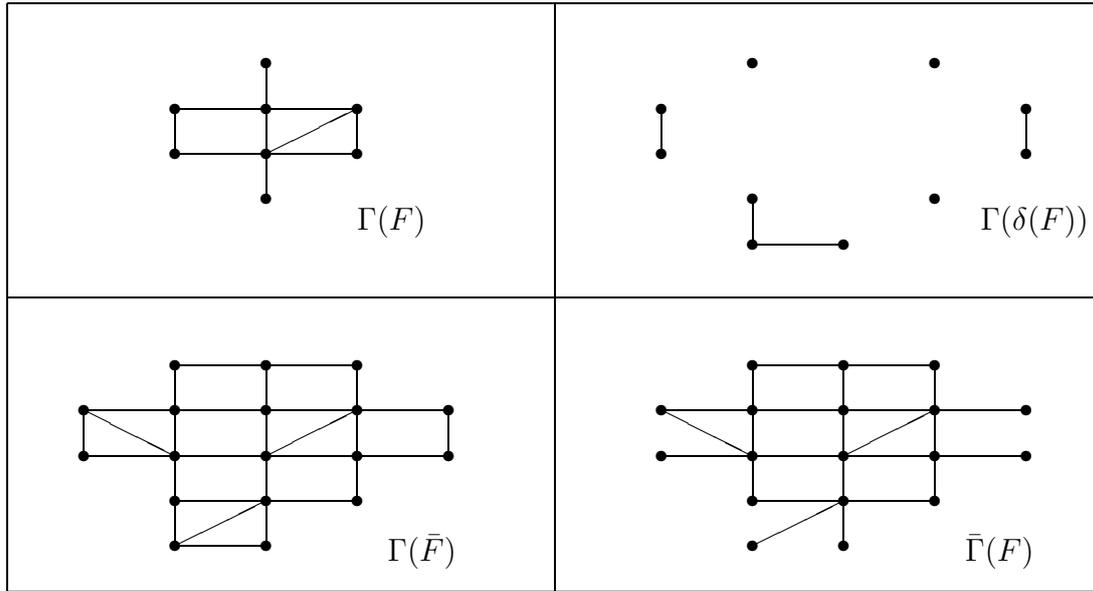


Figura 1.2: Subvariedades $\Gamma(F)$, $\Gamma(\delta(F))$, $\Gamma(\bar{F})$ y $\bar{\Gamma}(F)$

- i) Si $F \subset V$, entonces $\Gamma(F) \leq \bar{\Gamma}(F) \leq \Gamma(\bar{F}) = \bar{\Gamma}(F) \cup \Gamma(\delta(F))$. Además, se satisface la igualdad en cualquiera de las dos desigualdades si F es una componente conexa de Γ .
- ii) Si $F_1, F_2 \subset V$ y $F_1 \subset F_2$, entonces $\Gamma(F_1) \leq \Gamma(F_2)$ y $\bar{\Gamma}(F_1) \leq \bar{\Gamma}(F_2)$.
- iii) Si Γ' es una subvariedad de Γ cuyo conjunto de vértices es F , entonces $\Gamma' \leq \Gamma(F)$, $\bar{\Gamma}' \leq \bar{\Gamma}(F)$ y $\text{Fr}(\Gamma') = \Gamma(\delta(F))$.

Finalizaremos esta sección construyendo variedades y subvariedades simples asociadas a funciones definidas sobre el conjunto $V \times V$, donde V es el conjunto de vértices de una variedad discreta Γ . Este estudio incluye como caso particular la noción de *función admisible sobre un grafo*, desarrollada por A. Ancona en [1] y también la noción de *grafo determinado por una matriz de orden $|V|$* (ver [59]).

Consideremos $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una función simétrica y nula en la diagonal, es decir tal que $a(x, y) = a(y, x)$ y $a(x, x) = 0$, para cada $x, y \in V$. Denominaremos *variedad discreta generada por a* , y la denotaremos por Γ_a , a la variedad simple cuyo conjunto de vértices es V y cuyas ramas están identificadas con los subconjuntos $\{x, y\} \in V^{(2)}$ tales que $a(x, y) \neq 0$. Observar que es la simetría de a la que permite definir sin ambigüedad el conjunto de ramas de Γ_a y que formalmente $\Gamma_a = (V, E_a, \theta_a)$, donde $E_a = \{\{x, y\} : a(x, y) \neq 0\}$ y θ_a es la identidad.

Aunque Γ_a y $\Gamma^\#$ son variedades simples relacionadas con la variedad Γ , en general no tienen por qué estar relacionados entre sí. Por otra parte, si $F \subset V$ tienen sentido las

nociones geométricas de frontera, de adherencia y de frontera de ramas de F , relativas a la nueva variedad Γ_a . Sin embargo, nosotros consideraremos aquí una estructura que relacione este tipo de nociones cuando se tienen presentes ambas variedades Γ_a y $\Gamma^\#$. Así, consideraremos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}\text{int}_a(F) &= \{x \in F : a(x, y) \neq 0 \Rightarrow y \in F\}, \\ \delta_a(F) &= \{x \in \delta(F) : a(x, y) \neq 0, \text{ para algún } y \in F\}, \\ \partial_a(F) &= \{\{x, y\} \in E_a : x \in F, y \in \delta(F)\}, \\ \text{ad}_a(F) &= F \cup \delta_a(F),\end{aligned}$$

denominados respectivamente *interior*, *frontera de vértices*, *frontera de ramas*, y *adherencia de F respecto de a* . Obsérvese que para cada $F \subset V$, $\text{int}_a(F)$ es el interior de F en Γ_a , mientras que $\delta_a(F)$ es la intersección de $\delta(F)$ con la frontera de vértices de F en Γ_a y $\text{ad}_a(F)$ es la intersección de \bar{F} con la adherencia de F en Γ_a . Por otra parte, $\text{int}_a(F)$ y $\partial_a(F)$ no contienen ni están contenidos en $\overset{\circ}{F}$ y $\partial(F)$, respectivamente.

Denotaremos por $\bar{\Gamma}_a(F)$ a la subvariedad de Γ_a cuyo conjunto de vértices es $\text{ad}_a(F)$ y cuyo conjunto de ramas es $\{\{x, y\} \in E_a : x \in F, y \in \text{ad}_a(F)\}$, que por supuesto contiene a $\partial_a(F)$. Nuevamente, $\bar{\Gamma}_a(F)$ no contiene ni está contenido en $\bar{\Gamma}^\#(F)$.

Diremos que la función a es *semi-compatibile con Γ sobre $F \subset V$* si se satisface que para cada $x \in F$ e $y \in \bar{F}$, $d(x, y) = 1 \Rightarrow a(x, y) \neq 0$ y diremos que a es *compatible con Γ sobre $F \subset V$* si para cada $x \in F$ e $y \in \bar{F}$, $d(x, y) = 1 \Leftrightarrow a(x, y) \neq 0$.

Observar que cuando V es conexo y $a(x, y) = \pi(x)p(x, y)$ con p la *matriz de transición* de un *camino aleatorio reversible* sobre V , si a es semicompatible con V , entonces el camino aleatorio es *uniformemente irreducible*, mientras que a es compatible sii el camino aleatorio es uniformemente irreducible y de tipo *vecino más próximo* (ver [62]). Por otra parte, si a es semi-compatibile con Γ sobre F , lo es también sobre cualquier subconjunto de F y se satisface que $\delta_a(F) = \delta(F)$, $\text{ad}_a(F) = \bar{F}$, mientras que $\text{int}_a(F) \subset \overset{\circ}{F}$, $\partial(F) \subset \partial_a(F)$ y $\bar{\Gamma}^\#(F) \leq \bar{\Gamma}_a(F)$. Además, si F es conexo en Γ , también lo es en $\Gamma_a(F)$. Por otra parte, si a es compatible con F , es semi-compatibile con F , también es compatible con cualquier subconjunto de F y además $\text{int}_a(F) = \overset{\circ}{F}$, $\partial_a(F) = \partial(F)$ y $\bar{\Gamma}^\#(F) = \bar{\Gamma}_a(F)$. En definitiva, a es semicompatible con F sii los grafos $\bar{\Gamma}^\#(F)$ y $\bar{\Gamma}_a(F)$ tienen el mismo conjunto de vértices y dos vértices adyacentes en $\bar{\Gamma}^\#(F)$ también son adyacentes en $\bar{\Gamma}_a(F)$. Por otra parte, a es compatible con F sii los grafos $\bar{\Gamma}^\#(F)$ y $\bar{\Gamma}_a(F)$ tienen los mismos conjuntos de vértices y de ramas, es decir sii $\bar{\Gamma}^\#(F) = \bar{\Gamma}_a(F)$. Un ejemplo inmediato de función compatible sobre V , y por tanto sobre cualquier subconjunto de vértices, es κ . Cuando Γ es una variedad simple, otro ejemplo de función compatible está dado por $a(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \sim y \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$ de manera que $p(x, y) = \frac{1}{k(x)} a(x, y)$ es la matriz de transición del *camino aleatorio simple sobre V* .

1.2 Espacios de funciones

En esta sección introduciremos los espacios de funciones en una variedad discreta. Supondremos nuevamente que $\Gamma = (V, E, \theta)$ es una variedad discreta y consideremos $\Gamma^\#$ su variedad simple subyacente. Como los objetos que aparecen en una variedad discreta son vértices y ramas, es natural considerar funciones definidas en unos y otros conjuntos. Básicamente estos son los únicos espacios de funciones que aparecen en aquellos trabajos en los que se incide en la naturaleza combinatoria de las variedades discretas (ver, por ejemplo [10, 11]). Cuando se introducen herramientas de Topología Algebraica, el espacio de funciones de ramas suele ser sustituido por el espacio de funciones sobre el producto cartesiano de vértices (ver, por ejemplo [27, 56]). En este caso, la variedad discreta ha de ser simple y además las funciones consideradas son antisimétricas, es decir, su valor cambia de signo cuando se cambia el orden de sus argumentos. Este tipo de funciones son entonces suficientes para describir las operaciones “diferenciales” básicas. No obstante, estas funciones antisimétricas pueden ser identificadas con las funciones sobre las ramas si previamente se ha dotado a éstas de una *orientación*, con lo que en definitiva ambas estructuras corresponden a herramientas equivalentes.

El hecho de que uno de los objetivos de esta memoria sea desarrollar una estructura métrica sobre las variedades discretas para poder realizar sobre ellas un cálculo integral y en diferencias a semejanza del cálculo en variedades Riemannianas, nos ha llevado a introducir espacios de funciones que expresen adecuadamente las componentes de dichas métricas o, de forma equivalente, de las transformaciones lineales que se corresponden con ellas. Además, como se pondrá de manifiesto en la siguiente sección, la actuación sobre funciones de ramas de las transformaciones lineales asociadas a métricas generales, producen funciones que dependen de las ramas y de los vértices donde se valora la métrica. Esta propiedad motiva la introducción de funciones que toman valores sobre las ramas que inciden en cada vértice.

Denotaremos por $\mathcal{C}(V), \mathcal{C}(V \times V), \mathcal{C}(V \times V \times V)$, por $\mathcal{C}(E), \mathcal{C}(V \times E)$ y por $\mathcal{C}(V \times E \times E)$ a los conjuntos de funciones reales definidas sobre los conjuntos que se indica en cada expresión. En todos los casos el superíndice $+$ denotará el correspondiente subconjunto formado por las funciones no negativas.

Con las operaciones usuales, todos los conjuntos anteriores son espacios vectoriales reales y anillos unitarios y conmutativos, siendo la función constantemente igual a 1 la unidad en todos los casos. Además, cada función $f \in \mathcal{C}(V)$ puede identificarse con la función $\hat{f} \in \mathcal{C}(V \times E)$ dada por $\hat{f}(x, e) = f(x)$. Identificaciones análogas permiten considerar también las inclusiones

$$\mathcal{C}(V) \subset \mathcal{C}(V \times V) \subset \mathcal{C}(V \times V \times V),$$

$$\mathcal{C}(E) \subset \mathcal{C}(V \times E) \subset \mathcal{C}(V \times E \times E),$$

que permiten interpretar a $\mathcal{C}(V)$ y a $\mathcal{C}(V \times V)$ como subespacios vectoriales y como subanillos de $\mathcal{C}(V \times V \times V)$ y a $\mathcal{C}(V), \mathcal{C}(E)$ y $\mathcal{C}(V \times E)$ como subespacios vectoriales y subanillos de $\mathcal{C}(V \times E \times E)$.

Consideremos el subconjunto de $\mathcal{C}(V \times E)$ dado por

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(V \times E) : f(x, e) = 0, \text{ si } e \notin E_x\}$$

y también el conjunto $\mathcal{C}^+(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma) \cap \mathcal{C}^+(V \times E)$. Claramente, $\mathcal{C}(\Gamma)$ es un subespacio vectorial y también un ideal de $\mathcal{C}(V \times E)$. Por otra parte, si consideramos la aplicación $\mathbf{1}$ dada por $\mathbf{1}(x, e) = 1$ si $e \in E_x$ y por $\mathbf{1}(x, e) = 0$ en otro caso, resulta que para cada $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$, $f\mathbf{1} = \mathbf{1}f = f$. En definitiva, $\mathcal{C}(\Gamma)$ tiene estructura de anillo unitario y conmutativo y por ello será denominado *anillo de funciones reales sobre Γ* .

Si $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$, denominaremos *soporte de vértices de f* , o simplemente *soporte de f* , al subconjunto de V dado por

$$\text{sop}(f) = \{x \in V : f(x, e) \neq 0, \text{ para algún } e \in E_x\}.$$

Es fácil comprobar que si $f, g \in \mathcal{C}(\Gamma)$, se satisfacen que

$$\text{sop}(fg) = \text{sop}(f) \cap \text{sop}(g) \quad \text{y} \quad \text{sop}(f + g) \subset \text{sop}(f) \cup \text{sop}(g).$$

Denominaremos *funciones simétricas o antisimétricas sobre Γ* a los elementos de los subconjuntos de $\mathcal{C}(\Gamma)$, definidos respectivamente como

$$\mathcal{C}^s(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma) : f(x, e) = f(y, e) \text{ si } e \in E_{xy}\},$$

$$\mathcal{C}^a(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma) : f(x, e) = -f(y, e) \text{ si } e \in E_{xy}\}.$$

Claramente, $\mathcal{C}^s(\Gamma) \cap \mathcal{C}^a(\Gamma) = \{0\}$ y dada $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$, si consideramos f^s y f^a dadas respectivamente por

$$f^s(x, e) = \frac{1}{2}(f(x, e) + f(y, e)) \quad \text{y} \quad f^a(x, e) = \frac{1}{2}(f(x, e) - f(y, e)), \quad \text{donde } \theta(e) = \{x, y\},$$

resulta que $f^s \in \mathcal{C}^s(\Gamma)$, $f^a \in \mathcal{C}^a(\Gamma)$, lo que implica que $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}^s(\Gamma) \oplus \mathcal{C}^a(\Gamma)$. Si $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$, las funciones f^s y f^a definidas anteriormente serán denominadas *parte simétrica y parte antisimétrica de f* , respectivamente y la función $\check{f} = f^s - f^a$, *reflejada de f* . Observar que para cada $x \in V$ y cada $e \in E_{xy}$, $\check{f}(x, e) = f(y, e)$, que

$$\text{sop}(f^s), \text{sop}(f^a), \text{sop}(\check{f}) \subset \overline{\text{sop}(f)} \quad (1.1)$$

y que si $f \in \mathcal{C}^+(\Gamma)$ entonces $f^s, \check{f} \in \mathcal{C}^+(\Gamma)$, mientras que $\mathcal{C}^a(\Gamma) \cap \mathcal{C}^+(\Gamma) = \{0\}$.

De las propias definiciones se deduce de forma inmediata que para cada $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ se tienen las identidades $(\check{f})^s = f^s$, $(\check{f})^a = -f^a$, $(\check{f})^s = (\check{f}^s)$, $(\check{f})^a = -(\check{f}^a)$, $\check{\check{f}} = f$ y también

$$(fg)^s = f^s g^s + f^a g^a, \quad (fg)^a = f^a g^s + f^s g^a, \quad \text{para cada } f, g \in \mathcal{C}(\Gamma). \quad (1.2)$$

Observar que si $f, g \in \mathcal{C}^a(\Gamma)$, entonces $fg \in \mathcal{C}^s(\Gamma)$ mientras que si $f, g \in \mathcal{C}^s(\Gamma)$, entonces $fg \in \mathcal{C}^s(\Gamma)$. Como además $\mathbf{1} \in \mathcal{C}^s(\Gamma)$, resulta que $\mathcal{C}^s(\Gamma)$ es un subanillo unitario de $\mathcal{C}(\Gamma)$, que

puede identificarse con $\mathcal{C}(E)$ mediante la aplicación que asigna a cada $f \in \mathcal{C}(E)$ la función $r \in \mathcal{C}^s(\Gamma)$ dada por $r(x, e) = f(e)$ cuando $e \in E_x$ y por $r(x, e) = 0$, en otro caso. También, podemos identificar el anillo $\mathcal{C}(V)$ con $\{f \in \mathcal{C}(\Gamma) : f(x, e) = f(x, e') \text{ si } e, e' \in E_x\}$. En lo sucesivo, haremos uso de estas identificaciones e interpretaremos los elementos de $\mathcal{C}(V)$ y de $\mathcal{C}(E)$ como funciones reales sobre Γ . Con esta identificación, si $u \in \mathcal{C}(V)$, el soporte de u como elemento de $\mathcal{C}(\Gamma)$ coincide con el soporte de u como elemento de $\mathcal{C}(V)$, mientras que si $f \in \mathcal{C}(E)$ entonces $\text{sup}(f) = \bigcup_{e \in S} \theta(e)$, donde $S = \{e : f(e) \neq 0\}$ es el soporte de f como elemento de $\mathcal{C}(E)$. Además, si $f \in \mathcal{C}(E)$, entonces $f^s = f$ y $f^a = 0$, lo que concuerda con la identificación de $\mathcal{C}(E)$ con $\mathcal{C}^s(\Gamma)$; mientras que al interpretar $u \in \mathcal{C}(V)$ como un elemento de $\mathcal{C}(\Gamma)$, tienen sentido u^s , u^a y \check{u} , sus partes simétrica, antisimétrica y reflejada, que están dadas, respectivamente, por $u^s(x, e) = \frac{1}{2}(u(x) + u(y))$, por $u^a(x, e) = \frac{1}{2}(u(x) - u(y))$ y por $\check{u}(x, e) = u(y)$, cuando $e \in E_{xy}$. Es claro que si $u \in \mathcal{C}(V)$, entonces $u^s, \check{u} \in \mathcal{C}(\Gamma) - \mathcal{C}(V)$, salvo cuando u sea constante; mientras que $u^a \in \mathcal{C}(V)$ sii $u(V) = \{a, -a\}$ con $a \in \mathbb{R}$ y $u(x)u(y) = -a^2$ cuando $x \sim y$. En particular, esto implica que si Γ tiene caminos cerrados de longitud impar, entonces $\mathcal{C}(V) \cap \mathcal{C}^a(\Gamma) = \{0\}$.

Es fácil comprobar que se satisfacen las siguientes identidades

$$\dim \mathcal{C}(V) = |V|, \quad \dim \mathcal{C}(E) = |E|, \quad \dim \mathcal{C}(\Gamma) = \sum_{x \in V} k(x) = 2|E|, \quad (1.3)$$

y por tanto $\dim \mathcal{C}^s(\Gamma) = \dim \mathcal{C}^a(\Gamma) = |E|$.

Denominaremos *funciones equilibradas sobre Γ* a los elementos del subconjunto de $\mathcal{C}(\Gamma)$, definido como

$$\mathcal{C}^\#(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma) : f(x, e) = f(x, e') \text{ si existe } y \in V, \text{ tal que } e, e' \in E_{xy}\}.$$

Si $f \in \mathcal{C}^\#(\Gamma)$, es claro que para cada $x \in V$ y $e \in E_x$, el valor $f(x, e)$ sólo depende del vértice $y \in V$ tal que $\theta(e) = \{x, y\}$. Por tanto, podemos considerar la identificación

$$\mathcal{C}^\#(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(V \times V) : f(x, y) = 0, \text{ si } d(x, y) \neq 1\},$$

a partir de la cual resulta sencillo comprobar que $\mathcal{C}^\#(\Gamma)$ es un subespacio vectorial y un subanillo unitario de $\mathcal{C}(\Gamma)$, que además contiene a $\mathcal{C}(V)$.

Si $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$, denominaremos *reducida de f* a la función $f^\# \in \mathcal{C}^\#(\Gamma)$ dada por

$$f^\#(x, y) = \frac{1}{\kappa(x, y)} \sum_{e' \in E_{xy}} f(x, e'), \text{ si } d(x, y) = 1.$$

Es claro que si $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ y $h \in \mathcal{C}(V)$, entonces $(hf)^\# = hf^\#$, mientras que si $f \in \mathcal{C}^+(\Gamma)$, entonces $f^\# \in \mathcal{C}^+(\Gamma)$. Además, para cada $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$, se satisfacen las identidades $f^{\#s} = f^{s\#}$, $f^{\#a} = f^{a\#}$ y $\check{f}^\# = f^\#$, que implican que $f^\# \in \mathcal{C}^s(\Gamma)$ (respectivamente $f^\# \in \mathcal{C}^a(\Gamma)$) cuando $f \in \mathcal{C}^s(\Gamma)$ (respectivamente cuando $f \in \mathcal{C}^a(\Gamma)$). Por otra parte, $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ es equilibrada sii $f^\# = f$, lo que, en particular, implica que $f^{\#\#} = f^\#$, para cada $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$.

Consideremos ahora el subconjunto de $\mathcal{C}(V \times E \times E)$ dado por

$$\mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(V \times E \times E) : f(x, e, e') = 0, \text{ si } (e, e') \notin E_x \times E_x\}$$

y también el conjunto $\mathcal{C}^+(\Gamma \times \Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma) \cap \mathcal{C}^+(V \times E \times E)$. Nuevamente, $\mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$ es un subespacio vectorial y un subanillo de $\mathcal{C}(V \times E \times E)$ y además $\dim \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma) = \sum_{x \in V} k^2(x)$.

Si $f \in \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$, diremos que f es compatible, si se verifica que $f(x, e, e') = f(y, e, e')$ para cada $e, e' \in E_{xy}$ y diremos que f es equilibrada, si $f(x, e, e') = f(x, \hat{e}, \tilde{e})$ para cada $e, \hat{e} \in E_{xy}$ y cada $e', \tilde{e} \in E_{xz}$. Denotaremos por $\mathcal{C}^\#(\Gamma \times \Gamma)$ al conjunto de funciones equilibradas de $\mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$. De nuevo, si $f \in \mathcal{C}^\#(\Gamma \times \Gamma)$, para cada $x \in V$ y cada par $(e, e') \in E_x \times E_x$, el valor $f(x, e, e')$ sólo depende de los vértices $y, z \in V$ tales que $\theta(e) = \{x, y\}$ y $\theta(e') = \{x, z\}$. Por tanto, podemos considerar la identificación

$$\mathcal{C}^\#(\Gamma \times \Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(V \times V \times V) : f(x, y, z) = 0, \text{ si } d(x, y) \cdot d(x, z) \neq 1\}.$$

Si $f \in \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$, denominaremos *reducida de f* a la función $\#f \in \mathcal{C}^\#(\Gamma \times \Gamma)$ dada por

$$\#f(x, y, z) = \frac{1}{\kappa(x, y)} \frac{1}{\kappa(x, z)} \sum_{e \in E_{xy}} \sum_{e' \in E_{xz}} f(x, e, e') \quad \text{si } d(x, y) \cdot d(x, z) = 1.$$

Además, $f \in \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$ es equilibrada sii $\#f = f$, lo que, en particular, implica que $\#\#f = \#f$, para cada $f \in \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$.

Por otra parte, $\mathcal{C}(\Gamma)$ puede identificarse, como subespacio vectorial y como subanillo, con el subconjunto de $\mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$ dado por $\{f \in \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma) : f(x, e, e') = 0, \text{ si } e \neq e'\}$. Con esta identificación, resulta que $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ es compatible como elemento de $\mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$ sii f es simétrica y además, $\kappa \cdot \#f = f^\#$.

Cuando Γ es una variedad simple, todas las funciones de $\mathcal{C}(\Gamma)$ y de $\mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$ son equilibradas y por tanto tenemos las identificaciones

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(V \times V) : f(x, y) = 0, \text{ si } d(x, y) \neq 1\},$$

$$\mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(V \times V \times V) : f(x, y, z) = 0, \text{ si } d(x, y) \cdot d(x, z) \neq 1\}.$$

Teniendo presente estas identificaciones, resulta que si Γ es una variedad simple y consideramos $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ y $g \in \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$, entonces $\text{sop}(f) = \{x \in V : f(x, y) \neq 0, \text{ para algún } y \in V\}$, f es simétrica (respectivamente antisimétrica) sii $f(x, y) = f(y, x)$ (respectivamente sii $f(x, y) = -f(y, x)$), para cada $x, y \in V$ y g es compatible sii $g(x, y, y) = g(y, x, x)$ para cada $x, y \in V$. Además, $f^s(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(y, x))$, $f^a(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) - f(y, x))$ y $\check{f}(x, y) = f(y, x)$.

Por último, si $V' \subset V$ y $E' \subset E$, los espacios $\mathcal{C}(V')$, $\mathcal{C}(V' \times V')$, $\mathcal{C}(V' \times V' \times V')$, $\mathcal{C}(E')$, $\mathcal{C}(V' \times E')$ y $\mathcal{C}(V' \times E' \times E')$ están identificados como subespacios vectoriales y subanillos con subconjuntos de $\mathcal{C}(V)$, $\mathcal{C}(V \times V)$, $\mathcal{C}(V \times V \times V)$, $\mathcal{C}(E)$, $\mathcal{C}(V \times E)$ y de $\mathcal{C}(V \times E \times E)$

respectivamente. Por tanto, si $\Gamma' = (V', E', \theta')$ es una subvariedad de Γ , entonces tenemos también las identificaciones, como subespacios vectoriales y como subanillos

$$\mathcal{C}(\Gamma') = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma) : \text{sop}(f) \subset V' \text{ y } f(x, e) = 0 \text{ si } e \notin E'_x, \text{ para cada } x \in V'\},$$

$$\mathcal{C}(\Gamma' \times \Gamma') = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma) : f(x, e, e') = 0 \text{ si } (x, e, e') \notin V' \times E'_x \times E'_x\}.$$

En particular, si $\Gamma^\#$ es la variedad simple subyacente a Γ , $\mathcal{C}(\Gamma^\#)$ puede identificarse con $\mathcal{C}^\#(\Gamma)$ y también $\mathcal{C}(\Gamma^\# \times \Gamma^\#)$ con $\mathcal{C}^\#(\Gamma \times \Gamma)$.

Observar que si para una subvariedad discreta $\Gamma' = (V', E', \theta')$ definimos $\mathbf{1}_{\Gamma'}$ como la función característica de E' y $\mathbf{1}_{\Gamma'} \otimes \mathbf{1}_{\Gamma'}$ como $(\mathbf{1}_{\Gamma'} \otimes \mathbf{1}_{\Gamma'})(e, e') = \mathbf{1}_{\Gamma'}(e)\mathbf{1}_{\Gamma'}(e')$, entonces se verifica que $\mathbf{1}_{\Gamma'} \in \mathcal{C}^s(\Gamma')$, $\mathbf{1}_{\Gamma'} \otimes \mathbf{1}_{\Gamma'}$ es compatible y equilibrada y además, se satisface que

$$\mathcal{C}(\Gamma') = \mathbf{1}_{\Gamma'} \cdot \mathcal{C}(\Gamma) \quad \text{y} \quad \mathcal{C}(\Gamma' \times \Gamma') = (\mathbf{1}_{\Gamma'} \otimes \mathbf{1}_{\Gamma'}) \cdot \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma).$$

1.3 Campos sobre una variedad discreta

El objetivo de esta sección es introducir algunas de las herramientas básicas para el estudio de variedades discretas, análogas a las consideradas en variedades diferenciables; herramientas que deben tener el mismo carácter local que las correspondientes del caso continuo. Así, definiremos los conceptos de espacio tangente en un punto, de campo, de forma y de campos de transformaciones lineales y bilineales. Estas nociones crean además un contexto adecuado para la utilización de los espacios de funciones introducidos en la sección anterior y permiten dotar a las variedades discretas de la estructura suficiente para establecer sobre ellas los operadores diferenciales que posibilitan la construcción de un cálculo vectorial, así como el desarrollo de los teoremas integrales.

Para la introducción de todos estos conceptos es clave la descripción del espacio tangente en un punto. Así como en el caso continuo el espacio tangente tiene la misma dimensión que el espacio de parámetros, la ausencia de entornos coordinados en el caso de variedades discretas impide una asignación de este tipo. Puesto que en términos topológicos una variedad discreta es un objeto unidimensional, parecería razonable dotar a cada vértice de un espacio tangente unidimensional. Una asignación de este tipo no es operativa, puesto que cada vértice está conectado con todos sus adyacentes y esta conexión debe quedar reflejada como grados de libertad en el espacio tangente. En definitiva, puesto que el espacio tangente en cada vértice de una variedad discreta debe discriminar el acceso a diferentes vértices adyacentes y también las distintas maneras de acceder al mismo vértice, su dimensión debe coincidir con el grado del vértice.

1.3.1 Campos de vectores y de covectores

Definiciones 1.3.1 Para cada vértice $x \in V$, denominaremos *espacio tangente en x* al espacio vectorial real de las combinaciones lineales formales de las ramas incidentes con x ,

es decir a

$$T_x(\Gamma) = \left\{ \sum_{e \in E_x} a(e)e : a(e) \in \mathbb{R} \right\}$$

y espacio cotangente en x a $T_x^*(\Gamma)$, el dual de $T_x(\Gamma)$.

Denotaremos por $T(\Gamma)$ y por $T^*(\Gamma)$ a los conjuntos $T(\Gamma) = \bigcup_{x \in V} T_x(\Gamma)$ y $T^*(\Gamma) = \bigcup_{x \in V} T_x^*(\Gamma)$, respectivamente.

Es claro que para cada $x \in V$, el conjunto E_x de ramas incidentes con x constituye una base de $T_x(\Gamma)$, que denominaremos *base coordenada de $T_x(\Gamma)$* . Por tanto, $\dim T_x(\Gamma) = k(x)$ y en particular, si Γ es regular de grado k , el espacio tangente en cualquier vértice tiene dimensión igual a k . Por otra parte, si x es un vértice aislado, entonces $T_x(\Gamma) = \{0\}$.

Definiciones 1.3.2 Denominaremos *campo de vectores sobre Γ* o *campo vectorial sobre Γ* o simplemente *campo sobre Γ* a toda aplicación $f: V \rightarrow T(\Gamma)$ tal que $f(x) \in T_x(\Gamma)$ para cada $x \in V$. En particular, el campo vectorial \mathbf{t}_Γ dado por $\mathbf{t}_\Gamma(x) = \sum_{e \in E_x} e$, será denominado *campo característico de Γ* y lo denotaremos simplemente por \mathbf{t} cuando no haya lugar a confusión.

Denominaremos *campo de covectores sobre Γ* o simplemente *forma sobre Γ* a toda aplicación $\Phi: V \rightarrow T^*(\Gamma)$ tal que $\Phi(x) \in T_x^*(\Gamma)$ para cada $x \in V$.

Los conjuntos de campos y de formas sobre Γ serán denotados por $\mathcal{X}(\Gamma)$ y $\mathcal{L}(\Gamma)$, respectivamente.

Si f es un campo vectorial sobre Γ , f está unívocamente determinado por sus componentes en cada base coordenada. Así podemos asociar a f la función $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ tal que para cada $x \in V$, $f(x) = \sum_{e \in E_x} f(x, e)e$. Es claro que f está unívocamente determinado por f .

Por otra parte, si Φ es una forma sobre Γ , Φ está unívocamente determinada por sus componentes en la base dual de cada base coordenada. Así podemos asociar a Φ la función $\phi \in \mathcal{C}(\Gamma)$ tal que para cada $x \in V$, $\Phi(x) = \sum_{e \in E_x} \phi(x, e)e^*$. Es claro que Φ está unívocamente determinada por ϕ .

En particular, si $x \in V$, un vector arbitrario de $T_x(\Gamma)$ y una forma lineal arbitraria en $T_x^*(\Gamma)$ pueden identificarse, respectivamente, con un campo y una forma sobre Γ . Concretamente, si $\mathbf{v} = \sum_{e \in E_x} a(e)e$ y $\ell = \sum_{e \in E_x} b(e)e^*$, \mathbf{v} y ℓ pueden identificarse con el campo $f_{\mathbf{v}}$ y la forma Φ_{ℓ} definidos por las asignaciones

$$f_{\mathbf{v}}(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \neq x, \\ \mathbf{v}, & \text{si } y = x, \end{cases} \quad \text{y} \quad \Phi_{\ell}(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \neq x, \\ \ell, & \text{si } y = x, \end{cases} \quad (1.4)$$

es decir, con el campo y la forma cuyas funciones componentes son, respectivamente

$$f(y, e) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \neq x \text{ ó } e \notin E_x, \\ a(e), & \text{si } y = x \text{ y } e \in E_x; \end{cases} \quad \text{y} \quad \phi(y, e) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \neq x \text{ ó } e \notin E_x, \\ b(e), & \text{si } y = x \text{ y } e \in E_x. \end{cases}$$

Las siguientes nociones relativas a campos y formas hacen uso de las correspondientes a sus funciones componentes.

Definiciones 1.3.3 Si $\Phi \in \Lambda(\Gamma)$ y $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$, las funciones $\phi, f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ definidas anteriormente se denominan *funciones componentes de Φ y f* , respectivamente.

Denominaremos *soporte de Φ* y *soporte de f* al soporte de sus funciones componentes. Los soportes de Φ y f serán denotados por $\text{sop}(\Phi)$ y $\text{sop}(f)$, respectivamente.

Diremos que $\Phi \in \Lambda(\Gamma)$, respectivamente $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$, es una *forma simétrica, antisimétrica o equilibrada*, respectivamente un *campo simétrico, antisimétrico o equilibrado*, si su función componente ϕ , respectivamente f , es simétrica, antisimétrica o equilibrada. Los conjuntos de formas simétricas, antisimétricas y equilibradas y los de campos simétricos, antisimétricos y equilibrados serán denotados por $\Lambda^s(\Gamma)$, $\Lambda^a(\Gamma)$, $\Lambda^\#(\Gamma)$, $\mathcal{X}^s(\Gamma)$, $\mathcal{X}^a(\Gamma)$ y $\mathcal{X}^\#(\Gamma)$, respectivamente.

Si $\Phi \in \Lambda(\Gamma)$, respectivamente si $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$, denominaremos *forma reducida de Φ* , respectivamente *campo reducido de f* , a la forma equilibrada $\Phi^\#$ cuya función componente es la reducida de la función componente de Φ , respectivamente al campo equilibrado $f^\#$ cuya función componente es la reducida de la función componente de f .

Obsérvese que si $\Phi \in \Lambda(\Gamma)$ y $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$, entonces

$$\text{sop}(\Phi) = \{x \in V : \Phi(x) \neq 0\} \quad \text{y} \quad \text{sop}(f) = \{x \in V : f(x) \neq 0\}.$$

Por otra parte, los conjuntos $\Lambda(\Gamma)$ y $\mathcal{X}(\Gamma)$ tienen estructura de espacios vectoriales reales con las cuales $\Lambda^s(\Gamma)$, $\Lambda^a(\Gamma)$ y $\Lambda^\#(\Gamma)$ son subespacios vectoriales de $\Lambda(\Gamma)$, mientras que $\mathcal{X}^s(\Gamma)$, $\mathcal{X}^a(\Gamma)$ y $\mathcal{X}^\#(\Gamma)$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{X}(\Gamma)$.

Consideraremos ahora la aplicación de $\mathcal{C}(\Gamma) \times \mathcal{X}(\Gamma)$ en $\mathcal{X}(\Gamma)$ que a cada par (r, f) le asigna el campo $r \cdot f$, dado por

$$(r \cdot f)(x) = \sum_{e \in E} r(x, e) f(x, e) e, \quad x \in V, \quad (1.5)$$

donde $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ es la función componente de f y análogamente consideraremos la aplicación de $\mathcal{C}(\Gamma) \times \Lambda(\Gamma)$ en $\Lambda(\Gamma)$ que a cada par (r, Φ) le asigna la forma $r \cdot \Phi$, dada por

$$(r \cdot \Phi)(x) = \sum_{e \in E} r(x, e) \phi(x, e) e^*, \quad x \in V, \quad (1.6)$$

donde $\phi \in \mathcal{C}(\Gamma)$ es la función componente de Φ .

Las anteriores aplicaciones son homomorfismos de espacios vectoriales, pero como $\mathcal{C}(\Gamma)$ es un anillo unitario, confieren a $\Lambda(\Gamma)$ y $\mathcal{X}(\Gamma)$ de estructura de $\mathcal{C}(\Gamma)$ -módulos. Además, como $\mathcal{C}(V)$, $\mathcal{C}(E)$ y $\mathcal{C}^\#(\Gamma)$ son subanillos unitarios de $\mathcal{C}(\Gamma)$, las anteriores aplicaciones dotan a $\Lambda(\Gamma)$ y a $\mathcal{X}(\Gamma)$ de estructura de $\mathcal{C}(V)$ -módulos, de $\mathcal{C}(E)$ -módulos y de $\mathcal{C}^\#(\Gamma)$ -módulos.

Proposición 1.3.4 *Las aplicaciones*

$$\begin{array}{ccc} P: \mathcal{C}(\Gamma) & \longrightarrow & \mathcal{X}(\Gamma), & \sim: \Lambda(\Gamma) & \longrightarrow & \mathcal{X}(\Gamma) \\ f & \longrightarrow & f \cdot \mathbf{t} & \Phi & \longrightarrow & \phi \cdot \mathbf{t} \end{array}$$

son isomorfismos de espacios vectoriales y de $\mathcal{C}(\Gamma)$ -módulos.

Demostración. De la definición de la operación \cdot se deduce inmediatamente que P es un homomorfismo de espacios vectoriales. Además, si $P(f) = \mathbf{0}$, entonces, para cada $x \in V$ y para cada $e \in E_x$, necesariamente $f(x, e) = 0$, lo que implica que $f \equiv 0$ y en definitiva la inyectividad de P . Por otra parte, si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ y $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ es su función componente, entonces $\mathbf{f} = f \cdot \mathbf{t}$, lo que demuestra que P es sobreyectiva y en conclusión un isomorfismo.

La demostración del segundo isomorfismo, se apoya en el resultado anterior y, por lo demás, es análoga a él. ■

El inverso del isomorfismo \sim , que será también denotado por \sim , permite definir el concepto de *forma característica de Γ* como $\tilde{\mathbf{t}}$, la imagen por \sim del campo característico de Γ . Es claro que tanto el campo como la forma característicos de Γ tienen a $\mathbf{1}$ como función componente, lo que implica que $\mathbf{t} \in \mathcal{X}^s(\Gamma) \cap \mathcal{X}^\#(\Gamma)$, $\tilde{\mathbf{t}} \in \Lambda^s(\Gamma) \cap \Lambda^\#(\Gamma)$ y que $\text{sop}(\mathbf{t}) = \text{sop}(\tilde{\mathbf{t}}) = V$.

Por otra parte, si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ tiene a $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ como componente, entonces $\tilde{\mathbf{f}} = f \cdot \tilde{\mathbf{t}}$. Además, para cada $\Phi \in \Lambda(\Gamma)$ y cada $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ se satisface que $\text{sop}(\tilde{\Phi}) = \text{sop}(\Phi)$, $\text{sop}(\tilde{\mathbf{f}}) = \text{sop}(\mathbf{f})$ y que $\tilde{\tilde{\Phi}} = \Phi$ y $\tilde{\tilde{\mathbf{f}}} = \mathbf{f}$. Por otra parte, la composición de P con \sim , que será denotada por \tilde{P} , establece un isomorfismo entre $\mathcal{C}(\Gamma)$ y $\Lambda(\Gamma)$ como espacios vectoriales y como $\mathcal{C}(\Gamma)$ -módulos y además se tiene que $\tilde{P}(\phi) = \phi \cdot \tilde{\mathbf{t}}$, para cada $\phi \in \mathcal{C}(\Gamma)$. En definitiva, los conjuntos $\Lambda(\Gamma)$, $\mathcal{X}(\Gamma)$ y $\mathcal{C}(\Gamma)$ están identificados de forma natural como espacios vectoriales y como módulos. Así pues, las propiedades del espacio de funciones sobre una variedad discreta se traducen inmediatamente en propiedades de los espacios de campos y de formas.

Corolario 1.3.5 *Se tienen las descomposiciones*

$$\mathcal{X}(\Gamma) = \mathcal{X}^s(\Gamma) \oplus \mathcal{X}^a(\Gamma) \quad \text{y} \quad \Lambda(\Gamma) = \Lambda^s(\Gamma) \oplus \Lambda^a(\Gamma).$$

Además, $P(\mathcal{C}(E)) = \mathcal{X}^s(\Gamma)$, $P(\mathcal{C}^a(\Gamma)) = \mathcal{X}^a(\Gamma)$, $P(\mathcal{C}^\#(\Gamma)) = \mathcal{X}^\#(\Gamma)$ y por tanto se satisface que $\tilde{P}(\mathcal{C}(E)) = \Lambda^s(\Gamma)$, $\tilde{P}(\mathcal{C}^a(\Gamma)) = \Lambda^a(\Gamma)$, $\tilde{P}(\mathcal{C}^\#(\Gamma)) = \Lambda^\#(\Gamma)$. Más generalmente, si Γ' es una subvariedad de Γ , se verifica que $\tilde{P}(\mathcal{C}(\Gamma')) = \Lambda(\Gamma')$, $P(\mathcal{C}(\Gamma')) = \mathcal{X}(\Gamma')$.

Demostración. Si $f = f \cdot \mathbf{t}$, entonces $f \in \mathcal{X}^s(\Gamma) \cap \mathcal{X}^a(\Gamma)$ sii $f \in \mathcal{C}^s(\Gamma) \cap \mathcal{C}^a(\Gamma)$, es decir, sii $f \equiv 0$ y por tanto sii $f \equiv 0$.

Además, como P es homomorfismo, $f = P(f^s + f^a) = P(f^s) + P(f^a) = f^s \cdot \mathbf{t} + f^a \cdot \mathbf{t}$, de donde $\mathcal{X}(\Gamma) = \mathcal{X}^s(\Gamma) \oplus \mathcal{X}^a(\Gamma)$. Por otra parte, la igualdad $P(\mathcal{C}(E)) = \mathcal{X}^s(\Gamma)$ es consecuencia de la identificación de $\mathcal{C}(E)$ con $\mathcal{C}^s(\Gamma)$ y las identidades $P(\mathcal{C}^a(\Gamma)) = \mathcal{X}^a(\Gamma)$ y $P(\mathcal{C}^\#(\Gamma)) = \mathcal{X}^\#(\Gamma)$ son consecuencia de las definiciones de campo antisimétrico y campo equilibrado. Por otra parte, obtenemos que $P(\mathcal{C}(\Gamma')) = \mathcal{X}(\Gamma')$ si más que tener en cuenta que $f \in \mathcal{X}(\Gamma')$ sii su función componente pertenece a $\mathcal{C}(\Gamma')$.

Las demostraciones de las igualdades para la aplicación \tilde{P} son análogas. ■

Partiendo de la identificación de $\mathcal{C}^\#(\Gamma)$ con $\mathcal{C}(\Gamma^\#)$, del corolario anterior se concluyen también las identificaciones $\Lambda^\#(\Gamma) = \Lambda(\Gamma^\#)$ y $\mathcal{X}^\#(\Gamma) = \mathcal{X}(\Gamma^\#)$ y además, tanto \mathbf{t} como $\tilde{\mathbf{t}}$ pueden interpretarse, respectivamente, como el campo y la forma característicos de $\Gamma^\#$.

Del mismo modo, si Γ' es una subvariedad de Γ , entonces $\Lambda(\Gamma')$ y $\mathcal{X}(\Gamma')$ están también identificados con subespacios vectoriales de $\Lambda(\Gamma)$ y $\mathcal{X}(\Gamma)$, respectivamente y si denotamos por $\mathbf{t}_{\Gamma'}$ y $\tilde{\mathbf{t}}_{\Gamma'}$ al campo y la forma característicos de Γ' , entonces $\mathbf{t}_{\Gamma'} = P(\mathbf{1}_{\Gamma'})$ y $\tilde{\mathbf{t}}_{\Gamma'} = \tilde{P}(\mathbf{1}_{\Gamma'})$.

Si $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$, $\Phi \in \Lambda(\Gamma)$ y $f, \phi \in \mathcal{C}(\Gamma)$ son sus respectivas funciones componentes, los campos vectoriales $f^s = f^s \cdot \mathbf{t}$ y $f^a = f^a \cdot \mathbf{t}$ y las formas $\Phi^s = \phi^s \cdot \tilde{\mathbf{t}}$ y $\Phi^a = \phi^a \cdot \tilde{\mathbf{t}}$ se denominan *parte simétrica y parte antisimétrica de f* y de Φ , respectivamente. Además, denominaremos *campo reflejado de f*, respectivamente *forma reflejada de Φ* , y lo denotaremos por \check{f} , respectivamente $\check{\Phi}$, al campo cuya función componente es \check{f} , es decir al campo $\check{f} = f^s - f^a$, respectivamente a la forma $\check{\Phi} = \Phi^s - \Phi^a$.

Después de la proposición anterior, es claro que se satisfacen las identidades

$$\dim \mathcal{X}(\Gamma) = \dim \Lambda(\Gamma) = 2|E| \quad \text{y} \quad \dim \mathcal{X}^s(\Gamma) = \dim \mathcal{X}^a(\Gamma) = \dim \Lambda^s(\Gamma) = \dim \Lambda^a(\Gamma) = |E|.$$

La proposición anterior también implica que $\mathcal{X}(\Gamma)$ y $\Lambda(\Gamma)$ son $\mathcal{C}(\Gamma)$ -módulos libres unidimensionales con $\{\mathbf{t}\}$ y $\{\tilde{\mathbf{t}}\}$ como bases respectivamente, y permite asimismo concluir que $\mathcal{X}^\#(\Gamma)$ y $\Lambda^\#(\Gamma)$ son $\mathcal{C}^\#(\Gamma)$ -módulos libres unidimensionales con $\{\mathbf{t}\}$ y $\{\tilde{\mathbf{t}}\}$ como bases, respectivamente y que $\mathcal{X}^s(\Gamma)$ y $\Lambda^s(\Gamma)$ son $\mathcal{C}(E)$ -módulos libres unidimensionales con $\{\mathbf{t}\}$ y $\{\tilde{\mathbf{t}}\}$ como bases, respectivamente. Desde luego, como $\dim \mathcal{X}^s(\Gamma) = \dim \mathcal{X}^a(\Gamma)$, los espacios $\mathcal{X}^s(\Gamma)$ y $\mathcal{X}^a(\Gamma)$, respectivamente $\Lambda^s(\Gamma)$ y $\Lambda^a(\Gamma)$, son isomorfos. De hecho, puede demostrarse, mediante la introducción de una *orientación sobre Γ* , que en ambos casos los subespacios son *naturalmente isomorfos*. Esto permite identificar también a $\mathcal{X}^a(\Gamma)$ y a $\Lambda^a(\Gamma)$ con $\mathcal{C}(E)$ y por tanto conferirles estructura de $\mathcal{C}(E)$ -módulos libres unidimensionales, de manera que $\mathcal{C}(\Gamma)$, $\mathcal{X}(\Gamma)$ y $\Lambda(\Gamma)$ resultan ser $\mathcal{C}(E)$ -módulos libres bidimensionales.

1.3.2 Campos de aplicaciones bilineales

Definiciones 1.3.6 Para cada $x \in V$, sean $F_x(\Gamma)$ y $B_x(\Gamma)$, los espacios vectoriales de endomorfismos y de aplicaciones bilineales sobre $T_x(\Gamma)$, respectivamente y consideraremos también los conjuntos $F(\Gamma) = \bigcup_{x \in V} F_x(\Gamma)$ y $B(\Gamma) = \bigcup_{x \in V} B_x(\Gamma)$.

Denominaremos *campo de endomorfismos sobre Γ* a toda aplicación $F: V \longrightarrow F(\Gamma)$ tal que para cada $x \in V$, $F(x) \in F_x(\Gamma)$. El conjunto de campos de aplicaciones lineales sobre Γ será denotado por $\mathcal{F}(\Gamma)$.

Denominaremos *campo de aplicaciones bilineales sobre Γ* a toda aplicación $B: V \longrightarrow B(\Gamma)$ tal que para cada $x \in V$, $B(x) \in B_x(\Gamma)$. El conjunto de campos de aplicaciones bilineales sobre Γ será denotado por $\mathcal{B}(\Gamma)$.

Diremos que el campo B de aplicaciones bilineales es *no degenerado*, respectivamente *ortogonal*, si para cada $x \in V$, $B(x)$ es no degenerada, respectivamente la base coordenada de $T_x(\Gamma)$ es ortogonal respecto de $B(x)$. En particular, si para cada $x \in V$, $B(x)$ es un producto interno sobre $T_x(\Gamma)$, entonces B se denominará *campo de productos internos o métrica sobre Γ* .

Denominaremos *métrica canónica sobre Γ* y la representaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, a la única métrica sobre Γ tal que para cada $x \in V$, la base coordenada de $T_x(\Gamma)$ es ortonormal.

Es claro que con las operaciones habituales $\mathcal{F}(\Gamma)$ y $\mathcal{B}(\Gamma)$ son espacios vectoriales reales.

Definiciones 1.3.7 Para cada $x \in V$, sea $M_x(\Gamma)$, el espacio de matrices cuadradas de orden $k(x)$ y consideremos el conjunto $M(\Gamma) = \bigcup_{x \in V} M_x(\Gamma)$.

Denominaremos *campo de matrices sobre Γ* a toda aplicación $M: V \longrightarrow M(\Gamma)$ tal que para cada $x \in V$, $M(x) \in M_x(\Gamma)$. El conjunto de campos de matrices sobre Γ será denotado por $\mathcal{M}(\Gamma)$.

Diremos que M es un *campo diagonal o campo de matrices diagonales sobre Γ* , respectivamente *campo simétrico*, *campo no singular* o *campo definido positivo*, si para cada $x \in V$, $M(x)$ es una matriz diagonal, respectivamente simétrica, no singular o definida positiva. El conjunto de campos diagonales de matrices sobre Γ será denotado por $\mathcal{D}(\Gamma)$.

Es claro que con las operaciones habituales, $\mathcal{M}(\Gamma)$ es un espacio vectorial que contiene a $\mathcal{D}(\Gamma)$ como subespacio vectorial. Por otra parte, si M es un campo de matrices sobre Γ , para cada $x \in V$ y para cada $e, e' \in E_x$, podemos considerar la función $m \in \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$ tal que si $e, e' \in E_x$, $m(x, e, e')$ es la componente de $M(x)$ correspondiente a la fila e -ésima y a la columna e' -ésima. Es claro que el campo M está unívocamente determinado por la función m , que en lo sucesivo denominaremos *función componente de M* . Así pues, $\mathcal{M}(\Gamma)$ puede identificarse con el espacio vectorial $\mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$ y por tanto, $\mathcal{D}(\Gamma)$ con el subespacio $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Definiciones 1.3.8 Si $M \in \mathcal{M}(\Gamma)$ y $m \in \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$ es su función componente, diremos que M es un *campo de matrices compatible o equilibrado* si m es una función compatible o equilibrada, respectivamente. Denominaremos *campo reducido de M* al campo de matrices ${}^{\#}M$, cuya función componente es ${}^{\#}m$, la función reducida de m .

Después de las definiciones e identificaciones anteriores, resulta que el conjunto de campos de matrices diagonales y compatibles puede identificarse con el anillo $\mathcal{C}(E)$. Por otra parte, M es un campo simétrico sii $m(x, e, e') = m(x, e', e)$ para cada $x \in V$ y cada $e, e' \in E$. En este caso ${}^{\#}M$ es también un campo simétrico, es decir ${}^{\#}m(x, y, z) = {}^{\#}m(x, z, y)$ para cada $x, y, z \in V$.

Por otra parte, si $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, entonces existe un campo de matrices, M , que denominaremos *campo de matrices asociado a F* , tal que para cada $v \in T_x(\Gamma)$, $F(x)(v) = M(x)v$, donde se ha utilizado la identificación de v con sus componentes en la base coordenada de $T_x(\Gamma)$. Recíprocamente, todo campo de matrices define unívocamente un campo de aplicaciones lineales sobre Γ . En definitiva, podemos identificar los campos de endomorfismos sobre Γ con los campos de matrices sobre Γ .

También, si $B \in \mathcal{B}(\Gamma)$, entonces existe un campo de matrices, M , que denominaremos *campo de matrices asociado a B* , cuya función componente está determinada por la asignación $m(x, e, e') = B(x)(e, e')$ para cada $e, e' \in E_x$, es decir, M es tal que para cada $v, w \in T_x(\Gamma)$, $B(x)(v, w) = \langle M(x)v, w \rangle(x)$. Recíprocamente, cada campo de matrices sobre Γ determina unívocamente, mediante la relación anterior, un campo de aplicaciones bilineales sobre Γ . Además, un campo de aplicaciones bilineales, B es ortogonal, simétrico, no degenerado o una métrica sobre Γ sii su campo de matrices asociado, M , es diagonal, simétrico, no singular o simétrico y definido positivo, respectivamente. Por tanto, el conjunto de campos de aplicaciones bilineales ortogonales está identificado con $\mathcal{C}(\Gamma)$ y el conjunto de campos de aplicaciones bilineales ortogonales y compatibles con $\mathcal{C}(E)$. En particular, la métrica canónica está identificada con la aplicación 1. Además, cuando B es no degenerado, el campo de aplicaciones bilineales determinado por el campo de matrices M^{-1} , dado por la asignación $M^{-1}(x)$ para cada $x \in V$, será denotado por B^{-1} y se verifica que B es ortogonal, simétrico o una métrica sii B^{-1} lo es.

Las identificaciones anteriores permiten a su vez identificar cada campo de endomorfismos, F , con un campo de aplicaciones bilineales, B , y viceversa, por medio de los campos de matrices determinados por ellos.

Definición 1.3.9 Sean F y B campos de endomorfismos y de aplicaciones bilineales sobre Γ , respectivamente. Diremos que F ó B son *equilibrados o compatibles* si sus correspondientes campos de matrices asociados son equilibrados o compatibles, respectivamente. Denominaremos *campo de endomorfismos reducido de F* y *campo de aplicaciones bilineales reducido de B* a los campos de aplicaciones lineales ${}^{\#}F$ y de aplicaciones bilineales, ${}^{\#}B$ correspondientes a ${}^{\#}M$.

Si B es un campo ortogonal y $m \in \mathcal{C}(\Gamma)$ es la función componente del campo de matrices

asociado, entonces \mathbf{B} es no degenerado si $m(x, e) \neq 0$ para cada $x \in V$ y cada $e \in E_x$. Por tanto, la función componente asociada a \mathbf{B}^{-1} está dada por $m^{-1}(x, e)$ para cada $x \in V$ y cada $e \in E_x$. Además, \mathbf{B} es compatible sii $m \in \mathcal{C}(E)$ y por tanto, \mathbf{B} es ortogonal, no degenerado y compatible sii \mathbf{B}^{-1} lo es. En general, si \mathbf{B} es un campo no degenerado de aplicaciones bilineales, \mathbf{B}^{-1} no tiene por qué ser compatible si \mathbf{B} lo es. También debe observarse que aunque la métrica canónica es compatible, en general, una métrica ortogonal no es necesariamente compatible. Por otra parte, si \mathbf{F} es el campo de endomorfismos identificado con \mathbf{B} , es claro que \mathbf{F} es compatible sii \mathbf{B} lo es.

Si $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(\Gamma)$ y $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, la aplicación $\mathbf{F}(\mathbf{f}): V \rightarrow T(\Gamma)$, dada por $\mathbf{F}(\mathbf{f})(x) = \mathbf{F}(x)(\mathbf{f}(x))$ define un campo vectorial sobre Γ . Análogamente, si $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\Gamma)$, y $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, podemos considerar $\mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{C}(V)$, la aplicación dada por $\mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g})(x) = \mathbf{B}(x)(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x))$. Además, si \mathbf{M} es el campo de matrices asociado a \mathbf{F} y \mathbf{B} , el campo $\mathbf{F}(\mathbf{f})$ y la aplicación $\mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ serán también denotados como $\mathbf{M}\mathbf{f}$ y $\langle \mathbf{M}\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$, respectivamente. En definitiva, si $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\Gamma)$ y $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\Gamma)$ están asociados, para cada $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, denotaremos indistintamente por $\mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, por $\langle \mathbf{F}(\mathbf{f}), \mathbf{g} \rangle$ y por $\langle \mathbf{M}\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ al elemento de $\mathcal{C}(V)$ definido por las identidades

$$\mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g})(x) = \mathbf{B}(x)(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x)) = \langle \mathbf{F}(\mathbf{f}), \mathbf{g} \rangle(x) = \langle \mathbf{M}\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle(x) = \langle \mathbf{M}(x)\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x) \rangle(x), \quad x \in V.$$

Por otra parte, si $\Phi \in \Lambda(\Gamma)$, entonces para cada $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ podemos definir la función $\Phi(\mathbf{f}) \in \mathcal{C}(V)$ mediante la asignación $\Phi(x)(\mathbf{f}(x))$, para cada $x \in V$. También, si $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\Gamma)$ y $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, podemos definir la forma $\mathbf{B}(\mathbf{f})$ asignando a cada $x \in V$ la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{f})(x): T_x(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\longrightarrow \mathbf{B}(x)(\mathbf{f}(x), \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Observando que cuando \mathbf{B} es la métrica canónica esta forma sobre Γ es precisamente $\tilde{\mathbf{f}}$, tenemos que, en el caso general la forma $\mathbf{B}(\mathbf{f})$ coincide con $\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{f})} = \widetilde{\mathbf{M}\mathbf{f}}$ y por tanto se satisfacen las identidades

$$\mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \mathbf{B}(\mathbf{f})(\mathbf{g}) = \widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{f})}(\mathbf{g}) = \widetilde{\mathbf{M}\mathbf{f}}(\mathbf{g}).$$

A continuación expondremos las principales propiedades y relaciones de los objetos definidos anteriormente. Omitiremos las demostraciones pues en todos los casos se reducen a una mera comprobación.

Proposición 1.3.10 *Supongamos que $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\Gamma)$ y $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\Gamma)$ están asociados y consideremos $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ y $\Phi \in \Lambda(\Gamma)$. Sean también $m \in \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$, $f, g, \phi \in \mathcal{C}(\Gamma)$, las funciones componentes de \mathbf{M} , \mathbf{f} , \mathbf{g} y Φ , respectivamente. Se satisfacen los siguientes resultados:*

i) Para cada $x \in V$, $\Phi(\mathbf{f})(x) = \sum_{e \in E} \phi(x, e) f(x, e)$. En particular, $\text{sop}(\Phi(\mathbf{f})) \subset \text{sop}(\mathbf{f})$.

ii) El campo $\mathbf{F}(\mathbf{f})$ y la forma $\mathbf{B}(\mathbf{f})$ tienen como función componente a la determinada por la expresión

$$r(x, e) = \sum_{e' \in E} m(x, e, e') f(x, e'), \quad x \in V, e \in E.$$

En particular, $\text{sop}(F(f)) = \text{sop}(B(f)) \subset \text{sop}(f)$.

iii) Si $h \in \mathcal{C}(V)$, entonces $F(h \cdot f) = h \cdot F(f)$.

iv) Si $f \in \mathcal{X}^\#(\Gamma)$, entonces $F(f)^\# = \#F(f)$, mientras que si F es un campo equilibrado de aplicaciones lineales, entonces $F(f) = F(f^\#)$ para cada $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$. En particular, si F y f son equilibrados, entonces $F(f)$ también lo es.

v) Si M es diagonal, entonces $F(f) = m \cdot f$ y $F(\mathcal{X}(\Gamma')) \subset \mathcal{X}(\Gamma')$ para cualquier subvariedad Γ' . Si además F es compatible, entonces se tienen las inclusiones $F(\mathcal{X}^s(\Gamma)) \subset \mathcal{X}^s(\Gamma)$ y $F(\mathcal{X}^a(\Gamma)) \subset \mathcal{X}^a(\Gamma)$. En general, esto no ocurre si M no es diagonal.

vi) La función $B(f, g)$ está dada por $B(f, g)(x) = \sum_{e, e' \in E} m(x, e, e') f(x, e') g(x, e)$, $x \in V$. En particular, si B es ortogonal, entonces $B(f, g)(x) = \sum_{e \in E} m(x, e) f(x, e) g(x, e)$, $x \in V$ y además, para cada $h \in \mathcal{C}(\Gamma)$ se tiene que $B(h \cdot f, g) = B(f, h \cdot g)$.

vii) Si B es no degenerado, entonces $h = F^{-1}(\tilde{\Phi})$ es el único campo tal que $\Phi = B(h)$. En particular, $h = \tilde{\Phi}$ si B es la métrica canónica.

viii) Si $h \in \mathcal{C}(V)$, entonces $B(h \cdot f, g) = B(f, h \cdot g) = h B(f, g)$ y en particular, si $h(x) > 0$ para cada $x \in V$, entonces B es una métrica sii $B' = hB$ es una métrica.

ix) Si $f, g \in \mathcal{X}^\#(\Gamma)$, entonces $B(f, g) = \#B(f, g)$. Además, para cada $x \in V$ se tiene que

$$B(f, g)(x) = \sum_{y, z \in V} \#m(x, y, z) \kappa(x, y) \kappa(x, z) f(x, y) g(x, z).$$

x) Si B es equilibrada, entonces $B(f, g) = B(f^\#, g^\#)$.

La parte (vii) de la anterior proposición establece que todo campo no degenerado de aplicaciones bilineales, y en particular toda métrica sobre Γ , determina un isomorfismo natural entre $\mathcal{X}(\Gamma)$ y $\Lambda(\Gamma)$, que coincide con \sim cuando B es la métrica canónica.

De las partes (i) y (ii) de la proposición anterior se concluye que toda forma y todo campo de endomorfismos sobre Γ pueden ser interpretados, respectivamente, como un homomorfismo de $\mathcal{X}(\Gamma)$ sobre $\mathcal{C}(V)$ y como un endomorfismo sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$, con la particularidad en ambos casos de que no aumenta el soporte. Como veremos al final de esta sección, no todo endomorfismo tiene este mismo carácter local, de manera que podemos clasificar dichos endomorfismos atendiendo a la relación, en términos de contención de conjuntos, entre el soporte del objeto inicial y de su imagen.

Definición 1.3.11 Consideremos \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 subespacios vectoriales de $\mathcal{X}(\Gamma)$ y $\mathcal{C}(V)$, respectivamente y las aplicaciones lineales

$$F: \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{X}(\Gamma), \quad G: \mathcal{V}_2 \longrightarrow \mathcal{X}(\Gamma), \quad H: \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{C}(V) \quad \text{y} \quad J: \mathcal{V}_2 \longrightarrow \mathcal{C}(V).$$

Diremos que F , G , H ó J son *operadores locales* si para cada $f \in \mathcal{V}_1$ y cada $u \in \mathcal{V}_2$, se verifica que $\text{sop}(F(f)) \subset \text{sop}(f)$, $\text{sop}(G(u)) \subset \text{sop}(u)$, $\text{sop}(H(f)) \subset \text{sop}(f)$ ó $\text{sop}(J(u)) \subset \text{sop}(u)$, respectivamente.

Diremos que F , G , H y J son *operadores de orden n* si n es el menor número natural tal que, para cada $f \in \mathcal{V}_1$ y cada $u \in \mathcal{V}_2$ se satisface que

$$\begin{aligned} \text{sop}(F(f)), \text{sop}(H(f)) &\subset \{x \in V : d(x, \text{sop}(f)) \leq n\}, \\ \text{sop}(G(u)), \text{sop}(J(u)) &\subset \{x \in V : d(x, \text{sop}(u)) \leq n\}. \end{aligned}$$

Se pueden definir conceptos análogos a los anteriores sustituyendo en el enunciado de la definición anterior, $\mathcal{X}(\Gamma)$ por $\Lambda(\Gamma)$. Así por ejemplo, diremos que una aplicación lineal $G: \mathcal{V}_2 \rightarrow \Lambda(\Gamma)$ tiene orden n , si n es el menor natural tal que para cada $u \in \mathcal{V}_2$, se verifica $\text{sop}(G(u)) \subset \{x \in V : d(x, \text{sop}(u)) \leq n\}$.

Es claro que un homomorfismo es local sii es de orden 0 y que todo homomorfismo es de orden menor o igual que $d(\Gamma)$. Por otra parte, la composición de dos homomorfismos de órdenes n y m respectivamente, es un endomorfismo de orden menor o igual que $n + m$ y, en particular, la composición de homomorfismos locales es nuevamente un homomorfismo local. Además, la noción de orden es hereditaria, en el sentido de que la restricción de un operador a un subespacio tiene orden menor o igual que el del operador, lo que no excluye que, en algunos casos, el orden de la restricción pueda ser estrictamente menor.

Obsérvese que si F , G , H y J son operadores de orden 1, u *operadores de primer orden*, entonces para cada $f \in \mathcal{V}_1$ y cada $f \in \mathcal{V}_2$ se satisface que

$$\text{sop}(F(f)), \text{sop}(H(f)) \subset \overline{\text{sop}(f)} \quad \text{y} \quad \text{sop}(G(f)), \text{sop}(J(f)) \subset \overline{\text{sop}(f)},$$

mientras que si son operadores de orden 2, u *operadores de segundo orden*, entonces para cada $f \in \mathcal{V}_1$ y cada $f \in \mathcal{V}_2$ se satisface que

$$\text{sop}(F(f)), \text{sop}(H(f)) \subset \overline{\overline{\text{sop}(f)}} \quad \text{y} \quad \text{sop}(G(f)), \text{sop}(J(f)) \subset \overline{\overline{\text{sop}(f)}}.$$

Después de estas definiciones, resulta que toda forma sobre Γ puede interpretarse como un endomorfismo local de $\mathcal{X}(\Gamma)$ sobre $\mathcal{C}(V)$, mientras que todo campo de endomorfismos sobre Γ puede interpretarse como un endomorfismo local sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$. Recíprocamente, si $H: \mathcal{X}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}(V)$ y $F: \mathcal{X}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{X}(\Gamma)$ son homomorfismos locales, entonces H y F pueden interpretarse como la forma y el campo de endomorfismos sobre Γ dados respectivamente por $\Phi(x)(f(x)) = H(f)(x)$ y $F(x)(f(x)) = F(f)(x)$. En definitiva, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.3.12 *Las formas y los campos de endomorfismos sobre Γ están identificados con los homomorfismos locales de $\mathcal{X}(\Gamma)$ sobre $\mathcal{C}(V)$ y con los endomorfismos locales sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$, respectivamente.*

Definición 1.3.13 Denotaremos por $\pi^s, \pi^a, \check{\pi}$ y por $\pi^\#$ a los endomorfismos en $\mathcal{X}(\Gamma)$ dados por $\pi^s(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^s, \pi^a(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^a, \check{\pi}(\mathbf{f}) = \check{\mathbf{f}}$ y por $\pi^\#(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^\#$, respectivamente.

Si $g \in \mathcal{C}(\Gamma)$, denotaremos por T_g al endomorfismo sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$ dado por $T_g(\mathbf{f}) = g \cdot \mathbf{f}$.

Si Γ' es una subvariedad de Γ , denotaremos por $\pi_{\Gamma'}$ al endomorfismo $\pi_{\Gamma'} = T_g$ donde $g = \mathbf{1}_{\Gamma'}$.

Lema 1.3.14 *Los endomorfismos $\pi^s, \pi^a, \check{\pi}, \pi^\#$ y $\pi_{\Gamma'}$ son idempotentes y conmutan entre sí. Además, $\pi^\#$ y $\pi_{\Gamma'}$ son locales y π^s, π^a y $\check{\pi}$ son de primer orden.*

Si $g \in \mathcal{C}(\Gamma)$, entonces T_g es local y conmuta con $\pi_{\Gamma'}$, y si $g \in \mathcal{C}^\#(\Gamma)$, T_g conmuta con $\pi^\#$. En particular, si $g \in \mathcal{C}(V)$, T_g puede también considerarse como un endomorfismo local sobre $\mathcal{C}(V)$. Además, si $h \in \mathcal{C}(\Gamma)$, entonces $T_g \circ T_h = T_h \circ T_g = T_{gh}$.

El caso de los operadores π^s y π^a muestra que operadores de cierto orden pueden ser de menor orden cuando se restringen a determinados subespacios. Concretamente, π^s y π^a son locales sobre $\mathcal{X}^s(\Gamma)$ y sobre $\mathcal{X}^a(\Gamma)$ pues en cada caso son la identidad o el endomorfismo nulo.

Después de las definiciones de los operadores $\pi^s, \pi^a, \pi^\#$ y $\pi_{\Gamma'}$ y T_g , podemos reescribir los resultados de la proposición 1.3.10 en función de los mismos.

Proposición 1.3.15 *Sea F un endomorfismo local sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$ y consideremos B el campo de aplicaciones bilineales determinado por él. Si $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, se satisfacen los siguientes resultados:*

- i) *Si $h \in \mathcal{C}(V)$, entonces $F \circ T_h = T_h \circ F$ y $B(T_h(\mathbf{f}), \mathbf{g}) = B(\mathbf{f}, T_h(\mathbf{g})) = T_h \circ B(\mathbf{f}, \mathbf{g})$.*
- ii) *$\pi^\# \circ F \circ \pi^\# = {}^\#F$. En particular, si F es equilibrado, entonces $F \circ \pi^\# = F$.*
- iii) *Si B es ortogonal, entonces $F = T_m$, donde $m \in \mathcal{C}(\Gamma)$ es la componente de F y por tanto, para cada $h \in \mathcal{C}(\Gamma)$, $T_{hm} = F \circ T_h = T_h \circ F$ y $B(T_h(\mathbf{f}), \mathbf{g}) = B(\mathbf{f}, T_h(\mathbf{g}))$. En particular, para cada subvariedad Γ' , $F \circ \pi_{\Gamma'} = \pi_{\Gamma'} \circ F$ y si B es además compatible, entonces $F \circ \pi^s = \pi^s \circ F$ y $F \circ \pi^a = \pi^a \circ F$.*

A la vista de los resultados (iv) y (ix) de la Proposición 1.3.10, si $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, podemos interpretar a ${}^\#F$, el campo reducido de F , como un endomorfismo sobre $\mathcal{X}^\#(\Gamma)$, es decir como un campo de aplicaciones lineales sobre $\Gamma^\#$. Además, ${}^\#B$ puede identificarse con un campo de aplicaciones bilineales sobre $\Gamma^\#$ y con la restricción de B sobre $\mathcal{X}^\#(\Gamma)$. Observemos que, en virtud de la parte (ix) de la Proposición 1.3.10, si M es el campo de matrices asociado a B , entonces el campo de matrices asociado a ${}^\#B$ como métrica sobre $\mathcal{X}^\#(\Gamma)$ es ${}^\#M$, mientras que como métrica sobre $\Gamma^\#$ su campo de matrices asociado es $D {}^\#M D$, donde D es la matriz diagonal cuya función componente es κ .

Por otra parte, si Γ' es un submultigrafo seguiremos denotando por \mathbf{B} a la restricción de \mathbf{B} al subespacio $\mathcal{X}(\Gamma')$.

Con las anteriores notaciones, tenemos el siguiente resultado, cuya importancia se pondrá de manifiesto en las secciones posteriores.

Corolario 1.3.16 *Si \mathbf{B} es una métrica sobre Γ , entonces $\# \mathbf{B}$ es una métrica sobre $\Gamma^\#$ y para cada subvariedad Γ' , \mathbf{B} es una métrica sobre Γ' .*

Como veremos en el capítulo siguiente, la elección de una métrica sobre una variedad Riemanniana discreta determina la expresión de importantes operadores en diferencias sobre ella. Con vistas a las aplicaciones, la mayor o menor utilidad de una métrica estará relacionada con las propiedades algebraicas del campo de matrices asociado. Para describir estas propiedades necesitaremos algunas nociones y resultados provenientes de la Teoría de Matrices. Las definiciones y los resultados que aparecen a continuación pueden encontrarse en [7, 22, 45, 59].

Definiciones 1.3.17 Consideremos $\mathbf{M} = (m_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n y simétrica.

Diremos que \mathbf{M} es *no negativa* y lo denotaremos por $\mathbf{M} \geq 0$ si $m_{ij} \geq 0$ para cada $i, j = 1, \dots, n$.

Diremos que \mathbf{M} es una *Z-matriz* si $m_{ij} \leq 0$ para cada $i, j = 1, \dots, n$ con $i \neq j$.

Diremos que \mathbf{M} es *diagonalmente dominante* si $|m_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |m_{ij}|$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Si además la desigualdad es estricta para todo $i = 1, \dots, n$, entonces \mathbf{M} se denomina *diagonalmente dominante de forma estricta*.

Diremos que \mathbf{M} es *ultramétrica* si es no negativa y satisface que $m_{ij} \geq \min\{m_{ik}, m_{kj}\}$ para cada $i, j, k = 1, \dots, n$. Si además se verifica que $m_{ii} > \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \{m_{ij}\}$ para cada $i = 1, \dots, n$, entonces \mathbf{M} se denomina *estrictamente ultramétrica*.

Diremos que \mathbf{M} es una *matriz de Stieltjes* si es una Z-matriz definida positiva.

Como se muestra a continuación, los conceptos de matrices de Stieltjes diagonalmente dominantes y de matrices ultramétricas están relacionados entre sí. Ésto se hace aún más patente en matrices de segundo orden, pues en este caso toda matriz de Stieltjes diagonalmente dominante es la inversa de una matriz ultramétrica y de hecho, una matriz de segundo orden definida positiva es o bien una matriz ultramétrica o bien una matriz de Stieltjes.

Lema 1.3.18 *Consideremos $\mathbf{M} = (m_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n y simétrica. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

- i) Si M es una Z -matriz, y $m_{ii} \geq 0$ para cada $i = 1, \dots, n$, M es diagonalmente dominante sii $\sum_{j=1}^n m_{ij} \geq 0$, para cada $i = 1, \dots, n$ y diagonalmente dominante de forma estricta sii la anterior desigualdad es estricta para cada $i = 1, \dots, n$. En este último caso, M es una matriz de Stieltjes.
- ii) Si M es una matriz de Stieltjes, entonces $M^{-1} \geq 0$.
- iii) Si M es ultramétrica, es no singular sii todas sus columnas son diferentes. En este caso M^{-1} es una matriz de Stieltjes diagonalmente dominante.
- iv) Si M es estrictamente ultramétrica, es no singular, $M^{-1} = (a_{ij})$ es una matriz de Stieltjes diagonalmente dominante de forma estricta y además $a_{ij} = 0$ sii $m_{ij} = 0$.

Definiciones 1.3.19 Consideremos M un campo de matrices simétricas sobre la variedad discreta Γ y $F \subset V$ un conjunto no vacío.

Diremos que M es un *campo diagonalmente dominante, diagonalmente dominante de forma estricta, ultramétrico, estrictamente ultramétrico o de Stieltjes sobre F* , si para cada $x \in F$, $M(x)$ es una matriz diagonalmente dominante, diagonalmente dominante de forma estricta, ultramétrica, estrictamente ultramétrica o de Stieltjes, respectivamente.

El siguiente resultado muestra como las anteriores propiedades para el campo de matrices asociado a una métrica B sobre Γ pueden ser heredadas por la métrica ${}^{\#}B$ cuando ésta se considera como una métrica sobre la variedad simple subyacente $\Gamma^{\#}$.

Proposición 1.3.20 Consideremos $F \subset V$ no vacío, B una métrica sobre Γ y denotemos por M al campo de matrices determinado por B . Si M es un campo de Stieltjes sobre F , entonces $D^{\#}MD$ es un campo de Stieltjes sobre F en $\Gamma^{\#}$ y si además M es diagonalmente dominante o diagonalmente dominante de forma estricta, lo mismo ocurre con $D^{\#}MD$.

Demostración. Si $m \in \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$ es la función componente de M , entonces la función componente de $D^{\#}MD$, $r \in \mathcal{C}(V \times V)$, está dada por

$$r(x, y, z) = {}^{\#}m(x, y, z) \kappa(x, y) \kappa(x, z) = \sum_{e \in E_{xy}} \sum_{e' \in E_{xz}} m(x, e, e'), \quad x, y, z \in V.$$

De esta expresión se deduce directamente que si $M(x)$ es una Z -matriz, lo mismo ocurre con $D^{\#}MD(x)$. Como además, en virtud del Corolario 1.3.16, $D^{\#}MD$ es un campo definido positivo, concluimos que es un campo de Stieltjes sobre F . Por otra parte, para cada $x \in F$ se satisface que

$$\sum_{z \in V} r(x, y, z) = \sum_{e \in E_{xy}} \sum_{z \in V} \sum_{e' \in E_{xz}} m(x, e, e') = \sum_{e \in E_{xy}} \sum_{e' \in E} m(x, e, e'),$$

para cada $y \in V$, y como $\sum_{e' \in E} m(x, e, e') \geq 0$ para cada $e \in E$, la parte (i) del Lema 1.3.18 implica las últimas afirmaciones. ■

Concluiremos este capítulo presentado algunos casos concretos de métricas. Específicamente, consideraremos como variedades discretas retículas uniformes en \mathbb{R}^n y sobre ellas métricas generales coherentes con la uniformidad de la variedad.

Supondremos fijados $h > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m_1, \dots, m_n \geq 3$, los subconjuntos de \mathbb{R}^n

$$V_n = \{h(i_1, \dots, i_n) : 0 \leq i_j \leq m_j, j = 1, \dots, n \text{ e } i_j = 0 \text{ ó } m_j \text{ para un índice a lo sumo}\},$$

$$R_n = \{h(i_1, \dots, i_n) \in V_n : 1 \leq i_j \leq m_j - 1, j = 1, \dots, n\},$$

$$\delta(R_n) = \{h(i_1, \dots, i_n) \in V_n : i_j = 0 \text{ ó } m_j, \text{ para algún } j\}$$

y la variedad discreta simple Γ_n (*retícula uniforme n -dimensional de tamaño h*) cuyo conjunto de vértices es V_n y donde dos vértices son adyacentes sii su distancia euclídea es igual a h y al menos uno de ellos pertenece a R_n . Una representación gráfica de una retícula bidimensional está dada en la Figura 1.3.

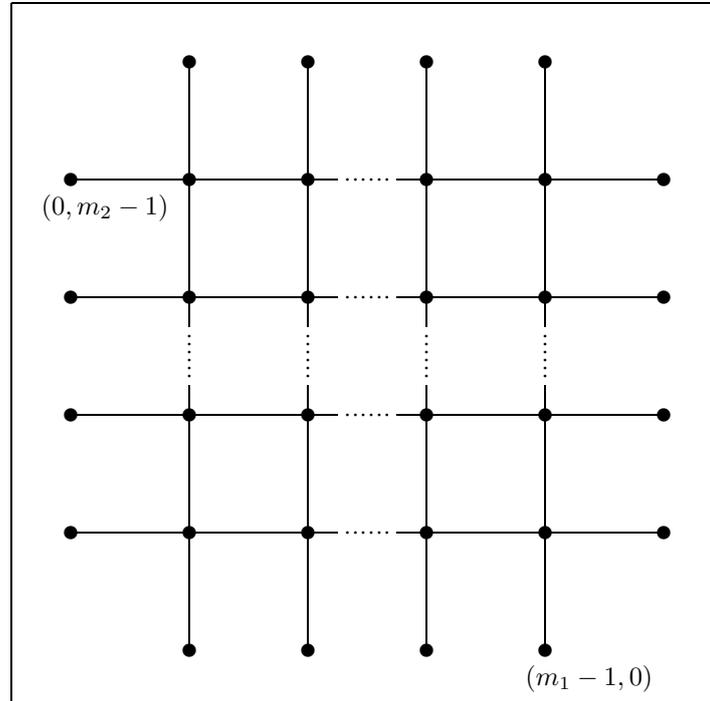


Figura 1.3: Retícula bidimensional

Las métricas definidas sobre este tipo de retículas que sean coherentes con el carácter uniforme de las mismas, deben asignar la misma matriz a cada punto de R_n . A continuación describiremos una familia suficientemente rica de tales matrices y analizaremos las condiciones para que se satisfagan las propiedades establecidas en la Definición 1.3.17 y a las cuales pueden, por tanto, aplicarse los resultados del Lema 1.3.18.

Lema 1.3.21 *Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ con $n \geq 2$ y cada $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ la matriz de orden $2n$ definida por la expresión*

$$\mathbf{M}(n; a, b, c, d) = \begin{bmatrix} a & b & \overset{n-1}{\dots} & b & d & \overset{n-1}{\dots} & d & c \\ b & a & \dots & b & d & \dots & c & d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & c & \dots & d & d \\ d & d & \dots & c & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d & c & \dots & d & b & \dots & a & b \\ c & d & \dots & d & b & \dots & b & a \end{bmatrix}$$

satisface las siguientes propiedades:

$$i) \det \mathbf{M}(n; a, b, c, d) = (a+c+(n-1)(b+d)) (a+c-(b+d))^{n-1} (a-c+(n-1)(b-d)) (a-c-(b-d))^{n-1}.$$

ii) $\mathbf{M}(n; a, b, c, d)$ es semidefinida positiva sii

$$a \geq \max \{b+d-c, b-d+c, -(n-1)(b+d)-c, (n-1)(d-b)+c\}$$

y definida positiva sii la anterior desigualdad es estricta.

iii) Si $\det \mathbf{M}(n; a, b, c, d) \neq 0$, entonces $\mathbf{M}^{-1}(n; a, b, c, d) = \mathbf{M}(n; A, -B, -C, -D)$, donde

$$A = \frac{a(a^2 - c^2 + b^2 - d^2) + 2(ab - cd)((n-2)a - (n-1)b) + (n-1)(n-2)(a-b)(b^2 - d^2)}{(a+c+(n-1)(b+d)) (a+c-(b+d)) (a-c+(n-1)(b-d)) (a-c-(b-d))}$$

$$B = \frac{b(a-c)^2 + 2ac(b-d) + (b^2 - d^2)((n-2)a - (n-1)b)}{(a+c+(n-1)(b+d)) (a+c-(b+d)) (a-c+(n-1)(b-d)) (a-c-(b-d))}$$

$$D = \frac{d(a-c)^2 - 2ac(b-d) + (b^2 - d^2)((n-1)d - (n-2)c)}{(a+c+(n-1)(b+d)) (a+c-(b+d)) (a-c+(n-1)(b-d)) (a-c-(b-d))}$$

$$C = \frac{c(a^2 - c^2 + b^2 - d^2) + 2(ab - cd)((n-2)c - (n-1)d) + (n-1)(n-2)(c-d)(b^2 - d^2)}{(a+c+(n-1)(b+d)) (a+c-(b+d)) (a-c+(n-1)(b-d)) (a-c-(b-d))}$$

iv) $\mathbf{M}(n; a, b, c, d)$ es de Stieltjes sii $b, c, d \leq 0$ y además $a+c+(n-1)(b+d) > 0$.

v) Si $n \geq 3$, $M(n; a, b, c, d)$ es ultramétrica, sii o bien $c = d$ y $a \geq b \geq c \geq 0$ o bien $d = b$ y $a \geq c \geq b \geq 0$, mientras que $M(2, a, b, c, d)$ es ultramétrica sii o bien se satisface una de las dos posibilidades anteriores o bien $c = b$ y $a \geq d \geq c \geq 0$. En cualquier caso, $M(n; a, b, c, d)$ es estrictamente ultramétrica sii en las expresiones anteriores se verifica además que la primera desigualdad es estricta.

Demostración. (i) Consideremos los escalares $\alpha = \det M(n; a, b, c, d)$ y

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= a + c + (n-1)(b+d), & \lambda_2 &= a + c - (b+d), \\ \lambda_3 &= a - c + (n-1)(b-d), & \lambda_4 &= a - c - (b-d).\end{aligned}$$

Sumando a la primera el resto de filas de $M(n; a, b, c, d)$, obtenemos que

$$\alpha = \lambda_1 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ b & a & \dots & b & d & \dots & c & d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & c & \dots & d & d \\ d & d & \dots & c & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d & c & \dots & d & b & \dots & a & b \\ c & d & \dots & d & b & \dots & b & a \end{bmatrix} = \lambda_1 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a-b & \dots & 0 & d-b & \dots & c-b & d-b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b & c-b & \dots & d-b & d-b \\ 0 & 0 & \dots & c-d & a-d & \dots & b-d & b-d \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & c-d & \dots & 0 & b-d & \dots & a-d & b-d \\ c-d & 0 & \dots & 0 & b-d & \dots & b-d & a-d \end{bmatrix}.$$

Sumando ahora a la fila j la fila $2n - j + 1$, para cada $j = 2, \dots, n$, obtenemos que

$$\alpha = \lambda_1 \lambda_2^{n-1} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c-d & a-d & \dots & b-d & b-d \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & c-d & \dots & 0 & b-d & \dots & a-d & b-d \\ c-d & 0 & \dots & 0 & b-d & \dots & b-d & a-d \end{bmatrix}$$

y por tanto restando a la primera la fila j -ésima $j = 2, \dots, n$, resulta que

$$\alpha = \lambda_1 \lambda_2^{n-1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c-d & a-d & \dots & b-d & b-d \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & c-d & \dots & 0 & b-d & \dots & a-d & b-d \\ c-d & 0 & \dots & 0 & b-d & \dots & b-d & a-d \end{bmatrix}$$

A continuación, si a la fila $2n - j + 1$ -ésima le sumamos la j -ésima multiplicada por $d - c$,

para cada $j = 1, \dots, n$, obtenemos que

$$\alpha = \lambda_1 \lambda_2^{n-1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-c & \dots & b-d & b-d \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b-d & \dots & a-c & b-d \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b-d & \dots & b-d & a-c \end{bmatrix} = \lambda_1 \lambda_2^{n-1} \det \begin{bmatrix} a-c & b-d & \dots & b-d \\ b-d & a-c & \dots & b-d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b-d & b-d & \dots & a-c \end{bmatrix}$$

Finalmente, sumando a la primera el resto de filas,

$$\det \begin{bmatrix} a-c & b-d & \dots & b-d \\ b-d & a-c & \dots & b-d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b-d & b-d & \dots & a-c \end{bmatrix} = \lambda_3 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b-d & a-c & \dots & b-d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b-d & b-d & \dots & a-c \end{bmatrix} = \lambda_3 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

obtenemos que $\alpha = \lambda_1 \lambda_2^{n-1} \lambda_3 \lambda_4^{n-1}$.

(ii) Teniendo en cuenta que el polinomio característico de la matriz $M(n; a, b, c, d)$ es $\det M(n; a-x, b, c, d)$, resulta que sus autovalores son precisamente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 y por tanto $M(n; a, b, c, d)$ es semidefinida positiva o definida positiva sii los anteriores escalares son no negativos o positivos, respectivamente.

(iii) Después de (i), la matriz $M(n; a, b, c, d)$ es invertible sii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \neq 0$ y en este caso, si suponemos que $M^{-1}(n; a, b, c, d) = M(n; \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d})$, los escalares $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ y \hat{d} deben ser solución del sistema

$$\begin{bmatrix} a & (n-1)b & (n-1)d & c \\ b & a+(n-2)b & c+(n-2)d & d \\ d & c+(n-2)d & a+(n-2)b & b \\ c & (n-1)d & (n-1)b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{d} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [S].$$

Si hacemos el cambio de variable $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{d} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{d} \\ \hat{c} \end{bmatrix}$, el sistema [S] se convierte

en el sistema

$$\begin{bmatrix} a & a+(n-1)b & c+(n-1)d & c \\ b & a+(n-1)b & c+(n-1)d & d \\ d & c+(n-1)d & a+(n-1)b & b \\ c & c+(n-1)d & a+(n-1)b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{d} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [S'].$$

Restando a las filas segunda y tercera la primera y cuarta respectivamente, obtenemos que

$$\begin{bmatrix} a & a + (n-1)b & c + (n-1)d & c \\ b-a & 0 & 0 & d-c \\ d-c & 0 & 0 & b-a \\ c & c + (n-1)d & a + (n-1)b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{d} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y sumando ahora la fila tercera a la segunda

$$\begin{bmatrix} a & a + (n-1)b & c + (n-1)d & c \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ d-c & 0 & 0 & b-a \\ c & c + (n-1)d & a + (n-1)b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{d} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\lambda_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tenemos pues que el sistema [S'] puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} 0 & a + (n-1)b & c + (n-1)d & c-a \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c + (n-1)d & a + (n-1)b & a-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{d} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2-a}{\lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_2} \\ \frac{d-c}{\lambda_2\lambda_4} \\ -\frac{c}{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

y, sumando a la primera la cuarta fila,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c + (n-1)d & a + (n-1)b & a-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{d} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2-(a+c)}{\lambda_1\lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_2} \\ \frac{d-c}{\lambda_2\lambda_4} \\ -\frac{c}{\lambda_2} \end{bmatrix}.$$

En definitiva, restando a la segunda fila la tercera y sumando a la cuarta la tercera multiplicada por $c-a$, obtenemos que [S'] queda expresado como

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c + (n-1)d & a + (n-1)b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{d} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2-(a+c)}{\lambda_1\lambda_2} \\ \frac{\lambda_4+c-d}{\lambda_2\lambda_4} \\ \frac{d-c}{\lambda_2\lambda_4} \\ -\frac{(c\lambda_4+(c-d)(c-a))}{\lambda_2\lambda_4} \end{bmatrix} = \frac{-1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_4} \begin{bmatrix} \lambda_4(b+d) \\ \lambda_1(b-a) \\ \lambda_1(c-d) \\ \lambda_1(ad-bc) \end{bmatrix}.$$

Por tanto, el sistema [S'] tiene como única solución la dada por

$$\tilde{a} = \frac{1}{\lambda_2\lambda_4} (a-b), \quad \tilde{b} = \frac{[(c+(n-1)d)(ad-bc) + (a+(n-1)b)(b(b-a) + d(c-d))]}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4},$$

$$\tilde{c} = \frac{1}{\lambda_2\lambda_4} (d-c), \quad \tilde{d} = \frac{[(c+(n-1)d)(b(a-b) + d(d-c)) - (a+(n-1)b)(ad-bc)]}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}.$$

lo que implica que el sistema [S] tiene como solución la dada por

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \left[a(a^2 - c^2 + b^2 - d^2) + 2(ab - cd)((n-2)a - (n-1)b) + (n-1)(n-2)(a-b)(b^2 - d^2) \right], \\ \hat{b} &= \frac{-1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \left[b(a-c)^2 + 2ac(b-d) + (b^2 - d^2)((n-2)a - (n-1)b) \right], \\ \hat{d} &= \frac{-1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \left[d(a-c)^2 - 2ac(b-d) + (b^2 - d^2)((n-1)d - (n-2)c) \right], \\ \hat{c} &= \frac{-1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \left[c(a^2 - c^2 + b^2 - d^2) + 2(ab - cd)((n-2)c - (n-1)d) + (n-1)(n-2)(c-d)(b^2 - d^2) \right].\end{aligned}$$

(iv) Recordemos que una matriz simétrica es de Stieltjes sii es una Z -matriz definida positiva. Es claro que $\mathbf{M}(n; a, b, c, d)$ es una Z -matriz sii $b, c, d \leq 0$ y cuando esto ocurre, su menor autovalor es λ_1 . Por tanto, si $\mathbf{M}(n; a, b, c, d)$ es una Z -matriz, es de Stieltjes sii $a + c + (n-1)(b+d) = \lambda_1 > 0$.

(v) Es sencillo comprobar que la matriz $\mathbf{M}(n; a, b, c, d)$ es ultramétrica sii se satisfacen las desigualdades

$$a, b, c, d \geq 0, \quad a \geq b, \quad a \geq c, \quad a \geq d, \quad b \geq \min\{c, d\}, \quad c \geq \min\{b, d\}, \quad d \geq \min\{b, c\}.$$

y además $b \geq d$ cuando $n \geq 3$.

Si $n \geq 3$, las anteriores desigualdades implican que o bien $a \geq c \geq b = d \geq 0$ o bien $a \geq b \geq c = d \geq 0$; mientras que si $n = 2$ a éstas debe añadirse la posibilidad $a \geq d \geq b = c \geq 0$. Por último en cualquiera de las situaciones, $\mathbf{M}(n; a, b, c, d)$ es estrictamente ultramétrica sii además de las anteriores se verifican las desigualdades $a > b$, $a > c$ y $a > d$. ■

Obsérvese que si $\mathbf{M}(n; a, b, c, d)$ es ultramétrica, es invertible sii es estrictamente ultramétrica, mientras que $\mathbf{M}(n; a, b, c, d)$ es de Stieltjes sii es diagonalmente dominante de forma estricta y $b, c, d \leq 0$.

La definición de la familia de matrices $\mathbf{M}(n; a, b, c, d)$ puede extenderse al caso $n = 1$, tomando $\mathbf{M}(1; a, b, c, d) = \begin{bmatrix} a & c \\ c & a \end{bmatrix}$. Si adoptamos el convenio de que cuando $n = 1$ entonces $b = d = 0$, todas las propiedades descritas en el lema anterior siguen vigentes en el caso unidimensional.

A continuación utilizaremos el tipo de matrices que acabamos de describir para definir una métrica, o de forma equivalente un campo de matrices simétricas y definidas positivas, sobre Γ_n , la retícula uniforme de tamaño h .

Observemos primero que si $x \in \delta(R_n)$, entonces $k(x) = 1$, mientras que si $x \in R_n$, entonces $k(x) = 2n$. Así pues, si $x \in \delta(R_n)$ tomaremos $\mathbf{M}(x) = h\alpha$, donde $\alpha > 0$, mientras que para cada $x \in R_n$ consideraremos la asignación $\mathbf{M}(x) = h\mathbf{M}(n; a, b, c, d)$, donde

$$a > \max \left\{ b + d - c, b - d + c, -(n-1)(b+d) - c, (n-1)(d-b) + c \right\}$$

y donde el valor de la función componente de \mathbf{M} está dada por la expresión:

Para cada $x = h(i_1, \dots, i_n)$,

$$m(x, y, z) = h \left\{ \begin{array}{l} a, \text{ si } y = z = h(i_1, \dots, i_l \pm 1, \dots, i_n), \quad 1 \leq l \leq n; \\ b, \text{ si } y = h(i_1, \dots, i_l \pm 1, \dots, i_n); \quad z = h(i_1, \dots, i_s \pm 1, \dots, i_n); \\ \quad 1 \leq l, s \leq n, \quad l \neq s; \\ c, \text{ si } y = h(i_1, \dots, i_l \pm 1, \dots, i_n); \quad z = h(i_1, \dots, i_l \mp 1, \dots, i_n); \\ \quad 1 \leq l \leq n; \\ d, \text{ si } y = h(i_1, \dots, i_l \pm 1, \dots, i_n); \quad z = h(i_1, \dots, i_s \mp 1, \dots, i_n); \\ \quad 1 \leq l, s \leq n, \quad l \neq s. \end{array} \right.$$

En lo sucesivo, este tipo de métricas sobre Γ_n serán denominadas *métricas uniformes*.

Capítulo 2

Cálculo en diferencias sobre variedades Riemannianas discretas

Así como las retículas uniformes constituyen un modelo discreto de subconjuntos apropiados del espacio euclídeo, un grafo finito puede ser considerado como un análogo discreto de una variedad diferenciable compacta. Por otra parte, el operador de Laplace es el operador diferencial con el que se modelan un gran número de fenómenos de interés. Entonces, cuando se considera su discretización sobre una retícula uniforme se obtiene un *operador en diferencias* que corresponde a un esquema en diferencias de $2n + 1$ puntos, donde n es la dimensión del espacio ambiente. De la misma forma, un grafo finito tiene asociado el denominado Laplaciano combinatorio, que por tanto puede interpretarse como un análogo discreto del operador de Laplace-Beltrami sobre una variedad Riemanniana compacta.

Aunque el Laplaciano combinatorio había sido profusamente utilizado en relación con los caminos aleatorios simples, son las herramientas introducidas por J. Dodziuk ([24, 25]), las que permiten interpretarlo verdaderamente como una versión discreta del operador de Laplace-Beltrami. Para ello, se dota de productos internos adecuados a los espacios de funciones definidas sobre los vértices y sobre las ramas de un grafo y entonces el Laplaciano combinatorio puede obtenerse formalmente como la composición de dos operadores en diferencias relacionados entre sí por ser uno el opuesto del dual del otro, y que por tanto juegan el mismo papel que el gradiente y la divergencia en el caso continuo. Desde el punto de vista combinatorio, estos operadores están relacionados con la denominada *matriz de incidencia vértice-rama*, tanto en el caso de redes finitas (ver por ejemplo [10, 15]) como infinitas (ver por ejemplo [40, 60]).

Una característica común de todos los trabajos previamente citados es que el papel de la métrica está simplificado, ya que sólo se consideran o bien la métrica canónica o bien una métrica que, en nuestra terminología, es ortogonal y compatible. Por tanto, las métricas consideradas están asociadas a funciones positivas sobre las ramas del grafo, lo que conduce a la noción de redes puramente resistivas. Otra coincidencia en todos los modelos anteriores es la necesidad de introducir una orientación sobre el grafo para así poder definir las operaciones

en diferencias, lo que es más evidente desde el punto de vista combinatorio ya que sólo es posible definir la matriz de incidencia si previamente se considera una orientación sobre el grafo. De cualquier forma, todos los autores coinciden en la independencia de la expresión del Laplaciano respecto de la orientación escogida.

En este capítulo consideraremos las métricas generales sobre una variedad discreta que fueron introducidas en el capítulo anterior, lo que nos conducirá al concepto de variedad Riemanniana discreta. En tales variedades se consideran productos internos sobre el espacio de funciones sobre los vértices y sobre el espacio de campos, lo que permite introducir los operadores en diferencias mediante técnicas de dualidad. Un hecho importante de esta construcción es que se efectúa sin necesidad de introducir previamente una orientación sobre la variedad. La consideración de una orientación sobre el modelo aquí presentado, cambiaría las expresiones de los operadores en diferencias, pero no modificaría los resultados cualitativos obtenidos y por ello en esta memoria no se definirá ninguna orientación sobre la variedad.

Un aspecto relevante de la consideración de métricas generales radica en que los esquemas en diferencias habituales sobre retículas uniformes corresponden a una elección adecuada de los coeficientes de determinadas métricas. En particular, este es el caso para los esquemas en diferencias de 5 puntos en la recta, de 9 y 13 puntos en el plano y de 19 y 25 puntos en el espacio tridimensional. Esto indica que los esquemas en diferencias provenientes de desarrollos de Taylor de orden superior, pueden ser abordados desde la consideración de determinadas métricas no ortogonales. Además, este tipo de estructuras métricas pueden modelar situaciones de inhomogeneidad y de anisotropía del espacio subyacente mediante esquemas en diferencias consistentes. En particular, nuestro modelo discreto recoge buena parte de los desarrollos de esquemas en diferencias sobre redes lógicamente rectangulares debidos a M. Shashkov y colaboradores (ver [38, 44]).

Por último, la definición de los operadores en diferencias sobre una variedad Riemanniana discreta, permite considerar el Laplaciano de Hodge sobre los campos de la variedad. Aunque esta situación no es nueva, (ver por ejemplo [23, 25, 55]), en todos los trabajos se obtiene interpretando la variedad discreta (grafo) como el esqueleto 1-dimensional de un complejo simplicial cuya dimensión es la del espacio ambiente. En contraste, los resultados presentados en este capítulo sólo utilizan la estructura unidimensional de la variedad, sin necesidad de interpretarla como parte de un complejo de dimensión superior. En particular, se obtiene una definición del *rotacional* de un campo, completamente acorde con la teoría del continuo y que responde a los requerimientos que para tal operador se plantean en [36].

2.1 Variedades Riemannianas discretas

El objetivo de esta sección es definir, a partir de una métrica sobre una variedad discreta, productos internos en el espacio de funciones sobre los vértices de la variedad y en el espacio de campos de la variedad para, a continuación, definir el concepto de operador adjunto asociado a una aplicación lineal entre estos espacios. Comenzaremos estableciendo las nociones

básicas y los resultados fundamentales en un contexto abstracto, adecuado para nuestros propósitos.

Los siguientes resultados son de tipo estándar en la teoría de operadores en espacios con producto interno y serán de utilidad en las secciones posteriores. Además, como el caso que nos ocupa es el de dimensión finita, todos ellos tienen demostraciones elementales que provienen del Álgebra Lineal.

Sean H_1 y H_2 espacios vectoriales reales de dimensión finita y supongamos que sobre cada uno de ellos está dado un producto interno, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, respectivamente. La notación $H_1 = H_2$ significará no sólo que los espacios vectoriales coinciden sino que también lo hacen los productos internos.

Definición 2.1.1 Si $F: H_1 \rightarrow H_2$ es un operador lineal, denominaremos *adjunto de F* a todo operador $G: H_2 \rightarrow H_1$ tal que $\langle F(v), w \rangle_2 = \langle v, G(w) \rangle_1$ para cada $v \in H_1$ y cada $w \in H_2$.

Cuando $H_1 = H_2$, diremos que F es *autoadjunto* si es adjunto de sí mismo.

Es fácil comprobar que en las condiciones anteriores F posee un único adjunto, que en lo sucesivo denotaremos por F^* . Por tanto, si $H_1 = H_2$, F es autoadjunto sii $F^* = F$. Además, de la propia definición se obtiene que F es el adjunto de F^* , es decir se satisface que $F^{**} = F$.

Proposición 2.1.2 Sean H_1 y H_2 espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno. Se satisfacen las siguientes propiedades:

- i) Si $F, G: H_1 \rightarrow H_2$ son lineales, entonces $(aF + bG)^* = aF^* + bG^*$ para cada $a, b \in \mathbb{R}$.
- ii) Si H_3 es otro espacio vectorial con producto interno y $F: H_1 \rightarrow H_2$ y $G: H_2 \rightarrow H_3$ son lineales, entonces $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.
- iii) (Alternativa de Fredholm). Si $F: H_1 \rightarrow H_2$ es lineal, entonces $\text{Im} F = [\ker F^*]^\perp$.
- iv) Si H_3 es un subespacio de H_2 y $F: H_1 \rightarrow H_3$ es lineal, entonces el adjunto de F es la restricción de F^* a H_3 , donde F^* denota el adjunto de F interpretado como operador de H_1 en H_2 .

A continuación, describiremos los espacios con producto interno que aparecen en una variedad discreta $\Gamma = (V, E, \theta)$. Consideraremos fundamentalmente los espacios vectoriales $\mathcal{C}(V)$ y $\mathcal{X}(\Gamma)$, aunque es claro que las identificaciones de $\mathcal{X}(\Gamma)$ con $\mathcal{C}(\Gamma)$ y con $\Lambda(\Gamma)$ permiten transcribir las operaciones sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$ en operaciones sobre estos últimos.

Antes de definir productos internos sobre los espacios $\mathcal{C}(V)$ y $\mathcal{X}(\Gamma)$, será preciso establecer el siguiente concepto.

Definición 2.1.3 Diremos que una medida positiva $\mu \in \mathcal{M}^+(V)$ es una μ medida densa en V o simplemente una *medida densa* si $\text{sop}(\mu) = V$.

Si para cada $x \in V$, ε_x denota la medida de Dirac en x , denominaremos *medida cardinal sobre V* a $\lambda = \sum_{x \in V} \varepsilon_x$.

La medida cardinal debe su nombre a que si $F \subset V$, entonces $\lambda(F) = |F|$. Por otra parte, es claro que λ es una medida densa en V y que cualquier otra medida sobre V , positiva o no, puede identificarse con su densidad respecto de λ , es decir si $\nu \in \mathcal{M}(V)$, entonces $\nu = \sum_{x \in V} \nu(x) \varepsilon_x = \nu \cdot \lambda$ donde ahora ν se interpreta como un elemento de $\mathcal{C}(V)$. Con esta identificación, una medida es positiva sii su densidad es no negativa, es densa sii su densidad es positiva en todo punto y el soporte de la medida coincide con el de su densidad. En lo sucesivo utilizaremos estas identificaciones y por tanto interpretaremos las medidas sobre V como tales o como elementos de $\mathcal{C}(V)$. En particular, la medida cardinal está identificada con la función 1.

La noción de medida densa permite introducir el producto interno natural sobre $\mathcal{C}(V)$ asociado a cada una de ellas.

Proposición 2.1.4 Si Γ es una variedad discreta y ν es una medida densa, la expresión

$$\int_V fg \, d\nu, \quad \text{para cada } f, g \in \mathcal{C}(V),$$

define un producto interno sobre $\mathcal{C}(V)$.

Definición 2.1.5 Sean Γ una variedad discreta y ν una medida densa. Denominaremos *producto interno inducido por ν* al dado por $\int_V fg \, d\nu$. El espacio vectorial $\mathcal{C}(V)$ junto con este producto interno será denotado por $L(\nu)$ y simplemente por L cuando $\nu = \lambda$.

Es claro que la estructura del espacio $L(\nu)$ no depende más que del conjunto de vértices de Γ y no de la variedad discreta. Por otra parte, la restricción del producto interno de $L(\nu)$ a cualquier subespacio de $\mathcal{C}(V)$, sigue siendo un producto interno sobre tal subespacio. En particular, si para cada $F \subset V$ denotamos por $\mathcal{C}(F)$ al subconjunto dado por

$$\mathcal{C}(F) = \{f \in \mathcal{C}(V) : \text{sop}(f) \subset F\},$$

resulta que $\mathcal{C}(F)$ es un subespacio vectorial de $L(\nu)$ y la expresión $\int_F fg \, d\nu$, $f, g \in \mathcal{C}(F)$, no es más que la restricción del producto interno de $L(\nu)$ a dicho subespacio y por tanto, un producto interno sobre él. Obsérvese que además, el subespacio $\mathcal{C}(F)$ está identificado canónicamente con el espacio vectorial de funciones reales definidas sobre F , ya que cada aplicación $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ se considera extendida por 0 a F^c .

Para cumplir el objetivo de definir un producto interno sobre el espacio de los campos vectoriales de una variedad discreta, será útil definir antes el siguiente concepto.

Definición 2.1.6 Denominaremos *variedad Riemanniana discreta* a toda terna $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ donde Γ es una variedad discreta, \mathbf{B} una métrica sobre Γ y μ una medida densa. En este caso, Γ se denomina *variedad discreta subyacente a la variedad Riemanniana* y el par (\mathbf{B}, μ) *estructura Riemanniana o estructura métrica de la variedad*.

Denominaremos *variedad Riemanniana simple* a aquélla cuya variedad subyacente sea simple. Cuando \mathbf{B} sea la métrica canónica y $\mu = \lambda$, la estructura Riemanniana (\mathbf{B}, μ) se denominará *canónica*.

Cuando \mathbf{B} es una métrica ortogonal y compatible y μ es la medida cardinal, el concepto de variedad Riemanniana discreta aquí introducido coincide con el que aparece en la literatura bajo la denominación de *red finita* o, en el contexto de redes eléctricas, de *red puramente resistiva*, (ver por ejemplo, [11, 28, 53, 56]). Por otra parte, en el desarrollo del resto de esta memoria, se hará patente el papel de la medida densa μ introducida en la definición anterior. En primera instancia cabe decir que su función puede asimilarse a la del determinante Jacobiano de la parametrización de una variedad diferenciable en el caso continuo, como queda reflejado en el resultado siguiente.

Proposición 2.1.7 Si $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ es una variedad Riemanniana discreta, la expresión

$$\frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mu, \quad \text{para cada } \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma),$$

define un producto interno sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$.

Definición 2.1.8 Si $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ es una variedad Riemanniana discreta, denominaremos *producto interno inducido por la estructura Riemanniana (\mathbf{B}, μ)* , al determinado por la expresión $\frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mu$. El espacio vectorial $\mathcal{X}(\Gamma)$ junto con este producto interno será denotado por $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$, por $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ cuando $\mu = \lambda$ y por \mathbf{H} cuando la estructura Riemanniana sea la canónica.

A diferencia de los productos internos definidos sobre $\mathcal{C}(V)$, el anterior producto interno sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$ depende de la estructura de la variedad discreta. Por otra parte, el producto interno inducido sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$ por la estructura Riemanniana (\mathbf{B}, μ) coincide con el producto interno inducido sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$ por la estructura Riemanniana $(\mu \mathbf{B}, \lambda)$. Por tanto, las variedades Riemannianas $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ y $(\Gamma, \mu \mathbf{B}, \lambda)$ y los espacios $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$ y $\mathbf{H}(\mu \mathbf{B})$, pueden considerarse equivalentes a efectos de la métrica inducida sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$.

Nuevamente, la restricción del producto interno de $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$ a cualquier subespacio de $\mathcal{X}(\Gamma)$ sigue siendo un producto interno sobre tal subespacio. En particular, si Γ' es una subvariedad de Γ , resulta que $\mathcal{X}(\Gamma')$ es un subespacio de $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$. Si V' es el conjunto de vértices de Γ' , en virtud del Corolario 1.3.16, la expresión $\frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mu$, para cada $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma')$, no es más que la restricción del producto interno de $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$ al subespacio $\mathcal{X}(\Gamma')$. Así pues, si $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ es una variedad Riemanniana discreta y Γ' es una subvariedad de Γ ,

$(\Gamma', \mathbf{B}, \mu)$ tiene estructura de variedad Riemanniana discreta y será denominada *subvariedad Riemanniana de $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$* .

Por otra parte, si consideramos $\mathcal{X}^\#(\Gamma)$, el subespacio de campos equilibrados sobre Γ , nuevamente la aplicación del Corolario 1.3.16, permite obtener el siguiente resultado:

Corolario 2.1.9 *Si $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ es una variedad Riemanniana discreta, la expresión*

$$\frac{1}{2} \int_V \# \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mu, \quad \text{para cada } \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}^\#(\Gamma),$$

define un producto interno sobre $\mathcal{X}(\Gamma^\#)$.

En las condiciones del corolario, $(\Gamma^\#, \# \mathbf{B}, \mu)$ será denominada *variedad Riemanniana simple subyacente a $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$* .

La razón de la aparición del factor $\frac{1}{2}$ en la expresión de los productos internos definidos anteriormente, es debida a que cada rama del multigrafo subyacente a la variedad discreta aparece contada dos veces, una por cada vértice incidente con ella. Por otra parte, si \mathbf{B} es una métrica ortogonal y $m \in \mathcal{C}(\Gamma)$ es su función componente, entonces para cada $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mu &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sum_{e \in E_x} m(x, e) f(x, e) g(x, e) \mu(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in E} \sum_{x \in \theta(e)} m(x, e) f(x, e) g(x, e) \mu(x) = \sum_{e \in E} (mfg\mu)^s(e), \end{aligned}$$

donde $f, g \in \mathcal{C}(\Gamma)$ son las funciones componentes de \mathbf{f} y de \mathbf{g} , respectivamente. En particular, si $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$ y consideramos la función $r = (m\mu)^s \in \mathcal{C}^+(E)$, entonces

$$\frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mu = \sum_{e \in E} r(e) f(e) g(e) = \int_E fg dr = \int_E fg r d\hat{\lambda},$$

donde $\hat{\lambda}$ es la medida cardinal sobre E . En definitiva, el producto escalar inducido en $\mathcal{X}^s(\Gamma)$ como subespacio de $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$, corresponde al producto escalar estándar en $\mathcal{C}(E)$, respecto del peso r , que en este contexto suele denominarse *resistencia*. Recíprocamente, si r es un peso sobre E y consideramos el producto interno sobre $\mathcal{C}(E)$ respecto de r , éste coincide con el inducido por $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ cuando consideramos sobre Γ la métrica ortogonal \mathbf{B} de componente r . Así pues, los productos internos sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$ definidos en este trabajo incluyen aquellos productos internos sobre $\mathcal{C}(E)$ que han sido utilizados habitualmente en los trabajos sobre redes, tanto finitas como infinitas (ver, a modo de ejemplo, [15, 27, 42, 54, 56, 58, 60]).

Por otra parte, como $\mathcal{C}(V)$ puede ser considerado como un subespacio de $\mathcal{X}(\Gamma)$, también puede ser considerado como un subespacio de $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$. En este caso, si consideramos la

función $p(x) = \frac{1}{2} \mathbf{B}(\mathbf{t}, \mathbf{t})(x) = \frac{1}{2} \sum_{e, e' \in E} m(x, e, e')$ y la medida $\nu = p\mu$, entonces si $f, g \in \mathcal{C}(V)$, obtenemos que

$$\frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(f, g) d\mu = \frac{1}{2} \int_V fg \mathbf{B}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) d\mu = \int_V fg d\nu.$$

Por tanto, interpretado como subespacio de $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$, $\mathcal{C}(V)$ coincide con $\mathbf{L}(\nu)$. Recíprocamente, si ν es cualquier medida densa y tomamos $\mu = \frac{2}{\mathbf{B}(\mathbf{t}, \mathbf{t})} \nu$, entonces μ es también una medida densa y considerado $\mathcal{C}(V)$ como un subespacio de $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$, coincide con $\mathbf{L}(\nu)$. En particular, si \mathbf{B} es la métrica canónica y $\mu = \alpha \lambda$ con $\alpha > 0$, resulta que las restricciones del producto escalar $\frac{1}{2} \int_F \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mu$ a los subespacios $\mathcal{C}(E)$ y $\mathcal{C}(V)$ están dadas, respectivamente por

$$\alpha \int_E fg d\hat{\lambda}, \quad \text{para } f, g \in \mathcal{C}(E) \quad \text{y} \quad \frac{\alpha}{2} \int_V fgk d\lambda, \quad \text{para } f, g \in \mathcal{C}(V).$$

Definición 2.1.10 Consideremos $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ una variedad Riemanniana discreta, ν una medida densa y las aplicaciones lineales

$$\mathbf{K}: \mathcal{X}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{X}(\Gamma), \quad \mathbf{G}: \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{X}(\Gamma), \quad \mathbf{H}: \mathcal{X}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{C}(V) \quad \text{y} \quad \mathbf{J}: \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V).$$

Denotaremos por \mathbf{K}_μ^* , $\mathbf{G}_{\nu\mu}^*$, $\mathbf{H}_{\mu\nu}^*$ y \mathbf{J}_ν^* a los correspondientes operadores adjuntos, cuando sobre $\mathcal{C}(V)$ se considera el producto interno inducido por ν y en $\mathcal{X}(\Gamma)$ el producto interno inducido por la estructura Riemanniana (\mathbf{B}, μ) .

Cuando $\mu = \nu = \lambda$, eliminaremos los subíndices en las expresiones de los operadores adjuntos y cuando la estructura Riemanniana sea la canónica, el operador \mathbf{K}^* será denotado por \mathbf{K}^t .

En las condiciones anteriores, resulta que \mathbf{K}_μ^* , $\mathbf{G}_{\nu\mu}^*$, $\mathbf{H}_{\mu\nu}^*$ y \mathbf{J}_ν^* están caracterizados por las identidades

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{K}(\mathbf{f}), \mathbf{g}) d\mu &= \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{K}_\mu^*(\mathbf{g})) d\mu, & \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{G}(f), \mathbf{g}) d\mu &= \int_V f \mathbf{G}_{\nu\mu}^*(\mathbf{g}) d\nu, \\ \int_V g \mathbf{H}(\mathbf{f}) d\nu &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{H}_{\mu\nu}^*(g), \mathbf{f}) d\mu, & \int_V \mathbf{J}(f) g d\nu &= \int_V f \mathbf{J}_\nu^*(g) d\nu, \end{aligned}$$

para cada $f, g \in \mathcal{C}(V)$ y cada $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$.

Proposición 2.1.11 Consideremos $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ una variedad Riemanniana discreta, ν una medida densa y \mathbf{F} el isomorfismo sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$ determinado por \mathbf{B} . Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

- i) $\mathbf{F}^t = \mathbf{F}$ y si \mathbf{K} es un endomorfismo sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$, entonces $\mathbf{K}^* = \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{K}^t \circ \mathbf{F}$.
- ii) Para cada $p \in \mathcal{C}(\Gamma)$, \mathbf{T}_p es autoadjunto sobre $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$.

iii) Si $p \in \mathcal{C}(V)$, T_p es autoadjunto sobre $L(\nu)$ y sobre $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$. Si además $p(x) \neq 0$ para cada $x \in V$, entonces T_p es un isomorfismo sobre $\mathcal{C}(V)$ y sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$ y $T_p^{-1} = T_{\frac{1}{p}}$.

iv) Sean las aplicaciones lineales $\mathbf{K}: \mathcal{X}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{X}(\Gamma)$, $\mathbf{G}: \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathcal{X}(\Gamma)$, $\mathbf{H}: \mathcal{X}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}(V)$ y $\mathbf{J}: \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathcal{C}(V)$. Entonces se satisface que

$$\mathbf{K}_\mu^* = T_\mu^{-1} \circ \mathbf{K}^* \circ T_\mu, \quad \mathbf{G}_{\nu\mu}^* = T_\nu^{-1} \circ \mathbf{G}^* \circ T_\mu, \quad \mathbf{H}_{\mu\nu}^* = T_\mu^{-1} \circ \mathbf{H}^* \circ T_\nu \quad \text{y} \quad \mathbf{J}_\nu^* = T_\nu^{-1} \circ \mathbf{J}^* \circ T_\nu.$$

v) Si \mathbf{B} es ortogonal y compatible, entonces $T_\mu^{-1} \circ \pi^s$ y $T_\mu^{-1} \circ \pi^a$ son autoadjuntos y los subespacios $\frac{1}{\mu} \mathcal{X}^s(\Gamma)$ y $\mathcal{X}^a(\Gamma)$ (respectivamente $\mathcal{X}^s(\Gamma)$ y $\frac{1}{\mu} \mathcal{X}^a(\Gamma)$) son ortogonales. En particular, si μ es múltiplo de λ , π^s y π^a son autoadjuntos y además los subespacios $\mathcal{X}^s(\Gamma)$ y $\mathcal{X}^a(\Gamma)$ son ortogonales.

Demostración. (i) Como \mathbf{B} es simétrica, para cada $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ se verifica que

$$\int_V \langle \mathbf{F}(\mathbf{f}), \mathbf{g} \rangle d\mu = \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mu = \int_V \mathbf{B}(\mathbf{g}, \mathbf{f}) d\mu = \int_V \langle \mathbf{F}(\mathbf{g}), \mathbf{f} \rangle d\mu = \int_V \langle \mathbf{f}, \mathbf{F}(\mathbf{g}) \rangle d\mu,$$

y por tanto \mathbf{F} es autoadjunto en $\mathbf{H}(\mathbf{B}', \mu)$ para cualquier estructura métrica en la que \mathbf{B}' sea la métrica canónica y en particular, para la estructura métrica canónica. Por otra parte,

$$\int_V \mathbf{B}(\mathbf{K}(\mathbf{f}), \mathbf{g}) d\lambda = \int_V \langle \mathbf{F}(\mathbf{K}(\mathbf{f})), \mathbf{g} \rangle d\lambda = \int_V \langle \mathbf{f}, \mathbf{K}^t(\mathbf{F}(\mathbf{g})) \rangle d\lambda = \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{F}^{-1} \mathbf{K}^t(\mathbf{F}(\mathbf{g}))) d\lambda,$$

lo que implica que $\mathbf{K}^* = \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{K}^t \circ \mathbf{F}$.

(ii) Aplicando la parte (vi) de la Proposición 1.3.10, tenemos que para cada $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$,

$$\int_V \mathbf{B}(T_p(\mathbf{f}), \mathbf{g}) d\mu = \int_V \mathbf{B}(p\mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mu = \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, p\mathbf{g}) d\mu = \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, T_p(\mathbf{g})) d\mu,$$

es decir, T_p es autoadjunto sobre $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$.

(iii) Si $f, g \in \mathcal{C}(V)$, se satisface que

$$\int_V T_p(f) g d\nu = \int_V p f g d\nu = \int_V f p g d\nu = \int_V f T_p(g) d\nu,$$

lo que implica que T_p es autoadjunto sobre $L(\nu)$.

Si $p(x) \neq 0$ para cada $x \in V$, entonces $T_p \circ T_{\frac{1}{p}} = T_{\frac{1}{p}} \circ T_p = T_1$ que es la identidad tanto en $\mathcal{C}(V)$ como en $\mathcal{X}(\Gamma)$.

(iv) Observemos primero que para cada $f, g \in \mathcal{C}(V)$ y para cada $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, tenemos que

$$\int_V f g d\nu = \int_V f g \nu d\lambda = \int_V T_\nu(f) g d\lambda = \int_V f T_\nu(g) d\lambda,$$

$$\int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mu = \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \mu d\lambda = \int_V \mathbf{B}(T_\mu(\mathbf{f}), \mathbf{g}) d\lambda = \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, T_\mu(\mathbf{g})) d\lambda.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{K}(\mathbf{f}), \mathbf{g}) d\mu &= \int_V \mathbf{B}(\mathbf{K}(\mathbf{f}), \mathbf{T}_\mu(\mathbf{g})) d\lambda \\ &= \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{K}^*(\mathbf{T}_\mu(\mathbf{g}))) d\lambda = \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{T}_\mu^{-1}(\mathbf{K}^*(\mathbf{T}_\mu(\mathbf{g})))) d\mu. \end{aligned}$$

$$\int_V \mathbf{J}(\mathbf{f}) \mathbf{g} d\nu = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{f}) \mathbf{T}_\nu(\mathbf{g}) d\lambda = \int_V \mathbf{f} \mathbf{J}^*(\mathbf{T}_\nu(\mathbf{g})) d\lambda = \int_V \mathbf{f} \mathbf{T}_\nu^{-1}(\mathbf{J}^*(\mathbf{T}_\nu(\mathbf{g}))) d\nu$$

lo que implica que $\mathbf{K}_\mu^* = \mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \mathbf{K}^* \circ \mathbf{T}_\mu$ y que $\mathbf{J}_\nu^* = \mathbf{T}_\nu^{-1} \circ \mathbf{J}^* \circ \mathbf{T}_\nu$; y también

$$\int_V \mathbf{f}(\mathbf{T}_\nu \circ \mathbf{G}_{\nu\mu}^*)(\mathbf{g}) d\lambda = \int_V \mathbf{f} \mathbf{G}_{\nu\mu}^*(\mathbf{g}) d\nu = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{G}(\mathbf{f}), \mathbf{g}) d\mu = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}((\mathbf{T}_\mu \circ \mathbf{G})(\mathbf{f}), \mathbf{g}) d\lambda$$

$$\int_V \mathbf{f}(\mathbf{T}_\nu \circ \mathbf{H})(\mathbf{g}) d\lambda = \int_V \mathbf{f} \mathbf{H}(\mathbf{g}) d\nu = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{H}_{\mu\nu}^*(\mathbf{f}), \mathbf{g}) d\mu = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}((\mathbf{T}_\mu \circ \mathbf{H}_{\mu\nu}^*)(\mathbf{f}), \mathbf{g}) d\lambda$$

y por tanto, que $\mathbf{T}_\nu \circ \mathbf{G}_{\nu\mu}^* = (\mathbf{T}_\mu \circ \mathbf{G})^* = \mathbf{G}^* \circ \mathbf{T}_\mu$ y que $\mathbf{T}_\mu \circ \mathbf{H}_{\mu\nu}^* = (\mathbf{T}_\nu \circ \mathbf{H})^* = \mathbf{H}^* \circ \mathbf{T}_\nu$.

(v) Para la estructura métrica canónica tenemos que si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$, $\mathbf{g} \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$ y $f, g \in \mathcal{C}(\Gamma)$ son sus respectivas componentes, entonces

$$\begin{aligned} \int_V \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle d\lambda &= \sum_{x \in V} \sum_{e \in E_x} f(x, e) g(x, e) = \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} \sum_{e \in E_{xy}} f(x, e) g(x, e) \\ &= \sum_{y \in V} \sum_{x \in V} \sum_{e \in E_{xy}} f(y, e) g(y, e) = - \sum_{y \in V} \sum_{x \in V} \sum_{e \in E_{xy}} f(x, e) g(x, e) \\ &= - \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} \sum_{e \in E_{xy}} f(x, e) g(x, e) = - \int_V \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle d\lambda, \end{aligned}$$

lo que implica que $\int_V \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle d\lambda = 0$ y por tanto que $\mathcal{X}^s(\Gamma)$ y $\mathcal{X}^a(\Gamma)$ son ortogonales en \mathbf{H} . Además, si $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, entonces

$$\int_V \langle \pi^s(\mathbf{f}), \mathbf{g} \rangle d\lambda = \int_V \langle \pi^s(\mathbf{f}), \pi^s(\mathbf{g}) \rangle d\lambda = \int_V \langle \mathbf{f}, \pi^s(\mathbf{g}) \rangle d\lambda,$$

$$\int_V \langle \pi^a(\mathbf{f}), \mathbf{g} \rangle d\lambda = \int_V \langle \pi^a(\mathbf{f}), \pi^a(\mathbf{g}) \rangle d\lambda = \int_V \langle \mathbf{f}, \pi^a(\mathbf{g}) \rangle d\lambda,$$

de donde se deduce que π^s y π^a son autoadjuntos en \mathbf{H} .

Por otra parte, como \mathbf{B} es ortogonal, $\mathbf{F} = \mathbf{T}_m$ donde m es la función componente de \mathbf{B} . Como $(\pi^s)^t = \pi^s$, aplicando ahora las expresiones obtenidas en (i) y en (iv), resulta que

$$(\pi^s)_\mu^* = \mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \mathbf{T}_m^{-1} \circ \pi^s \circ \mathbf{T}_m \circ \mathbf{T}_\mu$$

y como π^s y \mathbf{T}_m^{-1} conmutan por ser \mathbf{B} compatible, obtenemos que $(\pi^s)_\mu^* = \mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \pi^s \circ \mathbf{T}_\mu$, lo que teniendo en cuenta que \mathbf{T}_μ es autoadjunto, implica que $\mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \pi^s$ también lo es. Si tomamos $\mathbf{f} \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$ y $\mathbf{g} \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$, entonces $\pi^s(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$, $\pi^s(\mathbf{g}) = \mathbf{0}$ y

$$\int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \frac{1}{\mu} \mathbf{g},) d\mu = \int_V \mathbf{B}(\frac{1}{\mu} \mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mu = \int_V \mathbf{B}(\mathbf{T}_\mu^{-1}(\pi^s(\mathbf{f})), \mathbf{g}) d\mu = \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{T}_\mu^{-1}(\pi^s(\mathbf{g}))) d\mu = 0,$$

es decir $\frac{1}{\mu}\mathcal{X}^s(\Gamma)$ y $\mathcal{X}^a(\Gamma)$ (respectivamente $\mathcal{X}^s(\Gamma)$ y $\frac{1}{\mu}\mathcal{X}^a(\Gamma)$) son ortogonales en $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$. El resultado cuando μ es un múltiplo de la medida canónica es consecuencia de que en este caso Γ_μ^{-1} conmuta con π^s y π^a y además, $\frac{1}{\mu}\mathcal{X}^s(\Gamma) = \mathcal{X}^s(\Gamma)$ y $\frac{1}{\mu}\mathcal{X}^a(\Gamma) = \mathcal{X}^a(\Gamma)$. ■

Observar que, con las notaciones de la proposición anterior, para cada $f \in \mathcal{C}(V)$ y para cada $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ se tiene que

$$\mathbf{K}_\mu^*(\mathbf{f}) = \frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{K}^*(\mu \cdot \mathbf{f}), \quad \mathbf{G}_{\nu\mu}^*(\mathbf{f}) = \frac{1}{\nu} \cdot \mathbf{G}^*(\mu \cdot \mathbf{f}), \quad \mathbf{H}_{\mu\nu}^*(f) = \frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{H}^*(\nu \cdot f) \quad \text{y} \quad \mathbf{J}_\nu^* = \frac{1}{\nu} \cdot \mathbf{J}^*(\nu \cdot f).$$

2.2 Operadores en diferencias

El objetivo de esta sección es definir los análogos discretos de los operadores diferenciales fundamentales en una variedad Riemanniana, concretamente los operadores derivada, gradiente, divergencia y laplaciano. Debido al carácter discreto de los objetos involucrados, este tipo de operadores serán denominados de forma genérica *operadores en diferencias sobre una variedad Riemanniana discreta*. Aunque en la mayor parte de la sección consideraremos una variedad discreta Γ junto con una estructura métrica (\mathbf{B}, μ) , en la definición de cada uno de los operadores en diferencias la influencia de la estructura métrica de la variedad es más o menos relevante. En particular, la noción de operador derivada es válida también para variedades discretas, en el concepto de gradiente sólo interviene la métrica \mathbf{B} y no la medida μ y en la expresión de la divergencia aparece sólo la medida μ .

Definición 2.2.1 Consideremos $\Gamma = (V, E, \theta)$ una variedad discreta. Denominaremos *operador derivada en Γ* a la aplicación $\mathbf{d}: \mathcal{C}(V) \rightarrow \Lambda(\Gamma)$ que a cada función u le asigna la forma du cuya función componente es $-2u^a$. Para cada $u \in \mathcal{C}(V)$, la forma du se denominará *derivada de u* .

Si \mathbf{w} es un campo vectorial sobre Γ , denominaremos *operador derivada según \mathbf{w}* a la aplicación $\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}: \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathcal{C}(V)$ que a cada $u \in \mathcal{C}(V)$ le asigna la función $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{w}} = du(\mathbf{w})$. Para cada $u \in \mathcal{C}(V)$, la función $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{w}}$ se denominará *derivada de u según \mathbf{w}* .

Si \mathbf{w} es un campo vectorial cuya función componente es $w \in \mathcal{C}(\Gamma)$, entonces, para cada $u \in \mathcal{C}(V)$, la forma du y la función $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{w}}$ están dados, respectivamente, por las expresiones

$$\begin{aligned} (du)(x) &= \sum_{y \sim x} \sum_{e \in E_{xy}} (u(y) - u(x)) e^*, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{w}} \right)(x) &= \sum_{y \in V} (u(y) - u(x)) \sum_{e \in E_{xy}} w(x, e). \end{aligned}$$

De la definición del operador \mathbf{d} se deduce fácilmente que la derivada de u es una forma antisimétrica y equilibrada, es decir que $\mathbf{d}(\mathcal{C}(V)) \subset \Lambda^a(\Gamma) \cap \Lambda^\#(\Gamma)$. Por otra parte, de la expresión de la función de la derivada de u según \mathbf{w} , obtenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{w}^\#}$$

y también que para cada $x \in V$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{w}} \right) (x) = \sum_{y \in V} \kappa(x, y) w^\#(x, y) (u(y) - u(x)),$$

utilizando la interpretación habitual de las funciones equilibradas como elementos del espacio $\mathcal{C}(V \times V)$. Además, si consideramos sobre $\Lambda(\Gamma)$ la estructura de $\mathcal{C}(V)$ -módulo, resulta que para cada $u \in \mathcal{C}(V)$, la aplicación $\frac{\partial u}{\partial \cdot}: \mathcal{X}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}(V)$ es un endomorfismo de $\mathcal{C}(V)$ -módulos.

La aplicación \sim que identifica $\Lambda(\Gamma)$ con $\mathcal{X}(\Gamma)$ permite considerar también la aplicación $\tilde{\mathbf{d}}: \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathcal{X}(\Gamma)$ dada por la asignación $\tilde{\mathbf{d}}u = \tilde{\mathbf{d}}u = -2u^a \cdot \mathbf{t}$. Nuevamente se satisface que $\tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{C}(V)) \subset \mathcal{X}^a(\Gamma) \cap \mathcal{X}^\#(\Gamma)$ y además, si suponemos que Γ está dotada con la estructura métrica canónica, resulta que para cada $\mathbf{w} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{w}} = \langle \mathbf{w}, \tilde{\mathbf{d}}u \rangle$.

Proposición 2.2.2 *Sea $\mathbf{w} \in \mathcal{X}(\Gamma)$. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

- i) Los operadores \mathbf{d} y $\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}$ son lineales y de primer orden.
- ii) Si $u \in \mathcal{C}(V)$, entonces $\mathbf{d}u = 0$ sii u es constante en cada componente conexa de V .
- iii) Regla de Leibnitz: Si $u, v \in \mathcal{C}(V)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(uv) &= v^s \cdot \mathbf{d}u + u^s \cdot \mathbf{d}v = v \mathbf{d}u + u \mathbf{d}v + 4(u^a v^a) \cdot \tilde{\mathbf{t}}, \\ \frac{\partial(uv)}{\partial \mathbf{w}} &= \frac{\partial u}{\partial(v^s \cdot \mathbf{w})} + \frac{\partial v}{\partial(u^s \cdot \mathbf{w})} = v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{w}} + u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{w}} - \frac{\partial u}{\partial(v^a \cdot \mathbf{w})} - \frac{\partial v}{\partial(u^a \cdot \mathbf{w})}. \end{aligned}$$

Demostración. (i) La linealidad de los operadores es inmediata. Para concluir el carácter local de ambos, observemos que aplicando (1.1), resulta que $\mathbf{sop}(\mathbf{d}u) = \mathbf{sop}(u^a) \subset \overline{\mathbf{sop}(u)}$ y que por otra parte, $\mathbf{sop}(\mathbf{d}u(\mathbf{w})) \subset \mathbf{sop}(\mathbf{d}u) \subset \overline{\mathbf{sop}(u)}$.

(ii) Es claro que si u es constante en cada componente conexa de Γ , entonces $\mathbf{d}u = 0$. Recíprocamente, consideremos $x, y \in V$ con $x \sim y$ y $e \in E_{xy}$. Entonces, si $\mathbf{d}u = 0$ necesariamente $u(y) = u(x)$. Si fijamos $x \in V$ y consideramos $y \in V$ perteneciente a la componente conexa de x , existe un camino, c , de longitud n cuyos extremos son x e y . Como $c(j) \sim c(j+1)$, resulta que $u(x) = u(c(0)) = u(c(1)) = \dots = u(c(n)) = u(y)$.

(iii) Por la identidad (1.2) tenemos que $(uv)^a = v^s u^a + u^s v^a$, lo que implica que

$$\mathbf{d}(uv) = -2(uv)^a \cdot \tilde{\mathbf{t}} = -2(v^s u^a) \cdot \tilde{\mathbf{t}} - 2(u^s v^a) \cdot \tilde{\mathbf{t}} = v^s(-2u^a) \cdot \tilde{\mathbf{t}} + u^s(-2v^a) \cdot \tilde{\mathbf{t}}$$

y como $u^s = u - u^a$ y $v^s = v - v^a$, resulta que $v^s \mathbf{d}u + u^s \mathbf{d}v = v \mathbf{d}u + 2(v^a u^a) \cdot \tilde{\mathbf{t}} + u \mathbf{d}v + 2(u^a v^a) \cdot \tilde{\mathbf{t}}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uv)}{\partial \mathbf{w}} &= \langle \mathbf{w}, \tilde{\mathbf{d}}(uv) \rangle = \langle \mathbf{w}, v^s \cdot \tilde{\mathbf{d}}u + u^s \cdot \tilde{\mathbf{d}}v \rangle = \langle (v^s \cdot \mathbf{w}), \tilde{\mathbf{d}}u \rangle + \langle (u^s \cdot \mathbf{w}), \tilde{\mathbf{d}}v \rangle \\ &= v \langle \mathbf{w}, \tilde{\mathbf{d}}u \rangle - \langle (v^a \cdot \mathbf{w}), \tilde{\mathbf{d}}u \rangle + u \langle \mathbf{w}, \tilde{\mathbf{d}}v \rangle - \langle (u^a \cdot \mathbf{w}), \tilde{\mathbf{d}}v \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La Regla de Leibnitz que aparece en la parte (iii) de la proposición anterior es una generalización de la obtenida en [54], e independientemente en [55], en el caso de, en nuestra nomenclatura, variedades Riemannianas simples con estructura métrica canónica.

Definición 2.2.3 Si Γ es una variedad discreta y sobre ella consideramos la estructura Riemanniana canónica, denominaremos *operador divergencia en Γ* al operador $\mathbf{div} = -\tilde{\mathbf{d}}^*$, cuando $\tilde{\mathbf{d}}$ es considerado como operador de \mathbf{L} en \mathbf{H} .

Para cada $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, la función $\mathbf{div} \mathbf{f}$ será denominada *divergencia de \mathbf{f}* . Un campo \mathbf{f} se denomina *solenoidal* si $\mathbf{div} \mathbf{f} = 0$.

De la definición se deduce directamente que $\mathbf{div}: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{L}$ está caracterizado por la identidad

$$\frac{1}{2} \int_V \langle \tilde{\mathbf{d}}u, \mathbf{f} \rangle d\lambda = - \int_V u \mathbf{div}(\mathbf{f}) d\lambda, \quad \text{para cada } u \in \mathcal{C}(V) \quad \text{y cada } \mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma).$$

En particular, tomando u constante en la anterior identidad, obtenemos que

$$\int_V \mathbf{div}(\mathbf{f}) d\lambda = 0, \quad \text{para cada } \mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma). \quad (2.1)$$

Proposición 2.2.4 Sean $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ y $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ su función componente. Entonces,

$$\mathbf{div}(\mathbf{f})(x) = \sum_{e \in E} f^a(x, e), \quad \text{para cada } x \in V.$$

Demostración. Sea $x \in V$ y consideremos $u = \varepsilon_x$. Entonces,

$$\mathbf{div}(\mathbf{f})(x) = \int_V u \mathbf{div}(\mathbf{f}) d\lambda = -\frac{1}{2} \int_V \langle \tilde{\mathbf{d}}u, \mathbf{f} \rangle d\lambda.$$

Por otra parte, para cada $y \in V$ tenemos que $-\langle \tilde{\mathbf{d}}u, \mathbf{f} \rangle(y) = 2 \sum_{e \in E_y} u^a(y, e) f(y, e)$ y como

$$2u^a(y, e) = \begin{cases} 1, & \text{si } y = x, \\ -1, & \text{si } y \neq x \text{ y } e \in E_{yx}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\text{resulta que } -\langle \tilde{d}u, f \rangle(y) = \begin{cases} \sum_{e \in E_x} f(x, e), & \text{si } y = x, \\ -\sum_{e \in E_{xy}} f(y, e), & \text{si } y \neq x. \end{cases}$$

En definitiva, $-\int_V \langle \tilde{d}u, f \rangle d\lambda = \sum_{y \in V} \sum_{e \in E_{yx}} (f(x, e) - f(y, e)) = \sum_{y \in V} \sum_{e \in E_{yx}} 2f^a(x, e)$ y por tanto,

$$\text{div}(f)(x) = \sum_{e \in E_x} f^a(x, e). \blacksquare$$

Corolario 2.2.5 *Se verifican las siguientes propiedades:*

i) *Para cada $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$, $\text{div}(f) = \langle f^a, \mathbf{t} \rangle = \text{div}(f^a) = \text{div}(f^\#)$ y además*

$$\text{div}(f)(x) = \sum_{y \in V} \kappa(x, y) f^{\#a}(x, y) \quad \text{para cada } x \in V.$$

En particular, todo campo simétrico es solenoidal y $\text{div}(u) = -\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{t}}$ para cada función $u \in \mathcal{C}(V)$.

ii) *El operador div es de primer orden sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$ y su restricción a $\mathcal{X}^a(\Gamma)$ es de orden 0.*

iii) *Para cada $u \in \mathcal{C}(V)$ y para cada $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$,*

$$u \text{div}(f) = \text{div}(u^s \cdot f) - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial f^a} = \text{div}(u \cdot f) + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial f}.$$

Demostración. (i) Observemos primero que si $\mathbf{h} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ y h es su función componente, para cada $x \in V$ se tienen las identidades

$$\langle \mathbf{h}, \mathbf{t} \rangle(x) = \sum_{e \in E} h(x, e) = \sum_{y \in V} \sum_{e \in E_{xy}} h(x, e) = \sum_{y \in V} \kappa(x, y) h^\#(x, y) = \langle \mathbf{h}^\#, \mathbf{t} \rangle(x).$$

La primera igualdad de (i) se deduce entonces de la primera identidad anterior sustituyendo h por h^a , la tercera se deduce de la identidad $f^{\#a} = f^{a\#}$, mientras que para la segunda basta tener en cuenta que $f^{aa} = f^a$. Las últimas afirmaciones se deducen de que la parte antisimétrica de una función simétrica es nula y de que si $u \in \mathcal{C}(V)$ se considera como una función de $\mathcal{C}(\Gamma)$, es decir identificada al campo $u \cdot \mathbf{t}$, entonces u^a está identificada al campo $-\frac{1}{2} \tilde{d}u$.

(ii) De la expresión de $\text{div}(f)$ obtenida en la proposición anterior, resulta que $\text{div}(f)(x) = 0$ cuando $\overline{f^a(x, e)} = 0$ para cada $e \in E_x$ y por tanto, $\text{sop}(\text{div}(f)) \subset \text{sop}(f^a)$. En general, $\text{sop}(f^a) \subset \text{sop}(f)$, pero cuando f es antisimétrico, entonces $\text{sop}(f^a) = \text{sop}(f)$.

(iii) En virtud de las identidades 1.2 tenemos que

$$\begin{aligned}(u^s f)^a &= u^s f^a = u f^a - u^a f^a, \\ (u f)^a &= u^s f^a + u^a f^s = u f^a + u^a (f^s - f^a) = u f^a + u^a \check{f},\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u^s \cdot f) &= u \operatorname{div}(f) + \frac{1}{2} \langle \tilde{d}u, f^a \rangle, \\ \operatorname{div}(u \cdot f) &= u \operatorname{div}(f) - \frac{1}{2} \langle \tilde{d}u, \check{f} \rangle. \blacksquare\end{aligned}$$

Para cada $w \in \mathcal{X}(\Gamma)$, el operador $\frac{\partial}{\partial w}$ puede considerarse como endomorfismo en L y por tanto tiene sentido considerar su operador adjunto.

Proposición 2.2.6 *El operador $\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^*$ está dado por la asignación*

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^*(u) = -2 \operatorname{div}(u \cdot w),$$

para cada $u \in \mathcal{C}(V)$. En particular, $\frac{\partial}{\partial w}$ es autoadjunto sii $w^\# \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$.

Demostración. Si denotamos por $H: \mathbf{H} \rightarrow L$ al operador $\langle w, \cdot \rangle$, entonces $\frac{\partial}{\partial w} = H \circ \tilde{d}$ y por tanto, $\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^* = \tilde{d}^* \circ H^* = -\operatorname{div} \circ H^*$. Para hallar H^* observemos que si $u \in \mathcal{C}(V)$, para cada $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$ se tiene que

$$\frac{1}{2} \int_V \langle H^*(u), f \rangle d\lambda = \int_V u H(f) d\lambda = \int_V \langle u \cdot w, f \rangle d\lambda,$$

lo que implica que $H^*(u) = 2u \cdot w$ y, en definitiva que $\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^*(u) = -2 \operatorname{div}(u \cdot w)$. Por otra parte, aplicando el apartado (iii) de la proposición anterior se tiene que para cada $u \in \mathcal{C}(V)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^*(u) = -2u \operatorname{div}(w) + \frac{\partial u}{\partial \check{w}}$$

y como $\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w^s} + \frac{\partial}{\partial w^a}$, resulta que $\frac{\partial}{\partial w}$ es autoadjunto sii para cada $u \in \mathcal{C}(V)$ se satisface

$$\frac{\partial u}{\partial w^s} + \frac{\partial u}{\partial w^a} = -2u \operatorname{div}(w) + \frac{\partial u}{\partial w^s} - \frac{\partial u}{\partial w^a},$$

es decir, sii para cada $u \in \mathcal{C}(V)$, $u \operatorname{div}(\mathbf{w}) + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{w}^a} = u \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}^a} = 0$, donde $\mathbf{v} = \mathbf{w}^\#$. Desde luego, si $\mathbf{v} \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$, entonces $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}^a} = 0$, por lo que la condición es suficiente. Recíprocamente, si para cada $u \in \mathcal{C}(V)$, $u \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}^a} = 0$, tomando u constante, la identidad anterior implica que $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$ y por tanto que $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}^a} = 0$ para cada $u \in \mathcal{C}(V)$. Tomando ahora $u = \varepsilon_x$, v la componente de \mathbf{v} y teniendo en cuenta que si $x \neq y$,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}^a}(y) = \kappa(x, y)v^a(y, x) = -\kappa(x, y)v^a(x, y),$$

obtenemos que $v^a(x, y) = 0$ para cada $y \in V$, y por tanto que $\mathbf{v}^a = 0$. ■

Supongamos ahora que, en lugar de considerar la estructura Riemanniana canónica sobre Γ , la dotamos de una estructura métrica (\mathbf{B}, μ) . En este caso, denotaremos por \mathbf{F} al campo de aplicaciones lineales determinado por \mathbf{B} , por \mathbf{M} y por \mathbf{A} a los campos de matrices determinados, respectivamente, por \mathbf{F} y por \mathbf{F}^{-1} , y por m y a a las funciones componentes de \mathbf{M} y de \mathbf{A} respectivamente.

Definición 2.2.7 Denominaremos *operador gradiente, respecto de \mathbf{B}* , a $\nabla_{\mathbf{B}}: \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{X}(\Gamma)$, dado por $\mathbf{F}^{-1} \circ \tilde{\mathbf{d}}$. Para cada $u \in \mathcal{C}(V)$, el campo $\nabla_{\mathbf{B}}u$ será denominado *gradiente de u , respecto de \mathbf{B}* , y un campo \mathbf{f} se denominará *campo gradiente, respecto de \mathbf{B}* , si existe $u \in \mathcal{C}(V)$ tal que $\mathbf{f} = \nabla_{\mathbf{B}}u$.

Cuando no haya lugar a confusión, eliminaremos la expresión *respecto de \mathbf{B}* y suprimiremos en las notaciones el subíndice \mathbf{B} .

En virtud de la parte (vii) de la Proposición 1.3.10, si $u \in \mathcal{C}(V)$, entonces ∇u es el único campo que satisface que para cada $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, $\mathbf{d}u(\mathbf{f}) = \mathbf{B}(\nabla u, \mathbf{f})$. En particular, si \mathbf{B} es la métrica canónica $\nabla u = \tilde{\mathbf{d}}u$. Por supuesto, esta caracterización del campo ∇u podría haberse utilizado como su definición.

Por otra parte, para cada $u \in \mathcal{C}(V)$, el gradiente de u está dado por $\nabla u = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{d}}u$, es decir por la expresión

$$(\nabla u)(x) = \sum_{e \in E} \left[\sum_{z \in V} (u(z) - u(x)) \sum_{e' \in E_{xz}} a(x, e, e') \right] e.$$

Por tanto, si denotamos por $h \in \mathcal{C}(\Gamma)$ a la componente de ∇u , entonces

$$h(x, e) = \sum_{z \in V} (u(z) - u(x)) \sum_{e' \in E_{xz}} a(x, e, e'), \quad \text{para cada } (x, e) \in V \times E$$

lo que implica que

$$h^\#(x, y) = \sum_{z \in V} \# a(x, y, z) \kappa(x, z) (u(z) - u(x)), \quad \text{para cada } x, y \in V. \quad (2.2)$$

En particular, si Γ es una variedad simple, utilizando las identificaciones habituales para las funciones de $\mathcal{C}(\Gamma)$ y de $\mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$, obtenemos que

$$h(x, y) = \sum_{z \in V} (u(z) - u(x))a(x, y, z), \quad \text{para cada } x, y \in V. \quad (2.3)$$

A diferencia del operador derivada, el operador gradiente depende de la métrica escogida. Cuando \mathbf{B} es ortogonal, entonces $m, a \in \mathcal{C}(\Gamma)$ y para cada $u \in \mathcal{C}(V)$, tenemos que

$$\nabla u = a \cdot \tilde{\mathbf{d}}u = -(2au^a) \cdot \mathbf{t}. \quad (2.4)$$

En particular, los operadores derivada y gradiente coinciden si \mathbf{B} es la métrica canónica sobre Γ , pues en este caso $a \equiv 1$.

En el caso de variedades Riemannianas simples cuya métrica es ortogonal y compatible, nuestra definición de gradiente y de divergencia coincide básicamente con la que aparece en [40], si bien en este caso se considera previamente una orientación sobre la variedad. En particular, si la estructura métrica es la canónica, estas expresiones son idénticas a las dadas en [26, 54, 55].

Describiremos a continuación algunas propiedades del operador ∇ , análogas a las del operador derivada.

Proposición 2.2.8 *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

- i) *El operador gradiente es lineal y de primer orden.*
- ii) *Si \mathbf{B} es ortogonal y compatible, entonces $\nabla(\mathcal{C}(V)) \subset \mathcal{X}^a(\Gamma)$.*
- iii) *Si \mathbf{B} es equilibrada, entonces $\nabla(\mathcal{C}(V)) \subset \mathcal{X}^\#(\Gamma)$.*
- iv) *Si $u \in \mathcal{C}(V)$, entonces $\nabla u = 0$ sii u es constante en cada componente conexa de V .*
- v) *Regla de Leibnitz: Si \mathbf{B} es ortogonal y $u, v \in \mathcal{C}(V)$, entonces*

$$\nabla(uv) = v^s \cdot \nabla u + u^s \cdot \nabla v.$$

- vi) *Si f es un campo gradiente, necesariamente $\mathbf{M}f \in \mathcal{X}^a(\Gamma) \cap \mathcal{X}^\#(\Gamma)$.*

Demostración. Las demostraciones de las partes (i), (iv) y (v) se deducen directamente de las correspondientes propiedades para el operador derivada y (vi) es consecuencia directa de la definición de campo gradiente. Para demostrar (ii), observemos que si \mathbf{B} es ortogonal, entonces teniendo en cuenta (2.4), $\nabla u \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$ sii $au^a \in \mathcal{C}^a(\Gamma)$. Por la identidad (1.2), esto ocurre cuando $a \in \mathcal{C}^s(\Gamma)$, o de forma equivalente, cuando \mathbf{B} es compatible. Por último, como $\tilde{\mathbf{d}}u \in \mathcal{X}^\#(\Gamma)$, (iii) se concluye aplicando la parte (iv) de la Proposición 1.3.10. ■

Si w es un campo vectorial sobre Γ , podríamos definir el operador derivada según w y respecto de \mathbf{B} , mediante la asignación $\frac{\partial u}{\partial_{\mathbf{B}} w} = \mathbf{B}(w, \tilde{d}u)$, pero es claro que esta definición no aportaría nada nuevo puesto que $\frac{\partial u}{\partial_{\mathbf{B}} w} = \mathbf{B}(w, \tilde{d}u) = \langle \mathbf{F}(w), \tilde{d}u \rangle$ y por tanto el operador derivada según w , respecto de \mathbf{B} , coincide con el operador derivada según $\mathbf{F}(w)$.

Supongamos ahora que además de la estructura métrica (\mathbf{B}, μ) consideramos también una medida densa ν y los espacios $\mathbf{L}(\nu)$ y $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$.

Definición 2.2.9 Denominaremos *operador divergencia, respecto de ν y (\mathbf{B}, μ)* y lo denotaremos por $\text{div}_{\nu\mu}$ a $-\nabla^*$ cuando ∇ se interpreta como operador entre los espacios $\mathbf{L}(\nu)$ y $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$.

Denotaremos por $\mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu)$ al subespacio de $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$ formado por los campos solenoidales, es decir al núcleo de $\text{div}_{\nu\mu}$. El espacio $\mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu)$ será denotado simplemente por $\mathbf{H}_0(\mathbf{B})$ cuando μ sea la medida cardinal y por \mathbf{H}_0 si además \mathbf{B} es la métrica canónica.

De la definición se deduce directamente que $\text{div}_{\nu\mu}: \mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu) \rightarrow \mathbf{L}(\nu)$ está caracterizado por la identidad

$$\frac{1}{2} \int_V \langle \tilde{d}u, f \rangle d\mu = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\nabla u, f) d\mu = - \int_V u \text{div}_{\nu\mu}(f) d\nu, \text{ para cada } u \in \mathcal{C}(V), f \in \mathcal{X}(\Gamma).$$

En particular, observamos que $\text{div}_{\nu\mu}$ no depende la métrica \mathbf{B} y por tanto, si $\nu = \mu = \lambda$, $-\nabla^* = -\tilde{d}^* = \text{div}$. Por otra parte, de la identidad que caracteriza $\text{div}_{\nu\mu}$ obtenemos si $f \in \mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu)$, entonces para cada $u \in \mathcal{C}(V)$, $\int_V \frac{\partial u}{\partial f} d\mu = \int_V \mathbf{B}(\nabla u, f) d\mu = 0$.

Proposición 2.2.10 *Supongamos que V_1, \dots, V_m son las componentes conexas de Γ . Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

i) *Si $h \in \mathcal{C}(V)$, la condición necesaria y suficiente para que exista $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$ tal que $\text{div}_{\nu\mu}(f) = h$ es que $\int_{V_j} h d\nu = 0$ para cada $j = 1, \dots, m$. En particular, para cada $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$, $\int_{V_j} \text{div}_{\nu\mu}(f) d\nu = 0$, $j = 1, \dots, m$.*

ii) *$\dim \text{Im} \text{div}_{\nu\mu} = |V| - m$ y $\dim \mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu) = |E| + m - \chi(\Gamma) \geq |E|$. En particular, Γ es un bosque sii $\dim \mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu) = |E|$.*

Demostración. En virtud de la Alternativa de Fredholm, tenemos que $\text{Im} \text{div}_{\nu\mu} = [\ker \nabla]^\perp$ y que $\mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu) = [\text{Im} \nabla]^\perp$. Por tanto, (i) es consecuencia de la primera identidad y de que

$\ker \nabla$ está constituido por las funciones constantes en cada componente conexa de Γ . Por otra parte, las dos indentidades anteriores implican también que

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} \operatorname{div}_{\nu\mu} &= \dim \mathcal{C}(V) - \dim \ker \nabla = |V| - m; \\ \dim \mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu) &= \dim \mathcal{X}(\Gamma) - \dim \operatorname{Im} \nabla = 2|E| + m - |V| = |E| + m - \chi(\Gamma). \end{aligned}$$

Por último, como Γ es un bosque sii $\chi(\Gamma) = m$, la igualdad anterior muestra que Γ es un bosque sii $\dim \mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu) = |E|$. ■

Proposición 2.2.11 *Se verifican las siguientes propiedades:*

i) Si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ y $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ es su función componente, entonces para cada $x \in V$,

$$\operatorname{div}_{\nu\mu}(\mathbf{f})(x) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{e \in E} (\mu f)^a(x, e) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in V} \kappa(x, y) (\mu f^\#)^a(x, y).$$

ii) Para cada $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, $\operatorname{div}_{\nu\mu}(\mathbf{f}) = \operatorname{div}_{\nu\mu}(\mathbf{f}^\#)$ y $\operatorname{div}_{\nu\mu}(\mathbf{f}) = \frac{\mu}{\nu} \operatorname{div}(\mathbf{f}) + \frac{1}{2\nu} \frac{\partial \mu}{\partial \tilde{\mathbf{f}}}$.

iii) El operador $\operatorname{div}_{\nu\mu}$ es de primer orden sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$ y su restricción al subespacio $\frac{1}{\mu} \mathcal{X}^a(\Gamma)$ es de orden 0.

iv) El espacio $\mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu)$ es independiente de la medida ν y sólo depende de la estructura métrica (\mathbf{B}, μ) . En general $\frac{1}{\mu} \mathcal{X}^s(\Gamma) \subset \mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu)$ y se satisface la igualdad sii Γ es un bosque. En este caso, la condición necesaria y suficiente para que un campo \mathbf{f} sea gradiente es que $\mathbf{Mf} \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$.

Demostración. Las tres primeras partes se deducen directamente de la aplicación de las Proposiciones 2.1.11 y 2.2.4 y del Corolario 2.2.5. Por otra parte, la expresión de la divergencia obtenida en (i), implica que $\operatorname{div}_{\nu\mu}(\mathbf{f}) = 0$ sii $\operatorname{div}_{\lambda\mu}(\mathbf{f}) = 0$ y también que $\frac{1}{\mu} \mathcal{X}^s(\Gamma) \subset \mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu)$. Como $\dim \frac{1}{\mu} \mathcal{X}^s(\Gamma) = \dim \mathcal{X}^s(\Gamma) = |E|$, la aplicación de la parte (ii) de la Proposición 2.2.10, conduce a la igualdad de ambos espacios sii Γ es un bosque. Además, como si $\mathbf{Mf} \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$, para cada $\mathbf{g} \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$ tenemos que

$$\int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \frac{1}{\mu} \mathbf{g}) d\mu = \int_V \langle \mathbf{Mf}, \mathbf{g} \rangle d\lambda = 0$$

pues $\mathcal{X}^a(\Gamma)$ y $\mathcal{X}^s(\Gamma)$ son ortogonales para la estructura métrica canónica. Así pues, cuando Γ es un bosque, si $\mathbf{Mf} \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$ entonces $\mathbf{f} \in \left(\frac{1}{\mu} \mathcal{X}^s(\Gamma)\right)^\perp = \mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu)^\perp = \operatorname{Im} \nabla$. ■

Obsérvese que como un bosque es una variedad simple, todo campo es reducido. Por tanto, la parte (iv) de la proposición anterior establece que en un bosque la condición necesaria y suficiente para que un campo \mathbf{f} sea gradiente es que $\mathbf{Mf} \in \mathcal{X}^a(\Gamma) \cap \mathcal{X}^\#(\Gamma)$, lo que concuerda con la condición necesaria establecida en la parte (vi) de la Proposición 2.2.8.

Definición 2.2.12 Consideremos $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ una variedad Riemanniana discreta y ν una medida densa. Denominaremos *operador de Laplace o Laplaciano, respecto de ν y (\mathbf{B}, μ)* , al operador lineal $\Delta_{\nu, \mathbf{B}, \mu}: \mathcal{L}(\nu) \rightarrow \mathcal{L}(\nu)$ dado por $\Delta_{\nu, \mathbf{B}, \mu} = \text{div}_{\nu\mu} \circ \nabla_{\mathbf{B}}$. Para cada $u \in \mathcal{C}(V)$, la función $\Delta_{\nu, \mathbf{B}, \mu} u$ será denominada *Laplaciano de u , respecto de ν y (\mathbf{B}, μ)* . En particular, el Laplaciano respecto de λ y (\mathbf{B}, μ) se denomina el *Laplaciano de la variedad Riemanniana discreta*.

En lo sucesivo, y cuando no haya lugar a confusión eliminaremos los subíndices ν , μ y \mathbf{B} en la escritura de los operadores en diferencias que han sido definidos en esta sección, así como las expresiones *respecto de ν y (\mathbf{B}, μ)* .

Antes de obtener su expresión explícita, podemos concluir algunas propiedades del operador de Laplace directamente de su propia definición.

Proposición 2.2.13 Si $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ es una variedad Riemanniana y ν es una medida densa, se satisfacen las siguientes propiedades:

- i) El operador de Laplace tiene a lo sumo orden 2 y es autoadjunto, es decir, para cada par de funciones $u, v \in \mathcal{C}(V)$, se satisface que $\int_V u \Delta v \, d\nu = \int_V v \Delta u \, d\nu$.
- ii) (Identidad de Green): Para cada $u, v \in \mathcal{C}(V)$, $\int_V v \Delta u \, d\nu = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\nabla u, \nabla v) \, d\mu$.
- iii) (Teorema de Gauss): para cada $u \in \mathcal{C}(V)$, $\int_V \Delta u \, d\nu = 0$.
- iv) La expresión $-\int_V u \Delta u \, d\nu$ define una forma cuadrática semidefinida positiva sobre $\mathcal{C}(V)$ cuyos elementos isótropos son y sólo son las funciones constantes en cada componente conexa de Γ .
- v) Si $u \in \mathcal{C}(V)$, entonces $\Delta u = 0$ si y sólo si u es constante en cada componente conexa de Γ .

Demostración. Que Δ es un operador de segundo de orden menor o igual a 2 es consecuencia de que se obtiene como composición de dos operadores de orden menor o igual que 1.

Además, si $u, v \in \mathcal{C}(V)$, de las definiciones del Laplaciano, de la divergencia y de la simetría de \mathbf{B} , obtenemos que

$$\int_V u \Delta v \, d\nu = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\nabla u, \nabla v) \, d\mu = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\nabla v, \nabla u) \, d\mu = \int_V v \Delta u \, d\nu$$

expresión que demuestra el carácter autoadjunto de Δ , así como la identidad de Green. En particular, el Teorema de Gauss se obtiene tomando v constante no nula en la identidad de Green.

La expresión anterior muestra también que $-\int_V u \Delta u d\nu = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\nabla u, \nabla u) d\mu$ y es claro que esta última expresión define una forma cuadrática semidefinida positiva sobre $\mathcal{C}(V)$, dado que \mathbf{B} es una métrica. Por tanto, $\int_V u \Delta u d\nu = 0$ sii $\nabla u = 0$ y por tanto sii u es constante en cada componente conexa de Γ .

Para finalizar, si u es constante en cada componente conexa de Γ , entonces $\Delta u = 0$ pues $\nabla u = 0$. Recíprocamente, si $\Delta u = 0$, entonces u es isótropo para la anterior forma cuadrática y por tanto u es constante en cada componente conexa de Γ . ■

El siguiente resultado será útil para obtener la expresión explícita del operador de Laplace.

Lema 2.2.14 Sean (\mathbf{B}, μ) una estructura Riemanniana sobre Γ , a la función coeficiente de \mathbf{B}^{-1} y consideremos la función $c \in \mathcal{C}(V \times V)$ dada por $c(x, x) = 0$ para todo $x \in V$ y por

$$c(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{z \in V} \left[\#a(x, y, z) \kappa(x, y) \kappa(x, z) \mu(x) + \#a(y, x, z) \kappa(y, x) \kappa(y, z) \mu(y) \right] \\ - \frac{1}{2} \sum_{z \in V} \#a(z, x, y) \kappa(z, x) \kappa(z, y) \mu(z), \quad \text{si } x \neq y.$$

Se satisfacen las siguientes propiedades:

i) La función c es simétrica y $c(x, y) = 0$, cuando $d(x, y) > 2$. Además, si $d(x, y) = 2$, entonces $c(x, y) = -\frac{1}{2} \sum_{z \in V} \#a(z, x, y) \kappa(z, x) \kappa(z, y) \mu(z)$, mientras que si $d(x, y) = 1$ y x e y no son vértices de un triángulo, entonces

$$c(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{z \in V} \left[\#a(x, y, z) \kappa(x, y) \kappa(x, z) \mu(x) + \#a(y, x, z) \kappa(y, x) \kappa(y, z) \mu(y) \right]$$

ii) Para cada $x \in V$, $\int_V c(x, y) d\lambda(y) > 0$.

iii) Si \mathbf{B} es ortogonal, $c = \kappa(\mu a^\#)^s$. En particular, $c \in \mathcal{C}^s(\Gamma^\#)$ y es compatible con V .

Demostración. (i) Basta observar que fijado $z \in V$, la simetría de \mathbf{B} implica que, para cada $x, y \in V$ se tiene que $\#a(z, x, y) = \#a(z, y, x)$.

Por otra parte, como $\#a \in \mathcal{C}^\#(\Gamma \times \Gamma)$, resulta que $\#a(x, y, z) = 0$ si $d(x, y) \cdot d(x, z) \neq 1$. Por tanto, si $d(x, y) > 2$, entonces $d(x, z) \cdot d(y, z) \neq 1$ para cada $z \in V$, lo que implica que $\#a(x, y, z) = \#a(y, x, z) = \#a(z, y, x) = 0$ y en definitiva que $c(x, y) = 0$.

Si $d(x, y) = 2$, entonces $\#a(x, y, z) = \#a(y, x, z) = 0$ para cada $z \in V$, de manera que los dos primeros sumandos en la expresión de c son nulos.

Si $d(x, y) = 1$, el que x e y no sean vértices de ningún triángulo en Γ significa que no existe $z \in V$ simultáneamente adyacente a ambos vértices o de forma equivalente tal que $d(x, y) = d(x, z) = d(y, z) = 1$. Esto implica que $\#a(z, x, y) = 0$ para cada $z \in V$ y por tanto el tercer sumando en la expresión de c es nulo.

(ii) De la expresión dada para c obtenemos que para cada $x \in V$,

$$\begin{aligned}
2 \sum_{y \in V} c(x, y) &= \sum_{y, z \in V} \#a(x, y, z) \kappa(x, y) \kappa(x, z) \mu(x) + \sum_{y, z \in V} \#a(y, x, z) \kappa(x, y) \kappa(y, z) \mu(y) \\
&\quad - \sum_{y, z \in V} \#a(z, x, y) \kappa(x, z) \kappa(y, z) \mu(z) + \sum_{z \in V} \#a(z, x, x) \kappa(x, z) \kappa(x, z) \mu(z) \\
&= \sum_{y, z \in V} \#a(x, y, z) \kappa(x, y) \kappa(x, z) \mu(x) + \sum_{z \in V} \#a(z, x, x) \kappa(x, z) \kappa(x, z) \mu(z) \\
&\quad + \sum_{y, z \in V} \#a(y, x, z) \kappa(x, y) \kappa(y, z) \mu(y) - \sum_{y, z \in V} \#a(z, x, y) \kappa(x, z) \kappa(y, z) \mu(z) \\
&= \sum_{y, z \in V} \#a(x, y, z) \kappa(x, y) \kappa(x, z) \mu(x) + \sum_{z \in V} \#a(z, x, x) \kappa(x, z) \kappa(x, z) \mu(z) \\
&\quad + \sum_{y, z \in V} \#a(y, x, z) \kappa(x, y) \kappa(y, z) \mu(y) - \sum_{z, y \in V} \#a(y, x, z) \kappa(x, y) \kappa(y, z) \mu(y) \\
&= \mu(x) \langle \mathbf{At}, \mathbf{t} \rangle(x) + \sum_{z \in V} \#a(z, x, x) \kappa^2(x, z) \mu(z) > 0.
\end{aligned}$$

(iii) Si \mathbf{B} es ortogonal, entonces $a \in \mathcal{C}(\Gamma)$ y $\kappa \#a = a^\#$. Además, si $x \neq y$, entonces $\#a(z, x, y) = 0$, para cada $z \in V$, lo que implica que $c = (\kappa \mu a^\#)^s$. El resultado se deduce directamente, teniendo en cuenta que $\kappa \in \mathcal{C}^s(\Gamma)$. ■

Definición 2.2.15 Si (\mathbf{B}, μ) es una estructura Riemanniana sobre Γ , denominaremos *función coeficiente de (\mathbf{B}, μ)* o simplemente *coeficiente* a la función c determinada en el lema anterior.

Proposición 2.2.16 Si $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ es una variedad Riemanniana discreta, c es la función coeficiente de su estructura Riemanniana y ν es una medida densa, entonces para cada $u, v \in \mathcal{C}(V)$ y cada $x \in V$, se satisface que

$$\begin{aligned}
(\Delta u)(x) &= \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in V} c(x, y) (u(y) - u(x)) = \frac{1}{\nu(x)} \int_V c(x, y) (u(y) - u(x)) d\lambda(y), \\
- \int_V v \Delta u d\nu &= \frac{1}{2} \int_{V \times V} c(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y).
\end{aligned}$$

Además,

$$(\Delta uv)(x) = u(x) (\Delta v)(x) + v(x) (\Delta u)(x) + \frac{1}{\nu(x)} \int_V c(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) d\lambda(y)$$

y en particular,

$$(\Delta u^2)(x) = 2 u(x) (\Delta u)(x) + \frac{1}{\nu(x)} \int_V c(x, y) (u(y) - u(x))^2 d\lambda(y).$$

Demostración. (i) Llamando $h \in \mathcal{C}(\Gamma)$ a la función componente del campo ∇u y aplicando la parte (i) de la Proposición 2.2.11 tenemos que para cada $x \in V$,

$$\Delta(u)(x) = \operatorname{div}((\nabla u)^\#)(x) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in V} \kappa(x, y) (\mu h^\#)^a(x, y).$$

Por otra parte, de la expresión (2.2), obtenemos que

$$h^\#(x, y) = \sum_{z \in V} \# a(x, y, z) \kappa(x, z) (u(z) - u(x))$$

y por tanto, para completar la expresión de Δ , resta calcular $(\mu h^\#)^a(x, y)$, para cada $x, y \in V$. Para ello, observemos primero que

$$\begin{aligned} (\mu h^\#)^a(x, y) &= \frac{1}{2} (\mu(x) h^\#(x, y) - \mu(y) h^\#(y, x)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{z \in V} \left[\# a(x, y, z) \kappa(x, z) \mu(x) (u(z) - u(x)) - \# a(y, x, z) \kappa(y, z) \mu(y) (u(z) - u(y)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{z \in V} \left[\# a(x, y, z) \kappa(x, z) \mu(x) (u(z) - u(x)) + \# a(y, x, z) \kappa(y, z) \mu(y) (u(y) - u(x)) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{z \in V} \# a(y, x, z) \kappa(y, z) \mu(y) (u(z) - u(x)) \end{aligned}$$

De aquí, obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{y \in V} \kappa(x, y) (\mu h^\#)^a(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{z \in V} (u(z) - u(x)) \sum_{y \in V} \# a(x, y, z) \kappa(x, y) \kappa(x, z) \mu(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{y \in V} (u(y) - u(x)) \sum_{z \in V} \# a(y, x, z) \kappa(x, y) \kappa(y, z) \mu(y) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{z \in V} (u(z) - u(x)) \sum_{y \in V} \# a(y, x, z) \kappa(x, y) \kappa(y, z) \mu(y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{y \in V} (u(y) - u(x)) \sum_{z \in V} \# a(x, y, z) \kappa(x, y) \kappa(x, z) \mu(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{y \in V} (u(y) - u(x)) \sum_{z \in V} \# a(y, x, z) \kappa(y, x) \kappa(y, z) \mu(y) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{y \in V} (u(y) - u(x)) \sum_{z \in V} \# a(z, x, y) \kappa(z, x) \kappa(z, y) \mu(z), \end{aligned}$$

donde se ha utilizado que para cada $x \in V$, ${}^{\#}a(x, y, z) = {}^{\#}a(x, z, y)$, para cada $y, z \in V$. En definitiva, teniendo en cuenta la expresión de c , la función coeficiente de la estructura Riemanniana, obtenida en el Lema 2.2.14, resulta que

$$\sum_{y \in V} \kappa(x, y) (\mu h^{\#})^a(x, y) = \sum_{y \in V} c(x, y) (u(y) - u(x)) = \int_V c(x, y) (u(y) - u(x)) d\lambda(y).$$

Si ahora tomamos $u, v \in \mathcal{C}(V)$ y $x \in V$, de la identidad

$$(uv)(y) - (uv)(x) = v(x)(u(y) - u(x)) + u(x)(v(y) - v(x)) + (u(y) - u(x))(v(y) - v(x)),$$

aplicando la expresión integral del Laplaciano, obtenemos que para cada $x \in V$

$$(\Delta uv)(x) = u(x)(\Delta v)(x) + v(x)(\Delta u)(x) + \frac{1}{\nu(x)} \int_V c(x, y) (u(y) - u(x))(v(y) - v(x)) d\lambda(y)$$

y en particular que para cada $u \in \mathcal{C}(V)$ y cada $x \in V$,

$$(\Delta u^2)(x) = 2u(x)(\Delta u)(x) + \frac{1}{\nu(x)} \int_V c(x, y) (u(y) - u(x))^2 d\lambda(y).$$

Para finalizar, teniendo en cuenta la simetría de c , de la expresión integral del Laplaciano, se deduce que

$$\begin{aligned} \int_V v \Delta u d\nu &= \int_V v(z) \left(\int_V c(z, w) (u(w) - u(z)) d\lambda(w) \right) d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{2} \int_V v(x) \left(\int_V c(x, y) (u(y) - u(x)) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_V v(y) \left(\int_V c(y, x) (u(x) - u(y)) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{V \times V} c(x, y) v(x) (u(y) - u(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{V \times V} c(x, y) v(y) (u(y) - u(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{V \times V} c(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y). \blacksquare \end{aligned}$$

De la expresión de la forma cuadrática $-\int_V u \Delta u d\nu$ que acabamos de obtener, resulta que la restricción del producto escalar inducido por la estructura Riemanniana sobre $\mathcal{X}(\Gamma)$ al subespacio de campos gradientes está dada por

$$\int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mu = -2 \int_V v \Delta u d\nu = \int_{V \times V} c(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y) \quad (2.5)$$

donde $f = \nabla u$ y $g = \nabla v$. En particular, para cada $u \in \mathcal{C}(V)$,

$$\int_V \mathbf{B}(\nabla u, \nabla u) d\mu = -2 \int_V u \Delta u d\nu = \int_{V \times V} c(x, y) (u(y) - u(x))^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) \quad (2.6)$$

Por otra parte, si sobre $V \times V$ consideramos la medida γ cuya densidad respecto de $\lambda \times \lambda$ es la función $c(x, y)$, entonces para cada $u, v \in \mathcal{C}(V)$,

$$\int_V \mathbf{B}(\nabla u, \nabla v) d\mu = \int_{V \times V} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y)) d\gamma(x, y) \quad (2.7)$$

y en particular

$$\int_V \mathbf{B}(\nabla u, \nabla u) d\mu = \int_{V \times V} (u(x) - u(y))^2 d\gamma(x, y)$$

formulación acorde con la Teoría de Formas de Dirichlet (ver, por ejemplo [33, 39]).

Obsérvese que aunque en general γ no es una medida positiva, para cada $u \in \mathcal{C}(V)$ se verifica que $\int_{V \times V} (u(x) - u(y))^2 d\gamma(x, y) \geq 0$ y además el valor de la integral es nulo sii u es constante en cada componente conexa de Γ . En particular, obtenemos que para que una función u sea constante en cada componente conexa es necesario y suficiente que sea constante sobre el conjunto $\{x \in V : \text{existe } y \in V \text{ tal que } c(x, y) \neq 0\}$. Por supuesto, esta condición no aporta ninguna novedad cuando c es semi-compatible con V , pero es interesante cuando esta condición no se satisface.

El siguiente resultado constituye la particularización de los anteriores al caso contemplado hasta ahora en la literatura que, en nuestra terminología, resulta ser el de variedades Riemannianas, generalmente simples, tales que la estructura métrica está determinada por una métrica ortogonal y la medida canónica. En particular, obtendremos las expresiones que aparecen en [39] y en [40] relativas al Laplaciano del producto de funciones.

Corolario 2.2.17 *Si \mathbf{B} es una métrica ortogonal, entonces Δ es un operador de primer orden. Si además, \mathbf{B} es compatible y $\mu = \lambda$, entonces para cada $u, v \in \mathcal{C}(V)$ se verifica que*

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + \frac{1}{\nu} \mathbf{B}(\nabla u, \nabla v) \quad y \quad \Delta u^2 = 2u\Delta u + \frac{1}{\nu} \mathbf{B}(\nabla u, \nabla u)$$

y además que $\mathbf{B}(\nabla u, \nabla v)(x) = \int_V c(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) d\lambda(y)$.

Demostración. Cuando \mathbf{B} es ortogonal, la parte (iii) del Lema 2.2.14 asegura que cuando $d(x, y) \neq 1$, entonces $c(x, y) = 0$. Como para cada $x \in V$, se tiene que

$$(\Delta u)(x) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \sim x} c(x, y) (u(y) - u(x)),$$

si $x \notin \overline{\text{sup}(u)}$ entonces $u(x) = 0$ y además $u(y) = 0$ para cada $y \sim x$, lo que implica que $(\Delta u)(x) = 0$ y por tanto, que Δ es un operador de primer orden.

Cuando $\mu = \lambda$, aplicando la Regla de Leibnitz y la parte (iii) del Corolario 2.2.5, obtenemos que

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= \operatorname{div}(\nabla(uv)) = \operatorname{div}(u^s \cdot \nabla v) + \operatorname{div}(v^s \cdot \nabla u) \\ &= u\Delta v + \frac{1}{2\nu} \langle \tilde{\mathbf{d}}u, (\nabla v)^a \rangle + v\Delta u + \frac{1}{2\nu} \langle \tilde{\mathbf{d}}v, (\nabla u)^a \rangle \\ &= u\Delta v + v\Delta u + \frac{1}{2\nu} \mathbf{B}(\nabla u, \nabla v) + \frac{1}{2\nu} \mathbf{B}(\nabla v, \nabla u),\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que por ser \mathbf{B} ortogonal y compatible $\nabla u, \nabla v \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$.

Para concluir, el corolario basta observar que si \mathbf{B} es ortogonal y compatible y $\mu = \lambda$, el coeficiente de la estructura Riemanniana es $c = \kappa a^\#$ y por tanto, para cada $u, v \in \mathcal{C}(V)$ y cada $x \in V$, se satisface que

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\nabla u, \nabla v)(x) &= \langle \tilde{\mathbf{d}}u, \nabla v \rangle = \langle \tilde{\mathbf{d}}u, (a \cdot \tilde{\mathbf{d}}v) \rangle = \sum_{e \in E} a(x, e) (\tilde{\mathbf{d}}u)(x, e) (\tilde{\mathbf{d}}v)(x, e) \\ &= \sum_{y \in V} (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) \sum_{e \in E_{xy}} a(x, e) \\ &= \sum_{y \in V} (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) \kappa(x, y) a^\#(x, y) \\ &= \sum_{y \in V} c(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)). \blacksquare\end{aligned}$$

Podríamos haber demostrado directamente, sin acudir a la expresión explícita del Laplaciano, que bajo las hipótesis del corolario, Δ es un operador de primer orden. Observemos que en este caso, para cada $u \in \mathcal{C}(V)$,

$$\Delta u = \operatorname{div}(a \cdot \tilde{\mathbf{d}}u) = \frac{1}{\nu} \langle (\mu a \cdot \tilde{\mathbf{d}}u)^a, \mathbf{t} \rangle = \frac{1}{\nu} \langle (\mu a)^s \cdot \tilde{\mathbf{d}}u, \mathbf{t} \rangle = \frac{1}{\nu} \langle \tilde{\mathbf{d}}u, (\mu a)^s \cdot \mathbf{t} \rangle.$$

Si consideramos el campo \mathbf{w} de componente $(\mu a)^s$, resulta que $\mathbf{w} \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$ y satisface que para cada $u \in \mathcal{C}(V)$

$$\Delta u = \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{w}} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{w}^\#}. \quad (2.8)$$

Recíprocamente, si $\mathbf{w} \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$ y su función componente w satisface que $w(x, e) > 0$ para cada $e \in E_x$, entonces w^{-1} puede interpretarse como la función coeficiente de una métrica ortogonal sobre Γ , tal que si consideramos $\mu = \lambda$ y ν una medida densa, el Laplaciano correspondiente satisface la identidad (2.8). En definitiva como operador en diferencias, los Laplacianos correspondientes a estructuras Riemannianas cuya métrica sea ortogonal no sólo son de primer orden sino que además son indistinguibles de los operadores derivadas según campos simétricos y positivos. Recuérdese que si $\mathbf{w} \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$, el operador $\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}$ es autoadjunto en \mathbf{L} y por tanto, el operador $\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}$ es autoadjunto en $\mathbf{L}(\nu)$.

Llegados a este punto, es conveniente hacer algunas puntalizaciones sobre la terminología empleada. En primer lugar, cuando $\nu = \mu = \lambda$, la definición de operador de Laplace de una variedad Riemanniana discreta es el análogo discreto del concepto de *operador de Laplace-Beltrami* de una variedad Riemanniana continua, mientras que el caso $\nu = \mu$ correspondería a la expresión de este operador en coordenadas, donde μ tiene el papel del determinante de la métrica.

Por otra parte, con excepción hecha de las aplicaciones a la construcción de esquemas en diferencias finitas para problemas de contorno elípticos, los casos abordados en la literatura corresponden a la situación en la que la estructura Riemanniana (\mathbf{B}, μ) satisface que $\mu = \lambda$ y que \mathbf{B} es ortogonal y compatible. El caso particular $\nu = \lambda$ conduce al denominado *Laplaciano combinatorio* (ver fundamentalmente [11] y [15]). Si tomamos ν la medida densa definida como $\nu(x) = \int_V c(x, y) d\lambda(y)$, entonces el Laplaciano determinado por ν y por (\mathbf{B}, λ) es precisamente el denominado *Laplaciano probabilístico* asociado a un camino aleatorio reversible cuya distribución estacionaria es ν (ver por ejemplo [11, 15, 18, 28, 35]). Por supuesto, esta noción puede ser generalizada: si suponemos que la función coeficiente de la estructura Riemanniana (\mathbf{B}, μ) es no negativa, podemos definir Laplaciano probabilístico considerando de nuevo $\nu(x) = \int_V c(x, y) d\lambda(y)$. En este caso el Laplaciano probabilístico está asociado a caminos aleatorios reversibles que no son necesariamente del tipo “entorno más cercano” (ver por ejemplo, [1, 42, 62]). Esta elección también puede interpretarse como el análogo discreto de la noción de *variedad Riemanniana pesada* utilizada en [3, 34].

Por último, señalaremos que la noción de *Laplaciano normalizado*, que ha sido introducida recientemente en los trabajos [16, 18], será abordada en el siguiente capítulo, donde además se la relacionará con la noción de operador de Laplace dada en esta memoria. Solamente diremos aquí que este concepto se corresponde no con un operador de Laplace-Beltrami sino con un operador en diferencias que contiene un término de orden 0 y cuya parte principal es nuestro operador de Laplace.

Concluiremos esta sección determinando la expresión del operador de Laplace sobre la retícula uniforme n -dimensional, Γ_n , asociado a las métricas uniformes descritas al final del primer capítulo. Supondremos que el tamaño de la retícula es $h > 0$ y en este caso tomaremos $\mu = \lambda$, $\nu = h\lambda$ y denotaremos por $\mathbf{A}(x)$ a la inversa de la matriz de la métrica en el vértice x y por a su función componente. Por tanto, la función coeficiente de la estructura métrica está dada por la expresión $c(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{z \in V} (a(x, y, z) + a(y, x, z) - a(z, x, y))$, si $x \neq y$ y como además Γ_n no tiene triángulos, $c(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{z \in V} (a(x, y, z) + a(y, x, z))$ cuando $d(x, y) = 1$.

De acuerdo con las asignaciones establecidas al final del capítulo precedente, consideraremos $\mathbf{A}(x) = \frac{a_0}{h}$ con $a_0 > 0$ si $x \in \delta(R_n)$, mientras que si $x \in R_n$, haremos la asignación

$A(x) = \frac{1}{h} M(n; a, b, c, d)$, es decir

$$A(x) = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b & d & \cdots & d & c \\ b & a & \cdots & b & d & \cdots & c & d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & c & \cdots & d & d \\ d & d & \cdots & c & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d & c & \cdots & d & b & \cdots & a & b \\ c & d & \cdots & d & b & \cdots & b & a \end{bmatrix},$$

donde $a > \max \{b + d - c, b - d + c, -(n-1)(b+d) - c, (n-1)(d-b) + c\}$. Por supuesto, según la propiedad (iii) del Lema 1.3.21, el campo de matrices asociado a la métrica está dado por las identidades $M(x) = \frac{h}{a_0}$ si $x \in \delta(R_n)$ y $M(x) = h M(n; A, -B, -C, -D)$ si $x \in R_n$, donde A, B, C y D están descritos en el mencionado lema. En lo sucesivo denominaremos *estructura Riemanniana uniforme de tamaño h* a la determinada por la medida cardinal y por la métrica uniforme asociada al anterior campo de matrices. Además, denotaremos por Δ_A al operador de Laplace asociado a esta estructura métrica y a $\nu = h\lambda$.

De especial importancia en el desarrollo de esta memoria serán las estructuras uniformes correspondientes al caso en el que $b, c, d \leq 0$, para el cual la condición sobre los coeficientes es equivalente a que $a + c + (n-1)(b+d) > 0$, es decir el caso en el que $A(n; a, b, c, d)$ es una matriz de Stieltjes diagonalmente dominante de forma estricta.

Para determinar la expresión de Δ_A , es necesario analizar con un poco de detalle V_n , el conjunto de vértices de la retícula uniforme n -dimensional Γ_n . Recordemos que

$V_n = \{h(i_1, \dots, i_n) : 0 \leq i_j \leq m_j, j = 1, \dots, n \text{ e } i_j = 0 \text{ ó } m_j \text{ para un índice a lo sumo}\}$,
y observemos que se tienen las identidades

$$V_n = \overset{\circ}{R}_n \cup \delta(R_n^c) \cup \delta(R_n) = \overset{\circ}{R}_n \cup \left(\bigcup_{r=1}^n L_n^r \right) \cup \delta(R_n) = \overset{\circ}{R}_n \cup \left(\bigcup_{r=1}^n \bigcup_{t=0}^r L_n^{r,t} \right) \cup \delta(R_n),$$

donde

$$\begin{aligned} R_n &= \{h(i_1, \dots, i_n) \in V_n : 1 \leq i_j \leq m_j - 1, j = 1, \dots, n\}, \\ \delta(R_n) &= \{h(i_1, \dots, i_n) \in V_n : i_j = 0 \text{ ó } m_j, \text{ para exactamente un índice } j\} \\ \overset{\circ}{R}_n &= \{h(i_1, \dots, i_n) \in V_n : 2 \leq i_j \leq m_j - 2, j = 1, \dots, n\}, \\ \delta(R_n^c) &= \{h(i_1, \dots, i_n) \in V_n : 1 \leq i_j \leq m_j - 1 \text{ para todo } j \\ &\quad \text{e } i_j = 1 \text{ ó } m_j - 1, \text{ para algún } j\}, \\ L_n^r &= \{h(i_1, \dots, i_n) \in \delta(R_n^c) : \text{existen exactamente } r \text{ subíndices } j_1, \dots, j_r, \\ &\quad \text{tales que } i_{j_s} = 1 \text{ ó } m_{j_s} - 1, s = 1, \dots, r\}, r = 1, \dots, n; \\ L_n^{r,t} &= \{h(i_1, \dots, i_n) \in L_n^r : \text{existen exactamente } t \text{ subíndices } j_1, \dots, j_t, \\ &\quad \text{tales que } i_{j_s} = 1, s = 1, \dots, t\}, t = 0, \dots, r. \end{aligned}$$

Además, para cada $x = h(i_1, \dots, i_n) \in V_n$, definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} V^1(x) &= \{y \in V_n : y = h(i_1, \dots, i_j \pm 1, \dots, i_n), \quad j = 1, \dots, n\}; \\ V^{2,c}(x) &= \{y \in V_n : y = h(i_1, \dots, i_j \pm 2, \dots, i_n), \quad j = 1, \dots, n\}; \\ V^{2,b}(x) &= \{y \in V_n : y = h(i_1, \dots, i_r \pm 1, \dots, i_s \pm 1, \dots, i_n), \quad r, s = 1, \dots, n, \quad r \neq s\}; \\ V^{2,d}(x) &= \{y \in V_n : y = h(i_1, \dots, i_r \pm 1, \dots, i_s \mp 1, \dots, i_n), \quad r, s = 1, \dots, n, \quad r \neq s\}. \end{aligned}$$

Si $x \in \overset{\circ}{R}_n$, entonces $|V^1(x)| = |V^{2,c}(x)| = 2n$, $|V^{2,b}(x)| = |V^{2,d}(x)| = n(n-1)$ y si $u \in \mathcal{C}(V_n)$, el laplaciano de u en x está dado por la expresión

$$\begin{aligned} \Delta_A u(x) &= \frac{1}{h^2} \left(a + c + (n-1)(b+d) \right) \sum_{y \in V^1(x)} u(y) \\ &\quad - \frac{1}{2h^2} \left(c \sum_{y \in V^{2,c}(x)} u(y) + 2b \sum_{y \in V^{2,b}(x)} u(y) + 2d \sum_{y \in V^{2,d}(x)} u(y) \right) \\ &\quad - \frac{n}{h^2} \left(2a + c + (n-1)(b+d) \right) u(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si $x \in \delta(R_n)$, entonces $|V^1(x)| = |V^{2,c}(x)| = 1$, $|V^{2,b}(x)| = |V^{2,d}(x)| = n-1$ y si $u \in \mathcal{C}(V_n)$, el laplaciano de u en x está dado por la expresión

$$\begin{aligned} \Delta_A u(x) &= \frac{1}{2h^2} \left(a + c + a_0 + (n-1)(b+d) \right) \sum_{y \in V^1(x)} u(y) \\ &\quad - \frac{1}{2h^2} \left(c \sum_{y \in V^{2,c}(x)} u(y) + b \sum_{y \in V^{2,b}(x)} u(y) + d \sum_{y \in V^{2,d}(x)} u(y) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2h^2} (a + a_0) u(x) \end{aligned}$$

Si $x \in L_n^{r,t}$, entonces $|V^1(x)| = 2n$, $|V^1(x) \setminus \delta(R_n)| = |V^{2,c}(x)| = 2n-r$, mientras que

$$\begin{aligned} |V^{2,b}(x) \setminus \delta(R_n)| &= 2 \binom{n-r}{2} + r(n-r) + \binom{t}{2} + \binom{r-t}{2} \\ &= (n-1)(n-r) + \frac{1}{2} (t(t-1) + (r-t)(r-t-1)); \end{aligned}$$

$$|V^{2,b}(x) \cap \delta(R_n)| = r(n-r) + 2t(r-t);$$

$$|V^{2,d}(x) \setminus \delta(R_n)| = 2 \binom{n-r}{2} + r(n-r) + t(r-t) = (n-1)(n-r) + t(r-t)$$

$$|V^{2,d}(x) \cap \delta(R_n)| = r(n-r) + 2 \left[\binom{t}{2} + \binom{r-t}{2} \right] = r(n-r) + t(t-1) + (r-t)(r-t-1).$$

Por tanto, si $u \in \mathcal{C}(\overline{V_n})$, el laplaciano de u en x está dado por la expresión

$$\begin{aligned} \Delta_A u(x) &= \frac{1}{h^2} (a + c + (n-1)(b+d)) \sum_{y \in V^1(x) \setminus \delta(R_n)} u(y) \\ &+ \frac{1}{2h^2} (a + c + a_0 + (n-1)(b+d)) \sum_{y \in V^1(x) \cap \delta(R_n)} u(y) \\ &- \frac{1}{2h^2} \left(c \sum_{y \in V^{2,c}(x)} u(y) + b \sum_{y \in V^{2,b}(x) \cap \delta(R_n)} u(y) + d \sum_{y \in V^{2,d}(x) \cap \delta(R_n)} u(y) \right) \\ &- \frac{1}{h^2} \left(b \sum_{y \in V^{2,b}(x) \setminus \delta(R_n)} u(y) + d \sum_{y \in V^{2,d}(x) \setminus \delta(R_n)} u(y) \right) \\ &- \frac{1}{2h^2} (2n(2a + c + (n-1)(b+d)) + r(a_0 - a)) u(x) \end{aligned}$$

La expresión que acabamos de obtener para el operador de Laplace sobre retículas n -dimensionales, es similar, al menos desde el punto de vista formal, a la de los esquemas en diferencias finitas sobre la retícula utilizados en la discretización de los operadores elípticos de segundo orden. Mostraremos a continuación que esta semejanza no es sólo formal y que de hecho, el laplaciano asociado a la estructura métrica anterior se corresponde con la discretización mediante esquemas consistentes en diferencias finitas del operador diferencial con coeficientes constantes

$$L(u) = \hat{a} \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + 2\hat{b} \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_{x_i x_j},$$

donde $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$ deben satisfacer que $\hat{a} > \max\{\hat{b}, -(n-1)\hat{b}\}$ para que L sea elíptico. Sobre cuestiones generales acerca de la construcción de esquemas en diferencias finitas para operadores elípticos, pueden consultarse por ejemplo [31] y [48]. Siguiendo la terminología allí establecida, un *esquema en diferencias* para el operador L sobre los puntos de R_n , mediante una plantilla centrada en un nodo $x \in \overset{\circ}{R}_n$ que involucre a aquellos otros nodos de R_n que disten a lo más 2 de x , es decir a los puntos de los conjuntos $V^1(x)$, $V^{2,c}(x)$, $V^{2,b}(x)$ y $V^{2,d}(x)$ y que sea *consistente de orden k* , estriba en encontrar escalares α_j , $j = 0, \dots, 2n$, γ_j , $j = 1, \dots, 2n$ y β_j, δ_j , $j = 1, \dots, n(n-1)$, tales que si u es una función suficientemente regular y consideramos el operador en diferencias dado por la expresión

$$L_h(u)(x) = \alpha_0 u(x) + \sum_{x_j \in V^1(x)} \alpha_j u(x_j) + \sum_{y_j \in V^{2,c}(x)} \gamma_j u(y_j) + \sum_{z_j \in V^{2,b}(x)} \beta_j u(z_j) + \sum_{w_j \in V^{2,d}(x)} \delta_j u(w_j),$$

entonces $L(u) - L_h(u) = O(h^k)$.

La hipótesis de consistencia con el operador L antes definido, conduce a un sistema de ecuaciones que deben verificar los coeficientes $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$. Cuando $k = 2$, dichas ecuaciones

implican la existencia de escalares $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j &= \alpha, & j &= 1, \dots, 2n; \\ \beta_j &= \beta, & j &= 1, \dots, n(n-1); \\ \gamma_j &= \gamma, & j &= 1, \dots, 2n; \\ \delta_j &= \delta, & j &= 1, \dots, n(n-1); \\ \alpha_0 + 2n(\alpha + \gamma) + n(n-1)(\beta + \delta) &= 0; \\ h^2(\alpha + 4\gamma + (n-1)(\beta + \delta)) &= \hat{a}; \\ 2h^2(\beta - \delta) &= \hat{b}. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Por tanto, todos los esquemas consistentes de segundo orden para el operador L , están dados por los valores

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\hat{b}}{2h^2} + \delta; \\ \alpha &= \frac{1}{2h^2} (2\hat{a} - (n-1)\hat{b}) - 4\gamma - 2(n-1)\delta; \\ \alpha_0 &= -\frac{n}{2h^2} (4\hat{a} - (n-1)\hat{b}) + 6n\gamma + 2n(n-1)\delta, \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

donde $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, para que un esquema en diferencias finitas para el operador L que sea de la forma

$$L_h(u)(x) = \alpha_0 u(x) + \alpha \sum_{y \in V^1(x)} u(y) + \gamma \sum_{y \in V^{2,c}(x)} u(y) + \beta \sum_{y \in V^{2,b}(x)} u(y) + \delta \sum_{y \in V^{2,d}(x)} u(y), \quad (2.12)$$

coincida, en los puntos interiores de la retícula con Δ_A , el operador de Laplace sobre Γ_n relativo a la métrica uniforme cuyo campo de matrices sobre \mathring{R}_n es $hM^{-1}(n; a, b, c, d)$, han de satisfacerse, en virtud de la expresión (2.9), las identidades

$$\begin{aligned} a &= h^2(\alpha + 2\gamma + (n-1)(\beta + \delta)) \\ b &= -h^2\beta; \\ c &= -2h^2\gamma; \\ d &= -h^2\delta, \end{aligned} \quad (2.13)$$

junto con $\alpha_0 = -n(2(\alpha + \gamma) + (n-1)(\beta + \delta))$. Además como

$$a > \max \{b + d - c, b - d + c, -(n-1)(b + d) - c, (n-1)(d - b) + c\},$$

es también necesario que se verifiquen las condiciones

$$\left. \begin{aligned} \alpha &> 0 \\ \alpha &> -n(\beta + \delta); \\ \alpha &> -4\gamma - n\beta - (n-2)\delta; \\ \alpha &> -4\gamma - 2(n-1)\delta. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Las anteriores condiciones son también suficientes ya que si son satisfechas entonces basta tomar la métrica uniforme determinada por $h\mathbf{M}^{-1}(n; a, b, c, d)$ donde a, b, c y d están dados por las identidades (2.13). En particular, las desigualdades (2.14) se cumplen si $\alpha > 0$ y $\beta, \gamma, \delta \geq 0$. Este tipo de esquemas, denominados a veces *esquemas de tipo positivo*, son los más utilizados en la práctica (ver por ejemplo [37] y [48]) y además, la correspondiente matriz $\frac{1}{h}\mathbf{M}(n, a, b, c, d)$ es de Stieltjes y diagonalmente dominante de forma estricta, propiedades que serán de utilidad en nuestro trabajo, como se pondrá de manifiesto en los siguientes capítulos. Sin embargo, los resultados anteriores tienen una utilidad muy limitada si no se tiene en cuenta la consistencia del esquema L_h con el operador L . El siguiente resultado establece las conclusiones anteriores para esquemas consistentes de segundo orden.

Proposición 2.2.18 *Consideremos en \mathbb{R}^n el operador diferencial elíptico con coeficientes constantes*

$$L(u) = \hat{a} \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + 2\hat{b} \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_{x_i x_j},$$

donde $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$ satisfacen que $\hat{a} > \max\{\hat{b}, -(n-1)\hat{b}\}$, el esquema en diferencias finitas sobre la retícula uniforme de tamaño $h > 0$

$$L_h(u)(x) = \alpha_0 u(x) + \alpha \sum_{y \in V^1(x)} u(y) + \gamma \sum_{y \in V^{2,c}(x)} u(y) + \beta \sum_{y \in V^{2,b}(x)} u(y) + \delta \sum_{y \in V^{2,d}(x)} u(y)$$

y supongamos que L_h es consistente de segundo orden con L . Entonces, la condición necesaria y suficiente para que sobre Γ_n exista una estructura Riemanniana uniforme de tamaño h cuyo laplaciano es tal que $\Delta_A = L_h$ sobre \mathring{R}_n , es que se satisfagan las desigualdades

$$\hat{b} < \frac{2\hat{a}}{n-1}, \quad 2\gamma + (n-1)\delta < \frac{1}{4h^2} (2\hat{a} - (n-1)\hat{b}) \quad y \quad 2\gamma - \delta < \frac{1}{4h^2} (2\hat{a} + \hat{b})$$

en cuyo caso

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{2h} \mathbf{M}(n; 2\hat{a} - 4h^2\gamma, -\hat{b} - 2h^2\delta, -4h^2\gamma, -2h^2\delta), \quad x \in \mathring{R}_n.$$

Demostración. Los comentarios anteriores determinan que la condición necesaria y suficiente para que $L_h = \Delta_A$ sobre \mathring{R}_n es que se satisfagan las desigualdades (2.14). Además, si el esquema (2.12) es consistente de segundo orden entonces, aplicando las identidades (2.11), resulta que las desigualdades (2.14) son equivalentes a las desigualdades

$$\left. \begin{aligned} 2\gamma + (n-1)\delta &< \frac{1}{4h^2} (2\hat{a} - (n-1)\hat{b}); \\ 2\gamma - \delta &< \frac{1}{4h^2} (2\hat{a} + \hat{b}); \\ 0 &< \frac{1}{2h^2} (2\hat{a} + \hat{b}); \\ 0 &< \frac{1}{2h^2} (2\hat{a} - (n-1)\hat{b}); \end{aligned} \right\}$$

Como L es elíptico, entonces $\hat{a} > |\hat{b}|$ y por tanto la tercera desigualdad siempre se satisface, de manera que la verificación de las otras tres desigualdades constituye la condición necesaria y suficiente para que $L_h = \Delta_A$. En este caso, teniendo en cuenta las identidades (2.11) y (2.13) resulta que

$$a = h^2 \left(\frac{1}{2h^2} (2\hat{a} - (n-1)\hat{b}) - 4\gamma - 2(n-1)\delta + 2\gamma + \frac{(n-1)\hat{b}}{2h^2} + 2(n-1)\delta \right) = \hat{a} - 2h^2\gamma;$$

$$b = -h^2\beta = -\frac{\hat{b}}{2} - h^2\delta; \quad c = -2h^2\gamma, \quad y \quad d = -h^2\delta. \quad \blacksquare$$

Las condiciones establecidas en la proposición anterior son de distinta naturaleza: mientras que la primera depende sólo del operador diferencial L , las otras dos dependen del tamaño de la retícula. Es por ello que en la práctica, la única restricción está dada por la desigualdad $(n-1)\hat{b} < 2\hat{a}$, ya que supuesta ésta satisfecha, las otras dos condiciones se verifican para toda retícula de tamaño suficientemente pequeño. Además, dicha condición se satisface automáticamente si $\hat{b} \leq 0$ o si $n = 2, 3$, en virtud de la elipticidad de L , para cualquier valor de \hat{b} . Así pues, en los casos bi y tridimensionales, todo esquema consistente de segundo orden para un operador elíptico de la forma $L(u) = \hat{a} \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + 2\hat{b} \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_{x_i x_j}$, coincide, en el interior de cada retícula de tamaño suficientemente pequeño, con el operador de Laplace relativo a una métrica uniforme.

Aunque la condición $(n-1)\hat{b} < 2\hat{a}$ puede parecer algo restrictiva, se observa fácilmente que es necesaria para el esquema (2.12) sea consistente y de tipo positivo.

Proposición 2.2.19 *Consideremos en \mathbb{R}^n el operador diferencial elíptico con coeficientes constantes*

$$L(u) = \hat{a} \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + 2\hat{b} \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_{x_i x_j},$$

donde $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$ satisfacen que $2\hat{a} > \max \{2\hat{b}, -2(n-1)\hat{b}, (n-1)\hat{b}\}$.

Existen $\gamma, \delta \geq 0$, tales que si $\alpha = \frac{1}{2h^2} (2\hat{a} - (n-1)\hat{b}) - 4\gamma - 2(n-1)\delta$, $\beta = \frac{\hat{b}}{2h^2} + \delta$ y $\alpha_0 = -\frac{n}{2h^2} (4\hat{a} - (n-1)\hat{b}) + 6n\gamma + 2n(n-1)\delta$, entonces el esquema en diferencias finitas

$$L_h(u)(x) = \alpha_0 u(x) + \alpha \sum_{y \in V^1(x)} u(y) + \gamma \sum_{y \in V^{2,c}(x)} u(y) + \beta \sum_{y \in V^{2,b}(x)} u(y) + \delta \sum_{y \in V^{2,d}(x)} u(y)$$

es consistente de segundo orden sobre \mathring{R}_n y de tipo positivo. Además, la matriz

$$A = \frac{1}{2h} \mathbf{M}(n; 2\hat{a} - 4h^2\gamma, -\hat{b} - 2h^2\delta, -4h^2\gamma, -2h^2\delta)$$

es de Stieltjes diagonalmente dominante de forma estricta y $L_h u(x) = \Delta_A u(x)$ para cada $x \in \mathring{R}_n$.

Demostración. En virtud de las identidades (2.11), la definición de α y β implican que el esquema L_h es consistente de segundo orden. Además, si el esquema es de tipo positivo entonces \mathbf{A} es de Stieltjes diagonalmente dominante y $L_h = \Delta_{\mathbf{A}}$.

Si $\hat{b} \geq 0$, para que el esquema L_h sea de tipo positivo es suficiente considerar $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 \leq \gamma < \frac{1}{8h^2} (2\hat{a} - (n-1)\hat{b}) \quad \text{y} \quad 0 \leq \delta < \frac{1}{4(n-1)h^2} (2\hat{a} - (n-1)\hat{b} - 8h^2\gamma).$$

Si $\hat{b} < 0$ para que L_h sea de tipo positivo es suficiente consideramos $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 \leq \gamma \leq \frac{\hat{a}}{8h^2} \quad \text{y} \quad -\frac{\hat{b}}{2h^2} \leq \delta \leq \frac{1}{4(n-1)h^2} (\hat{a} - 2(n-1)\hat{b} - 8h^2\gamma),$$

pues en este caso $\beta = \frac{\hat{b}}{2h^2} + \delta \geq 0$ y

$$\begin{aligned} 2h^2\alpha &= 2\hat{a} - (n-1)\hat{b} - 8h^2\gamma - 4h^2(n-1)\delta \\ &= \hat{a} - 2(n-1)\hat{b} - 8h^2\gamma - 4h^2(n-1)\delta + a + (n-1)\hat{b} \geq \hat{a} + (n-1)\hat{b} > 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Cuando L es un múltiplo del operador de Laplace en \mathbb{R}^n , es decir $L(u) = \hat{a} \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ con $\hat{a} > 0$ la elección de determinados valores de los parámetros γ, δ corresponde a esquemas en diferencias finitas sobre la retícula n -dimensional de uso frecuente. Más concretamente, si $\gamma = \delta = 0$, L_h es el esquema estándar de $2n+1$ puntos (5 y 7 en los casos bi y tridimensional, respectivamente) y además $L_h = \Delta_{\mathbf{A}}$ sobre \mathring{R}_n , donde $\mathbf{A} = \frac{\hat{a}}{h} \mathbf{M}(n; 1, 0, 0) = \frac{\hat{a}}{h} \text{Id}$; mientras que si $\gamma = 0$ y $\delta = \frac{\hat{a}}{6(n-1)h^2}$, L_h es el esquema estándar de $2n^2+1$ puntos (9 y 19 en los casos bi y tridimensional, respectivamente) y además $L_h = \Delta_{\mathbf{A}}$ sobre \mathring{R}_n , donde $\mathbf{A} = \frac{\hat{a}}{6h(n-1)} \mathbf{M}(n; 6(n-1), -1, 0, -1)$

En resumen, hemos demostrado que en los puntos interiores de la retícula n -dimensional, todo esquema consistente con un operador elíptico con coeficientes constantes de la forma $L(u) = \hat{a} \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + 2\hat{b} \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_{x_i x_j}$, que sea de segundo orden y de tipo positivo, coincide con un Laplaciano relativo a una estructura métrica uniforme y además hemos establecido una condición necesaria y suficiente para L admita un esquema de este tipo. Sin embargo, esto no excluye el que existan esquemas consistentes que no sean de tipo positivo y que sin embargo coincidan, en el interior de la retícula, con el Laplaciano relativo a una estructura uniforme; es decir, esquemas cuyos coeficientes satisfagan las identidades (2.11) y las desigualdades

que aparecen en la Proposición 2.2.18. Por ejemplo, si $\hat{b} < \frac{2\hat{a}}{n-1}$ y tomamos $\delta = -\frac{\hat{b}}{4h^2}$ y $\gamma < \frac{\hat{a}}{4h^2}$, entonces $2\gamma + (n-1)\delta = 2\gamma - \frac{(n-1)\hat{b}}{4h^2} < \frac{1}{4h^2}(2\hat{a} - (n-1)\hat{b})$ y también $2\gamma - \delta = 2\gamma + \frac{\hat{b}}{4h^2} < \frac{1}{4h^2}(2\hat{a} + \hat{b})$, por lo que aplicando la Proposición 2.2.18, el esquema (2.12) coincide en los puntos interiores de la retícula con Δ_A , donde

$$A = \frac{1}{4h} M(n; 4\hat{a} - 8h^2\gamma, -\hat{b}, -8h^2\gamma, \hat{b}).$$

En particular, si $n = 2$ ó 3 y $A = \frac{1}{4h} M(n; 4\hat{a}, -\hat{b}, 0, \hat{b})$, entonces Δ_A es un esquema consistente de segundo orden para el operador elíptico L , (cuando $n = 2$, éste es el esquema considerado en [2]).

Hasta ahora hemos estudiado esquemas para el operador L que son consistentes de segundo orden. Si consideramos esquemas que tengan un orden de consistencia mayor, necesariamente $k \geq 4$ y en este caso, además de las ecuaciones (2.10), deben también satisfacerse las siguientes

$$\begin{aligned} \beta + \delta &= 0; \\ \beta - \delta &= 0; \\ \alpha + 16\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Así pues, la posibilidad de que el esquema (2.12) sea consistente de cuarto orden sólo puede presentarse si $\hat{b} = 0$, pues en otro caso el anterior sistema es incompatible, lo que implica que el operador L es un múltiplo del operador de Laplace en \mathbb{R}^n . Por tanto, si $L(u) = \hat{a} \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$, el esquema en diferencias finitas L_h es consistente de cuarto orden si $\beta = \delta = 0$ y α_0, α y γ verifican las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -2n(\alpha + \gamma); \\ h^2(\alpha + 4\gamma) &= \hat{a}; \\ \alpha + 16\gamma &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

lo que implica que

$$\alpha_0 = -\frac{5n}{2h^2} \hat{a}, \quad \alpha = \frac{4}{3h^2} \hat{a}, \quad \gamma = -\frac{1}{12h^2} \hat{a}.$$

En definitiva, los operadores elípticos de la forma $L(u) = \hat{a} \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + 2\hat{b} \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_{x_i x_j}$, sólo pueden admitir esquemas consistentes de cuarto orden cuando $\hat{b} = 0$ y en este caso poseen un único esquema con tal propiedad. Además, como $\delta = 0$ y $\gamma < 0$, se satisfacen las condiciones de la Proposición 2.2.18, de manera que si consideramos $A = \frac{\hat{a}}{6h} M(n; 7, 0, 1, 0)$, entonces $L_h = \Delta_A$ sobre $\overset{\circ}{R}_n$. Obsérvese que en este caso, la matriz A es ultramétrica y diagonalmente dominante de forma estricta, lo que implica que el campo de matrices asociado a la métrica uniforme es un campo de Stieltjes.

2.3 La cohomología de una variedad discreta

El objetivo de esta sección es obtener algunos resultados acerca de variedades Riemannianas discretas que tradicionalmente pertenecen al campo de la Topología Algebraica. Algunos conceptos de este ámbito, como por ejemplo el de característica de Euler, ya han sido utilizados tanto en el presente capítulo como en el anterior. Un tratamiento de la homología de las variedades discretas, consideradas como *CW complejos unidimensionales* o como espacios triangulables unidimensionales, puede encontrarse por ejemplo en [46].

El uso de la terminología y de las técnicas de la topología algebraica en el análisis de las redes proporcionó un tratamiento riguroso de las redes infinitas y se ha convertido en estándar (ver por ejemplo [24, 30, 56]). Sin embargo, este no es el caso para redes finitas y la única mención de este lenguaje parece ser la definición de *cohomología de un multigrafo* que se encuentra en [10].

Nuestra intención es mostrar que la situación en variedades Riemannianas discretas es totalmente mimética al caso de variedades Riemannianas compactas: El análogo discreto de la *cohomología de De Rham* proporciona las propiedades fundamentales de la cohomología ordinaria en el ámbito de la Topología Algebraica. Por otra parte, este desarrollo confirmará hasta que punto son adecuadas las definiciones que se han establecido en la sección anterior para los operadores en diferencias sobre una variedad discreta.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el espacio vectorial $\Lambda^n(\Gamma)$ definido como $\Lambda^0(\Gamma) = \mathcal{C}(V)$ y como $\Lambda^n(\Gamma) = \Lambda(\Gamma)$ para $n \geq 1$ y también la aplicación lineal $\mathbf{d}_n: \Lambda^n(\Gamma) \rightarrow \Lambda^{n+1}(\Gamma)$ dada por

$$\mathbf{d}_n = \begin{cases} -2\tilde{\pi}^a, & \text{si } n = 2k, \quad k \geq 0; \\ 2\tilde{\pi}^s, & \text{si } n = 2k + 1, \quad k \geq 0. \end{cases}$$

Si además, definimos $\mathbf{d}_{-1}: \{0\} \rightarrow \Lambda^0(\Gamma)$ como la aplicación nula, es inmediato comprobar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface que $\mathbf{d}_n \circ \mathbf{d}_{n-1} = 0$ o, de forma equivalente, que $\text{Img } \mathbf{d}_{n-1} \subset \ker \mathbf{d}_n$. Además, el operador \mathbf{d}_0 coincide con \mathbf{d} , el operador derivada introducido en la Definición 2.2.1.

Definición 2.3.1 Denominaremos *complejo de De Rham* de la variedad discreta Γ a

$$\{0\} \xrightarrow{\mathbf{d}_{-1}} \Lambda^0(\Gamma) \xrightarrow{\mathbf{d}_0} \Lambda^1(\Gamma) \xrightarrow{\mathbf{d}_1} \dots \xrightarrow{\mathbf{d}_n} \Lambda^{n+1}(\Gamma) \xrightarrow{\mathbf{d}_{n+1}} \dots$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denominaremos *n-ésimo grupo de cohomología de De Rham de Γ* y *n-ésimo número de Betti de Γ* a $H^n(\Gamma) = \ker \mathbf{d}_n / \text{Img } \mathbf{d}_{n-1}$ y $\beta_n = \dim H^n(\Gamma)$, respectivamente.

Proposición 2.3.2 Si Γ es una variedad discreta con m componentes conexas, entonces $\beta_0 = m$, $\beta_1 = |E| - |V| + m$ y $\beta_n = 0$ para cada $n \geq 2$. En particular, se satisface que

$$\chi(\Gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\beta_n = \dim \ker \mathbf{d}_n - \dim \text{Im} \mathbf{d}_{n-1}$, lo que en particular implica que $\beta_0 = \dim \ker \mathbf{d}_0$.

Si $n = 0$ y consideramos u_1, \dots, u_m , las funciones características de las componentes conexas de Γ , es claro que dichas funciones son linealmente independientes y además en virtud de la parte (i) de la Proposición 2.2.2, forman un sistema generador de $\ker \mathbf{d}$. En definitiva, $\beta_0 = m$.

Si $n = 1$, $\ker \mathbf{d}_1 = \ker \tilde{\pi}^s = \Lambda^s(\Gamma)$, lo que implica que $\dim \ker \mathbf{d}_1 = |E|$. Por otra parte,

$$\dim \text{Im} \mathbf{d}_0 = \dim \Lambda^0(\Gamma) - \dim \ker \mathbf{d}_0 = \dim \mathcal{C}(V) - \dim \ker \mathbf{d} = |V| - m,$$

lo que implica que $\beta_1 = |E| - |V| + m$.

Si $n = 2k$ con $k \geq 1$, entonces, $\ker \mathbf{d}_n = \ker \tilde{\pi}^a = \Lambda^s(\Gamma) = \text{Im} \tilde{\pi}^s = \text{Im} \mathbf{d}_{n-1}$ y por tanto $\beta_n = 0$.

Si $n = 2k + 1$ con $k \geq 1$, entonces, $\ker \mathbf{d}_n = \ker \tilde{\pi}^s = \Lambda^a(\Gamma) = \text{Im} \tilde{\pi}^a = \text{Im} \mathbf{d}_{n-1}$ y por tanto $\beta_n = 0$.

Para finalizar, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n = \beta_0 - \beta_1 = m - (|E| - |V| + m) = |V| - |E| = \chi(\Gamma)$. ■

Corolario 2.3.3 *La variedad discreta Γ es un bosque sii $H^1 = \{0\}$.*

Supongamos que ahora consideramos sobre Γ una estructura métrica (\mathbf{B}, μ) y una medida densa ν . Entonces, si denotamos por \mathbf{F} al campo de aplicaciones lineales asociado a \mathbf{B} y teniendo en cuenta la identificación de cada forma Φ con el campo $\mathbf{F}^{-1}(\tilde{\Phi})$ (parte (vii) de la Proposición 1.3.10), resulta que cada endomorfismo $\mathbf{H}: \Lambda(\Gamma) \rightarrow \Lambda(\Gamma)$ puede interpretarse como el endomorfismo $\hat{\mathbf{H}}: \mathcal{X}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{X}(\Gamma)$ dado por $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{F}$ y de manera análoga todo endomorfismo $\mathbf{J}: \mathcal{C}(V) \rightarrow \Lambda(\Gamma)$ puede interpretarse como el endomorfismo $\hat{\mathbf{J}}: \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathcal{X}(\Gamma)$ dado por $\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{J}$.

Teniendo en cuenta las identificaciones anteriores, podemos reinterpretar el complejo de De Rham en términos del complejo

$$\{0\} \xrightarrow{0} \mathcal{C}(V) \xrightarrow{\hat{\mathbf{d}}_0} \mathcal{X}(\Gamma) \xrightarrow{\hat{\mathbf{d}}_1} \dots \xrightarrow{\hat{\mathbf{d}}_n} \mathcal{X}(\Gamma) \xrightarrow{\hat{\mathbf{d}}_{n+1}} \dots$$

donde es claro que se satisface que $\hat{\mathbf{d}}_n \circ \hat{\mathbf{d}}_{n-1} = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

De la propia definición se deduce que $\hat{\mathbf{d}}_0$ coincide con ∇ , el operador gradiente respecto de la métrica \mathbf{B} y además, si definimos $\hat{\mathbf{d}}_{-1} = 0$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tienen las identificaciones $\text{Im} \hat{\mathbf{d}}_{n-1} \simeq \text{Im} \mathbf{d}_{n-1}$ y $\ker \hat{\mathbf{d}}_n \simeq \ker \mathbf{d}_n$ y por tanto la identificación $H^n(\Gamma) \simeq \ker \hat{\mathbf{d}}_n / \text{Im} \hat{\mathbf{d}}_{n-1}$.

Por otra parte, como podemos interpretar $\hat{\mathbf{d}}_0$ como un operador de $L(\nu)$ en $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$ y para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $\hat{\mathbf{d}}_n$ como un endomorfismo sobre $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$, tiene sentido considerar para

cada $n \in \mathbb{N}$, δ_n , el operador adjunto de $\widehat{\mathbf{d}}_n$. Así pues, si definimos $\delta_{-1} = 0$, se tiene el siguiente complejo

$$\{0\} \xleftarrow{\delta_{-1}} \mathbf{L}(\nu) \xleftarrow{\delta_0} \mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu) \xleftarrow{\delta_1} \dots \xleftarrow{\delta_n} \mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu) \xleftarrow{\delta_{n+1}} \dots$$

que satisface que $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la Proposición 2.1.11, resultan las identidades

$$\delta_0 = -\text{div}_{\nu\mu}, \quad \delta_{2k-1} = 2 \mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \pi^s \circ \mathbf{T}_\mu \quad \text{y} \quad \delta_{2k} = -2 \mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \pi^a \circ \mathbf{T}_\mu, \quad k \geq 1$$

y por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ también se satisface que

$$\mathbf{T}_\mu \circ \delta_n \circ \mathbf{F} = \mathbf{F} \circ \widehat{\mathbf{d}}_n \circ \mathbf{T}_\mu.$$

Observar que para cada $n \geq 1$, el operador δ_n depende sólo de la estructura métrica y no de la medida densa ν .

En el resto de la sección supondremos fijadas sobre Γ una estructura Riemannianna (\mathbf{B}, μ) y una medida densa ν y denotaremos por \mathbf{F} al campo de aplicaciones lineales determinado por \mathbf{B} .

La analogía con el caso continuo permite introducir el siguiente concepto relativo al caso $n = 1$.

Definición 2.3.4 Denominaremos *operador rotacional, respecto de (\mathbf{B}, μ)* al endomorfismo $\text{rot}_{\mathbf{B},\mu}: \mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$ determinado por la identidad $\text{rot}_{\mathbf{B},\mu} = \delta_1 \circ \mathbf{F} \circ \mathbf{T}_\mu^{-1}$.

Si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, el campo $\text{rot}_{\mathbf{B},\mu} \mathbf{f}$ será denominado *rotacional de \mathbf{f}* y un campo $\mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ se denominará *campo irrotacional* si $\text{rot}_{\mathbf{B},\mu} \mathbf{g} = 0$.

En lo sucesivo, puesto que la estructura métrica está fijada, eliminaremos en la escritura del rotacional los subíndices \mathbf{B} y μ y la expresión respecto de (\mathbf{B}, μ) .

Proposición 2.3.5 *El rotacional es un operador autoadjunto que satisface las siguientes identidades:*

$$\text{rot} = 2 \mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \pi^s \circ \mathbf{F} = \mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \mathbf{F} \circ \widehat{\mathbf{d}}_1, \quad \text{div} \circ \text{rot} = 0 \quad \text{y} \quad \text{rot} \circ \nabla = 0.$$

Además, $\ker \text{rot} = \ker \widehat{\mathbf{d}}_1 = \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{X}^a(\Gamma))$.

Demostración. Como $\delta_1 = 2 \mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \pi^s \circ \mathbf{T}_\mu$, entonces $\text{rot} = 2 \mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \pi^s \circ \mathbf{F}$ y de esta identidad y de la Proposición 2.1.11, se deduce que

$$\text{rot}^* = 2 \mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F} \circ \pi^s \circ \mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \mathbf{F} \circ \mathbf{T}_\mu = 2 \mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \pi^s \circ \mathbf{F} = \text{rot}.$$

Por otra parte, $\text{div} \circ \text{rot} = -\delta_0 \circ \delta_1 \circ F \circ T_\mu^{-1} = 0$, mientras que

$$\text{rot} \circ \nabla = \left(2T_\mu^{-1} \circ \pi^s \circ F\right) \circ F^{-1} \circ \tilde{\mathbf{d}}_0 = -4T_\mu^{-1} \circ \pi^s \circ \pi^a = 0.$$

Por otra parte, como $T_\mu^{-1} \circ F$ es un automorfismo, resulta que $\ker \text{rot} = \ker \hat{\mathbf{d}}_1$ y como $\hat{\mathbf{d}}_1(f) = 2F^{-1}((F(f))^s)$, resulta que $f \in \ker \hat{\mathbf{d}}_1$ sii $F(f) \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$. ■

Corolario 2.3.6 *Una variedad Riemanniana discreta Γ es un bosque sii todo campo irrotacional es gradiente o de forma equivalente todo campo solenoidal es el rotacional de otro campo.*

Demostración. Aplicando el Corolario 2.3.3, Γ es un bosque sii $H^1(\Gamma) = \{0\}$ y esta condición es equivalente a la identidad $\text{Img} \hat{\mathbf{d}}_0 = \ker \hat{\mathbf{d}}_1$. Como $\ker \hat{\mathbf{d}}_1 = \ker \text{rot}$, resulta que un campo f es irrotacional sii $f \in \text{Img} \hat{\mathbf{d}}_0 = \text{Img} \nabla$, es decir sii f es gradiente. Por otra parte teniendo en cuenta que δ_0 y δ_1 son adjuntos de $\hat{\mathbf{d}}_0$ y $\hat{\mathbf{d}}_1$ respectivamente, aplicando la Alternativa de Fredholm, la identidad $\text{Img} \hat{\mathbf{d}}_0 = \ker \hat{\mathbf{d}}_1$ es a su vez equivalente a la identidad $\text{Img} \delta_1 = \ker \delta_0$. Como $\delta_0 = -\text{div}$, resulta que si $\text{div}(f) = 0$, existe $g \in \mathcal{X}(\Gamma)$ tal que tal que $\delta_1(g) = f$. Tomando ahora $h = \mu \cdot F^{-1}(g)$, resulta que $\text{rot}(h) = \delta_1(g) = f$. ■

Obsérvese que el resultado anterior estaba ya contenido en la parte (iv) de la Proposición 2.2.11, pues $\text{rot}(f) = 0$ sii $F(f) \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$, o de forma equivalente, sii $Mf \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$ donde M es el campo de matrices determinado por F .

Definición 2.3.7 Para cada $n \in \mathbb{N}$, denominaremos *Laplaciano de Hodge* al operador Δ_n determinado por la identidad

$$\Delta_n = \delta_n \circ \hat{\mathbf{d}}_n + \hat{\mathbf{d}}_{n-1} \circ \delta_{n-1}.$$

Obsérvese que Δ_0 es un endomorfismo sobre $L(\nu)$, mientras que para cada $n \in \mathbb{N}^*$, Δ_n es un endomorfismo sobre $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$.

Proposición 2.3.8 *Se satisface que $\Delta_0 = -\Delta$ y $\Delta_1 = \text{rot} \circ T_\mu^2 \circ F^{-2} \circ \text{rot} - \nabla \circ \text{div}$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, Δ_n es un operador autoadjunto semidefinido positivo y si $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$, entonces $\Delta_n(f) = 0$ sii $\delta_{n-1}(f) = \hat{\mathbf{d}}_n(f) = 0$. En particular, $\Delta_1(f) = 0$ sii $\text{div}(f) = 0$ y $\text{rot}(f) = 0$.*

Demostración. Si $n = 0$, como $\delta_{-1} = 0$ y $\hat{\mathbf{d}}_{-1} = 0$, resulta que

$$\Delta_0 = \delta_0 \circ \hat{\mathbf{d}}_0 = -\text{div} \circ \nabla = -\Delta.$$

Si $n = 1$, la expresión para Δ_1 se deduce de las identidades

$$\delta_0 = -\operatorname{div}, \quad \widehat{\mathbf{d}}_0 = \nabla, \quad \delta_1 = \operatorname{rot} \circ F^{-1} \circ T_\mu \quad \text{y} \quad \widehat{\mathbf{d}}_1 = T_\mu \circ F^{-1} \circ \operatorname{rot}.$$

Si $n \geq 1$, el que Δ_n es autoadjunto es consecuencia de ser δ_n y $\widehat{\mathbf{d}}_n$ adjunto uno de otro. Por otra parte, si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{B}(\Delta_n(\mathbf{f}), \mathbf{f}) d\mu &= \int_V \mathbf{B}(\delta_n \circ \widehat{\mathbf{d}}_n(\mathbf{f}), \mathbf{f}) d\mu + \int_V \mathbf{B}(\widehat{\mathbf{d}}_{n-1} \circ \delta_{n-1}(\mathbf{f}), \mathbf{f}) d\mu \\ &= \int_V \mathbf{B}(\widehat{\mathbf{d}}_n(\mathbf{f}), \widehat{\mathbf{d}}_n(\mathbf{f})) d\mu + \int_V \mathbf{B}(\delta_{n-1}(\mathbf{f}), \delta_{n-1}(\mathbf{f})) d\mu, \end{aligned}$$

lo que implica simultáneamente que Δ_n es semidefinido positivo y que además que $\Delta_n(\mathbf{f}) = 0$ sii $\int_V \mathbf{B}(\widehat{\mathbf{d}}_n(\mathbf{f}), \widehat{\mathbf{d}}_n(\mathbf{f})) d\mu = \int_V \mathbf{B}(\delta_{n-1}(\mathbf{f}), \delta_{n-1}(\mathbf{f})) d\mu = 0$, es decir sii se satisface que $\widehat{\mathbf{d}}_n(\mathbf{f}) = 0$ y $\delta_{n-1}(\mathbf{f}) = 0$. Por último, la particularización a $n = 1$ se obtiene observando que $\delta_0 = -\operatorname{div}$ y que $\widehat{\mathbf{d}}_1(\mathbf{f}) = 0$ sii $\operatorname{rot}(\mathbf{f}) = 0$. ■

La proposición anterior sigue siendo válida en el caso $n = 0$, concretamente la Proposición 2.2.13, muestra que $\Delta_0 = -\Delta$ es un operador autoadjunto y que si $u \in \mathcal{C}(V)$, entonces $\Delta_0(u) = 0$ sii $0 = \nabla(u) = \widehat{\mathbf{d}}_0(u)$.

Proposición 2.3.9 (Teorema de descomposición de Hodge). *Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene la descomposición ortogonal*

$$\mathcal{X}(\Gamma) = \ker \Delta_n \oplus \operatorname{Im} \widehat{\mathbf{d}}_{n-1} \oplus \operatorname{Im} \delta_n.$$

Demostración. Supongamos en principio que $n \geq 2$. Probaremos primero que la descomposición es ortogonal. Consideremos pues $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ y supongamos que $\mathbf{f} = \widehat{\mathbf{d}}_{n-1}(\mathbf{f}')$, $\mathbf{g} = \delta_n(\mathbf{g}')$ con $\mathbf{f}', \mathbf{g}' \in \mathcal{X}(\Gamma)$. Si $\mathbf{h} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ es tal que $\Delta_n(\mathbf{h}) = 0$, entonces $\widehat{\mathbf{d}}_n(\mathbf{h}) = 0$ y $\delta_{n-1}(\mathbf{h}) = 0$, lo que implica que

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{h}, \mathbf{f}) d\mu &= \int_V \mathbf{B}(\mathbf{h}, \widehat{\mathbf{d}}_{n-1}(\mathbf{f}')) d\mu = \int_V \mathbf{B}(\delta_{n-1}(\mathbf{h}), \mathbf{f}') d\mu = 0, \\ \int_V \mathbf{B}(\mathbf{h}, \mathbf{g}) d\mu &= \int_V \mathbf{B}(\mathbf{h}, \delta_n(\mathbf{g}')) d\mu = \int_V \mathbf{B}(\widehat{\mathbf{d}}_n(\mathbf{h}), \mathbf{g}') d\mu = 0. \end{aligned}$$

Como además $\int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mu = \int_V \mathbf{B}(\widehat{\mathbf{d}}_{n-1}(\mathbf{f}'), \delta_n(\mathbf{g}')) d\mu = \int_V \mathbf{B}(\widehat{\mathbf{d}}_n(\widehat{\mathbf{d}}_{n-1}(\mathbf{f}')), \mathbf{g}') d\mu = 0$, resulta que los subespacios $\ker \Delta_n$, $\operatorname{Im} \widehat{\mathbf{d}}_{n-1}$ y $\operatorname{Im} \delta_n$ son ortogonales entre sí. En particular, $\operatorname{Im} \widehat{\mathbf{d}}_{n-1} \oplus \operatorname{Im} \delta_n \subset (\ker \Delta_n)^\perp$. Por otra parte, de la definición del operador Δ_n se obtiene que $\operatorname{Im} \Delta_n \subset \operatorname{Im} \widehat{\mathbf{d}}_{n-1} \oplus \operatorname{Im} \delta_n$ y como Δ_n es autoadjunto, resulta que

$$\operatorname{Im} \widehat{\mathbf{d}}_{n-1} \oplus \operatorname{Im} \delta_n \subset (\ker \Delta_n)^\perp = \operatorname{Im} \Delta_n \subset \operatorname{Im} \widehat{\mathbf{d}}_{n-1} \oplus \operatorname{Im} \delta_n,$$

lo que implica que $\text{Img } \Delta_n = \text{Img } \widehat{\mathbf{d}}_{n-1} \oplus \text{Img } \delta_n$ y en definitiva que

$$\mathcal{X}(\Gamma) = \ker \Delta_n \oplus (\ker \Delta_n)^\perp = \ker \Delta_n \oplus \text{Img } \widehat{\mathbf{d}}_{n-1} \oplus \text{Img } \delta_n.$$

La demostración para el caso $n = 1$ es análoga a la anterior, sustituyendo el campo $\mathbf{f}' \in \mathcal{X}(\Gamma)$ por la función $u \in \mathcal{C}(V)$ e $\int_V \mathbf{B}(\delta_{n-1}(\mathbf{h}), \mathbf{f}') d\mu$ por $\int_V \delta_0(\mathbf{h}) u d\nu = - \int_V \text{div}(\mathbf{h}) u d\nu$. ■

Nuevamente el resultado de la proposición anterior sigue siendo válido para el caso $n = 0$, sustituyendo $\mathcal{X}(\Gamma)$ por $\mathcal{C}(V)$. Concretamente, aplicando la Alternativa de Fredholm, tenemos que

$$\mathcal{C}(V) = \ker \nabla \oplus (\ker \nabla)^\perp = \ker \Delta \oplus \text{Img } \text{div} = \ker \Delta_0 \oplus \text{Img } \delta_0 = \ker \Delta_0 \oplus \text{Img } \widehat{\mathbf{d}}_{-1} \oplus \text{Img } \delta_0.$$

Por otra parte, el Teorema de descomposición de Hodge en el caso $n = 1$ representa, no sólo una solución efectiva sino el contexto adecuado a la cuestión principal esbozada en [36], relativa a la descomposición de un grafo o una red (puramente resistiva) en una parte irrotacional, otra solenoidal y otra simultáneamente irrotacional y solenoidal. De hecho, tenemos el siguiente resultado, que es mucho más concreto que el planteado en el trabajo mencionado.

Corolario 2.3.10 *Para cada $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ existen una función, $u \in \mathcal{C}(V)$ y campos $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, tales que $\mathbf{f} = \nabla u + \text{rot}(\mathbf{g}) + \mathbf{h}$ y donde $\text{div}(\mathbf{h}) = 0$ y $\text{rot}(\mathbf{h}) = 0$. Además, los campos \mathbf{h} , ∇u y $\text{rot}(\mathbf{g})$ están unívocamente determinados.*

Demostración. Aplicando la descomposición de Hodge a \mathbf{f} , existen unos únicos campos $\mathbf{h}, \mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1$ tales que $\mathbf{f} = \mathbf{h} + \mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1$ y que además satisfacen que $\Delta_1(\mathbf{h}) = 0$, $\mathbf{f}_1 = \nabla u$ y $\mathbf{g}_1 = \delta_1(\mathbf{g}')$ para ciertos $u \in \mathcal{C}(V)$ y $\mathbf{g}' \in \mathcal{X}(\Gamma)$. Como $\Delta_1(\mathbf{h}) = 0$ es equivalente a que $\text{div}(\mathbf{h}) = 0$ y $\text{rot}(\mathbf{h}) = 0$ y además $\delta_1 = \text{rot} \circ \mathbf{T}_\mu^{-1} \circ \mathbf{F}^{-1}$, para concluir basta tomar $\mathbf{g} = \frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{g}')$. ■

Proposición 2.3.11 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\ker \widehat{\mathbf{d}}_n = \ker \Delta_n \oplus \text{Img } \widehat{\mathbf{d}}_{n-1}$ y por tanto que $H^n(\Gamma) \simeq \ker \Delta_n$. En particular,*

$$H^1(\Gamma) \simeq \{ \mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma) : \text{div}(\mathbf{f}) = 0 \text{ y } \text{rot}(\mathbf{f}) = 0 \}$$

y para cada $n \geq 2$, Δ_n es un automorfismo sobre $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$. Además, Δ_1 es un automorfismo sii Γ es un bosque.

Demostración. Si suponemos demostrado que dado $n \in \mathbb{N}$, $\ker \widehat{\mathbf{d}}_n = \ker \Delta_n \oplus \text{Img } \widehat{\mathbf{d}}_{n-1}$, entonces $H^n(\Gamma) \simeq \ker \widehat{\mathbf{d}}_n / \text{Img } \widehat{\mathbf{d}}_{n-1} \simeq \ker \Delta_n$. Como para cada $n \geq 2$, $H^n = \{0\}$ esta identidad implica que Δ_n es inyectivo y por tanto un automorfismo, mientras que la conclusión

para $n = 1$ se deduce de que $\Delta_1(\mathbf{f}) = 0$ sii $\operatorname{div}(\mathbf{f}) = 0$ y $\operatorname{rot}(\mathbf{f}) = 0$. Por otra parte, Δ_1 es un automorfismo sii $H^1(\Gamma) = \{0\}$, es decir sii Γ es un bosque, en virtud del Corolario 2.3.3.

Si $n = 0$, la igualdad $\ker \widehat{\mathbf{d}}_0 = \ker \Delta_0 \oplus \operatorname{Im} \widehat{\mathbf{d}}_{-1}$ es consecuencia de ser $\ker \nabla = \ker \Delta$, mientras que si $n \geq 1$ la identidad $\ker \widehat{\mathbf{d}}_n = \ker \Delta_n \oplus \operatorname{Im} \widehat{\mathbf{d}}_{n-1}$ se deduce de las igualdades

$$\ker \widehat{\mathbf{d}}_n \oplus \operatorname{Im} \delta_n = \ker \widehat{\mathbf{d}}_n \oplus (\ker \widehat{\mathbf{d}}_n)^\perp = \mathcal{X}(\Gamma) = \ker \Delta_n \oplus \operatorname{Im} \widehat{\mathbf{d}}_{n-1} \oplus \operatorname{Im} \delta_n$$

y de ser los subespacios de la derecha de la última igualdad ortogonales entre sí. ■

El que Δ_n sea un automorfismo para $n \geq 2$, permite contemplar el Teorema de descomposición de Hodge como una generalización de la descomposición de un campo en parte simétrica y parte antisimétrica.

Corolario 2.3.12 *Para cada $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ existen únicos campos $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$ y $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$ tales que*

$$\mathbf{f} = \mu \cdot \mathbf{f}_1 + \mathbf{F}(\mathbf{g}_1) = \mathbf{F}(\mathbf{f}_2) + \mu \cdot \mathbf{g}_2.$$

Además, $\mathbf{f} = 0$ sii $(\mu \cdot \mathbf{f})^s = \mathbf{F}(\mathbf{f})^a = 0$ o, de forma equivalente, sii $(\mu \cdot \mathbf{f})^a = \mathbf{F}(\mathbf{f})^s = 0$.

Demostración. Sea $k \geq 1$ y consideremos $n = 2k$ y $m = 2k + 1$. Entonces, se satisfacen las identidades $\ker \Delta_n = \ker \Delta_m = \{0\}$, $\operatorname{Im} \widehat{\mathbf{d}}_{n-1} = \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{X}^s(\Gamma))$, $\operatorname{Im} \widehat{\mathbf{d}}_{m-1} = \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{X}^a(\Gamma))$, $\operatorname{Im} \delta_n = \frac{1}{\mu} \mathcal{X}^a(\Gamma)$ y $\operatorname{Im} \delta_m = \frac{1}{\mu} \mathcal{X}^s(\Gamma)$. Si consideramos el campo $\frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{f})$, la aplicación del Teorema de descomposición de Hodge establece la existencia de únicos campos $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$ y $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$ tales que

$$\frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{f}_1) + \frac{1}{\mu} \mathbf{g}_1 = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{g}_2) + \frac{1}{\mu} \mathbf{f}_2.$$

Por otra parte, como $\mathbf{f} = 0$ sii $\Delta_n(\mathbf{f}) = 0$, o equivalentemente sii $\Delta_m(\mathbf{f}) = 0$, del resultado de la Proposición 2.3.8 obtenemos que $\mathbf{f} = 0$ sii $\widehat{\mathbf{d}}_{n-1}(\mathbf{f}) = \delta_n(\mathbf{f}) = 0$ o equivalentemente, sii $\widehat{\mathbf{d}}_{m-1}(\mathbf{f}) = \delta_m(\mathbf{f}) = 0$. Como

$$\widehat{\mathbf{d}}_{n-1}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}(\mathbf{f})^s), \quad \delta_n(\mathbf{f}) = \frac{1}{\mu} \cdot (\mu \cdot \mathbf{f})^a, \quad \widehat{\mathbf{d}}_{m-1}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}(\mathbf{f})^a) \quad \text{y} \quad \delta_m(\mathbf{f}) = \frac{1}{\mu} \cdot (\mu \cdot \mathbf{f})^s,$$

obtenemos que $\mathbf{f} = 0$ sii $\mathbf{F}(\mathbf{f})^s = (\mu \cdot \mathbf{f})^a$ o, de forma equivalente, sii $\mathbf{F}(\mathbf{f})^a = (\mu \cdot \mathbf{f})^s = 0$. ■

El resultado del corolario anterior podría haberse expresado de forma equivalente mediante las identidades

$$\mathcal{X}(\Gamma) = \mu \mathcal{X}^s(\Gamma) \oplus \mathbf{F}(\mathcal{X}^a(\Gamma)) = \mathbf{F}(\mathcal{X}^s(\Gamma)) \oplus \mu \mathcal{X}^a(\Gamma),$$

donde las descomposiciones no son, en general, ortogonales. Obsérvese que sin embargo, las anteriores descomposiciones son ortogonales respecto al producto interno inducido por la estructura Riemanniana $(\mathbf{B}^{-1}, \mu^{-1})$.

Finalizaremos esta sección particularizando los resultados anteriores al caso en el que \mathbf{B} es una métrica ortogonal y compatible y $\mu = \lambda$, es decir a redes puramente resistivas. Esta situación incluye el caso en el que la estructura métrica es la canónica y puede considerarse como una extensión de los resultados relativos a la descomposición ortogonal de un multigrafo y a su cohomología que aparecen en [10]. En dicho trabajo se presenta el siguiente complejo

$$\{0\} \xrightarrow{0} C(V) \xrightarrow{\widehat{\mathbf{d}}} \mathcal{C}(E) \xrightarrow{0} \{0\},$$

donde $\widehat{\mathbf{d}}$ representa el operador derivada relativo a una orientación sobre Γ . En nuestro lenguaje, el anterior complejo resultaría de sustituir el complejo de De Rham por

$$\{0\} \xrightarrow{\mathbf{d}_{-1}} C(V) \xrightarrow{\mathbf{d}_0} \Lambda^a(\Gamma) \xrightarrow{\mathbf{d}_1} \{0\},$$

teniendo en cuenta que como $\Lambda^a(\Gamma) = \ker \mathbf{d}_1$, la restricción de \mathbf{d}_1 a $\Lambda^a(\Gamma)$ es la aplicación nula y que además este espacio puede identificarse con $\mathcal{C}(E)$.

La propiedad fundamental que aparece cuando \mathbf{B} es una métrica ortogonal y compatible, es que en este caso π^s y π^a conmutan con \mathbf{F} (parte (iii) de la Proposición 1.3.15) y por tanto para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se satisface que $\widehat{\mathbf{d}}_n = \widetilde{\mathbf{d}}_n$. Además, como $\mu = \lambda$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $\widetilde{\mathbf{d}}_n$ es autoadjunto y por tanto $\delta_n = \widetilde{\mathbf{d}}_n$. En particular, esto implica que $\text{rot} = 2\pi^s \circ \mathbf{F} = 2\mathbf{F} \circ \pi^s$, $\ker \text{rot} = \mathcal{X}^a(\Gamma)$, $\text{rot}^2 = 2\mathbf{F} \circ \text{rot}$ y además que

$$\Delta_1 = \delta_1 \circ \widehat{\mathbf{d}}_1 + \widehat{\mathbf{d}}_0 \circ \delta_0 = \mathbf{F}^{-2} \circ \text{rot}^2 - \nabla \circ \text{div}.$$

Por otra parte, para cada $n \geq 2$,

$$\Delta_n = \delta_n^2 + \delta_{n-1}^2 = 2(\delta_n + \delta_{n-1}) = 4(\pi^s + \pi^a) = 4\text{Id}$$

y el Teorema de descomposición de Hodge se reduce en este caso a la descomposición de un campo en parte simétrica y antisimétrica.

En particular, si \mathbf{B} es la métrica canónica, entonces para cada $k \geq 0$, $\widetilde{\mathbf{d}}_{2k} = \delta_{2k} = -2\pi^a$, $\widetilde{\mathbf{d}}_{2k+1} = \delta_{2k+1} = 2\pi^s$ y además $\text{rot} = 2\pi^s$. Además, se obtiene la siguiente identidad análoga a la correspondiente al caso continuo

$$\text{rot}^2 = \Delta_1 + \nabla \circ \text{div},$$

que tiene la particularidad de que en el caso discreto $\text{rot}^2 = 2\text{rot}$.

Capítulo 3

Integración sobre variedades Riemannianas discretas

Una vez definidas las variedades Riemannianas discretas y desarrollado un cálculo en diferencias sobre ellas, para cubrir los objetivos generales de esta memoria, será necesario abordar un cálculo integral sobre dichos objetos. Como el fin último es el planteamiento y resolución de problemas de contorno discretos, pondremos especial énfasis en la construcción de los análogos discretos de las Identidades de Green. De todas formas, una reproducción fidedigna de las herramientas de la Geometría Diferencial en el contexto de las variedades discretas, requiere detenerse en la cuestión de la integración sobre curvas y recuperar así el concepto de circulación de un campo sobre una curva, lo que conduce además a una interpretación discreta del Teorema de Stokes-Ampère o del Rotacional.

El primer paso corresponde a la noción de curva en una variedad discreta. Una curva consta de dos componentes: un camino, es decir una sucesión finita de vértices adyacentes, y un campo, el campo tangente a la curva, soportado por el camino y con divergencia nula excepto, quizá, en los extremos del mismo. Cuando la curva es cerrada, su campo tangente es, en el contexto de redes eléctricas, un ciclo. La verificación de la Ley de ciclos de Kirchhoff en tales redes, nos ha inspirado la noción de circulación de un campo sobre una curva. Una vez establecido este concepto, se deduce de forma inmediata el Teorema del Rotacional y también la caracterización de los campos conservativos. En particular, se demuestra que la única posibilidad de verificación de un análogo del Teorema de Poincaré sólo es posible si la variedad discreta es un bosque, lo que concuerda con el hecho de que éstas son las únicas variedades discretas cuya homología es trivial. Debe observarse además, que desde el punto de vista geométrico, los bosques son los únicos dominios con forma de estrella. Estos resultados contrastan con los obtenidos, por ejemplo en [38, 55], donde todo campo conservativo es gradiente, debido a que la red se considera como el esqueleto unidimensional de un complejo simplicial de dimensión superior.

La búsqueda de un Teorema de la Divergencia, hace aparecer de forma natural el concepto de campo normal a un subconjunto de vértices de una variedad discreta. La particulariza-

ción del Teorema de la Divergencia al caso del operador de Laplace, conduce al concepto de campo conormal al conjunto, relativo a la estructura Riemanniana. La consideración de estos campos será básica para la obtención de las Identidades de Green. La falta de referentes generales en este contexto nos ha conducido a modular la presentación de tales identidades desarrollándolas primero para métricas ortogonales, conteniendo así los resultados establecidos hasta la fecha y discriminando los diferentes tipos de identidades en términos de las distintas elecciones de la frontera del dominio de integración. La demostración del caso general requiere la positividad del coeficiente de la estructura métrica y se basa en la construcción de una nueva variedad Riemanniana discreta para la cual su correspondiente operador de Laplace contiene al operador de Laplace y al operador derivada conormal de la variedad discreta original. Esta construcción tiene similitudes con la técnica de resolución de las ecuaciones en diferencias asociadas a problemas de contorno, donde las condiciones que involucran derivadas se incorporan al sistema en diferencias.

3.1 Integración sobre curvas

En esta sección desarrollaremos los resultados básicos de integración sobre curvas en variedades Riemannianas discretas. Nuestro objetivo es definir y obtener propiedades de conceptos tales como curvas, longitud de curvas, geodésicas e integración de campos vectoriales a lo largo de curvas.

El resultado más relevante de la sección consiste en obtener el análogo discreto de la caracterización, en el modelo continuo, de los campos conservativos como campos gradientes. Para ello, será preciso establecer las versiones discretas de los conceptos de curva diferenciable y de circulación de un campo a lo largo de una curva. La diferencia fundamental entre ambos modelos estriba en que mientras que en el caso continuo todo campo conservativo es irrotacional, esto no ocurre en el discreto, de manera que quedarán caracterizados como campos gradientes aquellos campos irrotacionales que sean conservativos. Esta caracterización se simplifica en el caso de métricas ortogonales y compatibles, que es el único considerado en la literatura, donde además sólo intervienen campos antisimétricos. En este contexto, los campos conservativos coinciden con los campos gradientes, pues hemos de tener en cuenta que si una métrica es ortogonal y compatible todo campo antisimétrico es irrotacional. Por otra parte, en el ámbito de las redes eléctricas puramente resistivas, la noción de circulación permitiría una descripción sencilla de las leyes de Kirchoff, al estilo de la formulación presentada en [42].

A lo largo de la sección consideraremos fijados $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$, una variedad Riemanniana discreta, ν una medida densa y los espacios con producto interno inducidos, $\mathbf{L}(\nu)$ y $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \mu)$. Asimismo, consideraremos \mathbf{F} el campo de aplicaciones lineales determinado por la métrica \mathbf{B} , \mathbf{M} y \mathbf{A} los campos de matrices asociados a \mathbf{F} y a \mathbf{F}^{-1} respectivamente y $a \in \mathcal{C}(\Gamma \times \Gamma)$ la función componente de \mathbf{A} . Supondremos también que Γ tiene m componentes conexas, que denotaremos por V_1, \dots, V_m , respectivamente.

A menos que se especifique otra cosa, todos los operadores en diferencias que consideraremos en esta sección serán los inducidos por ν y la estructura Riemanniana (\mathbf{B}, μ) , por lo que como es habitual, evitaremos en su expresión los subíndices relativos a estos datos.

Consideraremos también fijada la aplicación $\mathcal{E}: V \times V \longrightarrow \mathcal{C}(V)$ determinada por la asignación

$$\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{\nu} \begin{cases} \varepsilon_x - \varepsilon_y, & \text{si } x, y \in V_j \text{ para algún } j = 1, \dots, m; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que para cada $x, y, z \in V$ se satisface que

$$\mathcal{E}(x, x) = 0, \quad \mathcal{E}(y, x) = -\mathcal{E}(x, y), \quad \mathcal{E}(x, y) + \mathcal{E}(y, z) = \mathcal{E}(x, z)$$

y además si $x, y \in V_j$, para cada $f \in \mathcal{C}(V)$,

$$\int_{V_j} \mathcal{E}(x, y)(z) f(z) d\nu(z) = f(x) - f(y). \quad (3.1)$$

Definición 3.1.1 Si $n \in \mathbb{N}^*$, denominaremos *curva en Γ parametrizada en $I(n)$* o simplemente *curva* a toda aplicación $\gamma: I(n) \longrightarrow V \times T(\Gamma)$ tal que sus funciones componentes c y \dot{c} , satisfacen las siguientes propiedades:

- i) c es un camino.
- ii) $\dot{c}(n) = \mathbf{0} \in T_{c(n)}(\Gamma)$ y para cada $j = 0, \dots, n-1$, $\dot{c}(j) \in T_{c(j)}(\Gamma) \cap T_{c(j+1)}(\Gamma)$.
- iii) Existe $r(\gamma) \geq 0$ tal que para todo $j \in I(n-1)$, $\mu(c(j)) \langle \dot{c}(j), \mathbf{t}(c(j)) \rangle = 2r(\gamma)$.

El camino c , el vector $\dot{c}(j)$ y el campo $\dot{\gamma} = \sum_{j=0}^n \dot{c}(j)$, donde cada vector se identifica con un campo según la asignación (1.4), serán denominados *soporte de γ* , *vector tangente a γ en j* y *campo tangente de γ* , respectivamente.

Denominaremos *inicio y final de γ* a los vértices $c(0)$ y $c(n)$ respectivamente y *vértices interiores de γ* a los vértices interiores de su camino soporte. Diremos que γ es una *curva cerrada* si su inicio y su final coinciden y *simple* si su soporte es un camino internamente disjunto.

Si $x, y \in V$, denotaremos por \mathcal{C}_{xy} al conjunto de curvas con inicio en x y final en y y para cada $r \geq 0$ por \mathcal{C}_{xy}^r al conjunto de curvas con inicio en x y final en y tales que $r(\gamma) = r$.

Obsérvese que si $\gamma \in \mathcal{C}_{xy}$ y c es su camino soporte, entonces $\text{sop}(\dot{\gamma}) \subset \text{trc} \subset V_j$ para algún $j = 0, \dots, m$. Además, si h denota la función característica de $\text{sop}(\dot{\gamma})$, entonces la propiedad (iii) es equivalente a la identidad $\mu \langle \dot{\gamma}, \mathbf{t} \rangle = 2r(\gamma) h$.

Con objeto de clarificar el significado de la condición (iii) en la definición de curva, supongamos ahora que una función $\gamma: I(n) \rightarrow V \times T(\Gamma)$ de componentes c y \dot{c} , satisface las condiciones (i) y (ii) de tal definición. Entonces, fijado $j \in I(n-1)$ resulta que el vector tangente a γ en j está dado por $\dot{c}(j) = \sum_{e \in E_{c(j)c(j+1)}} \alpha(e) e$, lo que implica que la función componente del campo $\dot{c}(j)$ está dada por

$$f_j(x, e) = \begin{cases} \alpha(e) & \text{si } x = c(j) \text{ y } e \in E_{c(j)c(j+1)}; \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

de donde se obtiene que

$$2(\mu f_j)^a(x, e) = \mu(c(j)) \begin{cases} \alpha(e), & \text{si } x = c(j) \text{ y } e \in E_{c(j)c(j+1)}; \\ -\alpha(e), & \text{si } x = c(j+1) \text{ y } e \in E_{c(j)c(j+1)}; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si para cada $j \in I(n-1)$ consideramos el escalar $r(j) = \frac{\mu(c(j))}{2} \sum_{e \in E_{c(j)c(j+1)}} \alpha(e)$, la identidad anterior asegura que para cada $x \in V$ se satisface que

$$\operatorname{div}(\dot{c}(j))(x) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{e \in E_x} (\mu \cdot \dot{c}(j))^a(x, e) = \frac{r(j)}{\nu(x)} (\varepsilon_{c(j)}(x) - \varepsilon_{c(j+1)}(x)),$$

es decir que $\operatorname{div}(\dot{c}(j)) = r(j) \mathcal{E}(c(j), c(j+1))$. Así pues, la condición (iii) de la definición de curva establece que $\operatorname{div}(\dot{c}(j)) = r(\gamma) \mathcal{E}(c(j), c(j+1))$ para cada $j \in I(n-1)$. Esto implica que si $\gamma \in \mathcal{C}_{xy}$ entonces $\operatorname{div}(\dot{\gamma}) = r(\gamma) \mathcal{E}(x, y)$ y que en particular, si γ es una curva cerrada entonces $\dot{\gamma}$ es un campo solenoidal, es decir, $\dot{\gamma} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu)$.

En la terminología de las redes puramente resistivas, la función $\mathcal{E}(x, y)$ se denomina *dipolo de polos x e y* (ver [56]), mientras que un campo \mathbf{f} tal que $\operatorname{div}(\mathbf{f}) = r \mathcal{E}(x, y)$ con $r \geq 0$, se denomina *flujo de intensidad r de x a y* (en la denominación estándar, se requiere además que $\mathbf{f} \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$). Más generalmente, dados $F_1, F_2 \subset V$, $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ es un *flujo de intensidad $r(\mathbf{f})$ de F_1 a F_2* si $\operatorname{div}(\mathbf{f}) \geq 0$ sobre F_1 , $\operatorname{div}(\mathbf{f}) \leq 0$ sobre F_2 , $\operatorname{div}(\mathbf{f}) = 0$ sobre $V - (F_1 \cup F_2)$ y $r(\mathbf{f}) = \sum_{z \in F_1} \operatorname{div}(\mathbf{f})(z)$ (ver [42]). Con esta nomenclatura, si $\gamma \in \mathcal{C}_{xy}$, entonces $\dot{\gamma}$ es un flujo de intensidad $r(\gamma)$ de x a y que “localmente” es también un flujo de intensidad $r(\gamma)$, en el sentido de que si γ está parametrizada en $I(n)$ y c es su camino soporte, para cada $j \in I(n-1)$, el vector tangente a γ en j es un flujo de intensidad $r(\gamma)$ de $c(j)$ a $c(j+1)$.

Por otra parte, la noción de flujo de F_1 a F_2 , y en particular la de flujo de x a y , lleva asociada implícitamente una cierta direccionalidad en el sentido de que $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ es un flujo de intensidad r de F_1 a F_2 si y sólo si $-\mathbf{f}$ es un flujo de intensidad r de F_2 a F_1 . En particular, para cada $r \geq 0$ si $\gamma_1 \in \mathcal{C}_{xy}^r$ y $\gamma_2 \in \mathcal{C}_{yx}^r$, entonces $\operatorname{div}(\dot{\gamma}_1) = r \mathcal{E}(x, y) = -r \mathcal{E}(y, x) = \operatorname{div}(-\dot{\gamma}_2)$, por lo que cabe preguntarse por la existencia de alguna relación entre las curvas en \mathcal{C}_{xy} y las curvas en \mathcal{C}_{yx} .

Para ello, supongamos que la aplicación $\gamma: I(n) \rightarrow V \times T(\Gamma)$ de componentes c y \dot{c} , es una curva en Γ . Consideremos ahora la aplicación $\gamma_-: I(n) \rightarrow V \times T(\Gamma)$ de componentes

$-c$ y \dot{c}_- , donde $-c$ es el camino opuesto a c , $\dot{c}_-(n) = \mathbf{0} \in T_{c(0)} = T_{-c(n)}(\Gamma)$ y para $j \in I(n-1)$, $\dot{c}_-(j) = \frac{\mu(c(n-j-1))}{\mu(c(n-j))} \dot{c}(n-j-1) \in T_{c(n-j)}(\Gamma) \cap T_{c(n-j-1)}(\Gamma) = T_{-c(j)}(\Gamma) \cap T_{-c(j+1)}(\Gamma)$. Como además para cada $j \in I(n-1)$ se satisfacen las identidades

$$\begin{aligned} \mu(-c(j)) \langle \dot{c}_-(j), \mathbf{t}(-c(j)) \rangle &= \mu(c(n-j)) \frac{\mu(c(n-j-1))}{\mu(c(n-j))} \langle \dot{c}(n-j-1), \mathbf{t}(c(n-j)) \rangle \\ &= \mu(c(n-j-1)) \langle \dot{c}(n-j-1), \mathbf{t}(c(n-j-1)) \rangle = 2r(\gamma), \end{aligned}$$

resulta que γ_- es una curva con inicio en $c(n)$ y final en $c(0)$.

Lema 3.1.2 Para cada $x, y \in V$ y cada $r \geq 0$ se satisface que $\mathcal{C}_{yx}^r = \{\gamma_- : \gamma \in \mathcal{C}_{xy}^r\}$. Además, si γ es una curva en Γ , entonces $(\mu\dot{\gamma})^a = -(\mu\dot{\gamma}_-)^a$.

Demostración. La definición de γ_- dada anteriormente implica que $\{\gamma_- : \gamma \in \mathcal{C}_{xy}^r\} \subset \mathcal{C}_{yx}^r$ y la igualdad de ambos conjuntos se concluye de la identidad $\gamma_{--} = \gamma$.

Por otra parte, para cada $j \in I(n-1)$ se satisface que

$$\mu(-c(j)) \dot{c}_-(j) = \mu(c(n-j-1)) \dot{c}(n-j-1),$$

lo que implica que $(\mu\dot{c}_-(j))^a = -(\mu\dot{c}(n-j-1))^a$ y en definitiva que

$$(\mu\dot{\gamma}_-)^a = \sum_{j=0}^{n-1} (\mu\dot{c}_-(j))^a = -\sum_{j=0}^{n-1} (\mu\dot{c}(n-j-1))^a = -\sum_{j=0}^{n-1} (\mu\dot{c}(j))^a = -(\mu\dot{\gamma})^a. \blacksquare$$

A continuación construiremos curvas elementales entre vértices adyacentes, lo que con posterioridad nos permitirá asegurar la existencia de curvas entre cualesquiera vértices de la misma componente conexa de Γ .

Lema 3.1.3 Sean $x, y \in V$ vértices adyacentes, $e \in E_{xy}$ y c el camino de longitud 1 con extremos x e y . Entonces, si consideramos $\dot{c}(0) = \frac{2}{\mu(x)} e$, el par $\gamma_{xe} = (c, \dot{c})$ es una curva simple perteneciente a \mathcal{C}_{xy}^1 . Además, se satisface que $\gamma_{xe_-} = \gamma_{ye}$ y que \mathcal{C}_{xy}^1 puede identificarse con el conjunto $\left\{ \sum_{e \in E_{xy}} \alpha(e) e : \mu(x) \sum_{e \in E_{xy}} \alpha(e) = 2 \right\}$. En particular, si Γ es una variedad simple entonces, $\mathcal{C}_{xy}^1 = \{\gamma_{xe}\}$.

Demostración. Desde luego, se satisfacen las propiedades (i) y (ii) de la Definición 3.1.1 donde, como $n = 1$, $I(n-1) = \{0\}$. Si consideramos $j = 0$, resulta que

$$\mu(c(0)) \langle \dot{c}(0), \mathbf{t}(c(0)) \rangle = \mu(x) \frac{2}{\mu(x)} \langle e, \mathbf{t}(x) \rangle = 2,$$

lo que implica que $r(\gamma_{xe}) = 1$. Además, la construcción de γ_{xe} asegura que

$$\dot{c}_-(0) = \frac{\mu(c(0))}{\mu(c(1))} \dot{c}(0) = \frac{\mu(x)}{\mu(y)} \frac{2}{\mu(x)} e = \frac{2}{\mu(y)} e,$$

de donde se concluye que $\gamma_{xe} = \gamma_{ye}$.

Si $\gamma \in \mathcal{C}_{xy}^1$, necesariamente su camino soporte es c y además $\dot{\gamma}(y) = \mathbf{0}$, lo que implica que cada elemento de \mathcal{C}_{xy}^1 quedan identificado con el vector $\dot{\gamma}(x) \in T_x(\Gamma) \cap T_y(\Gamma)$.

Si $\dot{\gamma}(x) = \sum_{e \in E_{xy}} \alpha(e) e = \mathbf{v}$, como $2 = \mu(x) \langle \dot{\gamma}(x), \mathbf{t}(x) \rangle = \mu(x) \sum_{e \in E_{xy}} \alpha(e)$, resulta que \mathbf{v} pertenece al conjunto descrito en el enunciado. Recíprocamente, si \mathbf{v} es un tal elemento de $T_x(\Gamma)$ y consideramos la aplicación γ de componentes (c, \dot{c}) donde $\dot{c}(0) = \frac{2}{\mu(x)} \mathbf{v}$ y $\dot{c}(1) = \mathbf{0}$, entonces el razonamiento efectuado para γ_{xe} demuestra que $\gamma \in \mathcal{C}_{xy}^1$. Por último, cuando Γ es simple, $E_{xy} = \{e\}$, por lo que \mathcal{C}_{xy}^1 está identificado con $\left\{ \frac{2}{\mu(x)} e \right\}$, es decir, $\mathcal{C}_{xy}^1 = \{\gamma_{xe}\}$. ■

Ahora, introduciremos las operaciones básicas entre curvas, que junto con la construcción anterior serán las herramientas para determinar curvas entre vértices arbitrarios de la misma componente conexa de V .

Definición 3.1.4 Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\gamma_1: I(n_1) \rightarrow V \times T(\Gamma)$, $\gamma_2: I(n_2) \rightarrow V \times T(\Gamma)$ curvas en Γ cuyas componentes son c_1 y \dot{c}_1 y c_2 y \dot{c}_2 , respectivamente.

Denominaremos *producto de α por γ_1* a la aplicación $\alpha\gamma_1: I(n_1) \rightarrow V \times T(\Gamma)$ determinada por $(\alpha\gamma_1)(j) = (c_1(j), \alpha\dot{c}_1(j))$, para cada $j \in I(n_1)$ cuando $\alpha \geq 0$ y por $\alpha\gamma_1 = |\alpha|\gamma_{1-}$ cuando $\alpha < 0$.

Si $c_1 = c_2$, lo que implica que $n_1 = n_2$, denominaremos *suma de γ_1 y γ_2* a la aplicación $\gamma_1 + \gamma_2: I(n_1) \rightarrow V \times T(\Gamma)$ dada por $(\gamma_1 + \gamma_2)(j) = (c_1(j), \dot{c}_1(j) + \dot{c}_2(j))$ para cada $j \in I(n_1)$.

Si $c_1(n) = c_2(0)$, la aplicación $\gamma_1 * \gamma_2: I(n_1 + n_2) \rightarrow V \times T(\Gamma)$ dada por

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(j) = \begin{cases} (c_1(j), \dot{c}_1(j)), & \text{si } 0 \leq j < n_1, \\ (c_2(0), \dot{c}_2(0)), & \text{si } j = n_1, \\ (c_2(j), \dot{c}_2(j)), & \text{si } n_1 < j \leq n_1 + n_2, \end{cases}$$

será denominada *producto de γ_1 y γ_2* .

Observar $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_1$ y que la primera componente de $\gamma_1 * \gamma_2$ es precisamente el camino producto $c_1 * c_2$. Además, $-\gamma = \gamma_-$ y por tanto si $\alpha < 0$, el camino soporte de $\alpha\gamma$ es el opuesto del camino soporte de γ .

Por otra parte, es claro que si γ_3 es otra curva entonces $(\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3 = \gamma_1 + (\gamma_2 + \gamma_3)$ y $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$, entendiéndose que, en cada caso, el término derecho de la identidad tiene sentido si el izquierdo tiene sentido y entonces se satisface la igualdad. De esta forma podemos definir, cuando sea posible, $\gamma_1 + \dots + \gamma_n$ y $\gamma_1 * \dots * \gamma_n$.

Proposición 3.1.5 Consideremos V_j , $j = 1, \dots, m$, una componente conexa de Γ . Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades:

- i) Si γ_1, γ_2 son curvas con el mismo camino soporte, entonces $\gamma_1 + \gamma_2$ es una curva y además $r(\gamma_1 + \gamma_2) = r(\gamma_1) + r(\gamma_2)$.
- ii) Si $x, y \in V_j$ y $r > 0$, entonces $\mathcal{C}_{xy}^r = r\mathcal{C}_{xy}^1$ y por tanto $r\mathcal{C}_{xy} = \mathcal{C}_{xy}$. Además, para cada $\alpha \geq 0$, $r(\alpha\gamma) = \alpha r(\gamma)$.
- iii) Si $x, y, z \in V_j$ y consideramos $\gamma_1 \in \mathcal{C}_{xy}, \gamma_2 \in \mathcal{C}_{yz}$, entonces $\gamma_1 * \gamma_2$ es una curva sii $r(\gamma_1) = r(\gamma_2)$. En este caso, $\gamma_1 * \gamma_2 \in \mathcal{C}_{xz}$ y además $r(\gamma_1 * \gamma_2) = r(\gamma_1)$.

Demostración. (i) Sean γ_1 y γ_2 curvas cuyo camino soporte es c y cuyas segundas componentes son \dot{c}_1 y \dot{c}_2 . Es claro que la primera componente de $\gamma_1 + \gamma_2$ es precisamente c y que además la segunda satisface la propiedad (ii) de la Definición 3.1.1. Por otra parte, si $I(n)$ es el intervalo de parametrización de ambas curvas, entonces para cada $j \in I(n-1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(c(j)) \langle \dot{c}_1(j) + \dot{c}_2(j), \mathbf{t}(c(j)) \rangle &= \mu(c(j)) \langle \dot{c}_1(j), \mathbf{t}(c(j)) \rangle + \mu(c(j)) \langle \dot{c}_2(j), \mathbf{t}(c(j)) \rangle \\ &= 2r(\gamma_1) + 2r(\gamma_2), \end{aligned}$$

lo que implica simultáneamente que $\gamma_1 + \gamma_2$ es una curva y que $r(\gamma_1 + \gamma_2) = r(\gamma_1) + r(\gamma_2)$.

(ii) Un argumento análogo al anterior, muestra que $r\mathcal{C}_{xy}^1 \subset \mathcal{C}_{xy}^r$, para cada $r \geq 0$. Además, si $r > 0$, el mismo razonamiento concluye que $\frac{1}{r}\mathcal{C}_{xy}^r \subset \mathcal{C}_{xy}^1$ y por tanto que $\mathcal{C}_{xy}^r \subset r\mathcal{C}_{xy}^1$. Que $r(\alpha\gamma) = \alpha r(\gamma)$ para cada $\alpha \geq 0$, se deduce también con los mismos argumentos de (i).

(iii) Sea $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ y supongamos que $I(n_1)$ e $I(n_2)$ son los intervalos de definición de γ_1 y γ_2 , respectivamente. Desde luego, la primera componente de γ es una curva de extremos x y z , concretamente $c_1 * c_2$. Si denotamos por \dot{c} a su segunda componente, entonces se satisfacen las propiedades (i) y (ii) de la Definición 3.1.1 y además,

$$\mu(c(j)) \langle \dot{c}(j), \mathbf{t}(c(j)) \rangle = \mu(c_1(j)) \langle \dot{c}_1(j), \mathbf{t}(c_1(j)) \rangle = 2r(\gamma_1), \quad 0 \leq j \leq n_1 - 1,$$

$$\mu(c(j)) \langle \dot{c}(j), \mathbf{t}(c(j)) \rangle = \mu(c_2(n_1 - j)) \langle \dot{c}_2(n_1 - j), \mathbf{t}(c_2(n_1 - j)) \rangle = 2r(\gamma_2), \quad n_1 \leq j \leq n_2 - 1,$$

de manera que se satisface la propiedad (iii) sii $r(\gamma_1) = r(\gamma_2)$. ■

Observar que si γ_1, γ_2 son curvas y $r \in \mathbb{R}$, entonces el campo tangente a la curva $r\gamma_1$ es $r\dot{\gamma}_1$, mientras que el campo tangente a las curvas $\gamma_1 + \gamma_2$ y $\gamma_1 * \gamma_2$, cuando las operaciones tengan sentido, es $\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2$.

Proposición 3.1.6 Se satisfacen las siguientes propiedades:

- i) Si x, y son vértices distintos pertenecientes a la misma componente conexa de Γ , entonces para cada $r \geq 0$, $\mathcal{C}_{xy}^r \neq \emptyset$. Además, dada $\gamma \in \mathcal{C}_{xy}^r$, si c es su camino soporte e $I(n)$ es su intervalo de parametrización, entonces para cada $z \in \{c(j) : 1 \leq j \leq n-1\}$ existen $\gamma_1 \in \mathcal{C}_{xz}^r$ y $\gamma_2 \in \mathcal{C}_{zy}^r$ tales que $\gamma_1 * \gamma_2 = \gamma$. En particular, toda curva es producto de curvas simples.
- ii) Para cada $x \in V$, $T_x(\Gamma)$ está generado por el conjunto $\{\dot{\gamma}_{xe}(x) : e \in E_x\}$. Más generalmente, $\mathcal{X}(\Gamma)$ está generado por el conjunto $\{\dot{\gamma}_{xe} : x \in V, e \in E_x\}$.

Demostración. (i) Si $r = 0$, la curva $\gamma = (c, 0)$, donde c es cualquier camino que une x e y , es un elemento de \mathcal{C}_{xy}^r . Si $r > 0$, para concluir que $\mathcal{C}_{xy}^r \neq \emptyset$ basta demostrar que $\mathcal{C}_{xy}^1 \neq \emptyset$, en virtud de la parte (ii) de la Proposición 3.1.5. Para ello consideremos $c: I(n) \rightarrow V$ un camino de extremos x e y y para cada $j \in I(n-1)$, $e_j \in E_{c(j)c(j+1)}$ y la curva $\gamma_j = \gamma_{c(j)e_j}$ definida en la proposición anterior. La parte (iii) de la Proposición 3.1.5 muestra ahora que $\gamma_1 * \dots * \gamma_{n-1} \in \mathcal{C}_{xy}^1$.

Supongamos ahora que $\gamma \in \mathcal{C}_{xy}^r$, y consideremos $z \in \{c(j) : 1 \leq j \leq n-1\}$ y el conjunto

$$I(z) = \{j \in I(n) : j > 0 \text{ y } c(j) = z\}.$$

Como $I(z) \neq \emptyset$, podemos considerar $i \in I(n)$, el primer elemento de $I(z)$. Definimos entonces las aplicaciones $\gamma_1: I(i) \rightarrow V \times T(\Gamma)$ y $\gamma_2: I(n-i) \rightarrow V \times T(\Gamma)$ cuyas componentes (c_1, \dot{c}_1) y (c_2, \dot{c}_2) están dadas respectivamente por $c_1(j) = c(j)$, $\dot{c}_1(j) = \dot{c}(j)$ si $j \in I(i-1)$, $c_1(i) = c(i)$, $\dot{c}_1(i) = 0$ y por $c_2(j) = c(j+i)$, $\dot{c}_2(j) = \dot{c}(j+i)$, $j \in I(n-i)$. Es claro que γ_1 y γ_2 satisfacen las condiciones de la Definición 3.1.1 y por tanto $\gamma_1 \in \mathcal{C}_{xz}$ y $\gamma_2 \in \mathcal{C}_{zy}$. Además, necesariamente $r(\gamma_1) = r(\gamma) = r(\gamma_2)$ y por tanto tiene sentido el producto $\gamma_1 * \gamma_2$ que coincide con γ , pues $c_1 * c_2 = c$ y además $(c_2(0), \dot{c}_2(0)) = (c(i), \dot{c}(i))$.

Para finalizar, supongamos que $c = c_1 * c_2$, donde c_1 es un camino internamente disjunto con dominio de definición $I(i)$. Entonces, si $z = c(i)$, resulta que i es el primer elemento de $I(z)$ y basta construir $\gamma_1 \in \mathcal{C}_{xz}$ y $\gamma_2 \in \mathcal{C}_{zy}$ según el criterio anterior. Además, como el camino soporte de γ_1 es precisamente c_1 , resulta que γ_1 es una curva simple. El resultado general se deduce entonces por descomposición de c en producto de caminos internamente disjuntos.

(ii) Si $\mathbf{v} \in T_x(\Gamma)$, entonces $\mathbf{v} = \sum_{e \in E_x} v(e)e = \frac{\mu(x)}{2} \sum_{e \in E_x} v(e)\dot{\gamma}_{xe}(x)$. Por otra parte, si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ y consideramos $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ su función componente, resulta que

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \mu(x) \sum_{e \in E_x} f(x, e)\dot{\gamma}_{xe}. \quad \blacksquare$$

Corolario 3.1.7 Si para cada $j = 1, \dots, m$ fijamos $z_j \in V_j$, entonces el conjunto de funciones $\left\{ \{\mathcal{E}(x, z_1)\}_{\substack{x \in V_1 \\ x \neq z_1}}, \dots, \{\mathcal{E}(x, z_m)\}_{\substack{x \in V_m \\ x \neq z_m}} \right\}$ es una base del espacio vectorial $\text{Im} \text{g div}$.

Demostración. Como para cada $x \in V_j$, $\mathcal{C}_{xz_j}^1 \neq \emptyset$, si tomamos $\gamma \in \mathcal{C}_{xz_j}^1$, obtenemos que $\text{div}(\dot{\gamma}) = \mathcal{E}(x, z_j)$. Por tanto, el conjunto de funciones dado en el enunciado pertenece al espacio Img div y además es fácil comprobar que es un sistema libre. Como por otra parte, consta de $|V| - m$ elementos y este valor coincide con la dimensión de Img div (parte (i) de la Proposición 2.2.10), resulta que el sistema en cuestión es base de Img div . ■

Supongamos que $h \in \mathcal{C}(V)$ satisface que $\int_{V_j} h d\nu = 0$ para cada $j = 1, \dots, m$. Por la parte (i) de la Proposición 2.2.10, esta condición es equivalente a que exista $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ tal que $h = \text{div}(\mathbf{f})$. Desde luego, tal campo no es único, pues si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ satisface que $\text{div}(\mathbf{f}) = h$, cualquier campo \mathbf{g} en el conjunto $\mathbf{f} + \mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu)$ satisface también que $\text{div}(\mathbf{g}) = h$ (recordemos que $\dim \mathbf{H}_0(\mathbf{B}, \mu) \geq |E|$). Los resultados anteriores permiten encontrar campos que satisfacen tal propiedad:

Como $h \in \text{Img div}$, el corolario anterior implica que $h = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{x \in V_j \\ x \neq z_j}} \alpha_x \mathcal{E}(x, z_j)$, con $\alpha_x \in \mathbb{R}$.

Además, si $x \in V_j - \{z_j\}$ valorando los dos términos de la identidad anterior en x , resulta que $\alpha_x = \nu(x) h(x)$. Por tanto, si para cada $j = 1, \dots, m$ y cada $x \in V_j$ consideramos $\gamma_x \in \mathcal{C}_{xz_j}^1$, resulta que el campo $\mathbf{f} = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{x \in V_j \\ x \neq z_j}} \nu(x) h(x) \dot{\gamma}_x$ satisface que $\text{div}(\mathbf{f}) = h$. Desde luego, para cada $x \in V$, la curva γ_x puede escogerse en $\mathcal{C}_{xz_j}^1$ de forma arbitraria.

Definición 3.1.8 Si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ y γ es una curva, denominaremos *circulación de \mathbf{f} sobre γ* al número real

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} = \frac{1}{2} \int_V \langle (\mathbf{M}\mathbf{f})^a, \dot{\gamma} \rangle d\mu.$$

Diremos que \mathbf{f} es un *campo conservativo* si la circulación de \mathbf{f} sobre cualquier curva cerrada es nula.

Si γ es una curva en Γ y consideramos los campos $\mathbf{t}_{\gamma} = (\mu\dot{\gamma})^a$ y $\mathbf{n}_{\gamma} = -\frac{1}{4}(\mu\dot{\gamma})^s$, es sencillo establecer el siguiente análogo discreto del Teorema del Rotacional.

Proposición 3.1.9 Si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ y γ es una curva, entonces $\int_{\gamma} \mathbf{f} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{t}_{\gamma}) d\lambda$. Además, si los soportes de \mathbf{f} y de $\dot{\gamma}$ son disjuntos también se satisface que

$$\int_{\overline{\text{sop}(\mathbf{f})}} \langle \text{rot } \mathbf{f}, \mathbf{n}_{\gamma} \rangle d\mu = \int_{\gamma} \mathbf{f}.$$

Demostración. Como, respecto de la estructura métrica canónica, los subespacios $\mathcal{X}^a(\Gamma)$ y $\mathcal{X}^s(\Gamma)$ son ortogonales, se satisfacen las identidades

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} = \frac{1}{2} \int_V \langle (\mathbf{M}\mathbf{f})^a, \dot{\gamma} \rangle d\mu = \frac{1}{2} \int_V \langle (\mathbf{M}\mathbf{f})^a, (\mu\dot{\gamma})^a \rangle d\lambda = \frac{1}{2} \int_V \langle \mathbf{M}\mathbf{f}, \mathbf{t}_{\gamma} \rangle d\lambda = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{t}_{\gamma}) d\lambda.$$

Por otra parte, si $\text{sop}(\mathbf{f}) \cap \text{sop}(\dot{\gamma}) = \emptyset$, entonces $\int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \dot{\gamma}) d\mu = \int_{\text{sop}(\mathbf{f})} \mathbf{B}(\mathbf{f}, \dot{\gamma}) d\mu = 0$ y por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \dot{\gamma}) d\mu = \frac{1}{2} \int_V \langle (\mathbf{M}\mathbf{f})^a, \dot{\gamma} \rangle d\mu + \frac{1}{2} \int_V \langle (\mathbf{M}\mathbf{f})^s, \dot{\gamma} \rangle d\mu \\ &= \int_{\gamma} \mathbf{f} + \frac{1}{2} \int_V \langle (\mathbf{M}\mathbf{f})^s, \dot{\gamma} \rangle d\mu = \int_{\gamma} \mathbf{f} - 2 \int_V \langle (\mathbf{M}\mathbf{f})^s, \mathbf{n}_{\gamma} \rangle d\lambda \\ &= \int_{\gamma} \mathbf{f} - \int_V \langle \text{rot } \mathbf{f}, \mathbf{n}_{\gamma} \rangle d\mu. \end{aligned}$$

El siguiente resultado establece las propiedades básicas de la circulación.

Proposición 3.1.10 *Si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ y γ es una curva, entonces se satisface que $\int_{\gamma_-} \mathbf{f} = -\int_{\gamma} \mathbf{f}$, que $\int_{\alpha\gamma} \mathbf{f} = \alpha \int_{\gamma} \mathbf{f}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y que $\int_{\gamma} \mathbf{f} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \dot{\gamma}) d\mu$ cuando $\text{rot } \mathbf{f} = 0$. Además, si $\mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ entonces $\int_{\gamma} (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \int_{\gamma} \mathbf{f} + \int_{\gamma} \mathbf{g}$ y si γ_1 es otra curva entonces $\int_{\gamma+\gamma_1} \mathbf{f} = \int_{\gamma} \mathbf{f} + \int_{\gamma_1} \mathbf{f}$ y $\int_{\gamma*\gamma_1} \mathbf{f} = \int_{\gamma} \mathbf{f} + \int_{\gamma_1} \mathbf{f}$ cuando las curvas $\gamma + \gamma_1$ y $\gamma * \gamma_1$ tengan sentido.*

Demostración. Como $(\mu\dot{\gamma})^a = -(\mu\dot{\gamma}_-)^a$, en virtud del Lema 3.1.2, de la ortogonalidad entre los campos simétricos y antisimétricos, respecto de la métrica canónica, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{f} &= \frac{1}{2} \int_V \langle (\mathbf{M}\mathbf{f})^a, \mu\dot{\gamma} \rangle d\lambda = \frac{1}{2} \int_V \langle (\mathbf{M}\mathbf{f})^a, (\mu\dot{\gamma})^a \rangle d\lambda \\ &= -\frac{1}{2} \int_V \langle (\mathbf{M}\mathbf{f})^a, (\mu\dot{\gamma}_-)^a \rangle d\lambda = -\frac{1}{2} \int_V \langle (\mathbf{M}\mathbf{f})^a, \dot{\gamma}_- \rangle d\mu = -\int_{\gamma_-} \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Por otra parte, como $\text{rot } \mathbf{f} = 0$ sii $\mathbf{M}\mathbf{f} \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$, resulta que

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} = \frac{1}{2} \int_V \langle (\mathbf{M}\mathbf{f})^a, \dot{\gamma} \rangle d\mu = \frac{1}{2} \int_V \langle \mathbf{M}\mathbf{f}, \dot{\gamma} \rangle d\mu = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{f}, \dot{\gamma}) d\mu.$$

Por último, teniendo en cuenta que, cuando las curvas $\gamma + \gamma_1$ y $\gamma * \gamma_1$ tienen sentido su campo tangente es $\dot{\gamma} + \dot{\gamma}_1$ y que si $\alpha < 0$, el campo tangente de $\alpha\gamma$ es $-\alpha\dot{\gamma}_-$; el resto de propiedades se deducen directamente de la linealidad de las operaciones involucradas en la definición de circulación. ■

Proposición 3.1.11 *Un campo \mathbf{f} es conservativo sii $(\mathbf{M}\mathbf{f})^a \in \text{Im} \tilde{\mathbf{d}}$. En particular, los únicos campos simultáneamente irrotacionales y conservativos son los campos gradiente.*

Demostración. Consideremos $u \in \mathcal{C}(V)$ y $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{d}}u$. Entonces, si $\gamma \in \mathcal{C}_{xy}$ en virtud de la expresión (3.1) tenemos que

$$\frac{1}{2} \int_V \langle \tilde{\mathbf{d}}u, \dot{\gamma} \rangle d\mu = - \int_V u \operatorname{div}(\dot{\gamma}) d\nu = -r(\gamma) \int_V u \mathcal{E}(x, y) d\nu = r(\gamma) (u(y) - u(x)).$$

Por tanto, si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ es tal que $(\mathbf{Mf})^a \in \operatorname{Im} \tilde{\mathbf{d}}$, entonces $\int_\gamma \mathbf{f} = r(\gamma) (u(y) - u(x))$ y en particular, \mathbf{f} es conservativo.

Recíprocamente, supongamos que \mathbf{f} es un campo conservativo y fijemos $z_j \in V_j$, para cada $j = 1, \dots, m$. Entonces, para cada $x \in V_j$ y para cada $\gamma \in \mathcal{C}_{z_j x}^1$, el valor $\int_\gamma \mathbf{f}$ no depende más que de x y z_j , puesto que si $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}_{z_j x}^1$, entonces $\gamma_1 * (-\gamma_2) \in \mathcal{C}_{z_j z_j}^1$ y por tanto

$$0 = \int_{\gamma_1 * (-\gamma_2)} \mathbf{f} = \int_{\gamma_1} \mathbf{f} - \int_{\gamma_2} \mathbf{f}.$$

Podemos pues considerar la función $u_j \in \mathcal{C}(V_j)$ dada por

$$u_j(x) = \int_\gamma \mathbf{f}, \quad \text{para cada } x \in V_j,$$

donde γ es cualquier elemento de $\mathcal{C}_{z_j x}^1$. La demostración concluirá si probamos que la función $u = \sum_{j=1}^m u_j$ satisface que $\tilde{\mathbf{d}}u = (\mathbf{Mf})^a$, o de forma equivalente, que para cada $\mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, $\int_V \langle \tilde{\mathbf{d}}u, \mathbf{g} \rangle d\mu = \int_V \langle (\mathbf{Mf})^a, \mathbf{g} \rangle d\mu$. Para ello, en virtud de la segunda parte del Corolario 3.1.6, será suficiente demostrar la anterior identidad para los campos vectoriales de la forma $\dot{\gamma}$, donde γ es una curva con $r(\gamma) = 1$ o, de forma equivalente, que $\int_\gamma \mathbf{f} = u(y) - u(x)$ para cada curva tal que $r(\gamma) = 1$.

Si $\gamma \in \mathcal{C}_{xy}^1$ con $x, y \in V_j$ y consideramos $\gamma_1 \in \mathcal{C}_{z_j x}^1$, entonces se satisface que $\gamma_1 * \gamma \in \mathcal{C}_{z_j y}^1$ y por tanto que

$$u_j(y) = \int_{\gamma_1 * \gamma} \mathbf{f} = \int_{\gamma_1} \mathbf{f} + \int_\gamma \mathbf{f} = u_j(x) + \int_\gamma \mathbf{f}.$$

Para finalizar, si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ es irrotacional entonces $\mathbf{Mf} \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$, así que \mathbf{f} es conservativo sii existe $u \in \mathcal{C}(V)$ tal que $\mathbf{Mf} = \tilde{\mathbf{d}}u$, es decir sii $\mathbf{f} = \nabla u$. ■

Obsérvese que si \mathbf{f} es irrotacional y conservativo, la función $u \in \mathcal{C}(V)$ tal que $\nabla u = \mathbf{f}$ construída en la proposición anterior está caracterizada por esa propiedad y por satisfacer además que $u(z_j) = 0$ para cada $j = 1, \dots, m$.

Por otra parte, la proposición anterior permite discriminar los campos irrotacionales que no son gradientes: son precisamente los campos irrotacionales no conservativos. En el caso particular de que la variedad discreta sea un árbol, la igualdad entre campos gradientes y campos irrotacionales implica que en un árbol todo campo irrotacional es conservativo.

Para obtener una demostración directa de este hecho, observemos que si Γ es un bosque y para cada $j = 1, \dots, m$ fijamos $z_j \in V_j$ entonces, para cada $x \in V_j$ con $x \neq z_j$, existe un único camino internamente disjunto de extremos z_j y x . Si $x = x_0, x_1, \dots, x_{n+1} = z_j$ son los vértices de la traza de tal camino y denotamos por e_j la única rama incidente con x_j y x_{j+1} , entonces $\gamma_{z_j x} = \gamma_{x_0 e_0} * \dots * \gamma_{x_n e_n}$ es la única curva simple en $\mathcal{C}_{z_j x}^1$. El mismo argumento utilizado al final de la demostración de la proposición anterior muestra que si para cada $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$ definimos $u \in \mathcal{C}(V)$ como $u(z_j) = 0$ y $u(x) = \int_{\gamma_{z_j x}} f$, para cada $x \in V_j$ con $x \neq z_j$, entonces $\tilde{d}u = (\mathbf{M}f)^a$, lo que concuerda con la propiedad de que, en un bosque, f es gradiente sii $\mathbf{M}f \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$, es decir sii $\text{rot } f = 0$.

El resultado de la proposición anterior permite caracterizar de forma sencilla los campos conservativos cuando la métrica es ortogonal y compatible.

Corolario 3.1.12 *Si \mathbf{B} es una métrica ortogonal y compatible, entonces los campos conservativos coinciden con los campos cuya parte antisimétrica es gradiente.*

Demostración. Si $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$, entonces el razonamiento anterior muestra que f es conservativo sii existe $u \in \mathcal{C}(V)$ tal que $\tilde{d}u = (\mathbf{M}f)^a$. Además, si \mathbf{B} es ortogonal y compatible, como $(\mathbf{M}f)^a = \mathbf{M}f^a$, la anterior identidad implica que $\nabla u = f^a$. ■

Definición 3.1.13 Si γ es una curva cuyas componentes son c y \dot{c} , denominaremos *longitud de γ* al número real

$$\ell(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \sqrt{\mathbf{B}(\dot{c}(j), \dot{c}(j))} \mu(c(j)).$$

Si $x \neq y$, diremos que $\gamma \in \mathcal{C}_{xy}^1$ es una *geodésica entre x e y* si $\ell(\gamma) \leq \ell(\hat{\gamma})$ para cada $\hat{\gamma} \in \mathcal{C}_{xy}^1$.

Proposición 3.1.14 *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

- i) Si γ es una curva y $\ell(\gamma) = 0$, entonces $\dot{\gamma} = 0$.
- ii) Si γ es una curva simple, entonces $\ell(\gamma) = \frac{1}{2} \int_V \sqrt{\mathbf{B}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} d\mu$.
- iii) Si γ_1 y γ_2 son curvas con el mismo camino soporte, entonces $\ell(r\gamma_1) = |r|\ell(\gamma_1)$, para cada $r \in \mathbb{R}$, y $\ell(\gamma_1 + \gamma_2) \leq \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$. Además, en este caso se verifica la igualdad sii para cada j , los vectores tangentes a γ_1 y γ_2 en j son proporcionales.
- iv) Si $\gamma_1 \in \mathcal{C}_{xy}^r$ y $\gamma_2 \in \mathcal{C}_{yz}^r$, entonces $\ell(\gamma_1 * \gamma_2) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$.
- v) Si $x \neq y$, toda geodésica entre x e y es una curva simple.

vi) Si Γ es una variedad discreta simple y \mathbf{B} es la estructura métrica canónica, entonces las geodésicas están identificadas con los caminos cortos.

Demostración. (i) Es claro que si $\ell(\gamma) = 0$, entonces $\dot{c}(j) = \mathbf{0}$ para cada j , lo que implica que $\gamma = \mathbf{0}$.

(ii) Si $\gamma: I(m) \rightarrow V \times T(\Gamma)$ es simple, entonces $\dot{\gamma}(x) = \dot{c}(j)$ si $x = c(j)$ y $\dot{\gamma}(x) = \mathbf{0}$ en otro caso. Por tanto,

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \sqrt{\mathbf{B}(\dot{c}(j), \dot{c}(j))} \mu(c(j)) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \sqrt{\mathbf{B}(\dot{\gamma}(c(j)), \dot{\gamma}(c(j)))} \mu(c(j)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sqrt{\mathbf{B}(\dot{\gamma}(x), \dot{\gamma}(x))} \mu(x) = \frac{1}{2} \int_V \sqrt{\mathbf{B}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} d\mu. \end{aligned}$$

(iii) Basta tener en cuenta las propiedades de las bilineales definidas positivas.

(iv) Basta observar que $\dot{c}(j) = \dot{c}_1(j)$ cuando $j \in I(n-1)$ mientras que $\dot{c}(j) = \dot{c}_2(j)$ cuando $j = n, \dots, n+m$.

(v) Sea $\gamma \in \mathcal{C}_{xy}^1$ y supongamos que $\gamma: I(m) \rightarrow V \times T(\Gamma)$ con componentes c y \dot{c} . Si γ no es simple, existe $j \in I(m)$ con $j \neq 0, m$ tal que $c(j) = c(i)$ para algún $i \in I(j)$. Consideremos ahora $\hat{\gamma}: I(m+i-j) \rightarrow V \times T(\Gamma)$ de componentes \hat{c} y $\hat{\dot{c}}$ definidas por

$$(\hat{c}(k), \hat{\dot{c}}(k)) = \begin{cases} (c(k), \dot{c}(k)), & \text{si } k < i, \\ (c(j+k-i), \dot{c}(k+j-i)), & \text{si } k \geq i. \end{cases}$$

Es claro que $\gamma \in \mathcal{C}_{xy}^1$ y que $\dot{c}(i) \neq \mathbf{0}$ pues $\text{div}(\dot{c}(i)) = \mathcal{E}(c(i), c(i+1))$. Entonces, se satisface que

$$\ell(\hat{\gamma}) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m+i-j} \sqrt{\mathbf{B}(\hat{\dot{c}}(j), \hat{\dot{c}}(j))} \mu(\hat{c}(j)) < \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m \sqrt{\mathbf{B}(\dot{c}(j), \dot{c}(j))} \mu(c(j)) = \ell(\gamma)$$

(vi) Sea $\gamma: I(m) \rightarrow V \times T(\Gamma)$ una curva simple de componentes c y \dot{c} . Si para cada $j \in I(m-1)$ consideramos e_j la única rama entre $c(j)$ y $c(j+1)$, necesariamente $\dot{c}(j) = \alpha_j e_j$ con $\alpha_j \in \mathbb{R}$, lo que implica que $\gamma \in \mathcal{C}_{c(0)c(m)}^1$ sii $\alpha_j = \frac{2}{\mu(c(j))}$ para cada $j \in I(m-1)$ y además que $\ell(\gamma) = m$. Recíprocamente, si $c: I(m) \rightarrow V$ es un camino internamente disjunto y consideramos $\dot{c}: I(m) \rightarrow T(\Gamma)$ definida por $\dot{c}(m) = \mathbf{0}$ y $\dot{c}(j) = \frac{2}{\mu(c(j))} e$ si $j \in I(m-1)$, entonces la aplicación γ de componentes c y \dot{c} es una curva simple perteneciente a $\mathcal{C}_{c(0)c(m)}^1$ y satisface que $\ell(\gamma) = m$. En definitiva, cuando \mathbf{B} es la métrica canónica, toda curva simple tiene la longitud de su camino soporte. Como toda geodésica es una curva simple, el razonamiento anterior muestra que las geodésicas están entonces identificadas con los caminos cortos. ■

3.2 El Teorema de la Divergencia

Supongamos que $\Gamma = (V, E, \theta)$ es una variedad discreta. Nuestra intención en esta sección es reproducir el análogo discreto del Teorema de la Divergencia, sobre un subconjunto $F \subset V$ y su frontera de vértices $\delta(F)$. El resultado debe ser compatible con el hecho de que cuando $F = V$, entonces $\delta(F) = \emptyset$ y por tanto $\int_V \operatorname{div}(f) \, d\nu = 0$, para cada $f \in \mathcal{X}(\Gamma)$ (ver la parte (i) de la Proposición 2.2.10).

Recordemos (ver la Sección 1.1) que el interior, la frontera de vértices, la adherencia y la frontera de ramas de $F \subset V$, están definidos respectivamente por

$$\overset{\circ}{F} = \{x \in F : S_1(x) \subset F\},$$

$$\delta(F) = \{x \in F^c : S_1(x) \cap F \neq \emptyset\} = \{x \in V : d(x, F) = 1\},$$

$$\bar{F} = F \cup \delta(F) = \{x \in V : d(x, F) \leq 1\},$$

$$\partial(F) = \{e \in E : \theta(e) \cap F \neq \emptyset \text{ y } \theta(e) \cap \delta(F) \neq \emptyset\},$$

donde $S_1(x)$ denota el conjunto de vértices adyacentes a x . Por otra parte, denotamos por $E(F)$ al conjunto de ramas cuyos extremos son vértices de F y por $\bar{E}(F)$ a la unión de $E(F)$ con $\partial(F)$.

En la Sección 1.1 definimos también tres subvariedades asociadas a cada $F \subset V$. Concretamente, consideramos la subvariedad generada por F , que denotábamos por $\Gamma(F)$, la subvariedad generada por $\delta(F)$, que denominamos frontera y que denotábamos por $\Gamma(\delta(F))$ y por último la subvariedad adherencia de F , que denotábamos por $\bar{\Gamma}(F)$ cuyo conjunto de vértices es \bar{F} y cuyo conjunto de ramas es $\bar{E}(F)$. A continuación, asociaremos dos campos vectoriales a las subvariedades frontera y adherencia de F .

En el resto de la sección consideraremos fijada (\mathbf{B}, μ) una estructura Riemanniana sobre Γ y como es habitual, denotaremos por \mathbf{F} el campo de aplicaciones lineales determinado por \mathbf{B} , por \mathbf{M} y por \mathbf{A} los campos de matrices determinados, respectivamente, por \mathbf{F} y por \mathbf{F}^{-1} , por m y a las correspondientes funciones componentes de \mathbf{M} y de \mathbf{A} y por c la función coeficiente de la estructura Riemanniana. Consideraremos también fijada una medida densa ν y denotaremos por div , ∇ y Δ , los operadores divergencia, gradiente y laplaciano determinados por la estructura métrica y por ν .

Definición 3.2.1 Sea $F \subset V$. Denominaremos *campo tangente a $\delta(F)$* al campo \mathfrak{t}_F , restricción del campo característico a $\delta(F)$, es decir del campo característico de $\Gamma(\delta(F))$. Denominaremos *campo normal a F* , y lo denotaremos por \mathfrak{n}_F , al opuesto del campo derivada de la función característica de F .

Lema 3.2.2 Para cada $F \subset V$, la función componente de \mathbf{n}_F está dada por

$$n_F(x, e) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \in \delta(F) \text{ y } e \in \partial(F), \\ 1, & \text{si } x \in \delta(F^c) \text{ y } e \in \partial(F), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto, $\mathbf{t}_F \in \mathcal{X}^s(\Gamma) \cap \mathcal{X}^\#(\Gamma)$, $\mathbf{n}_F \in \mathcal{X}^a(\Gamma) \cap \mathcal{X}^\#(\Gamma)$, $\mathbf{n}_F = -\mathbf{n}_{F^c}$ y $\langle \mathbf{n}_F, \mathbf{t}_F \rangle = 0$. Además, $\mathbf{t}_V = \mathbf{n}_V = 0$ y más generalmente $\text{sop}(\mathbf{n}_F) = \delta(F) \cup \delta(F^c)$ y $\text{sop}(\mathbf{t}_F) = \delta(F)$.

Proposición 3.2.3 (Teorema de la Divergencia). Dado $F \subset V$, para cada $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ se tiene que

$$\int_F \text{div}(\mathbf{f}) \, d\nu = \int_{\delta(F^c)} \langle \mathbf{n}_F, (\mu \cdot \mathbf{f})^a \rangle \, d\lambda = \int_{\delta(F)} \langle \mathbf{n}_F, (\mu \cdot \mathbf{f})^a \rangle \, d\lambda.$$

Demostración. Si g denota la función característica de F , entonces

$$\begin{aligned} \int_F \text{div}(\mathbf{f}) \, d\nu &= \int_V g \text{div}(\mathbf{f}) \, d\nu = -\frac{1}{2} \int_V \langle \tilde{\mathbf{d}}g, \mathbf{f} \rangle \, d\mu = \frac{1}{2} \int_V \langle \mathbf{n}_F, \mathbf{f} \rangle \, d\mu = \frac{1}{2} \int_V \langle \mathbf{n}_F, (\mu \cdot \mathbf{f})^a \rangle \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_{\delta(F^c)} \langle \mathbf{n}_F, (\mu \cdot \mathbf{f})^a \rangle \, d\lambda + \frac{1}{2} \int_{\delta(F)} \langle \mathbf{n}_F, (\mu \cdot \mathbf{f})^a \rangle \, d\lambda. \end{aligned}$$

Por otra parte, si f es la componente de \mathbf{f} , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\delta(F^c)} \langle \mathbf{n}_F, (\mu \cdot \mathbf{f})^a \rangle \, d\lambda &= \sum_{x \in \delta(F^c)} \sum_{e \in \partial(F)} (\mu \cdot f)^a(x, e) = \sum_{x \in \delta(F^c)} \sum_{y \in \delta(F)} \sum_{e \in E_{xy}} (\mu \cdot f)^a(x, e) \\ &= - \sum_{y \in \delta(F)} \sum_{x \in \delta(F^c)} \sum_{e \in E_{xy}} (\mu \cdot f)^a(y, e) = - \sum_{y \in \delta(F)} \sum_{e \in \partial(F)} (\mu \cdot f)^a(y, e) \\ &= \int_{\delta(F)} \langle \mathbf{n}_F, (\mu \cdot \mathbf{f})^a \rangle \, d\lambda. \end{aligned}$$

El resultado se deduce sumando ambas expresiones. ■

Observar que si $\mathbf{f} \in \frac{1}{\mu} \mathcal{X}^a(\Gamma)$, el Teorema de la Divergencia se expresa en la forma

$$\int_F \text{div}(\mathbf{f}) \, d\nu = \int_{\delta(F^c)} \langle \mathbf{n}_F, \mathbf{f} \rangle \, d\mu = \int_{\delta(F)} \langle \mathbf{n}_F, \mathbf{f} \rangle \, d\mu.$$

En particular, cuando Γ es una variedad discreta simple, \mathbf{B} es la métrica canónica y las medidas μ y ν están dadas por $\mu = \lambda$ y $\nu = k \cdot \lambda$, esta expresión coincide con la obtenida en [54].

Concluiremos esta sección con una consecuencia del Teorema de la Divergencia en el caso de métricas ortogonales, que es el único caso contemplado hasta ahora en la literatura. Además, este resultado servirá de introducción al análisis de las Fórmulas de Green que abordaremos en la próxima sección.

Corolario 3.2.4 (Teorema de Gauss). *Supongamos que \mathbf{B} es ortogonal y consideremos el campo $\mathbf{n}_F = \frac{1}{\nu} \cdot (\mu a)^s \cdot \mathbf{n}_F$. Entonces, para cada $F \subset V$ y cada $u \in \mathcal{C}(V)$ se verifica que*

$$\int_F (\Delta u) d\nu = \int_{\delta(F^c)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F} d\nu = \int_{\delta(F)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F} d\nu.$$

Demostración. Como $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$, una aplicación directa del Teorema de la Divergencia conduce a la expresión

$$\int_F (\Delta u) d\nu = \int_{\delta(F^c)} \langle (\mu \nabla u)^a, \mathbf{n}_F \rangle d\lambda = \int_{\delta(F)} \langle (\mu \nabla u)^a, \mathbf{n}_F \rangle d\lambda.$$

En este caso, se tiene además que $\nabla u = a \cdot \tilde{\mathbf{d}}u$, por lo que $(\mu \nabla u)^a = (\mu a)^s \tilde{\mathbf{d}}u$ y para concluir, basta observar que

$$\langle (\mu \nabla u)^a, \mathbf{n}_F \rangle = \langle (\mu a)^s \cdot \tilde{\mathbf{d}}u, \mathbf{n}_F \rangle = \langle \tilde{\mathbf{d}}u, (\mu a)^s \cdot \mathbf{n}_F \rangle = \nu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F}. \quad \blacksquare$$

Debe observarse que el Teorema de Gauss mantiene su validez si consideramos la variedad simple subyacente. De hecho, para cada $x \in V$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F} \right) (x) &= \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F^\#} \right) (x) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in V} \kappa(x, y) \mathbf{n}_F^\#(x, y) (u(y) - u(x)) \\ &= \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in V} c(x, y) \mathbf{n}_F(x, y) (u(y) - u(x)), \end{aligned}$$

resulta que si sobre $\Gamma^\#$ consideramos el campo $\boldsymbol{\eta}_F = \kappa \cdot \mathbf{n}_F^\# = \frac{1}{\nu} \cdot c \cdot \mathbf{n}_F$, entonces $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}_F} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F}$,

donde la primera derivada direccional se considera en la variedad $\Gamma^\#$ y la segunda en Γ . Por tanto, para cada $u \in \mathcal{C}(V)$ se satisface que

$$\int_F (\Delta u) d\nu = \int_{\delta(F^c)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}_F} d\nu = \int_{\delta(F)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}_F} d\nu.$$

3.3 Identidades de Green

En esta sección desarrollaremos teoremas integrales que representarán la contrapartida discreta de los correspondientes al caso continuo. Los antecedentes de estos resultados aparecen en la literatura de forma dispersa y un tanto incompleta y siempre referidos al caso de grafos y métricas ortogonales y compatibles. Uno de los primeros resultados en esta dirección puede encontrarse en [27] aunque la versión de las identidades de Green sea un tanto rudimentaria

e ineficaz para nuestros objetivos posteriores. En esta misma línea, quizá la versión más adecuada de las identidades de Green sea la presentada en [40] aunque, como quedará reflejado posteriormente, no se ajuste a nuestros propósitos.

El principal objetivo de esta sección es elaborar versiones de las identidades de Green que nos permitan abordar con eficacia la resolución de problemas de contorno. Como antecedentes debemos destacar [21] y [29], donde sólo se contemplan retículas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , [15] y [17]. A nuestro entender la versión más completa de las fórmulas de Green y que engloba a todas las anteriores, es la desarrollada en [5]. En otro ámbito, también debemos señalar que las identidades de Green están presentes en algunos tratamientos de esquemas en diferencias finitas, sobre todo por lo que hace referencia a condiciones de contorno tipo Dirichlet (ver por ejemplo, [43]).

Comenzaremos esta sección presentando las versiones de las identidades de Green que aparecen en [5] y en [40]. Cabe destacar que, en primera instancia, la obtención de las identidades se realiza aquí de forma simultánea y empleando una técnica diferente a las utilizadas en ambos trabajos. Concretamente, utilizaremos la idea apuntada en [54] que consiste en seguir las pautas del caso continuo y aprovechar las propiedades del operador div para hacer aparecer las identidades como consecuencia del Teorema de la Divergencia.

En el resto del apartado, consideraremos fijados una variedad discreta $\Gamma = (V, E, \theta)$, (\mathbf{B}, μ) una estructura métrica sobre Γ , ν una medida densa en V y mantendremos el resto de notaciones de la sección anterior.

Proposición 3.3.1 *Supongamos que \mathbf{B} es ortogonal y consideremos $F \subset V$, el campo vectorial $\mathbf{n}_F = \frac{1}{\nu} \cdot (\mu a)^s \cdot \mathbf{n}_F$ y la función $b \in \mathcal{C}(\bar{F} \times \bar{F})$ dada por*

$$b(x, y) = \begin{cases} c(x, y), & \text{si } (x, y) \notin \delta(F) \times \delta(F), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, para cada $u, v \in \mathcal{C}(V)$ se verifica que

$$\begin{aligned} - \int_F v(\Delta u) d\nu &= \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) (u(y) - u(x))(v(y) - v(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y) - \int_{\delta(F)} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F} d\nu \\ &= \frac{1}{2} \int_{F \times F} c(x, y) (u(y) - u(x))(v(y) - v(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y) - \int_{\delta(F^c)} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F} d\nu. \end{aligned}$$

Demostración. Si consideramos la función $h \in \mathcal{C}^s(\Gamma)$ dada por $h = (\mu a)^s$, entonces en virtud de la parte (iii) del Corolario 2.2.5,

$$v(\Delta u) = v \text{div}(\nabla u) = \text{div}(v^s \nabla u) - \frac{1}{2} \langle \tilde{d}v, (\mu \nabla u)^a \rangle = \text{div}(v^s \nabla u) - \frac{1}{2} \langle \tilde{d}v, h \cdot \tilde{d}u \rangle,$$

y aplicando el Teorema de la Divergencia obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_F v(\Delta u) d\nu &= -\frac{1}{2} \int_F \langle \tilde{\mathbf{d}}v, h \cdot \tilde{\mathbf{d}}u \rangle d\lambda + \int_{\delta(F)} \langle (v^s h) \cdot \tilde{\mathbf{d}}u, \mathbf{n}_F \rangle d\lambda \\ &= -\frac{1}{2} \int_F \langle \tilde{\mathbf{d}}v, h \cdot \tilde{\mathbf{d}}u \rangle d\lambda + \int_{\delta(F^c)} \langle (v^s h) \cdot \tilde{\mathbf{d}}u, \mathbf{n}_F \rangle d\lambda \end{aligned}$$

Como $v^s = v - v^a$, resulta que $\langle (v^s h) \cdot \tilde{\mathbf{d}}u, \mathbf{n}_F \rangle = \nu v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F} - \nu \langle v^a \cdot \tilde{\mathbf{d}}u, \mathbf{n}_F \rangle$ y las identidades del enunciado se concluyen de las igualdades

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_F \langle \tilde{\mathbf{d}}v, h \cdot \tilde{\mathbf{d}}u \rangle d\lambda &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in F} c(x,y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{x \in \delta(F^c)} \sum_{y \in \delta(F)} c(x,y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)), \\ \int_{\delta(F)} \langle v^a \cdot \tilde{\mathbf{d}}u, \mathbf{n}_F \rangle d\nu &= \frac{1}{2} \sum_{y \in \delta(F^c)} \sum_{x \in \delta(F)} c(x,y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \delta(F^c)} \sum_{y \in \delta(F)} c(x,y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) \\ &= - \int_{\delta(F^c)} \langle v^a \cdot \tilde{\mathbf{d}}u, \mathbf{n}_F \rangle d\nu. \blacksquare \end{aligned}$$

Es importante destacar que en las dos identidades obtenidas en la proposición anterior sólo intervienen los valores de las funciones u y v en los puntos de \bar{F} y por tanto se puede suponer que $u, v \in \mathcal{C}(\bar{F})$.

Cuando Γ es una variedad simple, las dos identidades obtenidas corresponden a las desarrolladas en [5] y [40], respectivamente. Además, la expresión de la fórmula de Green que aparece en [27], corresponde exactamente a tomar la métrica canónica y el conjunto $\overset{\circ}{F}$ en la segunda igualdad de la proposición. Por otra parte, aunque ambas igualdades pueden ser consideradas como versiones discretas de la Primera Identidad de Green, a nuestro juicio es la primera de ellas la que se ajusta con más fidelidad al caso continuo. Observemos que en ambas identidades parece lógico asimilar F a un abierto del continuo por lo que las expresiones obtenidas sugieren dos versiones para su frontera: $\delta(F^c)$ y la frontera de vértices $\delta(F)$. El hecho de que $\delta(F^c) \subset F$ mientras que $F \cap \delta(F) = \emptyset$, es ya un indicio de que la versión que involucra a F, \bar{F} y $\delta(F)$ se corresponde de forma más idónea con el caso continuo. Además, la propia definición del campo normal a F y de derivada normal de una función también sugieren que ésta es la interpretación más adecuada, pues si $x \in \delta(F)$ para cada $e \in \partial(F)$, el vector $\mathbf{n}_F(x, e)$ denota una dirección de salida desde F y $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F}(x)$ tiene en cuenta todos los valores que toma u en un entorno de x contenido en F , mientras que si $x \in \delta(F^c)$, $\mathbf{n}_F(x, e)$ denota una dirección hacia F^c y $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F}(x)$ no tiene en cuenta más valor de u sobre F que el

que toma en el punto x , lo que implica que si $u \in \mathcal{C}(F)$, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F}(x)$ es un término de orden 0. Por último, teniendo como objetivo el análisis de problemas de contorno, que será abordado en el siguiente capítulo, comprobaremos a continuación que la versión de la identidad de Green que involucra a \bar{F} y a $\delta(F)$ permitirá integrar la derivada normal en una formulación compacta, lo que conducirá a un tratamiento más operativo de los problemas de contorno.

Fijados $F \subset V$ y $\bar{\Gamma}(F)$, la subvariedad adherencia determinada por F , consideraremos la restricción de la métrica \mathbf{B} a dicha variedad y de las medidas μ y ν a \bar{F} . Por abuso de notación seguiremos denotando tales restricciones por \mathbf{B} , μ y ν respectivamente. Si $\bar{\Delta}$ es el operador de Laplace determinado por \mathbf{B} , μ y ν sobre $\bar{\Gamma}(F)$ y $b \in \mathcal{C}(\bar{F} \times \bar{F})$ es la función definida en la proposición anterior, resulta que para cada $u \in \mathcal{C}(\bar{F})$ y cada $x \in \bar{F}$

$$(\bar{\Delta}u)(x) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in \bar{F}} b(x, y) (u(y) - u(x)) = \begin{cases} (\Delta u)(x), & \text{si } x \in F; \\ - \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F} \right) (x), & \text{si } x \in \delta(F). \end{cases}$$

Con esta identidad, la primera igualdad de la Proposición 3.3.1 se reduce a la Identidad de Green de la Proposición 2.2.13 aplicada sobre la variedad $\bar{\Gamma}(F)$, es decir a

$$\int_{\bar{F}} u \bar{\Delta} v \, d\nu = -\frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) \, d(\lambda \times \lambda)(x, y)$$

y el Teorema de Gauss a la propiedad (iii) de la Proposición 2.2.13 aplicada sobre $\bar{\Gamma}(F)$, es decir a $\int_{\bar{F}} (\bar{\Delta}u) \, d\nu = 0$.

Consideremos ahora $\Gamma(F)$ la variedad generada por F y denotemos nuevamente por \mathbf{B} , μ y ν a las restricciones de la métrica \mathbf{B} y de las medidas μ y ν sobre ella. Si denotamos por Δ_F al operador de Laplace determinado por \mathbf{B} , μ y ν sobre $\Gamma(F)$, resulta que para cada $u \in \mathcal{C}(\bar{F})$ y cada $x \in F$,

$$(\Delta_F u)(x) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in F} c(x, y) (u(y) - u(x)) = (\Delta u)(x) - \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \overset{\circ}{F} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F} \right) (x), & \text{si } x \in \delta(F^c). \end{cases}$$

Análogamente al caso anterior, la segunda igualdad de la Proposición 3.3.1 se reduce a la Identidad de Green de la Proposición 2.2.13 aplicada sobre la variedad $\Gamma(F)$, es decir a

$$\int_F u \Delta_F v \, d\nu = -\frac{1}{2} \int_{F \times F} c(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) \, d(\lambda \times \lambda)(x, y)$$

y el Teorema de Gauss a la propiedad (iii) de la Proposición 2.2.13 aplicada sobre $\Gamma(F)$, es decir a $\int_F (\Delta_F u) \, d\nu = 0$, donde además debe tenerse en cuenta que se verifica que

$$\int_F v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F} \, d\nu = \int_{\delta(F^c)} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F} \, d\nu$$

ya que $\text{sop} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_F} \right) \subset \delta(F^c) \cup \delta(F)$.

Por otra parte, si en lugar de considerar $\bar{\Gamma}(F)$, consideramos la subvariedad generada por \bar{F} , la primera expresión de la Proposición 3.3.1 quedaría alterada por la introducción de un sumando correspondiente a los valores $c(x, y)$, $x, y \in \delta(F)$, lo que permitirá introducir en las identidades de Green términos que correspondan a *variaciones tangenciales* de las funciones. Concretamente, si consideramos el campo (no tangencial) $\mathbf{w} = \mathbf{n}_F + \frac{1}{\nu} \cdot (\mu a)^s \cdot \mathbf{t}_F$, tenemos la igualdad

$$\begin{aligned} - \int_F v(\Delta u) d\nu &= \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &\quad - \int_{\delta(F)} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{w}} d\nu. \end{aligned}$$

En definitiva, de las dos versiones discretas de la Primera Identidad de Green que aparecen en la Proposición 3.3.1, la primera de ellas puede ser obtenida mediante la Primera Identidad de Green aplicada a la totalidad de una nueva variedad. En otras palabras, la primera identidad de Green del caso discreto para una “variedad con frontera” aparece como un caso particular de la primera identidad de Green para una “variedad sin frontera”. Este punto de vista es también el adoptado en [5] y en los trabajos de Chung y Yau (principalmente en [15] y [17]) y será seguido en el resto de esta memoria. Así, nuestro próximo objetivo será extender la primera identidad de la Proposición 3.3.1 al caso general, es decir para métricas no ortogonales, para lo cual será preciso generalizar la técnica que permite obtener tales identidades desde la primera identidad de Green aplicada a cierta variedad sin frontera. Para determinar dicha variedad, necesitaremos conocer como se comporta el operador de Laplace cuando se aplica a funciones cuyo soporte es la adherencia de un conjunto dado. Concretamente, sea $c \in \mathcal{C}(V \times V)$ la función coeficiente de la estructura Riemanniana (\mathbf{B}, μ) , es decir la dada por $c(x, x) = 0$ y por

$$\begin{aligned} c(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{z \in V} \left[\# a(x, y, z) \kappa(x, y) \kappa(x, z) \mu(x) + \# a(y, x, z) \kappa(y, x) \kappa(y, z) \mu(y) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{z \in V} \# a(z, x, y) \kappa(z, x) \kappa(z, y) \mu(z), \quad \text{si } x \neq y \end{aligned}$$

y supongamos que F es un subconjunto no vacío de V . Si $x \in F$, es fácil comprobar que si $y_1 \in F$, $y_2 \in \delta(F)$ e $y_3 \in \delta(\bar{F})$ se satisfacen las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
 c(x, y_1) &= \frac{1}{2} \sum_{z \in \bar{F}} \left[\# a(x, y_1, z) \kappa(x, y_1) \kappa(x, z) \mu(x) + \# a(y_1, x, z) \kappa(y_1, x) \kappa(y_1, z) \mu(y_1) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{z \in \bar{F}} \# a(z, x, y_1) \kappa(z, x) \kappa(z, y_1) \mu(z); \\
 c(x, y_2) &= \frac{1}{2} \sum_{z \in \bar{F}} \left[\# a(x, y_2, z) \kappa(x, y_2) \kappa(x, z) \mu(x) + \# a(y_2, x, z) \kappa(y_2, x) \kappa(y_2, z) \mu(y_2) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{z \in \bar{F}} \# a(z, x, y_2) \kappa(z, x) \kappa(z, y_2) \mu(z) + \frac{1}{2} \sum_{z \in \delta(\bar{F})} \# a(y_2, x, z) \kappa(y_2, x) \kappa(y_2, z) \mu(y_2); \\
 c(x, y_3) &= -\frac{1}{2} \sum_{z \in \delta(F)} \# a(z, x, y_3) \kappa(z, x) \kappa(z, y_3) \mu(z).
 \end{aligned}$$

Por otra parte, si $u \in \mathcal{C}(V)$, de la expresión de Δu , obtenemos que para cada $x \in F$

$$\begin{aligned}
 (\Delta u)(x) &= \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in V} c(x, y) (u(y) - u(x)) \\
 &= \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in \bar{F}} c(x, y) (u(y) - u(x)) + \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in \delta(\bar{F})} c(x, y) (u(y) - u(x)).
 \end{aligned}$$

Consideremos ahora la función $q_F \in \mathcal{C}(F)$ dada por

$$q_F(x) = \sum_{y \in \delta(\bar{F})} c(x, y) = -\frac{1}{2} \sum_{y \in \delta(\bar{F})} \sum_{z \in \delta(F)} \# a(z, x, y) \kappa(z, x) \kappa(z, y) \mu(z), \quad x \in F.$$

Entonces, si $u \in \mathcal{C}(\bar{F})$, para cada $x \in F$ tenemos que

$$(\Delta u)(x) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in \bar{F}} c(x, y) (u(y) - u(x)) - \frac{1}{\nu(x)} q_F(x) u(x). \quad (3.2)$$

Podemos observar que si $u \in \mathcal{C}(\bar{F})$, en la expresión de la restricción de Δu a F dada en (3.2), aparecen dos términos de distinta naturaleza. El primero de ellos, que podríamos denominar *la parte principal*, tiene un aspecto semejante al del propio Laplaciano de u e involucra todos valores de c en F y $\delta(F)$, mientras que el segundo, que podríamos interpretarlo como un término complementario de *orden cero*, corresponde a conexiones de F con $\text{Ext}(F)$. Por otra parte, la simetría de la función c permite desarrollar los conceptos expuestos al final de la Sección 1.1 y considerar Γ_c la variedad generada por c y para cada $F \subset V$ los conjuntos $\delta_c(F)$, $\text{ad}_c(F)$, $\partial_c(F)$ y la subvariedad de Γ_c , $\bar{\Gamma}_c(F)$. Con estas notaciones, (3.2) queda expresado como

$$(\Delta u)(x) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in \text{ad}_c(F)} c(x, y) (u(y) - u(x)) - \frac{1}{\nu(x)} q_F(x) u(x), \quad (3.3)$$

para cada $x \in F$.

Nuestro próximo objetivo será demostrar que, bajo ciertas hipótesis, la parte principal de (3.2) puede a su vez considerarse como la actuación de un Laplaciano relativo a una métrica ortogonal construída sobre una subvariedad ajustada al conjunto F . Esto motiva la introducción de los siguientes conceptos.

Definición 3.3.2 Supongamos que c es no negativa sobre $F \times \bar{F}$. Diremos que la estructura métrica (\mathbf{B}, μ) es *semi-compatible* o *compatible* sobre F si la función c es semi-compatible o compatible con F , respectivamente.

Es claro que las propiedades anteriores tienen carácter *hereditario* en el sentido de que si se satisfacen para F también son ciertas en cada subconjunto de F .

Antes de continuar, mostraremos que estas nociones incluyen una amplia gama de situaciones y, en particular, el caso en el que la métrica \mathbf{B} es ortogonal. Recordemos que si \mathbf{D} denota al campo de matrices cuya función componente es κ , entonces la métrica $\# \mathbf{B}^{-1}$ inducida sobre $\Gamma^\#$ tiene como campo de matrices asociado $\mathbf{D} \# \mathbf{A} \mathbf{D}$.

Proposición 3.3.3 *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

- i) Si para cada $x \in \bar{F}$, $\# \mathbf{A}(x)$ es una Z -matriz, entonces para cada $x \in F$ y cada $y \in V$ tales que $d(x, y) = 2$, se tiene que $c(x, y) \geq 0$. En particular, $q_F \geq 0$.
- ii) Si para cada $x \in \bar{F}$, $\mathbf{D}(x) \# \mathbf{A}(x) \mathbf{D}(x)$ es una matriz de Stieltjes diagonalmente dominante, entonces c es no negativa sobre $F \times \bar{F}$.
- iii) Si para cada $x \in \bar{F}$, $\mathbf{D}(x) \# \mathbf{A}(x) \mathbf{D}(x)$ es una matriz de Stieltjes diagonalmente dominante de forma estricta, entonces (\mathbf{B}, μ) es semi-compatible sobre F .
- iv) Si para cada $x \in \bar{F}$, $\mathbf{B}(x)$ es ortogonal, entonces (\mathbf{B}, μ) es compatible sobre F y además $q_F = 0$.

Demostración. Si $x, y \in V$ son tales que $x \in F$ y $d(x, y) = 2$, necesariamente

$$c(x, y) = -\frac{1}{2} \sum_{z \in V} \# a(z, x, y) \kappa(z, x) \kappa(z, y) \mu(z) = -\frac{1}{2} \sum_{z \in \bar{F}} \# a(z, x, y) \kappa(z, x) \kappa(z, y) \mu(z),$$

que cuando $y \in \delta(\bar{F})$ se reduce a

$$c(x, y) = -\frac{1}{2} \sum_{z \in \delta(F)} \# a(z, x, y) \kappa(z, x) \kappa(z, y) \mu(z).$$

En cualquier caso, como $x \neq y$ y $\# \mathbf{A}(z)$ es Z -matriz para cada $z \in \bar{F}$, tenemos que $\# a(z, x, y) \kappa(z, x) \kappa(z, y) \leq 0$ y por tanto $c(x, y) \geq 0$. En particular, $q_F \geq 0$ pues cada sumando que interviene en la construcción de q_F es no negativo.

Supongamos ahora que $x \in F$ e $y \in V$ son tales que $d(x, y) = 1$. Entonces, $\#a(z, x, y) = 0$ si $z \notin \bar{F}$ y por tanto,

$$\begin{aligned} c(x, y) &= \frac{\mu(x)}{2} \sum_{z \in V} \#a(x, y, z) \kappa(x, y) \kappa(x, z) + \frac{\mu(y)}{2} \sum_{z \in V} \#a(y, x, z) \kappa(y, x) \kappa(y, z) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{z \in \bar{F}} \#a(z, x, y) \kappa(z, x) \kappa(z, y) \mu(z). \end{aligned}$$

Ahora bien, como $x \neq y$, para cada $z \in \bar{F}$, $\#a(z, x, y) \leq 0$ el tercer sumando en la expresión anterior es no negativo y como por otra parte

$$\sum_{z \in V} \#a(x, y, z) \kappa(x, y) \kappa(x, z) \quad \text{y} \quad \sum_{z \in V} \#a(y, x, z) \kappa(y, x) \kappa(y, z)$$

corresponden a la suma de la filas y -ésima y x -ésima de $D(x)\#A(x)D(x)$ y $D(y)\#A(y)D(y)$ respectivamente, y ambas son Z -matrices y diagonalmente dominantes, resulta que los dos primeros sumandos son no negativos y estrictamente positivos en el caso en el que $D(x)\#A(x)D(x)$ y $D(y)\#A(y)D(y)$ sean diagonalmente dominantes de forma estricta.

Por último, si para cada $x \in \bar{F}$, $B(x)$ es ortogonal, entonces $c(x, y) = 0$ cuando $x \in F$ e $y \in \delta(\bar{F})$ lo que implica que $q_F = 0$. Además, si identificamos a con un elemento de $\mathcal{C}(\Gamma)$, entonces para cada $(x, y) \in F \times \bar{F}$, se tiene que

$$c(x, y) = \frac{1}{2} \kappa(x, y) [\mu(x) a^\#(x, y) + \mu(y) a^\#(y, x)],$$

lo que implica que c es no negativa sobre $F \times \bar{F}$ y compatible con F . ■

Obsérvese que como para cada $x \in V$, $D(x)\#A(x)D(x)$ es simétrica y definida positiva, entonces es una matriz de Stieltjes sii es una Z -matriz y además esto ocurre sii $\#A(x)$ es una Z -matriz.

Por otra parte, en virtud del resultado de la Proposición 1.3.20, para que se satisfagan las condiciones (i), (ii) o (iii) de la proposición anterior es suficiente que se satisfaga que A es un campo de Stieltjes, un campo de Stieltjes diagonalmente dominante o un campo de Stieltjes diagonalmente dominante de forma estricta sobre \bar{F} , respectivamente.

Definición 3.3.4 Sea $F \subset V$, denominaremos *campo conormal a F , respecto de la estructura métrica (B, μ)* o simplemente *campo conormal a F* a $\eta_F \in \mathcal{X}(\Gamma_c)$ cuya función componente está dada por la expresión

$$\eta_F(x, y) = \frac{1}{\nu(x)} \begin{cases} -c(x, y), & \text{si } (x, y) \in \delta_c(F) \times F, \\ c(x, y), & \text{si } (x, y) \in F \times \delta_c(F), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Diremos que un campo vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{X}(\Gamma_c)$ es *oblícuo* o *no tangencial a F* , respecto de la estructura métrica (\mathbf{B}, μ) o simplemente *oblícuo* o *no tangencial a F* , si existe $p \in \mathcal{C}^+(\delta_c(F) \times \delta_c(F))$ tal que p es simétrica y $\mathbf{v} = \boldsymbol{\eta}_F - \frac{1}{\nu} \cdot p \cdot \mathbf{t}_c$, donde \mathbf{t}_c denota el campo característico en Γ_c .

Denominaremos *operador derivada conormal respecto de la estructura métrica (\mathbf{B}, μ)* , o simplemente *operador derivada conormal a $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}_F}$* . Si $\mathbf{v} \in \mathcal{X}(\Gamma_c)$ es no tangencial, denominaremos *operador derivada oblícuo, respecto de la estructura métrica (\mathbf{B}, μ)* o simplemente *operador derivada oblícuo a $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$* .

Si $u \in \mathcal{C}(\bar{F})$ y $\mathbf{v} \in \mathcal{X}(\Gamma_c)$ es oblícuo, las funciones $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}_F}$ y $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}$ serán denominadas *derivada conormal de u* y *derivada oblícuo de u* , respectivamente.

Obsérvese que si \mathbf{B} es una métrica ortogonal, entonces $\Gamma_c = \Gamma^\#$ y el campo conormal a F es realmente un campo (equilibrado) sobre Γ , que además coincide con el campo que con la misma notación fue introducido después del Corolario 3.2.4.

Por otra parte, si $p \in \mathcal{C}^+(\delta_c(F) \times \delta_c(F))$ y consideramos $\mathbf{v} = \boldsymbol{\eta}_F - \frac{1}{\nu} \cdot p \cdot \mathbf{t}_c$, los operadores $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}_F}$ y $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ pueden considerarse como operadores de $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ en $\mathcal{C}(\delta_c(F))$. Además, si $u \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$, para cada $x \in \delta_c(F)$ se tiene que

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}_F} \right) (x) &= -\frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in F} c(x, y) (u(y) - u(x)); \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \right) (x) &= -\frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in F} c(x, y) (u(y) - u(x)) - \frac{1}{\nu(x)} \sum_{\substack{y \in \delta(F) \\ c(x, y) \neq 0}} p(x, y) (u(y) - u(x)). \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Proposición 3.3.5 Sean $F \subset V$, $p \in \mathcal{C}^+(\delta_c(F) \times \delta_c(F))$ simétrica y el campo no tangencial $\mathbf{v} = \boldsymbol{\eta}_F - \frac{1}{\nu} \cdot p \cdot \mathbf{t}_c$. Supongamos que c es no negativa sobre $F \times \bar{F}$ y consideremos $b \in \mathcal{C}(\bar{F} \times \bar{F})$ dada por

$$b(x, y) = \begin{cases} c(x, y), & \text{si } x, y \in F \text{ o } \{x, y\} \in \partial_c(F), \\ p(x, y), & \text{si } x, y \in \delta_c(F) \text{ y } c(x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, b es simétrica, no negativa y se satisfacen las siguientes propiedades:

i) (Primera Identidad de Green): Para cada $u, v \in \mathcal{C}(\bar{F})$,

$$\begin{aligned} - \int_F v (\Delta u) d\nu &= \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &+ \int_F q_F u v d\lambda - \int_{\delta(F)} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} d\nu. \end{aligned}$$

ii) (Segunda Identidad de Green): Para cada $u, v \in \mathcal{C}(\bar{F})$,

$$\int_F (v (\Delta u) - u (\Delta v)) d\nu = \int_{\delta(F)} \left(v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} \right) d\nu.$$

Demostración. Es claro que la Segunda Identidad de Green es consecuencia inmediata de la Primera. Para demostrar ésta, consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} V_\delta &= \{x \in \delta_c(F) : p(x, y) > 0 \text{ para algún } y \in \delta_c(F)\} \\ E_\delta &= \{\{x, y\} \in V_\delta \times V_\delta : p(x, y) > 0\} \end{aligned}$$

y también Γ_δ la variedad cuyo conjunto de vértices es V_δ y cuyo conjunto de ramas es E_δ . Observemos que si consideramos la subvariedad de $\Gamma^\#$ generada por $\delta_c(F)$, entonces Γ_δ coincide con la variedad generada por p en tal subvariedad.

Por otra parte, como c y b son simétricas, podemos considerar Γ_b y Γ_c , las variedades generadas por b y c respectivamente. Es fácil comprobar que Γ_δ y $\bar{\Gamma}_c(F)$ son subvariedades de $\bar{\Gamma}_b(F)$ y que de hecho, $\bar{\Gamma}_b(F) = \bar{\Gamma}_c(F) \cup \Gamma_\delta \leq \Gamma_c(\text{ad}_c(F))$. Además, $b \in \mathcal{C}(\bar{\Gamma}_b(F))$ y es estrictamente positiva. Por tanto, si consideramos $r = \frac{1}{b}$, podemos identificar r con la función componente de una métrica ortogonal, R , sobre $\bar{\Gamma}_b(F)$. Entonces, el Laplaciano sobre $\bar{\Gamma}_b(F)$, respecto de R , λ y ν está dado por

$$(\bar{\Delta}u)(x) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in \text{ad}_c(F)} b(x, y) (u(y) - u(x)) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in \bar{F}} b(x, y) (u(y) - u(x)),$$

para cada $u \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ y cada $x \in \text{ad}_c(F)$. Por tanto,

$$(\bar{\Delta}u)(x) = \frac{1}{\nu(x)} \begin{cases} \sum_{y \in \bar{F}} c(x, y) (u(y) - u(x)), & \text{si } x \in F; \\ \sum_{y \in F} c(x, y) (u(y) - u(x)) + \sum_{y \in \delta(F)} p(x, y) (u(y) - u(x)), & \text{si } x \in \delta_c(F). \end{cases}$$

Teniendo presentes las expresiones 3.2 y 3.4, obtenemos que

$$(\bar{\Delta}u)(x) = \begin{cases} (\Delta u)(x) + \frac{1}{\nu(x)} q_F(x) u(x), & \text{si } x \in F; \\ - \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \right) (x), & \text{si } x \in \delta_c(F). \end{cases}$$

Aplicando la Identidad de Green (Proposición 2.2.13) al Laplaciano sobre la variedad $\bar{\Gamma}_b(F)$, respecto de la métrica R y las medidas λ y ν , y teniendo en cuenta la expresión 2.7, resulta que para cada $u, v \in \mathcal{C}(\bar{F})$,

$$\begin{aligned} \int_{\text{ad}_c(F)} v(\bar{\Delta}u) d\nu &= -\frac{1}{2} \int_{\text{ad}_c(F) \times \text{ad}_c(F)} b(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y). \end{aligned}$$

Por otra parte, de la relación entre los valores de $\bar{\Delta}u$, Δu y la derivada oblícua de u , obtenemos que

$$\int_{\text{ad}_c(F)} v(\bar{\Delta}u) d\nu = \int_F v(\Delta u) d\nu + \int_F q_F v u d\lambda - \int_{\delta_c(F)} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} d\nu$$

y la Primera Identidad de Green resulta de despejar el valor de $\int_F v(\Delta u) d\nu$ en la expresión anterior. ■

Debemos observar que como el término de la izquierda en la Segunda Identidad de Green no depende del campo no tangencial escogido, el término de la derecha tampoco debe depender de éste último. De hecho, si $\mathbf{v} = \boldsymbol{\eta}_F - \frac{1}{\nu} \cdot p \cdot \mathbf{t}_c$, como

$$\begin{aligned} &\sum_{x \in \delta(F)} v(x) \sum_{y \in \delta(F)} p(x, y) (u(y) - u(x)) - \sum_{y \in \delta(F)} u(y) \sum_{x \in \delta(F)} p(x, y) (v(x) - v(y)) \\ &= \sum_{x \in \delta(F)} \sum_{y \in \delta(F)} p(x, y) [v(x)(u(y) - u(x)) - u(y)(v(x) - v(y))] \\ &= \sum_{x \in \delta(F)} v(x)u(x) \sum_{y \in \delta(F)} p(x, y) - \sum_{y \in \delta(F)} v(y)u(y) \sum_{x \in \delta(F)} p(x, y) = 0, \end{aligned}$$

resulta que

$$\int_{\delta(F)} \left(v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} \right) d\nu = \int_{\delta(F)} \left(v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}_F} - u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}_F} \right) d\nu.$$

Por otra parte, no se excluye la posibilidad de que p sea nula, en cuyo caso $\mathbf{v} = \boldsymbol{\eta}_F$ y por tanto $\bar{\Gamma}_b(F) = \bar{\Gamma}_c(F)$ y $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}_F} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}$.

Capítulo 4

Problemas de Contorno Discretos

Disponiendo del concepto de variedad Riemanniana discreta, de los operadores en diferencias sobre ellas y de las operaciones integrales que relacionan los dominios de integración con tales operadores, resulta natural plantear problemas de contorno sobre subvariedades. Los problemas abordados corresponden a los *problemas de contorno elípticos autoadjuntos de segundo orden* del caso continuo. En esta situación, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el operador diferencial es necesariamente de la forma $\mathcal{L}(u) = -\operatorname{div}(A\nabla u) + qu$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, donde A es un campo de matrices simétricas y definidas positivas, de manera que, al menos si $n \geq 3$, su parte principal puede interpretarse, salvo un factor multiplicativo, como el operador de Laplace-Beltrami relativo a una métrica sobre Ω , cuyo campo de matrices asociado tiene como inverso un múltiplo adecuado de A . Por esta razón, consideraremos operadores en diferencias cuya parte principal sea el análogo discreto del operador de Laplace-Beltrami, es decir el operador de Laplace, relativo a la estructura Riemanniana discreta. Debe observarse que en contraposición con el caso continuo, un operador en diferencias de segundo orden y autoadjunto puede contener términos de primer orden con coeficientes que no están relacionados con los de la parte principal. Sin embargo, para mantener la analogía con el caso continuo, los operadores en diferencias que consideraremos serán los de la forma $\mathcal{L} = -\Delta + q$. Las identidades de Green aplicadas a este operador, caracterizan el tipo de condiciones de contorno que pueden considerarse para que el correspondiente problema sea autoadjunto.

Los problemas de contorno aquí planteados aparecen en distintos ámbitos. Por ejemplo, en el contexto de redes eléctricas, la consideración de diferentes *aparatos o multipuertos*, conduce a una expresión de la *Ley de Ohm* que involucra una matriz de admitancias no diagonal (ver por ejemplo [13, 41, 53]), de manera que la aplicación de las *leyes de Kirchhoff* produce una ecuación en diferencias análoga a las aquí consideradas. Además, las condiciones de contorno naturales están íntimamente ligadas con los fenómenos físicos que modelan tales redes. Otro contexto en el que aparecen los problemas aquí abordados es el de variedades Riemannianas, donde las propiedades de las funciones de Green de determinados problemas de contorno relativos al esqueleto unidimensional de una triangulación de la variedad, permiten establecer criterios de clasificación de las mismas. Asimismo, la aplicación de técnicas de discretización de problemas de contorno autoadjuntos en el continuo, conduce a esquemas

en diferencias recogidos como casos particulares de la formulación que aquí se presenta. La generalidad de nuestra metodología, permite extender el cálculo formal a esquemas definidos sobre redes completamente irregulares. Además este planteamiento tiene la ventaja de ofrecer un tratamiento sistemático de las condiciones de contorno, cuestión siempre delicada en el ámbito de los esquemas en diferencias, sobre todo en redes irregulares y/o fronteras alabeadas.

4.1 Problemas de contorno autoadjuntos

En esta sección nos plantearemos la versión discreta de los problemas de contorno autoadjuntos de segundo orden relativos a operadores lineales elípticos. Los operadores en diferencias considerados serán los operadores de Laplace, respecto de estructuras Riemannianas, completados con un término de orden cero. Las condiciones de contorno consideradas serán las denominadas *condiciones naturales de contorno*, que son las que aparecen por aplicación de las Identidades de Green.

El análisis aquí realizado sigue un esquema similar al que se efectúa en los problemas de contorno elípticos del caso continuo. Para ello, es preciso asumir la hipótesis de positividad de la función coeficiente de la estructura Riemanniana, que aparece aquí sustituyendo a la condición de elipticidad uniforme del operador en el caso continuo. Esta hipótesis no sólo es necesaria para utilizar las Identidades de Green, sino que también es fundamental en el análisis de la unicidad de solución de los problemas y permite asimismo plantearlos desde el punto de vista variacional.

La diferencia más significativa de nuestro tratamiento de los problemas de contorno, respecto de los métodos del caso continuo, consiste en la incorporación de las condiciones de contorno al operador, lo que por otra parte constituye la metodología habitual en la resolución de los esquemas en diferencias. De esta manera, el análisis de un problema de contorno general se reduce al de un problema de Dirichlet o al de una ecuación de Poisson y es por ello que en el estudio de la unicidad de solución de los problemas de contorno podrán relajarse los requerimientos sobre los coeficientes de orden cero, de forma análoga a lo que ocurre en el caso continuo, donde para concluir la unicidad de solución del problema de Dirichlet no es necesario exigir la positividad del término de orden cero.

En esta sección mantendremos fijada una variedad discreta $\Gamma = (V, E, \theta)$, B una métrica sobre ella, μ y ν medidas densas, c la función coeficiente de la estructura Riemanniana y F un subconjunto no vacío de V .

Consideraremos también fijados los siguientes datos:

- Una partición, $\{F_1, F_2\}$, de $\delta_c(F)$, es decir, $F_1 \cup F_2 = \delta_c(F)$ y $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.
- Las funciones $q \in \mathcal{C}(F)$ y $h \in \mathcal{C}(F_1)$, $p \in \mathcal{C}^+(\delta_c(F) \times \delta_c(F))$.

- La función b definida como $b(x, y) = \begin{cases} c(x, y), & \text{si } x, y \in F \text{ o } \{x, y\} \in \partial_c(F), \\ p(x, y), & \text{si } x, y \in \delta_c(F) \text{ y } c(x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
- La función $q_F \in \mathcal{C}(F)$ dada por $q_F(x) = \sum_{y \in \delta(\bar{F})} c(x, y)$, $x \in F$.
- Los campos conormal y no tangencial a F , $\boldsymbol{\eta}_F$ y $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\eta}_F - \frac{1}{\nu} \cdot p \cdot \mathbf{t}_c$, respectivamente.

Denotaremos por \mathcal{L} y por \mathcal{U} a los operadores en $L(\nu)$ dados por

$$\mathcal{L}(u) = -\Delta u + \frac{1}{\nu} q u \quad \text{y por} \quad \mathcal{U}(u) = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \frac{1}{\nu} h u.$$

Observemos que se satisface que $\text{ad}_c(F) = F \cup \delta_c(F) = F \cup F_1 \cup F_2$ y que en virtud de las identidades (3.3) y (3.4), para cada $u \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ las expresiones de los anteriores operadores están dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u)(x) &= \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in \text{ad}_c(F)} c(x, y) (u(x) - u(y)) + \frac{1}{\nu(x)} (q_F(x) + q(x)) u(x), \quad \text{si } x \in F \\ \mathcal{U}(u)(x) &= \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in V} b(x, y) (u(x) - u(y)) + \frac{1}{\nu(x)} h(x) u(x), \quad \text{si } x \in F_1. \end{aligned}$$

Claramente, $\mathcal{U}(u)$ se reduce a $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ sobre F_2 . Por otra parte, si $u \in \mathcal{C}(F_2)$ el hecho de que los soportes de q y u y de h y u sean disjuntos implica que $\mathcal{L}(u) = -\Delta(u)$ y que $\mathcal{U}(u) = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}$. De hecho, $\mathcal{L}(u)(x) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in V} c(x, y) (u(x) - u(y)) = -\frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in F_2} c(x, y) u(y)$ para cada $x \in F$, mientras que si $x \in F_1$, $\mathcal{U}(u)(x) = -\frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in F_2} p(x, y) u(y)$. En particular, si $\text{sop}(p) \subset F_1 \times F_1$, $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \mathcal{U}(u) = 0$ sobre F_1 .

Obsérvese que la hipótesis $\text{sop}(p) \subset F_1 \times F_1$ implicaría evaluar derivadas tangenciales sólo entre puntos donde se evalúa la derivada conormal, mientras que la hipótesis general, $\text{sop}(p) \subset \delta_c(F) \times \delta_c(F)$, permite evaluar derivadas tangenciales en puntos de F_1 conectados con puntos de F_2 .

Un problema de contorno sobre F consiste en:

Dadas $f \in \mathcal{C}(F)$, $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$ y $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$, decidir si existe $u \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ que satisfaga

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(u)(x) &= f(x), & \text{si } x \in F, \\ \mathcal{U}(u)(x) &= g_1(x), & \text{si } x \in F_1, \\ u(x) &= g_2(x), & \text{si } x \in F_2 \end{aligned} \right\} \text{ [PC]}$$

y en caso afirmativo, encontrar tales funciones, que serán denominadas *soluciones del problema*.

Consideraremos también los problemas de contorno *homogéneo y semihomogéneos* asociados a [PC]. Estos problemas corresponden respectivamente a tomar las tres funciones dato f , g_1 y g_2 nulas y a tomar dos de ellas nulas. Denotaremos por [PH] al problema homogéneo y por [PS]₀, [PS]₁ y [PS]₂ a los problemas semihomogéneos correspondientes a tomar g_1 y g_2 nulas, f y g_2 nulas y f y g_1 nulas, respectivamente, es decir a los problemas

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(u)(x) = 0, \quad \text{si } x \in F, \\ \mathcal{U}(u)(x) = 0, \quad \text{si } x \in F_1, \\ u(x) = 0, \quad \text{si } x \in F_2 \end{array} \right\} \text{ [PH]} \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(u)(x) = f(x), \quad \text{si } x \in F, \\ \mathcal{U}(u)(x) = 0, \quad \text{si } x \in F_1, \\ u(x) = 0, \quad \text{si } x \in F_2 \end{array} \right\} \text{ [PS]}_0$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(u)(x) = 0, \quad \text{si } x \in F, \\ \mathcal{U}(u)(x) = g_1(x), \quad \text{si } x \in F_1, \\ u(x) = 0, \quad \text{si } x \in F_2 \end{array} \right\} \text{ [PS]}_1 \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(u)(x) = 0, \quad \text{si } x \in F, \\ \mathcal{U}(u)(x) = 0, \quad \text{si } x \in F_1, \\ u(x) = g_2(x), \quad \text{si } x \in F_2 \end{array} \right\} \text{ [PS]}_2$$

También, denotaremos por \mathcal{V}_H al conjunto de soluciones del problema [PH] y por K , K_0 , K_1 y K_2 a los conjuntos de soluciones de los problemas [PC], [PS]₀, [PS]₁ y [PS]₂, respectivamente. Como todos los problemas descritos son lineales, \mathcal{V}_H es un espacio vectorial y K , K_1 , K_2 y K_3 o son vacíos o bien espacios afines con variedad de direcciones dada por \mathcal{V}_H , es decir si u, u_0, u_1 y u_2 son soluciones de los problemas [PC], [PS]₀, [PS]₁ y [PS]₂, respectivamente, entonces

$$K = u + \mathcal{V}_H; \quad K_0 = u_0 + \mathcal{V}_H; \quad K_1 = u_1 + \mathcal{V}_H \quad \text{y} \quad K_2 = u_2 + \mathcal{V}_H$$

y además $u_0 + u_1 + u_2 \in K$. Por otra parte, es claro que $\mathcal{V}_H, K_0, K_1 \subset \mathcal{C}(F \cup F_1)$, mientras que si consideramos el espacio afín $K_{g_2} = \{u \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F)) : u = g_2 \text{ sobre } F_2\}$, entonces $K, K_2 \subset K_{g_2}$ y además, la variedad de direcciones de K_{g_2} es $\mathcal{C}(F \cup F_1)$, es decir se satisface la identidad $K_{g_2} = g_2 + \mathcal{C}(F \cup F_1)$.

Con la generalidad con la que ha sido formulado, el problema de contorno [PC] se denomina *Problema Mixto Dirichlet-Robin con derivada oblícua* y sumaliza diferentes tipos de problemas de contorno que aparecen en la literatura con nombre propio y que serán detallados a continuación. En la descripción que haremos asumiremos que, a menos que se especifique lo contrario, los conjuntos F_1 y F_2 son no vacíos y la función h no nula.

i) *Ecuación de Poisson*: $F_1 = F_2 = \emptyset$ y por tanto, F es una componente conexa de Γ_c .

ii) *Problema de Dirichlet*: $F_1 = \emptyset$.

- iii) *Problema de Robin:* $F_2 = \emptyset$.
- iv) *Problema de Neumann:* $F_2 = \emptyset$ y $h \equiv 0$.
- v) *Problema Mixto Dirichlet-Neumann:* $h \equiv 0$.

La primera etapa en la resolución de [PC] consiste en reducirlo al caso en el que F es conexo como subconjunto de vértices de la variedad $\Gamma_c(F)$. Antes de comenzar el razonamiento, debemos observar que las variedades $\Gamma_c(F)$, $\bar{\Gamma}_c(F)$ y $\bar{\Gamma}_b(F)$ tienen las mismas componentes conexas. Si suponemos ahora que F tiene m componentes conexas, entonces es sencillo comprobar que las soluciones de [PC] se obtienen por *superposición* de soluciones de problemas del mismo tipo sobre cada una de las m componentes conexas. En particular, [PC] tiene solución sii cada uno de los m problemas inducidos sobre sus componentes conexas tiene solución. Además, la solución de [PC] es única sii cada uno de dichos m problemas tiene solución única.

La segunda etapa en la resolución del problema de contorno [PC] consiste en transformarlo en otro problema equivalente cuyo tratamiento es más sencillo. Concretamente utilizaremos la técnica habitual, que se demuestra mediante comprobación directa, que permite reducir la resolución del problema [PC] a otro con dato Dirichlet homogéneo.

Lema 4.1.1 *Dadas las funciones $f \in \mathcal{C}(F)$, $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$ y $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$, el problema de contorno [PC] es equivalente al problema de contorno consistente en decidir si existe una función $u \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$ que satisfaga*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(u)(x) &= f(x) + \Delta(g_2)(x), & \text{si } x \in F, \\ \mathcal{U}(u)(x) &= g_1(x) - \frac{\partial g_2}{\partial \nu}(x), & \text{si } x \in F_1, \end{aligned} \right\} \text{ [PCE]}$$

en el sentido de que u es solución de [PCE] sii $u + g_2$ es solución de [PC].

Demostración. Basta observar que de hecho, el problema [PCE] es el problema

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(u)(x) &= f(x) - \mathcal{L}(g_2)(x), & \text{si } x \in F, \\ \mathcal{U}(u)(x) &= g_1(x) - \mathcal{U}(g_2)(x), & \text{si } x \in F_1, \end{aligned} \right\}$$

que claramente satisface la propiedad enunciada. ■

Para obtener resultados tanto cualitativos como cuantitativos en relación al problema [PC], o su equivalente [PCE], será necesario establecer las hipótesis suficientes que permitan aplicar los teoremas integrales establecidos en el capítulo precedente. En definitiva, en el resto de la sección supondremos que se verifican las dos hipótesis siguientes:

- [H1] F es conexo como subconjunto de vértices de la variedad $\Gamma_c(F)$

[H2] La función c es no negativa sobre $F \times \bar{F}$.

y además tendremos presente la siguiente consideración

[C] El espacio vectorial $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ y todos sus subespacios vectoriales son a su vez, subespacios de $\mathbf{L}(\nu)$ y por tanto están dotados del producto interno inducido por este último.

La hipótesis [H2] permite aplicar las identidades de Green a las funciones del espacio $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$. Concretamente, con la nomenclatura introducida, la Primera y Segunda Identidades de Green se expresan como

$$\begin{aligned} \int_F v \mathcal{L}(u) d\nu &= \frac{1}{2} \int_{\text{ad}_c(F) \times \text{ad}_c(F)} b(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &+ \int_F (q_F + q) u v d\lambda + \int_{F_1} h u v d\lambda - \int_{F_1 \cup F_2} v \mathcal{U}(u) d\nu. \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\int_F (v \mathcal{L}(u) - u \mathcal{L}(v)) d\nu = \int_{F_1 \cup F_2} (u \mathcal{U}(v) - v \mathcal{U}(u)) d\nu.$$

Por otra parte, asumiendo [C], todas las situaciones en las que se consideren nociones tales como subespacios ortogonales, operadores adjuntos, etc., estarán referidas a considerar en el espacio de funciones que corresponda el producto interno $\int_{\text{ad}_c(F)} u v d\nu$.

Los siguientes resultados utilizarán las versiones que acabamos de obtener de las identidades de Green para concluir propiedades de simetría de los problemas de contorno.

Proposición 4.1.2 El operador lineal $\mathcal{F}: \mathcal{C}(F \cup F_1) \longrightarrow \mathcal{C}(F \cup F_1)$ definido por la expresión

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} \mathcal{L}(u), & \text{sobre } F, \\ \mathcal{U}(u), & \text{sobre } F_1, \end{cases}$$

es autoadjunto y además $\ker \mathcal{F} = \mathcal{V}_H$.

Demostración. Si $u, v \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$, entonces aplicando la Segunda Identidad de Green tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{F \cup F_1} v \mathcal{F}(u) d\nu &= \int_F v \mathcal{L}(u) d\nu + \int_{F_1} v \mathcal{U}(u) d\nu \\ &= \int_F u \mathcal{L}(v) d\nu + \int_{F_1} u \mathcal{U}(v) d\nu = \int_{F \cup F_1} u \mathcal{F}(v) d\nu. \end{aligned}$$

Por último, $v \in \mathcal{V}_H$ sii $\mathcal{L}(v) = 0$ sobre F , $\mathcal{U}(v) = 0$ sobre F_1 y $v = 0$ sobre F_2 , es decir, sii $v \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$ y $\mathcal{F}(v) = 0$. ■

Proposición 4.1.3 *El problema [PC] es formalmente autoadjunto, es decir,*

$$\int_F v \mathcal{L}(u) d\nu = \int_F u \mathcal{L}(v) d\nu,$$

para cada $u, v \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ tales que $\mathcal{U}(u) = \mathcal{U}(v) = 0$ sobre F_1 y $u = v = 0$ sobre F_2 .

Además, si $f \in \mathcal{C}(F)$, $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$ y $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$ la condición necesaria y suficiente para que el problema [PC] tenga solución es que f , g_1 y g_2 satisfagan que

$$\int_F f v d\nu + \int_{F_1} g_1 v d\nu = \int_{F_2} g_2 \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} d\nu, \quad \text{para cada } v \in \mathcal{V}_H$$

y en este caso existe una única $u \in K$ tal que $\int_{\text{ad}_c(F)} u v d\nu = 0$ para cada $v \in \mathcal{V}_H$.

Demostración. Si $u, v \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$, son tales que $\mathcal{U}(u) = \mathcal{U}(v) = 0$ sobre F_1 y $u = v = 0$ sobre F_2 , entonces $u, v \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$, $\mathcal{F}(u), \mathcal{F}(v) \in \mathcal{C}(F)$ y como \mathcal{F} es autoadjunto,

$$0 = \int_{F \cup F_1} (v \mathcal{F}(u) - u \mathcal{F}(v)) d\nu = \int_F (v \mathcal{F}(u) - u \mathcal{F}(v)) d\nu = \int_F (v \mathcal{L}(u) - u \mathcal{L}(v)) d\nu,$$

con lo que se concluye la demostración de la primera afirmación.

Por otra parte, aplicando el Lema 4.1.1, [PC] tiene solución sii [PCE] tiene solución. Si consideramos la función $\hat{f} \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$ dada por la expresión

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) + \Delta(g_2)(x), & \text{si } x \in F, \\ g_1(x) - \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{v}}(x), & \text{si } x \in F_1, \end{cases}$$

resulta que [PCE] tiene solución sii $\hat{f} \in \text{Im} \mathcal{F}$ y como \mathcal{F} es autoadjunto, aplicando la Alternativa de Fredholm, obtenemos que [PCE] tiene solución sii para cada $v \in \ker \mathcal{F}$, es decir para cada $v \in \mathcal{V}_H$, se verifica que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{F \cup F_1} \hat{f} v d\nu = \int_{F \cup F_1} (f + g_1) v d\nu + \int_F v \Delta(g_2) d\nu - \int_{F_1} v \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{v}} d\nu \\ &= \int_F f v d\nu + \int_{F_1} g_1 v d\nu + \int_F v \Delta(g_2) d\nu - \int_{F_1} v \mathcal{U}(g_2) d\nu. \end{aligned}$$

Aplicando ahora la versión (4.1) de la Segunda Identidad de Green, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_F v \Delta(g_2) d\nu &= - \int_F v \mathcal{L}(g_2) d\nu = - \int_F g_2 \mathcal{L}(v) d\nu \\ &+ \int_{F_1 \cup F_2} (v \mathcal{U}(g_2) - g_2 \mathcal{U}(v)) d\nu = \int_{F_1} v \mathcal{U}(g_2) d\nu - \int_{F_2} g_2 \mathcal{U}(v) d\nu, \end{aligned}$$

donde se ha tenido presente que $v \in \mathcal{V}_H$.

Es claro que si consideramos $(\ker \mathcal{F})^\perp$, el subespacio de $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ ortogonal a $\ker \mathcal{F}$, se tiene la descomposición $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F)) = \ker \mathcal{F} \oplus (\ker \mathcal{F})^\perp$ y por tanto, para cada $u \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$, $u = u_0 + u_1$ con $u_0 \in \ker \mathcal{F}$ y $u_1 \in (\ker \mathcal{F})^\perp$. Ahora, si $u \in K$, como $u_1 = u - u_0$, necesariamente $u_1 \in K$ con lo que para concluir basta demostrar que u_1 es la única solución de [PC] en $(\ker \mathcal{F})^\perp$. Para ello, supongamos que \hat{u} verifica también esta propiedad y tomemos $u_1 - \hat{u}$. Como $u_1 - \hat{u} \in \mathcal{V}_H \cap (\ker \mathcal{F})^\perp = \ker \mathcal{F} \cap (\ker \mathcal{F})^\perp = \{0\}$, resulta que $u_1 = \hat{u}$. ■

Es importante observar que el operador \mathcal{F} considera simultáneamente el operador \mathcal{L} y la condición de contorno de tipo Robin, \mathcal{U} . De hecho, como veremos a continuación, \mathcal{F} puede interpretarse en términos de un operador de Laplace sobre una variedad convenientemente escogida. Concretamente, consideremos la variedad $\bar{\Gamma}_b(F)$ y sobre ella la métrica ortogonal determinada por $\frac{1}{b}$, que tiene sentido ya que la hipótesis [H2] implica que b es no negativa, tal y como se define en la demostración de la Proposición 3.3.5. Además, si denotamos por $\bar{\Delta}$ al laplaciano determinado por tal métrica y por las medidas ν y μ , en dicha demostración también se concluye que si $u \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$, entonces

$$-\bar{\Delta}(u)(x) = \begin{cases} -\Delta(u)(x) - \frac{1}{\nu(x)} q_F(x) u(x) & \text{si } x \in F, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}\right)(x) & \text{si } x \in F_1. \end{cases}$$

Por tanto, si consideramos las funciones $\bar{q} = q_F + q + h$, $\bar{f} = f + g_1$ y el operador $\bar{\mathcal{L}}: \mathcal{C}(\text{ad}_c(F)) \rightarrow \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ determinado por la expresión

$$\bar{\mathcal{L}}(u) = -\bar{\Delta}(u) + \frac{1}{\nu} \bar{q} u,$$

resulta que el problema [PC] se reescribe en la forma

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(u)(x) &= \bar{f}(x), & \text{si } x \in F \cup F_1, \\ u(x) &= g_2(x), & \text{si } x \in F_2 \end{aligned} \right\} \overline{[\text{PC}]}$$

y el problema [PCE] lo hace en la forma

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(u)(x) &= \bar{f}(x) + \Delta(g_2)(x), & \text{si } x \in F \cup F_1, \\ u(x) &= 0, & \text{si } x \in F_2 \end{aligned} \right\} \overline{[\text{PCE}]}$$

donde se ha utilizado que $-\bar{\mathcal{L}}(g_2) = \bar{\Delta}(g_2) = \Delta(g_2)$. Si tenemos en cuenta que en la variedad $\bar{\Gamma}_b(F)$ la frontera de vértices de $F \cup F_1$ coincide con F_2 , resulta que sobre $\bar{\Gamma}_b(F)$, el problema $\overline{[\text{PC}]}$ no es más que un problema del tipo de los descritos al comienzo de la sección, concretamente una ecuación de Poisson o un problema de Dirichlet, dependiendo de si F_2 es vacío o no. Por tanto, pueden aplicarse los resultados obtenidos relativos al problema [PC] y en particular la Proposición 4.1.3. Esta situación la podemos sumarizar como sigue:

Proposición 4.1.4 *Todo problema Mixto Dirichlet-Robin puede interpretarse como un problema de Dirichlet en la variedad $\bar{\Gamma}_b(F)$, mientras todo problema de Robin puede interpretarse como una ecuación de Poisson sobre $\bar{\Gamma}_b(F)$.*

El siguiente resultado será de utilidad para establecer la existencia y unicidad de solución de los problemas semihomogéneos. Concretamente obtendremos condiciones sobre las funciones que determinan las partes de orden cero de los operadores en diferencias para que el problema homogéneo o bien tenga como única solución la trivial, o bien posea soluciones positivas.

Proposición 4.1.5 *Consideremos $\sigma \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in \text{ad}_c(F)$ y las funciones $q_\sigma \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ y $h_\sigma \in \mathcal{C}(F_1)$ definidas por las expresiones*

$$q_\sigma(x) = \frac{\nu(x)}{\sigma(x)} \Delta\sigma(x), \quad x \in F, \quad \text{y} \quad h_\sigma(x) = -\frac{\nu(x)}{\sigma(x)} \frac{\partial\sigma}{\partial\nu}(x), \quad x \in F_1.$$

Se satisfacen las siguientes propiedades:

- i) Si $\delta_c(F) \neq \emptyset$ y $h \geq h_\sigma$, entonces $\mathcal{C}(\delta_c(F)) \cap \mathcal{V}_H = \{0\}$.*
- ii) Si $q \geq q_\sigma$, entonces $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H = \{0\}$ a menos que $\delta_c(F) = \emptyset$ y $q = q_\sigma$ simultáneamente, en cuyo caso $\mathcal{V}_H = \{a\sigma : a \in \mathbb{R}\}$.*
- iii) Si $q \geq q_\sigma$ y $h \geq h_\sigma$, entonces $\mathcal{V}_H = \{0\}$ a menos que se satisfaga simultáneamente que $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$, en cuyo caso $\mathcal{V}_H = \{a\sigma : a \in \mathbb{R}\}$.*

Demostración. Comenzamos observando que si $u \in \mathcal{V}_H$, aplicando la versión 4.1 de la Primera Identidad de Green al caso $u = v$, resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) (u(y) - u(x))^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) + \int_F (q_F + q) u^2 d\lambda + \int_{F_1} h u^2 d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) (u(y) - u(x))^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &\quad + \int_F (q_F + q - q_\sigma) u^2 d\lambda + \int_{F_1} (h - h_\sigma) u^2 d\lambda + \int_F q_\sigma u^2 d\lambda + \int_{F_1} h_\sigma u^2 d\lambda. \end{aligned}$$

Por otra parte, aplicando la Primera Identidad de Green, resulta que

$$\begin{aligned} \int_F q_\sigma u^2 d\lambda &= \int_F \frac{u^2}{\sigma} \Delta\sigma d\nu = - \int_F q_F u^2 d\lambda + \int_{F_1} \frac{u^2}{\sigma} \frac{\partial\sigma}{\partial\nu} d\nu \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) (\sigma(y) - \sigma(x)) \left(\frac{u^2(y)}{\sigma(y)} - \frac{u^2(x)}{\sigma(x)} \right) d(\lambda \times \lambda)(x, y) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la identidad

$$\left(u(x) - u(y)\right)^2 - \left(\sigma(y) - \sigma(x)\right) \left(\frac{u^2(y)}{\sigma(y)} - \frac{u^2(x)}{\sigma(x)}\right) = \sigma(x) \sigma(y) \left(\frac{u(y)}{\sigma(y)} - \frac{u(x)}{\sigma(x)}\right)^2,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) \sigma(x) \sigma(y) \left(\frac{u(y)}{\sigma(y)} - \frac{u(x)}{\sigma(x)}\right)^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &+ \int_F (q - q_\sigma) u^2 d\lambda + \int_{F_1} (h - h_\sigma) u^2 d\lambda. \end{aligned} \quad (4.2)$$

(i) Si $u \in \mathcal{C}(\delta_c(F))$, la expresión (4.2) se reduce a

$$0 = \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) \sigma(x) \sigma(y) \left(\frac{u(y)}{\sigma(y)} - \frac{u(x)}{\sigma(x)}\right)^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) + \int_{F_1} (h - h_\sigma) u^2 d\nu$$

y como $h \geq h_\sigma$, los dos sumandos deben ser nulos, lo que implica que $\frac{u}{\sigma}$ es constante en $\text{ad}_c(F)$ y como u se anula sobre F , necesariamente $u = 0$.

(ii) En este caso, tenemos que

$$0 = \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) \sigma(x) \sigma(y) \left(\frac{u(y)}{\sigma(y)} - \frac{u(x)}{\sigma(x)}\right)^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) + \int_F (q - q_\sigma) u^2 d\nu$$

lo que implica que ambos sumandos son nulos. La anulaci3n del primero implica que $u = a \sigma$ con $a \in \mathbb{R}$ y la del segundo que $a^2 (q - q_\sigma) = 0$ sobre F . Por tanto, $a = 0$ a menos que $\delta_c(F) = \emptyset$ y $q = q_\sigma$ simult3neamente.

(iii) En este caso, todos los sumandos que aparecen en la expresi3n (4.2) son nulos. Nuevamente, la anulaci3n del primer sumando implica que $u = a \sigma$ con $a \in \mathbb{R}$, mientras que la anulaci3n de los otros dos implica que $a^2 (h - h_\sigma) = 0$ y que $a^2 (q - q_\sigma) = 0$. Si $F_2 \neq \emptyset$, entonces como u se anula en F_2 , a debe ser nula. Finalmente, si $F_2 = \emptyset$ y o bien $q \neq q_\sigma$ o bien $h \neq h_\sigma$, las dos 3ltimas identidades implican que $a = 0$. ■

Los valores de las funciones q_σ y h_σ definidas en la proposici3n anterior, est3n dados respectivamente por

$$\begin{aligned} q_\sigma(x) &= \frac{1}{\sigma(x)} \sum_{y \in \bar{F}} c(x, y) (\sigma(y) - \sigma(x)) - q_F(x), & x \in F, \\ h_\sigma(x) &= \frac{1}{\sigma(x)} \left[\sum_{y \in F} c(x, y) (\sigma(y) - \sigma(x)) + \sum_{\substack{y \in \delta_c(F) \\ c(x, y) \neq 0}} p(x, y) (\sigma(y) - \sigma(x)) \right], & x \in F_1. \end{aligned}$$

En particular, cuando σ es constante, tenemos que $q_\sigma = -q_F$ y $h_\sigma = 0$. Además, a la vista de las expresiones anteriores, concluimos que en la formulación de la proposición anterior es fundamental la hipótesis de positividad de σ pero no lo es la de que $\sigma \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ o más generalmente que $\sigma \in \mathcal{C}(\bar{F})$. Si por ejemplo, $\sigma \in \mathcal{C}(V)$ la definición de h_σ quedaría inalterada, mientras que la de q_σ debería cambiarse a $q_\sigma(x) = \frac{\nu(x)}{\sigma(x)} \Delta\sigma|_{\bar{F}}(x)$, $x \in F$ para obtener así la expresión anterior.

Por otra parte, la definición de h_σ depende de los valores de las derivadas tangenciales de σ . Podría sustituirse esta definición por la de

$$\hat{h}_\sigma(x) = -\frac{\nu(x)}{\sigma(x)} \frac{\partial\sigma}{\partial\boldsymbol{\eta}_F}(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \sum_{y \in F} c(x, y) (\sigma(y) - \sigma(x)), \quad x \in F_1,$$

que es independiante de los valores de las derivadas tangenciales. En este caso, el sumando $\int_{F_1} (h - h_\sigma) u^2 d\lambda$ de (4.2) se transforma en

$$\begin{aligned} \int_{F_1} (h - h_\sigma) u^2 d\lambda &= \int_{F_1} (h - \hat{h}_\sigma) u^2 d\lambda + \int_{F_1} (\hat{h}_\sigma - h_\sigma) u^2 d\lambda = \int_{F_1} (h - \hat{h}_\sigma) u^2 d\lambda \\ &+ \frac{1}{2} \int_{F_1 \times \delta_c(F)} p(x, y) \frac{u^2(x)}{\sigma(x)} (\sigma(x) - \sigma(y)) d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{F_1 \times \delta_c(F)} p(x, y) \frac{u^2(y)}{\sigma(y)} (\sigma(y) - \sigma(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{F_1 \times \delta_c(F)} p(x, y) (\sigma(y) - \sigma(x)) \left(\frac{u^2(y)}{\sigma(y)} - \frac{u^2(x)}{\sigma(x)} \right) d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &+ \int_{F_1} (h - \hat{h}_\sigma) u^2 d\lambda. \end{aligned}$$

En definitiva, si consideramos la función $\hat{b} \in \mathcal{C}(\bar{F} \times \bar{F})$ definida por

$$\hat{b}(x, y) = \begin{cases} b(x, y), & \text{si } (x, y) \notin (\delta_c(F) \times F_1) \cup (F_1 \times \delta_c(F)), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

en lugar de (4.2) tendríamos la identidad

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) \sigma(x) \sigma(y) \left(\frac{u(y)}{\sigma(y)} - \frac{u(x)}{\sigma(x)} \right)^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\
&+ \frac{1}{2} \int_{F_1 \times \delta_c(F)} p(x, y) (\sigma(y) - \sigma(x)) \left(\frac{u^2(y)}{\sigma(y)} - \frac{u^2(x)}{\sigma(x)} \right) d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\
&+ \int_F (q - q_\sigma) u^2 d\nu + \int_{F_1} (h - \hat{h}_\sigma) u^2 d\nu \\
&= \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} \hat{b}(x, y) \sigma(x) \sigma(y) \left(\frac{u(y)}{\sigma(y)} - \frac{u(x)}{\sigma(x)} \right)^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\delta_c(F) \times F_1} p(x, y) \sigma(x) \sigma(y) \left(\frac{u(y)}{\sigma(y)} - \frac{u(x)}{\sigma(x)} \right)^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\
&+ \frac{1}{2} \int_{F_1 \times \delta_c(F)} p(x, y) (u(x) - u(y))^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\
&+ \int_F (q - q_\sigma) u^2 d\nu + \int_{F_1} (h - \hat{h}_\sigma) u^2 d\nu.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

En este caso, la conclusión (i) es idéntica sustituyendo h_σ por \hat{h}_σ , mientras que las conclusiones (ii) y (iii) deben modificarse como sigue:

ii)' Si $q \geq q_\sigma$, entonces $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H = \{0\}$ a menos que se satisfaga simultáneamente que $\delta_c(F) = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $\sigma(x) = \sigma(y)$ para cada $(x, y) \in F_1 \times \delta_c(F)$ tales que $p(x, y) > 0$, en cuyo caso $\mathcal{V}_H = \{a\sigma : a \in \mathbb{R}\}$.

iii)' Si $q \geq q_\sigma$ y $h \geq \hat{h}_\sigma$, entonces $\mathcal{V}_H = \{0\}$ a menos que se satisfaga simultáneamente que $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$, $h = \hat{h}_\sigma$ y $\sigma(x) = \sigma(y)$ para cada $(x, y) \in F_1 \times \delta_c(F)$ tales que $p(x, y) > 0$, en cuyo caso $\mathcal{V}_H = \{a\sigma : a \in \mathbb{R}\}$.

Podemos utilizar la interpretación del problema de contorno [PC] como un problema de contorno sobre $\bar{\Gamma}_b(F)$ para justificar la introducción de las funciones q_σ y h_σ en la Proposición 4.1.5. Concretamente, si $u \in \mathcal{C}(\bar{F})$, entonces

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) - \frac{1}{\nu(x)} q_\sigma(x) u(x) &= \frac{1}{\sigma(x) \nu(x)} \sum_{y \in \text{ad}_c(F)} c(x, y) \sigma(x) \sigma(y) \left(\frac{u(y)}{\sigma(y)} - \frac{u(x)}{\sigma(x)} \right), \quad x \in F, \\
\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}(x) + \frac{1}{\nu(x)} h_\sigma(x) u(x) &= \frac{-1}{\sigma(x) \nu(x)} \sum_{y \in \text{ad}_c(F)} b(x, y) \sigma(x) \sigma(y) \left(\frac{u(y)}{\sigma(y)} - \frac{u(x)}{\sigma(x)} \right), \quad x \in \delta_c(F).
\end{aligned}$$

Si consideramos $\hat{b} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times \text{ad}_c(F))$ dada por $\hat{b} = (\sigma \otimes \sigma) b$ es claro que $\bar{\Gamma}_{\hat{b}}(F) = \bar{\Gamma}_b(F)$. Además, si sobre $\bar{\Gamma}_b(F)$ consideramos la métrica ortogonal \hat{R} cuya función componente es

$\hat{r} = \frac{1}{\hat{b}}$, entonces el Laplaciano asociado a esa métrica está dado por

$$\hat{\Delta}v(x) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \in \text{ad}_c(F)} \hat{b}(x, y)(v(y) - v(x)), \quad x \in \text{ad}_c(F)$$

para cada $v \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$, por lo que

$$\frac{1}{\sigma(x)} \hat{\Delta} \frac{u}{\sigma}(x) = \begin{cases} \Delta u(x) - \frac{1}{\nu(x)} q_\sigma(x) u(x), & x \in F, \\ -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{V}}(x) - \frac{1}{\nu(x)} h_\sigma(x) u(x), & x \in \delta_c(F). \end{cases}$$

Si ahora consideramos la función $\hat{q} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ y el operador $\hat{\mathcal{L}}: \mathcal{C}(\text{ad}_c(F)) \rightarrow \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ dados respectivamente por $\hat{q} = \sigma^2(q - q_\sigma + h - h_\sigma)$ y por $\hat{\mathcal{L}}(v) = -\hat{\Delta}(v) + \frac{1}{\nu} \hat{q}v$, resulta que el problema [PC] es equivalente al problema de Dirichlet o la ecuación de Poisson

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}(v)(x) &= \sigma(x) (f(x) + g_1(x)), & x \in F \cup F_1, \\ v(x) &= \frac{g_2(x)}{\sigma(x)}, & x \in F_2 \end{aligned} \right\} [\widehat{\text{PC}}]$$

en el sentido de que v es solución de $[\widehat{\text{PC}}]$ sii $u = \sigma v$ es solución de [PC] y, en particular, el conjunto de soluciones del correspondiente problema homogéneo está dado por $\frac{1}{\sigma} \mathcal{V}_H$. Además, se satisface que sobre la variedad discreta $\bar{\Gamma}_b(F)$ los laplacianos asociados a ν y a las estructuras Riemannianas (\mathbf{R}, λ) y $(\hat{\mathbf{R}}, \lambda)$ están relacionados por las identidades

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathbb{T}_{\frac{1}{\sigma}} \circ \hat{\mathcal{L}} \circ \mathbb{T}_{\frac{1}{\sigma}} \quad \text{y} \quad \hat{\mathcal{L}} = \mathbb{T}_\sigma \circ \bar{\mathcal{L}} \circ \mathbb{T}_\sigma.$$

En particular, si σ es constante, entonces $\hat{\mathcal{L}} = \sigma^2 \bar{\mathcal{L}}$.

De esta manera, $\hat{\mathcal{L}}$ aparece como el *operador normalizado* de $\bar{\mathcal{L}}$ y recíprocamente, $\bar{\mathcal{L}}$ es el operador normalizado de $\hat{\mathcal{L}}$ y por ello $[\widehat{\text{PC}}]$ será denominado *problema normalizado* del problema de contorno [PC]. Desde luego pueden obtenerse resultados de existencia y unicidad de soluciones para el problema normalizado análogos a los desarrollados para el problema [PC] o su equivalente $[\widehat{\text{PC}}]$. Esto puede hacerse directamente siguiendo un razonamiento similar al empleado en el caso del problema [PC] y utilizando ahora las identidades de Green para la variedad Riemanniana sin frontera $(\bar{\Gamma}_b(F), \mathbf{R}, \lambda)$, o bien a partir de la relación entre $\hat{\mathcal{L}}$ y $\bar{\mathcal{L}}$. De todas formas, la única situación a la que sacaremos un rendimiento específico, y por tanto la única que analizaremos explícitamente, será descrita en la siguiente proposición. La noción de Laplaciano normalizado fue introducida por Chung y Langlands en [16] y corresponde a siguiente situación:

Sobre una variedad discreta, se consideran la medida densa $\nu = \lambda$, la estructura Riemanniana (\mathbf{B}, λ) , donde \mathbf{B} es ortogonal y compatible y el laplaciano asociado, que suponemos dado por la expresión $\Delta u(x) = \sum_{y \in V} c(x, y) (u(y) - u(x))$. Entonces, si tomamos

$\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{y \in V} c(x, y)}}$, el Laplaciano normalizado asociado a Δ es $\hat{\Delta} = \mathsf{T}_\sigma \circ \Delta \circ \mathsf{T}_\sigma$, (ver también [15, 18]). Obsérvese que para la estructura Riemanniana canónica, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{k}}$, situación que en el caso de variedades simples también está descrita en [19].

En definitiva, los problemas de contorno planteados en esta sección incluyen tanto los problemas de contorno para el Laplaciano normalizado analizados en los trabajos anteriormente citados, como también los estudiados en [5, 6], todos ellos referidos a métricas ortogonales y compatibles. Como se verá en las secciones posteriores, en esta memoria extenderemos las técnicas utilizadas en dichos trabajos al caso de métricas no ortogonales, lo que en particular implicará la introducción de nuevos métodos en el tratamiento de los problemas de contorno para el Laplaciano normalizado.

Proposición 4.1.6 *Supongamos que existe $\sigma \in \mathcal{C}(\bar{F})$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in \bar{F}$, $q \geq q_\sigma$ y $h \geq h_\sigma$ y consideremos $f \in \mathcal{C}(F)$, $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$, $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$. Entonces, los problemas de contorno [PC] y su normalizado $[\widehat{\text{PC}}]$ con datos f , g_1 y g_2 tienen una única solución excepto cuando se satisface simultáneamente que $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$. En este caso, se verifican los siguientes resultados:*

- i) *El problema [PC] tiene solución sii f y g_1 verifican que $\int_F f \sigma \, d\nu + \int_{F_1} g_1 \sigma \, d\nu = 0$; la solución es única salvo adición de un múltiplo de σ ; existe una única solución u tal que $\int_{\text{ad}_c(F)} u \sigma \, d\nu = 0$, y si $F_1 \neq \emptyset$, también existen únicas soluciones u_0 y u_1 tales que $\int_F u_0 \sigma \, d\nu = \int_{F_1} u_1 \sigma \, d\nu = 0$.*
- ii) *El problema $[\widehat{\text{PC}}]$ tiene solución sii f y g_1 verifican que $\int_F f \, d\nu + \int_{F_1} g_1 \, d\nu = 0$; la solución es única salvo constante aditiva, y existe una única solución v tal que $\int_{\text{ad}_c(F)} v \, d\nu = 0$.*

Demostración. En virtud de la Proposición 4.1.5, sabemos que cuando $q \geq q_\sigma$ y $h \geq h_\sigma$, entonces $v \in \mathcal{V}_H$ sii existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $v = a \sigma$, con $a = 0$ si además no ocurre que $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$ simultáneamente. Esto implica además que el espacio de soluciones del problema homogéneo asociado a $[\widehat{\text{PC}}]$ es trivial excepto cuando $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$ simultáneamente, en cuyo caso es el conjunto de funciones constantes.

(i) Supongamos que se satisface que $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$. En este caso, la condición necesaria y suficiente de resolubilidad y la existencia de una única solución en \mathcal{V}_H^\perp se deduce de la Proposición 4.1.3 y además si u es solución del problema [PC] entonces el conjunto de todas las soluciones del problema es $K = \{u + a \sigma : a \in \mathbb{R}\}$. Por otra parte, si además $F_1 \neq \emptyset$, basta tomar $a_0 = -\left(\int_F \sigma^2 \, d\nu\right)^{-1} \int_F u \sigma \, d\nu$ y $a_1 = -\left(\int_{F_1} \sigma^2 \, d\nu\right)^{-1} \int_{F_1} u \sigma \, d\nu$ para que

$u_0 = u + a_0 \sigma$ y $u_1 = u + a_1 \sigma$ satisfagan las propiedades requeridas. Además si $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1 \in K$ satisfacen tales propiedades, entonces $u_0 - \tilde{u}_0 = b_0 \sigma$ y $u_1 - \tilde{u}_1 = b_1 \sigma$ con $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ y como $\int_F b_0 \sigma^2 d\nu = \int_{F_1} b_1 \sigma^2 d\nu = 0$, necesariamente $b_0 = b_1 = 0$.

(ii) En virtud de (i) y de la equivalencia entre los problema [PC] y $[\widehat{\text{PC}}]$, este último tiene solución para el dato $f + g_1 = \sigma \left(\frac{1}{\sigma} (f + g_1) \right)$ sii $0 = \int_{F \cup F_1} \left(\frac{1}{\sigma} (f + g_1) \right) \sigma d\nu = \int_{F \cup F_1} (f + g_1) d\nu$. Como en este caso el espacio de soluciones del problema homogéneo consiste en las funciones constantes, la solución del problema $[\widehat{\text{PC}}]$ es única salvo constante aditiva, es decir, si v es una solución, el conjunto de todas las soluciones está dado por $K = \{v + a : a \in \mathbb{R}\}$. Ahora, basta considerar $a = -\frac{1}{\nu(\text{ad}_c(F))} \int_{\text{ad}_c(F)} v d\nu$ para que $v + a$ satisfaga la propiedad requerida y es claro que es la única solución de $[\widehat{\text{PC}}]$ con esa característica. ■

A continuación abordaremos la formulación variacional del problema [PC] en el caso en el que $q \geq q_\sigma$ y $h \geq h_\sigma$, para alguna función $\sigma \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ estrictamente positiva en todo punto.

Proposición 4.1.7 (Principio de Dirichlet). *Supongamos que existe $\sigma \in \mathcal{C}(\bar{F})$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in \bar{F}$, $q \geq q_\sigma$ y $h \geq h_\sigma$ y consideremos las funciones $f \in \mathcal{C}(F)$, $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$, y $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$, el convexo $K_{g_2} = \{u \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F)) : u = g_2 \text{ sobre } F_2\}$ y el funcional cuadrático $\mathcal{J} : \mathcal{C}(\text{ad}_c(F)) \rightarrow \mathbb{R}$ determinado por la expresión*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &= \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) (u(y) - u(x))^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &+ \int_F (q_F + q) u^2 d\lambda + \int_{F_1} h u^2 d\lambda - 2 \int_F f u d\nu - 2 \int_{F_1} g_1 u d\nu. \end{aligned}$$

Entonces $u \in K_{g_2}$ es solución de [PC] sii minimiza \mathcal{J} sobre K_{g_2} .

Demostración. Observemos primero que $K_{g_2} = g_2 + \mathcal{C}(F \cup F_1)$ y que usando las misma técnicas que en la demostración de la Proposición 4.1.5, el funcional \mathcal{J} puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &= \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) \sigma(x) \sigma(y) \left(\frac{u(y)}{\sigma(y)} - \frac{u(x)}{\sigma(x)} \right)^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &+ \int_F (q - q_\sigma) u^2 d\lambda + \int_{F_1} (h - h_\sigma) u^2 d\lambda - 2 \int_F f u d\nu - 2 \int_{F_1} g_1 u d\nu. \end{aligned}$$

lo que implica, teniendo en cuenta que $q \geq q_\sigma$ y $h \geq h_\sigma$, que \mathcal{J} es convexo sobre K_{g_2} . Por tanto, $u \in K_{g_2}$ minimiza \mathcal{J} sii satisface la Identidad de Euler asociada, que en este caso se

expresa en la forma

$$\begin{aligned} \int_F f v d\nu + \int_{F_1} g_1 v d\nu &= \int_F (q_F + q) u v d\lambda + \int_{F_1} h u v d\lambda \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\bar{F} \times \bar{F}} b(x, y) (u(y) - u(x)) (v(y) - v(x)) d(\lambda \times \lambda)(x, y), \end{aligned}$$

para cada $v \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$. Utilizando ahora la versión (4.1) de la Primera Identidad de Green, obtenemos que $u \in K_{g_2}$ minimiza \mathcal{J} si satisface la denominada Identidad de Euler-Lagrange, es decir, si

$$\int_F f v d\nu + \int_{F_1} g_1 v d\nu = \int_F v \mathcal{L}(u) d\nu + \int_{F_1} v \mathcal{U}(u) d\nu,$$

para cada $v \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$. El resultado se concluye ahora aplicando la Identidad de Euler-Lagrange las funciones $v = \varepsilon_x$, $x \in F \cup F_1$, que constituyen una base del espacio vectorial $\mathcal{C}(F \cup F_1)$. ■

Obsérvese que, en virtud de la versión (4.1) de la Primera Identidad de Green, el funcional \mathcal{J} puede expresarse también como

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &= \int_F u \mathcal{L}(u) d\nu + \int_{F_1 \cup F_2} u \mathcal{U}(u) d\nu - 2 \int_F f u d\nu - 2 \int_{F_1} g_1 d\lambda \\ &= \int_{\text{ad}_c(F)} u \bar{\mathcal{L}}(u) d\nu - 2 \int_{F \cup F_1} \bar{f} u d\nu. \end{aligned}$$

Finalizaremos esta sección definiendo subespacios vectoriales de $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ en cuyos términos podremos reescribir los resultados generales de existencia establecidos en la Proposición 4.1.3, lo cual además será de utilidad en el desarrollo del resto de este trabajo.

Consideraremos los subespacios vectoriales $\mathcal{V}_F \subset \mathcal{C}(F)$, $\mathcal{V}_{F_1} \subset \mathcal{C}(F_1)$ y $\mathcal{V}_{F_2} \subset \mathcal{C}(F_2)$ definidos por las identidades

$$\mathcal{V}_F = \left\{ v|_F : v \in \mathcal{V}_H \right\}, \quad \mathcal{V}_{F_1} = \left\{ v|_{F_1} : v \in \mathcal{V}_H \right\}, \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_{F_2} = \left\{ \left. \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_{F_2} : v \in \mathcal{V}_H \right\}.$$

Si \mathcal{V}_F , \mathcal{V}_{F_1} o \mathcal{V}_{F_2} son triviales entonces, $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{C}(\delta_c(F))$, $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{C}(F)$ y $\mathcal{U}(\mathcal{V}_H) \subset \mathcal{C}(F)$, respectivamente. Por otra parte, tenemos las siguientes descomposiciones ortogonales

$$\mathcal{C}(F) = \mathcal{V}_F \oplus (\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_F^\perp), \quad \mathcal{C}(F_1) = \mathcal{V}_{F_1} \oplus (\mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_{F_1}^\perp), \quad \text{y} \quad \mathcal{C}(F_2) = \mathcal{V}_{F_2} \oplus (\mathcal{C}(F_2) \cap \mathcal{V}_{F_2}^\perp)$$

y además las identidades

$$\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_F^\perp = \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp, \quad \mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_{F_1}^\perp = \mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp, \quad \text{y} \quad \mathcal{C}(F_2) \cap \mathcal{V}_{F_2}^\perp = \mathcal{C}(F_2) \cap \mathcal{U}(\mathcal{V}_H)^\perp.$$

Corolario 4.1.8 *Consideremos los problemas semihomogéneos [PS]₀, [PS]₁ y [PS]₂ con datos $f \in \mathcal{C}(F)$, $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$, $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$, respectivamente. Se satisfacen los siguientes resultados:*

- i) Si \mathcal{V}_F es trivial, entonces $K_0 \neq \emptyset$. Si \mathcal{V}_F no es trivial, la condición necesaria y suficiente para que $[\text{PS}]_0$ tenga solución es que $f \in \mathcal{V}_F^\perp$ y en este caso, $K_0 \cap \mathcal{V}_F^\perp \neq \emptyset$ y se reduce a un elemento si además, $\delta_c(F) \neq \emptyset$ y existe $\sigma \in \mathcal{C}(\bar{F})$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in \bar{F}$ y $h \geq h_\sigma$. En cualquier caso, $u|_F = \hat{u}|_F$ para cada $u, \hat{u} \in K_0 \cap \mathcal{V}_F^\perp$.
- ii) Si \mathcal{V}_{F_1} es trivial, entonces $K_1 \neq \emptyset$. Si \mathcal{V}_{F_1} no es trivial, la condición necesaria y suficiente para que $[\text{PS}]_1$ tenga solución es que $g_1 \in \mathcal{V}_{F_1}^\perp$ y en este caso, $K_1 \cap \mathcal{V}_{F_1}^\perp \neq \emptyset$ y se reduce a un elemento si además existe $\sigma \in \mathcal{C}(\bar{F})$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in \bar{F}$ y $q \geq q_\sigma$. En cualquier caso, $u|_{F_1} = \hat{u}|_{F_1}$ para cada $u, \hat{u} \in K_1 \cap \mathcal{V}_{F_1}^\perp$.
- iii) Si \mathcal{V}_{F_2} es trivial, entonces $K_2 \neq \emptyset$. Si \mathcal{V}_{F_2} no es trivial, la condición necesaria y suficiente para que $[\text{PS}]_2$ tenga solución es que $g_2 \in \mathcal{V}_{F_2}^\perp$ y en este caso se verifica que $K_2 \subset \mathcal{V}_{F_2}^\perp$ y que $\mathcal{U}(K_2) \cap \mathcal{V}_{F_2}^\perp \neq \emptyset$. Además, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{F_2} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{F_2}$ para cada $u, \hat{u} \in K_2$ tales que $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{v}} \in \mathcal{V}_{F_2}^\perp$.

Demostración. Como las demostraciones de los apartados (i) y (ii) son análogas, desarrollaremos sólo la del primero de ellos. Aplicando la proposición anterior al caso en el que g_1 y g_2 son nulas, resulta que $[\text{PS}]_0$ tiene solución sii $f \in \mathcal{V}_H^\perp$ y como $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_F^\perp = \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp$, sii $f \in \mathcal{V}_F^\perp$. Por otra parte, sabemos que $\mathcal{C}(F) = \mathcal{V}_F \oplus (\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_F^\perp)$, de donde resulta que si \mathcal{V}_F es trivial, entonces $\mathcal{C}(F) \subset \mathcal{V}_H^\perp$ y por tanto $[\text{PS}]_0$ tiene solución. Si \mathcal{V}_F no es trivial y consideramos $u \in K_0$ y $w \in \mathcal{V}_H$ tal que $w|_F$ es la proyección ortogonal de u sobre \mathcal{V}_F , entonces $u_0 = u - w \in K_0 \cap \mathcal{V}_F^\perp$. Si $\hat{u} \in K_0$ satisface también la propiedad descrita, entonces $v = u_0 - \hat{u} \in \mathcal{V}_H \cap \mathcal{V}_F^\perp$, lo que implica que $\int_F v^2 d\nu = 0$, es decir que $v \in \mathcal{C}(\delta_c(F)) \cap \mathcal{V}_H$. La unicidad se deduce entonces de la Proposición 4.1.5 (i).

Por otra parte, las dos primeras afirmaciones de (iii) se demuestran de forma similar a las anteriores. Además, si $u \in K_2$, entonces $\int_{\text{ad}_c(F)} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{F_2} d\nu = \int_{F_2} g_2 \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} d\nu = 0$, para cada $v \in \mathcal{V}_H$, lo que implica que $K_2 \subset \mathcal{V}_{F_2}^\perp$.

Si $u \in K_2$ y consideramos $w \in \mathcal{V}_H$ tal que $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{F_2}$ es la proyección ortogonal de $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}$ sobre \mathcal{V}_{F_2} , entonces $u_0 = u - w \in K_2$ y además $\mathcal{U}(u_0) \in \mathcal{V}_{F_2}^\perp$. Por último, si $\hat{u} \in K_2$ satisface que $\mathcal{U}(\hat{u}) \in \mathcal{V}_{F_2}^\perp$, entonces, $\frac{\partial(u - \hat{u})}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{F_2} \in \mathcal{V}_{F_2} \cap \mathcal{V}_{F_2}^\perp$ y por tanto, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{F_2} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{F_2}$. ■

4.2 Operadores de Green, de Robin y de Poisson

En esta sección describiremos operadores lineales que pueden ser considerados como inversos de los problemas de contorno abordados en la sección anterior, en el sentido de que para cada dato que satisfaga la condición de resolubilidad, proporcionan una solución del correspondiente problema. Más concretamente, construiremos operadores que son inversos a la derecha de la restricción de \mathcal{L} al subespacio de funciones de $\mathcal{C}(F \cup F_1)$ que satisfacen la condición $\mathcal{U}(u) = 0$ sobre F_1 ; operadores que son inversos a la derecha de la restricción de \mathcal{U} al subespacio de funciones de $\mathcal{C}(F \cup F_1)$ que satisfacen la condición $\mathcal{L}(u) = 0$ sobre F , y operadores que son inversos a la derecha de la restricción de la identidad al subespacio de funciones de $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ que satisfacen que $\mathcal{L}(u) = 0$ sobre F y $\mathcal{U}(u) = 0$ sobre F_1 . Designaremos a cada una de las familias de operadores inversos mediante la denominación de operadores de Green, de Robin y de Poisson, respectivamente.

Cuando el problema de contorno homogéneo tiene soluciones no triviales, existen infinitos operadores del tipo mencionado que, en su equivalente en el caso continuo para los dos primeros problemas semihomogéneos referidos, son denominados de forma genérica, *operadores de Green generalizados*. La unicidad de solución ortogonal al espacio de soluciones del problema homogéneo de cada uno de los problemas semihomogéneos, queda reflejada en la unicidad del correspondiente operador inverso que asigna a cada dato dicha solución única. Estos operadores, denominados ortogonales, satisfacen entonces la propiedad de ser formalmente autoadjuntos sobre un subespacio de $\mathcal{C}(F)$ en el caso de operadores de Green, sobre un subespacio de $\mathcal{C}(F_1)$ en el caso de operadores de Robin y sobre $\mathcal{C}(F_2)$ en el caso de los operadores de Poisson. Además, el operador de Poisson ortogonal se expresa en términos del operador de Green ortogonal, lo que recupera una conocida propiedad de estos operadores en el caso continuo. Por otra parte, la búsqueda de operadores de Green y de Robin que sean autoadjuntos sobre $\mathcal{C}(F)$ y $\mathcal{C}(F_1)$ respectivamente, conduce a la noción de operadores ortogonales sobre F y F_1 , que coinciden con los anteriores si el problema homogéneo tiene como única solución la trivial.

Como un problema general de contorno es equivalente o bien a un problema de Dirichlet o bien a una ecuación de Poisson, tiene sentido considerar los operadores de Green del problema equivalente y analizar su relación con los operadores de Green y de Robin de los problemas semihomogéneos asociados al problema general. Debemos señalar que el concepto de operador de Green del problema equivalente puede considerarse una generalización del operador asociado a la denominada *función de Kuramochi* que, en el caso discreto, ha sido estudiada por Yamasaki y colaboradores (ver por ejemplo [49, 50]).

Nuevamente consideraremos fijada una variedad $\Gamma = (V, E, \theta)$, \mathbf{B} una métrica sobre él, μ y ν medidas densas y c la función coeficiente de la estructura Riemanniana. También consideraremos fijados F un subconjunto no vacío de V , $\{F_1, F_2\}$, una partición de $\delta_c(F)$, las funciones $q \in \mathcal{C}(F)$ y $h \in \mathcal{C}(F_1)$, $p \in \mathcal{C}^+(\delta_c(F) \times \delta_c(F))$, y los operadores sobre $L(\nu)$ dados por $\mathcal{L}(u) = -\Delta u + \frac{1}{\nu} q u$ y por $\mathcal{U}(u) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{\nu} h u$, respectivamente.

En toda la sección supondremos vigentes las hipótesis [H1] y [H2] y la consideración [C] introducidas en la sección anterior, esto es que F es conexo como subconjunto de vértices de la variedad $\Gamma_c(F)$, que la función c es no negativa sobre $F \times \bar{F}$ y que el producto interno que se considerará en todos los espacios de funciones involucrados será el inducido por $L(\nu)$.

Nuestro punto de partida será considerar las funciones $f \in \mathcal{C}(F)$, $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$ y $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$, el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(u)(x) &= f(x), & \text{si } x \in F, \\ \mathcal{U}(u)(x) &= g_1(x), & \text{si } x \in F_1, \\ u(x) &= g_2(x), & \text{si } x \in F_2 \end{aligned} \right\} [\text{PC}],$$

y los problemas de contorno homogéneo [PH] y semihomogéneos [PS]₀, [PS]₁ y [PS]₂ asociados a [PC]. Como ya mencionamos, nuestra pretensión es encontrar operadores que puedan ser considerados como inversos de cada uno de los problemas de contorno semihomogéneos en el sentido de que si el dato no nulo presente en cada uno de ellos satisface la condición necesaria y suficiente de resolubilidad descrita en el Corolario 4.1.8, el operador construido asigne a tal función una solución del problema de contorno semihomogéneo con el que se está trabajando. Tales operadores recibirán la denominación de operador de Green en el caso del problema [PS]₀, operador de Robin en el caso del problema [PS]₁ y operador de Poisson en el caso del problema [PS]₂.

Interpretaremos \mathcal{L} y \mathcal{U} como operadores lineales definidos sobre $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ y consideraremos los subespacios de $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \{u \in \mathcal{C}(F \cup F_1) : \mathcal{U}(u) = 0 \text{ en } F_1\} \\ \mathcal{V}_1 &= \{u \in \mathcal{C}(F \cup F_1) : \mathcal{L}(u) = 0 \text{ en } F\} \\ \mathcal{V}_2 &= \{u : \mathcal{L}(u) = 0 \text{ en } F \text{ y } \mathcal{U}(u) = 0 \text{ en } F_1\} \end{aligned}$$

relacionados con la verificación de las condiciones homogéneas en los problemas semihomogéneos [PS]₀, [PS]₁ y [PS]₂ respectivamente; \mathcal{V}_H el espacio de soluciones de [PH] y también los subespacios \mathcal{V}_F , \mathcal{V}_{F_1} y \mathcal{V}_{F_2} que fueron introducidos en la sección anterior.

Es claro que $\mathcal{V}_H = \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{C}(F \cup F_1)$. Además, si \mathcal{V}_H^\perp es el subespacio de $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ ortogonal a \mathcal{V}_H , tenemos las identidades

$$\mathcal{C}(\text{ad}_c(F)) = \mathcal{V}_H \oplus \mathcal{V}_H^\perp, \quad \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_H \oplus (\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_H^\perp), \quad \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_H \oplus (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_H^\perp) \text{ y } \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_H \oplus (\mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_H^\perp)$$

que se añaden a las ya conocidas

$$\mathcal{C}(F) = \mathcal{V}_F \oplus (\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp), \quad \mathcal{C}(F_1) = \mathcal{V}_{F_1} \oplus (\mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp) \text{ y } \mathcal{C}(F_2) = \mathcal{V}_{F_2} \oplus (\mathcal{C}(F_2) \cap \mathcal{U}(\mathcal{V}_H)^\perp).$$

Si consideramos el endomorfismo sobre $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$, definido por la expresión

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} \mathcal{L}(u), & \text{sobre } F, \\ \mathcal{U}(u), & \text{sobre } F_1, \\ u, & \text{sobre } F_2 \end{cases}$$

entonces, el Corolario 4.1.8 nos asegura que

- i) Si $f \in \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp$, existen funciones $u_0 \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_H^\perp$ y $\hat{u}_0 \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_F^\perp$ soluciones de $[\text{PS}]_0$, es decir tales que $\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}(\hat{u}_0) = f$. Además, u_0 es la única solución de $[\text{PS}]_0$ en \mathcal{V}_H^\perp .
- ii) Si $F_1 \neq \emptyset$ y $g_1 \in \mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp$, existen funciones $u_1 \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_H^\perp$ y $\hat{u}_1 \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_{F_1}^\perp$ soluciones de $[\text{PS}]_1$, es decir tales que $\mathcal{F}(u_1) = \mathcal{F}(\hat{u}_1) = g_1$. Además, u_1 es la única solución de $[\text{PS}]_1$ en \mathcal{V}_H^\perp .
- iii) Si $F_2 \neq \emptyset$ y $g_2 \in \mathcal{C}(F_2) \cap \mathcal{U}(\mathcal{V}_H)^\perp$, existen funciones $u_2 \in \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_H^\perp$ y $\hat{u}_2 \in \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_{F_2}^\perp$ soluciones de $[\text{PS}]_2$, es decir tales que $\mathcal{F}(u_2) = \mathcal{F}(\hat{u}_2) = g_2$. Además, u_2 es la única solución de $[\text{PS}]_2$ en \mathcal{V}_H^\perp .

Por otra parte, en virtud de la versión (4.1) de la Segunda Identidad de Green, obtenemos que si $v \in \mathcal{V}_H$, entonces $\int_{F_2} g_2 \frac{\partial v}{\partial \mathbf{N}} d\nu = 0$ sii $\int_{\text{ad}_c(F)} \mathcal{F}(g_2) v d\nu = 0$ y por tanto, la condición (iii) puede reescribirse como

- iii)' Si $F_2 \neq \emptyset$ y $\mathcal{F}(g_2) \in \mathcal{V}_H^\perp$, existen funciones $u_2 \in \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_H^\perp$ y $\hat{u}_2 \in \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_{F_2}^\perp$ soluciones de $[\text{PS}]_2$, es decir tales que $\mathcal{F}(u_2) = \mathcal{F}(\hat{u}_2) = g_2$. Además, u_2 es la única solución de $[\text{PS}]_2$ en \mathcal{V}_H^\perp .

Debe observarse que a pesar de que $\ker \mathcal{F} = \mathcal{V}_H$, la condición (iii)', y por tanto la condición (iii), no es trivial, ya que aunque la restricción de \mathcal{F} a $\mathcal{C}(F \cup F_1)$ es un endomorfismo autoadjunto (Proposición 4.1.2), su extensión a $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$, que es la que estamos considerando en esta sección, no lo es.

En definitiva, si denotamos por \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_1 , y \mathcal{F}_2 a las restricciones de \mathcal{F} a $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_H^\perp$, $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_H^\perp$ y a $\mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_H^\perp$ respectivamente, las aplicaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 & : (\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_H^\perp) \longrightarrow (\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp), \\ \mathcal{F}_1 & : (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_H^\perp) \longrightarrow (\mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp), \\ \mathcal{F}_2 & : (\mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_H^\perp) \longrightarrow (\mathcal{C}(F_2) \cap \mathcal{U}(\mathcal{V}_H)^\perp), \end{aligned}$$

son isomorfismos. Por supuesto, la notación se simplifica cuando $[\text{PH}]$ tiene una única solución, pues en este caso \mathcal{V}_H es trivial y por tanto, $\mathcal{V}_H^\perp = \mathcal{V}_F^\perp = \mathcal{V}_{F_1}^\perp = \mathcal{U}(\mathcal{V}_H)^\perp = \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$

y los isomorfismos anteriores quedan expresados, respectivamente, como

$$\mathcal{F}_0: \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathcal{C}(F), \quad \mathcal{F}_1: \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{C}(F_1) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_2: \mathcal{V}_2 \longrightarrow \mathcal{C}(F_2).$$

Por otra parte, en el caso en el que $F_1 = \emptyset$, es decir cuando [PC] es o bien un problema de Dirichlet o bien una ecuación de Poisson, se tiene que $\mathcal{C}(F \cup F_1) = \mathcal{C}(F) = \mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_H = \mathcal{V}_F$ y por tanto \mathcal{F}_0 es un automorfismo sobre $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp$.

Definiciones 4.2.1 Diremos que una aplicación lineal $\check{\mathcal{G}}: (\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp) \longrightarrow \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ es un *operador de Green del problema de contorno* [PC]₀ o por extensión *un operador de Green de* [PC] si para cada $f \in \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp$, $\check{\mathcal{G}}(f)$ es solución del problema semihomogéneo [PC]₀ con dato f .

Si $F_1 \neq \emptyset$, diremos que una aplicación lineal $\check{\mathcal{R}}: (\mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp) \longrightarrow \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ es un *operador de Robin del problema de contorno* [PC]₁ o por extensión *un operador de Robin de* [PC] si para cada $g_1 \in \mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_F^\perp$, $\check{\mathcal{R}}(g_1)$ es solución del problema semihomogéneo [PC]₁ con dato g_1 .

Si $F_2 \neq \emptyset$, diremos que una aplicación lineal $\check{\mathcal{P}}: (\mathcal{C}(F_2) \cap \mathcal{V}_H^\perp) \longrightarrow \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ es un *operador de Poisson del problema de contorno* [PC]₂ o por extensión *un operador de Poisson de* [PC] si para cada $g_2 \in \mathcal{C}(F_2) \cap \mathcal{U}(\mathcal{V}_H)^\perp$, $\check{\mathcal{P}}(g_2)$ es solución del problema semihomogéneo [PC]₂ con dato g_2 .

Es importante señalar que siempre existen operadores de Green, de Robin y de Poisson. Concretamente, si denotamos por $\check{\mathcal{G}}: (\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp) \longrightarrow (\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_H^\perp)$, $\check{\mathcal{R}}: (\mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp) \longrightarrow (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_H^\perp)$ y $\check{\mathcal{P}}: (\mathcal{C}(F_2) \cap \mathcal{U}(\mathcal{V}_H)^\perp) \longrightarrow (\mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_H^\perp)$ a los inversos de los isomorfismos \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 , es claro que $\check{\mathcal{G}}$, $\check{\mathcal{R}}$ y $\check{\mathcal{P}}$ son, respectivamente, operadores de Green, de Robin y de Poisson del problema [PC] y de hecho, están caracterizados por asignar a cada dato la única solución en \mathcal{V}_H^\perp del correspondiente problema semihomogéneo. Así pues, estos operadores están unívocamente determinados y en lo sucesivo serán denominados *ortogonales sobre* $\text{ad}_c(F)$ o simplemente *ortogonales* y denotados por \mathcal{G} , \mathcal{R} y \mathcal{P} , respectivamente.

Desde luego, si \mathcal{V}_H es trivial, existe un único operador de Green, un único operador de Robin y un único operador de Poisson, que por tanto, coinciden con \mathcal{G} , \mathcal{R} y \mathcal{P} , respectivamente. Sin embargo, si \mathcal{V}_H no es trivial, existen infinidad de operadores de Green, de operadores de Robin y de operadores de Poisson, puesto que si $\check{\mathcal{G}}$, $\check{\mathcal{R}}$ y $\check{\mathcal{P}}$ son unos de ellos, entonces, por ejemplo $\check{\mathcal{G}} + v$, $\check{\mathcal{R}} + v$ y $\check{\mathcal{P}} + v$ con $v \in \mathcal{V}_H$ y $\check{\mathcal{G}} + v \otimes w$, $\check{\mathcal{R}} + v \otimes w$ y $\check{\mathcal{P}} + v \otimes w$ con $v \in \mathcal{V}_H$ y $w \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$, también lo son. Por otra parte, utilizando el Corolario 4.1.8, podemos definir operadores de Green, $\check{\mathcal{G}}$, de Robin, $\check{\mathcal{R}}$, y de Poisson $\check{\mathcal{P}}$, tales que $\check{\mathcal{G}}(\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp) \subset \mathcal{V}_F^\perp$, $\check{\mathcal{R}}(\mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp) \subset \mathcal{V}_{F_1}^\perp$ y $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp) \subset \mathcal{U}^{-1}(\mathcal{V}_{F_2}^\perp)$, respectivamente. En lo sucesivo, este tipo de operadores serán denominados *ortogonales sobre* F , *sobre* F_1 *y sobre* F_2 , respectivamente. Observemos que aplicando nuevamente el Corolario 4.1.8, si $\delta_c(F) \neq \emptyset$ y además $h \geq h_\sigma$, existe un único operador de Green ortogonal sobre F ; si $F_1 \neq \emptyset$ y $q \geq q_\sigma$, existe un único operador de Robin ortogonal sobre F_1 , y por último, si $F_2 \neq \emptyset$,

$q \geq q_\sigma$ y $h \geq h_\sigma$, también existe un único operador de Poisson ortogonal sobre F_2 (aquí $\sigma \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ es estrictamente positiva en cada punto).

Podemos extender la definición de $\check{\mathcal{G}}$, de $\check{\mathcal{R}}$ y de $\check{\mathcal{P}}$ a los espacios $\mathcal{C}(F)$, $\mathcal{C}(F_1)$ y $\mathcal{C}(F_2)$ respectivamente, considerando para cada $f \in \mathcal{C}(F)$, cada $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$ y cada $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$, las asignaciones

$$\check{\mathcal{G}}(f) = \check{\mathcal{G}}(f - \pi_0(f)), \quad \check{\mathcal{R}}(g_1) = \check{\mathcal{R}}(g_1 - \pi_1(g_1)) \quad \text{y} \quad \check{\mathcal{P}}(g_2) = \check{\mathcal{P}}(g_2 - \pi_2(g_2)),$$

donde π_0, π_1 y π_2 denotan las proyecciones sobre los subespacios \mathcal{V}_F , \mathcal{V}_{F_1} y \mathcal{V}_{F_2} respectivamente. Tenemos pues que si $f \in \mathcal{C}(F)$, $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$ y $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$, entonces se satisface que

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(\check{\mathcal{G}}(f)) = f - \pi_0(f), \quad \text{en } F, \\ \mathcal{U}(\check{\mathcal{G}}(f)) = 0, \quad \text{en } F_1, \\ \check{\mathcal{G}}(f) = 0, \quad \text{en } F_2 \end{array} \right\} \text{ y } \left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(\check{\mathcal{R}}(g_1)) = 0, \quad \text{en } F, \\ \mathcal{U}(\check{\mathcal{R}}(g_1)) = g_1 - \pi_1(g_1), \quad \text{en } F_1, \\ \check{\mathcal{R}}(g_1) = 0, \quad \text{en } F_2 \end{array} \right\}$$

mientras que

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(\check{\mathcal{P}}(g_2)) = 0, \quad \text{en } F, \\ \mathcal{U}(\check{\mathcal{P}}(g_2)) = 0, \quad \text{en } F_1, \\ \check{\mathcal{P}}(g_2) = g_2 - \pi_2(g_2), \quad \text{en } F_2. \end{array} \right\}$$

Además, si $u \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ y consideramos $f = \mathcal{L}(u)|_F$, $g_1 = \mathcal{U}(u)|_{F_1}$ y $g_2 = u|_{F_2}$ se satisface que

$$u \in \mathcal{V}_0 \implies \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{V}_H^\perp, \\ \mathcal{G}(f) = u - \pi(u), \end{array} \right. \quad u \in \mathcal{V}_1 \implies \left\{ \begin{array}{l} g_1 \in \mathcal{V}_H^\perp, \\ \mathcal{R}(g_1) = u - \pi(u), \end{array} \right.$$

y también que

$$u \in \mathcal{V}_2 \implies \left\{ \begin{array}{l} g_2 \in \mathcal{V}_H^\perp, \\ \mathcal{P}(g_2) = u - \pi(u), \end{array} \right.$$

donde π denota la proyección ortogonal sobre \mathcal{V}_H .

También es claro que cuando se satisfacen las condiciones que aseguran la unicidad de soluciones en \mathcal{V}_F^\perp , $\mathcal{V}_{F_1}^\perp$ y $\mathcal{V}_{F_2}^\perp$ (Corolario 4.1.8), es decir cuando los operadores de Green, de Robin y de Poisson ortogonales sobre F , F_1 y F_2 respectivamente, están unívocamente determinados, se satisface un resultado análogo al anterior sustituyendo \mathcal{G} , \mathcal{R} y \mathcal{P} por $\check{\mathcal{G}}$, $\check{\mathcal{R}}$ y $\check{\mathcal{P}}$ y π por π_0 , π_1 o π_2 respectivamente.

Proposición 4.2.2 *Cualquier operador de Green, de Robin o de Poisson es formalmente autoadjunto, es decir se satisface que*

$$\begin{aligned}\int_F g \tilde{\mathcal{G}}(f) d\nu &= \int_F f \tilde{\mathcal{G}}(g) d\nu, \quad \text{para cada } f, g \in \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp, \\ \int_{F_1} g \tilde{\mathcal{R}}(f) d\nu &= \int_{F_1} f \tilde{\mathcal{R}}(g) d\nu, \quad \text{para cada } f, g \in \mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp, \\ \int_{F_2} g \tilde{\mathcal{P}}(f) d\nu &= \int_{F_2} f \tilde{\mathcal{P}}(g) d\nu, \quad \text{para cada } f, g \in \mathcal{C}(F_2).\end{aligned}$$

En particular, si $\tilde{\mathcal{G}}$ y $\tilde{\mathcal{R}}$ son ortogonales sobre F y F_1 , respectivamente, se satisface que

$$\begin{aligned}\int_F g \tilde{\mathcal{G}}(f) d\nu &= \int_F f \tilde{\mathcal{G}}(g) d\nu, \quad \text{para cada } f, g \in \mathcal{C}(F), \\ \int_{F_1} g \tilde{\mathcal{R}}(f) d\nu &= \int_{F_1} f \tilde{\mathcal{R}}(g) d\nu, \quad \text{para cada } f, g \in \mathcal{C}(F_1).\end{aligned}$$

Además, si $\text{sop}(p) \subset F_1 \times F_1$, entonces $\mathcal{P} = (\mathcal{I} - \pi_{F_2}) + \mathcal{G} \circ \mathcal{N} \circ (\mathcal{I} - \pi_{F_2})$, donde \mathcal{I} es el operador identidad en $\mathcal{C}(F_2)$ y $\mathcal{N}: \mathcal{C}(F_2) \rightarrow \mathcal{C}(F)$ es el operador que asigna a cada $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$ la restricción a F de $\Delta(g_2)$.

Demostración. Si $f, g \in \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_F^\perp$ y consideramos $u = \tilde{\mathcal{G}}(f)$, $v = \tilde{\mathcal{G}}(g)$, entonces $u, v \in \mathcal{V}_0$ y sobre F , $\mathcal{L}(u) = f$ y $\mathcal{L}(v) = g$. Como el problema [PC] es formalmente autoadjunto, se verifica que

$$\int_F f \tilde{\mathcal{G}}(g) d\nu = \int_F v \mathcal{L}(u) d\nu = \int_F u \mathcal{L}(v) d\nu = \int_F g \tilde{\mathcal{G}}(f) d\nu.$$

Si $\tilde{\mathcal{G}}$ es ortogonal sobre F , $f, g \in \mathcal{C}(F)$ y consideramos $u = \tilde{\mathcal{G}}(f)$, $v = \tilde{\mathcal{G}}(g)$, entonces $u, v \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_F^\perp$ y sobre F , $\mathcal{L}(u) = f - \pi_0(f)$ y $\mathcal{L}(v) = g - \pi_0(g)$ y además se satisface que

$$\begin{aligned}\int_F f \tilde{\mathcal{G}}(g) d\nu &= \int_F (f - \pi_0(f)) v d\nu = \int_F v \mathcal{L}(u) d\nu \\ &= \int_F u \mathcal{L}(v) d\nu = \int_F (g - \pi_0(g)) u d\nu = \int_F g \tilde{\mathcal{G}}(f) d\nu.\end{aligned}$$

Si $f, g \in \mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp$ y consideramos $u = \tilde{\mathcal{R}}(f)$ y $v = \tilde{\mathcal{R}}(g)$, entonces se verifica que $u, v \in \mathcal{V}_1$ y además, sobre F_1 , $\mathcal{U}(u) = f$ y $\mathcal{U}(v) = g$. De la versión (4.1) de la Segunda Identidad de Green deducimos que

$$\begin{aligned}0 &= \int_F (v \mathcal{L}(u) - u \mathcal{L}(v)) d\nu = \int_{F_1 \cup F_2} (u \mathcal{U}(v) - v \mathcal{U}(u)) d\nu = \int_{F_1} (u \mathcal{U}(v) - v \mathcal{U}(u)) d\nu \\ &= \int_{F_1} (u g - v f) d\nu = \int_{F_1} (g \tilde{\mathcal{R}}(f) d\nu - f \tilde{\mathcal{R}}(g)) d\nu.\end{aligned}$$

Si $\tilde{\mathcal{R}}$ es ortogonal sobre F_1 , $f, g \in \mathcal{C}(F_1)$ y consideramos $u = \tilde{\mathcal{R}}(f)$ y $v = \tilde{\mathcal{R}}(g)$, entonces se verifica que $u, v \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_{F_1}^\perp$ y además, sobre F_1 , $\mathcal{U}(u) = f - \pi_1(f)$, $\mathcal{U}(v) = g - \pi_1(g)$ y además,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_F (v \mathcal{L}(u) - u \mathcal{L}(v)) d\nu = \int_{F_1} (u \mathcal{U}(v) - v \mathcal{U}(u)) d\nu \\ &= \int_{F_1} (u (g - \pi_1(g)) - v (f - \pi_1(f))) d\nu \\ &= \int_{F_1} (u g - v f) d\nu = \int_{F_1} (g \tilde{\mathcal{R}}(f) d\nu - f \tilde{\mathcal{R}}(g)) d\nu. \end{aligned}$$

Si $f, g \in \mathcal{C}(F_2)$, entonces sobre F_2 se tiene que $\tilde{\mathcal{P}}(f) = f - \pi_2(f)$ y $\tilde{\mathcal{P}}(g) = g - \pi_2(g)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{F_2} f \tilde{\mathcal{P}}(g) d\nu &= \int_{F_2} f (g - \pi_2(g)) d\nu = \int_{F_2} (f - \pi_2(f)) (g - \pi_2(g)) d\nu \\ &= \int_{F_2} (f - \pi_2(f)) g d\nu = \int_{F_2} g \tilde{\mathcal{P}}(f) d\nu. \end{aligned}$$

Para finalizar, si $\tilde{g}_2 = g_2 - \pi_2(g_2)$ y suponemos que $\text{sop}(p) \subset F_1 \times F_1$, entonces $\mathcal{U}(\tilde{g}_2) = 0$ sobre F_1 y por tanto, el problema $[\text{PS}]_2$ con dato \tilde{g}_2 es equivalente al problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(u) &= \Delta(\tilde{g}_2), & \text{sobre } F, \\ \mathcal{U}(u) &= 0, & \text{sobre } F_1 \\ u &= 0, & \text{sobre } F_2 \end{aligned} \right\}.$$

Además como $\tilde{g}_2 \in \mathcal{V}_{F_2}^\perp$, para cada $v \in \mathcal{V}_H$,

$$\int_F v \Delta(\tilde{g}_2) d\nu = \int_{F_1} v \mathcal{U}(\tilde{g}_2) d\nu - \int_{F_2} \tilde{g}_2 \mathcal{U}(v) d\nu = - \int_{F_2} \tilde{g}_2 \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} d\nu = 0.$$

Por tanto, $\mathcal{G}(\Delta(\tilde{g}_2)|_F)$ es la única solución del problema anterior en \mathcal{V}_H^\perp y como también se verifica que $\mathcal{C}(F_2) \subset \mathcal{V}_H^\perp$, obtenemos que $\mathcal{P}(g_2) = \tilde{g}_2 + \mathcal{G}(\Delta(\tilde{g}_2)|_F)$. ■

Hasta ahora hemos reformulado la condición necesaria y suficiente de existencia de solución del problema $[\text{PC}]$ para cada uno de los problemas semihomogéneos asociados a él y en base a dichas condiciones hemos definido el concepto de operadores de Green, de Robin y de Poisson. Sin embargo, también podemos plantearnos el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(u)(x) &= f(x), & \text{si } x \in F, \\ \mathcal{U}(u)(x) &= g_1(x), & \text{si } x \in F_1, \\ u(x) &= 0, & \text{si } x \in F_2 \end{aligned} \right\} \overline{[\text{PS}]_0},$$

para el cual la condición necesaria y suficiente de resolubilidad es que $f + g_1 \in \mathcal{V}_H^\perp$ y en este caso existe una única solución de $\overline{[\text{PS}]}_0$ en \mathcal{V}_H^\perp . Desde luego, esto nos lleva a concluir que si consideremos $\mathcal{V}_3 = \mathcal{C}(F \cup F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp$ y denominamos \mathcal{F}_3 a la restricción de \mathcal{F} sobre \mathcal{V}_3 , entonces $\mathcal{F}_3: \mathcal{V}_3 \rightarrow \mathcal{V}_3$ es un automorfismo. Además sobre el subespacio de \mathcal{V}_3 dado por $(\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp) \oplus (\mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp)$, es claro que $\mathcal{F}^{-1}(f + g_1) = \mathcal{G}(f) + \mathcal{R}(g_1)$. Sin embargo, es posible la situación en la que $f + g_1 \in \mathcal{V}_H^\perp$ pero $f \notin \mathcal{V}_H^\perp$ y $g_1 \notin \mathcal{V}_H^\perp$. En este caso, ni $[\text{PS}]_0$ ni $[\text{PS}]_1$ tienen solución mientras que $\overline{[\text{PS}]}_0$ sí la tiene.

Por otra parte, utilizando los resultados de la sección anterior, resulta que $\overline{[\text{PS}]}_0$ no es más que un problema de Dirichlet o una ecuación de Poisson. Concretamente, si consideramos las funciones $\bar{q} = q_F + q + h$, $\bar{f} = f + g_1$ y el operador $\bar{\mathcal{L}} = -\bar{\Delta} + \frac{1}{\nu} \bar{q}$, entonces $\overline{[\text{PS}]}_0$ se reescribe como el problema de contorno sobre $\bar{\Gamma}_b(F)$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(u)(x) &= \bar{f}(x), & \text{si } x \in F \cup F_1, \\ u(x) &= 0, & \text{si } x \in F_2 \end{aligned} \right\},$$

es decir, como un problema semihomogéneo asociado a $\overline{[\text{PC}]}$. Obsérvese que el problema de contorno homogéneo $\overline{[\text{PH}]}$ asociado a $\overline{[\text{PC}]}$ es a su vez equivalente a $[\text{PH}]$, por lo que su espacio de soluciones es nuevamente \mathcal{V}_H , mientras que el problema semihomogéneo $\overline{[\text{PS}]}_0$ no es equivalente a $[\text{PS}]_0$ a menos que $g_1 = 0$.

Tiene sentido considerar tanto operadores de Green como operadores de Poisson del problema $\overline{[\text{PC}]}$. En estas circunstancias, es claro que los operadores de Poisson del problema $\overline{[\text{PC}]}$ son los mismos que los operadores de Poisson del problema $[\text{PC}]$, pues los problemas semihomogéneos correspondientes son idénticos, mientras que las restricciones de cualquier operador de Green del problema $\overline{[\text{PC}]}$ a los subespacios $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp$ y $\mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp$ son, respectivamente, operadores de Green y de Robin de los problemas semihomogéneos $[\text{PS}]_0$ y $[\text{PS}]_1$. Obsérvese que, en este caso, la noción análoga a la de operador ortogonal sobre F es la operador ortogonal sobre $F \cup F_1$ y por tanto coincide con la de operador ortogonal. En lo sucesivo, denotaremos por $\bar{\mathcal{G}}$ al único operador de Green de $\overline{[\text{PC}]}$ ortogonal, es decir a aquél caracterizado por asignar a cada $\bar{f} \in \mathcal{V}_3$ la única solución de $\overline{[\text{PS}]}_0$ en \mathcal{V}_3 . En otras palabras, $\bar{\mathcal{G}}: \mathcal{V}_3 \rightarrow \mathcal{V}_3$ es el operador inverso del automorfismo \mathcal{F}_3 .

Si $\tilde{\mathcal{G}}: \mathcal{V}_3 \rightarrow \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ es cualquier operador de Green de $\overline{[\text{PC}]}$ y volvemos a considerar π , la proyección ortogonal sobre \mathcal{V}_H^\perp , nuevamente podemos extender el operador $\tilde{\mathcal{G}}$ a $\mathcal{C}(F \cup F_1)$ definiendo $\tilde{\mathcal{G}}(\bar{f}) = \tilde{\mathcal{G}}(\bar{f} - \pi(\bar{f}))$. En definitiva, para cada $\bar{f} \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$ se tiene que

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(\tilde{\mathcal{G}}(\bar{f})) &= \bar{f} - \pi(\bar{f}), & \text{sobre } F \cup F_1, \\ \tilde{\mathcal{G}}(\bar{f}) &= 0, & \text{sobre } F_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

y además, si $u \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$, entonces $\bar{f} = \bar{\mathcal{L}}(u)|_{F \cup F_1} \in \mathcal{V}_H^\perp$ y por tanto, tenemos que $\tilde{\mathcal{G}}(\bar{f}) = u - \pi(u)$.

A continuación, analizaremos la relación entre los operadores de Green, de Robin y de Poisson asociados al problema [PC] y el operador de Green asociado al problema $\widehat{[PC]}$.

Proposición 4.2.3 *Cualquier operador de Green del problema de contorno $\widehat{[PC]}$, es formalmente autoadjunto, es decir*

$$\int_{F \cup F_1} \bar{f} \tilde{\mathcal{G}}(\bar{g}) d\nu = \int_{F \cup F_1} \bar{g} \tilde{\mathcal{G}}(\bar{f}) d\nu \quad \text{para cada } \bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{V}_3$$

y en particular,

$$\int_{F \cup F_1} \bar{f} \bar{\mathcal{G}}(\bar{g}) d\nu = \int_{F \cup F_1} \bar{g} \bar{\mathcal{G}}(\bar{f}) d\nu \quad \text{para cada } \bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{C}(F \cup F_1).$$

Además, sobre el subespacio $(\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp) \oplus (\mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp)$ se verifica que $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{R}$ y, en particular, $\bar{\mathcal{G}}$ y \mathcal{G} coinciden sobre $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp$ y $\bar{\mathcal{G}}$ y \mathcal{R} coinciden sobre $\mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp$; mientras que $\mathcal{P} = (\mathcal{I} - \pi_{F_2}) + \bar{\mathcal{G}} \circ \bar{\mathcal{N}} \circ (\mathcal{I} - \pi_{F_2})$, donde \mathcal{I} es el operador identidad en $\mathcal{C}(F_2)$ y $\bar{\mathcal{N}}: \mathcal{C}(F_2) \rightarrow \mathcal{C}(F \cup F_1)$ es el operador que asigna a cada $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$ la restricción de $\bar{\Delta}(g_2)$ a $F \cup F_1$.

Demostración. La demostración del carácter autoadjunto de $\bar{\mathcal{G}}$ y la particularización a $\bar{\mathcal{G}}$ son análogas a la realizadas para los operadores de Green del problema [PC] (Proposición 4.2.2). Por otra parte, si $\bar{f} = f \in \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp$ o si $\bar{f} = g_1 \in \mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp$, entonces $\bar{\mathcal{G}}(\bar{f})$ es la única solución de [PS]₀ o [PS]₁, respectivamente, perteneciente a \mathcal{V}_H^\perp . Como $\mathcal{G}(f)$ y $\mathcal{R}(g_1)$ verifican la misma propiedad y las soluciones de este tipo son únicas, necesariamente $\bar{\mathcal{G}}(\bar{f}) = \mathcal{G}(f)$ en el primer caso y $\bar{\mathcal{G}}(\bar{f}) = \mathcal{R}(g_1)$ en el segundo.

Por último, la demostración de la relación entre \mathcal{P} y $\bar{\mathcal{G}}$ sigue los mismos pasos, con las modificaciones pertinentes, que la desarrollada en la Proposición 4.2.2. ■

Debemos señalar que cuando \mathcal{V}_H no es trivial, $\bar{\mathcal{G}}$ y \mathcal{G} no coinciden sobre el subespacio $\mathcal{C}(F)$, puesto que $\mathcal{G}(f) = f - \pi_0(f)$ mientras que $\bar{\mathcal{G}}(f) = f - \pi(f)$ y, en general, $\pi_0(f) \neq \pi(f)$, a menos que $F_1 = \emptyset$. Por último, si $\text{sop}(p) \subset F_1 \times F_1$, entonces $\text{Img}(\bar{\mathcal{N}}) \subset \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp$ y aplicando el resultado anterior, $\bar{\mathcal{G}} \circ \bar{\mathcal{N}} = \mathcal{G} \circ \bar{\mathcal{N}}$.

Concluiremos esta sección describiendo las propiedades del operador de Green asociado al problema de contorno normalizado de [PC]. Para ello, sea $\mathcal{V}_4 = \mathcal{C}(F \cup F_1) \cap \left(\frac{1}{\sigma} \mathcal{V}_H\right)^\perp$, el subespacio constituido por las funciones de $\mathcal{C}(F \cup F_1)$ ortogonales al espacio de soluciones del problema homogéneo asociado a $\widehat{[PC]}$. Denotaremos por $\hat{\mathcal{G}}$ al único operador de Green de $\widehat{[PC]}$ ortogonal, es decir a la aplicación determinada por asignar a cada $\hat{f} \in \mathcal{V}_4$ la única solución en \mathcal{V}_4 del problema $\widehat{[PC]}$ con dato \hat{f} .

Si denotamos por $\hat{\pi}$ a la proyección ortogonal sobre $\frac{1}{\sigma} \mathcal{V}_H$ y $\check{\mathcal{G}}: \mathcal{V}_4 \rightarrow \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ es un operador de Green de $\widehat{[PC]}$, $\check{\mathcal{G}}$ puede extenderse a $\mathcal{C}(F \cup F_1)$ definiendo $\check{\mathcal{G}}(\hat{f}) = \check{\mathcal{G}}(\hat{f} - \hat{\pi}(\hat{f}))$.

Así pues, para cada $\hat{f} \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$ se tiene que

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}(\check{\mathcal{G}}(\hat{f})) &= \hat{f} - \hat{\pi}(\hat{f}), & \text{sobre } F \cup F_1, \\ \check{\mathcal{G}}(\hat{f}) &= 0, & \text{sobre } F_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

y además, si $u \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$, entonces $\hat{f} = \hat{\mathcal{L}}(u)|_{F \cup F_1} \in \mathcal{V}_4$ y $\hat{\mathcal{G}}(\hat{f}) = u - \hat{\pi}(u)$.

Proposición 4.2.4 *Cualquier operador de Green, $\check{\mathcal{G}}$, del problema de contorno $[\widehat{\text{PC}}]$ es formalmente autoadjunto, es decir*

$$\int_{F \cup F_1} \hat{f} \check{\mathcal{G}}(\hat{g}) \, d\nu = \int_{F \cup F_1} \hat{g} \check{\mathcal{G}}(\hat{f}) \, d\nu \quad \text{para cada } \hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{V}_4$$

y, en particular,

$$\int_{F \cup F_1} \hat{f} \hat{\mathcal{G}}(\hat{g}) \, d\nu = \int_{F \cup F_1} \hat{g} \hat{\mathcal{G}}(\hat{f}) \, d\nu \quad \text{para cada } \hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{C}(F \cup F_1).$$

Además, se satisfacen las relaciones

$$\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{I} - \pi) \circ \mathcal{T}_\sigma \circ \hat{\mathcal{G}} \circ \mathcal{T}_\sigma \circ (\mathcal{I} - \pi) \quad \text{y} \quad \hat{\mathcal{G}} = (\mathcal{I} - \hat{\pi}) \circ \mathcal{T}_{\frac{1}{\sigma}} \circ \bar{\mathcal{G}} \circ \mathcal{T}_{\frac{1}{\sigma}} \circ (\mathcal{I} - \hat{\pi}),$$

donde \mathcal{I} es el operador identidad en $\mathcal{C}(F \cup F_1)$.

Demostración. La demostración de la primera parte de la proposición es nuevamente análoga a la efectuada para los operadores de Green del problema $[\text{PC}]$ (Proposición 4.2.2).

Sean ahora $\bar{f} \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$ y $u = \bar{\mathcal{G}}(\bar{f})$. Entonces $\bar{\mathcal{L}}(u) = \bar{f} - \pi(\bar{f})$ y como $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{T}_{\frac{1}{\sigma}} \circ \hat{\mathcal{L}} \circ \mathcal{T}_{\frac{1}{\sigma}}$, resulta que $\hat{\mathcal{L}}(\frac{u}{\sigma}) = \sigma(\bar{f} - \pi(\bar{f}))$. Además, como $\bar{f} - \pi(\bar{f}) \in \mathcal{V}_3$ entonces, $\sigma(\bar{f} - \pi(\bar{f})) \in \mathcal{V}_4$ y por tanto se satisface que $\hat{\mathcal{G}}(\sigma(\bar{f} - \pi(\bar{f}))) = \frac{u}{\sigma} - \hat{\pi}(\frac{u}{\sigma})$, es decir, $\sigma \hat{\mathcal{G}}(\sigma(\bar{f} - \pi(\bar{f}))) = u - \sigma \hat{\pi}(\frac{u}{\sigma})$, pero como $\sigma \hat{\pi}(\frac{u}{\sigma}) \in \mathcal{V}_H$ y $u \in \mathcal{V}_H^\perp$, tenemos que $(\mathcal{I} - \pi)(u - \sigma \hat{\pi}(\frac{u}{\sigma})) = u$. La demostración de la segunda identidad es análoga. ■

4.3 Núcleos de Green, de Robin y de Poisson

En esta sección mantendremos las hipótesis y notaciones de la precedente y construiremos los núcleos asociados a los operadores de Green, de Robin y de Poisson introducidos en ella. Nuestro objetivo es demostrar que, de forma análoga a lo que ocurre en el caso continuo, dichos operadores son de hecho operadores integrales. Más generalmente, demostramos que cualquier endomorfismo en $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ es un operador integral que tiene asociado un núcleo, lo que en cierta manera, puede ser interpretado como la versión discreta del *Teorema de los Núcleos de L. Schwartz*. Desde otro punto de vista, entendiendo un problema de contorno

discreto como un sistema lineal y un núcleo integral como una matriz, resulta que los núcleos de Green, de Robin y de Poisson son matrices inversas a la derecha de la matriz de coeficientes del sistema correspondiente. En estos términos, uno de los resultados de esta sección es la obtención de todas las matrices inversas a la derecha de las matrices de coeficientes de los sistemas lineales anteriormente mencionados y además, la caracterización de aquéllas que verifican propiedades adicionales, como por ejemplo la simetría.

De momento, sólo nos preocuparemos de establecer las definiciones precisas de estos conceptos y de demostrar aquellas propiedades que serán necesarias para el desarrollo de esta sección. Un estudio más detallado de algunas propiedades de los núcleos, sus operadores integrales asociados y de su repercusión en la resolución de problemas de contorno, será desarrollado en el siguiente capítulo.

Definición 4.3.1 Denominaremos *núcleo sobre* $\mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F))$ o simplemente *núcleo* a cualquier función $K \in \mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F) \times \mathfrak{ad}_c(F))$ y para cada $x, y \in \mathfrak{ad}_c(F)$, denotaremos por K^x y por K_y a las funciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F))$ definidas como $K^x(y) = K_y(x) = K(x, y)$.

Si K es un núcleo, denominaremos *operador integral asociado a K , respecto de ν* , o simplemente *operador integral asociado a K* , al operador

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : \mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F)) &\longrightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F)) \\ f &\longrightarrow \int_{\mathfrak{ad}_c(F)} K(x, y) f(y) d\nu(y), \quad x \in \mathfrak{ad}_c(F). \end{aligned}$$

Proposición 4.3.2 *Todo endomorfismo sobre $\mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F))$ es un operador integral y su núcleo está unívocamente determinado.*

Si $A \subset \mathfrak{ad}_c(F)$ es no vacío, cualquier operador lineal $\mathcal{H} : \mathcal{C}(A) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F))$ puede extenderse de forma única a un operador integral $\tilde{\mathcal{H}}$ tal que $\mathcal{C}(A^c) \subset \ker \tilde{\mathcal{H}}$. Además, el núcleo H de $\tilde{\mathcal{H}}$ satisface que $H \in \mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F) \times A)$ y por tanto para cada $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F))$,

$$\tilde{\mathcal{H}}(f)(x) = \int_A H(x, y) f(y) d\nu(y), \quad x \in \mathfrak{ad}_c(F).$$

Demostración. De las propias definiciones obtenemos que si \mathcal{K} es el operador integral asociado al núcleo K , entonces para cada $y \in \mathfrak{ad}_c(F)$, se tiene que $\nu(y) K_y = \mathcal{K}(\varepsilon_y)$, es decir $K(x, y) \nu(y) = \mathcal{K}(\varepsilon_y)(x)$. Recíprocamente, si \mathcal{K} es un endomorfismo sobre $\mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F))$ y definimos el núcleo K mediante la asignación $K(x, y) = \frac{1}{\nu(y)} \mathcal{K}(\varepsilon_y)$, entonces \mathcal{K} es el operador integral determinado por K .

Por otra parte, si $\mathcal{H} : \mathcal{C}(A) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F))$ es un operador lineal y para cada $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F))$ definimos $\tilde{\mathcal{H}}(f) = \mathcal{H}(f|_A)$, \mathcal{H} queda extendido a un endomorfismo sobre $\mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F))$, es decir a un operador integral, que claramente satisface que $\mathcal{C}(A^c) \subset \ker \tilde{\mathcal{H}}$. Si H es el núcleo de tal extensión como $\tilde{\mathcal{H}}(\varepsilon_y) = \nu(y) H_y$, si tomamos $y \in A^c$, entonces $\tilde{\mathcal{H}}(\varepsilon_y) = 0$ y por tanto $H(x, y) = 0$, para cada $x \in \mathfrak{ad}_c(F)$. ■

Es claro que la noción de operador integral asociado a un núcleo depende de la medida ν considerada y recíprocamente, fijado un endomorfismo sobre $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$, considerado como operador integral, su núcleo depende la medida considerada. Así pues, sea \mathcal{K} un operador sobre $\mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ con núcleo K , respecto de ν y consideramos \mathcal{K} como operador integral, respecto de la medida cardinal λ . Si denominamos K_λ al núcleo de \mathcal{K} respecto de λ , tenemos la siguiente relación entre ambos núcleos:

$$K_\lambda(x, y) = \mathcal{K}(\varepsilon_y)(x) = K(x, y) \nu(y).$$

Recordemos que los operadores de Green, de Robin y de Poisson asociados al problema [PC] los considerábamos extendidos a aplicaciones

$$\tilde{\mathcal{G}}: \mathcal{C}(F) \longrightarrow \mathcal{C}(\text{ad}_c(F)), \quad \tilde{\mathcal{R}}: \mathcal{C}(F_1) \longrightarrow \mathcal{C}(\text{ad}_c(F)) \quad \text{y} \quad \tilde{\mathcal{P}}: \mathcal{C}(F_2) \longrightarrow \mathcal{C}(\text{ad}_c(F)),$$

mientras que los operadores de Green del problema $\overline{[\text{PC}]}$ y de su normalizado $\widehat{[\text{PC}]}$ los considerábamos extendidos a aplicaciones lineales $\tilde{\tilde{\mathcal{G}}}, \tilde{\tilde{\mathcal{R}}}: \mathcal{C}(F \cup F_1) \longrightarrow \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$. Por tanto, en virtud de la proposición anterior, los operadores de Green, de Robin y de Poisson asociados al problema de contorno [PC] y los operadores de Green asociados a $\overline{[\text{PC}]}$ y a $\widehat{[\text{PC}]}$, son todos operadores integrales.

Definiciones 4.3.3 Denominaremos *núcleo o función de Green del problema de contorno* $[\text{PS}]_0$ o por extensión *núcleo o función de Green de* [PC], al núcleo de cualquier operador de Green de [PC]. Diremos que un núcleo de Green es *ortogonal u ortogonal sobre* F si es el núcleo del operador de Green ortogonal o el de un operador de Green ortogonal sobre F , respectivamente.

Denominaremos *núcleo de Green del problema de contorno* $\overline{[\text{PS}]}$ y *núcleo de Green del problema de contorno* $\widehat{[\text{PS}]}$ a los núcleos de cualquier operador de Green de $\overline{[\text{PS}]}$ o de $\widehat{[\text{PS}]}$, respectivamente. Diremos que un núcleo de Green de $\overline{[\text{PS}]}$ o de $\widehat{[\text{PS}]}$ es *ortogonal sobre* $\text{ad}_c(F)$ o simplemente *ortogonal* si el núcleo de un operador de Green ortogonal.

Denominaremos *núcleo de Robin del problema de contorno* $[\text{PS}]_1$ o por extensión *núcleo de Robin de* [PC] al núcleo de cualquier operador de Robin de [PC]. Diremos que un núcleo de Robin es *ortogonal u ortogonal sobre* F_1 si es el núcleo del operador de Robin ortogonal o el de un operador de Robin ortogonal sobre F_1 , respectivamente.

Denominaremos *núcleo de Poisson del problema de contorno* $[\text{PS}]_2$ o por extensión *núcleo de Poisson de* [PC] al núcleo de cualquier operador de Poisson de [PC]. Diremos que un núcleo de Poisson es *ortogonal u ortogonal sobre* F_2 si es el núcleo del operador de Poisson ortogonal o el de un operador de Poisson ortogonal sobre F_2 , respectivamente.

En general, los núcleos de Green, de Robin y de Poisson de problema [PC] serán denotados por $\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{\mathcal{R}}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$, respectivamente mientras que los núcleos de Green de los problemas $\overline{[\text{PC}]}$ y

$[\widehat{\text{PC}}]$ serán denotados por \widetilde{G} y por \check{G} , respectivamente. En particular, denotaremos por G , \bar{G} y \hat{G} a los núcleos de Green ortogonales de $[\text{PC}]$, $[\overline{\text{PC}}]$ y $[\widehat{\text{PC}}]$, respectivamente y por R y P a los núcleos de Robin y de Poisson ortogonales de $[\text{PC}]$, respectivamente.

Observemos que para los problemas $[\overline{\text{PC}}]$ y $[\widehat{\text{PC}}]$ la noción análoga a la núcleo de Green de $[\text{PC}]$ ortogonal sobre F , sería la de núcleo ortogonal sobre $F \cup F_1$, que en este caso coincide con la de núcleo ortogonal.

En virtud de la Proposición 4.3.2, tenemos que, en cualquier caso,

$\widetilde{G}, \check{G} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times (F \cup F_1))$, $\bar{G} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F)$, $\tilde{R} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F_1)$ y $\tilde{P} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F_2)$ y para cada $\bar{f} \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$, $f \in \mathcal{C}(F)$, $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$ y $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$, las funciones

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= \int_{F \cup F_1} \widetilde{G}(x, y) \bar{f}(y) d\nu(y), & x \in \text{ad}_c(F), \\ \hat{u}(x) &= \int_{F \cup F_1} \check{G}(x, y) \bar{f}(y) d\nu(y), & x \in \text{ad}_c(F), \\ u_0(x) &= \int_F \bar{G}(x, y) f(y) d\nu(y), & x \in \text{ad}_c(F), \\ u_1(x) &= \int_{F_1} \tilde{R}(x, y) g_1(y) d\nu(y), & x \in \text{ad}_c(F), \\ u_2(x) &= \int_{F_2} \tilde{P}(x, y) g_2(y) d\nu(y), & x \in \text{ad}_c(F), \end{aligned} \quad (4.6)$$

son soluciones de los problemas semihomogéneos $[\overline{\text{PS}}]_0$, $[\widehat{\text{PC}}]_0$, $[\text{PS}]_0$, $[\text{PS}]_1$ y $[\text{PS}]_2$ con datos $\bar{f} - \pi(\bar{f})$, $\bar{f} - \hat{\pi}(\bar{f})$, $f - \pi_0(f)$, $g_1 - \pi_1(g_1)$ y $g_2 - \pi_2(g_2)$, respectivamente.

Consideremos nuevamente \mathcal{V}_H el espacio de soluciones del problema $[\text{PH}]$ y los espacios vectoriales

$$\mathcal{V}_F = \{v|_F : v \in \mathcal{V}_H\}, \quad \mathcal{V}_{F_1} = \{v|_{F_1} : v \in \mathcal{V}_H\} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_{F_2} = \left\{ \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{F_2} : v \in \mathcal{V}_H \right\}.$$

El siguiente resultado nos permite considerar en tales subespacios, bases adecuadas que faciliten la expresión de las proyecciones π_0 , π_1 y π_2 .

Lema 4.3.4 *Supongamos que \mathcal{V}_H no es trivial, es decir, no se reduce a la función nula y consideremos $J = \{1, \dots, \dim \mathcal{V}_H\}$. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

- i) Existen $\{v_{0j}\}_{j \in J}$, una base de \mathcal{V}_H y $J_0 \subset J$, tales que $\{v_{0j}|_F\}_{j \in J_0}$ es base ortonormal de \mathcal{V}_F y $v_{0j}|_F = 0$, si $j \in J - J_0$. Si además existe $\sigma \in \mathcal{C}(\bar{F})$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in \bar{F}$ y $h \geq h_\sigma$, entonces $J_0 = J$.*

ii) Existen $\{v_{1j}\}_{j \in J}$, una base de \mathcal{V}_H y $J_1 \subset J$, tales que $\{v_{1j}|_{F_1}\}_{j \in J_1}$ es base ortonormal de \mathcal{V}_{F_1} y $v_{1j}|_{F_1} = 0$, si $j \in J - J_1$. Si además existe $\sigma \in \mathcal{C}(\bar{F})$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in \bar{F}$ y $q \geq q_\sigma$, entonces $J_1 = J$.

iii) Existen $\{v_{2j}\}_{j \in J}$, una base de \mathcal{V}_H y $J_2 \subset J$, tales que $\left\{ \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{F_2} \right\}_{j \in J_2}$ es base de \mathcal{V}_{F_2} y $\frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}} = 0$ sobre F_2 , si $j \in J - J_2$. Si además existe $\sigma \in \mathcal{C}(\bar{F})$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in \bar{F}$, $q \geq q_\sigma$ y $h \geq h_\sigma$, entonces $J_2 = \emptyset$ y $\mathcal{V}_{F_2} = \{0\}$.

Demostración. Como las demostraciones de los tres resultados son análogas, sólo desarrollaremos una de ellas, concretamente (i).

Si \mathcal{V}_F es trivial y $\{v_{0j}\}_{j \in J}$ es cualquier base de \mathcal{V}_H , entonces $v_{0j}|_F = 0$, $j \in J$ y por tanto basta tomar $J_0 = \emptyset$.

Si \mathcal{V}_F no es trivial y $\{v_j\}_{j \in J}$ es una base de \mathcal{V}_H , es claro que el conjunto $\{v_j|_F\}_{j \in J}$ es generador de \mathcal{V}_F , por lo que de él puede extraerse una base. Así pues existe $J_0 \subset J$ tal que $\{v_j|_F\}_{j \in J_0}$ es base de \mathcal{V}_F . Si a esta base de \mathcal{V}_F le aplicamos el proceso de Gram-Schmidt, obtenemos un sistema, $\{v_{0j}\}_{j \in J_0} \subset \mathcal{V}_H$ tal que $\{v_{0j}|_F\}_{j \in J_0}$ es base ortonormal de \mathcal{V}_F . Desde luego, $\{v_{0j}\}_{j \in J_0}$ es un sistema libre en \mathcal{V}_H y por tanto ampliable a una base $\{v_{0j}\}_{j \in J_0} \cup \{w_j\}_{j \in J - J_0}$ de \mathcal{V}_H .

Por otra parte, si $j \notin J_0$, existen escalares a_{ij} , $i \in J_0$, tales que $w_j|_F = \sum_{i \in J_0} a_{ij} v_{0i}|_F$, por lo que si para cada $j \in J - J_0$ tomamos $v_{0j} = w_j - \sum_{i \in J_0} a_{ij} v_{0i}$, resulta que v_{0j} se anula sobre F y además $\{v_{0j}\}_{j \in J}$ es base de \mathcal{V}_H .

Por último, si se satisface la hipótesis del enunciado sobre σ y suponemos que $j \in J - J_0$, entonces $v_{0j} \in \mathcal{C}(\delta_c(F)) \cap \mathcal{V}_H$ y como además $h \geq h_\sigma$, la parte (i) de la Proposición 4.1.5 asegura que $v_{0j} = 0$, lo cual es absurdo pues v_{0j} forma parte de una base de \mathcal{V}_H . ■

Cuando \mathcal{V}_H es trivial, necesariamente \mathcal{V}_F , \mathcal{V}_{F_1} y \mathcal{V}_{F_2} son también triviales, así que podemos extender la situación del lema anterior también a este caso, tomando $J = J_0 = J_1 = J_2 = \emptyset$.

En lo que sigue, consideraremos fijadas $\{v_j\}_{j \in J}$ una base ortonormal de \mathcal{V}_H y $\{v_{ij}\}_{j \in J}$, con $i = 0, 1, 2$, bases de \mathcal{V}_H verificando, respectivamente, las propiedades (i), (ii) y (iii) del lema anterior.

Si π , π_0 , π_1 y π_2 denotan, respectivamente, las proyecciones sobre los subespacios \mathcal{V}_H , \mathcal{V}_F , \mathcal{V}_{F_1} y \mathcal{V}_{F_2} , entonces si $\bar{f} \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$, $f \in \mathcal{C}(F)$, $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$ y $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\pi(\bar{f}) &= \sum_{j \in J} \left(\int_{\text{ad}_c(F)} \bar{f} v_j d\nu \right) v_j, \\
\pi_0(f) &= \sum_{j \in J_0} \left(\int_F f v_{0j} d\nu \right) v_{0j|_F} = \sum_{j \in J} \left(\int_F f v_{0j} d\nu \right) v_{0j|_F}, \\
\pi_1(g_1) &= \sum_{j \in J_1} \left(\int_{F_1} g_1 v_{1j} d\nu \right) v_{1j|_{F_1}} = \sum_{j \in J} \left(\int_{F_1} g_1 v_{1j} d\nu \right) v_{1j|_{F_1}}, \\
\pi_2(g_2) &= \sum_{j \in J_2} \left(\int_{F_2} g_2 \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}} d\nu \right) \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{F_2} = \sum_{j \in J_2} \left(\int_{F_2} g_2 \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}} d\nu \right) \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{F_2},
\end{aligned}$$

donde se adopta el convenio de que si el conjunto de índices es vacío, la suma correspondiente es nula. Obsérvese que cuando \mathcal{V}_F ó \mathcal{V}_{F_1} ó \mathcal{V}_{F_2} son triviales, las expresiones de la segunda igualdad dadas para π_0 , π_1 y π_2 en términos de estas bases, son compatibles con el hecho de que, en estos casos, dichas proyecciones son nulas.

Proposición 4.3.5 *Un núcleo $\tilde{G} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F)$ es una función de Green del problema [PC] sii para cada $y \in F$ satisface que*

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{L}(\tilde{G}_y) &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y - \sum_{j \in J} v_{0j}(y) v_{0j}, & \text{en } F, \\
\mathcal{U}(\tilde{G}_y(f)) &= 0, & \text{en } F_1, \\
\tilde{G}_y &= 0, & \text{en } F_2.
\end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Además, para cada $x, y \in F$ se satisface que

$$\tilde{G}(x, y) - \sum_{j \in J} v_{0j}(x) \int_F \tilde{G}(z, y) v_{0j}(z) d\nu(z) = \tilde{G}(y, x) - \sum_{j \in J} v_{0j}(y) \int_F \tilde{G}(z, x) v_{0j}(z) d\nu(z) \quad (4.8)$$

y $H \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F)$ es otro núcleo de Green del problema [PC] sii existen funciones $f_j \in \mathcal{C}(F)$, $j \in J$, tales que

$$H = \tilde{G} + \sum_{j \in J} v_{0j} \otimes f_j. \quad (4.9)$$

Demostración. Sean \tilde{G} una función de Green y $\tilde{\mathcal{G}}$ su operador de Green asociado. Entonces, para cada $y \in F$ se tiene que $\tilde{G}_y = \frac{1}{\nu(y)} \tilde{\mathcal{G}}(\varepsilon_y)$, lo que implica que \tilde{G}_y es una solución del problema [PS]₀ con dato $\frac{1}{\nu(y)} (\varepsilon_y - \pi_0(\varepsilon_y))$. Como $\pi_0(\varepsilon_y) = \nu(y) \sum_{j \in J} v_{0j}(y) v_{0j|_F}$, obtenemos que el núcleo de Green \tilde{G} , satisface las ecuaciones (4.7).

Recíprocamente, para cada $y \in F$ tiene sentido plantearse el problema de contorno (4.7). Si para cada $y \in F$, escogemos una de las soluciones del problema y la denotamos por

$\tilde{G}(x, y)$, podemos definir el operador $\tilde{\mathcal{G}}: \mathcal{C}(F) \longrightarrow \mathcal{C}(\text{ad}_c(F))$ asignando a cada $f \in \mathcal{C}(F)$ la función

$$u(x) = \int_F \tilde{G}(x, y) f(y) d\nu(y), \quad x \in \text{ad}_c(F).$$

Entonces, $\tilde{\mathcal{G}}$ será un operador de Green sii para cada $f \in \mathcal{C}(F)$, la función $\tilde{\mathcal{G}}(f)$ es solución de $[\text{PS}]_0$ con dato $f - \pi_0(f)$. Para comprobar este hecho, observemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u)(x) &= \int_F \mathcal{L}(\tilde{G}_y)(x) f(y) d\nu(y) \\ &= \int_F \left(\frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y(x) - \sum_{j \in J} v_{0j}(y) v_{0j}(x) \right) f(y) d\nu(y), \\ &= f(x) - \sum_{j \in J} \left(\int_F v_{0j} f d\nu \right) v_{0j}(x) = f(x) - \pi_0(f)(x), \quad x \in F, \\ \mathcal{U}(u)(x) &= \int_F \mathcal{U}(\tilde{G}_y)(x) f(y) d\nu(y) = 0 \quad x \in F_1, \\ u(x) &= \int_F \tilde{G}_y(x) f(y) d\nu(y) = 0, \quad x \in F_2, . \end{aligned}$$

Por otra parte, si $x, y \in F$, tenemos que

$$\int_F \tilde{G}_y \mathcal{L}(\tilde{G}_x) d\nu = \int_F \tilde{G}_y \left(\frac{1}{\nu(x)} \varepsilon_x - \sum_{j \in J} v_{0j}(x) v_{0j} \right) d\nu = \tilde{G}_y(x) - \sum_{j \in J} v_{0j}(x) \int_F \tilde{G}_y v_{0j} d\nu,$$

y como problema de contorno $[\text{PC}]$ es formalmente autoadjunto, resulta que

$$\begin{aligned} \tilde{G}_y(x) - \sum_{j \in J} v_{0j}(x) \int_F \tilde{G}_y v_{0j} d\nu &= \int_F \tilde{G}_y \mathcal{L}(\tilde{G}_x) d\nu \\ &= \int_F \tilde{G}_x \mathcal{L}(\tilde{G}_y) d\nu = \tilde{G}_x(y) - \sum_{j \in J} v_{0j}(y) \int_F \tilde{G}_x v_{0j} d\nu. \end{aligned}$$

Por último, supongamos que $H \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F)$ es otro núcleo de Green para el problema $[\text{PC}]$. Entonces para cada $f \in \mathcal{C}(F)$ tenemos que

$$\int_F \left(H(x, y) - \tilde{G}(x, y) \right) f(y) d\nu(y) \in \mathcal{V}_H.$$

Aplicando esta relación a $f = \varepsilon_y$ con $y \in F$, obtenemos que $H_y - \tilde{G}_y \in \mathcal{V}_H$ y por tanto que $H_y - \tilde{G}_y = \sum_{j \in J} f_j(y) v_{0j}$.

Recíprocamente, si H está determinado por la relación (4.9), es claro que para cada $y \in F$, H_y satisface las ecuaciones (4.7) y es por tanto un núcleo de Green. ■

Cuando \mathcal{V}_H es trivial, la proposición muestra que existe un único operador de Green que, por tanto, está caracterizado por las ecuaciones (4.7) y que además, es simétrico sobre F .

La técnica usada en la demostración de la proposición anterior permite obtener núcleos de Green con propiedades particulares. Los siguientes resultados constituyen una buena muestra de esta afirmación.

Corolario 4.3.6 *Los núcleos de Green ortogonales sobre F están caracterizados por satisfacer para cada $y \in F$, las ecuaciones*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(\check{G}_y) &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y - \sum_{j \in J} v_{0j}(y) v_{0j}, & \text{en } F, \\ \mathcal{U}(\check{G}_y(f)) &= 0, & \text{en } F_1, \\ \check{G}_y &= 0, & \text{en } F_2, \\ \int_F v_{0j} \check{G}_y d\nu &= 0, & j \in J. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Además, \check{G} es simétrico sobre F , es decir $\check{G}(x, y) = \check{G}(y, x)$ para cada $x, y \in F$, y para cada $f \in \mathcal{C}(F)$, la función $u(x) = \int_F \check{G}(x, y) f(y) d\nu(y)$, $x \in \text{ad}_c(F)$, es una solución de $[\text{PS}]_0$ con dato $f - \pi_0(f)$ que satisface que $\int_F u v_{0j} d\nu = 0$, $j \in J$.

En particular, si \mathcal{V}_F es trivial, toda función de Green es ortogonal sobre F y por tanto, simétrica sobre F , mientras que si $\delta_c(F) \neq \emptyset$ y existe $\sigma \in \mathcal{C}(\bar{F})$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in \text{ad}_c(F)$ y $h \geq h_\sigma$, entonces existe una única función de Green ortogonal sobre F , que está caracterizada por las ecuaciones (4.10). En este caso, para cada $f \in \mathcal{C}(F)$, la función $u(x) = \int_F \check{G}(x, y) f(y) d\nu(y)$, $x \in \text{ad}_c(F)$, es la única solución de $[\text{PS}]_0$ con dato $f - \pi_0(f)$ que satisface que $\int_F u v_{0j} d\nu = 0$, $j \in J$.

Demostración. Si \check{G} es una función de Green ortogonal sobre F , satisface las tres primeras ecuaciones de (4.10), en virtud de la Proposición 4.3.5. Además, como $\check{G}_y = \frac{1}{\nu(y)} \check{G}(\varepsilon_y)$, tenemos que $\check{G}_y \in \mathcal{V}_F^\perp$.

Recíprocamente si \check{G} satisface las ecuaciones (4.10), aplicando nuevamente la Proposición 4.3.5, \check{G} es un núcleo de Green y además para $f \in \mathcal{C}(F)$, $u(x) = \int_F \check{G}(x, y) f(y) d\nu(y)$ es solución del problema $[\text{PS}]_0$ con dato $f - \pi_0(f)$. Si ahora tomamos $j \in J$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_F u(x) v_{0j}(x) d\nu(x) &= \int_F v_{0j}(x) \left(\int_F \check{G}(x, y) f(y) d\nu(y) \right) d\nu(x) \\ &= \int_F f(y) \left(\int_F v_{0j}(x) \check{G}(x, y) d\nu(x) \right) d\nu(y) = 0. \end{aligned}$$

con lo que se concluye que $u \in \mathcal{V}_F^\perp$.

Por otra parte, el que $\check{G}_y \in \mathcal{V}_F^\perp$ para cada $y \in F$, implica, después de aplicar a \check{G} la expresión (4.8), que \check{G} es simétrico sobre F . En particular, cuando \mathcal{V}_F es trivial, cualquier función de Green satisface las condiciones de ortogonalidad sobre F , puesto que $v|_F = 0$ para cada $v \in \mathcal{V}_H$, y por tanto es ortogonal sobre F y en definitiva, simétrica sobre F .

Por último, si se satisface que $\delta_c(F) \neq \emptyset$ y $h \geq h_\sigma$, el Corolario 4.1.8 asegura que las ecuaciones (4.10) determinan unívocamente \check{G}_y y la unicidad de u . ■

Corolario 4.3.7 *El único núcleo de Green ortogonal, G , está caracterizado por satisfacer, para cada $y \in F$, las ecuaciones*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(G_y) &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y - \sum_{j \in J} v_{0j}(y) v_{0j}, & \text{en } F, \\ \mathcal{U}(G_y(f)) &= 0, & \text{en } F_1, \\ G_y &= 0, & \text{en } F_2, \\ \int_{\text{ad}_c(F)} v_{0j} G_y d\nu &= 0, & j \in J. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Además, para cada $f \in \mathcal{C}(F)$, la función $u(x) = \int_F G(x, y) f(y) d\nu(y)$, $x \in \text{ad}_c(F)$, es la única solución de $[\text{PS}]_0$ con dato $f - \pi_0(f)$ que satisface que $\int_{\text{ad}_c(F)} u v_{0j} d\nu = 0$, $j \in J$.

Demostración. La demostración sigue los pasos de la del corolario anterior. A pesar de ello, daremos aquí una demostración diferente de la unicidad de este tipo de núcleos. Supongamos pues que K es otro núcleo de Green satisfaciendo las ecuaciones (4.11). Entonces, $K = G + H$ con $H_y \in \mathcal{V}_H$ para cada $y \in F$. Como por otra parte, $H_y = K_y - G_y \in \mathcal{V}_H^\perp$, obtenemos que $H_y = 0$ para cada $y \in F$ y en definitiva que $K = G$. ■

Después de todos estos resultados y dado que sin hipótesis adicionales, el único núcleo de Green que está completamente caracterizado es G , podemos utilizarlo para obtener el resto de núcleos de Green a partir de la expresión (4.9).

Proposición 4.3.8 *Consideremos $\check{G} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F)$ la función definida por la expresión*

$$\check{G}(x, y) = G(x, y) - \sum_{j \in J} v_{0j}(x) \int_F G(z, y) v_{0j}(z) d\nu(z), \quad x \in \text{ad}_c(F), y \in F.$$

Entonces, \check{G} es un núcleo de Green ortogonal sobre F y una función $\tilde{G} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F)$ es un núcleo de Green sii existen funciones $f_j \in \mathcal{C}(F)$, $j \in J$, tales que

$$\tilde{G} = \check{G} + \sum_{i \in J} v_{0i} \otimes f_i. \quad (4.12)$$

Además, se tienen las siguientes propiedades:

i) \tilde{G} es simétrico sobre F sii existe una matriz simétrica de orden $|J_0|$, $A = (a_{ij})$, tal que para cada $i \in J_0$ se verifica que $f_i(y) = \sum_{j \in J_0} a_{ij} v_{0j}(y)$, $y \in F$.

ii) \tilde{G} es ortogonal sobre F sii $f_i = 0$, para cada $i \in J_0$.

Demostración. Que \check{G} es un núcleo de Green es consecuencia de aplicar la expresión (4.9) a G . Además, se comprueba directamente que \check{G} es simétrico y, de hecho, ortogonal sobre F . Además, como \check{G} es un núcleo de Green, cualquier otro núcleo de Green puede obtenerse de él mediante la expresión (4.9) aplicada a \check{G} , que es justamente (4.12).

(i) Después de la expresión anterior, como \check{G} es simétrica resulta que \tilde{G} es simétrica sobre F sii se satisface que

$$\sum_{i \in J_0} v_{0i}(x) f_i(y) = \sum_{i \in J_0} v_{0i}(y) f_i(x) \quad \text{para cada } x, y \in F.$$

Ahora, fijado $y \in F$, y teniendo en cuenta que $\{v_{0j}|_F\}_{j \in J_0}$ es ortonormal, obtenemos que para cada $i \in J_0$

$$f_i(y) = \sum_{i \in J_0} v_{0i}(y) \int_F f_i(x) v_{0i}(x) d\nu(x) = \pi_0(f_i)(y)$$

lo que implica que $f_i \in \mathcal{V}_F$ y por tanto, la existencia de una matriz A de orden $|J_0|$ tal que $f_i(y) = \sum_{j \in J_0} a_{ij} v_{0j}(y)$ para cada $y \in F$. En definitiva, \tilde{G} es simétrica sii

$$\sum_{i, j \in J_0} a_{ij} v_{0i}(x) v_{0j}(y) = \sum_{i, j \in J_0} a_{ij} v_{0i}(y) v_{0j}(x) \quad \text{para cada } x, y \in F$$

lo que es equivalente a que $a_{ij} = a_{ji}$, ya que el sistema $\{v_{0i}|_F \otimes v_{0j}|_F\}_{i, j \in J_0}$ es base ortonormal de $\mathcal{V}_F \times \mathcal{V}_F$.

(ii) Como \check{G} es ortogonal sobre F , resulta que \tilde{G} es ortogonal sobre F sii $\sum_{i \in J_0} v_{0i} \otimes f_i$ es ortogonal sobre F y esto ocurre sii para cada $j \in J_0$ y cada $y \in F$,

$$f_j(y) = \int_F \left(\sum_{i \in J_0} v_{0i}(x) f_i(y) \right) v_{0j}(x) d\nu(x) = 0. \quad \blacksquare$$

Obsérvese que la proposición anterior resume los resultados relativos a funciones de Green, obtenidos en la Proposición 4.3.5 y en el Corolario 4.3.6. Por ejemplo, si \mathcal{V}_H es trivial, entonces $J_0 = \emptyset$ con lo que las condiciones (i) y (ii) se satisfacen automáticamente y resulta que bajo esa hipótesis, todo núcleo de Green es ortogonal sobre F . Por otra parte, si $\delta_c(F) \neq \emptyset$ y existe $\sigma \in \mathcal{C}(\bar{F})$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in \text{ad}_c(F)$ y $h \geq h_\sigma$, entonces $J_0 = J$ y por tanto la condición (ii) implica que existe una única función de Green ortogonal sobre F . Es importante señalar que en este caso, salvo que \mathcal{V}_H sea trivial, existen infinitas funciones de Green simétricas.

Los resultados que expondremos a continuación, corresponden a las propiedades que satisfacen los núcleos de Robin y de Poisson de [PC] y los núcleos de Green de [PC]. Aunque los tres tipos de núcleos tienen propiedades análogas a las desarrolladas en la Proposición 4.3.5 y en el Corolario 4.3.6, sólo nos preocuparemos de presentar, en cada caso, un resultado del tipo de la Proposición 4.3.8 que sumarice todas las posibilidades. Nuevamente omitiremos las demostraciones pues, con las modificaciones pertinentes, son análogas a las efectuadas para el caso de los núcleos de Green.

Proposición 4.3.9 *Si $F_1 \neq \emptyset$, existe un único núcleo de Robin ortogonal del problema [PC], $R \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F_1)$, que está caracterizado por satisfacer para cada $y \in F$, las ecuaciones*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(R_y) &= 0, && \text{en } F, \\ \mathcal{U}(R_y) &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y - \sum_{j \in J} v_{1j}(y) v_{1j}, && \text{en } F_1, \\ R_y &= 0, && \text{en } F_2, \\ \int_{\text{ad}_c(F)} v_{1j} R_y d\nu &= 0, && j \in J. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Además, se verifican las siguientes propiedades:

i) Para cada $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$ la función $u(x) = \int_{F_1} R(x, y) g_1(y) d\nu(y)$, $x \in \text{ad}_c(F)$, es la única solución de [PS]₁ con dato $g_1 - \pi_1(g_1)$, tal que $\int_{\text{ad}_c(F)} u v_{1j} d\nu = 0$, $j \in J$.

ii) Si $\check{R} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F_1)$ es la función definida por la expresión

$$\check{R}(x, y) = R(x, y) - \sum_{j \in J} v_{1j}(x) \int_{F_1} R(z, y) v_{1j}(z) d\nu(z), \quad x \in \text{ad}_c(F), y \in F_1$$

entonces, \check{R} es un núcleo de Robin ortogonal sobre F_1 . Además, \check{R} es simétrico sobre F_1 y para cada $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$, la función $u(x) = \int_{F_1} \check{R}(x, y) g_1(y) d\nu(y)$, es una solución de [PS]₁ con dato $g_1 - \pi_1(g_1)$, que satisface que $\int_{F_1} u v_{1j} d\nu = 0$, $j \in J$. Si existe $\sigma \in \mathcal{C}(\bar{F})$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in \text{ad}_c(F)$ y $q \geq q_\sigma$, entonces \check{R} es el único núcleo de Robin ortogonal sobre F_1 y para cada $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$, la función u es la única solución de [PS]₁ con dato $g_1 - \pi_1(g_1)$, que satisface que $\int_{F_1} u v_{1j} d\nu = 0$, $j \in J$.

iii) Una función $\tilde{R} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F_1)$ es un núcleo de Robin sii existen $g_{1j} \in \mathcal{C}(F_1)$, $j \in J$, tales que

$$\tilde{R} = \check{R} + \sum_{i \in J} v_{1i} \otimes g_{1i}. \quad (4.14)$$

- iv) Un núcleo de Robin, \tilde{R} , es simétrico sobre F_1 sii existe una matriz simétrica de orden $|J_1|$, $A = (a_{ij})$, tal que para cada $i \in J_1$ se verifica que $g_{1i}(y) = \sum_{j \in J_1} a_{ij} v_{1j}(y)$, $y \in F_1$.
- v) Un núcleo de Robin, \tilde{R} , es ortogonal sobre F_1 sii $g_{1i} = 0$, para cada $i \in J_1$ y por tanto, todo núcleo de Robin ortogonal sobre F_1 es simétrico sobre F_1 . En particular, si \mathcal{V}_{F_1} es trivial, $J_1 = \emptyset$ y por tanto todo núcleo de Robin es simétrico y, de hecho, ortogonal sobre F_1 .

Antes de proceder a la obtención de los resultados relativos a los núcleos de Poisson, será cómodo introducir las siguientes notaciones: Si $K \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times \text{ad}_c(F))$, la expresión $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} K(x, y)$ representa a $\left(\frac{\partial K_y}{\partial \mathbf{v}} \right) (x)$, mientras que $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} K(x, y)$ representa a $\left(\frac{\partial K^x}{\partial \mathbf{v}} \right) (y)$.

Proposición 4.3.10 Si $F_2 \neq \emptyset$, existe un único núcleo de Poisson ortogonal del problema [PC], $P \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F_2)$, que está caracterizado por satisfacer, para cada $y \in F_2$, las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(P_y) &= 0, && \text{en } F, \\ \mathcal{U}(P_y) &= 0, && \text{en } F_1, \\ P_y &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y - \sum_{j \in J} \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}(y) \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}, && \text{en } F_2, \\ \int_{\text{ad}_c(F)} v_{2j} P_y d\nu &= 0, && j \in J. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Además, se verifican las siguientes propiedades:

- i) Para cada $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$ la función $u(x) = \int_{F_2} P(x, y) g_2(y) d\nu(y)$, $x \in \text{ad}_c(F)$, es la única solución de [PS]₂ con dato $g_2 - \pi_2(g_2)$, tal que $\int_{\text{ad}_c(F)} u v_{2j} d\nu = 0$, $j \in J$.

- ii) Si $\check{P} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F_2)$ es la función definida por la expresión

$$\check{P}(x, y) = P(x, y) - \sum_{j \in J} v_{2j}(x) \int_{F_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} P(z, y) \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}(z) d\nu(z), \quad x \in \text{ad}_c(F), y \in F_2$$

entonces, \check{P} es un núcleo de Poisson ortogonal sobre F_2 . Además, para cada $x, y \in F_2$, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \check{P}(x, y) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \check{P}(y, x)$ y para cada $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$, $u(x) = \int_{F_2} \check{P}(x, y) g_2(y) d\nu(y)$, es una solución de [PS]₂ con dato $g_2 - \pi_2(g_2)$, que satisface que $\int_{F_2} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}} d\nu = 0$, $j \in J$.

- iii) Una función $\tilde{P} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F_2)$ es un núcleo de Poisson sii existen $g_{2j} \in \mathcal{C}(F_2)$, $j \in J$, tales que

$$\tilde{P} = \check{P} + \sum_{i \in J} v_{2i} \otimes g_{2i}. \quad (4.16)$$

- iv) Un núcleo de Poisson, \tilde{P} , satisface que $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \tilde{P}$ es simétrico sobre F_2 sii existe una matriz simétrica de orden $|J_2|$, $A = (a_{ij})$, tal que $g_{2i}(y) = \sum_{j \in J_2} a_{ij} v_{2j}(y)$, $y \in F_2$, para cada $i \in J_2$.
- v) Un núcleo de Poisson, \tilde{P} , es ortogonal sobre F_2 sii $g_{2i} = 0$, para cada $i \in J_2$. En particular, si \mathcal{V}_{F_2} es trivial, $J_2 = \emptyset$ y por tanto todo núcleo de Poisson es ortogonal sobre F_2 .

Proposición 4.3.11 Existe un único núcleo de Green ortogonal del problema $\overline{[PC]}$, \bar{G} , que está caracterizado por satisfacer para cada $y \in F \cup F_1$, las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(\bar{G}_y) &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y - \sum_{j \in J} v_j(y) v_j, & \text{en } F \cup F_1, \\ \bar{G}_y &= 0, & \text{en } F_2, \\ \int_{\text{ad}_c(F)} v_j \bar{G}_y d\nu &= 0, & j \in J. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Además, se verifican las siguientes propiedades:

- i) $\bar{G} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times (F \cup F_1))$ y $\bar{G}(x, y) = \bar{G}(y, x)$ para cada $x, y \in \text{ad}_c(F)$. En particular, para cada $y \in \text{ad}_c(F)$, \bar{G}_y satisface las ecuaciones (4.17).
- ii) Para cada $\bar{f} \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$ la función $u(x) = \int_{F \cup F_1} \bar{G}(x, y) \bar{f}(y) d\nu(y)$, $x \in \text{ad}_c(F)$, es la única solución de $\overline{[PS]}_0$ con dato $\bar{f} - \pi(\bar{f})$, tal que $\int_{\text{ad}_c(F)} u v_j d\nu = 0$, $j \in J$.
- iii) Una función $\tilde{\bar{G}} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times (F \cup F_1))$ es un núcleo de Green del problema $\overline{[PC]}$ sii existen $\bar{f}_i \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$, $i \in J$, tales que

$$\tilde{\bar{G}} = \bar{G} + \sum_{i \in J} v_i \otimes \bar{f}_i. \quad (4.18)$$

- iv) Un núcleo de Green de $\overline{[PC]}$, $\tilde{\bar{G}}$, es simétrico sobre $\text{ad}_c(F)$ sii existe una matriz simétrica de orden $|J|$, $A = (a_{ij})$, tal que $\bar{f}_i(y) = \sum_{j \in J} a_{ij} v_j(y)$, $y \in F \cup F_1$, para cada $i \in J$.

El siguiente resultado traduce en términos de los núcleos correspondientes, la relación entre los operadores de Green, de Robin y de Poisson del problema $[PC]$ con el operador de Green del problema $\overline{[PC]}$, que fue presentada en la proposición 4.2.3.

Proposición 4.3.12 Se satisfacen las siguientes propiedades:

i) Las relaciones entre el núcleo de Green ortogonal del problema [PC], el núcleo de Green ortogonal sobre F del problema [PC] y \bar{G} están dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \bar{G}(x, y) - \sum_{j \in J} v_{0j}(y) \int_F \bar{G}(x, z) v_{0j}(z) d\nu(z), \\ \check{G}(x, y) &= \bar{G}(x, y) - \sum_{j \in J} v_{0j}(y) \int_F \bar{G}(x, z) v_{0j}(z) d\nu(z) \\ &\quad - \sum_{i \in J} v_{0i}(x) \int_F \bar{G}(w, y) v_{0i}(w) d\nu(w) \\ &\quad + \sum_{i, j \in J} v_{0i}(x) v_{0j}(y) \int_{F \times F} \bar{G}(w, z) v_{0i}(w) v_{0j}(z) d(\nu \times \nu)(w, z), \end{aligned}$$

para cada $(x, y) \in \text{ad}_c(F) \times F$.

ii) Si $F_1 \neq \emptyset$, las relaciones entre el núcleo de Robin ortogonal del problema [PC], el núcleo de Robin ortogonal sobre F_1 del problema [PC] y \bar{G} están dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \bar{G}(x, y) - \sum_{j \in J} v_{1j}(y) \int_{F_1} \bar{G}(x, z) v_{1j}(z) d\nu(z), \\ \check{R}(x, y) &= \bar{G}(x, y) - \sum_{j \in J} v_{1j}(y) \int_{F_1} \bar{G}(x, z) v_{1j}(z) d\nu(z) \\ &\quad - \sum_{i \in J} v_{1i}(x) \int_{F_1} \bar{G}(w, y) v_{1i}(w) d\nu(w) \\ &\quad + \sum_{i, j \in J} v_{1i}(x) v_{1j}(y) \int_{F \times F} \bar{G}(w, z) v_{1i}(w) v_{1j}(z) d(\nu \times \nu)(w, z), \end{aligned}$$

para cada $(x, y) \in \text{ad}_c(F) \times F_1$.

iii) Si $F_2 \neq \emptyset$, la relación entre el núcleo de Poisson ortogonal del problema [PC] y \bar{G} está dada por

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y(x) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} \bar{G}(x, y) \\ &\quad - \sum_{j \in J} \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}(y) \int_{F_2} \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}(z) \left(\frac{1}{\nu(x)} \varepsilon_x(z) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} \bar{G}(x, z) \right) d\nu(z). \end{aligned}$$

para cada $(x, y) \in \text{ad}_c(F) \times F_2$. En particular, si \mathcal{V}_F es trivial y $\text{sop}(p) \subset F_1 \times F_1$ entonces, para cada $(x, y) \in \text{ad}_c(F) \times F_2$,

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y(x) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} G(x, y) \\ &\quad - \sum_{j \in J} \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}(y) \int_{F_2} \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}(z) \left(\frac{1}{\nu(x)} \varepsilon_x(z) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} G(x, z) \right) d\nu(z). \end{aligned}$$

Demostración. (i) Si para cada $y \in F$, si consideramos $f = \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y - \sum_{j \in J} v_{0j}(y) v_{0j}|_F$, resulta que $f \in \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{V}_H^\perp$. Como G_y está determinada por las ecuaciones (4.11), aplicando la propiedad (ii) de la Proposición 4.3.11, resulta que

$$\begin{aligned} G_y(x) &= \int_{F \cup F_1} \bar{G}(x, z) f(z) d\nu(z) = \int_F \bar{G}(x, z) f(z) d\nu(z) \\ &= \bar{G}(x, y) - \sum_{j \in J} v_{0j}(y) \int_F \bar{G}(x, z) v_{0j}(z) d\nu(z). \end{aligned}$$

La relación entre \check{G} y \bar{G} se deduce directamente de esta expresión, teniendo en cuenta que

$$\check{G}(x, y) = G(x, y) - \sum_{i \in J} v_{0i}(x) \int_F G(w, y) v_{0i}(w) d\nu(w), \quad (x, y) \in \text{ad}_c(F) \times F.$$

(ii) La demostración de este apartado es análoga a la de (i) teniendo ahora en cuenta que para cada $y \in F_1$, R_y está determinada por las ecuaciones (4.13).

(iii) Si para cada $y \in F_2$, consideramos las funciones $g_2 = \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y - \sum_{j \in J} \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}(y) \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}|_{F_2}$ y $\bar{f} = -\bar{\mathcal{L}}(g_2)|_{F \cup F_1}$, resulta que $\bar{f} \in \mathcal{C}(F \cup F_1) \cap \mathcal{V}_H^\perp$. Como P_y está determinada por las ecuaciones (4.15), que son equivalentes a las ecuaciones

$$\bar{\mathcal{L}}(u) = \bar{f} \text{ sobre } F \cup F_1, \quad u = 0 \text{ sobre } F_2 \text{ e } \int_{\text{ad}_c(F)} u v_j = 0, \quad j \in J,$$

en el sentido de que $P_y = g_2 + u$, obtenemos que $P_y(x) = g_2(x) - \int_{F \cup F_1} \bar{G}(x, z) \bar{\mathcal{L}}g_2(z) d\nu(z)$, para cada $x \in \text{ad}_c(F)$, después de aplicar la propiedad (ii) de la Proposición 4.3.11.

Si ahora tenemos en cuenta que \bar{G}_z satisface las ecuaciones (4.17) para cada $z \in \text{ad}_c(F)$, y aplicamos la versión (4.1) de la Segunda Identidad de Green, resulta que

$$\begin{aligned} P_y(x) &= g_2(x) - \int_{F \cup F_1} \bar{G}(x, z) \bar{\mathcal{L}}g_2(z) d\nu(z) = g_2(x) - \int_{F_2} g_2(z) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} \bar{G}(x, z) d\nu(z) \\ &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y(x) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} \bar{G}(x, y) - \sum_{j \in J} \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}(y) \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}|_{F_2}(x) \\ &+ \sum_{j \in J} \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}(y) \int_{F_2} \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}(z) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} \bar{G}(x, z) d\nu(z) \\ &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y(x) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} \bar{G}(x, y) \\ &- \sum_{j \in J} \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}(y) \int_{F_2} \frac{\partial v_{2j}}{\partial \mathbf{v}}(z) \left(\frac{1}{\nu(x)} \varepsilon_x(z) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} \bar{G}(x, z) \right) d\nu(z), \quad x \in \text{ad}_c(F), \quad y \in F_2. \end{aligned}$$

Cuando \mathcal{V}_F es trivial, la parte (i) de la proposición muestra que $G(x, y) = \bar{G}(x, y)$ para cada $(x, y) \in \mathbf{ad}_c(F) \times F$. Si además $\mathbf{sop}(p) \subset F_1 \times F_1$, resulta que para cada $(x, z) \in \mathbf{ad}_c(F) \times F_2$,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} \bar{G}(x, z) = -\frac{1}{\nu(z)} \sum_{w \in F} c(x, w) \bar{G}(x, w) = -\frac{1}{\nu(z)} \sum_{w \in F} c(x, w) G(x, w) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} G(x, z). \quad \blacksquare$$

El siguiente resultado analiza las propiedades de los núcleos de Green del problema normalizado $[\widehat{\text{PC}}]$ y traduce la relación entre los operadores de Green ortogonales de los problemas $[\overline{\text{PC}}]$ y $[\widehat{\text{PC}}]$ que fue presentada en la Proposición 4.2.4, en términos de los núcleos correspondientes.

Proposición 4.3.13 *Sea $\sigma \in \mathcal{C}(\mathbf{ad}_c(F))$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in \mathbf{ad}_c(F)$ y consideremos $[\widehat{\text{PC}}]$ el problema normalizado de $[\text{PC}]$ correspondiente a σ .*

Existe un único núcleo de Green ortogonal del problema $[\widehat{\text{PC}}]$, \hat{G} , que está caracterizado por satisfacer para cada $y \in F \cup F_1$, las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}(\hat{G}_y) &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y - \hat{\pi}(\varepsilon_y), & \text{en } F \cup F_1, \\ \hat{G}_y &= 0, & \text{en } F_2, \\ \int_{\mathbf{ad}_c(F)} \frac{v_j}{\sigma} \hat{G}_y d\nu &= 0, & j \in J. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Además, se verifican las siguientes propiedades:

- i) $\hat{G} \in \mathcal{C}(\mathbf{ad}_c(F) \times (F \cup F_1))$ y $\hat{G}(x, y) = \hat{G}(y, x)$ para cada $x, y \in \mathbf{ad}_c(F)$. En particular, para cada $y \in \mathbf{ad}_c(F)$, \hat{G}_y satisface las ecuaciones (4.19).
- ii) Para cada $\hat{f} \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$ la función $\hat{u}(x) = \int_{F \cup F_1} \hat{G}(x, y) \hat{f} d\nu(y)$, $x \in \mathbf{ad}_c(F)$, es la única solución del problema semihomogéneos asociado a $[\widehat{\text{PS}}]$ con dato $\hat{f} - \hat{\pi}(\hat{f})$, tal que $\int_{\mathbf{ad}_c(F)} \frac{v_j}{\sigma} \hat{u} d\nu = 0$, $j \in J$.
- iii) Una función $\check{G} \in \mathcal{C}(\mathbf{ad}_c(F) \times (F \cup F_1))$ es un núcleo de Green del problema $[\widehat{\text{PC}}]$ sii existen $\hat{f}_i \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$, $i \in J$, tales que

$$\check{G} = \hat{G} + \sum_{i \in J} \frac{v_i}{\sigma} \otimes \hat{f}_i. \quad (4.20)$$

- iv) Un núcleo de Green de $[\widehat{\text{PC}}]$, \check{G} , es simétrico sobre $\mathbf{ad}_c(F)$ sii existe una matriz simétrica de orden $|J|$, $A = (a_{ij})$, tal que $\hat{f}_i(y) = \frac{1}{\sigma(y)} \sum_{j \in J} a_{ij} v_j(y)$, $y \in F \cup F_1$, para cada $i \in J$.

v) Para cada $x, y \in \text{ad}_c(F)$,

$$\begin{aligned}\bar{G}(x, y) &= \hat{G}(x, y) \sigma(x) \sigma(y) \\ &- \sum_{j \in J} v_j(y) \int_{\text{ad}_c(F)} \hat{G}(x, z) \sigma(x) \sigma(z) v_j(z) d\nu(z) \\ &- \sum_{j \in J} v_j(x) \int_{\text{ad}_c(F)} \hat{G}(y, z) \sigma(y) \sigma(z) v_j(z) d\nu(z) \\ &+ \sum_{i, j \in J} v_j(x) v_j(y) \int_{\text{ad}_c(F) \times \text{ad}_c(F)} \hat{G}(w, z) \sigma(w) \sigma(z) v_j(w) v_j(z) d(\nu \times \nu)(w, z).\end{aligned}$$

Demostración. Excepto la propiedad (v), la demostración es análoga a las realizadas en el caso de los núcleos de Green del problema [PC]. Para demostrar (v), como se satisface que $\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{I} - \pi) \circ \mathbb{T}_\sigma \circ \hat{\mathcal{G}} \circ \mathbb{T}_\sigma \circ (\mathcal{I} - \pi)$, resulta que

$$\bar{G}_y = \frac{1}{\nu(y)} (\mathcal{I} - \pi) \left(\sigma \hat{\mathcal{G}} (\sigma \varepsilon_y - \nu(y) \sum_{j \in J} v_j(y) \sigma v_j) \right).$$

Por otra parte, para cada $y \in F \cup F_1$

$$\begin{aligned}& \sigma(x) \hat{\mathcal{G}} \left(\sigma \varepsilon_y - \nu(y) \sum_{j \in J} v_j(y) \sigma v_j \right) (x) \\ &= \int_{\text{ad}_c(F)} \sigma(x) \hat{G}(x, z) \left(\sigma(z) \varepsilon_y(z) - \nu(y) \sum_{j \in J} v_j(y) \sigma(z) v_j(z) \right) d\nu(z) \\ &= \nu(y) \hat{G}(x, y) \sigma(x) \sigma(y) - \nu(y) \sum_{j \in J} v_j(y) \int_{\text{ad}_c(F)} \hat{G}(x, z) \sigma(x) \sigma(z) v_j(z) d\nu(z),\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}\bar{G}(x, y) &= \hat{G}(x, y) \sigma(x) \sigma(y) - \sum_{j \in J} v_j(y) \int_{\text{ad}_c(F)} \hat{G}(x, z) \sigma(x) \sigma(z) v_j(z) d\nu(z) \\ &- \sum_{j \in J} v_j(x) \int_{\text{ad}_c(F)} \hat{G}(y, z) \sigma(y) \sigma(z) v_j(z) d\nu(z) \\ &+ \sum_{i, j \in J} v_i(x) v_j(y) \int_{\text{ad}_c(F) \times \text{ad}_c(F)} \hat{G}(w, z) \sigma(w) \sigma(z) v_i(w) v_j(z) d(\nu \times \nu)(w, z). \blacksquare\end{aligned}$$

Finalizaremos esta sección especificando los resultados anteriores al caso en el que está en vigor la hipótesis

[H3] Existe una función $\sigma \in \mathcal{C}(\bar{F})$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in \text{ad}_c(F)$ y además se satisface que $q \geq q_\sigma$ y $h \geq h_\sigma$.

Por lo que respecta a las funciones de Green, los resultados que mostraremos constituyen una generalización de los que obtenidos en [5] para métricas ortogonales definidas sobre variedades discretas simples y donde $\nu = \mu = \lambda$ y σ es constante, y también de los que aparecen en [18] relativos al problema de Dirichlet y a la ecuación de Poisson para el Laplaciano normalizado (recuérdese que en todos estos casos, $q_F = 0$).

Proposición 4.3.14 *Si se satisface la hipótesis [H3], la función de Green ortogonal del problema [PC], $G \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F)$, está caracterizada por verificar para cada $y \in F$ las siguientes propiedades:*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(G_y) &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y - a_0 \sigma(y) \sigma, & \text{en } F, \\ \mathcal{U}(G_y) &= 0, & \text{en } F_1, \\ G_y &= 0, & \text{en } F_2, \\ a_0 \int_{\text{ad}_c(F)} \sigma G_y d\nu &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

donde $a_0 = 0$, excepto cuando se satisface simultáneamente que $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$, en cuyo caso $a_0 = \left(\int_F \sigma^2 d\nu \right)^{-1}$. Además, se verifican las siguientes propiedades:

i) Para cada $f \in \mathcal{C}(F)$, la función $u(x) = \int_F G(x, y) f(y) d\nu(y)$, $x \in \text{ad}_c(F)$, es la única solución de [PS]₀ con dato $f - a_0 \sigma \int_F f \sigma d\nu$ que satisface que $a_0 \int_{\text{ad}_c(F)} u \sigma d\nu = 0$.

ii) Si $\check{G} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F_1)$ es la función definida por la expresión

$$\check{G}(x, y) = G(x, y) - a_0 \sigma(x) \int_F G(z, y) \sigma(z) d\nu(z), \quad x \in \text{ad}_c(F), y \in F$$

entonces, \check{G} es el único núcleo de Green ortogonal sobre F . Además, \check{G} es simétrico sobre F y para cada $f \in \mathcal{C}(F)$, la función $u(x) = \int_F \check{G}(x, y) f(y) d\nu(y)$, es la única solución de [PS]₀ con dato $f - a_0 \sigma \int_F f \sigma d\nu$ que satisface que $a_0 \int_F u \sigma d\nu = 0$.

iii) Una función $\tilde{G} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F)$ es un núcleo de Green sii existe $\phi \in \mathcal{C}(F)$, tal que $\tilde{G} = \check{G} + a_0 (\sigma \otimes \phi)$.

iv) Un núcleo de Green, \tilde{G} , es simétrico sobre F sii $\tilde{G} = \check{G} + a_0 b (\sigma \otimes \sigma)$, con $b \in \mathbb{R}$.

Demostración. Aplicando la Proposición 4.1.5, \mathcal{V}_H es trivial o bien se reduce a los múltiplos de σ cuando $F = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$ simultáneamente. En este caso, $\sqrt{a_0} \sigma|_F$ es base ortonormal de \mathcal{V}_F y el resultado se concluye de las proposiciones 4.3.7 y 4.3.8. ■

Proposición 4.3.15 Si $F_1 \neq \emptyset$ y se satisface la hipótesis [H3], el núcleo de Robin ortogonal del problema [PC], $R \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F_1)$, está caracterizado por verificar para cada $y \in F$ las siguientes propiedades:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(R_y) &= 0, && \text{en } F, \\ \mathcal{U}(R_y) &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y - a_1 \sigma(y) \sigma, && \text{en } F_1, \\ R_y &= 0, && \text{en } F_2, \\ a_1 \int_{\text{ad}_c(F)} \sigma R_y d\nu &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

donde $a_1 = 0$, excepto cuando se satisface simultáneamente que $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$, en cuyo caso $a_1 = \left(\int_{F_1} \sigma^2 d\nu \right)^{-1}$. Además, se verifican las siguientes propiedades:

i) Para cada $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$ la función $u(x) = \int_{F_1} R(x, y) g_1(y) d\nu(y)$, $x \in \text{ad}_c(F)$, es la única solución de [PS]₁ con dato $g_1 - a_1 \sigma \int_{F_1} g_1 \sigma d\nu$ tal que $a_1 \int_{\text{ad}_c(F)} u \sigma d\nu = 0$.

ii) Si $\check{R} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F_1)$ es la función definida por la expresión

$$\check{R}(x, y) = R(x, y) - a_1 \sigma(x) \int_{F_1} R(z, y) \sigma(z) d\nu(z), \quad x \in \text{ad}_c(F), y \in F_1$$

entonces, \check{R} es el único núcleo de Robin ortogonal sobre F_1 . Además, \check{R} es simétrico sobre F_1 y para cada $g_1 \in \mathcal{C}(F_1)$, la función $u(x) = \int_{F_1} \check{R}(x, y) g_1(y) d\nu(y)$, es la única solución de [PS]₁ con dato $g_1 - a_1 \sigma \int_{F_1} g_1 \sigma d\nu$, que satisface que $a_1 \int_{F_1} u \sigma d\nu = 0$.

iii) Una función $\tilde{R} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F_1)$ es un núcleo de Robin sii existe $\phi \in \mathcal{C}(F_1)$ tal que $\tilde{R} = \check{R} + a_1 (\sigma \otimes \phi)$.

iv) Un núcleo de Robin, \tilde{R} , es simétrico sobre F_1 sii $\tilde{R} = \check{R} + a_1 b (\sigma \otimes \sigma)$, con $b \in \mathbb{R}$.

Proposición 4.3.16 Si $F_2 \neq \emptyset$ y se satisface la hipótesis [H3], existe un único núcleo de Poisson del problema [PC], $P \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times F_2)$, que está caracterizado por verificar para cada $y \in F$ las siguientes propiedades:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(P_y) &= 0, && \text{en } F, \\ \mathcal{U}(P_y) &= 0, && \text{en } F_1, \\ P_y &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y, && \text{en } F_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Además, $\frac{\partial P}{\partial \nu}$ es simétrico sobre F_2 y para cada $g_2 \in \mathcal{C}(F_2)$, $u(x) = \int_{F_2} P(x, y) g_2(y) d\nu(y)$, $x \in \text{ad}_c(F)$, es la única solución de [PS]₂ con dato g_2 .

Proposición 4.3.17 Si se satisface la hipótesis [H3], la función de Green ortogonal del problema $\overline{[PC]}$, $\bar{G} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times (F \cup F_1))$, está caracterizada por satisfacer para cada $y \in F \cup F_1$, las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(\bar{G}_y) &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y - a \sigma(y) \sigma, & \text{en } F \cup F_1, \\ \bar{G}_y &= 0, & \text{en } F_2, \\ a \int_{\text{ad}_c(F)} \sigma \bar{G}_y d\nu &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

donde $a = 0$, excepto cuando se satisface simultáneamente que $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$, en cuyo caso $a = \left(\int_{\text{ad}_c(F)} \sigma^2 d\nu \right)^{-1}$. Además, se verifican las siguientes propiedades:

- i) \bar{G} es simétrica en $\text{ad}_c(F)$.
- ii) Para cada $\bar{f} \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$ la función $u(x) = \int_{F \cup F_1} \bar{G}(x, y) \bar{f}(y) d\nu(y)$, $x \in \text{ad}_c(F)$, es la única solución de $\overline{[PS]}_0$ con dato $\bar{f} - a \sigma \int_{\text{ad}_c(F)} \bar{f} \sigma d\nu$, tal que $a \int_{\text{ad}_c(F)} u \sigma d\nu = 0$.
- iii) Una función $\tilde{\tilde{G}} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F) \times (F \cup F_1))$ es un núcleo de Green del problema $\overline{[PC]}$ sii existe $\phi \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$, tal que $\tilde{\tilde{G}} = \bar{G} + a(\sigma \otimes \phi)$.
- iv) Un núcleo de Green de $\overline{[PC]}$, $\tilde{\tilde{G}}$, es simétrico sobre $\text{ad}_c(F)$ sii existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\tilde{G}} = \bar{G} + ab(\sigma \otimes \sigma)$.

Proposición 4.3.18 Supongamos que se satisface la hipótesis [H3] y consideremos, \bar{G} la función de Green ortogonal del problema $\overline{[PC]}$ y $H, \bar{H} \in \mathcal{C}(\text{ad}_c(F)^4)$ las funciones determinadas, respectivamente por las expresiones

$$\begin{aligned} H(x, y; w, z) &= \bar{G}(x, y) \sigma(w) \sigma(z) - \bar{G}(x, z) \sigma(y) \sigma(w), \\ \bar{H}(x, y; w, z) &= H(x, y; w, z) - H(w, y; x, z). \end{aligned}$$

Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- i) Para cada $(x, y) \in \text{ad}_c(F) \times F$ se tiene que $\bar{G}(x, y) = G(x, y) = \check{G}(x, y)$, excepto cuando se satisface simultáneamente que $F_1 \neq \emptyset$, $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$, en cuyo caso

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \left(\int_F \sigma^2 d\nu \right)^{-2} \int_{F \times F} H(x, y; w, z) \sigma(w) \sigma(z) d(\nu \times \nu)(w, z); \\ \check{G}(x, y) &= \left(\int_F \sigma^2 d\nu \right)^{-2} \int_{F \times F} \bar{H}(x, y; w, z) \sigma(w) \sigma(z) d(\nu \times \nu)(w, z). \end{aligned}$$

ii) Si $F_1 \neq \emptyset$, para cada $(x, y) \in \mathfrak{ad}_c(F) \times F_1$ se tiene que $\bar{G}(x, y) = R(x, y) = \check{R}(x, y)$, excepto cuando se satisface simultáneamente que $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$, en cuyo caso

$$R(x, y) = \left(\int_{F_1} \sigma^2 d\nu \right)^{-2} \int_{F_1 \times F_1} H(x, y; w, z) \sigma(w) \sigma(z) d(\nu \times \nu)(w, z);$$

$$\check{R}(x, y) = \left(\int_{F_1} \sigma^2 d\nu \right)^{-2} \int_{F_1 \times F_1} \bar{H}(x, y; w, z) \sigma(w) \sigma(z) d(\nu \times \nu)(w, z).$$

iii) Si $F_2 \neq \emptyset$, para cada $(x, y) \in \mathfrak{ad}_c(F) \times F_2$ se tiene que

$$P(x, y) = \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y(x) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} \bar{G}(x, y).$$

En particular, si $\text{sop}(p) \subset F_1 \times F_1$, para cada $(x, y) \in \mathfrak{ad}_c(F) \times F_2$ se tiene que

$$P(x, y) = \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y(x) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} G(x, y).$$

Proposición 4.3.19 Supongamos que se satisface la hipótesis [H3], sea \hat{G} la función de Green ortogonal del problema $[\widehat{\text{PC}}]$ y consideremos $\hat{H} \in \mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F)^4)$ la función determinada por la expresión

$$\hat{H}(x, y; w, z) = \left(\hat{G}(x, y) - \hat{G}(x, z) - \hat{G}(y, w) + \hat{G}(w, z) \right) \sigma(x) \sigma(y) \sigma(z) \sigma(w).$$

Entonces, para cada $y \in F \cup F_1$ se verifican las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(\hat{G}_y) &= \frac{1}{\nu(y)} \varepsilon_y - a, & \text{en } F \cup F_1, \\ \hat{G}_y &= 0, & \text{en } F_2, \\ a \int_{\mathfrak{ad}_c(F)} \hat{G}_y d\nu &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

donde $a = 0$, excepto cuando se satisface simultáneamente que $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$, en cuyo caso $a = (\nu(F) + \nu(F_1))^{-1}$. Además, se verifican las siguientes propiedades:

i) \hat{G} es simétrica en $\mathfrak{ad}_c(F)$.

ii) Para cada $\hat{f} \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$ la función $u(x) = \int_{F \cup F_1} \hat{G}(x, y) \hat{f}(y) d\nu(y)$, $x \in \mathfrak{ad}_c(F)$, es la única solución del problema semihomogéneo asociado a $[\widehat{\text{PS}}]$ con dato $\hat{f} - a \int_{\mathfrak{ad}_c(F)} \hat{f} d\nu$, tal que $a \int_{\mathfrak{ad}_c(F)} u d\nu = 0$.

iii) Una función $\check{G} \in \mathcal{C}(\mathfrak{ad}_c(F) \times (F \cup F_1))$ es un núcleo de Green del problema $[\widehat{\text{PC}}]$ sii existe $\phi \in \mathcal{C}(F \cup F_1)$, tal que $\check{G} = \hat{G} + a \otimes \phi$.

iv) Un núcleo de Green de $[\widehat{\text{PC}}]$, \check{G} , es simétrico sobre $\text{ad}_c(F)$ sii existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\check{G} = \hat{G} + ab$.

v) Si no se satisface simultáneamente que $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$, entonces

$$\bar{G}(x, y) = \hat{G}(x, y) \sigma(x) \sigma(y) \quad \text{para cada } x, y \in \text{ad}_c(F).$$

vi) Si $F_2 = \emptyset$, $q = q_\sigma$ y $h = h_\sigma$, entonces para cada $x, y \in \text{ad}_c(F)$ se satisface que

$$\bar{G}(x, y) = \left(\int_{\text{ad}_c(F)} \sigma^2 d\nu \right)^{-2} \int_{\text{ad}_c(F) \times \text{ad}_c(F)} \hat{H}(x, y; w, z) \sigma(w) \sigma(z) d(\nu \times \nu)(w, z).$$

Obsérvese que con las hipótesis de la proposición anterior, cuando \mathcal{V}_H no es trivial, \mathcal{V}_F es no trivial, $J_0 = J = \{1\}$ y si $F_1 \neq \emptyset$ también \mathcal{V}_{F_1} es no trivial y $J_1 = J = \{1\}$. Sin embargo, el caso σ constante muestra que \mathcal{V}_{F_2} puede ser trivial cuando \mathcal{V}_H no lo es.

Capítulo 5

Solución de problemas de contorno mediante medidas de equilibrio

El objetivo principal de este capítulo consiste en obtener una metodología de resolución común a todos los problemas de contorno autoadjuntos que han sido tratados en los capítulos anteriores. Como todos estos problemas son equivalentes o bien a problemas de Dirichlet o bien a ecuaciones de Poisson, será suficiente desarrollar dicha metodología en estos casos. La idea básica consiste en expresar la solución de cualquiera de los anteriores problemas en términos de las denominadas medidas de equilibrio, que son las soluciones de problemas de Dirichlet semihomogéneos, con segundo miembro constante. Estas soluciones están íntimamente relacionadas con la geometría de la variedad, concretamente con la función coeficiente de la estructura Riemanniana, y permiten obtener expresiones muy sencillas de los diferentes núcleos de Green y de Poisson. Además, cuando la variedad tiene suficientes propiedades de simetría, es posible calcular directamente las medidas de equilibrio y por tanto los núcleos de Green ([5]). En el caso general, las medidas de equilibrio pueden obtenerse o bien mediante algoritmos de programación cuadrática y convexa, o bien mediante algoritmos de programación lineal. La posibilidad de resolver los problemas de equilibrio utilizando estos algoritmos de optimización, proviene de la aplicación de los métodos de la Teoría del Potencial. Bajo la hipótesis básica de que la función coeficiente de la estructura Riemanniana es no negativa, el operador de Laplace-Beltrami o más generalmente la suma de tal operador y un término conveniente de orden cero, se interpreta como un núcleo que satisface principios suficientes, energía y máximo, para que el problema de equilibrio tenga solución para cada subconjunto propio del conjunto de vértices. En este sentido, nuestras técnicas se sitúan entre las dos visiones tradicionales de la Teoría del Potencial: la desarrollada a partir de los núcleos y la desarrollada a partir de las formas de Dirichlet. Por una parte, nuestros núcleos no tienen que satisfacer todos los principios clásicos, y de hecho no son ni siquiera positivos, y por otra sólo en algunos casos la forma cuadrática asociada al operador es una forma de Dirichlet. Si interpretamos los problemas de contorno en términos de sistemas lineales, el caso en el que sí existe una forma de Dirichlet corresponde a la situación en la cual la matriz de coeficientes del sistema es una matriz de Stieltjes diagonalmente dominante

([8]). Nuestro tratamiento incluye situaciones para las cuales la forma cuadrática asociada se corresponde con una matriz de Stieltjes. Este tipo de sistemas lineales aparecen con frecuencia en la resolución numérica de problemas de contorno del continuo, tanto aquéllos que provienen de la consideración de esquemas en diferencias como de otros que surgen de la aplicación del método de los elementos finitos. Como estos sistemas suelen resolverse por medio de métodos iterativos (ver por ejemplo [7]), nuestra metodología constituye un método alternativo a dichas técnicas.

5.1 Teoría del Potencial en espacios finitos

En esta sección desarrollaremos algunos aspectos de la Teoría Discreta del Potencial, y más concretamente de la teoría del potencial respecto de un núcleo, que serán de utilidad en el resto del capítulo. En general, la Teoría del Potencial respecto de un núcleo se centra en el análisis de los principios que satisface dicho núcleo y que conciernen a las propiedades de sus potenciales asociados. Un tratamiento sistemático de la Teoría del Potencial respecto de un núcleo se encuentra en los trabajos de B. Fuglede [32] y de M. Ohtsuka [51]. Aunque en ambos el caso particular en el que espacio subyacente es finito no está explícitamente contemplado, los resultados fundamentales en este contexto pueden deducirse sin dificultad del caso general. El caso finito ha sido considerado explícitamente en algunos trabajos clásicos debidos a G. Choquet y J. Deny (ver por ejemplo [14]). Sin embargo, tanto en ellos como en otros trabajos posteriores, siempre se consideran núcleos no negativos, lo que corresponde a desarrollar una Teoría del Potencial respecto de los núcleos de Green. Por otra parte, el análisis del comportamiento de los funcionales de energía en un espacio finito, respecto de ciertas transformaciones, condujo a la creación de la Teoría de Formas de Dirichlet, llevada a cabo por A. Beurling y J. Deny en [8].

Como en un espacio finito los núcleos y las formas cuadráticas están identificados con matrices, tanto los principios de la Teoría del Potencial como las propiedades de las Formas de Dirichlet, pueden ser expresados como propiedades de las matrices correspondientes. Esta visión ya está contenida en los trabajos [8, 14] y a estos efectos también puede consultarse [47]. En cualquier caso, son las matrices de Stieltjes diagonalmente dominantes o sus inversas las que tienen el papel fundamental en toda esta teoría.

La introducción de la Teoría Discreta del Potencial respecto de un núcleo, que desarrollamos a continuación es muy simple pues, para nuestros fines, sólo necesitamos comprobar la verificación de dos principios fundamentales, energía y máximo, para concluir el principio de equilibrio que resultará ser la herramienta básica en nuestro tratamiento de los problemas de contorno. Cabe mencionar, no obstante, que no imponemos aquí ninguna hipótesis de positividad sobre el núcleo.

En toda la sección, V denotará un conjunto finito de puntos y $\mathcal{M}(V)$ el espacio de las medidas de Radon sobre él. Al igual que los núcleos sobre V están identificados con las matrices cuadradas de orden $|V|$, el espacio $\mathcal{M}(V)$ está identificado con $\mathcal{C}(V)$ y por tanto

con $\mathbb{R}^{|V|}$.

Definiciones 5.1.1 Si $\tau \in \mathcal{M}(V)$, denominaremos *soporte de τ* y *masa de τ* al conjunto y al número real dados respectivamente por

$$\text{sop}(\tau) = \{x \in V : \tau(x) \neq 0\}, \quad |\tau| = \int_V d\tau = \sum_{x \in V} \tau(x).$$

Si F es un subconjunto no vacío de V , denotaremos por $\mathcal{M}^+(F)$ al conjunto de medidas positivas cuyo soporte está contenido en F y por $\mathcal{M}^1(F)$ al conjunto $\{\tau \in \mathcal{M}^+(F) : |\tau| = 1\}$.

Denominaremos *núcleo sobre V* a cualquier función $\mathcal{K} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que sea simétrica, es decir tal que $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(y, x)$ para cada $x, y \in V$.

Dados $\tau \in \mathcal{M}(V)$ y \mathcal{K} un núcleo sobre V , denominaremos *potencial y energía de τ respecto de \mathcal{K}* , a la función y al número real dados respectivamente por

$$\mathcal{U}^\tau(x) = \int_V \mathcal{K}(x, y) d\tau(y), \quad x \in V \quad \text{e} \quad \mathcal{I}(\tau) = \int_V \mathcal{U}^\tau(x) d\tau(x).$$

Obsérvese que la aplicación $\mathcal{U} : \mathcal{M}(V) \rightarrow \mathcal{C}(V)$ dada por $\mathcal{U}(\tau) = \mathcal{U}^\tau$ es lineal, mientras que la aplicación $\mathcal{I} : \mathcal{M}(F) \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada medida le asigna su energía, es un funcional cuadrático cuya bilineal asociada, que como es habitual será denotada por $\mathcal{I}(\cdot, \cdot)$, está dada por la igualdad

$$\mathcal{I}(\tau_1, \tau_2) = \int_V \mathcal{U}^{\tau_1}(y) d\tau_2(y) = \int_{V \times V} \mathcal{K}(x, y) d\tau_1(x) d\tau_2(y) = \int_V \mathcal{U}^{\tau_2}(x) d\tau_1(x).$$

Definiciones 5.1.2 Sean \mathcal{K} un núcleo sobre V y F un subconjunto no vacío de V .

Diremos que \mathcal{K} satisface el *principio del máximo de Frostman*, o simplemente el *principio del máximo*, si $\max_{x \in V} \{\mathcal{U}^\tau(x)\} = \max_{x \in \text{sop}(\tau)} \{\mathcal{U}^\tau(x)\}$, para cada $\tau \in \mathcal{M}^+(V)$.

Diremos que \mathcal{K} satisface el *principio de energía sobre F* si $\mathcal{I}(\tau_1 - \tau_2) \geq 0$, para cada $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{M}^1(V)$ y se satisface la igualdad sii $\tau_1 = \tau_2$.

Proposición 5.1.3 Para cada F , subconjunto no vacío de V , el conjunto $\mathcal{M}^1(F)$ es convexo y compacto. Además, la condición necesaria y suficiente para que un núcleo \mathcal{K} sobre V satisfaga el principio de energía es que \mathcal{I} sea un funcional estrictamente convexo sobre $\mathcal{M}^1(V)$ o, de forma equivalente, que la bilineal $\mathcal{I}(\cdot, \cdot)$ sea definida positiva sobre el subespacio de las medidas de masa nula.

Demostración. Es inmediato comprobar las dos primeras afirmaciones. Por otra parte, el funcional cuadrático \mathcal{I} es estrictamente convexo sobre $\mathcal{M}^1(V)$ sii la bilineal asociada a él, $\mathcal{I}(\cdot, \cdot)$, es estrictamente definida positiva sobre el subespacio generado por $\mathcal{M}^1(V) - \mathcal{M}^1(V)$, que coincide con el conjunto $\{\tau \in \mathcal{M}(V) : |\tau| = 0\}$. Para finalizar basta observar que si $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{M}^1(V)$, entonces $\mathcal{I}(a\tau_1 + b\tau_2) \geq 0$ para cada $a, b \in \mathbb{R}$ sii $\mathcal{I}(\tau_1 - \tau_2) \geq 0$. ■

Proposición 5.1.4 *Sea \mathcal{K} un núcleo sobre V . Entonces, para cada F , subconjunto no vacío de V , se satisface que*

$$\min_{\tau \in \mathcal{M}^1(F)} \{\mathcal{I}(\tau)\} = \min_{\tau \in \mathcal{M}^1(F)} \max_{x \in \text{sop}(\tau)} \{\mathcal{U}^\tau(x)\}$$

y ambos problemas de minimización tienen las mismas soluciones. Si además \mathcal{K} satisface el principio de energía, entonces ambos problemas tienen una única solución.

Demostración. Como todos los conjuntos involucrados son compactos y los funcionales continuos los problemas de optimización planteados tienen solución.

Si $\tau \in \mathcal{M}^1(F)$, como para cada $x \in \text{sop}(\tau)$, $\mathcal{U}^\tau(x) \leq \max_{x \in \text{sop}(\tau)} \{\mathcal{U}^\tau(x)\}$, integrando respecto de τ resulta que $\mathcal{I}(\tau) \leq \max_{x \in \text{sop}(\tau)} \{\mathcal{U}^\tau(x)\}$, lo que implica que

$$\min_{\tau \in \mathcal{M}^1(F)} \{\mathcal{I}(\tau)\} \leq \min_{\tau \in \mathcal{M}^1(F)} \max_{x \in \text{sop}(\tau)} \{\mathcal{U}^\tau(x)\}.$$

Por otra parte, sea $\gamma \in \mathcal{M}^1(F)$ tal que $\mathcal{I}(\gamma) = \min_{\tau \in \mathcal{M}^1(F)} \{\mathcal{I}(\tau)\}$. Como \mathcal{I} es un funcional cuadrático y $\mathcal{M}^1(F)$ es convexo, γ debe satisfacer la desigualdad de Euler asociada, es decir $\mathcal{I}(\gamma, \tau - \gamma) \geq 0$ para cada $\tau \in \mathcal{M}^1(F)$. En particular, si $z \in F$ y tomamos $\tau = \varepsilon_z$, resulta

$$\mathcal{I}(\gamma) \leq \int_V \mathcal{U}^\gamma(x) d\tau(x) = \mathcal{U}^\gamma(z),$$

que es la desigualdad de Euler-Lagrange asociada.

Integrando la desigualdad de Euler-Lagrange respecto de γ y teniendo en cuenta que $|\gamma| = 1$, resulta que $\mathcal{U}^\gamma = \mathcal{I}(\gamma)$ sobre $\text{sop}(\gamma)$, de donde se deduce que

$$\min_{\tau \in \mathcal{M}^1(F)} \max_{x \in \text{sop}(\tau)} \{\mathcal{U}^\tau(x)\} \leq \mathcal{I}(\gamma)$$

y en definitiva que $\min_{\tau \in \mathcal{M}^1(F)} \max_{x \in \text{sop}(\tau)} \{\mathcal{U}^\tau(x)\} = \mathcal{I}(\gamma)$. Además, las medidas solución de ambos problemas coinciden.

Por último, si se satisface el principio de energía, el funcional \mathcal{I} es estrictamente convexo y por tanto el problema de minimización de la energía tiene solución única. ■

Corolario 5.1.5 *Sea \mathcal{K} un núcleo sobre V y supongamos que satisface el principio del máximo. Entonces, para cada F , subconjunto no vacío de V , se verifica que*

$$\min_{\tau \in \mathcal{M}^1(F)} \{\mathcal{I}(\tau)\} = \min_{\tau \in \mathcal{M}^1(F)} \max_{x \in F} \{\mathcal{U}^\tau(x)\};$$

ambos problemas de minimización tienen las mismas soluciones y éstas satisfacen que su potencial es constante sobre F . Si además \mathcal{K} satisface el principio de energía, entonces ambos problemas tienen una única solución que está caracterizada porque su potencial es constante sobre F .

Demostración. La primera parte se deduce inmediatamente de la proposición anterior y de que

$$\min_{\tau \in \mathcal{M}^1(F)} \max_{x \in F} \{\mathcal{U}^\tau(x)\} = \min_{\tau \in \mathcal{M}^1(F)} \max_{x \in \text{sop}(\tau)} \{\mathcal{U}^\tau(x)\}.$$

Por otra parte, si γ es una medida optimal, también se probó que $\mathcal{U}^\gamma = \mathcal{I}(\gamma)$ sobre $\text{sop}(\gamma)$. Además, la desigualdad de Euler-Lagrange implica que $\mathcal{I}(\gamma) \leq \mathcal{U}^\gamma(z)$ para cada $z \in F$ y como se satisface el principio del máximo, resulta que $\mathcal{I}(\gamma) \leq \mathcal{U}^\gamma(z) \leq \mathcal{I}(\gamma)$ para cada $z \in F$. Recíprocamente, si $\gamma \in \mathcal{M}^1(F)$ es tal que $\mathcal{U}^\gamma = a$ sobre F , necesariamente $a = \mathcal{I}(\gamma) \leq 0$. Entonces, para cada $\tau \in \mathcal{M}^1(F)$ tenemos que $\mathcal{I}(\gamma, \tau - \gamma) = 0$, por lo que γ satisface la desigualdad de Euler. La conclusión se obtiene observando que si se satisface el principio de energía, \mathcal{I} es un funcional convexo sobre $\mathcal{M}^1(F)$, y por tanto la verificación de la desigualdad de Euler caracteriza las medidas que producen su mínimo valor. ■

Desde el punto de vista del cálculo efectivo, el problema de minimización de la energía sobre el conjunto $\mathcal{M}^1(F)$ es un problema de Programación Cuadrática. Concretamente, si suponemos que $F = \{x_1, \dots, x_n\}$, y definimos $a_{ij} = \mathcal{K}(x_i, x_j)$, se trata de resolver el problema

$$\begin{aligned} \min \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} q_i q_j \\ q_1 \geq 0 \\ \vdots \\ q_n \geq 0 \\ q_1 + \dots + q_n = 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Además, si se satisface el principio de energía, el problema es de Programación Cuadrática y Convexa y tiene solución única.

Por otra parte, si se satisface el principio del máximo, el problema anterior es equivalente a calcular $\min_{\tau \in \mathcal{M}^1(F)} \max_{x \in F} \{\mathcal{U}^\tau(x)\}$ que es de hecho un problema de Programación Lineal. Concretamente, si introducimos la variable $a \in [0, +\infty)$, el anterior problema se reescribe como

$$\begin{aligned} \min \{a\} \\ \tau \in \mathcal{M}^1(F) \\ \mathcal{U}^\tau \leq a, \end{aligned}$$

es decir, como

$$\begin{aligned} & \min \{a\} \\ & q_1 \geq 0 \\ & \vdots \\ & q_n \geq 0 \\ & a - \sum_{j=1}^n a_{1,j} q_j \geq 0 \\ & \vdots \\ & a - \sum_{j=1}^n a_{n,j} q_j \geq 0 \\ & q_1 + \cdots + q_n = 1 \end{aligned}$$

Supongamos ahora que el núcleo \mathcal{K} satisface los principios de energía y del máximo. Consideremos también F un subconjunto no vacío de V tal que $\mathcal{I}(\tau) > 0$ para cada medida $\tau \in \mathcal{M}^1(F)$. Entonces existe una única medida $\gamma^F \in \mathcal{M}^+(F)$, denominada *medida de equilibrio*, solución del denominado *problema de equilibrio*:

$$\text{Encontrar } \gamma^F \in \mathcal{M}^+(F) \quad \text{tal que} \quad U^{\gamma^F}(x) = 1 \quad \text{sobre } F.$$

Con estas hipótesis, si $\gamma \in \mathcal{M}^1(F)$ es la única medida que satisface $\mathcal{I}(\gamma) = \min_{\tau \in \mathcal{M}^1(F)} \{\mathcal{I}(\tau)\}$, resulta que $\mathcal{I}(\gamma) > 0$ y por tanto, $\gamma^F = (\mathcal{I}(\gamma))^{-1}\gamma$. Recíprocamente, si γ^F es la medida de equilibrio, entonces $\mathcal{I}(\gamma^F) = |\gamma^F|$ y por tanto $\gamma = |\gamma^F|^{-1}\gamma^F$.

5.2 El núcleo asociado a los operadores en diferencias autoadjuntos

En el capítulo anterior demostramos que la resolución de problemas de contorno autoadjuntos sobre una variedad Riemanniana discreta podía abordarse desde la resolución de problemas de Dirichlet o de la ecuación de Poisson sobre una nueva variedad Riemanniana discreta. El objetivo de esta sección es analizar precisamente este tipo de problemas. A pesar de que están incluidos entre los tratados en el capítulo precedente, el estudio que desarrollaremos aquí es de naturaleza diferente y resulta ser también el análogo discreto de técnicas del caso continuo. Concretamente, asumiendo que la función coeficiente de la estructura Riemanniana es no negativa, deduciremos resultados de existencia y unicidad de solución a partir de las propiedades de monotonía del operador de Laplace o más generalmente, de los operadores autoadjuntos construidos sumando un término de orden cero al Laplaciano. La monotonía de estos operadores está íntimamente relacionada con los principios del mínimo, de manera análoga a la situación del caso continuo. Aquí, mostramos la verificación de estos principios ante la presencia de términos de orden cero, lo que constituye una extensión en

relación con el caso continuo. En particular, los esquemas en diferencias construidos a partir de tales operadores, satisfacen estos principios.

Una vez establecidas las propiedades fundamentales de los operadores considerados, describimos las principales propiedades de los núcleos de Green y de Poisson correspondientes, así como la relación existente entre ellos. También generalizamos, utilizando técnicas análogas, los resultados de Yamasaki (ver [61]) sobre la convergencia monótona de los núcleos de Green, respecto de variaciones monótonas del término de orden cero del operador.

Las propiedades de monotonía descritas anteriormente se transfieren al núcleo asociado a los operadores, lo que permite construir una Teoría del Potencial sobre el conjunto de vértices de la variedad. Concretamente, el núcleo Laplaciano satisface los principios de energía y del máximo, lo que en particular implica la existencia de medidas de equilibrio para cualquier subconjunto propio de vértices y también para el conjunto total, salvo que la ecuación de Poisson homogénea tenga solución no trivial. El resultado fundamental de esta sección consiste en expresar en términos de medidas de equilibrio los núcleos de Green y de Poisson asociados a cualquier subconjunto. Esto incluye también el caso del núcleo de Green ortogonal asociado a la ecuación de Poisson cuando la correspondiente ecuación homogénea tiene soluciones no triviales.

La consideración del Laplaciano como un núcleo al que aplicar las técnicas de la Teoría del Potencial, apareció por vez primera en [4, 5]. Aquí, se generalizan las técnicas utilizadas en ambos trabajos, al contexto de operadores de Laplace-Beltrami asociados a métricas generales. Además, en esta memoria se muestra la verificación de los principios de energía y del máximo para una gama más amplia de operadores, concretamente los obtenidos como normalizados de los operadores de Laplace-Beltrami, lo que en términos matriciales significa que dichos principios son satisfechos no sólo por las matrices de Stieltjes diagonalmente dominantes, sino también por la totalidad de las matrices de Stieltjes e incluso por las Z -matrices simétricas y semidefinidas positivas.

No abordaremos aquí la construcción explícita, en términos de medidas de equilibrio, de las funciones de Green asociadas a variedades con un alto grado de homogeneidad e isotropía. Una gama suficientemente amplia de tales variedades la constituyen los denominados *grafos distancia-regulares*, cuyas funciones de Green fueron construidas en [5].

La profunda relación entre las funciones de Green y las medidas de equilibrio, permite expresar en términos de estas últimas algunas propiedades de las soluciones de problemas de tipo *fuente-sumidero*. Concretamente, obtenemos una expresión explícita de la *resistencia efectiva entre nodos de una variedad* y generalizamos a este contexto el *Teorema de Foster* (ver por ejemplo [11]), utilizando para ello una extensión de las técnicas empleadas en [6]. También expresamos la función de Green de cualquier subvariedad cuyo complementario se reduce a un vértice, en términos de las resistencias efectivas, lo que constituye una generalización de los resultados obtenidos por Coppersmith *et al.* (ver [20] y [52]) y por tanto, puede utilizarse en la resolución del denominado *problema inverso*, es decir en la obtención del coeficiente de la estructura Riemanniana a partir del conocimiento de las resistencias efectivas.

En esta sección mantendremos las notaciones de los capítulos precedentes. Así pues, consideraremos fijada $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ una variedad Riemanniana discreta, c la función coeficiente de la estructura Riemanniana, λ la medida cardinal y Δ el operador de Laplace determinado por λ y la estructura Riemanniana (\mathbf{B}, μ) . La razón de utilizar la medida cardinal en lugar de otra arbitraria ν , es debida a nuestro interés por mantener la simetría de los núcleos considerados. No obstante, el caso general puede obtenerse a partir del aquí considerado, o bien a partir de las relación entre las soluciones de los problemas de contorno o bien de las relación entre los núcleos integrales correspondientes. Por supuesto, nuestro estudio incluye el caso en el que la estructura métrica corresponde a los casos estudiados hasta ahora en el ámbito de la Teoría de Redes, es decir a los casos en los que $\mu = \lambda$ y \mathbf{B} es ortogonal y compatible.

Consideraremos también fijados la función $q \in \mathcal{C}(V)$, donde V es el conjunto de vértices de Γ , y el operador en diferencias sobre el espacio \mathcal{L} dado por $\mathcal{L}(u) = -\Delta u + qu$.

Para cada subconjunto no vacío F plantearemos en Γ el problema de contorno consistente en, dadas las funciones $f \in \mathcal{C}(F)$, $g \in \mathcal{C}(F^c)$ encontrar, si es posible, las funciones $u \in \mathcal{C}(V)$ que satisfacen que

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(u)(x) &= f(x), & \text{si } x \in F, \\ u(x) &= g(x), & \text{si } x \in F^c. \end{aligned} \right\} \text{ [PC]}$$

Cuando $F \neq V$, tiene sentido considerar los siguientes problemas semihomogéneos asociados a [PC]

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(u)(x) &= f(x), & \text{si } x \in F, \\ u(x) &= 0, & \text{si } x \in F^c. \end{aligned} \right\} \text{ [PC]}_0, \quad \left. \begin{aligned} \mathcal{L}(u)(x) &= 0, & \text{si } x \in F, \\ u(x) &= g(x), & \text{si } x \in F^c. \end{aligned} \right\} \text{ [PC]}_2.$$

Es claro que si u_0 y u_1 son soluciones de $[\text{PC}]_0$ y $[\text{PC}]_2$ respectivamente, entonces $u = u_0 + u_1$ es solución de [PC]. Además, el problema [PC] es equivalente al problema semihomogéneo $[\text{PC}]_0$ con dato $f - \mathcal{L}(g)$, es decir al problema

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(u)(x) &= f(x) - \mathcal{L}(g)(x), & \text{si } x \in F, \\ u(x) &= 0, & \text{si } x \in F^c. \end{aligned} \right\}$$

en el sentido de que u es solución de este problema sii $u + g$ es solución de [PC]. Así pues además de [PC] consideraremos también los problemas de contorno homogéneo, [PH], y semihomogéneos $[\text{PS}]_0$ y $[\text{PS}]_2$ asociados a [PC].

Obsérvese que cuando $F \neq V$, este problema corresponde a uno de los analizados en el capítulo precedente, concretamente al caso $F_1 = \emptyset$, con la salvedad de que como en general no se satisface que $\delta_c(F) = F^c$, no es exactamente un problema de Dirichlet. Sin embargo, si $u \in \mathcal{C}(V)$ y consideramos $v = u|_{\text{ad}_c(F)}$, es claro que u es una solución de [PC] sii $u = g$ sobre $F^c - \delta_c(F)$ y v es solución del problema de Dirichlet

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(v)(x) &= f(x), & \text{si } x \in F, \\ v(x) &= g(x), & \text{si } x \in \delta_c(F). \end{aligned} \right\}.$$

Así pues, cuando $F \neq V$, consideraremos a [PC] y a sus problemas semihomogéneos asociados como problemas de Dirichlet a los que puede aplicarse por tanto los resultados de existencia y unidad establecidos en el capítulo precedente. De acuerdo con las notaciones allí utilizadas, si $\sigma \in \mathcal{C}(V)$ es tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in V$ y consideramos la función $q_\sigma = \frac{1}{\sigma} \Delta\sigma$, entonces para cada $u \in \mathcal{C}(V)$ y cada $x \in V$, la expresión de $\mathcal{L}(u)(x)$ está dada por

$$\mathcal{L}(u)(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \sum_{z \in V} c(x, z) \sigma(x) \sigma(z) \left(\frac{u(x)}{\sigma(x)} - \frac{u(z)}{\sigma(z)} \right) + (q(x) - q_\sigma(x)) u(x) \quad (5.1)$$

y en particular, $\mathcal{L}(u)(x) = - \int_V c(x, y) u(y) d\lambda(y)$ para cada $x \notin \text{sop}(u)$. Esta última expresión implica que si u tiene signo constante, entonces $\mathcal{L}(u)$ tiene signo constante sobre $V \setminus \text{sop}(u)$ y $\mathcal{L}(u)(x) = 0$ para $x \notin \text{sop}(u)$ sii $c(x, y) = 0$ para cada $y \in \text{sop}(u)$, es decir si sobre la variedad $\Gamma_c(V)$, $d(x, \text{sop}(u)) > 1$.

Por otra parte, $\mathcal{L}(\sigma) = (q - q_\sigma)\sigma$ lo que implica que $\mathcal{L}(\sigma) = 0$ cuando $q = q_\sigma$. Además, si para cada subconjunto $F \subset V$ definimos $q_{F, \sigma} \in \mathcal{C}(F)$ como $q_{F, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \sum_{z \notin \bar{F}} c(x, z) \sigma(z)$ cuando $x \in F$, entonces para cada $u \in \mathcal{C}(\bar{F})$ se satisface que

$$\mathcal{L}(u)(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \sum_{z \in \bar{F}} c(x, z) \sigma(x) \sigma(z) \left(\frac{u(x)}{\sigma(x)} - \frac{u(z)}{\sigma(z)} \right) + (q(x) + q_{F, \sigma}(x) - q_\sigma(x)) u(x), \quad x \in F.$$

En toda la sección, supondremos que se satisfacen las siguientes hipótesis:

[H1] V conexo como conjunto de vértices de $\Gamma_c(V)$.

[H2] El coeficiente de la estructura Riemanniana, c , es una función no negativa sobre $V \times V$.

[H3] Existe $\sigma \in \mathcal{C}(V)$ tal que $\sigma > 0$ y $q \geq q_\sigma$.

Obsérvese que las hipótesis [H1] y [H2] implican que dados $x, y \in V$, existen vértices $x_0, \dots, x_n \in V$ con $x_0 = x$, $x_n = y$ y tales que $c(x_{j-1}, x_j) > 0$ para cada $j = 1, \dots, n$. En particular, la hipótesis [H1] implica que si u es una función que no cambia de signo, necesariamente $\mathcal{L}(u)(x) \neq 0$ para algún $x \in \text{sop}(u)$, pues en otro caso $d(\text{sop}(u), \text{sop}(u)^c) > 1$ y por tanto, V queda desconectado en $\Gamma_c(V)$.

Por otra parte, $q_\sigma = 0$ sii σ es constante y cuando σ no es constante, necesariamente q_σ cambia signo en V pues $\int_V \sigma q_\sigma d\lambda = \int_V \Delta\sigma d\lambda = 0$. Así pues, cuando $q = 0$, es decir cuando \mathcal{L} coincide con Δ , el operador de Laplace de la variedad Riemanniana discreta $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$, se satisface la condición [H3] con $\sigma = 1$ y no existe ninguna función positiva no constante tal que $q \geq q_\sigma$.

De acuerdo con las hipótesis anteriores, los resultados de las proposiciones 4.1.5, parte (iii), y 4.1.3 y del Corolario 4.1.8 permiten concluir que [PC] y sus problemas semihomogéneos asociados, tienen una única solución excepto cuando se satisface simultáneamente que $F = V$ y $q = q_\sigma$. En este último caso el problema [PC] corresponde a la ecuación de Poisson sobre V y existe solución de [PC] sii se verifica que $\int_V f \sigma d\lambda = 0$. Además, cuando esta condición se satisface, la solución es única salvo adición de un múltiplo de σ , lo que implica la existencia de una única solución u de [PC] tal que $\int_V u \sigma d\lambda = 0$. Estos resultados pueden también interpretarse en términos de la función de Green y del núcleo de Poisson asociados al problema [PC]. Así, existe una única función de Green del problema [PC], excepto cuando se satisface simultáneamente que $F = V$ y $q = q_\sigma$, en cuyo caso existe una única función de Green ortogonal; mientras que si F es propio, existe un único núcleo de Poisson del problema [PC], que en virtud de los comentarios efectuados anteriormente en torno al problema de Dirichlet, debe coincidir con $\varepsilon_y(x)$ para cada $y \in F^c \setminus \delta_c(F)$ y cada $x \in V$. El hecho de que el problema de contorno [PC] está completamente determinado por la elección del subconjunto F , tanto en el caso $F \neq V$ (problema de Dirichlet) como en el caso $F = V$ (problema de Poisson) motiva los siguientes conceptos.

Definición 5.2.1 Si F es un subconjunto no vacío de V , denominaremos *función de Green de F* a la función de Green ortogonal del problema [PC]. En general, la función de Green de F será denotada por G^F , excepto en los casos $F = V$ y $F = V - \{x\}$ en los cuales será denotada por G y por G^x , respectivamente.

Si F es propio, denominaremos *núcleo de Poisson de F* al núcleo de Poisson del problema [PC]. En general, el núcleo de Poisson de F será denotado por P^F excepto en los casos $F = V - \{x\}$ y $F = V - \{x, y\}$ con $x \neq y$ en los que será denotado por P^x y por P^{xy} , respectivamente.

Es claro que si $F \neq V$, G^F es la única función de Green de [PC], mientras que si $F = V$, G coincide con la función de Green ortogonal asociada a la ecuación de Poisson y además G es la única función de Green de este problema si $q \neq q_\sigma$.

Si observamos que cuando F es un subconjunto no vacío V y $f \in \mathcal{C}(F)$, la solución del problema [PC]₀ con dato f , si $F \neq V$, y del problema [PC] con dato f , si $F = V$, es una función perteneciente a $\mathcal{C}(F)$, resulta que los resultados anteriores establecen que para cada $F \subset V$ no vacío, $\mathcal{L}|_F$ es un automorfismo sobre $\mathcal{C}(F)$, excepto cuando se satisface simultáneamente que $F = V$ y $q = q_\sigma$. Los siguientes resultados están encaminados a obtener esta conclusión a partir del análisis de las propiedades de monotonía del operador \mathcal{L} .

Proposición 5.2.2 *Supongamos que F es un subconjunto no vacío de V y que no se satisfacen simultáneamente que $F = V$ y $q = q_\sigma$. Si $u \in \mathcal{C}(V)$ es tal que $\mathcal{L}(u) \geq 0$ sobre F y $u \geq 0$ sobre F^c , entonces $u \in \mathcal{C}^+(V)$.*

Demostración. Como por hipótesis, $u \geq 0$ sobre F^c , basta demostrar que $u(z) \geq 0$ para cada $z \in F$. Si $v = \frac{u}{\sigma}$, para concluir que $u \in \mathcal{C}^+(F)$, basta demostrar que $v \in \mathcal{C}^+(F)$ y

para ello, si $x \in F$ es tal que $v(x) = \min_{z \in F} \{v(z)\}$ será suficiente demostrar que $v(x) \geq 0$, o de forma equivalente, que si $v(x) \leq 0$, entonces $v(x) = 0$.

Supongamos pues que $v(x) \leq 0$. Entonces $v(x) \leq v(z)$ para cada $z \in V$ y por tanto de la expresión (5.1), deducimos que

$$0 \leq \mathcal{L}(u)(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \sum_{z \in V} c(x, z) \sigma(x) \sigma(z) (v(x) - v(z)) + (q(x) - q_\sigma(x)) \sigma(x) v(x) \leq 0,$$

lo que implica que $v(x) = v(z)$ para cada $z \in F$ tal que $c(x, z) \neq 0$. Desde luego, si $c(x, z) > 0$ para algún $z \in F^c$, como $v(z) \geq 0$, necesariamente $v(x) = 0$.

Si $F \neq V$ y consideramos $y \in F^c$, como se satisfacen [H1] y [H2], existen $n \in \mathbb{N}^*$ y $x_0, \dots, x_n \in V$, tales que $x_0 = x$, $x_n = y$ y además $c(x_{j-1}, x_j) > 0$ para cada $j = 1, \dots, n$. Sean ahora $J = \{j = 1, \dots, n : x_j \notin F\}$ y j_0 el primer elemento de J . Si $j_0 = 1$, el razonamiento anterior prueba que $v(x) = 0$, mientras que si $j_0 > 1$, el mismo razonamiento concluye que x_1 es un punto de mínimo de v sobre F , así que podemos repetir el razonamiento anterior tomando el punto x_1 en lugar de x_0 . Un simple razonamiento inductivo concluye que $v(x_0) = \dots = v(x_{j_0}) = 0$.

Si $F = V$, un razonamiento análogo al anterior concluye que v debe ser constante sobre F . Por tanto, $0 = \mathcal{L}(u) = (q - q_\sigma)u$ y como $q \neq q_\sigma$, necesariamente $u = 0$. ■

Cuando $q = q_\sigma$, aplicando un razonamiento análogo al de la demostración anterior o bien teniendo en cuenta que, en este caso, para cada $u \in \mathcal{C}(V)$ necesariamente $\mathcal{L}(u)$ debe cambiar de signo, resulta que la condición $\mathcal{L}(u) \geq 0$ sobre V es equivalente a que $\mathcal{L}(u) = 0$ sobre V y por tanto a que $u = a\sigma$ con $a \in \mathbb{R}$. Por otra parte, como veremos a continuación esta propiedad de monotonía de los operadores del tipo $\mathcal{L} = -\Delta + q$ puede extenderse a propiedades de monotonía respecto de q .

Corolario 5.2.3 *Consideremos $\sigma, q_1, q_2 \in \mathcal{C}(V)$ tales que sobre V , $\sigma > 0$ y $q_1 \geq q_2 \geq q_\sigma$; los operadores en diferencias $\mathcal{L}_1 = -\Delta + q_1$ y $\mathcal{L}_2 = -\Delta + q_2$ y F un subconjunto propio de V . Si $u, v \in \mathcal{C}(V)$ satisfacen que $\mathcal{L}_2(v) \geq \mathcal{L}_1(u) \geq 0$ sobre F y que $v \geq u \geq 0$ sobre F^c , entonces $v \geq u \geq 0$ sobre V .*

Demostración. Si aplicamos la proposición anterior al operador \mathcal{L}_1 y a la función u , obtenemos que $u \geq 0$ sobre V . Por otra parte, teniendo en cuenta la identidad $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 - (q_1 - q_2)$, si consideramos la función $w = v - u$, resulta que

$$\mathcal{L}_2(w) = \mathcal{L}_2(v) - \mathcal{L}_2(u) = \mathcal{L}_2(v) - \mathcal{L}_1(u) + (q_1 - q_2)u \geq 0 \quad \text{sobre } F.$$

Como $w \geq 0$ sobre F^c , concluimos que $w \in \mathcal{C}^+(V)$ tras una nueva aplicación de la proposición anterior. ■

Nuevamente, el resultado del corolario anterior sigue siendo válido cuando $F = V$ siempre y cuando no se satisfaga que $q_2 = q_\sigma$.

A continuación, la propiedad de monotonía del operador \mathcal{L} será aprovechada para volver a obtener los resultados ya conocidos de existencia y unicidad de solución de los problemas semihomogéneos asociados a [PC]. De hecho, en virtud de la equivalencia del problema [PC]₂ con dato g y el problema [PC]₀ con dato $-\mathcal{L}(g)$, será suficiente establecer los resultados para el caso del problema semihomogéneo [PC]₀.

Corolario 5.2.4 *Sea F un subconjunto no vacío de V y supongamos que no se satisface simultáneamente que $F = V$ y que $q = q_\sigma$. Entonces, para cada $f \in \mathcal{C}(F)$ existe una única $u \in \mathcal{C}(F)$ tal que $\mathcal{L}(u) = f$ sobre F . Además, si $f \in \mathcal{C}^+(F)$, entonces $u \in \mathcal{C}^+(F)$ y $\text{sop}(f) \subset \text{sop}(u)$.*

Demostración. Consideremos el endomorfismo $\mathcal{F}: \mathcal{C}(F) \rightarrow \mathcal{C}(F)$ dado por la asignación $\mathcal{F}(u) = \mathcal{L}(u)|_F$ y supongamos que \mathcal{F} es monótono, es decir satisface que $\mathcal{F}(u) \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$. Entonces \mathcal{F} es biyectivo ya que es inyectivo, pues si $\mathcal{F}(u) = 0$, entonces $\mathcal{F}(u), \mathcal{F}(-u) \geq 0$ lo que implica que $u, -u \geq 0$, es decir que $u = 0$. Esto prueba que si $f \in \mathcal{C}^+(F)$, existe una única $u \in \mathcal{C}^+(F)$ tal que $\mathcal{F}(u) = f$, es decir tal que $\mathcal{L}(u) = f$ sobre F . Además, si consideramos $u \in \mathcal{C}^+(F)$, en virtud de la expresión (5.1) si $x \in F$ es tal que $u(x) = 0$, como c, σ y u son no negativas, resulta que $\mathcal{L}(u)(x) \leq 0$. Por tanto si $f \in \mathcal{C}^+(F)$ y $u \in \mathcal{C}^+(F)$ son tales que $\mathcal{L}(u) = f$ sobre F , necesariamente $f(x) = 0$ cuando $u(x) = 0$, lo que implica que $\text{sop}(f) \subset \text{sop}(u)$.

Así pues la proposición quedará probada si demostramos que \mathcal{F} es un operador monótono. Pero esta propiedad es consecuencia directa de la proposición anterior, pues si $u \in \mathcal{C}(F)$, y $\mathcal{F}(u) \geq 0$, entonces $u \geq 0$ sobre F^c y $\mathcal{L}(u) \geq 0$ sobre F , lo que implica que $u \in \mathcal{C}^+(V)$, lo que en nuestro caso es equivalente a que $u \in \mathcal{C}^+(F)$. ■

Corolario 5.2.5 (Principio de condensadores). *Sean F es subconjunto propio de V , $\{A, B\}$ una partición de F^c y $u \in \mathcal{C}(V)$ la única solución del problema de contorno*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(u)(x) &= 0, & \text{si } x \in F, \\ u(x) &= \sigma(x), & \text{si } x \in A, \\ u(x) &= 0, & \text{si } x \in B. \end{aligned} \right\}$$

Entonces, u satisface que $0 \leq u \leq \sigma$ sobre V , $\mathcal{L}(u) \geq 0$ sobre A y $\mathcal{L}(u) \leq 0$ sobre B .

Demostración. Si $A = \emptyset$, como $F^c \neq \emptyset$, la única solución del problema de contorno del enunciado es $u = 0$, que satisface las conclusiones de la proposición. Si $A \neq \emptyset$, entonces el problema planteado es equivalente al problema de encontrar $v \in \mathcal{C}(F)$ tal que $\mathcal{L}(v) = f$ sobre F , donde $f = -\mathcal{L}(\sigma|_A)|_F$, en el sentido de que u es solución de sii $u = v + \sigma|_A$. Además, en virtud de la identidad (5.1) se tiene que $f(x) = \int_A c(x, y)\sigma(y) d\lambda(y)$ y por tanto $f \geq 0$.

Aplicando ahora el Corolario 5.2.4, resulta que el problema equivalente tiene una única solución que además es no negativa, lo que implica que el problema inicial tiene también una única solución, u , que además verifica que $u \geq 0$.

Por otra parte, si tomamos $w = \sigma - u$, entonces $w \geq 0$ en F^c y como además se tiene que $\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(\sigma) = (q - q_\sigma)\sigma \geq 0$, la aplicación de la Proposición 5.2.2 concluye que $w \geq 0$ sobre V . ■

La propiedad de monotonía del operador \mathcal{L} a la que hace referencia la Proposición 5.2.2, puede interpretarse como un *principio del mínimo* para el operador en diferencias \mathcal{L} , (ver por ejemplo [24, 61]), que es una versión discreta del conocido principio del mínimo para operadores elípticos de segundo orden (ver por ejemplo [12, Proposición IX.29]). De hecho, mostraremos a continuación que dicha propiedad corresponde realmente a un *principio fuerte del mínimo*. Antes de demostrar la propiedad anterior será conveniente considerar F como un subconjunto de vértices de la variedad discreta $\Gamma_c(V)$ y así, $\delta(F)$ y \bar{F} denotarán ahora la frontera y la adherencia de F en esta variedad.

Proposición 5.2.6 *Supongamos que $q = q_\sigma$ y consideremos F un subconjunto propio. Si $u \in \mathcal{C}(\bar{F})$ es tal que $\mathcal{L}(u) \geq 0$ sobre F , entonces*

$$\min_{x \in \delta(F)} \left\{ \frac{u(x)}{\sigma(x)} \right\} \leq \min_{x \in F} \left\{ \frac{u(x)}{\sigma(x)} \right\}$$

y se satisface la igualdad si u coincide sobre cada componente conexa de \bar{F} con un múltiplo de σ .

Demostración. Consideremos el escalar $m = \min_{x \in \delta(F)} \left\{ \frac{u(x)}{\sigma(x)} \right\}$ y la función $w = u - m\sigma|_{\bar{F}}$. Desde luego, $\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(u) \geq 0$ sobre F y $w \geq 0$ sobre F^c , lo que en virtud de la Proposición 5.2.2, implica que $w \geq 0$ sobre V , así que $m = \min_{x \in F} \left\{ \frac{u(x)}{\sigma(x)} \right\}$.

Si consideramos la función $v = \frac{w}{\sigma} = \frac{u}{\sigma} - m$, entonces $v \geq 0$ sobre \bar{F} y si $x^* \in F$ es tal que $m = \frac{u(x^*)}{\sigma(x^*)}$, resulta que $v(x^*) = 0$. Repitiendo el razonamiento de la Proposición 5.2.2, necesariamente $v(z) = 0$ para cada $z \in \bar{F}$ tal que $c(x^*, z) > 0$. Nuevamente un argumento de conexión concluye que $v = 0$ sobre cada componente conexa de F y por tanto sobre cada componente conexa de \bar{F} . ■

Como es habitual, el anterior principio del mínimo es equivalente a un *principio del máximo* para \mathcal{L} , que es nuevamente una versión discreta del principio del máximo para operadores elípticos de segundo orden. El siguiente resultado es pues un análogo discreto de los principios del máximo y del mínimo para funciones tales que $\mathcal{L}(u) = 0$.

Corolario 5.2.7 *Supongamos que $q = q_\sigma$ y consideremos F un subconjunto propio. Si $u \in \mathcal{C}(\bar{F})$ es tal que $\mathcal{L}(u) = 0$ sobre F , entonces para cada $x \in F$ se tiene que*

$$\min_{z \in \delta(F)} \left\{ \frac{u(z)}{\sigma(z)} \right\} \leq \frac{u(x)}{\sigma(x)} \leq \max_{z \in \delta(F)} \left\{ \frac{u(z)}{\sigma(z)} \right\}$$

y se satisface cualquiera de las igualdades sii u coincide con un múltiplo de σ sobre cada componente conexa de \bar{F} .

Demostración. Como $\mathcal{L}(u) \geq 0$ sobre F , la primera desigualdad es consecuencia directa del corolario anterior. Por otra parte, si $v = -u$, como $\mathcal{L}(v) \geq 0$ sobre F , nuevamente la aplicación del corolario anterior conduce a que

$$-\max_{z \in \delta(F)} \left\{ \frac{u(z)}{\sigma(z)} \right\} = \min_{z \in \delta(F)} \left\{ -\frac{u(z)}{\sigma(z)} \right\} \leq -\frac{u(x)}{\sigma(x)}. \quad \blacksquare$$

Debe observarse que los anteriores principios del mínimo o del máximo son más finos que sus análogos continuos: mientras que en el caso continuo debe exigirse que el término de orden cero sea nulo, la condición en el caso discreto es que $q = q_\sigma$. En particular, si $\bar{F} \neq V$, no existe, *a priori*, inconveniente para que q_σ sea no positiva en \bar{F} , lo que implicaría que el principio del mínimo (o el del máximo) discreto se satisface contanto con la presencia de un término de orden cero no positivo.

Aunque aquí se ha demostrado, es bien conocido (ver por ejemplo [7]), que la monotonía de un operador lineal implica su invertibilidad y la positividad del operador inverso. Los siguientes resultados dan cuenta de esta propiedad en el lenguaje de los problemas de contorno. Para ello si F es un subconjunto propio de V será útil considerar para cada $y \in \bar{F}$ el conjunto F_y definido de la siguiente manera:

- i) Si $y \in \delta(F)$, F_y es el conjunto de vértices de F pertenecientes a la componente conexa de \bar{F} que contiene a y .
- ii) Si $y \in F$, F_y la componente conexa de F que contiene a y .

Proposición 5.2.8 *Si F es un subconjunto propio de V , para cada $y \in F^c$ se verifica que $0 \leq P_y^F \leq \frac{\sigma}{\sigma(y)}$. Además, si $F = V - \{y\}$ y $q = a\varepsilon_y + q_\sigma$ con $a \geq 0$, entonces $P_y^F = \frac{\sigma}{\sigma(y)}$ y $\mathcal{L}(P_y^F)(y) > 0$ cuando $a > 0$. En otro caso, para cada $y \in F^c$ se tiene que $\mathcal{L}(P_y^F)(y) > 0$ y si $y \in \delta(F)$, entonces $0 < P_y^F < \frac{\sigma}{\sigma(y)}$ sobre F_y y $P_y^F = 0$ sobre $F - F_y$.*

Demostración. Si $y \in F^c$, y consideramos $u = \sigma(y) P_y^F$, entonces u satisface que $\mathcal{L}(u) = 0$ sobre F , $u(y) = \sigma(y)$ y $u = 0$ sobre $F^c - \{y\}$. Si tomamos $A = \{y\}$ y $B = F^c - \{y\}$ y aplicamos

el principio de los condensadores, obtenemos que $0 \leq u \leq \sigma$ y además que $\mathcal{L}(u)(y) \geq 0$. Como $\int_V \mathcal{L}(u) u d\lambda = \mathcal{L}(u)(y) \sigma(y)$, resulta que $\mathcal{L}(u)(y) = 0$ sii $\mathcal{L}(u) = 0$ y por tanto sii o bien $u = 0$ cuando $q \neq q_\sigma$ o bien $u = \alpha \sigma$ cuando $q = q_\sigma$. Como la primera posibilidad es imposible, pues $u(y) = \sigma(y) > 0$, necesariamente $q = q_\sigma$. Además, como $\sigma(y) = u(y) = \alpha \sigma(y)$, necesariamente $\alpha = 1$ y como también u se anula en $F^c - \{y\}$ concluimos que esta última posibilidad sólo puede darse si $F^c - \{y\} = \emptyset$, es decir sii $F = V - \{y\}$. Así pues, $\mathcal{L}(u)(y) > 0$ a menos que $q = q_\sigma$ y $F = V - \{y\}$ simultáneamente.

Si $F = V - \{y\}$, como $\mathcal{L}(\sigma) = (q - q_\sigma) \sigma$, resulta que si $q = a \varepsilon_y + q_\sigma$, entonces $\mathcal{L}(\sigma) = 0$ sobre F , lo que implica directamente que $P_y^F = \frac{\sigma}{\sigma(y)}$.

Si las dos condiciones anteriores no se satisfacen simultáneamente y consideramos $y \in \delta(F)$ y la función $v = u|_{F_y \cup \{y\}}$, entonces $\mathcal{L}(v) = 0$ sobre F y $v = u$ sobre F^c , por lo que $v = u$. Recíprocamente, si $x \in F_y$, necesariamente $u(x) > 0$, pues en otro caso el principio del mínimo implicaría que u sería nula sobre \bar{F}_y y por tanto nula en y . Este mismo razonamiento aplicado a la función $w = u - \sigma$, concluye que $w > 0$ sobre F_y . ■

Proposición 5.2.9 *Sea F un subconjunto no vacío de V y supongamos que no se satisface simultáneamente que $F = V$ y $q = q_\sigma$. Entonces G^F es simétrica y para cada $y \in F$ se verifica que $G_y^F(y) > 0$, que $P_y^{F-\{y\}} = \frac{G_y^F}{G_y^F(y)}$ y que $0 \leq G_y^F \leq G_y^F(y) \frac{\sigma}{\sigma(y)}$.*

Además, $G_y^F = \frac{\sigma}{a \sigma(y)}$ sii $F = V$ y $q = a \varepsilon_y + q_\sigma$ con $a > 0$. En otro caso, $G_y^F = 0$ sobre $F - F_y$ y $0 < G_y^F < G_y^F(y) \frac{\sigma}{\sigma(y)}$ sobre $F_y - \{y\}$.

Demostración. En estas condiciones G^F existe, es simétrica y además no negativa, en virtud de la monotonía de \mathcal{L} . Además, si $y \in F$, necesariamente $G_y^F(y) > 0$ pues en otro caso $\mathcal{L}(G_y^F)(y) = - \int_V c(y, z) G_y^F(z) d\lambda(z) \leq 0$, lo que contradice que $\mathcal{L}(G_y^F) = \varepsilon_y$. Por otra parte si consideramos $u = \frac{1}{G_y^F(y)} G_y^F$, resulta que $u(y) = 1$, $u = 0$ sobre F^c y además $\mathcal{L}(u) = \varepsilon_y$ sobre F , lo que implica que $\mathcal{L}(u) = 0$ sobre $F - \{y\}$, $u = 0$ sobre $(F - \{y\})^c - \{y\}$ y que $u(y) = 1$. En definitiva, $u = P_y^{F-\{y\}}$ y por tanto los resultados del enunciado se obtienen aplicando la proposición anterior. ■

Una consecuencia importante del resultado anterior es que cuando F es conexo como conjunto de vértices de Γ_c , entonces para cada $y \in F$, la función $\frac{1}{\sigma} G_y^F$ es estrictamente positiva sobre F , alcanza su máximo en $\{y\}$ y tal máximo es estricto a menos que se satisfagan simultáneamente que $F = V$ y que $q = a \varepsilon_y + q_\sigma$, en cuyo caso $\frac{1}{\sigma} G^F$ es constante. A continuación describiremos propiedades de monotonía de las funciones de Green, respec-

to del término de orden 0, que generalizan las obtenidas en [61] y que pueden fácilmente reformularse en términos de los núcleos de Poisson, en virtud de la relación entre ambos.

Proposición 5.2.10 *Sea F un subconjunto no vacío de V y supongamos que no se satisface simultáneamente que $F = V$ y $q = q_\sigma$. Entonces $\int_V G_y^F q d\lambda \leq 1$, para cada $y \in F$ con desigualdad estricta si F es propio. Además, si $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ satisface que $q_k \downarrow q$ (respectivamente $q_k \uparrow q$ con $q_1 \geq q_\sigma$ y $q_1 \neq q_\sigma$ si $F = V$) y para cada $k \in \mathbb{N}^*$ denotamos por G_k^F a la función de Green de F para el operador $\mathcal{L}_k = -\Delta + q_k$, entonces $G_{ky}^F \uparrow G_y^F$ (respectivamente $G_{ky}^F \downarrow G_y^F$), para cada $y \in V$.*

Demostración. Si $v = G_y^F$, entonces $\text{sop}(v) \subset F$ y además $v \in \mathcal{C}^+(V)$. Por tanto, cuando F es propio, $\mathcal{L}(v) \leq 0$ sobre F^c y como V es conexo necesariamente $\mathcal{L}(v)(x) < 0$ para algún $x \in F^c$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} 1 - \int_V v q d\lambda &= \int_V \varepsilon_y d\lambda - \int_V v q d\lambda = \int_V \mathcal{L}(v) d\lambda - \int_{F^c} \mathcal{L}(v) d\lambda - \int_V v q d\lambda \\ &= \int_V \Delta(v) d\lambda - \int_{F^c} \mathcal{L}(v) d\lambda = - \int_{F^c} \mathcal{L}(v) d\lambda, \end{aligned}$$

y el primer resultado se concluye observando que el valor $\int_{F^c} \mathcal{L}(v) d\lambda$ es nulo cuando $F = V$ y negativo cuando F es propio.

Por otra parte, si para cada $k \in \mathbb{N}^*$ consideramos $v_k = G_{ky}^F$ y fijado $x \in F$ tomamos $u = G_x^F$, aplicando las identidades de Green resulta que

$$v_k(x) = \int_F \mathcal{L}(u) v_k d\lambda = - \int_F \Delta(u) v_k d\lambda + \int_F q u v_k d\lambda = - \int_F \Delta(v_k) u d\lambda + \int_F q u v_k d\lambda,$$

$$u(y) = \int_F \mathcal{L}_k(v_k) u d\lambda = - \int_F \Delta(v_k) u d\lambda + \int_F q_k v_k u d\lambda.$$

Teniendo en cuenta que la simetría de G^F implica que $u(y) = v(x)$, las identidades anteriores conducen a la igualdad $v(x) - v_k(x) = \int_V (q_k - q) v_k u d\lambda$.

Si $q_k \downarrow q$, como $u, v_k \in \mathcal{C}^+(V)$, obtenemos que $v \geq v_k$. Además, si $\alpha \geq 0$ es tal que $G^F \leq \alpha$, entonces $u, v \leq \alpha$ y por tanto $0 \leq v(x) - v_k(x) \leq \alpha^2 \int_V (q_k - q) d\lambda$, de donde se concluye que $v_k \uparrow v$.

Si ahora suponemos que $q_k \uparrow q$, la hipótesis $q_1 \geq q_\sigma$ con $q_1 \neq q_\sigma$ cuando $F = V$, asegura que para cada k tiene sentido G_k^F y además podemos aplicar el Corolario 5.2.3 para concluir que, con las notaciones anteriores, $v \leq v_k \leq v_{k-1}$. Por tanto, si $\alpha \geq 0$ es tal que $G_1^F \leq \alpha$, entonces $0 \leq v_k(x) - v(x) \leq \alpha^2 \int_V (q - q_k) d\lambda$, y en consecuencia, $v_k \downarrow v$. ■

Hasta ahora, hemos seguido un desarrollo análogo al del caso continuo: el operador \mathcal{L} es tratado como un análogo discreto de un operador diferencial y su inverso como análogo

discreto de un operador integral. Sin embargo, en nuestro caso, cualquier endomorfismo sobre $\mathcal{C}(V)$, incluido el operador en diferencias \mathcal{L} , puede ser considerado como un operador integral. Esta nueva interpretación de los operadores en diferencias como operadores integrales será fundamental en el desarrollo de esta sección y conducirá a la aplicación al estudio de las soluciones del problema [PC], de la Teoría del Potencial desarrollada en la sección precedente.

Definición 5.2.11 Denominaremos *núcleo asociado al operador en diferencias* \mathcal{L} y lo denotaremos por L , al núcleo asociado al operador integral \mathcal{L} . En particular, cuando $\mathcal{L} = \Delta$, el núcleo L se denominará *núcleo de la variedad Riemanniana discreta* $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ y será denotado por L_c .

A continuación describiremos las relaciones entre el problema de contorno $[\text{PC}]_0$ y la Teoría del Potencial respecto del núcleo asociado a él. Durante todo el desarrollo, utilizaremos la identificación de cada medida sobre V con su densidad respecto de la medida cardinal. Además, como no hay lugar a confusión, omitiremos la expresión *respecto de* L en todas las nociones relativas a la Teoría del Potencial desarrollada para L .

Proposición 5.2.12 *El núcleo L es simétrico y para cada $x, y \in V$ está dado por*

$$L(x, y) = \begin{cases} -c(x, y), & \text{si } x \neq y, \\ \frac{1}{\sigma(x)} \int_V c(x, z) \sigma(z) d\lambda(z) + q(x) - q_\sigma(x), & \text{si } x = y; \end{cases}$$

Además, para cada $\gamma \in \mathcal{M}(V)$, el potencial de γ coincide con $\mathcal{L}(\gamma)$ y la energía de γ está dada por

$$\mathcal{I}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{V \times V} c(x, y) \sigma(x) \sigma(y) \left(\frac{\gamma(y)}{\sigma(y)} - \frac{\gamma(x)}{\sigma(x)} \right)^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) + \int_V (q - q_\sigma) \gamma^2 d\lambda.$$

Demostración. Como para cada $u \in \mathcal{C}(V)$,

$$\mathcal{L}(u)(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \sum_{z \in V} c(x, z) \sigma(x) \sigma(z) \left(\frac{u(x)}{\sigma(x)} - \frac{u(z)}{\sigma(z)} \right) + (q(x) - q_\sigma(x)) u(x)$$

de la relación entre un operador integral y su núcleo asociado, obtenemos que para cada $y \in V$, $L_y = \mathcal{L}(\varepsilon_y)$ y por tanto

$$L_y(x) = L(x, y) = \begin{cases} -c(x, y), & \text{si } x \neq y, \\ \frac{1}{\sigma(x)} \sum_{z \in V} c(x, z) \sigma(z) + q(x) - q_\sigma(x), & \text{si } x = y, \end{cases}$$

donde la simetría de c implica además la simetría de L .

Si $\gamma \in \mathcal{M}(V)$, teniendo en cuenta que L es el núcleo del operador \mathcal{L} , el potencial de γ está definido por la expresión

$$\mathcal{U}^\gamma(x) = \int_V L(x, y) d\gamma(y) = \int_V L(x, y) \gamma(y) d\lambda(y) = \mathcal{L}(\gamma)(x),$$

mientras que la energía de γ está dada por

$$\mathcal{I}(\gamma) = \int_V \mathcal{U}^\gamma d\gamma = \int_V \gamma \mathcal{L}(\gamma) d\lambda.$$

Aplicando ahora la versión (4.1) de la Segunda Identidad de Green y utilizando un razonamiento análogo al empleado en la demostración de la Proposición 4.1.5 obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_V \gamma \mathcal{L}(\gamma) d\lambda &= \frac{1}{2} \int_{V \times V} c(x, y) \sigma(x) \sigma(y) \left(\frac{\gamma(y)}{\sigma(y)} - \frac{\gamma(x)}{\sigma(x)} \right)^2 d(\lambda \times \lambda)(x, y) \\ &+ \int_V (q - q_\sigma) \gamma^2 d\lambda. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observar que con las notaciones de la proposición anterior, el funcional \mathcal{J} definido en la Proposición 4.1.7 con motivo de la descripción variacional del problema [PC], se expresa como

$$\mathcal{J}(\gamma) = \mathcal{I}(\gamma) - 2 \int_F f \gamma d\lambda$$

de manera que \mathcal{J} es un *Funcional de Gauss* cuya parte cuadrática es la energía respecto del núcleo L .

El siguiente resultado es una relectura de la proposición anterior en el caso en el que σ es constante y $q = 0$.

Corolario 5.2.13 *El núcleo de la de la variedad Riemanniana discreta $(\Gamma, \mathbf{B}, \mu)$ está dado por la expresión*

$$L_c(x, y) = \begin{cases} -c(x, y), & \text{si } x \neq y, \\ \int_V c(x, z) d\lambda(z), & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Además, para cada $x, y \in V$ se tiene que $L(x, y) = L_c(x, y) + q(x) \varepsilon_y(x)$.

Proposición 5.2.14 *El núcleo L satisface los principios de energía y del máximo.*

Demostración. Después de la expresión de $\mathcal{I}(\gamma)$ obtenida en la proposición anterior, es claro que \mathcal{I} es semidefinida positiva (ver también la demostración de la convexidad del funcional \mathcal{J} en la Proposición 4.1.7). Por otra parte, $\mathcal{I}(\gamma) = 0$ sii $\gamma = a\sigma$ con $a \in \mathbb{R}$ y si además $\int_V d\gamma = \int_V \gamma d\lambda = 0$, necesariamente $a = 0$. Por tanto, \mathcal{I} es definida positiva sobre el subespacio $\left\{ \gamma \in \mathcal{M}(V) : \int_V d\gamma = 0 \right\}$, es decir, L satisface el principio de energía.

Consideremos ahora $\gamma \in \mathcal{M}^+(V)$ y $F = \text{sop}(\gamma)$. Como para cada $x \in V$ se verifica que

$$\mathcal{U}^\gamma(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \sum_{z \in V} c(x, z) \sigma(x) \sigma(z) \left(\frac{\gamma(x)}{\sigma(x)} - \frac{\gamma(z)}{\sigma(z)} \right) + (q(x) - q_\sigma(x)) \gamma(x),$$

y las funciones γ , c y σ son no negativas, resulta que $\mathcal{U}^\gamma(x) \leq 0$ si $x \notin F$. Si tomamos $x \in F$ tal que $\frac{\gamma(x)}{\sigma(x)} = \max_{z \in F} \left\{ \frac{\gamma(z)}{\sigma(z)} \right\}$, como también $q \geq q_\sigma$, entonces $\mathcal{U}^\gamma(x) \geq 0$ y en definitiva, obtenemos que $\max_{z \in V} \{\mathcal{U}^\gamma(z)\} = \max_{z \in F} \{\mathcal{U}^\gamma(z)\}$, así que L satisface el principio del máximo. ■

Corolario 5.2.15 *Sea F un subconjunto no vacío de V y supongamos que no se satisface simultáneamente que $F = V$ y que $q = q_\sigma$. Entonces, existe una única medida positiva γ^F tal que $\text{sop}(\gamma^F) = F$ y $\mathcal{L}(\gamma^F) = 1$ sobre F .*

Demostración. Como el núcleo L satisface los principios de energía y del máximo, también satisface el principio de equilibrio sobre cualquier subconjunto F de V tal que $I(F) > 0$.

Si $\gamma \in \mathcal{M}^+(F)$ es tal que $\mathcal{I}(\gamma) = 0$, necesariamente $\gamma = 0$ excepto cuando se satisface simultáneamente que $F = V$ y que $q = q_\sigma$, en cuyo caso $\gamma = a\sigma$, para cierto $a > 0$. En definitiva, $I(F) > 0$ a menos que $F = V$ y $q = q_\sigma$ simultáneamente, en cuyo caso $I(F) = 0$.

Supongamos pues que no se satisface simultáneamente que $F = V$ y que $q = q_\sigma$ y consideremos $\gamma^F \in \mathcal{M}^+(F)$ la medida de equilibrio de F , respecto de L . Esta medida está unívocamente determinada por satisfacer que $\mathcal{U}^{\gamma^F} = 1$ sobre F , es decir por satisfacer que $\mathcal{L}(\gamma^F) = 1$ sobre F . Como $1|_F \in \mathcal{C}^+(F)$, entonces $\text{sop}(1|_F) \subset \text{sop}(\gamma^F)$, lo que implica que $\text{sop}(\gamma^F) = F$. ■

Definición 5.2.16 Si F un subconjunto no vacío de V y no se satisface simultáneamente que $F = V$ y que $q = q_\sigma$, denominaremos *medida de equilibrio de F* a la única medida positiva γ^F que satisface que $\text{sop}(\gamma^F) = F$ y que $\mathcal{L}(\gamma^F) = 1$ sobre F .

Cuando F se reduce a un punto, por ejemplo $\{x\}$, la medida de equilibrio de F debe ser un múltiplo de ε_x . Como

$$\mathcal{L}(\varepsilon_x)(x) = L(x, x) = \frac{1}{\sigma(x)} \int_V c(x, y) \sigma(y) d\lambda(y) + q(x) - q_\sigma(x),$$

resulta que en este caso $\gamma^F = \frac{1}{L(x, x)} \varepsilon_x$.

Sin embargo, si $F = V$ y se satisface que $q = q_\sigma + \frac{a}{\sigma}$ con $a > 0$, entonces $\gamma^F = \frac{1}{a} \sigma$. En particular, cuando σ y q son constantes ($q > 0$), γ^V es constante.

Obsérvese que si $F \subset V$ está en las condiciones de la Definición 5.2.16, entonces para cada $x \in F^c$ se verifica que $\mathcal{L}(\gamma^F)(x) = - \int_F c(x, y) \gamma^F(y) d\lambda(y)$. Por otra parte, al igual que hicimos para los núcleos de Green y de Poisson utilizaremos notaciones especiales para designar a las medidas de equilibrio de los subconjuntos de V cuyo complementario tiene cardinal 1 ó 2. Así, designaremos por γ^x y por γ^{xy} a las medidas de equilibrio de los subconjuntos $F = V - \{x\}$ y $V - \{x, y\}$ con $x \neq y$, respectivamente. Además, la aplicación de la alternativa de Fredholm implica que para cada $x \in V$ se satisface

$$\mathcal{L}(\gamma^x) = 1 - \frac{1}{\sigma} \left(\int_V \gamma^x \sigma(q - q_\sigma) d\lambda + \int_V \sigma d\lambda \right) \varepsilon_x. \quad (5.2)$$

En general, la medida de equilibrio no es aditiva respecto de la unión de conjuntos aunque estos sean disjuntos. A continuación, caracterizaremos los casos en los que se satisface dicha aditividad, lo que será de utilidad al final de esta sección. Nuevamente, el resultado que presentamos constituye una generalización del obtenido en [4] para el caso de variedades simples y métricas ortogonales.

Proposición 5.2.17 Sean F_1 y F_2 subconjuntos no vacíos de V , consideremos $F = F_1 \cup F_2$ y supongamos que $F \neq V$. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que se verifique que $\gamma^F = \gamma^{F_1} + \gamma^{F_2}$ es que F_1 y F_2 sean disjuntos y además se satisfaga que $c(x, y) = 0$, para cada $x \in F_1$ e $y \in F_2$.

Demostración. Es claro que $\gamma^F = \gamma^{F_1} + \gamma^{F_2}$ sii $\mathcal{L}(\gamma^{F_1}) = 0$ sobre F_2 y $\mathcal{L}(\gamma^{F_2}) = 0$ sobre F_1 , lo que implica que además F_1 y F_2 deben ser disjuntos.

Por otra parte, si F_1 y F_2 son disjuntos, aplicando la expresión (5.1), tenemos que si $x \in F_1$, como $x \notin \text{sop}(\gamma^{F_2})$, entonces

$$\mathcal{L}(\gamma^{F_2})(x) = - \int_V c(x, z) \gamma^{F_2}(z) d\lambda(z) = - \int_{F_2} c(x, z) \gamma^{F_2}(z) d\lambda(z).$$

Por tanto, $\mathcal{L}(\gamma^{F_2}) = 0$ sobre F_1 sii $c(x, z) = 0$ para cada $z \in F_2$ debido a la positividad de γ^{F_2} . ■

Obsérvese que si F_1 y F_2 son subconjuntos disjuntos y no vacíos de V y se satisface que $c(x, y) = 0$, para cada $x \in F_1$ e $y \in F_2$, entonces necesariamente $F \neq V$, pues en otro caso V sería desconectado como conjunto de vértices de $\Gamma_c(V)$, lo que contradice la hipótesis [H1].

Aunque el resultado del Corolario 5.2.15 se ha obtenido mediante técnicas de la Teoría del Potencial, también es consecuencia de la aplicación de la Proposición 5.2.2 a la función $f = 1|_F$. Sin embargo, es importante resaltar que la aplicación de la Teoría del Potencial desarrollada en la sección precedente asegura que si $F \subset V$ satisface las condiciones del corolario anterior, su medida de equilibrio puede obtenerse mediante algoritmos de Programación Cuadrática y/o de Programación Lineal. Concretamente, si $n = |F|$, $F = \{x_1, \dots, x_n\}$, y

consideramos para cada $i, j = 1, \dots, n$ el escalar $c_{ij} = c(x_i, x_j)$ y para cada $j = 1, \dots, n$ los escalares σ_j, q_j, p_j tales que $\sigma = \sum_{j=1}^n \sigma_j \varepsilon_{x_j}$, $q - q_\sigma = \sum_{j=1}^n q_j \varepsilon_{x_j}$ y $p_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \sigma_j$, entonces $\gamma^F = \frac{1}{a_0} \sum_{j=1}^n a_j \varepsilon_{x_j}$, donde (a_1, \dots, a_n) es la solución del problema de Programación Cuadrática convexa

$$\begin{aligned} \min \quad & \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} (\sigma_i q_i + p_i) z_i^2 - \sum_{i,j=1}^n c_{ij} z_i z_j \right\} \\ & \vdots \\ z_n \geq 0 \\ z_1 + \dots + z_n = 1 \end{aligned}$$

y a_0 es el valor de tal mínimo. Además, (a_0, a_1, \dots, a_n) es también solución del problema de Programación Lineal

$$\begin{aligned} \min \quad & \{z_0\} \\ z_1 \geq 0 \\ & \vdots \\ z_n \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n \sigma_1 c_{1j} z_j - (\sigma_1 q_1 + p_1) z_1 + \sigma_1 z_0 & \geq 0 \\ & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \sigma_n c_{nj} z_j - (\sigma_n q_n + p_n) z_n + \sigma_n z_0 & \geq 0 \\ z_1 + \dots + z_n = 1 \end{aligned}$$

Por otra parte, la utilización de las medidas de equilibrio permite obtener una expresión explícita de la función de Green de cada subconjunto no vacío F , siempre y cuando no se satisfaga simultáneamente que $F = V$ y $q = q_\sigma$ y también del núcleo de Poisson de cada subconjunto propio.

Proposición 5.2.18 *Si F es un subconjunto no vacío de V , se verifican las siguientes propiedades:*

i) Si no se satisface simultáneamente que $F = V$ y $q = q_\sigma$, entonces la función de Green de F está dada por las expresiones

$$\begin{aligned} G^F(x, y) &= \left(1 + \int_V c(y, z) d\gamma^{F-\{y\}}(z) \right)^{-1} (\gamma^F(x) - \gamma^{F-\{y\}}(x)), \\ &= (|\gamma^F| - |\gamma^{F-\{y\}}|)^{-1} \gamma^F(y) (\gamma^F(x) - \gamma^{F-\{y\}}(x)); \end{aligned}$$

para cada $x, y \in V$.

ii) Si F es propio y no se satisface simultáneamente que $|F| > |V| - 2$ y $q = q_\sigma$, entonces el núcleo de Poisson de F está dado por la expresión

$$P^F(x, y) = \left(\gamma^{F \cup \{y\}}(y) \right)^{-1} \left(\gamma^{F \cup \{y\}}(x) - \gamma^F(x) \right); \quad x, y \in V.$$

Demostración. (i) Teniendo en cuenta la Proposición 4.3.5 y las ecuaciones (4.11), resulta que la función de Green de F , es decir la función de Green del problema [PC] está caracterizada por satisfacer, para cada $y \in F$, las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(G_y^F) &= \varepsilon_y, \quad \text{sobre } F \\ G_y^F &= 0, \quad \text{sobre } F^c, \end{aligned} \right\}.$$

Consideremos $K \in \mathcal{C}(V \times F)$ el núcleo dado por $K(x, y) = \gamma^F(x) - \gamma^{F-\{y\}}(x)$. Fijado $y \in F$, es claro que $K_y = 0$ sobre F^c , puesto que $\text{sop}(\gamma^F), \text{sop}(\gamma^{F-\{y\}}) \subset F$. Además, se satisface que

$$\mathcal{L}(K_y)(x) = \mathcal{L}(\gamma^F)(x) - \mathcal{L}(\gamma^{F-\{y\}})(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq y, \\ 1 - \mathcal{L}(\gamma^{F-\{y\}})(y), & \text{si } x = y \end{cases}$$

y basta ahora tener en cuenta que $\mathcal{L}(\gamma^{F-\{y\}})(y) = - \int_V c(y, z) d\gamma^{F-\{y\}}(z)$.

Por otra parte, aplicando la segunda identidad de Green a $\gamma^{F-\{y\}}$ y γ^F , obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_V \gamma^{F-\{y\}} d\lambda &= \int_V \gamma^{F-\{y\}} \mathcal{L}(\gamma^F) d\lambda = \int_V \mathcal{L}(\gamma^{F-\{y\}}) \gamma^F d\lambda \\ &= \int_V \gamma^F d\lambda - \gamma^F(y) \left(1 - \mathcal{L}(\gamma^{F-\{y\}})(y) \right). \end{aligned}$$

(ii) Como $G_y^F(y) = \gamma^F(y) \left(1 - \mathcal{L}(\gamma^{F-\{y\}})(y) \right)^{-1}$, resulta que

$$\frac{G_y^F}{G_y^F(y)} = \left(\gamma^F(y) \right)^{-1} \left(\gamma^F - \gamma^{F-\{y\}} \right),$$

así que el resultado se deduce de la relación entre P_y^F y $G_y^{F \cup \{y\}}$ determinada en la Proposición 5.2.9. ■

Debe observarse que cuando $y \in F^c$, $\gamma^{F-\{y\}} = \gamma^F$, mientras que si $y \in F$, $\gamma^{F \cup \{y\}} = \gamma^F$. Por tanto, las expresiones dadas en (i) y (ii) para G^F y P^F son compatibles con el hecho de ser $G^F \in \mathcal{C}(V \times F)$ y $P^F \in \mathcal{C}(V \times F^c)$, respectivamente. Además, si $y \in F^c - \delta_c(F)$, la medida de equilibrio de $F \cup \{y\}$ es la suma de las medidas de equilibrio de F y de $\{y\}$ y por tanto $P^F(x, y) = \frac{\gamma^{\{y\}}(x)}{\gamma^{\{y\}}(y)} = \varepsilon_y(x)$.

Por otra parte, de la expresión de la función de Green obtenida en la proposición anterior y de sus propiedades de anulación, descritas en la Proposición 5.2.9, podemos deducir algunas relaciones entre las medidas γ^F y $\gamma^{F-\{y\}}$ con $y \in F$.

Corolario 5.2.19 *Supongamos que F es un subconjunto no vacío de V y que no se satisface simultáneamente que $F = V$ y $q = q_\sigma$. Entonces para cada $y \in V$ se tiene que*

$$\gamma^{F-\{y\}} \leq \gamma^F \leq \frac{\gamma^F(y)}{\sigma(y)} \sigma + \gamma^{F-\{y\}}$$

Además, $\gamma^{F-\{y\}} = \gamma^F$ sobre $F - F_y$ y si $q - q_\sigma \neq a\varepsilon_y$, entonces

$$\gamma^{F-\{y\}} < \gamma^F < \frac{\gamma^F(y)}{\sigma(y)} \sigma + \gamma^{F-\{y\}} \text{ sobre } F_y - \{y\}.$$

En particular, si F es conexo como conjunto de vértices de $\Gamma_c(V)$, entonces

$$\gamma^{F-\{y\}} < \gamma^F < \frac{\gamma^F(y)}{\sigma(y)} \sigma + \gamma^{F-\{y\}} \text{ sobre } F - \{y\}.$$

Por supuesto, pueden obtenerse expresiones análogas para γ^F y $\gamma^{F \cup \{y\}}$ con $y \in \delta(F)$, aplicando la expresión del núcleo de Poisson obtenida en la Proposición 5.2.18 y teniendo en cuenta sus propiedades de anulación descritas en la Proposición 5.2.8.

La expresión de la función de Green del conjunto F obtenida en la proposición anterior es análoga a la que aparece en [5], que corresponde al caso de una métrica ortogonal y compatible y donde además σ es constante. En ese trabajo, las medidas de equilibrio de los conjuntos $V - \{y\}$ con $y \in F$ permitieron también obtener directamente una expresión de la función de Green de V cuando $q = 0$, o de forma equivalente, del caso $F = V$ y $\mathcal{L} = -\Delta$. El siguiente resultado muestra la correspondiente generalización al caso de métricas no ortogonales.

Proposición 5.2.20 *La función de Green ortogonal para la ecuación de Poisson asociada al operador de Laplace de una variedad Riemanniana discreta está dada por la expresión*

$$G(x, y) = |V|^{-2} (|\gamma^y| - |V| \gamma^y(x)), \quad x, y \in V.$$

En particular, para cada $y \in V$, $G_y(x) < G_y(y)$ para cada $x \in V$ con $x \neq y$.

Demostración. Como para cada $y \in V$ se satisface que

$$-\Delta(\gamma^y)(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ -\int_V c(x, z) d\gamma^y(z), & \text{si } x = y, \end{cases}$$

aplicando la alternativa de Fredholm obtenemos que $\int_V c(x, z) d\gamma^y(z) = |V| - 1$ y por tanto que $-\Delta(-\gamma^y) = |V| \left(\varepsilon_y - \frac{1}{|V|} \right)$.

Como para cada $y \in V$, la función Green ortonormal está caracterizada por las ecuaciones (4.11), resulta que $G_y = a(y) - |V|^{-1} \gamma^y$ donde $a(y) \in \mathbb{R}$. Como se satisface que

$$0 = \int_V G_y d\lambda = a(y) |V| - \frac{1}{|V|} \int_V \gamma^y d\lambda$$

necesariamente $a(y) = \frac{1}{|V|^2} |\gamma^y|$, con lo que se concluye la expresión de G .

Por último, la acotación para G_y es consecuencia de que como $\gamma^y(x) \geq 0$ para cada $x \in V$, entonces $|V|^2 G(x, y) = |\gamma^y| - |V| \gamma^y(x) \leq |\gamma^y| = |V|^2 G(y, y)$, con desigualdad estricta si $x \neq y$. ■

En la demostración anterior, la identidad $-\Delta(\gamma^y) = 1$ sobre $V - \{y\}$ ha sido fundamental para demostrar que G_y coincide, salvo constante, con la medida $-\gamma^y$, (de hecho, $-\gamma^y$ es una función de Green de la ecuación de Poisson). Por tanto, cuando $\mathcal{L} = -\Delta + q_\sigma$ la técnica anterior no puede aplicarse para obtener una expresión de la función de Green de V en términos de medidas de equilibrio. Sin embargo, mostraremos a continuación que tales expresiones pueden obtenerse a partir de un estudio en profundidad de las propiedades de los núcleos de Poisson de los subconjuntos de V cuyo complemento tiene cardinal 2. Obsérvese que aplicando el resultado de la Proposición 5.2.18, para cada $x, y \in V$ con $x \neq y$ se tiene que

$$P_x^{xy} = \left(\gamma^y(x) \right)^{-1} (\gamma^y - \gamma^{xy}) \quad \text{y} \quad P_y^{xy} = \left(\gamma^x(y) \right)^{-1} (\gamma^x - \gamma^{xy}).$$

El primer resultado que obtendremos muestra que cuando $q = q_\sigma$, cualquier expresión que involucre medidas de equilibrio puede reducirse a otra donde sólo intervengan medidas de equilibrio del tipo γ^x con $x \in V$. Más concretamente, para cada F , subconjunto propio de V , la medida de equilibrio de F puede obtenerse a partir de las medidas de equilibrio de los conjuntos $F \cup \{y\}$ con $y \in F^c$, con lo que basta aplicar a estos últimos el mismo resultado de forma iterativa.

Proposición 5.2.21 *Supongamos que $q = q_\sigma$ y consideremos $F \subset V$ tal que $|F| < |V| - 1$. Entonces,*

$$\gamma^F = \left(\sum_{y \in F^c} \frac{\sigma(y)}{\gamma^{F \cup \{y\}}(y)} \right)^{-1} \left(\sum_{y \in F^c} \frac{\sigma(y)}{\gamma^{F \cup \{y\}}(y)} \gamma^{F \cup \{y\}} - \sigma \right).$$

En particular, para cada $x, y \in V$ con $x \neq y$, se tiene que

$$\gamma^{xy} = \left(\sigma(x) \gamma^x(y) + \sigma(y) \gamma^y(x) \right)^{-1} \left(\sigma(x) \gamma^x(y) \gamma^y + \sigma(y) \gamma^y(x) \gamma^x - \gamma^x(y) \gamma^y(x) \sigma \right).$$

Demostración. Como $|F^c| \geq 2$, para cada $y \in F^c$, $F \cup \{y\}$ es propio y por tanto tiene sentido la medida de equilibrio de $F \cup \{y\}$. Consideremos $\{A, B\}$ una partición de F^c de manera que tanto A como B sean no vacíos, y también $u, v \in \mathcal{C}(V)$ las únicas soluciones de los problemas

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(u) = 0, \text{ sobre } F \\ u = \sigma, \text{ sobre } A \\ u = 0 \text{ sobre } B, \end{array} \right\} \text{ y } \left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(v) = 0, \text{ sobre } F \\ v = 0 \text{ sobre } A \\ v = \sigma \text{ sobre } B, \end{array} \right\}$$

respectivamente. Entonces, ambas funciones están determinadas por las identidades

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{F^c} P^F(x, y) \sigma|_A(y) d\lambda(y) = \int_A P^F(x, y) \sigma(y) d\lambda(y), \\ v(x) &= \int_{F^c} P^F(x, y) \sigma|_B(y) d\lambda(y) = \int_B P^F(x, y) \sigma(y) d\lambda(y). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión de P^F obtenida en la Proposición 5.2.18, obtenemos que

$$\begin{aligned} u &= \sum_{a \in A} \frac{\sigma(a)}{\gamma^{F \cup \{a\}}(a)} \gamma^{F \cup \{a\}} - \left(\sum_{a \in A} \frac{\sigma(a)}{\gamma^{F \cup \{a\}}(a)} \right) \gamma^F, \\ v &= \sum_{b \in B} \frac{\sigma(b)}{\gamma^{F \cup \{b\}}(b)} \gamma^{F \cup \{b\}} - \left(\sum_{b \in B} \frac{\sigma(b)}{\gamma^{F \cup \{b\}}(b)} \right) \gamma^F, \end{aligned}$$

respectivamente. Por otra parte, como se satisface que $u+v = \sigma$, sumando las dos expresiones anteriores resulta que

$$\sigma = \sum_{y \in F^c} \frac{\sigma(y)}{\gamma^{F \cup \{y\}}(y)} \gamma^{F \cup \{y\}} - \left(\sum_{y \in F^c} \frac{\sigma(y)}{\gamma^{F \cup \{y\}}(y)} \right) \gamma^F,$$

lo que implica el resultado sin más que despejar γ^F en la igualdad anterior.

En particular, si $F = V - \{x, y\}$, $F \cup \{y\} = V - \{x\}$, $F \cup \{x\} = V - \{y\}$ y por tanto la identidad anterior queda expresada como

$$\begin{aligned} \gamma^{xy} &= \left(\frac{\sigma(y)}{\gamma^x(y)} + \frac{\sigma(x)}{\gamma^y(x)} \right)^{-1} \left(\frac{\sigma(y)}{\gamma^x(y)} \gamma^x + \frac{\sigma(x)}{\gamma^y(x)} \gamma^y - \sigma \right) \\ &= \frac{\gamma^x(y) \gamma^y(x)}{\sigma(x) \gamma^x(y) + \sigma(y) \gamma^y(x)} \left(\frac{\sigma(y)}{\gamma^x(y)} \gamma^x + \frac{\sigma(x)}{\gamma^y(x)} \gamma^y - \sigma \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En vista de la fórmula obtenida en la proposición anterior, será cómodo considerar la función $\rho: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\rho(x, y) = \sigma(x) \gamma^x(y) + \sigma(y) \gamma^y(x); \quad x, y \in V.$$

Es claro que ρ es una función simétrica que se anula en la diagonal de V y que es estrictamente positiva fuera de ella. En el contexto de redes eléctricas resistivas, es decir cuando Γ es una variedad Riemanniana simple cuya métrica es ortogonal y compatible y σ es constante, el valor $\rho(x, y) \left(\int_V \sigma d\lambda \right)^{-1}$ coincide con la *resistencia efectiva entre los vértices x e y* . La expresión dada aquí generaliza la obtenida en [6], que a su vez generaliza la dada en [9] para el caso de grafos distancia-regulares. Por otra parte, el siguiente resultado es también una generalización del denominado *Teorema de Foster*, del cual se han dado diferentes tipos de demostraciones (ver por ejemplo, [52] y [57]). La que presentamos aquí sigue los pasos de la realizada en [6].

Proposición 5.2.22 *Si $q = q_\sigma$, entonces se satisface que*

$$\int_{V \times V} \rho(x, y) c(x, y) d(\lambda \times \lambda)(x, y) = 2 \left(\int_V \sigma d\lambda \right) (|V| - 1).$$

Demostración. La identidad

$$\int_V \sigma(x) \int_V \gamma^x(y) c(x, y) d\lambda(y) d\lambda(x) = \int_V \sigma(y) \int_V \gamma^y(x) c(y, x) d\lambda(x) \lambda(y)$$

y la simetría de c implican que

$$\int_{V \times V} \rho c d(\lambda \times \lambda) = 2 \int_V \sigma(x) \int_V \gamma^x(y) c(x, y) d\lambda(y) \lambda(x).$$

Por otra parte, como para cada $x \in V$, se satisface que

$$- \int_V \gamma^x(y) c(x, y) d\lambda(y) = \mathcal{L}(\gamma^x)(x) = 1 - \frac{1}{\sigma(x)} \int_V \sigma d\lambda,$$

se concluye que

$$\int_V \sigma(x) \int_V \gamma^x(y) c(x, y) d\lambda(y) \lambda(x) = \int_V \left(\int_V \sigma d\lambda - \sigma \right) d\lambda. \blacksquare$$

Como veremos a continuación esta función está íntimamente relacionada con las propiedades de los núcleos de Poisson de los subconjuntos de V cuyo complemento tiene cardinal 2.

Corolario 5.2.23 *Supongamos que $q = q_\sigma$ y consideremos $x, y \in V$ con $x \neq y$. Entonces,*

$$P_x^{xy} = \left(\rho(x, y) \right)^{-1} \left(\sigma(y) (\gamma^y - \gamma^x) + \gamma^x(y) \sigma \right) \text{ y } P_y^{xy} = \left(\rho(x, y) \right)^{-1} \left(\sigma(x) (\gamma^x - \gamma^y) + \gamma^y(x) \sigma \right)$$

y se satisfacen las identidades

$$(i) \quad \sigma = \sigma(x) P_x^{xy} + \sigma(y) P_y^{xy}$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}(P_x^{xy}) = \left(\sigma(x) \rho(x, y) \right)^{-1} \left(\int_V \sigma d\lambda \right) \left(\sigma(y) \varepsilon_x - \sigma(x) \varepsilon_y \right)$$

$$(iii) \quad \int_V \sigma d\lambda = \rho(x, y) \frac{\sigma(x)}{\sigma(y)} \mathcal{I}(P_x^{xy}) = -\rho(x, y) \mathcal{I}(P_x^{xy}, P_y^{xy})$$

$$(iv) \quad G_y^x = \left(\int_V \sigma d\lambda \right)^{-1} \frac{\sigma(y)}{\sigma(x)} \rho(x, y) P_y^{xy}.$$

Además, si u verifica que $\mathcal{L}(u) = \sigma(y) \varepsilon_x - \sigma(x) \varepsilon_y$, entonces

$$\frac{u(x)}{\sigma(x)} - \frac{u(y)}{\sigma(y)} = \rho(x, y) \left(\int_V \sigma d\lambda \right)^{-1}.$$

Demostración. Teniendo en cuenta la expresión de γ^{xy} obtenida en la Proposición 5.2.21, resulta que

$$\begin{aligned} \gamma^y - \gamma^{xy} &= \frac{\gamma^y(x)}{\rho(x, y)} \left(\sigma(y) (\gamma^y - \gamma^x) + \gamma^x(y) \sigma \right), \\ \gamma^x - \gamma^{xy} &= \frac{\gamma^x(y)}{\rho(x, y)} \left(\sigma(x) (\gamma^x - \gamma^y) + \gamma^y(x) \sigma \right) \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} P_x^{xy} &= \frac{1}{\rho(x, y)} \left(\sigma(y) (\gamma^y - \gamma^x) + \gamma^x(y) \sigma \right), \\ P_y^{xy} &= \frac{1}{\rho(x, y)} \left(\sigma(x) (\gamma^x - \gamma^y) + \gamma^y(x) \sigma \right). \end{aligned}$$

De estas expresiones se deduce directamente la identidad $\sigma = \sigma(x) P_x^{xy} + \sigma(y) P_y^{xy}$ y teniendo en cuenta que para cada $x \in V$, $\mathcal{L}(\gamma^x) = 1 - \frac{1}{\sigma} \left(\int_V \sigma d\lambda \right) \varepsilon_x$, también obtenemos que

$$\mathcal{L}(P_x^{xy}) = \left(\int_V \sigma d\lambda \right) \frac{\sigma(y)}{\rho(x, y)} \left(\frac{1}{\sigma(x)} \varepsilon_x - \frac{1}{\sigma(y)} \varepsilon_y \right).$$

Como $\sigma(y) P_y^{xy} = \sigma - \sigma(x) P_x^{xy}$ y σ es isótropo para \mathcal{I} , se tiene las identidades

$$\mathcal{I}(\sigma(y) P_y^{xy}) = \mathcal{I}(\sigma(x) P_x^{xy}) \quad \text{y} \quad 0 = \mathcal{I}(\sigma(y) P_y^{xy}) + \mathcal{I}(\sigma(x) P_x^{xy}) + 2\mathcal{I}(\sigma(x) P_x^{xy}, \sigma(y) P_y^{xy}),$$

por lo que $\sigma(x) \sigma(y) \mathcal{I}(P_x^{xy}, P_y^{xy}) = -\sigma^2(x) \mathcal{I}(P_x^{xy})$. Así pues, para demostrar las identidades de (iii) basta calcular $\mathcal{I}(P_x^{xy})$ y para ello, utilizando la expresión de $\mathcal{L}(P_x^{xy})$,

$$\mathcal{I}(P_x^{xy}) = \int_V \mathcal{L}(P_x^{xy}) P_x^{xy} d\lambda = \mathcal{L}(P_x^{xy})(x) = \left(\int_V \sigma d\lambda \right) \frac{\sigma(y)}{\sigma(x)} \frac{1}{\rho(x, y)}.$$

Para demostrar (iv), aplicando la Proposición 5.2.18 (i), la expresión de G^x está dada por $G_y^x = \left(1 - \mathcal{L}(\gamma^{xy})(y) \right)^{-1} (\gamma^x - \gamma^{xy})$ y por tanto, $G_y^x = a P_y^{xy}$ con $a = \gamma^y(x) \left(1 - \mathcal{L}(\gamma^{xy})(y) \right)^{-1}$. El resultado se concluye razonando directamente con la expresión de γ^{xy} o bien teniendo en cuenta que como $\mathcal{L}(G_y^x)(y) = 1$ y $\mathcal{L}(P_y^{xy})(y) = \left(\int_V \sigma d\lambda \right) \frac{\sigma(x)}{\sigma(y)} \frac{1}{\rho(x, y)}$, necesariamente $a = \left(\int_V \sigma d\lambda \right)^{-1} \frac{\sigma(y)}{\sigma(x)} \rho(x, y)$.

Por otra parte, si para $x \in V$ consideramos el escalar $\alpha = \frac{1}{\sigma(x) \rho(x, y)} \left(\int_V \sigma d\lambda \right)$, como se verifica que $\mathcal{L}(P_x^{xy}) = \alpha \left(\sigma(y) \varepsilon_x - \sigma(x) \varepsilon_y \right)$, si $u \in \mathcal{C}(V)$ satisface que $\mathcal{L}(u) = \sigma(y) \varepsilon_x - \sigma(x) \varepsilon_y$,

entonces $P_x^{xy} = \alpha u + a \sigma$. Además, como

$$0 = P_x^{xy}(y) = \alpha u(y) + a \sigma(y) \quad \text{y} \quad 1 = P_x^{xy}(x) = \alpha u(x) + a \sigma(y),$$

resulta que $a = -\frac{\alpha u(y)}{\sigma(y)}$ y en definitiva que $1 = \frac{\alpha}{\sigma(y)}(\sigma(y)u(x) - \sigma(x)u(y))$. ■

Proposición 5.2.24 *Supongamos que $q = q_\sigma$ y consideremos $\alpha = \left(\int_V \sigma d\lambda\right)^{-1} \left(\int_V \sigma^2 d\lambda\right)^{-1}$ y $\beta = \left(\int_V \sigma d\lambda\right)^{-1} \left(\int_V \sigma^2 d\lambda\right)^{-2}$. Entonces, la función de Green de V está dada por la expresión*

$$\begin{aligned} G(x, y) = & \alpha \sigma(x) \sigma(y) \int_V \sigma(z) \gamma^y(z) d\lambda(z) - \sigma(y) \gamma^y(x) \left(\int_V \sigma d\lambda\right)^{-1} \\ & + \alpha \sigma(y) \int_V \sigma^2(z) \gamma^z(x) d\lambda(z) - \beta \sigma(x) \sigma(y) \int_{V \times V} \sigma^2(z) \sigma(w) \gamma^z(w) d(\lambda \times \lambda)(z, w). \end{aligned}$$

En particular, para cada $y \in V$, se satisface que $G_y \leq G_y(y) \frac{\sigma}{\sigma(y)}$.

Demostración. Consideremos los escalares $a = \int_V \sigma d\lambda$ y $b = \int_V \sigma^2 d\lambda$ y fijemos $y \in V$. Como según la parte (ii) del Corolario 5.2.23, para cada $z \in V$ el núcleo de Poisson del conjunto $V - \{y, z\}$ satisface que

$$\mathcal{L}(\sigma(z) \rho(z, y) P_z^{zy}) = a (\sigma(y) \varepsilon_z - \sigma(z) \varepsilon_y).$$

Por tanto, si consideramos $v = \int_V \sigma^2(z) \rho(z, y) P_z^{zy} d\lambda(z)$, entonces

$$\mathcal{L}(v) = \int_V \sigma(z) \mathcal{L}(\sigma(z) \rho(z, y) P_z^{zy}) d\lambda(z) = a (\sigma(y) \sigma - b \varepsilon_y) = -a b (\varepsilon_y - b^{-1} \sigma(y) \sigma).$$

Como la función de Green de V está caracterizada por las ecuaciones (4.11), necesariamente $v = -a b G_y + k(y) \sigma$ y además $k(y) = b^{-1} \int_V v \sigma d\lambda$, lo que implica que

$$G_y = \frac{\sigma}{a b^2} \int_V v \sigma d\lambda - \frac{1}{a b} v = \beta \left(\int_V v \sigma d\lambda\right) \sigma - \alpha v.$$

Si tenemos en cuenta que $v \geq 0$, la identidad anterior implica que $G_y \leq \beta \left(\int_V v \sigma d\lambda\right) \sigma$.

Como por otra parte, $v(y) = 0$, resulta que $G_y(y) = \beta \left(\int_V v \sigma d\lambda\right) \sigma(y)$ y por tanto, la desigualdad

$$G_y \leq \frac{\sigma}{\sigma(y)} G(y, y).$$

El resultado se concluye ahora de las identidades

$$\begin{aligned}
v(x) &= \int_V \sigma^2(z) \left(\sigma(y) (\gamma^y(x) - \gamma^z(x)) + \gamma^z(y) \sigma(x) \right) d\lambda(z) \\
&= b \sigma(y) \gamma^y(x) + \sigma(x) \int_V \sigma^2(z) \gamma^z(y) d\lambda(z) - \sigma(y) \int_V \sigma^2(z) \gamma^z(x) d\lambda(z); \\
\int_V \sigma v d\lambda &= b \sigma(y) \int_V \sigma(x) \gamma^y(x) d\lambda(x) + b \int_V \sigma^2(z) \gamma^z(y) d\lambda(z) \\
&\quad - \sigma(y) \int_V \sigma(x) \left(\int_V \sigma^2(z) \gamma^z(x) d\lambda(z) \right) d\lambda(x) \\
&= b \sigma(y) \int_V \sigma(z) \gamma^y(z) d\lambda(z) + b \int_V \sigma^2(z) \gamma^z(y) d\lambda(z) \\
&\quad - \sigma(y) \int_{V \times V} \sigma^2(z) \sigma(w) \gamma^z(w) d(\lambda \times \lambda)(z, w). \blacksquare
\end{aligned}$$

Obsérvese que cuando σ es constante, $\alpha = \sigma^{-3} |V|^{-2}$, $\beta = \sigma^{-5} |V|^{-3}$ y la expresión de la función de Green de V dada en la proposición anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
G(x, y) &= \alpha \sigma^3 |\gamma^y| - \sigma \gamma^y(x) (|V| \sigma)^{-1} + \alpha \sigma^3 |\gamma^z| - \beta \sigma^5 \int_V |\gamma^z|(w) d\lambda(z) \\
&= \frac{1}{|V|^2} (|\gamma^y| - |V| \gamma^y(x)) - \frac{1}{|V|^3} \int_V (|\gamma^z| - |V| \gamma^z(x)) d\lambda(z).
\end{aligned}$$

Por otra parte, como para cada $x, z \in V$, $|\gamma^z| - |V| \gamma^z(x) = |\gamma^x| - |V| \gamma^x(z)$, resulta que

$$\int_V (|\gamma^z| - |V| \gamma^z(x)) d\lambda(z) = \int_V (|\gamma^x| - |V| \gamma^x(z)) d\lambda(z) = 0$$

y en definitiva,

$$G(x, y) = \frac{1}{|V|^2} (|\gamma^y| - |V| \gamma^y(x))$$

con lo que la expresión de la función de Green de V coincide con la obtenida, para este caso, en la Proposición 5.2.20.

Corolario 5.2.25 *Para cada $x, y, z \in V$ se satisface que*

$$\sigma(z) G^z(x, y) = \frac{1}{2} \left(\int_V \sigma d\lambda \right)^{-1} \left(\sigma(y) \rho(x, z) + \sigma(x) \rho(z, y) - \sigma(z) \rho(x, y) \right)$$

y además que $G_y^z \leq \left(\int_V \sigma d\lambda \right)^{-1} \rho(z, y) \frac{\sigma}{\sigma(z)}$.

En particular, $\frac{\rho}{\sigma \otimes \sigma}$ es una distancia sobre V .

Demostración. De la definición de la función ρ , obtenemos que para cada $x, y, z \in V$,

$$\begin{aligned} \sigma(y) \rho(x, z) + \sigma(x) \rho(z, y) - \sigma(z) \rho(x, y) &= \sigma(y) (\sigma(x) \gamma^x(z) + \sigma(z) \gamma^z(x)) \\ &\quad + \sigma(x) (\sigma(z) \gamma^z(y) + \sigma(y) \gamma^y(z)) \\ &\quad - \sigma(z) (\sigma(x) \gamma^x(y) + \sigma(y) \gamma^y(x)). \end{aligned}$$

Tomando $a^{-1} = \int_V \sigma^2 d\lambda$, de la expresión de la función de Green de V obtenida en la proposición anterior y teniendo en cuenta su simetría, resulta que para cada $x, y \in V$,

$$\begin{aligned} \sigma(x) \gamma^x(y) &= \sigma(y) \gamma^y(x) + a \sigma(x) \sigma(y) \int_V \sigma (\gamma^x - \gamma^y) d\lambda \\ &\quad + a \int_V \sigma^2(w) (\sigma(x) \gamma^w(y) - \sigma(y) \gamma^w(x)) d\lambda(w). \end{aligned}$$

y por tanto que,

$$\begin{aligned} &\sigma(y) \sigma(x) \gamma^x(z) + \sigma(x) \sigma(z) \gamma^z(y) - \sigma(z) \sigma(x) \gamma^x(y) \\ &= \sigma(y) \sigma(z) \gamma^z(x) + \sigma(x) \sigma(y) \gamma^y(z) - \sigma(z) \sigma(y) \gamma^y(x) \\ &\quad + a \sigma(x) \sigma(y) \sigma(z) \int_V \sigma ((\gamma^x - \gamma^z) + (\gamma^z - \gamma^y) - (\gamma^x - \gamma^y)) d\lambda \\ &\quad + a \int_V \sigma^2(w) (\sigma(x) \sigma(y) \gamma^w(z) - \sigma(y) \sigma(z) \gamma^w(x)) d\lambda(w) \\ &\quad + a \int_V \sigma^2(w) (\sigma(x) \sigma(z) \gamma^w(y) - \sigma(x) \sigma(y) \gamma^w(z)) d\lambda(w) \\ &\quad - a \int_V \sigma^2(w) (\sigma(x) \sigma(z) \gamma^w(y) - \sigma(y) \sigma(z) \gamma^w(x)) d\lambda(w) \\ &= \sigma(y) \sigma(z) \gamma^z(x) + \sigma(x) \sigma(y) \gamma^y(z) - \sigma(z) \sigma(y) \gamma^y(x). \end{aligned}$$

lo que implica que,

$$\sigma(y) \rho(x, z) + \sigma(x) \rho(z, y) - \sigma(z) \rho(x, y) = 2 (\sigma(y) \sigma(z) \gamma^z(x) + \sigma(x) \sigma(y) \gamma^y(z) - \sigma(y) \sigma(z) \gamma^y(x))$$

Por otra parte, en virtud de la expresión de G_y^x obtenida en la parte (iv) del Corolario 5.2.23,

$$\begin{aligned} G^z(x, y) &= \left(\int_V \sigma d\lambda \right)^{-1} \frac{\sigma(y)}{\sigma(z)} (\sigma(z) (\gamma^z(x) - \gamma^y(x)) + \gamma^y(z) \sigma(x)) \\ &= \frac{1}{\sigma(z)} \left(\int_V \sigma d\lambda \right)^{-1} (\sigma(y) \sigma(z) \gamma^z(x) + \sigma(x) \sigma(y) \gamma^y(z) - \sigma(y) \sigma(z) \gamma^y(x)). \end{aligned}$$

Si aplicamos a G^z la desigualdad obtenida en la parte (i) de la Proposición 5.2.18 tenemos que para cada $y \in V$, $\sigma(y) G_y^z \leq G^z(y, y) \sigma$. La desigualdad del enunciado se obtiene directamente de ésta sin más que observar que $\sigma(z) G^z(y, y) = \left(\int_V \sigma d\lambda \right)^{-1} \sigma(y) \rho(z, y)$.

Para finalizar, como $\frac{\rho}{\sigma \otimes \sigma}$ es simétrica, nula en la diagonal de V y estrictamente positiva fuera de ella, determina una distancia sobre V si satisface la desigualdad triangular. Ahora bien, como

$$\frac{\rho(x, z)}{\sigma(x)\sigma(z)} + \frac{\rho(z, y)}{\sigma(y)\sigma(z)} - \frac{\rho(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)} = 2 \frac{G^z(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)} \int_V \sigma d\lambda$$

el resultado es consecuencia de la no negatividad de la función de Green. ■

Desde luego, la cota superior para G_y^z obtenida en la proposición anterior es la mejor posible pues $G^z(y, y) = \left(\int_V \sigma d\lambda \right)^{-1} \frac{\sigma(y)}{\sigma(z)} \rho(y, z)$.

Por otra parte, se satisface que $\frac{\rho(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{\rho(x, z)}{\sigma(x)\sigma(z)} + \frac{\rho(z, y)}{\sigma(y)\sigma(z)}$ si $G_y^z(x) = 0$, es decir si $V - \{z\}$ no es conexo y x e y están separados por z , es decir si $x \notin F_y$.

Conclusiones y desarrollos futuros

En este trabajo se ha desarrollado un cálculo vectorial sobre estructuras discretas, análogo al de los modelos continuos. En él se ha introducido el concepto de espacio tangente a cada punto de un multigrafo o variedad discreta y a partir de esta noción se han definido también los distintos conceptos de campo sobre la variedad: de vectores, de covectores, de bilineales y de matrices. Asimismo, se ha introducido la estructura de variedad Riemanniana discreta y sobre ella se han considerado los operadores en diferencias que son la contrapartida discreta de los correspondientes operadores del caso continuo, es decir los operadores derivada, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano. Se ha demostrado que estas definiciones son coherentes en el sentido que satisfacen los teoremas fundamentales del cálculo diferencial, como son la irrotacionalidad del gradiente y el que todo campo que sea rotacional de otro es solenoidal. Además, el operador divergencia es el opuesto del adjunto del gradiente y el Laplaciano y el rotacional son operadores autoadjuntos. Por otra parte, a lo largo del trabajo se ha mostrado que los diferentes operadores de Laplace considerados en la literatura, como el probabilístico o el correspondiente a una variedad pesada, son casos particulares del operador de Laplace-Beltrami que hemos presentado aquí. También hemos probado que conceptos como el de Laplaciano normalizado, se corresponden con operadores autoadjuntos completos cuya parte principal es nuestro operador de Laplace-Beltrami.

Otro aspecto desarrollado dentro del cálculo en diferencias, ha sido la introducción del complejo de De Rham de una variedad discreta. Hemos demostrado que en el caso de variedades Riemannianas también es posible definir un Laplaciano de Hodge y obtener un teorema de descomposición totalmente similares a los del caso continuo.

El aspecto formal de los operadores discretos construídos, ha permitido identificarlos como operadores en diferencias y en particular se ha demostrado que todos los esquemas en diferencias sobre retículas uniformes del espacio euclídeo que son de tipo positivo y consistentes con perturbaciones del operador de Laplace, coinciden con el operador de Laplace-Beltrami para una determinada métrica sobre la retícula. También se ha demostrado que una condición suficiente para que el esquema sea de tipo positivo es que la métrica esté dada por un campo de matrices de Stieltjes diagonalmente dominantes. Este resultado también se satisface en el caso de una variedad abstracta.

Se ha desarrollado un cálculo integral sobre subvariedades discretas que incluye la integración sobre curvas y los análogos de los teoremas integrales del caso continuo, a saber el Teorema de la Divergencia y las Identidades de Green. En relación con la integración

sobre curvas, se ha definido también el concepto de circulación y con él se ha desarrollado una versión discreta del Teorema de Stokes-Ampère y se han caracterizado los campos gradientes.

El desarrollo de los teoremas integrales y más concretamente de las Identidades de Green, ha permitido formular correctamente el concepto de problema de contorno autoadjunto sobre una subvariedad. Bajo la hipótesis fundamental de la positividad del coeficiente de la estructura Riemanniana, se ha realizado un análisis de existencia y de unicidad de soluciones de tales problemas y en particular, se han determinado condiciones sobre el término de orden 0 del operador en diferencias para asegurar, no sólo la existencia y unicidad de soluciones, sino también que los problemas admiten una formulación variacional. Además, se ha demostrado que cada problema de contorno autoadjunto es equivalente o bien a un problema de Dirichlet, o bien a una ecuación de Poisson sobre una nueva variedad Riemanniana, donde la parte principal del nuevo operador en diferencias sigue siendo un operador de Laplace-Beltrami. También se ha demostrado cómo nuestra formulación engloba el estudio de aquellos problemas cuyo operador en diferencias es un Laplaciano normalizado.

En el desarrollo del trabajo se ha abordado el estudio de los operadores integrales y sus correspondientes núcleos, asociados a cada uno de los problemas de contorno semihomogéneos tratados. Este análisis se efectúa en el caso general, es decir incluso cuando dicho problema de contorno no tiene unicidad de soluciones y describimos todos los operadores integrales que son inversos del problema de contorno considerado. Además, logramos identificar los que tienen propiedades especiales, como por ejemplo aquéllos cuyo núcleo es simétrico.

Asumiendo nuevamente la positividad del coeficiente de la estructura métrica y teniendo presentes las mismas circunstancias que permitían una interpretación variacional de los problemas de contorno, demostramos que el operador en diferencias es monótono o de forma equivalente que satisface el principio del mínimo, lo cual permite precisar los resultados de existencia y unicidad de soluciones de los problemas de contorno, incluyendo cuestiones relativas al soporte de la solución.

El hecho de que en un espacio finito todo operador lineal puede interpretarse como un operador integral, nos ha permitido entender los operadores en diferencias que determinan los problemas de contorno como núcleos sobre el espacio de vértices de la variedad. Hemos demostrado que desde el punto de vista de la Teoría del Potencial estos núcleos satisfacen los principios de energía y del máximo, que son suficientes para que tenga sentido el problema de equilibrio sobre cada subconjunto. Además las peculiaridades de estos núcleos nos han permitido probar que el soporte de la medida de equilibrio de cada subconjunto coincide con él. Esta propiedad conduce a demostrar que la función de Green de cada subconjunto, es decir la asociada al problema de Dirichlet si el subconjunto es propio o a la ecuación de Poisson si el subconjunto coincide con la totalidad de los vértices, se expresa en términos de medidas de equilibrio. Como cada una de estas medidas puede obtenerse mediante algoritmos de programación lineal, con vistas a las aplicaciones, esta técnica puede considerarse como alternativa a otras, como por ejemplo a los métodos iterativos.

Finalmente, en este trabajo se ha generalizado el concepto de resistencia efectiva entre

vértices de una variedad discreta, al caso de los operadores en diferencias de segundo orden, cuya parte principal es un Laplaciano normalizado de un operador de Laplace-Beltrami asociado a una métrica no necesariamente ortogonal. Se ha demostrado que se satisfacen las mismas propiedades que en el caso clásico y, en particular, se ha obtenido una expresión sencilla de la resistencia efectiva en términos de medidas de equilibrio.

Muchos de los temas abordados en este trabajo han merecido y merecen la atención de un gran número de investigadores. Sin embargo, la mayor parte de la metodología presentada aquí no sigue pautas preestablecidas y por tanto consideramos de interés seguir avanzando en su desarrollo.

Desde el punto de vista de la estructura que soporta la formulación de los problemas, será interesante definir el concepto de aplicación entre variedades y asignarle una transformación lineal entre los espacios tangentes. El análisis de los automorfismos de una variedad discreta permitirá tratar en un contexto adecuado propiedades tales como la homogeneidad o isotropía de la variedad. Desde luego, esta es un área de gran interés en el marco de la Combinatoria y más concretamente en el de la Teoría de Grafos. Por ejemplo, importantes familias de grafos, como son los grafos vértice-transitivos, los grafos simétricos o los grafos distancia-regulares, están caracterizados por su comportamiento ante su grupo de automorfismos.

Otro aspecto íntimamente relacionado con la estructura de las variedades discretas es la definición de una orientación sobre ellas. Durante el desarrollo de este trabajo hemos sopesado su consideración, de manera que estamos en condiciones de comentar los cambios fundamentales que reportaría. El más notable está producido por el hecho de que la derivada de una función debería ser una forma simétrica y por tanto cambiarían las expresiones de los operadores divergencia y laplaciano, construídos a partir de ella. Si bien la obtención de una condición suficiente para que el coeficiente de la estructura Riemanniana sea positivo se vuelve algo más delicada, otros aspectos estructurales se benefician de la introducción de una orientación, como por ejemplo el complejo de De Rham, que tiene aún más similitudes con el caso continuo pues en esta situación, la composición de la derivada consigo misma es nula.

La relación que hemos establecido entre los operadores de Laplace-Beltrami y los esquemas en diferencias destinados a la resolución de problemas de contorno elípticos, sugiere planear la relación entre las propiedades del medio continuo y las métricas discretas. Esto permitiría establecer una discretización no de las ecuaciones de estado sino del comportamiento del modelo continuo mismo. Algunos de los trabajos referenciados en esta memoria tienen ya presente esta línea de trabajo, de manera que la primera tarea en esta dirección debe ser traducir a nuestro lenguaje los resultados de esos autores. Por otra parte, nuestros desarrollos siguen siendo válidos aun cuando la matriz que juega el papel de inversa de la métrica es singular, de manera que es factible abordar también el análisis de problemas de contorno con operadores elípticos degenerados.

Una vez establecida la relación entre los problemas de contorno del continuo y los problemas de contorno discretos, el siguiente paso debería contemplar la utilización de nuestras

técnicas para demostrar la convergencia de las soluciones discretas a la solución del problema continuo, cuando el tamaño de las redes consideradas tiende a 0. También, desde el punto de vista de la resolución efectiva de los problemas discretos, otra de las tareas que deben ser abordadas es la de contrastar el método de cargas extremales, es decir el de obtención de medidas de equilibrio, con otros métodos de resolución de las ecuaciones en diferencias como los métodos iterativos. En este sentido deberán escogerse problemas tipo y comparar las velocidades de convergencia y la estabilidad numérica de los métodos.

A lo largo de este trabajo también se han establecido las bases para la formulación de problemas de contorno no autoadjuntos. La diferencia básica, respecto de los problemas autoadjuntos, consistiría en la adición al operador en diferencias de un operador de primer orden que contenga la derivada según un campo no simétrico. La reducción de estos problemas a problemas de Dirichlet o a ecuaciones de Poisson debería seguir pasos análogos a los establecidos aquí. Sin embargo, lo que cambiará sustancialmente es la Teoría del Potencial que aplicar en este caso, que deberá ser la construída respecto de núcleos no simétricos. Afortunadamente existen sólidos desarrollos en este campo, establecidos alrededor de los años setenta, de manera que parece factible adecuar a nuestras necesidades las técnicas ya establecidas, de forma similar a lo que se ha realizado para núcleos simétricos. En el caso no simétrico la diferencia substancial es que el problema de equilibrio no admite un planteamiento variacional, por lo que las medidas de equilibrio no pueden obtenerse a partir de la minimización de la energía, de manera que para asegurar su existencia debe hacerse uso de teoremas más delicados.

Otro aspecto a tener en cuenta es el posible planteamiento de problemas no lineales. Desde el punto de vista del caso discreto ya se han contemplado algunos intentos en esta dirección, de forma que es factible plantear estos problemas desde nuestras técnicas. Desde el punto de vista de la reducción de los problemas a problemas de equilibrio, podríamos utilizar versiones discretas de la Teoría no Lineal del Potencial que ha tenido un enorme desarrollo en los últimos años, aunque hemos de reconocer que la situación en este caso nos es mucho menos familiar que la correspondiente al caso lineal.

Por último, una prolongación natural de los trabajos desarrollados en esta memoria, así como de las extensiones que acabamos de mencionar, consiste en la consideración de redes infinitas, lo que desde el punto de vista continuo se corresponde con las variedades no compactas. Hay que decir que la mayor parte de las referencias que aparecen en este trabajo corresponden a desarrollos en este ámbito y que una de las técnicas más utilizadas es la de la exhaustión, que consiste en considerar una sucesión creciente de subvariedades compactas, subvariedades como las estudiadas en nuestro trabajo, y cuya unión es la red total. Nosotros ya hemos obtenido algunos resultados en esta dirección aplicando la técnica anterior, concretamente hemos obtenido la expresión de la función de Green de un grafo distancia-regular infinito a partir del límite de funciones de Green de grafos distancia-regulares finitos, construídas a partir de medidas de equilibrio.

Bibliografía

- [1] A. Ancona, Positive harmonic functions and hyperbolicity, in *Potential Theory-Surveys and Problems*, Lect. Notes in Math. 1344, Springer-Verlag, 1988, 1-23.
- [2] T. Arbogast, M.F. Wheeler y I. Yotov, Mixed finite elements for elliptic problems with tensor coefficients as cell-centered finite differences, *SIAM J. Numer. Anal.* **34** (1997), 828-852.
- [3] M. Barlow, T. Coulhon y A. Grigor'yan, Manifolds and graphs with slow heat kernel decay, *Invent. Math.* **144** (2001), 609-649.
- [4] E. Bendito, A. Carmona y A. M. Encinas, Shortest paths in distance-regular graphs, *European Journal of Combinatorics* **21** (2000), 153-166.
- [5] E. Bendito, A. Carmona y A. M. Encinas, Solving boundary value problems on networks using equilibrium measures, *J. Funct. Anal.* **171** (2000), 155-176.
- [6] E. Bendito, A. Carmona y A. M. Encinas, Solving Dirichlet and Poisson problems on graphs by means of equilibrium measures, sometido en *Combinatorica*.
- [7] A. Berman y R. Plemmons, "Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences", Classics in Applied Mathematics 9, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [8] A. Beurling y J. Deny, Espaces de Dirichlet I. Le cas élémentaire, *Acta Math.* **99** (1958), 203-224.
- [9] N. Biggs, Potential Theory on distance-regular graphs, *Combin. Probab. Comput.* **2** (1993), 243-255.
- [10] N. Biggs, Algebraic Potential Theory on graphs, *Bull. London Math. Soc.* **29** (1997), 641-682.
- [11] B. Bollobás, "Modern Graph Theory", Springer, 1998.
- [12] H. Brézis, "Análisis Funcional", Alianza Universidad Textos, 1984.
- [13] S.L. Campbell y C.D. Meyer Jr., "Generalized Inverses of Linear Transformations", Dover, 1991.

- [14] G. Choquet y J. Deny, Modèles finis en théorie du potentiel, *J. Analyse Math.* **5** (1956/57), 77-135.
- [15] F.R.K Chung, “Spectral Graph Theory”, CBMS 92, American Mathematical Society, 1997.
- [16] F.R.K. Chung y R.P. Langlands, A combinatorial Laplacian with vertex weights, *J. Comb. Theory (A)*, **75** (1996), 316-327.
- [17] F.R.K. Chung y S.T. Yau, Eigenvalue inequalities for graphs and convex subgraphs, *Comm. Anal. Geom.* **5** (1997), 575–623.
- [18] F.R.K. Chung y S.T. Yau, Discrete Green functions, *J. Comb. Theory (A)*, **91** (2000), 191-214.
- [19] Y. Colin de Verdière, Spectre d’opérateurs différentiels sur les graphes, en *Random Walks and Discrete Potential Theory (Cortona, 1997)*, M. Picardello & W. Woess (ed.) Symposia Mathematica, vol. XXXIX, Cambridge University Press 1999, 139-164.
- [20] D. Coppersmith, P. Doyle, P. Raghavan y M. Snir, Random walks on weighted graphs, and applications to on-line algorithms, *J. Assoc. Comput. Mach.* **40** (1993), 421-453.
- [21] E.B. Curtis y J.A. Morrow, Determining the resistors in a network, *SIAM J. Appl. Math.* **50** (1990), 918–930.
- [22] C. Dellacherie, S. Martínez y J. San Martín, Ultrametric matrices and induced Markov chains, *Adv. Appl. Math.* **17** (1996), 169-183.
- [23] J. Dodziuk, Finite-difference approach to the Hodge Theory of harmonic forms, *Amer. J. Math.* **98** (1976), 79-104.
- [24] J. Dodziuk, Difference equations, isoperimetric inequality and transience of certain random walks, *Trans. Amer. Math. Soc.* **284** (1984), 787-794.
- [25] J. Dodziuk, Laplacian on manifolds and analogous difference operator for graphs, *Contemp. Math.* **49** (1986), 45-49.
- [26] J. Dodziuk y W.S. Kendall, Combinatorial Laplacians and isoperimetric inequality, en *From local times to global geometry, control and physics*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **150** (1986), 68-74.
- [27] J. Dodziuk y L. Karp, Spectral and function theory for combinatorial Laplacians, *Contemp. Math.* **73** (1988), 25-40.
- [28] P. Doyle y J.L. Snell, “Random Walks and Electrical Networks”, The Carus Mathematical Monographs, Math. Assoc. America, 1984.
- [29] R.J. Duffin, Discrete Potential Theory, *Duke Math. J.* **20** (1953), 233-251.

- [30] H. Flanders, Infinite networks: I-resistive networks, *IEEE Trans. Circuit Theory* **CT-18** (1971), 326-331.
- [31] G.E. Forsythe y W.R. Wasow, “Finite Difference Methods for Partial Differential Equations”, John Wiley & Sons, 1960.
- [32] B. Fuglede, On the theory of potentials in locally compact spaces, *Acta Math.* **103** (1960), 139-215.
- [33] M. Fukushima, “Dirichlet Forms and Markov Processes”, North-Holland, 1980.
- [34] A. Grigor’yan, Heat kernels on manifolds, graphs and fractals, en *Proceedings of the 3rd ECM*, editado en CD-Rom (Ed. C. Casacuberta, J.M. Font, S. Zarzuela), (2000).
- [35] A. Grigor’yan y A. Telcs, Sub-gaussian estimates of heat kernels on infinite fractals, aparecerá en *Duke Math. J.*
- [36] K. Gustafson y F. Harary, The curl of graphs and networks, *Math. Modelling* **6** (1985), 145-155.
- [37] B. Heinrich, “Finite Difference Methods on Irregular Networks”, Birkhäuser Verlag, 1987.
- [38] J.M. Hyman y M. Shashkov, The orthogonal decomposition theorems for mimetic finite difference methods, *SIAM. J. Numer. Anal.* **36** (1999), 788-818.
- [39] V. A. Kaimanovich, Dirichlet norms, capacities and generalized isoperimetric inequalities for Markov operators, *Potential Analysis* **1** (1992), 61-82.
- [40] T. Kayano y M. Yamasaki, Discrete Dirichlet integral formula, *Discrete Appl. Math.* **22** (1988/89), 53-68.
- [41] S. J. Kirkland y M. Neumann, The M-matrix group generalized inverse problem for weighted trees, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **19** (1998), 226-234.
- [42] R. Lyons y Y. Peres, “Probability on Trees and Networks”, *versión de Diciembre de 2000*. Accesible en la dirección electrónica <http://php.indiana.edu/~rdlyons/>.
- [43] G.I. Marchuk, Splitting and alternating direction methods, en *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. I, P.G. Ciarlet & J.L. Lions (ed.) North-Holland (1990), 197-462.
- [44] L.G. Margolin, M. Shashkov y P.K. Smolarkiewicz, A discrete operator calculus for finite difference approximations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **187** (2000), 365-383.
- [45] S. Martínez, G. Minchon y J. San Martín, Inverse of strictly ultrametric matrices are of the Stieltjes type, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **15** (1994), 98-106.
- [46] W. S. Massey, “A Basic Course in Algebraic Topology”, Springer-Verlag, 1991.

- [47] G. Minchon, Matrices de Stieltjes et potentiels finis, *Rev. Mat. Apl.* **14** (1993), 31-36.
- [48] A.R. Mitchell y D.F. Griffiths, “ The Finite Difference Method in Partial Differential Equations”, John Wiley & Sons, 1994.
- [49] A. Murakami y M. Yamasaki, An introduction of Kuramochi boundary of an infinite network, *Mem. Fac. Sci. Shimane Univ.* **30** (1997), 57–89.
- [50] A. Murakami y M. Yamasaki, Discrete Kuramochi function, en *New developments in difference equations and applications (Taipei, 1997)*, S. S. Cheng, S. Elaydi and G. Ladas (ed.) (1999), 313–322.
- [51] M. Ohtsuka, On potential in locally compact spaces, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math.* **25** (1961), 135-352.
- [52] S. Ponzio, The combinatorics of effective resistances and resistive inverses, *Inform. and Comput.* **147** (1998), 209-223.
- [53] A. Recki, “ Matroid Theory and its Applications ”, Springer-Verlag (1989).
- [54] M. Rigoli, M. Salvatori y M. Vignati, Liouville properties on graphs, *Mathematika* **94** (1997), 133-148.
- [55] W. Schwalm, B. Moritz, M. Giota y M. Schwalm, Vector difference calculus for physical lattice models, *Phy. Rev. E* **59** (1999), 1217-1233.
- [56] P.M. Soardi, “Potential Theory on Infinite Networks”, Lect. Notes in Math. 1590, Springer-Verlag, 1994.
- [57] P. Tetali, An extension of Foster’s network theorem, *Combin. Probab. Comput.* **3** (1994), 421-427.
- [58] H. Urakawa, Heat kernel and Green kernel comparison theorems for infinite graphs, *J. Funct. Anal.* **146** (1997), 206–235.
- [59] R.S. Varga, “Matrix Iterative Analysis”, Prentice-Hall, 1962.
- [60] M. Yamasaki, Extremum problems on an infinite network, *Hiroshima Math. J.* **5** (1975), 223-250.
- [61] M. Yamasaki, The equation $\Delta u = qu$ on an infinite network, *Mem. Fac. Sci. Shimane Univ.* **21** (1987), 31–46.
- [62] W. Woess, “Random Walks on Infinite Graphs and Groups”, Cambridge University Press, 2000.

Índice de Materias

- adherencia de un conjunto, 5
 - respecto de una función, 8
- árbol, 5
- base coordenada, 15
- Betti, número de, 69
- bosque, 5
- camino
 - cerrado, 4
 - corto, 4
 - internamente disjunto, 4
 - opuesto, 4
 - producto, 4
 - soporte de una curva, 79
- campo
 - de bilineales, 19
 - compatible, 20
 - equilibrado, 20
 - no degenerado, 19
 - ortogonal, 19
 - reducido de otro, 20
 - de covectores, *véase* forma
 - de endomorfismos, 19
 - compatible, 20
 - equilibrado, 20
 - reducido de otro, 20
 - de matrices
 - asociado a un campo de endomorfismos, 20
 - asociado a un campo de bilineales, 20
 - definido positivo, 19
 - de Stieltjes, 26
 - diagonalmente dominante, 26
 - de forma estricta, 26
 - compatible, 20
 - diagonal, 19
 - equilibrado, 20
 - no singular, 19
 - reducido de otro, 20
 - simétrico, 19
 - ultramétrico, 26
 - estrictamente, 26
 - de productos internos, *véase* métrica
 - vectorial, 15
 - antisimétrico, 16
 - característico, 15
 - conormal a un conjunto, 99
 - conservativo, 85
 - equilibrado, 16
 - gradiente, 49
 - irrotacional, 71
 - no tangencial a un conjunto, 100
 - normal a un conjunto, 90
 - oblícuo a un conjunto, *véase* no tangencial
 - reducido de otro, 16
 - reflejado de otro, 16
 - rotacional de otro, 71
 - simétrico, 16
 - solenoidal, 46
 - tangente de una curva, 79
 - tangente a un conjunto, 90
- característica de Euler, 3
- circulación, 85
- componentes conexas de un multigrafo, 4
- curva, 79
 - cerrada, 79
 - simple, 79
 - producto, 80
 - producto por un escalar, 80
 - suma, 80
- De Rham
 - complejo de, 69
 - grupo de cohomología de, 69
- diámetro de un multigrafo, 5
- dipolo, 80
- Dirac, medida de, 38
- distancia, 4
- Divergencia, teorema de la, 91
- ecuación de Poisson, 106
- energía, 153
- esquema en diferencias, 63
 - de tipo positivo, 65
- espacio tangente, 14
- espacio cotangente, 15
- estructura métrica, *véase* estructura Riemanniana
- estructura Riemanniana, 39

- compatible, 98
- semi-compatible, 98
- uniforme, 61
- canónica, 39
- exterior de un conjunto, 5
- extremos de un camino, 4
- flujo, 80
- forma, 15
 - antisimétrica, 16
 - característica, 16
 - derivada de una función, 44
 - reflejada de otra, 18
 - simétrica, 16
 - equilibrada, 16
- Foster, teorema de, 176
- frontera de un conjunto
 - de vértices, 5
 - respecto de una función, 8
 - de ramas, 5
 - respecto de una función, 8
- Fredholm, alternativa de, 37
- función
 - coeficiente de una estructura Riemanniana, 55
 - derivada conormal de una función, 100
 - derivada de una función según un campo, 44
 - derivada oblicua de una función, 100
 - divergencia de un campo, 45
 - Laplaciano de otra, 53
 - sobre $V \times V$
 - admisible, 8
 - compatible, 8
 - de Green, 160, *véase* núcleo de Green
 - semi-compatible, 8
 - sobre Γ
 - antisimétrica, 11
 - componente
 - de un campo de matrices, 19
 - de un campo vectorial, 16
 - de una forma, 16
 - equilibrada, 12
 - reducida de otra, 12
 - reflejada de otra, 11
 - simétrica, 11
 - sobre $\Gamma \times \Gamma$
 - compatible, 13
 - equilibrada, 13
 - reducida de otra, 13
- funcional cuadrático, 117
- Gauss,
 - funcional de, 167
 - teorema de, 53, 92
- geodésica, 88
- grafo, 3
 - determinado por una matriz, 8
 - subyacente, 3
- grado de un vértice, 3
- Hodge
 - Laplaciano de, 72
 - teorema de Descomposición de, 73
- Identidades de Green, 53, 101
- intensidad de un flujo, 80
- interior de un conjunto, 5
 - respecto de una función, 8
- Laplaciano, 53
 - combinatorio, 60
 - de una variedad Riemanniana discreta, 53
 - de Hodge, *véase* Hodge, Laplaciano de normalizado, 60, 115
 - probabilístico, 60
- Leibnitz, regla de, 45
- longitud
 - de un camino, 4
 - de una curva, 88
- masa de una medida, 153
- matriz
 - de Stieltjes, 25
 - diagonalmente dominante, 25
 - de forma estricta, 25
 - no negativa, 25
 - ultramétrica, 25
 - estrictamente, 25
 - Z , 25
- medida
 - cardinal, 38
 - de equilibrio, 156
 - densa, 38
- métrica, 19
 - uniforme, 33
- multigrafo, 2
 - conexo, 4
 - finito, 3
 - localmente finito, 3
 - numerable, 3
 - regular, 3
- núcleo, 130, 153
 - asociado a un operador en diferencias, 167
 - de Green, 131
 - ortogonal, 131
 - ortogonal sobre un conjunto, 131
 - de Poisson, 131, 160

- ortogonal, 131
 - ortogonal sobre un conjunto, 131
 - de Robin, 131
 - ortogonal, 131
 - ortogonal sobre un conjunto, 131
 - de una variedad Riemanniana, 167
- operador
 - adjunto de otro, 37
 - autoadjunto, 37
 - de Green, 123
 - ortogonal, 123
 - sobre un conjunto, 123
 - de Laplace, *véase* Laplaciano
 - de Laplace-Beltrami, 60
 - de Poisson, 123
 - ortogonal, 123
 - sobre un conjunto, 123
 - de Robin, 123
 - ortogonal, 123
 - sobre un conjunto, 123
 - derivada, 44
 - conormal, 100
 - oblícuca, 100
 - divergencia, 46, 51
 - según un campo, 44
 - en diferencias, 44
 - gradiente, 49
 - integral, 130
 - local, 23
 - monótono, 160
 - rotacional, 71
- orden de un operador, 23
- orden y tamaño de un multigrafo, 3
- parte antisimétrica
 - de un campo, 18
 - de una forma, 18
 - de una función, 11
- parte principal de un operador, 97
- parte simétrica
 - de un campo, 18
 - de una forma, 18
 - de una función, 11
- potencial, 153
- principio
 - de condensadores, 162
 - de Dirichlet, 117
 - de energía, 153
 - del máximo, 153
 - del mínimo, 163
- problema de contorno, 105
 - de Dirichlet, 106
 - de Neumann, 107
 - de Robin, 107
 - formalmente autoadjunto, 109
 - homogéneo, 106
 - Mixto
 - Dirichlet-Neumann, 107
 - Dirichlet-Robin, 106
 - normalizado, 115
 - semihomogéneo, 106
- problema de equilibrio, 156
- producto interno
 - inducido por una estructura métrica, 39
 - inducido por una medida densa, 38
- rama, 3
 - incidente con un vértice, 3
- red
 - finita, 39
 - puramente resistiva, 39
- resistencia, 40
- resistencia efectiva, 176
- retícula uniforme, 27
- soporte
 - de un campo, 16
 - de una forma, 16
 - de una función, 11
 - de una medida, 153
- solución de un problema de contorno, 106
- subvariedad, 7
 - simple, 7
 - unión, 7
 - Riemanniana, 40
- traza de un camino, 4
- variedad discreta, 5
 - adherencia de un conjunto
 - frontera de un conjunto, 7
 - generada por un conjunto, 7
 - generada por una función, 8
 - Riemanniana, 39
 - simple, 5
 - subyacente, 5
- vector tangente a una curva en un punto, 79
- vértice, 2
 - adyacente a otro vértice, 3
 - aislado, 3
 - final de una curva, 79
 - incidente con una rama, 3
 - inicial de una curva, 79
 - interior
 - de un camino, 4
 - de una curva, 79