

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de Doctorat:

AUTOMATITZACIÓ AVANÇADA I ROBÒTICA

Tesi Doctoral

CINEMÀTICA I CONTROL EN ENTORNS MULTI-ROBOT

Ramon Costa i Castelló

Director: Luis Basañez Villaluenga

Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials

Octubre de 2001

Als meus pares

Agraïments

Abans de començar aquest llista d'agraïments, vull demanar excuses a aquells que es puguin sentir decebutos amb el meu treball.

Primer que tot agrair als meus pares el seu suport incondicional en tot el camí que m'ha portat fins aquí. No vull oblidar als meus germans que sempre han estat allí quan m'han fet falta.

Als meus amics i companys de tota la vida que tan han sentit parlar d'aquest treball, entre d'altres el Jaume, Carlos, Emilio, Eduardo, Rafi i Angel, i molt especialment al Joaquin amb qui he passat tantes hores per aquests mons de Déu.

Agrair el suport rebut dels companys tant de l'IC, com ara en l'IOC. Agrair el suport de la gent del PAS que m'han donat suport sempre que ha estat necessari, agraïments especials pel Falet, el Vicenç, la Montse i l'Enric. També vull agrair la paciència de la gent d'administració, sobretot en aquest moments finals de nerviosisme, gràcies a la Noemí i la Glòria. Finalment una menció molt especial per la Carme, de qui sempre he rebut un suport incondicional.

També vull agrair, a la resta de gent de l'IOC, el seu recolzament tant personal com professional. Menció especial mereix la gent del grup de robòtica. Finalment, voldria agrair especial el suport rebut d'en Robert durant els temps més obscurs d'aquest camí que ara s'acaba.

Durant tot aquest temps la meva activitat ha estat molt lligada a la docència, camp en què he rebut el recolzament de la gent del departament, en especial de l'Agustí i Javier, sense el suport dels quals aquest camí hagués estat molt més llarg. També he de recordar al Miquel Angel amb qui hem compartit moltes hores de tertúlia cosa que ha ajudat a alleugerir el cansament del camí.

Vull agrair al Salvador i l'Andreu el seu esforç, dedicació i constància durant el temps que vam fer via junts, moltes de les coses aquí presentades són en part seves.

És just agrair el temps i esforç dedicat per algunes persones en guiar els meus passos en algunes diferents matèries, en especial al Prof. Muñoz i a l'Enric pel seu suport en l'aprenentatge de les matemàtiques.

Finalment vull agrair el suport del meu tutor d'estudis Prof. Riera, qui sempre ha tingut una paraula amable, i al meu director de tesi Prof. Basañez, de qui he après tant en el camp personal com en el professional.

Índex

I	Introducció	1
1	Introducció	3
1.1	Motivació i problemàtica	3
1.2	Objectius de la tesi	6
1.2.1	Cinemàtica	6
1.2.2	Dinàmica i control	7
1.3	Estructura de la Tesi	8
II	Cinemàtica	11
2	Cinemàtica dels sistemes multi-robot	13
2.1	Sistemes robotics amb restriccions holònomes	13
2.2	Sistemes Multirobot amb restriccions holònomes	15
2.3	Estudi de Velocitats	18
2.3.1	Descripció	18
2.3.2	Singularitats	19
2.4	Cinemàtica Inversa	20
2.4.1	Definició	20
2.4.2	Partició de l'espai de configuracions	21
2.5	Mètrica	21
2.6	Volum	24
2.7	Manipulabilitat	25

2.8	Proposta d'una nova mesura de manipulabilitat	29
2.9	Forces	30
2.10	Espai de treball	32
2.10.1	Introducció	32
2.10.2	Generació de l'espai de treball	33
2.10.2.1	Estudi de les singularitats	33
2.10.2.2	Discretització l'espai de treball	36
3	Espai de treball d'un sistema multirobot	37
3.1	Espai de treball	37
3.2	Espai destre	38
3.3	Espai realitzable	41
3.3.1	Definició	41
3.3.2	Problemàtica d'Orientació	43
3.3.3	Qualitat de l'espai de treball	45
3.4	Espai d'orientació constant	46
3.5	Espai de treball per rangs de posicions de premsió	47
3.6	Trajectòries dins l'espai de treball	47
4	Aplicació a robots tipus SCARA	49
4.1	Caracterització cinemàtica d'un robot scara	50
4.1.1	Descripció cinemàtica	50
4.1.2	Singularitats i partició de l'espai de configuracions	51
4.1.3	Estudi de l'espai de treball	52
4.1.4	Estudi de Manipulabilitat	55
4.2	Espai de treball del sistema multirobot	56
4.2.1	Construcció de la figura destra	56
4.2.2	Construcció de la figura realitzable	58
4.2.3	Solució del Problema d'orientació	62
4.3	Disseny	63

5	Aplicació a robots tipus PUMA	67
5.1	Caracterització cinemàtica d'un robot RX	68
5.1.1	Descripció	68
5.1.2	Singularitats	68
5.1.3	Particions de l'espai de configuracions	70
5.1.3.1	Descripció	70
5.1.3.2	Articulacions d'orientació	70
5.1.3.3	Articulacions de Posició	72
5.1.4	Cinemàtica Inversa	73
5.1.5	Espai de treball d'orientació d'un robot RX-90	73
5.1.6	Espai de treball de posició d'un robot RX-90	75
5.1.6.1	Estudi detallat	75
5.1.6.2	Espai de treball simplicat	77
5.2	Espai de treball del sistema multirobot	79
5.2.1	Construcció de la figura destra	80
5.2.2	Construcció de la figura realitzable	81
5.2.2.1	Aparició de forats interns	87
5.2.2.2	Intersecció	90
5.2.2.3	Estudi de la restricció d'orientació	91
5.3	Exemples d'espai de treball	93
5.3.1	Cel·la Robotitzada de l'IOC	93
5.3.2	Evolució orientació	95
III	Dinàmica i Control	99
6	Sistemes Mecànics amb restriccions holònomes	101
6.1	Formulació dels sistemes mecànics	102
6.1.1	Dinàmica de les cadenes cinemàtiques obertes	102
6.1.2	Robot restringit a una superfície	104

6.1.2.1	Modelat del Sistema	104
6.1.2.2	Caracterització de les Singularitats	105
6.1.3	Robots manipulant la mateixa peça simultàniament	106
6.1.3.1	Modelat	106
6.1.3.2	Caracterització de les singularitats	107
6.2	Simulacions	108
6.2.1	Eines d'implementació	109
6.2.2	Simulació d'un robot restringit a una superfície	110
6.2.3	Dos robots manipulant rígidament un objecte rígid	110
6.3	Control de Sistemes DAE	110
6.3.1	Formulació del problema	114
6.3.2	Extensió dinàmica	116
6.3.3	Disseny del sistema de control	117
6.3.4	Llei de Control lineal	120
6.3.5	Exemple numèric	121
7	Identificació i control de forces internes	125
7.1	Velocitats Internes	125
7.1.1	Descomposició de les forces	125
7.1.2	Definició	126
7.2	Modelat del sistema	127
7.2.1	Introducció	127
7.2.2	Obtenció de les dades experimentals	127
7.2.3	Ajust de models	129
7.3	Sistema de Control	130
7.3.1	Algorisme de Control	131
7.3.2	Càlcul de les forces òptimes	133
7.3.3	Comentaris sobre l'estabilitat del sistema complet	134
7.4	Validació Experimental	136

7.4.1	Plataforma d'Experimentació.	136
7.4.2	Procés d'identificació	136
7.4.3	Disseny dels controladors	141
7.4.4	Resultats Experimentals	141
8	Comportament d'Impedància	147
8.1	Introducció	147
8.2	Comportament d'impedància	149
8.2.1	Plantejament del problema	149
8.2.2	Definició de l'error	149
8.2.3	Model d'impedància sobre l'error	151
8.2.4	Energia cinètica	152
8.2.5	Energia potencial	152
8.2.5.1	Formulació genèrica	152
8.2.5.2	Energia potencial en coordenades exponencials	153
8.2.6	Forces Dissipatives	155
8.2.7	Sistema Complet	156
8.3	Criteris de selecció dels paràmetres	156
8.3.1	Rigidesa Resultant	156
8.3.2	Efecte sobre les forces internes	159
8.4	Implementació en robots amb control de posició	162
8.4.1	Modelat dels robots	163
8.4.2	Modelat dels sensors de força	164
8.4.3	Discretització de les equacions	164
8.4.3.1	Introducció	164
8.4.4	Algorisme d'integració	165
8.4.5	Esquema d'implementació	166
8.4.6	Limitacions	167
8.5	Validació Experimental	168

IV	Comentaris Finals	175
9	Conclusions i treballs futurs	177
9.1	Principals aportacions	177
9.1.1	Cinemàtica	177
9.1.2	Dinàmica i control	178
9.2	Treballs Futurs	179
9.2.1	Cinemàtica	179
9.2.2	Dinàmica i Control	181
V	Apèndixs	183
A	Cinemàtica dels robots	185
A.1	Introducció	185
A.2	Cinemàtica Directa	186
A.3	Cinemàtica Inversa	188
A.3.1	Definició	188
A.3.2	Partició de l'Espai de Configuracions	188
A.4	Estudi de Velocitats	189
A.4.1	Singularitats	191
A.5	Estudi de les Forces	192
A.6	Mètrica	193
A.6.1	Definició	193
A.6.2	Mètrica $SE(3)$	193
A.6.3	Mètrica \mathcal{C}	194
A.6.3.1	Mètrica natural	194
A.6.3.2	Mètrica induïda	194
A.7	Volum	195
A.7.1	Definició	195
A.7.2	Aplicació en robòtica	196

A.8	Manipulabilitat	197
A.9	Espai de treball	198
A.9.1	Mecanismes d'anàlisi de l'espai de treball	199
A.9.1.1	Generació de l'espai de treball	199
A.9.1.2	Estudi de les singularitats	199
A.9.1.3	Discretització l'espai de treball	200
B	Sistemes Diferencial Algebraics	203
B.1	Teoria bàsica de DAEs	203
B.1.1	Definició	203
B.1.2	Índex d'un DAE	205
B.1.3	Formes Canòniques	205
B.2	Mètodes Numèrics	206
B.2.1	Introducció	206
B.2.2	Reformulació com a ODE	207
B.2.3	Reformulació del DAE	208
	Referències	211
	Índex alfabètic	220

Part I

Introducció

Capítol 1

Introducció

Un dels camps de la robòtica que estan despertant més interès per part de la comunitat científica és el dels entorns multirobot. Aquest nom genèric inclou diferents tipus de sistemes amb característiques i problemàtiques força diferenciades. En aquest treball s'utilitzarà aquest terme per fer referència a cel·les robotitzades que estan compostes per més d'un robot treballant coordinadament, entès el terme robot com braç articulat.

Els entorns multirobot poden oferir unes prestacions que permeten millorar les funcionalitats de les cel·les robotitzades, però, en contrapartida, introdueixen una problemàtica que dificulta la seva implantació. En aquesta tesi es desenvoluparan algorismes i mètodes que permeten abordar una part d'aquesta problemàtica.

1.1 Motivació i problemàtica

Els sistemes multi-robot presenten un gran nombre d'avantatges en front dels sistemes mono-robot. Aquests avantatges es poden agrupar en tres grans grups:

- Millora de les prestacions de les cel·les de producció. El fet de tenir diferents elements actius dins la cel·la de producció introdueix les següents millores:

- Augment de la flexibilitat.

En els sistemes industrials s'està duent a terme un gran esforç per tal de millorar la flexibilitat de les cel·les de fabricació amb l'objectiu de reduir costos en la producció de sèries curtes que no justifiquen el desenvolupament de màquines especialitzades. Una de les solucions més prometedores a la exigència de la flexibilitat és la utilització d'entorns multi-robot. Aquest tipus d'entorns són especialment flexibles a causa de l'existència de diferents elements programables el que permet reconfigurar el funcionament de l'entorn per tal de realitzar una gran varietat de tasques.

Aquesta gran flexibilitat obre la possibilitat d'implementar algorismes de recuperació enfront d'errors (*Error Recovery*) que facin que la cel·la pugui reaccionar enfront de possibles errors o avaries en algun dels seus components, permetent que

aquesta continuï funcionant (*Fault Tolerance*) [Smith and Gini, 1986]. Amb això s'aconseguirà que les pèrdues de producció siguin mínimes i no s'aturi la cadena.

– Augment de la productivitat.

El fet de tenir diferents elements actius dins d'un mateix àmbit fa que la realització de moltes tasques sigui més ràpida que en el cas de disposar d'un sol element actiu [Jing, 1994], inclús en algun tipus de tasques les cel·les multi-robot són més eficients que varies cel·les mono-robot treballant en paral·lel degut a la coordinació. Això fa que la productivitat de les cel·les multirobot sigui en molts casos més elevada.

– Realització de Tasques més Complexes.

Gràcies a la interacció entre els diferents braços es produeix un augment en la destresa de l'entorn, cosa que permet realitzar tasques d'acoblament complexes, moltes de les quals no són directament realitzables en entorns mono-robot.

• Millora de les Característiques Tècniques de l'Entorn.

La manipulació simultània d'un objecte per més d'un robot fa que augmentin les prestacions de l'entorn:

– Augment de l'Espai de Treball.

Des del punt de vista de l'espai de treball, el fet de tenir varis robots amb àrea de treball solapada produeix un increment de l'àrea de treball total amb el conseqüent increment de l'accessibilitat i la possibilitat de comunicació amb d'altres elements de la cel·la, com alimentadors, cintes transportadores, pulmons, etc ..., de manera més ràpida i sense la necessitat de nous elements d'enllaç.

– Augment de la Capacitat de Càrrega.

La manipulació d'objectes per més d'un robot permet treballar amb objectes més pesants, cosa de gran interès en àmbits com la construcció i les aplicacions espacials o subaquàtiques i el muntatge de vaixells o avions.

– Manipulació d'Objectes Conflictius.

La manipulació d'un objecte simultàniament per diferents robots fa que hi hagi un major control sobre l'objecte manipulat. Això, és especialment interessant en la manipulació d'objectes de gran tamany i d'objectes flexibles, ja que aquest tipus d'objectes són difícilment manipulables per un sol robot. De manera similar el fet de tenir diferents punts de contacte permet manipular objectes no agafadissos (*non-grippable objects*). Aquest tipus d'objectes no són manipulables en entorns convencionals si no s'utilitzen tècniques especials, com la magnetització o el buit (succió).

• Especialització dels components de l'entorn.

Els avantatges esmentats fins ara es presenten en entorns on els diferents robots de l'entorn tenen habilitats semblants. Però també hi ha entorns multi-robot on cada robot té unes característiques pròpies, és a dir cada robot està especialitzat en la realització d'una sèrie de tasques concretes. Això permet que l'entorn tingui unes prestacions molt millors de les que tindria un sol robot. Dos casos d'aquest tipus d'entorns són el sensat actiu [Zhe et al., 1991], on un robot realitza una certa tasca de manipulació amb el suport d'un

altre robot que realitza tasques de sensat, o en la manipulació conjunta especilitzada on per exemple un pòrtic i un robot treballen conjuntament per tal d'obtenir una bona precisió amb gran capacitat de càrrega [Osumi and Arai, 1994].

Tot els avantatges presentats concorden amb la constatació que la majoria d'animals disposen de diferents extremitats que utilitzen simultàniament en la realització de les més diverses tasques. Aquesta similitud amb el món animal ha guiat sovint la recerca en aquest camp.

Els temes d'estudi clàssics en els sistemes robotitzats s'extenen també als entorns multi-robot, encara que moltes de les solucions proposades per entorns mono-robot han d'ésser modificades per poder ésser aplicades en entorns multi-robot. La existència de diferents robots dins l'entorn introdueix la necessitat de coordinar les seves accions, aquesta coordinació està present en els diferents àmbits del sistema multirobot.

Seguidament es fa un breu comentari de com influeix en cadascun d'aquests temes el fet de que una cel·la estigui formada per més d'un robot [Costa Castelló et al., 1995].

- Control de Moviments [Asada and Slotine, 1986].

El problema afegit en aquest cas és l'anàlisi i control de les cadenes cinemàtiques tancades formades quan diferents robots actuen conjuntament sobre un mateix objecte. Aquesta interacció a través de l'objecte manipulat introdueix modificacions substancials en els comportaments i especificacions dels sistemes.

Una de les especificacions que s'introdueixen i que no apareix en la manipulació monorobot és la necessitat de mantenir sota control les forces que actuen sobre l'objecte manipulat degudes a la interacció amb els diferents robots.

- Llenguatges de Programació [Lozano-Pérez, 1983].

Per a que la comunicació amb el robot sigui el més simple possible és necessari disposar de llenguatges que ens permetin comunicar-nos amb el robot de manera ràpida y senzilla.

Per tal que aquest tipus de llenguatges siguin possibles, fa falta disposar d'algorismes que realitzin tasques com la planificació de trajectòries i algorismes de descomposició i seqüenciació de tasques.

A més d'aquests mecanismes, els llenguatges per treballar amb sistemes multirobot hauran d'introduir entre d'altres sentències per especificar accions conjuntes i accions en paral·lel entre d'altres.

- Planificació de trajectòries [Latombe, 1991].

Una de les principals dificultats afegides degut al fet de tenir varis robots dins l'entorn, és l'elevat nombre de graus de llibertat amb què s'ha de treballar.

En la planificació de trajectòries en sistemes multi-robot, cal distingir dos problemes. Un primer és la planificació de moviments de robots que comparteixen àrea de treball [Alison and Gilmartin, 1994] i un segon que és la planificació de moviments quan diferents robots formen una cadena cinemàtica tancada [Koga, 1994].

– Algorismes de Descomposició i Assignació de Tasques.

Per tal de facilitar la programació de les cel·les de producció, és necessari que les tasques a realitzar es puguin especificar al més alt nivell possible. Perquè això sigui possible és imprescindible disposar d'algorismes que a partir d'aquestes especificacions generen el conjunt de tasques primàries que ha d'anar realitzant cada robot. Aquests, han de tenir en compte l'existència i característiques dels diferents robots per tal d'obtenir el màxim rendiment dels recursos disponibles.

• Disseny d'entorns robotitzats.

Els criteris seguits habitualment per dissenyar cel·les robotitzades no solen tenir en compte la possible existència de més d'un robot en la cel·la, per tant serà necessari disposar de criteris que contemplin aquest fet. En concret s'ha d'optimitzar la relació entre l'espai de treball comú i els riscos de col·lisions.

A més a més en les cel·les en que es pretengui realitzar manipulació conjunta serà necessari tenir en compte que l'espai de treball conjunt és inferior al individual, i per tant serà crític estudiar en detall les ubicacions relatives dels diferents robots.

• Simulació d'entorns robotitzats.

Donada la complexitat d'aquests entorns serà fonamental disposar d'eines que contemplin l'existència de distints robots, tant a nivell de les dinàmiques com a nivell de les tasques.

La interacció existent entre els diferents elements fa que els algorismes necessaris siguin més complexos que pel cas mono-robot.

La problemàtica i les principals línies de recerca en sistemes multirobot foren analitzades en el *Workshop on Coordinated Multiple Robot Manipulators: Planning, Control and Applications* celebrat a San Diego del 7 al 9 de Gener de 1987 [Koivo and Bekey, 1988], on es reuniren les principals autoritats en el tema per tal de determinar les línies de recerca futures dins el camp dels entorns multi-robot. Algunes d'aquestes línies són les que han seguit els investigadors durant els darrers anys i dins aquestes línies s'emmarca el treball que aquí es presenta.

1.2 Objectius de la tesi

El treball que es presenta es centra en l'estudi del sistemes multirobot en els que hi ha manipulació conjunta d'objectes rígides amb prensió també rígida. Dins aquesta àrea els objectius que s'han plantejat s'agrupen en dues grans temàtiques. Una primera d'estudi de la cinemàtica, i una segona encarada a l'estudi del comportament dinàmic i desenvolupament d'algorismes de control que facin possible la manipulació conjunta.

1.2.1 Cinemàtica

Quan diferents robots manipulen conjuntament un mateix objecte s'estableixen un lligams cinemàtics que modifiquen les característiques dels diferents robots implicats. En aquest

treball es pretén caracteritzar la cinemàtica del sistema multirobot a partir de les cinemàtiques individuals, la posició relativa de les seves bases, i les característiques de la configuració de prensió. Aquest tipus de caracterització ha d'ajudar a entendre les característiques del sistema complet, cosa fonamental per poder dissenyar de forma correcta les cel·les multirobot.

En primer lloc, s'estendran els principals conceptes de la cinemàtica dels robots al cas de sistemes multirobot. Això es farà seguint un paral·lelisme amb les definicions tradicionals dels robots i procurant analitzar la relació entre el comportament individual de cadascun dels robots que formen el sistema i el sistema complet.

Dins de la cinemàtica es pretén estudiar principalment dues qüestions. Per un cantó s'estudiaran les característiques de les mesures de manipulabilitat d'aquest sistemes i per l'altre es caracteritzarà l'espai de treball del sistema multirobot.

Les mesures de manipulabilitat són una mesura de les prestacions cinemàtiques que ofereix un mecanisme, i fins la data s'han proposat diferents mesures de manipulabilitat per cadenes cinemàtiques tancades. En aquest treball es revisaran aquestes mesures, i s'expressaran en una notació homogènia que permeti comparar-les. Un cop realitzat aquest estudi s'analitzarà l'interès de les diferents mesures en el cas del sistemes multirobot, i en cas que no siguin adequades es realitzarà una proposta de mesura de manipulabilitat per aquest tipus de sistemes.

L'espai de treball del sistema complet pateix unes deformacions bastant grans respecte els espais de treball individuals, i depèn fortament de les posicions relatives de les bases i les característiques de la configuració de prensió. El que s'intentarà és caracteritzar aquestes dependències amb l'objectiu d'entendre l'estructura i la forma de l'espai de treball del sistema complet i, com conseqüència, dissenyar de forma òptima les cel·les multirobot.

1.2.2 Dinàmica i control

En els entorns multirobot com els estudiats aquí hi ha diferents robots que manipulen simultàniament la mateixa peça. Per tant és necessari establir una coordinació entre tots ells, tant a nivell cinemàtica com a nivell dinàmic. Qualsevol desincronització o error en el modelat introduirà tensions sobre l'objecte manipulat, que poden arribar a deformar-lo o trencar-lo. Aquest tipus de fenòmens es materialitzen en la aparició de forces internes. Per tant, dins del control de sistemes multirobot, a més del tradicional control de posició, un dels objectius primordials serà el control de les forces internes. Aquest darrer objectiu serà estudiat en aquesta tesi, i es plantejaran diferents esquemes que permetin assolir-lo.

El fet que el comportament dels diferents robots estiguin acoblat a través de l'objecte manipulat fa que el comportament del sistema complet resulti bastant complex i amb característiques pròpies. El comportament de cadascun dels robots es pot modelar a través d'un conjunt d'equacions diferencials, però la manipulació conjunta introdueix un conjunt de restriccions sobre la evolució de les trajectòries d'aquestes equacions diferencials. Habitualment, es seleccionen un conjunt de variables que representen el comportament total i, posteriorment, es determina el conjunt d'equacions diferencials que representen el comportament total del sistema en funció d'aquestes noves variables. Aquesta aproximació dificulta la interpretació física del sistema, a més d'amagar fenòmens com les forces internes. Per aquest motiu en

aquesta tesi el sistema complet es modelarà a través de les equacions diferencials que representen el comportament de cadascun dels robots i del conjunt de restriccions que actuen sobre el sistema. Aquest enfoc permetrà visualitzar i interpretar adequadament fenòmens com les forces internes. Donat que el sistema complet estarà format per equacions diferencials i equacions algebraïques no serà possible emprar les eines de simulació tradicionals i, per aquest motiu, es proposaran eines i mètodes per poder simular el comportament del sistema a partir de la formulació proposada.

De forma similar, els esquemes de control tradicional no estan pensats per sistemes amb restriccions algebraïques i, per aquest motiu, s'estudiarà el procediment de disseny de sistemes de control per aquest tipus de sistemes.

Dins el món industrial, els robots incorporen controladors de posició, i la manipulació multirobot amb aquest tipus de robot presentarà unes característiques diferents a les analitzades en el punt anterior. En aquest tipus d'entorn s'introdueixen sensors de força que permeten obtenir informació sobre les forces internes que actuen sobre el sistema, i a partir d'aquesta informació, s'aplica un llaç de control que actua per sobre del control de posició amb l'objectiu de limitar les forces internes.

Tradicionalment, el control de força en sistemes que presenten un control de posició s'ha realitzat a través de dues estratègies: control híbrid i control d'impedància. En aquesta tesi s'estudiarà la aplicabilitat d'aquestes dues estratègies al cas de la manipulació multirobot.

1.3 Estructura de la Tesi

El contingut de la tesi està distribuït en dues parts d'acord amb els objectius plantejats. En la primera s'analitzen en detall els aspectes cinemàtics dels sistemes multirobot, mentre que en la segona es presenten els temes relacionats amb els aspectes de dinàmica y control. Finalment es presenten les conclusions i els possibles treballs futurs. Tenint en compte això la estructura que presenta la tesi és la següent:

- Introducció
 - Capítol 1: Introducció
 - En aquest capítol es presenten les motivacions que han impulsat el desenvolupament d'aquesta, i els objectius plantejats.
- Cinemàtica
 - Capítol 2: Cinemàtica dels sistemes multi-robot
 - En aquest capítol es presenta la extensió dels principals conceptes de la cinemàtica al cas dels sistemes multi-robot. Amb especial atenció s'estudien les diferents definicions de les mesures de manipulabilitat i es presenten en una notació uniforme que permet comparar-les entre si. A partir de les mesures existents es realitza una proposta de nova mesura coherent amb les mètriques de les diferents varietats de treball.

- Capítol 3: Espai de treball d'un sistema multirobot
En aquest capítol s'estudia en detall l'estructura de l'espai de treball dels sistemes multirobot i es presenta una nova metodologia per la construcció de l'espai de treball del sistema multirobot a partir dels espai de treball individuals.
- Capítol 4: Aplicació a robots tipus SCARA
En aquest capítol s'estudia en detall les característiques de les cel·les multirobot composades per robot tipus SCARA.
- Capítol 5: Aplicació a robots tipus PUMA
En aquest capítol s'estudia en detall les característiques de les cel·les multirobot composades per robot tipus PUMA.
- Dinàmica i Control
 - Capítol 6: Sistemes Mecànics amb restriccions holònomes
En aquest capítol s'estudia el comportament dinàmic del sistemes robòtics amb restriccions holònomes, fa seguint una formulació en forma de Equacions Algebraic Diferencials (DAE) i es presenten qüestions relacionades amb la integració numèrica i el control d'aquest tipus de sistemes.
 - Capítol 7: Identificació i control de forces internes
En aquest capítol es presenta una caracterització experimental de les forces internes que apareixen quan varis robots amb control de posició manipulen conjuntament un mateix objecte.
A partir dels models obtinguts es desenvolupen controladors, seguint una estratègia de control híbrid que permeten regular aquestes forces. Es presenta la formulació teòrica i una validació experimental dels resultats obtinguts.
 - Capítol 8: Comportament d'impedància
En aquest capítol es presenta una formulació del comportament d'impedància que és coherent amb l'estructura topològica de l'espai de treball.
La formulació teòrica s'acompanya d'un estudi de la viabilitat de la seva implementació en robots amb control de posició, i es validen experimentalment els resultats obtinguts.
- Comentaris Finals
 - Capítol 9: Conclusions i treballs futurs
En aquest capítol es revisen els diferents resultats obtinguts, i es comenten les diferents línies de recerca que s'han obert durant el desenvolupament d'aquest treball.
- Apèndixs
 - Apèndix A: Cinemàtica dels robots
En aquest apèndix es presenten els recullen conceptes de la cinemàtica de robots, emprant la mateixa notació utilitzada en la resta de la tesi.
 - Apèndix B : Sistemes diferencial algebraics (DAE)
En aquest apèndix es presenta una introducció als sistemes d'equacions diferencials amb restriccions algebraiques.

Part II
Cinemàtica

Capítol 2

Cinemàtica dels sistemes multi-robot

En aquest capítol es presenta una formulació de la cinemàtica pels sistemes robòtics amb restriccions holònomes i, en particular, dels sistemes multirobot amb premsió rígida d'objectes rígids, basada en les eines de la geometria diferencials. La formulació proposada permet estendre de forma natural els conceptes cinemàtics dels robots individuals recollits en l'apèndix A. A més d'aquesta formulació, es realitza una revisió exhaustiva de les mètriques aplicables, i de les mesures de manipulabilitat incloent una reescriptura de les mateixes en termes de la formulació proposada. Finalment es realitza una proposta de nova mesura de manipulabilitat.

2.1 Sistemes robòtics amb restriccions holònomes

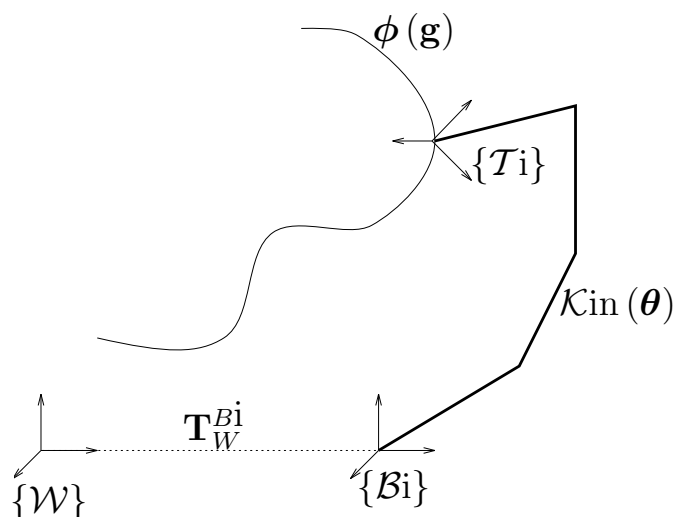


Figura 2.1: Robot amb l'element terminal restringit a una corba.

Les restriccions holònomes són restriccions que actuen sobre la varietat, reduint el seu tamany. El conjunt de punts que pertanyen a la varietat inicial i a més compleixen les restriccions formen una nova varietat. Aquesta varietat té un espai tangent diferent del de la varietat inicial, i per

$$\begin{array}{ccc}
 T\phi_{\mathcal{K}_{\text{cin}}}^{\mathcal{C}} & \longrightarrow & T\mathcal{O}_{\phi} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \phi_{\mathcal{K}_{\text{cin}}}^{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\mathcal{K}_{\text{cin}}^{\phi}} & \mathcal{O}_{\phi}
 \end{array}$$

Figura 2.2: Aplicació cinemàtica en sistemes robòtics amb restriccions.

$$\begin{array}{ccccccc}
 T\mathcal{O}_{\phi} & \longrightarrow & T\mathcal{O} & \xleftarrow{T\mathcal{K}_{\text{cin}}} & T\mathcal{C} & \xleftarrow{} & T\phi_{\mathcal{K}_{\text{cin}}}^{\mathcal{C}} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}_{\phi} & \xrightarrow{\phi(\mathbf{x})=0} & \mathcal{O} & \xleftarrow{\mathcal{K}_{\text{cin}}} & \mathcal{C} & \xleftarrow{\phi(\mathcal{K}_{\text{cin}}(\boldsymbol{\theta}))=0} & \phi_{\mathcal{K}_{\text{cin}}}^{\mathcal{C}} \\
 \uparrow \varrho & \uparrow \varrho^{-1} & \uparrow \rho^{-1} & \uparrow \rho & \uparrow \chi^{-1} & \uparrow \chi & \uparrow \psi^{-1} \\
 \mathbf{o} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{x} & \xleftarrow{\kappa} & \boldsymbol{\theta} & \xleftarrow{\lambda} & \boldsymbol{\zeta} \\
 & & & & & & \uparrow \psi
 \end{array}$$

Figura 2.3: Diagrama de les diferents varietats i aplicacions existents.

tant totes les característiques relacionades com la dimensió i la mètrica es veuran directament afectades.

Un exemple d'aquest tipus de situació és el moviment de l'element terminal d'un robot que està restringit a moure's sobre una corba o superfície en l'espai (Figura 2.1). La superfície o corba es pot definir mitjançant una equació de la forma:

$$\begin{aligned}
 \phi : \mathcal{O} &\rightarrow \mathbb{R}^m \\
 \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{y}
 \end{aligned}$$

els sobre la corba ($\phi(\mathbf{x}) = 0$) formen una varietat diferencial \mathcal{O}_{ϕ} .

Una de les principals diferències entre el sistemes amb restriccions i els sistemes habituals és que l'espai de configuracions deixa d'ésser un espai pla i esdevé una varietat implícita sumergida (*embedded*), $\phi_{\mathcal{K}_{\text{cin}}}^{\mathcal{C}}$, en una varietat plana de dimensió més gran, \mathcal{C} .

La varietat inicial correspon a l'espai de configuracions del robot \mathcal{C} , mentre que l'espai de configuracions tenint en compte les restriccions $\phi_{\mathcal{K}_{\text{cin}}}^{\mathcal{C}}$ queda definida a través de l'equació

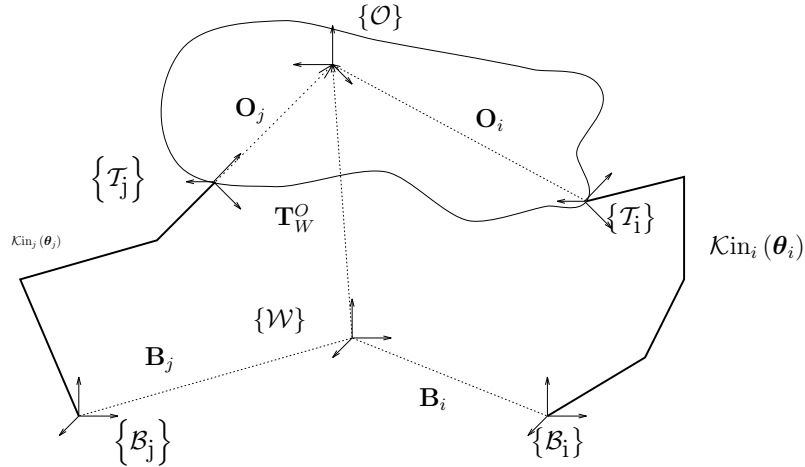


Figura 2.4: Esquema d'un sistema multirobot amb manipulació conjunta .

implícita:

$$\phi(\mathcal{K}_{\text{cin}}(\boldsymbol{\theta})) = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

Una de les principals dificultats en el moment d'estudiar la varietat serà la selecció d'un conjunt de coordenades locals (ζ). Habitualment aquestes no seran globals i serà necessari estudiar el seu àmbit de validesa.

En aquest context és possible definir una aplicació entre l'espai de configuracions restringit ($\phi_{\mathcal{K}_{\text{cin}}}^c$) i l'espai de treball del sistema amb restriccions (\mathcal{O}_ϕ). Aquesta aplicació serà la cinemàtica del sistema a estudiar (Figura 2.2).

Finalment en la figura 2.3 es presenta un diagrama on apareixen totes les varietats diferencials implicades en la definició, en aquest diagrama ϱ , ρ , χ i ψ són cartes locals, mentre que γ , κ i λ són les aplicacions entre les diferents varietats diferencials expressades en les coordenades locals seleccionades, aquestes coordenades es representen per \mathbf{o} , \mathbf{x} , $\boldsymbol{\theta}$ i ζ respectivament.

2.2 Sistemes Multirobot amb restriccions holònomes

Els sistema multirobot en que hi ha manipulació conjunta (Figura 2.4) es poden estudiar com sistemes mecànics amb restriccions, el tipus de restriccions depèn del tipus de lligams cinemàtics que hi ha entre l'objecte manipulador i els diferents robots implicats en la manipulació [Luh and Zheng, 1987].

Aquest estudi es centrarà en els sistemes multirobot amb pressió rígida, per la manipulació d'objectes rígids. En aquest tipus de sistemes la relació entre els sistemes coordinats dels elements terminals dels diferents robots $\{T_j\}$ i un sistema de referència sobre l'objecte, $\{O\}$, es manté constant i es pot expressar a partir de la matriu de transformació homogènia O_j . Aquest tipus de relació és expressable en forma de les $r - 1$ restriccions del tipus:

$$\mathbf{B}_i \mathcal{K}_{\text{cin}_i}(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{O}_i = \mathbf{B}_j \mathcal{K}_{\text{cin}_j}(\boldsymbol{\theta}_j) \mathbf{O}_j \quad i, j = 1..r \quad (2.2)$$

on r és el número de robots que intervenen en la manipulació, $\mathcal{K}in_j$ correspon a la cinemàtica del robot j , i \mathbf{B}_j a la transformació homogènia que relaciona un sistema coordinat sobre la base del robot j amb un sistema de coordenades de món $\{\mathcal{W}\}$ comú a tots els robots. Per simplicitat, en aquest treball es seleccionarà un dels braços que s'utilitzarà com a referència. Aquest robot que s'anomenarà 0, servirà com a referència per definir els sistema coordinat de món i el de l'objecte. S'assumirà: $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}_d$ i $\mathbf{O}_0 = \mathbf{I}_d$, i totes les restriccions (2.2) s'escriuran de la forma:

$$\mathcal{K}in_0(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{B}_j \mathcal{K}in_j(\boldsymbol{\theta}_j) \mathbf{O}_j \quad j = 1..r-1 \quad (2.3)$$

La equació (2.3) es pot reescriure de la forma:

$$\mathbf{I}_d = \mathcal{K}in_0(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1} \mathbf{B}_j \mathcal{K}in_j(\boldsymbol{\theta}_j) \mathbf{O}_j \quad j = 1..r-1 \quad (2.4)$$

Així doncs, es pot concloure que cada relació es pot interpretar com una restricció de la forma:

$$\Phi_j : SE(n) \times SE(n) \rightarrow SE(n) \quad j = 1..r-1 \quad (2.5)$$

on $n = 2$ pel cas del pla, i $n = 3$ pel cas 3D. Aquest conjunt de restriccions es poden escriure com una única restricció de la forma:

$$\Phi : SE(n)^r \rightarrow SE(n)^{r-1} \quad (2.6)$$

on $\Phi \triangleq (\Phi_1, \dots, \Phi_{r-1})$.

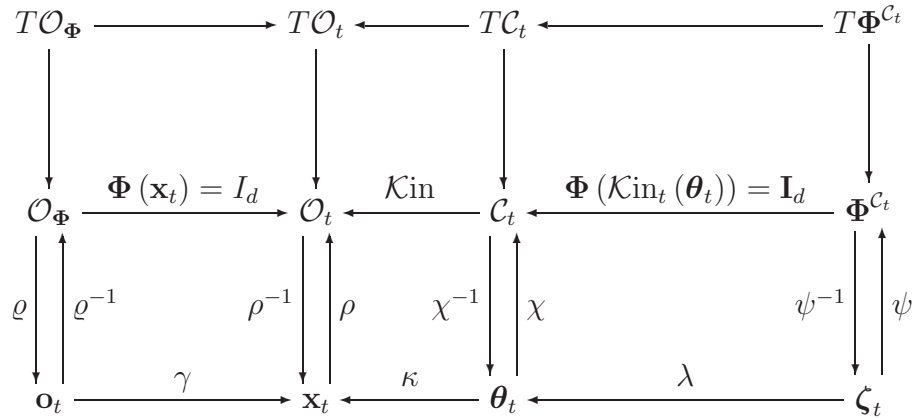


Figura 2.5: Varietats i relacions entre elles existents en el sistema multirobot.

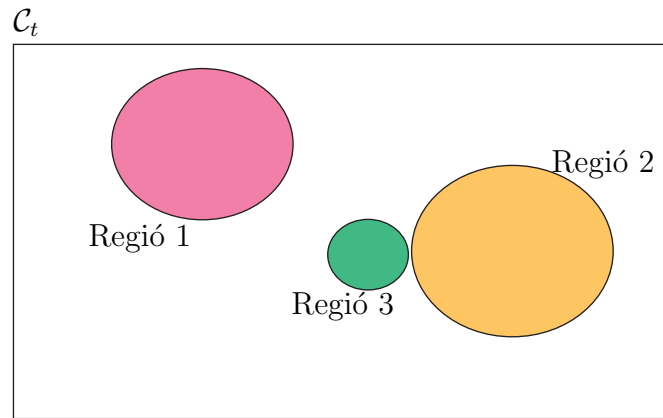
Per facilitar l'estudi del sistema multirobot s'aplicaran les següents definicions:

$$\mathcal{C}_t \triangleq \mathcal{C}_0 \times \dots \times \mathcal{C}_{r-1} \quad (2.7)$$

$$\mathcal{O}_t \triangleq \mathcal{O}_0 \times \dots \times \mathcal{O}_{r-1} \quad (2.8)$$

En la figura 2.5 es presenta un diagrama amb la relació entre totes les varietats implicades. La varietat \mathcal{O}_t correspon al conjunt de posicions dels elements terminals de cadascun dels robots. Els seus elements es poden escriure de la forma:

$$\mathbf{x}_t \triangleq (\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{r-1})$$

Figura 2.6: Exemple de la distribució de \mathcal{C}_t .

on x_i correspon a la posició i orientació del sistema coordinat sobre l'element terminal del robot i . De tots aquests elements únicament els que compleixen els lligams de premsió seran vàlids per la manipulació rígida, i la projecció d'aquests sobre $SE(n)$ constituirà l'espai de treball de la cadena cinemàtica tancada \mathcal{O}_{Φ} .

La varietat \mathcal{C}_t correspon al producte cartesià dels espais de configuracions individuals. Els seus elements es poden escriure de la forma

$$\boldsymbol{\theta}_t \triangleq (\boldsymbol{\theta}_0, \dots, \boldsymbol{\theta}_{r-1})$$

on $\boldsymbol{\theta}_i$ correspon a la configuració del robot i . Dins aquesta varietat hi haurà regions que compliran la restricció de la cadena cinemàtica tancada (Figura 2.6). Aquestes correspondran al punts on serà possible treballar, es a dir l'espai de configuracions de la cadena cinemàtica tancada $\Phi^{\mathcal{C}_t}$. Les fronteres d'aquestes regions estaran directament lligades a les singularitats de la cadena cinemàtica tancada o als límits mecànics de les diferents articulacions.

En la figura 2.5, els símbols \mathbf{o}_t , \mathbf{x}_t , $\boldsymbol{\theta}_t$ i $\boldsymbol{\zeta}_t$ representen coordenades locals de cadascuna de les varietats, i ϱ , ρ , χ i ψ corresponen a les aplicacions que relacionen cada punt de la varietat amb les seves coordenades locals. De forma similar γ , κ i λ corresponen a les aplicacions entre les diferents varietats expressades en les coordenades locals indicades.

Com en el cas del sistemes robotics sense restriccions, la cinemàtica dels sistemes multirobot, és una aplicació entre l'espai de configuracions restringit ($\Phi^{\mathcal{C}_t}$) i l'espai de treball de la cadena cinemàtica (\mathcal{O}_{Φ}) (Figura 2.7).

La cinemàtica directa de les cadenes cinemàtiques tancades és una qüestió complexa, que en molts casos no té solució analítica [Merlet, 2000]. En el tipus de sistemes que aquí s'està estudiant és possible aprofitar el coneixement dels mateixos per determinar la forma i característiques de la cinemàtica directa de la cadena cinemàtica tancada. En el cas en que tots els robots tenen el mateix nombre de graus de llibertat que l'espai de treball és possible seleccionar, com a coordenades locals, la configuració d'un dels manipuladors. Aquestes coordenades seran vàlides sempre que cap del robots implicats estigui en una configuració

$$\begin{array}{ccc}
T^{C_t} & \xrightarrow{\mathcal{K}in_*} & T\mathcal{O}_{\Phi} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Phi^{C_t} & \xrightarrow{\mathcal{K}in} & \mathcal{O}_{\Phi}
\end{array}$$

Figura 2.7: Aplicació cinemàtica sobre la varietat restringida.

singular, és a dir sempre que λ_* sigui de rang complet. En el cas en que els manipuladors tinguin més graus de llibertat que l'espai de treball serà necessari, seleccionar unes cartes locals adients.

2.3 Estudi de Velocitats

2.3.1 Descripció

Com en el cas de cadenes cinemàtiques obertes, la relació de velocitats es pot expressar com la relació entre els espais tangents de Φ^{C_t} i \mathcal{O}_{Φ} . Aquesta relació es pot obtenir a través de l'estudi de l'aplicació $\mathcal{K}in_*$, definida entre els dos espais tangents.

En el cas de les cadenes cinemàtiques tancades, aquest estudi no és del tot complet, ja que únicament recull la relació de les velocitats de les coordenades locals amb la velocitat del punt de referència. En molts casos serà de gran interès poder estudiar les velocitats de les articulacions de tots els robots i com es relacionen amb la velocitat de l'element de referència. Aquest estudi es pot realitzar a través de l'estudi de la aplicació λ (Figura 2.5), que no és altra cosa que l'equació de la varietat en unes certes coordenades, la seva aplicació tangent λ_* , i la cinemàtica del sistema $\mathcal{K}in_*$ (Figura 2.7).

En aquest treball, s'assumirà que s'està treballant amb robots que tenen el mateix nombre de graus de llibertat que l'espai de treball, i la configuració del robot de referència serà utilitzada com a carta local de la varietat Φ^{C_t} sempre que això sigui possible.

Agafant com a coordenades locals la configuració del robot de referència la aplicació tangent de la cinemàtica, $\mathcal{K}in_*$, pren la forma:

$$\mathbf{v} = \mathcal{K}in_{0*}(\boldsymbol{\theta}_0) \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 \quad (2.9)$$

on \mathbf{v} correspon a la velocitat del sistema de referència sobre la cadena cinemàtica. Seleccionant com a coordenades locals de C_t les configuracions dels diferents robots, la aplicació tangent de λ , λ_* es pot escriure com un conjunt d'equacions de la forma:

$$\mathcal{K}in_{0*}(\boldsymbol{\theta}_0) \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 = \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_j^{-1}} \mathcal{K}in_{j*}(\boldsymbol{\theta}_j) \dot{\boldsymbol{\theta}}_j \quad (2.10)$$

Cal entendre aquestes igualtats com igualtats entre elements de $se(n)$.

Aquest conjunt d'equacions es pot reagrupar en forma de sistema lineal de la forma:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I}_d & \mathcal{K}in_{0*}(\boldsymbol{\theta}_0) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{K}in_{0*}(\boldsymbol{\theta}_0) & \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}\mathcal{K}in_{1*}(\boldsymbol{\theta}_1) & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{K}in_{0*}(\boldsymbol{\theta}_0) & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{K}in_{0*}(\boldsymbol{\theta}_0) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}\mathcal{K}in_{r*}(\boldsymbol{\theta}_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

En alguns casos serà més útil reescriure aquesta equació de la forma:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I}_d & \mathcal{K}in_{0*}(\boldsymbol{\theta}_0) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I}_d & \mathbf{0} & \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}\mathcal{K}in_{1*}(\boldsymbol{\theta}_1) & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}\mathcal{K}in_{r*}(\boldsymbol{\theta}_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Cal tenir en compte que aquest sistema està sobredeterminat, i que en el cas en que tots els robots tinguin els mateixos graus de llibertat que la dimensió de l'espai de treball, i que cap d'ells estigui en una configuració singular, el nucli de la matriu és de dimensió de 6 (per a $n=3$) o 3 (per a $n=2$). Per tant hi haurà tot un espai vectorial de dimensió 6 (per a $n=3$) o 3 (per a $n=2$) que serà solució del sistema. Aquesta solució correspon als conjunt compost per la velocitat del sistema de referència de la cadena cinemàtica tancada i les velocitats de les articulacions de cadascun dels robots compatibles amb la velocitat del sistema de referència.

2.3.2 Singularitats

Una singularitat correspon a una configuració on el sistema de referència sobre la cadena cinemàtica tancada perd algun grau de llibertat de moviment, i això es reflexa en una pèrdua de rang de la aplicació tangent de la cinemàtica. La principal diferència entre l'espai de configuracions d'una cadena cinemàtica oberta i una de tancada és que el seu espai de configuracions be definit per una equació implícita no lineal i per tant deixa d'ésser pla. Aquest fet fa que apareguin singularitats amb característiques diferents a les que es troben en les cadenes cinemàtiques obertes [Park and Kim, 1999] [Gosselin and Angeles, 1990].

L'espai de configuracions de les cadenes cinemàtiques tancades aquí estudiades es pot expressar amb una equació implícita de la forma:

$$\Phi(\mathcal{K}in_t(\boldsymbol{\theta}_t)) = 0 \quad (2.13)$$

que juntament amb la cinemàtica del mecanisme es pot expressar de forma genèrica:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_t) = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

A partir d'aquesta expressió es possible determinar la equació que han de complir els elements de l'espai tangent:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \nabla_{\boldsymbol{\theta}_t}\mathbf{F} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_t = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

Aquesta nova equació és equivalent a les equacions 2.11 i 2.12 obtingudes anteriorment.

Les configuracions en que hi ha una pèrdua de rang de $\nabla_{\theta_t} \mathbf{F}$ corresponen a singularitats de la cadena cinemàtica, i les configuracions en que $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{F}$ perd rang corresponen a configuracions en les que el sistema de referència sobre la cadena cinemàtica tancada es pot moure mentre les articulacions resten immòbils. Finalment les configuracions en que $\nabla_{\theta_t} \mathbf{F}$ i $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{F}$ perden rang simultàniament corresponen configuracions en les que el sistema de referència es pot moure sense moure les articulacions o el moviment de les articulacions pot no generar moviment del sistema de referència.

La equació (2.15) es pot escriure en un format matricial similar al de l'equació (2.12):

$$[\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{F}, \nabla_{\theta_t} \mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \dot{\theta}_t \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

per tant associant aquesta forma amb la equació 2.15 s'obté:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{F} = [-\mathbf{I}_d, \dots, -\mathbf{I}_d]^T$$

i

$$\nabla_{\theta_t} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{\text{in}_{0*}}(\theta_0) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{Ad}_{O_1^{-1}} \mathcal{K}_{\text{in}_{1*}}(\theta_1) & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \text{Ad}_{O_{r-1}^{-1}} \mathcal{K}_{\text{in}_{r*}}(\theta_r) \end{bmatrix}$$

a partir d'aquestes expressions es caracteritzà les singularitats que poden presentar els sistemes multirobot aquí estudiats.

Proposició 2.1 *Els sistemes multirobot manipulant un objecte rígid mitjançant premsió rígida únicament presenten singularitat pròpies de les cadenes cinemàtiques obertes.*

Demostració

Això és així ja que $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{F}$ és de rang complet per definició.

Proposició 2.2 *Les configuracions singulars dels sistemes multirobot manipulant un objecte rígid mitjançant premsió rígida únicament són configuracions en les que algun dels robots que formen la cadena està en una configuració singular.*

Demostració

$\nabla_{\theta_t} \mathbf{F}$ és singular si algun $\mathcal{K}_{\text{in}_{j*}}(\theta_j)$ ho és, i això implica que el robot j està en una configuració singular.

2.4 Cinemàtica Inversa

2.4.1 Definició

La cinemàtica inversa determina la relació entre la posició i orientació d'un sistema de referència solidari a l'objecte manipulat i la configuració de cadascun dels graus de llibertat del mecanisme. En el cas general la solució analítica d'aquest problema és complexa i en alguns casos inexistent.

En el cas de sistemes multirobot amb r robots, el problema de la cinemàtica inversa es pot descomposar en la solució de r subproblemes. Un cop fixada la configuració del sistema de referència, és possible determinar de forma unívoca la configuració dels sistemes de referència de cadascun dels robots involucrats en la manipulació. Per tant, per trobar la configuració de cadascun dels robots, únicament cal resoldre la cinemàtica inversa dels diferents robots.

Donat que la cinemàtica inversa de cadascun dels robots té, en general, vàries solucions, la cinemàtica inversa de la cadena cinemàtica també en tindrà varies. Així si en el punt \mathbf{g} la cinemàtica inversa del robot i té p_i solucions, la cadena cinemàtica tancada en tindrà un màxim de $\prod_{i=0..r-1} p_i$.

2.4.2 Partició de l'espai de configuracions

En el cas d'un robot la cinemàtica inversa indueix una partició de l'espai de configuracions $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_i^1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_i^{p_i}$ i dins de cada cel·la, \mathcal{C}_i^k , d'aquesta partició la cinemàtica és una bijecció (secció A.3.2). De manera similar pel cas del sistema multirobot es pot induir una partició per l'espai de configuracions restringit.

Així per exemple, si per a cada robot j es fixa la solució de la cinemàtica i_j el conjunt de configuracions dels diferents robots es mouran en l'interior de la regió

$$\mathcal{C}_t^{i_0, i_1, \dots, i_{r-1}} \triangleq \mathcal{C}_0^{i_0} \times \mathcal{C}_1^{i_1} \times \dots \times \mathcal{C}_{r-1}^{i_{r-1}} \subset \mathcal{C}_t$$

El conjunt de totes les regions d'aquest tipus forma una partició de \mathcal{C}_t . El punts de cadascuna d'aquestes regions que verifiquen la restricció de cadena cinemàtica tancada formen una varietat de dimensió 6 (per a $n=3$) o 3 (per a $n=2$) en el cas de robots amb el mateix nombre de graus de llibertat que la dimensió de l'espai de treball. Aquesta varietat s'anomenarà $\Phi_{\mathcal{K}_{\text{in}}}^{\mathcal{C}_t^{i_0, i_1, \dots, i_{r-1}}} \subset \Phi_{\mathcal{K}_{\text{in}}}^{\mathcal{C}_t}$. Cal tenir en compte que aquest varietat pot ésser el conjunt buit o no compacte. El conjunt de les varietats d'aquest tipus defineix una partició de $\Phi_{\mathcal{K}_{\text{in}}}^{\mathcal{C}_t}$. El número màxim total de cel·les és $\prod_{i=0..r-1} p_i$.

En la pràctica, i degut a les restriccions imposades per les controladores, es convenient triar la partició de forma adequada, ja que l'espai de treball associat a cadascuna de les cel·les pot ésser molt desigual i el moure's d'una cel·la a una altra pot ésser molt difícil o impossible. S'ha de tenir en compte que a més de la dificultat de fer treballar els robots al voltant d'una singularitat, les cel·les poden no tenir cap punt em comú.

2.5 Mètrica

Tal com s'ha mostrat en la figura 2.5, en la formulació proposada conviuen diferents varietats, cadascuna de les quals té la seva pròpia mètrica natural. Donat que les diferents varietats estan relacionades entre si, és possible per a una varietat heretar les mètriques de les varietats amb les que està relacionada. Seguidament es presenten les possibles mètriques per cadascuna de les varietats que defineixen el sistema multirobot.

En aquesta secció i en les posteriors la aplicació tangent de cadascun dels robots es notará a través de la formulació tradicional, es a dir \mathbf{J}_i (equivalent a $\mathcal{K}_{in_{i*}}$).

- \mathcal{O}_t , és una varietat composta pel producte cartesià de r còpies de $SE(n)$. Per tant la seva mètrica natural estarà directament relacionada amb la de $SE(n)$ (secció A.6.2). Així si \mathbf{H} representa en forma matricial la mètrica sobre $SE(n)$, la mètrica sobre \mathcal{O}_t serà de la forma:

$$\mathbf{H}_{\mathcal{O}_t}^{SE(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

Aquesta mètrica no té en compte que els diferents sistemes de referència estan lligats entre si, una mètrica alternativa és :

$$\mathbf{H}'_{\mathcal{O}_t}{}^{SE(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}^T \mathbf{H} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}^T \mathbf{H} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}} \end{bmatrix}$$

aquesta nova mètrica realitza la mesura en el mateix sistema de referència per tot els robots, i per tant s'introdueix una referència comú. Cal tenir en compte que moviments petits sobre un sistema de referència comú poden implicar grans moviments sobre el sistema de referència del robot i , cosa que farà que la magnitud de mesura sigui força diferent.

- \mathcal{O}_{Φ} , donat que que es tracta d'una subvarietat de \mathcal{O}_t es pot importar la seva mètrica a través de la restricció (Φ), en el cas d'importar la mètrica $\mathbf{H}_{\mathcal{O}_t}^{SE(n)}$ amb el que s'obté la nova mètrica:

$$\mathbf{H}_{\mathcal{O}_{\Phi}}^{\mathcal{O}_t} = \mathbf{H} + \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}^{-1} + \dots + \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}^{-1}$$

alternativament és possible importar la mètrica $\mathbf{H}'_{\mathcal{O}_t}{}^{SE(n)}$ s'obté :

$$\mathbf{H}'_{\mathcal{O}_{\Phi}}{}^{\mathcal{O}_t} = r \mathbf{H}$$

Cal tenir en compte que \mathcal{O}_{Φ} representa el conjunt de punts que pot assolir en sistema de referència sobre l'objecte, per tant és isomorfa amb $SE(3)$. Per aquest motiu una mètrica alternativa és aplicar directament la mètrica definida sobre $SE(3)$, és a dir :

$$\mathbf{H}''_{\mathcal{O}_{\Phi}}{}^{\mathcal{O}_t} = \mathbf{H}$$

Deixant de banda el factor d'escala, $\mathbf{H}''_{\mathcal{O}_{\Phi}}{}^{\mathcal{O}_t}$ i $\mathbf{H}'_{\mathcal{O}_{\Phi}}{}^{\mathcal{O}_t}$ són equivalents i no tenen en compte que el sistema és una cadena cinemàtica tancada, però en canvi són coherents amb en concepte habitual d'espai. És a dir la mesura de distància i volum són directament les que es podria esperar. D'altra banda si s'utilitza $\mathbf{H}_{\mathcal{O}_{\Phi}}^{\mathcal{O}_t}$, la distància d'una corba correspon a la suma de les distàncies dels recorreguts dels sistemes de referència de cadascun dels manipuladors que formen la cadena cinemàtica.

- \mathcal{C}_t , correspon al producte cartesià dels espais de configuracions individuals dels diferents robots, per aquest motiu la seva mètrica natural és de la forma:

$$\mathbf{H}_{\mathcal{C}_t} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{G}_{r-1} \end{bmatrix}$$

on \mathbf{G}_i correspon a la mètrica natural sobre \mathcal{C}_i .

Una altra mètrica amb que es pot treballar en aquesta varietat és la induïda des de \mathcal{O}_t a través de $\mathcal{K}in_t$. En el cas d'emprar $\mathbf{H}_{\mathcal{O}_t}^{SE(n)}$ com a mètrica en \mathcal{O}_t , la mètrica induïda presenta la forma:

$$\mathbf{H}_{\mathcal{C}_t}^{\mathcal{O}_t} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_0^T \mathbf{H} \mathbf{J}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_1^T \mathbf{H} \mathbf{J}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{r-1}^T \mathbf{H} \mathbf{J}_{r-1} \end{bmatrix}$$

alternativament en cas d'emprar $\mathbf{H}'_{\mathcal{O}_t}^{SE(n)}$ com a mètrica sobre \mathcal{O}_t , la mètrica induïda presenta la forma:

$$\mathbf{H}'_{\mathcal{C}_t}^{\mathcal{O}_t} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_0^T \mathbf{H} \mathbf{J}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_1^T \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}^T \mathbf{H} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}} \mathbf{J}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{r-1}^T \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}^T \mathbf{H} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}} \mathbf{J}_{r-1} \end{bmatrix}$$

En $\mathbf{H}_{\mathcal{C}_t}^{\mathcal{O}_t}$ es mesuren les distàncies com la suma de les distàncies recorregudes pels elements terminals de cadascun dels robots que formen la cadena cinemàtica tancada, mentre que $\mathbf{H}'_{\mathcal{C}_t}^{\mathcal{O}_t}$ mesura la distància com la distància recorreguda pel sistema de referència sobre l'objecte manipulats.

- $\Phi^{\mathcal{C}_t}$, donat que és una subvarietat de \mathcal{C}_t , és possible importar la seva mètrica a través de la restricció ($\Phi(\mathcal{K}in_t(\cdot))$). En el cas de prendre com a coordenades locals la configuració del robot de referència i la mètrica $\mathbf{H}_{\mathcal{C}_t}$ sobre \mathcal{C}_t , aquesta pren la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\Phi^{\mathcal{C}_t}}^{\mathcal{C}_t} &= \mathbf{G}_0 + \mathbf{J}_0^T \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}^{-T} \mathbf{J}_1^{-T} \mathbf{G}_1 \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}^{-1} \mathbf{J}_0 + \cdots + \mathbf{J}_0^T \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}^{-T} \mathbf{J}_{r-1}^{-T} \mathbf{G}_{r-1} \mathbf{J}_{r-1}^{-1} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}^{-1} \mathbf{J}_0 \\ &= \mathbf{G}_0 + \mathbf{J}_0^T \left[\sum_{j=1}^{r-1} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_j^{-1}}^{-T} \mathbf{J}_j^{-T} \mathbf{G}_j \mathbf{J}_j^{-1} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_j^{-1}}^{-1} \right] \mathbf{J}_0 \end{aligned}$$

Alternativament, si es pren com a coordenades locals la posició/orientació del punt de referència i la mètrica $\mathbf{H}_{\mathcal{C}_t}$ sobre \mathcal{C}_t , aquesta mateixa mètrica pren la forma:

$$\mathbf{H}_{\Phi^{\mathcal{C}_t}}^{\mathcal{C}_t} = \mathbf{J}_0^{-T} \mathbf{G}_0 \mathbf{J}_0^{-1} + \left[\sum_{j=1}^{r-1} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_j^{-1}}^{-T} \mathbf{J}_j^{-T} \mathbf{G}_j \mathbf{J}_j^{-1} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_j^{-1}}^{-1} \right] \quad (2.17)$$

Aquesta última mètrica recull les característiques articulars de cadascun dels manipuladors, i la seva relació quan formen cadena cinemàtica tancada. Cal tenir en compte que en la definició anterior s'utilitza de forma explícita que tots els robots estan en una configuració no singular i que el seu jacobià és quadrat. En cas contrari la mètrica no seria directament aplicable i s'hauria de reformular adequadament. De forma similar és possible importar $\mathbf{H}_{\mathcal{C}_t}^{\mathcal{O}_t}$ i $\mathbf{H}'_{\mathcal{C}_t}^{\mathcal{O}_t}$

Alternativament és possible importar la mètrica de \mathcal{O}_t , en el cas d'emprar les coordenades del robot de referència i la mètrica $\mathbf{H}_{\mathcal{O}_t}^{SE(3)}$ sobre \mathcal{O}_t aquesta mètrica induïda pren la forma

$$\mathbf{H}_{\Phi \mathcal{C}_t}^{\mathcal{O}_t} = r \mathbf{J}_0^T [\mathbf{H}] \mathbf{J}_0$$

de forma similar es pot importar $\mathbf{H}'_{\mathcal{O}_t}^{SE(3)}$

Finalment és possible emprar la mètrica induïda des de \mathcal{O}_Φ a través de $\mathcal{K}in$. Aquesta en el cas d'emprar $\mathbf{H}'_{\mathcal{O}_t}^{SE(3)}$ com a mètrica de \mathcal{O}_t pren la forma:

$$\mathbf{H}_{\Phi \mathcal{C}_t}^{\mathcal{O}_\Phi} = \mathbf{J}_0^T \left[\mathbf{H} + \sum_{j=1}^{r-1} \mathbf{Ad}_{\mathcal{O}_j^{-1}}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{Ad}_{\mathcal{O}_j^{-1}}^{-1} \right] \mathbf{J}_0 \quad (2.18)$$

Aquesta mètrica a diferència de l'anterior, recull informació sobre l'estructura de presió de la cadena cinemàtica tancada, però no de la configuració dels diferents robots. De forma similar es importa la mètrica $\mathbf{H}_{\mathcal{O}_t}^{SE(3)}$, encara que els resultats obtinguts són menys rellevants.

2.6 Volum

De forma similar al que es fa amb els robots, és possible expressar el volum de l'espai de treball de la cadena cinemàtica tancada de la forma:

$$\text{Vol}(\mathcal{O}_\Phi) = \int_{\mathcal{O}_\Phi} \Omega_{\mathcal{O}_\Phi}$$

on $\Omega_{\mathcal{O}_\Phi}$ correspon a la unitat de volum definida a partir de la mètrica emprada en \mathcal{O}_Φ . De manera similar al que es fa en les cadenes cinemàtiques obertes aquesta integral es pot ficar en funció de l'espai de configuracions:

$$\text{Vol}(\mathcal{O}_\Phi) = \frac{1}{\text{deg}(\mathcal{K}in)} \int_{\Phi \mathcal{C}_t} \mathcal{K}in^* \Omega_{\mathcal{O}_\Phi}$$

Des d'un punt de vista pràctic, a diferència del que passa en les cadenes cinemàtiques obertes, aquestes expressions són de poca utilitat ja que al expressar-les en coordenades per tal de realitzar el càlcul, resulta complex determinar els límits d'integració de cadascuna de les coordenades.

2.7 Manipulabilitat

En el cas de les cadenes cinemàtics obertes, l'estudi de la manipulabilitat es realitza a través de les propietats de la aplicació tangent de la cinemàtica, en unes coordenades locals que habitualment són directament la configuració del robot. En el cas de les cadenes cinemàtiques tancades, aquest tipus d'estudi no recull l'estat de totes les articulacions que formen la cadena cinemàtica, i per aquest motiu, encara que l'aplicació tangent presenti unes característiques òptimes en unes coordenades, podria ésser que en unes altres presentés un altre tipus de característiques. Així doncs, sembla clar que un estudi de manipulabilitat que depengui de la selecció de les coordenades locals no és intrínsec a la cadena cinemàtica i per tant inadequat per realitzar un estudi genèric.

Per aquest motiu, i donat el gran nombre de possibilitats en la definició de les mètriques, el disseny de mesures de manipulabilitat per les cadenes cinemàtiques tancades i en concret per cas del sistema multirobot, ha seguit diferents tipus de metodologies. Les principals són:

- Construcció de l'el·lipsoide de manipulabilitat.

Seguint l'enfoc emprat pels sistemes sense restriccions holònomes, s'intenta construir l'el·lipsoide de manipulabilitat.

Inicialment, aquest es va definir a partir dels el·lipsoides de manipulabilitat de cadascun dels robots que formen la cadena cinemàtica tancada. Totes les propostes en aquest sentit analitzen la intersecció dels diferents el·lipsoides individuals, per tal d'obtenir informació sobre la cadena cinemàtica tancada. La principal diferència entre els diferents enfocos proposats està en la forma d'obtenir la intersecció, que en general aproximen per figures geomètriques més simples. Algunes de les aproximacions proposades són:

- *Aproximació El·lipsoidal* [Lee, 1989].

Es selecciona un dels el·lipsoides corresponent a un dels robots que intervenen en la cadena cinemàtica tancada. Aquest tindrà uns eixos directors $\{\mathbf{u}_i\}$ i uns radis $\{\eta_i\}$. Seguidament es determina la intersecció dels eixos directors de l'el·lipsoide seleccionat amb els el·lipsoide de la resta de robots. Això es determina fàcilment, ja que s'ha de complir:

$$\eta_i^j \mathbf{u}_i^T \left(\mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_j^{-1}} \mathbf{J}_j \mathbf{J}_j^T \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_j^{-1}}^T \right)^{-1} \eta_i^j \mathbf{u}_i = 1$$

i per tant :

$$\eta_i^j = \left[\mathbf{u}_i^T \left(\mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_j^{-1}} \mathbf{J}_j \mathbf{J}_j^T \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_j^{-1}}^T \right)^{-1} \mathbf{u}_i \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Finalment l'el·lipsoide obtingut és el format pels eixos directors $\{\mathbf{u}_i\}$ i els radis $\{\min_{j=0..r-1} \{\eta_i^j\}\}$.

El fet que l'aproximació sigui un el·lipsoide facilita la seva interpretació, ja que es poden emprar raonaments similars als emprats en les cadenes cinemàtiques obertes.

Un dels principals problemes, és que el resultat final pot dependre de quin és el·lipsoide inicialment seleccionat.

- *Aproximació poligonal* [Kokkinis and Paden, 1989].

La aproximació de la intersecció per un el·lipsoide pot arribar a ésser massa conservadora per recollir les característiques reals del sistema multirobot. Per aquest motiu altres treballs han proposat una aproximació poligonal de la intersecció dels el·lipsoides individuals.

En alguns casos la interpretació cinemàtica del polígon resultant pot presentar dificultats.

Posteriorment s'ha intentat definir un el·lipsoide que reculli les característiques de la cadena cinemàtica tancada de forma directa. Aquest enfoc s'ha abordat de diferents maneres. Les principals aproximacions són:

- *Relació de Forces* [Chiacchio et al., 1991] [Huang and Lu, 1994].

La força resultant sobre un sistema de referència sobre la cadena cinemàtica tancada pot expressar-se de la forma:

$$\mathbf{f}_{res} = \mathbf{f}_0 + \sum_{i=1}^{r-1} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_i}^T \mathbf{f}_i$$

on \mathbf{f}_i és la força generalitzada aplicada-rebuda pel robot i sobre el seu sistema de referència. Aquesta expressió en forma matricial pren la forma:

$$\mathbf{f}_{res} = \mathbf{W}\mathbf{f}$$

on $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_0^T \cdots \mathbf{f}_{r-1}^T]^T$ i $\mathbf{W} = [\mathbf{I}, \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1}^T, \cdots, \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}}^T]$. Seguidament aquesta equació es transforma en :

$$\mathbf{W}^\dagger \mathbf{f}_{res} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{f}_{in} = \mathbf{f}$$

on \mathbf{W}^\dagger correspon a la pseudoinversa de \mathbf{W} , \mathbf{V} és una matriu formada per una base del nucli \mathbf{W} , i \mathbf{f}_{in} un vector arbitrari, que està lligat a les forces internes que actuen sobre la manipulació.

El vector de forces \mathbf{f} , es pot escriure en funció del parell aplicat per cadascuna de les articulacions dels manipuladors:

$$\mathbf{J}^T \mathbf{f} = \boldsymbol{\tau}$$

on $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\tau}_0^T, \cdots, \boldsymbol{\tau}_{r-1}^T]^T$ i $\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_0^T & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{r-1}^T \end{bmatrix}$. Finalment, fusionant ambdues expressions s'obté:

$$\mathbf{J}^T \mathbf{W}^\dagger \mathbf{f}_{res} + \mathbf{J}^T \mathbf{V} \cdot \mathbf{f}_{in} = \boldsymbol{\tau}$$

L'el·lipsoide de força es defineix:

$$\mathbf{f}_{res}^T \left[[\mathbf{W}^\dagger]^T \mathbf{J} \mathbf{J}^T \mathbf{W}^\dagger \right] \mathbf{f}_{res} = 1$$

i el dual en velocitat presenta la forma:

$$\mathbf{v}^T \left[[\mathbf{W}^\dagger]^T \mathbf{J} \mathbf{J}^T \mathbf{W}^\dagger \right]^{-1} \mathbf{v} = 1$$

Un cop definit l'el·lipsoide és possible realitzar un estudi sobre les característiques cinemàtiques.

De forma similar es defineixen els el·lipsoïds de les forces internes (\mathbf{f}_{in}) que permeten estudiar les relacions entre aquestes i els parells aplicats τ .

Estudis posteriors, han provat l'existència de casos en els que la mesura no recull de forma adequada les prestacions del sistema multirobot [Melchiorri, 1993] [Chiacchio et al., 1993].

En el cas de manipuladors amb el mateix nombre de graus de llibertat que l'espai de treball i en configuracions no singulars, \mathbf{W}^\dagger pot expressar-se:

$$\mathbf{W}^\dagger = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d \\ \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}^{-T} \\ \vdots \\ \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}^{-T} \end{bmatrix}$$

i, en conseqüència :

$$\mathbf{M} = \left[[\mathbf{W}^\dagger]^T \mathbf{J} \mathbf{J}^T \mathbf{W}^\dagger \right]^{-1} = r^2 \left[\mathbf{J}_0 \mathbf{J}_0^T + \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}^{-1} \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1^T \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}^{-T} + \dots + \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}^{-1} \mathbf{J}_{r-1} \mathbf{J}_{r-1}^T \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}^{-T} \right]^{-1} \quad (2.19)$$

- Comparació de mètriques.

L'altra metodologia d'avaluar les prestacions de la cinemàtica és la comparació de les mètriques induïdes cap a l'espai de configuracions restringit ($\Phi^{\mathcal{C}_t}$) des de l'espai de destí (\mathcal{O}_Φ) i l'espai de configuracions (\mathcal{C}_t). El procés de transport de les mètriques s'ha proposat a través de diferents enfoc:

- Geometria Diferencial (*pullback metric*) [Park and Kim, 1998].

Per aplicar aquest enfoc únicament és necessari seleccionar una mètrica per l'espai de configuració restringit ($\Phi^{\mathcal{C}_t}$) i l'espai de treball (\mathcal{O}_Φ). La proposta inicial utilitza $\mathbf{H}_{\Phi^{\mathcal{C}_t}}^{\mathcal{C}_t}$ com la mètrica per ($\Phi^{\mathcal{C}_t}$) i la mètrica de $SE(3)$ com a mètrica per \mathcal{O}_Φ . Així la isometria pren la forma :

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}_{\Phi^{\mathcal{C}_t}}^{\mathcal{C}_t}$$

que en el cas d'escriure-la en unes coordenades locals formades per la configuració del robot de referència s'escriu:

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}^{-1} \left[\mathbf{G}_0 + \mathbf{J}_0^T \left[\sum_{j=1}^{r-1} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_j^{-1}}^{-T} \mathbf{J}_j^{-T} \mathbf{G}_j \mathbf{J}_j^{-1} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_j^{-1}}^{-1} \right] \mathbf{J}_0 \right] \quad (2.20)$$

Aquesta mesura únicament té en compte l'estructura de la cadena cinemàtica tancada sobre \mathcal{C}_t , i no sobre \mathcal{O}_Φ .

- Anàlisi de l'espai tangent [Bicchi and Melchiorri, 1993] [Bicchi and Melchiorri, 1992].

Seguint el desenvolupament aplicat en l'estudi de les singularitats (secció 2.3.2), les equacions que han de complir les velocitats del sistema de referència sobre la cadena cinemàtica i les velocitats de les diferents articulacions de cadascun dels robots queden definides per l'equació 2.16. Aquesta és reformula en la forma:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{F} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_t \end{bmatrix} = 0 \quad (2.21)$$

on $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{F} \triangleq [\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{F}, \nabla_{\boldsymbol{\theta}_t}\mathbf{F}]$. El nucli de $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{F}$ defineix el conjunt de velocitats possibles. Els vectors que pertanyen al nucli de $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{F}$ es poden expressar de la forma:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{v} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{v} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{v} \end{bmatrix}$$

on \mathbf{C} és una matriu formada pels vectors d'una base ortonormal del nucli de $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{F}$, i \mathbf{v} és un vector arbitrari.

Un cop es té aquesta descomposició es pot calcular el valor de la mesura de manipulabilitat com :

$$\mathbf{v}^T\mathbf{M}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{C}_1^T\mathbf{H}\mathbf{C}_1\mathbf{v}}{\mathbf{v}^T\mathbf{C}_2^T\mathbf{M}_{C_t}\mathbf{C}_2\mathbf{v}}$$

Es pot provar que pel cas en que $\|\mathbf{v}\| = 1$, aquesta mesura es pot rescriure en la forma:

$$\mathbf{v}^T\mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{v}$$

on $\mathbf{M}_1 \triangleq \mathbf{C}_1^T\mathbf{H}\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{M}_2 \triangleq \mathbf{C}_2^T\mathbf{G}\mathbf{C}_2$. Aquesta mesura és equivalent a la mesura inicialment proposada en el punt anterior.

Un enfoc similar ha estat emprat recentment per la formulació de l'el·lipsoide de manipulabilitat en sistemes mecànics amb restriccions genèriques [Wen and Wilfinger, 1998] [O'Brien and Wen, 1999].

Pel cas multirobot, suposant $\mathbf{v} = \mathbf{v}$, i sota la hipòtesi de que tots els robots estan en configuracions de rang complet i que el seu jacobinà és quadrat s'obté:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d \\ \mathbf{J}_0^{-1} \\ [\mathbf{Ad}_{O_1^{-1}}\mathbf{J}_1]^{-1} \\ \vdots \\ [\mathbf{Ad}_{O_{r-1}^{-1}}\mathbf{J}_{r-1}]^{-1} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{C}_1 = \mathbf{I}_d; \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d \\ \mathbf{J}_0^{-1} \\ [\mathbf{Ad}_{O_1^{-1}}\mathbf{J}_1]^{-1} \\ \vdots \\ [\mathbf{Ad}_{O_{r-1}^{-1}}\mathbf{J}_{r-1}]^{-1} \end{bmatrix}$$

d'on es dedueix que en aquest cas $\mathbf{M}_1 = \mathbf{H}$ i

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{J}_0^{-T}\mathbf{G}_0\mathbf{J}_0^{-1} + \mathbf{Ad}_{O_1^{-1}}^{-T}\mathbf{J}_1^{-T}\mathbf{G}_1\mathbf{J}_1^{-1}\mathbf{Ad}_{O_1^{-1}}^{-1} + \cdots + \mathbf{Ad}_{O_{r-1}^{-1}}^{-T}\mathbf{J}_{r-1}^{-T}\mathbf{G}_{r-1}\mathbf{J}_{r-1}^{-1}\mathbf{Ad}_{O_{r-1}^{-1}}^{-1}$$

Cal destacar que \mathbf{M}_2 equival a $\mathbf{H}_{\Phi_t}^{C_t}$ quan s'utilitza com a coordenades locals la posició/orientació del punt de referència i la mètrica \mathbf{H}_{C_t} sobre C_t .

De manera similar cal destacar que el cas de triar $\mathbf{v} = \boldsymbol{\theta}_0$, $\mathbf{M}_1 = \frac{1}{r}\mathbf{H}_{\Phi}^{O_t}$ i $\mathbf{M}_2 = \mathbf{H}_{\Phi}^{C_t}$ prenen com a coordenades locals la configuració del robot de referència.

- Pseudoinverses [van den Doel, 1994].

Una proposta alternativa, és importar la mètrica de \mathcal{O}_{Φ} directament sobre \mathcal{C}_t , partint de la equació (2.15). D'aquesta equació s'obté la relació:

$$\mathbf{v} = -[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{F}]^{\dagger} \nabla_{\theta_t}\mathbf{F} \cdot \dot{\theta}_t \quad (2.22)$$

un cop establerta aquesta relació es poden formular la relació d'isometria o l'estudi de l'el·lipsoide de la forma habitual. Els resultats obtinguts són similars als del plantejament anterior, encara que en aquest s'assumeix que la relació es fixa pels moviments de mínima distància en \mathcal{C}_t (rellevant per cas de sistemes redundants).

En el cas del sistemes multirobot cal tenir en compte que $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{F} = -[\mathbf{I}_d, \mathbf{I}_d, \dots, \mathbf{I}_d]^T$ i que per tant $[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{F}]^{\dagger} = -\frac{1}{r}[\mathbf{I}_d, \mathbf{I}_d, \dots, \mathbf{I}_d]$, amb el que \mathbf{v} es transforma en una mitjana ponderada de les velocitats del diferents robots expressades sobre el sistema de referència sobre l'objecte. I per tant en aquest cas la mesura de distància serà de la forma

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_t}^{\mathcal{O}_{\Phi}} = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_0^T \mathbf{H} \mathbf{J}_0 & \mathbf{J}_0^T \mathbf{H} \text{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}} \mathbf{J}_1 & \dots & \mathbf{J}_0^T \mathbf{H} \text{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}} \mathbf{J}_{r-1} \\ \mathbf{J}_1^T \text{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}^T \mathbf{H} \mathbf{J}_0 & \mathbf{J}_1^T \text{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}^T \mathbf{H} \text{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}} \mathbf{J}_1 & \dots & \mathbf{J}_1^T \text{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}^T \mathbf{H} \text{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}} \mathbf{J}_{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{J}_{r-1}^T \text{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}^T \mathbf{H} \mathbf{J}_0 & \mathbf{J}_{r-1}^T \text{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}^T \mathbf{H} \text{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}} \mathbf{J}_1 & \dots & \mathbf{J}_{r-1}^T \text{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}^T \mathbf{H} \text{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}} \mathbf{J}_{r-1} \end{bmatrix}$$

que incorpora com a peculiaritat principal la introducció dels termes creuats.

A més d'aquesta incorporació cal recalcar que aquest mesura es realitza sobre \mathcal{C}_t i per tant d'un el·lipsoide $r \cdot n_i$ dimensional, on n_i són els graus de llibertat dels diferents robots.

2.8 Proposta d'una nova mesura de manipulabilitat

En la secció anterior s'han revisat les principals propostes de mesures de manipulabilitat que s'han trobat en la literatura, i en els comentaris associats a cadascuna d'elles s'ha procurat dins el possible interpretar-les en forma d'una mesura d'isometria, encara que això és complicat en les mesures que fan us de la pseudoinversa [van den Doel, 1994] [Chiacchio et al., 1991], ja que aquestes segueixen un camí no natural. Per aquest motiu s'ha cregut més interessant considerar una mesura que segueixi la formulació tradicional. Dins aquestes es troben les basades en l'us directe dels conceptes de la geometria diferencial [Park and Kim, 1998] i l'anàlisi de l'espai tangent [Bicchi and Melchiorri, 1993]. Aquests dos enfoc es diferencien en quines són les varietats origen i destí, i per tant les mètriques que es comparen.

En aquest treball s'ha considerat que la varietat origen a la aplicació cinemàtica és $\Phi^{\mathcal{C}_t}$, i la varietat destí és \mathcal{O}_{Φ} . Aquest enfoc és similar al seguit en els treballs de Park [Park and Kim, 1998], en els treballs de Park s'utilitza com a mètrica sobre \mathcal{O}_{Φ} , la mètrica de $SE(3)$, això fa que l'estructura del sistema multirobot únicament es tingui en compte sobre l'espai de configuracions. Per aquest motiu es proposa emprar la mètrica importada

de \mathcal{O}_t a través de Φ , que ha estat presentada en la equació (2.18). Amb això la mesura de manipulabilitat proposada queda definida com:

$$\mathbf{M} \triangleq [\mathbf{H}_{\mathcal{O}_\Phi}^{\mathcal{O}_t}]^{-1} \mathbf{H}_{\Phi}^{\mathcal{C}_t} \quad (2.23)$$

Aquesta nova mesura d'isometria recull fenòmens no recollits per la resta de mesures, i, sobretot es poden fer palesos moviments en que la diferència de velocitats dels diferents sistemes de referència sobre els diferents robots és força diferent. Aquest fet pot ésser especialment interessant en el cas de les forces ja que, en general, una de les qüestions desitjables en la manipulació multirobot és que les forces aplicades pels diferents robots estiguin equilibrades.

2.9 Forces

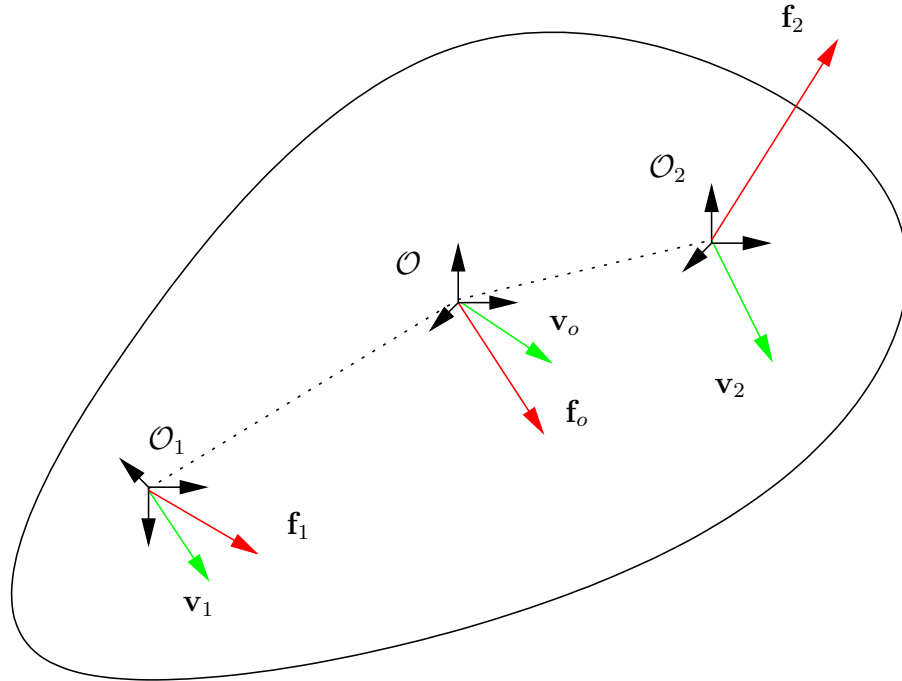


Figura 2.8: Esquema de Velocitats-Forces en ma manipulació multirobot.

La restricció (2.6), es pot expressar en termes de l'espai tangent de la forma:

$$d\Phi \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

on $d\Phi \in T_{\mathbf{x}_t}^* \mathcal{O}_t$ formen les forces de lligam i s'obtenen derivant Φ_i en front del temps, i $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_t} \mathcal{O}_t$ format per $\mathbf{v}_i \in T_{\mathbf{x}_i} \mathcal{O}_i$ que corresponen a les velocitats dels sistemes de referència dels diferents robots [Figura (2.8)]. Cal recordar que \mathbf{v}_i representen les velocitats del sistema de referència del robot i respecte el sistema coordinat fixe a la base del robot i , però expressat en la orientació del sistema coordinat de referència del robot i .

En el cas en que el punt de referència sobre l'objecte està situat en el sistema de referència del robot 0, $d\Phi$ pren la forma:

$$d\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & -\mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_d & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_d & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Proposició 2.3 *La restricció $d\Phi\mathbf{v} = \mathbf{0}$ és invariant en front a transformacions per l'esquerra, és a dir $d\Phi$ és invariant al sistema coordinat triat com a sistema de referència de món.*

Demostració: Cada restricció Φ_i és de la forma $\mathcal{K}\text{in}_0 = \mathbf{B}_i\mathcal{K}\text{in}_i\mathbf{O}_i$, el fet de canviar el sistema de referència món la convertiria en una restricció de la forma $\mathbf{A}\mathcal{K}\text{in}_0 = \mathbf{A}\mathbf{B}_i\mathcal{K}\text{in}_i\mathbf{O}_i$, on \mathbf{A} és una matriu homogènia que relaciona el sistema de referència inercial amb el nou. Al passar aquesta restricció amb tangent s'obté:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_i^{-1}}\mathbf{v}_i$$

que com es pot veure és independent de \mathbf{A} .

Proposició 2.4 *La restricció $d\Phi\mathbf{v} = \mathbf{0}$ és invariant en front a transformacions per la dreta, és a dir $d\Phi$ és invariant al sistema de coordinat de referència sobre l'objecte manipulat.*

Demostració: Cada restricció Φ_i és de la forma $\mathcal{K}\text{in}_0 = \mathbf{B}_i\mathcal{K}\text{in}_i\mathbf{O}_i$, el fet de canviar el sistema de referència sobre l'objecte la convertiria en una restricció de la forma $\mathcal{K}\text{in}_0\mathbf{A} = \mathbf{B}_i\mathcal{K}\text{in}_i\mathbf{O}_i\mathbf{A}$, on \mathbf{A} és una matriu homogènia que relaciona el nou sistema de referència sobre l'objecte amb l'anterior. Al passar aquesta restricció amb tangent s'obté:

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{A}^{-1}}\mathbf{v}_0 = \mathbf{Ad}_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{O}_i^{-1}}\mathbf{v}_i$$

aquesta equació és equivalent a l'equació:

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{A}^{-1}}\mathbf{v}_0 = \mathbf{Ad}_{\mathbf{A}^{-1}}\mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_i^{-1}}\mathbf{v}_i$$

i donat que $\mathbf{Ad}_{\mathbf{A}^{-1}}$, és de rang complet per construcció, la relació entre \mathbf{v}_0 i \mathbf{v}_i es pot transformar en la relació inicial:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_i^{-1}}\mathbf{v}_i$$

Proposició 2.5 *El conjunt de covectors que formen $d\Phi$ és un conjunt generador de les forces de lligam que actuen sobre el sistema.*

Demostració: Donat que $\mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_i^{-1}}$ és de rang complet, $d\Phi$ també ho serà donada la seva estructura (2.25).

Quan els diferents robots apliquen un força $\mathbf{f}_i \in T_{\mathbf{x}_i}^*\mathcal{O}_i$ sobre el punt de contacte sobre l'objecte manipulat, una de les qüestions d'interès és determinar quina és la força resultant sobre el sistema de referència sobre l'objecte manipulat, aquesta relació ve determinada per :

$$\mathbf{f}_o = \sum_{i=0}^{r-1} \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_i}^T \mathbf{f}_i$$

on $\mathbf{f}_o \in T_{\mathbf{o}_t}^* \mathcal{O}_\Phi$, aquesta relació es pot expressar en forma matricial de la forma:

$$\mathbf{f}_o = \mathbf{W}\mathbf{f} \quad (2.26)$$

on $\mathbf{f} \in T_{\mathbf{x}_t}^* \mathcal{O}_t$, està format per les forces aplicades pels diferents robots, es a dir $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r]$. $\mathbf{W} \triangleq [\mathbf{I}_d, \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1}^T, \dots, \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}}^T]$. Aquesta matriu rep el nom de matriu de prensió.

Cal recalcar que l'equació (2.26), és invariant en front a transformacions per l'esquerra, es a dir enfront a canvis en el sistema de referència inercial, però presenta una dependència en front a les transformacions per la dreta. Els canvis en el sistema de referència sobre l'objecte, el punt on estudia la resultant de les forces, afecten de la forma:

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{A}}^{-T} \mathbf{f}_o = \mathbf{W}\mathbf{f}$$

on \mathbf{A} correspon a la transformació homogènia que relaciona els dos sistemes de referència.

De la equació (2.26) es dedueix que la part de \mathbf{f} que pertany al nucli de \mathbf{W} no contribueix a la generació de \mathbf{f}_o i per tant no genera moviment. Aquesta força actua con una força de deformació sobre el sistema, aquesta component s'anomenarà força interna.

Proposició 2.6 $\mathbf{W}(d\Phi)^T = 0$

Demostració: Donat que les forces de lligam no generen treball i per tant no generen força resultant (f_o). Això es verifica aplicant el càlcul directe

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(d\Phi)^T &= [\mathbf{I}_d - \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1}^T \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_1^{-1}}^T, \dots, \mathbf{I}_d - \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}}^T \mathbf{Ad}_{\mathbf{O}_{r-1}^{-1}}^T,] \\ &= \mathbf{W}(d\Phi)^T = [\mathbf{I}_d - \mathbf{I}_d, \dots, \mathbf{I}_d - \mathbf{I}_d,] = \mathbf{0} \end{aligned}$$

2.10 Espai de treball

2.10.1 Introducció

Les definicions de l'espai de treball de les cadenes cinemàtiques tancades són anàlogues a les emprades per les cadenes cinemàtiques obertes. Cal destacar però que els algorismes de generació de l'espai de treball presenten major complexitat pel fet d'haver de tractar amb restriccions.

L'objectiu de l'estudi de l'espai de treball de les cadenes cinemàtiques tancades, persegueix dos objectius diferenciats, el primer és la anàlisi d'un sistema definit a priori, mentre que l'altra qüestió de rellevància és la necessitat de disposar d'eines de suport al disseny d'aquest tipus de sistemes. En concret una qüestió d'interès en el cas dels sistemes multirobot és la determinació de la posició relativa de les bases per tal que l'espai de treball del sistema complert sigui òptim d'acord amb algun criteri predefinit.

Seguidament es presenten les principals metodologies de generació de l'espai de treball reportades en la literatura, destacant les seves característiques en el cas multirobot.

2.10.2 Generació de l'espai de treball

En molts casos la cadena cinemàtica tancada es pot analitzar a partir de la anàlisi de les diferents parts que la componen. Així, aquesta es descomposa en cadenes cinemàtiques obertes, l'espai de treball de cadascuna de les quals és fàcilment calculable. Posteriorment s'analitzen les característiques del sistema complet a partir de l'espai de treball de cadascuna de les cadenes i les restriccions imposades per la cadena cinemàtica tancada [Merlet, 2000] [Kim et al., 1997]. Aquest tipus de mètodes s'han aplicat a un gran nombre de sistemes de complexitat moderada, el principal inconvenient és que resulta necessari realitzar un estudi adhoc per cada mecanisme en concret.

En els casos en que es possible l'aplicació d'aquest enfoc és possible obtenir informació que permet estudiar l'estructura de l'espai de treball i per tant determinar criteris per dissenyar cel·les multirobot.

2.10.2.1 Estudi de les singularitats

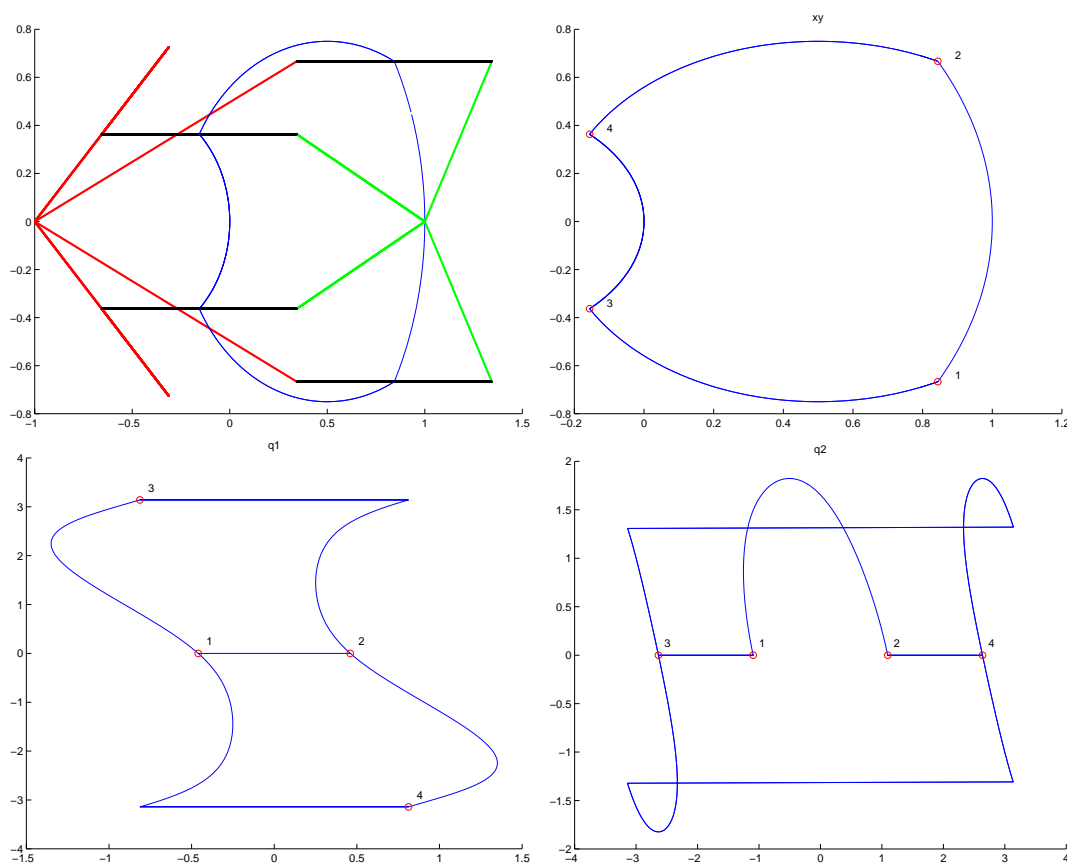


Figura 2.9: Exemple d'anàlisi de l'espai de treball d'un sistema multirobot a través de mètodes de continuació.

Com ja s'ha comentat en el cas de cadenes cinemàtiques obertes, els límits del espai de treball

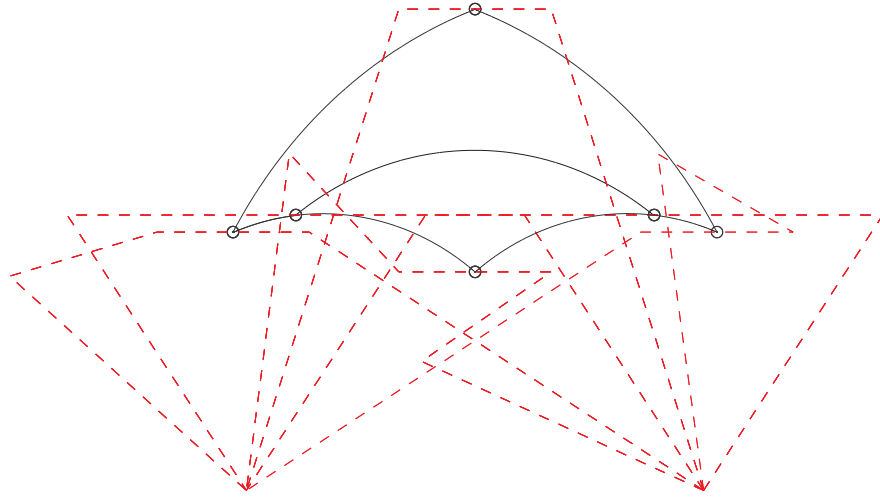


Figura 2.10: Exemple d'anàlisi de l'espai de treball d'un sistema multirobot a través de mètodes de continuació.

del sistema multirobot estan definits o bé per les singularitats del mecanisme o bé per límits mecànics de les diferents articulacions. Aquests darrers, poden modelar-se com a singularitats a través d'un canvi de variables adequat [Haug et al., 1992] [Qiu et al., 1995].

En general les singularitats formen subvarietats unidimensionals dins l'espai de configuracions, per tant recorrent-les, i aplicant sobre elles la cinemàtica es recorre la frontera de l'espai de treball. Per poder construir la frontera des d'aquest punt de vista es necessita en primer lloc determinar una configuració de Φ^{C_t} en la que el sistema sigui singular. Aquest punt s'aconsegueix a través d'heurístiques o mètodes numèrics de cerca [Haug et al., 1994].

Posteriorment es recorren les varietats que defineixen les singularitats, això es fa aplicant mètodes de continuïtat [Allgower and Georg, 1990] al sistema unidimensional que seguidament es comentaran. De la equació (2.14) i la necessitat que la equació $\nabla_{\theta_t} \mathbf{F}$ sigui singular s'obté:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_t) \\ \nabla_{\boldsymbol{\theta}_t} \mathbf{F}^T \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

on $\boldsymbol{\xi}$, és un vector en la direcció de la singularitat estudiada. Donat que de $\boldsymbol{\xi}$ únicament interessa la direcció i no la magnitud es pot afegir una restricció addicional:

$$\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} = 1 \quad (2.28)$$

la solució d'aquest sistema d'equacions correspon al conjunt de corbes/superfícies que defineixen la singularitat de la cadena cinemàtica tancada. Les equacions (2.27) i (2.28) defineixen una varietat de dimensió $n - 1$, on n és la dimensió de Φ^{C_t} , i donat que els mètodes de continuació clàssics únicament treballen amb varietats unidimensionals, és necessari afegir un conjunt addicional d'equacions per reduir la dimensió del sistema. Així el sistema complet queda

de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_t) \\ \nabla_{\boldsymbol{\theta}_t} \mathbf{F}^T \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} - 1 \\ \Upsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

on Υ són un conjunt de $n - 2$ equacions independents. En general representen l'equació d'un pla i una restricció d'orientació. D'aquesta manera s'obté la frontera de l'espai de treball dins la secció de l'espai definida per Υ .

Durant el recorregut dins d'una secció, es construeix un graf. Els nodes d'aquest graf corresponen a punts en els que la pèrdua de rang de $\nabla_{\boldsymbol{\theta}_t} \mathbf{F}$ és superior a 1, mentre que els arcs corresponen a corbes solució de (2.29). Els nodes per tant seran configuracions en les que interseccen dues corbes. Els nodes són punts que necessiten un estudi especial, per determinar quin és el conjunt de vectors tangents possibles. Això es possible fer-ho a través de l'estudi de les característiques del Hessià de $\nabla_{\boldsymbol{\theta}_t} \mathbf{F}$ [Keller, 1987].

Un exemple dels resultats obtinguts a través de la aplicació d'aquests mètodes es presenta en la figura 2.9. On s'aplica el mètode a l'estudi d'un sistema multirobot compost per dos robots de 3 graus de llibertat cadascun. En aquest estudi s'ha fixat que la orientació de l'objecte manipulats sigui la identitat respecte el sistema de referència. En la primera gràfica es mostra la frontera de l'espai de treball i algunes configuracions associades a ell. Seguidament es presenta la representació en forma de graf de l'espai de treball, de forma anàloga es presenten les representacions de grafs sobre la projecció de l'espai de configuracions de les dues primeres articulacions de cadascun dels manipuladors.

Un exemple addicional (Figura 2.10) mostra l'estudi d'un sistema de les mateixes característiques. En aquest cas és possible visualitzar l'aparició de singularitats internes a l'espai de treball.

El mètode descrit en la literatura permet determinar correctament els vectors tangents en els nodes del grafs, quan la pèrdua de rang de $\nabla_{\boldsymbol{\theta}_t} \mathbf{F}$ és com a molt 2. En la pràctica és difícil trobar casos en que el jacobíà presenti una pèrdua de rang superior a dos, sobretot si es treballa amb mecanismes paral·lels senzills, però bastant factible en sistemes multirobot amb més de 2 dos robots que presenten simetries. La resolució d'aquesta problemàtica implica analitzar els termes d'ordre superior de la descomposició en serie de Taylor de la singularitat, o l'us d'heurístiques [Qiu et al., 1995].

Un plantejament similar s'ha emprat per l'estudi de sistemes multirobot [Hemami et al., 1991]. En aquest treball s'ha estudiat l'espai de treball per orientació constant per dos robot PUMA, a diferència dels anteriors mètodes s'ha emprat un mètode heurístic per recórrer la frontera de l'espai de treball.

Aquests mètodes permeten d'una forma genèrica determinar les característiques cinemàtiques de la cadena cinemàtica, incloent els límits mecànics de cadascuna de les articulacions. El principal inconvenient és la necessitat de realitzar l'estudi per seccions de l'espai de treball, posteriorment totes les seccions es poden agrupar en un model tridimensional. El mètode és especialment indicat per la anàlisi de l'espai de treball, però no pel disseny de la cadena cinemàtica.

2.10.2.2 Discretització l'espai de treball

Com el cas de les cadenes cinemàtiques obertes, una possibilitat per obtenir informació sobre l'espai de treball, és definir una discretització en l'espai de configuracions i avaluar la cinemàtica en ell, d'aquesta manera i després d'un recorregut exhaustiu de l'espai de configuracions és possible obtenir informació de sobre l'espai de treball del sistema. En el cas genèric de cadenes cinemàtiques tancades, la obtenció de configuracions que compleixen les restriccions cinemàtiques no és una tasca senzilla [Han and Amato, 2000] [LaValle et al., 1999].

En el cas de sistemes multirobot, pels que es coneix la cinemàtica inversa això es pot realitzar de forma senzilla, ja que únicament cal seleccionar un dels robots discretitzar el seu espai de configuracions, i verificar si el sistema de referència sobre aquest robot compleix les restriccions sobre l'espai de treball, això es fa propagant la situació d'aquest sistema de referència sobre el sistema de referència de cadascun dels manipuladors que estan lligats a través de restriccions rígides. Posteriorment per cada manipulador es verifica si el punt pertany a l'espai de treball individual. En el cas que pertanyi a l'espai de treball de tots els manipuladors, el punt pertany a l'espai de treball de la cadena cinemàtica tancada [Tarn et al., 1995].

Aquest tipus de mètode té una implementació senzilla, pel cas de sistemes multirobot, a més presenta l'avantatge que permet introduir qüestions com els obstacles. Com en el cas anterior són mètodes especialment indicats per la anàlisi de l'espai de treball, però no pel disseny.

Capítol 3

Espai de treball d'un sistema multirobot

En aquest capítol es proposa una nova metodologia per la construcció de l'espai de treball d'un sistema multirobot a partir dels espais de treball de cadascun dels robots que el formen, les posicions relatives de les bases i les posicions relatives dels elements terminals. El mètode proposat es pot classificar dins els mètodes de generació de l'espai de treball presentats en el capítol 2.

La metodologia diferencia entre l'espai destre i l'espai realitzable. En els dos casos l'espai de treball del sistema multirobot es defineix com la intersecció de diferents figures geomètriques, una corresponent a l'espai de treball d'un robot de referència i la resta corresponents a la figura destra/realitzable. Aquestes figures s'obtenen a la deformació de l'espai de treball de la resta de manipuladors per tenir en compte l'objecte manipulat.

Finalment es presenta la extensió del mètode per tenir en compte diferents tipus de prensió o incloure trajectòries o conjunts de punts dins l'espai de treball.

3.1 Espai de treball

Donats els espais de treball individuals dels diferents robots que componen el sistema multirobot (\mathcal{W}^i), la relació entre els diferents sistemes de referència dels diferents robots (\mathbf{B}_i), i les característiques de prensió de l'objecte manipulat (\mathbf{O}_i) es poden estudiar els elements de $SE(3)$ que seran assolibles per un sistema coordinat solidari a l'objecte manipulat. Aquests elements constituiran l'espai de treball dels sistema multirobot.

En aquest estudi s'assumirà que el sistema coordinat de referència està situat sobre el punt de prensió del robot 0, i amb la mateixa orientació de la pinça del manipulador, per tant $\mathbf{O}_i = \mathbf{I}_d$, i es fixarà el sistema referència en el sistema de referència d'aquest mateix robot, per tant $\mathbf{B}_i = \mathbf{I}_d$. Aquesta assumpció no resta generalitat a l'estudi ja que el sistema de referència triat està relacionat de forma unívoca amb qualsevol altre sistema de referència sobre l'objecte manipulat.

Els elements que pertanyen a l'espai de treball són:

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{x} \in SE(3) \mid \exists \boldsymbol{\theta}_i \ i = 0, \dots, r-1 \ \mathbf{B}_i \mathcal{K}_{in_i}(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{O}_i = \mathbf{x}\} \quad (3.1)$$

Les igualtats d'aquesta definició són igualtats entre elements de $SE(n)$, però es poden expressar també en forma de les seves equivalents de posició i orientació:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{B}_j} & \mathbf{p}_{\mathbf{B}_j} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_j(\boldsymbol{\theta}_j) & \mathbf{p}_j(\boldsymbol{\theta}_j) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{O}_j} & \mathbf{p}_{\mathbf{O}_j} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x & \mathbf{p}_x \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

i aprofitant que $\mathbf{x} = \mathcal{K}_{in_0}(\boldsymbol{\theta}_0)$ es pot reescriure l'equació anterior de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{B}_j} & \mathbf{p}_{\mathbf{B}_j} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_j(\boldsymbol{\theta}_j) & \mathbf{p}_j(\boldsymbol{\theta}_j) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{O}_j} & \mathbf{p}_{\mathbf{O}_j} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\theta}_0) & \mathbf{p}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

reagrupant s'obté l'expressió:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{B}_j} \mathbf{R}_j(\boldsymbol{\theta}_j) \mathbf{R}_{\mathbf{O}_j} & \mathbf{R}_{\mathbf{B}_j} \mathbf{R}_j(\boldsymbol{\theta}_j) \mathbf{p}_{\mathbf{O}_j} + \mathbf{R}_{\mathbf{B}_j} \mathbf{p}_j(\boldsymbol{\theta}_j) + \mathbf{p}_{\mathbf{B}_j} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\theta}_0) & \mathbf{p}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A partir d'aquesta equació es pot reescriure la definició de l'espai de treball a partir de les components de posició i orientació:

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = (\mathbf{R}, \mathbf{p}) \in SE(3), \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \boldsymbol{\theta}_i \in \mathcal{C}_i, \boldsymbol{\theta}_0 \in \mathcal{C}_0 \\ \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{R}_i(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i} = \mathbf{R} = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{R}_i(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} + \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta}_i) + \mathbf{p}_{\mathbf{B}_i} = \mathbf{p} = \mathbf{p}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

Seguidament s'estudiarà la composició de l'espai de treball destre (\mathcal{W}_D), i el realitzable \mathcal{W}_R corresponents a la cadena cinemàtica tancada a partir de l'espai de treball (\mathcal{W}^i), l'espai destre (\mathcal{W}_D^i) i l'espai realitzable (\mathcal{W}_R^i) de cadascun dels robots que formen el sistema multirobot.

3.2 Espai destre

L'espai destre del sistema multirobot, es defineix:

$$\mathcal{W}_D = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \forall \mathbf{R} \in SO(3) \ \exists \boldsymbol{\theta}_i \in \mathcal{C}_i \\ \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{R}_i(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} + \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta}_i) + \mathbf{p}_{\mathbf{B}_i} = \mathbf{p} = \mathbf{p}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{R}_i(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i} = \mathbf{R} = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

d'acord amb aquesta formulació per tal que un punt pertanyi a l'espai destre del sistema multirobot, és necessari que pertanyi a l'espai destre del robot de referència i que els punts corresponents a la resta de robots tinguin un conjunt d'orientacions compatibles.

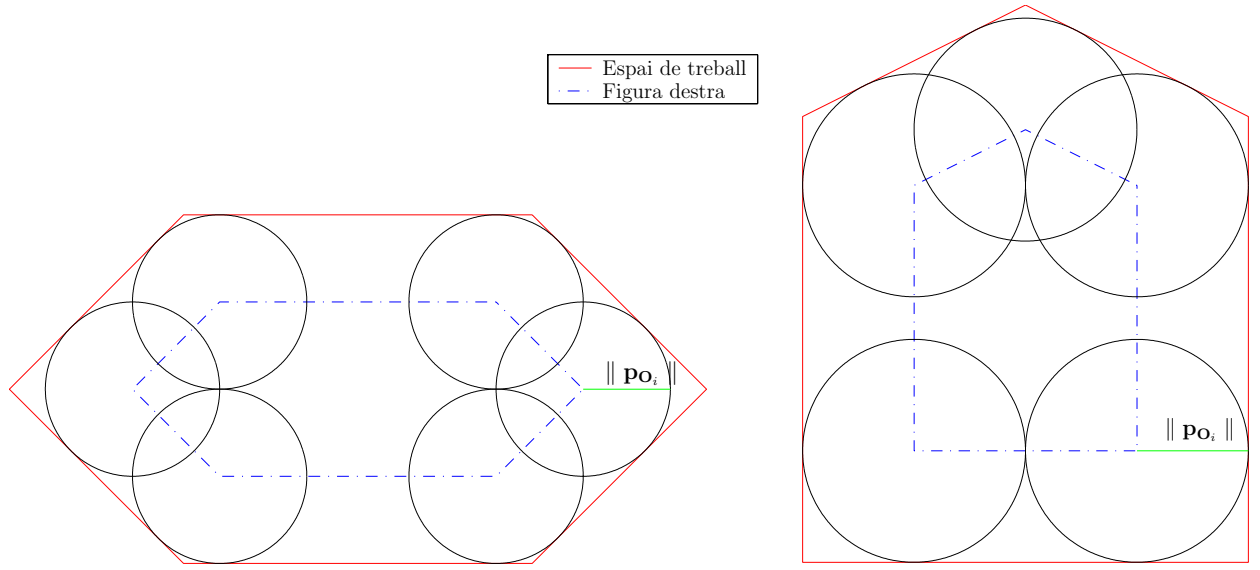


Figura 3.1: Exemples de figura destra per espais de treball hexagonal i pentagonal.

Definició 3.1 $\Phi_i(\mathbf{p}) \triangleq \{ \mathbf{R} \in SO(n) \mid \exists \boldsymbol{\theta}_i \mid \mathbf{R} = \mathbf{R}_i(\boldsymbol{\theta}_i) \ \& \ \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta}_i) = \mathbf{p} \}$

És a dir $\Phi_i(\mathbf{p})$ és el conjunt d'orientacions que el robot i pot assolir quan el seu element terminal està situat en la posició \mathbf{p} .

Corolari 3.1 Si $\mathbf{p} \in \mathcal{W}_D^i$ aleshores $\Phi_i(\mathbf{p}) = SO(n)$.

Corolari 3.2 Per tal que un punt \mathbf{p} pertanyi a l'espai destre del sistema multirobot, $\mathbf{p} \in \mathcal{W}_D^0$, i la resta de robots han de complir les restriccions:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i}^T (\mathbf{p} + \mathbf{p}_{\mathbf{B}_i} + \mathbf{R} \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i}^T \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i}^T \mathbf{R} \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i}^T &\subset \Phi_i(\mathbf{p}_i) \end{aligned}$$

En el cas 2D, per cada punt \mathbf{p} , els punts \mathbf{p}_i , estan distribuïts sobre un cercle de radi $\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$ i centre $\mathbf{R}_{\mathbf{B}_i}^T (\mathbf{p} + \mathbf{p}_{\mathbf{B}_i})$. En cadascun dels punts d'aquest cercle, és necessari que el robot i pugui assolir una orientació concreta ($\mathbf{R}_{\mathbf{B}_i}^T \mathbf{R} \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i}^T$).

En el cas 3D, per cada punt \mathbf{p} , els punts \mathbf{p}_i , estan distribuïts sobre una esfera de radi $\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$ i centre $\mathbf{R}_{\mathbf{B}_i}^T (\mathbf{p} + \mathbf{p}_{\mathbf{B}_i})$. En cadascun dels punts sobre l'esfera, és necessari que el robot i pugui assolir tota una varietat unidimensional d'orientacions que corresponen:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{B}_i}^T \mathbf{R} \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i}^T \mid (\mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{p}_i - \mathbf{p} - \mathbf{p}_{\mathbf{B}_i}) = \mathbf{R} \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i}^T \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}$$

Si s'utilitza una representació en forma d'eix i angle de la rotació, és necessari que en el punt \mathbf{p}_i , el robot i pugui generar totes les rotacions possibles al voltant d'un eix definit per : $(\mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{p}_i - \mathbf{p} - \mathbf{p}_{\mathbf{B}_i}) \times \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}$.

Les condicions del corol·lari 3.2 no impliquen que $\mathbf{p}_i \in \mathcal{W}_D^i$. Però per introduir simetria i facilitar l'estudi s'assumirà que $\mathbf{p}_i \in \mathcal{W}_D^i$.

Sota aquesta assumpció, la definició anterior es pot rescriure de la forma:

$$\mathcal{W}_D^* = \{ \mathbf{p} \in \mathcal{W}_D^0 \mid \forall \mathbf{R} \in SO(3) \ \mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \subset \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \circ \mathcal{W}_D^i + \mathbf{p}_{\mathbf{B}_i} \}$$

on \circ nota la aplicació de la rotació $\mathbf{R}_{\mathbf{B}_i}$ sobre tots els punts que formen \mathcal{W}_D^i .

Definició 3.2 *La figura destra ($\widetilde{\mathcal{W}}_D^i$) d'un robot i amb espai de treball destre \mathcal{W}_D^i que està agafant rígidament un objecte, i que presentar una relació de prensió (\mathbf{O}_i) entre el sistema de referència sobre l'objecte i el sistema de referència sobre l'element terminal del robot es defineix com:*

$$\widetilde{\mathcal{W}}_D^i \triangleq \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{R} \in SO(3) \ \mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \} \subset \mathcal{W}_D^i \quad (3.7)$$

La figura destra es pot interpretar en termes que quin seria l'espai destre del robot quan està manipulant un objecte de tamany $\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$ [Gupta, 1997]. Estrictament correspon a l'espai destre d'un sistema de referència col·locat a una distància $\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$ de l'element terminal del robot.

Proposició 3.1 *La figura destra del sistema multirobot és independent de la orientació entre els diferents sistemes coordenats en els sistemes coordenats de prensió.*

Demostració

Trivial a partir de la observació de la equació 3.7.

Proposició 3.2 *La figura destra del sistema multirobot és independent de la situació relativa de les bases dels diferents robots.*

Demostració

Trivial a partir de la observació de la equació 3.7.

Manipulant adequadament la definició de la figura destra, i tenint en compte que el conjunt de punts que formen $\mathbf{R}\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}$ defineixen un cercle/esfera de radi $\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$ i centre l'origen, és possible redefinir la figura destra tenint això en compte.

Definició 3.3 *La figura destra es pot expressar:*

$$\widetilde{\mathcal{W}}_D^i = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{esf}(\mathbf{x}, \| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|) \subset \mathcal{W}_D^i \}$$

on $\text{esf}(\mathbf{c}, r)$ correspon al cercle (esfera) de centre \mathbf{c} i radi r .

Aquesta nova manera de visualitzar la figura destra, permet construir de manera senzilla la figura destra d'un espai de treball. Per calcular-la únicament cal determinar els punts de l'espai destre del manipulador i en els que una circumferència (esfera) centrada en ells està

totalment inscrita en \mathcal{W}_D^i . En termes de morfologia matemàtica aquesta operació correspon a una erosió amb un element estructurant que és un cercle de radi $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$.

Com es pot veure en la definició de la figura destra i visualitzar en els exemples presentats [Figura 3.1], la figura destra del robot i presenta una superfície (volum) més petita que el seu espai destre, i va disminuint a mesura que $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$ va creixent. Fins al punt que a partir d'un cert valor de $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$ la figura destra serà nul·la.

Lema 3.1 *De la definició anterior és dedueix que:*

$$\mathcal{W}_D \supset \mathcal{W}_D^* = \left(\mathbf{B}_i \circ \widetilde{\mathcal{W}_D^i} \right) \cap \mathcal{W}_D^0$$

Aquesta nova formulació permet expressar l'espai destre com la intersecció de dos conjunts de punts. Això fa possible la generació de l'espai destre d'un sistema multirobot d'una manera eficient.

Proposició 3.3 *El tamany de l'espai destre disminueix a mesura que $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$ augmenta. La màxima distància sobre \mathbb{R}^n que pot separar els punts de premsió i que fa que l'espai destre sigui no nul és el radi maximal de la esfera (cercle) que pot ésser inscrit en l'espai destre més petit dels robots que intervenen en el sistema multirobot.*

Demostració

En el cas en que $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$ presenti un valor superior al del radi de la esfera (cercle) de màxim radi que es pot incloure totalment dins l'espai destre del robot i , la seva figura destra és nul·la i per tant l'espai de treball destre del sistema multirobot també ho serà.

3.3 Espai realitzable

3.3.1 Definició

L'espai realitzable correspon a la projecció de l'espai de treball sobre \mathbb{R}^n . Per tant, és el conjunt de posicions que es pot assolir en alguna orientació. Així l'espai realitzable estarà format per totes aquelles posicions que verifiquin la següent definició:

$$\mathcal{W}_R = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{R} \in SO(n) \exists \boldsymbol{\theta}_i \in \mathcal{C}_i, \boldsymbol{\theta}_0 \in \mathcal{C}_0 \\ \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{R}_i(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{p}_{O_i} + \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta}_i) + \mathbf{p}_{\mathbf{B}_i} = \mathbf{p} = \mathbf{p}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{R}_i(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{R}_{O_i} = \mathbf{R} = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Per facilitar l'estudi de l'espai realitzable es farà en dos passos, un primer en el que únicament es tindrà en compte l'equació de posició i un segon en el que es verificarà si l'equació d'orientació es compleix en els punts que s'han determinat en el primer pas.

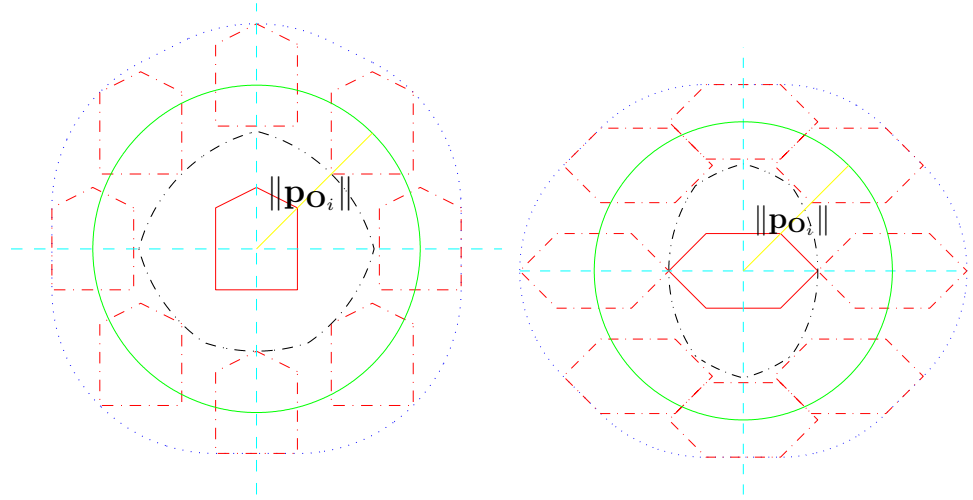
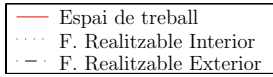


Figura 3.2: Exemples de figures realitzables per espais de treball hexagonal i pentagonal.

Definició 3.4 La figura realitzable ($\widehat{\mathcal{W}}_R^i$) d'un robot amb un espai de treball \mathcal{W}^i , que està manipulant un objecte rígid amb prensió rígida, que presenta una relació entre el sistema de referència sobre l'objecte manipulat i el sistema de referència sobre el robot \mathbf{O}_i , es defineix com:

$$\widehat{\mathcal{W}}_R^i \triangleq \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{R} \in SO(n), \mathbf{p}_i \in \mathcal{W}_R^i \ \mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} + \mathbf{p}_i \}$$

aquest conjunt està format per tots els punts de \mathbb{R}^n que podria assolir el robot i agafant un objecte tal que la distància entre el sistema de referència del robot i el de referència sobre l'objecte és $\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$, en el suposat cas en que aquest manipulador pogués assolir totes les orientacions en totes les posicions.

Definició 3.5 Una expressió equivalent a la anterior és:

$$\widehat{\mathcal{W}}_R^i \triangleq \bigcup_{\forall \mathbf{R} \in SO(n)} \{ \mathbf{R}\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} + \mathcal{W}_R^i \}$$

en aquesta nova expressió es pot visualitzar que l'objecte realitzable s'obté desplaçant l'espai realitzable una distància igual al mòdul de $\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}$ en totes les direccions possibles, la unió de tots els espais de treball desplaçat forma la figura realitzable (Figura 3.2).

Definició 3.6 Una definició equivalent a l'anterior és:

$$\widehat{\mathcal{W}}_R^i = \text{esf}(\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|, \mathbf{0}) * \mathcal{W}_R^i$$

on $*$ representa la convolució dins \mathbb{R}^n .

Proposició 3.4 *L'objecte realitzable no depèn de la distribució de \mathbf{p}_{O_i} ja que només depèn del seu mòdul ($\|\mathbf{p}_{O_i}\|$).*

Proposició 3.5 *L'espai realitzable del sistema multirobot és un subconjunt de la intersecció de l'objecte realitzable i l'espai realitzable del robot de referència:*

$$\mathcal{W}_R \subset \mathcal{W}_R^* = \{\mathbf{B}_i \circ \widehat{\mathcal{W}}_R^i\} \cap \mathcal{W}_R^0$$

De la intersecció hi ha punts que no pertanyen a \mathcal{W}_R ja que no compleixen l'equació de rotació.

Proposició 3.6 *L'espai realitzable del sistema multirobot és independent de la orientació entre els diferents sistemes coordinats en els punts de prensió.*

Proposició 3.7 *Si $\mathcal{W}_R^i = \mathcal{W}_D^i$ i $\mathcal{W}_R^0 = \mathcal{W}_D^0$ aleshores $\mathcal{W}_R = \mathcal{W}_R^*$.*

3.3.2 Problemàtica d'Orientació

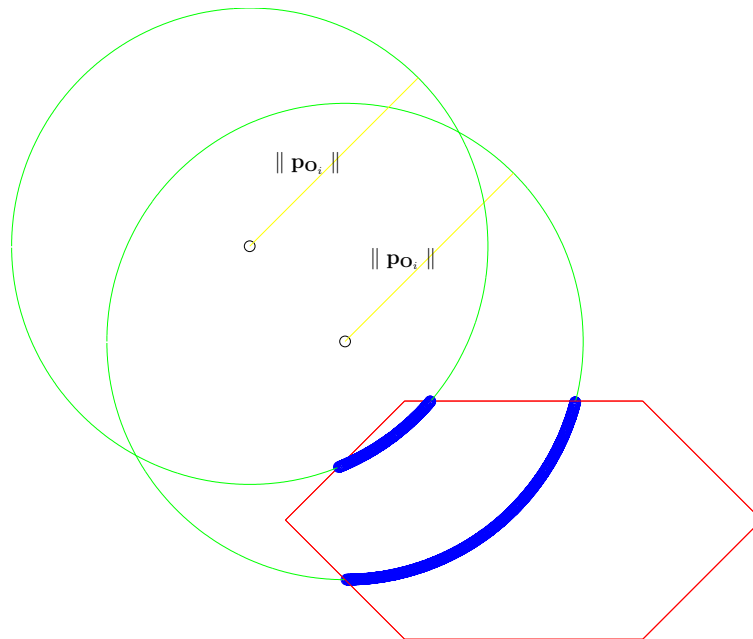


Figura 3.3: Punts que generen un mateix punt dins la figura realitzable.

En la secció anterior s'ha presentat un procediment per determinar \mathcal{W}_R^* , els punts que formen \mathcal{W}_R^* són punts candidats a pertànyer a \mathcal{W}_R . Ara la pregunta clau és: “Donat un punt $\mathbf{p} \in \mathcal{W}_R^*$ pertany a \mathcal{W}_R ?”, aquesta pregunta es pot emmarcar dins una pregunta més genèrica, que és: “Donat un punt $\mathbf{p} \in \mathcal{W}_R^*$ quin rang d'orientacions es pot assolir en ell?”. Per definició, si el rang d'orientacions és no nul aleshores $\mathbf{p} \in \mathcal{W}_R$.

Per tal d'estudiar aquest problema s'haurà d'estudiar en detall les característiques de l'equació d'orientació de la restricció cinemàtica:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{R}_i(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i} = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\theta}_0)$$

cal tenir en compte que interessa avaluar aquesta equació en un punt \mathbf{p} . Per tant la part dreta de la igualtat únicament podrà prendre valors del conjunt $\Phi_0(\mathbf{p})$. Per estudiar els valors que haurà de prendre $\mathbf{R}_i(\boldsymbol{\theta}_i)$ es manipula l'equació anterior per tal d'obtenir :

$$\mathbf{R}_i(\boldsymbol{\theta}_i) = \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i}^T \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i}^T$$

per tant $\mathbf{R}_i(\boldsymbol{\theta}_i)$ haurà de prendre valors dins el conjunt $\mathbf{R}_{\mathbf{B}_i}^T \Phi_0(\mathbf{x}) \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i}^T$. A diferència del que passa sobre el robot 0, el punt en que s'han d'assolir les orientacions no és constant i depèn de $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\theta}_0)$. Per tant abans de verificar si les orientacions són assolibles, serà necessari determinar el punts on s'ha de verificar.

Els punts de \mathcal{W}_R^i en que s'haurà d'estudiar l'equació corresponen directament a :

$$\Lambda_{\mathbf{p}}^i = \text{esf}(\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|, \mathbf{p}) \cap \mathbf{B}_i \circ \mathcal{W}_R^i$$

que correspon als punts que estan directament lligats amb \mathbf{p} . En la figura 3.3, s'il·lustra el conjunt de punts que formarien $\Lambda_{\mathbf{p}}^i$ pel cas d'un espai de treball hexagonal.

En un punt $\mathbf{y}_i \in \Lambda_{\mathbf{p}}^i$, el robot i pot assolir les orientacions $\Phi_i(\mathbf{y}_i)$, donat que la relació entre \mathbf{p} i \mathbf{y}_i és:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{y}_i + \mathbf{p}_{\mathbf{B}_i} - \mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \quad (3.9)$$

\mathbf{R} ha d'ésser una rotació sobre un eix perpendicular al pla definit per $\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}$ i $\mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{y}_i + \mathbf{p}_{\mathbf{B}_i} - \mathbf{p}^\dagger$, i una quantitat igual a l'angle entre els dos vectors. En el cas 2D això defineix unívocament la rotació, però el cas 3D aquestes especificacions defineixen tota una varietat unidimensional de rotacions. Així si \mathbf{R} correspon al conjunt d'orientacions solució de (3.9), el conjunt d'orientacions possibles en el punt \mathbf{x} i fixant \mathbf{y}_i seran:

$$\mathbf{R} \cap \Phi_0(\mathbf{x}) \cap \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \Phi_i(\mathbf{y}_i) \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i}$$

finalment el conjunt d'orientacions que el sistema multirobot podrà assolir en el punt \mathbf{p} ($\Phi(\mathbf{p})$) serà:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \bigcup_{\forall \mathbf{y}_i \in \Lambda_{\mathbf{p}}^i} \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{B}_i, \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}, \mathbf{y}_i, \mathbf{p}) \cap \Phi_0(\mathbf{p}) \cap \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \Phi_i(\mathbf{y}_i) \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i} \right\} \quad (3.10)$$

on $\mathbf{R}(\mathbf{B}_i, \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}, \mathbf{y}_i, \mathbf{p})$ correspon a les solucions de (3.9).

Proposició 3.8 *Un punt $\mathbf{x} \in \mathcal{W}_R^*$, pertany a \mathcal{W}_R si i només si $\Phi(\mathbf{p}) \neq \emptyset$.*

[†] En el cas particular que $\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} = \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{y}_i + \mathbf{p}_{\mathbf{B}_i} - \mathbf{p}$ la rotació \mathbf{R} és respecte l'eix definit per $\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}$.

3.3.3 Qualitat de l'espai de treball

Una mesura que es sol emprar per estudiar la qualitat d'un punt (\mathbf{p}) de l'espai realitzable, és la quantitat d'orientacions es poden assolir en ell. Així doncs aquesta mesura es pot avaluar com:

$$\text{vol}(\Phi(\mathbf{p}))$$

on vol correspon a la mesura de volum sobre $SO(3)$. En el cas el punt estudiat (\mathbf{p}) pertanyi a l'espai destre $\text{vol}(\Phi(\mathbf{p})) = 8\pi^2 \text{rad}^3$.

Per tal d'estudiar l'evolució de la qualitat de l'espai de treball a mesura que augmenta la distància entre els punts de prensió del robot de referència i el robot i ($\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|$), s'utilitzarà una aproximació circular/esfèrica de l'espai realitzable del robot i (\mathcal{W}_R^i), i s'estudiarà en aquest cas aproximat.

Donat l'espai de treball realitzable d'un robot \mathcal{W}_R^i , és possible trobar una cercle/esfera de radi mínim que inclou tots els punts de \mathcal{W}_R^i , $C_{\mathcal{W}_R^i} = \text{esf}(r, \mathbf{c})$.

El conjunt d'orientacions possibles en un punt determinat de l'espai de treball del sistema multirobot queda fixat per la intersecció amb entre \mathcal{W}_R^i i un cercle/esfera de radi $\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|$ i cercle el punt estudiat ($\text{esf}(\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|, \mathbf{x})$). Un cas conservador és calcular-les a través de la intersecció entre $\text{esf}(\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|, \mathbf{x})$ i $C_{\mathcal{W}_R^i}$. El volum obtingut per aquest cas serà sempre superior o igual al real.

En els casos en que que $r > \|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|$, és possible aplicar un desplaçament a $C_{\mathcal{W}_R^i}$ de tal manera que el cercle de radi $\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|$ estigui totalment contingut dins $C_{\mathcal{W}_R^i}$, d'aquesta manera el rang d'orientacions assolibles serien totes les possibles. Posteriorment, per $\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\| > r$ no és possible incloure totalment $\text{esf}(\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|, \mathbf{x})$ dins $C_{\mathcal{W}_R^i}$, per aquest motiu el rang d'orientacions que es poden assolir deixa d'ésser complet. En aquests casos la situació relativa que presenta una intersecció de longitud/superfície màxima s'obté en el cas en que la distància entre els centres és $\sqrt{\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|^2 - r^2}$. En aquesta situació, pel cas 2D s'obté que el tant per 1 de la longitud que pertany a la intersecció respecte al longitud de cercle complert és:

$$\frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|^2 - r^2}} \right)$$

De manera similar en el cas 3D el tant per 1 de la superfície que pertany a la intersecció respecte a la superfície total de la esfera és

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|^2 - r^2}}{\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|} \right)$$

en ambdós casos s'observa que a mesura que $\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|$ augmenta la proporció de la intersecció cada cop és més petita. Per tant la quantitat d'orientacions possibles en el cas òptim és cada cop més petita. A partir de la observació d'aquesta evolució és possible formular la següent conjectura.

Conjectura 3.1 *La qualitat de l'espai de treball decreix al augmentar la distància entre els sistemes coordenats de prensió.*

3.4 Espai d'orientació constant

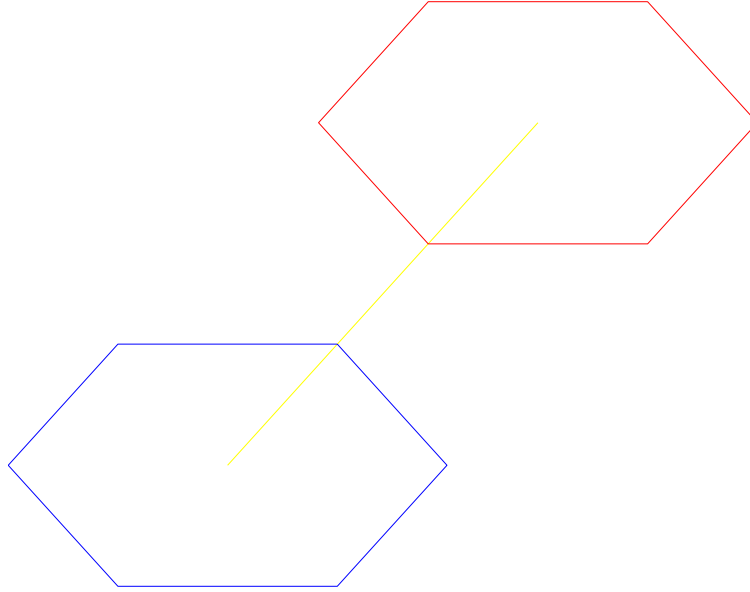


Figura 3.4: Exemple d'espai d'orientació constant.

Seguint un enfoc similar al emprat en el cas de l'espai realitzable, primerament s'estudiarà la forma que presenta l'espai d'orientació constant del sistema multirobot, en el cas que tots els manipuladors poden agafar totes les orientacions en tots els punts, i posteriorment s'eliminaran els punts que no compleixen les restriccions d'orientació.

En la definició 3.5 es presentava l'espai realitzable com la unió dels espais d'orientació constant per totes les orientacions, per tant en el cas de treballar amb una única orientació predeterminada ($\alpha \in SO(n)$), el conjunt de punts és:

$$\mathcal{W}_\alpha^* = \{ \mathbf{p} \in \mathcal{W}_R^0, \mathbf{p} \in \alpha \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i}^T \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} + \mathbf{B}_i \circ \mathcal{W}_R^i \} \quad (3.11)$$

on cal destacar que $\alpha \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i}^T \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}$ és un desplaçament constant. Aquest espai de treball correspon a la intersecció de l'espai de treball del manipulador de referència i del manipulador i afectada per la transformació \mathbf{B}_i i desplaçada una distància $\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$ en una direcció que depèn de la orientació de treball.

Com en el cas de l'espai realitzable, en aquesta primera aproximació s'ha assumit que la equació d'orientació sempre es compleix, aquesta verificació es planteja inicialment per cada punt \mathbf{p} de l'espai d'orientació constant. Les restriccions que han de complir els diferents punts per pertànyer a l'espai d'orientació constant d'una orientació α predeterminada són:

$$\begin{aligned} \alpha &\in \Phi_0(\mathbf{p}) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i}^T \alpha \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i}^T &\in \Phi_i(\mathbf{y}_i) \end{aligned}$$

on $\mathbf{y}_i = \mathbf{R}_{\mathbf{B}_i}^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\mathbf{B}_i} - \alpha \mathbf{R}_{\mathbf{O}_i}^T \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i})$.

Cal tenir en compte que la posició relativa de les bases (\mathbf{B}_i) pot ésser crítica en la forma i el àrea/volum de l'espai d'orientació constant.

3.5 Espai de treball per rangs de posicions de prensió

Quan es dissenya una cel·la multirobot és possible que no es manipuli únicament un tipus de peces, o que la manera d'agafar les peces pugui canviar durant el procés de manipulació, per aquest motiu té interès saber quin serà l'espai de treball comú per tot aquest conjunt de configuracions.

Seguint amb l'enfoc d'estudiar primer el conjunt de punts possibles i després validar-los a través de les equacions de rotació. Si $[\mathcal{W}_R^*]_r$ és l'espai de treball del sistema multirobot per una distància entre el sistema coordinats de prensió de r , i el que interessa és determinar els punts de treball candidats a pertànyer a l'espai de treball comú per un conjunt de distàncies de prensió Ψ , es pot calcular com la intersecció de tots ells, es a dir:

$$[\mathcal{W}_R^*]_{\Psi} = \bigcap_{\forall r \in \Psi} [\mathcal{W}_R^*]_r \quad (3.12)$$

com en el cas del càlcul de l'espai de treball realitzable aquestes expressions es poden ficar en funció de la configuració relativa de les bases (\mathbf{B}_i), i per tant és possible utilitzar la definició pel disseny de cel·les multirobot.

L'estudi de les orientacions pot ésser més complex, ja que els estudis presentats anteriors, realitzen l'estudi del conjunt d'orientacions possibles en un punt de l'espai fixat, això permetia determinar un punt $\mathbf{p} \in \mathcal{W}_R^0$ i punt $\mathbf{y}_i \in \mathcal{W}_R^i$. Encara que el punt \mathbf{p} és independent del valor de r , el valor de \mathbf{y}_i un cop fixar \mathbf{B}_i , estaran fortament lligats al valor de r . No resulta evident determinar quines orientacions seran possibles. Això implicarà fer un estudi d'orientacions per cadascun dels valors de r i posteriorment calcular la intersecció del conjunt d'orientacions possibles per cadascun d'ells.

3.6 Trajectòries dins l'espai de treball

Molts cops resulta interessant intentar dissenyar un espai de treball tal que un conjunt de posicions estiguin incloses en ell, de la mateixa manera, és important que algunes trajectòries que puguin unir aquests punts estiguin totalment incloses en ell.

Un primer punt és la definició de trajectòria i posició, en el cas en que aquestes es defineixen sobre $SE(n)$, cosa que implica fixar la posició i la orientació és una condició força més restrictiva que el cas de fixar únicament la posició, es a dir definir les trajectòries sobre \mathbb{R}^n .

Un enfoc senzill per aquest darrer plantejament és enfocar-ho de forma similar a com s'ha fet en el cas del disseny de l'espai realitzable, es a dir expressar inicialment el conjunt de posicions-trajectòries en el sistema de referència del manipulador de referència. En el suposat cas que no sigui possible situats totes les posicions-trajectòries en el seu interior, el problema no té

solució. En cas en que sigui possible, es pot determinar la posició relativa de les bases \mathbf{B}_i en la figura realitzable del robot i inclogui també el conjunt de posicions-trajectòries desitjades. Posteriorment a aquest procés serà necessari realitzar un estudi de les orientacions possibles en cadascun de les posicions.

Capítol 4

Aplicació a robots tipus SCARA

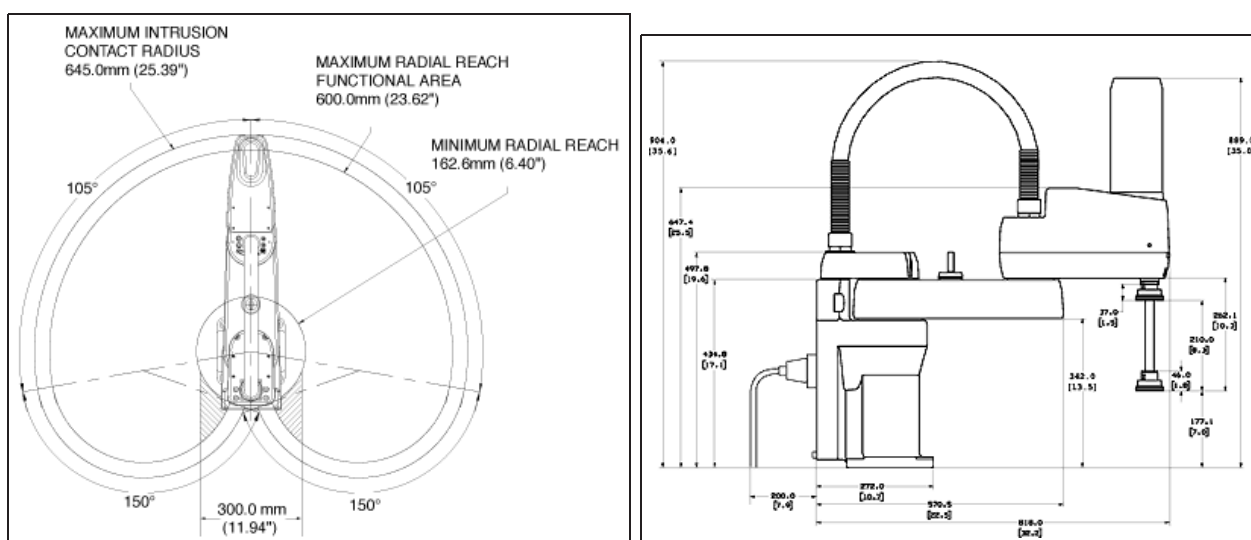


Figura 4.1: Exemple de robot industrial tipus SCARA (Font: http://www.adept.com/main/products/robots/cobra600_dr.html)

En aquest capítol es desenvolupa d'estudi d'una cel·la multirobot composta per dos robots tipus SCARA (Figura 4.1). Aquests tipus de robots són de gran interès en les tasques de muntatge per la seva precisió i rapidesa en els moviments.

En la pràctica presenten 4 graus de llibertat, els dos primers de rotació permeten posicionar-se dins sobre un pla horitzontal, mentre que el tercer prismàtic permet fixar el pla de treball. Finalment una quarta articulació de rotació permet fixar l'orientació de l'element terminal. Des d'un punt de vista de l'espai de treball les característiques de les dues primeres articulacions fixaran la morfologia de l'espai de treball sobre un pla, mentre que la tercera genera una translació prismàtica d'aquest. Per tant les característiques de l'espai de treball vindran fixades per les dues primeres articulacions i la quarta, per tant es pot menysprear la tercera a aquests efectes. Així en aquest capítol s'assumirà que els robots no presenten aquesta tercera articulació.

4.1 Caracterització cinemàtica d'un robot scara

4.1.1 Descripció cinemàtica

articulació	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	θ_{min}	θ_{max}
1	0	0	0	θ_1	θ_1^{min}	θ_1^{max}
2	0	L_1	0	θ_2	θ_2^{min}	θ_2^{max}
3	0	L_2	0	θ_3	θ_3^{min}	θ_3^{max}

Taula 4.1: Paràmetres DH d'un robot pla de tres graus de llibertat de rotació.

Totes les articulacions que formen aquest tipus de robot generen rotacions respecte eixos perpendiculars a un mateix pla, per aquest motiu el moviment de l'element terminal del robot està restringit a un pla. Els paràmetres cinemàtics que defineixen la seva estructura es poden veure en la taula 4.1, on L_1 i L_2 corresponen a les longituds de les articulacions 1 i 2, θ_i representa la configuració de l'articulació i , i finalment $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ correspon al rang de valors que pot prendre la articulació i .

Les equacions que regulen la cinemàtica es poden obtenir aplicant el formalisme del producte de exponencials en coordenades espaials:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = e^{\widehat{\mathbf{B}}_1 \theta_1} e^{\widehat{\mathbf{B}}_2 \theta_2} e^{\widehat{\mathbf{B}}_3 \theta_3} \mathbf{N}$$

on:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -L_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -L_1 - L_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 + L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

amb el que la cinemàtica pren la forma

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \cos(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_3) & -\sin(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_3) & 0 & \cos(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2) L_2 + L_1 \cos \boldsymbol{\theta}_1 \\ \sin(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_3) & \cos(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_3) & 0 & \sin(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2) L_2 + L_1 \sin \boldsymbol{\theta}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Una característica important d'aquesta cinemàtica és el fet que la posició i la orientació es poden desacoblar fàcilment, es a dir per fixar una posició sobre el pla s'utilitzen les dues primeres articulacions, mentre que la tercera s'utilitza per compensar la orientació introduïda per les dues primeres i fixar la orientació desitjada.

A partir d'aquesta equació és possible obtenir la aplicació tangent en cada punt, en coordenades

de l'objecte:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} L_2 \sin \theta_3 + L_1 \sin (\theta_2 + \theta_3) & L_2 \sin \theta_3 & 0 \\ L_2 \cos \theta_3 + L_1 \cos (\theta_2 + \theta_3) & L_2 \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

o en coordenades del món:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & L_1 \sin \theta_1 & L_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) + L_1 \sin \theta_1 \\ 0 & -L_1 \cos \theta_1 & -L_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) - L_1 \cos \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

4.1.2 Singularitats i partició de l'espai de configuracions

L'estudi de les configuracions singulars es realitzarà a partir de l'estudi de les aplicacions tangents anteriorment presentades. Les configuracions singulars coincidiran amb la pèrdua de rang d'aquestes, és a dir quan les columnes 1 i 2 de (4.3) o les 2 i 3 de (4.4) s'al·linein. Això es produeix quan:

$$\sin \theta_2 = 0 \quad (4.5)$$

Aquesta equació té per solució $\theta_2 = 0 + \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$, aquestes configuracions corresponen a quan la segona articulació del robot està totalment alineada amb la primera.

Donat que tots els graus de llibertat són cíclics, en el cas de no haver límits mecànics, el número de particions generades és infinit, i les fronteres de cadascuna estan definides per les singularitats i les corbes $\theta_1 = \alpha_1 + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ i $\theta_3 = \alpha_3 + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$, on α_1 i α_3 s'utilitzen per fixar l'origen del mallat, ja que en principi no hi ha cap manera natural e fer-ho.

Un cas molt habitual en el cas de robots industrials, és que hi hagi limitacions mecàniques, es a dir que les articulacions presentin un rang finit de treball. En la pràctica, la distribució més habitual queda determinada per $-\pi < \theta_1^{min} < \theta_1 < \theta_1^{max} < \pi$, $-\pi < \theta_2^{min} < \theta_2 < \theta_2^{max} < \pi$, i $-\pi < \theta_3^{min} < \theta_3 < \theta_3^{max} < \pi$. En aquest cas l'espai de configuracions únicament presenta dues parts* :

- $\mathcal{C}^1 = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid 0 < \theta_2 < \theta_2^{max}, \theta_1^{min} < \theta_1 < \theta_1^{max}, \theta_3^{min} < \theta_3 < \theta_3^{max}\}$
- $\mathcal{C}^2 = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \theta_2^{min} < \theta_2 < 0, \theta_1^{min} < \theta_1 < \theta_1^{max}, \theta_3^{min} < \theta_3 < \theta_3^{max}\}$

En la figura 4.2 es mostra un esquema de les particions i la seva relació amb les solucions de la cinemàtica inversa.

* Un cas habitual és que $\theta_3^{max} - \theta_3^{min} > 2\pi$, en aquests casos el número de parts és més elevat

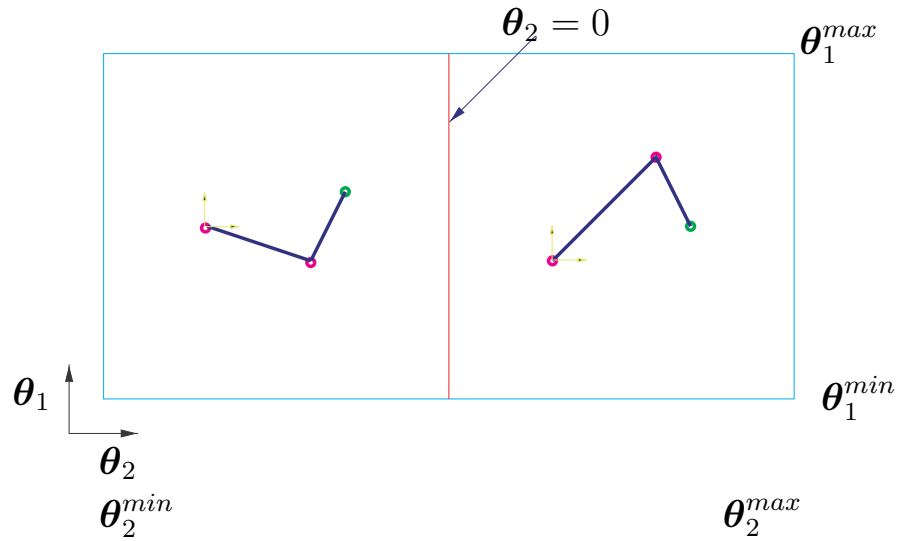


Figura 4.2: Esquema de les particions i la seva relació amb les solucions de la cinemàtica inversa

4.1.3 Estudi de l'espai de treball

Les fronteres de l'espai de treball d'un robot estan definides per aquelles configuracions corresponents a alguna singularitat o algun límit mecànic. Per tant, identificant cadascun d'aquests elements serà possible determinar automàticament les fronteres de l'espai de treball. Cadascuna d'aquestes entitats correspondrà directament amb alguna de les fronteres de les cel·les de l'espai de configuracions. Donat que pels robots tipus SCARA les dues primeres articulacions s'utilitzen per fixar la posició. Estudiant el comportament la cinemàtica de les dues primeres articulacions serà possible estudiar el rang de posicions assolible pel robot.

En el cas en que θ_3 té un rang de treball superior o igual a 2π , aleshores en totes les posicions serà possible assolir totes les orientacions. En cas contrari el rang d'orientacions assolible en un punt serà igual al rang de valors que pugui prendre θ_3 , encara que la distribució dependrà de la orientació fixada per les dues primeres articulacions.

En els estudis que seguiran s'assumirà que $L_2 < L_1$. Aquesta simplificació permet simplificar algunes de les expressions resultants.

A mode d'exemple estudiarà l'espai de treball associat a la primera partició. Aquesta partició sobre \mathcal{C} té forma de rectangle:

$$\begin{array}{ccc}
 P_C^2 = (\theta_1^{\max}, \theta_2^{\min}) & \begin{array}{c} \rho_C^3 = \theta_1^{\max} \\ \rho_C^4 = \theta_2^{\max} \\ \rho_C^1 = \theta_1^{\min} \\ \rho_C^2 = \theta_2^{\min} \end{array} & P_C^3 = (\theta_1^{\max}, \theta_2^{\max}) \\
 P_C^1 = (\theta_1^{\min}, \theta_2^{\min}) & & P_C^4 = (\theta_1^{\min}, \theta_2^{\max})
 \end{array}$$

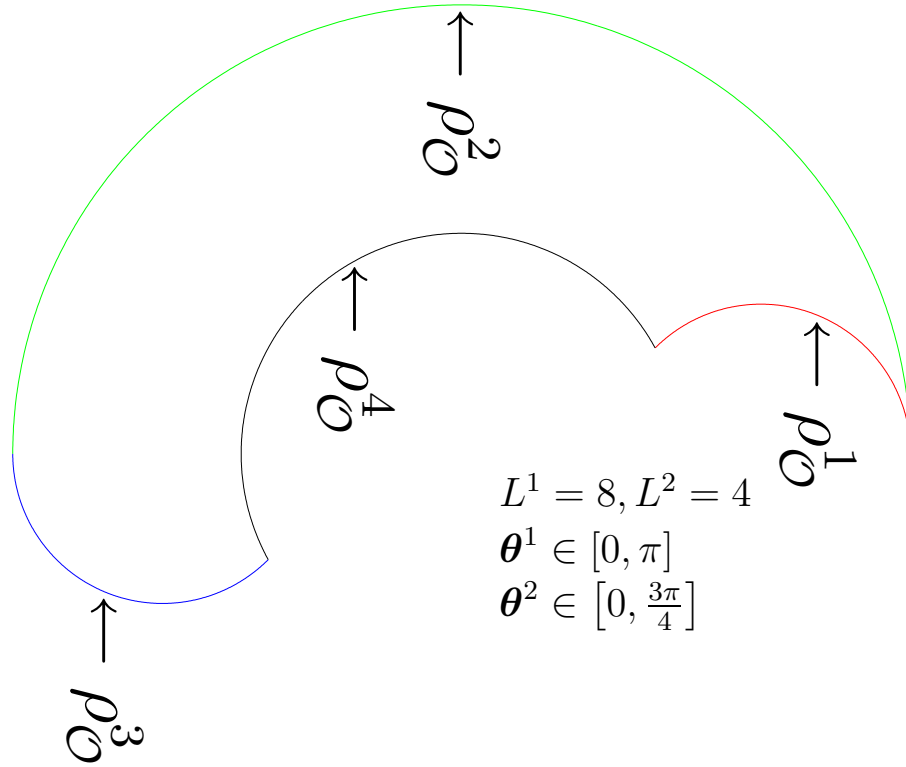


Figura 4.3: Exemple de l'espai de treball i corbes que formen la seva frontera.

per tant la frontera de la partició està definida per quatre corbes (ρ_C^i) que en aquest cas són segments de recta. Cadascuna d'aquestes corbes té una equivalent sobre l'espai de treball (ρ_O^i) obtinguda a través de la aplicació de la cinemàtica sobre ρ_C^i . Les corbes ρ_O^i definiran la frontera de la partició sobre \mathcal{O} . Les expressions analítiques de cadascuna d'aquestes corbes són:

- $$\rho_O^1 = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1^{\min} + L_2 \cos(\theta_1^{\min} + \theta_2) \\ L_1 \sin \theta_1^{\min} + L_2 \sin(\theta_1^{\min} + \theta_2) \end{bmatrix} \theta_2 \in [\theta_2^{\max}, \theta_2^{\min}] \quad (4.6)$$

aquesta expressió correspon a un arc de cercle de centre $L_1 [\cos \theta_1^{\min}, \sin \theta_1^{\min}]$ i radi L_2 amb l'angle en l'interval $[\theta_1^{\min} + \theta_2^{\min}, \theta_1^{\min} + \theta_2^{\max}]$.

- $$\rho_O^2 = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2^{\min}) \\ L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2^{\min}) \end{bmatrix} \theta_1 \in [\theta_1^{\min}, \theta_1^{\max}] \quad (4.7)$$

aquesta expressió correspon a un arc de cercle de centre $[0, 0]$ i radi $L_1^2 + 2L_1L_2 \cos \theta_2^{\min} + L_2^2$ amb l'angle en l'interval

$$\left[\arctan \left(\frac{L_1 \sin \theta_1^{\min} + L_2 \sin(\theta_1^{\min} + \theta_2^{\min})}{L_1 \cos \theta_1^{\min} + L_2 \cos(\theta_1^{\min} + \theta_2^{\min})} \right), \arctan \left(\frac{L_1 \sin \theta_1^{\max} + L_2 \sin(\theta_1^{\max} + \theta_2^{\min})}{L_1 \cos \theta_1^{\max} + L_2 \cos(\theta_1^{\max} + \theta_2^{\min})} \right) \right]$$

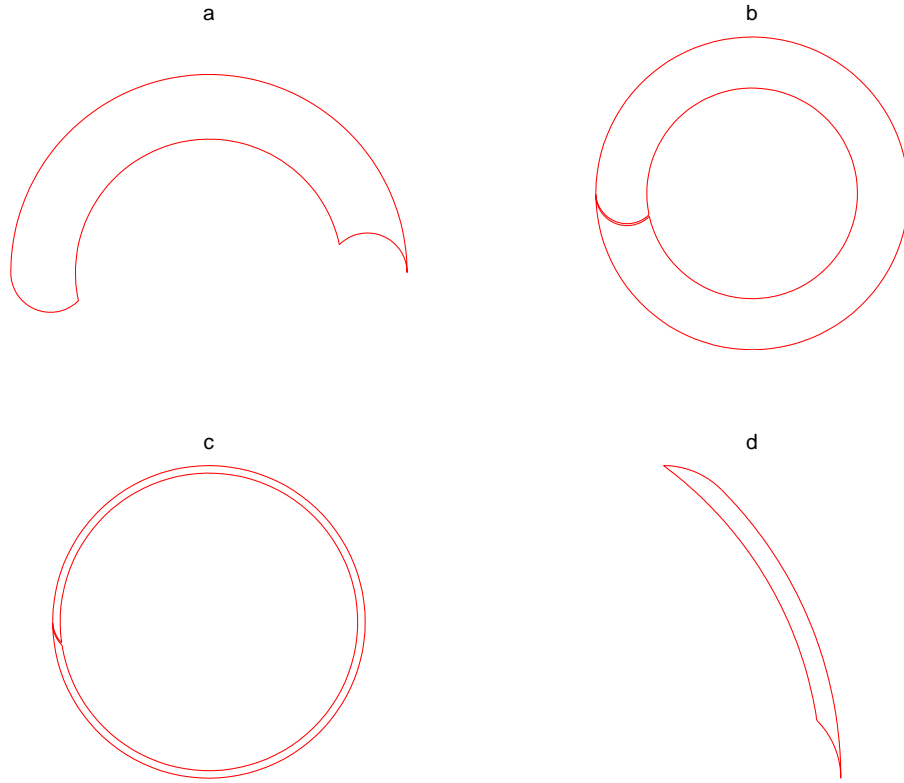


Figura 4.4: Alguns exemples d'espais de treball en robot scara.

•

$$\rho_{\mathcal{O}}^3 = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1^{\max} + L_2 \cos (\theta_1^{\max} + \theta_2) \\ L_1 \sin \theta_1^{\max} + L_2 \sin (\theta_1^{\max} + \theta_2) \end{bmatrix} \theta_2 \in [\theta_2^{\max}, \theta_2^{\min}] \quad (4.8)$$

aquesta expressió correspon a un arc de cercle de centre $L_1 [\cos \theta_1^{\max}, \sin \theta_1^{\max}]$ i radi L_2 amb l'angle en l'interval $[\theta_1^{\max} + \theta_2^{\min}, \theta_1^{\max} + \theta_2^{\max}]$

•

$$\rho_{\mathcal{O}}^4 = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos (\theta_1 + \theta_2^{\max}) \\ L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin (\theta_1 + \theta_2^{\max}) \end{bmatrix} \theta_1 \in [\theta_1^{\max}, \theta_1^{\min}] \quad (4.9)$$

aquesta expressió correspon a un arc de cercle de centre $[0, 0]$ i radi $L_1^2 + 2L_1L_2 \cos \theta_2^{\max} + L_2^2$ amb l'angle en l'interval

$$\left[\arctan (L_1 \sin \theta_1^{\min} + L_2 \sin (\theta_1^{\min} + \theta_2^{\max}), L_1 \cos \theta_1^{\min} + L_2 \cos (\theta_1^{\min} + \theta_2^{\max})), \right. \\ \left. \arctan (L_1 \sin \theta_1^{\max} + L_2 \sin (\theta_1^{\max} + \theta_2^{\max}), L_1 \cos \theta_1^{\max} + L_2 \cos (\theta_1^{\max} + \theta_2^{\max})) \right]$$

Proposició 4.1 *La frontera de l'espai de treball dels robots tipus SCARA està formada per segments de cercles. (Un exemple d'aquestes corbes és Fig. 4.3).*

En la Figura 4.4 es presenta la forma de l'espai de treball per diferents valors dels rangs de treball de les diferents articulacions, i les longituds de les articulacions. Com es pot observar la seva morfologia és prou variada encara que les expressions analítiques de les corbes siguin les mateixes.

4.1.4 Estudi de Manipulabilitat

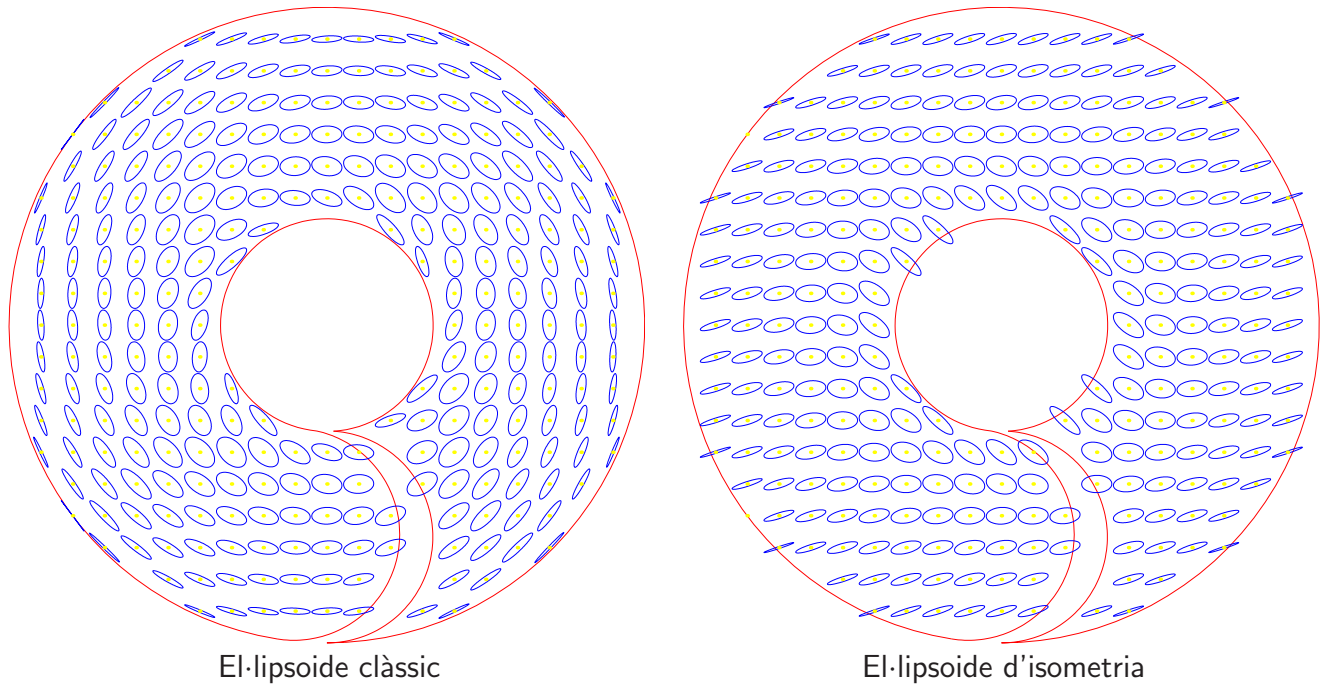


Figura 4.5: El·lipsoids de Manipulabilitat.

Per fer l'estudi de manipulabilitat d'aquest tipus de mecanisme, en primer lloc es definiran les mètriques sobre l'espai de configuracions i sobre l'espai de treball. En l'espai de configuracions es considerarà que el moviment de totes les articulacions té el mateix cost, per tant la mètrica en coordenades dels angles de les articulacions prendrà la forma:

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

mentre que en l'espai de treball s'ha seleccionat una mètrica isotròpica excepte pel grau de llibertat de rotació que tindrà una ponderació diferent:

$$\mathbf{H}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

en aquest cas s'ha seleccionat $\beta = 2$. La mesura d'isometria, entre la mètrica natural de \mathcal{C} i la induïda des de \mathcal{O} a través de la cinemàtica pren la forma:

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}_c^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{H}_o \mathbf{J} \quad (4.12)$$

que en el cas aquí plantejat es pot escriure:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} L_2^2 + 2L_2L_1 \cos \theta_2 + L_1^2 + \beta & L_2^2 + L_2L_1 \cos \theta_2 + \beta & \beta \\ L_2^2 + L_2L_1 \cos \theta_2 + \beta & L_2^2 + \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Es pot observar que la mesura de manipulabilitat únicament depèn de θ_2 , a més el seu determinant és:

$$\beta L_2^2 L_1^2 (1 - (\cos \theta_2)^2)$$

amb la qual cosa es prova que és un mètrica en tots els punts excepte en les singularitats que es comporta com una pseudomètrica.

En la figura 4.5 es presenta una representació de proposada en la secció 2.8 i l'el·lipsoide obtingut clàssic [Yoshikawa, 1990]. La principal diferència entre ambdós és que l'el·lipsoide clàssic està orientat en el sistema de referència, mentre que l'el·lipsoide d'isometria presenta una orientació fixa en l'element terminal del robot.

4.2 Espai de treball del sistema multirobot

Un cop presentades les característiques dels robots SCARA, seguidament es presenten les característiques i propietats de l'espai de treball del sistema multirobot formats per robots d'aquest tipus. L'estudi que es presenta està basat en la metodologia proposada en el capítol 3.

De forma prèvia a l'estudi de l'espai de treball del sistema multirobot es presenta la construcció de la figura destra i la figura realitzable, posteriorment s'analitzaran els espais de treballs associats.

4.2.1 Construcció de la figura destra

Els punts que pertanyen a la figura destra són aquells que pertanyen a l'espai destre del robot i i un cercle de radi $\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|$ centrat en ell està totalment inclòs en el d'espai destre del robot (Definició 3.3). Donat que l'espai de treball d'un robot de tipus SCARA no presenta forats, tots els punts que presenten una distància mínima a la frontera de l'espai de treball major o igual que $\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|$ pertanyen a la figura destra. Per tant la frontera de la figura destra estarà formada per corbes que estan una distància $\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|$ de la frontera de l'espai de treball. Aquestes corbes es poden construir de la manera:

$$\psi_{\mathcal{O}}^i \triangleq \rho_{\mathcal{O}}^i + \text{sign}(\rho_{\mathcal{O}}^i) \frac{\rho_{\mathcal{O}}^{i\perp}}{\|\rho_{\mathcal{O}}^{i\perp}\|} \|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|$$

on $\rho_{\mathcal{O}}^{i\perp}$ representa un vector normal a $\rho_{\mathcal{O}}^i$, $\text{sign}(\psi_{\mathcal{O}}^i)$ val 1 per corbes còncaues ($\rho_{\mathcal{O}}^1, \rho_{\mathcal{O}}^4$) i -1 per corbes convexes ($\rho_{\mathcal{O}}^2, \rho_{\mathcal{O}}^3$).

Així la frontera de la figura destra estarà formada per les corbes.

$$\psi_{\mathcal{O}}^1 = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1^{\min} + (L_2 + \|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|) \cos(\theta_1^{\min} + \theta_2) \\ L_1 \sin \theta_1^{\min} + (L_2 + \|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|) \sin(\theta_1^{\min} + \theta_2) \end{bmatrix}$$

aquesta expressió correspon a un arc de cercle de centre $L_1 [\cos \theta_1^{\min}, \sin \theta_1^{\min}]$ i radi $|L_2 + \|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\||$ amb l'angle en l'interval $[\theta_1^{\min} + \theta_2^{\max}, \theta_1^{\min} + \theta_2^{\min}]$.

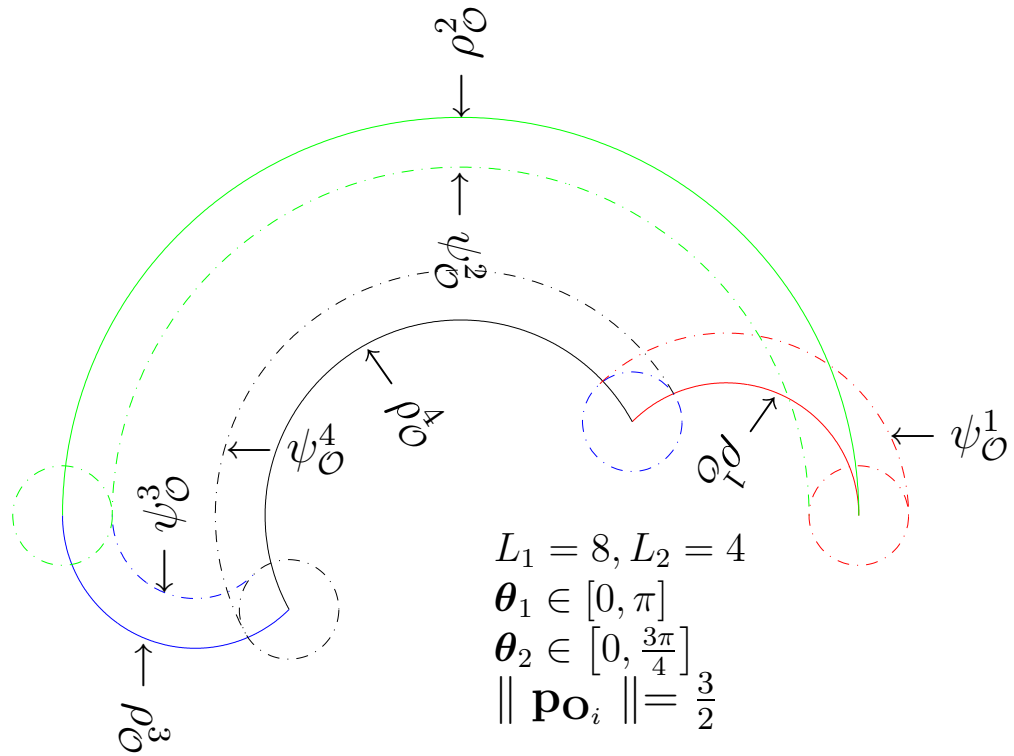


Figura 4.6: Estructura de la figura dreta d'un robot tipus SCARA.

$$\psi_{\mathcal{O}}^2 = \begin{bmatrix} \alpha^1 \cos \theta_1 + \alpha^2 \cos(\theta_1 + \theta_2^{min}) \\ \alpha^1 \sin \theta_1 + \alpha^2 \sin(\theta_1 + \theta_2^{min}) \end{bmatrix}$$

on $\alpha^1 \triangleq L_1 - \frac{L_1 \|\mathbf{p}_{O_i}\|}{\sqrt{2L_1 L_2 \cos(\theta_2^{min}) + L_1^2 + L_2^2}}$ i $\alpha^2 \triangleq L_2 - \frac{L_2 \|\mathbf{p}_{O_i}\|}{\sqrt{2L_1 L_2 \cos(\theta_2^{min}) + L_1^2 + L_2^2}}$ aquesta expressió

correspon a un arc de cercle de centre $[0, 0]$ i radi $\sqrt{(\alpha^2)^2 + (\alpha^1)^2 + 2 \cdot \alpha^1 \cdot \alpha^2 \cos \theta_2^{min}}$ amb l'angle en l'interval

$$\left[\arctan(\alpha^1 \sin \theta_1^{min} + \alpha^2 \sin(\theta_1^{min} + \theta_2^{min}), \alpha^1 \cos \theta_1^{min} + \alpha^2 \cos(\theta_1^{min} + \theta_2^{min})), \right. \\ \left. \arctan(\alpha^1 \sin \theta_1^{max} + \alpha^2 \sin(\theta_1^{max} + \theta_2^{min}), \alpha^1 \cos \theta_1^{max} + \alpha^2 \cos(\theta_1^{max} + \theta_2^{min})) \right]$$

$$\psi_{\mathcal{O}}^3 = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1^{max} + (L_2 - p_{O_i}) \cos(\theta_1^{max} + \theta_2) \\ L_1 \sin \theta_1^{max} + (L_2 - p_{O_i}) \sin(\theta_1^{max} + \theta_2) \end{bmatrix}$$

aquesta expressió correspon a un arc de cercle de centre $L_1 [\cos \theta_1^{max}, \sin \theta_1^{max}]$ i radi $|L_2 - \mathbf{p}_{O_i}|$ amb l'angle en l'interval $[\theta_1^{max} + \theta_2^{min}, \theta_1^{max} + \theta_2^{max}]$.

$$\psi_{\mathcal{O}}^4 = \begin{bmatrix} \alpha^3 \cos \theta_1 + \alpha^4 \cos(\theta_1 + \theta_2^{max}) \\ \alpha^3 \sin \theta_1 + \alpha^4 \sin(\theta_1 + \theta_2^{max}) \end{bmatrix}$$

on $\alpha^3 \triangleq L_1 + \frac{L_1 \|\mathbf{p}_{O_i}\|}{\sqrt{2L_1 L_2 \cos \theta_2^{max} + L_1^2 + L_2^2}}$ i $\alpha^4 \triangleq L_2 + \frac{L_2 \|\mathbf{p}_{O_i}\|}{\sqrt{2L_1 L_2 \cos \theta_2^{max} + L_1^2 + L_2^2}}$ aquesta expressió

correspon a un arc de cercle de centre $[0, 0]$ i radi $\sqrt{(\alpha^3)^2 + (\alpha^4)^2 + 2 \cdot \alpha^3 \cdot \alpha^4 \cos \theta_2^{max}}$

amb l'angle en l'interval

$$\left[\arctan \left(\alpha^3 \sin \theta_1^{\min} + \alpha^4 \sin (\theta_1^{\min} + \theta_2^{\max}), \alpha^3 \cos \theta_1^{\min} + \alpha^4 \cos (\theta_1^{\min} + \theta_2^{\max}) \right), \right. \\ \left. \arctan \left(\alpha^3 \sin \theta_1^{\max} + \alpha^4 \sin (\theta_1^{\max} + \theta_2^{\max}), \alpha^3 \cos \theta_1^{\max} + \alpha^4 \cos (\theta_1^{\max} + \theta_2^{\max}) \right) \right]$$

A més d'aquestes corbes, els cercles de radi $\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$ centrats en els vèrtexs de la frontera de l'espai dret també poden formar part de la frontera de la figura dreta. Un exemple d'aquestes corbes i la seva relació amb l'espai de treball inicial es presenta en la figura 4.6.

Proposició 4.2 *La frontera de la figura dreta dels robots tipus SCARA està formada per segments de cercles.*

Proposició 4.3 *Quan $\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$ creix, l'àrea de la figura dreta decreix.*

Demostració

El valor $\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$ màxim pel que existeix la figura dreta s'obté quan $\psi_{\mathcal{O}}^2$ i $\psi_{\mathcal{O}}^3$ entren en contacte. Això passa per $\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \| = \frac{L_2}{2}$. Cal notar que $\rho_{\mathcal{O}}^2$ i $\rho_{\mathcal{O}}^3$ són cercles i els seus radis estan separats una distància L_2 , i els punts de $\psi_{\mathcal{O}}^2$ estan separats dels de $\psi_{\mathcal{O}}^3$ una distància de $L_2 - 2 \| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$.

Un cop caracteritzada la figura dreta, l'estudi de l'espai de treball dret del sistema multirobot es limita a fixar la posició relativa de les bases, aplicar aquesta transformació a la figura dreta i posteriorment determinar la intersecció amb l'espai de treball de l'altre robot. Donat que ambdues figures estan formades per arcs de cercle aquesta intersecció es pot realitzar analíticament.

Proposició 4.4 *La frontera de l'espai de treball dret d'un robot tipus SCARA està formada per segments de cercle.*

Demostració

Donat que la frontera de la figura dreta i la frontera de l'espai de treball, i que l'espai de treball dret estarà format per la intersecció d'ambdues figures geomètriques.

4.2.2 Construcció de la figura realitzable

La figura realitzable es defineix com la convolució entre un cercle de radi $\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$ i centre l'origen amb l'espai de treball realitzable del robot. Es a dir que qualsevol punt que pertanyi a un cercle de radi $\| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$ i centrat en algun punt que pertanyi a l'espai de treball, pertanyi a la figura realitzable. Seguint aquest plantejament es possible associar a cadascuna de les corbes que formen l'espai de treball, una altra corba generada per l'envolvent obtinguda al passar un cercle sobre aquesta corba. Aquest conjunt d'envolvents es construeixen de la forma:

$$\psi_{\mathcal{O}}^i \triangleq \rho_{\mathcal{O}}^i - \text{sign}(\rho_{\mathcal{O}}^i) \frac{\rho_{\mathcal{O}}^{i \perp}}{\| \rho_{\mathcal{O}}^{i \perp} \|} \| \mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \|$$

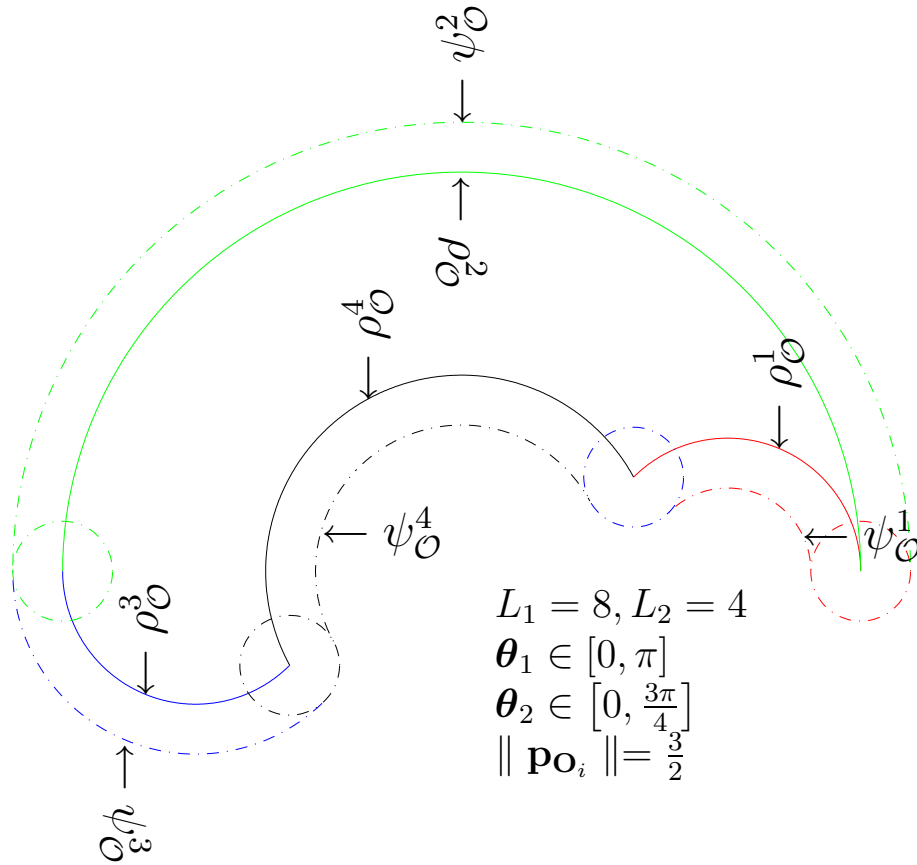


Figura 4.7: Estructura de la figura realitzable per un robot tipus SCARA.

aquesta estructura és similar a la de les corbes de la figura destra, amb la principal diferència del signe en la adició de la component normal.

El resultat d'avaluar aquestes expressions és:

$$\psi_O^1 = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1^{\min} + (L_2 - \|\mathbf{p}_{O_i}\|) \cos(\theta_1^{\min} + \theta_2) \\ L_1 \sin \theta_1^{\min} + (L_2 - \|\mathbf{p}_{O_i}\|) \sin(\theta_1^{\min} + \theta_2) \end{bmatrix}$$

aquesta expressió correspon a un arc de cercle de centre $L_1 [\cos \theta_1^{\min}, \sin \theta_1^{\min}]$ i radi $|L_2 - \|\mathbf{p}_{O_i}\||$ amb l'angle en l'interval $[\theta_1^{\min} + \theta_2^{\min}, \theta_1^{\min} + \theta_2^{\max}]$.

$$\psi_O^2 = \begin{bmatrix} \alpha^5 \cos \theta_1 + \alpha^6 \cos(\theta_1 + \theta_2^{\min}) \\ \alpha^5 \sin \theta_1 + \alpha^6 \sin(\theta_1 + \theta_2^{\min}) \end{bmatrix}$$

on $\alpha^5 \triangleq L_1 + \frac{L_1 \|\mathbf{p}_{O_i}\|}{\sqrt{2L_1 L_2 \cos \theta_2^{\min} + L_1^2 + L_2^2}}$ i $\alpha^6 \triangleq L_2 + \frac{L_2 \|\mathbf{p}_{O_i}\|}{\sqrt{2L_1 L_2 \cos \theta_2^{\min} + L_1^2 + L_2^2}}$ aquesta expressió

correspon a un arc de cercle de centre $[0, 0]$ i radi $\sqrt{(\alpha^5)^2 + (\alpha^6)^2 + 2 \cdot \alpha^5 \cdot \alpha^6 \cos \theta_2^{\min}}$ amb l'angle en l'interval

$$\left[\arctan(\alpha^5 \sin \theta_1^{\min} + \alpha^6 \sin(\theta_1^{\min} + \theta_2^{\min}), \alpha^5 \cos \theta_1^{\min} + \alpha^6 \cos(\theta_1^{\min} + \theta_2^{\min})), \right. \\ \left. \arctan(\alpha^5 \sin \theta_1^{\max} + \alpha^6 \sin(\theta_1^{\max} + \theta_2^{\min}), \alpha^5 \cos \theta_1^{\max} + \alpha^6 \cos(\theta_1^{\max} + \theta_2^{\min})) \right]$$

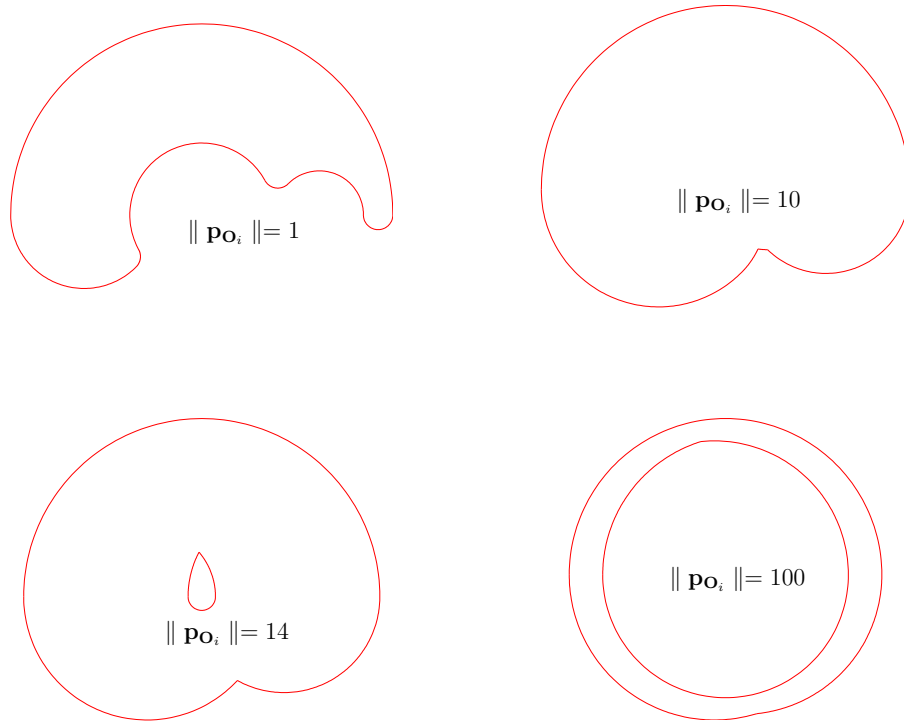


Figura 4.8: Figura realitzable de l'espai de treball presentat en la figura 4.7 per un conjunt de valors de $\| \mathbf{p}_{O_i} \|$.

$$\psi_{\mathcal{O}}^3 = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1^{\max} + (L_2 + \| \mathbf{p}_{O_i} \|) \cos(\theta_1^{\max} + \theta_2) \\ L_1 \sin \theta_1^{\max} + (L_2 + \| \mathbf{p}_{O_i} \|) \sin(\theta_1^{\max} + \theta_2) \end{bmatrix}$$

aquesta expressió correspon a un arc de cercle de centre $L_1 [\cos \theta_1^{\max}, \sin \theta_1^{\max}]$ i radi $\| L_2 + \| \mathbf{p}_{O_i} \| \|$ amb l'angle en l'interval $[\theta_1^{\max} + \theta_2^{\min}, \theta_1^{\max} + \theta_2^{\max}]$.

$$\psi_{\mathcal{O}}^4 = \begin{bmatrix} \alpha^7 \cos \theta_1 + \alpha^8 \cos(\theta_1 + \theta_2^{\max}) \\ \alpha^7 \sin \theta_1 + \alpha^8 \sin(\theta_1 + \theta_2^{\max}) \end{bmatrix}$$

on $\alpha^7 \triangleq L_1 - \frac{L_1 \| \mathbf{p}_{O_i} \|}{\sqrt{2L_1 L_2 \cos \theta_2^{\max} + L_1^2 + L_2^2}}$ i $\alpha^8 \triangleq L_2 - \frac{L_2 \| \mathbf{p}_{O_i} \|}{\sqrt{2L_1 L_2 \cos \theta_2^{\max} + L_1^2 + L_2^2}}$ aquesta expressió

correspon a un arc de cercle de centre $[0, 0]$ i radi $\sqrt{(\alpha^7)^2 + (\alpha^8)^2 + 2 \cdot \alpha^7 \cdot \alpha^8 \cos \theta_2^{\min}}$ amb l'angle en l'interval

$$\left[\arctan(\alpha^7 \sin \theta_1^{\min} + \alpha^8 \sin(\theta_1^{\min} + \theta_2^{\max}), \alpha^7 \cos \theta_1^{\min} + \alpha^8 \cos(\theta_1^{\min} + \theta_2^{\max})), \right. \\ \left. \arctan(\alpha^7 \sin \theta_1^{\max} + \alpha^8 \sin(\theta_1^{\max} + \theta_2^{\max}), \alpha^7 \cos \theta_1^{\max} + \alpha^8 \cos(\theta_1^{\max} + \theta_2^{\max})) \right]$$

A més d'aquestes corbes, els cercles de radi $\| \mathbf{p}_{O_i} \|$ centrats en els vèrtexs de la frontera de l'espai realitzable també poden formar part de la frontera de la figura realitzable. Un exemple d'aquestes corbes i la seva relació amb l'espai de treball inicial es presenta en la figura 4.7.

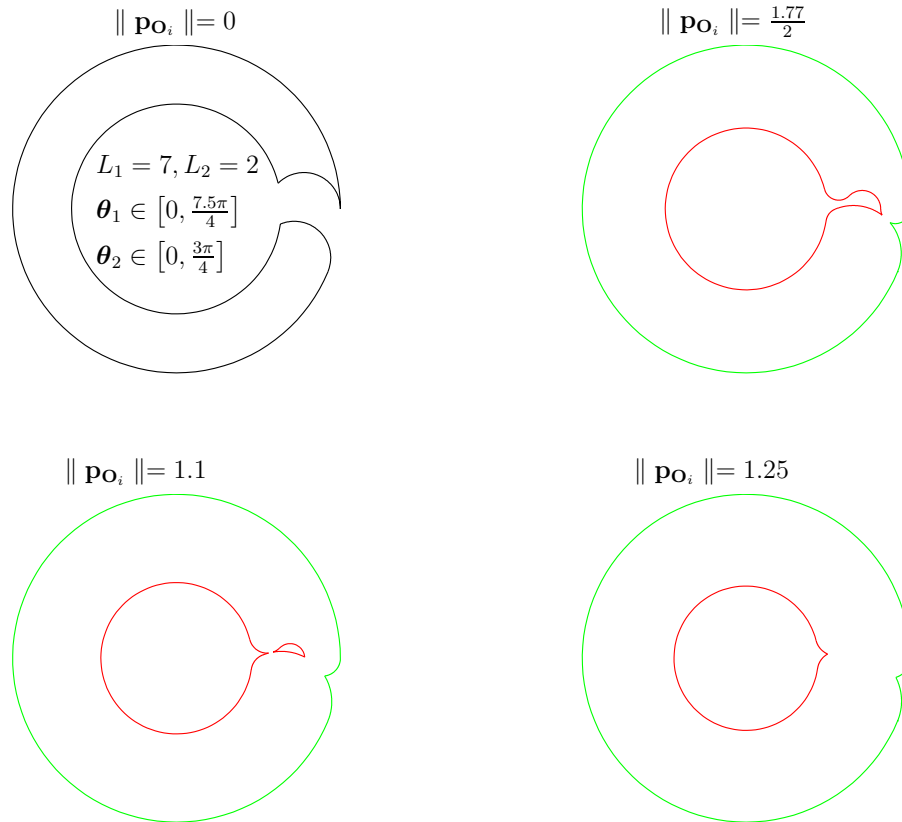


Figura 4.9: Figura realitzable per un conjunt de valors de $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$.

Proposició 4.5 *La frontera de la figura realitzable dels robots tipus SCARA està formada per arcs de cercle.*

Demostració

Un cop observada la forma de les corbes resulta trivial.

A diferència de la figura de la dreta, la figura realitzable presenta una morfologia que és bastant depenent dels valors de $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$, L_1 , L_2 , i el rang de valors que prenen θ_1 i θ_2 . A mode d'exemple la figura 4.8 presenta la evolució de la figura realitzable a mesura que $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$ va augmentant per l'espai de treball presentat en la figura 4.7. Per $\|\mathbf{p}_{O_i}\| = 0$, la figura realitzable correspon directament amb l'espai de treball realitzable; a mesura que $\|\mathbf{p}_{O_i}\| = 0$ va augmentant i per valors de $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$ petits en comparació amb el tamany de l'espai realitzable la figura realitzable presenta una morfologia similar a l'espai de treball amb la principal diferència que els vèrtexs es van suavitzant, ja que són substituïts per cercles de radi $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$; per valors de $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$ més grans alguns d'aquests cercles comencen a intersectar entre ells fent desaparèixer algunes de les corbes (ψ_O^4, ψ_O^1) i la figura realitzable comença a semblar-se cada cop més a un cercle. Aquest procés continua endavant fins que per un valor de $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$ que és aproximadament la meitat del tamany l'espai de treball la figura realitzable presenta un forat interior. Per valors de $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$ més grans la figura realitzable tendeix asimptòticament a una corona circular. Aquest tipus d'evolució es pot considerar genèric, encara que els detalls exactes depenen fortament de les relacions entre els paràmetres que defineixen l'espai de treball realitzable.

En la Figura 4.9 es presenta un altre exemple de la evolució de morfologia de la figura realitzable. En aquest cas particular apareixen forats interns per valors de $\| \mathbf{p}_{O_i} \|$ petits en comparació amb el tamany de l'espai de treball realitzable. Aquest tipus de forat té una procedència totalment diferent que els forats que s'han comentat en l'exemple anterior. Aquest tipus de morfologia apareix quan θ_1 presenta un rang de valors d'amplitud propera a 2π . Encara que per valors petits de $\| \mathbf{p}_{O_i} \|$ aquest tipus d'espai de treball realitzable presenta figures realitzable amb morfologies rares, a mesura que $\| \mathbf{p}_{O_i} \|$ va creixent aquest forats interiors desapareixen i la figura realitzable presenta una morfologia bastant semblant a la del exemple anterior.

Un cop caracteritzada la figura realitzable i l'espai de treball, és necessari fixar la situació relativa de les bases, aplicar-la a la figura realitzable i finalment calcular la intersecció de entre ambdues figures geomètriques. Donat que les fronteres d'ambdues figures geomètriques estan formades per arcs de cercle, és possible determinar analíticament la intersecció i per tant la intersecció.

A diferència del que passa en el cas del càlcul de l'espai de treball, aquí és necessari verificar quin és el conjunt d'orientacions possibles en cada punt d'aquesta intersecció. En el cas pitjor punts que pertanyen a aquesta intersecció no formaran part de l'espai de treball realitzable del sistema multirobot ja que no compliran les equacions de rotació.

4.2.3 Solució del Problema d'orientació

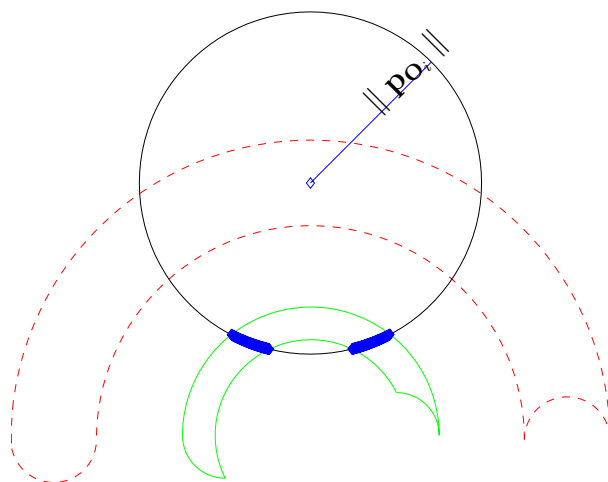


Figura 4.10: Estudi de les orientacions compatibles en un punt donat.

Per determinar el conjunt d'orientacions que es poden assolir en un punt \mathbf{p} predeterminat, s'aplica el procediment descrit en la secció 3.3.2. En el cas en qüestió i donat que totes les figures geomètriques implicades tenen les seves fronteres formades per arcs de cercle, el càlcul de $\Lambda_{\mathbf{p}}^i$ es pot fer analíticament.

Una altra qüestió que simplifica notablement els càlculs és el fet que la cinemàtica inversa de la orientació està desacoblat de la cinemàtica inversa de la posició. Per aquest motiu un

robot SCARA pot assolir un rang d'orientacions en el seu element terminal igual del mateix tamany que rang de valors que pot prendre la seva tercera articulació.

Corolari 4.1 *El rang d'orientacions que el sistema multirobot pot ésser discontinu (Figura 4.10)*

4.3 Disseny

L_1^1	L_2^1	L_3^1	L_1^2	L_2^2	L_3^2
1	$\frac{1}{2}$	0	3	$\frac{1}{2}$	0
θ_1^1	θ_2^1	θ_3^1	θ_1^0	θ_2^0	θ_3^0
$[0, \pi]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[0, 2\pi]$	$[0, \pi]$	$[0, \pi]$	$[0, 2\pi]$

Taula 4.2: Dades numèriques del robot. L_k^j , correspon a la longitud de la articulació k del robot j expressades en unitats de longitud. θ_k^j , correspon al rang de valors de l'articulació k del robot j expressat en radians.

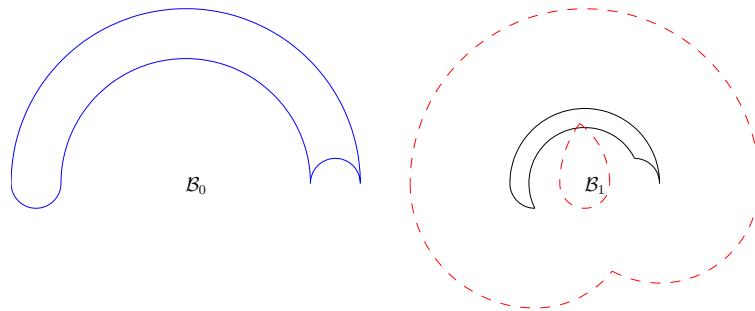


Figura 4.11: Espais de treball realitzables individuals i figura realitzable del robot 1.

Un cop s'han introduït les eines d'anàlisi de l'espai de treball del sistema multirobot, és possible atacar el problema de disseny. En aquest problema s'intenta determinar quina és la situació relativa de les bases (\mathbf{B}_i) que fa que l'espai de treball del sistema multirobot sigui l'òptim. Donada la gran varietat de morfologies que pot presentar l'espai de treball i la figura destra/realitzable sembla complicat sinó impossible determinar de forma genèrica una solució pel problema. Per aquest motiu s'ha plantejat una solució numèrica al problema, en aquest cas i a mode d'exemple es planteja la localització de la situació relativa de les bases tal que es maximitzi l'espai de treball realitzable del sistema multirobot. En els exemples que seguiran s'utilitzaran els valors numèrics del sistema multirobot definit en la Taula 4.2 (Figura 4.11).

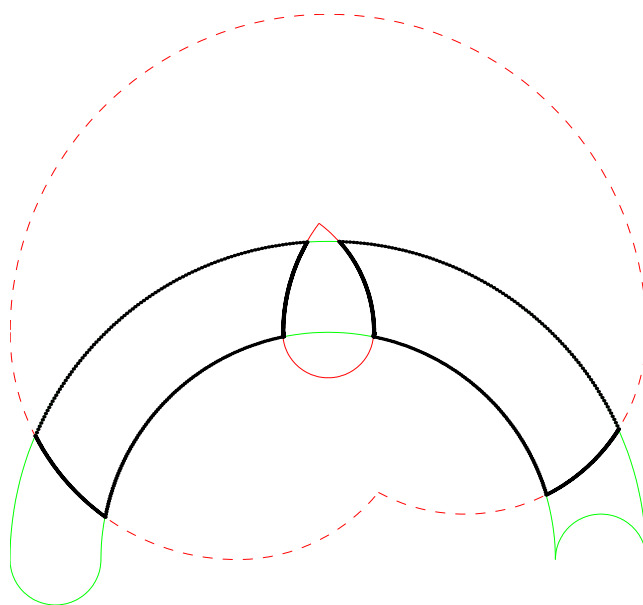


Figura 4.12: La intersecció de l'espai de treball amb la figura realitzable pot estar formada per regions disconnexes.

Així el problema plantejat és:

$$\max_{\mathbf{B}_i} \text{vol}(\mathcal{W}_R)$$

per atacar el problema s'assumeix que $\mathcal{W}_R = \mathcal{W}_R^*$, cosa raonable ja que els rangs de les terceres articulacions és màxim[†]. Com ja s'ha comentat anteriorment el càlcul de $\text{vol}(\mathcal{W}_R)$ es fa de forma analítica, ja que es disposa d'una representació analítica de \mathcal{W}_R .

Aquest problema es pot afrontar amb un algorisme d'optimització clàssic. El principal inconvenient és que la funció de cost és no convexa, per tant es pot caure fàcilment en un mínim local. Per aquest motiu abans d'aplicar el mètode d'optimització es genera un mallat de baixa resolució sobre l'espai de dades, per tal d'obtenir unes condicions inicials adequades al problema d'optimització.

Durant el procés d'optimització és fàcil caure en configuracions en les que l'espai de treball sigui no connex (Figure 4.12). En aquest casos s'avalua el volum de l'espai de treball com el volum de la regió connexa més gran.

Un cop s'ha obtingut la situació relativa òptima és necessari validar el conjunt d'orientacions que es poden obtenir en cadascun dels punts de l'espai de treball. En la Figura 4.13 es presenta la solució obtinguda pel cas estudiat, i codificat amb colors sobre cada punt el rang d'orientacions, expressat en radians, que pot assolir la cadena cinemàtica tancada.

En alguns casos serà necessari introduir restriccions sobre la distància mínima a la que poden estar situades les bases dels diferents robots, per tal d'evitar que estiguin físicament superposades.

[†] Això és així en la majoria de robots SCARA del mercat

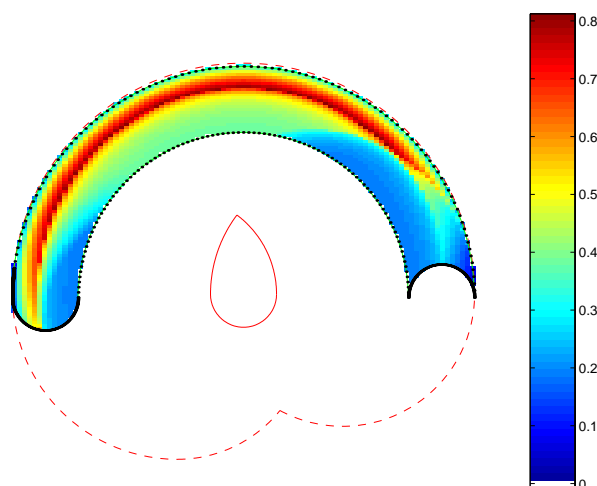


Figura 4.13: Ubicació òptima pel cas dels manipuladors estudiats.

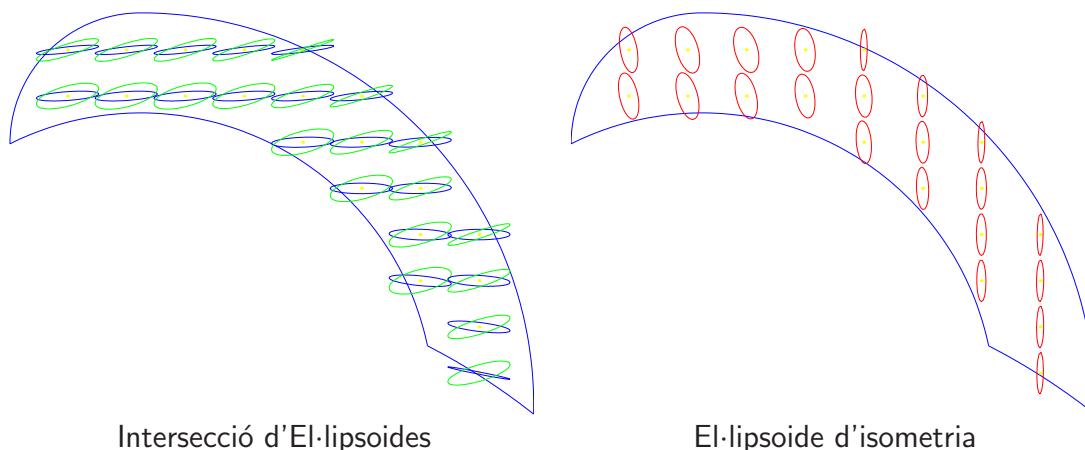


Figura 4.14: El·lipsoides de Manipulabilitat per l'espai de treball de la figura 4.13 estudiat per orientació constant igual a la identitat.

En la figura 4.14 es presenta l'espai de treball, per orientació constant (amb una orientació igual a la identitat), sobre l'espai de treball s'han dibuixat dues mesures de manipulabilitat. En primer lloc es presenta la superposició dels el·lipsoids de manipulabilitat individuals, mentre que en l'altra es presenta la mesura de manipulabilitat proposada (secció 2.8), com es pot veure la intersecció dels el·lipsoids determina algunes zones com inadequades, aquestes mateixes zones són classificades com adequades per la mesura d'isometria proposada. Això és degut a que aquesta segona mesura té en compte l'estructura de la cadena cinemàtica i l'espai de treball mentre que la primera únicament té en compte les característiques individuals de cadascun dels robots.

Capítol 5

Aplicació a robots tipus PUMA

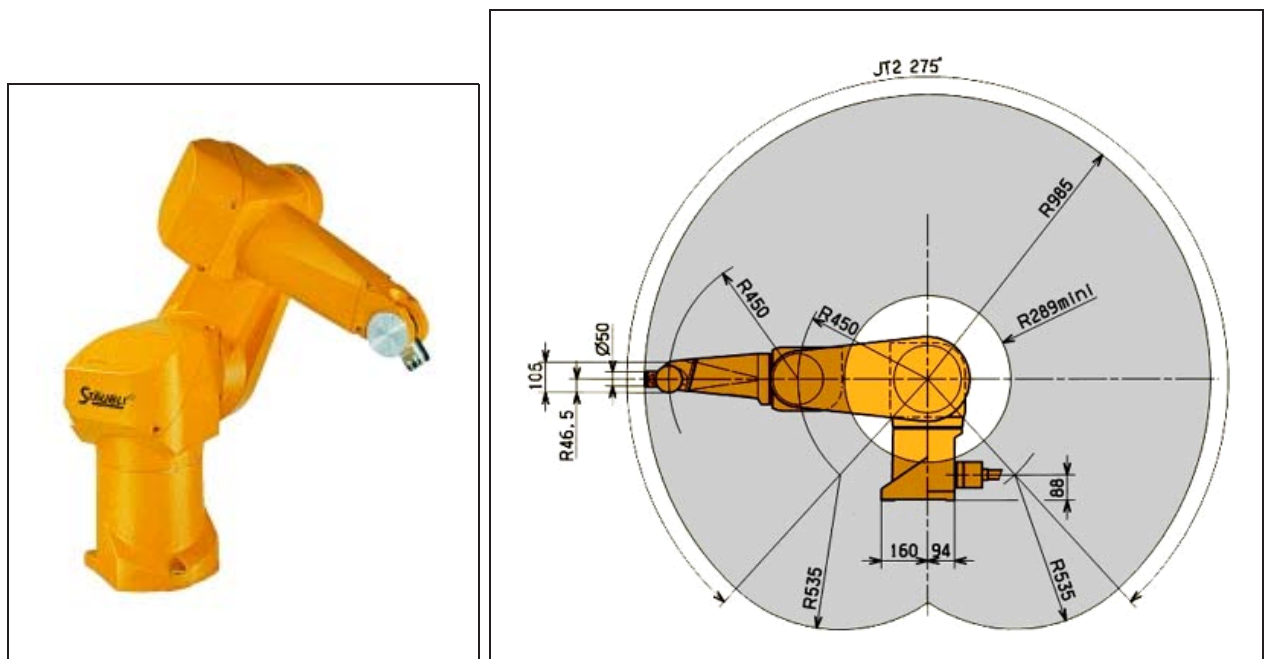


Figura 5.1: Robot RX-90 (Font: <http://www.staubli.com/>).

En aquest capítol es presenta l'aplicació de la metodologia proposada al cas d'una cel·la multirobot composta per dos robots RX-90 (Figura 5.1). Aquests robots presenten una estructura cinemàtica similar a la dels robots PUMA desenvolupats per Unimation. Aquests darrers han esdevinguts uns clàssics tan en la robòtica industrial com en la robòtica teòrica hi han estat estudiats des de diversos punts de vista.

A part de la seva estructura característica aquest tipus de robots ha estat triat ja que la cel·la multirobot de l'Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials (IOC) està formada per robots d'aquest tipus.

5.1 Caracterització cinemàtica d'un robot RX

5.1.1 Descripció

articulació	$\alpha_{i-1}(rad)$	a_{i-1}	d_i	θ_i	θ_{min}	θ_{max}
1	0	0	0	θ_1	θ_1^{min}	θ_1^{max}
2	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	θ_2	θ_2^{min}	θ_2^{max}
3	0	a_2	d_3	θ_3	θ_3^{min}	θ_3^{max}
4	$-\frac{\pi}{2}$	a_3	d_4	θ_4	θ_4^{min}	θ_4^{max}
5	$\frac{\pi}{2}$	0	0	θ_5	θ_5^{min}	θ_5^{max}
6	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	θ_6	θ_6^{min}	θ_6^{max}

Taula 5.1: Paràmetres DH d'un robot amb estructura PUMA.

La cinemàtica dels robots RX-90 presenta una estructura idèntica a la dels robots PUMA (Taula 5.1), amb uns paràmetres que simplifiquen la seva estructura (Taula 5.2). El fet que alguns dels paràmetres s'anul·lin simplifica el càlcul de la cinemàtica directa e inversa, a més de modificar lleugerament la distribució de les singularitats i l'estructura del volum de treball.

Els robots tipus PUMA tenen 6 graus de llibertat de rotació, on els eixos de rotació de les tres darreres articulacions intersecta en un mateix punt. En aquest tipus de mecanismes és possible desacoblar la solució de la cinemàtica inversa en la solució de la posició i la solució de la orientació [Pieper, 1968] [Gupta, 1997] [Merlet, 2000], així els tres primers graus de llibertat s'utilitzen per fixar la posició i els tres darrers per fixar la orientació. Aquesta característica simplifica, notablement, l'estudi de la cinemàtica i l'espai de treball.

5.1.2 Singularitats

Les singularitats d'un robot corresponent a aquelles configuracions on l'aplicació tangent perd algun grau de llibertat. Pel cas d'aplicacions quadrades, això és equivalent a aquelles configuracions on el determinant de la matriu de Jacobi s'anul·la. Pel cas del manipulador

		a_2	a_3	d_3	d_4		
		450mm	0	0	450mm		
θ_1^{min}	θ_1^{max}	θ_2^{min}	θ_2^{max}	θ_3^{min}	θ_3^{max}		
$-\frac{25\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{18}$	$-\frac{227\pi}{180}$	$\frac{47\pi}{180}$	$-\frac{58\pi}{45}$	$\frac{13\pi}{45}$		
θ_4^{min}	θ_4^{max}	θ_5^{min}	θ_5^{max}	θ_6^{min}	θ_6^{max}		
$-\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{28\pi}{45}$	$\frac{28\pi}{45}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$		

Taula 5.2: Paràmetres del robot RX-90 (els angles estan expressats en radians).

RX-90 això correspon a :

$$\det \{J\} = a_2^3 [-\cos \theta_2 + \sin (\theta_2 + \theta_3)] \cos \theta_3 \sin \theta_5 = 0 \quad (5.1)$$

Seguint la anàlisi tradicionalment aplicada sobre als robot tipus PUMA [Craig, 1986]. El determinant 5.1 es pot expressar com el producte de tres elements, cadascun d'ells lligat a una problemàtica concreta i amb una interpretació física diferenciada. Per aquest motiu en els robots de tipus PUMA, i en concret en el RX es sol aplicar la següent classificació:

- Singularitat de Canell (*wrist singularity*) : Aquesta singularitat es produeix quan l'eix de rotació 4 i el 6 queden totalment alineats, i per tant les rotacions del grau de llibertat 4 i del 6 són equivalents.

Des del punt de vista del determinant, aquesta singularitat és equivalent a:

$$\sin \theta_5 = 0$$

Les configuracions que compleixen això són de la forma: $\theta_5 = \{0, \pi\}$. Degut a que la estructura cinemàtica del RX permet desacoblar la posició de la orientació, aquesta singularitat no afecta a la posició.

- Singularitat de Colze (*elbow singularity*) : Aquesta singularitat correspon al cas en que la tercera articulació està totalment alineada amb la segona articulació, i per tant el braç està totalment estirat. Això fa que resulti impossible que l'element terminal s'allunyi més de la base del robot. Per tant aquesta singularitat defineix la frontera exterior de l'espai de treball.

Des del punt de vista del determinant, aquesta singularitat és equivalent a:

$$\cos \theta_3 = 0$$

Els valors de θ_3 que compleixen aquesta equació són de la forma $\theta_3 = \pm \frac{\pi}{2}$, però degut a les restriccions de les articulacions reals del RX-90, les configuracions possibles són únicament de la forma $\theta_3 = -\frac{\pi}{2}$.

La varietat definida per les configuracions que estan sobre aquesta singularitat es notará com ρ_C^1

- Singularitat d'Aliniament (*alignment singularity*): En aquest cas l'eix de rotació 1 s'alinea amb l'eix de rotació 4, per aquest motiu el moviment del primer grau de llibertat no provoca una variació en la posició del canell, i únicament modifica la seva orientació de forma idèntica a la que ho fa el moviment del quart grau de llibertat.

Les característiques d'aquesta singularitat canvien notablement en el cas de robots tipus PUMA ja que aquestes singularitats provoquen l'aparició d'un forat intern en l'espai de treball (cilindre en el cas del robot PUMA560).

Des del punt de vista del determinant, aquesta singularitat és equivalent a:

$$-\cos \theta_2 + \sin (\theta_2 + \theta_3) = 0$$

Les varietats implícites definides per l'equació anterior poden expressar-se en forma de rectes. En concret les rectes contingudes dins a l'espai de treball del RX-90 són:

$$S_1: \theta_3 = -2\theta_2 - \frac{3\pi}{2}, \theta_2 = \frac{-1}{2} (\theta_3 + \frac{3\pi}{2})$$

La varietat definida per les configuracions que estan sobre aquesta singularitat es notará com ρ_C^6 .

$$S_2: \theta_3 = -2\theta_2 + \frac{\pi}{2}, \theta_2 = \frac{-1}{2} (\theta_3 - \frac{\pi}{2}).$$

La varietat definida per les configuracions que estan sobre aquesta singularitat es notará com ρ_C^7 .

$$S_3: \theta_3 = -2\theta_2 - \frac{7\pi}{2}, \theta_2 = \frac{-1}{2} (\theta_3 + \frac{7\pi}{2})$$

La varietat definida per les configuracions que estan sobre aquesta singularitat es notará com ρ_C^8 .

aquestes singularitats no defineixen la frontera de l'espai de treball sinó que són interiors a l'espai de treball.

5.1.3 Particions de l'espai de configuracions

5.1.3.1 Descripció

Les articulacions dels robot RX estan limitades, per límits mecànics, i per tant encara que siguin de rotació, es poden considerar de forma anàloga a com si fossin lineals ja que el tenir en compte que són elements de rotació no aporta cap millora substancial a l'estudi. Amb aquesta consideració l'espai de configuracions pren la forma d'un paral·lelepípede 6 dimensional. Les fronteres d'aquest paral·lelepípede estan formades pels límits de cadascuna de les articulacions, el seu interior està descomposat en diferents parts, i la frontera de cadascuna de les parts està formada per uns hipersuperfície generada per un límit mecànic o bé una singularitat. Cadascuna d'aquestes parts tindrà associat un volum en l'espai de treball que estarà lliure de singularitats o límits mecànics, per aquest motiu resulta d'interès estudiar-les.

Es pot comprovar que hi ha un desacoblament total entre les singularitats generades per les 3 primeres articulacions i les 3 últimes. Per aquest motiu, és possible estudiar les particions de l'espai de treball per separat.

5.1.3.2 Articulacions d'orientació

El conjunt de les articulacions d'orientació està format per les articulacions que mouen el canell dels robots (és a dir les 4, 5 i 6). Aquestes articulacions únicament estan afectades per la singularitat de canell. Per tant les particions de l'espai de configuracions estaran definides per aquesta singularitat i les limitacions mecàniques de cadascuna de les articulacions* .

Des del punt de vista de les orientacions que són assolibles, cal indicar que aquesta estructura del canell és similar a una representació de la orientació en forma d'angles d'Euler Z-Y-Z. En aquesta parametrització, per tal de cobrir totes les rotacions possibles, el primer angle ha de

* És possible trobar en el mercat manipuladors RX-90 que tenen la articulació 6 de gir infinit. En aquest cas seria convenient tractar aquesta articulació com a \mathcal{T}^1 i no com un segment de \mathbb{R}

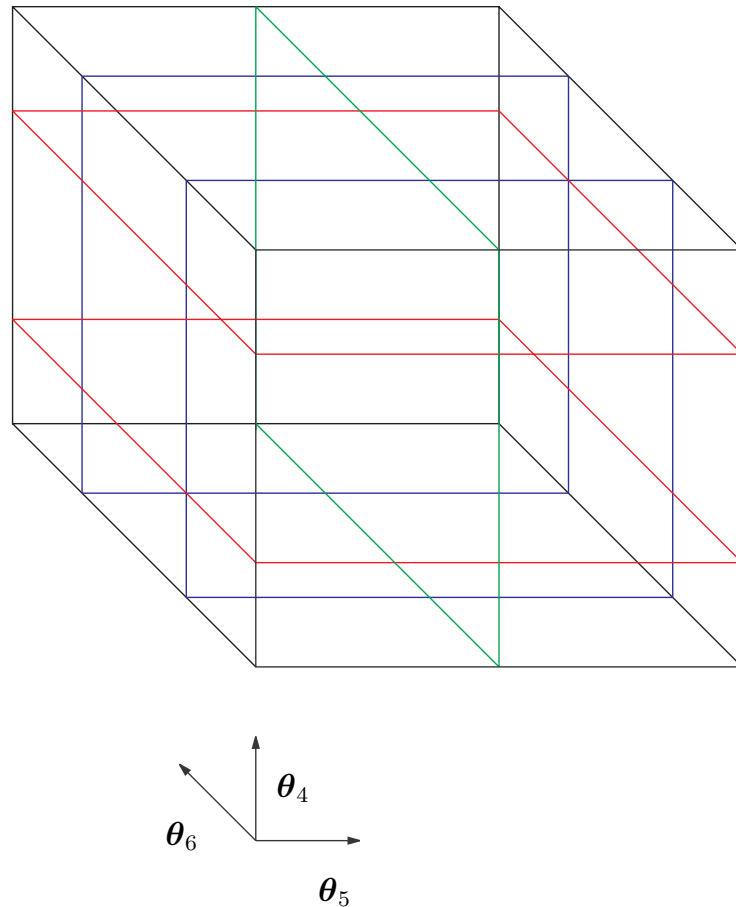


Figura 5.2: Estructura de l'espai de configuracions de les articulacions de rotació

prendre valors en 0 i 2π , el segon entre 0 i π , i finalment el tercer entre 0 i 2π [Craig, 1986]. D'acord amb els paràmetres del RX-90 (Taula 5.2), la articulació 4 (primera rotació Z) i la articulació 6 (segona articulació Z) presenten un rang més gran de $2 * \pi$ i per tant compleixen la restricció anterior. D'altra banda cal tenir en compte que la articulació 5 (rotació Y) no pot assolir tots els angles entre 0 i π , ja que les rotacions negatives són equivalents a les rotacions positives.

Per tant, les singularitats generen dues particions, una per $\theta_5 > 0$ i l'altra per $\theta_5 < 0$. Donat que θ_4 i θ_6 tenen rangs superiors a 2π (totes dues tenen un rang 3π), hi haurà diferents configuracions que tindran la mateixa equivalència en \mathcal{O} . Aquest fet introdueix unes singularitats addicionals degudes al canvi de variables emprat per representar un rang de treball més gran que 2π [Haug et al., 1992] [Wang and Wu, 1993] [Qiu et al., 1995]. La situació d'aquestes singularitats dins l'espai de configuracions depèn del canvi de variables aplicat.

En la pràctica es poden plantejar dos tipus de canvis de variable:

- El primer tipus planteja la descomposició : $[\theta_i^{\min}, \theta_i^{\min} + 2\pi]$ $[\theta_i^{\min} + 2\pi, \theta_i^{\max}]$
Aquesta primera proposta presenta el principal avantatge que el número de particions és mínim, i el seu principal inconvenient és la asimetria introduïda
- El segon tipus planteja la descomposició : $[\theta_i^{\min}, -\pi]$, $[-\pi, \pi]$, $[\pi, \theta_i^{\max}]$
Aquesta segona proposta presenta el avantatge de la simetria, a canvi d'introduir un nombre més elevat de particions.

Cal recordar que aquestes noves particions són traspassables sense cap tipus de problema, ja que no són singularitats reals. Per aquest motiu en aquest treball s'ha assumit el segon tipus de partició, ja que, encara que augmenti el tipus de particions, introdueix un factor de simetria que pot facilitar notablement l'aplicació posterior d'algorismes de planificació de trajectòries. Així doncs, inicialment és recomanable treballar en les particions centrals, encara que si és necessari es poden fer excursions en les particions del cantó de forma simètrica.

Recapitulant, les articulacions 4 i 6 introduiran 3 particions del segment de la recta real, metre que la 5 únicament n'introduirà dues. S'obté així un total de 18 particions ($3 \times 2 \times 3$), dues de les quals seran de tamany màxim, mentre que la resta seran d'un tamany bastant inferior i totes elles del mateix tamany.

Cal tenir en compte que les singularitats cinemàtiques únicament parteixen l'espai de configuracions d'orientació en dues parts, però que l'existència dels límits mecànics i la necessitat de que la relació entre l'espai de treball i el de configuracions sigui una bijecció introdueix les particions restants.

5.1.3.3 Articulacions de Posició

De forma similar al cas de la orientació, pot assumir-se que l'espai de configuracions definit per les tres primeres articulacions pot assumir-se que correspon a un cub, ja que totes les articulacions presenten límits mecànics i tenen un rang de treball inferior a 2π . Donat que les singularitats de posició són independents de l'articulació 1, les seccions de les superfícies per l'articulació 1 constant definides per les singularitats sobre l'espai de configuracions seran idèntiques. Per aquest motiu s'estudiarà primerament la forma i distribució de cadascuna d'aquestes seccions. En la Figura 5.3 es presenta la representació gràfica d'aquestes seccions.

Les fronteres de les particions estaran formades per varietats bidimensionals, unes primeres degudes a les singularitats cinemàtiques $(\rho_C^1, \rho_C^6, \rho_C^7, \rho_C^8)$ i unes altres degudes als límits mecànics $(\rho_C^2, \rho_C^3, \rho_C^4, \rho_C^5, \rho_C^9, \rho_C^{10} \dagger)$

Inicialment la secció de l'espai de configuracions s'ha descomposat en dues gran parts delimitades per la singularitat de Colze. Aquestes parts rebran el nom de P1 i P2 respectivament. Cadascuna d'aquestes particions està travessada per dues rectes corresponents

[†] ρ_C^9, ρ_C^{10} , corresponen a les varietats tals que la articulació 1 està en el seu mínim i el seu màxim respectivament.

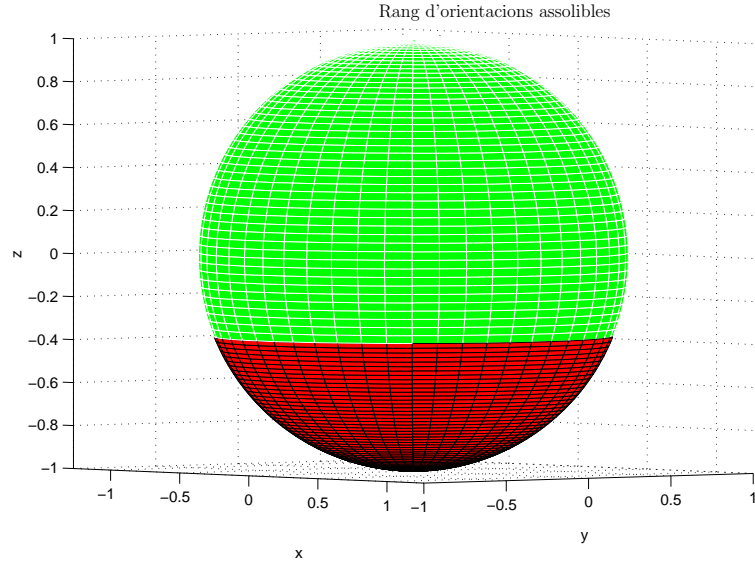


Figura 5.4: Rang d'orientacions assolibles (verd) pel canell del RX-90.

$\theta_5^{\min} = -\theta_5^{\max}$). Per tant estudiant el rang d'orientacions en una d'aquestes particions es pot determinar l'espai d'orientacions que pot adoptar el canell.

La figura 5.4 representa el conjunt d'orientacions assolibles pel canell del RX-90. Per visualitzar les orientacions s'utilitza una representació eix-angle de la orientació (i no és té en compte la primera rotació inicial de $-\frac{\pi}{2}$ rad al voltant de l'eix X que presenta el canell). Donada l'estructura del canell i que la darrera articulació pot rotar 2π rad, és suficient representar les orientacions com a punt d'una esfera.

La estructura del canell fa que, si no hi haguessin limitacions mecàniques, fos possible obtenir totes les orientacions que formen $SO(3)$. Per aquest motiu el seu volum és $8\pi^2 \text{ rad}^3$. En el cas de tenir limitacions mecàniques, el volum es calcula integrant, sobre tot l'espai tota la partició, la n-forma de volum:

$$\Omega_{rot} = \sqrt{\det \{ \mathbf{J}_{rot} \}} d\theta_4 \wedge d\theta_5 \wedge d\theta_6$$

on \mathbf{J}_{rot} correspon a la aplicació tangent de la cinemàtica del canell.

Per tant s'obté

$$\begin{aligned} \int_{C_{rot}} \Omega_{rot} &= \int_{\theta_4^{\min}}^{\theta_4^{\max}} \int_{\theta_5^{\min}}^{\theta_5^{\max}} \int_{\theta_6^{\min}}^{\theta_6^{\max}} \sin \theta_5^{\min} d\theta_4 \wedge d\theta_5 \wedge d\theta_6 \\ &= (\cos \theta_5^{\max} - \cos \theta_5^{\min}) (\theta_4^{\max} - \theta_4^{\min}) (\theta_6^{\max} - \theta_6^{\min}) \end{aligned}$$

Pel RX-90 s'obté un volum de $4\pi^2 \left(\cos \frac{17\pi}{45} + 1 \right) \text{ rad}^3$, que representa el 68.73% del volum de $SO(3)$.

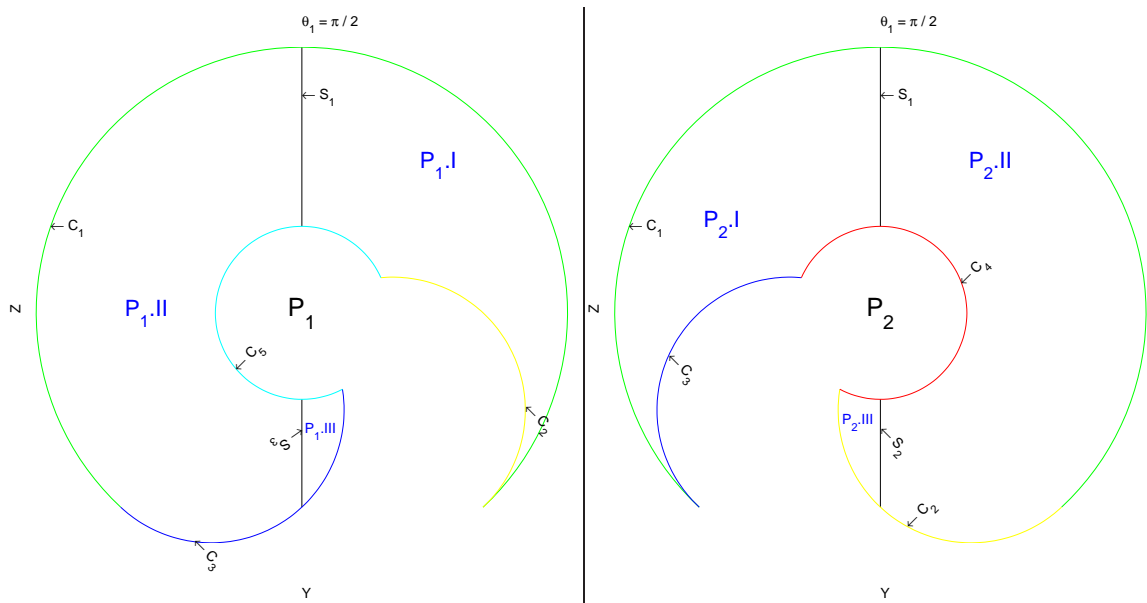


Figura 5.5: Seccions de l'espai de treball per $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.

5.1.6 Espai de treball de posició d'un robot RX-90

5.1.6.1 Estudi detallat

Les fronteres de l'espai de treball estaran formades per un conjunt de superfícies relacionades amb les singularitats del braç i d'altra banda amb els límits mecànics de les diferents articulacions. Per tant les varietats que representen la frontera de l'espai de treball, notades per $\rho_{\mathcal{O}}^i$, estaran relacionades amb una de les varietats que defineixen les particions de l'espai de configuracions ($\rho_{\mathcal{C}}^i$). Es a dir :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\xrightarrow{\text{Kin}} \mathcal{O} \\ \rho_{\mathcal{C}}^i &\xrightarrow{\text{Kin}} \rho_{\mathcal{O}}^i \end{aligned}$$

Les superfícies $\rho_{\mathcal{O}}^i$ presenten la forma següent:

$\rho_{\mathcal{O}}^1$ correspon a una superfície de la forma:

$$\begin{bmatrix} 2a_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ 2a_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ -2a_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

Aquesta superfície presenta la forma d'una esfera de radi $2a_2$, centrada en l'origen i expressada en coordenades polars. Per que l'esfera fos completa, θ_1 (angle en el pla horitzontal) hauria de prendre valors entre $-\pi$ i π , però el seu recorregut és des

de θ_1^{\min} fins a θ_1^{\max} . Per tant les seccions horitzontals estaran mancades d'un sector de cercle.

D'altra banda el paràmetre θ_2 (angle en el pla vertical) hauria d'anar entre 0 i π , però el seu recorregut tampoc és complet, ja que únicament anirà entre 0 i θ_2^{\min} o be entre 0 i θ_2^{\max} . Per tant el semi cercle descrit per la secció vertical estarà en la pràctica mancada d'un sector de cercle.

$\rho_{\mathcal{O}}^2$ correspon a una superfície de la forma:

$$\begin{bmatrix} -a_2 \cos \theta_1 \left(\sin\left(\frac{47}{180}\pi + \theta_3\right) - \cos\frac{47}{180}\pi \right) \\ -a_2 \sin \theta_1 \left(\sin\left(\frac{47}{180}\pi + \theta_3\right) - \cos\frac{47}{180}\pi \right) \\ -a_2 \left(\cos\frac{47}{180}\pi + \theta_3 \right) - \cos\frac{47}{180}\pi \end{bmatrix}$$

Per cada valor de θ_1 aquesta superfície descriu un cercle sobre un pla radial (perpendicular al vector $[\cos \theta_1, \sin \theta_1, 0]^T$). El cercle està desplaçat respecte l'origen, i per aquest motiu la figura que s'obté és un torus. La equació implícita d'un torus és de la forma:

$$\left(c - \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 + z^2 = a^2$$

on c correspon al radi revolució, i a és el radi del cercle revolucionat.

Els paràmetres del torus obtingut són $a = a_2$, $c = a_2 \cos \frac{47}{180}\pi$, i desplaçament sobre l'eix Z de $a_2 \cos \frac{47}{180}\pi$.

La varietat està delimitada i, per tant, no correspon a la frontera completa del torus, degut a que els paràmetres no presenten tot el recorregut ideal. Per aquest motiu a la secció horitzontal li falta un arc de cercle, mentre que la secció vertical està delimitada per plans generats pels valors mínim i màxim de θ_3 .

$\rho_{\mathcal{O}}^3$ correspon a una superfície de la forma:

$$\begin{bmatrix} -a_2 \cos \theta_1 \left(\cos\left(\frac{43}{180}\pi + \theta_3\right) + \cos\frac{47}{180}\pi \right) \\ -a_2 \sin \theta_1 \left(\cos\left(\frac{43}{180}\pi + \theta_3\right) + \cos\frac{47}{180}\pi \right) \\ a_2 \left(\sin\left(\frac{43}{180}\pi + \theta_3\right) - \sin\frac{47}{180}\pi \right) \end{bmatrix}$$

Aquesta superfície té una estructura anàloga a descrita anteriorment per $\rho_{\mathcal{O}}^2$.

$\rho_{\mathcal{O}}^4$ correspon a una superfície de la forma:

$$\begin{bmatrix} -a_2 \cos \theta_1 \left(\sin\left(\theta_2 + \frac{13\pi}{45}\right) - \cos \theta_2 \right) \\ -a_2 \sin \theta_1 \left(\sin\left(\theta_2 + \frac{13\pi}{45}\right) - \cos \theta_2 \right) \\ -a_2 \left(\cos\left(\theta_2 + \frac{13\pi}{45}\right) - \sin \theta_2 \right) \end{bmatrix}$$

Aquesta expressió és la representació en coordenades polars d'una esfera de radi $a_2 \sqrt{2 - 2 \sin \frac{13\pi}{45}}$ i centrada a l'origen.

$\rho_{\mathcal{O}}^5$ correspon a una superfície de la forma:

$$\begin{bmatrix} -a_2 \cos \theta_1 \left(\sin\left(\theta_2 + \frac{19\pi}{90}\right) - \cos \theta_2 \right) \\ -a_2 \sin \theta_1 \left(\sin\left(\theta_2 + \frac{19\pi}{90}\right) - \cos \theta_2 \right) \\ a_2 \left(\cos\left(\theta_2 + \frac{19\pi}{90}\right) - \sin \theta_2 \right) \end{bmatrix}$$

Aquesta expressió és la representació en coordenades polars d'una esfera de radi $a_2\sqrt{2 - 2\sin\frac{19\pi}{90}}$ i centrada a l'origen.

$\rho_{\mathcal{O}}^6, \rho_{\mathcal{O}}^7, \rho_{\mathcal{O}}^8$ Aquestes varietats provenen de les varietats bidimensionals $\rho_{\mathcal{C}}^6, \rho_{\mathcal{C}}^7$ i $\rho_{\mathcal{C}}^8$ i es projecten amb la varietat

$$[0, 0, -2a_2 \sin \theta_2]$$

que és un segment rectilini vertical. La longitud del segment depèn de recorregut de θ_2 en la varietat en \mathcal{C} . Cal tenir en compte que aquesta varietat destí és unidimensional.

$\rho_{\mathcal{O}}^9$ correspon a una varietat plana sobre l'espai

$$-x \sin \frac{7\pi}{18} + y \cos \frac{7\pi}{18} = 0$$

Aquesta varietat està delimitada per la projecció de la resta de varietats sobre ella.

$\rho_{\mathcal{O}}^{10}$ correspon a una varietat plana sobre l'espai

$$x \sin \frac{7\pi}{18} + y \cos \frac{7\pi}{18} = 0$$

Aquesta varietat està delimitada per la projecció de la resta de varietats sobre ella.

Les varietats sobre \mathcal{C} , $\rho_{\mathcal{C}}^i$, definien una partició de \mathcal{C} , però, degut a que la cinemàtica no és una aplicació injectiva, la cinemàtica no indueix una partició sobre \mathcal{O} . Així doncs l'espai de treball de cadascuna de les parts de \mathcal{C} presenta una intersecció no nul·la. Estrictament parlant l'espai de treball és a la reunió del punts generats per la revolució de les seccions presentades en la figura 5.5. La revolució està generada per la articulació θ_1 , però aquesta articulació no presenta un rang complet (és a dir entre 0 i 2π), i per tant la revolució de les dues seccions és diferent i es complementa. L'espai de treball generat no està lliure de singularitats, i per poder recórrer-lo en la seva totalitat serà necessari a travessar diferents singularitats.

Cal destacar que treballant únicament dins les particions P1.II i P2.II, és possible generar tot aquest espai de treball. El principal inconvenient és que per passar d'una a l'altra serà necessari travessar una singularitat doble, definida per la intersecció entre $\rho_{\mathcal{C}}^1$ i $\rho_{\mathcal{C}}^6$.

5.1.6.2 Espai de treball simplicat

Per tal d'evitar tenir un espai de treball que presenti singularitats és convenient treballar únicament en l'interior d'una partició de \mathcal{C} , i, en aquest sentit s'elegirà una de les dues particions que presenten espai de treball màxim, és a dir en $P_1.II$ o bé en $P_2.II$. Ambdues tenen un volum de treball idèntic, encara que la seva distribució és diferent. La morfologia de l'espai de treball és igual amb la única diferència que presenten una rotació de π rad respecte l'eix Z. Per aquest motiu, únicament s'estudia una de elles, i en aquest cas s'ha triat $P_1.II$. Aquest zona de l'espai de treball està lliure de singularitats i està relacionada amb la partició de l'espai de

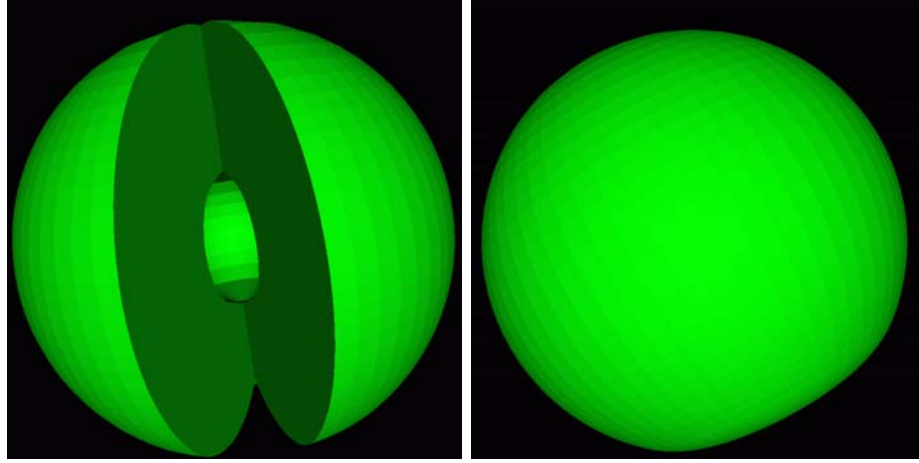


Figura 5.6: Espai de treball simplificat

configuracions $\mathcal{C}_{P_1.II}$, definida per:

$$\mathcal{C}_{P_1.II} = \left\{ (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \begin{array}{l} \theta_1^{\min} < \theta_1 < \theta_1^{\max} \\ \theta_3^{\min} < \theta_3 < \frac{-\pi}{2} \\ \theta_2^{\min} + \frac{1}{2}(\theta_3 + 3\frac{\pi}{2}) > 0 \\ (\theta_2^{\min} + \frac{1}{2}(\theta_3 + 7\frac{\pi}{2}) < 0 \text{ i } \theta_3 < \alpha) \text{ o } (\theta_2 > \theta_2^{\min} \text{ i } \theta_3 < \alpha) \end{array} \right\}$$

on $\alpha = -2\theta_2^{\min} - \frac{7\pi}{2}$. Cada secció de $\mathcal{C}_{P_1.II}$, per θ_1 constant, presenta una secció sobre \mathcal{O} de la forma presentada en la figura 5.7. L'àrea d'aquesta secció es pot calcular aplicant l'equació de l'àrea:

$$\Omega_{pos\theta_1} = \sqrt{\det \{ \mathbf{J}_{pos\theta_1} \}} d\theta_2 \wedge d\theta_3$$

on $J_{pos\theta_1} = -a_2^2 \cos \theta_3$. Per tant l'àrea de la secció es pot determinar a través de la integral:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_{P_1.II}^{\theta_1}} \Omega_{pos\theta_1} &= \int_{\mathcal{C}_{P_1.II}^{\theta_1}} -a_2^2 \cos \theta_3 d\theta_2 \wedge d\theta_3 \\ &= -\frac{a_2^3}{2} (\sin(2\theta_2^{\max}) + 2\theta_2^{\max} + \pi + 2\pi \sin \theta_3^{\max}) \end{aligned}$$

Aplicant els paràmetres del RX-90 aquest integral dona -1086512.109mm^2 , en el cas ideal, en que θ_2 no presentés límit mecànic, aquesta integral donaria -1137483.294mm^2 , per aquest motiu es conclou que la secció és el 95.52% de l'àrea ideal.

Un cop analitzada l'àrea de la secció, es presenta el volum complet de tot l'espai. Inicialment s'utilitzarà la n-forma del volum definida en aquest cas com:

$$\Omega_{pos\theta_1} = \sqrt{\det \{ \mathbf{J}_{pos} \}} d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3$$

Per tant l'àrea de la secció es pot determinar a través de la integral:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_{P_1.II}} \Omega_{pos} &= \int_{\mathcal{C}_{P_1.II}} a_2^3 (-\cos \theta_2 + \sin(\theta_2 + \theta_3)) \cos \theta_3 d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \\ &= \frac{a_2^3}{6} (\theta_1^{\max} - \theta_1^{\min}) \left(16 - 4(2 - 2\sin \theta_3^{\max})^{\frac{2}{3}} + (16 + 2(\cos \theta_2^{\max})^2) \sin \theta_2^{\max} \right. \\ &\quad \left. + (3\pi - 6\theta_2^{\max}) \cos \theta_2^{\max} \right) \end{aligned}$$

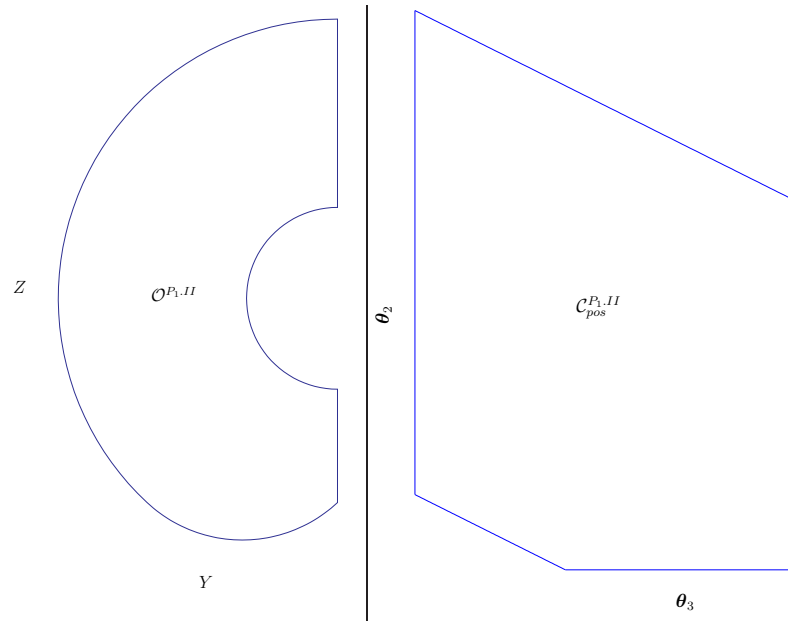


Figura 5.7: Secció de l'espai de treball simplificat per $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$.

Pels els paràmetres del RX-90 aquest integral dóna 2574270312.25mm^3 . En el cas ideal, que correspondria al volum d'una esfera de radi $2a_2$ menys el volum corresponent a una esfera de radi $a_2\sqrt{2 - 2\sin\theta_3^{\max}}$, el volum que s'obté és de 2948252015.23mm^3 . Així doncs, el volum associat a la partició $C_{P_1, II}$ és el 87.32% de l'àrea ideal.

La frontera d'aquest espai està formada per les superfícies ρ_O^{10} , ρ_O^9 , ρ_O^1 , ρ_O^3 , ρ_O^5 , ρ_O^6 i ρ_O^8 .

D'aquí endavant, sempre que es faci referència a l'espai de treball dels manipuladors RX-90, es considerarà l'espai de treball associat a la partició $C_{P_1, II}$. Aquest espai de treball correspon a l'espai controlable del robot RX-90.

5.2 Espai de treball del sistema multirobot

Un cop presentades les característiques dels robots RX-90, seguidament es presenten les característiques i propietats de l'espai de treball dels sistemes multirobot compostos per aquest tipus de robots. L'estudi que es presenta està basat en la metodologia proposada en el capítol 3.

De forma prèvia a l'estudi de l'espai de treball del sistema multirobot es presenta la construcció de la figura destra i la figura realitzable, i posteriorment, s'analitzaran els espais de treballs associats.

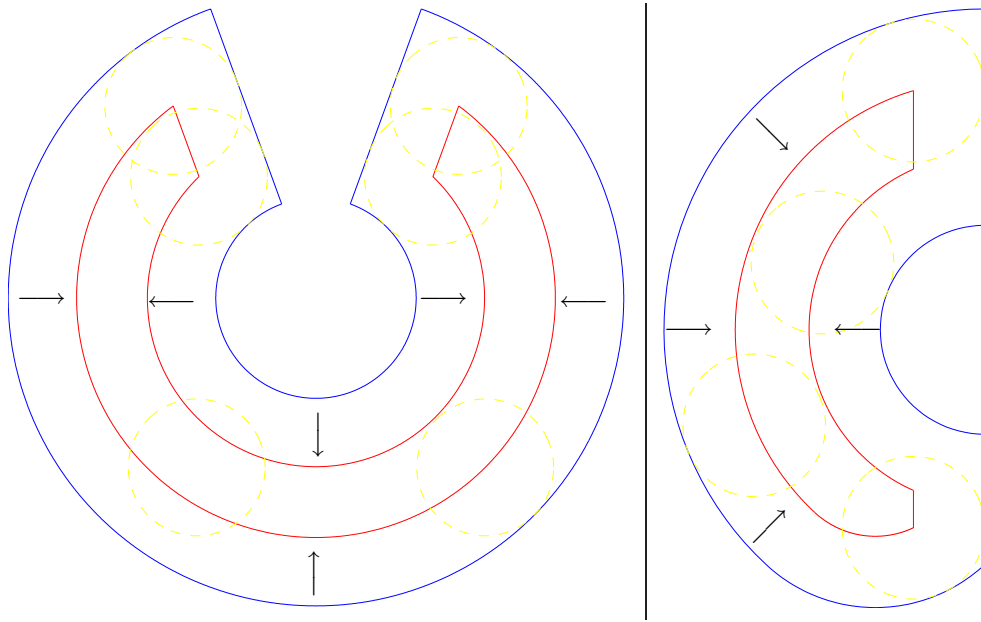


Figura 5.8: Esquema de construcció de la figura dextra.

5.2.1 Construcció de la figura dextra

En primer lloc cal recordar que els robots RX-90 no tenen espai dretre ja que no poden assolir totes les orientacions en cap punt de l'espai de treball.

Si el manipulador no presentés limitacions mecàniques, el seu volum de treball seria una esfera de radi $2a_2$ amb un forat interior de forma esfèrica concèntrica amb l'anterior i de radi $a_2\sqrt{2-2\sin\theta_3^{\max}}$. Sota aquestes circumstàncies la figura dextra correspondria a una esfera de radi $2a_2 - \|\mathbf{p}_{O_i}\|$ amb un forat interior esfèric concèntric i de radi $a_2\sqrt{2-2\sin\theta_3^{\max}} + \|\mathbf{p}_{O_i}\|$.

Proposició 5.1 *Els robots tipus RX-90, ideals, presenten una figura dextra nul·la per $\|\mathbf{p}_{O_i}\| \geq \frac{a_2(2 - \sqrt{2 - 2\sin\theta_3^{\max}})}{2}$.*

Demostració

La figura dextra esdevé nul·la quan el radi de la esfera interior és igual o més gran que el radi de la esfera exterior. Per determinar la condició límit únicament cal igualar els dos radis:

$$a_2\sqrt{2-2\sin\theta_3^{\max}} + \|\mathbf{p}_{O_i}\| = 2a_2 - \|\mathbf{p}_{O_i}\| \rightarrow \|\mathbf{p}_{O_i}\| = \frac{a_2(2 - \sqrt{2 - 2\sin\theta_3^{\max}})}{2}$$

La figura dextra presentarà una morfologia similar a la del espai de treball però de dimensions inferiors. Cadascuna de les superfícies que formen la seva frontera es veuran modificades (veure Figura 5.8). Seguidament es comenta la evolució de cadascuna de les superfícies que formen l'espai de treball al deformar-lo per d'obtenir la figura dextra:

$\rho_{\mathcal{O}}^{10}, \rho_{\mathcal{O}}^9$ Aquestes dues superfícies són dos plans que defineixen els límits laterals. En la figura destra passaran a ésser dos plans paral·lels als anteriors, per la part interior.

Com en el cas anterior estaran limitats per les superfícies deformatades provinents de les que formen la frontera de l'espai de treball.

$\rho_{\mathcal{O}}^1$ Aquesta superfície defineix la esfera exterior, que un cop deformatada veurà reduït el seu radi fins $2a_2 - \|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$.

$\rho_{\mathcal{O}}^5$ Aquesta superfície defineix la esfera interior, que un cop deformatada veurà augmentat el seu radi fins $a_2 \left(1 - \sqrt{2 - 2 \sin \theta_3^{\max}}\right) + \|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$.

$\rho_{\mathcal{O}}^3$ Aquesta superfície correspon a un torus, que un cop deformat mantindrà constant el seu paràmetre a però reduirà el c fins $a_2 - \|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$.

$\rho_{\mathcal{O}}^6, \rho_{\mathcal{O}}^8$ Aquestes dues superfícies, que en realitat són rectes, desapareixeran, encara que en el seu lloc apareixen dues noves rectes definides per la intersecció dels dos plans definits per la deformació de $\rho_{\mathcal{O}}^{10}$ i $\rho_{\mathcal{O}}^9$ i la esfera que surt de la deformació de les esfera interior i exterior i el torus inferior.

5.2.2 Construcció de la figura realitzable

Proposició 5.2 *La figura realitzable d'un manipulador tipus RX-90, ideal, correspon als punts situats en l'interior d'una esfera de radi $2a_2 - \|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$ i l'exterior d'una esfera concèntrica amb l'anterior i de radi r_{in} . El valor de r_{in} és:*

- $r_{in} = a_2 \sqrt{2 - 2 \sin \frac{13\pi}{45}} - \|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$ si $0 < \|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\| < a_2 \sqrt{2 - 2 \sin \frac{13\pi}{45}}$
- $r_{in} = 0$ si $a_2 \sqrt{2 - 2 \sin \frac{13\pi}{45}} \leq \|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\| \leq 2a_2$
- $r_{in} = 2a_2 - \|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$ si $2a_2 < \|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$

Demostració

Donat que la l'espai de treball d'un robot RX-90 ideal està format per dues esferes concèntriques, i que la figura realitzable s'obté convolucionant l'espai de treball amb una altra esfera.

Donat que l'esfera exterior és el resultat de convolucionar la esfera de radi $\|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$ amb la esfera exterior de l'espai de treball aquesta presentarà radi $2a_2 - \|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$.

En el cas de valors petits de $\|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$, el forat interior prové del forat que apareix al convolucionar la esfera interior de l'espai de treball amb l'esfera de radi $\|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$. Per aquest motiu el seu radi és $a_2 \sqrt{2 - 2 \sin \frac{13\pi}{45}} - \|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$. A mesura que $\|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$ augmenta, el radi interior disminueix, fins esdevenir nul.

Posteriorment, i fins que la convolució de la esfera de radi $\|\mathbf{p}_{\mathcal{O}_i}\|$ amb la esfera exterior de l'espai de treball no presenta forat interior, la figura realitzable tampoc presenta forat interior.

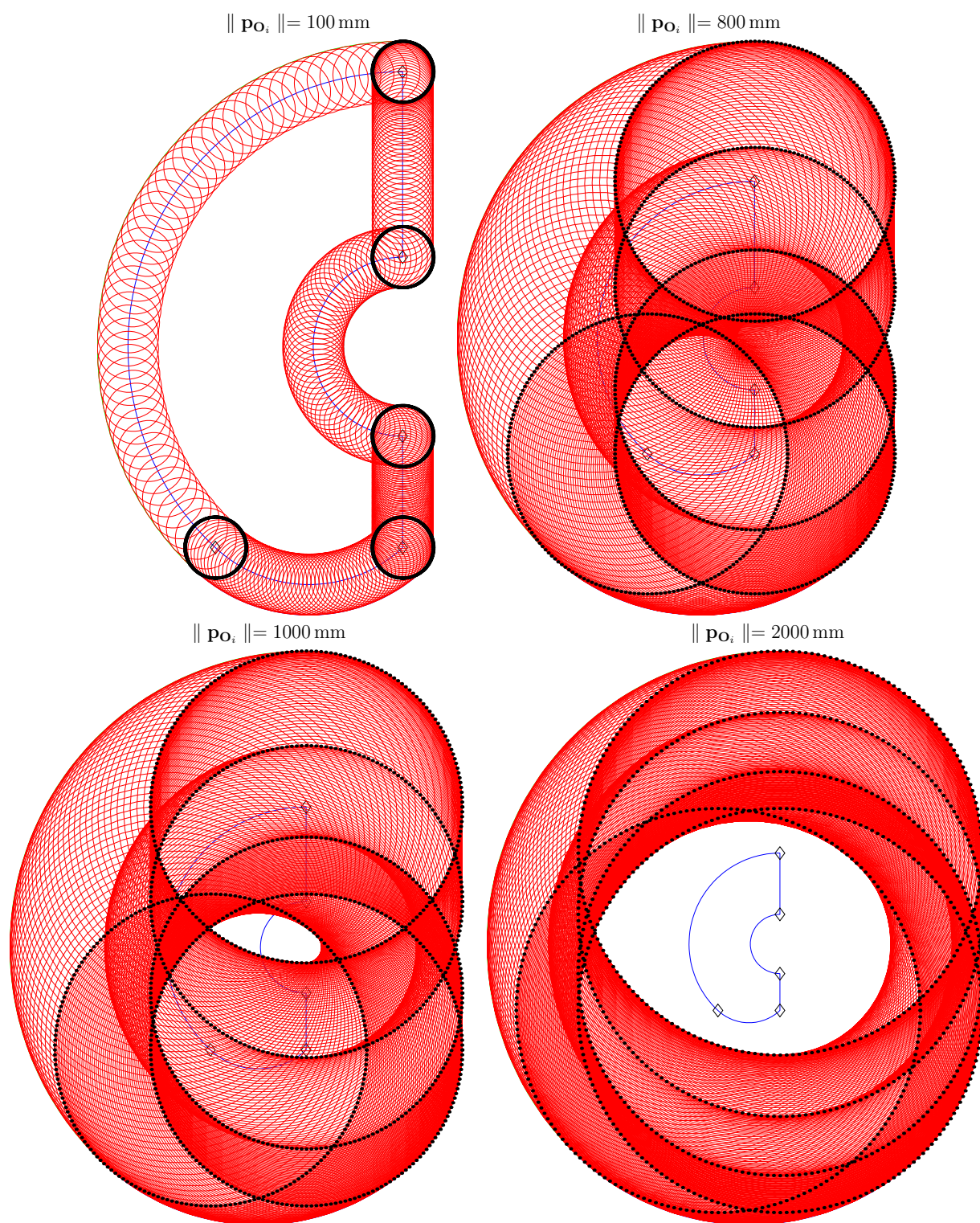


Figura 5.9: Seccions de l'espai de treball simplificat, i la seva deformació per generar la figura realitzable.

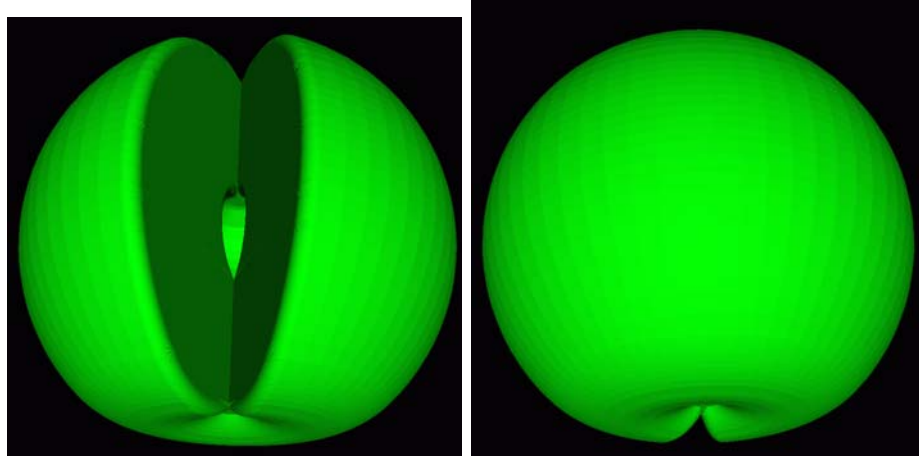


Figura 5.10: Figura realitzable per $\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\| = 50$ mm.

Finalment, per valors de $\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|$ grans la figura realitzable presenta el forat interior que prové de la convolució de la esfera de radi $\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|$ amb la esfera exterior de l'espai de treball.

A diferència de la figura destra, la figura realitzable presenta una morfologia dependent del valor de $\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|$. Mentre la figura destra està formada per un subconjunt dels punts de l'espai de treball, els que formen la figura realitzable no són un subconjunt de l'espai de treball.

La frontera de la figura destra presenta una morfologia similar a la de la frontera de l'espai de treball. Tanmateix la morfologia de la frontera de la figura realitzable presenta formes força diferents a les de l'espai de treball.

Una diferència fonamental de la figura destra amb la figura realitzable és que per a la primera únicament era necessari l'estudi d'una secció vertical de la mateixa i posteriorment la figura completa es generava per revolució d'aquesta secció. En el cas de la figura realitzable, no és possible aplicar aquest procediment. En la Figura 5.9, es presenta la forma de diferents seccions i la deformació que presentarien al generar una figura realitzable en cas de tractar-se d'un sistema planar.

Una altra diferència substancial és la aparició de noves superfícies, que encara que relacionades amb les originals no provenen directament d'aquestes, sinó de la intersecció de superfícies que formen la frontera de l'espai de treball.

La construcció de la frontera de la figura realitzable es farà a partir de la deformació de les superfícies que formen l'espai de treball. Seguidament es comenta les superfícies que formen la frontera de la figura realitzable, i la seva relació amb les superfícies que formen la frontera de l'espai de treball. Les superfícies que provenen de la deformació de les superfícies que formen la frontera l'espai de treball o de la evolució ideal són:

1. Esfera de radi $2a_2 + \|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\|$ centrada a l'origen. Aquest superfície prové directament del creixement de la superfície $\rho_{\mathbf{O}}^1$.

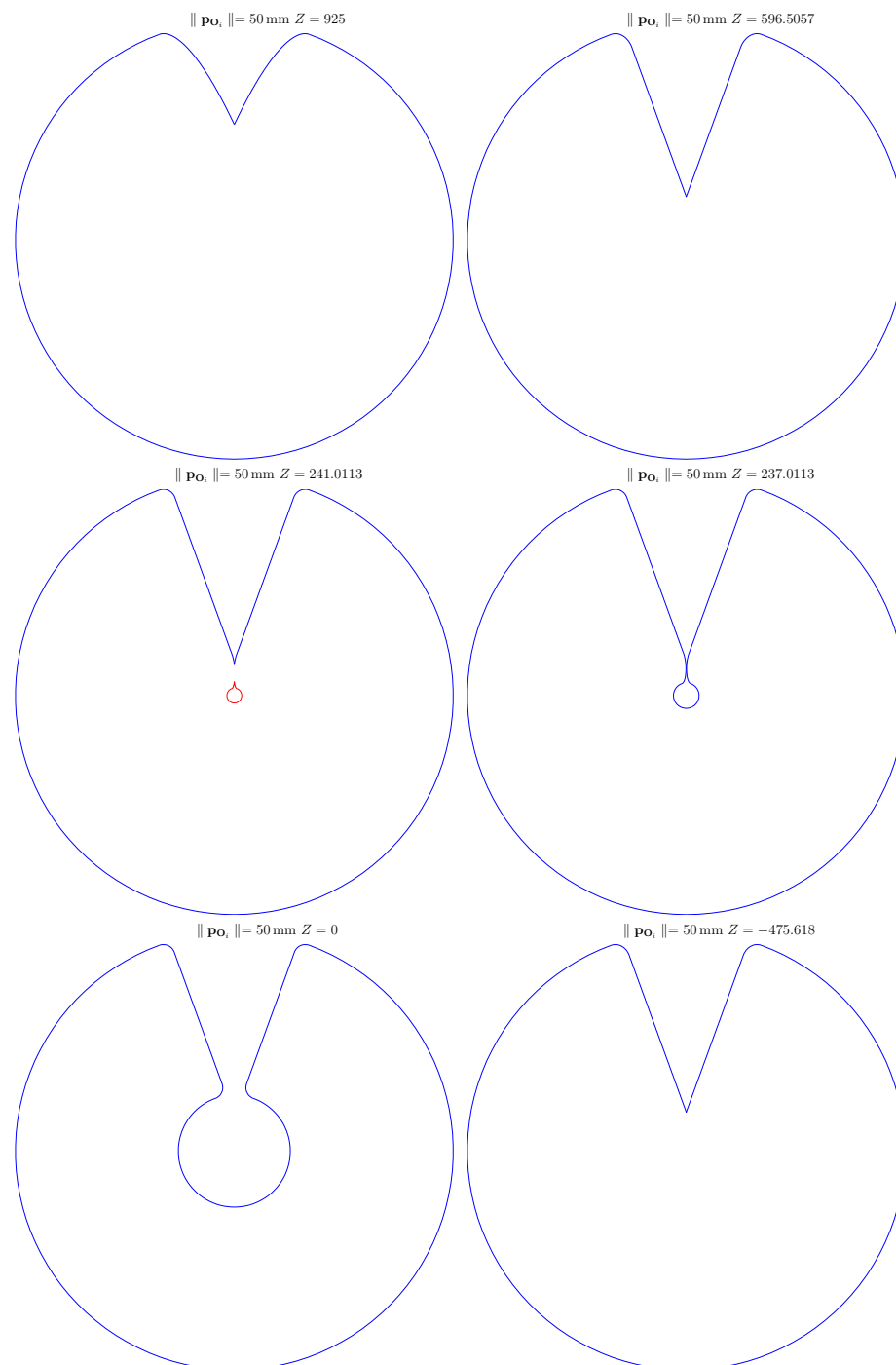


Figura 5.11: Seccions Horitzontals de la figura realitzable per $\| \mathbf{p}_{0_i} \| = 50 \text{ mm}$.

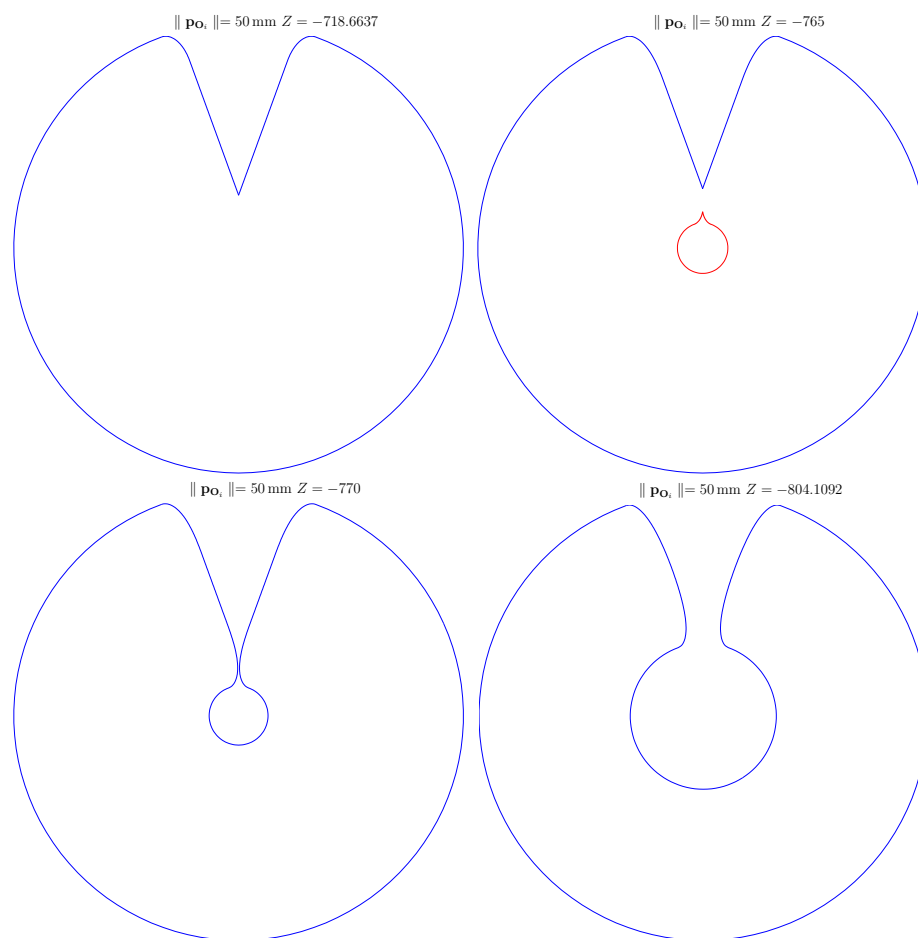


Figura 5.12: Seccions Horitzontals de la figura realitzable per $\|\mathbf{p}_{\mathbf{o}_i}\| = 50 \text{ mm}$ (part II).

2. Esfera de radi $(a_2\sqrt{2 - 2\sin\frac{13\pi}{45}} - \|\mathbf{p}_{O_i}\|)$ centrada a l'origen. Aquesta superfície prové directament de la reducció de la superfície $\rho_{\mathcal{O}}^5$, i únicament existeix per valors del radi positius. A partir del moment en que el radi esdevé negatiu la esfera desapareix.
3. Torus amb paràmetres $c = a_2 \cos \theta_{max}^2$ i $a = a_2 + \|\mathbf{p}_{O_i}\|$. El torus està definit sobre un pla horitzontal amb $z = -a_2 \cos \frac{47\pi}{180}$.
Aquest torus és de tipus *spindle*, i per tant incorpora una llimona interna.
Aquesta superfície prové directament del creixement de la superfície $\rho_{\mathcal{O}}^3$.
4. Pla dret, paral·lel $\rho_{\mathcal{O}}^9$ i a una distància de $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$ d'aquest.
5. Pla esquerra, paral·lel $\rho_{\mathcal{O}}^{10}$ i a una distància de $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$ d'aquest.

La figura realitzable es pot interpretar com els punts de l'espai que pertanyen a la frontera d'una esfera de radi $\|\mathbf{p}_{O_i}\|$ centrada en algun punt de l'espai de treball. Per aquest motiu a l'estudiar les figures que generen el conjunt d'esferes centrades en les corbes que uneixen les diferents superfícies de l'espai de treball, que són segment de cercles, s'observa que són torus. Així doncs, el que en l'espai de treball s'unia a través d'uns arcs de cercle, en la figura realitzable s'uneix a través de les fronteres d'un torus. Tots aquest torus estan definits respecte un pla que no és l'horitzontal. De fet es troben definits o bé sobre el pla $\rho_{\mathcal{O}}^9$ o bé sobre el pla $\rho_{\mathcal{O}}^{10}$, a més tots tenen un paràmetre $a = \|\mathbf{p}_{O_i}\|$. Així els torus que apareixen són:

N°	Pla	c	centre	sup. 1	sup. 2
1	$\rho_{\mathcal{O}}^9$	$2a_2$	(0, 0, 0)	4	1
2	$\rho_{\mathcal{O}}^{10}$	$2a_2$	(0, 0, 0)	5	1
3	$\rho_{\mathcal{O}}^9$	a_2	$\begin{pmatrix} a_2 \cos \theta_{min}^1 \cos \frac{47\pi}{180} \\ a_2 \sin \theta_{min}^1 \cos \frac{47\pi}{180} \\ -a_2 \sin \frac{47\pi}{180} \end{pmatrix}$	4	3
4	$\rho_{\mathcal{O}}^{10}$	a_2	$\begin{pmatrix} a_2 \cos \theta_{max}^1 \cos \frac{47\pi}{180} \\ a_2 \sin \theta_{max}^1 \cos \frac{47\pi}{180} \\ -a_2 \sin \frac{47\pi}{180} \end{pmatrix}$	4	3
5	$\rho_{\mathcal{O}}^9$	$a_2\sqrt{2 - 2\sin\frac{13\pi}{45}}$	(0, 0, 0)	4	2
6	$\rho_{\mathcal{O}}^{10}$	$a_2\sqrt{2 - 2\sin\frac{13\pi}{45}}$	(0, 0, 0)	5	2

Aquests torus són la principal diferència entre la figura realitzable i la que s'obtidria de la anàlisi de la secció de revolució (Figura 5.9). Cal tenir en compte que la secció horitzontal de la figura realitzable no s'obté aplicant l'algorisme de creixement sobre la secció horitzontal de l'espai de treball. Per a obtenir-la s'ha de partir del coneixement geomètric de totes les figures descrites i posteriorment calcular la intersecció d'aquestes amb al pla que s'està estudiant.

El volum contingut en la figura realitzable es pot obtenir a través del càlcul de l'àrea de les diferents seccions horitzontals i la posterior integració respecte l'eix Z linealment. Cadascuna

‡ sup. 1 i sup. 2 indiquen les dues superfícies que s'uneix.

$\ \mathbf{p}_{O_i} \ $	$\text{vol}(\widetilde{\mathcal{W}}_R^i)$
50.0000 mm	$3.204451363502991e + 009 \text{ mm}^3$
500.0000 mm	$1.130671729571324e + 010 \text{ mm}^3$
680.0890 mm	$1.631090847919611e + 010 \text{ mm}^3$
1556.0694 mm	$6.044712118825948e + 010 \text{ mm}^3$
2000.0000 mm	$9.598943331148666e + 010 \text{ mm}^3$

Taula 5.3: Alguns valors del volum de la figura realitzable d'un robot RX-90 en funció de $\| \mathbf{p}_{O_i} \|$.

de les àrees de les seccions es pot calcular a través de la aplicació del teorema de Stokes, de la mateixa manera que s'ha aplicat anteriorment en el càlcul de l'àrea dels robots SCARA. A mode d'exemple, en la Taula 5.3 es presenta el volum de la figura realitzable per diferents valors de $\| \mathbf{p}_{O_i} \|$.

Les figures 5.11 i 5.12 representen diferents seccions horitzontals de la figura realitzable per $\| \mathbf{p}_{O_i} \| = 50\text{mm}$, i per diferents valors de Z . Inicialment les seccions són similars a les que presenta l'espai de treball, encara que amb els escaires arrodonits, però posteriorment, les seccions presenten un forat intern. Aquests són deguts a que situacions en les que els plans o els torus formen la frontera de l'espai exterior en contacte entre si, i quan el segment d'esfera interior encara existeix. D'aquesta manera s'aïlla un tros de la secció sota estudi. Aquest tipus de forats que presenten les seccions en general no donen lloc a un forat en l'espai 3D, ja que no són continuats. Aquests forats que presenten les seccions estan lligats als primers tipus de forats que presenta la figura realitzable ideal.

En la figura 5.10 es pot veure la representació tridimensional de la figura realitzable completa.

5.2.2.1 Aparició de forats interns

Per valors de $\| \mathbf{p}_{O_i} \|$ grans, apareixen forats interiors en la figura realitzable. Aquests forats estan lligats al segon tipus de forats que presenta la figura realitzable ideal. Un exemple d'aquest tipus de forat és el que s'obté per $\| \mathbf{p}_{O_i} \| = 2000$ (Figures 5.14, 5.15 i 5.13).

Les fronteres d'aquests forats estan formades per superfícies diferents a les inicialment presentades. Aquestes superfícies són:

1. Esfera de radi $\| \mathbf{p}_{O_i} \| - 2a_2$ centrada a l'origen. Aquesta superfície únicament existeix per valors del radi positiu. Encara aquesta esfera presenti unes característiques molt similars a l'anterior cal indicar que la seva natura és totalment diferent, i que ambdós són incompatibles, és a dir que una es dona per valors de $\| \mathbf{p}_{O_i} \|$ més grans que els que generen la superfície anterior.
2. Torus amb els paràmetres $c = \| \mathbf{p}_{O_i} \| - a_2$ i $a = -a_2 \cos \theta_2^{\max}$. Aquests torus està definit sobre un pla horitzontal $Z = -a_2 \sin \theta_2^{\max}$.

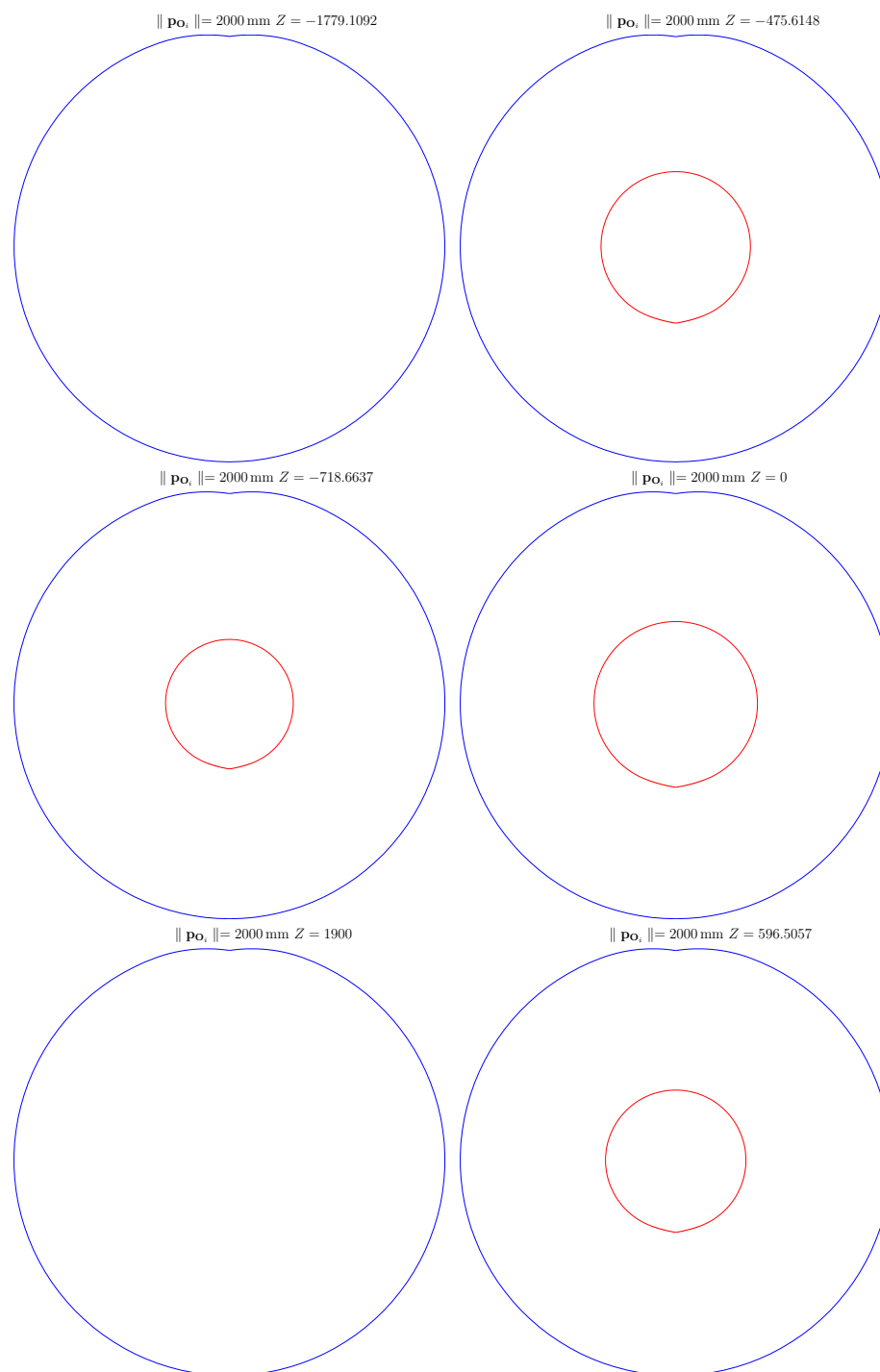


Figura 5.13: Seccions Horitzontals de la figura realitzable per $\| \mathbf{p}_{O_i} \| = 2000 \text{ mm}$.

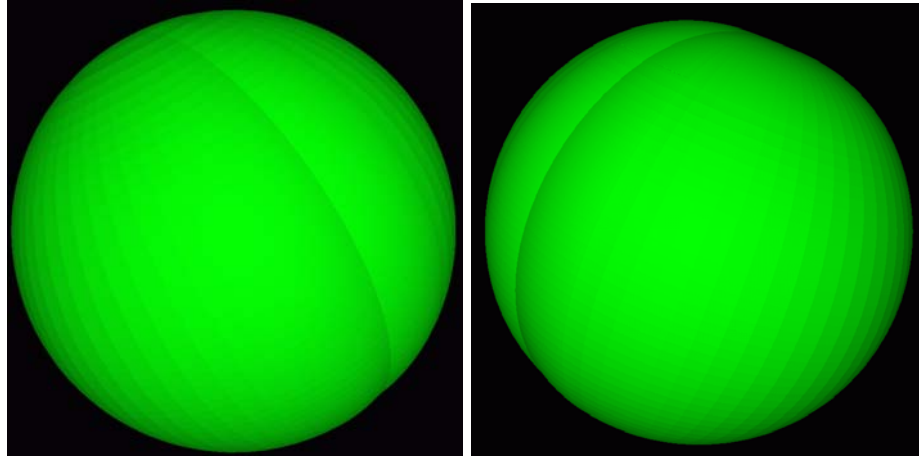


Figura 5.14: Figura realitzable per $\| \mathbf{p}_{O_i} \| = 2000\text{mm}$.

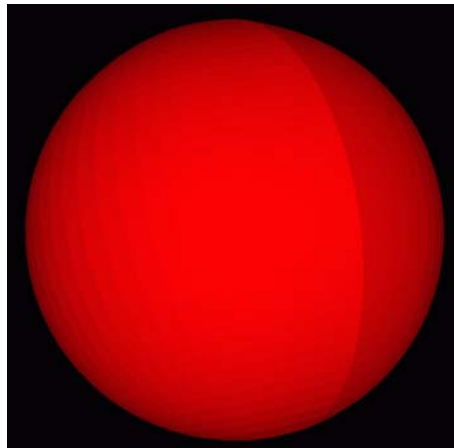


Figura 5.15: Forat interior de la figura realitzable per $\| \mathbf{p}_{O_i} \| = 2000\text{mm}$.

3. La unió de les dues superfícies anterior es genera a través del següent conjunt de torus amb el paràmetre $a = \| \mathbf{p}_{O_i} \|$:

N°	Pla	c	centre
1	ρ_C^9	$2a_2$	$(0, 0, 0)$
2	ρ_C^{10}	$2a_2$	$(0, 0, 0)$
3	ρ_C^9	a_2	$\begin{pmatrix} a_2 \cos \theta_{min}^1 \cos \frac{47\pi}{180} \\ a_2 \sin \theta_{min}^1 \cos \frac{47\pi}{180} \\ -a_2 \sin \frac{47\pi}{180} \end{pmatrix}$
4	ρ_C^{10}	a_2	$\begin{pmatrix} a_2 \cos \theta_{max}^1 \cos \frac{47\pi}{180} \\ a_2 \sin \theta_{max}^1 \cos \frac{47\pi}{180} \\ -a_2 \sin \frac{47\pi}{180} \end{pmatrix}$

a diferència de les superfícies d'unió presentades anteriorment, aquests torus no uneixen

directament dues superfícies, sinó que fan d'unió entre una superfície i un altre torus.

En la figura 5.13 es poden veure diferents seccions horitzontals de la figura realitzable per $\| \mathbf{p}_{O_i} \| = 2000\text{mm}$. Aquestes seccions presenten una forma força similar a la de les seccions de la figura realitzable d'un robot RX-90 ideal, és a dir una forma de cercle o corona circular. La única diferència és que les zones mortes es tanquen amb les seccions d'un torus. A mesura que $\| \mathbf{p}_{O_i} \|$ es va fent més gran cada cop les seccions i per tant la figura realitzable seran més semblants a les d'un robot ideal. En la 5.14 es pot veure la representació tridimensional de la figura realitzable complerta.

5.2.2.2 Intersecció

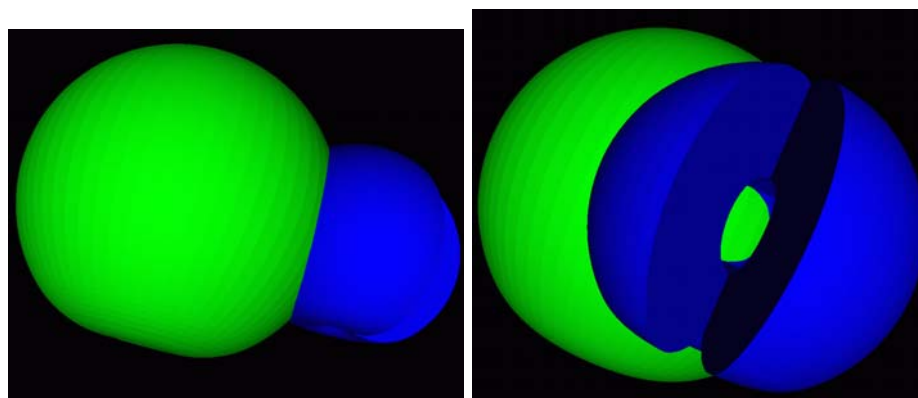


Figura 5.16: Espai de treball i figura realitzable per $\| \mathbf{p}_{O_i} \| = 500\text{mm}$.

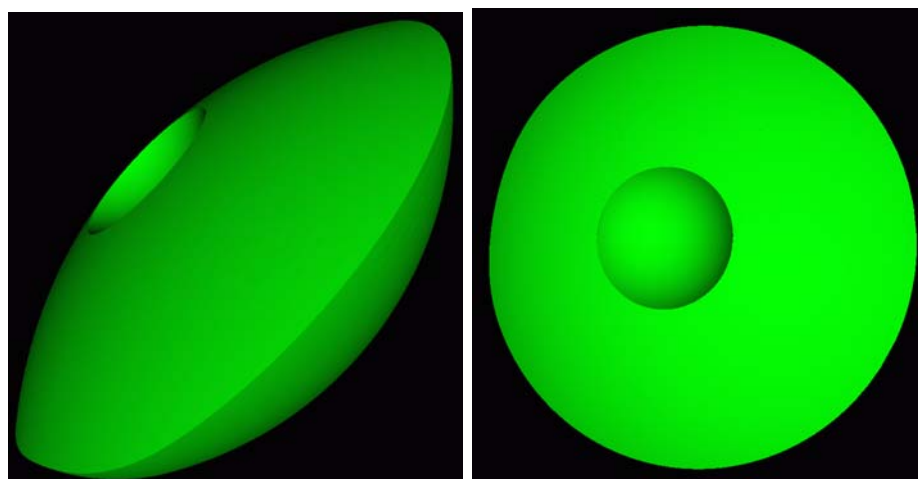


Figura 5.17: Espai de treball \mathcal{W}_R^* del sistema multirobot per $\| \mathbf{p}_{O_i} \| = 500\text{mm}$.

Un cop generades les figures realitzables i l'espai de treball, s'ha de fixar la posició relativa de les bases per tal d'analitzar l'espai de treball del sistema multirobot. Des d'un punt de vista algorísmic la intersecció es pot calcular a través de dues grans famílies de mètodes:

- Superfícies analítiques. Amb les diferents superfícies es construeix un graf de connectivitat per tal de modelar la adjacència de les diferents superfícies. Associat a cada arc hi hauria una corba que definiria la unió entre dos superfícies (nodes del graf). Posteriorment la intersecció es determinarà a partir de la verificació de quines superfícies col·lisionen entre si. D'aquesta anàlisi s'obtindria també un conjunt de superfícies i un conjunt de corbes que determinarien el rang de validesa de cadascuna de les superfícies.

Aquest enfoc és totalment analític i per tant conserva tota la resolució. El seu principal inconvenient és que algunes de les superfícies són torus, i en l'estudi realitzat no s'ha trobat cap manera senzilla de modelar de forma exacta les corbes que formen la intersecció de dos torus, o d'un torus i un esfera, i això dificulta notablement la aplicació del mètode analític descrit.

- Seccions. Donades les figures geomètriques de l'espai de treball i de la figura realitzable, és possible determinar la intersecció d'aquestes amb un pla. Donat que es disposa analíticament de les superfícies i els seus rangs de validesa, la secció també es pot calcular de forma analítica. Si es disposa de la secció de les dues figures geomètriques, la secció de la intersecció serà directament la intersecció de les seccions. Per tant serà possible reconstruir la intersecció de les dues figures geomètriques a partir de la intersecció de les seccions.

En aquesta aproximació és possible calcular el volum de la intersecció a través la integració de l'àrea de les seccions.

Durant el desenvolupament d'aquesta tesi s'ha adoptat aquesta segona estratègia.

La Figura 5.16 mostra l'espai de treball d'un manipulador i la figura realitzable de l'altre per $\|\mathbf{p}_{O_i}\| = 500\text{mm}$. En aquesta figura la situació relativa de les bases està determinada per:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 846 \text{ mm} \\ 0 & -1 & 0 & -1306 \text{ mm} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \text{ mm} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

que coincideix amb la situació relativa de les bases dels dos robots que formen la cel·la multirobot de l'IOC. L'espai de treball del sistema multirobot \mathcal{W}_R^* per aquest cas es pot veure en la Figura 5.17. El volum d'aquesta nova figura geomètrica és $8.08181622069438810^8\text{mm}^3$, que correspon aproximadament a un 7% del volum de la figura realitzable i un 31% del volum de l'espai de treball individual del manipulador de referència. Com es pot veure l'espai de treball del sistema multirobot pateix una reducció considerable de volum.

5.2.2.3 Estudi de la restricció d'orientació

Per determinar el conjunt d'orientacions que es poden assolir en un punt \mathbf{p} predeterminat, s'aplica el procediment descrit en la secció 3.3.2. En el cas en qüestió i donat que totes les figures geomètriques implicades tenen les seves fronteres formades per segments d'esfera, torus i plans, el càlcul de $\Lambda_{\mathbf{p}}^i$ es pot fer analíticament. El mètode seguit és similar al presentat en els manipuladors tipus SCARA, tenint en compte la particularitat de la orientació en 3D. És a

dir es, necessari avaluar la compatibilitat entre les orientacions assolibles en \mathbf{p} pel robot 0 i les assolibles en $\Lambda_{\mathbf{p}}^i$ pel robot i .

Cada relació $\mathbf{p} - \mathbf{p}_i$, amb $\mathbf{p}_i \in \Lambda_{\mathbf{p}}^i$ restringeix la orientació del sistema de referència. En el cas 2D, la fixa totalment, en el cas 3D la fixa dins una varietat unidimensional d'orientacions. Per estudiar aquesta relació s'analitzarà la equació:

$$\mathbf{R}\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} = \Gamma$$

on $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}(\alpha)$ representa una rotació d'un angle α al voltant d'un eix \mathbf{v} , $\Gamma \triangleq -\mathbf{R}_{B_i}\mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta}_i) - \mathbf{p}_{B_i} + \mathbf{p}_0(\boldsymbol{\theta}_0)$, i \mathbf{R} correspon a una rotació genèrica que recull el conjunt de rotacions que afecten a $\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}$. Per tal que es compleixi aquesta equació s'ha de verificar que $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\Gamma}(\beta)\mathbf{R}_b(\gamma)$ on $\beta \triangleq \frac{\tilde{\Gamma} \times \widetilde{\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}}}{\|\tilde{\Gamma} \times \widetilde{\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}}\|}$, $\tilde{\Gamma}$ correspon al vector Γ normalitzat, $\widetilde{\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}}$ correspon al vector $\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}$ normalitzat, i $\gamma \triangleq \arccos(\tilde{\Gamma} \cdot \widetilde{\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}})$.

Per tal d'estudiar el rang d'orientacions que el sistema multirobot pot assolir en el punt \mathbf{p} , es seguiran els següents passos :

1. Determinació de $\Lambda_{\mathbf{p}}^i$.

En el cas del robot RX-90, aquest primer pas es pot fer analíticament, degut a que es disposa d'una representació analítica de les espais de treball individuals.

Un cop determinat $\Lambda_{\mathbf{p}}^i$, és possible calcular $\Phi_{\Lambda_{\mathbf{p}}^i} \triangleq \{\mathbf{R} \in SO(3) \mid \mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i} \in \Lambda_{\mathbf{p}}^i\}$. Aquest conjunt d'orientacions és el que podria assolir el sistema multirobot en el cas en que tot $\mathcal{W}_R^i = \mathcal{W}_D^i$.

Cal tenir en compte que $\Phi_{\Lambda_{\mathbf{p}}^i} \cap \Phi_0(\mathbf{p})$ correspon al conjunt d'orientacions un cop analitzades les restriccions d'orientació imposades pel robot 0.

2. Estudi del rang d'orientacions en $\mathbf{p}_i \in \Lambda_{\mathbf{p}}^i$.

Les orientacions que es poden assolir en el punt \mathbf{p}_i són de la forma $\mathbf{R}_{\Gamma}(\beta)\mathbf{R}_b(\gamma)$. Per tant, el conjunt d'orientacions factibles són:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \left\{ \bigcup_{\forall \mathbf{p}_i \in \Lambda_{\mathbf{p}}^i} \mathbf{R}_{\Gamma}(\beta)\mathbf{R}_b(\gamma) \cap \Phi_i(\mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{p}_i) \right\} \cap \Phi_0(\mathbf{p})$$

La obtenció d'aquest conjunt es fa discretitzant $\Lambda_{\mathbf{p}}^i$, i estudiant del conjunt d'orientacions vàlides en cada punt de la discretització.

La intersecció entre $\Phi_i(\mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{p}_i)$ i $\mathbf{R}_{\Gamma}(\beta)\mathbf{R}_b(\gamma)$ s'ha realitzat discretitzant el rang de valors de β .

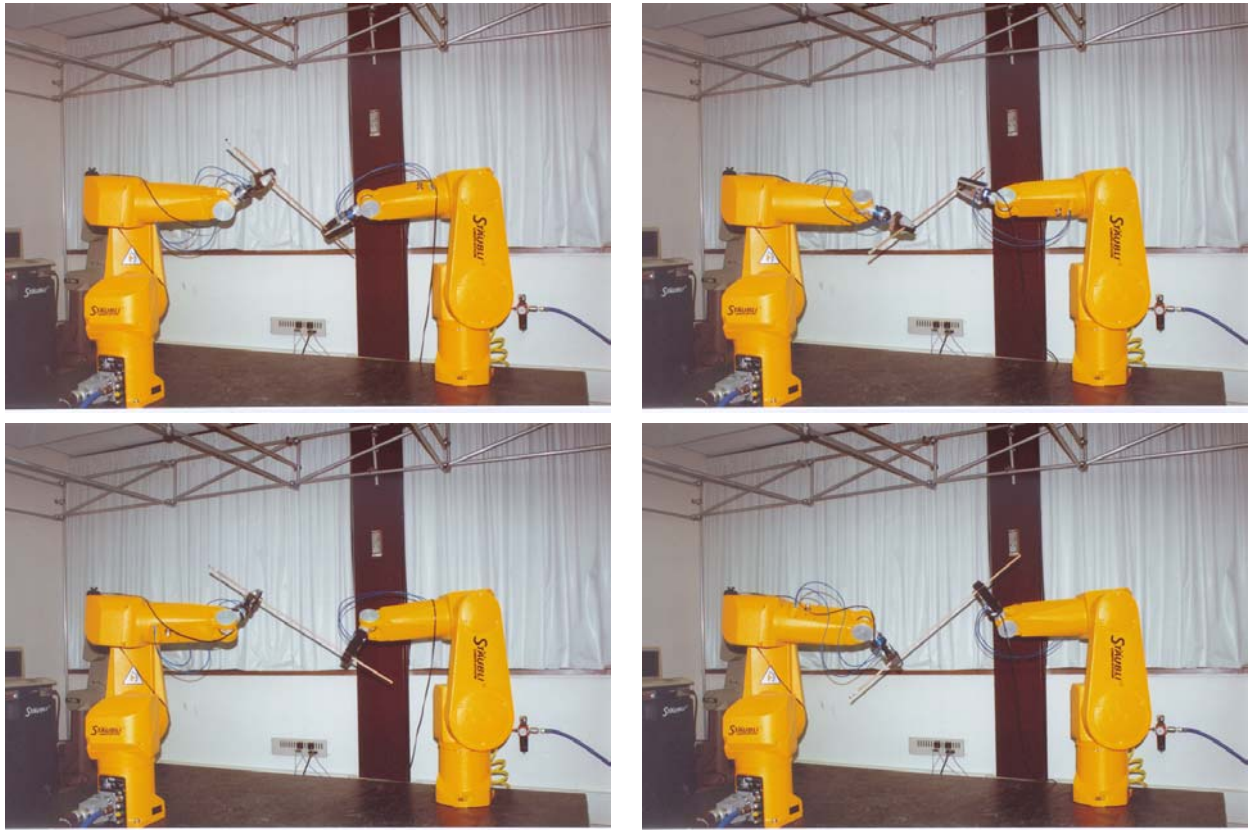


Figura 5.18: Cel·la robòtica de l'IOC amb punt de referència \mathbf{x}_1 i diferents orientacions.

5.3 Exemples d'espai de treball

5.3.1 Cel·la Robotitzada de l'IOC

Com exemple d'aplicació de la metodologia descrita s'ha estudiat l'espai de treball realitzable del sistema multirobot que forma la cel·la de treball de l'IOC (Figura 5.18). Aquesta cel·la està formada per dos robots RX-90, i la posició relativa de les seves bases està donada per la equació (5.2).

En el cas concret estudiat els robots manipulen una peça, i la relació de presió entre les dues pinces és

$$\mathbf{O}_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 500 \text{ mm} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \text{ mm} \\ 0 & 0 & -1 & 461 \text{ mm} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

que correspon a $\|\mathbf{p}_{\mathbf{O}_i}\| = 680.088$. L'espai de treball realitzable serà a la intersecció de l'espai de treball del manipulador de referència (Figura 5.19, en color lila) i la figura realitzable de l'altre manipulador (Figura 5.19, en color verd). L'espai resultant es presenta en la figura 5.20, i té un volum de $1.193534635097666 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$ cosa que representa el 46.36% del volum de l'espai

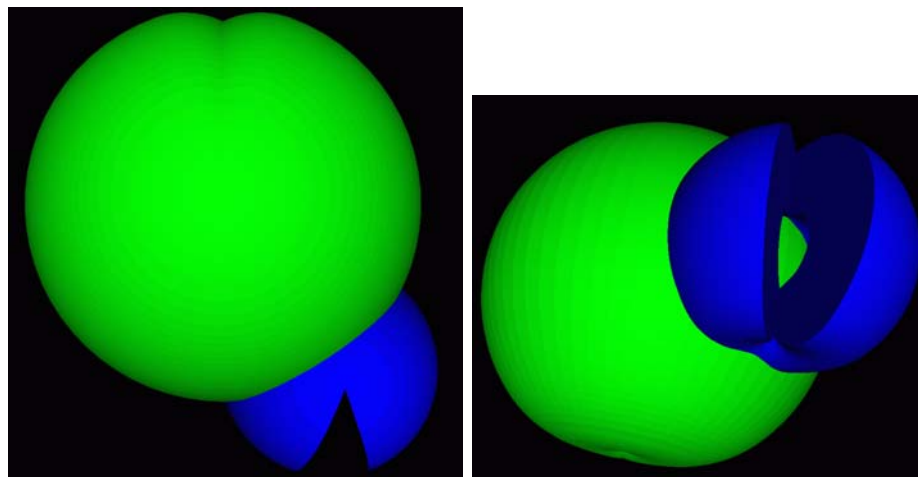


Figura 5.19: Espai de treball i figura realitzable pel cas de la cel·la de l'IOC.

de treball del robot RX-90.

El volum obtingut no té en compte les restriccions d'orientació del sistema i per aquest motiu, és necessari estudiar el rang d'orientacions assolibles en els diferents punts de l'espai de treball. A mode d'exemple s'ha aplicat l'algorisme presentat anteriorment en dos punts de l'espai de treball $\mathbf{x}_1 = [1.96 \cdot 10^2, -4.03 \cdot 10^2, 4.19 \cdot 10^2]^T$ mm i $\mathbf{x}_2 = [500.00, -500.00, 419.00]^T$ mm . En les figures 5.21 i 5.22 es representa el rang d'orientacions que es poden assolir en els punts estudiats en forma eix-angle. L'eix de rotació determina de forma unívoca un punt sobre una esfera unitària, i l'angle girat es representa en intensitat de color (en l'escala, al lateral, un gir de 2π està representat per 1). Cal indicar, que per fer més visible la representació s'ha assumit que l'angle girat va entre 0 i 2π , i per tant els eixos de gir únicament recobriran la meitat de la esfera (d'altra manera algunes orientacions estarien situades en la antípoda, i no serien visibles en una única representació).

En primer lloc, cal destacar que les orientacions estan distribuïdes sobre el que seria la frontera de la intersecció entre una esfera i l'espai de treball d'un dels robots, tal com es dedueix de la forma en que s'han generat les interseccions. Existeix una zona en la que és possible obtenir totes les orientacions de gir respecte als eixos representats i fora d'aquesta zona el rang d'orientacions es va degradant fins arribar a extingir-se. Per la situació relativa de les bases analitzada la qualitat de l'espai de treball és bastant propera a la ideal, que presentaria la mateixa distribució d'eixos, però amb un rang de 2π en tots els punts. Que la qualitat de l'espai sigui bona és degut a que la distància entre els sistemes coordinat de prensió es de l'ordre dels espais de treball (Conjectura 3.1), i que la situació relativa de les bases també ho és.

En la figura 5.18 es presenten diferents imatges en les que el sistema coordinat del robot de referència (robot de l'esquerra) està situat en la posició \mathbf{x}_1 . Cal indicar que el sistema de referència està situat sobre el punt en que intersecten els eixos de rotació de les articulacions 4, 5 i 6. Les diferents configuracions correspon a rotacions respecte un eix predeterminat, i en concret un dels eixos que presenten rotació de 2π (Figura 5.21).

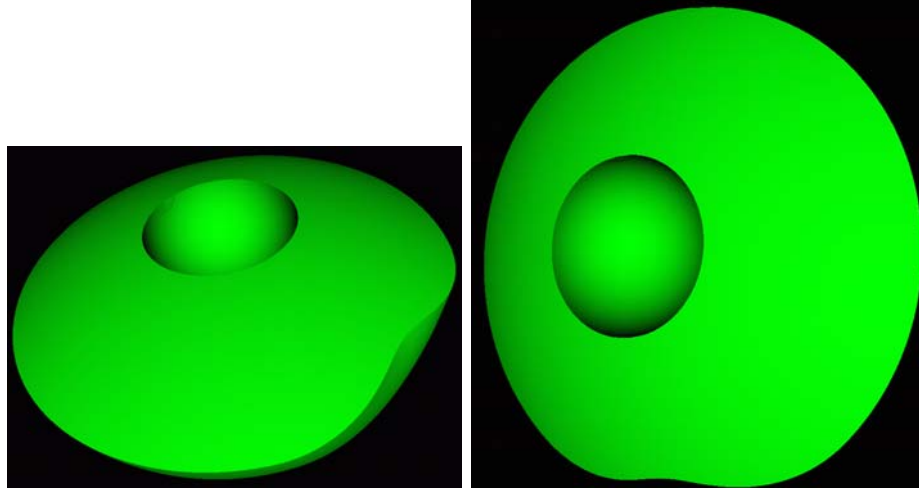


Figura 5.20: Espai de treball (\mathcal{W}_R^*) del sistema multirobot per $\|\mathbf{p}_{O_i}\| = 680.088mm$.

5.3.2 Evolució orientació

Per tal d'il·lustrar la evolució del rang orientacions al augmentar la distància entre els punts de pressió s'ha estudiat una altra configuració, en una relació de pressió donada per:

$$\mathbf{O}_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2000 \text{ mm} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \text{ mm} \\ 0 & 0 & -1 & 461 \text{ mm} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

cosa que implica $\|\mathbf{p}_{O_i}\| = 2052.44mm$. Aquesta configuració de pressió presenta unes característiques similars a la emprada en l'exemple anterior, amb la única diferència que la distància entre els sistemes de pressió és bastant més gran. Per tal que l'espai de treball per aquesta configuració de pressió no sigui nul s'ha seleccionat la següent posició relativa de les bases:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1000 \text{ mm} \\ 0 & -1 & 0 & -2000 \text{ mm} \\ 0 & 0 & 0 & 461 \text{ mm} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

un cop fixades la configuració s'ha estudiat el rang d'orientacions possibles en el punt $\mathbf{x} = [196, -403, 419]^T$ mm (Figura 5.23). A primera vista és presenten dues diferències importants amb els rangs d'orientació obtinguts en l'exemple anterior. En primer lloc el rang d'orientació té regions no connexes, i a més l'interval de rotacions en cadascun dels eixos és notablement més petita que l'exemple anterior. Aquesta darrera observació és coherent amb la conjectura realitzada (Conjectura 3.1), mentre que la primera observació és deguda a el fet que l'espai de treball del robot és no convexa i la intersecció entre una esfera i un sòlid no convexa pot presentar una frontera no continua sobre la esfera. Donades les característiques obtingudes en la anàlisi d'aquest punt i d'altres en podria considerar que aquesta configuració està al límit del que seria recomanable per a treballar amb manipulació conjunta.

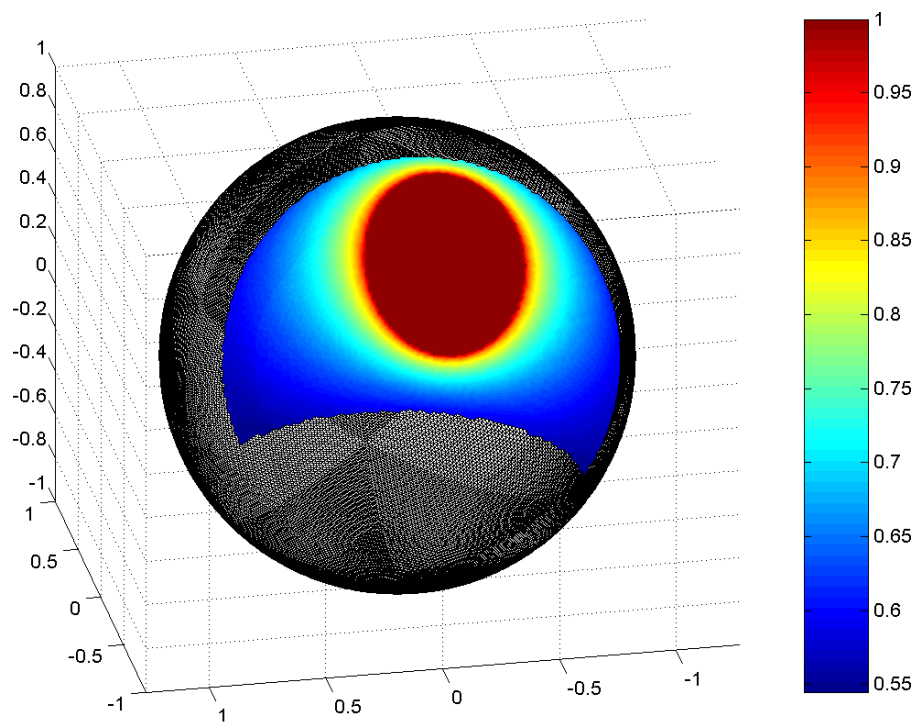


Figura 5.21: Rang d'orientacions del sistema multirobot de la cel·la del IOC per a x_1 .

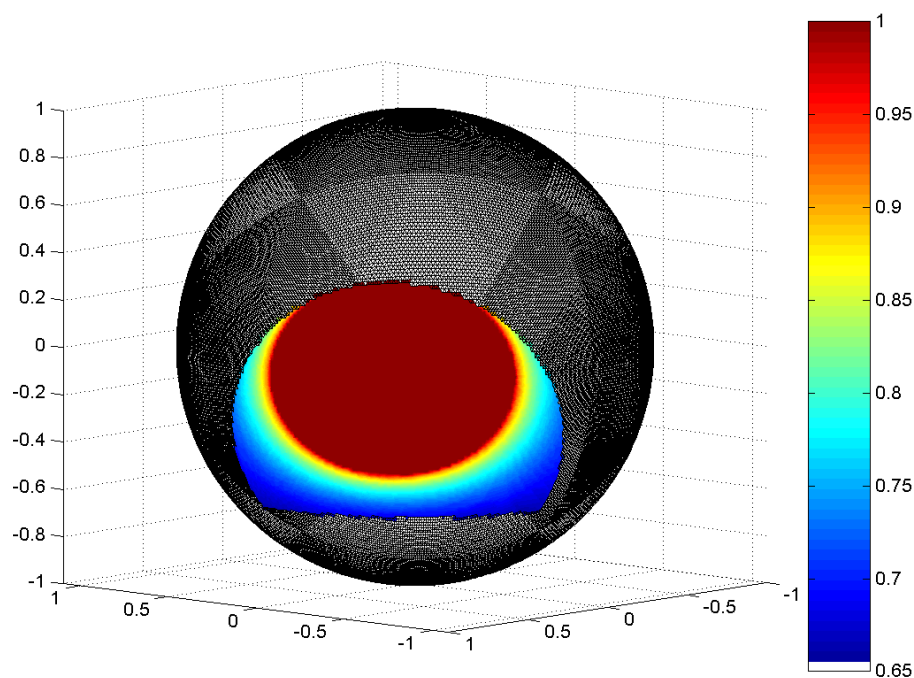


Figura 5.22: Rang d'orientacions del sistema multirobot de la cel·la del IOC per a x_2 .

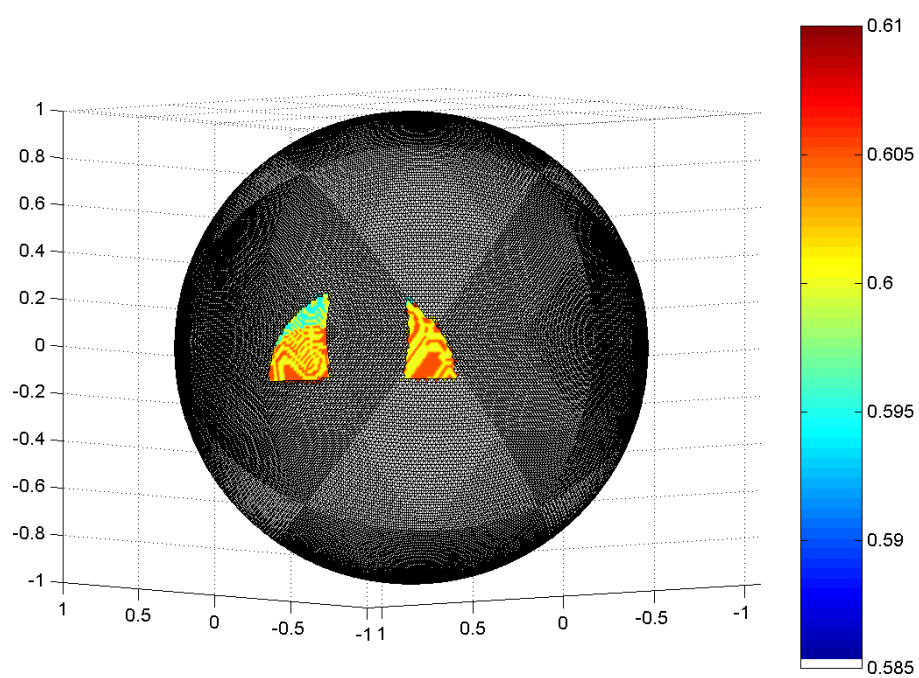


Figura 5.23: Rang d'orientacions del sistema multirobot en la configuració II.

Part III

Dinàmica i Control

Capítol 6

Sistemes Mecànics amb restriccions holònomes

L'estudi del comportament dinàmic de sistemes mecànics amb restriccions holònomes es pot fer seguint diferents procediments. Una possibilitat és seleccionar un conjunt de coordenades locals del sistema (Capítol 2), i sobre aquestes realitzar un estudi similar al que es faria sobre \mathbb{R}^n . La selecció d'aquestes coordenades no és sempre fàcil i en molts casos amaga propietats del sistema, a més de dificultar la sistematització de molts dels procediments d'estudi. En aquest capítol es presenta l'estudi d'aquests sistemes seguint un enfoc basat en la seva formulació en forma de sistemes d'equacions diferencial-algebraiques (DAEs). En aquest plantejament es descriu per una banda la varietat sobre la que es mou el sistema, i per l'altra un conjunt d'equacions diferencials que corresponen a la dinàmica del sistema sense restriccions. Aquest plantejament permet mantenir la intuïció física sobre el sistema a canvi de treballar amb un sistema d'ordre superior. La principal diferència entre l'enfoc basat en DAEs i la formulació clàssica de problemes amb restriccions, resolts per mètode de Lagrange, és la metodologia de resolució.

El plantejament basat en DAEs es pot aplicar a la definició, simulació i disseny de controladors per aquest tipus de sistemes [Sira-Ramirez, 1992a] [Kumar and Daoutidis, 1995] [McClamroch, 1990] [Krishnan and McClamroch, 1993] [Yim, 1993].

En aquest capítol s'ha adoptat una representació dels sistemes amb restriccions holònomes que permet la seva integració mitjançant integradors de DAEs (*DAE solvers*) clàssics. Es caracteritzen les singularitats d'aquests sistemes pel cas de robot amb l'element terminal restringit a una superfície rígida i per la manipulació multirobot a través de premsió rígida de sòlid rígid. Finalment es realitza una proposta de sistema de control genèric per aquest tipus de sistemes que permet regular la posició i les forces de lligam que actuen sobre el sistema.

6.1 Formulació dels sistemes mecànics

Els sistemes mecànics que s'estudiaran estan compostats per cadenes cinemàtiques obertes, i lligams cinemàtics que restringeixen el seu moviment. Com ja s'ha apuntat anteriorment, el modelat a través de DAE formula el sistema amb les equacions de la dinàmica de les cadenes cinemàtiques obertes i les restriccions cinemàtiques, per separat. A continuació es descriu la forma genèrica de la dinàmica d'aquestes cadenes, i posteriorment es presenta la aplicació de la metodologia proposada a dos casos concrets de sistemes amb restriccions holònomes.

6.1.1 Dinàmica de les cadenes cinemàtiques obertes

Les cadenes cinemàtiques obertes estan formades per un conjunt de cossos a l'espai, que s'assumeixen rígids. Per tant la seva configuració es pot representar per una varietat de la forma:

$$\mathcal{M} = SE(3) \times SE(3) \times \cdots \times SE(3) \quad (6.1)$$

aquesta varietat presenta una mètrica natural de la forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_n \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

on \mathbf{T}_i correspon a la mètrica emprada per descriure les característiques físiques del cos i . La obtenció d'aquestes mètriques, que habitualment s'anomena tensor d'inèrcia, és un problema força estudiat i conegut [Stokes and Brockett, 1996]. En les cadenes articulades els diferents cossos estan units a través d'articulacions, i la situació de les diferents articulacions θ forma el que s'anomena espai de configuracions \mathcal{C} . A partir de la situació de les articulacions i l'aplicació de la cinemàtica del mecanisme és possible determinar la situació de cadascun dels cossos dins l'espai de treball. Per tant existeix una aplicació:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{K}} \mathcal{M}$$

un cop establerta aquest relació és possible importar la mètrica de \mathcal{M} cap a \mathcal{C} . Aquesta mètrica presenta la forma:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{M}} = \mathbf{J}^T \mathbf{T} \mathbf{J}$$

on \mathbf{J} representa la aplicació tangent de \mathcal{K} . Aquesta expressió es pot desenvolupar en la forma:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^T \mathbf{T}_i \mathbf{J}_i$$

on \mathbf{J}_i correspon a les components de la aplicació tangent de \mathcal{K} que permeten relacionar les velocitats de les articulacions i les velocitats del cos i .

La mètrica definida, està directament relacionada amb la energia cinètica de la cadena cinemàtica. Les trajectòries que descriu el mecanisme corresponen a les geodèsiques de la

mètrica corresponent a l'energia cinètica. És a dir que la dinàmica del mecanisme es representa a través de l'equació:

$$\nabla_{\omega}\omega = \mathbf{0} \quad (6.3)$$

on $\omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$ i $\nabla_{\omega}\omega$ representa la derivada covariant. Aquesta derivada covariant ha d'ésser coherent amb la mètrica de l'energia cinètica, i per tant definir una connexió Riemanniana [Boothby, 1986].

A més de l'energia cinètica, la majoria de sistemes mecànics tenen una component d'energia potencial. Aquesta és una funció de la forma:

$$U : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

la inclusió d'aquesta nova component de la energia modifica la energia total de les geodèsiques del sistema, i la evolució de les geodèsiques del sistema prendrà la forma:

$$\mathbf{T}\nabla_{\omega}\omega + \text{grad}U = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

on $\text{grad}U$ correspon al gradient de U . Finalment és possible obtenir una representació completa de la dinàmica introduint la influència de les forces exteriors:

$$\mathbf{T}\nabla_{\omega}\omega + \text{grad}U = \boldsymbol{\tau} \quad (6.5)$$

entre aquestes forces exteriors s'inclouen les forces aplicades en les articulacions i els fregaments.

Un cop fixat un conjunt de coordenades locals, la equació (6.5) es transforma directament en la equació:

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{T}_{kj}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\theta}_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Gamma_{ij}^k(\boldsymbol{\theta}) \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j + \mathbf{g}_k = \tau_k \quad (6.6)$$

on Γ_{ij}^k corresponen als símbols de Christoffel per les coordenades locals fixades. En la literatura de robòtica aquesta equació es presenta en forma matricial de la forma:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\tau} \quad (6.7)$$

on $\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}$ són vectors vectors ($n \times 1$) que corresponen a les variables articulars, les seves velocitats i acceleracions respectivament, \mathbf{M} és una matriu simètrica i definida positiva que correspon al tensor d'inèrcia, \mathbf{c} és un vector ($n \times 1$) que representa les forces de Coriolis i centrípètes, \mathbf{g} és un vector ($n \times 1$) que representa les forces que provenen de potencials i $\boldsymbol{\tau}$ és un vector ($n \times 1$) que correspon al parell exercit en les diferents articulacions.

Aquesta formulació expressa la dinàmica sobre l'espai de configuracions, mentre altres formulacions la referencien a la configuració de l'element terminal del sistema multirobot (*Operational Space Formulation*) [Kathib, 1987].

Tal com s'ha presentat anteriorment (capítol 2), en els sistemes amb restriccions holònomes el moviment del sistema estarà restringit. La dinàmica del sistema completa serà la dinàmica lliure però restringida a una varietat. És a dir :

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{In} \boldsymbol{\tau} + \frac{\partial \phi^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\lambda} \quad (6.8)$$

$$\phi(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \quad (6.9)$$

on ϕ correspon a les restriccions que actuen sobre el sistema expressades sobre l'espai de configuracions, \mathbf{In} és una matriu de permutació que relaciona els parells generalitzats amb les diferents articulacions, i $\boldsymbol{\lambda}$ les forces de lligam introduïdes per mantenir el sistema sobre la varietat. Aquesta formulació es pot expressar en l'espai d'estat amb el que s'obté

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{In} \boldsymbol{\tau} + \frac{\partial \phi^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\lambda} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega} \\ \phi(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Aquest és el format genèric en el que presenten els sistemes mecànics amb restriccions holònomes.

El sistema (6.10) presenta un format de DAE d'índex III (Taula B.1), per tant la seva matriu de reducció d'índex és $\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \phi^T}{\partial \boldsymbol{\theta}}$.

El sistema (6.10) té solució si i només si $\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \phi^T}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ és no singular. Aquesta conclusió és equivalent al Teorema d'existència de la dinàmica amb restriccions [Haug, 1989].

Seguidament s'apliquen aquest desenvolupaments a dos tipus de sistemes robòtics amb restriccions holònomes.

6.1.2 Robot restringit a una superfície

Seguidament s'aplica la formulació presentada al cas de robots l'element terminal dels quals està restringit a moure's sobre una superfície/corba rígida. Aquest tipus de sistema és habitual en la realització de tasques robotitzades en les que hi ha contacte amb l'entorn com per exemple el polít, a més de poder-se modelar d'aquesta manera diferents tipus de sistemes mecànics. A més de la formulació es presenta una caracterització nova i intuïtiva de les singularitats que presenten aquest tipus de mecanismes.

6.1.2.1 Modelat del Sistema

En aquest tipus de sistemes \mathbf{M} , \mathbf{c} i \mathbf{g} corresponen directament a les característiques de la dinàmica del robot. La restricció $\phi(\boldsymbol{\theta})$ es pot expressar de la forma $\varphi(\mathcal{K}\text{in}(\boldsymbol{\theta}))$ on

$$\varphi : SE(3) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

correspon a la descripció de la superfície de restricció, i $\mathcal{K}\text{in}$ és la cinemàtica del robot. Aplicant aquesta descomposició és possible escriure $\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J}$, on \mathbf{J} correspon a la aplicació tangent de la cinemàtica lliure. Cal tenir en compte que en aquest cas $\boldsymbol{\lambda}$ té la mateixa dimensió que $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}$, és a dir el nombre de restriccions independents.

Com ja és sabut \mathbf{J} relaciona les direccions de moviment en \mathcal{C} i el $SE(3)$. De manera similar les components de $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}$ representen les direccions normals a la superfície de restricció, per tant formen un conjunt generador de les direccions prohibides degut a la restricció, és a dir el

Equacions de la corba	Singularitats
$a \cdot y + b \cdot x = c$	$\theta_2 \in [0, \pi], \theta_1 = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$
$(x - a)^2 + (y - c)^2 = 1$	$\theta_2 \in [0, \pi], \theta_1 = \arctan\left(\frac{c}{a}\right)$

Taula 6.1: Anàlisi d'algunes corbes de restricció.

complementari a l'espai tangent de la varietat. Finalment el producte $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J}$ permet relacionar les velocitats de \mathcal{C} amb les velocitats sobre la varietat.

Les forces lligam generades sobre l'espai de configuracions presentaran la forma:

$$\mathbf{J}^T \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (6.11)$$

on $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ és un vector que indica la quantitat de força en cadascuna de les components del conjunt generador format pels elements de $\mathbf{J}^T \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}^T$.

Cal tenir en compte que els vectors que formen $\mathbf{J}^T \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}^T$ no tenen per que ésser ortogonals entre si ni unitaris, això s'ha de tenir en compte en la interpretació de $\boldsymbol{\lambda}$. És possible, però aconseguir que aquests vectors siguin ortonormals entre si a través de combinacions lineals.

Proposició 6.1 *En els robots restringits a una superfície/corba la matriu de reducció d'índex presenta la forma:*

$$\mathbf{J} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}^T \mathbf{J}^T \quad (6.12)$$

Demostració

Donat que la matriu de reducció d'índex genèrica pren la forma $\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\theta}}^T$ substituint el valor de $\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ deduït anteriorment s'obté l'expressió presentada.

6.1.2.2 Caracterització de les Singularitats

En aquesta secció es presentació la relació existent entre les singularitats de la cinemàtica i les singularitats de la matriu de reducció d'índex.

Proposició 6.2 *La matriu de reducció d'índex $\wp = \mathbf{J} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}^T \mathbf{J}^T$ és singular si i només si $\text{span} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}^T \right\} \cap \ker \{ \mathbf{J}^T(\boldsymbol{\theta}) \} \neq \{0\}$*

Demostració

Donat que \mathbf{M} representa el tensor d'inèrcia d'una cadena cinemàtica oberta es pot considerar que és una matriu definida positiva i per tant de rang complet. Per tant (6.12) és una forma quadràtica definida positiva.

En el cas en que \wp és un escalar, és singular quan és igual a 0. Això passa quan $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})^T \phi_{\mathbf{x}}(\mathcal{K}_{\text{in}}(\boldsymbol{\theta}))^T = 0$, cosa que indica que $\phi_{\mathbf{x}}^T(\mathcal{K}_{\text{in}}(\boldsymbol{\theta})) \in \ker \{ \mathbf{J}^T(\boldsymbol{\theta}) \}$.

El producte $\mathbf{J}^T \frac{\partial \varphi^T}{\partial \mathbf{x}}$, es pot expressar com $\left[\mathbf{J}^T \frac{\partial \varphi_1^T}{\partial \mathbf{x}}, \dots, \mathbf{J}^T \frac{\partial \varphi_m^T}{\partial \mathbf{x}} \right]$, aquesta matriu té com a molt rang m . En el suposat cas en que $\text{span} \left\{ \frac{\partial \varphi^T}{\partial \mathbf{x}} \right\} \cap \ker \{ \mathbf{J}^T (\boldsymbol{\theta}) \} \neq \{0\}$, el seu rang es redueix i passa a ésser $m - \dim \left\{ \text{span} \left\{ \frac{\partial \varphi^T}{\partial \mathbf{x}} \right\} \cap \ker \{ \mathbf{J}^T (\boldsymbol{\theta}) \} \right\}$, i per tant es produeix una pèrdua de rang.

Lema 6.1 *En el cas particular que*

$$\text{Rank} \{ \ker \{ \mathbf{J}^T (\boldsymbol{\theta}) \} \} = 1$$

la condició de la proposició (6.2) es dóna quan $\ker \{ \mathbf{J}^T (\boldsymbol{\theta}) \}$ i $\phi_{\mathbf{x}}^T (\mathbf{kin} (\boldsymbol{\theta}))$ s'al·lineen.

Les forces que pertanyen al nucli de \mathbf{J}^T , poden tenir magnitud infinita sense que això generi cap força sobre les articulacions. Per aquest motiu si les forces de lligam es troben dins aquest conjunt, no és possible solucionar de forma única el problema dinàmic, ja que forces de lligam de diferent magnitud generaran la mateixa força sobre l'espai de configuracions i per tant el mateix moviment de les articulacions.

L'estudi de les singularitats que s'ha presentat únicament considera relacions de velocitat, i no té en compte les restriccions de posició. Per tant algunes singularitats obtingudes a partir de la aplicació de la proposició 6.2 no seran tals ja que no compliran les restriccions de posició. La natura de les singularitats depèn de les característiques de la superfície de lligam i les característiques cinemàtiques del manipulador. En la Taula 6.1 es presenten alguns resultats obtinguts en l'estudi d'un manipulador de 2 graus de llibertat restringit a diferents tipus de superfícies [Costa-Castelló et al., 1995].

6.1.3 Robots manipulant la mateixa peça simultàniament

A continuació s'aplica la metodologia de modelat al cas de dos robots que manipulen conjuntament una mateixa peça. Es considerarà que la peça manipulada es pot modelar com un sòlid rígid i que les configuracions de prensió són totalment rígides. Com en el cas anterior a més de la formulació es presenta una caracterització de les singularitats del mecanisme sota estudi.

6.1.3.1 Modelat

Aquest tipus de sistemes, estudiats en la secció 2.2, presenten un tipus de restriccions diferents, ja que són igualtats entre elements de $SE(3)$.

Les equacions de la dinàmica lliure presentaran un format similar, encara que la interpretació serà una mica diferent:

$$\mathbf{M} (\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{c} (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{g} (\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{In} \boldsymbol{\tau} - \mathbf{W}^T (\boldsymbol{\theta}) \mathbf{f} \quad (6.13)$$

on $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}_2^T, \mathbf{x}^T]^T$, $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T, \mathbf{f}_2^T]^T$, $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\tau}_1^T, \boldsymbol{\tau}_2^T]^T$, $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{g}_1(\boldsymbol{\theta}_1)^T, \mathbf{g}_2(\boldsymbol{\theta}_2)^T, m\mathbf{g}_r^T]^T$,
 $\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{c}_1(\boldsymbol{\theta}_1)^T, \mathbf{c}_2(\boldsymbol{\theta}_2)^T, \mathbf{c}_o(\mathbf{x})^T]^T$,

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1(\boldsymbol{\theta}_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2(\boldsymbol{\theta}_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_o \end{bmatrix}, \mathbf{In} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_d & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1(\boldsymbol{\theta}_1) & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_2(\boldsymbol{\theta}_2) & -\mathbf{I}_d \end{bmatrix}$$

on \mathbf{x} correspon a la situació en l'espai de l'objecte manipulat, \mathbf{M}_o és el tensor d'inèrcia de l'objecte manipulat expressat en el sistema de referència sobre l'objecte, $\mathbf{c}_o(\mathbf{x})$ correspon al terme d'acoblament de la dinàmica del sòlid manipulat, m és la massa d'aquest sòlid, \mathbf{g}_r correspon a les forces que actuen sobre l'objecte degudes a la gravetat, i $\mathbf{E}_i(\boldsymbol{\theta}_i) \triangleq \mathbf{A}\mathbf{d}_{\mathbf{O}_i^{-1}}\mathbf{J}_i$ correspon al jacobià del robot i expressat en el sistema coordinat de referència sobre l'objecte.

Així el sistema complet pren la forma

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{In}\boldsymbol{\tau} - \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{f} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}_1\mathcal{K}\text{in}_1(\boldsymbol{\theta}_1)\mathbf{O}_1 \quad (6.15)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}_2\mathcal{K}\text{in}_j(\boldsymbol{\theta}_2)\mathbf{O}_2 \quad (6.16)$$

on \mathbf{O}_i correspon a la transformació entre el sistema de referència sobre el canell del robot i , i el sistema de referència sobre l'objecte i \mathbf{B}_i correspon a la transformació necessària entre el sistema de referència sobre la base del robot i , i el sistema de referència de món.

Pels sistemes multirobot amb manipulació rígida d'objectes rígids, la matriu de reducció d'índex presenta la forma $\mathbf{W}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{W}(\boldsymbol{\theta})$, i substituint s'obté l'expressió:

$$\wp = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}(\boldsymbol{\theta}_1) + \mathbf{M}_o^{-1} & \mathbf{M}_o^{-1} \\ \mathbf{M}_o^{-1} & \boldsymbol{\Lambda}_2^{-1}(\boldsymbol{\theta}_2) + \mathbf{M}_o^{-1} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

on $\boldsymbol{\Lambda}_i^{-1}(\boldsymbol{\theta}_i) = \mathbf{E}_i(\boldsymbol{\theta}_i)\mathbf{M}_i^{-1}(\boldsymbol{\theta}_i)\mathbf{E}_i^T(\boldsymbol{\theta}_i)$, i anomenant $\boldsymbol{\Psi}_i \triangleq \boldsymbol{\Lambda}_i^{-1}(\boldsymbol{\theta}_i) + \mathbf{M}_o^{-1}$ s'obté :

$$\wp = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 & \mathbf{M}_o^{-1} \\ \mathbf{M}_o^{-1} & \boldsymbol{\Psi}_2 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

6.1.3.2 Caracterització de les singularitats

Lema 6.2 Woodbury [Kailath, 1980]:

Si \mathbf{P} , \mathbf{Q} i $\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}$ són de rang complet, aleshores

$$(\mathbf{P} + \mathbf{S}\mathbf{Q}\mathbf{R})^{-1} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S})^{-1}\mathbf{R}\mathbf{P}^{-1} \quad (6.19)$$

Proposició 6.3 *La matriu de reducció d'índex (6.18) és singular si $\ker \{\mathbf{E}_1^T\} \cap \ker \{\mathbf{E}_2^T\} \neq \emptyset$*

Demostració

Ψ_i és la suma d'una matriu definida positiva i una que és semidefinida positiva per tant és definida positiva i per tant invertible.

Per tal d'estudiar el rang de \wp se li aplicaran algunes transformacions lineals. Primerament la segona fila es premultiplicarà per $-\mathbf{M}_o^{-1} [\Psi_2]^{-1}$ i posteriorment es sumarà a la primera fila:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 - \mathbf{M}_o^{-1} [\Psi_2]^{-1} \mathbf{M}_o^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_o^{-1} & \Psi_2 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Donat que Ψ_2 i \mathbf{M}_o^{-1} són de rang complet, aleshores \wp és singular quan $\Psi_1 - \mathbf{M}_o^{-1} [\Psi_2]^{-1} \mathbf{M}_o^{-1}$ és singular. Per tant es pot reduir l'estudi a l'estudi del rang d'aquesta matriu.

Aplicant el lema de Woodbury a (6.3):

$$\begin{aligned} \Psi_1 - \mathbf{M}_o^{-1} [\Psi_2]^{-1} \mathbf{M}_o^{-1} &= \\ \Psi_1 - \mathbf{M}_o^{-1} \left[[\mathbf{E}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{E}_2^T]^{-1} + \mathbf{M}_o^{-1} \right] \mathbf{M}_o^{-1} &= \\ \Lambda_1 + \mathbf{M}_o^{-1} - \mathbf{M}_o^{-1} \left[\mathbf{M}_o^{-1} - \mathbf{M}_o^{-1} \mathbf{E}_2 [\mathbf{M}_2 + \mathbf{E}_2^T \mathbf{M}_o^{-1} \mathbf{E}_2]^{-1} \cdot \mathbf{E}_2^T \mathbf{M}_o^{-1} \right] \mathbf{M}_o^{-1} &= \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{E}_1^T + \mathbf{M}_o^{-1} - \mathbf{M}_o^{-1} \left[\mathbf{M}_o^{-1} - \mathbf{M}_o^{-1} \mathbf{E}_2 \cdot [\mathbf{M}_2 + \mathbf{E}_2^T \mathbf{M}_o^{-1} \mathbf{E}_2]^{-1} \mathbf{E}_2^T \mathbf{M}_o^{-1} \right] \mathbf{M}_o^{-1} &= \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{E}_1^T + \mathbf{E}_2 [\mathbf{M}_2 + \mathbf{E}_2^T \mathbf{M}_o^{-1} \mathbf{E}_2]^{-1} \mathbf{E}_2^T & \end{aligned}$$

Donat que \mathbf{M}_1^{-1} i $[\mathbf{M}_2 + \mathbf{E}_2^T \mathbf{M}_o^{-1} \mathbf{E}_2]^{-1}$ són matrius definides positives, $\Psi_1 - \mathbf{M}_o^{-1} [\Psi_2]^{-1} \mathbf{M}_o^{-1}$ és una matriu semidefinida positiva, i per tant $\Psi_1 - \mathbf{M}_o^{-1} [\Psi_1]^{-1} \mathbf{M}_o^{-1}$ és singular únicament quan hi ha un vector que pertany a la intersecció dels nuclis de \mathbf{E}_1^T i \mathbf{E}_2^T simultàniament. Formalment, es pot escriure:

$$\det \{ \Psi_1 - \mathbf{M}_o^{-1} [\Psi_1]^{-1} \mathbf{M}_o^{-1} \} = 0 \text{ iff } \dim \{ \text{span} \{ \ker \{ \mathbf{E}_1^T \} \cap \ker \{ \mathbf{E}_2^T \} \} \} > 0$$

La matriu (6.18) és singular quan els nuclis de les matrius \mathbf{E}_i presenten una intersecció no nul·la. És a dir que les direccions singulars dels robots coincideixen.

Aquestes singularitats estan definides sobre l'espai tangent, per tant és possible que les configuracions singulars obtingudes no compleixin les restriccions de posició. En conseqüència serà necessari verificar aquest punt.

6.2 Simulacions

A mode d'exemple de l'efectivitat de l'enfoc comentat es presenta la metodologia de simulació i modelat de sistemes mecànics amb restriccions holònomes emprada durant el desenvolupament de la tesi. Les simulacions corresponen als sistemes robotics estudiats en la secció anterior.

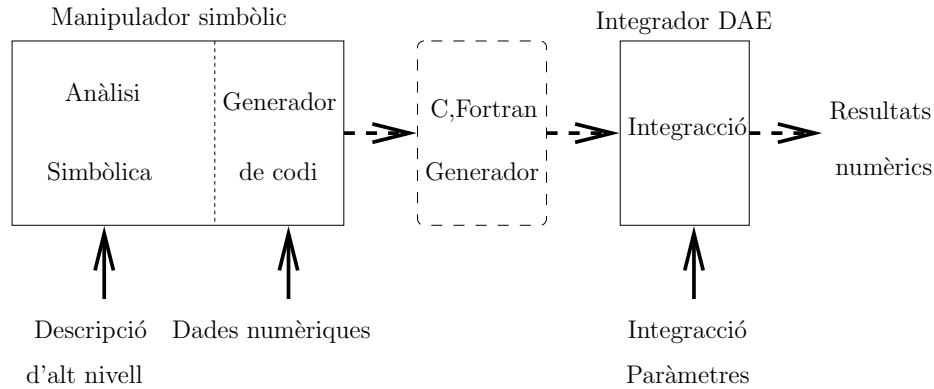


Figura 6.1: Esquema de la metodologia proposada.

6.2.1 Eines d'implementació

Una de les qüestions més tedioses i que en la pràctica consumeixen més temps en el procés de simulació, és la obtenció del conjunt final d'equacions i la seva validació. Per tal de facilitar aquesta tasca s'ha desenvolupat un procediment que permet portar a la pràctica tot els passos, de forma natural i eficaç en quan al temps de desenvolupament. Aquest procediment s'ha esquematitzat en la la Figura 6.1. En el primer pas es fa una descripció d'alt nivell del comportament del sistema. Aquesta descripció és similar als desenvolupaments presentats en la secció anterior. Per facilitar aquesta descripció s'ha desenvolupat un conjunt d'eines que automatitzen molts dels passos, com la introducció de la cinemàtica, càlcul de la aplicació tangent i el tensor d'inèrcia, entre d'altres [Costa-Castelló, 1996]. En aquest primer pas no són necessàries dades numèriques. A partir d'aquesta descripció, el manipulador simbòlic genera i simplifica un conjunt d'equacions que reflexen el comportament del sistema. L'estudi d'aquestes equacions pot aportar informació i conclusions sobre el comportament del sistema [Campbell et al., 1994]. A partir d'aquestes equacions i com a pas previ a la integració numèrica s'obté directament la formulació GGL (Secció B.2.3). Seguidament es recomana introduir les dades numèriques del problema. El fet d'introduir-les en aquest moment permet introduir una segona fase de simplificació. Aquest pas es podria fer un cop generat el codi, però d'aquesta manera la simulació serà més ràpida, encara que una modificació del paràmetres implicarà una nova generació del codi.

El pas següent és la generació de codi a partir d'aquestes equacions. Habitualment el que es genera són un conjunt de rutines en llenguatge Fortran o C. Aquest pas es realitza automàticament.

De forma prèvia a la simulació resulta d'interès estudiar quines són les singularitats del sistema que es pretén simular, ja que en aquests punts la simulació no podrà continuar.

Un cop es disposa del codi, aquest es compila i enllaça conjuntament amb l'integrador. De forma prèvia a la simulació és necessari seleccionar de forma manual alguns paràmetres d'integració per tal d'optimitzar el procés. Un cop s'ha realitzat això, s'executa el programa obtingut i

s'obtenen un conjunt de dades numèriques que representen la evolució de les diferents variables del sistema. Aquestes dades es poden visualitzar amb el suport d'algun paquet estàndard.

En aquest treball s'ha emprat MapleV R3[©] [Char, 1991] com a manipulador simbòlic, DASSL [Brenan et al., 1989] com a integrador de DAEs i MatLabTM [The MathWorks, 1992] com a eina de visualització.

6.2.2 Simulació d'un robot restringit a una superfície

En aquesta secció es presenta el resultat de dues simulacions d'un robot de dos graus de llibertat, on cadascun dels seus cossos és d'un metre de longitud, 5kg de pes i $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de moment d'inèrcia. L'element terminal està restringit a moure's sobre una superfície rígida, en aquest cas una recta. La simulació presenta la següent evolució temporal: entre $t = 0 \text{sg}$ i $t = 0.5 \text{sg}$ el robot es manté parat degut a que s'apliquen uns parell sobre les articulacions que compensen l'efecte de la gravetat, posteriorment per $t = 0.5 \text{sg}$ aquest parell s'elimina i el robot es mou sota l'acció de la gravetat.

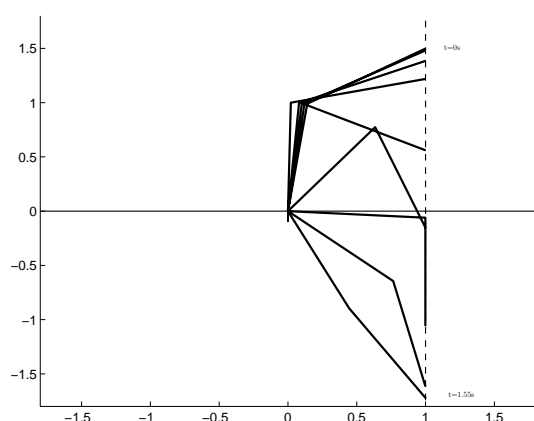
Això s'ha implementat per dos casos diferents. En el primer la superfície de restricció és $x = 1$. Per aquest tipus de superfície les singularitats venen donades per $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$, i (π, π) (Taula 6.1). Cap d'aquestes singularitats compleix les restriccions de posició, per tant el sistema està lliure de singularitats (Figura 6.2). En el segon cas la restricció és $x = 0$; les singularitats per aquest cas són les mateixes que en l'anterior cas però (π, π) i $(0, \pi)$ compleixen les restriccions de posició, per tant són singularitats reals. Per aquest motiu la simulació no pot continuar quan es passa prop d'aquests punts (Figura 6.3).

6.2.3 Dos robots manipulant rígidament un objecte rígid

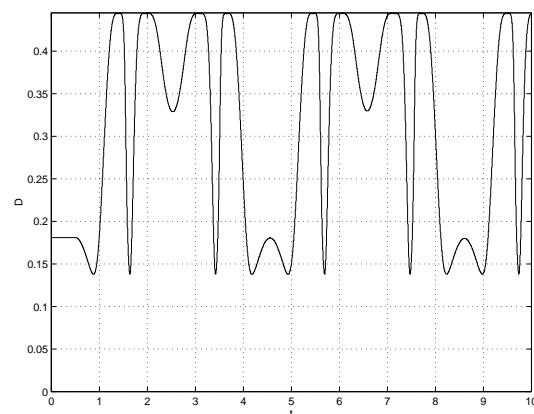
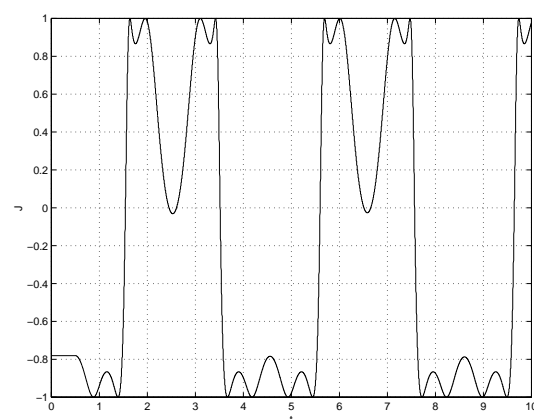
En aquest secció es presenta una simulació de un sistema compost per dos robots de tres graus de llibertat cadascun, que manipulen rígidament un objecte rígid. Els robots del sistema estan composts per cossos de 1m de llargada i 5kg de massa, (Figure 6.4), i l'objecte té una massa de 1kg. Els robots es deixen lliure en front a l'acció de la gravetat. Com es pot observar en les gràfiques la simulació evoluciona correctament fins que el sistema s'aproxima a una singularitat de la matriu de reducció d'índex. Aquesta singularitat correspon a les característiques definides anteriorment en la caracterització d'aquest tipus de sistemes.

6.3 Control de Sistemes DAE

En aquesta secció es presenta una metodologia per dissenyar controladors dinàmics per una classe de sistemes DAE d'índex III, que inclou els sistemes robòtics amb restriccions holònomes. La majoria de treballs presentats en el control d'aquest tipus de sistemes estan basats en tècniques algebraiques [McClamroch, 1990], però en la proposta descrita a continuació s'utilitzen tècniques clàssiques de geometria diferencial per sistemes no lineals. Per poder aplicar aquestes tècniques al tipus de sistemes objecte d'estudi és necessari reformular el



(a) Evolució del Robot

(b) Determinant de φ 

(c) Determinant del Jacobià

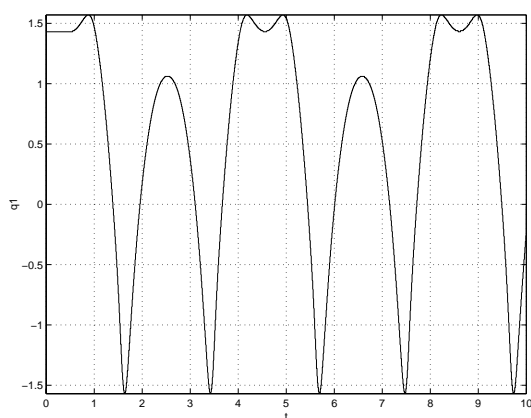
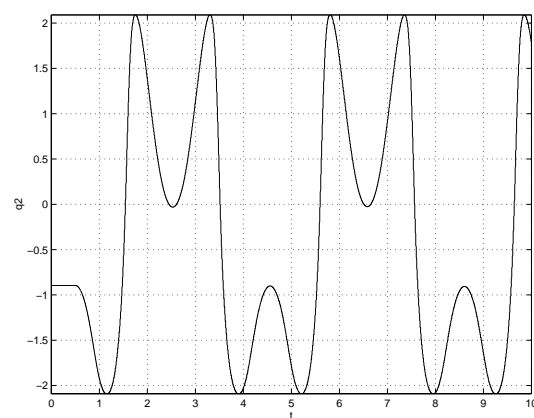
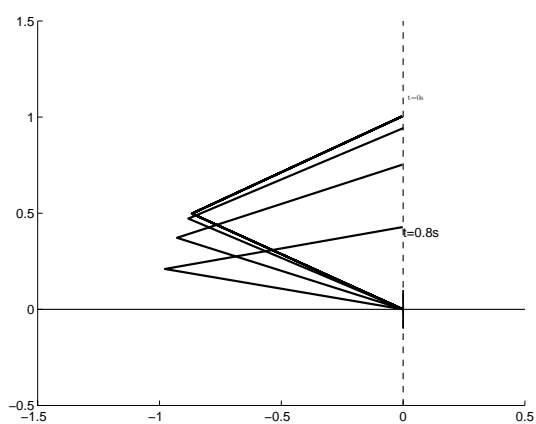
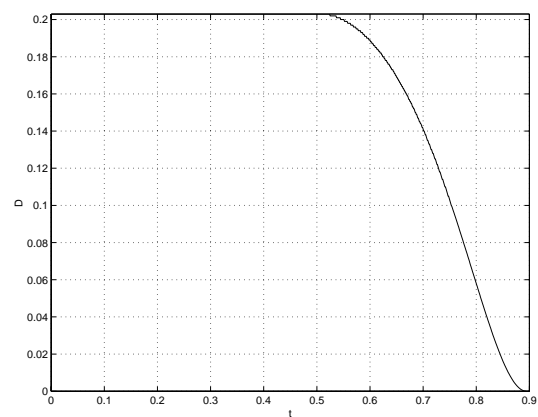
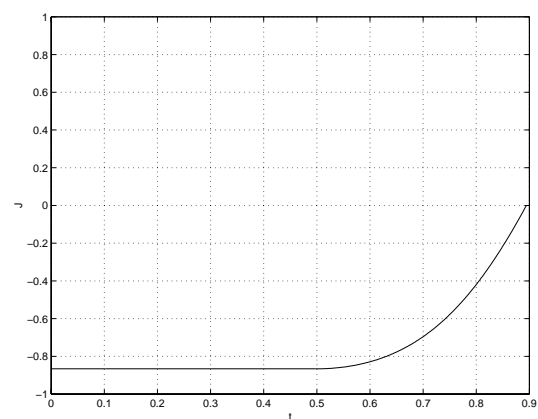
(d) Variable articular $\theta_1(t)$ (e) Variable articular $\theta_2(t)$

Figura 6.2: Evolució per la superfície $x = 1\text{m}$ (Dades Numèriques : Tolerància absoluta 10^{-3} , Tolerància relativa 10^{-3} , Pas d'integració màxim $5 \cdot 10^{-6}\text{s}$, Error màxim produït : $5.249 \cdot 10^{-11}$)



(a) Evolució del Robot

(b) Determinant de φ 

(c) Determinant del Jacobiana

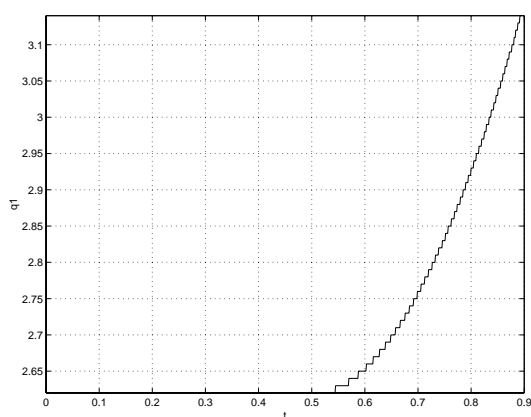
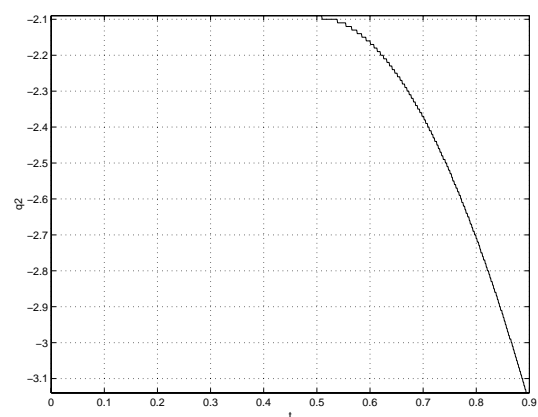
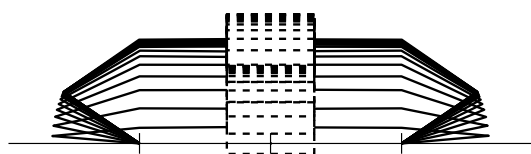
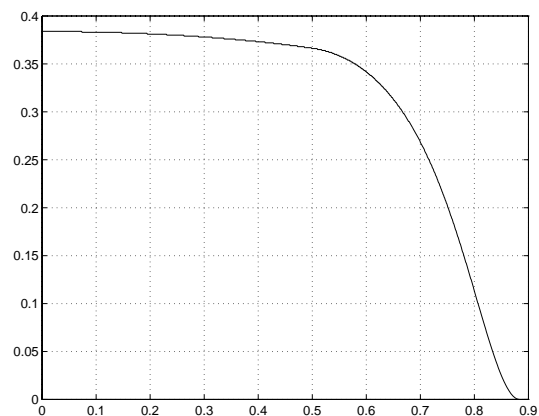
(d) Variable articular $\theta_1(t)$ (e) Variable articular $\theta_2(t)$

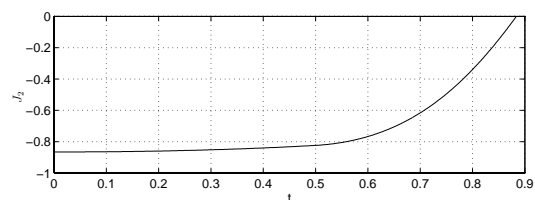
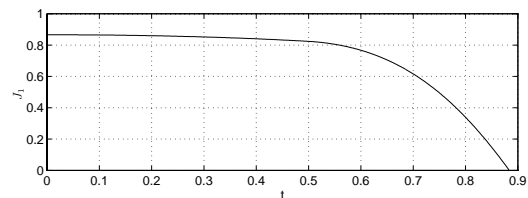
Figura 6.3: Evolució per la superfície $x = 0\text{m}$ (Dades Numèriques : Tolerància absoluta $5 \cdot 10^{-3}$, Tolerància relativa $5 \cdot 10^{-3}$, Pas d'integració màxim $7 \cdot 10^{-6}\text{s}$, Error màxim produït : $1.9 \cdot 10^{-16}$)



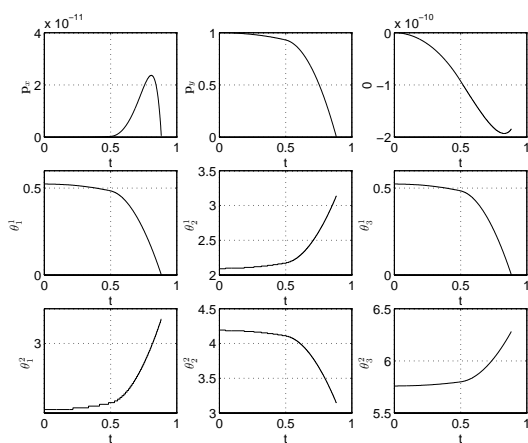
(a) Evolució dels Robots



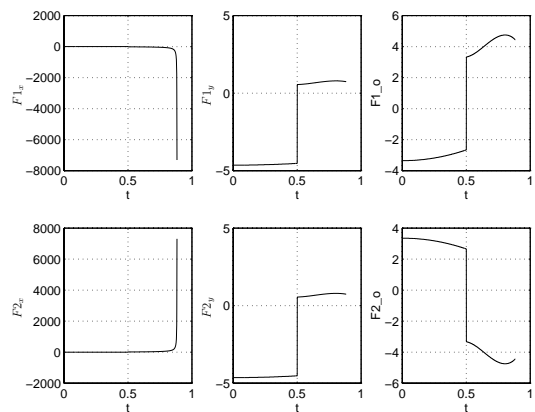
(b) Determinant de φ



(c) Determinant del Jacobià



(d) $\mathbf{x}(t)$



(e) Forces de Lligam

Figura 6.4: Evolució del sistema multirobot (a) Trajectòria descrita pels robots , (b) Determinant de la matriu de reducció d'índex (c) Determinant dels jacobians dels robots, (d) Evolució del vector d'estat (d) Forces de Lligam. (Tolerància absoluta 10^{-6} , Tolerància relativa 10^{-3} , pas d'integració màxim $5 \cdot 10^{-4}$, error màxim $3.9657 \cdot 10^{-8}$)

problema en forma de ODE. Aquesta tècnica s'ha aplicat a priori per sistemes de tipus químic [Kumar and Daoutidis, 1995] i mecànics [Yun, 1993].

En aquest treball s'utilitza una tècnica provinents dels mètodes numèrics de DAEs [Brenan et al., 1989]. Es treballa amb el ODE subjacent (secció B.1.2). La dificultat principal de l'aplicació de les tècniques habituals és que el sistema no està en forma afí. Per solucionar aquest problema s'aplica la tècnica d'extensió dinàmica [Nijmeijer and van der Schaft, 1990].

L'enfoc proposat és genèric i serveix per qualsevol sistema mecànic amb restriccions holònomes modelat amb DAEs. A través de l'aplicació dels algorismes proposats és possible controlar els graus de llibertat de posició del sistema a més de les forces de lligam que actuen sobre ell. Els resultats obtinguts són similars als presentats per alguns casos particulars en el treballs de Xiaoping [Yun, 1993], encara que el procediment d'obtenció del mateixos és totalment diferent.

6.3.1 Formulació del problema

Les equacions d'un sistema robòtic amb restriccions holònomes (Equació 6.10) es poden escriure de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau} \quad (6.22)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_1 \quad (6.23)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}(\mathbf{x}_2) \quad (6.24)$$

on \mathbf{x}_2 representa les variables de posició del sistema, \mathbf{x}_1 les variables de velocitats, $\boldsymbol{\lambda}$ les forces de lligam degudes a les restriccions, $\boldsymbol{\tau}$ són els parells aplicats en les articulacions del sistema, \mathbf{A} , \mathbf{B} , i \mathbf{C} són funcions contínues i diferenciables que defineixen la dinàmica lliure del sistema i, finalment, \mathbf{r} és el conjunt de restriccions que actuen sobre el sistema.

Com ja s'ha introduït anteriorment, aquest tipus de sistema correspon, en general, a un DAE d'índex III. Per tal d'aplicar directament les tècniques de control geomètric és necessari reescriure el sistema (6.22)-(6.24) en forma d'ODE. El mètode emprat per realitzar la conversió es basa en derivar les restriccions algebraiques (6.24) dues vegades en front del temps. Aplicant això s'obté:

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_2} \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{x}_1 \quad (6.25)$$

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{x}_1 + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{x}}_1 \quad (6.26)$$

Per tal d'obtenir el valor de $\boldsymbol{\lambda}$, es substitueix el valor de $\dot{\mathbf{x}}_1$ obtingut de (6.22), en la equació (6.26):

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{x}_1 + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau} \quad (6.27)$$

Si la matriu de reducció índex és no singular, és possible obtenir de forma analítica el valor de $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\lambda} = - [\mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2)]^{-1} \left[\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{x}_1 + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau} \right] \quad (6.28)$$

Per tal d'obtenir un ODE hi ha dues maneres bàsiques de procedir. En la primera el valor de λ es substitueix en (6.22) per tal d'obtenir l'ODE:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) \left[-[\mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2)]^{-1} \cdot \left[\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{x}_1 + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau} \right] \right] + \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_1 \quad (6.30)$$

Aquest sistema s'anomena l'ODE reduït, ja que elimina la restricció algebraica i les variables de lligam. Aquesta aproximació s'ha emprat per dissenyar controladors mitjançant linealització per realimentació d'estat [Krishnan and McClamroch, 1993]. En els casos en que és necessari fer control de les forces de lligam, la variable de sortida és una funció de les variables d'estat i les entrades. Aquest tipus de sistemes no és directament controlable a través de les tècniques clàssiques ja que hi ha una restricció algebraica entre les entrades i les sortides [Krishnan and McClamroch, 1993].

En la segona metodologia, la equació (6.28) es deriva dues vegades respecte el temps per tal d'obtenir una expressió implícita de $\dot{\lambda}$:

$$\left[\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_2) \right] \boldsymbol{\lambda} + [\mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2)] \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} &- \left[\ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{x}_1 + \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right. \\ &\quad \left. + \left[\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_2) \right] \boldsymbol{\tau} + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \dot{\boldsymbol{\tau}} \right] \end{aligned} \quad (6.32)$$

i si la matriu de reducció d'índex és no singular, és possible obtenir el següent ODE :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= - \left[\mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_2) \right]^{-1} \left[\left[\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_2) \right] \boldsymbol{\lambda} + \ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{x}_1 + \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{x}}_1 \right. \\ &\quad \left. + \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \left[\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_2) \right] \boldsymbol{\tau} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \dot{\boldsymbol{\tau}} \right] \end{aligned} \quad (6.33)$$

Aquesta equació, conjuntament amb (6.22)-(6.23) formen l'ODE subjacent [Ascher et al., 1992] del DAE (6.22)-(6.24). En aquesta aproximació la equació algebraica (6.24) queda substituïda per una equació diferencial (6.33).

Per simplificar la notació, la equació (6.33) s'escriu de forma més compacta com:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \dot{\boldsymbol{\tau}} \quad (6.34)$$

i per tant el conjunt d'equacions diferencials queda:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau} \quad (6.35)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_1 \quad (6.36)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \dot{\boldsymbol{\tau}} \quad (6.37)$$

on

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \triangleq -[\mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2)]^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \quad (6.38)$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \triangleq -[\mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2)]^{-1} \quad (6.39)$$

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \triangleq -[\mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2)]^{-1} \left[(\mathbf{x}_1^T \otimes \mathbf{I}_{res}) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}_2} \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) (\mathbf{x}_1^T \otimes \mathbf{I}_{dof}) \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}_2} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \right] \quad (6.40)$$

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -[\mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2)]^{-1} \left[(\mathbf{x}_1^T \otimes \mathbf{I}_{res}) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}_2} \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) (\mathbf{x}_1^T \otimes \mathbf{I}_{dof}) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}_2} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) \right] \quad (6.41)$$

$$\left[(\mathbf{x}_1^T \otimes \mathbf{I}_{res}) (\mathbf{x}_1^T \otimes \mathbf{I}_{res \cdot dof}) \frac{\partial \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}_2}}{\partial \mathbf{x}_2} \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_1^T \otimes \mathbf{I}_{res}) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}_2} \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \left((\mathbf{x}_1^T \otimes \mathbf{I}_{dof}) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}_2} \right) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right]$$

on \otimes nota el producte de Kronecker, \mathbf{I}_p nota la matriu identitat de $p \times p$, i

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \triangleq \left((\mathbf{x}_1^T \otimes \mathbf{I}_{res}) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}_2} \right) \quad (6.42)$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \triangleq \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}_1^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}_1^{dof}} \right] \quad (6.43)$$

$$\mathbf{H}_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \triangleq \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}_2^1} \mathbf{x}_1, \dots, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}_2^{dof}} \mathbf{x}_1 \right] \quad (6.44)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \triangleq \mathbf{H}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{H}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{H}_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (6.45)$$

Donat que el sistema (6.35)-(6.37) és directament un ODE, la teoria clàssica de control és directament aplicable.

6.3.2 Extensió dinàmica

El sistema (6.35)-(6.37) no està en forma afí ja que apareixen les derivades de les variables de control. Per tal de transformar (6.35)-(6.37) en un sistema afí, s'utilitza l'algorisme d'extensió dinàmica [Nijmeijer and van der Schaft, 1990]. En aquest algorisme es defineix $\mathbf{u} \triangleq \dot{\boldsymbol{\tau}}$, i s'introdueix una nova equació diferencial amb el que s'obté:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau} \quad (6.46)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_1 \quad (6.47)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{u} \quad (6.48)$$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{u} \quad (6.49)$$

Aquest nou sistema és afí, per tant es poden aplicar les tècniques clàssiques de control no lineal. El concepte d'extensió dinàmica s'està emprant cada cop més en el camp de l'àlgebra diferencial

[Fliess, 1991] i les seves aplicacions al sistemes de control lliscant [Sira-Ramirez et al., 1992] [Sira-Ramirez, 1992b].

Finalment, el sistema es rescriu com

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (6.50)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{l}(\mathbf{x}) \quad (6.51)$$

on \mathbf{z} són les sortides del sistema, $\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{l}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}(\mathbf{x}_2) \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \boldsymbol{\lambda}^T, \boldsymbol{\tau}^T]^T$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

És important notar que hi ha dos tipus de sortides, una que depèn únicament de les variables de posició i una altra que depèn exclusivament de les variables de lligam. Donat que hi ha dos tipus de sortides, estructuralment diferents les metodologies de dissenys seran diferents.

6.3.3 Disseny del sistema de control

Sobre el sistema (6.50)-(6.51) s'aplica una tècnica de linealització entrada/sortida per realimentació d'estat [Marino and Tomei, 1995]. Per tal d'aplicar aquesta tècnica és necessari estudiar el grau relatiu entre les sortides del sistema (\mathbf{z}) i les seves entrades (\mathbf{u}). Tal com s'ha presentat en la secció anterior hi ha dos tipus de sortides, i per tant l'estudi s'haurà de realitzar de forma independent per cadascuna d'elles. Les sortides que depenen únicament de les variables de posició presenten un grau relatiu 3 mentre que les que únicament depenen de les forces de lligam presenten un grau relatiu 1. Així les variables d'estat del sistema linealitzat \mathbf{y} es defineixen de la següent forma:

$$\mathbf{y}_1^i = \mathbf{l}_1^i(\mathbf{x}) \quad (6.52)$$

$$\mathbf{y}_2^i = L_f \mathbf{l}_1^i(\mathbf{x}) \quad (6.53)$$

$$\mathbf{y}_3^i = L_f^2 \mathbf{l}_1^i(\mathbf{x}) \quad i = 1, \dots, \dim \{\mathbf{l}_1(\mathbf{x})\} \quad (6.54)$$

$$\mathbf{y}_4^j = \mathbf{l}_2^j(\mathbf{x}) \quad j = 1, \dots, \dim \{\mathbf{l}_2(\mathbf{x})\} \quad (6.55)$$

on L representa la derivada de Lie [Marino and Tomei, 1995], i $L_f^2 \mathbf{l}_1^i(\mathbf{x}) = L_f L_f \mathbf{l}_1^i(\mathbf{x})$. Assumint que es verifiquen les condicions de linealització [Nijmeijer and van der Schaft, 1990], i que la aplicació

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \mathbf{y}_3^T, \mathbf{y}_4^T]^T = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) \quad (6.56)$$

és un difeomorfisme, el sistema linealitzat presenta la forma:

$$\dot{\mathbf{y}}_1^i \triangleq \mathbf{y}_2^i \quad (6.57)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_2^i \triangleq \mathbf{y}_3^i \quad (6.58)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_3^i \triangleq L_f^3 \mathbf{l}_1^i(\mathbf{x}) + L_g L_f^2 \mathbf{l}_1^i(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (6.59)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_4^j \triangleq L_f \mathbf{l}_2^j(\mathbf{x}) + L_g \mathbf{l}_2^j(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (6.60)$$

que pot ésser linealitzat amb un control de la forma:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) [\mathbf{v} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})] \quad (6.61)$$

on

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) \triangleq \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}^1} L_{\mathbf{f}_1}^2 \mathbf{l}_1^1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{g}^n} L_{\mathbf{f}_1}^2 \mathbf{l}_1^1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}^1} L_{\mathbf{f}_1}^2 \mathbf{l}_1^i(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{g}^n} L_{\mathbf{f}_1}^2 \mathbf{l}_1^i(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{g}^1} L_{\mathbf{f}_1}^2 \mathbf{l}_2^1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{g}^n} L_{\mathbf{f}_1}^2 \mathbf{l}_2^1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}^1} L_{\mathbf{f}_1}^2 \mathbf{l}_2^j(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{g}^n} L_{\mathbf{f}_1}^2 \mathbf{l}_2^j(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad n = 1, \dots, \text{coldim}[\mathbf{g}] \quad (6.62)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \triangleq \begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}_1}^3 \mathbf{l}_1^i(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}_1} \mathbf{l}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

Aplicant la definició de $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ i $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$ sobre el sistema aquí estudiat, és possible obtenir les expressions de $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix}$$

on

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \quad (6.64)$$

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_1^T} \right]^T + \left[\frac{\partial \left[\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}_2^T} \right]^T \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}_1^T} \right]^T \\ \left[\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) [\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau}]}{\partial \mathbf{x}_2^T} \right]^T + \left[\frac{\partial \left[\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}_2^T} \right]^T \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}_2^T} \right]^T \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau}] + \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) [\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau}]$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) \mathbf{g}_2 + \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \mathbf{C}(\mathbf{x}_2)$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

$$\text{on } \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) = \left(\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \mathbf{x}_2^T} \right)^T$$

Finalment, assumint aquesta llei de control el sistema complet es comporta de la forma:

$$\dot{\mathbf{y}}_1^i = \mathbf{y}_2 \quad (6.65)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_2^i = \mathbf{y}_3 \quad (6.66)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_3^i = \mathbf{v}_1 \quad (6.67)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_4^i = \mathbf{v}_2 \quad (6.68)$$

És important notar que aquest sistema (6.65)-(6.68) és lineal i desacoblat, per tant es possible emprar les metodologies clàssiques de control lineal.

Per tal que aquest procediment sigui correcte és necessari que $\boldsymbol{\beta}$ sigui de rang complet.

Proposició 6.4 β és de rang complet si la matriu $\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix}$ és de rang complet.

Demostració

La matriu β presenta la següent estructura

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2) \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{bmatrix}$$

i donat que l'única cosa que interessa és determinar en quines situacions es produeix una pèrdua de rang, es poden fer modificacions que no alterin el seu rang. Així es multiplica el bloc inferior per $\mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_2)$ i es resta del superior amb el que s'obté la nova matriu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \mathbf{C}(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{bmatrix}$$

Seguidament es substitueixen els diferents elements pel seu valor:

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \\ -[\mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_2) \mathbf{R}^T(\mathbf{x}_2)]^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_2) \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_2) \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

La matriu de la dreta és de rang complet ja que $\mathbf{M}(\mathbf{x}_2)$ és el tensor d'inèrcia. Per tant el rang de la matriu quedarà determinat pel rang de la matriu de l'esquerra. En el bloc de sota de la matriu de l'esquerra cal tenir en compte que $[\mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_2) \mathbf{R}^T(\mathbf{x}_2)]$ correspon a la matriu de reducció d'índex. Aquesta matriu es considera de rang complet per definició, ja que en cas contrari no és possible trobar el ODE de partida d'aquest estudi. Per tant el rang de la matriu queda definit pel rang de la matriu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix}$$

Així si aquesta matriu és rang complet, β serà de rang complet.

Lema 6.3 *En el cas de sistemes robots restringits a una superfície/corba, la matriu β és de rang complet si les restriccions imposades per la restricció són independents de les direccions de control i el sistema està fora d'una configuració singular.*

Demostració

Si la superfície de restricció és de la forma $\phi(\mathbf{p})$ i la sortida del sistema és $\mathbf{l}_1(\mathbf{p})$, on \mathbf{p} són coordenades de l'espai tal que $\mathbf{p} = \mathcal{K}_{\text{in}}(\boldsymbol{\theta})$, es pot escriure :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(\mathbf{p}) \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{l}_1(\mathbf{p}) \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} = [\phi(\mathbf{p}), \mathbf{l}_1(\mathbf{p})] \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix}$$

Aleshores si \mathbf{J} és de rang complet $[\phi(\mathbf{p}), \mathbf{l}_1(\mathbf{p})]$ ha d'ésser també de rang complet.

Lema 6.4 *En el cas de sistemes de manipulació multirobot rígida d'objectes rígids, la matriu β és de rang complet si el braços estan en configuracions no singulars.*

Demostració

Per aquest cas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{R}(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_1 & -\mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{J}_r \end{bmatrix}$$

Si es resta la primera fila a les demés files s'obté:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{J}_r \end{bmatrix}$$

que únicament és de rang complet si tots els \mathbf{J}_i ho són.

6.3.4 Llei de Control lineal

Per tal que les sortides del sistema $(\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_4(t))$ segueixin les referències predefinides $(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t))$ s'utilitzarà una metodologia de regulació sobre l'error. Primerament s'apliquen les següents definicions:

$$\mathbf{e}_1(t) \triangleq \mathbf{y}_1(t) - \mathbf{r}_1(t) \quad (6.69)$$

$$\mathbf{e}_2(t) \triangleq \mathbf{y}_2(t) - \frac{d\mathbf{r}_1(t)}{dt} \quad (6.70)$$

$$\mathbf{e}_3(t) \triangleq \mathbf{y}_3(t) - \frac{d^2\mathbf{r}_1(t)}{dt^2} \quad (6.71)$$

$$\mathbf{e}_4(t) \triangleq \mathbf{y}_4(t) - \mathbf{r}_2(t) \quad (6.72)$$

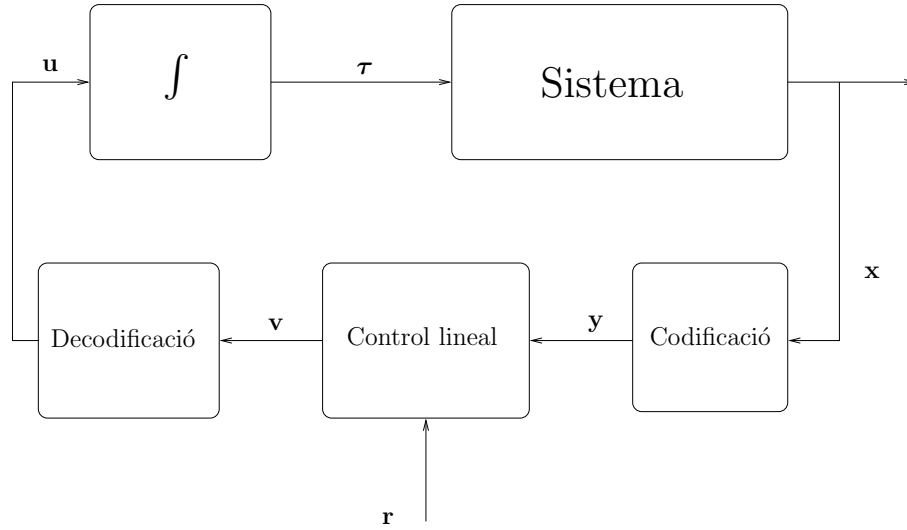


Figura 6.5: Arquitectura del Sistema de Control.

que aplicant-les al sistema el transformen en:

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2 \quad (6.73)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_3 \quad (6.74)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{v}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad (6.75)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_4 = \mathbf{v}_2 - \dot{\mathbf{r}}_2 \quad (6.76)$$

per tant les entrades es seleccionen de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^i &= -\frac{d^3 \mathbf{r}_1^i(t)}{dt^3} - \Lambda_{1,1}^i \left(\mathbf{y}_3^i - \frac{d^2 \mathbf{r}_1^i(t)}{dt^2} \right) - \Lambda_{1,2}^i \left(\mathbf{y}_2^i - \frac{d \mathbf{r}_1^i(t)}{dt} \right) \\ &\quad - \Lambda_{1,3}^i (\mathbf{y}_1^i - \mathbf{r}_1^i(t)) \end{aligned} \quad (6.77)$$

$$\mathbf{v}_2^j = -\left(\frac{d \mathbf{r}_2^j(t)}{dt} + \Lambda_{1,1}^j (\mathbf{y}_4^j - \mathbf{r}_2^j(t)) \right) \quad (6.78)$$

on els paràmetres $\Lambda_{i,j}^k$ es trien per tal que

$$s^3 + \Lambda_{1,1}^i s^2 + \Lambda_{1,2}^i s + \Lambda_{1,3}^i = 0 \quad (6.79)$$

$$s + \Lambda_{2,1}^j = 0 \quad (6.80)$$

siguin polinomis de Hurwitz . Els valors $\Lambda_{i,j}^k$ fixaran la dinàmica de l'error.

6.3.5 Exemple numèric

Seguidament s'aplica la metodologia presentada a un manipulador de 2 graus de llibertat, en el que el seu element terminal està restringit a moures sobre una recta. L'objectiu serà el

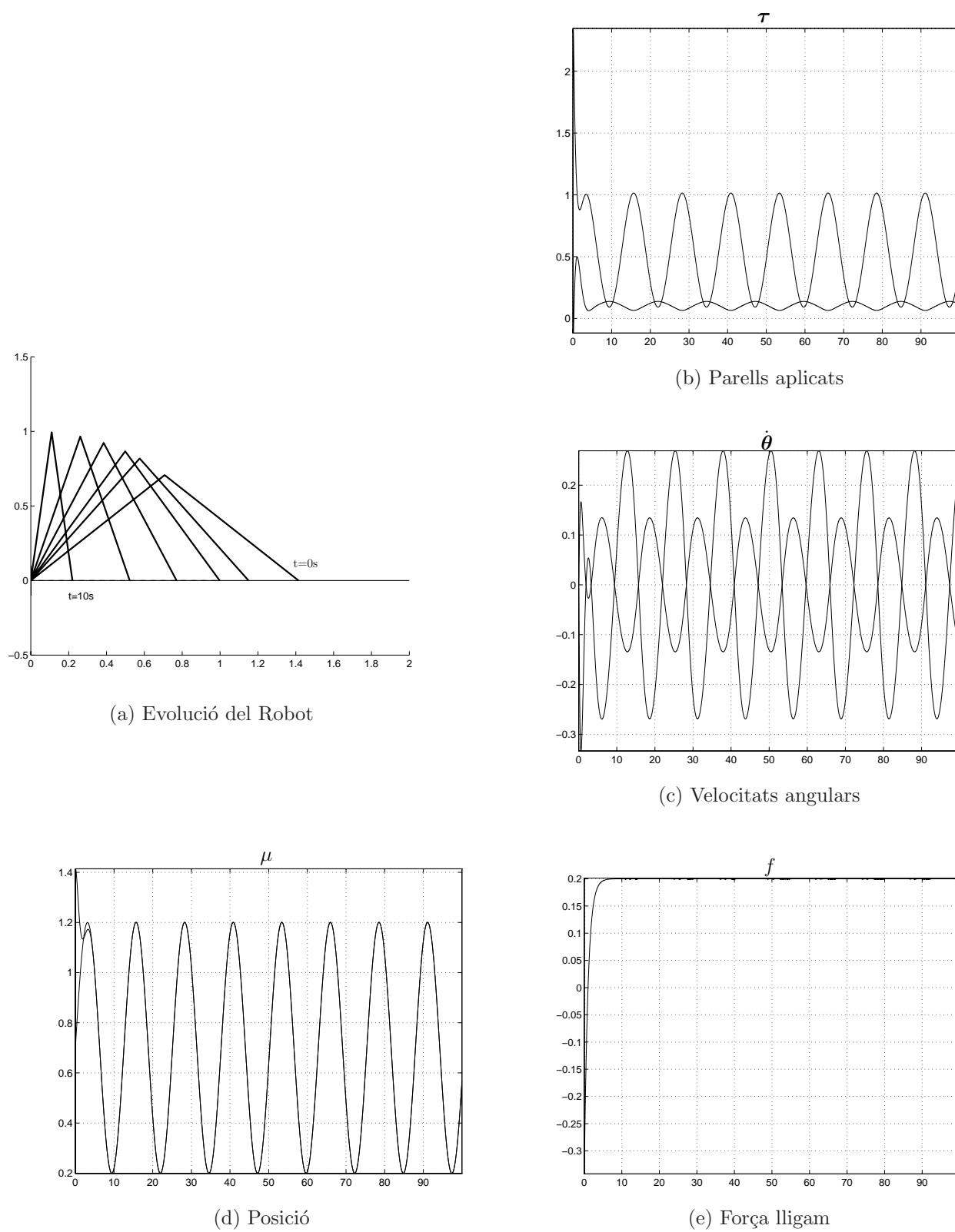


Figura 6.6: Resultats de la simulació del sistema de control.

seguiment d'una trajectòria predefinida $\mathbf{p}_d(t)$ amb una força de lligam també predefinida $\mathbf{f}_d(t)$. La arquitectura del sistema complet es presenta en la Figura 6.5.

En aquest cas la superfície de restricció és una línia recta que es pot parametritzar de la forma:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \mu$$

Fixant el paràmetre escalar μ queda determinat un punt sobre la recta. Les sortides del sistema seran de la forma:

$$\mathbf{l}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{K}_{in}(\mathbf{q}) - \mathbf{p}_0}{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0} \\ f \end{bmatrix}$$

La trajectòria que es desitja seguir és:

$$\mathbf{l}_d(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.70 + 0.5 \sin(0.5t) \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Per tant el punt de contacte entre l'element terminal del robot i la superfície de restricció descriurà una sinusoide mantenint la força de contacte constant.

La validació del sistema s'ha realitzat mitjançant simulació. Els paràmetres del robot són: longitud de les articulacions 1m cadascuna, amb 1kg de pes i $1\text{kg} \cdot \text{m}^2$ de moment d'inèrcia. La superfície de restricció amb que s'ha treballat és $y = 0$.

Els paràmetres del sistema lineal són $\Lambda_{1,1}^1 = 25$, $\Lambda_{1,2}^1 = 50$ i $\Lambda_{1,3}^1 = 50$ per la llei de control de posició i $\Lambda_{2,1}^1 = 1$ per la part de control de força. Amb aquest valors s'obté una constant de temps d'uns 4s tant per la posició com per la força.

En la Figura 6.6 es presenten els resultats de la simulació del comportament del sistema de control. Es pot comprovar que es compleixen perfectament totes les especificacions realitzades, sense la necessitat d'aplicar parells desmesurats o velocitats articulars elevades.

Capítol 7

Identificació i control de forces internes

En aquest capítol es proposa una metodologia pel modelat i control de les forces internes que apareixen en la manipulació multirobot. El mètode proposat obté un model explícit de la relació entre les forces internes i el que s'anomenarà velocitats internes. Aquestes velocitats seran moviments que aniran contra la hipòtesi de premsió rígida. Aquesta relació s'obté a través de l'estudi de dades empíriques, i la posterior aplicació d'un procés d'identificació. Finalment, els models obtinguts s'utilitzen en el disseny de controladors de les forces internes. L'esquema de control proposat actua a dos nivells, un intern en el que es controlen les forces internes i un d'exterior encarregat de determinar les forces internes desitjades d'acord amb una funció de cost indicada a priori [Boleko et al., 2001] [Boleko et al., 1999] [Boleko, 1999].

7.1 Velocitats Internes

7.1.1 Descomposició de les forces

En la secció 2.9 s'ha definit el concepte de força de lligam, i s'ha presentat la forma que presenten aquestes forces dins la manipulació multirobot. Dins el context de control aquestes forces s'anomenen habitualment forces internes. Així doncs s'anomenara forces internes aquelles forces que pertanyin al nucli de la matriu de premsió (\mathbf{W}).

Donat que la matriu de premsió és de rang complet, el seu nucli té dimensió $6(r - 1)$. Per tant és possible trobar un conjunt de $6(r - 1)$ vectors que formen una base ortonormal del nucli de \mathbf{W} . Si els vectors d'aquesta base s'uneixen en una matriu (\mathbf{W}_ϵ), el producte d'aquesta matriu pel vector \mathbf{f} de forces aplicades ens donarà les components d'aquestes en les direccions dels vectors que formen la base. És a dir:

$$\mathbf{f}_\epsilon = \mathbf{W}_\epsilon^T \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{6(N-1)} \quad (7.1)$$

on \mathbf{f}_ϵ és un vector format per les components de \mathbf{f} en la direcció dels vectors de la base ortonormal. Aquest vector és el que s'anomenarà vector de forces internes.

Així doncs, cada vector de forces aplicades es podrà expressar com la suma de dos vectors un que pertany al nucli de \mathbf{W} , φ_{e^\perp} , i un de forces actives, φ_e :

$$\mathbf{f} = \varphi_e + \varphi_{e^\perp}$$

on $\varphi_{e^\perp} = \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{f}_\varepsilon^T$.

7.1.2 Definició

Seguint un plantejament similar que el emprat en la anàlisi de les forces, és possible descomposar els elements de l'espai tangent $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_i} \mathcal{O}_i$, i escriure'ls com la composició de les velocitats dels sistemes de referència de cadascun dels robots. És a dir :

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r]^T \quad (7.2)$$

on $\mathbf{v}_i \in T_{\mathbf{x}_i} \mathcal{O}_i$ correspon a la velocitat del sistema de referència \mathcal{O}_i sobre el robot i respecte al sistema inercial.

Des del moment en que es produeix la manipulació conjunta, és necessari que el vectors \mathbf{v} verifiquin l'equació de lligam $d\Phi \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. $d\Phi$ pot veure's com una aplicació lineal de la forma:

$$d\Phi : \mathbb{R}^{6r} \rightarrow \mathbb{R}^{6(r-1)}$$

Aquesta aplicació defineix un espai lineal S_e pels vectors de la forma $d\Phi \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Aquest espai correspon al conjunt de velocitats que compleixen les condicions de lligam, per tant $S_e \approx T_{\mathbf{o}_t} \mathcal{O}_\Phi$. De forma anàloga és possible definir l'espai complementari a S_e (S_e^\perp) que correspon a aquelles velocitats que no verifiquen les restriccions de lligam.

Un vector genèric $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_i} \mathcal{O}_i$ pot descomposar-se en la suma de dos vectors:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_{e^\perp}$$

$\mathbf{v}_e \in S_e$, i $\mathbf{v}_{e^\perp} \in S_e^\perp$. Els vectors que pertanyen a S_e^\perp corresponen a velocitats que violen les restriccions de manipulació rígida i, per tant, que tendiran a deformar l'objecte manipulats. Donat que $\dim \{S_e^\perp\} = 6(r-1)$, els seus elements (\mathbf{v}_{e^\perp}) poden representar-se per un conjunt de $6(r-1)$ variables independents (\mathbf{v}_ε). Donat que $d\Phi \cdot \mathbf{W}^T = 0$ i que \mathbf{W} és de rang complet, \mathbf{W}^T és un conjunt generador de S_e , Així de la mateixa manera que passava amb les forces internes:

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{W}_\varepsilon^T \mathbf{v} \quad (7.3)$$

El vector \mathbf{v}_ε s'anomenarà velocitats internes. És possible calcular \mathbf{v}_{e^\perp} a partir de \mathbf{v}_ε com:

$$\mathbf{v}_{e^\perp} = \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon^T \quad (7.4)$$

7.2 Modelat del sistema

7.2.1 Introducció

La relació entre les forces internes i les velocitats internes en un sistema totalment rígid ve determinada per la equació del treball instantani:

$$\omega = \boldsymbol{\varphi}_{e\perp}^T \mathbf{v}_{e\perp} = \mathbf{f}_\varepsilon \mathbf{W}_\varepsilon^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon^T = \mathbf{f}_\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon^T$$

i donat que les forces internes no generen treballs aquesta expressió presenta un valor de 0, així doncs es pot escriure:

$$\mathbf{f}_\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon^T = 0$$

aquesta relació estàtica correspon a la relació entre les forces internes i les velocitat internes en el cas d'un sòlid rígid. En la pràctica els sistemes no són totalment rígids i presenten certes acomodacions. Per tal de poder controlar les forces internes serà necessari conèixer aquesta relació, que vindrà representada per un model dinàmic de la forma:

$$\mathbf{f}_\varepsilon = H \{ \mathbf{v}_\varepsilon \}$$

on H és l'operador que representa la dinàmica interna. Aquesta dinàmica recull una gran quantitat de fenòmens com el joc mecànic de les pinces, la deformació dels objectes manipulats, i la fricció entre les pinces i els objectes manipulats entre d'altres. La obtenció d'un model analític d'aquesta dinàmica és extraordinàriament complex, a més d'obtenir un model de grau elevat la utilitat del qual a efectes del disseny del sistema de control, objecte final de l'estudi, és més que dubtosa. Per aquest motiu s'ha optat per buscar un model del sistema basat en dades empíriques. Per tal d'obtenir aquest tipus de models s'ha plantejat un procés d'identificació estàndard [Ljung, 1999].

Els models que s'obtidran i el procés d'obtenció dels mateixos està en funció de les característiques del sistema amb que es pretén treballar. En aquest cas es tracta de robot industrials, que disposen de controladors de posició. Aquest tipus de robots es poden considerar com a posicionadors, és a dir com a sistemes als que s'indica una consigna i seguint un cert comportament fan que l'element de terminal es situï en la configuració consignada. Les consignes s'indiquen amb un període (T), i amb aquest mateix període és possible observar la evolució de la sortida. Per tant des d'aquest punt de vista és possible modelar el robot com un sistema de temps discret. Donat que les velocitats es podran indicar únicament en temps discret, el controlador de forces internes s'haurà de dissenyar també en temps discret. Per aquest motiu s'ha considerat que els models estudiats són també de temps discret.

Finalment, per plantejar el procés de identificació de model serà necessari determinar el procés d'obtenció de les dades i el mètode emprat per ajustar els models a partir de les dades obtingudes.

7.2.2 Obtenció de les dades experimentals

El primer pas en el moment de plantejar-se la obtenció d'un conjunt de dades experimentals que reculli el comportament dinàmic del sistema, és la selecció d'un senyal d'excitació

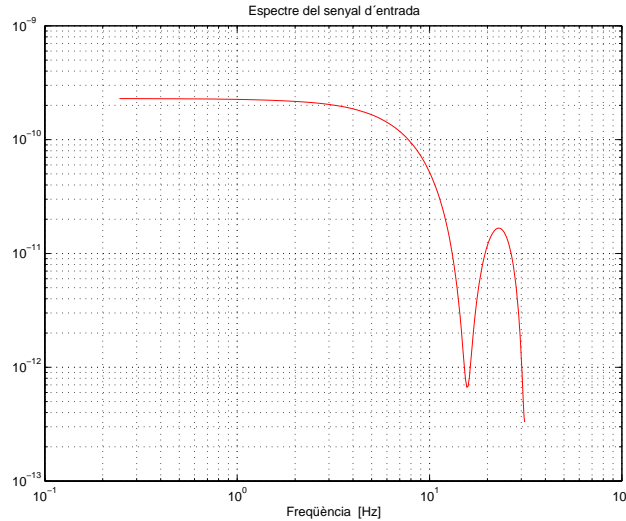


Figura 7.1: Espectre de potència del senyal d'excitació.

adequat pel sistema que es pretén identificar. En la literatura es documenten diferents tipus de senyals per excitar els sistemes amb l'objectiu d'identificar el seu comportament [Schoukens and Pintelon, 1991] [Söderström and Stoica, 1989] [Ljung, 1999].

En aquest treball s'han seleccionat les seqüències binàries de longitud màxima MLBS (Maximum Length Binary Sequence) [Schoukens and Pintelon, 1991]. Aquest tipus de senyal és periòdic i binari. La elecció d'aquest tipus de senyal és deguda a que les pertorbacions que poden aparèixer en el sistema degudes a desincronitzacions o errors de modelat solen tenir un comportament similar, d'aquesta manera el model obtingut correspondrà a les característiques de treball similars a les reals.

El senyal MLBS presenta la propietat de que el seu espectre de potència és pràcticament constant dins una certa banda passant, i fora d'aquesta banda presenta valors pràcticament menyspreables. La banda en que es concentra la potència del senyal es pot fixar jugant amb el nombre de vegades que es repeteix cada element de la seqüència. Això és de gran interès ja que permet concentrar la potència del senyal dins la banda passant del sistema que es pretén identificar.

La magnitud de l'espectre d'aquest senyal a una freqüència $\omega_k = \frac{2\pi k}{NT}$ presenta la forma:

$$A_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{N} \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)}{N \frac{k\pi}{N}}} \quad (7.5)$$

on A_0 és l'amplitud escollida pel senyal binari; N és la longitud de la sèrie i T és el període de mostratge. En la figura 7.1 es presenta la evolució de la magnitud de l'espectre del senyal emprat en la identificació.

Donat que el període de mostratge queda fixat per les característiques del sistema, únicament cal determinar N i A_0 . En aquest treball s'ha pres $N = 2^{13} - 1 = 8191$ per tal de tenir una bona densitat de freqüències.

La selecció del paràmetre A_0 s'ha de realitzar de forma experimental, per tal que les condicions de identificació siguin el més semblants possibles a les de treball. Cal tenir en compte que velocitats internes massa grans poden produir ruptures en l'objecte manipulats, o produir lliscament sobre les pinces.

Una qüestió que cal tenir en compte, en la pràctica, és que els sensors de força emprats per mesurar les forces internes, són en general bastant sorollosos. Per tal de minimitzar l'efecte del soroll és recomanable aplicar una tècnica de promitjat [Schoukens and Pintelon, 1991], és a dir, cadascun dels experiments s'ha realitzat un total de 6 vegades, finalment els valors d'entrada de cadascun dels experiments s'han sumat i dividit per 6, i un tractament similar s'ha fet sobre els valors de sortida. Finalment, aquest nou conjunt de valors entrada/sortida és el que s'han emprat per analitzar la relació entrada/sortida.

7.2.3 Ajust de models

De forma prèvia a ajustar els models s'ha realitzat un estudi per determinar quina és la estructura adient per modelar adequadament el comportament del sistema. Per obtenir més informació sobre el comportament s'ha de realitzar un estudi de la coherència espectral de la relació entrada/sortida de les dades experimentals disponibles (secció 7.4). Aquest estudi [Boleko, 1999] [Boleko et al., 2001], ha provat que dins de la banda passant del sistema la coherència espectral eix a eix és bastant propera a 1. La coherència espectral dóna idea de la linealitat del sistema, i el que la coherència espectral sigui elevada implica que el sistema té un comportament força lineal dins la seva banda passant.

Donat que la coherència eix a eix es prou elevada, s'ha decidit emprar models de comportament lineal i a més desacoblats. És a dir que el sistema es modela a través de 6 sistemes lineals amb una entrada i una sortida. Treballar amb aquest tipus de models fa que tant el procés d'identificació i el posterior disseny de sistemes de control sigui notablement més senzill. A més els models acoblats que s'han experimentat no han aportat una millora substancial.

De forma prèvia a la obtenció de models és recomanable la normalització de les dades, és a dir eliminar el valor mig i normalitzar les amplituds $[-1, 1]$. D'aquesta manera s'aconsegueix que els mètodes numèrics encarregats d'ajustar els paràmetres dels models funcionin d'una forma més eficient. Amb aquest procediment, s'ha eliminat però el guany en estat estacionari que ha d'ésser tractat de forma aïllada.

De forma prèvia a l'ajust dels models, és convenient estudiar el comportament dels models no paramètrics del sistema, que oferiran informació sobre el comportament del sistema i aportaran informació sobre les característiques que han de presentar els models definitius. Un cop estudiats els models no paramètrics es realitza una cerca iterativa de models fent servir estructures polinòmiques de caixa negra. L'estructures que s'han mostrat especialment adients són ARX i *Output Error* [Ljung, 1999]. Per cadascun dels eixos és recomanable aplicar els criteris d'*Akaike* (IAC,FPE), per trobar els models òptims d'acord amb la seva complexitat i grau de predicció.

De forma addicional és recomanable aplicar criteris qualitius de selecció com la similitud entre les respostes freqüencials dels models amb les respostes freqüencials dels models no paramètrics. Aquest punt és força important ja que posteriorment es dissenyaran els controladors mitjançant

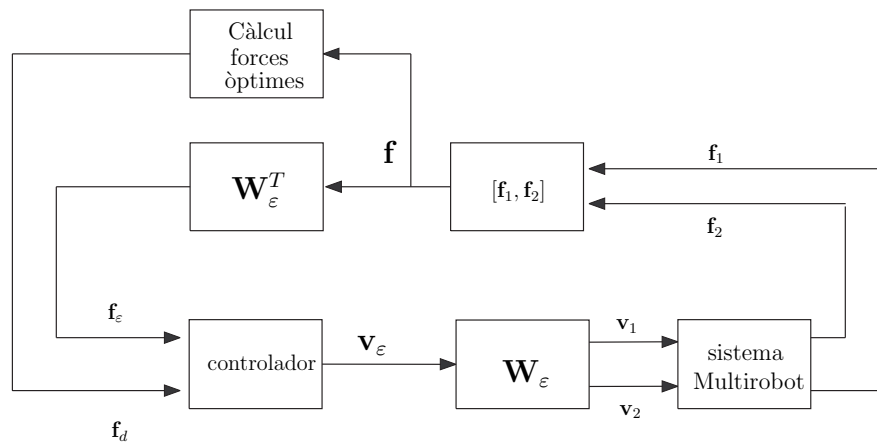


Figura 7.2: Arquitectura del Sistema de control.

tècniques freqüencials. Addicionalment es recomanable descomposar les dades experimentals en dos subconjunts. Mitjançant el primer s'obtenen els models i amb el segon s'utilitzarà per comparar el grau de similitud de la resposta temporal.

Cal recalcar que els models obtinguts, a més de la dinàmica deguda als jocs mecànics, fregaments i acomodaments, recullen també les possibles diferències existents en les respostes temporals dels diferents robots que, en la pràctica, poden provocar la aparició de forces internes. El fet que el model inclogui també aquests fenòmens fa que el sistema de control els pugui compensar. L'únic inconvenient és que en alguns casos els models obtinguts no presenten una interpretació física clara.

7.3 Sistema de Control

Un cop s'han obtingut models que descriuen el comportament de les forces internes, una de les necessitats de la manipulació multirobot és mantenir sota control aquestes forces. Per aquest motiu es dissenyarà un sistema de control que fixarà aquestes forces en un cert nivell especificat. En molts casos interessarà mantenir les forces internes en un valor mínim, aquesta opció però, no permetrà controlar el repartiment de càrrega entre els diferents robots. És possible també, regular el nivell de forces internes a altres valors, inclús és possible calcular de forma dinàmica el nivell de forces internes desitjat.

Una possibilitat és determinar el nivell de forces internes que genera el repartiment de càrrega desitjat entre els diferents robots [Alberts and Soloway, 1988], i utilitzar-lo com a referència pel sistema de control de forces internes. El sistema de control que es proposa segueix aquest plantejament, és a dir, presenta un nivell intern de regulació de forces internes i un llaç exterior encarregat de determinar la consigna de forces internes òptimes d'acord amb una certa funció de cost relacionada amb el repartiment de càrrega (Figura 7.2).

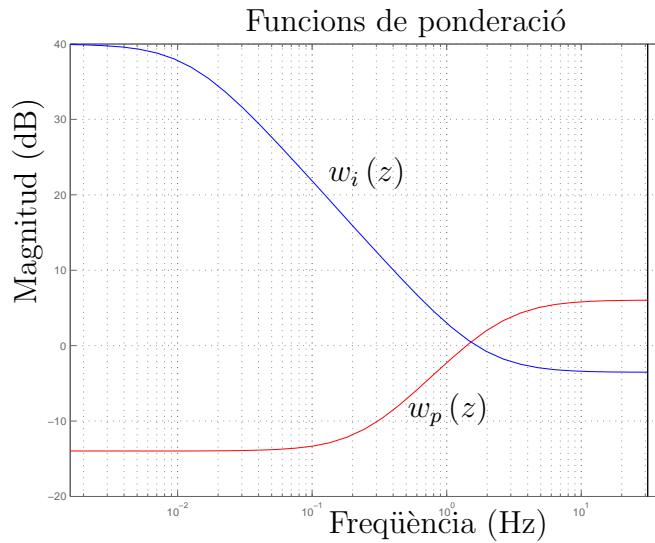


Figura 7.3: Especificacions controlador.

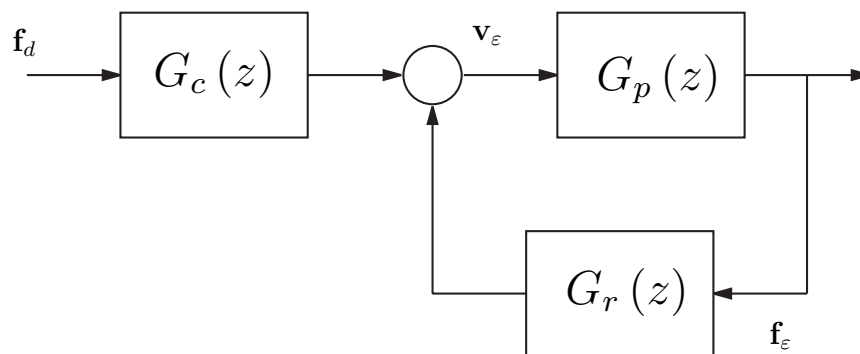


Figura 7.4: Estructura de l'algorisme de dos graus de llibertat.

7.3.1 Algorisme de Control

Seguint l'esquema dels models obtinguts a través del procés d'identificació es dissenyaran 6 sistemes control, un per cadascun dels eixos. L'objectiu de cadascun d'aquest sistemes serà mantenir la força interna de eix corresponent fixada a un cert valor de consigna.

Entre la planta real i els models obtinguts hi haurà un cert nivell d'incertesa ocasionat per la inexactitud dels models, la influència de la peça manipulada i la configuració del sistema. A més d'aquesta incertesa el sistema presenta un cert nivell de soroll de sensat no menyspreable introduït pels sensors de força. Per tal de minimitzar l'efecte de tots aquest elements sobre el comportament del sistema s'ha afrontat el disseny del controlador des d'un punt vista de control robust.

Per tal de formalitzar les especificacions que es desitgen s'ha emprat la teoria clàssica de control

robust [Doyle et al., 1992]. Aquesta, es basa en l'estudi de la funció de sensibilitat del sistema $S(z)$ i la funció de sensibilitat complementària $T(z)$, i la posterior definició d'unes fites sobre aquestes funcions. Habitualment aquestes fites es defineixen a través de funcions de ponderació $w_p(z)$, $w_i(z)$. Donat que la funció de sensibilitat representa la relació entre les pertorbacions en la sortida i la sortida del sistema, és recomanable que dins la banda passant del sistema la funció de sensibilitat prengui valor petits, ja que això significa bon rebuig de les pertorbacions, mentre que fora de la banda passant i donat que habitualment es disposa de models poc acurats és convenient que preguin valors grans per no amplificar els modes no modelats. Per aquest motiu s'ha triat una funció de ponderació de la forma:

$$w_p \triangleq \frac{\frac{s}{M} + \Omega_{BW}}{s + \Omega_{BW} \cdot A}$$

on es trien els paràmetres per tal que la resposta freqüencial de w_p presenti una forma passa alt (Figura 7.3). Els paràmetres es poden fixar tenint en compte que M es pot considerar com una estimació del marge de mòdul desitjat: Ω_{BW} fixa la banda de pas, i A correspon a l'error estacionari permès dins la banda passant. Aplicant aquesta funció de pes a la funció de sensibilitat s'obté la primera restricció de disseny :

$$|w_p(s) S(z, \mathbf{k})| < 1$$

Aquesta expressió rep el nom de condició de funcionament nominal (*Nominal performance condition*) [Doyle et al., 1992]. És possible, també fixar restriccions sobre la funció de sensibilitat complementària. Aquestes es definiran a través d'una funció de ponderació com en el cas anterior. La funció emprada pren la forma* :

$$w_i \triangleq \frac{\tau s + r_0}{\frac{\tau}{r_\infty} s + 1}$$

els paràmetres de la qual es fixaran per tal que la seva resposta freqüencial presenti un perfil passa baix. Els paràmetres es poden fixar tenint en compte que $\frac{1}{\tau}$ indica la banda de pas del sistema, r_0 dóna idea de la incertesa en la entrada a baixes freqüències i r_∞ de la incertesa en la entrada a altes freqüències. Aquesta nova funció de ponderació podria donar lloc a una restricció com la expressada anteriorment. Desafortunadament ambdues restriccions no estan desacoblades i, per aquest motiu s'unifiquen en una única restricció que pren la forma:

$$\max_{\omega} \{ |w_p(z) S(z, \mathbf{k})|_{z=e^{j\omega T}} + |w_i(z) T(z, \mathbf{k})|_{z=e^{j\omega T}} \} < 1$$

Aquesta nova restricció rep el nom de condició de funcionament robust.

Durant el procés de disseny del controlador s'han imposat dues condicions addicionals, una que limita el guany de la funció de sensibilitat entre la acció de control i la referència ($S_{u,r}$), i una altra garanteix la existència d'un guany mínim en la funció de sensibilitat entre la sortida i la referència ($S_{r,y}$). Finalment s'ha plantejat el següent problema d'optimització:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{k}} \quad & \{ \max_{\omega} (|w_p(z) S(z, \mathbf{k})|_{z=e^{j\omega T}} + |w_i(z) T(z, \mathbf{k})|_{z=e^{j\omega T}}) |_{z=e^{I\omega}} \} \\ \text{subject to} \quad & |S_{c,r}(z, \mathbf{k})|_{z=e^{j\omega T}} > \alpha \\ & |S_{u,r}(z, \mathbf{k})|_{z=e^{j\omega T}} < \beta \end{aligned}$$

* Habitualment les funcions de ponderació es defineixen emprant la transformada de Laplace per aprofitar la intuïció existent en sistemes de temps continu, posteriorment es passen a temps discret mitjançant l'ús de la transformada bilineal

on $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$ són dos paràmetres de disseny i \mathbf{k} són els paràmetres del controlador. Per solucionar el problema d'optimització s'ha emprat un mecanisme de programació seqüencial quadràtica.

Un pas previ a solucionar el problema ha estat la selecció d'una estructura pel controlador que permeti obtenir les especificacions de control desitjades. Inicialment es va plantejar a l'ús d'una estructura PID estàndard, però experimentalment s'ha vist que el fet que aquesta estructura presenti únicament 3 paràmetres \mathbf{k} , fa que l'algorisme d'optimització no convergeixi a una solució adequada. Per aquest motiu s'ha optat per una estructura que presenti més paràmetres. La estructura emprada (Figura 7.4), és de dos graus de llibertat ja que una part del controlador únicament veu la referència i l'altra únicament veu la sortida. Les dues components estan formades per una part integral i un sistema de primer ordre complet, és a dir :

$$G_r(z) = \frac{T}{2T_i} \frac{z+1}{z-1} + \frac{k_1 z + k_2}{z + k_3}, G_c(z) = \frac{T}{2T_i} \frac{z+1}{z-1} + \frac{k_4 z + k_5}{z + k_6}$$

on T és el període de mostratge del sistema, i $T_i, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$ i k_6 són els paràmetres del disseny del sistema. Per tal que el sistema en laç obert sigui estable s'ha forçat que $|k_3| < 1$ i $|k_6| < 1$.

7.3.2 Càlcul de les forces òptimes

Com ja s'ha introduït anteriorment, un dels interessos de la manipulació multirobot és repartir la càrrega entre els diferents robots. La relació entre les forces aplicades pels diferents robots i la força resultant sobre un sistema coordinat de referència situat sobre l'objecte manipulat be donada per la equació (2.26):

$$\mathbf{f}_o = \mathbf{W}\mathbf{f} \quad (7.6)$$

Les forces \mathbf{f}_o són les que generen moviment sobre l'objecte. En el cas de condicions estàtiques aquestes forces correspondran a l'efecte de compensar la gravetat i aquelles forces externes que actuïn sobre el sistema. Donat que \mathbf{W} presenta un nucli no nul, és possible trobat diferents valors de \mathbf{f} que generen les mateixes forces resultants \mathbf{f}_o . Per aquest motiu és possible seleccionar la \mathbf{f} òptima segons un cert criteri predefinit. En la literatura s'han presentat diferents metodologies per afrontar aquest problema, i en aquest treball s'ha seguit l'enfoc de Alberts i Soloway [Alberts and Soloway, 1988], ja que correspon a un plantejament flexible i amb solució analítica. En aquest enfoc el criteri d'optimalitat està definit per una funció de cost quadràtica de la forma:

$$p(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{P} \mathbf{f} \quad (7.7)$$

on \mathbf{P} és una matriu de pesos que pren la forma:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{P}_r \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

on \mathbf{P}_i són matrius simètriques definides positives que reflexen la ponderació de l'esforç de cadascun dels robots que intervenen en la manipulació. Cadascuna d'aquestes matrius pren la forma:

$$\mathbf{P}_i = \alpha_i \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta_i \cdot \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

on $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ és el coeficient que pondera l'esforç desitjat en cadascun del manipuladors, i $\beta_i \in \mathbb{R}^+$ és un coeficient que permet ponderar els esforços realitzats a través de la aplicació de forces o moments.

Donat que es pretén obtenir el conjunt de forces que optimitzen el funcional de cost, però que alhora compleixin la restricció de la força aplicada (Equació 7.6), és necessari modificar el plantejament per tal de tenir en compte aquesta restricció. Això es fa aplicant les equacions de Kuhn-Tucker. Així la nova funció de cost pren la forma:

$$p(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{P} \mathbf{f} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f}_o - \mathbf{W} \mathbf{f}) \quad (7.9)$$

on $\boldsymbol{\lambda}$ corresponen als multiplicadors de Lagrange. Donat que aquest problema és convex presenta un únic mínim global localitzat en

$$\mathbf{f}_{op} = \mathbf{W}_0 \mathbf{f} \quad (7.10)$$

on:

$$\mathbf{W}_0 \triangleq \mathbf{P}^{-1} \mathbf{W}^T (\mathbf{W} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{W}^T)^{-1} \quad (7.11)$$

Cal notar que \mathbf{f}_{op} presentarà una component de forces internes que es pot calcular per l'expressió:

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{W}_\varepsilon^T \mathbf{f}_{op} \quad (7.12)$$

Aquesta component de força interna és la que s'utilitzarà com a consigna pel sistema de control de forces internes presentat anteriorment.

7.3.3 Comentaris sobre l'estabilitat del sistema complet

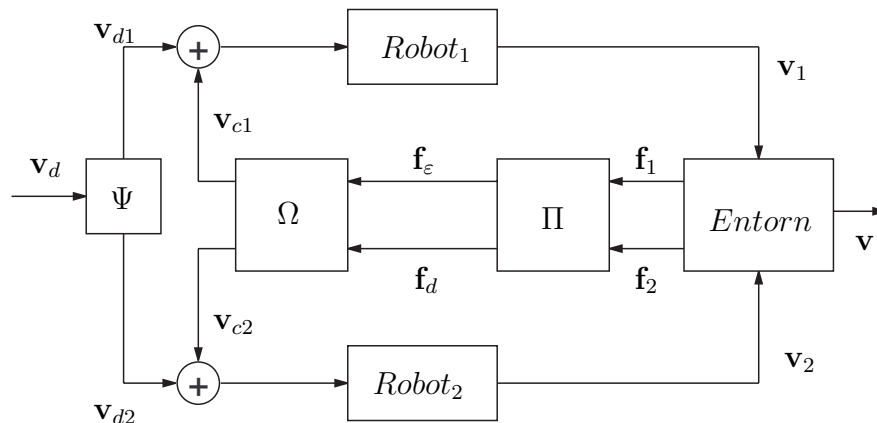


Figura 7.5: Esquema del sistema complet.

En la figura 7.5 es presenta un esquema complet del sistema de control pel cas particular de 2 robots, on II correspon a l'algorisme encarregat de calcular les forces internes i les forces internes

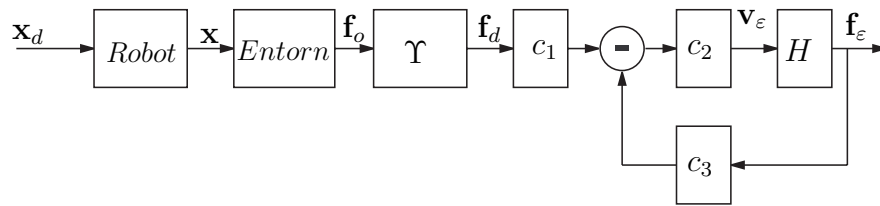


Figura 7.6: Esquema Equivalent.

òptimes, Ω correspon a algorisme de control de forces internes i la posterior descomposició de la velocitat interna desitjada en velocitats de cadascun dels robots, i finalment Ψ correspon a la aplicació que calcula la velocitat dels elements terminals dels robots a partir de la velocitat desitjada pel sistema de referència de manera que no es generin velocitats internes.

Per tal d'estudiar la estabilitat d'aquest sistema, s'aplicarà el principi de descomposició en diferents eixos que s'ha presentat anteriorment per definir les forces internes i les velocitats internes. Primerament cal destacar que la força interna ideal \mathbf{f}_d és funció exclusivament de la matriu de pressió \mathbf{W} , de la matriu de ponderació \mathbf{P} i la força resultant sobre el sistema de referència \mathbf{f}_o . Donat que durant la manipulació \mathbf{W} i \mathbf{P} es consideren constants, la evolució de \mathbf{f}_d , depèn exclusivament de \mathbf{f}_o . En el cas de manipulació multirobot \mathbf{f}_o correspon directament al pes de l'objecte manipulats, i en el cas de realitzar tasques on hi ha contacte amb l'entorn \mathbf{f}_o correspondrà a la composició del pes de l'objecte i de les forces que provenen de l'entorn. Per tant és possible considerar que la evolució de \mathbf{f}_o depèn exclusivament de la posició i orientació \mathbf{x} de l'objecte manipulats. A partir de \mathbf{f}_o s'obté directament la força interna desitjada a través de l'aplicació de l'algorisme de càlcul de les forces òptimes Υ presentat en la secció anterior.

D'altra banda el moviment dels elements terminals dels robots es pot descomposar en aquelles components que pertanyen a S_e i aquelles que pertanyen S_{e^\perp} (secció 7.1.2). Les components de S_e corresponen a aquelles que generaran variacions de \mathbf{x} , i que per tant poden generar variacions de \mathbf{f}_o . La relació entre les consignes de posició \mathbf{x}_d i \mathbf{f}_o es pot considerar com la connexió en cascada un conjunt de subsistemes (Figura 7.6). La estructura d'aquesta concatenació es pot descomposar a una primera part (*Robot*) que correspon a la composició de les velocitats individuals i un altra (*Entorn*) que correspon al sistema físic real. En principi ambdós subsistemes són desconeguts, però es considera que són sistemes estables. En el cas del primer, la assumptió està basada en el fet que els controls de posició individuals són estables, i que la possible interacció o desincronització no genera moviment de S_e , i per tant no afecta a la evolució de \mathbf{x} .

Finalment la relació de les velocitats internes i les forces internes generades ha estat identificada i el sistema està controlat amb un sistema de control encarregat d'estabilitzar el sistema (Figura 7.6, on c_1, c_2 i c_3 corresponen a les diferents parts que formen el controlador dissenyat).

Així finalment, observant la figura 7.6 es pot concloure que el sistema es pot escriure com la connexió en cascada d'un conjunt de sistemes que són estables, per tant el sistema final també ho serà.

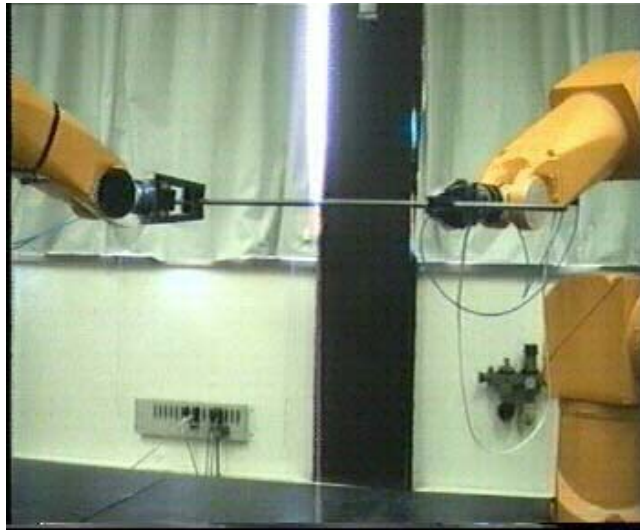


Figura 7.7: Robots RX90 manipulant una mateixa peça.

7.4 Validació Experimental

La proposta realitzada en les seccions anteriors ha estat portada a la pràctica en la cel·la robotitzada de l'IOC. En les seccions següents es descriu el procés d'implementació i es presenten els resultats experimentals obtinguts.

7.4.1 Plataforma d'Experimentació.

La cel·la robotitzada de l'IOC en la que s'ha implementat la metodologia proposada estava formada per dos robots RX-90, cadascun dels quals està equipat amb un sensor de força JR3 sobre el seu canell. Tots aquests components està connectats a una estació de treball Crimson-Elan Silicon Graphics Workstation. El sistema de comunicació del computador amb els robots es realitza a través del mode ALTER dels robots i l'ús d'unes llibreries específiques [Boleko Ribas et al., 1998]. El període de mostratge del sistema és de $T = 16ms$.

7.4.2 Procés d'identificació

En general la banda passant dels sistemes mecànics no sol superar els 10Hz, i amb aquest criteri s'ha seleccionat la banda passant del senyal MLBS emprat per identificar el comportament del sistema (Figura 7.1). Guardant coherència amb aquesta banda passant s'ha seleccionat el filtre dels sensors de força amb una banda passant de $7.8125Hz$ [JR3, 1994]. D'aquesta manera es limita la banda passant del senyal de sortida i s'evita el problema de recobriment espectral [Proakis and Manolakis, 1992].

Un cop fixada la banda passant, resta fixar l'amplitud del senyal d'excitació, que s'ha realitzat mitjançant experimentació en cel·la. Finalment, s'ha triat un factor $A_0 = 60 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s}$ pels eixos

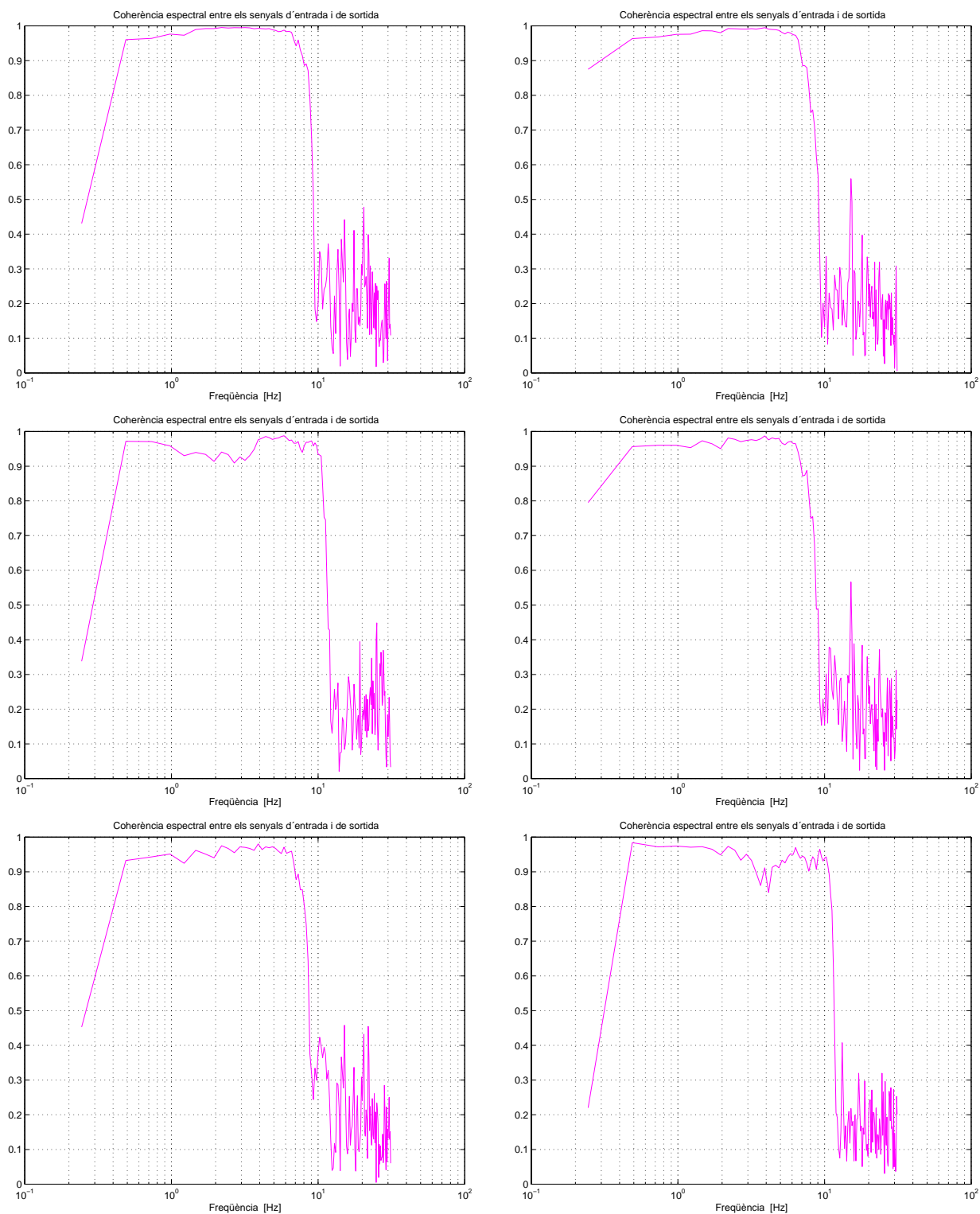


Figura 7.8: Coherència espectral entrada/sortida per la configuració 1

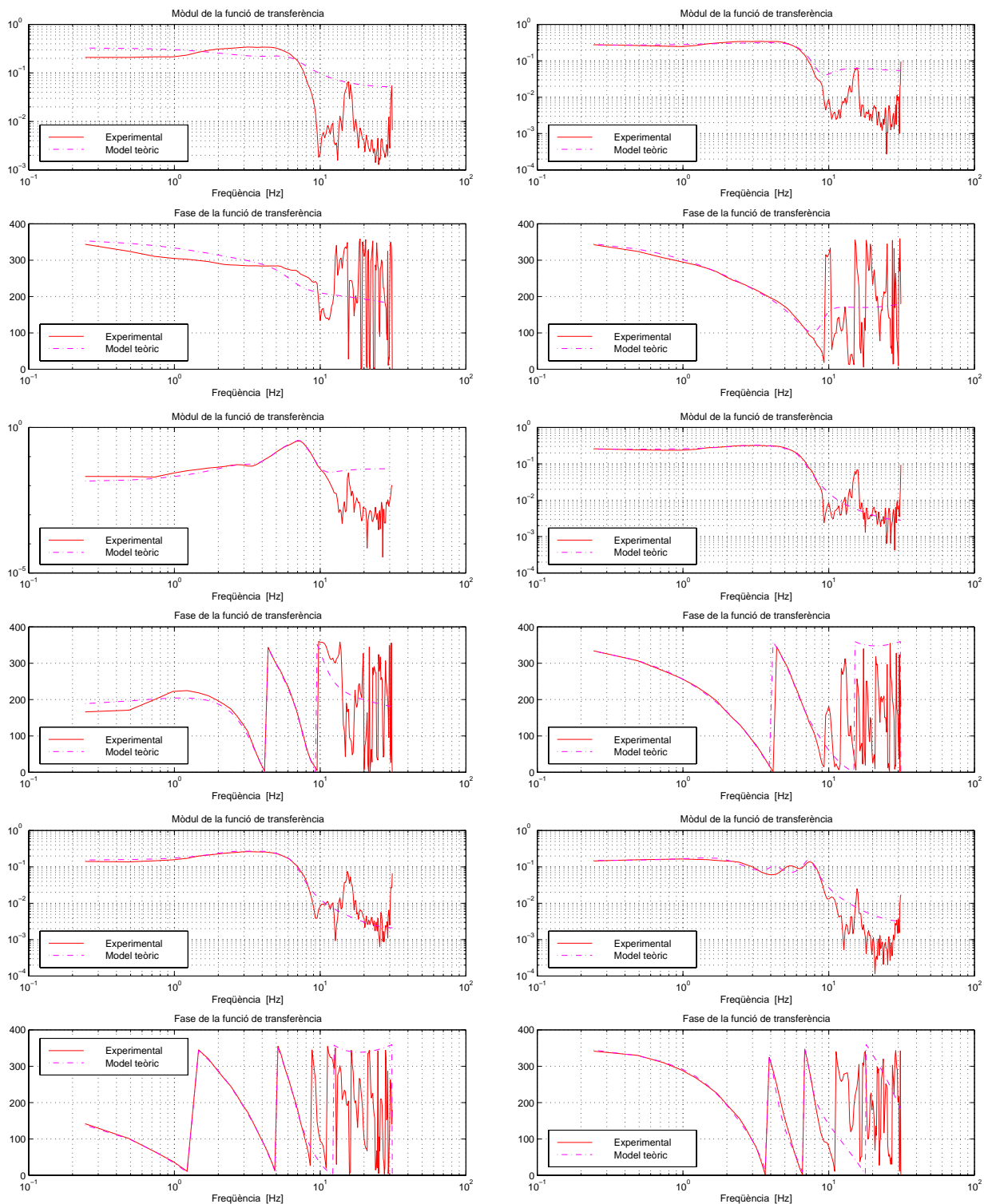


Figura 7.9: Diagrama de Bode de les funcions de transferència

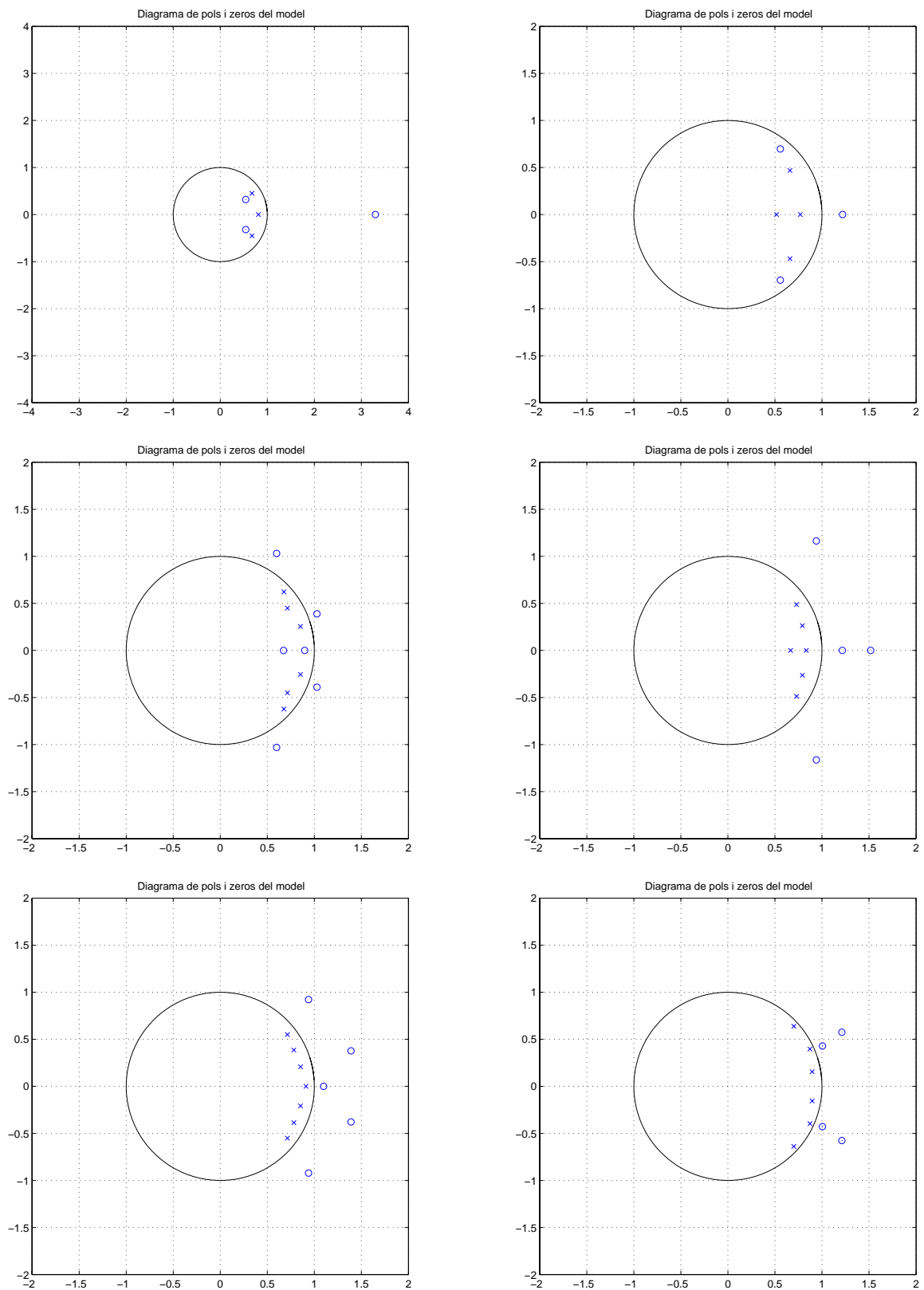


Figura 7.10: Pols i zeros dels models dels sis eixos.

de translació (components 1,2 i 3 del vector de velocitats internes) i un factor de $6 \cdot 10^{-4} \frac{rad}{s}$ pel cas del desplaçament de rotació.

Eix 1	Eix 2	Eix 3	Eix 4	Eix 5	Eix 6
$24.59 \cdot 10^{-3} \frac{N}{m}$	$29.30 \cdot 10^{-3} \frac{N}{m}$	$349.06 \frac{N}{m}$	$522.37 \frac{Nm}{rad}$	$256.85 \frac{Nm}{rad}$	$68.12 \frac{Nm}{rad}$

Taula 7.1: Guanys Estàtics dels models identificats per la barra metàl·lica.

De forma prèvia i per determinar el rang de validesa dels models en front a canvis en les peces manipulades, s'han seleccionat dues peces amb les que realitzar els experiments, una de fusta i l'altra metàl·lica (en la Taula 7.1 es presenten els guanys obtinguts en la identificació de la peça metàl·lica). Ambdues es poden considerar totalment rígides a efectes d'aquest estudi.

De manera similar, i per tal d'estudiar la dependència dels models enfront al canvi de configuració del sistema, s'han seleccionat dues configuracions de pressió diferents. En aquestes configuracions no canvia la matriu de pressió, el que canvia és la solució de la cinemàtica inversa del robots.

La coherència espectral obtinguda en la s'assaig corresponent a la configuració 1 amb la barra metàl·lica es presenta en la figura 7.8[†]. En cadascun dels eixos es presenta la coherència creuada de l'entrada en un eix i la sortida en el mateix eix. Cal tenir el compte que l'ús del senyal MLBS per excitar el sistema fa que hi hagi poca excitació a baixa freqüència i per aquest motiu la coherència decau en aquestes freqüències [Schoukens and Pintelon, 1991].

De forma prèvia al plantejament dels dels models definitius, s'han obtingut els models no paramètrics que permeten determinar la resposta temporal i freqüencial del sistema directament de les dades experimentals [Ljung, 1999]. Aquests s'han emprat com un dels paràmetres de referència al validar els models obtinguts. En la figura 7.9 es presenta la resposta freqüencial obtinguda a través de l'aplicació del mètode de *Blackman-Tukey* superposat a la resposta freqüencial dels models obtinguts.

Com resultat del procés d'identificació s'ha obtingut un model per cadascun dels eixos. En la figura 7.10 es presenta un diagrama de pols i zeros dels diferents models, i en la figura 7.9 es mostren les seves respostes freqüencials superposades a les respostes freqüencials experimentals. Com es pot veure l'ordre dels diferents sistemes és elevat. Això es degut a que els models recullen conjuntament les dinàmiques dels robots, de les forces internes i dels filtres dels sensors (l'estudi detallat de les característiques dels filtres ha mostrat que es tracta de filtres passa baixos IIR el·líptics d'ordre 7).

Cal destacar que tots els models són estables, cosa coherent amb el fet que la planta també ho és. Com es pot veure en el diagrama de pols i zeros la majoria de models són de fase no mínima, i en molts sistemes això indicaria l'existència de retards purs dins el sistema. Per verificar la seva existència s'ha intentat forçar els retards de forma estructural, però això no ha millorat els models obtinguts. Els zeros de fase no mínima podem ésser atribuïts a l'efecte del filtre el·líptic.

[†] Tota la informació que es presentarà a continuació s'il·lustra amb els resultats d'aquest experiments. La resta d'experiments donen resultats similars. Les dades complertes es poden trobar en [Boleko, 1999].

Cal indicar que els models obtinguts presenten un error quadràtic mitjà inferior al 10% en les comparacions entre les simulacions i les dades experimentals del conjunt de test. Això juntament amb la semblança qualitativa entre l'espectre experimental i el del model ha fet que es donin per bons els models obtinguts. Cal tenir en compte que la coherència espectral no és en alguns casos superior al 95% i això delata la existència d'un cert comportament no lineal, que no serà recollit amb els models emprats.

Els models presentats són els corresponents a les dades obtingudes en l'experiment de la configuració 1 i la barra metàl·lica. Els models obtinguts en les altres experiments presenten unes característiques força similars a les dels models presentats. La principal diferència ha estat que la barra metàl·lica presenta guanyos estacionaris una mica superiors que la barra de fusta. Donades aquestes similituds es prendran els models presentats com a models nominals per disseny de compensadors.

Si s'analitza en detall la resposta freqüencial dels models obtinguts s'observa que la seva magnitud presenta una forma plana dins la banda passant del sistema. Aquesta forma és la que presentaria una molla lineal ideal. La principal diferència amb l'espectre d'una molla lineal ideal és la evolució de la corba de fase, encara que aquesta diferència pot ésser deguda a l'efecte del filtre i de la dinàmica del robot.

7.4.3 Disseny dels controladors

Per sintonitzar els controladors amb el mètode proposat anteriorment és necessari fixar els paràmetres de les funcions de ponderació. En els experiments realitzats s'ha fixat $M = 1.5$; Ω_{BW} que correspon a la banda de pas desitjada s'ha fixat com el 90% de l'ample de banda del filtre del sensor, és a dir $\Omega_{BW} = 7.0313\text{Hz}$; A que correspon a l'error estacionari permès dins la banda passant s'ha fixat en $A = 0.01$; i finalment $r_0 = 0.2$ i $r_\infty = 2$ (la forma final de les funcions de ponderació es presenta en la Figura 7.3). Un cop fixats aquest paràmetres s'ha procedit a executar el procés d'identificació. L'efecte dels controladors sobre els sistemes es pot observar en la figura 7.11 on es presenta el diagrama de Nyquist de la planta i de la planta més el controlador per cadascun dels eixos.

7.4.4 Resultats Experimentals

A mode d'exemple es presenta els resultats experimentals obtinguts al manipular la peça de fusta en una configuració inicial propera a la segona configuració seleccionada. Cal destacar que aquestes condicions no correspon ni a la peça amb que s'ha identificat el comportament del sistema ni a la configuració amb que s'ha identificat. En aquest experiment s'ha fixat, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 10^3$, $\alpha_2 = 1.5$ i $\beta_2 = 10^3$, a fi de que el robot 1 presenti un factor de càrrega més elevat que el robot 2. A més s'ha ponderat més els moments que les forces lineals, per a que, en cas de necessitar generar moments, aquests es generin majoritàriament a través dels moments generats per l'acoblament de les forces lineals i els moments.

En la figura 7.12 es presenten les trajectòries nominals consignades en cadascun dels eixos de treball, i en la figura 7.13 es mostren els errors obtinguts en cadascuna d'aquestes trajectòries

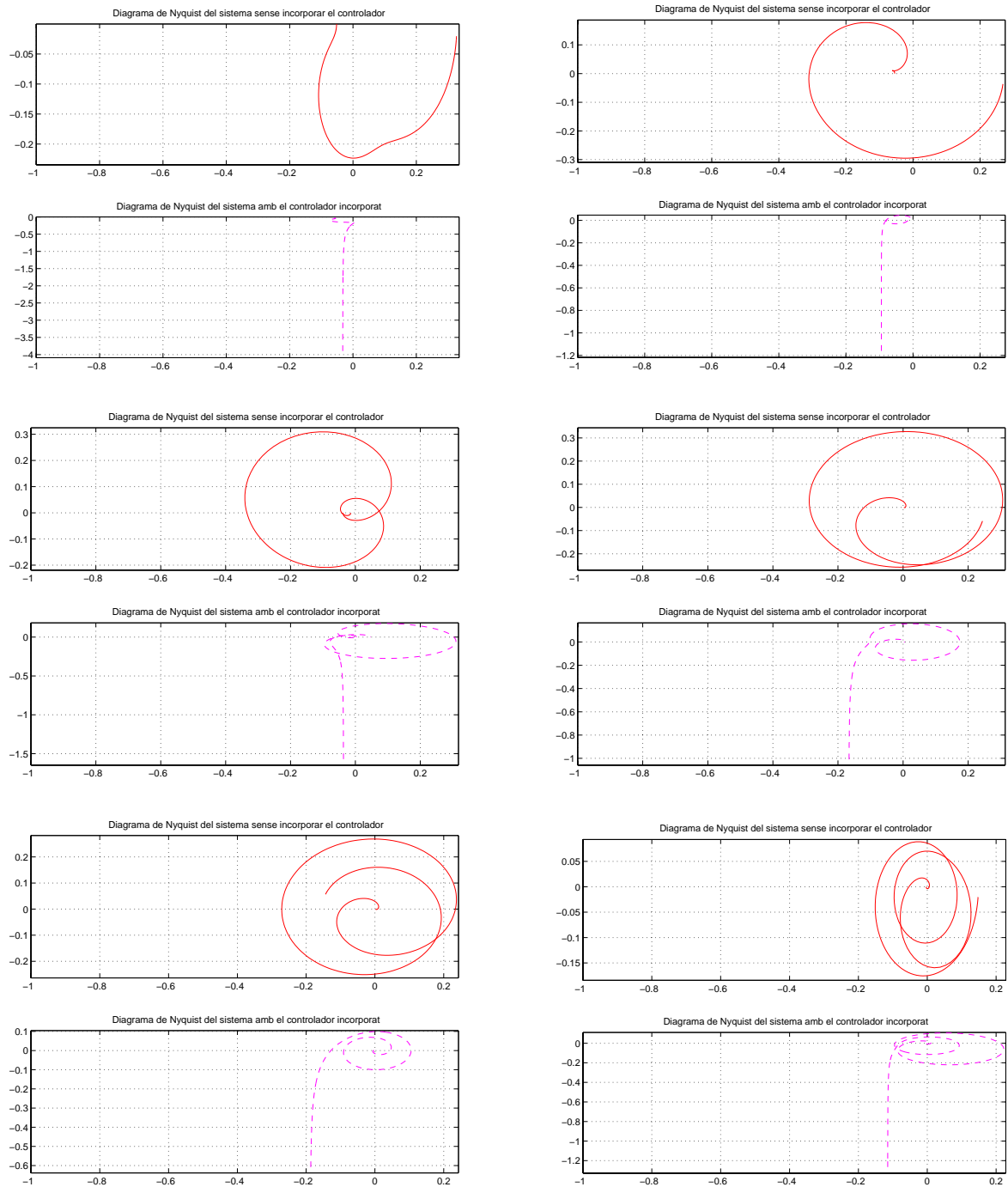


Figura 7.11: Diagrama de Nyquist de la planta i la planta en cascada amb el controlador.

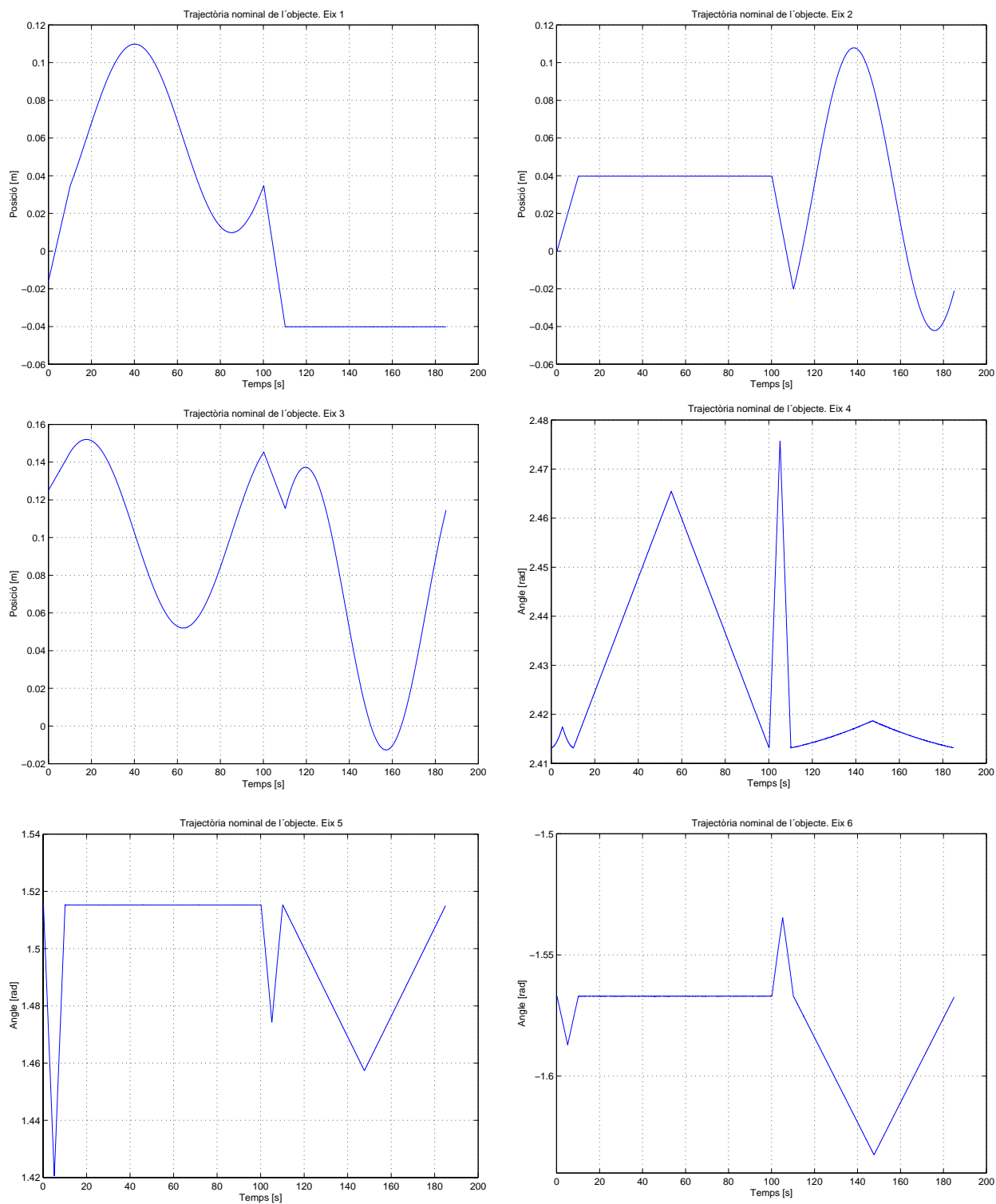


Figura 7.12: Trajectòria nominal de l'objecte

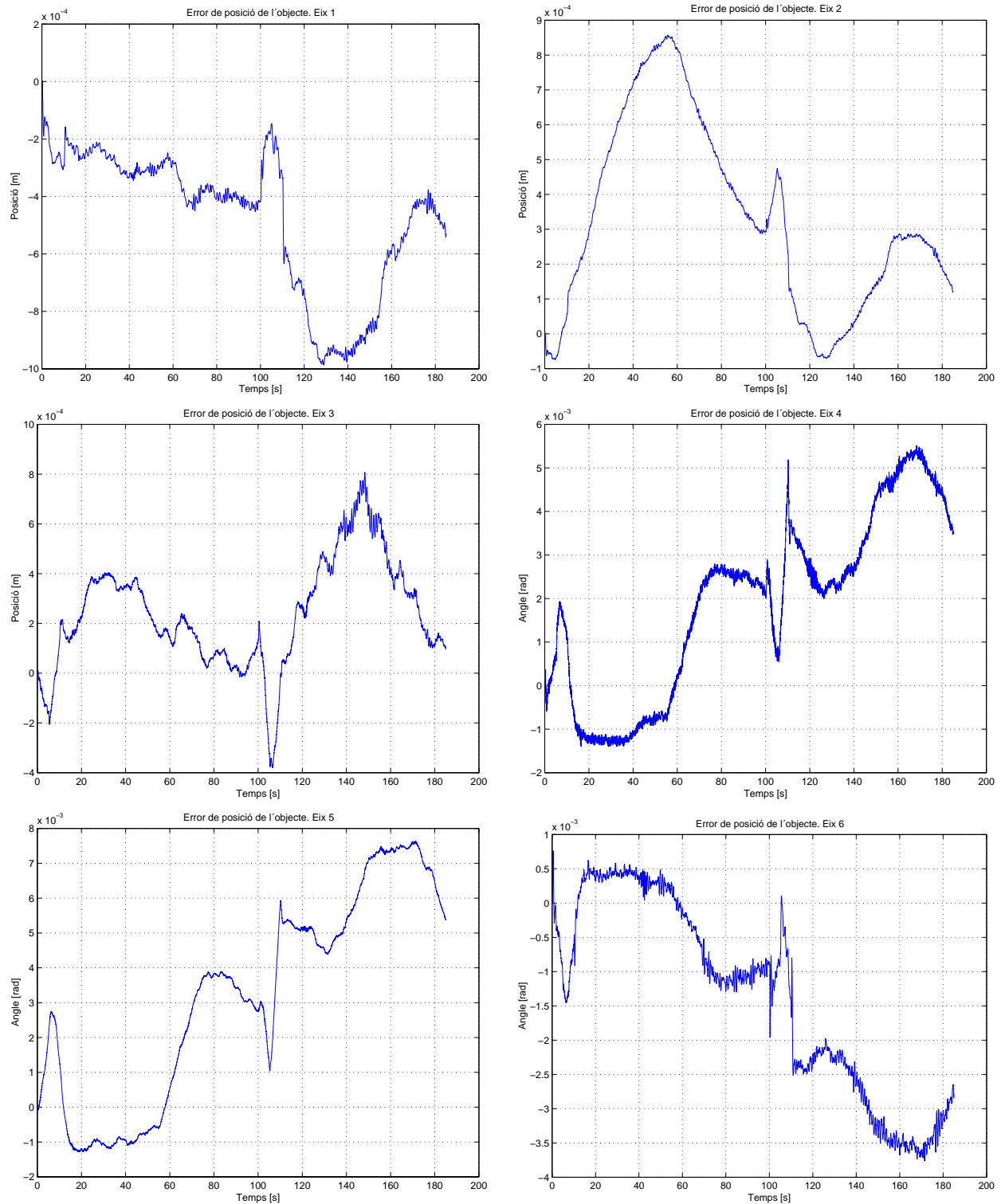


Figura 7.13: Error de seguiment de la trajectòria nominal de l'objecte

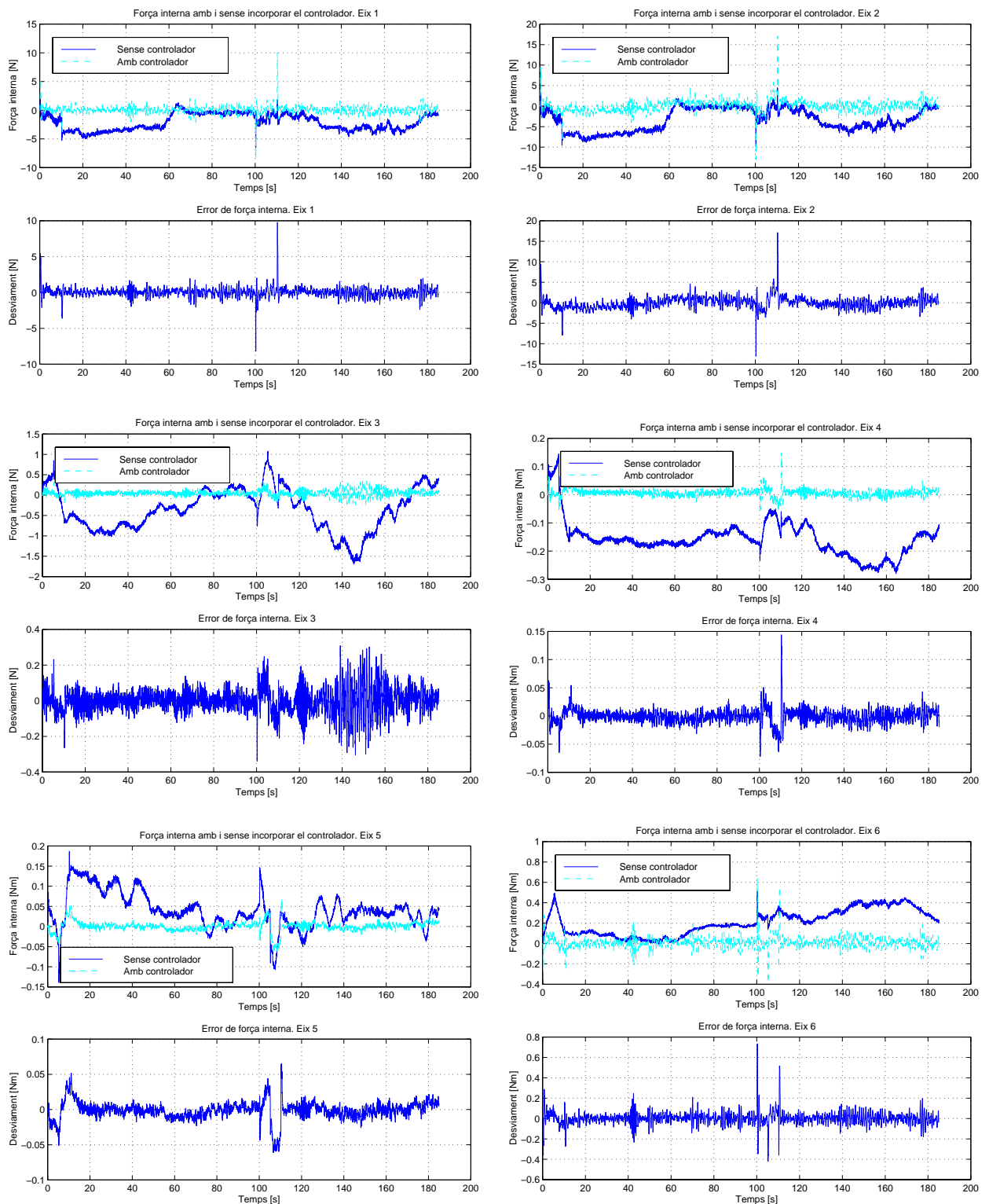


Figura 7.14: Força interna prèvia i posteriorment a la incorporació del controlador. Error de seguiment del valor òptim

deguts a les correccions de posició introduïdes pel sistema de control. Finalment, en la figura 7.14 es presenten les forces internes obtingudes quan es segueixen les trajectòries de la figura 7.12 sense controlador i amb controlador, i l'error de regulació de força interna comés en cadascun dels eixos.

Com es pot comprovar el comportament del sistema es molt proper al ideal, amb la particularitat de presentar pics d'error que coincideixen amb els moments en que les trajectòries seguides presenten discontinuïtats en la velocitat. Això és degut a que els sensors de força emprats no presenten compensació de les forces inercials, i donat que l'efecte d'aquestes no està modelat, s'introdueix dins el sistema en forma de pertorbacions. Fora d'aquest punts, les forces internes segueixen perfectament la consigna reduint l'error a la magnitud del soroll propi del sensor.

Capítol 8

Comportament d'Impedància

En aquest capítol es proposa una metodologia per dissenyar i implementar un comportament d'impedància aplicable en la manipulació multirobot. Aquest tipus d'estratègia imposa un cert comportament en cadascun dels robots. Com a resultat de la combinació dels comportaments dels diferents robots, les variables del sistema que es pretenen regular segueixen unes especificacions plantejades prèviament. En el cas de la manipulació multirobot, l'objectiu del control d'impedància serà mantenir sota control les forces internes i reaccionar de forma coordinada enfront a forces exteriors. A diferència del sistema proposat en el capítol anterior, aquí no s'utilitzen models explícits del sistema que es pretén controlar, sinó que el control s'obté de forma indirecta.

En la proposta aquí realitzada es contempla un comportament d'impedància que té en compte l'estructura topològica de l'espai en el que es realitzaran els moviments. La exposició teòrica es complementa amb un estudi de les possibles vies d'implementació i treballs experimentals [Fargas-Marques et al., 2000] [Armengol Fontova, 2001] [Fargas Marques, 2000].

8.1 Introducció

Tradicionalment el comportament d'impedància ha tractat d'emular el comportament d'un sistema mecànic compost per una massa puntual, un fregament lineal, un amortidor lineal i una força exterior. Aquesta força exterior, en general, prové de la interacció amb l'entorn. Aquest símil de la física presenta l'avantatge d'ésser simple i força estudiat, i per aquest motiu s'ha emprat en un gran nombre d'ocasions [Hogan, 1985] [Natale et al., 1999] [Schneider and Cannon, 1989] [Heinrichs et al., 1996].

Al definir el comportament d'impedància es fixa una relació entre dues variables a controlar, força i posició, i aquesta relació queda parametritzada pels coeficients dels diferents elements del símil mecànic.

Donat que el sistema mecànic que s'utilitza com a referència és dissipatiu això fa que la interacció d'aquest tipus de comportament amb altres sistemes del mateix estil presenti un comportament estable. Per aquest motiu, aquesta estratègia és ideal per la interacció amb

entorns no estructurats, és a dir per entorns dels que es disposa d'un model ben definit.

El símil mecànic es pot aplicar sobre diferents espais topològics en funció de les propietats de l'entorn que es vulgui tenir en compte. El plantejament més simple és considerar que la posició i la orientació en l'espai es poden representar mitjançant 6 variables independents i desacoblades. En aquest enfoc el comportament d'impedància es defineix sobre \mathbb{R} , es a dir, es considera que la massa en moviment es pot moure únicament en una direcció, i en aquest mateixa direcció actua també el fregament, l'amortiment i la força exterior. Finalment el comportament d'impedància queda modelat per un conjunt de 6 equacions diferencials amb una entrada i una sortida. Donat que aquestes equacions són lineals, és possible trobar unes equacions de temps discret que representin adequadament el comportament de temps continu, i això facilita molt el procediment d'implementació del sistema. Encara que aquesta aproximació és la més emprada en la pràctica [Schneider and Cannon, 1989] [Heinrichs et al., 1996], no té en compte la estructura topològica de l'espai en que es realitzen els moviments, i això fa que es puguin observar comportaments força diferents dels que hom podria esperar o que el comportament final dependent del conjunt de variables seleccionades.

L'enfoc anterior planteja nombrosos problemes en els graus de llibertat de rotació, que altres treballs resolen definint la impedància sobre $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$, i considerant que la posició i la orientació són dues entitats totalment diferents i sense cap tipus d'acoblament. El comportament obtingut d'aquesta manera es pot representar per un conjunt d'equacions diferencials no lineals de temps continu. La implementació implica dos problemes, la primera és com integrar en temps real les equacions i la segona és la selecció d'una parametrització adequada per la orientació. En la major part de treballs, la integració es resol emprant un període de mostratge petit i aproximant la derivada per diferències (aproximació pel mètode d'Euler). En referència a les representacions emprades, destaquen els angles d'Euler [Yamakita et al., 1996], la formulació en forma d'eix i angle [Caccavale et al., 1999] i els quaternions [Caccavale et al., 1999]. Aquest enfoc, encara que més aproximat que l'anterior, no recull de forma completa l'estructura de l'espai de treball, per aquest motiu pot presentar problemes o trajectòries estranyes en el cas de sistemes amb un fort acoblament com és el cas de la manipulació multirobot. Aquest fet és especialment visible quan es realitzen moviments que s'allunyen de l'origen d'impedància.

Finalment, és possible definir el comportament d'impedància sobre $SE(3)$. Donat que $SE(3)$ és el grup que representa el moviment del rígid, aquest enfoc tracta com un tot els elements de rotació i translació, i per tant té en compte totes les característiques topològiques de l'espai de treball. El resultat de la especificació d'aquest comportament són un conjunt d'equacions no lineals, per tant el problema que es presentaran a l'hora d'implementar aquest tipus d'esquemes seran similars als de l'enfoc anterior.

En aquest treball s'ha seguit aquest darrer enfoc i, en les següents seccions es presenta la formulació proposada i les tècniques emprades per portar a la pràctica la metodologia indicada.

8.2 Comportament d'impedància

8.2.1 Plantejament del problema

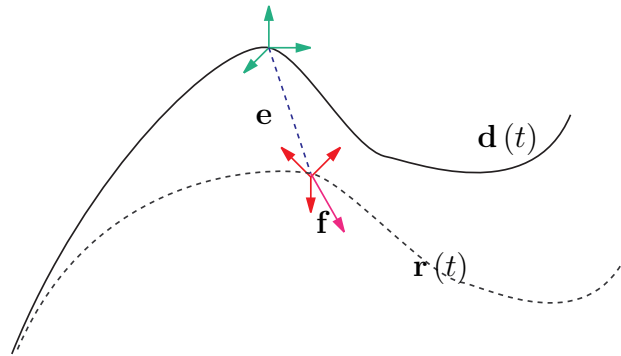


Figura 8.1: Definició del sistema d'impedància.

En la manipulació multirobot, i com a resultat d'un procés de planificació, s'obté una trajectòria ha de seguir un sistema de referència lligat a l'objecte. Donat que es considera rígida la premsió sobre l'objecte, això fixa de forma unívoca les trajectòries que han de seguir els diferents robots. Cadascuna d'aquestes trajectòries està definida sobre $SE(3)$. L'objectiu del comportament d'impedància pot ésser doble; en primer lloc, tenir sota control les forces internes que actuen sobre el sistema i, en segon, que el sistema complert presenti acomodació enfront a la aparició de forces externes que actuen sobre el sistema.

Es pretén que la aparició de forces \mathbf{f} sobre el sistema de referència del robot introdueixi un cert error \mathbf{e} sobre la trajectòria nominal $\mathbf{d}(t)$, d'acord amb el comportament especificat. Això implica que la trajectòria seguida $\mathbf{r}(t)$, sigui serà diferent de la inicialment consignada (Figura 8.1). Per tal de poder aplicar aquest comportament serà necessari, definir primerament el concepte d'error sobre $SE(3)$ i posteriorment definir quin és el comportament d'impedància sobre aquesta varietat.

8.2.2 Definició de l'error

Donat que es treballarà amb elements de $SE(3)$, és necessari estendre el concepte d'error als elements de la varietat. Sobre \mathbb{R} és natural que l'error és defineixi com la resta entre l'element nominal i el real, ja que la suma és la operació interna del grup i el canvi de signe genera l'element simètric. Per tant serà natural emprar l'element simètric sobre $SE(3)$ i la operació interna per calcular l'error que es comet al aproximar una configuració desitjada \mathbf{d} per una de real \mathbf{r} . Les principals propostes de definició de l'error que hom pot trobar en la bibliografia són [Bullo and Murray, 1995]:

- *Error natural* :

$$\mathbf{e} \triangleq \mathbf{d}^{-1}\mathbf{r} \quad (8.1)$$

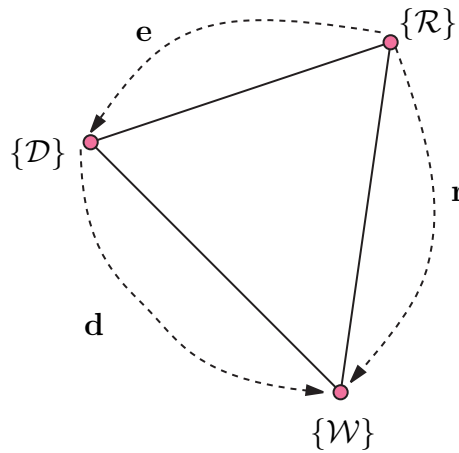


Figura 8.2: Definició de l'error natural.

Aquesta expressió en les seves components de posició i orientació presenta la forma:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_d^T \mathbf{R}_r & \mathbf{R}_d^T (\mathbf{p}_r - \mathbf{p}_d) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

En la figura 8.2 es presenta un esquema on s'il·lustra aquesta definició.

- *Error recíproc:*

$$\mathbf{e} \triangleq \mathbf{d}\mathbf{r}^{-1} \quad (8.3)$$

que es pot expressar també en les seves components de posició i orientació

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_d \mathbf{R}_r^T & \mathbf{p}_d - \mathbf{R}_d \mathbf{R}_r^T \mathbf{p}_r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

D'aquesta manera, es calcula l'error de posició i orientació respecte a la base inercial o fixa triada. Això suposa que els resultats depenen de quina base s'hagi triat.

- *Error híbrid:* S'empra la estructura $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ en el càlcul de l'error:

$$\mathbf{e} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{R}_d^T \mathbf{R}_r & \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

Totes les definicions indicades podrien a priori semblar adequades per l'avaluació de l'error, però hi ha algunes qüestions que cal tenir en compte. L'error *híbrid* i *recíproc* són magnituds que depenen del sistema de referència inercial que s'ha fixat, mentre que l'error natural no presenta aquesta dependència. Una altra qüestió addicional és que l'error *natural* i el *recíproc* estan expressats a través d'operacions entre els elements del grup mentre que l'error híbrid no presenta aquesta forma, i per tant, encara que el resultat final sigui un element del grup, la seva definició no recull l'estructura d'aquest. Per aquest motiu s'ha seleccionat l'error natural per definir el comportament d'impedància.

8.2.3 Model d'impedància sobre l'error

La extensió del comportament d'impedància al moviment sobre $SE(3)$ es pot fer de diferents maneres; la més directa és expressar el moviment desitjat en termes energètics. Com és ben conegut, els sistemes mecànics tenen dos grans tipus d'energia la potencial i la cinètica. La relació entre la energia i les trajectòries de la dinàmica és que aquestes trajectòries són geodèsiques de les energies.

El model d'impedància definit sobre $SE(3)$ emularà el comportament que presentaria un sòlid rígid sotmès a l'efecte d'un amortidor i un fregament. Les característiques dinàmiques d'un sòlid rígid estan reflexades en el seu tensor d'inèrcia (\mathbf{T}) [Stokes and Brockett, 1996]. A partir d'aquestes característiques queda definida la energia cinètica del sistema:

$$\mathbf{T} : T_g SE(3) \times T_g SE(3) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Les corbes de la dinàmica del sòlid correspondran a les geodèsiques de la mètrica definida pel tensor d'inèrcia. Les geodèsiques sobre $SE(3)$ presentaran la forma:

$$\mathbf{T}\nabla_V V = 0 \quad (8.6)$$

on ∇ correspon a la derivada covariant del camp vectorial V en la direcció definida pel camp vectorial V [Boothby, 1986] i $V = v_i \hat{L}_i$. De forma més detallada la expressió anterior presenta la forma:

$$\mathbf{T}\dot{v}_k \hat{L}_k + v_i v_j \Gamma_{ij}^k \mathbf{T}\hat{L}_k = 0 \quad (8.7)$$

on Γ_{ij}^k són els símbols de Christoffel que defineixen una connexió de Levi-Civita coherent amb la mètrica T i la estructura de $SE(3)$ [Boothby, 1986]. La equació (8.6) es pot interpretar com la extensió de la llei de Newton per treballar sobre varietats.

A més de la energia cinètica la majoria de sistemes mecànics, i en particular els que es pretén emular en el comportament d'impedància presenten energia potencial. Aquesta es defineix a través d'una funció continua definida positiva de la forma:

$$U : SE(3) \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (8.8)$$

L'efecte de la energia potencial sobre el sistema és la introducció de forces conservatives, aquestes modifiquen les corbes de comportament de la forma següent:

$$\mathbf{T}\nabla_V V + \text{grad}U = \mathbf{0} \quad (8.9)$$

on grad representa el gradient de U .

Per completar les equacions de comportament s'introdueixen les forces dissipatives i les forces externes. Les primeres en molts casos es modelen a través de funcions de Rayleigh, obtenint fregaments lineals. Amb tot això s'obté l'expressió:

$$\mathbf{T}\nabla_V V + \text{grad}U + BV = \mathbf{f} \quad (8.10)$$

que descriu el comportament del sistema mecànic que es pretén emular. En les següents seccions s'estudiarà les característiques de cadascuna de les components aquí presentats.

8.2.4 Energia cinètica

La energia cinètica d'un sòlid rígid queda caracteritzada pel tensor d'inèrcia. En general quan aquesta s'expressa en un sistema coordinat situat en el centre de masses del sòlid, la seva representació pren la forma genèrica:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_z \end{bmatrix}$$

on m correspon a la massa del sòlid, i \mathbf{I}_x , \mathbf{I}_y i \mathbf{I}_z corresponen a les components del tensor en les diferents eixos coordinats. A efectes del comportament d'impedància especificat, el tensor d'inèrcia únicament introdueix un factor d'escalat en el sistema. Per aquest motiu en aquest treball es considerarà que el sòlid de referència és isòtrop i per tant $\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_y = \mathbf{I}_z$. En aquest cas s'utilitzarà com a sòlid de referència una esfera. El moment d'inèrcia per aquest tipus de sòlid és $I = \frac{2mr^2}{5}$, on m és la massa de la esfera i r el radi.

La connexió de Levi-Civita coherent amb la mètrica pren la forma [Žefran and Kumar, 1996b]:

$$\nabla_X Y = \left[\begin{array}{l} \frac{dY_v}{dt} + X_\omega \times Y_v \\ \frac{dY_\omega}{dt} + \frac{1}{2} [X_\omega \times Y_\omega + \mathbf{H}^{-1} (X_\omega \times \mathbf{H} Y_\omega) + \mathbf{H}^{-1} (Y_\omega \times \mathbf{H} X_\omega)] \end{array} \right] \quad (8.11)$$

on $X = [X_v^T, X_\omega^T]^T \in se(3)$, $Y = [Y_v^T, Y_\omega^T]^T \in se(3)$, $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_z \end{bmatrix}$. En el cas en que

$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_y = \mathbf{I}_z$ la connexió presenta la forma:

$$\nabla_X Y = \left[\begin{array}{l} \frac{dY_v}{dt} + X_\omega \times Y_v \\ \frac{dY_\omega}{dt} + \frac{1}{2} X_\omega \times Y_\omega \end{array} \right] \quad (8.12)$$

D'ara endavant s'assumirà que s'està emprant la connexió de la equació (8.12), i per tant $\nabla_V V$ equival a:

$$\nabla_V V = \left[\begin{array}{l} \frac{dV_v}{dt} + V_\omega \times V_v \\ \frac{dV_\omega}{dt} \end{array} \right] \quad (8.13)$$

que correspon directament a l'expressió habitual emprada pel càlcul de l'acceleració d'un sòlid rígid en la mecànica tradicional.

8.2.5 Energia potencial

8.2.5.1 Formulació genèrica

En el cas del comportament d'impedància, la energia potencial que es pretén introduir en el sistema és deguda a un amortidor. Per tant s'estudiarà aquest tipus d'energies potencials,

encara que també és possible considerar-ne d'altres tipus, com les degudes a l'acció de la gravetat.

Dins el camp de la robòtica els amortidors són dispositius ampliament estudiats. Els objectius d'aquests estudis són la caracterització de la rigidesa necessària per tal de realitzar certes tasques [Kim et al., 2000], la caracterització de la rigidesa d'estructures mecàniques [Huang et al., 2001], i la construcció d'amortidors genèrics a partir d'amortidors més senzills [Ciblack and Lipkin, 1999] [Loncaric, 1985].

L'estudi del comportament de les molles dins el sistema es pot plantejar de diferents maneres. En aquest treball es seguirà un enfoc basat en la formulació de la energia potencial i la posterior deducció de les forces conservatives associades a ella. Com ja s'ha introduït anteriorment, l'energia potencial U és una funció definida positiva que únicament depèn de la posició dins l'espai:

$$U : SE(3) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

la força introduïda per aquest potencial en el sistema ve donada pel al gradient de U . Aquest gradient correspon a una 1-forma tal que:

$$\langle \text{grad}U; X \rangle = X(U)$$

on $X \in T_g SE(3)$ és un camp vectorial, i $\langle ; \rangle$ nota l'acció d'una 1-forma sobre un camp vectorial. Per tant $X(U)$ correspon a la potència instantània generada al moure's amb una velocitat X , sota l'acció d'una força $\text{grad}U$. Aquest gradient en un punt es pot calcular com :

$$\text{grad}U = W_i \lambda_i$$

on $\lambda_i \in T_g^* SE(3)$ forma una base de $T_g^* SE(3)$ tal que $\langle \lambda_i; \hat{L}_j \rangle = \delta_j^i$ i $W_i = \hat{L}_i U$.

Una qüestió addicional és la rigidesa que aquesta la molla que causa la energia potencial. Aquesta rigidesa dóna idea de com varia el gradient en moures sobre la varietat $\nabla_{\hat{L}_j} \text{grad}U$. La rigidesa es presenta en forma d'una matriu \mathbf{K} , els elements de la qual presenten la forma:

$$\mathbf{K}_{ij} = \langle \nabla_{\hat{L}_j} \text{grad}U; \hat{L}_i \rangle$$

aquest matriu forma el hessià de U . La definició introduïda per la matriu de rigidesa és coherent amb la connexió de Levi-Civita definida per la mètrica de la energia cinètica [Žefran and Kumar, 1996a]. Una condició desitjable és que la matriu de rigidesa sigui simètrica, encara que en algunes aplicacions pràctiques s'ha provat que fora del punt d'equilibri aquestes matrius no són simètriques. En alguns casos això és degut a la definició que s'ha emprat i en d'altres és degut a la estructura cinemàtica del sistema [Žefran and Kumar, 2000].

8.2.5.2 Energia potencial en coordenades exponencials

En aquest treball s'utilitzen energies potencials, la definició de les quals es realitza emprant les coordenades exponencials. Aquest conjunt de coordenades és una parametrització mínima de $SE(3)$ amb un interpretació bastant intuïtiva. Com totes les representacions mínimes de $SE(3)$ presenta singularitats, però com es comentarà més endavant, la seva situació dins l'espai fa que la seva influència sobre el sistema d'impedància sigui mínima.

Les coordenades exponencials fan us del mapa exponencial, que és una aplicació de la forma:

$$\exp : se(3) \rightarrow SE(3)$$

és a dir, a un element de l'àlgebra se li associa un element del grup. També és conegut que $se(3)$ és isomorf amb \mathbb{R}^6 . Per tant es pot veure la aplicació exponencial com un mapa de la forma:

$$\exp : \mathbb{R}^6 \rightarrow SE(3)$$

Aquest mapa és continu i bijectiu, i per tant una carta local. Associat al mapa exponencial hi ha el mapa logarítmic que presenta unes característiques inverses.

Les coordenades exponencials es poden definir de varies maneres. En aquest treball s'ha emprat la següent definició:

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R}^6 &\rightarrow SE(3) \\ \boldsymbol{\psi} &\rightarrow \prod_{i=1}^6 e^{L_i \psi_i} \end{aligned}$$

on L_i corresponen als vectors de la base de $se(3)$ i ψ_i són les coordenades exponencials emprades. Per definir de forma unívoca aquestes coordenades és necessari fixar l'ordre en que es realitzen els productes, que aquí s'ha fixat de tal manera que:

$$\exp(\boldsymbol{\psi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\psi_4) \mathbf{R}_y(\psi_5) \mathbf{R}_x(\psi_6) & \begin{matrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ 1 \end{matrix} \\ \mathbf{0} & \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

Aquestes coordenades exponencials són equivalents a codificar l'element de $SE(3)$ com la seva component de posició i la rotació a través dels angles d'EULER Z-Y-X. En aquest representació, les coordenades corresponents a la posició poden prendre qualsevol valor real, mentre que $\psi_6 \in [-\pi, \pi]$, $\psi_5 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i $\psi_4 \in [-\pi, \pi]$. Les singularitats d'aquesta representació estan definides per $\cos(\psi_5) = 0$, que correspon als límits del rang de valors de ψ_5 . El fet que les singularitats estiguin sobre els límits de validesa dels paràmetres fa que la representació sigui més adient que d'altres que representen les singularitats sobre la identitat o en l'interior del rang de valors.

Associat a aquestes coordenades és possible definir un conjunt de vectors tangents $E_i \in T_g SE(3)$, que formen un conjunt generador de l'espai tangent. Cadascun d'aquest vectors s'obté de la forma:

$$\frac{dg}{dt} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial g}{\partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{dt} = \sum_{i=1}^6 E_i \frac{d\psi_i}{dt} = E_i \dot{\psi}_i$$

Aquest conjunt generador es pot relacionar amb la base de $T_g SE(3)$ induïda des de l'àlgebra a través de l'aplicació de la operació per l'esquerra $\hat{L}_i = g L_i$. Aquesta relació ve determinada per una aplicació lineal de la forma:

$$\hat{L}_i = \alpha_i^j E_j$$

on els elements α_i^j expressats en forma matricial són:

$$\mathbf{\Lambda} = [\alpha_i^j] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\psi_4) \mathbf{R}_y(\psi_5) \mathbf{R}_x(\psi_6) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_w(\psi_5, \psi_6) \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

on \mathbf{J}_w relaciona la variació dels angles d'Euler amb la velocitat angular. Cal recordar també que la component corresponent al terme de posició de la velocitat no és res més que la velocitat expressada en la orientació del sistema coordinat sobre l'objecte manipulats.

Finalment, es defineix la energia potencial de la forma:

$$U(\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}^t \mathbf{Q} \boldsymbol{\psi}$$

on \mathbf{Q} ha d'ésser una matriu simètrica i definida positiva. En una forma genèrica \mathbf{Q} presenta la forma [Loncaric, 1985]:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

on \mathbf{A} i \mathbf{C} són matrius simètriques que representen la energia potencial deguda als termes de posició i orientació respectivament. Finalment \mathbf{B} representa l'energia deguda als termes creuats entre la orientació i la posició. La matriu de rigidesa associada a aquesta energia potencial es calcula de la següent forma:

$$\mathbf{K}_{ij} = \langle \nabla_{\widehat{L}_j} dU; \widehat{L}_i \rangle = \langle \nabla_{\alpha_j^l E_l} dU; \alpha_i^m E_m \rangle = \alpha_j^l \alpha_i^m \langle \nabla_{E_l} dU; E_m \rangle = \alpha_j^l \alpha_i^m \frac{\partial^2 U}{\partial \psi_l \partial \psi_m}$$

Aquestes expressions es podem agrupar en forma matricial i s'obté:

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} & \mathbf{R}^T \mathbf{B} \mathbf{J}_w \\ \mathbf{J}_w^T \mathbf{B}^T \mathbf{R} & \mathbf{J}_w^T \mathbf{C} \mathbf{J}_w \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

La primera qüestió a observar és que aquesta matriu de rigidesa és simètrica en tots els casos i per tant compleix les propietats d'estabilitat desitjades en tots els punts de la varietat.

El gradient generat per aquest tipus d'energia expressat en la base $\{E_j\}$ presenta la forma

$$\text{grad} U_{E_i} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\psi}$$

mentre que aquest mateix gradient expressat en la base $\{\widehat{L}_j\}$ ve donat per:

$$\text{grad} U_{\widehat{L}_j} = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{Q} \boldsymbol{\psi}$$

8.2.6 Forces Dissipatives

Les forces dissipatives que presenta la forma de fregament, són forces que actuen en contra del moviment. En aquest treball s'assumeix un fregament viscos generalitzat. La forma d'aquestes forces segueix un plantejament anàleg al de les forces degudes a potencial, és a dir:

$$\begin{aligned} F : T_g SE(3) &\rightarrow T_g^* SE(3) \\ \boldsymbol{\omega} &\rightarrow -\mathbf{B} \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

on la matriu \mathbf{B} és una matriu simètrica definida positiva amb una estructura similar a la matriu de rigidesa presentada anteriorment. El treball instantani generat per aquestes forces es pot calcular com:

$$\langle -\mathbf{B} \boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\omega} \rangle = -\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}$$

que sempre és negatiu, i per tant queda provat que aquestes forces són sempre dissipatives.

Dins el comportament d'impedància s'introdueixen les forces dissipatives per tal que el comportament del sistema sigui estable. Això és així ja que la resta de components introduïdes anteriorment són conservatives, i per tant del balanç energètic és nul. El fet d'introduir les forces dissipatives fa que el balanç energètic sigui negatiu i, en absència de forces externes, el sistema tendirà a un estat estacionari d'energia mínima.

Des d'un altre punt de vista, els components de la matriu de fregaments permetran fixar les constants del temps del sistema un cop fixada la rigidesa desitjada.

8.2.7 Sistema Complet

Un cop definits els diferents elements que componen el comportament desitjat es pot escriure el comportament total del sistema que estarà representat per la equació:

$$\mathbf{T} \nabla_{\mathbf{e}} \mathbf{e} + \text{grad}_{\hat{L}_i} U (\exp^{-1}(\mathbf{e})) + \mathbf{B} \mathbf{e} = \mathbf{f} \quad (8.18)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \mathbf{e} \quad (8.19)$$

on \mathbf{e} correspon a la velocitat del sistema, U és la energia potencial definida sobre el sistema, \mathbf{B} el fregament viscos introduït i \mathbf{f} és la força aplicada per l'entorn sobre l'element terminal del robot expressada en la orientació del sistema coordinat de la pinça.

8.3 Criteris de selecció dels paràmetres

8.3.1 Rigidesa Resultant

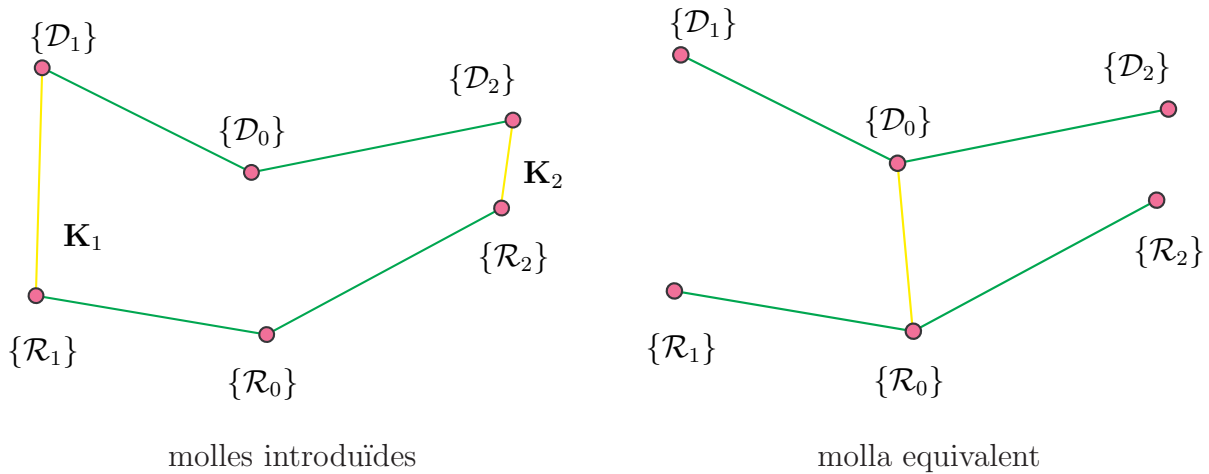


Figura 8.3: Comparació del sistemes de molles.

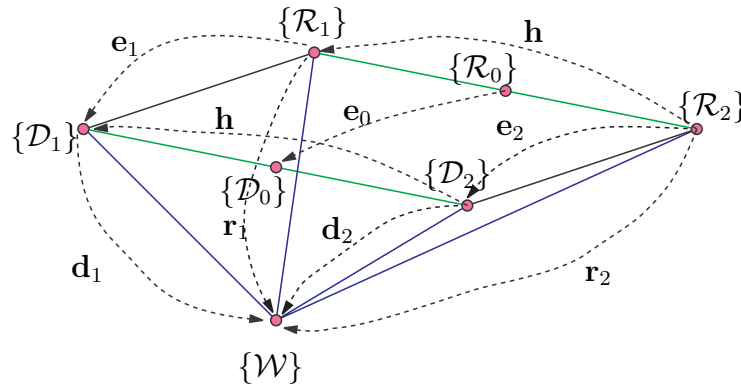


Figura 8.4: Relació entre els diferents sistemes coordinats i les transformacions associades.

Una qüestió de gran importància és determinar quina és la rigidesa que presenta el sistema complet en front a forces que actuen sobre el sistema. Aquest estudi té un interès especial en les tasques d'acoblament i en aquells entorns en que hi ha interacció amb l'home.

Per realitzar aquest estudi s'assumirà que l'objecte manipulat presenta un comportament totalment rígid. Sota aquesta hipòtesi la relació entre els sistemes coordinats dels diferents robots ($\{\mathcal{R}_i\}$) està fixada de forma rígida i unívoca. Per tant es pot escriure :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j \mathbf{h}_{ij}$$

on \mathbf{h}_{ij} és la matriu homogènia que relaciona el sistema coordinat $\{\mathcal{R}_i\}$ amb el sistema coordinat $\{\mathcal{R}_j\}$, i \mathbf{r}_i és la matriu homogènia que relaciona el sistema coordinat $\{\mathcal{R}_i\}$ amb el sistema de referència de món $\{\mathcal{W}\}$.

Aquesta relació és directament aplicable sobre els sistemes coordinats ideals $\{\mathcal{D}_i\}$, es a dir

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_j \mathbf{h}_{ij}$$

Donat que la relació amb el punt de referència sobre l'objecte $\{\mathcal{R}_0\}$ és també constant, es pot escriure de la manera $\mathbf{e}_0 = \mathbf{h}_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{h}_i$ o de forma equivalent $\mathbf{e}_i = \mathbf{h}_i \mathbf{e}_0 \mathbf{h}_i^{-1}$. Aquesta relació es pot escriure en els elements del tangent de la forma:

$$\widehat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{h}_i \widehat{\mathbf{e}}_0 \mathbf{h}_i^{-1} \quad (8.20)$$

on $\widehat{\mathbf{e}}_0$ i $\widehat{\mathbf{e}}_i$ corresponen a les velocitats de \mathbf{e}_0 i \mathbf{e}_i respectivament, escrites en forma matricial. De forma anàloga és possible escriure la seva relació en forma vectorial de la forma:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i} \mathbf{e}_0 \quad (8.21)$$

un cop es disposa d'aquesta relació és possible expressa la rigidesa de la molla i vista des del $\{\mathcal{R}_0\}$, aquesta pren la forma:

$$\mathbf{K}_i^0 = \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i}^T \mathbf{K}_i \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i} \quad (8.22)$$

Aquesta expressió es pot estudiar en funció de les components de posició i orientació:

$$\mathbf{K}_i^0 = \quad (8.23)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i}^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_{\mathbf{h}_i}^T \widehat{\mathbf{p}}_{\mathbf{h}_i} & \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T \mathbf{A}_i \mathbf{R} & \mathbf{R}^T \mathbf{B}_i \mathbf{J}_w \\ \mathbf{J}_w^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{R} & \mathbf{J}_w^T \mathbf{C}_i \mathbf{J}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i} & \widehat{\mathbf{p}}_{\mathbf{h}_i} \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i} \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i}^T \mathbf{R}^T \mathbf{A}_i \mathbf{R} \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i} & \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i}^T \mathbf{R}^T \mathbf{A}_i \mathbf{R} \widehat{\mathbf{p}}_{\mathbf{h}_i} \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i} + \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i}^T \mathbf{R}^T \mathbf{B}_i \mathbf{J}_w \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i} \\ -\mathbf{R}_{\mathbf{h}_i}^T \widehat{\mathbf{p}}_{\mathbf{h}_i} \mathbf{R}^T \mathbf{A}_i \mathbf{R} \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i} + \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i}^T \mathbf{J}_w^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{R} \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i} & \star \end{bmatrix}$$

$$\star = -\mathbf{R}_{\mathbf{h}_i}^T \widehat{\mathbf{p}}_{\mathbf{h}_i} \mathbf{R}^T \mathbf{A}_i \mathbf{R} \widehat{\mathbf{p}}_{\mathbf{h}_i} \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i} + \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i}^T \mathbf{J}_w^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{R} \widehat{\mathbf{p}}_{\mathbf{h}_i} \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i} - \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i}^T \widehat{\mathbf{p}}_{\mathbf{h}_i} \mathbf{R}^T \mathbf{B}_i \mathbf{J}_w \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i} + \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i}^T \mathbf{J}_w^T \mathbf{C}_i \mathbf{J}_w \mathbf{R}_{\mathbf{h}_i}$$

Aquesta matriu presenta les mateixes característiques que \mathbf{K}_i amb la diferència de la aparició dels termes creuats degut a l'acoblament entre els parells i les forces.

Finalment la rigidesa total vista des de $\{\mathcal{R}_0\}$ correspon a la suma de les rigideses individuals vistes des d'aquest sistema:

$$\mathbf{K}_0 = \sum_{i=1}^r \mathbf{K}_i^0 \quad (8.25)$$

En una posició d'equilibri, la matriu de rigidesa dóna idea de la relació entre el desplaçament del sistema de referència i la força aplicada. Aquesta relació és de la forma:

$$\mathbf{f}_{ext} = \sum_{i=1}^r \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_i) \mathbf{Q}_i \boldsymbol{\psi}_i \quad (8.26)$$

Donat que la relació entre \mathbf{e}_i i \mathbf{e}_0 és coneguda es pot reescriure la equació anterior en termes de \mathbf{e}_0 :

$$\mathbf{f}_{ext} = \sum_{i=1}^r \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i}^T \Lambda^T(\mathbf{h}_i \mathbf{e}_0 \mathbf{h}_i^{-1}) \mathbf{Q}_i \exp^{-1}(\mathbf{h}_i \mathbf{e}_0 \mathbf{h}_i^{-1}) \quad (8.27)$$

Un cop fixada la força exterior (\mathbf{f}_{ext}) és possible determinar de forma unívoca el valor de \mathbf{e}_0 , i determinar quin és el valor de les forces aplicades per cadascun dels robots. Desafortunadament aquesta equació presenta termes trigonomètrics i no lineals que dificulten la seva resolució de forma genèrica.

En el cas de petits desplaçaments es pot emprar una aproximació de primer ordre de la forma, emprant la rigidesa equivalent presentada anteriorment (equació 8.25):

$$\Delta \mathbf{f}_{ext} \approx \mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{e}_0 = \sum_{i=1}^r \mathbf{K}_i^0 \Delta \mathbf{e}_0 \quad (8.28)$$

Aquelles molles que presentin una rigidesa superior en la direcció de $\Delta \mathbf{e}_0$ produiran una aportació de força superior en el sistema de referència. Per aquest motiu una mesura de relació de càrrega entre el robot i i el robot j serà $[k_i^0]^{-1} [k_j^0]$ on k_i^0 correspon al guany de \mathbf{K}_i^0 en la direcció \mathbf{e}_0 . De forma genèrica és possible estendre aquest mesura de la forma:

$$[\mathbf{K}_i^0]^{-1} \mathbf{K}_j^0$$

Aquest producte en el cas d'equidistribució donarà la identitat. Cal notar que aquesta matriu té en compte la rigidesa pròpia de cadascun del robots com els braços de palanca introduïts per l'operador $\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i}$.

8.3.2 Efecte sobre les forces internes

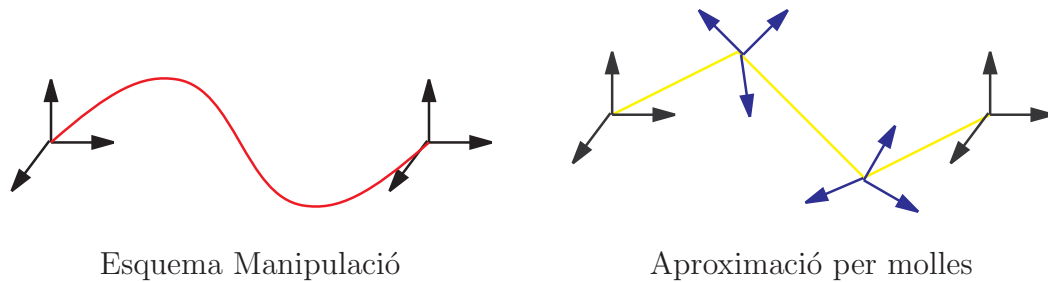


Figura 8.5: Aproximació per molles de l'objecte manipulat.

Un altre dels aspectes importants del control d'impedància en la manipulació multirobot és la capacitat de mantenir sota control les forces internes que actuen sobre el sistema. Per poder realitzar un estudi sobre la evolució de les forces internes és necessari definir-les prèviament. En la secció 7.2.1 s'ha emprat un model experimental per trobar la relació entre les forces internes i el que s'anomenat velocitats internes. En aquest cas es modelarà el del sistema representant la interacció com una molla o un conjunt de molles. Aquesta aproximació que ha estat emprada en altres treballs, presenta un comportament similar al obtingut amb els models experimentals (Secció 7.4.2).

El modelat per molles implica que qualsevol moviment dels sistemes coordinats de pressió que pretengui deformar l'objecte manipulat produirà una força en contra similar a la que produiria desplaçar la molla fora del seu punt d'equilibri. Idealment, si es desitja tenir una estimació de la força interna que representi acuradament la deformació de l'objecte, s'hauria de tenir un model compost per una gran quantitat de subsistemes molla-massa. No obstant, en la pràctica un model d'ordre reduït serà suficient. En aquest treball s'assumeix que els objectes manipulats són pràcticament rígids, i per tant les deformacions sofertes durant la manipulació seran petites i representables per una única molla. Si es vol treballar amb objectes que poden presentar deformacions més grans serà necessari utilitzar models d'ordre superior. En la figura 8.5 es presenta un exemple de deformació que requeriria un model d'ordre superior. Cal tenir en compte que la introducció de més d'una molla implica la introducció de masses intermitges el que implica la aparició de dinàmiques d'ordre superior.

Seguidament es dedueixen les equacions que governen el comportament del sistema multirobot quan les deformacions de l'objecte manipulat s'han modelat com una única molla generalitzada. Cal tenir en compte que aquest molla representa també les acomodacions que puguin presentar les diferents parts del sistema com són les pinces i sensors, entre d'altres. En el cas que la manipulació es realitzi amb més de dos robots és necessari introduir molles entre els diferents robots per tal de representar les deformacions que produeixen els diferents moviments creuats (Figura 8.7). Una representació equivalent seria la de forma d'estrella.

L'error de posicionament entre dos robot i i j , es pot representar per:

$$\mathbf{e}_{ij} \triangleq \mathbf{h}_i^{-1} \mathbf{e}_i^{-1} \mathbf{h}_i \mathbf{h}_j^{-1} \mathbf{e}_j \mathbf{h}_j \quad (8.29)$$

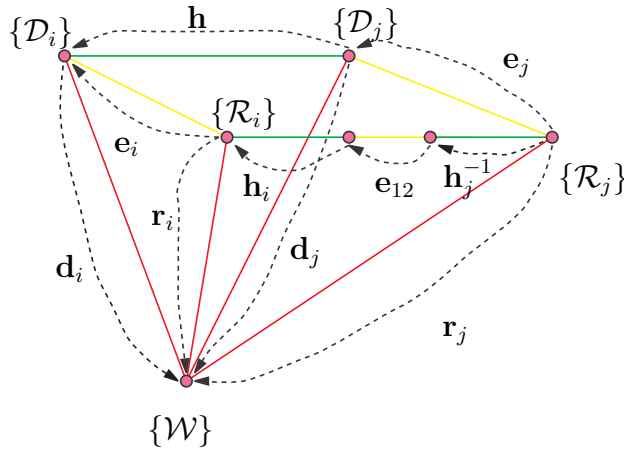


Figura 8.6: Esquema dels sistemes de coordenats i transformacions implicades en les forces internes per la manipulació amb dos robots.

que expressada en termes dels elements del tangent presenta la forma:

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_j^{-1}} \mathbf{e}_j - \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i^{-1} \mathbf{h}_j \mathbf{e}_j^{-1} \mathbf{h}_j^{-1}} \mathbf{e}_i \quad (8.30)$$

Per cada error de posicionament \mathbf{e}_{ij} , es defineix una energia potencial de la forma presentada en la secció 8.2.5.2:

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \exp^{-1}(\mathbf{e}_{ij})^T \mathbf{Q}_{ij} \exp^{-1}(\mathbf{e}_{ij}) \quad (8.31)$$

on la matriu de rigidesa \mathbf{Q}_{ij} representarà la acomodació existent entre els punts de premsió i i j . Les energies potencials generen unes forces que modifiquen la dinàmica dels punts de referència sobre l'objecte. Sobre el robot j aquestes forces presenten la forma:

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_j}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{ij}) \mathbf{Q}_{ij} \exp^{-1}(\mathbf{e}_{ij})$$

mentre que sobre el robot i seran:

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i^{-1} \mathbf{h}_j \mathbf{e}_j^{-1} \mathbf{h}_j^{-1}}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{ij}) \mathbf{Q}_{ij} \exp^{-1}(\mathbf{e}_{ij})$$

Per petits desplaçaments aquestes forces sobre el robot i es poden expressar en funció de \mathbf{e}_{ij} :

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i^{-1} \mathbf{h}_j \mathbf{e}_j^{-1} \mathbf{h}_j^{-1}}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{ij}) \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{e}_{ij} \quad (8.32)$$

que es pot escriure en funció de \mathbf{e}_i i \mathbf{e}_j :

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i^{-1} \mathbf{h}_j \mathbf{e}_j^{-1} \mathbf{h}_j^{-1}}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{ij}) \mathbf{Q}_{ij} \left(\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_j} \mathbf{e}_j - \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i^{-1} \mathbf{h}_j \mathbf{e}_j^{-1} \mathbf{h}_j^{-1}} \mathbf{e}_i \right) \quad (8.33)$$

Així, la dinàmica deguda a la existència de forces internes del sistema complet vindrà donada per la equació:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{e}_i + \Lambda(\mathbf{e}_i)^T \mathbf{Q}_i \exp^{-1}(\mathbf{e}_i) + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{ji}) \mathbf{Q}_{ji} \exp^{-1}(\mathbf{e}_{ji}) \\ - \sum_{j \in \mathcal{R}_i} \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i^{-1} \mathbf{h}_j \mathbf{e}_j^{-1} \mathbf{h}_j^{-1}}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{ij}) \mathbf{Q}_{ij} \exp^{-1}(\mathbf{e}_{ij}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8.34)$$

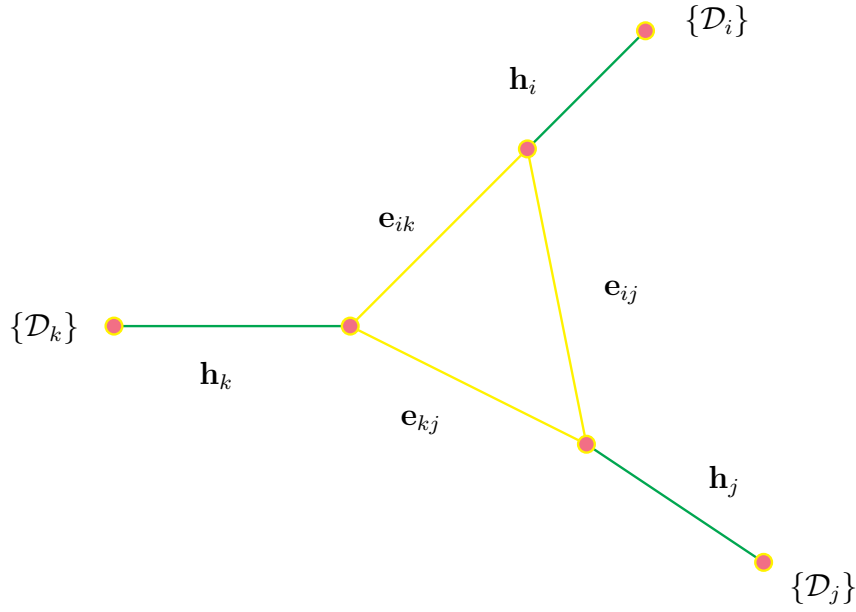


Figura 8.7: Esquema del sistema de molles per més de 2 robots.

on \mathcal{T}_i es refereix als robots respecte els quals l'error ha estat definit de la forma \mathbf{e}_{ij} , mentre que \mathcal{R}_i correspon als robots respecte els quals l'error ha estat definir de la forma \mathbf{e}_{ji} .

Els punts d'equil·libri del sistema quedaran definits per un conjunt de r equacions de la forma:

$$\Lambda(\mathbf{e}_i)^T \mathbf{Q}_i \exp^{-1}(\mathbf{e}_i) = \sum_{j \in \mathcal{T}_i} \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{ji}) \mathbf{Q}_{ji} \exp^{-1}(\mathbf{e}_{ji}) - \sum_{j \in \mathcal{R}_i} \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i^{-1} \mathbf{h}_j \mathbf{e}_j^{-1} \mathbf{h}_j^{-1}}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{ij}) \mathbf{Q}_{ij} \exp^{-1}(\mathbf{e}_{ij}) \quad (8.35)$$

A partir d'aquest conjunt d'equacions s'obtidrà directament i de forma unívoca els valors de \mathbf{e}_i i \mathbf{e}_{ij} . Cal recordar que \mathbf{e}_{ij} és funció de \mathbf{e}_i i \mathbf{e}_j . La solució analítica d'aquest conjunt d'equacions és complexa, i resulta difícil trobar una solució genèrica del sistema.

En el cas de petits desplaçaments és possible rescriure la equació anterior en la forma:

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{e}_i)^T \mathbf{Q}_i \Lambda(\mathbf{e}_i) \Delta \mathbf{e}_i = & \sum_{j \in \mathcal{T}_i} \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{ji}) \mathbf{Q}_{ji} \Lambda(\mathbf{e}_{ji}) \left(\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i} \Delta \mathbf{e}_i - \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i^{-1} \mathbf{h}_j \mathbf{e}_j^{-1} \mathbf{h}_j^{-1}} \Delta \mathbf{e}_j \right) \\ & \sum_{j \in \mathcal{R}_i} \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i^{-1} \mathbf{h}_j \mathbf{e}_j^{-1} \mathbf{h}_j^{-1}}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{ij}) \mathbf{Q}_{ij} \Lambda(\mathbf{e}_{ij}) \left(\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i} \Delta \mathbf{e}_i - \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_i^{-1} \mathbf{h}_j \mathbf{e}_j^{-1} \mathbf{h}_j^{-1}} \Delta \mathbf{e}_j \right) \end{aligned} \quad (8.36)$$

Pel cas de 2 robots aquesta expressió pren la forma:

$$\begin{aligned} & \Lambda(\mathbf{e}_1)^T \mathbf{Q}_1 \Lambda(\mathbf{e}_1) \Delta \mathbf{e}_1 + \\ & \quad \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_1^{-1} \mathbf{h}_2 \mathbf{e}_2^{-1} \mathbf{h}_2^{-1}}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Q}_{12} \Lambda(\mathbf{e}_{12}) \left(\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_1} \Delta \mathbf{e}_1 - \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_1^{-1} \mathbf{h}_2 \mathbf{e}_2^{-1} \mathbf{h}_2^{-1}} \Delta \mathbf{e}_2 \right) = \mathbf{0} \quad (8.37) \\ & \Lambda(\mathbf{e}_2)^T \mathbf{Q}_2 \Lambda(\mathbf{e}_2) \Delta \mathbf{e}_2 + \\ & \quad \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_2}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Q}_{12} \Lambda(\mathbf{e}_{12}) \left(\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_2} \Delta \mathbf{e}_2 - \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_2^{-1} \mathbf{h}_1 \mathbf{e}_1^{-1} \mathbf{h}_1^{-1}} \Delta \mathbf{e}_1 \right) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

que pot transformar-se fàcilment en la següent equació matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e}_1 \\ \Delta \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (8.38)$$

on

$$a_{11} = \Lambda(\mathbf{e}_1)^T \mathbf{Q}_1 \Lambda(\mathbf{e}_1) + \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_1^{-1} \mathbf{h}_2 \mathbf{e}_2^{-1} \mathbf{h}_2^{-1}}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Q}_{12} \Lambda(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_1} \quad (8.39)$$

$$a_{12} = -\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_1^{-1} \mathbf{h}_2 \mathbf{e}_2^{-1} \mathbf{h}_2^{-1}}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Q}_{12} \Lambda(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_1^{-1} \mathbf{h}_2 \mathbf{e}_2^{-1} \mathbf{h}_2^{-1}} \quad (8.40)$$

$$a_{21} = -\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_2}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Q}_{12} \Lambda(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_2^{-1} \mathbf{h}_1 \mathbf{e}_1^{-1} \mathbf{h}_1^{-1}} \quad (8.41)$$

$$a_{22} = \Lambda(\mathbf{e}_2)^T \mathbf{Q}_2 \Lambda(\mathbf{e}_2) + \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_2}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Q}_{12} \Lambda(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_2} \quad (8.42)$$

La matriu $[a_{ij}]$, es pot expressar com la suma de dues matriu definides positives, i per tant es també definida positiva, i de rang complet. La primera d'aquestes dues matrius està formada per les matriu de rigideses individuals:

$$\begin{bmatrix} \Lambda(\mathbf{e}_1)^T \mathbf{Q}_1 \Lambda(\mathbf{e}_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda(\mathbf{e}_2)^T \mathbf{Q}_2 \Lambda(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix}$$

i una segona, per la matriu de rigideses creuades:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_1^{-1} \mathbf{h}_2 \mathbf{e}_2^{-1} \mathbf{h}_2^{-1}}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Q}_{12} \Lambda(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_1} & -\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_1^{-1} \mathbf{h}_2 \mathbf{e}_2^{-1} \mathbf{h}_2^{-1}}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Q}_{12} \Lambda(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_1^{-1} \mathbf{h}_2 \mathbf{e}_2^{-1} \mathbf{h}_2^{-1}} \\ -\mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_2}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Q}_{12} \Lambda(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_2^{-1} \mathbf{h}_1 \mathbf{e}_1^{-1} \mathbf{h}_1^{-1}} & \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_2}^T \Lambda^T(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Q}_{12} \Lambda(\mathbf{e}_{12}) \mathbf{Ad}_{\mathbf{h}_2} \end{bmatrix}$$

El fet que la matriu a_{ij} sigui de rang complet implica que no presenta nucli i per tant la solució del sistema (8.38), serà $\Delta \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, i $\Delta \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$. Això és coherent amb el fet que el sistema dinàmic s'estabilitza al voltant del punt de mínima energia, i es pot comprovar que amb aquest plantejament s'aconsegueix que el punt d'equilibri del sistema presenti error nul i per tant forces internes nul·les.

L'existència d'errors de modelat fa que l'origen de les energies (8.31) no estigui situat en l'origen, i presenti algunes desviacions. Això implica que el punt de mínima energia no estigui situat en $\psi_i = 0$, per el que el punt d'equilibri presentarà una certa desviació i per tant existirà una força interna no nul·la. Aquestes forces internes dependran de la rigidesa relativa de les diferents molles implicades.

8.4 Implementació en robots amb control de posició

En aquesta secció es presenta la implementació dels comportaments proposats en les seccions anteriors utilitzant robots industrials que disposen de control de posició i de sensors de

força en seu canell. Primerament es presenten les característiques dels models del robots i sensors i, posteriorment, es descriu el procés d'adaptació de les equacions que descriuen el comportament d'impedància per tal que puguin ésser implementades en un sistema de temps discret. Finalment, es descriuen algunes limitacions sobre el comportament del sistema degudes a la metodologia d'implementació proposada.

8.4.1 Modelat dels robots

Els robots industrials disposen, en general, d'un controlador de posició encarregat de seguir les trajectòries dissenyades per l'usuari. En general, i sota aquest tipus de controladors, els robots es poden considerar posicionadors ideals. És a dir el robot rep consignes que indiquen la posició desitjada, i el robot hi va en un temps finit. Aquestes consignes es donen cada cert temps T que en principi és constant i determinat, i per tant es poden considerar sistemes de temps discret. En la pràctica la majoria d'aquest robots presenten un comportament que es pot modelar a través d'un sistema de segon ordre amb un cert retard pur:

$$R_i(z) = \frac{P_i(z)}{V_i(z)} = \frac{z (1 - \exp(-T/\tau))}{z - \exp(-T/\tau)} \frac{T z}{z - 1} z^{-D} \quad (8.43)$$

on $P_i(z)$ representa la posició de l'element terminal del robot, $V_i(z)$ representa la velocitat de consigna, τ és la constant del temps del sistema de primer ordre i D és el nombre de períodes de mostratge retard que actuen del sistema. Aquest retard pot ésser deguts al propi robot, o al procés de comunicació entre el sistema de control i el robot. Els paràmetres τ i D , es poden obtenir a partir de la anàlisi de la resposta temporal del robot real.

El model plantejat assumeix, que els diferents paràmetres $P_i(z)$ evolucionen independentment uns dels altres, i que aquesta evolució és independent del punt de treball. Els eixos $P_i(z)$ corresponen a cadascun dels paràmetres de posició-orientació que utilitza el robot i que en general solen ésser les coordenades de posició i un conjunt d'angles d'Euler per representar la orientació. Aquest conjunt de paràmetres es pot relacionar amb la configuració a través d'un mapa exponencial adequat.

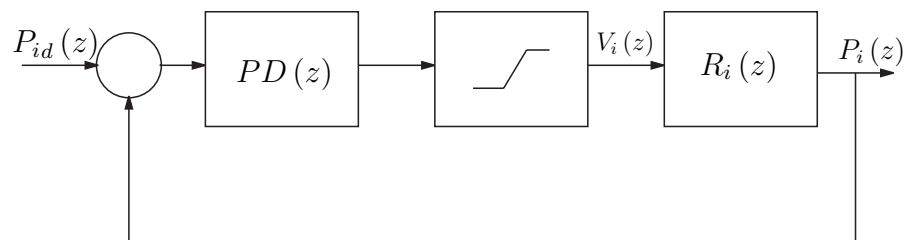


Figura 8.8: Esquema del robot.

La majoria d'implementacions del control d'impedància estan pensades per robots en els que es realitza un control del sistema a nivell de parells. Aquestes implementacions es basen en la cancel·lació de la dinàmica pròpia del sistema mecànic i en la posterior imposició de la

dinàmica del comportament d'impedància. Desafortunadament, en el cas dels sistemes amb control de posició que es comporten com un model de la forma (8.43), no és possible aplicar aquest tipus d'estratègia ja que per compensar els retards purs seria necessari introduir avanços en el temps, cosa que no és possible. Per aquest motiu s'ha hagut de pensar en altres tipus d'esquemes com els basats en model de referència. El principal problema de la implantació d'aquests esquemes ha estat que donat que el comportament d'impedància estarà representat per un conjunt d'equacions no lineals de temps discret (8.4.3) el disseny del controladors i l'estudi d'estabilitat resulta bastant complex, i des d'un punt de vista pràctic resultaria difícil obtenir bons resultats ja que l'existència del retards en el comportament del sistema dificulta el seguiment del comportament ideal.

Per aquest motiu s'ha optat per intentar que el comportament del robot sigui el més semblant possible al d'un posicionador ideal, és a dir que el sistema vagi a la posició desitjada en el mínim de temps possible. Per aconseguir això s'utilitza un llaç de control per sobre del sistema de control de posició (Figura 8.8). L'objectiu del llaç és fer el sistema més ràpid. Cal tenir en compte que en el llaç de control hi ha una saturació, i s'hauran d'evitar dissenys que facin que aquesta actuï sobre l'acció de control. En la pràctica, s'ha comprovat que una estructura de forma de controlador proporcional-derivatiu (PD) és suficient per aconseguir el objectius desitjats.

8.4.2 Modelat dels sensors de força

De forma similar al que passa amb el robot, el sensor de força tampoc és un element ideal i serà necessari tenir en compte el seu comportament. En la pràctica la relació entre la força aplicada i la sensada presenta una relació de la forma:

$$\mathbf{f}_s = H_i(z) \mathbf{f}_i \quad (8.44)$$

on $H_i(z)$ correspon a un filtre lineal, que habitualment forma part del sensor de força. Aquest filtre, a més de modificar l'espectre de la força pot introduir un cert retard en la propagació del senyal el que dificultarà també la implementació del comportament d'impedància. S'assumeix que durant el procés de mesura s'han aconseguit desacoblar correctament tots els eixos. Finalment cal tenir en compte que les forces que es mesuren recullen també les components inercials, que existeixen en el sistema. Aquestes components, no desitjades en la pràctica, introduiran soroll dins el comportament d'impedància. Aquest tipus de soroll serà especialment important en el cas de moviments ràpids.

8.4.3 Discretització de les equacions

8.4.3.1 Introducció

Com s'ha indicat en la secció anterior, des d'un punt de vista del comportament temporal, els robots es poden considerar sistemes de temps discret, i per tant serà necessari generar una entrada per cada instant $k \cdot T$. D'altra banda el comportament d'impedància presentat anteriorment correspon a un sistema de temps continu (secció 8.2.7).

Un primer problema és com obtenir la consigna de posició en cada instant de mostratge que reflexi de forma adequada el comportament del sistema de temps continu. Una solució d'aquest problema és plantejar un conjunt d'equacions de temps discret que aproximïn la evolució del sistema de temps continu. En el cas de sistemes lineals això es pot fer a través de diferents transformades com la \mathcal{Z} o la bilineal entre d'altres [Åström and Wittenmark, 1997]. Cadascuna d'elles té les seves característiques particulars. Així la transformada \mathcal{Z} fa que la sortida del sistema de temps discret coincideixi amb la del sistema de temps continu en els instants de mostratge, mentre que la transformada bilineal conserva la característica de passivitat del sistema, cosa que la fa especialment interessant per discretitzar comportaments d'impedància definits a través d'equacions lineals.

El conjunt d'equacions desenvolupades anteriorment és no lineal, i per tant cap de les dues aproximacions és directament aplicable. Per aquest motiu s'ha optat per realitzar una integració de les equacions en temps real seleccionant un integrador que permeti aquest tipus de funcionament [Howe, 1991]. Les condicions bàsiques que ha de complir aquest integrador són que únicament utilitzi valors de la sortida i la entrada en instants passats de temps i que l'algorisme sigui determinista en temps, per el que no ha d'ésser iteratiu. L'algorisme seleccionat fou proposat per R.M. Howe i a més d'aquestes propietats presenta un afïtament de l'error millor que altres del seu estil. Aquest algorisme es descriu en la secció següent.

8.4.4 Algorisme d'integració

El comportament d'impedància descrit en les seccions anteriors es pot formular de manera genèrica com un conjunt d'equacions de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] \quad (8.45)$$

el resultat de la integració d'aquesta equació, és una trajectòria $\mathbf{x}(t)$ que estarà en funció de la entrada $\mathbf{u}(t)$. L'objectiu de l'integrador és obtenir una estimació $\mathbf{x}^*(k \cdot T)$ del valor de $\mathbf{x}(k \cdot T)$. L'integrador emprat, utilitza una aproximació en varis passos, en concret realitza un primer pas de predicció mitjançant una aproximació de segon ordre, on es calcula una predicció $\tilde{\mathbf{x}}((k + \frac{1}{3})T)$ del valor de \mathbf{x} en l'instant $(k + \frac{1}{3})T$:

$$\tilde{\mathbf{x}}((k + \frac{1}{3})T) = \mathbf{x}^*(k \cdot T) + \frac{T}{18} (7\mathbf{f}_{k \cdot T}^* - \mathbf{f}_{(k-1) \cdot T}^*)$$

on $\mathbf{f}_{k \cdot T}^* = \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(k \cdot T), \mathbf{u}(k \cdot T)]$. Posterior es realitza un pas predictor-corrector de tercer ordre per tal d'obtenir una estimació del valor de \mathbf{x} en l'instant $(k + \frac{2}{3})T$:

$$\tilde{\mathbf{x}}((k + \frac{2}{3})T) = \mathbf{x}^*(k \cdot T) + \frac{T}{54} (39\tilde{\mathbf{f}}_{(k+\frac{1}{3})T} - 4\mathbf{f}_{k \cdot T}^* + \mathbf{f}_{(k-1) \cdot T}^*)$$

on $\tilde{\mathbf{f}}_{(k+\frac{1}{3})T} = \mathbf{f}[\tilde{\mathbf{x}}((k + \frac{1}{3}) \cdot T), \mathbf{u}(k \cdot T)]^\dagger$. Finalment s'aplica un darrer pas per calcular una predicció de \mathbf{x} en l'instant $((k + 1) \cdot T)$:

$$\mathbf{x}^*((k + 1) \cdot T) = \mathbf{x}^*(k \cdot T) + \frac{T}{4} (\mathbf{f}_{k \cdot T}^* + 3\tilde{\mathbf{f}}_{(k+\frac{2}{3})T})$$

[†] En aquesta avaluació és interessant substituir en valor de $\mathbf{u}(k \cdot T)$, per $\mathbf{u}((k + \frac{1}{3})T)$ en el cas que estigui disponible.

El resultat de la aplicació d'aquest algorisme d'integració, és la obtenció d'una equació de la forma:

$$\mathbf{x}^*((k+1) \cdot T) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^*(k) \cdot T, \mathbf{u}(k) \cdot T)$$

que dona lloc a una equació en diferències que s'emprarà per implementar el comportament d'impedància en el sistema real.

Aquesta metodologia d'integració introdueix un error d'integració inferior a $\frac{T^3}{216}O(T^3)$, i presenta la millor relació d'error dins els integradors del seu ordre [Howe, 1991]. A més, s'ha de caracteritzar la dinàmica l'error, que és estable si $|\lambda T| < 1$ [Howe, 1991], on λ és el valor propi més petit del sistema que s'està integrant. Aquesta condició imposarà una restricció sobre les dinàmiques que es poden adoptar per un cert període de mostratge.

8.4.5 Esquema d'implementació

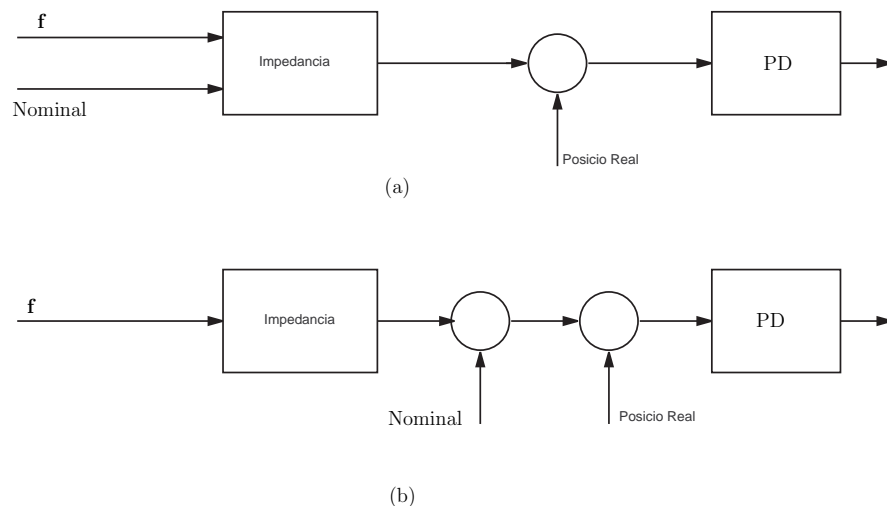


Figura 8.9: Esquema d'implementació de la impedància.

El comportament d'impedància defineix quina és la evolució de l'error en funció de les forces sensades, i l'error defineix la relació existent entre la posició desitjada (Nominal) i la posició consignada al robot. Durant el desenvolupament d'aquest treball s'ha detectat que és possible implementar la modificació de la trajectòria de dues maneres (Figura 8.9). En la primera d'elles (Figura 8.9, opció (a)) s'aplica la definició d'error i a partir d'aquest i de la força sensada es calcula la impedància. D'aquesta manera s'obté quina és la evolució de l'error i a partir d'aquest evolució s'obté la de la posició real. El resultat d'aquest plantejament és que els canvis en l'error són produïts o bé per la variació de les forces externes \mathbf{f} , o bé per la variació en la trajectòria de consigna. El resultat més significatiu és que la trajectòria de consigna pateix l'efecte de la impedància, i per tant presenta un efecte filtre. En la segona de les opcions (Figura 8.9, opció (b)) l'error únicament depèn de les forces exteriors, i posteriorment es superposa sobre la trajectòria desitjada. D'aquesta manera la trajectòria no està filtrada pel comportament d'impedància.

Les dues metodologies són perfectament vàlides, encara que cal tenir en compte que en la primera opció és recomanable que els diferents robots presentin la mateixa impedància ja que en cas contrari la diferència de comportaments introduirà desincronització entre els robots i per tant d'aparició de forces internes no desitjables. A més d'aquest fet cal tenir en compte que la trajectòria pateixi l'efecte de la impedància implica que el sistema final no serà capaç d'efectuar trajectòries que presentin components freqüencials per sobre de les que permet el comportament d'impedància. En contrapartida, la segona opció d'implementació permet que els diferents braços tinguin comportaments d'impedància diferents, i no hi ha limitacions teòriques en les possibles trajectòries que es poden seguir. Des d'un punt de vista pràctic, el seguiment de trajectòries amb components freqüencials elevades implica la aparició de forces inercials que no estan contemplades en el model de treball, i que per tant fan que el comportament final no sigui el desitjat.

8.4.6 Limitacions

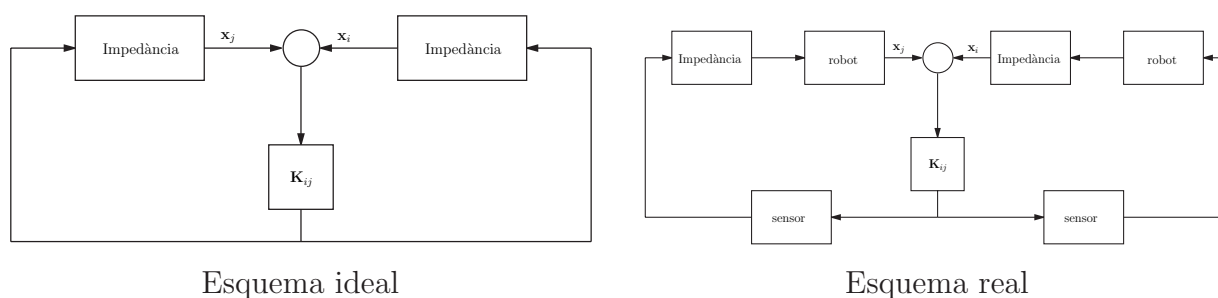


Figura 8.10: Comparació impedància real i la ideal.

En les seccions anteriors s'han presentat un conjunt de diferències entre el comportament de impedància inicialment previst i el comportament que finalment es pot implementar (Figura 8.10). En el sistema ideal la estabilitat del sistema multirobot amb manipulació conjunta queda garantida ja que cadascun dels robots es comporta com un sistema dissipatiu, i la interacció es produeix a través d'un sistema que és conservatiu, amb el que el sistema complet és dissipatiu i per tant estable.

La principal diferència entre el sistema ideal i el real, és la introducció d'elements no modelats com el comportament dels robots i dels sensors, a més del fet que el comportament d'impedància s'implementa en temps discret. Per determinar de quina manera influeixen aquestes modificacions de l'esquema ideal s'ha plantejat un estudi d'estabilitat del sistema real. Idealment aquest estudi podria realitzar-se amb el sistema de temps continu, però la aparició de retards purs, i el fet que tant els robots com els sensors siguin dispositius de temps discret dificulta aquest estudi.

Per aquest motiu s'ha optat per estudiar el sistema en temps discret. Cal tenir en compte que l'objectiu del control d'impedància és mantenir sota control les forces internes, i per tant la evolució del sistema es mourà al voltant del punt d'equilibri. Per aquest motiu es realitzarà un estudi d'estabilitat al voltant d'un punt. El fet de treballar al voltant del punt d'equilibri

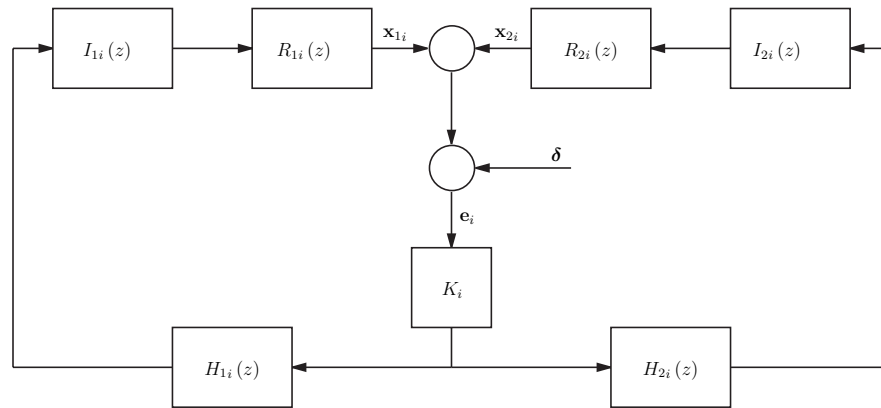


Figura 8.11: Esquema del sistema linealitzat.

permet treballar amb el sistema linealitzat al voltant d'aquest punt. Pel cas de dos robots, aquest comportament linealitzat es pot expressar de la forma:

$$\mathbf{e}(z) = [\mathbf{I}_d + (\mathbf{T}_1 \mathbf{R}_1(z) \mathbf{I}_1(z) \mathbf{H}_1(z) \mathbf{A}_1^T \mathbf{K}^o + \mathbf{T}_2 \mathbf{R}_2(z) \mathbf{I}_2(z) \mathbf{H}_2(z) \mathbf{A}_2^T \mathbf{K}^o)]^{-1} \boldsymbol{\delta}(z) \quad (8.46)$$

on \mathbf{T}_i són desplaçament relatius de cadascun dels punts de premsió respecte el sistema de referència sobre l'objecte; \mathbf{A}_i són les matrius adjuntes necessàries per relacionar les forces i velocitats del punt d'aplicació al sistema de referència sobre el robot, \mathbf{R}_i correspon a les dinàmiques del robots, \mathbf{H}_i correspon a la dinàmica del sensors de força, \mathbf{I}_i són els comportaments d'impedància linealitzats, i $\boldsymbol{\delta}$ representen les perturbacions de posició degudes als errors de modelat o problemes de sincronització, i $\Delta \mathbf{e}$ correspon a les deformacions aplicades sobre l'objecte, que es consideren proporcionals a les forces internes. Així amb aquest modelat s'obté una relació lineal entre les forces internes i les perturbacions de posició que actuen sobre el sistema. Un cop fixats els comportaments d'impedància dels diferents robots, l'únic element que resta desconegut és el valor de \mathbf{K} que dependrà de les característiques de l'objecte manipulat. En el cas ideal, els sistema de laç tancat hauria d'ésser estable per qualsevol valor de \mathbf{K} , en la pràctica hi haurà valors de \mathbf{K} que poden fer el sistema (8.46) inestable.

8.5 Validació Experimental

La metodologia proposada ha estat implementada en la cel·la robotitzada de l'IOC composta per dos robots RX-90 [Adept Technology, 1995], amb sensors de força JR3 [JR3, 1994] sobre el seu element terminal. Tots aquests elements estan connectats a un PC amb el sistema operatiu QNX [QNX Software Systems Ltd., 1997]. Per tal de coordinar el funcionament del diferents dispositius i garantir el seu funcionament en temps real s'han desenvolupat unes llibreries de comunicació [Riego and Costa Castelló, 2001]. La comunicació entre el PC i els robots s'ha realitzat a través del mode ALTER [Adept Technology, 1993] de les controladores del robot. En aquest mode es dona una nova consigna cada 16ms, i per tant el període de mostratge es fixarà en $T = 16\text{ms}$.

Els sensors de força disposen de diferents mecanismes de prefiltrat i desacoblament. En aquest treball s'ha seleccionat el filtre de mínim retard, que és aproximadament de 1.3ms dins la banda passant del filtre [JR3, 1994]. Així a efectes de la implementació es pot considerar que el sensor de força introdueix un retard d'un període i un guany programable k_{si} , i per tant

$$H_{j_i}(z) = \frac{k_{si}}{z}$$

El comportament dels braços s'ha identificat introduint un senyal conegut en el sistema i observant la sortida. Quan s'introdueix un consigna en forma d'esglaó en els robots es pot observar com la sortida evoluciona de forma similar a la que presenta un sistema de primer ordre en cascada amb un integrador i diversos retards pur. En concret s'ha trobat que pels dos robots i per tots els eixos el comportament del sistema presenta els mateixos paràmetres que són $\tau = 35\text{ms}$ i un retard pur de $D = 7$ períodes. Amb aquestes dades s'ha ajustat un model de la forma (8.43).

Pel cas de petits desplaçament interns i assumint que el punt de referència està centrat en els diferents punts de prensió, es pot assumir que $A_1 + A_2 \approx 2\mathbf{I}_d$. Donat que els dos robots i els dos sensors es comporten de la mateixa manera i assumint que el punt de referència està centrat i que s'ha imposat el mateix comportament d'impedància en els dos robots, es pot reescriure la equació (8.46) de la forma:

$$\mathbf{e}(z) = [\mathbf{I}_d + 2\mathbf{R}_1(z) \mathbf{I}_1(z) \mathbf{H}_1(z) \mathbf{K}^o]^{-1} \boldsymbol{\delta}(z) \quad (8.47)$$

En el cas que les impedàncies seleccionades presentin unes rigideses tals que $\mathbf{B} = 0$ i \mathbf{A} i \mathbf{C} diagonals, la equació anterior dóna lloc a un conjunt de 6 equacions independents.

$$\mathbf{e}_i(z) = \frac{1}{1 + 2r(z) i(z) h(z) k_i^o} \boldsymbol{\delta} \quad (8.48)$$

Un cop fixada la impedància desitjada és possible estudiar el rang de rigideses de la peça manipulada que fa que el llaç tancat sigui estable. De forma similar un cop fixada la peça manipulada és possible determinar el rang de comportaments possibles per sistema.

La equació (8.48) presenta diferents paràmetres que s'han de fixar: m_i, b_i , i k_i permeten definir el comportament d'impedància desitjat; k_{si} és el guany introduït pels sensors i finalment k_i^o correspon a la rigidesa de l'objecte en l'eix i . Per tal de fixar el comportament final, s'ha elegit inicialment el comportament d'impedància, i, a partir d'aquest s'ha estudiat el rang de valors que pot prendre k_{si} per tal que el sistema sigui estable. Aquest valors dependran de k_i^o . El valors de k_{si} es poden interpretar com una modificació de la rigidesa de l'objecte manipulat.

Per tal de simplificar el procediment de disseny es defineix $k_{ni} \triangleq k_{si} k_i$ que correspon a la nova rigidesa. L'estudi d'estabilitat es realitza en funció d'aquest nou paràmetre k_{ni} . Per $k_{ni} = 1$ es presenta en la figura 8.12 el diagrama de Nyquist del sistema per $m_i = 1$, $b_i = 3.2$ i $k_i = 2.7^\ddagger$. A partir de la observació del diagrama i coneixent que els pols de llaç obert són estables es pot determinar que $k_{ni} \in [0..7.9]$ per tal que sistema de llaç tancat sigui estable.

[‡] Pels paràmetres emprats la s'obté $|\lambda T_s| < 2.63 \cdot 10^{-3}$, i per tant l'integrador estarà treballant en les condicions adients.

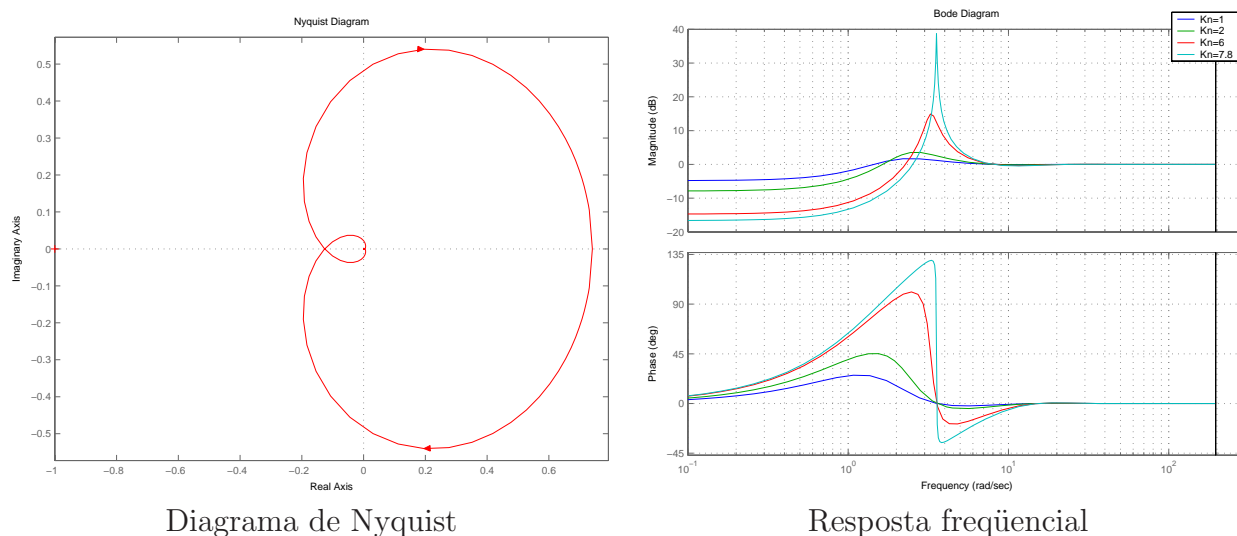


Figura 8.12: Comportament freqüencial del sistema linealitzat.

La relació en estat estacionari entre les perturbacions de posició i l'error intern queda fixada per la expressió:

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{1 + 2\frac{k_{ni}}{k_i}} \boldsymbol{\delta} = \frac{k_i}{k_i + 2k_{ni}} \boldsymbol{\delta} \quad (8.49)$$

Un cop fixat k_i , es pot comprovar que per tenir forces internes petites en estat estacionari és necessari que k_{ni} sigui gran, el que és contrari a l'estabilitat, ja que com més gran és k_{ni} , més petit és el marge de guany. Per tant serà necessari trobar un compromís entre el marge de guany i l'error en estat estacionari. En la figura 8.12 es mostra la resposta freqüencial del sistema enllaç tancat per diferents valors de k_{ni} . Com es pot veure els sistemes que presenten gran rebuig a baixes freqüències tenen pics de ressonància grans, símptoma de la proximitat a la inestabilitat.

En la figura 8.13 es representa la evolució del sistema real per $k_{ni} = 9$. Es pot comprovar que el sistema presenta oscil·lacions mantingudes, produïdes pel lliscament sobre les pinces, degut a que les forces d'interacció són més elevades que les de pressió. Aquest lliscament fa que les oscil·lacions no creixin i es mantinguin amb amplitud constant.

Finalment, per il·lustrar el comportament del sistema en un cas real, es presenten els resultats d'un cas pràctic implementat en la cel·la (Figures 8.14 i 8.15). Seguint l'esquema presentat anteriorment, s'ha fixat una impedància igual en els tots eixos i en els dos robots. La manipulació s'ha realitzat amb la peça caracteritzada en el capítol anterior (Taula 7.1). Per tal que tots els eixos presentin un comportament similar s'ha fixat $k_{ni} = 2$, que com s'ha indicat anteriorment dóna lloc a un comportament estable.

En la primera figura (Figura 8.14) es mostra en primer lloc la evolució de la trajectòria nominal d'un dels robots (Nominal), i la trajectòria que seguiria el robot en el cas de no utilitzar cap tipus de control (Nocontrol). Entre aquestes dues trajectòries es pot observar l'existència d'un retard degut al robot i les comunicacions. Finalment es presenten les trajectòries del sistema quan s'utilitza el comportament d'impedància.

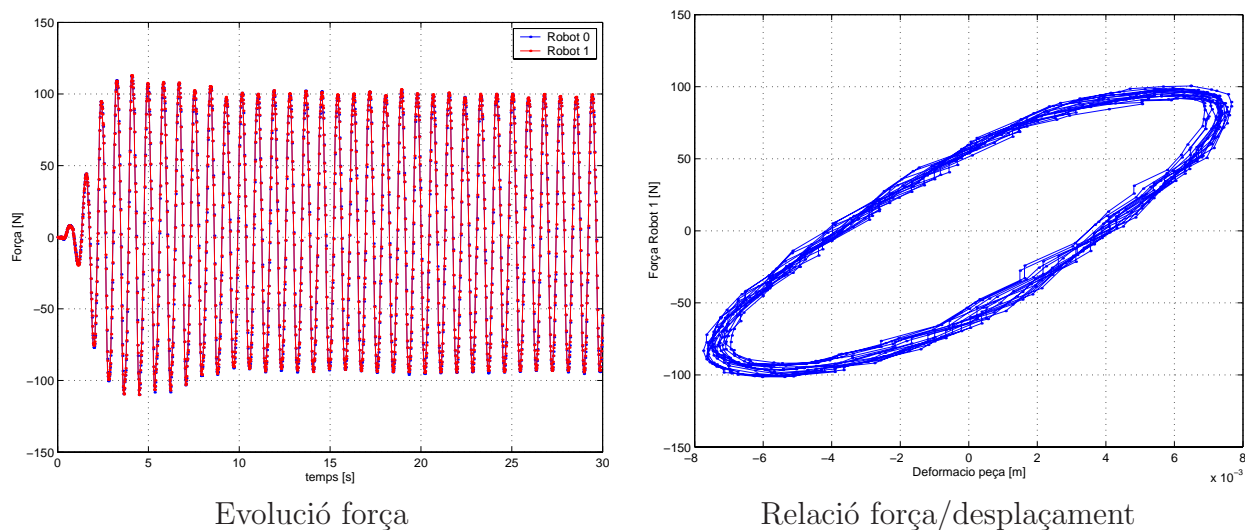


Figura 8.13: Oscil·lacions Mantingudes.

La Figura 8.14 mostra també els resultants per les dues metodologies d'implementació (secció 8.4.5). Es pot observar que quan la trajectòria està filtrada pel comportament (filtretraj), presenta una amplitud i un desfasament grans respecte la trajectòria nominal, mentre que en el cas en que la trajectòria no està filtrada (filtreforca), la evolució és pràcticament idèntica a la del sistema sense control, a excepció d'aquelles zones en les que es produeix un canvi de direcció, ja que en aquestes zones es generen forces inercials que fan desviar la evolució del sistema de la seva trajectòria ideal.

De forma complementària en la figura 8.15 es mostra la evolució de les forces internes en els tres casos plantejats, primerament es presenten les forces internes que existeixen en el cas que no actui control (Nocontrol), seguidament es presenta la evolució de les forces internes pel cas en que no es filtra la trajectòria (filtreforca) i finalment, la evolució del sistema amb filtrat de trajectòria (filtretraj). Es pot comprovar que el comportament d'impedància produeix una reducció substancial, de l'ordre del 40%, de la amplitud de les forces internes, valor molt similar al obtingut amb l'estudi lineal. Cal destacar que les forces internes que apareixen en el sistema que filtra la trajectòria són sempre inferiors a les del sistema que no introdueix filtrat. Això és degut a que les trajectòries seguides no presenten components freqüencials fora de la banda d'atenuació del sistema, i per tant les perturbacions introduïdes són de més baixa freqüència.

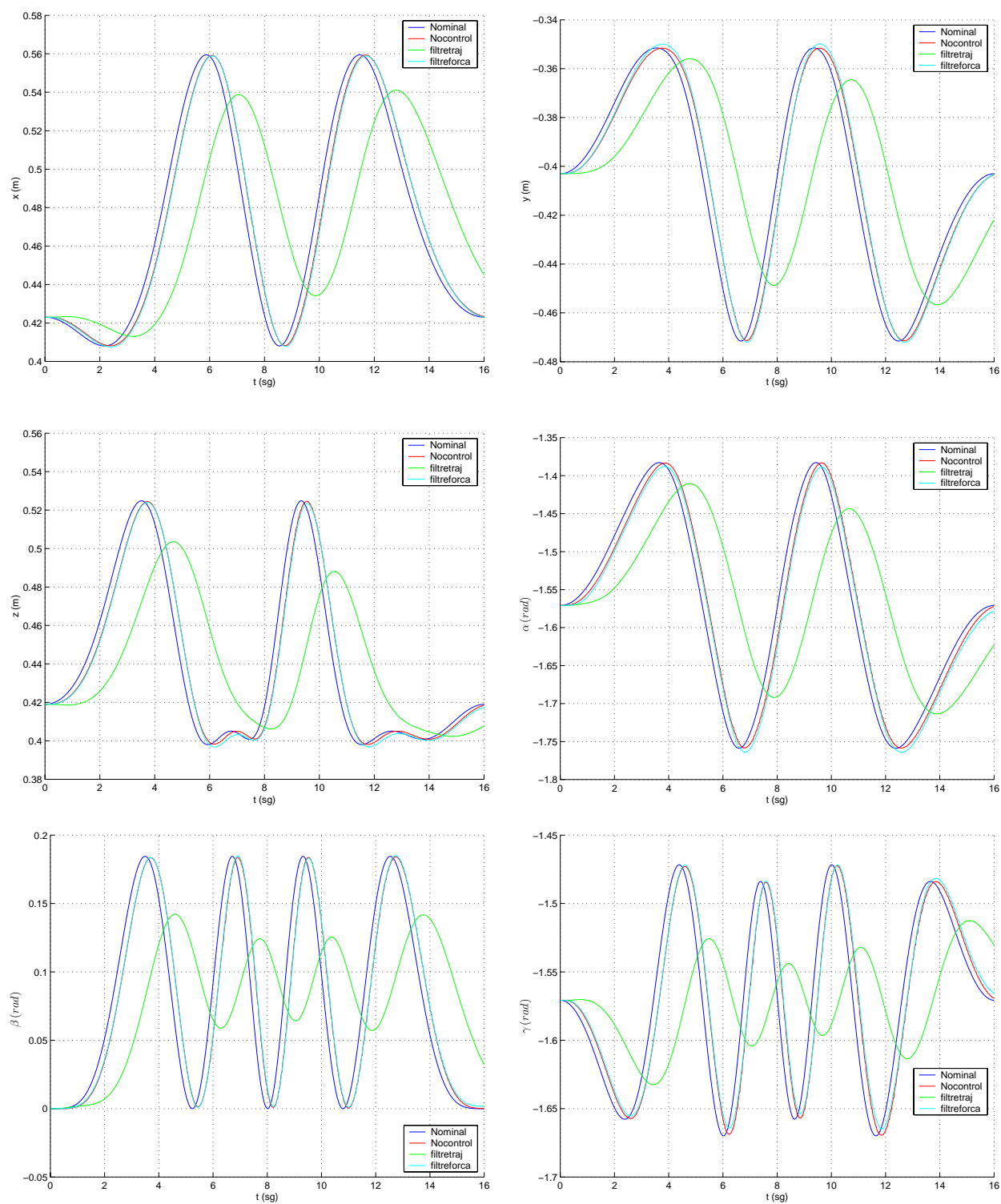


Figura 8.14: Evolució de les diferents trajectòries.

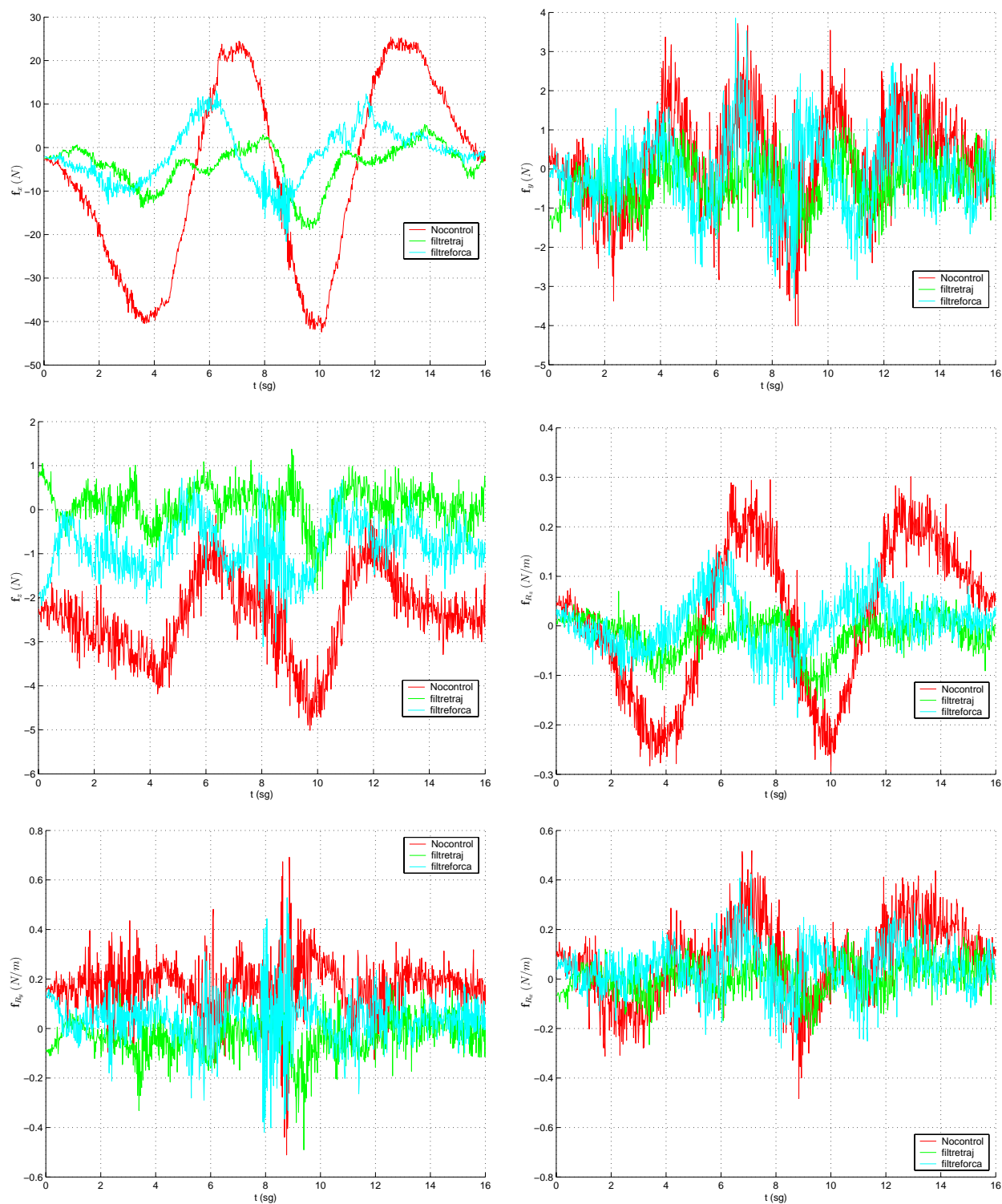


Figura 8.15: Evolució forces internes.

Part IV

Comentaris Finals

Capítol 9

Conclusions i treballs futurs

Seguidament es descriuen les principals conclusions i aportacions realitzades en aquesta tesi. De manera similar es descriuen breument les línies de recerca que resten obertes i que poden ser d'interès en un futur proper.

9.1 Principals aportacions

9.1.1 Cinemàtica

La cinemàtica dels sistemes multirobot presenta unes característiques força diferents de la de les sistemes amb únic robot, i una de les principals és el fet que l'espai de configuracions està definit a través de varietats implícites. Aquest fet dificulta l'aplicació de molts dels conceptes aplicables en els robots tradicionals. En aquesta tesi s'ha emprat un llenguatge comú per unificar i comparar les diferents propostes de mesures de manipulabilitat existents en la bibliografia (Capítol 2) i, en aquest llenguatge, s'han formulat les diferents propietats dels sistemes multirobot. Finalment s'ha realitzat una proposta de nova mesura de manipulabilitat que té en compte el comportament dels diferents braços en l'espai de configuracions i en l'espai de treball, per el que és especialment indicada pels sistemes multirobot.

L'espai de treball del sistema multirobot és una altra de les qüestions que s'ha estudiat en detall en la tesi, i s'ha proposat una metodologia basada en els conceptes de figura destra i figura realitzable (Capítol 3). Aquestes dues figures geomètriques provinents dels espais de treball individuals, permeten descriure l'espai de treball com la intersecció d'unes figures geomètriques, i aquest interpretació permet dissenyar de forma intuïtiva cel·les multirobot en les que hi haurà manipulació multirobot. La metodologia s'ha implementat en el cas de dos tipus de robots, en primer lloc en els robots tipus SCARA (Capítol 4) on l'espai de treball es pot estudiar a través de seccions planes, i en segon lloc en els robots tipus PUMA (Capítol 5).

El mètode proposat pot emprar-se en el disseny de cel·les multirobot, ja que les figures individuals definides són independents de la posició relativa de les bases, i per tant la posició d'aquestes es pot fixar de tal manera que es maximitzi l'espai de treball conjunt. Un avantatge

del mètode és que l'espai de treball resultat està lliure de singularitats.

9.1.2 Dinàmica i control

Dins els aspectes de dinàmica i control abordats en la tesi, cal diferenciar dos grans apartats, el referent a la dinàmica del sistema multirobot (Capítol 6) i el referent als sistemes en els que els robots presenten control de posició (Capítols 7 i 8).

En els aspectes de dinàmica pròpiament dita s'ha analitzat en detall la formulació en forma de equacions algebraic diferencials (DAE) dels sistemes mecànics amb restriccions holònomes, cas genèric dins el que s'engloben els sistemes multirobot amb manipulació rígida d'objectes rígids. Aquesta formulació permet obtenir el comportament del sistema a partir de les equacions que descriuen el comportament individual de cadascun dels robots i els conjunt de restriccions cinemàtiques que actuen sobre el sistema. Per aquest tipus de sistemes s'ha caracteritzat les seves singularitats. L'estudi s'ha completat amb el disseny d'una llei de control genèrica per aquest tipus de sistemes que permet regular la posició i les forces d'enllaç del sistema. La llei de control proposada està basada en una extensió dinàmica del sistema inicial y una posterior linealització entrada/sortida a través de realimentació d'estat.

A més de l'estudi teòric s'ha proposat una metodologia per obtenir de forma ràpida i eficient el conjunt d'equacions que s'han d'integrar per observar l'evolució del sistema.

En el cas dels robots amb control de posició, el comportament i control presenten unes característiques totalment diferents. Per aquest tipus d'entorns s'han proposat, dos tipus de controls diferents. El primer, basat en un enfoc de control híbrid (Capítol 7), descomposa el sistema en eixos sobre els que s'aplica control de posició i eixos en els que s'aplica control de força, aquest darrers corresponen a les forces internes. Aquest enfoc és totalment centralitzat, es a dir que hi ha un element central encarregat de controlar el comportament del sistema. Com a principal aportació dins aquesta línia, s'ha proposat una metodologia per identificar el comportament de les forces internes que actuen sobre el sistema.

En contrapartida al control híbrid s'ha desenvolupat un esquema de control basat en la imposició d'un comportament d'impedància en cadascun dels robots (Capítol 8). Aquest plantejament és totalment desacoblat, és a dir cadascun dels robots implementa el seu comportament sense necessitat d'un intercanvi d'informació. La principal aportació del mètode és que el comportament d'impedància s'ha plantejat sobre $SE(3)$, el que fa que els comportaments obtinguts estiguin d'acord amb la topologia de l'espai de treball.

Com es pot observar en els treballs experimentals presentats, el control híbrid permet obtenir millors prestacions que els obtinguts amb el control d'impedància; en contrapartida el nivell de coneixement que s'ha de tenir del sistema és més elevat. Per tant la elecció d'un mètode o l'altre dependrà de les característiques concretes de l'entorn de treball en que s'hagi d'aplicar.

9.2 Treballs Futurs

Els treballs desenvolupats durant aquesta tesi han obert diferents línies de recerca les principals de les quals es descriuen a continuació.

9.2.1 Cinemàtica

Donat que l'espai de treball del sistema multirobot és en general molt més petit que el dels robots que el formen i que en la majoria de casos els espais de treball d'aquests sistemes estan lliures d'obstacles, la planificació de trajectòries ha d'anar enfocada a l'optimització de les mateixes d'acord amb certs criteris. En concret, un d'aquests criteris és la maximització de la mesura de manipulabilitat proposada.

Dins l'apartat de l'espai de treball s'han obert diferents camps que poden donar lloc a futures tasques de recerca, que es poden agrupar en els següents punts:

- Algorismes genèrics per la obtenció de la convolució de figures geomètriques genèriques
La construcció de la figura realitzable de figures geomètriques tridimensionals no convexes, és en general un problema complex, i per tant, l'extensió del mètode a altres famílies de robots passa per l'obtenció d'algorismes genèrics de càlcul de la convolució de figures geomètriques genèriques.

- Representacions del volum que redueixin el procés de càlcul de la intersecció
Durant el càlcul de l'espai de treball, el càlcul de la intersecció de les figures geomètriques, en el cas 3D, s'ha realitzat a través d'aplicar seccions 2D, calcular sobre elles la intersecció i reconstruir posteriorment la figura 3D a partir de les diferents seccions. Aquest procés és lent i dificulta l'aplicació de processos d'optimització automàtics. Per tant, és necessari millorar aquest càlcul per tal d'aplicar mètodes similars als proposats en el cas 2D.

Algunes de les idees en que s'està treballant és l'ús de representacions aproximades que permetin calcular de forma ràpida les característiques de la intersecció. En aquesta línia pel cas dels robots tipus PUMA s'està treballant en la aproximació del volum individual i de la figura de la destra per un conjunt d'esferes disjunctes (Figura 9.1). Aquesta aproximació permet calcular ràpidament el volum i la forma de la intersecció, però en contrapartida, és difícil trobar un conjunt d'esferes que corresponguin a una aproximació òptima. Cal tenir en compte també que aquesta representació és adequada per robot tipus PUMA, ja que idealment el seu espai de treball és pràcticament una esfera, però altres tipus de robots poden no ésser representables adequadament amb aquest tipus d'aproximació.

Una metodologia més genèrica és la representació de les figures geomètriques a partir de les seves fronteres que, en general, seran superfícies i corbes a l'espai. Posteriorment serà possible calcular la frontera de la intersecció a partir del càlcul de la intersecció de les diferents superfícies i corbes, però això pot ésser computacionalment costós per superfícies i corbes genèriques.

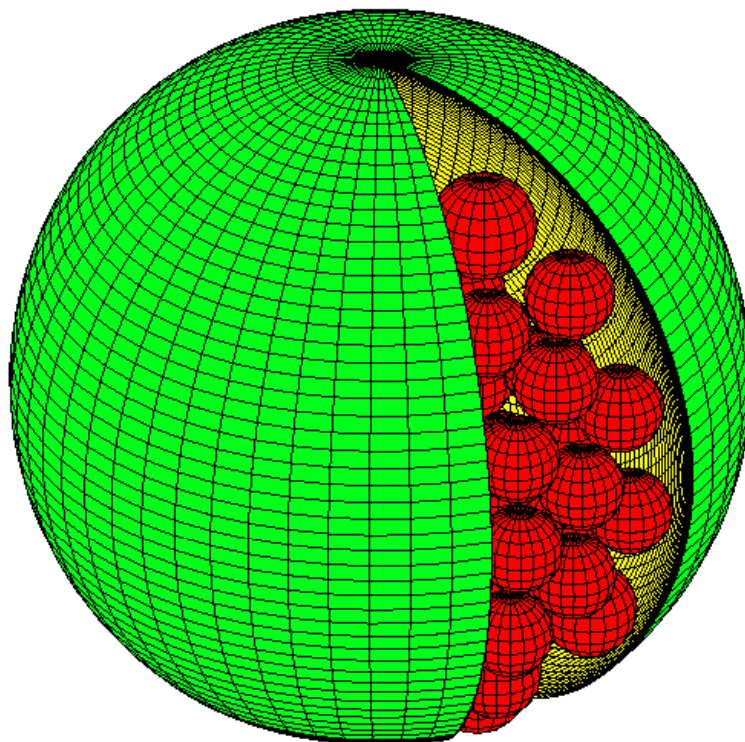


Figura 9.1: Exemple d'aproximació per esferes de l'espai de treball del RX-90.

- Fusió en un sol pas el procés d'anàlisi

En l'actualitat el càlcul de l'espai de treball es realitza en dos passos, un primer corresponent a la anàlisi de la equació de posició i un segon corresponent a la anàlisi de la equació de rotació. El segon pas és computacionalment costós ja que fa necessària la avaluació de les possibles orientacions en cadascun dels punts del sistema. Per aquest motiu és necessari continuar treballant en aquesta direcció per tal d'intentar fusionar en un sol pas l'estudi de l'espai de treball, o reduir el número de punts en els que s'ha d'estudiar l'equació d'orientació per tal d'obtenir la informació necessària per determinar quins dels punts obtinguts en el primer pas pertanyen realment a l'espai de treball.

- Introducció de les mesures de manipulabilitat dins el procés de disseny

En l'estratègia proposada les cel·les es dissenyen únicament en funció de l'espai de treball. No obstant, en alguns casos pot ésser de gran interès tenir en compte les mesures de manipulabilitat, ja que, a vegades espais de treball grans poden presentar prestacions cinemàtiques inadequades pel tipus de tasca que s'ha de realitzar.



Figura 9.2: Interacció home màquina.

9.2.2 Dinàmica i Control

Una de les qüestions que ha quedat oberta en aquesta part del treball per manca d'una plataforma d'experimentació adequada, ha estat la validació experimental dels controladors dissenyats a través de la formulació dels sistemes multirobot en forma de DAEs, aquest tipus de control pot oferir millors prestacions que els controladors desenvolupats pels sistemes multirobot on els robots presenten control de posició.

Dins l'apartat d'aplicació del control híbrid, el que dificulta més l'aplicació d'aquest esquema és la necessitat de disposar de models dels comportament de les peces manipulades. Per això una possibilitat que s'està avaluant és l'ús de tècniques de control adaptatiu per tal de poder treballar amb un rang de peces més elevat, incloent peces flexibles.

Finalment, el camp en que s'han obert més línies de treball que encara resten obertes, és el referent a l'ús del comportament d'impedància. Les principals qüestions en les que es pretén treballar són:

- Estudi del sistema no lineal

En el capítol 8 s'ha emprat un model linealitzat del comportament del sistema per determinar l'estabilitat del sistema complet. Aquest estudi ha permès trobar llindars aproximats pels paràmetres del sistema.

L'estudi del sistema no lineal i la obtenció d'expressions analítiques fàcils d'avaluar per la determinació dels punts d'equilibri en el cas de la manipulació multirobot amb grans desplaçaments, permetrà entendre millor el comportament del sistema, a més de facilitar el procés d'ajusts dels seus paràmetres.

- Estudi de la rigidesa del sistema

La experimentació ha mostrat que la rigidesa que veuen els robots durant la manipulació conjunta és una combinació, entre d'altres, de la rigidesa del l'objecte, el joc mecànic de les pinces, i la rigidesa del sensor. Aquest fet fa que sigui difícil de trobar un conjunt de paràmetres que representin la rigidesa del sistema de forma independent de l'amplitud de les forces d'interacció i de la configuració. Per aquest motiu és necessari, millorar els models emprats.

Una qüestió alternativa és la introducció d'algun element d'acomodació dins el sistema (similar a un RCC), ja que, si aquest element és el dominant sobre la resta, serà fàcil de modelar i regular el comportament del sistema.

- Desenvolupament de tècniques d'implementació diferents

En la proposta actual el procés d'implementació de la impedància no contempla l'existència de la dinàmica del sensor ni de dinàmica en el robot, i l'efecte d'aquests elements s'avalua a posteriori a través de l'estudi d'estabilitat del sistema complet. Desafortunadament aquests elements redueixen notablement les prestacions del sistema. En l'actualitat s'està treballant per tal de buscar un nou enfoc que permeti compensar l'efecte d'aquests elements no modelats.

Una qüestió addicional és la búsqueda d'una parametrització adequada per l'especificació i integració de les equacions del sistema, ja que els angles d'Euler presenten el problema de l'existència de singularitats. Desafortunadament les parametritzacions, com els quaternions, que no presenten singularitats contenen restriccions algebraiques entre els paràmetres, i aquestes restriccions poden deixar de complir-se sota l'efecte de la quantificació i la discretització.

En la pràctica els sensors de força permeten una freqüència de mostreig bastant més elevada que la de les consignes que s'envien al robot. Per aquest motiu seria interessant estudiar si la introducció d'aquestes mostres intermitges poder millorar les prestacions del sistema.

- Treball amb objectes flexibles

Durant el desenvolupament de la tesi s'ha treballat amb objectes que es poden considerar com a rígids, però el comportament d'impedància es pot emprar per treballar amb objectes flexibles. Per aquest tipus d'objectes s'haurà de replantejar el concepte de força interna i s'haurà de treballar amb models de l'objecte d'ordre superior.

- Interactivitat home-màquina

Una de les tendències actuals dins la robòtica és el desenvolupament de sistemes que puguin interactuar amb l'ésser humà. El control d'impedància és especialment indicat per aquest tipus de sistema, ja que és possible fixar la rigidesa global a partir de les rigideses individuals. Aquesta rigidesa és un dels factors importants per definir el comportament que ha de tenir el sistema en front a forces d'interacció (Figura 9.2).

Part V

Apèndixs

Apèndix A

Cinemàtica dels robots

Aquest apèndix presenta els principals conceptes de la cinemàtica dels robots emprats en la tesi. Per formalitzar els diferents conceptes s'utilitza una nomenclatura basada en l'ús de la geometria diferencial i s'ha procurat en la mesura del possible lligar aquesta nomenclatura amb la tradicional dins la bibliografia sobre robòtica.

A.1 Introducció

La cinemàtica (\mathcal{K}_{in}) d'un robot descriu la relació entre l'estat de cadascun dels graus de llibertat del robot (espai de configuracions \mathcal{C}) i el de l'element terminal del robot (o qualsevol altre element de la cadena cinemàtica) en l'espai de treball (\mathcal{O}) [Figura A.1].

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{K}_{in}} \\ \xleftarrow{\mathcal{K}_{in}^{-1}} \end{array} \mathcal{O}$$

En general, l'espai de configuracions es pot expressar com el producte cartesià dels rangs de treball de cadascuna de les articulacions del robot, és a dir:

$$\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n_{tr}} \times \mathcal{T}^{n_{rot}}$$

on $\mathcal{T}^k = \underbrace{\mathcal{S}^1 \times \dots \times \mathcal{S}^1}_k$ (éssent \mathcal{S}^i l'esfera de dimensió i), n_{tr} és el número d'articulacions lineals de la cadena i n_{rot} és el número d'articulacions de rotació del robot, éssent $n = n_{tr} + n_{rot}$ el nombre total de graus de llibertat de la cadena cinemàtica. Donat que les articulacions lineals tenen un rang de treball finit i que les de rotació poden ésser des d'una fracció de volta fins multivolta, l'espai de configuracions real pot representar-se com un subconjunt de \mathbb{R}^n . Quan $\dim \{\mathcal{C}\} < \dim \{\mathcal{O}\}$ es diu que el mecanisme és subactuat i en el cas en que $\dim \{\mathcal{C}\} > \dim \{\mathcal{O}\}$ es diu que el mecanisme és sobreactuat o redundant (Figura A.2). Habitualment denotarem θ els elements de \mathcal{C} i \mathbf{x} els elements de \mathcal{O} .

L'espai de treball representa la situació de l'element terminal dins el món físic, posició que es pot considerar com un element de $SE(3)$. Habitualment, els elements de $SE(3)$ es representen

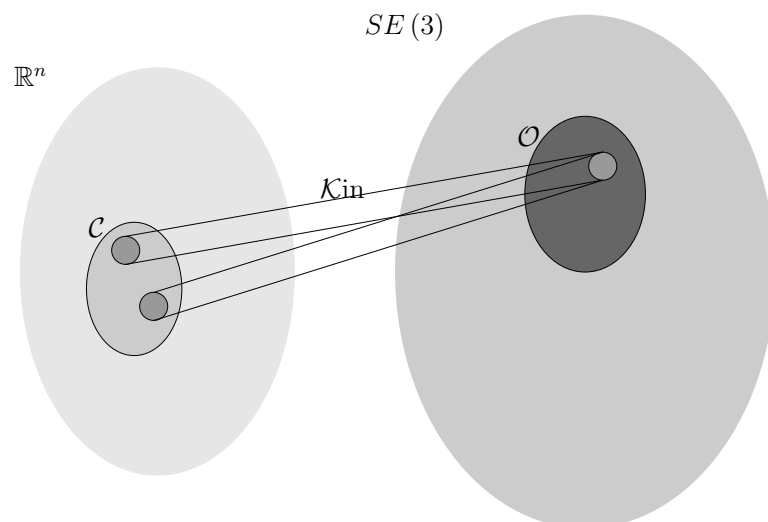


Figura A.1: Cinemàtica Directa.

amb matrius homogènies de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & 1 \end{bmatrix}$$

on \mathbf{R} és una matriu ortonormal de 3×3 (que es pot considerar un element de $SO(3)$) i $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$.

En aquest treball, els símbols $\mathbf{x}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ representen diferents elements genèrics de $SE(3)$.

A.2 Cinemàtica Directa

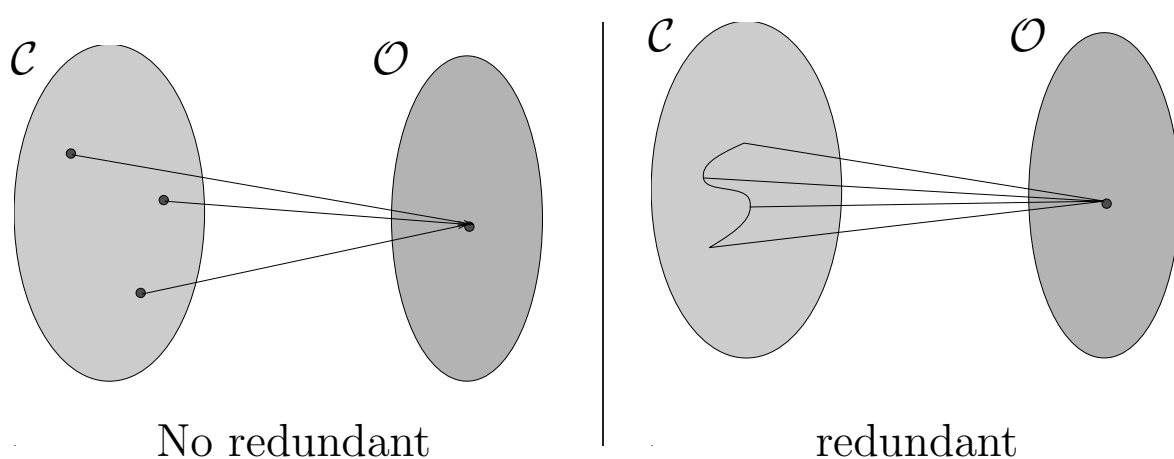


Figura A.2: Diferents tipus de cinemàtiques.

S'anomena cinemàtica directa a la aplicació, K_{in} , entre \mathcal{C} i \mathcal{O} . En els cas aquí tractat és una

aplicació no lineal contínua i diferenciable entre dues varietats diferenciables:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{in} : \mathbb{R}^n &\rightarrow SE(3) \\ \boldsymbol{\theta} &\rightarrow \mathbf{g}\end{aligned}$$

normalment aquesta aplicació no és injectiva ja que un element de $SE(3)$ pot tenir varies imatges sobre \mathbb{R}^n .

La obtenció d'una expressió explícita de \mathcal{K}_{in} a partir la descripció física d'una cadena cinemàtica oberta i seriada, objecte d'aquest apartat, és un tema ben conegut [Craig, 1986] [Murray et al., 1994], encara que és un tema d'estudi pel cas de mecanismes cinemàtics genèrics [Merlet, 2000].

La formulació de la cinemàtica basada en el producte d'exponencials de matrius (formalisme POE) [Brockett, 1983] [Murray et al., 1994] presenta una interpretació geomètrica més clara que l'habitual formulació de *Denavit-Hartenberg* en forma de producte de matrius homogènies, i permet tractar restriccions cinemàtiques més fàcilment [Park and Bobrow, 1995]. Per aquest motiu, juntament amb la seva major eficiència computacional [Park and Pack, 1991] en aquest treball s'utilitza aquest formalisme, que es pot aplicar seguint dos enfocos diferents, un primer anomenat de coordenades de món:

$$\mathbf{f}^s(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{M}e^{\mathbf{A}_1\boldsymbol{\theta}_1} \dots e^{\mathbf{A}_6\boldsymbol{\theta}_6}$$

i un segon anomenat de coordenades de l'espai:

$$\mathbf{f}^b(\boldsymbol{\theta}) = e^{\mathbf{B}_1\boldsymbol{\theta}_1} \dots e^{\mathbf{B}_6\boldsymbol{\theta}_6}\mathbf{N}$$

on $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i \in se(3)$ són eixos (*screws*) que descriuen el moviment de cadascun dels graus de llibertat de la cadena cinemàtica, i $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in SE(3)$ corresponen a la situació de l'element terminal quan cadascun dels graus de llibertat està en el seu origen.

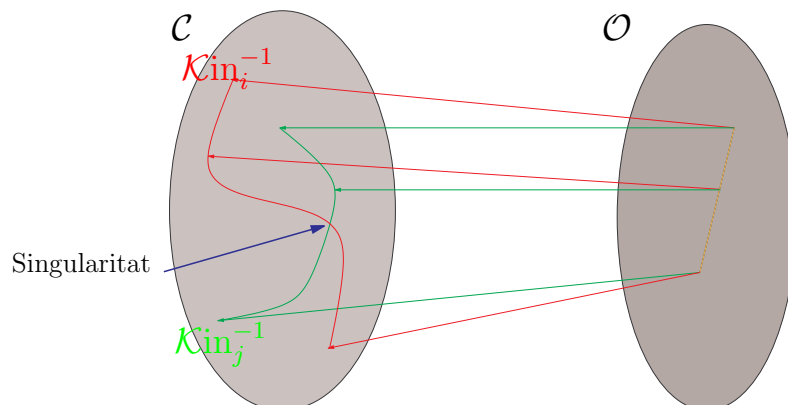


Figura A.3: Relació entre les diferents solucions de la cinemàtica inversa.

A.3 Cinemàtica Inversa

A.3.1 Definició

La cinemàtica inversa, permet determinar la configuració que ha d'adoptar el robot per tal que el seu element terminal es situï en un punt de \mathcal{O} determinat. Les característiques d'aquesta relació depenen de les dimensions relatives de \mathcal{O} i \mathcal{C} , i de l'estructura de la cadena cinemàtica. En general, es tracta d'una relació 1 a p ; es a dir:

$$\exists \boldsymbol{\theta}^i \in \mathcal{C}, i = 1 \cdots p \mid \mathcal{K}_{\text{in}}(\boldsymbol{\theta}^i) = \mathcal{K}_{\text{in}}(\boldsymbol{\theta}^j) \quad i, j = 1 \cdots p$$

i es defineix:

$$\mathcal{N}_{\mathbf{x}} \triangleq \{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C} \mid \mathcal{K}_{\text{in}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x} \in \mathcal{O}\}$$

En el cas en que $\dim(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{O})$, habitualment $\mathcal{N}_{\mathbf{x}}$ està compost per un conjunt de punt aïllats. El número de punts depèn de les característiques de \mathcal{K}_{in} i el rang de treball de les articulacions. En el cas en que $\dim(\mathcal{C}) > \dim(\mathcal{O})$, $\mathcal{N}_{\mathbf{x}}$ forma una subvarietat de dimensió $\dim(\mathcal{C}) - \dim(\mathcal{O})$, i en aquest cas es diu que el manipulador és redundat [Figura A.2].

En el cas de robots redundants solen existir infinits punts de l'espai de configuracions que generen el mateix punt de l'espai de treball i aquest fet s'aprofita per optimitzar certs criteris predeterminats [Nakamura, 1991]. Això fa que aquest tipus de robots siguin molt interessants en nombroses aplicacions, encara que resultin més complexes des del punt de vista mecànic.

Generalment resulta complex obtenir expressions analítiques per la cinemàtica inversa. Per aquest motiu és freqüent utilitzar solucions de caràcter numèric [Parker et al., 1989] [Tsai and Morgan, 1985], encara que existeixen un conjunt d'estructures cinemàtiques per les que es poden obtenir solucions analítiques a través de mètodes geomètrics o analítics [Pieper, 1968]. Aquestes estructures són molt freqüents en els manipuladors industrials. En els casos en que és possible obtenir solucions explícites es disposa d'un conjunt de p funcions no lineals contínues i diferenciables de la forma:

$$\mathcal{K}_{\text{in}_k}^{-1} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{C} \quad (k = 1..p)$$

Una característica important d'aquestes solucions, és que entre elles només tenen en comú configuracions singulars [Uchiyama, 1979] [Murray et al., 1994]. Es a dir que una vegada definit un camí en \mathcal{O} i seleccionada una de les possibles solucions, no és possible canviar de solució durant el moviment, excepte si es passa per una configuració singular [Figura A.3].

A.3.2 Partició de l'Espai de Configuracions

Si s'agrupen en un conjunt \mathcal{C}_k tots els elements de \mathcal{C} que són imatge de \mathcal{O} a través de la aplicació \mathcal{K}_{in}

$$\mathcal{C}_k = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathcal{O} \mid \mathcal{K}_{\text{in}_k}^{-1}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}\}$$

s'obté una partició de \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_p$$

Si s'anomena \mathcal{C}_{sin} el conjunt de configuracions singulars, es pot verificar que:

$$\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \in \mathcal{C}_{sin}$$

En general les configuracions singulars formen subvarietats diferenciables de \mathcal{C} [Pai and Leu, 1992].

En la pràctica és convenient seleccionar una partició de l'espai de treball en funció de les necessitats de la tasca a realitzar. En ocasions això resultat complex ja que les característiques de cadascuna de les particions poden ésser molt diferents degut als límits mecànics del sistema o als obstacles de l'entorn [Borrel and Liegeois, 1986] [Wenger and Chedmail, 1991].

A.4 Estudi de Velocitats

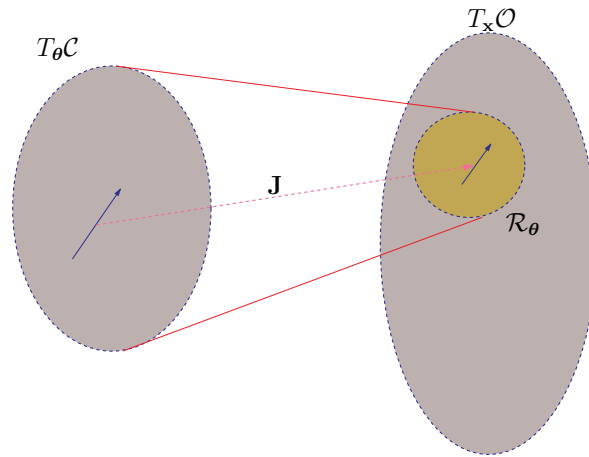


Figura A.4: Aplicació definida per la matriu de Jacobi.

El conjunt de totes les derivades en un punt $\theta \in \mathcal{C}$ constitueix un espai vectorial $T_\theta \mathcal{C}$, que rep el nom d'espai tangent. Una cosa similar passa en un punt $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$, amb $T_{\mathbf{x}} \mathcal{O}$. Una aplicació continua i diferenciable entre \mathcal{C} i \mathcal{O} , infereix una relació entre els espais tangents en $\theta \in \mathcal{C}$ i $\mathcal{K}in(\theta) \in \mathcal{O}$, que es denomina aplicació tangent, $\mathcal{K}in_*$:

$$\begin{array}{ccc} T_\theta \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{K}in_*} & T_{\mathcal{K}in(\theta)} \mathcal{O} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \theta \in \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{K}in} & \mathcal{K}in(\theta) \in \mathcal{O} \end{array}$$

La unió de tots els espais tangents constitueix el fibrat tangent, $T\mathcal{C} = \bigcup_{\theta \in \mathcal{C}} T_\theta \mathcal{C}$ i $T\mathcal{O} = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{O}} T_{\mathbf{x}} \mathcal{O}$. Ambdós fibrats formen una varietat diferenciable de dimensió doble a l'inicial i

poden relacionar-se a través de la aplicació tangent $T\mathcal{K}\text{in}$:

$$\begin{array}{ccc} TC & \xrightarrow{T\mathcal{K}\text{in}} & T\mathcal{O} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{K}\text{in}} & \mathcal{O} \end{array}$$

Aquesta aplicació no és res més que la matriu de Jacobi que, com és ben conegut, en robòtica relaciona les velocitats en \mathcal{C} i les velocitats en \mathcal{O} . Així es pot plantejar la formulació habitual:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.1})$$

on \mathbf{J} és la matriu de Jacobi de $\mathcal{K}\text{in}$.

Un altra característica d'aquesta aplicació és que indueix un espai vectorial sobre $T_{\mathbf{x}}\mathcal{O}$, que s'anomenarà $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}}$. Aquest subespai de $T_{\mathbf{x}}\mathcal{O}$ representa el conjunt de velocitats realitzables en $\mathcal{K}\text{in}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathcal{O}$. De manera similar es defineix el complementari de $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}}$, $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}}^{\perp}$, com el conjunt de velocitats de $T_{\mathbf{x}}\mathcal{O}$ no realitzables. El rang de $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ és igual a la dimensió de $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}}$. Per tant:

$$\dim \{\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}}\} = \text{Rank} \{\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})\} \leq \min \{n, \dim \{\mathcal{O}\}\}$$

on n és el número d'articulacions del robot. El nucli de $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathcal{N}\{\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})\}$, rep el nom d'espai redundant (*Redundant Space*) \mathcal{RS} i la seva dimensió és el grau de redundància (*Degree Of Redundancy*) \mathcal{DOR} . Aleshores es compleix:

$$\dim \{\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}}\} + \dim \{\mathcal{N}\{\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})\}\} = n$$

Com s'ha indicat anteriorment; en aquest treball s'assumeix que $\mathcal{C} \cong \mathbb{R}^6$, per tant $TC \cong T\mathbb{R}^6$ la qual cosa implica que sobre \mathcal{C} són directament aplicable totes les eines del càlcul sobre \mathbb{R}^n . D'altra banda $\mathcal{O} \cong SE(3)$, i donat que $SE(3)$ és un grup de Lie [Sattinger and Weaver, 1993], el seu espai tangent és isomorf a l'espai tangent de $SE(3)$ en la identitat (\mathbf{I}_d). Aquest espai, $se(3)$, és el que forma l'àlgebra de Lie del grup i és a més a més isomorf a \mathbb{R}^6 . És possible relacionar un element de l'espai de tangent $T_{\mathbf{x}}SE(3)$ de $SE(3)$, en el punt \mathbf{x} amb un element de $T_{\mathbf{I}_d}SE(3) = se(3)$ de dues maneres, per l'esquerra o per la dreta, és a dir:

$$L_{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} \triangleq \mathbf{x}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathfrak{r}, \mid \dot{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}SE(3), \mathfrak{r} \in se(3)$$

on $L_{\mathbf{g}}$ nota la transformació per l'esquerra. Els elements obtinguts a partir d'aplicar la transformació per l'esquerra reben el nom de velocitat de l'objecte (*body velocity*) $\mathbf{V}^b = \mathbf{x}^{-1}\dot{\mathbf{x}}$, i corresponen a la velocitat del sistema coordinat de l'objecte expressada en la orientació del sistema coordinat de l'objecte. L'altra possibilitat és aplicar la transformació per la dreta,

$$R_{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} \triangleq \dot{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} = \mathfrak{r}, \mid \dot{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}SE(3), \mathfrak{r} \in se(3)$$

on $R_{\mathbf{g}}$ nota la transformació per la dreta. Aquests reben el nom de velocitat espacial (*spatial velocity*), $\mathbf{V}^s = \dot{\mathbf{x}}\mathbf{x}^{-1}$, i corresponen a la velocitat que tindria un punt solidari a l'objecte i situat

en l'origen del sistema coordinat de referència. En aquest treball s'utilitzarà la transformació per l'esquerra.

En la formulació de la cinemàtica a través de productes d'exponencials de matrius (POE), la velocitat de l'element terminal s'expressa [Brockett, 1983]:

$$\mathbf{V}^b = [\mathbf{g}^b]^{-1} \dot{\mathbf{g}}^b = \mathbf{B}_6 \dot{\boldsymbol{\theta}}_6 + \cdots + \left(\mathbf{Ad}_{(e^{(-\mathbf{B}_1 \boldsymbol{\theta}_1)} \dots e^{(-\mathbf{B}_5 \boldsymbol{\theta}_5)})} \mathbf{B}_1 \right) \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{V}^s = \dot{\mathbf{g}}^s [\mathbf{g}^s]^{-1} = \mathbf{A}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \cdots + \left(\mathbf{Ad}_{(e^{(\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\theta}_1)} \dots e^{(\mathbf{A}_5 \boldsymbol{\theta}_5)})} \mathbf{A}_6 \right) \dot{\boldsymbol{\theta}}_6 \quad (\text{A.3})$$

on \mathbf{Ad} representa l'operador adjunt. Aquest, permet expressar les velocitats en un altre sistema de referència solidari al primer. La relació entre ambdós sistemes coordinats es pot escriure en forma d'un element \mathbf{H} de $SE(3)$. En aquest cas l'operador \mathbf{Ad} presentat en forma matricial pren la forma:

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

on \mathbf{R} correspon a la component de rotació de \mathbf{H} , i $\hat{\mathbf{p}}$ correspon a la component de posició expressat en forma de matriu antisimètrica. En les expressions anteriors ((A.2)-(A.3)), cadascun dels elements que multiplica a un $\boldsymbol{\theta}_i$ pertany a $se(3)$, i per tant la velocitat total de l'element terminal és la combinació de les velocitats generades per cadascuna de les articulacions, tal com ja s'havia introduït anteriorment. Donat que $se(3)$ és isomorf amb \mathbb{R}^6 aquests elements es poden expressar en forma de vector columna, i si finalment tots s'uneixen en forma de matriu s'obté la matriu de Jacobi de la cinemàtica.

A.4.1 Singularitats

Les singularitats són punts $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}$, en els que el rang de la aplicació tangent no és màxim, es a dir:

$$\text{Rank} \{ \mathcal{K}_{in_*} \} < \min \{ n, \dim \{ \mathcal{O} \} \}$$

En les configuracions singulars hi ha velocitats en \mathcal{O} que no són realitzables. Degut a aquesta circumstància, aquestes configuracions són problemàtiques i per tant es procura evitar-les [Kieffer and Cahill, 1995]. Des d'un punt de vista cinemàtic aquestes configuracions estan perfectament caracteritzades respecte a la topologia dels elements articulats [Uchiyama, 1979] [Murray et al., 1994].

Amb la interpretació, introduïda en l'apartat anterior, les singularitats són configuracions en les que alguns dels vectors columna que formen la matriu de Jacobi s'al·lineen, es a dir la contribució de varis dels graus de llibertat a la velocitat és en la mateixa direcció. Des d'un punt de vista de la aplicació lineal que indueix el Jacobià, les singularitats són punts en els que es produeix un canvi de signe de la aplicació lineal. Pel cas en que el Jacobià sigui quadrat, les configuracions singulars són punts on es produeix un canvi de signe del $\det \{ \mathbf{J}(\mathbf{q}) \}$. El signe del determinant representa el canvi de la orientació del sistema coordinat de la aplicació. Es a dir si el signe del determinant és positiu la orientació no canvia i canvia en el cas d'ésser negatiu.

A.5 Estudi de les Forces

El conjunt de les funcions lineals $\omega_{\theta} : T_{\theta}\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ rep el nom d'espai cotangent de \mathcal{C} , i es representa per $T_{\theta}^*\mathcal{C}$.

L'espai cotangent és un espai vectorial de la mateixa dimensió que $T_{\theta}\mathcal{C}$ i els seus elements reben el nom de 1-formes i s'apliquen sobre els elements del tangent (derivades, camps vectorials, ...) generant una funció escalar. L'aplicació d'una 1-forma sobre un element de l'espai tangent es nota $\langle ; \rangle$.

Aquestes definicions són aplicables també a \mathcal{O} , on les 1-formes (μ_x) constitueixen l'espai cotangent $T_x^*\mathcal{O}$ a \mathcal{O} .

Tal com s'ha introduït anteriorment, els elements dels espais tangent es relacionen amb les velocitats dels elements de la varietat. De manera dual els elements de l'espai cotangent es relacionen amb les forces que actuen sobre la varietat. Així $\tau \in T_{\theta}^*\mathcal{C}$ corresponen als parells aplicats a les articulacions del robot, mentre que $\mathbf{f} \in T_x^*\mathcal{O}$ corresponen a les forces realitzades per l'element terminal del robot.

Com passava en el cas de l'espai tangent, quan existeix una aplicació diferenciable \mathcal{K}_{in} entre dues varietats diferenciables (\mathcal{C} i \mathcal{O}) és possible establir una aplicació \mathcal{K}_{in}^* entre els elements de l'espai cotangent de les dues varietats diferenciables:

$$\begin{array}{ccc} T_{\theta}^*\mathcal{C} & \xleftarrow{\mathcal{K}_{in}^*} & T_{\mathcal{K}_{in}(\theta)}^*\mathcal{O} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \theta \in \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{K}_{in}} & \mathcal{K}_{in}(\theta) \in \mathcal{O} \end{array}$$

Aquesta aplicació $\mathcal{K}_{in}^* : T_{\mathcal{K}_{in}(\theta)}^*\mathcal{O} \rightarrow T_{\theta}^*\mathcal{C}$, relaciona els elements de l'espai cotangent de la varietat destí amb els elements de l'espai cotangent de la varietat origen. La aplicació cotangent es defineix com:

$$\langle \mathcal{K}_{in}^* \mu_{\mathcal{K}_{in}(\theta)}; X_{\theta} \rangle = \langle \mu_{\mathcal{K}_{in}(\theta)}; \mathcal{K}_{in*} X_{\theta} \rangle$$

on $\mu_{\mathcal{K}_{in}(\theta)} \in T_{\mathcal{K}_{in}(\theta)}^*\mathcal{O}$ i $X_{\theta} \in T_{\theta}\mathcal{C}$.

La unió de tots els espais cotangents constitueix el fibrat cotangent, així: $T^*\mathcal{C} = \bigcup_{\theta \in \mathcal{C}} T_{\theta}^*\mathcal{C}$ i $T^*\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} T_x^*\mathcal{O}$. Ambdós fibrats formen una varietat diferenciable de dimensió doble a l'inicial i poden relacionar-se a través de la aplicació cotangent \mathcal{K}_{in}^* :

$$\begin{array}{ccc} T^*\mathcal{C} & \xleftarrow{\mathcal{K}_{in}^*} & T^*\mathcal{O} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{K}_{in}} & \mathcal{O} \end{array}$$

Al igual que en el cas de l'espai tangent i fent el paral·lisme amb la formulació clàssica de la

cinemàtica, l'expressió habitual de l'aplicació cotangent $\mathcal{K}in^*$, és:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{f}$$

on $\boldsymbol{\tau}$ representa el parell sobre les articulacions, \mathbf{f} és la força aplicada o realitzada sobre l'element terminal del robot.

Com es ben conegut dins la dinàmica el producte escalar de la velocitat instantània per la força aplicada equival al treball instantani realitzat. Seguint aquest fet l'aplicació d'una 1-forma sobre un element del tangent s'interpreta en termes de treball realitzat.

A.6 Mètrica

A.6.1 Definició

La mètrica és la entitat que permet realitzar la mesura de distàncies. Donada una corba $\mathbf{r}(t)$ sobre \mathbb{R}^n , la longitud de la corba es calcula de la forma:

$$l = \int_a^b \langle \dot{\mathbf{r}}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle_{\mathbf{r}(t)}^{\frac{1}{2}} dt$$

on $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{r}(t)}$ és la mètrica que actua en $T_{\mathbf{r}(t)}\mathbb{R}^n$. Habitualment aquesta mètrica és el producte escalar tradicional.

Una mètrica Riemanniana (Ψ) sobre una varietat diferencial \mathbf{M} :

$$\Psi_y : T_y\mathcal{M} \times T_y\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

és una assignació continua i diferenciable d'un producte escalar a l'espai tangent de cada punt $y \in \mathcal{M}$ de la varietat diferencial. A més d'ésser continua hi diferenciable, Ψ ha d'ésser bilineal, simètrica, i definida positiva [Boothby, 1986].

A.6.2 Mètrica $SE(3)$

Donat que l'espai de treball $\mathcal{O} \in SE(3)$, serà necessari determinar quina és la mètrica de $SE(3)$. Com s'ha vist anteriorment a cada element de $T_{\mathbf{x}}SE(3)$ se li pot associar un element de $se(3)$ que és isomorf a \mathbb{R}^6 , per tant serà possible obtenir una mètrica sobre $SE(3)$ a partir del producte escalar definit sobre \mathbb{R}^6 . Donat que hi ha dues maneres s'associar elements de $T_{\mathbf{x}}SE(3)$ a $se(3)$, hi haurà dos tipus de mètrica, el de les obtingudes a través de transformacions per la dreta i el de les obtingudes a través de transformacions per l'esquerra.

Les mètriques obtingudes per a través de transformacions per l'esquerra presenten la propietat de que són invariants en front a canvis en el sistema de referència de món, mentre que les obtingudes per l'esquerra són invariants enfront al canvi en el sistema de referència sobre l'objecte. Desafortunadament no hi ha cap mètrica sobre $SE(3)$ que sigui bi-invariant, es

a dir invariant en front a canvis en el sistema de referència de món i en front a a canvis en el sistema de referència sobre l'objecte.

Les mètriques invariants en front a canvis en el sistema de referència de món sobre $SE(3)$ presenten una representació matricial de la forma [Park, 1995]:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

on $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ són factors de ponderació. Aquesta mètrica es defineix sobre una base $\{L_i\}$ de $se(3)$. Cadascun dels elements que formen la base es pot relacionar amb un element de $T_{\mathbf{x}}SE(3)$, a través de la aplicació de la transformació per l'esquerra. Així s'obté un conjunt $\hat{L}_i = \mathbf{x}L_i \in T_{\mathbf{x}}SE(3)$ que forma una base de $T_{\mathbf{x}}SE(3)$. Finalment és possible aplicar la mètrica sobre $T_{\mathbf{x}}SE(3)$, tenint en compte que :

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_i, \hat{L}_j \rangle_{\mathbf{x}} &= \langle L_i, L_j \rangle_{\mathbf{I}_d} = 0 \quad \forall i \neq j, \\ \langle \hat{L}_i, \hat{L}_i \rangle_{\mathbf{x}} &= \langle L_i, L_i \rangle_{\mathbf{I}_d} = \alpha \quad i = 1..3 \\ \langle \hat{L}_i, \hat{L}_i \rangle_{\mathbf{x}} &= \langle L_i, L_i \rangle_{\mathbf{I}_d} = \beta \quad i = 4..6 \end{aligned}$$

on $\langle, \rangle_{\mathbf{x}}$ nota la aplicació de la mètrica sobre dos elements de l'espai tangent en el punt \mathbf{x} .

A.6.3 Mètrica \mathcal{C}

A.6.3.1 Mètrica natural

En aquest treball s'ha associat \mathcal{C} amb \mathbb{R}^6 , i per tant s'hereta de forma natural la mètrica existent en \mathbb{R}^6 , que és el producte escalar tradicional. Aquesta mètrica considera que el moviment en cadascun dels graus de llibertat és exactament igual des de el punt de vista del càlcul de distàncies. Tanmateix en alguns casos, pot resultar útil ponderar diferentment els diferents graus de llibertat. Aquesta ponderació dóna lloc a una mètrica de la forma:

$$\Psi_y(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j, \quad \Psi_y(e_j, e_j) = \epsilon_j$$

on Ψ_y representa la mètrica en un punt $y \in \mathcal{C}$; $\{e_j\}$ és una base de $T_y\mathcal{C}$ on e_j està alineat amb el moviment de la articulació j , i finalment ϵ_j correspon al factor de ponderació de la articulació j .

Aquesta mètrica és invariant sobre tot \mathcal{C} .

A.6.3.2 Mètrica induïda

Donat que la aplicació tangent permet obtenir vectors elements de $T_{\mathbf{x}}SE(3)$ a partir dels elements de $T_{\theta}\mathcal{C}$, és possible importar la mètrica de $T_{\mathbf{x}}\mathcal{O}$ cap a $T_{\theta}\mathcal{C}$. D'aquesta manera és possible mesurar la longitud d'una corba en \mathcal{C} a partir de la longitud de la corba en \mathcal{O} associada

a través de la cinemàtica. Així, en el cas de treballar amb robots redundants el moviment en el interior de $\mathcal{N}\{\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})\}$ tindria mesura nul·la.

El procés d'importació s'esquematitza en la següent figura:

$$\Psi_{\boldsymbol{\theta}}(X^1, X^2) \longleftarrow \Psi_{\mathcal{K}_{\text{in}}(\boldsymbol{\theta})}(\mathcal{K}_{\text{in}*}X^1, \mathcal{K}_{\text{in}*}X^2)$$

$$\begin{array}{ccc} T_{\boldsymbol{\theta}}\mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{K}_{\text{in}*}} & T_{\mathcal{K}_{\text{in}}(\boldsymbol{\theta})}\mathcal{O} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{K}_{\text{in}}} & \mathcal{K}_{\text{in}}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathcal{O} \end{array}$$

on $\Psi_{\mathcal{K}_{\text{in}}(\boldsymbol{\theta})}$ representa la mètrica sobre \mathcal{O} que es pretén importar, $X^1, X^2 \in T_{\boldsymbol{\theta}}\mathcal{C}$ són dos elements de l'espai tangent en el punt $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}$, i finalment $\Psi_{\boldsymbol{\theta}}$ correspon a la mètrica sobre \mathcal{C} importada a través de la cinemàtica. Aquesta nova mètrica s'anomenarà mètrica $\Psi_{\boldsymbol{\theta}}$ induïda per \mathcal{K}_{in} .

A.7 Volum

A.7.1 Definició

El concepte de volum, permet estendre el concepte de tamany a les varietats diferencials. Infinitesimalment el volum es pot concebre com el tamany que tindria un paral·lelepípede situat sobre un punt de la varietat on les seves arestes alineades amb la direcció dels vectors d'una base del tangent en aquell punt.

Sobre un punt p d'una varietat \mathcal{M} , aquest concepte, es formalitza com una n -forma antisimètrica (tensor alternant n covariant) de la forma [Boothby, 1986]:

$$\Omega : \underbrace{T_p\mathcal{M} \times \cdots \times T_p\mathcal{M}}_n \rightarrow \mathbb{R}$$

Un cop fixat el volum generat en una base concreta, es possible obtenir el volum que generen els vectors en una altra base de forma unívoca. Així si $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ són dues bases de $T_p\mathcal{M}$, el volum generat per cadascuna d'elles es relaciona a través de l'expressió

$$\Omega(a_1, \dots, a_n) = \det(\Delta)\Omega(b_1, \dots, b_n)$$

on Δ és la matriu de canvi de base, es a dir la matriu que permet expressar en $\{a_i\}$ un vector definit en $\{b_i\}$.

Teorema [Boothby, 1986, pàg. 218] En una varietat Riemaniana amb una mètrica Riemaniana Ψ , fixada una orientació en \mathcal{M} hi ha una única n -forma Ω que té el valor $+1$ en totes les bases ortonormals orientades positivament. Aquesta n -forma s'anomena element de volum de la varietat Riemaniana orientada, i en un punt $p \in \mathcal{M}$ es pot escriure com:

$$\Omega_p(a_i, \dots, a_n) = \sqrt{\det\{\Psi_{ij}\}}a_1^* \wedge \cdots \wedge a_n^*$$

on $\Psi_{ij} = \langle a_i, a_j \rangle_p$, \wedge nota el producte exterior i a_1^* són els elements de l'espai cotangent associats a a_i .

El volum d'un subconjunt $\mathcal{D} \in \mathcal{M}$ es calcula com la suma del volum de tots els paral·lelepípedes situats sobre cadascun dels punts que formen el subconjunt. Matemàticament es pot formalitzar de la forma:

$$\text{vol}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \sqrt{\det \{\Psi_{ij}\}}$$

De forma similar, el volum situat sota una funció

$$f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

avaluada sobre un subconjunt \mathcal{D} de la varietat es calcula de la forma:

$$\text{vol}(f) = \int_{\mathcal{D}} f \cdot \Omega$$

En els casos en que si existeix una aplicació f entre dues varietats diferenciables \mathcal{M} i \mathcal{N} , si en la varietat \mathcal{N} es té un volum Ω , és possible importar-lo sobre \mathcal{M} de forma similar al que es feia amb la mètrica.

A.7.2 Aplicació en robòtica

En el cas dels robots el volum té interès com a mesura de la quantitat d'espai en la que l'element terminal es pot ubicar. Per tant interessarà estudiar quin és el volum sobre $SE(3)$ i la seva relació amb \mathcal{C} a través de la aplicació cinemàtica.

Habitualment, el volum sobre $SE(3)$ en un punt $\mathbf{g} \in SE(3)$ pren la forma:

$$\Omega_{\mathbf{g}} = \sqrt{\det \{\mathbf{Q}\}} \hat{L}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{L}_n = \sqrt{\alpha^3 \beta^3} \hat{L}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{L}_n$$

on \mathbf{Q} correspon a la mètrica Riemaniana introduïda anteriorment, α i β corresponen als seus factors de ponderació i finalment \hat{L}_i són una base de $T_{\mathbf{g}}SE(3)$. Una de les característiques importants del volum sobre $SE(3)$ és que es bi-invariant, es dir el volum es manté constant en front a canvis en el sistema de referència de món o canvis en sistema de l'objecte [Park, 1991].

En una aplicació com la cinemàtica, serà interessant determinar quin volum presenta el conjunt de punts que són assolibles a través d'aplicar la cinemàtica sobre els punts de l'espai de configuracions. Aquest volum es pot calcular de la forma:

$$\text{vol}(\mathcal{O}) = \int_{\mathcal{C}} \Omega$$

on Ω correspon a la mesura de volum importada de \mathcal{O} cap a \mathcal{C} . En el cas aquí abordat en que $\dim \{\mathcal{C}\} = \dim \{\mathcal{O}\}$, i suposant que es treballa sobre $SE(3)$, la expressió anterior pren la forma [Park and Brockett, 1994, pàg. 10]:

$$\text{vol}(\mathcal{O}) = \frac{1}{\text{deg}(\mathcal{K}_{\text{in}})} \int_{\mathcal{C}} \sqrt{\alpha^3 \beta^3} \mathcal{K}_{\text{in}}^* \Omega = \sqrt{\alpha^3 \beta^3} \frac{1}{\text{deg}(\mathcal{K}_{\text{in}})} \int_{\mathcal{C}} \det \{\mathcal{K}_{\text{in}*}\} d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_n$$

on α i β són els coeficients de ponderació de la mètrica introduïts anteriorment, i deg correspon al grau de *Brouwer*, que s'associa al número de solucions de la cinemàtica inversa. Si en lloc d'avaluar el volum sobre tot l'espai de configuracions s'avalua en l'interior d'una partició (\mathcal{C}_i) l'expressió anterior es pot reduir a la següent:

$$\text{vol}(\mathcal{O}) = \int_{\text{Im}(\mathcal{K}_{\text{in}})} \Omega = \sqrt{\alpha^3 \beta^3} \int_{\mathcal{C}_i} \det \{\mathcal{K}_{\text{in}_*}\} d\boldsymbol{\theta}_1 \wedge \cdots \wedge d\boldsymbol{\theta}_n$$

Pels casos en que les particions o l'espai de configuracions està definit com un paral·lelepípede de \mathbb{R}^6 , aquestes integrals es poden avaluar de la forma:

$$\int_{\mathcal{C}_i} \det \{\mathcal{K}_{\text{in}_*}\} d\boldsymbol{\theta}_1 \wedge \cdots \wedge d\boldsymbol{\theta}_n = \int_{\boldsymbol{\theta}_1^{\text{ini}}}^{\boldsymbol{\theta}_1^{\text{fi}}} \cdots \int_{\boldsymbol{\theta}_n^{\text{ini}}}^{\boldsymbol{\theta}_n^{\text{fi}}} \det \{\mathcal{K}_{\text{in}_*}\}$$

on $\boldsymbol{\theta}_i^{\text{ini}}$ i $\boldsymbol{\theta}_i^{\text{fi}}$ són els límits del rang de la articulació i . En alguns casos es pot obtenir una expressió analítica del volum generat per la partició o espai de configuracions. Aquesta expressió analítica està en funció del paràmetres del manipulador i s'ha utilitzat per optimitzar el disseny de manipuladors amb la finalitat d'obtenir un espai de treball amb màxim volum [Park, 1991].

A.8 Manipulabilitat

Conceptualment la manipulabilitat és una mesura de l'habilitat per generar moviment i forces en direccions arbitràries. Per tant dóna idea de les prestacions de la cinemàtica, es a dir l'aplicació entre \mathcal{C} i \mathcal{O} . Això, tradicionalment, s'ha fet mitjançant l'estudi del valors singulars de la aplicació tangent en un punt de \mathcal{O} o \mathcal{C} . Inicialment, la manipulabilitat fou definida per Yoshikawa [Yoshikawa, 1984] de la forma:

$$\eta(\boldsymbol{\theta}) = \sqrt{\det \left\{ \mathcal{K}_{\text{in}_*}(\boldsymbol{\theta}) [\mathcal{K}_{\text{in}_*}(\boldsymbol{\theta})]^T \right\}} = \sigma_1^2 \cdots \sigma_n^2$$

on σ_i són els valors singulars de la matriu associada a la aplicació lineal de $\mathcal{K}_{\text{in}_*}$. Aquest valor dóna idea de la relació entre el volum d'un cub unitari en \mathcal{C} , i el cub associat a través de $\mathcal{K}_{\text{in}_*}$ en \mathcal{O} , en el punt avaluat.

Donat que la descomposició en valors singulars (SVD) implica una descomposició en eixos ortonormals tan de l'espai d'entrada com el de sortida, i que σ_i és el guany associat a cadascun dels eixos resultants, aquesta mesura dóna idea dels guany de velocitat entre l'espai de configuracions i l'element terminal. Per exemple, en les configuracions singulars algun dels valors singulars s'anul·la ja que hi ha direccions en les que l'element terminal no es pot moure, i per tant la mesura es fa zero.

Posteriorment a aquesta definició s'han proposat nombroses variacions sobre l'idea inicial [Klein and Blaho, 1987] [Gosselin, 1990]. Aquest tipus de mesures són d'especial interès en el cas de robot redundants ja que és possible trobar la configuració òptima per un punt de \mathcal{O} d'acord amb algun criteri predefinit.

Un altre tipus de mesures són les proposades per Park i Brockett [Park and Brockett, 1994], que caracteritzen de forma global la cinemàtica a través de l'estudi de la distorsió de volum que aquesta implica i que pot expressar-se:

$$D_{\mathcal{K}_{\text{in}}} = \int_{\mathcal{C}} d_{\mathcal{K}_{\text{in}}}(\boldsymbol{\theta}) \Omega_{\mathcal{C}}$$

on d és la distorsió local, que no és altra cosa que la diferència entre la mètrica natural $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\theta}}$ de \mathcal{C} , en un punt $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}$ i la mètrica $\mathcal{K}_{\text{in}}^* \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\theta}}$ induïda per \mathcal{K}_{in} de \mathcal{O} cap a \mathcal{C} , en aquest mateix punt. Aquest concepte es formalitza de la forma:

$$d_{\mathcal{K}_{\text{in}}}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{M}_{\boldsymbol{\theta}}]^{-1} (\mathcal{K}_{\text{in}}^* \mathbf{Q})_{\boldsymbol{\theta}}$$

aquesta mesura global es aplicable en el disseny de mecanismes [Park, 1991].

A.9 Espai de treball

L'espai de treball d'un manipulador \mathcal{W} es defineix com el conjunt d'elements de \mathcal{O} que pot assolir l'element terminal. Es a dir :

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{O} \mid \exists \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C} \mid \mathcal{K}_{\text{in}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}\} \subset \mathcal{O}$$

Habitualment, l'estudi i caracterització de l'espai de treball es realitza sobre els següents conjunts de punts [Gupta, 1997]:

- Espai Realitzable (*Reachable Workspace, Maximal Workspace*):

L'Espai Realitzable és la projecció de l'espai de treball sobre \mathbb{R}^3 , o en altres paraules el conjunt de posicions que es poden assolir en alguna orientació. Formalment es pot expressar:

$$\mathcal{W}_R = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C} \mid \mathcal{K}_{\text{in}}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{R}_{\mathcal{K}_{\text{in}}}, \mathbf{p}_{\mathcal{K}_{\text{in}}}) \quad \mathbf{p}_{\mathcal{K}_{\text{in}}} = \mathbf{p}\} \subset \mathbb{R}^3$$

on $\mathbf{p}_{\mathcal{K}_{\text{in}}}$ representa la part de la cinemàtica directa corresponent a la posició, $\mathbf{R}_{\mathcal{K}_{\text{in}}}$ representa la part de cinemàtica directa relacionada amb la orientació.

- Espai destre (*Dexterous Workspace, Primary Workspace*):

L'espai destre correspon al conjunt de posicions en les que es pot arribar en qualsevol orientació. Formalment es pot escriure:

$$\mathcal{W}_D = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \forall \mathbf{R} \in SO(3) \quad \mathcal{K}_{\text{in}}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{R}_{\mathcal{K}_{\text{in}}}, \mathbf{p}_{\mathcal{K}_{\text{in}}}) \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathcal{K}_{\text{in}}}\} \subset \mathbb{R}^3$$

El conjunt de punts que pertanyen a l'espai realitzable i no pertanyen a l'espai destre es sol anomenar espai de treball secundari (*Secondary Workspace*), [Gupta, 1997].

Un altre subconjunt de l'espai de treball que s'utilitza és, l'espai de treball d'orientació constant (*constant orientation workspace*), que està compost per tots aquells punts de \mathbb{R}^n que són

assolibles en una orientació predeterminada. Seguint aquest enfoc es defineix també el *Inclusive orientation Workspace* [Merlet, 2000] com el subconjunt de punts de \mathbb{R}^n que poden assolir-se amb una orientació que pertany a un rang determinat. Igualment, el conjunt dels punts que poden assolir totes les orientacions dins aquest rang predeterminat reben el nom de *Total orientation Workspace* [Merlet, 2000].

Una altra definició d'interès correspon al espai de treball controlable (*controllably workspace*), definit com aquells subconjunts de punts de l'espai de treball que estan lliures de singularitats [Merlet, 2000].

A.9.1 Mecanismes d'anàlisi de l'espai de treball

La obtenció de l'espai de treball a partir de les característiques de la cadena cinemàtica no és en general una tasca fàcil. Seguidament es presenten les principals metodologies proposades per obtenir l'espai de treball.

A.9.1.1 Generació de l'espai de treball

En aquest enfoc es determina en primer lloc l'espai de treball assolible per la primera articulació, que en general és una corba en l'espai tridimensional (un segment de recta en el cas d'articulacions lineals, i un segment de cercle en el cas d'articulacions de rotació). Posteriorment es determina la corba corresponent a l'espai de treball de la segona articulació. La situació en l'espai d'aquesta segona corba serà funció de la configuració de la primera articulació. Per tant combinant totes les possibles situacions de la primera i segona articulació s'obté una superfície que correspon a l'espai de treball de les dues primeres articulacions. D'aquesta forma es prosseguiria amb les següents articulacions [Gupta, 1997]. A cada pas la complexitat del conjunt de punts obtingut va augmentant, i això fa que la metodologia sigui únicament aplicable, des d'un punt vista pràctic, a manipuladors de pocs graus de llibertat. Seguint aquesta metodologia és possible estudiar i donar explicació a fenòmens com l'aparició de forats en l'interior de l'espai [Gupta and Roth, 1982]. El principal avantatge del mètode és que es tracta d'un mètode constructiu i exacte.

La combinació de les corbes corresponents als espais de treball de cadascuna de les articulacions es pot entendre com una convolució d'elements de $SE(3)$, cosa que permet, de forma natural incloure l'estudi de la orientació dins la metodologia [Chirikjian and Ebert-Uphoff, 1998].

A.9.1.2 Estudi de les singularitats

Fent us del teorema de la funció inversa, es pot demostrar que les fronteres de l'espai de treball estan definides, be pels singularitats de la cinemàtica o be per límits mecànics de les articulacions. Fent us d'aquest fet s'han desenvolupat un conjunt d'algorismes que determinen la frontera de l'espai de treball a partir de l'estudi de les singularitats de la cinemàtica i els rangs de treball de cadascuna de les articulacions [Haug et al., 1992] [Wang and Wu, 1993] [Qiu et al., 1995].

En aquests mètodes es descomposa l'espai de treball en seccions bidimensionals i, posteriorment, per cada secció es localitza una configuració singular o que tingui una articulació en el seu valor límit, i que pertanyi a la secció sota estudi. Donat que les singularitats i els límits mecànics constitueixen corbes sobre la secció, aquestes es determinen mitjançant l'ús d'algorismes de continuació [Allgower and Georg, 1990]. Les diferents corbes es segueixen fins arribar a la intersecció amb una altra corba de característiques similars. Els punts d'intersecció són punts en que la aplicació tangent associada a la cinemàtica té una pèrdua de rang de 2 o més (ja sigui degut a la cinemàtica o a un límit mecànic). En aquests punts es determinen les possibles direccions de les corbes [Keller, 1987] i posteriorment es continuen generant les corbes. Amb els conjunts de punts determinats i els trams de corbes que els uneixen es construeix un graf que recull l'estructura de la secció de l'espai de treball que s'està estudiant.

Aquest mètode permet obtenir de forma exacta, encara que numèrica, la frontera de l'espai de treball en cadascuna de les seccions. A partir de l'estudi en un conjunt prou gran de seccions es possible tenir una idea de l'espai de treball del mecanisme estudiat.

Aquesta metodologia és genèrica i aplicable a qualsevol tipus de mecanisme. La principal restricció és el gran número de seccions que s'han de generar, especialment en el cas de tenir en compte la orientació.

A.9.1.3 Discretització l'espai de treball

Els tipus de mecanismes que es poden estudiar de forma analítica formen un conjunt molt reduït, i per aquest motiu en moltes ocasions es planteja obtenir una representació aproximada de l'espai de treball. La aproximació habitual és descomposar el possible espai de treball en cel·les i posteriorment determinar si cadascuna d'elles pertany o no a l'espai de treball del mecanisme sota estudi [Chirikjian and Ebert-Uphoff, 1998] [Wenger and Chedmail, 1991]. Aquest procés es pot realitzar de dues maneres, una primera en que es discretitza el possible espai de treball i posteriorment a través de la cinemàtica inversa es determina si el punt pertany o no a l'espai de treball real i una segona en la que es discretitza l'espai de configuracions, i per cada cel·la d'aquest es determina amb quina cel·la de l'espai de treball està relacionada a través de la cinemàtica. El primer mètode presenta l'avantatge de que únicament és necessari un càlcul per saber si un punt de l'espai pertany o no a l'espai realitzable; el principal inconvenient és que resulta imprescindible tenir la cinemàtica inversa, (en cas de no disposar-se s'hauria d'aplicar algun algorisme numèric per la seva obtenció).

En el segon mètode únicament és necessari disposar de la cinemàtica directa, el principal inconvenient és com determinar una discretització de l'espai de configuracions que concordi amb la discretització definida per l'espai (es necessari estudiar el Jacobià de la cinemàtica per determinar la relació de tamanys entre les cel·les en un espai i l'altre). Aquest mètode permet a més determinar el número de configuracions que generen el mateix punt de l'espai, cosa de molt interès en el cas robots redundants.

Aquest enfoc presenta els inconvenients de que no és complert, de que en general fan falta estructures de dades de gran tamany i complexitat per representar la informació, i de que és computacionalment costós. Un avantatge que ofereix respecte els mètodes anteriorment presentats és que permet tenir en compte altres limitacions com la col·lisió del robot amb ell mateix o amb objectes de l'entorn.

Apèndix B

Sistemes Diferencial Algebraics

En les següents seccions es presenta un recull de la teoria bàsica de sistemes d'equacions diferencial algebraiques (DAEs). Aquest recull inclou les definicions bàsiques, així com les propietats fonamentals de les principals estructures de sistemes DAE.

A més de les formulacions analítiques es presenten, també les formulacions que permeten la integració numèrica d'aquests sistemes amb els integradors disponibles en la actualitat.

B.1 Teoria bàsica de DAEs

B.1.1 Definició

Definició B.1 *Un sistema DAE és un conjunt d'equacions diferencials que es poden formular com :*

$$\boldsymbol{\gamma}(t, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (\text{B.1})$$

on $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R}^{1+2n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$ és singular (i.e. $\text{Rank} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right\} < n$), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, i $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. \mathbf{u} correspon a l'entrada del sistema.

En el cas en que $\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$ és no singular, la equació diferencial (B.1) pot convertir-se formalment en un sistema d'equacions diferencials ordinàries.

Pel cas de sistemes DAE lineals hi ha teoria ben establerta [Brenan et al., 1989][Dai, 1989], encara que això no és així pel cas de sistemes no lineals genèrics. La teoria de DAE lineals està basada en la anàlisi del *pencil**, l'estudi del *pencil* presenta també interès en el cas de sistemes no lineals ja que permet fer un estudi de les característiques de forma local. Un estudi d'aquest tipus és el que s'aplica durant el procés d'integració numèrica d'aquest tipus de sistemes.

En coneixement dels sistemes DAE no lineals es redueix a un conjunt de morfologies, les més habituals es presenten en la Taula B.1.

* Per un sistema de la forma $\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$, on $\mathbf{A}(t)$ i $\mathbf{B}(t)$ són $m \times n$ matrius, la matriu *pencil* es defineix com $\lambda \mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)$, on $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{lineal} \\ \\ \text{no lineal} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{semi explícit} \\ \\ \text{implícit} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{const.} \\ \text{var.} \\ \text{temps} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{B}_{11}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_{12}\mathbf{z}(t) = \mathbf{f}_1(t) \\ \mathbf{B}_{21}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_{22}\mathbf{z}(t) = \mathbf{f}_2(t) \\ \\ \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \\ \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)) \\ \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)) \\ \mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)) \\ \\ \mathbf{f}(t, \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t)) = 0 \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = 0 \end{array} \right.$$

Taula B.1: Morfologies típiques de DAEs homogenis. $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)]^T$

Índex	sistema DAE	\mathbf{x}	Condicció $\det\{\wp\} \neq 0$
I	$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{r}(t, \mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{u})$ $\mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{u})$	$[\mathbf{y}, \mathbf{w}]^T$	$\det\{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{w}^T}\} \neq 0$
II	$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{r}(t, \mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{u})$ $\mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$	$[\mathbf{y}, \mathbf{w}]^T$	$\det\{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}^T} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{w}^T}\} \neq 0$
III	$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{r}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u})$ $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{k}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{u})$ $\mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$	$[\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}]^T$	$\det\{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}^T} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}^T} \cdot \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{w}^T}\} \neq 0$

Taula B.2: DAEs Homogenis semiexplícits morfologia i índex.

B.1.2 Índex d'un DAE

Definició B.2 *L'índex diferencial d'un DAE és el nombre mínim de vegades que totes o part de les equacions implícites(B.1) s'han de derivar en front del temps per obtenir $\dot{\mathbf{x}}$ com una funció continua (Ψ) de $t, \mathbf{x}, \mathbf{u}$.*

Definició B.3 $\dot{\mathbf{x}} = \Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ rep el nom de ODE subjacent del DAE.

En els sistemes DAE no lineals, l'índex diferencial i l'ODE subjacent són, en general, propietats locals.

La Taula B.2 presenta la relació entre l'índex diferencial i la morfologia d'alguns DAE no lineals semi explícits. Per tal d'obtenir d'ODE subjacent és necessari derivar la part implícita del DAE respecte el temps diverses vegades, durant el procés s'ha d'invertir una matriu per tal d'obtenir l'ODE explícit. Aquesta matriu s'anomena matriu de reducció d'índex (\wp) del DAE. Si \wp és singular, no és possible obtenir directament l'ODE subjacent, i s'ha de continuar derivant part del sistema. En la Taula B.2 es presenta la condició necessari per tal que \wp sigui de rang complet per una família de sistemes.

Encara que l'índex diferencial és l'indicador més emprat per classificar el sistemes DAE. S'ha introduït també l'índex de pertorbació[Hairer et al., 1989]. Aquest descriu la continuïtat de les solucions \mathbf{x} de $\gamma(t, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \delta(t)$ a mesura que $\delta(t) \rightarrow \mathbf{0}$. L'índex de pertorbació és igual o més gran que l'índex diferencial per la majoria de DAEs. En aquest treball sempre que es faci referència a l'índex es farà referència a l'índex diferencial.

B.1.3 Formes Canòniques

La majoria de resultats i anàlisis dels sistemes DAE estan relacionats amb certes formes preestablertes. Seguidament es presenten algunes d'aquestes formes.

Definició B.4 *La forma de Hessenberg de tamany r d'un DAE és:*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \gamma_1(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \gamma_2(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{r-1}) \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_i &= \gamma_i(t, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_{r-1}), \quad 3 \leq i \leq r-1 \\ &\vdots \\ \mathbf{0} &= \gamma_r(t, \mathbf{x}_{r-1}) \end{aligned} \tag{B.2}$$

amb $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r]^T$ i la matriu $\left(\frac{\partial \gamma_r}{\partial \mathbf{x}_{r-1}}\right) \left(\frac{\partial \gamma_{r-1}}{\partial \mathbf{x}_{r-2}}\right) \dots \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \mathbf{x}_1}\right) \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \mathbf{x}_r}\right)$ no singular.

Teorema B.1 [Brenan et al., 1989] *Si γ_i ($i = 1, 2, \dots, r$) és suficientment diferenciable, la forma de Hessenbergde tamany r té solució i índex r .*

La majoria de sistemes mecànics, i en particular els sistemes robòtics amb restriccions holònomes es poden expressar en forma de Hessenberg de tamany 3 si la matriu $(\wp = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_3}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \gamma_1}{\partial \mathbf{x}_3} \end{pmatrix})$ és no singular, aquest tipus de DAE tindrà índex 3.

La majoria de sistemes robòtics amb restriccions holònomes presenten configuracions en les que \wp és singular, per tant aquest tipus de sistemes són d'índex 3, únicament localment.

Definició B.5 *La forma canònica Standard d'un DAE és:*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \boldsymbol{\gamma}_1(t, \mathbf{x}_1) \\ \boldsymbol{\zeta}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

on $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^T$.

Definició B.6 *La forma Triangular de tamany r d'un DAE és:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_1(t, \dot{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_1) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\gamma}_2(t, \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \mathbf{0} \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_r(t, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_r, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

on $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r]^T$ i $\boldsymbol{\gamma}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) és un ODE implícit, un DAE en forma de Hessenberg o un DAE en forma canònica Standard.

Teorema B.2 [Brenan et al., 1989] *La forma triangular d'un DAE sempre té solució.*

B.2 Mètodes Numèrics

B.2.1 Introducció

Els sistemes DAEs no són directament integrables mitjançant integradors tradicionals per ODEs (*ODE solvers*) [Harier et al., 1991], aquests han d'ésser integrats a través d'algorismes específics (*DAE solvers*) [Brenan et al., 1989]. Aquest tipus d'integradors s'han emprat en l'estudi i resolució de sistemes compostos per diferents cossos amb restriccions [Führer and Leimkuhler, 1991] [Simeon et al., 1994].

Els integradors de DAEs existents no poden integrar qualsevol tipus de DAE. En general es limiten a poder integrar DAEs d'un cert índex com a molt. Per tant per poder integrar DAEs d'ordre superior s'han plantejat dues grans alternatives, la primera és reformular el DAE en forma d'ODE, i la segona consisteix en reformular el DAE de tal forma que presenti un índex amb el que els integradors de DAEs existents puguin treballar.

Una altra problemàtica en la integració de DAEs és la determinació d'un conjunt de condicions inicials que compleixin les restriccions algebraïques, ja que la majoria d'integradors necessiten

que les condicions inicials compleixen les restriccions. Aquest problema s'ha solucionat per certes famílies de DAEs [Brown et al., 1995][Gracia and Pons, 1992] [Pantelides, 1988], però és complex en altres en els que és necessari determinar-les manualment o mitjançant l'ús d'heurístiques. Aquest problema no té gran rellevància en el cas del sistema mecànic amb restriccions, ja que habitualment les simulacions s'inicialitzen en condicions estàtiques i per tant únicament és necessari aplicar la cinemàtica del sistema per determinar un punt d'inici que compleixi les restriccions.

B.2.2 Reformulació com a ODE

Hi ha diferents metodologies per tal d'obtenir un ODE a partir d'un DAE. Per simplificar la descripció dels diferents procediments s'utilitzarà l'esquema habitual del sistema mecànic amb restriccions per il·lustrar el procediment. Donat que els sistemes mecànics presenten dinàmiques de segon ordre és possible escriure'ls de la forma:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{z} \quad (\text{B.5})$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}) [\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) + \mathbf{G}^T(\mathbf{y}) \mathbf{f}] \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (\text{B.7})$$

on \mathbf{y} és un vector corresponent a les posicions, \mathbf{z} és un vector corresponent a les velocitats, $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ són un conjunt de restriccions holònomes que actuen sobre el sistema, \mathbf{f} són les forces de lligam, \mathbf{A} és el tensor d'inèrcia, \mathbf{h} correspon a la dinàmica del sistema sense restriccions algebraiques $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}^T}$ és la matriu de Jacobi de $\mathbf{g}(\mathbf{y})$.

Es pot provar que quan $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{G}(\mathbf{y}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}) \mathbf{G}^T(\mathbf{y})$ és no singular, el sistema presenta un forma de Hessenberg de tamany 3, i per tant serà d'índex III.

Una manera de convertir (B.5)-(B.7) en un ODE és emprar la transformació de reducció [McClamroch, 1986], que obté un ODE reduït (\mathbf{y}, \mathbf{z}) . El procediment evoluciona de la següent manera, primer la equació (B.7) es deriva dues vegades en front del temps fins obtenir \mathbf{f} com una funció de (\mathbf{y}, \mathbf{z}) . Aleshores s'obté el següent DAE sobredeterminat [Eich et al., 1990]:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{z} \quad (\text{B.8})$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}) [\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) + \mathbf{G}^T(\mathbf{y}) \mathbf{f}] \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{y}) \dot{\mathbf{y}} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{f} = - \left(\mathbf{G}(\mathbf{y}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}) \mathbf{G}(\mathbf{y})^T \right)^{-1} \left(\mathbf{G}(\mathbf{y}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}) \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) \mathbf{z} \right) \quad (\text{B.12})$$

seguidament el valor de \mathbf{f} es substitueix en (B.9), i finalment s'obté l'ODE reduït:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{z} \quad (\text{B.13})$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}) [\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) - \mathbf{G}^T(\mathbf{y}) [\mathbf{G}(\mathbf{y}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}) \mathbf{G}^T(\mathbf{y})]^{-1} [\mathbf{G}(\mathbf{y}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}) \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) \mathbf{z}]]] \quad (\text{B.14})$$

on les restriccions sobre el sistema estan implícites. Cal tenir en compte que aquestes expressions són correctes únicament si la matriu de reducció d'índex $\mathbf{G}(\mathbf{y}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}) \mathbf{G}^T(\mathbf{y})$ és no singular.

Una altra possibilitat és derivar una altra cop per tal d'obtenir una expressió per $\dot{\mathbf{f}}$. Aquest nou sistema correspon al ODE subjacent de (B.5)-(B.7). Cap de les dues metodologies genera una representació en espai d'estat, ja que cap d'elles és una representació mínima. Altres metodologies poden obtenir una representació en forma de vector estat a través de la selecció d'unes coordenades locals adients [Führer and Leimkuhler, 1991].

En cap de les dues metodologies descrites apareixen explícitament les restriccions de posició. Encara que analíticament les corbes solució d'aquestes reformulacions són idèntiques a les corbes solució del sistema inicial, un cop sotmeses a la discretització temporal i quantificació per a seva integració en computador poden introduir deriva numèrica, i per tant les variables (\mathbf{y}) poden deixar de complir les restriccions de posició.

B.2.3 Reformulació del DAE

El principal problema dels integradors de DAEs, disponibles en la actualitat, és que únicament poden resoldre sistemes d'índex II. Alguns d'aquest són: HEM5 [Brasey, 1994] basat en mètodes semi explícits de cinquè ordre [Brasey, 1992]; LSODI [Hindmarsh, 1983] basat en fórmules de diferenciació enrera (BDF) de pas fixe; i el DASSL [Brenan et al., 1989] basat en les fórmules BDF en pas variable. Durant el desenvolupament del treball s'ha emprat DASSL.

Donat que els sistemes mecànics són d'índex III, és necessari reduir el seu índex de forma prèvia a integrar-los. La forma més directa de reduir l'índex d'un DAE de la forma (B.5)-(B.7) és substituir la restricció (B.7) per la seva derivada enfront del temps. Donat que el DAE resultant és d'índex II, serà directament integrable amb els integradors abans comentats. El principal inconvenient d'aquest plantejament és que s'ha eliminat la restricció de posició i per tant pot presentar deriva numèrica al ésser integrada. Una solució per aquest problema és reintroduir les restriccions de posició amb un multiplicador de Lagrange addicional ($\boldsymbol{\mu}$). Aquest plantejament rep el nom de formulació GGL (Gear, Gupta & Leimkuhler). La formulació GGL aplicada als sistemes mecànics (B.5)-(B.6) presenta la forma:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{z} + \mathbf{G}^T(\mathbf{y}) \boldsymbol{\mu} \quad (\text{B.15})$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}) [\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) + \mathbf{G}^T(\mathbf{y}) \mathbf{f}] \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{y}) \dot{\mathbf{y}} \quad (\text{B.18})$$

Altres formulacions similars a la GGL introdueixen una derivació addicional de les restriccions, conjuntament amb un conjunt addicional de multiplicadors de Lagrange, d'aquesta manera es facilita la feina de l'integrador. Tots aquest tipus de plantejaments reben el nom genèric de formulacions d'Euler-Lagrange estabilitzades. Encara que són numèricament robustes, la introducció de equacions addicionals introdueix ineficiència en alguns casos [Petzold et al., 1993].

Donat que en la formulació GGL és necessari calcular la inversa de $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ i això és computacional costós; especialment en el cas d'estar pròxims a una singularitat. És habitual introduir una

equació addicional:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{z} + \mathbf{G}^T(\mathbf{y}) \boldsymbol{\mu} \quad (\text{B.19})$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{w} \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{0} = -\mathbf{A}(\mathbf{y}) \mathbf{w} + \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \mathbf{G}^T(\mathbf{y}) \mathbf{f} \quad (\text{B.21})$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{y}) \dot{\mathbf{y}} \quad (\text{B.23})$$

Una metodologia diferent és la formulació de Baumgarte [Baumgarte, 1972], aquesta substitueix la restricció per una combinació lineal de la restricció i les seves derivades:

$$0 = \mathbf{G}(\mathbf{y}) \dot{\mathbf{y}} + \alpha \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (\text{B.24})$$

o

$$0 = \dot{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{G}(\mathbf{y}) \ddot{\mathbf{y}} + \alpha_1 \mathbf{G}(\mathbf{y}) \dot{\mathbf{y}} + \alpha_0 \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (\text{B.25})$$

on α_i són valors constants seleccionats de forma que el polinomi en \mathbf{g} és un polinomi de Hurwitz. Aquesta reformulació dóna lloc a una regularització del DAE original, per tant ambdós sistemes presenten el mateix comportament. El principal inconvenient és que la selecció d'un conjunt de paràmetres α_i adient depèn del comportament del sistema i del pas d'integració [Ascher et al., 1992].

A diferència de les tècniques de reducció de l'índex hi ha tècniques basades en l'aplicació d'un operador de descomposició a [Yen and Petzold, 1994]. Aquesta formulació aplicada a (B.5)-(B.6) presenta la forma:

$$\mathcal{P}(\mathbf{y}) \dot{\mathbf{y}} = \mathcal{P}(\mathbf{y}) \mathbf{z} \quad (\text{B.26})$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{y}) \dot{\mathbf{z}} = \mathcal{P}(\mathbf{y}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}) [\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u})] \quad (\text{B.27})$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (\text{B.28})$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{y}) \dot{\mathbf{y}} \quad (\text{B.29})$$

on

$$\mathcal{P}(\mathbf{y}) = \mathbf{X}^T - [(\mathbf{G}(\mathbf{y}) \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{y}) \mathbf{X}]^T \mathbf{Y}^T \quad (\text{B.30})$$

\mathbf{X} i \mathbf{Y} són matrius de permutació tals que

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \mathbf{y}_1 + \mathbf{Y} \mathbf{y}_2 \quad (\text{B.31})$$

on \mathbf{y}_1 i \mathbf{y}_2 són conjunts disjunts de les components de \mathbf{y} . En aquesta nova formulació desapareixen els multiplicadors de Lagrange, d'aquesta manera no és necessari recalculer-los a cada pas. La descomposició en coordenades (Coordinate-Splitting (CS)) presenta avantatges substancials en sistemes amb tendència a presentar oscil·lacions d'alta freqüència [Yen and Petzold, 1996].

Tots els plantejaments anteriors permeten integrar DAE d'índex III, però no poden aplicar-se quan la matriu de reducció d'índex és singular. Una Formulació que pot treballar en aquest tipus de configuracions [Petzold et al., 1993], és la que formula el sistema com un problema de minimització:

$$\min_{\mathbf{f}} \quad \frac{1}{2} \mathbf{M}_c^T \mathbf{M}_c \quad (\text{B.32})$$

$$\text{subject to} \quad \frac{h^4}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{f} \leq \delta \quad (\text{B.33})$$

on

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{g}(\mathbf{y}) + h\mathbf{G}(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}h^2\mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2}h^2\mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{B}(\mathbf{y})\mathbf{f} \quad (\text{B.34})$$

resolent per \mathbf{f} s'obté :

$$\mathbf{f} = \left[(\mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{B}(\mathbf{y}))^T (\mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{B}(\mathbf{y})) + \epsilon\mathbf{I} \right]^{-1} \left[(\mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{B}(\mathbf{y}))^T \mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) + \frac{2}{h} (\mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{B}(\mathbf{y}))^T (\mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{z}) + \frac{2}{h^2} (\mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{B}(\mathbf{y}))^T \mathbf{g}(\mathbf{y}) \right] \quad (\text{B.35})$$

on $\mathbf{B}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{G}^T(\mathbf{y})$, ϵ i h són paràmetres numèrics. Posteriorment el valor de \mathbf{f} es pot substituir per (B.6). Aquest nou ODE pot integrar-se encara que $\mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{B}(\mathbf{y})$ sigui singular. És important notar que encara $\mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{B}(\mathbf{y})$ sigui singular o no singular, el mínim sempre s'obté per $\mathbf{M}_c = 0$. En el cas en que el sistema sigui singular el grau de llibertat pel nucli de $\mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{B}(\mathbf{y})$ s'utilitzen per minimitzar la norma de \mathbf{f} . Aquest tipus d'aproximació és habitual en els algorismes que permeten treballar al voltant de configuracions singulars [Murphy et al., 1990].

Encara que el resultat d'aquesta metodologia és un ODE que pot integrar-se amb un integrador tradicional, pertany propiament a la secció anterior (secció B.2.2), però donat que prové de la regularització Baumgarte s'ha presentat en aquesta secció.

Referències

- [Åström and Wittenmark, 1997] Åström, K. J. and Wittenmark, B. (1997). *Computer Controlled Systems*. Prentice Hall Information and System Sciences Series. Prentice Hall, third edition.
- [Adept Technology, 1993] Adept Technology (1993). *V+ Language. Version 11.0. User's guide*. Stäubli.
- [Adept Technology, 1995] Adept Technology (1995). *RX90, RX90L, CS7*. Stäubli.
- [Alberts and Soloway, 1988] Alberts, T. E. and Soloway, D. I. (1988). Force control of a multi-arm robot system. In *Proc. of the 1988 IEEE Int. Conf. On Robotics And Automation*, volume 3, pages 1490–1496, Philadelphia, Pennsylvania.
- [Alison and Gilmartin, 1994] Alison, P. and Gilmartin, M. (1994). Strategic collision avoidance of two robot arms in the same work cell. In Lenarcic, A., editor, *Advances In Robot Kinematics And Computacional Geometry*, pages 467–476. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- [Allgower and Georg, 1990] Allgower, E. L. and Georg, K. (1990). *Numerical Continuation Methods. An Introduction*. Springer-Verlag.
- [Armengol Fontova, 2001] Armengol Fontova, X. (2001). Estudi, disseny i implementació d'un control d'impedància per la manipulació multirobot. Projecte final de Carrera, Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Barcelona, Barcelona (Spain).
- [Asada and Slotine, 1986] Asada, H. and Slotine, J.-J. E. (1986). *Robot Analysis and Control*. John Wiley Sons, Inc.
- [Ascher et al., 1992] Ascher, U., Chin, H., and Reich, S. (1992). Stabilization of dae's and invariant manifolds. Technical Report 92-17, Department of Computer Science, UBC, Vancouver.
- [Baumgarte, 1972] Baumgarte, J. (1972). Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Comp. Math. Appl. Mech. Eng*, (1):1–16.
- [Bicchi and Melchiorri, 1992] Bicchi, A. and Melchiorri, C. (1992). Mobility and kinematic analysis of general robotic systems. pages 421–426.
- [Bicchi and Melchiorri, 1993] Bicchi, A. and Melchiorri, C. (1993). Manipulability measures of cooperating arms. pages 321–325.

- [Boleko, 1999] Boleko, S. (1999). Implementació d'un sistema de control de posició i força en sistemes multirobot. Projecte final de Carrera, Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Barcelona, Barcelona (Spain).
- [Boleko et al., 2001] Boleko, S., Costa-Castelló, R., and nez Villaluenga, L. B. (2001). On the identification and control of internal forces in multirobot manipulation. In *Proceedings of the 32nd ISR(International Symposium on Robotics)*, pages 108–113, Seoul (Korea).
- [Boleko et al., 1999] Boleko, S., Costa-Castelló, R., and Villaluenga, L. B. (1999). Implementación de un sistema de control para manipulación conjunta en sistemas multirobot. In *Memoria Técnica del Seminario Anual de Automática y Electrónica Industrial (SAAEI'99)*, pages 299–302, Madrid, Spain.
- [Boleko Ribas et al., 1998] Boleko Ribas, S., Castelló, R. C., and Basañez, L. (1998). Diseño e implementación de un sistema de control para entornos multirobot. Document Tècnic IOC-DT-A-1998-06, Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials, UPC. In spanish. CYCIT TAP96-0868.
- [Boothby, 1986] Boothby, W. M. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press Inc, New York. ISBN 0-12-116053-X.
- [Borrel and Liegeois, 1986] Borrel, P. and Liegeois, A. (1986). A study of multiple manipulator inverse kinematic solutions with applications to trajectory planning and workspace determination. pages 1180–1185.
- [Brasey, 1992] Brasey, V. (1992). A half-explicit runge-kutta method of order 5 for solving constrained mechanical systems. *Computing*, 48:191–201.
- [Brasey, 1994] Brasey, V. (1994). *HEM5 User's Guide*.
- [Brenan et al., 1989] Brenan, K., Campbell, S., and Petzold, L. (1989). *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. SIAM.
- [Brockett, 1983] Brockett, R. (1983). Robotic manipulators and the product of exponentials formula. In *Proceedings of Symposia Math. Theory Networks and Systems*, pages 120–129, Beer Sheba, Israel.
- [Brown et al., 1995] Brown, P. N., Hindmarsh, A. C., and Petzold, L. (1995). Consistent initial condition calculation for differential-algebraic systems. RR UMSI 95/174, Univ. of Minnesota, Supercom. Inst.
- [Bullo and Murray, 1995] Bullo, F. and Murray, R. (1995). Proportional derivative (pd) control on the euclidean group. CDS Technical Report 95-010, Division of Engineering and Applied Science. California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125.
- [Caccavale et al., 1999] Caccavale, F., Natale, C., Siciliano, B., and Villani, L. (1999). Six-dof impedance control based on angle/axis representations. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, (2):289–300.

- [Campbell et al., 1994] Campbell, S. L., Moore, E., and Zhong, Y. (1994). Utilization of automatic differentiation in control algorithms. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 39(5):1047–1052.
- [Char, 1991] Char, B. W. (1991). *Maple V language reference manual*.
- [Žefran and Kumar, 1996a] Žefran, M. and Kumar, V. (1996a). Coordinate-free formulation of the cartesian stiffness matrix. In *Int. Symposium on Advances in Robot Kinematics*, Portorož, Slovenia.
- [Žefran and Kumar, 1996b] Žefran, M. and Kumar, V. (1996b). Planning of smooth motions on SE(3). In *Proc. of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, Minnesota.
- [Žefran and Kumar, 2000] Žefran, M. and Kumar, V. (2000). A geometric study of the cartesian stiffness matrix. *ASME Journal of Mechanical Design*.
- [Chiacchio et al., 1991] Chiacchio, P., Chiaverini, S., Sciavicco, L., and Siciliano, B. (1991). Global task space manipulability ellipsoids for multiple-arm systems. *IEEE Transactions On Robotics And Automation*, 7(5):678–685.
- [Chiacchio et al., 1993] Chiacchio, P., Chiaverini, S., Sciavicco, L., and Siciliano, B. (1993). Reply to “comments on “global task space manipulability ellipsoids for multiple-arm systems””. *IEEE Transactions On Robotics And Automation*, 9(2):685–686.
- [Chirikjian and Ebert-Uphoff, 1998] Chirikjian, G. S. and Ebert-Uphoff, I. (1998). Discretely actuated manipulator workspace generation using numerical convolution on the euclidean group. pages 742–749.
- [Ciblack and Lipkin, 1999] Ciblack, N. and Lipkin, H. (1999). Synthesis of cartesian stiffness for robotic applications. In *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2147–2152, Detroit, Michigan.
- [Costa-Castelló, 1996] Costa-Castelló, R. (1996). Una robot toolbox per maple. Research Report IC-DT-9619, Institut de Cibernètica. (in catalan).
- [Costa Castelló et al., 1995] Costa Castelló, R., Basañez, L., and Suárez, R. (1995). Planificación y control en entornos multi-robot. In *Actas del 4rto Congreso de la Asociación Española de Robótica Tecnologías de la producción*, pages 123–131, Zaragoza, Spain. (in spanish).
- [Costa-Castelló et al., 1995] Costa-Castelló, R., Griñó, R., and Basañez, L. (1995). Análisis de la matriz de reducción de Índice en el “modelado de sistemas robotizados sometidos a restricciones: Formulación en forma de sistemas singulares”. Research Report IC-DT-9533, Institut de Cibernètica. (in spanish).
- [Craig, 1986] Craig, J. J. (1986). *Introduction to Robotics, Mechanics Control*. Addison Wesley. ISBN 0-201-10326-5.
- [Dai, 1989] Dai, L. (1989). *Singular Control Systems*, volume 118 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag New York Berlin.

- [Doyle et al., 1992] Doyle, J. C., Francis, B. A., and Tannenbaum, A. R. (1992). *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Company.
- [Eich et al., 1990] Eich, E., Leimkuhler, B., and Reich, S. (1990). Stabilization and projection methods for multibody dynamics. TR A281, Helsinki Univ. of Tech., Inst. of Mathematics.
- [Fargas Marques, 2000] Fargas Marques, A. (2000). Control d'impedancia en la manipulació multirobot. Projecte final de Carrera, Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Barcelona, Barcelona (Spain).
- [Fargas-Marques et al., 2000] Fargas-Marques, A., Costa-Castelló, R., and Basañez, L. (2000). Spatial impedance control in coordinated manipulation. In *Preprints 6th IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO'00)*, pages 615–620, Vienna (Austria).
- [Fliess, 1991] Fliess, M. (1991). Nonlinear control theory and differential algebra: Some illustrative examples. In *IFAC 10th Triennial World Congress*, Munich, Germany.
- [Führer and Leimkuhler, 1991] Führer, C. and Leimkuhler, B. (1991). Numerical solution of differential-algebraic equations for constrained mechanical motion. *Numerische Mathematik*, 59:55–69.
- [Gosselin and Angeles, 1990] Gosselin, C. and Angeles, J. (1990). Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Transactions in Robotics and Automation*, 6(3):281–290.
- [Gosselin, 1990] Gosselin, C. M. (1990). Dexterity indices for planar and spatial robotic manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Rob. and Aut.*, pages 650–655.
- [Gracia and Pons, 1992] Gracia, X. and Pons, J. (1992). A generalized geometric framework for constrained systems. *Dif. Geom. and Appl.*, (2):223–247.
- [Gupta and Roth, 1982] Gupta, K. and Roth, B. (1982). Design consideration for manipulator workspace. *Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design.*, 104(4):704–712.
- [Gupta, 1997] Gupta, K. C. (1997). *Mechanics and Control of Robots*. Mechanical Engineering Series. Springer-Verlag, Berlin.
- [Hairer et al., 1989] Hairer, E., Lubich, C., and Roche, M. (1989). *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*. Springer-Verlag Berlin.
- [Han and Amato, 2000] Han, L. and Amato, N. M. (2000). A kinematics-based probabilistic roadmap method for closed chain systems. In *Proceedings of the Fourth International Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics (WAFR2000)*.
- [Harier et al., 1991] Harier, E., Norsett, S., and Wanner, G. (1991). *Solving Ordinary Differential Equations*. Springer Verlag Series In Computational Mathematics. Springer Verlag.
- [Haug et al., 1994] Haug, E., Luh, C.-M., Adkins, F., and Wang, J. (1994). Numerical algorithms for mapping boundaries of manipulator workspaces. *Advances in Design Automation*, 2(ASME DE-69):447–459.

- [Haug et al., 1992] Haug, E., Wang, J., and Wu, J. (1992). Dexterous workspaces of manipulators. i. analytical criteria. *Mech. Struct. & Mach.*, 20(3):321–361.
- [Haug, 1989] Haug, E. J. (1989). *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Volume I: Basic Methods*. Allyn and Bacon. ISBN 8-205-11669-8 (v.1).
- [Heinrichs et al., 1996] Heinrichs, B., Sepehri, N., and Thornton-Trump, A. (1996). Position-based impedance control of an industrial hydraulic manipulator. In *Proc. of the 1996 IEEE Int. Conf. On Robotics And Automation*, volume 1, pages 284–290, Minneapolis, Minnesota.
- [Hemami et al., 1991] Hemami, A., Ranjbaran, F., and Cheng, R. (1991). A case study of two-robot-arm worcell material handling. *Journal of Robotics Systems*, 8(1):21–37.
- [Hindmarsh, 1983] Hindmarsh, A. C. (1983). Odepack, a systematized collection of ode solvers. *Scientific Computing*, pages 55–64.
- [Hogan, 1985] Hogan, N. (1985). Impedance control: An approach to manipulation. *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, (107):1–24.
- [Howe, 1991] Howe, R. M. (1991). A new family of real-time predictor-corrector integration algorithms. *SIMULATION*, 57(3):177–186.
- [Huang et al., 2001] Huang, T., Mei, J., Zhao, X., Zhou, L., Zhang, D., and Zeng, Z. (2001). Stiffness estimation of a tripod-based parallel kinematic machine. In *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2147–2152, Seoul, Korea.
- [Huang and Lu, 1994] Huang, Y. and Lu, G. (1994). Coordinability measure for multiple robots and its application to motion planning. In *Preprints of the Fourth IFAC Symposium On Robot Control*, pages 933–938, Capri, Italy.
- [Jing, 1994] Jing, H. W. (1994). Two arms are faster than one. *The Int. Journal Of Robotics Research*, 13(4):364–368.
- [JR3, 1994] JR3, I. (1994). *JR3. DSP-BASED FORCE SENSOR RECEIVERS. SOFTWARE AND INSTALLATION MANUAL*.
- [Kailath, 1980] Kailath, T. (1980). *Linear Systems*. Prentice Hall information and system sciences series. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall.
- [Kathib, 1987] Kathib, O. (1987). A unified approach for motion and force control of robotic manipulators: The operational space formulation. *IEEE Journal Int. Conf. On Robotics And Automation*, pages 1924–1928.
- [Keller, 1987] Keller, H. (1987). *Lectures on NUMERICAL METHODS IN BIFURCATION PROBLEMS*. Springer Verlag.
- [Kieffer and Cahill, 1995] Kieffer, J. C. and Cahill, A. J. (1995). Fast pick and place at robot singularities. In *IEEE Int. Conf. on Rob. and Aut.*, pages 2236–2241.

- [Kim et al., 2000] Kim, B.-H., Yi, B.-J., Suh, L. H., and Oh, S.-R. (2000). Stiffness analysis for effective peg-in/out-hole tasks using multi-fingered robot hands. In *Proceedings of the 2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1229–1236. IEEE.
- [Kim et al., 1997] Kim, D., Chung, W., and Youm, Y. (1997). Geometrical approach for the workspace of 6-dof parallel manipulators. In *Proceedings of the 1997 IEEE Conference on Robotics and Automation*, pages 2986–2991, Albuquerque (New Mexico).
- [Klein and Blaho, 1987] Klein, C. A. and Blaho, B. E. (1987). Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 6(2):72–83.
- [Koga, 1994] Koga, Y. (1994). *On Computing Multi-Arm Manipulation Trajectories*. PhD thesis, Stanford.
- [Koivo and Bekey, 1988] Koivo, A. J. and Bekey, G. A. (1988). Report of workshop on coordinated multiple robot manipulators: Planning, control and applications. *IEEE Journal Of Robotics and Automation*, 4(1):91–93.
- [Kokkinis and Paden, 1989] Kokkinis, T. and Paden, B. (1989). Kinetostatic performance limits of cooperating robot manipulators using force-velocity polytopes. pages 151–155.
- [Krishnan and McClamroch, 1993] Krishnan, H. and McClamroch, N. H. (1993). Tracking in control systems described by nonlinear differential-algebraic equations with applications to constrained robot systems. In *Proc. of the American Control Conference*, pages 837–841, San Francisco, California.
- [Kumar and Daoutidis, 1995] Kumar, A. and Daoutidis, P. (1995). Feedback control of nonlinear differential-algebraic-equation systems. *AIChE journal*, 41(3):619–636.
- [Latombe, 1991] Latombe, J.-C. (1991). *Robot Motion Planning*. Kluwer Academic Publishers. ISBN: 0-7923-9129-2.
- [LaValle et al., 1999] LaValle, S. M., Yakey, J. H., and Kavraki, L. E. (1999). A probabilistic roadmap approach for systems with closed kinematic chains. In *Proc. of the 1999 IEEE Int. Conf. On Robotics And Automation*, volume 3, pages 1671–1676.
- [Lee, 1989] Lee, S. (1989). Dual redundant arm configuration optimization with task-oriented dual arm manipulability. *IEEE Transactions On Robotics And Automation*, 5(1):78–97.
- [Ljung, 1999] Ljung, L. (1999). *System Identification. Theory for the user*. Prentice Hall Information and System Sciences Series. Prentice Hall.
- [Loncaric, 1985] Loncaric, J. (1985). *Geometrical Analysis of Compliant Mechanisms in Robotics*. PhD thesis, Harvard University. Advisor: Prof. R. Brockett.
- [Lozano-Pérez, 1983] Lozano-Pérez, T. (1983). Robot programming. In *Proc. of the IEEE*, pages 821–841. Published as Proc. of the IEEE, volume 71, number 7.

- [Luh and Zheng, 1987] Luh, J. and Zheng, Y. (1987). Constrained relations between two coordinated industrial robots for motion control. *The Int. Journal Of Robotics Research*, 6(3):60–70.
- [Marino and Tomei, 1995] Marino, R. and Tomei, P. (1995). *Nonlinear Control Design. Geometric, Adaptive & Robust*. Prentice Hall International (UK) limited.
- [McClamroch, 1986] McClamroch, N. H. (1986). Singular systems of differential equations as dynamic models for constrained robot systems. In *Proc. of the 1986 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 1, pages 21–28, San Francisco, California.
- [McClamroch, 1990] McClamroch, N. H. (1990). Feedback stabilization of control systems described by a class of nonlinear differential-algebraic equations. *Systems & Control Letters*, (15):53–60.
- [Melchiorri, 1993] Melchiorri, C. (1993). Comments on “global task space manipulability ellipsoids for multiple-arm systems”. *IEEE Transactions On Robotics And Automation*, 9(2):232–235.
- [Merlet, 2000] Merlet, J.-P. (2000). *Parallel Robots*, volume 74 of *Solid Mechanics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, USA, 1 edition.
- [Murphy et al., 1990] Murphy, S. H., Wen, J. T., and Saridis, G. (1990). Simulation of cooperating robot manipulators on a mobile platform. In *Proc. of the 1990 IEEE Int. Conf. On Robotics And Automation*, volume 2, pages 1190–1195, Hyatt Regency Cincinnati, Ohio.
- [Murray et al., 1994] Murray, R. M., Li, Z., and Sastry, S. S. (1994). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press.
- [Nakamura, 1991] Nakamura, Y. (1991). *Advanced Robotics, Redundancy and Optimization*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. ISBN 0-201-15848-7.
- [Natale et al., 1999] Natale, C., Siciliano, B., and Villani, L. (1999). Spatial impedance control of redundant manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, Detroit, Michigan*, pages 1788–1793.
- [Nijmeijer and van der Schaft, 1990] Nijmeijer, H. and van der Schaft, A. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag Berlin-New York.
- [O’Brien and Wen, 1999] O’Brien, J. F. and Wen, J. T. (1999). Redundant actuation for improving kinematic manipulability. pages 1520–1525.
- [Osumi and Arai, 1994] Osumi, H. and Arai, T. (1994). Cooperative control between two position-controlled manipulators. In *Proc. of the 1994 IEEE Int. Conf. On Robotics And Automation*, volume 2, pages 1509–1515, San Diego, California.
- [Pai and Leu, 1992] Pai, D. K. and Leu, M. (1992). Genericity and singularities of robot manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(5):545–559.
- [Pantelides, 1988] Pantelides, C. C. (March 1988). The consistent initialization of differential-algebraic systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 9(2):213–231.

- [Park and Kim, 1998] Park, F. and Kim, J. (1998). Manipulability of closed kinematic chains. *Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design*, 120:542–548.
- [Park and Kim, 1999] Park, F. and Kim, J. (1999). Singularity analysis of closed kinematic chains. *Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design*, 121:32–38.
- [Park, 1991] Park, F. C. (1991). *The Optimal Kinematic Design of Mechanisms*. PhD thesis, Harvard University. Advisor: Prof. R. Brockett.
- [Park, 1995] Park, F. C. (1995). Distance metrics on the rigid-body motions with applications to mechanism design. *Transactions of the ASME*, 117:48–54.
- [Park and Bobrow, 1995] Park, F. C. and Bobrow, J. E. (1995). Geometric optimization algorithms for robot kinematic design. *Journal of Robotic Systems*, 12(6):453–463.
- [Park and Brockett, 1994] Park, F. C. and Brockett, R. W. (1994). Kinematic dexterity of robotic mechanisms. *The International Journal Of Robotics Research*, 13(1):1–15.
- [Park and Pack, 1991] Park, F. C. and Pack, D. J. (1991). Motion control using the product-of-exponential kinematic equations. In *Proc. of the 1991 IEEE Int. Conf. On Robotics And Automation*, pages 2204–2209.
- [Parker et al., 1989] Parker, J. K., Khoogar, A. R., and Goldberg, D. E. (1989). Inverse kinematics of redundant robots using genetic algorithms. In *Proc. of the 1989 IEEE Int. Conf. On Robotics And Automation*, pages 271–276, Scottsdale, Arizona.
- [Petzold et al., 1993] Petzold, L. R., Ren, Y., and Maly, T. (1993). Numerical solution of differential-algebraic equations with ill-conditioned constraints. Technical Report 93-59, University of Minnesota, Department of Computer Science.
- [Pieper, 1968] Pieper, D. (1968). *The Kinematics of Manipulators Under Computer Control*. PhD thesis, Stanford University.
- [Proakis and Manolakis, 1992] Proakis, J. G. and Manolakis, D. G. (1992). *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms and Applications*. Macmillan Publishing Company, second edition edition.
- [Qiu et al., 1995] Qiu, C. C., Luh, C.-M., and Haug, E. J. (1995). Dexterous workspaces of manipulators, part iii: Calculation of continuation curves at bifurcation points. *Mech. Struct. & Mach.*, 23(1):115–130.
- [QNX Software Systems Ltd., 1997] QNX Software Systems Ltd. (1997). *QNX Operating System. System Architecture*.
- [Riego and Costa Castelló, 2001] Riego, A. and Costa Castelló, R. (2001). Referència de les llibreries de comunicació amb el robot rx90. Document Tècnic IOC-DT-I-2001-04, Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials, UPC. In catalan. CICYT TAP99-0839.
- [Sattinger and Weaver, 1993] Sattinger, D. and Weaver, O. (1993). *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*, volume 61 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Verlag. ISBN 3-540-96240-9.

- [Schneider and Cannon, 1989] Schneider, S. A. and Cannon, r., R. H. (1989). Object impedance control for control for cooperative manipulation: Theory and experimental results. In *Proc. of the 1989 IEEE Int. Conf. On Robotics And Automation*, volume 2, pages 1076–1083, Scottsdale, Arizona.
- [Schoukens and Pintelon, 1991] Schoukens, J. and Pintelon, R. (1991). *Identification of Linear Systems. A Practical Guideline to Accurate Modeling*. Pergamon Press, first edition edition.
- [Simeon et al., 1994] Simeon, B., Grupp, F., Führer, C., and P.Rentrop (1994). A nonlinear truck model and its treatment as a multibody system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 50:523–532.
- [Sira-Ramirez, 1992a] Sira-Ramirez, H. (1992a). The differential algebraic approach in nonlinear dynamical feedback controlled landing maneuvers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(4):518–524.
- [Sira-Ramirez, 1992b] Sira-Ramirez, H. (1992b). On the sliding mode control of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 19(4):303–312.
- [Sira-Ramirez et al., 1992] Sira-Ramirez, H., Ahmad, S., and Zribi, M. (1992). Dynamical feedback control of robotic manipulators with joint flexibility. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 22(4):736–747.
- [Smith and Gini, 1986] Smith, R. and Gini, M. (1986). Robot tracking and control issues in an intelligent error recovery system. In *Proc. of the 1986 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1070–1075, San Francisco, California.
- [Söderström and Stoica, 1989] Söderström, T. and Stoica, P. (1989). *System Identification*. Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering. Prentice Hall.
- [Stokes and Brockett, 1996] Stokes, A. and Brockett, R. (1996). Dynamics of kinematic chains. *The International Journal of Robotics Research*, 15(4):393–405.
- [Tarn et al., 1995] Tarn, T., De, P., Bejczy, A., and Z.Li (1995). Visualization of dual-arm robot motion space under kinematic constraints. *International Journal of Robotic Research*, 14(1):9–18.
- [The MathWorks, 1992] The MathWorks, I. (1992). *MATLAB Reference Guide*.
- [Tsai and Morgan, 1985] Tsai, L. and Morgan, A. (1985). Solving the kinematics of the most general six-and-five-degree-of-freedom manipulators by continuation methods. *ASME Journal of Mechanisms, Transmission, and Automation in Design*, 107:189–200.
- [Uchiyama, 1979] Uchiyama, M. (1979). A study of computer control of motion of a mechanical arm (1st report, calculation of coordinative motion considering singular points). *Bulletin of the JSME*, 22(173):1640–1647.
- [van den Doel, 1994] van den Doel, C. P. (1994). *The Performance of Robot Manipulation*. Phd. thesis, The Faculty of Graduate Studies. Department of Computer Science, The University of British Columbia.

- [Wang and Wu, 1993] Wang, J. and Wu, J. (1993). Dexterous workspaces of manipulators, part 2: Computational methods. *Mech. Struct. & Mach.*, 21(4):471–506.
- [Wen and Wilfinder, 1998] Wen, J. T. and Wilfinder, L. S. (1998). Kinematic manipulability of general constrained rigid multibody systems. pages 1020–1025.
- [Wenger and Chedmail, 1991] Wenger, P. and Chedmail, P. (1991). On the connectivity of manipulator free workspace. *Journal of Robotics Systems*, 8(6):767–799.
- [Yamakita et al., 1996] Yamakita, M., Jimura, K., and Furuta, K. (1996). Impedance Posture Control of Robot Manipulators Using Euler Parameters. *Proc. of 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan*, pages 1964–1966.
- [Yen and Petzold, 1994] Yen, J. and Petzold, L. R. (1994). On the numerical solution of constrained multibody dynamic systems. Technical Report AHPCRC TR 94-038, University of Minnesota, Department of Computer Science.
- [Yen and Petzold, 1996] Yen, J. and Petzold, L. R. (1996). An efficient newton-type iteration for the numerical solution of highly oscillatory constrained multibody dynamic systems. Technical Report AHPCRC TR 96-001, University of Minnesota, Department of Computer Science.
- [Yim, 1993] Yim, W. (1993). Feedback linearization of differential-algebraic systems and force and position control of manipulators. In *Proc. of the American Control Conference*, pages 837–841, San Francisco, California.
- [Yoshikawa, 1984] Yoshikawa, T. (1984). Analysis and control of robot manipulators with redundancy. In Brady, M. and Paul, R., editors, *Robotics Research*, pages 735–747. Cambridge, MA.
- [Yoshikawa, 1990] Yoshikawa, T. (1990). *Foundations of robotics analysis and control*. MIT Press, USA.
- [Yun, 1993] Yun, X. (1993). Dynamic state feedback control of two cooperative manipulators. *International Journal of Systems Science*, 24(5):915–928.
- [Zhe et al., 1991] Zhe, J. Y., Chen, Q., and Tsuji, S. (1991). Active camera guided manipulation. In *Proc. of the 1991 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 632–638, Sacramento, California.

Índex alfabètic

- SE(3)*, 193
- Error Recovery*, 3
- Fault Tolerance, 4
- body velocity*, 190
- non-grippable objects, 4
- spatial velocity*, 190
- índex de pertorbació*, 205
- índex diferencial*, 205

- espai de treball controlable*, 199

- alignment singularity*, 69
- ALTER*, 136, 168
- angles d'Euler*, 163
- ARX*, 129

- BDF*, 208

- C*, 109
- Christoffel*, 151
- coherència espectral*, 129
- condició de funcionament nominal*, 132
- condició de funcionament robust*, 132
- connexió*, 152, 153
- connexió Riemanniana*, 103
- constant orientation workspace*, 198
- controllably workspace*, 199
- convex*, 134
- Coordinate-Splitting*, 209
- Crimson-Elan*, 136
- critèris d'Akaike*, 129

- DAE*, 102
- DAE lineals*, 203
- DAE solvers*, 101, 206
- DAEs*, 101
- DASSL*, 110, 208
- derivada covariant*, 103, 151
- Dexterous Workspace*, 198
- diferencial-algebraiques*, 101

- dinàmica interna*, 127

- elbow singularity*, 69
- element estructurant*, 41
- Energia cinètica*, 152
- energia cinètica*, 103, 151
- energia potencial*, 103
- equacions de Kuhn-Tucker*, 134
- erosió*, 41
- error*, 149
- Error híbrid*, 150
- Error natural*, 149
- Error recíproc*, 150
- Espai destre*, 198
- Espai Realitzable*, 198
- espectre de potència*, 128
- EULER Z-Y-X*, 154
- Euler Z-Y-Z*, 70
- el·lipsoide de manipulabilitat*, 25

- figura destra*, 40
- figura realitzable*, 42, 58
- força de lligam*, 125
- forces actives*, 126
- forces de lligam*, 207
- forces internes*, 125, 127, 129
- forces internes òptimes*, 130
- forma canònica Standard*, 206
- forma de Hessian*, 205
- forma Triangular*, 206
- formulació de Baumgarte*, 209
- formulació GGL*, 109, 208
- Fortran*, 109
- FPE*, 129
- funció de ponderació*, 132
- funció de sensibilitat*, 132
- funció de sensibilitat complementària*, 132

- geodèsiques*, 151

- hessià*, 153
IAC, 129
impedància, 151
incertesa, 131
Inclusive orientation Workspace, 199
integradors de DAEs, 101, 206
IOC, 91, 136, 168

JR3, 136, 168

Kronecker, 116

Lagrange, 101
Levi-Civita, 151–153
llimona, 86

manipulabilitat, 25
manipulador simbòlic, 110
Maple V R3, 110
MatLabTM, 110
matriu de premsió, 32, 125
matriu de reducció d'índex, 205, 207
matriu de rigidesa, 153
Maximal Workspace, 198
Maximum Length Binary Sequence, 128
MLBS, 128
models no paramètrics, 129
morfologia matemàtica, 41
multiplicadors de Lagrange, 134
mètrica, 103, 193
Mètrica natural, 194

Nominal performance condition, 132
normalització de les dades, 129

ODE solvers, 206
ODE subjacent, 205
Output Error, 129

pencil, 203
PID, 133
POE, 187, 191
polinomi de Hurwitz, 209
Primary Workspace, 198

QNX, 168

Rayleigh, 151

Reachable Workspace, 198
regularització, 209
repartiment de càrrega, 130
Riemanaiana, 193
robots industrials, 163
RX-90, 69, 71, 74, 78, 79, 81, 94, 136, 168

SCARA, 87
Secondary Workspace, 198
sensors de força, 129, 131
Singularitat d'Aliniament, 69
Singularitat de Canell, 69
Singularitat de Colze, 69
singularitats, 153, 154
singulars, 188
spindle, 86
Stokes, 87
SVD, 197

tensor d'inèrcia, 109
Total orientation Workspace, 199

velocitats internes, 126, 127

wrist singurilarity, 69