ANEXO D

Cálculo del cortante basal

CÁLCULO DEL CORTANTE BASAL

El cálculo del cortante basal permite determinar la fuerza lateral total como consecuencia de las fuerzas inercia que se induce a un sistema de *N*–grados de libertad, distribuyéndolo posteriormente a lo largo de las diferentes alturas de la estructura. El cortante basal se utiliza de una manera simplificada en el cálculo del parámetro 3, correspondiente a la resistencia convencional propuesto en el método del índice de vulnerabilidad. Por lo tanto, en este anexo, se describirá el desarrollo de la ecuación del cortante basal.

Utilizando el método de superposición modal para el análisis de la respuesta dinámica de un sistema de *N*–grados de libertad, permitirá calcular el cortante basal o resistencia lateral de un edificio, así como la distribución de este en cada uno de los entrepisos del edificio. La posición desplazada de un sistema de *N*–grados esta definida por las *N* componentes de vector ***y***, sin embargo para propósitos dinámicos, se tienen más ventajas al expresar esta posición en términos de las formas modales de vibración. Estas formas constituyen *N* patrones de desplazamientos independiente cuyas amplitudes pueden servir como coordenadas generalizadas para expresar cualquier grupo de desplazamientos.

La ecuación de movimiento para un sistema de *N*–grados de libertad esta definida por:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{y} = \mathbf{F}_{\mathrm{eq}} \qquad \text{ec. D-1}$$

Considerando que **F**eq, esta definida por:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{eq}} = \mathbf{-M} \cdot \boldsymbol{J} \cdot \ddot{z}_{o} \qquad \text{ec. D-2}$$

En donde

M	es la matriz de masas de la estructura
C	es la matriz de amortiguamiento de la estructura
K	es la matriz de rigideces de la estructura
y	es vector de desplazamiento
J	es un vector unitario
$\ddot{z}_o$	es la aceleración del terreno
$\mathbf{F}_{eq}$	es la fuerza equivalente provocada por la aceleración del terreno, es decir:

La forma de cada uno de los *N* modos de vibración puede ser representado por la matriz Φ;

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n] \qquad \text{ec. D-3}$$

Los vectores ϕ_i son las formas modales no normalizadas. Utilizando estas formas modales se pueden definir la masas generalizadas, como;

$$\phi_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_i = m_i^* \qquad \text{ec. D-4}$$

En donde m_i^* es la masa generalizada y, además se cumplen las propiedades de ortogonalidad lineal para $i \neq j$, es decir,

$$\phi_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_i = 0 \qquad \text{ec. D-5}$$

De la misma manera se utilizan las formas modales ϕ_i para definir la rigidez generalizada, esto es, se multiplica la ec. D-6 por ϕ_i^T, y se sustituye la ec. D-4 en E-7.

$$\mathbf{K} \cdot \phi_i = \omega_i^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_i \qquad \text{ec. D-6}$$

$$\phi_i^T \cdot \mathbf{K} \cdot \phi_i = \omega_i^2 \cdot \phi_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_i \qquad \text{ec. D-7}$$

$$\phi_i^T \cdot \mathbf{K} \cdot \phi_i = \omega_i^2 \cdot m_i^* \qquad \text{ec. D-8}$$

Considerando

$$\omega_i^2 \cdot m_i^* = k_i^* \qquad \text{ec. D-9}$$

Y sustituyéndola en la ec. D-8, se obtiene

$$\phi_i^T \cdot \mathbf{K} \cdot \phi_i = k_i^* \qquad \text{ec. D-10}$$

En donde k_i^*, es la rigidez generalizada que cumplen las propiedades de ortogonalidad lineal para $i \neq j$, es decir:

$$\phi_j^T \cdot \mathbf{K} \cdot \phi_i = 0 \qquad \text{ec. D-11}$$

Finalmente, el amortiguamiento generalizado esta definido por la ec. D-12, cumpliéndose las propiedades de ortogonalidad lineal para $i \neq j$, de acuerdo a la ec. D-13.

$$\phi_i^T \cdot \mathbf{C} \cdot \phi_i = 2 \cdot \zeta_i . \omega_i \cdot m_i^* \qquad \text{ec. D-12}$$

$$\phi_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_i = 0 \qquad \text{ec. D-13}$$

Considerando la ec. D-14, como solución de la ecuación de movimiento, se deriva y sustituye en la ec. D-1.

$$\boldsymbol{y} = \Phi \cdot \boldsymbol{z} \qquad \text{ec. D-14}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \Phi \cdot \dot{\boldsymbol{z}} \qquad \text{ec. D-15}$$

$$\ddot{\boldsymbol{y}} = \Phi \cdot \ddot{\boldsymbol{z}} \qquad \text{ec. D-16}$$

$$\mathbf{M} \cdot \Phi \cdot \ddot{\boldsymbol{z}} + \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \dot{\boldsymbol{z}} + \mathbf{K} \cdot \Phi \cdot \boldsymbol{z} = \mathbf{F}_{\mathrm{eq}} \qquad \text{ec. D-17}$$

Multiplicando la ec. D-17, por ϕ_j^T

$$\phi_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi \cdot \ddot{\boldsymbol{z}} + \phi_j^T \cdot \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \dot{\boldsymbol{z}} + \phi_j^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi \cdot \boldsymbol{z} = \phi_j^T \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{eq}} \qquad \text{ec. D-18}$$

Utilizando la relación:

$$\phi_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi \cdot \boldsymbol{z} = \phi_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_1 \cdot \ddot{z}_1 + \phi_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_2 \cdot \ddot{z}_2 + \ldots + \phi_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_i \cdot \ddot{z}_i \qquad \text{ec. D-19}$$

De acuerdo a la condición de ortogonalidad (ec. D-5), la ec. D-19, se reduce a:

$$\phi_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi \cdot \boldsymbol{z} = \phi_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_i \cdot \ddot{z}_i \qquad \text{ec. D-20}$$

Realizando el mismo proceso para $\phi_j^T \cdot \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot z_i$ y $\phi_j^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi \cdot z_i$ y sustituyendo las ecuaciones D-4, D-10 y D-12 en D-18, se obtiene la siguiente ecuación.

$$m_i^* \cdot \ddot{z}_i + 2 \cdot \zeta_i \cdot \omega_i \cdot m_i^* \cdot \dot{z}_i + k_i^* \cdot z_i = \phi_i^T \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{eq}} \qquad \text{ec. D-21}$$

Dividiendo la ec. D-21 por la masa generalizada, m_i^*:

$$\ddot{z}_i + 2 \cdot \zeta_i \cdot \omega_i \cdot \dot{z}_i + \omega_i^2 \cdot z_i = \frac{\phi_i^T}{m_i^*} \cdot \mathbf{F}_{eq} \qquad \text{ec. D-22}$$

Se realizan operaciones con el termino de la derecha, de acuerdo a:

$$\phi_i^T \cdot \mathbf{F}_{eq} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_n \end{bmatrix} \cdot \ddot{z}_o = \left[\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \phi_{ki} \right] \cdot \ddot{z}_o \qquad \text{ec. D-23}$$

En donde se obtiene el factor de participación modal o factor de excitación sísmica γ_i:

$$\gamma_i = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \phi_{ki} \qquad \text{ec. D-24}$$

Sustituyendo en la ec. D-23

$$\ddot{z}_i + 2 \cdot \zeta_i \cdot \omega_i \cdot \dot{z}_i + \omega_i^2 \cdot z_i = \frac{-\gamma_i}{m_i^*} \ddot{z}_o \qquad \text{ec. D-25}$$

De esta manera se ha transformado la ecuación de movimiento dinámico (ec. D-1), para un sistema lineal amortiguado acoplado de *N*–grados de libertad, en *N* sistemas desacoplados de un grado de libertad.

Resolviendo la ec. D-25, se obtienen los vectores generalizados $z_i(t)$, es decir,

$$\mathbf{Y} = \Phi \cdot z = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \cdot z_i \qquad \text{ec. D-26}$$

ó

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \text{ec. D-27}$$

En donde

$$y_i = \phi_i \cdot z_i \qquad \text{ec. D-28}$$

Para valores de ω_i y γ_i, se obtendrá un valor máximo de desplazamiento $\boldsymbol{y}_{i,max}$ = Sd_i, el cual esta relacionado con los vectores generalizados de la siguiente forma:

$$z_{i,max} = \frac{\gamma_i}{m_i^*} \cdot \mathrm{Sd}_i \qquad \text{ec. D-29}$$

Relacionando esta ecuación con el vector de desplazamientos (ec. D-28)

$$\boldsymbol{y}_i = \phi_i \cdot z_{i,max} \qquad \text{ec. D-30}$$

Se obtiene, el vector de desplazamientos máximos del sistema

$$\boldsymbol{y}_{i,max} = \phi_i \cdot \frac{\gamma_i}{m_i^*} \cdot \mathrm{Sd}_i \qquad \text{ec. D-31}$$

Una vez resuelto el problema dinámico, la fuerza necesaria para producir el valor máximo del desplazamiento y_{max} = Sd, en un sistema de un grado de libertad es:

$$\mathrm{F} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{Sd} \qquad \text{ec. D-32}$$

En donde :

$$\mathrm{k} = \mathrm{m} \cdot \omega_o^2 \qquad \text{ec. D-33}$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{F} = \mathrm{m} \cdot \omega_o^2 \cdot \mathrm{Sd} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{Sa} \qquad \text{ec. D-34}$$

Sustituyendo Sa por:

$$\mathrm{Sa} = \omega_o^2 \cdot \mathrm{Sd} \qquad \text{ec. D-35}$$

Generalizando este procedimiento para un sistema de *N*–grados de libertad:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{y}_{i,max} \qquad \text{ec. D-36}$$

$$\mathbf{F}_i = \frac{\gamma_i}{m_i^*} \cdot \mathrm{Sd}_i \cdot \mathbf{K} \cdot \phi_i \qquad \text{ec. D-37}$$

$$\mathbf{K} \cdot \phi_n = \omega_n^2 \cdot m \cdot \phi_n \qquad \text{ec. D-38}$$

Utilizando la ec. D-38 y sustituyéndola en la ec. D-37, se obtiene:

$$\mathbf{F}_i = \frac{\gamma_i}{m_i^*} \cdot \omega_i^2 \cdot \mathrm{Sd}_i \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_i \qquad \text{ec. D-39}$$

Sustituyendo la relación E-35, en la ec. D-39

$$\mathbf{F}_i = \frac{\gamma_i}{m_i^*} \cdot \mathrm{Sa}_i \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_i \qquad \text{ec. D-40}$$

Ahora se define la fuerza cortante como:

$$\mathbf{V}_{oi} = \boldsymbol{J}^T \cdot \mathbf{F}_i \qquad \text{ec. D-41}$$

Sustituyendo la ec. D-40 en E-41

$$\mathbf{V}_{oi} = \frac{\gamma_i}{m_i^*} \cdot \mathrm{Sa}_i \cdot \boldsymbol{J}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_i \qquad \text{ec. D-42}$$

Desarrollando parte del termino derecho de la ec. D-42

$$\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{m}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{m}_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{m}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \ldots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}_k \cdot \phi_{ki} \qquad \text{ec. D-43}$$

Y la ecuación de la masa generalizada:

$$m_i^* = \phi_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_i = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \ldots & \phi_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{m}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{m}_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{m}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \ldots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}_k \cdot \phi_{ki}^2 \qquad \text{ec. D-44}$$

Se sustituyen las ecuaciones D-43 y D-44 en D-42

$$\mathbf{V}_{oi} = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \phi_{ki}\right] \cdot \mathrm{Sa}_i \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \phi_{ki}\right]}{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \phi_{ki}^2} = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \phi_{ki}\right]^2}{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \phi_{ki}^2} \cdot \mathrm{Sa}_i \qquad \text{ec. D-45}$$

Usando la siguiente relación y sustituyéndola en la ec. D-45,

$$m_k = \frac{\mathbf{W}_k}{\mathrm{g}} \qquad \text{ec. D-46}$$

$$\mathbf{V}_{oi} = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{W}_k \cdot \phi_{ki}\right]^2}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{W}_k \cdot \phi_{ki}^2} \cdot \frac{\mathbf{Sa}_i}{\mathbf{g}} \qquad \text{ec. D-47}$$

Simplificando la ec. D-47, mediante la siguiente ecuación

$$\mathbf{W}_i = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{W}_k \cdot \phi_{ki}\right]^2}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{W}_k \cdot \phi_{ki}^2} \qquad \text{ec. D-48}$$

Se obtiene el cortante basal de la estructura,

$$\mathbf{V}_{oi} = \mathbf{W}_i \cdot \frac{\mathrm{Sa}_i}{\mathrm{g}} \qquad \text{ec. D-49}$$

Donde $\mathbf{W}_i$, es el peso efectivo modal y $\frac{\mathrm{Sa}_i}{\mathrm{g}}$ es el coeficiente sísmico

$$\mathrm{c} = \frac{\mathrm{Sa}_i}{\mathrm{g}} \qquad \text{ec. D-50}$$

$$\mathbf{V}_{oi} = \mathbf{W}_i \cdot \mathrm{c} \qquad \text{ec. D-51}$$

La distribución de las fuerzas en los entrepisos, se realiza de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{f}_{ji} = \frac{\gamma_i}{m_i^*} \cdot \mathrm{Sa}_i \cdot m_j \cdot \phi_{ji} \qquad \text{ec. D-52}$$

Despejando de la ec. D-49, Sa_i:

$$\mathrm{Sa}_i = \frac{\mathbf{V}_{oi} \cdot \mathrm{g}}{\mathbf{W}_i} \qquad \text{ec. D-52}$$

$$\boldsymbol{f}_{ji} = \frac{\gamma_i}{m_i^*} \cdot \frac{\mathbf{V}_{oi}}{\mathbf{W}_i} \cdot \mathbf{g} \cdot m_j \cdot \phi_{ji} \qquad \text{ec. D-52}$$

Desarrollando el termino:

$$\frac{\gamma_i}{m_i^*} \cdot \frac{1}{\mathbf{W}_i} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \phi_{ki}}{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \phi_{ki}^2} \cdot \frac{1}{\frac{m_k}{\mathbf{g}}} = \frac{1}{\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \phi_{ki}}{\mathbf{g}}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{W}_k \cdot \phi_{ki}} \qquad \text{ec. D-52}$$

Con:

$$\mathbf{g} \cdot m_j = \mathbf{W}_j \qquad \text{ec. D-52}$$

Sustituyendo en la ec. D-51

$$\boldsymbol{f}_{ji} = \frac{\mathbf{W}_j \cdot \phi_{ji}}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{W}_k \phi_{ki}} \cdot \mathbf{V}_{oi} \qquad \text{ec. D-52}$$

Considerando el primer modo con un valor máximo de 1, el ángulo que forma el modo con la altura del entrepiso, se calcula mediante la **tan** θ = 1 / H.

$$\phi_{ji} = h_j \cdot \mathbf{tan}\theta = \frac{h_j}{\mathbf{H}} \qquad \text{ec. D-52}$$

$$\boldsymbol{f}_j = \frac{\mathbf{W}_j \cdot \frac{h_j}{\mathbf{H}}}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{W}_k \cdot \frac{h_k}{\mathbf{H}}} \cdot \mathbf{V}_o \qquad \text{ec. D-52}$$

Finalmente se obtiene la fuerza cortante en cada uno de los entrepisos, utilizada en el cálculo del parámetro 3.

$$\boldsymbol{f}_j = \frac{\mathbf{W}_j \cdot h_j}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{W}_k \cdot h_k} \cdot \mathbf{V}_o \qquad \text{ec. D-52}$$