

3

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS A LA

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO.

CAPÍTULO 3

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS **A LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO.**

3.1 PLANTEAMIENTO DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

La utilización de los métodos de identificación de parámetros en Geotecnia viene condicionada, en parte, por la posibilidad de usar modelos complejos con la metodología expuesta en el capítulo anterior. Por tanto es conveniente que esta metodología pueda aplicarse al problema inverso utilizando técnicas similares a las usadas en la resolución del problema directo. En la mayoría de los casos, las condiciones de contorno son tales que no permiten una solución analítica del problema planteado. Por este motivo, los métodos numéricos de cálculo, y en particular, el método de los elementos finitos, han sido muy utilizados en Ingeniería Geotécnica. La versatilidad de este método permite resolver problemas con una geometría totalmente general y, en principio, con cualquier modelo de comportamiento del material.

Las posibilidades de utilización práctica de los métodos de identificación, pasan por tanto por su formulación acoplada al método de los elementos finitos, al menos en lo que a Geotecnia se refiere.

Esta adaptación hace referencia, fundamentalmente, al cálculo de la matriz de sensibilidad (ya que es necesaria para utilizar los algoritmos de Gauss-Newton y Marquardt) usando la discretización y el planteamiento del problema proporcionados por los elementos finitos. La matriz de sensibilidad, A , se definió en el capítulo anterior como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}(\mathbf{p}) \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} \quad [3.1]$$

y debido a que el modelo está definido numéricamente, el cálculo de sus derivadas respecto a los parámetros no será trivial.

Una descripción completa del método de los elementos finitos (MEF) puede verse en el libro ya clásico de Zienkiewicz (1967), y algunos detalles de tipo numérico en Hinton y Owen (1977), Irons y Ahmad (1980) y Bathe (1982). Únicamente a efectos de fijar la notación se indican aquí las ecuaciones básicas del método.

El MEF se basa en discretizar un medio continuo en elementos definidos por nodos. El campo de corrimientos se calcula en cualquier punto interpolando los valores en los nodos, a través de las funciones de forma. Los desplazamientos horizontal y vertical en el interior de un elemento serán, suponiendo que el problema es bidimensional:

$$u = \sum_{i=1}^{n_e} N_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^{n_e} N_i v_i$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & & & N_{ne} & 0 \\ 0 & N_1 & & & 0 & N_{ne} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_{ne} \\ v_{ne} \end{bmatrix}$$

[3.2]

donde n_e es el número de nodos de cada elemento y N la función de forma correspondiente. Las deformaciones y los corrimientos se pueden relacionar utilizando las expresiones clásicas para pequeñas deformaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{x}$$

[3.3]

Obtenidas las deformaciones, las tensiones en el interior del elemento podrán calcularse utilizando la ley constitutiva del material. En el caso más simple será $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$. Para elasticidad bidimensional y en deformación plana, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad [3.4]$$

La ecuación fundamental que representa el equilibrio del elemento, se formula utilizando el principio de los trabajos virtuales, igualando el trabajo de las fuerzas interiores y exteriores. Este principio es totalmente general, y no depende del tipo de material ni exige restricciones sobre la magnitud de las deformaciones. Además tiene una expresión integral, lo que supone cierta ventaja a efectos de calcular el problema numéricamente. La formulación del principio de los trabajos virtuales conduce a una ecuación general, que puede ensamblarse para todos los elementos, del tipo (Zienkiewicz 1967):

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad [3.5]$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez del problema, simétrica y de dimensiones $2n_n \times 2n_n$, con n_n número de nodos de la malla de discretización. \mathbf{x} es el vector de desplazamientos nodales y \mathbf{f} es el vector de fuerzas nodales. La matriz de rigidez tiene una expresión del tipo:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad [3.6]$$

y el vector de fuerzas nodales incluye las fuerzas exteriores puntuales \mathbf{f}_{ext} , de superficie \mathbf{t} y másicas \mathbf{b} , así como las fuerzas originadas por la existencia de tensiones σ_0 o deformaciones ϵ_0 iniciales:

$$f = f_{\text{ext}} + \int_S N^T t \, dS + \int_V N^T b \, dV + \int_V B^T D \varepsilon_0 \, dV - \int_V B^T \sigma_0 \, dV$$

[3.7]

Con este proceso se ha conseguido plantear el problema del equilibrio de un continuo, como un sistema de ecuaciones referidas a los desplazamientos nodales de la malla discretizada.

En algunas ocasiones la matriz de rigidez puede depender de los desplazamientos nodales, por ejemplo si el material tiene una ley de comportamiento no lineal, o si se trata de un problema de grandes desplazamientos. En estos casos la ecuación [3.5] será del tipo:

$$K(x)x = f$$

[3.8]

La versatilidad del MEF y el desarrollo de los procedimientos numéricos de cálculo ha convertido este método en uno de los más populares para resolver problemas complejos (problemas "directos") de ingeniería geotécnica y estructural.

3.2 DETERMINACIÓN NUMÉRICA DE LA MATRIZ DE SENSIBILIDAD.

Las ecuaciones [3.1] representan respectivamente el modelo que relaciona unos parámetros con unos desplazamientos, y la matriz de sensibilidad, requerida para resolver el problema inverso en los términos planteados en el capítulo segundo.

Utilizando la formulación del MEF, \mathbf{x} serán los desplazamientos nodales, algunos de los cuales serán medidos, y el modelo que relaciona desplazamientos y parámetros viene definido por:

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad [3.9]$$

Obsérvese que en esta expresión los parámetros están incluidos en la definición de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas nodales.

El problema que se plantea a continuación es cómo calcular la matriz de sensibilidad :

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} \quad [3.10]$$

La dificultad clásica de calcular estas derivadas utilizando modelos de tipo numérico ha dado lugar a numerosos trabajos sobre el tema, y llevó a algunos autores a utilizar el método de las diferencias finitas, aproximando las derivadas mediante:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p} = \mathbf{p}_k} = \frac{\mathbf{x}(p_i + \Delta p_i) - \mathbf{x}(p_i - \Delta p_i)}{2 \Delta p_i} \Big|_{\mathbf{p} = \mathbf{p}_k} \quad [3.11]$$

Es decir, se calcula la derivada respecto a un parámetro utilizando su propia definición, y manteniendo el resto de los parámetros fijos. [3.11] es la fórmula clásica de las diferencias finitas centrales. En el apartado 2.3.3.2 se han hecho algunas indicaciones sobre esta forma de calcular las derivadas. Este procedimiento presenta dos desventajas importantes:

- Requiere el cálculo de dos problemas directos para estimar la derivada respecto a un parámetro.

- Los errores de redondeo o de truncación pueden ser muy importantes, puesto que, Δp_i debe ser muy pequeño, y la propia división en [3.11] originará errores. Existen criterios (apartado 2.3.3.2) sobre la magnitud aconsejable de Δp_i en función del error relativo del ordenador que se utiliza.

En cualquier caso, los métodos de diferencias finitas constituyen una alternativa para el cálculo de la matriz de sensibilidad, pero siempre que se pueda, es conveniente trabajar con métodos m'as eficientes y más precisos. Por este motivo se ha desarrollado un método de cálculo de estas derivadas partiendo de la ecuación inicial [3.5].

3.3 CÁLCULO DE DERIVADAS. MODELOS LINEALES.

3.3.1 Cálculo De La Matriz De Sensibilidad.

En los intentos de evitar el cálculo de la matriz de sensibilidad usando [3.11], cabe citar el reciente trabajo de Ryu et al (1985) que indica la posibilidad de derivar la ecuación [3.5] en el caso de que el modelo sea lineal, o lo que es lo mismo, la matriz de rigidez dependa exclusivamente de los parámetros, y no dependa de los desplazamientos. La dependencia, sin embargo, de esta matriz con los parámetros puede ser no lineal.

Siguiendo esta propuesta y derivando la ecuación [3.5] respecto a los parámetros, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial p} \left[K x \right] = \frac{\partial f}{\partial p} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial K}{\partial p} x + K \frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial p} \quad [3.12]$$

Como se desea obtener la derivada de los desplazamientos respecto a los parámetros, despejando se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{K}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{x} \right] \quad [3.13]$$

Esta ecuación representa una manera "exacta" de obtener las derivadas buscadas, en el sentido de que no introduce aproximaciones adicionales a las ya utilizadas en el MEF. Por otra parte, su cálculo no exige un esfuerzo muy grande de ordenador (medido en tiempo de CPU), ya que \mathbf{K}^{-1} se calcula en el problema directo en cada iteración. En la práctica la inversa de la matriz de rigidez no se calcula nunca como tal, sino que es más eficiente descomponerla y resolver el sistema en cada caso, de forma que el cálculo de la descomposición sí que se realiza sólo una vez en el problema directo.

En la ecuación [3.13] aparece la derivada de la matriz de rigidez respecto a los parámetros. Esta puede calcularse utilizando la definición:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad [3.14]$$

y derivando:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} = \int_V \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{B} dV \quad [3.15]$$

teniendo en cuenta que la geometría no varía con los parámetros.

Por ejemplo, en el caso de modelo lineal elástico e isótropo, y con la condición de deformación plana, las derivadas de la matriz **D** son:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial E} = \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} (1 - \nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1 - \nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \nu} = \frac{E}{(1 + \nu^2)(1 - 2\nu)^2} \begin{bmatrix} 2\nu(2 - \nu) & 1 + 2\nu^2 & 0 \\ 1 + 2\nu^2 & 2\nu(2 - \nu) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

[3.16]

Por tanto, si el modelo es lineal, las derivadas de la matriz de rigidez respecto a cada parámetro se pueden calcular utilizando las mismas subrutinas de programa que generan la propia matriz de rigidez, sin más que sustituir **D** por $\partial \mathbf{D} / \partial p_i$. El proceso de ensamblaje de todos los elementos será el mismo.

El término de derivada de las fuerzas nodales respecto a los parámetros será habitualmente nulo, si se trata exclusivamente de fuerzas exteriores. En Ingeniería Geotécnica es común, sin embargo, englobar en el término de **f** las fuerzas equivalentes debidas a tensiones iniciales que actúan sobre contornos excavados. En particular, en el caso de excavación de túneles, es habitual plantear el problema directo colocando sobre el contorno de la excavación el efecto de las tensiones iniciales. Estas se suelen

representar como una tensión vertical inicial σ_y^0 y una tensión horizontal inicial $K_0 \sigma_y^0$, donde K_0 es el coeficiente de empuje al reposo, expresado en términos de tensiones totales. Las tensiones equivalentes, normal y tangencial, que deben aplicarse sobre el contorno excavado son (Naylor et al, 1981):

$$\sigma_n = (K_0 \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) \sigma_y^0$$

$$\tau_n = (1 - K_0) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \sigma_y^0$$

donde θ es el ángulo del contorno de la excavación con la horizontal en cada punto. Si se utiliza la nomenclatura del método de los elementos finitos, el vector de fuerzas a aplicar se calcula así:

$$f = - \int_S N^T \sigma^0 dS \quad [3.17]$$

donde $\sigma^0 = (K_0 \sigma_y^0, \sigma_y^0, 0)$. σ_y^0 puede hacerse igual al peso de tierras que hay por encima del punto considerado a falta de más datos sobre las tensiones iniciales. Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial K_0} = - \int_S N^T \frac{\partial \sigma^0}{\partial K_0} dS = - \int_S N^T \sigma^{0*} dS \quad [3.18]$$

donde $\sigma^{0*} = (\sigma_y^0, 0, 0)$.

Por consiguiente, para calcular $\partial f / \partial K_0$ se pueden utilizar las mismas rutinas del programa que calculan las fuerzas nodales debidas a la excavación sin más que sustituir el campo de tensiones iniciales σ^0 por σ^{0*} .

La expresión [3.13] proporciona por tanto un método útil para calcular las derivadas de los desplazamientos respecto a los parámetros, permitiendo generar la matriz de sensibilidad.

Del vector $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{p}$ sólo se tomarán las componentes que correspondan a grados de libertad medidos, para formar la matriz **A** .

Si los movimientos medidos no corresponden a desplazamientos nodales, pero pueden expresarse en función de los mismos:

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad [3.19]$$

donde **d** son los desplazamientos en los puntos de medida, es también inmediato obtener la matriz de sensibilidad, pues:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} \quad [3.20]$$

y $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{p}$ se obtiene tal como se ha descrito en este apartado.

3.3.2 Metodología Del Proceso Iterativo.

Como se ha señalado anteriormente, el cálculo de los parámetros se ha de realizar de forma iterativa, debido al propio método de minimización. Teniendo en cuenta el proceso numérico descrito para calcular las derivadas, el método iterativo a seguir para identificar los parámetros es el siguiente:

a) Definido el problema, se supone un conjunto inicial de parámetros \mathbf{p}_0 .

b) Utilizando el Método de los Elementos Finitos, se evalúa la matriz global de rigidez K .

c) Se resuelve el problema directo, expresable matemáticamente como $\mathbf{x} = K^{-1}\mathbf{f}$.

d) Se calculan las diferencias entre los desplazamientos medidos y calculados $\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{x}^* - \mathbf{x})$. En el caso de que los desplazamientos medidos no se correspondan con determinados desplazamientos nodales, se deberá interpolar en cada elemento.

e) Se calcula la matriz de sensibilidad. Para ello, se utiliza la ecuación [3.13], que requiere el cálculo de las derivadas de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas nodales. La matriz K^{-1} ya se ha calculado en el punto c) (en realidad se ha calculado su descomposición). De nuevo si los puntos de medida no coinciden con nodos de la malla, debe usarse la ecuación [3.20] para evaluar la matriz de sensibilidad.

f) Hallar $\Delta \mathbf{p}$ usando el algoritmo de minimización expuesto en 2.4.6 (Gauss-Newton) o en 2.4.7 (Marquardt): $\Delta \mathbf{p} = H \Delta \mathbf{x}$.

g) Calcular el nuevo valor de los parámetros $\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \Delta \mathbf{p}_k$.

h) Comprobar la convergencia. Si $\|\Delta \mathbf{p}\|$ es todavía grande o el valor de la función objetivo J no es estacionario, se vuelve a la etapa b).

El procedimiento descrito puede acoplarse a cualquier programa general de elementos finitos realizando sólo algunas modificaciones. Es interesante observar que cada iteración

requiere la resolución de un problema directo y la realización de una serie de operaciones matriciales que, en principio, son relativamente rápidas, aunque esto depende del cálculo de las matrices derivadas.

Finalmente, con el fin de comprobar la bondad de la formulación acoplada MEF - Problema inverso, descrita en este capítulo, se utilizó el ejemplo teórico desarrollado en el apartado 2.5. La malla de elementos finitos construida con este fin se representa en la figura 3.1. Debido a la simetría del problema, sólo se discretizó la cuarta parte de la geometría.

Siguiendo la metodología descrita, y utilizando la formulación del MEF, para material elástico y deformación plana, se identificaron el módulo de elasticidad y el de Poisson prácticamente coincidiendo con la resolución teórica presentada, reproduciendo los caminos del proceso iterativo representados en la figura 2.7. Las pequeñas diferencias se situaron en el umbral de los errores de redondeo del ordenador.

Para el análisis con elementos finitos hay que tener en cuenta que los desplazamientos que se consideran medidos en este ejemplo son radiales, mientras que los calculados numéricamente con el MEF están referidos a ejes cartesianos. La función que los relaciona puede obtenerse fácilmente por consideraciones geométricas (figura 2.6):

$$u_r = \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) \cos \left[\arctan \left(\frac{v}{u} \right) - \theta \right] \quad [3.21]$$

donde u y v son el desplazamiento horizontal y vertical

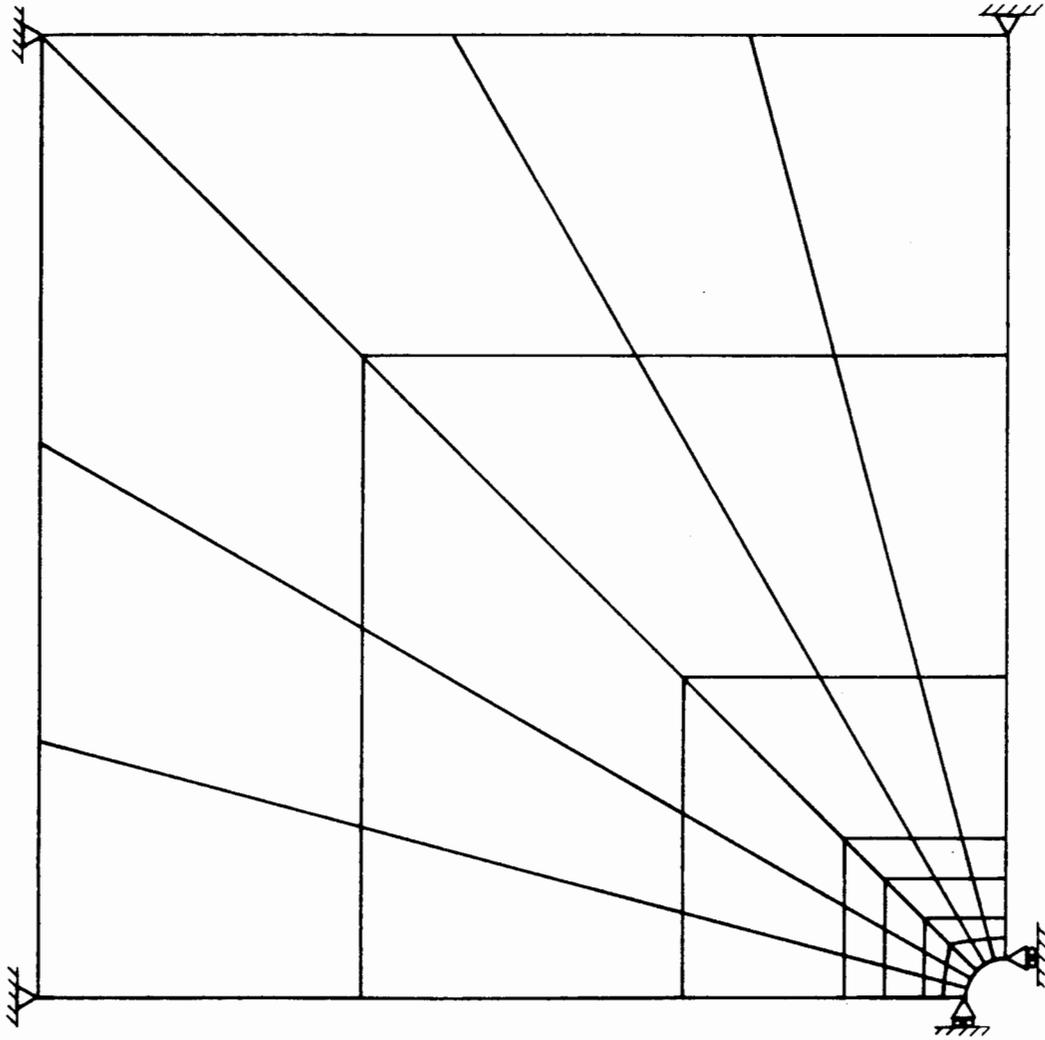


Figura 3.1. Malla de elementos finitos utilizada para comprobar el ejemplo teórico del túnel circular. Sólo se utilizó, por simetría, la cuarta parte de la geometría.

respectivamente. Esta expresión debe usarse en los pasos d) y e) del proceso iterativo descrito anteriormente. En un caso se usa para poder calcular las diferencias entre desplazamientos medidos y calculados, y en el otro se usa la ecuación [3.20] para calcular la matriz de sensibilidad. En este ejemplo, si se miden movimientos radiales, la matriz de sensibilidad será:

$$\frac{\partial u_r}{\partial p} = \frac{\partial u_r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p}$$

donde $\partial u_r / \partial x$ se calcula directamente a partir de [3.21].

3.4 CÁLCULO DE DERIVADAS. MODELOS NO LINEALES.

En el apartado anterior se han fijado las bases para la resolución del problema inverso en Ingeniería Geotécnica utilizando el método de los elementos finitos. La formulación indicada puede aplicarse, con pocos cambios, a otros problemas de ingeniería civil. Hay sin embargo una limitación importante al desarrollo efectuado, y es la condición que se ha tomado de modelo de comportamiento del material lineal. En Geotecnia esta condición puede ser una limitación importante en muchos problemas. Sin embargo, el considerar modelos de comportamiento no lineales conduce a formulaciones mucho más complejas, no siempre resolubles. En Elementos Finitos el estudio de problemas no lineales ha sido tradicionalmente uno de los campos con más dificultades de desarrollo (Irons y Ahmad, 1980). En los problemas de identificación de parámetros o de optimización, Ryu et al (1985) han puesto de relieve las dificultades de un cálculo eficiente de

la matriz de sensibilidad en casos no lineales. El problema básico radica en el hecho de que la matriz de rigidez en el caso no lineal depende no sólo de los parámetros, sino también de las tensiones, y por tanto de los desplazamientos.

Aquí se desarrolla un procedimiento para calcular las derivadas cuando el modelo es no lineal, y además tiene una expresión unívoca (no incremental) entre tensiones y deformaciones. En este supuesto, puede escribirse que la ecuación general del MEF es:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad [3.22]$$

Como la matriz de rigidez depende de los parámetros y de los desplazamientos que a su vez también dependen de los parámetros, el cálculo de la derivada será

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\mathbf{K}\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{f}$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{x} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \quad [3.23]$$

Interesa despejar $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{p}$. Puede comprobarse que [3.23] es equivalente a:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} * \mathbf{x} + \mathbf{K} \right] \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{x} \quad [3.24]$$

donde "*" representa un producto contraído definido de la siguiente forma, usando la notación de índices repetidos para las sumas:

$$\mathbf{K}' = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} * \mathbf{x} \quad K'_{ik} = \frac{\partial K_{ij}}{\partial x_k} x_j \quad [3.25]$$

La expresión definitiva para las derivadas de los desplazamientos respecto a los parámetros es:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = - \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} + \mathbf{K} \right]^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}$$

$(2n_n \times 1) \quad (2n_n \times 2n_n) \quad (2n_n \times 2n_n) \quad (2n_n \times 1)$
[3.26]

donde se ha indicado las dimensiones de cada matriz, teniendo en cuenta que hay 2 grados de libertad por nodo, y n_n nodos en la malla. Este desarrollo es correcto si se utiliza la matriz de rigidez secante y los desplazamientos y tensiones acumulados (figura 3.2). Por otra parte, los términos de [3.26] pueden calcularse así:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} = \int_V \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{B} dV \qquad \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = \int_V \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_i} \mathbf{B} dV$$

[3.27]

ya que la matriz \mathbf{B} no depende de los desplazamientos ni de los parámetros, y sólo de la geometría del problema.

El cálculo de $\partial \mathbf{D} / \partial \mathbf{p}$ puede realizarse directamente, puesto que la matriz \mathbf{D} suele depender de forma explícita de ellos. La determinación de $\partial \mathbf{D} / \partial x_i$ es sin embargo más compleja, ya que habitualmente \mathbf{D} depende del nivel de tensiones, y de forma indirecta de los desplazamientos. De manera que, en general, se deberá calcular:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}$$

[3.28]

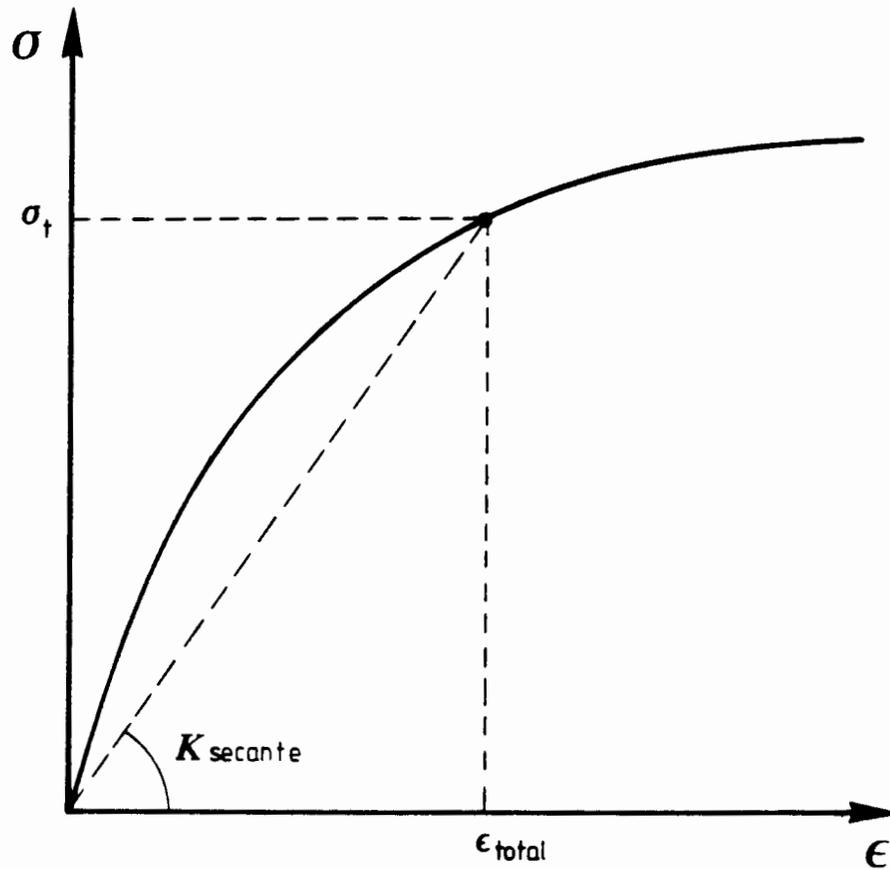


Figura 3.2. Esquema simplificado de la relación tensión - deformación de un material no lineal.

Para agilizar el cálculo convendría tener en cuenta que muchos de los términos de $\partial K/\partial x_i$ son nulos. Concretamente, son nulos los términos correspondientes a grados de libertad que no están en el mismo elemento que el grado de libertad x_i . Esta condición se refleja en el valor de $\partial \varepsilon/\partial x_i$ en [3.28].

Una simple observación de [3.26] muestra la complejidad adicional que el modelo no lineal introduce en el esquema de cálculo "exacto" de las derivadas de los desplazamientos respecto a los parámetros. La matriz a invertir para este cálculo es:

$$\left[\frac{\partial K}{\partial x} * x + K \right]$$

Esta matriz ya no coincide con la del problema directo, por lo que debe invertirse en cada iteración. Además, es una matriz no simétrica, aunque tiene una estructura en banda. Su ancho de banda coincide con el de la matriz K , por lo que, puede utilizarse una estrategia de almacenamiento reducido. Los detalles de programación correspondientes al problema no lineal se indican en el Apéndice.

3.4.1 Metodología Del Proceso Iterativo.

La metodología del proceso iterativo, en el caso de que se trate de un problema no lineal, es similar a la indicada en el apartado 3.3.2 para problemas lineales, teniendo en cuenta las dificultades adicionales que la no linealidad introduce en el proceso.

Estos pasos serán los siguientes:

a) Una vez definido el problema, se parte de un conjunto inicial de parámetros p_0 .

b) Calcular los desplazamientos nodales solución del problema directo no lineal con el MEF, resolviendo $K(x)x = f$. Esta operación, por sí misma, requiere un proceso iterativo, actualizando la matriz de rigidez en cada paso, al depender del nivel de tensiones.

c) Calcular las diferencias entre los desplazamientos medidos y calculados $\Delta x = (x^* - x)$.

d) Calcular las matrices derivadas de K respecto a cada uno de los parámetros (tantas como parámetros haya): $\partial K / \partial p$.

e) Calcular la matriz $K' = (\partial K / \partial x)^* x + K$, tal como se ha indicado anteriormente en [3.25].

f) Invertir la matriz $(K' + K)$ (en la práctica se realiza su descomposición).

g) Resolver [3.26], utilizando las expresiones [3.27], para calcular la matriz de sensibilidad.

h) Determinada la matriz de sensibilidad puede hallarse el valor de Δp , usando el algoritmo de minimización explicado en el apartado 2.4.4, según la expresión: $\Delta p = H \Delta x$.

i) Calcular el nuevo valor de los parámetros $p_{k+1} = p_k + \Delta p_k$.

j) Comprobar si se produce convergencia. Si $\|\Delta p\|$ es excesivamente grande o el valor de la función objetivo J no es estable, se continua en la etapa b).

Se observa que el algoritmo de resolución para el problema no lineal requiere mucho más tiempo de ordenador que para el caso lineal. Uno de los factores que contribuye a ello en mayor medida, es la inversión de la matriz $(K' + K)$. A pesar de esta circunstancia, el método de cálculo propuesto para evaluar la matriz de sensibilidad sigue siendo competitivo frente a otras alternativas, tales como el cálculo mediante diferencias finitas, que exigiría resolver un sistema no lineal para cada parámetro.

En el capítulo sexto se indican algunos valores concretos de tiempos de cálculo que corroboran esta afirmación.

La utilización del Método de los Elementos Finitos conjuntamente con los algoritmos de resolución del problema inverso, queda definida en las ecuaciones anteriores. La viabilidad de estos planteamientos se defiende en los capítulos posteriores, presentando para ello ejemplos de aplicación.