

4

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA INVERSO EN GEOTECNIA.

CAPÍTULO 4

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA INVERSO EN GEOTECNIA.

4.1 INTRODUCCIÓN.

En los capítulos precedentes se ha desarrollado la metodología clásica para la identificación de parámetros en problemas generales, y se ha formulado un esquema numérico de resolución utilizando el método de los elementos finitos. En este capítulo se trata de establecer las bases para la formulación del problema inverso en aplicaciones típicas de Ingeniería Geotécnica.

La importancia de la identificación de parámetros en Mecánica del Suelo y de Rocas se ha comentado anteriormente. En Geomecánica es a menudo imposible obtener muestras de terreno representativas de la estructura del conjunto del subsuelo. Factores diversos como la macrofábrica, el tamaño de las partículas, la heterogeneidad del terreno y la alteración y relajación de tensiones en el proceso de extracción de la muestra, obligan con frecuencia a considerar los resultados de laboratorio sólo de forma orientativa. Existen además algunos parámetros (como por ejemplo K_0 , que define las tensiones iniciales) cuya determinación es muy difícil, incluso con ensayos "in situ", y para los que los métodos de identificación

ofrecen mejores posibilidades. En estas condiciones, las medidas de campo adquieren un mayor protagonismo, puesto que junto con las modernas técnicas de identificación, presentan nuevas perspectivas en la determinación de los parámetros que reflejan la respuesta "in situ" del terreno.

Bajo este punto de vista, se plantea un problema típico en Geotecnia en los siguientes términos: Se dispone de una serie de medidas de campo relativas a una actuación humana sobre el terreno (por ejemplo, una excavación, o cualquier tipo de obra). Se supone conocido el modelo de comportamiento del material o materiales afectados, y la geometría del problema. Con estos supuestos, se trata de obtener los parámetros del modelo escogido que "mejor" corresponden a las medidas realizadas.

El problema así definido es un ejemplo típico de "problema inverso", planteable en términos matemáticos utilizando las formulaciones desarrolladas en apartados anteriores. Sin embargo, los aspectos físicos del caso y las peculiaridades del mismo permiten presentar una formulación particular para problemas "geomecánicos".

El ejemplo de aplicación utilizado en este trabajo es el de la excavación de un túnel. Esta es una de las obras de tipo geotécnico en la que con frecuencia se realizan medidas de los movimientos del terreno. En la actualidad, los medios de instrumentación disponibles permiten medir con precisión aceptable los desplazamientos del terreno originados por la excavación de un túnel. Por motivos prácticos, es preciso distinguir, en este tipo

de obras, entre movimientos horizontales (medibles con inclinómetros) y movimientos verticales (medibles con extensómetros o con micrómetros). Cada uno de estos aparatos proporciona un error de medida diferente e independiente, que se deberá considerar en el proceso de identificación.

La formulación general que se presenta en este capítulo es aplicable a este caso, y tiene en cuenta el hecho de que las medidas se pueden realizar con varios instrumentos diferentes, considerando el error cometido con cada uno de ellos y admitiendo las posibles correlaciones entre medidas de un mismo instrumento.

Como criterio de identificación se ha escogido el de máxima verosimilitud, por los motivos indicados en el capítulo segundo. Este criterio admite una generalización en el caso de que se disponga de información previa sobre los parámetros, y por esta razón la formulación que se desarrolla también considera esta posibilidad.

La importancia de conocer el error de las medidas se pone de manifiesto en varios ejemplos teóricos, por lo que se incluye en la formulación la posibilidad de que se tome la estructura de error (en términos de varianzas de las medidas) como un parámetro más a identificar. Por otra parte se demuestra la influencia que una adecuada elección del modelo ejerce sobre el proceso de identificación.

El capítulo finaliza con la determinación de las matrices de covarianza de los errores de las observaciones para algunos instrumentos usados habitualmente en Geotecnia en la medida de desplazamientos. Estas matrices, que aparecen de modo natural en

la formulación propuesta, se utilizan en algunos de los ejemplos teóricos mencionados.

4.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA EN TÉRMINOS ESTADÍSTICOS.

Planteado el problema físico, el método matemático de resolución debe escogerse entre las diferentes opciones presentadas en el capítulo segundo. El criterio de identificación escogido, de máxima verosimilitud, es suficientemente general (engloba al de mínimos cuadrados), permite un tratamiento estadístico coherente de la información y es aplicable a los problemas que nos ocupan.

En cuanto al método numérico de resolución, se ha elegido el de Gauss-Newton con la modificación de Levenberg-Marquardt y con otras modificaciones particulares propuestas para modelos no lineales (capítulo sexto). La característica básica de los métodos escogidos es que requieren el cálculo de las derivadas de las variables de estado medidas (en este caso desplazamientos) respecto a los parámetros a identificar. Por otra parte, en el capítulo tercero se ha propuesto una metodología de cálculo de estas derivadas utilizando el método de los elementos finitos, usado también para resolver el problema directo.

Se dispone entonces de todos los elementos necesarios para expresar el criterio de máxima verosimilitud en los problemas en estudio. La función de verosimilitud, definida en el capítulo segundo, tiene la expresión [2.5]:

$$L(\mathbf{p}) = KP(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = KP(\mathbf{x})P(\mathbf{p})$$

[4.1]

donde K es una constante, y el resto de las variables siguen la nomenclatura utilizada en el capítulo segundo. Se vio que maximizar [4.1] era equivalente a minimizar la función

$$S = -2 \ln L(\mathbf{p}) \quad [4.2]$$

que con las hipótesis realizadas sobre normalidad de las distribuciones de probabilidad de los errores, proporciona la función objetivo a minimizar [2.10] :

$$S = (\Delta \mathbf{x})^T \mathbf{C}_x^{-1} (\Delta \mathbf{x}) + (\Delta \mathbf{p}^o)^T \mathbf{C}_p^{0-1} (\Delta \mathbf{p}^o) + \ln |\mathbf{C}_x| + \ln |\mathbf{C}_p^o| \quad [4.3]$$

A efectos de la formulación del problema, es útil considerar las matrices de covarianza compuestas de dos factores:

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_x)_i &= \sigma_i^2 (\mathbf{E}_x)_i \\ (\mathbf{C}_p^o)_j &= \sigma_j^2 (\mathbf{E}_p^o)_j \end{aligned} \quad [4.4]$$

donde σ_i^2 , σ_j^2 son valores que representan una varianza media de las medidas o de los parámetros estimados inicialmente y $(\mathbf{E}_x)_i$, $(\mathbf{E}_p^o)_j$ son matrices que representan la estructura de error de las medidas o de los parámetros. Estas matrices son fijas para cada problema: en el caso de las medidas, $(\mathbf{E}_x)_i$ dependerá sólo del tipo de instrumento utilizado y no del valor de la medida. Es precisamente la técnica de medida empleada la que introduce unas determinadas correlaciones en los errores de medida. Por supuesto, si éstos son independientes entre sí dicha matriz es la identidad.

Ya se ha indicado anteriormente la conveniencia de considerar la estructura de error de las medidas de campo disponibles. Como éstas se llevan a cabo con instrumentos muy variados, será preciso agruparlas en función del instrumento utilizado para obtenerlas. Matemáticamente esta distinción puede considerarse tomando una matriz de covarianzas diferente para cada conjunto de medidas relacionadas entre sí.

De la misma forma se puede considerar que, en un caso general en el que se dispone de cierta información previa sobre los parámetros, algunos de ellos están relacionados por una matriz de covarianzas, de manera que C_p^0 representa la relación existente "a priori" entre los parámetros.

En estas condiciones, suponiendo que se disponen de "r" instrumentos de medida independientes, y que existen "s" grupos de parámetros relacionados entre sí, la expresión [4.3], utilizando las relaciones [4.4], se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 S = & \sum_{i=1}^r (\Delta \mathbf{x})^T \frac{(\mathbf{E}_{\mathbf{x}})_i^{-1}}{\sigma_i^2} (\Delta \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^s (\Delta \mathbf{p}^0)^T \frac{(\mathbf{E}_{\mathbf{p}}^0)_j^{-1}}{\sigma_j^2} (\Delta \mathbf{p}) + \\
 & + \sum_{i=1}^r n_i \ln(\sigma_i^2) + \sum_{j=1}^s n_j \ln(\sigma_j^2) + \sum_{i=1}^r \ln|(\mathbf{E}_{\mathbf{x}})_i| + \sum_{j=1}^s \ln|(\mathbf{E}_{\mathbf{p}}^0)_j|
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Con esta nomenclatura, los dos últimos términos de [4.5] son constantes para cada problema, y a efectos de minimización no influyen. Por ello la función objetivo definitiva se puede expresar en la forma:

$$\begin{aligned}
S = & \sum_{i=1}^r (\Delta \mathbf{x})^T \frac{(\mathbf{E}_x)_i^{-1}}{\sigma_i^2} (\Delta \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^s (\Delta \mathbf{p}^o)^T \frac{(\mathbf{E}_p^o)_j^{-1}}{\sigma_j^2} (\Delta \mathbf{p}) + \\
& + \sum_{i=1}^r n_i \ln(\sigma_i^2) + \sum_{j=1}^s n_j \ln(\sigma_j^2)
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

donde se cumple

$$\sum_{i=1}^r n_i = m \quad \sum_{j=1}^s n_j = p
\tag{4.7}$$

siendo "m" y "p" el número total de medidas y de parámetros respectivamente.

La expresión [4.7] representa la función a minimizar buscada para el problema planteado. Incluye los sumandos debidos a la información previa de los parámetros, y la estructura de error tanto de medidas como de los parámetros.

4.3 APLICACIÓN A UN PROBLEMA DE EXCAVACIÓN DE TÚNELES.

4.3.1 Metodología Utilizada.

A continuación se presenta un ejemplo ilustrativo de la metodología expuesta, relativo a la excavación de un túnel en la que se realizan medidas de desplazamientos del terreno. A efectos de mostrar la formulación y los detalles teóricos de la misma, se ha desarrollado un ejemplo teórico en el que las supuestas medidas corresponden a los desplazamientos proporcionados por un cálculo en elementos finitos para unos parámetros conocidos. El proceso de identificación debe conducir de manera natural a la obtención de dichos parámetros.

Se ha seleccionado la geometría utilizada por Mair (1979) y Taylor (1984) que reproduce el prototipo de un ensayo en modelo reducido en el aparato centrífugo de Cambridge.

En la excavación de túneles en suelos, los movimientos verticales más importantes se producen, en general, sobre su clave, y los desplazamientos horizontales mayores se generan en la zona de hastiales. Por este motivo la disposición típica de la instrumentación para estos casos consiste en extensómetros sobre la clave (E) e inclinómetros en la zona del hastial (I) (figura 4.1).

El material se supone elástico, homogéneo e isótropo en el modelo, y se trata el problema en deformación plana. Las tensiones iniciales verticales corresponden al peso de tierras, y las horizontales se obtienen a partir de la tensión vertical, mediante el coeficiente de empuje al reposo, trabajando en tensiones totales.

A efectos de demostrar la viabilidad de la metodología propuesta, la adopción de este tipo de modelo es válida. El estudio de este problema en el caso de modelos no lineales se realiza en el capítulo sexto. Hay que tener en cuenta, además, que la linealidad entre tensiones y deformaciones (modelo elástico) no implica necesariamente linealidad entre variables de estado medidas (desplazamientos) y parámetros.

Los parámetros del modelo que se desean identificar son el módulo de elasticidad y el coeficiente de empuje al reposo. Se supone fijo el módulo de Poisson, e igual a 0.49, intentando representar el caso de carga o descarga no drenada (material casi

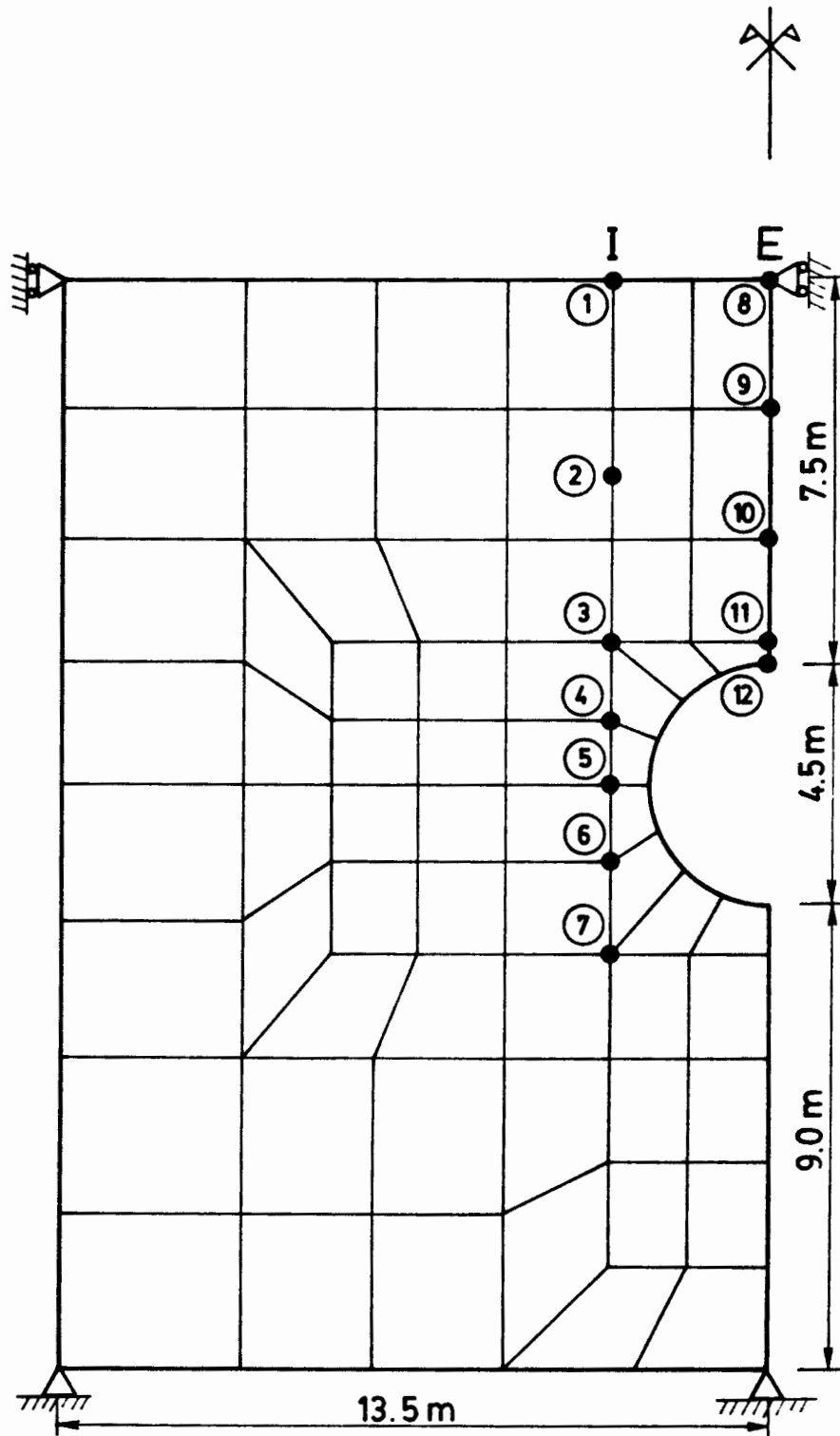


Figura 4.1. Malla de elementos finitos utilizada para desarrollar diferentes ejemplos teóricos sobre un túnel circular. La geometría coincide con la utilizada por Mair (1979) y Taylor (1984) para representar un ensayo en modelo reducido en el aparato centrífugo de Cambridge. Se indican los doce puntos considerados como puntos de medida.

incompresible). La ventaja de escoger sólo dos parámetros para identificar radica en que la función objetivo a minimizar puede ser dibujada, y permite ilustrar el proceso de identificación. Por otra parte, se supone en este ejemplo que no se dispone de información previa sobre los parámetros del modelo. La geometría utilizada se ha representado en la figura 4.1, con las condiciones de contorno consideradas. Debido a la simetría sólo se ha modelado la mitad de la geometría.

El camino a seguir para resolver un problema inverso de tipo geotécnico, y en concreto, el caso planteado, es el siguiente:

a) Definición de la malla de elementos finitos que modela el problema directo (figura 4.1). Por conveniencia, se ha hecho coincidir los puntos de medida con nodos de la malla, si bien no existe conceptualmente ningún problema si esto no es así. En el capítulo tercero se han comentado las pequeñas variaciones que se introducirían en el cálculo en el caso de que no se cumpliera esta condición.

b) Resolución del problema directo. Para ello se supone un conjunto de parámetros iniciales, punto de partida del algoritmo de búsqueda del mínimo definido por el criterio de identificación de máxima verosimilitud. Se utiliza el método de los elementos finitos, calculando por tanto la matriz de rigidez del problema y resolviendo en la forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} \quad [4.8]$$

El vector de fuerzas exteriores está formado por las fuerzas introducidas sobre el contorno de la excavación y calculadas a

partir de las tensiones iniciales (apartado 3.3.1).

c) Cálculo de las diferencias entre desplazamientos medidos y los calculados con los parámetros en el problema directo b):

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{x}^* - \mathbf{x})$$

d) Cálculo de las derivadas de la matriz de rigidez respecto a los parámetros, siguiendo la metodología desarrollada en el capítulo tercero. Los algoritmos propuestos requieren el cálculo de las derivadas de las variables medidas respecto a los parámetros, que a su vez dependen de las derivadas de la matriz de rigidez respecto a los parámetros, calculables según [3.15]. Las expresiones [3.16] indican la forma de calcular la derivada de la matriz de rigidez respecto al módulo de elasticidad y al módulo de Poisson, y las ecuaciones [3.17] y [3.18] lo indican para la derivación respecto al coeficiente K_0 .

En el ejemplo propuesto este cálculo es relativamente sencillo: sólo es necesario calcular las derivadas de las matrices al principio del proceso iterativo. Como la matriz de rigidez depende linealmente de E , y el vector de fuerzas exteriores también depende de forma lineal de K_0 , las derivadas correspondientes son constantes en todo el proceso.

Sin embargo, en un caso general (por ejemplo, con modelos de material no lineales, o en el supuesto de que se identifique el módulo de Poisson), la relación entre matriz de rigidez y parámetros no es lineal, y estas matrices deben evaluarse en cada iteración.

e) Cálculo de la matriz de sensibilidad, de derivadas de los

desplazamientos respecto a los parámetros $A = \partial x / \partial p$,
 usando la expresión [3.13] :

$$\frac{\partial x}{\partial p} = K^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial K}{\partial p} x \right]$$

que da lugar a:

$$\frac{\partial x}{\partial E} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial E} x \qquad \frac{\partial x}{\partial K_0} = K^{-1} \frac{\partial f}{\partial K_0}$$

puesto que identificamos el módulo de elasticidad y el coeficiente de empuje al reposo. En este caso se utilizan las circunstancias de que el vector de fuerzas nodales no depende del módulo de elasticidad, y de que la matriz de rigidez no depende del coeficiente de empuje al reposo.

f) Utilización del algoritmo de Gauss-Newton-Marquardt, presentado en el capítulo segundo ([2.88] y [2.89]), para obtener el vector incremento de parámetros a aplicar a los parámetros de la iteración:

$$p_{k+1} = p_k + \Delta p_k$$

$$\Delta p_k = (A_k^T C_x^{-1} A_k + \mu_k I)^{-1} A_k^T C_x^{-1} \Delta x_k$$

donde se utiliza la matriz de covarianza de los errores de las medidas. Si estos errores son independientes entre sí, esta matriz adopta la forma $\sigma^2 I$ donde σ^2 es la varianza de las medidas. En ese caso la denominada "matriz de error" es la identidad.

g) Comprobación de convergencia. En cada iteración comprobar si el incremento de parámetros es muy pequeño, o la función objetivo, evaluada como norma del vector de diferencias calculado en c), es estable. Si no se cumplen las condiciones de convergencia, se

vuelve al punto b) con los nuevos parámetros obtenidos en la iteración. Si se ha producido la convergencia, puede determinarse la matriz de covarianzas "a posteriori" de los parámetros, que proporciona las varianzas de los parámetros identificados:

$$C_p = (A^T C_x^{-1} A)^{-1}$$

También puede evaluarse la matriz densidad de información y los valores y vectores propios de la descomposición singular explicada en el apartado 2.4.4.

Esta es la metodología propuesta para este tipo de ejemplos, pero puede adaptarse sin dificultad a cualquier otro problema de tipo geotécnico, resoluble por elementos finitos, en el que se midan desplazamientos.

4.3.2 Ejemplo Teórico.

Utilizando la malla de elementos finitos definida en la figura 4.1 y las características del problema antes expuestas, se procedió a la identificación de los dos parámetros: E y Ko, sin considerar información previa sobre sus valores. Se ha supuesto que los desplazamientos obtenidos eran los correspondientes al problema directo definido por E= 10 MPa y Ko =1 , que en este caso son:

Movimientos horizontales.

Punto 1.	0.3157 cm	Punto 2.	0.556 cm
Punto 3.	2.038 cm	Punto 4.	3.550 cm
Punto 5.	4.550 cm	Punto 6.	3.92 cm
Punto 7.	2.427 cm		

Movimientos verticales.

Punto 8. -3.598 cm	Punto 9. -3.905 cm
Punto 10. -3.905 cm	Punto 11. -6.327 cm
Punto 12. -7.048 cm	

[4.9]

El proceso de identificación deberá conducir a los parámetros $E = 10 \text{ MPa}$, $K_0 = 1$, partiendo de las medidas anteriores.

Si se supone, en primer lugar, que las medidas son exactas, la función objetivo, en el mínimo, deberá ser nula, salvo errores de redondeo. Por otra parte, la matriz de covarianzas de las medidas será la identidad, al considerar las medidas independientes. En apartados posteriores se verá la influencia de utilizar una matriz de covarianzas diferente de la identidad en el proceso de identificación. Para este ejemplo se tomaron 12 medidas en los puntos señalados en la figura 4.1, de las que 7 son horizontales y 5 verticales. La función objetivo "J", equivale en este caso al primer término de la función "S" definida en [4.3], ya que no se considera información previa y la matriz de covarianzas es fija en todo el proceso:

$$J = (\Delta \mathbf{x})^T \mathbf{C}_x^{-1} (\Delta \mathbf{x}) \quad [4.10]$$

Como el número de parámetros escogidos es sólo de dos, la función objetivo "J" admite una representación gráfica simple que ilustra muy bien el proceso iterativo. En la figura 4.2 se representa mediante curvas de nivel esta función. Cada punto de la función objetivo requiere el cálculo de un problema directo con los parámetros E y K_0 correspondientes, para evaluar la norma del vector de diferencias entre desplazamientos medidos y calculados.

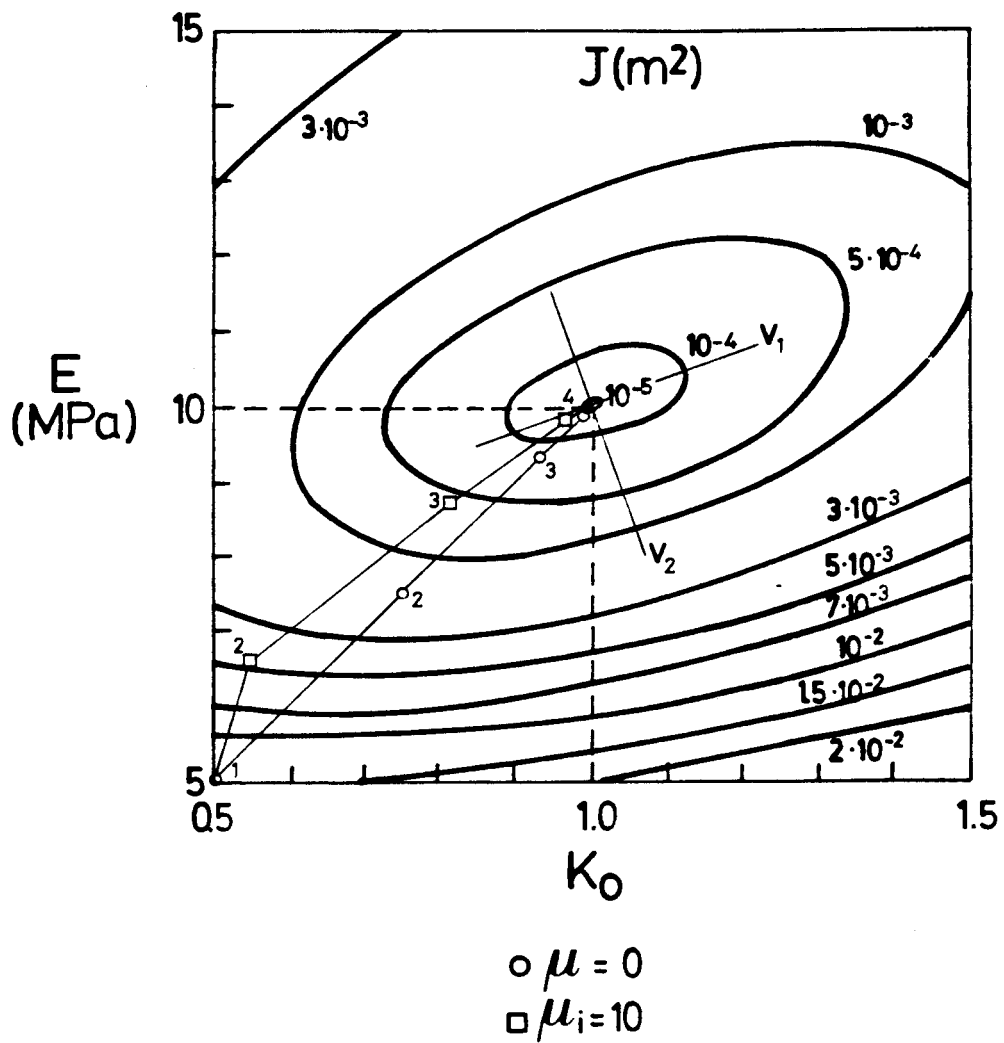


Figura 4.2. Representación de la función objetivo correspondiente al ejemplo en estudio (12 medidas), en las cercanías del mínimo. Se indican los caminos seguidos por dos procesos iterativos dependiendo del parámetro de Marquardt inicial elegido. También se señalan las direcciones de máxima y mínima curvatura en el mínimo.

En principio, la forma de la función objetivo dibujada en la figura 4.2, hace suponer que no surgirán problemas de identificación, puesto que el mínimo está bien definido, y la función se asemeja a un paraboloides.

En la misma figura 4.2 se ha representado el camino seguido en el proceso iterativo. Puede observarse que con pocas iteraciones se llega al mínimo, partiendo del punto inicial: $E=5$ MPa y $K_0=0.5$. Se han dibujado dos caminos partiendo de ese punto, uno de ellos con el parámetro inicial de Marquardt nulo y el otro con dicho parámetro igual a 10. Recuérdese (capítulo segundo) que al aumentar μ , el vector de avance se acerca a la dirección del gradiente y en sentido descendente, y su módulo se reduce. Esta tendencia puede observarse directamente en la figura 4.2.

En la figura 4.3 se representa la variación de la función objetivo correspondiente a este problema con el número de iteraciones, comparando el método de Gauss-Newton y el de Marquardt. El parámetro de Marquardt decrece de forma monótona debido a que el valor de la función objetivo en cada paso también decrece. Al ser las medidas exactas, el valor de J tiende a cero (salvo los errores de redondeo propios del ordenador).

La figura 4.4 representa la evolución de cada uno de los parámetros con las iteraciones. En este problema no hay diferencias sustanciales en la velocidad de convergencia, entre los dos métodos utilizados. Es preciso señalar que este ejemplo teórico corresponde a un caso sencillo, sin problemas de identificabilidad, y que por tanto el algoritmo de Gauss-Newton ha sido adecuado (no se ha requerido la utilización del algoritmo de Marquardt).

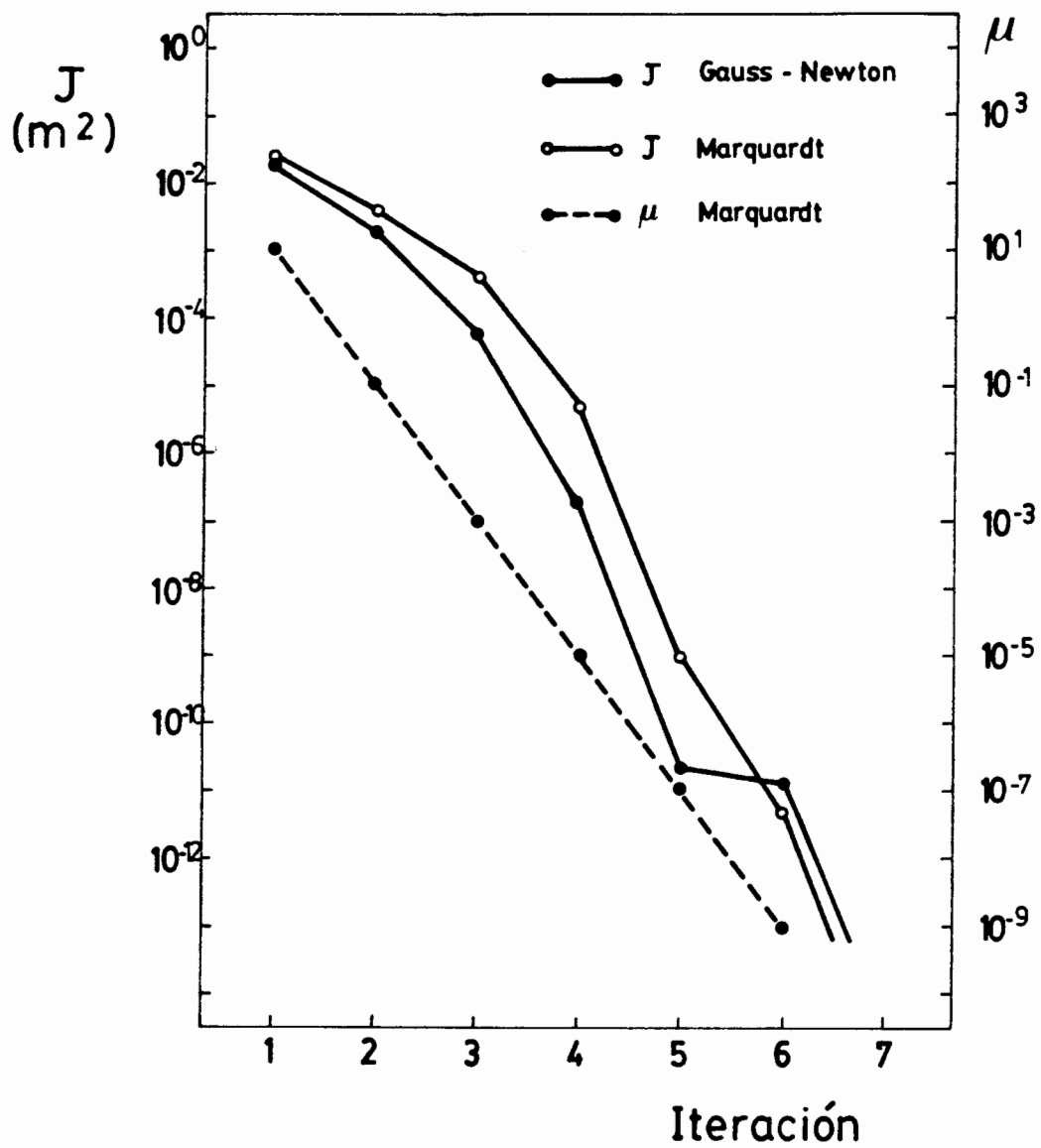


Figura 4.3. Variación de la función objetivo con las iteraciones para el algoritmo de Gauss-Newton y de Marquardt. Para este último caso se indica también la variación de μ .

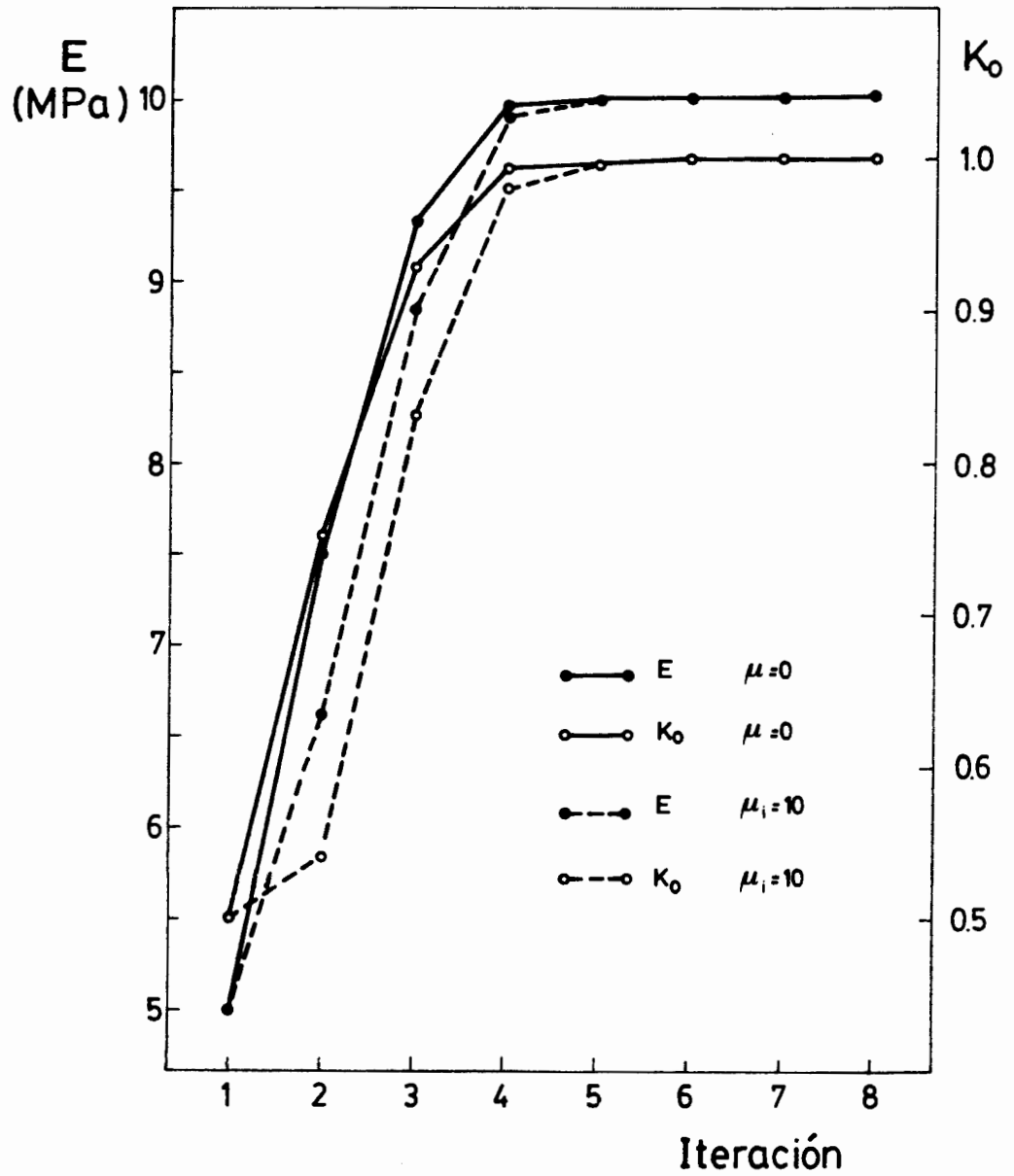


Figura 4.4. Variación de los parámetros a identificar con las iteraciones, utilizando el algoritmo de Gauss-Newton ($\mu = 0$) y el de Marquardt para el ejemplo en estudio.

Por último, se han dibujado algunas de las filas de la matriz densidad de información, definida en el apartado 2.4.4. En la figura 4.5 pueden observarse las filas correspondientes a dos puntos de medidas horizontales y dos verticales. Se comprueba que unas y otras son poco dependientes entre sí: una variación en la medida número 5, por ejemplo, influye poco sobre las medidas verticales. Esto implica que los grupos de medidas horizontales y verticales son relativamente independientes y que por tanto hacen falta los dos tipos de medidas para identificar bien los parámetros del modelo. Por otra parte, la figura 4.5 permite suponer que los resultados variarían probablemente muy poco si se hubieran empleado sólo los puntos 5 y 12 (y alguno más para obtener redundancia, si se consideraran errores en las medidas). La utilidad del estudio de esta matriz radica en que refleja la estructura del modelo e indica la interrelación entre las medidas de desplazamientos en unos puntos y en otros.

El método de identificación propuesto permite obtener también información acerca de la "calidad" de la solución encontrada. En este caso, teniendo en cuenta que la matriz de covarianzas de las medidas es proporcional a la identidad, la matriz de covarianzas de los parámetros ("a posteriori") que se obtiene en el mínimo es:

$$C_p = (A^T C_x^{-1} A)^{-1} = \begin{bmatrix} 6702 & 568 \\ 568 & 198 \end{bmatrix} \sigma^2 \quad [4.11]$$

utilizando las unidades MPa y m. La diagonal principal de esta matriz proporciona directamente las varianzas de los parámetros identificados. Obsérvese que las varianzas de las medidas ya se introducen en el cálculo a través de C_x . Si las medidas son

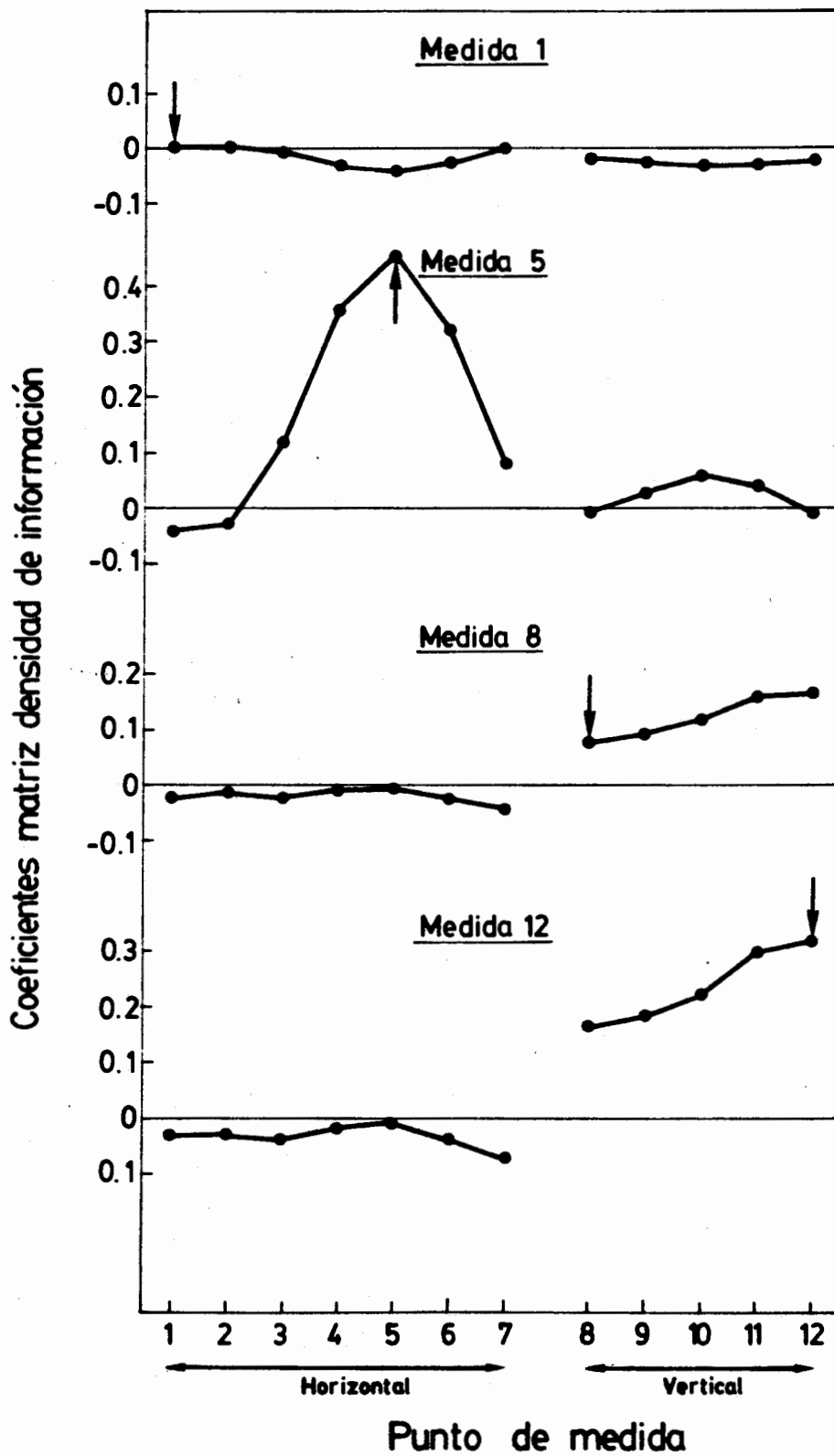


Figura 4.5. Representación gráfica de los valores de algunas de las filas de la matriz densidad de información en el mínimo de la función objetivo, para el ejemplo en estudio.

exactas, su varianza es nula y la matriz C_p también.

La matriz [4.11], que define las varianzas de los parámetros, es consecuencia de la forma de la función objetivo "J" en el mínimo. En efecto, en ese punto J puede aproximarse por un paraboloides de ecuación

$$J(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{G} \mathbf{p} \quad [4.12]$$

(ecuación [2.21]), donde \mathbf{G} es el hessiano de la función objetivo, expresable en la forma (apartado 2.4):

$$\mathbf{G} = 2 \mathbf{A}^T \mathbf{C}_x^{-1} \mathbf{A} \quad [4.13]$$

La expresión [2.25] muestra que los vectores propios correspondientes a los valores propios de \mathbf{G} en el mínimo, son las direcciones de máxima y mínima curvatura de un paraboloides tangente a la función objetivo. Las varianzas de los parámetros son, por tanto, proporcionales a los inversos de estos valores propios (figura 2.2). Recuérdese que el número de condición es el cociente entre el valor propio máximo y mínimo, y que cuanto mayor es su valor, más aumentan unas varianzas respecto a otras y más difícil se suele hacer el proceso iterativo. Geométricamente, el aumento del número de condición indica una gran excentricidad en la forma del paraboloides en el mínimo.

Por otra parte, si los vectores propios tienen la misma orientación que los ejes coordenados, la matriz de covarianzas [4.13] es diagonal.

El estudio de la función objetivo en el mínimo proporciona los siguientes resultados:

	E(MPa)	Ko
Vectores propios:	(-0.937, 0.349)	
	(0.349, 0.937)	
Valores propios:	6751.8	148.7
Número de condición:		45

Estos vectores propios definen las direcciones de los ejes principales de la elipse dibujada en el entorno del mínimo en la figura 4.2. El número de condición es relativamente bajo, lo que asegura un proceso iterativo sin problemas. No se pueden dar valores generales del número de condición que impliquen una convergencia fácil, aunque para problemas de este tipo, según la experiencia adquirida, y mayores de 10^6 reflejan una gran excentricidad y permiten esperar una alta posibilidad de dificultades en la convergencia.

En el supuesto de que los parámetros a identificar sean dimensionalmente distintos y sus valores numéricos muy diferentes, es aconsejable realizar un cambio de dimensiones de forma que sus valores numéricos sean similares, facilitándose la interpretación de los resultados. En este caso, Ko es adimensional, y el módulo de elasticidad puede medirse en unidades de 10 MPa, con lo que el mínimo se sitúa en el punto Ko=1, E=1.

El ejemplo analizado permite estudiar la influencia de otros factores en la identificabilidad del problema. Por ejemplo, puede estudiarse qué ocurre cuando se aumenta el número de medidas, o

cómo influye la estructura de las matrices de covarianza en el proceso de identificación.

4.3.3 Influencia Del Número De Medidas.

Es de esperar que si se aumenta el número de medidas, se facilitará la resolución del problema. En efecto, si se consideran, además de las medidas 1 a 12 de la figura 4.1, las medidas 13 a 24 señaladas en la figura 4.6 (15 horizontales y 9 verticales), la función objetivo que se obtiene, representada en la figura 4.7, discrimina mejor sus puntos del mínimo. Este mínimo corresponde, por supuesto, a los valores $E=10$ MPa, $K_0=1$, tomados como verdaderos para estos ejemplos. Es lógico suponer que la mayor o menor mejora en la forma de la función J dependerá del tipo de medidas que se añadan. En este caso, las 12 medidas adicionales no representan cualitativamente una mejora en el tipo de información que proporcionan, puesto que pueden considerarse "redundantes" respecto a las 12 medidas iniciales.

Si se decide añadir a las 24 medidas anteriores, los movimientos horizontales y verticales de los nodos del contorno de la excavación del túnel, se obtienen un total de 55 medidas. En este caso es de esperar que los valores de los desplazamientos del contorno discriminen más la función objetivo, en el sentido de que proporcionan información adicional cualitativamente diferente a las 24 medidas anteriores. En la figura 4.8 se ha representado la función objetivo correspondiente a este caso. La función J presenta en general mayores pendientes, y permite una identificación más rápida. En dicha figura se ha representado el

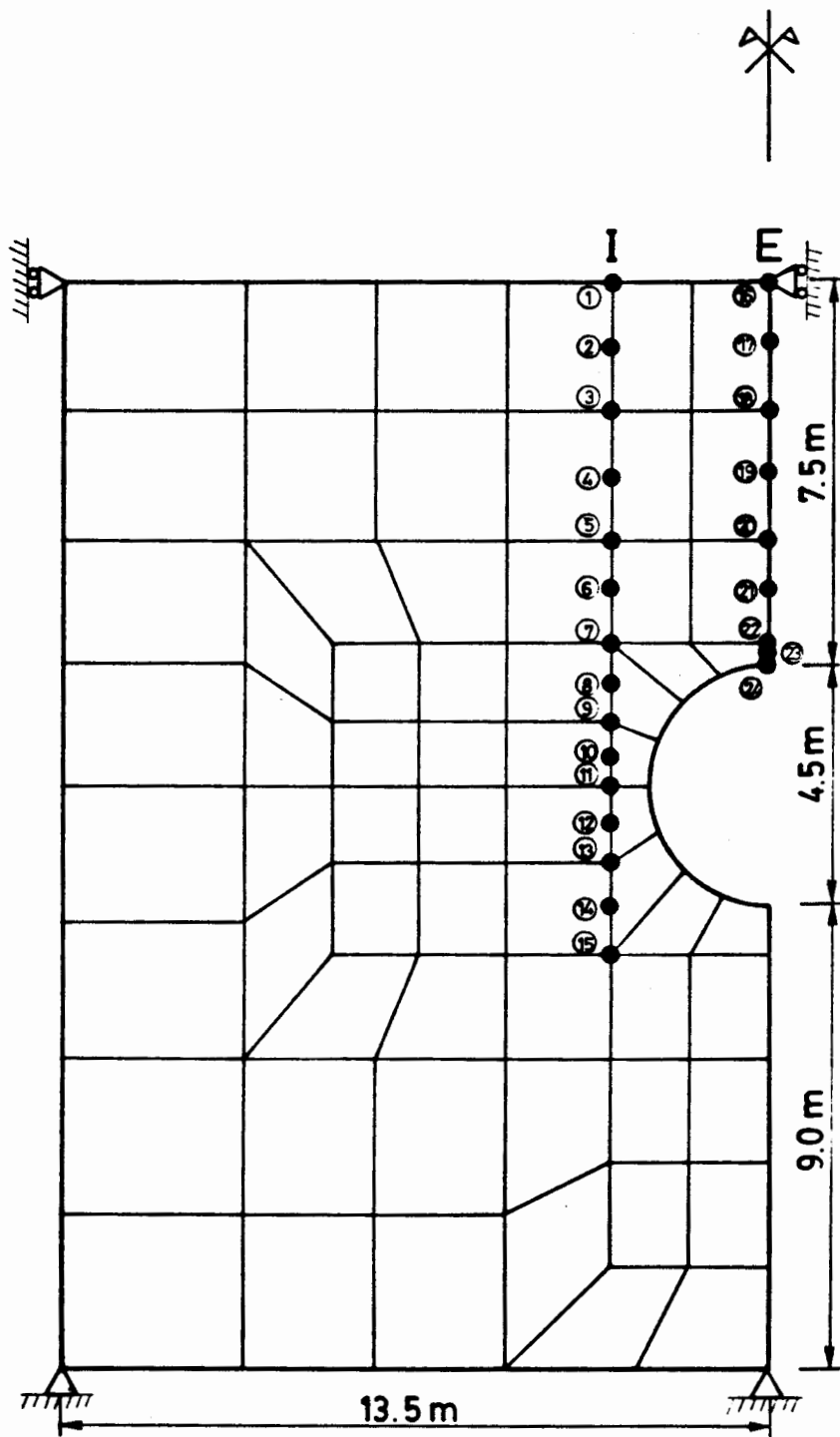


Figura 4.6. Situación de los puntos de medida en la malla de elementos finitos, en los ejemplos en los que el número de medidas era de 24.

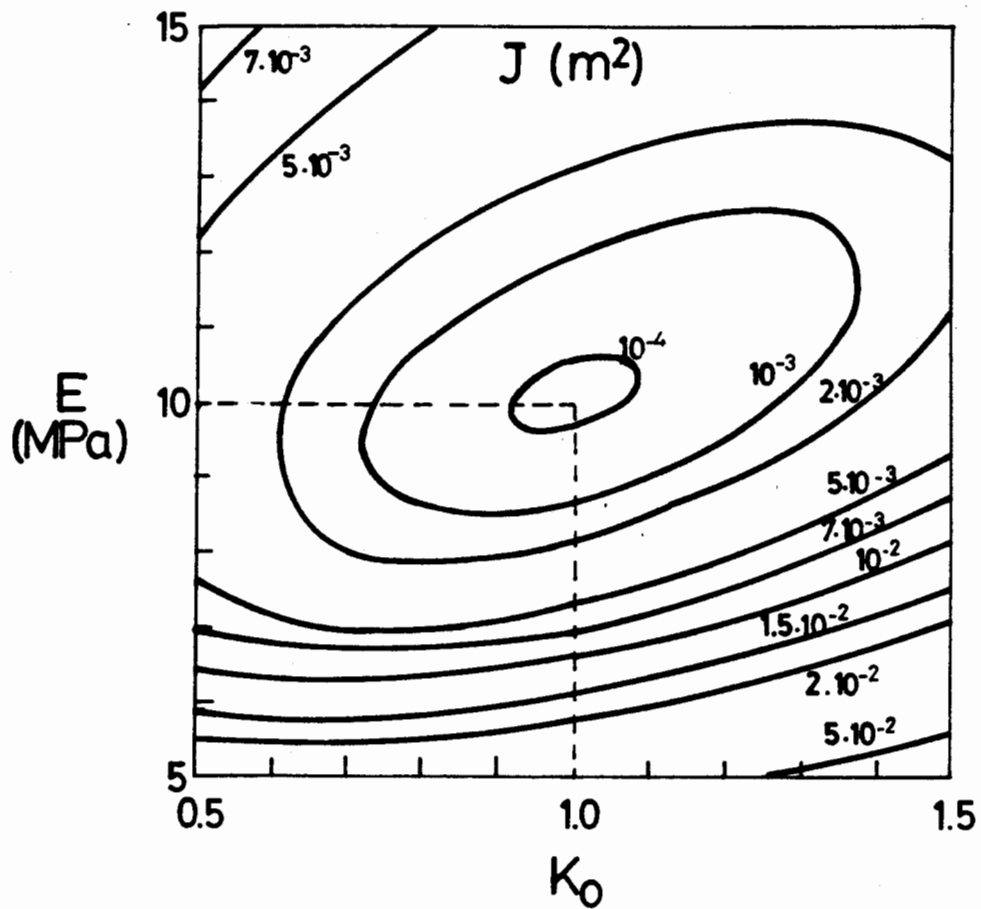


Figura 4.7. Representación gráfica de la función objetivo en la zona del mínimo, para el ejemplo propuesto con 24 medidas.

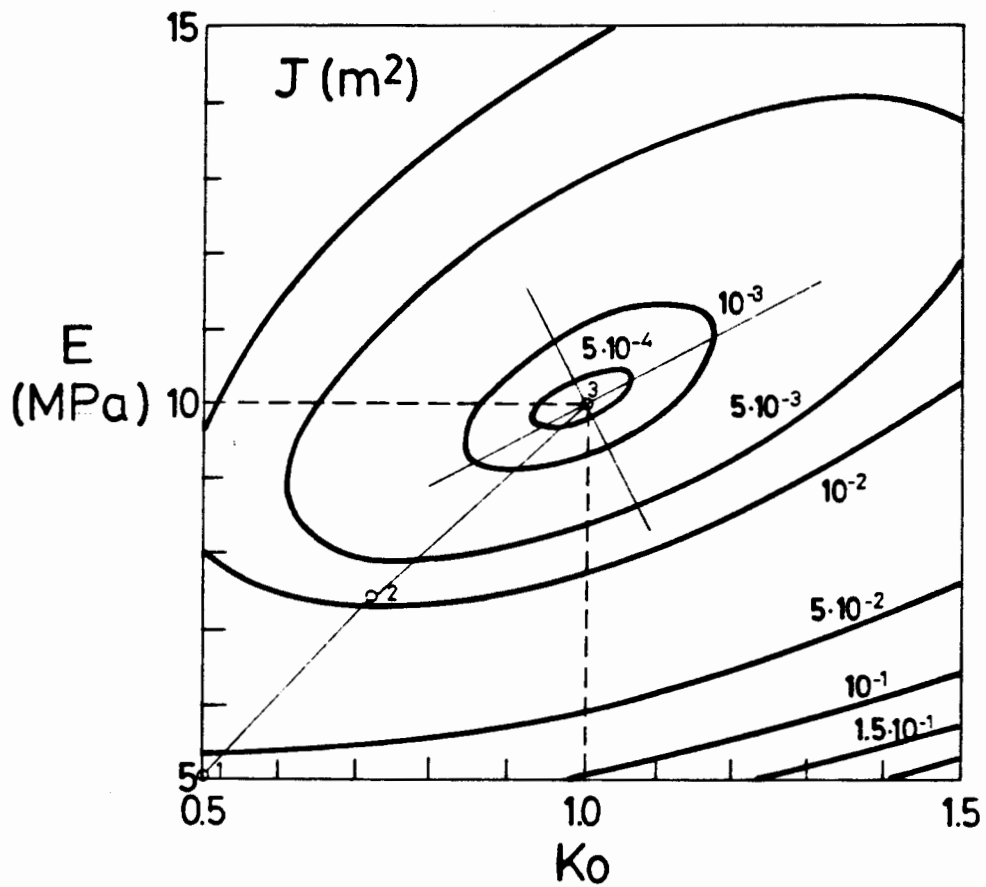


Figura 4.8. Representación gráfica de la función objetivo en las cercanías del mínimo, para el ejemplo propuesto, en el caso de que se tomen 55 medidas

camino seguido por el algoritmo de identificación de Marquardt, comenzando desde el punto $E=5$ MPa y $K_0 = 0.5$. En tres iteraciones se sitúa prácticamente en el mínimo.

Los tres ejemplos estudiados (12, 24 y 55 medidas), permiten presentar en forma comparativa en la figura 4.9 (columnas 1, 2 y 3) las características del mínimo de la función objetivo identificado en cada caso. Obsérvese que disminuyen las varianzas de los parámetros identificados y el número de condición al aumentar el número de medidas. En general puede concluirse que añadir medidas es en cualquier caso positivo, si bien hay que tener en cuenta que el "valor" o la "calidad" de las medidas añadidas tiene influencia en la identificabilidad del problema.

4.3.4 Influencia De Las Matrices De Covarianza.

Otros factores, además del número de medidas, pueden alterar la forma de la función objetivo. En particular, las diferentes formas que puede adoptar la matriz de covarianzas puede alterar mucho la identificabilidad de nuestro problema.

En efecto, no sólo la cantidad de medidas es importante: la "calidad" de las mismas puede ser un factor decisivo en la resolución del problema inverso. La forma matemática de expresar esta "calidad" es a través de los valores de las componentes de las matrices de covarianza.

	1	2	3	4	5
	12 medidas	24 medidas	55 medidas	24 medidas	24 medidas
μ	$\begin{matrix} 1 \\ \sigma^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ \sigma^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ \sigma^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/16 \\ 6.625 \sigma^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 16/1 \\ 10.375 \sigma^2 \end{matrix}$
Vectores propios	(-0.937 , 0.349)	(-0.927 , 0.375)	(-0.885 , 0.464)	(-0.707 , -0.707)	(-0.999 , -0.012)
	(0.349 , 0.937)	(0.375 , 0.926)	(0.464 , 0.885)	(0.707 , 0.707)	(-0.012 , 0.999)
Valores propios	6751.8	148.7	2512	114	820.8
	148.7	2512	114	820.8	47.3
N. de condición	45	22	17	201.4	3.8
Matriz de covarianzas de los parámetros Cp/σ_m^2 (σ en m)	$\begin{bmatrix} 6702 & 568 \\ 568 & 198 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3769 & 310 \\ 310 & 102 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1665 & 161 \\ 161 & 39 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6451 & 584 \\ 584 & 64 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 392 & -12 \\ -12 & 104 \end{bmatrix}$
[E (Mpa), Ko]					

Figura 4.9. Tabla comparativa de las diferentes identificaciones realizadas variando el número y las varianzas de las medidas. Ejemplo teórico.

Supóngase de nuevo que se utiliza el ejemplo con 24 medidas, 15 de ellas horizontales y 9 verticales. Cada tipo de medidas requiere la utilización de un aparato y una técnica distinta, por lo que sus varianzas serán diferentes. Si por ejemplo se supone que las medidas verticales tienen 16 veces más varianza que las horizontales (4 veces más desviación típica), el proceso de identificación concederá poca importancia a las medidas verticales frente a las horizontales. En el límite, la importancia de las medidas verticales será prácticamente nula, y el propio método intentará identificar parámetros con las medidas horizontales solamente. Obsérvese que la función objetivo en su expresión más simple (sin información previa de parámetros) está definida por

$$J = (\Delta \mathbf{x})^T \mathbf{C}_x^{-1} (\Delta \mathbf{x}) \quad [4.14]$$

y la matriz de covarianzas inversa puede interpretarse como una matriz de pesos para las medidas. Por ejemplo, si las medidas horizontales y verticales son independientes entre sí, (entre grupos y dentro de cada grupo de medidas), la matriz de covarianzas será del tipo:

$$(\mathbf{C}_x) = \begin{pmatrix} \sigma_I^2 & & & & 0 \\ & \sigma_I^2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \sigma_E^2 & \\ 0 & & & & \sigma_E^2 \end{pmatrix}$$

y la matriz inversa que aparece en [4.14] dará un peso menor a las medidas con mayor varianza.

El efecto de que las varianzas horizontales y verticales sean mayores o menores puede ilustrarse también mediante el dibujo de la función objetivo. Así, en la figura 4.10 se ha dibujado esta función, J , utilizando 24 medidas exactas correspondientes a $E=10$ MPa y $K_0=1$ y tomando la varianza de las medidas verticales 16 veces la de las horizontales. En este caso prácticamente no se da peso a las medidas verticales frente a las horizontales en la identificación, pero a pesar de ello se ha conseguido identificar sin problemas, lo que indica que las medidas horizontales son suficientes para identificar el módulo E y el coeficiente de empuje al reposo. Esto coincide con el comportamiento del modelo elástico para este rango de parámetros y con esta geometría.

En dicha figura se ha representado también un proceso iterativo posible, comenzando, al igual que en los casos anteriores, desde el punto $E=5$ MPa y $K_0=0.5$, con un parámetro inicial de Marquardt de 1.0. En cinco iteraciones se llega al mínimo, que por otra parte proporciona la matriz de covarianzas de los parámetros siguiente:

$$C_p = (A^T C_x^{-1} A)^{-1} = \begin{bmatrix} 42737 & 3866 \\ 3866 & 427 \end{bmatrix} \sigma^2 \quad [4.15]$$

donde hay que tener en cuenta que la matriz de covarianzas de las medidas que se ha usado es:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 16 & \\ 0 & & & & 16 \end{pmatrix}$$

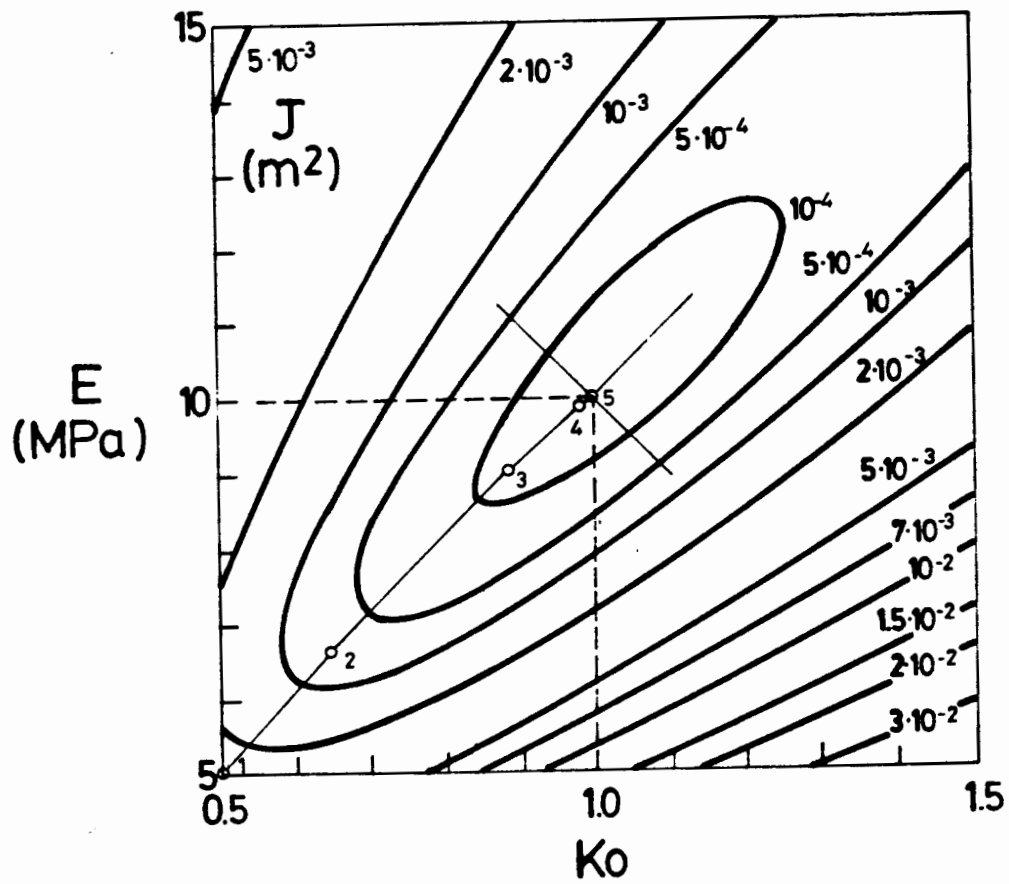


Figura 4.10. Representación gráfica de la función objetivo, cerca del mínimo, en el caso de que se tomen 24 medidas (15 horizontales y 9 verticales), y las medidas verticales tengan 16 veces más varianza que las horizontales.

y para poder comparar con matrices de covarianzas anteriores, hay que considerar que C_x interviene multiplicando en C_p , y el resultado numérico depende de la matriz C_x utilizada. A efectos únicamente comparativos pueden dividirse las componentes de la matriz [4.15] por el valor:

$$\sigma_m^2 = \frac{n_E (\sigma_E^2) + n_I (\sigma_I^2)}{n_E + n_I} \quad [4.16]$$

que pondera el número de medidas verticales y horizontales por su respectivas varianzas. Para este ejemplo se obtiene $\sigma_m^2 = 6.625 \sigma^2$, y la matriz de covarianzas normalizada queda:

$$(C_p) / \sigma_m^2 = \begin{bmatrix} 6451 & 584 \\ 584 & 64 \end{bmatrix} \sigma^2$$

y sus términos son comparables a los obtenidos en el apartado anterior. Los vectores propios que se obtienen en el mínimo indican la dirección del valle aproximadamente a 45 grados en la figura 4.10.

Si se toma el ejemplo contrario, es decir, se supone que las medidas horizontales tienen 16 veces más varianza que las verticales, el problema sólo dependerá de éstas. Manteniendo las medidas "exactas" se ha obtenido para este caso la función objetivo dibujada en la figura 4.11. Como puede verse, el mínimo se presenta en un valle paralelo al eje de K_0 , si bien la apariencia de la función objetivo depende de la escala utilizada para cada parámetro en el dibujo. Por este motivo en la figura 4.9 (columnas 4 y 5) se muestran los valores numéricos normalizados de valores y vectores propios y de matrices de covarianzas en el mínimo para

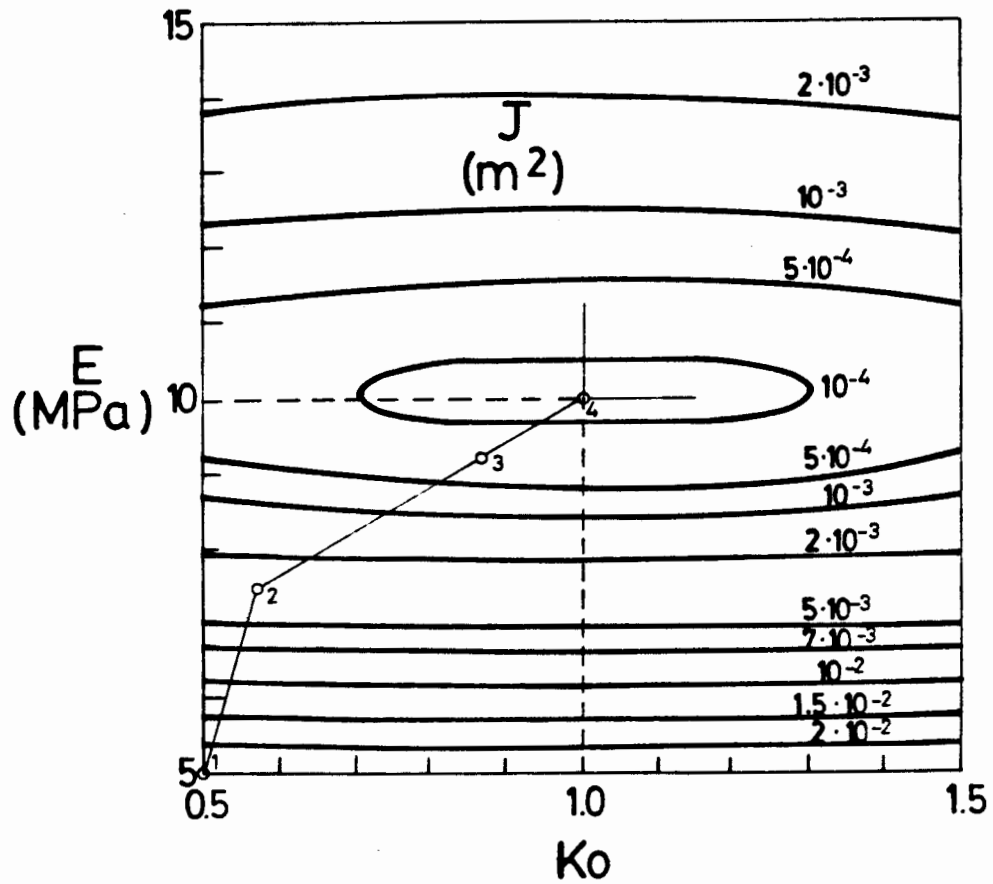


Figura 4.11. Representación gráfica de la función objetivo, cerca del mínimo, en el caso de que se tomen 24 medidas (15 horizontales y 9 verticales), y las medidas horizontales tengan 16 veces más varianza que las verticales.

cada uno de los casos estudiados.

En general la existencia de un valle marcado en el dibujo de la función objetivo, reflejado por un número de condición muy alto, dificulta la identificabilidad del problema, ya que los algoritmos de identificación conducen rápidamente al valle, pero es más difícil moverse según el mismo, debido a los pequeños gradientes de la zona. Este problema es importante en el caso de que se usen algoritmos de identificación basados exclusivamente en el método del gradiente.

Como se ha podido comprobar, el conocimiento de las matrices de covarianza de las medidas es importante, puesto que pueden variar de forma considerable la forma de la función objetivo. Por este motivo en los apartados posteriores se estudia la estructura de estas matrices y la forma de evaluarlas.

4.4 LA ESTRUCTURA DE ERROR COMO VARIABLE A IDENTIFICAR.

4.4.1 Metodología.

En el apartado 4.2 se ha formulado el problema inverso en términos de la función de verosimilitud. Para ello ha sido necesario suponer una función de distribución de probabilidad para las medidas y los parámetros. La hipótesis de distribución gaussiana es razonable, pero en cualquier caso se introducen nuevas variables en el problema: las varianzas de los errores de las medidas y de los parámetros. Lógicamente al introducir más variables se intenta reproducir mejor el problema real, pero en

este caso no siempre es fácil evaluar "a priori" esas nuevas variables. Por este motivo, pueden considerarse las varianzas de las medidas como otros parámetros a identificar, junto con los propios del modelo. Este problema, planteado por primera vez por Theil (1963), se ha resuelto para algunas aplicaciones concretas (por ejemplo para identificación de parámetros en hidrología subterránea -Carrera, 1984-).

La resolución del problema inverso considerando las varianzas de las medidas como parámetros del modelo, exigiría, en principio, minimizar la función objetivo respecto a todos los parámetros (incluyendo, por tanto, la minimización respecto a dichas varianzas). Sin embargo, en este apartado se demuestra que para resolver el problema así planteado, puede desacoplarse la minimización de J respecto a los parámetros propios del modelo exclusivamente, y la minimización respecto a las varianzas de las medidas. Este "desacoplamiento" facilitará, lógicamente, el proceso de identificación.

Para plantear el problema inverso en estos nuevos términos, puede partirse de la expresión de la función objetivo definida en [4.6]:

$$\begin{aligned}
 S = & \sum_{i=1}^r (\Delta \mathbf{x})^T \frac{(\mathbf{E}_{\mathbf{x}})_i^{-1}}{\sigma_i^2} (\Delta \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^s (\Delta \mathbf{p}^o)^T \frac{(\mathbf{E}_{\mathbf{p}}^o)_j^{-1}}{\sigma_j^2} (\Delta \mathbf{p}) + \\
 & + \sum_{i=1}^r n_i \ln(\sigma_i^2) + \sum_{j=1}^s n_j \ln(\sigma_j^2)
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

donde se considera, para mayor generalidad, que existe una información previa de los parámetros.

Esta ha sido la función a minimizar respecto a los parámetros en los ejemplos estudiados. Veamos si la minimización respecto a las varianzas puede realizarse utilizando los métodos anteriores de minimización respecto a los parámetros exclusivamente.

Supóngase en primer lugar que las varianzas se consideran fijas, es decir, se supone fijada la estructura de error, tanto de las medidas como de los parámetros. En ese caso, pueden eliminarse algunos términos de [4.17], a efectos de minimización, con lo que resulta la expresión habitual:

$$J = \sum_{i=1}^r (\Delta \mathbf{x})^T \frac{(\mathbf{E}_{\mathbf{x}})_i^{-1}}{\sigma_i^2} (\Delta \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^s (\Delta \mathbf{p}^0)^T \frac{(\mathbf{E}_{\mathbf{p}}^0)_j^{-1}}{\sigma_j^2} (\Delta \mathbf{p})$$

o lo que es lo mismo, introduciendo cualquiera de las varianzas como factor común, σ^{*2} :

$$J = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma^{*2}}{\sigma_i^2} (\Delta \mathbf{x})^T (\mathbf{E}_{\mathbf{x}})_i^{-1} (\Delta \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^s \frac{\sigma^{*2}}{\sigma_j^2} (\Delta \mathbf{p}^0)^T (\mathbf{E}_{\mathbf{p}}^0)_j^{-1} (\Delta \mathbf{p}) \quad [4.18]$$

y por facilidad de nomenclatura se hace:

$$\mu_i = \frac{\sigma^{*2}}{\sigma_i^2} \quad \mu_j = \frac{\sigma^{*2}}{\sigma_j^2}$$

Mostraremos que si se supone fijo el cociente

$$\mu_k = \frac{\sigma^{*2}}{\sigma_k^2} \quad [4.19]$$

el mínimo de la expresión [4.17] coincide con el de [4.18]. Para ello, basta tomar [4.19] como ligadura y utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange minimizando [4.17]. La ligadura será del tipo:

$$[\sigma^{*2} - \mu_k \sigma_k^2] = 0$$

[4.20]

donde μ_k puede ser cualquier cociente entre varianzas de los que aparecen en [4.18]. Si se añade la ligadura a la función a minimizar, se obtiene la expresión:

$$Lag = \sum_{i=1}^r \frac{J_{xi}}{\sigma_i^2} + \sum_{j=1}^s \frac{J_{pj}}{\sigma_j^2} + \sum_{i=1}^r n_i \ln(\sigma_i^2) + \sum_{j=1}^s n_j \ln(\sigma_j^2) + \sum_k \lambda_k [\sigma^{*2} - \mu_k \sigma_k^2]$$

[4.21]

donde, por comodidad de notación, se ha hecho J_{xi} y J_{pj} igual a los sumandos de la función objetivo debidos a medidas y a parámetros respectivamente. Derivando la función así definida, respecto a σ^{*2} y σ_k^2 , prefijados de antemano, resultará, suponiendo que estas dos varianzas escogidas corresponden a las medidas:

$$\frac{\partial Lag}{\partial \sigma^{*2}} = -\frac{J_{x^*}}{\sigma^{*4}} + \frac{n_{i^*}}{\sigma^{*2}} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial Lag}{\partial \sigma_k^2} = -\frac{J_{x_k}}{\sigma_k^4} + \frac{n_{ik}}{\sigma_k^2} - \lambda \mu_k = 0$$

[4.22]

donde se han igualado a cero para imponer la condición de extremo. Si se deriva respecto a otra varianza cualquiera σ_l^2 se tendrá:

$$\frac{\partial Lag}{\partial \sigma_l^2} = -\frac{J_{x_l}}{\sigma_l^4} + \frac{n_{il}}{\sigma_l^2} = 0$$

[4.23]

Es preciso indicar que σ^{*2} y σ_k^2 pueden escogerse arbitrariamente entre las medidas o los parámetros. Derivando la

función aumentada con la ligadura, se obtienen tantas ecuaciones como varianzas tenga el problema. Multiplicando cada ecuación por su varianza respectiva y sumando todas ellas, resulta:

$$-\frac{J_{x^*}}{\sigma^{*2}} + n^* + \lambda \sigma^{*2} - \sum_k \frac{J_{x_k}}{\sigma_k^2} - \sum_k \frac{J_{p_k}}{\sigma_k^2} + \sum_k n_{ik} + \sum_k n_{jk} - \lambda \mu_k \sigma_k^2 = 0$$

[4.24]

y como se cumple la ecuación [4.20] de la ligadura, se obtiene, reagrupando términos:

$$\left(n^* + \sum_k n_{ik} + \sum_k n_{jk} \right) \sigma^{*2} = J_{x^*} + \sum_k \mu_k J_{x_k} + \sum_k \mu_k J_{p_k} = J'$$

de manera que la condición de mínimo implica:

$$\sigma^{*2} = \frac{J'}{\sum_{i=1}^r n_i + \sum_{j=1}^s n_j} = \frac{J'}{m+p}$$

y

$$\sigma_k^2 = \frac{\sigma^{*2}}{\mu_k} = \frac{J'}{\mu_k(m+p)}$$

[4.25]

para cualquier valor de k. Sustituyendo finalmente estos valores en la definición de S dada por [4.17] se obtiene una expresión del mínimo de S, fijado [4.19]:

$$S = m + p + \sum_{i=1}^r n_i \ln \left(\frac{J'}{\mu_i(m+p)} \right) + \sum_{j=1}^s n_j \ln \left(\frac{J'}{\mu_j(m+p)} \right)$$

[4.26]

En consecuencia, minimizar S es equivalente a minimizar J', ya que [4.26] es una función monótona. Esto facilita el cálculo, puesto

que pueden identificarse varianzas utilizando los procedimientos de minimización usados para la función objetivo J.

El método utilizado para identificar varianzas consiste en variar para diferentes casos los valores de μ_k , obtener los parámetros que minimizan J' y encontrar el valor de S para ese caso. La relación de varianzas y los parámetros más verosímiles serán aquellos que minimicen S. Por ejemplo, si sólo se identifica una relación de varianzas (k=1), bastará con dibujar la curva S - μ y obtener el mínimo de forma directa. Un mínimo que lo será tanto respecto a los parámetros como respecto a las relaciones de varianzas.

4.4.2 Aplicación Al Problema De Excavación De Túneles.

La metodología expuesta se aplica al problema de excavación de un túnel descrito en el apartado 4.3, considerando que se dispone de 24 medidas, 15 horizontales y 9 verticales, realizadas con aparatos y procedimientos diferentes. Para este análisis se perturbaron las medidas "exactas" sumándoles una componente aleatoria distribuida según una función de probabilidad normal de media cero y varianza prefijada. Por otra parte, se supone que no se tiene información previa sobre los parámetros, en cuyo caso la función objetivo definida en [4.6] se expresa en la siguiente forma, distinguiendo entre medidas horizontales y verticales:

$$S = (\Delta \mathbf{x})_E^T \frac{(\mathbf{E}_x)_E^{-1}}{\sigma_E^2} (\Delta \mathbf{x})_E + (\Delta \mathbf{x})_I^T \frac{(\mathbf{E}_x)_I^{-1}}{\sigma_I^2} (\Delta \mathbf{x})_I +$$

$$+ n_E \ln(\sigma_E^2) + n_I \ln(\sigma_I^2)$$

que puede escribirse así:

$$S = \frac{J_{x_I}}{\sigma_I^2} + \frac{J_{x_E}}{\sigma_E^2} + n_I \ln(\sigma_I^2) + n_E \ln(\sigma_E^2)$$

Si se utiliza la formulación definida por [4.26], la función S definitiva, sustituyendo los valores del número de medidas, queda en la forma:

$$S = 24 + 15 \ln\left(\frac{J'}{24}\right) + 9 \ln\left(\frac{J'}{\mu 24}\right)$$

$$J' = J_{x_I} + \mu J_{x_E}$$

$$\mu = \sigma_I^2 / \sigma_E^2$$

[4.27]

ya que 15 es el número de medidas horizontales de varianza σ_I^2 y 9 es el de horizontales, de varianza σ_E^2 . J_{x_I} y J_{x_E} son respectivamente la contribución de las medidas horizontales y verticales a la función objetivo.

Estableciendo una equivalencia con la notación utilizada en el apartado anterior, puede escribirse:

$$\sigma^{*2} = \sigma_I^2$$

$$\sigma_k^2 = \sigma_E^2$$

La simulación del error de medida se llevó a cabo, como ya se ha indicado, sumando un valor aleatorio a las medidas disponibles. Siguiendo el desarrollo anterior, la metodología propuesta debe ser capaz de identificar la varianza introducida en las medidas exactas, distinguiendo entre varianzas de medidas horizontales y verticales.

Las medidas consideradas como exactas, correspondientes a $E = 10 \text{ MPa}$ y $K_0 = 1$, fueron:

Horizontales:

Punto 1.	0.3157 cm	Punto 2.	0.2997 cm
Punto 3.	0.3562 cm	Punto 4.	0.5560 cm
Punto 5.	0.8824 cm	Punto 6.	1.3392 cm
Punto 7.	2.0379 cm	Punto 8.	2.7259 cm
Punto 9.	3.5499 cm	Punto 10.	4.1039 cm
Punto 11.	4.5494 cm	Punto 12.	4.3606 cm
Punto 13.	3.9199 cm	Punto 14.	3.1008 cm
Punto 15.	2.4270 cm		

Verticales:

Punto 16.	-3.5983 cm	Punto 17.	-3.7342 cm
Punto 18.	-3.9053 cm	Punto 19.	-4.1187 cm
Punto 20.	-4.4923 cm	Punto 21.	-5.1053 cm
Punto 22.	-6.3276 cm	Punto 23.	-6.6659 cm
Punto 24.	-7.0481 cm		

y la perturbación a estas medidas se aplicó considerando tres posibilidades, en función de la varianza de los errores de las medidas horizontales σ_I^2 y verticales σ_E^2 :

- a) Análisis con $\sigma_I = 0.06 \text{ m}$, $\sigma_E = 0.015 \text{ m}$ ($\mu = 16$)
- b) Análisis con $\sigma_I = 0.03 \text{ m}$, $\sigma_E = 0.03 \text{ m}$ ($\mu = 1$)
- c) Análisis con $\sigma_I = 0.015 \text{ m}$, $\sigma_E = 0.06 \text{ m}$ ($\mu = 0.0625$)

Estas desviaciones típicas son relativamente importantes respecto a la magnitud de los desplazamientos "exactos", pero se tomaron así con el fin de comprobar la identificabilidad del problema incluso en ejemplos con errores considerables.

Para ello se calculó la función de objetivo según la expresión [4.27] y variando las matrices de covarianza, que eran del tipo:

$$\begin{pmatrix} \sigma_I^2 & & & & 0 \\ & \sigma_I^2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \sigma_E^2 & \\ 0 & & & & \sigma_E^2 \end{pmatrix}$$

Cada relación entre varianzas horizontales y verticales proporcionaba un valor de la función S. Estos valores se representan en la figura 4.12 en función de $\mu = \sigma_I^2 / \sigma_E^2$. Puede observarse que en los tres casos escogidos, el mínimo de la función S se obtiene en su correspondiente valor de μ , coincidente con la relación de varianzas de los errores con que se perturbaron las medidas. Es decir, se identifica la relación de varianzas de las medidas horizontales y verticales minimizando la función S, obteniendo también unos parámetros identificados.

Con esto se comprueba la metodología presentada y se verifica la posibilidad de introducir la relación de varianzas entre instrumentos como un parámetro más a identificar. En todos los casos se llegó a identificar los valores del módulo y del coeficiente de empuje al reposo con una precisión aceptable (de forma similar a los ejemplos de "medidas exactas"), si bien en el caso de que los errores sean muy importantes, es de esperar que disminuya la identificabilidad del problema.

En la figura 4.13 se representa el error cometido al identificar los parámetros E y Ko (calculado como norma euclídea), teniendo en cuenta que los reales son E = 10 MPa y Ko = 1. En esta

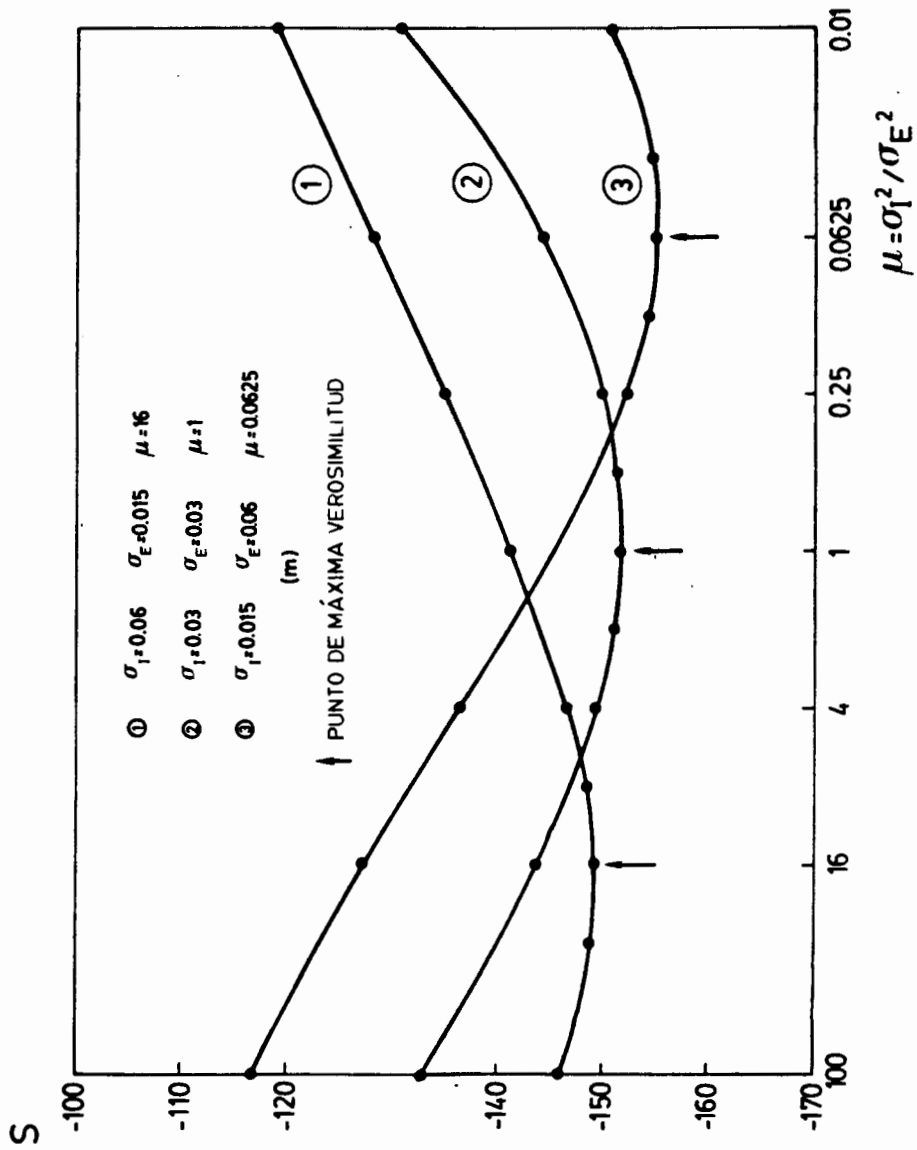


Figura 4.12. Variación de la función de soporte dependiendo de la relación entre varianzas de medidas horizontales y verticales para el ejemplo propuesto. Se indican tres casos simulados distintos, en función del valor real de μ de las medidas. El mínimo de la función de soporte se presenta para dicho valor de μ .

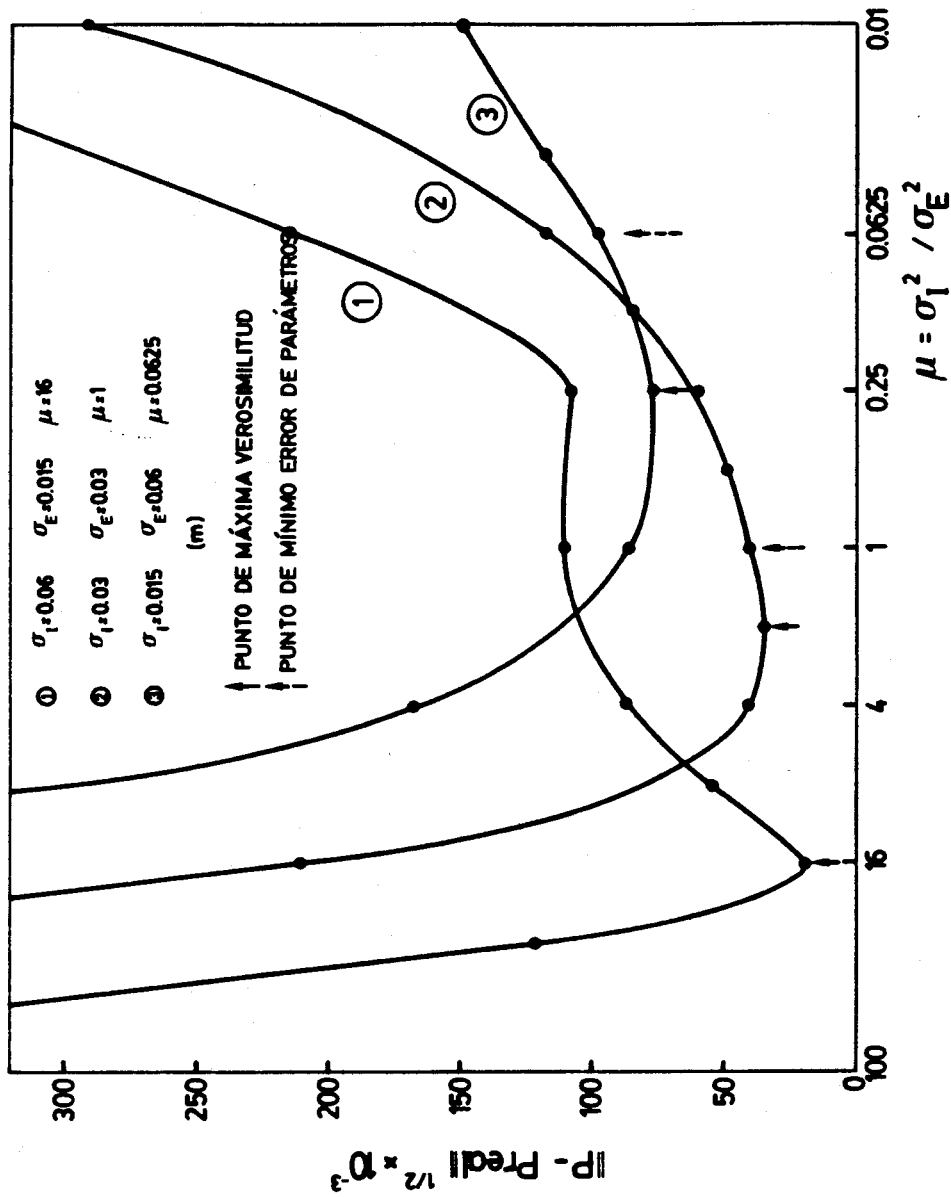


Figura 4.13. Variación de la norma del vector de diferencias entre parámetros estimados y parámetros reales (E y Ko) en función de la relación de varianzas de medidas horizontales y verticales, para tres casos simulados del ejemplo propuesto.

figura se comprueba que el mínimo no coincide exactamente con el valor de μ que corresponde a cada curva, aunque se sitúa muy cerca de él. Esta circunstancia no puede generalizarse, y puede atribuirse al poco número de valores que se utilizan como medidas, y que hace que no quede definido en buenas condiciones un error de tipo normal. Gracias a las propiedades asintóticas del estimador de máxima verosimilitud, si se aumenta el número de medidas, el mínimo se acercará más al valor de μ que le corresponde. Por otra parte, en la elaboración de esta figura no se ha considerado el valor de μ . Estrictamente debería considerarse como un parámetro más que ha sido identificado, junto con E y Ko, e introducirlo en el cálculo del error dibujado en la figura 4.13. Se ha preferido sin embargo separarlos, para destacar la importancia de los parámetros propios del modelo.

En la figura 4.14 se han representado estos dos parámetros, E y Ko, obtenidos para cada valor de μ y en cada uno de los tres casos estudiados. Puede observarse que para una amplia zona de relaciones entre desviaciones típicas cercanas a la unidad, los valores de los parámetros identificados no son muy diferentes entre sí.

Finalmente, en la figura 4.15 se representan las varianzas de los parámetros, obtenidas a partir de su matriz de covarianzas en el mínimo, en función de μ . De nuevo hay que tener en cuenta que debido a la estructura de la propia metodología de cálculo, se consideran dos parámetros en todo el proceso iterativo, mientras que desde un punto de vista matemático son tres: E, Ko y μ . Por este motivo, las varianzas dibujadas en la figura 4.15 no son comparables entre sí en forma directa. En esta figura se

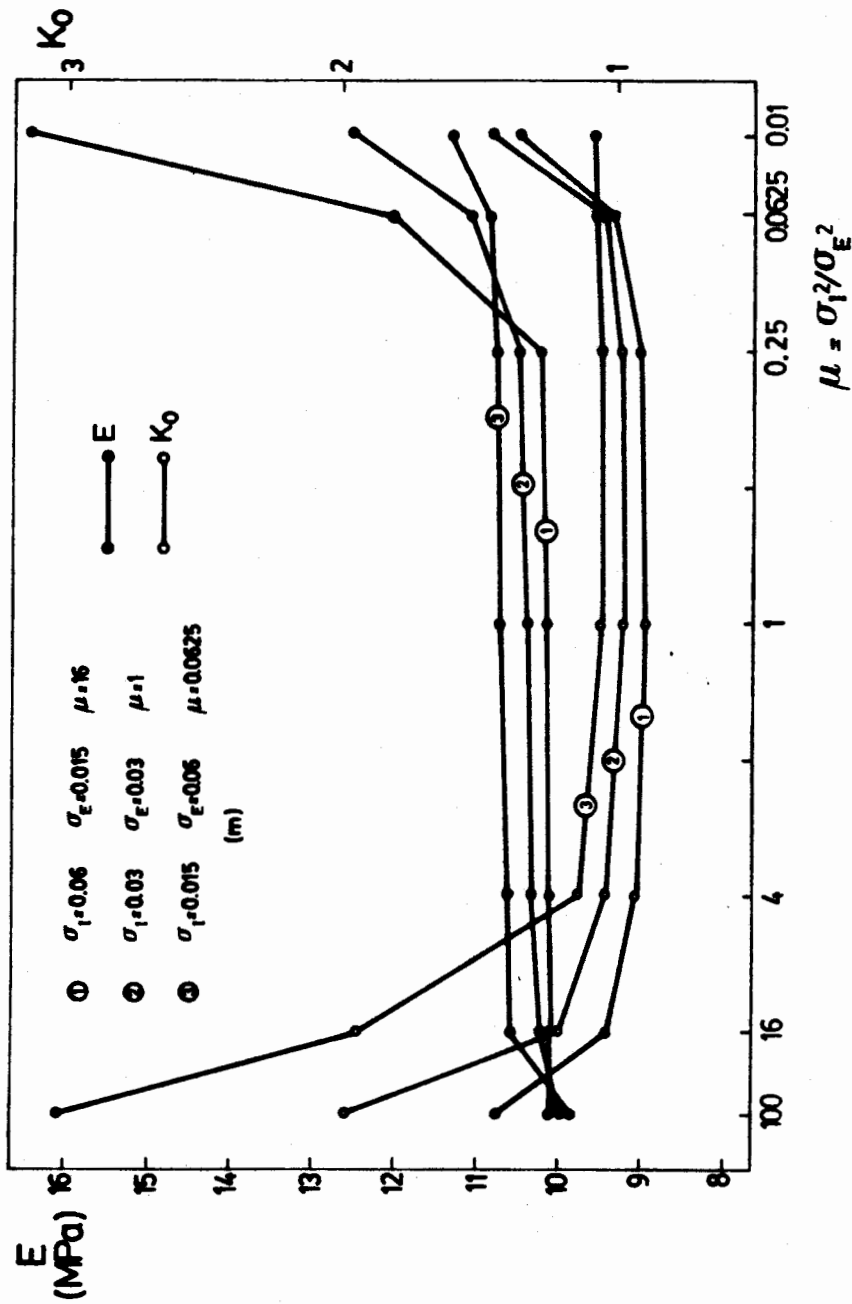


Figura 4.14. Parámetros identificados en función de la relación entre varianzas horizontales y verticales usada en la matriz de covarianzas de las medidas, considerada diagonal, para tres ejemplos simulados.

representan las varianzas de los parámetros fijado un valor de μ , y para cada uno de estos valores fijados, la estimación de máxima verosimilitud es también asintóticamente una estimación de mínima varianza.

El proceso de determinación del mínimo de la función S puede acelerarse si en vez de dibujarla toda para hallar su mínimo, se usa un criterio de convergencia adicional. Un criterio heurístico que se ha usado en algunas ocasiones con buenos resultados (Carrera, 1984) consiste en partir de un valor inicial de $\mu = \sigma_I^2 / \sigma_E^2$, calcular la función objetivo, y seguir un proceso iterativo con un nuevo μ definido por:

$$\mu = \frac{J_{x_I / n_I}}{J_{x_E / n_E}}$$

de forma sucesiva se comprueba empíricamente que se llega al valor de μ correspondiente al mínimo buscado.

Como conclusión, la aplicación del método propuesto para estimar varianzas de las medidas en un problema concreto de identificación demuestra la viabilidad de todo el proceso. La estimación correcta de las varianzas de las medidas era una condición importante para la aplicabilidad de la metodología indicada, puesto que, como ya se ha visto, estas varianzas pueden influir mucho en la forma de la función objetivo.

4.4.3 Influencia Del Modelo.

En todo el desarrollo del apartado anterior no se ha hecho

referencia alguna al modelo. Se ha considerado que éste es fijo, y que toda la fuente de error procede de las técnicas de medida. Sin embargo, es lógico pensar que el modelo que se usa juega un papel fundamental en el problema inverso y en especial en Geotecnia, donde se reconoce habitualmente una especial dificultad, frente a otros materiales, en modelar adecuadamente el comportamiento del terreno.

Se comprende que si nuestro modelo representa muy mal el problema físico, los parámetros que se identifiquen no serán representativos, ni siquiera para el propio modelo usado. Con el fin de ilustrar esta afirmación, supóngase que las medidas utilizadas en el ejemplo de excavación del túnel anterior, corresponden a un modelo elástico anisótropo, y que se intenta identificar con un modelo elástico isótropo. Supóngase asimismo que no existe información previa de los parámetros. Se trata entonces de estudiar cuales son los parámetros que se identifican con estas condiciones.

Para ello se han utilizado 12 medidas que corresponden a un modelo elástico anisótropo y lineal definido por los parámetros siguientes: $E_h = 10$ MPa, $E_v = 5$ MPa, $G_v = 20$ MPa y $\nu_{vh} = 0.49$. El resto de los parámetros queda predeterminado. El valor del módulo de Poisson intenta reproducir el caso de carga no drenada (incompresibilidad).

Las relaciones tensión - deformación para el modelo con anisotropía vertical y horizontal son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_h} - \nu_h \frac{\sigma_y}{E_h} - \nu_{vh} \frac{\sigma_z}{E_v} & \gamma_{xz} &= \frac{\sigma_{xz}}{G_v} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_h} - \nu_h \frac{\sigma_x}{E_h} - \nu_{vh} \frac{\sigma_z}{E_v} & \gamma_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{G_v} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E_v} - \nu_{hv} \frac{\sigma_x}{E_h} - \nu_{vh} \frac{\sigma_y}{E_h} & \gamma_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G_h} = \frac{2(1+\nu_h)}{E_h} \sigma_{xy} \end{aligned}$$

$$\frac{\nu_{hv}}{\nu_{vh}} = \frac{E_h}{E_v}$$

[4.28]

donde debe cumplirse para carga no drenada

$$\nu_h = 1 - \nu_{hv}$$

[4.29]

La malla utilizada y la posición de los puntos de medida fue la misma que en el ejemplo definido por la figura 4.1, siendo por tanto un problema en deformación plana. Al igual que en los ejemplos anteriores se tomó $K_0 = 1$. Por otra parte, se añadió a los desplazamientos una componente aleatoria con función de distribución normal de media cero y desviación típica 0.03 m. igual para todas las medidas, tanto horizontales como verticales, que coincide con la utilizada en el análisis b) del apartado anterior. En condiciones normales, el método de identificación debería proporcionar esos parámetros y una relación de varianzas horizontales y verticales $\mu = 1$. Sin embargo, al tomar ahora como modelo de identificación el elástico e isótropo, se distorsionan los resultados. Como en ejemplos anteriores, se tomó E y K_0 como parámetros a identificar, conociendo que la identificación de un solo módulo E carece de sentido si las medidas corresponden a un modelo anisótropo. El parámetro K_0 aparece, sin

embargo, en los dos modelos.

Los resultados del proceso se indican en las figuras 4.16 y 4.17. Como era de esperar, la utilización de un modelo equivocado da lugar a resultados muy diferentes de los verdaderos. En concreto, el valor de μ que se identifica es aproximadamente 16, cuando debería ser 1. Por otra parte, la magnitud de K_0 que corresponde a ese valor es de 1.47. En definitiva, si se tomase como modelo el elástico isótropo se adoptarían los valores $E=19.5$ MPa, $K_0 = 1.47$ y $\mu = 16$, mientras que los valores reales son $\mu = 1$ y $K_0 = 1.0$. Obsérvese, por otra parte, que en la figura 4.17, el valor de K_0 más cercano al real se identifica con el modelo isotrópico para μ menores de 0.01. Se produce por tanto una disociación importante entre el valor de μ que proporciona mejores parámetros, el mínimo de S y los valores reales. En realidad el proceso de identificación tiende a asignar a las medidas el error en la elección del modelo, de manera que la estimación de μ es fundamentalmente errónea.

Se comprueba, por tanto, que definir adecuadamente el modelo es también importante (en especial si se desea identificar varianzas), ya que se considera fijo en todo el proceso. La identificación del propio modelo, como ya se ha comentado, entraría dentro de la teoría de identificación de sistemas, en fase incipiente de desarrollo, y fuera del objeto de este trabajo.

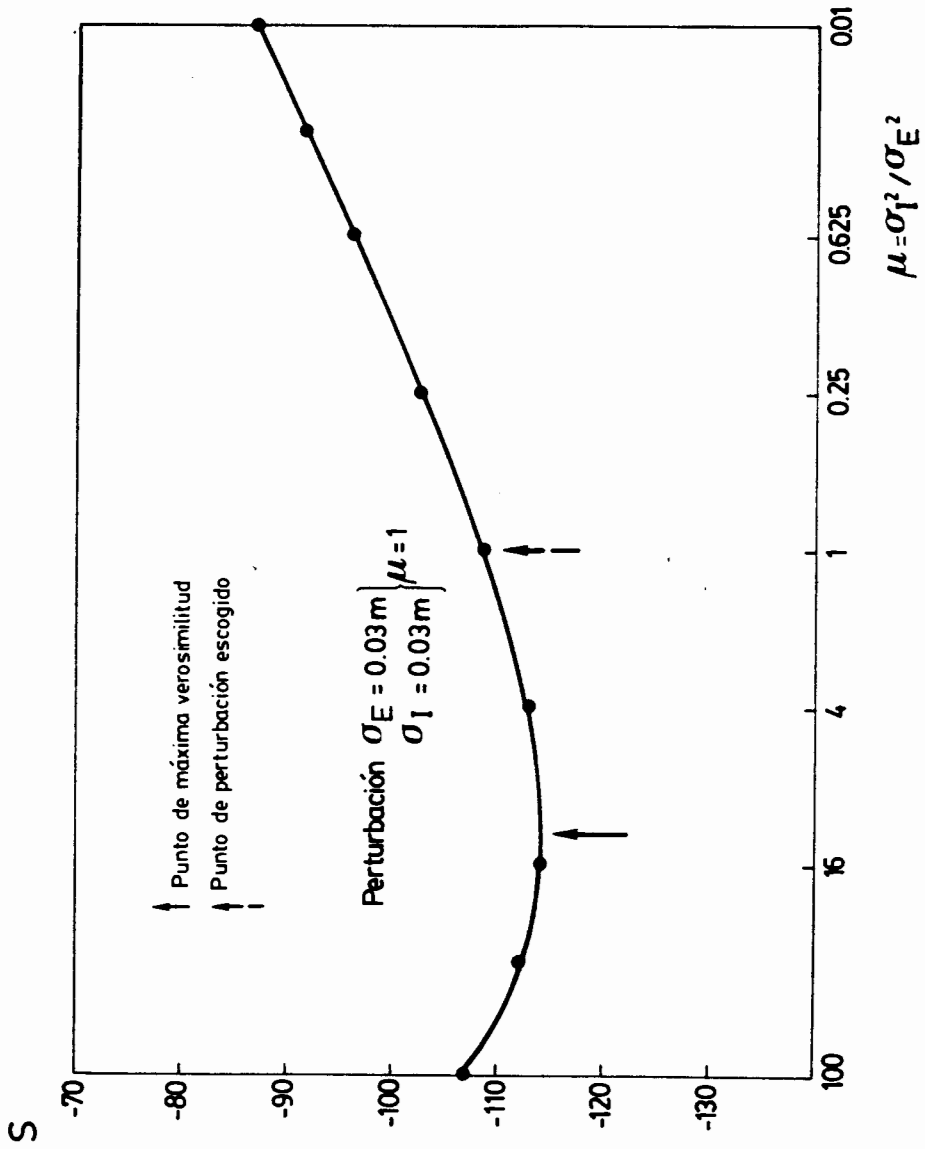


Figura 4.16. Variación de la función de soporte respecto a la relación entre varianzas de medidas horizontales y verticales en el caso de que el modelo utilizado en la identificación (elástico e isótropo) sea diferente del real (elástico y anisótropo).

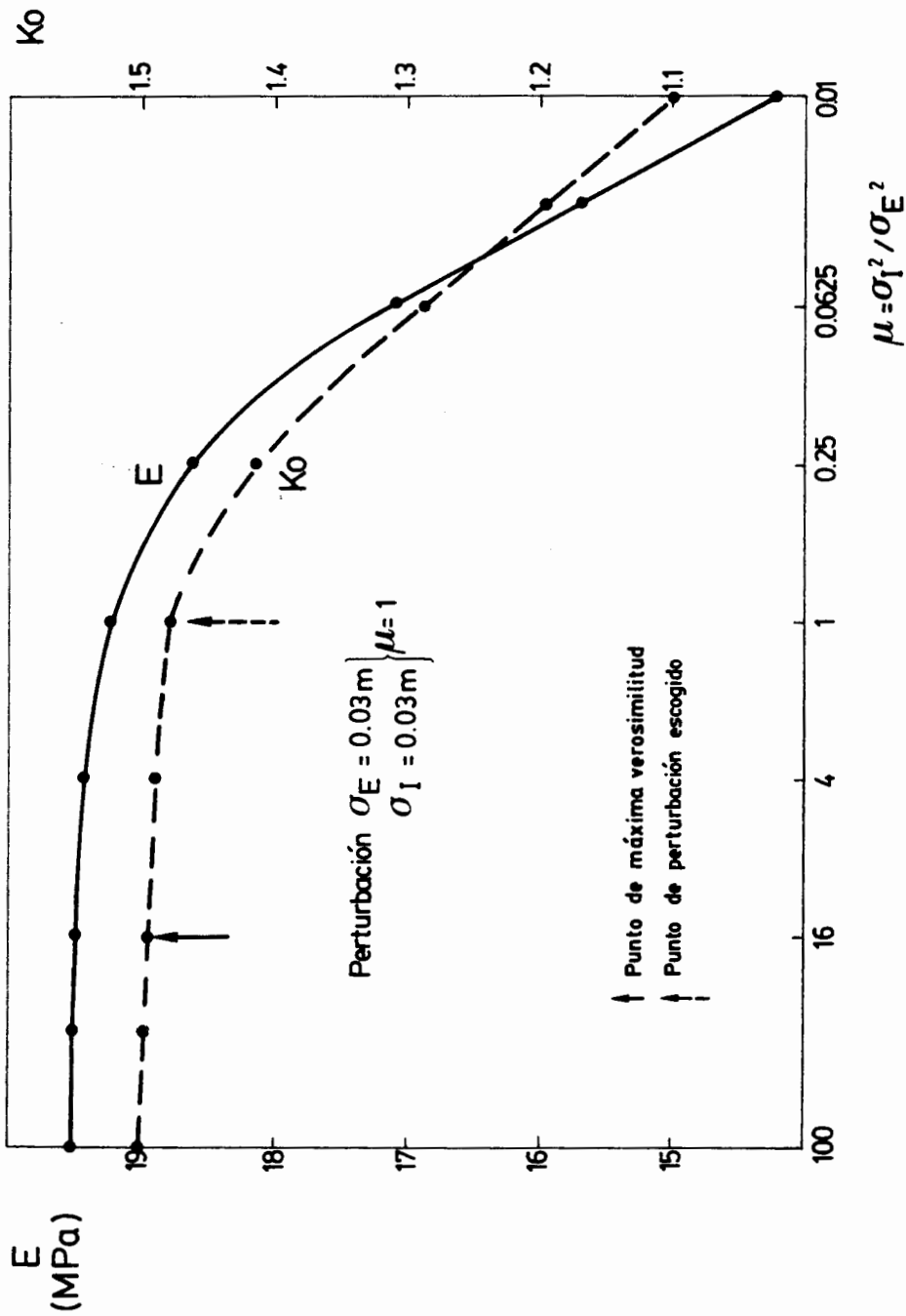


Figura 4.17. Variación de los parámetros identificados en función de la relación de varianzas entre medidas horizontales y verticales en el caso de que el modelo utilizado en la identificación (elástico e isótropo) sea diferente del real (elástico y anisótropo).

4.5 DETERMINACIÓN DE LAS MATRICES DE COVARIANZA DE LAS MEDIDAS.

4.5.1 Instrumentos Para Medida De Desplazamientos.

Ya se ha mostrado en el apartado 4.3. la importancia de las matrices de covarianza en la definición de la función objetivo. Por este motivo se ha propuesto en el apartado 4.4 una metodología de identificación de las varianzas de las medidas. En todo ese desarrollo se ha trabajado con matrices de covarianza diagonales, y no se ha hecho referencia alguna a su estructura interna. Por ello se estudia a continuación la forma de evaluar esta estructura interna. De esta forma, el problema planteado inicialmente quedará completamente definido en su forma más general.

En principio la estructura de las matrices de covarianza dependerá de la forma en que se hagan las medidas de campo. Por ejemplo, si un instrumento permite realizar medidas independientes, la matriz de covarianzas correspondiente será diagonal. Sin embargo, si los desplazamientos se obtienen a partir de observaciones medidas de forma incremental, los valores obtenidos son dependientes entre sí. En este último caso la matriz de covarianzas no será diagonal.

En el tipo de problemas que aquí se tratan se utilizan instrumentos de los dos tipos: algunos permiten realizar observaciones de forma incremental, otros proporcionan medidas independientes entre sí. En cualquier caso las lecturas suelen realizarse a lo largo de un sondeo por el que se hace pasar el instrumento de medida, o en el que se instalan los sistemas fijos

de lectura. Esta filosofía de trabajo responde al concepto de observación a lo largo de un sondeo, muy propio de la Ingeniería Geotécnica.

Kovari y Amstad (1984) desarrollaron este concepto teórico de "observación lineal", aplicándolo a algunas técnicas de medida usadas en Geotecnia. De esta forma sistematizaron y clasificaron los diferentes métodos disponibles hasta entonces.

Bajo esta filosofía, se evalúa a continuación la estructura de las matrices de covarianza de cuatro tipos de aparatos de medida, utilizados para observar movimientos del terreno en obras muy variadas, y en concreto en la excavación de túneles: extensómetro de varillas y micrómetro deslizante, usados para medir movimientos verticales, e inclinómetro y deflectómetro, usados para medir los movimientos horizontales.

4.5.2 Extensómetros De Varillas.

Consisten en unas varillas que se introducen en un sondeo y se anclan al terreno a diferentes profundidades, de manera que midiendo el desplazamiento longitudinal de la cabeza de la varilla, se obtiene el del anclaje. El desplazamiento de la cabeza se refiere después a un punto fijo. La matriz de covarianzas es en este caso diagonal, pues puede suponerse que la medida de cada varilla es independiente de las otras.

La medida es directa, y sólo requiere sumarle el desplazamiento absoluto del punto tomado como referencia (que suele ser un punto de la superficie, en el propio cabezal del

extensómetro). El valor definitivo del desplazamiento se compondrá, por tanto, de dos sumandos:

$$u_i = u'_i + Q$$

donde u'_i es el desplazamiento de la varilla "i", y Q es el desplazamiento del punto tomado como referencia.

Como las medidas son independientes entre sí, la matriz de covarianzas será diagonal:

$$C_{ij} = \sigma^2 \delta_{ij} \qquad e_{ij} = \delta_{ij} \qquad [4.30]$$

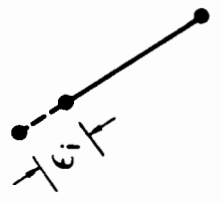
donde e_{ij} es la matriz que refleja únicamente la estructura del error. Si se considera la posible varianza en la medida del movimiento absoluto del punto de referencia, resulta:

$$e_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\text{var}(Q)}{\sigma^2} \qquad [4.31]$$

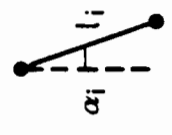
4.5.3 Micrómetro Deslizante.

El micrómetro deslizante consiste en una torpedo que se introduce en un sondeo sobre el que previamente se ha instalado un tubo con marcas a longitudes conocidas. El torpedo mide con precisión la distancia entre las marcas una vez se ha movido el terreno. De esta forma puede obtenerse el desplazamiento longitudinal relativo entre las marcas, y luego referirlo a un valor absoluto. Se puede utilizar para medir movimientos verticales. Se supone que la línea sobre la que se mide está dividida en "n" tramos de longitud l (figura 4.18), con lo que

a) Micrómetro deslizante.



b) Inclinómetro.



c) Deflectómetro.

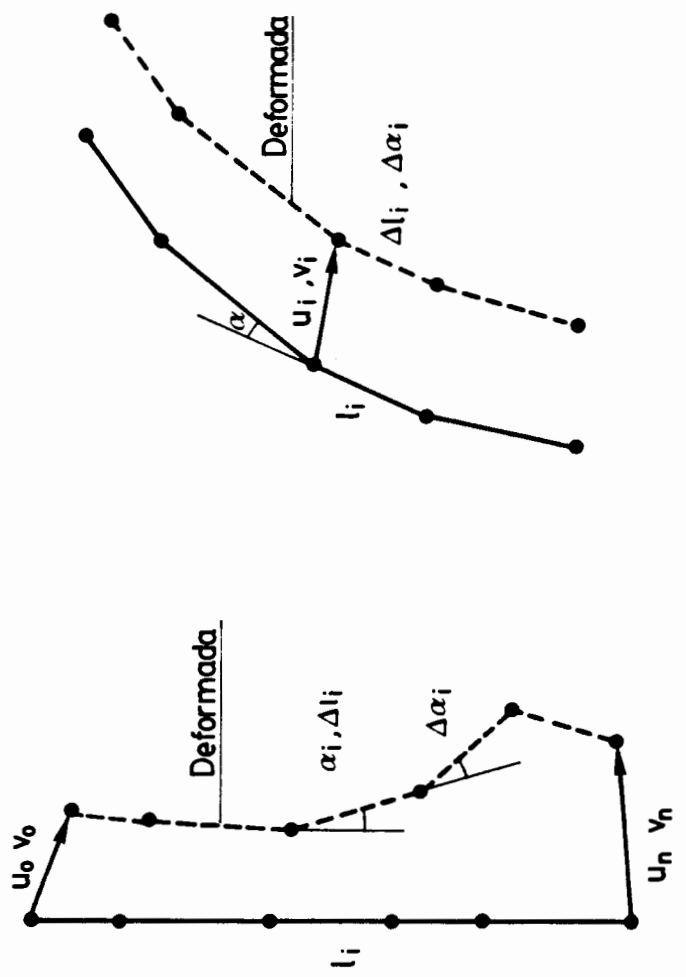


Figura 4.18. Esquema de funcionamiento de las medidas de tipo lineal realizadas con tres clases de aparatos usados en instrumentación geotécnica.

el desplazamiento en el punto "n" será:

$$u_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i + A$$

el valor de "A" es una constante que permite pasar a movimiento absoluto (puede considerarse como el movimiento longitudinal del primer punto respecto a un punto fijo).

Un elemento de la matriz de covarianzas, para este caso, será de la forma:

$$C_{ij} = \text{cov}[u_i, u_j]$$

y desarrollando:

$$C_{ij} = \text{cov}\left[\sum_{k=1}^i \varepsilon_k, \sum_{l=1}^j \varepsilon_l\right] = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \text{cov}[\varepsilon_k, \varepsilon_l] \quad [4.32]$$

Es razonable suponer que las medidas primarias ε_i sí que son independientes entre sí, con lo que este valor será cero excepto para $k=l$, y se tiene:

$$C_{ij} = \sigma^2 \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \delta_{kl} = \sigma^2 \text{mín}(i, j)$$

donde σ^2 es la varianza de una medida realizada con el micrómetro deslizante.

La matriz (E_x) definida anteriormente, será:

$$e_{ij} = \text{mín}(i, j)$$

$$(E_x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix} \quad [4.33]$$

Si se considera la varianza de la constante inicial de referencia, esta matriz tiene la expresión:

$$e_{ij} = \min(i, j) + \frac{\text{var}(A)}{\sigma^2} \quad [4.34]$$

4.5.4 Inclinómetro.

Se utiliza para obtener movimientos horizontales del terreno. Consiste también en un torpedo que se introduce en un tubo ranurado que le sirve de guía en un sondeo. El instrumento proporciona el ángulo que forma con la vertical. Integrando estos ángulos se obtiene el desplazamiento horizontal (figura 4.18). El movimiento transversal se calcula, por tanto, con la fórmula:

$$v_n = \sum_{i=1}^n a_i l_i + B \quad [4.35]$$

donde de nuevo la constante "B" representa el desplazamiento horizontal del primer punto, referido a un punto fijo.

La matriz de covarianzas para este instrumento será:

$$C_{ij} = \text{cov}[v_i, v_j] = \text{cov} \left[\sum_{k=1}^i a_k l_k, \sum_{k=1}^j a_k l_k \right]$$

y desarrollando:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \text{cov}(a_k, a_l) l_k l_l = \sigma^2 \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j l_k l_l \delta_{kl} \quad [4.36]$$

donde se ha supuesto que las medidas iniciales de ángulos son independientes entre sí y de varianza σ^2 .

Se obtiene entonces:

$$C_{ij} = \sigma^2 \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_k^2 \quad e_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_k^2$$

y la expresión matricial de esta fórmula es:

$$(E_x) = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 & l_1^2 & & \\ l_1^2 & l_1^2 + l_2^2 & l_1^2 + l_2^2 & \dots & \\ l_1^2 & l_1^2 + l_2^2 & l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 & & \\ & \dots & & & \end{bmatrix}$$

Si se tiene en cuenta la varianza de la medida de referencia, resulta:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_k^2 + \frac{\text{var}(B)}{\sigma^2}$$

[4.37]

4.5.5 Deflectómetro.

Es un instrumento que permite medir movimientos transversales a la dirección del sondeo en el que se ha colocado el correspondiente tubo guía. El torpedo mide en este caso la curvatura en el punto de medida, comparando las variaciones de ángulo en cada tramo (figura 4.18). El movimiento transversal se obtiene con la expresión:

$$w_k = \sum_{j=1}^k \beta_j l_j + C$$

$$v_n = \sum_{i=1}^n \beta_i l_i \left(\sum_{j=1}^n l_j \right) + C \sum_{i=1}^n l_i + D \quad [4.38]$$

donde β_j es la curvatura en el punto "j" (variación de ángulo

dividido por variación de distancia), w_k es el ángulo recorrido hasta el tramo "k", y v_n es el desplazamiento transversal del tramo "n".

La matriz de covarianzas será, para este caso:

$$C_{ij} = \text{cov}[v_i, v_j] = \text{cov} \left[\sum_{k=1}^i \beta_k l_k \left(\sum_{r=k}^i l_r \right), \sum_{l=1}^j \beta_l l_l \left(\sum_{s=l}^j l_s \right) \right]$$

y desarrollando, se obtiene:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j l_k \left(\sum_{r=k}^i l_r \right) l_l \left(\sum_{s=l}^j l_s \right) \text{cov}[\beta_k, \beta_l] = \\ &= \sigma^2 \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_k^2 \left(\sum_{r=k}^i l_r \right) \left(\sum_{s=k}^j l_s \right) \end{aligned}$$

[4.39]

De la misma forma que para los instrumentos anteriores, se obtiene una matriz (E_x) que indica la estructura del error de medidas:

$$\begin{aligned} e_{11} &= l_1^4 & e_{23} &= l_1^2(l_1 + l_2)(l_1 + l_2 + l_3) + l_2^3(l_2 + l_3) \\ e_{12} &= l_1^3(l_1 + l_2) & e_{31} &= l_1^3(l_1 + l_2 + l_3) \\ e_{13} &= l_1^3(l_1 + l_2 + l_3) & e_{32} &= l_1^2(l_1 + l_2)(l_1 + l_2 + l_3) + l_2^3(l_2 + l_3) \\ e_{21} &= l_1^3(l_1 + l_2) & e_{33} &= l_1^2(l_1 + l_2 + l_3)^2 + l_2^2(l_2 + l_3)^2 + l_3^4 \\ e_{22} &= l_1^2(l_1 + l_2) + l_2^4 & & \end{aligned}$$

...

...

Si se consideran las varianzas de los desplazamientos de referencia, la expresión definitiva para esta matriz es:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_k^2 \left(\sum_{r=k}^i l_r \right) \left(\sum_{s=k}^j l_s \right) + \left(\sum_{l=1}^i l_l \right) \left(\sum_{l=1}^j l_l \right) \frac{\text{var}(C)}{\sigma^2} + \frac{\text{var}(D)}{\sigma^2}$$

[4.40]

4.5.6 Aplicación Al Problema De Excavación De Túneles.

Las matrices de covarianza determinadas anteriormente pueden incorporarse directamente al análisis del problema utilizando el criterio de máxima verosimilitud. Conviene destacar que únicamente se ha utilizado el concepto básico del instrumento correspondiente. Cualquier otro efecto debido a la instalación de los aparatos, o a la posible interacción suelo - instrumento no se ha tenido en cuenta, debido a su origen no sistemático.

Como ejemplo de aplicación de las matrices de covarianza no diagonales, se ha tomado el problema definido en anteriores apartados, cuya geometría se especifica en la malla de elementos finitos de la figura 4.1.

Para esta simulación se tomaron las 12 medidas habituales (7 horizontales y 5 verticales). Las medidas verticales se perturbaron con un ruido aleatorio de distribución normal, de media nula y varianza 0.01 m . Por su parte, las medidas horizontales se contaminaron con un ruido generado teniendo en cuenta la expresión del movimiento horizontal en función de la medida del ángulo con el inclinómetro (ecuación [4.35]). La varianza asignada a la medida del ángulo fue de 0.01, y la matriz de covarianzas resultante está

indicada en la figura 4.19. Obsérvese que se tomó una varianza inicial para la medida horizontal inferior, ya que no puede considerarse como punto fijo. En la misma figura se indica la matriz de covarianzas inversa, que presenta una estructura en banda y que indica que lo que en realidad se "penaliza" son los errores en los incrementos de desplazamientos. Las medidas utilizadas como base correspondían como en otros ejemplos a los parámetros $E=10$ MPa y $K_0=1$.

Fijado el problema, se debería demostrar que se identifica mejor si se considera la matriz de covarianzas adecuada. Efectivamente esto es así, y en la figura 4.20 puede observarse la evolución del proceso iterativo cuando se considera la matriz completa y cuando se supone que es diagonal. En este último caso se comprueba que los parámetros identificados son peores. En particular, el valor de K_0 identificado así es de 1.33, frente a 1.02 si se identifica con la estructura de error correcta.

La utilización de la estructura de error adecuada es, por consiguiente importante, si se quiere obtener una mayor fiabilidad en el proceso de identificación.

En la figura 4.21 se ha representado de nuevo una función objetivo calculada con una matriz de covarianzas completa correspondiente a las 24 medidas habituales en el problema de excavación del túnel estudiado (15 horizontales y 9 verticales). En este caso se tomaron las medidas exactas correspondientes a $E=10$ MPa y $K_0=1.0$, para observar el efecto diferenciado de la matriz de covarianzas completa sobre la función objetivo. Para el cálculo de J se usó una matriz de covarianzas evaluada de la misma forma que

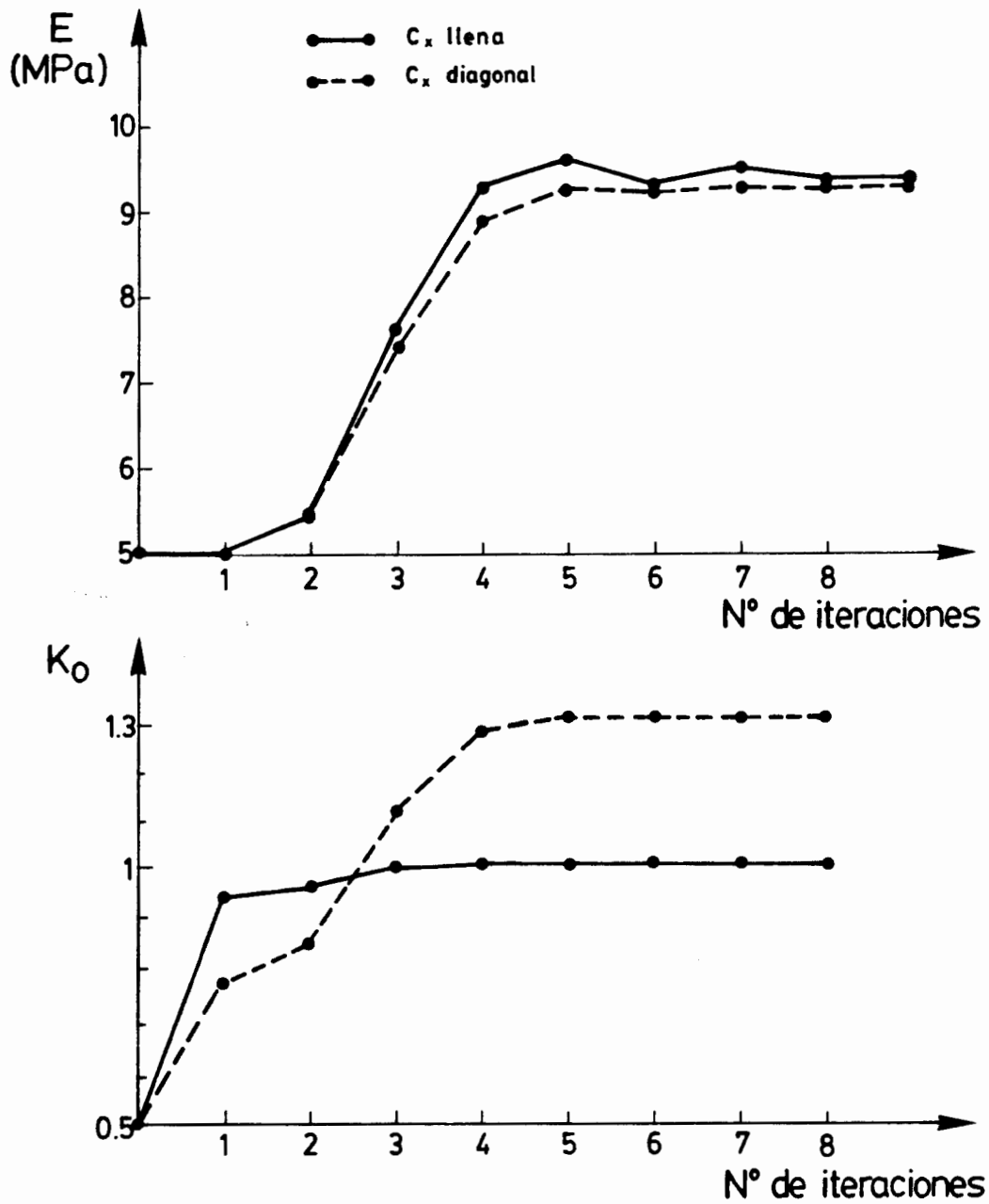


Figura 4.20. Valor de los parámetros identificados en el ejemplo propuesto, en función del proceso iterativo en el caso de que se use una matriz de covarianzas de las medidas diagonal o llena.

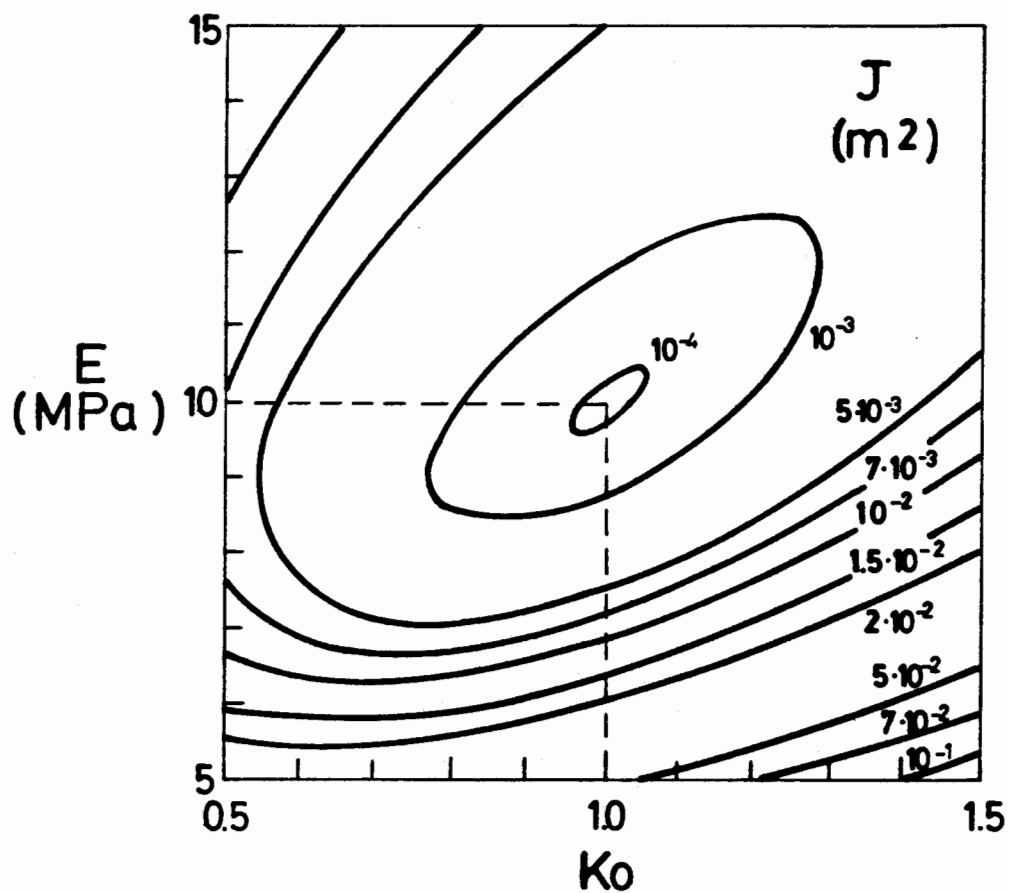


Figura 4.21. Representación de la función objetivo en las cercanías del mínimo, para el ejemplo propuesto (24 medidas), evaluada considerando una matriz de covarianzas de las medidas llena.

la indicada en la figura 4.19, pero extendida a las 24 medidas. El efecto diferenciador de esta matriz se reduce a una pequeña distorsión de la forma respecto a la correspondiente al caso representado en la figura 4.7, que es el equivalente a este pero con matriz de covarianzas igual a la identidad. Las diferencias en este ejemplo no son importantes, por lo que la identificabilidad de ambos problemas ha sido parecida, pero en un caso general, estas diferencias dependerán de la propia matriz de covarianzas que se utilice.

4.6 RECAPITULACIÓN.

Este capítulo constituye el núcleo de este trabajo, ya que propone una metodología concreta para identificar parámetros en problemas geotécnicos.

En los capítulos precedentes se ha definido matemáticamente el problema inverso y se ha indicado un método de cálculo, acoplado al de elementos finitos, que permite evaluar la matriz de sensibilidad. El ejemplo base utilizado ha sido la excavación de un túnel en un suelo en el que se miden desplazamientos y del que se desea conocer los parámetros de su modelo de comportamiento. Por otra parte, la consideración adecuada de la estructura de error de las observaciones requiere distinguir entre medidas horizontales y verticales, que en la práctica se realiza con instrumentos diferentes. Se realiza un estudio comparativo de la identificabilidad del problema teórico variando el número y la localización de las observaciones, y la relación entre las varianzas de las medidas horizontales y verticales.

Dada la importancia que el conocimiento de la estructura de error de las medidas tiene en el proceso de identificación, se desarrolla una metodología que considera esta estructura como una variable más a identificar. Finalmente, las matrices de covarianzas de los errores de las medidas, fundamentales en este análisis, se calculan para diferentes tipos de instrumentos utilizados habitualmente en Geotecnia.

La aplicación de esta metodología a los ejemplos teóricos descritos ha permitido validar la formulación propuesta, y en el siguiente capítulo se pone en práctica en un caso real.