

# 6

**EXTENSIÓN DE LA FORMULACIÓN A PROBLEMAS NO LINEALES.**

## CAPÍTULO 6

### EXTENSIÓN DE LA FORMULACIÓN A PROBLEMAS NO LINEALES.

#### 6.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ADOPTANDO UN MODELO HIPERBÓLICO.

La formulación del problema inverso en el caso de que la ecuación constitutiva del material sea no lineal es en principio la misma que la desarrollada en el capítulo cuarto. Sin embargo, su aplicación práctica es mucho más compleja. A la dificultad propia del problema directo cuando el modelo es no lineal, hay que añadir la complicación que surge al calcular la matriz de sensibilidad, descrita en los capítulos segundo y tercero. Como se ha visto, los algoritmos iterativos propuestos para obtener el mínimo de la función objetivo requieren básicamente el cálculo de dicha matriz de derivadas de desplazamientos respecto a parámetros. En el caso de que el modelo sea no lineal, la obtención de estas derivadas es más compleja, puesto que dependen del nivel de tensiones.

En el apartado 3.4 se indicó el procedimiento para evaluar dicha matriz, expresado finalmente mediante la ecuación [3.26]:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = - \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} * \mathbf{x} + \mathbf{K} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{x}$$

[6.1]

donde  $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{p}$  representan las columnas de la matriz de sensibilidad  $\mathbf{A}$  que permiten resolver el problema inverso utilizando cualquier método de los descritos en el capítulo segundo. En concreto, el método de Marquardt conduce a una expresión del tipo [2.89]:

$$\Delta \mathbf{p}_k = (\mathbf{A}_k^T \mathbf{C}_x^{-1} \mathbf{A}_k + \mu_k \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}_k^T \mathbf{C}_x^{-1} \Delta \mathbf{x}^* \quad [6.2]$$

En el capítulo tercero se han descrito los problemas de tipo numérico, que un modelo de comportamiento no lineal introduce en la metodología propuesta para identificar parámetros, especialmente en lo que se refiere a la formulación del problema utilizando el método de los elementos finitos.

Una vez establecidas las fórmulas [6.1] y [6.2] que permiten resolver el problema no lineal, se ha aplicado la identificación a un ejemplo concreto con el fin de comprobar su validez.

La condición implícita en [6.1] es que la relación entre tensiones y deformaciones sea biunívoca, por lo que se ha escogido para este ejemplo un modelo de tipo hiperbólico, que es uno de los modelos más utilizados para materiales elásticos de Cauchy no lineales.

El modelo hiperbólico fue desarrollado por Duncan y sus colaboradores (1970), y en el caso de que se adopten hipótesis simplificadoras, puede definirse con pocos parámetros. Otra ventaja importante del modelo es que cumple la condición de relación unívoca entre tensión y deformación. En su expresión más simple (unidimensional), y trabajando en tensiones totales, esta

relación es:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{b + a\varepsilon}$$

[6.3]

de forma que la tangente en el origen es  $1/b$  (módulo de elasticidad inicial), y la asíntota de la hipérbola corresponde a la tensión de valor  $1/a$  (figura 6.1).

El modelo hiperbólico ha sido ampliamente utilizado en la resolución de problemas reales, obteniendo buenos resultados (Chang y Duncan, 1970) a pesar de que no representa de forma adecuada aspectos parciales de comportamiento de algunos suelos (por ejemplo los suelos muy dilatantes).

En cualquier caso, el uso de este modelo en lo que a identificación de parámetros se refiere, supone un avance respecto a los desarrollos con modelos lineales realizados en los capítulos anteriores. La extensión a otros modelos no lineales queda abierta, y uno de los puntos a estudiar corresponde al cálculo óptimo de la matriz de sensibilidad, que presumiblemente deberá analizarse para cada tipo de modelo en particular. La metodología que aquí se presenta se considera un punto de partida obligado.

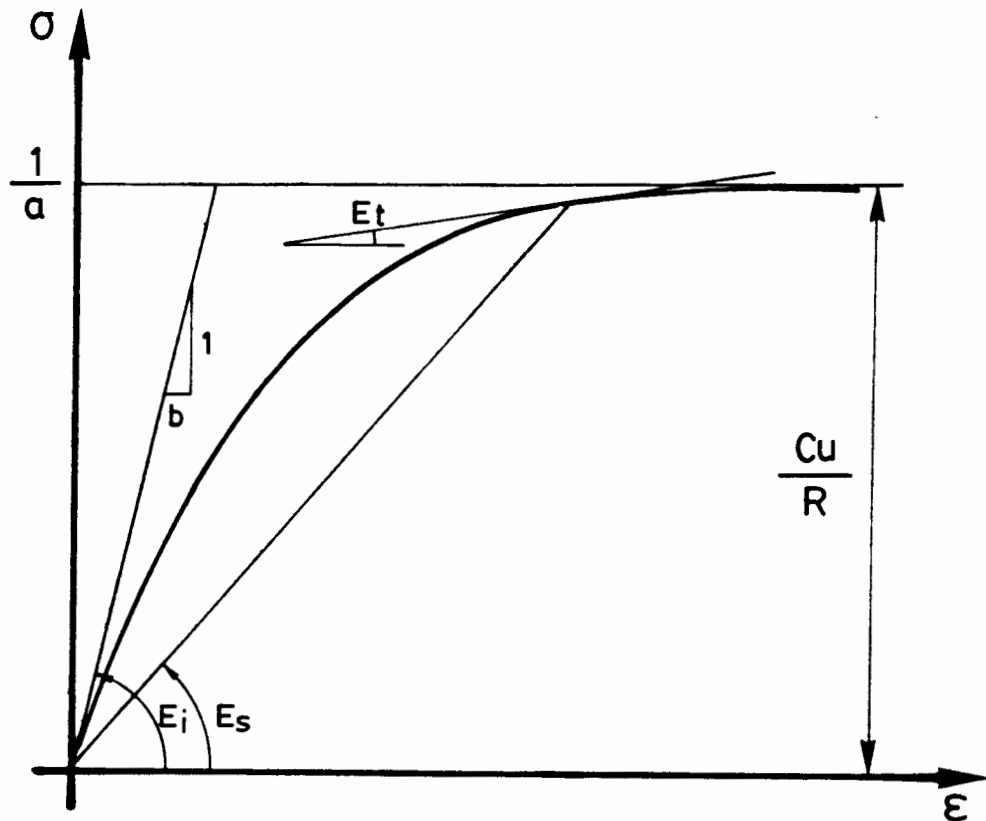
Habitualmente se representa el parámetro "a" como porcentaje de la resistencia al corte sin drenaje (especialmente si la carga es rápida), en la forma:

$$a = \frac{R}{C_u}$$

[6.4]

donde R es un parámetro positivo que se suele fijar entre 0.7 y 1.

El módulo de elasticidad tangente tiene la expresión:



**Figura 6.1.** Representación esquemática de la ley tensión - deformación del modelo hiperbólico, indicando la nomenclatura utilizada.

$$E_t = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{b}{(b + a\varepsilon)^2} = \frac{1}{b} (1 - a\sigma)^2 = E_i \left(1 - R \frac{\sigma}{C_u}\right)^2$$

[6.5]

y el módulo elástico secante:

$$E_s = E_i \left(1 - R \frac{\sigma}{C_u}\right)$$

[6.6]

En los ejemplos posteriores se toma  $R=1$ , con lo que se simula la rotura de forma asintótica. La relación [6.3] es válida para tensiones y deformaciones uniaxiales. Si se generaliza la expresión a tres dimensiones, el modelo requiere la introducción del módulo de Poisson  $\nu$ , que puede tomarse como un parámetro más. Si se supone que la aplicación de la carga es rápida y por tanto sin drenaje, puede tomarse este módulo como fijo e igual a 0.49. En el caso de deformación plana, la expresión de la matriz que relaciona tensiones y deformaciones, utilizada en el método de los elementos finitos para calcular la matriz de rigidez es:

$$\left[ D_H \right]_s = E_s D_E = \frac{E_i \left(1 - R \frac{\sigma}{C_u}\right)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} (1 - \nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1 - \nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

[6.7]

Esta expresión permite calcular la matriz de rigidez secante, mediante la fórmula [3.6]:

$$K = \int_V B^T D B dV$$

[6.8]

En la expresión [6.7] aparece el valor de una tensión o un nivel de

tensiones del que depende el módulo, tal como se definió en [6.5] o [6.6]. En muchos casos se usa como nivel de tensiones el invariante del tensor de tensiones desviadoras " $J_T$ ", definido por

$$J_T^2 = \frac{1}{2} \text{tr} S^2 \quad S = \sigma - \hat{p}I \quad \hat{p} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad [6.9]$$

Las expresiones [6.3] a [6.9] definen matemáticamente el modelo hiperbólico. Para poder definir el proceso de identificación se debe evaluar la matriz de sensibilidad para este modelo. Este cálculo, como ya se ha indicado, requiere la determinación de los términos de la expresión [6.1], que incluyen operaciones de tipo derivada con la matriz de rigidez del problema.

Las derivadas respecto a los parámetros pueden obtenerse directamente utilizando la fórmula [3.15]:

$$\frac{\partial K}{\partial p_i} = \int_V B^T \frac{\partial D}{\partial p_i} B dV \quad [6.10]$$

que particularizada para los parámetros del modelo hiperbólico que se desea identificar,  $E_i$  y  $C_u$  (en el caso no drenado  $v$  se fija en 0.49), se tendrá, utilizando siempre la matriz secante:

$$\frac{\partial D_H}{\partial E_i} = \left(1 - R \frac{J_T}{C_u}\right) D_E \quad \frac{\partial D_H}{\partial C_u} = E_i R \frac{J_T}{C_u^2} D_E \quad [6.11]$$

donde la matriz  $D_E$  es, para deformación plana:

$$\mathbf{D}_E = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad [6.12]$$

Las derivadas de la matriz de rigidez respecto a los desplazamientos nodales, requeridas también en [6.1], se pueden calcular en la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = \int_V \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_i} \mathbf{B} dV \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \quad [6.13]$$

De [6.7] se deduce directamente:

$$\frac{\partial \mathbf{D}_H}{\partial x_i} = -E_i \frac{R}{C_u} \frac{\partial J_T}{\partial x_i} \mathbf{D}_E \quad [6.14]$$

donde

$$\frac{\partial J_T}{\partial x_i} = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial J_T}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \sigma_j}{\partial \epsilon_k} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial x_i} \quad [6.15]$$

Esta expresión es un escalar, calculable en cada punto de Gauss donde se lleve a cabo la integración numérica.

Eliminando los términos nulos en deformación plana, resulta:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_T}{\partial x_i} &= \frac{\partial J_T}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x_i} + \frac{\partial J_T}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x_i} + \\
&+ \frac{\partial J_T}{\partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x_i} + \frac{\partial J_T}{\partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x_i} + \\
&+ \frac{\partial J_T}{\partial \sigma_{xy}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \varepsilon_{xy}} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x_i}
\end{aligned}
\tag{6.16}$$

Las derivadas de  $J_T$  respecto a las tensiones son:

$$\frac{\partial J_T}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{2J_T} (\sigma_x - \hat{p}) \quad \frac{\partial J_T}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{2J_T} (\sigma_y - \hat{p})$$

$$\frac{\partial J_T}{\partial \sigma_{xy}} = \frac{1}{2J_T} (\sigma_{xy} - \hat{p})$$

[6.17]

donde " $\hat{p}$ " se ha definido en [6.9]. Las derivadas de las tensiones respecto a las deformaciones se obtienen directamente de la matriz elástica del modelo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E_i \left(1 - \frac{R}{C_u} J_T\right)^2}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} (1 - \nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1 - \nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

[6.18]

Finalmente, las derivadas de las deformaciones respecto a un desplazamiento nodal, se calculan a partir de las funciones de forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1x} \\ x_{1y} \\ x_{2x} \\ x_{2y} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{8x} \\ x_{8y} \end{bmatrix} \quad [6.19]$$

donde "Ni" son las funciones de forma, y se ha supuesto que se utilizan elementos isoparamétricos de 8 nodos.

Se dispone, por tanto, de todos los términos necesarios para evaluar la expresión [6.1], y sólo falta seguir las indicaciones realizadas en el capítulo tercero relativas a la introducción de las condiciones de contorno en estas matrices. Obtenida finalmente la matriz de sensibilidad, puede resolverse el problema de identificación de parámetros utilizando por ejemplo el método de Marquardt.

## 6.2 APLICACIÓN A UN EJEMPLO TEÓRICO.

### 6.2.1 Descripción Del Ejemplo Utilizado.

Para comprobar la factibilidad del planteamiento descrito, se ha utilizado un ejemplo teórico similar en su geometría al usado en el capítulo cuarto (figura 4.1), pero con un modelo de comportamiento hiperbólico, tal como se ha descrito en el apartado precedente. Considerando el problema como de carga sin drenaje, se tomó  $\nu = 0.49$  como valor fijo. Se estableció también el valor  $R = 1$  en todo el proceso, de manera que los únicos parámetros

variables eran el módulo de elasticidad inicial y la resistencia al corte sin drenaje.

Es interesante comprobar la influencia de la evolución de los dos parámetros escogidos en el mayor o menor nivel de tensiones en el terreno, y por tanto, en la mayor o menor cercanía a lo que podría denominarse como "rotura". Como se comprobará posteriormente, el nivel de tensiones influye en la mayor o menor facilidad para identificar el problema planteado.

El ejemplo definido en la figura 4.1 representa, tal como se indicó en el capítulo cuarto, la geometría de unos ensayos realizados en modelo reducido con el aparato centrífugo de Cambridge. Mair (1979) proporciona los límites superior e inferior del valor de  $C_u$  para rotura en este caso. La rotura, en plasticidad, no depende del módulo elástico  $E_i$ . En la figura 6.2 se reproducen estos resultados que son función de la geometría del problema, de la presión de sostenimiento en el interior del túnel, del peso específico del material y de un parámetro "n" que representa el factor de escala entre el prototipo y la realidad, que en este caso es la unidad, por haberse escogido una malla de elementos finitos equivalente a la del prototipo realizado por Mair (1979) y Taylor (1984). Tomando esta gráfica como referencia, se obtiene un valor aproximado de  $C_u$  para el cual se produce rotura de 0.06 MPa (considerando que la presión de sostenimiento es nula).

Establecido este límite correspondiente a rotura, se definieron cuatro ejemplos con diferentes valores de  $E_i$  y  $C_u$  a los que se debería aplicar posteriormente el algoritmo de

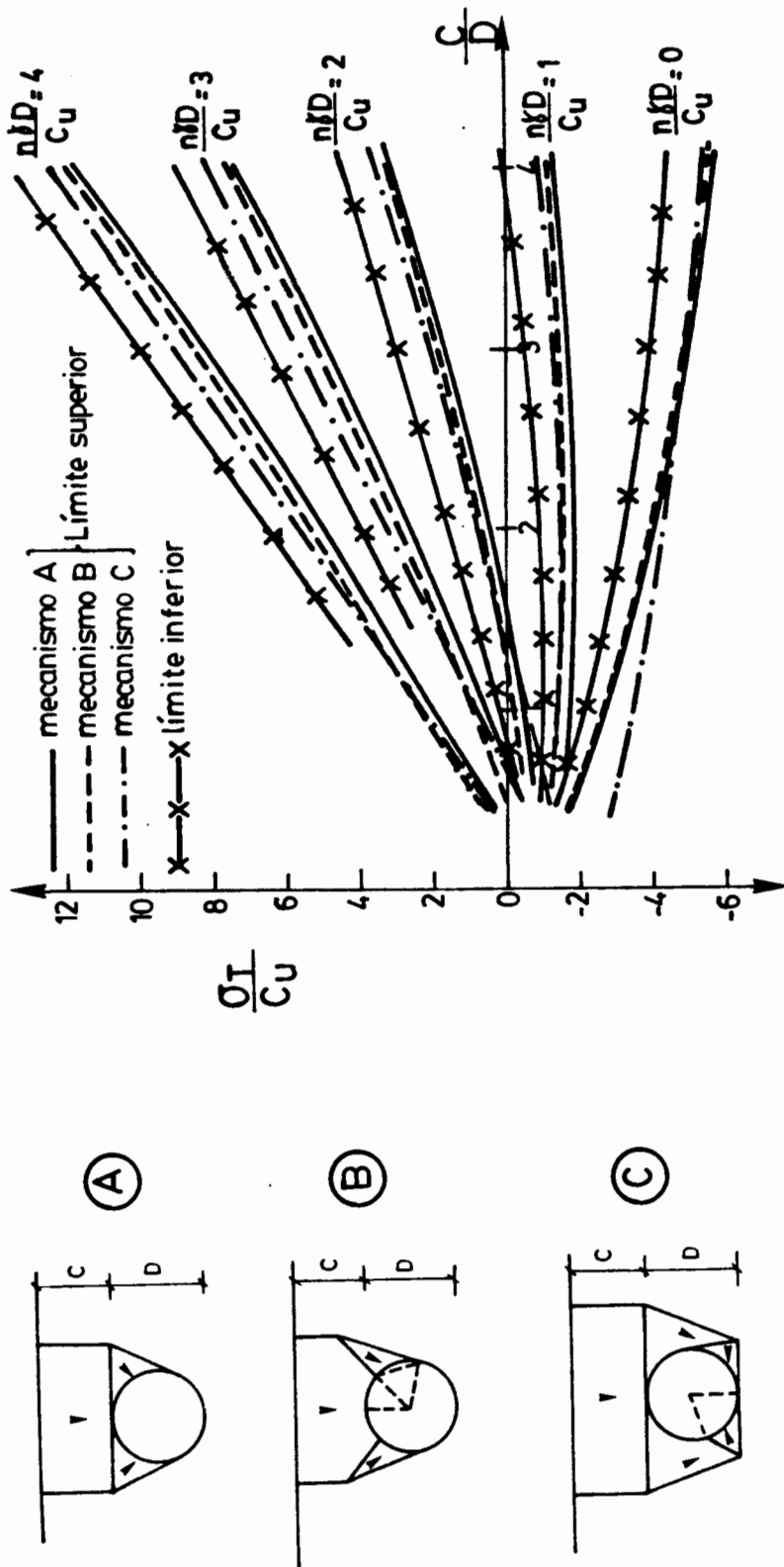


Figura 6.2. Cotas superior e inferior de los diferentes mecanismos de rotura (A,B y C) considerados para el problema de un túnel circular somero, en función de la geometría, de la presión de sostenimiento ( $\sigma_T$ ) y de la resistencia al corte sin drenaje del material (según Mair, 1979).

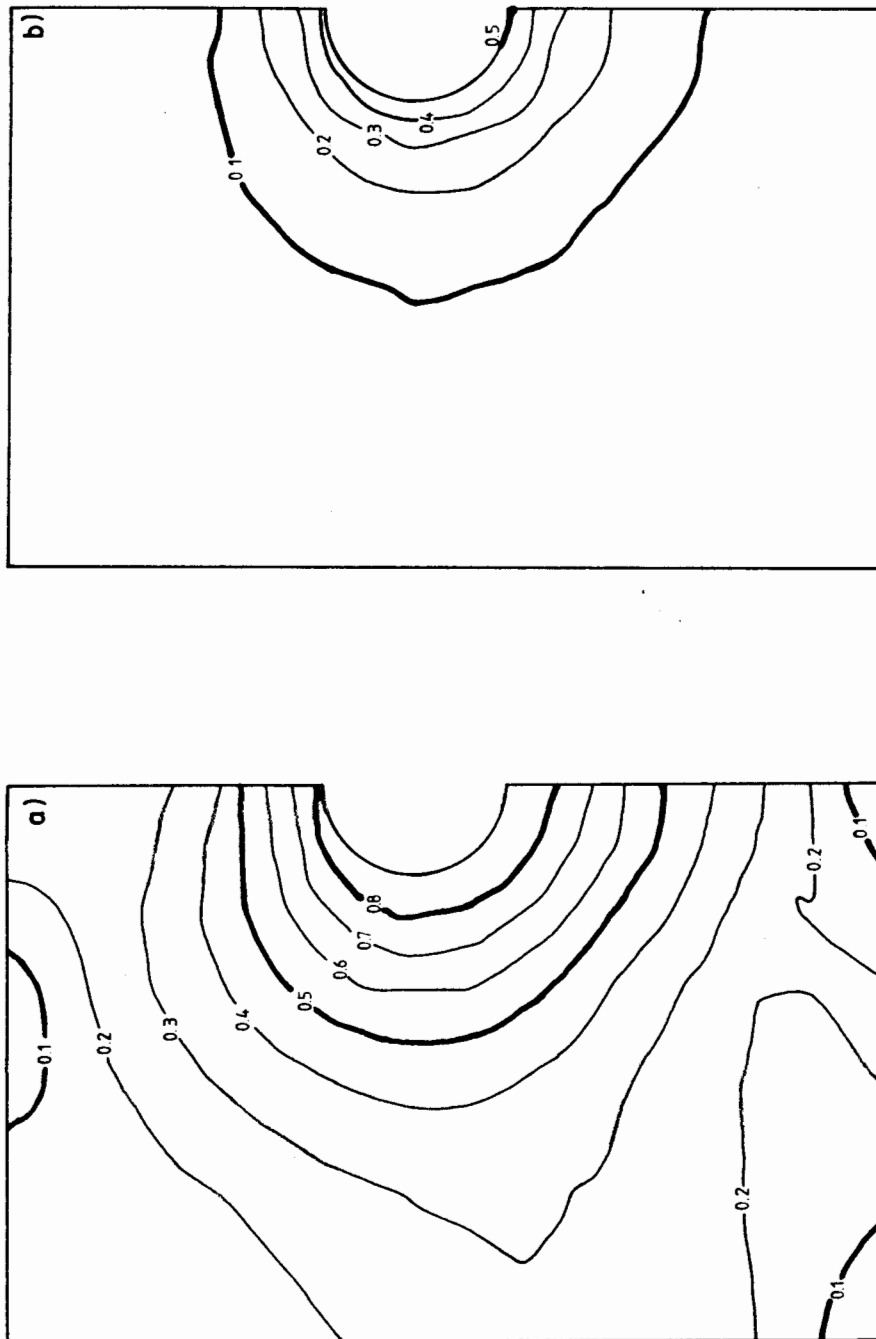
identificación. Los cuatro ejemplos escogidos fueron:

- a)  $E_i=10$  MPa,  $C_u=0.1$  MPa
- b)  $E_i=30$  MPa,  $C_u=0.3$  MPa
- c)  $E_i=50$  MPa,  $C_u=0.5$  MPa
- d)  $E_i=100$  MPa,  $C_u=1.0$  MPa

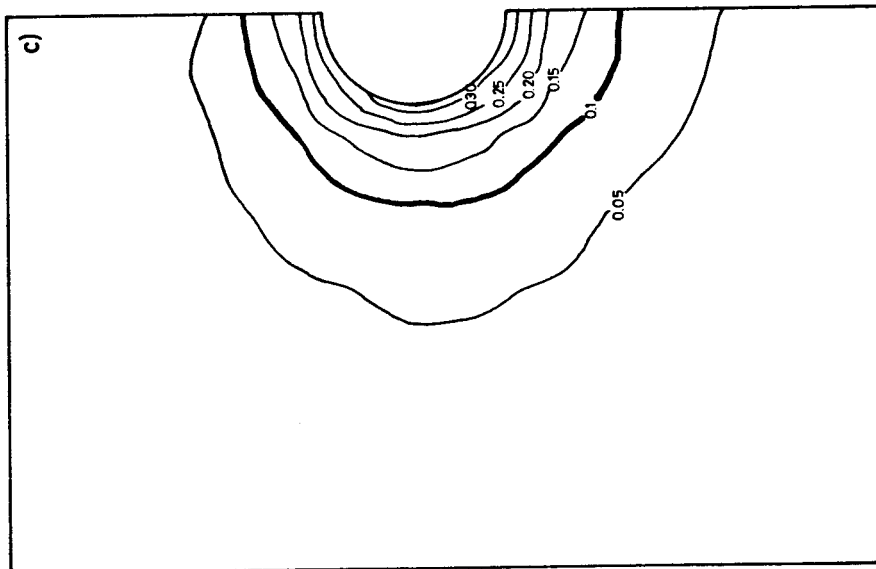
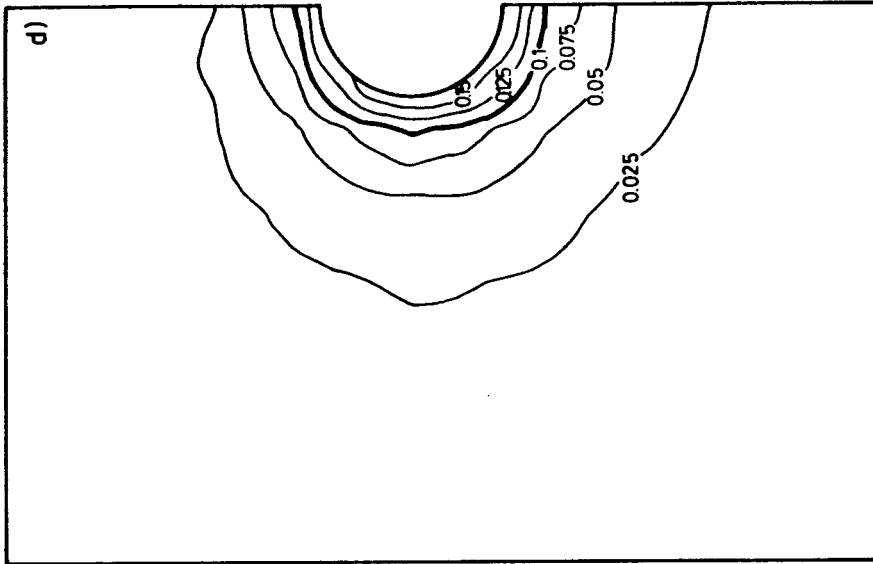
En todos ellos se mantuvo la relación  $E_i/C_u=100$ . Los cuatro casos están ordenados de menor a mayor valor numérico de los parámetros, comenzando por el caso a) que puede considerarse cercano a rotura. Con el fin de visualizar el nivel de tensiones que se produce en un terreno de propiedades definidas por a), b), c) o d), se han dibujado los contornos de igual valor de  $J_T * R/C_u$  (con  $R=1$ ) para cada uno de esos casos. En las figuras 6.3 y 6.4 se representan estos contornos para los cuatro ejemplos escogidos. Se han resaltado las líneas de  $J_T / C_u$  igual a 0.8, 0.5 y 0.1, de manera que puede comprobarse cómo disminuye el nivel de tensiones relativo a  $C_u$  al aumentar el valor numérico de los parámetros.

Desde el punto de vista de la identificación de parámetros, el conocimiento inicial del comportamiento real del modelo es muy importante. Como prueba de ello, analicemos los cuatro casos mencionados.

El ejemplo cercano a rotura ya se ha indicado que depende fundamentalmente de  $C_u$ . El módulo  $E_i$  apenas proporciona información sobre el terreno, y en consecuencia puede ser más conveniente no intentar identificarlo. En este caso el modelo prácticamente sólo depende de  $C_u$ , y podría replantearse el problema con un solo parámetro.



**Figura 6.3.** Contornos de puntos de igual nivel de tensiones (S) originadas por la excavación del túnel circular tomado como ejemplo, para diferentes parámetros del terreno: a)  $E = 30$ ,  $C_u = 0.1$ , b)  $E = 10$ ,  $C_u = 0.3$ , en MPa.



**Figura 6.4.** Contornos de puntos de igual nivel de tensiones (S) originadas por la excavación del túnel circular tomado como ejemplo, para diferentes parámetros del terreno: c)  $E = 50$ ,  $C_u = 0.5$ , d)  $E = 100$ ,  $C_u = 1.0$ , en MPa.

Por el contrario, si nos encontramos muy lejos de rotura, los niveles de tensiones serán muy bajos en todos los puntos, y el problema dependerá fundamentalmente de  $E_i$ , siendo independiente de  $C_u$ . En este caso de nuevo conviene replantear el modelo con un solo parámetro:  $E_i$ .

Se observa que bajo ciertas condiciones, algunos de los parámetros del modelo casi no influyen en la solución del problema. Esto, como se verá a continuación, condiciona en gran medida el proceso de identificación: no puede ser factible intentar identificar un parámetro que no influye en el problema directo.

#### **6.2.2 Definición Del Problema.**

Utilizando el ejemplo descrito en el apartado anterior, se procedió a identificar los parámetros  $E_i$  y  $C_u$  para los cuatro casos escogidos, fijando el resto de variables.

Como puntos de medida se tomaron los definidos en la figura 4.1: 7 horizontales correspondientes a un supuesto inclinómetro, y 5 verticales que se obtendrían de un hipotético extensómetro sobre la clave del túnel. Suponiendo el material definido por una ley constitutiva de tipo hiperbólico, eran de aplicación los desarrollos del apartado anterior.

La excavación del túnel se simuló, al igual que en ejemplos anteriores, introduciendo sobre el contorno excavado las fuerzas equivalentes a las tensiones iniciales. Se tomó la tensión vertical equivalente al peso de tierras, con un peso específico de  $20 \text{ KN/m}^3$ , y se fijó el valor de  $K_0=1$ , definido en términos de



tensiones totales.

Con estas condiciones, el estudio del método de identificación se basa en suponer unos valores de los parámetros y obtener unos desplazamientos que se toman como movimientos medidos en el proceso identificativo. Este proceso deberá conducir a los parámetros escogidos de antemano. Los parámetros supuestos en cada caso corresponden a los indicados anteriormente como casos a), b), c) y d). A estos efectos se consideraron tres grupos: el ejemplo cercano a rotura, el caso lejano de rotura, y los casos intermedios.

Por otra parte, se comprobará posteriormente que la función objetivo en este ejemplo es particularmente difícil de identificar, debido a que dista mucho de la forma de un paraboloide, que como se ha visto en el capítulo 2, permite asegurar el éxito del cálculo del mínimo. Como consecuencia de ello, se realizaron ligeras modificaciones en el método de Marquardt, que se comentan en cada caso.

### **6.2.3 Caso A), Cercano A Rotura.**

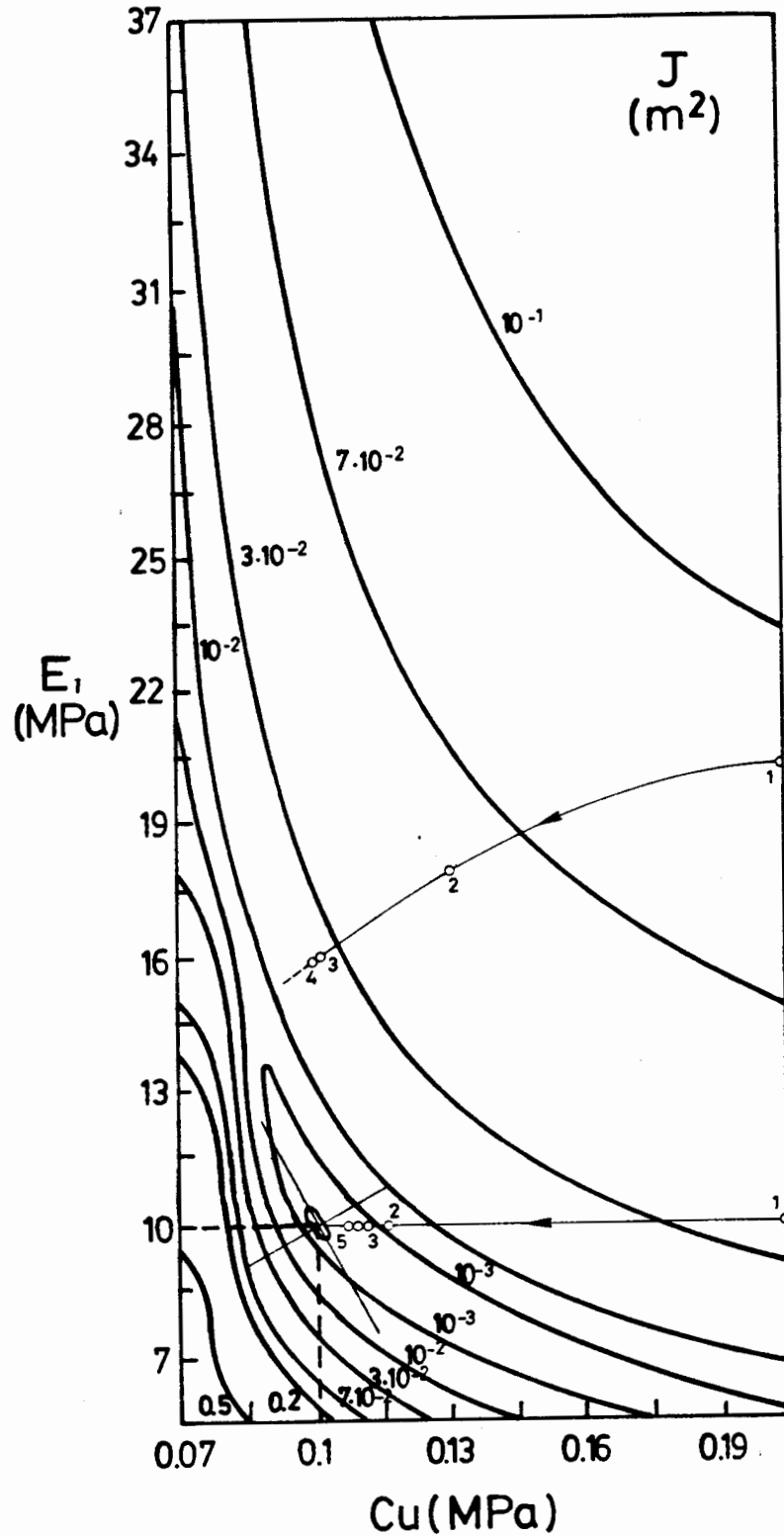
Como ya se ha indicado, en estas condiciones el problema debe ser prácticamente independiente de  $E_i$ . Una forma de comprobarlo es dibujando la función objetivo correspondiente a este caso, aprovechando la circunstancia de que el problema sólo depende de dos parámetros. Las medidas corresponden al resultado del problema directo para  $E_i=10$  MPa y  $C_u=0.1$  MPa, de manera que en este punto se debe localizar el mínimo de la función objetivo.

En efecto, en la figura 6.5 se representan las curvas de nivel de igual valor de la función objetivo, que presenta un mínimo para el punto indicado. Cada punto de la gráfica se ha evaluado calculando el problema directo con un  $E_i$  y  $C_u$  determinado, y hallando después la suma de los cuadrados de las diferencias entre desplazamientos medidos y calculados en los 12 puntos escogidos de la figura 4.1.

El hecho de que el problema casi no depende de  $E_i$ , debido a la cercanía a la rotura define la forma de la función objetivo. Obsérvese que la gráfica presenta una zona de "valle" casi paralela al eje  $E_i$ , al menos para valores de  $C_u$  bajos. Lógicamente, para  $C_u$  altos el valor de  $E_i$  tiene más importancia, y el valle de la función objetivo se curva en esa zona.

Ya se ha visto que la forma de la función objetivo determina la mayor o menor dificultad para encontrar un mínimo. En este caso es lógico pensar que el parámetro  $E_i$  será muy difícil de identificar, debido a dicha forma, reflejo del problema físico en estudio.

En la figura 6.5 se han representado también los caminos seguidos en algunos intentos de resolver el problema de identificación. Puede observarse que el proceso iterativo conduce, en general, hacia la zona de valle, pero no hacia el mínimo absoluto. La razón es que una vez el proceso iterativo ha llegado al valle, es muy difícil seguir por él, debido a los valores muy bajos del gradiente en esa zona.



**Figura 6.5.** Representación gráfica de la función objetivo correspondiente al ejemplo del túnel circular con parámetros cercanos a rotura:  $E = 10$ ,  $Cu = 0.1$  en MPa. Se indican algunos caminos seguidos por procesos iterativos, así como las direcciones de máxima y mínima curvatura en el mínimo.

En esencia, las dificultades que aparecen en el proceso de identificación son consecuencia de la propia estructura del problema, del que la función objetivo no es más que una simple representación. Ya se ha comentado, al describir el modelo, que en este caso, cercano a rotura, el problema es prácticamente independiente de E. Por ello no tiene sentido intentar identificarlo, y por este motivo los caminos seguidos por el algoritmo identifican valores aceptables de Cu, pero son incapaces de estimar el E real, si bien esto no es ningún problema: nuestro modelo depende, en estas circunstancias, sólo de Cu.

La matriz de covarianzas de los parámetros, en el mínimo, es la siguiente:

$$C_p = \begin{bmatrix} 23090 & -92 \\ -92 & 0.37 \end{bmatrix} \sigma^2 \quad \text{MPa}^2$$

donde  $\sigma^2$  sería la varianza de las medidas. Las direcciones que representan los vectores propios de esta matriz, normalizados a las dimensiones utilizadas, se han dibujado en el mínimo. Se comprueba en la figura 6.5 que dichas direcciones coinciden con las de máxima y mínima curvatura en ese punto.

Algunas filas de la matriz densidad de información de este ejemplo se han representado en la figura 6.6. Según ella no existe una interrelación importante entre medidas horizontales y verticales, siendo necesarios ambos conjuntos de medidas para identificar el problema.

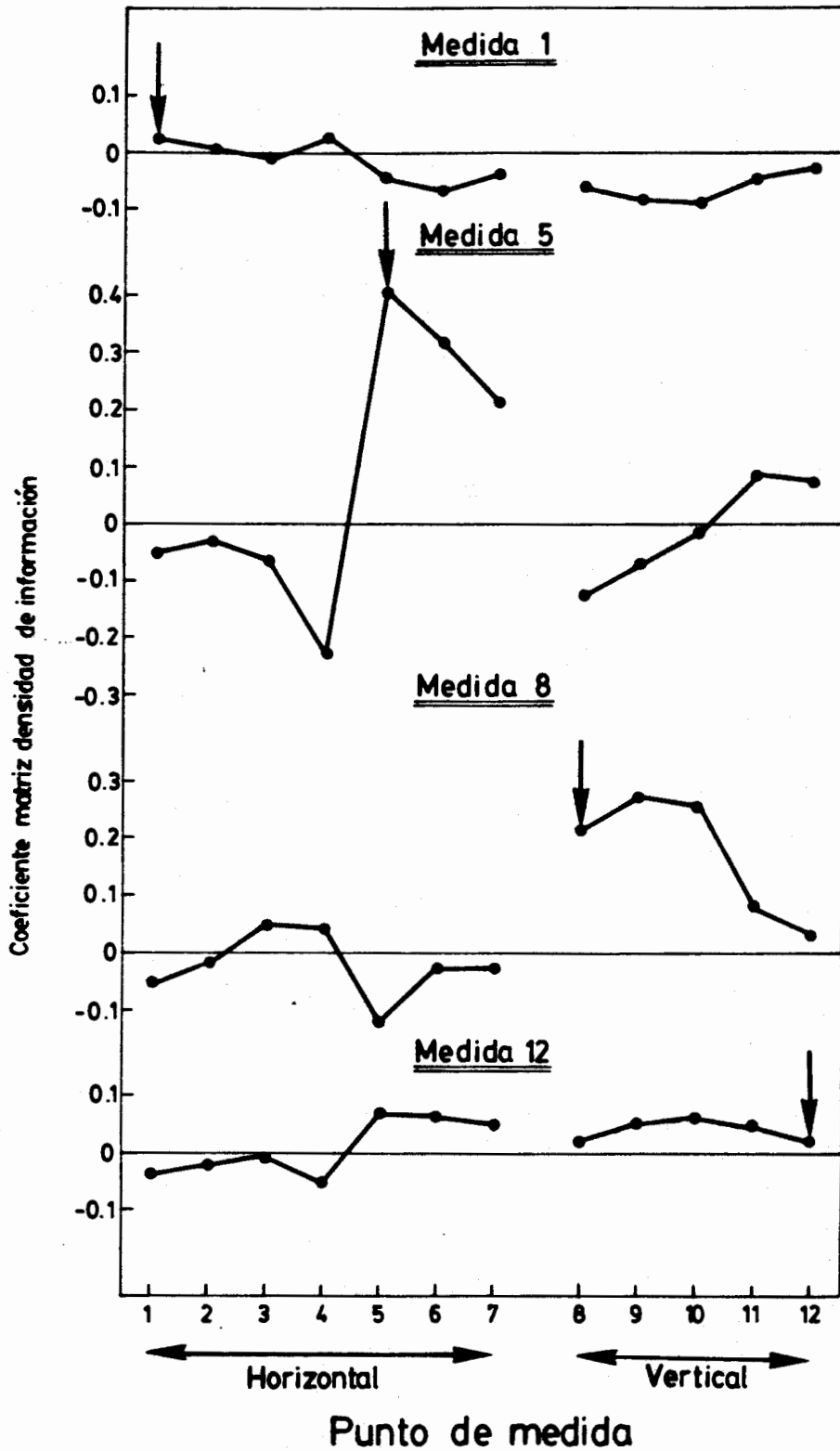


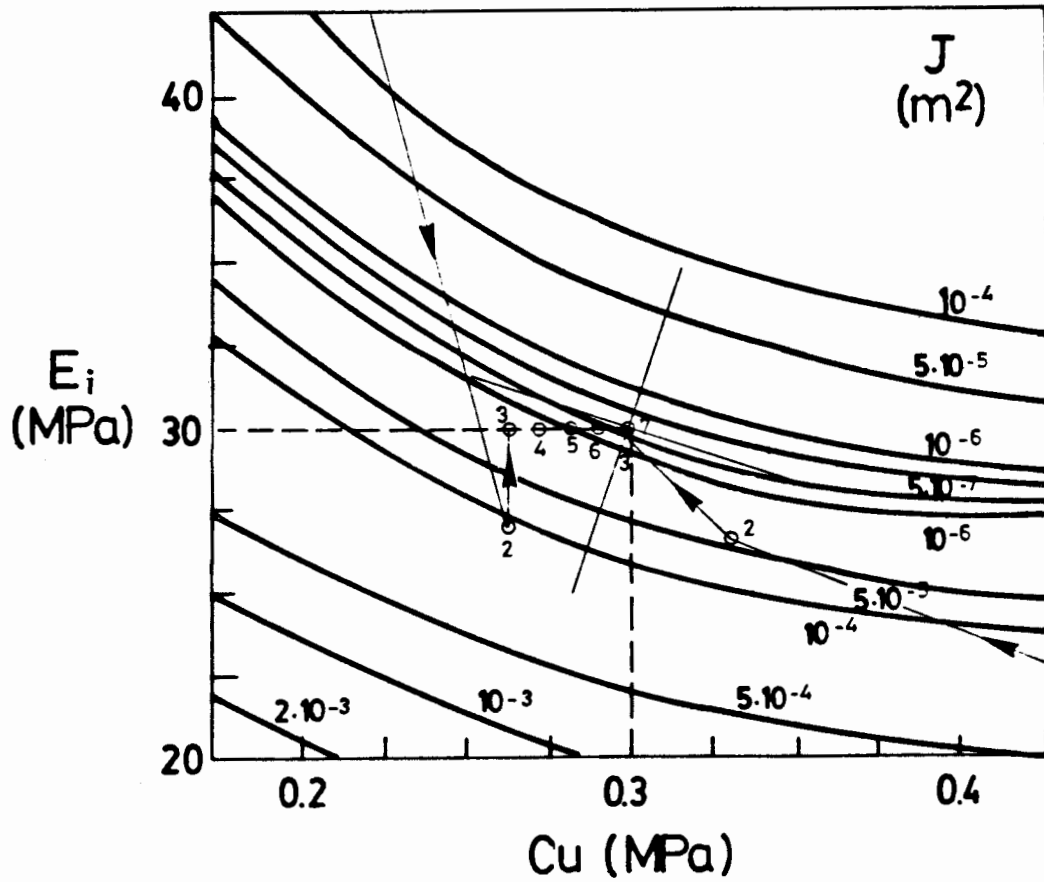
Figura 6.6. Representación gráfica de algunas de las filas de la matriz densidad de información para el ejemplo del túnel circular con parámetros cercanos a rotura.

Este caso puede representar un ejemplo típico en el que la existencia de valles en las funciones objetivo originan problemas de identificación a menudo no resolubles con las técnicas disponibles en la actualidad. Una vez se ha llegado a un valle, la condición de mínimo no sirve para discriminar de manera suficiente unos puntos de otros, y es muy difícil llegar al mínimo absoluto. Una posibilidad consiste en tomar otros puntos iniciales y utilizar la información que sobre la función objetivo han proporcionado los tanteos anteriores (figura 6.5). Otra alternativa más coherente se basa en combinar sucesivamente diferentes algoritmos de minimización.

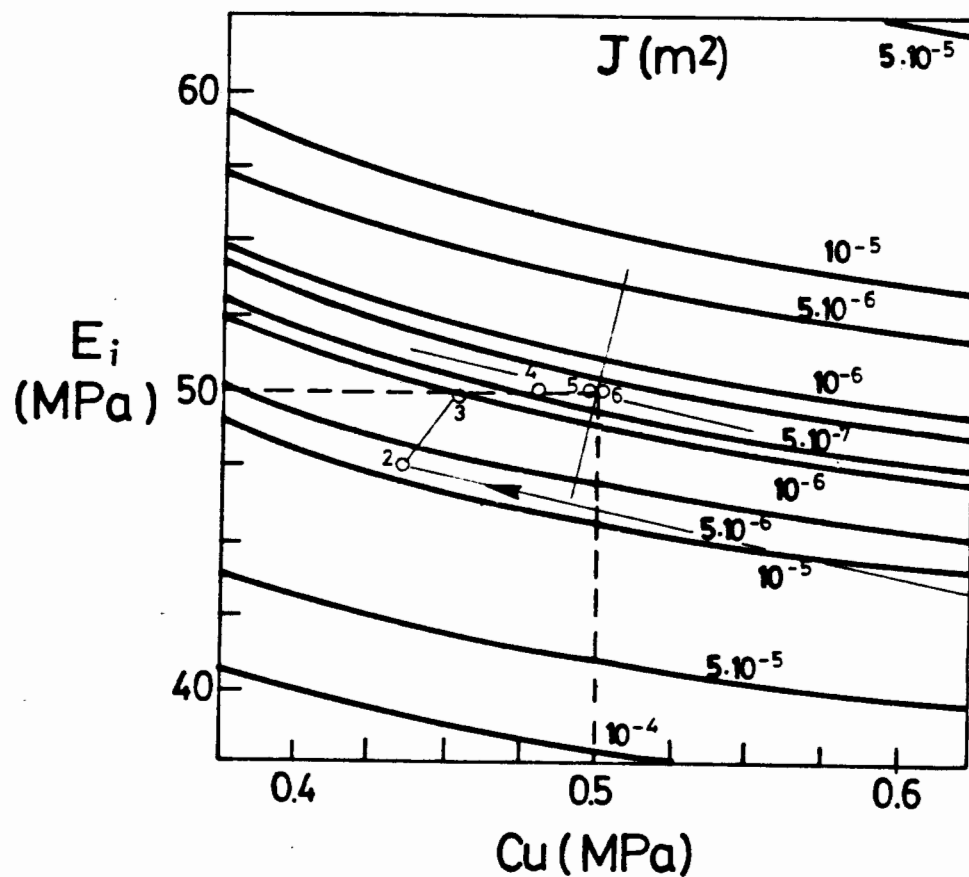
En cualquier caso, los problemas de identificabilidad que originan estos valles reflejan, en general, las características del modelo y su mayor o menor representación del problema físico. En consecuencia, puede ser conveniente plantear el problema en otros términos.

#### 6.2.4 Casos Intermedios B) Y C).

Corresponden a los valores definidos por b) y c) en el apartado 6.2.1. Para esos valores el terreno no está muy lejos de rotura, de manera que algunos de sus puntos todavía se encuentran con niveles de tensiones que corresponderían a plastificación (aunque estrictamente esto sólo tendría sentido en un modelo elastoplástico, ya que en el modelo hiperbólico nunca se alcanza la tensión de plastificación definida por la asíntota). En estas circunstancias el problema depende tanto del módulo  $E_i$  como del parámetro  $C_u$ . En las figuras 6.7 y 6.8 se han representado las funciones objetivo correspondientes a estos dos casos.



**Figura 6.7.** Representación gráfica de la función objetivo correspondiente al ejemplo del túnel circular con parámetros intermedios:  $E = 30$ ,  $C_u = 0.3$  en MPa. Se indican algunos caminos seguidos por procesos iterativos y las direcciones de máxima y mínima curvatura en el mínimo.



**Figura 6.8.** Representación gráfica de la función objetivo correspondiente al ejemplo del túnel circular con parámetros intermedios:  $E = 50$ ,  $Cu = 0.5$  en MPa. Se indican algunos caminos seguidos por procesos iterativos y las direcciones de máxima y mínima curvatura en el mínimo.



Una visión directa de la figura 6.7 o de la 6.8 permite comprender la influencia de los dos parámetros que intervienen en el proceso: Puede observarse, al igual que en el caso anterior, la existencia de una zona de mínimo o "valle" relativamente importante. Esto constituye de nuevo un ejemplo de los problemas de identificabilidad que aparecen en ocasiones en la resolución del problema inverso. Las figuras en este caso reflejan el hecho de que a efectos de la función objetivo escogida, se obtienen prácticamente los mismos desplazamientos si se toman los parámetros  $(E_i, C_u)$  o bien otros parámetros tales que  $E_i$  sea algo mayor y  $C_u$  algo menor. La consecuencia es que existen varios pares de parámetros  $(E_i, C_u)$  que proporcionan desplazamientos parecidos, y por tanto, el mismo valor de la función objetivo. Las figuras 6.7 y 6.8 inducen a pensar que el modelo, en este rango de parámetros y con esta geometría, podría caracterizarse en función de un solo parámetro, combinación de  $E_i$  y  $C_u$ , ya que el tomar mayor número de medidas (por ejemplo las del contorno excavado), se ha comprobado que no hace variar sustancialmente la forma de la función objetivo.

En las mismas figuras se representan algunos caminos seguidos por el algoritmo de Marquardt para estos problemas no lineales, así como las direcciones de máxima y mínima curvatura. Los parámetros pueden ser difíciles de identificar, debido a la existencia de un valle, si se escoge un punto inicial demasiado alejado del mínimo. Sin embargo, estos casos son más sencillos que el anterior: la curvatura de la función objetivo es positiva en una amplia zona de  $E_i$  menores que el mínimo.

Las matrices de covarianza de los parámetros en el caso representado en la figura 6.7 es:

$$C_p = \begin{bmatrix} 4.4 \cdot 10^7 & -1.0 \cdot 10^6 \\ -1.0 \cdot 10^6 & 2.4 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \sigma^2 \quad \text{MPa}^2$$

y para el ejemplo representado por la figura 6.8:

$$C_p = \begin{bmatrix} 5.1 \cdot 10^8 & -2.2 \cdot 10^7 \\ -2.2 \cdot 10^7 & 9.5 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \sigma^2 \quad \text{MPa}^2$$

Se puede observar que las varianzas de los parámetros aumentan considerablemente al alejarnos de rotura. Esto es consecuencia directa de la forma de la función objetivo, que presenta un valle cada vez más definido.

En lo que hace referencia al algoritmo de Marquardt usado en estos ejemplos, se han realizado ligeras modificaciones sobre el mismo para los casos más difíciles de identificar. En concreto, para estos dos casos, comenzando desde algunas zonas, a un extremo del valle, el algoritmo se dirigía hacia otro punto en el extremo opuesto, al otro lado del valle. La dirección era correcta, pero la magnitud del avance no, debido a que se aproxima cuadráticamente en cada punto, y la forma de la función es muy no lineal.

Por ello, como alternativa posible, puede utilizarse la dirección encontrada y limitar el "salto" a un valor fijo, o bien estudiar los puntos intermedios del "salto" inicial, observando si se atraviesa alguna zona de menor valor de la función objetivo. Posteriormente se comentan en detalle estas alternativas.

Con ligeros cambios de este tipo puede facilitarse la convergencia en algunos problemas concretos, pero en cualquier caso no constituyen métodos generales como para definir una modificación propia del algoritmo de Marquardt.

En general se ha podido identificar correctamente en estos dos ejemplos, incluso tomando valores iniciales relativamente alejados de la solución, y a pesar de la existencia del valle descrito. En cualquier caso, no siempre está garantizada la convergencia con estos algoritmos cuando la función objetivo presenta este tipo de valles. Los problemas de unicidad que éstos originan, se concretan en dificultades numéricas de minimización, pero en esencia, estas dificultades son reflejo de la estructura del modelo, que conviene estudiar desde un punto de vista físico.

#### **6.2.5 Caso D), Lejano A Rotura.**

Para este ejemplo se tomaron como desplazamientos medidos los correspondientes a los parámetros definidos por d) en el apartado 6.2.1 La función objetivo se representa en la figura 6.9. Desde un punto de vista físico, el problema, al estar lejos de rotura, no depende de  $C_u$ , ya que todos los puntos tienen un nivel muy bajo de tensiones. Esto se refleja en dicha figura en el valle casi paralelo al eje de  $C_u$ . Puede observarse también que el gradiente es menor, y la función es "más llana" que en los casos anteriores.

La matriz de covarianzas de los parámetros correspondiente es:

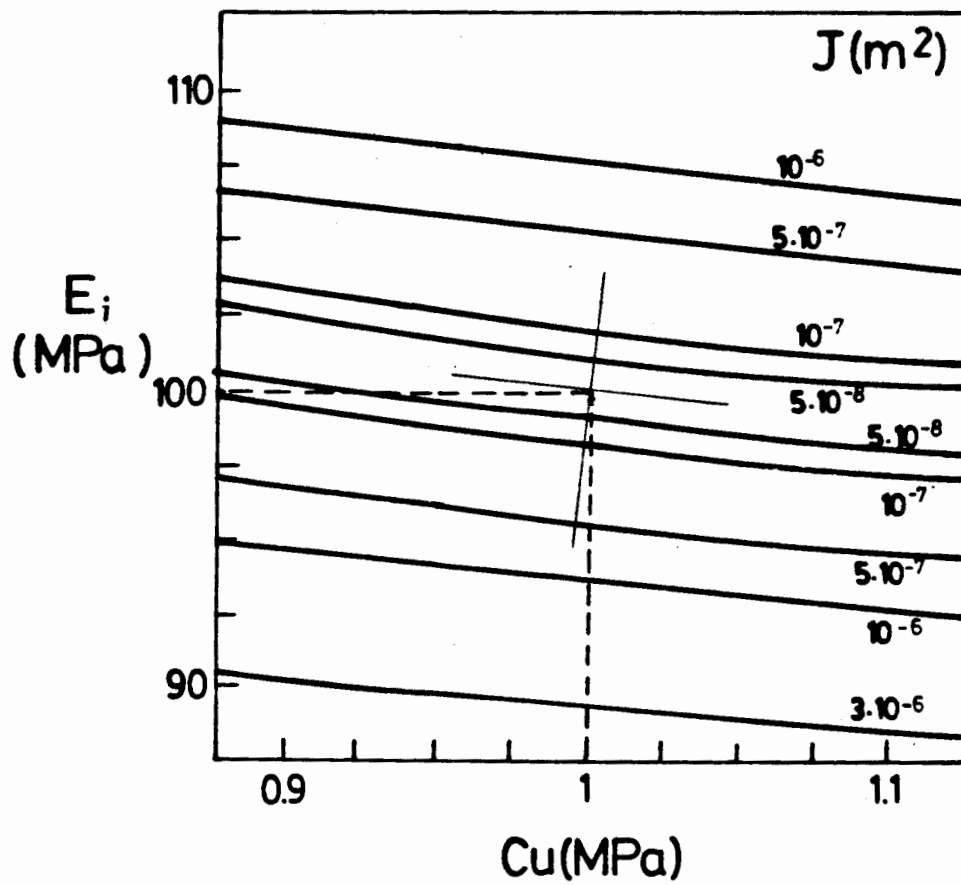


Figura 6.9. Representación gráfica de la función objetivo correspondiente al ejemplo del túnel circular con parámetros lejanos a rotura:  $E = 100$ ,  $Cu = 1.0$  en MPa. Se indican las direcciones de máxima y mínima curvatura en el mínimo.

$$C_p = \begin{bmatrix} 1.0 \cdot 10^{10} & -9.4 \cdot 10^8 \\ -9.4 \cdot 10^8 & 8.8 \cdot 10^7 \end{bmatrix} \sigma^2 \quad \text{MPa}^2$$

que proporciona los valores más altos de los cuatro ejemplos estudiados, y se corresponde con la forma de la función objetivo, extraordinariamente llana en el entorno del mínimo. Esto es lógico, ya que para valores altos de los parámetros los desplazamientos son pequeños y es más difícil discriminar unos puntos de otros en el valor de J.

A efectos del problema de identificación, se presentan dificultades similares a las del primer caso, cercano a rotura, aumentadas, si cabe, por el hecho de que en sentido perpendicular al valle la función objetivo es también muy plana. Esta circunstancia dificultará la identificación de los dos parámetros. En concreto, un intento de resolución comenzando desde los valores  $E=80$  MPa,  $C_u=0.7$  MPa, condujo a los parámetros identificados:

-  $E = 106$  MPa

-  $C_u = 10.4$  MPa

y a un valor de la función objetivo de  $2.077 \cdot 10^{-4}$ , cuando los valores ciertos son  $E=100$  MPa y  $C_u=1$  MPa. Como puede verse, el módulo de elasticidad se estimó con cierta aproximación, pero el valor de  $C_u$  dista mucho del verdadero. Las altas varianzas de los parámetros obtenidos, desaconsejan tomar desde un principio los valores identificados como solución, a menos que se realice un estudio sistemático de la forma de la función objetivo (comenzando desde otros puntos o usando algoritmos alternativos), y se tengan ciertas garantías sobre si el mínimo encontrado es un mínimo

global.

Siguiendo con este caso lejano a rotura, se han dibujado algunas filas de la matriz densidad de información en la figura 6.10. Esta refleja una estructura diferente de la representada en la figura 6.6, correspondiente al ejemplo cercano a rotura. Se comprueba que lejos de rotura, las medidas 5 y 12 (correspondientes a clave y hastial de túnel respectivamente) están muy interrelacionadas, indicando que bastaría una de ellas para identificar el problema. Cerca de rotura, sin embargo, las dos medidas no guardan relación alguna.

### 6.3 ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN EN PROBLEMAS NO LINEALES.

Los ejemplos anteriores muestran las dificultades encontradas en la identificación de parámetros en un modelo no lineal particular. Esta "no linealidad" hace referencia a la relación tensión - deformación, y es la que complica el cálculo de la matriz de sensibilidad. Sin embargo, la identificabilidad del problema no está directamente relacionada con este tipo de "no linealidad", sino con la relación entre variables de estado medidas (desplazamientos) y parámetros a identificar. En los ejemplos de capítulos anteriores, con modelos de material elásticos lineales, la relación  $\mathbf{x} = \mathbf{M}(\mathbf{p})$  era no lineal, y por este motivo el algoritmo de identificación procedía de modo iterativo. Con frecuencia los problemas de identificabilidad van ligados a la parametrización y estado del sistema, más que al hecho de que el comportamiento del material se tome lineal o no lineal.

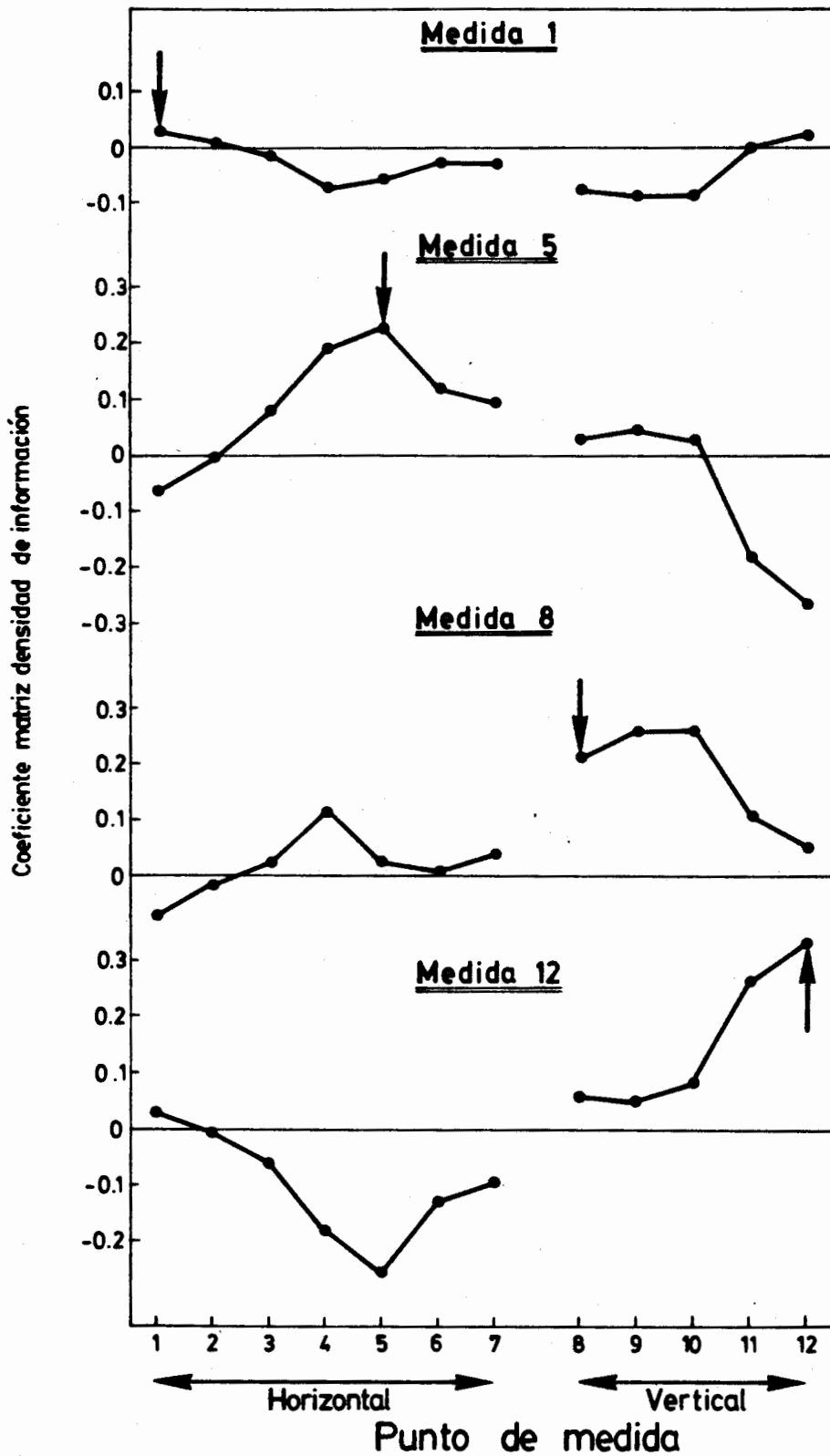


Figura 6.10. Representación gráfica de algunas de las filas de la matriz densidad de información para el ejemplo del túnel circular con parámetros lejanos a rotura.

El algoritmo de Levenberg - Marquardt, desarrollado y adaptado especialmente a este tipo de problemas, ha sido utilizado en todo el desarrollo de este trabajo. Sin embargo, su uso en problemas no lineales requirió realizar en él pequeñas modificaciones.

La dificultad mayor aparece en estos casos debido a la alta no linealidad de la función objetivo, a su poco parecido a un paraboloides y, en algunos casos, a su hessiano definido negativo. La consecuencia más inmediata es que en muchos casos la dirección de avance calculada con el algoritmo utilizado es la correcta, pero el incremento de avance es excesivamente grande. En ese caso se llega a un nuevo punto que puede tener un valor mayor de la función objetivo. El algoritmo de Marquardt de forma natural, cambia en este caso la dirección de avance. Sin embargo la dirección anterior puede haber sido correcta, y simplemente se intentaba dar un "salto" excesivamente grande. Esto es habitual en el caso de que la función objetivo sea muy no lineal. La propuesta en este caso es seguir en la misma dirección, y estudiar la función objetivo en un incremento menor (mitad, por ejemplo). Si el estudio en esa misma dirección y con incrementos menores sigue proporcionando valores altos de la función objetivo, se cambia de dirección tal como lo hacía el método propuesto inicialmente. De esta forma, antes de cambiar de dirección de avance, se estudia una misma dirección con varios incrementos. De esta forma se ha conseguido identificar los casos b) y c) anteriores. En ellos, la existencia de un valle muy encajado, hacía difícil que durante el proceso de identificación se entrara en él, y se "saltaba" de un lado a otro sucesivamente.



Los detalles de estructuración del programa de cálculo utilizado para la identificación de problemas no lineales, se explica en un apéndice final.

El tiempo de cálculo de ordenador puede ser un factor decisivo en las posibilidades de implementación del esquema de resolución propuesto. En el caso de modelos no lineales, el cálculo de las derivadas de los desplazamientos respecto a los parámetros resulta muy laborioso, pero sigue siendo competitivo respecto a otros métodos. Para los ejemplos anteriores, los tiempos de cálculo de cada módulo fueron, referidos al tiempo de CPU de resolución del problema directo:

- Problema directo            x
- Cálculo de derivadas    2.3x
- Identificación            0.5x

Puede comprobarse que para calcular las derivadas se necesita menos tiempo que si se evalúan mediante diferencias finitas, en cuyo caso se deberían resolver 4 problemas directos (en algunos casos bastaría con sólo 2, según el tipo de aproximación que se tomara). Por otra parte, el método propuesto de cálculo de derivadas es "exacto", en el sentido de que no introduce más aproximaciones que las del propio método de los elementos finitos, mientras que el método de diferencias finitas introduce un error adicional en función del incremento que se tome al calcular las derivadas. En consecuencia, incluso para modelos no lineales, el cálculo de la matriz de sensibilidad con este método es factible desde el punto de vista de tiempo de cálculo en ordenador.

Se observa, en vista de las dificultades que han surgido en el análisis no lineal, que cada tipo de problemas requiere un tratamiento especial, y en particular, los algoritmos de identificación para estos casos todavía se encuentran en fase de estudio e investigación.

Finalmente, cabe indicar que con la formulación indicada, el cálculo de la matriz de sensibilidad para modelos lineales se convierte en un caso particular de la generalización hecha para modelos no lineales.

# 7

**CONCLUSIONES.**

## **CAPÍTULO 7**

### **CONCLUSIONES**

#### **7.1 RESUMEN Y CONCLUSIONES.**

En el capítulo primero se indicaron los objetivos fundamentales perseguidos en este trabajo. Un requisito inicial era el establecer una formulación general de la identificación de parámetros, aplicable a problemas de Geotecnia. La determinación de parámetros de modelos constitutivos de suelos y rocas no ha sido tradicionalmente una tarea fácil. El desarrollo de la instrumentación, y la posibilidad, cada vez más factible, de tomar medidas fiables "in situ", permite obtener suficiente información como para intentar una determinación de los parámetros de los modelos en buenas condiciones.

En primer lugar, la definición metodológica de un procedimiento de resolución del problema inverso era en cualquier caso necesaria, debido a la gran dispersión de la literatura sobre un tema que es forzosamente multidisciplinar, y en su mayoría no geotécnica. Sin embargo, establecida una metodología útil, era necesario comprobar su validez práctica en una variedad de ejemplos sintéticos y reales. Estas dos exigencias, metodología y campo de aplicación amplio en problemas reales, han condicionado el propio

desarrollo del trabajo.

Como consecuencia de este desarrollo, cabe destacar las siguientes conclusiones:

**a) Criterio de identificación.**

La identificación de parámetros de un modelo a partir de medidas de campo se efectúa definiendo en primer lugar un criterio de identificación. El criterio que se ha considerado más adecuado para el tipo de problemas que se tratan es el de máxima verosimilitud, ya que permite representar de forma aceptable la estructura estadística del proceso de identificación, e incluye como caso particular al de mínimos cuadrados. Es importante destacar la necesidad de considerar las observaciones como variables aleatorias, afectadas de un error de medida. El problema inverso, planteado en los términos anteriores, debe considerarse por tanto como un problema estadístico.

**b) El problema matemático.**

Elegido un criterio de identificación, el problema matemático subyacente a nuestro problema físico es hallar el mínimo de la función definida por dicho criterio. En general esta función depende de las diferencias entre variables medidas y calculadas. Por otra parte, no puede decirse que exista un método suficientemente general para minimizar funciones. Entre los procedimientos presentados, el método de Gauss-Newton planteado en forma incremental ha proporcionado resultados satisfactorios en el tipo de problemas que se tratan en este trabajo. En aquellos casos en que se han presentado dificultades en la convergencia, se ha utilizado la variante de Levenberg-Marquardt con ligeras

modificaciones para problemas no lineales. La ventaja adicional de estos métodos es que proporcionan información de tipo estadístico sobre los parámetros identificados.

**c) Unicidad de solución.**

Uno de los problemas habituales en la identificación de parámetros es el de la unicidad. Existen criterios matemáticos para definir un extremo de una función, pero no hay ninguna garantía de que el mínimo encontrado sea el mínimo absoluto. El buen funcionamiento de los métodos de minimización depende en gran medida del punto de partida en el proceso iterativo. Los problemas se agudizan cuando la función objetivo presenta una zona de "valle". La mayoría de los algoritmos permiten llegar a los puntos del valle, pero es muy difícil moverse a través del mismo en busca del mínimo absoluto. En los capítulos precedentes se han mostrado varios ejemplos de este tipo, con problemas importantes de identificabilidad. En ocasiones es fácil encontrar una explicación física a la existencia del valle en la función objetivo: por ejemplo, no se podrá estimar el módulo elástico inicial ( $E_i$ ) de un material con modelo de comportamiento hiperbólico, a partir de medidas que corresponden a un estado cercano a rotura, ya que ésta depende fundamentalmente de  $C_u$ .

En consecuencia, los problemas de unicidad van ligados, en muchas ocasiones, a problemas inversos mal definidos, ya sea por el propio modelo, o por el tipo de datos de que se disponen. No existe una metodología definida para resolver este tipo de problemas, y hay que estudiar cada caso en concreto. Como técnicas generales, puede comenzarse el proceso iterativo desde otro punto inicial para comprobar si converge al mismo valor de los

parámetros, y también puede estudiarse la información sobre varianzas de los parámetros que proporcionan los algoritmos propuestos.

**d) Uso del Método de los Elementos Finitos.**

Se ha desarrollado una formulación acoplada "Problema Inverso" - "Método de los Elementos Finitos" que permite usar este método de forma totalmente general. Este era un requisito importante si se deseaba dotar de cierta generalidad a la metodología de identificación de parámetros propuesta.

Los algoritmos utilizados en el proceso de minimización requieren el cálculo de la derivada de las variables medidas (normalmente desplazamientos) respecto a los parámetros a identificar. Se ha propuesto un método de cálculo de estas derivadas utilizando el método de los elementos finitos, evitando los errores y el mayor tiempo de cálculo que originaría un procedimiento basado en diferencias finitas.

**e) Análisis de errores.**

El análisis del problema desde un punto de vista estadístico ha permitido obtener algunas conclusiones adicionales de importancia. En primer lugar, la resolución del problema inverso con la formulación propuesta permite obtener información acerca de la estructura del modelo y de la interrelación entre los diferentes puntos de medida, a efectos de identificación de parámetros. También se obtiene información, como ya se ha indicado, sobre las varianzas de los parámetros encontrados, en función de las varianzas de las medidas. Por otra parte, el análisis de errores ha puesto de manifiesto la influencia que sobre las varianzas de

los parámetros identificados tiene el propio valor de los parámetros. Esto implica que no es posible estudiar una disposición óptima de instrumentación exclusivamente mediante criterios de mínima varianza de los parámetros, a menos que se supongan unos valores realistas de esos parámetros de antemano. El problema de la distribución más adecuada de la instrumentación requiere, en definitiva, lo que en capítulos anteriores se ha denominado información previa, generalizando el concepto de óptimo al de óptimo en función de la información disponible.

**f) Aplicación a Problemas Geotécnicos concretos.**

Utilizando el criterio de identificación de máxima verosimilitud con información previa, y los algoritmos de resolución de Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, se ha propuesto una formulación general para la resolución del problema inverso en Geotecnia, empleando el método de los elementos finitos. Esta formulación general se ha aplicado con éxito a varios ejemplos teóricos todos ellos relativos a la excavación de túneles, donde se ha considerado dos grupos de medidas: desplazamientos horizontales y verticales, y se ha identificado el módulo de elasticidad y el coeficiente de empuje al reposo (con la salvedad de que el análisis se ha llevado a cabo en tensiones totales). Con el fin de comparar los diferentes casos, se ha utilizado el mismo ejemplo definido por una malla de elementos finitos representada en la figura 4.1.

El estudio de la influencia del error de las medidas en la identificabilidad del problema se ha realizado introduciendo varianzas diferentes en las medidas horizontales y verticales. El problema depende del cociente entre dichas varianzas, y para diferentes valores de este cociente se ha resuelto el problema



inverso y se ha dibujado la función objetivo, que es fácilmente representable al depender sólo de dos parámetros.

Mediante estos ejemplos se pone de manifiesto la importancia del conocimiento de la estructura de error de las medidas en el proceso de identificación. Por ejemplo, un error importante (es decir, una varianza alta) de las medidas horizontales respecto a las verticales hace que el coeficiente de empuje al reposo sea difícil de identificar (la varianza de  $K_0$  identificado es relativamente alta), ya que este coeficiente está muy relacionado con ese tipo de medidas.

**g) Identificación de las varianzas de las medidas.**

Dada la importancia de considerar la estructura de error de las medidas, y debido a la dificultad de conocer "a priori" sus varianzas, se han considerado como un parámetro más a identificar. La formulación de la identificación de varianzas se ha desacoplado de la identificación de parámetros, obteniéndose un método de estimación fácil a partir de las formulaciones anteriores. Se han presentado varios ejemplos de identificación de parámetros y varianzas, utilizando el criterio de máxima verosimilitud.

**h) Matrices de covarianza de instrumentación geotécnica.**

Por otra parte, se han desarrollado las matrices de covarianza de los errores de las medidas que aparecen en la formulación propuesta, para diferentes aparatos utilizados con frecuencia en la instrumentación geotécnica. Su característica común es que permiten realizar medidas de desplazamientos o de inclinaciones a lo largo de una línea. Ejemplos de este tipo de aparatos son: micrómetros deslizantes, extensómetros e inclinómetros. De esta

forma se puede reproducir correctamente la estructura de error de las medidas de que se disponga, según el aparato utilizado para medir.

El uso de la matriz de covarianza de las medidas, y en particular de diferentes varianzas para unas medidas o para otras, puede interpretarse como una "matriz de pesos" que actúa sobre nuestra función objetivo, concediendo más importancia a las medidas más "exactas". El uso de esta estructura de error puede dar lugar a dificultades en el proceso de identificación: por ejemplo, una varianza muy alta en unas medidas respecto a otras da lugar a que el propio método no las considere, disminuyendo el número total de medidas disponibles y manteniendo el número total de parámetros.

#### **i) Importancia del modelo.**

El modelo utilizado tiene gran importancia en el proceso de identificación. Por una parte, escogido un modelo (que se considera, por tanto, determinista), los parámetros que se obtienen son los "mejores" para ese modelo en el sentido "objetivo" definido por un criterio de identificación. Es decir, se obtienen los parámetros que mejor reproducen las medidas, con el modelo elegido. Si el modelo es erróneo, será difícil "ajustarle" las observaciones, y el proceso de identificación concederá un error importante a los aparatos de medida, es decir, aumentarán las varianzas de los parámetros y de las medidas (si estas se identifican). La elección del modelo es, por tanto, una fase importante, y la identificación del modelo más adecuado entra dentro de lo que se denomina "Identificación de Sistemas", en fase todavía mucho más incipiente de desarrollo que la "Identificación de Parámetros".

j) Aplicación a un caso real.

En el capítulo quinto se ha presentado la identificación de los módulos elásticos de tres estratos y del coeficiente de empuje al reposo, a partir de medidas efectuadas durante la excavación de un túnel real en una zona urbana. La metodología propuesta se ha mostrado especialmente útil y efectiva en un ejemplo práctico de este tipo, a pesar de la escasez de medidas, del alto número de elementos finitos que requería la geometría del problema, y del número de parámetros.

Para el estrato intermedio de arcilla, los parámetros obtenidos se compararon con los módulos medidos en laboratorio a partir de probetas de terreno procedentes de muestras bloque extraídas cuidadosamente. En dichas probetas se intentó medir módulos a bajos niveles de deformación. Durante la excavación del túnel, el terreno proporcionó movimientos pequeños, y su comportamiento, a efectos constructivos, fue bueno. El medir módulos a bajos niveles de deformación permitiría reproducir el comportamiento real de dicho terreno. En efecto, la identificación de parámetros realizada con la metodología propuesta a partir de medidas de campo proporcionó módulos del mismo orden de magnitud que los obtenidos con muestras bloque ensayadas cuidadosamente.

La identificación de parámetros permitió obtener información "real" de las características geomecánicas del terreno afectado por la excavación del túnel: el relleno superior, la arcilla sobreconsolidada y el estrato inferior de arcilla y bloques de pizarra. La imposibilidad de ensayar en laboratorio el relleno heterogéneo y el terreno del estrato inferior, concede a los módulos obtenidos mediante la identificación de parámetros una

importancia adicional.

Las conclusiones anteriores ponen de manifiesto la importancia de la instrumentación de campo en Ingeniería Geotécnica, ya que la metodología de identificación de parámetros propuesta permite extraer información objetiva y útil de las medidas realizadas. La utilización racional de los métodos de identificación exige al mismo tiempo una mayor flexibilidad en el diseño y ejecución de las obras, variándolos en función de la información que nuestro "sistema" en estudio nos proporciona.

**k) Extensión a modelos no lineales.**

Finalmente, la formulación propuesta se ha extendido también para modelos constitutivos no lineales (con una relación biunívoca entre tensiones y deformaciones), mucho más realistas en Geomecánica. Se ha particularizado para el caso de que el modelo constitutivo del material sea de tipo hiperbólico, resolviendo el ejemplo teórico utilizado en los capítulos anteriores identificando el módulo de elasticidad inicial ( $E_i$ ) y la resistencia al corte sin drenaje ( $C_u$ ). Se ha analizado la influencia del valor de dichos parámetros en la identificabilidad del problema, dibujando la función objetivo en varios casos, según el terreno esté cerca o lejos de rotura. Al realizar este análisis se ha puesto de manifiesto la importancia de una adecuada definición del problema físico para llevar a cabo la identificación. Por ejemplo, para el modelo hiperbólico estudiado, no tiene sentido intentar identificar el módulo de elasticidad inicial de un terreno, si sus puntos se encuentran en rotura, ya que ésta depende sólo de  $C_u$ . De la misma forma, si el terreno está sometido a un nivel de tensiones muy bajo, el problema físico casi no dependerá de  $C_u$ , y este parámetro

será inidentificable.

## 7.2 LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS.

El trabajo realizado puede continuarse en varios aspectos, tanto de tipo matemático - numérico, como de tipo geotécnico.

Desde un punto de vista exclusivamente matemático, es conveniente dotar al método de minimización de algoritmos alternativos que ayuden a resolver el problema en el caso de que se produzcan dificultades de convergencia con los métodos propuestos. A medio plazo, sería conveniente disponer de una biblioteca de algoritmos de minimización de funciones numéricas, acoplable a la formulación del problema con el método de los elementos finitos. En cualquier caso, el problema matemático descrito está en continuo desarrollo, y la incorporación de nuevos métodos de minimización es siempre aconsejable. Las dificultades obtenidas en la identificación con modelos no lineales aconsejan seguir trabajando en este aspecto particular del problema.

En lo que hace referencia a la aplicabilidad del método, sería conveniente generalizarlo para el caso de que existan medidas de variables de estado que no sean desplazamientos. De esta forma se podrían utilizar otros tipos de medidas también frecuentes en instrumentación geotécnica, tales como tensiones.

Existen otros aspectos que pueden constituir un trabajo de ampliación al desarrollado aquí. Tal es el caso de la extensión del programa desarrollado a tres dimensiones. Esto permitiría modelar mejor la geometría de algunos problemas, y en cualquier caso constituiría una herramienta útil. La implementación del método para el caso de que el modelo dependa del tiempo ampliaría su campo de aplicación, permitiendo, por ejemplo, utilizar modelos de tipo viscoso.

El estudio estadístico del problema inverso ha permitido definir conceptos relativos a la estructura del modelo y a la estructura de error de los parámetros identificados.

Como ya se ha indicado en el apartado anterior, la definición de una instrumentación óptima debe estar referida a una información previa sobre los parámetros. Un estudio en detalle de algunos problemas típicos en Geotecnia permitiría posiblemente aconsejar sobre la disposición de la instrumentación que proporciona "mayor información" a efectos de identificación de parámetros.

Finalmente, la línea de investigación que se considera más importante es la continuación en la extensión de la formulación a modelos de comportamiento no lineales. Las dificultades inherentes a este tipo de modelos son, sin embargo, importantes, y se han puesto de manifiesto en el capítulo anterior. En particular, la identificación de los parámetros de los modelos elasto-plásticos (estado crítico), proporcionaría al método suficiente potencia y generalidad como para utilizarlo en una amplia gama de problemas en Geotecnia.