

Capítol 3. Control en mode lliscant

3.1. Introducció

El control en mode lliscant és un mètode de control no lineal, i és un cas particular dels sistemes de regulació amb estructura variable. En els sistemes de control amb estructura variable, tal i com suggereix el nom, la llei de control canvia durant el procés de control d'acord a una sèrie de normes definides que depenen de l'estat del sistema.

Aquest mètode fou originalment proposat i elaborat per S. V. Emeljanov [29] i un grup de col·laboradors, entre els quals destaca V. I. Utkin [30], [31]. No és fins als anys noranta quan, al món occidental, se li ha prestat especial atenció.

Les principals prestacions que s'obtenen amb aquest tipus de control són la seva robustesa davant variacions dels paràmetres de la planta, la possibilitat d'aconseguir transitoris ràpids i sense oscil·lacions, i el més important, es pot aconseguir fer el sistema insensible a pertorbacions externes, és a dir, una ràpida resposta davant a variacions de càrregues externes.

El nom de control en mode lliscant es deu a que l'acció de control (la commutació entre dos estats), està orientada a aconseguir que el sistema arribi a una recta de commutació (en el cas de dues variables d'estat), i a que posteriorment llisqui per ella.

Es pot demostrar matemàticament l'existència d'aquesta recta de lliscament [32]. El desenvolupament matemàtic es fa a partir de suposar (idealment) una freqüència de commutació infinita. Això porta a que el sistema, partint d'un estat inicial qualsevol, arribi en un temps finit a la recta de commutació, i un cop sobre aquesta, llisqui per sobre d'ella fins arribar al punt de funcionament. És a dir, en un motor de continua, per exemple, controlat amb un trossejador, si s'estableixen unes condicions inicials, com pot ser aturat ($i_a=0$, $n=0$) i sense càrrega, i es vol arribar a una velocitat de consigna, el sistema evolucionarà en el pla de fases (i_a-n) descrivint una trajectòria sense produir-se

cap commutació fins arribar a la recta de commutació. Com més endavant s'exposarà, si s'està en el domini de lliscament, les variables d'estat faran una trajectòria al llarg d'una recta ($s(x)=0$), que és el que s'anomena recta de lliscament i x és el vector d'estat del sistema.

Si la freqüència de commutació del control i el sensat de les variables que en ell intervenen necessita d'un temps finit, la implementació física és a freqüència finita. Aquest temps finit pot ser degut als convertors analògics-digitals, a les rutines de càlcul necessàries, i al retràs que introdueixen els components electrònics. Aquest fet provoca que es tingui un mode lliscament i, sobreposat a ell, un arrissat d'alta freqüència que s'anomena *chattering*. Això és degut a que les variables d'estat es mouen al llarg de la recta de lliscament amb un petit arrissat de petita amplitud i d'alta freqüència. Aquest arrissat serà tant més petit com més ràpid es commuti. Com que hi ha un límit en la freqüència de commutació, els últims estudis van encaminats a implementar estratègies de control per reduir al màxim aquest *chattering*.

Com ja s'ha comentat, en el control en mode lliscant, es commuta el sistema entre dos estats. Aquests dos estats estan dividits per l'anomenada llei de commutació ($s(x)=0$) que depèn de les variables d'estat del sistema. En funció del valor d'aquesta llei de control es commuta a un estat o a l'altre segons aquesta relació:

$$u = u_{max} \text{ si } s(x) > 0$$

$$u = u_{min} \text{ si } s(x) < 0$$

D'aquesta manera es té un sistema de control d'estructura variable tal com es representa a la figura 3.1.

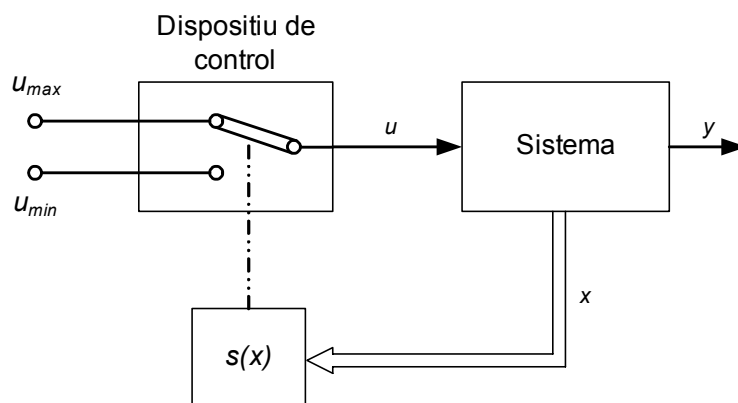


Figura 3.1. Control d'estructura variable.

Per demostrar l'existència del mode lliscant hom es situa al pla de les variables d'estat del sistema. Suposem que s'està fora de la recta de commutació, i que la trajectòria que descriuen les variables d'estat és cap a la superfície de lliscament (si s'està en un pla, i en el cas de dues variables d'estat, es tracta d'una recta). A aquesta situació s'anomena mode d'assoliment (*reaching mode*).

La llei de commutació és tal que assigna una posició a l'interruptor depenent del costat de la recta en que està el sistema, de forma que sempre faci tendir el sistema cap a ella. Si l'estat inicial és x_0 amb un estat de l'interruptor $u=u_{m\grave{a}x}$ i en un diferencial de temps dt les variables d'estat s'incrementen en un dx' , si es compleix que $s(x_0+dx') < 0$, llavors per la llei de commutació s'ha de fer $u=u_{m\grave{i}n}$, i, amb aquesta acció es produeix un desplaçament en el pla d'estat (dx''); i si $s(x_0+dx'+dx'') > 0$, llavors cal tornar a commutar, i aquesta vegada a $u=u_{m\grave{a}x}$. Per tant es té un moviment infinitament petit al voltant de $s(x)=0$. A la figura 3.2 s'ha representat aquest raonament per a tenir una major claredat [32].

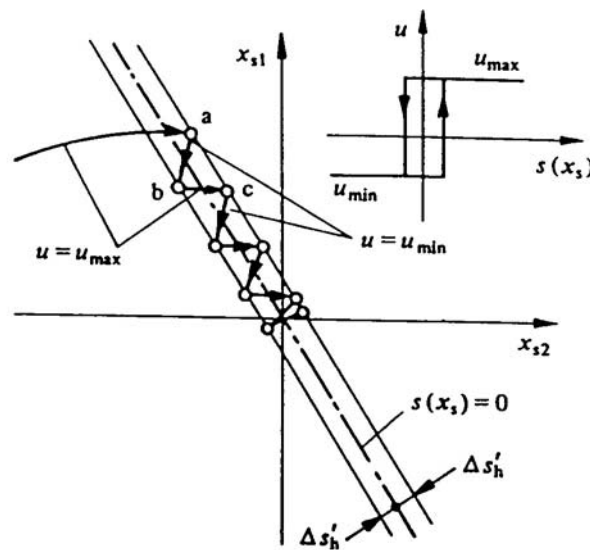


Figura 3.2. Recta de lliscament i commutacions del sistema.

Les trajectòries en el pla d'estat depenen del valor inicial de les variables d'estat (x_0), i de la consigna. A la figura 3.3 (esquerra) es poden veure les trajectòries en el pla d'estat depenent del valor inicial del vector d'estat. A la trajectòria 'a' es pot veure que si el valor de la sortida està lluny del valor de consigna, la trajectòria de les variables d'estat no entren en mode lliscament fins que no estan dins dels límits del mode lliscament; tot

el contrari que a la trajectòria 'c' que entra directament en mode lliscament. A la figura 3.3 (dreta) està representada la trajectòria que descriurien les variables d'estat quan es fa canviar la consigna. Canviar de consigna significa desplaçar paral·lelament la recta de commutació en el pla d'estat [32].

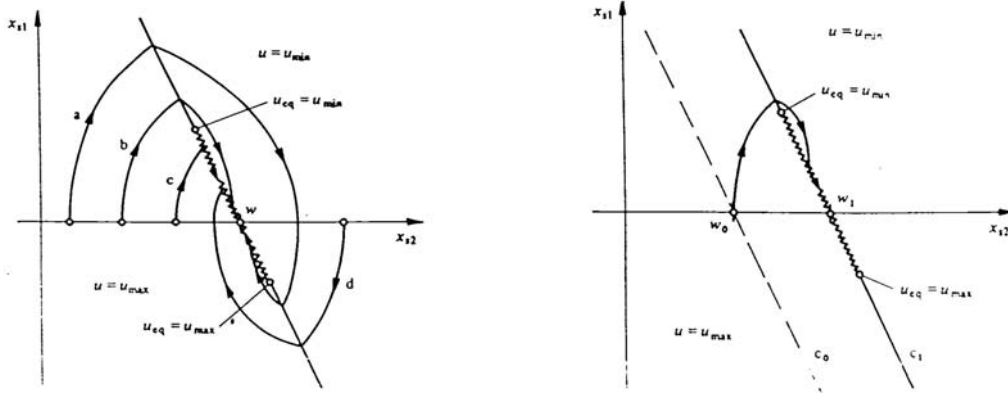


Figura 3.3. Trajectòries en el pla d'estat.

3.2. Llei de commutació

El sistema a controlar està representat a la figura 3.4.

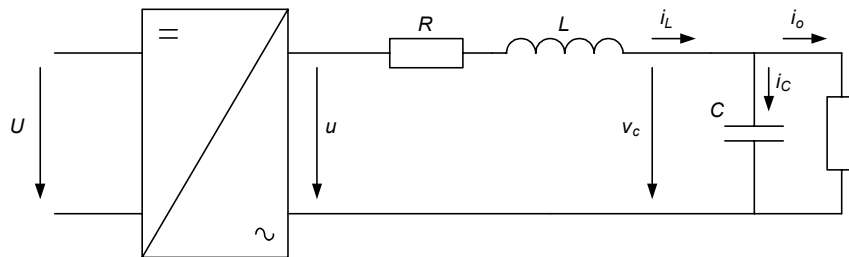


Figura 3.4. Sistema a controlar.

Les equacions que descriuen el sistema són:

$$\begin{aligned}
 u &= Ri_L + L \frac{di_L}{dt} + v_c \\
 i_L &= i_o + i_c \\
 i_c &= C \frac{dv_c}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 3.1}$$

El sistema a regular pot ésser descrit per les seves equacions d'estat:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + Bu + Ed \\
 y &= Cx
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 3.2}$$

On els símbols de les equacions 3.2 estan representats a les equacions 3.3.

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} v_c \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} \quad u \in \{u_{m\grave{a}x}, u_{m\grave{i}n}\} \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/LC \end{bmatrix} \\ E &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.3})$$

Cal notar que la pertorbació 'd' del sistema està relacionada amb el corrent que circula per la càrrega i la seva variació amb la llei que es representa a l'equació 3.4.

$$d = -\frac{1}{C} \left(\frac{di_o}{dt} \right) - \frac{R}{LC} i_o \quad (\text{Eq. 3.4})$$

Aquest control en mode lliscament ha de seguir el més proper possible la referència sinusoidal de consigna i, per tant, es defineix un vector referència de la següent manera:

$$x_{ref} = \begin{bmatrix} v_{ref} \\ \dot{v}_{ref} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.5})$$

on v_{ref} és la tensió sinusoidal requerida en borns del condensador.

També es defineix el vector d'error segons es mostra a l'equació 3.6.

$$x_e = x_{ref} - x = \begin{bmatrix} v_{ref} - v_c \\ \dot{v}_{ref} - \dot{v}_c \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.6})$$

La missió del control és fer nul aquest vector i, per això, es defineix la llei de commutació com:

$$s(x_e) = k_1(v_{ref} - v_c) + k_2(\dot{v}_{ref} - \dot{v}_c) \quad (\text{Eq. 3.7})$$

on k_1 i k_2 són dues constants a definir per l'estratègia de control.

La llei de control u depèn d'aquesta llei de commutació de la forma que s'indica a continuació:

$$\begin{aligned} u &= u_{m\grave{a}x} \text{ si } s(x_e) > 0 \\ u &= u_{m\grave{i}n} \text{ si } s(x_e) < 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.8})$$

La relació $s(x_e)=0$ és la recta de lliscament. Si la llei de control canvia ràpidament entre $u_{m\grave{a}x}$ i $u_{m\grave{i}n}$, es diu que el sistema ha assolit el mode lliscament, i això vol dir que el vector d'error es minimitza.

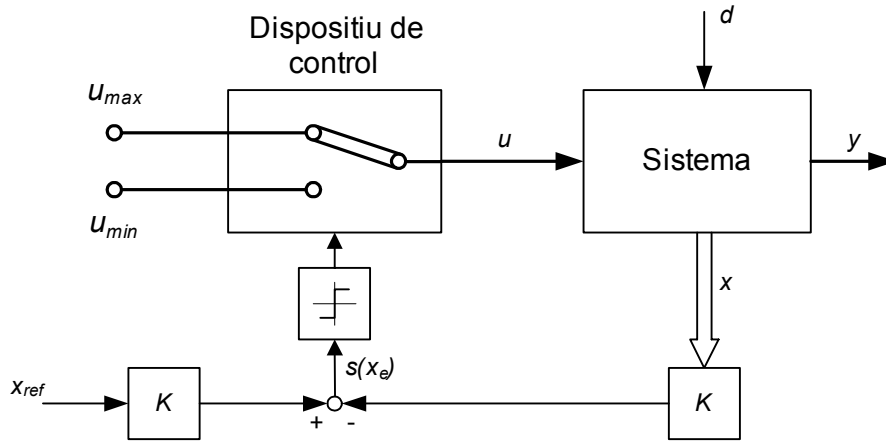


Figura 3.5. Llei de commutació per contrareacció d'estat.

La llei de commutació (figura 3.5) es pot expressar també com indica l'equació 3.9 i que és força més útil.

$$s(x_e) = -Kx + Kx_{ref} \quad (\text{Eq. 3.9})$$

on $K = [k_1 \quad k_2]$; k_1 i k_2 és el vector de contrareacció d'estat.

La igualtat $s(x_e)=0$ és una recta, i la seva equació es mostra a continuació:

$$\dot{v}_c = \frac{k_1}{k_2}(v_{ref} - v_c) + \dot{v}_{ref} \quad (\text{Eq. 3.10})$$

Un cop el sistema entri en mode lliscant, s'anirà desplaçant per sobre de la recta anteriorment descrita (Eq. 3.10).

Se sap que quan el sistema treballa en mode lliscant compleix que $s(x_e)=0$ i, per tant, de forma ideal també es complirà que la seva derivada es nul·la, $\dot{s}(x_e)=0$. Llavors, s'obté:

$$\dot{s}(x_e) = -K\dot{x} + K\dot{x}_{ref} = -K(Ax + Bu + Ed) + K\dot{x}_{ref} = 0 \quad (\text{Eq. 3.11})$$

De l'equació 3.11 es pot extreure una u_{eq} , de forma que es compleixi el mode lliscant en tot instant de temps, obtenint-se l'equació 3.12.

$$u_{eq} = -\frac{1}{KB}K(Ax + Ed) + \frac{1}{KB}K\dot{x}_{ref} \quad (\text{Eq. 3.12})$$

Aquesta amplitud de control es pot interpretar més fàcilment observant el gràfic representat a la figura 3.6.

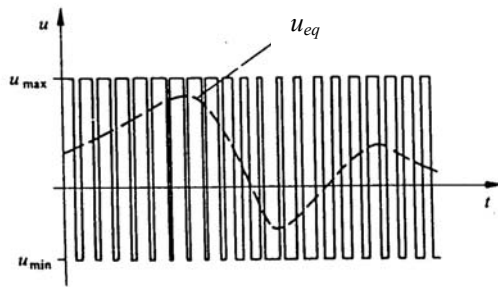


Figura 3.6. Amplitud de control [32].

Es pot observar que per l'existència del mode lliscant s'ha de complir que $u_{min} \leq u_{eq} \leq u_{max}$. També és indispensable que KB (Eq. 3.12) sigui diferent de zero, que és una condició intrínseca per l'aparició del mode lliscant. A partir de la u_{eq} i substituint a la llei de commutació s'obté la solució de l'equació d'estat en mode lliscant [32].

3.3. Càlcul de K per imposició de pols

El càlcul dels coeficients de contrareacció d'estat es pot realitzar per diversos mètodes, entre els quals destaquen els mètodes de Liapunov i Pontryagin. Un tercer mètode és el d'imposició de pols, que és el que s'usa en aquest treball. Els dos primers es basen en l'estabilitat del sistema, és a dir, forcen el sistema a complir uns teoremes, i d'aquesta forma s'assegura la convergència del sistema.

En aquest treball, però, es realitza el càlcul dels coeficients amb el mètode d'imposició de pols. Evidentment, aquesta assignació es fa de manera que els pols tinguin part real negativa per tal d'assegurar l'estabilitat del sistema.

A partir de l'equació del sistema, es calcula la matriu de controlabilitat [33] tal com es mostra a les expressions 3.13.

$$\begin{aligned}
 Q_c &= [B \quad AB] \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/LC \end{bmatrix} \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/LC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/LC \\ -R/L^2C \end{bmatrix} \\
 Q_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1/LC \\ 1/LC & -R/L^2C \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 3.13}$$

El sistema és controlable gràcies a que aquesta matriu té rang dos, i, per tant, és regular.

Per sistemes d'ordre petit, com és aquest cas, un mètode molt ràpid per solucionar el problema dels coeficients de realimentació és substituir directament la realimentació al polinomi característic [33]; d'aquesta manera s'obté l'expressió 3.14.

$$|sI - A + BK| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 - s(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1\mu_2 \quad (\text{Eq. 3.14})$$

on μ_1 i μ_2 són els pols a imposar.

$$\begin{vmatrix} s & -1 \\ (k_1 + 1)/LC & s + R/L + k_2/LC \end{vmatrix} = s^2 + s\left(\frac{R}{L} + \frac{k_2}{LC}\right) + \frac{k_1 + 1}{LC} \quad (\text{Eq. 3.15})$$

Igualant terme a terme s'obtenen les següents expressions:

$$\begin{aligned} -(\mu_1 + \mu_2) &= \frac{R}{L} + \frac{k_2}{LC} \\ \mu_1\mu_2 &= \frac{k_1 + 1}{LC} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.16})$$

Com que el sistema es vol estable, mitjançant la imposició de pols s'ha de fer que μ_1 i μ_2 siguin menors que zero i, per tant, es pot veure (equacions 3.17) quin és el rang de valors per a les constants k_1 i k_2 que fan el sistema estable:

$$\begin{aligned} -(\mu_1 + \mu_2) > 0 \\ \mu_1\mu_2 > 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{R}{L} + \frac{k_2}{LC} > 0 \\ \frac{k_1 + 1}{LC} > 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.17})$$

on els paràmetres del sistema R , L i C són constants positives i, per tant, la condició d'estabilitat es fàcil d'aconseguir. En particular, tots els valors positius de k_1 i k_2 fan que el sistema sigui estable.

Cal dir que els valors de k_1 i k_2 , 4 i 1 respectivament, s'han obtingut gràcies a les simulacions i després s'han verificat sobre el prototipus. El que aquí s'ha presentat és una demostració de què amb aquests valors el sistema és estable. Com es pot observar, qualsevol valor positiu de k_1 i k_2 verifica que el control és estable. El problema radica en què no tots els valors que fan estables el sistema de control són òptims des del punt de vista de la forma d'ona de la tensió de sortida.

3.4. Equacions per a la implementació

La llei de commutació és l'encarregada de determinar la llei de control del sistema. La decisió d'obrir o tancar un interruptor es pren de la següent manera en funció de $s(x_e)$:

$$s(x_e) = k_1(v_{ref} - v_c) + k_2(\dot{v}_{ref} - \dot{v}_c) \quad (\text{Eq. 3.18})$$

Un cop calculada la $s(x_e)$ cal determinar quin interruptor s'obre i quin es tanca. Això es fa de la manera que es mostra en les equacions 3.19.

$$\begin{aligned} u &= u_{m\grave{a}x} \text{ si } s(x_e) > 0 \\ u &= u_{m\grave{i}n} \text{ si } s(x_e) < 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.19})$$

Així doncs, aquesta funció $s(x_e)$ és la que cal implementar per fer funcionar el sistema. Però s'ha de tenir en compte que cal adaptar aquesta funció per poder implementar-la en un controlador digital; principalment, el que cal és buscar una manera d'obtenir la derivada de l'error.

El primer terme de l'equació és l'error, que s'obté de restar del valor de referència el valor sensat de la tensió de sortida de l'ondulador segons es mostra a l'equació 3.20.

$$v_{ref} - v_c = e(n) \quad (\text{Eq. 3.20})$$

El segon terme de l'equació, que és la derivada de l'error, es pot obtenir de diverses maneres. La primera i més senzilla és basa en restar l'error en l'instant n i el de l'instant $n-1$ i dividir el resultat obtingut pel període; això s'expressa de la següent manera:

$$(\dot{v}_{ref} - \dot{v}_c) = \frac{e(n) - e(n-1)}{T} \quad (\text{Eq. 3.21})$$

En una primera implementació, s'ha usat l'equació 3.21 per a la implementació de la derivada, i els resultats no han estat del tot dolents, però a fi i efecte de millorar-los, i per tal de preveure possibles anomalies produïdes per la presència de sorolls en els senyals que desvirtuessin el valor de la mostra de la tensió de sortida, s'ha decidit implementar una versió millorada per calcular la derivada de l'error; l'expressió corresponent és la 3.22.

$$(\dot{v}_{ref} - \dot{v}_c) = \frac{2}{T}(e(n) - e(n-1) - m(n-1)) \quad (\text{Eq. 3.22})$$

on $m(n-1) = e(n-1) - e(n-2) - m(n-2)$.

D'aquesta manera, els resultats milloren força i el programa no es complica de manera excessiva, podent-se mantenir la freqüència de mostreig.

Es podria haver complicat aquesta tècnica i incloure més termes per aconseguir tenir una derivada més robusta enfront de possibles sorolls, inclús afegir algun tipus de filtre digital en les mostres, però aquesta opció ha estat descartada degut a dos motius força lògics, a saber, el primer és que els resultats obtinguts amb aquesta aproximació són força bons; i el segon és la complicació d'implementar un filtre digital i el retràs que això comportaria en el llaç de control, que de ben segur afectaria molt més al bon funcionament del sistema.