

3. CONSIDERACIÓN DE LA SATURACIÓN MAGNÉTICA EN EL MODELO DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN.

3.1. JUSTIFICACIÓN.

En el modelado de la máquina asíncrona habitualmente se adopta la hipótesis de comportamiento magnético lineal, premisa que para un buen número de aplicaciones proporciona resultados satisfactorios.

Sin embargo, también existen otros regímenes de operación en los que esta hipótesis pierde su validez, bien porque deliberadamente se pretende trabajar con niveles de flujo inferiores o superiores al nominal, o bien porque la saturación se manifiesta como parte inherente de determinados procesos transitorios.

Se hallan en la literatura especializada numerosos ejemplos de aplicación en los que la inclusión del fenómeno de la saturación ¹ redundaría en resultados más ajustados a los datos experimentales, o incluso casos determinados en que al modelo con característica magnética lineal le resulta imposible representar el comportamiento real de la máquina, siendo, en consecuencia, obligada la consideración de la saturación.

Así sucede, por ejemplo, en el caso del alternador asíncrono funcionando en isla: la no linealidad de la característica magnética juega un papel vital en el proceso de autoexcitación a partir de un banco de condensadores. En esta aplicación, el uso del modelo con característica magnética lineal no conduce a ninguna solución estable [26], [27].

En regímenes transitorios severos en los que hay envueltas grandes corrientes, como puede ser el arranque directo o la reconexión a la red tras una falta en la tensión de alimentación, la inclusión de la saturación en el modelo conduce a resultados más ajustados a los observados experimentalmente.

¹ Constituye una práctica habitual el considerar independientemente la saturación del flujo magnetizante de la saturación de los flujos de dispersión. La saturación del flujo magnetizante es la más ampliamente tratada en la literatura especializada, y a menos que se explicite lo contrario, es a la que aluden las referencias que se citan en esta sección.

En estas situaciones, el modelo con característica magnética lineal predice picos transitorios de par superiores a los observados, mientras que el modelo saturado, por su menor inductancia magnetizante proporciona valores más reducidos para esta magnitud, que resultan más ajustados a los valores medidos [28]-[30].

Tras una falta en la tensión de alimentación, el modelo lineal también predice un ritmo inferior de disminución para la fuerza contraelectromotriz en el motor que el modelo con inclusión de la saturación, luego si la reconexión se produjese con la f.c.e.m. en oposición de fase respecto al voltaje en la red, la tensión resultante en bornes de la máquina calculada a partir del modelo lineal sería mayor, prediciendo transitorios más severos [31].

En relación a los transitorios que implican grandes corrientes, [13] señala a la saturación de los flujos de dispersión, concretamente los flujos de dispersión de ranura, como factor importante a tener en cuenta para el correcto cálculo de las intensidades.

Otra aplicación que requiere de la inclusión de la saturación en el modelo del motor es su frenado por desconexión de la red y conexión a un banco de condensadores. La velocidad calculada con el modelo lineal decrece más rápidamente que la observada experimentalmente, debido a que el par de frenado determinado a partir de este modelo es superior al real [32].

Se observa, pues, en los diversos casos de aplicación sobre los que se informa en las publicaciones especializadas, que la saturación tiene un efecto amortiguador sobre los transitorios eléctricos, aumentando la región estable de operación de la máquina [33], [26], [28].

Otro campo donde la inclusión del fenómeno de la saturación puede resultar determinante son los accionamientos a velocidad variable.

Así, en [34] se señala la conveniencia de modelar adecuadamente este fenómeno para el correcto diseño del inversor, en lo tocante a la impedancia que presenta el motor saturado a los distintos armónicos presentes en la alimentación.

En [35] se destaca la importancia del correcto valor de la inductancia magnetizante en el análisis de la estabilidad de los accionamientos de corriente alterna.

En [36] se manifiesta que en técnicas de control vectorial, el uso del modelo convencional del motor de inducción únicamente se justifica con flujo constante e igual al nominal. Cuando se requieren cambios en el nivel de flujo, el modelo lineal no proporciona resultados satisfactorios. El trabajo en la zona de debilitamiento de campo, o la optimización de determinadas magnitudes como el factor de potencia o el rendimiento, implican cambios en el nivel de flujo y demandan de una adecuada caracterización del comportamiento magnético de la máquina.

También, el nivel de saturación es, junto a otros factores, responsable de las variaciones en la constante de tiempo rotórica, que si no son compensadas pueden degradar el funcionamiento del control vectorial [37].

En aplicaciones de tracción eléctrica, operando en saturación pueden conseguirse puntas de par destinadas a salvar pendientes pronunciadas o a posibilitar rápidas aceleraciones y frenadas, mientras que la máquina estará dimensionada para las condiciones normales de conducción. Esto es, puede recurrirse a motores de menor tamaño (y potencia) si su sistema de control está correctamente diseñado para operar puntualmente en saturación [38].

Mostrada la conveniencia de incluir el fenómeno de la saturación magnética en determinadas aplicaciones, en la siguiente sección se considerarán los diferentes enfoques con que esta tarea ha sido abordada.

3.2. MODELADO DE LA SATURACIÓN MAGNÉTICA EN EL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN: DIFERENTES ENFOQUES.

El modo en que tradicionalmente se ha tomado en consideración el fenómeno de la saturación magnética en la máquina de inducción ha consistido sencillamente en ajustar los valores de las distintas inductancias susceptibles de experimentar saturación en las ecuaciones propias del modelo convencional.

Dicho ajuste puede efectuarse simplemente utilizando dos valores distintos para estas inductancias, según se trabaje en la zona lineal o en la zona saturada de la característica magnética, o bien puede recurrirse a una expresión analítica que muestre como varían continuamente en función de las corrientes o los flujos en la máquina.

Este método para considerar la saturación resulta intuitivo y conserva la estructura de las ecuaciones propias del modelo convencional, esto es, no supone la aparición de nuevos términos para dar cuenta del trabajo en saturación.

Debe decirse, no obstante, que –pese a que esta práctica genera resultados más ajustados a la realidad que los ofrecidos por el modelo con comportamiento magnético lineal-, matemáticamente no se halla bien fundamentada, dado que asume inductancias variables pero después las supone constantes a la hora de calcular las derivadas de los distintos flujos presentes en las ecuaciones del modelo.

Esto es:

$$\Psi = Li \Rightarrow \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) = \frac{dL}{dt}i + L \frac{di}{dt} \quad (3.1)$$

mientras que en la técnica referida se parte de las ecuaciones del modelo convencional con comportamiento magnético lineal, donde las inductancias son constantes, y por tanto la derivada del flujo se reduce a:

$$\Psi = Li \quad \wedge \quad L = \text{cte} \Rightarrow \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) = L \frac{di}{dt} \quad (3.2)$$

para luego substituir en esta última expresión valores variables para las inductancias.

El tratamiento riguroso de las derivadas de los distintos flujos susceptibles de saturación presentes en las ecuaciones del motor, provoca la aparición de nuevos términos en estas expresiones que modifican la estructura del modelo convencional con comportamiento magnético lineal, aumentando significativamente su complejidad.

La complicación añadida dependerá grandemente de la selección de las variables a emplear en el modelo. Así, la formulación en función de flujos elimina la necesidad de desarrollar sus derivadas, por lo que se previene la aparición de nuevos términos en las ecuaciones; en el polo opuesto, la utilización de las corrientes de estator y rotor como variables da lugar a la formulación de mayor complejidad.

La naturaleza de los términos de nueva aparición introduce en el modelo el fenómeno conocido como “intersaturación”, que no se evidencia en los modelos que sencillamente substituyen inductancias variables en las ecuaciones convencionales de la máquina. En esencia, dado un sistema bifásico de referencia, la intersaturación alude a la capacidad de la corriente según un eje de provocar variaciones en el flujo según el eje que se halla en cuadratura.

Una revisión de la literatura especializada permite clasificar las diferentes aproximaciones con que el tratamiento de la saturación magnética ha sido abordado, según las dos metodologías antes expuestas, a saber:

- modelos que usan inductancias variables en las ecuaciones convencionales del motor
- modelos con intersaturación

A continuación se pasará a reseñar las referencias más significativas correspondientes a la clasificación anterior. Como se indicó en la sección precedente, la saturación tratada mayoritariamente en las publicaciones especializadas es la del flujo magnetizante, y es a la que fundamentalmente se hará referencia en lo que seguirá, a menos que expresamente se indique que se considera la saturación del flujo de dispersión.

Así, perteneciente a la primera de las metodologías, [29] utiliza el clásico esquema equivalente en T para régimen dinámico, en el que introduce inductancias magnetizantes distintas para los ejes directo y en cuadratura, L_{mx} y L_{my} . En el trabajo en zona lineal se

impone la condición de que ambas inductancias magnetizantes sean constantes e iguales entre sí ($L_{mx} = L_{my} = L_m$), mientras que en saturación se hace que cada inductancia magnetizante dependa en exclusiva de la corriente magnetizante de su propio eje, es decir, $L_{mx} = f(i_{mx})$ y $L_{my} = f(i_{my})$.

En [39] se presenta un enfoque similar, con el añadido de que se subdivide las inductancias de dispersión de estator y rotor en una parte lineal, que da cuenta de la dispersión en las cabezas de bobina, y en una parte saturable, representativa mayormente de la dispersión de ranura. Para todas las inductancias saturables, tanto la magnetizante como las de dispersión, se emplean valores distintos para los ejes directo y en cuadratura, y cada una de ellas depende únicamente de la corriente de excitación de su propio eje.

En [23] se propone una alternativa al esquema equivalente en T clásico con inductancia magnetizante variable. Se introduce un circuito con sendas inductancias no lineales L_{si} y L_{ri} en disposición paralelo, para dar cuenta de la saturación en el yugo y dientes estáticos, por una parte, y en los dientes y el núcleo retórico, por otra, mientras que se considera constante la inductancia L_m de la rama central, representativa del entrehierro. El esquema equivalente propuesto (para el sistema estacionario) se muestra en la figura 3.1.

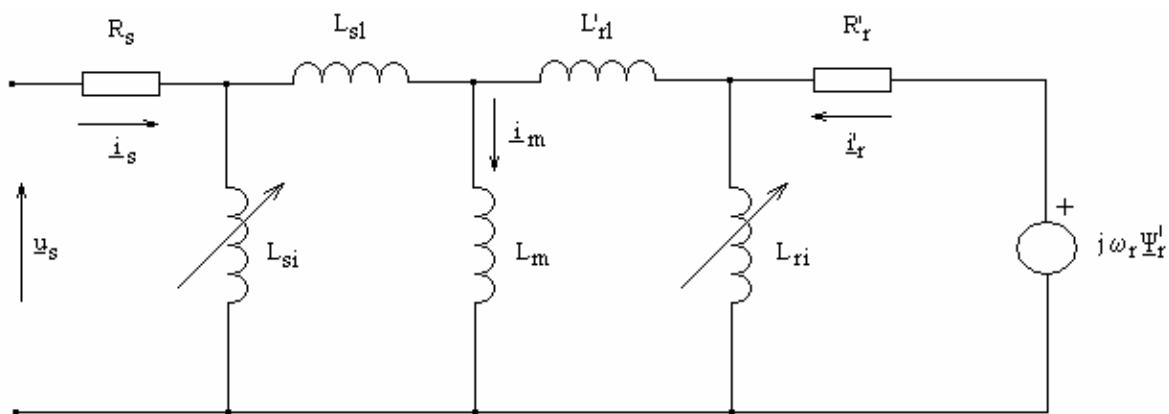


Figura 3.1. Esquema equivalente para el régimen dinámico del motor de inducción en el sistema estacionario, con consideración de la saturación.

Como utilidad, se introduce una simplificación en el esquema propuesto fundamentada en que en la mayoría de las máquinas y de las condiciones de carga puede ignorarse el efecto de la saturación rotórica, pudiendo representarse la saturación efectiva únicamente mediante la

inductancia no lineal L_{si} , siendo esta afirmación tanto más cierta con cargas crecientes, que disminuyen la densidad del flujo rotórico.

Esta simplificación, junto a la posibilidad de eliminar una de las inductancias de dispersión mediante el uso de factores de referencia adecuadamente seleccionados, conduce a la transformación del esquema original en dos posibles esquemas equivalentes, mostrados en la figura 3.2:

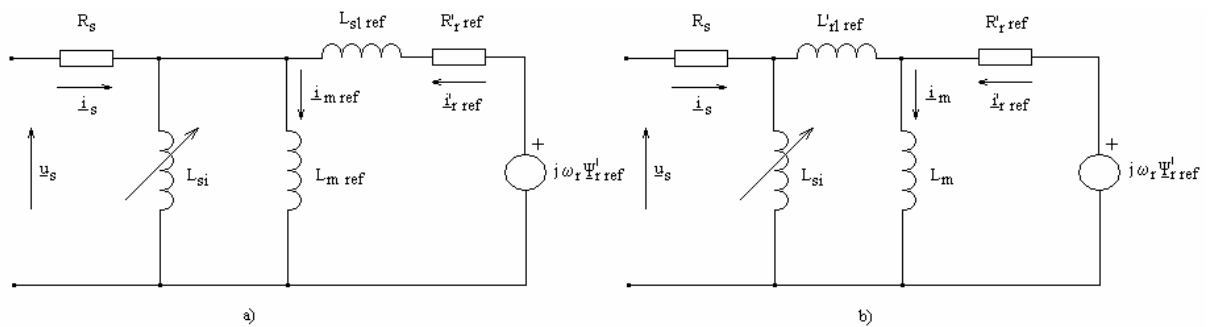


Figura 3.2. Esquemas equivalentes resultantes al despreciar la saturación rotórica en el esquema de la fig. 3.1, y eliminando la inductancia de dispersión a) estática, b) rotórica.

El esquema mostrado en el apartado a) de la figura 3.2 permitiría la simplificación adicional de combinar en paralelo la inductancia L_{si} no lineal con la inductancia constante $L_{m\ ref}$ de la rama central, en cuyo caso se llega al esquema convencional en T con la inductancia estática de dispersión eliminada.

Extendiendo este enfoque, en [28] se propone un esquema equivalente como el mostrado en la figura 3.3, donde mediante las inductancias en disposición paralelo L_{sc} , L_m , L_{rc} se considera de forma independiente la saturación en el yugo estático (L_{sc}), en la rama magnetizante (con L_m representativa en este caso no solo del entrehierro sino también de los dientes de estator y rotor), y en el núcleo rotórico (L_{rc}). Tanto en el estator como en el rotor se segregan los flujos de dispersión de cabeza de bobina y de ranura, representados a través de las inductancias lineales L_{sa} , L_{sb} en el estator, y L_{ra} , L_{rb} en el rotor. Cualquier posible saturación de los flujos de dispersión de ranura se supone incorporada en las inductancias no lineales L_{sc} y L_{rc} representativas del yugo y el núcleo rotórico. Para la determinación de las distintas

inductancias presentes en el modelo se recurre tanto a sensores de flujo como a técnicas de elementos finitos.

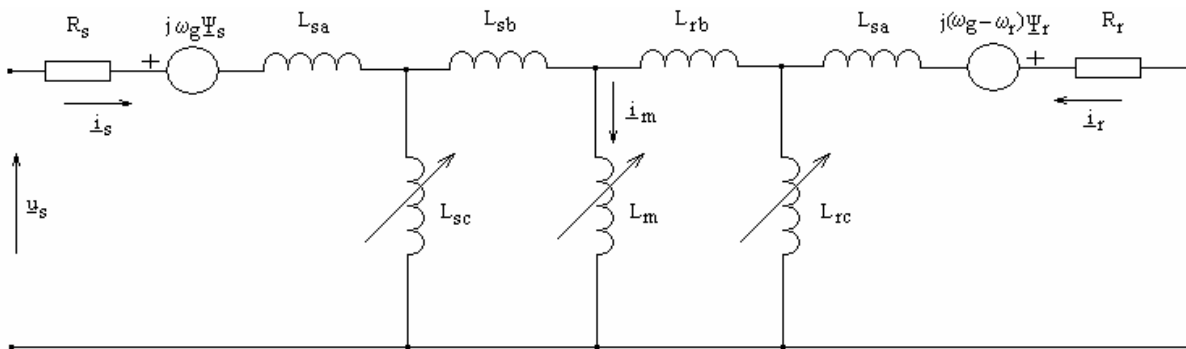


Figura 3.3. Esquema equivalente en el sistema genérico de referencia con tres inductancias saturables y con segregación de los flujos de dispersión, considerados lineales.

En [38] se presenta un esquema equivalente en π no lineal para modelar la saturación en el motor de inducción. Partiendo del modelo del circuito magnético de un par de dientes de estator y rotor, tras diversas transformaciones se obtiene su equivalente eléctrico, mostrado en la figura 3.4:

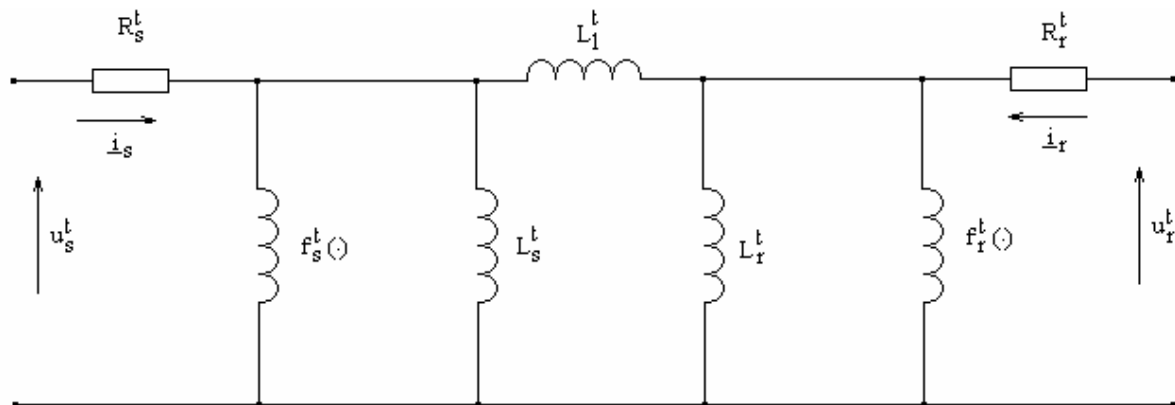


Figura 3.4. Circuito eléctrico equivalente de un par de dientes de estator y rotor.

En el circuito mostrado en la figura 3.4, R_s^t , R_r^t , $f_s^t(\cdot)$, $f_r^t(\cdot)$ representan los valores de las resistencias eléctricas de los devanados de estator y rotor y las inductancias no lineales que están asociados a un par de dientes, respectivamente. Respecto a los parámetros L_s^t , L_r^t , L_l^t , simbolizan inductancias de dispersión que, durante el transcurso de las diversas

transformaciones efectuadas conducentes a la obtención del modelo eléctrico del par de dientes, han perdido su identidad física. Finalmente, el modelo descrito para un par de dientes se extiende a toda la máquina asumiendo un número infinito de dientes infinitesimales.

En [40], argumentando que la saturación introduce componentes armónicas de flujo, con el tercer armónico como el más significativo, se representa la modulación producida por esta componente sobre la onda fundamental de flujo asumiendo un entrehierro ficticio de longitud variable en función del nivel de flujo y de su posición espacial. La saturación modelada siguiendo este enfoque es la producida en los dientes de estator y rotor, que se alcanza más fácilmente que la del yugo y el núcleo rotórico, donde típicamente existen menores densidades de flujo. La caracterización del modelo propuesto se efectúa a partir de los ensayos de vacío y de cortocircuito, aunque también se requiere del conocimiento de determinadas variables del diseño constructivo del motor.

En cuanto a las referencias que introducen la intersaturación en el modelo del motor cabe citar [41], donde se incorpora la saturación del flujo magnetizante en las ecuaciones generalizadas de la máquina de corriente alterna, expresadas en el sistema genérico de referencia y en términos de fasores espaciales de corriente de estator y rotor. El tratamiento formalmente correcto de las derivadas de flujo presentes en las ecuaciones del modelo pone de manifiesto la aparición de nuevos términos, a los que se dota de interpretación física con el fenómeno de la intersaturación.

En [42] se introduce la saturación del flujo magnetizante y de los flujos de dispersión de estator y rotor en las ecuaciones que modelan el motor. La selección de las componentes de los fasores espaciales de flujo de estator y rotor como variables elimina la necesidad de desarrollar las derivadas de flujo, con lo que se previene la aparición de nuevos términos en las ecuaciones del motor, que no obstante, permanecen implícitos. En lo que toca al tratamiento de los flujos de dispersión, los separa en una parte lineal, asociada a la dispersión en las cabezas de bobina, y en una parte saturable, básicamente ligada a la dispersión de ranura.

En [43] se analiza el fundamento físico del fenómeno de la intersaturación, poniéndose de manifiesto la analogía que guarda con la reacción de inducido en la máquina de corriente continua.

En [35] se presenta una formulación del modelo del motor con saturación en términos del flujo magnetizante y la corriente rotórica. La utilización del flujo magnetizante oculta en el modelo determinados términos, que permanecen implícitos, ganando en sencillez el modelo resultante.

En [44] se muestra un esquema equivalente representativo de las ecuaciones generalizadas del motor de inducción con inclusión de la intersaturación, expresadas en términos de corrientes de estator y rotor y formuladas en el sistema genérico de referencia. La representación gráfica de las ecuaciones mediante un esquema equivalente permite rápidamente visualizar los nuevos elementos introducidos, ausentes en el esquema equivalente convencional. También se considera en el mismo esquema el efecto de la ranura profunda mediante el empleo de una triple jaula rotórica.

En [45] se muestran las ecuaciones del modelo con intersaturación en formato de espacio de estado, con las corrientes de estator y rotor como variables, para los modelos con una y con doble jaula. En [46], el mismo autor enumera un total de 14 posibles formulaciones del modelo con una jaula, según las variables de estado seleccionadas, y en [47] se hace lo propio con el modelo de doble jaula, identificándose 48 combinaciones.

En [33] se obtiene la formulación del modelo del motor de inducción con saturación partiendo de consideraciones de co-energía.

Como alternativa, en [48] se trabaja con un modelo en términos de variables de fase, en el que los efectos de la saturación se incorporan tanto en la inductancia magnetizante como en las inductancias mutuas de estator, siendo capaz de predecir los armónicos de tensión y corriente provocados por la saturación magnética.

Analizadas las referencias más significativas correspondientes a ambos enfoques para el modelado de la saturación magnética, cabe decir que se echa en falta una comparación rigurosa entre ambas técnicas, que justifique o bien desaconseje, según el caso de estudio, la simplificación que supone el no desarrollar convenientemente las derivadas del flujo.

En las referencias más recientes, aunque no se discute el mayor rigor de los modelos con intersaturación, con frecuencia no se toma en consideración este fenómeno en aras de una mayor simplicidad.

En la sección siguiente se considerarán en detalle los modelos que incluyen la intersaturación. Pese a la mayor complejidad añadida que comportan, a juicio de quien subscribe es preferible disponer de modelos formalmente bien fundamentados (por su desarrollo riguroso de las derivadas de los flujos), pudiéndose posteriormente valorar el peso relativo de los nuevos términos introducidos en las ecuaciones del motor y, en su caso, si los resultados así lo avalan, efectuar las simplificaciones que se estime adecuadas.

3.3. MODELOS CON INTERSATURACIÓN DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN.

3.3.1. Consideraciones previas.

Como se apuntó en la sección anterior, la selección de las componentes de los fasores espaciales de flujo de estator y rotor como variables de estado, que son las magnitudes que naturalmente aparecen derivadas en las ecuaciones del motor, elimina la necesidad de desarrollar estas derivadas, eludiéndose el problema de calcular la variación temporal de las inductancias y previniendo la aparición de términos adicionales en el modelo.

La selección como variable de estado de cualquier otra magnitud distinta del flujo de estator y el/los flujos rotóricos (según se trate de un modelo con una o dos jaulas rotóricas) necesariamente obligará a enfrentar el problema de considerar la derivada temporal de la inductancia implicada en cada caso.

El mayor nivel de complejidad introducido en las ecuaciones se tiene con la selección de las corrientes de estator y rotor como variables de estado; sin embargo resulta esclarecedor para comprender la naturaleza del fenómeno de la intersaturación examinar la estructura de los términos adicionales que esta formulación incorpora, pues evidencian de un modo más manifiesto las interacciones entre variables que son su causa última.

3.3.2. Modelo con intersaturación del motor trifásico de inducción con las corrientes de estator y rotor como variables de estado.

3.3.2.1. Modelo con una jaula rotórica.

Considérense las ecuaciones eléctricas del modelo del motor trifásico de inducción con una sola jaula rotórica, formuladas en términos de fasores espaciales y expresadas en el sistema genérico de referencia:²

$$\bar{u}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d}{dt} \bar{\Psi}_s + j\omega_g \bar{\Psi}_s$$

² La notación empleada se recoge en la página I. Notación. Las magnitudes rotóricas se consideran referidas al estator.

$$0 = R_r \bar{i}_r + \frac{d}{dt} \bar{\Psi}_r + j(\omega_g - \omega) \bar{\Psi}_r \quad (3.4)$$

complementadas con las relaciones algebraicas entre flujos y corrientes:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_s &= \bar{\Psi}_{sl} + \bar{\Psi}_m = L_{sl} \bar{i}_s + L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_r) \\ \bar{\Psi}_r &= \bar{\Psi}_{rl} + \bar{\Psi}_m = L_{rl} \bar{i}_r + L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_r) \end{aligned} \quad (3.5)$$

La selección de las corrientes de estator y rotor como variables de estado requiere de la sustitución de las expresiones de los flujos en función de las corrientes recogidas en (3.5) dentro de (3.4), y en lo tocante a las derivadas de los flujos, que constituyen aquí el centro de interés, quedan de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Psi}_s}{dt} &= \frac{d}{dt} (\bar{\Psi}_{sl} + \bar{\Psi}_m) = \frac{d}{dt} (L_{sl} \bar{i}_s) + \frac{d}{dt} (L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_r)) \\ \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} &= \frac{d}{dt} (\bar{\Psi}_{rl} + \bar{\Psi}_m) = \frac{d}{dt} (L_{rl} \bar{i}_r) + \frac{d}{dt} (L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_r)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Es llegado a este punto cuando deben tomarse las opciones que conducirán a los diversos enfoques con que se aborda el modelado de la saturación magnética.

Dejando de lado la saturación del flujo de dispersión (inductancias de dispersión constantes), si en (3.6) se trata la inductancia magnetizante L_m como a una constante – bien porque se pretenda obtener un modelo para el trabajo del motor en la zona lineal de la característica magnética, o bien porque deliberadamente se opte por ello, como se efectúa en la primera de las metodologías expuestas en la sección 3.2 para modelar la saturación- entonces las expresiones en (3.6) se reducen a:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Psi}_s}{dt} &= \frac{d}{dt} (\bar{\Psi}_{sl} + \bar{\Psi}_m) = L_{sl} \frac{d}{dt} \bar{i}_s + L_m \frac{d}{dt} (\bar{i}_s + \bar{i}_r) \\ \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} &= \frac{d}{dt} (\bar{\Psi}_{rl} + \bar{\Psi}_m) = L_{rl} \frac{d}{dt} \bar{i}_r + L_m \frac{d}{dt} (\bar{i}_s + \bar{i}_r) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Tras alguna manipulación algebraica, la formulación resultante queda de la forma:

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g(L_{sl} + L_m) & 0 & -\omega_g L_m \\ \omega_g(L_{sl} + L_m) & R_s & \omega_g L_m & 0 \\ 0 & -(\omega_g - \omega)L_m & R_r & -(\omega_g - \omega)(L_{rl} + L_m) \\ (\omega_g - \omega)L_m & 0 & (\omega_g - \omega)(L_{rl} + L_m) & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{sl} + L_m & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_{sl} + L_m & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_{rl} + L_m & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_{rl} + L_m \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

El esquema equivalente correspondiente, según los ejes directo y en cuadratura del sistema genérico de referencia se muestra en la figura 3.5:

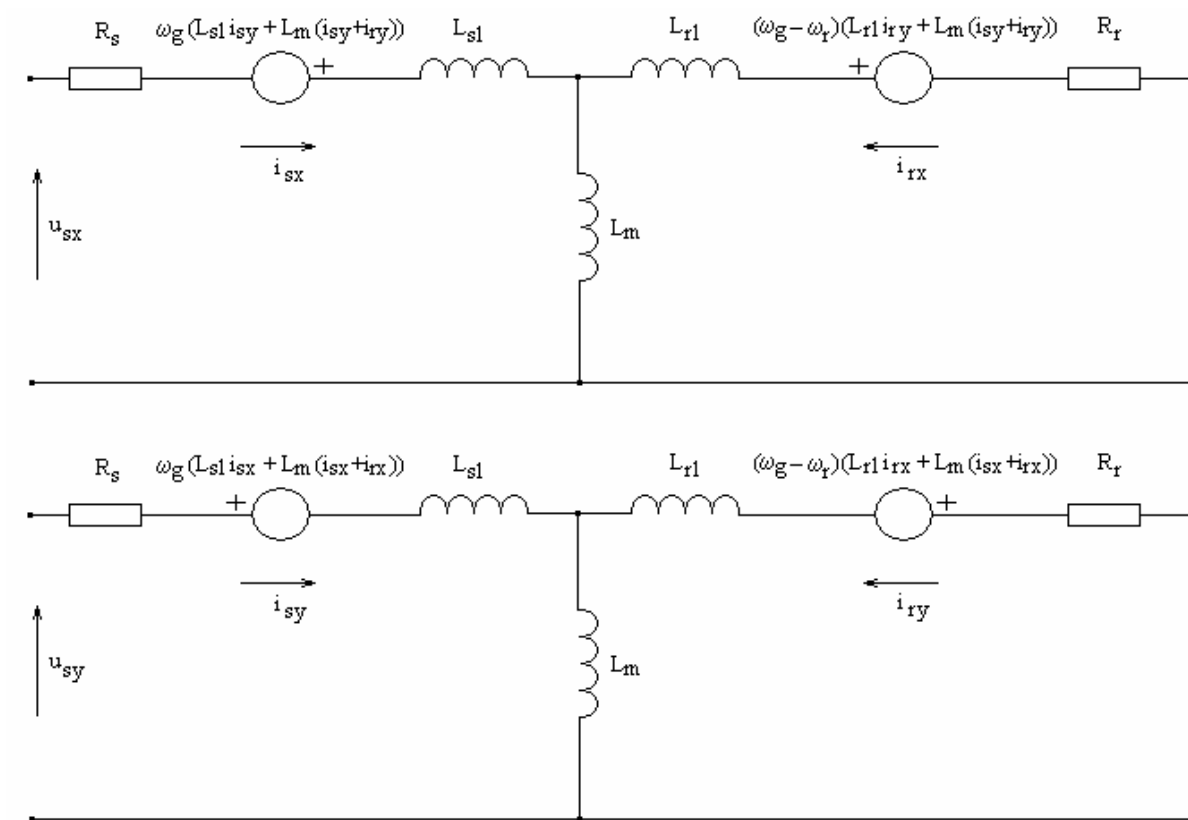


Figura 3.5. Esquemas equivalentes para régimen dinámico, según los ejes directo y en cuadratura del sistema genérico de referencia, para el modelo con inductancias constantes del motor trifásico de inducción.

Nótese que el modelo así obtenido, válido para el trabajo en la zona lineal de la característica magnética por haber sido desarrollado bajo la hipótesis de inductancia magnetizante constante, es también el utilizado por la primera de las metodologías expuestas en la sección anterior para el modelado de la saturación, tras simplemente substituir cada aparición de la inductancia magnetizante inicialmente supuesta constante por una función del flujo o la corriente magnetizantes.

Si, por otra parte, se trata a la inductancia magnetizante desde el mismo principio como a una variable, entonces las derivadas de los distintos flujos en (3.6) resultan ser:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\Psi}_s}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{\Psi}_{sl} + \bar{\Psi}_m) = L_{sl} \frac{d}{dt} \bar{i}_s + \frac{dL_m}{dt} (\bar{i}_s + \bar{i}_r) + L_m \frac{d}{dt} (\bar{i}_s + \bar{i}_r) \\ \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{\Psi}_{rl} + \bar{\Psi}_m) = L_{rl} \frac{d}{dt} \bar{i}_r + \frac{dL_m}{dt} (\bar{i}_s + \bar{i}_r) + L_m \frac{d}{dt} (\bar{i}_s + \bar{i}_r)\end{aligned}\quad (3.9)$$

Obsérvese que el término de nueva aparición en este caso es $\frac{dL_m}{dt} (\bar{i}_s + \bar{i}_r)$.

Suponiendo la inductancia magnetizante una función de la corriente magnetizante, esto es, $L_m = f(|\bar{i}_m|)$, donde $\bar{i}_m = \bar{i}_s + \bar{i}_r$, entonces la derivada $\frac{dL_m}{dt}$ presente en el término de nueva aparición puede expresarse alternativamente como:

$$\begin{aligned}\frac{dL_m}{dt} &= \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{d|\bar{i}_m|}{dt} = \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{d}{dt} \sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2} = \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{1}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}} \left(i_{mx} \frac{di_{mx}}{dt} + i_{my} \frac{di_{my}}{dt} \right) \\ &= \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \left(\frac{(i_{sx} + i_{rx})}{\sqrt{(i_{sx} + i_{rx})^2 + (i_{sy} + i_{ry})^2}} \frac{d}{dt} (i_{sx} + i_{rx}) + \frac{(i_{sy} + i_{ry})}{\sqrt{(i_{sx} + i_{rx})^2 + (i_{sy} + i_{ry})^2}} \frac{d}{dt} (i_{sy} + i_{ry}) \right)\end{aligned}\quad (3.10)$$

La formulación del modelo que resulta cuando la inductancia magnetizante es tratada como un variable se muestra en la ecuación (3.11).

La comparación entre las expresiones de ambos modelos, el que trata la inductancia magnetizante como constante (aunque posteriormente se le asignen valores variables) en (3.8) y el que trata como a una función de las variables de estado recogido en (3.11), evidencia que las diferencias entre ambos se concentran en la matriz de inductancias que premultiplica a la derivada temporal del vector de corrientes. Concretamente, se observa lo siguiente:

- 1) Todos los elementos nulos en la matriz de inductancias de (3.8) han sido substituidos en (3.11) por:

$$\frac{dL_m}{d|\dot{i}_m|} \frac{(i_{sx} + i_{rx})(i_{sy} + i_{ry})}{\sqrt{(i_{sx} + i_{rx})^2 + (i_{sy} + i_{ry})^2}} \quad (3.12)$$

Para abreviar la notación, en numerosas referencias se denomina a este término L_{mxy} .

- 2) A todos los elementos no nulos en la matriz de inductancias de (3.8), según pertenezcan a las filas que corresponden bien a las componentes directas o bien a las componentes en cuadratura de las corrientes, respectivamente, se les suma en (3.11) los siguientes términos:

$$\frac{dL_m}{d|\dot{i}_m|} \frac{(i_{sx} + i_{rx})^2}{\sqrt{(i_{sx} + i_{rx})^2 + (i_{sy} + i_{ry})^2}}, \text{ en las filas asociadas a las componentes directas}$$

$$\frac{dL_m}{d|\dot{i}_m|} \frac{(i_{sy} + i_{ry})^2}{\sqrt{(i_{sx} + i_{rx})^2 + (i_{sy} + i_{ry})^2}}, \text{ las filas asociadas a las componentes en cuadratura}$$

En la misma línea de simplificación de la notación, a la suma de la inductancia magnetizante L_m con cada uno de los términos anteriores se denomina comúnmente L_{mx} y L_{my} ; esto es:

$$L_{mx} = L_m + \frac{dL_m}{d|\dot{i}_m|} \frac{(i_{sx} + i_{rx})^2}{\sqrt{(i_{sx} + i_{rx})^2 + (i_{sy} + i_{ry})^2}}$$

$$L_{my} = L_m + \frac{dL_m}{d|\dot{i}_m|} \frac{(i_{sy} + i_{ry})^2}{\sqrt{(i_{sx} + i_{rx})^2 + (i_{sy} + i_{ry})^2}} \quad (3.13)$$

Por otra parte, por simple observación del modelo recogido en (3.11) se hace patente que se este se reduce al caso con comportamiento magnético lineal mostrado en (3.8) con solo imponer la condición: $L_m = \text{cte} \Rightarrow \frac{dL_m}{d|i_m|} = 0$.

Para una mejor comprensión de las diferencias entre el modelo con comportamiento magnético lineal en (3.8) y el modelo con saturación en (3.11) resulta ilustrativo comparar sus respectivas expresiones para la derivada temporal del flujo magnetizante.

Nótese que para ambos modelos es válida la relación:

$$\bar{\Psi}_m = L_m \bar{i}_m \Rightarrow \begin{cases} \Psi_{mx} = L_m i_{mx} \\ \Psi_{my} = L_m i_{my} \end{cases} \quad (3.14)$$

Pero en cambio, mientras que para el modelo representativo del trabajo en zona lineal (3.8) se tiene:

$$\frac{d}{dt} \bar{\Psi}_m = L_m \frac{d}{dt} \bar{i}_m \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \Psi_{mx} = L_m \frac{d}{dt} i_{mx} \\ \frac{d}{dt} \Psi_{my} = L_m \frac{d}{dt} i_{my} \end{cases} \quad (3.15)$$

esto es, la variación del flujo magnetizante según un eje depende en exclusiva de la variación de la corriente magnetizante según ese mismo eje, para el modelo con saturación se da:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_{mx} &= L_{mx} \frac{d}{dt} i_{mx} + L_{mxy} \frac{d}{dt} i_{my} \\ \frac{d}{dt} \Psi_{my} &= L_{mxy} \frac{d}{dt} i_{mx} + L_{my} \frac{d}{dt} i_{my} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Obsérvense en (3.16) las dos diferencias comentadas anteriormente:

- 1) La variación del flujo magnetizante según un eje no depende tan solo de la variación de la corriente magnetizante según ese mismo eje, también recibe la influencia de la variación de la corriente según el eje dispuesto en cuadratura mediante la inductancia L_{mxy} ; es decir se produce el fenómeno de la intersaturación magnética,

- 2) La influencia de la variación de la corriente magnetizante según un eje sobre la variación del flujo magnetizante según ese mismo eje se da mediante las inductancias L_{mx} o L_{my} , dependiendo del eje considerado, y que son distintas de la inductancia magnetizante L_m , responsable de la interacción entre corrientes y flujos en el modelo con comportamiento magnético lineal.

En resumidas cuentas, no solo aparecen nuevos términos en el modelo debidos a la intersaturación magnética (relativos a L_{mxy}), sino que los términos que se mantienen utilizan inductancias distintas a la del modelo con comportamiento magnético lineal ($L_{mx} \neq L_{my} \neq L_m$).

La utilización de diagramas fasoriales permite visualizar en forma gráfica el efecto de acoplamiento entre ejes propio de la intersaturación magnética.

Para una mejor comprensión del fenómeno, resulta conveniente representar en primer lugar el trabajo en zona lineal de la característica magnética reflejado en (3.15).

Considérese para ello inicialmente el caso en que únicamente el eje directo de la máquina esté excitado. En la figura 3.6 a) se representa el fasor de corriente magnetizante i_{mx} y su correspondiente fasor de flujo magnetizante Ψ_{mx} , obtenido a partir de una hipotética característica magnética.

Provóquese ahora una variación en la corriente magnetizante del eje en cuadratura, que inicialmente no se hallaba excitado. La figura 3.6 en su apartado b) refleja la nueva situación, mostrando que el cambio en la corriente magnetizante del eje en cuadratura no provoca ninguna variación en la componente directa del flujo magnetizante, que mantiene su valor inicial, como se desprende de (3.15).

Repítase de nuevo el proceso trabajando ahora en la zona saturada de la característica magnética. La figura 3.6 muestra en su apartado c) el fasor de flujo magnetizante resultante cuando el eje directo es el único excitado; en el apartado d) se advierte cómo ante la aparición de corriente magnetizante según el eje en cuadratura la componente del flujo magnetizante según el eje directo adopta un valor Ψ'_{mx} distinto del inicial.

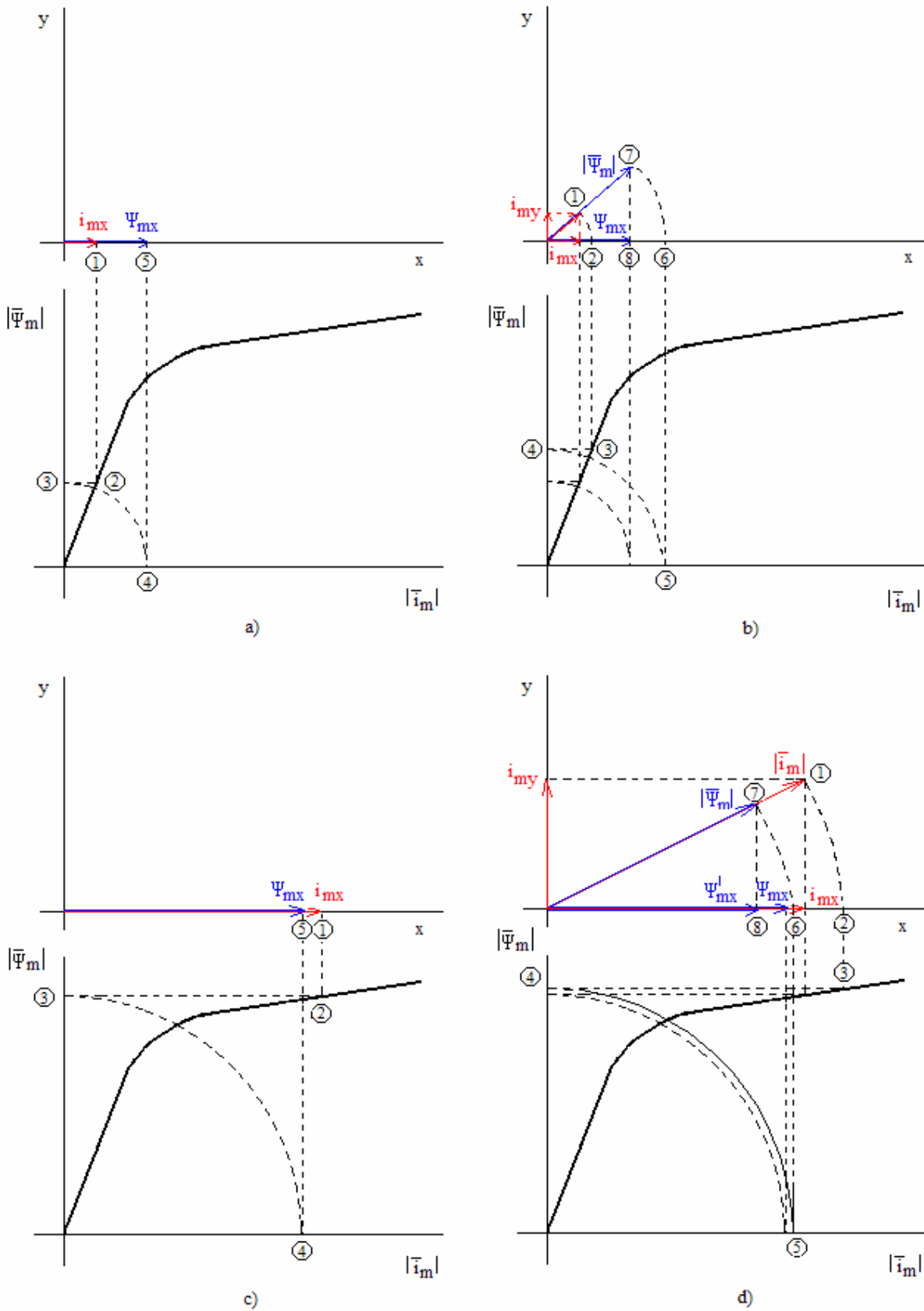


Figura 3.6. Diagramas fasoriales de corriente y flujo magnetizante en la zona lineal de la característica magnética, a) con excitación del eje directo, b) con excitación en ambos ejes, y en la zona saturada c) con excitación del eje directo, d) con excitación en ambos ejes.

Aunque en la formulación del modelo con saturación expuesto en (3.11) se hallan seleccionado las corrientes de estator y rotor como variables, haciendo uso del flujo y la corriente magnetizantes como variables intermedias se obtienen en la bibliografía [43] otras expresiones alternativas equivalentes para las inductancias L_{mx} , L_{my} y L_{mxy} .

Así, volviendo a las expresiones para las derivadas de los flujos de estator y rotor recogidas en (3.9), estas pueden reformularse como:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\Psi}_s}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{\Psi}_{sl} + \bar{\Psi}_m) = L_{sl} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + \frac{d\bar{\Psi}_m}{dt} \\ \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{\Psi}_{rl} + \bar{\Psi}_m) = L_{rl} \frac{d\bar{i}_r}{dt} + \frac{d\bar{\Psi}_m}{dt}\end{aligned}\quad (3.17)$$

Centrándose en la derivada del flujo magnetizante:⁵

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\Psi}_m}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{\Psi}_m | e^{j\mu}) = \left((L \cos^2 \mu + L_m \sin^2 \mu) \frac{di_{mx}}{dt} + (L - L_m) \sin \mu \cos \mu \frac{di_{my}}{dt} \right) \\ &+ j \left((L - L_m) \sin \mu \cos \mu \frac{di_{mx}}{dt} + (L \sin^2 \mu + L_m \cos^2 \mu) \frac{di_{my}}{dt} \right)\end{aligned}\quad (3.18)$$

Donde $\mu = \text{atan} \frac{i_{my}}{i_{mx}}$ es el argumento de los fasores espaciales de flujo y corriente magnetizantes, que estarán en fase bajo la hipótesis adoptada de ausencia de pérdidas en el hierro. Por otra parte, $L = \frac{d|\bar{\Psi}_m|}{d|\bar{i}_m|}$ es una inductancia magnetizante dinámica, por contraposición

a la inductancia magnetizante estática $L_m = \frac{|\bar{\Psi}_m|}{|\bar{i}_m|}$.

En la figura 3.7 se muestra la interpretación geométrica de estas inductancias sobre la característica magnética.

⁵ El desarrollo detallado de la derivada temporal del fasor espacial de flujo magnetizante se recoge en el apéndice C.

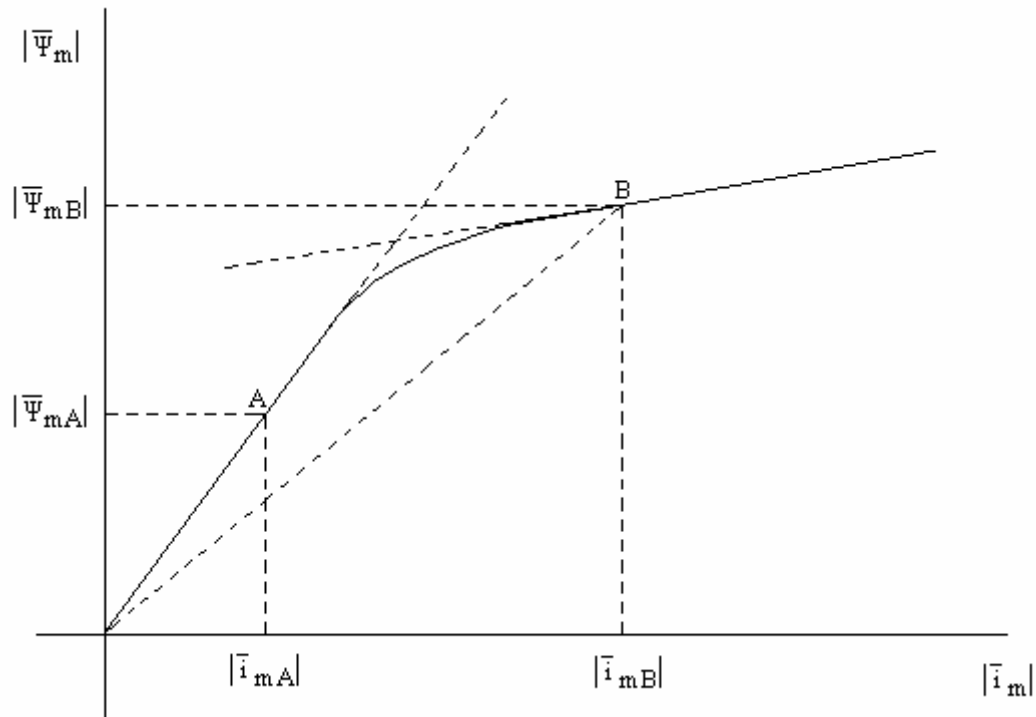


Figura 3.7. Interpretación geométrica sobre la característica magnética de las inductancias magnetizantes estática L_m y dinámica.

Como se desprende de la definición dada para cada inductancia, la inductancia magnetizante estática L_m se corresponde con la pendiente del segmento que une el origen de coordenadas con un punto cualquiera perteneciente a la característica magnética, mientras que la inductancia magnetizante dinámica equivale a la pendiente de la recta tangente a este punto de la característica.

Nótese que en la zonal lineal de la característica (punto A de la figura 3.8) ambas inductancias son idénticas, no siendo así en la zona saturada (punto B).

$$\text{Zona lineal (punto A): } L_m = \frac{|\bar{\Psi}_m|_A}{|\bar{i}_m|_A} = L = \frac{d|\bar{\Psi}_m|}{d|\bar{i}_m|} \Big|_A$$

$$\text{Zona saturada (punto B): } L_m = \frac{|\bar{\Psi}_m|_B}{|\bar{i}_m|_B} > L = \frac{d|\bar{\Psi}_m|}{d|\bar{i}_m|} \Big|_B$$

Así, por comparación entre las ecuaciones (3.16) y (3.18) se determinan las expresiones alternativas equivalentes antes mencionadas para las inductancias L_{mx} , L_{my} y L_{mxy} :

$$\begin{aligned} L_{mx} &= L \cos^2 \mu + L_m \sin^2 \mu \\ L_{my} &= L \sin^2 \mu + L_m \cos^2 \mu \\ L_{mxy} &= (L - L_m) \sin \mu \cos \mu \end{aligned} \quad (3.19)$$

La estructura de estas expresiones alternativas para las inductancias L_{mx} , L_{my} y L_{mxy} recogidas en (3.19) también permite constatar rápidamente que en la zona lineal de la característica magnética se cumplirá:

$$L_m = \text{cte} \Rightarrow L_m = L \Rightarrow \begin{cases} L_{mx} = L_{my} = L_m \\ L_{mxy} = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

También, las expresiones en (3.19) permiten visualizar más intuitivamente posibles simplificaciones a efectuar en el modelo. Así, eligiendo un sistema de referencia bien alineado o bien en cuadratura con el fasor espacial de flujo magnetizante (lo que implica $\mu=0$ o bien $\mu=\pi/2$, respectivamente), se consigue anular la inductancia L_{mxy} envuelta en el acoplamiento entre ejes, además de simplificar las expresiones para las inductancias L_{mx} y L_{my} .

Concretamente:

$$\mu = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_{mx} = L \\ L_{my} = L_m \\ L_{mxy} = 0 \end{cases} \quad \mu = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} L_{mx} = L_m \\ L_{my} = L \\ L_{mxy} = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Así, con una adecuada orientación de ejes se consigue una notable simplificación en el modelo, obteniéndose un conjunto de expresiones similar a las válidas para el trabajo en la zona lineal de la característica magnética, sin presencia de intersaturación pero con el empleo de inductancias magnetizantes distintas para cada eje.

Para conseguir la misma simplificación expuesta en (3.21) partiendo de las expresiones inicialmente presentadas para las inductancias L_{mx} , L_{my} y L_{mxy} en (3.12), (3.13) las condiciones a imponer son, o bien:

$$i_{my} = i_{sy} + i_{ry} = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_{mx} = L_m + \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} i_{mx} = L_m + \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} |\bar{i}_m| = L \\ L_{my} = L_m \\ L_{mxy} = 0 \end{cases} \quad (\text{corresponde al caso } \mu = 0)$$

(3.22)

o bien:

$$i_{mx} = i_{sx} + i_{rx} = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_{mx} = L_m \\ L_{my} = L_m + \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} i_{my} = L_m + \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} |\bar{i}_m| = L \\ L_{mxy} = 0 \end{cases} \quad (\text{corresponde al caso } \mu = \frac{\pi}{2})$$

(3.23)

La identidad $L = L_m + \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} |\bar{i}_m|$ empleada en (3.22) y (3.23) queda inmediatamente justificada recordando la definición de la inductancia magnetizante dinámica:

$$L = \frac{d|\bar{\Psi}_m|}{d|\bar{i}_m|} = \frac{d}{d|\bar{i}_m|} (L_m |\bar{i}_m|) = \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} |\bar{i}_m| + L_m \quad (3.24)$$

Como observación práctica, nótese que en las expresiones (3.12), (3.13) para las inductancias L_{mx} , L_{my} y L_{mxy} se utiliza la función $\frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|}$, mientras que en las formulaciones alternativas

recogidas en (3.19) se emplea la inductancia magnetizante dinámica $L = \frac{d|\bar{\Psi}_m|}{d|\bar{i}_m|}$.

A partir del ensayo de vacío puede obtenerse la función:

$$|\bar{\Psi}_m| = f(|\bar{i}_m|) \quad (3.25)$$

y de esta:

$$L_m = \frac{|\bar{\Psi}_m|}{|\bar{i}_m|} = \frac{f(|\bar{i}_m|)}{|\bar{i}_m|} = f^*(|\bar{i}_m|) \quad (3.26)$$

A partir de aquí, según la formulación elegida deberá optarse por el cálculo bien de:

$$\frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} = \frac{d}{d|\bar{i}_m|} \left(\frac{|\bar{\Psi}_m|}{|\bar{i}_m|} \right) = \frac{\frac{d|\bar{\Psi}_m|}{d|\bar{i}_m|} |\bar{i}_m| - |\bar{\Psi}_m|}{|\bar{i}_m|^2} = \frac{L - L_m}{|\bar{i}_m|} \quad (3.27)$$

para su uso con (3.12), (3.13), o bien de:

$$L = \frac{d|\bar{\Psi}_m|}{d|\bar{i}_m|} = \frac{d(f(|\bar{i}_m|))}{d|\bar{i}_m|} \quad (3.28)$$

para su uso con (3.19).

La división adicional a realizar para la obtención de la función $\frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|}$ podría comportar un mayor error añadido al modelo. No debe olvidarse que los datos de partida $|\bar{\Psi}_m| = L_m |\bar{i}_m|$ ya provienen además del ajuste – con mayor o menor precisión- de una determinada función a datos experimentales.

Como añadido a la cuestión de las diversas formulaciones halladas en la literatura para las inductancias L_{mx} , L_{my} y L_{mxy} , en [41] se propone:

$$\begin{aligned} L_{mx} &= L_0 + L_2 \cos 2\mu \\ L_{my} &= L_0 - L_2 \cos 2\mu \\ L_{mxy} &= L_2 \sin 2\mu \end{aligned} \quad (3.29)$$

siendo:

$$L_0 = \frac{L + L_m}{2} \quad (3.30)$$

$$L_2 = \frac{L - L_m}{2}$$

Las expresiones presentadas en (3.29), (3.30) pueden obtenerse sin dificultad aplicando relaciones trigonométricas elementales a (3.19).

Finalmente, como ayuda gráfica para mejor visualizar las diferencias entre el modelo con comportamiento magnético lineal y el modelo con intersaturación del flujo magnetizante, se muestra el esquema equivalente correspondiente a este último.

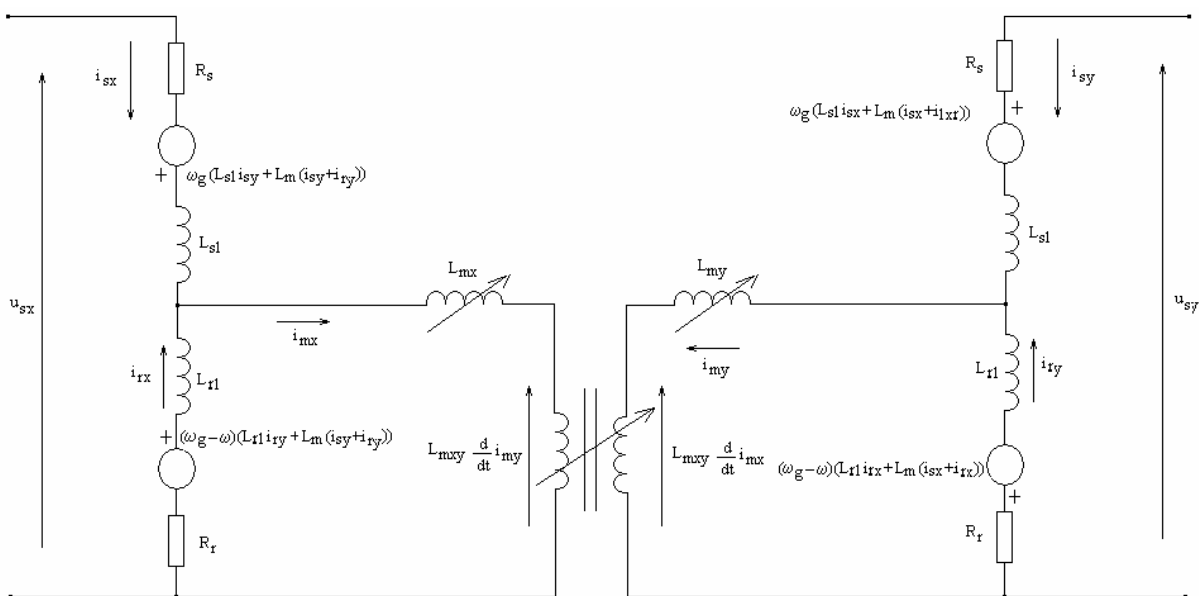


Figura 3.8. Esquema equivalente para régimen dinámico en el sistema genérico de referencia del motor trifásico de inducción con saturación del flujo magnetizante.

3.3.2.2. Modelo con dos jaulas rotóricas.

La extensión del modelo con intersaturación, expresado en términos de corrientes de estator y rotor, al caso del motor trifásico de inducción con doble jaula se recoge en (3.31)⁶, donde

⁶ La notación empleada se recoge en la página I. Notación.

rigen las mismas expresiones para las inductancias L_{mx} , L_{my} y L_{mxy} enunciadas en (3.12), (3.13) o en cualquiera de las formas alternativas (3.19) o (3.29), (3.30), en el bien entendido que ahora $\bar{i}_m = \bar{i}_s + \bar{i}_1 + \bar{i}_2$, es decir, que la corriente rotórica \bar{i}_r propia del modelo con una sola jaula queda aquí reemplazada por la suma vectorial de las corrientes asociadas a cada jaula $\bar{i}_r = \bar{i}_1 + \bar{i}_2$.

Finalmente, el esquema equivalente para el modelo de doble jaula enunciado en (3.31) adopta la forma mostrada en la figura 3.9.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g(L_{sl} + L_m) & 0 & -\omega_g L_m & 0 & -\omega_g L_m \\ \omega_g(L_{sl} + L_m) & R_s & \omega_g L_m & 0 & \omega_g L_m & 0 \\ 0 & -(\omega_g - \omega)L_m & R_1 & -(\omega_g - \omega)(L_{11} + L_{121} + L_m) & 0 & -(\omega_g - \omega)(L_{121} + L_m) \\ (\omega_g - \omega)L_m & 0 & (\omega_g - \omega)(L_{11} + L_{121} + L_m) & R_1 & (\omega_g - \omega)(L_{121} + L_m) & 0 \\ 0 & -(\omega_g - \omega)L_m & 0 & -(\omega_g - \omega)(L_{121} + L_m) & R_2 & -(\omega_g - \omega)(L_{21} + L_{121} + L_m) \\ (\omega_g - \omega)L_m & 0 & (\omega_g - \omega)(L_{121} + L_m) & 0 & (\omega_g - \omega)(L_{21} + L_{121} + L_m) & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{1x} \\ i_{1y} \\ i_{2x} \\ i_{2y} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} L_{sl} + L_{mx} & L_{mxy} & L_{mx} & L_{mxy} & L_{mx} & L_{mxy} \\ L_{mxy} & L_{sl} + L_{my} & L_{mxy} & L_{my} & L_{mxy} & L_{my} \\ L_{mx} & L_{mxy} & L_{11} + L_{121} + L_{mx} & L_{mxy} & L_{121} + L_{mx} & L_{mxy} \\ L_{mxy} & L_{my} & L_{mxy} & L_{11} + L_{121} + L_{my} & L_{mxy} & L_{121} + L_{my} \\ L_{mx} & L_{mxy} & L_{121} + L_{mx} & L_{mxy} & L_{21} + L_{121} + L_{mx} & L_{mxy} \\ L_{mxy} & L_{my} & L_{mxy} & L_{121} + L_{my} & L_{mxy} & L_{21} + L_{121} + L_{my} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{1x} \\ i_{1y} \\ i_{2x} \\ i_{2y} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

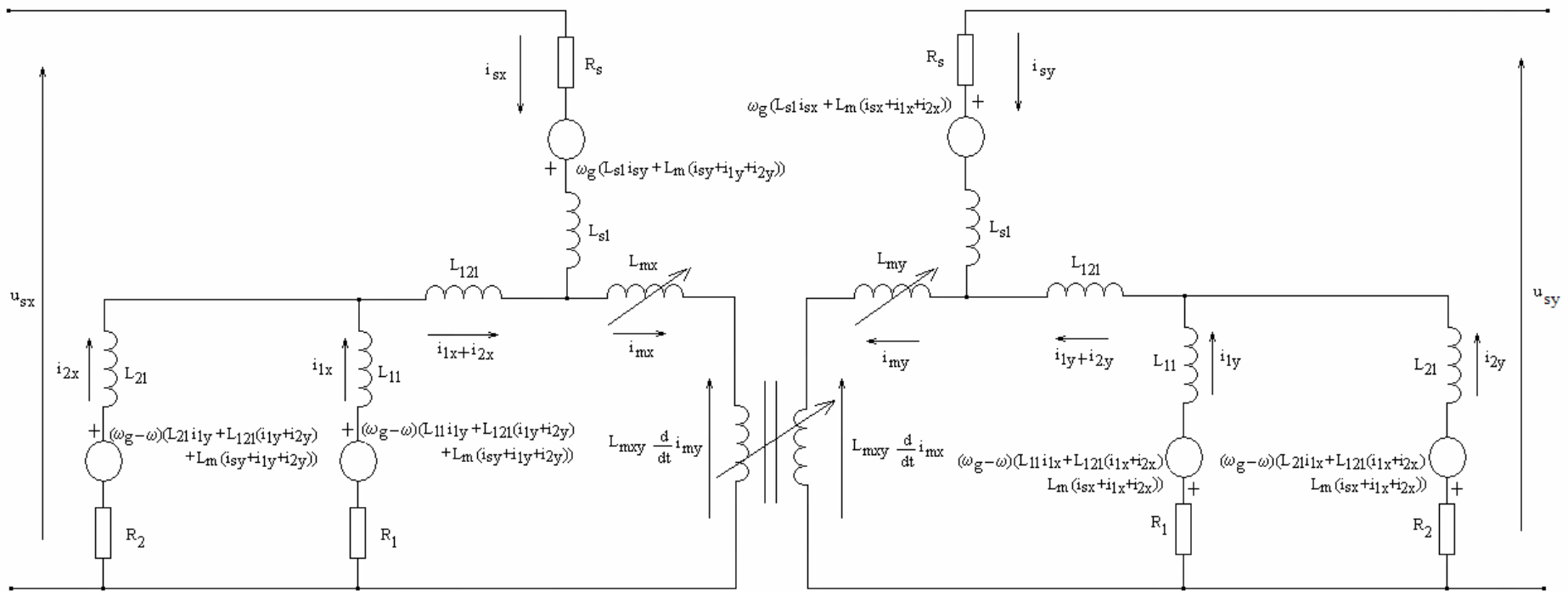


Figura 3.9. Esquema equivalente para el modelo de doble jaula del motor trifásico de inducción en régimen dinámico y en el sistema genérico de referencia con saturación del flujo magnetizante.

3.4. COMPARACIÓN DE LOS MODELOS DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN CON Y SIN INTERSATURACIÓN.

La comparación del modelo con consideración de la saturación expuesto en (3.11) con el válido para el trabajo en la zona lineal de la característica magnética mostrado en (3.8) pone inmediatamente de manifiesto la complejidad añadida que comporta la caracterización rigurosa de este fenómeno, evidenciada en la forma de términos de nueva aparición y en la complicación de los ya existentes.

Este hecho justifica el interés por aplicar técnicas simplificadoras que faciliten el trabajo con las ecuaciones del modelo.

Pese a la corrección formal del modelo con intersaturación recogido en (3.11), su complejidad invita a evaluar la bondad de la primera de las metodologías para el modelado de la saturación del flujo magnetizante considerada en este capítulo, esto es, la consistente en utilizar el modelo válido para la zona lineal de la característica magnética substituyendo en este la inductancia magnetizante constante por una función dependiente bien de la corriente o del flujo magnetizante.

Este interés se ve alentado por los informes -en ocasiones contradictorios- que se encuentran en la literatura especializada sobre los resultados obtenidos con su uso.

Así, en las referencias reseñadas en la sección 3.2 sobre el uso de modelos pertenecientes a esta tipología, se constata cómo son utilizados en aplicaciones diversas con resultados en apariencia satisfactorios.

Por otra parte, en [41] y [13] se comparan los resultados procedentes de esta aproximación con los provenientes del modelo con intersaturación, evidenciando que esta proporciona una respuesta especialmente deficiente para el par electromagnético, subestimando la amplitud de sus picos transitorios y mostrando un trazado distinto y en ocasiones hasta en oposición de fase con el predicho por el modelo con intersaturación. Se muestra cómo incluso la respuesta del modelo válido para el trabajo en zona lineal es más satisfactoria que la proporcionada por el modelo aproximado de la saturación del flujo magnetizante.

Entre estas dos posturas encontradas, en [49] se efectúa una clarificadora contribución que arroja algo más de luz sobre la bondad del modelo aproximado.

En esencia, el autor compara los resultados procedentes de los modelos con y sin intersaturación y halla que estos son más o menos divergentes en función de las variables de estado utilizadas.

Así, distingue dos comportamientos bien diferenciados: ambos modelos exhiben las mayores discrepancias a la hora de su comparación cuando son formulados exclusivamente en términos de corrientes o si interviene la corriente magnetizante como una de las variables de estado seleccionadas; por otra parte, para el resto de combinaciones posibles de variables de estado las diferencias apenas sí son perceptibles.

Si, como parecen evidenciar los resultados presentados en [49], el empleo de determinados conjuntos de variables de estado redundaba en respuestas prácticamente idénticas tanto si se considera la intersaturación como si no, queda sobradamente justificado el intento de efectuar alguna contribución adicional al esclarecimiento de esta cuestión, en aras de la notable simplificación que supondría el recurso –con garantías– a modelos más simples.

3.4.1. Modelo con una jaula rotórica.

Para el modelo de una única jaula existen, como ya se expuso anteriormente, un total de 14 posibles formulaciones distintas según el conjunto seleccionado de variables de estado. En el apéndice D se recogen íntegramente estas diferentes formulaciones, con consideración de la intersaturación.

Para cada selección de variables de estado, la comparación sus ecuaciones con las del modelo homólogo sin intersaturación permite poner de manifiesto los términos que se hallan ausentes en este último, responsables de las divergencias exhibidas en los resultados.

La tabla 3.1 recoge para cada una de las 14 formulaciones posibles los términos que se hallan ausentes en el modelo sin intersaturación. En ella se han establecido diversas secciones, separadas por trazo grueso, en las que se agrupan las formulaciones completamente

equivalentes entre sí, esto es, aquellas en las que para cada ecuación se encuentran ausentes exactamente los mismos términos.

Nótese que las diversas selecciones de variables de estado dan lugar a conjuntos diferentes de términos presentes en el modelo con intersaturación y ausentes en el modelo que no la considera.

Así, en un extremo se tiene el modelo formulado en función de los flujos de estator y rotor, que por ser las magnitudes que naturalmente aparecen derivadas en las ecuaciones del motor, permite eludir la cuestión del tratamiento como constante o como variable de la inductancia magnetizante. En el polo opuesto se hallan los modelos formulados exclusivamente en términos de corrientes, que requieren el desarrollo completo de las derivadas de los flujos hasta quedar expresadas en función de las corrientes.

El examen de la estructura de los términos ignorados por los modelos sin intersaturación permite constatar que estos son proporcionales a la derivada de la inductancia magnetizante cuando las variables de estado son corrientes o la combinación de la corriente magnetizante y un flujo, mientras que para el resto de formulaciones estos términos resultan ser directamente proporcionales a la derivada de la inversa de la corriente magnetizante.

Para poder evaluar mejor el impacto relativo de los términos ausentes en una determinada formulación, se ha considerado conveniente reescribirlos utilizando una variable común: la corriente magnetizante. De este modo, para todas las formulaciones los términos ausentes resultan ser múltiplos de la corriente magnetizante por la derivada temporal de la inductancia magnetizante.

La ponderación de los diversos factores de multiplicidad que acompañan a esta cantidad básica ausente en todas las formulaciones sin intersaturación permite establecer una gradación del error implícito.

Tabla 3.1. Términos ausentes en los modelos sin intersaturación del motor trifásico de inducción con una jaula, en función del conjunto seleccionado de variables de estado.

VARIABLES DE ESTADO	TÉRMINOS AUSENTES			
	En ecuación de estator	Expresión equivalente	En ecuación de rotor	Expresión equivalente
$\dot{\bar{i}}_s, \dot{\bar{i}}_r$	$(\dot{\bar{i}}_s + \dot{\bar{i}}_r) \frac{dL_m}{dt}$	$\dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	$(\dot{\bar{i}}_s + \dot{\bar{i}}_r) \frac{dL_m}{dt}$	$\dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\dot{\bar{i}}_s, \dot{\bar{i}}_m$	$\dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\dot{\bar{i}}_m, \dot{\bar{i}}_r$	$\dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_s, \dot{\bar{i}}_m$	—	—	$\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_{sl}}\right) \dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_{sl}}\right) \dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\dot{\bar{i}}_m, \bar{\Psi}_r$	$\left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}}\right) \dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}}\right) \dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	—	—
$\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_m$	—	—	$L_{rl} \bar{\Psi}_m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{rl}}{L_m} \dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_s, \dot{\bar{i}}_s$	—	—	$L_{rl} (\bar{\Psi}_s - L_{sl} \dot{\bar{i}}_s) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{rl}}{L_m} \dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_m, \dot{\bar{i}}_s$	—	—	$L_{rl} \bar{\Psi}_m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{rl}}{L_m} \dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_m, \bar{\Psi}_r$	$L_{sl} \bar{\Psi}_m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{sl}}{L_m} \dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	—	—
$\bar{\Psi}_r, \dot{\bar{i}}_r$	$L_{sl} (\bar{\Psi}_r - L_{rl} \dot{\bar{i}}_r) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{sl}}{L_m} \dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	—	—
$\bar{\Psi}_m, \dot{\bar{i}}_r$	$L_{sl} \bar{\Psi}_m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{sl}}{L_m} \dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	—	—
$\dot{\bar{i}}_s, \bar{\Psi}_r$	$(L_{rl} \dot{\bar{i}}_s + \bar{\Psi}_r) \frac{d}{dt} \left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \right)$	$\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$	—	—
$\bar{\Psi}_s, \dot{\bar{i}}_r$	—	—	$(L_{sl} \dot{\bar{i}}_r + \bar{\Psi}_s) \frac{d}{dt} \left(\frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_m} \right)$	$\frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_m} \dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_r$	—	—	—	—

Así, cualquiera que sea el mecanismo de interacción en las ecuaciones del modelo de la cantidad básica ausente $\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$, este tendrá su máximo efecto cuando los factores de multiplicidad sean la unidad (corrientes como variables de estado) o bien $\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_{sl}}\right), \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}}\right)$ (corriente magnetizante combinada con un flujo), mientras que para resto de combinaciones de variables, los factores de multiplicidad inversamente proporcionales a la inductancia magnetizante reducirán el peso de los términos ausentes al menos en un orden de magnitud.

Para ilustrar lo expuesto se presentan a continuación resultados procedentes de la simulación de un mismo motor (de características listadas en el apéndice B) utilizando las 14 posibles combinaciones de variables de estado. El motor arranca descargado sometido a una tensión un 50% superior a la nominal.

Obviamente, se obtienen respuestas idénticas para el modelo con intersaturación independientemente de la selección de variables efectuada, debido a su tratamiento formalmente correcto de las derivadas de flujo. Lo mismo sucede con el modelo válido para el trabajo en la zona lineal, en el que de las derivadas de flujo se computan tomando como constante a una inductancia magnetizante que realmente lo es. En lo tocante a los resultados predichos por los modelos sin intersaturación, se obtiene una gama de posibles respuestas condicionada por el peso relativo de los términos despreciados, tal como se recogen en la tabla 3.1.

La figura 3.10 muestra el par electromagnético predicho por los modelos con intersaturación (en color azul) y sin intersaturación (en color rojo), formulados utilizando la corriente magnetizante y el flujo de rotor como variables de estado, así como por el modelo para zona lineal de la característica magnética (en negro).

Puede observarse cómo el modelo para la zona lineal predice mayores picos transitorios de par que el modelo con intersaturación; reduciéndose prácticamente las diferencias entre ambas respuestas a una cuestión de escala. Por otra parte, el desarrollo del par calculado a partir del modelo sin intersaturación predice picos que inicialmente son de menor amplitud pero que decrecen a menor ritmo que los calculados por el modelo con intersaturación y el modelo para

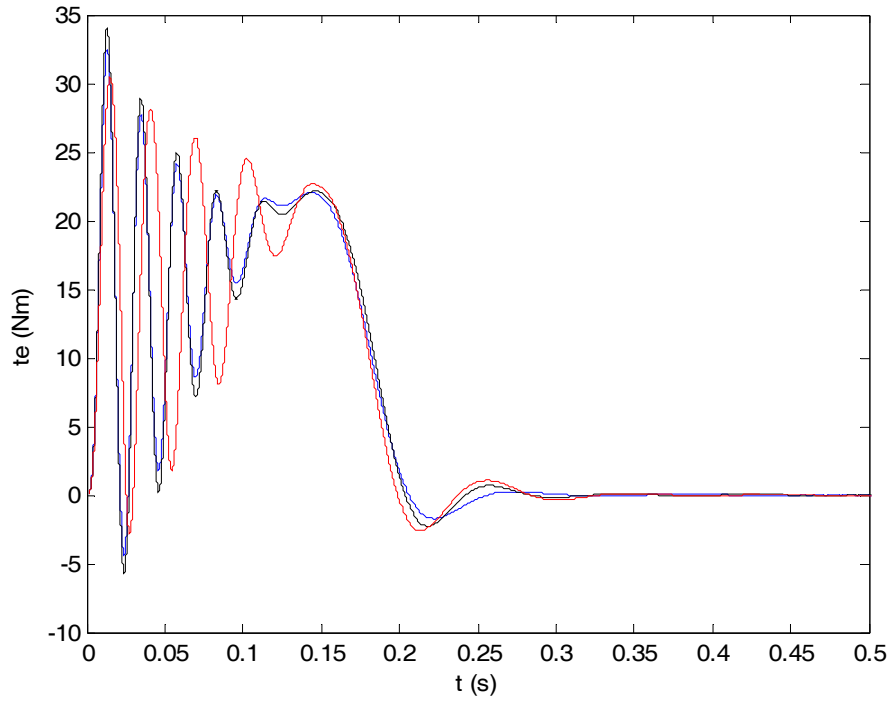


Figura 3.10. Par electromagnético predicho por los modelos (azul) con y (rojo) sin intersaturación, y por el modelo para zona lineal de la característica electromagnética (negro), con corriente magnetizante y flujo de rotor como variables de estado.

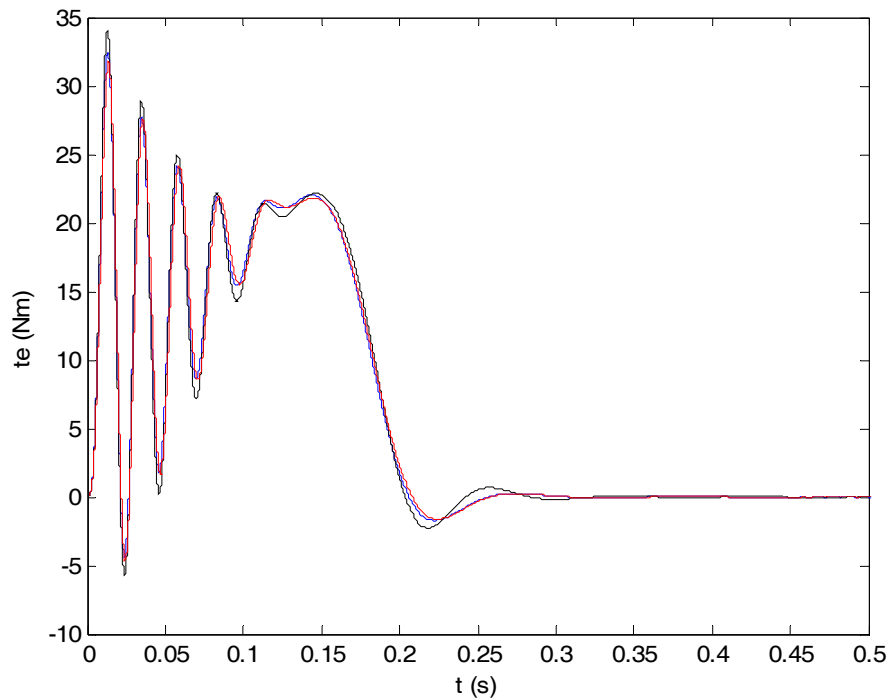


Figura 3.11. Par electromagnético predicho por los modelos (azul) con y (rojo) sin intersaturación, y por el modelo para zona lineal de la característica electromagnética (negro), con flujo de estator y corriente de rotor como variables de estado.

zonal lineal, por lo que acaban superando a los predichos por estos últimos. También, el trazado transitorio del par se revela en determinados tramos hasta en oposición de fase con el calculado a partir de los modelos con intersaturación y para el trabajo en zona lineal.

Como se ha comentado, el conjunto de variables de estado seleccionado para los modelos ha sido el compuesto por la corriente magnetizante y el flujo rotórico, que según se muestra en la tabla 3.1. premultiplica a la cantidad básica $\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$ ausente en todas las formulaciones del método aproximado por el factor de peso $\left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}}\right)$, uno de los más desfavorables.

Si por otra parte, se selecciona un juego de variables para las que, según se recoge en la tabla 3.1, la cantidad básica $\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$ despreciada en el modelo es modulada por un factor de peso significativamente menor, se obtienen resultados prácticamente idénticos con ambas metodologías para el modelado de la saturación, como puede apreciarse en la figura 3.11.

El examen de la tabla 3.1 revela que existirán un total de siete posibles tipos de respuestas proporcionadas por el método aproximado para el modelado de la saturación, pero agrupadas en dos grandes familias, a saber, las que conducen a resultados semejantes a los del modelo con intersaturación, en las que el peso relativo de los términos despreciados es bajo, y las que predicen resultados más discrepantes, a saber, las que corresponden al uso exclusivo de corrientes o de corriente magnetizante y flujo como variables de estado.

En las figuras que siguen se muestra la comparación entre las respuestas de par, velocidad y corriente generadas por los modelos con intersaturación y para zona lineal con cada una de las posibles respuestas tipo que es posible obtener a partir del modelo aproximado para el modelado de la saturación. Para mayor claridad, se comparan separadamente las dos familias que manifiestan un comportamiento más diferenciado, esto es, por una parte los modelos formulados exclusivamente en corrientes o en corriente magnetizante y un flujo, y por otra el correspondiente al resto de combinaciones de variables de estado.

Puede observarse en las figuras 3.12 a 3.17 cómo el par electromagnético y la velocidad evidencian de modo más acusado los dos distintos comportamientos mencionados, mientras que en el caso de la corriente las diferencias son más discretas.

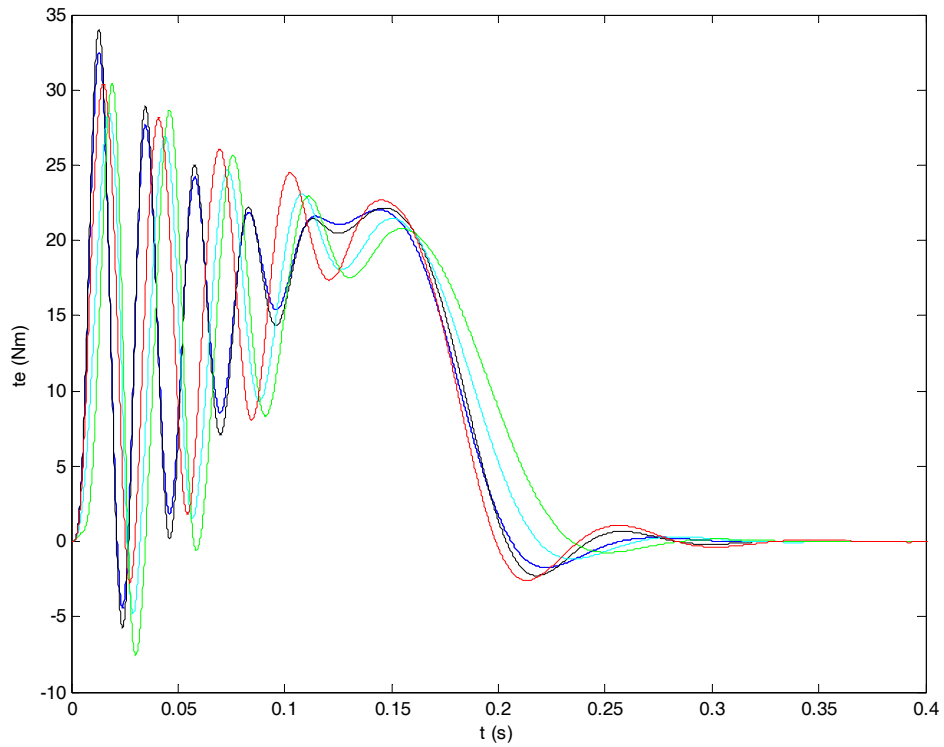


Figura 3.12. Par electromagnético predicho por los modelos con intersaturación (azul), para zona lineal (negro) y por el modelo aproximado formulado con \bar{i}_s, \bar{i}_r (azul ciano), con $\bar{\psi}_s, \bar{i}_m$ (verde) y con $\bar{i}_m, \bar{\psi}_r$ (rojo).

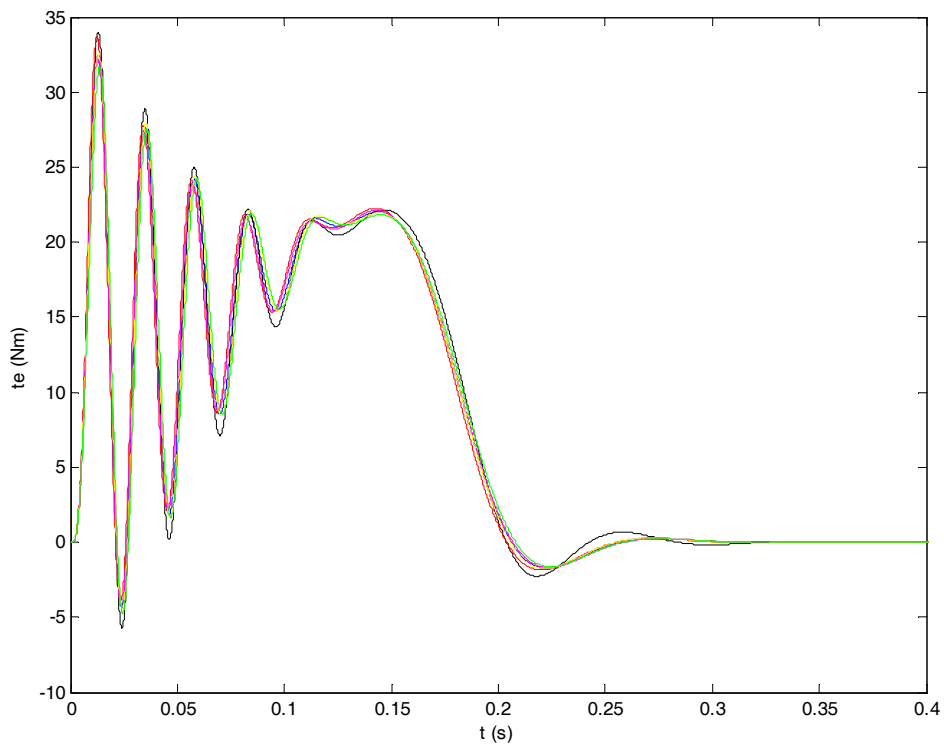


Figura 3.13. Par electromagnético predicho por los modelos con intersaturación (azul), para zona lineal (negro) y por el modelo aproximado formulado con $\bar{\psi}_s, \bar{\psi}_m$ (rojo), con $\bar{\psi}_m, \bar{\psi}_r$ (magenta), con $\bar{i}_s, \bar{\psi}_r$ (amarillo) y con $\bar{\psi}_s, \bar{i}_r$ (verde).

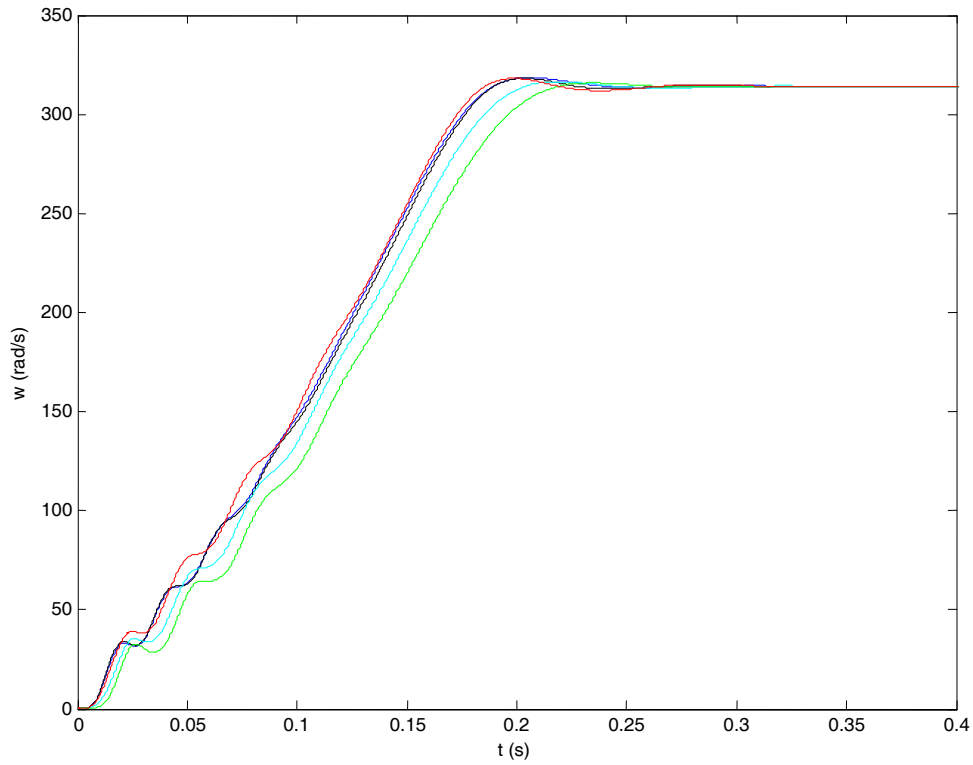


Figura 3.14. Velocidad predicha por los modelos con intersaturación (azul), para zona lineal (negro) y por el modelo aproximado formulado con \bar{i}_s, \bar{i}_r (azul ciano), con $\bar{\psi}_s, \bar{i}_m$ (verde) y con $\bar{i}_m, \bar{\psi}_r$ (rojo).

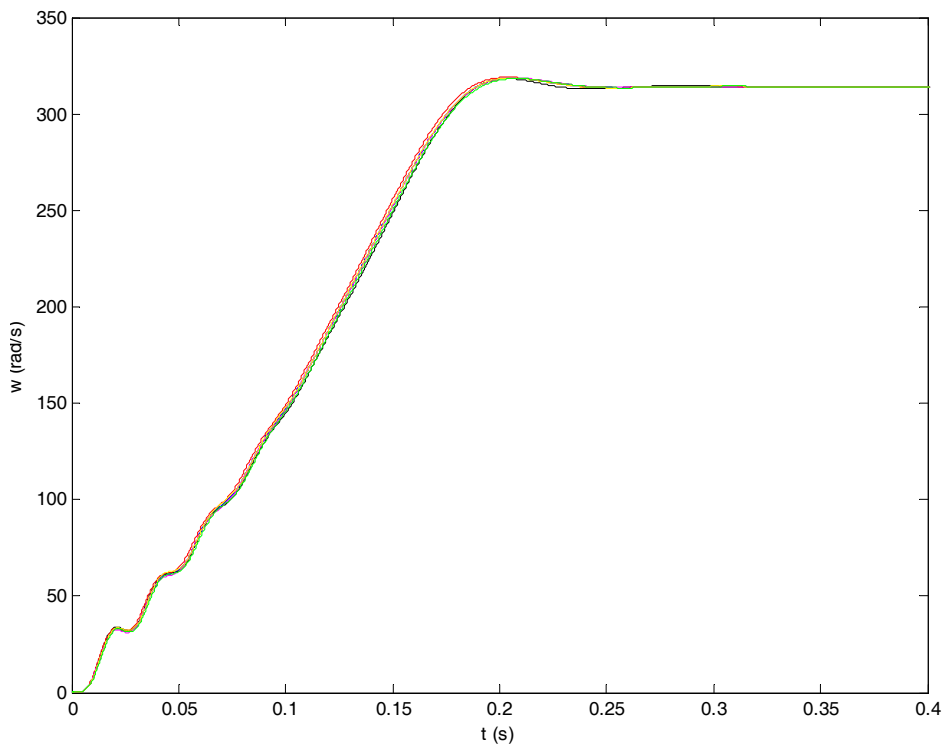


Figura 3.15. Velocidad predicha por los modelos con intersaturación (azul), para zona lineal (negro) y por el modelo aproximado formulado con $\bar{\psi}_s, \bar{\psi}_m$ (rojo), con $\bar{\psi}_m, \bar{\psi}_r$ (magenta), con $\bar{i}_s, \bar{\psi}_r$ (amarillo) y con $\bar{\psi}_s, \bar{i}_r$ (verde).

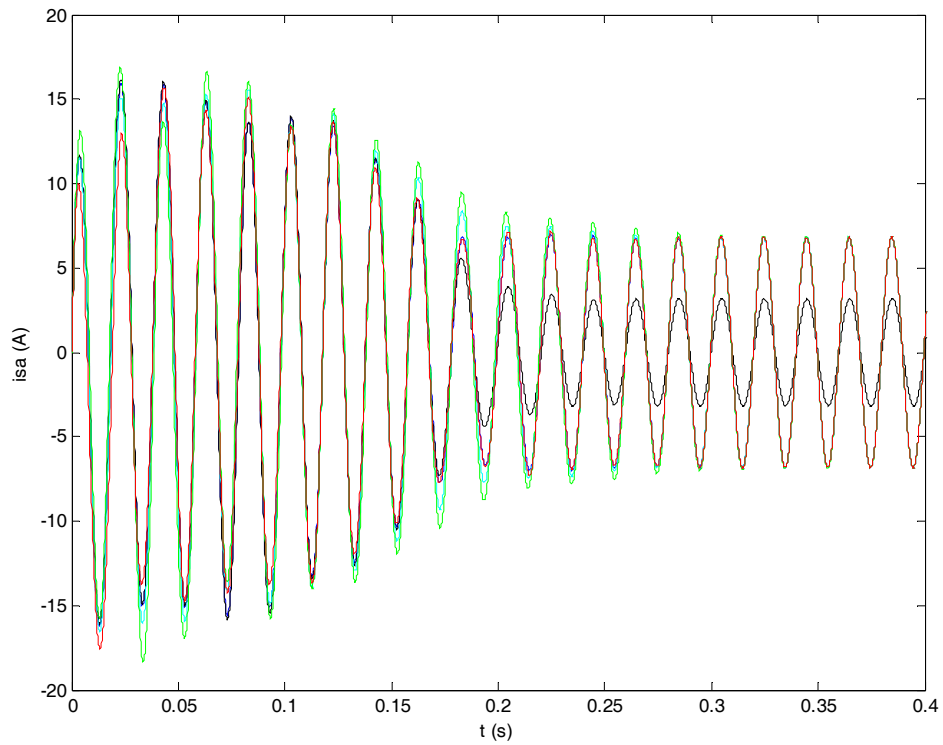


Figura 3.16. Corriente en la fase a predicha por los modelos con intersaturación (azul), para zona lineal (negro) y por el modelo aproximado formulado con \bar{i}_s, \bar{i}_r (azul ciano), con $\bar{\psi}_s, \bar{i}_m$ (verde) y con $\bar{i}_m, \bar{\psi}_r$ (rojo).

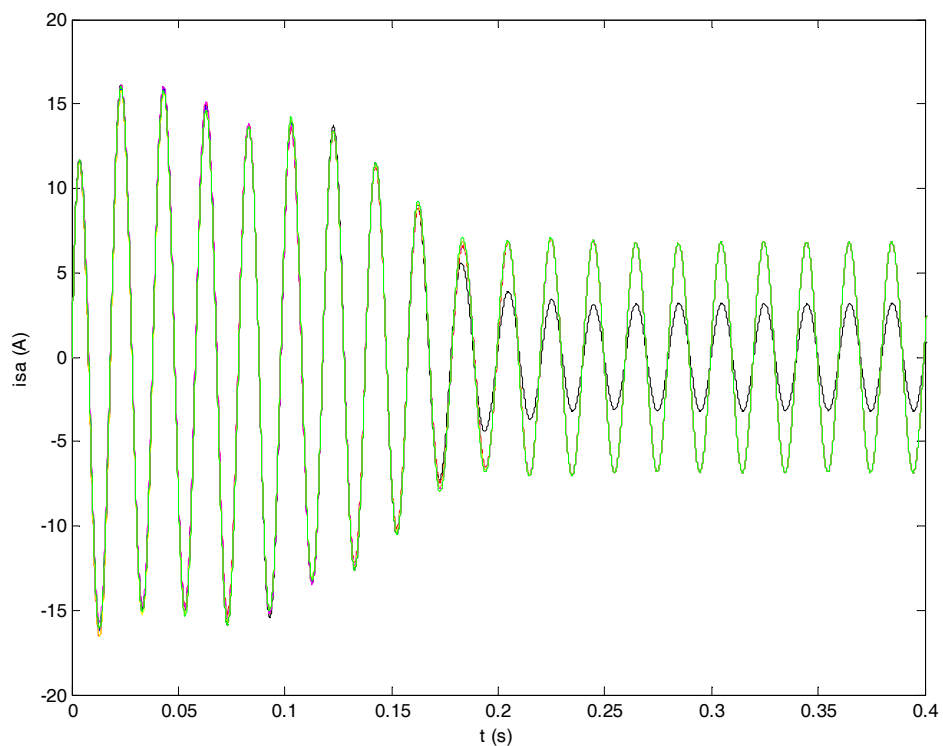


Figura 3.17. Corriente en la fase a predicha por los modelos con intersaturación (azul), para zona lineal (negro) y por el modelo aproximado formulado con $\bar{\psi}_s, \bar{\psi}_m$ (rojo), con $\bar{\psi}_m, \bar{\psi}_r$ (magenta), con $\bar{i}_s, \bar{\psi}_r$ (amarillo) y con $\bar{\psi}_s, \bar{i}_r$ (verde).

3.4.2. Modelo con dos jaulas rotóricas.

La complejidad añadida que aporta al modelo del motor la adición de una ecuación fasorial rotórica adicional para dar cuenta del efecto de ranura profunda recomienda aún más si cabe la extensión de los resultados obtenidos en el apartado anterior al caso de la doble jaula.

Así, repitiendo el proceso ya expuesto, se han recogido en la tabla 3.2 los distintos términos ignorados en el método aproximado para el modelado de la saturación según el conjunto elegido de variables de estado, que han sido reescritos todos ellos en función de la corriente magnetizante para facilitar la comparación de la importancia relativa que comporta su ausencia. Del análisis de los datos consignados, se desprende que al igual que en el caso del modelo con jaula única, aquellas selecciones de variables que requieren del cálculo de la derivada temporal de la inductancia magnetizante (exclusivamente corrientes o la combinación de la corriente magnetizante con dos variables más) exhiben resultados más discrepantes con los predichos por el modelo con intersaturación.

Dentro de la tabla 3.2 se han delimitado mediante trazo grueso aquellos modelos equivalentes, esto es, que carecen exactamente de los mismos términos en las mismas ecuaciones, y que lógicamente generan respuestas idénticas. Del total de 48 combinaciones posibles de variables resultan 26 tipos formalmente distintos de modelos sin intersaturación, en vista de los diferentes factores de peso que premultiplican a la cantidad básica ausente en todos los casos

$$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}.$$

Considerando el caso del arranque en vacío con una tensión un 50% superior a la nominal del motor de doble jaula de características listadas en el apéndice B, se muestra en las figuras 3.18 a 3.20 el desarrollo del par electromagnético, la velocidad y la corriente en la fase a tal como son generados a partir del modelo con intersaturación, del válido para el trabajo en la zona lineal de la característica electromagnética, y uno de los modelos sin intersaturación perteneciente a cada una de las dos grandes familias en que estos pueden agruparse según la similitud de sus resultados; concretamente se consideran las selecciones de variables de estado $\bar{i}_s, \bar{i}_1, \bar{i}_2$ y $\bar{i}_s, \bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2$.

En lo que respecta al par electromagnético, puede observarse en este caso cómo el predicho por los modelos con intersaturación, para zona lineal y el correspondiente al método aproximado en base a los estados $\bar{i}_s, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2$ resulta prácticamente indistinguible, en tanto que el que utiliza $\bar{i}_s, \bar{i}_1, \bar{i}_2$ como variables exhibe una gran discrepancia.

Respecto a la velocidad, de nuevo el modelo sin intersaturación formulado en términos de $\bar{i}_s, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2$, presenta un comportamiento diferenciado respecto a los otros modelos considerados, dando lugar a una respuesta más lenta.

En lo tocante a la corriente en la fase a, las diferencias entre ambos modelos aproximados son mínimas, de modo que se aprecian prácticamente superpuestos, y también es pequeña la diferencia entre estos y el modelo con intersaturación.

En definitiva, el análisis efectuado sobre el peso relativo de los distintos términos ignorados en los modelos aproximados para la consideración de la saturación del flujo magnetizante, muestra cómo la opción por esta técnica simplificada, extremadamente ventajosa en el caso de la doble jaula, puede ser adoptada con suficientes garantías cuando la selección de variables de estado es la adecuada, basándose en la información presentada en las tablas 3.1 y 3.2 del presente capítulo.

Tabla 3.2. Términos ausentes en los modelos sin intersaturación del motor trifásico de inducción con doble jaula, en función del conjunto seleccionado de variables de estado.

ESTADOS		TÉRMINOS AUSENTES	EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{i}_s, \bar{i}_1, \bar{i}_2$	En ecuación de estator	$\left(\bar{i}_s + \bar{i}_1 + \bar{i}_2\right) \frac{dL_m}{dt}$	$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	$\left(\bar{i}_s + \bar{i}_1 + \bar{i}_2\right) \frac{dL_m}{dt}$	$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	$\left(\bar{i}_s + \bar{i}_1 + \bar{i}_2\right) \frac{dL_m}{dt}$	$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{i}_s, \bar{i}_m, \bar{i}_1$ $\bar{i}_s, \bar{i}_m, \bar{i}_2$ $\bar{i}_m, \bar{i}_1, \bar{i}_2$	En ecuación de estator	$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\psi}_s, \bar{i}_m, \bar{\psi}_1$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	$\left(1 + \frac{L_{11}(L_{121} + L_{21}) + L_{21}(L_{s1} + L_{121})}{L_{s1}L_{11}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{11}(L_{121} + L_{21}) + L_{21}(L_{s1} + L_{121})}{L_{s1}L_{11}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\psi}_s, \bar{i}_m, \bar{\psi}_2$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	$\left(1 + \frac{L_{11}(L_{s1} + L_{121}) + L_{21}(L_{121} + L_{11})}{L_{s1}L_{21}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{11}(L_{s1} + L_{121}) + L_{21}(L_{121} + L_{11})}{L_{s1}L_{21}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{i}_m, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2$	En ecuación de estator	$\left(1 + \frac{L_{s1}(L_{11} + L_{21})}{L_{11}L_{21} + L_{121}(L_{11} + L_{21})}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{s1}(L_{11} + L_{21})}{L_{11}L_{21} + L_{121}(L_{11} + L_{21})}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{i}_s, \bar{i}_m, \bar{\psi}_1$	En ecuación de estator	$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	$\left(1 + \frac{L_{21}}{L_{11}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{21}}{L_{11}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$

Tabla 3.2. (Continuación)

ESTADOS	TÉRMINOS AUSENTES		EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{i}_s, \bar{i}_m, \bar{\Psi}_2$	En ecuación de estator	$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	$\left(1 + \frac{L_{11}}{L_{21}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{11}}{L_{21}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{\Psi}_s, \bar{i}_m, \bar{i}_1$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	$\left(1 + \frac{L_{121}}{L_{s1}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{121}}{L_{s1}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	$\left(1 + \frac{L_{121} + L_{21}}{L_{s1}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{121} + L_{21}}{L_{s1}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_s, \bar{i}_m, \bar{i}_2$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	$\left(1 + \frac{L_{121} + L_{11}}{L_{s1}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{121} + L_{11}}{L_{s1}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	$\left(1 + \frac{L_{121}}{L_{s1}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{121}}{L_{s1}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{i}_m, \bar{i}_1, \bar{\Psi}_2$	En ecuación de estator	$\left(1 + \frac{L_{s1}}{L_{121} + L_{21}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{s1}}{L_{121} + L_{21}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	$\left(1 - \frac{L_{121}}{L_{121} + L_{21}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 - \frac{L_{121}}{L_{121} + L_{21}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{i}_m, \bar{\Psi}_1, \bar{i}_2$	En ecuación de estator	$\left(1 + \frac{L_{s1}}{L_{121} + L_{11}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{s1}}{L_{121} + L_{11}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	$\left(1 - \frac{L_{121}}{L_{121} + L_{11}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 - \frac{L_{121}}{L_{121} + L_{11}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{i}_m, \bar{\Psi}_1, \bar{i}_1$	En ecuación de estator	$\left(1 + \frac{L_{s1}}{L_{121}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{s1}}{L_{121}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	$-\frac{L_{21}}{L_{121}} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$-\frac{L_{21}}{L_{121}} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$

Tabla 3.2. (Continuación)

ESTADOS	TÉRMINOS AUSENTES		EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{i}_m, \bar{i}_2, \bar{\psi}_2,$	En ecuación de estator	$\left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{121}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$\left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{121}}\right) \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	$-\frac{L_{11}}{L_{121}} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$	$-\frac{L_{11}}{L_{121}} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{\psi}_s, \bar{i}_s, \bar{i}_1$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	$L_{121}(\bar{\psi}_s - L_{sl}\bar{i}_s) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m}\right)$	$-\frac{L_{121}}{L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	$(L_{121} + L_{21})(\bar{\psi}_s - L_{sl}\bar{i}_s) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m}\right)$	$-\frac{(L_{121} + L_{21})}{L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\psi}_m, \bar{i}_s, \bar{i}_1$ $\bar{\psi}_s, \bar{\psi}_m, \bar{i}_1$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	$L_{121} \bar{\psi}_m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m}\right)$	$-\frac{L_{121}}{L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	$(L_{121} + L_{21}) \bar{\psi}_m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m}\right)$	$-\frac{(L_{121} + L_{21})}{L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\psi}_s, \bar{i}_s, \bar{i}_2$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	$(L_{121} + L_{11})(\bar{\psi}_s - L_{sl}\bar{i}_s) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m}\right)$	$-\frac{(L_{121} + L_{11})}{L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	$L_{121}(\bar{\psi}_s - L_{sl}\bar{i}_s) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m}\right)$	$-\frac{L_{121}}{L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\psi}_m, \bar{i}_s, \bar{i}_2$ $\bar{\psi}_s, \bar{\psi}_m, \bar{i}_2$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	$(L_{121} + L_{11}) \bar{\psi}_m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m}\right)$	$-\frac{(L_{121} + L_{11})}{L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	$L_{121} \bar{\psi}_m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m}\right)$	$-\frac{L_{121}}{L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{i}_s, \bar{i}_1, \bar{\psi}_1$	En ecuación de estator	$\left(L_{121} \bar{i}_s + \bar{\psi}_1 - L_{11} \bar{i}_1\right) \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{121} + L_m}\right)$	$\frac{L_{121}}{L_{121} + L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	$-L_{21} \bar{i}_s \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{121} + L_m}\right) + L_{21} \bar{\psi}_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_{121} + L_m}\right)$ $-L_{21} \bar{i}_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{L_{11} + L_{121} + L_m}{L_{121} + L_m}\right)$	$\frac{-L_{21}}{L_{121} + L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$

Tabla 3.2. (Continuación)

ESTADOS	TÉRMINOS AUSENTES		EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{i}_s, \bar{i}_2, \bar{\Psi}_2$	En ecuación de estator	$(L_{121}\bar{i}_s + \bar{\Psi}_2 - L_{21}\bar{i}_2) \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{121} + L_m} \right)$	$\frac{L_{121}}{L_{121} + L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	$-L_{11}\bar{i}_s \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{121} + L_m} \right) + L_{11}\bar{\Psi}_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_{121} + L_m} \right)$ $-L_{11}\bar{i}_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{L_{21} + L_{121} + L_m}{L_{121} + L_m} \right)$	$\frac{-L_{11}}{L_{121} + L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{i}_s, \bar{i}_1, \bar{\Psi}_2$	En ecuación de estator	$((L_{121} + L_{21})\bar{i}_s + \bar{\Psi}_2 + L_{21}\bar{i}_1) \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{121} + L_{21} + L_m} \right)$	$\frac{L_{121} + L_{21}}{L_{121} + L_{21} + L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	$L_{21}\bar{i}_s \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{121} + L_{21} + L_m} \right) + L_{21}\bar{i}_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{L_{121} + L_m}{L_{121} + L_{21} + L_m} \right)$ $-L_{21}\bar{\Psi}_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_{121} + L_{21} + L_m} \right)$	$\frac{L_{21}}{L_{121} + L_{21} + L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{i}_s, \bar{i}_2, \bar{\Psi}_1$	En ecuación de estator	$((L_{121} + L_{11})\bar{i}_s + \bar{\Psi}_1 + L_{11}\bar{i}_2) \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{121} + L_{11} + L_m} \right)$	$\frac{L_{121} + L_{11}}{L_{121} + L_{11} + L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	$L_{11}\bar{i}_s \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{121} + L_{11} + L_m} \right) - L_{11}\bar{\Psi}_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_{121} + L_{11} + L_m} \right)$ $+ L_{11}\bar{i}_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{L_{121} + L_m}{L_{121} + L_{11} + L_m} \right)$	$\frac{L_{11}}{L_{121} + L_{11} + L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_s, \bar{i}_1, \bar{i}_2$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	$(\bar{\Psi}_s + L_{s1}\bar{i}_1 + L_{s1}\bar{i}_2) \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{s1} + L_m} \right)$	$\frac{L_{s1}}{L_{s1} + L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	$(\bar{\Psi}_s + L_{s1}\bar{i}_1 + L_{s1}\bar{i}_2) \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{s1} + L_m} \right)$	$\frac{L_{s1}}{L_{s1} + L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_1, \bar{i}_1, \bar{i}_2$	En ecuación de estator	$L_{s1}(\bar{\Psi}_1 - (L_{121} + L_{11})\bar{i}_1 - L_{121}\bar{i}_2) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{s1}}{L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	—	—

Tabla 3.2. (Continuación)

ESTADOS	TÉRMINOS AUSENTES		EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{\Psi}_2, \bar{i}_1, \bar{i}_2$	En ecuación de estator	$L_{sl} \left(-L_{121} \bar{i}_1 - (L_{121} + L_{21}) \bar{i}_2 + \bar{\Psi}_2 \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{sl}}{L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{\Psi}_1, \bar{i}_1, \bar{\Psi}_2$	En ecuación de estator	$\frac{L_{sl}}{L_{21}} \left((L_{121} + L_{21}) \bar{\Psi}_1 - (L_{11} L_{21} + L_{121} (L_{11} + L_{21})) \bar{i}_1 - L_{121} \bar{\Psi}_2 \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{sl}}{L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{\Psi}_1, \bar{i}_2, \bar{\Psi}_2$	En ecuación de estator	$\frac{L_{sl}}{L_{11}} \left(-L_{121} \bar{\Psi}_1 + (L_{121} + L_{11}) \bar{\Psi}_2 - (L_{11} L_{21} + L_{121} (L_{11} + L_{21})) \bar{i}_2 \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{sl}}{L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{\Psi}_m, \bar{i}_1, \bar{i}_2$ $\bar{\Psi}_m, \bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2$ $\bar{\Psi}_m, \bar{\Psi}_1, \bar{i}_1$ $\bar{\Psi}_m, \bar{\Psi}_2, \bar{i}_2$ $\bar{\Psi}_m, \bar{i}_1, \bar{\Psi}_2$ $\bar{\Psi}_m, \bar{\Psi}_1, \bar{i}_2$	En ecuación de estator	$L_{sl} \bar{\Psi}_m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{sl}}{L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{\Psi}_s, \bar{i}_s, \bar{\Psi}_1$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	$\frac{L_{11} L_{21} + L_{121} (L_{11} + L_{21})}{L_{11}} (\bar{\Psi}_s - L_{sl} \bar{i}_s) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{11} L_{21} + L_{121} (L_{11} + L_{21})}{L_{11} L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$

Tabla 3.2. (Continuación)

ESTADOS	TÉRMINOS AUSENTES		EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_m, \bar{\Psi}_1$ $\bar{i}_s, \bar{\Psi}_m, \bar{\Psi}_1$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	$\frac{L_{11}L_{21} + L_{121}(L_{11} + L_{21})}{L_{11}} \bar{\Psi}_m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{11}L_{21} + L_{121}(L_{11} + L_{21})}{L_{11}L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_s, \bar{i}_s, \bar{\Psi}_2$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	$\frac{L_{11}L_{21} + L_{121}(L_{11} + L_{21})}{L_{21}} (\bar{\Psi}_s - L_{s1} \bar{i}_s) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{11}L_{21} + L_{121}(L_{11} + L_{21})}{L_{21}L_m} \bar{\Psi}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_m, \bar{\Psi}_2$ $\bar{i}_s, \bar{\Psi}_m, \bar{\Psi}_2$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	$\frac{L_{11}L_{21} + L_{121}(L_{11} + L_{21})}{L_{21}} \bar{\Psi}_m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_m} \right)$	$-\frac{L_{11}L_{21} + L_{121}(L_{11} + L_{21})}{L_{21}L_m} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_1, \bar{i}_1$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	$-L_{21} \bar{\Psi}_s \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)} \right)$ $+ \bar{\Psi}_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{L_{s1}L_m + (L_{121} + L_{21})(L_{s1} + L_m)}{L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)} \right)$ $-\bar{i}_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{L_{11}(L_{s1}L_m + (L_{121} + L_{21})(L_{s1} + L_m)) + L_{21}L_{s1}L_m}{L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)} \right)$	$-\frac{L_{s1}L_{21}}{L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_2, \bar{i}_2$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	$-L_{11} \bar{\Psi}_s \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)} \right)$ $+ \bar{\Psi}_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{L_{s1}L_m + (L_{121} + L_{11})(L_{s1} + L_m)}{L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)} \right)$ $-\bar{i}_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{L_{21}(L_{s1}L_m + (L_{121} + L_{11})(L_{s1} + L_m)) + L_{11}L_{s1}L_m}{L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)} \right)$	$-\frac{L_{s1}L_{11}}{L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	—	—

Tabla 3.2. (Continuación)

ESTADOS	TÉRMINOS AUSENTES		EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{\Psi}_s, \bar{i}_1, \bar{\Psi}_2$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	$L_{21} \bar{\Psi}_s \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{s1}L_m + (L_{121} + L_{21})(L_{s1} + L_m)} \right)$ $+ \bar{i}_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{-L_{121}(L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)) + L_{21}L_{s1}L_m}{L_{s1}L_m + (L_{121} + L_{21})(L_{s1} + L_m)} \right)$ $+ \bar{\Psi}_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)}{L_{s1}L_m + (L_{121} + L_{21})(L_{s1} + L_m)} \right)$	$\frac{L_{s1}L_{21}}{L_{s1}L_m + (L_{121} + L_{21})(L_{s1} + L_m)} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
	En ecuación de jaula externa	—	—
$\bar{\Psi}_s, \bar{i}_2, \bar{\Psi}_1$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	$L_{11} \bar{\Psi}_s \frac{d}{dt} \left(\frac{L_m}{L_{s1}L_m + (L_{121} + L_{11})(L_{s1} + L_m)} \right)$ $+ \bar{i}_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{-L_{121}(L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)) + L_{11}L_{s1}L_m}{L_{s1}L_m + (L_{121} + L_{11})(L_{s1} + L_m)} \right)$ $+ \bar{\Psi}_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)}{L_{s1}L_m + (L_{121} + L_{11})(L_{s1} + L_m)} \right)$	$\frac{L_{s1}L_{11}}{L_{s1}L_m + (L_{121} + L_{11})(L_{s1} + L_m)} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2$	En ecuación de estator	—	—
	En ecuación de jaula interna	—	—
	En ecuación de jaula externa	—	—

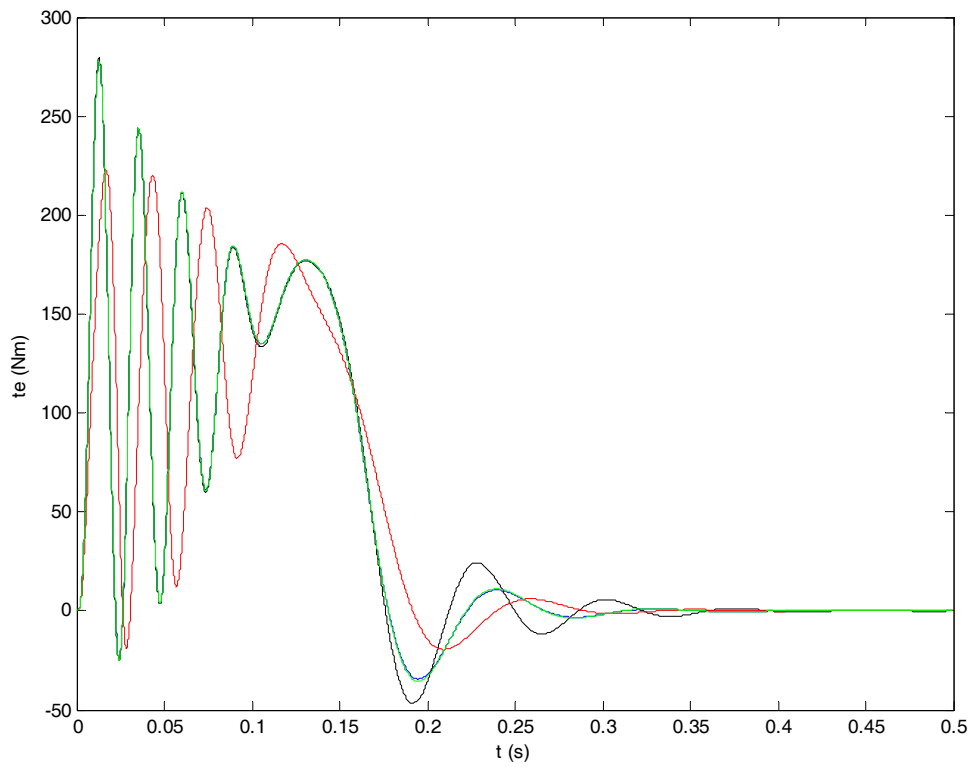


Figura 3.18. Par electromagnético predicho por los modelos con intersaturación (azul), para zona lineal (negro) y por el modelo aproximado formulado con $\bar{i}_s, \bar{i}_1, \bar{i}_2$ (azul ciano) y con $\bar{i}_s, \bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2$ (rojo).

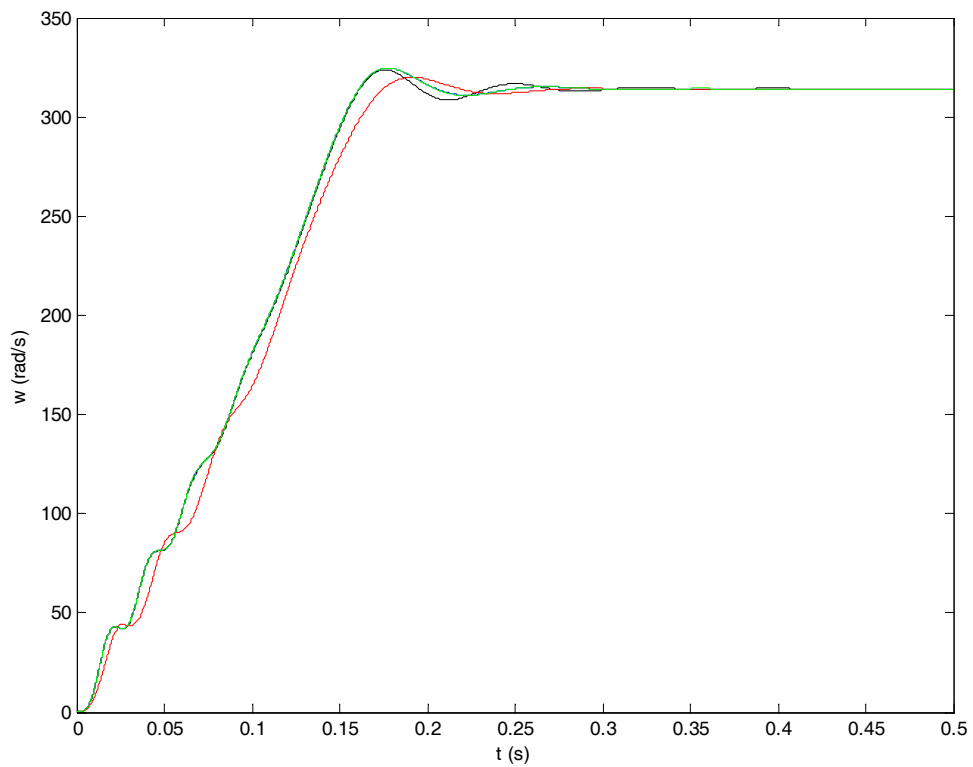


Figura 3.19. Velocidad predicha por los modelos con intersaturación (azul), para zona lineal (negro) y por el modelo aproximado formulado con $\bar{i}_s, \bar{i}_1, \bar{i}_2$ (azul ciano) y con $\bar{i}_s, \bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2$ (rojo).

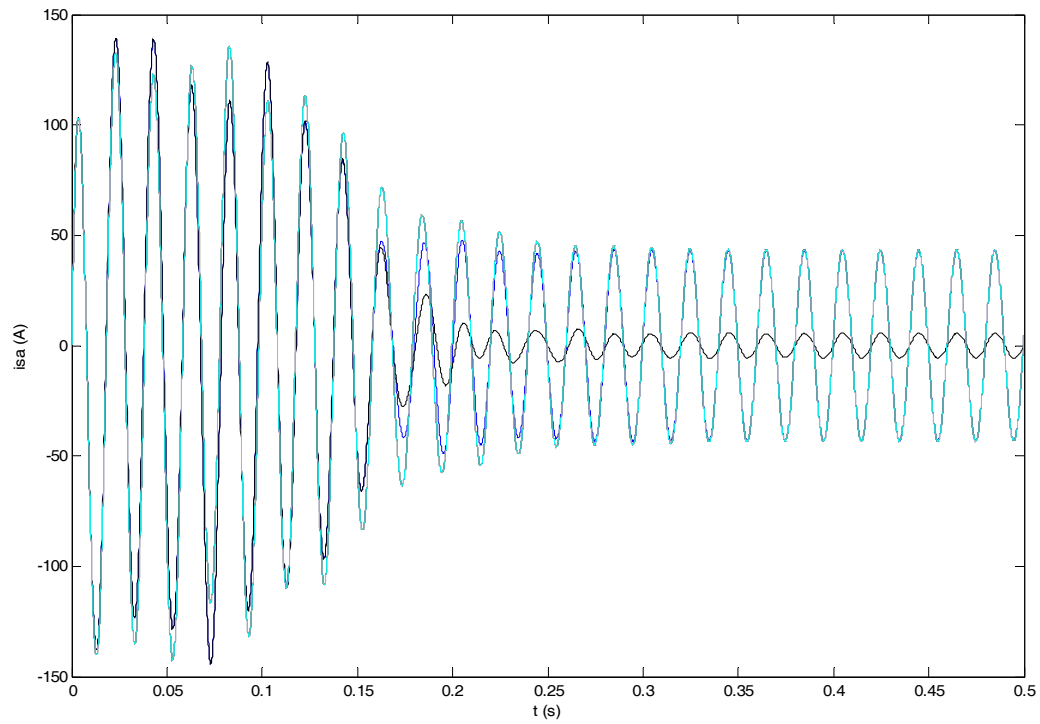


Figura 3.20. Corriente en la fase a predicha por los modelos con intersaturación (azul), para zona lineal (negro) y por el modelo aproximado formulado con $\bar{i}_s, \bar{i}_1, \bar{i}_2$ (azul ciano) y con $\bar{i}_s, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2$ (rojo).

3.5. SOBRE LA ELIMINACIÓN DE PARÁMETROS EN LOS MODELOS DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN CON SATURACIÓN.

En el capítulo 1 se hizo alusión a la utilización de esquemas equivalentes con un número reducido de parámetros, como método práctico para aliviar la complejidad que supone la adición de una nueva ecuación rotórica para modelar el efecto de ranura profunda en el motor trifásico de inducción.

En primera instancia, parecería indicado recurrir a esta misma técnica para reducir el fuerte incremento en la complejidad de los modelos del motor que implica la consideración del fenómeno de la saturación.

Un análisis detallado del asunto revela, no obstante, que obtener modelos *exactamente* equivalentes con un número inferior de parámetros conduce a formulaciones mucho más complicadas que las de partida, debido esencialmente a la naturaleza no lineal de la inductancia magnetizante.

Para ilustrar lo expuesto, considérense las ecuaciones del modelo con una sola jaula del motor trifásico de inducción, expresadas en el sistema genérico de referencia:

$$\begin{aligned}\bar{u}_s &= R_s \bar{i}_s + \frac{d}{dt} \bar{\Psi}_s + j\omega_g \bar{\Psi}_s \\ 0 &= R_r \bar{i}_r + \frac{d}{dt} \bar{\Psi}_r + j(\omega_g - \omega) \bar{\Psi}_r \\ t_e - t_l &= \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\rho}{P} \omega\end{aligned}\tag{3.32}$$

Con:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_s &= L_{sl} \bar{i}_s + L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_r) \\ \bar{\Psi}_r &= L_{rl} \bar{i}_r + L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_r) \\ t_e &= -\frac{3}{2} P \bar{\Psi}_s \wedge \bar{i}_s\end{aligned}\tag{3.33}$$

Haciendo uso de un factor de referencia “ α ” para las cantidades rotóricas, asimilable a una relación de número de espiras ficticia, se obtiene el siguiente conjunto de magnitudes referidas:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{i}}_{r\text{ref}} &= \frac{\dot{\underline{i}}_r}{\alpha} \\ \underline{\Psi}_{r\text{ref}} &= \alpha \underline{\Psi}_r \\ \underline{u}_{r\text{ref}} &= \alpha \underline{u}_r\end{aligned}\tag{3.34}$$

Que necesariamente implica, para no alterar el modelo:

$$\begin{aligned}L_{sl\text{ref}} &= L_{sl} + (1 - \alpha)L_m \\ L_{m\text{ref}} &= \alpha L_m \\ L_{rl\text{ref}} &= (L_{rl} + L_m)\alpha^2 - \alpha L_m \\ R_{r\text{ref}} &= \alpha^2 R_r\end{aligned}\tag{3.35}$$

Establecida la relación entre magnitudes originales y referidas, manténgase sin cambios la ecuación estatórica, pero multiplíquense ambos miembros de la ecuación rotórica por el factor de referencia α , con lo que se obtendrá el sistema equivalente:

$$\begin{aligned}\bar{\underline{u}}_s &= R_s \bar{\underline{i}}_s + \frac{d}{dt} \bar{\underline{\Psi}}_s + j\omega_g \bar{\underline{\Psi}}_s \\ 0 &= R_{r\text{ref}} \bar{\underline{i}}_{r\text{ref}} + \alpha \frac{d}{dt} \bar{\underline{\Psi}}_r + j(\omega_g - \omega) \bar{\underline{\Psi}}_{r\text{ref}} \\ t_e - t_1 &= \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\rho}{P} \omega\end{aligned}\tag{3.36}$$

con:

$$\begin{aligned}\bar{\underline{\Psi}}_s &= L_{sl\text{ref}} \bar{\underline{i}}_s + L_{m\text{ref}} (\bar{\underline{i}}_s + \bar{\underline{i}}_{r\text{ref}}) \\ \bar{\underline{\Psi}}_{r\text{ref}} &= L_{rl\text{ref}} \bar{\underline{i}}_{r\text{ref}} + L_{m\text{ref}} (\bar{\underline{i}}_s + \bar{\underline{i}}_{r\text{ref}}) \\ t_e &= -\frac{3}{2} P \bar{\underline{\Psi}}_s \wedge \bar{\underline{i}}_s\end{aligned}\tag{3.37}$$

Nótese que automáticamente todos los miembros de la ecuación rotórica han quedado expresados en función de magnitudes referidas, a excepción del correspondiente a la derivada temporal del fasor de flujo rotórico, que queda de la forma: $\alpha \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt}$.

El interés del empleo de magnitudes referidas radica en el hecho de que con una adecuada selección de la relación de número de espiras α , pueden anularse los parámetros $L_{sl\ ref}$ o $L_{rl\ ref}$ ($L_{sl\ ref}$ o $L_{12l\ ref}$ para el motor doble jaula, véase la sección 1.5), para lo cual se requiere:

$$\begin{aligned} L_{sl\ ref} = 0 &\Rightarrow \alpha = \frac{L_{sl\ ref} + L_m}{L_m} \\ L_{rl\ ref} = 0 &\Rightarrow \alpha = \frac{L_m}{L_{rl\ ref} + L_m} \end{aligned} \quad (3.38)$$

En la zona lineal de la característica magnética, donde la inductancia magnetizante se mantiene constante, el factor de referencia α también será, lógicamente, constante. En este supuesto se tendrá:

$$L_m = cte \Rightarrow \alpha = cte \Rightarrow \alpha \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} = \frac{d(\alpha\bar{\Psi}_r)}{dt} = \frac{d(\bar{\Psi}_{r\ ref})}{dt} \quad (3.39)$$

Con lo que la ecuación rotórica, expresada en términos de magnitudes referidas toma la forma:

$$0 = R_{r\ ref} \bar{i}_{r\ ref} + \frac{d}{dt} \bar{\Psi}_{r\ ref} + j(\omega_g - \omega) \bar{\Psi}_{r\ ref} \quad (3.40)$$

Nótese que la estructura formal de las ecuaciones de estator y rotor se conserva (con la salvedad de los términos afectados por el parámetro $L_{sl\ ref}$ o $L_{rl\ ref}$ a eliminar). Es decir, si en las ecuaciones de partida mostradas en (3.32), (3.33), en lugar de utilizar los parámetros originales se recurre a parámetros referidos, las magnitudes estatóricas, la velocidad y el par resultan inalterados, mientras que las variables rotóricas se entenderán referidas (siendo las cantidades originales recuperables a partir de (3.34)).

No sucede lo mismo en el trabajo en la zona saturada de la característica magnética; en esta región, para lograr la exacta cancelación de los parámetros referidos $L_{sl\ ref}$ o $L_{rl\ ref}$, la relación de número de espiras α debe variar como una función de la inductancia magnetizante, por lo que se tendrá:

$$L_m \neq cte \Rightarrow \alpha \neq cte \Rightarrow \alpha \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} \neq \frac{d(\alpha\bar{\Psi}_r)}{dt} = \frac{d\bar{\Psi}_{r\ ref}}{dt} \quad (3.41)$$

más bien:

$$\alpha \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} = \alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{\Psi}_{r\ ref}}{\alpha} \right) = \alpha \frac{\frac{d\bar{\Psi}_{r\ ref}}{dt} - \bar{\Psi}_{r\ ref} \frac{d\alpha}{dt}}{\alpha^2} = \frac{d\bar{\Psi}_{r\ ref}}{dt} - \frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_{r\ ref} \frac{d\alpha}{dt} \quad (3.42)$$

siendo:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt} \quad (3.43)$$

con lo que finalmente resulta:

$$\alpha \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} = \frac{d\bar{\Psi}_{r\ ref}}{dt} - \frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_{r\ ref} \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt} \quad (3.44)$$

Es decir, para lograr la cancelación exacta de un parámetro manteniendo el sistema inalterado, no basta con actualizar continuamente el valor del factor de referencia α acorde con la variación de la inductancia magnetizante, sino que debe modificarse la estructura de la ecuación rotórica, quedando el sistema definitivo de la forma:

$$\begin{aligned} \bar{u}_s &= R_s \bar{i}_s + \frac{d}{dt} \bar{\Psi}_s + j\omega_g \bar{\Psi}_s \\ 0 &= R_{r\ ref} \bar{i}_{r\ ref} + \frac{d\bar{\Psi}_{r\ ref}}{dt} - \frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_{r\ ref} \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt} + j(\omega_g - \omega) \bar{\Psi}_{r\ ref} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\rho}{P} \omega$$

con:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_s &= L_{sl\text{ref}} \bar{i}_s + L_{m\text{ref}} (\bar{i}_s + \bar{i}_{r\text{ref}}) \\ \bar{\Psi}_{r\text{ref}} &= L_{rl\text{ref}} \bar{i}_{r\text{ref}} + L_{m\text{ref}} (\bar{i}_s + \bar{i}_{r\text{ref}}) \\ t_e &= -\frac{3}{2} P \bar{\Psi}_s \wedge \bar{i}_s\end{aligned}\tag{3.46}$$

El error cometido al no incluir el término $-\frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_{r\text{ref}} \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$ en la ecuación rotórica se ve todavía aumentado con el uso de determinados conjuntos de variables de estado. Así, expresando los fasores de flujo en función de los fasores de corriente, se tendrá:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\Psi}_s}{dt} &= \frac{d}{dt} (L_{sl\text{ref}} \bar{i}_s + L_{m\text{ref}} (\bar{i}_s + \bar{i}_{r\text{ref}})) = L_{sl\text{ref}} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + \bar{i}_s \frac{dL_{sl\text{ref}}}{dt} + L_{m\text{ref}} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_{m\text{ref}} \frac{d\bar{i}_{r\text{ref}}}{dt} + \bar{i}_s \frac{dL_{m\text{ref}}}{dt} + \bar{i}_{r\text{ref}} \frac{dL_{m\text{ref}}}{dt} \\ \frac{d\bar{\Psi}_{r\text{ref}}}{dt} &= \frac{d}{dt} (L_{rl\text{ref}} \bar{i}_{r\text{ref}} + L_{m\text{ref}} (\bar{i}_s + \bar{i}_{r\text{ref}})) = L_{rl\text{ref}} \frac{d\bar{i}_{r\text{ref}}}{dt} + \bar{i}_{r\text{ref}} \frac{dL_{rl\text{ref}}}{dt} + L_{m\text{ref}} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_{m\text{ref}} \frac{d\bar{i}_{r\text{ref}}}{dt} + \bar{i}_s \frac{dL_{m\text{ref}}}{dt} + \bar{i}_{r\text{ref}} \frac{dL_{m\text{ref}}}{dt}\end{aligned}\tag{3.47}$$

Nótese la aparición de dos nuevos términos en (3.47), a saber:

$$\begin{aligned}\bar{i}_s \frac{dL_{sl\text{ref}}}{dt} &= \bar{i}_s \frac{d}{dt} (L_{sl} + (1-\alpha)L_m) = \bar{i}_s \left(-L_m \frac{d\alpha}{dt} + (1-\alpha) \frac{dL_m}{dt} \right) = \bar{i}_s \left(1-\alpha - \frac{d\alpha}{dL_m} L_m \right) \frac{dL_m}{dt} \\ \bar{i}_{r\text{ref}} \frac{dL_{rl\text{ref}}}{dt} &= \bar{i}_{r\text{ref}} \frac{d}{dt} ((L_{rl} + L_m)\alpha^2 - \alpha L_m) = \bar{i}_{r\text{ref}} \left(\alpha(\alpha-1) \frac{dL_m}{dt} + (2\alpha(L_{rl} + L_m) - L_m) \frac{d\alpha}{dt} \right) \\ &= \bar{i}_{r\text{ref}} \left(\alpha(\alpha-1) + \frac{d\alpha}{dL_m} (2\alpha(L_{rl} + L_m) - L_m) \right) \frac{dL_m}{dt}\end{aligned}\tag{3.48}$$

El empleo de las diversas combinaciones de variables de estado existentes da lugar a una colección de términos de nueva aparición. En la tabla 3.3 se recogen, para los distintos juegos de variables de estado, los términos a incluir en las ecuaciones de partida en (3.32), (3.33) cuando en estas se substituyan parámetros afectados por un factor de referencia variable, si se pretende mantener exactamente la identidad del sistema. De no incluir estos términos en las ecuaciones referidas, el sistema resultante diferirá del primitivo en los términos mostrados en la tabla 3.3.

Tabla 3.3. Términos a añadir a las ecuaciones referidas para preservar la identidad del modelo del motor con el uso de factores de referencia α variable.

ESTADOS	TÉRMINOS A INCLUIR EN LAS ECUACIONES		PARÁM. ANULADO	EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_{r \text{ ref}}$	Estator	—	$L_{sl \text{ ref}}$	—
			$L_{rl \text{ ref}}$	—
	Rotor	$-\frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_{r \text{ ref}} \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	$\frac{L_{sl}}{(L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{i}_s, \bar{i}_{r \text{ ref}}$	Estator	$\bar{i}_s \frac{dL_{sl \text{ ref}}}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	—
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \bar{i}_m - \frac{L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
	Rotor	$\bar{i}_{r \text{ ref}} \frac{dL_{rl \text{ ref}}}{dt} - \frac{1}{\alpha} (L_{m \text{ ref}} \bar{i}_s + (L_{rl \text{ ref}} + L_{m \text{ ref}}) \bar{i}_{r \text{ ref}}) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	$\left(\frac{L_{sl}(2L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_m L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \bar{i}_m - \frac{L_{sl}(L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl}))}{L_m^2 L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{i}_s, \bar{i}_{m \text{ ref}}$	Estator	$\bar{i}_s \frac{dL_{sl \text{ ref}}}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	—
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \bar{i}_m - \frac{L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
	Rotor	$(\bar{i}_s - \bar{i}_{m \text{ ref}}) \frac{dL_{rl \text{ ref}}}{dt} - \frac{1}{\alpha} (-L_{rl \text{ ref}} \bar{i}_s + (L_{rl \text{ ref}} + L_{m \text{ ref}}) \bar{i}_{m \text{ ref}}) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	$\left(\frac{L_{sl}(2L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_m L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \bar{i}_m - \frac{L_{sl}(L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl}))}{L_m^2 L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$

Tabla 3.3. (Continuación).

ESTADOS	TÉRMINOS A INCLUIR EN LAS ECUACIONES		PARÁM. ANULADO	EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\dot{\bar{i}}_{m\text{ref}}, \dot{\bar{i}}_{r\text{ref}}$	Estator	$\left(\dot{\bar{i}}_{m\text{ref}} - \dot{\bar{i}}_{r\text{ref}}\right) \frac{dL_{sl\text{ref}}}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	—
			$L_{rl\text{ref}}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \dot{\bar{i}}_m - \frac{L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r\right) \frac{dL_m}{dt}$
	Rotor	$\dot{\bar{i}}_{r\text{ref}} \frac{dL_{rl\text{ref}}}{dt} - \frac{1}{\alpha} \left(L_{rl\text{ref}} \dot{\bar{i}}_{r\text{ref}} + L_{m\text{ref}} \dot{\bar{i}}_{m\text{ref}}\right) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\left(\frac{L_{sl}(2L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_m L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \dot{\bar{i}}_m - \frac{L_{sl}(L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl}))}{L_m^2 L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \bar{\Psi}_r\right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
$\dot{\bar{i}}_s, \bar{\Psi}_{m\text{ref}}$	Estator	$\dot{\bar{i}}_s \frac{dL_{sl\text{ref}}}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	—
			$L_{rl\text{ref}}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \dot{\bar{i}}_m - \frac{L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r\right) \frac{dL_m}{dt}$
	Rotor	$\left(-\dot{\bar{i}}_s + \frac{\bar{\Psi}_{m\text{ref}}}{L_{m\text{ref}}}\right) \frac{dL_{rl\text{ref}}}{dt} - \frac{1}{\alpha} \left(-L_{rl\text{ref}} \dot{\bar{i}}_s + \left(1 + \frac{L_{rl\text{ref}}}{L_{m\text{ref}}}\right) \bar{\Psi}_{m\text{ref}}\right) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\left(\frac{L_{sl}(2L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_m L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \dot{\bar{i}}_m - \frac{L_{sl}(L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl}))}{L_m^2 L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \bar{\Psi}_r\right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_{m\text{ref}}, \dot{\bar{i}}_{r\text{ref}}$	Estator	$\left(\frac{\bar{\Psi}_{m\text{ref}}}{L_{m\text{ref}}} - \dot{\bar{i}}_{r\text{ref}}\right) \frac{dL_{sl\text{ref}}}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	—
			$L_{rl\text{ref}}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \dot{\bar{i}}_m - \frac{L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r\right) \frac{dL_m}{dt}$
	Rotor	$\dot{\bar{i}}_{r\text{ref}} \frac{dL_{rl\text{ref}}}{dt} - \frac{1}{\alpha} \left(L_{rl\text{ref}} \dot{\bar{i}}_{r\text{ref}} + \bar{\Psi}_{m\text{ref}}\right) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\left(\frac{L_{sl}(2L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_m L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \dot{\bar{i}}_m - \frac{L_{sl}(L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl}))}{L_m^2 L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \bar{\Psi}_r\right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$

Tabla 3.3. (Continuación).

ESTADOS	TÉRMINOS A INCLUIR EN LAS ECUACIONES		PARÁM. ANULADO	EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_{m\text{ref}}$	Estator	—	$L_{sl\text{ref}}$	—
			$L_{rl\text{ref}}$	—
	Rotor	$\frac{d}{dt} \left(\frac{L_{rl\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}}} \right) \left(-\bar{\Psi}_s + \bar{\Psi}_{m\text{ref}} \right) + \frac{\bar{\Psi}_{m\text{ref}}}{L_{m\text{ref}}} \frac{dL_{rl\text{ref}}}{dt}$ $- \frac{1}{\alpha} \left(\frac{-L_{rl\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}}} \bar{\Psi}_s \right)$ $+ \bar{\Psi}_{m\text{ref}} \left(1 + L_{rl\text{ref}} \left(\frac{1}{L_{m\text{ref}}} + \frac{1}{L_{sl\text{ref}}} \right) \right) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	(División por cero)
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_s, \bar{i}_{m\text{ref}}$	Estator	—	$L_{sl\text{ref}}$	—
			$L_{rl\text{ref}}$	—
	Rotor	$\frac{d}{dt} \left(\frac{L_{rl\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}}} \right) \left(-\bar{\Psi}_s + L_{m\text{ref}} \bar{i}_{m\text{ref}} \right) + \bar{i}_{m\text{ref}} \frac{dL_{rl\text{ref}}}{dt}$ $- \frac{1}{\alpha} \left(\frac{-L_{rl\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}}} \bar{\Psi}_s \right)$ $+ \bar{i}_{m\text{ref}} \left(L_{rl\text{ref}} + L_{m\text{ref}} \left(1 + \frac{L_{rl\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}}} \right) \right) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	(División por cero)
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_{m\text{ref}}, \bar{\Psi}_{r\text{ref}}$	Estator	$\frac{d}{dt} \left(\frac{L_{sl\text{ref}}}{L_{rl\text{ref}}} \right) \left(\bar{\Psi}_{m\text{ref}} - \bar{\Psi}_{r\text{ref}} \right) + \frac{\bar{\Psi}_{m\text{ref}}}{L_{m\text{ref}}} \frac{dL_{sl\text{ref}}}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	—
			$L_{rl\text{ref}}$	(División por cero)
	Rotor	$- \frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_{r\text{ref}} \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\frac{L_{sl}}{(L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{i}_{m\text{ref}}, \bar{\Psi}_{r\text{ref}}$	Estator	$\frac{d}{dt} \left(\frac{L_{sl\text{ref}}}{L_{rl\text{ref}}} \right) \left(L_{m\text{ref}} \bar{i}_{m\text{ref}} - \bar{\Psi}_{r\text{ref}} \right) + \bar{i}_{m\text{ref}} \frac{dL_{sl\text{ref}}}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	—
			$L_{rl\text{ref}}$	(División por cero)
	Rotor	$- \frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_{r\text{ref}} \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\frac{L_{sl}}{(L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$

Tabla 3.3. (Continuación).

ESTADOS	TÉRMINOS A INCLUIR EN LAS ECUACIONES		PARÁM. ANULADO	EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{\Psi}_s, \dot{\bar{i}}_s$	Estator	—	$L_{sl\ ref}$	—
			$L_{rl\ ref}$	—
	Rotor	$\frac{\bar{\Psi}_s}{L_{m\ ref}} \frac{dL_{rl\ ref}}{dt} - \dot{\bar{i}}_s \frac{d}{dt} (L_{sl\ ref} + L_{rl\ ref})$ $- \frac{\dot{\bar{i}}_s}{L_{m\ ref}} \frac{d}{dt} (L_{sl\ ref} L_{rl\ ref})$ $- \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{L_{rl\ ref}}{L_{m\ ref}} \right) \bar{\Psi}_s$ $- \dot{\bar{i}}_s \left(L_{rl\ ref} + L_{sl\ ref} \left(1 + \frac{L_{rl\ ref}}{L_{m\ ref}} \right) \right) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\ ref}$	$\left(\frac{L_{sl} (2L_{sl} L_{rl} + L_m (L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_m L_{rl} (L_{sl} + L_m)} \dot{\bar{i}}_m \right.$ $\left. - \frac{L_{sl} (L_{sl} L_{rl} + L_m (L_{sl} + L_{rl}))}{L_m^2 L_{rl} (L_{sl} + L_m)} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\ ref}$	$\frac{-L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \dot{\bar{i}}_m \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{sl\ ref}$	—
			$L_{rl\ ref}$	—
$\bar{\Psi}_s, \dot{\bar{i}}_{r\ ref}$	Estator	—	$L_{sl\ ref}$	—
			$L_{rl\ ref}$	—
	Rotor	$\dot{\bar{i}}_{r\ ref} \frac{dL_{rl\ ref}}{dt}$ $+ \left(\frac{L_{m\ ref}}{L_{sl\ ref} + L_{m\ ref}} \right)^2 \left(\dot{\bar{i}}_{r\ ref} - \frac{\bar{\Psi}_s}{L_{m\ ref}} \right) \frac{dL_{sl\ ref}}{dt}$ $- \frac{1}{\alpha} \left(\frac{L_{m\ ref}}{L_{sl\ ref} + L_{m\ ref}} \bar{\Psi}_s \right.$ $\left. + \left(L_{rl\ ref} + \frac{L_{sl\ ref} L_{m\ ref}}{L_{sl\ ref} + L_{m\ ref}} \right) \dot{\bar{i}}_{r\ ref} \right) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\ ref}$	$\left(\frac{L_{sl} (2L_{sl} L_{rl} + L_m (L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_m L_{rl} (L_{sl} + L_m)} \dot{\bar{i}}_m \right.$ $\left. - \frac{L_{sl} (L_{sl} L_{rl} + L_m (L_{sl} + L_{rl}))}{L_m^2 L_{rl} (L_{sl} + L_m)} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\ ref}$	$- \frac{L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^3 (L_{sl} + L_m)} (L_m^2 (L_{rl} + L_m) \dot{\bar{i}}_m$ $+ (L_{sl} L_{rl} + L_m (L_{sl} + L_{rl})) \bar{\Psi}_r) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{sl\ ref}$	—
			$L_{rl\ ref}$	—
$\bar{\Psi}_{r\ ref}, \dot{\bar{i}}_{r\ ref}$	Estator	$\frac{\bar{\Psi}_{r\ ref}}{L_{m\ ref}} \frac{dL_{sl\ ref}}{dt} - \dot{\bar{i}}_{r\ ref} \frac{d}{dt} (L_{sl\ ref} + L_{rl\ ref})$ $- \frac{\dot{\bar{i}}_{r\ ref}}{L_{m\ ref}} \frac{d}{dt} (L_{sl\ ref} L_{rl\ ref})$	$L_{sl\ ref}$	$\left(\frac{-L_{sl} (2L_{sl} L_{rl} + L_m (L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_m^2 L_{rl}} \dot{\bar{i}}_m \right.$ $\left. + \frac{L_{sl} (L_{sl} L_{rl} + L_m (L_{sl} + L_{rl}))}{L_m^3 L_{rl}} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\ ref}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \dot{\bar{i}}_m - \frac{L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
	Rotor	$- \frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_{r\ ref} \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\ ref}$	$\frac{L_{sl}}{(L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\ ref}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
	$L_{sl\ ref}$	—		
	$L_{rl\ ref}$	—		

Tabla 3.3. (Continuación).

ESTADOS	TÉRMINOS A INCLUIR EN LAS ECUACIONES		PARÁM. ANULADO	EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{i}_s, \bar{\Psi}_r$	Estator	$\bar{i}_s \frac{dL_{sl\text{ref}}}{dt} + \left(\frac{L_{m\text{ref}}}{L_{rl\text{ref}} + L_{m\text{ref}}} \right)^2 \left(\bar{i}_s - \frac{\bar{\Psi}_r}{L_{m\text{ref}}} \right) \frac{dL_{rl\text{ref}}}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\frac{-L_m L_{sl} (2L_{sl} L_{rl} + L_m (L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_{rl} (L_{sl} + L_m)^2 (L_{rl} + L_m)} \cdot \left(\bar{i}_m - \frac{\bar{\Psi}_r}{L_m} \right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \bar{i}_m - \frac{L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
	Rotor	$-\frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_r \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\frac{L_{sl}}{(L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$

Mediante trazo grueso, se han delimitado diversas secciones en la tabla 3.3 que agrupan a las formulaciones que precisan de la adición de los mismos términos correctores en las mismas ecuaciones. Nótese que, con los términos correctores debidamente incluidos, todas las formulaciones resultan equivalentes; de ignorarse estos términos, se obtienen un total de ocho sistemas distintos entre sí y también respecto al original mostrado en (3.32), (3.33).

Tras examinar la estructura de los diversos términos correctores se advierte que no pueden reformularse, para su comparación, en función de una única variable de estado. Se observa también, como se señaló en párrafos anteriores, que el término $-\frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_r \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$ (o sus equivalentes empleando otras variables de estado) siempre es de obligada inclusión en la ecuación rotórica. En consecuencia, se opta por reescribir todos los términos en función del flujo rotórico y de alguna otra variable, en este caso, la corriente magnetizante (buscando la analogía con el análisis efectuado en la sección 3.4).

Dado que el objetivo de la utilización de factores de referencia variables es lograr la exacta cancelación de los términos afectados por los parámetros referidos $L_{sl\text{ref}}$ o $L_{rl\text{ref}}$, únicamente tienen valor práctico aquellos valores del factor de referencia α que logran este fin. Por ello,

se evalúan los términos correctores para los valores concretos del factor de referencia que consiguen la anulación de $L_{sl\ ref}$ o $L_{rl\ ref}$, recogiendo también los resultados en la tabla 3.3.

El examen de los términos correctores reformulados en función del flujo rotórico y la corriente magnetizante, permite constatar que el producto $\bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$ aparece siempre modulado por la inversa de la inductancia magnetizante elevada al cuadrado, y que el producto $\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$ lo es por la inversa de la inductancia magnetizante.

En lo que a la cantidad $\bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$ se refiere, el análisis efectuado en la sección 3.4 confirmó que cuando se hallaba afectada por un factor de peso inversamente proporcional a la inductancia magnetizante su efecto sobre el sistema era pequeño. No parece irrazonable afirmar que previsiblemente suceda lo mismo con el término $\bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$ cuando viene modulado por la inversa del cuadrado de la inductancia magnetizante, como es aquí el caso.

Otra cosa es prever el efecto conjunto de estas cantidades cuando ambas forman parte de los términos correctores, en los que en ocasiones aparecen afectadas por un mismo signo y en otras por signos opuestos.

Para comenzar a intentar dilucidar la cuestión, se determinan inicialmente las expresiones de un par de modelos exactamente equivalentes al conjunto de expresiones originales en (3.32), (3.33).

Para ello, se toma el modelo formulado en flujos de estator y rotor mostrado en el apéndice D.1 y se añade el término corrector correspondiente, expresándolo inicialmente en función de un factor de referencia α genérico sin concretar, tal como se recoge en la primera sección de la tabla 3.3. Substituyendo en el modelo así corregido las expresiones para los parámetros referidos mostradas en (3.45), se obtienen los mismos valores para las magnitudes estáticas, la velocidad y el par electromagnético que a partir del sistema primitivo en (3.32), (3.33), mientras que las cantidades rotóricas se calculan referidas, pudiendo recuperarse las originales a partir de las relaciones de (3.34). Lo afirmado se revela cierto para cualquiera que sea el valor asignado al factor de referencia α , ya sea constante o arbitrariamente variable. (Basta

con dar un valor unitario al factor de referencia para recuperar las correspondientes ecuaciones originales, mostradas en el apéndice D.1).

Para verificar que efectivamente se produce la cancelación de los términos afectados por $L_{sl\ ref}$ o $L_{rl\ ref}$ cuando al factor de referencia α se le asignan los valores mostrados en (3.38), se simula el sistema corregido aludido en el párrafo anterior, pero habiendo eliminado previamente los términos que se supone deben cancelarse de forma natural. Los resultados obtenidos a partir de este sistema corregido abreviado coinciden con los del sistema corregido completo, y con los del sistema primitivo, confirmando que con los valores adecuados del factor de referencia α , puede prescindirse de antemano de términos que, de mantenerse en las ecuaciones, de todos modos se anularían automáticamente.

La ventaja teóricamente obtenida con esta técnica se ve rápidamente minimizada al examinar las expresiones para los modelos referidos exactos, esto es, con inclusión de términos correctores que garantizan la equivalencia con el modelo original en (3.32), (3.33).

Las ecuaciones (3.49) y (3.50) muestran las expresiones de los modelos equivalentes exactos al sistema de partida en (3.32), (3.33), habiéndose formulado (3.49) en función de flujos de estator y rotor y (3.50) utilizando corrientes de estator y rotor.

Si la motivación para estudiar la extensión a los modelos con saturación de la técnica de eliminación de parámetros - que se aplica ventajosamente a los modelos válidos para el trabajo en la zona lineal de la característica magnética- es la posibilidad de simplificar las ecuaciones, basta con examinar los dos modelos mostrados en (3.49) y (3.50) para constatar que el efecto logrado es justo el contrario.

La comparación de los modelos primitivos recogidos en los apéndices D.1 y D.2 con sus homólogos exactos en (3.49) y (3.50), pone de manifiesto que la pequeña simplificación que puede lograrse con la cancelación de determinados términos tiene como contrapartida un exagerado incremento en la complejidad del modelo resultante, para que este sea capaz de mantener su identidad con el sistema original aun trabajando con factores de referencia variables.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{sx} \\ \mathbf{u}_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s \frac{L_{rl\ ref} + L_{m\ ref}}{D} & -\omega_g & -R_s \frac{L_{m\ ref}}{D} & 0 \\ \omega_g & R_s \frac{L_{rl\ ref} + L_{m\ ref}}{D} & 0 & -R_s \frac{L_{m\ ref}}{D} \\ -R_{r\ ref} \frac{L_{m\ ref}}{D} & 0 & R_{r\ ref} \frac{L_{sl\ ref} + L_{m\ ref}}{D} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & -R_{r\ ref} \frac{L_{m\ ref}}{D} & (\omega_g - \omega) & R_r \frac{L_{sl\ ref} + L_{m\ ref}}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{rx\ ref} \\ \Psi_{ry\ ref} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ CA_1(A_1\Psi_{sx} + A_2\Psi_{rx\ ref})\Psi_{rx\ ref} & CA_1(A_1\Psi_{sy} + A_2\Psi_{ry\ ref})\Psi_{ry\ ref} & 1 + CA_2(A_1\Psi_{sx} + A_2\Psi_{rx\ ref})\Psi_{rx\ ref} & CA_2(A_1\Psi_{sy} + A_2\Psi_{ry\ ref})\Psi_{ry\ ref} \\ CA_1(A_1\Psi_{sx} + A_2\Psi_{rx\ ref})\Psi_{ry\ ref} & CA_1(A_1\Psi_{sy} + A_2\Psi_{ry\ ref})\Psi_{rx\ ref} & CA_2(A_1\Psi_{sx} + A_2\Psi_{rx\ ref})\Psi_{ry\ ref} & 1 + CA_2(A_1\Psi_{sy} + A_2\Psi_{ry\ ref})\Psi_{rx\ ref} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{rx\ ref} \\ \Psi_{ry\ ref} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_{m\ ref}}{D} (\Psi_{sy}\Psi_{rx\ ref} - \Psi_{sx}\Psi_{ry\ ref})$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

$$D = L_{sl\ ref}L_{rl\ ref} + L_{m\ ref}(L_{sl\ ref} + L_{rl\ ref})$$

$$A_1 = (L_{rl\ ref} + L_{m\ ref}(1 - \alpha))$$

$$A_2 = (\alpha L_{sl\ ref} - L_{m\ ref}(1 - \alpha))$$

$$C = \frac{-\frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{d\dot{i}_m}}{\alpha^2 \left(D \sqrt{(A_1\Psi_{sx} + A_2\Psi_{rx\ ref})^2 + (A_1\Psi_{sy} + A_2\Psi_{ry\ ref})^2} + \alpha \left((A_1\Psi_{sx} + A_2\Psi_{rx\ ref})^2 + (A_1\Psi_{sy} + A_2\Psi_{ry\ ref})^2 \right) \frac{\alpha^2 L_{sl\ ref} + L_{rl\ ref} + (1 - \alpha)^2 L_{m\ ref}}{D} \right)}$$

(3.49)

$$\dot{\mathbf{i}}_m = \dot{\mathbf{i}}_s + \alpha \dot{\mathbf{i}}_{r\ ref}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{sx} \\ \mathbf{u}_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & -\omega_g(\mathbf{L}_{sl\text{ref}} + \mathbf{L}_{m\text{ref}}) & 0 & -\omega_g \mathbf{L}_{m\text{ref}} \\ \omega_g(\mathbf{L}_{sl\text{ref}} + \mathbf{L}_{m\text{ref}}) & \mathbf{R}_s & \omega_g \mathbf{L}_{m\text{ref}} & 0 \\ 0 & -(\omega_g - \omega)\mathbf{L}_{m\text{ref}} & \mathbf{R}_{r\text{ref}} & -(\omega_g - \omega)(\mathbf{L}_{rl\text{ref}} + \mathbf{L}_{m\text{ref}}) \\ (\omega_g - \omega)\mathbf{L}_{m\text{ref}} & 0 & (\omega_g - \omega)(\mathbf{L}_{rl\text{ref}} + \mathbf{L}_{m\text{ref}}) & \mathbf{R}_{r\text{ref}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{sx} \\ \mathbf{i}_{sy} \\ \mathbf{i}_{rx\text{ref}} \\ \mathbf{i}_{ry\text{ref}} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{sl\text{ref}} + \mathbf{L}_{m\text{ref}} + \mathbf{L}_{xx} & \mathbf{L}_{yx} & \mathbf{L}_{m\text{ref}} + \alpha \mathbf{L}_{xx} & \alpha \mathbf{L}_{yx} \\ \mathbf{L}_{xy} & \mathbf{L}_{sl\text{ref}} + \mathbf{L}_{m\text{ref}} + \mathbf{L}_{yy} & \alpha \mathbf{L}_{xy} & \mathbf{L}_{m\text{ref}} + \alpha \mathbf{L}_{yy} \\ \mathbf{L}_{m\text{ref}} + \mathbf{L}'_{xx} & \mathbf{L}'_{yx} & \mathbf{L}_{rl\text{ref}} + \mathbf{L}_{m\text{ref}} + \alpha \mathbf{L}'_{xx} & \alpha \mathbf{L}'_{yx} \\ \mathbf{L}'_{xy} & \mathbf{L}_{m\text{ref}} + \mathbf{L}'_{yy} & \alpha \mathbf{L}'_{xy} & \mathbf{L}_{rl\text{ref}} + \mathbf{L}_{m\text{ref}} + \alpha \mathbf{L}'_{yy} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{sx} \\ \mathbf{i}_{sy} \\ \mathbf{i}_{rx\text{ref}} \\ \mathbf{i}_{ry\text{ref}} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5 \mathbf{P} \mathbf{L}_{m\text{ref}} (\mathbf{i}_{sy} \mathbf{i}_{rx\text{ref}} - \mathbf{i}_{sx} \mathbf{i}_{ry\text{ref}})$$

$$t_e - t_1 = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{P}} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{P}} \omega$$

$$\mathbf{L}_{xx} = \mathbf{C}(\mathbf{i}_{sx} + \alpha \mathbf{i}_{rx\text{ref}}) \left(\mathbf{i}_{sx} + \left(\alpha + \frac{d\alpha}{d\mathbf{L}_m} \frac{\mathbf{L}_{m\text{ref}}}{\alpha} \right) \mathbf{i}_{rx\text{ref}} \right) ; \quad \mathbf{L}'_{xx} = \mathbf{C}(\mathbf{i}_{sx} + \alpha \mathbf{i}_{rx\text{ref}}) \left(\alpha \mathbf{i}_{sx} + \left(\alpha^2 + \frac{d\alpha}{d\mathbf{L}_m} \frac{\mathbf{L}_{rl\text{ref}} + \mathbf{L}_{m\text{ref}}}{\alpha} \right) \mathbf{i}_{rx\text{ref}} \right)$$

$$\mathbf{L}_{xy} = \mathbf{C}(\mathbf{i}_{sx} + \alpha \mathbf{i}_{rx\text{ref}}) \left(\mathbf{i}_{sy} + \left(\alpha + \frac{d\alpha}{d\mathbf{L}_m} \frac{\mathbf{L}_{m\text{ref}}}{\alpha} \right) \mathbf{i}_{ry\text{ref}} \right) ; \quad \mathbf{L}'_{xy} = \mathbf{C}(\mathbf{i}_{sx} + \alpha \mathbf{i}_{rx\text{ref}}) \left(\alpha \mathbf{i}_{sy} + \left(\alpha^2 + \frac{d\alpha}{d\mathbf{L}_m} \frac{\mathbf{L}_{rl\text{ref}} + \mathbf{L}_{m\text{ref}}}{\alpha} \right) \mathbf{i}_{ry\text{ref}} \right)$$

$$\mathbf{L}_{yx} = \mathbf{C}(\mathbf{i}_{sy} + \alpha \mathbf{i}_{ry\text{ref}}) \left(\mathbf{i}_{sx} + \left(\alpha + \frac{d\alpha}{d\mathbf{L}_m} \frac{\mathbf{L}_{m\text{ref}}}{\alpha} \right) \mathbf{i}_{rx\text{ref}} \right) ; \quad \mathbf{L}'_{yx} = \mathbf{C}(\mathbf{i}_{sy} + \alpha \mathbf{i}_{ry\text{ref}}) \left(\alpha \mathbf{i}_{sx} + \left(\alpha^2 + \frac{d\alpha}{d\mathbf{L}_m} \frac{\mathbf{L}_{rl\text{ref}} + \mathbf{L}_{m\text{ref}}}{\alpha} \right) \mathbf{i}_{rx\text{ref}} \right)$$

$$\mathbf{L}_{yy} = \mathbf{C}(\mathbf{i}_{sy} + \alpha \mathbf{i}_{ry\text{ref}}) \left(\mathbf{i}_{sy} + \left(\alpha + \frac{d\alpha}{d\mathbf{L}_m} \frac{\mathbf{L}_{m\text{ref}}}{\alpha} \right) \mathbf{i}_{ry\text{ref}} \right) ; \quad \mathbf{L}'_{yy} = \mathbf{C}(\mathbf{i}_{sy} + \alpha \mathbf{i}_{ry\text{ref}}) \left(\alpha \mathbf{i}_{sy} + \left(\alpha^2 + \frac{d\alpha}{d\mathbf{L}_m} \frac{\mathbf{L}_{rl\text{ref}} + \mathbf{L}_{m\text{ref}}}{\alpha} \right) \mathbf{i}_{ry\text{ref}} \right)$$

(3.50)

$$\mathbf{C} = \frac{\frac{d\mathbf{L}_m}{d\bar{\mathbf{i}}_m}}{\sqrt{(\mathbf{i}_{sx} + \alpha \mathbf{i}_{rx\text{ref}})^2 + (\mathbf{i}_{sy} + \alpha \mathbf{i}_{ry\text{ref}})^2} - \frac{d\alpha}{d\mathbf{L}_m} (\mathbf{i}_{rx\text{ref}} (\mathbf{i}_{sx} + \alpha \mathbf{i}_{rx\text{ref}}) + \mathbf{i}_{ry\text{ref}} (\mathbf{i}_{sy} + \alpha \mathbf{i}_{ry\text{ref}}))} ; \quad \bar{\mathbf{i}}_m = \bar{\mathbf{i}}_s + \alpha \bar{\mathbf{i}}_{r\text{ref}}$$

Como se ha afirmado, basta con añadir los correspondientes términos correctores mostrados en la tabla 3.3 a las diversas formulaciones de los modelos recogidos en el apéndice D, para disponer de sistemas perfectamente equivalentes con un parámetro menos. Puede entonces plantearse la cuestión de si acaso la inclusión de estos términos es la responsable del incremento de la complejidad de los modelos resultantes, y de ser así, -aunque a expensas de cometer un cierto error todavía por evaluar-, determinar si no sería preferible ignorarlos para ganar en simplicidad mientras aún conseguimos trabajar con un modelo aproximadamente equivalente al original, pero que cuenta con un parámetro menos.

Es decir, se plantea la posibilidad de utilizar tal cual las ecuaciones de partida en (3.32), (3.33), anulando los términos afectados por el parámetro $L_{sl\ ref}$ o $L_{rl\ ref}$ que se prefiera eliminar, y afectando al resto de parámetros por una relación de referencia α variable que se actualice de continuo según los valores que tome la inductancia magnetizante, sin añadir ningún término corrector.

(Debe notarse que la no inclusión de los términos correctores no impide la perfecta cancelación de los términos afectados por los parámetros $L_{sl\ ref}$ o $L_{rl\ ref}$; mientras al factor de referencia se le asignen los valores adecuados mostrados en (3.38) la cancelación se produce de forma automática. El efecto de desprestigiar los términos correctores es que no se mantiene la identidad con el sistema original; se obtienen respuestas distintas a las del sistema primitivo).

Cómo muestra la tabla 3.3, todos los diferentes tipos de términos correctores dependen del factor $\frac{dL_m}{dt}$. Analícese su proceso de cálculo:

$$\frac{dL_m}{dt} = \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{d|\bar{i}_m|}{dt} \quad (3.51)$$

con:

$$|\bar{i}_m| = |\bar{i}_s + \bar{i}_r| = |\bar{i}_s + \alpha \bar{i}_{r\ ref}| \quad (3.52)$$

La verdadera dificultad del asunto radica en la determinación de la derivada temporal del módulo de una corriente magnetizante para cuyo cálculo no se dispone de la corriente rotórica original, sino de la corriente rotórica referida, esto es $\bar{i}_{r\ ref}$. En consecuencia, para recuperar la

corriente original debe recurrirse al factor de referencia α , utilizando la relación $\bar{i}_r = \alpha \bar{i}_{r \text{ ref}}$.

A la hora de calcular la derivada temporal del módulo de esta corriente magnetizante ahora dependiente del factor de referencia α variable, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{d|\bar{i}_m|}{dt} &= \frac{d|\bar{i}_s + \alpha \bar{i}_{r \text{ ref}}|}{dt} = \frac{d\left((i_{sx} + \alpha i_{rx})^2 + (i_{sy} + \alpha i_{ry})^2\right)^{\frac{1}{2}}}{dt} \\
 &= \frac{(i_{sx} + \alpha i_{rx}) \left(\frac{di_{sx}}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} i_{rx} + \alpha \frac{di_{rx}}{dt} \right) + (i_{sy} + \alpha i_{ry}) \left(\frac{di_{sy}}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} i_{ry} + \alpha \frac{di_{ry}}{dt} \right)}{\left((i_{sx} + \alpha i_{rx})^2 + (i_{sy} + \alpha i_{ry})^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{(i_{sx} + \alpha i_{rx}) \left(\frac{di_{sx}}{dt} + \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{d|\bar{i}_m|}{dt} i_{rx} + \alpha \frac{di_{rx}}{dt} \right) + (i_{sy} + \alpha i_{ry}) \left(\frac{di_{sy}}{dt} + \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{d|\bar{i}_m|}{dt} i_{ry} + \alpha \frac{di_{ry}}{dt} \right)}{\left((i_{sx} + \alpha i_{rx})^2 + (i_{sy} + \alpha i_{ry})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Aislado finalmente la derivada temporal del módulo de la corriente magnetizante, esta queda de la forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{d|\bar{i}_m|}{dt} &= \frac{(i_{sx} + \alpha i_{rx}) \left(\frac{di_{sx}}{dt} + \alpha \frac{di_{rx}}{dt} \right) + (i_{sy} + \alpha i_{ry}) \left(\frac{di_{sy}}{dt} + \alpha \frac{di_{ry}}{dt} \right)}{\left((i_{sx} + \alpha i_{rx})^2 + (i_{sy} + \alpha i_{ry})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} (i_{rx} (i_{sx} + \alpha i_{rx}) + i_{ry} (i_{sy} + \alpha i_{ry}))} \\
 &= \frac{(i_{sx} + \alpha i_{rx}) \left(\frac{di_{sx}}{dt} + \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{d|\bar{i}_m|}{dt} i_{rx} + \alpha \frac{di_{rx}}{dt} \right) + (i_{sy} + \alpha i_{ry}) \left(\frac{di_{sy}}{dt} + \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{d|\bar{i}_m|}{dt} i_{ry} + \alpha \frac{di_{ry}}{dt} \right)}{\left((i_{sx} + \alpha i_{rx})^2 + (i_{sy} + \alpha i_{ry})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Así, en virtud de (3.51), el factor $\frac{dL_m}{dt}$ que forma parte de todos los términos correctores, quedará expresado como:

$$\begin{aligned}
\frac{dL_m}{dt} &= \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{\left(\bar{i}_{sx} + \alpha \bar{i}_{rx} \right) \left(\frac{d\bar{i}_{sx}}{dt} + \alpha \frac{d\bar{i}_{rx}}{dt} \right) + \left(\bar{i}_{sy} + \alpha \bar{i}_{ry} \right) \left(\frac{d\bar{i}_{sy}}{dt} + \alpha \frac{d\bar{i}_{ry}}{dt} \right)}{\left(\left(\bar{i}_{sx} + \alpha \bar{i}_{rx} \right)^2 + \left(\bar{i}_{sy} + \alpha \bar{i}_{ry} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \left(\bar{i}_{rx} \left(\bar{i}_{sx} + \alpha \bar{i}_{rx} \right) + \bar{i}_{ry} \left(\bar{i}_{sy} + \alpha \bar{i}_{ry} \right) \right)} \\
&= \frac{\left(\bar{i}_{sx} + \alpha \bar{i}_{rx} \right) \left(\frac{d\bar{i}_{sx}}{dt} + \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{d|\bar{i}_m|}{dt} \bar{i}_{rx} + \alpha \frac{d\bar{i}_{rx}}{dt} \right) + \left(\bar{i}_{sy} + \alpha \bar{i}_{ry} \right) \left(\frac{d\bar{i}_{sy}}{dt} + \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{d|\bar{i}_m|}{dt} \bar{i}_{ry} + \alpha \frac{d\bar{i}_{ry}}{dt} \right)}{\left(\left(\bar{i}_{sx} + \alpha \bar{i}_{rx} \right)^2 + \left(\bar{i}_{sy} + \alpha \bar{i}_{ry} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

(Si en lugar de corriente magnetizante se trabaja con flujo magnetizante, se obtiene una expresión con una estructura semejante).

Queda manifiesto pues, que la inclusión de los términos correctores garantes de la equivalencia exacta entre el modelo primitivo y los modelos con parámetros referidos *contribuyen* a aumentar la complejidad del sistema.

Sin embargo, no son los únicos responsables de este fenómeno; nótese que dentro del propio sistema de partida, los términos que surgen cuando se efectúa un desarrollo riguroso de las derivadas de flujo también dependen, como se recoge en la tabla 3.1, del factor $\frac{dL_m}{dt}$.

Lógicamente, estos términos encuentran su reflejo en el sistema referido, como se evidencia a partir de (3.47), mostrándose bajo la forma:

$$\left(\dot{\bar{i}}_s + \bar{i}_{r.ref} \right) \frac{dL_{m.ref}}{dt} = \left(\dot{\bar{i}}_s + \bar{i}_{r.ref} \right) \frac{d(\alpha L_m)}{dt} = \left(\dot{\bar{i}}_s + \bar{i}_{r.ref} \right) \left(\frac{d\alpha}{dt} L_m + \alpha \frac{dL_m}{dt} \right) = \left(\dot{\bar{i}}_s + \bar{i}_{r.ref} \right) \left(\frac{d\alpha}{dL_m} L_m + \alpha \right) \frac{dL_m}{dt} \tag{3.56}$$

En consecuencia, aún despreciando los términos correctores, el sistema resultante -que ya no mantiene su perfecta identidad con el original-, paga un precio elevado por el uso de factores de referencia variables, cuya finalidad era lograr mediante la cancelación de un parámetro alguna simplificación en el modelo.

Por tanto, a menos que además de los términos correctores también se desprecien el resto de términos que dentro del modelo con parámetros referidos dependen del factor $\frac{dL_m}{dt}$, el nivel de complejidad de las expresiones se mantiene prácticamente inalterado.

No obstante, esta decisión deberá venir avalada por la constatación de que el error cometido, que en este caso será mayor, se halla dentro de límites tolerables para la aplicación que se considere.

En la tabla 3.4 se recogen todos los términos que dentro de los modelos con parámetros referidos resultan afectados por el factor $\frac{dL_m}{dt}$; resultantes de la suma de los términos correctores mostrados en la tabla 3.3 y de todos aquellos que dependen de $\frac{dL_{m.ref}}{dt}$ (que a su vez es función de $\frac{dL_m}{dt}$).

Como se hizo en la tabla 3.3, se agrupan por secciones delimitadas por trazo grueso aquellos modelos que, tras despreciar todos los términos afectados por la cantidad $\frac{dL_m}{dt}$ resultan equivalentes entre sí, es decir, carecen exactamente de los mismos términos en las mismas ecuaciones. De nuevo, únicamente los modelos expresados exclusivamente en términos de corrientes son idénticos, por lo que se obtiene un total de 12 modelos distintos. Para facilitar la intercomparación del peso relativo de los respectivos términos ausentes, estos han sido reformulados en función de dos variables comunes, la corriente magnetizante y el flujo rotórico.

Como ya se apreció al efectuar el análisis de los términos correctores recogidos en la tabla 3.3, es de esperar que cuando en los términos ahora considerados la corriente magnetizante se presente afectada por un factor inversamente proporcional a la inductancia magnetizante, su peso relativo sea bajo, al igual que cuando el flujo rotórico venga modulado por la inversa del cuadrado de la inductancia magnetizante.

Tabla 3.4. Términos dependientes del factor $\frac{dL_m}{dt}$ en los modelos con parámetros referidos.

ESTADOS	TÉRMINOS DEPENDIENTES DEL FACTOR $\frac{dL_m}{dt}$		PARÁM. ANULADO	EXPRESIÓN EQUIVALENTE	
$\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_{r \text{ ref}}$	Estator	—	$L_{sl \text{ ref}}$	—	
			$L_{rl \text{ ref}}$	—	
	Rotor	$-\frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_{r \text{ ref}} \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	$\frac{L_{sl}}{(L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$	
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$	
$\bar{i}_s, \bar{i}_{r \text{ ref}}$	Estator	$\bar{i}_s \frac{dL_{sl \text{ ref}}}{dt} + (\bar{i}_s + \bar{i}_{r \text{ ref}}) \frac{dL_{m \text{ ref}}}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	$\left(\frac{(L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl}))}{L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \bar{i}_m - \frac{L_{sl}}{L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$	
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \bar{i}_m + \frac{1}{L_{rl} + L_m} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$	
	Rotor	$\bar{i}_{r \text{ ref}} \frac{dL_{rl \text{ ref}}}{dt} - \frac{1}{\alpha} (L_{m \text{ ref}} \bar{i}_s + (L_{rl \text{ ref}} + L_{m \text{ ref}}) \bar{i}_{r \text{ ref}}) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt} + (\bar{i}_s + \bar{i}_{r \text{ ref}}) \frac{dL_{m \text{ ref}}}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	$\left(\frac{(L_{sl}L_{rl} + (L_{sl} + L_m)(L_{rl} + L_m))}{L_{rl}L_m} \bar{i}_m - \frac{L_{sl}(L_{rl} + L_m)}{L_{rl}L_m^2} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$	
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\frac{1}{L_{rl} + L_m} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$	
	$\bar{i}_s, \bar{i}_{m \text{ ref}}$	Estator	$\bar{i}_s \frac{dL_{sl \text{ ref}}}{dt} + \bar{i}_{m \text{ ref}} \frac{dL_{m \text{ ref}}}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	$\left(\frac{(L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl}))}{L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \bar{i}_m - \frac{L_{sl}}{L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
				$L_{rl \text{ ref}}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \bar{i}_m + \frac{1}{L_{rl} + L_m} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
Rotor		$(\bar{i}_s - \bar{i}_{m \text{ ref}}) \frac{dL_{rl \text{ ref}}}{dt} - \frac{1}{\alpha} (-L_{rl \text{ ref}} \bar{i}_s + (L_{rl \text{ ref}} + L_{m \text{ ref}}) \bar{i}_{m \text{ ref}}) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt} + \bar{i}_{m \text{ ref}} \frac{dL_{m \text{ ref}}}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	$\left(\frac{(L_{sl}L_{rl} + (L_{sl} + L_m)(L_{rl} + L_m))}{L_{rl}L_m} \bar{i}_m - \frac{L_{sl}(L_{rl} + L_m)}{L_{rl}L_m^2} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$	
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\frac{1}{L_{rl} + L_m} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$	

Tabla 3.4. (Continuación).

ESTADOS	TÉRMINOS DEPENDIENTES DEL FACTOR $\frac{dL_m}{dt}$		PARÁM. ANULADO	EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{i}_m \text{ ref}, \bar{i}_r \text{ ref}$	Estator	$(\bar{i}_m \text{ ref} - \bar{i}_r \text{ ref}) \frac{dL_{sl \text{ ref}}}{dt} + \bar{i}_m \text{ ref} \frac{dL_{m \text{ ref}}}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	$\left(\frac{(L_{sl} L_{rl} + L_m (L_{sl} + L_{rl}))}{L_{rl} (L_{sl} + L_m)} \bar{i}_m - \frac{L_{sl}}{L_{rl} (L_{sl} + L_m)} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \bar{i}_m + \frac{1}{L_{rl} + L_m} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
	Rotor	$\bar{i}_r \text{ ref} \frac{dL_{rl \text{ ref}}}{dt} - \frac{1}{\alpha} (L_{rl \text{ ref}} \bar{i}_r \text{ ref} + L_{m \text{ ref}} \bar{i}_m \text{ ref}) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt} + \bar{i}_m \text{ ref} \frac{dL_{m \text{ ref}}}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	$\left(\frac{(L_{sl} L_{rl} + (L_{sl} + L_m)(L_{rl} + L_m))}{L_{rl} L_m} \bar{i}_m - \frac{L_{sl} (L_{rl} + L_m)}{L_{rl} L_m^2} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\frac{1}{L_{rl} + L_m} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{i}_s, \bar{\Psi}_m \text{ ref}$	Estator	$\bar{i}_s \frac{dL_{sl \text{ ref}}}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	—
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \bar{i}_m - \frac{L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
	Rotor	$\left(-\bar{i}_s + \frac{\bar{\Psi}_m \text{ ref}}{L_{m \text{ ref}}} \right) \frac{dL_{rl \text{ ref}}}{dt} - \frac{1}{\alpha} \left(-L_{rl \text{ ref}} \bar{i}_s + \left(1 + \frac{L_{rl \text{ ref}}}{L_{m \text{ ref}}} \right) \bar{\Psi}_m \text{ ref} \right) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt} + \bar{\Psi}_m \text{ ref} L_{rl \text{ ref}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_{m \text{ ref}}} \right)$	$L_{sl \text{ ref}}$	$\frac{-L_{rl} (L_{sl} + L_m)}{L_m^2} \bar{i}_m \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_m \text{ ref}, \bar{i}_r \text{ ref}$	Estator	$\left(\frac{\bar{\Psi}_m \text{ ref}}{L_{m \text{ ref}}} - \bar{i}_r \text{ ref} \right) \frac{dL_{sl \text{ ref}}}{dt} + \bar{\Psi}_m \text{ ref} L_{sl \text{ ref}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_{m \text{ ref}}} \right)$	$L_{sl \text{ ref}}$	—
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \bar{i}_m - \frac{(2L_{sl} L_{rl} + L_m (L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_m^2 (L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
	Rotor	$\bar{i}_r \text{ ref} \frac{dL_{rl \text{ ref}}}{dt} - \frac{1}{\alpha} (L_{rl \text{ ref}} \bar{i}_r \text{ ref} + \bar{\Psi}_m \text{ ref}) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl \text{ ref}}$	$\left(\frac{L_{sl} (2L_{sl} L_{rl} + L_m (L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_m L_{rl} (L_{sl} + L_m)} \bar{i}_m - \frac{L_{sl} (L_{sl} L_{rl} + L_m (L_{sl} + L_{rl}))}{L_m^2 L_{rl} (L_{sl} + L_m)} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl \text{ ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$

Tabla 3.4. (Continuación).

ESTADOS	TÉRMINOS DEPENDIENTES DEL FACTOR $\frac{dL_m}{dt}$		PARÁM. ANULADO	EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_{m\text{ref}}$	Estator	—	$L_{sl\text{ref}}$	—
			$L_{rl\text{ref}}$	—
	Rotor	$\frac{d}{dt} \left(\frac{L_{rl\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}}} \right) (-\bar{\Psi}_s + \bar{\Psi}_{m\text{ref}}) + \frac{\bar{\Psi}_{m\text{ref}}}{L_{m\text{ref}}} \frac{dL_{rl\text{ref}}}{dt}$ $- \frac{1}{\alpha} \left(\frac{-L_{rl\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}}} \bar{\Psi}_s \right)$ $+ \bar{\Psi}_{m\text{ref}} \left(1 + L_{rl\text{ref}} \left(\frac{1}{L_{m\text{ref}}} + \frac{1}{L_{sl\text{ref}}} \right) \right) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$ $+ \bar{\Psi}_{m\text{ref}} L_{rl\text{ref}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_{m\text{ref}}} \right)$	$L_{sl\text{ref}}$	(División por cero)
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_s, \bar{i}_{m\text{ref}}$	Estator	—	$L_{sl\text{ref}}$	—
			$L_{rl\text{ref}}$	—
	Rotor	$\frac{d}{dt} \left(\frac{L_{rl\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}}} \right) (-\bar{\Psi}_s + L_{m\text{ref}} \bar{i}_{m\text{ref}}) + \bar{i}_{m\text{ref}} \frac{dL_{rl\text{ref}}}{dt}$ $- \frac{1}{\alpha} \left(\frac{-L_{rl\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}}} \bar{\Psi}_s \right)$ $+ \bar{i}_{m\text{ref}} \left(L_{rl\text{ref}} + L_{m\text{ref}} \left(1 + \frac{L_{rl\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}}} \right) \right) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$ $+ \bar{i}_{m\text{ref}} \left(1 + \frac{L_{rl\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}}} \right) \frac{dL_{m\text{ref}}}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	(División por cero)
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{1}{L_{rl} + L_m} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_{m\text{ref}}, \bar{\Psi}_{r\text{ref}}$	Estator	$\frac{d}{dt} \left(\frac{L_{sl\text{ref}}}{L_{rl\text{ref}}} \right) (\bar{\Psi}_{m\text{ref}} - \bar{\Psi}_{r\text{ref}}) + \frac{\bar{\Psi}_{m\text{ref}}}{L_{m\text{ref}}} \frac{dL_{sl\text{ref}}}{dt}$ $+ \bar{\Psi}_{m\text{ref}} L_{sl\text{ref}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_{m\text{ref}}} \right)$	$L_{sl\text{ref}}$	—
			$L_{rl\text{ref}}$	(División por cero)
	Rotor	$- \frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_{r\text{ref}} \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\frac{L_{sl}}{(L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$

Tabla 3.4. (Continuación).

ESTADOS	TÉRMINOS DEPENDIENTES DEL FACTOR $\frac{dL_m}{dt}$	PARÁM. ANULADO	EXPRESIÓN EQUIVALENTE	
$\dot{\bar{i}}_{m\text{ref}}, \bar{\Psi}_{r\text{ref}}$	Estator	$\frac{d}{dt} \left(\frac{L_{sl\text{ref}}}{L_{rl\text{ref}}} \right) \left(L_{m\text{ref}} \dot{\bar{i}}_{m\text{ref}} - \bar{\Psi}_{r\text{ref}} \right) + \dot{\bar{i}}_{m\text{ref}} \frac{dL_{sl\text{ref}}}{dt}$ $+ \dot{\bar{i}}_{m\text{ref}} \left(1 + \frac{L_{sl\text{ref}}}{L_{rl\text{ref}}} \right) \frac{dL_{m\text{ref}}}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\left(\frac{(L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl}))}{L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \dot{\bar{i}}_{m\text{ref}} - \frac{L_{sl}}{L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	(División por cero)
	Rotor	$-\frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_{r\text{ref}} \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\frac{L_{sl}}{(L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_s, \dot{\bar{i}}_s$	Estator	—	$L_{sl\text{ref}}$	—
			$L_{rl\text{ref}}$	—
	Rotor	$\frac{\bar{\Psi}_s}{L_{m\text{ref}}} \frac{dL_{rl\text{ref}}}{dt} - \dot{\bar{i}}_s \frac{d}{dt} (L_{sl\text{ref}} + L_{rl\text{ref}})$ $-\frac{\dot{\bar{i}}_s}{L_{m\text{ref}}} \frac{d}{dt} (L_{sl\text{ref}} L_{rl\text{ref}})$ $-\frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{L_{rl\text{ref}}}{L_{m\text{ref}}} \right) \bar{\Psi}_s$ $-\dot{\bar{i}}_s \left(L_{rl\text{ref}} + L_{sl\text{ref}} \left(1 + \frac{L_{rl\text{ref}}}{L_{m\text{ref}}} \right) \right) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$ $+ \bar{\Psi}_{m\text{ref}} L_{rl\text{ref}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_{m\text{ref}}} \right)$	$L_{sl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}(L_{sl} + L_m)}{L_m^2} \dot{\bar{i}}_{m\text{ref}} \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \dot{\bar{i}}_{m\text{ref}} \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{\Psi}_s, \dot{\bar{i}}_{r\text{ref}}$	Estator	—	$L_{sl\text{ref}}$	—
			$L_{rl\text{ref}}$	—
	Rotor	$\dot{\bar{i}}_{r\text{ref}} \frac{dL_{rl\text{ref}}}{dt}$ $+ \left(\frac{L_{m\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}} + L_{m\text{ref}}} \right)^2 \left(\dot{\bar{i}}_{r\text{ref}} - \frac{\bar{\Psi}_s}{L_{m\text{ref}}} \right) \frac{dL_{sl\text{ref}}}{dt}$ $-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{L_{m\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}} + L_{m\text{ref}}} \bar{\Psi}_s + \left(L_{rl\text{ref}} + \frac{L_{sl\text{ref}} L_{m\text{ref}}}{L_{sl\text{ref}} + L_{m\text{ref}}} \right) \dot{\bar{i}}_{r\text{ref}} \right) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$ $+ \frac{L_{sl\text{ref}}}{(L_{sl\text{ref}} + L_{m\text{ref}})^2} (\bar{\Psi}_s + L_{sl\text{ref}} \dot{\bar{i}}_{r\text{ref}}) \frac{dL_{m\text{ref}}}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\left(\frac{L_{sl}(2L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_m L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \dot{\bar{i}}_{m\text{ref}} - \frac{L_{sl}(L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl}))}{L_m^2 L_{rl}(L_{sl} + L_m)} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{1}{(L_{rl} + L_m)^3 (L_{sl} + L_m)^2} (-L_m^2 (L_{rl} L_m^2 + (L_{sl} L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl}))(3L_{rl} + L_m)) \dot{\bar{i}}_{m\text{ref}} + (L_{sl} + L_m)(L_{rl} + L_m) \cdot (L_{sl} L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})) \bar{\Psi}_r) \frac{dL_m}{dt}$

Tabla 3.4. (Continuación).

ESTADOS	TÉRMINOS DEPENDIENTES DEL FACTOR $\frac{dL_m}{dt}$		PARÁM. ANULADO	EXPRESIÓN EQUIVALENTE
$\bar{\Psi}_{r\text{ref}}, \bar{i}_{r\text{ref}}$	Estator	$\frac{\bar{\Psi}_{r\text{ref}}}{L_{m\text{ref}}} \frac{dL_{sl\text{ref}}}{dt} - \bar{i}_{r\text{ref}} \frac{d}{dt} (L_{sl\text{ref}} + L_{rl\text{ref}})$ $- \frac{\bar{i}_{r\text{ref}}}{L_{m\text{ref}}} \frac{d}{dt} (L_{sl\text{ref}} L_{rl\text{ref}})$ $+ \bar{\Psi}_{m\text{ref}} L_{sl\text{ref}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_{m\text{ref}}} \right)$	$L_{sl\text{ref}}$	$\left(\frac{-L_{sl}(2L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_m^2 L_{rl}} \bar{i}_m \right.$ $\left. + \frac{L_{sl}(L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl}))}{L_m^3 L_{rl}} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \bar{i}_m \right.$ $\left. - \frac{(2L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + 2L_{rl}))}{(L_{rl} + L_m)L_m^2} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
	Rotor	$- \frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_{r\text{ref}} \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\frac{L_{sl}}{(L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
$\bar{i}_s, \bar{\Psi}_{r\text{ref}}$	Estator	$\bar{i}_s \frac{dL_{sl\text{ref}}}{dt}$ $+ \left(\frac{L_{m\text{ref}}}{L_{rl\text{ref}} + L_{m\text{ref}}} \right)^2 \left(\bar{i}_s - \frac{\bar{\Psi}_{r\text{ref}}}{L_{m\text{ref}}} \right) \frac{dL_{rl\text{ref}}}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\frac{-L_m L_{sl} (2L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + 2L_{rl}))}{L_{rl}(L_{sl} + L_m)^2 (L_{rl} + L_m)}$ $\cdot \left(\bar{i}_m - \frac{\bar{\Psi}_r}{L_m} \right) \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\left(\frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \bar{i}_m - \frac{L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \right) \frac{dL_m}{dt}$
	Rotor	$- \frac{1}{\alpha} \bar{\Psi}_{r\text{ref}} \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}$	$L_{sl\text{ref}}$	$\frac{L_{sl}}{(L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$
			$L_{rl\text{ref}}$	$\frac{-L_{rl}}{(L_{rl} + L_m)^2} \bar{\Psi}_r \frac{dL_m}{dt}$

El examen de la tabla 3.4 manifiesta que estas condiciones no se cumplen para los modelos formulados exclusivamente en función de corrientes, ni para aquellos en los que la corriente magnetizante es una de las variables de estado, análogamente a lo que ya se observó al estudiar el efecto de no considerar los términos dependientes del factor $\frac{dL_m}{dt}$ en los modelos expresados en magnitudes primitivas, o no referidas. Se espera, en consecuencia, que estos modelos ofrezcan los resultados más discrepantes respecto de los modelos primitivos recogidos en el apéndice D.

Las figuras 3.21 a 3.32 recogen las respuestas de par, velocidad y corriente, para cada uno de los 12 modelos distintos con parámetros y magnitudes referidas que se obtienen cuando, por simplicidad, se eliminan todos los términos dependientes de la cantidad $\frac{dL_m}{dt}$, tal como son recogidos en la tabla 3.4. Ello equivale a tomar los modelos primitivos listados en el apéndice F carentes de términos afectados por $\frac{dL_m}{dt}$, y sustituir directamente en ellos parámetros referidos afectados por un factor de referencia α variable.

(Nótese que se obtienen 12 modelos formalmente distintos, pero que quedan en función del factor de referencia α variable. Limitando los valores de α a aquellos que consiguen anular un parámetro (y excluyendo los 4 casos en que esto provocaría una división por cero –véase la tabla 3.4-), el número total de modelos resultantes es de $12 \cdot 2 - 4 = 20$).

Las respuestas obtenidas se comparan con las procedentes de los correspondientes modelos primitivos con inclusión del fenómeno de la intersaturación (apéndice D), para así evaluar el error cometido con la simplificación adoptada. Se considera el caso del arranque en vacío con una tensión un 40% superior a la nominal del motor con una jaula de características listadas en el apéndice B.

Observando las figuras 3.21 a 3.32, se confirma la apreciación hecha en párrafos anteriores de que los modelos formulados exclusivamente en términos de corrientes, o aquellos en los que la corriente magnetizante es una de las variables de estado, son aquellos que más discrepan del modelo primitivo que considera la intersaturación. Dentro de esta familia de modelos, los peores resultados se obtienen al anular el parámetro $L_{rl\ ref}$, llegando a ser en este caso verdaderamente notables las diferencias respecto al modelo primitivo (véanse las figuras 3.22 y 3.26).

En lo que toca al resto de casos, exhiben diferentes niveles de error respecto del modelo primitivo tomado como patrón, siendo quizás algo más pronunciado en las formulaciones en base a un flujo y una corriente en la que una de las magnitudes es rotórica, pero perfectamente aceptable para un buen número de aplicaciones.

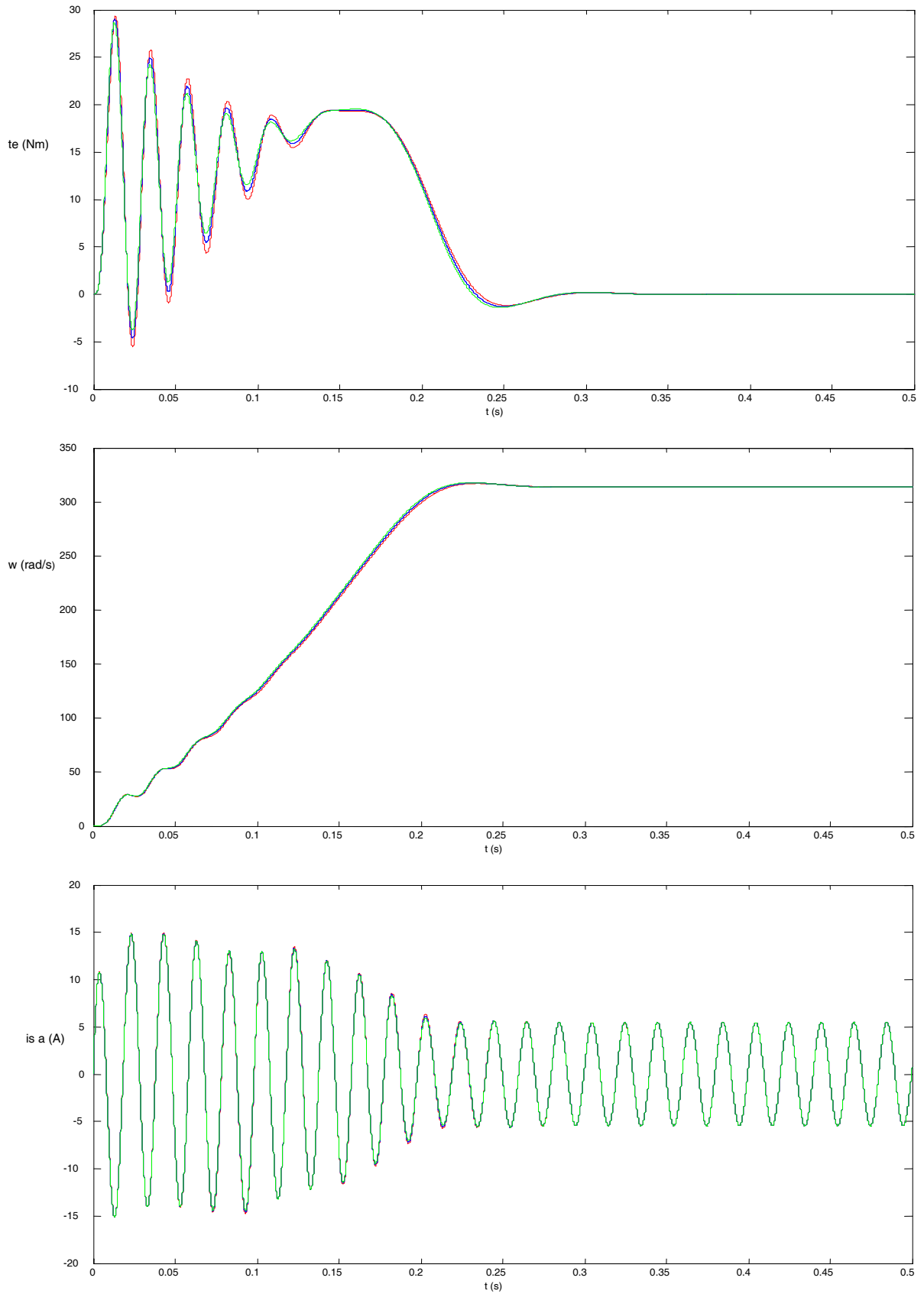


Figura 3.21. Respuestas de par, velocidad y corriente en la fase a de los modelos formulados en $\bar{\psi}_s, \bar{\psi}_r$ a) primitivo (azul), b) referido con $L_{sl \text{ ref}}=0$ (rojo), c) referido con $L_{rl \text{ ref}}=0$ (verde).

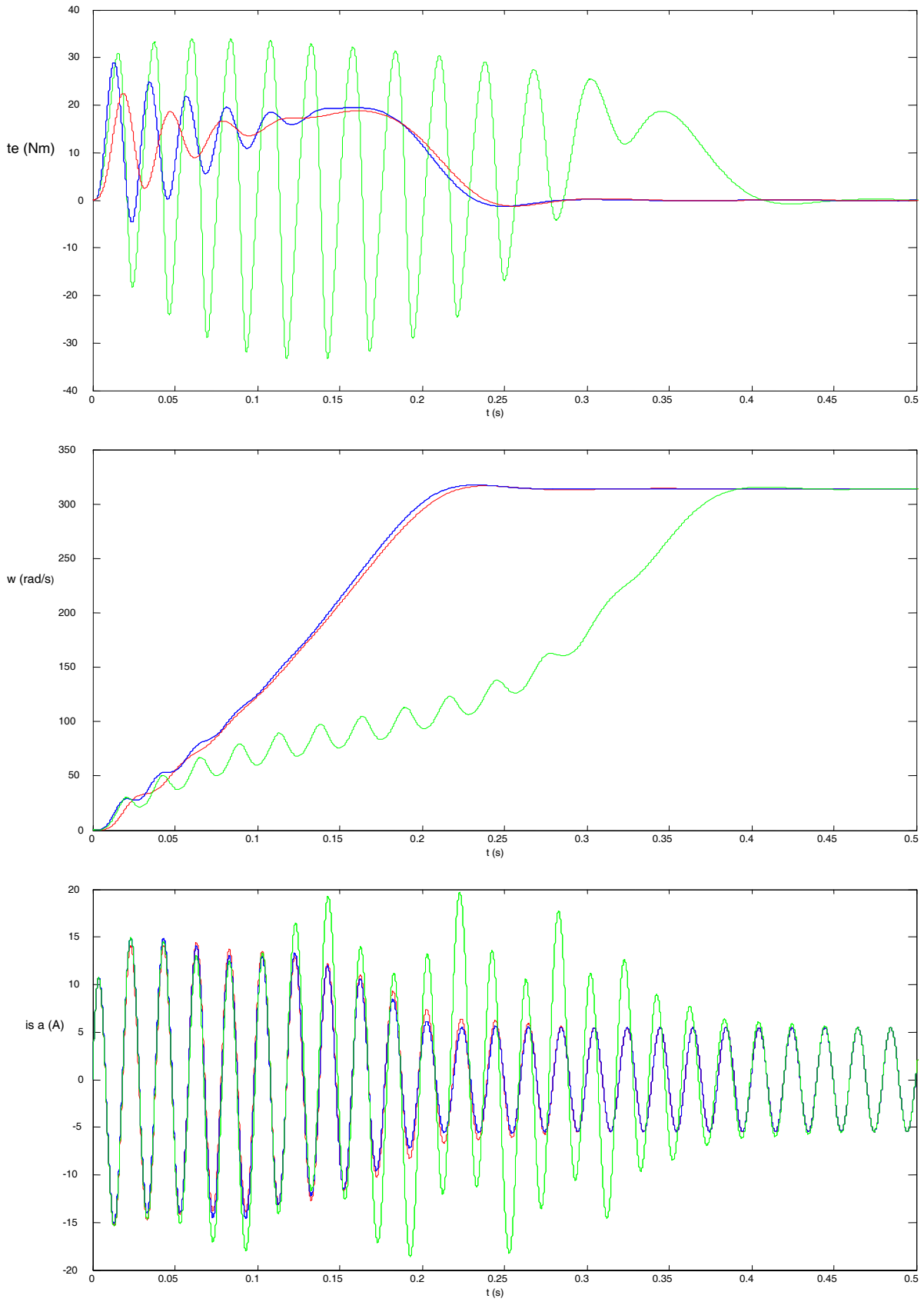


Figura 3.22. Respuestas de par, velocidad y corriente de los modelos formulados en \bar{i}_s, \bar{i}_r , $\bar{i}_s, \bar{i}_m, \bar{i}_m, \bar{i}_r$ a) primitivo (azul), b) referido con $L_{sl\ ref}=0$ (rojo), c) referido con $L_{rl\ ref}=0$ (verde).

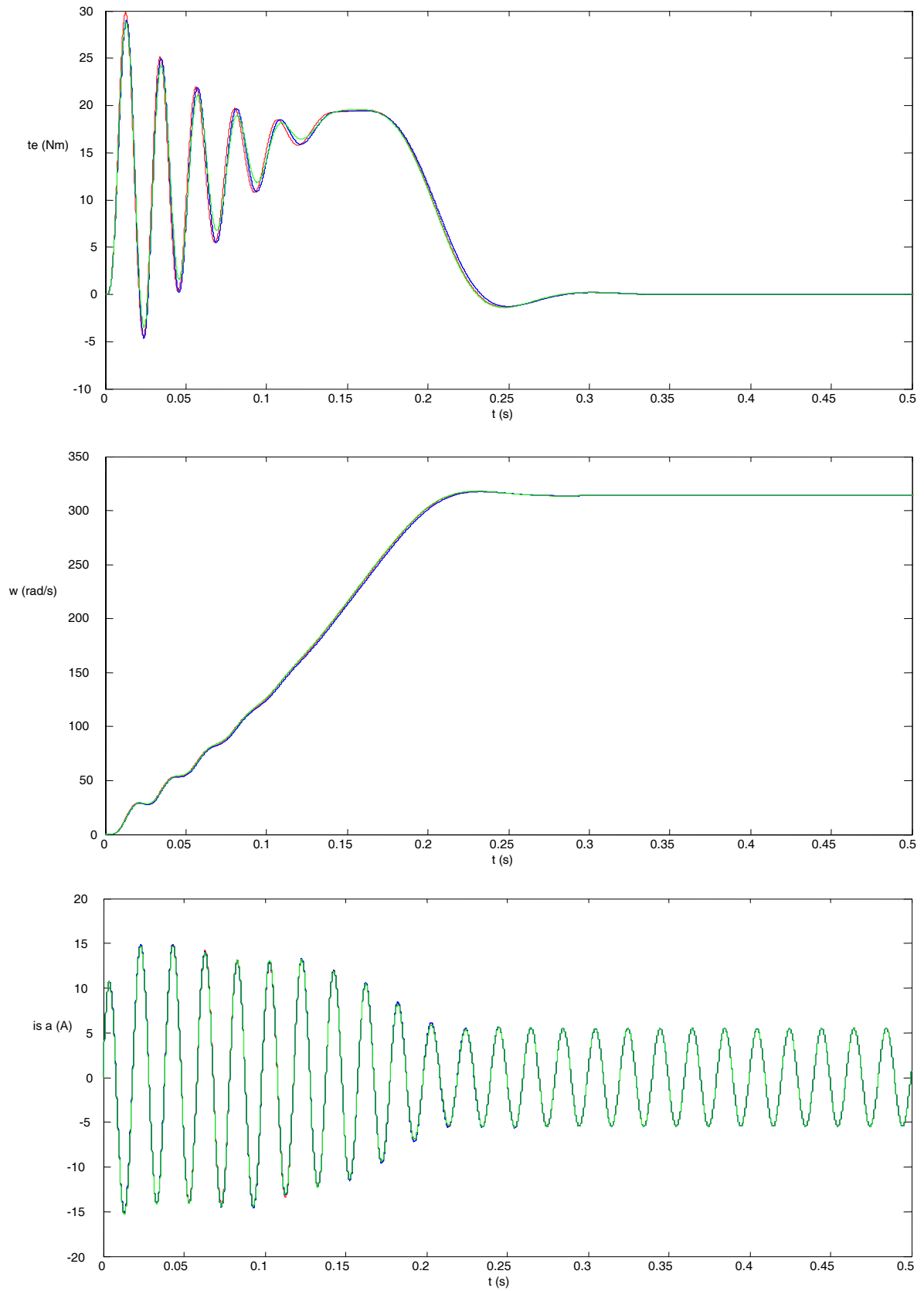


Figura 3.23. Respuestas de par, velocidad y corriente en la fase a de los modelos formulados en $\bar{i}_s, \bar{\psi}_m$ a) primitivo (azul), b) referido con $L_{sl\ ref}=0$ (rojo), c) referido con $L_{rl\ ref}=0$ (verde).

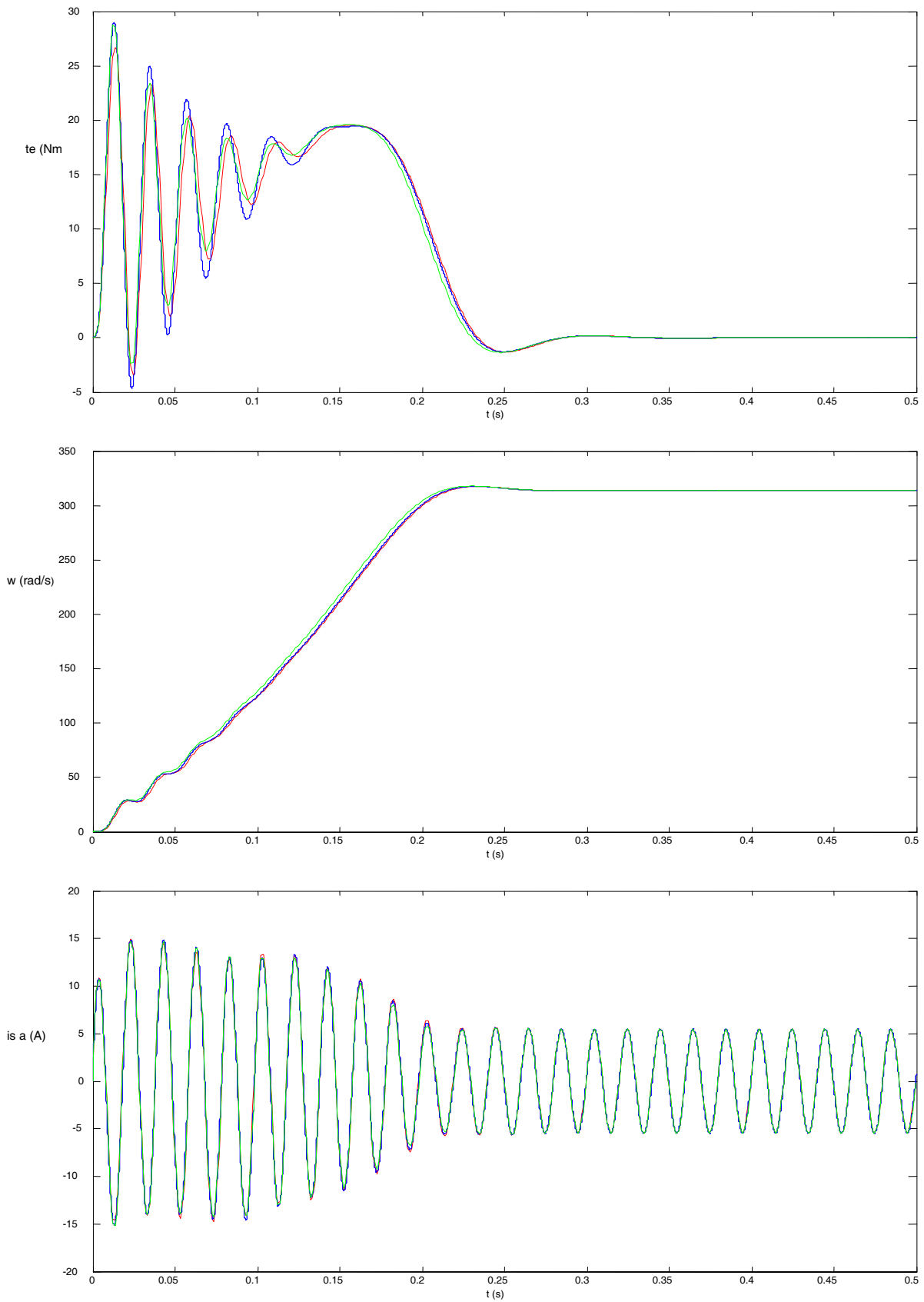


Figura 3.24. Respuestas de par, velocidad y corriente en la fase a de los modelos formulados en $\bar{\psi}_m, \bar{i}_r$ a) primitivo (azul), b) referido con $L_{sl_ref}=0$ (rojo), c) referido con $L_{rl_ref}=0$ (verde).

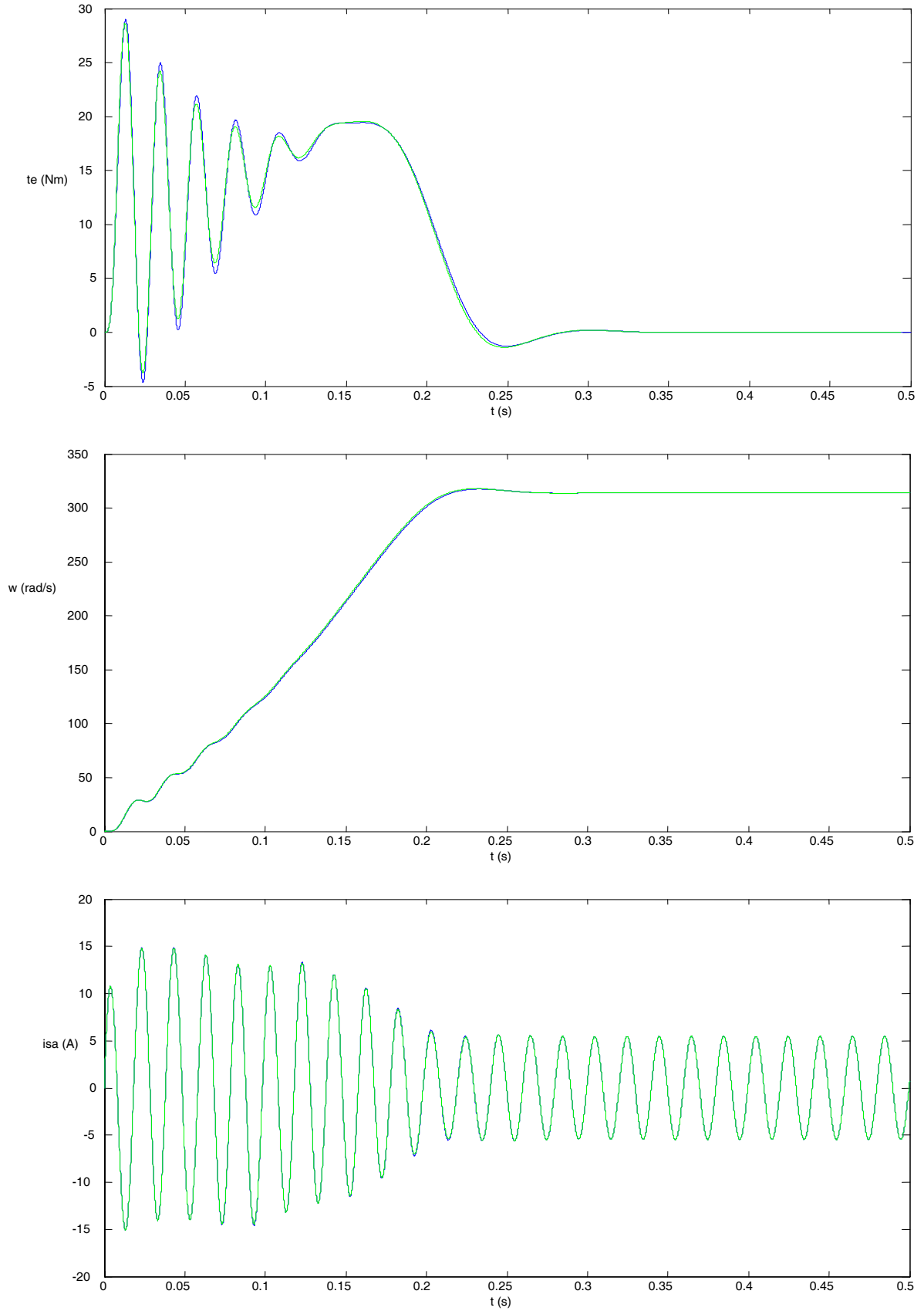


Figura 3.25. Respuestas de par, velocidad y corriente en la fase a de los modelos formulados en $\bar{\psi}_s, \bar{\psi}_m$ a) primitivo (azul), b) referido con $L_{rl\ ref}=0$ (verde).

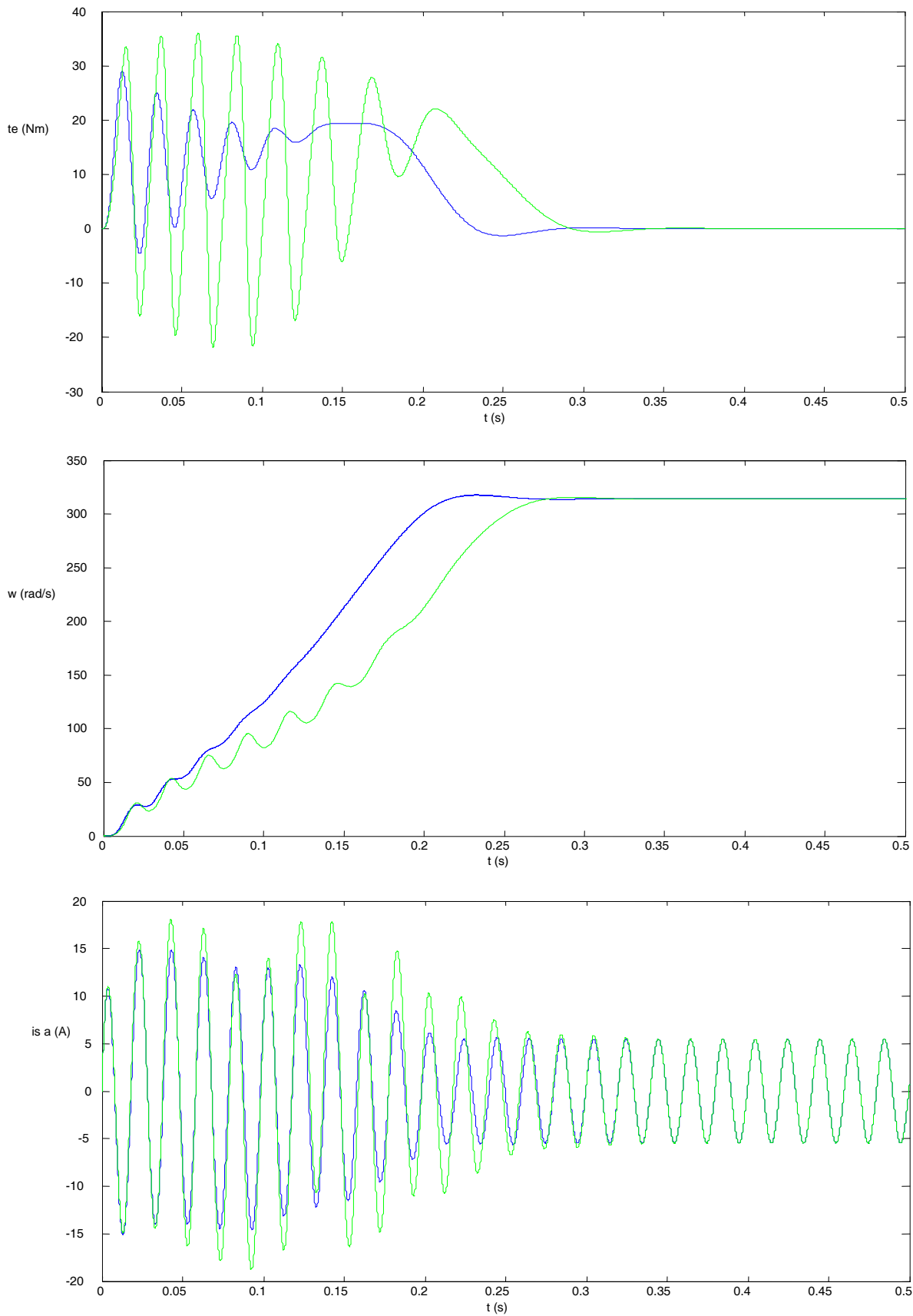


Figura 3.26. Respuestas de par, velocidad y corriente en la fase a de los modelos formulados en $\bar{\psi}_s, \bar{i}_m$ a) primitivo (azul), b) referido con $L_{rl\ ref}=0$ (verde).

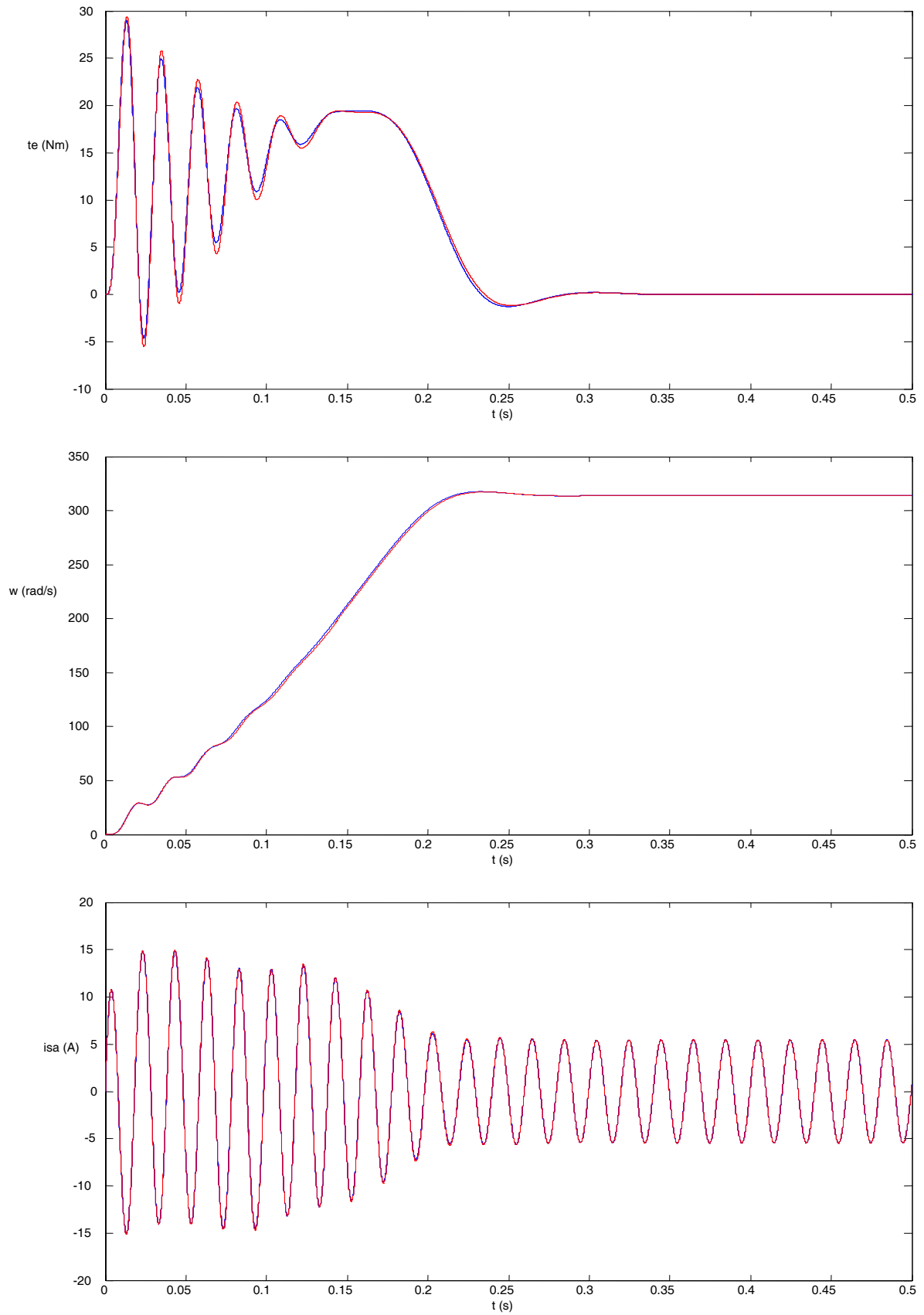


Figura 3.27. Respuestas de par, velocidad y corriente en la fase a de los modelos formulados en $\bar{\psi}_m, \bar{\psi}_r$ a) primitivo (azul), b) referido con $L_{sl\ ref}=0$ (rojo).

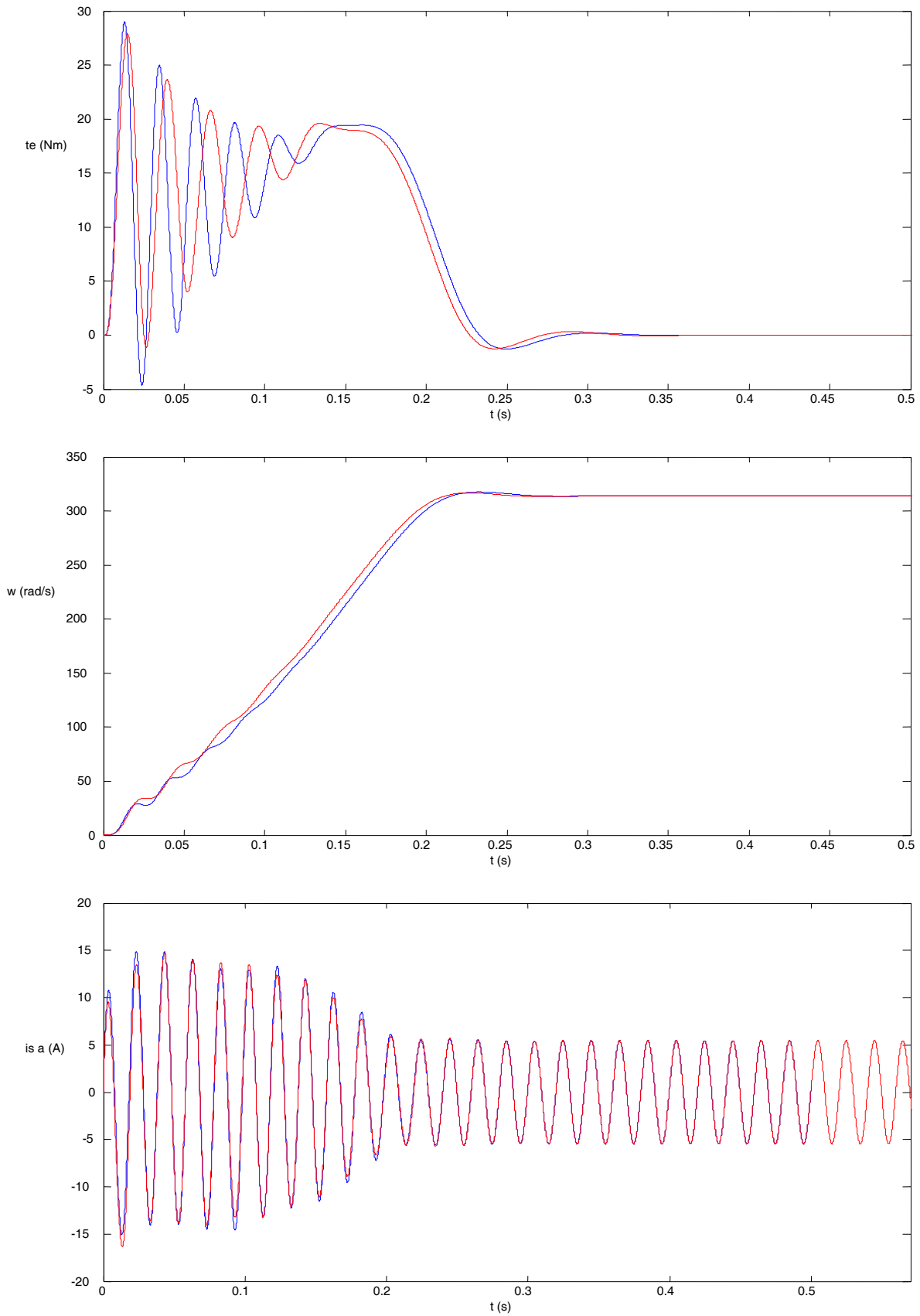


Figura 3.28. Respuestas de par, velocidad y corriente en la fase a de los modelos formulados en $\bar{i}_m, \bar{\psi}_r$ a) primitivo (azul), b) referido con $L_{sl\ ref}=0$ (rojo).

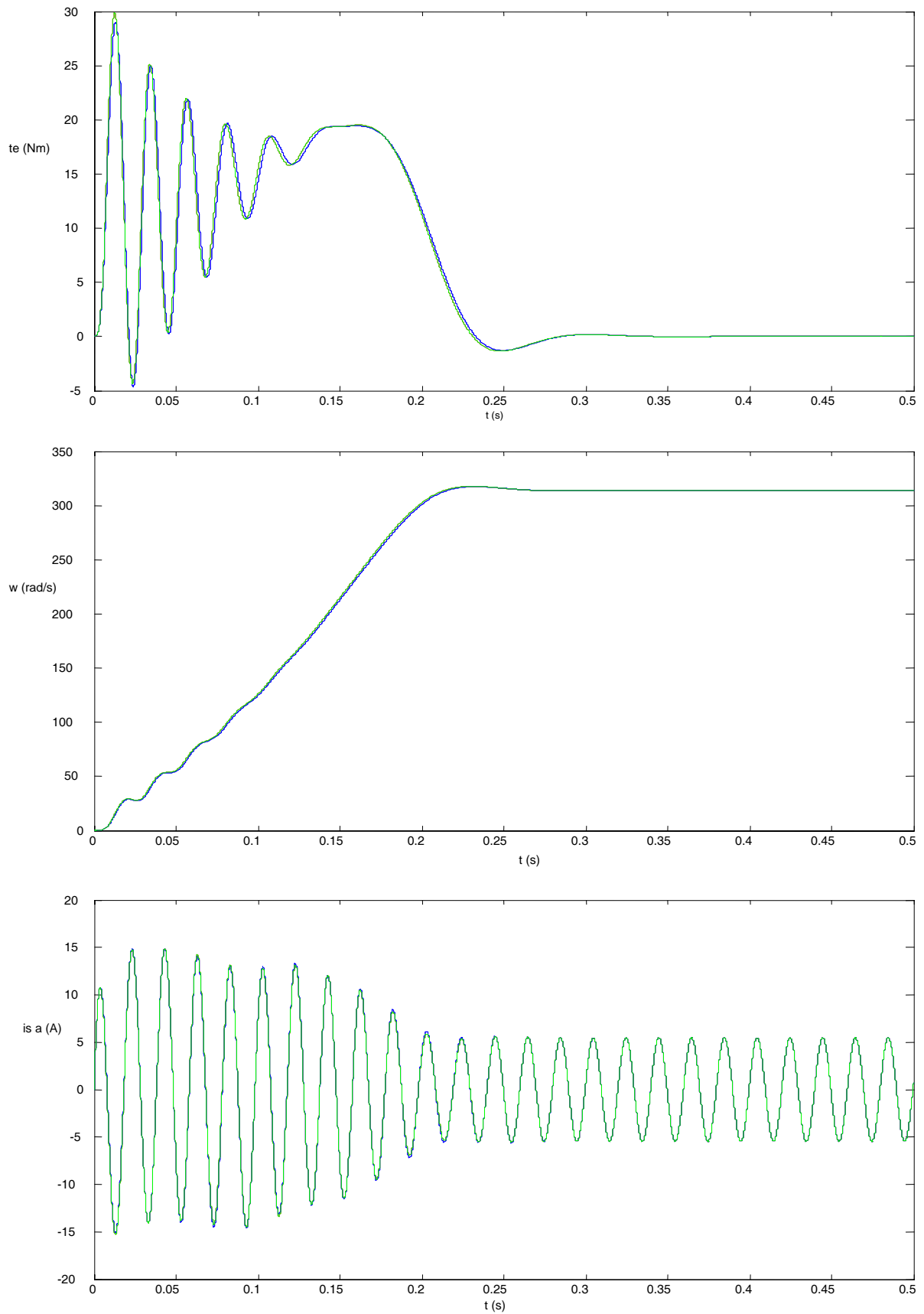


Figura 3.29. Respuestas de par, velocidad y corriente en la fase a de los modelos formulados en $\bar{\psi}_s, \bar{i}_s$ a) primitivo (azul), b) referido con $L_{sl\ ref}=0$ (rojo), c) referido con $L_{rl\ ref}=0$ (verde).

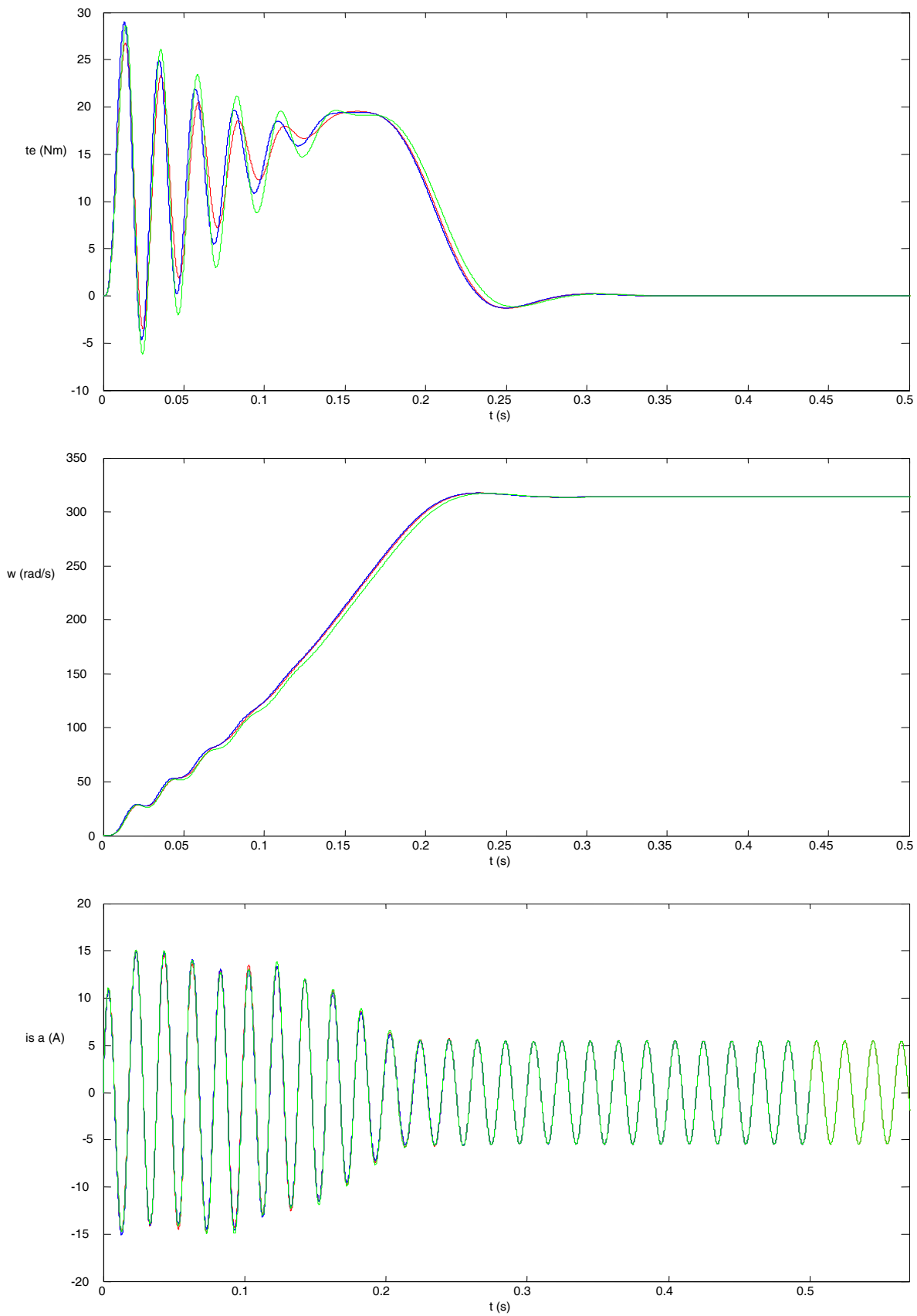


Figura 3.30. Respuestas de par, velocidad y corriente en la fase a de los modelos formulados en $\bar{\psi}_s, \bar{i}_r$ a) primitivo (azul), b) referido con $L_{sl\ ref}=0$ (rojo), c) referido con $L_{rl\ ref}=0$ (verde).

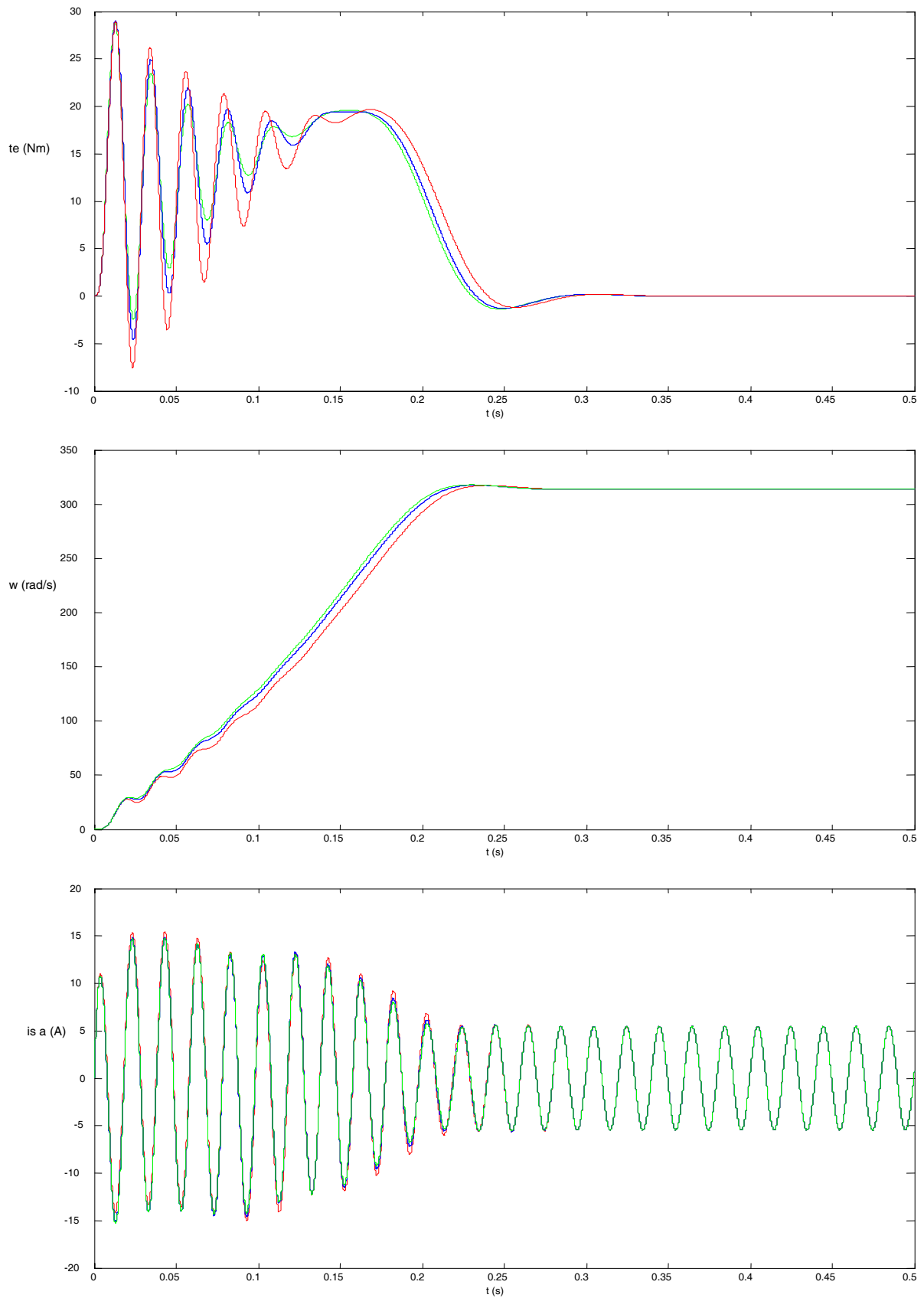


Figura 3.31. Respuestas de par, velocidad y corriente en la fase a de los modelos formulados en $\bar{\psi}_r, \bar{i}_r$ a) primitivo (azul), b) referido con $L_{sl\ ref}=0$ (rojo), c) referido con $L_{rl\ ref}=0$ (verde).

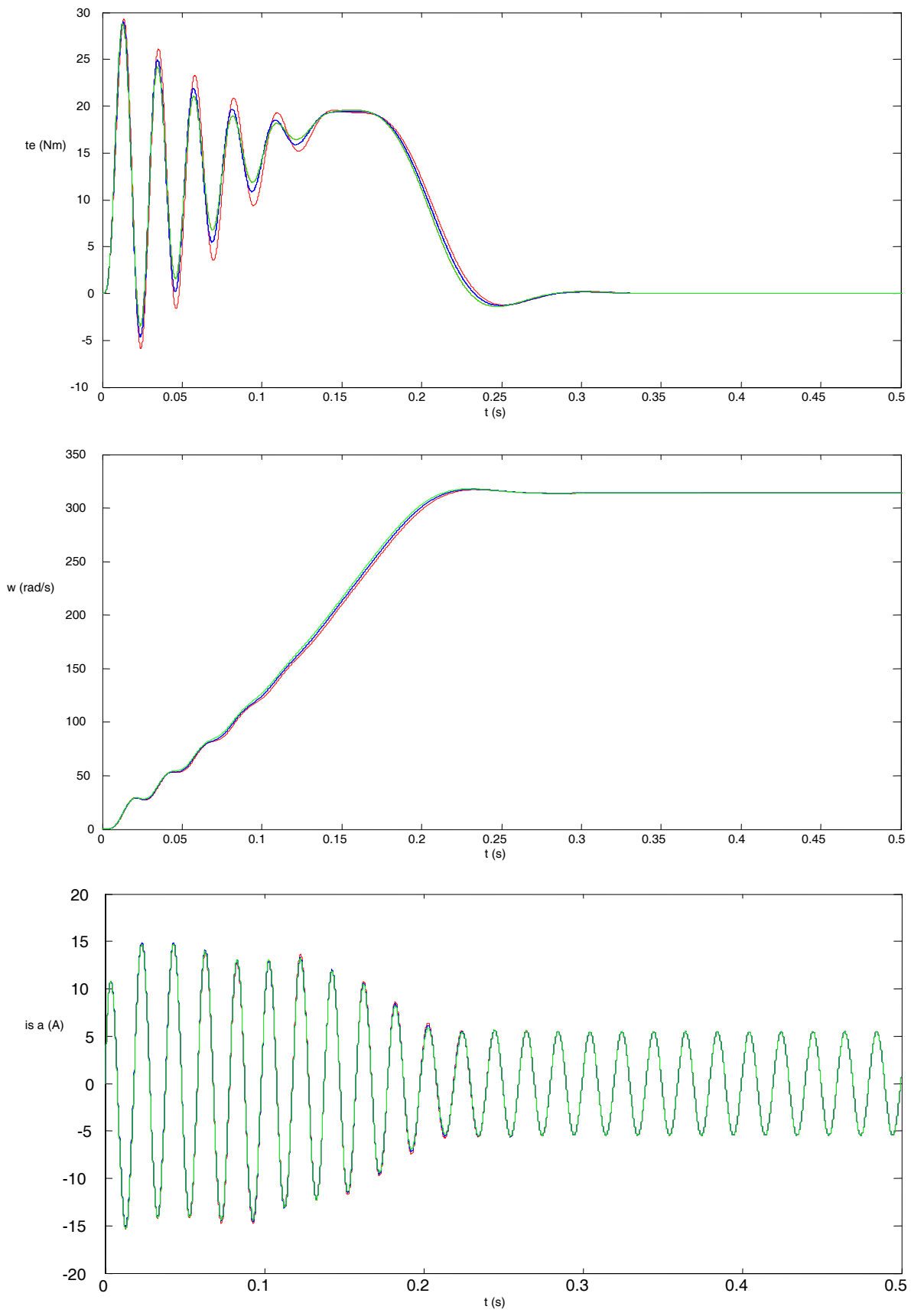


Figura 3.32. Respuestas de par, velocidad y corriente en la fase a de los modelos formulados en $\bar{i}_s, \bar{\psi}_r$ a) primitivo (azul), b) referido con $L_{sl\ ref}=0$ (rojo), c) referido con $L_{rl\ ref}=0$ (verde).

Debe hacerse notar, no obstante, que despreciar los términos dependientes de la cantidad $\frac{dL_m}{dt}$ dentro de los modelos afectados por un factor de referencia variable, no implica que el modelo primitivo equivalente carezca de términos dependientes de este factor.

Es decir, si se toman los modelos primitivos en los que se han eliminado los términos dependientes de $\frac{dL_m}{dt}$ (recogidos en el apéndice F), y en ellos se substituyen parámetros referidos afectados por un factor de referencia variable, se obtienen modelos referidos que no solo no mantienen la equivalencia con el modelo primitivo sin términos dependientes de $\frac{dL_m}{dt}$ del cual parten, sino que al devolverlos a magnitudes originales, surgen términos dependientes del factor $\frac{dL_m}{dt}$.

Para ilustrar lo expuesto, considérese la expresión de las derivadas temporales de los fasores de flujo estático y rotórico, expresada en términos de corrientes de estator y rotor:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Psi}_s}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(L_{sl} \bar{i}_s + L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_r) \right) = L_{sl} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + \bar{i}_s \frac{dL_{sl}}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_r}{dt} + \bar{i}_s \frac{dL_m}{dt} + \bar{i}_r \frac{dL_m}{dt} \\ \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(L_{rl} \bar{i}_r + L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_r) \right) = L_{rl} \frac{d\bar{i}_r}{dt} + \bar{i}_r \frac{dL_{rl}}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_r}{dt} + \bar{i}_s \frac{dL_m}{dt} + \bar{i}_r \frac{dL_m}{dt} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Supóngase que, por simplicidad, se decide prescindir de los términos dependientes del factor $\frac{dL_m}{dt}$, modelando la saturación sencillamente mediante el empleo de una inductancia L_m variable en (3.57), obteniéndose las expresiones simplificadas:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Psi}_s}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(L_{sl} \bar{i}_s + L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_r) \right) \approx L_{sl} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_r}{dt} \\ \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(L_{rl} \bar{i}_r + L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_r) \right) \approx L_{rl} \frac{d\bar{i}_r}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_r}{dt} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Ahora, por tal de eliminar un parámetro, se substituyen directamente en (3.58) parámetros referidos afectados por un factor de referencia α variable, asumiendo erróneamente que las cantidades rotóricas automáticamente quedan referidas cumpliendo las relaciones en (3.34):

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\Psi}_s}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(L_{sl\text{ref}} \bar{i}_s + L_{m\text{ref}} (\bar{i}_s + \bar{i}_{r\text{ref}}) \right) \approx L_{sl\text{ref}} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_{m\text{ref}} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_{m\text{ref}} \frac{d\bar{i}_{r\text{ref}}}{dt} \\ \frac{d\bar{\Psi}_{r\text{ref}}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(L_{rl\text{ref}} \bar{i}_{r\text{ref}} + L_{m\text{ref}} (\bar{i}_s + \bar{i}_{r\text{ref}}) \right) \approx L_{rl\text{ref}} \frac{d\bar{i}_{r\text{ref}}}{dt} + L_{m\text{ref}} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_{m\text{ref}} \frac{d\bar{i}_{r\text{ref}}}{dt}\end{aligned}\quad (3.59)$$

El sistema en (3.59) no solo no mantiene ya su perfecta equivalencia con las ecuaciones (ya de por si simplificadas) en (3.58) a partir de las que se formuló (sólo será cierto para $\alpha=1$), sino que, a pesar de carecer de términos en apariencia dependientes de $\frac{dL_m}{dt}$, cuando es

devuelto a magnitudes primitivas da lugar al surgimiento de términos dependientes de $\frac{dL_m}{dt}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\Psi}_s}{dt} &\approx L_{sl\text{ref}} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_{m\text{ref}} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_{m\text{ref}} \frac{d\bar{i}_{r\text{ref}}}{dt} = (L_{sl} + (1-\alpha)L_m) \frac{d\bar{i}_s}{dt} + \alpha L_m \frac{d\bar{i}_s}{dt} + \alpha L_m \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{i}_r}{\alpha} \right) \\ &= L_{sl} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_r}{dt} - \frac{1}{\alpha} L_m \bar{i}_r \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt} \\ \frac{d\bar{\Psi}_{r\text{ref}}}{dt} &= \frac{d(\alpha\bar{\Psi}_r)}{dt} \approx L_{rl\text{ref}} \frac{d\bar{i}_{r\text{ref}}}{dt} + L_{m\text{ref}} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_{m\text{ref}} \frac{d\bar{i}_{r\text{ref}}}{dt} = ((L_{rl} + L_m)\alpha^2 - \alpha L_m) \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{i}_r}{\alpha} \right) + \alpha L_m \frac{d\bar{i}_s}{dt} \\ &+ \alpha L_m \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{i}_r}{\alpha} \right) \Rightarrow \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} \approx L_{rl} \frac{d\bar{i}_r}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_r}{dt} - \frac{1}{\alpha} ((L_{rl} + L_m)\bar{i}_r + \bar{\Psi}_r) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt} \\ &= L_{rl} \frac{d\bar{i}_r}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_s}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_r}{dt} - \frac{1}{\alpha} (L_m \bar{i}_s + 2(L_{rl} + L_m)\bar{i}_r) \frac{d\alpha}{dL_m} \frac{dL_m}{dt}\end{aligned}\quad (3.60)$$

En definitiva, la utilización de parámetros referidos dentro de las ecuaciones primitivas carentes de términos dependientes de la cantidad $\frac{dL_m}{dt}$ puede resultar atractiva, siempre que la simplificación conseguida con la desaparición de los términos afectados por el parámetro eliminado, compense el esfuerzo de cálculo requerido para la continua actualización de los parámetros referidos variables.

El análisis de los términos despreciados con este enfoque (respecto del modelo patrón original con intersaturación) muestra que, a excepción de las formulaciones exclusivamente en términos de corrientes o de aquellas en las que la corriente magnetizante es una de las variables de estado seleccionadas, el resto de modelos proporciona resultados suficientemente buenos para un gran número de aplicaciones.

4. CONCLUSIONES Y APORTACIONES DEL TRABAJO.

De un modo muy sintético, las aportaciones del presente trabajo pueden resumirse en tres puntos, a saber:

- se ha realizado una labor de recopilación del estado del arte de las principales técnicas de modelado del efecto de ranura profunda y de la saturación magnética en el motor trifásico de inducción, partiendo de una bibliografía muy dispersa con ausencia de obras monográficas especializadas sobre estos particulares.
- en lo relativo a la determinación del tiempo de operación estable del motor ante un hueco de tensión, se evidencia la necesidad de incluir el efecto de ranura profunda en el modelo, tanto más cuanto mayor sea la potencia de la máquina considerada. Se pone de manifiesto la incapacidad del modelo estándar de una sola jaula para representar el comportamiento real del motor en todo el rango de deslizamientos, y se muestra cómo aun los modelos de orden reducido, mas de doble jaula, predicen para esta aplicación resultados más ajustados a los datos suministrados por el fabricante.
- en lo tocante al modelado de la saturación magnética, se justifica la divergencia en los resultados obtenidos a partir de los modelos con y sin intersaturación cuando estos son formulados en función de determinados conjuntos de variables de estado, a partir de la evaluación de los pesos relativos de los distintos términos que marcan la diferencia entre ambos tipos de modelos, contribuyendo así a clarificar un punto que ha sido objeto de controversia en la literatura especializada. Se efectúa, así mismo, un estudio detallado sobre las implicaciones del uso de parámetros y magnitudes referidos en los modelos con y sin intersaturación, evaluando para qué conjuntos de variables de estado su utilización resulta ventajosa.

En suma, queda puesto de manifiesto que es posible modelar con garantías efectos que en muchas ocasiones son obviados en los modelos para evitar la excesiva complejidad que su inclusión aporta, pero que en aplicaciones concretas resultan esenciales para representar adecuadamente el comportamiento real del motor.

El recurso a formulaciones de doble jaula, más de orden reducido, resulta una herramienta excelente para modelar la respuesta dinámica de la velocidad de la máquina ante un hueco de tensión, circunstancia en la que el modelo tradicional de una sola jaula no proporciona resultados concordantes con lo esperado a partir de las características de catálogo suministradas por el fabricante.

La respuesta de los modelos simplificados que no consideran la intersaturación, cuando son formulados en función de las variables de estado adecuadas, no diverge en exceso de los modelos –mucho más complejos– que sí la consideran, por lo que con poca complicación añadida respecto al modelo válido para el trabajo en la zona lineal de la característica magnética puede tenerse una representación adecuada de este fenómeno.

En definitiva, se comprueban los buenos resultados de determinados recursos simplificativos, orientados a paliar la complejidad que la consideración del fenómeno de la saturación magnética y el efecto de la ranura profunda añade al modelo estándar de 5º orden en ejes dq del motor.

NOTACIÓN.

B	coeficiente de rozamiento viscoso
\bar{i}_m	fasor espacial de corriente magnetizante en el sistema genérico de referencia
\bar{i}_r	fasor espacial de corriente de rotor en el sistema genérico de referencia
\bar{i}_s	fasor espacial de corriente de estator en el sistema genérico de referencia
i_{sa}	corriente instantánea en la fase a de un sistema trifásico
\bar{i}_1	fasor espacial de corriente de la jaula rotórica interna en el sistema genérico de referencia
\bar{i}_2	fasor espacial de corriente de la jaula rotórica externa en el sistema genérico de referencia
j	operador complejo
J	momento de inercia
L_m	inductancia magnetizante
L_r	inductancia de rotor
L_{r1}	inductancia de dispersión de rotor
L_s	inductancia de estator
L_{s1}	inductancia de dispersión de estator
L_1	inductancia de la jaula rotórica interna
L_{11}	inductancia de dispersión de la jaula rotórica interna
L_{121}	inductancia de dispersión entre jaulas rotóricas
L_2	inductancia de la jaula rotórica externa
L_{21}	inductancia de dispersión de la jaula rotórica externa
P	potencia nominal
p	número de pares de polos
p(t)	potencia activa instantánea
q(t)	potencia reactiva instantánea
R_r	resistencia rotórica
R_s	resistencia estatórica
R_1	resistencia de la jaula rotórica interna
R_1	resistencia de la jaula rotórica externa
t	tiempo
t_e	par electromagnético
t_l	par de carga
\bar{u}_s	fasor espacial de tensión de estator en el sistema genérico de referencia
$\bar{\Psi}_m$	fasor espacial de flujo magnetizante en el sistema genérico de referencia
$\bar{\Psi}_r$	fasor espacial de flujo de rotor en el sistema genérico de referencia
$\bar{\Psi}_s$	fasor espacial de flujo de estator en el sistema genérico de referencia
$\bar{\Psi}_1$	fasor espacial de flujo de la jaula rotórica interna en el sistema genérico de referencia
$\bar{\Psi}_2$	fasor espacial de flujo de la jaula rotórica externa en el sistema genérico de referencia
ω	velocidad angular rotórica (eléctrica)
ω_g	velocidad angular del sistema genérico de referencia

Subíndices

x,y	componentes directo y en cuadratura de un fasor espacial expresado en el sistema genérico de referencia
-----	---

BIBLIOGRAFIA

- [1] Alger, P.L. "Induction Machines. Their Behavior and Uses". Gordon and Breach Science Publishers. USA, 3rd ed., 1995.
- [2] Chapman, S.J. "Máquinas Eléctricas" Mc Graw-Hill. Colombia, 1990.
- [3] Smith, A.C., Healey, R.C., Williamson, S. "A transient Induction Motor Model Including Saturation and Deep Bar Effect". IEEE Trans. On Energy Conversion, vol. 11, n° 1, Marzo 1996.
- [4] Levy, W., Landy, C.F., Mc Culloch, M.D. "Deep Bar Induction Motor Model for Variable Speed Drive Simulation" Power Electronics and Variable-Speed Drives 1991, Fourth Int. Conf. On. 17-19 Julio 1990, pag. 376-381.
- [5] Jingchuan, L., Longya, X. "Investigation of Cross-Saturation and Deep Bar Effects of Induction Motors by Augmented d-q modeling Method" Industry Application Conference 2001 Thirty-Sixth IAS Annual Meeting, Conf. Record of the 2001 IEEE, vol. 2, Sept.-4 Oct. 2001, pag. 745-750.
- [6] Klingshirn, E.A. Simulation of Polyphase Induction Machines with Deep Rotor Bars. IEEE Trans on Power App. And Systems, vol. PAS-89, n° 6, Julio/Agosto 1970.
- [7] Landy C.F., Levy, W, Mc Culloh, M., Meyer, A.S. "The Effect of Deep-Bar Properties when Assessing Reswitching Transients in Squirrel Cage Induction Motors". Industry Applications Society Annual Meeting 1991, Conf. Record of the 1991 IEEE, 28 Sept.-4 Oct. 1991, pag. 35-39, vol. 1.
- [8] Pedra. J., Córcoles, F. "Estimation of Induction Motor Double-Cage Model Parameters from Manufacturer Data". IEEE Trans. On Energy Conversion, vol. 19, n° 2, June 2004.
- [9] Levy, W., Landy, C.F., Mc Culloh, M.D. "Improved Models for the Simulation of Deep Bar Induction Motors". IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 5, n° 2, Junio 1990.
- [10] Sudhoff, S.D., Chapman, P.L. "An Advanced Induction Machine Model for predicting Inverter-machine Interaction". IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 17, n° 2, Junio 2002.
- [11] De Doncker, R.W.A.A. "Field- Oriented Controllers with Rotor Deep Bar Compensation Circuits" IEEE Trans. on Industry Applications, vol. 28, n° 5, Sept./Oct. 1992.
- [12] Healey, R.C., Williamson, S., Smith, A. "Improved Rotor Models for Vector Controlled Induction Motors". IEEE Trans. on Industry Applications, vol. 31, n° 4, Julio/Agosto 1995.
- [13] Vas, P. "Electrical Machines and Drives" Oxford Science Publications. Clarendon Press-Oxford 1992.

- [14] Johnson, B.K., Willis, J.R. "Tailoring Induction Motor Analytical Models to Fit Known Motor Performance Characteristics and Satisfy Particular Study Needs" . Trans. on Power Systems, vol. 6, n° 3, Agosto 1991.
- [15] Zhang, Z., Dawson, G.E., Eastham, T.R. "Evaluation of Dynamic Parameters and Performance of Deep-Bar Induction Machines". Industry Applications Society Annual Meeting 1994, Conference Record of the 1994 IEEE, 2-6 Octubre 1994, vol. 1, pag. 62-66.
- [16] Lethla, T., Joller, J., Lethla, M., Langis, J. "Parameter Identification and Comparison of an Induction Motor Models". Power Electronics and Variable-Speed Drives, 18-19 Septiembre 2000, Conferece Publication n° 475.
- [17] Thorsen, O.V., Dalva, M. "Development and Industrial Application of a Practical Model for Simulation of Saturated Deep Bar Induction Machines. Industry Applications Society Annual Meeting 1994, Conference Record of the 1994 IEEE, 2-6 Octubre 1994, vol. 1, pag. 137-142.
- [18] Adkins, B., Harley, R.G. "The general Theory of Alternating Current Machines. Application to Practical Problems". Chapman and Hall. London, 1975.
- [19] Hallenius, K.E., Vas, P., Brown, J.E. "The Analysis of a Saturated Self-Excited Asynchronous Generator". IEEE Trans. On Energy Conversion, vol. 6, n° 2, Junio 1991.
- [20] Melkebeek, J.A.A, Nobotny, D.W. "The influence of Saturation on Induction Machine Drive Dynamics". IEEE Trans. On Industry Applications, vol. IA, Septiembre-Octubre 1983.
- [21] Krause, P.C., Wasynczuk, O., Sudhoff, S.D. "Analysis of Electric Machinery". IEEE Press. N.Y., 1995.
- [22] Córcoles, F., Pedra, J. "Analysis of the Induction Machine Parameter Identification". IEEE Trans. On Energy Conversion, vol. 17, n° 2, Junio 2002.
- [23] Slemon, G.R. "Modelling of Induction Machines for Electric Drives". IEEE Trans. on Industry Applications, vol. 25, n° 6, Noviembre/Diciembre 1989.
- [24] Novotny, D.W., Lipo, T.A. "Vector Control and Dynamics of AC Drives". Clarendon Press-Oxford. N.Y., 1996.
- [25] Khalil, N.A., Tan, O.T., Baran, I.U. "Reduced Order Models for Double-Cage Induction Motors". IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems, vol. PAS-101, n° 9, Sept. 1982.
- [26] Melkebeek, J.A.A., Novotny, D.W. "The Influence of Saturation on Induction Machine Drive Dynamics". IEEE Trans. on Industry Applications, vol. IA-19, n° 5, Septiembre/Octubre 1983.
- [27] Hallenius, K.E., Vas, P, Brown, J.E. "The Analysis of a Saturated Self-Excited Asynchronous Generator". IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 6, n° 2, Junio 1991.

- [28] Ojo, J.O., Consoli, A., Lipo, T.A. "An Improved Model of Saturated Induction Machines". IEEE Trans. on Industry Applications, vol. 26, n° 2, Marzo/Abril 1990.
- [29] Reynaud, J.F., Pillay, P. "Modelling Saturation Effects in the Magnetizing Branch on an Induction Motor using Pspice". Southeastcon'92, Proceedings, IEEE, 12-15 Abril 1992, pag. 513-516, vol. 2.
- [30] Reynaud, J.F., Pillay, P. "Modelling of Saturation in Induction Machines using EMTP, Pspice and a Dedicated Computer Program". Electric Power Systems Research 30 (1994) pag. 279-285.
- [31] Reynaud, J.F., Pillay, P. "Reclosing Transients in Induction Machines including the Effects of Saturation of the Magnetizing Branch and a Practical Case Study". IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 9, n° 2, Junio 1994.
- [32] Vas, P, Levi, E., Oros, Dj., Jevremovic, R. "Capacitor Braking of Double-Cage Induction Motors". Electric Power Systems Research 40 (1997) pag. 161-166.
- [33] Ferreira de Jesús, J.M., "A model for Saturation in Induction Machines". IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 3, n° 3, Septiembre 1988.
- [34] Slemon, G.R., Ismailov, E.A., "An Analysis of the Harmonic Impedance of a Saturated Induction Machine". IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS-99, pag. 1663-1669, Julio/Agosto 1980.
- [35] Kerkman, R.J. "Steady-State and Transient Analysis of an Induction Machine with Saturation of the Magnetizing Branch". IEEE Trans. on Industry Applications, vol. IA-21, n° 1, Enero/Febrero 1985.
- [36] Mendes, E, Razek, A. "A simple Model for Core Loses and Magnetic Saturation in Induction Machines for Direct Flux Orientation Control". Power Electronics and Variable-Speed Drives, 26-28 Octubre 1994, Conferece Publication n° 339, IEE, 1994.
- [37] Ganji, A.A., Guillaume, P, Pintelon, R., Lataire, P. "Identification of the Induction Machine Dynamic and Static Inductance with Regard to Saturation". Power Electronics and Variable-Speed Drives, 23-25 Septiembre 1996, Conferece Publication n° 429, IEE, 1996.
- [38] Sullivan, C.R., Sanders, S.R., "Models for Induction Machines with Magnetic Saturation of the Main Flux Path". IEEE Trans. on Industry Applications, vol. 31, n° 4, Julio/Agosto 1995.
- [39] Keyhani, A., Tsai, H. "IGSpice Simulation of Induction Machines with Saturable Inductances". IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 4, n° 1, Marzo 1989.
- [40] Moreira, J.C., Lipo, T.A. "Modeling of Saturated ac Machines Including Air Gap Flux Harmonic Components". IEEE Trans. on Industry Applications, vol. 28, n° 2, Marzo/Abril 1992.

- [41] Brown, J.E., Kovacs, K.P., Vas, P. "A Method of including the Effects of Main Flux Path Saturation in the Generalized Equations of A.C. Machines". IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS-102, n° 1. Enero 1983.
- [42] Lipo, T.A., Consoli, A. "Modelling and Simulation of Induction Motors with Saturable Leakage Reactances". IEEE Trans. on Industry Applications, vol. IA-20, n° 1, Enero/Febrero 1984.
- [43] Vas, P., Hallenius, K.E., Brown, J.E. "Cross-Saturation in Smooth-Air-gap Electrical machines". IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. EC-1, n° 1, Marzo 1986.
- [44] Boldea, I., Nasar, S.A. "A General Equivalent Circuit (GEC) of Electric Machines including Crosscoupling Saturation and Frequency Effects". IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 3, n° 3, Septiembre 1988.
- [45] Levi, E. "Applications of the Current State Space Model in Analyses of Saturated Induction Machines". Electric Power Systems Research 31 (1994) pag. 203-216.
- [46] Levi, E. "A Unified Approach to Main Flux Saturation Modelling in D-Q Axis Models of Induction Machines". IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 10, n° 3, Marzo 1995.
- [47] Levi, E. "General method of Magnetizing Flux Saturation Modelling in D-Q Axis of Double-Cage Induction Machines". IEE Proc.-Electr. Power Applic., vol. 144, n° 2, Marzo 1997.
- [48] Donescu, V., Charette, A., Yao, Z., Rajagopalan, V. "Modeling and Simulation of Saturated Induction Motors in Phase Quantities". IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 14, n° 3, Septiembre 1999.
- [49] Levi, E. "Impact of Cross-Saturation on Accuracy of Saturated Induction Machine Models". IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 13, n° 3, Septiembre 1997.
- [50] Das, J.C. "Effects of Momentary Voltage Dips on the Operation of Induction and Synchronous Motors". IEEE Trans. on Industry Applications, vol. 26, n° 4, Julio/Agosto 1990.
- [51] Córcoles, F., Pedra, J. "Algorithm for the Study of Voltage Sags on Induction Machines". IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 14, n° 4, Diciembre 1999.
- [52] Bollen, M. H. J. "Voltage Recovery After Unbalanced and Balanced Voltage Dips in Three-Phase Systems". IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 18, n° 4, Octubre 2003.
- [53] Guasch, L., Córcoles, F., Pedra, J. "Effects of Symmetrical and Unsymmetrical Voltage Sags on Induction Machines". IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 19, n° 2, Abril 2004.
- [54] Pedra, J. "Estimation of Typical Squirrel-Cage Induction Motor Parameters for Dynamic Performance Simulation". IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib., vol. 153, n° 2, Marzo 2006.

APÉNDICE A. MODELOS DE JAULA DOBLE Y SENCILLA, DE ÓRDENES COMPLETO Y REDUCIDO DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN, EN TÉRMINOS DE CORRIENTES DE ESTATOR Y FLUJOS DE ROTOR, EN EL SISTEMA GENÉRICO DE REFERENCIA.

A.1. Modelo de doble jaula y orden completo.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g \left(L_s + L_m^2 \frac{2L_{12} - L_1 - L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \right) & 0 & -\omega_g \frac{L_m(L_2 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\omega_g \frac{L_m(L_1 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \\ \omega_g \left(L_s + L_m^2 \frac{2L_{12} - L_1 - L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \right) & R_s & \omega_g \frac{L_m(L_2 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \omega_g \frac{L_m(L_1 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 \\ \frac{R_1 L_m(L_{12} - L_2)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & -(\omega_g - \omega) & -\frac{R_1 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 \\ 0 & \frac{R_1 L_m(L_{12} - L_2)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\frac{R_1 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \\ \frac{R_2 L_m(L_{12} - L_1)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\frac{R_2 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \frac{R_2 L_1}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & \frac{R_2 L_m(L_{12} - L_1)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\frac{R_2 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_2 L_1}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{1x} \\ \Psi_{1y} \\ \Psi_{2x} \\ \Psi_{2y} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} L_s + L_m^2 \frac{2L_{12} - L_1 - L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \frac{L_m(L_2 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \frac{L_m(L_1 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 \\ 0 & L_s + L_m^2 \frac{2L_{12} - L_1 - L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \frac{L_m(L_2 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \frac{L_m(L_1 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{1x} \\ \Psi_{1y} \\ \Psi_{2x} \\ \Psi_{2y} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \left((L_2 - L_{12})(\Psi_{1x} i_{sy} - \Psi_{1y} i_{sx}) + (L_1 - L_{12})(\Psi_{2x} i_{sy} - \Psi_{2y} i_{sx}) \right)$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

A.2. Modelo de doble jaula de 5° orden, con supresión de los transitorios estáticos.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g \left(L_s + L_m^2 \frac{2L_{12} - L_1 - L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \right) & 0 & -\omega_g \frac{L_m(L_2 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\omega_g \frac{L_m(L_1 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \\ \omega_g \left(L_s + L_m^2 \frac{2L_{12} - L_1 - L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \right) & R_s & \omega_g \frac{L_m(L_2 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \omega_g \frac{L_m(L_1 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 \\ \frac{R_1 L_m(L_{12} - L_2)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & -(\omega_g - \omega) & -\frac{R_1 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 \\ 0 & \frac{R_1 L_m(L_{12} - L_2)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\frac{R_1 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \\ \frac{R_2 L_m(L_{12} - L_1)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\frac{R_2 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \frac{R_2 L_1}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & \frac{R_2 L_m(L_{12} - L_1)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\frac{R_2 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_2 L_1}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{1x} \\ \Psi_{1y} \\ \Psi_{2x} \\ \Psi_{2y} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{1x} \\ \Psi_{1y} \\ \Psi_{2x} \\ \Psi_{2y} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \left((L_2 - L_{12})(\Psi_{1x} i_{sy} - \Psi_{1y} i_{sx}) + (L_1 - L_{12})(\Psi_{2x} i_{sy} - \Psi_{2y} i_{sx}) \right)$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

A.3. Modelo de doble jaula de 3^{er} orden, con supresión de los transitorios estáticos y de la jaula externa.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g \left(L_s + L_m^2 \frac{2L_{12} - L_1 - L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \right) & 0 & -\omega_g \frac{L_m(L_2 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\omega_g \frac{L_m(L_1 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \\ \omega_g \left(L_s + L_m^2 \frac{2L_{12} - L_1 - L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \right) & R_s & \omega_g \frac{L_m(L_2 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \omega_g \frac{L_m(L_1 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 \\ \frac{R_1 L_m(L_{12} - L_2)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & -(\omega_g - \omega) & -\frac{R_1 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 \\ 0 & \frac{R_1 L_m(L_{12} - L_2)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\frac{R_1 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \\ \frac{R_2 L_m(L_{12} - L_1)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\frac{R_2 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \frac{R_2 L_1}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & \frac{R_2 L_m(L_{12} - L_1)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\frac{R_2 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_2 L_1}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{1x} \\ \Psi_{1y} \\ \Psi_{2x} \\ \Psi_{2y} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{1x} \\ \Psi_{1y} \\ \Psi_{2x} \\ \Psi_{2y} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \left((L_2 - L_{12})(\Psi_{1x} i_{sy} - \Psi_{1y} i_{sx}) + (L_1 - L_{12})(\Psi_{2x} i_{sy} - \Psi_{2y} i_{sx}) \right)$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

A.4. Modelo de doble jaula de 1^{er} orden, con supresión de los transitorios estáticos y de las jaulas interna y externa.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g \left(L_s + L_m^2 \frac{2L_{12} - L_1 - L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \right) & 0 & -\omega_g \frac{L_m(L_2 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\omega_g \frac{L_m(L_1 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \\ \omega_g \left(L_s + L_m^2 \frac{2L_{12} - L_1 - L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \right) & R_s & \omega_g \frac{L_m(L_2 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \omega_g \frac{L_m(L_1 - L_{12})}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 \\ \frac{R_1 L_m(L_{12} - L_2)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & -(\omega_g - \omega) & -\frac{R_1 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 \\ 0 & \frac{R_1 L_m(L_{12} - L_2)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\frac{R_1 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \\ \frac{R_2 L_m(L_{12} - L_1)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\frac{R_2 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & \frac{R_2 L_1}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & \frac{R_2 L_m(L_{12} - L_1)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & 0 & -\frac{R_2 L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_2 L_1}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{1x} \\ \Psi_{1y} \\ \Psi_{2x} \\ \Psi_{2y} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_1 L_2 - L_{12}^2} \left((L_2 - L_{12})(\Psi_{1x} i_{sy} - \Psi_{1y} i_{sx}) + (L_1 - L_{12})(\Psi_{2x} i_{sy} - \Psi_{2y} i_{sx}) \right)$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

A.5. Modelo de jaula sencilla y orden completo.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g \left(L_s - \frac{L_m^2}{L_r} \right) & 0 & -\omega_g \frac{L_m}{L_r} \\ \omega_g \left(L_s - \frac{L_m^2}{L_r} \right) & R_s & \omega_g \frac{L_m}{L_r} & 0 \\ -R_r \frac{L_m}{L_r} & 0 & \frac{R_r}{L_r} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & -R_r \frac{L_m}{L_r} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_r}{L_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(L_s - \frac{L_m^2}{L_r} \right) & 0 & \frac{L_m}{L_r} & 0 \\ 0 & \left(L_s - \frac{L_m^2}{L_r} \right) & 0 & \frac{L_m}{L_r} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_r} (i_{sy} \psi_{rx} - i_{sx} \psi_{ry})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

A.6. Modelo de jaula sencilla de 3^{er} orden, con supresión de los transitorios estatóricos.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g \left(L_s - \frac{L_m^2}{L_r} \right) & 0 & -\omega_g \frac{L_m}{L_r} \\ \omega_g \left(L_s - \frac{L_m^2}{L_r} \right) & R_s & \omega_g \frac{L_m}{L_r} & 0 \\ -R_r \frac{L_m}{L_r} & 0 & \frac{R_r}{L_r} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & -R_r \frac{L_m}{L_r} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_r}{L_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_r} (i_{sy} \psi_{rx} - i_{sx} \psi_{ry})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

A.7. Modelo de jaula sencilla de 1^{er} orden, con supresión de los transitorios estáticos y rotóricos.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g \left(L_s - \frac{L_m^2}{L_r} \right) & 0 & -\omega_g \frac{L_m}{L_r} \\ \omega_g \left(L_s - \frac{L_m^2}{L_r} \right) & R_s & \omega_g \frac{L_m}{L_r} & 0 \\ -R_r \frac{L_m}{L_r} & 0 & \frac{R_r}{L_r} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & -R_r \frac{L_m}{L_r} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_r}{L_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_r} (i_{sy} \Psi_{rx} - i_{sx} \Psi_{ry})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

APÉNDICE B. DATOS DE LOS DIFERENTES MOTORES REFERENCIADOS.

1) Capítulo 2.

Fuente: <http://energyefficiency.jrc.cec.eu.int/eurodeem>. EuroDEEM 2000, European Database of efficient Electric Motors.

<http://www.energy.wsu.edu/software>. MotorMaster+ Ver. 4.0, Washington State University Energy Program.

Tabla B.1. Características nominales de motores de 400 V, 50 Hz.

P (kW)	cos ϕ_{FL}	T_M/T_{FL}	T_{ST}/T_{FL}	I_{ST}/I_{FL}	n_{FL} (rev/min)	η_{FL}
500	0.87	2.80	2.30	6.50	992	0.966
400	0.82	2.60	2.10	6.50	742	0.962
355	0.87	2.70	2.20	6.80	1486	0.967
315	0.84	3.00	2.00	7.30	991	0.962
250	0.80	3.00	2.20	7.30	991	0.910
200	0.87	2.70	2.70	7.00	1488	0.962
160	0.86	2.70	2.40	7.00	1487	0.960
132	0.86	3.00	2.70	7.20	1486	0.955
110	0.86	3.00	2.00	7.60	2982	0.955
90	0.86	2.70	2.20	6.80	1480	0.940
75	0.86	2.40	2.10	6.30	1482	0.947
55	0.82	2.40	2.20	6.00	738	0.931
45	0.81	2.30	2.10	6.00	740	0.920
37	0.86	3.10	2.50	7.00	1475	0.929
30	0.88	2.70	2.30	6.00	2940	0.910
22	0.77	2.90	2.80	5.50	975	0.908
18.5	0.84	3.20	2.70	6.90	1460	0.905
15	0.92	2.90	2.20	6.60	2910	0.904
11	0.90	3.10	2.30	7.00	2945	0.910
8	0.74	2.50	2.10	4.60	960	0.860

Tabla B.2. Características nominales de motores de 460 V, 60 Hz.

P (hp)	cos ϕ_{FL}	T_M/T_{FL}	T_{ST}/T_{FL}	I_{ST}/I_{FL}	n_{FL} (rev/min)	η_{FL}
500	0.92	2.36	1.00	6.39	3575	0.962
450	0.86	2.37	1.45	6.19	1781	0.962
400	0.87	3.01	1.67	6.85	1780	0.945
350	0.89	2.93	1.74	7.40	1785	0.958
300	0.88	2.67	1.48	6.31	1783	0.955
250	0.83	2.40	1.40	5.90	1187	0.955
200	0.88	3.21	1.48	7.07	1780	0.950
150	0.86	2.45	1.40	6.38	1189	0.955
125	0.85	2.72	1.42	6.09	1775	0.945
100	0.88	2.50	1.51	6.47	1785	0.954
75	0.90	2.83	1.68	6.62	3560	0.951
50	0.88	2.82	1.51	6.25	1180	0.930
40	0.83	2.61	2.08	5.85	1775	0.942
30	0.90	3.24	1.71	6.87	3540	0.936
20	0.87	3.30	2.80	6.95	1755	0.914
10	0.80	3.58	1.96	6.93	1760	0.917

Tabla B.3. Parámetros (en p.u.) de los esquemas equivalentes con una y dos jaulas respectivamente, para los motores de la tabla B.1. (Fuente: [8]).

P (kW)	Modelo con una jaula				Modelo con dos jaulas					
	r_s	r_r	x_m	$x_{s1}=x_{r1}$	r_s	r_1	r_2	x_m	$x_{s1}=x_{21}$	x_{11}
500	0.00360	0.00719	2.294	0.08179	0.00383	0.00765	0.15052	2.398	0.05592	0.12222
400	0.00460	0.00919	1.770	0.08616	0.00527	0.01055	0.08353	1.812	0.06387	0.13991
355	0.00422	0.00844	2.233	0.08357	0.00459	0.00917	0.10147	2.43	0.0623	0.12936
315	0.00403	0.00806	1.808	0.07495	0.00454	0.00908	0.07140	1.914	0.06145	0.11528
250	0.00389	0.00778	1.441	0.07471	0.00459	0.00917	0.05959	1.458	0.05660	0.12460
200	0.00369	0.00737	2.085	0.08355	0.00389	0.00778	0.11090	2.431	0.05409	0.13607
160	0.00394	0.00788	2.004	0.08348	0.00426	0.00852	0.09377	2.247	0.05889	0.13366
132	0.00425	0.00849	1.954	0.07535	0.00458	0.00916	0.11549	2.138	2.138	0.11891
110	0.00272	0.00544	2.018	0.07659	0.00295	0.00590	0.07075	2.142	0.06047	0.11135
90	0.00584	0.01169	2.121	0.08326	0.00686	0.01371	0.08552	2.170	2.170	0.06277
75	0.00535	0.01070	2.052	0.09253	0.00595	0.01191	0.09413	2.339	0.06683	0.15630
55	0.00674	0.01349	1.721	0.09144	0.00806	0.01612	0.09339	1.779	0.06516	0.16389
45	0.00554	0.01108	1.670	0.09592	0.00665	0.01330	0.08073	1.692	0.06607	0.17329
37	0.00734	0.01468	1.992	0.07158	0.00853	0.01706	0.11405	2.005	0.05614	0.11442
30	0.00870	0.01739	2.341	0.08189	0.00983	0.01967	0.17397	2.365	0.05783	0.13199
22	0.01036	0.02072	1.251	0.07227	0.01209	0.02418	0.21134	1.278	0.03989	0.13305
18.5	0.01147	0.02293	1.678	0.06608	0.01492	0.02984	0.10096	1.672	0.05469	0.12202
15	0.01321	0.02642	3.122	0.07381	0.01658	0.03317	0.12460	3.141	0.06608	0.12324
11	0.00823	0.01646	2.512	0.07140	0.00943	0.01886	0.12825	2.582	0.05966	0.10924
8	0.01549	0.03097	1.055	0.07874	0.01911	0.03822	0.17705	1.058	0.06505	0.13272

Tabla D.4. Parámetros (en p.u.) de los esquemas equivalentes con una y dos jaulas respectivamente, para los motores de la tabla B.2. (Fuente: [8]).

P (hp)	Modelo con una jaula				Modelo con dos jaulas					
	r_s	r_r	x_m	$x_{s1}=x_{r1}$	r_s	r_1	r_2	x_m	$x_{s1}=x_{21}$	x_{11}
500	0.00312	0.00642	3.901	0.09871	0.00312	0.0072	0.05085	4.351	0.08388	0.15169
450	0.00371	0.00931	2.335	0.09581	0.00371	0.01078	0.06704	2.505	0.07703	0.15801
400	0.00606	0.00988	2.215	0.07529	0.00606	0.01113	0.09093	2.226	0.06972	0.10192
350	0.00478	0.00767	2.45	0.07773	0.00478	0.00849	0.0695	2.677	0.06618	0.11537
300	0.00384	0.00867	2.202	0.08464	0.00384	0.00925	0.09439	2.513	0.07692	0.11575
250	0.00596	0.00925	1.92	0.09298	0.00596	0.01073	0.07227	1.96	0.07813	0.14375
200	0.0044	0.01022	2.165	0.07072	0.0044	0.01132	0.08535	2.347	0.07255	0.08951
150	0.00608	0.00806	2.279	0.09189	0.00608	0.00924	0.06322	2.398	0.07537	0.145
125	0.00596	0.0121	2.019	0.08257	0.00596	0.01411	0.0851	2.041	0.07878	0.11689
100	0.00579	0.00771	2.122	0.08861	0.00579	0.00822	0.07414	2.588	0.0744	0.13451
75	0.00716	0.01012	2.754	0.07932	0.00716	0.01095	0.11595	2.932	0.07156	0.10691
50	0.01116	0.01456	2.347	0.0775	0.01116	0.01671	0.1121	2.355	0.07739	0.10171
40	0.00809	0.01195	1.799	0.08383	0.00809	0.01324	0.14473	1.868	0.06333	0.12799
30	0.00832	0.01498	2.622	0.06892	0.00832	0.01659	0.14994	2.644	0.06986	0.08366
20	0.00933	0.02192	1.975	0.06569	0.00933	0.0264	0.13929	1.993	0.05216	0.11263
10	0.01088	0.0192	1.373	0.05871	0.01088	0.024	0.09086	1.369	0.06521	0.07825

2) Capítulo 3, figuras 3.10 a 3.17. Fuente: [49]

Motor trifásico de inducción 0.75 kW 380 V 2.1 A 1.390 rpm 50 Hz Y

$R_s=10\ \Omega$ $R_r=6.3\ \Omega$ $L_{sl}=43\ \text{mH}$ $L_{rl}=40\ \text{mH}$ $L_{mn}=0.4212\ \text{mH}$ $J=0.02\ \text{kgm}^2$ $B=0\ \text{Nms}$

Ajuste para el flujo magnetizante: (valores de pico)

$$|\bar{\Psi}_m| = 0.8403 \operatorname{atan}(0.8236 * |\bar{i}_m|) \text{ [Wb]}$$

3) Capítulo 3, figuras 3.18 a 3.20. Fuente: [46]

Motor trifásico de inducción doble jaula 7.5 kW 380 V 14.7 A 2.905 rpm 50 Hz D

$R_s=1.97\ \Omega$ $R1=2.82\ \Omega$ $R2=1.36\ \Omega$ $L_{sl}=10.23\ \text{mH}$ $L_{11}=0\ \text{mH}$ $L_{21}=8\ \text{mH}$

$L_{mn}=0.44977\ \text{mH}$ $L_{121}=0.4212\ \text{mH}$ $J=0.07\ \text{kgm}^2$ $B=0\ \text{Nms}$

Ajuste para el flujo magnetizante: (valores de pico)

$$|\bar{\Psi}_m| = 1.3752 \operatorname{atan}(0.6445 * |\bar{i}_m|) \text{ [Wb]}$$

APÉNDICE C. Desarrollo de la derivada temporal del fasor espacial de flujo magnetizante.

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\Psi}_m}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(|\bar{\Psi}_m| e^{j\mu} \right) = \frac{d|\bar{\Psi}_m|}{dt} e^{j\mu} + |\bar{\Psi}_m| \frac{de^{j\mu}}{dt} = \frac{d\bar{\Psi}_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{d|\bar{i}_m|}{dt} e^{j\mu} + L_m |\bar{i}_m| j e^{j\mu} \frac{d\mu}{dt} \\
&= L \frac{d\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}{dt} e^{j\mu} + L_m |\bar{i}_m| j e^{j\mu} \frac{d}{dt} \left(\text{atan} \frac{i_{my}}{i_{mx}} \right) = L \frac{1}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}} \left(i_{mx} \frac{di_{mx}}{dt} + i_{my} \frac{di_{my}}{dt} \right) e^{j\mu} \\
&+ L_m |\bar{i}_m| j e^{j\mu} \frac{1}{1 + \left(\frac{i_{my}}{i_{mx}} \right)^2} \frac{1}{i_{mx}^2} \left(i_{mx} \frac{di_{my}}{dt} - i_{my} \frac{di_{mx}}{dt} \right) \\
&= \left(L \left(\frac{i_{mx}}{|\bar{i}_m|} \frac{di_{mx}}{dt} + \frac{i_{my}}{|\bar{i}_m|} \frac{di_{my}}{dt} \right) + j L_m \left(\frac{i_{mx}}{|\bar{i}_m|} \frac{di_{my}}{dt} - \frac{i_{my}}{|\bar{i}_m|} \frac{di_{mx}}{dt} \right) \right) e^{j\mu} \\
&= \left(L \left(\cos \mu \frac{di_{mx}}{dt} + \sin \mu \frac{di_{my}}{dt} \right) + j L_m \left(\cos \mu \frac{di_{my}}{dt} - \sin \mu \frac{di_{mx}}{dt} \right) \right) (\cos \mu + j \sin \mu) \\
&= \left((L \cos^2 \mu + L_m \sin^2 \mu) \frac{di_{mx}}{dt} + (L - L_m) \sin \mu \cos \mu \frac{di_{my}}{dt} \right) \\
&+ j \left((L - L_m) \sin \mu \cos \mu \frac{di_{mx}}{dt} + (L \sin^2 \mu + L_m \cos^2 \mu) \frac{di_{my}}{dt} \right)
\end{aligned}$$

Siendo:

$\mu = \text{atan} \frac{i_{my}}{i_{mx}}$, argumento del fasor espacial de flujo magnetizante (y también del fasor espacial de corriente magnetizante, bajo la hipótesis adoptada de ausencia de pérdidas en el hierro),

$L = \frac{d|\bar{\Psi}_m|}{d|\bar{i}_m|}$, inductancia magnetizante dinámica

$L = \frac{|\bar{\Psi}_m|}{|\bar{i}_m|}$, inductancia magnetizante estática

APÉNDICE D. MODELOS DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN CON UNA JAULA ROTÓRICA (O ROTOR BOBINADO) EN EL SISTEMA GENÉRICO DE REFERENCIA.

D.1. Modelo en términos de flujos de estator y rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s \frac{L_{rl} + L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} & -\omega_g & -R_s \frac{L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} & 0 \\ \omega_g & R_s \frac{L_{rl} + L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} & 0 & -R_s \frac{L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} \\ -R_r \frac{L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} & 0 & R_r \frac{L_{sl} + L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & -R_r \frac{L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} & (\omega_g - \omega) & R_r \frac{L_{sl} + L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{sx} \\ \psi_{sy} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sx} \\ \psi_{sy} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} (\psi_{sy} \psi_{rx} - \psi_{sx} \psi_{ry})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

D.2. Modelo en términos de corrientes de estator y rotor.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{sx} \\ \mathbf{u}_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g(L_{sl} + L_m) & 0 & -\omega_g L_m \\ \omega_g(L_{sl} + L_m) & R_s & \omega_g L_m & 0 \\ 0 & -(\omega_g - \omega)L_m & R_r & -(\omega_g - \omega)(L_{rl} + L_m) \\ (\omega_g - \omega)L_m & 0 & (\omega_g - \omega)(L_{rl} + L_m) & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{sl} + L_{mx} & L_{mxy} & L_{mx} & L_{mxy} \\ L_{mxy} & L_{sl} + L_{my} & L_{mxy} & L_{my} \\ L_{mx} & L_{mxy} & L_{rl} + L_{mx} & L_{mxy} \\ L_{mxy} & L_{my} & L_{mxy} & L_{rl} + L_{my} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5PL_m (i_{sy}i_{rx} - i_{sx}i_{ry})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

Siendo:

$$L_{mx} = L_m + \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{(i_{sx} + i_{rx})^2}{\sqrt{(i_{sx} + i_{rx})^2 + (i_{sy} + i_{ry})^2}}$$

$$L_{my} = L_m + \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{(i_{sy} + i_{ry})^2}{\sqrt{(i_{sx} + i_{rx})^2 + (i_{sy} + i_{ry})^2}}$$

$$L_{mxy} = \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{(i_{sx} + i_{rx})(i_{sy} + i_{ry})}{\sqrt{(i_{sx} + i_{rx})^2 + (i_{sy} + i_{ry})^2}}$$

D.2

D.3. Modelo en términos de corrientes de estator y magnetizante.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{sx} \\ \mathbf{u}_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & -\omega_g \mathbf{L}_{sl} & 0 & -\omega_g \mathbf{L}_m \\ \omega_g \mathbf{L}_{sl} & \mathbf{R}_s & \omega_g \mathbf{L}_m & 0 \\ -\mathbf{R}_r & (\omega_g - \omega) \mathbf{L}_{rl} & \mathbf{R}_r & -(\omega_g - \omega)(\mathbf{L}_{rl} + \mathbf{L}_m) \\ -(\omega_g - \omega) \mathbf{L}_{rl} & -\mathbf{R}_r & (\omega_g - \omega)(\mathbf{L}_{rl} + \mathbf{L}_m) & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{sx} \\ \mathbf{i}_{sy} \\ \mathbf{i}_{mx} \\ \mathbf{i}_{my} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{sl} & 0 & \mathbf{L}_{mx} & \mathbf{L}_{mxy} \\ 0 & \mathbf{L}_{sl} & \mathbf{L}_{mxy} & \mathbf{L}_{my} \\ -\mathbf{L}_{rl} & 0 & \mathbf{L}_{rl} + \mathbf{L}_{mx} & \mathbf{L}_{mxy} \\ 0 & -\mathbf{L}_{rl} & \mathbf{L}_{mxy} & \mathbf{L}_{rl} + \mathbf{L}_{my} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{sx} \\ \mathbf{i}_{sy} \\ \mathbf{i}_{mx} \\ \mathbf{i}_{my} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5 \mathbf{P} \mathbf{L}_m (\mathbf{i}_{sy} \mathbf{i}_{mx} - \mathbf{i}_{sx} \mathbf{i}_{my})$$

$$t_e - t_l = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{P}} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{P}} \omega$$

Siendo:

$$\mathbf{L}_{mx} = \mathbf{L}_m + \frac{d\mathbf{L}_m}{d|\bar{\mathbf{i}}_m|} \frac{\mathbf{i}_{mx}^2}{\sqrt{\mathbf{i}_{mx}^2 + \mathbf{i}_{my}^2}}$$

$$\mathbf{L}_{my} = \mathbf{L}_m + \frac{d\mathbf{L}_m}{d|\bar{\mathbf{i}}_m|} \frac{\mathbf{i}_{my}^2}{\sqrt{\mathbf{i}_{mx}^2 + \mathbf{i}_{my}^2}}$$

$$\mathbf{L}_{mxy} = \frac{d\mathbf{L}_m}{d|\bar{\mathbf{i}}_m|} \frac{\mathbf{i}_{mx} \mathbf{i}_{my}}{\sqrt{\mathbf{i}_{mx}^2 + \mathbf{i}_{my}^2}}$$

D.4. Modelo en términos de corrientes magnetizante y de rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g(L_{sl} + L_m) & -R_s & \omega_g L_{sl} \\ \omega_g(L_{sl} + L_m) & R_s & -\omega_g L_{sl} & -R_s \\ 0 & -(\omega_g - \omega)L_m & R_r & -(\omega_g - \omega)L_{rl} \\ (\omega_g - \omega)L_m & 0 & (\omega_g - \omega)L_{rl} & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{mx} \\ i_{my} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{sl} + L_{mx} & L_{mxy} & -L_{sl} & 0 \\ L_{mxy} & L_{sl} + L_{my} & 0 & -L_{sl} \\ L_{mx} & L_{mxy} & L_{rl} & 0 \\ L_{mxy} & L_{my} & 0 & L_{rl} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{mx} \\ i_{my} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5PL_m(i_{my}i_{rx} - i_{mx}i_{ry})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

Siendo:

$$L_{mx} = L_m + \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{i_{mx}^2}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

$$L_{my} = L_m + \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{i_{my}^2}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

$$L_{mxy} = \frac{dL_m}{d|\bar{i}_m|} \frac{i_{mx}i_{my}}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

D.4

D.5. Modelo en términos de flujo de estator y corriente magnetizante.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{L_{sl}} & -\omega_g & -\frac{R_s}{L_{sl}} L_m & 0 \\ \omega_g & \frac{R_s}{L_{sl}} & 0 & -\frac{R_s}{L_{sl}} L_m \\ -\frac{R_r}{L_{sl}} & (\omega_g - \omega) \frac{L_{rl}}{L_{sl}} & R_r \left(1 + \frac{L_m}{L_{sl}}\right) & -(\omega_g - \omega) \left(L_{rl} + L_m \left(1 + \frac{L_{rl}}{L_{sl}}\right) \right) \\ -(\omega_g - \omega) \frac{L_{rl}}{L_{sl}} & -\frac{R_r}{L_{sl}} & (\omega_g - \omega) \left(L_{rl} + L_m \left(1 + \frac{L_{rl}}{L_{sl}}\right) \right) & R_r \left(1 + \frac{L_m}{L_{sl}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{L_{rl}}{L_{sl}} & 0 & L_{rl} + \left(1 + \frac{L_{rl}}{L_{sl}}\right) L_{mx} & \left(1 + \frac{L_{rl}}{L_{sl}}\right) L_{mxy} \\ 0 & -\frac{L_{rl}}{L_{sl}} & \left(1 + \frac{L_{rl}}{L_{sl}}\right) L_{mxy} & L_{rl} + \left(1 + \frac{L_{rl}}{L_{sl}}\right) L_{my} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_{sl}} (\Psi_{sy} i_{mx} - \Psi_{sx} i_{my})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

Siendo:

$$L_{mx} = L_m + \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{mx}^2}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

$$L_{my} = L_m + \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{my}^2}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

$$L_{mxy} = \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{mx} i_{my}}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

D.6. Modelo en términos de corriente magnetizante y flujo de rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s \left(1 + \frac{L_m}{L_{rl}}\right) & -\omega_g \left(L_{sl} + L_m \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}}\right)\right) & -\frac{R_s}{L_{rl}} & \omega_g \frac{L_{sl}}{L_{rl}} \\ \omega_g \left(L_{sl} + L_m \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}}\right)\right) & R_s \left(1 + \frac{L_m}{L_{rl}}\right) & -\omega_g \frac{L_{sl}}{L_{rl}} & -\frac{R_s}{L_{rl}} \\ -\frac{R_r}{L_{rl}} L_m & 0 & \frac{R_r}{L_{rl}} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & -\frac{R_r}{L_{rl}} L_m & (\omega_g - \omega) & \frac{R_r}{L_{rl}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{mx} \\ i_{my} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{sl} + \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}}\right) L_{mx} & \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}}\right) L_{mxy} & -\frac{L_{sl}}{L_{rl}} & 0 \\ \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}}\right) L_{mxy} & L_{sl} + \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}}\right) L_{my} & 0 & -\frac{L_{sl}}{L_{rl}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{mx} \\ i_{my} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_{rl}} (i_{my} \psi_{rx} - i_{mx} \psi_{ry})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

Siendo:

$$L_{mx} = L_m + \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{mx}^2}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

$$L_{my} = L_m + \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{my}^2}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

$$L_{mxy} = \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{mx} i_{my}}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

D.7. Modelo en términos de flujo y corriente de estator.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_g & R_s & 0 \\ \omega_g & 0 & 0 & R_s \\ \frac{R_r}{L_m} & -\left(\omega_g - \omega\right)\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right) & -R_r\left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right) & \left(\omega_g - \omega\right)\left(L_{rl} + L_{sl}\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right)\right) \\ \left(\omega_g - \omega\right)\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right) & \frac{R_r}{L_m} & -\left(\omega_g - \omega\right)\left(L_{rl} + L_{sl}\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right)\right) & -R_r\left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ i_{sx} \\ i_{sy} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 + \frac{L_{rl}}{L_m}(1 - \alpha_x) & -\frac{L_{rl}}{L_m}\alpha_{xy} & -\left(L_{rl} + L_{sl}\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}(1 - \alpha_x)\right)\right) & \frac{L_{rl}}{L_m}\alpha_{xy} \\ -\frac{L_{rl}}{L_m}\alpha_{xy} & 1 + \frac{L_{rl}}{L_m}(1 - \alpha_y) & \frac{L_{rl}}{L_m}\alpha_{xy} & -\left(L_{rl} + L_{sl}\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}(1 - \alpha_y)\right)\right) \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ i_{sx} \\ i_{sy} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$t_e = 1,5P(\Psi_{sy} i_{mx} - \Psi_{sx} i_{my})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

$$\alpha_x = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\Psi}_m|} \frac{(\Psi_{sx} - L_{sl} i_{sx})^2}{\sqrt{(\Psi_{sx} - L_{sl} i_{sx})^2 + (\Psi_{sy} - L_{sl} i_{sy})^2}}$$

Siendo:

$$\alpha_y = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\Psi}_m|} \frac{(\Psi_{sy} - L_{sl} i_{sy})^2}{\sqrt{(\Psi_{sx} - L_{sl} i_{sx})^2 + (\Psi_{sy} - L_{sl} i_{sy})^2}}$$

$$\alpha_{xy} = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\Psi}_m|} \frac{(\Psi_{sx} - L_{sl} i_{sx})(\Psi_{sy} - L_{sl} i_{sy})}{\sqrt{(\Psi_{sx} - L_{sl} i_{sx})^2 + (\Psi_{sy} - L_{sl} i_{sy})^2}}$$

D.8. Modelo en términos de flujos de estator y magnetizante.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{L_{sl}} & -\omega_g & -\frac{R_s}{L_{sl}} & 0 \\ \omega_g & \frac{R_s}{L_{sl}} & 0 & -\frac{R_s}{L_{sl}} \\ -\frac{R_r}{L_{sl}} & (\omega_g - \omega) \frac{L_{rl}}{L_{sl}} & R_r \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_m} \right) & -(\omega_g - \omega) \left(1 + L_{rl} \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_m} \right) \right) \\ -(\omega_g - \omega) \frac{L_{rl}}{L_{sl}} & -\frac{R_r}{L_{sl}} & (\omega_g - \omega) \left(1 + L_{rl} \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_m} \right) \right) & R_r \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_m} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{L_{rl}}{L_{sl}} & 0 & 1 + L_{rl} \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_m} (1 - \alpha_x) \right) & -\frac{L_{rl}}{L_m} \alpha_{xy} \\ 0 & -\frac{L_{rl}}{L_{sl}} & -\frac{L_{rl}}{L_m} \alpha_{xy} & 1 + L_{rl} \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_m} (1 - \alpha_x) \right) \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{1}{L_{sl}} (\Psi_{sy} \Psi_{mx} - \Psi_{sx} \Psi_{my})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

$$\alpha_x = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\Psi_m|} \frac{\Psi_{mx}^2}{\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}}$$

Siendo:

$$\alpha_y = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\Psi_m|} \frac{\Psi_{my}^2}{\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}}$$

$$\alpha_{xy} = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\Psi_m|} \frac{\Psi_{mx} \Psi_{my}}{\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}}$$

D.8

D.9. Modelo en términos de corriente de estator y flujo magnetizante.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g L_{sl} & 0 & -\omega_g \\ \omega_g L_{sl} & R_s & \omega_g & 0 \\ -R_r & (\omega_g - \omega)L_{rl} & \frac{R_r}{L_m} & -(\omega_g - \omega)\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right) \\ -(\omega_g - \omega)L_{rl} & -R_r & (\omega_g - \omega)\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right) & \frac{R_r}{L_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{sl} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & L_{sl} & 0 & 1 \\ -L_{rl} & 0 & 1 + \frac{L_{rl}}{L_m}(1 - \alpha_x) & -\frac{L_{rl}}{L_m}\alpha_{xy} \\ 0 & -L_{rl} & -\frac{L_{rl}}{L_m}\alpha_{xy} & 1 + \frac{L_{rl}}{L_m}(1 - \alpha_y) \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P(i_{sy}\Psi_{mx} - i_{sx}\Psi_{my})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

Siendo:

$$\alpha_x = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\Psi_m|} \frac{\Psi_{mx}^2}{\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}}$$

$$\alpha_y = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\Psi_m|} \frac{\Psi_{my}^2}{\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}}$$

$$\alpha_{xy} = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\Psi_m|} \frac{\Psi_{mx}\Psi_{my}}{\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}}$$

D.10. Modelo en términos de flujo y corriente de rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{L_m} & -\omega_g \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right) & -R_s \left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right) & \omega_g \left(L_{sl} + L_{rl} \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right)\right) \\ \omega_g \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right) & \frac{R_s}{L_m} & -\omega_g \left(L_{sl} + L_{rl} \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right)\right) & -R_s \left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right) \\ 0 & -(\omega_g - \omega) & R_r & 0 \\ (\omega_g - \omega) & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 1 + \frac{L_{sl}}{L_m} (1 - \alpha_x) & -\frac{L_{sl}}{L_m} \alpha_{xy} & -\left(L_{sl} + L_{rl} \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m} (1 - \alpha_x)\right)\right) & \frac{L_{sl} L_{rl}}{L_m} \alpha_{xy} \\ -\frac{L_{sl}}{L_m} \alpha_{xy} & 1 + \frac{L_{sl}}{L_m} (1 - \alpha_x) & \frac{L_{sl} L_{rl}}{L_m} \alpha_{xy} & -\left(L_{sl} + L_{rl} \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m} (1 - \alpha_x)\right)\right) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P(\Psi_{ry}i_{rx} - \Psi_{rx}i_{ry})$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

Siendo:

$$\alpha_x = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\Psi}_m|} \frac{(\Psi_{rx} - L_{rl}i_{rx})^2}{\sqrt{(\Psi_{rx} - L_{rl}i_{rx})^2 + (\Psi_{ry} - L_{rl}i_{ry})^2}}$$

$$\alpha_y = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\Psi}_m|} \frac{(\Psi_{ry} - L_{rl}i_{ry})^2}{\sqrt{(\Psi_{rx} - L_{rl}i_{rx})^2 + (\Psi_{ry} - L_{rl}i_{ry})^2}}$$

$$\alpha_{xy} = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\Psi}_m|} \frac{(\Psi_{rx} - L_{rl}i_{rx})(\Psi_{ry} - L_{rl}i_{ry})}{\sqrt{(\Psi_{rx} - L_{rl}i_{rx})^2 + (\Psi_{ry} - L_{rl}i_{ry})^2}}$$

D.11. Modelo en términos de flujos magnetizante y de rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) & -\omega_g \left(1 + L_{sl} \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) \right) & -\frac{R_s}{L_{rl}} & \omega_g \frac{L_{sl}}{L_{rl}} \\ \omega_g \left(1 + L_{sl} \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) \right) & R_s \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) & -\omega_g \frac{L_{sl}}{L_{rl}} & -\frac{R_s}{L_{rl}} \\ -\frac{R_r}{L_{rl}} & 0 & \frac{R_r}{L_{rl}} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & -\frac{R_r}{L_{rl}} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_r}{L_{rl}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{mx} \\ \psi_{my} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + L_{sl} \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} (1 - \alpha_x) \right) & -\frac{L_{sl}}{L_m} \alpha_{xy} & -\frac{L_{sl}}{L_{rl}} & 0 \\ -\frac{L_{sl}}{L_m} \alpha_{xy} & 1 + L_{sl} \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} (1 - \alpha_y) \right) & 0 & -\frac{L_{sl}}{L_{rl}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{mx} \\ \psi_{my} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{1}{L_{rl}} (\psi_{my} \psi_{rx} - \psi_{ry} \psi_{mx})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

Siendo:

$$\alpha_x = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\psi}_m|} \frac{\psi_{mx}^2}{\sqrt{\psi_{mx}^2 + \psi_{my}^2}}$$

$$\alpha_y = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\psi}_m|} \frac{\psi_{my}^2}{\sqrt{\psi_{mx}^2 + \psi_{my}^2}}$$

$$\alpha_{xy} = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\psi}_m|} \frac{\psi_{mx} \psi_{my}}{\sqrt{\psi_{mx}^2 + \psi_{my}^2}}$$

D.12. Modelo en términos de corriente de rotor y flujo magnetizante.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{L_m} & -\omega_g \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right) & -R_s & \omega_g L_{sl} \\ \omega_g \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right) & \frac{R_s}{L_m} & -\omega_g L_{sl} & -R_s \\ 0 & -(\omega_g - \omega) & R_r & -(\omega_g - \omega)L_{rl} \\ (\omega_g - \omega) & 0 & (\omega_g - \omega)L_{rl} & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{mx} \\ \psi_{my} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \frac{L_{sl}}{L_m}(1 - \alpha_x) & -\frac{L_{sl}}{L_m}\alpha_{xy} & -L_{sl} & 0 \\ -\frac{L_{sl}}{L_m}\alpha_{xy} & 1 + \frac{L_{sl}}{L_m}(1 - \alpha_y) & 0 & -L_{sl} \\ 0 & 0 & L_{rl} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{rl} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{mx} \\ \psi_{my} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P(\psi_{my}i_{rx} - \psi_{mx}i_{ry})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

Siendo:

$$\alpha_x = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\psi}_m|} \frac{\psi_{mx}^2}{\sqrt{\psi_{mx}^2 + \psi_{my}^2}}$$

$$\alpha_y = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\psi}_m|} \frac{\psi_{my}^2}{\sqrt{\psi_{mx}^2 + \psi_{my}^2}}$$

$$\alpha_{xy} = \frac{1}{L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\psi}_m|} \frac{\psi_{mx} \psi_{my}}{\sqrt{\psi_{mx}^2 + \psi_{my}^2}}$$

D.12

D.13. Modelo en términos de corriente de estator y flujo de rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g \left(L_{sl} + \frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} L_m \right) & 0 & -\omega_g \frac{L_m}{L_{rl} + L_m} \\ \omega_g \left(L_{sl} + \frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} L_m \right) & R_s & \omega_g \frac{L_m}{L_{rl} + L_m} & 0 \\ -R_r \frac{L_m}{L_{rl} + L_m} & 0 & \frac{R_r}{L_{rl} + L_m} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & -R_r \frac{L_m}{L_{rl} + L_m} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_r}{L_{rl} + L_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} L_{sl} + \frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} (L_m + L_{rl}\beta_x) & \frac{L_{rl}^2}{L_{rl} + L_m} \beta_{xy} & \frac{1}{L_{rl} + L_m} (L_m + L_{rl}\beta_x) & \frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \beta_{xy} \\ \frac{L_{rl}^2}{L_{rl} + L_m} \beta_{xy} & L_{sl} + \frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} (L_m + L_{rl}\beta_y) & \frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} \beta_{xy} & \frac{1}{L_{rl} + L_m} (L_m + L_{rl}\beta_y) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_{rl} + L_m} (i_{sy} \Psi_{rx} - i_{sx} \Psi_{ry})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

Siendo:

$$\beta_x = \frac{1}{L_{rl} + L_m} \frac{dL_m}{d|L_{rl}\bar{i}_s + \bar{\Psi}_r|} \frac{(L_{rl}i_{sx} + \Psi_{rx})^2}{\sqrt{(L_{rl}i_{sx} + \Psi_{rx})^2 + (L_{rl}i_{sy} + \Psi_{ry})^2}}$$

$$\beta_y = \frac{1}{L_{rl} + L_m} \frac{dL_m}{d|L_{rl}\bar{i}_s + \bar{\Psi}_r|} \frac{(L_{rl}i_{sy} + \Psi_{ry})^2}{\sqrt{(L_{rl}i_{sx} + \Psi_{rx})^2 + (L_{rl}i_{sy} + \Psi_{ry})^2}}$$

$$\beta_{xy} = \frac{1}{L_{rl} + L_m} \frac{dL_m}{d|L_{rl}\bar{i}_s + \bar{\Psi}_r|} \frac{(L_{rl}i_{sx} + \Psi_{rx})(L_{rl}i_{sy} + \Psi_{ry})}{\sqrt{(L_{rl}i_{sx} + \Psi_{rx})^2 + (L_{rl}i_{sy} + \Psi_{ry})^2}}$$

con $\frac{dL_m}{d|L_{rl}\bar{i}_s + \bar{\Psi}_r|} = \begin{cases} \frac{1}{\frac{L_{rl} + L_m}{dL_m} + |\bar{i}_m|} \\ \frac{d|\bar{i}_m|}{L_m} \end{cases}$ o bien: $\frac{L_m}{\frac{L_{rl} + L_m}{dL_m} - \frac{L_{rl}}{L_m} |\bar{\Psi}_m|}$ $\frac{d|\bar{\Psi}_m|}{d|\bar{\Psi}_m|}$

D.14. Modelo en términos de flujo de estator y corriente de rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{L_{sl} + L_m} & -\omega_g & -R_s \frac{L_m}{L_{sl} + L_m} & -0 \\ \omega_g & \frac{R_s}{L_{sl} + L_m} & 0 & -R_s \frac{L_m}{L_{sl} + L_m} \\ 0 & -(\omega_g - \omega) \frac{L_m}{L_{sl} + L_m} & R_r & -(\omega_g - \omega) \left(L_{rl} + \frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_m} L_m \right) \\ (\omega_g - \omega) \frac{L_m}{L_{sl} + L_m} & 0 & (\omega_g - \omega) \left(L_{rl} + \frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_m} L_m \right) & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{sx} \\ \psi_{sy} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_{sl} + L_m} (L_m + L_{sl} \gamma_x) & \frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_m} \gamma_{xy} & L_{rl} + \frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_m} (L_m + L_{sl} \gamma_x) & \frac{L_{sl}^2}{L_{sl} + L_m} \gamma_{xy} \\ \frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_m} \gamma_{xy} & \frac{1}{L_{sl} + L_m} (L_m + L_{sl} \gamma_y) & \frac{L_{sl}^2}{L_{sl} + L_m} \gamma_{xy} & L_{rl} + \frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_m} (L_m + L_{sl} \gamma_y) \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sx} \\ \psi_{sy} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_{sl} + L_m} (\psi_{sy} i_{rx} - \psi_{sx} i_{ry})$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

Siendo:

$$\gamma_x = \frac{1}{L_{sl} + L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\psi}_s + L_{sl} \bar{i}_r|} \frac{(\psi_{sx} + L_{sl} i_{rx})^2}{\sqrt{(\psi_{sx} + L_{sl} i_{rx})^2 + (\psi_{sy} + L_{sl} i_{ry})^2}} \\
 \gamma_y = \frac{1}{L_{sl} + L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\psi}_s + L_{sl} \bar{i}_r|} \frac{(\psi_{sy} + L_{sl} i_{ry})^2}{\sqrt{(\psi_{sx} + L_{sl} i_{rx})^2 + (\psi_{sy} + L_{sl} i_{ry})^2}} \\
 \gamma_{xy} = \frac{1}{L_{sl} + L_m} \frac{dL_m}{d|\bar{\psi}_s + L_{sl} \bar{i}_r|} \frac{(\psi_{sx} + L_{sl} i_{rx})(\psi_{sy} + L_{sl} i_{ry})}{\sqrt{(\psi_{sx} + L_{sl} i_{rx})^2 + (\psi_{sy} + L_{sl} i_{ry})^2}}$$

con $\frac{dL_m}{|\bar{\psi}_s + L_{sl} \bar{i}_r|} = \begin{cases} \frac{1}{\frac{L_{sl} + L_m}{dL_m} + |\bar{i}_m|} \\ \frac{d|\bar{i}_m|}{L_m} \\ \text{o bien:} \\ \frac{L_{sl} + L_m}{d|\bar{\psi}_m|} - \frac{L_{sl}}{L_m} |\bar{\psi}_m| \end{cases}$

APÉNDICE E. MODELOS DE DOBLE JAULA PARA EL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN EN EL SISTEMA GENÉRICO DE REFERENCIA.

E.1. Modelo formulado en términos de flujo de estator y flujos asociados a las jaulas rotóricas interna y externa.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} R_s(L_{11}L_{21} + (L_{121} + L_m)(L_{11} + L_{21})) & -\omega_g D & -R_s L_{21} L_m & 0 & -R_s L_{11} L_m & 0 \\ R_s(L_{11}L_{21} + (L_{121} + L_m)(L_{11} + L_{21})) & \omega_g D & 0 & -R_s L_{21} L_m & 0 & -R_s L_{11} L_m \\ -R_1 L_{21} L_m & 0 & R_1(L_{s1}L_m + (L_{21} + L_{121})(L_{s1} + L_m)) & -(\omega_g - \omega)D & -R_1(L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)) & 0 \\ 0 & 0 & (\omega_g - \omega)D & R_1(L_{s1}L_m + (L_{21} + L_{121})(L_{s1} + L_m)) & 0 & -R_1(L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)) \\ -R_2 L_{11} L_m & 0 & -R_2(L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)) & 0 & R_2(L_{s1}L_m + (L_{11} + L_{121})(L_{s1} + L_m)) & -(\omega_g - \omega)D \\ 0 & 0 & -R_2 L_{11} L_m & -R_2(L_{s1}L_m + L_{121}(L_{s1} + L_m)) & (\omega_g - \omega)D & R_2(L_{s1}L_m + (L_{11} + L_{121})(L_{s1} + L_m)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_{sx} \\ \psi_{sy} \\ \psi_{1x} \\ \psi_{1y} \\ \psi_{2x} \\ \psi_{2y} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sx} \\ \psi_{sy} \\ \psi_{1x} \\ \psi_{1y} \\ \psi_{2x} \\ \psi_{2y} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{D} (\psi_{sy} (L_{21}\psi_{1x} + L_{11}\psi_{2x}) - \psi_{sx} (L_{21}\psi_{1y} + L_{11}\psi_{2y}))$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

Siendo:

$$D = (L_{s1} + L_m)(L_{11}L_{21} + L_{121}(L_{11} + L_{21})) + L_{s1}L_m(L_{11} + L_{21})$$

E.2. Modelo formulado en términos de corrientes de estator y de las jaulas rotóricas interna y externa.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g(L_{sl} + L_m) & 0 & -\omega_g L_m & 0 & -\omega_g L_m \\ \omega_g(L_{sl} + L_m) & R_s & \omega_g L_m & 0 & \omega_g L_m & 0 \\ 0 & -(\omega_g - \omega)L_m & R_1 & -(\omega_g - \omega)(L_{11} + L_{121} + L_m) & 0 & -(\omega_g - \omega)(L_{121} + L_m) \\ (\omega_g - \omega)L_m & 0 & (\omega_g - \omega)(L_{11} + L_{121} + L_m) & R_1 & (\omega_g - \omega)(L_{121} + L_m) & 0 \\ 0 & -(\omega_g - \omega)L_m & 0 & -(\omega_g - \omega)(L_{121} + L_m) & R_2 & -(\omega_g - \omega)(L_{21} + L_{121} + L_m) \\ (\omega_g - \omega)L_m & 0 & (\omega_g - \omega)(L_{121} + L_m) & 0 & (\omega_g - \omega)(L_{21} + L_{121} + L_m) & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{1x} \\ i_{1y} \\ i_{2x} \\ i_{2y} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} L_{sl} + L_{mx} & L_{mxy} & L_{mx} & L_{mxy} & L_{mx} & L_{mxy} \\ L_{mxy} & L_{sl} + L_{my} & L_{mxy} & L_{my} & L_{mxy} & L_{my} \\ L_{mx} & L_{mxy} & L_{11} + L_{121} + L_{mx} & L_{mxy} & L_{121} + L_{mx} & L_{mxy} \\ L_{mxy} & L_{my} & L_{mxy} & L_{11} + L_{121} + L_{my} & L_{mxy} & L_{121} + L_{my} \\ L_{mx} & L_{mxy} & L_{121} + L_{mx} & L_{mxy} & L_{21} + L_{121} + L_{mx} & L_{mxy} \\ L_{mxy} & L_{my} & L_{mxy} & L_{121} + L_{my} & L_{mxy} & L_{21} + L_{121} + L_{my} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{1x} \\ i_{1y} \\ i_{2x} \\ i_{2y} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5PL_m(i_{sy}(i_{1x} + i_{2x}) - i_{sx}(i_{1y} + i_{2y}))$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

$$L_{mx} = L_m + \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{(i_{sx} + i_{1x} + i_{2x})^2}{\sqrt{(i_{sx} + i_{1x} + i_{2x})^2 + (i_{sy} + i_{1y} + i_{2y})^2}}$$

$$\text{Siendo: } L_{my} = L_m + \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{(i_{sy} + i_{1y} + i_{2y})^2}{\sqrt{(i_{sx} + i_{1x} + i_{2x})^2 + (i_{sy} + i_{1y} + i_{2y})^2}}$$

$$L_{mxy} = \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{(i_{sx} + i_{1x} + i_{2x})(i_{sy} + i_{1y} + i_{2y})}{\sqrt{(i_{sx} + i_{1x} + i_{2x})^2 + (i_{sy} + i_{1y} + i_{2y})^2}}$$

E.2

E.3. Modelo formulado en términos de corrientes de estator, magnetizante y de la jaula rotórica interna.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g L_{sl} & 0 & -\omega_g L_m & 0 & 0 \\ \omega_g L_{sl} & R_s & \omega_g L_m & 0 & 0 & 0 \\ -R_2 & (\omega_g - \omega)(L_{21} + L_{121}) & R_2 & -(\omega_g - \omega)(L_{21} + L_{121} + L_m) & -R_2 & (\omega_g - \omega)L_{21} \\ -(\omega_g - \omega)(L_{21} + L_{121}) & -R_2 & (\omega_g - \omega)(L_{21} + L_{121} + L_m) & R_2 & -(\omega_g - \omega)L_{21} & -R_2 \\ 0 & (\omega_g - \omega)L_{121} & 0 & -(\omega_g - \omega)(L_{121} + L_m) & R_1 & -(\omega_g - \omega)L_{11} \\ -(\omega_g - \omega)L_{121} & 0 & (\omega_g - \omega)(L_{121} + L_m) & 0 & (\omega_g - \omega)L_{11} & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \\ i_{1x} \\ i_{1y} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} L_{sl} & 0 & L_{mx} & L_{mxy} & 0 & 0 \\ 0 & L_{sl} & L_{mxy} & L_{my} & 0 & 0 \\ -(L_{21} + L_{121}) & 0 & L_{21} + L_{121} + L_{mx} & L_{mxy} & -L_{21} & 0 \\ 0 & -(L_{21} + L_{121}) & L_{mxy} & L_{21} + L_{121} + L_{my} & 0 & -L_{21} \\ -L_{121} & 0 & L_{121} + L_{mx} & L_{mxy} & L_{11} & 0 \\ 0 & -L_{121} & L_{mxy} & L_{121} + L_{my} & 0 & L_{11} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \\ i_{1x} \\ i_{1y} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5PL_m(i_{sy}i_{mx} - i_{sx}i_{my})$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

$$L_{mx} = L_m + \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{mx}^2}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

$$\text{Siendo: } L_{my} = L_m + \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{my}^2}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

$$L_{mxy} = \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{mx}i_{my}}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

E.4. Modelo formulado en términos de corrientes de estator, magnetizante y de la jaula rotórica externa.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g L_{sl} & 0 & -\omega_g L_m & 0 & 0 \\ \omega_g L_{sl} & R_s & \omega_g L_m & 0 & 0 & 0 \\ -R_1 & (\omega_g - \omega)(L_{11} + L_{121}) & R_1 & -(\omega_g - \omega)(L_{11} + L_{121} + L_m) & -R_1 & (\omega_g - \omega)L_{11} \\ -(\omega_g - \omega)(L_{11} + L_{121}) & -R_1 & (\omega_g - \omega)(L_{11} + L_{121} + L_m) & R_1 & -(\omega_g - \omega)L_{11} & -R_1 \\ 0 & (\omega_g - \omega)L_{121} & 0 & -(\omega_g - \omega)(L_{121} + L_m) & R_2 & -(\omega_g - \omega)L_{21} \\ -(\omega_g - \omega)L_{121} & 0 & (\omega_g - \omega)(L_{121} + L_m) & 0 & (\omega_g - \omega)L_{21} & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \\ i_{2x} \\ i_{2y} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} L_{sl} & 0 & L_{mx} & L_{mxy} & 0 & 0 \\ 0 & L_{sl} & L_{mxy} & L_{my} & 0 & 0 \\ -(L_{11} + L_{121}) & 0 & L_{11} + L_{121} + L_{mx} & L_{mxy} & -L_{11} & 0 \\ 0 & -(L_{11} + L_{121}) & L_{mxy} & L_{11} + L_{121} + L_{my} & 0 & -L_{11} \\ -L_{121} & 0 & L_{121} + L_{mx} & L_{mxy} & L_{21} & 0 \\ 0 & -L_{121} & L_{mxy} & L_{121} + L_{my} & 0 & L_{21} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \\ i_{2x} \\ i_{2y} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5PL_m(i_{sy}i_{mx} - i_{sx}i_{my})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

$$L_{mx} = L_m + \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{mx}^2}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

$$\text{Siendo: } L_{my} = L_m + \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{my}^2}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

$$L_{mxy} = \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{mx}i_{my}}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

E.4

E.5. Modelo formulado en términos de corrientes magnetizante, y de las jaulas rotóricas interna y externa.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g(L_{sl} + L_m) & -R_s & \omega_g L_{sl} & -R_s & \omega_g L_{sl} \\ \omega_g(L_{sl} + L_m) & R_s & -\omega_g L_{sl} & -R_s & -\omega_g L_{sl} & -R_s \\ 0 & -(\omega_g - \omega)L_m & R_1 & -(\omega_g - \omega)(L_{11} + L_{121}) & 0 & -(\omega_g - \omega)L_{121} \\ (\omega_g - \omega)L_m & 0 & (\omega_g - \omega)(L_{11} + L_{121}) & R_1 & (\omega_g - \omega)L_{121} & 0 \\ 0 & -(\omega_g - \omega)L_m & 0 & -(\omega_g - \omega)L_{121} & R_2 & -(\omega_g - \omega)(L_{21} + L_{121}) \\ (\omega_g - \omega)L_m & 0 & (\omega_g - \omega)L_{121} & 0 & (\omega_g - \omega)(L_{21} + L_{121}) & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{mx} \\ i_{my} \\ i_{1x} \\ i_{1y} \\ i_{2x} \\ i_{2y} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} L_{sl} + L_{mx} & L_{mxy} & -L_{sl} & 0 & -L_{sl} & 0 \\ L_{mxy} & L_{sl} + L_{my} & 0 & -L_{sl} & 0 & -L_{sl} \\ L_{mx} & L_{mxy} & L_{11} + L_{121} & 0 & L_{121} & 0 \\ L_{mxy} & L_{my} & 0 & L_{11} + L_{121} & 0 & L_{121} \\ L_{mx} & L_{mxy} & L_{121} & 0 & L_{21} + L_{121} & 0 \\ L_{mxy} & L_{my} & 0 & L_{121} & 0 & L_{21} + L_{121} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{mx} \\ i_{my} \\ i_{1x} \\ i_{1y} \\ i_{2x} \\ i_{2y} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5PL_m(i_{my}(i_{1x} + i_{2x}) - i_{mx}(i_{1y} + i_{2y}))$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

$$L_{mx} = L_m + \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{mx}^2}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

$$\text{Siendo: } L_{my} = L_m + \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{my}^2}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

$$L_{mxy} = \frac{dL_m}{d|i_m|} \frac{i_{mx} i_{my}}{\sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}}$$

APÉNDICE F. MODELOS CON CONSIDERACIÓN APROXIMADA DEL FENÓMENO DE LA SATURACIÓN MAGNÉTICA PARA EL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN CON UNA JAULA ROTÓRICA (O ROTOR BOBINADO) EN EL SISTEMA GENÉRICO DE REFERENCIA.

F.1. Modelo en términos de flujos de estator y rotor.¹

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s \frac{L_{rl} + L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} & -\omega_g & -R_s \frac{L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} & 0 \\ \omega_g & R_s \frac{L_{rl} + L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} & 0 & -R_s \frac{L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} \\ -R_r \frac{L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} & 0 & R_r \frac{L_{sl} + L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & -R_r \frac{L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} & (\omega_g - \omega) & R_r \frac{L_{sl} + L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{sx} \\ \psi_{sy} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sx} \\ \psi_{sy} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_{sl}L_{rl} + L_m(L_{sl} + L_{rl})} (\psi_{sy} \psi_{rx} - \psi_{sx} \psi_{ry})$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

¹ Con la formulación en términos de flujos de estator y rotor se obtiene un modelo exacto, no aproximado. Se incluye en este apéndice por considerar todos los conjuntos posibles de variables de estado.

F.2. Modelo en términos de corrientes de estator y rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g(L_{sl} + L_m) & 0 & -\omega_g L_m \\ \omega_g(L_{sl} + L_m) & R_s & \omega_g L_m & 0 \\ 0 & -(\omega_g - \omega)L_m & R_r & -(\omega_g - \omega)(L_{rl} + L_m) \\ (\omega_g - \omega)L_m & 0 & (\omega_g - \omega)(L_{rl} + L_m) & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{sl} + L_m & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_{sl} + L_m & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_{rl} + L_m & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_{rl} + L_m \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5PL_m(i_{sy}i_{rx} - i_{sx}i_{ry})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

F.3. Modelo en términos de corrientes de estator y magnetizante.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g L_{sl} & 0 & -\omega_g L_m \\ \omega_g L_{sl} & R_s & \omega_g L_m & 0 \\ -R_r & (\omega_g - \omega)L_{rl} & R_r & -(\omega_g - \omega)(L_{rl} + L_m) \\ -(\omega_g - \omega)L_{rl} & -R_r & (\omega_g - \omega)(L_{rl} + L_m) & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{sl} & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_{sl} & 0 & L_m \\ -L_{rl} & 0 & L_{rl} + L_m & 0 \\ 0 & -L_{rl} & 0 & L_{rl} + L_m \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5PL_m(i_{sy}i_{mx} - i_{sx}i_{my})$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

F.4. Modelo en términos de corrientes magnetizante y de rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g(L_{sl} + L_m) & -R_s & \omega_g L_{sl} \\ \omega_g(L_{sl} + L_m) & R_s & -\omega_g L_{sl} & -R_s \\ 0 & -(\omega_g - \omega)L_m & R_r & -(\omega_g - \omega)L_{rl} \\ (\omega_g - \omega)L_m & 0 & (\omega_g - \omega)L_{rl} & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{mx} \\ i_{my} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{sl} + L_m & 0 & -L_{sl} & 0 \\ 0 & L_{sl} + L_m & 0 & -L_{sl} \\ L_m & 0 & L_{rl} & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_{rl} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{mx} \\ i_{my} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5PL_m(i_{my}i_{rx} - i_{mx}i_{ry})$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

F.5. Modelo en términos de flujo de estator y corriente magnetizante.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{L_{sl}} & -\omega_g & -\frac{R_s}{L_{sl}}L_m & 0 \\ \omega_g & \frac{R_s}{L_{sl}} & 0 & -\frac{R_s}{L_{sl}}L_m \\ -\frac{R_r}{L_{sl}} & (\omega_g - \omega)\frac{L_{rl}}{L_{sl}} & R_r\left(1 + \frac{L_m}{L_{sl}}\right) & -(\omega_g - \omega)\left(L_{rl} + L_m\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_{sl}}\right)\right) \\ -(\omega_g - \omega)\frac{L_{rl}}{L_{sl}} & -\frac{R_r}{L_{sl}} & (\omega_g - \omega)\left(L_{rl} + L_m\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_{sl}}\right)\right) & R_r\left(1 + \frac{L_m}{L_{sl}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{L_{rl}}{L_{sl}} & 0 & L_{rl} + \left(1 + \frac{L_{rl}}{L_{sl}}\right)L_m & 0 \\ 0 & -\frac{L_{rl}}{L_{sl}} & 0 & L_{rl} + \left(1 + \frac{L_{rl}}{L_{sl}}\right)L_m \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_{sl}} (\Psi_{sy} i_{mx} - \Psi_{sx} i_{my})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

F.6. Modelo en términos de corriente magnetizante y flujo de rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s \left(1 + \frac{L_m}{L_{rl}} \right) & -\omega_g \left(L_{sl} + L_m \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}} \right) \right) & -\frac{R_s}{L_{rl}} & \omega_g \frac{L_{sl}}{L_{rl}} \\ \omega_g \left(L_{sl} + L_m \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}} \right) \right) & R_s \left(1 + \frac{L_m}{L_{rl}} \right) & -\omega_g \frac{L_{sl}}{L_{rl}} & -\frac{R_s}{L_{rl}} \\ -\frac{R_r}{L_{rl}} L_m & 0 & \frac{R_r}{L_{rl}} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & -\frac{R_r}{L_{rl}} L_m & (\omega_g - \omega) & \frac{R_r}{L_{rl}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{mx} \\ i_{my} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{sl} + \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}} \right) L_m & 0 & -\frac{L_{sl}}{L_{rl}} & 0 \\ 0 & L_{sl} + \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_{rl}} \right) L_m & 0 & -\frac{L_{sl}}{L_{rl}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{mx} \\ i_{my} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_{rl}} (i_{my} \psi_{rx} - i_{mx} \psi_{ry})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

F.7. Modelo en términos de flujo y corriente de estator.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_g & R_s & 0 \\ \omega_g & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_r}{L_m} & -(\omega_g - \omega)\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right) & -R_r\left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right) & (\omega_g - \omega)\left(L_{rl} + L_{sl}\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right)\right) \\ (\omega_g - \omega)\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right) & \frac{R_r}{L_m} & -(\omega_g - \omega)\left(L_{rl} + L_{sl}\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right)\right) & -R_r\left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{sx} \\ \psi_{sy} \\ i_{sx} \\ i_{sy} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 + \frac{L_{rl}}{L_m} & 0 & -\left(L_{rl} + L_{sl}\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right)\right) & 0 \\ 0 & 1 + \frac{L_{rl}}{L_m} & 0 & -\left(L_{rl} + L_{sl}\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right)\right) \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sx} \\ \psi_{sy} \\ i_{sx} \\ i_{sy} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P(\psi_{sy} i_{mx} - \psi_{sx} i_{my})$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

F.8. Modelo en términos de flujos de estator y magnetizante.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{L_{sl}} & -\omega_g & -\frac{R_s}{L_{sl}} & 0 \\ \omega_g & \frac{R_s}{L_{sl}} & 0 & -\frac{R_s}{L_{sl}} \\ -\frac{R_r}{L_{sl}} & (\omega_g - \omega) \frac{L_{rl}}{L_{sl}} & R_r \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_m} \right) & -(\omega_g - \omega) \left(1 + L_{rl} \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_m} \right) \right) \\ -(\omega_g - \omega) \frac{L_{rl}}{L_{sl}} & -\frac{R_r}{L_{sl}} & (\omega_g - \omega) \left(1 + L_{rl} \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_m} \right) \right) & R_r \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_m} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{L_{rl}}{L_{sl}} & 0 & 1 + L_{rl} \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_m} \right) & 0 \\ 0 & -\frac{L_{rl}}{L_{sl}} & 0 & 1 + L_{rl} \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_m} \right) \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{1}{L_{sl}} (\Psi_{sy} \Psi_{mx} - \Psi_{sx} \Psi_{my})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

F.9. Modelo en términos de corriente de estator y flujo magnetizante.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g L_{sl} & 0 & -\omega_g \\ \omega_g L_{sl} & R_s & \omega_g & 0 \\ -R_r & (\omega_g - \omega)L_{rl} & \frac{R_r}{L_m} & -(\omega_g - \omega)\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right) \\ -(\omega_g - \omega)L_{rl} & -R_r & (\omega_g - \omega)\left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right) & \frac{R_r}{L_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{sl} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & L_{sl} & 0 & 1 \\ -L_{rl} & 0 & 1 + \frac{L_{rl}}{L_m} & 0 \\ 0 & -L_{rl} & 0 & 1 + \frac{L_{rl}}{L_m} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P(i_{sy}\Psi_{mx} - i_{sx}\Psi_{my})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

F.10. Modelo en términos de flujo y corriente de rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{L_m} & -\omega_g \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right) & -R_s \left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right) & \omega_g \left(L_{sl} + L_{rl} \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right)\right) \\ \omega_g \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right) & \frac{R_s}{L_m} & -\omega_g \left(L_{sl} + L_{rl} \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right)\right) & -R_s \left(1 + \frac{L_{rl}}{L_m}\right) \\ 0 & -(\omega_g - \omega) & R_r & 0 \\ (\omega_g - \omega) & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 + \frac{L_{sl}}{L_m} & 0 & -\left(L_{sl} + L_{rl} \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right)\right) & 0 \\ 0 & 1 + \frac{L_{sl}}{L_m} & 0 & -\left(L_{sl} + L_{rl} \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right)\right) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P(\psi_{ry}i_{rx} - \psi_{rx}i_{ry})$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

F.11. Modelo en términos de flujos magnetizante y de rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) & -\omega_g \left(1 + L_{sl} \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) \right) & -\frac{R_s}{L_{rl}} & \omega_g \frac{L_{sl}}{L_{rl}} \\ \omega_g \left(1 + L_{sl} \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) \right) & R_s \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) & -\omega_g \frac{L_{sl}}{L_{rl}} & -\frac{R_s}{L_{rl}} \\ -\frac{R_r}{L_{rl}} & 0 & \frac{R_r}{L_{rl}} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & -\frac{R_r}{L_{rl}} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_r}{L_{rl}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{mx} \\ \psi_{my} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + L_{sl} \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) & 0 & -\frac{L_{sl}}{L_{rl}} & 0 \\ 0 & 1 + L_{sl} \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) & 0 & -\frac{L_{sl}}{L_{rl}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{mx} \\ \psi_{my} \\ \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{1}{L_{rl}} (\psi_{my} \psi_{rx} - \psi_{ry} \psi_{mx})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

F.12. Modelo en términos de corriente de rotor y flujo magnetizante.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{L_m} & -\omega_g \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right) & -R_s & \omega_g L_{sl} \\ \omega_g \left(1 + \frac{L_{sl}}{L_m}\right) & \frac{R_s}{L_m} & -\omega_g L_{sl} & -R_s \\ 0 & -(\omega_g - \omega) & R_r & -(\omega_g - \omega)L_{rl} \\ (\omega_g - \omega) & 0 & (\omega_g - \omega)L_{rl} & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{mx} \\ \psi_{my} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \frac{L_{sl}}{L_m} & 0 & -L_{sl} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{L_{sl}}{L_m} & 0 & -L_{sl} \\ 1 & 0 & L_{rl} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_{rl} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{mx} \\ \psi_{my} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P(\psi_{my}i_{rx} - \psi_{mx}i_{ry})$$

$$t_e - t_i = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

F.13. Modelo en términos de corriente de estator y flujo de rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_g \left(L_{sl} + \frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} L_m \right) & 0 & -\omega_g \frac{L_m}{L_{rl} + L_m} \\ \omega_g \left(L_{sl} + \frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} L_m \right) & R_s & \omega_g \frac{L_m}{L_{rl} + L_m} & 0 \\ -R_r \frac{L_m}{L_{rl} + L_m} & 0 & \frac{R_r}{L_{rl} + L_m} & -(\omega_g - \omega) \\ 0 & -R_r \frac{L_m}{L_{rl} + L_m} & (\omega_g - \omega) & \frac{R_r}{L_{rl} + L_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} L_{sl} + \frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} L_m & 0 & \frac{1}{L_{rl} + L_m} L_m & 0 \\ 0 & L_{sl} + \frac{L_{rl}}{L_{rl} + L_m} L_m & 0 & \frac{1}{L_{rl} + L_m} L_m \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_{rl} + L_m} (i_{sy} \Psi_{rx} - i_{sx} \Psi_{ry})$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$

F.14. Modelo en términos de flujo de estator y corriente de rotor.

$$\begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{L_{sl} + L_m} & -\omega_g & -R_s \frac{L_m}{L_{sl} + L_m} & -0 \\ \omega_g & \frac{R_s}{L_{sl} + L_m} & 0 & -R_s \frac{L_m}{L_{sl} + L_m} \\ 0 & -(\omega_g - \omega) \frac{L_m}{L_{sl} + L_m} & R_r & -(\omega_g - \omega) \left(L_{rl} + \frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_m} L_m \right) \\ (\omega_g - \omega) \frac{L_m}{L_{sl} + L_m} & 0 & (\omega_g - \omega) \left(L_{rl} + \frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_m} L_m \right) & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_{sl} + L_m} L_m & 0 & L_{rl} + \frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_m} L_m & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{sl} + L_m} L_m & 0 & L_{rl} + \frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_m} L_m \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix}$$

$$t_e = 1,5P \frac{L_m}{L_{sl} + L_m} (\Psi_{sy} i_{rx} - \Psi_{sx} i_{ry})$$

$$t_e - t_1 = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{P} \omega$$