5 Formalización del modelo

Tipos de periodos

Se considera un horizonte de planificación de T periodos.

Un periodo se puede corresponder con un día o bien con un turno horario dentro de un día. Por ejemplo si se pretende organizar el trabajo de 10 semanas y cada día tiene dos turnos horarios – mañana y tarde- el número total de periodos a considerar sería

$$T = 10 \times 7 \times 2 = 140 \text{ periodos}$$

Los periodos se clasifican según la demanda de viajes en n tipos de periodos diferentes. La demanda de viajes en periodos del mismo tipo es idéntica.

Sea el conjunto de tipos de periodo

$$\{1,2,\ldots,n\}$$

Sobre cada tipo de periodo se ha planteado y resuelto un problema de *Crew scheduling* que ha dado como resultado las jornadas de trabajo de cada tipo de periodo.

Sea d_i es el número de jornadas de trabajo del tipo de periodo i

$$d_1, d_2, \ldots, d_n$$

$$d = \max\{ d_1, d_2, \ldots, d_n\}$$

Sea t_i el número de periodos tipo i en el horizonte de planificación, por lo tanto se cumplirá

$$T = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$$

Para cada periodo y para cada tipo de periodo se define

$$b_{ki} = \begin{cases} 0 & si\ el\ periodo\ k\ no\ es\ de\ tipo\ i \\ 1 & si\ el\ periodo\ k\ es\ de\ tipo\ i \end{cases}$$

Se cumplirá

$$\sum_{k=1}^{T} b_{ki} = t_i \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ki} = 1 \qquad \forall k \in \{1, 2, \ldots, T\}$$

Se define también el conjunto formado por todos los índices de los periodos del tipo i como

$$K_i = \{ k \mid b_{ki} = 1\}$$

Número de conductores

El número total de jornadas de trabajo con un horizonte de planificación que abarca T periodos será

$$W = \sum_{i=1}^{n} d_i t_i$$

Sea r el ratio entre el número de periodos libres y el número de periodos totales:

$$r = \frac{periodos\ libres}{periodos\ totales}$$

Por ejemplo, en el caso de que cada semana tuviera dos días libres el rátio sería r = 2/7.

En el supuesto de haber dos turnos horarios: mañana y tarde, el número total de periodos en una semana sería $7x2$ de los cuales un mismo conductor sólo podría trabajar en 5 de ellos por lo tanto el ratio sería r = 9/14.

El número de periodos libres que le corresponde a un trabajador en T periodos será como media

$$rT$$

y en consecuencia el número de jornadas que puede hacer un conductor en T periodos será como media de

$$T - rT = T(1 - r)$$

Sea C una cota inferior del número de conductores mínimo necesario para cubrir la demanda:

$$C = \left\lceil \frac{W}{T(1-r)} \right\rceil$$

Se asume también que en ningún periodo hacen falta más de C conductores simultáneamente, en caso contrario se debería aumentar el número mínimo de conductores al máximo de estas dos cantidades:

$$C = max\left(\left\lceil \frac{W}{T(1-r)} \right\rceil, D \right)$$

Donde D representa el número máximo de jornadas de trabajo tales que dos cualesquiera de ellas no podrían ser hechas por el mismo conductor. Se observa que cuando se trata de un solo turno horario el número de conductores simultáneos D coincide con el número máximo de jornadas de trabajo pertenecientes al mismo tipo de periodo

$$D = d = max\{ d_1, d_2, ..., d_n \}$$

Sin embargo cuando se trabaja con más de un turno horario, D es la suma máxima de las jornadas de trabajo de los periodos incompatibles.

Jornadas de trabajo

$A_1 = \{a_1^1, a_2^1, \quad ... \quad , a_{d_1}^1\}$ jornadas de trabajo de los periodos tipo 1

$A_2 = \{a_1^2, a_2^2, \quad ... \quad , a_{d_2}^2\}$ jornadas de trabajo de los periodos tipo 2

...

$A_n = \{a_1^n, a_2^n, \quad ... \quad , a_{d_n}^n\}$ jornadas de trabajo de los periodos tipo n

Cada jornada de trabajo a_j^i se caracteriza por:

- Un lugar de incorporación: u_j^i
- Una hora de inicio: s_j^i
- Un tiempo de trabajo: b_j^i

Se añade a los tipos de periodos con menos de d jornadas de trabajo, tantas jornadas ficticias como hagan falta para completar un número de d jornadas.

Es decir si $d_i < d$ se crean $a_{d_i+1}^i, a_{d_i+2}^i, \ ... \ , a_d^i$

De modo que a partir de este momento todos los tipos de periodos tienen el mismo número de jornadas.

$A'_1 = \{a_1^1, a_2^1, \quad ... \quad , a_d^1\}$ jornadas de trabajo de los periodos tipo 1 incluidas las ficticias

$A'_2 = \{a_1^2, a_2^2, \quad ... \quad , a_d^2\}$ jornadas de trabajo de los periodos tipo 2 incluidas las ficticias

...

$A'_n = \{a_1^n, a_2^n, \quad ... \quad , a_d^n\}$ jornadas de trabajo de los periodos tipo n incluidas las ficticias

Una jornada ficticia se caracterizará por:

- Un lugar de incorporación comodín.
- Una hora de inicio comodín.
- Un tiempo de trabajo igual a 0

El tiempo total de trabajo en T periodos será:

$$H = \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{j=1}^{d_i} b_j^i$$

Con lo cual si se repartiera equitativamente entre todos los conductores, a cada trabajador le correspondería un tiempo de trabajo:

$$\frac{H}{C}$$

Patrones de períodos libres

Sea el conjunto de patrones

$$\Pi = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$$

donde cada elemento representa una combinación determinada de periodos de trabajo y descanso.

$$P_p = (a_1^p, a_2^p, \ldots, a_T^p) \quad donde \quad a_k^p = \begin{cases} 0 & si\ el\ periodo\ k\ es\ libre\ en\ el\ patrón\ P_p \\ 1 & si\ el\ periodo\ k\ es\ de\ trabajo\ en\ el\ patrón\ P_p \end{cases}$$

Se supone que todos los patrones de Π son patrones válidos, es decir que tienen un ratio r entre periodos libres y periodos totales y que cumplen cualquier otro requisito impuesto, como puede ser el número adecuado de fines de semana libres o la alternancia entre los distintos turnos horarios.

Se define

$$f_i^p = \sum_{k=1}^{T} b_{ki}(1 - a_k^p)$$

como el número de periodos de tipo i libres en el patrón p.

Se observa que

$$f_i^p \leq t_i$$

alcanzándose la igualdad en el caso de que en el patrón p no se trabajara ningún periodo de tipo i.

Sea

$$F_i = \max_p \{f_i^p\}$$

esto es, el número máximo de periodos de tipo i libres que tiene cualquier patrón.

<u>Definición</u>: Tipo de periodo obligatorio

Un tipo de periodo i será obligatorio si y sólo si $F_i < t_i$

Listas de tareas

Una lista de tareas será un elemento del producto cartesiano:

$$L = A_1' \times A_2' \times \ldots \times A_n' \times \Pi$$

ya que una lista de tareas es una combinación determinada de jornadas de trabajo para cada tipo de periodo, más un patrón de periodos libres.

$$L_l = \left(a_{l_1}^1, a_{l_2}^2, \ldots, a_{l_n}^n, P_{p_l} \right)$$

Como a una lista de tareas corresponde siempre un único patrón, por simplificar la notación se define

$$\boldsymbol{d}_k^l = \boldsymbol{a}_k^{P_l}$$

Del mismo modo a cada lista de tareas corresponde una única jornada de trabajo por tipo de periodo, con el fin de simplificar la notación se define

$$\boldsymbol{g}_{ji}^l = \begin{cases} 0 & si\ l_i \neq j \\ 1 & si\ l_i = j \end{cases}$$

Luego para cada lista de tarea l y para cada tipo de periodo i se tiene

$$\sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{g}_{ji}^l = 1$$

Para cada lista de tareas l es posible calcular el número de horas trabajadas en T periodos

$$w_l = \sum_{k=1}^{T} \boldsymbol{d}_k^l \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{b}_{ki} \sum_{j=1}^{d_i} b_j^i \boldsymbol{g}_{ji}^l$$

y en consecuencia también el coste o penalización de dicha lista por apartarse del número de horas estimado como valor ideal en un reparto equitativo de la carga de trabajo

$$c_l = \left| w_l - \frac{H}{C} \right|$$

El número de listas de tareas diferentes será

$$Card(L) = d^n \cdot m$$

Sea $\hat{L} \subset L$ el subconjunto de listas de tareas válidas, es decir aquellas que cumplen:

- El lugar de incorporación de todas las jornadas de trabajo es el mismo.
- La hora de incorporación es similar, es decir no se permitirá que formen parte de la misma lista de tareas dos jornadas de trabajo cuyas horas de incorporación al trabajo disten mucho. La diferencia horaria máxima permitida podrá variar en cada caso concreto.

- No hay jornadas de trabajo ficticias en periodos de trabajo, es decir que si el patrón asociado a la lista de tareas l tiene el periodo k de tipo i como un periodo de trabajo, entonces la jornada de trabajo asociada a ese tipo de periodo debe ser real y por lo tanto su índice menor o igual a d_i

$$\left.\begin{array}{l} d_k^l = 1 \\ b_{ki} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow l_i \leq d_i$$

Tan sólo existe una excepción y es cuando el tipo de periodo i está representando un día de fiesta intersemanal. Debe tenerse en cuenta que en este caso si el día de fiesta coincide con un día de descanso en el patrón, dicho día de fiesta debe retribuírsele de todas formas al trabajador. Por lo tanto si corresponde a un día de trabajo y tiene una jornada ficticia asignada, se le concederá como día de descanso sin cargo alguno para la empresa.

- No hay jornadas de trabajo reales que no vayan a ser realizadas nunca, es decir que si un patrón no trabaja ningún periodo de tipo i ese tipo de periodo tiene asignado una jornada ficticia, esto es una jornada cuyo índice es mayor que d_i

$$f_i^{p_l} = t_i \Rightarrow l_i > d_i$$

De entre todas las listas de tareas válidas, sólo un pequeño número de ellas será escogido para ser asignadas a los conductores en la solución buscada.

Sea $\tilde{L}$ el subconjunto formado por las listas de tareas finalmente asignadas a los conductores.

<u>Proposición 1</u>

Una combinación determinada de jornadas de trabajo $\left(a_{l_1}^1, a_{l_2}^2, ..., a_{l_n}^n\right)$ puede formar parte como máximo de e listas de tareas de $\tilde{L}$ donde $e = \left\lfloor \frac{1}{1-r} \right\rfloor$

Demostración

Cuando una jornada de trabajo de tipo i es asignada a un trabajador, este deberá trabjar en ella durante todos los periodos de tipo i que le corresponda trabajar. Para que la misma jornada pudiera ser asignada a otro trabajador sería necesario que el primero librara suficientes periodos de tipo i como para que el segundo pudiera tener asignada la misma jornada.

A partir del ratio r entre periodos libres y periodos totales, es posible determinar el número máximo de trabajadores que podrían compartir las mismas jornadas de trabajo, combinando desde luego convenientemente los patrones de periodos libres.

$$e = \left\lfloor \frac{Periodos \quad totales}{Periodos \quad trabajo} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{Periodos \quad totales}{Periodos \quad totales - Periodos \quad libres} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{1-r} \right\rfloor$$

Ejemplos

Si $r = \frac{2}{7}$ entonces $e = \left\lfloor \frac{1}{1-\frac{2}{7}} \right\rfloor = 1$

lo cual quiere decir que dos trabajadores distintos no podrán compartir la misma combinación de jornadas de trabajo ya que las ausencias del primero no son suficientes para proporcionar los periodos de trabajo necesarios para el segundo.

No ocurre lo mismo si es rátio es $r = \frac{14}{9}$

Si $r = \frac{9}{14}$ entonces $e = \left\lfloor \frac{1}{1 - \frac{9}{14}} \right\rfloor = 2$

y en este caso si pueden compartir dos trabajadores distintos la misma combinación de jornadas de trabajo, pero no tres.

Sea r_i el rátio máximo de periodos libres de tipo i que puede tener un patrón

$$r_i = \frac{F_i}{t_i} \leq 1$$

<u>Proposición 2</u>

Si $r_i < 1$ entonces una jornada de trabajo real a^i_j puede estar como máximo en e_i listas de tareas de $\tilde{L}$ donde $e_i = \left\lfloor \frac{1}{1 - r_i} \right\rfloor$

Demostración

Supongamos que la jornada de trabajo real a^i_j estuviera en q listas de tareas de $\tilde{L}$, tendrían que compartir los periodos de tipo i esto es

$$t_i \geq q(t_i - F_i)$$

y como ninguno de los patrones de estas listas podría tener todos los periodo de tipo i libres

$$q \leq \frac{t_i}{t_i - F_i} = \frac{1}{1 - r_i}$$

y dado que q es un número entero

$$q \leq \left\lfloor \frac{1}{1 - r_i} \right\rfloor = e_i$$

Conductores fijos y corre-turnos

Los conductores fijos son aquellos que tienen una lista de tareas asignada, a diferencia de los conductores corre-turnos que no tienen lista de tareas asignada sino que cubren las ausencias de dos o más conductores fijos.

Sea C_1 el número de conductores fijo y C_2 el número de conductores corre-turno.

$$C = C_1 + C_2$$

La proporción entre C_1 y C_2 puede variar ya que a pesar de que existan periodos suficientes con una misma jornada de trabajo por cubrir, no es necesario que sean cubiertas por un conductor fijo, podrían hacerlo uno o varios corre-turnos.

En principio parece deseable que haya tantos conductores fijos como sea posible.

Si existe algún tipo de periodo obligatorio, es decir un tipo de periodo donde todos los patrones válidos tengan periodos de trabajo de ese tipo, entonces existe una cota superior para C_1.

Proposición 3

Si $\exists i^* \in \{1,2,...,n\} \quad tal\ que \quad F_{i^*} < t_{i^*}$

Entonces $C_1 \leq C_1' = \underset{F_i < t_i}{Min} \{d_i e_i\}$

Demostración

Todas las listas de tareas tienen que tener una jornada de trabajo real en los periodos obligatorios.

Una misma jornada de trabajo real a_j^i puede repetirse como máximo en e_i listas de tareas de $\tilde{L}$, luego puede haber como máximo $d_i e_i$ conductores fijos.

Planteamiento con sólo fijos

Se trata de escoger el mayor número posible de listas de tareas de entre todas las listas válidas del conjunto $\hat{L}$ tales que:

- El tiempo de trabajo en todas ellas sea similar al estimado como ideal, esto es: $\frac{H}{C}$.
- En ningún periodo coincidan dos trabajadores fijos con la misma jornada de trabajo.
- En ningún periodo queden por cubrir más de C_2 jornadas de trabajo.

  Se observa que $C_2 = C - C_1$ es el número de conductores corre-turno en el caso de que se trabajara con el número mínimo de conductores necesarios para cubrir la demanda y con un número C_1 de conductores fijos.

Se definen las variables

$$z_l = \begin{cases} 0 & \text{si la lista } l \text{ no es seleccionada} \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y las constantes l_1 y l_2 para ponderar el peso relativo del doble objetivo que se plantea, por un lado que haya el mayor número posible de conductores fijos y por el otro que el número de horas trabajadas por todos ellos sea similar.

$$Minimizar\left[l_1 \left(C_1' - C_1 \right) + l_2 \max_l \{ c_l z_l \} \right]$$

s.a.

$$\sum_l z_l = C_1 \qquad (1)$$

$$\sum_l d_k^l g_{ji}^l z_l \leq 1 \qquad \forall (k, j) \in K_i \times \{1,2,\ldots,d_i\} \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (2)$$

$$\sum_l d_k^l z_l \geq d_i - C_2 \qquad \forall k \in K_i \quad \forall i = 1\ldots n \qquad (3)$$

$$C = C_1 + C_2 \qquad (4)$$

$$z_l \in \{0,1\} \qquad \forall l$$

(1) El número de listas de tareas seleccionas está determinando el número de conductores fijos, ya que un conductor fijo es por definición aquel que realiza la misma jornada de trabajo todos los periodos del mismo tipo.

(2) Esta restricción garantiza que no se presentaran a trabajar en ningún periodo dos conductores fijos con la misma jornada de trabajo asignada.

(3) Por último esta restricción garantizará que el número de jornadas de trabajo que quedan por cubrir en cualquier periodo no superará el número de conductores corre-turno.

(4) Establece que la suma de conductores fijos y corre-turnos debe coincidir con el parámetro C que representa el número mínimo de conductores necesarios para cubrir la demanda.

La función objetivo se ha expresado como la suma ponderada mediante los factores l_1 y l_2 de dos conceptos:

- Por un lado el asignar el mayor número posible de listas de tareas, es decir el contar con el mayor número posible de conductores fijos. Esto se ha reflejado mediante la diferencia de la variable C_1 o número de conductores fijos a su cota superior: C_1' calculada según se indica en la proposición 3.

- Por otro lado el conseguir listas de tareas lo más equilibradas posibles, esto es listas de tareas donde los trabajadores asignados a ellas trabajen un número de horas lo más parecido posible al número estimado domo ideal: $\frac{H}{C}$. Se recuerda que el coste c_l de una lista de tareas está calculado en función de la diferencia a este número

$$c_l = \left| w_l - \frac{H}{C} \right|$$

La expresión que aquí se ha adoptado es la de conseguir que la diferencia máxima o coste máximo sea lo más reducido posible. Otras alternativa sería la de hacer mínima la suma de los costes de las listas escogidas, en ese caso la función objetivo sería

$$Minimizar\left[l_1 (C_1' - C_1) + l_2 \sum_l c_l z_l \right]$$

Formulación equivalente

Una formulación alternativa y algo más compacta se obtiene al sustituir las variables C_1 y C_2 por sus expresiones en función de las variables z_l

$$C_1 = \sum_l z_l$$

$$C_2 = C - \sum_l z_l$$

El programa resultante es:

$$Min\left[l_1 \left(C_1' - \sum_l z_l \right) + l_2 \, \underset{l}{Max} \{ c_l z_l \} \right]$$

s.a.

$$\sum_l d_k^l g_{ji}^l z_l \leq 1 \qquad \forall (k, j) \in K_i \times \{1,2,...,d_i\} \quad i = 1,2,...,n$$

$$\sum_l (d_k^l - 1) z_l \geq d_i - C \qquad \forall k \in K_i \quad \forall i = 1...n$$

$$z_l \in \{0,1\} \qquad \forall l$$

Conclusiones

De la observación del modelo planteado se desprende la imposibilidad de tratarlo directamente, no solo porque posee un número muy elevado de variables sino también por el gran número de restricciones que plantea.

A modo de ejemplo se cuantifica el tamaño del modelo para el caso concreto que se resuelve en el capítulo 6.

Tipos de periodos diferentes:	$n=6$
Horizonte de planificación:	$T=304$ periodos
Número de jornadas de trabajo por tipo de periodo:	$d=10$
Número de patrones diferentes:	$m=14$
El número de variables binarias del modelo sería:	14×10^6
El número de restricciones del modelo:	**3344**