

SOBRE LA EXISTENCIA DEL ESQUEMA DE HILBERT  
DE LOS GERMENES DE CURVA DE  $(\mathbb{K}^N, 0)$ .

Memoria presentada por Juan  
Elías García para aspirar al  
grado de Doctor en Matemáticas  
(por la Universidad de Barce-  
lona).

R. 12.980

Tesis

ELI-



SOBRE LA EXISTENCIA DEL ESQUEMA DE HILBERT  
DE LOS GERMENES DE CURVA DE  $(k^N, 0)$ .

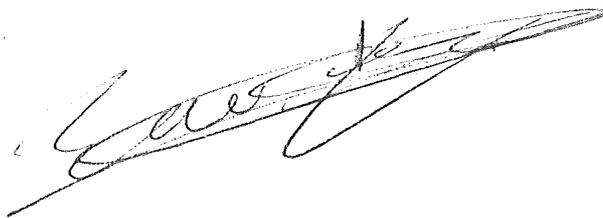
Memoria presentada por Juan  
Elías García para aspirar al  
grado de Doctor en Matemáticas  
(por la Universidad de Barce-  
lona).

Eduardo Canas Alvero  
Catedrático del Departamento  
de Topología y Geometría  
de la Facultad de Matemáticas de la  
Universidad de Barcelona.

**CERTIFICA:**

Que la presenta memoria ha sido  
realizada bajo su dirección por  
Juan Elías García, y que constituye  
su tesis para aspirar al grado de  
Doctor en Matemáticas.

Barcelona, a 7 de Diciembre de 1984

A handwritten signature in dark ink, appearing to read 'Eduardo Canas Alvero', written in a cursive style. The signature is positioned below the date and is partially obscured by a horizontal line.

Als meus pares.

## INDICE

INTRODUCCION.	i-vii
CAPITULO I: PRELIMINARES	1
CAPITULO II: VARIACION DEL ORDEN DE SINGULARIDAD POR PROYECCION.	
1. Proyección de gérmenes de curvas.	15
2. Variación del orden de singularidad de una rama por proyección.	31
3. Variación del orden de singularidad de un germen por proyección.	36
CAPITULO III: TEOREMA DE TRUNCACION.	
1. Propiedades de los ideales que se conservan por contacto elevado.	51
2. Teorema de truncación para gérmenes de curva reducida de $(k^N, o)$ .	65
3. Comentarios sobre los teoremas de truncación.	78
CAPITULO IV: CONSTRUCCION DEL ESQUEMA DE HILBERT DE LOS GERMENES DE CURVA DE $(k^N, o)$ CON POLINOMIO DE HILBERT-SAMUEL $p(T)$ .	
1. Familias de gérmenes de curvas.	81
2. La variedad $W(n, r, F)$ .	90
3. Construcción del esquema de Hilbert de los gérmenes de curva de $(k^N, o)$ con polinomio de Hilbert-Samuel $p(T)$ .	103
4. El espacio tangente de $H_{N, p(T)}$ en un punto racional.	118
5. Familias normalmente planas de gérmenes de curva.	122
CAPITULO V: SOBRE LOS GERMENES DE CURVA DE $(k^N, o)$ .	
1. Construcción de $CH_{p(T), \delta, n+1}$ .	125
2. Ideales perfectos de altura dos de $k\langle\langle X_1, \dots, X_N \rangle\rangle$ .	137
3. Cálculo de la dimensión de $CH_{p(T), \delta, n+1}$ para el polinomio $p(T) = \frac{1}{2}v(v-1)T - \frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$ .	163
APENDICE I: ELEMENTOS SUPERFICIALES.	177
APENDICE II: IDEALES PERFECTOS DE ALTURA DOS.	181
APENDICE III: SISTEMAS DE GENERADORES.	183
BIBLIOGRAFIA.	187

**INTRODUCCION.**

## INTRODUCCION:

Esta memoria pretende contribuir al estudio de las singularidades de los gérmenes de curva alabeada en los tres aspectos siguientes:

- (A) Propiedades de los gérmenes de curva que quedan determinadas por una de sus truncaciones.
- (B) Existencia de esquemas que parametrizan gérmenes de curva, o truncaciones de gérmenes, con ciertos invariantes prefijados.
- (C) Número de ecuaciones requeridas por un germen de curva y su relación con las propiedades del germen.

En la presente memoria  $k$  será un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero,  $R_N$  el anillo de series formales  $k[[X_1, \dots, X_N]]$  y  $(k^N, o)$  el esquema  $\text{Spec}(R_N)$ .

Un germen de curva de  $(k^N, o)$  es un subesquema cerrado de  $(k^N, o)$ , unidimensional y de Cohen-Macaulay. Si  $X = \text{Spec}(R_N/I)$  es un germen de curva, la truncación  $n$ -ésima de  $X$  será el esquema cero-dimensional  $X_n = \text{Spec}(R_N/I + X_1, \dots, X_N)^n$ .

En lo referente a las cuestiones del tipo (A), el resultado más notable es el "Teorema de Truncación" (Capítulo II, teorema 2.2). En él se establece la existencia de una función  $w: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  tal que, fijado  $\delta$ , el tipo analítico de cualquier germen de curva  $X$  de orden de singularidad no superior a  $\delta$ , está determinado por cualquiera de sus truncaciones  $X_n$  con  $n \geq w(\delta)$ .

Como corolario del resultado anterior obtenemos el "Teorema de Truncación Efectiva" (Capítulo II, teorema 2.7): sea  $X = \text{Spec}(k \llbracket X_1, X_2, X_3 \rrbracket / I)$  un germen de curva reducida de  $(k^3, 0)$  con orden de singularidad menor o igual que  $\delta$ , y  $A$  una matriz, con coeficiente de  $k \llbracket X_1, X_2, X_3 \rrbracket$  y dimensiones  $v \times (v-1)$ , cuyos menores maximales engendren  $I$ . Para todo  $n \geq w(\delta)$  el ideal  $J$  engendrado por los menores maximales de la matriz  $B$ , obtenida truncando módulo  $n$  los coeficientes de  $A$ , es analíticamente equivalente a  $I$ .

Acerca de las cuestiones del tipo (B), se ha construido un esquema  $H_{N,p}(T)$  que parametriza, en el sentido de "moduli" (ver NEW chap 1 § 2), los gérmenes de curva de  $(k^N, 0)$  con polinomio de Hilbert-Samuel fijado  $p(T)$ . El esquema  $H_{N,p}(T)$  se llamará "esquema de Hilbert de los gérmenes de curva de  $(k^N, 0)$  con polinomio de Hilbert-Samuel  $p(T)$ ".

El concepto de familia que se utiliza es una debilitación del de familia normalmente plana (Capítulo IV prop. 1.6). En la sección 5 del capítulo IV se prueba la existencia de un esquema que parametriza los gérmenes de curva de  $(k^N, 0)$  con función de Hilbert-Samuel fijada considerando familias normalmente planas (prop. 5.1).

En el capítulo V (prop. 1.4) se demuestra la existencia de conjuntos constructibles  $CH_{p(T), \delta, n+1}$  que parametrizan las truncaciones  $n+1$ -ésimas de los gérmenes de curva reducida de  $(k^3, 0)$  con orden de singularidad menor o igual que  $\delta$  y polinomio de Hilbert-Samuel  $p(T)$ . En conexión con ello hemos introducido variedades  $E_{\delta}^{n,q}$  que parametrizan las matrices  $z$  con coeficientes polinomios pertenecientes a  $k[X_1, X_2, X_3]$  de grado no superior a  $n$ , de dimensiones  $q \times (q-1)$  y cuyos menores

maximales engendran un ideal  $I(z)$  que define un germen de curva  $X(z) = \text{Spec} \left( \frac{k[X_1, X_2, X_3]}{I(z)} \right)$  reducida de  $(k^3, 0)$  con orden de singularidad menor o igual que  $\zeta$  (Capítulo V, sección 1).

En la construcción de  $E_{\zeta}^{n,q}$  juega un papel importante el teorema de truncación efectiva (Capítulo III, teorema 2.7).

Finalmente, en lo que se refiere a las cuestiones del tipo (C) se ha obtenido una cota inmejorable, en función de la multiplicidad, del número de ecuaciones requeridas por un subesquema Cohen-Macaulay de codimensión dos de  $(k^N, 0)$  (Capítulo IV, teorema 2.4). Los esquemas que requieren  $v$  ecuaciones y que alcanzan dicha cota se llamarán  $v$ -extremales.

En el teorema 2.13 del capítulo V se han caracterizado los esquemas  $v$ -extremales en términos de los dos primeros coeficientes de su polinomio de Hilbert-Samuel. Una de las consecuencias del anterior resultado es que los subesquemas Cohen-Macaulay de codimensión dos de  $(k^N, 0)$  que tienen polinomio de Hilbert-Samuel de la forma

$$p(T) = \frac{1}{2} v(v-1) \binom{T+N-2}{N-2} - \frac{1}{3} v(v-1)(v-2) \binom{T+N-3}{N+3} +$$

+ términos de grado inferior

son  $v$ -extremales y su función de Hilbert-Samuel queda completamente determinada.

Como aplicación al caso de gérmenes de curva, de la caracterización de los esquemas  $v$ -extremales, se obtiene que un germen de curva es  $v$ -extremal si y sólo si su polinomio de Hilbert-Samuel es  $p_v(T) = \frac{1}{2} v(v-1) T - \frac{1}{3} v(v-1)(v-3)$ .

En la variedad  $E_{\zeta}^{n,q}$  se han considerado las subvariedades

des cerradas  $NG_v$  formadas por los puntos  $z \in E_{\delta}^{n,q}$  tales que el esquema requiera más de  $v-1$  ecuaciones. Se ha probado que el conjunto  $NG_v$  es una estratificación de  $E_{\delta}^{n,q}$ , de tal manera que  $NG_{v+1}$  es el lugar singular de  $NG_v$  (Capítulo V prop.5.1).

Se ha establecido la existencia de abiertos no vacíos  $Z'_v \subset NG_v$  de modo que para todo  $z \in Z'_v$  el esquema  $X(z)$  es  $v$ -extremal, tiene orden de singularidad  $\frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$  y presenta en el origen una singularidad ordinaria (Capítulo V, prop.2,7).

Como consecuencia de los resultados anteriores (Capítulo V, prop. 2.14) el conjunto de puntos  $z \in E_{\delta}^{n,q}$  tales que el esquema  $X(z)$  tiene polinomio igual a  $p(T)$  es un abierto denso de  $NG_v$ . Este resultado nos permite probar que  $CH_{p_v}(T), \delta, n+1$  es irreducible y calcular su dimensión (Capítulo V, teorema 3.2).

Presentados los resultados más notables, pasamos a describir el contenido de los cinco capítulos y tres apéndices de que consta la memoria.

Capítulo I: Preliminares. Este capítulo no contiene materia original, las definiciones y resultados citados lo son en orden a fijar nomenclaturas y notaciones y facilitar la referencia. Se incluye la demostración de los resultados que no son fácilmente accesibles y la de aquellos que han sufrido alguna modificación.

Capítulo II: Variación del orden de singularidad por proyección.

El objeto de este capítulo es probar el teorema 3.5 que establece una cota superior del orden de singularidad de la proyección plana genérica de un germen en términos de su orden de singularidad. Para ello, en primer lugar, se ha acotado superior-

mente la variación por proyección, por un lado del orden de singularidad de una rama (teorema 2.5) y por otro del contacto entre ramas (teorema 3.4). El teorema se sigue utilizando la fórmula (Cáp.I prop.1.3(i)) que relaciona el orden de singularidad de un germen con el orden de singularidad de sus ramas y el contacto entre ellas.

### Capítulo III: Teorema de Truncación.

El resultado central de este capítulo es el "Teorema de Truncación" (teorema 2.2).

La cota del orden de singularidad de la proyección plana de un germen de  $(k^N, o)$  en términos de su orden de singularidad, dada en el capítulo II, permite reducir la demostración del teorema de truncación al caso plano, que a su vez se obtiene de un resultado de Samuel (SAM-2 ó NOB-1 corolario 2.6). Como corolario se obtiene el "Teorema de Truncación Efectiva" (teorema 2.7).

La relación del teorema de truncación con resultados similares de Samuel e Hironaka-Rossi se trata al final del capítulo (sección 3).

### Capítulo IV: Construcción del esquema de Hilbert de los gérmenes de curva de $(k^N, o)$ con polinomio de Hilbert-Samuel fijado.

En la primera sección se introduce el concepto de "familia de gérmenes de curva  $(k^N, o)$  con polinomio de Hilbert-Samuel  $p(T)$ "; se demuestra que las familias son planas (prop.1.3) y que el concepto de familia es una debilitación del de platitude normal (prop.1.6). Asimismo se define el functor contravariante

$$\underline{H}_{N,p}(T) : \text{AFF} \longrightarrow \text{SET},$$

entre las categorías de  $k$ -esquemas afines de tipo finito y de conjuntos, que a todo  $k$ -esquema  $S$  le hace corresponder el conjunto  $\underline{H}_{N,p}(T)(S)$  de las familias de base  $S$  de gérmenes de curvas de  $(k^N, \mathfrak{o})$  con polinomio de Hilbert-Samuel  $p(T)$ .

En la sección tercera se construye el esquema  $H_{N,p}(T)$ , que se obtiene como límite proyectivo de  $k$ -esquemas de tipo finito, el cual representa al functor  $\underline{H}_{N,p}(T)$ . Este esquema es el "esquema de Hilbert de los gérmenes de curva de  $(k^N, \mathfrak{o})$  con polinomio de Hilbert-Samuel  $p(T)$ ". A continuación se describe el espacio tangente de  $H_{N,p}(T)$  en un punto racional (sección 4 proposición 4.2).

El capítulo finaliza con la construcción de un esquema que parametriza los gérmenes de curva de  $(k^N, \mathfrak{o})$  con función de Hilbert-Samuel fijada considerando, esta vez, familias normalmente planas (sección 5 proposición 5.1).

### Capítulo V: Sobre los gérmenes de curva de $(k^3, \mathfrak{o})$

En este capítulo se estudian los gérmenes de curva de  $(k^3, \mathfrak{o})$  y los conjuntos constructibles que parametrizan sus truncaciones (i.e.  $CH_{p(T), \delta, n+1}$ ).

Los ideales  $I \subset k \llbracket X_1, X_2, X_3 \rrbracket$  que definen gérmenes de curva de  $(k^3, \mathfrak{o})$  son determinantes (ver Ap.II). Esto nos ha permitido, en la primera sección, construir las variedades  $E_{\delta}^{n,q}, NG_V$  y los conjuntos constructibles  $CH_{p(T), \delta, n+1}$ , citados al comienzo de la introducción. Así mismo se han introducido la subvariedad  $E_{\delta, p(T)}^{n,q}$  de  $E_{\delta}^{n,q}$  formada por los puntos  $z$  tales que el po-

linomio de Hilbert-Samuel de  $X(z)$  sea igual a  $p(T)$ , y se ha definido un morfismo eshaustivo  $g$  entre  $E_{\delta, p(T)}^{n, q}$  y  $CH_{p(T), \delta, n+1}$

Para los resultados obtenidos en la segunda sección ver las cuestiones del tipo (C).

La dimensión de  $CH_{p_v(T), \delta, n+1}$  se ha calculado de dos formas:

(a) Dando una descripción explícita de las fibras del morfismo  $g$  y aplicando el teorema de la dimensión de las fibras.

(b) Aplicando los resultados de la sección segunda.

En la memoria se ha incluido la segunda (sección tercera).

La memoria finaliza con tres apéndices donde se han incluido resultados conocidos, para mayor comodidad del lector, (apéndice II) ó resultados auxiliares (apéndices I y II).

Quiero agradecer a Dr. Eduardo Casas el haber dirigido este trabajo; al Dr. Sebastián Xambó el apoyo que siempre me ha dado y a Rosa Ma. el afecto y comprensión que de ella he recibido durante estos últimos años.

Finalmente quiero agradecer a Isabel la paciencia que ha tenido al mecanografiar gran parte de esta memoria.

CAPITULO I

CAPITULO I: PRELIMINARES

En este capítulo daremos las definiciones de los conceptos que serán utilizados a lo largo de la presente memoria, así como sus propiedades fundamentales. Se incluye la demostración de los resultados que no son fácilmente accesibles y la de aquellos que han sufrido alguna modificación.

A lo largo de toda la memoria  $k$  será un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero. Denotaremos por  $R_N$  el anillo de series formales  $k[[X_1, \dots, X_N]]$ ,  $S_N$  el anillo  $k[X_1, \dots, X_N]_{(X_1, \dots, X_N)}$  y por  $P_N$  el anillo de polinomios  $k[X_1, \dots, X_N]$ ; en los tres casos anteriores  $M$  será el ideal maximal engendrado por  $X_1, \dots, X_N$ . Si no hay peligro de confusión se omitirá el subíndice  $N$ .

Para todo  $n \geq 0$   $R_n$  será el cociente  $R/M^n$  y  $b(n) = \binom{N+n-1}{N}$  su dimensión como  $k$ -espacio vectorial.

Denotaremos por  $\text{Id}(N)$  el conjunto de ideales de  $R_N$  tales que  $R_N/I$  sea unidimensional y Cohen-Macaulay.

Llamaremos germen de curva de  $(k^N, o) = \text{Spec}(R_N)$  un  $k$ -esquema  $(X, o)$  definido por una  $k$ -álgebra  $R/I$ , que denotaremos por  $\mathcal{O}_{(X, o)}$ , donde  $I \in \text{Id}(N)$ . Si además  $I$  es radical el germen lo será de curva reducida.

Un germen de curva reducida es irreducible si el ideal que lo define es primo, en este caso el germen se denomina rama de  $(k^N, o)$ . Si  $I$  es el ideal de un germen de curva reducida  $(X, o)$ , y

$$I = p_1 \cap \dots \cap p_r$$

es la descomposición primaria del ideal  $I$ , los ideales  $p_i$  de-

finen ramas de  $(k^N, o)$  que reciben el nombre de ramas de  $(X, o)$ .

Si  $m$  es el ideal maximal de  $\mathcal{O}_{(X, o)}$ , el  $k$ -espacio vectorial  $\frac{m}{m^2}$  se denomina espacio tangente de Zariski de  $(X, o)$ , y a su dimensión sobre  $k$  dimensión de inmersión de  $(X, o)$  que denotaremos por  $\text{embd}(X, o)$ . Si  $\text{embd}(X, o) \leq 2$  diremos que  $(X, o)$  es un germen de curva plana.

Al anillo  $\mathcal{O}_{(X, o)}$  se le asocia una función, llamada de Hilbert-Samuel,  $\text{FHS}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por

$$\text{FHS}(n) = \dim_k \left( \frac{\mathcal{O}_{(X, o)}}{m^n} \right)$$

Es bien conocido (ver p.e. SE-2 cap.II (pág.25) Th.3) que existe un polinomio PHS, llamado asimismo de Hilbert-Samuel, tal que para valores de  $n$  suficientemente grandes

$$\text{PHS}(n) = \text{FHS}(n)$$

El grado del polinomio PHS es igual a la dimensión del anillo  $\mathcal{O}_{(X, o)}$  (ver SE-2 cap.III (pág.7) Th 1), en el caso que centra nuestro interés el polinomio de Hilbert-Samuel tiene grado uno, y puede escribirse

$$\text{PHS}(n) = en - \rho$$

Se dice que  $e$  es la multiplicidad de  $(X, o)$  y  $\rho$  es el número de reducción de  $(X, o)$ .

Es sabido (ver KI) que se verifican las desigualdades

$$e-1 \leq \rho \leq \frac{e(e-1)}{2}$$

Un germen de curva de  $(k^N, o)$  se dice no singular si  $e=1$ , lo que equivale a  $\text{embd}(X, o)=1$ , en caso contrario se llama singular.

Denotaremos por  $\text{tot } \mathcal{O}_{(X, o)}$  el anillo total de fracciones de  $\mathcal{O}_{(X, o)}$  y por  $\overline{\mathcal{O}_{(X, o)}}$  la clausura entera de  $\mathcal{O}_{(X, o)}$  en  $\text{tot } \mathcal{O}_{(X, o)}$

Se llama orden de singularidad de  $(X, o)$  al número

$$\delta(X, o) = \dim_k \left( \frac{\overline{\mathcal{O}_{(X, o)}}}{\mathcal{O}_{(X, o)}} \right)$$

Es bien conocido que  $\delta(X, o) = 0$  equivale a que  $(X, o)$  sea no singular.

Sean  $\delta$  y  $p(T) = eT - p$  un número natural y un polinomio de grado uno respectivamente. Denotaremos por  $\text{Id}(N, \delta)$  el subconjunto de  $\text{Id}(N)$  formado por los ideales  $I$  tales que  $R/I$  sea reducido y el orden de singularidad de  $\text{Spec}(R/I)$  sea menor o igual que  $\delta$ ,  $\text{Id}(N, p(T))$  el subconjunto de  $\text{Id}(N)$  formado por los ideales  $I$  tales que el polinomio de Hilbert-Samuel de  $R/I$  sea igual a  $p(T)$ , finalmente  $\text{Id}(N, \delta, p(T))$  la intersección  $\text{Id}(N, \delta) \cap \text{Id}(N, p(T))$ .

Dado que la extensión  $\mathcal{O}_{(X, o)} \subset \overline{\mathcal{O}_{(X, o)}}$  es finita es no nulo el conductor  $\mathcal{C}$  de la extensión:

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in \overline{\mathcal{O}_{(X, o)}} \mid x \cdot \overline{\mathcal{O}_{(X, o)}} \subset \mathcal{O}_{(X, o)} \right\}$$

observemos que  $\mathcal{C}$  es un ideal no nulo de  $\overline{\mathcal{O}_{(X, o)}}$  y de  $\mathcal{O}_{(X, o)}$ , y tiene sentido definir

$$c(X, o) = \dim_k \left( \frac{\overline{\mathcal{O}_{(X, o)}}}{\mathcal{C}} \right)$$

1.1. Proposición: (ver SE-1 cap IV n°11 prop.7) Si  $(X, o)$  es un germe de curva reducido y singular, se tiene

$$\delta(X, o) + 1 \leq c(X, o) \leq 2\delta(X, o)$$

La igualdad  $c(X, o) = 2\delta(X, o)$  se verifica si sólo si el anillo  $\mathcal{O}_{(X, o)}$  es Gorenstein (i.e.  $\text{Ext}_k^1(k, \mathcal{O}_{(X, o)}) = 1$ ).

Definición: Si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos ramas distintas de  $(k^N, o)$  definidas por ideales  $I$  e  $J$ , entonces se define

$$(\alpha, \beta) = \dim_k \left( \frac{R}{I+J} \right)$$

El número  $(\alpha, \beta)$  es finito al ser  $I \neq J$ .

Sea  $V$  una variedad no singular y  $O \in V$  un punto. Consideremos la explosión (blow up) de  $V$  en  $O$ :

$$\pi_1 : V^{(1)} \longrightarrow V$$

Los puntos del divisor excepcional de  $\pi_1$ , i.e.  $\pi_1^{-1}(O)$ , se denominan puntos del primer entorno de  $O$  en  $V$ . Por recurrencia se definen los puntos del  $i$ -ésimo entorno de  $O$  en  $V$  como los puntos de primer entorno de un punto del  $(i-1)$ -ésimo entorno de  $O$  en  $V$ . Los puntos definidos anteriormente también se les conoce como puntos infinitamente próximos del  $i$ -ésimo entorno de  $O$ .

De la misma definición deducimos que cada puntos infinitamente próximo de  $O$  es un punto simple en una variedad obtenida de  $V$  via una sucesión de explosiones de centros en puntos infinitamente próximos pertenecientes a entornos de órdenes inferiores.

Sea  $O_i$  un punto en el  $i$ -ésimo entorno de  $O$  y sea  $V_i$  la variedad a la que pertenece obtenida por sucesivas explosiones de  $V$ . Diremos que una subvariedad  $W$ , que contenga  $O$ , pasa por  $O_i$  con multiplicidad  $e_i$  si la transformada estricta de  $W$  en  $V_i$  contiene el punto  $O_i$  y presenta multiplicidad  $e_i$  en dicho punto.

Para más detalles sobre el concepto y propiedades de los puntos infinitamente próximos ver VDW.

Definición: Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos ramas de  $(k^N, O)$ , entonces escribire-

mos

$$(\alpha * \beta) = \sum_{i=1}^s a_i \cdot b_i$$

donde la suma se extiende a los puntos infinitamente próximos comunes a ambas ramas y  $a_i$ ,  $b_i$  denotan las multiplicidades el  $i$ -ésimo punto infinitamente próximo en  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente.

1.2 Proposición: (ver VDW "Fórmula de Noether"). Si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos ramas de  $(k^2, o)$  entonces

$$(\alpha \cdot \beta) = (\alpha * \beta)$$

y ambas coinciden con la multiplicidad de intersección de  $\alpha$  y  $\beta$  en el sentido habitual.

Definición: Sean  $(X, o)$  un germen de curva reducido de  $(k^N, o)$  y  $\{m_i\}_{i \in I}$  el conjunto de multiplicidades de los puntos infinitamente próximos de  $(X, o)$ . Definimos

$$\delta^*(X, o) = \sum_{i \in I} \frac{m_i(m_i - 1)}{2}$$

1.3 Proposición: Si  $(X, o)$  es un germen de curva reducida de  $(k^N, o)$  con ramas  $Y_i$   $i = 1, 2, \dots, r$ , entonces

$$(i) \quad \delta(X, o) = \sum_{i=1}^r \delta(Y_i, o) + \sum_{i=1}^{r-1} \left( Y_i \cdot \left( \bigcup_{j=i+1}^r Y_j \right) \right)$$

(ii) siempre se verifica

$$\delta(X, o) \leq \delta^*(X, o)$$

(iii) Si  $\{p_i\}_{i \in I}$  son los números de reducción de los puntos infinitamente próximos de  $(X, o)$  entonces se verifica

$$\delta(X, o) = \sum_{i \in I} p_i$$

(iv) Si  $e$  es la multiplicidad de  $(X, o)$

$$\delta^*(X, o) \leq \frac{e}{2} \delta(X, o)$$

(v)  $\delta(X, o) = \delta^*(X, o)$  si y sólo si  $(X, o)$  es plana.

$$(vi) \delta^*(X, o) = \sum_{i=1}^r \delta^*(Y_i, o) + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r (Y_i * Y_j)$$

Demostración: para (i) y (ii) ver HI-1 prop.4 y observación al Teorema 1. Para (iii) ver CA-1. El apartado (ii) se deduce de (i), (iii) y de la desigualdad  $e_i - 1 \leq p_i$ . El apartado (vi) se demuestra fácilmente por inducción sobre  $r$ .

Sea  $(X, o)$  un germen de curva reducido de  $(k^N, o)$  y  $Y_1, \dots, Y_r$  sus ramas. El anillo total de fracciones de  $\mathcal{O}_{(X, o)}$  es la suma directa de los cuerpos de fracciones  $K_j$  de los anillos  $\mathcal{O}_{(Y_j, o)}$ , para  $j = 1, 2, \dots, r$ ,

$$\text{tot} \left( \mathcal{O}_{(X, o)} \right) = \bigoplus_{j=1}^r K_j,$$

ver HI-1 pág.180. La clausura entera de  $\mathcal{O}_{(X, o)}$  en su anillo total de fracciones es suma directa de las clausuras enteras de los anillos  $\mathcal{O}_{(Y_j, o)}$  en  $K_j$ :

$$\overline{\mathcal{O}_{(X, o)}} = \bigoplus_{j=1}^r \overline{\mathcal{O}_{(Y_j, o)}}$$

ver HI-1 pág.182.

Dado que los anillos  $\overline{\mathcal{O}_{(Y_j, o)}}$  son locales, completos y regulares son isomorfos a anillos de series en una indeterminada:

$$\overline{\mathcal{O}_{(Y_j, o)}} \cong k \llbracket t_j \rrbracket$$

Los elementos  $t_1, \dots, t_r$  suelen llamarse parámetros uniformizantes de  $\mathcal{O}_{(X,0)}$ .

Denotaremos por  $x_i$  la clase inducida por  $X_i \in R$ , para  $i=1, 2, \dots, N$ .

Definición: un conjunto de series  $f = \left\{ f_i^j(t_j) \in k \parallel t_j \parallel ; i=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, r \right\}$  se dice que es una parametrización de  $(X,0)$  si el morfismo

$$\varphi : \mathcal{O}_{(X,0)} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^r k \parallel t_j \parallel$$

con  $\varphi(x_i) = (f_i^j(t_j))_{j=1, 2, \dots, r}$ , es inyectiva.

Como es habitual en la literatura escribiremos formalmente

$$(X,0) : \begin{cases} X_i(t_j) = f_i^j(t_j) \\ i=1, 2, \dots, N \\ j=1, 2, \dots, r \end{cases}$$

para denotar la parametrización definida por el conjunto  $f$ .

Definición: una parametrización se llama propia si el morfismo  $\varphi$  definido por ella es el de normalización de  $\mathcal{O}_{(X,0)}$ .

Si  $(X,0)$  es un germen de curva reducido y

$$(X,0) : \begin{cases} X_i(t_j) = f_i^j(t_j) \\ i=1, 2, \dots, N \\ j=1, 2, \dots, r \end{cases}$$

es una parametrización propia de  $(X,0)$ , entonces es inmediato que

$$Y_j : \begin{cases} X_i(t_j) = f_i^j(t_j) \\ i=1, 2, \dots, N \end{cases}$$

es una parametrización propia de la rama  $j$ -ésima de  $(X,0)$ .

Cada rama  $Y_j$  de  $(X,0)$  define una valoración  $V_j$  de  $\mathcal{O}_{(X,0)}$  que pasamos a describir: si  $F(x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{O}_{(X,0)}$ , definimos

$$V_j(F(x_1, \dots, x_N)) = \text{orden}_{t_j}(F(f_1^j(t_j), \dots, f_N^j(t_j))).$$

Un elemento  $F \in \mathcal{O}_{(X,0)}$  se llama parámetro transversal de  $\mathcal{O}_{(X,0)}$  si para cada  $j=1, 2, \dots, r$ ,  $V_j(F)$  es el mínimo de los  $V_j(G)$  con  $G$  perteneciente al ideal maximal de  $\mathcal{O}_{(X,0)}$ .

Es fácil demostrar que si  $L \in R$  es una forma lineal, entonces la clase inducida por  $L$  en  $\mathcal{O}_{(X,0)}$  es un parámetro transversal si  $\checkmark$  sólo si el hiperplano de ecuación  $L=0$  no contiene a ninguna de las rectas tangentes a  $\mathcal{O}_{(X,0)}$ .

Supongamos que  $x_1$  sea un parámetro transversal de  $\mathcal{O}_{(X,0)}$ , entonces puede escogerse parámetros uniformizantes  $t_1, \dots, t_r$  tales que  $(X,0)$  admite una parametrización propia de la forma

$$\begin{cases} X_1(t_j) = t_j^{e_j} \\ X_i(t_j) = f_i^j(t_j) \\ i=2, 3, \dots, N \end{cases}$$

para  $j=1, 2, \dots, r$ , donde  $e_j$  es la multiplicidad de la rama  $j$ -ésima de  $(X,0)$  y  $\text{orden}_{t_j}(f_i^j(t_j)) \geq e_j$ .

Si  $\alpha$  es una rama de  $(k^N, 0)$  y

$$\alpha: \begin{cases} X_1(t) = t^e \\ X_i(t) = f_i(t) \\ i=2, 3, \dots, N \end{cases} \quad \alpha: \begin{cases} \bar{X}_1(s) = s^e \\ \bar{X}_i(s) = g_i(s) \\ i=2, 3, \dots, N \end{cases}$$

son parametrizaciones propias de  $\alpha$ , es fácil demostrar que existe una raíz  $n$ -ésima de la unidad  $\xi$  tal que si sustituimos  $s$  por  $\xi t$  se verifica

$$f_i(t) = g_i(\xi t)$$

para  $i=2, 3, \dots, N$ . En este caso indicaremos  $g_{i,\xi}(t)$  en lugar de

$f_i(t)$  y  $\bar{X}_{i,\xi}(t)$  en lugar de  $X_i(t)$ .

Recíprocamente si tenemos una parametrización propia de

$$\alpha: \begin{cases} X_1(t) = t^e \\ X_i(t) = f_i(t) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases}$$

para cada raíz  $n$ -ésima de la unidad  $\xi$  obtendremos otra parametrización propia de  $\alpha$ :

$$\alpha: \begin{cases} \bar{X}_1(t) = t^e \\ \bar{X}_i(t) = f_i(\xi \cdot t) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases}$$

1.4.-Lema: Sea  $\alpha$  una rama de  $(k^N, 0)$  y

$$\alpha: \begin{cases} X_1 = t^e \\ X_i = \sum_{j \geq e} a_j^i \cdot t^j \\ i=2,3,\dots,N \end{cases}$$

una parametrización de  $\alpha$ . La parametrización es propia si  $\sqrt{y}$  sólo si  $\text{mcd}(e, \{j/\text{existe } i \text{ tal que } a_j^i \neq 0\}) = 1$

Demostración: la parametrización define un morfismo inyectivo

$$\varphi: \mathcal{O}_{(\alpha, 0)} \longrightarrow k \llbracket t \rrbracket$$

con  $\varphi(x_i) = \sum_{j \geq e} a_j^i t^j$  para  $i \geq 2$  y  $\varphi(x_1) = t^e$ . Identificaremos  $\mathcal{O}_{(\alpha, 0)}$  con su imagen por  $\varphi$  en  $k \llbracket t \rrbracket$ .

Si suponemos que la parametrización es propia entonces  $k \llbracket t \rrbracket$  es la clausura entera de  $\mathcal{O}_{(\alpha, 0)}$  y el cuerpo de fracciones de  $\mathcal{O}_{(\alpha, 0)}$ , que denotaremos por  $K$ , coincide con el de  $k \llbracket t \rrbracket$ :

$$K = k \llbracket t \rrbracket (0)$$

Supongamos que el máximo común divisor fuese  $n > 1$ , entonces para todo elemento  $W = \frac{F(x_1, \dots, x_N)}{G(x_1, \dots, x_N)} \in K$  el entero  $V(W)$  sería

un múltiplo de  $n$ , llegando a una contradicción con el hecho  $t \in K$ . Así hemos demostrado que si la parametrización es propia el máximo común divisor es igual a uno.

Supongamos que  $\text{mcd}(e, \{j / \text{existe } i \text{ tal que } a_j^i \neq 0\}) = 1$ . No es restrictivo suponer que, después de un cambio de coordenadas lineal en las variables  $X_1, \dots, X_N$ , se tiene

$$\text{mcd}(e, \{j / a_j^2 \neq 0\}) = 1$$

Gracias al lema 21.14 de SG el subcuerpo  $L$  de  $k \llbracket t \rrbracket_{(0)}$  engendrado por  $X_1(t), X_2(t)$  contiene un elemento de orden uno en  $t$ . Así deducimos que  $L = k \llbracket t \rrbracket_{(0)}$ , por lo tanto el cuerpo  $K$  de fracciones del anillo  $\mathcal{O}_{(\alpha, 0)}$ , que contiene  $L$ , es igual  $k \llbracket t \rrbracket_{(0)}$ .

Dado que  $t$  es entero sobre  $\mathcal{O}_{(\alpha, 0)}$  se tiene que  $k \llbracket t \rrbracket \subset \overline{\mathcal{O}_{(\alpha, 0)}}$  al ser  $\overline{\mathcal{O}_{(\alpha, 0)}}$  completo deducimos que  $k \llbracket t \rrbracket \subset \overline{\mathcal{O}_{(\alpha, 0)}}$ . Como que  $k \llbracket t \rrbracket$  es integralmente cerrado se obtiene  $\overline{\mathcal{O}_{(\alpha, 0)}} = k \llbracket t \rrbracket$ , así hemos demostrado que  $\psi$  es el morfismo de normalización de  $\mathcal{O}_{(\alpha, 0)}$  y por tanto la parametrización es propia.

Definición: Dados dos gérmenes de curvas  $(X_1, 0)$  y  $(X_2, 0)$ , definidos por ideales  $I_1$  y  $I_2$  respectivamente, se dirá que son analíticamente isomorfos si existe un automorfismo de  $k$ -álgebras  $\sigma$  de  $R$  tal que  $\sigma(I_1) = I_2$ . Escribiremos  $\sigma(X_1) = X_2$ .

Todo automorfismo  $\sigma$  de  $R$  tal que  $\sigma(I_1) = I_2$  induce un isomorfismo de  $k$ -álgebras  $\bar{\sigma}$  entre  $\mathcal{O}_{(X_1, 0)}$  y  $\mathcal{O}_{(X_2, 0)}$ , reciprocamente para todo isomorfismo de  $k$ -álgebras  $\tau$  entre  $\mathcal{O}_{(X_1, 0)}$  y  $\mathcal{O}_{(X_2, 0)}$  existe un automorfismo  $\sigma$  de  $k$ -álgebras de  $R$  tal que  $\bar{\sigma} = \tau$ .

Es habitual denominar isomorfismos analíticos a los automorfismos de  $k$ -álgebra de  $R$  y a los isomorfismos entre sus cocientes.

Sean  $(X_1, 0)$  y  $(X_2, 0)$  dos gérmenes de curva reducida analíticamente isomorfos via  $\sigma$ . Consideramos  $B = \bigoplus_{i=1}^r k \llbracket t_i \rrbracket$  la clausura entera del anillo  $\mathcal{O}_{(X_2, 0)}$ . Para toda parametrización propia del germen  $(X_2, 0)$ :

$$\varphi' : \mathcal{O}_{(X_2, 0)} \hookrightarrow B$$

el morfismo  $\varphi = \varphi' \circ \bar{\sigma}$

$$\varphi : \mathcal{O}_{(X_1, 0)} \hookrightarrow B$$

es de normalización de  $\mathcal{O}_{(X_1, 0)}$ , i.e. es una parametrización propia de  $(X_1, 0)$ , y hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 I_1 & \hookrightarrow & R & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(X_1, 0)} \\
 \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma & & \downarrow \bar{\sigma} \\
 I_2 = \sigma(I_1) & \hookrightarrow & R & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(X_2, 0)}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \varphi \\
 \searrow \varphi'
 \end{array}
 \rightarrow B$$

Si  $\alpha$  es una rama de  $(X_2, 0)$  que admite la parametrización propia

$$\alpha : \begin{cases} X_i(t) = f_i(t) \\ i=1, 2, \dots, N \end{cases}$$

entonces la rama  $\sigma^{-1}(\alpha)$  admite por parametrización propia

$$\sigma^{-1}(\alpha) : \begin{cases} \bar{X}_i(t) = \sigma(X_i(t)) \\ i=1, 2, \dots, N \end{cases}$$

Sea  $\alpha$  una rama de  $(k^2, 0)$  no tangente al eje Y. Consideremos una parametrización propia de  $\alpha$  de la forma:

$$\alpha : \begin{cases} X = t^e \\ Y = \sum_{i=e}^{\infty} a_i t^i \end{cases}$$

Si  $y$  es una raíz  $e$ -ésima de la unidad entonces, en virtud de

la proposición 1.4,

$$\begin{cases} X = t^e \\ Y_\nu = \sum_{i=e}^{\infty} a_i \nu^i t^i \end{cases}$$

es también una parametrización propia de  $\alpha$ .

Substituyendo formalmente  $t = X^{1/e}$  se obtiene la serie de  $k \llbracket X^{1/e} \rrbracket$

$$Y_\nu = \sum_{i \geq e} a_i \nu^i X^{i/e},$$

cada una de estas series, al variar  $\nu$ , se llama serie de Puisseux de  $\alpha$ .

Es conocido (ver S-K apéndice B) que el cuerpo  $\bigcup_{n \geq 0} k \llbracket X^{1/n} \rrbracket$  es algebraicamente cerrado, éste resultado es conocido como "teorema de Puisseux", si  $F(X, Y)$  es un generador del ideal  $I \subset R$  que define la rama  $\alpha$  entonces se demuestra que:

$$F(X, Y) = U \cdot \prod_{\nu^e=1} (Y - Y_\nu(X))$$

con  $U$  un elemento inversible de  $R$ . Podemos decir que las series de Puisseux son las raíces de la ecuación  $F(X, Y) = 0$  en el anillo  $k \llbracket X^{1/e} \rrbracket$  supuesto que  $v(x) < v(y)$ , i.e. supuesto que la rama no sea tangente al eje  $Y$ .

Igualmente considerando  $F(X, Y)$  como polinomio en  $X$  se tiene una factorización

$$F(X, Y) = \prod_{\substack{r=1 \\ \mathfrak{z}}} (X - X_{\mathfrak{z}}(Y))$$

donde  $X_{\mathfrak{z}}(Y)$  son elementos de  $k \llbracket Y^{1/r} \rrbracket$  con  $r = \bar{v}(y)$ .

Las series  $X_{\mathfrak{z}}(Y)$  no son necesariamente las de Puisseux (lo son sólo si  $r=e$ ) y se conocen como series inversas de las  $Y_\nu(X)$

1.5. REGLA DE HALPHEN: Sean  $\alpha$  y  $\bar{\alpha}$  dos ramas de  $(k^2, 0)$  con series

de Puiseux

$$Y(X) = \sum_{i=e}^{\infty} a_i X^{i/e}, \quad \bar{Y}(X) = \sum_{i=\bar{e}}^{\infty} \bar{a}_i X^{i/\bar{e}}$$

entonces

$$(\alpha, \bar{\alpha}) = \text{orden}_X \left( \prod_{\substack{\nu^e=1 \\ \eta^{\bar{e}}=1}} (Y_{\nu}(X) - \bar{Y}_{\eta}(X)) \right)$$

Demostración: ver prop. IV-5.2 de WAL.

Definición: (ver Z-III pág. 994). Sea  $Y(X) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X^{i/e} \in k \llbracket X^{1/e} \rrbracket$

verificando  $\text{mcd}(e, \{i/a_i \neq 0\}) = 1$ , se llaman exponentes característicos al conjunto de números racionales  $\frac{r_1}{e_1}, \frac{r_2}{e_1 e_2}, \dots, \frac{r_g}{e}$  definidos de la forma siguiente:  $\frac{r_1}{e_1}$  es el primer exponente, en forma irreducible, no entero efectivamente aparente en  $Y(X)$ . Supongamos definidos los exponentes  $\frac{r_1}{e_1}, \dots, \frac{r_{i-1}}{e_1 \dots e_{i-1}}$ , entonces si  $e_1 \dots e_{i-1} < e$  el  $i$ -ésimo exponente  $\frac{r_i}{e_1 \dots e_i}$  es el menor exponente, efectivamente aparente  $Y(X)$ , no reducible a denominador  $e_1 \dots e_{i-1}$ , tomando  $(r_i, e_i) = 1$ .

Al conjunto de enteros  $\{e; \beta_1, \dots, \beta_g\}$  con  $\beta_i = \frac{r_i}{e_1 \dots e_i} \cdot e$

se le denomina característica de la serie  $Y(X)$ .

La característica del desarrollo de Puiseux de una rama plana es independiente de la elección de  $x, y$ , base del ideal maximal de  $\mathcal{O}_{(\alpha, 0)}$ , bajo la hipótesis  $v(x) \leq v(y)$ . Ver Z-III pág. 995.

En consecuencia la característica de la serie de Puiseux de una rama plana se llama característica de la rama  $\gamma$ , análogamente, los exponentes característicos de dicha serie se llaman exponentes característicos de la rama.

1.6.-FORMULA DE INVERSION : Sea  $\{e; \beta_1, \dots, \beta_g\}$  la característica de la serie  $Y(X)$  y  $\{e'; \beta'_1, \dots, \beta'_g\}$  la característica de  $X(Y)$  (donde  $Y(X) \in k \llbracket X^{1/e} \rrbracket$  y  $X(Y) \in k \llbracket Y^{1/e'} \rrbracket$  ). Supongamos que  $e \leq e'$ :

(a) Si  $e < e' < \beta_1$  entonces  $g' = g + 1, \beta'_1 = e, \beta'_{i+1} + e' = \beta_i + e$

para  $i = 1, 2, \dots, g$ .

(b) en los demás casos  $g' = g$  y  $\beta'_i + e' = \beta_i + e$  para  $i = 1, 2, \dots, g$

Demostración: Z-III pág.996

Los exponentes característicos de una rama plana determinan la estructura del conjunto de los puntos infinitamente próximos (multiplicidades y relaciones de proximidad), para ello ver por ejemplo S-K, CA-2, E-CH.

Para las diferentes definiciones de equisingularidad ver Z.

---

CAPITULO II

---

## CAPITULO II: VARIACION DEL ORDEN DE SINGULARIDAD POR PROYECCION

A lo largo de este capítulo todos los gérmenes de curvas se supondrán reducidos.

### 1. Proyección de gérmenes de curvas

Sea  $\bar{N}$  un entero natural verificado  $2 \leq \bar{N} \leq N$ , consideremos el morfismo de  $k$ -álgebras

$$\sigma^* : R_N \longrightarrow R_{\bar{N}}$$

definido por  $\sigma^*(f(X_1, \dots, X_N)) = (X_1, \dots, X_{\bar{N}}, 0, \dots, 0)$ . Así tenemos un morfismo inyectivo de  $k$ -esquemas.

$$\sigma : (k^{\bar{N}}, \mathfrak{o}) \longrightarrow (k^N, \mathfrak{o})$$

que no es sino la inmersión natural de la variedad lineal  $X_{\bar{N}+1} = \dots = X_N = 0$  en  $(k^N, \mathfrak{o})$ .

Dada una variedad lineal  $L$  de dimensión  $N - \bar{N}$  de  $k^N$  que pase por  $\mathfrak{o} \in k^N$  y sea transversal a la variedad lineal  $X_{\bar{N}+1} = \dots = X_N = 0$ , la proyección paralela según  $L$  es el morfismo

$$\pi_L : (k^N, \mathfrak{o}) \longrightarrow (k^{\bar{N}}, \mathfrak{o})$$

inducido por el morfismo de  $k$ -álgebras

$$\pi_L^* : R_{\bar{N}} \longrightarrow R_N$$

definido por  $\pi_L^*(X_i) = X_i - G_i(X_{\bar{N}+1}, \dots, X_N)$  para  $i=1, 2, \dots, \bar{N}$ , donde

$$\left\{ X_i - G_i(X_{\bar{N}+1}, \dots, X_N); i=1, 2, \dots, \bar{N} \right\}$$

es un conjunto de ecuaciones que determinan la variedad  $L$ . Es inmediato comprobar que

$$\pi_L \circ \sigma = \text{Id}_{(k^{\bar{N}}, \mathfrak{o})}$$

Sean  $Y_1$  e  $Y_2$  dos ramas de  $(k^N, \mathfrak{o})$ , eventualmente coincidentes, con parametrizaciones propias

$$Y_j: \begin{cases} X_i = f_i^j(t) \\ i=1,2,\dots,N \end{cases}$$

para  $j=1,2$ . Para cada par de series  $t(s)$ ,  $t'(s)$  pertenecientes a  $(s)k \parallel s$  se considera

$$(f_i^1(t(s)) - f_i^2(t'(s)))_{i=1,2,\dots,N} = s^r (C_1^0, \dots, C_N^0) + \bar{s}^{r+1} (C_1^1, \dots, C_N^1) + \dots$$

con algún  $C_i^0 \neq 0$ .

El vector  $(C_1^0, \dots, C_N^0)$  se dice, por definición, que es secante al par de ramas  $Y_1, Y_2$ .

Definición : (BGG cáp.IV). Si  $(X,o)$  es un germen de curva de  $(k^N, o)$ , se define el cono secante de  $(X,o)$ ,  $CS(X,o)$ , como el conjunto de puntos de las rectas que pasan por el origen y tienen por vector director un vector secante a un par de ramas cualesquiera, no necesariamente distintas de  $(X,o)$ .

Si  $(X,o)$  es no singular es fácil de comprobar que  $CS(X,o)$  se reduce a la recta tangente de  $(X,o)$ .

1.1 Proposición: Si  $(X,o)$  es singular,  $CS(X,o)$  es la unión de un número finito de planos, cada uno de ellos pasando por una recta tangente a  $(X,o)$

Demostración ver BGG cap.IV, donde se da una demostración para  $k=\mathbb{C}$ , que es válida en nuestras hipótesis.

Observación de la demostración de 1.1. que se da en BGG se obtiene una descripción del cono secante. Observemos en primer lugar que el cono secante de un germen  $(X,o)$  viene determinado por los vectores secantes a un par de ramas arbitrarias del germen.

Por lo cual basta describir el conjunto de vectores secantes a un par de ramas  $Y_1, Y_2$  en el caso que las tangentes coincidan y en el caso de que no coincidan.

En el primer caso supongamos que la recta tangente sea el eje  $X_1$ , sea  $n$  el mínimo común múltiplo de las multiplicidades de  $Y_1$  e  $Y_2$ ; tenemos parametrizaciones (en general no propias) de la forma

$$Y_1: \begin{cases} X_1 = t^n \\ X_j = \sum_{i>n} a_{j,i} t^i \\ j=2,3,\dots,N \end{cases} \quad Y_2: \begin{cases} X_1 = t^n \\ X_j = \sum_{i>n} b_{j,i} t^i \\ j=2,3,\dots,N \end{cases}$$

Sea  $\xi$  una raíz  $n$ -ésima de la unidad, definimos el entero  $C(\xi) = \inf \left\{ i \mid \text{existe } j \text{ tal que } b_{j,i} \neq \xi^i a_{j,i} \right\}$

se puede probar que existen raíces de la unidad para los que  $C(\xi)$  es finito.

Para cada  $\xi$  tal que  $C(\xi)$  sea finito definimos el plano  $A_\xi$  engendrado por los vectores  $(1, 0, \dots, 0)$  y  $v_\xi = (0, \xi^{C(\xi)} a_{2,C(\xi)} - b_{2,C(\xi)}, \dots, \xi^{C(\xi)} a_{N,C(\xi)} - b_{N,C(\xi)})$ . La unión de los planos  $A_\xi$  es el conjunto de vectores secantes al par  $Y_1, Y_2$ .

En el caso que las rectas tangentes de  $Y_1$  e  $Y_2$  no coincidan los vectores secantes al par de ramas forman el plano engendrado por dos vectores directores de las dos rectas tangentes.

Ejemplo: sea  $\alpha$  la rama de  $(k^3, 0)$  que tiene por parametrización propia

$$\alpha: \begin{cases} X = t^6 \\ Y = t^9 \\ Z = t^8 \end{cases}$$

Sean  $U_6 = \{1, -1, \xi, \xi^2, -\xi, -\xi^2\}$  las raíces sextas de la unidad, donde  $\xi$  es una raíz tercera primitiva de la unidad

La raíz  $-1$  determina el entero  $C(-1)=9$  y el vector  $v_{-1}=(0,1,0)$ , las demás raíces sextas de la unidad, a excepción de  $1$ , determinan un único entero  $C=8$  y el vector  $v=(0,0,1)$ .

El cono secante de  $\alpha$  está formado por la unión de los planos  $\langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$  y  $\langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$ .

Denotaremos por  $G_{\bar{N}}$  la Grassmaniana de los subespacios vectoriales de  $k^{\bar{N}}$  de codimensión  $\bar{N}$  y  $W(\bar{N})$  el abierto de  $G_{\bar{N}}$  formado por los subespacios vectoriales de  $k^{\bar{N}}$  de codimensión  $\bar{N}$  y transversales de la variedad lineal  $X_{\bar{N}+1}=\dots=X_{\bar{N}}=0$ .

Definición: Sea  $(X,o)$  un germen de curva de  $(k^{\bar{N}},o)$ , por definición  $W(\bar{N},X)$  es el abierto de  $G_{\bar{N}}$  formado por los subespacios  $L$  pertenecientes a  $W(\bar{N})$  tal que  $L \cap CS(X,o) = \{o\}$ .

Definición: Para todo  $L \in W(\bar{N},X)$  consideremos el morfismo  $\pi_L^*: R_{\bar{N}} \rightarrow R_N$ . Por definición  $(X^L,o)$ , imagen de  $X$  por  $\pi_L$ , será el germen de curva de  $(k^{\bar{N}},o)$  determinado por el ideal  $(\pi_L^*)^{-1}(I)$ , donde  $I$  es el ideal de  $R_N$  que define a  $(X,o)$ .

1.2 Proposición: Sea  $(X,o)$  un germen de curva de  $(k^{\bar{N}},o)$  con  $r$  ramas. Si  $L \in W(\bar{N},X)$  entonces  $(X^L,o)$  es un germen de curva de  $(k^{\bar{N}},o)$  con  $r$  ramas. Si  $n: \mathcal{O}_{(X,o)} \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}_{(X,o)}}$  es el morfismo de normalización del anillo  $\mathcal{O}_{(X,o)}$  entonces  $n \circ (\pi_L|_{(X,o)})^* : \mathcal{O}_{(X^L,o)} \rightarrow \overline{\mathcal{O}_{(X,o)}}$  es el morfismo de normalización de  $\mathcal{O}_{(X^L,o)}$ .

Demostración: vamos a demostrar la proposición en primer lugar para  $\bar{N}=2$ .

Podemos tomar un sistema de coordenadas  $Y_1, \dots, Y_N$  tales

que

(1)  $Y_3, \dots, Y_N$  sea el plano sobre el cual proyectamos

(2)  $L$  está definida por  $Y_1 = Y_2 = 0$

Podemos suponer que  $Y_1$  es un parámetro transversal de  $\mathcal{O}_{(X,0)}$ , porque si todo hiperplano que contuviese a  $L$  no fuese un parámetro transversal de  $\mathcal{O}_{(X,0)}$ , la variedad  $L$  contendría una recta tangente a  $(X,0)$  en contra de la hipótesis  $L \in W(2, X)$ .

Sean  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  las ramas de  $(X,0)$ , las cuales admiten parametrizaciones propias

$$\gamma_j: \begin{cases} Y_1 = t_j^{e_j} \\ Y_i = f_i^j(t_j) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases}$$

Consideremos las parametrizaciones

$$(1) \begin{cases} Y_1 = t_j^{e_j} \\ Y_2 = f_2^j(t_j) \end{cases},$$

vamos a demostrar que son parametrizaciones propias de  $r$  ramas distintas de  $(k^2, 0)$ . Veamos, en primer lugar, que si

$$f_2^j(t_j) = \sum_{l=e_j}^{\infty} a_l^j \cdot t_j^l$$

entonces  $\text{mcd} \left\{ e_j, \left\{ l / a_l^j \neq 0 \right\} \right\} = 1$ .

En caso contrario sea  $a > 1$  el máximo común divisor y  $\xi$  una raíz primitiva  $m$ -ésima de la unidad con un  $m$  divisor primo de  $a$ .

El vector inicial de

$$(t_j^{e_j} - (t_j \xi)^{e_j}, f_2^j(t_j) - f_2^j(\xi t_j), \dots, f_N^j(t_j) - f_N^j(\xi t_j))$$

es de la forma  $W = (0, 0, C_3, \dots, C_N)$  con algún  $C_i \neq 0$  ya que las series  $f_i^j(t_j)$  definen una parametrización propia de la rama  $\gamma_j$  (lema I-1.4).

Así  $W$  es un vector secante a  $\gamma_j$  contenido en la varie-

dad  $L$ , en contra de la hipótesis  $L \in W(2, X)$ , luego el máximo común divisor es igual a uno.

Gracias al lema I-1.4 las parametrizaciones (1) lo son propias de ciertas ramas  $\beta_j$ ,  $j=1, 2, \dots, r$ , de  $(k^2, o)$ .

Veamos ahora que las ramas  $\beta_1, \dots, \beta_r$  son distintas. Si  $\beta_1 = \beta_2$  entonces  $e_1 = e_2 = e$ , al ser las parametrizaciones propias existe una raíz  $e$ -ésima de la unidad  $\xi$  tal que

$$f_2^1(t) = f_2^2(\xi \cdot t).$$

El vector inicial de

$$(s^e - (s\xi)^e, f_2^1(s) - f_2^2(\xi s), \dots, f_N^1(s) - f_N^2(\xi s))$$

es de la forma  $w = (0, 0, C_3, \dots, C_N)$  con algún  $C_i \neq 0$  por ser las ramas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  distintas. Así  $w$  es un vector secante contenido en  $L$  en contra de la hipótesis  $L \in W(2, X)$ .

Si  $I \subset R_N$  es el ideal que define un germen  $(X, o)$  entonces el ideal que define  $(X^L, o)$  es  $I^L = I \cap R_2$ ; al ser  $I$  radical también lo es  $I^L$ .

Para todo  $F(Y_1, Y_2) \in I^L$  tenemos que  $F \in I$ , por tanto

$$F(t_j^{e_j}, f_2^j(t_j)) = 0,$$

así deducimos, al ser  $I^L$  radical, que las ramas  $\beta_j$  lo son de  $(X^L, o)$ . Hemos probado, entonces, que  $(X^L, o)$  tiene como mínimo  $r$  ramas distintas.

De la inyectividad del morfismo  $n \circ (\pi_L |_{(X, o)})^*$  deducimos que  $(X^L, o)$  no tiene más ramas que las  $\beta_1, \dots, \beta_r$ .

De las hipótesis obtenemos que el anillo  $\mathcal{O}_{(X, o)}$  es isomorfo a  $\bigoplus_{j=1}^r k \parallel t_j \parallel$  y el morfismo de normalización.

$$n: \mathcal{O}_{(X, o)} \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_{(X, o)}} = \bigoplus_{j=1}^r k \parallel t_j \parallel$$

viene dado por  $n(y_i) = (f_i^1(t), \dots, f_i^r(t_r))$  para  $i=2, 3, \dots, N$ ,

$$n(y_1) = (t_1^{e_1}, \dots, t_r^{e_r}).$$

Así el morfismo  $\bar{n} = n \circ (\pi_L|_{(X,o)})^* : \mathcal{O}_{(X^L,o)} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^r k \parallel t_j \parallel$  viene dado por  $\bar{n}(y_1) = (t_1^{e_1}, \dots, t_r^{e_r})$ ,  $\bar{n}(y_2) = (f_2^1(t_1), \dots, f_2^r(t_r))$

Al ser las parametrizaciones (1) propias deducimos que el morfismo  $\bar{n}$  es el de normalización de  $\mathcal{O}_{(X^L,o)}$ . Quedando demostrada la proposición para  $\bar{N} = 2$ .

Como consecuencia obtenemos que  $\overline{\mathcal{O}_{(X^L,o)}} = \overline{\mathcal{O}_{(X,o)}}$

$$\text{y } \text{tot}(\mathcal{O}_{(X^L,o)}) = \text{tot}(\mathcal{O}_{(X,o)}).$$

Pasemos ahora al caso  $\bar{N} > 2$ .

Sea  $L \in W(\bar{N}, X)$ , es fácil probar que existe  $K \in W(2, X)$  tal que  $K \supset L$ . Consideremos el diagrama

$$(2) \quad \mathcal{O}_{(X^K,o)} \xrightarrow{v} \mathcal{O}_{(X^L,o)} \xrightarrow{(\pi_L|_{(X,o)})^*} \mathcal{O}_{(X,o)} \xrightarrow{n} \overline{\mathcal{O}_{(X,o)}}$$

$$\text{donde } (\pi_L|_{(X,o)})^* \circ v = (\pi_K|_{(X,o)})^*$$

Gracias al caso  $\bar{N}=2$  sabemos que el morfismo  $n \circ (\pi_K|_{(X,o)})^*$  es el de normalización de  $\mathcal{O}_{(X^K,o)}$ , de lo cual deducimos que  $(\pi_L|_{(X,o)})^*$  es un morfismo finito.

Vamos a probar que  $\text{tot}(\mathcal{O}_{(X^L,o)}) = \text{tot}(\mathcal{O}_{(X^K,o)})$ . Denotemos por  $q_1$  y  $q_2$  los conductores de las extensiones  $\mathcal{O}_{(X^K,o)} \subset \mathcal{O}_{(X^L,o)}$  y  $\mathcal{O}_{(X^L,o)} \subset \mathcal{O}_{(X,o)}$  respectivamente. Si  $\mathcal{L}$  es el conductor de la extensión  $\mathcal{O}_{(X^K,o)} \subset \overline{\mathcal{O}_{(X^K,o)}} = \overline{\mathcal{O}_{(X,o)}}$  se tiene que  $\mathcal{L} \subset q_i$  para  $i=1,2$ .

1.3 Lema: Si  $m$  es el ideal maximal de  $\mathcal{O}_{(X^L,o)}$  y  $m'$  el de  $\mathcal{O}_{(X,o)}$ , entonces existen dos enteros  $S_1$  y  $S_2$  que verifican

$$m^{S_1} \subset q_1, \quad m'^{S_2} \subset q_2$$

Demostración: demostramos solamente la existencia de  $S_1$ , la de  $S_2$  se hace análogamente.

De la inclusión  $\mathcal{C} \subset q_1$  deducimos que

$$\dim_k \left( \frac{\mathcal{O}_{(X^L, o)}}{q_1} \right) \leq \dim_k \left( \frac{\overline{\mathcal{O}_{(X, o)}}}{\mathcal{C}} \right),$$

al ser la dimensión de la derecha finita (verCáp.I) también lo es la de la izquierda.

Al ser  $\mathcal{O}_{(X^L, o)}/q_1$  de dimensión finita sobre  $k$  existe un entero  $S_1$  tal que, si  $\bar{m}$  es la imagen de  $m$  en  $\mathcal{O}_{(X^L, o)}/q_1$ , se tiene

$$\bar{m}^{S_1} = 0$$

y por tanto  $m^{S_1} \subset q_1$ .

Los conductores  $q_1$  y  $q_2$  no están formados unicamente por divisores de cero de los anillos  $\mathcal{O}_{(X^L, o)}$  y  $\mathcal{O}_{(X, o)}$  respectivamente, ya que en caso contrario, gracias al lema 1.4, los ideales maximales  $m$  y  $m'$  estarían formados por divisores de cero en contra de la hipótesis de que los anillos  $\mathcal{O}_{(X^L, o)}$  y  $\mathcal{O}_{(X, o)}$  sean reducidos.

Al no estar los ideales  $q_1$  y  $q_2$  formados unicamente por divisores de cero, es inmediato concluir que el conjunto de no divisores de cero de  $\mathcal{O}_{(X^K, o)}$  (resp.  $\mathcal{O}_{(X^L, o)}$ ) se inyecta en el conjunto de no divisores de cero de  $\mathcal{O}_{(X^L, o)}$  (resp.  $\mathcal{O}_{(X, o)}$ ). Así el diagrama (2) induce el diagrama

$$\text{tot} \left( \mathcal{O}_{(X^K, o)} \right) \longleftrightarrow \text{tot} \left( \mathcal{O}_{(X^L, o)} \right) \longleftrightarrow \text{tot} \left( \mathcal{O}_{(X, o)} \right),$$

de la igualdad de los términos extremos deducimos que

$$(3) \quad \text{tot} \left( \mathcal{O}_{(X^L, o)} \right) = \text{tot} \left( \mathcal{O}_{(X, o)} \right).$$

Al ser la extensión  $\mathcal{O}_{(X^L, o)} \subset \mathcal{O}_{(X, o)}$  finita y de la igualdad (3) deducimos  $\overline{\mathcal{O}_{(X^L, o)}} = \mathcal{O}_{(X, o)}$  y que el morfismo  $n \circ (\pi_L|_{(X, o)})$  es el de normalización de  $\mathcal{O}_{(X^L, o)}$ . Queda pues demostrada la proposición 1.2

1.4 Corolario: En las hipótesis de la proposición 1.2 se verifica

$$\delta(X^L, o) = \delta(X, o) + \dim_k \left( \frac{\mathcal{O}_{(X, o)}}{\mathcal{O}_{(X^L, o)}} \right),$$

en particular  $\delta(X, o) \leq \delta(X^L, o)$ .

Demostración: considérese el diagrama (2) de la demostración de la proposición 1.2.

Observación: otros resultados acerca de la proyección de gérmenes de curva de  $(\mathbb{C}^N, o)$  se hallan BGG cap IV.

A continuación a cada rama  $\alpha$  le asociaremos una rama  $\alpha^n$  (ver teorema 1.9) y demostraremos que  $W(\bar{N}, \alpha) = X(\bar{N}, \alpha^n)$ . (ver prop.1.10). Estos resultados serán utilizados en la sección siguiente.

Sean  $f_1, \dots, f_s$  series pertenecientes a  $k[[t]]$ , notemos  $V(f_1, \dots, f_s) = \{v_t(F(f_1(t), \dots, f_s(t))) / F \in k[[X_1, \dots, X_s]]\}$ . Observemos que  $V(f_1, \dots, f_s)$  es un sub-semigrupo de  $\mathbb{N}$ .

1.5 Lema : el semigrupo  $V(f_1, \dots, f_s)$  es finitogenerado.

Demostración: Si el máximo común divisor de los exponentes efectivamente aparentes en las series  $f_1, \dots, f_s$  es uno, gracias al lema I-1.4, el conjunto de series  $\{f_i\}_{i=1, 2, \dots, s}$  es una parametri-

zación propia de una rama  $\alpha$  de  $(k^s, o)$ .

Sea  $\mathcal{L}$  el conductor de la extensión

$$\mathcal{O}_{(\alpha, o)} \subset \overline{\mathcal{O}_{(\alpha, o)}} = k \llbracket t \rrbracket,$$

entonces  $\mathcal{L} = (t^c)$  con  $c = \dim_k \left( \frac{\overline{\mathcal{O}_{(\alpha, o)}}}{\mathcal{O}_{(\alpha, o)}} \right)$ , así tenemos que

$$c' \in V(f_1, \dots, f_s)$$

para todo  $c' \geq c$ . Es inmediato comprobar que el conjunto

$$(V(f_1, \dots, f_s) \cap \{1, 2, \dots, c-1\}) \cup \{c, c+1, \dots, 2c-1\}$$

es un sistema de generadores de  $V(f_1, \dots, f_s)$ , con lo cual se deduce el lema 1.5.

Supongamos que el máximo común divisor de los exponentes efectivamente aparentes en las series  $f_1, \dots, f_s$  es  $a > 1$ .

Sean  $g_1, \dots, g_s$  las series obtenidas a partir de las  $f_1, \dots, f_s$  substituyendo  $t^a$  por  $t$ , entonces el máximo común divisor de los exponentes efectivamente aparentes en las series  $g_1, \dots, g_s$  es uno. Observemos que

$$(1) \quad V(g_1, \dots, g_s) \cdot a = V(f_1, \dots, f_s)$$

Por el razonamiento de la primera parte de la demostración sabemos que  $V(g_1, \dots, g_s)$  es finitamente generado, de la igualdad (1) obtenemos que también lo es el semigrupo  $V(f_1, \dots, f_s)$ .

1.6 Lema : Para toda serie  $f(t) \in k \llbracket t \rrbracket$  existe  $F \in k \llbracket X_1, \dots, X_s \rrbracket$  tal que los exponentes efectivamente presentes en

$$f(t) - F(f_1(t), \dots, f_s(t))$$

no pertenecen a  $V(f_1, \dots, f_s)$ .

Demostración: Supongamos que  $f(t) = \sum_{i \in I} a_i \cdot t^i$  con  $a_i \neq 0$  para todo  $i \in I$  y  $I \subset \mathbb{N}$ .

Designemos por  $V$  el semigrupo  $V(f_1, \dots, f_s)$ . Sean  $u_1, \dots, u_r$  un conjunto de generadores de  $V$  (es un conjunto finito gracias al lema 1.5) y  $G_1, \dots, G_r$  elementos de  $k \llbracket X_1, \dots, X_s \rrbracket$  tales que

$$v_t(G_i(f_1(t), \dots, f_s(t))) = u_i$$

Sea  $i_0 = \text{Min}(I \cap V)$ , entonces existen enteros  $C_1^0, \dots, C_r^0$  tales que

$$i_0 = \sum_{i=1}^r C_i^0 \cdot u_i$$

y puede elegirse una serie  $F_0 = \lambda_0 \cdot G_1^{C_1^0} \dots G_r^{C_r^0}$ , con  $\lambda_0 \in k - \{0\}$ , de modo que en la serie

$$f(t) - F_0(f_1(t), \dots, f_s(t))$$

no aparecen exponentes pertenecientes a  $V$  menores o iguales que

$i_0$ . Repitiendo el proceso obtenemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  existen enteros  $C_1^n, \dots, C_r^n$  tales que, tomando adecuadamente  $F_n = \lambda_n G_1^{C_1^n} \dots G_r^{C_r^n}$ , con  $\lambda_n \in k - \{0\}$ , se verifican:

$$(a) \quad i_n = \sum_{i=1}^r C_i^n \cdot u_i$$

(b) en las series  $f_n = f - F_0(f_1, \dots, f_s) - \dots - F_n(f_1, \dots, f_s)$  no aparecen exponentes pertenecientes a  $V$  menores o iguales a  $i_n$ .

(c) el menor exponente efectivamente aparente en  $f_n$  es  $i_{n+1}$ .

Para concluir el lema 1.8 hemos de demostrar que la sucesión

$$(F_0 + \dots + F_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

es de Cauchy. Para ello basta demostrar que  $\text{orden}(F_n) \geq n \cdot b$  para cierto  $b \in \mathbb{R}^+$ .

De la condición (a) es fácil deducir que para todo  $n$  existe un  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  tal que

$$C_i^n \geq i_n \cdot \frac{1}{r \cdot u_i} ,$$

sea  $b = \frac{1}{r} \text{ Mín } \left\{ \frac{\text{orden}(G_1)}{u_1}, \dots, \frac{\text{orden}(G_r)}{u_r} \right\}$ , entonces de la de-

sigualdad anterior obtenemos

$$\text{orden}(F_n) \geq i_n \cdot b$$

Al ser la sucesión  $\{i_n\}$  creciente se verifica que

$$i_n \geq n ,$$

por lo tanto

$$\text{orden}(F_n) \geq n \cdot b$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Hemos demostrado que la sucesión  $(F_0 + \dots + F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy, su límite puede tomarse como la serie  $F$  del enunciado del lema 1.8, quedando éste demostrado.

1.7 Proposición: Sea  $\alpha$  una rama de  $(k^N, 0)$  y supongamos que  $\text{embd}(\alpha, 0) = N$ .

Existe una rama  $\alpha'$  analíticamente isomorfa a  $\alpha$  que admite una parametrización propia

$$\alpha' : \begin{cases} X_i = g_i(t) \\ i=1, 2, \dots, N \end{cases}$$

que verifica

$$(1) \quad v_t(g_1(t)) < v_t(g_2(t)) < \dots < v_t(g_N(t)) < +\infty$$

$$(2) \quad v_t(g_{i+1}(t)) \notin v(g_1(t), \dots, g_i(t)) \text{ para } i=1, 2, \dots, N-1.$$

Demostración: aplicar el lema 1.6 y razonar por recurrencia.

1.8 Lema: Sea  $\alpha$  una rama de  $(k^N, 0)$  de multiplicidad  $e > 1$ , supon-

gamos que  $\text{embd}(\alpha, o) = N$ . Entonces se verifica

$$\text{Máx} \left\{ \alpha.H / H \text{ hipersuperficie no singular} \right\} \leq c(\alpha, o) + e - 1.$$

Demostración: Podemos suponer que la rama  $\alpha$  admite una parametrización propia

$$\alpha : \begin{cases} X_i = g_i(t) \\ i = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

que verifica las propiedades (1) y (2) de 1.7.

Sea  $\bar{n} = \text{Máx} \left\{ \alpha.H / H \text{ hipersuperficie no singular} \right\}$ , denotemos por  $m_i$  el entero  $V_t(g_i(t))$ .

En primer lugar vamos a probar que  $\bar{n} = m_N$ , la desigualdad  $m_N \leq \bar{n}$  es obvia.

Sea  $H$  una hipersuperficie no singular y  $L = a^1 X_{j_1} + \dots + a^r X_{j_r}$  su forma inicial (suponemos  $a^i \neq 0$ ,  $j_1 < \dots < j_r$ ).

Denotemos por  $G \in R_N$  la suma de los monomios que aparecen efectivamente en  $H$  que contengan unicamente variables  $X_j$  con  $j < j_1$ .

Supongamos que  $\alpha.H > m_N$ , por tanto  $\alpha.H > m_{j_1}$ . Puesto que  $V_t(L) = m_{j_1}$  y  $m_1 < \dots < m_N$ , necesariamente

$$m_{j_1} = V_t(G(g_1(t), \dots, g_{j_1-1}(t)))$$

llegando a una contradicción con la hipótesis

$$m_{j_1} \notin V(g_1(t), \dots, g_{j_1-1}(t))$$

Así hemos probado que  $\bar{n} = m_N$ .

Para finalizar demostraremos que  $m_N \leq c(\alpha, o) + e - 1$ . Supongamos que  $m_N > c(\alpha, o) + e - 1$  y sea

$$(1) \quad m_{i_0} = \text{Mín} \left\{ m_i / m_i > c(\alpha, o) + e - 1 \right\}$$

Observemos que al ser  $\alpha$  singular, ya que  $e > 1$ , se verifi-

ca

$$\delta(\alpha, 0) + 1 \leq c(\alpha, 0)$$

(ver proposición I-1.1). De la proposición I-1.3(iii) deducimos

$$(2) \quad m_1 = e \leq c(\alpha, 0),$$

y por lo tanto  $i_0 > 1$ .

Al ser  $c(\alpha, 0)$  el conductor de la extensión  $\mathcal{O}_{(\alpha, 0)} \longrightarrow$

$\overline{\mathcal{O}_{(\alpha, 0)}} = k \parallel t \parallel$  de (1) obtenemos

$$\{c, c+1, \dots, c+e-1\} \subset V(g_1, \dots, g_{i_0-1})$$

Como por otro lado

$$e \in V(g_1, \dots, g_{i_0-1}),$$

ya que  $m_1 = e$ , deducimos

$$\{c, c+1, \dots\} \subset V(g_1, \dots, g_{i_0-1}),$$

por lo tanto

$$m_{i_0} \in V(g_1, \dots, g_{i_0-1}).$$

En contra de la hipótesis.

$$\text{Hemos probado } \bar{n} = m_N \quad \text{y} \quad m_N \leq c(\alpha, 0) + e - 1,$$

quedando demostrado el lema 1.8

1.9 TEOREMA : Sea  $\alpha$  una rama de  $(k^N, 0)$  de multiplicidad  $e$  con parametrización propia

$$\alpha: \begin{cases} X_i = g_i(t) \\ i=1, 2, \dots, N \end{cases}$$

Para todo  $n \geq \text{Máx} \{2, 2\delta(\alpha, 0) + e\}$  es analíticamente equivalente a  $\alpha$  la rama  $\alpha^n$  que admite como parametrización propia

$$\alpha^n: \begin{cases} X_i = f_i(t) \\ i=1, 2, \dots, N \end{cases}$$

donde  $f_i(t)$  es la truncación  $n$ -ésima de  $g_i$ , i.e.  $f_i$  es un polinomio en  $t$  que verifica  $f_i - g_i \equiv 0$  módulo  $(t^n)$  y  $\deg(f_i) \leq n-1$ , para todo  $i=1,2,\dots,N$ .

Demostración: el caso  $e=1$  es obvio. Supongamos que  $e > 1$ .

En primer lugar vamos a demostrar:

(A) Supongamos que  $\text{embd}(\alpha, o) = N$ . Para todo  $n \geq 2 \delta(\alpha, o) + e$  y para toda serie  $f(t) \in k \llbracket t \rrbracket$  que verifique  $V_t(f(t)) = n$  existe una serie  $F \in k \llbracket X_1, \dots, X_N \rrbracket$  tal que:

$$(A-1) \quad f(t) = F(g_1(t), \dots, g_N(t))$$

$$(A-2) \quad \text{orden}(F) \geq 2$$

De la proposición I-1.1 deducimos que

$$c(\alpha, o) \leq 2 \delta(\alpha, o) + e,$$

con lo cual toda serie  $f(t)$ , con  $V_t(f(t)) \geq 2 \delta(\alpha, o) + e$ , pertenece a  $\mathcal{O}_{(\alpha, o)}$ . Por lo tanto existe una serie  $F \in k \llbracket X_1, \dots, X_N \rrbracket$  que verifica (A-1).

La propiedad (A-2) resulta inmediatamente de 1.8.

Después de un cambio de coordenadas lineal podemos suponer que el espacio tangente de  $\alpha$  es la variedad lineal  $X_{b+1} = \dots = X_N = 0$  con  $b = \text{embd}(\alpha, o)$ .

Gracias al teorema 1 de SAM-1 la rama  $\alpha$  es analíticamente equivalente a la rama  $\beta$  que admite por parametrización propia

$$\beta : \begin{cases} X_i = g_i(t) & i = 1, 2, \dots, b \\ X_i = 0 & i = b+1, \dots, N \end{cases}$$

Sea  $f_i$  la truncación  $n$ -ésima de  $g_i$ . Aplicando (A) a la rama  $\beta$  deducimos que existe una serie  $F_i \in k \llbracket X_1, \dots, X_b \rrbracket$  tal que  $\text{orden}(F_i) \geq 2$  y  $f_i - g_i = F_i(g_1(t), \dots, g_b(t))$ .

Consideremos el endomorfismo de  $k$ -álgebras  $\phi$  de  $R$ :

$$\phi(X_i) = X_i + F_i(X_1, \dots, X_b),$$

de la condición orden  $(F_i) \gg 2$  se deduce que  $\emptyset$  es un automorfismo analítico de  $R$ .

Es inmediato que la rama  $\alpha$  es analíticamente isomorfa, vía  $\emptyset$ , a la rama  $\alpha^n$  que admite por parametrización propia:

$$\alpha^n: \begin{cases} X_i = f_i(t) \\ i = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

1.10 Proposición: sea  $\alpha$  una rama de  $(k^N, o)$  de multiplicidad  $e$ . Para todo  $n \gg \text{Máx} \left\{ 2, 2 \delta(\alpha, o) + e \right\}$  se verifica

$$W(\bar{N}, \alpha) = W(\bar{N}, \alpha^n)$$

Demostración: vamos a demostrar que  $CS(\alpha, o) = CS(\alpha^n, o)$ . Gracias al teorema 1.9 las ramas  $\alpha$  y  $\alpha^n$  admiten parametrizaciones propias

$$\alpha: \begin{cases} X_1 = t^e \\ X_i = \sum_{j=e+1}^{\infty} a_j^i t^j \\ i = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad \alpha^n: \begin{cases} X_1 = t^e \\ X_i = \sum_{j=e+1}^{n-1} a_j^i t^j \\ i = 2, 3, \dots, N \end{cases}$$

Sea  $\xi \neq 1$  una raíz  $e$ -ésima de la unidad. Al ser la parametrización de  $\alpha^n$  propia y gracias al lema I-1.4 tenemos que

$$C(\xi) = \inf \left\{ j / \text{existe } i \text{ tal que } a_j^i \neq 0 \text{ y } \xi^j \neq 1 \right\}$$

es menor o igual que  $n-1$ .

De la observación posterior a la proposición 1.1 deducimos que  $CS(\alpha, o) = CS(\alpha^n, o)$ .

1.11 Corolario: Sean  $\alpha, \beta$  dos ramas de  $(k^N, o)$  y

$$\alpha: \begin{cases} X_i = f_i(t) \\ i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad \beta: \begin{cases} X_i = \bar{f}_i(t) \\ i = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

parametrizaciones propias de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Denotemos por  $e$  y  $e'$  las multiplicidades de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente.

Supongamos que  $f_i(t) \equiv \bar{f}_i(t) \pmod{t^n}$  para  $n \geq \text{Máx} \{ 2, 2\delta(\alpha, 0) + e, 2\delta(\beta, 0) + e' \}$ , entonces

$$W(\bar{N}, \alpha) = W(\bar{N}, \beta)$$

Demostración: es inmediato comprobar, en virtud de la hipótesis, que  $\alpha^n = \beta^n$ . Usando la proposición 1.10 deducimos el corolario.

## 2. Variación del orden de singularidad de una rama por proyección

En primer lugar daremos algunos resultados sobre las características (ver Cap. I) de las series pertenecientes al anillo  $k \llbracket x^{1/e} \rrbracket$ .

2.1 Lema: Sea  $y = \sum_{i=e}^{\infty} a_i x^{i/e}$  un elemento de  $k \llbracket x^{1/e} \rrbracket$  que verifica  $\text{mcd}(e, \{i \in \mathbb{N} / a_i \neq 0\}) = 1$  y tiene característica  $(e; \beta_1, \dots, \beta_g)$ , la característica de la serie

$$y' = \sum_{i=e}^{\infty} a_i x^{i-e/e}$$

es  $(e; \beta_1^{-e}, \dots, \beta_g^{-e})$ .

Demostración: Observemos que  $\text{mcd}(e, \{i-e/a_i \neq 0\}) = 1$  ya que  $\text{mcd}(e, \{i/a_i \neq 0\}) = 1$ .

El primer exponente de  $y'$  no entero es  $\frac{\beta_1^{-e}}{e}$  por tanto  $\beta_1' = \beta_1^{-e}$ , además  $\frac{\beta_1'}{e} = \frac{r_1^{-e_1}}{e_1}$  siendo  $\frac{r_1}{e_1}$  la forma irreducible de la fracción  $\frac{\beta_1}{e}$ . Se tiene  $\text{mcd}(r_1^{-e_1}, e_1) = 1$  dado que  $\text{mcd}(r_1, e_1) = 1$ .

$$\text{Supongamos por inducción } \frac{\beta_i'}{e} = \frac{\beta_i^{-e}}{e} = \frac{r_i^{-e_1 \dots e_i}}{e_1 \dots e_i}$$

con  $\text{mcd}(r_i^{-e_1 \dots e_i}, e_i) = 1$ , el  $i+1$ -ésimo exponente de  $y'$  será el primer exponente, efectivamente aparente en  $y'$  y mayor de

$$\frac{\beta_i'}{e}, \text{ no múltiplo entero } r_e \cdot \frac{1}{e_1 \dots e_i}.$$

Basta observar que  $\frac{n}{e}$  es múltiplo entero de  $\frac{1}{e_1 \cdots e_i}$  si y sólo si lo es  $\frac{n-e}{e}$ , para concluir que  $\beta'_{i+1} = \beta_{i+1}^{-e}$  y el que  $i+1$ -ésimo exponente característico de  $y'$  es

$$\frac{\beta_{i+1}^{-e}}{e} = \frac{r_{i+1} - e_1 \cdots e_{i+1}}{e_1 \cdots e_{i+1}}$$

Donde de nuevo  $\text{mcd}(r_{i+1} - e_1 \cdots e_{i+1}, e_{i+1}) = 1$

2.2 Lema : Sea  $\alpha$  una rama de  $(k^2, 0)$  con característica  $(e; \beta_1, \dots, \beta_g)$ . Supongamos que  $v_t(x) = e$  (i.e.  $x$  parámetro transversal de  $\mathcal{O}_{(X,0)}$ ) y que  $V_t(y) = m > e$  (i.e.  $m$  es la clase de  $\alpha$ ), la rama  $\alpha'$  obtenida después de hacer la transformación  $\tau$ :

$$\tau: \begin{cases} Y' = Y/X \\ X' = X \end{cases}$$

tiene característica:

(a)  $(e; \beta_1^{-e}, \dots, \beta_g^{-e})$  si  $2e \leq m$

(b)  $(m-e; \beta_1^{-(m-e)}, \dots, \beta_g^{-(m-e)})$  para  $i=1$  ó  $2$  si  $2e > m$ .

Demostración: sea  $Y(X) = \sum_{i \geq m} a_i X^{i/e}$  una serie de Puisseux de  $\alpha$ , una parametrización propia de  $\alpha$  será:

$$\alpha: \begin{cases} X = t^e \\ Y = \sum_{i \geq m} a_i t^i \end{cases}$$

Si hacemos la transformación  $\tau$ , la rama  $\alpha'$  tiene por parametrización propia

$$\alpha': \begin{cases} X' = t^e \\ Y' = \sum_{i \geq m} a_i t^{i-e} \end{cases}$$

La serie  $Y'(X') = \sum_{i \geq m} a_i X'^{i-e/e}$  tiene por característica (Lema 2.1)  $(e; \beta_1^{-e}, \dots, \beta_g^{-e})$ .

Si  $m \geq 2e$  la serie  $Y'(X')$  es la de Puisseux de  $\alpha'$  y la característica de  $\alpha'$  coincide con la de  $Y'(X')$ , i.e. con la del enunciado.

Si  $m < 2e$ , vale como serie de Puisseux de  $\alpha'$  la  $X'(Y')$  obtenida de  $Y'(X')$  por inversión. Por la fórmula de inversión (ver I-1.6) la característica de  $X'(Y')$  puede tomar dos valores

$$(m-e; \beta_1 - (m-e), \dots, \beta_g - (m-e))$$

para  $i=1$  ó  $2$ , quedando demostrado el lema 2.2

2.3 Proposición: Sea  $\alpha$  una rama de  $(k^2, o)$  con característica  $(e; \beta_1, \dots, \beta_g)$ . El orden de singularidad de  $\alpha$  es menor o igual que

$$\frac{(\beta_g - 1) \cdot (e-1)}{2}$$

Demostración: El caso  $e=1$  es obvio. Razonemos por inducción sobre el par  $(e, \beta_g)$ .

Si  $e=2$ , entonces  $g=1$  y  $\beta_1 = h \cdot e + 1$ . De la proposición I-1.3(v) obtenemos  $\delta(\alpha, o) = h \cdot \frac{e(e-1)}{2} = \frac{(\beta_1 - 1) \cdot (e-1)}{2}$

Supongamos  $e > 2$ , si realizamos una explosión en el origen de  $\alpha$  la rama transformada  $\alpha'$  puede tener multiplicidad igual o inferior a  $e$ .

En el primer caso la característica de  $\alpha'$  es  $(e; \beta_1 - e, \dots, \beta_g - e)$  (lema 2.2) y por hipótesis de inducción:

$$\delta(\alpha, o) = \delta(\alpha', o) + \frac{e(e-1)}{2} \leq \frac{(\beta_g - e - 1)}{2} (e-1) + \frac{e(e-1)}{2} = \frac{(\beta_g - 1) \cdot (e-1)}{2}$$

En el segundo caso si  $e'$  es la multiplicidad de  $\alpha'$ , la característica de esta última rama es igual a

$$(e'; \beta_1 - e', \dots, \beta_g - e')$$

para  $i=1$  ó  $2$  (ver lema 2.2).

Por hipótesis de inducción

$$\delta(\alpha, o) = \delta(\alpha', o) + \frac{e(e-1)}{2} \leq \frac{(\beta_g - e' - 1)}{2} (e' - 1) + \frac{e(e-1)}{2}$$

para concluir la demostración necesitamos el siguiente resultado:

2.4 Lema : Si se verifica

$$\frac{(\beta_g^{-e'-1})}{2} (e'-1) + \frac{e(e-1)}{2} \geq \frac{(\beta_g^{-1}) \cdot (e-1)}{2}$$

entonces se tiene  $\delta(\alpha, 0) = \frac{(\beta_g^{-1}) \cdot (e-1)}{2}$

Demostración del Lema: la desigualdad del enunciado dado que  $e' < e$  equivale a  $\beta_g \leq e+e'$ . Supongamos, pues, que  $\beta_g \leq e+e'$ ,

La rama  $\alpha$  admite una parametrización propia de la forma

$$\alpha: \begin{cases} X = t^e \\ Y = at^{e+e'} + \dots \end{cases}$$

con  $a \neq 0$ . Al ser  $\beta_g \leq e+e'$  deducimos que  $\beta_g = e+e'$  y  $g=1$ , así  $\frac{e+e'}{e}$  es el único exponente característico de la rama  $\alpha$ .

La proposición I-1.3(v) permite calcular  $\delta = \frac{(e-1)(e+e'-1)}{2}$  y de ahí el enunciado.

Continuación de la demostración de 2.3.

Hemos demostrado que si

$$\frac{(\beta_g^{-e'-1})}{2} (e'-1) + \frac{e(e-1)}{2} \leq \frac{(\beta_g^{-1}) (e-1)}{2}$$

se verifica 2.3, en caso contrario gracias al lema 2.4 también se verifica 2.3.

2.5 TEOREMA : Sea  $\alpha$  una rama de  $(k^N, 0)$ . Para cada  $L \in W(2, \alpha)$ . Se verifica:

$$\delta(\alpha, 0) \leq \delta(\alpha^L, 0) \leq \frac{(2\delta(\alpha, 0) + e - 2) \cdot (e-1)}{2}$$

donde  $e$  es la multiplicidad de  $\alpha$ .

Demostración : la desigualdad  $\delta(\alpha, 0) \leq \delta(\alpha^L, 0)$  es consecuencia inmediata del corolario 1.4

Podemos tomar coordenadas tales que la variedad  $L$  tenga por ecuaciones  $X_1 = X_2 = 0$ , asimismo podemos suponer que  $\alpha_1$  es un

parámetro transversal de  $\mathcal{O}_{(\alpha,0)}$  (ver demostración de la prop.1.2).

Es inmediato comprobar que para  $e=1$  el teorema 2.5 se verifica, supongamos pues,  $e > 1$ .

Consideremos una parametrización propia de la rama  $\alpha$ :

$$\alpha: \begin{cases} X_1 = t^e \\ X_i = g_i(t) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases}$$

Sea  $\bar{\alpha}$  la rama  $\alpha^n$  para  $n = 2\delta(\alpha,0) + e$ . Sabemos, gracias al teorema 1.9, que la rama  $\bar{\alpha}$  admite como parametrización propia

$$\bar{\alpha}: \begin{cases} X_1 = t^e \\ X_i = \bar{g}_i(t) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases}$$

con  $\deg(g_i) \leq 2\delta(\alpha,0) + e - 1$  y  $g_i \equiv \bar{g}_i$  módulo  $(t^{2\delta(\alpha,0)+e})$ .

Al ser  $W(2,\alpha) = W(2,\bar{\alpha})$ , prop. 1.10, la rama  $(\bar{\alpha})^L$  admite como parametrización propia

$$(\bar{\alpha})^L: \begin{cases} X_1 = t^e \\ X_2 = \bar{g}_2(t) \end{cases}$$

de modo que  $\beta_g((\bar{\alpha})^L) \leq \deg(\bar{g}_2(t)) \leq 2\delta(\alpha,0) + e - 1$ .

La rama  $\alpha^L$  admite como parametrización propia

$$\alpha^L: \begin{cases} X_1 = t^e \\ X_2 = g_2(t) \end{cases} ;$$

puesto que

$$g_2(t) \equiv \bar{g}_2(t) \text{ módulo } (t^{2\delta(\alpha,0)+e})$$

y la parametrización de  $(\bar{\alpha})^L$  es propia, los exponentes característicos de  $(\bar{\alpha})^L$  y  $\alpha^L$  coinciden.

Así tenemos que

$$\beta_g(\alpha^L) = \beta_g((\bar{\alpha})^L) ,$$

por tanto

$$\beta_g(\alpha^L) \leq 2\delta(\alpha,0) + e - 1 .$$

Basta aplicar la proposición 2.3 para obtener:

$$\delta(\alpha^L, o) \leq \frac{(2 \delta(\alpha, o) + e - 2)}{2} \cdot (e - 1)$$

quedando demostrado el teorema 2.5

2.6 Corolario: Sea  $\alpha$  una rama de  $(k^N, o)$ . Para cada  $L \in W(\bar{N}, \alpha)$ , se verifica

$$\delta(\alpha, o) \leq \delta(\alpha^L, o) \leq \frac{(2 \cdot \delta(\alpha, o) + e - 2)}{2} \cdot (e - 1)$$

donde  $e$  es la multiplicidad de  $\alpha$ .

Demostración: Sea  $L \in W(\bar{N}, \alpha)$ , es fácil probar que existe  $K \in W(2, \alpha)$ , tal que  $K \supset L$ . Del lema 1.4 obtenemos

$$\delta(\alpha, o) \leq \delta(\alpha^L, o) \leq \delta(\alpha^K, o),$$

y del teorema 2.5 deducimos el corolario.

### 3. Variación del orden de singularidad de un germen por proyección.

En el párrafo anterior hemos acotado el orden de singularidad de la proyección plana de una rama (teorema 2.5). Para establecer un resultado análogo para gérmenes con varias ramas es necesario estudiar el comportamiento por proyección del contacto entre ramas, este es el primer objetivo de esta sección.

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos ramas de  $(k^N, o)$  de multiplicidades  $e$  y  $e'$  respectivamente, que admitan parametrizaciones propias

$$\alpha: \begin{cases} X_i = f_i(t) \\ i=1, 2, \dots, N \end{cases} \quad \beta: \begin{cases} X_i = g_i(t) \\ i=1, 2, \dots, N \end{cases}$$

Se condieran las series

$$f_{i, \varepsilon}(t) = f_i(\varepsilon \cdot t) \quad , \quad g_{i, \eta}(t) = g_i(\eta \cdot t),$$

donde  $\varepsilon$  es una raíz  $e$ -ésima de la unidad y  $\eta$  una raíz  $e'$ -ésima de

la unidad respectivamente; se define el número racional positivo:

$$K_{\varepsilon, \eta}(\alpha, \beta) = \text{Mín} \left\{ \text{orden}_U (f_{i, \varepsilon}(U^{1/e}) - g_{i, \eta}(U^{1/e'})) ; i=1, 2, \dots, N \right\}$$

Recordemos que en el capítulo I definíamos el entero

$$(\alpha * \beta) = \sum_{i=1}^s a_i \cdot b_i$$

donde la suma se extiende a los puntos infinitamente próximos comunes a ambas ramas y  $a_i, b_i$  denotan las multiplicidades del  $i$ -ésimo punto infinitamente próximo en  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. A continuación damos una propiedad del entero  $(\alpha * \beta)$  :

3.1 Proposición:  $K_{\varepsilon, \eta}(\alpha, \beta) \leq (\alpha * \beta)$ .

Demostración: Denotaremos por  $K$  el número  $K_{\varepsilon, \eta}(\alpha, \beta)$ .

Supongamos  $K \geq 2$ , entonces las ramas tienen la misma recta tangente y por tanto podemos tomar como parámetro transversal de los anillos  $\mathcal{O}_{(\alpha, 0)}$  y  $\mathcal{O}_{(\beta, 0)}$  el mismo elemento  $x_i$ , para cierto  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Después de una reordenación de los subíndices podemos suponer que  $i=1$ . Por lo tanto las ramas  $\bar{\alpha}$  y  $\bar{\beta}$ , transformadas por la explosión en el origen de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, admiten parametrizaciones propias

$$\bar{\alpha}: \begin{cases} X_1 = f_1(t) \\ X_i = \frac{f_i(t)}{f_1(t)} \\ i=2, 3, \dots, N \end{cases} \quad \bar{\beta}: \begin{cases} X_1 = g_1(t) \\ X_i = \frac{g_i(t)}{g_1(t)} \\ i=2, 3, \dots, N \end{cases}$$

Sean  $\bar{f}_{i, \varepsilon}$  y  $\bar{g}_{i, \eta}$  los cocientes  $\frac{f_{i, \varepsilon}}{f_{1, \varepsilon}}$  y  $\frac{g_{i, \eta}}{g_{1, \eta}}$  respectivamente, en primer lugar vamos a calcular el orden de la serie

$$\bar{f}_{i, \varepsilon}(U^{1/e}) - \bar{g}_{i, \eta}(U^{1/e'}) ,$$

para ello necesitamos el siguiente lema:

3.2. Lema : existen series  $h \in k \left\| U^{1/e} \right\|$  y  $h' \in k \left\| U^{1/e'} \right\|$  tales

que

$$(i) \quad f_{1,\varepsilon} (U^{1/e}) \cdot h = U, \quad g_{1,\eta} (U^{1/e'}) \cdot h' = U$$

$$(ii) \quad \text{orden}_U (h-h') \geq K-1$$

Demostración del lema 3.2 : si  $f_{1,\varepsilon}(t) = \lambda t^e + \dots$  con  $\lambda \neq 0$ , entonces existe una serie  $H(t) \in k \left\| t \right\|$  tal que

$$f_{1,\varepsilon}(t) \cdot H(t) = t^e,$$

basta tomar  $h(U) = H(U^{1/e})$ . Para  $h'$  se hace analogamente.

Sabemos que

$$f_{1,\varepsilon}(U^{1/e}) - g_{1,\eta}(U^{1/e'}) \equiv 0 \text{ módulo } (U^K)$$

así obtenemos

$$U - g_{1,\eta}(U^{1/e'}) \cdot h(U) \equiv 0 \text{ módulo } (U^K).$$

De la igualdad anterior y de

$$g_{1,\eta}(U^{1/e'}) \cdot h'(U) = U$$

deducimos que

$$g_{1,\eta}(U^{1/e'}) \cdot (h(U) - h'(U)) \equiv 0 \text{ módulo } (U^K),$$

al ser  $g_{1,\eta}(U^{1/e'})$  de orden uno en  $U$ , de la última igualdad obtenemos

$$\text{orden}_U (h-h') \geq K-1$$

Continuación de la demostración de la proposición 3.1:

Sean  $h$  y  $h'$  las series del lema anterior. Se verifica que

$$\bar{f}_{i,\varepsilon}(U^{1/e}) - \bar{g}_{i,\eta}(U^{1/e'}) = f_{i,\varepsilon}(U^{1/e}) \cdot \frac{h}{U} - g_{i,\eta}(U^{1/e'}) \cdot \frac{h'}{U},$$

y de la condición

$$\text{orden}_U (h-h') \geq K-1$$

obtenemos que

$$\text{orden} (\bar{f}_{i,\varepsilon}(U^{1/e}) - \bar{g}_{i,\eta}(U^{1/e'})) \geq K-1$$

Si denotamos  $\bar{K} = \text{Mín} \left\{ \text{orden}_U (\bar{f}_{i,\varepsilon}(U^{1/e}) - \bar{g}_{i,\eta}(U^{1/e'})) \right\}$ ; para  $i=1,2,\dots,N$  }, hemos demostrado que si  $K \geq 2$  se verifica

$$(1) \quad \bar{K} \geq K-1$$

La demostración se realizará por inducción sobre el número  $s$  de puntos infinitamente próximos comunes a las dos ramas.

Supongamos  $s=1$ , tenemos  $(\alpha * \beta) = e.e'$ . Asimismo  $K=1$ , porque en caso contrario, gracias a la desigualdad (1), tendríamos  $\bar{K} \geq 1$ , por lo tanto las ramas  $\bar{\alpha}$  y  $\bar{\beta}$  tendrían el origen en común en contra de la hipótesis  $s=1$ . Así en el caso  $s=1$  se tiene:

$$(\alpha * \beta) = e.e' \quad \text{y} \quad K=1, \quad \text{verificándose la proposición 3.1}$$

Si  $K \leq e.e'$ , como por definición siempre se tiene  $e.e' \leq (\alpha * \beta)$ , obtenemos

$$K \leq (\alpha * \beta)$$

concluyendo la proposición 3.1

Supongamos pues  $K \geq e.e'+1$  y  $s \geq 2$ . De la primera condición deducimos  $K \geq 2$  por lo tanto se verifica la desigualdad (1):

$$\bar{K} \geq K-1$$

Sean  $a$  y  $a'$  las multiplicidades de las ramas  $\bar{\alpha}$  y  $\bar{\beta}$  respectivamente. Observamos que  $\bar{K}$  no es necesariamente igual a  $K_{\varepsilon, \eta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  a causa de ello hemos de considerar tres casos:

(I)  $e=a, e'=a'$ . En este caso

$$K_{\varepsilon, \eta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \bar{K}$$

y por tanto de (1) obtenemos

$$K_{\varepsilon, \beta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \geq K-1$$

Por hipótesis de inducción tenemos que

$$(\bar{\alpha} * \bar{\beta}) \geq K_{\varepsilon, \eta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}),$$

luego

$$(\bar{\alpha} * \bar{\beta}) \geq K-1.$$

Dado que  $(\alpha^*\beta) = (\bar{\alpha}^*\bar{\beta}) + e.e'$  de la última desigualdad obtenemos

$$(\alpha^*\beta) \geq K.$$

II  $e > a$  ,  $e' = a'$  ó  $e = a$  ,  $e' > a'$  . Son dos alternativas que no pueden presentarse, por su simetría veamos el caso  $e > a$  ,  $e' = a'$  .

Si  $e > a$  para algún  $i$  se verifica

$$\text{orden}_t (\bar{f}_{i,\varepsilon} (t)) = a < e$$

por lo que

$$(2) \quad \text{orden}_U (\bar{f}_{i,\varepsilon} (U^{1/e})) = \frac{a}{e} < 1.$$

Observemos que  $K \geq 3$  ya que  $e > a \geq 1$  y  $K \geq e.e' + 1$ , por lo tanto usando (1),  $\bar{K} \geq 2$  obtenemos

$$\text{orden}_U (\bar{g}_{1,\eta} (U^{1/e'})) = \frac{a}{e} < 1,$$

hecho que es incompatible con la hipótesis  $e' = a'$  .

(III)  $e > a$  ,  $e' > a'$  . Repitiendo el razonamiento del apartado (II) se obtiene

$$\frac{a}{e} = \frac{a'}{e'}$$

De la igualdad anterior deducimos que

$$\text{orden}_V (\bar{f}_{i,\varepsilon} (v^{1/a}) - \bar{g}_{i,\eta} (v^{1/a'})) = \text{orden}_U (\bar{f}_{i,\varepsilon} (U^{1/e}) - \bar{g}_{i,\eta} (U^{1/e'})) - \frac{\varepsilon}{e}$$

y de la desigualdad (1) deducimos

$$(3) \quad \text{orden}_V (\bar{f}_{i,\varepsilon} (v^{1/a}) - \bar{g}_{i,\eta} (v^{1/a'})) \geq (K-1) \cdot \frac{e}{a} .$$

Por hipótesis de inducción y gracias a la anterior desigualdad obtenemos

$$(\bar{\alpha}^*\bar{\beta}) \geq (K-1) \cdot \frac{e}{a}$$

Es inmediato comprobar que  $K \leq (K-1) \cdot \frac{e}{a} + e.e'$ , combinando las dos últimas desigualdades se deduce

$$(\bar{\alpha}^*\bar{\beta}) + e.e' \geq K ,$$

como  $(\alpha^*\beta) = (\bar{\alpha}^*\bar{\beta}) + e.e'$  , deducimos la proposición 3.1

3.3 Proposición: Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos ramas de  $(k^N, 0)$  que admiten parametrizaciones propias

$$\alpha: \begin{cases} X_1 = t^e \\ X_i = f_i(t) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases} \quad \beta: \begin{cases} X_1 = t^{e'} \\ X_i = f'_i(t) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases}$$

Supongamos que la variedad lineal definida por las ecuaciones  $X_1 = X_2 = 0$  pertenezca a  $W(2, \alpha \cup \beta)$ , entonces para todo par de raíces de la unidad  $\varepsilon, \eta$  ( $e$ -ésima y  $e'$ -ésima y respectivamente) se verifica que

$$K_{\varepsilon, \eta}(\alpha, \beta) = \text{orden}_U (f_{2, \varepsilon}(U^{1/e}) - f'_{2, \eta}(U^{1/e'}))$$

Demostración: por definición se tiene

$$K_{\varepsilon, \eta}(\alpha, \beta) \leq \text{orden}_U (f_{2, \varepsilon}(U^{1/e}) - f'_{2, \eta}(U^{1/e'})),$$

Supongamos que existe  $i \in \{3, 4, \dots, N\}$  tal que

$$(1) \text{orden}_U (f_{i, \varepsilon}(U^{1/e}) - f'_{i, \eta}(U^{1/e'})) < \text{orden}_U (f_{2, \varepsilon}(U^{1/e}) - f'_{2, \eta}(U^{1/e'})),$$

de la anterior desigualdad se deduce, al sustituir  $U$  por  $S^{e \cdot e'}$ , que

$$(2) \text{orden}_S (f_{i, \varepsilon}(S^{e'}) - f'_{i, \eta}(S^e)) < \text{orden}_S (f_{2, \varepsilon}(S^{e'}) - f'_{2, \eta}(S^e)).$$

Consideramos el vector secante  $w$  definido por la diferencia  $(S^{e \cdot e'} - S^{e \cdot e'}, f_{2, \varepsilon}(S^{e'}) - f'_{2, \eta}(S^e), \dots, f_{N, \varepsilon}(S^{e'}) - f'_{N, \eta}(S^e))$ , de la desigualdad (2) obtenemos que  $w = (0, 0, a_3, \dots, a_N)$  con  $a_j \neq 0$  para algún  $j \in \{3, 4, \dots, N\}$ .

Así  $w$  es un vector secante a  $\alpha \cup \beta$  contenido en la variedad  $X_1 = X_2 = 0$ , hecho que está en contradicción con que dicha variedad pertenezca a  $W(2, \alpha \cup \beta)$ .

Hemos demostrado que la desigualdad (1) no se verifica jamás, quedando demostrada la proposición 3.3.

3.4 TEOREMA : Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos ramas de  $(k^N, 0)$ . Para toda  $L \in W(2, \alpha \cup \beta)$  se verifica

$$(\alpha^{L*} \beta^L) \leq e \cdot e' (\alpha * \beta)$$

siendo  $e$  y  $e'$  las multiplicidades de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente.

Demostración : podemos tomar coordenadas locales de tal modo que  $L$  sea la variedad lineal definida por las ecuaciones  $X_1 = X_2 = 0$  y que las ramas admitan parametrizaciones propias:

$$\alpha : \begin{cases} X_1 = t^e \\ X_i = f_i(t) \\ i=2, 3, \dots, N \end{cases} \quad \beta : \begin{cases} X_1 = t^{e'} \\ X_i = f'_i(t) \\ i=2, 3, \dots, N \end{cases}$$

(ver demostración de la prop. 1.2).

Las proyecciones planas según  $L$  tienen parametrizaciones propias

$$\alpha^L : \begin{cases} X_1 = t^e \\ X_2 = f_2(t) \end{cases} \quad \beta^L : \begin{cases} X_1 = t^{e'} \\ X_2 = f'_2(t) \end{cases}$$

gracias al teorema I-1.5 tenemos que

$$(\alpha^{L*} \beta^L) = \text{orden}_{X_1} \left( \prod_{\substack{\varepsilon^e=1 \\ \eta^{e'}=1}} (f_2, \varepsilon (X_1^{1/e}) - f'_2, \eta (X_1^{1/e'})) \right)$$

Para ciertas raíces de la unidad  $\varepsilon_0, \eta_0$  se verifica que

$$\text{orden}_{X_1} (f_2, \varepsilon_0 (X_1^{1/e}) - f'_2, \eta_0 (X_1^{1/e'})) < \frac{(\alpha^L * \beta^L)}{e \cdot e'}$$

gracias a la proposición 3.3 obtenemos

$$K_{\varepsilon_0, \eta_0} (\alpha, \beta) \geq \frac{(\alpha^{L*} \beta^L)}{e \cdot e'}$$

y de la proposición 3.1

$$(\alpha * \beta) \geq \frac{(\alpha^{L*} \beta^L)}{e \cdot e'}$$

de donde se sigue el enunciado.

Definición : Si  $(X, o)$  es un germen de curva de  $(k^N, o)$

$\bar{e}(X, o)$  = máximo de las multiplicidades de las ramas de  $(X, o)$

3.5. TEOREMA : Sea  $(X, o)$  un germen de curva de  $(k^N, o)$  de multiplicidad  $e$  y  $r$  ramas. Para todo  $2 \leq \bar{N} \leq N$  y toda variedad lineal  $L \in W(\bar{N}, X)$  se verifica:

$$\text{si } r=1 \quad \delta(X, o) \leq \delta(X^L, o) \leq \frac{1}{2} \cdot (e-1) (2 \delta(X, o) + e - 2)$$

$$\text{si } r \geq 1 \quad \delta(X, o) \leq \delta(X^L, o) \leq r \frac{(\bar{e}-1)(\bar{e}-2)}{2} + \frac{1}{2} e (\bar{e})^2 \delta(X, o),$$

con  $\bar{e} = \bar{e}(X, o)$ .

Demostración: el caso  $r=1$  fué establecido en el teorema 2.5.

Vamos a demostrar el teorema para  $r \geq 1$  suponiendo en primer lugar  $\bar{N}=2$ .

Sean  $Y_1, \dots, Y_r$  las ramas de  $(X, o)$ , gracias a la proposición 1.2 de las ramas de  $(X^L, o)$  son  $Y_1^L, \dots, Y_r^L$ .

De la proposición I-1.3 (vi) obtenemos que

$$\delta(X^L, o) = \sum_{i=1}^r \delta(Y_i^L, o) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r (Y_i^L * Y_j^L)$$

Del teorema 2.6 y de la proposición I-1.3(ii) tenemos que

$$\delta(Y_i^L, o) \leq \frac{1}{2} (\bar{e}-1) (2 \delta^*(Y_i, o) + \bar{e} - 2)$$

por otra parte gracias al teorema 3.4 se verifica

$$(Y_i^L * Y_j^L) \leq (\bar{e})^2 \cdot (Y_i * Y_j)$$

Combinando estas dos igualdades con la expresión (1) obtenemos

$$\delta(X, o) \leq \delta(X^L, o) \leq r \cdot \frac{(\bar{e}-1)(\bar{e}-2)}{2} +$$

$$+ (\bar{e})^2 \left( \sum_{i=1}^r \delta^*(Y_i, o) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r (Y_i * Y_j) \right)$$

de la proposición I-1.3(vi) se deduce

$$\delta(X^L, o) \leq r \cdot \frac{(\bar{e}-1)(\bar{e}-2)}{2} + (\bar{e})^2 \delta^*(X, o)$$

Finalmente de la desigualdad anterior y gracias a la proposición I-1.3(iv) obtenemos

$$\delta(X^L, o) \leq r \cdot \frac{(\bar{e}-1)(\bar{e}-2)}{2} + \frac{1}{2} e (\bar{e})^2 \delta(X, o)$$

que es una de las desigualdades que queríamos demostrar. La otra se deduce del corolario 1.4, quedando demostrado el teorema para  $\bar{N}=2$ .

El caso general se deduce del caso  $\bar{N}=2$  análogamente como se hizo en la demostración del teorema 2.6.

Definición :  $\bar{w}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  será la función  $\bar{w}(n) = \frac{1}{2} n^2 (n+1) (n+3)$ .

3.6 TEOREMA : Sea  $(X, o)$  un germen de curva de  $(k^N, o)$ . Para toda variedad lineal  $L \in W(\bar{N}, X)$  se verifica

$$\delta(X, o) \leq \delta(X^L, o) \leq \bar{w}(\delta(X, o)).$$

Demostración: Si  $\rho$  es el número de reducción y  $e$  la multiplicidad del anillo  $\mathcal{O}_{(X, o)}$ , sabemos que  $e-1 \leq \rho$ . De la proposición I-1.3(iii) obtenemos

$$e-1 \leq \delta(X, o)$$

Dado que  $\bar{e}(X, o) \leq e$ , deducimos  $\bar{e}(X, o) - 1 \leq \delta(X, o)$ . Como  $r \leq e$  del teorema 3.5 se concluye 3.6.

OBSERVACIONES :

(1) Si  $e=1, 2$  es fácil deducir del teorema 3.5 que se verifica

$$\delta(X, o) = \delta(X^L, o),$$

lo que fuerza a que  $\pi_L$  sea un isomorfismo analítico entre los gérmenes  $(X, o)$  y  $(X^L, o)$ , gracias al corolario 1.4.

(2) Es fácil probar que para todo  $e \leq N$  existe un germen de curva  $(X, o)$  tal que  $\delta(X^L, o)$  alcanza la cota superior del teorema 3.5.

Basta tomar un germen de curva formado por  $e$  rectas pasando por el origen en posición general.

La cota inferior se verifica para todo germen con dimensión de imbeding igual a  $\bar{N}$ .

Para finalizar el capítulo vamos a dar un resultado que generaliza el corolario 1.11

3.7 Proposición : Sean  $(Z_1, o)$  y  $(Z_2, o)$  dos gérmenes de curva de  $(k^N, o)$  de multiplicidad  $e$ , analíticamente equivalente por un automorfismo  $\varphi$  de  $R$  que verifica  $\varphi \equiv \text{Id}$  módulo  $(M^n)$  con  $n \geq 2(e-1)^2 \cdot \delta^*(Z_i, o) + 2$ .

En estas hipótesis se verifica

$$W(\bar{N}, Z_1) = W(\bar{N}, Z_2) .$$

Demostración: Vamos a probar que  $CS(Z_1, o) = CS(Z_2, o)$ .

Sean  $Y_1, \dots, Y_r$  las ramas de  $(Z_1, o)$  y  $Y'_1, \dots, Y'_r$  las de  $(Z_2, o)$ . Supondremos que  $Y_i$  se transforma por el automorfismo  $\varphi$  en la rama  $Y'_i$ .

Si  $r=1$  la proposición resulta de 1.11. Supongamos, pues que  $r \geq 2$ .

En virtud de la observación a la proposición I-1.1 para demostrar que los conos secantes coinciden basta probar que los vectores secante a una rama  $Y_i$  coinciden con los de  $Y'_i$ , y que los vectores secantes al par  $Y_i, Y_j$  coinciden con los secantes de par  $Y'_i, Y'_j$ , para todos  $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ .

Después de un cambio de coordenadas lineal, que no modifica

las hipótesis de la proposición, podemos suponer que la rama  $Y_i$  admite parametrización propia:

$$(1) \quad Y_i: \begin{cases} X_1 = t^e \\ X_\ell = \sum_{j=e+1}^{\infty} a_j^\ell t^j \\ \ell = 2, 3, \dots, N \end{cases}$$

i.e. se toma como eje  $X_1$  la recta tangente a  $Y_i$ .

La rama  $Y_i'$ , gracias a la condición  $\varphi \equiv \text{Id}$  módulo  $(M^n)$ , admitirá como parametrización propia:

$$(1)' \quad Y_i': \begin{cases} X_1 = t^e + \sum_{j=n \cdot e}^{\infty} d_j t^j \\ X_\ell = \sum_{j=e+1}^{n \cdot e - 1} a_j^\ell t^j + \sum_{j=e \cdot n}^{\infty} c_j^\ell t^j \\ \ell = 2, 3, \dots, N \end{cases}$$

Si la multiplicidad de  $Y_i$  es uno (que también es la de  $Y_i'$ ) su cono secante es igual a su recta tangente (análogamente con  $Y_i'$ ). Vistas las parametrizaciones de  $Y_i$  e  $Y_i'$  deducimos que las rectas tangentes coinciden, por tanto sus conos secantes también.

Supongamos que  $e \geq 2$ . Consideremos una serie  $S = S(t) \in k[[t]]$  tal que

$$(S(t))^e = t^e + \sum_{j=e \cdot n}^{\infty} d_j t^j$$

es fácil probar que puede elegirse  $S$  de forma que

$$S(t) - t \equiv 0 \text{ módulo } (t^n).$$

Tomando a  $S$  como parámetro uniformizante, la rama  $Y_i'$  admite una parametrización propia

$$(2) \quad Y_i': \begin{cases} X_1 = S^e \\ X_\ell = \sum_{j=e+1}^{n-1} a_j^\ell \cdot S^j + \sum_{j=n}^{\infty} \bar{c}_j^\ell S^j \\ \ell = 2, 3, \dots, N \end{cases}$$

del corolario 1.11 y la proposición I-1.3(ii) deducimos que  $CS(Y_i, o) = CS(Y_i', o)$ .

Sean  $Y_i, Y_j$  dos ramas distintas de  $(X_1, o)$ , por comodidad de escritura haremos  $i=1, j=2$ . Si las rectas tangentes de las dos ramas no coinciden, los vectores secantes al par de ramas forman el plano determinado por dichas tangentes. Como hemos demostrado que la recta tangente de una rama y la de su imagen por  $\varphi$  coinciden, obtenemos que los vectores secantes al par  $Y_1, Y_2$  coinciden con los vectores secantes al par  $Y_1', Y_2'$ .

Supongamos, pues, que las rectas tangentes de  $Y_1$  e  $Y_2$  coincidan. Después de un cambio de coordenadas lineal podemos suponer que dicha recta tangente sea el eje  $X_1$ , así las ramas admiten parametrizaciones propias:

$$(3) \quad Y_1: \begin{cases} X_1 = t^e \\ X_i = f_i(t_1) \\ i=2, 3, \dots, N \end{cases} \quad Y_2: \begin{cases} X_1 = t^{e'} \\ X_i = g_i(t_2) \\ i=2, 3, \dots, N \end{cases}$$

Sea  $m$  el mínimo común múltiplo de  $e$  y  $e'$ ; sean  $c, d$ , y  $\ell$  enteros tales que  $m = e \cdot c$ ,  $m = e' \cdot d$  y  $m \cdot \ell = e \cdot e'$ .

3.8 Lema: para toda raíz  $m$ -ésima de la unidad  $\varepsilon$  se verifica

$$C(\varepsilon) \leq (Y_1 * Y_2) \cdot e \cdot e'$$

Demostración del lema 3.8: es bien conocido que existen raíces de la unidad  $\eta$   $e$ -ésima y  $\xi$   $e'$ -ésima, tales que  $\varepsilon \cdot \eta = \xi$ . Así mismo se verifica que  $\eta^d$  es raíz  $e'$ -ésima de la unidad y  $\xi^c$  es raíz  $e$ -ésima de la unidad.

Si sustituimos  $t_1$  por  $t^c$  y  $t_2$  por  $t^d$  en las parametrizaciones de (3), obtenemos las parametrizaciones, no necesaria-

mente propias,

$$Y_1: \begin{cases} X_1 = t^m \\ X_i = \bar{f}_i(t) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases} \quad Y_2: \begin{cases} X_1 = t^m \\ X_i = \bar{g}_i(t) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases}$$

con  $\bar{f}_i(t) = f_i(t^c)$  y  $\bar{g}_i(t) = g_i(t^d)$  para  $i=2,3,\dots,N$

De la misma definición de  $C(\xi)$ , ver observación a la proposición II-1.1, tenemos que si hacemos la sustitución  $t=s\eta$ .

$$C(\xi) = \text{Mín} \left\{ \text{orden}_s (\bar{f}_i(\frac{1}{2}s) - \bar{g}_i(\eta s)); i=2,3,\dots,N \right\}$$

Es inmediato demostrar que si se hace la sustitución  $s=U^\ell$  se obtiene que

$$\bar{f}_i(\frac{1}{2}U^\ell) = f_{i,\frac{1}{2}^c}(U^{e'}) \quad , \quad \bar{g}_i(\eta U^\ell) = g_{i,\eta^d}(U^e) \quad ,$$

por lo tanto

$$C(\xi) = \text{Mín} \left\{ \text{orden}_U (f_{i,\frac{1}{2}^c}(U^{e'}) - g_{i,\eta^d}(U^e)); i=2,3,\dots,N \right\} \cdot \frac{1}{\ell}$$

luego

$$C(\xi) = \text{Mín} \left\{ \text{orden}_U (f_{i,\frac{1}{2}^c}(U^{e'}) - g_{i,\eta^d}(U^e)); i=2,3,\dots,N \right\}$$

Substituyendo formalmente  $U$  por  $v^{1/e \cdot e'}$  obtenemos

$$C(\xi) \leq \text{Mín} \left\{ \text{orden}_v (f_{i,\frac{1}{2}^c}(v^{1/e}) - g_{i,\eta^d}(v^{1/e'})); i=2,3,\dots,N \right\} \cdot e \cdot e'$$

luego

$$C(\xi) \leq K_{\frac{1}{2}^c, \eta^d}(Y_1, Y_2) \cdot e \cdot e'$$

y gracias a la proposición 3.1 obtenemos

$$C(\xi) \leq (Y_1 * Y_2) \cdot e \cdot e'$$

que es lo que queríamos demostrar.

Continuación de la demostración de la proposición 3.7: Observe-mos que  $(Y_1 * Y_2) e \cdot e' \leq \delta^*(X_1, 0) (e-1)^2$  dado que  $r \geq 2$ , entonces del lema 3.8 se deduce  $C(\xi) \leq n-1$ .

Dado que las parametrizaciones de  $Y_1$  e  $Y_1'$  (resp  $Y_2$  e  $Y_2'$ ) coinciden módulo  $n$  (ver (1) y (1)') y gracias a la desigualdad  $C(\varepsilon) \leq n-1$  obtenemos que los vectores secantes  $V_\varepsilon$ , definido por el par  $Y_1, Y_2$ , y  $V_\varepsilon'$ , definido por el par  $Y_1', Y_2'$ , coinciden.

Como el conjunto de vectores secantes al par de ramas  $Y_1, Y_2$  forman una unión de planos definidos por la recta tangente a  $Y_1$  y  $Y_2$  y el vector  $V_\varepsilon$ , al variar  $\varepsilon$  raíz  $m$ -ésima de la unidad, deducimos de la igualdad  $V_\varepsilon = V_\varepsilon'$  que los vectores secantes al par  $Y_1, Y_2$  coinciden con los vectores secantes al par  $Y_1', Y_2'$ .

CAPITULO III

CAPITULO III : TEOREMA DE TRUNCACION

1. Propiedades de los ideales que permanecen por contacto elevado

En esta sección nos proponemos demostrar que ciertas propiedades de los gérmenes de curvas de  $(k^N, o)$  se conservan por contacto elevado. Más concretamente: diremos que una propiedad  $\mathcal{P}$ , definida sobre un conjunto de ideales  $\sum \subset \text{Id}(N)$ , se conserva por contacto elevado si existe un entero  $f(\mathcal{P})$  tal que para todo par de ideales  $I, J \in \sum$ , con  $I \equiv J$  módulo  $(M^{f(\mathcal{P})})$ , se tiene que  $I$  verifica  $\mathcal{P}$  si sólo si  $J$  verifica  $\mathcal{P}$ .

1.1 Proposición: Sea  $I \in \text{Id}(N)$ ,  $J$  un ideal de  $R$  y  $s_0$  el índice de regularidad del cociente  $R/I$  (ver apéndice 1).

Supongamos que  $I \equiv J$  módulo  $(M^n)$  con  $n \gg s_0 + 2$ , entonces se verifican:

$$(i) \text{ FHS}_J(t) \leq \text{FHS}_I(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{N}.$$

$$(ii) \dim(R/I) \gg \dim(R/J).$$

Demostración: observemos que la condición  $I \equiv J$  módulo  $(M^n)$  implica que

$$(1) \quad \frac{I+M^{s-1}}{I+M^s} = \frac{J+M^{s-1}}{J+M^s}$$

para  $s \leq n$ . De la anterior igualdad se deduce

$$(2) \quad \dim_k \left( \frac{R}{I+M^s} \right) = \dim_k \left( \frac{R}{J+M^s} \right)$$

para  $1 \leq s \leq n$ , por lo tanto

$$(3) \quad \text{FHS}_I(s) = \text{FHS}_J(s)$$

para  $s \leq n$

Sea  $x \in R$  tal que su clase en el cociente  $R/I$  sea un elemento superficial de grado uno. Por los teoremas 2 y 5 de Ap-I

es isomorfismo la multiplicación por  $x$ :

$$\frac{I + M^{s_0}}{I + M^{s_0+1}} \xrightarrow{\cdot x} \frac{I + M^{s_0+1}}{I + M^{s_0+2}}$$

de modo que por (1) es asimismo isomorfismo

$$\frac{J + M^{s_0}}{J + M^{s_0+1}} \xrightarrow{\cdot x} \frac{J + M^{s_0+1}}{J + M^{s_0+2}}$$

Denotaremos por  $\bar{m}$  el ideal maximal  $\frac{M}{J}$  de  $\frac{R}{J}$  el isomorfismo anterior puede escribirse

$$\frac{\bar{m}^{-s_0}}{\bar{m}^{-s_0+1}} \xrightarrow{\cdot x} \frac{\bar{m}^{-s_0+1}}{\bar{m}^{-s_0+2}}$$

Usando el lema de Nakayama obtenemos  $\bar{m}^{-s_0+1} = x\bar{m}^{-s_0}$ . Así para todo  $s \gg s_0$

$$(3) \quad \bar{m}^{-s+1} = x \bar{m}^{-s}$$

por tanto el morfismo

$$(4) \quad \frac{\bar{m}^{-s}}{\bar{m}^{-s+1}} \xrightarrow{\cdot x} \frac{\bar{m}^{-s+1}}{\bar{m}^{-s+2}}$$

es exhaustivo para todo  $s \gg s_0$ .

Si  $e$  es la multiplicidad de  $R/I$  sabemos que para todo  $s \gg s_0$

$$(5) \quad \dim_k \left( \frac{I + M^s}{I + M^{s+1}} \right) = e$$

(Ap-I prop.2).

Del isomorfismo (1) para  $s=s_0+1$  y de (5) obtenemos que

$$\dim_k \left( \frac{\bar{m}^{-s_0}}{\bar{m}^{-s_0+1}} \right) = e$$

y de la epiyectividad de los morfismos (4) deducimos que

$$(6) \quad e \gg \dim_k \left( \frac{\bar{m}^{-s}}{\bar{m}^{-s+1}} \right)$$

para  $s \gg s_0$

De (5) y (6) se deduce que

$$(7) \quad \dim_k \left( \frac{I + M^s}{I + M^{s+1}} \right) = e \gg \dim_k \left( \frac{q^s}{q^{s+1}} \right)$$

para  $s \gg s_0$ .

Basta sumar para obtener de (3) y (7) el apartado (i) de la proposición, el apartado (ii) se deduce del (i) al ser la dimensión de los anillos el grado de sus polinomios de Hilbert-Samuel (Vid. SE-2 Cap III p.e.).

Sea  $A$  una  $k$ -álgebra local y  $m$  su ideal maximal.

Denotaremos por  $\text{Gr}(A)$  el anillo graduado de  $A$  en su ideal maximal:

$$\text{Gr}(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{m^n}{m^{n+1}} ;$$

$\text{Gr}(I)$  será el ideal homogéneo de  $\text{Gr}(A)$ , núcleo del morfismo homogéneo de grado cero:

$$\Pi: \text{Gr}(A) \longrightarrow \text{Gr}(A/I) ,$$

que induce el morfismo natural de paso al cociente en cada pieza de grado  $n$ :

$$\Pi(n): \text{Gr}(A)(n) = \frac{m^n}{m^{n+1}} \longrightarrow \text{Gr}(A/I)(n) = \frac{m^n}{m^{n+1}}$$

Denotaremos  $I(n)$  la pieza de grado  $n$  del ideal  $\text{Gr}(I)$ ; en general, si  $B$  es una  $k$ -álgebra graduada  $B(n)$  será su pieza de grado  $n$ .

1.2 Lema: Sea  $I \in \text{Id}(N)$ , todo elemento de una base minimal homogénea de  $\text{Gr}(I)$  tiene grado menor ó igual que  $s_0(I)+1$ .

Demostración: vamos a demostrar que para todo  $s \gg s_0(I)+1$  se verifica

$$I(s+1) = I(s) \cdot P(1) ,$$

de lo cual se concluye facilmente el lema 1.2.

Sea  $x$  un elemento superficial de grado uno de  $R/I$ . De las proposiciones 2 y 5 del apéndice primero deducimos que el mor-

fismo

$$(1) \quad \frac{m^{s-1}}{m^s} = \frac{P(s-1)}{I(s-1)} \xrightarrow{\cdot x} \frac{P(s)}{I(s)} = \frac{m^s}{m^{s-1}}$$

es biyectivo para todo  $s \geq s_0(I)+1$

La inclusión  $I(s).P(1) \subset I(s+1)$  siempre se verifica, vamos a establecer la contraria para  $s \geq s_0(I)+1$ .

De la epiyectividad de los morfismos (1) deducimos que

$$P(s) = I(s) + x.P(s-1)$$

para todo  $s \geq s_0(I)+1$ . De esta última igualdad se obtiene que

$$(2) \quad P(s+1) = I(s).P(1) + x.P(s)$$

para todo  $s \geq s_0(I)+1$ .

Sea  $y$  un elemento de  $I(s+1)$ , de la igualdad (2) deducimos que existen elementos  $q \in I(s).P(1)$  y  $r \in P(s)$  tales que

$$y = q + x.r$$

De la igualdad anterior y de la inyectividad del morfismo (1) para  $s+1$  obtenemos que  $r$  pertenece a  $I(s)$ , por tanto  $y - q \in I(s).P(1)$  concluyendo que  $y \in I(s).P(1)$ .

Hemos demostrado que  $I(s+1) = I(s).P(1)$ , quedando probado el lema 1.2.

1.3 Proposición: En las hipótesis de 1.1 son equivalentes:

$$(i) \quad FHS_J = FHS_I$$

$$(ii) \quad J \in \text{Id}(N)$$

(iii) Los anillos  $\text{Gr}(\mathbb{R}/I)$  y  $\text{Gr}(\mathbb{R}/J)$  son isomorfos como cocientes del graduado de  $\mathbb{R}$ .

Demostración: la implicación (iii)  $\Rightarrow$  (i) es inmediata.

Denotaremos  $A = \mathbb{R}/I$ ,  $\bar{A} = \mathbb{R}/J$ ;  $m$  y  $\bar{m}$  los ideales maximales de  $A$  y  $\bar{A}$  respectivamente,  $e$  y  $\bar{e}$  las multiplicidades de  $A$  y  $\bar{A}$  respectivamente. (ii)  $\Rightarrow$  (i) Supongamos que  $J$  es un ideal perfec-

to de altura  $N-1$ . Sea  $Y$  un elemento de  $R$  cuya clase  $\bar{y}$  en  $\bar{A}$  sea un elemento superficial de grado uno.

Consideremos la siguiente igualdad

$$(1) \quad \dim_k \left( \frac{\bar{m}^s}{\bar{m}^{s+1}} \right) = \dim_k \left( \frac{\bar{m}^s}{\bar{y} \cdot \bar{m}^s} \right) - \dim_k \left( \frac{\bar{m}^{s+1}}{\bar{y} \cdot \bar{m}^s} \right)$$

Al ser  $\bar{A}$  Cohen-Macaulay es sabido (MAL prop.12.5) que

$$\dim_k \left( \frac{\bar{m}^s}{\bar{y} \cdot \bar{m}^s} \right) = \bar{e}$$

para todo  $s$ .

Por otro lado de la hipótesis  $I \cong J$  módulo  $(M^n)$  deducimos

$$\frac{m^{s_0}}{\bar{m}^{s_0+1}} = \frac{\bar{m}^{s_0}}{\bar{m}^{s_0+1}},$$

por tanto de la proposición 2 de Ap-I obtenemos

$$(2) \quad \dim_k \left( \frac{\bar{m}^{s_0}}{\bar{m}^{s_0+1}} \right) = e$$

Así la igualdad (1) se convierte en

$$e = \bar{e} - \dim_k \left( \frac{\bar{m}^{s_0+1}}{\bar{y} \cdot \bar{m}^{s_0}} \right),$$

luego

$$\bar{e} \geq e.$$

De la condición (i) de la proposición 1.1 tenemos que  $e \geq \bar{e}$ , por tanto concluimos que  $e = \bar{e}$ .

Al ser la multiplicidad de  $\bar{A}$  igual a  $e$ , de la proposición 2 de Ap-I y de (2) deducimos que

$$\dim_k \left( \frac{\bar{m}^s}{\bar{m}^{s+1}} \right) = e$$

para todo  $s \geq s_0$ .

De la igualdad (3) de la demostración de 1.1 y de la igualdad anterior se obtiene la condición (i) del enunciado.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Vamos a demostrar un lema que como caso particular nos dará la implicación que nos ocupa:

1.4 Lema : En las hipótesis de 1.1, supongamos que  $FHS_I = FHS_J$ .

Se verifican las siguientes propiedades

(a)  $R/J$  es Cohen-Macaulay.

(b) Sea  $Y \in R$  cuya clase  $y$  en  $R/I$  sea un elemento superficial de grado uno, entonces su clase  $\bar{y}$  en  $R/J$  también lo es.

Demostración: Al ser  $y$ , clase de  $Y$  en  $R/I$ , un elemento superficial de grado uno tenemos que el morfismo

$$\frac{A}{\mathfrak{m}^{s_0}} \xrightarrow{\cdot y} \frac{A}{\mathfrak{m}^{s_0+1}}$$

es inyectivo (proposición 5 de Ap-I). Gracias a la hipótesis  $I \cong J$  módulo  $(M^n)$ , con  $n \geq s_0 + 2$ , deducimos que el morfismo

$$\frac{\bar{A}}{\bar{\mathfrak{m}}^{s_0}} \xrightarrow{\cdot \bar{y}} \frac{\bar{A}}{\bar{\mathfrak{m}}^{s_0+1}}$$

es inyectivo, lo que fuerza a que

$$(\bar{\mathfrak{m}}^{s_0+1} ; \bar{y}) = \bar{\mathfrak{m}}^{s_0} .$$

Vamos a demostrar que

$$(1) \quad (\bar{\mathfrak{m}}^{s+1} ; \bar{y}) = \bar{\mathfrak{m}}^s$$

para todo  $s \geq s_0$ , por inducción sobre  $s$ .

De la hipótesis  $FHS_I = FHS_J$  y de la proposición 2 de Ap-I deducimos que  $\dim_k \left( \frac{\bar{\mathfrak{m}}^s}{\bar{\mathfrak{m}}^{s+1}} \right) = e$  para todo  $s \geq s_0$ . Por lo tanto de la exhaustividad de los morfismos (4) de la demostración de 1.1, obtenemos que los morfismos

$$(2) \quad \frac{\bar{\mathfrak{m}}^s}{\bar{\mathfrak{m}}^{s+1}} \xrightarrow{\cdot \bar{y}} \frac{\bar{\mathfrak{m}}^{s+1}}{\bar{\mathfrak{m}}^{s+2}}$$

son biyectivos para  $s \geq s_0$ .

Sea  $x \in (\bar{\mathfrak{m}}^{s+1} ; \bar{y})$ , para  $s \geq s_0$ . entonces  $x\bar{y} \in \bar{\mathfrak{m}}^{s+1}$ , por lo tanto  $x\bar{y} \in \bar{\mathfrak{m}}^{s_0+1}$ . De la igualdad (1) obtenemos que  $x \in \bar{\mathfrak{m}}^{s_0}$ .

Utilizando la inyectividad de los morfismos (2) y razonando por recurrencia se demuestra que  $x \in \bar{\mathfrak{m}}^s$ .

Hemos demostrado que  $(\bar{m}^{s+1} : \bar{y}) = \bar{m}^s$  para todo  $s \geq s_0$ , de la proposición 3 del apéndice primero obtenemos que  $\bar{y}$  es un elemento no divisor de cero de  $\bar{A}$ , luego  $\bar{A}$  es un anillo Cohen-Macaulay e  $\bar{y}$  es un elemento superficial de grado uno.

La implicación (i)  $\Rightarrow$  (iii) se deduce del lema 1.2 y de la implicación (i)  $\Rightarrow$  (ii).

Definición : Sea  $I \subset R$  un ideal, una base standard es un sistema de generadores de  $I$  cuyas formas iniciales forman un sistema de generadores del ideal homogéneo  $Gr(I)$ .

Vid. HI-2 Cap. III § 1 y 2 para las propiedades fundamentales de las bases standard.

Sea  $(k^N, o)^{\circ}$  el esquema obtenido por dilatación ("explosión" ó "Blow-up") de  $(k^N, o)$  en el origen (ver NOR-1 y 2, HI-2 para las definiciones y propiedades fundamentales de la "dilatación").

El esquema  $(k^N, o)^{\circ}$  es isomorfo al subesquema cerrado de  $\mathbb{P}^{N-1}_R = Proj(R[Y_1, \dots, Y_N])$  definido por el ideal

$$(X_i \cdot Y_j - X_j \cdot Y_i ; i, j = 1, 2, \dots, N) ,$$

y se tiene un morfismo birracional

$$BL: (k^N, o)^{\circ} \longrightarrow (k^N, o)$$

inducido por el morfismo canónico

$$\mathbb{P}^{N-1}_R \longrightarrow Spec(R) = (k^N, o)$$

El lugar excepcional de BL, i.e.  $E_1 = BL^{-1}(o)$ , es un divisor de  $(k^N, o)^{\circ}$  que suele llamarse primer entorno del punto  $o$ , y está en correspondencia con las direcciones por  $o$ .

Sea  $(k^N, \mathfrak{o})_1^\circ$  el abierto afín  $D_+(Y_1) \subset (k^N, \mathfrak{o})^\circ$ , entonces el morfismo

$$\text{BL}|_{(k^N, \mathfrak{o})^\circ} : (k^N, \mathfrak{o})_1^\circ \longrightarrow (k^N, \mathfrak{o})$$

permite identificar el anillo afín de  $(k^N, \mathfrak{o})_1^\circ$  a la extensión de  $R$ ,

$$R \left[ \frac{Y_2}{Y_1}, \dots, \frac{Y_N}{Y_1} \right]$$

Sea  $I \in \text{Id}(N)$  y consideremos el  $k$ -esquema

$$X = \text{Spec}(R/I) ,$$

$\text{BL}^{-1}(X)$  es igual a la unión de un esquema unidimensional  $X^\circ$ , llamado transformado estricto de  $X$ , y el divisor excepcional  $E_1$ .

El conjunto  $E_1 \cap X^\circ = E_1(X)$  suele llamarse primer entorno de  $\mathfrak{o}$  en  $X$  y cada punto  $p \in E_1(X)$  punto infinitamente próximo a  $\mathfrak{o}$  en  $X$ .

Consideremos el morfismo canónico

$$f: \mathbb{P}_R^{N-1} \longrightarrow \mathbb{P}_k^{N-1} ,$$

es conocido que  $f$  restringe a un isomorfismo entre  $E_1$  y  $\mathbb{P}_k^{N-1}$ , y que  $f|_{E_1}(E_1(X)) = \text{Proj}(\text{Gr}(R/I)) \subset \mathbb{P}_k^{N-1}$ .

Si  $x \in R/I$  es un elemento superficial de grado uno, denotaremos por  $(R/I)^\circ$  el anillo del primer entorno de  $R/I$ :

$$(R/I)^\circ = (R/I) \left[ \frac{x_1}{x}, \dots, \frac{x_N}{x} \right] \subset \text{tot}(R/I)$$

(ver MAL cap.12). Supongamos que  $x = x_1$ , entonces  $X^\circ \subset (k^N, \mathfrak{o})_1^\circ$  y el anillo  $H^\circ(X^\circ, \mathcal{O}_{X^\circ, \mathfrak{o}})$  es isomorfo a  $(R/I)^\circ$ .

1.5 Proposición: Sean  $I$  y  $J$  dos ideales pertenecientes a  $\text{Id}(N)$  Supongamos que  $I \cong J$  módulo  $(M^n)$ , con  $n \geq s_0(I) + 2$ , y que las clases de  $X_1$  en  $R/I$  y  $R/J$  sean elementos superficiales de grado uno.

Si indicamos por  $I'$  y  $J'$  los ideales del anillo  $R \left[ \frac{X_2}{X_1}, \dots, \frac{X_N}{X_1} \right]$  que definen los transformados estrictos de los gérmenes de curva definidos por  $I$  y  $J$ , entonces

$$I' \equiv J' \text{ módulo } \left( M^{s-s_0-1} \cdot R \left[ \frac{X_2}{X_1}, \dots, \frac{X_N}{X_1} \right] \right).$$

Demostración : gracias a la proposición 1.3 sabemos que  $\text{Gr}(I) = \text{Gr}(J)$ . Por lo tanto existe un sistema de generadores  $f_1, \dots, f_r$  de  $\text{Gr}(I) = \text{Gr}(J)$  tal que  $\deg(f_i) \leq s_0 + 1$  (lema 1.2) para  $i=1, 2, \dots, r$ .

Sean  $g_1, \dots, g_r \in I$  y  $h_1, \dots, h_r \in J$  elegidos de modo que

(i)  $g_i \equiv h_i$  módulo  $(M^n)$ .

(ii) las formas iniciales de  $h_i$  y  $g_i$  sean iguales a  $f_i$  para  $i=1, 2, \dots, r$ .

De la condición (ii) y del corolario al lema 6, Chap II 2, de HI-2 los elementos  $\{g_i\}_{i=1, 2, \dots, r}$  forman un sistema de ge-

neradores de  $I$ , análogamente los  $\{h_i\}_{i=1, 2, \dots, r}$  lo son de  $J$ .

Por el lema 6, chap. III 2, de HI-2, si  $q_i$  es el grado de la forma  $f_i$

$$I' = (X_1^{-q_i} \cdot g_i \quad ; i=1, 2, \dots, r)$$

$$J' = (X_1^{-q_i} \cdot h_i \quad ; i=1, 2, \dots, r).$$

De donde con la condición  $\deg(f_i) = q_i \leq s_0 + 1$ , obtenemos que

$$I' \equiv J' \text{ módulo } \left( M^{n-s_0-1} \cdot R \left[ \frac{X_2}{X_1}, \dots, \frac{X_N}{X_1} \right] \right).$$

1.6 Proposición: Para cualesquiera  $I \in \text{Id}(N, \delta)$  y  $J \in \text{Id}(N)$  que verifiquen  $I \equiv J$  módulo  $(M^{2\delta+2})$ , se tiene que

(i)  $J$  es radical

(ii) Sean  $X, Y$  los gérmenes de curva definidos por  $I, J$  respectivamente. Existe una biyección entre el conjunto de ramas de

X y el de Y de modo que ramas correspondientes presentan en común todos los puntos infinitamente próximos hasta el primero que es simple en X. Los anillos locales de X e Y en cada uno de estos puntos infinitamente próximos presentan el mismo polinomio de Hilbert-Samuel.

(iii) Los órdenes de singularidad de X e Y coinciden, en particular  $J \in \text{Id}(N, \delta)$ .

Demostración : Denotaremos por U y V los anillos del primer entorno de  $R/I$  y  $R/J$ , por m y  $\bar{m}$  los ideales maximales de  $R/I$  y  $R/J$  respectivamente.

Escribamos  $u(t) = 2t + 2$

La demostración se hará por inducción sobre  $\delta$ , antes necesitamos un lema:

1.7 Lema : sea  $p(T) = eT - \rho$  el polinomio de Hilbert-Samuel del anillo  $R/I$  y  $s_0$  su índice de regularidad, entonces:

$$(i) \quad u(\delta) \geq s_0 + 2.$$

$$(ii) \quad u(\delta) - s_0 - 1 \geq u(\delta - p), \text{ cuando } p > 0.$$

Demostración del lema 1.7: de la proposición 1 de A-I tenemos que

$$s_0 \leq e - 1$$

y de la desigualdad del capítulo I §1

$$e - 1 \leq \rho,$$

obtenemos

$$(1) \quad s_0 \leq \rho.$$

De esta última desigualdad y de la proposición I-1.3(iii) deducimos que

$$s_0 \leq \delta,$$

luego

$$u(\delta) \geq s_0 + 2.$$

La desigualdad del apartado (ii) equivale a

$$2\rho \geq s_0 + 1,$$

la cual se deduce de (1) si  $\rho > 0$ .

Continuación de la demostración de 1.6

Si  $\delta = 0$  el anillo  $R/I$  es local regular, por tanto la dimensión de su espacio tangente de Zariski es uno.

De la condición  $I \equiv J$  modulo  $(M^2)$  deducimos que

$$\frac{m}{m^2} = \frac{\bar{m}}{\bar{m}^2},$$

así la dimensión del espacio tangente de Zariski de  $R/J$  es uno y el anillo es regular. En este caso es fácil ver que se verifican las tesis de 1.6.

Supongamos  $\delta > 0$ , de la proposición 12.16 de MAL se deduce que  $\rho > 1$ .

Gracias al teorema 3.2 chap 1 de SAL podemos suponer que el elemento  $x_1 \in R/I$  es superficial de grado uno ( recordemos que  $x_1$  es la clase de  $X_1$  ).

Por otra parte del lema 1.7 (i) sabemos que

$$u(\delta) \geq s_0 + 2,$$

así del lema 1.4 y proposición 1.3 concluimos que la clase de  $X_1$  en  $R/J$ , que denotaremos por  $\bar{x}_1$ , es un elemento superficial de grado uno.

Sean  $I'$ ,  $J'$  los ideales del anillo

$$B = R \left[ \frac{X_2}{X_1}, \dots, \frac{X_N}{X_1} \right]$$

tales que  $U = B/I'$ ,  $V = B/J'$  respectivamente.

Sabemos, gracias a la proposición 1.3(iii), que los anillos  $Gr(R/I)$  y  $Gr(R/J)$  son isomorfos como cocientes del gradua-

do de  $R$ , por tanto los puntos del primer entorno de  $X$  e  $Y$  coinciden. Indiquémosles por  $A_1, \dots, A_r$ .

Sean  $q_1, \dots, q_r$  los ideales maximales de  $B$  correspondientes a  $A_1, \dots, A_r$ ; denotaremos por  $\bar{q}_i$  (resp.  $\tilde{q}_i$ ) la imagen de  $q_i$  en  $U$  (resp.  $V$ ) por el morfismo de paso al cociente.

1.8 Lema : Los anillos  $V_{\tilde{q}_i}$  son sompletos y se verifica

$V \cong \prod_{i=1}^r V_{\tilde{q}_i}$ . También son válidas las anteriores propiedades si sustituimos  $V$  por  $U$  y  $\tilde{q}_i$  por  $\bar{q}_i$ .

Demostración del lema 1.8 : El anillo  $R/J$  es completo, luego  $V$  también lo es (CH prop 3). Del teorema 17.7 de NA deducimos que

$$V = \prod_{i=1}^r \hat{V}_{\tilde{q}_i},$$

al ser los anillos  $V_{\tilde{q}_i}$  completos (corolario 1 al teorema 10 de NOR-3) deducimos el lema. Observamos que la demostración es válida si sustituimos  $V$  por  $U$  y  $\tilde{q}_i$  por  $\bar{q}_i$ .

Continuación de la demostración de la proposición 1.6:

De la hipótesis  $I \cong J$  módulo  $(M^{u(\delta)})$  y gracias a la proposición 1.5 y del lema 1.7(i), deducimos que

$$I' \cong J' \text{ módulo } (M^{u(\delta)-s_0-1}.B).$$

Así tenemos un morfismo de  $B$ -álgebras

$$(1) \quad \frac{U}{U.m^{u(\delta)-s_0-1}} \cong \frac{V}{V.m^{u(\delta)-s_0-1}},$$

El isomorfismo (1) induce el isomorfismo de  $B_{q_i}$ -módulos

$$\left( \frac{U}{U.m^{u(\delta)-s_0-1}} \right)_{\bar{q}_i} \cong \left( \frac{V}{V.m^{u(\delta)-s_0-1}} \right)_{\tilde{q}_i},$$

el cual induce a su vez, habida cuenta de que

$$\begin{aligned} U_{\bar{q}_i} u(\delta) - s_0 - 1 &\subset \bar{q}_i u(\delta) - s_0 - 1 \\ V_{\tilde{q}_i} u(\delta) - s_0 - 1 &\subset \tilde{q}_i u(\delta) - s_0 - 1 \end{aligned}$$

el isomorfismo de  $B_{q_i}$ -módulos

$$(2) \quad \frac{U_{\bar{q}_i}}{\bar{q}_i u(\delta) - s_0 - 1} \cong \frac{V_{\tilde{q}_i}}{\tilde{q}_i u(\delta) - s_0 - 1}$$

El esquema  $(k^N, \mathcal{O})^\circ$  es liso ya que es la dilatación de un esquema liso, de lo cual deducimos que  $\text{Spec}(B)$  también lo es ya que es un abierto de  $(k^N, \mathcal{O})^\circ$ .

Al ser  $\text{Spec}(B)$  no singular y de dimensión  $N$  se tiene que

$$\widehat{B_{q_i}} = R$$

para todo  $i=1,2,\dots,r$ . Dado que los anillos  $U_{\bar{q}_i}$  (resp.  $V_{\tilde{q}_i}$ ) son completos (ver lema 1.8) existen ideales  $I_i$  (resp.  $J_i$ ) de  $\widehat{B_{q_i}}$  tales que

$$U_{\bar{q}_i} = \frac{\widehat{B_{q_i}}}{I_i}$$

(resp.  $V_{\tilde{q}_i} = \frac{\widehat{B_{q_i}}}{J_i}$ ) para  $i=1,2,\dots,r$ .

Al ser los anillos que aparecen en el isomorfismo (2) artinianos y por lo tanto completos, se deduce que el isomorfismo lo es de  $\widehat{B_{q_i}}$ -módulos, así de la existencia de los isomorfismos (2) obtenemos

$$(3) \quad I_i \cong J_i \text{ módulo } (M^{u(\delta) - s_0 - 1})$$

donde  $M$  es el ideal maximal de  $R \cong \widehat{B_{q_i}}$ .

Gracias al lema 1.8 (ii) sabemos que  $u(\delta) - s_0 - 1 \gg u(\delta - \rho)$ . Si  $\delta_i$  es el orden de singularidad del germen de curva definido por  $I_i$ , de la proposición I-1.3 (iii) se deduce

$$\delta - \rho \gg \delta_i$$

luego

$$(4) \quad u(\delta) - s_0 - 1 \geq u(\delta_i).$$

Gracias a (3) y (4) podemos aplicar la hipótesis de inducción a los pares  $I_i, J_i$ , para  $i=1,2,\dots,r$ , y obtener que los anillos  $V_{\tilde{q}_i}$  son reducidos. Gracias a la proposición 1.3 los polinomios de Hilbert-Samuel de  $\mathcal{O}_{(X,0)}$  y  $\mathcal{O}_{(Y,0)}$  coinciden, aplicando la hipótesis de inducción obtenemos el apartado (ii).

Al ser los anillos  $V_{\tilde{q}_i}$  reducidos, del lema 1.8 deducimos que  $V$  es reducido. Como que  $R/J$  es un subanillo de  $V$ , es asimismo reducido, quedando probado el apartado (i).

El apartado (iii) es consecuencia del (ii) y de la prop. I-1.3 (iii).

1.7 Corolario: En las hipótesis de la proposición 1.6 supongamos que se verifica

$$I \equiv J \text{ módulo } (M^{2\delta+1+n})$$

para  $n \in \mathbb{N}$ . Sean  $\alpha$  y  $\beta$  ramas de  $X$  e  $Y$  respectivamente, que se correspondan por la biyección del apartado (ii) de la proposición 1.6.

Las ramas  $\alpha$  y  $\beta$  presentan en común todos los puntos infinitamente próximos hasta el  $n$ -ésimo que es simple en  $X$  e  $Y$ .

Demostración: basta observar en la demostración de la proposición 1.6 que el orden de congruencia entre los ideales disminuye en  $s_0+1$  al hacer una explosión en el origen, donde  $s_0$  es el índice de regularidad del ideal  $I$ .

Dado que el índice de regularidad de un ideal que define un germen no singular es cero, razonando por inducción, análogamente a como se hizo en la demostración de 1.6, se obtiene el corolario.

2. Teorema de truncación para gérmenes de curva reducida de  $(k^N, o)$ .

Sea  $\mu$  el número de Milnor de un germen de curva plana,  $\delta$  su orden de singularidad y  $r$  el número de ramas. Es bien conocida (ver ML §10) la relación

$$2\delta + 1 - r = \mu,$$

en particular  $2\delta \geq \mu$ .

De NOB-1 corolario 2.6 utilizaremos:

2.1 Proposición: Sean  $f=0$  y  $g=0$  dos ecuaciones locales de gérmenes de curva reducida de  $(k^2, o)$ , sea  $\mu$  el número de Milnor asociado a  $f=0$ .

Si  $f \equiv g$  módulo  $(X, Y)$  con  $\nu \geq 2\mu + 1$ , existe un automorfismo  $\varphi$  de  $R_2$  que transforma  $f$  en  $g$ , y que verifica

$$\varphi \equiv \text{Id} \text{ módulo } (X, Y)^{\nu - 2\mu}.$$

Definición:  $w: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  será la función  $w(n) = 2(n+1)(2n^3(n+1)(n+3)+1) + 1$

2.2 TEOREMA DE TRUNCACION: Para cualesquiera  $\delta \in \mathbb{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  e  $I_1, I_2$  ideales pertenecientes al conjunto  $\text{Id}(N, \delta)$ , que verifiquen

$$I_1 \equiv I_2 \text{ módulo } (M^{w(\delta)}),$$

existe un automorfismo analítico de  $R$  que transforma  $I_1$  en  $I_2$ .

Demostración: observemos en primer lugar que

$$W(n) = (n+1)(8\bar{w}(n)+1) + 2n+1$$

Siendo  $\bar{w}(n) = \frac{1}{2}n^3(n+1)(n+3)$  la función del teorema II-3.6.

Podemos suponer  $\delta > 0$ , ya que en caso contrario los gérmenes  $Z_1$  y  $Z_2$  definidos por  $I_1$  e  $I_2$  son no singulares y la tesis del enunciado se verifica independientemente de la hipótesis de congruencia de los ideales, como es bien sabido.

Dado que los cambios de coordenadas lineales de  $(k^N, 0)$  no modifican el enunciado del teorema, podemos suponer que las proyecciones sobre los planos  $X_1, X_i$  paralelamente a  $X_1 = X_i = 0$  verifican las hipótesis del teorema II-3.6 y que  $X_1$  es un parámetro transversal tanto para  $Z_1$  como para  $Z_2$ .

De la definición de  $w$  es fácil deducir que

$$2\delta + 2 \leq w(\delta),$$

de modo que las hipótesis del teorema se obtiene

$$I_1 \equiv I_2 \text{ módulo } (M^{2\delta+2}),$$

y la proposición 1.6(ii) asegura la existencia de una biyección entre las ramas de  $Z_1$  y  $Z_2$  de modo que ramas correspondientes presentan en común todos los puntos infinitamente próximos hasta el primero que es simple en  $Z_1$ . Los anillos locales de  $Z_1$  y  $Z_2$  en cada uno de estos puntos infinitamente próximos presentan el mismo polinomio de Hilbert-Samuel.

Por lo tanto los gérmenes  $Z_1$  y  $Z_2$  tienen el mismo número de ramas  $r$ . Del teorema II-1.2 obtenemos que los gérmenes  $Z_{j,i}$ , proyección sobre el plano  $X_1, X_i$  del germen  $Z_j$ , tienen asimismo  $r$  ramas para  $j=1,2, i=2,3,\dots,N$ .

Sean  $\left\{ Z_j^\ell \right\}_{\ell=1,2,\dots,r}$  las ramas de  $Z_j$  y  $\left\{ Z_{j,i}^\ell \right\}_{\ell=1,2,\dots,r}$

las de  $Z_{j,i}$ , para  $j=1,2, i=2,3,\dots,N$ . Supondremos que  $Z_{j,i}^\ell$  es la proyección de la rama  $Z_j^\ell$  sobre el plano  $X_1, X_i$ .

Supongamos que las ramas  $Z_1$  y  $Z_2$  están ordenadas de tal modo que la rama correspondiente a  $Z_1^\ell$ , por la biyección de 1.6, sea  $Z_2^\ell$ .

2.3 Lema : Para todo  $\ell=1,2,\dots,r$  existen parametrizaciones propias de las ramas  $Z_1^\ell$  y  $Z_2^\ell$

$$Z_1^\ell : \begin{cases} X_1 = t_\ell^{e_\ell} \\ X_i = f_{1,i}^\ell(t_\ell) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases} , \quad Z_2^\ell : \begin{cases} X_1 = t_\ell^{e_\ell} \\ X_i = f_{2,i}^\ell(t_\ell) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases}$$

tales que

$$f_{1,i}^\ell \equiv f_{2,i}^\ell \text{ módulo } (t_\ell^{e(8\bar{w}(\delta)+1)})$$

para  $i=2,3,\dots,N$ .

Demostración del lema: de las hipótesis del teorema y gracias a la desigualdad  $e \leq \delta+1$  (ver prop. I-1.3(iii)) obtenemos

$$I_1 \equiv I_2 \text{ módulo } (M^{e(8\bar{w}(\delta)+1)+2\delta+1}) ,$$

del lema 1.7 deducimos que las ramas  $Z_1^\ell$  y  $Z_2^\ell$  tienen en común  $e(8\bar{w}(\delta)+1)$  puntos infinitamente próximos  $A_1, \dots, A_{e(8\bar{w}(\delta)+1)}$  que son simples en ambas ramas.

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  las ramas con origen en  $A_1$  transformadas de las  $Z_1^\ell$  y  $Z_2^\ell$  respectivamente; las ramas  $\alpha$  y  $\beta$  son simples y tienen en común los puntos infinitamente próximos  $A_1, \dots, A_{e(8\bar{w}(\delta)+1)}$ . De esta última condición es inmediato deducir que existen parametrizaciones propias de las ramas  $\alpha$  y  $\beta$

$$\alpha : \begin{cases} Y_1 = t \\ Y_i = f_i(t) \end{cases} \quad \beta : \begin{cases} Y_1 = t \\ Y_i = g_i(t) \end{cases}$$

tales que:

$$(1) \quad f_i(t) \equiv g_i(t) \text{ módulo } (t^{e(8\bar{w}(\delta)+1)})$$

para  $i=2,3,\dots,N$ .

Sea  $\varphi$  la composición de las sucesivas explosiones centradas en los puntos infinitamente próximos comunes a  $Z_1^\ell$  y  $Z_2^\ell$  anteriores a  $A_1$ :  $Z_1^\ell$  y  $Z_2^\ell$  son las imágenes por  $\varphi$  de las ramas  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente.

Denotemos por  $\varphi^*: \mathcal{O}_{(k^N, 0)} \longrightarrow \mathcal{O}_{(k^N, A_1)}$  el morfismo inducido por  $\varphi$  a nivel de anillos locales, sean  $\{H_i\}_{i=1,2,\dots,N}$  series de  $k \ll Y_1, \dots, Y_N \ll \cong \mathcal{O}_{(k^N, A_1)}$  tales que

$$\varphi^*(X_i) = H_i(Y_1, \dots, Y_N)$$

Es sabido que las ramas  $Z_1^\ell, Z_2^\ell$  admiten parametrizaciones propias

$$(2) \quad \begin{aligned} Z_1^\ell: & \begin{cases} X_i = H_i(f_1(t), \dots, f_N(t)) \\ i=1, 2, \dots, N \end{cases} \\ Z_2^\ell: & \begin{cases} X_i = H_i(g_1(t), \dots, g_N(t)) \\ i=1, 2, \dots, N \end{cases} \end{aligned}$$

De la condición (1) obtenemos que

$$(3) \quad H_i(f_1, \dots, f_N) \equiv H_i(g_1, \dots, g_N) \text{ módulo } (t^{e(8\bar{w}(\delta)+1)})$$

Habíamos supuesto que  $X_1$  era un parámetro transversal tanto para  $Z_1$  como para  $Z_2$ , por lo tanto

$$\text{orden}_t(H_1(f_1, \dots, f_N)) = \text{orden}_t(H_1(g_1, \dots, g_N)) = e_\ell$$

Sabemos, gracias al teorema de Puiseux (ver Capítulo I), que existen series  $u_1(t), u_2(t) \in k \ll t \ll$  tales que

$$(4) \quad \begin{aligned} (u_1(t))^{e_\ell} &= H_1(f_1(t), \dots, f_N(t)) \\ (u_2(t))^{e_\ell} &= H_1(g_1(t), \dots, g_N(t)), \end{aligned}$$

gracias a la condición (3) pueden escogerse  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de tal manera que

$$(5) \quad u_1(t) \equiv u_2(t) \text{ módulo } (t^{\frac{e(8\bar{w}(\delta)+1)}{e_\ell}}).$$

Al ser las series  $u_1$  y  $u_2$  de orden uno respecto de  $t$ , existen series  $\bar{u}_1$  y  $\bar{u}_2$  pertenecientes a  $k \ll s \ll$ , que también son de orden uno, tales que

$$\begin{aligned} \bar{u}_j(\bar{u}_j(s)) &= s \\ \bar{u}_j(u_j(t)) &= t \end{aligned}$$

para  $j=1,2$ . De la condición (5) es fácil deducir que

$$(6) \quad \bar{u}_1(s) \equiv \bar{u}_2(s) \text{ módulo } (s \frac{e \cdot (8\bar{w}(\delta) + 1)}{e_\ell}).$$

Si sustituimos  $t = \bar{u}_1(s)$  en la parametrización propia de la rama  $Z_1^\ell$  de (2) y  $t = \bar{u}_2(s)$  en la parametrización propia de la rama  $Z_2^\ell$  de (2) obtenemos parametrizaciones propias

$$Z_1: \begin{cases} X_1 = s^{e_\ell} \\ X_i = H_i(f_1(\bar{u}_1(s)), \dots, f_N(\bar{u}_1(s))) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases} \quad Z_2: \begin{cases} X_1 = s^{e_\ell} \\ X_i = H_i(g_1(\bar{u}_2(s)), \dots, g_N(\bar{u}_2(s))) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases}$$

$$\text{Sea } s = t_\ell, f_{1,i}^\ell(t_\ell) = H_i(f_1(\bar{u}_1(s)), \dots, f_N(\bar{u}_1(s))) \\ \text{y } f_{2,i}^\ell(t_\ell) = H_i(g_1(\bar{u}_2(s)), \dots, g_N(\bar{u}_2(s)))$$

Observemos que al ser las parametrizaciones (2) propias se verifica que

$$\text{orden}_t(H_i(f_1, \dots, f_N)) \geq e_\ell$$

$$\text{orden}_t(H_i(g_1, \dots, g_N)) \geq e_\ell$$

para  $i=1,2,\dots,N$ . De la condición (6) es fácil deducir que

$$f_{1,i}^\ell(t_\ell) \equiv f_{2,i}^\ell(t_\ell) \text{ módulo } (t_\ell^{e(8\bar{w}(\delta)+1)})$$

quedando el lema 2.3 demostrado.

Continuación de la demostración 2.2 Gracias a la proposición

II-1.2 la rama  $Z_{j,i}^\ell$  admite por parametrización propia

$$Z_{j,i}^\ell: \begin{cases} X_1 = t^{e_\ell} \\ X_i = f_{j,i}^\ell(t_\ell) \\ i=2,3,\dots,N \end{cases}$$

para  $j=1,2$ ,  $\ell=1,2,\dots,r$ . Así el germen  $Z_{j,i}^\ell$  tiene como ecuación local

$$F_{j,i}^\ell(X_1, X_i) = \prod_{\nu^{e_\ell}=1} (X_i - (f_{j,i}^\ell)_{\nu}(X_1^{1/e_\ell})),$$

por lo tanto el germen  $Z_{j,i}$  tiene por ecuación local

$$F_{j,i} = \prod_{\ell=1}^r F_{j,i}^{\ell} ,$$

(ver capítulo I).

De la tesis del lema 2.3 se desprende que

$$(7) \quad F_{1,i}^{\ell} \equiv F_{2,i}^{\ell} \text{ módulo } ((X_1, X_i)^{8\bar{w}(\delta)+1}) ,$$

de donde

$$(8) \quad F_{1,i} \equiv F_{2,i} \text{ módulo } ((X_1, X_i)^{8\bar{w}(\delta)+1}) .$$

El teorema II-3.6 nos dice que el orden de singularidad de los gérmenes  $Z_{j,i}$ , y en particular el de las ramas  $Z_{j,i}^{\ell}$ , es menor o igual de  $\bar{w}(\delta)$ . De la igualdad (7) es fácil deducir, visto el corolario 1.7, que las ramas  $Z_{1,i}^{\ell}$  y  $Z_{2,i}^{\ell}$  tienen en común  $6\bar{w}(\delta)$  puntos simples.

Dado que  $6\bar{w}(\delta)$  es estrictamente mayor que el orden de singularidad de los gérmenes  $Z_{j,i}$ , y como que un punto múltiple contribuye al orden de singularidad al menos con una unidad, deducimos que

$$(9) \quad \text{las ramas } Z_{1,i}^{\ell} \text{ y } Z_{2,i}^{\ell} \text{ tienen en común un punto simple que lo es también de los gérmenes } Z_{1,i} \text{ y } Z_{2,i} .$$

De la condición (8), para  $i=2$ , se desprende, gracias a la proposición 2.1, que existe un automorfismo analítico  $\phi$  de  $(k^2, o)$  tal que  $\phi(Z_{2,2}) = Z_{1,2}$  y verifica

$$(10) \quad \phi \equiv \text{Id módulo } ((X_1, X_2)^{4\bar{w}(\delta)+1})$$

De esta última condición, vista la proposición 1.6, se obtiene que existe una biyección entre las ramas de  $\phi(Z_{2,2})$  y  $Z_{2,2}$  tal que ramas correspondientes presentan en común todos los puntos infinitamente próximos hasta el primero que es simple en  $\phi(Z_{2,2})$  y  $Z_{2,2}$ . De la condición (9) se deduce que

$$\varnothing (z_{2,2}^\ell) = z_{1,2}^\ell$$

para  $\ell=1,2,\dots,r$ .

El automorfismo  $\varnothing$  puede extenderse a un automorfismo  $\bar{\varnothing}$  de  $R$ , de la siguiente manera:

$$\bar{\varnothing} \begin{cases} \bar{\varnothing} (x_\ell) = \varnothing (x_\ell) & \text{para } \ell= 1,2 \\ \bar{\varnothing} (x_\ell) + x_\ell & \text{para } \ell= 3,4,\dots,N. \end{cases}$$

observemos que de (10) se obtiene

$$(11) \quad \varnothing \equiv \text{Id} \text{ módulo } ((X_1, X_2)^{4\bar{w}(\delta)+1})$$

De la proposición I-1.3(iv) es fácil deducir que

$$2(e-1) \cdot \delta^*(z_2, 0) + 2 \leq 4\bar{w}(\delta) + 1, \quad ,$$

donde  $e$  es la multiplicidad de  $z_2$ . De la proposición II-3.6 y la condición (11) se concluye

$$W(2, z_2) = W(2, \bar{\varnothing}(z_2)) ,$$

de donde la proyección sobre el plano  $X_1, X_2$  paralelamente a la variedad  $X_1 = X_2 = 0$  verifica la proposición II-1.2 para el germen  $\bar{\varnothing}(z_2)$ . Por lo tanto, dado que la proyección de las ramas  $\bar{\varnothing}(z_2^\ell)$  y  $z_1^\ell$  coinciden con  $\varnothing(z_{2,2}^\ell) = z_{1,2}^\ell$ , deducimos, gracias a la proposición II-1.2, que las normalizaciones de las ramas  $\bar{\varnothing}(z_2^\ell)$ ,  $z_1^\ell$  y  $z_{1,2}^\ell$  coinciden.

Del lema 2.3 y de la condición (11) deducimos que la rama  $\bar{\varnothing}(z_2^\ell)$  admite una parametrización propia

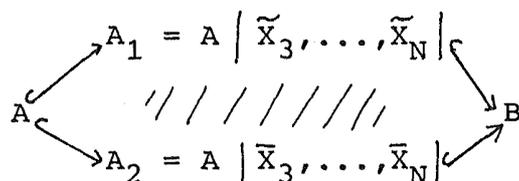
$$\varnothing(z_2^\ell) : \begin{cases} X_i = h_i^\ell(t_\ell) \\ i=1,2,\dots,N \end{cases}$$

tal que

$$(12) \quad \begin{aligned} t_\ell &\equiv h_1^\ell(t_\ell) \text{ módulo } (t_\ell^{4\bar{w}(\delta)+1}) \\ f_{1,i}^\ell(t_\ell) &\equiv h_i^\ell(t_\ell) \text{ módulo } (t_\ell^{4\bar{w}(\delta)+1}) \end{aligned}$$

para  $i=2,3,\dots,N$ .

Sean  $A = \mathcal{O}_{(\emptyset, (z_{2,2}), 0)} = \mathcal{O}_{(z_{1,2}, 0)}$ ,  $B$  la clausura entera de  $A$ , y  $A_j = \mathcal{O}_{(\emptyset, (z_j), 0)}$  para  $j=1,2$ . Así tenemos un diagrama



El paso final consiste en evaluar la diferencia  $\bar{X}_1 - \tilde{X}_i \in B$  para  $i=3,3,\dots,N$ .

Sabemos que la clausura entera de  $A$  es isomorfa a la suma directa  $\bigoplus_{\ell=1}^r k \parallel t_\ell \parallel$ .

De la condición (12) obtenemos que

$$(13) \quad \bar{X}_i - \tilde{X}_i \in (t_1)^{4\bar{w}(\delta)+1} \oplus \dots \oplus (t_r)^{4\bar{w}(\delta)+1}$$

para  $i=3,4,\dots,N$ .

Sea  $\mathcal{C}$  el conductor de la extensión  $A \subset B$ , de las proposiciones I-1.1 y II-3.6 sabemos que

$$\dim_k \left( \frac{B}{\mathcal{C}} \right) \leq 2\bar{w}(\delta),$$

por lo tanto

$$(14) \quad (t_1)^{2\bar{w}(\delta)} \oplus \dots \oplus (t_r)^{2\bar{w}(\delta)} \subset \mathcal{C} \subset A.$$

Sea  $m$  el ideal maximal de  $A$ , podemos suponer que  $\mathcal{C} \subset m$  ya que en caso contrario  $A=B$ , lo que forzaría a que los gérmenes  $Z_1$  y  $Z_2$  fueran no singulares. Este caso ya se ha estudiado al principio de la demostración. Por lo tanto de (13) y (14) deducimos

$$\bar{X}_i - \tilde{X}_i \in m^2;$$

sean  $u_3, \dots, u_N$  elementos de  $(X_1, X_2)^2 \subset k \parallel X_1, X_2 \parallel$  cuyas clases  $[u_i] \in A$  verifiquen

$$\bar{X}_1 - \tilde{X}_2 = [u_i] \in A$$

para  $i=3,4,\dots,N$ .

La transformación  $\varphi$  definida por las asignaciones

$$\begin{cases} \varphi(X_i) = X_i & i=1,2 \\ \varphi(X_i) = X_i + u_i(X_1, X_2) & i=3,4,\dots,N \end{cases},$$

es un automorfismo de  $R$  (ya que  $u_i \in (X_1, X_2)^2$ ) que transforma las parametrizaciones de las ramas  $Z_1$  en las parametrizaciones de las ramas  $\bar{\varphi}(Z_2)$ , luego transforma  $\bar{\varphi}(Z_2)$  en  $Z_1$ . Por lo tanto  $Z_2$  es isomorfo analíticamente a  $Z_1$  via el automorfismo analítico  $\varphi \bar{\varphi}$ .

2.4 Corolario: la función  $w(n) = 2(n+1)(2n^3(n+1)(n+3)+1) + n$  verifica que para cualesquiera  $I \in \text{Id}(N, \delta)$ ,  $J \in \text{Id}(N)$  tales que

$$I \equiv J \text{ módulo } (M^{w(\delta)}),$$

existe un automorfismo de  $R$  que transforma un ideal en el otro.

Demostración: observando que  $w(\delta) \gg 2\delta + 2$ , de la proposición 1.6(iii) y del teorema 2.2 deducimos el corolario.

Definición: sean  $f_1, \dots, f_s$  elementos del anillo de polinomios  $P_N$ , por grado de la  $n$ -pla  $(f_1, \dots, f_s)$  entenderemos la suma de los grados de los  $f_i$ .

El grado de un ideal  $q$  de  $P_N$  será el mínimo de los grados de las  $n$ -pla formados por sistemas de generadores de  $q$ , se denotará por  $\text{deg}(q)$ .

2.5 Proposición existe una función  $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  con la siguiente propiedad:

Si  $q$  es un ideal de  $P_N$  se verifica

$$\text{deg}(\text{rad}(q)) \leq \gamma(\text{deg}(q))$$

Demostración: ver HR, o también AR-1 teorema 6.5.

A continuación vamos a establecer otro corolario al teorema 2.2 :

2.6 Proposición : existe una función  $\tau: \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$  con la siguiente propiedad:

Sea  $I \in \text{Id}(N, \delta)$  y  $e$  la multiplicidad de  $R/I$ .

Para todo  $n \geq w(\delta)$  existe un ideal  $J \in \text{Id}(N, \delta)$  engendrado por polinomios tal que:

(i) existe un automorfismo analítico  $\varphi$  de  $R$  que verifica

(a)  $\varphi \equiv \text{Id}$  módulo  $(M^n)$

(b)  $\varphi(J) = I$

en particular  $I \equiv J$  módulo  $(M^n)$ .

(ii)  $\text{deg}(J) \leq \tau(n, \delta, e)$ .

Demostración: indiquemos por  $(X, o)$  el germen de curva reducida definido por el ideal  $I$ , sea  $m$  el ideal maximal de  $\mathcal{O}_{(X, o)}$ . Sean  $Z_1, \dots, Z_r$  las ramas de  $(X, o)$ .

Si  $\delta = 0$  el germen  $(X, o)$  es no singular y podemos tomar  $\tau(n, \delta, e) = n$ , gracias a la proposición 2.1.

Supongamos  $\delta \geq 1$ . Después de un cambio de coordenadas lineal podemos suponer que las variedades  $X_1 = X_i = 0$  pertenecen a  $W(2, X)$ .

Sea  $\mathcal{C}$  el conductor de la extensión  $\mathcal{O}_{(X, o)} \subset \overline{\mathcal{O}_{(X, o)}}$ , de la proposición I-1.1 deducimos

$$\dim_k \left( \frac{\mathcal{O}_{(X, o)}}{\mathcal{C}} \right) \leq 2\delta ;$$

si denotamos por  $\mathfrak{q}$  el ideal  $t_1 \oplus \dots \oplus t_r$  del anillo  $\overline{\mathcal{O}_{(X, o)}} \cong \bigoplus_{i=1}^r k \parallel t_i \parallel$ , por un razonamiento análogo al hecho en la demostración del lema II-1.3

tracción del lema II-1.3

$$\mathfrak{q}^{2\delta} \subset m.$$

De donde en particular

$$q^{2\delta n} \subset m^n,$$

es decir

$$(1) \quad t_1^{2\delta n} \oplus \dots \oplus t_r^{2\delta n} \subset m^n.$$

Tomando convenientemente los parámetros uniformizantes  $t_1, \dots, t_r$  podemos suponer que las ramas de  $(X, o)$  admiten parametrizaciones propias:

$$z_j : \begin{cases} X_1 = t_j^{e_j} \\ X_i = f_j^i(t_j) \\ i=2, 3, \dots, N \end{cases}$$

$j=1, 2, \dots, r$ . Siendo  $e_j$  la multiplicidad de la rama  $j$ -ésima (lo que fuerza  $e=2e_1+\dots+e_r$ ).

Si  $F \in R$  denotaremos por  $F^1 \oplus \dots \oplus F^r$  su imagen en  $\bigoplus_{i=1}^r k \parallel t_i \parallel$  por la composición  $R \longrightarrow \mathcal{O}_{(X,o)} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r k \parallel t_i \parallel$ .

De la inclusión (1) deducimos que existen, para  $n \gg 2$ , series  $F_i \in M^n$ , tales que:

$$\deg_t (F_i^j - f_i^j) \leq 2\delta n - 1$$

El isomorfo analítico  $\emptyset$ , definido por las asignaciones

$$\begin{cases} \emptyset(X_i) = X_i - F_i \\ i=1, 2, \dots, N \end{cases}$$

transforma  $(X, o)$  en un germen de curva  $(Y, o)$ , definido por el ideal  $J = \emptyset(I)$ , cuyas ramas admiten parametrizaciones propias

$$(2) \quad z'_j : \begin{cases} X_1 = t_j^{e_j} \\ X_i = g_j^i(t_j) \\ i=2, 3, \dots, N \end{cases}$$

para  $j=1, 2, \dots, r$ , con  $\deg(g_i^j) \leq 2\delta n - 1$  y  $\text{orden}_t(g_i^j - f_i^j) \geq 2\delta n$ .

Sea  $\rho$  el número de reducción de  $\mathcal{O}_{(X,o)}$  de la igualdad del Capítulo I-§1  $e-1 \leq \rho$  y de la proposición I-1.2(iv) se deduce

que  $e-1 \leq \delta$ . Es inmediato que:

$$2(e-1)^2 \cdot \delta^*(X,0) + 2 \leq w(\delta) ,$$

de la proposición II-3.7 se concluye que las variedades lineales  $X_1 = X_i = 0$  pertenecen a  $W(2,Y)$ .

Al ser las parametrizaciones (2) propias, gracias a la proposición II-1.2, sabemos que

$$\begin{cases} X_1 = t_j^{e_j} \\ X_i = g_j^i(t_j) \end{cases}$$

es una parametrización propia de la proyección, paralelamente a la variedad lenal  $X_1 = X_i = 0$ , de la rama  $Z_j^!$ . Así pues, la proyección de  $(Y,0)$  admite por ecuación local (ver capítulo I) al polinomio de  $k[X_1, X_i]$ :

$$H_i = \prod_{j=1}^r \left\{ \prod_{\xi^j=1}^{e_j} (X_i - g_j^i(\xi \cdot X_1^{1/e_j})) \right\} ,$$

es fácil verificar que

$$\deg(H_i) \leq e \cdot (2\delta n - 1) .$$

Observemos que los dos gérmenes definidos por los ideales  $J$  y  $\text{rad}((H_2, \dots, H_N))$  admiten las mismas parametrizaciones propias (i.e. (2)), por tanto son iguales.

De la proposición 2.5 deducimos que

$$\deg(J) \leq \gamma((N-1) \cdot e \cdot (2\delta n - 1)) ,$$

tenemos  $\tau(n, \delta, e) = \gamma((N-1) \cdot e \cdot (2n - 1))$ .

La condición (i) del enunciado de la proposición 2.6 se deduce del hecho

$$\emptyset \equiv \text{Id módulo } (M^n) ,$$

quedando la proposición demostrada.

Los ideales que definen los gérmenes de curva, reducida o no, de  $(k^3, 0)$  son perfectos y de altura dos (i.e. pertenecientes a  $\text{Id}(3)$ ) por lo que son determinantaes (ver apéndice II). Este hecho nos permitirá establecer un teorema de truncación efectiva para dichos gérmenes (teorema 2.7).

Definición: Sea  $f \in R_N$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Un polinomio  $g \in P_N$  se dirá que es la truncación de  $f$  módulo  $n$  (o que  $g$  se obtiene de  $f$  truncando módulo  $n$ ) si se verifican:

- (a)  $f-g \equiv 0$  módulo  $(M^n)$
- (b)  $\text{deg}(g) \leq n-1$

2.7 TEOREMA DE TRUNCACION EFECTIVA: Sea  $I \in \text{Id}(3, \delta)$ . Para todo sistema de generadores  $f_1, \dots, f_n$  de  $I$  y toda matriz  $A$ , con coeficientes pertenecientes a  $k \llbracket X_1, X_2, X_3 \rrbracket$ , de dimensiones  $n \times (n-1)$ , cuyos menores maximales sean los elementos  $f_1, \dots, f_n$ , se verifica: el ideal  $J$  engendrado por los menores maximales de la matriz  $B$ , obtenida truncando módulo  $r \gg w(\delta)$  los coeficientes de  $A$ , es analíticamente equivalente a  $I$ .

Demostración: el ideal  $J$  está engendrado por los menores maximales de una matriz, por lo tanto

$$\text{ht}(J) \leq 2,$$

ver proposición 1 de Ap-II.

Es fácil deducir de las hipótesis que

$$(1) \quad I \equiv J \text{ módulo } (M^{w(\delta)}),$$

gracias a la proposición 1.1 y al lema 1.7, habida cuenta que  $u(\delta) \leq w(\delta)$ , obtenemos

$$\text{ht}(J) \geq 2.$$

por tanto  $\text{ht}(J) = 2$ .

Al ser el ideal  $J$  de altura dos del teorema 2-(i) de Ap-II deducimos que  $J$  es perfecto. Así de la condición (1) y del teorema 2.4 deducimos que existe un automorfismo de  $R_3$  que transforma  $I$  en  $J$ .

### 3. Comentarios sobre los teoremas de truncación

3.1.- El teorema de truncación (ver 2.2) se enmarca en un conjunto de resultados clásicos como son los de Samuel (ver prop.2.1 para el caso de curvas y el lema 2 de NOB-1 para el caso general) y los de Hironaka y Rossi (ver H-R).

El resultado de Samuel dice que si  $f=0$  es la ecuación local de un germen de hipersuperficie algebroide  $(f \in R_N)$ , con singularidad aislada y número de Milnor  $\mu$ , y si  $g$  es un elemento de  $R_N$  que verifica

$$f-g \equiv 0 \text{ módulo } (M^{2\mu+1})$$

existe un automorfismo de  $R_N$  que transforma  $f$  en  $g$ .

La hipótesis de singularidad aislada no puede omitirse, ya que el resultado sería falso, por ejemplo  $f = Y^2 - X^2$  y  $g_n = Y^2 - X^2 + X^n$  (ver NOB-2). En su tesis Augusto Nobile (ver NOB-2) da resultados, en la línea de los de Samuel, para singularidades no aisladas de hipersuperficies de  $(\mathbb{C}^N, o)$ .

El trabajo de Hironaka-Rossi (ver H-R ó AR-1 pág 33 para la versión que daremos aquí) demuestra el siguiente resultado: Sea  $I \subset R$  un ideal tal que  $\text{Spec}(R/I)$  sea reducido, de dimensión pura  $r$  y cuyo origen sea un punto singular aislado. Existe un entero  $c \in \mathbb{N}$  tal que para todo ideal  $J \subset R$ , que defina un esquema reducido de dimensión pura  $r$  y que verifique

$$I \equiv J \text{ módulo } M^c,$$

existe un automorfismo de  $R$  que transforma  $I$  en  $J$ .

El anterior resultado mejora el de Samuel, en el sentido de que no hay restricción en cuanto a la dimensión, pero se pierde información ya que el entero  $c \in \mathbb{N}$  depende del esquema definido por  $I$  y no de un invariante de la singularidad (como puede ser el número de Milnor para las hipersuperficies).

El teorema III-2.2 proporciona un resultado que si es por una parte más débil que el de Hinoraka-Rossi (se aplica sólo a gérmenes de curva) controla el entero  $c$  en función de invariantes numéricos de la singularidad, al igual que el resultado de Samuel para hipersuperficies.

3.2.- Supongamos que  $\mathcal{P}$  es una propiedad definida sobre el conjunto  $I(N, \delta)$  que sea invariante por isomorfismo analítico, entonces se conserva por contacto elevado (vid. teorema 2.2) y podemos tomar  $f(\mathcal{P}) = w(\delta)$ .

3.3.- El teorema de truncación efectiva puede considerarse como un corolario de un resultado más general.

2.8 TEOREMA : Sea  $I \in \text{Id}(N, \delta)$ . Para todo sistema de generadores  $f_1, \dots, f_n$  de  $I$  y toda matriz  $A$ , con coeficientes pertenecientes a  $R_N$ , de dimensiones  $r \times s$ , cuyos menores de orden  $t$  sean los elementos  $f_1, \dots, f_n$ , se verifica: el ideal  $J$  engendrado por los menores maximales de la matriz  $B$ , obtenida truncando módulo  $r \geq w(\delta)$  los coeficientes de  $A$ , es analíticamente equivalente a  $I$ .  
Demostración : igual que la del teorema 2.7 utilizando el teorema 1 de H-E en lugar del teorema 2-(ii) de Ap-II.

Asimismo gracias a la estructura de los ideales Gorenstein de altura cuatro de  $k \llbracket X_1, \dots, X_4 \rrbracket$  (ver B-E), puede darse un teorema de truncación efectiva para dichos ideales.

CAPITULO IV

CAPITULO IV: CONSTRUCCION DEL ESQUEMA DE HILBERT DE LOS GERMEENES

DE CURVA DE  $(k^N, 0)$  CON POLINOMIO DE HILBERT-SAMUEL  $p(T)$ :

A lo largo del capítulo denotaremos por  $p(T)$  la función lineal  $p(T) = eT - \rho$ , donde  $e$  y  $\rho$  son dos enteros naturales.

1. Familias de gérmenes de curvas.

Denotaremos por SCH la categoría de los  $k$ -esquemas localmente de tipo finito y por SET la categoría de conjuntos.

Denotaremos por PAD la categoría cuyos objetos son pares  $(A, I)$  donde  $A$  es una  $k$ -álgebra e  $I$  es un ideal de  $A$ . Dados dos objetos  $(A, I), (B, J)$ , un morfismo entre ellos es un morfismo de  $k$ -álgebras  $f: A \rightarrow B$  tal que  $f(I) \subset J$ .

Se denotará por AD la subcategoría plena de PAD cuyos objetos son pares  $(A, I)$  de modo que la topología  $I$ -ádica haga de  $A$  una  $k$ -álgebra completa y separada.

Consideremos el diagrama de PAD:

$$\begin{array}{ccc} (A, I) & \longrightarrow & (B, J) \\ \downarrow & & \\ (C, K) & & \end{array}$$

es inmediato comprobar que  $(C \otimes_A B, C \otimes_A J + K \otimes_A B)$  es el colímite en PAD del diagrama anterior.

La completación respecto la topología  $I$ -ádica da lugar a un functor

$$\begin{array}{ccc} \underline{c}: \text{PAD} & \longrightarrow & \text{AD} \\ (A, I) & \longrightarrow & (\hat{A}, \hat{I}) \end{array}$$

que admite la inclusión natural  $\underline{i}: \text{AD} \rightarrow \text{PAD}$  como functor coadjunto (EGA-0-1.5), gracias a EGA-0-1.5.7 el functor  $\underline{c}$  conserva colímites, por lo tanto cualquier diagrama de AD:

$$\begin{array}{ccc}
 (A, I) & \longrightarrow & (B, J) \\
 \downarrow & & \\
 (C, K) & & 
 \end{array}$$

tiene por colímite a  $(C \hat{\otimes}_A B, (C \otimes_A J + K \otimes_A B) \cdot C \hat{\otimes}_A B)$ . Ver EGA-0-7.7 para las propiedades fundamentales del producto tensorial completado.

Denotaremos por  $AF$  la categoría de los  $k$ -esquemas afines y por  $AFF$  la subcategoría plena de  $AF$  de los  $k$ -esquemas afines de tipo finito. Es sabido que  $(AF)^\circ$  es isomorfa a la categoría de las  $k$ -álgebras y  $(AFF)^\circ$  isomorfa a la categoría de las  $k$ -álgebras de tipo finito. Es fácil ver que  $(PAD)^\circ$  es isomorfa a la subcategoría plena de  $AF \times AF$  cuyos objetos son de la forma  $(\text{Spec}(A), \text{Spec}(A/I))$ , y de la misma forma  $(AD)^\circ$  es isomorfa a la subcategoría plena de  $(PAD)^\circ$  cuyos objetos son de la forma  $(\text{Spec}(A), \text{Spec}(A/I))$  con  $A$  una  $k$ -álgebra completa por la topología  $I$ -ádica.

Sea  $\underline{D}: (AD)^\circ \longrightarrow AF$  el functor "olvido":

$$\underline{D}((\text{Spec}(A), \text{Spec}(A/I))) = \text{Spec}(A).$$

Tomando  $L_n(A, I) = A/I^n$  y  $L_n(\varphi)$  el morfismo inducido en el cociente, se define un functor

$$\underline{L}_n: AD \longrightarrow (AF)^\circ$$

Denotaremos por  $\underline{T}_n$  el functor dual de  $\underline{L}_n$  y lo llamaremos "functor de truncación  $n$ -ésima".

Por comodidad de escritura  $A \parallel X \parallel$  será el anillo  $A \parallel X_1, \dots, X_N \parallel$ .

1.1 Lema: Dado un diagrama  $D$  de la categoría  $(AD)^{\circ}$  de la forma

$$D: \begin{array}{ccc} & & (\text{Spec}(\frac{A\|X\|}{J}), \text{Spec}(A)) \\ & & \downarrow \\ (\text{Spec}(B), \text{Spec}(B)) & \longrightarrow & (\text{Spec}(A), \text{Spec}(A)) \end{array}$$

se verifica que

$$T_n(\varprojlim D) = \varprojlim T_n(D) .$$

Demostración: el enunciado es consecuencia inmediata de la existencia del isomorfismo, evidente dada la definición de  $\hat{\otimes}$  (EGA-0-7.7),

$$\left( \frac{A\|X\|}{J} \hat{\otimes}_A B \right) /_{(X)^n} \cong \frac{A\|X\|}{J + (X)^n} \otimes_A B$$

Denotaremos por  $AF \xrightarrow{\bar{\quad}} AF$  el functor que a todo objeto  $S = \text{Spec}(A)$  de  $AF$  le asigna  $\bar{S} = \text{Spec}(A\|X\|)$  y a cada morfismo su extensión natural. Observemos que  $S$  puede considerarse como un subesquema de  $\bar{S}$  gracias al morfismo natural de paso al cociente  $A\|X\| \longrightarrow A$ .

Sea  $\Pi: \bar{S} \longrightarrow S$  el morfismo de  $k$ -esquemas inducido por el morfismo natural de  $A$ -álgebras  $A \longrightarrow A\|X\|$ , consideraremos a  $\bar{S}$  como un  $S$ -esquema con morfismo estructural  $\Pi$ .

Definición: Sea  $f: (Z, S) \longrightarrow (S, S)$  un morfismo de la categoría  $(AD)^{\circ}$ . Si  $s$  es un punto de  $S$  llamaremos fibra de  $f$  en el punto  $s$  al objeto de  $(AD)^{\circ}$ :

$$(Z, S) \times_{(S, S)} (\text{Spec}(k(s)), \text{Spec}(k(s))) ,$$

que denotaremos por  $f_s$  ó  $(Z, S)_s$ .

Sea  $S = \text{Spec}(A)$  un objeto de  $\text{AFF}$ , una familia de base  $S$  de gérmenes de curva de  $(k^N, \mathfrak{o})$  con polinomio de Hilbert-Samuel  $p(T)$  es un morfismo  $f: (Z, S) \longrightarrow (S, S)$  de la categoría  $(\text{AD})^\circ$ , cuya restricción a las segundas componentes es la identidad, y que verifica las siguientes propiedades:

- (i)  $Z$  es un sub- $S$ -esquema cerrado de  $\bar{S}$ , es decir: existe una inmersión cerrada  $j: Z \longrightarrow \bar{S}$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{j} & \bar{S} \\ \underline{D}(f) \searrow & \swarrow \pi & \\ & S & \end{array}$$

es conmutativo.

- (ii) Para todo  $n \geq e+1$  el morfismo  $\underline{T}_n(f): \underline{T}_n(Z, S) \longrightarrow S$  es plano y con fibras de longitud  $p(n)$  (i.e. si  $s$  es un punto de  $S$  entonces

$$\dim_k \left( \mathcal{O}_{(\underline{T}_n(Z, S))_s} \right) = p(n) .$$

- (iii) Para todo punto cerrado  $s \in S$  el esquema  $\underline{D}(f_s)$  es Cohen-Macaulay.

Es fácil probar que en la definición anterior puede sustituirse (iii) por:

- (iii)' Para todo punto cerrado  $s \in S$  el morfismo

$$j_s: \underline{D}((Z, S))_s \longrightarrow \underline{D}((\bar{S}, S))_s \cong (k^N, \mathfrak{o})$$

es la inmersión de un germen de curva con polinomio de Hilbert-Samuel  $p(T)$  en  $(k^N, \mathfrak{o})$ .

Observación: Supongamos que  $S = \text{Spec}(A)$ , con  $A$  una  $k$ -álgebra. De la condición (i) de la definición de familia se deduce fácilmente la existencia de un ideal  $J \subset (X)A[[X]]$  tal que

$$(Z, S) = \left( \text{Spec} \left( \frac{A[[X]]}{J} \right), \text{Spec} \left( \frac{A[[X]]}{(X)} \right) \right)$$

y el morfismo  $\underline{D}(f)$  es el inducido por el morfismo natural de

A-álgebras

$$A \longrightarrow \frac{A \llbracket X \rrbracket}{J}$$

Definición: Sea  $S$  un objeto de  $AFF$ , el conjunto de familias de base  $S$  de gérmenes de curva de  $(k^N, 0)$  con polinomio de Hilbert-Samuel  $p(T)$  se denotará por  $\underline{H}_{N,p(T)}(S)$ .

Si  $f: S_1 \longrightarrow S_2$  es un morfismo de  $AFF$ , vamos a definir una aplicación

$$\underline{H}_{N,p(T)}(f): \underline{H}_{N,p(T)}(S_2) \longrightarrow \underline{H}_{N,p(T)}(S_1) \quad .$$

Sea  $g: (Z, S_2) \longrightarrow (S_2, S_2)$  una familia de base  $S_2$ ,  $\underline{H}_{N,p(T)}(f)(g)$  es por definición el morfismo de  $(AD)^0$ :

$$(Z, S_2) \times_{(S_2, S_2)} (S_1, S_1) \xrightarrow{g'} (S_1, S_1) \quad ,$$

gracias a la observación anterior deducimos que  $g'$  verifica la condición (i) de la definición de familia de gérmenes. La condición (ii) se verifica gracias al Lema 2.1 y a la conservación de la platitud y de la longitud de las fibras por el producto fibrado.

Si  $s$  es un punto cerrado de  $S_1$  entonces  $f(s) \in S_2$  también es un punto cerrado y es fácil demostrar que

$$g_{f(s)} \cong g'_s \quad ,$$

de lo cual deducimos que  $g'$  verifica la condición (iii) de la definición de familia de gérmenes.

Las asignaciones  $S \longrightarrow \underline{H}_{N,p(T)}(S)$  y  $f \longrightarrow \underline{H}_{N,p(T)}(f)$  definen un functor entre las categorías  $AFF$  y  $SET$  que denotaremos por  $\underline{H}_{N,p(T)}$ . Dado que  $N$  y  $p(T)$  serán fijos a lo largo del capítulo

escribiremos  $\underline{H}$  en lugar de  $\underline{H}_{N,p}(T)$ .

A continuación vamos a dar una serie de propiedades de las familias de gérmenes de curvas, más concretamente: demostraremos que si  $f$  es una familia, el morfismo  $\underline{D}(f)$  es plano (prop. 1.3) y que en la definición de familia la condición " $\underline{T}_n(f)$  es plano" es redundante si suponemos que  $S$  es un esquema reducido (prop. 1.5).

1.2 Proposición: Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de tipo finito,  $J$  un ideal de  $A[[X]]$  y  $n_0$  un entero natural. Si para todo  $n \gg n_0$  el  $A$ -módulo  $\frac{A[[X]]}{J+(X)^n}$  es plano, el  $A$ -módulo  $\frac{A[[X]]}{J}$  también es plano.

Demostración: para ver que el  $A$ -módulo  $A[[X]]/J$  es plano, es suficiente probar que para todo morfismo inyectivo de  $A$ -módulos finitamente generados  $f: L \rightarrow M$ , el morfismo

$$L \otimes_A \frac{A[[X]]}{J} \xrightarrow{f \otimes \text{Id}} M \otimes_A \frac{A[[X]]}{J}$$

es inyectivo.

Al ser  $A$ -plano el módulo  $\frac{A[[X]]}{J+(X)^n}$ ,  $n \gg n_0$ , sabemos que es inyectivo el morfismo

$$L \otimes_A \frac{A[[X]]}{J+(X)^n} \xrightarrow{f \otimes \text{Id}_n} M \otimes_A \frac{A[[X]]}{J+(X)^n}$$

para todo  $n \gg n_0$ , así tenemos un morfismo inyectivo

$$\varprojlim ( L \otimes_A \frac{A[[X]]}{J+(X)^n} ) \xrightarrow{\varprojlim (f \otimes \text{Id}_n)} \varprojlim ( M \otimes_A \frac{A[[X]]}{J+(X)^n} )$$

Si probamos que existen isomorfismos de  $A$ -módulos  $f_L$  y  $f_M$  que hagan commutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 L \otimes_A \frac{A\|X\|}{J} & \xrightarrow{f_L} & \varprojlim \left( L \otimes_A \frac{A\|X\|}{J+(X)^n} \right) \\
 \downarrow f \otimes \text{Id} & & \downarrow \varprojlim (f \otimes \text{Id}_n) \\
 M \otimes_A \frac{A\|X\|}{J} & \xrightarrow{f_M} & \varprojlim \left( M \otimes_A \frac{A\|X\|}{J+(X)^n} \right)
 \end{array}$$

habremos finalizado la demostración.

El anillo  $A\|X\|$  es completo por la topología  $(X)$ -ádica, de la proposición 23.D de MAT deducimos que el  $A\|X\|$ -módulo  $A\|X\|/J$  es completo. Gracias al teorema 55 de MAT el  $A\|X\|$ -módulo  $L \otimes_A \frac{A\|X\|}{J}$  es completo por ser finito generado (análogamente para  $M$ ), así existen isomorfismos de  $A\|X\|$ -módulos  $g_L$  y  $g_M$  que hacen conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 L \otimes_A \frac{A\|X\|}{J} & \xrightarrow{g_L} & \varprojlim \left( \frac{L \otimes_A \frac{A\|X\|}{J}}{(X)^n \left( L \otimes_A \frac{A\|X\|}{J} \right)} \right) \\
 \downarrow f \otimes \text{Id} & & \downarrow \varprojlim ((f \otimes \text{Id})_n) \\
 M \otimes_A \frac{A\|X\|}{J} & \xrightarrow{g_M} & \varprojlim \left( \frac{M \otimes_A \frac{A\|X\|}{J}}{(X)^n \left( M \otimes_A \frac{A\|X\|}{J} \right)} \right)
 \end{array}$$

Si probamos que para cada  $n \geq n_0$  existen isomorfismos de  $A$ -módulos

$$(1) \quad L \otimes_A \frac{A\|X\|}{J+(X)^n} \xrightarrow{\cong} \frac{L \otimes_A \frac{A\|X\|}{J}}{(X)^n \left( L \otimes_A \frac{A\|X\|}{J} \right)}$$

y el análogo para  $M$ , compatibles con los morfismos de transición

de los respectivos sistemas proyectivos, habremos demostrado la proposición.

Pero el isomorfismo (1) es fácil de establecer: basta aplicar la exactitud por la derecha del producto tensorial. La compatibilidad con los morfismos de transición resulta de la naturalidad del isomorfismo.

1.3 Corolario: Sea  $S$  un objeto de  $AFF$  y  $f$  una familia de base  $S$  de gérmenes de curva, el morfismo  $\underline{D}(f)$  es plano.

Demostración: la condición (ii) de la definición de familia dice que para todo  $n \geq e+1$  el morfismo  $\underline{T}_n(f)$  es plano, basta usar la proposición 1.2.

Sea  $A$  una  $k$ -álgebra reducida y de tipo finito,  $J$  un ideal de  $A[[X]]$  contenido en  $(X) \cdot A[[X]]$ . Consideremos el morfismo

$$g: Z = \text{Spec}\left(\frac{A[[X]]}{J}\right) \longrightarrow S = \text{Spec}(A)$$

inducido por el morfismo natural de  $A$ -álgebras  $A \longrightarrow \frac{A[[X]]}{J}$ .

1.4 Proposición: Si para todo punto cerrado  $s \in S$  la fibra  $Z_s$  es un germen de curva de  $(k^N, 0)$  con polinomio de Hilbert-Samuel  $p(T)$ , entonces  $g$  y los morfismos

$$g_n: Z_n = \text{Spec}\left(\frac{A[[X]]}{J + (X)^n}\right) \longrightarrow S$$

inducidos por  $g$ , son planos para todo  $n \geq e+1$ .

Demostración: utilizaremos el teorema de semicontinuidad de HAR pág. 125. Sea  $n \geq e+1$ , de la proposición 1 de Ap-I deducimos que

para todo punto cerrado  $s \in S$  la fibra  $(Z_n)_s$  tiene longitud  $p(n)$ . Del apartado (a) del teorema de semicontinuidad, el conjunto de los puntos, cerrados o no, de  $S$  cuya fibra por  $g_n$  sea de longitud menor igual que  $p(n)-1$  es un abierto de  $S$ , sea  $B$  tal abierto. Supongamos que  $B$  es no vacío. Al ser  $S$  un esquema de Jacobson (EGA-I-6.4) existe un punto cerrado  $s_0$  perteneciente a  $B$ , siendo esto una contradicción con el hecho de que  $(Z_n)_{s_0}$  tenga longitud  $p(n)$ , por lo tanto  $B = \emptyset$ .

Podemos suponer pues que para todo punto  $s \in S$  la longitud de  $(Z_n)_s$  es mayor o igual que  $p(n)$ , del apartado (a) del teorema de semicontinuidad deducimos que el conjunto de puntos cerrados de  $S$  cuya fibra por  $g_n$  sea de longitud  $p(n)$  es un abierto  $B'$  de  $S$ . Habíamos visto que la fibra de todo punto cerrado tenía longitud  $p(n)$ , por lo tanto  $B'$  contiene todos los puntos cerrados de  $S$ . Al ser  $S$  un esquema de Jacobson deducimos que  $B' = S$  con lo cual para todo punto  $s \in S$  la longitud de  $(Z_n)_s$  es igual a  $p(n)$ .

Del apartado 8(c) del teorema de semicontinuidad, al ser  $S$  reducido, obtenemos que los morfismos  $g_n$  son planos para todo  $n \geq e+1$ . De la proposición 1.2 deducimos que  $g$  es plano.

1.5 Corolario: Sea  $S = \text{Spec}(A)$  un esquema reducido, objeto de la categoría AFF. En la definición de familia de base  $S$  de gérmenes de curva, la condición " $\underline{T}_n(f)$  es plano" es redundante.

Demostración: basta aplicar la proposición 1.4.

Para finalizar esta sección vamos a ver (prop. 1.6) que la condición " $\underline{T}_n(f)$  es plano para todo  $n \geq e+1$ " es una debilitación de la platitude normal. Con ello creemos justificada su intro-

ducción, como condición de constancia del "tipo de equisingularidad", en la definición de familia de gérmenes de curva.

Definición: (HI-2 pág. 136) sea  $A$  una  $k$ -álgebra y  $J$  un ideal de  $A[[X]]$  contenido en  $(X) \cdot A[[X]]$ . Diremos que  $\text{Spec}(A[[X]]/J)$  es normalmente plano a lo largo de  $\text{Spec}(A)$  si y sólo si el  $A$ -módulo  $\text{Gr}_{(X)}(A[[X]]/J)$  es plano.

Se observa fácilmente que la platitudez del  $A$ -módulo  $\text{Gr}_{(X)}(A[[X]]/J)$  es equivalente a la del  $A$ -módulo  $\frac{A[[X]]}{(J+(X)^n) \cdot A[[X]]}$  para todo  $n \geq 0$ .

1.6 Proposición: Sea  $S$  un objeto de  $\text{AFF}$  y  $f: (Z, S) \longrightarrow (S, S)$  un morfismo de  $(\text{AD})^0$  que verifica las condiciones (i) y (iii)'. Si  $Z$  es normalmente plano a lo largo de  $S$ , entonces  $f \in \underline{H}(S)$ .

Demostración: obvia, vista la observación que precede.

## 2. La variedad $W(n, r, F)$ .

Sea  $E$  un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita,  $\tilde{E}$  será el haz de  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}$ -módulos inducido por  $E$  en  $\text{Spec}(k)$ . Si  $S$  es un  $k$ -esquema, denotaremos por  $\tilde{E}_{(S)}$  el haz de  $\mathcal{O}_S$ -módulos  $\varphi^*(\tilde{E})$ , siendo  $\varphi: S \longrightarrow \text{Spec}(k)$  el morfismo estructural de  $S$ .

Si  $E$  es un espacio vectorial de dimensión finita, denotaremos por  $\text{Sim}(\tilde{E})$ , resp.  $\text{Sim}(E)$ , el álgebra simétrica asociada al haz de  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}$ -módulos  $\tilde{E}$ , resp. al espacio vectorial  $E$ . Es sabido que  $\text{Sim}(\tilde{E}) = \widehat{\text{Sim}(E)}$  (EGA-I-9.4.6).

Denotaremos por  $\mathbb{V}(\tilde{E}) = \text{Spec}(\text{Sim}(\tilde{E}))$  el fibrado geométrico asociado a  $\tilde{E}$  (EGA-I-9.4.9), dicho esquema representa al functor que a todo  $k$ -esquema  $T$  la asocia el conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\tilde{E}_{(T)}, \mathcal{O}_T)$ .

Sea  $e_1, \dots, e_r$  una base de  $E$ , es inmediato que existe un único isomorfismo  $\text{Sim}(E) \cong k[T_1, \dots, T_r]$  que a cada vector  $e_i$  le hace corresponder  $T_i$ , para  $i=1, 2, \dots, r$ , sabemos que existe un isomorfismo natural  $\text{Spec}(\text{Sim}(\tilde{E})) \cong \text{Spec}(\text{Sim}(E))$ , por lo cual identificaremos  $\mathbb{V}(\tilde{E}) = \text{Spec}(\text{Sim}(\tilde{E}))$  con el espacio afín  $k^r = \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_r])$ .

Sean  $E$  y  $F$  dos  $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita y  $\{e_1, \dots, e_r\}$ ,  $\{f_1, \dots, f_r\}$  sendas bases. Sea  $f: E \rightarrow F$  un morfismo de espacios vectoriales. El morfismo  $f$  induce un morfismo de  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}$ -álgebras  $\tilde{f}: \text{Sim}(\tilde{E}) \rightarrow \text{Sim}(\tilde{F})$  y este a su vez un morfismo de  $k$ -esquemas  $\mathbb{V}(f): \mathbb{V}(\tilde{F}) \rightarrow \mathbb{V}(\tilde{E})$ .

Es fácil de ver que si identificamos  $\mathbb{V}(\tilde{E})$  y  $\mathbb{V}(\tilde{F})$  con  $k^r$  y  $k^s$  respectivamente, via los isomorfismos definidos por las bases  $\{e\}$  y  $\{f\}$ , el morfismo  $\mathbb{V}(f)$  es una aplicación que en las referencias afines  $\{0; e_1, \dots, e_r\}$ ,  $\{0; f_1, \dots, f_s\}$  tiene por matriz la traspuesta de la matriz asociada a  $f$  en las bases  $\{e_1, \dots, e_r\}$ ,  $\{f_1, \dots, f_s\}$ .

Sea  $X$  un  $k$ -esquema de tipo finito, al ser  $X$  un esquema de Jacobson (EGA-I-6.4) todo subconjunto constructible de  $X$  queda determinado por sus puntos cerrados. Gracias a esta propiedad definiremos subconjuntos constructibles de  $X$  dando solamente sus puntos cerrados.

Si  $X'$ ,  $X''$  son dos subesquemas de un esquema  $X$ , denotaremos por  $X' \wedge X''$  el esquema  $X' \times_X X''$ , el cual es un subesquema de  $X$  via el morfismo natural  $X' \times_X X'' \rightarrow X$ .

A los  $k$ -esquemas reducidos se les denominará por variedades.

Sea  $r$  y  $n$ ,  $r \leq n$ , dos enteros naturales y  $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una función cuya restricción  $F|_{\{r, r+1, \dots, n\}}$  sea creciente. Para todo  $t \geq 0$  denotaremos por  $G_t$  la Grassmanniana de los cocientes de  $R_t$  de dimensión  $F(t)$ . Sea  $\underline{G}_t: \text{SCH} \rightarrow \text{SET}$  el functor que a todo  $k$ -esquema  $S$  le asocia el conjunto

$$\underline{G}_t(S) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_S\text{-módulos } \mathcal{F} \text{ cocientes de } \widetilde{R}_t(S) \\ \text{localmente libres de rango } F(t). \end{array} \right\}$$

Si  $f: S \rightarrow T$  es un morfismo de  $k$ -esquemas, el functor  $\underline{G}_t$  le asigna la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \underline{G}_t(T) & \xrightarrow{\underline{G}_t(f)} & \underline{G}_t(S) \\ \mathcal{F} & \longrightarrow & f^*(\mathcal{F}) \end{array}$$

Es conocido que el esquema  $G_t$  representa al functor  $\underline{G}_t$  (EGA-I-9.7.4). i.e. existe un isomorfismo functorial  $\text{Hom}(\cdot, G_t) \cong \underline{G}_t(\cdot)$ . Sea  $\mathcal{Y}_t$  el haz localmente libre de rango  $F_n(t)$  cociente de  $\widetilde{R}_t(G_t)$  imagen por  $\sigma$  del morfismo identidad  $\text{Id}: G_t \rightarrow G_t$ . Sea  $S$  un  $k$ -esquema localmente de tipo finito y  $f: S \rightarrow G_t$  un morfismo,  $\sigma_S(f)$  es el haz  $f^*(\mathcal{Y}_t)$  (ver EGA-I-9.7.5).

Gracias a la semicontinuidad superior de la dimensión de los  $k$ -espacios vectoriales, existe un subconjunto localmente cerrado de  $G_n$  cuyos puntos cerrados son los cocientes  $R_n/L$  tales que para todo  $t \in \{r, r+1, \dots, n\}$  el espacio vectorial  $R_n/L+M^t$  tiene dimensión  $F(t)$ . Denotaremos por  $W(n, r, F)$  el subesquema reducido de  $G_n$  soportado por el anterior conjunto localmente cerrado.

Definición: Sea  $S$  un  $k$ -esquema y  $\mathcal{F} = \widetilde{R}_n(S) / \mathcal{L}$  un haz de  $\mathcal{O}_S$ -módulos cociente de  $\widetilde{R}_n(S)$ . Para todo  $i < n$  se define

$$\mathcal{F}^{(i)} = \frac{R_n(S)}{\mathcal{L} + M^{n-i}(S)}$$

el cual es un haz de  $\mathcal{O}_S$ -módulos cociente del haz  $\widetilde{R}_{n-i}(S)$

Sea  $f: T \longrightarrow S$  un morfismo de  $k$ -esquemas, de la exactitud por la derecha del functor imagen inversa se deduce que existe un isomorfismo, natural en  $\mathcal{F}$ , de  $\mathcal{O}_T$ -módulos

$$f^*(\mathcal{F}^{(i)}) \cong (f^*(\mathcal{F}))^{(i)}$$

Definición:  $F_n$  es el functor entre las categorías SCH y SET que asigna a un  $k$ -esquema  $S$  el conjunto

$$F_n(S) = \left\{ \mathcal{F} \in \underline{G}_n(S) \mid \mathcal{F}^{(i)} \in \underline{G}_{n-i}(S) \text{ para } i=1, \dots, n-r \right\}$$

Si  $f: S \longrightarrow T$  es un morfismo de  $k$ -esquemas, el functor  $F_n$  le asigna la aplicación

$$\begin{array}{ccc} F_n(T) & \xrightarrow{F_n(f)} & F_n(S) \\ \mathcal{F} & \longrightarrow & f^*(\mathcal{F}) \end{array} .$$

Sea  $\{m_i\}_{i=1,2,\dots,b(t)}$  una base de  $R_t$  formada por las clases de los monomios del anillo de polinimios  $P_N$  de grado menor o igual que  $t-1$ . Supondremos que  $i \leq j$  si  $\deg(m_i) \leq \deg(m_j)$ . Para cada conjunto de índices  $H = \{i_1, \dots, i_{F(t)}\} \subset \{1, 2, \dots, b(t)\}$  se considera el abierto de  $G_t$ :

$$B_t(H) = \left\{ \begin{array}{l} \text{cocientes } R_t / \mathcal{L} \text{ de dimensión } F(t) \text{ tales que} \\ \text{las clases de } m_{i_1}, \dots, m_{i_{F(t)}} \text{ en el cociente} \\ \text{forman una base.} \end{array} \right.$$

el cual es isomorfo a un espacio afin de dimensión  $F(t)(b(t)-F(t))$  (ver demostración de la siguiente proposición).

2.1 Proposición: El functor  $F_n$  es representable por la variedad  $W(n,r,F)$ .

Demostración: para demostrar la proposición utilizaremos EGA-0-4.5.4.

La condición (ii) de la proposición de EGA-0-4.5.4 es verificada por  $F_n$ : si  $S$  es un  $k$ -esquema la aplicación  $U \rightarrow F_n(U)$ , donde  $U$  recorre los abiertos de  $S$ , es un haz de conjuntos. Ver la demostración de EGA-I-9.7.4.

Sea  $H = \{i_1, \dots, i_{F(n)}\}$  un subconjunto de  $\{1, 2, \dots, b(n)\}$  tal que el cardinal del conjunto  $\{1, 2, \dots, b(n-i)\} \cap H$  sea  $F(n-i)$  para  $i = 1, 2, \dots, n-r$ .

Denotaremos por  $\mathcal{H}$  el conjunto de las partes de  $\{1, 2, \dots, b(n)\}$  que verifiquen la anterior propiedad.

Sea  $\varphi_H: \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}^{F(n)} \rightarrow \widetilde{R}_n$  el morfismo de  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}$ -módulos inducido por el morfismo de  $k$ -espacios vectoriales

$$\varphi_H: k^{F(n)} \rightarrow R_n \quad \text{con} \quad \varphi_H((a_i)_{i \in H}) = \sum_{i \in H} m_i a_i.$$

Sea  $F_{n,H}(S)$  el subconjunto de  $F_n(S)$  formado por los haces tales que la composición

$$\mathcal{O}_S^{F(n)} \xrightarrow{\varphi_{H(S)}} \widetilde{R}_{n(S)} \rightarrow \mathcal{F}$$

sea un morfismo epiyectivo. Se comprueba que la asignación

$S \rightarrow F_{n,H}(S)$  es un subfunctor de  $F_n$ .

Analogamente se define un subfunctor de  $\underline{G}_{n,H}$  de  $\underline{G}_n$  (EGA-I-9.7.4) que a todo  $k$ -esquema  $S$  le asigna el conjunto  $\underline{G}_{n,H}(S)$  formado por los haces  $\mathcal{F} \in \underline{G}_n(S)$  tales que el morfismo

$$\mathcal{O}_S^{F(n)} \xrightarrow{\varphi_{H(S)}} \widetilde{R}_n(S) \longrightarrow \mathcal{F}$$

sea epiyectivo.

A continuación vamos a ver a grandes rasgos que el functor  $\underline{G}_{n,H}$  es representable por el abierto de la Grassmanniana  $\underline{G}_n$ ,  $B_n(H)$  (para más detalles ver EGA-I-9.7.4).

En primer lugar se demuestra que  $\underline{G}_{n,H}(S)$  se puede identificar al conjunto de morfismos  $v: \widetilde{R}_n(S) \longrightarrow \mathcal{O}_S^{F(n)}$  tales que  $v \varphi_{H(S)} = \text{Id}$ : al morfismo  $v$  se le hace corresponder el haz  $\mathcal{F} = \widetilde{R}_n(S) / \text{Ker}.v$ . Así se tiene una sucesión exacta de conjuntos:

$$(1) \quad \underline{G}_{n,H}(S) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\widetilde{R}_n(S), \mathcal{O}_S^{F(n)}) \xrightarrow[\beta]{\alpha_H} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^{F(n)}, \mathcal{O}_S^{F(n)})$$

con  $\alpha_H(v) = v \varphi_{H(S)}$  y  $\beta(v) = \text{Id}$ . Así el functor  $\underline{G}_{n,H}$  es representable por el núcleo del par de morfismos:

$$(2) \quad \mathbb{V}(\widetilde{R}_n)^{F(n)} \xrightarrow[b]{a_H} \mathbb{V}(\widetilde{k^{F(n)}})^{F(n)}$$

A continuación vamos a describir los morfismos  $a_H$  y  $b$ . Para ello se utiliza la identificación de  $\mathbb{V}(\widetilde{R}_n)$  con  $k^{b(n)}$  via el morfismo definido por la base  $\{m_i\}_{i=1,2,\dots,b(n)}$  y de  $\mathbb{V}(\widetilde{k^{F(n)}})$  con  $k^{F(n)}$  via el morfismo definido por la base  $\{(0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)\}_{i=1, \dots, F(n)}$ . Así  $(\mathbb{V}(\widetilde{R}_n))^{F(n)}$  se identifica al espacio afín de las matrices  $F(n) \times b(n)$  y  $(\mathbb{V}(\widetilde{k^{F(n)}}))^{F(n)}$  al de las matrices  $F(n) \times F(n)$ . Es fácil demostrar  $a_H$  y  $b$ :

$$k^{b(n).F(n)} \xrightarrow[b]{a_H} k^{F(n).F(n)}$$

toman la forma  $a_H(A) = A_H$ ,  $b(A) = \text{Id}$ , siendo  $A_H$  la matriz de dimensiones  $F(n).F(n)$  cuya columna  $j$ -ésima es la  $i_j$ -ésima de  $A$ , para

$j=1,2,\dots,F(n)$  .

Se concluye, por lo tanto, que el abierto  $B_n(H)$  es isomorfo a la subvariedad lineal de  $k^{b(n) \cdot F(n)}$  de ecuaciones  $A_H = \text{Id}$ . Si  $A$  es una matriz perteneciente a la variedad lineal  $A_H = \text{Id}$ , el cociente de  $R_n$  definido por ella es  $R_n / \text{Ker}.v$  con  $v: R_n \rightarrow k^{F(n)}$  el morfismo de  $k$ -espacios vectoriales que tiene por matriz  $A$ .

A continuación vamos a demostrar que el functor  $F_{n,H}$  es representable, construiremos una sucesión exacta de conjuntos análoga a la (1) . Para ello observaremos en primer lugar que tenemos un morfismo inyectivo de conjuntos

$$(3) \quad F_{n,H}(S) \longrightarrow \text{Hom} \left( \widetilde{R}_{n(S)}, \mathcal{O}_S^{F(n)} \right),$$

gracias a la identificación de  $G_{n,H}(S)$  con el subconjunto de morfismos  $v: \widetilde{R}_{n(S)} \rightarrow \mathcal{O}_S^{F(n)}$  tales que  $v \varphi_H = \text{Id}$ . A continuación vamos a determinar la imagen del morfismo (3) .

Sea  $S$  un  $k$ -esquema, denotaremos por  $\Pi(i)$  el morfismo de haces

$$\Pi(i): \mathcal{O}_S^{F(n)} \longrightarrow \mathcal{O}_S^{F(n-i)}$$

proyección sobre las primeras  $F(n-i)$  componentes. Sea  $L_i$  el espacio vectorial  $M^{n-i} / M^n$ , la descomposición  $R_n \cong R_{n-i} \oplus L_i$  induce una de haces:

$$\widetilde{R}_{n(S)} \cong \widetilde{R}_{n-i(S)} \oplus \widetilde{L}_i(S) .$$

Denotaremos por  $\sigma(i)$  el morfismo de inclusión  $\sigma(i): \widetilde{L}_i(S) \rightarrow \widetilde{R}_{n(S)}$  .

2.2 Lema: Sea  $v: \widetilde{R}_{n(S)} \rightarrow \mathcal{O}_S^{F(n)}$  un morfismo tal que  $v \varphi_H = \text{Id}$ . El haz  $\left( R_{n(S)} / \text{Ker}.v \right)^{(i)}$  es localmente libre de rango  $F(n-i)$  si y sólo si  $\Pi(i)v \sigma(i) = 0$ .

Demostración: al ser una cuestión local podemos suponer que  $S = \text{Spec}(A)$  , con  $A$  una  $k$ -álgebra de tipo finito.

Sea  $\bar{v}: R_n \otimes_k A \longrightarrow A^{F(n)}$  el morfismo de  $A$ -módulos inducido por  $v$  (EGA-I-1.4.2), y  $U$  la matriz de dimensiones  $F(n) \times b(n)$  asociada a  $\bar{v}$  respecto a las bases  $\{m_i\}_{i=1, \dots, b(n)}$  y  $\{(0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)\}_{i=1, \dots, b(n)}$  de  $A^{b(n)}$  y  $A^{F(n)}$  respectivamente.

Gracias a la descomposición  $A^{b(n)} \cong A^{b(n-i)} \oplus A^{b(n)-b(n-i)}$ , inducida por la descomposición  $R_n \cong R_{n-i} \oplus L_i$ , y a que la base  $\{m_i\}_{i=1, \dots, b(n)}$  esta formada por monomios deducimos que  $U$  tiene la forma:

$$U = \left( \begin{array}{c|c} \boxed{U_1} & \boxed{U_2} \end{array} \right)$$

con  $U_1$  una matriz de dimensiones  $F(n) \times b(n-i)$  y  $U_2$  una matriz de dimensiones  $F(n) \times (b(n)-b(n-i))$ .

Para simplificar los cálculos supondremos que hemos reordenado los índices de tal forma que

$$H \cap \{1, \dots, b(n-i)\} = \{1, \dots, F(n-i)\}$$

$$H \cap \{b(n-i)+1, \dots, b(n)\} = \{b(n-i)+1, \dots, b(n-i)+F(n)-F(n-i)\}$$

Gracias a la condición  $v \varphi_H = \text{Id}$ , podemos suponer que las matrices  $U_1$  y  $U_2$  tienen la forma

$$U_1 = \left( \begin{array}{c|c} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}} & \boxed{E} \\ \hline \boxed{0} & \boxed{B} \end{array} \right) \Bigg\}^{F(n-i)} \quad U_2 = \left( \begin{array}{c|c} \boxed{0} & \boxed{C} \\ \hline \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}} & \boxed{D} \end{array} \right) \Bigg\}^{F(n-i)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{F(n-i)} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{F(n)-F(n-i)}$

Sea  $a(i) = b(n) - (b(n) + F(n) - F(n-i)) + 1$ .

Denotemos  $E = (e_i^j)_{\substack{i=1, \dots, F(n-i) \\ j=F(n-i)+1, \dots, b(n-i)}}$ ,  $C = (c_i^j)_{\substack{i=1, \dots, F(n-i) \\ j=a(i), \dots, b(n)}}$

$B = (b_i^j)_{\substack{i=F(n-i)+1, \dots, F(n) \\ j=F(n-i)+1, \dots, b(n-i)}}$ ,  $D = (d_i^j)_{\substack{i=F(n-i)+1, \dots, F(n) \\ j=a(i), \dots, b(n)}}$  ;

es fácil demostrar que el  $A$ -módulo  $\ker \bar{v}$  está engendrado por los vectores:

$$(-e_1^j, \dots, -e_{F(n-i)}^j; \dots, \overset{j}{\underset{\sim}{1}}, \dots; -b_{F(n-i)+1}^j, \dots, -b_{F(n)}^j; 0, \dots, 0)$$

$$(-c_1^q, \dots, -c_{F(n-i)}^q; 0, \dots, 0; -d_{F(n-i)+1}^q, \dots, -d_{F(n)}^q; \dots, \overset{q}{\underset{\sim}{1}}, \dots)$$

para  $j=F(n-i)+1, \dots, b(n-i)$  y  $q=a(i), \dots, b(n)$ . Vamos a demostrar:

$$(4) \quad E = \left( \begin{array}{c} A^{b(n)} \\ \text{Ker. } \bar{v} \end{array} \right)^{(i)} \text{ es libre de rango } F(n-i) \text{ s\u00ed y s\u00f3lo s\u00ed } C=0.$$

Observemos que E es isomorfo al cociente de  $A^{b(n)}$  por el subm\u00f3dulo engendrado por los vectores:

$$(5) \quad (-e_1^j, \dots, -e_{F(n-i)}^j; \dots, \overset{j}{\underset{\sim}{1}}, \dots)$$

$$(6) \quad (-c_1^q, \dots, -c_{F(n-i)}^q; 0, \dots, 0)$$

para  $j=F(n-i)+1, \dots, b(n-i)$  y  $q=a(i), \dots, b(n)$ .

Es f\u00e1cil probar que el cociente de  $A^{b(n)}$  por el subm\u00f3dulo generado por los vectores de (5) es libre de rango  $F(n-i)$ . Por lo tanto E es libre de rango  $F(n-i)$  s\u00ed y s\u00f3lo s\u00ed los vectores de (6) son nulos (i.e.  $C=0$ ).

De la condici\u00f3n  $v \varphi_H = \text{Id}$  y del hecho de que un morfismo exhaustivo entre haces localmente libres del mismo rango sea un isomorfismo (EGA-0-5.5.7) es f\u00e1cil deducir que E es localmente libre de rango  $F(n-i)$  s\u00ed y s\u00f3lo s\u00ed E es libre de rango  $F(n-i)$ .

Por otro lado es inmediato de las definiciones de los morfismos  $\pi(i)$  y  $\sigma(i)$  que  $C=0$  s\u00ed y s\u00f3lo s\u00ed  $\pi(i) \vee \sigma(i) = 0$ . Quedando demostrado el lema.

### Continuaci\u00f3n de la demostraci\u00f3n de la proposici\u00f3n 2.1:

Consideremos la sucesi\u00f3n de conjuntos, cuya exactitud se sigue del lema 2.2,

$$(8) \quad F_{n,H}(S) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{R}_n(S), \mathcal{O}_S^{F(n)}) \xrightarrow[\delta_H]{\gamma_H} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^{F(n)}, \mathcal{O}_S^{F(n)}) \times \prod_{i=1}^{n-r} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{L}_i(S), \mathcal{O}_S^{F(n-i)})$$

$$\text{con } \gamma_H(v) = (v \varphi_H; \pi(1) \vee \sigma(1), \dots, \pi(n-r) \vee \sigma(n-r)) \text{ y } \delta_H(v) = (\text{Id}; 0, \dots, 0)$$

Gracias a EGA-I-9.4.9 y a la exactitud de (8) deducimos que  $F_{n,H}$  es representable por el núcleo  $X_H$  del par de morfismos:

$$\mathbb{V}(\tilde{R}_n)^{F(n)} \xrightarrow[\delta_H]{\gamma_H} \mathbb{V}(\widehat{k^{F(n)}})^{F(n)} \times \prod_{i=1}^{n-r} \mathbb{V}(\tilde{L}_i)^{F(n-i)}$$

por lo tanto se verifica la condición (iv) del teorema EGA-0-4.5.4 para la familia de funtores  $\{F_{n,H}\}_{H \in \mathcal{H}}$ . De la demostración del lema 2.2 deducimos que  $X_H$  es una subvariedad lineal de  $k^{b(n)} \cdot F(n) \cong \mathbb{V}(\tilde{R}_n)^{F(n)}$ , luego el esquema  $X_H$  es reducido. Es fácil probar que  $F_{n,H}$  es un subfunctor de  $\underline{G}_{n,H}$ , sea  $j_H$  el morfismo de inclusión canónico. Es inmediato que se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F_{n,H}(S) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{R}_n(S), \mathcal{O}_S^{F(n)}) & \xrightarrow[\delta_H]{\gamma_H} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^{F(n)}, \mathcal{O}_S^{F(n)}) \times \prod_{i=1}^{n-r} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{L}_i(S), \mathcal{O}_S^{F(n-i)}) \\ \downarrow j_H & & \downarrow \Pi \\ \underline{G}_{n,H}(S) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{R}_n(S), \mathcal{O}_S^{F(n)}) & \xrightarrow[\beta]{\alpha_H} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^{F(n)}, \mathcal{O}_S^{F(n)}) \end{array}$$

con  $\Pi$  la proyección natural, que induce el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_H \rightarrow \mathbb{V}(\tilde{R}_n)^{F(n)} & \xrightarrow[\delta_H]{\gamma_H} & \mathbb{V}(\widehat{k^{F(n)}})^{F(n)} \times \prod_{i=1}^{n-r} \mathbb{V}(\tilde{L}_i)^{F(n-i)} \\ \downarrow & & \downarrow \Pi \\ B_n(H) \rightarrow \mathbb{V}(\tilde{R}_n)^{F(n)} & \xrightarrow[\beta]{\alpha_H} & \mathbb{V}(\widehat{k^{F(n)}})^{F(n)} \end{array}$$

Recordemos que  $B_n(H)$  se identificaba a una subvariedad lineal de  $\mathbb{V}(\tilde{R}_n)^{F(n)}$ , de la conmutatividad del anterior diagrama deducimos que  $X_H$  es una subvariedad lineal de  $B_n(H)$ .

La condición (i) del teorema EGA-0-4.5.4 dice: cada uno de los morfismos functoriales canónicos  $F_{n,H} \longrightarrow F_n$  es representable por una inmersión abierta. Esta condición se verifica gracias al lema EGA-I-9.7.4.6. La condición (iii) del teorema EGA-0-4.5.4 dice: para todo  $k$ -esquema  $Z$  y todo morfismo  $\text{Hom}(\cdot, Z) \longrightarrow F_n$ , si  $Z_H$  es el  $k$ -esquema que representa al functor

$$F_{n,H} \times_{F_n} \text{Hom}(\cdot, Z)$$

y  $U_H$  es la imagen en  $Z$  del espacio topológico subyacente a  $Z_H$  (imagen que es un abierto de  $Z$ , ya que  $Z_H \longrightarrow Z$  es una inmersión abierta gracias a la condición (i)) entonces  $\{U_H\}_{H \in \mathcal{H}}$  es un recubrimiento abierto de  $Z$ . Esta condición se verifica gracias a EGA-I-9.7.4.7.

Así pues se verifican todas las hipótesis de EGA-0-4.5.4, por lo tanto el functor  $F_n$  es representable por un esquema  $X$  y los subesquemas  $X_H$  son subesquemas abiertos de  $X$ .

Consideremos el morfismo de funtores  $\underline{i}: F_n \longrightarrow G_n$  que hace de  $F_n$  un subfunctor de  $G_n$ . Es inmediato comprobar, vistas las definiciones que

$$(\underline{i})^{-1} G_{n,H}(S) = F_{n,H}(S) \quad .$$

Por lo tanto el morfismo  $\underline{i}$  restringe a un morfismo entre los funtores  $F_{n,H}$  y  $G_{n,H}$  que no es más que el morfismo  $j_H$ .

Habíamos demostrado que  $j_H$  inducía una inmersión de  $X_H$  en  $B_n(H)$ , luego gracias a EGA-I-4.2.4(ii) el morfismo inducido entre  $X$  y  $G_n$  por el morfismo functorial  $\underline{i}$  es una inmersión. Consideremos  $X$  como subesquema de  $G_n$ .

Sabemos que  $X_H$ , para  $H \in \mathcal{H}$ , es reducido y es un abierto de  $X$ , por lo tanto  $X$  es reducido. De la misma definición de  $F_n$  tenemos

que el conjunto de puntos cerrados de  $X$  coincide con el de  $W(n,r,F)$  por tanto  $X=W(n,r,F)$ . Quedando probada la proposición.

Sea  $G^n$  la Grassmanniana de los subespacios vectoriales de  $R_n$  de codimension  $F(n)$ . Es sabido que existe un isomorfismo  $G^n \cong G_n$  que hace corresponder a un subespacio vectorial  $L$  de  $R_n$  de codimensión  $F(n)$  el cociente  $R_n / L$ . Es inmediato de comprobar que la antiimagen de  $B_n(H)$ , por el anterior isomorfismo, es el abierto de  $G^n$

$$B^n(H) = \left\{ L \in G^n \mid L \cap \langle m_i; i \in H \rangle = 0 \right\} .$$

En la demostración de la proposición anterior habíamos visto que  $B_n(H)$  era isomorfo a la subvariedad lineal del espacio afín de las matrices de dimensiones  $F(n) \times b(n)$  definida por la ecuación  $A_H = \text{Id}$ . A una matriz  $A$  le hacíamos corresponder el cociente  $R_n / \text{Ker.}v$  siendo  $v: R_n \rightarrow k^{F(n)}$  el morfismo de matriz  $A$ . Para dar una descripción de  $B^n(H)$  y su relación con  $B_n(H)$  supongamos que  $H = \{1, \dots, F(n)\}$ , caso al que nos podemos remitir por una reordenación de índices. Así  $B_n(H)$  es isomorfo, como  $k$ -esquema, al espacio afín de las matrices  $A$  de dimensiones  $F(n) \times b(n)$  de la forma

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \text{Id} & B \end{array} \right)$$

con  $B$  una matriz de dimensiones  $F(n) \times (b(n) - F(n))$ .

Es fácil de demostrar que el morfismo  $v: R_n \rightarrow k^{F(n)}$  de matriz  $A$  tiene por núcleo al subespacio vectorial de  $R_n$  generado por las filas de la matriz de dimensiones  $(b(n) - F(n)) \times b(n)$

$$\left( \begin{array}{c|c} -A' & \text{Id} \end{array} \right)$$

siendo  $A'$  la matriz traspuesta de  $A$ . Por lo tanto  $B^n(H)$  es isomorfo, como  $k$ -esquema, al espacio afín de las matrices de



dimensiones  $(b(n)-F(n)) \times b(n)$  de la forma

$$(1) \quad B = \left( \begin{array}{c|c} C & \text{Id} \end{array} \right)$$

con  $C$  una matriz de dimensiones  $(b(n)-F(n)) \times F(n)$ . A una matriz le corresponde el subespacio vectorial  $L$  de  $R_n$  generado por los vectores fila de  $B$ . Observemos que dichos vectores fila forman una base de  $L$  y que  $L$  sólo tiene una base cuyas componentes, en la base  $\{m_i\}_{i=1, \dots, b(n)}$ , escritas por filas definan una matriz que presente la forma de (1).

En lo que resta de memoria identificaremos  $G^n$  con  $G_n$ , utilizando siempre la notación  $G_n$ , trabajando en un modelo u otro según nos convenga.

Denotaremos por  $\text{Hilbt}_t$  el esquema de Hilbert que parametriza los ideales de  $R_t$  de colongitud  $F(t)$ ,  $\text{Hilbt}_t: \text{SCH} \longrightarrow \text{SET}$  será el functor asociado a  $\text{Hilbt}_t$ : si  $S$  es un  $k$ -esquema localmente de tipo finito,  $\text{Hilbt}_t(S)$  es el conjunto de morfismos  $f: Z \longrightarrow S$  tales que:

- (i)  $Z \subset S \times \text{Spec}(R_t)$  y  $f$  es la restricción de la proyección natural  $S \times \text{Spec}(R_t) \longrightarrow S$ .
- (ii)  $f$  es un morfismo plano y para todo  $s \in S$  la fibra  $Z_s$  es un subesquema de  $\text{Spec}(R_t) \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(k(s))$  de longitud  $F(t)$ .

el esquema  $\text{Hilbt}_t$  representa al functor  $\text{Hilbt}_t$  (vid. GR).

El esquema  $\text{Hilbt}_t$  es un subesquema cerrado de  $G_t$  via una inmersión cerrada  $\sigma$  que viene inducida por el morfismo de funtores

$$\text{Hilbt}_t \longrightarrow G_t$$

que asigna a un elemento  $f: Z \longrightarrow S$  de  $\text{Hilbt}_t(S)$  el haz  $\sigma(f) = f_*(\mathcal{O}_Z)$ . Identificaremos el functor  $\text{Hilbt}_t$  con  $\sigma \text{Hilbt}_t$  usando la notación  $\text{Hilbt}_t$  tanto en un caso como en el otro.

Definición: Denotaremos por  $W'(n,r,F)$  el esquema  $W(n,r,F) \wedge \text{Hilbt}_n$ .

2.3 Proposición: El functor  $F_n \times_{G_n} \text{Hilbt}_t$  es representable por el esquema  $W'(n,r,F)$ .

Demostración: inmediata ya que los funtores  $\text{Hom}(\cdot, X)$ , con  $X$  un esquema, y los productos fibrados conmutan (vid. EGA-0-1.2.3.1).

Denotaremos por  $a(n+1)$  el morfismo de  $W'(n+1,r,F)$  en  $W'(n,r,F)$  inducido por el morfismo de funtores

$$a(n+1): F_{n+1} \times_{G_{n+1}} \text{Hilbt}_{n+1} \longrightarrow F_n \times_{G_n} \text{Hilbt}_n$$

con  $a(n+1)(S)(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^{(1)}$ . Observemos que  $a(n+1)$  es restricción del morfismo  $a(n+1): W(n+1,r,F) \longrightarrow G_n$  que a un punto cerrado  $R_{n+1}/L$  de  $W(n+1,r,F)$  le hace corresponder  $R_{n+1}/L+M^n$ .

En lo que resta de capítulo, exceptuada la sección 5, se tomará como función  $F$  la función lineal definida por el polinomio  $p(T)$ . Así  $\text{Hilbt}_t$  (resp.  $G_t$ ) será el esquema de Hilbert (resp. Grassmanniana) que parametriza los ideales (resp. subespacios vectoriales) de  $R_t$  de codimensión  $p(t)$ .

### 3. Construcción del esquema de Hilbert de los gérmenes de curva de $(k^N, 0)$ .

Denotemos por  $W(n)$  y  $W'(n)$  los esquemas  $W(n, e+1, p(T))$  y  $W'(n, e+1, p(T))$  respectivamente.

3.1 Lema: Sea  $I$  un ideal de  $R$ . Supongamos que  $B = R/I$  sea un anillo unidimensional de multiplicidad  $e$ . Si  $x \in B$  siempre se tiene:

$$\dim_k \left( \frac{B}{xB} \right) \geq e ,$$

se verifica la igualdad si y sólo si  $B$  es un anillo Cohen-Macaulay y  $x$  es un elemento superficial de grado uno de  $B$ .

Demostración: si  $\dim_k \left( \frac{B}{xB} \right) = +\infty$  no hay nada que demostrar.

Supongamos que  $\dim_k \left( \frac{B}{xB} \right) < +\infty$  entonces  $xB$  es un ideal  $m$ -primario, siendo  $m$  el ideal maximal de  $B$ .

Sea  $\bar{e}$  la multiplicidad del ideal  $xB$  en el anillo  $B$ , es bien sabido que  $e \leq \bar{e}$ . De la proposición 3.4 Cap.-I de SAL-1 resulta que la igualdad  $e = \dim_k \left( \frac{B}{xB} \right)$  implica que  $x$  no es divisor de cero en  $B$ , por lo tanto  $B$  es Cohen-Macaulay. Sabido que  $B$  es Cohen-Macaulay y  $e = \dim_k \left( \frac{B}{xB} \right)$ , de la proposición 12.5 de MAL obtenemos que  $x$  es un elemento superficial de grado uno.

Si  $B$  es Cohen-Macaulay y  $x$  es un elemento superficial de grado uno, es sabido ( prop.12.5 de MAL ) que se verifica  $e = \dim_k \left( \frac{B}{xB} \right)$ .

Definición: Si  $I$  es un ideal de  $R$ ,  $I_n$  será el ideal  $\frac{I + M^n}{M^n}$

de  $R_n$ . Sea  $x \in R$ , denotaremos por  $U(x)$  el abierto de  $G_{e+1}$  formado por los subespacios vectoriales de  $R_{e+1}$  de codimensión  $p(e+1)$  que verifiquen  $\dim_k((L,x)) \geq b(e+1) - e$ , donde  $(L,x)$  es el ideal engendrado por  $L$  y  $x$  en  $R_{e+1}$ .

3.2 Lema: Sea  $I$  y  $x$  un ideal y un elemento de  $I$  respectivamente.

Supongamos que  $I_{e+1}$  tiene codimensión  $p(e+1)$  en  $R_{e+1}$  y que  $B = R/I$  sea unidimensional y de multiplicidad  $e$ . Son equivalentes:

- (i)  $I_{e+1}$  pertenece a  $U(x)$ .
- (ii)  $B$  es Cohen-Macaulay y la clase de  $x$  en  $B$  es un elemento superficial de grado uno.

Demostración: visto el lema 3.1 basta demostrar la equivalencia

$$(1) \dim_k \left( \frac{R}{(x) + I} \right) \leq e \iff \dim_k \left( \frac{R}{(x) + I + M^{e+1}} \right) \leq e,$$

la implicación de izquierda a derecha es obvia. Sea  $m$  el ideal maximal de  $B = \frac{R}{(x) + I}$ ; si  $m^{e+1} \neq 0$  entonces los espacios vectoriales  $\frac{B}{m}, \frac{B}{m^2}, \dots, \frac{B}{m^{e+1}}$  son no nulos por lo tanto

$$\dim_k \left( \frac{B}{m^{e+1}} \right) = \dim_k \left( \frac{R}{(x) + I + M^{e+1}} \right) \geq e+1,$$

llegando a una contradicción con  $\dim_k \left( \frac{R}{(x) + I + M^{e+1}} \right) \leq e$ . Así necesariamente  $m^{e+1} = 0$ , luego  $(x) + I + M^{e+1} = (x) + I$ , lo que prueba la implicación de derecha a izquierda.

3.3 Lema: Sea  $I \in \text{Id}(N, p(T))$  y  $\bar{x}$  un elemento superficial de grado uno de  $\frac{R}{I}$ . Supongamos que  $v_1, \dots, v_e$  son formas de grado  $e$  de  $R$  linealmente independientes tales que

$$I_{e+1} \cap \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_e \rangle = \{0\},$$

donde  $\bar{v}_i$  es la clase de  $v_i$  en el cociente  $R_{e+1}$ . Entonces las clases de  $x^s v_1, \dots, x^s v_e$  en

$$\frac{I + M^{e+s}}{I + M^{e+s+1}}$$

forman una base y  $I_{e+s+1} \cap \langle \overline{x^s v_1}, \dots, \overline{x^s v_e} \rangle = \{0\}$  para todo  $s \geq 0$ .

Demostración: sabemos que para todo  $s \geq 0$

$$\dim_k \left( \frac{I + M^{e+s}}{I + M^{e+s+1}} \right) = e.$$

Con ello es fácil demostrar que  $I_{e+s+1} \cap \langle \overline{x^s v_1}, \dots, \overline{x^s v_e} \rangle = \{0\}$

si y sólo si las clases de  $x^s v_1, \dots, x^s v_e$  en  $\frac{I + M^{e+s}}{I + M^{e+s+1}}$  forman base.

Podemos asegurar, dadas las hipótesis, que las clases de  $v_1, \dots, v_e$  en  $\frac{I + M^e}{I + M^{e+1}}$  forman una base. De la proposición 5 de Ap-I tenemos que los morfismos

$$\frac{I + M^e}{I + M^{e+1}} \xrightarrow{\cdot x^s} \frac{I + M^{e+s}}{I + M^{e+s+1}}$$

son biyectivos, por lo tanto las clases de  $x^s v_1, \dots, x^s v_e$  en  $\frac{I + M^{e+s}}{I + M^{e+s+1}}$  forman una base.

Definición: Dados los conjuntos de índices  $i. = \{i_1, \dots, i_{p(e)}\} \subset \{1, \dots, b(e)\}$ ,  $j. = \{j_1, \dots, j_e\} \subset \{b(e)+1, \dots, b(e+1)\}$  ..y una forma lineal  $x \in P_N$  se considera  $D_n(x)$  el subespacio vectorial de  $R_n$  generado por las clases  $m_{i_1}, \dots, m_{i_{p(e)}}, m_{j_1}, \dots, m_{j_e}, x m_{j_1}, \dots, x m_{j_e}, \dots, x^{n-e-1} m_{j_1}, \dots, x^{n-e-1} m_{j_e}$ . Obsérvese que  $\dim_k(D_n(x)) = p(n)$ .

Denotemos por  $B'_n(i.; j.; x)$  el abierto de  $G_n$  formado por los subespacios vectoriales de  $R_n$  de codimensión  $p(n)$  que verifican  $L \cap D_n(x) = \{0\}$ . Denotemos por  $B_n(i.; j.; x)$  el abierto de  $G_n$  formado por los subespacios vectoriales de  $R_n$  de codimensión  $p(n)$  que verifican las condiciones siguientes:

- (i)  $L \cap D_n(x) = \{0\}$
- (ii)  $\dim_k \left( \frac{(L, x) + M^{e+1}}{M^{e+1}} \right) \geq b(e+1) - e.$

A continuación vamos a definir una base  $V_n(i.; j.; x)$  de  $R_n$ , gracias al isomorfismo de  $k$ -espacios vectoriales  $R_n \cong R_e \oplus \frac{M^e}{M^{e+1}} \oplus \dots \oplus \frac{M^{n-1}}{M^n}$ , que es unión de bases de los espacios vectoriales  $R_e, \frac{M^e}{M^{e+1}}, \dots, \frac{M^{n-1}}{M^n}$ . En  $R_e$  se considera la base formada por las clases de  $m_1, \dots, m_{b(e)}$ ; para cada  $e+1 \leq r \leq n$  se amplía el conjunto formado por las clases de los vectores  $x^{r-e-1} m_{j_1}, \dots, x^{r-e-1} m_{j_e}$  a una base  $m'_{b(r-1)}, \dots, m'_{b(r)-e-1}, x^{r-e-1} m_{j_1}, \dots, x^{r-e-1} m_{j_e}$  de  $\frac{M^{r-1}}{M^r}$  con  $m'_q$  perteneciente a  $m_{b(r-1)+1}, \dots, m_{b(r)}$  para  $q = b(r-1), \dots, b(r)-e-1$ .

3.4 Proposición: Sea  $I \in \text{Id}(N, p(T))$  tal que  $I_{e+1} \in B_{e+1}(i.;j.;x)$ . Para todo  $n \geq e+1$  el ideal  $I_n$  pertenece a  $B_n(i.;j.;x) \cap W'(n)$ .

Demostración: gracias a la proposición 1 de Ap-I tenemos que el polinomio de Hilbert-Samuel de  $\frac{R}{I}$ ,  $\text{PHS}_I(n)$ , coincide con su función de Hilbert-Samuel  $\text{FHS}_I(n)$  para  $n \geq e$ , luego  $I_n \in W'(n)$ . Supongamos que existe un elemento no nulo  $z \in I_n \cap D_n(x)$ . Si  $e+s$  es el grado de la forma inicial  $z_0$  de  $z$ , entonces obtenemos que  $0 \neq z_0 \in I_{e+s+1} \cap \langle \overline{x^{s m_{j_1}}}, \dots, \overline{x^{s m_{j_e}}} \rangle$ . De las hipótesis de la proposición tenemos que  $I_{e+1} \cap \langle m_{j_1}, \dots, m_{j_e} \rangle = \{0\}$ , por los lemas 3.2 y 3.3 llegamos a una contradicción. Por lo tanto  $I_n \cap D_n(x) = \{0\}$ .

Dado que  $I_{e+1} \in B_{e+1}(i.;j.;x)$  se verifica que la dimensión del  $k$ -espacio vectorial  $(I_{e+1}, x) + \frac{M^{e+1}}{M^{e+1}}$  es mayor o igual  $b(e+1)-e$  por consiguiente  $I_n \in B_n(i.;j.;x)$ .

3.5 Proposición: Existen formas lineales  $L_1, \dots, L_\xi$  donde  $\xi = e(N-1) + 1$  de modo que para todo  $I \in \text{Id}(N, p(T))$  existe  $L_q, i., j.$  con  $I_{e+1} \in B_{e+1}(i.;j.;L_q)$ .

Demostración: de la demostración de la prop. 3.2 Cap.I de SAL-1, deducimos que si una forma lineal  $L$  es un no divisor de cero en

$$A = (\text{Gr}(\frac{R}{I}))_{\text{red}}$$

entonces la clase de  $L$  en  $\frac{R}{I}$  es un elemento superficial de grado uno. Sea  $L_1, \dots, L_\xi$  un conjunto de formas lineales tal que todo subconjunto de  $N-1$  elementos sea linealmente independiente. Es inmediato probar que para todo conjunto de  $e$  rectas pasando por el origen, existe un hiperplano  $L_q = 0$  que no contiene a ninguna de tales rectas. Por lo tanto para todo  $I$  perteneciente a  $\text{Id}(N, p(T))$  existe  $L_q$  cuya clase en  $A$  es un no divisor de cero, luego la clase de  $L_q$  en  $\frac{R}{I}$  es un elemento superficial

de grado. Del lema 3.2 deducimos que  $I_{e+1} \in U(L_q)$ . La existencia de los índices  $i, j$ . tales que  $D_{e+1}(L_q) \cap I_{e+1} = \{0\}$  es consecuencia del lema 3.3 y de la prop. 2 de Ap-I. Con lo cual  $I_{e+1} \in B_{e+1}(i.;j.;L_q)$ .

Por comodidad denotaremos por  $B_n(i.;j.;q)$  (resp.  $B'_n(i.;j.;q)$ ) el abierto  $B_n(i.;j.;L_q)$  (resp.  $B'_n(i.;j.;L_q)$ ). Por definición  $B_n$  será la unión  $\bigcup_{i.;j.;q} B_n(i.;j.;q)$ .

Definición: Para todo  $n \geq e+1$ ,  $X_n(i.;j.;q)$  será el esquema  $B_n(i.;j.;q) \cap W'(n)$  y  $X_n$  será  $B_n \cap W'(n)$ .

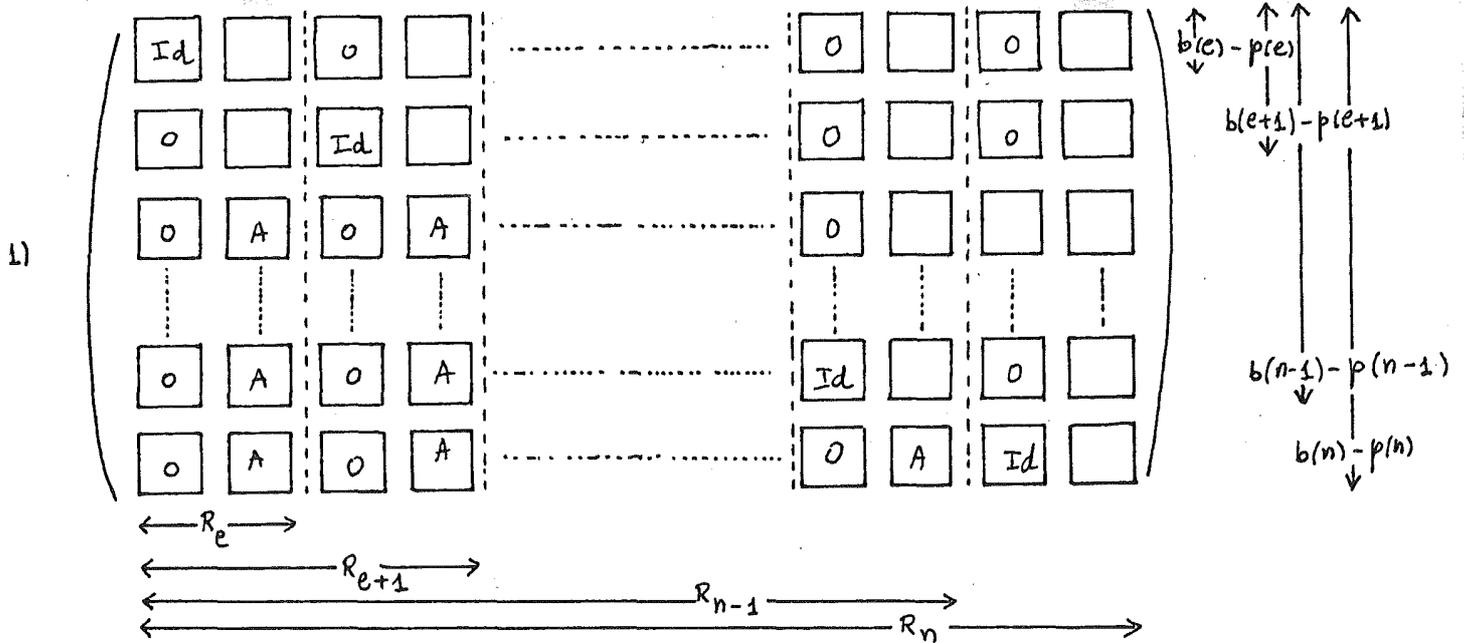
3.6 Lema: Para todo  $n \geq e+1$  se verifican las siguientes propiedades:

- (i) el morfismo  $a(n): W(n) \rightarrow G_{n-1}$  restringe a  $a(n): W(n) \cap B'_n(i.;j.;q) \rightarrow W(n-1) \cap B'_{n-1}(i.;j.;q)$ .
- (ii) existen isomorfismos  $\varphi_n: k^{S_n} \rightarrow W(n) \cap B'_n(i.;j.;q)$  que hacen commutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 k^{S_n} & \xrightarrow{\varphi_n} & W(n) \cap B'_n(i.;j.;q) \\
 \pi \downarrow & & \downarrow a(n) \\
 k^{S_{n-1}} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & W(n-1) \cap B'_{n-1}(i.;j.;q)
 \end{array}$$

donde  $\pi$  es la proyección en las primeras  $s_{n-1}$  componentes.

Demostración: tomando la base  $V_n(i.;j.;L_q)$  en lugar de  $\{m_i\}_{i=1, \dots, b}$  y utilizando la identificación de  $B_n(H)$  con un espacio de matrices descrita después de la prop. 2.1, el abierto  $B'_n(i.;j.;q)$  resulta isomorfo al espacio afín de las matrices de dimensiones  $(b(n)-p(n)) \times b(n)$  de la forma:



Sea  $L$  un subespacio vectorial de  $R_n$  de codimensión  $p(n)$  perteneciente a  $B'_n(i.;j.;q)$ . Sea  $B$  la matriz del tipo (1) asociada a  $L$ . El espacio vectorial  $\frac{L + M^{n-i}}{M^{n-i}}$  está generado los vectores fila de la submatriz de  $B$  obtenida eliminando las 2.i últimas columnas de submatrices.

Es fácil probar que  $\frac{L + M^{n-i}}{M^{n-i}}$  tiene codimensión  $p(n-i)$  en  $R_{n-i}$ , para  $i=1, \dots, n-e-1$ , sí y sólo sí  $A=\hat{o}$ . Hemos demostrado que  $B'_n(i.;j.;q) \cap W(n)$  es una subvariedad lineal de  $B'_n(i.;j.;q)$  que tiene por ecuaciones  $A=0$ , por lo tanto es isomorfo a un espacio afín  $k^{S_n}$ . Análogamente se demuestra que  $B'_{n-1}(i.;j.;q) \cong \cap W(n-1) \cong k^{S_{n-1}}$ .

Sea  $L$  perteneciente a  $B'_n(i.;j.;q) \cap W(n)$ . El espacio vectorial  $a(n)(L) = \frac{L + M^{n-1}}{M^{n-1}}$  está generado por los vectores fila de la submatriz de  $B$  obtenida eliminando las dos últimas columnas y la última fila de submatrices; obtenemos, pues, que  $a(n)(L)$  pertenece a  $B'_{n-1}(i.;j.;q) \cap W(n-1)$  de lo que deducimos el apartado (i). El apartado (ii) es inmediato.

Observemos que del lema anterior se deduce que el morfismo  $a(n): W'(n) \longrightarrow W'(n-1)$  restringe a  $a(n): X_n(i.,j.,\bar{q}) \longrightarrow X_{n-1}(i.,j.,\bar{q})$

3.7 Proposición: Para todo  $n \geq e+2$  el morfismo

$$a(n): X_n(i.;j.;q) \longrightarrow X_{n-1}(i.;j.;q) \text{ es afín.}$$

Demostración: observemos en primer lugar que si un morfismo afín  $f: X \longrightarrow Y$  restringe a  $f': X' \longrightarrow Y'$ , donde  $X', Y'$  son subsquemas cerrados de  $X$  e  $Y$  respectivamente, entonces la restricción  $f'$  es también afín (EGA-I-9.1.2. y EGA-I-9.1.16(i)y(v)).

El morfismo  $a(n): B'_n(i.;j.;q) \cap W(n) \longrightarrow B'_{n-1}(i.;j.;q) \cap W(n-1)$  es afín por 3.6(ii). Es fácil demostrar que

$$a(n)^{-1} \left( B'_{n-1}(i.;j.;q) \cap W(n-1) \right) = B'_n(i.;j.;q) \cap W(n) ,$$

por lo tanto el morfismo

$$a(n): B_n(i.;j.;q) \cap W(n) \longrightarrow B_{n-1}(i.;j.;q) \cap W(n-1)$$

es afín.

Al ser  $X_n(i.;j.;q)$  un subsquema cerrado de  $W(n) \cap B_n(i.;j.;q)$ , ya que  $\text{Hilbt}_n$  lo es de  $G_n$ , análogamente  $X_{n-1}(i.;j.;q)$  es un subsquema cerrado de  $W(n-1) \cap B_{n-1}(i.;j.;q)$ , y gracias a la observación del principio de la demostración deducimos que el morfismo  $a(n)$  es afín.

3.8 Proposición: Para todo  $n \geq e+4$  el morfismo  $a(n): X_n \longrightarrow X_{n-1}$  es afín.

Demostración: vamos a demostrar que  $(a(n))_{\text{red}}$  es afín. Es suficiente probar, gracias a la prop. 3.7, que

$$(a(n))_{\text{red}}^{-1} \left( (X_{n-1}(i.;j.;q))_{\text{red}} \right) = (X_n(i.;j.;q))_{\text{red}} ,$$

para todo  $i., j., q$ .

La inclusión  $(X_n(i.;j.;q))_{\text{red}} \subset (a(n))_{\text{red}}^{-1} \left( (X_{n-1}(i.;j.;q))_{\text{red}} \right)$  es consecuencia del lema 3.6(i).

Sea  $x$  un punto cerrado de  $X_n$  tal que  $a(n)(x) \in (X_{n-1}(i.;j.;q))_{\text{red}}$  denotemos por  $J \subset R_n$  el ideal determinado por  $x \in \text{Hilbt}_n$  y por  $m$