# SOBRE LA EXISTENCIA DEL ESQUEMA DE HILBERT DE LOS GERMENES DE CURVA DE $(K^N,0)$.

Memoria presentada por Juan Elías García para aspirar al grado de Doctor en Matemáticas (por la Universidad de Barcelona).

el ideal maximal de ${}^{R_n}\!\diagup_{J}$. Por pertenecer $a(n)(x)$ a la intersección $B_{n-1}(i.;j.;q)\cap W(n-1)$ tenemos que

$$\frac{J+M^{n-1}}{M^{n-1}}\cap D_{n-1}(L_q)=o \quad ,$$

por lo tanto

$$\text{(1)}\qquad \frac{J+M^{e+s+1}}{M^{e+s+1}}\cap\left\langle\overline{L_q^s m_{j_1}},\ldots,\overline{L_q^s m_{j_e}}\right\rangle=\{o\}$$

para $s=1,2$.

Observemos que la dimensión de los espacios vectoriales ${}^{m^{e+s}}\!\diagup_{m^{e+s+1}}$ es igual a e para todo $1\leqslant s\leqslant n-e-1$ ya que $x\in W(n)$. De la igualdad (1) es fácil deducir que las clases de los vectores $L_q^s m_{j_1},\ldots,L_q^s m_{j_e}$ forman una base del k-espacio vectorial ${}^{m^{e+s}}\!\diagup_{m^{e+s+1}}$ para $s=1,2$. Así el morfismo

$$m^{e+1}\diagup m^{e+2}\xrightarrow{\ L_q\ } m^{e+2}\diagup m^{e+3}$$

es isomorfismo y del Lema de Nakayama obtenemos $m^{e+2}=L_q m^{e+1}$.

El morfismo

$$m^{e+1}\diagup m^{e+2}\xrightarrow{\ L_q^s\ } m^{e+1+s}\diagup m^{e+2+s} \quad ,$$

para $1\leqslant s\leqslant n-2-e$, es biyectivo ya que es una aplicación lineal exaustiva entre espacios vectoriales de la misma dimensión y $x\in W(n)$.

Así tenemos que

$$m^{e+s+1}\diagup m^{e+s+2}=\left\langle\overline{L_q^{s+1}m_{j_1}},\ldots,\overline{L_q^{s+1}m_{j_e}}\right\rangle ,$$

para $o\leqslant s\leqslant n-e-2$, razonando analogamente como se hizo en la demostración de la prop. 3.4 se obtiene

$$J\cap D_n(L_q)=\{o\} \quad .$$

De aquí se concluye facilmente que $x\in(X_n(i.;j.;q))_{red}$.

<u>3.9 Teorema</u>: El sistema proyectivo $\left\{X_n, a(n+1)\right\}_{n\geqslant e+1}$ tiene límite en la categoría de k-esquemas.

<u>Demostración</u>: dado que los morfismo $a(n)$ son afines para $n\geqslant e+4$, basta aplicar EGA-IV-3ª parte 8.2.3 (ó SGA-4 expossé VII apartado 5.1) para obtener el teorema.

Definición: $H_{N,p(T)}$ será el límite proyecctivo del sistema proyectivo $\{X_n, a(n+1)\}_{n \geqslant e+1}$ ; denotaremos por $\pi_n$: $H_{N,p(T)} \longrightarrow X_n$ las proyecciones naturales para $n \geqslant e+1$.

3.10 Teorema: El esquema $H_{N,p(T)}$ representa al functor $\underline{H}_{N,p(T)}$.

Demostración: vamos a probar que $\underline{H}=\underline{H}_{N,p(T)}$ es isomorfo, via $\sigma$ , al functor $h(.)=\mathrm{Hom}(.,H_{N,p(T)})$ .

Sea $f:(Z,S) \longrightarrow (S,S)$ un elemento de $\underline{H}(S)$. Al ser el morfismo $\underline{T}_n(f) : \underline{T}_n(Z,S) \longrightarrow S$ plano y de fibras de longitud constante $p(n)$ (condición (ii) de la definición de familia) se verifica que:

$$(1) \qquad \underline{T}_n(f)_*(\mathcal{O}_{\underline{T}_n(Z,S)}) \in \underline{\mathrm{Hilbt}}_n(S)$$

para todo $n \geqslant e+1$.

Es fácil probar que

$$(2) \qquad (\underline{T}_n(f)_*(\mathcal{O}_{\underline{T}_n(Z,S)}))^{(i)} = (\underline{T}_{n-i}(f))_*(\mathcal{O}_{\underline{T}_{n-i}(Z,S)})$$

por lo tanto al ser el haz $\underline{T}_{n-i}(f)_*(\mathcal{O}_{T_{n-i}(Z,S)})$ localmente libre de rango $p(n-i)$ para $i=o,\dots,n-e-1$, gracias a la condición (ii) de familia, tenemos que

$$(3) \qquad \underline{T}_n(f)_*(\mathcal{O}_{\underline{T}_n(Z,S)}) \in F_n(S) .$$

De (1) y (3) obtenemos

$$(\underline{T}_n(f))_*(\mathcal{O}_{\underline{T}_n(Z,S)}) \in (F_n \underset{\underline{G}_n}{\times} \underline{\mathrm{Hilbt}}_n)(S) ,$$

de la proposición 2.3 deducimos que existe un único morfismo

$$\overset{n}{\sigma}_S f : S \longrightarrow W'(n)$$

tal que

$$\underline{T}_n(f)_*(\mathcal{O}_{\underline{T}_n(Z,S)}) = \left(\overset{n}{\sigma}_S(f)\right)^*(\mathcal{G}_n|_{W'(n)}) .$$

Vamos a ver que el morfismo $\sigma_S^n(f)$ factoriza a través de $X_n = W'(n) \cap B_n$. Observemos que al ser $B_n$ un subconjunto abierto de $G_n$ basta demostrar que para todo punto cerrado $x \in S$ la imagen $\sigma_S^n(f)(x)$ pertenece a $B_n$.

La imagen de x por $\sigma_S^n(f)$ es, gracias a la proposición 2.3, el punto cerrado de $\mathrm{Hilbt}_n$ asociado a

$$\underline{T}_n(Z,S) \times_S \mathrm{Spec}(k(x)) \quad .$$

Por el lema 1.1 se verifica

$$(4) \qquad \underline{T}_n(Z,S) \times_S \mathrm{Spec}(k(x)) \cong \underline{T}_n((Z,S)_x) \quad .$$

De la condición (iii) de la definición de familia de gérmenes se deduce que el esquema $\underline{D}((Z,S)_x)$ es un germen de curva de $(k^N, o)$ con polinomio de Hilbert-Samuel p(T). Por lo tanto de las proposiciones 3.4 y 3.5 obtenemos que el punto de $\mathrm{Hilbt}_n$ asociado a $\underline{T}_n((Z,S)_x)$ pertenece a $B_n$, luego de (4) obtenemos que

$$\sigma_S^n(f)(x) \in B_n \quad .$$

Así el morfismo $\sigma_S^n(f)$ factoriza a través de $X_n$.

Vamos a ver que para todo $n \geq e+2$ se verifica

$$(5) \qquad a(n)\ \sigma_S^n(f) = \sigma_S^{n-1}(f) \quad ,$$

gracias a la proposición 2.3 basta probar que

$$(\underline{T}_n(f)_*(\mathcal{O}_{\underline{T}_n(Z,S)}))^{(1)} = \underline{T}_{n-1}(f)_*(\mathcal{O}_{\underline{T}_{n-1}(Z,S)}) \quad ,$$

pero esta igualdad es la (1) para i=1.

Las relaciones de compatibilidad (5) permiten definir un morfismo

$$\sigma_S(f) : S \longrightarrow H = H_{N,p(T)}$$

tal que $\pi_n\, \sigma_S(f) = \sigma_S^n(f)$ para todo $n \geq e+1$. Así hemos definido una aplicación

$$\sigma_S : \underline{H}(S) \longrightarrow h(S) \quad ,$$

vamos a ver que es inyectiva y natural en S.

Sean $f:(Z,S) \longrightarrow (S,S)$ y $g:(Z',S) \longrightarrow (S,S)$ dos familias de gérmenes de curva de $(k^N,o)$ con polinomio de Hilbert-Samuel $p(T)$, i.e. pertenecientes a $\underline{H}(S)$. Supongamos que $\sigma_S(f) = \sigma_S(g)$, entonces para todo $n \geqslant e+1$

$$\sigma_S^n(f) = \sigma_S^n(g) \quad ,$$

por lo tanto de la proposición 2.3 obtenemos que

$$(6) \qquad \underline{T}_n(f)_*(\mathcal{O}_{\underline{T}_n(Z,S)}) = \underline{T}_n(g)_*(\mathcal{O}_{\underline{T}_n(Z',S)})$$

para todo $n \geqslant e+1$.

Al ser S un esquema afín de la igualdad (6) es fácil concluir que para todo $n \geqslant e+1$ se verifica

$$\underline{T}_n(Z,S) = \underline{T}_n(Z',S) \quad ,$$

lo que fuerza $(Z,S)=(Z',S)$, con lo cual $f=g$.

La naturalidad en S del morfismo $\sigma_S$ se deduce inmediatamente, gracias a la proposición 2.3, de la naturalidad en S de la asignación

$$f \longrightarrow \underline{T}_n(f)_*(\mathcal{O}_{\underline{T}_n(Z,S)}) \quad .$$

Hemos establecido, por lo tanto, un morfismo inyectivo de functores

$$\sigma: \underline{H} \longrightarrow h \quad ,$$

vamos a demostrar que es exhaustivo.

Sea $g$: $S=\mathrm{Spec}(A) \longrightarrow H$ un morfismo, denotemos por $g_n$ la composición $\pi_n g$.

Sea $j_n$ la inmersión canónica de $X_n$ en $\mathrm{Hilbt}_n$, gracias a la representabilidad de $\underline{\mathrm{Hilbt}}_n$ por el esquema $\mathrm{Hilbt}_n$, el morfismo $j_n g_n$ determina un único morfismo plano y con fibras de longitud $p(n)$:

$$f_n: \mathrm{Spec}(A\|X\|/J_n) \longrightarrow S$$

(i.e. perteneciente a $\underline{\mathrm{Hilbt}}_n(S)$) tal que

(7) $$(f_n)_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A\|X\|/J_n)}) = g_n^*(\mathcal{J}_n|X_n)$$

La relación de compatibilidad $a(n)g_n=g_{n-1}$, implica, gracias a (7) y a la prop. 2.3, que

(8) $$((f_n)_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A\|X\|/J_n)}))^{(1)}=(f_{n-1})_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A\|X\|/J_{n-1})})$$

para todo $n \geqslant e+2$.

Al ser S un esquema afín la igualdad (8) fuerza a que

(9) $$J_{n-1}= J_n + (X)^{n-1} \quad .$$

Sea $J= \bigcap_{n \geqslant e+1} J_n$, es inmediato comprobar que

$$A\|X\|/J = \varprojlim (A\|X\|/J_n) \quad ,$$

de la igualdad (9) deducimos que

(10) $$J_n= J + (X)^n \quad .$$

Denotemos por Z el esquema $\mathrm{Spec}(A\|X\|/J)$ y por $f:(Z,S) \longrightarrow (S,S)$ el morfismo de la categoría $(AD)^o$ inducido por el morfismo natural de A-álgebras

$$A \longrightarrow A\|X\|/J \quad .$$

Es obvio que f verifica la propiedad (i) de la definición de familia de gérmenes de curva.

De la igualdad (10) se deduce que

(11) $$\underline{T}_n(f)= f_n \quad ,$$

al pertenecer $f_n$ al conjunto $\underline{\mathrm{Hilbt}}_n(S)$ se tiene que f verifica la condición (ii) de la definición de familia de gérmenes de curva.

Sea x un punto cerrado de S, hemos de probar que $\underline{D}(f_x)$ es un germen de curva de $(k^N,o)$ con polinomio de Hilbert-Samuel p(T) (i.e. f verifica la propiedad (iii)' de la definición de familia).

Gracias al lema 1.1 tenemos que $\underline{T}_n(f_x) = (\underline{T}_n(f))_x$, así el esquema $\underline{D}(f_x)$, que es a su vez un subesquema de $(k^N, o)$, tiene polinomio de Hilbert-Samuel p(T) ya que f verifica la propiedad (ii) de familia. Como el grado del polinomio de Hilbert-Samuel de un anillo es igual a su dimensión de Krull, deducimos que $\underline{D}(f_x)$ es un subesquema unidimensional de $(k^N, o)$.

De la forma en que ha sido obtenido el morfismo $f_n$, se deduce que la imagen de x por el morfismo $g_n$ es el punto cerrado de $\mathrm{Hilbt}_n$ asociado al esquema $(f_n)_x$. De las igualdades (11) y (12) obtenemos $\underline{T}_n(f_x) = (f_n)_x$, por lo tanto $g_n(x)$ es el punto cerrado de $\mathrm{Hilbt}_n$ asociado al esquema $\underline{T}_n(f_x)$.

Al pertenecer $g_n(x)$ al abierto $B_n$, de la proposición 3.2, aplicada al ideal de $R_n$ que define el esquema $\underline{T}_n(f_x)$, obtenemos que $\underline{D}(f_x)$ es un germen de curva de $(k^N, o)$. Como ya habíamos demostrado que $\underline{D}(f_x)$ tenía polinomio de Hilbert-Samuel p(T), deducimos que $\underline{D}(f_x)$ es un germen de curva de $(k^N, o)$ con polinomio de Hilbert-Samuel p(T).

Así hemos demostrado que f es una familia de gérmenes de curva de $(k^N, o)$ con polinomio de Hilbert-Samuel p(T).

Gracias a la igualdad (11) y a la representabilidad del functor $\underline{\mathrm{Hilbt}}_n$ por el esquema $\mathrm{Hilbt}_n$, es inmediato que $\sigma^n_S(f) = g_n$, con lo cual $\sigma(f) = g$.

Hemos demostrado que $\sigma$ es exaustivo, por lo tanto, dado que era inyectivo, es un isomorfismo entre los functores $\underline{H}_{N,p(T)}$ y h.

<u>3.11 Corolario</u>: El conjunto Id(N,p(T)) está en biyección con el conjunto de puntos racionales de $H_{N,p(T)}$.

<u>Demostración</u>: es sabido (EGA-I-3.5.5) que el conjunto de puntos racionales de $H_{N,p(T)}$ está en biyección con el conjunto de morfis-

mos de Spec(k) en $H_{N,p(T)}$, considerados como k-esquemas. Del teorema 3.10 deducimos la proposición.

Definición: denotaremos por $(H_{N,p(T)})_{rat}$ el conjunto de puntos racionales de $H_{N,p(T)}$; si $x \in H_{N,p(T)}$, $I_x$ y $C_x$ serán el ideal y el germen de curva determinados por el punto racional x.

El esquema $H_{N,p(T)}$ se llamará "Esquema de Hilbert de los gérmenes de curva de $(k^N,o)$ con polinomio de Hilbert-Samuel p(T)".

## 4. El espacio tangente de $H_{N,p(T)}$ en un punto racional.

Sea $x \in (H_{N,p(T)})_{rat}$, en esta sección vamos a dar una descripción del espacio tangente de $H=H_{N,p(T)}$ en el punto x, el cual denotaremos por $T_x$.

El esquema de los "números duales", spec( $k[\varepsilon]/(\varepsilon)^2$), se denotará por D, $q_D$ será el único punto cerrado de D.

Es conocido (HAR cáp. II ex.2.8) que existe una biyección natural entre el espacio tangente $T_x$ y el conjunto de morfismos $f\colon D \longrightarrow H$ tales que $f(q_D)=x$.

Del teorema 3.10 deducimos que $T_x$ está en biyección natural con el conjunto de familias pertencientes a $\underline{H}(D)$ cuya fibra en el punto cerrado $q_D$ sea igual a $C_x$, denotemos por $\underline{H}^x(D)$ tal conjunto de familias.

El conjunto de deformaciones infinitesimales de primer orden inmersas del germen $C_x$ se denotará por $\mathrm{Embdef}(C_x)$ ( AR-2).

Habíamos demostrado (corolario 1.3) que para toda familia $f \in \underline{H}(D)$ el morfismo $\underline{D}(f)$ es plano, por lo tanto si $f \in \underline{H}^x(D)$ el morfismo $\underline{D}(f)$ es una deformación infinitesimal de primer orden de $C_x$.

Definición: $\phi$ es la aplicación inyectiva entre los conjuntos $\underline{H}^x(D)$ y $\mathrm{Embdef}(C_x)$ que hace corresponder a toda familia f del conjunto $\underline{H}^x(D)$ la deformación infinitesimal $\phi(f)=\underline{D}(f)$.

La siguiente proposición da una caracterización de las deformaciones infinitesimales que son familias de gérmenes de curvas.

Sea $f_1,\ldots,f_s$ una base standard minimal del ideal $I_x$, denotemos por $v_i$ el orden de $f_i$ para $i=1,\ldots,s$. Gracias a la prop. 2

de Ap-I y al lema III-1.2 se verifica que máx $\{v_1,\dots,v_s\} \leq e$.

4.1 Proposición: Sea $\{f_i+\varepsilon g_i\}_{i=1,\dots,s}$ un sistema de generadores de un ideal J de $\frac{k\|\varepsilon\|}{(\varepsilon)^2}\|X\|$. Supongamos que el morfismo

$$\varphi\colon Z=\mathrm{Spec}\left(\frac{\left(k\|\varepsilon\|/(\varepsilon)^2\right)\|X\|}{J}\right)\longrightarrow D$$

inducido por el morfismo natural de $k\|\varepsilon\|/(\varepsilon)^2$ - álgebras

$$k\|\varepsilon\|/(\varepsilon)^2 \longrightarrow \frac{\left(k\|\varepsilon\|/(\varepsilon)^2\right)\|X\|}{J}$$

sea una deformación infinitesimal de primer orden de $C_X$. Son equivalentes:

(i) existe una familia $f\in \underline{H}^X(D)$ tal que $\phi(f)=\varphi$.

(ii) para todo i=1,...,s se verifica $g_i \in \bigcap_{n\geq e+1}(I_X+M^n:M^{n-v_i})$ .

Demostración: gracias al corolario de la página 11 de AR-2, $\varphi\colon Z\longrightarrow D$ es una deformación plana si para toda relación $\sum_{i=1}^{s} a_i f_i=0$, existen elementos $A^1,\dots,A^s$ del anillo $k\|X\|$ tales que:

$$\sum_{i=1}^{s}(f_i+\varepsilon g_i)(a_i+\varepsilon A^i)=0 .$$

Dicho corolario implica que el $k\|\varepsilon\|/(\varepsilon)^2$ -módulo $\frac{\left(k\|\varepsilon\|/(\varepsilon)^2\right)\|X\|}{J+M^n}$ es plano si para toda relación

$$\sum_{i=1}^{s} f_i a^i+\sum_{|K|=n+1} X^K b_K=0$$

existen elementos $A^i,B_K$ del anillo $k\|X\|$ tales que

$$\sum_{i=1}^{s}(f_i+\varepsilon g_i)(a^i+\varepsilon A^i)+\sum_{|K|=n+1} X^K(b_K+\varepsilon B_K)=0 ,$$

lo que equivale a que para toda s-pla $a^1,\dots,a^s$ tal que $\sum_{i=1}^{s} f_i a^i\in M^n$ existan elementos $A^1,\dots,A^s$ que verifiquen:

$$\sum_{i=1}^{s}(f_i+\varepsilon g_i)(a^i+\varepsilon A^i)\in M^n\frac{k\|\varepsilon\|}{(\varepsilon)^2}\|X\|$$

(i)$\Rightarrow$(ii). Sean $n \geq e+1$ y $a \in M^{n-\nu_i}$. De la condición $f_i a \in M^n$ se deduce, gracias a las consideraciones anteriores, que existen elementos $A^1, \ldots, A^s$ tales que:

$$g_i a + \sum_{i=1}^{s} f_i A^i \in M^n \quad ,$$

por lo tanto para todo $a \in M^{n-\nu_i}$ se verifica

$$g_i a \in I_x + M^n \quad .$$

Así hemos demostrado que $g_i \in \bigcap_{n \geq e+1} (I_x + M^n : M^{n-\nu_i})$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Supongamos que $\sum_{i=1}^{s} f_i a^i \in M^n$. Al ser $f_1, \ldots, f_s$ una base standard de $I_x$, existen elementos $c^i \in M^{n-\nu_i}$ (corolario 1.8 de R-V) tales que

$$\sum_{i=1}^{s} f_i a^i = \sum_{i=1}^{s} f_i c^i \quad .$$

Por lo tanto la s-pla $(a^1 - c^1, \ldots, a^s - c^s)$ es una relación entre los elementos $f_1, \ldots, f_s$.

Al ser $\varphi: Z \longrightarrow D$ una deformación plana, existen $A^1, \ldots, A^s$ tales que

$$\sum_{i=1}^{s} (f_i + \varepsilon g_i)(a^i - c^i + \varepsilon A^i) = 0,$$

por lo tanto

(1) $$\sum_{i=1}^{s} f_i A^i + \sum_{i=1}^{s} g_i a^i = \sum_{i=1}^{s} g_i c^i \quad .$$

Por otro lado, de la condición(ii) deducimos que existen elementos $B^1, \ldots, B^s$ tales que

(2) $$\sum_{i=1}^{s} g_i c^i - \sum_{i=1}^{s} f_i B^i \in M^n \quad .$$

De (1) y (2) es fácil deducir, dado que $\sum_{i=1}^{s} f_i a^i \in M^n$, que se verifica

$$\sum_{i=1}^{s} (f_i + \varepsilon g_i)(a^i + \varepsilon (A^i - B^i)) \in M^n \quad .$$

De las consideraciones del principio de la demostración obtenemos

$\dfrac{\left(k\|\varepsilon\|/(\varepsilon)^2\right)\|x\|}{J\quad M^n}$ es un $k\|\varepsilon\|/(\varepsilon)^2$ - módulo plano para todo $n \geq e+1$, por lo tanto se verifica (i).

Es sabido que las deformaciones infinitesimales de primer orden de $C_x$ están clasificadas por el módulo normal $N_x = \mathrm{Hom}_R(I_x, \frac{R}{I_x})$ via una aplicación $\tau$: $N_x \longrightarrow \mathrm{Embdef}(C_x)$ que pasamos a describir (prop. 6.1 de AR-2).

Sea $\bar{g}$: $I_x \longrightarrow \frac{R}{I_x}$ un morfismo de R-módulos, diremos que un morfismo $g=(g_1,\ldots,g_s)$: $R^s \longrightarrow R$ es una elevación de g si se tiene un diagrama commutativo

$$\begin{array}{ccc} R^s & \xrightarrow{\;g\;} & R \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ I_x & \xrightarrow[\;\bar{g}\;]{} & \frac{R}{I_x} \end{array} ,$$

con f el morfismo definido por la s-pla $(f_1,\ldots,f_s)$ y $\pi$ el morfismo de paso al cociente.

La deformación $\tau(\bar{g})$ es por definición el morfismo de k-esquemas definido por el morfismo natural de $k\|\varepsilon\|/(\varepsilon)^2$ -álgebras

$$k\|\varepsilon\|/(\varepsilon)^2 \longrightarrow \frac{\left(k\|\varepsilon\|/(\varepsilon)^2\right)\|x\|}{(f_i+\varepsilon g_i)_{i=1,\ldots,s}}$$

siendo $g=(g_1,\ldots,g_s)$ una elevación arbitraria.

<u>Definición</u>: $\tilde{N}_x = \left\{ \bar{g} \in N_x \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{existe una elevación } g\text{: } R^s \longrightarrow R \text{ de } \bar{g} \text{ tal} \\ \text{que } g_i \in \bigcap_{n \geq e+1} (I_x \quad M^n : M^{n-v_i}),\ i=1,\ldots,s \end{array} \right\}$

Es fácil comprobar que $\tilde{N}_x$ es un sub-R-módulo de $N_x$.

<u>4.2 Proposición</u>: Existe una biyección natural $\tilde{\tau}$ entre $N_x$ y $T_x$.

<u>Demostración</u>: basta tomar $\tilde{\tau} = \phi^{-1}(\tau|_{\tilde{N}_x})$ , identificando $T_x$ con $\underline{H}^x(D)$

## 5. Familias normalmente planas de gérmenes de curva.

Se dirá que una función $F: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es admisible para el polinomio $p(T)$ si existe un ideal $I \in Id(N,p(T))$ tal que la función de Hilbert-Samuel de $R/I$ es igual a $F$.

De las proposiciones 1 y 2 de Ap-I se deduce que el conjunto de funciones admisibles, fijado $p(T)$ , es finito.

Es conocido que para ciertos polinomios de Hilbert-Samuel sólo existe una función admisible(p.e. $p(T)=T$, $2T-1$, ver MAL 12.16 y 12.17), en el capítulo V sección 2 daremos una familia de polinomios que poseen la anterior propiedad.

Sea A una k-álgebra de tipo finito y J un ideal de $A\|X\|$. Para todo $n \geq o$ se define la función $\varphi_n$: $Spec(A) \longrightarrow \mathbb{N}$ que a todo $q \in Spec(A)$ le hace corresponder $\varphi_n(q) = \dim_{k(q)}\left(\dfrac{A\|X\|}{J+(X)^n} \underset{A}{\otimes} k(q)\right)$ , esta función es semicontínua superiormente (HAR cáp.II ex.2.5).

Sea $Z = Spec\left(A\|X\|/J\right)$ un k-esquema. Observemos que si Z es normalmente plano a lo largo de Spec(A) la función $\varphi_n$, para todo $n \geq o$, es localmente constante (HAR cáp.II ex.2.5). Si Spec(A) es conexo $\varphi$ es constante.

<u>Definición</u>: Sea $F: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función, diremos que Z es F-normalmente plano a lo largo de Spec(A) si y sólo si Z es normalmente plano a lo largo de Spec(A) y la función $\varphi_n$ es constante e igual a $F(n)$ para todo $n \geq o$.

<u>Definición</u>: Sea F una función admisible para $p(T)$. Denotaremos por $\underline{H}_{N,F}$ el subfunctor de $\underline{H}_{N,p(T)}$ tal que a todo objeto S de AFF le hace corresponder el conjunto

$$\underline{H}_{N,F}(S) = \left\{ \begin{array}{l} f: (Z,S) \longrightarrow (S,S) \in \underline{H}_{N,p(T)}(S) \text{ tal que el esquema } Z \\ \text{es F-normalmente plano a lo largo de S.} \end{array} \right\}$$

Observemos que si $f:(Z,S)\longrightarrow(S',S)$ es una familia de gérmenes perteneciente a $\underline{H}_{N,p(T)}(S)$ es F-normalmente plana a lo largo de S si y sólo si se verifica:

$$\underline{T}_{e+1}(f)_*(\mathcal{O}_{\underline{T}_{e+1}(Z,S)})\in F_{e+1}(S) \quad ,$$

con $F_{e+1}$ el functor que es representado por la variedad $W(o,e+1,F)$ (Teorema 2.1).

Sea j la inmersión canónica de $X_{e+1}$ en $G_{e+1}$, el morfismo $j.\pi_{e+1}: H_{N,p(T)}\longrightarrow G_{e+1}$ viene inducido por el morfismo de functores $\underline{H}_{N,p(T)}\longrightarrow \underline{G}_{e+1}$ que hace corresponder a la familia f el haz localmente libre

$$\underline{T}_{e+1}(f)_*(\mathcal{O}_{\underline{T}_{e+1}(Z,S)})\in\underline{G}_{e+1}(S),$$

ver demostración del Teorema 3.10.

De todo lo anterior es fácil concluir que

$$\underline{H}_{N,F} \cong \underline{H}_{N,p(T)} \underset{\underline{G}_{e+1}}{\times} F_{e+1} \quad ,$$

si denotamos por $H_{N,F}$ el esquema $H_{N,p(T)} \underset{G_{e+1}}{\times} W(o,e+1,F)$ es inmediato que:

<u>5.1 Proposición</u>: El functor $\underline{H}_{N,F}$ es representable por el esquema $H_{N,F}$.

# CAPITULO V

## CAPITULO V: GERMENES DE CURVA DE $(k^3,0)$.

### 1.Construcción de $CH_{p(T),\delta,n+1}$.

En esta sección tomaremos N=3. Para cada par de enteros naturales $n\in\mathbb{N}$ y $q\in\mathbb{N}$ consideremos el espacio afín E que parametriza las matrices $(f_{ij})$ $\begin{matrix} i=1,2,\ldots,q \\ j=1,2,\ldots,q-1\end{matrix}$ con coeficientes $f_{ij}\in P=k|X_1,X_2,X_3|$ y $\deg(f_{ij})\leq n$.

Si z es un punto cerrado de E, denotaremos por B(z) la matriz definida por z, d'(z) la q-pla formada por los menores maximales de B(z), I(z) el ideal de $R=k||X_1,X_2,X_3||$ engendrado por los menores maximales de B(z) y por C(z) el complejo de R-módulos (Ver Ap-II).

$$C(z)\ :\ 0\longrightarrow R^{q-1}\xrightarrow{B(z)}R^{q}\xrightarrow{d'(z)}R\longrightarrow\frac{R}{I(z)}\longrightarrow 0\ .$$

Sabemos que es equivalente que el complejo sea exacto a que el ideal I(z) tenga altura dos (Ver Ap-II).

Denotaremos por $Z^K_{ij}$, donde $K\in\mathbb{N}^3$ es un multiíndice, el coeficiente del monomio $X^K$ del elemento (i,j) de la matriz $(f_{ij})_{i\,j}$:

$$f_{ij}=\sum_{|K|\leq n} Z^K_{ij}\cdot X^K\ ,$$

$B^o$ será la matriz de términos independientes $(Z^o_{ij})_{ij}$.

Denotaremos por $\bar{E}$ el cerrado de $k^3\mathrm{x}E$ definido por la anulación de los menores maximales de la matriz $(f_{ij}(Z;X_1,X_2,X_3))_{ij}$ y por $\pi:\bar{E}\to E$ la restricción del morfismo de proyección. Observemos que $\bar{E}$ es la familia de los subesquemas de $k^3$ definidos por la anulación los menores de orden máximo de B(z) al variar $z\in E$.

Sea $A(q) = \operatorname{Spec}\,(k|T_{i\,j}|\ \begin{smallmatrix} i=1,2,\ldots,q \\ j=1,2,\ldots,q-1 \end{smallmatrix})$ el espacio afín de las matrices de dimensiones $q \times (q-1)$ con coeficientes en $k$, $D(C)$ será el subesquema de $A(q)$ definido por los menores de orden $C$ de la matriz $(T_{ij})\ \begin{smallmatrix} i=1,2,\ldots,q \\ j=1,2,\ldots,q-1 \end{smallmatrix}$ (los puntos cerrados de $D(C)$ son las matrices cuyos menores de orden $C$ son nulos). Obviamente $D(C) \supset D(C-1)$ y los esquemas $D(C)$ verifican, entre otras, las siguientes propiedades (Ver LAK):

(i) $D(C)$ es reducido e irreducible y $\dim(D(C)-\dim(D(C-1))=2$.

(ii) $D(C)$ es el lugar singular de $D(C+1)$.

(iii) $D(C)$ es Cohen-Macaulay.

Sea $D$ la subvariedad de $E$ definida por la anulación de los menores maximales de la matriz $B^{o}$. Es inmediato que existe un isomorfismo.

$$\varphi : D \longrightarrow D(q-1) \times k^{r},$$

con $r = \dim E - q(q-1)$, que a todo punto cerrado $(Z^{K}_{ij})_{|k| \leq n}$; $i=1,2,\ldots,q$ ; $j=1,2,\ldots,q-1$ de $D$ le hace corresponder el punto $((Z^{o}_{ij}) , (Z^{K}_{ij})_{|K| \geq 1})$.

Identificaremos $D$ con $D(q-1) \times k^{r}$ via el isomorfismo $\varphi$. Así el lugar singular de la subvariedad $D(q-i) \times k^{r}$ de $D$ es precisamente $D(q-i-1) \times k^{r}$ para $i=1,2,\ldots,q-2$.

<u>1.1 Proposición</u>: Existe un abierto $E^{n,q}_{\delta} \subset D$ que verifica:

(i) El conjunto de puntos cerrados de $E^{n,q}_{\delta}$ coincide con el conjunto de puntos cerrados $z \in D$ tales que el ideal $I(z)$ define un germen de curva reducida de $(k^{3},0)$ con orden de singularidad menor o igual que (i.e. $I(z) \in Id(3,\delta)$).

(ii) El morfismo $\bar{\pi}$: $\bar{E}^{n,q}_{\delta} \longrightarrow E^{n,q}_{\delta}$, obtenido por cambio de base del morfismo $\pi : \bar{E} \longrightarrow E$, es plano en un entorno de $E^{n,q}_{\delta} \times \{0\} \subset \bar{E}^{n,q}_{\delta}$.

(iii) Para todo punto cerrado $z \in E^{n,q}$ el complejo $C(z)$ es exacto.

Demostración: De la semicontinuidad superior de la dimensión de las k-álgebras deducimos que existe un abierto $U \subset D$ cuyo conjunto de puntos cerrados es igual al conjunto de puntos cerrados $z \in D$ tales que la dimensión de $\frac{R}{I(z)}$ sea menor o igual que uno. Por otro lado al estar los ideales $I(z)$, con $z \in D$, engendrados por los menores maximales de la matriz $B(z)$ deducimos, gracias a la proposición 1 de Ap-II, que la altura de $I(z)$ es menor o igual que dos. Por lo tanto el conjunto de puntos cerrados de U es igual al conjunto de puntos cerrados de D cuya altura sea dos (lo que equivale a que la dimensión de $\frac{R}{I(z)}$ sea uno).

De la proposición 2 de Ap-II se deduce que para todo $z \in U$ el ideal $I(z)$ es perfecto de altura dos y que $C(z)$ es exacto, lo que prueba el apartado (iii) para los puntos de U.

1.2 Lema: El morfismo $\pi: \bar{U} \longrightarrow U$, obtenido por cambio de base del morfismo $\pi: \bar{E} \longrightarrow E$, es plano en un entorno $U \times \{0\} \subset \bar{U}$.

Demostración del lema 1.2 : Sea A el cociente de $k|Z^K_{ij}|$ que defina el subesquema $D = \mathrm{Spec}(A)$ de $E = \mathrm{Spec}(k|Z^K_{ij}|)$.

Basta probar, para obtener el lema, que para todo abierto afín de D de la forma $V = \mathrm{Spec}(A_g)$ contenido en U, el morfismo $\pi: \bar{V} \longrightarrow V$, obtenido por cambio de base del morfismo $\pi: \bar{U} \longrightarrow U$, es plano en un entorno de $V \times \{0\} \subset \bar{V}$.

Observemos que $\bar{E}$ es el subesquema de

$E \times k^3 = \mathrm{Spec}(k|Z^K_{i\ j}, X_l|\ |K| \leq n;\ i=1,2,\ldots q;\ j=1,2,\ldots,q-1;\ l=1,2,3)$

definido por el ideal J engendrado por los menores maximales de la matriz $(\sum_{|k|\leq n} Z_{ij}^{K}.X^{K})_{ij}$ . Así $\bar{V}$ es el subesquema de $V \times K^3 = \mathrm{Spec}(A_g|X_1,X_2,X_3|)$ definido por el ideal $\bar{J}$ engendrado por los menores maximales de la matriz

(1) $$(\sum_{|k|\leq n} \overline{Z_{ij}^{K}}.X^{K})_{ij}$$

donde $\overline{Z_{ij}^{K}}$ es la clase de $Z_{ij}^{K}$ en $A_g$

Es inmediato que el morfismo $\pi:\bar{V} \longrightarrow V$ viene definido por el paso al cociente $A_g \longrightarrow \frac{A_g|X_1,X_2,X_3|}{\bar{J}}$

Dado que la platitud es una propiedad abierta basta probar que el morfismo $A_g \longrightarrow (\frac{A_g|X|}{\bar{J}})_{(X)}$ es plano. Sea $\tilde{J} = \bar{J}.(A_g|X|)_{(X)}$

Sabemos que la dimensión de las fibras del morfismo $\pi:\bar{U} \longrightarrow U$ en los puntos de $U \times \{0\} \subset \bar{U}$ es igual a uno por lo tanto la dimensión de las fibras del morfismo $\pi:\bar{V} \longrightarrow V$ en los puntos de $V \times \{0\} \subset \bar{V}$ es también igual a uno. Es fácil demostrar que existe un entorno W de $V \times \{0\}$ en $\bar{V}$ tal que la dimensión de las fibras del morfismo $\pi|_W:W \longrightarrow V$ es igual a uno.

Al ser V irreducible, ya que es un abierto de una variedad irreducible D, obtenemos que dim W=dim V+1. Así se tiene la igualdad

$$\dim\left(\left(\frac{A_g|X|}{\bar{J}}\right)_{(X)}\right) = \dim(A_g) + 1,$$

por lo tanto $ht(\tilde{J}) = 2$.

Los resultados del apéndice II son válidos para anillos conmutativos Noetherianos con identidad, excepto el apartado (iii) del teorema 2. Por lo tanto al estar el ideal J engendrado por los menores maximales de una matriz B, imagen por el morfismo $A_g|X| \longrightarrow A_g|X|_{(X)}$ de la matriz (1), de dimensiones q x (q-1) y al ser su altura igual a dos, de la proposición 1 de Ap-II obtenemos que $\tilde{J}$ es perfecto. Del teorema 2-(ii)(b) de Ap-II se deduce que el anillo $A_g|X|_{(X)}/\tilde{J}$ admite una resolución libre como $G= A_g|X|_{(X)}$ - módulo:

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow G^{q-1} \xrightarrow[B]{} G^q \xrightarrow[d']{} G \longrightarrow G/\tilde{J} \longrightarrow 0 ,$$

donde d' es la q-pla de los menores maximales de B.

Sea m un ideal maximal de $A_g$, si aplicamos el functor $\cdot \otimes_{A_g} \frac{A_g}{m}$ a la resolución (2) obtenemos el complejo

$$(3) \qquad 0 \longrightarrow (k|X|_{(X)})^{q-1} \xrightarrow[B \otimes_{A_g} \frac{A_g}{m}]{} (k|X|_{(X)})^q \xrightarrow[d' \otimes_{A_g} \frac{A_g}{m}]{} k|X|_{(X)} \longrightarrow \frac{k|X|_{(X)}}{\tilde{J}\, k|X|_{(X)}} \longrightarrow 0.$$

Finalmente, si aplicamos el functor $\cdot \otimes_{k|X|_{(X)}} k\|X\|$ a (3) obtenemos la resolución C(z), siendo z el punto cerrado de V correspondiente a m.

Al ser el anillo $k|X|_{(X)}$ de Jacobson la extensión $k|X|_{(X)} \subset k\|X\|$ es fielmente plana (Ver teorema 56 de MAT), con lo cual el complejo (3) es exacto al serlo C(Z).

De la exactitud de los complejos (2) y (3) es fácil deducir que

$$\operatorname{Tor}^1_{(A_g)_m} \left( \left( \frac{A_g|X|_{(X)}}{\tilde{J}} \right)_m , k \right) = 0 \quad ,$$

lo que fuerza a que el $(A_g)_m$ - módulo $\left( \frac{A_g|X|_{(X)}}{\tilde{J}} \right)_m$ sea plano (Ver MAT teorema 49).

Al ser el ideal m arbitrario obtenemos que el $A_g$ - módulo

$$\frac{A_g|X|_{(X)}}{\tilde{\mathfrak{J}}} = \left(\frac{A_g|X|}{\bar{\mathfrak{J}}}\right)_{(X)}$$ es plano, quedando el lema demostrado.

<u>Continuación de la demostración de la proposición 1.1.</u>

El morfismo $\pi:\bar{U} \longrightarrow U$ es de presentación finita (Ver EGA-IV 1ª parte teorema 1.6.3). Gracias al lema 1.2 y al teorema 12.1.1 (vii) de EGA-IV 3ª parte, el conjunto de puntos $z\in U$ tales que la fibra $(\bar{U})_z$ sea reducida en $(z,0)\in\bar{U}$ es un abierto $\tilde{U}$.

Al ser los anillos $\mathcal{O}_{((\bar{U})_z,(z,0))}$ k-álgebras esencialmente de tipo finito son analíticamente no ramificados (Ver EGA -IV 2ª parte teoremas 7.6.4 y 7.6.5). Dado que

$$\frac{R}{I(z)} = \widehat{\mathcal{O}_{((\bar{U})_z,(z,0))}} \quad ,$$

el anillo $\frac{R}{I(z)}$ es reducido si y sólo si lo es $\mathcal{O}_{((\bar{U})_z,(z,0))}$.

Por otro lado es sabido que un anillo local Noetheriano es Cohen-Macaulay si y sólo si su completación lo es. Por lo tanto el conjunto de puntos cerrados de $\tilde{U}$ coincide con el conjunto de puntos cerrados $z\in U$ para los que el anillo $\frac{R}{I(z)}$ es reducido de dimensión uno y Cohen-Macaulay.

De la semicontinuidad del orden de singularidad (Ver TE teorema 1) deducimos la existencia de un abierto $E_\delta^{n,q}\subset\tilde{U}$ (y por lo tanto de D) que verifica las propiedades (i), (ii) y (iii).

<u>Definición</u>: $E^{n,q}_{\delta,p(T)}$ es el subconjunto localmente cerrado de $E_\delta^{n,q}$ cuyo conjunto de puntos cerrados es el conjunto de puntos cerrados $z\in E_\delta^{n,q}$ tales que el polinomio de Hilbert-Samuel de $\frac{R}{I(z)}$

sea igual a p(T). Consideraremos $E^{n,q}_{\delta,p(T)}$ como subesquema de $E^{n,q}_{\delta}$ con la estructura reducida.

Denotaremos $q_o = \text{Máx}\left\{v(I)/I \ Id(3,\delta)\right\}$ , $n_o = w(\delta)$, siendo W la función del Teorema III-2.2 , y $\bar{q}_o = \text{Máx}\left\{v(I)/I \ Id(3,\delta,p(T))\right\}$.

<u>1.3 Corolario</u>: Sea $n \geq n_o$:

(i) Supongamos $q \geq q_o$. Para todo I Id(3,$\delta$) existe un punto cerrado $z \in E^{n,q}$ tal que $I \equiv I(z)$ módulo $(M^{n+1})$.

(ii) Supongamos $q \geq \bar{q}_o$. Para todo $I \in Id(3,\delta,p(T))$ existe un punto cerrado $z \in E^{n,q}_{\delta,p(T)}$ tal que $I \equiv I(z)$ módulo $(M^{n+1})$.

<u>Demostración</u>: Basta aplicar el teorema III-2.7.

En lo que resta de memoria sólo consideraremos variedades $E^{n,q}_{\delta}$ (resp. $E^{n,q}_{\delta,p(T)}$) para los pares de enteros (n,q) que verifiquen $n \geq n_o$ y $q \geq q_o$ (resp. $q \geq \bar{q}_o$).

<u>Definición</u>: Para todo punto cerrado $z \in E$ denotaremos por J(z) el ideal de $S = k|X_1,X_2,X_3|_{(X_1,X_2,X_3)}$ engendrado por los menores maximales de la matriz B(z). Denotaremos por C'(z) el complejo C'(z): $0 \longrightarrow S^{q-1} \xrightarrow[B(z)]{} S^q \xrightarrow[d'(z)]{} S \longrightarrow \frac{S}{J(z)} \longrightarrow 0$

Obsérvese que J(z).R = I(z) y que para todo punto cerrado $z \in E^{n,q}_{\delta}$ el complejo C'(z) es exacto (teorema 2 de Ap-II y el functor $\cdot \otimes_S R$ es fielmente exacto gracias al teorema 56 de MAT).

Sea $n \geqslant n_o$, $q \geqslant \bar{q}_o$. Observemos que si z es un punto cerrado de $E^{n,q}_{\delta,p(T)}$, el anillo $R/_{I(z)}$ tiene polinomio de Hilbert-Samuel p(T). De la definición de $n_o$ deducimos que $n \geqslant e$, con e la multiplicidad de $R/_{I(z)}$. De la proposición 2 de Ap-I obtenemos que la dimensión de

$$(*) \qquad R/_{I(z)+M^{n+1}}$$

es igual a p(n+1).

Denotaremos por $g_q: E^{n,q}_{\delta,p(T)} \longrightarrow G_{n+1}$ el morfismo que hace corresponder a todo punto cerrado z el punto cerrado de $G_{n\ 1}$ asociado al cociente (*).

<u>1.4 Proposición</u>: Para todo $q \geqslant \bar{q}_o$, $\text{Imag}(g_{q_o}) = \text{Imag}(g_q)$.

<u>Demostracicón</u>: gracias a la proposción 1.1(i) y al corolario 1.3(ii) para todo $q \geqslant \bar{q}_o$ el conjunto de puntos cerrados de $\text{Imag}(g_q)$ es igual al conjunto de puntos cerrados de $G_{n+1}$ de la forma $R/_{I+M^{n+1}}$, al variar $I \in \text{Id}(3,\delta,p(T))$. Por lo tanto $\text{Imag}(g_q)$ y $\text{Imag}(g_{q_o})$ tienen el mismo conjunto de puntos cerrados, de donde se deduce la proposición.

<u>Definición</u>: Denotaremos por $CH_{p(T),\delta,n+1}$ el subconjunto constructible de $G_{n+1}$, $\text{Imag}(g_q)$ para cualquier $q' \geqslant \bar{q}_o$.

Denotaremos por $(E_\delta^{n,q})_i$ la subvariedad de $E_\delta^{n,q}$ definida por el ideal engendrado por los menores de orden i de la matriz $B^o$.

1.5 Proposición: Para cada i=1,2,...,q-1 se verifican las siguientes propiedades:

(i) $(E_\delta^{n,q})_i$ es irreducible y Sing $((E_\delta^{n,q})_i) = (E_\delta^{n,q})_{i-1}$

(ii) El conjunto $(E_\delta^{n,q})_i$ $i=1,2,...,q-1$ es una estratificación de $E_\delta^{n,q}$.

Demostración: El apartado (ii) es consecuencia del (i).

(ii) $(E_\delta^{n,q})_i$ es irreducible ya que es un abierto, gracias a la proposición 1.1, de $D(i) \times k^r$. Habíamos observado que el lugar singular de $D(i) \times k^r$ era precisamente $D(i-1) \times k^r$. Al ser $(E_\delta^{n,q})_i$ un abierto de $D(i) \times k^r$, se deduce la segunda parte de (i).

Definición: Para todo s=2,3,...,q, $NG_s$ será el conjunto de puntos cerrados $z \in E_\delta^{n,q}$ tales que el número de elementos de un sistema de generadores minimal de I(z) sea mayor o igual que s.

1.5 TEOREMA: Para cada i=1,2,...,q-1 el conjunto de puntos cerrados $z \in E_\delta^{n,q}$ tales que el número de elementos de un sistema de generadores minimal del ideal I(z) sea mayor o igual que q-i+1 (i.e. z $NG_{q-i+1}$) coincide con el conjunto de puntos cerrados de $(E_\delta^{n,q})_i$.

Demostración: Sea z un punto cerrado de $E^{n,q}$, el ideal I(z) admite la resolución libre (Ver proposición 1.1 (iii)):

$$C(z): \quad 0 \longrightarrow R^{q-1} \xrightarrow[B(z)]{} R^q \xrightarrow[d'(z)]{} R \longrightarrow \frac{R}{I(z)} \longrightarrow 0$$

Sea v = v(I), sabemos (Ver SE-2 apéndice I al capítulo IV) que la resolución C(z) se descompone en suma directa de una resolución minimal.

(1) $$0 \longrightarrow R^{v-1} \xrightarrow{L} R^{v} \longrightarrow R \longrightarrow \frac{R}{I(z)} \longrightarrow 0$$

y una resolución de cero:

(2) $$0 \longrightarrow R^{q-v} \xrightarrow{K} R^{q-v} \longrightarrow 0$$

Por lo tanto existen dos matrices invertibles $A_1$ y $A_2$ de coeficientes en R y dimensiones respectivas $(q-1)^2$ y $q^2$, tales que:

(3) $$B(z) = (A_2)^{-1} (L \oplus K) A_1$$

Sean $A_i^o$, $L^o$, $K^o$ las matrices numéricas imagen de las matrices $A_i$, L, K por el morfismo de paso al cociente $R \longrightarrow k$. De la igualdad (3) obtenemos

(4) $$B^o(z) = (A_2^o)^{-1} (L^o \oplus K^o) . A_1^o ,$$

al ser la resolución (1) minimal $L^o=0$, por lo tanto

$$B^o(z) = (A_2^o)^{-1} (0 \oplus K^o) A_1^o.$$

Al ser las matrices $A_1$ y $A_2$ inversibles, de esta última igualdad se deduce

$$\text{rango } (B^o(z)) = \text{rango } (0 \oplus K^o) = q-v ,$$

de lo cual se sigue la afirmación.

Finalizaremos esta sección dando un resultado sobre las propiedades definidad sobre el conjunto $Id(3,\delta)$ que se conservan por contacto elevado (c.e.). Recordemos que una propiedad $\mathcal{P}$, definida sobre el conjunto de ideales $Id(3,\delta)$, se conserva por contacto elevado si existe un entero $f(\mathcal{P})$ tal que para todo par de ideales $I,J \in Id(3,\delta)$, con $I \equiv J$ módulo $(M^{f(\mathcal{P})})$, se tiene que I verifica $\mathcal{P}$ si y sólo si J verifica $\mathcal{P}$.

Sea una propiedad c.e. definida sobre el conjunto $Id(3,\delta)$.

Sabemos que el conjunto de puntos cerrados de $CH_{p(T),\delta,n+1}$ coincide con el conjunto de puntos cerrados de $G_{n+1}$ de la forma $\frac{R}{I+M^{n+1}}$ con $I\in Id(3,\delta,p(T))$ (Ver proposición 1.4).

Sea $n \geqslant f(\mathcal{P})-1$ y $z = \frac{R}{L}$ un punto cerrado de $CH_{p(T),\delta,n+1}$ diremos que z verifica $\mathcal{P}$ si existe un ideal $I \in Id(3,\mathcal{P},p(T))$ que verifica la propiedad $\mathcal{P}$ y que $L = I+M^{n+1}$.

Obsérvese que al ser $\mathcal{P}$ una propiedad c.e. y $n \geqslant f(\mathcal{P})-1$ todo ideal $J \in Id(3,\delta,p(T))$ con $L = J+M^{n+1}$ verifica $\mathcal{P}$.

Finalmente diremos que un punto cerrado $z \in E_{\delta}^{n,q}$ verifica la propiedad $\mathcal{P}$ si $I(z)$ la verifica.

Denotaremos por $E_{\delta}^{n,q}(\mathcal{P})$ el conjunto de puntos cerrados $z \in E_{\delta}^{n,q}$ que verifican $\mathcal{P}$ . Diremos que $\mathcal{P}$ es abierta si existen enteros $n \geqslant \text{máx}(n_o,f(\mathcal{P})-1)$, $q \geqslant q_o$ y un subconjunto abierto de $E_{\delta}^{n,q}$ cuyo conjunto de puntos cerrados sea igual a $E_{\delta}^{n,q}(\mathcal{P})$.

<u>1.6 TEOREMA</u>: Sea $\mathcal{P}$ una propiedad que se conserve por contacto elevado y abierta, definida sobre el conjunto $Id(3,\mathcal{P})$.

Si para un entero $v \geqslant 2$ existe un ideal $I \in Id(3,\mathcal{P})$ que verifica $\mathcal{P}$ y tal que el número de elementos de un sistema de generadores minimal de I es igual a v, entonces para todo $2 \leqslant t \leqslant v$ existe un ideal $J \in Id(3,\mathcal{P})$ que verifica $\mathcal{P}$ y el número de elementos de un sistema de generadores minimal de J es igual a t.

<u>Demostración</u>: Sean $n \geqslant \text{máx}(n_o,f(\mathcal{P})-1)$, $q \geqslant q_o$ enteros tales que exista un conjunto abierto U de $E^{n,q}$ cuyo conjunto de puntos cerrados sea igual a $E_{\delta}^{n,q}(\mathcal{P})$.

Observemos que gracias al teorema 1.5 el conjunto de pun tos cerrados de $(E_{\delta}^{n,q})_{q-t+1} - (E_{\delta}^{n,q})_{q-t}$ es igual a $NG_t - NG_{t+1}$.

Por hipótesis $U \cap (NG_v - NG_{v+1}) \neq \emptyset$ , de la inclusión $NG_v \subset NG_t$ obtenemos $U \cap NG_t \neq \emptyset$ . Así se tiene $U \cap (E_{\delta}^{n,q})_{q-t+1} \neq \emptyset$.

Al ser $(E_{\delta}^{n,q})_{q-t+1}$ irreducible (ver proposición 1.5) el abierto $(E_{\delta}^{n,q})_{q-t+1} - (E_{\delta}^{n,q})_{q-t}$ de $(E_{\delta}^{n,q})_{q-t+1}$ es denso.

Dado que el abierto de $(E_{\delta}^{n,q})_{q-t+1}$ , $U \cap (E_{\delta}^{n,q})_{q-t+1}$ es no vacio obtenemos que $U \cap ((E_{\delta}^{n,q})_{q-t+1} - (E_{\delta}^{n,q})_{q-t}) \neq \emptyset$ , con lo cual $U \cap (NG_t - NG_{t+1}) \neq \emptyset$.

Que es lo que queríamos demostrar.

Como consecuencia inmediata del anterior teorema se deduce el siguiente corolario:

<u>1.7 Corolario</u>: Para todo $2 \leqslant t \leqslant q_o = \text{máx} \{ v(I) \ / \ I \in Id(3,\delta) \}$ existe un ideal $I \in Id(3,\delta)$ tal que el número de elementos de un sistema de generadores minimal de I es igual a t (i.e. $v(I) = t$).

El objetivo que nos planteamos ahora es el de dar una descripción de los ideales $I(z)$ para z un punto cerrado genérico de $NG_v$. Para ello nos ha sido necesario obtener en la sección siguiente una serie de resultados sobre las variedades determinantales de codimensión dos de $(k^N,0)$ con $N \geqslant 3$.

## 2. Ideales perfectos de altura dos de $k\|X_1,\dots,X_N\|$.

En esta sección tomaremos $N \geqslant 3$.

Denotaremos por $P|-a|$ el anillo de polinomios $P=k|X_1,\dots,X_N|$. con la graduación en la que la pieza de grado n de $P|-a|$ es la de grado n-a de P con la graduación ordinaria.

Si a y b son un par de enteros en esta sección tomaremos $\binom{a}{b} = 0$ si $a<b$.

Para cualquier $(a^l_{ij})$ $\begin{array}{l} i=1,2,\dots,\bar{q} \\ j=1,2,\dots,\bar{q}-1 \\ l=1,2,\dots,N \end{array}$ $\in k^{N\bar{q}(\bar{q}-1)}$ se considera la matriz $B(a^l_{ij}) = \left(\sum_{l=1}^{N} a^l_{ij} X_l\right)$ $\begin{array}{l} i=1,2,\dots,\bar{q} \\ j=1,2,\dots,\bar{q}-1 \end{array}$ ; $I(a^l_{ij})$ será el ideal engendrado en $P=k|X_1,\dots,X_N|$ por los menores maximales de la matriz $B(a^l_{ij})$.

<u>2.1 Proposición</u>: Existe un abierto $Z_{\bar{q}} \subset k^{N\bar{q}(\bar{q}-1)}$ no vacío, tal que para todo $(a^l_{ij}) \in Z_{\bar{q}}$ se verifican las siguientes propiedades:

(i) El ideal $I(a^l_{ij})$ es de altura dos, perfecto y radical.

(ii) La función de Hilbert del subesquema V de $\mathbb{P}_{N-1}$ definido por el ideal $I(a^l_{ij})$ es igual a

$$F_V(t) = \binom{N+t-1}{N-1} - \bar{q}.\binom{N+t-\bar{q}}{N-1} + (\bar{q}-1).\binom{N+t-\bar{q}-1}{N-1}$$

<u>Demostración</u>: Sea A la k-álgebra $k|X_{ij}$ ; $i=1,2,\dots,\bar{q}$ , $j=1,2,\dots,\bar{q}-1|$ y $D \subset \mathbb{P}_{\bar{q}(\bar{q}-1)-1}$ la variedad definida por la anulación de los menores maximales de la matriz $X=(X_{ij})$. Sabemos (ver principio de la sección 1) que el lugar singular de D es la variedad D' de $\mathbb{P}_{\bar{q}(\bar{q}-1)-1}$ definida por la anulación de los menores de orden $(\bar{q}-2)$ de la matriz X y que D y D' son irreducibles.

Sea $L(a^l_{ij})$ la variedad lineal de $\mathbb{P}_{\bar{q}(\bar{q}-1)-1}$ definida por las ecuaciones paramétricas

$$X_{ij} = \sum_{l=i}^{N} a^l_{ij} X_l ,$$

es inmediato comprobar que el ideal $I(a^l_{ij})$ define la intersección $L(a^l_{ij}) \cap D$ como subvariedad de la variedad lineal $L(a^l_{ij})$.

Del teorema de Bertini se obtiene que existe un abierto $Z_{\bar{q}} \subset k^{N\bar{q}(\bar{q}-1)}$ tal que para todo $(a^l_{ij}) \in Z_{\bar{q}}$ se verifican las siguientes propiedades:

(a) $L(a^l_{ij}) \cap (D-D')$ es no singular.

(b) $L(a^l_{ij}) \cap D$ es reducido irreducible y la dimensión N-3.

Al ser $L(a^l_{ij}) \cap D$ reducido el ideal $I(a^l_{ij})$ es radical.

Recordemos que el ideal $I(a^l_{ij})$ está engendrado por los menores maximales de la matriz $B(a^l_{ij})$, al ser su altura igual ~~a~~ dos (ya que la dimensión de $L(a^l_{ij}) \cap D$ es N-3) es determinantal (ver Ap-II). Del teorema 2 de Ap-II, que es válido para el anillo P, deducimos que $I(a^l_{ij})$ es perfecto y que el complejo de morfismos de grado cero

$$0 \longrightarrow (P|-\bar{q}|)^{\bar{q}-1} \xrightarrow[B(a^l_{ij})]{} (P|-\bar{q}+1|)^{\bar{q}} \xrightarrow[d'(a^l_{ij})]{} P \longrightarrow \frac{P}{I(a^l_{ij})} \longrightarrow 0$$

es exacto, con $d'(a^l_{ij})$ la $\bar{q}$-pla formada por los menores maximales de la matriz $B(a^l_{ij})$.

De la existencia de la anterior resolución deducimos que $F_V(t) = \dim_k \left(\left(\frac{P}{I(a^l_{ij})}\right)(t)\right) = \dim_k (P(t)) - \bar{q}\dim_k (P(t-\bar{q}-1)) + (\bar{q}-1).\dim_k (P(t-\bar{q}))$, de esta igualdad es inmediato concluir el apartado (ii).

2.2 Lema: Sea $I \subset R = k\|X_1,\ldots X_N\|$ un ideal perfecto y de altura dos. Después de un cambio de coordenadas lineal podemos suponer que las clases $\overline{X}_3,\ldots,\overline{X}_N \in A = \frac{R}{I}$ forman una sucesión regular y que para cada $i=3,4,\ldots,N$ la clase del elemento $\overline{X}_i$ en

$$\frac{A}{(\overline{X}_{i+1},\ldots,\overline{X}_N)}$$ es superficial de grado uno.

Demostración: Razonar por inducción sobre N y usar la demostración de la proposición 3.2 del capítulo I de SAL.

Definición: Dada una función $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$, $\Delta f$ será por definición la función $\Delta f(t) = f(t) - f(t-1)$.

Es habitual (ver 2.1 capítulo I de SAL) escribir el polinomio de Hilbert-Samuel de un anillo A, local y Noetheriano, en la forma

$$PHS_A(t) = e_o\binom{t+d}{d} + e_1\binom{t+d-1}{d-1} + \ldots + e_d,$$

donde d es la dimensión de A y $e_o,\ldots, e_d$ son enteros. Resulta con ello

$$\Delta^s PHS_A(t) = e_o\binom{t+d-s}{d-s} + \ldots + e_{d-s}.$$

2.3 Lema: Sea I un ideal de R de altura dos y perfecto. Sea un elemento de $A = \frac{R}{I}$ no divisor de cero y superficial de grado uno, entonces

$$PHS_{A/(x)} = \Delta PHS_A.$$

Demostración: De la proposición 3.1 del capítulo II de SAL, tenemos que

$$PHS_{A/(x)}(n) = \Delta PHS_A(n) + \dim_k\left(\frac{(m^n : x)}{m^{n-1}}\right)$$

para $n \gg 0$, donde m es el ideal maximal de A.

De la observación primera a la proposición 3.3 del capítulo I de SAL, deducimos que $(m^{n+1} : x) = m^n$ para $n \gg 0$.

De las anteriores igualdades se obtiene

$$PHS_{A/(x)} = \Delta PHS_A$$

para $n \gg 0$, por lo tanto se verifica el lema.

El siguiente teorema es una generalización del resultado principal que dimos en E-1.

<u>2.4 TEOREMA</u>: Sea I un ideal R perfecto y de altura dos, $v=v(I)$ y e la multiplicidad del cociente $A = \frac{R}{I}$. Se verifican las siguientes propiedades:

(a) $v(v-1) \leqslant 2e$

(b) Para todo $r \in \mathbb{N}$ existen ideales $I_r$ de R, perfectos y de altura dos, para los cuales $v(I_r) = r$ y la multiplicidad de $\frac{R}{I_r}$ es $\frac{1}{2}r(r-1)$.

(c) Son equivalentes:

(i) $v(v-1) = 2e$

(ii) Existe una base standard $f_1, \ldots, f_v$ de I que es un sistema de generadores minimal de I y cuyos elementos verifican orden $(f_i) = v-1$.

El anillo Gr(A) es Cohen-Macaulay.

(d) Si se verifican las condiciones equivalentes del apartado anterior, la función $\Delta FHS_A$ es igual a:

$$\Delta FHS_A(t+1) = \binom{t+N-1}{N-1} - v\binom{t-v+N}{N-1} + (v-1)\binom{t-v-1+N}{N-1}$$

<u>Demostración</u>: (a) Al ser el ideal I determinantal (ver Ap-II), del corolario dos al teorema cinco de BUR, sabemos que

(1) $I \subset M^{v-1}$

Gracias a los lemas 2.2 y 2.3 podemos suponer elegidos $X_3,\dots,X_N$ de modo que

$$(2) \qquad \dim_k \left(\frac{R}{I+(X_3,\dots,X_N)}\right) = e$$

De la condición (1) deducimos que las clases de los elementos $X_1^i\,X_2^j$, con $i+j \leq v-2$, en el cociente

$$\frac{R}{I+(X_3,\dots,X_N)}$$

son independientes sobre k.

Dado que el número de elementos $X_1^i\,X_2^j$, con $i+j \leq v-2$, es igual a $\frac{v(v-1)}{2}$, de la igualdad (2) obtenemos

$$\frac{v(v-1)}{2} \leq \dim_k \left(\frac{R}{I+(X_3,\dots,X_N)}\right) = e$$

(b) Sea $a = (a_{ij}^1)$ un punto del abierto $Z_r \subset k^{N.r.(r-1)}$ de la proposición 2.1. El ideal I(a) es perfecto y de altura dos por lo tanto $J = I(a)R$ también es perfecto y de altura dos.

Al estar J engendrado por los menores maximales de la matriz $B = B(a)$ y al ser su altura igual a dos, es determinantal (ver Ap-II). Por lo tanto el cociente $\frac{R}{J}$ admite una resolución libre:

$$(w) \qquad 0 \longrightarrow R^{r-1} \xrightarrow{B} R^r \xrightarrow{d'} R \longrightarrow \frac{R}{J} \longrightarrow 0\,,$$

donde d' es la r-pla de los menores maximales de B.

Al pertenecer los coeficientes de B al ideal maximal de R la resolución (w) es minimal, luego $v(J)=r$.

Al ser $\frac{R}{J}$ la completación $(\bar{X}_1,\dots,\bar{X}_N)$ - ádica del anillo $\frac{P}{I(a)}$, sus funciones de Hilbert-Samuel coincidem. De la proposición 2.1 (ii) se concluye que la multiplicidad de $\frac{R}{J}$ es $\frac{1}{2}\,r(r-1)$.

(c) (i) $\Longrightarrow$ (ii). Elegidos $X_3,\dots,X_N$ como en la demostración del apartado (a), las clases de los elementos $X_1^i\ X_2^i$, con $i+j\leq v-2$, en el cociente

$$\bar{A} = \frac{R}{I+(X_3,\dots,X_N)}$$

son independientes sobre k. De la hipôtesis $v(v-1)=2e$ deducimos que el anterior conjunto de clases es una base de $\bar{A}$ como k-espacio vectorial.

Por lo tanto fijados i,j, con $i+j=v-1$, existen elementos $f_{ij}\in I$, $\lambda_{a,b}\in R$ y $g_{ij}\in(X_3,\dots,X_N)R$ tales que

$$X_1^i\ X_2^j = \sum_{a+b\leq v-2} \lambda_{a,b}\ X_1^a\ X_2^b + f_{ij} + g_{ij}$$

Al ser el ideal I determinantal (ver Ap-II), del corolario dos al teorema cinco de BUR, sabemos que

(3) $$I\subset M^{v-1},$$

con lo cual orden $(f_{ij})\geqslant v-1$ y $\lambda_{a,b}=0$. Así obtenemos

$$f_{ij} = X_1^i\ X_2^j - g_{ij}$$

para $i+j=v-1$.

Sean $h_1,\dots,h_v$ un sistema de generadores minimal de I, escribiendo los elementos $f_{ij}$ como combinación lineal de los generadores resulta una igualdad matricial de la forma

$$(f_{ij})_{i+j=v-1} = L(h_i)_{i=1,2,\dots,v},$$

donde L es una matriz de dimensiones v x v con coeficientes en R.

Sean $h_i^o$ y $g_{ij}^o$ las formas de grado v-1 de los elementos $h_i$ y $g_{ij}$ respectivamente para $i=1,2,\dots,v$ y $i+j=v-1$; denotemos por $L^o$ la matriz formada por los términos independientes de los coeficientes de L. De la inclusión (3) deducimos que orden $(f_{ij}) \geqslant v-1$, orden $(h_i) \geqslant v-1$, por lo tanto

$$(4) \qquad (X_1^i\, X_2^j - g_{ij}^o)_{i+j=v-1} = L^o\, (h_i^o)_{i=1,2,\ldots,v}.$$

Dado que los elementos $g_{ij}^o$, para $i+j=v-1$, pertenecen al ideal $(X_3,\ldots,X_N)R$ los polinomios $X_1^iX_2^j - g_{ij}^o$ son linealmente independientes sobre k. De la igualdad (4) es fácil deducir que $L^o$ es inversible. Así la matriz L es inversible y $\{f_{ij}\}_{ij=v-1}$ es un sistema de generadores minimal de I.

A continuación vamos a demostrar que $\{f_{ij}\}_{i+j=v-1}$ es una base standard de I.

Sea H una matriz de dimensiones v x (v-1) cuyos menores maximales sean los elementos $f_{ij}$ (ver para su existencia Ap-II proposición 2-(iii)). De la proposición 2-(ii)(b) de Ap-II se deduce que las columnas de H forman un sistema de generadores del módulo de relaciones de los elementos $f_{ij}$. Al ser $\{f_{ij}\}_{i+j=v-1}$ un sistema de generadores minimal de I los coeficientes de H pertenecen al ideal maximal de R.

Denotemos por $\bar{H}$ la matriz cuyos coeficientes sean las formas de grado uno de los coeficientes de H. Dado que los coeficientes de H pertenecen al ideal maximal de R es fácil probar que los menores maximales de $\bar{H}$ son las formas iniciales de los elementos $f_{ij}$, que denotaremos por $l_{ij}$ (observemos que $l_{ij} = X_1^iX_2^j - g_{ij}^o$ ).

Gracias al corolario 1.10 de R-V para demostrar que $\{f_{ij}\}$ es una base standard basta ver que para toda relación homogénea $(c_1,\ldots,c_v)$ de los elementos $\{l_{ij}\}$, existe una relación $(\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_v)$ de los elementos $\{f_{ij}\}$ tal que la forma inicial de $\bar{c}_i$ sea $c_i$, para $i=1,2,\ldots,v$. La relación $(\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_v)$ se dirá que es una elevación de $(c_1,\dots,c_v)$.

El ideal $J=(l_{ij};\ i+j=v-1)\subset P$ es homogéneo y define una variedad Y de $\mathbb{P}_{N-1}$. Observemos que el ideal $J+(X_3,\dots,X_N)$ es igual a $(X_1^i X_2^j\ ;\ i+j=v-1,\ X_3,\dots,X_N)$ ya que $g_{ij}^o\in(X_3,\dots,X_N)R$. Por lo tanto la intersección de Y con la variedad lineal $X_3=\dots=X_N=0$ es vacía, luego el ideal de J es de altura mayor o igual que 2. Dado que el ideal J está engendrado por los menores maximales de $\bar{H}$ su altura es menor o igual que dos (proposición 1 de Ap-II), así deducimos que ht(J)=2 y el ideal J es perfecto (proposición 1-(i) de Ap-II). De la proposición 2-(ii)(b) de Ap-II obtenemos que las columnas de $\bar{H}$ son un sistema de generadores del módulo de relaciones de los elementos $l_{ij}$.

Dada una relación homogénea $(c_1,\dots,c_v)$ de los elementos $l_{ij}$, existen $\lambda_1,\dots,\lambda_{v-1}$ tales que

$$(c_1,\dots,c_v)=\sum_{i=1}^{v-1}\lambda_i(\bar{H})_i\ ,$$

siendo $(\bar{H})_i$ la columna i-ésima de la matriz $\bar{H}$. Es fácil deducir, vista la definición de $\bar{H}$, que la relación de los elementos $f_{ij}$ definida por

$$(\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_v)=\sum_{i=1}^{v-1}\lambda_i(H)_i\ ,$$

con $H_i$ la columna i-ésima de la matriz H, verifica que la forma inicial de $\bar{c}_i$ es igual a $c_i$ para $i=1,2,\dots,v$. Por lo tanto toda relación homogénea $(c_1,\dots,c_2)$ de los elementos $\{l_{ij}\}$ se eleva a una relación $(\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_v)$ de los elementos $\{f_{ij}\}$. Gracias al corolario 1.10 de R-V $\{f_{ij}\}$ es una base standard del ideal I.

Al ser $\{f_{ij}\}$ base standard de I las formas iniciales de los elementos $f_{ij}$, para i+j=v-1, engendran el ideal Gr(I). Dado que dichas formas iniciales son, por definición, los elementos $l_{ij}$, para i+j=v-1, tenemos que J=Gr(I).

Habíamos demostrado que J era perfecto por lo tanto el anillo $Gr(A)=\dfrac{k[X_1,\ldots,X_N]}{Gr(I)}$ es Cohen-Macaulay.

(c) (ii) $\Longrightarrow$ (i) y (d). Sea $f_1,\ldots,f_v$ una base standard de I con orden $(f_i)=v-1$. Denotemos por $g_i$ la forma inicial de $f_i$, entonces $Gr(I)=(g_1,\ldots,g_v)$.

Al ser $f_1,\ldots,f_v$ un sistema de generadores minimal, gracias al lema 6 del capítulo II §2 de HI-2, $g_1,\ldots,g_v$ es un sistema de generadores minimal de Gr(I).

Consideremos una resolución proyectiva minimal de Gr(A) = $\dfrac{P}{Gr(I)}$ : $0 \longrightarrow (P[-v])^{v-1} \longrightarrow (P[-v+1])^{v} \xrightarrow{(g)} P \longrightarrow Gr(A) \longrightarrow 0,$

con g el morfismo determinado por la v-pla $(g_1,\ldots,g_v)$. Gracias a la anterior resolución podemos calcular la función de Hilbert del anillo graduado Gr(A):

$$\dim_k(Gr(A)(t)) = \binom{t+N-1}{N-1} - v\binom{t-v+N}{N-1} + (v-1)\binom{t-v-1+N}{N-1}.$$

Observemos que $Gr(A)(t) = \Delta FHS_A(t+1)$, de lo cual deducimos, mediante un cálculo sencillo, los apartados (c) (i) y (d).

<u>2.5 Corolario</u>: Supongamos 2e=v(v-1). La función de Hilbert-Samuel de A verifica:

$$FHS_A(t) = FHS_R(t) \qquad t \leq v-1$$
$$FHS_A(t) = PHS_A(t) \qquad t \geq v \quad ,$$

en particular el índice de regularidad de A es igual a v.

<u>Demostración</u>: Es consecuencia inmediata del apartado (d).

2.6 Corolario: Supongamos $2e=v(v-1)$. Todo sistema de generadores minimal de $I$, $f'_1,\dots,f'_v$ es una base standard y orden$(f'_i)=v-1$.

Demostración: Sea $f_1,\dots,f_v$ un sistema de generadores minimal de I que verifique la condición (c) (ii) del teorema. Gracias a la proposición uno de Ap-III existe una matriz inversible C de dimensiones $v \times v$ con coeficientes en R tal que $(f)=C(f')$.

Al ser el ideal I determinantal del corolario 2 al teorema 5 de BU deducimos que $I \subset M^{v-1}$. Por lo tanto los órdenes de los elementos $f'_i$ son mayores o iguales que $v-1$, para $i=1,2,\dots,v$.

Sea $\{f^o_i\}$ la v-pla de las formas iniciales de los elementos $\{f_i\}$, $\{f''_i\}$ la v-pla de las formas de grado $v-1$ de los elementos $\{f'_i\}$ y $C^o$ la matriz de los términos independientes de los coeficientes de C.

Al ser los órdenes de los elementos $\{f'_i\}$ mayores o iguales que $v-1$, tenemos que grado $(f''_i) \geqslant v-1$ para $i=1,2,\dots,v$. Por otro lado sabemos que grado $(f^o_i)=v-1$ (condición (c)(ii)), por lo tanto de la igualdad $(f)=C(f')$ deducimos

(1) $$(f^o_i) = C^o\ (f''_i)$$

El conjunto $\{f_i\}$ $i=1,2,\dots,v$ es una base standard de I ya que verifica el apartado (c)(ii) del teorema, por lo tanto el conjunto de formas iniciales $\{f^o_i\}$' $i=1,2,\dots,v$ engendran el ideal Gr(I). Si $\{f^o_i\}$ $i=1,2,\dots,v$ fuese un conjunto linealmente dependiente, Gr(I) podría ser engendrado por $v-1$ elementos $f^o_{i_1},\dots,f^o_{i_{v-1}}$ ; gracias al lema 6, chap II §2, de HI-2 los elementos $f_{i_1},\dots,f_{i_{v-1}}$ engendrarían I en contra de la hipótesis $v(I) = v$. Así $f^o_1,\dots,f^o_v$ son v formas de grado

$v-1$ linealmente independientes.

De la igualdad (1) y de la independencia de $f_1^o,\dots,f_v^o$ deducimos que $C^o$ es inversible. Por lo tanto $\{f_i''\}_{i=1,2,\dots,v}$ es un sistema de generadores del ideal $Gr(I)$, luego $\{f_i'\}_{i=1,2,\dots,v}$ es una base standard de $I$.

De la igualdad $(f_i'')=(C^o)^{-1}(f_i^o)$ y de la independencia de los elementos $\{f_i\}$ $i=1,2,\dots,v$ es fácil probar que $f_i''\neq 0$, por lo tanto orden $(f_i')=v-1$ para $i=1,2,\dots,v$.

Recordemos que $q_o=\max\{v(I)/I\ Id(e,\delta)\}$, y que $NG_j$ es el conjunto de puntos cerrados $z\in E^{n,q}$ tales que el número de elementos de un sistema de generadores minimal del ideal $I(z)$ sea mayor o igual que $j$.

2.7 Proposición: Para cada $i=q-q_o+1,\dots,q-1$ existe un abierto no vacío $Z_i'$ del conjunto $NG_{q-i+1}$ tal que para todo $z\in Z_i'$ se verifican:

(i) El número de elementos $v$ de un sistema de generadores minimal de $I(z)$ es igual a $q-i+1$.

(ii) El germen de curva reducida definida por $I(z)$ es ordinario, de multiplicidad $\frac{1}{2}v(v-1)$ y tiene orden de singularidad igual a $\frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$.

Demostración: Sabemos, gracias al teorema 1.5, que el conjunto $NG_{q-i+1}$ coincide con el de los puntos cerrados de $(E_\delta^{n,q})_i$, por lo tanto basta probar que existe un abierto no vacío de $(E_\delta^{n,q})_i$ cuyo conjunto de puntos cerrados verifica (i) y(ii).

Para cada conjunto de índices $U=\{u_1,\dots,u_{i-1}\}\subset 1,2,\dots,v$ y $T=\{t_1,\dots,t_{i-1}\}\subset 1,2,\dots,v-1$ se considera el abierto $\mathcal{B}(U,T)$ de $(E_\delta^{n,q})_i$ complementario del cerrado definido por la ecuación

$$\det((z^{o}_{lj})_{l\in U, j\in T}) = 0$$

Sea Y el espacio afín de las matrices v x (v-1), con coeficientes polinomios de grado menor o igual que n, de la forma

$$\begin{array}{cc} \overbrace{\phantom{\begin{array}{c|c} C & 0 \end{array}}}^{T} & \\ \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & Id \end{array}\right) & \}\, U \end{array}$$

Donde C es una matriz con coeficientes pertenecientes al ideal $(X_1, \ldots, X_N)$.

Vamos a definir un morfismo $\varphi$ entre $\mathcal{B}(U,T)$ e Y.

Sea z un punto de $\mathcal{B}(U,T)$, escribamos la matriz B(z) en la forma:

$$B(z) = \left(\begin{array}{c|c} E & \overbrace{L_1}^{T} \\ \hline L_2 & A \end{array}\right) \}\, U,$$

y consideremos la matriz

$$(1) \qquad \left(\begin{array}{c|c} \bar{C} & 0 \\ \hline 0 & Id \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} Id & -L_1A^{-1} \\ \hline 0 & Id \end{array}\right) B(z) \left(\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline -A^{-1}L_2 & A^{-1} \end{array}\right)$$

Es inmediato comprobar que los menores maximales de la matriz anterior engendran el ideal I(z). Gracias al teorema de truncación efectiva (III-2.7), el ideal engendrado por los menores maximales de la matriz obtenida truncando módulo n+1 los coeficientes de la matriz (1), es analíticamente equivalente a I(z).

Al pertenecer el punto z a $\mathcal{B}(U,T) \subset (E^{n,q}_{\delta})_i$ el rango de la matriz $B^{o}(z)$ es igual a i-1, por lo tanto el rango de la matriz de los términos independientes de la matriz (1) es también igual a i-1. Luego los coeficientes de $\bar{C}$ pertenecen al ideal $(X_1,\dots,X_N)$ y el número de elementos de un sistema de generadores minimal del ideal $I(z)$ es igual a $v=q-i+1$.

Por definición $\varphi(z)$ será la matriz obtenida de la (1) truncando sus coeficientes módulo n+1.

Hemos visto que los ideales engendrados por los menores maximales de $B(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticamente equivalentes; si demostramos que existe un abierto $V(U,T)$ de $Y$, que corte a $\mathrm{Imag}\varphi$, tal que para toda matriz perteneciente a dicho abierto el ideal engendrado por sus menores maximales verifica (i) y (ii), se concluye la proposición tomando $Z_i' = \bigcup_{U,T} \varphi^{-1}(V(U,T))$.

Sea $\bar{Y} = k^{N(q-i+1).(q-i)}$ el espacio afín que parametriza las matrices $B(a^1_{ab}) = (\sum_{l=1}^{N} a^1_{ab} X_1)$ $\begin{array}{l} a=1,2,\dots,q-i+1 \\ b=1,2,\dots,q-i \end{array}$ (ver proposición 2.1).

Consideremos el morfismo $\pi\colon Y \longrightarrow \bar{Y}$ que a una matriz de Y

$$\overbrace{\phantom{0}}^{T}\qquad \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Id} \end{array}\right)\Big\}\,U$$

le asigna la matriz de las formas lineales de los coeficientes de C.

Sea $Z_{q-i+1} \subset \bar{Y}$ el abierto de la proposición 2.1, vamos a ver que $\pi^{-1}(Z_{q-i+1}) = V(U,T)$ es un abierto de Y que verifica (i) y (ii). Para ello necesitamos el lema siguiente:

<u>2.8 Lema</u>: Sea C una matriz de dimensiones $\bar{q} \times (\bar{q}-1)$ y de coeficientes pertenecientes a $(X_1,\dots,X_N)$, tal que la matriz $C^1$ de las formas lineales de los coeficientes de C pertenezca a $Z_{\bar{q}}$.

Se verifican las siguientes propiedades:

(i) Los menores maximales $f_1,\dots,f_{\bar{q}}$ de la matriz C son una base standard de $I=(f_1,\dots,f_q)$.

(ii) Los ideales I, Gr(I) son perfectos, radicales y de altura dos.

(iii) La función de Hilbert de $Gr(\frac{R}{I})$ es igual a la del apartado (ii) de la proposción 2.1.

Demostración del lema: En primer lugar vamos a demostrar que $ht(I) = 2$.

Al estar el ideal I engendrado por los menores maximales de la matriz C, su altura es menor o igual que dos (ver proposición 1 de Ap-II).

Obsérvese que el ideal Gr(I) contiene a los menores maximales $g_1,\dots,g_{\bar{q}}$ de la matriz $C^1$, dado que $C^1$ pertenece a $Z_{\bar{q}}$ tenemos que $ht(g_1,\dots,g_{\bar{q}}) = 2$, por lo tanto $ht(Gr(I)) \geqslant 2$. Dado que $ht(Gr(I)) = ht(I)$, obtenemos que $ht(I) \geqslant 2$. Como ya sabíamos que $ht(I) \leqslant 2$, concluimos que I tiene altura dos.

Al ser I un ideal engendrado por los menores maximales de una matriz $\bar{q} \times (\bar{q}-1)$ y de altura dos, es determinantal. De la proposición 2 de Ap-II el ideal I es perfecto y las columnas de C forman un sistema de generadores del módulo de relaciones de $f_1,\dots,f_{\bar{q}}$. Análogamente, al ser el ideal $(g_1,\dots,g_{\bar{q}})$ perfecto (ver proposición 2.1) las columnas de $C^1$ forman un sistema de generadores del módulo de relaciones de $g_1,\dots,g_{\bar{q}}$.

Es fácil demostrar, ver demostración (i) $\Longrightarrow$ (ii) del teorema 2.4, que toda relación homogénea de los elementos $g_1,\dots,g_{\bar{q}}$ se eleva a una relación de los elementos $f_1,\dots,f_{\bar{q}}$. Del corolario 1.10 de R-V deducimos que $f_1,\dots,f_{\bar{q}}$ es una base standard de I, por lo tanto $(g_1,\dots,g_{\bar{q}}) = Gr(I)$.

Al pertenecer $C^1$ a $Z_{\bar{q}}$ el anillo $Gr(\frac{R}{I}) = \frac{P}{(g_1,\ldots,g_{\bar{q}})}$ es reducido, de la inclusión $\frac{R}{I} \subset Gr(\frac{R}{I})$ deducimos que el cociente $\frac{R}{I}$ es reducido. Así mismo, de la pertenencia a $Z_{\bar{q}}$ de la matriz $C^1$ obtenemos que la función de Hilbert de $Gr(\frac{R}{I})$ es igual a la del apartado (ii) de la proposición 2.1.

<u>Continuación de la demostración de 2.7.</u> Gracias al lema anterior para todo punto cerrado $z \in \varphi^{-1}.\pi^{-1}(Z_{q-i+1})$ el ideal $I(z)$ es perfecto, radical y de altura dos.

Al ser el ideal $Gr(I(z))$ radical, el germen definido por $I(z)$ es ordinario y por lo tanto el orden de singularidad del germen es igual al número de reducción del anillo $\frac{R}{I}$ (ver proposición I-1.3 (iii)).

Gracias al lema anterior conocemos la función de Hilbert de $Gr(\frac{R}{I})$, lo que nos permite calcular el polinomio de Hilbert-Samuel de $\frac{R}{I}$ y obtener que la multiplicidad de $\frac{R}{I}$ es igual a $\frac{1}{2}\, v(v-1)$ y su número de reducción igual a $\frac{1}{3}\, v(v-1)(v-2)$.

Como ya habíamos visto que $v(I(z)) = v$, sólo falta ver que $\varphi^{-1}.\pi^{-1}(Z_{q-i+1})$ es no vacío. Para ello basta tomar un punto $z$ de $(E_{\delta}^{n,q})_i$ cuya matriz asociada $B(z)$ sea de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} C & \overbrace{0}^{T} \\ \hline 0 & Id \end{array}\right)\Big\}U \quad ,$$

con $C \in Z_{q-i+1}$.

La siguiente proposición, excepto el apartado (ii), es una aplicación de los anteriores resultados para el caso N=3.

2.9 Proposición: Sea I un ideal perfecto, radical, y de altura dos del anillo $R = k\|X_1,X_2,X_3\|$. Denotemos por e y $\delta$ la multiplicidad y orden de singularidad del cociente $R/_I$ respectivamente, sea v el número de elementos de un sistema de generadores minimal de I (i.e. v= v(I)). Se verifican las siguientes propiedades:

(i) $2e \geqslant v(v-1)$

(ii) Si $2e = v(v-1)$ entonces $3\delta \geqslant v(v-1)(v-2)$.

Para todo $v \in \mathbb{N}$ existe un ideal I perfecto, radical, y de altura dos del anillo R tal que:

(iii) La multiplicidad del cociente es $\frac{1}{2}v(v-1)$ y el número de elementos de un sistema minimal de generadores de I es igual a v.

(iv) El germen de curva definido por I presenta en el origen una singularidad ordinaria y tiene orden de singularidad igual a $\frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$.

Demostración: Los apartados (iii) y (iv) se deducen de la proposición 2.7. El apartado (i) del teorema 2.4 (a).

En cuanto a (ii), sea m el ideal maximal de $A= \frac{R}{I}$.

Para todo $n \geqslant \frac{1}{2}v(v-1)$ se verifica, gracias a la proposición 1 de Ap-I, que

$$(1) \qquad \dim_k(\frac{A}{m^n}) = \frac{1}{2}v(v-1).n-\rho$$

Consideremos la igualdad:

$$(2) \quad \dim_k(\frac{A}{m^n}) = \dim_k(\frac{A}{m^{v-1}}) + \dim_k(\frac{m^{v-1}}{m^v}) + \ldots + \dim_k(\frac{m^{n-1}}{m^n}).$$

Del corolario 2.5 sabemos que la igualdad (1) se verifica para $n \geqslant v-1$, por lo tanto gracias a la proposición 2 de Ap-I obtenemos

$$\dim_k\left(\frac{m^s}{m^{s+1}}\right) = \frac{1}{2}\, v(v-1)$$

para $s \geqslant v-1$. Al ser el ideal I determinantal, del corolario dos al teorema cinco de BUR sabemos que

$$I \subset M^{v-1}$$

Luego de la igualdad (2) concluimos

$$\dim_k\left(\frac{A}{m^n}\right) = \binom{v+1}{3} + \frac{1}{2}(n-v+1)v(v-1) \quad ,$$

por lo tanto $p = \frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$. Al ser $\delta \geqslant \rho$ (ver I-1.3(iii)) obtenemos el apartado (ii).

<u>2.10 Proposición</u>: La proposición 2.9 es cierta si substituimos el anillo $R = k\|X_1,X_2,X_3\|$ por $S = k|X_1,X_2,X_3|_{(X_1,X_2,X_3)}$.

<u>Demostración</u>: Si I es un ideal perfecto, radical, y de altura dos del anillo S, el ideal $\hat{I}=I.R$ también es perfecto, radical, y de altura dos.

Dado que $v(I) = v(\hat{I})$ y que el orden de singularidad del germen de curva de Spec (S) definido por I es igual al del germen de curva de $(k^N,0)$ = Spec(R) definido por $\hat{I}$, aplicando los apartados (i) y (ii) al ideal $\hat{I}$ obtenemos que el ideal I también verifica los apartados (i) y (ii).

Para los apartados (iii) y (iv) basta tomar un punto $z \in Z_i'$ (ver proposición 2.7) y considerar el ideal $I=J(z)$.

En las proposiciones anteriores hemos establecido para cada v la existencia de ideales de los anillos $k\|X_1,X_2,X_3\|$ y $S_3 = k|X_1,X_2,X_3|_{(X_1,X_2,X_3)}$ con sistemas minimales de generadores de v elementos.

En 1906 F.S. Macaulay (ver MAC pág. 36 o AB, GEY) construyó, para todo $n \geqslant 2$, ideales primos de altura dos del anillo $S_3$, que denotaremos por $M_n$, que verifican $v(M_n) = n$. Más concretamente: $\frac{S_3}{M_n}$ es el anillo de gérmenes de funciones en el origen de una curva C que pasamos a describir: considérense $\frac{1}{2}n(n-1)$ rectas pasando por el origen $0 \in k^N$ no contenidas en un cono de orden $n-2$. Sea $Q_1$ un cono de orden n y $Q_2$ una superfície, que no sea un cono, de orden n, que contengan las rectas. Pueden elegirse las superfícies $Q_1$ y $Q_2$ de tal manera que $Q_1 \cap Q_2$ sea la unión de las $\frac{1}{2}n(n-1)$ rectas y una curva irreducible C de orden $\frac{1}{2}n(n+1)$ que presenta en el origen una singularidad ordinaria de multiplicidad $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Por construcción la curva C tiene multiplicidad $\frac{1}{2}n(n-1)$, y n es el número de elementos de un sistema de generadores minimal de $M_n$.

En 1974 T.T.MOH (ver MOH) construyó, para todo número natural impar n 3, ideales primos de altura dos de k $X_1,X_2,X_3$ que denotaremos por $H_n$, que verifican $v(H_n) = n+1$. Más concretamente, $H_n$ es el ideal de la rama de $(k^3,0)$ que admite parametrización propia:

$$\begin{cases} X_1 = t^{n.m} + t^{n.m+\lambda} \\ X_2 = t^{(n+1).m} \\ X_3 = t^{(n+2).m} \end{cases}$$

con $m = \frac{n+1}{2}$, $\lambda$ un número natural mayor que $(n+1).n.m$ y primo con m. Obsérvese que la multiplicidad de $\frac{k\|X_1,X_2,X_3\|}{H_n}$ es igual a $\frac{n.(n+1)}{2}$.

Las proposiciones 2.9 y 2.10 nos permiten afirmar:

2.11 Proposición: Los ejemplos de Macaulay y de Moh son ideales de multiplicidad mínima fijado el número de elementos de un sistema minimal de generadores.

Definición: Diremos que un ideal I, perfecto y de altura dos, de R es v-extremal si la multiplicidad de $\frac{R}{I}$ es igual a $\frac{1}{2}v(v-1)$ y el número de elementos de un sistema de generadores minimal de I es v (i.e. $v(I) = v$).

En el teorema 2.4 (d) habíamos visto que si I es un ideal v-extremal la función de Hilbert-Samuel del cociente $A=\frac{R}{I}$ queda fijada, en particular su polinomio de Hilbert-Samuel toma la forma

$$PHS_{A(t)} = \frac{v(v-1)}{2}\binom{t+N-2}{N-2} - \frac{v(v-1)(v-2)}{3}\binom{t+N-3}{N-3} + \dots .$$

A continuación vamos a probar que los ideales v-extremales están caracterizados por los dos primeros coeficientes de su polinomio de Hilbert-Samuel.

2.12 TEOREMA: Sea I un ideal de R perfecto y de altura dos. Supongamos que el polinomio de Hilbert-Samuel de $A=\frac{R}{I}$ tiene la forma

$$PHS_A(t) = \frac{r(r-1)}{2}\binom{t+N-2}{N-2} - \frac{r(r-1)(r-2)}{3}\binom{t+N-3}{N-3} + \dots .$$

En tal caso la función $\Delta FHS_A$ es igual a:

$$\Delta FHS_A\ (t+1) = \binom{t+N-1}{N-1} - r\binom{t-r+N}{N-1} + (r-1)\binom{t-r-1+N}{N-1} ,$$

y el número de elementos de un sistema de generadores minimal de I es igual a r (i.e. r=v(I)), en particular I es r-extremal.

Demostración: Se reducirá al caso N=3 por inducción sobre N.

Gracias al lema 2.2 podemos elegir las coordenadas de tal modo que $\bar{X}_N \in A$ sea un elemento superficial de grado uno y no divisor de cero. Del lema 2.3 obtenemos

$$PHS_{A/(\bar{X}_N)} = \Delta PHS_A ,$$

por lo tanto

$$(1) \qquad PHS_{A/(\bar{X}_N)}(t) = \frac{r(r-1)}{2}\binom{t+N-3}{N-3} - \frac{r(r-1)(r-2)}{3}\binom{t+N-4}{N-4} + \dots$$

Al ser $\bar{X}_N \in A$ un no divisor de cero el ideal $\frac{I+(X_N)}{I}$ está engendrado por una sucesión regular (i.e. $X_N$), del teorema II-1.2 de SAL deducimos que

$$v(I+(X_N)) = v(I) + v\left(\frac{I+(X_N)}{I}\right)$$

por lo tanto

$$v(I+(X_N)) = v(I) + 1 \qquad .$$

Repitiendo el anterior razonamiento para el ideal $\frac{I+(X_N)}{(X_N)}$ obtenemos

$$v(I+(X_N)) = v(X_N) + v\left(\frac{I+(X_N)}{(X_N)}\right) ,$$

de lo cual deducimos

$$(2) \qquad v(I) = v\left(\frac{I + (X_N)}{(X_N)}\right) .$$

De las igualdades (1) y (2) se desprende que basta demostrar el teorema para N=3.

Sea r=v(I), del teorema 2.4-(i) obtenemos

$$\frac{1}{2} v(v-1) \leqslant \frac{1}{2} r(r-1) ,$$

de donde $v \leqslant r$.

Consideremos la función $f_r : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f_r(t) = \text{Mín} \left\{ \binom{t+2}{2}, \binom{r}{2} \right\}$ para todo $t \in \mathbb{N}$.

Sea m el ideal maximal de A. Dado que la multiplicidad de A es $\frac{1}{2} r(r-1)$, de la proposición 2 de Ap-I deducimos que

$$(1) \qquad \dim_k \left( \frac{m^t}{m^{t+1}} \right) \leqslant f_r(t) ,$$

por lo tanto

$$FHS_A(t) \leqslant \sum_{i=0}^{t-1} f_r(i)$$

para todo $t \geqslant 0$.

Gracias a la proposición 1 de Ap-I para todo $t \geqslant \frac{r(r-1)}{2} - 1$ Se tiene la igualdad

$$FHS_A(t) = PHS_A(t) ,$$

por lo tanto para $\bar{t} = \frac{r(r-1)}{2} - 1$ se verifica la igualdad

$$FHS_A(\bar{t}) = \frac{r(r-1)}{2} \bar{t} - \frac{r(r-1)(r-2)}{3} ,$$

Por otro lado es fácil demostrar que

$$\sum_{i=0}^{\bar{t}-1} f_r(i) = \frac{r(r-1)}{2} \bar{t} - \frac{r(r-1)(r-2)}{3} ,$$

de lo cual deducimos

$$\sum_{i=0}^{\bar{t}-1} \dim_k \left(\frac{m^i}{m^{i+1}}\right) = FHS_A(\bar{t}) = \sum_{i=0}^{\bar{t}-1} f_r(i) ,$$

lo que fuerza, habida cuenta de (1), que se verifique

$$(2) \qquad \dim_k \left(\frac{m^t}{m^{t+1}}\right) = f_r\,(t)$$

para todo $t \geqslant 0$.

En particular tenemos que

$$\dim_k \left(\frac{m^{r-2}}{m^{r-1}}\right) = \binom{r}{2} ,$$

de donde $I \subset M^{r-1}$ .

Sea $f_1,\ldots,f_v$ una base minimal de I, sean $g_1,\ldots,g_\varepsilon$ las formas iniciales de los elementos de la base que tengan orden r-1. De la inclusión $I \subset M^{r-1}$ deducimos que $g_1,\ldots,g_\varepsilon$ generan la pieza de grado r-1 del ideal Gr(I) como k-espacio vectorial. La dimensión de esta pieza es igual a

$$\dim_k \;(Gr(I)\,|r-1|) = \dim_k \left(\frac{M^{r-1}}{M^r}\right) - \dim_k \left(\frac{m^{r-1}}{m^r}\right),$$

de donde, usando (2), se sigue

$$\dim_k \;(Gr(I)\,|r-1|) = \binom{r+1}{2} - \binom{r}{2} = r ,$$

por lo tanto $v \geqslant \varepsilon \geqslant r$.

Como ya habíamos demostrado $v \leqslant r$, obtenemos $v=r$.

Dado que la multiplicidad de $A=\frac{R}{I}$ es $\frac{1}{2}\,r(r-1)$ y $r=v(I)$, el ideal I es r-extremal. Del teorema 2.4 (d) obtenemos $\triangle FHS_A$.

El siguiente resultado es una recopilación de las condiciones equivalentes a v-extremal que han sido establecidas anteriormente.

2.13 TEOREMA: Sea I un ideal de R perfecto y de altura dos. Para todo $v \in \mathbb{N}$ son equivalentes:

(a) I es v-extremal.

(b) $v(I) = v$ y la multiplicidad de $A=\frac{R}{I}$ es $\frac{1}{2}v(v-1)$.

(c) El polinomio de Hilbert-Samuel de A tiene la forma

$$PHS_A(t) = \frac{1}{2}v(v-1)\binom{t+N-2}{N-2} - \frac{1}{3}r(r-1)(r-2)\binom{t+N-3}{N-3} + \dots$$

(d) La función de Hilbert-Samuel de A verifica

$$FHS_A(t+1) = \binom{t+N-1}{N-1} - v\binom{t-v+N}{N-1} + (v-1)\binom{t-v+N-1}{N-1}.$$

(e) $v(I) = v$, existe una base standard $f_1,\dots,f_v$ con $\text{orden}(f_i)=v-1$ y el anillo Gr(A) es Cohen-Macaulay.

Demostración: (a) $\Longleftrightarrow$ (b) por definición.

(b) $\Longleftrightarrow$ (e) $\Longrightarrow$ (d) teorema 2.4.

(d) $\Longrightarrow$ (c) cálculo directo.

(c) $\Longrightarrow$ (b) teorema 2.11.

Definición: $p_v(T)$ será el polinomio $p_v(T) = \frac{1}{2}v(v-1)T - \frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$. Obsérvese que $p_v(T)$ es el polinomio de Hilbert-Samuel del cociente $\frac{k\|X_1,X_2,X_3\|}{I}$ con I un ideal v-extremal.

Cerraremos esta sección con un resultado sobre los gérmenes de curvas de $(k^3,0)$, que nos permitirá calcular en la sección 3 la dimensión de $CH_{p_v(T),\delta,n+1}$:

2.14 Proposición: Sea $v \in \mathbb{N}$ y $\delta \geq \frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$. La variedad $(E_\delta^{n,q})_{q-v+1}$ es no vacía y $E^{n,q}_{\delta,p_v(T)}$ es un abierto denso de $(E_\delta^{n,q})_{q-v+1}$.

Demostración: Si $\delta \geqslant \frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$ el entero $q_o = \text{Máx}\left\{v(I)/I \ Id(3,\delta)\right\}$, gracias a la proposición 2.9, es mayor o igual que v. De la proposición 2.7 deducimos que $(E_\delta^{n,q})_{q-v+1} \neq \emptyset$.

En el teorema 1.4(i) demostramos que $NG_v$ era el conjunto de puntos cerrados de $(E_\delta^{n,q})_{q-v+1}$, de la proposición 2.11 obtenemos que $E^{n,q}_{\delta,p_v(T)} \subset (E_\delta^{n,q})_{q-v+1}$.

Gracias al teorema 1.4 el conjunto de puntos cerrados del abierto $V=(E_\delta^{n,q})_{q-v+1} - (E_\delta^{n,q})_{q-v}$ coincide con el conjunto de puntos cerrados $z \in E^{n,q}$ tales que $v(I(z))=v$. Si z es un punto cerrado cualesquiera de V se verifica

$$\frac{1}{2}\, v(v-1) \leqslant e$$

donde e es la multiplicidad de $\frac{k\|X_1,X_2,X_3\|}{I(z)}$ (teorema 2.4(a)).

De la semicontinuidad superior de la multiplicidad deducimos que existe un abierto $V' \subset V$ cuyo conjunto de puntos cerrados coincide con el conjunto de puntos cerrados $z \in E_\delta^{n,q}$ tales que $v(I(z))=v$ y la multiplicidad del cociente $\frac{k\|X\|}{I(z)}$ es igual a $\frac{1}{2}\, v(v-1)$. Del teorema 2.13 concluimos

$$V' = E^{n,q}_{\delta,p_v(T)} \quad , \quad ,$$

por lo tanto $E^{n,q}_{\delta,p_v(T)}$ es un abierto de $(E_\delta^{n,q})_{q-v+1}$. Es denso dado que $(E_\delta^{n,q})_{q-v+1}$ es irreducible (teorema 1.5).

El abierto es no vacío gracias a la proposición 2.7, quedando la proposición demostrada.

Observemos que del anterior resultado obtenemos que si z es un punto cerrado general de $(E_{\delta}^{n,q})_{q-v+1}$ el ideal I(z) es v-extremal.

OBSERVACIONES

(1) En general el graduado de un anillo local Cohen-Macaulay no es Cohen-Maculay, el teorema 2.4 da condiciones suficientes para que lo sea. Para otros resultados de este tipo ver SAL -2 y 3, OR-2.

(2) De las propiedades generales de la completación resulta fácilmente que los teoremas 2.4, 2.12 y 2.13 son válidos para ideales de altura dos perfectos de $S_N$.

(3) Es fácil probar, gracias a EGA-IV 3ª parte teorema 1.2.1 - (vii), que para $i=q-q_o+1,\dots,q-1$ existe un abierto no vacío $Z_i'' \subset (E_{\delta}^{n,q})_i$ tal que para todo punto cerrado $z \in Z_i''$ el ideal J(z) es primo y verifica las condiciones (i) y (ii) de la proposición 2.7.

Podemos decir que el objetivo de los ejemplos de Macaulay se alcanza genéricamente en la variedad $(E_{\delta}^{n,q})_i$.

(4) El teorema 2.12 para el anillo $S_N$ (ver nota (2)) permite dar un resultado análogo al obtenido en E-I teorema 1. Antes necesitamos una definición:

Definición: Sea I un ideal homogéneo de $P_N$. Se llamará serie de Hilbert-Samuel de $\frac{P_N}{I}$ a

$$\mathrm{Hilbt}_{P_N/I}(Z) = \sum_{i=0} \dim_k\left(\frac{P_N}{I}(i)\right)\cdot Z^i$$

2.15 Proposición: Sea I un ideal homogéneo de altura dos y perfecto de $P_N$, después de un cambio lineal de coordenadas podemos suponer que las clases de $X_3,\dots,X_N$ en $A=\frac{P_N}{I}$ forma una sucesión regular.

Demostración: Ver observación (c) pág. 9 de F-L.

Gracias a la proposición anterior es inmediato que

$$\frac{1}{(1-z)^{N-2}} \text{ Hilbt}_{\frac{A}{(\bar{X}_3,\dots,\bar{X}_N)}}(z) = \text{Hilbt}_A(z) \quad ,$$

del teorema 2.13 es fácil concluir:

2.16 Proposición: Sea I un ideal homogéneo de altura dos y perfecto de $P_N$. Sea e la multiplicidad de $(\frac{P_N}{I})_{(\bar{X}_1,\dots,\bar{X}_N)}$ y v un entero positivo, son equivalentes

(a) $v=v(I)$, $2e=v(v-1)$

(b) $\text{Hilbt}_{P_N/I}(z) = \frac{1}{(1-z)^{N-2}} \sum_{t=0}^{v-2} (t+1)z^t.$

De la proposición 8 de F-L obtenemos que la condición (b) de la anterior proposición es equivalente a:

(c) $P_N/I$ es un anillo Cohen-Macaulay extremal y $d=v-1$

(d) $P_N/I$ es una álgebra "compressed" del tipo $(v-1)z^{v-2}$

(e) $P_N/I$ es extremadamente compressed del tipo $(v-1)z^{v-2}$,

con lo cual obtenemos que las álgebras extremadamente compressed del tipo $(v-1)z^{v-2}$ son precisamente las v-extremales.

En particular obtenemos que los ejemplos de Macaulay son álgebras compressed ya que verifican la condición (a).

## 3. Cálculo de la dimensión de $CH_{p(T),\delta,n+1}$ para el polinomio $p(T)=\frac{1}{2}v(v-1)T-\frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$.

El objetivo de esta sección es calcular la dimensión de $CH=CH_{p(T),\delta,n+1}$ para $\delta \geqslant \frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$.

Recordemos que CH se definía como imagen por el morfismo $g_q$ de la variedad $E^{n,q}_{\delta,p(T)}$ para $q \geqslant q_o = \text{Máx}\left\{ v(I) \;\middle|\; I \in Id(3,\delta,p_v(T))\right\}$ . Gracias al teorema 2.12 $q_o=v$, por lo tanto podemos tomar $E=E^{n,v}_{\delta,p_v(T)}$ para definir CH.

Recordemos la definición de $g_v$. El morfismo $g_v$ hace corresponder a todo punto cerrado $z \in E$ el punto cerrado de $G_{n+1}$ asociado al espacio vectorial $R\big/(f_1,\ldots,f_v)+M^{n+1}$ , donde $f_1,\ldots,f_v$ son los menores maximales de la matriz $B(z)$.

De la proposición 2.14 deducimos que E es un abierto denso no vacio de $(E^{n,v}_{\delta})_1$, que a su vez es un abierto del espacio afín de las matrices $(f_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,v\\ j=1,\ldots,v-1}}$ tales que $f_{i,j}$ es un polinomio de grado no superior a n y de término independiente nulo (prop. 1.1).

Al ser E irreducible (es un abierto denso de un espacio afín) CH también lo es.

Sea $e=\frac{1}{2}v(v-1)$. Sean $\alpha_1,\ldots,\alpha_e$ ramas no singulares de $(k^3,0)$ para las que la clase de $X_1$ en los respectivos anillos sea un elemento superficial de grado uno. Sabemos (Cap. I) que la rama $\alpha_i$ admite una única parametrización propia de la forma

$$\alpha_i: \begin{cases} X_1 = t_i \\ X_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} a^i_{j,\ell} t_i^{\ell} \\ j=2,3 \end{cases}$$

para $i=1,\ldots,e$

Observemos que la rama $\alpha_i$ admite como vector tangente a $w_i=(1,a^i_{2,1},a^i_{3,1})$. Denotemos por $P_i$ el punto del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ cuyas coordenadas homogéneas son $(1,a^i_{2,1},a^i_{3,1})$, para $i=1,..,e$.

Sea $S^i_j(t_i)$ la serie $\sum_{\ell=1}^{\infty} a^i_{j,\ell}\, t_i^{\ell} \in k\|t_i\|$. Denotemos por $I(S^i_j)$ el ideal de R formado por los elementos $F\in R$ tales que

$$F(t_i,S^i_1(t_i),S^i_2(t_i))=o$$

para $i=1,..,e$. Es inmediato que $I(S^i_j)$ es el ideal radical de R asociado al germen $X(S^i_j)$ de $(k^3,o)$ unión de la ramas $\alpha_1,\ldots,\alpha_e$, en particular $I(S^i_j)$ es perfecto y de altura dos.

Observemos que la multiplicidad del germen $X(S^i_j)$ es igual a e.

<u>3.1 Proposición</u>: Si los puntos $P_1,\ldots,P_e$ no están contenidos en una curva de grado v-2, el ideal $I(S^i_j)$ es v-extremal.

<u>Demostración</u>: en primer lugar vamos a demostrar que el orden de todo elemento de $I=I(S^i_j)$ es mayor o igual que v-1.

Sea $F\in I$ una serie con orden r, supongamos que $r\leqslant v-2$. Denotemos por $F_r$ la forma inicial de F.

De la igualdad $F(t_i,S^i_2,S^i_3)=o$ es fácil deducir que, para todo $i=1,..,e$, se tiene $F_r(1,a^i_{2,1},a^i_{3,1})=o$. Con lo cual la curva de $\mathbb{P}_2$ de ecuación $F_r$ contiene los puntos $P_1,\ldots,P_e$, gracias a la hipótesis de la proposición obtenemos $F_r=o$. En contra de la hipótesis de que F tenga orden r.

Hemos demostrado que todo elemento de I tiene orden no inferior a v-1, por lo tanto $I\subset M^{v-1}$.

Sea A el anillo $R/I$ y m su ideal maximal.

Consideremos la igualdad

$$(1)\qquad \dim_k(A/m^n)=\dim_k(A/m^{v-1})+\dim_k(m^{v-1}/m^v)+\ldots+\dim_k(m^{n-1}/m^n),$$

para $n\geqslant v-1$.

Al ser la multiplicidad del germen $X(S_j^i)$ igual a $\frac{1}{2}v(v-1)$, de la proposición 1 de Ap-I deducimos que $\dim_k(m^s/m^{s+1}) \leqslant \frac{1}{2}v(v-1)$ para todo $s \geqslant 0$. De la inclusión $I \subset M^{v-1}$ obtenemos

$$\dim_k(A/m^{v-1}) = \binom{v+1}{3} \qquad ,$$

por lo tanto de la igualdad (1) concluimos que

$$\dim_k(A/m^n) \leqslant \binom{v-1}{3} + \frac{1}{2}v(v-1)(n-v+1) \qquad ,$$

luego

(2) $$\dim_k(A/m^n) \leqslant \frac{1}{2}v(v-1)n - \frac{1}{3}v(v-1)(v-2) \qquad .$$

Sea $p_A(T) = \frac{1}{2}v(v-1)T - \rho$ el polinomio de Hilbert-Samuel de A. Sabemos, gracias a la proposición 2 de Ap-I, que para n suficientemente grande se verifica

$$\dim_k(A/m^n) = p_A(n) \qquad ,$$

de la desigualdad (2) deducimos

$$p_A(n) \leqslant \frac{1}{2}v(v-1)n - \frac{1}{3}v(v-1)(v-2) \qquad ,$$

por lo tanto

(3) $$\rho \geqslant \frac{1}{3}v(v-1)(v-2) \qquad .$$

Vamos a demostrar que $\rho = \frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$ con lo cual el polinomio de Hilbert-Samuel de A será $p_V(T) = \frac{1}{2}v(v-1)T - \frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$ y el ideal $I(S_j^i)$ será, gracias al teorema 2.13, v-extremal.

Sea J el radical de $Gr(I(S_j^i))$. Es inmediato comprobar que J es el ideal radical de $k|X_1,X_2,X_3|$ que define la curva obtenida por la unión de las e rectas de $k^3$ que pasan por el origen y que admiten por vectores directores a $w_i = (1, a_{2,1}^i, a_{3,1}^i)$ para $i=1,\ldots,e$.

Sea S el anillo local $k|X_1,X_2,X_3|_{(X_1,X_2,X_3)}$. La inclusión $Gr(I(S_j^i)) \subset J$ induce un morfismo exhaustivo

$$Gr(A) = \frac{k|X_1,X_2,X_3|}{Gr(I(S_j^i))} \twoheadrightarrow \frac{k|X_1,X_2,X_3|}{J} \qquad ,$$

el cual a su vez induce por localización el epimorfismo

$$(4) \qquad B=\frac{S}{Gr(I(S_j^i)).S} \longrightarrow \frac{S}{J.S}=C' \quad .$$

Es inmediato comprobar que el polinomio de Hilbert-Samuel de B es igual al de A.

Sea $p_C(T)=\frac{1}{2}v(v-1)T-\bar{\rho}$ el polinomio de Hilbert-Samuel de C. De la exhaustividad del morfismo (4) se deduce facilmente que

$$(5) \qquad \rho \leqslant \bar{\rho} \quad .$$

Si demostramos que $\bar{\rho}=\frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$, de las desigualdades (3) y (5) deduciremos que $\rho=\frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$ con lo que concluiremos la demostración.

Sea $\hat{C}$ la completación de C respecto su ideal maximal, es sabido que los polinomios de Hilbert-Samuel de C y $\hat{C}$ coinciden.

Al ser el ideal J radical y de altura dos es perfecto, por lo tanto el anillo C es Cohen-Macaulay. De donde deducimos que $\hat{C}$ es Cohen-Macaulay. Sea $\bar{m}$ el ideal maximal de C.

Al no estar los puntos $P_1,\dots,P_e$ contenidos en una curva de grado v-2 y al ser e la dimensión de las formas de grado v-1, para todo i=1,...,e existe una forma $F_i$ de grado v-2 tal que la curva de $\mathbb{P}_2$ de ecuación $F_i=o$ contiene los puntos $P_1,\dots,\hat{P}_i,\dots,P_e$ y no contiene a $P_i$.

Consideremos $F_i=L_i.F_i$, con $L_i$ una forma lineal que defina una recta de $\mathbb{P}_2$ que no contenga a $P_i$, para i=1,..,e. Entonces la curva de ecuación $F_i=o$ es de grado v-1, contiene a los puntos $P_1,\dots,\hat{P}_i,\dots,P_e$ y no contiene a $P_i$. Es fácil probar que las clases de $F_i$, i=1,...,e, en $\bar{m}^{v-1}/\bar{m}^v$ forman un conjunto linealmente independiente, luego

$$\dim_k(\bar{m}^{v-1}/\bar{m}^v) \geqslant \frac{1}{2}v(v-1) \quad .$$

Como la multiplicidad del anillo C, que es la de C, es igual a $\frac{1}{2}v(v-1)$, de la proposición 2 de Ap-I obtenemos

$$\dim_k\left( \bar{m}^{v-1} / \bar{m}^{v} \right) = \frac{1}{2}v(v-1) \quad .$$

Asimismo de la proposición2 de Ap-I deducimos que para todo $s \geq v-1$ se verifica

(6) $$\dim_k\left( \bar{m}^{s} / \bar{m}^{s+1} \right) = \frac{1}{2}v(v-1) \quad .$$

De la hipótesis de la proposición se deduce, con un razonamiento análogo al del principio de la demostración, que $J \subset (X_1,X_2,X_3)^{v-1}$, de donde

(7) $$\dim_k\left( \hat{C} / \bar{m}^{v-1} \right) = \binom{v+1}{3} \quad .$$

De las igualdades (6) y (7) obtenemos que el polinomio de Hilbert-Samuel de $\hat{C}$ y por lo tanto el de $C$ es igual a $\frac{1}{2}v(v-1)T-$ $-\frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$, de donde $\bar{\rho} =\frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$ quedando demostrada la proposición.

Definición: Para todo $n \geq v-1$ , $Q(n-v+3)$ será el espacio afín de dimensión $v(v-1)(n-v+2)$ que parametriza los coeficientes de las series:

$$s_j^i(t_i) = \sum_{q=1}^{n-v+2} a_{j,q}^i \cdot t_i^q$$

para $i=1,\ldots,e$ y $j=2,3$.

Denotaremos por $Q'(n-v+3)$ el abierto formado por los puntos de $Q(n-v+3)$ para los que los puntos de $\mathbb{P}_2$ de coordenadas homogéneas $(1,a_{2,1}^i,a_{3,1}^i)$ para $i=1,\ldots,e$ no estan contenidos en una curva de grado $v-2$.

Obviamente $Q'(n-v+3)$ es no vacío y de dimensión igual a $v(v-1)(n-v+2)$.

Sea $I$ un ideal v-extremal y supongamos que la clase de $X_1$ en $R/I$ es un elemento superficial de grado uno.

Denotemos por $X$ el germen de curva de $(k^3,o)$ definido por $I$. Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ son las ramas de $X$, sabemos(ver Cáp.I) que para cada $i=1,\ldots,r$ la rama $\alpha_i$ admite una única parametrización propia de la forma

$$\alpha_i : \begin{cases} X_1 = t_i \\ X_j = S^i_{j,I}(t_i) \in k\|t_i\| \\ j=2,3 \end{cases}$$

Sea $(S^i_j)_{i=1,\ldots,e;j=2,3}$ un elemento de $Q'(n-v+3)$, entonces:

<u>3.2 Proposición:</u> Para todo $n \geqslant v-1$ son equivalentes:

(i) $I \equiv I(S^i_j)$ módulo$(M^{n+1})$.

(ii) El germen $X$ presenta en el origen una singularidad ordinaria (i.e. $r=e$) y a menos de una reodenación de los índices de sus ramas $S^i_j(t_i) \equiv S^i_{j,I}(t_i)$ módulo$(t_i)^{n-v+3}$, para todo $i=1,\ldots,e$ y $j=2,3$.

(iii) Para todo $f \in I$ se verifica:

$$f(t_i, S^i_2(t_i), S^i_3(t_i)) = o \text{ módulo}(t_i)^{n+1}$$

para $i=1,\ldots,e$.

<u>Demostración</u>: (i)$\Rightarrow$(ii). Los ideales $I$ e $I(S^i_j)$ son v-extremales: el primero por hipótesis y el segundo gracias a la proposición 3.1. Por lo tanto los índices de regularidad de ambos ideales son iguales a $v-1$ (corolario 2.5). De la proposición 1.3 del Cáp.III deducimos que los conos tangentes de los gérmenes $X, X(S^i_j)$ coinciden y presentando $X(S^i_j)$ singularidad ordinaria, lo propio ocurre con $X$.

Al coincidir los conos tangentes de $X$ y $X(S^i_j)$, tienen asimimo coincidentes los puntos infinitamente próximos del primer entorno, sean $P_1,\ldots,P_e$ dichos puntos.

Denotemos por $X_q, X_q(S^i_j)$ las ramas no singulares centradas en $P_q$ de los transformados estrictos de $X, X(S^i_j)$ por la dilatación en el origen para $q=1,..,e$.

El anillo local $\mathcal{O}_{(X_q,P_q)}$ (resp. $\mathcal{O}_{(X_q(S_j^i),P_q)}$) es cociente de $\mathcal{O}_{(k^N,P_q)} \cong R$ por un ideal $J_q$ (resp. $J'_q$).

Al ser el ideal I v-extremal admite una base standard $f_1,\dots,f_v$ formada por series de orden v-1(teorema 2.4-(c)(ii)).

De la hipótesis $I \equiv I(S_j^i)$ módulo$(M^{n+1})$ deducimos que existen series $F_1,\dots,F_v$, pertenecientes al ideal $I(S_j^i)$, tales que

(1) $$f_i \equiv F_i \text{ módulo}(M^{n+1}).$$

Al ser $n+1 \geqslant v$, las formas iniciales de $F_i$ y $f_i$ coinciden. Sabíamos que los conos tangentes de los gérmenes X y $X(S_j^i)$ eran iguales, luego el conjunto $\{F_i\}_{i=1,\dots,v}$ es una base standard de $I(S_j^i)$.

Por hipótesis las clases de $X_1$ en los anillos $R/I$, $R/I(S_j^i)$ son elementos superficiales de grado uno, de donde los elementos $f_i/X_1^{v-1}$, para $i=1,\dots,v$, en el anillo $\mathcal{O}_{(k^N,P_q)}$ engendran el ideal $J_q$ (analogamente los elementos $F_i/X_1^{v-1}$, para $i=1,\dots,v$, engendran el ideal $J'_q$).

De la igualdad (1) deducimos que $J_q \equiv J'_q$ módulo$(M^{n-v+2})$, de donde los gérmenes $X_q$ y $X_q(S_j^i)$, dado que son simples, tienen en común hasta el punto del n-v+1-ésimo entorno, para $q=1,\dots,e$. De aquí es fácil deducir (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Al ser I determinantal, del corolario dos al teorema cinco de BUR deducimos que $I \subset M^{v-1}$. Luego el orden de cualquier elemento f de I es mayor o igual que v-1, de la condición

$$f(t_i,S_{2,I}(t_i),S_{3,I}(t_i))=o$$

se deduce (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). En primer lugar vamos a demostrar que $Gr(I)=Gr(I(S_j^i))$.

Dado que el ideal I es v-extremal, admite una base standard $\{f_1,\dots,f_v\}$ formada por series de orden v-1(teorema 2.4-(c)(ii)). Luego las formas iniciales de $f_1,\dots,f_v$, que denotaremos por $f_1^o,\dots,f_v^o$, engendran el ideal Gr(I).

De la condición (iii), al ser $n+1 \geqslant v$, obtenemos que cada una de las superficies de $(k^3,o)$ definidas por las formas $f_1^o, \ldots, f_v^o$ contienen las e rectas tangentes del germen $X(S_j^i)$.

Al ser el ideal $I(S_j^i)$ v-extremal el anillo $Gr(R/I(S_j^i))$ es Cohen-Macaulay(prop.2.4-(c)(ii)). Dado que $X(S_j^i)$ presenta una singularidad ordinaria en el origen, el ideal $Gr(I(S_j^i))$ es radical, i.e. $Spec(Gr(R/I(S_j^i))$ es la unión de las e rectas tangentes de $X(S_j^i)$. Por lo tanto las formas $f_i^o$, para $i=1,\ldots,v$, pertenecen a $Gr(I)$, de donde $Gr(I) \subset Gr(I(S_j^i))$. De esta última inclusión obtenemos

(2) $$Spec\left(Gr(R/I)\right) \subset Spec\left(Gr(R/I(S_j^i))\right)$$

Al ser el germen $X(S_j^i)$ ordinario y al ser la multiplicidad de X igual a e, de la inmersión (2), deducimos que $Spec\left(Gr(R/I)\right)$ es unión de $Spec\, Gr(R/I(S_j^i))$ y un esquema de dimensión cero.

El anillo $Gr(R/I)$ es Cohen-Macaulay ya que I es un ideal v-extremal(teorema 2.4-(c)(ii)), por lo tanto no tiene componentes sumergidas. Luego la inmersión (2) es un isomorfismo, lo que equivale a $Gr(I)= Gr(I(S_j^i))$.

<u>Lema:</u> Para todo $f \in I$ existe $F \in I(S_j^i)$, con $f \equiv F$ módulo$(M^{n+1})$.

<u>Demostración</u>: sea $f \in I$, en primer lugar vamos a demostrar que existe una serie $G \in M^{n+1}$ tal que

(3) $$f(t_i, S_2^i(t_i), S_3^i(t_i)) = G(t_i, S_2^i(t_i), S_3^i(t_i)) \quad .$$

Supongamos que no exista una serie $G'$ en las condiciones anteriores. Sea s el número natural

$$s = \text{Máx}\left\{ \text{orden}(G) \;\middle|\; G \text{ verifica la igualdad (3)} \right\} \quad ,$$

entonces $s < n+1$.

Sea $G \in R$ una serie de orden s que verifique la igualdad (3). Denotemos por $G_s$ la forma inicial de G. Es fácil deducir de la igualdad (3), dado que $\text{orden}(F)=s < \text{orden}(G(t_i, S_2^i(t_i), S_3^i(t_i)))=n+1$, que

(4) $$G_s(1,a^i_{2,1},a^i_{3,1})=0 \quad ,$$

para $i=1,\dots,e$.

Recordemos que $w_i=(1,a^i_{2,1},a^i_{3,1})$ $i=1,\dots,e$ era un conjunto de vectores directores de las e rectas del cono tangente de $X(S^i_j)$. De la condición (4) deducimos que la forma $G_s$ pertenece al ideal $Gr(\ I(S^i_j)\ )$. Por lo tanto existe un elemento $H\in I(S^i_j)$ tal que su forma inicial es igual a $G_s$.

La serie G-H tiene orden mayor que s y verifica la igualdad (3), siendo esto una contradicción con lo supuesto anteriormente.

Así hemos demostrado que existe una serie $G\in M^{n+1}$ que verifica la igualdad (3).

Es inmediato que la serie F=f-G pertenece al ideal $I(S^i_j)$. Por lo tanto queda demostrado el lema.

Sea $F_1,\dots,F_v$ elementos de $I(S^i_j)$ tales que $f_i\equiv F_i$ módulo$(M^{n+1})$ para todo $i=1,\dots,v$.

Al ser $n+1\geqslant v$, las formas iniciales de las series $f_i$ y $F_i$ coinciden para $i=1,\dots,v$. Al coincidir los conos tangentes de los gérmenes X y $X(S^i_j)$, los elementos $F_1,\dots,F_v$ forman una base standard del ideal $I(S^i_j)$, en particular son un sistema de generadores.

De la condición $f_i\equiv F_i$ módulo$(M^{n+1})$ se deduce (i).

<u>3.2 Teorema</u>: La dimensión de $CH_{P_v(T),\mathcal{S},n+1}$ es $v(v-1)(n-v+2)$.

<u>Demostración</u>: vamos a probar que la dimensión de $\overline{CH}$, clausura de CH en $G_{n+1}$, es igual a $v(v-1)(n-v+2)$.

Para cada $S=(S^i_j(t_i))_{i=1,\dots,e;j=1,2}\in Q'(n-v+3)$ y cada $q\in\{1,\dots,e\}$, consideremos el morfismo de k-álgebras

$$\sigma_q(S):\ R_{n+1}\longrightarrow k[[t_q]]/(t_q)^{n+1}$$

que a cada $\bar{f} \in R_{n+1}$ le hace corresponder la clase en $k\|t_q\|/(t_q)^{n+1}$ de $f(t_q, S_2^q(t_q), S_3^q(t_q))$.

Denotemos por C el subconjunto de $G_{n+1} \times Q'(n-v+3)$ formado por los pares $(R_{n+1}/_L, (S_j^i))$ tales que $\sigma_q((S_j^i))(L)=o$ para todo $q=1,\dots,e$. Es inmediato demostrar, considerando los abiertos $B_{n+1}(H)$ de $G_{n+1}$ (ver cáp. IV sección 1), que C es un subconjunto cerrado de $G_{n+1} \times Q'(n-v+3)$.

Denotemos por $\tilde{C}$ el subconjunto constructible de C, $\tilde{C} = C \cap (CH \times Q'(n-v+3))$. Sea $\tilde{C} = C_1 \cup \dots \cup C_r$ una descomposición de $\tilde{C}$ en subconjuntos localmente cerrados.

La demostración se hará en dos pasos: en primer lugar probaremos que $\dim(\tilde{C}) = \dim(\overline{CH})$, después veremos que $\dim(\tilde{C}) = \dim(Q'(n-v+3))$. Dado que $\dim(Q'(n-v+3)) = v(v-1)(n-v\ 2)$, concluimos el teorema.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ G_{n\ 1} & & Q'(n-v+3) \end{tikzcd} .$$

De la misma definición de $\tilde{C}$ se obtiene que $p_1(\tilde{C}) \subset \overline{CH}$, vamos a demostara que $p_1(\tilde{C})$ es denso en $\overline{CH}$.

Sabemos, gracias a la prop. 2.7, que existe un subconjunto abierto Z' de E tal que para todo punto cerrado $z \in Z'$ el ideal I(z) verifica:

(a) El número de elementos de un sistema de generadores minimal de I(z) es v(i.e. V(I(z))=v).

(b) El germen de curva definido por I(z) es reducido, tiene multiplicidad $\frac{1}{2}v(v-1)$, orden de singularidad $\frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$ y presenta en el origen una singularidad ordinaria.

En particular para todo $z \in Z'$ el ideal I(z) pertenece al conjunto $Id(3, \delta, p_v(T))$.

Sea U el subconjunto constructible $g(Z')$ de $\overline{CH}$..Al ser E irreducible y Z' un abierto no vacío de E, Z' es denso en E. Dado que $g: E \longrightarrow CH$ es un morfismo dominante entre variedades irreducibles, U es un subconjunto denso de CH.

Sea $B_1$ el subconjunto abierto de $G_{n+1}$ cuyos puntos cerrados $I+M^{n+1}/M^{n+1}$ verifican

$$\dim_k \left( \frac{I+M^{e+1}+(X_1)}{M^e} \right) \geq b(e+1)-e$$

Sea I un ideal de $Id(3,\delta,p_v(T))$, gracias al lema 3.2 del cáp. IV, la clase de $X_1$ en $R/I$ es un elemento superficial de grado uno si y sólo si $I+M^{n+1}/M^{n+1}$ pertenece a $B_1$. Denostemos por $V_1$ la intersección $B_1 \cap CH$.

Al ser U y $V_1$ subconjuntos densos de $\overline{CH}$ la intersección $U \cap V_1$ es un subconjunto denso de $\overline{CH}$. Vamos a probar que $U \cap V_1 \subset p_1(\tilde{C})$, con lo cual $p_1(\tilde{C})$ será un subconjunto denso de $\overline{CH}$.

Sea $x=\dfrac{I+M^{n+1}}{M^{n+1}}$ un punto cerrado de $U \cap V_1$, por pertencer x a U existe $z \in Z'$ tal que $I+M^{n+1}=I(z)+M^{n+1}$. Del teorema de truncación (Cáp.III teorema 2.2) deducimos que el ideal I es analitícamente equivalente al ideal I(z), por lo tanto $v(I)=v$, ya que $v(I(z))=v$, y el germen X definido por I presenta en el origen una singularidad ordinaria ya que lo mismo ocurre con el germen definido por I(z).

Sean $\alpha_1,\dots,\alpha_e$ las ramas de X. Al ser la clase de $X_1$ en $R/I$ un elemento superficial de grado uno, ya que $x \in V_1$, cada rama $\alpha_i$ admite una única parametrización propia de la forma

$$(1) \qquad \alpha_i : \begin{cases} X_1 = t_i \\ X_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} a^i_{j,\ell}\, t_i^{\ell} \\ j=2,3 \end{cases}$$

para $i=1,\dots,e$.

Al ser el ideal I determinantal, del corolario dos del teorema cinco de BUR, deducimos que

(2) $$I \subset M^{v-1} \quad ,$$

por lo tanto el ideal Gr(I) no contiene formas de grado inferior a v-1.

Vistas parametrizaciones (1) las rectas tangentes de X admiten como vectores directores a $w_i=(1,a^i_{2,1},a^i_{3,1})$ para $i=1,\dots,e$. Sea $P_i$ el punto de $\mathbb{P}_2$ cuyas coordenadas homogêneas son $w_i$ para $i=1,\dots,e$.

El ideal Gr(I) es radical ya que es perfecto ( teorema 2.4-(c)(ii)) y el germen X presenta en el origen una singualaridad ordinaria. Luego Gr(I) es el ideal de $k|X_1,X_2,X_3|$ formado por los polonomios f tales que $f(P_i)=o$ para $i=1,\dots,e$. De la inclusión (2) Gr(I) no contiene ninguna forma de grado inferior a v-1, por lo tanto los puntos $P_1,\dots,P_e$ no están contenidos en ninguna curva de $\mathbb{P}_2$ de grado v-2. Así pues si denotamos por $S^i_j(t_i)$ la serie $\sum_{\ell=1}^{n-v+2} a^i_{j,\ell}t_i^\ell$ (observemos que $n-v+2 \geqslant 1$ ya que $n \geqslant w(\delta)$ 1) es inmediato comprobar que $(S^i_j(t_i))_{i=1,\dots,e;j=2,3}$ pertenece al abierto $Q'(n-v+3)$.

Si f I entonces se verifica $f(t_i,\sum_{\ell=1}^{\infty}a^i_{2,\ell}t_i^\ell,\sum_{\ell=1}^{\infty}a^i_{2,\ell}t_i^\ell)=o$ para todo $i=1,\dots,e$. Gracias al la inclusión (2) es fácil deducir que para todo $f\in I$ y $q=1,\dots,e$ , $\sigma_q((S^i_j))(f)=o$, por ello el par $(x,(S^i_j))$ pertenece a $\widetilde{C}$ y hemos demostrado que el conjunto $p_1(\widetilde{C})$ es denso de $\overline{CH}$.

Consideremos la restricción del morfismo $p_1$:

$$p_1|_{C_i}: C_i \longrightarrow \overline{CH}$$

para $i=1,\dots,r$.

Gracias a la equivalencia (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) de la proposición 3.2 las fibras del morfismo $p_1|_{C_i}$ son de dimensión cero; por tanto

(3) $$\dim(C_i)=\dim(p_1(C_i)) \leqslant \dim(\overline{CH}) \quad .$$

Al ser $p_1(\widetilde{C})$ un subconjunto denso de $\overline{CH}$, existe $i_o \in \{1,\ldots,r\}$ tal que $\dim(p_1(C_{i_o}))= \dim(\overline{CH})$, de la desigualdad (3) obtenemos

$$\dim(\widetilde{C})= \dim(\overline{CH}) \quad .$$

Consideremos la restricción del morfismo $p_2$:

$$p_2|_{C_i}: C_i \longrightarrow Q'(n-v+3) \quad ,$$

para $i=1,\ldots,r$.

Gracias a la eqivalencia (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) de la proposición 3.2 las fibras del morfismo $p_2|_{C_i}$ son de dimensión cero;por tanto

$$\dim(C_i)=\dim(p_2(C_i)) \leqslant \dim(Q'(n-v+3)) .$$

Sea $(S_j^i) \in Q'(n-v+3)$. Al ser el ideal $I(S_j^i)$ v-extremal(prop. 3.1) el número de reducción del anillo $\mathcal{O}_{(X(S_j^i),o)}$ es $\frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$. Dado que $X(S_j^i)$ presenta en el origen una singularidad ordinaria su orden de reducción coincide con el número de reducción del anillo $\mathcal{O}_{(X(S_j^i),o)}$ (prop.I-1.3(iii)), por lo tanto el orden de singularidad es igual a $\frac{1}{3}v(v-1)(v-2)$. Luego el ideal $I(S_j^i)$ pertenece a $Id(3,\delta,p_v(T))$ y $K= R/_{I(S_j^i)+M^{n+1}}$ pertenece a CH. Así el par $(K,(S_j^i))$ pertenece a $\widetilde{C}$.

Hemos visto que para todo $(S_j^i) \in Q'(n-v+3)$ existe $K \in CH$ tal que $(K,(S_j^i)) \in \widetilde{C}$, por lo tanto $Q'(n-v+3)=\bigcup_{i=1}^{r} p_2(C_i)$.

Al ser $Q'(n-v+3)$ irreducible existe $i \in \{1,\ldots,r\}$ tal que $p_2(C_i)$ es denso en $Q'(n-v+3)$, de donde $\dim(p_2(C_i))= \dim(Q'(n-v+3))$. De la desigualdad (4) obtenemos

$$\dim(\widetilde{C})= \dim(Q'(n-v+3)) .$$

# APENDICES

## APENDICE I: ELEMENTOS SUPERFICIALES.

A lo largo de este apéndice A será un anillo Noetheriano, local, Cohen-Macaulay y de dimensión uno. Sea m el ideal maximal de A y k su cuerpo residual. Denotaremos por FHS y PHS la función y el polinomio de Hilbert-Samuel del anillo A. Al ser el anillo A de dimensión uno, existen enteros e y $\rho$ tal que

$$PHS(n) = en - \rho$$

1. Proposición: para $n \geqslant e-1$ se verifica

$$FHS(n) = PHS(n)$$

Demostración: ver KI.

Al anillo A se le asocia un entero $S_o(A) = \text{Mín}\{n \mid FHS(n) = PHS(n)\}$, que es conocido como índice de regularidad de A. Si $A = {}^{R}N/_{I}$ hacemos $S_o(A) = S_o(I)$ y diremos que $S_o(I)$ es el índice de regularidad de I.

2. Proposición: El entero $S_o(A)$ verifica:

(1) $\dim_k\left(\frac{m^n}{m^{n+1}}\right) = e \quad \text{si } n \geqslant S_o$

(2) $\dim_k\left(\frac{m^n}{m^{n+1}}\right) < e \quad \text{si } n < S_o$

Demostración: ver teoremas 12.10 y 12.11 de MAL.

Definición: un elemento $x \in m^s$ se llama superficial de grado s si verifica una de las siguientes condiciones equivalentes:

(1) $(m^{n+s} : x) = m^n$ para $n \gg 0$

(2) $m^{n+s} = x.m^n$ para $n \gg 0$

(3) existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $m^c \cap (m^{n+s} : x) = m^n$ para $n \gg 0$.

(ver: NOR-1 th. 1)

3. Proposición: Sea B un anillo local Noetheriano con ideal maximal $q$. Sea $x \in B$ un elemento que verifique $(q^{n+s}: x) = q^n$ para cualquier $n$ suficientemente grande, entonces $x$ es un no divisor de cero de B.

Demostración: Supongamos que $x.y=0$, entonces $y \in q^n$ para todo $n$ suficientemente grande. Así tenemos que

$$y \in \bigcap_{n \geq 0} q^n \quad ,$$

por ser B local $\bigcap_{n \geq 0} q^n = 0$ (lema de Rees), por lo que $y=0$.

4. Proposición: Sea B un anillo local, Noetheriano, de dimensión uno con ideal maximal $q$. Sea $x \in B$, son equivalentes.

(1) B es Cohen-Macaulay y $x$ es un elemento superficial de grado uno.

(2) Para $n \gg 0$ se verifica $(m^{n+1}: x) = m^n$.

Demostración: (1) implica (2) por definición. Si se verifica la condición (2), gracias a la proposición 3, $x$ es un elemento no divisor de cero de B. Así B es Cohen-Macaulay y $x$ es superficial de grado uno.

5. Proposición: Sea $s_o$ el índice de regularidad del anillo A. Un elemento $x \in A$ es superficial de grado uno de A si y sólo si $(m^{s_o+2}:x) = m^{s_o+1}$, en cuyo caso se tiene $(m^{n+1}: x) = m^n$ para todo $n \geq s_o$.

Demostración: Vamos a demostrar que si $x$ es superficial de grado uno se verifica que $(m^{n+1}:x) = m^n$ para todo $n \geq s_o$.

De la proposición 12.5 de MAL deducimos que para todo $n$ se tiene la igualdad

$$\dim_k \left(\frac{m^{n+1}}{x.m^n}\right) = e - \dim_k \left(\frac{m^n}{m^{n+1}}\right) ,$$

luego para todo $n \geqslant s_o$

$$m^{n+1} = x\, m^n \quad ,$$

dado que

$$\dim_k\left(\frac{m^n}{m^{n+1}}\right) = e$$

(proposición 2).

Supongamos $x.y \in m^{s_o+ s+1} = x^{s+1}.m^{s_o}$ , por tanto existe $z \in m^{s_o}$ tal que

$$xy = x^{s+1}.z$$

Al ser x no divisor de cero (proposición 3) de la igualdad anterior deducimos que

$$y = x^s.z \in x^s.m^{s_o} \subset m^{s+s_o} \; .$$

Resumiendo $xy \in m^{s_o+s+1}$ implica $y \in m^{s+s_o}$ , por lo tanto hemos demostrado que $(m^{n+1} : x) = m^n$ para todo $n \geqslant s_o$.

Recíprocamente, supongamos que $(m^{s_o+2} : x) = m^{s_o+1}$ , entonces el morfismo

$$\frac{m^{s_o}}{m^{s_o+1}} \xrightarrow{\;.\,x\;} \frac{m^{s_o+1}}{m^{s_o+2}}$$

es inyectivo. Al ser los dos espacios vectoriales de la misma dimensión e, proposición 2, el morfismo anterior es biyectivo por tanto $m^{s_o+1} = x.m^{s_o}$.

Hemos visto que $m^{s_o+1} = x.m^{s_o}$, de lo cual deducimos que $m^{n+1} = x.m^n$ para $n \geqslant s_o$, que es una de las condiciones equivalentes de la definición de elemento superficial.

APENDICE II: IDEALES PERFECTOS DE ALTURA DOS.

A continuación vamos a dar las propiedades fundamentales de los ideales perfectos de altura dos:

1. Proposición (H-E th 3): sea I un ideal propio de $R=R_N$. Supongamos que I admite un sistema de generadores que son los menores de orden t de una matriz r x s con coeficientes en R, entonces

$$ht(I) \leqslant (r-t+1)(s-t+1).$$

Definición: Un ideal en las hipótesis de 3.1 se llama determinantal si y sólo si $ht(I) = (r-t+1)(s-t+1)$.

2. Teorema: Sea I un ideal propio de R, se verifican las siguientes propiedades:

(i) Si I tiene altura dos es equivalente que I sea perfecto a que I sea determinantal.

(ii) Sea A una matriz de dimensiones n x (n-1), con coeficientes pertenecientes a R. Sean $f_1,\ldots,f_n$ los menores maximales de A, entonces:

(a) la sucesión

$$(w) \quad 0 \longrightarrow R^{n-1} \xrightarrow{A} R^n \xrightarrow{(f_i)} R \longrightarrow R/_I \longrightarrow 0$$

es un complejo.

(b) es equivalente que el complejo (w) sea exacto a que I tenga altura dos.

(iii) Supongamos que I sea determinantal de altura dos. Para todo sistema de generadores $f_1,\ldots,f_n$ de I existe una matriz A, con coeficientes de R, cuyos menores maximales son los elementos $f_1,\ldots,f_n$.

Demostración: (i) Si I es perfecto del teorema 5 de BUR obtenemos que I es determinantal. Si I es determinantal del teorema 1 de H-E deducimos que I es perfecto.

(ii) (a) es consecuencia de la construcción del apartado (2) de E-N. (b) es consecuencia del apartado (i) y del teorema 1 de E-N.

(iii) Ver pág. 671, 672 y 673 de la demostración del teorema 1 de SHA.

APENDICE III: SISTEMAS DE GENERADORES.

Sea A un anillo local, unitario y conmutativo. Denotemos por m su ideal maximal.

1. Proposición: Sea M un A-módulo finitamente generado. Para todo par de sistemas de generadores de M, $\{g_1,\ldots,g_s\}$ y $\{f_1,\ldots,f_s\}$ existe una matriz inversible B tal que

$$B(f) = (g).$$

Demostración: Sea $\{h_1,\ldots,h_r\}$ un sistema de generadores minimal de M, al ser $A^s$ y $A^r$ libres, existen morfismos $\varphi, \psi$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A^s \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] \arrow[dr, "(f)"'] & & A^r \arrow[ll, bend right, "\psi"'] \arrow[dl, "(h)"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. El morfismo $\alpha = \varphi\psi : A^r \longrightarrow A^r$ verifica $\alpha h = h$; gracias al lema siguiente $\alpha$ es un isomorfimo:

2 Lema: Sean $\{h_1,\ldots,h_r\}$ y $\{h'_1,\ldots,h'_s\}$ dos sistemas minimales de generadores de M y $\alpha : A^r \longrightarrow A^s$ un morfismo que haga conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} A^r \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "(h)"'] & & A^s \arrow[dl, "(h')"] \\ & M & \end{tikzcd},$$

El morfismo $\alpha$ es biyectivo y r=s.

Demostración del lema 2: Al ser $\{h_i\}$ y $\{h'_i\}$ minimales se verifica

(1) $\quad \mathrm{Ker}(h') \subset m.A^s \quad , \quad \mathrm{Ker}(h) \subset m.A^r.$

Vamos a ver que $\alpha$ es exhaustivo. Sea $y \in A^s$, de la conmutatividad del diagrama se deduce que existe $x \in A^r$ tal que

$$h'(y) = h(x) = h'(\alpha(x)) \;,$$

por lo tanto $y-\alpha(x) \in \mathrm{Ker}(h')$. De la primera inclusión de (1) obtenemos

$$y \in m.A^s + \mathrm{Imag}\,\alpha$$

para todo $y \in A^s$, así hemos demostrado que

$$A^s = m.A^s + \mathrm{Imag}\,\alpha$$

Por el lema de Nakayama se tiene que $A^s = \mathrm{Imag}\,\alpha$ , luego $\alpha$ es exhaustivo.

Al ser $A^s$ libre existe un morfismo $\beta : A^s \longrightarrow A^r$ sección de $\alpha$, por lo tanto $\beta$ es inyectivo y se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A^r \arrow[dr, "(h)"'] & A^s \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "(h')"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

dado que $h(\beta(y)) = (h'\alpha)\;(\beta(y)) = (h'(\alpha\beta))\;(y) = h'(y)$.

Aplicando la primera parte de la demostración del lema al morfismo $\beta$, se obtiene que $\beta$ es un isomorfismo. Al ser $\beta$ una sección de $\alpha$ es fácil concluir que $\alpha = \beta^{-1}$, por lo tanto $\alpha$ es un isomorfismo.

<u>Continuación de la demostración de la proposición 1</u>: Es inmediato comprobar, visto el lema 2, que el morfismo $\psi\alpha^{-1} : A^r \longrightarrow A^s$ es una sección de $\varphi$. Por lo tanto $\varphi$ es exhaustivo y tenemos una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\varphi \longrightarrow A^s \xrightarrow{\varphi} A^r \longrightarrow 0 \;;$$

al ser $A^r$ libre la sucesión anterior escinde: $A^s \cong A^r \oplus \operatorname{Ker}\varphi$, así $\operatorname{Ker}\varphi$ es libre de rango s-r y se tiene un diagrama conmutativo:

(2)
$$\begin{tikzcd}
A^s \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "(f)"'] & & A^r \oplus A^{s-r} \arrow[dl, "(h)\oplus 0"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Repitiendo el proceso para (g) obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A^r \oplus A^{s-r} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "(h)\oplus 0"'] & & A^s \arrow[dl, "(g)"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

de los diagramas (2) y (3) obtenemos el diagrama conmutativo:

(3)
$$\begin{tikzcd}
A^s \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "(f)"'] & & A^s \arrow[dl, "(g)"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

con $\sigma$: $A^s \longrightarrow A^s$ un isomorfismo de A-módulos.

Tomando B igual a la matriz asociada a $\sigma$ en la base canónica de $A^s$ concluimos la proposición.

# BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA.


AB ABHYANKAR. "On Macaulay examples". Conference on commutative algebra". Lect. Notes in Math. 311. Springer-Verlag.

AR-1 Artin. "Algebraic aproximation of structures over complete local rings". Publ. IHES 36, 23-58 (1969).

AR-2 _____ "Deformation of singularities". Tata Institute. Bombay 1976.

BGG BRIANCON-GALLIGO-GRANGER. "Deformations equisingulieres des germes de courbes reduïtes". Mem. Soc. Math. de France. Tom 108, Fasc.1 (1980).

B-E BUCHBAUM-EISENBUD. "Algebra structures for finite free solutions, and some structures Theorems for ideals of codimension 3". Amer. J. of Math. Vol.99-I (1977).

BUR BURCH. "On ideals of finite homological dimension in local rings". Proc. Camb. Phil. Soc. Vol 64 (1968).

CA-1 CASAS. "Sobre el câlculo efectivo de gêrmenes de curvas algebraicas". Collectanea Math. Vol.XXV, Fasc.1 (1974).

CA-2 _____ "Moduli of algebraic plane curves". Lect. Notes in Math. 961, Springer-Verlag.

CH CHEVALEY. "On the theory of local rings". Ann. of Math. Vol. 44, n.4, Octubre (1943).

EGA GROTHENDICK-DIEUDONNE. "Elêments de Gêomêtrie Algêbrique". I, Springer-Verlag 1971. II, II y IV Publ. IHES.

E ELIAS. "Sharped bounds for the number of generators of ideals defining space curves singularities". Preprint, n.7 (1982) Univ. Barcelona.

E-CH ENRIQUES-CHISINI. "Teoria geometrica delle equazione e delle funzione algebriche". Vol.I, Libro 4, Cap.I. Zanichelli 1924.

E-I ELIAS-IARROBINO. "Gorenstein Artin algebras of minimal length and heigth 3". Preprint (1983).

E-N EAGON-NORTHCOTT. "Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them". Proc. of the Royal Soc. A, Vol.269 (1967), pp.147-172.

F-L FROBERG-LAKSOV. "Extremal Cohen-Macaulay rings and Gorenstein rings". Preprint (1983).

GEY GEYER. "On the number of equations which are necesary to describe an algebraic cet in n-space". IMPA Lect. Notes n.9. Rio de Janeiro 1977.

GRO GROTHENDIECK. "Fondements de la Géométrie Algebirque". Sem. Bourbaki exp. 221, 1957-62.

HAR HATSHORNE. "Algebraic Geometry". GTM n.52, Springer-Verlag.

H-E HOCHTER-EAGON. "Cohen-Macaulay rings, invariant theory and the generic perfection of determinantal loci". Amer. J. of Math. 93 (1971).

HR HERMANN. "Die Frage der endlich vielen Schritte in der theorie der Polynomideale". Math. Ann. 95 (1926) 736-88.

HI-1 HIRONAKA. "On the aritmetic genera and the effective genera of algebraic curves". Memoirs of the College of Science, Univ. Tokio. Ser.A, Vol.XXX, Math. N.2, 1957.

HI-2 ____"Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of char. zero". Ann. of Math. 79 (1964).

H-R HIRONAKA-ROSSI. "On the equivalence of Imbeddings of Excepcional Complex Spaces". Math. Ann. 156, 313-333 (1964).

KI KIRBY. "The reduction number of a one dimensional local ring". J. London Math. Soc. (2), 10 (1975).

LAK LAKSOV. "Deformation and transversality". Proc. Copenhagen 1978. Lect. Notes in Math. 732. Springer-Verlag.

MAC MACAULAY. "The algebraic theory of modular systemes". Camb.Tracts in Math. (1916).

MAT MATSUMURA. "Commutative Algebra". Benjamin. New York (1970).

MAL MATLIS. "One dimensional local rings". Lect. Notes in Math. 327. Springer-Verlag.

ML MILNOR. "Singular point of complex hypersurfaces" Ann. of Math. Studies n. 61, Princeton Univ. Press, Princeton (1968).

MOH MOH. "On generators of ideals". Proc. of the Amer. Math. Soc. Vol.77, Number 3 (1979).

NA NAGATA. "Local rings". Interscience tracts in Pure and Applied Math. 13, J. Wiley, New York (1962).

NEW NEWSTEAD. "Introduction to moduli problems and orbit spaces". Tata Institute, Bombay (1978).

NOB-1 NOBILE. "On equisingular deformations of plane curve singularities". Illinois J. of Math. Vol.22, N.3 (1978).

NOB-2 _____ "On saturations of embedded analytic rings". Illinois J. of Math. Vol. 24, N.3 (1980).

NOR-1 NORTHCOTT. "On the notion of a first Neighbourhood ring". Proc. Camb. Phil. Soc. 53 (1957).

NOR-2 ____"The Neighbourhood of a local ring". J. of London Math. Soc., N.30 (1955).

NOR-3 _____"Some contributions to the theory of one dimensional l-cal rings". Proc. London Math. Soc.(3),8,1958.

SAL-1 SALLY. "Number of generators of ideals in local rings". Lect. Notes in Pure and Applied Math. 35, 1978.

SAL-2 ____"On the associated graded ring of a local Cohen Macaulay ring". J. Math. Kioto Univ. 17 (1977)

SAL-3 ____"Super regular sequences". Pacific J. of Math.Vol.84, N.2, 1979.

SAM-1 SAMUEL. "Singularities des varietes algebriques". Bull. Soc. Math. de France 79, 1951.

SAM-2 ___"Algebricité de certains points singuliers algebroids". J. des Math. Pures et Apliquées, tome XXXV, Fasc.1, 1959.

SE-1 SERRE. "Groupes algebriques et corps de clases" Actualites scientifiques et industrielles 1264, ed. Hermann 1959.

SE-2 ----- "Algebre locale et multiplicités" Lect.Notes in Math. 11, Springer Verlag.

SHA SHAPS. "Deformations of Cohen-Macaulay schemes of codimension 2 and nonsingular deformations of space curves". Amer.J.of Math. 99(1977),699-684.

S-K SEMPLE-KNEEBONNE."Algebraic curves".Oxford Univ.Press.1959.

SG SEIDENBERG."Elements of the theory of algebraic curves" Adisson-Wesley Publ.Company,1968.

T TEISSIER."Resolution simultanée-I.Familles de courbes". Sem.sur les singularités des surfaces.Lect.Notes in Math. 777.Springer Verlag.

V VALLA."Generators of ideals and multiplicities".Comm. in Algebra 9(15),1541-1549(1981).

WAL WALKER"Algebraic curves"Pricenton Univ.Pricenton 1950.

VDW VAN DER WAERDEN."Infinitely near points"Indagationes Math 12(1950).

Z ZARISKI."Estudies in equisingularity I,II,III" Amer.J. of Math. Vol.87(1965),pp.507-536.Vol.87(1965),pp.972-1006. Vol.90(1968),pp.961-1023.