Somos como enanos sentados sobre los hombros de gigantes para ver más cosas que ellos y ver más lejos, no porque nuestra visión sea más aguda o nuestra estatura mayor, sino porque podemos elevarnos más alto gracias a su estatura de gigantes.

BERNARDO DE CHARTRES.

II

DESARROLLO HISTORICO DE LA OPTIMIZACION ESTRUCTURAL

CAPITULO II

DESARROLLO HISTORICO DE LA OPTIMIZACION ESTRUCTURAL

II.1 INTRODUCCION

La evolución histórica y el desarrollo metodológico de las técnicas de optimización estructural están marcadas por una serie de hitos de importancia singular, que provocaron alteraciones radicales en los planteamientos asumidos por la comunidad científica hasta el momento de su aparición, o cuanto menos permitieron la apertura de nuevas y profundas lineas de investigación.

En las últimas décadas, sin embargo, y como sucede en tantas otras ramas de la ciencia, el crecimiento constante del volumen de investigaciones en curso, la aplicación generalizada de técnicas de gran sofisticación, la interrelación existente entre áreas de conocimiento dispares, la calidad y cantidad de conocimientos acumulados, y la transmisión constante de información entre los cientificos, han provocado un cambio cualitativo en la evolución de las técnicas de optimización estructural; la evolución marcada por hitos aislados y claramente identificables de antaño se ha transformado en la actualidad en una evolución casi continua.

Por este motivo consideramos oportuno enfocar desde un punto de vista histórico el desarrollo de las técnicas de optimización estructural hasta la década de 1960, y desde un punto de vista sintético y metodológico su evolución posterior.

II.2 EVOLUCION HISTORICA. (HASTA 1960)

II.2.1 Los primeros planteamientos de optimización estructural

Es prácticamente imposible precisar el momento en que surge por primera vez el concepto de optimización en el ámbito del diseño, y en concreto en el diseño estructural -entendido en un sentido amplio de obtención del resultado más deseable desde cualquier punto de vista objetivo, ya sea económico, de utilidad, etc-. Es claro, sin embargo, que la aspiración humana de alcanzar la perfección en todas sus obras, se manifiesta desde los tiempos más remotos en las artes, la arquitectura, la ingeniería, y todas las manifestaciones de la cultura. El ser humano, a lo largo de la historia, identifica en numerosas ocasiones la perfección con la belleza y sus cánones, con la religión, y con otros muchos aspectos de difícil valoración objetiva. Si bien la concepción primera del diseño puede estar plenamente condicionada por motivaciones de esta naturaleza, la realización material de la obra permite siempre un cierto margen de decisión basado en criterios objetivos, como la elección de los materiales, la disposición de los elementos estructurales portantes, etc. Es indudable que dentro de estos márgenes, los diseñadores y constructores de la antigüedad optimizan en cierto grado el diseño, si bien sus criterios de optimización se basan esencialmente en conocimientos empíricos y la bondad de sus decisiones está fuertemente limitada por la carencia de una doctrina científica bien consolidada de cálculo estructural.

Podemos considerar a Galileo, en el siglo XVII, como uno de los precursores del diseño estructural óptimo tal y como lo entendemos en la actualidad. Su análisis de la distribución tensional en vigas sometidas a flexión [Galileo 1638], aunque incorrecto, le permitió abordar racionalmente la obtención de la forma óptima en vigas de canto variable.

Johan Bernoulli [1687], revisa la teoría de Galileo aproximadamente medio siglo después de su formulación, y aplica la hipótesis de deformación plana de la sección y la ley de Hooke, postulando una distribución lineal para el estado tensional en las secciones ortogonales a la directriz. Su teoría le permite abordar el problema del diseño de vigas de resistencia uniforme.

No obstante, no podemos hablar con propiedad de la formulación de problemas de optimización estructural analíticamente bien fundamentados, hasta que Parent [1708,1710] en la primera década del siglo XVIII, descubre el concepto de fibra neutra de la sección y resuelve el problema del diseño de vigas de resistencia uniforme sometidas a la acción de cargas móviles. Su teoría es redescubierta con posterioridad, en el último tercio del siglo, por Lagrange [1770-1773,1772], quien analiza el diseño elástico de columnas axisimétricas de mínimo peso sometidas a cargas axiales. Sus conclusiones, aunque incorrectas (Lagrange no considera la acción del peso propio y por tanto obtiene una solución cilíndrica de sección constante) abrieron la vía que permitió a Clausen [1851] resolver acertadamente el problema, obteniendo, para la acción combinada de cargas centradas y peso propio, la conocida distribución exponencial del área de la sección en función de la altura.

Esta fase inicial de desarrollo de las técnicas de optimización estructural, de dos siglos de duración aproximadamente, aunque evolucionando a la par que los métodos de cálculo estructural, no configuró sin embargo en ningún momento un cuerpo de doctrina. El establecimiento de teorías coherentes, que aunque careciesen de generalidad fuesen cuanto menos aplicables a ciertas tipologías completas de problemas y a ciertos criterios restringidos de optimización, no se concretó hasta el desarrollo durante el último tercio del siglo XIX y el inicio del XX de las aportaciones de Levy, Maxwell y Michell.

II.2.2 Diseño óptimo de estructuras articuladas

Maxwell [1890] realiza la primera gran aportación a la construcción de una teoría de diseño óptimo estructural. En su artículo demuestra un importante teorema relativo a estructuras articuladas bajo un solo estado de carga, relacionando las longitudes de las barras con las máximas tensiones de tracción y compresión permitidas en cada una.

Lévy [1875] lleva a término un profundo estudio sobre diseño de cerchas y arcos de resistencia uniforme. Su demostración, que prueba el carácter forzosamente isostático de la configuración óptima de una celosía sometida a un estado de carga constante, es de particular interés, y ha generado con posterioridad numerosas polémicas analizando la posible extensión de este resultado a otros tipos de tipologías estructurales, estados de carga, y criterios de optimización.

Michell [1904] presenta una contribución revolucionaria a las técnicas de diseño óptimo estructural. Su teoría, a partir de las realizaciones de Maxwell, desarrolla una poderosa metodología aplicable a estructuras articuladas bidimensionales sometidas a un único estado de carga, que permite hallar la configuración de mínimo peso con restricciones en los valores máximos admisibles de las tensiones en las barras, y óptima por tanto en este sentido. Una configuración de este tipo está totalmente determinada por los puntos de aplicación y valores de las acciones exteriores y la localización de los apoyos, siendo necesariamente isostática como demuestra la teoría de Levy. Evidentemente no es posible asegurar el buen comportamiento de las estructuras óptimas de Michell bajo varios estados de carga distintos, y por desgracia, sus diseños son habitualmente irrealizables o no funcionales. No obstante, siguiendo a Morris [1982] en su excelente introducción a la optimización estructural, podemos establecer un paralelismo entre las estructuras ideales óptimas de Michell y el ciclo ideal termodinámico de Carnot, en el sentido en que permiten, en cualquier caso, estimar por comparación la eficiencia teórica de soluciones realizables en la práctica. Là metodología de Michell envuelve una gran complejidad operativa, y excepto en casos muy sencillos, su aplicación no pudo ser llevada a cabo hasta la aparición de los primeros ordenadores digitales.

A partir de los importantes descubrimientos citados, y hasta el advenimiento de la II Guerra Mundial, se realizan estudios de optimización estructural en la misma línea, esto es, tendentes a la obtención de sistemas estructurales de mínimo peso, con restricciones de tipo tensional, y sometidos principalmente a un solo estado de carga. La investigación en armamento, y particularmente en aeronáutica, durante los años precedentes al conflicto bélico y durante su desarrollo se intensificó de forma extraordinaria, impulsando las técnicas de optimización y abordando un rango distinto de problemas.

II.2.3 Diseño óptimo de componentes en la industria aeronáutica. La II Guerra Mundial

En los años cuarenta el diseño aeronáutico había alcanzado ya un grado notable de sofisticación. El avance científico en las áreas relacionadas fundamentalmente con la aerodinámica y la estabilidad de vuelo permitía resolver en mayor o menor grado los problemas que inicialmente fueron predominantes en la ingeniería aeronáutica. La introducción de nuevos materiales en la construcción, como las aleaciones de aluminio, de poco peso y gran resistencia, y las necesidades de producción originadas por el conflicto bélico, decantaron hacia el diseño de los componentes estructurales gran parte de la importancia de los proyectos. La ingeniería de la época se enfrentaba con problemas tales como el análisis del pandeo de paneles, rigidizadores, almas y alas de perfiles metálicos, etc., y la necesidad de diseñar este tipo de elementos estructurales con alta resistencia y mínimo peso.

Si bien este tipo de análisis había sido efectuado previamente por Wagner [1929], los primeros resultados de importancia en el ámbito de la optimización se deben a Cox y Smith [1943], en relación con diseño de estructuras de peso mínimo en compresión, y Zahorski [1944], en relación con la distribución de material en paneles rigidizados.

Wittrick [1945] y Leggett y Hopkins [1949] analizan el diseño óptimo de paneles compuestos por varias capas de materiales teniendo en cuenta el pandeo.

Es característico de este período considerar que cada elemento estructural está determinado por una variable de diseño, y a él se asocia una restricción, normalmente formulada en términos de las cargas críticas de pandeo. La técnica de optimización suele basarse en la suposición de que en el óptimo se producen simultáneamente varios modos de fallo estructural. Igualando por tanto las expresiones de las cargas críticas de inestabilidad de aquellos componentes cuyo fallo se tiene en cuenta en el analisis y del sistema estructural completo, puede obtenerse un sistema de ecuaciones cuya solución determina hipotéticamente el diseño óptimo de peso mínimo. Es igualmente característico de este periodo el estudio detallado de componentes aislados, y su optimización independiente del comportamiento del sistema estructural completo. La aplicación de estas técnicas está restringida a una clase muy concreta de problemas, y es evidente que la concepción que las inspira es todavía muy pobre considerada en el ámbito del diseño óptimo. No obstante sirvieron de fragua para el nacimiento y consolidación de dos técnicas que alcanzaron gran difusión en la década de los años cincuenta.

II.2.4 Las técnicas intuitivas de optimización: La teoria del fallo simultáneo y los índices de carga

Shanley [1952] y Gerard [1956] contribuyen considerablemente a difundir las técnicas que denominaremos intuitivas.

La teoria del fallo simultáneo, inspirada por los análisis sobre pandeo de la década anterior, se basa en la suposición de que el diseño óptimo de mínimo peso es aquel en que todos los modos de fallo de la estructura (por rotura o inestabilidad) ocurren simultáneamente. Para poder formular el problema matemáticamente es en general imprescindible que exista una variable de diseño por modo de fallo estructural. Ello conduce al planteamiento de un sistema de ecuaciones no lineales cuya solución se aborda mediante técnicas iterativas, la más difundida de las cuales consiste en modificar en cada iteración las dimensiones de cada componente mediante una sencilla regla de tres en función del valor previo de la dimensión del componente, su tensión, y la tensión máxima admisible (método de escalado o de la razón de tensiones).

En el caso de una estructura compleja, la bondad de la solución obtenida viene determinada por el acierto con que el diseñador selecciona los modos de fallo críticos de la estructura (pandeo, tensiones admisibles) y la forma en que los incluye en el modelo de optimización ligándolos a variables de diseño determinadas. Es esencial resaltar el hecho de que esta teoria no predice los tipos concretos de fallo estructural. Son precisamente esos tipos los que el diseñador impone de antemano, y que por tanto determinan la solución. Los resultados obtenidos son habitualmente quasi-óptimos, y no es posible en general introducir en el problema otro tipo de restricciones formuladas en términos de desplazamientos, geometría, etc. No obstante, la teoría y su aplicación práctica más común, que es la conocida habitualmente bajo la denominación de diseño a máxima tensión (full stress design), experimentó una considerable difusión y permitió obtener mejoras cualitativamente importantes en diseños de ciertas tipologías estructurales. Fundamentalmente se aplica a la optimización de dimensiones de componentes estructurales (secciones de barras en cerchas, espesores de placas, rigidizadores de paneles, etc.). En caso de existencia de varios estados de carga, el diseño a máxima tensión presupone que el diseño óptimo es aquel en que cada componente estructural se encuentra sometido a la máxima tensión admisible, para al menos un estado de carga. Posteriormente, se demostraría la falsedad de esta aseveración en el caso de estructuras hiperestáticas.

Hacia el año 1958 los métodos de índices de carga desarrollados a partir de los planteamientos de Shanley se encuentran en su máximo apogeo. Los índices estructurales o de carga no son sino factores que relacionan las esfuerzos que resisten los componentes con sus propiedades geométricas y resistentes, de forma que su valor determine más o menos aproximadamente la distribución tensional. Permiten comparar, por tanto, la eficiencia relativa de distintos materiales o tipologías estructurales. Lamentablemente, su aplicación se restringe a componentes sencillos sometidos a un único estado de carga, y es difícil la introducción de restricciones no formuladas en función de tensiones máximas admisibles o del pandeo. Su utilización en optimización se realiza en conjunción con los métodos de fallo simultáneo.

II.2.5 El desarrollo del análisis plástico. Aplicación de la programación lineal

El desarrollo de la teoría del colapso plástico de pórticos abre nuevas perspectivas en la década de 1950 a las técnicas de optimización estructural, fuertemente influenciadas por las teorías de fallo simultáneo. Heyman [1951], Foulkes [1954], Prager [1956] y Livesley [1956] analizan el diseño óptimo de pórticos sometidos a un estado de carga. Heyman y Prager [1958] y Livesley [1959] generalizan la técnica para múltiples estados de carga. Si bien las aportaciones citadas son difícilmente generalizables a otras tipologías estructurales, por primera vez se introducen métodos de programación matemática en la optimización estructural, ya que el óptimo en condiciones de colapso plástico se obtiene generalmente mediante programación lineal (Método del Simplex).

Los métodos plásticos refuerzan temporalmente las teorías de fallo simultáneo, dado que esencialmente son equivalentes, exceptuando el hecho de que el diseño a máxima tensión se había formulado hasta la fecha para problemas elásticos, y mediante ambas metodologías se obtienen quasi-óptimos en los que forzosamente varias restricciones son críticas, es decir, alcanzan su límite de aceptabilidad.

Las técnicas de programación matemática hacen su aparición de esta forma en la optimización estructural, pese a que en el estado del conocimiento de la época sus aplicaciones son muy restrictivas y no se contempla la introducción de restricciones en tensiones, corrimientos, o pandeo bajo condiciones de servicio. No obstante, de alguna forma, inducen la formulación de los planteamientos modernos generalizados del diseño estructural óptimo.

II.2.6 El inicio de las concepciones modernas

Los principios que inspiran la moderna concepción del diseño óptimo fueron formulados en el periodo 1955-1960, y se deben fundamentalmente a Klein, Pearson y Schmit. Sus aportaciones fundamentales respectivas pueden ser resumidas en los siguientes términos:

- La formulación del problema generalizado de optimización estructural en la forma que hoy en día se denomina estándar.
- La integración del análisis estructural y la optimización en un esquema único y coherente de diseño.
- La utilización de métodos generales de cálculo estructural de gran potencia (MEF), y la subsiguiente aplicación de la optimización estructural a problemas con dominios de definición continuos bi y tridimensionales.

Klein [1955a], es el primero en plantear el problema general de optimización estructural como un problema estándar de programación no lineal, es decir, en términos de la minimación de una función objetivo (peso estructural, coste económico, etc.) de las variables de diseño que determinan las propiedades geométricas y resistentes de la estructura, considerando restricciones de tipo genérico expresadas como inecuaciones en función de las mismas variables, o de variables dependientes de las mismas. La formulación de Klein, o formulación estándar, engloba todos los conceptos desarrollados hasta la fecha, pudiendo ser considerados éstos como particularizaciones, métodos alternativos de resolver el problema de programación matemática o aproximaciones en mayor o menor grado a su solución. Sin embargo, pese a la evidente generalización que supone su formulación, Klein no contempla la posibilidad de optimizar un diseño estructural considerando diversas hipótesis de carga.

Lamentablemente, en el momento en que Klein publica su formulación se desconocen las técnicas modernas de programación matemática no lineal, y la optimización ha de abordarse mediante los métodos clásicos basados en la reducción del problema de minimización con restricciones en desigualdades, a problemas de minimización con restricciones de igualdad, mediante la introducción de nuevas variables que denominaremos de separación (o mudas), que afectan al planteamiento del problema de programación pero no intervienen directamente en el modelo de optimización estructural. Los problemas de minimización con restricciones pueden resolverse mediante técnicas basadas en los multiplicadores de Lagrange. De esta forma se obtienen generalmente grandes sistemas de ecuaciones no lineales, dependientes de numerosas variables, y que admiten numerosas soluciones. Dado que no todas ellas son óptimas, es imprescindible calcular el conjunto completo de soluciones de tales sistemas con el fin de obtener el óptimo buscado.

El anális de Klein, publicado en el Journal of the Operations Research Society of America, no recibe en el momento una atención excepcional, debido fundamentalmente al ambiente crítico existente en el círculo de la Investigación Operativa respecto a los métodos clásicos, asumido por Charnes y Cooper [1955], el propio Klein [1955b] y Dantzig [1956]. Si bien este espíritu cristalizaría, poco tiempo después, en el desarrollo de las técnicas modernas de programación no lineal, la no disponibilidad de estos métodos resta interés a la nueva formulación y su autor renuncia a profundizar en la misma línea.

Pearson [1958], aunque analizando problemas de diseño óptimo en condiciones de colapso plástico, complementa en numerosos aspectos las nuevas ideas de Klein. Sus estudios se centran fundamentalmente en la transformación de problemas con restricciones en desigualdad a problemas equivalentes de optimización no restringida, y en la realización de cambios de variable ingeniosos que permitan la reducción de la dimensión del problema original. Pero por encima de todo es el precursor de la integración de las técnicas de anális estructural y los métodos de optimización en un esquema coherente de diseño, ya que su método obtiene simultáneamente el óptimo estructural y su mecanismo de colapso.

Schmit [1960] introduce por primera vez la idea de ensamblar métodos de cálculo de gran potencia y generalidad, como el Método de los Elementos Finitos, con técnicas de programación no lineal, con objeto de crear sistemas avanzados de diseño óptimo con un rango de aplicación muy extenso, excediendo, con mucho, las pretensiones de las aportaciones realizadas hasta la fecha.

En aquel momento la formulación estándar de Klein se encuentra ampliamente divulgada, y los investigadores la aceptan sin reparos casi con total unanimidad. No obstante, se pone en duda sistemáticamente su aplicabilidad, excepto en lo concerniente a problemas acádemicos de gran sencillez, dada la inexistencia de métodos eficientes para la solución de problemas de programación no lineal. A pesar de aceptarse la formulación de Klein, es característico de la época formular la optimización estructural con planteamientos más primitivos, principalmente en lo que concierne a imponer una restricción de comportamiento por modo de fallo estructural, considerar que las variables de diseño afectan exclusivamente a dimensiones de componentes, etc., y no se hace uso de toda la potencia que permitiría una interpretación más intensa y profunda de la nueva formulación.

Sin embargo, pese a ser frecuente considerar el peso estructural como función a minimizar, se acepta la potencial utilización de otras funciones (coste, fiabilidad, eficacia, etc.). Paralelamente, se recurre con frecuencia a representaciones planas de los problemas de optimización no lineal, con objeto de buscar interpretaciones geométricas de los nuevos algoritmos de resolución que comienzan a emerger, y se generaliza la idea de que es conveniente imponer restricciones sencillas directamente sobre cada variable de diseño, limitando sus valores máximo y mínimo admisibles, tanto por razones de viabilidad de la solución óptima buscada, como con objeto de evitar mal condicionamientos en el análisis.

Schmit, siempre en el rango de comportamiento elástico de las estructuras, reconoce la necesidad de profundizar en métodos que permitan considerar varios estados de carga, y remarca fuertemente la importancia de las restricciones en desigualdad, debido a su inherente generalidad.

Tienen gran importancia sus críticas a las teorías de modos de fallo simultáneos y al método de diseño a máxima tensión, cuando enuncia el hecho de que el óptimo de un problema de diseño estructural no está necesariamente condicionado por varios modos de fallo. Por tanto si existen "n" variables que determinan el diseño, no siempre el óptimo es aquel en que se producen simultáneamente "n" modos de fallo, y en consecuencia, los planteamientos de diseño a máxima tensión son esencialmente erróneos cuando se aplican indiscriminadamente a todo tipo de estructuras.

La veracidad de este aserto fue demostrada de forma magistral por Schmit [1960], mediante un ejemplo conceptualmente sencillo que exponemos a continuación.

Analizando mediante un método clásico de diseño a máxima tensión una estructura articulada compuesta por tres barras, en la cual son variables de optimización las secciones transversales de las mismas, bajo dos hipótesis de carga, y con restricciones en la tensión máxima admisible (Figs. 2.1-a y 2.1-b), obtiene una solución quasi-óptima en la que una de las barras tiene sección nula, siendo por tanto isostática la configuración final

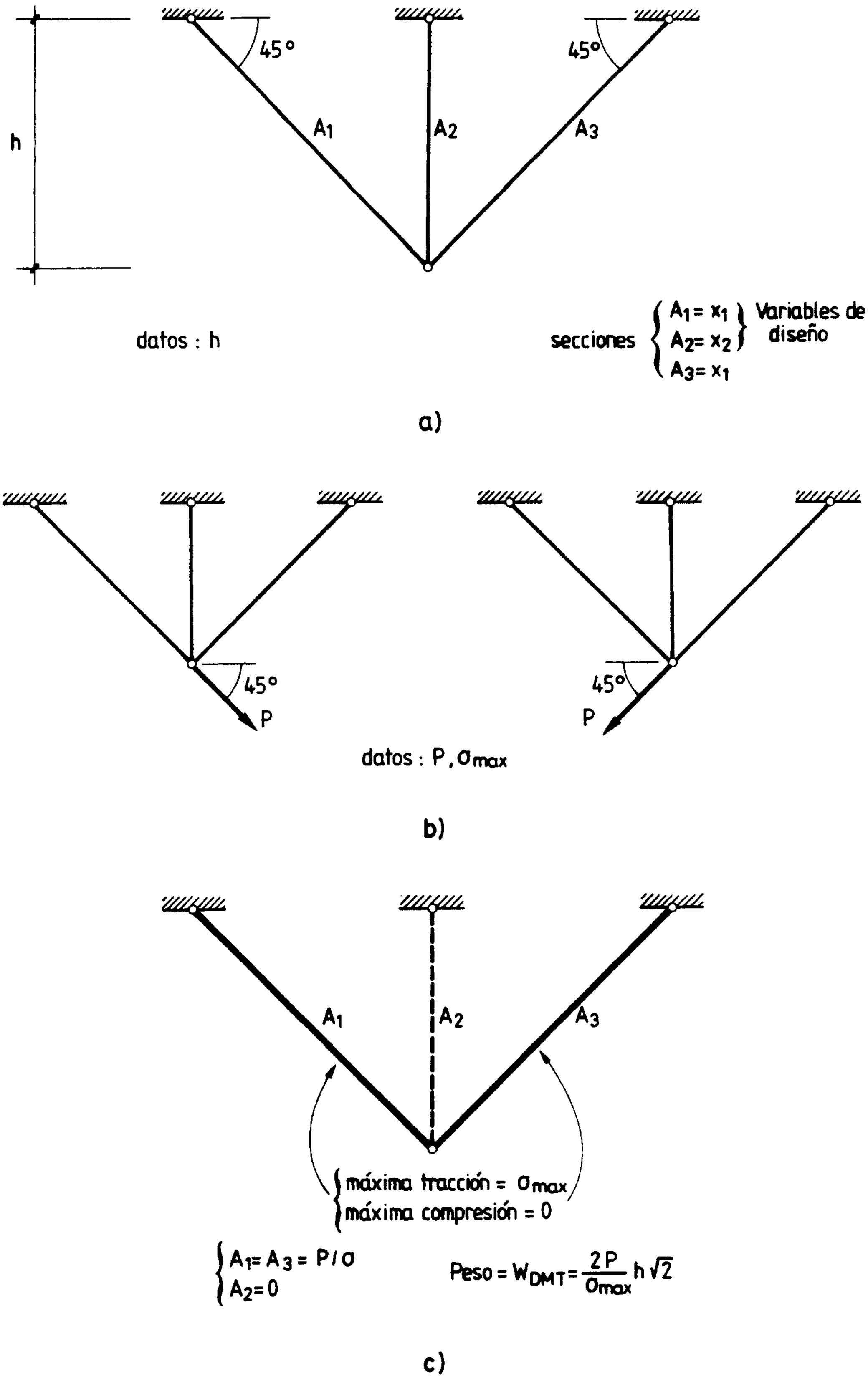

Figura 2.1.- Optimización de las dimensiones de una estructura articulada hiperestática bajo el criterio de diseño a máxima tensión.

a)Modelo de diseño.

b)Hipótesis de carga consideradas.

c)Diseño final obtenido mediante el método de diseño a máxima tensión.

(Fig. 2.1-c). Si bien ello concuerda con la teoria de Lévy [1875], Schmit se enfrenta a una aparente paradoja cuando al analizar el mismo caso mediante técnicas de programación matemática y adoptando como función objetivo el peso estructural (Figs. 2.2-a y 2.2-b), obtiene una configuración hiperestática de menor peso (Fig. 2.2-c), en la que una de las barras no alcanza bajo ninguna hipótesis de carga la tensión máxima admisible. Este resultado pone en evidencia la falsedad de la teoria de los modos de fallo simultáneos y el diseño a máxima tensión, pero se encuentra aparentemente en contradicción con la teoria de Lévy ya que la estructura óptima no es isostática. Sin embargo, al introducir en el modelo de diseño la posibilidad de modificar la geometria de la estructura, y no tan solo las secciones transversales de las barras (Figs. 2.3-a y 2.3-b), el mismo análisis de programación matemática conduce a la solución óptima isostática (Fig. 2.3-c), de distinta geometria y menor peso que las anteriores.

En este sencillo ejemplo, cuya deducción es un interesante ejercicio y donde se evidencia parcialmente la dificultad que implica el tratamiento de los problemas de optimización estructural y la complejidad de las técnicas de programación matemática, se manifiestan plenamente las limitaciones de la visión restringida de la optimización estructural aceptada hasta la fecha, en la que se optimizan exclusivamente dimensiones de componentes estructurales pero no su geometria, y se aplican técnicas intuitivas tales como el diseño a máxima tensión.

La influencia de este estudio fue notable en la difusión posterior del planteamiento de Klein y en el desarrollo de

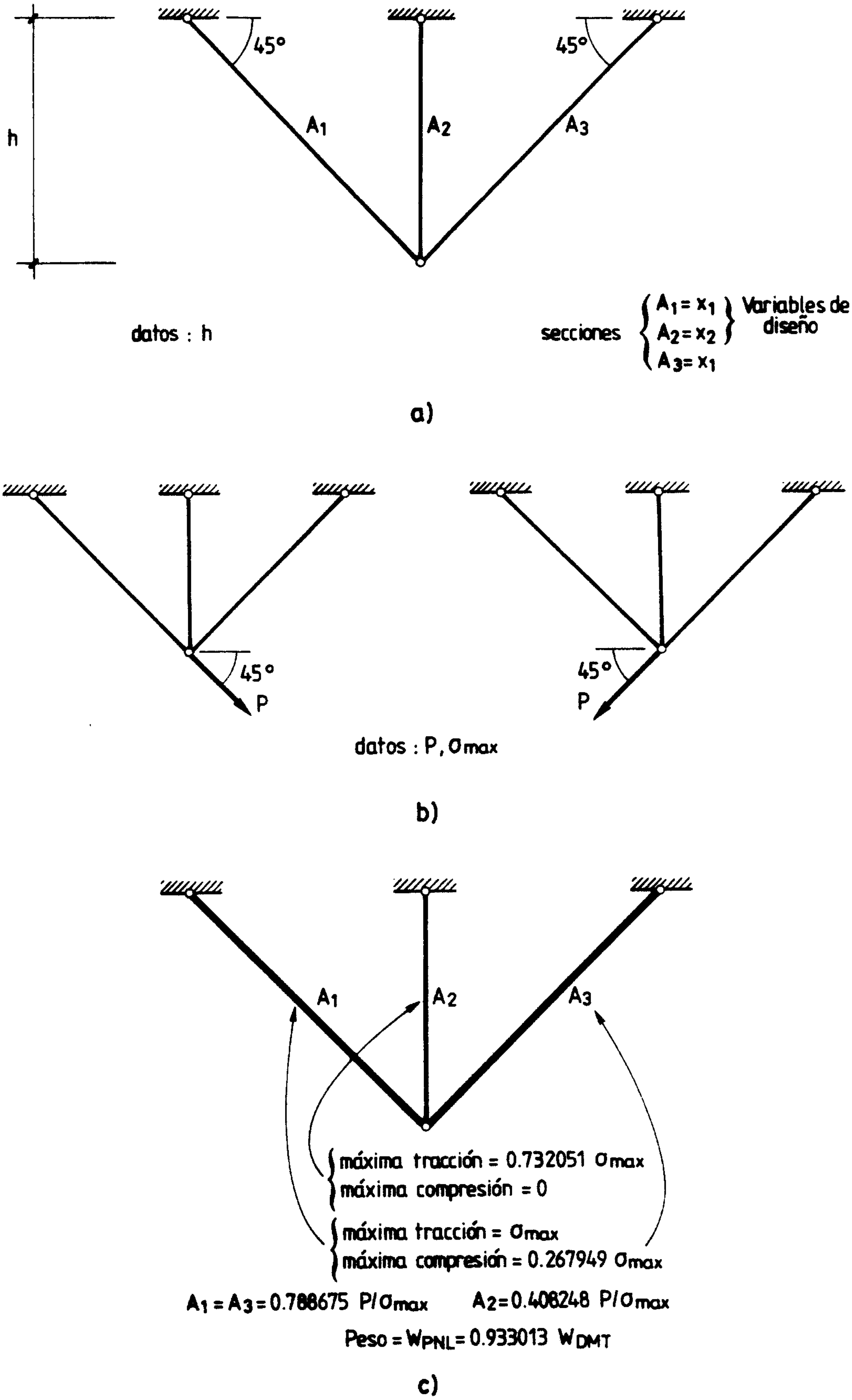

Figura 2.2.- Optimización de las dimensiones de una estructura articulada hiperestática bajo el criterio de peso mínimo y restricciones en la tensión máxima.

a) Modelo de diseño.

b) Hipótesis de carga consideradas.

c) Diseño final obtenido mediante técnicas de programación matemática no lineal.

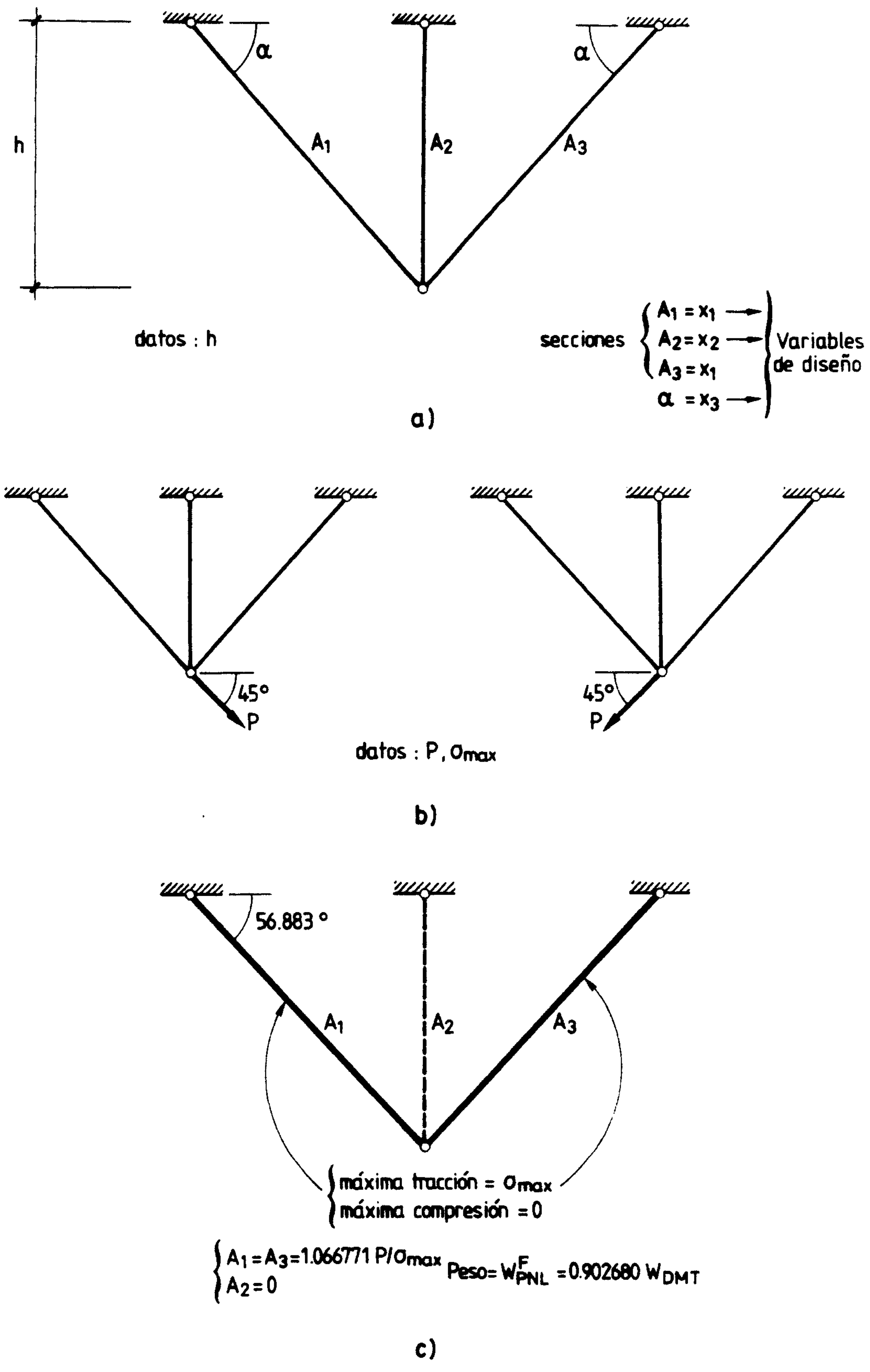

Figura 2.3.- Optimización de la forma y de las dimensiones de una estructura articulada hiperestática bajo el criterio de peso mínimo y restricciones en tensión máxima.

a)Modelo de diseño.

b)Hipótesis de carga consideradas.

c)Diseño final obtenido mediante técnicas de programación matemática no lineal.

técnicas de optimización de la forma estructural.

A partir de 1960 podemos considerar que la optimización estructural se encuentra plenamente consolidada como un cuerpo doctrinal, y no solamente como un conjunto de técnicas relacionadas entre sí. Por ello, la exposición de las aportaciones realizadas desde esa fecha hasta nuestros días la realizaremos desde una perspectiva más sintética, atendiendo en menor grado al orden cronológico.

II.3 LA OPTIMIZACION ESTRUCTURAL MODERNA. (1960-1986)

La optimización estructural moderna se caracteriza por su sistematización, frente a la diversidad de planteamientos aparentemente inconexos que predomina hasta los años sesenta. En este sentido, se observa que los planteamientos, tanto en la investigación como en la realización de aplicaciones, se materializan siguiendo un esquema coherente, que podemos definir en los siguientes términos:

- Formulación del problema de optimización como un problema general de programación matemática: esto es, como la minimización de una cierta función objetivo (peso estructural, concentración de tensiones, coste, etc.), verificándose unas restricciones expresadas generalmente como inecuaciones en función de variables que definen el comportamiento estructural (esfuerzos, tensiones o desplazamientos inferiores a ciertos valores admisibles, limitaciones geométricas, etc.)

- Generación de un modelo de optimización: esto es, la definición de la estructura a través de un conjunto de variables de diseño que determinan sus propiedades, de forma que pueda realizarse su análisis mediante un determinado procedimiento de cálculo estructural y obtener así la información necesaria para el planteamiento del problema de optimización (tensiones, desplazamientos, etc.)

- Desarrollo y aplicación de nuevos métodos de solución de problemas de programación matemática.

- Desarrollo y aplicación de otras técnicas asociadas a la optimización estructural cuyo objetivo es simplificar la solución del problema o aportar información de mayor calidad que facilite este objetivo. Entre ellas, es preciso mencionar en este punto el análisis de sensibilidad, del que ofreceremos una perspectiva más completa posteriormente pero que en primera aproximación podríamos definir como el conjunto de técnicas que permiten estimar o predecir, con mayor o menor exactitud, las modificaciones que se producirán en el comportamiento del modelo.

Sin renunciar totalmente a un tratamiento cronológico en la exposición, analizaremos separadamente las técnicas que conciernen a los siguientes aspectos:

. Las técnicas de solución de los problemas de minimización restringida.

. El planteamiento de modelos de optimización estructural.

. Otras técnicas asociadas a la optimización estructural.

II.3.1 Las técnicas de solución de los problemas de minimización restringida

En este apartado pretendemos ofrecer una perspectiva sintética de las más relevantes técnicas que se han aplicado en optimización estructural para resolver los problemas de minimización con restricciones a los que conduce la formulación de Klein.

No obstante, la importancia y la complejidad de las técnicas de programación matemática nos obliga a realizar una exposición más profunda desde un punto de vista analítico que se recoge separadamente en el Capítulo III.

El planteamiento de la optimización estructural como un problema de programación matemática, introduce numerosas dificultades inexistentes en planteamientos más primitivos. Frente a la concepción de la optimización estructural a través de la teoría del fallo simultáneo, en el planteamiento de Klein se desconocen a priori las restricciones que condicionarán la solución, y las que no influirán en la misma. Además, la mayor flexibilidad de esta formulación conduce naturalmente al planteamiento de problemas de optimización estructural de también mayor complejidad, en los que las variables de comportamiento que intervienen en las restricciones impuestas pueden estar definidas mediante grandes sistemas de ecuaciones implícitas (con la consiguiente dificultad que ello representa para su manipulación matemática). Por otra parte, se plantean problemas de tamaño creciente, tanto en lo que se refiere al número de restricciones (múltiples estados de carga, etc.) como al número de variables de diseño.

Para solucionar este tipo de problemas se desarrollan y aplican diversas técnicas que podemos clasificar en tres grandes grupos:

- Métodos intuitivos.
- Métodos basados en Criterios de Optimalidad.
- Métodos basados en algoritmos de Programación Matemática.

Los métodos intuitivos aplicados a partir de 1960 no son sino extensiones o modificaciones de los ya mencionados previamente, y en particular del método de escalado o de la razón de tensiones para problemas de diseño a máxima tensión. Si bien su validez para resolver problemas de tipo general es puesta en duda [Schmit 1960, Gallagher 1973], su utilización dentro de un planteamiento de minimización restringida contiene aspectos conceptualmente novedosos. En efecto, desde esta perspectiva estos métodos pueden considerarse como técnicas alternativas de resolver el problema general de programación matemática basados en la realización de ciertas hipótesis a priori sobre cuáles son las restricciones que condicionan estrictamente el óptimo. Esta idea conduce de forma natural a los métodos basados en criterios de optimalidad.

II.3.1.1 Métodos basados en Criterios de Optimalidad

Un criterio de optimalidad para un cierto problema de optimización consiste en un conjunto de condiciones que han de verificarse necesariamente en la solución del mismo. Si puede establecerse este conjunto de condiciones, suficientemente completo como para definir la solución del problema, es, en general, posible resolver indirectamente el problema de minimización. Normalmente, el algoritmo de resolución se plantea como un esquema iterativo tendente a satisfacer el criterio de optimalidad.

Desde este punto de vista, las técnicas intuitivas de optimización pueden considerarse como métodos basados en primitivos criterios de optimalidad establecidos a partir de hipótesis no siempre bien fundamentadas.

Planteamientos más rigurosos se desarrollaron posteriormente teniendo en cuenta conceptos propios de los problemas de optimización estructural (isoestatismo o hiperestatismo, energía de deformación), así como las condiciones necesarias de mínimo de Kuhn-Tucker [1951] para el problema general de minimización.

En esta categoría de métodos, las dificultades fundamentales residen en:

- la identificación de las restricciones que condicionan la solución (denominadas activas), de forma que puedan ser eliminadas las restantes (o inactivas).

- el desarrollo de métodos iterativos para hallar las soluciones que verifican el conjunto de condiciones, comprobando simultáneamente si la identificación de las restricciones activas es correcta, y en caso contrario modificando las hipótesis iniciales al respecto.

Prager y Taylor [1968], y Sheu y Prager [1968] sientan los fundamentos teóricos de este tipo de métodos a partir de principios variacionales, reduciendo diversos problemas sencillos de optimización (con modelos de cálculo estructural de tipo continuo), a la solución de las ecuaciones diferenciales de Euler. Si bien este enfoque se muestra ineficaz para la solución de problemas menos idealizados y más realistas, sirve de base para el desarrollo de métodos similares aplicables a modelos de cálculo estructural de tipo discreto (métodos matriciales) y por extensión al Método de Elementos Finitos.

Venkayya, Khot y Reddy [1969] y Venkayya, Khot y Tischler [1971] emplean criterios de optimalidad que postulan una distribución uniforme de energía de deformación en cerchas óptimas. Berke [1970] deriva un criterio de optimalidad basado en las condiciones de Kuhn-Tucker para un problema con una sola restricción, por desgracia inaplicable a problemas con múltiples restricciones. Numerosos autores proponen diversos algoritmos en la década 1970-1980, aparentemente inconexos, para identificar las restricciones activas a partir de la estimación de los multiplicadores de Lagrange de las condiciones de Kuhn-Tucker en problemas con múltiples restricciones. De todos ellos se ofrece una visión unificadora en Khot [1982].

Sin embargo, los problemas inherentes al método, no se resuelven de una forma rigurosa hasta el desarrollo de la formulación dual [Fleury y Sander 1977,1978, Fleury 1979a,1979b,1980, Esping 1984a,1984b, Fleury y Braibant 1986], en la cual la identificación de las restricciones activas es un aspecto sustancial e íntimamente ligado al algoritmo de programación matemática empleado para resolver el problema de minimización. A partir de este momento puede considerarse la formulación dual como el nexo de unificación de los criterios de optimalidad con las técnicas de programación matemática. Es preciso indicar, no obstante, que hasta el momento presente los algoritmos basados en la formulación dual solo han podido probar su eficacia en problemas de optimización estructural en los que el óptimo está condicionado por un número relativamente bajo de restricciones.

Referencias actualizadas sobre aplicaciones de criterios de optimalidad en optimización estructural pueden hallarse en Schmit Jr. [1984], y Khot y Berke [1984].

II.3.1.2 Métodos basados en algoritmos de Programación Matemática

Ramakrishnan y Campbell [1973] y Vitiello [1973] emplean el método de las funciones de penalización en optimización de presas de gravedad. Este método, como se expondrá posteriormente en detalle, consiste en reducir el problema de minimización con restricciones a una sucesión de problemas no restringidos que se obtienen sumando a la función objetivo original una serie de términos que penalizan el incumplimiento de las restricciones.

Middleton y Oñate [1977] aplican esta técnica en la optimización de vasijas de presión metálicas adoptando como función objetivo a minimizar la tensión tangencial. Posteriormente Bond [1979] y Middleton [1979] utilizan con éxito el mismo método con diversas modificaciones que contribuyen a acelerar notablemente la velocidad de convergencia.

Tocher y Karnes [1971] y Smith y Woodhead [1973] aplican los algoritmos de direcciones factibles de Zoutendijk [1960] y de programación lineal secuencial, respectivamente, mostrando las buenas perspectivas que ofrecen los métodos de linealización, esto es, métodos en que la solución del problema no lineal se sustituye por una secuencia de problemas lineales obtenidos a partir del primero truncando por su primer término los desarrollos de Taylor de la función objetivo y de las restricciones.

El método de programación lineal secuencial, pese a su gran potencialidad, presenta algunos efectos indeseables (principalmente oscilaciones si la solución del problema no se encuentra condicionada por un número suficientemente alto de restricciones) [Ricketts y Zienkiewicz 1984]. Para paliar estos efectos y acelerar la convergencia se realizan numerosas mejoras en este algoritmo. Kelley [1960] desarrolla el método del plano secante, en el cual se retienen en iteraciones sucesivas las restricciones linealizadas precedentes. Moses [1964], y otros autores emplean el método de límites móviles, consistente en imponer restricciones adicionales de tipo lineal, desarrollado por Griffith y Stewart [1961]. Zienkiewicz y Campbell [1973] sugieren limitar la cuantía de la modificación del diseño entre cada iteración y la siguiente reduciendo la amplitud de las oscilaciones, pero no eliminándolas. Schmit y Farshi [1974] aplican el método de las hiperesferas inscritas de Baldur [1972] mejorando las posibilidades de evitar óptimos locales y conducir el proceso hacia el óptimo global.

Chao, Fenves y Westerberg [1984] aplican técnicas de programación cuadrática (esto es, técnicas para problemas con función objetivo cuadrática y restricciones lineales) a problemas de optimización de estructuras articuladas.

Referencias actualizadas sobre aplicaciones de métodos de programación matemática en optimización estructural pueden hallarse en Schmit Jr. [1984], Ricketts y Zienkiewicz [1984], y Ragsdell [1984]. Un estudio comparativo de las diversas técnicas con ejemplos numéricos puede encontrarse en Belegundu y Arora [1985a,1985b].

II.3.2 <u>El planteamiento de modelos de optimización estructural</u>

II.3.2.1 Clasificación

Como se ha expuesto anteriormente, el planteamiento de un modelo de optimización estructural implica esencialmente la definición de dos aspectos:

- El modelo de cálculo estructural empleado: ésto es, el procedimiento mediante el cual se obtiene información sobre el comportamiento de la estructura a partir de sus propiedades.

- El modelo de diseño: ésto es, la definición de la estructura a través de un conjunto de variables de diseño que determinan sus propiedades.

Consideraremos por tanto dos criterios bajo los cuales pueden clasificarse los diferentes planteamientos modernos de modelos de optimización estructural:

- La naturaleza del modelo de cálculo estructural.
- La naturaleza del modelo de diseño.

II.3.2.1.1 Clasificación según la naturaleza del modelo de cálculo estructural

Siguiendo la exposición de L. A. Schmit Jr. [1984], consideraremos dos niveles de diseño:

- Nivel de componente
- Nivel de sistema

Entendemos por nivel de componente, la optimización del diseño de una determinada parte de un sistema estructural cuyo comportamiento se considera independiente del resto del sistema, o de una estructura completa, idealizada mediante un modelo de cálculo sencillo. En este nivel se consideran habitualmente pocas variables de diseño, dado que se trata de estructuras simples, pero pueden tenerse en cuenta numerosos estados de carga y restricciones (en tensión, pandeo, propagación de fisuras, etc.). Las acciones que actúan sobre cada componente estructural se consideran conocidas, y por tanto independientes de su diseño final. Si bien se habian realizado numerosos estudios de esta indole en los años precedentes, a partir de 1960, y a diferencia de ellos, se plantean este tipo de análisis como problemas estándar de programación no lineal en la forma propuesta por Klein. Entre las aportaciones más relevantes citaremos las de Schmit, Kicher y Morrow [1963] -analizando el diseño de peso minimo de paneles tipo placa rigidizados, y considerando restricciones en pandeo, resistencia y dimensiones minimas-, Schmit y Fox [1964] -analizando problemas de impacto adoptando funciones objetivo distintas al peso estructural-, Schmit y Thornton [1965] -analizando problemas aeroelásticos-, Thornton y Schmit [1968] -analizando problemas termoestructurales-, y Kicher [1968], Morrow y Schmit [1968], y Stroud y Sykes [1969] quienes analizan el diseño de peso minimo de láminas cilindricas rigidizadas.

Los análisis a nivel de componente permiten considerar, evidentemente, el comportamiento estructural con gran precisión mediante diversos métodos de cálculo, bajo numerosas hipótesis de carga de gran complejidad, y considerando numerosas restricciones. Ello es debido a la sencillez del modelo de optimización. Por contra deben ser desarrollados independientemente para cada supuesto práctico, no admitiendo tratamientos generalizados debido a la gran diversidad de tipologias, formas de trabajo, y naturaleza de los componentes de sistemas estructurales completos.

Entendemos por nivel de sistema, la optimización de estructuras cuyo comportamiento no sea idealizable mediante modelos estructurales sencillos, o de sistemas estructurales completos integrados por diversos componentes cuyos comportamientos se consideran interdependientes.

Por su generalidad e inherente dificultad, es en este nivel en que se realiza el mayor esfuerzo de investigación a partir de 1960, y a él nos referiremos en lo sucesivo.

II.3.2.1.2 Clasificación según la naturaleza del modelo de diseño

La formulación de Klein permitió generalizar el planteamiento de los problemas de optimización estructural, evitando la necesidad de acudir a formulaciones restrictivas tales como adoptar para cada componente estructural una variable de diseño que determine sus propiedades (por ejemplo la sección de una barra, el espesor de una placa, etc.). Los nuevos planteamientos permiten que las variables de diseño definan de forma más general la estructura a optimizar. Surge la posibilidad de optimizar la forma de la estructura, frente a la optimización más clásica de la dimensión de sus componentes. A ello contribuye el análisis de estructuras continuas mediante el Método de Elementos Finitos, frente al análisis tradicional de estructuras formadas por elementos discretos (barras en estructuras articuladas o reticuladas, etc.), ya que en estructuras de tipo continuo el concepto de dimensión se disuelve en el concepto más general de geometría de la estructura.

Tradicionalmente suelen diferenciarse dos tipos de optimización:

- optimización de dimensiones

- optimización de formas

Suele denominarse optimización de dimensiones a la optimización estructural en la cual las variables de diseño afectan a dimensiones de componentes cuyas propiedades están bien definidas sin afectar a la geometría del conjunto (secciones de barras de longitud dada y directriz conocida, espesores de placas, etc.), pero también a la optimización estructural en la cual las variables de diseño afectan a las propiedades de los materiales (módulo de elasticidad, etc.). Ello se debe a que las técnicas de resolución de ambos tipos de problemas son idénticas, afectando las variables de diseño al comportamiento estructural de una forma relativamente sencilla. Los métodos de optimización aplicados entroncan fuertemente con el diseño a máxima tensión -por la naturaleza del problema- y a partir de la formulación de Klein, se generaliza éste mediante el fecundo concepto de criterios de optimalidad.

Por contra, suele hablarse de optimización de formas, cuando las variables de diseño afectan a la geometría estructural de una forma más compleja (posiciones de los nodos en estructuras de barras, directrices de piezas prismáticas, etc.).

Conceptualmente la diferenciación es poco clara, y responde más a motivos relacionados con el tipo de cálculo estructural realizado y a su dificultad, que a la propia naturaleza del modelo de optimización. Consideremos como ejemplo una viga de canto constante y sección rectangular de ancho conocido cuyo canto se desea optimizar; sea la única variable de diseño el valor del canto de la viga (Fig. 2.4-a); si analizamos el comportamiento estructural de la viga discretizándola en barras mediante cálculo matricial (Fig. 2.4-b), o bien mediante resistencia de materiales, deberíamos hablar de optimización de dimensiones; sin embargo, si analizamos la viga mediante un modelo de elementos finitos en tensión plana (Fig. 2.4-c), deberíamos hablar de optimización de formas ya que las variables de diseño afectan a las posiciones de los nodos de la malla de cálculo; pero es evidente que el modelo de diseño es único, por lo que nos enfrentamos a una contradicción.

A la vista de planteamientos más recientes, esta clasificación de las técnicas de optimización no parece tener un profundo sentido conceptual, y será empleada por nosotros tan sólo como una referencia a ciertos tipos de problemas. Esta idea será desarrollada con mayor profundidad posteriormente, proponiendo una clasificación más coherente según la naturaleza, en conjunto, del modelo de optimización.

No obstante su ambigüedad, el concepto de optimización de formas se mostró muy fructífero al dar lugar al planteamiento de problemas de mayor dificultad, en que las variables de diseño afectan al comportamiento estructural de una forma menos intuitiva y altamente no lineal. Este tipo de problemas ampliaron notablemente el rango de aplicación de la optimización estructural, y la necesidad de resolver los problemas altamente no lineales de programación matemática asociados generó un fuerte impulso a la investigación sobre técnicas de programación no lineal. Paralelamente, la mayor dificultad del análisis obligó a revisar viejos conceptos y a introducir otros nuevos que pueden

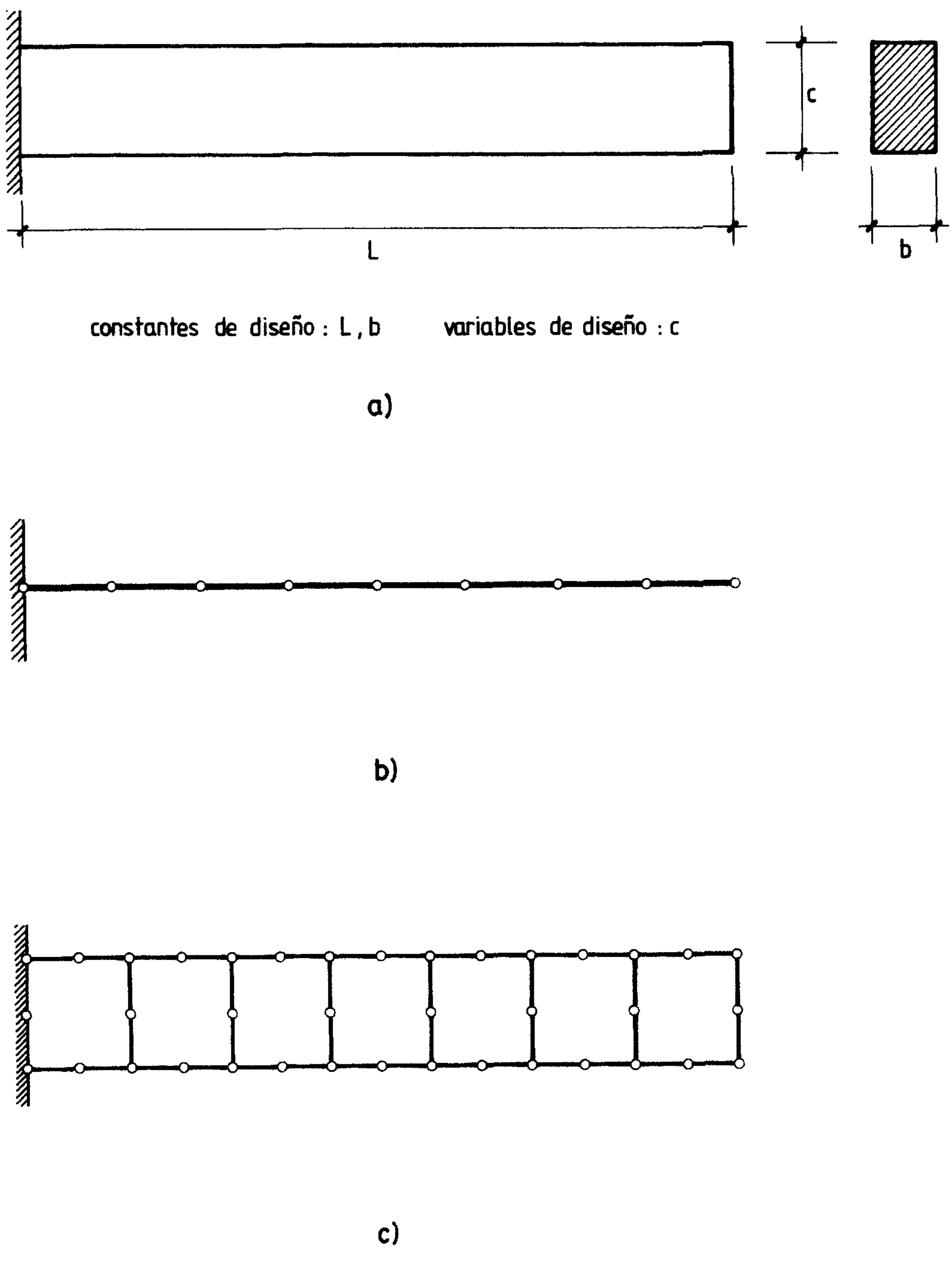

Figura 2.4.- Anbigüedad de los conceptos de "optimización de dimensiones" y "optimización de formas".

Un mismo modelo de diseño, la optimización del canto de una ménsula (a), da lugar a un problema de optimización de dimensiones si el modelo de cálculo estructural empleado es el método matricial para estructuras reticuladas (b), o a un problema de optimización de formas si se aplica el Método de Elementos Finitos para análisis en tensión plana (c).

ser aplicados igualmente a la optimización de dimensiones, y provocó una diversificación de técnicas extraordinaria y el desarrollo de lineas de investigación auxiliares, tales como el análisis de sensibilidad. De forma similar, los avances cientificos en lo que respecta a optimización de dimensiones son aplicables a la optimización de formas.

Por todos estos motivos expondremos a continuación la evolución posterior de la optimización de dimensiones y la optimización de formas, y separadamente otros enfoques, igualmente fecundos, pero que han alcanzado una menor difusión.

II.3.2.2 La optimización de dimensiones. (1960-1970)

Durante la década 1960-1970 se desarrollan en los Estados Unidos dos programas que constituyen, sin duda, la muestra más completa del nivel alcanzado por las técnicas de optimización estructural hasta la fecha. El primero fue realizado para Bell Aerosystems por Gallagher y Gellatly, [Gellatly, Gallagher y Luberacki 1964, Gellatly y Gallagher 1966, Gellatly 1966], y el segundo para Boeing por Karnes y Tocher, [Karnes y Tocher 1968,1971].

Puede considerarse esta década como una etapa de asentamiento y consolidación del conocimiento, en la que se utilizan frecuentemente programas eficientes de elementos finitos en conjunción con algoritmos de programación matemática de creciente complejidad y eficiencia. Se realizan significativos esfuerzos para reducir los tiempos de cálculo, y se asume plenamente la necesidad de crear modelos de optimización que definan las mallas de elementos finitos en función de un número relativamente pequeño de variables de diseño, evitando problemas de programación matemática con un número elevado de variables.

Se desarrolla además, por primera vez, un gran esfuerzo de divulgación de los métodos de optimización estructural, y de formación de científicos y técnicos.

Son plenamente clarificadores sobre el estado del conocimiento y sus avances en esta década las publicaciones de Schmit [1971a,1971b], Pope y Schmit [1971] , y Fox [1971].

En el ámbito de las estructuras de barras, se desarrollan nuevas técnicas que permiten optimizar la configuración estructural además de las dimensiones. Así Dorn, Gomory y Greenburg [1964] plantean el problema de seleccionar configuraciones óptimas de cerchas a partir de un conjunto predefinido de posibles localizaciones de sus nodos, optimizando simultáneamente sus dimensiones, obteniendo el diseño de mínimo peso mediante programación lineal y calculo plástico. Posteriormente, Dobbs y Felton [1969] generalizan esta técnica al caso de múltiples estados de carga y diseño elástico, siempre en cerchas planas, enfrentándose al crecimiento exponencial del número de configuraciones posibles con el número de posiciones predefinidas de las localizaciones de los nodos. Sheu y Schmit [1972] resuelven parcialmente este problema mediante una técnica que permite eliminar en principio una gran parte de las configuraciones posibles haciendo uso de un volumen de cálculo relativamente pequeño, y analizando en profundidad únicamente las configuraciones restantes.

A pesar de los indudables avances que suponen éstas y muchas otras aportaciones, las realizaciones prácticas de la década en cuanto a optimización estructural se refiere se concretan en programas que requieren grandes tiempos de cálculo, económicamente inviables en gran parte de los casos, y dotados de una capacidad de análisis modesta. Además, el planteamiento clásico de optimización de dimensiones conduce frecuentemente a soluciones inviables en la práctica por motivos constructivos (cerchas con numerosas barras de distinta sección transversal, áreas de las secciones óptimas no existentes en el mercado, etc.).

El desarrollo de nuevas técnicas de programación matemática de mayor eficiencia se realizaría parejamente a la formulación de problemas de diseño de mayor complejidad, fundamentalmente en el ámbito de la optimización de formas en la siguiente década.

II.3.2.3 La optimización de formas. (1970-1986)

Desde la publicación de la teoría de Michell [1904] no se realizan grandes aportaciones a la optimización de formas (excepto en lo que se refiere a técnicas analíticas cuya aplicación práctica y generalización envuelven una gran dificultad), hasta la aparición de la publicación de Schmit [1960], mencionada previamente. De este estudio se deriva la conclusión de que la optimización de la forma de las estructuras puede proporcionar diseños de mayor calidad que la sóla optimización de sus dimensiones, pudiendo ser sustancial la diferencia existente entre los resultados obtenidos a través de ambas perspectivas (Figs. 2.2-c y 2.3-c).

Sin embargo, la dificultad que envuelve la aplicación de modelos en los cuales la geometría es función de las variables de diseño a métodos complejos de cálculo de estructuras (MEF), y la fuerte no linealidad de los problemas asociados de programación matemática, limitan su introducción, que no se realiza de forma importante hasta una década después.

II.3.2.3.1 Sistemas estructurales discretos

La introducción de variables de diseño que afectan tanto a la forma como a las dimensiones de la estructura en el diseño óptimo de sistemas estructurales discretos no se generaliza hasta los años setenta, aunque los estudios de optimización de la configuración estructural de los años precedentes [Fleron 1964] pueden considerarse de alguna forma como precursores directos de esta nueva clase de técnicas de optimización.

Pedersen [1972] resuelve problemas de diseño óptimo de cerchas planas con restricciones en tensión y bajo un estado de carga, considerando en particular el peso propio de la estructura. Su formulación es numérica, frente a la formulación analítica clásica de Michell [1904], y representa la primera aportación de carácter general al mismo tema realizada en más de medio siglo. El problema de programación matemática es resuelto mediante programación lineal secuencial.

Sheppard y Palmer [1972] analizan el diseño óptimo de la forma de torres de transmisión de energía eléctrica aplicando técnicas de programación dinámica.

Lipson y Agrawal [1974] y Lipson y Gwin [1977a,1977b] aplican el método de minimización de Box [1965] al diseño óptimo de estructuras de barras. Introducen variables de diseño discretas, que determinan las dimensiones de las secciones transversales de las barras, y admiten en cierta medida cambios topológicos en el modelo de optimización, al considerar la eliminación de aquellas barras para las cuales las dimensiones de las sección tienden a anularse en el proceso de optimización.

Imai y Schmit [1981] emplean métodos de lagrangiano aumentado para resolver el problema de programación matemática, y aproximan el comportamiento estructural en las optimizaciones unidireccionales involucradas.

Otras aportaciones de interés, aunque más en el ámbito de la optimización de la topologia que de la forma de la estructura, pertenecen a Corcoran [1970], Pedersen [1972,1973], Fu [1973], Majid y Elliot [1973], Nagtegaal y Prager [1973], Reinschmidt y Russel [1974], Distefano y Rath [1975], Spillers [1975b], Majid y Saka [1977], Lev [1977,1978,1981a], Saka [1980], y Spillers y Kountouris [1980].

Por otro lado, Pedersen [1969] habia propuesto un tratamiento original de los problemas de optimización de formas y dimensiones simultáneamente, en los cuales se divide el proceso de optimización en dos fases, optimizando alternativamente la forma (mediante formulaciones en general complejas de programación no lineal) y las dimensiones (mediante formulaciones sencillas del tipo diseño a máxima tensión). Si bien Pedersen abandona en breve este tratamiento, numerosos investigadores la continúan durante la misma década. En particular Vanderplaats y Moses [1972,1973], quienes utilizan el método de las direcciones factibles extensamente, y consideran restricciones en pandeo y tensión en las barras, Vanderplaats [1975] generalizando la formulación anterior para restricciones de tipo general, y Spillers [1975a] quien utiliza una técnica similar en la que considera limites móviles, y admite la eliminación de barras que durante el proceso alcanzan las dimensiones minimas permitidas.

II.3.2.3.2 Sistemas estructurales continuos

La primera formulación general de un problema de optimización de formas de estructuras continuas abordado mediante métodos númericos se debe a Zienkiewicz y Campbell [1973], quienes emplean el Método de Elementos Finitos en el cálculo de la estructura, y utilizan como variables de diseño las coordenadas nodales de la malla. El problema de programación matemática es resuelto mediante una cadena de aproximaciones lineales a las que se aplica programación lineal (es decir, programación lineal secuencial), y el cálculo de sensibilidad necesario para estas aproximaciones se realiza mediante diferencias finitas partiendo de varios cálculos efectuados sobre diseños similares.

Se habian realizado sin embargo con anterioridad planteamientos parciales del problema, aunque desarrollados especificamente para problemas muy concretos. Asi Sharpe [1969] habia resuelto un problema de optimización de la forma del arco en planta y la sección de una presa bajo cargas de agua y peso propio, imponiendo restricciones en tensión y en estabilidad al vuelco; paralelamente De Silva [1969] analiza la sección del disco de una turbina.

Ramakrishnan y Francavilla [1975] emplean una formulación similar a la de Zienkiewicz y Campbell, pero resuelven el problema de programación matemática mediante un método de penalización.

Francavilla, Ramakrishnan y Zienkiewicz [1975] resuelven un problema de optimización de la forma de la sección de una barra, en el cual se trata de minimizar la concentración de tensión, y no el peso estructural.

Tvergaard [1975] presenta también una formulación similar basada en la aplicación de métodos variacionales sobre un modelo del campo tensional de la estructura, técnicas de perturbación y programación lineal secuencial. Kristensen y Madsen [1976] generalizan la formulación anterior para cuerpos bidimensionales, definiendo el contorno de los mismos mediante polinomios ortogonales cuyos coeficientes son las variables de diseño, y realizan el cálculo mediante elementos finitos y la optimización matemática mediante programación lineal secuencial. Aplicando sus metodologías analítico-numéricas resuelven problemas relacionados con la forma óptima de huecos en estructuras sometidas a campos tensionales biaxiales.

Bhavikatti y Ramakrishnan [1977] mejoran las formulaciones anteriores, y estudian diversos criterios de optimización, adoptando como funciones objetivo el peso estructural y un factor de concentración de tensiones, y comparan sus resultados con los de un criterio de optimalidad en el cual se supone el contorno de la pieza sometido a tensión uniforme.

Oda y Yamazaki [1977], y posteriormente Schnak [1979], emplean el Método de Elementos Finitos para calcular las tensiones de un cuerpo en la zona próxima a una concentración tensional, modificando iterativamente el contorno del cuerpo para minimizar la máxima tensión producida.

Chun y Haug [1978,1979] emplean un método de proyección de gradiente en el diseño óptimo de peso mínimo de cuerpos bidimensionales y de revolución, con restricciones sobre la tensión de comparación de Von Mises en distintos puntos, y la distribución de la tensión tangencial en el contorno, avanzando refinamientos en las técnicas de análisis de sensibilidad que serían desarrolladas poco después por Rousselet y Haug [1981].

De Silva y Grant [1978], Song y Lee [1981] y Queau y Trompette [1981], profundizan en el problema de optimización de discos de turbinas de peso mínimo, empleando una gran variedad de técnicas e imponiendo restricciones en tensiones, desplazamientos, frecuencias de vibración y velocidades de ráfaga; como estados de carga consideran fuerzas aerodinámicas sobre los álabes, y la aceleración centrífuga originada por la rotación a gran velocidad.

Botkin [1982] resuelve el problema de optimización de bielas destinadas a maquinaria del sector automovilístico. La modificación de la forma a lo largo del proceso de diseño es de tal magnitud, que obliga a redefinir varias veces la topología de la malla de elementos finitos empleada en el cálculo para obtener resultados satisfactorios. Por este motivo, Botkin resalta la necesidad de desarrollar tècnicas màs eficientes de generaciòn y refinamiento automàticos de mallas de elementos finitos, especialmente en problemas tridimensionales.

Si bien el criterio de mìnimo peso es con mucho el màs extendido, existen muchas otras aportaciones de interès basadas en la adopciòn de diferentes criterios. Asì Kristensen y Madsen [1976], Queau y Trompette [1980] y Pedersen y Carsten [1981], quienes optimizan el diseño de piezas mecànicas minimizando la concentraciòn de tensiones, problemas èstos en los que adquiere mayor importancia el realizar un modelado adecuado de la estructura, y mantener su precisiòn a lo largo del proceso. Miura [1972] estudia el diseño òptimo de peso mìnimo de planos de sustentaciòn de aeronaves supersònicas teniendo en cuenta los efectos de las cargas aerodinàmicas y las vibraciones, y Craig y Erbug [1976] analizan el diseño òptimo de planos de sustentaciòn formados por materiales compuestos, empleando una funciòn objetivo en la que intervienen el peso estructural y la resistencia aerodinàmica al avance. Hicks, Murman y Vanderplaats [1974], Haney, Johnson y Hicks [1979], Vanderplaats [1979b] y Tai, Kidwell y Vanderplaats [1982], estudian el diseño òptimo de màxima eficiencia aerodinàmica de piezas de aeronaves, prescindiendo del peso estructural y del comportamiento aerodinàmico del conjunto, aunque reconociendo los potenciales problemas de estas metodologìas [Vanderplaats 1984].

Cea [1981a,1981b,1981c], Zolesio [1981a,1981b] y Rousselet [1981], aportan una perspectiva màs general al presentar aplicaciones pràcticas y mètodos de resoluciòn de otros problemas de ingenierìa (no estructurales en general) en los cuales se intenta optimizar un cierto dominio de definición, y analizando por tanto problemas análogos a la optimización estructural de formas.

II.3.2.4 Otros enfoques de la optimización estructural

Analizando cuidadosamente la evolución anteriormente expuesta de las técnicas de optimización estructural, se observa una clara tendencia que, partiendo de los planteamientos más primitivos, busca la generalidad, es decir la creación de teorías aplicables a un rango muy amplio de problemas. Esta generalidad parece encontrarse finalmente en la formulación del problema en el sentido de Klein, es decir, en la forma estándar de la programación matemática no lineal, y en la utilización de herramientas de cálculo numérico tanto para resolver el problema de cálculo de la estructura (Método de Elementos Finitos), como para resolver el problema de minimización con restricciones a que conduce la formulación. Se busca, igualmente, una generalidad en la posibilidad de elegir diversas fuciones objetivo (mínimo peso, máxima eficiencia, mínimo coste, mínima tensión, máxima rigidez, etc.), en el planteamiento de restricciones de distinto carácter (en tensiones, desplazamientos, geometría de la estructura, inestabilidad, índices de eficiencia, resistencia, fisuración, etc.), y en la creación del modelo de optimización (variables de diseño que determinan dimensiones de componentes, forma de la estructura, propiedades de los materiales, posiciones de los apoyos, etc.).

Existen, sin embargo, otras tendencias que han adquirido una menor divulgación, pero que no carecen en absoluto de interés. A continuación nos referiremos a dos de ellas: la formulación del problema de optimización mediante métodos analíticos, y la optimización de la tipología estructural.

II.3.2.4.1 La optimización estructural mediante métodos analíticos

Desde el momento en que el problema general de optimización estructural se formula como un problema matemático en función de unas ciertas variables de diseño, surge inmediatamente la posibilidad de ascender a un nivel matemático superior en su planteamiento. Puesto que los métodos variacionales son la generalización en el ámbito del análisis funcional de los problemas de extremos de funciones, se contempla la posibilidad de formular los problemas de optimización estructural directamente mediante funciones de diseño, y no a través de variables. Ello conduce a un problema general consistente en minimizar un funcional de estas funciones de diseño, verificándose una serie de restricciones expresadas mediante inecuaciones en las que intervienen de forma similar otros funcionales. La principal dificultad con que se encuentran estas formulaciones es la complejidad de los métodos variacionales para problemas con restricciones en desigualdad de tipo general. Otros enfoques que introducen la optimización estructural directamente en formulaciones variacionales del cálculo estructural, dan lugar igualmente a planteamientos de optimización de tipo variacional.

Recientemente, se han empleado también, con éxito, métodos de perturbación para resolver problemas estructurales de optimización de formas [Banichuk 1984].

Prager y Taylor [1968] y Taylor [1969] analizan la optimización estructural bajo puntos de vista energéticos. Similares planteamientos emplean Huang [1968], Chern y Prager [1970], Masur [1970] y Martin [1971], que son desarrollados posteriormente por Shield y Prager [1970] y Huang [1971,1975].

Horak [1969] aplica principios variacionales clásicos de elasticidad modificados de forma que se extiendan a dominios de integración desconocidos de antemano (puesto que constituyen la solución del problema) e introduciendo términos adicionales que aseguran la minimización del volumen del cuerpo a diseñar. Imponiendo la condición de estacionariedad de la energía, obtiene el por él denominado principio variacional inverso. Seguchi y Tada [1977-1978] emplean un método iterativo sencillo, denominado método de razón de energía, para resolver las ecuaciones de Horak [1969] para cuerpos elásticos planos, y Hamada, Seguchi y Tada [1980] extienden la técnica para su aplicación a problemas de autovalores. Una exposición reciente de este principio por Tada y Seguchi, quienes resuelven el problema posteriormente mediante el Método de Elementos Finitos, puede encontrarse en Tada y Seguchi [1984]. Umetani y Hirai [1975], Oda y Yamazaki [1977] y Tsuta y Yamaji [1977] abordan el problema de diseño óptimo de piezas de resistencia uniforme mediante el Método de Elementos Finitos, siguiendo planteamientos análogos a los anteriores. Ya ha sido comentada anteriormente, aunque en otro contexto, la aportación de Tvergaard [1975].

Una exposición general sobre la aplicación de principios variacionales fue presentada recientemente por Haug, Choi, Hou y Yoo [1984].

Si bien en algunos casos se aborda la solución de los problemas anteriores mediante métodos númericos, en la mayor parte existe un alto grado de cálculo análitico y ello restringe, obviamente, el rango de aplicabilidad de estas técnicas. Se han aplicado profusamente para resolver problemas de optimización muy idealizados, y en particular la optimización de secciones de piezas sometidas a torsión, y la optimización de formas de huecos en estructuras bidimensionales. Por este motivo reseñaremos separadamente los diversos tratamientos empleados en la solución de estos dos tipos problemas, ya clásicos.

La optimización de secciones de piezas sometidas a torsión

Desde que Henry [1971] desarrolla un método iterativo para optimizar la forma de secciones de piezas sometidas a torsión, mediante un desarrollo que parte de una definición analítica del contorno en función de un número relativamente pequeño de variables de diseño, e imponiendo restricciones sobre la geometría y la tensión en el contorno, se han realizado numerosos estudios en problemas similares, muchos de los cuales se sustentan en formulaciones variacionales.

Así Banichuk [1975,1976b] analiza la distribución óptima no homogénea de una cierta cantidad, prefijada, de material en una sección, con objeto de maximizar su rigidez torsional. Emplea una formulación basada en métodos variacionales y el concepto de derivada material de mecánica de los medios continuos. Una descripción completa del problema, abordando su resolución mediante métodos de perturbaciones puede encontrarse en un artículo posterior del mismo autor [Banichuk 1984].

Kurshin y Onoprienko [1976] analizan un problema similar mediante un método de variable compleja.

Banichuk [1976a] extiende sus estudios, optimizando la rigidización del contorno de la sección.

Turvitch [1976] desarrolla una técnica analítica para optimizar la forma de un contorno interior, asociado con no homogeneidad del material, obteniendo condiciones necesarias y suficientes de optimalidad.

Dems y Mróz [1978] presentan un método empleado satisfactoriamente con posterioridad por Dems [1980] para resolver una notable variedad de problemas similares a los anteriormente citados. Mediante este método se derivan criterios de optimalidad partiendo de la aplicación conjunta de métodos de perturbación y un modelo de elementos finitos.

La optimización de la forma de huecos en sólidos planos

Neuber [1969,1972], Queber [1972] y Cherpanov [1974] resuelven el problema de optimizar la forma de un hueco en un sólido plano de forma que la tensión en el contorno del hueco sea constante, asumiendo esta condición como criterio de optimalidad. Sobre este problema se han realizado numerosos estudios en la URSS (referenciados en Cherpanov [1974]). Wheeler [1976] analiza las condiciones bajo las cuales el criterio de optimalidad anterior equivale a la minimización de la máxima tensión para problemas de optimización de formas de huecos en sólidos planos y secciones transversales de piezas.

Bjorman y Richards [1976] tratan el mismo problema minimizando la concentración de tensiones en el contorno del hueco.

Banichuk [1977b] analiza el mismo caso para un sólido ideal sometido a un estado de tensión biaxial en el infinito, y a partir del principio del máximo para funciones armónicas, prueba la veracidad en este caso del criterio de optimalidad de Neuber [1969], Queber [1972] y Cherpanov [1974].

Banichuk [1977a] analiza el problema de determinar la forma óptima de un hueco para minimizar el segundo invariante del tensor de tensiones sobre un placa sometida a flexión constante en el infinito, aplicando técnicas similares a las refenciadas en [1977b], y obteniendo, así mismo, resultados similares.

Un problema del mismo tipo fue abordado por Durelli y Rajaiah [1979] mediante un método experimental basado en fotoelasticidad para optimizar la forma de un hueco en una placa plana sometida a carga uniaxial, minimizando la concentración de tensiones.

Otros problemas similares de optimización

Banichuk y Karihaloo [1976] analizan la forma óptima de la sección transversal de una barra cilíndrica de peso mínimo, imponiendo restricciones en las rigideces a torsión y flexión, mediante una formulación variacional del problema de torsión, y una técnica de multiplicadores de Lagrange para las restricciones adjuntas a la función objetivo. Mediante el cálculo de la derivada material, obtienen la primera variación de la función objetivo aumentada (o lagrangiano aumentado) respecto a la forma, y derivan diversos criterios de optimalidad.

Parbery y Karihaloo [1977] emplean un método similar para optimizar cilindros huecos con restricciones en las rigideces a torsión y flexión.

Cherkaev [1978] presenta una formulación teórica del problema de optimización de la forma del contorno de una estructura para minimizar su volumen, imponiendo restricciones en el valor mínimo de la frecuencia natural de vibración. Desarrolla además una condición necesaria de optimalidad, y demuestra que el mismo resultado puede obtenerse a partir de una formulación variacional.

II.3.2.4.2 La optimización de la tipología estructural

A partir de las ya mencionadas aportaciones de Dorn, Gomory y Greenburg [1964], Dobbs y Felton [1969] y Sheu y Schmit [1972], fundamentalmente en la optimización de la configuración de estructuras de barras, se desarrollan numerosos estudios en este ámbito, que cristalizan finalmente en el asentamiento de las bases de una teoría moderna y coherente de optimización de tipologías estructurales a finales de los años setenta y comienzos de la década siguiente, debida a Prager y Rozvany

[1976], Prager y Rozvany [1977a,1977b], Rozvany y Prager [1979], Rozvany [1981a,1981b], Rozvany, Wang y Dow [1982]), y cuyas repercusiones se extienden incluso a estudios más matemáticos [Strang y Kohn 1981,1983]. La teoría de Prager puede aplicarse a numerosas tipologías estructurales, no sólo estructuras de barras, sino también a problemas de optimización de secciones de piezas sometidas a torsión, placas, etc.

Los fundamentos de la teoría de configuraciones óptimas de Prager se basan en la teoría de diseño plástico óptimo de Prager-Shield [Prager y Shield 1967, Rozvany 1976,1981c], y en la noción de "universo estructural" [Rozvany 1981a,1981b].

La condición de optimalidad de Prager-Shield puede expresarse como una relación generalmente no lineal entre deformaciones y tensiones, transformando el problema de optimización en un problema de elasticidad no lineal. El concepto de "universo estructural" se refiere al conjunto de todos los posibles elementos estructurales que pueden combinarse para formar la estructura completa. La teoría de Prager fue formulada inicialmente para cálculo plástico, aunque puede extenderse al diseño en régimen elástico con restricciones en tensiones [Rozvany 1976], o en frecuencias naturales de vibración [Olhoff y Rozvany 1982]. Una explicación más extensa de todos estos conceptos puede encontrarse en un reciente artículo de Rozvany [1984].

Por desgracia, y excepto en algunos casos, las configuraciones óptimas obtenidas por la aplicación de la teoría no son realizables en la práctica, dado que habitualmente contienen un sistema denso de nervaduras o aligeramientos cuya separación es infinitesimal.

La teoria de Prager está intimamente relacionada con la teoria de Michell [1904]. Soluciones óptimas de Michell para problemas concretos de cerchas han sido recogidas por Hemp [1973], y su teoria extendida a otras hipótesis de carga por Hemp [1974], Chan [1975] y Rozvany y Hill [1978]. Prager y Rozvany [1977] establecen una comparación entre las propiedades geométricas de las cerchas óptimas de Michell y emparrillados óptimos.

La aplicación de la teoria a configuraciones óptimas de emparrillados fue realizada por Rozvany y Adidam [1972], Rozvany [1976], Rozvany y Hill [1976], Hill y Rozvany [1977] y Rozvany [1981b], y analizada extensamente por Prager y Rozvany [1977a,1977b].

El problema análogo, desde un punto de vista matemático, de optimización del armado de placas y lajas fue discutido por Morley [1966] y Lowe y Melchers [1972]. Puede demostrarse que la configuración óptima de un emparrillado para diseño plástico en rotura es igualmente óptima para diseño elástico con restricciones de máxima tensión permitida, o con frecuencia de vibración dada [Rozvany 1976, Olhoff y Rozvany 1982, Prager 1974].

La aplicación de la teoria a problemas de placas ha demostrado que imponiendo restricciones en tensión la configuración óptima del espesor de la placa no consiste en una distribución suave [Rozvany, Olhoff, Cheng y Taylor 1982], si bien la distribución obtenida por estos autores es evidentemente irrealizable en la práctica.

Tal vez donde la teoría proporciona soluciones con mayor sentido físico, es en su aplicación al diseño óptimo de cubiertas sustentadas por emparrillados espaciales (bóvedas) y redes metálicas. La primera aportación al respecto se debe a Rozvany y Prager [1979] no considerando el efecto del peso propio, que fue introducido posteriormente por Rozvany, Nakamura y Kuhnell [1980], en una extensión del estudio anterior financiado por el gobierno alemán. La muerte de Prager truncó la materialización de nuevas investigaciones que estaba realizando en un intento de unificar el tratamiento de ambos tipos de estructuras, cuyas configuraciones óptimas reciben en su honor la denominación de estructuras de Prager. Posteriormente Rozvany, Wang y Dow [1982] realizan nuevos avances en la obtención de este tipo de configuraciones óptimas

Las estructuras de Prager difieren de las estructuras de Michell básicamente en que en las primeras todos los componentes estructurales deben encontrarse simultáneamente o bien traccionados o bien comprimidos, no admitiéndose en la misma estructura la existencia de componentes en distinto estado tensional , y la posición vertical de las cargas debe ser determinada durante la optimización, y por tanto no puede ser prefijada, si bien esta condición no es excesivamente restrictiva dado que esencialmente las estructuras de Prager se emplean en cubiertas, y por tanto la localización en planta de las cargas verticales está bien definida, pero su localización en alzado depende del diseño final (cargas de nieve, cargas de viento y peso propio).

Análisis similares han sido desarrollados para membranas bajo cargas externas considerando peso propio [Ziegler 1958, Issler 1964, Prager y Rozvany 1980, Nakamura, Dow y Rozvany 1981, Dow, Nakamura y Rozvany 1982].

Existen otros planteamientos de optimización de la topología estructural basados en métodos de programación matemática, si bien se encuentran más en la línea de lo que se ha dado en llamar optimización de formas, y simplemente consideran la modificación de la topología estructural en cuanto se refiere a la eliminación de componentes cuyas dimensiones durante el proceso de diseño se reducen por debajo de los límites mínimos aceptables.

II.3.3 Otras técnicas asociadas a la optimización estructural

Durante un proceso de optimización estructural es con frecuencia necesario, o cuando menos conveniente, conocer las derivadas de ciertas variables de comportamiento de las estructuras (tales como tensiones y desplazamientos) respecto a las propiedades geométricas o mecánicas y a los valores de las cargas, y habitualmente los métodos de cálculo estructural no contemplan esta posibilidad. Además, la formulación general del problema de optimización como problema de programación matemática puede conducir a problemas con numerosas variables de diseño y restricciones altamente no lineales. Con objeto de facilitar el cálculo de las derivadas de las variables de comportamiento, minimizar el número de cálculos que es necesario realizar en sucesivas modificaciones del diseño, o evitar un número excesivo de variables de diseño independientes y restricciones a tener en cuenta, se han desarrollado numerosas técnicas, muchas de las cuales encuentran aplicación o fueron inicialmente desarrolladas para otros campos. Puesto que no pertenecen ni al cálculo de estructuras clásico, ni a la optimización estructural propiamente dicha, ni al ámbito de la programación matemática, las expondremos sucintamente a continuación.

II.3.3.1 **Técnicas de reducción**

Las tendencias predominantes hacia los años sesenta en el ámbito de la optimización estructural se orientaban hacia la consideración de problemas con un número creciente de variables de diseño y restricciones, probablemente debido a la práctica, ampliamente divulgada aún y originaria de los métodos de diseño a máxima tensión, de considerar -especialmente en problemas de estructuras bidimensionales calculadas mediante elementos finitos y estructuras de barras- una variable de diseño y una restricción por elemento o barra de la estructura.

Con objeto de reducir el número de variables de diseño independientes, se aplicaron intensamente técnicas de regionalización y reducción de bases.

Se denomina regionalización al agrupamiento de variables de diseño suponiendo que en un mismo grupo todas sus componentes evolucionan de forma proporcional. Operativamente, ello conduce a una matriz que relaciona el vector de variables de diseño iniciales con un vector de variables de diseño que se suponen independientes, cuya dimensión es menor que la del vector original.

Se denomina reducción de bases al proceso mediante el cual se busca una aproximación al vector solución de variables de diseño independientes, de forma que ésta se encuentre contenida en un subespacio vectorial de menor dimensión, y por tanto pueda espresarse como combinación lineal de una serie de vectores base conocidos. Ello conduce a una formulación del problema en función de un vector de variables de diseño reducidas, cuya dimensión es menor que el de variables independientes. Operativamente, el procedimiento es análogo al análisis de Rayleigh-Ritz para cálculo de autovalores y autovectores. La bondad de la aproximación a la solución dependerá, obviamente, del acierto con que se elijan los vectores base de reducción. En realidad no existe una diferencia sustancial entre ambos procedimientos, constituyendo la regionalización un caso particular de reducción en que el criterio seguido para elegir los vectores base se apoya primordialmente en consideraciones tales como la exigencia de obtener diseños simétricos o con ciertas proporciones prefijadas, la sencillez de fabricación o el control de còstes, o la intuición o experiencia del diseñador.

Desde una perspectiva moderna, podemos considerar que la regionalización es un primer intento de separar el modelo de optimización del modelo de cálculo, esto es, de distinguir las variables de diseño de las propiedades geométricas y mecánicas y las cargas de la estructura, procurando generar modelos de optimización de suficiente calidad sin necesidad de emplear por ello un número elevado de variables de diseño.

Para reducir el número de restricciones del problema se recurre a procedimientos que permiten considerar o no una restricción en un determinado instante del problema, según esa restricción esté violada, se encuentre en estado critico, o cerca de estarlo, o bien no se encuentre violada y su valor sea lo suficientemente conservador como para suponer que no lo estará al modificar el diseño.

La aplicación de estos conceptos, junto con los métodos de aproximación que analizaremos a continuación, a problemas de optimización estructural [Schmit y Farshi 1974], permitió aplicar técnicas de programación matemática de creciente potencia. A partir de este momento surgen métodos de optimización estructural, siguiendo la misma orientación, cuya eficiencia es netamente superior a la de los intentos realizados con anterioridad [Haftka 1973, Haftka y Starnes 1976, Starnes y Haftka 1978, Schmit y Miura 1976a,1976b,1978].

II.3.3.2 Aproximación y predicción del comportamiento estructural. Análisis de sensibilidad

En el problema general de optimización, expresado como problema de programación matemática, tanto la función objetivo como las restricciones se formulan en función de variables de comportamiento de la estructura, tales como desplazamientos o tensiones, que son función de las propiedades geométricas o mecánicas de la estructura y de las cargas, que a su vez son función de las variables de diseño. Dado que estas propiedades y cargas pueden conocerse en función de las variables de diseño, a través de un cierto método de análisis estructural podrá calcularse el valor de las variables de comportamiento, y por tanto puede obtenerse el valor de la función objetivo y las restricciones en función de las variables de diseño. No obstante, las variables de comportamiento estructural son en general funciones altamente no lineales de las variables de diseño, y su expresión es desconocida habitualmente, si bien -como hemos expuesto- pueden calcularse punto a punto.

Siempre que el cálculo estructural conlleve un elevado tiempo de computación, y especialmente en sistemas estructurales importantes, el coste operativo de los sucesivos análisis que es preciso realizar en el proceso de diseño puede ser inadmisible. Con objeto de reducir el coste del análisis en sucesivas iteraciones se han propuesto diversos métodos de "aproximación" del comportamiento estructural que podemos esquematizar en la forma siguiente:

- Métodos directos.

- Métodos iterativos.

- Métodos aproximados.

Los métodos directos encuentran aplicación en casos en que sólo se modifica una parte de la estructura, y plantean la obtención de la respuesta del diseño estructural modificado a partir de la respuesta del diseño anterior y el reanálisis de la zona afectada por las modificaciones. Generan, por tanto, soluciones a un coste inferior al que supondría el cálculo completo del nuevo diseño. Han sido empleados y desarrollados por Householder [1957], Sack, Carpenter y Hatch [1967], Sobiesczanski-Sobieski [1969], Argyris et al. [1971], Kavlie y Powell [1971], Argyris y Roy [1972], Kirsch y Rubinstein [1972a], Kirsch [1981b] y Wang y Pilkey [1981].

Los métodos iterativos son empleados por Kirsch y Rubinstein [1972b] y Phansalkar [1974], y se aplican con éxito a problemas similares a los anteriores, si bien las aproximaciones son menos fiables excepto si las modificaciones en las variables de diseño son suficientemente pequeñas. Consisten básicamente en realizar el cálculo completo del diseño inicial, y en la utilización de algoritmos iterativos en los sucesivos estadios del proceso de diseño, utilizando la respuesta estructural del primer diseño como solución inicial, y obviando los aspectos más costosos de los sucesivos análisis. Los problemas fundamentales que se derivan de su aplicación radican en la posible divergencia y en la lentitud de convergencia del algoritmo iterativo.

Los métodos aproximados son empleados por Fox y Miura [1971], Noor y Lowder [1974,1975], Bennett [1981] y Kirsch [1981a,1981c], y consisten en la construcción de una aproximación a la respuesta estructural a partir de desarrollos en serie en función de las variables de diseño, o bien a partir de planteamientos de reducción de bases similares al método de Rayleigh-Ritz, en los que la respuesta del sistema estructural se plantea como combinación lineal de varios modos de respuesta supuestamente predominantes, reduciéndose el número de grados de libertad del problema. Una descripción más detallada de estos aspectos puede hallarse en Schmit Jr. [1984]. Estos métodos requieren habitualmente menos volumen de cálculo que los anteriores, si bien, por su propia naturaleza, las aproximaciones obtenidas no son válidas si las modificaciones del diseño son importantes y los errores de truncamiento pueden ser inadmisibles y dar lugar a resultados erróneos. Una descripción reciente de métodos de aproximación puede encontrarse en Kirsch [1984].

La idea de construir "predicciones" manejables del comportamiento estructural en función de las variables de diseño como ayuda para la modificación del mismo fue formulada inicialmente por Melosh y Luik [1967].

Las aproximaciones se construyen normalmente mediante desarrollos en serie de las variables de comportamiento, para la obtención de los cuales es necesario calcular las derivadas de las mismas respecto a las variables de diseño, lo cual implica, la derivación de las variables de comportamiento respecto a las propiedades mecánicas o geométricas o las cargas, y de éstas respecto a las variables de diseño. Si bien estas últimas son habitualmente fáciles de calcular, puesto que dependen del modelo de optimización formulado, las primeras no suelen ser obtenidas de los métodos de cálculo estructural clásicos. Se denomina "análisis de sensibilidad" a la citada derivación de las variables de comportamiento estructural respecto a las propiedades geométricas y mecánicas, y respecto a las posiciones y valores de las cargas que actúan sobre la estructura, si bien el concepto es mucho más extenso y tiene aplicación en numerosos ámbitos además de en la optimización estructural (regeneración automática de malla y estimación de errores de discretización en elementos finitos, y otros tipos de optimización no estructural). Puede definirse en general como la obtención del gradiente de las variables de respuesta respecto a las variables de entrada en un sistema determinista cualquiera para el que existe un procedimiento de cálculo de la respuesta para una entrada conocida. Su aplicación a la optimización estructural se debe principalmente a Fox [1965] y Fox y Kapoor [1968].

Es importante señalar que el análisis de sensibilidad es sustancialmente más complicado en problemas de optimización de formas que en problemas de optimización de dimensiones, y en problemas continuos que en problemas discretos. En efecto, en problemas de optimización de dimensiones en cálculo matricial y mediante el Método de Elementos Finitos, las variables de diseño afectan a términos que normalmente aparecen multiplicando o dividiendo, y elevadas a una cierta potencia, a las matrices de rigidez de barras, y en el subintegrando en matrices de rigidez de elementos finitos. La derivación es en este caso sencilla. Sin embargo, en problemas de optimización de formas, las variables de diseño afectan a las matrices de rigidez bien a través de las matrices de giro y la longitud de las barras, en el caso de cálculo matricial, bien a través del recinto de integración, en el caso de los elementos finitos. En este último caso, la derivación analítica de las matrices de rigidez y vectores de fuerzas nodales es complicada y costosa desde el punto de vista numérico.

Hasta muy recientemente no se dispuso de técnicas numéricamente eficientes para el cálculo exacto de tales derivadas. En la actualidad es ésta una de las líneas de investigación que han recibido un mayor impulso, y los objetivos de los investigadores se centran en la reducción de los tiempos de cálculo que justifiquen económicamente el uso de este tipo de análisis de sensibilidad. Evidentemente, un análisis de sensibilidad más preciso permite optimizar con mayores garantías de éxito, y por tanto es de esperar que sean precisas menos iteraciones para obtener diseños óptimos.

Por este motivo, en el caso de estructuras discretas y en optimización de dimensiones en general, se plantea habitualmente el análisis de sensibilidad mediante técnicas analíticas, mientras que en el caso de optimización de formas, y especialmente en problemas continuos, se plantea el análisis de sensibilidad mediante diferencias finitas [Zienkiewicz y Campbell 1973, Esping 1984a,1984b], pese a la importancia de los errores de truncamiento que se producen en la aplicación de éstas al cálculo de derivadas.

El problema del análisis de sensibilidad en optimización estructural implica, en general, la derivación de la ecuación de estado del modelo de cálculo. Como se expondrá en detalle posteriormente, la derivación primera de la ecuación conduce a un sistema lineal de ecuaciones cuya solución permite calcular la derivada de las variables de comportamiento o respuesta respecto a las variables de entrada. Mediante la diferenciación sucesiva de la ecuación es posible evaluar derivadas de orden superior. El cálculo de tales derivadas puede evitarse mediante las técnicas denominadas de "estado adjunto". Estas técnicas estuvieron inicialmente ligadas a las teorías de control óptimo y a la aplicación del concepto de derivada material en problemas de optimización de formas. La formulación de estos planteamientos para problemas tanto de optimización de formas como de dimensiones se recoge en [Pironneau, O. 1982,1984, Cea

1981a,1981b,1981c,1986, Zolesio 1981a,1981b, Rousselet 1981, y Haug, Choi y Komkov 1986, Braibant y Fleury 1986a] Su aplicación a diversas categorías de problemas es analizada por Hou [1985], Chenais [1986], quien estudia el diseño óptimo de láminas, Chenais, Rousselet y Benedict [1986], quienes estudian el diseño óptimo de arcos, y Rousselet [1986,1987].

La implementación de las técnicas citadas no es sencilla en general. Además, su extensión (especialmente en problemas de optimización de formas) para el cálculo de derivadas de orden superior al primero es particularmente costosa. La aplicación de tales formulaciones al diseño óptimo estructural mediante el Método de Elementos Finitos no se beneficia de las peculiaridades del mismo, ya que el cálculo de sensibilidad se plantea a priori sobre la ecuación de estado (normalmente un sistema de ecuaciones diferenciales o integrales) y no sobre su discretización. Por contra, en ello reside su principal ventaja, ya que permite su integración en planteamientos fundamentados en métodos variacionales.

Fleury y Sander [1978], Arora y Haug [1979-1980] y Vanderplaats [1980], aplican el método de la carga virtual, o estado adjunto, para análisis de sensibilidad, siendo ventajosa esta técnica frente a otras cuando el número de restricciones críticas es relativamente pequeño frente al número de variables de diseño independientes.

En cálculo dinámico, Nelson [1976] y Miura y Schmit [1979] analizan la derivación de modos propios y frecuencias propias de vibración respecto a variables de diseño.

Schmit y Fleury [1980a,1980b] combinan técnicas de aproximación con una formulación dual en la solución del problema de programación matemática, obteniendo algoritmos de optimización estructural de notable eficiencia. Si bien esta formulación se desarrolla originalmente para problemas de optimización de rango continuo, se ha aplicado también a problemas con variables de diseño de carácter discreto, o problemas mixtos con variables de diseño de ambos rangos. Pese a la intrinseca dificultad de estos casos y a que en ellos los postulados en que se basa el desarrollo de la teoria no se cumplen, especialmente en lo que se refiere a las condiciones de convexidad del problema, se han obtenido resultados satisfactorios [Fleury y Schmit 1980, Lasdon 1970, Fisher, Northup, y Shapiro 1975].

Planteamientos menos elaborados matemáticamente, pero notablemente más sencillos y eficientes en un ambiente de optimización estructural mediante el Método de Elementos Finitos fueron desarrollados por Wang, Sun y Gallagher [1985] para análisis de sensibilidad de primer orden. Independientemente, Sussman y Bathe [1985] contemplan desarrollos similares en el cálculo del gradiente del indicador variacional y sus aplicaciones en mecánica de fractura y optimización de mallas de cálculo.

El análisis de sensibilidad es evidentemente más complejo en problemas no lineales de cálculo estructural. Es tal vez por este motivo que la inmensa mayoria de las aportaciones a la optimización estructural se realizan en análisis lineales. Un breve estudio del análisis de sensibilidad en problemas no lineales puede hallarse en Ryu, Haririan y Arora [1985] y Arora y

Wu [1986].

Un enfoque distinto y de gran interés, de los análisis de sensibilidad, es el propuesto por Sobieszczanski-Sobieski y Bhat [1981] y Sobieszczanski-Sobieski, Barthelemy, y Riley [1981], quienes estudian la sensibilidad de la solución óptima obtenida respecto a los parámetros predefinidos del problema (valor de la tensión máxima admitida y otras restricciones, hipótesis de carga, etc.), en un intento de posibilitar el cálculo de otras soluciones óptimas bajo distintas condiciones sin rehacer el cálculo completo, y estudiar la estabilidad de la solución del problema bajo las condiciones impuestas.

Por último es importante señalar que si se conoce, al menos intuitivamente, la forma en que las variables de diseño afectan a las variables de comportamiento estructural, es ventajoso en general realizar cambios de variable, o emplear variables intermedias, al realizar las aproximaciones. Es decir, si se sabe que cierta variable de comportamiento, la tensión por ejemplo en una estructura de barras y para unos esfuerzos conocidos en las mismas, es afectada de forma inversamente proporcional por una variable de diseño, tal como el área de la sección, es preferible formular una aproximación lineal de la variable de comportamiento en función de la inversa de la variable de diseño que en función de la variable de diseño directamente. Es por este motivo que en abundante literatura, especialmente en optimización de dimensiones en estructuras de barras, se emplean en parte del análisis las inversas de las variables de diseño iniciales.

II.3.3.3 La adecuación de las técnicas de cálculo estructural para su uso en problemas de optimización

Como ya hemos visto, un proceso de diseño estructural óptimo incluye numerosos aspectos que exceden notablemente del ámbito del cálculo estructural.

En primera aproximación, podemos considerar que un sistema de optimización estructural contiene, en general, los siguientes elementos:

- Generación de un modelo de optimización en función de las variables de diseño.
- Cálculo de la estructura.
- Análisis de sensibilidad.
- Resolución de un problema de programación matemática.

Evidentemente, los elementos anteriores han de ser dirigidos por un sistema de control que decida en qué momento se ha de ejecutar una u otra operación, y gestione la transferencia de datos entre todos ellos.

La organización más primitiva de un sistema de optimización es sin duda la existente en sistemas monolíticos, "verdaderas cajas negras" desarrolladas para resolver un cierto problema o tipo concreto de problemas, en cuya estructura interna todos los elementos anteriormente citados se entremezclan y el usuario únicamente puede proporcionar al sistema los datos de entrada, es decir las variables de diseño y los límites de las restricciones impuestas, estando predefinidos el modelo, la función objetivo, y las restricciones. Este tipo de organización permite crear programas altamente especializados de gran eficiencia, pero de aplicación limitada y modificación costosa [Tripplett 1979].

Con una estructuración interna más evolucionada, pueden desarrollarse sistemas cerrados y especializados en los cuales estén netamente diferenciadas las funciones de cálculo, optimización matemática, análisis de sensibilidad, etc. En este caso, el sistema de optimización es susceptible de ser modificado, mejorado, o ampliado para incluir nuevos aspectos o diversas opciones de cálculo. Estos sistemas proporcionan una mayor adaptabilidad, manteniendo al mismo tiempo una notable eficiencia [Vanderplaats 1976,1979a, Sobieszczanski-Sobieski 1979]. En su creación se utilizan normalmente otros programas, ya existentes para realizar las diversas tareas de forma secuencial, pudiéndose incorporar todos ellos en un único programa o bien acoplarse transfiriendo la información de unos a otros a través de archivos de trabajo. En este esquema los diversos elementos se utilizan como "cajas negras", en tanto en cuanto el sistema de optimización desconoce la organización interna de cada uno de ellos.

En su versión más avanzada, la organización anterior permite disponer de diversos programas de cálculo de uso general para optimización de diversas estructuras, varios programas de programación matemática entre los cuales el usuario experimentado puede elegir el que le parezca más adecuado para el caso concreto que desea resolver, y en suma una gran flexibilidad. El usuario, además de introducir los datos, debe crear ciertos programas dependientes del problema a analizar que definan el modelo de optimización, la función objetivo a minimizar, las restricciones a considerar, etc. Este tipo de organización es propuesta por Schrem [1976] quien introduce la denominación de "sistema de programación". El control de las operaciones que conducen a la optimización lo realiza una verdadera "red" de interconexión, que gestiona los archivos intermedios, el flujo de información, y la interacción con el usuario a través de comandos de control [Haftka y Prasad 1978, Prasad 1985, Van Den Dam, Boerstoel y Daniëls 1986]. En algunos casos, la "red" citada está parcial o íntegramente compuesta por comandos y utilidades del sistema operativo del ordenador en que se implementa el sistema [Sobieszczanski-Sobieski 1975, Sobieszczanski-Sobieski y Bhat 1979]. La interacción con el usuario adquiere un grado de sofisticación creciente al ser considerada desde una perspectiva de diseño asistido por ordenador (CAD) [Braibant y Fleury 1985,1986b, Esping 1985].

Sin embargo, el incremento de adaptabilidad que proporciona este tipo de organización se contrarresta parcialmente por una mayor complejidad (que obliga al usuario del sistema a disponer de conocimientos avanzados sobre el mismo), por una relativa dependencia de un sistema operativo en particular, y por una cierta pérdida de eficiencia debida a la repetición de tareas por distintos programas, y a la imperfecta unión entre todos ellos. No obstante, este último defecto puede subsanarse modificando los diferentes programas de forma que se acoplen satisfactoriamente, facilitándose la transferencia de información y evitando la repetición de tareas, si bien para ello es obligado disponer de un profundo conocimiento de todos los programas empleados.

Una discusión reciente sobre los aspectos anteriores puede encontrarse en Sobieszczanski-Sobieski [1982].

La mayoria de las aplicaciones de la optimización estructural, tal como es concebida en la actualidad, tienen un componente predominante de cálculo estructural, tanto en términos de complejidad como de requerimientos de tiempo de cálculo y memoria en programas de ordenador. Por este motivo suele partirse de un programa determinado de cálculo, de tipo general, en la creación de sistemas de optimización estructural. Una problemática adicional es representada por la necesidad de modificar los programas de cálculo de forma que sea posible realizar además del mismo, el análisis de sensibilidad, ya que ésta es una utilidad que normalmente no proporcionan los programas actualmente disponibles. Entre las opciones extremas, de realizar un cálculo de sensibilidad aproximado mediante diferencias finitas, o bien construir un nuevo programa (o modificar completamente el original) para realizar este cálculo con precisión, deben buscarse soluciones intermedias. Es esencial lograr un equilibrio entre la bondad de los resultados obtenidos y el esfuerzo insumido y los costes de cálculo requeridos.

El problema del acoplamiento entre los diversos elementos de un sistema es particularmente importante en el caso de cálculos de gran complejidad con fuertes requerimientos de tiempo y memoria, tal como en el caso de programas de elementos finitos. A su vez, son éstos los que poseen un mayor interés por su indudable generalidad. Bhatia [1971] analiza esta problemática, planteando técnicas tales como la detección de la parte de la malla de elementos finitos que permanece inalterable a lo largo del proceso, realizando un preensamblaje de su matriz de rigidez y vector de fuerzas, y almacenándolos para su utilización posterior.

II.4 OTRAS REFERENCIAS

Pueden encontrarse numerosas referencias sobre optimización estructural en Lev [1981b], Gallagher [1985] y Ding [1986]. Estos dos últimos artículos son particularmente esclarecedores.

Consideramos de gran interés en una parte sustancial de la optimización estructural los libros de Gallagher y Zienkiewicz [1973], Morris [1982] y Atrek, Gallagher, Ragsdell y Zienkiewicz [1984].