

Al trisecar un ángulo dado, podemos proceder a encontrar el seno del ángulo -sea  $a$ - y, entonces, si  $x$  es el seno de un ángulo que mida la tercera parte del dado, tenemos:

$$4x^3 = 3x - a.$$

W. W. ROUSE BALL (1850-1925)

**V**

---

DESARROLLO DE UN SISTEMA  
DE DISEÑO OPTIMO ESTRUCTURAL  
BASADO EN EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

---

**CAPITULO V**  
**DESARROLLO DE UN SISTEMA DE DISEÑO OPTIMO ESTRUCTURAL**  
**BASADO EN EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS**

**V.1 PUNTOS PREVIOS**

En el Capítulo anterior se ha descrito, en términos generales, cuales son las funciones principales que debe realizar el módulo de cálculo en un sistema de diseño óptimo, y se puso de manifiesto la fuerte dependencia del mismo respecto a la naturaleza del problema físico subyacente al diseño. Es más: con frecuencia, el análisis de un determinado fenómeno físico puede plantearse a partir de varios modelos matemáticos, y a su vez, el modelo matemático empleado puede concretarse en diferentes modelos numéricos.

En el ámbito del diseño estructural en concreto, el módulo de cálculo depende: a) de la naturaleza del problema (cálculo estático, dinámico, sísmico, etc.); b) de la tipología estructural (estructuras de barras articuladas planas, reticuladas planas, emparrillados, articuladas espaciales, reticuladas espaciales, estructuras de hormigón armado o pretensado, estructuras de tipo continuo); c) del modelo matemático de cálculo (modelos de resistencia de materiales,

modelos elásticos lineales y no lineales, modelos plásticos, etc.); y d) del modelo numérico empleado en última instancia (en el que se aborda la resolución de un sistema lineal de ecuaciones mediante métodos directos o iterativos, la resolución de un sistema no lineal de ecuaciones mediante el método de Newton-Raphson o el método de Newton, la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante técnicas de diferencias finitas o por el Método de Elementos Finitos, etc.)

Se evidencia la imposibilidad de realizar un modelo de cálculo único para todos los problemas de análisis estructural. No obstante, una gran parte de los problemas que aparecen en la actualidad en la práctica profesional pueden resolverse eficazmente mediante métodos matriciales para estructuras de barras, en el caso de estructuras de tipo discreto, o bien mediante el Método de Elementos Finitos, en el caso de estructuras de tipo continuo. Además, en el estado actual del conocimiento, las tareas de diseño suelen realizarse mediante la aplicación de modelos de análisis de tipo lineal, mientras que los modelos que contemplan el comportamiento no lineal de la estructura, tanto mecánica como geométrica, se emplean como comprobación final.

Por consiguiente, la integración de forma efectiva de modelos de cálculo estructural de tipo lineal, basados en métodos matriciales o en el Método de Elementos Finitos, en un sistema de diseño óptimo, conferirá a éste un amplio rango de aplicabilidad. Además, los métodos matriciales tienen una gran similitud con los Métodos de Elementos Finitos, en cuanto a sus aspectos

operativos. A su vez, el Método de Elementos Finitos puede aplicarse con gran versatilidad dentro de un esquema unificado.

En este Capítulo se estudiará el desarrollo de un sistema de diseño óptimo estructural basado en el Método de Elementos Finitos. El sistema de diseño se analizará a partir de los planteamientos metodológicos generales descritos en el Capítulo anterior. Por su dificultad intrínseca y sus elevados requerimientos de tiempo de computación y espacio de almacenamiento en memoria, será el módulo de cálculo el que condicione más fuertemente la estructura y el funcionamiento del sistema en su conjunto. Por este motivo analizaremos en detalle -en primer lugar- el módulo de cálculo, y posteriormente los restantes módulos de sistema.

En lo sucesivo nos referiremos fundamentalmente a modelos de cálculo enmarcados en la aplicación del Método de Elementos Finitos (en su formulación más habitual) a problemas estructurales estáticos y lineales. Sin embargo, el desarrollo posterior es igualmente aplicable a otros problemas de formulación similar, en particular -con ligeras modificaciones y simplificaciones- a métodos matriciales de cálculo de estructuras, e incluso -con modificaciones más drásticas- a problemas no lineales.

## V.2 ANALISIS MEDIANTE EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS DE PROBLEMAS LINEALES DE CALCULO ESTRUCTURAL ESTATICO

### V.2.1 Descripción genérica del modelo analítico

En lo sucesivo supondremos que el lector está familiarizado con los conceptos básicos del Método de Elementos Finitos, y en particular con su aplicación a problemas de cálculo estructural.

En este caso, el objeto del diseño es una estructura de tipo continuo (pieza mecánica simple, componente estructural o estructura completa), cuyas propiedades fundamentales corresponden a diversas propiedades geométricas (situación y definición geométrica de componentes estructurales, dimensiones, etc.), mecánicas (módulos elásticos, resistencias mecánicas, etc.) o físicas en general (densidad, coeficientes de conducción térmica, etc.).

Las propiedades ambientales corresponden a diversos tipos de cargas (puntuales, distribuidas a lo largo de líneas, distribuidas a lo largo de superficies, gravitatorias, térmicas, etc.).

Los desplazamientos de los puntos de la estructura, y los tensores de deformación y tensión son las variables de estado o variables de comportamiento a considerar.

El modelo analítico de cálculo está formado fundamentalmente por tres tipos de ecuaciones:

- Ecuaciones de equilibrio.

- Ecuaciones constitutivas, o relaciones tensión-deformación.
  
- Ecuaciones de compatibilidad, o relaciones desplazamiento-deformación.

Las ecuaciones de equilibrio forman, en general, un sistema de ecuaciones diferenciales no determinado, que en ciertos casos admite simplificaciones (simetrías de revolución, etc.), y cuyas condiciones de contorno dependen de las condiciones de vinculación de la estructura y de las cargas exteriores.

Pueden formularse diferentes ecuaciones constitutivas, para modelar el comportamiento de los materiales (elástico lineal, elástico no lineal, plástico, etc.).

Igualmente pueden plantearse diferentes ecuaciones de compatibilidad para modelar distintas hipótesis de cálculo (pequeñas deformaciones y desplazamientos, grandes deformaciones y grandes desplazamientos, etc.)

Las ecuaciones de equilibrio, constitutivas y de compatibilidad pueden expresarse en forma tensorial, y por tanto invariante en todos los sistemas coordenados. No obstante, para obtener una solución que las satisfaga será conveniente seleccionar un sistema de coordenadas en concreto (cartesianas ortogonales, polares, cilíndricas, esféricas, etc.) que denominaremos SISTEMA GLOBAL DE COORDENADAS (o sistema de coordenadas materiales), en el que las expresiones adopten una forma cómoda y manipulable, y respecto al cual se describirán las propiedades y variables de estado.

En algunas tipologías estructurales pueden incluirse en las ecuaciones anteriores diversas hipótesis adicionales acerca del comportamiento tenso-deformacional de la estructura (hipótesis de Navier, etc.). La formulación de estas hipótesis permite caracterizar el estado tenso-deformacional en una variedad continua de puntos de la estructura (sección de una viga, espesor de una lámina) en función de una serie de variables de estado de orden superior (giros, momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiales, etc.), que denominaremos variables de estado generalizadas. Por tanto, entre éstas y las variables de estado elementales (tensores de deformaciones y tensiones, desplazamientos) existirá un conjunto de relaciones integrales, condicionadas por las hipótesis adicionales planteadas, que introducidas en las ecuaciones de equilibrio, constitutivas y de compatibilidad, permitirán escribir estas ecuaciones directamente en función de las variables de estado de orden superior. El efecto neto de la formulación de estas hipótesis adicionales es la reducción de la dimensión del espacio en que se analiza el problema estructural (así una viga -tridimensional- puede analizarse en tensión plana -estudio bidimensional- o mediante resistencia de materiales -estudio unidimensional-, una lámina -tridimensional- puede analizarse como estructura bidimensional, etc.).

En cualquier caso, independientemente de la selección de las variables de estado, el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales resultante de la combinación de las ecuaciones de equilibrio, constitutivas y de compatibilidad, puede plantearse finalmente en términos de los desplazamientos o

las tensiones (generalizados), y obtener mediante su solución parte de las variables de estado. Las restantes variables de estado pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de compatibilidad y las ecuaciones constitutivas.

Si bien la formulación y resolución del conjunto de ecuaciones mencionadas es fuertemente dependiente del tipo de cálculo a realizar, puede darse una visión relativamente generalizada del mismo que resumimos a continuación.

El sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno constituido por las ecuaciones de equilibrio, puede transformarse en un sistema de ecuaciones integrales mediante un método de residuos ponderados, mínimos cuadrados, o similar. En general, en este sistema de ecuaciones integrales intervienen derivadas de orden superior de las variables de estado y de ciertas propiedades del modelo respecto a las coordenadas del sistema elegido. Aplicando diversas transformaciones (con frecuencia el teorema de la divergencia o la integración por partes) puede obtenerse un nuevo sistema de ecuaciones integrales en el que se reduce el orden de las derivadas que intervienen en los subintegrandos. Este segundo sistema suele denominarse forma débil, y su utilidad radica en que reduce las exigencias de continuidad de las soluciones del sistema de ecuaciones, esto es, de las variables de estado.

En nuestro caso, puede obtenerse mediante este procedimiento el Principio de los Trabajos Virtuales, que no es más que una forma débil de las ecuaciones de equilibrio y por tanto, independiente de las ecuaciones constitutivas y de

compatibilidad.

Una expresión general del principio de los trabajos virtuales puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta \bar{\epsilon}^t \bar{\sigma} dV &= \iiint_V \delta \bar{u}^t \bar{b} dV + \iint_{\Gamma} \delta \bar{u}^t \bar{t} d\Omega + \\ &+ \int_C \delta \bar{u}^t \bar{q} d\ell + \sum \delta \bar{u}^t \bar{P} \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde los dominios de integración "V", "Γ", y "C" son respectivamente el volumen de la estructura, y las superficies (en particular el contorno) y líneas sobre las que actúan cargas distribuidas. " $\bar{\sigma}$ " es el vector de tensiones, " $\bar{b}$ " es el vector de cargas volumétricas, " $\bar{t}$ " el de cargas distribuidas a lo largo de una superficie, " $\bar{q}$ " el de cargas distribuidas a lo largo de una línea, y " $\bar{P}$ " el de cargas puntuales. Los términos " $\delta \bar{u}$ " y " $\delta \bar{\epsilon}$ " representan respectivamente un campo de desplazamientos virtual y su campo de deformaciones asociado, donde virtual significa cualquier campo compatible con las condiciones de vinculación.

Las ecuaciones constitutivas, para modelos de elasticidad lineal, pueden escribirse en la forma sencilla:

$$\bar{\sigma} = \underset{\sim}{\eta} (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_o) + \bar{\sigma}_o \quad (5.2)$$

donde " $\bar{\epsilon}$ " es el vector de deformaciones, " $\bar{\sigma}$ " es el vector de tensiones, " $\bar{\epsilon}_o$ " es el vector de deformaciones iniciales, " $\bar{\sigma}_o$ " es el vector de tensiones iniciales" y " $\underset{\sim}{\eta}$ " es el tensor de coeficientes elásticos, cuya forma depende de la variación de las propiedades mecánicas del material en distintas direcciones y

admite diferentes expresiones según éste sea anisótropo, ortótropo, isótropo, etc.

Las ecuaciones de compatibilidad, bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, pueden escribirse en la forma sencilla:

$$\bar{\epsilon} = \underset{\sim}{L} \bar{u} \quad (5.3)$$

donde " $\bar{\epsilon}$ " es el vector de deformaciones, " $\bar{u}$ " es el vector de desplazamientos en el sistema de coordenadas elegido, y " $\underset{\sim}{L}$ " es un operador diferencial lineal dependiente del sistema de coordenadas.

#### V.2.2 Descripción genérica del modelo numérico

La aplicación del Método de Elementos Finitos a la solución del sistema formado por las ecuaciones (5.1), (5.2), y (5.3) comprende fundamentalmente los siguientes aspectos:

- discretización del continuo en subdominios.
- selección de un conjunto finito de parámetros representativos de las propiedades del modelo y de las variables de estado en cada subdominio.
- aproximación de las propiedades del modelo y las variables de estado en cada subdominio mediante una interpolación sobre el conjunto de parámetros elegido.
- sustitución de las aproximaciones anteriores en las ecuaciones de equilibrio, de compatibilidad y constitutivas, obteniendo un sistema de ecuaciones algebraico en el que las

incógnitas son los parámetros representativos de las variables de estado.

- obtención de la solución del sistema algebraico anterior, y en función de la misma, aproximaciones a los valores de las variables de estado en cualquier punto de los subdominios mediante las interpolaciones definidas previamente.

Se denomina elemento finito a cada uno de los subdominios en que se divide el continuo. Dentro de cada subdominio se elige un sistema de coordenadas local, curvilíneo en general, que denominaremos sistema de referencia.

Cada punto de un subdominio se identifica unívocamente por sus coordenadas de referencia. Suelen adoptarse como parámetros representativos de cada subdominio los valores de las propiedades del modelo y las variables de estado en ciertos puntos denominados nodos, motivo por el cual se denominan propiedades y variables nodales al conjunto de parámetros citados. Las funciones de interpolación empleadas se denominan funciones de forma, y permiten obtener una aproximación al valor de las propiedades y variables de estado del modelo en cualquier punto de un elemento finito a partir de sus propiedades y variables nodales. La obtención de las coordenadas globales a partir de las coordenadas de referencia de un punto de un subdominio no es más que la interpolación de las coordenadas nodales del subdominio mediante las correspondientes funciones de forma.

En principio, los nodos y funciones de forma sobre los que se realiza la interpolación no han de ser necesariamente los

mismos para la geometría (coordenadas globales), las restantes propiedades y las variables de estado.

Sin embargo, un tipo de aproximación empleado frecuentemente y de particular interés es el de la interpolación isoparamétrica, en el que se utilizan las mismas funciones de forma y los mismos nodos para definir la interpolación de las propiedades (incluida la geometría) y variables de estado en cada subdominio. La formulación isoparamétrica da lugar a una formulación sumamente elegante y compacta. En lo sucesivo nos referiremos implícitamente a la transformación isoparamétrica y supondremos que el lector se encuentra familiarizado con sus conceptos básicos. No obstante, los desarrollos posteriores son aplicables a otros métodos de interpolación realizando las modificaciones pertinentes.

La aplicación de las fórmulas de interpolación isoparamétricas permite escribir inmediatamente las relaciones:

$$\bar{\mathbf{r}}_e(\bar{\xi}) = \mathbf{N}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{r}}_{ne} \quad (5.4)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_e(\bar{\xi}) = \mathbf{N}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_e$$

donde se obtiene para el punto de coordenadas de referencia " $\bar{\xi}$ " de cada elemento "e" su vector de coordenadas globales " $\bar{\mathbf{r}}_e$ " y una aproximación " $\bar{\mathbf{u}}_e$ " al vector de desplazamientos a partir de sus vectores de coordenadas nodales " $\bar{\mathbf{r}}_{ne}$ " y desplazamientos nodales " $\bar{\mathbf{a}}_e$ " mediante la matriz de funciones de forma " $\mathbf{N}$ ".

La sustitución en la ecuación (5.3) de la ecuación de

interpolación dada en (5.4) para los desplazamientos permite obtener una aproximación al vector de deformaciones:

$$\bar{\epsilon}_e(\bar{\xi}) = \underline{B}(\bar{\xi}) \bar{a}_e \quad (5.5)$$

con:  $\underline{B}(\bar{\xi}) = \underline{L} \underline{N}(\bar{\xi})$

y la sustitución de las expresiones anteriores en la ecuación (5.2) permite obtener una aproximación al vector de tensiones:

$$\bar{\sigma}_e(\bar{\xi}) = \underline{D}(\bar{\xi}) (\underline{B}(\bar{\xi}) \bar{a}_e - \bar{\epsilon}_o(\bar{\xi})) + \bar{\sigma}_o(\bar{\xi}) \quad (5.6)$$

Finalmente, la sustitución de las aproximaciones (5.4), (5.5), y (5.6) en la ecuación (5.1), expresión del Principio de los Trabajos Virtuales, y la realización de la integración en cada subdominio, permite escribir el sistema lineal de ecuaciones:

$$\underline{K} \bar{a} = \bar{f}$$

donde:

$$\underline{K} = \sum_e \underline{K}_e \quad (5.7)$$

$$\bar{f} = \sum_e \bar{f}_e$$

En el sistema anterior, la matriz de coeficientes " $\underline{K}$ " suele denominarse matriz de rigidez global (incluso, por extensión, en problemas formulados en ámbitos diferentes al del cálculo estructural), y el vector de términos independientes " $\bar{f}$ " suele

denominarse vector de fuerzas nodales (por extensión de los conceptos de cálculo matricial y de los primeros desarrollos del MEF). El vector de incógnitas " $\bar{a}$ " se denomina vector de desplazamientos nodales de la estructura, o vector de grados de libertad.

Las matrices " $\tilde{K}_e$ " se denominan matrices de rigidez de elemento, y los vectores " $\bar{f}_e$ " se denominan vectores de fuerzas de elemento. El proceso de adición mediante el cual se obtienen la matriz de rigidez y el vector de fuerzas globales a partir de las matrices de rigidez y vectores de fuerzas de cada elemento suele denominarse ENSAMBLAJE.

A su vez, estos términos pueden escribirse en la forma

$$\tilde{K}_e = \iiint_{V_e} \begin{matrix} t \\ B \\ \tilde{e} \end{matrix} \begin{matrix} D \\ \tilde{e} \end{matrix} \begin{matrix} B \\ \tilde{e} \end{matrix} dV$$

$$\bar{f}_e = \bar{f}_{Ve} + \bar{f}_{\Gamma e} + \bar{f}_{Ce} + \bar{f}_{Pe}$$

con:

$$\bar{f}_{Ve} = \iiint_{V_e} \begin{matrix} t \\ B \\ \tilde{e} \end{matrix} (D \begin{matrix} \bar{\epsilon} \\ \tilde{e} \\ o \end{matrix} - \begin{matrix} \bar{\sigma} \\ \tilde{e} \\ o \end{matrix}) dV + \iiint_{V_e} \begin{matrix} t \\ N \\ \tilde{e} \end{matrix} \bar{b} dV \quad (5.8)$$

$$\bar{f}_{\Gamma e} = \iint_{\Gamma e} \begin{matrix} t \\ N \\ \tilde{e} \end{matrix} \bar{t} d\Omega$$

$$\bar{f}_{Ce} = \int_{Ce} \begin{matrix} t \\ N \\ \tilde{e} \end{matrix} \bar{q} dl$$

$$\bar{f}_{Pe} = \sum \begin{matrix} t \\ N \\ \tilde{e} \end{matrix} \bar{P}$$

donde el vector de fuerzas nodales de cada elemento se ha descompuesto en los términos debidos a cargas volumétricas,

distribuidas a lo largo de superficies y líneas y cargas puntuales.

La realización de las integrales en cada elemento de la ecuación (5.8) exige la interpolación de las coordenadas globales " $\bar{r}$ " en función de las coordenadas isoparamétricas " $\bar{\xi}$ " en cada subdominio o elemento finito. La integración suele realizarse mediante técnicas numéricas (en particular se usan extensivamente las cuadraturas de Gauss-Legendre). Para realizar la integración del vector de fuerzas es necesario que la discretización se realice de forma que las superficies, líneas y puntos sobre las que actúan cargas estén bien definidas en coordenadas de referencia (en nuestro caso isoparamétricas) dentro de cada elemento. El tratamiento es más sencillo cuando tales superficies, líneas y puntos coinciden respectivamente con caras, aristas y puntos nodales de los elementos. En este caso, en general, se definirán todas las cargas por sus valores en los puntos nodales, y se aproximarán en cada elemento mediante una interpolación de la forma (5.4) en función de las coordenadas de referencia. En lo sucesivo asumiremos este planteamiento.

El sistema lineal de ecuaciones (5.7) está indeterminado, a falta de la imposición de las condiciones de vinculación o apoyo, que normalmente se traducen en el conocimiento de los desplazamientos nodales prescritos en los nodos vinculados. La introducción de una vinculación en un cierto grado de libertad o desplazamiento de un nodo, introduce una nueva incógnita denominada reacción. Por este motivo, escribiremos en lo sucesivo el sistema de ecuaciones (5.7) en la forma más general:

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{f}} + \underline{\underline{R}} \quad (5.9)$$

$$\underline{\underline{\Psi}} (\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{R}}) = \underline{\underline{0}}$$

donde la última ecuación expresa una condición de vínculo en la forma de una relación entre los desplazamientos y reacciones en los nodos coaccionados. En un gran porcentaje de los casos la condición de vínculo será de tipo lineal y en un número muy significativo todavía, consistirá simplemente en una prescripción del desplazamiento en cada nodo, independiente de la reacción. El tratamiento de estas condiciones de vínculo no implica una gran dificultad, normalmente, y puede realizarse de diversas formas modificando la matriz de rigidez adecuadamente y obteniendo un nuevo sistema lineal de ecuaciones. En general es conveniente que el sistema de ecuaciones que es preciso resolver finalmente sea simétrico y definido positivo, por lo que estas modificaciones deben efectuarse correctamente. Asumiremos en lo sucesivo por simplicidad que las condiciones de vínculo son sencillamente prescripciones en el valor de los desplazamientos coaccionados.

La matriz de rigidez es independiente de las acciones externas, y por tanto, la misma estructura puede calcularse bajo diferentes hipótesis de carga resolviendo varias veces el sistema de ecuaciones (5.7) con diferentes vectores de términos independientes.

La matriz " $\underline{\underline{K}}$ " es además simétrica y con las condiciones de vinculación es además definida positiva (en problemas elásticos)

lo que asegura su invertibilidad.

La solución del sistema de ecuaciones (5.9) puede realizarse mediante procedimientos directos o iterativos.

En la selección del método de resolución a emplear, es preciso tener en cuenta consideraciones tales como el tamaño del problema (en términos de número de ecuaciones, semiancho de banda, número de sistemas a resolver simultáneamente) en lo que afecta al tiempo de cálculo y a las necesidades de almacenamiento en memoria, y el error de truncamiento del algoritmo (si es iterativo) y la transmisión de errores de redondeo.

Entre los métodos directos se cuentan los métodos de eliminación (métodos de Gauss para matrices simétricas) y sus derivados (método Frontal aplicable a problemas de elementos finitos, cálculo matricial, y cualquier problema en general que requiera el ensamblaje o formación de la matriz de coeficientes del sistema a resolver, y donde el ensamblaje y la reducción Gaussiana se realizan simultáneamente), y los métodos de descomposición o factorización (descomposición de Crout para matrices simétricas o descomposición de Cholesky  $LL^t$ , descomposiciones tipo  $LDL^t$ ).

En cuanto a los métodos iterativos, podemos escribir su expresión general en la forma:

Sea el sistema:  $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$

$$\text{entonces: } \underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \underline{C}^k \underline{y}^k \quad (5.10)$$

$$\text{con: } \underline{y}^k = \underline{A} \underline{x}^k - \underline{b}$$

donde " $\underline{C}^k$ " es una aproximación a la inversa de la matriz de coeficientes " $\underline{A}$ ", y al vector " $\underline{y}$ " se le suele denominar en cálculo estructural vector de fuerzas residuales. Para diferentes elecciones de la matriz " $\underline{C}^k$ " se obtienen diferentes algoritmos clásicos (Jacobi, Gauss-Seidel, etc.) y otros de reciente confección especialmente desarrollados para su implementación en programas de elementos finitos (técnicas elemento por elemento, etc.). La velocidad de convergencia del algoritmo puede acelerarse en ocasiones mediante la utilización de coeficientes de relajación (obtenidos a partir del planteamiento de la solución del sistema de ecuaciones lineales mediante técnicas de minimización) o preconditionadores.

Entre los métodos directos y los métodos iterativos se encuentran ciertos métodos iterativos de convergencia finita (métodos de direcciones y gradientes conjugados). Existen numerosos métodos, menos conocidos, aplicables a casos específicos (problemas mal condicionados, etc.)

Además, la matriz de rigidez suele tener un semiancho de banda relativamente pequeño si la numeración global de los nodos en la discretización se ha realizado eficientemente, y en cualquier caso el semiancho de banda puede intentar reducirse

mediante la aplicación de algún algoritmo de reenumeración. El almacenamiento en banda de la matriz de rigidez (o la utilización de otros algoritmos de almacenamiento de mayor sofisticación tales como el column-profile o sky-line) y la programación eficiente de los algoritmos de resolución, son imprescindibles para poder reducir el coste de almacenamiento y realizar los cálculos en tiempos de ejecución razonables y por tanto abordar la solución de grandes sistemas de ecuaciones lineales.

En general, los métodos iterativos son preferibles para resolver grandes sistemas de ecuaciones, si bien, cuando es necesario resolver varios sistemas simultáneamente -con idéntica matriz de coeficientes- el coste operativo es proporcional al número de sistemas a resolver. Los métodos directos son, en principio, preferibles para sistemas de ecuaciones de tamaño medio o pequeño, y habitualmente permiten resolver varios sistemas de ecuaciones simultáneamente con un coste operativo muy inferior por cada sistema adicional, o bien, una vez resuelto un sistema, aprovechar gran parte de los cálculos para resolver varios sistemas con idéntica matriz de coeficientes. En particular los métodos de factorización de Crout-Cholesky  $LLt$  y la descomposición  $LDLt$  son muy aptos para su implementación en programas de cálculo por elementos finitos; su adaptación para algoritmos de almacenamiento en banda o en "sky-line" puede realizarse con sencillez, su eficiencia es notable, y la transmisión de errores de redondeo en problemas normalmente condicionados es satisfactoria.

Es necesario tener en cuenta, evidentemente, que la consideración del tamaño de un sistema de ecuaciones como

"pequeño", "medio", o "grande", depende de la velocidad de cálculo del ordenador empleado, así como de su capacidad de almacenamiento.

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones (5.9), es posible calcular una aproximación al vector de tensiones en cualquier punto de la estructura mediante la aplicación de la ecuación (5.6) en el elemento correspondiente. Es importante considerar que para las funciones de forma empleadas con más frecuencia, la interpolación de los desplazamientos es continua a lo largo de la estructura, pero no lo son sus derivadas. Por tanto, y en virtud de las ecuaciones (5.2) y (5.3), las aproximaciones a las deformaciones y a las tensiones obtenidas mediante la aplicación del MEF serán discontinuas en los contornos de los elementos (excepto si se aplican elementos con funciones de forma de alto orden de continuidad). En general, especialmente si se aplica integración numérica para realizar los cálculos implícitos en las ecuaciones (5.7), es frecuente obtener el valor del vector de tensiones en los puntos de integración de la cuadratura de Gauss empleada en cada elemento. Si el orden de la cuadratura está cuidadosamente escogido para que la integración sea exacta (cuando los subintegrandos son polinomios y la integración se realiza en coordenadas de referencia), en estos puntos se obtiene en general la aproximación con error mínimo.

**V.3 MODULOS DE CALCULO PARA SISTEMAS DE DISEÑO OPTIMO BASADOS EN EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS.**

**V.3.1 Descripción genérica**

Empleando la notación descrita en el Capitulo anterior y teniendo en cuenta las ecuaciones (5.7), (5.8), podemos escribir el sistema lineal de ecuaciones (5.9) en la forma general:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}(\bar{\alpha}) \bar{\mathbf{a}} &= \bar{\mathbf{f}}(\bar{\alpha}) + \bar{\mathbf{R}} \\ \bar{\mathbf{a}} &= \bar{\mathbf{p}}(\bar{\alpha}) \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde se ponen de manifiesto las dependencias de la matriz de rigidez, el vector de fuerzas, y los desplazamientos prescritos con respecto a las variables de entrada al módulo de cálculo.

De forma similar, podemos escribir la ecuación (5.6) como:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\xi}) &= \bar{\mathbf{D}}(\bar{\xi}, \bar{\alpha}) \left[ \bar{\mathbf{B}}(\bar{\xi}, \bar{\alpha}) \bar{\mathbf{a}} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\bar{\xi}, \bar{\alpha}) \right] \\ &+ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0(\bar{\xi}, \bar{\alpha}) \end{aligned} \tag{5.12}$$

Las ecuaciones (5.11) y (5.12) pueden considerarse como una forma particular del conjunto de ecuaciones implícitas (4.14) descritas en la formulación general, donde en este caso el conjunto de variables de comportamiento " $\bar{\omega}$ " está formado por los desplazamientos nodales " $\bar{\mathbf{a}}$ ", las reacciones en los nodos coaccionados " $\bar{\mathbf{R}}$ ", y las tensiones " $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ ", y son de hecho las ecuaciones de estado del problema estructural.

La ecuación (5.12) adopta una forma sencilla y explícita y los términos que intervienen en el segundo miembro han de ser calculados también para formar el sistema de ecuaciones (5.11). Por este motivo la trataremos separadamente, y en lo sucesivo, nos referiremos al sistema de ecuaciones (5.11) como a la ecuación de estado del problema, que escribiremos en la forma (4.14) como:

$$\bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\omega}) = \begin{Bmatrix} \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\omega}) \\ \mathbf{k} \\ \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\omega}) \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{0}}$$

con:

$$\bar{\omega} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{R}} \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\bar{\Psi}_{\mathbf{k}}(\bar{\alpha}, \bar{\omega}) = \bar{\mathbf{K}}(\bar{\alpha}) \bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{f}}(\bar{\alpha}) - \bar{\mathbf{R}}$$

El módulo de control del sistema debe obtener, accediendo al módulo de parametrización, y a la interface de cálculo, los valores de las variables de entrada en función de las variables de diseño. Esta información debe ser suministrada al módulo de cálculo para resolver el sistema de ecuaciones (5.13) y obtener por tanto el valor de desplazamientos y reacciones, y a partir de los desplazamientos, calcular las tensiones mediante la ecuación (5.12) en los puntos en que se solicite tal información.

Las variables de entrada al módulo de cálculo serán en este caso todas aquellas variables que permiten generar y ensamblar el

sistema (5.13), y formular la ecuación (5.12), y por tanto:

- La topología de la discretización.
- Las coordenadas nodales.
- Las propiedades de los materiales, incluyendo espesores, y otras dimensiones independientes de la discretización en los puntos nodales.
- Valores de cargas volumétricas (másicas y térmicas), distribuidas (en superficies y líneas) y puntuales en los puntos nodales. Si existen otras tensiones y deformaciones iniciales, se darán en general en los puntos de integración.
- Las condiciones de vinculación de los nodos coaccionados.

Estos aspectos se analizarán más en detalle al tratar el módulo de parametrización y la interface de cálculo en un apartado posterior.

Al describir la metodología general del diseño óptimo, se puso de manifiesto la necesidad de calcular las derivadas de las variables de estado respecto a las variables de diseño, esto es, realizar un análisis de sensibilidad; en nuestro caso ello implica calcular las derivadas de los desplazamientos, las reacciones y las tensiones, fundamentalmente. Desde una perspectiva general, pueden obtenerse las derivadas primeras y segundas direccionales de las variables de estado según direcciones arbitrarias en el espacio de diseño haciendo uso de las ecuaciones (4.26) y (4.42). No obstante, para obtener tales derivadas es preciso conocer las derivadas parciales respecto a

variables de entrada y comportamiento de la ecuación de estado, y la gran mayoría de los programas basados en el Método de Elementos Finitos existentes en la actualidad no contemplan la posibilidad de efectuar tales cálculos. Por tanto, y por lo que concierne al módulo de cálculo, en el desarrollo de un sistema de diseño óptimo, tanto si consiste en un programa ya existente como si se realiza especialmente, caben dos opciones:

- Implementación externa: emplear el módulo de cálculo como "caja negra", obteniendo las derivadas de la ecuación de estado mediante el análisis de diseños similares y la utilización de aproximaciones por diferencias finitas.
- Implementación integrada: modificar el módulo de cálculo normal basado en el MEF, o completarlo con nuevos procedimientos, de forma que proporcione la información adicional requerida.

La primera opción es más aséptica, sencilla, y no obliga al creador del sistema de diseño a comprender el programa de cálculo y la teoría involucrada en él. No obstante, la información obtenida es de baja calidad y puede inclusive inducir al módulo de decisión a modificar el diseño en forma claramente errónea.

Denominaremos implementación integrada, a toda implementación basada en la ampliación o modificación total o parcial de los fundamentos teóricos del módulo de cálculo, de forma que se obtenga la información adicional requerida. Esta segunda opción proporcionará información de mayor calidad, a costa de exigir la comprensión parcial o total, por parte del

creador del sistema, de la teoría subyacente al programa de cálculo, y obligar a modificar o complementar adecuadamente el mismo.

A su vez, la implementación integrada puede efectuarse según dos esquemas diferentes:

- Implementación integrada de tipo monolítico.
- Implementación integrada de tipo modular.

Hablaremos de esquemas de implementación de tipo monolítico cuando se realice un programa completo de cálculo estructural y análisis de sensibilidad en un solo bloque, normalmente mediante la modificación de una parte sustancial de un programa de cálculo estructural existente. El coste de este tipo de implementación es elevado, ya que exige desarrollar un programa completo, cuya dificultad es notoriamente mayor que la de un programa de cálculo tradicional. Además, siguiendo este esquema de implementación, la reconversión de programas de elementos finitos ya existentes para su integración en sistemas de diseño estructural óptimo envuelve una gran complejidad y precisa un esfuerzo de desarrollo muy elevado.

Hablaremos de implementaciones de tipo modular, cuando a partir de un esquema de cálculo estructural, se construya un conjunto de procedimientos complementarios, capaces de proporcionar la información adicional requerida aprovechando parte de las operaciones realizadas en un análisis estructural tradicional. Este esquema aparece entre la implementación externa y la implementación integrada de tipo monolítico, como

una solución de compromiso capaz de proporcionar información de muy alta calidad a costa de un esfuerzo razonable en su desarrollo, y con costes razonables de operación y almacenamiento de datos.

A continuación estudiaremos el análisis de sensibilidad para la ecuación de estado (5.13) y la ecuación (5.12), siguiendo los planteamientos en derivadas direccionales del Capítulo anterior.

### **V.3.2 Análisis de Sensibilidad**

#### **V.3.2.1 Implementación externa. Aproximaciones por diferencias**

Si la implementación del módulo de cálculo es externa, tal como se ha definido previamente, el cálculo de las derivadas de las variables de estado respecto a las variables de diseño debe efectuarse forzosamente mediante aproximaciones en diferencias finitas.

Obviaremos en lo sucesivo el subíndice "e" de elemento cuando ello no de lugar a confusión, y para evitar desarrollos excesivamente largos, sustituiremos implícitamente en las ecuaciones (5.12) y (5.13), cuando sea conveniente, las relaciones de dependencia de las variables de entrada al módulo de cálculo con las variables de diseño. Ello no reporta pérdida de generalidad, en absoluto, y permite expresar las ecuaciones citadas directamente en función de las variables de diseño " $\bar{x}$ ", en la forma simplificada:

$$\bar{K}(\bar{x}) - \bar{a}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{R}(\bar{x}) \quad (5.14)$$

$$\bar{a}(\bar{x}) = \bar{p}(\bar{x})$$

$$\bar{\sigma}(\bar{\xi}, \bar{x}) = \bar{D}_{\bar{\xi}, \bar{x}} \left[ \bar{B}(\bar{\xi}, \bar{x}) - \bar{a}(\bar{x}) - \bar{\epsilon}(\bar{\xi}, \bar{x}) \right] + \bar{\sigma}_o(\bar{\xi}, \bar{x}) \quad (5.15)$$

Podemos escribir las aproximaciones en diferencias directas para las derivadas primeras direccionales según la dirección " $\bar{s}$ ", en función de un incremento " $\mu$ " suficientemente pequeño en la forma,

$$D_{\bar{s}} \bar{a} \approx \frac{\bar{a}(\bar{x} + \mu \bar{s}) - \bar{a}(\bar{x})}{\mu} \quad (5.16)$$

$$D_{\bar{s}} \bar{\sigma} \approx \frac{\bar{\sigma}(\bar{\xi}, \bar{x} + \mu \bar{s}) - \bar{\sigma}(\bar{\xi}, \bar{x})}{\mu} \quad (5.17)$$

Para obtener derivadas direccionales de primer orden, por tanto, es preciso realizar un análisis completo de la estructura para las variables de diseño dadas, y un análisis completo adicional para su valor incrementado a lo largo de la dirección.

De forma similar, pueden obtenerse expresiones en diferencias para las derivadas de orden superior, si bien los

costes operativos crecen fuertemente con el orden de derivación.

Es importante considerar que en las ecuaciones (5.14) y (5.15) tiene capital importancia la adecuada elección del incremento " $\mu$ ". A medida que crece el valor del incremento, se eleva el error de truncamiento de la aproximación en diferencias. Por tanto, el valor del incremento debe ser necesariamente pequeño. No obstante, a medida que decrece el incremento aumenta el error de redondeo. No es posible, en general, elegir a priori el incremento más favorable. Además, el número de operaciones numéricas necesarias para obtener cada una de las soluciones de las ecuaciones (5.13) y (5.12) es normalmente muy alto, motivo por el cual los errores de redondeo de las soluciones obtenidas desvirtúan completamente las aproximaciones obtenidas por diferencias para valores relativamente pequeños de los incrementos.

No solo la información obtenida mediante este procedimiento es de baja calidad, sino que además su coste es muy elevado, dado el gran número de análisis estructurales completos que es preciso realizar.

Para obtener información más fiable, es preciso realizar una implementación integrada en mayor o menor grado, y partir de la derivación del sistema de ecuaciones lineales (5.13)

**V.3.2.2 Implementación Integrada. Derivación de las Ecuaciones Fundamentales**

**V.3.2.2.1 Análisis de sensibilidad de primer orden**

Siendo " $\bar{s}$ " una dirección arbitraria de modificación del diseño, la derivación primera direccional de la ecuación de estado (5.13) da lugar al sistema de ecuaciones (4.26) que en nuestro caso podemos escribir en la forma:

$$\frac{D}{s} \bar{a} = - \frac{D}{s} K \bar{a} + \frac{D}{s} \bar{f} + \frac{D}{s} \bar{R} \quad (5.18)$$

$$\frac{D}{s} \bar{a} = \frac{D}{s} \bar{p}$$

Las derivadas primeras direccionales de los desplazamientos nodales pueden obtenerse, por lo tanto, resolviendo un sistema de ecuaciones lineales para cada dirección. Se observa que la forma de cada sistema de ecuaciones (5.18) es totalmente análoga a la del sistema (5.11), esto es, a la ecuación de estado. De hecho la matriz de coeficientes es común a todos ellos y es precisamente la matriz de derivadas parciales de la ecuación de estado respecto a las variables de estado de las ecuaciones (4.26), que en nuestro caso coincide con la matriz de rigidez de la estructura.

Por tanto, si se utiliza para el sistema (5.11) un método que permita resolver nuevos sistemas con idéntica matriz aprovechando las operaciones efectuadas en la primera resolución, el coste adicional que supone la evaluación de las derivadas

direccionales de desplazamientos por este concepto es reducido. Por este motivo es aconsejable el uso de un método directo de factorización o eliminación para la resolución de sistemas de ecuaciones del tipo (5.11) en módulos de cálculo de diseño estructural óptimo, y en particular, la descomposición de la matriz de rigidez en la forma LDLt de Cholesky parece particularmente adecuada por este motivo. Otros métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales de probada eficacia, ya sean directos o iterativos, no son convenientes en este caso si no permiten resolver a posteriori nuevos problemas con idéntica matriz.

Si se conocen las derivadas direccionales de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales y habiendo resuelto previamente el sistema (5.11), el sistema (5.18) puede invertirse con sencillez obteniendo las derivadas direccionales de los desplazamientos y de las reacciones en los nodos con grados de libertad prescritos.

Una vez conocidas las derivadas de los desplazamientos pueden obtenerse las derivadas de las tensiones mediante un planteamiento similar. De la derivación de las ecuaciones (5.12) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_s \bar{\sigma} &= \mathbf{D}_s \mathbf{D} \left( \mathbf{B} \bar{\mathbf{a}} - \bar{\epsilon}_o \right) + \\
 &+ \mathbf{D}_s \left( \mathbf{D} \mathbf{B} \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{B} \mathbf{D}_s \bar{\mathbf{a}} - \mathbf{D}_s \bar{\epsilon}_o \right) + \\
 &+ \mathbf{D}_s \bar{\sigma}_o
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

donde se evidencia la necesidad de conocer adicionalmente las derivadas de las tensiones y deformaciones iniciales, y las de las matrices "Q" y "B".

#### V.3.2.2.2 Análisis de sensibilidad de segundo orden

Siendo "s<sub>1</sub>" y "s<sub>2</sub>" dos direcciones arbitrarias de modificación del diseño, la derivación segunda direccional de la ecuación de estado (5.13) da lugar a un sistema de ecuaciones en la forma (4.42) que en nuestro caso podemos escribir como,

$$\begin{aligned}
 \bar{K} \begin{matrix} D^2 \\ \bar{s} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{s} \end{matrix} &= - \begin{matrix} D^2 \\ \bar{s} \end{matrix} \bar{K} \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{s} \end{matrix} \\
 &- \begin{matrix} D \\ \bar{s} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{K} \\ \bar{s} \end{matrix} \begin{matrix} D \\ \bar{s} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{s} \end{matrix} - \begin{matrix} D \\ \bar{s} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{K} \\ \bar{s} \end{matrix} \begin{matrix} D \\ \bar{s} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{s} \end{matrix} + \\
 &+ \begin{matrix} D^2 \\ \bar{s} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{f} \\ \bar{s} \end{matrix} + \begin{matrix} D^2 \\ \bar{s} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{R} \\ \bar{s} \end{matrix} \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} D^2 \\ \bar{s} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{s} \end{matrix} = \begin{matrix} D^2 \\ \bar{s} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{p} \\ \bar{s} \end{matrix}$$

no desarrollando las derivadas direccionales de la matriz de rigidez en función de las derivadas parciales respecto a las variables de entrada "α".

Se observa que el sistema de ecuaciones (5.20) tiene la misma matriz de coeficientes que los sistemas (5.11) y su planteamiento es análogo. Por consiguiente, valen para ellos idénticas consideraciones que para el sistema (5.18) que permite calcular la derivada primera direccional. Se observa que para calcular la segunda derivada direccional de desplazamientos y reacciones es preciso haber calculado previamente sus derivadas primeras en ambas direcciones, y es obligado conocer las

derivadas segundas de la matriz de rigidez y vector de fuerzas nodales. Nótese que en comparación con el sistema (4.42) del planteamiento general, no intervienen en la ecuación (5.20) los términos correspondientes a las derivadas parciales segundas de la ecuación de estado respecto a las variables de estado, dado que la ecuación de estado (5.13) es lineal en estas variables.

Una vez calculadas las derivadas segundas de los desplazamientos, pueden calcularse las derivadas segundas direccionales de las tensiones. En efecto, derivando nuevamente la ecuación (5.19), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 D_{s_2 s_1}^2 \bar{\sigma} &= D_{s_2 s_1}^2 \bar{\rho} ( \bar{B} \bar{a} - \bar{\epsilon} ) + \\
 &+ D_{s_2} \bar{\rho} ( D_{s_1} \bar{B} \bar{a} + \bar{B} D_{s_1} \bar{a} - D_{s_1} \bar{\epsilon} ) + \\
 &+ D_{s_1} \bar{\rho} ( D_{s_2} \bar{B} \bar{a} + \bar{B} D_{s_2} \bar{a} - D_{s_2} \bar{\epsilon} ) + \\
 &+ \bar{\rho} ( D_{s_2 s_1}^2 \bar{B} \bar{a} + \bar{B} D_{s_2 s_1}^2 \bar{a} + \\
 &+ D_{s_2} \bar{B} D_{s_1} \bar{a} + D_{s_1} \bar{B} D_{s_2} \bar{a} - D_{s_2 s_1}^2 \bar{\epsilon} ) + \\
 &+ D_{s_2 s_1}^2 \bar{\sigma}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

fórmula para cuya evaluación es necesario conocer adicionalmente las derivadas segundas de las deformaciones y tensiones iniciales y de las matrices " $\bar{\rho}$ " y " $\bar{B}$ " respecto a las variables de diseño, así como haber realizado previamente el cálculo de las derivadas primeras en ambas direcciones.

La derivación sucesiva de las ecuaciones (5.20) y (5.21) da lugar a ecuaciones que permiten calcular derivadas de orden superior. El procedimiento es recursivo, es decir que las derivadas de orden "k+1" se obtienen a partir de las derivadas de orden "k", no envuelve una complejidad especial, y la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales tipo (5.18), (5.20) y sucesivas puede realizarse de modo eficiente.

Sin embargo, si han de calcularse las derivadas n-ésimas de las variables de estado respecto a todas las variables de diseño, y no tan solo en una dirección, el volumen de datos crece de forma exponencial con el orden de derivación, ya que si existen "n" variables de diseño, han de evaluarse "n" derivadas de primer orden de cada desplazamiento y tensión respecto a las variables de diseño, "n<sup>2</sup>" derivadas de segundo orden (sin contar las simetrías si las funciones a derivar son suficientemente regulares), "n<sup>3</sup>" derivadas de tercer orden, etc. Además, el crecimiento del volumen de almacenamiento de datos conlleva un fuerte incremento del coste evaluado en términos de tiempo de cálculo. En general, y para problemas con un número medio o alto de variables de diseño, las derivadas primeras pueden evaluarse, a la vista de las ecuaciones (5.18) y (5.19), con costes razonables en términos de tiempo de cálculo y almacenamiento de datos, mientras que para las derivadas de orden superior el coste es inaceptable.

Si bien la obtención de las derivadas de desplazamientos, reacciones y tensiones está formalmente resuelta a partir de las ecuaciones (5.18) (5.19), (5.20) y (5.21), es preciso evaluar las derivadas direccionales de la matriz de rigidez " $\tilde{K}$ ", el vector de

fuerzas nodales " $\bar{f}$ ", y las matrices " $\tilde{D}$ " y " $\tilde{B}$ ". En los apartados siguientes analizaremos en detalle estos aspectos.

Es preciso realizar también la derivación de las tensiones y deformaciones iniciales y los desplazamientos prescritos. No obstante, este cálculo puede considerarse trivial si estos términos han sido definidos por el usuario en función de las variables de diseño. Si por el contrario, para su obtención se plantea un análisis previo, su obtención corresponde a un problema físico distinto, y es por tanto en el marco de este problema en el que debe contemplarse su derivación. Por consiguiente no incidiremos en lo sucesivo en su cálculo (excepto para el caso de esfuerzos de origen térmico).

#### V.3.2.2.3 La distinción entre optimización de dimensiones y formas a partir del análisis de sensibilidad

A la vista de lo expuesto en apartados precedentes, concluimos que la implementación integrada de un módulo de cálculo basado en el Método de Elementos Finitos para problemas estructurales estáticos y lineales en un sistema de diseño óptimo exige la inclusión del análisis de sensibilidad definido por las ecuaciones (5.18), (5.19), (5.20), (5.21), y sus derivadas sucesivas hasta el orden de derivación considerado, además de las ecuaciones (5.11) y (5.12) que forman el núcleo tradicional de un programa de cálculo.

No obstante, como se ha puesto de manifiesto previamente, el problema no puede considerarse resuelto inmediatamente, ya que tanto si el esquema de implementación es monolítico como si es

modular es preciso abordar aún la derivación de diversos términos pertenecientes a las ecuaciones de estado, tales como la matriz de rigidez " $\tilde{K}$ ", el vector de fuerzas nodales " $\bar{f}$ ", y las matrices " $\tilde{D}$ " y " $\tilde{B}$ ".

En cualquier caso, la derivación de la matriz " $\tilde{D}$ " es sencilla, puesto que sus componentes son funciones simples de los módulos elásticos del material (módulo de Young y módulo de Poisson en materiales isótropos).

Por su parte, la matriz " $\tilde{B}$ " solo depende de la forma de cada subdominio. Por tanto, si las variables de diseño no afectan geoméricamente a la forma de la estructura, no es necesario realizar tal derivación.

En virtud de las ecuaciones (5.7), podemos escribir las derivadas direccionales primeras y segundas de la matriz de rigidez de la estructura y del vector de fuerzas nodales en la forma

$$D_s \tilde{K} = \sum_e D_s \tilde{K}_e \quad (5.22)$$

$$D_s \bar{f} = \sum_e D_s \bar{f}_e$$

$$D_{s_2 s_1}^2 \tilde{K} = \sum_e D_{s_2 s_1}^2 \tilde{K}_e \quad (5.23)$$

$$D_{s_2 s_1}^2 \bar{f} = \sum_e D_{s_2 s_1}^2 \bar{f}_e$$

De forma similar pueden escribirse expresiones para derivadas de orden superior.

La sustitución directa de las ecuaciones anteriores en las ecuaciones de sensibilidad (5.18) y (5.20) demuestra que las operaciones matriciales involucradas en la obtención de los segundos miembros pueden realizarse elemento a elemento. No es necesario, por lo tanto, realizar el ensamblaje de las derivadas de la matriz de rigidez.

Por su parte, la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales de cada elemento se obtienen por integración de ciertas funciones en el recinto de cada elemento y sobre superficies y líneas contenidas en éste (5.8). La derivación de tales integrales, necesaria para aplicar las ecuaciones (5.18), (5.19), (5.20) y (5.21), no plantea problemas graves de cálculo si las variables de diseño afectan exclusivamente a los subintegrandos, pero no al recinto de integración, ya que como es sabido, si la función subintegrando verifica unas condiciones suficientes de regularidad, la derivada de la integral de una función en un recinto suficientemente regular es igual a la integral en el recinto de la derivada de la función. Sin embargo, si las variables de diseño afectan al recinto de integración, y por tanto a la forma de los elementos, la derivación es notoriamente más complicada.

Como hemos expuesto en los Capítulos anteriores, tradicionalmente se distingue entre optimización de DIMENSIONES y optimización de FORMAS, aludiendo a la naturaleza de la parametrización del diseño.

Se habla de optimización de DIMENSIONES cuando las variables de diseño afectan a propiedades fundamentales, incluyendo dimensiones geométricas, o acciones externas pero no a la forma de la estructura. Se habla de optimización de FORMAS cuando las variables de diseño afectan a la geometría de la estructura fuertemente, definiendo o modificando su aspecto.

Sin embargo tal distinción es confusa, y creemos que la verdadera distinción entre ambos tipos de problemas no radica en la naturaleza de la parametrización sino en la interacción entre la parametrización y el cálculo, y especialmente en la dificultad inherente al análisis de sensibilidad en cada tipo de problema.

En optimización de dimensiones, las derivadas necesarias para plantear las ecuaciones de análisis de sensibilidad pueden obtenerse con relativa sencillez. En efecto, la derivada de la matriz " $\tilde{B}$ " es nula, y las variables de diseño tan solo afectan a los subintegrandos en la evaluación de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales. Además la predicción del comportamiento estructural es relativamente sencilla en términos de las variables de diseño. Por ello, la realización de cambios de variable adecuados (p.e.:utilizar las inversas de las variables de diseño en cierto tipo de problemas en los que el comportamiento estructural depende inversamente de las mismas) permite reducir la complejidad del problema de optimización, o escribirlo en una forma mejor condicionada para la aplicación de algoritmos de programación matemática (p.e.:asegurando la convexidad). En algunos casos es posible sacar partido de la formulación particular de cada problema para aplicar algoritmos específicos (p.e.:criterios de optimalidad).

Por contra, en optimización de formas la derivada de la matriz " $\tilde{B}$ " no es nula, y las variables de diseño afectan no solo a los subintegrandos, sino también a los recintos de integración en la evaluación de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas nodales. Además la predicción del comportamiento estructural en función de las variables de diseño es más compleja que en el caso de optimización de dimensiones, y no es extraño que las variables de estado sean funciones altamente no lineales de las variables de diseño.

En el desarrollo de sistemas de diseño óptimo estructural de amplio rango de aplicación sería conveniente no distinguir entre ambos tipos de optimización. Ello permitiría tratar de forma unificada y sistemática problemas en que las variables de diseño afecten a dimensiones, propiedades no geométricas, o acciones externas, y problemas en que las variables de diseño afecten a propiedades geométricas que definan la forma de la estructura, o problemas de tipo mixto en los que las variables de diseño afecten a cualquier propiedad o acción externa estructural.

Puede decirse, por consiguiente, que la distinción clásica entre optimización de dimensiones y formas es un tanto artificiosa, y depende tanto o más fuertemente de la naturaleza del modelo de cálculo y del planteamiento del análisis de sensibilidad que de la parametrización efectuada. El sencillo ejemplo que hemos expuesto en el Párrafo II.3.2.1.2 adquiere desde el punto de vista del análisis de sensibilidad una nueva perspectiva. En efecto, una misma parametrización, da lugar con el empleo de dos módulos de cálculo diferentes (basados

respectivamente en la resistencia de materiales y en el Método de Elementos Finitos para tensión plana) a dos análisis de sensibilidad completamente distintos y cuyo grado de dificultad se diferencia en un orden de magnitud.

Por estos motivos, consideramos conveniente abandonar la distinción entre ambos tipos de optimización, excepto en casos muy concretos y específicos en que pueda obtenerse un beneficio considerable aplicando técnicas de gran eficiencia desarrolladas especialmente para un cierto tipo de problema (diversos criterios de optimalidad por ejemplo).

Es requisito indispensable para desarrollar una formulación unificada, el poder disponer de técnicas de derivación de tipo general, ya que la diferencia sustancial a nivel operativo entre la optimización de dimensiones y la optimización de formas radica en el grado de dificultad que implica la derivación en el segundo caso frente a la relativa sencillez del primero, y todo cuanto ello supone en la realización del análisis de sensibilidad y en la predicción del comportamiento estructural en la toma de decisiones.

#### **V.3.2.2.4 Derivación direccional analítica de los términos de las ecuaciones de estado**

Se observa en las ecuaciones (5.8) que los términos que intervienen en la ecuación de estado que es preciso derivar para la realización del análisis de sensibilidad y cuya derivación no es trivial, son integrales que podemos escribir en la forma general:

$$P(\bar{x}) = \iiint_{E(\bar{x})} p(\bar{r}, \bar{x}) dV \quad (5.24)$$

si la integral se extiende al dominio " $E(\bar{x})$ ", o bien:

$$Q(\bar{x}) = \iint_{\Gamma(\bar{x})} q(\bar{r}, \bar{x}) d\Omega \quad (5.25)$$

si la integral se extiende a su contorno " $\Gamma(\bar{x})$ " (o cualquier otra superficie del dominio), o bien:

$$F(\bar{x}) = \int_{C(\bar{x})} f(\bar{r}, \bar{x}) d\ell \quad (5.26)$$

si la integral se extiende a la curva " $C(\bar{x})$ " contenida en el dominio, siendo " $\bar{r}$ " las componentes del vector de posición de un punto cualquiera del dominio de integración expresado en coordenadas globales. En todos los casos el recinto de integración puede ser dependiente de las variables de diseño " $\bar{x}$ ".

Consideraremos que las funciones subintegrales son escalares, ya que la extensión al caso en que se trate de vectores, matrices o tensores es inmediata.

En la Mecánica de los Medios Continuos se analizan clásicamente problemas de derivación de funciones definidas mediante integración en recintos que varían de forma con el tiempo, y por tanto análogos a los problemas de derivación de las funciones (5.24), (5.25) y (5.26). Se habla en este caso de "derivada material". La extensión del concepto de derivada

material al análisis de sensibilidad en optimización de formas ha sido estudiada profundamente por Cea [1981a,1981b]. Desde este punto de vista, la derivación primera de funciones del tipo (5.24) puede considerarse como una extensión directa del Teorema del Transporte de Reynolds [Malvern, 1969]. Zolesio [1981a] analiza la derivación primera de la función (5.25). Hasta donde alcanzamos a conocer, la derivación primera de la ecuación (5.26) no ha sido formulada explícitamente en el ámbito de la optimización estructural.

En el Anejo 1, se presenta una deducción original y unificada de las ecuaciones que permiten evaluar las derivadas primeras de las funciones (5.24), (5.25) y (5.26), y se analiza someramente su validez en espacios de dimensión "n". En la deducción no se parte del concepto de derivada material, en la línea de los autores citados, sino de una transformación de la forma de los dominios de integración definida sobre un espacio de coordenadas de referencia. En la deducción se asume que la transformación, los recintos de integración en el espacio de referencia, y las funciones subintegrales verifican los requisitos de continuidad suficientes para asegurar la veracidad de la deducción.

Las ecuaciones del Anejo 1 (al.13) y (al.15), concuerdan respectivamente con el Teorema del Transporte de Reynolds, y con la ecuación derivada por Zolesio [1981a], si bien en nuestra deducción, el "campo de velocidades" " $\overline{W}_i$ " no aparece como la figura determinante de la modificación de la forma de los dominios con las variables de diseño, sino tan solo como la derivada primera de las ecuaciones de la transformación respecto

a las variables de diseño. A partir de este planteamiento pueden obtenerse, por lo tanto, las ecuaciones necesarias para la evaluación de derivadas de orden superior, así como la derivada de la función (5.26).

Las fórmulas del Anejo 1, (al.13), (al.15) y (al.16), obtenidas para el cálculo de las derivadas parciales respecto a las variables de diseño, pueden reescribirse inmediatamente para el cálculo de derivadas direccionales en la forma:

$$D_s P = \iiint_{E(\bar{x})} D_s p \, dV + \iint_{\Gamma(\bar{x})} p \, \bar{n}^t D_s \bar{\rho} \, d\Omega \quad (5.27)$$

$$D_s Q = \iint_{\Gamma(\bar{x})} [ D_s q + \text{div}(q D_s \bar{\rho}) - q \langle \bar{n}, \frac{\partial}{\partial n} D_s \bar{\rho} \rangle ] \, d\Omega \quad (5.28)$$

$$D_s F = \int_{C(\bar{x})} [ D_s f + \frac{df}{dr} D_s \bar{\rho} + f \langle \bar{t}, \frac{\partial}{\partial t} D_s \bar{\rho} \rangle ] \, dl \quad (5.29)$$

donde " $\Gamma(\bar{x})$ " es el contorno del recinto de integración, " $\bar{\rho}$ " es la función que define la transformación introducida en el párrafo (al.1), " $\bar{n}$ " es el versor normal exterior al contorno del dominio " $E(\bar{x})$ ", y " $\bar{t}$ " es el versor tangente a la curva " $C(\bar{x})$ ".

El primer sumando del segundo miembro de cada una de las ecuaciones (5.27), (5.28) y (5.29) representa la aportación a la derivada debida a la variación de la función subintegral. Los sumandos restantes representan la aportación a la derivada debida a la variación del recinto de integración.

La ecuación (5.27) indica que para obtener la derivada de la integral de volumen (5.24), en lo que respecta a la variación de la forma del dominio, solo es preciso conocer la "velocidad de variación de forma" de su contorno " $D_s \bar{\rho}$ ".

Si bien empleando la metodología presentada en el citado Anejo puede plantearse la derivación de orden superior, la complejidad de las ecuaciones se incrementa de forma notable, así como el coste operativo que supone su evaluación.

De hecho, la forma de las ecuaciones (al.13), (al.15), y (al.16) se debe a una motivación clara: obtener una expresión de las derivadas de las funciones (5.24), (5.25) y (5.26) en términos de operadores intrínsecos (divergencia, producto escalar, etc.) y obviando las referencias a la transformación (al.1) cuya manipulación se presupone dificultosa, o que puede ser desconocida. Por este motivo se hace intervenir en las ecuaciones finales tan solo el "campo de velocidades" " $\bar{w}_i$ ", o de derivadas de la transformación respecto a las variables de diseño, que se considera como la información mínima sobre la transformación que es preciso conocer para obtener las derivadas buscadas.

La simplicidad aparente de las ecuaciones anteriores es engañosa. La derivación es sencilla solamente cuando las variables de diseño no afectan a los recintos de integración, en cuyo caso se anulan todos los términos excepto las variaciones de las funciones subintegrales. En general, la evaluación de los términos restantes es complicada y su implementación en la práctica en conjunción con métodos numéricos es muy costosa. Por

este motivo, la utilidad de las ecuaciones citadas, así como la de su extensión a órdenes de derivación superiores, es restringida en planteamientos numéricos, si bien adquiere toda su potencia en planteamientos fundamentalmente analíticos (mediante cálculo de variaciones) de los problemas de optimización.

#### **V.3.2.2.5 Derivación direccional por diferencias de los términos de las ecuaciones de estado**

Obsérvese que en optimización de dimensiones la contribución de la variación del recinto de integración a las derivadas de los términos (5.8) de las ecuaciones de estado es nula, y por tanto el miembro de la derecha de las ecuaciones (5.27), (5.28) y (5.29) se reduce al primer sumando, en general de sencilla evaluación. La obtención de derivadas de orden superior no plantea una problemática especial. Tradicionalmente, y por este motivo, el análisis de sensibilidad en optimización de dimensiones se realiza exactamente empleando las ecuaciones mencionadas. Sin embargo, en optimización de formas, debido a la complejidad de los cálculos, se realiza habitualmente mediante aproximaciones en diferencias de los términos cuya derivación no es sencilla.

Podemos escribir aproximaciones en diferencias finitas para las derivadas direccionales de los términos que intervienen en las ecuaciones (5.8), y que están afectados por la variación de la forma de los dominios de integración, como:

$$D_{\vec{s}} \vec{K} \approx \frac{K(\vec{x} + \mu \vec{s}) - K(\vec{x})}{\mu} \quad (5.30)$$

$$D_{\vec{s}} \vec{f} \approx \frac{\vec{f}(\vec{x} + \mu \vec{s}) - \vec{f}(\vec{x})}{\mu} \quad (5.31)$$

$$D_{\vec{s}} \vec{B} \approx \frac{B(\vec{x} + \mu \vec{s}) - B(\vec{x})}{\mu} \quad (5.32)$$

análogas a las aproximaciones (5.16) y (5.17), en función del incremento " $\mu$ ".

La derivación de la matriz " $\vec{\eta}$ " puede realizarse analíticamente con sencillez, ya que no depende de la forma de los elementos, motivo por el que es infrecuente su aproximación mediante diferencias finitas.

Estas aproximaciones pueden introducirse en las ecuaciones de sensibilidad (5.18), (5.19), (5.20) y (5.21) para evaluar las derivadas direccionales de primer y segundo orden de las variables de estado. Este planteamiento del análisis de sensibilidad es integrado, modular y de sencilla implementación, ya que no implica la realización de otros cálculos que los productos matriciales implícitos en las ecuaciones de sensibilidad, y la resolución de los sistemas de ecuaciones correspondientes.

Sin embargo adolece de graves defectos. En efecto, la aproximación por diferencias introduce errores muy importantes que en numerosas ocasiones pueden desvirtuar totalmente los resultados del análisis de sensibilidad. Ello es debido, fundamentalmente, a la dificultad de estimar el valor adecuado de los intervalos de derivación. Si los intervalos son pequeños, los errores de redondeo son muy elevados, en tanto que si los intervalos son grandes, también lo son los errores de truncamiento de la aproximación por diferencias. El coste operativo de la aproximación por diferencias es elevado, ya que como se pone de manifiesto en las ecuaciones (5.30), (5.31) y (5.32), para realizar una aproximación por diferencias al gradiente de cada una de las matrices y vectores respecto a las "n" variables de diseño, es preciso realizar el cálculo de cada matriz y vector para "n" valores incrementados de las mismas. Si se desea obtener aproximaciones a derivadas de orden superior, el número de vectores y matrices que es necesario evaluar para valores incrementados de las variables de diseño crece fuertemente con el orden de la derivación, y el error de las aproximaciones aumenta.

Pese a todos los defectos mencionados, la implementación de las aproximaciones (5.30), (5.31) y (5.32) en conjunción con las ecuaciones de sensibilidad de primer orden (5.18) y (5.19) es sencilla, y se ha utilizado mayoritariamente en optimización de formas durante las dos últimas décadas [Ricketts y Zienkiewicz 1984, Esping 1984, Prasad 1985].

**V.3.2.2.6 Derivación direccional n-ésima y exacta de los términos de las ecuaciones de estado**

Las técnicas de derivación analítico-numéricas desarrolladas por el autor, que se expondrán a continuación, son aplicables a funciones del tipo (5.24), (5.25) y (5.26) en un contexto de aplicación del Método de Elementos Finitos, y demuestran que la derivación de orden "n" de estas funciones puede realizarse de forma notablemente eficiente mediante procedimientos sencillos y analíticamente exactos.

Observamos, en primer lugar, que con los planteamientos anteriores basados en el Método de Elementos Finitos, los términos a derivar de las ecuaciones (5.8) adoptan en la práctica una forma ligeramente distinta a la expuesta en (5.24), (5.25) y (5.26) que se considera clásicamente en optimización estructural de formas. En realidad, las funciones a derivar adoptan la forma:

$$P(\bar{x}) = \iiint_{E(\bar{x})} \Pi(\bar{\xi}, \bar{x}) dV \quad (5.33)$$

si la integral se extiende al dominio "E(x)", o bien:

$$Q(\bar{x}) = \iint_{\Gamma(\bar{x})} \Theta(\bar{\xi}, \bar{x}) d\Omega \quad (5.34)$$

si la integral se extiende a su contorno " $\Gamma(\bar{x})$ " (o cualquier otra superficie del dominio), o bien:

$$F(\bar{x}) = \int_{C(\bar{x})} \Phi(\bar{\xi}, \bar{x}) d\ell \quad (5.35)$$

esto es: se conoce una expresión directa de las funciones subintegrales, no en función de las coordenadas globales " $\bar{r}$ ", sino de las coordenadas isoparamétricas " $\bar{\xi}$ " de referencia.

De hecho, la evaluación de las funciones de la forma (5.33), (5.34) y (5.35) se efectúa por integración en el espacio isoparamétrico, normalmente mediante cuadraturas numéricas Gaussianas.

Ello sugiere que la transformación (al.1), que en la deducción de las ecuaciones (al.13), (al.15) y (al.16) aparece como un mero artificio matemático, es conocida y se utiliza extensivamente en el desarrollo de los cálculos en la aplicación habitual del Método de Elementos Finitos. De hecho, el espacio de referencia empleado en el Anejo es el definido por las coordenadas isoparamétricas, y la transformación (al.1) puede identificarse inmediatamente con la transformación isoparamétrica. Además, su matriz jacobiana ha de ser evaluada en la aplicación normal del MEF. Parece razonable suponer, por lo tanto, que las ecuaciones (al.13), (al.15), y (al.16) serían de mayor aplicación en optimización estructural mediante el Método de Elementos Finitos si los subintegrandos se expresasen íntegramente en el espacio de referencia, o isoparamétrico.

En el Anejo 2 se deducen las ecuaciones (a2.11), (a2.13), y (a2.15), análogas respectivamente a las (al.13), (al.15) y

(al.16), pero donde los subintegrandos se expresan directamente en términos de las coordenadas de referencia, y la intervención de la transformación que define la forma de los dominios de integración en función de las variables de diseño se canaliza a través de su matriz jacobiana.

La formulación presentada puede escribirse de una forma elegante, y generalizarse simultáneamente para órdenes superiores de derivación, mediante la definición de los operadores:

$$D_s^E: \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x}) \rightarrow D_s \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x}) + \text{tr}(\tilde{J}^{-1} D_s \tilde{J}) \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x}) \quad (5.36)$$

$$D_s^F: \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x}) \rightarrow D_s \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x}) + \frac{\bar{M}^T \tilde{J}^{-1} D_s \tilde{J}^{-T} \bar{M}}{\bar{M}^T \tilde{J}^{-1} \tilde{J}^{-T} \bar{M}} \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x}) \quad (5.37)$$

$$D_s^C: \Phi(\bar{\zeta}, \bar{x}) \rightarrow D_s \Phi(\bar{\zeta}, \bar{x}) + \frac{\bar{\zeta}'^T \tilde{J}^T D_s \tilde{J} \bar{\zeta}'}{\bar{\zeta}'^T \tilde{J}^T \tilde{J} \bar{\zeta}'} \Phi(\bar{\zeta}, \bar{x}) \quad (5.38)$$

Donde " $\tilde{J}$ " es la matriz jacobiana de la transformación isoparamétrica, " $\bar{M}$ " es el vector normal (no necesariamente normalizado) a la superficie " $\Gamma_\xi$ " en el espacio de referencia, y " $\bar{\zeta}'_\tau$ " es el vector tangente (no necesariamente normalizado) a la curva " $C_\xi$ " en el espacio de referencia.

En función de estos operadores, podemos escribir inmediatamente las derivadas direccionales de las funciones

(5.33), (5.34) y (5.35) en la forma:

$$D_s \int \int \int_{E(\bar{x})} \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x}) dV = \int \int \int_{E(\bar{x})} D_s^E \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x}) dV \quad (5.39)$$

$$D_s \int \int_{\Gamma(\bar{x})} \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x}) d\Omega = \int \int_{\Gamma(\bar{x})} D_s^\Gamma \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x}) d\Omega \quad (5.40)$$

$$D_s \int_{C(\bar{x})} \Phi(\bar{\zeta}, \bar{x}) dl = \int_{C(\bar{x})} D_s^C \Phi(\bar{\zeta}, \bar{x}) dl \quad (5.41)$$

En los segundos miembros de los operadores (5.36), (5.37) y (5.38) el primer término representa la aportación a la derivada de la variación de la función subintegrando, y el segundo término representa la aportación a la derivada de la variación del recinto de integración. Obsérvese que en este término, la información relativa a la modificación de la forma del recinto de integración se suministra únicamente mediante la matriz jacobiana de la transformación isoparamétrica. Además, los operadores (5.36), (5.37) y (5.38) pueden aplicarse de forma recurrente sobre sí mismos. Esta operación no implica más que el cálculo de la derivada n-ésima direccional de la función subintegrando, y del jacobiano de la transformación, ya que los restantes elementos que intervienen en la definición de los operadores no dependen de las variables de diseño.

Podemos escribir, por tanto, las ecuaciones para la derivada n-ésima en la forma compacta:

$$\begin{aligned}
 D_{s_n \dots s_1}^{(n)} \iiint_{E(\bar{x})} \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x}) dV &= \\
 &= \iiint_{E(\bar{x})} D_{s_n}^E \dots D_{s_1}^E \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x}) dV
 \end{aligned}
 \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}
 D_{s_n \dots s_1}^{(n)} \iint_{\Gamma(\bar{x})} \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x}) d\Omega &= \\
 &= \iint_{\Gamma(\bar{x})} D_{s_n}^\Gamma \dots D_{s_1}^\Gamma \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x}) d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}
 D_{s_n \dots s_1}^{(n)} \int_{C(\bar{x})} \Phi(\bar{\zeta}, \bar{x}) dl &= \\
 &= \int_{C(\bar{x})} D_{s_n}^C \dots D_{s_1}^C \Phi(\bar{\zeta}, \bar{x}) dl
 \end{aligned}
 \tag{5.44}$$

Para confirmar la utilidad de las expresiones anteriores en optimización estructural analizaremos su aplicación a la derivación de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas de elemento.

En nuestro caso se comprueba a la vista de las ecuaciones (5.8) que las funciones subintegrales a derivar adoptan la forma:

$$\Pi_k(\bar{\zeta}, \bar{x}) = \underline{B}^t(\bar{\zeta}, \bar{x}) \underline{D}(\bar{\zeta}, \bar{x}) \underline{B}(\bar{\zeta}, \bar{x})
 \tag{5.45}$$

para la evaluación de la matriz de rigidez, y

$$\begin{aligned} \Pi_f(\bar{\xi}, \bar{x}) &= \underline{\underline{B}}^t(\bar{\xi}, \bar{x}) (\underline{\underline{D}}(\bar{\xi}, \bar{x}) \underline{\underline{\epsilon}}(\bar{\xi}, \bar{x}) - \underline{\underline{\sigma}}(\bar{\xi}, \bar{x})) + \\ &+ \underline{\underline{N}}^t(\bar{\xi}) \underline{\underline{b}}(\bar{\xi}, \bar{x}) \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\Theta_f(\bar{\xi}, \bar{x}) = \underline{\underline{N}}^t(\bar{\xi}) \underline{\underline{t}}(\bar{\xi}, \bar{x}) \quad (5.47)$$

$$\Phi_f(\bar{\xi}, \bar{x}) = \underline{\underline{N}}^t(\bar{\xi}) \underline{\underline{q}}(\bar{\xi}, \bar{x}) \quad (5.48)$$

para la evaluación del vector de fuerzas nodales.

Con la notación introducida, podemos escribir las derivadas n-ésimas de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas nodales en la forma:

$$D_{s_n \dots s_1}^n \bar{e}^k = \iiint_{Ve} D_{s_n}^E \dots D_{s_1}^E \Pi_k \, dv$$

$$D_{s_n \dots s_1}^n \bar{f}^e = D_{s_n \dots s_1}^n ( \bar{f}_{Ve} + \bar{f}_e + \bar{f}_{Ce} + \bar{f}_{Pe} )$$

con:

$$D_{s_n \dots s_1}^n \bar{f}_{Ve} = \iiint_{Ve} D_{s_n}^E \dots D_{s_1}^E \Pi_f \, dv \tag{5.49}$$

$$D_{s_n \dots s_1}^n \bar{f}_e = \iint_{\Gamma_e} D_{s_n}^\Gamma \dots D_{s_1}^\Gamma \Theta_f \, d\Omega$$

$$D_{s_n \dots s_1}^n \bar{f}_{Ce} = \int_{Ce} D_{s_n}^C \dots D_{s_1}^C \Phi_f \, dl$$

Frecuentemente, no se conocerán las componentes "t" y "q" en el sistema de coordenadas globales de los vectores de fuerzas exteriores que actúan sobre superficies y líneas, sino sus componentes "t<sub>ξ</sub>" y "q<sub>ξ</sub>" según los vectores naturales de las coordenadas isoparamétricas. En este caso, las funciones (5.47) y (5.48) se escribirán en la forma:

$$\Theta_f(\bar{\xi}, \bar{x}) = \bar{N}^t(\bar{\xi}) \bar{J}(\bar{\xi}, \bar{x}) \bar{t}_\xi(\bar{\xi}, \bar{x}) \tag{5.50}$$

$$\Phi_f(\bar{\xi}, \bar{x}) = \bar{N}^t(\bar{\xi}) \bar{J}(\bar{\xi}, \bar{x}) \bar{q}_\xi(\bar{\xi}, \bar{x}) \tag{5.51}$$

siendo "J" la matriz jacobiana de la transformación isoparamétrica.

Los componentes " $\bar{b}$ " del vector de fuerzas volumétricas que intervienen en la función (5.46) pueden adoptar distintas expresiones, según se trate de fuerzas gravitatorias, centrífugas, etc. En general se conocerán sus componentes directamente en el sistema global de coordenadas y no será necesario realizar ninguna transformación.

Si en coherencia con el planteamiento general se definen los vectores " $\bar{b}$ ", " $\bar{t}$ ", " $\bar{q}$ ", " $\bar{\sigma}_0$ ", " $\bar{\epsilon}_0$ ", y las propiedades de los materiales que intervienen en el cálculo de la matriz " $\tilde{n}$ " mediante sus valores en los nodos, la obtención de su valor en cualquier punto de coordenadas isoparamétricas " $\bar{\xi}$ " puede efectuarse a través de la interpolación isoparamétrica, de forma similar a lo expuesto en (5.4).

En el caso de que existan esfuerzos de origen térmico, pueden introducirse en los cálculos a través de unas tensiones iniciales que son función sencilla de los incrementos de temperatura y las propiedades de los materiales.

La derivación direccional de orden n-ésimo de las funciones anteriores es trivial, y es preciso conocer únicamente las derivadas direccionales correspondientes de las variables de entrada, esto es: fuerzas volumétricas, de superficie y de línea, incrementos térmicos y propiedades de los materiales. Los únicos términos no evidentes son los correspondientes a las derivadas de la matriz " $\tilde{B}$ " y a las derivadas de la matriz jacobiana " $\tilde{J}$ ".

La matriz jacobiana de la transformación puede escribirse, en virtud de las ecuaciones de interpolación (5.4), como:

$$\underline{J}(\bar{\xi}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \underline{N}(\bar{\xi}) \quad \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (5.52)$$

siendo " $\bar{\mathbf{r}}$ " las coordenadas nodales en el sistema global.

Su derivada direccional n-ésima puede, por consiguiente, escribirse en la forma:

$$\underline{D} \begin{matrix} n \\ s \dots s \\ n \dots s_1 \end{matrix} \underline{J}(\bar{\xi}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \underline{N}(\bar{\xi}) \quad \underline{D} \begin{matrix} n \\ s \dots s \\ n \dots s_1 \end{matrix} \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (5.53)$$

En (5.5) se definió la matriz " $\underline{B}$ " como el resultado de aplicar el operador diferencial " $\underline{L}$ " sobre la matriz de funciones de forma " $\underline{N}$ ". Si el operador es lineal (como sucede bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones) y las coordenadas son cartesianas, los términos de la matriz son las derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas del sistema global. En otros sistemas de coordenadas (por ejemplo coordenadas cilíndricas que suelen emplearse en el análisis de sólidos con simetría de revolución) pueden aparecer otros términos igualmente sencillos en función de las coordenadas globales y de las funciones de forma.

Por tanto, normalmente los términos de la matriz " $\underline{B}$ " se obtendrán directamente a partir de los términos de:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{r}}} \underline{N}(\bar{\xi}) = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \underline{N} \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{\mathbf{r}}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \underline{N} \quad \underline{J}^{-1}(\bar{\xi}, \bar{\mathbf{x}}) \quad (5.54)$$

Para evaluar la derivada  $n$ -ésima de la matriz " $B$ " será necesario en consecuencia calcular la derivada  $n$ -ésima de la inversa de la matriz jacobiana. La derivada de la inversa de una matriz puede escribirse en función de la derivada y de la inversa de la matriz, como se demuestra en el Párrafo A2.2.1. del Anejo 2, fórmula cuya extensión a órdenes superiores de derivación es inmediata.

Concluimos que la derivación direccional de las funciones (5.45), (5.46), (5.47) y (5.48) puede realizarse sin dificultad, y la de aquellos términos que envuelven una mayor complejidad se realiza a partir de la derivada direccional de la matriz jacobiana dada en (5.52), derivada que en cualquier caso es preciso realizar puesto que interviene en la definición de los operadores (5.36), (5.37) y (5.38).

Se comprueba, por consiguiente, que la variación de la forma de los dominios de integración (en nuestro caso los elementos finitos, sus contornos y sus aristas), interviene en las ecuaciones de derivación direccional de orden  $n$ -ésimo de los términos de las ecuaciones de estado (5.49) a través de las derivadas direccionales de orden  $n$ -ésimo e inferiores de la matriz jacobiana (5.52), cuya obtención es inmediata en función de las derivadas direccionales de las coordenadas nodales (5.53).

Las técnicas presentadas son independientes de las funciones de forma, y las cuadraturas de integración. Pueden extenderse igualmente a otro tipo de elementos no necesariamente isoparamétricos sin dificultad.

En la integración de las ecuaciones (5.49) pueden utilizarse otras cuadraturas de integración diferentes a las empleadas en la integración de las ecuaciones (5.8). No obstante, es conveniente emplear las mismas cuadraturas por dos razones:

- si las cuadraturas de integración utilizadas para las ecuaciones (5.8) no integran exactamente las funciones subintegrales correspondientes, no se obtendrán exactamente los términos de las ecuaciones de estado, sino unas aproximaciones a los mismos. El modelo numérico aplicado no será exacto, en el sentido de que en la obtención de sus propios términos se introduce conscientemente un error de truncamiento adicional debido a la falta de exactitud en las operaciones de integración. Por lo tanto, si se emplean las mismas cuadraturas para las ecuaciones (5.49), el análisis de sensibilidad tampoco será exacto, en el mismo sentido, pero si lo será desde el punto de vista del modelo numérico aproximado que en realidad se aplica.
- Puesto que la obtención de las derivadas requiere la evaluación de las matrices jacobianas y otros términos en los puntos de integración, y éstos han de ser calculados en cualquier caso para el ensamblaje del sistema de ecuaciones, la utilización de las mismas cuadraturas permite efectuar un ahorro considerable en las operaciones numéricas que es preciso realizar en la derivación.

Otros autores han publicado recientemente fórmulas para la derivación de primer orden de los términos de las ecuaciones de

estado [Sussman y Bathe 1985, Wang, Sun y Gallagher 1985]. Sus resultados coinciden con la particularización de las ecuaciones (5.49) -que aquí hemos presentado con carácter general y a partir de las ecuaciones (5.42), (5.43) y (5.44)- para el primer orden de derivación y en las direcciones de las variables de diseño.

Las técnicas de derivación presentadas no implican un volumen de cálculo mayor que en el caso de la aproximación por diferencias finitas, ya que es posible aprovechar la mayor parte de los cálculos realizados en la obtención por integración de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas nodales (5.8), en la realización del análisis de sensibilidad mediante las ecuaciones (5.49).

En el Anejo 3 se exponen de forma abreviada las bases del cálculo por elementos finitos de problemas enmarcados en los siguientes tipos de análisis:

- tensión plana
- deformación plana
- simetría de revolución
- elasticidad tridimensional

que se consideran suficientemente significativos, y para los cuales se ha desarrollado completamente el análisis de sensibilidad hasta el segundo orden que se ha implementado en el sistema DAO<sup>2</sup>, descrito en el Capítulo siguiente; con este sistema se han realizado los ejemplos presentados en este estudio.

#### V.3.2.2.7 Aspectos prácticos de los cálculos de derivación

Mediante las ecuaciones (5.49) y realizando a nivel de elemento las operaciones matriciales involucradas en (5.18), puede realizarse el análisis de sensibilidad completo, esto es calculando el gradiente de todas las variables de estado respecto a las variables de diseño, con un coste operativo razonable y con gran exactitud, ya que parte de los cálculos que es preciso realizar en (5.49) para las derivadas primeras pueden realizarse simultáneamente a los cálculos (5.8), ahorrando operaciones sustancialmente.

En general, el coste que supone la obtención de todas las derivadas segundas es inaceptable, principalmente en términos de almacenamiento de memoria, ya que para cada variable de estado es preciso evaluar " $n^2$ " derivadas segundas, siendo " $n$ " el número de variables de diseño. Sin embargo, el coste de la obtención de las derivadas segundas a lo largo de una determinada dirección de modificación del diseño, esto es la derivada segunda direccional, no es elevado. Al analizar el módulo de optimización se pondrá de manifiesto plenamente la necesidad que justifica su obtención.

Desde un punto de vista operativo es posible reorganizar los cálculos de derivación de forma eficiente. En efecto, las variables de entrada al módulo de cálculo cuyas derivadas intervienen en el análisis de sensibilidad pueden ser clasificadas en tres grupos:

- . propiedades de materiales y dimensiones.
- . valores de las cargas exteriores.

. coordenadas nodales.

Como se ha expuesto anteriormente, las variables de entrada cuyo tratamiento es más complejo, en lo que respecta al análisis de sensibilidad, son las coordenadas nodales. Si sus derivadas direccionales son nulas, sin embargo, no es preciso realizar la mayor parte de las operaciones involucradas en (5.49), ya que las variables de diseño no afectan a la forma de los recintos de integración, y los operadores (5.42), (5.43), (5.44) se reducen a la derivada direccional habitual, siendo además nulos los términos en los que interviene la matriz "B".

Por estos motivos, los cálculos pueden organizarse de forma que solo se realicen las operaciones pertinentes, según las variables de diseño afecten a las tres clases de variables de entrada mencionadas.

Así, es posible organizar los cálculos para la derivada primera direccional en la forma:

$$D_{s \bar{e}} K = [ D_{s \bar{e}} K ]^m + [ D_{s \bar{e}} K ]^f \quad (5.55)$$

$$D_{s \bar{V}_e} \bar{f} = [ D_{s \bar{V}_e} \bar{f} ]^m + [ D_{s \bar{V}_e} \bar{f} ]^f + [ D_{s \bar{V}_e} \bar{f} ]^c \quad (5.56)$$

$$D_{s \bar{\Gamma}_e} \bar{f} = [ D_{s \bar{\Gamma}_e} \bar{f} ]^f + [ D_{s \bar{\Gamma}_e} \bar{f} ]^c \quad (5.57)$$

$$D_{s\ Ce} \bar{f} = [ D_{s\ Ce} \bar{f} ]^f + [ D_{s\ Ce} \bar{f} ]^c \quad (5.58)$$

$$D_{s\ Pe} \bar{f} = [ D_{s\ Pe} \bar{f} ]^c \quad (5.59)$$

donde se calculan independientemente los términos de cada derivada debidos a la dependencia de las propiedades de materiales y dimensiones con las variables de diseño (super-índice "m"), de las coordenadas nodales con las variables de diseño (super-índice "f"), y de los valores de las cargas exteriores con las variables de diseño (super-índice "c"), en la dirección "s" de modificación del diseño.

Obsérvese que los términos correspondientes al primer tipo de dependencia se calculan a partir de las derivadas direccionales de propiedades y dimensiones, los términos correspondientes al segundo tipo se calculan a partir de las derivadas direccionales de las coordenadas nodales, y los términos correspondientes al tercer tipo se calculan a partir de las derivadas direccionales de las cargas exteriores.

Al requerir la realización del análisis de sensibilidad, el módulo de control puede indicar los tipos de dependencia de las variables de entrada y suministrar las correspondientes derivadas direccionales al módulo de cálculo, que de esta forma solo realizará las operaciones estrictamente necesarias.

Análogamente, es posible organizar los calculos para la derivada segunda direccional en la forma:

$$\begin{aligned}
D^2_{s s \tilde{e}} K = & [ D^2_{s s \tilde{e}} K ]^{m m} + [ D^2_{s s \tilde{e}} K ]^{m f} \\
& + [ D^2_{s s \tilde{e}} K ]^{f m} + [ D^2_{s s \tilde{e}} K ]^{f f}
\end{aligned}
\tag{5.60}$$

$$\begin{aligned}
D^2_{s s \tilde{V}e} \bar{f} = & [ D^2_{s s \tilde{V}e} \bar{f} ]^{m f} + [ D^2_{s s \tilde{V}e} \bar{f} ]^{f m} + \\
& + [ D^2_{s s \tilde{V}e} \bar{f} ]^{m c} + [ D^2_{s s \tilde{V}e} \bar{f} ]^{c m} + \\
& + [ D^2_{s s \tilde{V}e} \bar{f} ]^{f c} + [ D^2_{s s \tilde{V}e} \bar{f} ]^{c f} + \\
& + [ D^2_{s s \tilde{V}e} \bar{f} ]^{m m} + \\
& + [ D^2_{s s \tilde{V}e} \bar{f} ]^{f f} + \\
& + [ D^2_{s s \tilde{V}e} \bar{f} ]^{c c}
\end{aligned}
\tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}
D^2_{s s \Gamma e} \bar{f} = & [ D^2_{s s \Gamma e} \bar{f} ]^{f c} + [ D^2_{s s \Gamma e} \bar{f} ]^{c f} + \\
& + [ D^2_{s s \Gamma e} \bar{f} ]^{f f} + [ D^2_{s s \Gamma e} \bar{f} ]^{c c}
\end{aligned}
\tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}
D^2_{s s \text{Ce}} \bar{f} = & [ D^2_{s s \text{Ce}} \bar{f} ]^{f c} + [ D^2_{s s \text{Ce}} \bar{f} ]^{c f} + \\
& + [ D^2_{s s \text{Ce}} \bar{f} ]^{f f} + [ D^2_{s s \text{Ce}} \bar{f} ]^{c c}
\end{aligned}
\tag{5.63}$$

$$D_{s_2 s_1}^2 \bar{f}_{Pe} = [ D_{s_2 s_1}^2 \bar{f}_{Pe} ]^{c c} \quad (5.64)$$

donde se calculan independientemente los términos de cada derivada debidos a la dependencia de cada pareja de tipos de variables de entrada con las variables de diseño, en las direcciones " $\bar{s}_2$ ", y " $\bar{s}_1$ ", y los super-índices "m", "f", "c" correspondientes a cada dirección indican el tipo de dependencia.

Análogamente a lo que sucede con la derivada primera, al requerir la realización del análisis de sensibilidad de segundo orden, el módulo de control puede indicar los tipos de dependencia de las variables de entrada y suministrar las correspondientes derivadas direccionales al módulo de cálculo, que de esta forma solo realizará las operaciones estrictamente necesarias.

#### V.3.2.2.8 Recapitulación

La introducción de las técnicas de derivación generalizadas presentadas en los apartados precedentes supone un notable avance en el ámbito de la optimización estructural, ya que:

- Permite realizar una unificación de la optimización de dimensiones y la optimización de formas, tanto a nivel conceptual como operativo, a través de un enfoque global.
- El cálculo de las derivadas de las tensiones y los desplazamientos se realiza de esta forma con gran eficacia y exactitud, dotando al módulo de decisión de información

completa y veraz.

- La derivación de las matrices de rigidez y de los vectores de fuerzas nodales es tanto menos costosa cuanto más local es el modelo de optimización, entendiendo el término local en el sentido de que cada variable de diseño afecte solamente a un grupo de elementos del modelo numérico de elementos finitos. Este hecho debe tenerse muy en cuenta en la elaboración del módulo de parametrización, ya que si el modelo de optimización es local, en el cálculo de la derivada de la matriz de rigidez o del vector de fuerzas respecto a una determinada variable intervendrán únicamente una parte de los elementos del modelo numérico completo, y por tanto el número de operaciones a realizar es mucho menor. Por tanto, si el modelo de optimización ha sido diseñado adecuadamente, el análisis de sensibilidad puede realizarse de forma muy eficiente y obteniendo información de gran calidad.
  
- La obtención de derivadas primeras puede realizarse a bajo coste una vez resuelto el problema mediante el Método de Elementos Finitos, reciclando gran parte de los cálculos efectuados con anterioridad. Igualmente, en la obtención de derivadas de orden superior pueden aprovecharse ventajosamente los cálculos previos. El esquema de cálculo es tal que permite construir procedimientos que complementen a programas de cálculo ya existentes, de forma que el conjunto pueda ser implementable directamente como módulo de cálculo de un sistema de diseño óptimo. En general, si el programa de cálculo está suficientemente bien estructurado, el número de modificaciones que es necesario realizar es

mínimo.

La extensión de las técnicas de derivación anteriores al análisis de sensibilidad en problemas no lineales, es en principio realizable a partir de los planteamientos generales expuestos en el Capítulo IV, y las fórmulas de derivación recogidas en el Anejo 2.

Evidentemente la formulación del problema no lineal y su grado de complejidad, determinarán la forma final de las ecuaciones de derivación y de análisis de sensibilidad.

Es importante resaltar, no obstante, que no se han publicado recientemente más que un número reducido de artículos al respecto en optimización de dimensiones [Ryu, Haririan, Wu y Arora 1985], y en lo que alcanzamos a conocer, ninguno en optimización de formas.

#### V.4 MODULO DE DEFINICION DE OBJETIVO Y RESTRICCIONES

La definición del objetivo de diseño y la formulación de las restricciones impuestas al mismo ha de ser coherente con las posibilidades de los módulos de parametrización y cálculo.

Tanto la función objetivo como las restricciones se impondrán sobre el conjunto de variables de control (4.1), que a su vez se expresarán en función de las propiedades fundamentales y ambientales, y variables de estado (incluyendo en este grupo las propiedades derivadas) mediante la interface de definición (4.16).

Por la naturaleza de los problemas de optimización estructural, podemos clasificar las restricciones en los siguientes grupos:

- restricciones sobre las variables de diseño.
- restricciones geométricas.
- restricciones sobre el estado deformacional.
- restricciones sobre el estado tensional.
- restricciones sobre las condiciones de vinculación.

Las restricciones directas sobre variables de diseño se expresarán normalmente como restricciones laterales, cuyo tratamiento es sencillo según se expuso en el Capítulo III.

Las restricciones geométricas se expresarán sobre variables cuya dependencia con las variables de diseño será sencilla en

general, y vendrá determinada por el módulo de parametrización.

Las restricciones sobre el estado deformacional se expresarán comúnmente sobre los desplazamientos de distintos puntos de la estructura.

Las restricciones sobre el estado tensional se expresarán normalmente sobre el tensor de tensiones o sus invariantes. Es normal expresar las restricciones sobre las tensiones principales, tensiones en una determinada dirección o tensiones de comparación (Tresca, Von Mises, etc.) correspondientes a distintos criterios de rotura. Las tensiones principales y tensiones de comparación pueden escribirse mediante ecuaciones sencillas y explícitas en función de las componentes del tensor de tensiones. Es importante considerar que el cálculo por elementos finitos ofrece buenas aproximaciones a las tensiones en los puntos de integración de una cuadratura de Gauss. Sin embargo, las tensiones en los puntos nodales son discontinuas y pueden estar afectadas de un gran error. Si es necesario conocer el valor de las tensiones en los puntos nodales será necesario extrapolar su valor a partir del de las tensiones en los puntos de Gauss, operación que se suele denominar "suavizado" (o "smoothing" en la bibliografía anglosajona). La introducción de un suavizado puede provocar problemas adicionales en el análisis de sensibilidad, ya que será preciso obtener también las derivadas direccionales de las tensiones suavizadas a partir de las derivadas direccionales de las tensiones en los puntos de Gauss.

Las restricciones sobre las condiciones de vinculación se

impondrán normalmente sobre las reacciones en los nodos coaccionados.

En problemas dinámicos pueden imponerse restricciones sobre las frecuencias de vibración, etc., aspectos que no han sido considerados en este estudio por hallarse fuera de sus objetivos iniciales, y cuyo análisis de sensibilidad genera una problemática particular [Sadek 1984].

Cabe la posibilidad de emplear diferentes funciones objetivo en optimización estructural. Un criterio ampliamente difundido, que hemos empleado en el desarrollo de todos los ejemplos presentados en este estudio, es el de MINIMO PESO o VOLUMEN. En diversos estudios han sido probados, aunque con menor extensión, diferentes criterios tales como minimizar el valor máximo que alcanza una tensión de comparación (Von Mises, etc.) en todos los puntos de la estructura, y otros, que en general implican la reducción de las concentraciones de tensión en secciones fuertemente solicitadas de las estructuras. Una somera descripción de los mismos y referencias acerca de su utilización puede hallarse en Ding [1986].

El criterio de mínimo peso puede generalizarse fácilmente obteniendo un criterio de mínimo coste, si se evalúa éste atendiendo exclusivamente a los volúmenes utilizados de los materiales de que se compone la estructura y a sus precios unitarios. Nos referiremos en lo sucesivo a estos criterios como de mínimo peso, puesto que basta sustituir la densidad de cada material por su precio unitario (por unidad de volumen) para pasar de peso a coste y viceversa.

Las variables de control estructural que consideraremos en lo sucesivo serán:

- funciones sencillas de las variables de diseño.
- funciones sencillas de los desplazamientos nodales.
- funciones sencillas de las tensiones evaluadas en los puntos de integración de Gauss.
- funciones sencillas de las reacciones en los nodos coaccionados.
- el volumen, peso o coste de materiales, de parte de la estructura o de su conjunto.

El módulo de definición debe evaluar estas funciones y sus derivadas direccionales. La interface de definición debe obtener, a partir de los resultados proporcionados por el módulo de cálculo, las variables de control y sus derivadas direccionales.

Es importante considerar que en un análisis por elementos finitos podemos evaluar el peso estructural en la forma:

$$W = \iiint_V \mu \, dV = \sum_e \iiint_{V_e} \mu \, dV \quad (5.65)$$

siendo " $\mu$ " el peso específico del material, y " $W$ " el peso estructural, y por tanto en gran parte de los casos la función objetivo.

Para un peso específico igual a la unidad, la ecuación (5.65) proporcionará el volumen estructural, y si el peso

especifico se sustituye por el coste unitario por unidad de volumen de cada material se obtendrá el coste material de la estructura.

Las integraciones en cada elemento de (5.65) pueden realizarse de forma análoga a las de las ecuaciones (5.8) mediante las mismas cuadraturas numéricas. Su derivación direccional de orden n-ésimo puede realizarse por aplicación directa de la ecuación (5.42). De hecho, si el peso específico es constante dentro de cada elemento, puede evaluarse el peso estructural y sus derivadas a partir de los subproductos del cálculo y derivación de la matriz de rigidez.

Las restricciones que podremos considerar limitarán los valores máximos de las tensiones principales en tracción y compresión, los desplazamientos máximos, las reacciones y las dimensiones geométricas de la estructura. Las restricciones en tensiones, desplazamientos y reacciones pueden imponerse sobre uno o varios estados de carga. En el cuarto ejemplo (Cap. VII), imponemos restricciones no sólo en varios estados de carga, sino en cálculos efectuados con diferentes teorías. La optimización estructural multi-carga es perfectamente factible, y el único inconveniente que presenta es el aumento de los tiempos de cálculo y de la cantidad de almacenamiento necesario en memoria, además del crecimiento del número de restricciones del problema de programación matemática.

En general, las restricciones que tiene sentido imponer en optimización estructural son restricciones en desigualdad. Como ya se ha expuesto en el Capítulo III, las restricciones de

igualdad pueden tratarse de forma más sencilla que las restricciones en desigualdad, y en cualquier caso pueden transformarse en restricciones en desigualdad. En lo sucesivo consideraremos que todas las restricciones son laterales o en desigualdad.

Es esencial considerar que la función objetivo y las restricciones impuestas condicionan la solución del problema de diseño. Por tanto han de ser formuladas cuidadosamente y contemplando todos los aspectos de interés, para que el diseño final obtenido sea realizable.

El planteamiento inadecuado de la función objetivo y las restricciones dará lugar normalmente a uno de los tipos siguientes de malfunción:

- . El problema de optimización estructural está mal planteado y carece de sentido físico. Sin embargo el problema subyacente de programación matemática tiene sentido como tal. Su solución da lugar al ser suministrada al modelo de parametrización a un diseño de características absurdas.
- . El problema de optimización estructural está insuficientemente condicionado. El problema subyacente de programación matemática no tiene solución para valores finitos de las variables de diseño, ya que la región factible es ilimitada y la función objetivo es decreciente hasta el infinito.
- . El problema de optimización está excesivamente condicionado. No existe la región factible, y el problema subyacente de

programación matemática carece de solución.

Los valores de la función objetivo, las restricciones y sus derivadas han de ser proporcionados al módulo de control, que los suministrará al módulo de decisión.

## V.5 MÓDULO DE PARAMETRIZACIÓN

La creación de módulos de parametrización capaces de generar modelos de optimización para cualquier tipología dentro del ámbito del análisis estructural es hoy por hoy algo inabordable. Frente a esta dificultad caben diversas opciones razonables, que podríamos esquematizar en tres grupos, a saber:

- Módulos de parametrización específicos para cada problema particular de diseño que haya de ser resuelto, en función del módulo de cálculo de que se disponga.
- Módulos de parametrización específicos para ciertas familias de problemas (por ejemplo: estructuras de barras articuladas, estructuras reticuladas, piezas planas calculadas mediante programas de elementos finitos para tensión o deformación plana, piezas con simetría de revolución, tableros de puentes en viga cajón, etc.)
- Módulos de parametrización que permitan definir el modelo de optimización interactivamente aplicando técnicas de CAD, empleando para ello terminales gráficas y digitalizadores, haciendo uso de metodologías de modelado de curvas, superficies y sólidos (curvas de Bezier, B-Splines, etc.) [Esping 1985].

La primera opción es indudablemente la más sencilla, si bien la necesidad de generar manualmente un modelo para cada objeto de diseño restringe la aplicabilidad de esta técnica. El costo de generación manual de un modelo eficiente puede ser muy elevado, y por ello esta opción debe ser desestimada si no es en

el caso del diseño de piezas que se fabricarán en número muy elevado -en las que el costo de generación del modelo se diluya- o en el caso de estructuras de importancia singular y coste muy alto -en las que la generación del modelo influya de forma despreciable-.

La segunda opción puede ser en principio, y habida cuenta del estado actual de la investigación en estos momentos, la más rentable a corto plazo y la que permita resultados más generales, sin renunciar a recurrir a la primera opción cuando el número de unidades de la pieza a fabricar o su elevado coste lo hagan aconsejable. En conjunción con técnicas de CAD, como se apunta en la última opción, pueden dar lugar a sistemas de diseño óptimo de gran potencia y considerable capacidad de tratamiento de problemas de diversa índole, no solo estructural sino también en otras ramas de la ingeniería en que la formulación de los problemas de cálculo adopte expresiones y metodologías similares.

La tercera opción debe considerarse preferentemente, como ya se ha apuntado, como un complemento a las demás, principalmente en lo que concierne a la interacción del sistema de diseño con el usuario, factor éste que permite introducir en el proceso elementos de gran importancia y difícil automatización, como son la intuición y la experiencia del diseñador.

En cualquier caso, es de suma importancia generar modelos de optimización con el número mínimo de variables posible, que se comporten de forma eficiente y permitan determinar, a través de la interface de cálculo, para un valor dado de las variables de

diseño, todos aquellos elementos que requiera el módulo de cálculo y la definición final y completa del diseño a través del módulo de postproceso.

En optimización estructural mediante módulos de cálculo basados en el Método de Elementos Finitos, la interface de cálculo debe suministrar al módulo de cálculo la topología o conectividad de la malla, y las siguientes variables de entrada:

- . Coordenadas nodales.
- . Propiedades de materiales y dimensiones que no afecten a las coordenadas nodales (espesores, etc.).
- . Cargas.
- . Condiciones de vinculación.

La interface debe ser capaz de suministrar las derivadas direccionales sucesivas de las variables de entrada mencionadas para direcciones arbitrarias de modificación del diseño.

Para suministrar tal información, la interface de cálculo debe disponer, entre otras herramientas, de un generador automático de malla. El generador ha de ser construido de forma que permita calcular no solo las coordenadas nodales, sino también sus derivadas respecto a direcciones en el espacio de variables de diseño. Es importante tener en cuenta que la malla de cálculo debe ser coherente y adecuada al modificar las variables de diseño, puesto que en caso contrario se corre el riesgo de malcondicionar todos los cálculos. Referencias actuales sobre generadores automáticos de malla para sistemas de

Diseño Asistido por Ordenador pueden encontrarse en Cavendish, Field y Frey [1985].

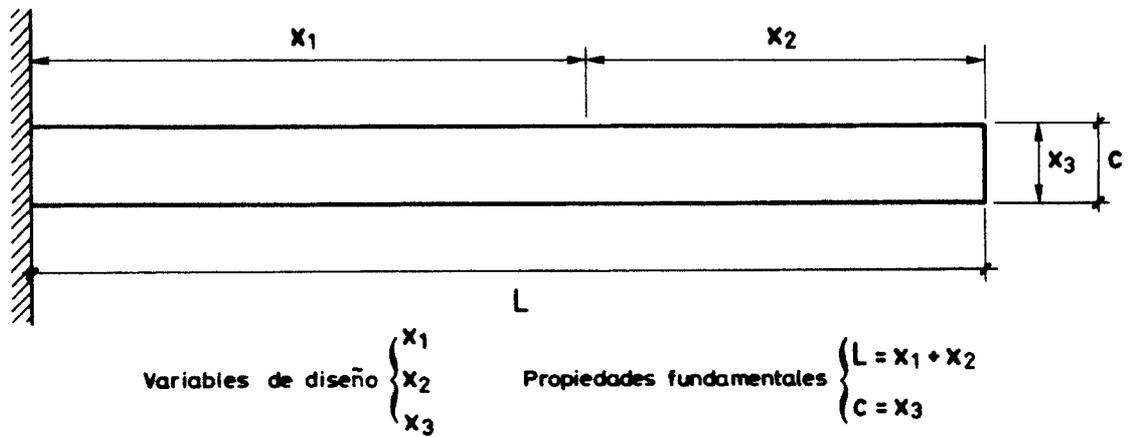
La adopción de un modelo de diseño inadecuado puede dar lugar a diversas malfunciones. Entre las más significativas podemos considerar las siguientes:

- . Si las dependencias de las propiedades fundamentales y ambientales con las "n" variables de diseño pueden expresarse en función de un conjunto de "m" relaciones independientes entre las variables de diseño ("m" menor que "n"), las variables de comportamiento estructural, y consiguientemente todas las variables de control, podrán expresarse en función de las "m" relaciones. La solución del problema de programación matemática, si existe, no será única, sino que existirán en general "n-m" grados de libertad en la elección de las variables de diseño para el valor de las variables de control que minimiza la función objetivo verificando las restricciones impuestas. El problema de optimización estructural puede estar bien planteado y el diseño óptimo bien definido, pero no unívocamente en función de las variables de diseño. Por tanto, el algoritmo de programación matemática no podrá discriminar cual es el valor óptimo de las variables de diseño. Los efectos de una parametrización inadecuada en este sentido sobre el funcionamiento del módulo de decisión dependen de sus características, de su implementación y de su capacidad para reconocer situaciones anómalas y serán en general imprevisibles debido a las perturbaciones introducidas por los errores de redondeo. Se traducirán normalmente en oscilaciones en el valor de las

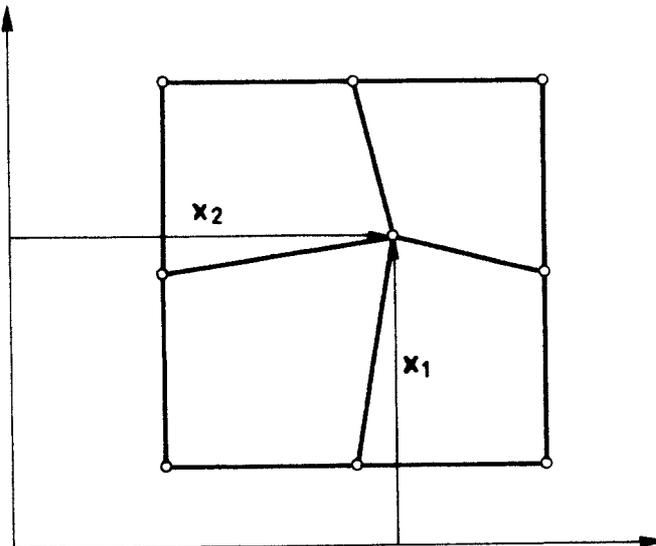
variables de diseño en sucesivas iteraciones, y en malcondicionamientos de los cálculos.

En la Figura 5.1-a se expone un ejemplo sencillo donde se manifiesta este tipo de error en la parametrización.

- . Una situación similar a la descrita anteriormente puede producirse cuando se expresan las variables de entrada al módulo de cálculo directamente en función de las variables de diseño, obviándose las propiedades fundamentales y ambientales en la formulación. Puede suceder que si bien las variables de entrada estén bien definidas en función de las variables de diseño, se produzca en las propiedades fundamentales y ambientales -que se han obviado, pero no por ello dejan de existir- el efecto descrito en el punto anterior. Por consiguiente, si el módulo de cálculo no estuviese afectado de ningún error se producirían los efectos ya mencionados. Además, el módulo de cálculo estará afectado de errores de diversa naturaleza. En nuestro caso, por ejemplo, los cálculos efectuados sobre discretizaciones diferentes de un mismo objeto darán resultados distintos, y la toma de decisiones puede verse perturbada por este motivo. En la Figura 5.1-b se expone un ejemplo sencillo que ilustra este efecto. Las coordenadas nodales del nodo central de la malla representada en la Figura son variables de diseño. El cálculo de la estructura debería arrojar los mismos resultados independientemente de la posición de este nodo. Ello no sucederá así debido a errores de cálculo, y la información que recibirá el módulo de decisión le conducirá a modificar las variables de diseño que determinan su posición



a)



Variables de diseño  $\begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$

b)

**Figura 5.1.- Modelos de parametrización incorrectos.**

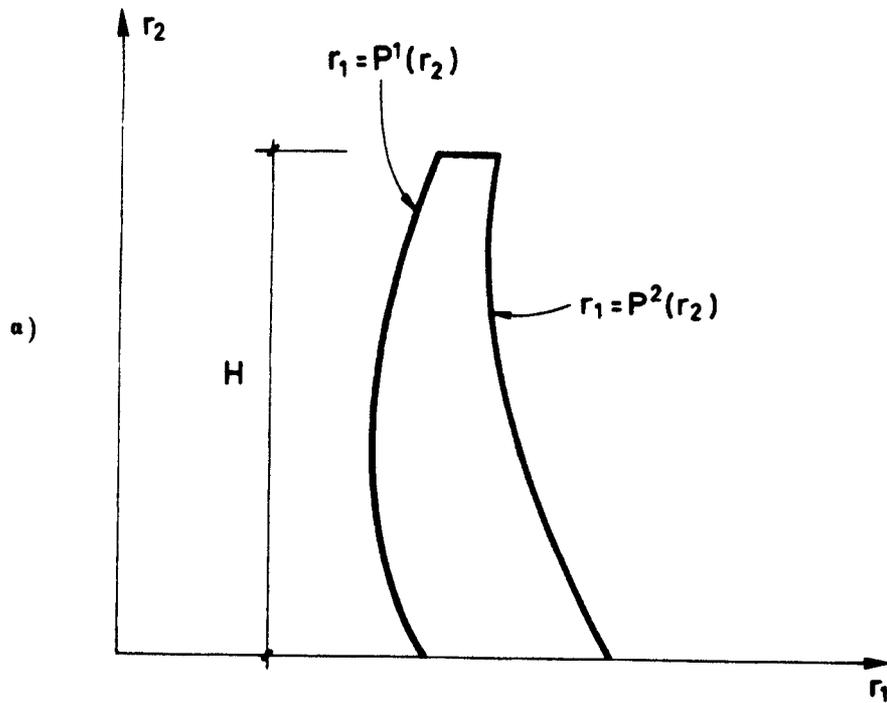
a) Caso en que la relación entre las propiedades (fundamentales y ambientales) y las variables de diseño no es unívoca.

b) Caso en que las variables de diseño (coordenadas de un nodo interior de una malla de elementos finitos) no afectan al comportamiento real del objeto diseñado (una pieza cuadrada sometida a ciertas acciones), pero sí, a causa de las inexactitudes del modelo de análisis, al comportamiento estimado en los cálculos.

de forma impredecible.

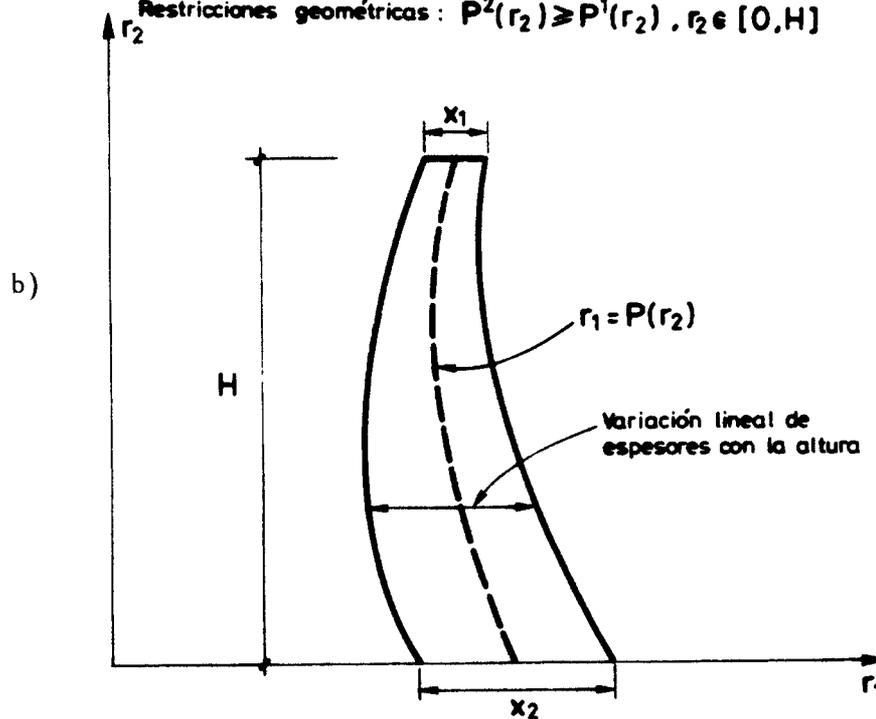
De alguna forma, la parametrización condiciona parte de la definición de objetivos. En efecto, para asegurar la coherencia de los resultados puede ser necesario introducir restricciones directamente sobre las variables de diseño. Si la parametrización no es adecuada, la imposición de tales restricciones puede ser compleja. En la Figura 5.2 se ilustra este efecto. Se pretende modelar la forma de la sección de una presa. Si se modelan los paramentos de la presa mediante dos polinomios y se adoptan como variables de diseño sus coeficientes, es preciso imponer condiciones adicionales que eviten que las curvas se crucen, lo cual carece de sentido físico (Figura 5.2-a). La manipulación de tales restricciones no es trivial, ya que son de tipo polinómico. Por contra, si se modela la línea media mediante un polinomio, se impone una variación lineal de espesores con la altura, y se adoptan como variables de diseño los coeficientes del polinomio y los espesores de la pared en coronación y en la base, para evitar que ambos paramentos se crucen bastará imponer una condición de no negatividad sobre estos espesores, restricciones cuya manipulación es muy sencilla ya que son de tipo lateral (Figura 5.2-b).

Como se ha expuesto en V.3.2.2.7 los cálculos de sensibilidad pueden organizarse de forma que se evalúen separadamente las aportaciones a las derivadas debidas a la dependencia de las propiedades de materiales y dimensiones, coordenadas nodales y valores de las cargas con las variables de diseño. Además las operaciones matriciales que es preciso



Variables de diseño : coeficientes de los polinomios  $P^1$  y  $P^2$

Restricciones geométricas :  $P^2(r_2) \geq P^1(r_2)$  ,  $r_2 \in [0, H]$



Variables de diseño  $\{x_1, x_2$   
coeficientes del polinomio  $P$

Restricciones geométricas  $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

**Figura 5.2.- Dependencia parcial de la definición de objetivos con la definición del modelo de parametrización.**

a)Ejemplo de modelo de parametrización que exige la imposición de restricciones geométricas adicionales cuyo tratamiento no es trivial.

b)Ejemplo de modelo de parametrización que exige la imposición de restricciones geométricas adicionales de tipo lateral, cuyo tratamiento es trivial.

realizar pueden efectuarse a nivel de elementos, sin necesidad de ensamblar las derivadas de los vectores de fuerzas y de las matrices de rigidez.

Si la interface de cálculo puede discriminar qué elementos no están afectados por una modificación del diseño en una cierta dirección, parte de las operaciones matriciales pueden obviarse ya que las derivadas direccionales de los vectores de fuerzas y de la matriz de rigidez de estos elementos serán nulas. Si la interface es capaz de discriminar qué variables de entrada correspondientes al elemento están afectadas por la modificación (propiedades y dimensiones, forma o cargas), sólo es necesario efectuar parte de las operaciones de derivación.

Diremos que un modelo de diseño-parametrización es tanto más LOCAL, cuánto más reducida sea la parte de la estructura a la que afecta cada variable de diseño. Diremos que un modelo es tanto más GLOBAL cuánto más amplia sea la parte de la estructura a la que afecta cada variable de diseño.

Un modelo local tiene la evidente ventaja de que al evaluar las derivadas de todas las variables de estado respecto a todas las variables de diseño, será preciso realizar un número reducido de operaciones de derivación para cada variable de diseño. Pueden realizarse, por tanto, modelos locales con un número elevado de variables de diseño y con el volumen de cálculo necesario para efectuar el análisis de sensibilidad admisible.

En cambio, en un modelo global será necesario efectuar más operaciones de derivación, y si el número de variables de diseño es muy elevado su coste operativo puede ser inadmisibile.

Sin embargo, si el modelo es excesivamente local pueden generarse efectos anómalos debidos fundamentalmente a la propia naturaleza local del modelo, que se manifiestan en oscilaciones de las variables de diseño en sucesivas iteraciones, obtención de diseños inadmisibles, etc.

Un ejemplo de modelo extremadamente local se encuentra en aquellos problemas de optimización estructural en que se utilizan como variables de diseño las coordenadas nodales o las propiedades y dimensiones de cada elemento, independientemente de los demás. La aplicación de este tipo de modelos, relativamente extendida, es sencilla de plantear. Sin embargo adolece de graves defectos, entre los que podemos citar los siguientes:

- el numero de variables de diseño es normalmente muy elevado. Ello dificulta la resolución del problema de minimización con restricciones.
- en las soluciones obtenidas suelen aparecer cambios bruscos en las propiedades y dimensiones entre elementos contiguos, y formas accidentadas en sus contornos. Para evitar estos efectos es preciso introducir restricciones directamente sobre las variables de diseño que aseguren la "suavidad" de la solución.
- se presentan frecuentemente malfunciones como las descritas previamente, especialmente las similares a la ilustrada en la Figura 5.1-b.

Entre modelos excesivamente locales con muchas variables de diseño y modelos excesivamente globales con muy pocas variables

de diseño debe hallarse un equilibrio que permita obtener soluciones de forma eficiente y con costes operativos razonables.

En este estudio hemos desarrollado módulos de parametrización independientes para cada uno de los ejemplos realizados, ya que nuestro objetivo ha sido intentar demostrar la eficacia de los planteamientos presentados en su aplicación a distintos problemas de optimización estructural, con distintas tipologías y teorías de cálculo. Los modelos aplicados en los ejemplos son fundamentalmente de tipo global con un número reducido de variables de diseño, ya que así lo hemos estimado oportuno dada la naturaleza de los problemas planteados.

La generación automática de malla se ha realizado aplicando ideas muy elementales, pero extendidas y ampliamente utilizadas en muchos generadores, y que podemos resumir en los siguientes puntos:

- . La estructura se divide en bloques topológicamente sencillos (equivalentes a cuadrados en problemas planos, y cubos en problemas tridimensionales).
- . Se definen en cada bloque unas coordenadas normalizadas entre -1 y 1 en unas coordenadas curvilíneas locales.
- . Se plantea la transformación de un punto de coordenadas locales dadas en coordenadas globales, para cada elección de las variables de diseño que afectan a cada bloque.
- . Se divide cada bloque en elementos finitos del tipo empleado en el cálculo, según las direcciones de las coordenadas curvilíneas, y en tantas divisiones como se indique en cada

dirección.

El procedimiento descrito puede aplicarse con cierta generalidad a problemas en que las formas de las estructuras son topológicamente sencillas.

## V.6 MODULO DE DECISION

### V.6.1 Puntos previos

Los planteamientos descritos conducen a la necesidad de realizar una toma de decisiones inteligente que sea capaz de generar un diseño lo suficientemente cercano al óptimo con el menor coste operativo posible.

Como ha sido expuesto, la toma de decisiones puede plantearse en general como la minimización de una función objetivo con restricciones expresadas mediante un conjunto de ecuaciones e inecuaciones (4.19). En problemas de optimización estructural es habitual que la mayor parte de las restricciones, si no todas, se expresen mediante inecuaciones, y en cualquier caso el problema siempre puede reducirse a la forma estándar (3.1).

Supondremos en lo sucesivo que el problema puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } & f(\bar{x}) & ; \bar{x} = \{x_i\} & ; i = 1, \dots, n \\ \text{verificando: } & g_j(\bar{x}) \leq 0 & & ; j = 1, \dots, m \\ & a_i \leq x_i \leq b_i & & ; i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{5.66}$$

en la que separamos explícitamente las restricciones laterales de las restantes restricciones en desigualdad.

Es esencial remarcar que en nuestro caso, la evaluación de la función objetivo y las restricciones en un punto " $\bar{x}$ ", exigirá

la realización de un cálculo por el Método de Elementos Finitos, y supondrá de por sí un elevado coste computacional. Igualmente la evaluación de las derivadas de estas funciones exigirá la realización de un análisis de sensibilidad.

En la mayor parte de los problemas de optimización estructural, se darán las siguientes características en el problema subyacente de minimización restringida:

- el problema está formulado en función de un número no demasiado elevado de variables de diseño.
- la función objetivo será generalmente una función no lineal, pero no excesivamente, de las variables de diseño (en un alto porcentaje será el peso de la estructura). Su evaluación y la de sus derivadas puede implicar un elevado volumen de cálculo, aunque normalmente inferior al de las restricciones. Puede obtenerse habitualmente como subproducto del cálculo estructural y del análisis de sensibilidad, y en ocasiones, dependiendo del tipo de parametrización y de la definición, podrá expresarse como una función directa de las variables de diseño.
- las restricciones en desigualdad serán o bien restricciones laterales, o restricciones definidas mediante funciones sencillas de las variables de diseño (restricciones de tipo geométrico), o bien restricciones definidas mediante funciones altamente no lineales de las variables de diseño. En este caso, su evaluación y la de sus derivadas será enormemente costosa, ya que supondrá la realización de un cálculo completo basado en el Método de Elementos Finitos, y

sus análisis de sensibilidad correspondientes. Existirá en general un número elevado de restricciones no triviales en desigualdad, altamente no lineales con las variables de diseño y de difícil cálculo y derivación.

- el problema puede tener varios mínimos locales, y dada la complejidad de las operaciones involucradas en su definición no se podrá normalmente analizar a priori su convexidad.
- en el óptimo se encontrará activo un conjunto de restricciones indeterminado y difícil de predecir inicialmente.

Dada la naturaleza de los problemas de optimización estructural, consideraremos además los siguientes aspectos:

- el diseño inicial no será factible en general. De hecho la obtención de un diseño inicial factible puede ser en si mismo un problema de gran complejidad.
- por debajo de unos ciertos límites no es necesario mejorar la solución. En una estructura cuyo peso es del orden de varios miles de toneladas, una presa por ejemplo, no tiene sentido invertir esfuerzo en la obtención de una solución cuyo peso sea inferior en tan solo unos kilogramos.
- por debajo de unos ciertos límites, no demasiado estrictos, carece de sentido obtener las variables de diseño con más precisión. Si las variables de diseño son dimensiones geométricas de una obra civil medidas en metros, por ejemplo, no tiene objeto calcular aproximaciones con errores

inferiores al milímetro, ya que por motivos constructivos no se podrá nunca obtener tal precisión en la realización material de la obra.

- normalmente no es necesario que las restricciones impuestas en tensión y desplazamiento se verifiquen estrictamente, admitiéndose una cierta tolerancia en su incumplimiento, por motivos similares a los expuestos previamente.

Por todo ello, consideramos conveniente disponer de un algoritmo de resolución del problema estándar escrito en la forma (5.66) que verifique las siguientes condiciones:

- el algoritmo ha de ser capaz de alcanzar soluciones factibles partiendo de aproximaciones iniciales no factibles, y de llegar a soluciones formalmente equivalentes partiendo de diseños iniciales distintos.
- el algoritmo ha de ser capaz de mejorar apreciablemente las aproximaciones iniciales hasta niveles por debajo de los cuales no sea necesario refinar la solución.
- el algoritmo ha de tener en cuenta los condicionantes de cálculo existentes en la evaluación de la función objetivo, las restricciones y sus derivadas. El cálculo de las derivadas primeras respecto a las variables de diseño puede efectuarse con un coste operativo aceptable. El coste del cálculo de las derivadas completas de orden superior será normalmente inaceptable. Sin embargo será aceptable el cálculo de derivadas direccionales de segundo orden.

## V.6.2 Desarrollo de un algoritmo de programación matemática adaptado a la optimización estructural

### V.6.2.1 Revisión de los métodos de programación matemática

A la vista de los condicionantes expuestos, debemos analizar los diversos métodos de programación matemática para problemas de minimización restringida descritos en el Capítulo III (Fig. 3.6).

En general, el problema de optimización estructural no se amoldará a ninguno de los problemas específicos para los que existen técnicas de gran eficiencia. Normalmente existirán restricciones en desigualdad de tipo general, y no solamente laterales, y el problema de minimización no será separable. El problema no será en general directamente resoluble por programación lineal o cuadrática, dado que aunque la función objetivo puede ser sencilla, las funciones que definen las restricciones serán normalmente altamente no lineales en las variables de diseño.

Los métodos de descenso generalizados no son adecuados para problemas con restricciones altamente no lineales, como es nuestro caso, sino para problemas con restricciones sencillas, en particular lineales, aunque pueden comportarse satisfactoriamente con funciones objetivo no lineales.

Los métodos basados en las condiciones de Kuhn-Tucker pueden demostrarse muy eficientes para resolver problemas clásicos de optimización de dimensiones, pero su aplicación a problemas generales, en los que existe optimización de la forma

de la estructura es conflictiva. La predicción del conjunto de variables activas es muy compleja, y la deducción de criterios de optimalidad difícil, al contrario de lo que sucede en otros tipos de problemas más sencillos. La convexidad del problema es, además, incierta.

La reducción a problemas de minimización no restringida mediante los métodos de funciones barrera, funciones de penalización y lagrangiano aumentado es sencilla. Sin embargo, estos métodos suelen requerir la realización de un número elevado de iteraciones, que en el tipo de problemas que nos planteamos en este estudio implicarían un elevado volumen de cálculo. En los métodos de funciones barrera y de penalización es necesario resolver una secuencia de problemas con diferentes valores de los pesos de las barreras y las penalizaciones, y analizar la convergencia de la secuencia de soluciones obtenida, lo cual supondría en nuestro caso un elevado coste computacional.

Por último, es en la aplicación de los métodos de reducción a problemas específicos donde creemos que los resultados obtenidos hasta el momento son más alentadores, y donde es más rentable profundizar, y a ellos nos referiremos en lo sucesivo.

Dentro de estos métodos consideramos que la aplicación de técnicas de programación cuadrática secuencial no aporta ventajas sustanciales en optimización estructural frente a la aplicación de técnicas de linealización, dado que la dificultad sustancial de los problemas de optimización estructural que abordamos radica en las restricciones y no en la función objetivo, como ya se ha explicado. En publicaciones recientes otros autores coinciden en

esta opinión basándose en resultados numéricos de distintos programas de aplicación [Ding 1986].

#### **V.6.2.2 Métodos de linealización**

En el Apartado III.5.3.5 describimos someramente los métodos de linealización. El algoritmo (3.110) de programación lineal secuencial con límites móviles es probablemente el que ha gozado de mayor aceptación en optimización estructural. En las aplicaciones de este algoritmo en problemas de optimización de formas, se han reportado éxitos considerables, máxime teniendo en cuenta que los procedimientos de análisis de sensibilidad empleados normalmente están basados en esquemas de diferencias finitas, y por tanto aquejados de importantes errores.

Sin embargo, el principal defecto del algoritmo radica en las oscilaciones de gran amplitud que se producen cerca del óptimo, y que impiden la convergencia (Fig. 3.11-b). Este algoritmo ha sido el empleado en la resolución de los ejemplos primero y segundo (Cap. VII).

Analizando en detalle las oscilaciones que se producen, se deduce que su aparición se debe a la naturaleza lineal de las aproximaciones efectuadas. Para evitarlas es necesario, por lo tanto, realizar de alguna forma aproximaciones de orden superior.

Puesto que el análisis de sensibilidad de segundo orden es sumamente costoso si se realiza íntegramente, pero viable si se realiza en una dirección, parece razonable realizar tras cada solución del problema linealizado una búsqueda unidireccional para obtener el factor de avance en la dirección definida por la

solución del problema lineal.

En efecto, la realización de la búsqueda unidireccional evaluando exactamente la función objetivo y las restricciones en cada punto es inviable, dado el elevado coste que supone la realización de un cálculo completo por elementos finitos de la estructura. Sin embargo, la búsqueda unidireccional puede realizarse utilizando las aproximaciones cuadráticas de la función objetivo y las restricciones en la dirección de avance. En el sexto ejemplo se pone de manifiesto la gran exactitud de esta aproximación, lo que justifica su utilización.

En el algoritmo generalizado de programación lineal secuencial con búsqueda unidireccional efectuada sobre las aproximaciones cuadráticas, persisten dos graves defectos:

- En un punto no factible del espacio de diseño el problema linealizado puede no tener solución (la región factible del problema linealizado puede ser vacía), y por tanto no es posible obtener una dirección de avance.
  
- En un diseño situado en el contorno de la región factible, si la restricción es convexa, al realizar la búsqueda unidireccional se produce el efecto descrito en la Figura 3.8-b, esto es, para cualquier valor del factor de avance en la dirección dada, el diseño obtenido es no factible. El factor de avance obtenido será nulo, por tanto, y el algoritmo se detendrá en el contorno.

El primer defecto puede corregirse cambiando de estrategia si el problema linealizado carece de solución y adoptando una

dirección de avance que tienda a entrar en la región factible, aún a riesgo de aumentar el valor de la función objetivo. Se han propuesto y empleado diversas direcciones de entrada en la región factible, la mas sencilla de las cuales consiste en adoptar como dirección de avance la opuesta al gradiente de la restricción más violada [Wang, Sun y Gallagher 1985]. Consideramos que esta elección en particular no es adecuada, puesto que se basa únicamente en una restricción. Adolece de otros defectos, tales como que en problemas simétricos puede hacer perder la simetría de la solución.

En la descripción del algoritmo proponemos adoptar como dirección de avance una combinación lineal de los gradientes de las restricciones violadas, cuyos coeficientes son directamente proporcionales a los incumplimientos de las restricciones correspondientes e inversamente proporcionales a las normas de los gradientes, cuya justificación damos posteriormente.

En el algoritmo propuesto, el segundo defecto se elimina permitiendo el incumplimiento de la restricción hasta una determinada tolerancia en la búsqueda unidireccional. Los efectos de esta relajación en la restricción son sumamente sutiles.

En la búsqueda unidireccional, la estrategia debe ser diferente según el punto de partida sea factible o no. Para ello será preciso catalogar previamente el punto de partida, y el estado de las restricciones.

El algoritmo propuesto ha demostrado su potencia en la ejecución de los ejemplos tercero, cuarto y quinto (Cap. VII) con

soluciones virtualmente idénticas partiendo de diseños iniciales totalmente distintos y en un número razonable de iteraciones.

### V.6.3 Algoritmo propuesto

Sea el problema de minimización restringida subyacente a un problema de optimización estructural (5.66). En lo sucesivo nos referiremos a las restricciones no laterales como restricciones simplemente, y las diferenciaremos de las restricciones laterales haciendo mención expresa a estas últimas cuando sea preciso.

Serán parámetros de funcionamiento del algoritmo los siguientes:

Se prescribirá el conjunto de límites móviles:

$$\bar{c} = \{ c_i \} \quad ; c_i > 0 \quad ; i = 1, \dots, n \quad (5.67)$$

que definen las máximas variaciones permitidas en los valores de las variables de diseño en cada iteración.

Se prescribirá el conjunto de tolerancias en las variables de diseño:

$$\bar{\epsilon} = \{ \epsilon_i^x \} \quad ; \epsilon_i^x > 0 \quad ; i = 1, \dots, n \quad (5.68)$$

que definen la precisión con que se desean obtener las variables en el diseño final. Consideraremos que el proceso ha convergido si los valores absolutos de las modificaciones de todas las variables de diseño en una iteración se encuentran por debajo de estas tolerancias.

Se prescribirá el conjunto de tolerancias en las restricciones:

$$\bar{\epsilon} = \left\{ \begin{matrix} \epsilon_j \\ \epsilon_j \end{matrix} \right\} ; \epsilon_j > 0 ; j = 1, \dots, m \quad (5.69)$$

que definen los máximos incumplimientos de las restricciones admitidos.

Se prescribirá el conjunto de límites de actividad:

$$\bar{\eta} = \left\{ \begin{matrix} \eta_j \\ \eta_j \end{matrix} \right\} ; \eta_j > 0 ; j = 1, \dots, m \quad (5.70)$$

que utilizaremos con varios propósitos que se expondrán en la descripción del algoritmo.

Diremos que un punto " $\bar{x}^k$ " se encuentra en la banda de actividad de la restricción "j" si se verifica:

$$\left| g_j(\bar{x}^k) \right| < \eta_j \quad (5.71)$$

Consideraremos en lo sucesivo que en todas las iteraciones se verifican las restricciones laterales, asumiendo que el punto inicial " $\bar{x}^0$ " las verifica, puesto que en el algoritmo propuesto se realiza un control que evita su incumplimiento.

Escribiremos el algoritmo en la forma iterativa genérica:

$$\begin{array}{ll} \text{dado:} & \bar{x}^k \\ \text{obtener:} & \bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k + \theta \bar{s}^k \end{array} \quad (5.72)$$

y realizaremos en cada iteración las siguientes operaciones consecutivamente:

- clasificación del punto actual a partir de los resultados del cálculo de la función objetivo y las restricciones.
- obtención de la dirección de avance " $\bar{s}^k$ " a partir de la información suministrada por el análisis de sensibilidad de primer orden completo.
- obtención del factor de avance " $\theta^k$ " a partir de la información suministrada por el análisis de sensibilidad de segundo orden en la dirección de avance.
- actualización de la aproximación a la solución, y análisis de la convergencia.

#### V.6.3.1 Clasificación del punto

En cada iteración se clasifica el punto actual según los criterios siguientes:

La restricción "j" en la iteración "k", se dirá:

$$\begin{array}{ll}
 \text{DESACTIVADA} & \text{si} \quad g_j(\bar{x}^k) < -\eta_j \\
 & \hspace{10em} (5.73) \\
 \text{ACTIVADA} & \text{si} \quad g_j(\bar{x}^k) \geq -\eta_j
 \end{array}$$

Denominaremos " $\Lambda_k$ " al conjunto de restricciones activadas en la iteración "k".

La restricción "j" en la iteración "k", se dirá:

$$\begin{array}{ll}
 \text{NO VIOLADA} & \text{si } g_j(\bar{x}^k) \leq 0 \\
 \\
 \text{CUASI NO VIOLADA} & \text{si } 0 < g_j(\bar{x}^k) \leq \epsilon_j^g \\
 \\
 \text{DEBILMENTE VIOLADA} & \text{si } \epsilon_j^g < g_j(\bar{x}^k) \leq \eta_j \\
 \\
 \text{FUERTEMENTE VIOLADA} & \text{si } g_j(\bar{x}^k) > \eta_j
 \end{array} \tag{5.74}$$

Denominaremos " $V_\kappa$ " al conjunto de restricciones débil o fuertemente violadas en la iteración "k".

El punto " $\bar{x}^k$ ", se dirá:

- FACTIBLE, si todas las restricciones son no violadas.
- ADMISIBLE, si todas las restricciones son no violadas o cuasi no violadas.
- DEBILMENTE NO FACTIBLE, si todas las restricciones son no violadas, cuasi no violadas o débilmente violadas.
- FUERTEMENTE NO FACTIBLE, si hay alguna restricción fuertemente violada.

### V.6.3.2 Obtención de la dirección de avance

Determinaremos el versor " $\bar{s}^{-k}$ " de la dirección de avance, o bien asumiremos que el algoritmo ha convergido, en función del vector " $\bar{r}^{-k}$ " en la forma:

$$\text{si } |\bar{r}^{-k}| \neq 0 \Rightarrow \bar{s}^{-k} = \frac{\bar{r}^{-k}}{|\bar{r}^{-k}|} \quad (5.75)$$

$$\text{si } |\bar{r}^{-k}| = 0 \Rightarrow \text{el algoritmo ha convergido}$$

donde " $\bar{r}^{-k}$ " se calculará mediante uno de los tres procedimientos siguientes, según la clasificación del punto:

#### **Procedimiento 1.**

Si " $\bar{x}^{-k}$ " no pertenece a la banda de actividad de ninguna de las restricciones, adoptamos como vector de avance el opuesto al gradiente de la función objetivo. En el caso de que alguna variable de diseño esté fija, y en la dirección opuesta al gradiente de la función objetivo se viole la restricción lateral correspondiente, la proyectaremos sobre el hiperplano que la define esto es:

$$r_i^k = \begin{cases} -v_i^k & \text{si } a_i < x_i < b_i \\ 0 & \text{si } \begin{cases} x_i = a_i & y_i^k > 0 \\ \text{"o"} \\ x_i = b_i & y_i^k < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.76)$$

con:

$$v_i^k = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x} = x^k}$$

de forma análoga a lo expuesto en el algoritmo (3.64) para problemas con restricciones exclusivamente laterales.

Dada la naturaleza de los problemas a resolver es improbable que se produzca esta situación, excepto cuando el diseño inicial es una estructura muy sobredimensionada que verifica con suficientemente holgura todas las restricciones. La elección (5.76) corresponde a la aplicación del método de Newton de primer orden, o método del gradiente adaptado para un problema con restricciones laterales. No consideramos necesario utilizar un procedimiento de minimización no restringida más elaborado, dada la baja frecuencia con que se producirá esta situación. Sin embargo, podría obtenerse un vector de avance " $\bar{r}^k$ " por aplicación de cualquier otro método para minimización no condicionada adaptado al problema con restricciones laterales.

**Procedimiento 2.**

Si " $\bar{x}^k$ " pertenece a la banda de actividad de al menos una de las restricciones, obtenemos el vector de avance " $\bar{r}^k$ " como:

$$\bar{r}^k = \bar{a}^k + \bar{t}^k - \bar{x}^k \quad (5.77)$$

donde " $\bar{t}^k$ " se obtiene resolviendo el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \bar{t}^k \text{ minimiza: } & F(\bar{t}) = F(\bar{0}) + \bar{\nabla} f(\bar{x}^k) \bar{t} \\ \text{verificando: } & G_j(\bar{t}) = G_j(\bar{0}) + \bar{\nabla} g_j(\bar{x}^k) \bar{t} \leq 0 \\ & \qquad \qquad \qquad ; j \in \Lambda \\ & 0 \leq \bar{t}_i \leq \bar{\sigma}_i^k - \bar{a}_i^k \qquad ; i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} \text{con: } F(\bar{0}) &= f(\bar{x}^k) + \bar{\nabla} f(\bar{x}^k) \left( \bar{a}^k - \bar{x}^k \right) \\ G_j(\bar{0}) &= g_j(\bar{x}^k) + \bar{\nabla} g_j(\bar{x}^k) \left( \bar{\sigma}_j^k - \bar{x}^k \right) ; j \in \Lambda \\ \bar{a}_i^k &= \max \left\{ \bar{a}_i^k, \bar{x}_i^k - \bar{c}_i^k \right\} \qquad ; i=1, \dots, n \\ \bar{\sigma}_i^k &= \min \left\{ \bar{b}_i^k, \bar{x}_i^k + \bar{c}_i^k \right\} \qquad ; i=1, \dots, n \end{aligned}$$

equivalente a la linealización del problema (5.66) considerando solamente las restricciones activadas, y con las condiciones laterales adicionales impuestas mediante los límites móviles (5.67).

Si el problema (5.78) carece de solución, la región factible del problema linealizado no existe, y se adopta como

dirección de entrada en la región factible la obtenida por el tercer procedimiento.

### Procedimiento 3.

En caso de fallo del procedimiento anterior, se adopta como dirección de avance la definida por:

$$\mathbf{r}_i^k = \mathbf{c}_i^k - \mathbf{v}_i^k$$

con:

$$\mathbf{v}^k = - \sum_{j \in V_k} \mu_j \frac{\nabla^t g_j(\bar{\mathbf{x}}^k)}{|\nabla g_j(\bar{\mathbf{x}}^k)|} \quad (5.79)$$

$$\mu_j = \frac{g_j(\bar{\mathbf{x}}^k)}{|\nabla g_j(\bar{\mathbf{x}}^k)|}$$

La elección (5.79) para la dirección de entrada en la región factible puede justificarse intuitivamente, ya que el vector " $\mathbf{v}^k$ " representa una dirección de avance obtenida como combinación lineal de los opuestos de los gradientes normalizados de las restricciones violadas (y por tanto de las direcciones en que las restricciones tienden a verificarse más rápidamente, en primera aproximación), donde los coeficientes de la combinación son proporcionales al cociente del incumplimiento de la restricción y el módulo de su gradiente (ponderándose favorablemente las restricciones más incumplidas y aquellas cuyo ritmo de disminución es menor).

La elección del vector " $\mathbf{v}^k$ " en la forma (5.79) puede justificarse también planteando que las aproximaciones lineales a

las restricciones violadas se verifiquen estrictamente, esto es:

$$g_i(\bar{x} + \bar{v}) \simeq g_i(\bar{x}) + \bar{\nabla} g_i(\bar{x}) \bar{v} = 0 \quad ; i \in V_k$$

con: (5.80)

$$\bar{v} = - \sum_{j \in V_k} \mu_j \bar{\nabla}^t g_j(\bar{x}) / |\bar{\nabla} g_j(\bar{x})|$$

siendo por tanto los coeficientes " $\mu_j$ " la solución del sistema lineal de ecuaciones:

$$M_{ij} \mu_j = g_i(\bar{x}) \quad ; i \in V_k ; j \in V_k \quad (5.81)$$

donde:

$$M_{ij} = \bar{\nabla} g_i(\bar{x}) \bar{\nabla}^t g_j(\bar{x}) / |\bar{\nabla} g_j(\bar{x})|$$

Y la elección (5.79) corresponde a una aproximación a la solución del sistema anterior, obtenida asumiendo que los términos de la diagonal principal son preponderantes sobre los restantes términos de la matriz de coeficientes.

Además, los coeficientes " $\mu_j$ " adoptados en (5.79) serían la solución del sistema (5.81) en el caso de que los gradientes de las restricciones violadas fuesen ortogonales entre sí.

Finalmente, los componentes del vector de avance " $\bar{r}^k$ " se obtienen ponderando los componentes del vector " $\bar{v}^k$ " por un conjunto de coeficientes que indique la importancia relativa que se concede a la modificación de una variable de diseño frente a las demás. En este estudio se han utilizado como tales

coeficientes los propios límites móviles (5.67), si bien podría haberse definido otro conjunto de parámetros de funcionamiento del algoritmo para este fin, o adoptar coeficientes unitarios si se desea respetar la elección del vector " $\bar{v}^{-k}$ ".

### V.6.3.3 Obtención del factor de avance

Para que una aproximación a la solución del problema (5.66) de la forma:

$$\bar{x}(\theta) = \bar{x}^{-k} + \theta \bar{s}^{-k} \quad (5.82)$$

verifique las restricciones laterales y se encuentre dentro del marco impuesto por los límites móviles (5.67) en torno a la aproximación " $\bar{x}^{-k}$ ", es preciso que el factor de avance " $\theta$ " verifique la condición:

$$\theta_{\min} < \theta < \theta_{\max}$$

donde:

$$\theta_{\min} = \max ( \theta_{\min}^1, \theta_{\min}^2 ) \quad (5.83)$$

$$\theta_{\max} = \min ( \theta_{\max}^1, \theta_{\max}^2 )$$

con:

$$\begin{aligned}
\theta^1_{\min} &= \max_{\substack{k \\ s_i > 0}} \frac{a - x_{i \ k}}{s_i} \\
\theta^2_{\min} &= \max_{\substack{k \\ s_i < 0}} \frac{b - x_{i \ k}}{s_i} \\
\theta^1_{\max} &= \min_{\substack{k \\ s_i < 0}} \frac{a - x_{i \ k}}{s_i} \\
\theta^2_{\max} &= \min_{\substack{k \\ s_i > 0}} \frac{b - x_{i \ k}}{s_i}
\end{aligned}
\tag{5.84}$$

siendo " $\bar{a}^k$ " y " $\bar{b}^k$ " los definidos en (5.78).

Sean las aproximaciones cuadráticas a la función objetivo y a las restricciones en el punto " $\bar{x}^k$ " y según la dirección " $\bar{s}^k$ " las funciones de variable real:

$$\begin{aligned}
\Phi(\theta) &= f(\bar{x}^k) + \theta D_s f(\bar{x}^k) + \frac{1}{2} \theta^2 D_s^2 f(\bar{x}^k) \\
\chi_j(\theta) &= g_j(\bar{x}^k) + \theta D_s g_j(\bar{x}^k) + \frac{1}{2} \theta^2 D_s^2 g_j(\bar{x}^k)
\end{aligned}
\tag{5.85}$$

; j=1, ..., m

En función del factor de avance " $\theta$ " diremos que la aproximación cuadrática " $\chi(\theta)$ " a la restricción "j" es:

NO VIOLADA	si	$\chi_j(\theta) \leq 0$	
CUASI NO VIOLADA	si	$0 < \chi_j(\theta) \leq \epsilon_j^g$	
DEBILMENTE VIOLADA	si	$\epsilon_j^g < \chi_j(\theta) \leq \eta_j$	(5.86)
FUERTEMENTE VIOLADA	si	$\chi_j(\theta) > \eta_j$	

de forma análoga a la clasificación (5.74)

Denominaremos " $V_{\kappa}(\theta)$ " al conjunto de restricciones cuyas aproximaciones sean cuasi no violadas, débilmente violadas o fuertemente violadas. para el factor de avance " $\theta$ ".

La aproximación a la solución (5.82) para el factor de avance " $\theta$ " se dirá

- FACTIBLE, si todas las aproximaciones cuadráticas a las restricciones son no violadas.
- ADMISIBLE, si todas las aproximaciones cuadráticas a las restricciones son no violadas o cuasi no violadas.
- DEBILMENTE NO FACTIBLE, si todas las aproximaciones cuadráticas a las restricciones son no violadas, cuasi no violadas o débilmente violadas.
- FUERTEMENTE NO FACTIBLE, si hay alguna aproximación a la restricción fuertemente violada.

Definimos la función "incumplimiento" de las aproximaciones cuadráticas a las restricciones en la forma:

$$E(\theta) = \sum_{\substack{j \in V(\theta) \\ k}} (\chi_j(\theta))^2 \quad (5.87)$$

Nótese que el sumatorio se extiende a todas las aproximaciones a las restricciones que estén violadas en cualquier grado, y por tanto a las cuasi no violadas, débilmente violadas y fuertemente violadas.

En estos términos, adoptaremos el factor de avance " $\theta^k$ ", en la iteración actual mediante una de las tres estrategias siguientes, dependiendo de la clasificación de la aproximación actual " $\bar{x}^k$ " a la solución:

**Estrategia 1.**

Si el punto " $\bar{x}^k$ " es factible o admisible, adoptaremos como factor de avance el valor " $\theta^k$ " tal que:

$$\theta^k \text{ minimiza: } \Phi(\theta)$$

verificando:

$$\theta_{\min} < \theta < \theta_{\max} \quad (5.88)$$

$$\bar{x}(\theta) \text{ es FACTIBLE o ADMISIBLE}$$

**Estrategia 2.**

Si el punto " $\bar{x}^k$ " es débilmente no factible, adoptaremos como factor de avance el valor " $\theta^k$ " que soluciona el problema (5.88). En su defecto, si el problema (5.88) no tiene solución, adoptaremos el valor " $\theta^k$ " tal que:

$\theta^k$  minimiza:  $E(\theta)$

verificando:

$$\theta_{\min} < \theta < \theta_{\max} \quad (5.89)$$

$\bar{x}(\theta)$  es DEBILMENTE NO FACTIBLE

**Estrategia 3.**

Si el punto " $\bar{x}^k$ " es fuertemente no factible, adoptaremos como factor de avance el valor " $\theta^k$ " que soluciona el problema (5.88). En su defecto, si el problema (5.88) no tiene solución, adoptaremos como factor de avance el valor " $\theta^k$ " que soluciona el problema (5.89). En su defecto, si el problema (5.89) no tiene solución, adoptaremos como factor de avance el valor " $\theta^k$ " tal que:

$\theta^k$  minimiza:  $E(\theta)$

verificando:

$$\theta_{\min} < \theta < \theta_{\max} \quad (5.90)$$

La solución de los problemas (5.88), (5.89) y (5.90) puede abordarse mediante diversos métodos de diferente grado de complejidad.

El método conceptualmente más sencillo consiste en realizar una inspección simple en el intervalo definido por la condición (5.83), para los valores del factor de avance:

$$\theta_i = \theta_{\min} + \Delta\theta_i ; i = 0, \dots, n_I$$

$$\text{con: } n_I = (\theta_{\max} - \theta_{\min}) / \Delta\theta$$

(5.91)

$$\Delta\theta \leq \min_k \left\{ \epsilon_i^x / s_i^k \right\}$$

$s_i \neq 0$

de forma que el error cometido en las variables de diseño sea inferior a las tolerancias (5.68). El algoritmo de búsqueda discreta anterior puede admitir diversos refinamientos con objeto de reducir el número de operaciones necesarias. En cualquier caso, las funciones (5.85) que es preciso evaluar en la resolución de los problemas (5.88), (5.89) y (5.90) son cuadráticas y de una sola variable. En general, el coste operativo de su resolución es muy inferior al implicado en otras fases de la resolución del problema de optimización estructural, tales como la obtención de la dirección de avance, el cálculo estructural o la realización del análisis de sensibilidad.

#### V.6.3.4 Actualización de la aproximación a la solución

Una vez evaluadas la dirección y el factor de avance se obtiene el valor de la nueva aproximación a la solución mediante la aplicación directa de la ecuación (5.72)

Si el algoritmo no ha convergido en alguna de las fases del proceso, aplicaremos un criterio de convergencia sobre las variables de diseño, deteniendo la ejecución cuando se verifique:

$$| x_i^{k+1} - x_i^k | < \epsilon_i \quad ; i=1, \dots, n \quad (5.92)$$

o el número de iteraciones exceda un límite prefijado.

El algoritmo puede detenerse en una condición del tipo (5.92) por tres motivos fundamentalmente:

- la aproximación final está razonablemente cerca de un mínimo local estricto del problema (5.66), dentro de los márgenes definidos por los parámetros de funcionamiento del algoritmo (5.67), (5.68), (5.69) y (5.70). En este caso la aproximación final obtenida ha de ser FACTIBLE O ADMISIBLE.
- la aproximación final no es factible ni admisible pero el problema (5.66) tiene solución. En este caso debe reinicializarse el proceso de optimización con diferentes parámetros de funcionamiento del algoritmo o con otra aproximación inicial.
- la aproximación final no es factible ni admisible. El problema (5.66) carece de solución (fundamentalmente porque la región factible es vacía, debido a la imposición incorrecta de las restricciones)

#### **V.6.4 Sistemas Expertos e Inteligencia Artificial**

Consideramos pertenecientes a este nivel todas aquellas metodologías que permiten introducir en el proceso de decisión aspectos relacionados con el aprendizaje. La toma de decisiones puede realizarse de forma más eficaz si el sistema es capaz de sintetizar a lo largo del proceso reglas de carácter heurístico, y aplicarlas posteriormente en conjunción con las técnicas anteriormente descritas, actualizándolas o rechazándolas en función de su operatividad. A pesar de que no existen en la actualidad realizaciones de este nivel con aplicación general al problema del diseño óptimo, consideramos que las perspectivas de desarrollo en este ámbito son inmejorables de cara a un futuro muy próximo, habida cuenta de los recientes avances en el diseño y construcción de nuevas generaciones de ordenadores y sistemas operativos en la línea de los sistemas expertos y la inteligencia artificial.

## V.7 MODULO DE POSTPROCESO

Las funciones del módulo de postproceso han sido descritas con anterioridad. Baste añadir por consiguiente que su concepción es básicamente la de un sistema de Diseño Asistido por Ordenador, si bien es importante observar que su desarrollo, principalmente mediante técnicas gráficas, permitirá mejorar sustancialmente la interacción con el usuario en la definición de objetivos, la realización y modificación de la parametrización, y la toma de decisiones.

Para la realización de este estudio, el autor ha desarrollado integralmente un postprocesador para la interpretación "a posteriori" de los resultados de los programas de optimización, dado que la concepción del sistema de diseño óptimo desarrollado es tal que permite la toma de decisiones de forma enteramente automática, sin asistencia del diseñador una vez se inicia el proceso.

El postprocesador desarrollado es convencional para problemas bi y tridimensionales en cálculo estructural por el Método de Elementos Finitos, y está adaptado fundamentalmente a los problemas tratados en los ejemplos de aplicación que se presentan en el Capítulo VII. Con él se han generado automáticamente la mayor parte de las figuras que se presentan en la descripción de los ejemplos.

## V.8 MODULO DE CONTROL

Como ya se ha expuesto, el módulo de control debe regular el flujo temporal de información entre los distintos módulos del sistema de diseño, permitiendo en su caso la interacción con el usuario del mismo.

Su análisis detallado excede las pretensiones de este estudio puesto que engloba primordialmente aspectos informáticos tales como el almacenamiento eficiente de la información del sistema, la transmisión de la misma a los diversos módulos, la estructuración del sistema desde un punto de vista de programación, etc.

En el Capítulo VI se describirá el sistema DAO<sup>2</sup> desarrollado como ejemplo de aplicación de la metodología presentada en este estudio, y en él puede hallarse una descripción de las funciones del módulo de control y la forma en que el usuario del sistema puede adaptarlo a sus requerimientos.