UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de doctorat de Matèmatica Aplicada

SOBRE LA REPRESENTACIÓ I GENERACIÓ DE RELACIONS D'INDISTINGIBILITAT

Autor: Jorge Recasens Ferrés
Director: Joan Jacas Moral

Desembre, 1991

1. Qüestions prèvies.

1.1. Introducció.

En aquest capítol es donaran les definicions i propietats bàsiques dels conceptes necessaris per a desenvolupar aquest memòria.

A la secció 1.2. s'estudiaran qüestions relatives a **t- normes** i **T-indistingibilitats**.

La secció 1.3. és dual a la secció anterior en el sentit que es concretarà a la secció 1.4. i estudia propietats de **t-conormes** i **S-mètriques**.

A la secció 1.4. les nocions de **negació forta** i **terna de De Morgan** permetran exposar la **dualitat** existent entre les dues seccions anteriors.

Els resultats d'aquest capítol són coneguts i es donen amb l'objectiu de fer autocontingut el treball. Per tant, l'estil en aquest capítol és concís i esquemàtic.

1.2. t-normes. T-indistingibilitats.

En aquesta secció es presenten les propietats bàsiques de **t-normes** i **T-indistingibilitats**.

Definició 1.2.1. Una operació T de $[0,1]\times[0,1]$ en $[0,1]$ és una **t-norma contínua** si, i només si, satisfà les següents propietats per cada $x, y, z, x', y' \in [0,1]$:

1.2.1.1. Associativitat: $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$

1.2.1.2. Monotonia:

Si $x \leq x'$, aleshores $T(x,y) \leq T(x',y)$

Si $y \leq y'$, aleshores $T(x,y) \leq T(x,y')$

1.2.1.3. Condicions de contorn: $T(x,1) = T(1,x) = x$

1.2.1.4. Continuïtat: T és contínua com a funció de dues variables.

Totes les t-normes d'aquest treball es suposaran contínues.

Jugant amb les condicions de monotonia i de contorn es té

$$T(x,y) \leq T(x,1) = x$$

$$T(x,y) \leq T(1,y) = y$$

i per tant $T(x,y) \leq \mathrm{Min}(x,y) \quad \forall x,y \in [0,1]$.

És a dir, que la t-norma Min és la t-norma més gran.

Com a corol.lari, es té que per qualsevol t-norma T es compleix $T(x,x) \leq x$ $\forall x \in [0,1]$.

Definició 1.2.2. Una t-norma T és **arquimediana** si, i només, si

$$T(x,x) < x \quad \forall x \in (0,1).$$

Donat que una t-norma T és associativa, es pot definir T^n, $n \in \mathbb{N}$ recurrentment: $T^1(x) = x$ i $T^n(x) = T(T^{n-1}(x), x)$ $\forall n > 1$.

Un element $x \in (0,1)$ es diu **nilpotent** si, i només si, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) = 0$.

Si Nil T representa el conjunt d'elements nilpotents respecte de T es té la següent

Proposició i Definició 1.2.3. Si T és una t-norma arquimediana, aleshores Nil T = $\emptyset$ ó Nil T = (0,1). En el primer cas, la t-norma T es diu **estricta** i **no estricta** en el segon.

Donada una t-norma T, $([0,1],T)$ té l'estructura de semigrup topològic. Dues t-normes T, T' es diran isomorfes si ho són $([0,1],T), ([0,1],T')$ com a semigrups topològics, és a dir:

Definició 1.2.4. Dues t-normes T, T' són **isomorfes** si, i només si, existeix una bijecció $f : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\forall x, y \in [0,1]$

$$f(T(x,y)) = T'(f(x), f(y)).$$

Dels axiomes de t-norma es dedueix immediatament que f ha de ser creixent i contínua.

1.2.5. Exemples de t-normes. Les següents t-normes són particularment importants, tal com quedarà palès als següents dos Teoremes:

1.2.5.1. La **t-norma Mínim** definida per

$$\forall x, y \in [0,1] \qquad \mathrm{Min}(x,y).$$

És la més important t-norma no arquimediana.

1.2.5.2. La **t-norma de Lukasiewicz** $T_{\mathcal{L}}$:

$$T_{\mathcal{L}}(x,y) = \mathrm{Max}(x+y-1, 0), \quad \forall x, y \in [0,1].$$

$T_{\mathcal{L}}$ és arquimediana no estricta.

1.2.5.3. La **t-norma producte** $T_{\prod}$:

$$T_{\prod}(x,y) = xy \qquad \forall x, y \in [0,1].$$

$T_{\prod}$ és arquimediana estricta.

La importància de $T_{\mathcal{L}}$, $T_{\prod}$ queda reflectida en el següent

Teorema 1.2.6. Tota t-norma arquimediana no estricta és isomorfa a la t- norma de Lukasiewicz $T_{\mathcal{L}}$.

Tota t-norma arquimediana estricta és isomorfa a la t-norma producte $T_{\prod}$.

Teorema 1.2.7. Tota t-norma és **suma ordinal** de t-normes arquimedianes i la t-norma Mínim.

(Per a la definició de suma ordinal vegi's, per exemple [Schweizer, B., Sklar, A. (1983)]).

Els dos últims Teoremes fan palesa la importància de l'estudi de les tres t-normes Min, $T_{\mathcal{L}}$ i $T_{\prod}$.

Definició 1.2.8. Donada una t-norma T, la seva **quasi- inversa** $\hat{T}$ es defineix:

$$\hat{T}(x|y) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid T(\alpha, x) \leq y\} \quad \forall x, y \in [0,1].$$

1.2.9. Exemples.

1.2.9.1. $\widehat{\mathrm{Min}}(x|y) = \begin{cases} y, & \text{si } x > y \\ 1, & \text{si } x \leq y \end{cases}$

1.2.9.2. $\hat{T}_{\mathcal{L}}(x|y) = \mathrm{Min}(1 - x + y, 1)$.

1.2.9.3. $\hat{T}_{\prod}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x}, & \text{si } x > y \\ 1, & \text{si } x \leq y \end{cases}$

•

Les t-normes tenen aplicacions en diversos camps de Matemàtiques tant pures com aplicades. En particular, en **lògica difusa** modelitzen conectius d'intersecció.

En aquest context, una possibilitat de modelitzar la **implicació** és mitjançant la quasi-inversa. Des d'aquest punt de vista està trobada, per exemple, en [Valverde, L. (1982)].

Un recull de propietats de les quasi-inverses de t-normes es pot trobar en [Valverde, L. (1985)].

En aquest treball, la quasi inversa $\hat{T}$ d'una t-norma T serà usada per generar T-indistingibilitats via el Teorema de Representació al capítol 3.

Relacionada amb els isomorfismes de t-normes es té la següent proposició:

Proposició 1.2.10. Si f és un isomorfisme entre dues t-normes T i T', aleshores f és un isomorfisme entre les seves respectives quasi- inverses, (i.e.: $f(T(x,y)) = T'(f(x), f(y)) \Rightarrow f(\hat{T}(x|y)) = \hat{T}'(f(x))f(y)))$.

Definició 1.2.11. Sigui X un conjunt. Una **relació difusa** en X és una aplicació $R : X \times X \rightarrow [0,1]$.

R és reflexiva si, i només si, $R(x,x) = 1 \quad \forall x \in X$,

R és simètrica si, i només si, $R(x,y) = R(y,x) \quad \forall x,y \in X$.

Si identifiquem un conjunt amb la seva funció característica, com és habitual en la teoria de conjunts difusos, les relacions difuses generalitzen les relacions "clàssiques" (crisp) que són aplicacions de $X \times X$ en $\{0,1\}$.

Sigui T una t-norma. La següent definició és central en tot el treball:

Definició 1.2.12. Una relació difusa E en un conjunt X és una **T-indistingibilitat** si, i només si, satisfà

1.2.12.1. Reflexivitat $E(x,x) = 1 \quad \forall x \in X$.

1.2.12.2. Simetria $E(x,y) = E(y,x) \quad \forall x,y \in X$.

1.2.12.3. T-transitivitat $T(E(x,y), E(y,z)) \leq E(x,z) \quad \forall x,y,z \in X$.

$E(x,y)$ es pot interpretar com el **grau de similitud** entre els elements x,y. En aquest sentit, la T-transitivitat dóna coherència als valors de E en el sentit que donats tres elements x,y,z de X els seus graus de similitud no poden ser arbitraris, sinó que estan lligats per una mena de desigualtat triangular.

Cal notar que si E és una relació reflexiva i simètrica "clàssica", aleshores E és transitiva (i.e. E és una relació d'equivalència) si, i només si, E és T-transitiva per qualsevol t-norma T.

Donat que el present estudi està centrar en el concepte de T-indistingibilitat, convé analitzar per separat cada una de les propietats de la seva definició:

Reflexivitat.

La reflexivitat sembla una condició raonable a imposar a relacions que generalitzen el concepte de relació d'equivalència. En determinats moments, però, resultarà ser una condició massa estricta i caldrà prescindir d'ella. En el capítol 5, per exemple, es tractarà el problema de la reducció de clusters i, en aquest context, és natural prescindir d'aquesta condició com es veurà. En canvi, caldrà imposar una condició de coherència en els valors de E: $E(x, y) \leq E(x, x)$.

Simetria.

És la traducció immediata del concepte de relació simètrica clàssica. No és una propietat essencial des del punt de vista teòric. Si R és una relació reflexiva i T-transitiva (una tal R s'anomena **preorde**) aleshores $R'(x, y) = \mathrm{Min}(R(x, y), R(y, x))$ $\forall x, y \in X$ és una T-indistingibilitat. Des del punt de vista del Teorema de Representació (Capítol 3) els generadors de R són els mateixos que els de R' [Valverde, L. (1985)].

T-transitivitat.

Aquesta és la propietat essencial ja que és la que dóna coherència a la relació. El capítol 5 tracta bàsicament d'aquesta propietat.

Definició 1.2.13. Sigui E una T-indistingibilitat en un conjunt X.

Si $T =$Min, E s'anomena **similitud** (similarity).

Si $T = T_{\mathcal{L}}$, E s'anomena **semblança** (likeness).

Si $T = T_{\prod}$, E s'anomena **relació probabilística**.

1.3. t-conormes. S-mètriques

Aquesta secció és dual de l'anterior i conté les propietats bàsiques de **t-conormes** i **S-mètriques**.

Definició 1.3.1. Una operació S de $[0,1] \times [0,1]$ en [0,1] és una **t-conorma contínua** si, i només si, satisfà les següents propietats per cada $x, y, z, x', y' \in [0,1]$:

1.3.1.1. Associativitat: $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$

1.3.1.2. Monotonia:

Si $x \leq x'$, aleshores $S(x,y) \leq S(x',y)$

Si $y \leq y'$, aleshores $S(x,y) \leq S(x,y')$

1.3.1.3. Condicions de contorn: $S(0,x) = S(x,0) = x$

1.3.1.4. Continuïtat: S és contínua com a funcions de dues variables.

Totes les t-conormes d'aquest treball es suposaran contínues.

Donat que $S(x,y) \geq S(x,0) = x$ i $S(x,y) \geq S(0,y) = y$, es té que $S(x,y) \geq \text{Max}(x,y) \quad \forall x,y \in [0,1]$.

Per tant, per qualsevol t-conorma S es compleix $S(x,x) \geq x \quad \forall x \in [0,1]$.

Definició 1.3.2. Una t-conorma S és **arquimediana** si, i només, si

$$S(x,x) > x \quad \forall x \in (0,1).$$

Donada una t-conorma S, es defineix $S^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ recurrentment: $S^1(x) = x$, $S^n(x) = S(S^{n-1}(x), x)) \; \forall n > 1$.

Un element $x \in (0,1)$ es diu **nilpotent** si, i només si, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^n(x) = 1$.

Sigui Nil S el conjunt d'elements nilpotents de S. Es té la següent

Proposició i Definició 1.3.3. Si S és una t-conorma arquimediana, aleshores Nil $S = \emptyset$ ó Nil S = (0,1). En el primer cas, S es diu **estricta** i en el segon **no estricta**.

Definició 1.3.4. Dues t-conormes S, S' són **isomorfes** si, i només si, existeix una bijecció $f : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\forall x, y \in [0,1]$

$$f(S(x,y)) = S'(f(x), f(y)).$$

Un tal f ha de ser creixent i contínua.

1.3.5. Exemples de t-conormes.

1.3.5.1. La **t-conorma Màxim** definida per

$$\forall x, y \in [0,1] \quad \text{Màx}(x,y)$$

És no arquimediana.

1.3.5.2. La **t-conorma de Lukasiewicz** $S_{\mathcal{L}}$:

$$S_{\mathcal{L}}(x,y) = \text{Min}(x+y,1), \quad \forall x, y \in [0,1].$$

$S_{\mathcal{L}}$ és arquimediana no estricta.

1.3.5.3. La **t-conorma del producte** $S_{\prod}$:

$$S_{\prod}(x,y) = x + y - xy \qquad \forall x, y \in [0,1].$$

$S_{\prod}$ és arquimediana estricta.

Teorema 1.3.6. Tota t-conorma arquimediana no estricta és isomorfa a la t-conorma de Lukasiewicz $S_{\mathcal{L}}$.

Tota t-conorma arquimediana estricta és isomorfa a la t-conorma del producte $S_{\prod}$.

Teorema 1.3.7. Tota t-conorma és **suma ordinal** [Schweizer, B., Sklar, A. (1983)] de t-conormes arquimedianes i la t-conorma Màxim.

Definició 1.3.8. Donada una t-conorma S, la seva **quasi-inversa** $\hat{S}$ es defineix:

$$\hat{S}(x|y) = \inf\{\alpha \in [0,1] \mid S(\alpha, x) \geq y\} \quad \forall x, y \in [0,1].$$

1.3.9. Exemples.

1.3.9.1. $\widehat{\mathrm{Max}}(x|y) = \begin{cases} y, & \text{si } x < y \\ 0, & \text{si } x \geq y \end{cases}$

1.3.9.2. $\hat{S}_{\mathcal{L}}(x|y) = \begin{cases} y - x, & \text{si } x < y \\ 0, & \text{si } x \geq y \end{cases}$

1.3.9.3. $\hat{S}_{\prod}(x|y) = \begin{cases} \mathrm{Min}\left(\dfrac{y-x}{1-x}, 0\right), & \text{si } x \neq 1 \\ 0, & \text{si } x = 1 \end{cases}$

En aquest treball, la quasi-inversa $\hat{S}$ d'una t-conorma S permetrà generar S-mètriques via el Teorema de Representació (capítol 3).

Proposició 1.3.10. Si f és un isomorfisme entre dues t-conormes S i S', aleshores f és un isomorfisme entre les seves respectives quasi- inverses, (i.e.: $f(S(x,y)) = S'(f(x), f(y)) \Rightarrow f(\hat{S}(x|y)) = \hat{S}'(f(x))f(y)))$.

Definició 1.3.11. Una **relació difusa** m en un conjunt X és una **matriu de dissimilitud** (o **relació de dissimilitud**) si, i només si, és simètrica i $m(x,x) = 0 \quad \forall x \in X$.

Les matrius de dissimilitud són objectes duals a les relacions difuses reflexives i simètriques. S'usen amb gran profusió en Cluster Analysis, on $m(x, y)$ s'interpreta com el **grau de dissimilitud** dels elements x, y [Jardine, N., Sibson, R. (1977), Sneath, P.H.A., Sokal, R.P. (1973)].

<u>Definició 1.3.12.</u> Sigui S una t-conorma. Una **S-mètrica** en un conjunt X és una aplicació $m : X \times X \to [0, 1]$ (i.e. una relació difusa en X) que satisfà:

1.3.12.1. $m(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$.

1.3.12.2. <u>Simetria</u> $m(x, y) = m(y, x) \quad \forall x, y \in X$.

1.3.12.3. <u>Desigualtat triangular</u> $S(m(x, y), m(y, z)) \geq m(x, z) \quad \forall x, y, z \in X$.

Una S-mètrica és un tipus especial de **Mètrica Generalitzada** [Trillas, E., Alsina, C. (1978)] i generalitza la noció de **mètrica clàssica**.

De fet, si $S = S_{\mathcal{L}}$ és la t-conorma de Lukasiewicz es recuperen les mètriques clàssiques.

Si S =Max, aleshores 1.3.12.3 és la condició perquè m sigui una **ultramètrica**.

<u>1.4. Ternes de De Morgan. Dualitat</u>.

Ser i no-ser s'engendren l'un a l'altre

Difícil i fàcil es complementen l'un a l'altre

Llarg i curt són relatius l'un a l'altre

Alt i baix s'acompanyen l'un a l'altre

Lao Tse, *Tao Te King*.

En aquesta secció es formalitza la dualitat de les dues anteriors. Per això, és essencial introduir les nocions de negació forta i de terna de De Morgan.

Definició 1.4.1. Una **negació forta** és una bijecció φ de [0,1] en [0,1] decreixent, contínua i idempotent (i.e.: $\varphi^2 = j$).

L'exemple standard és $\varphi = 1 - j \quad (\varphi(x) = 1 - x)$.

Definició 1.4.2. Una **terna de De Morgan** és una terna (T, S, φ) on T és una t-norma, S una t-conorma i φ una negació forta relacionades per

1.4.2.1. $T \circ (\varphi \times \varphi) = \varphi \circ S$.

Aquesta relació és equivalent a

1.4.2.2. $S \circ (\varphi \times \varphi) = \varphi \circ T$.

Si en el context de la lògica difusa T, S, φ modelitzen la conjunció, la disjunció i la negació respectivament, aleshores 1.4.2.1 i 1.4.2.2 són les lleis de De Morgan de l'Àlgebra de Proporcions clàssiques.

1.4.3. Exemples de ternes de De Morgan:

1.4.3.1. $(T_{\mathcal{L}}, S_{\mathcal{L}}, 1 - j)$

1.4.3.2. $(T_{\prod}, S_{\prod}, 1 - j)$

1.4.3.3. $(\mathrm{Min}, \mathrm{Max}, \varphi)$ on φ és qualsevol negació forta.

Proposició 1.4.4. Si (T, S, φ) és una terna de De Morgan, aleshores es compleix

1.4.4.1. $\varphi \circ \hat{T} = \hat{S}(\varphi | \varphi)$

1.4.4.2. $\varphi \circ \hat{S} = \hat{T}(\varphi | \varphi)$

La dualitat entre T-indistingibilitats i S-mètriques s'expressa en les següents Proposicions:

Proposició 1.4.5. Sigui φ una negació forta.

(i) m és una matriu de dissimilitud en un conjunt X si, i només si, $\varphi \circ m$ és una relació reflexiva i simètrica en X.

(ii) R és una relació reflexiva i simètrica d'un conjunt X si, i només si, $\varphi \circ R$ és una matriu de dissimilitud en X.

Proposició 1.4.6. Sigui (T, S, φ) una terna de De Morgan.

(i) m és una S-mètrica en un conjunt X si, i només si, $\varphi \circ m$ és una T-indistingibilitat en X.

(ii) E és una T-indistingibilitat en un conjunt X si, i només si, $\varphi \circ E$ és una S-mètrica en X.

La dualitat és molt forta i es manté en diversos àmbits.

Per exemple, hi ha dualitat entre els productes Max-T i Min-S definits en el següent capítol: Entre d'altres proposicions es provarà que si m i R són una matriu de dissimilitud i una relació reflexiva i simètrica respectivament duals, aleshores les seves clausures via Min-S i Max-T també ho són.

D'altra banda, si m és una S-mètrica i E una T-indistingibilitat duals respecte la terna (T, S, φ) (i.e.: $\varphi \circ m = E$, $\varphi \circ E = m$), aleshores h és un generador de m en el sentit del Teorema de Representació de L. Valverde si, i només si, $\varphi \circ h$ és un generador de E (capítol 3).

Noti's que el fet que (T, S, φ) sigui una terna de De Morgan implica isomorfia entre T i S o, si es vol, isomorfia entre $([0,1], T)$ i $([0,1], S)$ com semigrups topològics.

En particular T és arquimediana si, i només si, S és arquimediana i el mateix val per estricta.

D'altra banda, (Min,Max) és l'única parella formada per una t-norma i una t-conorma duals per qualsevol negació forta i per tant, en aquest sentit, és l'única parella amb isomorfia canònica.