UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de doctorat de Matèmatica Aplicada

SOBRE LA REPRESENTACIÓ I GENERACIÓ DE RELACIONS D'INDISTINGIBILITAT

Autor: Jorge Recasens Ferrés
Director: Joan Jacas Moral

Desembre, 1991

3. T-indistingibilitats i S-mètriques via Teorema de Representació.

All animals are equal

but some animals are more

equal than others.

George Orwell. *Animal Farm.*

3.1. Introducció.

Cada conjunt difús h d'un conjunt donat X genera una T-indistingibilitat E_h en X d'una manera natural que s'explicitarà en la següent secció.

D'altra banda, es pot provar que l'ínfim de T-indistinguibilitats és una T-indistingibilitat.

Combinant aquests dos fets, en [Valverde, L. (1985)] es demostra un **Teorema de Representació** que expressat d'una manera informal diu que una relació difusa en un conjunt X és una T-indistingiblitat si, i només si, existeix una família de conjunts difusos $(h_i)_{i \in I}$ de X tals que

$$E = \inf_{i \in I} E_{h_i}$$

Aquest Teorema dóna un mètode alternatiu a la clausura Max-T per a generar T- indsitingibilitats.

En particular és especialment útil en el **reconeixement de formes**: Si interpretem un conjunt difús com els **graus d'adequació** dels elements a un determinat **patró**, el Teorema permet calcular una T- indistingibilitat a partir d'una família de conjunts difusos que medeixen els graus d'adequació a una família de patrons.

D'altra banda, al ser un Teorema de Representació, qualsevol T-indistingibilitat pot ser generada per una família de conjunts difusos i si aquesta família és "petita" serà més econòmic guardar la família que no la T-indistingibilitat. Això porta a un problema de gran importància pràctica, com s'ha vist, i teòrica, perque la seva solució porta a una millor comprensió de l'estructura de les T-indistingibilitats:

Donada una T-indistingibilitat E, trobar una **família minimal de generadors** de T. Una tal família es dirà una **base** de E i el cardinal d'una base la **dimensió** de E.

Un conjunt difús h es dirà un **generador** de E si forma part d'alguna família generadora de E. El problema de trobar la base i la dimensió d'una T-indistigin-bilitat E porta a estudiar l'estructura del **conjunt de generadors** H_E de E. En aquest sentit, [Jacas, J. (1988)] ha demostrat que H_E és un reticle i el conjunt de tancats d'una topologia difusa explotant el fet que el producte Max-T de E per conjunts difusos és un operador de clausura.

Donat que tota t-norma és suma ordinal de la t-norma Min i t-normes arquimedianes, té sentit restringir l'estudi de T-indistingibilitats a aquests casos.

Si X és finit i $T = Min$ (i.e., E és una similitud), [Jacas, J. (1990)] ha desenvolupat algorismes fàcilment implementables per trobar una base, i conseqüentment la dimensió de E.

En la secció 3.3. una interpretació geomètrica de H_E i el fet que els morfismes preserven dimensions i bases permetrà determinar una base i la dimensió de E, si T és una t-norma arquimediana.

La base quan $T = T_{\mathcal{L}}$ i $T = T_{\prod}$ està formada per generadors maximals (secció 3.3.) triats entre les solucions d'uns sistemes d'inequacions lineals especialment senzills.

D'altra banda és interessant trobar condicions que permetin determinar la dimensió d'una T-indistingibilitat sense haver de trobar-ne explícitament una base.

En aquest sentit, si T és arquimediana [Jacas, J. (1988)] ha caracteritzat les T-indistingibilitats unidimensionals pel fet que determinen una **relació B de Betweenness total** en X. Si X és finit, de cardinal n, aquesta condició és equivalent a dir que el cardinal de B és $2\binom{n}{3}$.

A la secció 3.4. es provarà que en el cas en què T sigui arquimediana, una T-indistingibilitat E determina una **relació de Betweenness** B en X. Si X és finit, el cardinal d'aquesta relació està íntimament lligada a la dimensió de E. D'una forma imprecisa, com més gran és la dimensió de E, més petit és el cardinal de B. La formalització d'aquesta idea en el **cas bidimensional** porta a buscar una cota (inferior) del cardinal de les relacions de betweenness determinades per T-indistingibilitats de dimensió 2. La resolució d'aquest problema ha resultat especialment fructífera, perquè la determinació d'aquesta cota ha resultat equivalent a la resolució d'un problema obert de tipus combinatori formulat per [Turán, P. (1954)]. D'aquesta manera, al **problema de Turán**, que en principi és un problema relatiu a hipergrafs, se li dóna una interpretació geomètrica que obre nous camins per a la seva resolució.

A la secció 3.5. l'equivalència entre el problema de Turán i el de trobar una cota per a les T-indistingibilitats bidimensionals es demostra a través de formulacions equivalents d'aquest últim.

La dualitat entre S-mètriques i T-indistingibilitats fa que, mutatis mutandi, tot el dit en aquesta secció valgui també per S-mètriques. En particular es té un **Teorema de Representació per S-mètriques** similar a de T-indistingibilitats (secció 3.3) i té sentit parlar de la **dimensió** i de la **base** d'una S-mètrica. En el cas arquimedià també determinen una relació de Betweenness en X que està relacionada amb la seva dimensió.

Si m, E són una S-mètrica i una T-indistingibilitat duals, aleshores tenen la mateixa dimensió i coneguda una base d'una d'elles es pot trobar una base de l'altra (secció 3.3.).

La secció 3.6. conté aplicacions i conseqüències de les anteriors:

- Es demostra una generalització del Teorema de Representació per mètriques "clàssiques" (i.e. valorades a $\mathbb{R}^+$).
- Es dóna una **cota** en el cas arquimedià, assolible sempre, **per a la dimensió** de S-mètriques, T-indistingibilitats (i mètriques clàssiques).
- **Es determinen les dimensions** de la mètrica derivada de la norma 1 a $\mathbb{R}^2$ i de la mètrica derivada de la norma ∞ i de l'euclídea a $\mathbb{R}^n$.
- Es dóna un nou **mètode per calcular la clausura Max-T** (T arquimediana) d'una relació reflexiva i simètrica que a l'hora en troba una base i la seva dimensió.
- Per acabar es dóna una condició necessària i suficient perquè l'**equació** $\mathbf{X}^2 = \mathbf{A}$ (A T-indistingibilitat) tingui solució no trivial.

3.2. El Teorema de Representació.

En aquesta secció s'enunciaran els Teoremes de Representació de T- indistingibilitats i S-mètriques de Valverde. Es recordarà la definició de generador, base i dimensió d'una T-indistingibilitat i d'una S-mètrica.

En [Jacas, J. (1987)], Jacas va introduir la noció de T-indistingibilitats isomorfes, que es generalitzarà al capítol 5, i va demostrar que isomorfismes de T-indistingibilitats conserven la dimensió i transformen bases en bases. Aquests resultats permetran reduir l'estudi de T-indistingibilitats, T-arquimediana, als casos $T = T_{\mathcal{L}}$ i $T = T_{\prod}$ i es reprodueixen en aquesta memòria per fer-la autocontinguda.

D'altra banda, es provarà que si E, m són una T-indistingibilitat i una S-mètrica duals respecte (T, S, φ), aleshores h és un generador de E, si, i només si, $\varphi \circ h$ és un generador de m. En conseqüència E i m tenen la mateixa dimensió i $(h_i)_{i \in I}$ és una base de E si, i només si, $(\varphi \circ h_i)_{i \in I}$ és una base de m.

Lemma 3.2.1. Sigui h un conjunt difús en un conjunt X. Sigui T una t-norma. La relació E_h en X definida per la següent fòrmula és una T-indistingibilitat

$$\forall x, y \in X \quad E_h(x, y) = \hat{T}(\mathrm{Max}(h(x), h(y)) \mid \mathrm{Min}(h(x), h(y))).$$

Lemma 3.2.2. Sigui $(E_i)_{i \in I}$ una família de T- indistingibilitats en un conjunt X. Aleshores la relació

$$\forall x, y \in X \quad E(x, y) = \inf_{i \in I} E_i(x, y)$$

és una T-indistingibilitat.

Combinant aquests dos lemes, [Valverde, L. (1985)] va demostrar el següent teorema:

Teorema de Representació de T-indistingiblitats (Valverde) 3.2.3. Sigui E una relació difusa en un conjunt X i T una t-norma.

E és una T-indistingibilitat si, i només si, existeix una família $(h_i)_{i \in I}$ de conjunts difusos de X tal que

$$E = \inf_{i \in I} E_{h_i}.$$

Exemples 3.2.4.

3.2.4.1. Si $T = \text{Min}$, aleshores **la similitud** generada per h és

$$E(x,y) = \begin{cases} \text{Min}(h(x), h(y)), & \text{si } h(x) \neq h(y) \\ 1, & \text{altrament} \end{cases}$$

3.2.4.2. Si $T = T_{\prod}$, aleshores **la relació probabilística** generada per h és

$$E(x,y) = \begin{cases} \text{Min}\left(\dfrac{h(x)}{h(y)}, \dfrac{h(y)}{h(x)}\right) & \\ 1, & \text{si } h(x) = h(y) = 0 \end{cases}$$

3.2.4.3. Si $T = \prod_{\mathcal{L}}$, aleshores **la semblança (likeness)** generada per h és

$$E(x,y) = 1 - |h(x) - h(y)|.$$

Definició 3.2.5. Donada una T-indistingibilitat E en X, una família com la del Teorema 3.2.3. es dirà una **família generadora** o un **sistema de generadors** de E.

Definició 3.2.6. Un conjunt difús h de X es dirà un generador de E si, i només si, forma part d'alguna família generadora de E o H_E denotarà el **conjunt de generadors** de E.

Es clar, de la definició, que $h \in H_E$ si, i només si, $E_h \geq E$.

Definició 3.2.7. Donada una T-indistingibilitat E en X, l'ínfim dels cardinals dels índexs de les famílies generadores de E es dirà la **dimensió** de E. Una família generadora de E amb el conjunt d'índexs d'aquest cardinal es dirà una **base** de E.

Donada una família generadora d'una T-indistingiblitat E, no sempre és possible trobar-ne una subfamília que sigui base de E. Per tant, trobar la dimensió i una base de E és un problema no trivial.

Dualment, es té el següent Teorema per a S-mètriques:

Teorema de Representació de S-mètriques (Valverde) 3.2.8. Sigui m una relació difusa en un conjunt X i S una t-conorma:

m és una S-mètrica en X si, i només si, existeix una família $(h_i)_{i\in I}$ de conjunts difusos de X tal que

$$\forall x, y \in X \quad m(x,y) = \sup_{i\in I} \hat{S}(\mathrm{Min}(h_i(x), h_i(y)) \mid \mathrm{Max}(h_i(x), h_i(y))).$$

Exemples 3.2.9.

3.2.9.1. Si $S = \mathrm{Max}$, aleshores la **ultramètrica** generada per h és

$$m(x,y) = \begin{cases} \mathrm{Max}(h(x), h(y)), & \text{si } h(x) \neq h(y) \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

3.2.9.2. Si $S = T_{\mathcal{L}}$, aleshores la **mètrica** generada per h és

$$m(x,y) = |h(x) - h(y)|.$$

Dimensió, **sistema de generadors**, **generador** i **base** es defineixen per S-mètriques de forma anàloga a 3.2.5-3.2.7.

H_m denotarà el **conjunt de generadors** de la S-mètrica m i és clar que si m_h és la S-mètrica generada per h, aleshores $h \in H_m$ si, i només si, $m_h \leq m$.

Els següents resultats permeten introduir la noció d'isomorfisme entre indistingibilitats i proven la bondat d'aquesta noció respecte al Teorema de Representació. Una exposició més detallada es pot trobar en [Jacas, J. (1987)].

Lema 3.2.10. (Jacas). Si f és un isomorfisme entre les t-normes T i T', aleshores si E és una T-indistingibilitat en X, aleshores $f \circ E$ és una T'-indistingiblitat en X. E i $f \circ E$ es diran **indistingibilitats isomorfes**.

Proposició 3.2.11. (Jacas) Amb les notacions del Lema anterior, si $(h_i)_{i \in I}$ és una família generadora de E, aleshores $(f \circ h_i)_{i \in I}$ és una família generadora de $f \circ E$.

Corol.lari 3.2.12. (Jacas) Isomorfismes entre t-normes preserven dimensions d'indistingibilitats i envien bases a bases.

Donat que totes les t-normes arquimedianes són isomorfes a $T_{\prod}$ o a $T_{\mathcal{L}}$, el corol.lari permet reduir el problema de trobar la dimensió i una base de T-indistingibilitats, T arquimediana, als casos $T = T_{\mathcal{L}}$ i $T = T_{\prod}$.

Noti's que també es pot definir la noció de mètriques isomorfes i demostrar resultats anàlegs a 3.2.10.-3.2.12.

D'altra banda la següent proposició demostra que si és resol el problema de trobar la dimensió i la base per T-indistingibilitats, aleshores també estarà resolt per S-mètriques i viceversa.

Proposició 3.2.13. Sigui (T, S, φ) una terna de De Morgan i E, m una T-indistingibilitat i una S-mètrica respectivament en X duals (i.e., $m = \varphi \circ E$). h és un generador de E si, i només si, $\varphi \circ h$ és un generador de m.

Demostració. Si $E(x,y) = \operatorname{Inf}_{i \in I} \hat{T}(\operatorname{Max}(h_i(x), h_i(y)) \mid \operatorname{Min}(h_i(x), h_i(y)))$, aleshores

$$
\begin{aligned}
m(x,y) = \varphi \circ E(x,y) &= \varphi \operatorname*{Inf}_{i\in I} \hat{T}\left(\mathrm{Max}(h_i(x), h_i(y)) \mid \mathrm{Min}(h_i(x), h_i(y))\right) = \\
&= \sup_{i\in I} \varphi\hat{T}\left(\mathrm{Max}(h_i(x), h_i(y)) \mid \mathrm{Min}(h_i(x), h_i(y))\right) = \\
&= \sup_{i\in I} \hat{S}\left(\varphi\,\mathrm{Max}(h_i(x), h_i(y)) \mid \varphi\,\mathrm{Min}(h_i(x), h_i(y))\right) = \\
&= \sup_{i\in I} \hat{S}\left(\mathrm{Min}(\varphi h_i(x), \varphi h_i(y)) \mid \mathrm{Max}(\varphi h_i(x), \varphi h_i(y))\right). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Corol.lari 3.2.15. Amb les notacions de la proposició anterior, $\dim E = \dim m$ i $(h_i)_{i\in I}$ és una base de E si, i només si $(\varphi h_i)_{i\in I}$ és una base de m.

3.3. Determinació d'una base.

Una base d'una T-indistingibilitat E està formada per elements de H_E, el conjunt de generadors de E.

La búsqueda de bases de E porta per tant a estudiar l'estructura de H_E.

En aquest sentit, [Jacas, J. (1987), (1988)] ha demostrat d'una banda que H_E és **un subreticle** de $[0,1]^X$, i d'altra banda que H_E és el conjunt de **tancats d'una topologia difusa** en X.

Paradoxalment, ambdues estructures són massa riques i no permeten trobar un subconjunt de generadors distingits amb els quals formar una base de E.

En aquesta secció es definirà un **preordre** en H_E. Els **elements maximals** de l'ordre parcial induit per aquest preordre jugaran un paper important.

H_E s'identificarà de forma natural amb un subconjunt de $[0,1]^{\mathrm{card}\ X}$ i en el cas $T = T_{\mathcal{L}}$ i $T = T_{\prod}$ i si card X és finit, H_E és un **políedre** especialment senzill de $[0,1]^{\mathrm{card}\ X}$ i podrem trobar una base formada per elements de les seves arestes, que són maximals. D'aquesta manera s'haurà resolt el problema de trobar una base, i conseqüentment la dimensió, d'una T-indistingibilitat en els casos $T = T_{\mathcal{L}}$ i $T = T_{\prod}$. Pel dit a la secció anterior (corol.lari 3.2.12.) es té el problema **resolt per t-normes arquimedianes.** També es té el problema **resolt per S-mètriques, S arquimedianes**, pel Corol.lari 3.2.15.

Definició 3.3.1. Sigui E una T-indistingibilitat en un conjunt X i H_E el seu conjunt de generadors. En H_E es defineix la següent relació:

$$h \leq h' \quad \text{si, i només si } E_h \geq E_{h'}$$

on E_h denota la T-indistingibilitat generada per h.

Lema 3.2.2. $\leq$ és una relació de preordre en H_E.

Demostració. Trivial. ■

Com és usual, definim una relació d'equivalència $\sim$ en H_E per obtenir un ordre parcial:

$$h \sim h' \quad \text{si, i només si,} \quad E_h = E_{h'}$$

Definició 3.3.3. El conjunt quocient $H_E/\sim$ es denotarà H_E^p i es dirà el **projectivitzat** de H_E. Un element h de H_E es dirà **maximal** si, i només si, la seva classe $\overline{h}$ és maximal en H_E^p.

El nom de H_E^p prové de la següent proposició:

Proposició 3.3.4. Si $T = T_{\prod}$ i E és una relació probabilística en un conjunt X de cardinal diferent de 2, aleshores donats $h, h' \in H_E$ es té $h \sim h'$ si, i només si, $\exists \alpha \in \mathbf{R}^*$ tal que $h' = \alpha h$.

Demostració. És conseqüència de 3.2.4.2. ∎

De forma anàloga

Proposició 3.3.5. Si $T = T_{\mathcal{L}}$ i E és una semblança en un conjunt X de cardinal diferent de 2, aleshores donats $h, h' \in H_E$ es té $h \sim h'$ si, i només si, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $h = h + \alpha$.

Demostració. Es conseqüència de 3.2.4.3. ∎

Proposició 3.3.6. Si $T = \text{Min}$ i E és una similitud en un conjunt X de cardinal diferent de 2. Sigui $h \in H_E$ un generador que assoleix un màxim i.e., $\exists x_M \in X$ tal que $h(x_M) \geq h(x) \;\; \forall x \in X$. Sigui $Y \subset X$ el conjunt d'elements x de X tals que $h(x) = h(x_M)$. Sigui $s = \sup_{x \in X-Y}\{h(x)\}$. Sigui $h' \in H_E$. Es té $h' \sim h$ si, i només si, $\forall x \in X - Y \;\; h(x) = h'(x)$ i

$$h'(Y) = \{t\} \quad \text{on } s \leq t \leq 1.$$

Demostració. És conseqüència de 3.2.4.1. ∎

Els següents resultats donen un paper rellevant als elements maximals.

Lemma 3.3.7. Sigui M el conjunt d'elements maximals de la T- indistingibilitat E. Aleshores $E = \text{Inf}_{h \in M} E_h$.

Demostració. Trivial. ∎

Proposició 3.3.8. Sigui $(h_i)_{i \in I}$ una família generadora de la T-indistingibilitat E. Aleshores existeix una família generadora $(h'_i)_{i \in I}$ formada per elements maximals amb el mateix conjunt d'índexs.

Demostració. Cada h_i està contingut en algun maximal h'_i. ■

Corol.lari 3.3.9. Donada una T-indistingibilitat E, sempre és possible trobar una base de E formada per elements maximals.

A partir d'ara i fins al final de la secció, suposarem que X és un conjunt finit i els seus elements estan ordenats (i.e., $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$).

En aquest cas, cada conjunt difús h de X es pot identificar amb el punt $(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_h))$ de $[0,1]^n$.

Sigui E una T-indistingibilitat en X i H_E el conjunt de generadors de E. Aleshores $h \in H_E$ si, i només si, $E_h \geq E$. D'una forma més explícita $h \in H_E$ si, i només si, $\forall i, j = 1, \ldots, n$

$$\hat{T}(\mathrm{Max}(h(a_i), h(a_j)) \,|\, \mathrm{Min}\, h(a_i), h(a_j))) \geq E(a_i, a_j) \tag{1}$$

(1) és un sistema d'inequacions i H_E és precisament la solució de (1) més

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Per tant es té la següent caracterització geomètrica de H_E:

Teorema 3.3.10. Sigui E una T-indistingibilitat en X. El conjunt H_E de generadors de E és la solució del següents sistema d'inequacions:

$$\begin{cases} \hat{T}(\mathrm{Max}(x_i, x_j) \mid \mathrm{Min}(x_i, x_j)) \geq E(a_i, a_j) & 1 \leq i < j \leq n \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{2}$$

Si $T = T_{\mathcal{L}}$, (1) té una expressió molt senzilla:

$$1 - |h(a_i) - h(a_j)| \geq E(a_i, a_j)$$

o

$$|h(a_i) - h(a_j)| \leq 1 - E(a_i, a_j) \tag{3}$$

Aquesta inequació es pot desglossar en dues de lineals:

$$h(a_i) - h(a_j) \leq 1 - E(a_i, a_j)$$

$$h(a_j) - h(a_i) \leq 1 - E(a_i, a_j)$$

Si $T = T_{\prod}$, aleshores (1) s'escriu

$$\text{Min}\left(\frac{h(a_i)}{h(a_j)}, \frac{h(a_j)}{h(a_i)}\right) \geq E(a_i, a_j) \tag{3'}$$

Aquesta inequació es pot desglossar en dues de lineals i homogènies:

$$h(a_i) \geq E(a_i, a_j)h(a_j)$$

$$h(a_j) \geq E(a_i, a_j)h(a_j)$$

Per tant hem demostrat els següents dos Teoremes, casos particulars de 3.3.10:

Teorema 3.3.11. Si E és una semblança ($T = T_{\mathcal{L}}$) en X, aleshores el conjunt H_E de generadors de E és el poliedre de $[0,1]^n$ determinat pel següent sistema lineal d'inequacions:

$$x_i - x_j \leq 1 - E(a_i, a_j) \tag{4}$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

Teorema 3.3.12. Si E és una relació probabilística ($T = T_{\prod}$) en X, aleshores el conjunt H_E de generadors de E és el poliedre de $[0,1]^n$ determinat pel següent sistema lineal homogeni d'inequacions

$$x_i - E(a_i, a_j)x_j \geq 0 \tag{4'}$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{5'}$$

La disposició dels elements d'una base d'una semblança o d'una relació probabilística és relativament estricta tal com es mostra en la següent proposició:

Proposició 3.3.13. Els elements d'una base d'una semblança o d'una relació probabilística E són a les (hiper) cares de H_E determinades per (4) i (4') respectivament.

Demostració. Sigui $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ una base de E si, per exemple h_1 no estigués a cap cara, es tindria

$$E_{h_1}(a_i, a_j) > E(a_i, a_j) \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Per tant $H - \{h_1\}$ també generarà E. Contradicció. ∎

Si $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ és una base d'una semblança o d'una relació probabilística E, i per exemple h_1 és a, diguem, t cares, aleshores el conjunt $H' = \{h'_1, h_2, \ldots, h_k\}$ obtingut canviant h_1 per un conjunt difús que estigui en una aresta continguda en aquestes t cares també és una base de E. Repetint aquest procés per cada $h_i \in H$ podrem trobar una base amb tots els generadors en les arestes de H_E. Per tant s'ha provat el següent Teorema:

Teorema 3.3.14. Sigui E una semblança o una relació probabilística. Sempre és possible trobar una base de E amb tots els seus elements en les arestes de H_E.

Noti's que els elements de les arestes són maximals.

És clar que els elements d'una base com la del Teorema anterior pertanyen a arestes diferents i com que el nombre d'arestes és finit es té un procés finitari per trobar una base de E:

Mètode para trobar una base 3.3.15.: Es determina un generador a cada aresta de H_E. Sigui A el conjunt d'aquests generadors. S'agafen d'un en un i es mira si generen E. Si algun genera E, és una base i la dimensió de E és 1. En cas contrari es repeteix el procés agafant els generadors de dos en dos, de tres en tres, etc. fins a trobar un subconjunt de A que generi E. Aquest subconjunt és una base de E i el seu cardinal la dimensió de E.

Per tant queda resolt el problema de determinar una base i la dimensió d'una T-indistingibilitat en el cas finit i $T = T_{\mathcal{L}}$ ó $T = T_{\prod}$ i, per 3.2.12, per qualsevol T arquimediana. Per 3.2.15. queda també resolt el problema per S-mètriques, S arquimediana.

Noti's que el Mètode 3.3.15. seria més eficaç si es tingués una estimació a priori de la dimensió de E. La següent secció i part de la 3.6. es dedicaran a aquesta qüestió.

Exemple 3.3.16. El conjunt de generadors de la relació probabilística E en $X = \{a_1, a_2, a_3\}$ determinada per la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.23 & 0.37 \\ 0.23 & 1 & 0.26 \\ 0.37 & 0.26 & 1 \end{pmatrix}$$

és la part de la piràmide de vèrtex l'origen de coordenades i les arestes de la qual passen pels punts A, B, C, D, E, F continguda en $[0,1]^3$.

$$A = (0.37, 0.26, 1)$$

$$B = (1, 0.23, 0.86)$$

$$C = (1, 0.23, 0.37)$$

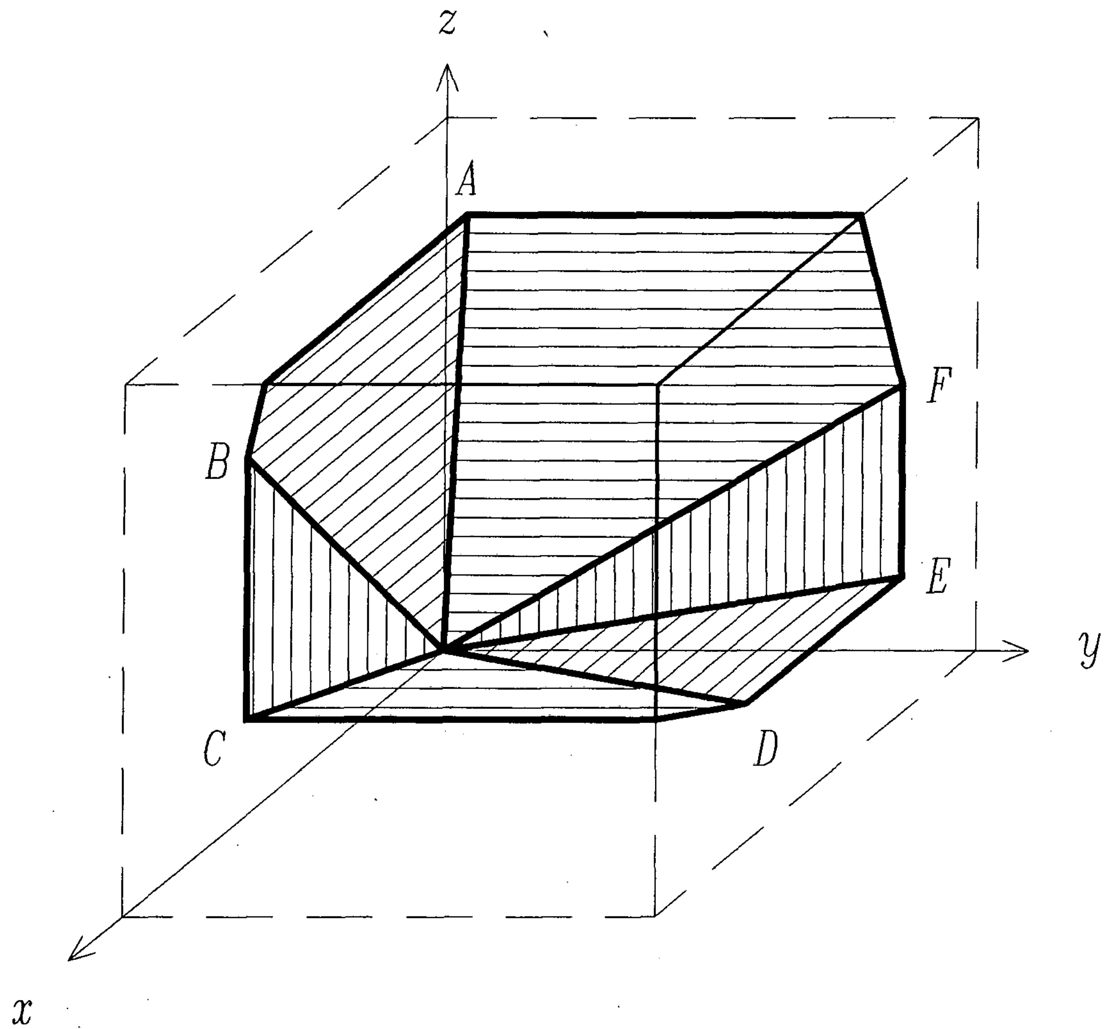
$$D = (0.72, 1, 0.26)$$

$$E = (0.23, 1, 0.26)$$

$$F = (0.23, 1, 0.61)$$

Una base de E està formada pels conjunts difusos

$$B = (1, 0.23, 0.86) \qquad \text{i} \qquad F = (0.23, 1, 0.61)$$



E és, per tant, bidimensional.

<u>Exemple 3.3.17.</u> El conjunt de generadors de la semblança (likeness) E en $X = \{a_1, a_2, a_3\}$ determinada per la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.32 & 0.42 \\ 0.32 & 1 & 0.36 \\ 0.42 & 0.36 & 1 \end{pmatrix}$$

és la part del prisma d'arestes paral.leles a la recta $x = y = z$ i que passen pels punts A, B, C, D, E, F continguda en $[0,1]^3$.

$$A = (0.68, 0, 0.64)$$

$$B = (0.68, 0, 0.1)$$

$$C = (0.58, 0.64, 0)$$

$$D = (0, 0.68, 0.04)$$

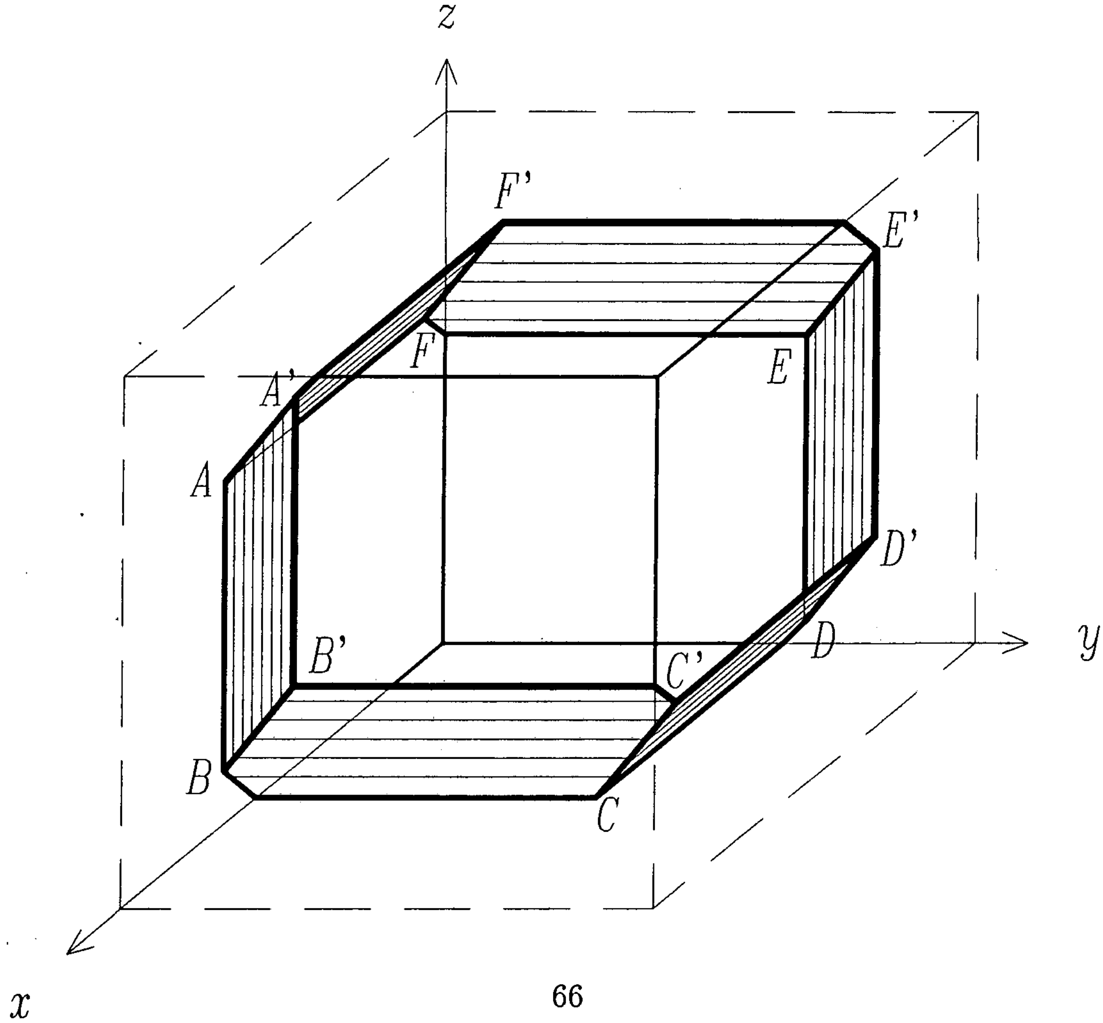
$$E = (0, 0.68, 0.58)$$

$$F = (0.06, 0, 0.64)$$

Una base de E està formada pels conjunts difusos

$$A = (0.68, 0, 0.64) \qquad \text{i} \qquad B = (0.68, 0, 0.1)$$

E és, per tant, bidimensional.



3.4. Relacions de Betweenness. T-indistingibilitats i S-mètriques bidimensionals

Tota T-indistingibilitat té associada de forma natural una T-indistingibilitat **separadora** i es provarà que tenen la mateixa dimensió.

D'altra banda, si T és una t-norma arquimediana, tota T-indistingibilitat **separadora** E en un conjunt X determina una relació de Betweenness en X que està íntimament lligada a la seva dimensió.

[Jacas, J. (1988)] ha demostrat una T-indistingibilitat separadora unidimensional si, i només si, la relació de Betweeenness que determina és total.

El mateix val per S-mètriques i si E, m són una T-indistingibilitat i una S-mètrica duals, aleshores determinen la mateixa relació de Betweenness.

En aquesta secció s'estudiarà les relacions de Betweenness generades per T-indsitingiblitats i S-mètriques bidimensionals. Determinar una cota al cardinal d'aquestes relacions quan X és finit portarà a un problema geomètric equivalent al problema de Turán.

Definició 3.4.1. Una T-indistingibilitat E en un conjunt X és **separadora** si, i només si, $E(x,y) \neq 1$, si $x \neq y$.

Donada una T-indistingibilitat E en X, la relació $\sim$ en X definida per $x \sim y$ si, i només si, $E(x,y) = 1$ és d'equivalència i la relació $\overline{E}$ definida en $\overline{X} = X/\sim$ per $E(\overline{x}, \overline{y}) = E(x,y)$ és una T-indistingibilitat separadora.

Lema 3.4.2. Si h és un generador de la T-indistingibilitat E en X i $E(x,y) = 1$, aleshores $h(x) = h(y)$.

Demostració. $E_h(x,y) = \hat{T}(\mathrm{Max}(h(x), h(y)) \mid \mathrm{Min}(h(x), h(y))) = 1.$

Per tant $\mathrm{Max}(h(x), h(y)) \leq \mathrm{Min}(h(x), h(y))$ i conseqüentment $h(x) = h(y)$.

■

Proposició 3.4.3. Amb les notacions anteriors, dim E=dim $\overline{E}$.

Demostració. $(h_i)_{i\in I}$ és una família generadora de E si, i només si la família $(\overline{h_i})_{i\in I}$ és una família generadora de $\overline{E}$ on $h_i(\overline{x}) = h_i(x)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_i"] \arrow[d] & {[0,1]} \\ \overline{X} = X/\sim \arrow[ur, "\overline{h_i}"'] & \end{tikzcd}$$

■

Corol.lari 3.4.4. Amb les notacions anteriors, $(h_i)_{i\in I}$ és una base de E si, i només si $(\overline{h_i})_{i\in I}$ és una base de $\overline{E}$.

Per tant podem superar sense pèrdua de generalitat que E és separadora en l'estudi de la dimensió de T-indistingibilitats.

Definició 3.4.5. Una S-mètrica m en un conjunt X és **separadora** si, i només si, $m(x,y) \neq 0$, si $x \neq y$.

La Proposició 3.4.3. i el Corol.lari 3.4.4. són vàlids també per a S- mètriques.

Definició 3.4.6. (Menger) [Menger, K. (1928), Trillas, E., Alsina, C. (1978)]. Sigui X un conjunt. Una relació ternària $B \subset X \times X \times X$ és una **relació de Betweenness** en X si, i només si les ternes (x,y,z) de B verifiquen:

3.4.6. 1) $x \neq y \neq z \neq x$.

3.4.6. 2) $(z,y,x) \in B$.

3.4.6. 3) $(y,z,x) \notin B$, $(z,x,y) \notin B$.

3.4.6. 4) si, a més $(x,z,t) \in B$, aleshores $(x,y,t) \in B$ i $(y,z,t) \in B$.

Exemple 3.4.7. L'exemple clàssic és el següent: Si (X,m) és un espai mètric aleshores la relació $(x,y,z) \in B$ si, i només si, $m(x,y) + m(y,z) = m(x,z)$ és una relació de Betweenness en X.

Definició 3.4.8. Si B és una relació de Betweenness en X i $(x,y,z) \in B$, aleshores es diu que y és **entre** x i z. Si donats tres elements de X sempre n'hi ha un entre els altres dos, aleshores es diu que la relació de Betweenness és **total**.

Lema 3.4.9. Si X és finit de cardinal n i B és una relació de Betweenness en X, aleshores B és total si, i només si, el cardinal de B és $2\binom{n}{3}$.

Demostració. És conseqüència immediata de la definició. ∎

Anem a veure que, en el cas arquimedià, les T-indistingibilitats i S mètriques separadores determinen relacions de Betweenness. Abans necessitem els següents lemes:

Lema 3.4.10. Siguin E una T-indistingibilitat i E' una T'- indistingibilitat en X isomorfes. Aleshores, donats $x, y, z \in X$

$$T(E(x,y), E(y,z)) = E(x,z) \quad \text{si, i només si} \quad T'(E'(x,y), E'(y,z)) = E'(x,z).$$

Demostració. Sigui f un isomorfisme entre T i T' (i.e. $f \circ T = T'(f \times f)$) $T(E(x,y), E(y,z)) = E(x,z) \Leftrightarrow f \circ T(E(x,y), E(y,z)) = fE(x,z) \Leftrightarrow T'(fE(x,y), fE(y,z)) = fE(x,z) \Leftrightarrow T'(E'(x,y), E'(y,z)) = E'(x,z)$. ∎

Lema 3.4.11. Siguin m una S-mètrica i m' una S'-mètrica en X isomorfes. Aleshores, donats $x, y, z \in X$

$$S(m(x,y), m(y,z)) = m(x,z) \quad \text{si, i només si,} \quad S'(m'(x,y), m'(y,z)) = m'(x,z)$$

Demostració. Anàloga a l'anterior. ∎

Teorema 3.4.12. Sigui T una t-norma arquimediana i E una T- indistingiblitat separadora en un conjunt X tal que $E(x,y) \neq 0 \; \forall x, y \in X$.

La relació ternària B en X definida per

$$(x,y,z) \in B \,\text{si, i només si}\;\; T(E(x,y), E(y,z)) = E(x,z) \,\text{i}\, x \neq y \neq z \neq x$$

és una relació de Betweenness en X.

Demostració.

3.4.6.1. Trivial.

3.4.6.2. És conseqüència de la commutativitat de T i de la simetria de E.

3.4.6.3. Anem a veure, per exemple, que si $(x, y, z) \in B$, aleshores $(y, z, x) \notin B$. (De forma anàloga es veuria $(z, x, y) \notin B$):

Hem de provar que $T(E(y, z), E(z, x)) < E(y, x)$.

Suposem $T(E(y, z), E(z, x)) = E(y, x)$.

Aleshores $T(T(E(y, z), E(z, x)), E(y, z)) = E(x, z)$ i per tant

$T(T(E(y, z), E(y, z)), E(x, z)) = E(x, z)$ per l'associativitat i commutativitat de T, i per la simetria de E.

Però el fet que $E(x, z) \neq 0$ porta a contradicció, perque l'última igualtat implica $T(E(y, z), E(y, z)) = 1$ i per tant $E(y, z) = 1$. Però E és separadora.

3.4.6.4. Anem a veure que si $(x, y, z) \in B$ i $(x, z, t) \in B$ aleshores $(y, z, t) \in B$ (De forma anàloga es veuria $(x, y, t) \in B$):

$$\begin{aligned} E(x, t) = T(E(x, z), E(z, t)) &= T(T(E(x, y), E(y, z)), E(z, t)) \\ &= T(E(x, y), T(E(y, z), E(z, t))) \end{aligned}$$

i donat que $T(E(y, z), E(z, t)) \leq E(y, t)$ la monotonia de T assegura

$$E(x, t) \geq T(E(x, y), E(y, t)) \geq T(E(x, y), T(E(y, z), E(z, t))) = E(x, t)$$

i per tant

$$T(E(x, y), E(y, t)) = T(E(x, y), T(E(y, z), E(z, t)))$$

i com que $E(x, y) \neq 0, 1$, $E(y, t) = T(E(y, z), E(z, t))$. ■

Per S-mètriques es té un Teorema similar:

<u>Teorema 3.4.13.</u> Sigui S una t-conorma arquimediana i m una S-mètrica separadora en un conjunt X tal que $m(x, y) \neq 1$ $\forall x, y \in X$.

La relació ternària B en X definida per

$$(x, y, z) \subset B \text{ si, i només si } S(m(x, y), m(y, z)) = m(x, z) \text{ i } x \neq y \neq z \neq x$$

és una relació de Betweenness en X.

Demostració. Anàloga a l'anterior. ∎

Proposició 3.4.14. Sigui (T, S, φ) una terna de De Morgan T, S arquimedianes i E, m una T-indistingibilitat i una S-mètrica en X respectivament duals. Aleshores les relacions de Betweenness definida per E i per m coincideixen.

Demostració.

$$T(E(x,y), E(y,z)) = E(x,z) \Leftrightarrow \varphi T(E(x,y), E(y,z)) = \varphi E(x,z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S(\varphi E(x,y), \varphi(E(y,z)) = \varphi E(x,z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S(m(x,y), m(y,z)) = m(x,z).$$

∎

D'altra banda és conseqüència immediata dels Lemes 3.4.10 i 3.4.11 que indistingibilitats i mètriques isomorfes determinen la mateixa relació de Betweenness.

La condició $E(x,y) \neq 0$ $(m(x,y) \neq 1)$ és necessària, perque si es té $x \neq y \neq z \neq x$ i $E(x,y) = E(x,z) = 0$ $(m(x,y) = 1, m(x,z) = 1)$, aleshores $(x,y,z) \in B$ i $(x,z,y) \in B$ i no es cumpleix 3.4.6.3. Si només hi ha una parella (x,y) d'elements de X tals que $E(x,y) = 0$ $(m(x,y) = 1)$, aleshores el Teorema continua essent cert.

En [Jacas, J. (1988)] es caracteritzen les T-indistingibilitats i S-mètriques separadores unidimensionals:

Teorema 3.4.15. (Jacas). Sigui T una t-norma arquimediana. Sigui E una T-indistingibilitat separadora en X tal que $E(x,y) \neq 0 \; \forall x,y \in X$. E és unidimensional si, i només si, la relació de Betweenness que determina en X es total.

Teorema 3.4.16. (Jacas). Sigui S una t-conorma arquimediana. Sigui m una S-mètrica separadora en X tal que $m(x,y) \neq 1 \; \forall x,y \in X$. m és unidimensional si, i només si, la relació de Betweenness que determina en X és total.

A partir d'ara, fins al final de la secció estudiarem les relacions de Betweenness determinades per T-indistingibilitats i S-mètriques bidimensionals recolzant-nos en els Teoremes anteriors. Pels lemes 3.4.10 i 3.4.11 ens podem restringir a estudiar els casos $T = T_{\mathcal{L}}$ i $T_{\prod}$ i $S = S_{\mathcal{L}}$ i $S_{\prod}$ i per la proposició 3.4.14 a estudiar T-indistingibilitats o S-mètriques.

Per qüestions tècniques estudiarem $S_{\mathcal{L}}$-mètriques i $T_{\prod}$-indistingibilitats (relacions probabilístiques):

$S_{\mathcal{L}}$-mètriques.

A partir d'aquí i fins al final d'aquesta secció X serà un conjunt finit $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de cardinal n, i m una $S_{\mathcal{L}}$-mètrica separadora en X bidimensional i tal que $m(x,y) \neq 1 \; \forall x,y \in X$.

Sigui $\{h_1, h_2\}$ una base de m.

La $S_{\mathcal{L}}$-mètrica m_i generada per h_i, $i = 1,2$ ve donada per

$$m_i(x,y) = |h_i(x) - h_i(y)|$$

i $m(x,y) = \sup\limits_{i=1,2} m_i(x,y) = \mathrm{Max}(|h_1(x) - h_1(y)|, |h_2(x) - h_2(y)|)$.

Sigui B la relació de Betweenness determinada per m en X. Siguin x_i, x_j, x_k tres elements diferents de X. Aleshores $(x_i, x_j, x_k) \in B$ si, i només si, $m(x_i, x_k) = m(x_i, x_j) + m(x_j, x_k)$.

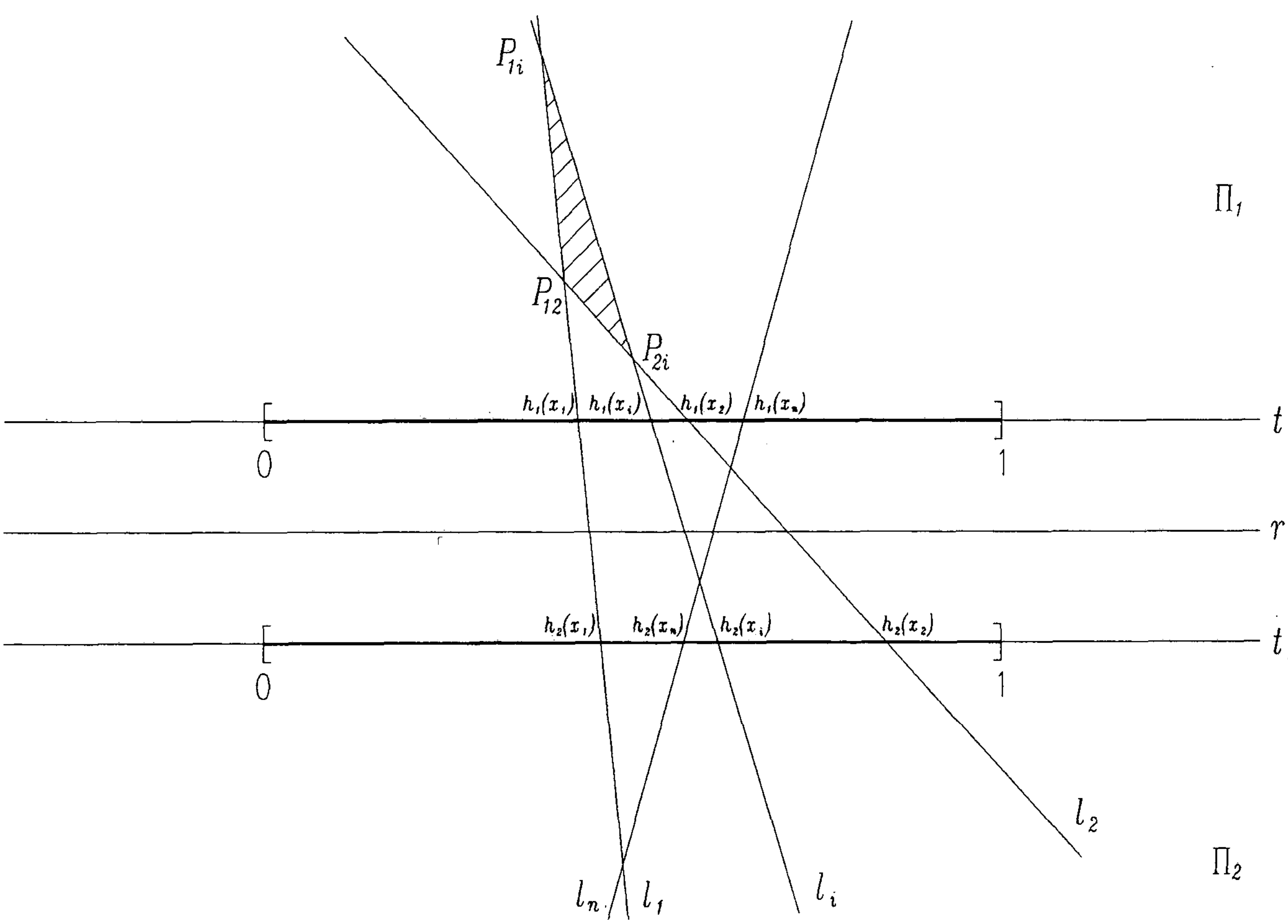
Aquesta igualtat es compleix si i només si es cumpleix

$$m(x_i, x_k) = m_1(x_i, x_k),\ m(x_i, x_j) = m_1(x_i, x_j),\ m(x_j, x_k) = m_1(x_j, x_k) \qquad (1)$$

o

$$m(x_i, x_k) = m_2(x_i, x_k),\ m(x_i, x_j) = m_2(x_i, x_j),\ m(x_j, x_k) = m_2(x_j, x_k) \qquad (2)$$

La següent representació geomètrica permetrà trobar una cota inferior al cardinal de la relació de Betweenness B determinada per m en X (veure figura).



Considerem una recta r en el pla. Aquesta recta determina dos semiplans tancats π_1, π_2. Siguin t_1, t_2 dues rectes situades en π_1 i π_2 respectivament, paral.leles a r i a igual distància de r. En aquestes rectes t_1, t_2 hi marquem sengles còpies de l'interval [0,1]. A l'interval de t_1 hi marquem els punts $h_1(x_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ i a l'interval de t_2 hi marquem els punts $h_2(x_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Tracem les rectes l_i que uneixen els punts $h_1(x_i), h_2(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Suposem que les rectes l_i es tallen dos a dos. Siguin $P_{ij} = l_i \cap l_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$ els punts d'intersecció de les rectes l_i. Aleshores el cumpleix (1) si, i només si, P_{ij}, P_{jk}, P_{ij} són punts de π_2 i es cumpleix (2) si, i només si, P_{ij}, P_{jk}, P_{ij} són punts de π_1.

Les rectes l_i $i = 1, 2, \ldots, n$ determinen $\binom{n}{3}$ triangles i acabem de veure que el cardinal de la relació B és igual al número d'aquests triangles no tallats per r multiplicat per 2 (Aquest factor per 3.4.6.2.: $(x, y, z) \in B$ sii $(x, y, z) \in B$)). Si algunes de les rectes l_i són paral.leles entre sí, una petita modificació dels punts $h_1(x_i), h_2(x_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ donarà lloc a dos generadors d'una nova $S_{\mathcal{L}}$-mètrica m' que determinarà una relació de Betweenness continguda en B. Per tant trobar una cota inferior a les relacions de Betweenness determinades per L-mètriques bidimensionals és equivalent a la resolució del següent problema:

<u>Problema 3.4.17.</u> Sigui $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ un conjunt de n rectes del pla no paral.leles dos a dos i tals que tres rectes no passen per un mateix punt. Qualsevol recta r del pla deixa un cert nombre k_r^L dels $\binom{n}{3}$ triangles determinats per les rectes L_i sense tallar. Trobar una cota inferior a k_r^L.

En la següent secció es provarà que aquest problema és equivalent a evaluar el nombre de Turán $T(n,5,3)$ (Definició 3.5.1.). Usant aquest resultat es té el següent

Teorema 3.4.18. Sigui m una $S_{\mathcal{L}}$-mètrica bidimensional en un conjunt X finit de cardinal n i tal que $m(x,y) \neq 1$ $\forall x,y \in X$. Sigui B la relació de Betweenness determinada en X per m. Aleshores

$$\text{cardinal } B \geq 2T(n,5,3).$$

(El factor 2 per 3.4.6.2.: $(x,y,z) \in B$ sii $(z,y,x) \in B$).

T_{Π}-indistingibilitats (i.e. Relacions probabilístiques):

En la secció 3.6 es demostrarà que el Teorema de Representació també es pot aplicar a espais mètrics "clàssics" (i.e. la mètrica valorada en $\mathbb{R}^+$ de forma habitual). Té sentit per tant parlar de la dimensió d'una mètrica "clàssica" que d'altra banda determina una relació de Betweenness en X i en el cas bidimensional val tot el dit en aquesta secció per $S_{\mathcal{L}}$-mètriques. És sabut que si E és una Relació probabilística en un conjunt X, aleshores $m = -\ln E$ és una pseudodistància "clàssica" en X, que és una distància si, i només si, E és separadora.

Proposició 3.4.19. Sigui E una relació probabilística separadora en un conjunt X tal que $E(x,y) \neq 0$ $\forall x,y$. Sigui B_m la relació de Betweenness determinada en X per E. Sigui B_n la relació de Betweenness determinada en X per la mètrica $m = -\ln E$. Aleshores $B_E = B_m$.

Demostració. $(x,y,z) \in B_E$ si, i només si, $E(x,z) = E(x,y) \cdot E(y,z)$ si, i només si, $-\ln E(x,z) = -\ln(E(x,y)\cdot E(y,z))$ si, i només si, $m(x,z) = m(x,y) + m(y,z)$ si, i només si, $(x,y,z) \in B_m$. ■

Una construcció geomètrica similar a l'anterior, marcant a les rectes t_1, t_2 sengles còpies de $\mathbb{R}^+$ i marcant a la còpia de t_1 els punts $-\ln h_1(x_i)$ $i = 1,2,\ldots,n$, i els punts $-\ln h_2(x_i)$ $i = 1,2,\ldots,n$ a la còpia de t_2 porta a un Teorema anàleg al Teorema 3.4.18 per relacions probabilístiques:

Teorema 3.4.19. Sigui E una relació probabilística separadora bidimensional en un conjunt X finit de cardinal n i tal que $E(x,y) \neq 0\ \forall x,y \in X$. Sigui B la relació de Betweenness determinada en X per E. Aleshores

$$\text{cardinal } B \geq 2T(n,5,3).$$

Els lemes 3.4.10 i 3.4.11, la proposició 3.4.14 i els Teoremes 3.4.18 i 3.4.19 permeten enunciar sels següents Teoremes:

Teorema 3.4.20. Sigui T una t-norma arquimediana i E una T- indistingibilitat separadora en un conjunt X finit de cardinal n tal que $E(x,y) \neq 0\ \forall x,y \in X$. Sigui B la relació de Betweenness determinada en X per E. Aleshores

$$\text{cardinal } B \geq 2T(n,5,3).$$

Teorema 3.4.21. Sigui S una t-conorma arquimediana i m una S-mètrica separadora en un conjunt X finit de cardinal n tal que $m(x,y) \neq 1\ \forall x,y \in X$. Sigui B la relació de Betweenness determinada en X per m. Aleshores

$$\text{cardinal } B \geq 2T(n,5,3).$$

3.5. Caracterització geomètrica del nombre de Turán $T(n, 5, 3)$.

En el context de la Teoria d'hipergrafs es defineixen els nombres de Turán de la següent manera:

Definició 3.5.1. $T(n, k, l)$ és el nombre mínim de subconjunts de l elements d'un conjunt A de n elements amb la condició que qualsevol subconjunt de k elements de A contingui algun d'aquests subconjunts.

El cas $l = 2$ correspon a la teoria de grafs i té la importància històrica de ser el primer problema extremal que es va proposar en teoria de grafs.

En aquest cas el propi Turán va determinat el valor de $T(n, k, 2)$ [Turán, P. (1941), Berge, C. (1958)]. Si $l > 2$ se sap molt poc de $T(n, k, l)$. [Erdös, P. (1981), Chvátal, V. (1971)].

En aquesta secció veurem que la determinació de $T(n, 5, 3)$ és equivalent a la resolució del Problema 3.4.17. Així quedaran demostrats els Teoremes 3.4.18.-3.4.21.

D'altra banda, el propi Turán va conjecturar que si n és parell, aleshores $T(n, 5, 3) = 2\binom{\frac{n}{2}}{3}$. [Turán, P. (1954)]. (1)

Els resultats d'aquesta secció corroboren aquesta conjectura i permeten conjecturar que si n és senar, aleshores

$$T(n, 5, 3) = \binom{\frac{n-1}{2}}{3} + \binom{\frac{n+1}{2}}{3} \quad (2)$$

Els nombres de (1) i (2) els denotarem $T^*(n, 5, 3)$.

La solució al problema 3.4.17 es dóna en forma de Teorema:

Teorema 3.5.2. Sigui $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ un conjunt de n rectes en el pla no paral.leles dos a dos i tals que tres rectes no passen per un mateix punt. $l_1, l_2, \ldots, l_n$ determinen $\binom{n}{3}$ triangles. Qualsevol recta r del pla deixa un cert nombre k_r^L d'aquests triangles sense tallar. Es té:

a) $k_r^L \geq T(n, 5, 3)$.

b) Per cada $n \in \mathbf{N}$ es pot trobar un conjunt L de n rectes del pla i una recta r del pla pels quals val la igualtat en a).

Per demostrar el Teorema 3.5.2. n'anirem donant formulacions equivalents:

Notis que n'hi ha prou amb demostrar el Teorema quan r no és paral.lela a cap l_i.

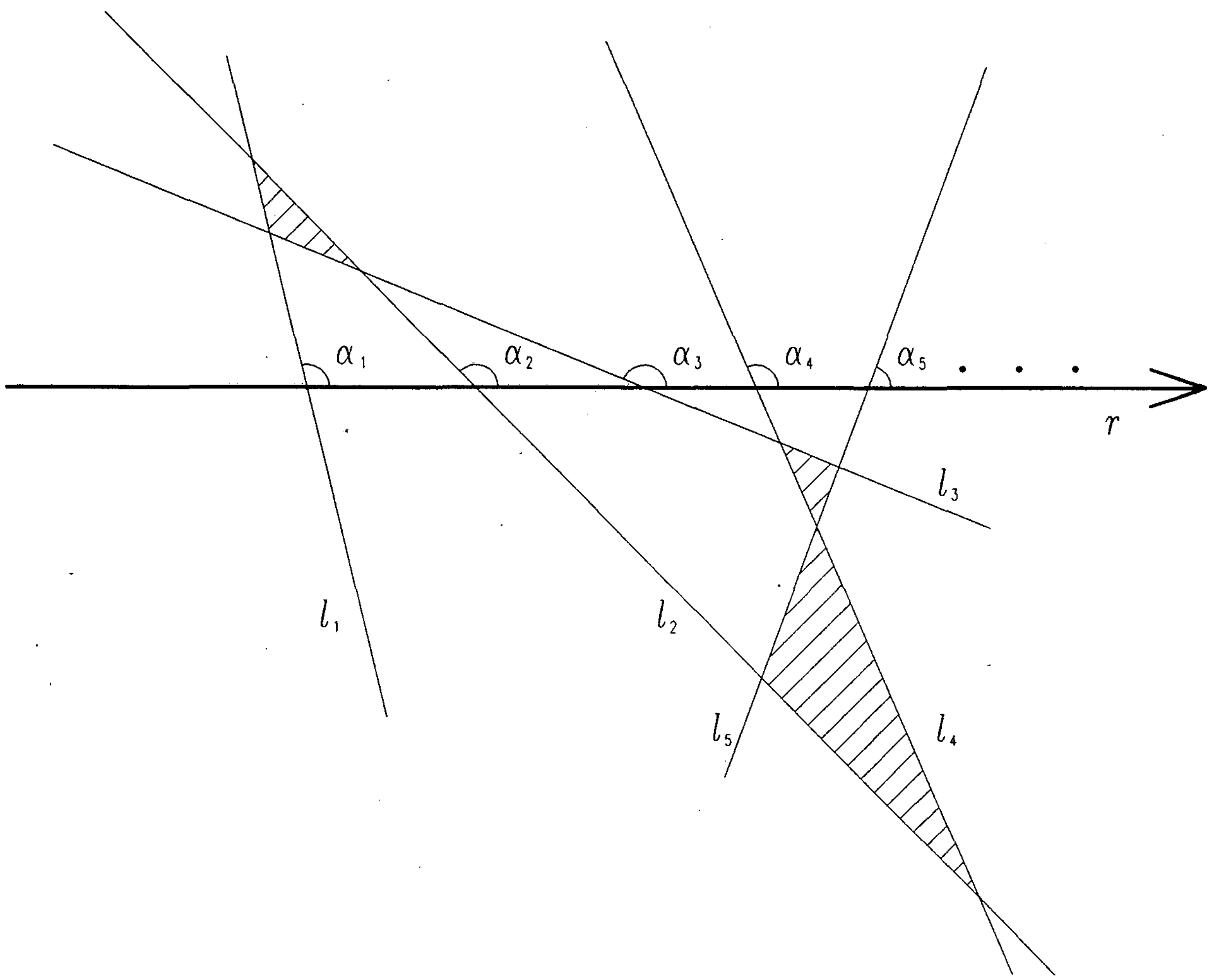
En aquest cas, si orientem la recta r, donada una recta $l_i \in L$ podem considerar (per exemple) l'angle α_i determinat per r i l_i contant a partir de r en el sentit contrari al de les agulles del rellotge.

Com que l_i, l_j no són paral.leles, si $i \neq j$, es té $\alpha_i \neq \alpha_j$, si $i \neq j$.

Per cada $l_i \in L$ sigui $P_i = l_i \cap r$. Si numerem les rectes l_i de tal forma que entre P_i i P_{i+1} $i = 1, 2, \ldots, n-1$ no hi hagi cap P_j $j = 1, 2, \ldots, n$, es té que per $i < j < k$ l_i, l_j, l_k determinen un triangle no tallat per r si, i només si,

$$\alpha_i < \alpha_j < \alpha_k \quad \text{o} \quad \alpha_i > \alpha_j > \alpha_k.$$

(veure figura)



Per tant el Teorema 3.5.2. és equivalent al

<u>Teorema 3.5.3.</u> Sigui $P_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ una permutació de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Direm que a_i, a_j, a_k formen un triangle si, i només si,

$$a_i < a_j < a_k \quad \text{i} \quad i < j < k$$

o

$$a_i > a_j > a_k \quad \text{i} \quad i < j < k$$

El nombre k de triangles que es poden formar a P_n satisfà:

a) $k_{P_n} \geq T(n, 5, 3)$

b) Per cada $n \in \mathbb{N}$ es pot trobar una permutació P_n per la qual en a) val la igualtat.

És fàcil trobar una permutació que satisfà $k_{P_n} = T^*(n, 5, 3)$:

Per exemple,

si n és parell $P_n = \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \ldots, 1, n, n-1, \ldots, \frac{n}{2} + 1\right)$

si n és senar $P_n = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \ldots, 1, n, n-1, \ldots, \frac{n+1}{2}\right)$

Donat un conjunt parcialment ordenat $(X, \leq)$, es pot definir la **dimensió** de la relació d'ordre i la **relació de Betweenness** que determina $\leq$ en X la següent manera [Fraïssé, R. (1986)]:

Qualsevol relació d'ordre parcial $\leq$ definida en un conjunt X es pot representar com intersecció de relacions d'ordres totals en X. El mínim nombre d'aquestes relacions necessàries per a generar $\leq$ es diu la seva **dimensió**.

D'altra banda, si $\leq$ és un ordre parcial en X, es diu que $y \in X$ és entre x i z si, i només si $x < y < z$ ó $z < y < x$. El conjunt $B_{\leq}$ de totes les ternes (x, y, z) amb y entre x i z és la **relació de Betweenness** determinada per $\leq$ en X.

Noti's que les relacions de Betweenness determinades per ordres parcials i les relacions de Betweenness definides en 3.4.6. no satisfan els mateixos axiomes (i.e. són conceptes diferents).

Retornant al Teorema 3.5.3, una permutació $P_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ defineix en X una relació d'ordre parcial $\leq_{P_n}$:

Definició 3.5.4. $a_i \leq_{P_n} a_j$ si, i només si, $i \leq j$ i $a_i \leq a_j$.

Aquesta relació d'ordre és **reversible** en el sentit de [Dushnik, B., Miller, E.W. (1941)]: **l'ordenació dual** $\leq_{P_n^*}$ està definida per

$$a_i \leq_{P_n^*} a_j \text{ si, i només si, } i \leq j \text{ i } a_i \geq a_j.$$

És interessant notar que en [Dushnik, B., Miller, E.W. (1941)] es demostra que una ordenació és reversible si, i només si, la seva dimensió és menor o igual que 2.

Si $B_{\leq}$ representa la relació de Betweenness determinada per $\leq$ en X, el Teorema 3.5.3 es pot formular de la següent manera:

Teorema 3.5.5. Per cada permutació $P_n = (a_1, a_3, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ es té

a) cardinal $B_{\leq_{P_n}}$ + cardinal $B_{\leq_{P_n^*}} \geq T(n, 5, 3)$.

b) Per cada $n \in \mathbb{N}$ es pot trobar una permutació P_n per la qual valgui el signe igual en a).

El Teorema 3.5.5. relaciona els conceptes de dimensió d'una T-indistingibilitat o S-mètrica i la relació de Betweenness que determinen amb la dimensió d'una relació d'ordre i la relació de Betweenness que determina.

Si s'escriu la permutació $P_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de la forma més explícita $P_n = ((1, a_1), (2, a_2), \ldots, (n, a_n))$ és té representada P_n com un conjunt de punts del pla amb abcisses i ordenades diferents dos a dos.

Per tant el Teorema 3.5.3. és equivalent a:

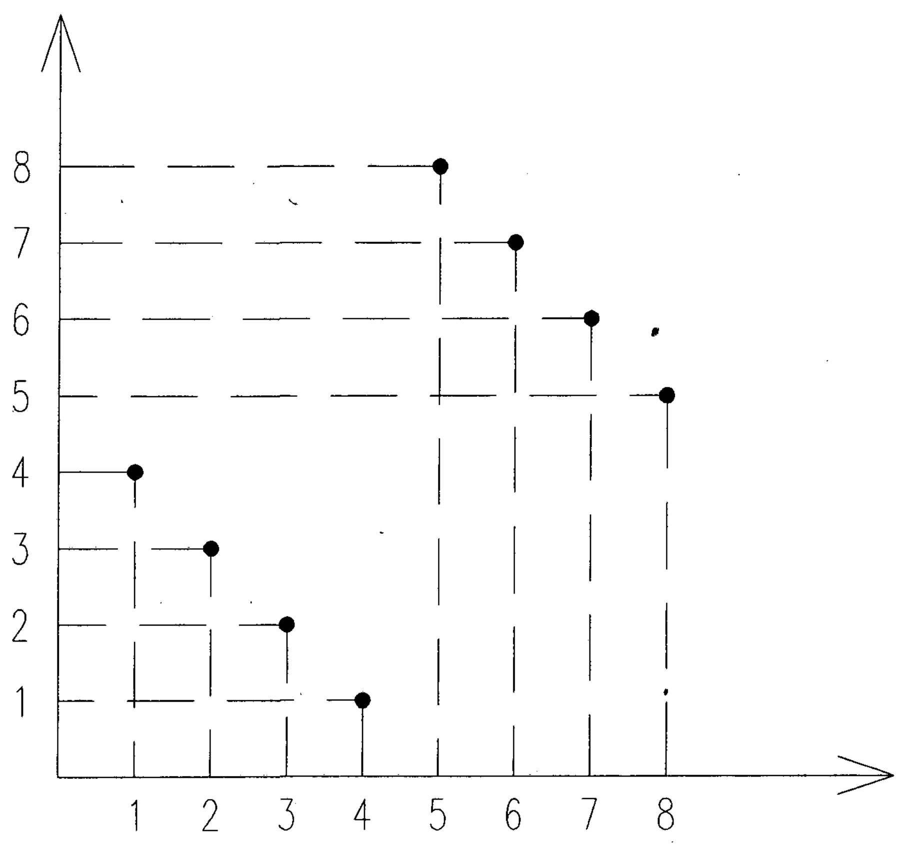
Teorema 3.5.6. Siguin $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2), \ldots,$ $P_n = (x_n, y_n)$, n punts del pla amb $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$. Direm que $P_iP_jP_k$ formen triangle si, i només si, $i < j < k$ i els vectors $\overrightarrow{P_iP_j}, \overrightarrow{P_jP_k}$ tenen el pendent del mateix signe. (En aquest cas $\overrightarrow{P_iP_k}$ també té el pendent del mateix signe). Sigui $k^{P_1,P_2,\ldots,P_n}$ el nombre de triangles formats per $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Es té:

a) $k^{P_1,P_2,\ldots,P_n} \geq T(n,5,3)$.

b) Per cada $n \in \mathbb{N}$ podem trobar n punts que satisfan les hipòtesis del Teorema i pels quals es té la igualtat en a).

És fàcil trobar n punts pels quals $k^{P_1,P_2,\ldots,P_n} = T(n,5,3)$.

Per exemple, si $n = 8$ una possible disposició és la de la figura:



D'altra banda és clar que el Teorema 3.5.3. és equivalent al següent:

Teorema 3.5.7. Sigui G_n un graf complet de n vèrtexs. Numerem els vèrtexs de G_n de 1 fins a n i pintem algunes arestes de G_n d'un color i les altres d'un altre color amb la condició que si $i < j < k$ i ij, jk són arestes del mateix color, aleshores ik també és d'aquest color.

Donada una d'aquestes possibles coloracions A de G_n, sigui k_n^A el nombre de triangles monocromàtics de G_n.

Aleshores es té:

a) $k_n^A \geq T(n, 5, 3)$.

b) Per cada $n \in \mathbb{N}$ existeix una coloració A de G_n per la qual val el signe igual a a).

Un exemple de coloració per la qual val $k_n^A = T^*(n, 5, 3)$ és el següent:

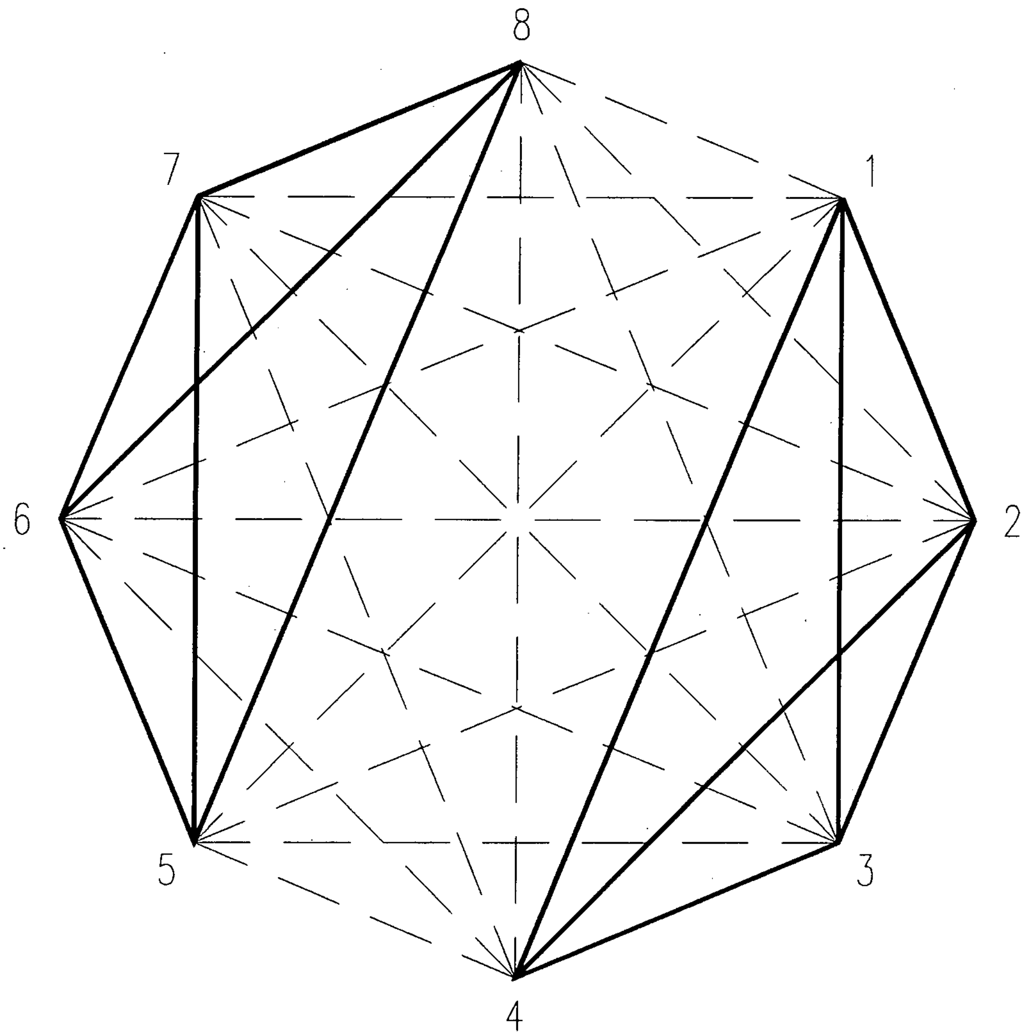
Agafem els grafs complets de vèrtexs $1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$ i $\frac{n}{2} + 1, \ldots, n$ si n parell ($1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ i $\frac{n+1}{2}, \ldots, n$ si n senar) i pintem totes les seves arestes del mateix color. Les arestes que uneixen els vèrtexs d'aquests semigrafs les pintem amb l'altre color.

Per exemple, n=8 (veure figura de la pàgina següent)

Aquesta construcció és interessant perque coincideix amb la solució del problema de Turán pel nombre $T(n, 3, 2)$ [Turán, P. (1941)].

La demostració d'aquests Teoremes és conseqüència del següent fet:

Donats quatre nombres en un cert ordre, és possible que no n'hi hagi tres en ordre creixent ni tres en ordre decreixent. (Per exemple (2,1,4,3)). En canvi, donats cinc nombres en un cert ordre, sempre hi ha com a mínim una terna de nombres en ordre creixent o decreixent.



3.6. Aplicacions i conseqüències.

En aquesta secció es donaran diverses aplicacions dels resultats anteriors:

a) Es demostrarà un **Teorema de Representació** anàleg al 3.2.8. per **espais mètrics "clàssics"**. En particular es tindrà una **interpretació geomètrica de la dimensió** d'un espai mètric que justificarà aquest terme.

b) Es donarà una **fita** a la dimensió de S-mètriques i T-indistingibilitats (en el cas arquimedià) i mètriques clàssiques assolible sempre.

c) Es **determinarà les dimensions** de les mètriques derivades de la **norma 1** a $\mathbb{R}^2$ i de la **norma** ∞ i de la **euclídea** a $\mathbb{R}^n$.

d) Una aplicació important es la generació d'un **nou mètode per calcular la clausura Max-T** de relacions reflexives i simètriques **i la clausura Min-S** de relacions de dissimilitud (en el cas arquimedià). **Aquest mètode calcula una base** (i la dimensió) **de la clausura**.

e) Es donarà una condició necessària i suficient perquè l'equació $X^2 = A$ tingui solucions no trivials (en el cas arquimedià).

a) Espais mètrics "clàssics".

Lema 3.6.1. Sigui X un conjunt i $h : X \to \mathbb{R}^+$ una funció. $m(x,y) = |h(x) - h(y)|$ és una pseudodistància en X que és una distància si, i només si, h és injectiva.

Demostració. Trivial. ∎

Lema 3.6.2. Si $\{m_i\}_{i \in I}$ és una família de pseudodistàncies en X, aleshores $m = \sup_{i \in I} m_i$ és una pseudodistància en X.

Demostració.

(i) $m(x,x) = 0 \ \forall x \in X$. Trivial.

(ii) $m(x,y) = m(y,x) \ \forall x,y \in X$. Trivial.

(iii) $m(x,y) \leq m(y,z) + m(z,y) \ \forall x,y,z \in X$:

$$m(x,z) + m(z,y) = \sup_{i \in I} m_i(y,z) + \sup_{i \in I} m_j(z,y) \geq$$
$$\geq m_i(x,z) + m_i(z,y) \geq m_i(x,y)$$

i això val $\forall i \in I$. Per tant

$$m(x,z) + m(z,y) \geq \sup_{i \in I} m_i(x,y) = m(x,y).$$

■

Teorema 3.6.3. de Representació d'espais mètrics. $m : X \times X \to R$ és una pseudodistància en X si, i només si, existeix una família de funcions $\{h_i\}_{i \in I}$ $h_i : X \to R$ tal que $m(x,y) = \sup_{i \in I} |h_j(x) - h_i(y)|$.

Demostració. $\Leftarrow$) Lemes 3.6.1 i 3.6.2. ■

$\Rightarrow$) Donat $z \in X$, sigui $h_z = m(\cdot, z)$ i considerem la família $\{h_z\}_{z \in X}$. Anem a veure que $m(x,y) = \sup_{z \in X} |h_z(x) - h_z(y)|$:

$$\left.\begin{array}{l} m(x,y) + m(y,z) \geq m(x,z) \Rightarrow m(x,y) \geq m(x,z) - m(y,z) \\ m(x,y) + m(x,z) \geq m(y,z) \Rightarrow m(x,y) \geq m(y,z) - m(x,z) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow m(x,y) \geq |m(x,z) - m(y,z)| = |h_z(x) - h_z(y)| \, \forall z \in X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(x,y) \geq \sup_{z \in X} |h_z(x) - h_z(y)|.$$

Però

$$m(x,y) = |m(x,y) - m(y,y)| = |h_y(x) - h_y(y)|.$$

Aquest Teorema és del tot anàleg a 3.2.8. i per tant té sentit parlar de la **dimensió** i de la **base** d'una distància.

D'altra banda el Teorema es pot reinterpretar de la següent manera:

Teorema 3.6.4. Tot espai mètric (X, m) és isomètric a un subconjunt $Y \subset \mathbb{R}^X$ amb la mètrica del suprem.

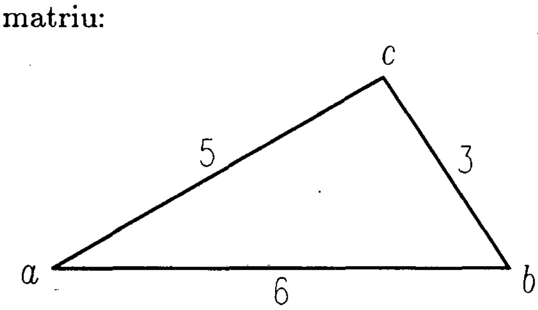
Demostració. Amb les notacions de la demostració de 3.6.3, sigui Y la imatge de X per la següent aplicació:

$$\varphi : X \to Y \subset \mathbb{R}^X = \prod_{i \in X} \mathbb{R}_i \text{ amb } \mathbb{R}_i = \mathbb{R}\ \forall i \in X.$$
$$x \to (m(x,z))_{z\in X} = (h_z(x))_{z\in X}.$$

Pel Teorema anterior és clar que (X, m) i (Y, s) on s és la distància del suprem a $\mathbb{R}^X$ restringida a Y són espais isomètrics. ■

Si m és una pseudodistància en X, definint en X la relació $x \sim y$ si, i només si, $m(x,y) = 0$ es té un conjunt quocient $X/\sim$ amb una distància induida $\overline{m}$. En aquest cas (Y, s) és isomètric amb $(X/\sim, \overline{m})$.

Exemple 3.6.5. Sigui $X = \{a, b, c\}$ i m la mètrica donada per les següents figura i matriu:



$$m \leftrightarrow \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 6 & 5 \\ b & 6 & 0 & 3 \\ c & 5 & 3 & 0 \end{array}$$

$$Y = \{(0,6,5),(6,0,3),(5,3,0)\} = \{\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Anem a donar una interpretació geomètrica a la dimensió d'una pseudodistància:

Sigui (X, m) un espai mètric i $\{h_i\}_{i\in I}$ una base de X.

Sigui Y' la imatge de X per la següent aplicació:

$$\gamma : X \to Y' \subset \mathbb{R}^I$$
$$x \to (h_i(x))_{i\in I}$$

Aleshores (X, m) és isomètric a (Y', s), s la distància del suprem a $\mathbb{R}^I$ restringida a Y'.

Per tant **la dimensió de m queda caracteritzada com el mínim dels cardinals dels conjunts I amb $(\mathbf{X}, \mathbf{m})$ isomètric amb un cert subconjunt $\mathbf{Y}' \subset \mathbb{R}^{\mathbf{I}}$ amb la mètrica del suprem.**

Noti's que en particular m és unidimensional si, i només si, X és isomètric amb $Y' \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ amb la distància habitual) i això dóna un Teorema de Caracterització anàleg al de Jacas per S-mètriques:

<u>Teorema 3.6.6 de Caracterització d'espais mètrics unidimensionals.</u> Una distància m en un conjunt X és unidimensional si, i només si, la relació de Betweenness que determina m en X és total.

<u>Exemple 3.6.7.</u> Seguint amb l'exemple 3.6.5, m és bidimensional, perque (X, m) és isomètric a (per exemple)

$$Y' = \{(0,0), (6,2), (3,5)\} \subset \mathbb{R}^2$$

amb la distància del suprem i m no és unidimensional perque la relació de Betweenness B que determina en X no és total (De fet $B = \emptyset$).

b) <u>Fitament de la dimensió</u>.

En la demostració dels Teoremes de Representació de S-mètriques, T-indistingibilitats i distàncies clàssiques es fa palès que les columnes $\{E(\cdot, z)\}_{z \in X}$ d'una T-indistingibilitat E en X o les columnes $\{m(\cdot, z)\}_{z \in X}$ d'una S-mètrica o distància clàssica són una família de generadors de E ó m respectivament. Per tant el cardinal de X és una fita a la dimensió de S-mètriques, T-indistingibilitats i distàncies clàssiques en X.

Aquesta fita es, però, molt grollera i en aquest apartat en trobarem una assolida per cada cardinal en el cas arquimedià o en distàncies clàssiques i X finit.

Cal recordar que a [Jacas, J. (1990)] es donen fites per similituds i ultramètriques en el cas finit.

Estudiarem el cas de $S_{\mathcal{L}}$-mètriques. Els mateixos raonaments són vàlids i porten als mateixos resultats per distàncies clàssiques i la següent Proposició 3.6.8. també els fa vàlids per relacions probabilístiques. Per tant, si trobem una fita assolible per $S_{\mathcal{L}}$-mètriques, aleshores aquesta també serà una fita assolible per qualsevol S-mètrica, T- indistingibilitat (cas arquimedià) i distància clàssica.

<u>Proposició 3.6.8.</u> Sigui E una relació probabilística en un conjunt X. $m = -\ln E$ és sabut que és una pseudodistància en X. Aleshores dim E = dim m.

<u>Demostració.</u> $\{h_i\}_{i\in I}$ és una base de E si, i només si, $\{-\ln h_i\}_{i\in I}$ és una base de m:

$E(x,y) = \operatorname*{Inf}_{i\in I} E_i(x,y)$ on E_i és la relació probabilística generada per h_i,

$$m(x,y) = -\ln E(x,y) = -\ln \operatorname*{Inf}_{i\in I} E_i(x,y) =$$
$$= -\operatorname*{Inf}_{i\in I} \ln E_i(x,y) = \operatorname*{Sup}_{i\in I}(-\ln E_i(x,y))$$

i $-\ln E_i(x,y)$ és la pseudodistància generada per $-\ln h_i$. ■

A partir d'ara i fins al final d'aquest apartat b), $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ serà un conjunt finit de cardinal n i m una $S_{\mathcal{L}}$-mètrica en X.

Sigui $\{h_i\}_{i\in I}$ una base de m amb tots els h_i en les arestes del conjunt H_m de generadors de m contingut en $[0,1]^n$.

H_m té $2\binom{n}{2}$ arestes paral.leles a la recta $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Les cares de H_m les aparellem de la següent manera: la cara $x_i - x_j = m(a_i, a_j)$ amb la $x_j - x_i = m(a_i, a_j)$.

Lema 3.6.9. Un conjunt de cares de H_m es tallen en una recta si, i només si, les seves aparellades es tallen en una recta.

Demostració. Trivial. ■

$n-1$ cares de H_m de diferents parelles determinen una recta. Les arestes de H_m paral.leles a la recta $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ estan contingudes en algunes d'aquestes rectes.

De fet les cares de H_m determinen $k \leq 2\binom{\binom{n}{2}}{n-1}$ rectes i es pot provar que les arestes de H_m paral.leles a $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ són $a \leq \binom{2(n-1)}{n-1}$. Les igualtats valen si, i només si, cap cara és combinació lineal a coeficients racionals (o enters) de les cares fora de la seva parella.

Lema 3.6.10. Donades $n-1$ parelles de cares de H_m, sempre és possible trobar $n-1$ cares que determinin una aresta de H_m.

Sigui h_1 un element de la base de m. h_1 és en una aresta i per tant és en la intersecció de com a mínimi $n-1$ cares. Si h_1 és la intersecció de $\binom{n}{2}$ cares, aleshores $\{h_1\}$ és una base de m i m és unidimensional.

En cas contrari triem $n-1$ parelles de cares d'entre les que no contenen h_1. (Si això no fós possible, voldria dir que només hi hauria $t < n-1$ parelles de cares que no contindrien h_1. En aquest cas t d'aquestes cares més $n-1-t$ altres qualsevols contindrien una aresta de H_m i triant h_2 d'aquesta aresta es tindria una base de m).

D'entre aquestes cares en triem $n-1$ que determinin una aresta de H_m i escollim h_2 d'aquesta aresta.

Repetint aquest procés conseguirem una base de m i com que en cada pas, com a mínim es satisfan $n-1$ equacions, al cap de $\frac{\binom{n}{2}}{n-1} = \frac{n}{2}$ passos haurem trobat una base de m.

Tenint en compte que si no hi ha cap cara combinació lineal a coeficients racionals de les cares fora de la seva parella a cada pas se satisfan exactament $n-1$ equacions és té el següent Teorema:

Teorema 3.6.10. Sigui m una $S_{\mathcal{L}}$-mètrica en un conjunt X finit de cardinal n. Si $[\ \ ]$ representa la part entera es té

a) $\dim m \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$

b) Per cada $n \in \mathbb{N}$ es pot trobar una $S_{\mathcal{L}}$-mètrica per la qual valgui el signe igual en a).

Demostració. a) Ja s'ha demostrat.

b) Noti's que si els vectors $m(a_i, a_j)$ $a_i, a_j \in X$ són $\mathbb{Q}$-linealment independients es té assegurada la igualtat en a).

Sigui m una $S_{\mathcal{L}}$-mètrica en X. Si $m(a_i, a_j)$ $a_i, a_j \in \mathbb{Q}$ no són $\mathbb{Q}$-linealment independents, poden trobar $\binom{n}{2}$ nombres reals $\{d_{ij}\}$ $i, j = 1, 2, \ldots, n$ $i < j$ $\mathbb{Q}$-linealment independents amb d_{ij} tan próxim a $m(a_i, a_j)$ com vulguem $\forall i, j$.

Donat que $S_{\mathcal{L}}$ és contínua, la desigualtat triangular es continuarà mantenint per la $S_{\mathcal{L}}$-mètrica definida per $m'(a_i, a_j) = d_{ij}$. ■

Pel dit al començament d'aquest apartat b) es té:

Teorema 3.6.11. Sigui E una T-indistingibilitat, T arquimediana, en un conjunt X finit de cardinal n. Aleshores

a) $\dim E \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$

b) Per cada $n \in \mathbb{N}$ es pot trobar una T-indistingibilitat per la qual valgui la igualtat en a).

Teorema 3.6.12. Sigui m una S-mètrica, S arquimediana, ó una distància clàssica en un conjunt X finit de cardinal n. Aleshores

a) $\dim m \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$

b) Per cada $n \in \mathbb{N}$ es pot trobar una S-mètrica i una distància per la qual valgui la igualtat en a).

A efectes pràctics convé que la dimensió sigui un nombre baix i en aquest sentit els Teoremes anteriors donen resultats desagradables. En l'apartat d) veurem, però, que en molts casos pràctics s'obtenen T-indistingibilitats i S- mètriques de dimensió baixa.

D'altra banda, en un context i amb mètodes diferents, [Wolfe, D. (1967)] va demostrar que la dimensió d'una distància en un conjunt X finit de cardinal n és menor o igual que $n-2$ ($n \geq 2$). Els resultats d'aquest apartat milloren aquesta cota considerablement.

c) Determinació de la dimensió d'algunes distàncies.

Anem a calcular la dimensió de la distància derivada de la norma 1 a $\mathbb{R}^2$ i de la derivada de la norma ∞ i la euclídea a $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$).

Teorema 3.6.13. $\mathbb{R}^n$ amb la distància del suprem té dimensió n.

Demostració. Les projeccions formen una base. ∎

Donat que la distància derivada de la norma 1 i la del suprem són isomètriques a $\mathbb{R}^2$ es té

Teorema 3.6.14. $\mathbb{R}^2$ amb la distància derivada de la norma 1 és de dimensió 2.

El Teorema anàleg a 3.4.21 per distàncies assegura que si X és un subconjunt de $\mathbb{R}^2$ finit de cardinal n, aleshores la relació de Betweenness B determinada per la distància derivada de la norma 1 en X satisfà

$$\text{cardinal } B \geq 2T(n,5,3).$$

Aquest resultat es pot obtenir directament estudiant la relació B: Una terna (P,Q,R) de punts de $\mathbb{R}^2$ és de B si, i només si, els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QR}$ tenen el pendent del mateix signe. El Teorema 3.5.6. assegura que card $B \geq 2T(n,5,3)$.

Per calcular la dimensió de $\mathbb{R}^n$ amb la distància euclídea necessitem el següent Teorema:

Teorema 3.6.15. Donat $n \in \mathbb{N}$ podem trobar n punts $P_1, P_2, \ldots, P_n$ del pla tals que si α_{ij} denota la distància euclídea entre P_i i P_j aleshores els $\binom{n}{2}$ nombres α_{ij} $i,j = 1,2,\ldots,n$, $i < j$ són $\mathbb{Q}$-linealment independents.

Demostració. El grau de transcendència de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ és infinit. Per tant, donat $n \in \mathbb{N}$ podem trobar $2n$ nombres reals $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $\mathbb{Q}$-algebraicament independents. N'hi ha prou en escollir els n punts $P_i = (x_i, y_i)$ $i = 1,2,\ldots,n$.

En efecte:

Considerem l'extensió algebraica $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{Q}$.

Donat que $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ són $\mathbb{Q}$ algebraicament independents, aquesta extensió és $\mathbb{Q}$-isomofa al cos de funcions racionals sobre $\mathbb{Q}$ en $2n$ variables, que denotarem $\mathbb{Q}(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Triem l'isomorfisme que envia x_i a X_i i y_i a Y_i $i = 1, 2, \ldots, n$.

Provar que α_{ij} $1 \leq i < j \leq n$ són $\mathbb{Q}$-linealment independents és per tant equivalent a provar que ho són les funcions $\sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}$:

Sigui * $\sum\limits_{i,j} \alpha_{ij} \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2} = 0$ $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$ $\forall i, j$.
Fixem i, j $(i < j)$ i donem els següents valors a les variables:

$$\forall k \neq i, j \quad X_k = Y_k = 0, \quad X_i = Y_i = X_j = 1, \quad Y_j = 2,$$

* queda

$$\sum_{k \neq i,j} \alpha_{ik} \sqrt{2} + \sum_{k \neq i,j} \alpha_{jk} \sqrt{5} + \alpha_{ij} \cdot 1 = 0.$$

1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ són $\mathbb{Q}$-linealment independents i per tant $\alpha_{ij} = 0$. ■

Anem a demostrar que dim $\mathbb{R}^n = \infty$ amb la distància euclídea $(n \geq 2)$: Per cada $n \in \mathbb{N}$ agafem un conjunt X_n de punts com els del Teorema anterior. La demostració del Teorema 3.6.10 assegura que dim $X_n = \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Quan n creix indefinidament, la dimensió de X_n també i a fortiori la de $\mathbb{R}^2$ que els conté. Per tant la dimensió de $\mathbb{R}^2$ és més gran que qualsevol nombre natural. Donat que $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, a fortiori la dimensió de $\mathbb{R}^n$ és més gran que qualsevol nombre natural. Per tant:

<u>Teorema 3.6.16.</u> $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ amb la distància euclídea té dimensió infinita.

d) <u>Clausures Max-T i Min-S</u>.

Anem a donar un mètode per trobar la clausura Max-T d'una relació reflexiva i simètrica i la clausura Min-S d'una relació de dissimilitud, en el cas arquimedià, basant-nos en els resultats d'aquest capítol.

Pel vist fins ara ens podem restringir a $T = T_{\mathcal{L}}$ i $T = T_{\prod}$. Els dos casos són anàlegs i per tant només estudiarem el primer:

Sigui M una relació difusa reflexiva i simètrica en un conjunt X finit de cardinal n.

Anem a trobar H_{M^c} el conjunt de generadors de la clausura $T_{\mathcal{L}}$-transitiva de M:

Recordem que $M^c \geq M$ i si E és una semblança amb $E \geq M$, aleshores $E \geq M^c$.

El Teorema 3.3.11. caracteritza el conjunt H_{M^c} com el poliedre de $[0,1]^n$ determinat pel sistema lineal

$$\begin{cases} x_i - x_j \leq 1 - M^c(a_i, a_j) & a_i, a_j \in X \\ 0 \leq x_i \leq 1 & i, j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Però aquest sistema és equivalent a

$$\begin{cases} x_i - x_j \leq 1 - M(a_i, a_j) & a_i, a_j \in X \\ 0 \leq x_i \leq 1 & i, j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Per tant podem trobar H_{M^c} i a partir d'aquí una base de M^c.

Noti's que les inequacions $x_i - x_j \leq 1 - M(a_i, a_j)$ amb $M(a_i, a_j) < M^c(a_i, a_j)$ són supèrflues i per tant els nombres $M^c(a_i, a_j)$ que són més grans que $M(a_i, a_j)$ són $\mathbb{Q}$-combinació lineal dels $M^c(a_i, a_j)$ que coincideixen amb el respectiu $M(a_i, a_j)$.

Per tant, com més nombres $M(a_i, a_j)$ hi hagi diferents de $M^c(a_i, a_j)$ menys arestes tindrà H_{M^c} i més petita serà la dimensió de M^c. Per tant com més "allunyada" estigui la relació M de la seva clausura $T_{\mathcal{L}}$-transitiva M^c, més petita serà la dimensió de M^c.

e) L'equació $X^2 = A$.

Sigui A una T-indistingibilitat separadora en un conjunt finit S amb $A(x, y) \neq 1$ $\forall x, y \in S$, T arquimediana. Sigui B la relació de Betweenness que determina A en S.

Donada una relació reflexiva i simètria X en S, X^2 denotarà el producte Max-T $X \circ_T X$.

El següent Teorema caracteritza les T-indistingibilitats A per les quals $X^2 = A$ té solució no trivial (i.e. amb $X \neq A$).

Teorema 3.6.17. L'equació $X^2 = A$ té solució no trivial si, i només si, $B \neq \emptyset$.

Demostració. $\Rightarrow$ Sigui X una solució no trivial de $X^2 = A$. Sigui m el menor valor de la matriu X que s'ha canviat al calcular X^2.

Definim la següent relació A' reflexiva i simètrica en S:

$$A'(x, y) = \begin{cases} A(x, y), & \text{si } X(x, y) \neq m \\ m, & \text{si } X(x, y) = m \end{cases}$$

Com que $X \leq A' \leq A$ es té $X^2 = A'^2 = A^2 = A$.

Fixem $x, y \in S$ tals que $X(x, y) = m$.

Sigui a un element de S tal que $T(A'(x, a), A'(a, y))$ sigui màxim.

$$A(x, y) = A'^2(x, y) = \operatorname*{Max}_{z \in S} T(A'(x, z), A'(z, y)) =$$

$$= T(A'(x, a), A'(a, y)).$$

Si $A'(x,a) = m$ ó $A'(a,y) = m$, aleshores $T(A'(x,a), A'(a,y))$ seria menor que m. Però $A'^2(x,y) \geq m$.

Per tant $A'(x,a) = A(x,a)$ i $A'(a,y) = A(a,y)$ i $A(x,y) = T(A(x,a), A(a,y))$. D'altra banda es té $x \neq a$, $y \neq a$, perque en cas contrari es tindria $A'(x,y) = A(x,y)$.

Per tant $(x,a,y) \in B$ i $B \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) Sigui (a,b,c) una terna de B.

Definim la relació difusa X:

$$X(x,y) = \begin{cases} A(x,y), & \text{si } (x,y) \neq (a,c) \\ m, & \text{si } (x,y) = (a,c) \end{cases}$$

on m és un nombre que satisfà $M < m < A(a,c)$ on

$$M = \operatorname*{Max}_{x,y \in S} \{A(x,y) \mid A(x,y) < A(a,c)\}.$$

És clar que A és la clausura T-transitiva de X, perque qualsevol T-indistingibilitat que contingui X també contindrà A.

D'altra banda

$$\begin{aligned} X^2(a,c) &= \operatorname*{Max}_{z \in X} T(X(a,z), X(x,c)) = T(A(a,b), A(b,c)) = \\ &= A(a,c) \end{aligned}$$

i per tant $X^2 = A$. ∎

Per tant el Teorema 3.6.17. és un **Teorema de caracterització** de les T-indistingibilitats amb $B \neq \emptyset$.