

### 3 BOMBAS DE ENGRANAJES CON PERFILES TROCOIDALES. ANÁLISIS DESPLAZAMIENTO VOLUMÉTRICO

#### 3.1 INTRODUCCIÓN

La bomba gerotor es una bomba oleohidráulica de engranajes internos, cuyo engranaje es un conjunto conjugado entre la rueda dentada interior (piñón) y la rueda dentada exterior (corona) para conseguir el engrane, y donde la rueda dentada interior tiene un *lóbulo* (diente) menos que la exterior. La rueda dentada interior es la encargada de transmitir el par del movimiento de rotación a la rueda dentada exterior, de forma que cada lóbulo de la rueda dentada interior se desliza en permanente contacto con la superficie de la rueda dentada exterior (Fotografía 3.1). Estos puntos de contacto entre ambos forman un número de cámaras estancas igual al número de lóbulos de la rueda dentada exterior, manteniendo al fluido encerrado en ellas. La acción de bombeo se produce por la variación del volumen de las cámaras estancas con la rotación completa del conjunto.



*Fotografía 3.1. Bomba de engranajes con perfiles trocoidales*

A la vista del Estado del Arte y en base al estudio de las ventajas y desventajas de los tipos de perfiles aplicados en las ruedas dentadas que forman el engranaje trocoidal de la bomba, se toman los lóbulos/dientes del perfil modificado de la rueda dentada exterior formados por arcos de circunferencia. Las principales razones que avalan esta decisión son:

- Los índices de caracterización, caudal específico e irregularidad caudal, no experimentan cambios significativos que determinen la preferencia de usar el perfil elíptico o policircular en vez del de arcos circulares
- Mejora de los requisitos básicos
- La mayor simplicidad de mecanización y fabricación

La utilización de un perfil elíptico mejora la curvatura de los lóbulos de la rueda dentada interior y el perfil policircular mejora el deslizamiento específico. Sin embargo, los inconvenientes que presentan estos perfiles enfrente del perfil de arco circular no van en

concordancia con las cualidades aportadas. A pesar de esto, se ha de remarcar que las mejoras que estos perfiles presentan pueden ser muy válidas y a tener en cuenta en determinados diseños.

La rueda dentada interior está formada por un perfil trocoidal modificado y la rueda dentada exterior está formada por un perfil envolvente modificado.

A continuación en los apartados siguientes se expone todo el desarrollo matemático en el que se fundamenta los perfiles trocoidales aplicados a las bombas oleohidráulicas.

### 3.2 GEOMETRÍA DEL ENGRANAJE DE PERFIL TROCOIDAL

#### 3.2.1 Generación de la Trocoide

La familia de curvas generadas en el plano por la trayectoria de un punto generador solidario a un disco móvil (o ruleta), que rueda sin deslizar sobre la circunferencia de un círculo fijo (o base), se denominan *curvas trocoidales*. Si el disco móvil gira sobre el exterior de la circunferencia del círculo fijo se denomina *epitrocoide*, si lo hace por su interior se denomina *hipotrocoide*, y si el disco móvil gira por el interior de su circunferencia sobre el exterior de la circunferencia del círculo fijo, se denomina *peritrocoide*.

Partiendo de la definición de epitrocoide, hipotrocoide y peritrocoide, en la Tabla 3.1 se presenta la nomenclatura definida.

Trocoide genérica		Epitrocoide $a < b$		Hipotrocoide $a < b$		Peritrocoide $a > b$	
Disco móvil	$a$	Ruleta externa móvil	$R_3$	Círculo móvil	$R_3$	Ruleta interna móvil	$r_2$
Círculo fijo	$b$	Base externa fija	$R_1$	Círculo fijo	$R_1$	Base interna fija	$r_1$

Tabla 3.1. Nomenclatura de radio de ruleta y base de generación de trocoides

La generación de una epitrocoide y una peritrocoide definen un mismo lugar geométrico de la trayectoria del punto generador, también llamado doble generación de una trocoide y que puede ser probado mediante el teorema de Belerman-Morley (Ansdale 1968). De la observación de la Figura 3.1, se observa el paralelogramo  $O_1O'PO_3$ , el cual será el generador de la trocoide. El disco móvil de radio  $R_3 = O_3I'$  gira sobre sí mismo en el centro  $O_3$  y rueda sin deslizar sobre el círculo fijo base  $R_1 = O_1I'$  centrado en  $O_1$ . De esta forma, el punto generador  $P$  solidario al disco móvil describe la trayectoria de una epitrocoide. Sin embargo, el punto generador  $P$  también es solidario a la ruleta interna móvil  $r_2 = O'I_1$  centrada en  $O'$  y cuya circunferencia interior rueda sin deslizar sobre la circunferencia exterior de la base interna fija  $r_1 = O_1I$  centrada en  $O_1$ , generándose una peritrocoide. La doble generación de la trocoide para el punto generador  $P$  se define mediante dos condiciones:

- (a) Los centros instantáneos de rotación  $I$  (ruleta y base internas) e  $I'$  (ruleta y base externas) deben ser coliniarios con el punto generador  $P$ .
- (b) El paralelogramo  $O_1O'PO_3$  determina que el centro  $O_3$  se halla en la extensión del segmento  $O_1I'$ .

Las ruletas y bases internas y externas están relacionadas mediante la relación,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R_3}{R_1} + 1 \quad (3.1)$$

donde

$$r_1 = e \frac{R_1}{R_3} \quad \text{y} \quad r_2 = e \left( 1 + \frac{R_1}{R_3} \right) \quad (3.2)$$

De la figura se deduce que la distancia  $O_1O'$  es,

$$e = r_2 - r_1 \quad (3.3)$$

y se define como *excentricidad* de la trocoide.

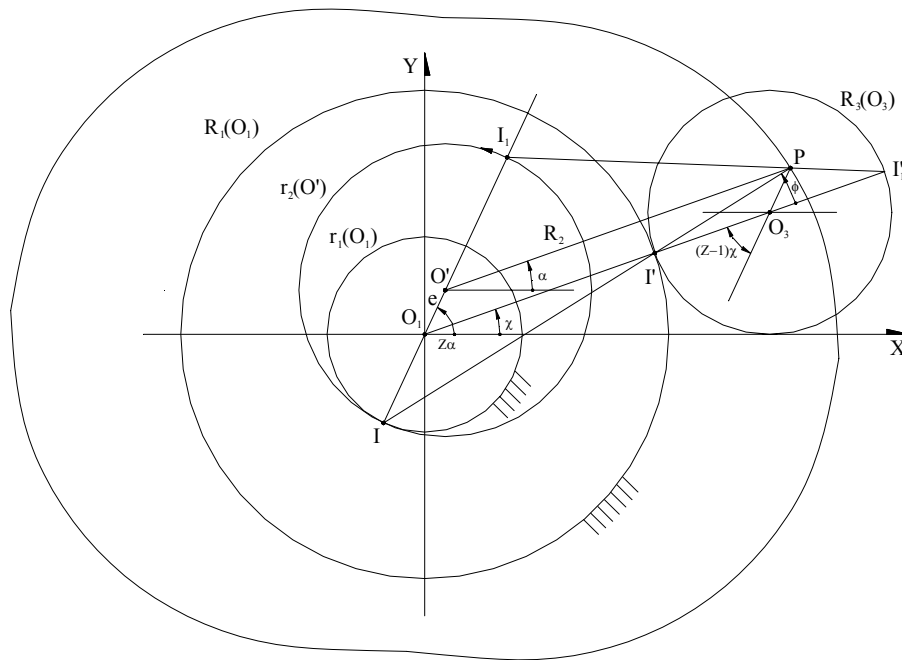


Figura 3.1. Doble generación de la trocoide

Debido a la doble generación de la trocoide, es correcto usar indistintamente el término epitrocoide y peritrocoide, ya que ambos se refieren a la misma curva.

### 3.2.2 Generación del Perfil Trocoidal

El *perfil trocoidal* engloba el concepto de la curva trocoide que es válida para ser utilizada como engranaje (Colbourne, 1974; Shung y Pennock, 1994). Su formación es descrita basándose en la Figura 3.2.

El punto generador  $P$  obtenido mediante el paralelogramo  $O_1O'PO_3$  genera la epitrocoide teórica. El punto  $O_1$  es el centro del círculo base externo fijo  $R_1$  y del círculo base interno fijo  $r_1$ . El punto  $O'$  es el centro de la ruleta interna  $r_2$  y gira concéntricamente alrededor de  $O_1$  con un radio igual a la excentricidad  $e = O_1O'$  cuando la circunferencia de la ruleta interna  $r_2$  rueda sin deslizar sobre la base interna fija  $r_1$ . De acuerdo con la doble generación de la trocoide, el punto  $P$  describe la misma epitrocoide cuando la ruleta  $R_3$  rueda sin deslizar sobre el círculo base fijo  $R_1$ .

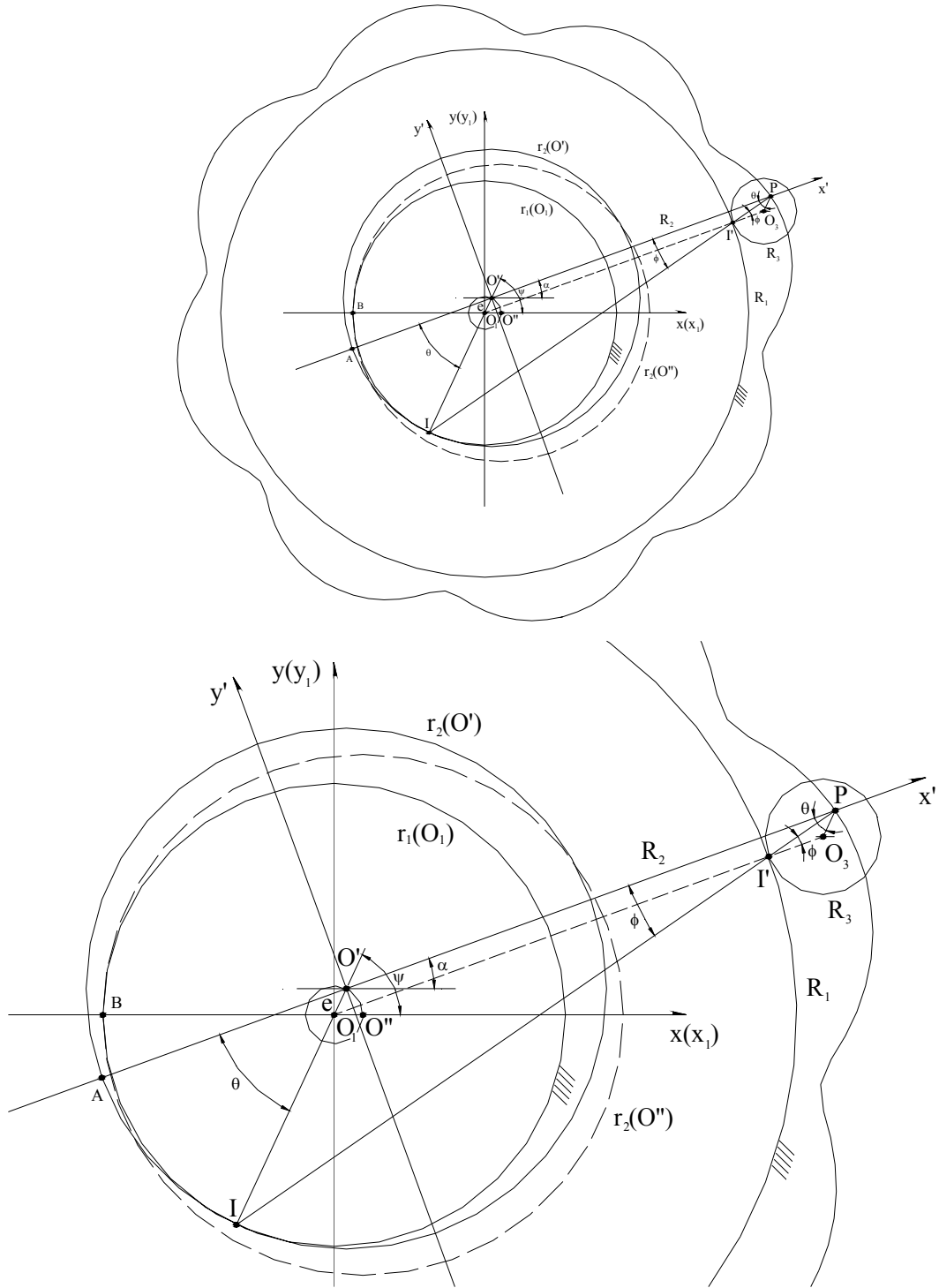


Figura 3.2. Generación de la epitrocoide (peritrocoide)

La altura de los arcos de trocoide o lóbulo viene definida por el *factor de contracción del perfil trocoidal* ( $\lambda$ ) como,

$$\lambda = \frac{O_3P}{R_3} \quad f = \frac{1}{\lambda} \quad (3.4)$$

o de su inversa como el *factor de desplazamiento del perfil trocoidal* ( $f$ ).

El ángulo que forma el segmento  $IO_1O'$  con el eje de abscisas  $x$  del sistema de coordenadas de referencia  $x(x_1)-y(y_1)$  es denominado ángulo  $\psi$ . El ángulo  $\psi$  representa el ángulo girado por la ruleta sobre la circunferencia del círculo base fijo sin deslizar, y también como el ángulo girado por la ruleta interna móvil sobre la circunferencia de la base interna fija.

El punto  $O_3$  se encuentra permanentemente sobre la circunferencia de radio  $O_1O_3$ . La igualdad de los segmentos  $O'P = O_1O_3$  queda reflejada mediante el paralelogramo  $O_1O'PO_3$ . Así, se define un nuevo radio denominado *radio generador*  $R_2 = O'P$ . El ángulo que forma el radio generador  $R_2$  con el eje de abscisas  $x$  del sistema de coordenadas de referencia  $x(x_1)-y(y_1)$  es denominado ángulo  $\alpha$ . El ángulo  $\alpha$  también representa el ángulo girado por el punto generador  $P$  sobre la circunferencia del círculo base fijo. Ahora, el factor de desplazamiento del perfil trocoidal ( $f$ ) también puede ser definido como,

$$f = \frac{R_2}{r_2} = \frac{1}{\lambda} \quad (3.5)$$

El ángulo  $\theta$  se define como el ángulo que forma el eje de abscisas del sistema de coordenadas  $x'-y'$  solidario a la ruleta interna móvil  $r_2$  o la ruleta  $R_3$  con el segmento  $IO_1O'$ . El ángulo  $\theta$  también representa el giro de la ruleta sobre su centro  $O_3$ , o también el giro de la ruleta interna móvil  $r_2$  sobre su centro  $O'$ .

Las condiciones fundamentales para obtener un perfil trocoidal son,

1. *Sin intersección.* La curva epitrocoide no debe cruzarse sobre ella misma creando bucles. Ese fenómeno sucede cuando la excentricidad es superior al radio del círculo base fijo ( $e > R_1$ ).
2. *Curva cerrada.* Para que la epitrocoide sea una curva cerrada después de una revolución completa de la ruleta sobre el círculo base fijo, el radio del disco ha de ser un número múltiplo entero  $z$  del radio del círculo. Desde otro punto de vista: la longitud de la circunferencia de la ruleta  $R_3$  debe estar contenida un número exacto de veces  $z$  (o  $Z_1 \equiv z$ ) en la longitud de la circunferencia del círculo fijo base  $R_1$ .

$$2\pi R_3 z = 2\pi R_1 \Rightarrow R_1 = zR_3 \quad (3.6)$$

Donde  $z$  ( $\equiv Z_1$ ) es el número de *lóbulos* de la epitrocoide. De igual forma, la condición de curva cerrada debe cumplirse para la ruleta y base internas. Cuando la ruleta interna móvil  $r_2$  realice una revolución completa sobre la base interna fija  $r_1$ , el centro instantáneo de rotación  $I$  habrá generado  $(z + 1)$  arcos de epitrocoide o lóbulos. Así, el punto de tangencia común (centro instantáneo de rotación) entre la ruleta y la base internas trazará sobre los mismos dos arcos iguales determinados por (Litvin 1994),

$$L_{arco} = 2\pi r_2 = 2\pi r_1 + kp_c \quad (3.7)$$

donde  $p_c$  es una trayectoria circular definida por la distancia entre dos centros instantáneos de rotación consecutivos medidos sobre la base interna fija  $r_1$ , y  $k \geq 1$  es un número entero. Para cumplir la condición de curva cerrada, el número de lóbulos ha de ser un número entero; por tanto,

$$p_c = \frac{2\pi r_1}{z} \quad (3.8)$$

De la ecuación ( 3.7 ) y la ecuación ( 3.8 ) se obtiene,

$$r_2 = r_1 \left( 1 + \frac{k}{z} \right) \quad (3.9)$$

y teniendo en cuenta la relación de transmisión,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{Z}{z} \quad (3.10)$$

se obtiene que,

$$Z \equiv Z_2 = z \left( 1 + \frac{k}{z} \right) \quad (3.11)$$

donde  $k = 1, 2, 3, \dots$  Para el caso de  $k = 1$ ,

$$Z = z + 1 \quad (3.12)$$

La interpretación es que el número de lóbulos de la envolvente del perfil trocoidal, o engranaje exterior, ha de ser mayor, al menos en uno lóbulo, del número de lóbulos del perfil trocoidal o engranaje interno. Partiendo de esta última ecuación y teniendo en cuenta la ecuación ( 3.3 ) y la ecuación ( 3.10 ), se obtiene la relación de la ruleta y base internas con la excentricidad y el número de lóbulos de la forma,

$$\begin{aligned} r_1 &= ze = (Z - 1)e \\ r_2 &= Ze = (z + 1)e \end{aligned} \quad (3.13)$$

Y la trayectoria circular se verifica que es,

$$p_c = 2\pi e \quad (3.14)$$

Volviendo a la Figura 3.2, inicialmente el centro de los ejes  $x'-y'$  solidarios la ruleta interna  $r_2$  se encuentra en el punto  $O''$ . Así, los puntos  $A$  y  $I$  están inicialmente coincidentes sobre el punto  $B$ , como es mostrado en la Figura con la circunferencia a trazos  $r_2(O'')$  centrada inicialmente en  $O''$ . Imprimiendo un ángulo de giro  $\psi$  al centro de los ejes  $x'-y'$ , el centro  $O''$  se desplaza al punto  $O'$  concéntricamente una distancia  $e$  respecto al centro  $O_1$ . Posteriormente, se imprime un giro  $\alpha$  a los ejes  $x'-y'$  solidarios a  $r_2$  respecto a los ejes del sistema de coordenadas de referencia  $x(x_1)-y(y_1)$  fijos y solidarios la base interna interno  $r_1$ . De esta forma, la condición de rodadura de la ruleta y base internas sin deslizar se define,

$$\text{arco } AI = \text{arco } BI \Rightarrow \begin{cases} R_3\theta = R_1\alpha \rightarrow \text{centroides externos} \\ r_2\theta = r_1\psi \rightarrow \text{centroides internos} \end{cases} \quad (3.15)$$

Introduciendo la ecuación ( 3.6 ) y ( 3.13 ) en la ecuación ( 3.15 ),

$$\begin{aligned} \theta &= z\alpha = (Z - 1)\alpha \\ Z\theta &= z\psi = (Z - 1)\psi \end{aligned} \quad (3.16)$$

De la Figura 3.2 se obtiene la relación de los ángulos,

$$\theta + \alpha = \psi \quad (3.17)$$

Así, de la combinación de las ecuaciones de ( 3.16 ) o introduciendo las ecuaciones ( 3.16 ) en ( 3.17 ), se obtiene la relación,

$$\psi = Z\alpha \quad (3.18)$$

De la observación directa del paralelogramo  $O_1O'PO_3$  de la Figura 3.2 se pueden obtener las coordenadas del punto generador  $P$  del perfil trocoidal teórico respecto el sistema de coordenadas de referencia  $x(x_1)-y(y_1)$ ,

$$\begin{aligned} x_1 = x_t &= e \cos \psi + R_2 \cos \alpha \\ y_1 = y_t &= e \sin \psi + R_2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.19)$$

Teniendo en cuenta la relación de la ecuación ( 3.18 ), la ecuación( 3.19 ) y define el perfil trocoidal teórico de la epitrocoide queda de la forma,

$$\begin{aligned} x_1 = x_t &= e \cos Z\alpha + R_2 \cos \alpha \\ y_1 = y_t &= e \sin Z\alpha + R_2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.20)$$

En el caso especial que  $R_2 = O'P = r_2 = Ze$ , la trayectoria del punto  $P$  define una epicicloide (Figura 3.3).

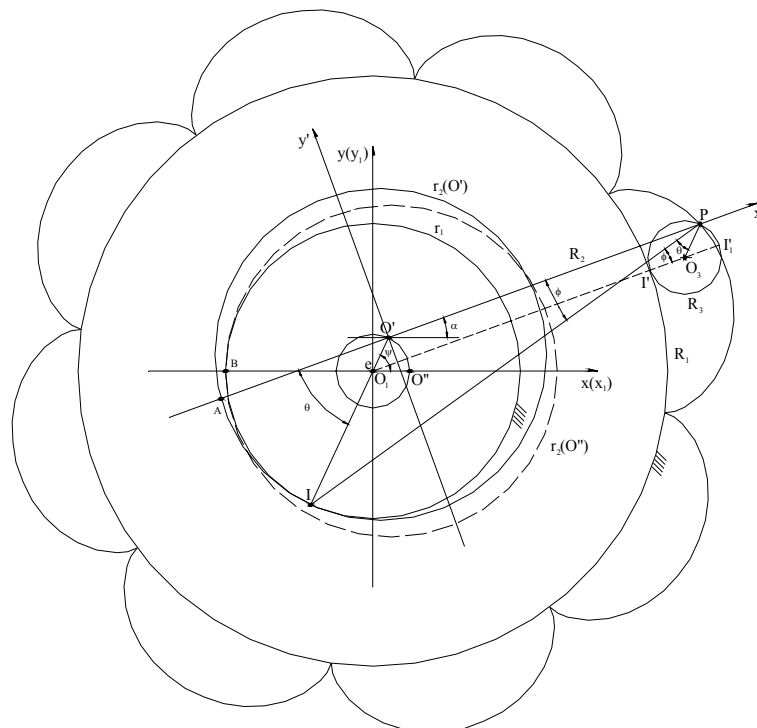


Figura 3.3. Generación de una epicicloide

El perfil trocoidal generado posee propiedades para ser utilizado como engranaje interno.

### 3.2.3 Generación del Perfil Trocoidal Modificado

El perfil trocoidal teórico no es adecuado por la problemática que presenta la estanquidad y el desgaste. La práctica ha demostrado la viabilidad de un perfil trocoidal modificado. En este sentido hay dos alternativas: exterior e interior.

Desde el punto de vista analítico, la generación del perfil trocoidal modificado puede ser obtenida mediante dos métodos diferentes. El primero está basado en el método general de la obtención de las ecuaciones paramétricas equidistantes de una curva. El segundo está basado en las características propias de los perfiles trocoidales.

### 3.2.3.1 Primer Método: Ecuación Paramétrica Equidistante

Este primer método se basa en la construcción del perfil trocoidal modificado una distancia  $S$  equidistante y normal al perfil trocoidal teórico. De hecho, y como puede observarse en la Figura 3.4, la construcción del perfil trocoidal modificado puede entenderse como el desplazamiento del centro de un círculo de radio  $S$  sobre los infinitos puntos que forman el perfil trocoidal teórico. El centro del círculo de radio  $S$  es el punto generador del perfil trocoidal teórico  $P$ , produciendo el punto generador  $P'$  del perfil trocoidal modificado con la intersección de la circunferencia de radio  $S$  y el segmento normal  $II'P$ , en la generación de la curva equidistante interior. De igual forma, es posible generar una curva equidistante exterior, produciendo un punto  $P''$  generador opuesto a  $P'$ . Sin embargo, y como puede observarse en el círculo a trazo y punto de la Figura 3.4, la curva se corta a sí misma, produciendo bucles. Este fenómeno hace que no se cumpla una de las dos condiciones definidas anteriormente para que la curva trocoidal sea válida.

De la observación de la Figura 3.4 se deduce,

$$\begin{aligned}x_t &= x_m + \Delta x \\y_t &= y_m + \Delta y\end{aligned}\tag{3.21}$$

de donde,

$$\Delta x = S \cos \zeta \quad \text{y} \quad \Delta y = S \sin \zeta\tag{3.22}$$

La recta  $a-a'$  representa la tangente al perfil trocoidal teórico en el punto genérico  $P$  formando, por tanto, un ángulo recto con el radio  $S = PP'$ . En el punto genérico  $P$ , su derivada  $x'_t, y'_t$  puede ser representado por un triángulo rectángulo, donde la recta tangente  $a-a'$  forma un ángulo  $\zeta$  con la ordenada  $y'_t$ . Un triángulo rectángulo homónimo puede ser representado sobre la prolongación del segmento  $PP'$ , el cual representa el vector perpendicular al vector tangente en el punto  $P$  sobre la recta  $a-a'$ . De aquí,

$$\cos \zeta = \frac{y'_t}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}} \quad \text{y} \quad \sin \zeta = \frac{-x_t'}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}}\tag{3.23}$$

introduciendo la ecuación ( 3.23 ) en la ecuación ( 3.22 ), y finalmente en la ecuación ( 3.21 ), se obtiene,

$$\begin{aligned}x_m &= x_t - S \frac{y_t'}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}} \\y_m &= y_t - S \frac{-x_t'}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}}\end{aligned}\tag{3.24}$$



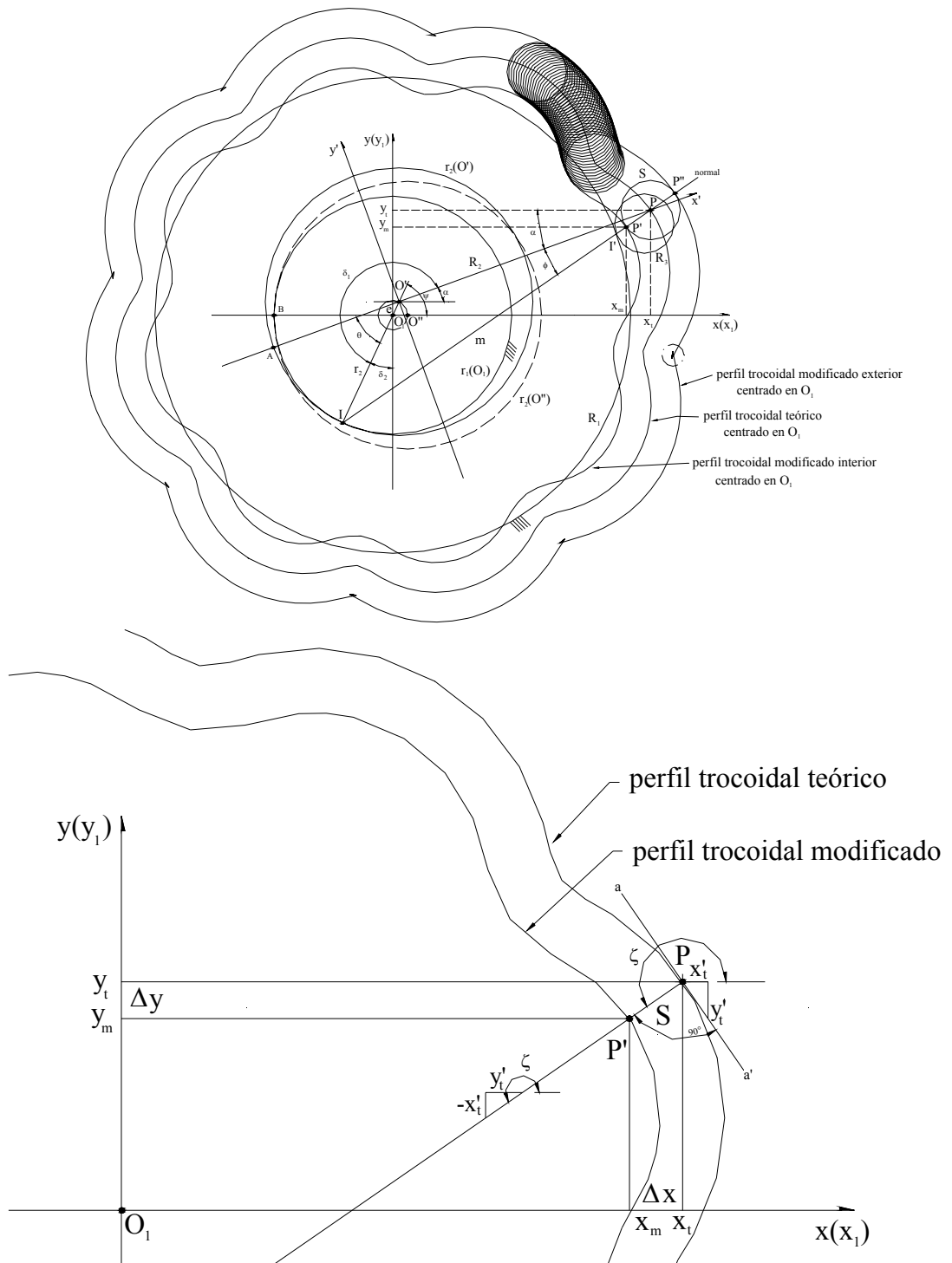


Figura 3.4. Generación del perfil trocoidal modificado

Las derivadas  $x'_t$  y  $y'_t$  son las derivadas del punto genérico  $P$  respecto el ángulo  $\alpha$  de la ecuación ( 3.20 ) del perfil trocoidal teórico. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 x'_t &= \frac{dx_t}{d\alpha} = -Ze \sin Z\alpha - R_2 \sin \alpha \\
 y'_t &= \frac{dy_t}{d\alpha} = Ze \cos Z\alpha + R_2 \cos \alpha
 \end{aligned}
 \tag{ 3.25 }$$

y desarrollando la ecuación ( 3.23 ) e introduciendo la ecuación ( 3.25 ) se obtiene,

$$\begin{aligned} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} &= \\ &= \sqrt{Z^2 e^2 \cos^2 Z\alpha + R_2^2 \cos^2 \alpha + 2ZeR_2 \cos Z\alpha \cos \alpha +} \\ &= \sqrt{+ Z^2 e^2 \sin^2 Z\alpha + R_2^2 \sin^2 \alpha + 2ZeR_2 \sin Z\alpha \sin \alpha} \\ &= \sqrt{Z^2 e^2 (\cos^2 Z\alpha + \sin^2 Z\alpha) + R_2^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) +} \\ &= \sqrt{+ 2ZeR_2 (\cos Z\alpha \cos \alpha + \sin Z\alpha \sin \alpha)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Utilizando las relaciones trigonométricas,

$$\begin{aligned} \cos^2 Z\alpha + \sin^2 Z\alpha &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \\ \cos Z\alpha \cos \alpha + \sin Z\alpha \sin \alpha &= \cos(Z\alpha - \alpha) = \cos(Z-1)\alpha \end{aligned} \quad (3.27)$$

en la ecuación ( 3.26 ) se obtiene,

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{Z^2 e^2 + R_2^2 + 2ZeR_2 \cos(Z-1)\alpha} \quad (3.28)$$

Introduciendo la ecuación ( 3.20 ), ( 3.25 ) y ( 3.28 ) en la ecuación ( 3.24 ) se obtiene la ecuación paramétrica del perfil trocoidal modificado que se puede expresar como,

$$\begin{aligned} x_1 = x_m &= e \cos Z\alpha + R_2 \cos \alpha - S \frac{Ze \cos Z\alpha + R_2 \cos \alpha}{\sqrt{Z^2 e^2 + R_2^2 + 2ZeR_2 \cos(Z-1)\alpha}} \\ y_1 = y_m &= e \cos Z\alpha + R_2 \sin \alpha - S \frac{Ze \sin Z\alpha + R_2 \sin \alpha}{\sqrt{Z^2 e^2 + R_2^2 + 2ZeR_2 \cos(Z-1)\alpha}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

### 3.2.3.2 Segundo Método: Característica Perfiles Trocoidales

Este segundo método se basa en la propiedad de los perfiles trocoidales por la cual la recta perpendicular a la curva en cualquier punto genérico  $P$ , pasa por el centro instantáneo de rotación  $I$  de la ruleta y base internas y por el centro instantáneo de rotación  $I'$  de la ruleta y base externas. La relación angular se genera por el triángulo formado por los puntos  $IO'P$  y de lados  $r_2 = IO'$ ,  $m = IP$  y  $R_2 = O'P$  y que puede verse en la Figura 3.4.

La ecuación del perfil trocoidal modificado puede escribirse como,

$$\begin{aligned} x_m &= e \cos Z\alpha + R_2 \cos \alpha + S \cos(\pi + \alpha + \phi) = e \cos Z\alpha + R_2 \cos \alpha - S \cos(\alpha + \phi) \\ y_m &= e \sin Z\alpha + R_2 \sin \alpha + S \sin(\pi + \alpha + \phi) = e \sin Z\alpha + R_2 \sin \alpha - S \sin(\alpha + \phi) \end{aligned} \quad (3.30)$$

El ángulo  $\phi$  formado entre la normal al perfil trocoidal y el radio generador  $R$ , representa la relación de giro del punto generador  $P$  del lóbulo respecto a la normal del perfil trocoidal.

Se definen dos ángulos auxiliares,

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{\pi}{2} - \psi = \frac{\pi}{2} - Z\alpha \\ \delta_1 &= 2\pi - \left( \delta_2 + \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \pi + (Z-1)\alpha \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde se ha tenido en cuenta la relación angular de la ecuación ( 3.18 ). Aplicando el teorema del coseno al triángulo  $IO'P$ , se obtiene,

$$m^2 = r_2^2 + R_2^2 - 2r_2R_2 \cos(2\pi - \delta_1) \quad (3.32)$$

e igualmente,

$$r_2^2 = m^2 + R_2^2 - 2mR_2 \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{m^2 + R_2^2 - r_2^2}{2mR_2} \quad (3.33)$$

Teniendo en cuenta la ecuación ( 3.31 ) y las relaciones trigonométricas,

$$\begin{aligned} \cos(2\pi - \delta_1) &= \cos 2\pi \cos \delta_1 + \sin 2\pi \sin \delta_1 = \cos \delta_1 \\ \cos \delta_1 &= \cos(\pi + (Z-1)\alpha) = \cos \pi \cos(Z-1)\alpha - \sin \pi \sin(Z-1)\alpha = -\cos(Z-1)\alpha \end{aligned} \quad (3.34)$$

de donde,

$$\cos(2\pi - \delta_1) = -\cos(Z-1)\alpha \quad (3.35)$$

Introduciendo la ecuación ( 3.35 ) en la ecuación ( 3.32 ), y el resultado en la ecuación ( 3.33 ),

$$\cos \phi = \frac{R_2 + r_2 \cos(Z-1)\alpha}{\sqrt{r_2^2 + R_2^2 + 2r_2R_2 \cos(Z-1)\alpha}} \quad (3.36)$$

Sabiendo que  $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ ,

$$\sin \phi = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \frac{r_2 \sin(Z-1)\alpha}{\sqrt{r_2^2 + R_2^2 + 2r_2R_2 \cos(Z-1)\alpha}} \quad (3.37)$$

Desarrollando los términos donde aparece el ángulo  $\phi$  en la ecuación ( 3.30 ),

$$\begin{aligned} S \cos(\alpha + \phi) &= S(\cos \alpha \cos \phi - \sin \alpha \sin \phi) = S \frac{r_2 \cos Z\alpha + R_2 \cos \alpha}{\sqrt{r_2^2 + R_2^2 + 2r_2R_2 \cos(Z-1)\alpha}} \\ S \sin(\alpha + \phi) &= S(\sin \alpha \cos \phi + \cos \alpha \sin \phi) = S \frac{r_2 \sin Z\alpha + R_2 \sin \alpha}{\sqrt{r_2^2 + R_2^2 + 2r_2R_2 \cos(Z-1)\alpha}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

e introduciendo el resultado, ecuación ( 3.38 ), en la ecuación ( 3.30 ) se obtiene la ecuación paramétrica del perfil trocoidal modificado,

$$\begin{aligned} x_1 = x_m &= e \cos Z\alpha + R_2 \cos \alpha - S \frac{r_2 \cos Z\alpha + R_2 \cos \alpha}{\sqrt{r_2^2 + R_2^2 + 2r_2R_2 \cos(Z-1)\alpha}} \\ y_1 = y_m &= e \sin Z\alpha + R_2 \sin \alpha - S \frac{r_2 \sin Z\alpha + R_2 \sin \alpha}{\sqrt{r_2^2 + R_2^2 + 2r_2R_2 \cos(Z-1)\alpha}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sabiendo que  $r_2 = Ze$  de la ecuación ( 3.13 ), se obtiene el mismo resultado que en la ecuación ( 3.29 ).

### 3.2.4 Engranaje formado por un Perfil Trocoidal Modificado

Para llegar a crear un engranaje trocoidal deben combinarse perfectamente las propiedades de los perfiles trocoidales y las de engrane. En otras palabras, asumiendo que se ha escogido un perfil trocoidal como base del engranaje trocoidal, el número de lóbulos del perfil trocoidal a de ser igual al número de dientes del engranaje.

Definiendo el módulo de un perfil trocoidal como  $M_t$  y el módulo de un engranaje trocoidal como  $M$ , sus expresiones son,

$$M_t = \frac{R_1}{R_3} \quad M = \frac{2R_1}{Z} \quad (3.40)$$

El módulo del perfil trocoidal define el número de lóbulos ya que la circunferencia de la ruleta  $R_3$  ha de estar contenida un número exacto de veces en la circunferencia del círculo base fijo  $R_1$ . De aquí,  $M_t = Z$  y substituyendo en  $M$  se obtiene,

$$M = \frac{2R_1}{R_1/R_3} = 2R_3 = 2 \frac{R_2}{Z} \quad (3.41)$$

En este punto, es conveniente introducir un nuevo parámetro adimensional: el *factor equidistante* ( $v$ ). El factor equidistante es una valoración de la modificación realizada en el cambio de un perfil trocoidal teórico a un perfil trocoidal modificado y su valor es:

$$v = \frac{S}{R_3} = \frac{S}{R_2} Z \quad (3.42)$$

Las ecuaciones ( 3.29 ) y ( 3.39 ) pueden ahora ser rescritas de nuevo, pero basándolas ahora en función de cuatro parámetros geométricos básicos y el ángulo de generación, de forma que quedan,

$$\begin{aligned} x_1 = x_m &= \frac{M}{2} \left[ \lambda \cos Z\alpha + Z \cos \alpha - v \frac{\lambda \cos Z\alpha + \cos \alpha}{\sqrt{\lambda^2 + 1 + 2\lambda \cos(Z-1)\alpha}} \right] \\ y_1 = y_m &= \frac{M}{2} \left[ \lambda \sin Z\alpha + Z \sin \alpha - v \frac{\lambda \sin Z\alpha + \sin \alpha}{\sqrt{\lambda^2 + 1 + 2\lambda \cos(Z-1)\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

## 3.3 PERFILES ENVOLVENTES

### 3.3.1 Generación del Perfil Envolverte Teórico

El *perfil envolvente teórico* de un perfil trocoidal se genera fijando el perfil trocoidal teórico concéntricamente a una base interna  $r_1$  y que rueda sin deslizar por el interior de la circunferencia de una ruleta interna  $r_2$ , la cual está fija. De hecho, la base y ruleta internas  $r_1$  y  $r_2$  son las mismas que se utilizaron en la generación del perfil trocoidal teórico. La diferencia ahora es que la ruleta interna  $r_2$  está ahora fija y es la base interna  $r_1$  la móvil. Para entenderlo mejor, se recomienda observar la Figura 3.5.

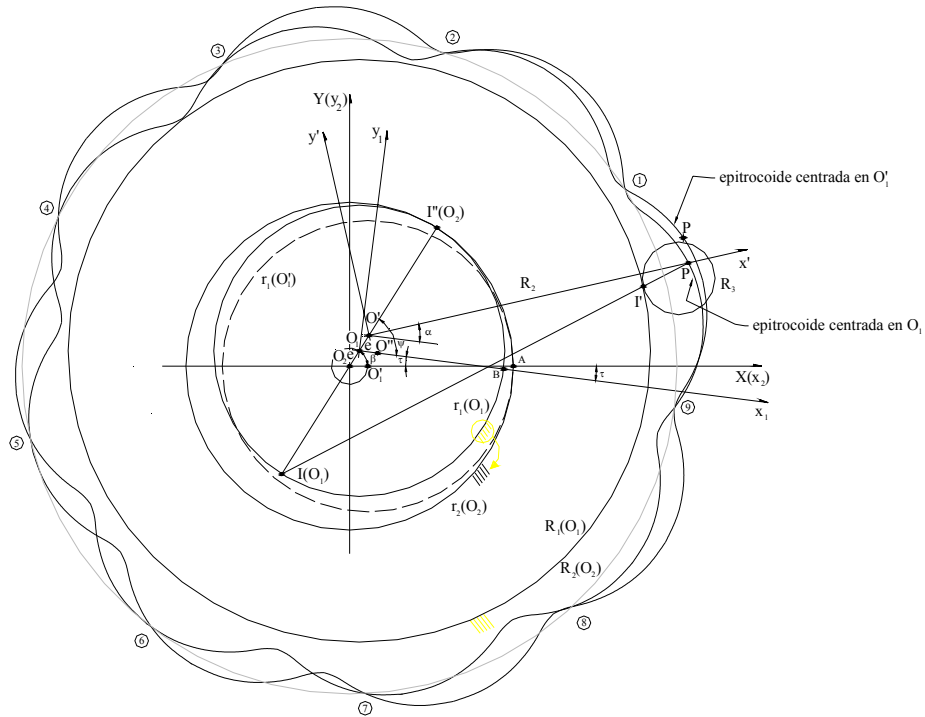


Figura 3.5. Generación del perfil envolvente teórico

Desde el punto de vista geométrico se tiene la curva epitrocoide centrada en  $O'_1$ , y que puede observarse en la Figura. Es el punto de partida. El punto  $O_1$  de la Figura 3.2 se sitúa sobre el punto  $O'_1$  de la Figura 3.5, a una distancia igual a la excentricidad  $e$  del punto  $O_2$  centro del perfil envolvente teórico, donde  $O_2O'_1 = O_2O_1 = O_1O' = e$ . A continuación, se le imprime un giro de rotación concéntrico sobre  $O_2$  de valor ángulo  $\beta$ , pasando de  $O'_1$  a  $O_1$ . Así, el ángulo  $\beta$  representa el ángulo girado por el perfil trocoidal teórico respecto al centro del perfil envolvente teórico  $O_2$ . Posteriormente, un nuevo giro es aplicado al perfil trocoidal teórico de valor  $\tau$ . El ángulo  $\tau$  representa el ángulo girado por el perfil trocoidal teórico sobre su propio centro  $O_1$ .

Así, la curva epitrocoide centrada en  $O'_1$ , descrita y solidaria por los ejes  $x_1-y_1$ , describe un movimiento de roto-traslación respecto los ejes del sistema de referencia  $X(x_2)-Y(y_2)$  fijo a la ruleta interna  $r_2$  y centrada en  $O_2$  al producirse el movimiento de rotación sin deslizamiento de la ruleta y base internas. El movimiento de roto-traslación del perfil trocoidal teórico genera una familia de perfiles envolventes teóricos respecto los ejes de sistema de referencia  $X(x_2)-Y(y_2)$ .

Los ángulos girados  $\beta$  y  $\tau$  son realizados respecto al sistema de coordenadas de referencia del perfil envolvente teórico  $X(x_2)-Y(y_2)$ . Además, estos dos giros son debidos a la rodadura sin deslizamiento de la ruleta y base internas. Partiendo de la posición de la base interna a trazos  $r_1(O'_1)$  centrado en  $O'_1$ , los puntos  $B$  y  $I''(O_2)$  están inicialmente coincidentes sobre el punto  $A$ , donde  $I''$  es el nuevo centro instantáneo de rotación del centro  $O_2$  que es colinear con el centro instantáneo de rotación  $I'$  centrado en  $O_1$  que definía la ruleta y base internas del perfil trocoidal teórico. El segmento  $IO_2I''$  es la referencia de los ángulos de giro de la ruleta y base internas, y de aquí, la condición de rodadura de la ruleta y base internas sin deslizar para el perfil envolvente teórico se define,

$$\text{arco } AI'' = \text{arco } BI'' \Rightarrow r_2\beta = r_1\psi \rightarrow \text{centroides internos} \quad (3.44)$$

De la propiedad de colinearidad de los centros instantáneos de rotación  $IO_2O_1O'I''$ , se define,

$$\beta + \tau = \psi \quad (3.45)$$

e introduciendo la ecuación ( 3.45 ) en la ecuación ( 3.44 ) se obtiene,

$$\tau = \frac{(r_2 - r_1)}{r_1} \beta \quad (3.46)$$

Ahora, teniendo en cuenta las relaciones ya obtenidas en la ecuación ( 3.13 ), se obtiene la relación,

$$\tau = \frac{\beta}{(Z - 1)} \quad (3.47)$$

Considerando el punto generador  $P$  de la curva epitrocoide centrada en  $O'_1$ , sus coordenadas en su sistema de referencia  $x(x_1)-y(y_1)$  de la generación del perfil trocoidal teórico son  $P(x_1, y_1)$  y vienen dadas por la expresión derivada anteriormente,

$$\begin{aligned} x_1 &= e \cos Z\alpha + R_2 \cos \alpha \\ y_1 &= e \sin Z\alpha + R_2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.20)$$

Considerando ahora que la curva epitrocoide centrada en  $O_1$  ha experimentado un movimiento de roto-traslación respecto la curva epitrocoide centrada en  $O'_1$ , el punto generador  $P(x_1, y_1)$  pasará a tener las coordenadas  $P(x_2, y_2)$  en el sistema de referencia  $X(x_2)-Y(y_2)$  de la generación del perfil envolvente teórico. De la Figura 3.5,

$$\begin{aligned} x_2 &= e \cos \beta + e \cos(\psi - \tau) + R_2 \cos(\alpha - \tau) \\ y_2 &= e \sin \beta + e \sin(\psi - \tau) + R_2 \sin(\alpha - \tau) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Introduciendo las relaciones derivadas de la ecuación ( 3.18 ) y la ecuación ( 3.47 ) en la ecuación ( 3.48 ), se obtienen las coordenadas de la familia de perfiles envolventes teóricos para cada par concreto de valores de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .

$$\begin{aligned} x_2 &= X_t = e \cos \beta + e \cos\left(Z\alpha - \frac{\beta}{Z-1}\right) + R_2 \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{Z-1}\right) \\ y_2 &= Y_t = e \sin \beta + e \sin\left(Z\alpha - \frac{\beta}{Z-1}\right) + R_2 \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{Z-1}\right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

También es posible llegar a esta expresión partiendo del cambio de base de la ecuación ( 3.20 ), para pasar del sistema de referencia  $x(x_1)-y(y_1)$  centrado en  $O_1$  al sistema de referencia  $X(x_2)-Y(y_2)$  centrado en  $O_2$ ,

$$\begin{aligned} x_2 &= e \cos \beta + x_1 \cos \tau + y_1 \sin \tau \\ y_2 &= e \sin \beta + y_1 \cos \tau - x_1 \sin \tau \end{aligned} \quad (3.50)$$

Substituyendo,

$$\begin{aligned} x_2 &= e \cos \beta + (e \cos Z\alpha + R_2 \cos \alpha) \cos \tau + (e \sin Z\alpha + R_2 \sin \alpha) \sin \tau = \\ &= e \cos \beta + e(\cos Z\alpha \cos \tau + \sin Z\alpha \sin \tau) + R_2(\cos \alpha \cos \tau + \sin \alpha \sin \tau) \\ y_2 &= e \sin \beta + (e \sin Z\alpha + R_2 \sin \alpha) \cos \tau - (e \cos Z\alpha + R_2 \cos \alpha) \sin \tau = \\ &= e \sin \beta + e(\sin Z\alpha \cos \tau - \cos Z\alpha \sin \tau) + R_2(\sin \alpha \cos \tau - \cos \alpha \sin \tau) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ordenando términos y usando las relaciones trigonométricas descritas anteriormente,

$$\begin{aligned}
 x_2 = X_t &= e \cos \beta + e \cos(Z\alpha - \tau) + R_2 \cos(\alpha - \tau) = \\
 &= e \cos \beta + e \cos\left(Z\alpha - \frac{\beta}{Z-1}\right) + R_2 \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{Z-1}\right) \\
 y_2 = Y_t &= e \sin \beta + e \sin(Z\alpha - \tau) + R_2 \sin(\alpha - \tau) = \\
 &= e \sin \beta + e \sin\left(Z\alpha - \frac{\beta}{Z-1}\right) + R_2 \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{Z-1}\right)
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Se obtiene la misma expresión que la ecuación ( 3.49 ).

El perfil envolvente teórico al perfil trocoidal teórico es la curva exterior o interior a la familia de curvas envolventes, y es generado por los puntos de intersección de las consecutivas e infinitas curvas envolventes. Por tanto, el siguiente paso es encontrar la ecuación paramétrica de la curva que define los puntos de intersección de la familia de curvas envolventes, partiendo del método propuesto por Ansdale (Ansdale 1968):

Sea  $f(x, y, c) = 0$  la ecuación de un sistema paramétrico o de una familia de curvas, donde las curvas son definidas por sus coordenadas  $x$  e  $y$ , y cada curva individualmente es definida por un valor particular del parámetro  $c$ . Una curva vecina a la curva definida con  $f(x, y, c) = 0$  se muestra como  $f(x, y, c + \Delta c) = 0$ , donde  $\Delta c$  es un incremento infinitesimal de  $c$ . Mediante el Teorema de Taylor,

$$f(c, y, c + \Delta c) = f(c, y, c) + \frac{\partial}{\partial c} [f(c, y, c)] \Delta c + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial c^2} [f(c, y, c + \varepsilon \Delta c)] (\Delta c)^2 + \dots \tag{3.53}$$

donde se han tomado los dos primeros términos de la serie y  $0 < \varepsilon < 1$ .

En el punto de intersección de la familia de curvas envolventes, se cumple la igualdad  $f(x, y, c) = f(x, y, c + \Delta c) = 0$ , quedando la ecuación anterior como,

$$\frac{\partial}{\partial c} [f(c, y, c)] \Delta c + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial c^2} [f(c, y, c + \varepsilon \Delta c)] (\Delta c)^2 = 0 \tag{3.54}$$

y cuando el incremento infinitesimal  $\Delta c$  tiende a cero,  $\Delta c \rightarrow 0$ , se obtienen las condiciones que han de cumplir los puntos que pertenecen a la envolvente de la familia de curvas, y el punto de intersección de la curva tiende a ser un punto que satisface las siguientes dos condiciones,

$$f(x, y, c) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial c} [f(x, y, c)] = 0 \tag{3.55}$$

Estos puntos “límite” son también llamados puntos de intersección de las “consecutivas” curvas de la familia de curvas del sistema, y el lugar geométrico exterior e interior de estos puntos cuando  $c$  varía, es el perfil envolvente teórico de la familia de curvas del sistema. Así, para encontrar el perfil envolvente teórico de entre la familia de curvas envolventes, se ha de cumplir,

1. *Condición 1.* Los puntos que definen el perfil envolvente teórico han de satisfacer la ecuación ( 3.49 ).
2. *Condición 2.* Las derivadas de la componente de abcisas del perfil envolvente teórico  $X_t = x_2$  y de la componente de ordenadas del perfil envolvente teórico  $Y_t = y_2$  respecto al ángulo de su generación ha de ser nula.

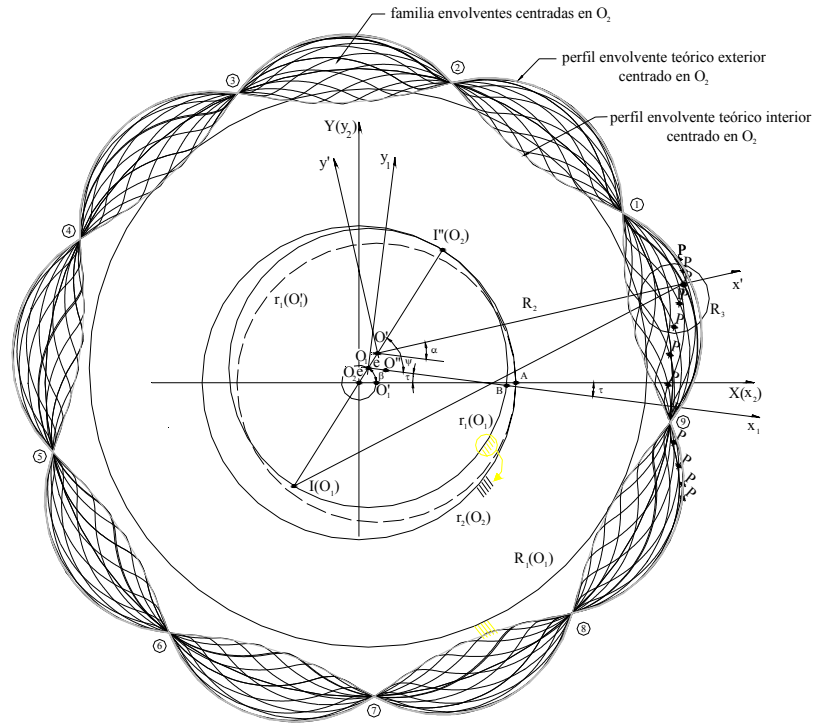


Figura 3.6. Familia de curvas envolventes

Para el presente caso, es conveniente aplicar un cambio de variables. Así,

$$\beta = u - Zv \quad \text{y} \quad Z\alpha - \frac{\beta}{Z-1} = u + Zv \quad (3.56)$$

de donde,

$$\alpha + \frac{\beta}{Z-1} = \frac{u + Zv}{Z} - \frac{u - Zv}{Z} = 2v \quad (3.57)$$

resultado de la combinación de las dos ecuaciones de la ecuación ( 3.56 ). De esta forma, las coordenadas del punto generador P con el cambio de variable, se presentan desde la ecuación ( 3.49 ) de la forma,

$$\begin{aligned} X_t &= e \cos(u - Zv) + e \cos(u + Zv) + R_2 \cos 2v \\ Y_t &= e \sin(u - Zv) + e \sin(u + Zv) + R_2 \sin 2v \end{aligned} \quad (3.58)$$

y aplicando la fórmula trigonométrica,

$$\cos u \cos Zv = \frac{1}{2} \{ \cos(u - Zv) + \cos(u + Zv) \} \quad (3.59)$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} X_t &= 2e \cos u \cos Zv + R_2 \cos 2v \\ Y_t &= 2e \sin u \sin Zv + R_2 \sin 2v \end{aligned} \quad (3.60)$$



Después del cambio de variable, se define el perfil envolvente teórico como la curva generada por los puntos de intersección de las curvas infinitas consecutivas cuando el ángulo  $v$  va variando.

Teniendo en cuenta las dos condiciones antes formuladas, el perfil envolvente teórico ha de cumplir:

$$\begin{aligned} \text{Condición 1} &\Rightarrow \begin{cases} X_t = 2e \cos u \cos Zv + R_2 \cos 2v \\ Y_t = 2e \sin u \sin Zv + R_2 \sin 2v \end{cases} \\ \text{Condición 2} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{dX_t}{dv} = 0 \\ \frac{dY_t}{dv} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Como  $X_t$  y  $Y_t$  son funciones de  $u$  y  $v$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dX_t}{dv} &= \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{dv} \\ \frac{dY_t}{dv} &= \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{du}{dv} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Y aplicando la ecuación ( 3.49 ) a la ecuación ( 3.61 ), se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dv} &= -2Ze \cos u \sin Zv - 2R_2 \sin 2v - 2e \sin u \cos Zv \frac{du}{dv} = 0 \\ \frac{dY}{dv} &= -2Ze \sin u \sin Zv + 2R_2 \cos 2v + 2e \cos u \cos Zv \frac{du}{dv} = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Multiplicando la primera ecuación de la ecuación ( 3.63 ) por  $\cos u$  y la segunda por  $\sin u$ ,

$$\begin{aligned} -Ze \cos^2 u \sin Zv - R_2 \sin 2v \cos u - e \cos u \sin u \cos Zv \frac{du}{dv} &= 0 \\ -Ze \sin^2 u \sin Zv + R_2 \cos 2v \sin u + e \cos u \sin u \cos Zv \frac{du}{dv} &= 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Y sumando las dos ecuaciones,

$$-Ze \sin Zv (\cos^2 u + \sin^2 u) - R_2 \sin 2v \cos u + R_2 \cos 2v \sin u = 0 \quad (3.65)$$

Se puede apreciar la utilidad del cambio de variable ya que al sumar las dos ecuaciones anteriores se elimina el término  $\frac{du}{dv}$ , el cual era desconocido, y se obtiene la segunda condición del perfil trocoidal teórico:

$$\frac{Ze}{R_2} \sin Zv - \cos 2v \sin u + \sin 2v \cos u = 0 \quad (3.66)$$

Esta ecuación presenta la forma de la ecuación trigonométrica genérica del tipo,

$$P + M \sin u + N \cos u = 0$$

con la solución genérica,

$$\begin{aligned}\sin u &= -P \cdot M \pm \sqrt{1 - P^2} \cdot N \\ \cos u &= -P \cdot N \mp \sqrt{1 - P^2} \cdot M\end{aligned}$$

De aquí, combinando términos,

$$\begin{aligned}P &= \frac{Ze}{R_2} \sin Zv \\ M &= -\cos 2v \\ N &= \sin 2v\end{aligned}\tag{3.67}$$

se obtiene las expresiones del  $\sin u$  y  $\cos u$ ,

$$\begin{aligned}\sin u &= \frac{Ze}{R_2} \sin Zv \cos 2v \pm \left[ 1 - \left( \frac{Ze}{R_2} \right)^2 \sin^2 Zv \right]^{\frac{1}{2}} \sin 2v \\ \cos u &= -\frac{Ze}{R_2} \sin Zv \sin 2v \mp \left[ 1 - \left( \frac{Ze}{R_2} \right)^2 \sin^2 Zv \right]^{\frac{1}{2}} \cos 2v\end{aligned}\tag{3.68}$$

que representan la segunda condición del perfil envolvente trocoidal entre los dos ángulos de giro del cambio de variables  $u$  y  $v$ , la condición de los ángulos  $\beta$  y  $\alpha$ . En definitiva, proporciona los valores del ángulo  $u$  en función del ángulo de giro  $v$ . Así, introduciendo la segunda condición en la ecuación ( 3.60 ), la primera condición queda condicionada por la segunda, obteniéndose la ecuación paramétrica del perfil envolvente teórico, que tras usar la función trigonométrica del ángulo doble  $\sin 2Zv = 2 \sin Zv \cos Zv$  y ordenar términos, tiene la forma,

$$\begin{aligned}X_t &= R_2 \cos 2v - \frac{Ze^2}{R_2} \sin 2Zv \sin 2v \pm \left[ 1 - \left( \frac{Ze}{R_2} \right)^2 \sin^2 Zv \right]^{\frac{1}{2}} \cos 2v \cos Zv \\ Y_t &= R_2 \sin 2v + \frac{Ze^2}{R_2} \sin 2Zv \cos 2v \pm \left[ 1 - \left( \frac{Ze}{R_2} \right)^2 \sin^2 Zv \right]^{\frac{1}{2}} \sin 2v \cos Zv\end{aligned}\tag{3.69}$$

Puede ser adoptado indistintamente el signo positivo o negativo en la ecuación ( 3.69 ), mientras sea el mismo en ambas. La diferencia solo radica en que si se adopta el signo positivo, se empieza a generar los lóbulos del perfil envolvente teórico externo y se termina con el interno. De la misma forma, si se adopta el signo negativo, se empieza a generar los lóbulos del perfil envolvente teórico interno y se termina con el externo. De ambas formas, se alcanza el mismo resultado mostrado en la Figura 3.7.

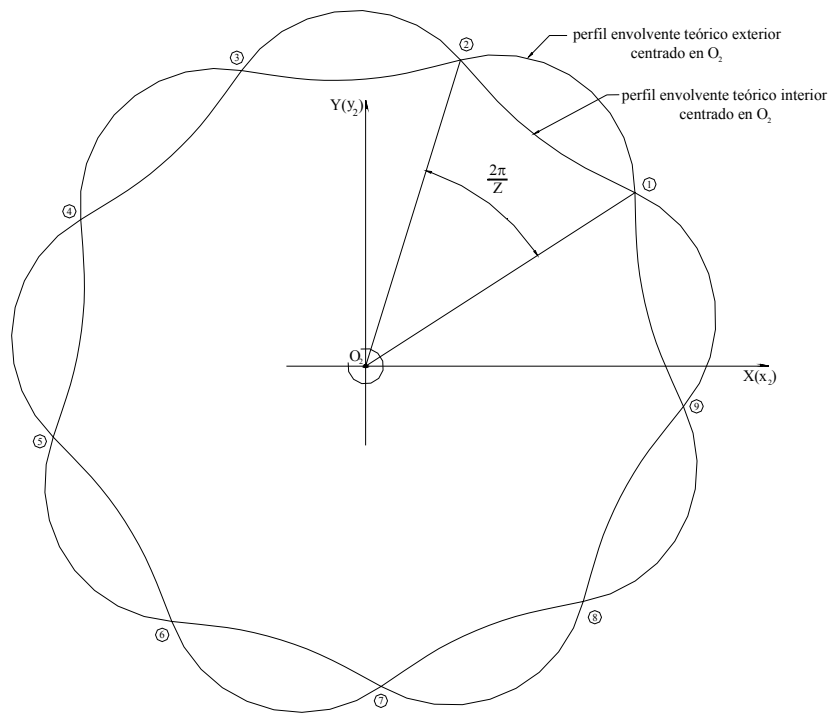


Figura 3.7. Perfil envolvente teórico externo e interno

En función del perfil envolvente teórico exterior o interior, se obtienen dos configuraciones epitrocoide – envolvente, como puede verse en la Figura 3.8.

En la configuración de la izquierda, es el perfil trocoidal teórico quien actúa como engranaje interior, mientras que el perfil envolvente teórico exterior actúa como engranaje exterior. En la configuración de la derecha, es el perfil envolvente teórico interior quien actúa como engranaje interior, mientras que el perfil trocoidal teórico actúa como engranaje exterior.

Una de las características de estas configuraciones construidas con perfiles trocoidales es que en ambas de las configuraciones el perfil teórico trocoidal y el perfil envolvente teórico permanecen permanentemente en contacto un número determinado de *puntos de contacto*.

Así, cuando  $\nu$  varía entre  $0$  y  $2\pi$ , el perfil envolvente teórico generado por la ecuación ( 3.69 ) presenta  $Z$  arcos de lóbulo y  $Z$  puntos de contacto, también llamados *puntos singulares*, tal y como puede observarse en la Figura 3.7. El ángulo formado entre dos puntos singulares consecutivos que definen el arco de un lóbulo vale, por tanto,  $2\pi/Z$ . El arco de lóbulo formado dentro de este ángulo es doble, un arco de lóbulo para el perfil envolvente teórico exterior y otro para el interno. De aquí, el número total de arcos de lóbulo cuando  $\nu$  varía entre  $0$  y  $2\pi$ , es de  $2Z$ ,  $Z$  arcos de lóbulos externos y  $Z$  arcos de lóbulos internos. En otras palabras, dentro del ángulo del arco de un lóbulo  $2\pi/Z$ , se emplea  $\pi/Z$  para generar los arcos de lóbulos externos y  $\pi/Z$  para generar los arcos de lóbulos internos.

De esta forma, se deben definir los intervalos del ángulo  $\nu$  en los que se generan los arcos de lóbulo del perfil envolvente teórico exterior y los intervalos del ángulo  $\nu$  en los que se generan los arcos de lóbulo del perfil envolvente teórico interior cuando el ángulo  $\nu$  varía de  $0$  a  $2\pi$  en la ecuación ( 3.69 ).

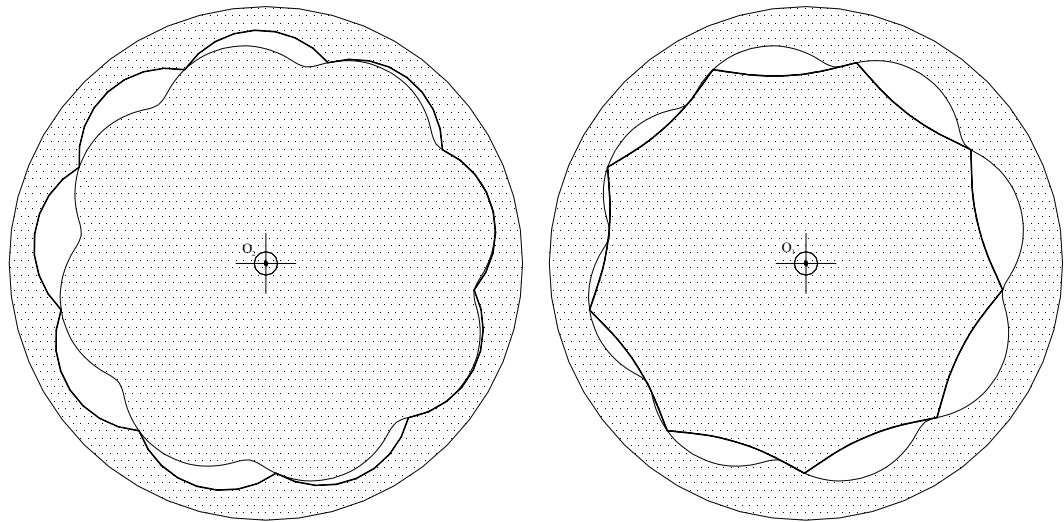


Figura 3.8. Configuración epitrocoide – envolvente teórico

Primeramente, se debe de partir de la referencia genérica definida anteriormente para la generación del perfil trocoidal y envolvente teóricos. Tal y como puede deducirse de la observación de la Figura 3.5, el sistema de referencia inicial es el mostrado en la figura de la izquierda de la Figura 3.9 y es llamado *referencia mitad del arco de lóbulo*. El punto  $P^{ext}$  y el punto  $P^{int}$  se sitúan en el punto medio del arco de lóbulo, donde el punto  $P^{ext}$  se sitúa en la cumbre y el punto  $P^{int}$  se sitúa en el valle del arco de lóbulo perteneciente al perfil envolvente teórico exterior e interior, respectivamente. Sin embargo, si se adoptara una nueva referencia denominada *referencia punto singular*, como la presentada en la figura de la derecha de la Figura 3.9, los puntos  $P^{ext}$  y  $P^{int}$  se encuentran sobre un punto singular, y por tanto, coincidentes y a la misma distancia del centro  $O_2$ .

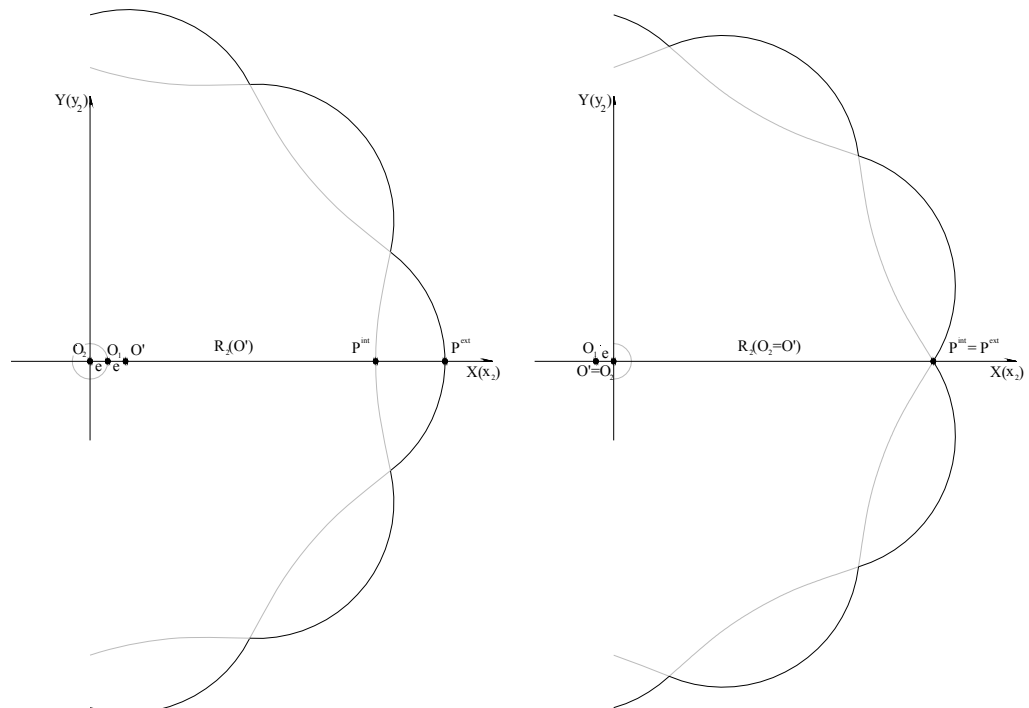


Figura 3.9. Sistemas de referencia para los arcos de lóbulo externo e interno

Los intervalos del ángulo  $\nu$  en los que se generan los arcos de lóbulo del perfil envolvente teórico exterior e interior se expresa,

$$\nu = \left[ \nu_0 + \frac{2(n+1)\pi}{Z}, \nu_0 + \frac{(2n+3)\pi}{Z} \right] \text{ para } n = -1, 0, 1, 2, 3, \dots, (Z-2) \quad (3.70)$$

El valor del ángulo de referencia  $\nu_0$  vendrá en función de la referencia escogida,

$$\left. \begin{array}{l} \nu_0 = -\frac{\pi}{2Z} \text{ para arco de lóbulo exterior} \\ \nu_0 = \frac{\pi}{2Z} \text{ para arco de lóbulo interior} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{referencia mitad del arco de lóbulo} \quad (3.71)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nu_0 = 0 \text{ para arco de lóbulo exterior} \\ \nu_0 = \frac{\pi}{Z} \text{ para arco de lóbulo interior} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{referencia punto singular}$$

Se deduce que la distancia o ángulo entre intervalo e intervalo es  $\pi/Z$ , al igual que el ángulo entre los extremos dentro de cada intervalo que es  $\pi/Z$ . Los ángulos definidos por los extremos de cada intervalo pertenecen a los ángulos de los puntos singulares.

Una observación a agregar es que los intervalos del ángulo  $\nu$  dependen única y exclusivamente del número de arcos de lóbulo o el número de lóbulos  $Z$ .

### 3.3.2 Generación del Perfil Envolvente Modificado

La generación del perfil envolvente modificado puede ser obtenida mediante dos métodos diferentes. El primero está basado en la derivación de las ecuaciones del perfil envolvente modificado al perfil trocoidal modificado mediante un proceso análogo al desarrollado en la derivación del perfil envolvente teórico. Así, se parte de la familia de curvas envolventes infinitas que se generaran en el movimiento de roto-traslación del perfil trocoidal modificado, en vez del perfil trocoidal teórico.

El segundo está basado en el método general de la obtención de las ecuaciones paramétricas equidistantes de una curva, igual al desarrollado en la obtención del perfil trocoidal modificado. Este método se basa en la construcción del perfil envolvente modificado una distancia  $S$  equidistante y normal al perfil modificado teórico. De hecho, y como puede observarse en la Figura 3.10, la construcción del perfil envolvente modificado puede entenderse como el desplazamiento infinito del centro de un círculo de radio  $S$  sobre los infinitos puntos que forman el perfil modificado teórico. En la figura de la izquierda, se presenta el perfil envolvente teórico exterior mientras que en la figura de la derecha se presenta el perfil envolvente teórico interior. Para ambos perfiles, es posible generar el perfil envolvente modificado exterior e interior, tomando ya sea un punto o su opuesto sobre la normal del círculo de radio  $S$ . Sin embargo, y tal como puede verse en las Figuras, no todos los perfiles cumplen las dos condiciones definidas anteriormente para que la curva trocoidal sea válida. Para el perfil envolvente teórico exterior (Figura 3.10 izquierda), puede observarse en el círculo a trazo y punto que la curva se corta a sí misma, produciendo bucles cuando se genera el perfil envolvente modificado exterior.

Un análisis idéntico sucede en el perfil envolvente modificado interior del perfil envolvente teórico interior (Figura 3.10 derecha), aunque no presenta ningún interés para la formación del engranaje trocoidal ya que el perfil trocoidal modificado sólo es válido su modificado interior, ya que el exterior presenta bucles (Figura 3.4).

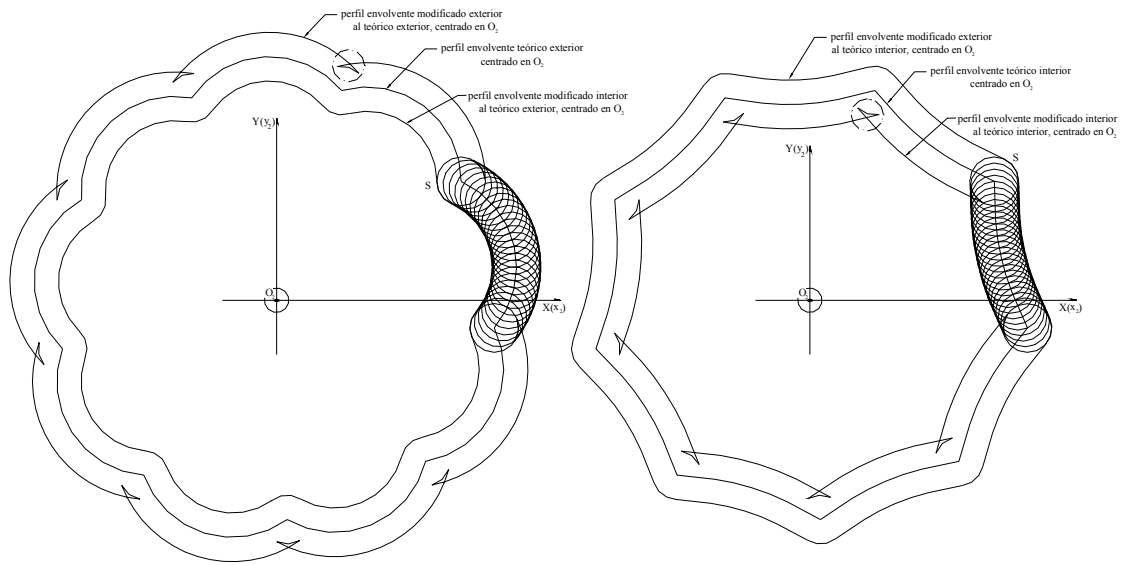


Figura 3.10. Perfil envolvente modificado: exterior e interior

Tomando, así, el perfil envolvente modificado interior al perfil envolvente teórico exterior, se procederá a la derivación de las ecuaciones paramétricas mediante la construcción de su perfil a tramos. La idea se basa en la Figura 3.11, donde,

- (a.) *Arcos de lóbulo entre los puntos singulares.* Se adopta una curva interior equidistante y normal, de valor un decremento  $S$  sobre el perfil envolvente teórico exterior, para la formación de los arcos de lóbulo entre los ángulos situados en el interior de los extremos de cada intervalo definido por ecuación (3.70) y (3.71).
- (b.) *Arco de circunferencia en los puntos singulares.* Se adopta un arco de circunferencia de radio  $S$  y centro en un punto singular  $P_s(X_s, Y_s)$  en los tramos de unión de los arcos de lóbulo, para los ángulos situados en los dos extremos de cada intervalo definido por la ecuación (3.70) y (3.71), ya que éste es el perfil equidistante a un punto.

(a.) *Arcos de lóbulo entre los puntos singulares*

Siguiendo un análisis análogo al desarrollado en la generación del perfil trocoidal modificado y de la observación de la Figura 3.11, se deduce,

$$\begin{aligned} X_t &= X_m + \Delta X \\ Y_t &= Y_m + \Delta Y \end{aligned} \quad (3.72)$$

de donde,

$$\Delta X = S \cos \zeta \quad \text{y} \quad \Delta Y = S \sin \zeta \quad (3.73)$$

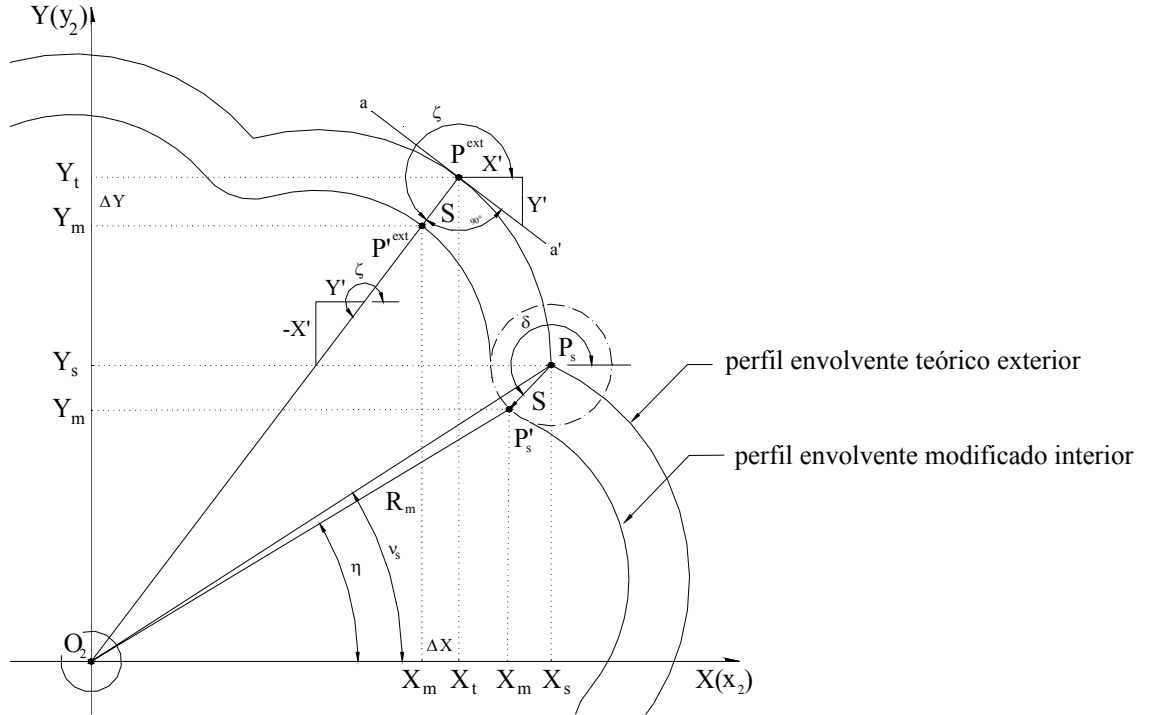


Figura 3.11. Generación del perfil envolvente modificado

La recta  $a-a'$  representa la tangente al perfil envolvente teórico exterior en el punto genérico  $P^{ext}$  formando, por tanto, un ángulo recto con el radio  $S = P^{ext}P^{ext}$ . En el punto genérico  $P^{ext}$ , su derivada  $X'_t, Y'_t$  puede ser representada por un triángulo rectángulo, donde la recta tangente  $a-a'$  forma un ángulo  $\zeta$  con la ordenada  $Y'_t$ . Un triángulo rectángulo homónimo puede ser representado sobre la prolongación del segmento  $P^{ext}P^{ext}$ , el cual representa el vector perpendicular al vector tangente en el punto  $P^{ext}$  sobre la recta  $a-a'$ . De aquí,

$$\cos \zeta = \frac{Y'_t}{\sqrt{X_t'^2 + Y_t'^2}} \quad \text{y} \quad \sin \zeta = \frac{-X'_t}{\sqrt{X_t'^2 + Y_t'^2}} \quad (3.74)$$

e introduciendo la ecuación ( 3.74 ) en la ecuación ( 3.73 ), y finalmente en la ( 3.72 ),

$$\begin{aligned} X_m &= X_t - S \frac{Y'_t}{\sqrt{X_t'^2 + Y_t'^2}} \\ Y_m &= Y_t - S \frac{-X'_t}{\sqrt{X_t'^2 + Y_t'^2}} \end{aligned} \quad (3.75)$$

La derivadas  $X'_t$  y  $Y'_t$  son las derivadas del punto genérico  $P^{ext}$  respecto el ángulo  $\nu$  de la ecuación ( 3.69 ) (adoptando el signo positivo) del perfil envolvente teórico. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 X'_i &= \frac{dX'_i}{dv} = -2R_2 \sin 2v - \frac{2Ze^2}{R_2} [Z \cos 2Zv \sin 2v + \sin 2Zv \cos Zv] + \\
 &+ \left\{ \frac{-\left(\frac{Ze}{R_2}\right)^2 Z \sin Zv \cos^2 Zv \cos 2v}{\sqrt{1-\left(\frac{Ze}{R_2}\right)^2 \sin^2 Zv}} - \sqrt{1-\left(\frac{Ze}{R_2}\right)^2 \sin^2 Zv} \cdot [2 \sin 2v \cos Zv + Z \cos 2v \sin Zv] \right\} \\
 Y'_i &= \frac{dY'_i}{dv} = 2R_2 \cos 2v + \frac{2Ze^2}{R_2} [Z \cos 2Zv \cos 2v - \sin 2Zv \sin Zv] + \\
 &\left\{ \frac{-\left(\frac{Ze}{R_2}\right)^2 Z \sin Zv \cos^2 Zv \sin 2v}{\sqrt{1-\left(\frac{Ze}{R_2}\right)^2 \sin^2 Zv}} + \sqrt{1-\left(\frac{Ze}{R_2}\right)^2 \sin^2 Zv} \cdot [2 \cos 2v \cos Zv - Z \sin 2v \sin Zv] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

A continuación, se introduce la ecuación ( 3.69 ) y la ecuación ( 3.76 ) en la ecuación ( 3.75 ) para obtener la ecuación paramétrica ( $x_2 = X_m$ ,  $y_2 = Y_m$ ) del perfil envolvente modificado interior al perfil envolvente teórico exterior.

En resumen, la aplicación de la ecuación ( 3.75 ), en su total desarrollo, proporciona los arcos de lóbulo modificados que son equidistantes a los arcos de lóbulo teóricos utilizados para construir el perfil envolvente teórico exterior al perfil trocoidal teórico, y que corresponden a los intervalos del ángulo  $v$  determinados por la ecuación ( 3.70 ) y ( 3.71 ).

(b.) Arco de circunferencia en los puntos singulares

Para completar el perfil envolvente modificado, deben de unirse los extremos de los arcos de lóbulo modificados. Estos tramos de unión consisten en arcos semicirculares de circunferencias de radio  $S$  situando su centro en los puntos singulares. De este modo, los tramos de unión se definen como la ecuación genérica de una circunferencia de radio  $S$  y centro en un punto singular  $P_s$  de coordenadas  $X_s, Y_s$  sobre el sistema de coordenadas de referencia  $X(x_2)-Y(y_2)$ , y que son formados en función del ángulo  $\eta$ . En la Figura 3.11 se muestra, además, el ángulo  $v_s$  como el ángulo formado entre el eje de abscisas  $X(x_2)$  del sistema de coordenadas de referencia  $X(x_2)-Y(y_2)$  y el punto singular  $P_s$ .

De aquí,

$$\begin{aligned}
 X_m &= X_s + S \cos \delta \\
 Y_m &= Y_s + S \sin \delta
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Se define  $R_m = O_2P'_s$  como el radio-módulo del punto del perfil envolvente modificado en los tramos de unión de arco semicircular,

$$R_m = \sqrt{X_m^2 + Y_m^2} \tag{3.78}$$

y la ecuación ( 3.77 ) puede también expresarse,



$$\begin{aligned} X_m &= R_m \cos \eta \\ Y_m &= R_m \sin \eta \end{aligned} \quad (3.79)$$

y con la combinación de la ecuación ( 3.77 ) y la ecuación ( 3.79 ) se obtiene la relación entre el ángulo auxiliar  $\delta$  y el ángulo  $\eta$ , que tras reordenar términos,

$$\begin{aligned} S \cos \delta &= R_m \cos \eta - X_s \\ S \sin \delta &= R_m \sin \eta - Y_s \end{aligned} \quad (3.80)$$

Elevando al cuadrado las dos ecuaciones de ( 3.80 ) y posteriormente sumándolas, se obtiene,

$$S^2 (\cos^2 \delta + \sin^2 \delta) = R_m^2 (\cos^2 \eta + \sin^2 \eta) + X_s^2 + Y_s^2 - 2R_m (X_s \cos \eta + Y_s \sin \eta) \quad (3.81)$$

de forma que el ángulo auxiliar  $\delta$  se elimina de la ecuación de segundo grado que queda para  $R_m$  en función únicamente del ángulo  $\eta$ ,

$$R_m^2 - 2(X_s \cos \eta + Y_s \sin \eta)R_m + (X_s^2 + Y_s^2 - S^2) = 0 \quad (3.82)$$

y que tiene la solución doble,

$$R_m = (X_s \cos \eta + Y_s \sin \eta) \pm \sqrt{(X_s \cos \eta + Y_s \sin \eta)^2 - (X_s^2 + Y_s^2 - S^2)} \quad (3.83)$$

Debido a la ecuación genérica de la circunferencia. De las dos soluciones, el punto que interesa es el radio menor en valor absoluto de  $R_m$ . Finalmente, substituyendo la ecuación ( 3.83 ) en la ecuación ( 3.79 ) se obtiene los puntos  $X_m, Y_m$  sobre el sistema de coordenadas de referencia  $X(x_2)-Y(y_2)$  del perfil envolvente modificado en los tramos de unión de arcos semicirculares en función del ángulo  $\eta$ .

Obtenida la ecuación paramétrica para los tramos de unión de los arcos de circunferencia en función del ángulo  $\eta$ , sólo resta definir el intervalo del ángulo  $\eta$  donde debe ser aplicada. Así, se deben determinar los puntos de tangencia donde se enlazan los arcos de lóbulo del perfil envolvente modificado interior perteneciente al perfil envolvente teórico exterior, con los arcos de circunferencia centrados sobre los puntos singulares del perfil envolvente teórico exterior, para completar el perfil envolvente modificado interior. Como se muestra en la Figura 3.12, el ángulo inicial de tangencia  $\eta_1$  pertenece al punto  $X_1, Y_1$  y el ángulo final de tangencia  $\eta_2$  pertenece al punto  $X_2, Y_2$ .

La metodología para la determinación de los arcos de semicircunferencia es:

1. Determinar el ángulo  $\nu_1$  del punto singular  $P_s (X_s, Y_s)$  que genera el punto final del arco de lóbulo modificado inicial mediante la ecuación ( 3.70 ) y ( 3.71 ).
2. Determinar el ángulo  $\nu_2$  del punto singular  $P_s (X_s, Y_s)$  que genera el punto inicial del arco de lóbulo modificado final mediante la ecuación ( 3.70 ) y ( 3.71 ).
3. Determinar las coordenadas del punto de tangencia inicial  $P'_1 (X_1, Y_1)$  introduciendo el ángulo  $\nu_1$  en la ecuación ( 3.75 ).
4. Determinar las coordenadas del punto de tangencia inicial  $P'_2 (X_2, Y_2)$  introduciendo el ángulo  $\nu_2$  en la ecuación ( 3.75 ).
5. Calcular los ángulos  $\eta_1$  y  $\eta_2$  mediante,

$$\eta_1 = \arctg \frac{Y_1}{X_1} \quad \text{y} \quad \eta_2 = \arctg \frac{Y_2}{X_2} \quad (3.84)$$

6. Se determina el arco de circunferencia mediante la ecuación ( 3.79 ) y ( 3.83 ) en el intervalo  $[\eta_1, \eta_2]$ .

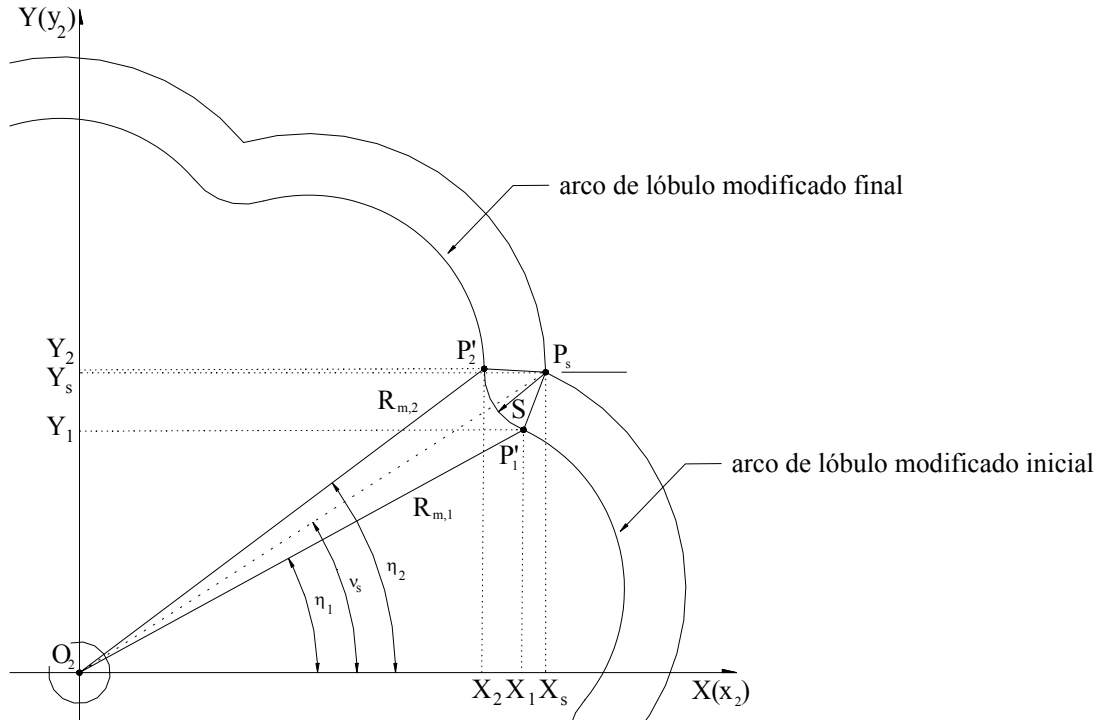


Figura 3.12. Inicio y final tramos de unión arcos de circunferencia

Finalmente, se obtiene la configuración epitrocoide-envolvente modificada como se muestra en la Figura 3.13.

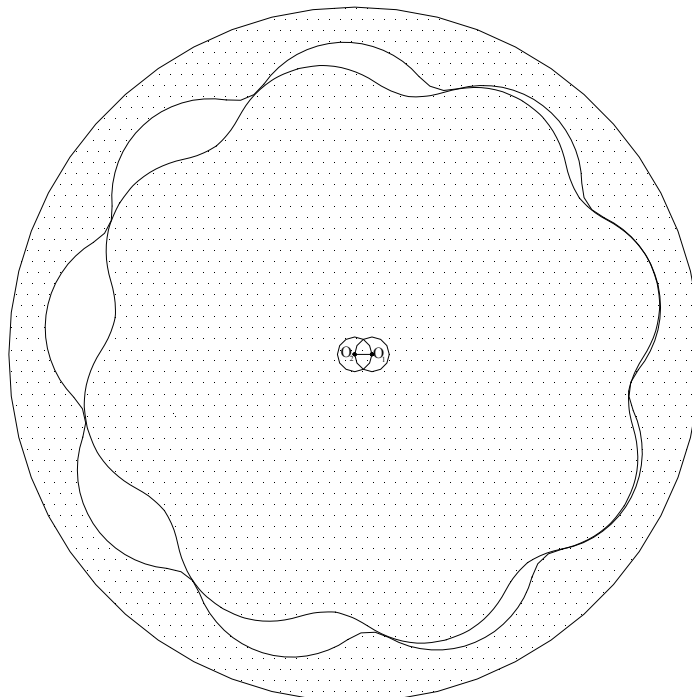


Figura 3.13. Configuración epitrocoide – envolvente modificado

### 3.4 ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LAS RUEDAS DENTADAS

Como ya ha sido comentado anteriormente, en la bomba gerotor la rueda dentada interior está formada por un *perfil trocoidal modificado* y la rueda dentada exterior está formada por un *perfil envolvente modificado*. El perfil de la rueda dentada exterior está compuesto de  $Z$  arcos circulares de radio  $S$ , y centro situado en los *puntos singulares* respectivos (Figura 3.14). Los círculos  $r_1$  y  $r_2$  son la base y la ruleta internas fija y móvil, respectivamente, y cuando la ruleta interna móvil rueda sin deslizar por el interior de la fija generan las bases de los perfiles trocoidal modificado y perfil envolvente modificado. El centro de la rueda dentada interior es  $O_1$  y el de la rueda dentada exterior es  $O_2$ , separados por la distancia de excentricidad  $e$ , la cual permite el engrane. El punto  $I$  es el centro instantáneo de rotación de la ruleta y base internas.

#### 3.4.1 Ecuación de Engrane y Ecuación de los Puntos de Contacto

En el desarrollo de las ecuaciones de los perfiles trocoidales y envolvente para formar el conjunto engranaje de perfil trocoidal, se introdujo el concepto de engranajes conjugados. Para el desarrollo de las ecuaciones de la rueda dentada interior y exterior, se introduce el concepto de la *ecuación de engrane*. Aunque no fue introducido previamente, el concepto de ecuación de engrane permanece implícito el método de la característica de los perfiles trocoidales para determinar el perfil trocoidal teórico.

Existen tres procedimientos alternativos para la derivación de la ecuación de engrane, (Litvin, 1996):

- *Geometría Diferencial*. El rango de la matriz Jacobiana formada con las primeras derivadas del vector  $r_1(\phi, \alpha)$  de generación del perfil de la rueda dentada interior con respecto  $\phi$  y  $\alpha$ , es uno
- *Teoría de Engranajes*. El valor de la componente normal del vector de velocidad de deslizamiento en el movimiento relativo es cero; por ejemplo, la velocidad de deslizamiento es tangente al perfil de la rueda dentada interior.
- *Característica de los Perfiles Trocoidales basada en el Teorema de Lewis*. La normal al círculo  $S$ , centrado en cualquier punto del perfil trocoidal teórico, en el punto de tangencia con el perfil trocoidal modificado pasa a través del centro instantáneo de rotación  $I$ .

Independientemente del procedimiento escogido se alcanzaría la ecuación de engrane en su forma más genérica como,

$$f(\phi, \alpha) = r_2 \sin(\phi + \alpha) - R_2 \sin \phi = 0 \quad (3.85)$$

donde  $\alpha$  representa el ángulo girado genérico en la generación del perfil trocoidal teórico y  $\phi$  representa el ángulo que describe el movimiento del disco móvil generador de la trocoide.

De la observación la Figura 3.4 se puede deducir la ecuación de engrane como,

$$f(\phi, \alpha) = r_2 \sin(Z - 1)\alpha - R_2 \sin \phi = 0 \quad (3.86)$$

#### 3.4.2 Línea de Puntos de Contacto

Como ya se ha referido anteriormente, la rueda dentada interior se desliza en permanente contacto con la superficie de la rueda dentada exterior durante la rotación completa del

conjunto. De esta forma, en cualquier posición de engrane de la rueda dentada interior con la exterior, se produce un número de puntos de contacto igual al número  $Z$  de arcos circulares de radio  $S$  que forman los dientes de la rueda dentada exterior. Así, todos los dientes de la rueda dentada exterior tienen un único punto de contacto. En cambio, la rueda dentada interior, al poseer un diente menos, produce un único punto de contacto en todos los dientes excepto en uno, donde se producen dos puntos de contacto.

La ecuación de los puntos de contacto determina todos los puntos de contacto entre la rueda dentada interior y la rueda dentada exterior para una posición de engrane determinada. Para derivarla, vuelve a ser válida la característica de los perfiles trocoidales basada en el teorema de Lewis, donde la normal a dos perfiles conjugados debe, en todos los puntos de contacto, pasar a través de un punto fijo localizado en la línea de unión de sus centros. En otras palabras, la línea de unión de los centros de los arcos circulares de radio  $S$  que forman los dientes de la rueda dentada exterior con centro instantáneo de rotación  $I$  (el cual está alineado con los centros de ambas ruedas dentadas), pasa por los puntos de contacto.

En un sistema de referencia absoluto  $X$ - $Y$  centrado en la rueda dentada exterior  $O_2$ , la ecuación de los puntos de contacto tiene la forma,

$$\begin{aligned} x_{pc}(\alpha_{pc}) &= R_2 \cos \alpha_{pc} - \frac{S}{m} (R_2 \cos \alpha_{pc} \pm r_2) \\ y_{pc}(\alpha_{pc}) &= R_2 \sin \alpha_{pc} - \frac{S}{m} (R_2 \sin \alpha_{pc}) \\ m &= \sqrt{r_2^2 + R_2^2 \pm 2r_2 R_2 \cos \alpha_{pc}} \end{aligned} \quad (3.87)$$

donde para la referencia de la Figura 3.14(a) el signo de  $r_2$  se escoge positivo, y por el contrario, para la referencia de la Figura 3.14(b) el signo de  $r_2$  se escoge negativo.

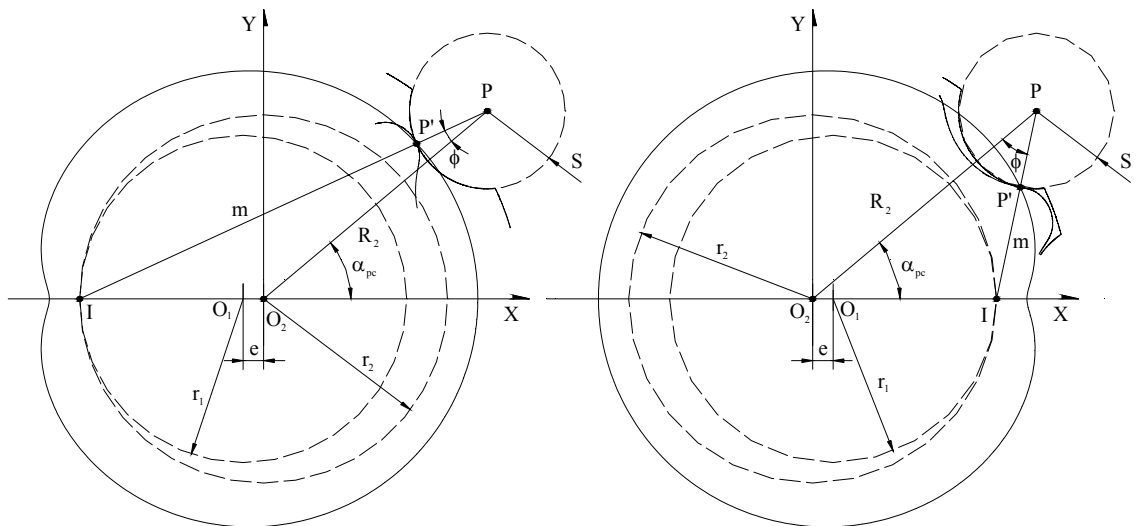


Figura 3.14. Generación de la línea de contacto: (a) figura de la izquierda (b) figura de la derecha

El ángulo  $\alpha_{pc}$  proporciona los puntos de contacto para una rotación completa. Para la determinación de un punto de contacto, se debe escoger el ángulo  $\alpha_{pc}$  que forma el centro del arco circular en estudio con el eje de abscisas del sistema de referencia absoluta  $X$ - $Y$ .

### 3.4.3 Rueda Dentada Interior

La generación del perfil de la rueda dentada interior fue descrita y determinada en los apartados anteriores basándose en la teoría de las curvas trocoidales, perfiles teóricos y modificados, y sus correspondientes envolventes.

Además, se puede describir el perfil de la rueda dentada interior a través de la línea de contacto. Como es sabido, la superficie de la rueda dentada interior mantiene un contacto permanente por deslizamiento con la superficie de la rueda dentada exterior. Sin embargo, no toda la superficie de la rueda dentada exterior con la rueda dentada interior. El contacto en la rueda dentada exterior se limita exclusivamente a arcos semicirculares que forman sus dientes.

A diferencia con lo que pasa con la rueda dentada exterior, toda la superficie de la rueda dentada interior mantiene contacto en un momento determinado en la rotación completa del conjunto. En otras palabras, todos los puntos que forman la superficie de la rueda dentada interior son puntos de contacto en algún momento de la rotación completa del conjunto.

De esta forma, se puede generar el perfil de la rueda dentada interior partiendo de la línea de puntos de contacto. Partiendo de un sistema de referencia  $x_i-y_i$  centrado en  $O_1$  e integrado en la rueda dentada interior, la línea de contacto describe su perfil al proyectar los puntos de contacto desde el sistema de referencia absoluta  $X-Y$  al sistema de referencia  $x_i-y_i$  en una rotación completa. Así,

$$\begin{aligned} x_i(\alpha_{pc}) &= R_2 \cos\left(\frac{1}{Z-1} \alpha_{pc}\right) \pm e \cos\left(\frac{Z}{Z-1} \alpha_{pc}\right) - \frac{S}{m} \left[ R_2 \cos\left(\frac{1}{Z-1} \alpha_{pc}\right) \pm r_2 \cos\left(\frac{Z}{Z-1} \alpha_{pc}\right) \right] \\ y_i(\alpha_{pc}) &= -R_2 \sin\left(\frac{1}{Z-1} \alpha_{pc}\right) \mp e \sin\left(\frac{Z}{Z-1} \alpha_{pc}\right) + \frac{S}{m} \left[ R_2 \sin\left(\frac{1}{Z-1} \alpha_{pc}\right) \pm r_2 \sin\left(\frac{Z}{Z-1} \alpha_{pc}\right) \right] \quad (3.88) \\ m &= \sqrt{r_2^2 + R_2^2 \pm 2r_2R_2 \cos \alpha_{pc}} \end{aligned}$$

donde para las dos referencias de la Figura 3.15, el criterio de signos se muestra en la Tabla 3.2.

Referencia	Punto	Signo a escoger en los términos		
		$e$	$r_2$	$m$
Figura 3.15(a)	$x_i(\alpha_{pc})$	positivo	positivo	positivo
	$y_i(\alpha_{pc})$	negativo	positivo	
Figura 3.15(b)	$x_i(\alpha_{pc})$	negativo	negativo	negativo
	$y_i(\alpha_{pc})$	positivo	negativo	

Tabla 3.2. Criterio de signos para la generación del perfil de la rueda dentada interior

La rueda dentada interior obtenida mediante la ecuación ( 3.88 ) sitúa su centro  $O_1$  sobre el  $O_2$ . La generación del perfil de la rueda dentada interior de la Figura 3.15(a) se lleva a cabo mediante una traslación restando la excentricidad  $e$  a la abscisa de la ecuación ( 3.88 ), mientras que para el perfil de la Figura 3.15 (b) se lleva a cabo mediante una traslación sumando la excentricidad  $e$  a la abscisa de la ecuación ( 3.88 ). La ecuación ( 3.89 ) expresa el resultado.

$$\begin{aligned} x_{t,i}(\alpha_{pc}) &= x_i(\alpha_{pc}) \mp e \\ y_{t,i}(\alpha_{pc}) &= y_i(\alpha_{pc}) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Sin embargo, la aplicación de la ecuación ( 3.88 ) no genera el perfil de la rueda dentada interior por completo, sino que sólo genera un lóbulo, un diente. Esto se debe a la propia cinemática del método. Sea  $\psi$  ángulo de giro en sentido contrario a las agujas del reloj relativo de la rueda

dentada exterior respecto a la rueda dentada interior, de forma la rotación en sentido contrario a las agujas del reloj para la rueda dentada exterior es  $\omega_e \equiv \omega_2$  y para la rueda dentada interior es  $\omega_i \equiv \omega_1$ , de forma que,

$$\begin{aligned} \omega_e &= -(Z-1)\psi & \omega_i &= -Z\psi \\ \omega &= (Z-1)\psi \end{aligned} \quad (3.90)$$

Si ahora se aplica una inversión cinemática al conjunto del sistema de referencia absoluta  $X-Y$  de valor  $\omega$  en sentido contrario a las agujas del reloj respecto  $O_2$ , la rueda dentada exterior es devuelta a su posición original reflejada en la Figura 3.17, y la rueda dentada interior recibe una rotación en sentido a las agujas del reloj de valor  $\psi$  respecto su centro  $O_1$ .

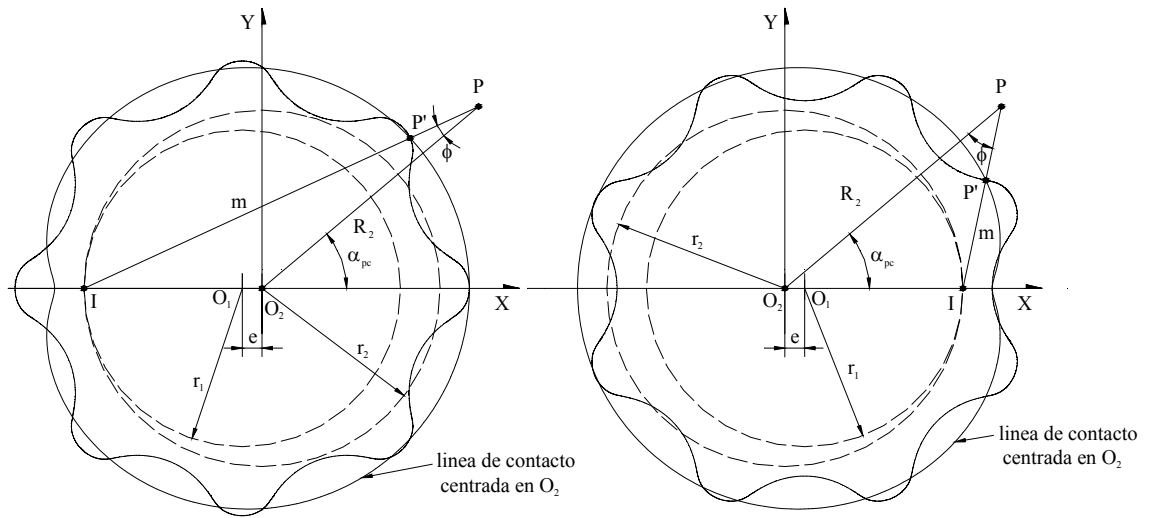


Figura 3.15. Perfil rueda dentada interior: (a) Contacto para  $\alpha_{pc}=0^\circ$  punta-punta diente, figura izquierda (b) Contacto para  $\alpha_{pc}=0^\circ$  valle-punta diente, figura derecha

Así, para una rotación completa en sentido contrario a las agujas del reloj de la rueda dentada exterior respecto el sistema de referencia absoluta  $X-Y$  centrado en  $O_2$ , que mediante la inversión cinemática es llevado siempre a su posición original, el sistema de referencia  $x_i-y_i$  centrado en  $O_1$  e integrado en la rueda dentada interior habrá rotado un ángulo  $\psi$  en sentido a las agujas del reloj respecto su centro  $O_1$  de valor,

$$\psi = -\frac{\omega_e}{Z-1} \quad (3.91)$$

En consecuencia, cuando la rueda dentada exterior experimenta una rotación completa en sentido contrario a las agujas del reloj respecto el sistema de referencia absoluta  $X-Y$ , el sistema de referencia  $x_i-y_i$  centrado en  $O_1$  e integrado en la rueda dentada interior habrá rotado  $1/(Z-1)$  en sentido a las agujas del reloj, generándose un único diente. Para obtener el perfil de la rueda dentada interior por completo, el ángulo  $\alpha_{pc}$  debe variar entre 0 y  $2\pi/(Z-1)$  en la ecuación (3.88). Por tanto,

$$\begin{aligned}
 x_i(\alpha_{gi}) &= R_2 \cos \alpha_{gi} \pm e \cos(Z\alpha_{gi}) - \frac{S}{m} [R_2 \cos \alpha_{gi} \pm r_2 \cos(Z\alpha_{gi})] \\
 y_i(\alpha_{gi}) &= -R_2 \sin \alpha_{gi} \mp e \sin(Z\alpha_{gi}) + \frac{S}{m} [R_2 \sin \alpha_{gi} \pm r_2 \sin(Z\alpha_{gi})] \\
 m &= \sqrt{r_2^2 + R_2^2 \pm 2r_2 R_2 \cos(Z-1)\alpha_{gi}}
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

donde  $\alpha_{gi} = -\frac{\alpha_{pc}}{Z-1}$  y manteniendo el criterio de signos de la Tabla 3.2. La inversión cinemática volverá a ser vista en el Capítulo 4.

### 3.4.4 Rueda Dentada Exterior

El perfil de la rueda dentada exterior está basado en arcos circulares  $S$  distribuido equidistantemente un ángulo  $\Delta\alpha_{pc} = \frac{2\pi}{Z}$  sobre la circunferencia de radio  $R_2$  centrada en  $O_2$ . El perfil de completa cerrándolo exteriormente mediante una circunferencia de radio  $G$  centrada en  $O_2$  de forma que une todos los arcos circulares.

Así, debido a que el perfil de la rueda dentada exterior se repite cada  $\Delta\alpha_{pc} = \frac{2\pi}{Z}$ , será necesario determinarlo en un primer intervalo, para posteriormente distribuirlo equidistantemente hasta completar su generación. De aquí, se define (Nervegna, 1999),

$$\Lambda = i \cdot \Delta\alpha_{pc} \quad \text{donde } i = 0, 1, 2, \dots, (Z-1) \tag{3.93}$$

La idea que reside en este desarrollo es generar la parte del perfil de la rueda dentada exterior contenido en el intervalo  $\Delta\alpha_{pc}$  en la posición representada en la Figura 3.16. Posteriormente, para cualquier otro intervalo  $\Lambda$  definido por la ecuación ( 3.93 ), se lleva a cabo mediante la rotación un ángulo  $\Lambda$  de los  $x_e$ - $y_e$  a través de la suma de este intervalo en estudio a las ecuaciones de generación.

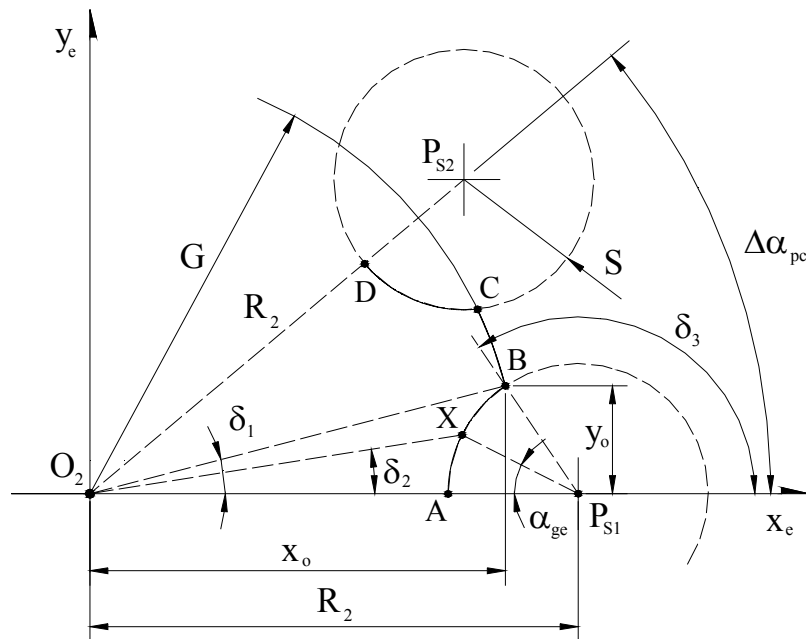


Figura 3.16. Generación por partes del perfil de la rueda dentada exterior

Primeramente, se definen las siguientes constantes de referencia,

$$\begin{aligned} x_o &= \frac{R_2^2 + G^2 - S^2}{2R_2} & y_o &= \sqrt{G^2 - x_o^2} \\ \delta_1 &= \arctan\left(\frac{y_o}{x_o}\right) & \delta_3 &= \pi - \arctan\left(\frac{y_o}{R_2 - x_o}\right) \end{aligned} \quad (3.94)$$

y a continuación las ecuaciones del perfil de la rueda dentada exterior para un punto genérico  $X$  en los diferentes tramos del intervalo son,

$$\begin{aligned} \text{A-B} \quad & \left. \begin{aligned} x_e(\alpha_{ge}) &= R_2 \cos \Lambda + S \cos(\pi + \Lambda - \alpha_{ge}) \\ y_e(\alpha_{ge}) &= R_2 \sin \Lambda + S \sin(\pi + \Lambda - \alpha_{ge}) \end{aligned} \right\} \text{ para } 0 \leq \alpha_{ge} < \pi - \delta_3 \\ \text{B-C} \quad & \left. \begin{aligned} x_e(\alpha_{ge}) &= G \cos(\Lambda + \delta_2) \\ y_e(\alpha_{ge}) &= G \sin(\Lambda + \delta_2) \end{aligned} \right\} \text{ para } \delta_1 \leq \delta_2 < \frac{2\pi}{N} - \delta_1 \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\text{C-D} \quad \left. \begin{aligned} x_e(\alpha_{ge}) &= R_2 \cos\left(\Lambda + \frac{2\pi}{N}\right) + S \cos\left[2\pi\left(\frac{Z+1}{Z}\right) + \Lambda - \delta_3 - \alpha_{ge}\right] \\ y_e(\alpha_{ge}) &= R_2 \sin\left(\Lambda + \frac{2\pi}{N}\right) + S \sin\left[2\pi\left(\frac{Z+1}{Z}\right) + \Lambda - \delta_3 - \alpha_{ge}\right] \end{aligned} \right\} 0 \leq \alpha_{ge} < \pi - \delta_3$$

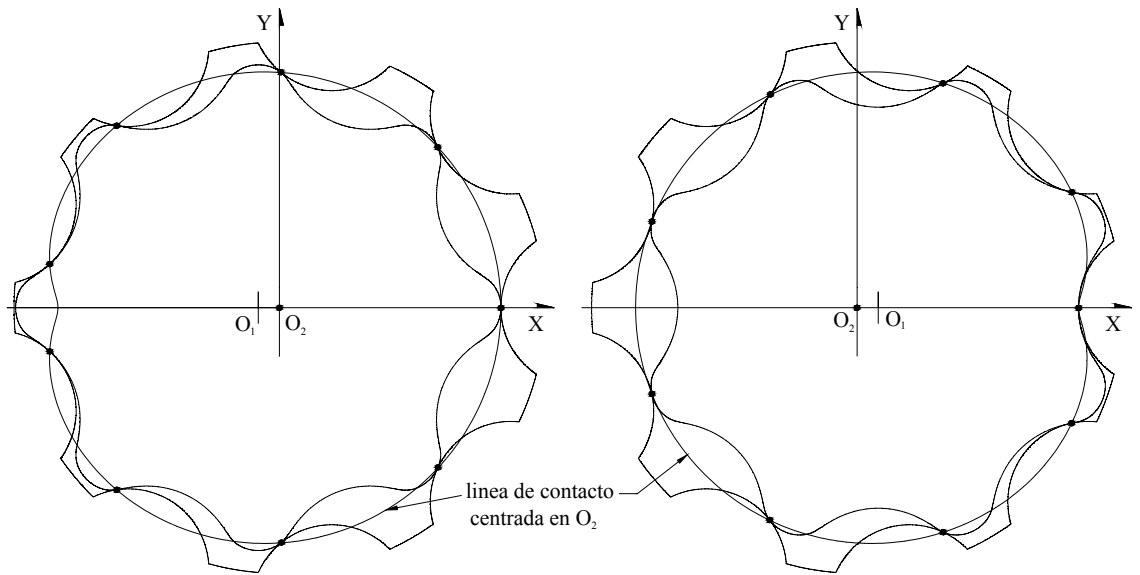


Figura 3.17. Perfiles rueda dentada interior y exterior: (a) Contacto para  $\alpha_{pc}=0^\circ$  punta-punta diente, figura izquierda (b) Contacto para  $\alpha_{pc}=0^\circ$  valle-punta diente, figura derecha

### 3.4.5 Relación de Transmisión

Cuando las dos ruedas dentadas están engranando, la ruleta y base internas giran sin deslizar sobre el centro instantáneo de rotación sobre sus propios y respectivos centros, con ángulos de giro para la rueda dentada exterior igual a  $\omega_e \equiv \omega_2$  y para la rueda dentada interior igual  $\omega_i \equiv \omega_1$ .



Tomando un sentido de giro de referencia contrario a las agujas del reloj, los ángulos de giro de ambas ruedas dentadas están relacionados de la forma,

$$\omega_e = \frac{Z-1}{Z} \omega_i \quad \omega_i = \frac{Z}{Z-1} \omega_e \quad (3.96)$$

donde  $\frac{Z-1}{Z}$  es la relación entre ángulos de giro de ambas ruedas dentadas, de forma que la rueda dentada interior posee un ángulo de giro superior al de la rueda dentada exterior en el engrane, debido a que tiene un diente menos.

Para generar el conjunto del engranaje en cualquier posición de giro y engrane, en primer lugar se debe conocer los ángulos de giro de ambas ruedas dentadas. Para un ángulo de giro dado  $\psi$ ,  $\omega_e$  o  $\omega_i$ , se puede obtener los respectivos ángulos de giro de las ruedas dentadas mediante las relaciones de la ecuación ( 3.91 ) y ( 3.96 ).

En segundo lugar, se deben aplicar las correspondientes ecuaciones de rotación a las ecuaciones de generación de cada rueda dentada. Para la rueda dentada interior, la ecuación de giro es,

$$\begin{aligned} x_{r,i}(\omega_i) &= x_i(\alpha_{gi}) \cos \omega_i - y_i(\alpha_{gi}) \sin \omega_i \\ y_{r,i}(\omega_i) &= x_i(\alpha_{gi}) \sin \omega_i + y_i(\alpha_{gi}) \cos \omega_i \end{aligned} \quad (3.97)$$

mientras que para la rueda dentada exterior es,

$$\begin{aligned} x_{r,e}(\omega_e) &= x_e(\alpha_{ge}) \cos \omega_e - y_e(\alpha_{ge}) \sin \omega_e \\ y_{r,e}(\omega_e) &= x_e(\alpha_{ge}) \sin \omega_e + y_e(\alpha_{ge}) \cos \omega_e \end{aligned} \quad (3.98)$$

En tercer lugar, se debe aplicar la traslación correspondiente a la rueda dentada interior dada por la ecuación ( 3.89 ).

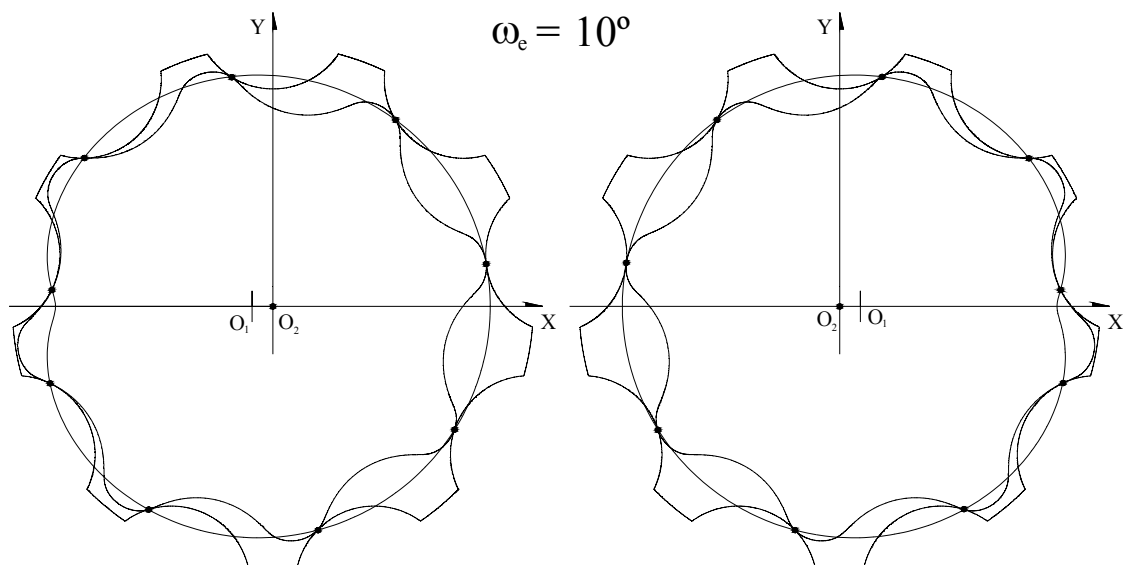


Figura 3.18. Perfiles rueda dentada interior y exterior: (a) Contacto para  $\omega_e=10^\circ$  punta-punta diente, figura izquierda (b) Contacto para  $\omega_e=10^\circ$  valle-punta diente, figura derecha

### 3.5 DESPLAZAMIENTO VOLUMÉTRICO POSITIVO DE UNA BOMBA

Como recordatorio, se expone de nuevo que la bomba gerotor es una bomba oleohidráulica de engranajes internos, cuyo engranaje es un conjunto conjugado entre la rueda dentada interior (piñón) y la rueda dentada exterior (corona) para conseguir el engrane, y donde la rueda dentada interior tiene un lóbulo (diente) menos que la exterior. La rueda dentada interior es la encargada de transmitir el par del movimiento de rotación a la rueda dentada exterior, de forma que cada lóbulo de la rueda dentada interior se desliza en permanente contacto con la superficie de la rueda dentada exterior. Estos puntos de contacto entre ambas ruedas forman un número de cámaras estancas igual al número de lóbulos de la rueda dentada exterior, manteniendo al fluido encerrado en ellas. La acción de bombeo se produce por la variación del volumen de las cámaras estancas con la rotación completa del conjunto.

El conocimiento de los volúmenes de las cámaras estancas, su situación, su variación, sus derivadas y su área de exposición respecto a las cámaras de aspiración e impulsión de la carcasa, es imprescindible para caracterizar sus prestaciones como bomba oleohidráulica.

#### 3.5.1 Análisis Integral-Derivativo

En el análisis integral-derivativo, el volumen de una cámara genérica  $V_k$  en una posición genérica se obtiene calculando la diferencia de las dos integrales de las ecuaciones que generan los perfiles de la rueda dentada interior y exterior. Posteriormente, la variación del volumen se obtiene mediante la derivación del volumen  $V_k$  respecto al ángulo.

Una característica importante de este método es que es condición necesaria determinar el perfil de la rueda dentada interior, y lo más importante, determinar el perfil de la rueda dentada exterior en todo momento del análisis.

Para llevar a cabo este análisis, previamente se deben cumplir las siguientes dos condiciones:

- (i) *Las ecuaciones paramétricas de la rueda dentada interior y exterior deben generar los dos perfiles en la misma referencia.* Esta condición ha sido aplicada en el desarrollo de las ecuaciones paramétricas que generan los perfiles de las ruedas dentadas, con la referencia absoluta  $X-Y$  centrado en  $O_2$ , el sistema de referencia  $x_i-y_i$  centrado en  $O_1$  e integrado en la rueda dentada interior y el sistema de referencia  $x_e-y_e$  centrado en  $O_2$  e integrado en la rueda dentada exterior.
- (ii) *Una posición y un sentido de rotación de referencia común.* En este sentido, la posición (a) representada en las Figuras previas es la más conveniente para el estudio de los volúmenes y su variación.

En la Figura 3.19 se muestra el conjunto del engranaje que va a ser empleado en el estudio del volumen de cámara y su variación y que cumple con las dos condiciones.

Las ecuaciones paramétricas son las definidas anteriormente como:

- *Línea de contacto.* Ecuación ( 3.87 ) con  $r_2$  signo positivo y centrada en el sistema de referencia absoluta  $X-Y$  centrado en  $O_2$ .
- *Rueda dentada interior.* Ecuación ( 3.92 ) con la referencia de la Figura 3.15(a) y criterio de signos de la Tabla 3.2 centrada en el sistema de referencia absoluta  $X-Y$  centrado en  $O_2$ . Posteriormente, la ecuación ( 3.89 ) con  $e$  signo negativo se produce la traslación al sistema de referencia  $x_i-y_i$  centrado en  $O_1$  e integrado en la rueda dentada interior.

- *Rueda dentada exterior.* Ecuación ( 3.95 ) con la referencia de la Figura 3.17(a) y centrada en el sistema de referencia  $x_e-y_e$  centrado en  $O_2$  e integrado en la rueda dentada exterior y a su vez centrada en el sistema de referencia absoluta  $X-Y$  centrado en  $O_2$ .
- *Giro rueda dentada interior.* Ecuación ( 3.91 ) para un  $\psi$  determinado o ecuación ( 3.96 ) para un  $\omega_e$  o  $\omega_i$ , determinado, y la rotación con la ecuación ( 3.97 ).
- *Giro rueda dentada exterior.* Ecuación ( 3.91 ) para un  $\psi$  determinado o ecuación ( 3.96 ) para un  $\omega_e$  o  $\omega_i$ , determinado, y la rotación con la ecuación ( 3.98 ).

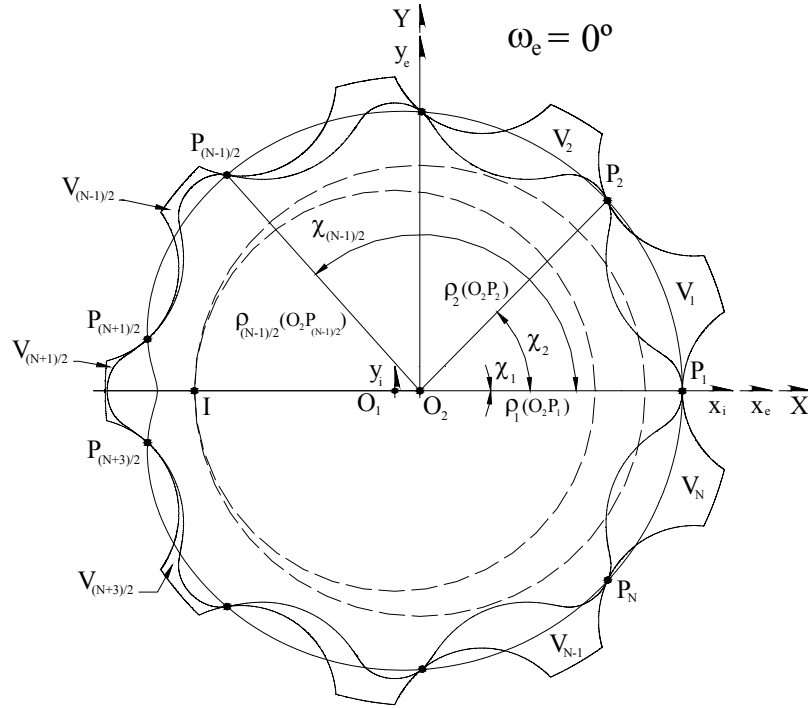


Figura 3.19. Posición y sentido de rotación de referencia para el estudio del volumen y su variación

En el análisis integral-derivativo, la integración de las ecuaciones que generan los perfiles de la rueda dentada interior y exterior es una integración en coordenadas polares donde se define un radiovector. Un *radiovector* es el vector de punto inicial el origen del sistema de referencia absoluta  $X-Y$  centrado en  $O_2$  y punto final un punto de contacto genérico  $P_k$ .

- *Módulo radiovector*  $\rho_k(\alpha_{pc})$ . Se define como el módulo del vector  $O_2P_k$  para cada punto de contacto  $k = 1, 2, 3, \dots Z$ .

$$\rho_k(\alpha_{pc}) = \sqrt{[x_{pc}(\alpha_{pc})]^2 + [y_{pc}(\alpha_{pc})]^2} \quad (3.99)$$

- *Ángulo radiovector*  $\chi_k(\alpha_{pc})$ . Se define como el ángulo del vector  $O_2P_k$  con el eje de abscisas  $X$  del sistema de referencia absoluta  $X-Y$  centrado en  $O_2$  para cada punto de contacto  $k = 1, 2, 3, \dots Z$ .

$$\chi_k(\alpha_{pc}) = \arctan\left(\frac{y_{pc}(\alpha_{pc})}{x_{pc}(\alpha_{pc})}\right) + a\pi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a=0 & \text{si } (x_{pc} \geq 0) \text{ y } (y_{pc} \geq 0) \\ a=1 & \text{si } (x_{pc} < 0) \\ a=2 & \text{si } (x_{pc} > 0) \text{ y } (y_{pc} < 0) \end{cases} \quad (3.100)$$

El área comprendida por una curva en coordenadas polares es,

$$A = \frac{1}{2} \int_{\chi_k}^{\chi_{k+1}} [\rho_k(\chi)]^2 d\chi \quad (3.101)$$

donde  $\rho_k(\chi)$  es el radiovector que barre el área entre los puntos de contacto  $P_k$  y  $P_{k+1}$  en función del ángulo  $\chi$ , y donde  $\chi_k$  y  $\chi_{k+1}$  son los ángulos que forman los puntos de contacto  $P_k$  y  $P_{k+1}$  respectivamente con el eje de abscisas  $X$  del sistema de referencia absoluto  $X-Y$  y delimitan una cámara genérica  $V_k$ .

Si se concentra el estudio en la cámara con  $V_1$  y se toma como referencia una posición genérica como la representada en la Figura 3.20,

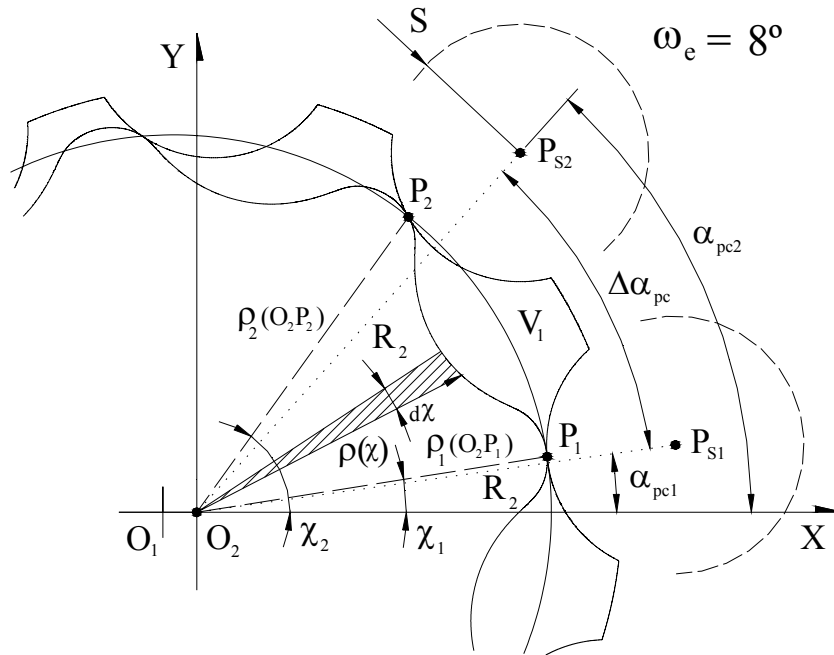


Figura 3.20. Integración en coordenadas polares del perfil de la rueda dentada interior

los ángulos  $\alpha_{pc1}$  y  $\alpha_{pc2}$  representan el ángulo de los puntos singulares que son centros de los arcos circulares respecto al eje de abscisas del sistema de referencia absoluta  $X-Y$  centrado en  $O_2$  y los  $\chi_1$  y  $\chi_2$  representan el ángulo de los puntos de contacto respecto al eje de abscisas del sistema de referencia absoluta  $X-Y$  centrado en  $O_2$ .

El ángulo  $\chi_1(\alpha_{pc1})$  se obtiene aplicando la ecuación ( 3.100 ), previamente calculando las coordenadas  $(x_{pc1}(\alpha_{pc1}), y_{pc1}(\alpha_{pc1}))$  del punto de contacto  $P_1$  mediante la ecuación ( 3.87 ). El ángulo  $\chi_2(\alpha_{pc2})$  se obtiene aplicando la relación,

$$\alpha_{pc2} = \alpha_{pc1} + \Delta\alpha_{pc} \quad (3.102)$$

donde  $\Delta\alpha_{pc} = \frac{2\pi}{Z}$ , a la ecuación ( 3.100 ), previamente calculando las coordenadas  $(x_{pc2}(\alpha_{pc1} + \Delta\alpha_{pc}), y_{pc2}(\alpha_{pc1} + \Delta\alpha_{pc}))$  del punto de contacto  $P_2$  mediante la ecuación ( 3.87 ).

La idea detrás de este razonamiento reside en que tras una rotación de la rueda dentada exterior  $\omega_e = \Delta\alpha_{pc}$ , cada arco de circunferencia ha rotado este ángulo, aunque la rueda dentada exterior se encuentra en una posición idéntica a la anterior. Así, el punto de contacto  $P_1$  se mueve avanzando a la posición que  $P_2$  ocupaba con anterioridad a la rotación, al igual que el punto de contacto  $P_N$  se mueve avanzando a la posición que  $P_1$  ocupaba con anterioridad a la rotación. En

definitiva, para una rotación de  $\omega_e = \Delta\alpha_{pc}$  de la rueda dentada exterior, desde cualquier posición (p.e. la de la Figura 3.20), se obtiene una posición idéntica de las ruedas dentadas y sus puntos de contacto (p.e. la la Figura 3.20 queda en esta misma posición). De esta forma, el ángulo  $\chi_2(\alpha_{pc2})$  es calculado  $\chi_2(\alpha_{pc2}) = \chi_1(\alpha_{pc1} + \Delta\alpha_{pc})$ , y en general, para cualquier punto de contacto  $P_k$ ,

$$\left. \begin{aligned} \rho_k(\alpha_{pck}) &= \rho_1(\alpha_{pc1} + (k-1)\Delta\alpha_{pc}) \\ \chi_k(\alpha_{pck}) &= \chi_1(\alpha_{pc1} + (k-1)\Delta\alpha_{pc}) \end{aligned} \right\} \quad (3.103)$$

donde  $k = 1, 2, 3, \dots Z$ . Finalmente, el volumen  $V_I$  de la primera cámara se calcula mediante la expresión,

$$V_I(\alpha_{pc1}) = H(A_e - A_i) = \frac{1}{2} H \int_{\chi_1}^{\chi_2} [\rho_e(\chi_e)]^2 d\chi - \frac{1}{2} H \int_{\chi_1}^{\chi_2} [\rho_i(\chi_i)]^2 d\chi \quad (3.104)$$

obtenida introduciendo las ecuaciones ( 3.97 ) y ( 3.98 ) en la ecuación ( 3.99 ), y posteriormente aplicándolo a la ecuación ( 3.101 ), y donde  $\rho_e(\chi)$  es el radiovector que barre el área entre los puntos de contacto  $P_1$  y  $P_2$  en función del ángulo  $\chi$  bajo el perfil de la rueda dentada exterior y donde  $\rho_i(\chi)$  es el radiovector que barre el área entre los puntos de contacto  $P_1$  y  $P_2$  en función del ángulo  $\chi$  bajo el perfil de la rueda dentada interior.  $\chi_1$  y  $\chi_2$  son los ángulos que forman los puntos de contacto  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente con el eje de abscisas  $X$  del sistema de referencia absoluto  $X-Y$  y delimitan el volumen  $V_I$  de la cámara 1.

Sin embargo, los radiovectores  $\rho_e(\chi)$  y  $\rho_i(\chi)$  tienen como inconveniente que no pueden ser definidos explícitamente en función del ángulo  $\chi$  para posteriormente calcular el volumen mediante la ecuación ( 3.104 ). A continuación se exponen los pasos a seguir para calcular el volumen  $V_I$ :

1. Se define la posición de estudio del conjunto de las ruedas dentadas (p.e. Figura 3.20) tomando siempre como referencia de “contacto punta-punta diente” correspondiente a las figuras de la izquierda (a), como la definida en la Figura 3.19. Esta posición de estudio es determinada por la selección de un ángulo de giro relativo  $\psi$  o el ángulo de giro de la rueda dentada exterior  $\omega_e$  o la de la rueda dentada interior  $\omega_i$ .
2. Mediante las ecuaciones ( 3.91 ) y ( 3.96 ) se calcula los otros dos ángulos de forma que queda determinado el ángulo de giro de la rueda dentada exterior  $\omega_e$  o el de la rueda dentada interior  $\omega_i$ .
3. Se asigna  $\alpha_{pc1} = \omega_e$  y  $\alpha_{pc2}$  se calcula mediante la ecuación ( 3.102 ).
4. Se calculan los ángulos  $\chi_1(\alpha_{pc1})$  y  $\chi_2(\alpha_{pc2})$  de los puntos de contacto  $P_1$  y  $P_2$  mediante la ecuación ( 3.100 ), y teniendo en cuenta la ecuación ( 3.103 ).
5. Se genera el perfil de la rueda dentada interior ( $x_i(\alpha_{gi}), y_i(\alpha_{gi})$ ) mediante la ecuación ( 3.92 ) variando su ángulo de generación  $\alpha_{gi}$ . De igual forma, Se genera el perfil de la rueda dentada exterior ( $x_e(\alpha_{ge}), y_e(\alpha_{ge})$ ) mediante la ecuación ( 3.95 ) variando su ángulo de generación  $\alpha_{ge}$ .
6. Se genera el perfil de la rueda dentada interior ( $x_{ri}(\omega_i), y_{ri}(\omega_i)$ ) al imprimir la rotación  $\omega_i$  en la ecuación ( 3.97 ). De igual modo, Se genera el perfil de la rueda dentada exterior ( $x_{re}(\omega_e), y_{re}(\omega_e)$ ) al imprimir la rotación  $\omega_i$  en la ecuación ( 3.98 ).
7. Se evalúa el ángulo  $\chi_{ij}(\omega_i)$  para todos los puntos  $j$  ( $x_{rij}(\omega_i), y_{rij}(\omega_i)$ ) del perfil de la rueda dentada interior mediante la ecuación ( 3.100 ). De igual modo, Se evalúa el ángulo  $\chi_{ej}(\omega_e)$  para todos los puntos  $j$  ( $x_{rej}(\omega_e), y_{rej}(\omega_e)$ ) del perfil de la rueda dentada

exterior mediante la ecuación ( 3.100 ).

8. Se define el intervalo de estudio del volumen para cada rueda dentada,

$$\begin{aligned} \chi_1(\alpha_{pc1}) \leq \chi_{i,j}(\omega_i) \leq \chi_2(\alpha_{pc2}) \\ \chi_1(\alpha_{pc1}) \leq \chi_{e,j}(\omega_e) \leq \chi_2(\alpha_{pc2}) \end{aligned} \quad (3.105)$$

9. El módulo de los radiovectores para cada rueda dentada se define, partiendo de la ecuación ( 3.99 ),

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}(\chi_{i,j}) &= \sqrt{[x_{ri,j}(\omega_i)]^2 + [y_{ri,j}(\omega_i)]^2} \\ \rho_{e,j}(\chi_{e,j}) &= \sqrt{[x_{re,j}(\omega_e)]^2 + [y_{re,j}(\omega_e)]^2} \end{aligned} \quad (3.106)$$

10. El cálculo de la integral de la ecuación ( 3.101 ) se lleva a cabo numéricamente. Así, para los valores del ángulo  $\chi_{i,j}$  y  $\chi_{e,j}$  que cumplen la condición de la ecuación ( 3.105 ),

$$\begin{aligned} A_{i,1} &= \frac{1}{2} \int_{\chi_1}^{\chi_2} [\rho_i(\chi_i)]^2 d\chi \cong \frac{1}{2} \sum_{\chi_1}^{\chi_2} [\rho_{i,j}(\chi_{i,j})]^2 \Delta\chi_{i,j} \quad \text{donde } \Delta\chi_{i,j} = \chi_{i,j+1} - \chi_{i,j} \\ A_{e,1} &= \frac{1}{2} \int_{\chi_1}^{\chi_2} [\rho_e(\chi_e)]^2 d\chi \cong \frac{1}{2} \sum_{\chi_1}^{\chi_2} [\rho_{e,j}(\chi_{e,j})]^2 \Delta\chi_{e,j} \quad \text{donde } \Delta\chi_{e,j} = \chi_{e,j+1} - \chi_{e,j} \end{aligned} \quad (3.107)$$

11. Finalmente, el volumen  $V_1$  de la primera cámara se calcula con la ecuación ( 3.104 ).

Este procedimiento ha sido descrito para el volumen  $V_1$  de la primera cámara. En general, para una cámara genérica  $k$ , su volumen se calcula,

$$V_k(\alpha_{pck}) = V_1(\alpha_{pc1} + (k-1)\Delta\alpha_{pc}) \quad (3.108)$$

Ahora, se ha llevado a cabo la parte integral del análisis integral-derivativo para el cálculo del volumen de una cámara genérica  $k$ . A continuación la parte derivativa del análisis integral-derivativo se realiza, una vez conocido  $V_k(\alpha_{pck})$ , mediante su derivación numérica  $\frac{dV_k(\alpha_{pck})}{d\alpha_{pck}}$ ,

obteniéndose la variación del volumen de la cámara genérica  $k$  para una rotación completa del conjunto de del engranaje.

### 3.5.2 Análisis Derivativo-Integral

En el análisis derivativo-integral, la variación del volumen de una cámara genérica  $V_k$  en una rotación completa del conjunto del engranaje, se obtiene directamente calculando el volumen delimitado por los perfiles de ambas ruedas dentadas entre dos puntos de contacto consecutivos. Posteriormente, el volumen se obtiene mediante la integración del volumen  $V_k$  respecto el ángulo. La característica más importante de este método es que es no es condición necesaria determinar el perfil de la rueda dentada interior ni el perfil de la rueda dentada exterior.

#### 3.5.2.1 Método de los Radiovectores

El estudio de la variación de volumen por el método de los radiovectores puede ser llevado a cabo desde dos puntos de vista, como son, la *variación de volúmenes de control* atrapados entre dos radiovectores o mediante un *balance de caudales de entrada y salida a la cámara* del

volumen de control sobre los radiovectores.

Variación de volúmenes de control

Se definen dos volúmenes de control,

- $V_i$ . Volumen atrapado en la rueda dentada interior definido por la polilínea  $AO_1B$  y la línea de puntos de contacto entre  $A$  y  $B$ , representado en la Figura 3.21(a).
- $V_e$ . Volumen atrapado en la rueda dentada exterior definido por el arco de circunferencia entre los puntos  $E$  y  $B$ , la línea de puntos de contacto entre  $A$  y  $B$ , y los segmentos  $BE$  y  $AF$ , representado en la Figura 3.22(a).

y cuatro radiovectores

- $\rho_{iA}$  y  $\rho_{iB}$ . Radiovectores definidos en la rueda dentada interior de origen en  $O_1$  y final en los puntos de contacto  $A$  y  $B$  respectivamente, representado en la Figura 3.21(a).
- $\rho_{eA}$  y  $\rho_{eB}$ . Radiovectores definidos en la rueda dentada exterior de origen en  $O_2$  y final en los puntos  $E$  y  $F$  respectivamente, representado en la Figura 3.22(a).

La idea de variación de volumen se concentra en la evaluación de la variación de los volúmenes  $V_i$  y  $V_e$  debido al volumen barrido por los radiovectores  $\rho_{iA}$  y  $\rho_{iB}$  para la rueda dentada interior y el volumen barrido por los segmentos  $BE$  y  $AF$  (que forman parte de los radiovectores  $\rho_{eA}$  y  $\rho_{eB}$ ) para la rueda dentada exterior cuando se imprime una rotación en el conjunto del engranaje. Sin embargo, los ángulos de giro de las ruedas dentadas y puntos de contacto no son iguales. Esto significa que el ángulo que se desplaza un punto de contacto es diferente al ángulo desplazado por la rueda dentada interior y el desplazado por la rueda dentada exterior.

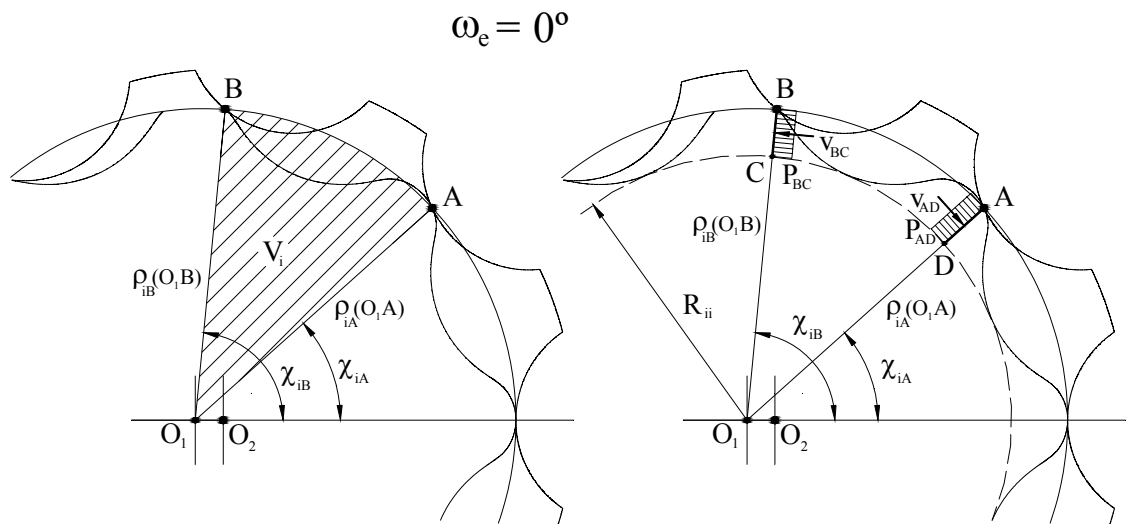


Figura 3.21. Volumen, velocidad y presión definidas en la rueda dentada interior: (a) variación de volúmenes de control - fig. izquierda- (b) balance de caudales de entrada y salida de la cámara – fig. derecha-

Sea  $d\omega_e = d\alpha_{pc}$  un ángulo infinitésimo de rotación imprimido a la rueda dentada exterior, de

forma que la rueda dentada interior, de acuerdo la relación de giro de la ecuación ( 3.96 ), gira  $d\omega_i = \frac{Z}{Z-1} \omega_e$ . El punto de contacto  $A$  sufre una rotación igual a  $d\chi_{iA}$  como puede observarse en la Figura 3.23.

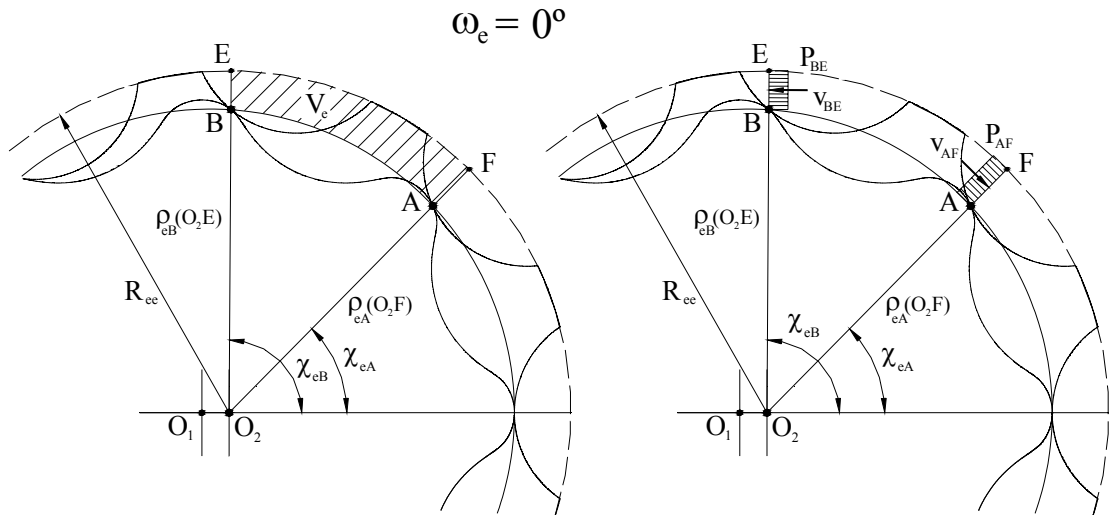


Figura 3.22. Volumen, velocidad y presión definidas en la rueda dentada exterior: (a) variación de volúmenes de control - fig. izquierda- (b) balance de caudales de entrada y salida de la cámara – fig. derecha-

Despreciando la variación del módulo del radiovector  $\rho_{iA}$  debido al infinitésimo del ángulo girado, el diferencial de área recorrida en su giro respecto  $O_1$  vendrá dada por la ecuación ( 3.101 ), y el diferencial de volumen barrido será  $\frac{1}{2} H \rho_{iA}^2 d\chi_{iA}$ . El diferencial de la variación de volumen es experimentada como una reducción del volumen  $V_i$ .

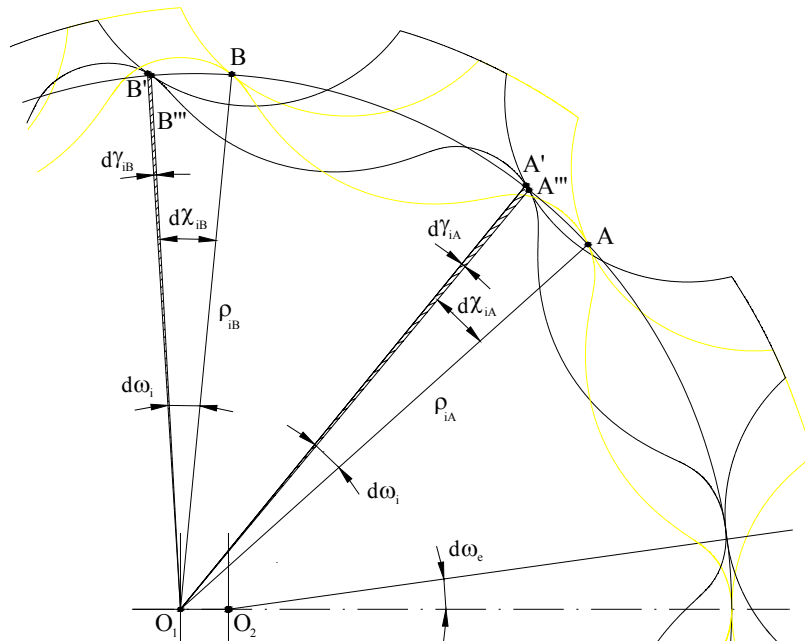


Figura 3.23. Variación del volumen en la rueda dentada interior



Ahora bien, la rueda dentada interior gira más rápido que el punto de contacto  $A$ , debido a que las coordenadas del punto de contacto  $A$  son función del ángulo  $\omega_e = \alpha_{pc}$  (ecuación ( 3.100 )) y las coordenadas de la rueda dentada interior son función del ángulo  $\omega_i$ . Entonces,  $d\omega_i > d\chi_{iA}$  y el diferencial de área formada entre los puntos  $O_2A'A''$  con volumen  $\frac{1}{2}H\rho_{iA}^2 d\gamma_{iA}$  entra también en el volumen  $V_i$  reduciéndolo. Como consecuencia, el diferencial de la variación de volumen neto debido al punto de contacto  $A$  será  $\frac{1}{2}H\rho_{iA}^2(d\chi_{iA} + d\gamma_{iA}) = \frac{1}{2}H\rho_{iA}^2 d\omega_i$ . Partiendo de un razonamiento similar para el punto de contacto  $B$ , se obtiene el diferencial de la variación de volumen  $V_i$  neto como,

$$dV_i = \frac{1}{2}H\rho_{iB}^2 d\omega_i - \frac{1}{2}H\rho_{iA}^2 d\omega_i = \frac{1}{2}H(\rho_{iB}^2 - \rho_{iA}^2)d\omega_i \quad (3.109)$$

Sea de nuevo  $d\omega_e = d\alpha_{pc}$  un ángulo infinitésimo de rotación provocado a la rueda dentada exterior, de forma que el radiovector  $\rho_{eA}$  gira centrado en  $O_2$  un ángulo  $d\chi_{eA}$ , y el punto de contacto  $A$  sufre una rotación igual a  $d\chi_{eA}$  como puede observarse en la Figura 3.24.

Despreciando la variación del módulo del radiovector  $\rho_{eA}$  debido al infinitésimo del ángulo girado, el diferencial de área recorrida por el segmento  $AF$  en su giro respecto  $O_1$  vendrá dada por la ecuación ( 3.101 ) en la forma  $\frac{1}{2}(R_{ee}^2 - \rho_{eA}^2)d\chi_{eA}$  y el diferencial del volumen barrido será  $\frac{1}{2}H(G^2 - \rho_{eA}^2)d\chi_{eA}$  donde  $R_{ee} \equiv G$ . El diferencial de la variación de volumen es experimentada como una reducción del volumen  $V_e$ . Sin embargo, en este caso la rueda dentada exterior gira más lenta que el punto de contacto  $A$ , debido a que las coordenadas del punto de contacto  $A$  son función de la rueda dentada interior y que gira más rápido, y las coordenadas de la rueda dentada exterior son función del ángulo  $\omega_e$ . Entonces,  $d\omega_e < d\chi_{eA}$  y el diferencial de área formada entre los puntos  $A''F''A''F''$  con volumen  $\frac{1}{2}H\rho_{eA}^2 d\gamma_{eA}$  sale del el volumen  $V_e$  aumentándolo. Como consecuencia, el diferencial de la variación de volumen neto debido al punto de contacto  $A$  en la rueda dentada exterior será  $\frac{1}{2}H(G^2 - \rho_{eA}^2)(d\chi_{eA} - d\gamma_{eA}) = \frac{1}{2}H\rho_{eA}^2 d\omega_e$ . Partiendo de un razonamiento similar para el punto de contacto  $B$ , se obtiene el diferencial de la variación de volumen  $V_i$  neto como,

$$dV_e = \frac{1}{2}H(G^2 - \rho_{eA}^2)d\omega_e - \frac{1}{2}H(G^2 - \rho_{eB}^2)d\omega_e = \frac{1}{2}H(\rho_{eA}^2 - \rho_{eB}^2)d\omega_e \quad (3.110)$$

La diferencia de signos de los radiovectores en las ecuaciones ( 3.109 ) y ( 3.110 ) es debido a la interpretación de la variación del volumen, donde en  $V_i$  se produce una disminución y en  $V_e$  se produce un aumento.

Finalmente, la variación infinitesimal total del volumen de la cámara se presenta como  $dV_c = dV_e + dV_i$ , donde substituyendo las ecuaciones ( 3.109 ) y ( 3.110 ) se obtiene,

$$dV_c = \frac{1}{2}H[(\rho_{eA}^2 - \rho_{eB}^2)d\omega_e + (\rho_{iB}^2 - \rho_{iA}^2)d\omega_i] \quad (3.111)$$

y teniendo en cuenta la relación de transmisión,

$$\frac{dV_c}{d\alpha_{pc}} = \frac{1}{2} H \left[ (\rho_{eA}^2 - \rho_{eB}^2) + (\rho_{iB}^2 - \rho_{iA}^2) \frac{Z}{Z-1} \right] \quad (3.112)$$

con  $\omega_e = \alpha_{pc}$

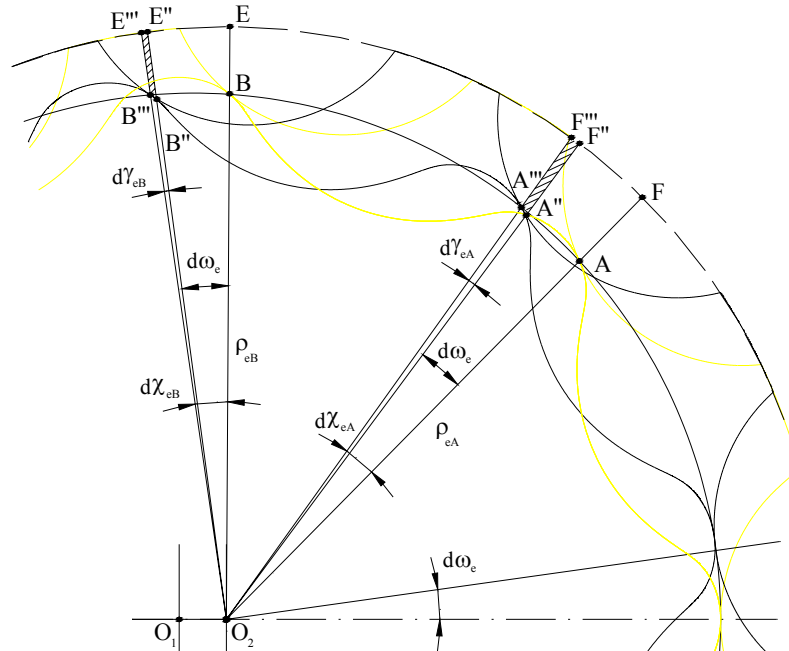


Figura 3.24. Variación del volumen en la rueda dentada exterior

### Balace de Caudales de Entrada y Salida de la Cámara

Se definen cuatro radiovectores,

- $\rho_{iA}$  y  $\rho_{iB}$ . Radiovectores definidos en la rueda dentada interior de origen en  $O_1$  y final en los puntos de contacto  $A$  y  $B$  respectivamente, representado en la Figura 3.21(b).
- $\rho_{eA}$  y  $\rho_{eB}$ . Radiovectores definidos en la rueda dentada exterior de origen en  $O_2$  y final en los puntos  $E$  y  $F$  respectivamente, representado en la Figura 3.22(b).

y los segmentos,

- $AD$  y  $BC$ . Segmentos definidos en la rueda dentada interior que cierran el volumen  $V_c$  entre el arco de la circunferencia entre dos valles de diente de la rueda dentada interior  $R_{ii}$  y la línea de puntos de contacto. Figura 3.21(b).
- $AF$  y  $BE$ . Segmentos definidos en la rueda dentada exterior que cierran el volumen  $V_c$  entre el arco de la circunferencia entre dos puntas de diente de la rueda dentada exterior  $R_{ee} \equiv G$  y la línea de puntos de contacto. Figura 3.22(b).

La idea del análisis se concentra en la evaluación de la variación de los caudales que salen/entran del volumen de la cámara  $V_c$  por los segmentos que lo definen. Así, tomando un caudal de salida de sentido positivo y otro de sentido negativo para ser coherente con la disminución del volumen  $V_c$  en la posición de estudio, en la rueda dentada interior,

$$dQ_i^- = -Hv_{AD}d\rho = -H\omega_i\rho d\rho \quad \Rightarrow \quad Q_i^- = \int_{\rho=R_{ii}}^{\rho=\rho_{iA}} -H\omega_i\rho d\rho = -\frac{1}{2}H\omega_i(\rho_{iA}^2 - R_{ii}^2)$$

$$dQ_i^+ = Hv_{BC}d\rho = H\omega_i\rho d\rho \quad \Rightarrow \quad Q_i^+ = \int_{\rho=R_{ii}}^{\rho=\rho_{iB}} H\omega_i\rho d\rho = \frac{1}{2}H\omega_i(\rho_{iB}^2 - R_{ii}^2)$$
(3.113)

y en la rueda dentada exterior,

$$dQ_e^- = -Hv_{AF}d\rho = -H\omega_e\rho d\rho \quad \Rightarrow \quad Q_e^- = \int_{\rho=\rho_{eA}}^{\rho=R_{ee}} -H\omega_e\rho d\rho = -\frac{1}{2}H\omega_e(R_{ee}^2 - \rho_{eA}^2)$$

$$dQ_e^+ = Hv_{BE}d\rho = H\omega_e\rho d\rho \quad \Rightarrow \quad Q_e^+ = \int_{\rho=\rho_{eB}}^{\rho=R_{ee}} H\omega_e\rho d\rho = \frac{1}{2}H\omega_e(R_{ee}^2 - \rho_{eB}^2)$$
(3.114)

Donde  $\omega_i$  y  $\omega_e$  es la velocidad de giro de la rueda dentada interior y exterior respectivamente. La variación neta de caudal en  $V_c$  debido a la rueda dentada interior,

$$Q_i = Q_i^- + Q_i^+ = \frac{1}{2}H\omega_i[(\rho_{iB}^2 - R_{ii}^2) - (\rho_{iA}^2 - R_{ii}^2)] = \frac{1}{2}H\omega_i(\rho_{iB}^2 - \rho_{iA}^2)$$
(3.115)

y la variación neta de caudal en  $V_c$  debido en la rueda dentada exterior,

$$Q_e = Q_e^- + Q_e^+ = \frac{1}{2}H\omega_e[(R_{ee}^2 - \rho_{eB}^2) - (R_{ee}^2 - \rho_{eA}^2)] = \frac{1}{2}H\omega_e(\rho_{eA}^2 - \rho_{eB}^2)$$
(3.116)

Finalmente, la variación neta de caudal en  $V_c$  en la cámara es,

$$Q_c = \frac{1}{2}H\omega_e[(\rho_{eA}^2 - \rho_{eB}^2) + (\rho_{iB}^2 - \rho_{iA}^2)\frac{Z}{Z-1}]$$
(3.117)

aplicando la ecuación ( 3.96 ). De la ecuación ( 3.117 ) se puede determinar la variación del volumen  $V_c$  integrando en el tiempo,

$$\frac{dV_c}{d\alpha_{pc}} = \frac{1}{2}H[(\rho_{eA}^2 - \rho_{eB}^2) + (\rho_{iB}^2 - \rho_{iA}^2)\frac{Z}{Z-1}]$$
(3.118)

### Volumen de la cámara

A continuación la parte integral del análisis derivativo-integral se realiza, una vez conocido  $V_1(\alpha_{pc} = 0)$ , y mediante su integración numérica o analítica,

$$V_1(\alpha_{pc}) = V_1(\alpha_{pc} = 0) + \int_0^{\alpha_{pc}} \frac{dV_c}{d\alpha_{pc}} d\alpha_{pc}$$
(3.119)

obteniéndose el volumen de la primera cámara para una rotación completa del conjunto del engranaje.

### 3.5.2.2 Método Energético

Las bombas oleohidráulicas son máquinas hidráulicas que convierten la energía mecánica en energía oleohidráulica, de forma que idealmente, se cumple,

$$E_{mec} \equiv Md\omega = PdV \equiv E_{oleo} \quad (3.120)$$

donde  $M$  es el par mecánico necesario para provocar un giro de ángulo  $d\omega$  sobre el eje de la bomba y  $P$  es la presión oleohidráulica que debe realizar un volumen elemental  $dV$  cuando es forzado a variar debido a la variación del volumen en las cámaras provocado por el giro de ángulo  $d\omega$  del conjunto del engranaje. En la bomba de engranajes trocoidales, se puede aplicar este mismo concepto de forma que,

$$M_i d\omega_i + M_e d\omega_e = PdV_u \quad (3.121)$$

donde  $M_i$  y  $M_e$  son los momentos que actúan, para provocar un giro de ángulo  $d\omega_i$  y  $d\omega_e$  sobre la rueda dentada interior y exterior respectivamente y  $dV_u$  es el volumen elemental que se transfiere cuando es forzado a variar debido a la variación del volumen en las cámaras entre los ángulos  $d\omega_i$  y  $d\omega_e$ .

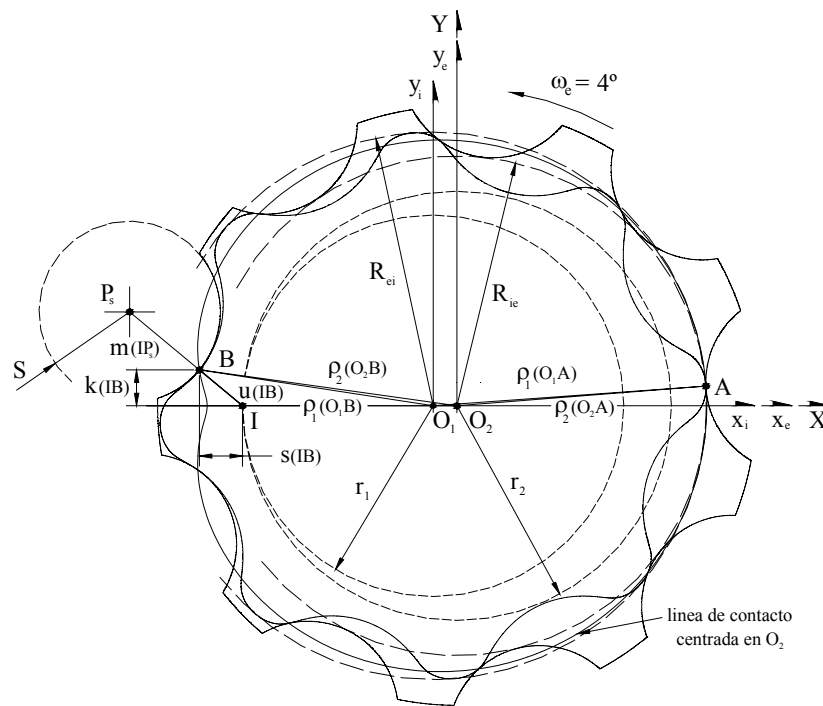


Figura 3.25. Disposición de análisis por el método de las energías

El cálculo se basa en las Figura 3.21(b) y Figura 3.22(b) pero con la disposición de los puntos de contacto  $A$  y  $B$  como se representan en la Figura 3.25 y mediante un proceso análogo al seguido en la variación del caudal se obtiene,

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{1}{2} HP(\rho_{iA}^2 - \rho_{iB}^2) \\ M_e &= \frac{1}{2} HP(\rho_{eB}^2 - \rho_{eA}^2) \end{aligned} \quad (3.122)$$

El criterio de signos adoptado para el cálculo de los momentos es opuesto al adoptado en el

cálculo del caudal. La razón radica en la misma metodología del cálculo, el cual está basado en la variación del volumen máximo de la cámara hasta el volumen mínimo, y desde el volumen mínimo al volumen máximo de nuevo. En la Figura 3.26 se muestra la disposición de los engranajes trocoidales para del volumen máximo y para el volumen mínimo en la bomba oleohidráulica.

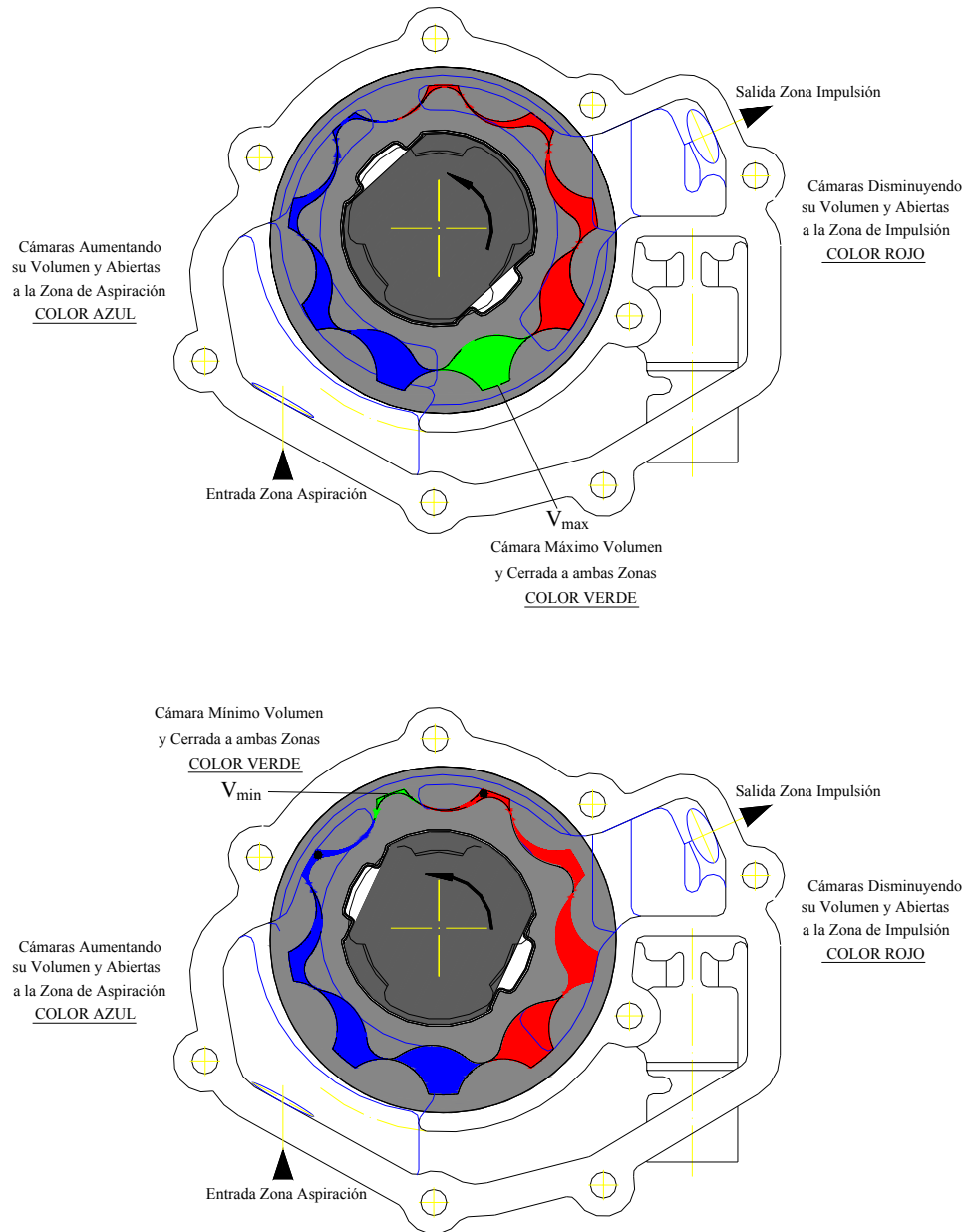


Figura 3.26. Evolución del volumen máximo y volumen mínimo en la bomba

Esta evolución es cíclica y se repite cada  $\Delta\alpha_{pc} = \frac{2\pi}{Z}$ , como puede verse en la Figura 3.27. Se toma el eje  $X$  del sistema de referencia absoluta como eje de simetría con  $\Delta\alpha_{pc} = -\frac{\pi}{Z}$  para el punto de contacto  $B$ , donde la distancia de referencia  $u$  entre el punto de contacto  $B$  y el centro instantáneo de rotación  $I$  es máxima y el volumen formado es mínimo  $V_{min}$ , Figura 3.27(a). Tras una rotación de valor el ángulo  $\omega_e = \frac{\pi}{Z}$  se alcanza el volumen máximo  $V_{max}$  con  $u$  mínima para

$\Delta\alpha_{pc} = 0$ , Figura 3.27(b). Finalmente, tras una rotación de valor el ángulo  $\omega_e = \Delta\alpha_{pc}$ , se repite la posición de inicio con volumen mínimo  $V_{min}$  para  $\Delta\alpha_{pc} = +\frac{\alpha}{Z}$  Figura 3.27(c).

Siguiendo esta evolución desde la posición de referencia de volumen mínimo, el volumen desde  $\Delta\alpha_{pc} = -\frac{\pi}{Z}$  a  $\Delta\alpha_{pc} = 0$  aumenta y desde  $\Delta\alpha_{pc} = 0$  a  $\Delta\alpha_{pc} = +\frac{\alpha}{Z}$  disminuye, opuestamente a la evolución del estudio de los caudales.

En la evolución de  $\Delta\alpha_{pc} = -\frac{\pi}{Z}$  a  $\Delta\alpha_{pc} = +\frac{\alpha}{Z}$  los radiovectores describen los perfiles de las ruedas dentadas interior y exterior variando su módulo y ángulo. Así, para el punto de contacto  $B$ ,

$$\begin{aligned}\rho_{iB}^2 &= (r_1 + s)^2 + k^2 = r_1^2 + 2r_1s + s^2 + k^2 = r_1^2 + 2r_1s + u^2 \\ \rho_{eB}^2 &= (r_2 + s)^2 + k^2 = r_2^2 + 2r_2s + s^2 + k^2 = r_2^2 + 2r_2s + u^2\end{aligned}\quad (3.123)$$

Un proceso análogo se sigue para el punto de contacto  $A$ . Sin embargo, y tal como puede observarse en la Figura 3.25 y Figura 3.27, la evolución de los radiovectores del punto  $A$  que describen los perfiles de la rueda dentada interior y exterior tienen una variación despreciable de su módulo al recorrer el ángulo de  $\Delta\alpha_{pc} = -\frac{\pi}{Z}$  a  $\Delta\alpha_{pc} = +\frac{\alpha}{Z}$ . Por este motivo, puede asumirse que,

$$\rho_{iA}^2 \cong R_{ei}^2 \quad \rho_{eA}^2 \cong R_{ie}^2 \quad (3.124)$$

que representará una simplificación muy efectiva en el posterior desarrollo matemático.

De aquí, los momentos quedarán de sustituir las anteriores expresiones en ( 3.122 ).

$$\begin{aligned}M_i &= \frac{1}{2} HP \left[ R_{ei}^2 - (r_1^2 + 2r_1s + u^2) \right] \\ M_e &= \frac{1}{2} HP \left[ (r_2^2 + 2r_2s + u^2) - R_{ie}^2 \right]\end{aligned}\quad (3.125)$$

Substituyendo las expresiones ( 3.125 ) y ( 3.96 ) en la expresión general de las bombas oleohidráulicas con engranajes trocoidales se obtiene,

$$V_u = \frac{dV_u}{d\omega_i} = \frac{1}{2} H \left[ R_{ei}^2 - \frac{r_1}{r_2} R_{ie}^2 - r_1(r_1 - r_2) - \left( 1 - \frac{r_1}{r_2} \right) u^2 \right] \quad (3.126)$$

la variación de volumen elemental  $V_u$  respecto el ángulo de giro de la rueda dentada interior para el intervalo  $-\frac{\pi}{Z} \leq \omega_i \leq +\frac{\pi}{Z}$ . En este planteamiento se expresa la variación de volumen en referencia la rueda dentada interior debido a que es éste el transmisor del movimiento de rotación al conjunto. Sin embargo, substituyendo la otra expresión de ( 3.96 ) se obtendría en referencia a la rueda dentada exterior.



$$u = m - S = \sqrt{r_2^2 + R_2^2 \pm 2r_2 R_2 \cos \omega_e} - S = \sqrt{r_2^2 + R_2^2 \pm 2r_2 R_2 \cos \left( \frac{Z-1}{Z} \right) \omega_i} - S \quad (3.127)$$

Posteriormente, integrando la variación de volumen se obtiene el volumen.

A continuación se presenta una tabla resumen que presenta las características y ecuaciones de los análisis, métodos y desarrollos expuestos para el estudio de la variación del volumen (Tabla 3.3).

ANÁLISIS INTEGRAL-DERIVATIVO		ANÁLISIS DERIVATIVO-INTEGRAL-		
<ul style="list-style-type: none"> <li>Descripción necesaria de los perfiles de las ruedas dentadas</li> <li>Cálculo inicial del volumen por integración numérica y su variación por derivación numérica</li> </ul>	<b>Características Análisis</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Descripción <u>no</u> necesaria de los perfiles de las ruedas dentadas</li> <li>Cálculo inicial de la variación del volumen por derivación y el volumen por integración analítica o numérica</li> </ul>		
<u>Método Integral</u>		<u>Método Radiovectores</u>	<u>Método Energético</u>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>Basado en el conocimiento de todos los puntos de contacto para cada posición genérica de la cámara</li> <li>Resolución del volumen siguiendo un esquema de cálculo</li> <li>No es posible calcular el módulo de los puntos de contacto en función su ángulo respecto el eje de abscisas</li> </ul>	<b>Características Método</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Basado en los puntos de contacto próximos de cierre de una cámara</li> <li>Cálculo de la variación del volumen en función del giro de la rueda dentada exterior</li> <li>No existe simplificación en el cálculo de los puntos de contacto</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Basado en los puntos de contacto de cierre de volumen máximo y mínimo para <math>\Delta\alpha_{pc}</math></li> <li>Cálculo de la variación del volumen en función del giro de la rueda dentada interior</li> <li>Existe simplificación en el cálculo de un punto de contacto</li> </ul>	
<i>Variación</i>		<i>Variación</i>	<i>Balance</i>	<i>Balance</i>
Concepto variación volumen para una cámara genérica $\int_{VC} dV$	<b>Características Desarrollo</b>	Concepto giro engranaje diferente a giro punto de contacto	Concepto aumento de volumen signo para balance caudal $\int_{SC} \bar{v} d\bar{S}$	Concepto disminución de volumen signo para balance de momento
Derivación Numérica Ecuación ( 3.108 )	<b>Variación Volumen</b>	Ecuación ( 3.108 )	Ecuación ( 3.118 )	Ecuación ( 3.126 )
Ecuación ( 3.108 )	<b>Volumen Cámara</b>	Ecuación ( 3.119 )	Ecuación ( 3.119 )	Integración Analítica Ecuación ( 3.126 )

Tabla 3.3. Resumen análisis y métodos para el estudio de la variación del volumen



### 3.6 ESTUDIO DEL CAUDAL Y SUS CARÁCTERÍSTICAS

En los apartados anteriores se ha estudiado la variación del volumen y el volumen de una cámara genérica por diferentes análisis, métodos y desarrollos. A continuación se va a estudiar el caudal y sus características. Para ello, se va a basar en el método energético.

La expresión ( 3.126 ) es la variación de volumen elemental respecto el ángulo de giro de la rueda dentada interior para el intervalo  $-\frac{\pi}{Z} \leq \omega_i \leq +\frac{\pi}{Z}$ . La misma expresión puede ser rescrita tomando referencia los cuatro parámetros geométricos básicos,

$$V_u = \frac{dV_u}{d\omega_i} = \frac{HM^2}{8} \left\{ \begin{array}{l} \left( Z + \lambda - v^2 \right) - \left( \frac{Z-1}{Z} \right) (Z - v^2) + (Z-1)\lambda^2 + \\ - \frac{1}{Z} \left[ Z \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left( \frac{Z-1}{Z} \right) \omega_i - v} \right]^2 \end{array} \right\} \quad (3.128)$$

Integrando esta expresión sobre este intervalo, se obtendrá el volumen desplazado por un par de dientes en la secuencia  $V_{u \min} \rightarrow V_{u \max} \rightarrow V_{u \min}$ . Es decir, el volumen desplazado por un diente de la rueda dentada interior  $V_z$ ,

$$V_z = \int_{-\frac{\pi}{Z}}^{+\frac{\pi}{Z}} \frac{dV_u}{d\omega_i} d\omega_i \quad [\text{volumen/diente rueda dentada interior}] \quad (3.129)$$

Esta integral puede ser resuelta analíticamente. Si el volumen desplazado por un diente se multiplica por el número de dientes de la rueda dentada interior, se obtiene la *capacidad volumétrica* ( $c_v$ ) en del engranaje trocoidal de forma,

$$c_v = (Z-1)V_z = (Z-1) \int_{-\frac{\pi}{Z}}^{+\frac{\pi}{Z}} \frac{dV_u}{d\omega_i} d\omega_i \quad [\text{volumen/una revolución rueda dentada interior}] \quad (3.130)$$

El *caudal teórico ideal* ( $Q_i$ ), en el que no se consideran las pérdidas volumétricas y puede ser considerado el valor del caudal medio, será el resultado de multiplicar la capacidad volumétrica por el número de revoluciones del eje conductor acoplado a la rueda dentada interior,

$$Q_i = nc_v = n(Z-1) \int_{-\frac{\pi}{Z}}^{+\frac{\pi}{Z}} \frac{dV_u}{d\omega_i} d\omega_i \quad [\text{volumen/tiempo}] \quad (3.131)$$

Con tal de poder comparar las prestaciones de cada tipo de engranaje trocoidal se definen dos índices,

- *Caudal específico* ( $Q_s$ ). Se define como el caudal adimensional de un engranaje trocoidal. La geometría de los engranajes trocoidales es función del producto  $\pi HM^2$  como consecuencia de las propias leyes de funcionamiento de las ruedas dentadas (Stryczek, 1996). Así,

$$Q_s = \frac{c_v}{\pi HM^2} = \frac{Z-1}{\pi HM^2} \int_{-\frac{\pi}{Z}}^{+\frac{\pi}{Z}} \frac{dV_u}{d\omega_i} d\omega_i \quad [\text{adimensional}] \quad (3.132)$$

• *Irregularidad del Caudal* ( $\delta_Q$ ). Se define como el grado de irregularidad del caudal de un engranaje trocoidal. La variación del volumen no es constante en un engranaje trocoidal, como podía deducirse de la ecuación ( 3.126 ), donde es función de la distancia de referencia  $u$  que varía desde un máximo a un mínimo en función del ángulo de giro, ecuación ( 3.127 ). La función es de carácter pulsatorio, traduciéndose en pulsaciones de caudal, de manera que el índice de irregularidad del caudal puede ser definido como la valoración del carácter pulsatorio del caudal impulsado por un engranaje trocoidal. Su expresión es,

$$\delta_Q = \frac{V_{u \max} - V_{u \min}}{V_{u \text{ med}}} \quad [\text{adimensional}] \quad (3.133)$$

donde,

- $V_{u \max}$  es el volumen máximo desplazado por un diente de la rueda dentada interior y se evalúa mediante la ecuación ( 3.126 ) para  $\omega_i = 0$
- $V_{u \min}$  es el volumen mínimo desplazado por un diente de la rueda dentada interior y se evalúa mediante la ecuación ( 3.126 ) para  $\omega_i = \mp \frac{\pi}{Z}$
- $V_{u \text{ med}}$  es el volumen medio desplazado por un diente de la rueda dentada interior y se evalúa

$$V_{u \text{ med}} = \frac{Z-1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{Z}}^{+\frac{\pi}{Z}} \frac{dV_u}{d\omega_i} d\omega_i \quad [\text{volumen/diente rueda dentada interior}] \quad (3.134)$$

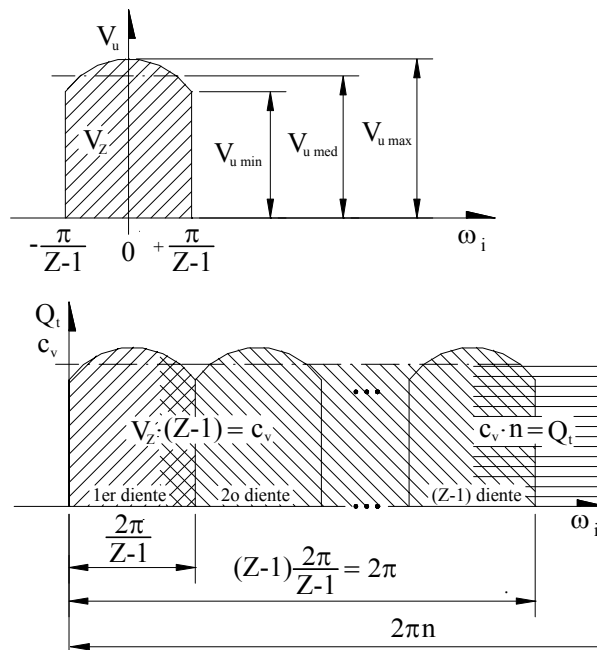


Figura 3.28. Representación del volumen en función del ángulo

Existe una simplificación de la integral de la ecuación ( 3.129 ), que puede ser realizada al eliminar uno de sus términos al observarse que es de segundo orden. De esta forma el caudal específico es,

$$Q_s = \frac{1}{4} \left[ (Z + \lambda - v)^2 - \left( \frac{Z-1}{Z} \right) (Z-v)^2 + (Z-1)\lambda^2 \right] \quad [\text{adimensional}] \quad (3.135)$$

### 3.7 RESOLUCIÓN DE LOS MÉTODOS PARA CÁLCULO DEL DESPLAZAMIENTO VOLUMÉTRICO POSITIVO

Existen dos aspectos a destacar para la resolución de los métodos de cálculo del desplazamiento volumétrico positivo. El primero es como se lleva a cabo la resolución de las integrales que se derivan del análisis. El segundo es considerar la bondad del método de los radiovectores frente al método energético.

En el análisis integral-derivativo el volumen de una cámara genérica  $V_k$  en una posición genérica se obtiene calculando la diferencia de las dos integrales de las ecuaciones que generan los perfiles de la rueda dentada interior y exterior. Posteriormente, la variación del volumen se obtiene mediante la derivación del volumen  $V_k$  respecto al ángulo. Las integrales que se presentan no pueden ser resueltas analíticamente debido a que la relación de ecuaciones resulta ser implícita; es decir, no es posible disponer de una ecuación explícita del módulo de los radiovectores de los puntos de contacto en función su ángulo. La resolución ha de plantearse en base a técnicas numéricas.

En el análisis derivativo-integral, la variación del volumen de una cámara genérica  $V_k$  en una rotación completa del conjunto del engranaje, se obtiene directamente calculando el volumen delimitado por los perfiles de ambas ruedas dentadas entre dos puntos de contacto consecutivos. Posteriormente, el volumen se obtiene mediante la integración del volumen  $V_k$  respecto al ángulo. Las integrales que se presentan pueden ser resueltas analíticamente o/y numéricamente.

En la Figura 3.29 se presentan los resultados.

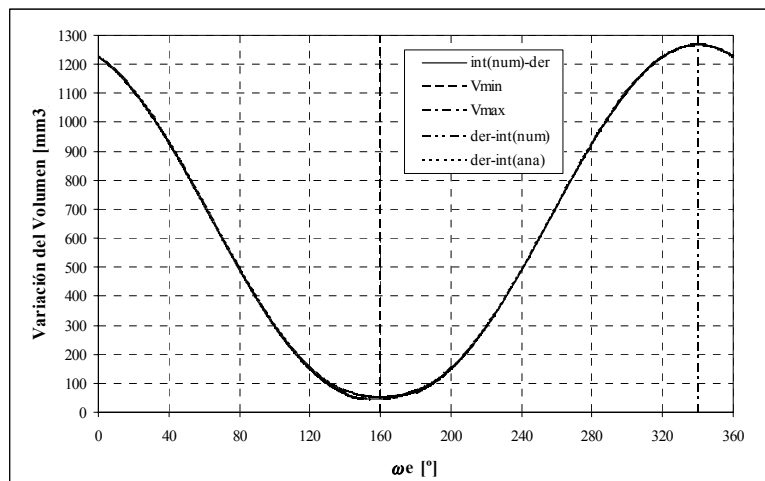


Figura 3.29. Comparación de la integración en los análisis de la variación del volumen. Leyenda: int=integral, der=derivativo, num=numérico, int=analítico, Vmin=volumen mínimo, Vmax=volumen máximo

Observando la Figura 3.29 se puede comprobar como ambos análisis ofrecen el mismo resultado independientemente de la resolución adoptada para las integrales, con la pequeña excepción del error que presenta el análisis integral(numérico)-derivativo cuando se aproxima al ángulo que proporciona el volumen mínimo.

Con relación al método energético, en la Figura 3.30 se puede colegir el error cometido al utilizar la ecuación ( 3.124 ).

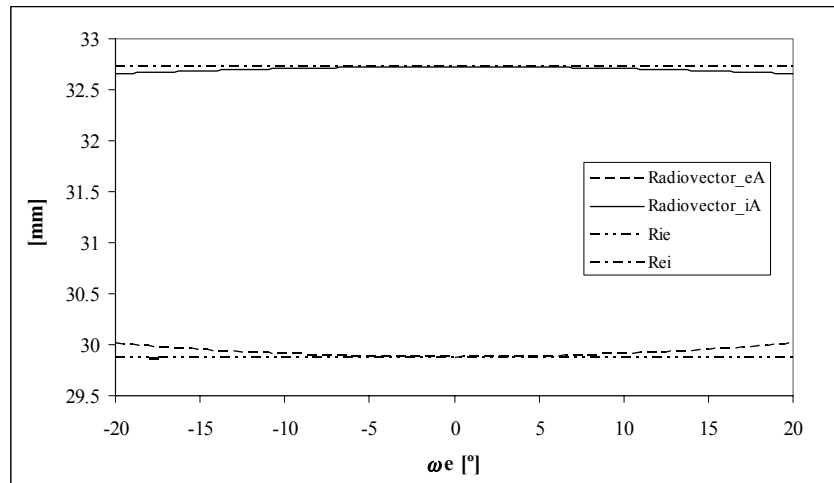


Figura 3.30. Evaluación del error de la simplificación del método energético. Leyenda: Radiovector\_eA  $\equiv \rho_{eA}$ , Radiovector\_iA  $\equiv \rho_{iA}$ , Rie  $\equiv$  radio interno entre dos valles de diente de la rueda dentada exterior, Rei  $\equiv$  radio externo entre dos puntas de diente de la rueda dentada interior

El error se que observa en el intervalo del ángulo de rotación de la rueda dentada exterior  $\pm \frac{\pi}{Z}$ ,

correspondiente a un ángulo de rotación de la rueda dentada interior  $\pm \frac{\pi}{Z-1}$ , es muy pequeño.

Cuantificado en porcentajes el error como el cociente de la diferencia del módulo exacto del radiovector menos su simplificación respecto al módulo exacto del radiovector, corresponde a un error máximo del 0.44% para la rueda dentada interior y del 0.22% para la rueda dentada exterior. Debido a la simplificación que se produce en el desarrollo matemático del método, se puede tomar como correcta ya que se produce un error despreciable.