

4 BOMBAS DE ENGRANAJES DE PERFILES TROCOIDALES. ANÁLISIS MECÁNICO

4.1 INTRODUCCIÓN

En capítulos anteriores se ha presentado la geometría del engranaje de perfil trocoidal y sus características volumétricas cuando trabaja formando parte de una bomba oleohidráulica. Se ha definido el caudal teórico ideal y la capacidad volumétrica.

En el presente capítulo, se centrará el estudio de la evolución del estado de fuerzas que actúan sobre los dientes de las ruedas dentadas, en el ciclo completo, como consecuencia del mecanismo de engrane intrínseco al funcionamiento como bomba de desplazamiento volumétrico positivo. Conocidos el estado de fuerzas, es posible determinar las tensiones de contacto en los diferentes puntos de engrane. El propio funcionamiento del engranaje trocoidal como bomba oleohidráulica presenta las ventajas conocidas como bajo nivel de ruido, pocos componentes y la no presencia de elementos de sellado. Sin embargo, una desventaja en su diseño es que no posee partes que se ajusten para compensar el desgaste de la superficie de las ruedas dentadas responsables del sellado de las cámaras interdentes que producen, con su variación, la acción de bombeo. Como consecuencia, se produce un decremento del rendimiento volumétrico de la bomba.

El estudio de las tensiones de contacto es un objetivo importante para caracterizar el funcionamiento de engranajes trocoidales habida cuenta que es una de las causas que provocan un desgaste progresivo de estas unidades. Pero el estudio de las tensiones de contacto se presenta como un objetivo ineludible cuando se desea alcanzar un diseño óptimo desde el punto de vista geométrico y del cálculo del desplazamiento volumétrico y caudal instantáneo. Obtener y conocer a priori los órdenes de magnitud de las tensiones de contacto máximas que se producen en los engranajes trocoidales es básico para el desarrollo de su geometría, que a posteriori, es básica en sus características volumétricas.

El funcionamiento implica que el par motor aplicado por el eje conductor de la rueda dentada interior (piñón) se transmite por engrane a la rueda dentada exterior (corona), facilitando la acción de bombeo. En el proceso de engrane se producen dos fenómenos importantes,

- *Rodadura*. Se produce rodadura entre las superficies de los perfiles de los dientes al engranar que permiten la transmisión del par a través de los puntos de contacto.
- *Deslizamiento*. Se produce deslizamiento entre las superficies de los perfiles de los dientes al engranar produciendo velocidades relativas entre ambos

El momento actual permite trabajar con diversas metodologías para el cálculo de tensiones de contacto, siendo la *Metodología de los Elementos Finitos* (MEF) la que se muestra más competitiva. Sin embargo, el MEF debe ser contrastado, ya sea analíticamente y/o experimentalmente. El objetivo de este capítulo es obtener las magnitudes de las tensiones de contacto mediante dos métodos:

- *Método Analítico*, a través de un método modificado inspirado en la teoría de Colbourne.

- *Método de los Elementos Finitos*

Se desea destacar que el autor de la tesis ha contrastado ambos métodos mediante trabajos experimentales. En (Gamez-Montero, 2003) se presentan los resultados de los trabajos experimentales mediante la técnica de fotoelasticidad. Sin embargo, esta técnica experimental resulta ser poco precisa y sólo permite afirmar la coincidencia del orden de magnitud de las tensiones.

4.2 METODOLOGÍA DE CÁLCULO. MÉTODO DE COLBOURNE MODIFICADO

Inspirados en Colbourne (Colbourne, 1976), a continuación se exponen las principales hipótesis que se asumen en la primera metodología de cálculo que se propone,

1. Los centros de la rueda dentada interior y exterior están fijos
2. Se consideran las propiedades físicas constantes del fluido
3. No se considera la viscosidad del fluido
4. Se asume que la rigidez del cojinete hidrodinámico producido entre la carcasa de la bomba y la rueda dentada exterior es superior a la rigidez de los mismos dientes
5. Los puntos de contacto sellan perfectamente las zonas de alta presión o impulsión respecto a las de baja presión o aspiración

Las tensiones de contacto se producen en los puntos de contacto de ambas ruedas dentadas del engranaje trocoidal. En consecuencia, la base de la metodología de cálculo es la determinación y conocimiento de los puntos de contacto para cada instante de una rotación completa de la rueda dentada interior y la evaluación de la distribución de las fuerzas que se transmiten en cada momento a través de cada uno de los dientes habida cuenta que se trata de un problema hiperestático.

La metodología de cálculo se desarrolla mediante los puntos siguientes:

1. Definir la posición de referencia¹ para el estudio de las tensiones de contacto.
2. Definir la línea de puntos de contacto, ya que es conocida la geometría de los perfiles interior y exterior de ambas ruedas dentadas (ver del Capítulo 3).
3. Definir los puntos de sellado. Entre cada par de puntos de contacto se genera una cámara genérica ocupada por un volumen determinado de fluido, como ya ha sido examinado anteriormente. La variación del tamaño de cada cámara durante la rotación del conjunto, produce la variación del volumen de fluido y, consecuentemente, la acción de bombeo. En una rotación completa, cada cámara alcanza su volumen máximo y mínimo, y como puede observarse en la posición tomada como referencia, se produce simétricamente respecto al eje de referencia absoluta X . Los puntos de contacto $A-B$ y $A-B'$ son los encargados de sellar y separar las zonas de alta presión o impulsión de las zonas de baja presión o aspiración (Figura 4.3).
4. Evaluar el momento requerido por la bomba,

$$E_{mec} \equiv M_{mec} d\omega = PdV \equiv E_{oleo} \quad (4.1)$$

¹ En la Figura 4.1 se muestra el conjunto del engranaje que va a ser empleado en el estudio de las tensiones de contacto y que cumple las condiciones expuestas en el Capítulo 3, para el ángulo de giro del engranaje exterior $\omega_e = \alpha_{pc} = 0$. Esta posición es la más conveniente para el estudio de las tensiones de contacto porque todos los puntos de contacto activos se encuentran siempre situados en el primer y segundo cuadrante.

donde M_{mec} es el par mecánico necesario para provocar un giro de ángulo $d\omega$ sobre el eje de la bomba y P es la presión oleohidráulica que debe realizar un volumen elemental dV cuando es forzado a variar debido a la variación del volumen en las cámaras provocado por el giro de ángulo $d\omega$ del conjunto del engranaje. Idealmente, $dV = c_v d\omega$ se sustituye en ecuación (4.1) obteniéndose,

$$E_{mec} \equiv M_{mec} = Pc_v \equiv E_{oleo} \quad (4.2)$$

donde c_v es la capacidad volumétrica. De la expresión se observa que el par mecánico es proporcional a la presión del fluido. En otras palabras, el momento mecánico es, bajo hipótesis, igual al momento debido a la presión del fluido.

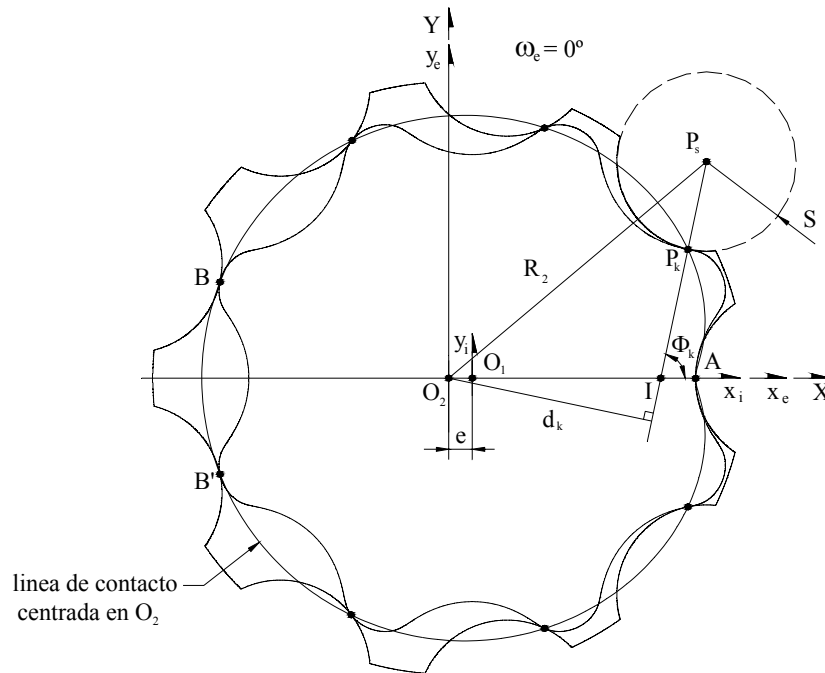


Figura 4.1. Posición y sentido de rotación de referencia para el estudio de las tensiones de contacto

La idea básica de la metodología de cálculo es igualar el momento mecánico transmitido desde la rueda dentada interior a la exterior a través de los puntos de contacto, denominado *momento de contacto*, y el *momento debido a la presión del fluido*. Cuando ambos son iguales, el momento de contacto es el momento mínimo necesario para producir la acción de bombeo (Figura 4.2).

- *Momento debido a la Presión del Fluido*. Es el momento producido por la fuerza de presión requerido para conducir el conjunto de las ruedas dentadas contra la presión del fluido en la acción de bombeo. Tomando el movimiento de rotación en el sentido contrario a las agujas del reloj, en la Figura 4.3 se muestra como se distribuyen la presión del fluido y las fuerzas de presión generadas que producen el momento debido a la presión del fluido sobre el centro de la rueda dentada exterior ($M_{F,O2}$).

Los puntos de contacto $A-B$ y $A-B'$ son los encargados de sellar y separar las zonas de alta presión o impulsión de las zonas de baja presión o aspiración. Esto produce un desequilibrio de presiones entre la zona de alta y baja presión de valor P . Este desequilibrio se traduce en un momento sobre el centro de las ruedas dentadas, que ha sido definido como momento debido a la presión del fluido, y que deberá ser generado por éstos para producir la acción de bombeo.

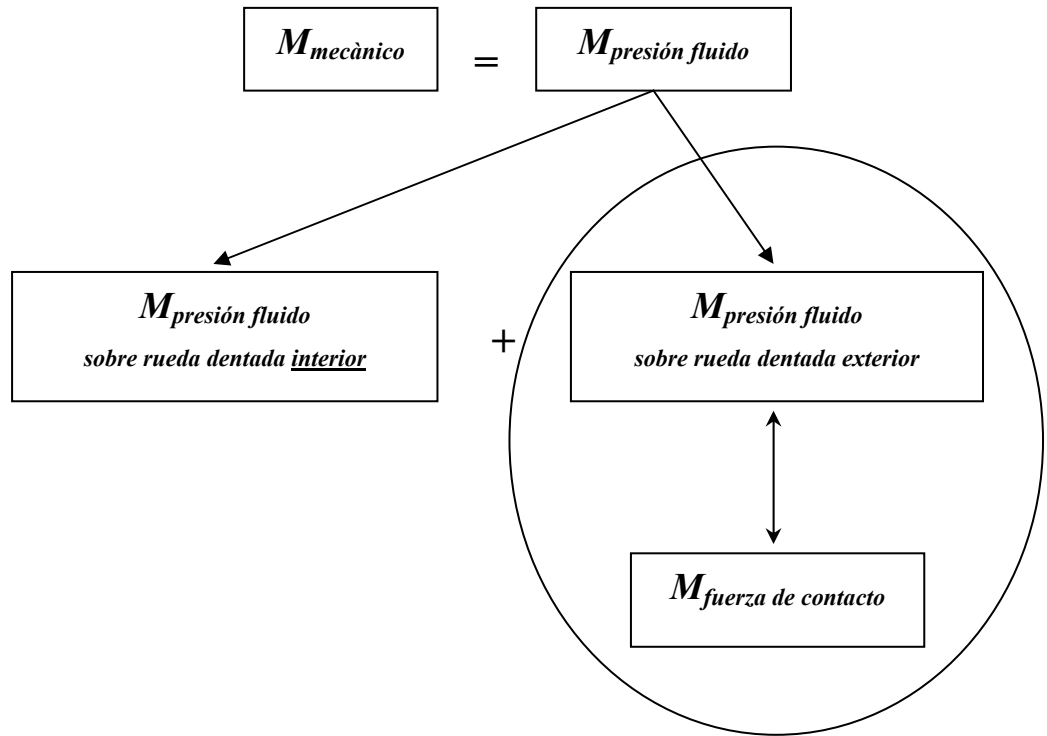


Figura 4.2. Diagrama de la metodol3gia de c3lculo de las tensiones de contacto

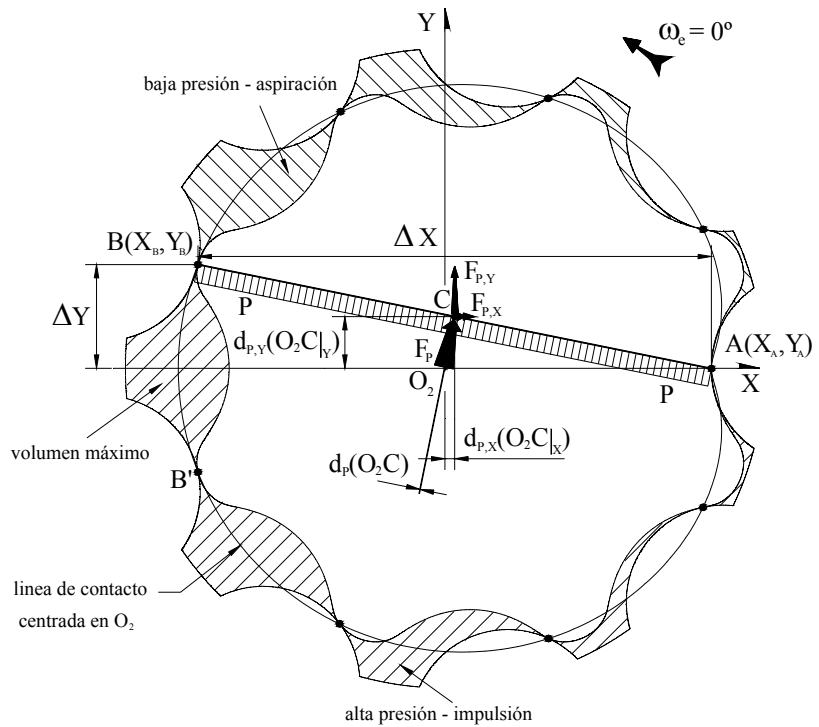


Figura 4.3. Momento contra la presi3n del fluido sobre el centro de la rueda dentada exterior

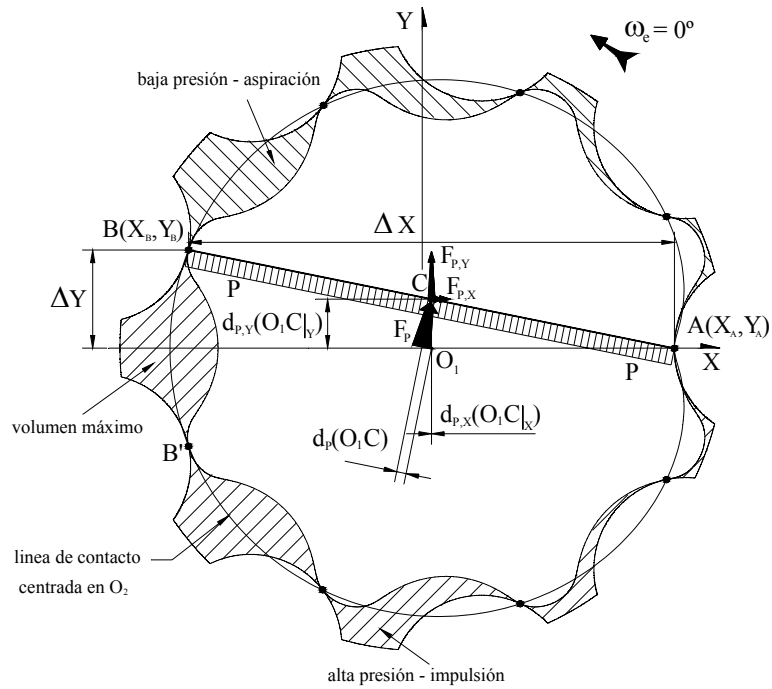


Figura 4.4. Momento contra la presión del fluido sobre el centro de la rueda dentada exterior

Conocidas las coordenadas de todos los puntos contacto, se conocen las coordenadas de los puntos A y B en cualquier instante. Posteriormente, proyectando la presión del fluido P sobre la línea de unión de ambos puntos (Figura 4.3), se obtiene la fuerza debido a la presión por unidad de espesor y su punto de aplicación es el punto medio de la línea de unión, punto C . La distancia perpendicular d_p está definida entre el punto de aplicación C de la fuerza debido a presión por unidad de espesor F_p y el centro de la rueda dentada exterior O_2 , provocan el momento debido a la presión del fluido sobre la rueda dentada exterior,

$$M_{F,O_2} = F_p d_p = \overline{ABPO_2C} \quad (4.3)$$

Si se definen las coordenadas de los puntos de contacto como X_A, Y_A y X_B, Y_B sobre los ejes de referencia absoluta XY , la fuerza debido a la presión por unidad de espesor F_p puede ser calculada mediante su proyección sobre el sistema de referencia absoluta XY como,

$$\begin{aligned} F_{p,X} &= -P\Delta Y = -P(Y_A - Y_B) \\ F_{p,Y} &= P\Delta X = P(X_A - X_B) \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde P es la presión del fluido. El momento contra la presión del fluido respecto el centro de la rueda dentada exterior se puede calcular mediante las distancias perpendiculares entre el punto de aplicación de la fuerza C y el centro de la rueda dentada exterior O_2 ,

$$\begin{aligned} d_{p,X} &= X_A - \left(\frac{X_A - X_B}{2} \right) \\ d_{p,Y} &= Y_A - \left(\frac{Y_A - Y_B}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

de forma que,

$$M_{F,O2} = F_{P,Y}d_{P,X} - F_{P,X}d_{P,Y} \quad (4.6)$$

Se puede llegar a un resultado semejante por el método de los radiovectores, ya explicado en el Capítulo 3 y donde la expresión resulta ser,

$$M_{F,O2} = \frac{P}{2}(\rho_B^2 - \rho_A^2) \quad (4.7)$$

- *Momento de Contacto.* Es el momento producido por las fuerzas sobre los puntos de contacto para una posición determinada de la rotación del conjunto del engranaje. Tomando el movimiento de rotación en el sentido contrario a las agujas del reloj, en la Figura 4.5 se muestra como se distribuyen las fuerzas de contacto y el momento de contacto sobre el centro de la rueda dentada exterior ($M_{C,O2}$).

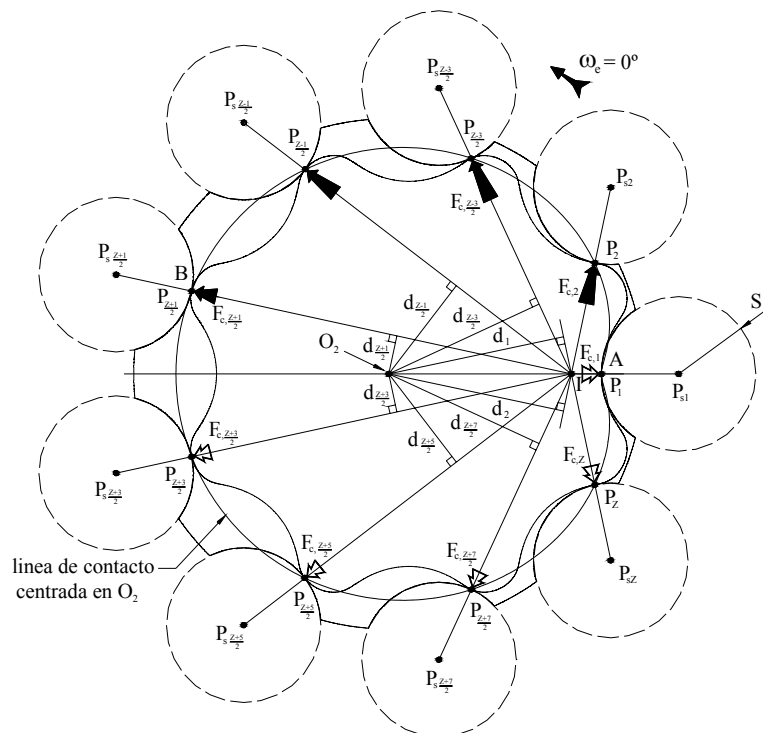


Figura 4.5. Momento transmitido por la rueda dentada interior al externo mediante las fuerzas de contacto situadas en los puntos de contacto y aplicado sobre el centro de la rueda dentada exterior

La fuerza de contacto por unidad de espesor $F_{c,k}$ que se produce en cada punto de contacto P_k , donde $k = 1, 2, \dots, Z$, está siempre situada sobre la línea IP_kP_{sk} que une el centro instantáneo de rotación I , el punto de contacto P_k y el centro del arco circular P_{sk} que da forma al diente de la rueda dentada exterior, como puede observarse en la Figura 4.5. Esta propiedad de la localización de la fuerza de contacto viene determinada por la característica de los perfiles trocoidales basada en el Teorema de Lewis que ya fue presentada en el Capítulo 3.

La fuerza de contacto por unidad de espesor $F_{c,k}$ que se produce en cada punto de contacto P_k se encuentra a la distancia perpendicular d_k del centro de la rueda dentada exterior O_2 . De esta forma, el momento de contacto producido por el punto de contacto P_k vale,

$$M_{c,k}^{O2} = F_{c,k} d_k \quad (4.8)$$

La contribución de las fuerzas de contacto producidas en cada uno de los puntos de contacto por su distancia perpendicular al centro de la rueda dentada exterior, corresponde al momento de contacto que actúa sobre la rueda dentada exterior, de valor,

$$M_{C,O2} = \sum_{k=1}^{k=Z} M_{c,k}^{O2} = \sum_{k=1}^{k=Z} F_{c,k} d_k \quad (4.9)$$

Por tanto, siendo la idea básica de la metodología de cálculo igualar el momento de contacto y el momento debido a la presión del fluido, la ecuación (4.6) es igual a la ecuación (4.9).

Sin embargo, no todas las fuerzas de contacto $F_{c,k}$ aportan par al momento de contacto. Tomado de referencia el sentido de rotación contrario a las agujas del reloj, son los puntos de contacto de 2 a $\frac{Z+1}{2}$ donde se producirán las fuerzas de contacto que transmitirán el momento de contacto desde la rueda dentada interior a la exterior ya que son puntos activos (representadas con flechas con sombreado y de diferentes dimensiones en la posición de referencia de la Figura 4.5). Por otro lado, los puntos de contacto de $\frac{Z+3}{2}$ a 1 no son puntos activos (representadas con flechas sin sombreado y de igual dimensión en la posición de referencia de la Figura 4.5). Las flechas con sombreado se han representado en la Figura 4.5 con diferentes dimensiones que representan el orden de magnitud de la fuerza de contacto para la posición de referencia. Las flechas sin sombreado representan magnitud nula.

Desde el momento en que existen varios puntos de contacto para transmitir el momento de contacto, el problema del cálculo de las fuerzas de contacto se presenta hiperestático. La metodología de cálculo llevada a cabo en este estudio para el cálculo de las fuerzas de contacto se fundamenta en un cálculo iterativo según la siguiente rutina,

- a. Se asigna un ángulo de giro,
- b. debido a la geometría de las ruedas dentadas, en cada punto de contacto se genera una deformación,
- c. a cada deformación le corresponde de forma proporcional una fuerza de contacto,
- d. el momento de las fuerzas generadas respecto el centro de la rueda dentada exterior ($M_{C,O2}$) debe ser igual al momento debido al fluido ($M_{F,O2}$),
- e. si estos momentos (mecánico-fluido) no coinciden, hay que modificar el ángulo girado hasta hacer cumplir la igualdad ($M_{C,O2} = M_{F,O2}$)

En este punto y definida la metodología de cálculo, ésta exige conocer previamente:

- i. La línea de los puntos de contacto para determinar sus coordenadas para cualquier ángulo de una rotación completa del conjunto del engranaje
- ii. La geometría de la rueda dentada interior y exterior
- iii. La curvatura de los dientes de la rueda dentada interior y exterior en los puntos de contacto
- iv. Propiedades de los materiales

Los dos primeros puntos, i y ii, han sido desarrollados en el Capítulo 3. A continuación se pasa a determinar las curvaturas en los puntos de contacto.

4.3 CÁLCULO DE LAS CURVATURAS MEDIANTE INVERSIÓN CINEMÁTICA

4.3.1 Curvaturas en Curvas Trocoidales y Envoltentes Conjugadas

La curvatura de los dientes de las ruedas dentadas se lleva a cabo mediante la relación entre los radios de curvatura de las curvas trocoidales y envoltentes conjugadas derivada por L'Hôpital y que se encuentra ilustrada en el trabajo de Hartenberg y Denavit (Hartenberg, 1964), de forma

$$\frac{1}{IQ_{k,e}} - \frac{1}{IQ_{k,i}} = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \frac{1}{\sin \phi_k} \quad (4.10)$$

donde $Q_{k,e}$ y $Q_{k,i}$ son los centros de curvatura en el punto de contacto P_k para el diente de la rueda dentada exterior e interior respectivamente, y r_1 y r_2 son la base fija y ruleta móvil de la peritrocoide y sus relaciones ya conocidas,

$$\begin{aligned} r_1 &= (Z-1)e \\ r_2 &= Ze \end{aligned} \quad (4.11)$$

El ángulo ϕ_k es conocido como el ángulo de presión y está definido como el ángulo entre la línea de unión de los centros O_2O_1I y la tangente común en el punto de contacto $P_{k,e}$, mostrado en la Figura 4.6.

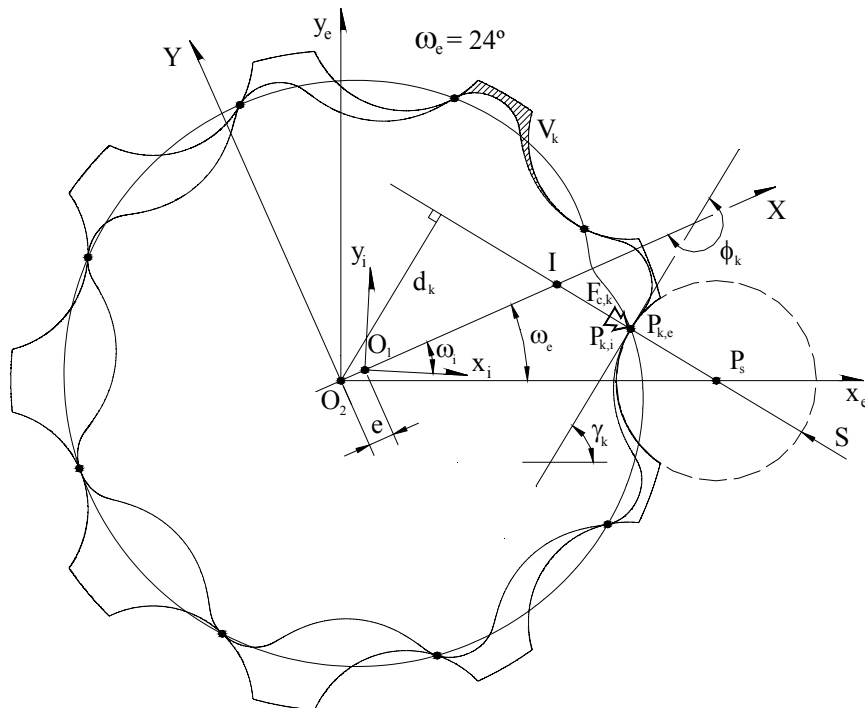


Figura 4.6. Geometría del engranaje mediante inversión cinemática

La curvatura en el punto de contacto para un diente de una forma geométrica determinada se define mediante la ecuación,

$$k_k = \frac{x'_k y''_k - y'_k x''_k}{(x'^2_k + y'^2_k)^{3/2}} \quad (4.12)$$

donde x_k, y_k son las coordenadas del punto dadas por la ecuación del perfil del diente. En el caso de que el perfil del diente de la rueda dentada exterior sea dado por un arco circular de radio S ,

su radio de curvatura es $Q_{k,e}P_{k,e} = S$ y la curvatura en el punto de contacto P_k será,

$$k_{2,k} \equiv \frac{1}{Q_{k,e}P_{k,e}} = \frac{1}{S} \quad (4.13)$$

De esta forma, la expresión (4.10) de L'Hôpital podrá ser utilizada para calcular la curvatura $k_{1,k}$ en el punto de contacto P_k para el diente de la rueda dentada interior.

4.3.2 Geometría en Inversión Cinemática

Para facilitar éste cálculo, se ha planteado utilizar la geometría del engranaje basándose en una inversión cinemática del conjunto.

Sea ϕ_k el ángulo de presión para cada punto de contacto P_k y sea ψ el ángulo de giro en sentido contrario a las agujas del reloj relativo de la rueda dentada exterior respecto a la rueda dentada interior, de forma que la rotación en sentido contrario a las agujas del reloj para la rueda dentada exterior es $\omega_e \equiv \omega_2$ y para la rueda dentada interior es $\omega_i \equiv \omega_1$, de forma que

$$\begin{aligned} \omega_e &= -(Z-1)\psi & \omega_i &= -Z\psi \\ \omega &= (Z-1)\psi \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si ahora se aplica una inversión cinemática (Figura 4.6) al conjunto del sistema de referencia absoluta $X-Y$ de valor ω en sentido contrario a las agujas del reloj respecto O_2 , la rueda dentada exterior es devuelta a su posición original reflejada en la Figura 4.1, y la rueda dentada interior recibe una rotación en sentido a las agujas del reloj de valor ψ respecto su centro O_1 . Así, para una rotación completa en sentido contrario a las agujas del reloj de la rueda dentada exterior respecto el sistema de referencia absoluta $X-Y$ centrado en O_2 , que mediante la inversión cinemática es llevado siempre a su posición original, el sistema de referencia x_i-y_i centrado en O_1 e integrado en la rueda dentada interior habrá rotado un ángulo ψ en sentido a las agujas del reloj respecto su centro O_1 de valor,

$$\psi = -\frac{\omega_e}{Z-1} \quad (4.15)$$

De esta forma, el ángulo ψ que se obtiene de la ecuación (4.15) corresponderá al primer diente representado en la posición de referencia para el estudio de las tensiones de contacto representado en la Figura 4.1. El siguiente diente en estudio estará situado en la posición que el primer diente alcanzaría si se incrementa el ángulo de rotación de la rueda dentada exterior ω_e en $\Delta\alpha_{pc} = \frac{2\pi}{Z}$. Efectivamente, si $\omega_e = \Delta\alpha_{pc}$, mediante la ecuación (4.14) se obtiene,

$$\psi = -\frac{2\pi}{Z(Z-1)} \quad (4.16)$$

Es decir, el ángulo ψ decrece $\frac{2\pi}{Z(Z-1)}$. En la inversión cinemática, la rueda dentada exterior es devuelta siempre a su posición de referencia, de manera que el punto de contacto en estudio para siempre al primer cuadrante del sistema de referencia de la rueda dentada exterior x_e-y_e . Cinemáticamente, se traduce diciendo que la rueda dentada exterior permanece inmóvil y es la rueda dentada interior la que produce una roto-traslación de engrane restando el giro relativo de la rueda dentada exterior a la de la rueda dentada interior. Así, cuando la rueda dentada interior está en una posición definida por el ángulo de rotación ω_i , la secuencia de valores del ángulo ψ

para todos los puntos de contacto k es,

$$\psi_k = -\frac{\omega_i}{Z} - \frac{2\pi}{Z(Z-1)} \quad k = 1, 2, \dots, Z \quad (4.17)$$

En este momento, definido el ángulo ψ_k para cada punto de contacto P_k mediante inversión cinemática, el ángulo ϕ_k viene dado por su definición y la Figura 4.6 como,

$$\phi_k = \pi + \gamma_k - (Z-1)\psi_k \quad (4.18)$$

El ángulo γ_k está definido como el ángulo de la tangente común en el punto de contacto $P_{k,e}$, y el eje x_e del sistema de referencia de la rueda dentada exterior. Este ángulo puede ser calculado por dos análisis,

- (a.) *Análisis mediante la derivada del perfil de la rueda dentada interior.* Se busca la tangente común en el punto de contacto de la rueda dentada interior $P_{k,i}$ mediante las coordenadas de la derivada del perfil de la rueda dentada interior en ese punto.
- (b.) *Análisis mediante la línea IP_kP_s .* Se busca el ángulo que forma la línea de unión del centro instantáneo de rotación I y el centro del arco circular P_s que forma el diente de la rueda dentada exterior, conocida la característica de los perfiles trocoidales basada en el Teorema de Lewis que dice que el punto de contacto P_k se encuentra sobre esta línea

A continuación se desarrolla cada análisis.

(a.) *Análisis mediante la derivada del perfil de la rueda dentada interior*

El análisis sigue la secuencia (se recomienda observar Figura 4.1 y Figura 4.6),

- (a.1) Se toma el primer punto de contacto k
- (a.2) Se determina el punto de contacto de la rueda dentada interior $P_{k,i}$ a estudiar
- (a.3) Se calculan las coordenadas del punto de contacto $x_{pc,k}(\omega_{e,k}), y_{pc,k}(\omega_{e,k})$, donde $\omega_{e,k} = -(Z-1)\psi_k$

$$\begin{aligned} x_{pc,k}(\omega_{e,k}) &= R_2 \cos \omega_{e,k} - \frac{S}{m_k} (R_2 \cos \omega_{e,k} - r_2) \\ y_{pc,k}(\omega_{e,k}) &= R_2 \sin \omega_{e,k} - \frac{S}{m_k} (R_2 \sin \omega_{e,k}) \\ m_k &= \sqrt{r_2^2 + R_2^2 - 2r_2 R_2 \cos \omega_{e,k}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

- (a.4) Se determina el ángulo de generación $\alpha_{gi,k}$ para el punto de contacto $x_{pc,k}(\omega_{e,k}), y_{pc,k}(\omega_{e,k})$. Para ello

$$\begin{aligned} x_{r,i}(\omega_i) &= x_{pc,k}(\omega_{e,k}) \\ y_{r,i}(\omega_i) &= y_{pc,k}(\omega_{e,k}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde $\omega_i = -Z\psi$. Posteriormente, aplicando la ecuación de rotación para la rueda dentada interior desde su centro O_I ,

$$\begin{aligned}x_{r,i}(\omega_i) &= x_i(\alpha_{gi})\cos\omega_i - y_i(\alpha_{gi})\sin\omega_i \\y_{r,i}(\omega_i) &= x_i(\alpha_{gi})\sin\omega_i + y_i(\alpha_{gi})\cos\omega_i\end{aligned}\quad (4.21)$$

y puede ser calculado el ángulo de generación $\alpha_{gi,k}$ y donde $x_i(\alpha_{gi}), y_i(\alpha_{gi})$ son las coordenadas del perfil de la rueda dentada interior,

$$\begin{aligned}x_i(\alpha_{gi}) &= R_2 \cos\alpha_{gi} + e \cos(Z\alpha_{gi}) - \frac{S[R_2 \cos\alpha_{gi} + r_2 \cos(Z\alpha_{gi})]}{\sqrt{r_2^2 + R_2^2 + 2r_2 R_2 \cos(Z-1)\alpha_{gi}}} + e \\y_i(\alpha_{gi}) &= R_2 \sin\alpha_{gi} + e \sin(Z\alpha_{gi}) - \frac{S[R_2 \sin\alpha_{gi} + r_2 \sin(Z\alpha_{gi})]}{\sqrt{r_2^2 + R_2^2 + 2r_2 R_2 \cos(Z-1)\alpha_{gi}}}\end{aligned}\quad (4.22)$$

Se ha de tener presente que la verdadera dificultad de este análisis es que es prácticamente inviable obtener una expresión del ángulo de generación en función del punto de contacto $\alpha_{gi} = f(x_{pc,k}(\omega_{e,k}), y_{pc,k}(\omega_{e,k}))$. Debido a esto, una forma de obtener el ángulo de generación $\alpha_{gi,k}$ es buscando las coordenadas del punto de contacto $x_{pc,k}(\omega_{e,k}), y_{pc,k}(\omega_{e,k})$ en la tabla de valores generada mediante la ecuación (4.21) con α_{gi} entre 0 y 360° y aplicando la ecuación (4.20). En el Capítulo 5 se expone otra vía.

(a.5) Una vez calculado el ángulo de generación $\alpha_{gi,k}$ para el punto de contacto $P_{k,i}$ en estudio, se deriva la ecuaciones de la derivada del perfil de la rueda dentada interior respecto el ángulo de generación,

$$\begin{aligned}x'_i(\alpha_{gi}) &= \frac{dx_i(\alpha_{gi})}{d\alpha_{gi}} = -R_2 \sin\alpha_{gi} - Ze \sin(Z\alpha_{gi}) + \\& - \frac{S[R_2 \cos\alpha_{gi} + r_2 \cos(Z\alpha_{gi})]r_2 R_2 (Z-1) \sin(Z-1)\alpha_{gi}}{(r_2^2 + R_2^2 + 2r_2 R_2 \cos(Z-1)\alpha_{gi})^{3/2}} - \frac{S[-R_2 \sin\alpha_{gi} - Zr_2 \sin(Z\alpha_{gi})]}{\sqrt{r_2^2 + R_2^2 + 2r_2 R_2 \cos(Z-1)\alpha_{gi}}} \\y'_i(\alpha_{gi}) &= \frac{dy_i(\alpha_{gi})}{d\alpha_{gi}} = R_2 \cos\alpha_{gi} + Ze \cos(Z\alpha_{gi}) + \\& - \frac{S[R_2 \sin\alpha_{gi} + r_2 \sin(Z\alpha_{gi})]r_2 R_2 (Z-1) \sin(Z-1)\alpha_{gi}}{(r_2^2 + R_2^2 + 2r_2 R_2 \cos(Z-1)\alpha_{gi})^{3/2}} - \frac{S[R_2 \cos\alpha_{gi} + Zr_2 \cos(Z\alpha_{gi})]}{\sqrt{r_2^2 + R_2^2 + 2r_2 R_2 \cos(Z-1)\alpha_{gi}}}\end{aligned}\quad (4.23)$$

(a.6) Se calcula la tangente común en el punto el punto de contacto $P_{k,e}$ de la forma,

$$\gamma_k = \arctan \frac{y'_i(\alpha_{gi,k})}{x'_i(\alpha_{gi,k})} + \omega_i \quad (4.24)$$

y donde debe añadirse el ángulo rotado por la rueda dentada interior.

(a.7) Se vuelve al punto 2 para el cálculo del siguiente punto de contacto hasta que $k = Z$.

(b.) Análisis mediante la línea IP_kP_s

En este análisis, se parte de la posición de referencia mostrada en la Figura 4.1 para calcular el ángulo γ'_k de la tangente común. Posteriormente, se aplica la inversión cinemática a este ángulo para obtener el ángulo γ_k de la tangente común en el primer cuadrante del sistema de referencia de la rueda dentada exterior. El análisis sigue la secuencia (se recomienda observar Figura 4.1 y

Figura 4.6),

(b.1) Se toma el primer punto de contacto k

(b.2) Se calcula $\sin \Phi_k$ y $\cos \Phi_k$

$$\begin{aligned}\sin \Phi_k &= \frac{R_2}{\sqrt{r_2^2 + R_2^2 - 2r_2 R_2 \cos \omega_{e,k}}} \sin \omega_{e,k} \\ \cos \Phi_k &= \frac{R_2 \cos \omega_{e,k} - r_2}{\sqrt{r_2^2 + R_2^2 - 2r_2 R_2 \cos \omega_{e,k}}}\end{aligned}\quad (4.25)$$

donde Φ_k es el ángulo que forma la línea $IP_k P_s$ con el eje de abscisas X del sistema de referencia absoluta en el punto de contacto k y $\omega_{e,k} = -(Z-1)\nu_k$. Mediante este cálculo, se conoce en que cuadrante se encuentra el ángulo Φ_k y se emplaza con referencia al primer cuadrante.

(b.3) Se calcula el ángulo Φ_k situado en el primer cuadrante como,

$$\Phi_k = \arcsin \left(\frac{R_2}{\sqrt{r_2^2 + R_2^2 - 2r_2 R_2 \cos \omega_{e,k}}} \sin \omega_{e,k} \right) \quad (4.26)$$

(b.4) Se calcula el ángulo γ'_k de la tangente común en el punto de contacto P_k sabiendo que es perpendicular a la línea $IP_k P_s$,

$$\gamma'_k = \Phi_k + \frac{\pi}{2} \quad (4.27)$$

(b.5) Finalmente, se aplica la inversión cinemática y se obtiene el ángulo γ_k de la tangente común en el primer cuadrante del sistema de referencia de la rueda dentada exterior,

$$\gamma_k = \gamma'_k - \omega_{e,k} \quad (4.28)$$

(b.6) Se vuelve al punto 2 para el cálculo del siguiente punto de contacto hasta que $k = Z$

Los dos análisis son válidos y se alcanzan idénticos resultados. Sin embargo, el análisis mediante la línea $IP_k P_s$ presenta ventajas de cálculo respecto al análisis mediante la derivada del perfil de la rueda dentada interior.

Teniendo definido el ángulo de la tangente común en la referencia de la inversión cinemática, la distancia $IP_{k,i} = IP_{k,e}$ puede ahora ser calculada como,

$$IP_{k,i} \equiv IP_{k,e} = x_{pc,k}^{ic}(\omega_{e,k}) \sin \gamma_k - y_{pc,k}^{ic}(\omega_{e,k}) \cos \gamma_k - Ze \sin(\phi_k - \pi) \quad (4.29)$$

donde $x_{pc,k}^{ic}(\omega_{e,k})$, $y_{pc,k}^{ic}(\omega_{e,k})$ son las coordenadas del punto de contacto en la referencia de la inversión cinemática de valor,

$$\begin{aligned}x_{pc,k}^{ic}(\omega_{e,k}) &= x_{pc,k}(\omega_{e,k}) \cos(-\omega_{e,k}) - y_{pc,k}(\omega_{e,k}) \sin(-\omega_{e,k}) \\ y_{pc,k}^{ic}(\omega_{e,k}) &= x_{pc,k}(\omega_{e,k}) \sin(-\omega_{e,k}) + y_{pc,k}(\omega_{e,k}) \cos(-\omega_{e,k})\end{aligned}\quad (4.30)$$

y la distancia perpendicular d_k desde el centro de la rueda dentada exterior O_2 a la normal común es dada por,

$$d_k = x_{pc,k}^{ic}(\omega_{e,k})\cos\gamma_k + y_{pc,k}^{ic}(\omega_{e,k})\sin\gamma_k \quad (4.31)$$

Finalmente, las coordenadas de los puntos de contacto sobre el sistema de referencia absoluta XY desde la inversión cinemática son (Figura 4.6),

$$\begin{aligned} X_k(\omega_{e,k}) &= x_{pc,k}^{ic}(\omega_{e,k})\cos(Z-1)\psi_k + y_{pc,k}^{ic}(\omega_{e,k})\sin(Z-1)\psi_k \\ Y_k(\omega_{e,k}) &= -x_{pc,k}^{ic}(\omega_{e,k})\sin(Z-1)\psi_k + y_{pc,k}^{ic}(\omega_{e,k})\cos(Z-1)\psi_k \end{aligned} \quad (4.32)$$

Evidentemente, las coordenadas de los puntos de contacto X_k, Y_k desde la inversión cinemática han de ser iguales a las coordenadas de los puntos de contacto $x_{pc,k}, y_{pc,k}$ (ecuación (4.19)) desde la posición de referencia (Figura 4.1) sin inversión cinemática. De esta forma, se debe cumplir,

$$\begin{aligned} X_k(\omega_{e,k}) &= x_{pc,k}(\omega_{e,k}) \\ Y_k(\omega_{e,k}) &= y_{pc,k}(\omega_{e,k}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Se puede utilizar la ecuación (4.32) para comprobar la validez del método.

4.3.3 Curvaturas en el Punto de Contacto

Conocida toda la geometría en inversión cinemática, es ahora posible calcular las curvaturas en los puntos de contacto. Como ya se definió anteriormente, la curvatura en los dientes de la rueda dentada exterior es conocida si se toman sus formas como arcos circulares y cuyo valor es dado por la ecuación (4.13).

$$k_{2,k} \equiv \frac{1}{Q_{k,e}P_{k,e}} = \frac{1}{S} \quad (4.13)$$

Con respecto a la rueda dentada interior, la curvatura $k_{1,k}$ viene definida mediante la expresión

$$k_{1,k} = \frac{1}{Q_{k,i}P_{k,i}} \quad (4.34)$$

y para cada punto de contacto puede ser calculado con la ayuda de la expresión (4.10) de L'Hôpital en donde la distancia entre el centro instantáneo de rotación y el centro del radio de curvatura para la rueda dentada exterior es,

$$IQ_{k,e} = IP_{k,e} - S \quad (4.35)$$

y por tanto, la distancia entre el centro instantáneo de rotación y el centro del radio de curvatura para la rueda dentada interior será,

$$IQ_{k,i} = \left(\frac{1}{IQ_{k,e}} - \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \frac{1}{\sin\phi_k} \right)^{-1} \quad (4.36)$$

Entonces, la inversa de la curvatura en el punto de contacto para la rueda dentada interior se puede expresar como,

$$Q_{k,i}P_{k,i} = IP_{k,i} - IQ_{k,i} \quad (4.37)$$

4.4 CÁLCULO DE LAS FUERZAS DE CONTACTO Y MÁXIMA TENSIÓN DE CONTACTO

Teniendo en cuenta la Figura 4.6, si se imprime una rotación a la rueda dentada interior de valor un ángulo pequeño $\Delta\omega_i$, el punto de contacto $P_{k,i}$ perteneciente a la rueda dentada interior se desplazará una distancia $(O_1P_{k,i})\Delta\omega_i$ en la dirección perpendicular a la recta $(O_1P_{k,i})$. De esta forma, se puede calcular una penetración virtual que se produciría en cada diente sobre la normal común como,

$$\Delta v_k = (O_1P_{k,i})\Delta\omega_i \cos(\beta_k - \phi_k) \quad (4.38)$$

donde β_k es el ángulo que forma la línea $(O_1P_{k,i})$ con el eje de referencia absoluta X . Teniendo en cuenta la referencia tomada, si la penetración Δv_k es negativa no existe contacto en ese determinado diente con punto de contacto $P_{k,i}$ bajo estudio.

Si se conoce el valor de la penetración se evalúan las tensiones de contacto según Hertz, mediante un análisis de tensión plana sobre el desplazamiento y la tensión entre dos cilindros en contacto (Colbourne, 1976).

Habiendo definido $F_{c,k}$ como la fuerza de contacto por unidad de espesor que se produce en cada punto de contacto P_k , y definiendo el ancho de contacto como $2a$,

$$a_k^2 = \frac{4F_{c,k}}{\pi} \left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right] \frac{1}{|k_{1,k} - k_{2,k}|} \quad (4.39)$$

donde E_1 , E_2 , ν_1 y ν_2 son el módulo de Young y Poisson para las dos superficies cilíndricas de los dientes de la rueda dentada interior y exterior, mientras que $k_{1,k}$ y $k_{2,k}$ son la curvatura del diente en el punto de contacto P_k para el diente de la rueda dentada interior y exterior, respectivamente, y calculadas anteriormente mediante las expresiones (4.34) y (4.13).

El desplazamiento v_k en el punto $(0,y_k)$ en el cilindro superior, diente de la rueda dentada exterior, viene dado por la expresión,

$$\frac{E_1 v_k}{(1-\nu_1^2)} = -\frac{F_{c,k}}{\pi} \left[2 \ln \mu_k + \frac{\nu_1}{(1-\nu_1)} \frac{1}{\mu_k^2} \right] \quad (4.40)$$

donde,

$$\mu_k = \frac{y_k}{a_k} + \left(\frac{y_k^2}{a_k^2} + 1 \right)^{0.5} \quad (4.41)$$

y y_k es la coordenada local en el cilindro superior medida en la dirección normal desde el punto de contacto. La ecuación (4.40) se usa para derivar una expresión para el desplazamiento relativo entre el punto de contacto P_k y el punto $(0,y_k)$,

$$\frac{E_1 (v_{0,k} - v_k)}{(1-\nu_1^2)} = \frac{F_{c,k}}{\pi} \left[2 \ln \mu_k - \frac{\nu_1}{(1-\nu_1)} \left(1 - \frac{1}{\mu_k^2} \right) \right] \quad (4.42)$$

y la penetración total Δv_k es igual a la suma de los desplazamientos relativos para cada uno de los dos dientes; es decir, la suma del desplazamiento relativo del diente de la rueda dentada interior y el de la rueda dentada exterior, siendo,

$$\Delta v_k = \frac{F_{c,k}}{\pi} \frac{(1-v_1^2)}{E_1} \left[2 \ln \mu_k - \frac{v_1}{(1-v_1)} \left(1 - \frac{1}{\mu_k^2} \right) \right] + \frac{F_{c,k}}{\pi} \frac{(1-v_2^2)}{E_2} \left[2 \ln \mu_k - \frac{v_2}{(1-v_2)} \left(1 - \frac{1}{\mu_k^2} \right) \right] \quad (4.43)$$

La penetración Δv_k derivada, depende de la profundidad y_k ya que el desplazamiento v_k es calculado basándose en su valor. De hecho, se está calculando la reducción de longitud sobre una longitud de referencia y_k sobre cada diente medida en la dirección normal desde el punto de contacto. La suma de las reducciones en longitud se ha definido como penetración Δv_k . Sin embargo, y a pesar de que sería la primera referencia a tomar, no tiene sentido usar el radio de curvatura local en cada diente como longitud de referencia y_k , ya que cuando la curvatura tiende a cero se obtendría un valor infinito para la longitud de referencia. Por esta razón, se decide usar una longitud de referencia y_k constante para ambas ruedas dentadas, siendo el valor escogido el radio de curvatura en el centro de un diente de la rueda dentada exterior².

Finalmente, la tensión máxima de contacto para cada punto de contacto viene dada por,

$$|\sigma_{yy}|_{\max,k} = \frac{2F_{c,k}}{\pi a_k} \quad (4.44)$$

En el caso particular que nos ocupa, habida cuenta que existen varios puntos de contacto para transmitir el momento (par motor), el problema es hiperestático y el cálculo de las fuerzas en los puntos de contacto no es directo, hay que recurrir a un método iterativo que consiste en,

1. Se asigna una rotación a la rueda dentada interior de valor un ángulo pequeño $\Delta \omega_i$
2. Se calcula la penetración en cada punto de contacto Δv_k mediante la ecuación (4.38)
3. Si la penetración en un diente Δv_k es negativa, se le asigna valor cero al no existir contacto en ese diente en particular cuando se imprime la rotación $\Delta \omega_i$
4. Se asigna un valor inicial al ancho de contacto a_k en cada punto de contacto igual a la unidad
5. Se calculan los valores μ_k en cada punto de contacto mediante la ecuación (4.41)
6. Se calcula la fuerza de contacto $F_{c,k}$ en cada punto de contacto mediante la ecuación (4.43)
7. Se calcula el valor del ancho de contacto a'_k en cada punto de contacto mediante la ecuación (4.39)
8. Sea ε un error aceptable. Si,
 - a. $|a'_k - a_k| > \varepsilon$ se asigna $a_k = a'_k$ y se repite de nuevo el cálculo regresando al punto 5
 - b. $|a'_k - a_k| \leq \varepsilon$ se finaliza el cálculo siendo los valores de las últimas fuerzas de contacto $F_{c,k}$ y ancho de contacto a_k calculados en cada punto de contacto los valores definitivos para la posición generada por la rotación del ángulo pequeño $\Delta \omega_i$. Paso al punto 9.
9. Finalmente, se calculan las tensiones de contacto máximas $\sigma_{yy,k}$ en cada punto de contacto mediante la ecuación (4.44).

² Con tal de comprobar la sensibilidad de la longitud de referencia y_k sobre los resultados del cálculo de las tensiones de contacto, se lleva a cabo un análisis con un valor de longitud de referencia y_k igual a la mitad del valor escogido. En todos los casos, el cambio en el valor calculado de la tensión de contacto en el diente es siempre inferior al 0.8% del valor de máxima tensión.

4.5 METODOLOGÍA DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es una técnica que permite obtener soluciones aproximadas de un sistema real. Existen dos tipos distintos de sistemas a resolver: sistemas discretos y sistemas continuos. El MEF se centra principalmente en resolver un sistema continuo mediante la discretización de este. Así, se reduce el problema a un número finito de variables pasando de un sistema continuo a uno discreto. El MEF precisa la integración de las ecuaciones diferenciales que expresan el equilibrio de un elemento diferencial genérico basándose en la información de las variables localizadas en los nodos, e interpoladas generalmente mediante polinomios en el dominio elemental.

El MEF divide el dominio en unas porciones, no necesariamente intersectantes entre sí, de forma que una vez ensambladas reconstruyen el problema. Estas porciones se denominan elementos y están conectadas entre sí por nodos. Sobre los nodos se aplican las incógnitas y las ecuaciones del problema para posteriormente poder calcular la solución de él. El comportamiento de los puntos interiores de los elementos está referido a los nodos mediante las funciones de forma que permiten extrapolar los resultados de los nodos a los puntos interiores del elemento.

La solución del problema de contacto es un proceso no lineal, ya que el contacto deforma la geometría original y por ende la geometría del contacto se debe de reajustar. Entre las técnicas numéricas más aceptadas hoy en día está el uso del MEF, tanto en sus formulaciones implícitas como explícitas, siendo esta última las más sencilla de implementar.

4.5.1 Definición del Problema a Resolver mediante MEF

El problema que se pretende resolver mediante la técnica de MEF es el de determinar la máxima tensión de contacto en los perfiles trocoidales teóricos de los dos componentes principales de la bomba gerotor: la rueda dentada interior y exterior (Figura 4.1). A continuación se exponen las principales hipótesis que se asumen en este estudio que se propone,

1. Los centros de la rueda dentada interior y exterior permanecen fijos en todo el estudio
2. El movimiento de rotación es transmitido de la rueda dentada interior a la exterior cuando ésta permanece fija y estática
3. Se consideran las propiedades físicas del material constantes
4. No se consideran las propiedades físicas del fluido
5. En los puntos de contacto no existe penetración entre los dientes de las ruedas dentadas
6. No se considera huelgo en el engrane
7. No se consideran errores de fabricación
8. No se consideran efectos térmicos
9. No se consideran efectos de fricción

y las condiciones de contorno:

- a. Los centros de la rueda dentada interior y exterior están fijos
- b. La rueda dentada exterior permanecerá fija y estática en todo el estudio
- c. El movimiento de rotación es transmitido de la rueda dentada interior a la exterior

cuando ésta permanece fija y estática

- d. El par motor es impuesto sobre la rueda dentada interior

4.5.2 Análisis mediante MEF

El estudio mediante el MEF se realiza bajo la hipótesis de equilibrio quasiestático, en donde cada instante del movimiento se resuelve encontrando el equilibrio estático, sin tomar en cuenta los términos de equilibrio inerciales.

Básicamente se han utilizado dos software en las tres partes de la simulación mediante MEF.

- *FASE I.* El software *GiD v7.0* es usado como pre-procesador para crear la geometría del engranaje y posteriormente desarrollar la malla.
- *FASE II.* El software *COMET v5.0* es usado en el análisis mecánico para calcular la máxima tensión de contacto en los puntos de contacto.
- *FASE III.* El software *GiD v7.0* es usado de nuevo como post-procesador para mostrar los resultados.

El proceso de cálculo se describe gráficamente en el diagrama de la Figura 4.7.

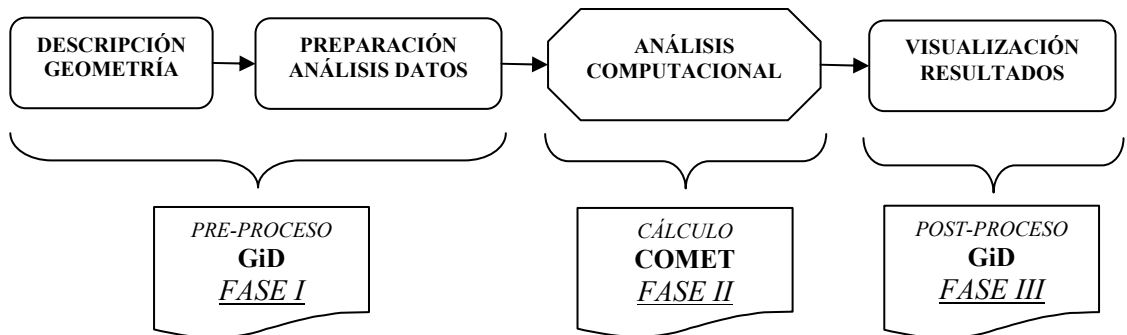


Figura 4.7. Proceso de cálculo mediante el software utilizado

GiD y COMET son un paquete de software comercial que ha sido desarrollado en Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería (CIMNE), centro con el cual existe una estrecha colaboración en diversos proyectos europeos, y por ende el uso del software mencionado ha estado al alcance de este trabajo. Adicionalmente, COMET cuenta con una amplia reputación en el mundo de la investigación de la mecánica computacional.

GiD es un pre y post-procesador que ha sido diseñado como un interface universal y adaptable para modelado geométrico, introducción de datos y visualización de resultados para todo tipo de programas de simulación numérica.

COMET es un código de investigación desarrollado en base al método de los elementos finitos en formulación implícita. COMET se encuentra acoplado completamente con el programa de pre y post GiD. En el presente estudio, COMET calcula mediante las hipótesis de tensión plana elástico-lineal aplicando no linealidad geométrica y grandes desplazamientos (aunque en este caso no existen) y un análisis quasiestático que aplica el momento torsor en 10 incrementos de carga para garantizar una buena solución de las superficies de contacto. El problema de contacto se encuentra resuelto mediante multiplicadores de Lagrange, lo que complica un aumento del número de ecuaciones a resolver, pero que por contra partida, garantiza el equilibrio en cada

incremento de carga. Adicionalmente, el problema ha requerido una discretización muy fina en la interface entre los dientes exterior e interior a fin de poder captar correctamente la geometría de las piezas, que debido al no huelgo que presentan requiere una exactitud más que detallada.

FASE I. Descripción de la Geometría y Desarrollo de la Malla

Así, primeramente se describe la geometría en estudio que es presentada en la Figura 4.8.

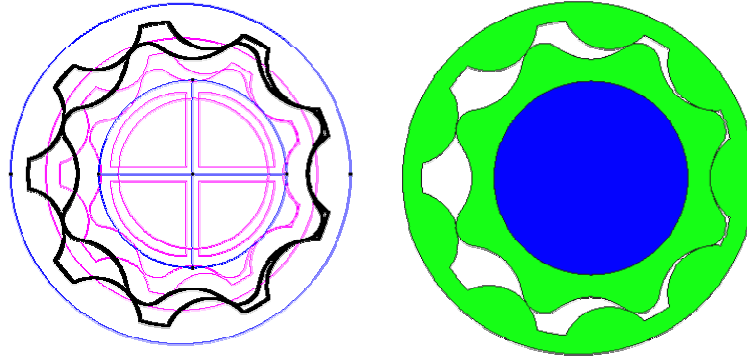


Figura 4.8. Geometría y superficies de la rueda dentada interior y exterior en el estudio 2D

El estudio es bidimensional y en él se definen dos superficies: la que comprende la rueda dentada exterior y la que comprende la rueda dentada interior. El par motor es transmitido por la rueda de cuatro radios (modelo del eje motor) situada en el centro y en contacto en cuatro puntos del interior de la rueda dentada interior.

La descripción de la geometría debe realizarse detenidamente. Los perfiles trocoidales de las ruedas dentadas del engranaje deben ser definidos con tremenda exactitud para llegar a describir correctamente la geometría del engrane. Si no se define correctamente, entonces se produce una penetración inicial del perfil de la rueda dentada interior sobre el perfil de la rueda dentada exterior debido al error de discretización. Esta penetración se ha de evitar ya que aparece interferencia entre ellos alejando el estudio de la realidad. Este fenómeno se muestra en la Figura 4.9.

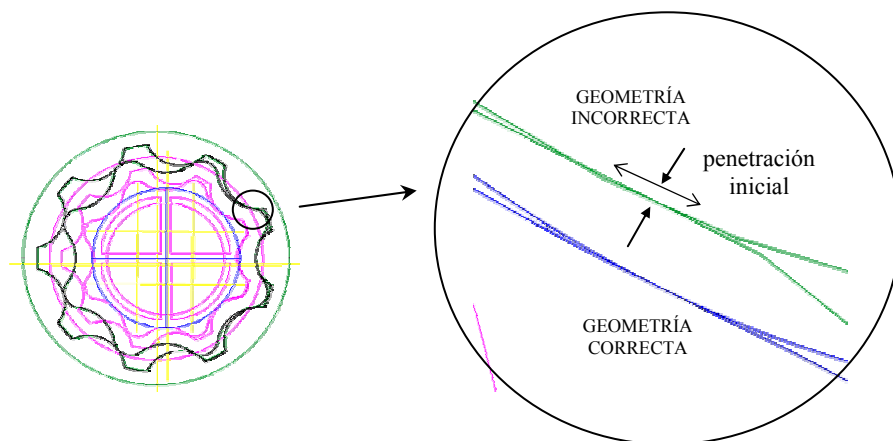


Figura 4.9. Penetración inicial por incorrecta definición de la geometría de los perfiles

A continuación se desarrolla la malla que se presenta en la Figura 4.10. En el presente estudio la malla está constituida por 26,270 triángulos no estructurados con 17,845 nodos. Los elementos se han concentrado con mayor densidad en los perfiles de las ruedas dentadas por tres razones:

- El perfil de la rueda dentada interior está en contacto continuo en los correspondientes puntos de contacto para cualquier posición en una rotación completa del conjunto del engranaje
- La curvatura del diente de la rueda dentada interior en el punto de contacto varía notablemente en función de la localización del punto de contacto sobre su perfil y es función de la posición en que se encuentra la rueda en una rotación completa del conjunto del engranaje
- La máxima tensión de contacto se concentra en el perfil de las ruedas dentadas

Sin embargo, se ha de tener en cuenta que la densidad de malla es un factor decisivo en el tiempo computacional de cálculo.

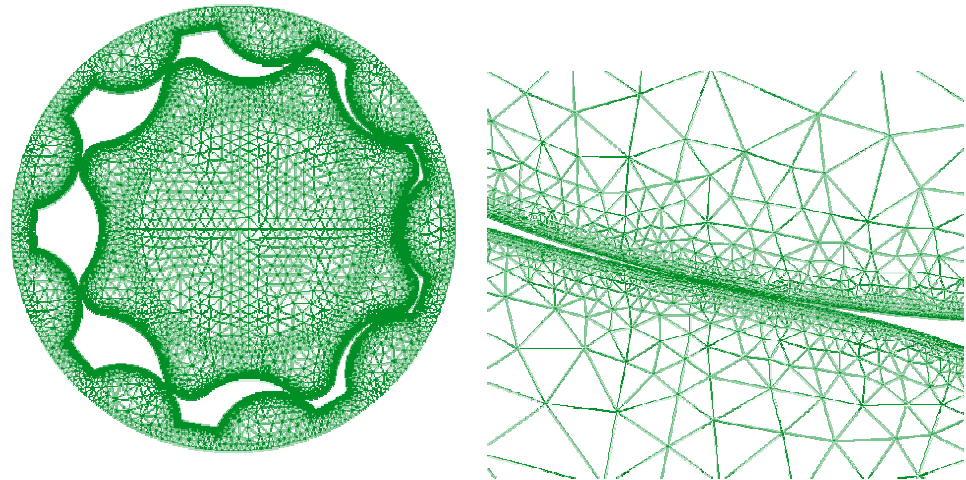


Figura 4.10. Malla desarrollada en el engranaje

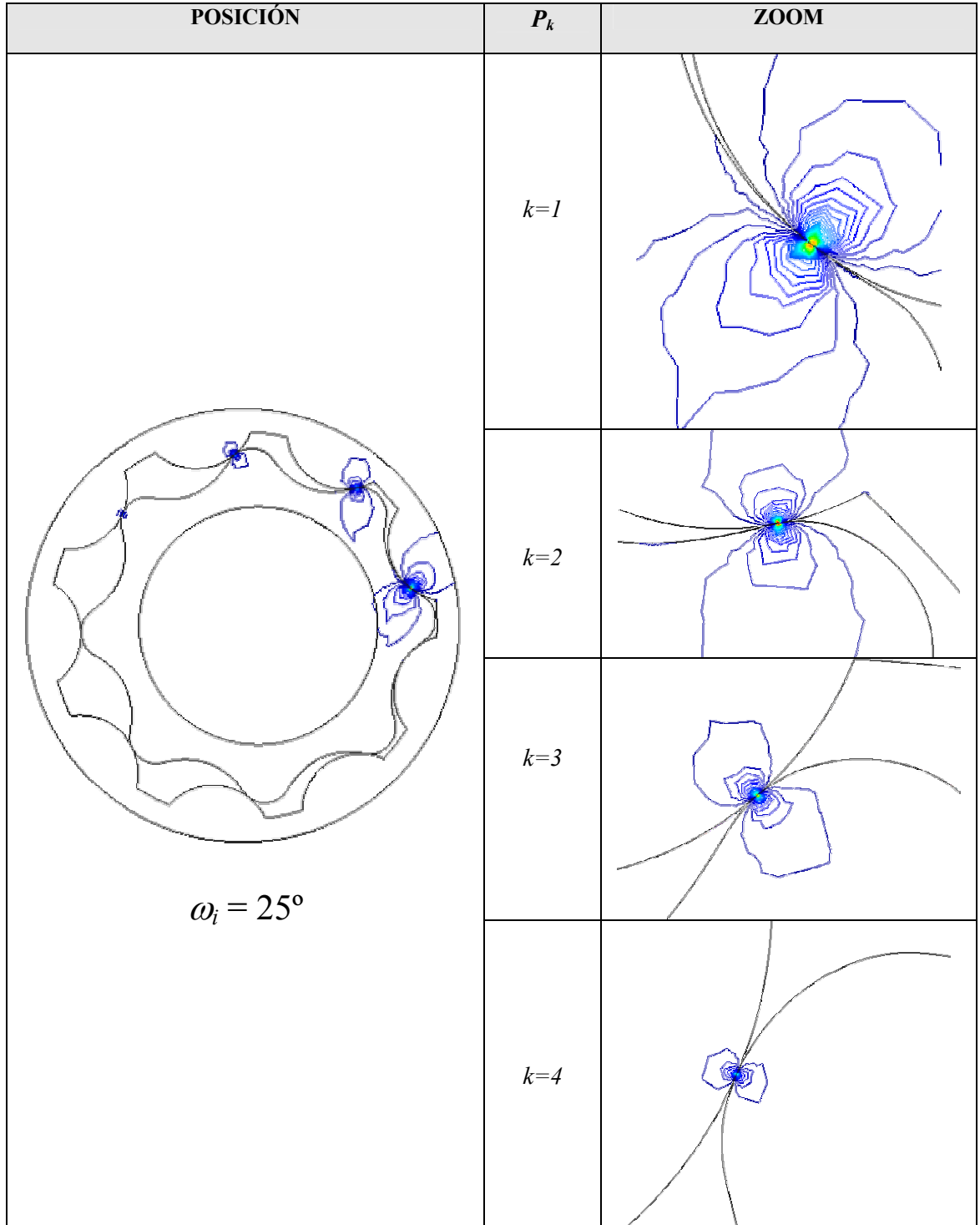
FASE II. Análisis Mecánico para el Cálculo de la Máxima Tensión de Contacto

En esta fase, se llevan a cabo los cálculos para la evaluación de la máxima tensión de contacto. Las ruedas dentadas del engranaje son situadas en una posición específica definida por el ángulo de rotación ω_i de la rueda dentada interior. El ángulo de rotación en estudio se ha concentrado entre los límites $0 \leq \omega_i \leq \frac{2\pi}{Z-1}$, ya que éste es el intervalo en el que la posición de los puntos de contacto se vuelve a repetir. Se han estudiado diez ángulos de rotación ω_i : 0°, 5°, 10°, 15°, 20°, 22.5°, 25°, 30°, 35° y 40° para presión del fluido de 0.5 MPa (5 bar).

A partir de la posición específica definida por el ángulo de rotación ω_i , se induce un momento de rotación a la rueda dentada interior mediante cuatro fuerzas localizadas en la periferia del eje motriz. El contacto se define en la interface entre los perfiles de las ruedas dentadas interior y exterior, siendo utilizada la técnica numérica de multiplicadores de Lagrange que toman un valor muy alto tan pronto comienza a existir penetraciones entre ambas superficies. La rueda dentada exterior es capaz de soportar dichos esfuerzos de contacto al encontrarse impedida en su movimiento. Para garantizar un correcto movimiento de la rueda dentada interior, el nodo central del eje se encuentra fijo permitiendo su rotación sin desplazamientos laterales.

FASE III. Presentación de los Resultados

En esta fase se muestran los resultados de las variables correspondientes con grandes posibilidades de presentación. A continuación se muestran los resultados de las líneas de contorno de isotensión de Von-Mises para una posición específica de estudio y a título de ejemplo $\omega_i = 25^\circ$.



4.6 RESULTADOS

Los resultados obtenidos se refieren al engranaje de perfiles trocoidales de la bomba gerotor. Las características del material del engranaje de perfiles trocoidales se presentan en la Tabla 4.1.

Material del Engranaje de Perfil Trocoidal	
Modulo de Young	115 GPa
Coficiente de Poisson	0.25
Densidad	6.8 gr/cm ³

Tabla 4.1. Características del material del engranaje de perfiles trocoidales

Los resultados de la máxima tensión de contacto en función del punto de contacto P_k (Figura 4.11) para cada posición de estudio para el método analítico basado en la teórica de Colbourne modificada y MEF se presentan entre la Figura 4.12 y Figura 4.16.

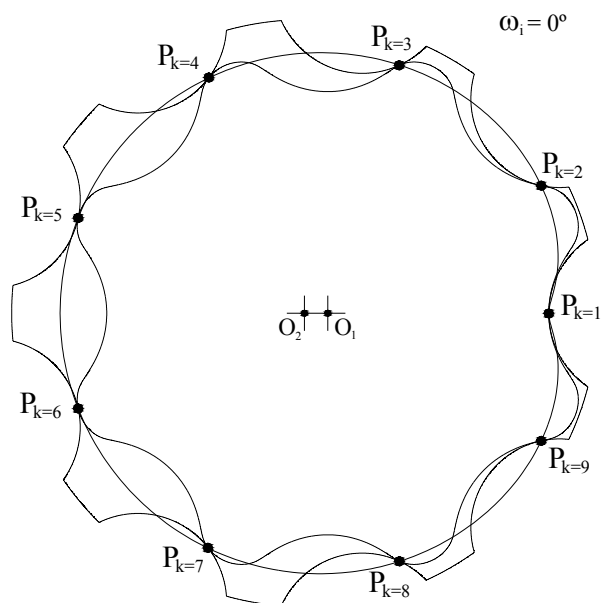


Figura 4.11. Localización de los puntos de contacto P_k

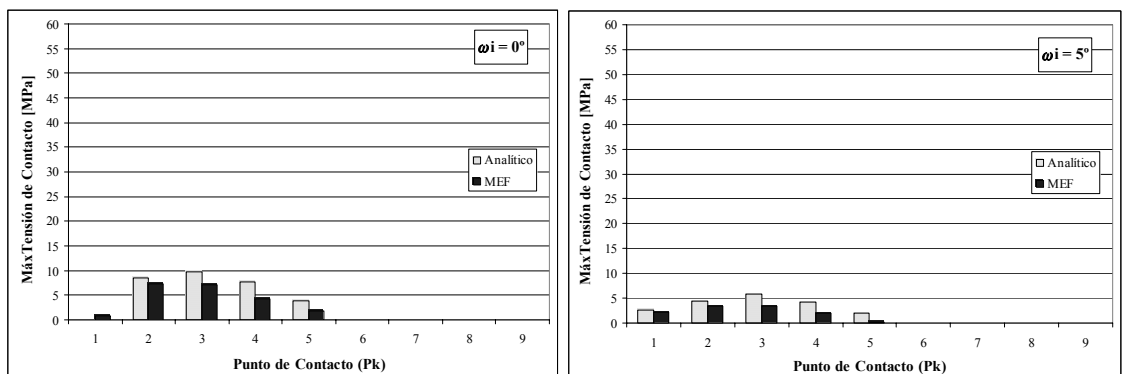


Figura 4.12. Máxima tensión de contacto método analítico y MEF en función del punto de contacto P_k para posición $\omega_i = 0^\circ$ y $\omega_i = 5^\circ$

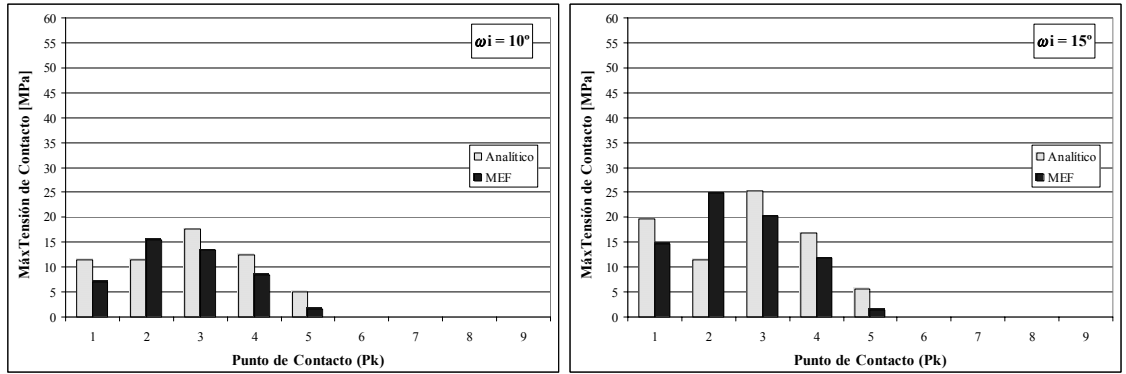


Figura 4.13. Máxima tensión de contacto método analítico y MEF en función del punto de contacto P_k para posición $\omega_i = 10^\circ$ y $\omega_i = 15^\circ$

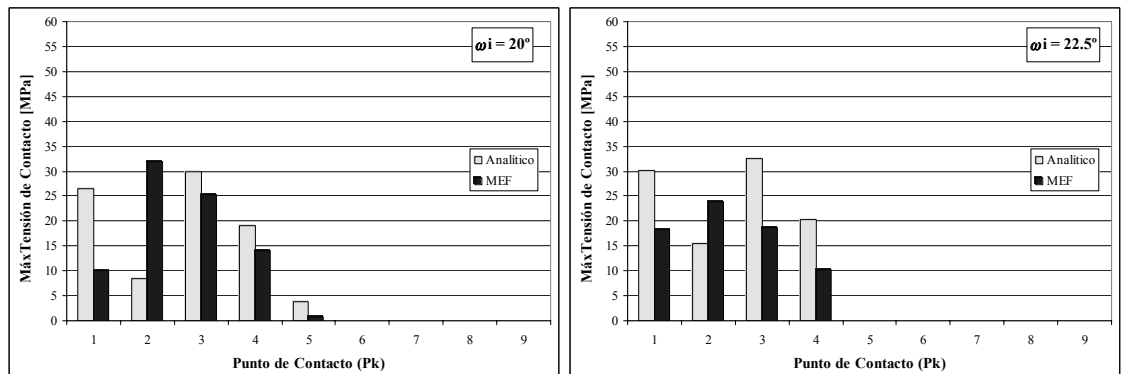


Figura 4.14. Máxima tensión de contacto método analítico y MEF en función del punto de contacto P_k para posición $\omega_i = 20^\circ$ y $\omega_i = 22.5^\circ$

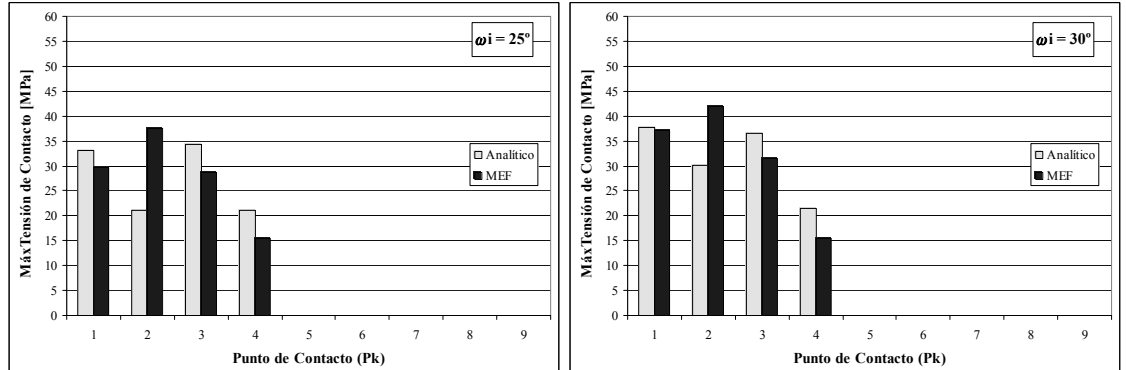


Figura 4.15. Máxima tensión de contacto método analítico y MEF en función del punto de contacto P_k para posición $\omega_i = 25^\circ$ y $\omega_i = 30^\circ$

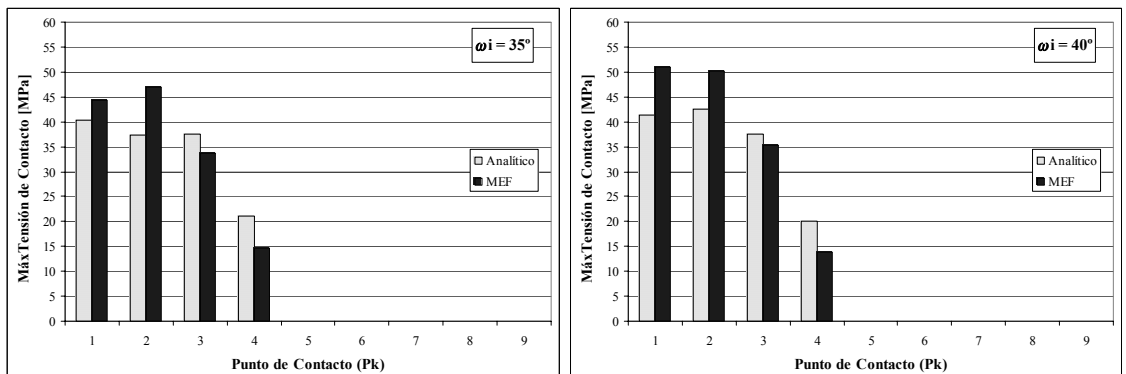


Figura 4.16. Máxima tensión de contacto método analítico y MEF en función del punto de contacto P_k para posición $\omega_i = 35^\circ$ y $\omega_i = 40^\circ$

Los resultados de la máxima tensión de contacto en función de las posiciones de estudio en cada punto de contacto P_k mediante el método analítico basado en la teoría de Colbourne modificada se presentan en la Figura 4.17.

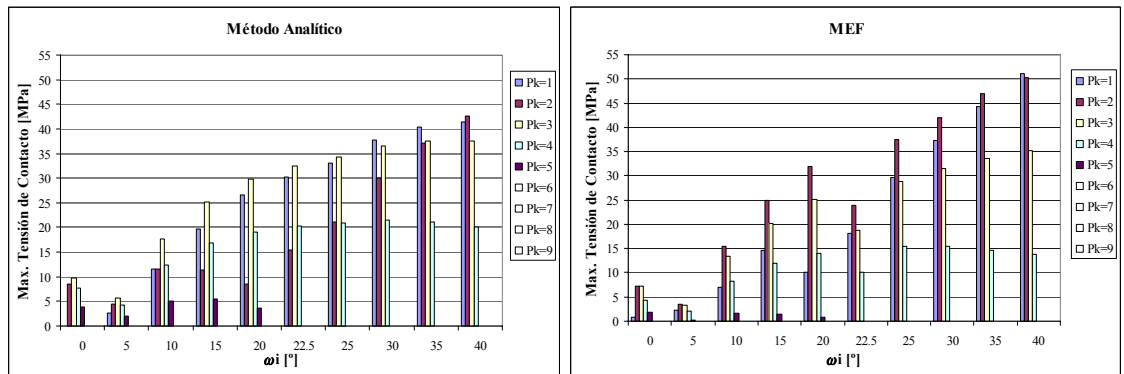


Figura 4.17. Máxima tensión de contacto método analítico y MEF en función de las posiciones de estudio en cada punto de contacto P_k

Los resultados de la máxima tensión de contacto en función de las posiciones de estudio en cada punto de contacto P_k mediante MEF se presentan en la Figura 4.17.

Los resultados de la máxima tensión de contacto en función de las posiciones de estudio mediante el método analítico basado en la teoría de Colbourne modificada y MEF se presentan en la Figura 4.18.

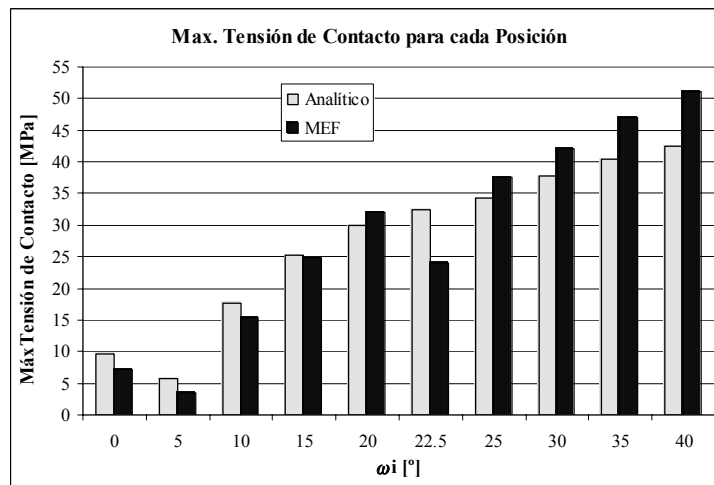


Figura 4.18. Máxima tensión de contacto método analítico y MEF en función de la posición

Con este apartado se da por finalizada la caracterización de una bomba gerotor desde el punto de vista de la geometría, mecanismo de engrane y el contacto.

Con relación al contacto, se desea destacar el estudio comparativo realizado entre la aplicación del método de Colbourne modificada y el MEF. Independientemente que el método de Colbourne es adecuado para ruedas dentadas exteriores donde el perfil del lóbulo o diente es ajustable a un arco circular, su aplicación sigue siendo engorrosa y muy restrictiva.

El MEF con sus condiciones de contorno y mallado da lugar a un cálculo relativamente rápido y flexible a la hora de introducir modificaciones. El método de Colbourne modificada da resultados de máxima tensión de contacto que difieren de los obtenidos por MEF en un 20%.

Paralelamente a estos estudios, se han realizado ensayos experimentales mediante la técnica experimental de fotoelasticidad (Gamez-Montero. 2003). Los resultados experimentales

obtenidos, a pesar de que se sitúan dentro del mismo orden de magnitud, se consideran poco fiables habida cuenta que la calibración del equipo en base al espectro de colores es crítica.

Tal como se ha mencionado en los objetivos del Capítulo 1, la finalidad de la presente tesis no radica en la optimización de la geometría de una bomba gerotor para obtener el máximo desplazamiento volumétrico y la minimización de las tensiones de contacto, sino que se centra en el estudio y desarrollo de metodologías para la caracterización dinámica del funcionamiento de la bomba gerotor. Así pues, en el próximo capítulo y tomando como referencia los Capítulos anteriores 1 y 2, la tesis se introducirá en la modelización y simulación del comportamiento dinámico de la bomba gerotor así como su caracterización experimental.