

5 BOMBAS DE ENGRANAJES CON PERFILES TROCOIDALES. ANÁLISIS FLUIDODINÁMICO

5.1 INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones desarrolladas en el Capítulo 3 han permitido deducir el desplazamiento volumétrico en función del ángulo, y en consecuencia, el caudal instantáneo desde el punto de vista teórico habida cuenta que se apoya en la descripción geométrica de los perfiles de las ruedas dentadas del engranaje.

El comportamiento real de una bomba es un proceso dinámico más complejo que la simple evolución del volumen de las cámaras. La presencia de fugas de fluido entre los diferentes componentes que constituyen una bomba, la compresibilidad del fluido y la inercia de las masas de fluido en movimiento modifican sustancialmente el comportamiento definido en el Capítulo 3 provocando que el caudal instantáneo real se aparte considerablemente del caudal instantáneo deducido de forma geométrica.

El objetivo de este capítulo es proponer, plantear y analizar el comportamiento ‘real’ de la bomba gerotor mediante las técnicas de modelado y simulación basadas en parámetros discretos. Por varias razones que se expondrán a continuación, la simulación se realizará mediante la técnica de BondGraph y la integración de las ecuaciones de estado mediante el software comercial *20-SIM*.

A partir de los 90 se produce un cambio en la manera de entender la relación tecnología y software. El cambio ha sido motivado por los usuarios, lo cuales requieren:

- (a) La simulación de sistemas complejos multidisciplinares
- (b) La programación avanzadas orientadas al objeto
- (c) Software para la resolución de sistemas diferenciales algebraicos
- (d) La computación simbólica
- (e) Métodos gráficos avanzados

Debido a la complejidad del propio funcionamiento fluidodinámico de la bomba gerotor, se ha de afrontar mediante una modelización basada en la simulación física. La modelización de una simulación física puede fundamentarse en un procedimiento consistente en dividir el sistema en los correspondientes subsistemas que interaccionan entre sí en los nodos de conexión de forma que expliquen su comportamiento. Cada subsistema ha de presentar el número de niveles que representen el sistema físico de forma que el nivel inferior está integrado por los elementos básicos que se agrupan para formar un subsistema de nivel superior. Finalmente, el modelo completo se obtiene agrupando los subsistemas.

Según Broenink (Broenink , 1999), se deben cumplir dos condiciones para garantizar que los submodelos sean acoplables:

1. Los puertos de conexión entre submodelos deben estar definidos como pares de variables. El uso de pares de variables conjugadas en potencia hace que las conexiones

sean físicas, como por ejemplo par-velocidad y presión-caudal.

2. Los submodelos han de estar escritos en estilo declarativo, es decir, estableciendo relaciones y no procedimiento para computar. Esta descripción también se denomina causal.

Los submodelos se han de describir aplicando ecuaciones de conservación, aunque también puede ser necesario describir las propiedades de los elementos usados. El sistema de ecuaciones se obtiene a través de la combinación de las ecuaciones de los submodelos y de los puertos de conexión. Esto conduce, naturalmente, a las ecuaciones diferenciales algebraicas (EDAs).

La técnica de *BondGraph* es el único método que contempla el flujo de energía, y que por tanto, es ideal para la simulación de sistemas y componentes oleohidráulicos dado que valora instantáneamente la evolución temporal del producto presión-caudal en cualquier punto. Este método, acompañado de un buen software de integración numérica, permite afrontar problemas de carácter no lineal de relativa complejidad para alcanzar los retos de la simulación física. La técnica de *BondGraph* permite añadir complejidad a un modelo mediante la incorporación de nuevos elementos o subsistemas de forma progresiva. Una de las virtudes de *BondGraph* es su versatilidad, porque permite modificar la estructura del sistema de forma rápida y certera, el cual es muy útil desde el punto de vista de diseño. Partiendo de esta base, es posible tratar un sistema sencillo y refinarlo progresivamente hasta transformarlo en un modelo lo suficientemente exacto al sistema considerado.

Tomando en consideración las características del software comercial disponible para simulación, de la bibliografía consultada además de otras consideraciones tangibles, se ha considerado utilizar el software *20-SIM*. *20-SIM* es un programa que permite separar los diferentes dominios tecnológicos en submodelos independientes. Este paquete de software fue desarrollado en 1995 en el Laboratorio de Control de la Universidad de Twente (Holanda) como sucesor del paquete TUTSIM. Después de un extensivo examen, en Agosto de 1995, la versión 1.0 de CAMAS fue comercialmente liberada bajo el nombre de *20-SIM*, cuya última versión tiene origen en varios prototipos (MAX, CAMAS y TUTSIM).

20-SIM usa varios algoritmos de integración avanzada. Permite crear submodelos y combinarlos para formar un modelo complejo. Utiliza el sistema de modelado a través de diagramas de iconos, *BondGraphs* y ecuaciones, y permite una interacción cerrada con MATLAB y SIMULINK. Comprende cajas de herramientas para la optimización de parámetros, generación de código ANSI-C, linealización, animación gráfica y animación 3D. La última versión es *20-SIM 3.4* con la cual se ha trabajado en la presente tesis.

Las razones que indujeron a utilizar este programa han sido las siguientes:

- *20-SIM* está basado en *BondGraph*, el cual es una herramienta muy interactiva que proporciona un modelo común para los diferentes campos de la técnica mediante la representación gráfica de sus componentes y sus interrelaciones
- La versatilidad de la técnica de *BondGraph*
- El departamento tiene licencia para uso del software y experiencia en su uso desde inicio de los 90

Existe otro software, AMEsim, que podría haber sido tenido en cuenta para la simulación dinámica llevada a cabo en la presente tesis. AMEsim también fundamenta en el método de *BondGraph*. AMEsim fue desarrollado por IMAGINE (Michel Lebrun 1987) en 1995. AMEsim ha sido capaz de capitalizar los conocimientos mecánicos e hidráulicos, así como el modelado y diseño de sistemas complejos. Previo al desarrollo de AMEsim, IMAGINE usó para modelar y simular sus estudios de consulta usando *Advanced Continuous Simulation Language* (ACSL). ACSL es una potente pero no muy interactiva herramienta dedicada al modelado de sistemas

dinámicos. En 1995, IMAGINE rompe la barrera entre el usuario de software y sus promotores creando AMEsim.

Existen razones que han llevado al autor de la presente tesis a decidirse por 20-SIM frente a AME-sim:

- Las prestaciones de AMEsim no son requeridas ni explotadas en el presente trabajo. El conocimiento de la técnica de BondGraph y de los métodos numéricos permite la creación propia de todos los modelos y submodelos
- La experiencia del departamento con la técnica de BondGraph y el software 20_SIM
- La posesión de licencia para el uso del software 20-SIM
- La posibilidad de contrastar ambos software habida cuenta que Nervegna y su equipo de trabajo han logrado con AMEsim en sus simulaciones

5.2 MODELIZACIÓN FLUIDODINÁMICA DE LA BOMBA GEROTOR

En este apartado se presenta la modelización fluidodinámica que se va a llevar a cabo de la bomba gerotor. La modelización se realiza de forma progresiva y la estructura es:

- *Parte A.* Submodelo de una Cámara
 - Nivel Inferior
 - Nivel Intermedio
 - Nivel Superior
- *Parte B.* Modelo Ideal
- *Parte C.* Modelo Completo

PARTE A

5.3 SUBMODELO DE UNA CÁMARA

El modelo del engranaje de perfiles trocoidales parte del submodelo de una cámara. El submodelo de una cámara se ha desarrollado en tres fases:

- *Primera Fase.* Se desarrolla el nivel inferior básico del submodelo configurado por los elementos básicos que describen el sistema físico de una cámara genérica del engranaje.
- *Segunda Fase.* Sobre el nivel inferior básico, se desarrollan los consecutivos niveles intermedios, en el que cada nuevo nivel aporta una descripción más detallada del sistema físico de una cámara genérica del engranaje y su interacción con los componentes de la bomba.
- *Tercera Fase.* El submodelo está completo y su nivel superior es desarrollado para el ensamblaje y conexión con el resto de submodelos y formar el modelo de simulación fluidodinámica de la bomba gerotor.

El submodelo de una cámara de BondGraph se centrará en la modelización de una cámara genérica V_k habida cuenta que su principio de funcionamiento se basa en el principio de desplazamiento volumétrico positivo. Esto significa modelizar a diferentes niveles el submodelo de la cámara:

- Nivel Inferior Básico.* Se modeliza la variación del volumen de la cámara genérica V_k para un rotación completa de la rueda dentada exterior desde la posición de referencia (Figura 5.1)
- Niveles Intermedios.* Se modeliza la interacción de la variación del volumen de la cámara genérica V_k con las zonas específicas y fronteras de circulación del fluido para un rotación completa de la rueda dentada exterior desde la posición de referencia.
- Nivel Superior.* Se modeliza el ensamblaje y conexionado de los submodelos de cada cámara entre sí.

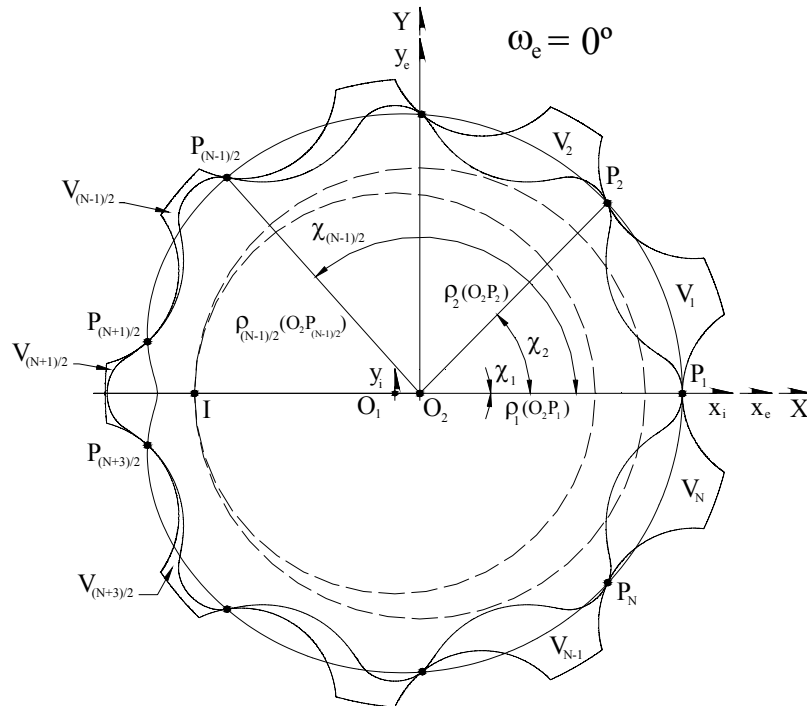
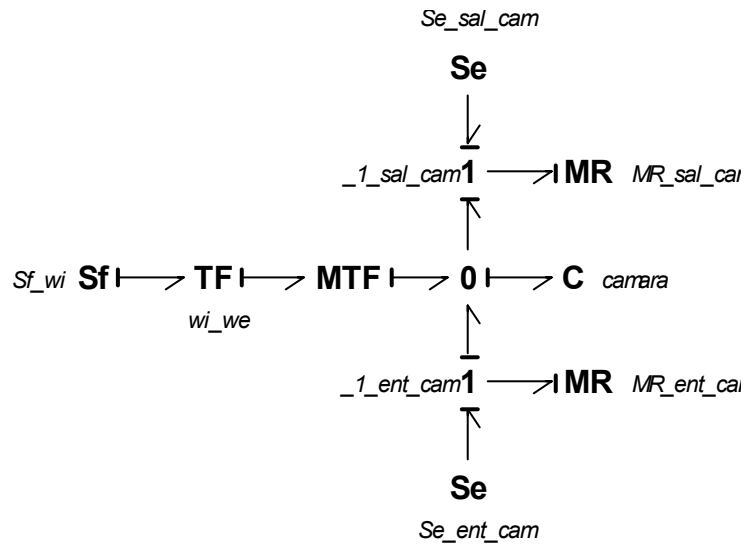


Figura 5.1. Posición y sentido de rotación de referencia para el estudio del volumen y su variación desde la Figura 3.19 del Capítulo 3

5.4 SUBMODELO DE UNA CÁMARA. NIVEL INFERIOR BÁSICO.

El primer nivel a desarrollar es el nivel inferior básico del submodelo de una cámara en BondGraph siendo el objetivo la modelización de la variación del volumen de la cámara genérica V_k para un rotación completa de la rueda dentada exterior desde la posición de referencia (Figura 5.1).

El nivel inferior básico del submodelo de la cámara se muestra en BondGraph 5.1. Si se concentra el estudio en la cámara denominada V_1 , los elementos de BondGraph tienen su correspondencia en la siguiente Tabla 2



BondGraph 5.1. BondGraph del nivel inferior básico de modelización del submodelo de la cámara

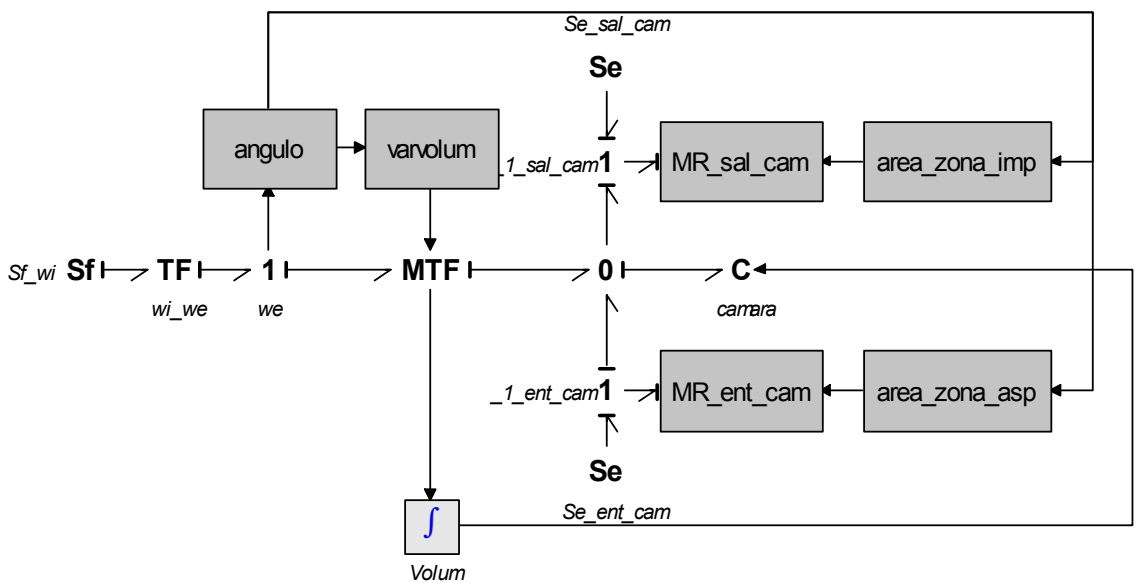
Concepto	Símbolo	Denom.	Variable Entrada	Variable Salida	Representa
Generador de velocidad de rotación	Sf_{wi} Sf	Fuente de flujo	Velocidad rotación $\dot{\omega}_i$	Par motor M_i	Velocidad de rotación rueda dentada interior $\dot{\omega}_i$
Relación de transmisión	TF wi_{we}	Transf..	Velocidad rotación $\dot{\omega}_i$	Velocidad rotación $\dot{\omega}_e$	De velocidad de rotación rueda dentada interior $\dot{\omega}_i$ a exterior $\dot{\omega}_e$
			Par motor M_e	Par motor M_i	
Principio Desplazamiento Volumétrico	MTF	Transf. modulado	Velocidad rotación $\dot{\omega}_e$	Caudal Instant. Q_C	Transformación modulada por variación del volumen de la cámara respecto al ángulo de giro $\frac{dV_c}{d\alpha_{pc}}$ ec. (3.120)
			Presión P_C	Par motor M	
Principio Conservación Masa	0	Nodo "0"	Caudales Q_{MTF-0} Q_{0-1_sal} Q_{1_ent-0}	Caudal Q_{C-0}	Sumatorio de caudales igual a cero y presión igual
			Presión P_{C-0}	Presión en cámara P_C	
Compresibilidad del fluido	C <i>camara</i>	Elemento Capacitivo	Caudal Q_{0-C}	Presión en cámara P_C	Capacidad hidráulica de la cámara
Balance de Presiones	_1_ent_cam1	Nodo "1"	Presiones $P_{Se_ent-1_ent}$ P_{1_ent-0}	Presión $P_{1_ent-MR_ent}$	Sumatorio de presiones igual a cero y caudal igual
			Caudal $Q_{MR_ent-1_ent}$	Caudal $Q_{MR_ent-1_ent}$	

Concepto	Símbolo	Denom.	Variable Entrada	Variable Salida	Representa
Caudal a través de un orificio variable	MR MR_{ent_ca}	Resistencia Modulada	Diferencia Presión ΔP	Caudal $Q_{MR_{ent-1_ent}}$	Resistencia modulada por la variación del área de la zona de aspiración A_{za} ec.(5.11)
Balance de Presiones	_1_sal_cam1	Nodo “1”	Presiones P_{0-1_sal} $P_{1_sal-Se_sal}$	Presión $P_{1_sal-MR_sal}$	Sumatorio de presiones igual a cero y caudal igual
			Caudal $Q_{MR_sal-1_sal}$	Caudal $Q_{MR_sal-1_sal}$	
Caudal a través de un orificio variable	MR MR_{sal_ca}	Resistencia Modulada	Diferencia Presión ΔP	Caudal $Q_{MR_{sal-1_sal}}$	Resistencia modulada por la variación del área de la zona de impulsión A_{zi} ec.(5.12)
Presión en la Zona de Aspiración	Se Se_{ent_cam}	Fuente de esfuerzo	Presión P_{ent}	Caudal $Q_{MR_{ent-1_ent}}$	Condición de contorno de presión en la zona de aspiración
Presión en la Zona de Impulsión	Se_{sal_cam} Se	Fuente de esfuerzo	Presión P_{sal}	Caudal $Q_{MR_{sal-1_sal}}$	Condición de contorno de presión en la zona de impulsión

Tabla 1. Correspondencia física del nivel inferior básico del submodelo de cámara de elementos BondGraph

5.5 SUBMODELO DE UNA CÁMARA. NIVEL INTERMEDIO DE MODELIZACIÓN DE ÁREAS DE ZONA DE ASPIRACIÓN E IMPULSIÓN

El siguiente nivel a desarrollar del submodelo de una cámara es el nivel intermedio de modelización de las áreas de la zona de aspiración e impulsión, siendo el primer nivel superior al nivel inferior básico del submodelo de una cámara. Este nivel aporta la modelización de la interacción de la variación del volumen de la cámara genérica V_k con las zonas específicas y fronteras de circulación del fluido para un rotación completa de la rueda dentada exterior desde la posición de referencia. Si se concentra de nuevo el estudio de BondGraph a la cámara denominada V_l (BondGraph 5.2), los elementos de BondGraph que modelizan este nivel tienen su correspondencia en la Tabla 2.



BondGraph 5.2. BondGraph del nivel intermedio de modelización de la zona de aspiración e impulsión del submodelo de la cámara


Cámara V_1	BondGraph <u>nivel intermedio</u> de modelización de la zona de aspiración e impulsión		Modelización
Elemento Físico	Símbolo	Denominación	Descripción
$\dot{\omega}_e$	1 we	Nudo "1"	Velocidad de rotación en sentido contrario a las agujas del reloj relativo de la rueda dentada exterior respecto del sistema de coordenadas de referencia absoluto X-Y
ω_e	angulo	Función matemática	Ángulo de giro en sentido contrario a las agujas del reloj relativo de la rueda dentada exterior respecto del sistema de coordenadas de referencia absoluto X-Y para cada vuelta
$\frac{dV_c}{d\alpha_{pc}}$ ec. (3.120)	varvolum	Modelo matemático	Variación del volumen de la cámara respecto al ángulo de giro
$V_1(\alpha_{pc})$ ec. (3.121)	 Volum	Integración de la variación de volumen de la cámara	Volumen de la cámara
$K_{za} = C_d \cdot A_{za} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}}$ ec. (5.2)	MR_ent_cam	Modelo matemático	Resistencia modulada por la variación de la sección efectiva del flujo en la zona de aspiración A_{za} ec. (5.11)
$K_{zi} = C_d \cdot A_{zi} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}}$ ec. (5.3)	MR_sal_cam	Modelo matemático	Resistencia modulada por la variación de la sección efectiva del flujo en la zona de impulsión A_{zi} ec. (5.12)
C_{camara} ec. (5.4)	C camara	Capacidad modulada	Capacidad hidráulica modulada de la cámara
A_{za} ec. (5.11)	area_zona_asp	Modelo matemático	Sección efectiva de la lumbrera que comunica la cámara con la zona de aspiración
A_{zi} ec. (5.12)	area_zona_imp	Modelo matemático	Sección efectiva de la lumbrera que comunica la cámara con la zona de impulsión

Tabla 2. Correspondencia física del nivel intermedio de modelización de la zona de aspiración e impulsión del submodelo de la cámara de elementos BondGraph

En el apartado siguiente se van a definir los modelos matemáticos de los elementos de BondGraph del nivel intermedio de modelización.

5.6 MODELOS MATEMÁTICOS DE LOS ELEMENTOS DE BONDGRAPH DEL NIVEL INTERMEDIO DE MODELIZACIÓN DE LAS ÁREAS DE LA ZONA DE ASPIRACIÓN E IMPULSIÓN

A continuación se desarrollan los modelos matemáticos que integran los elementos del BondGraph del nivel intermedio de modelización de las áreas de la zona de aspiración e impulsión del submodelo de una cámara genérica.

5.6.1 Elemento ‘ángulo’

Elemento ángulo

Este elemento está definido por una función matemática que genera una función “en diente de sierra” del ángulo de giro de la rueda dentada exterior a partir de la velocidad de rotación.

$$\omega_e = \int_0^{2\pi} \dot{\omega}_e dt \quad (5.1)$$

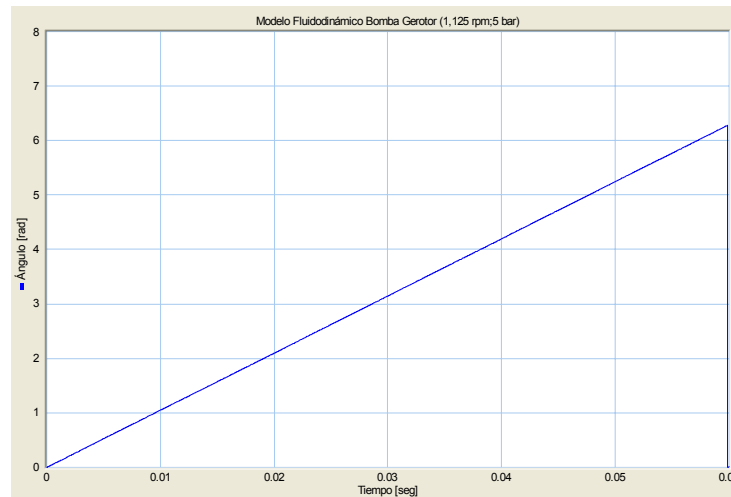


Figura 5.2. Elemento “ángulo”

5.6.2 Elemento ‘varvolum’

Elemento varvolum

Este elemento está definido por la variación del volumen en la cámara $\frac{dV_c}{d\alpha_{pc}}$ ecuación (3.120).

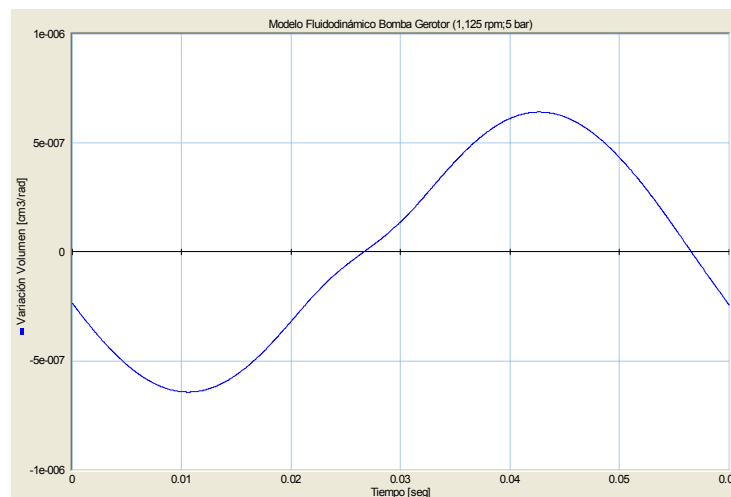


Figura 5.3. Elemento “varvolum”

5.6.3 Elemento ‘MTF’

Elemento **MTF**

Este elemento está definido por la ecuación que determina el caudal instantáneo de una cámara Q_c mediante la ecuación (3.119).

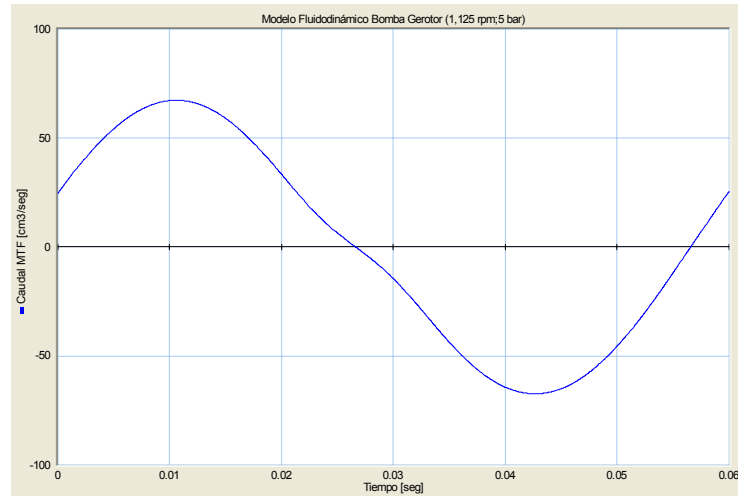


Figura 5.4. Elemento “MTF”

5.6.4 Elemento ‘Volum’



Elemento **Volum**

Este elemento está definido por la función matemática que integra la variación del volumen de una cámara.

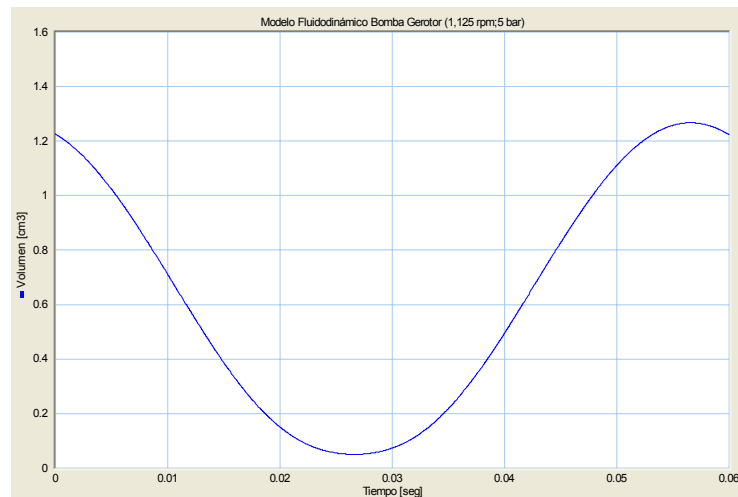


Figura 5.5. Elemento “Volum”

5.6.5 Elemento ‘MR_ent_cam’

Elemento MR_ent_cam

Este elemento está definido por la ecuación que determina el caudal a través de la lumbrera que comunica la cámara con la zona de aspiración y se expresa de la forma,

$$K_{za} = C_d \cdot A_{za} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}}$$

$$Q_{MR_ent_cam} = K_{za} \cdot \sqrt{\Delta P}$$
(5.2)

donde

- C_D es el coeficiente de descarga
- A_{za} es el área del orificio, siendo en este caso el área de la zona de aspiración
- ρ es la densidad del fluido
- ΔP es la variación de presión entre la cámara en estudio y la cámara anterior

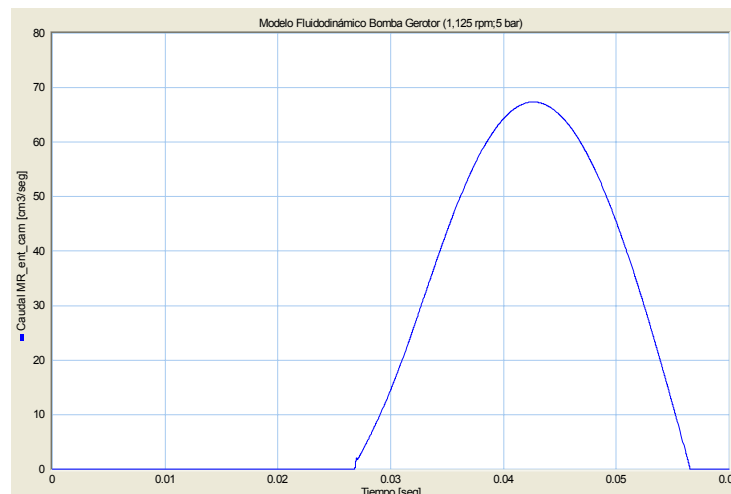


Figura 5.6. Elemento “MR_ent_cam”

5.6.6 Elemento ‘MR_sal_cam’

Elemento MR_sal_cam

Este elemento está definido por la ecuación que determina el caudal a través de la lumbrera que comunica la cámara con la zona de impulsión y se expresa de la forma,

$$K_{zi} = C_d \cdot A_{zi} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}}$$

$$Q_{MR_sal_cam} = K_{zi} \cdot \sqrt{\Delta P}$$
(5.3)

donde,

- A_{zi} es el área del orificio, siendo en este caso el área de la zona de impulsión
- ΔP es la variación de presión entre la cámara en estudio y la cámara posterior

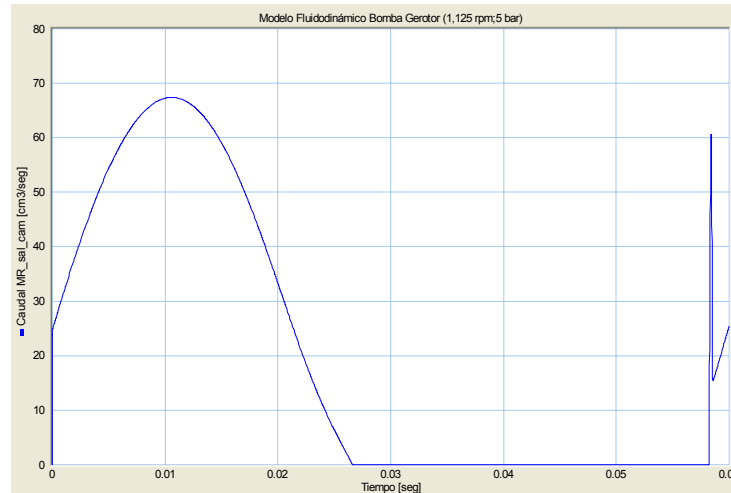


Figura 5.7. Elemento "MR_sal_cam"

5.6.7 Elemento 'C'

C

Elemento *carrera*

Este elemento está definido por la ecuación que determina la variación de la cantidad de fluido como consecuencia de la compresibilidad del fluido, incluida la variación geométrica del volumen de la cámara.

$$\Delta P = \frac{1}{C_{camara}} \int \sum Q_i \cdot dt \quad (5.4)$$

$$C_{camara} = \frac{V(\alpha_{pc})}{\beta}$$

5.6.8 Elementos 'area_zona_asp' y 'area_zona_imp'

Elementos area_zona_asp area_zona_imp

Estos elementos están definidos por las ecuaciones que determinan la variación de las secciones efectivas de las lumbreras que comunican la cámara a la zona de aspiración e impulsión (A_{za} , A_{zi}). El desarrollo de obtención de estas ecuaciones se muestra a continuación.

5.6.8.1 Zonas Específicas y Fronteras de Circulación de Fluido

En un determinado ángulo de la rotación completa del conjunto del engranaje, la variación del volumen de las cámaras crea una zona de aspiración mientras que en otro determinado ángulo crea una zona de impulsión. La variación de volumen de las cámaras estancas puede ser estudiada en cuatro zonas en una rotación completa del engranaje denominadas *zonas específicas de fluido* (Figura 5.8).

- *Zona Aspiración.* En esta zona, las cámaras estancas van aumentando su superficie a medida que la posición de los puntos de contacto varía debido a la rotación del conjunto del

engranaje. Este aumento de su área, y en consecuencia su volumen, crea una depresión que produce la entrada del fluido de trabajo hacia la cámara, llenándola.

- *Zona Impulsión.* En esta zona, las cámaras estancas van disminuyendo su superficie a medida que la posición de los puntos de contacto varía debido a la rotación del conjunto del engranaje. Esta disminución de su área y en consecuencia su volumen, da lugar a un desplazamiento volumétrico del fluido, vaciándola.
- *Zona Área Máxima.* En esta zona, las cámaras alcanzan su superficie máxima generada por la posición de los puntos de contacto en la rotación del conjunto del engranaje. Cuando se alcanza la posición de área máxima, y debido a la posición de las lumbreras, no se produce ni aspiración ni impulsión de fluido de trabajo quedando la cámara completamente aislada.
- *Zona Área Mínima.* En esta zona, las cámaras alcanzan su superficie mínima generada por la posición de los puntos de contacto en la rotación del conjunto del engranaje. Cuando se alcanza la posición de área mínima, y debido a la posición de las lumbreras, no se produce ni aspiración ni impulsión de fluido de trabajo quedando la cámara completamente aislada.

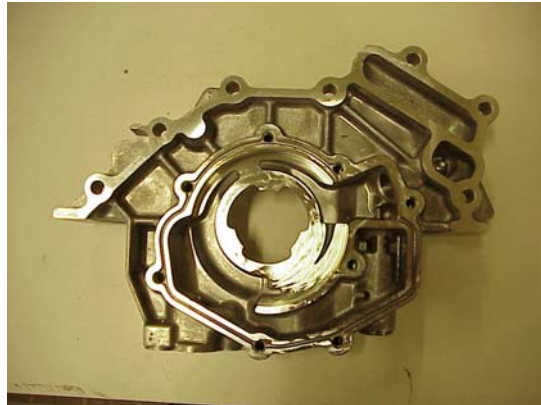


Foto 5.1. Ranuras y cavidades sobre la carcasa de la bomba

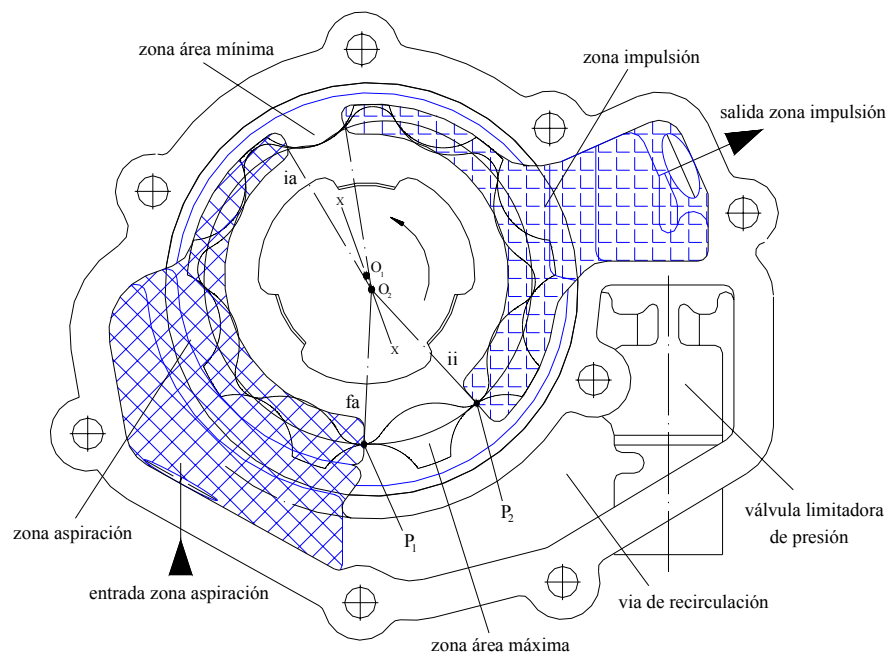


Figura 5.8. Zonas específicas y fronteras de circulación de fluido

Las cuatro zonas específicas de fluido quedan definidas teóricamente por la geometría y la cinemática del engrane del conjunto del engranaje. Constructivamente, las cuatro zonas quedan afectadas, por las ranuras y cavidades mecanizadas en la carcasa de la bomba. Estas ranuras y cavidades forman parte de colectores de las zonas de aspiración e impulsión.

Por un lado, la zona de aspiración está formada por una ranura mecanizada sobre la carcasa, de geometría tal que conecta todas las cámaras que en ese momento se encuentren entre las zonas de área mínima y máxima. Por otro lado, la zona de impulsión está formada por una ranura mecanizada sobre la carcasa, de geometría tal que conecta todas las cámaras que en ese momento se encuentren entre las zonas de área máxima y mínima. El llenado y vaciado de las cámaras se lleva a cabo mediante las ranuras mecanizadas sobre la carcasa.

La definición geométrica de las cuatro zonas se determina mediante cuatro fronteras, denominadas *fronteras de circulación de fluido*, marcada por los dos puntos de contacto de área máxima y los dos puntos de contacto del área mínima en una rotación completa del conjunto del engranaje. Para una mejor comprensión de su funcionamiento, se partirá de la cámara de máxima área que se encuentra aislada entre las zonas de aspiración e impulsión (Figura 5.8). Los puntos de contacto que hacen estanca la cámara en su posición de máxima área se denominan P_1 para el que aísla la cámara de la zona de aspiración y P_2 para el que aísla la cámara de la zona de impulsión. Las fronteras de circulación de fluido se definen partiendo de la zona de área máxima siguiendo la secuencia siguiente (Figura 5.9),

- 1 *Zona Área Máxima.* La cámara que presenta el área máxima está aislada de la zona de aspiración por el punto de contacto P_1 y de la zona de impulsión por el punto de contacto P_2 representado en la Figura 5.9(a).
- 2 *Frontera Inicio Impulsión 'ii'.* Cuando el punto de contacto que aísla la cámara de la zona de impulsión P_2 cruza esta frontera debido a la rotación del conjunto del engranaje, la cámara deja de estar aislada entre la zona de impulsión y aspiración. En este momento, la cámara empieza a estar expuesta a la zona de impulsión de manera que su área está situada entre la zona de impulsión y la zona de área máxima. Se crea una sección de flujo restringido para el vaciado de la cámara debido a la frontera de inicio de impulsión 'ii', representado en la Figura 5.9(b).
- 3 *Zona Impulsión.* Cuando el punto de contacto P_1 alcanza la frontera de inicio de impulsión 'ii' debido a la rotación del conjunto del engranaje, toda la cámara se encuentra completamente expuesta a la zona de impulsión para su vaciado debido a la disminución del volumen que va sufriendo la cámara en la rotación del conjunto del engranaje, representada en la Figura 5.9(c). Esta situación se prolonga hasta que el punto de contacto P_2 alcanza la frontera de fin de impulsión 'fi' representada en la Figura 5.9(d).
- 4 *Frontera Fin Impulsión 'fi'.* Cuando el punto de contacto P_2 cruza esta frontera debido a la rotación del conjunto del engranaje, la cámara deja de estar completamente expuesta a la zona de impulsión. En este momento, la cámara empieza a estar expuesta entre la zona de impulsión y zona de área mínima. Se crea una sección de flujo restringido para el vaciado de la cámara debido a la frontera de fin de impulsión 'fi', representado en la Figura 5.9(e).
- 5 *Zona Área Mínima.* Cuando el punto de contacto P_1 se sitúa sobre la frontera de fin de impulsión 'fi' y el punto de contacto P_2 se sitúa sobre la frontera de inicio de aspiración 'ia', en este momento la cámara está aislada y presenta el área mínima, representada en la Figura 5.9(f).
- 6 *Frontera Inicio Aspiración 'ia'.* Cuando el punto de contacto que aísla la cámara de la zona de aspiración P_2 cruza esta frontera debido a la rotación del conjunto del engranaje, la cámara deja de estar aislada entre la zona de aspiración e impulsión. En este momento, la cámara empieza a estar expuesta a la zona de aspiración de manera que su área está situada entre la zona de aspiración y la zona de área mínima. Se crea una sección de flujo

restringido para el llenado de la cámara debido a la frontera de inicio de aspiración 'ia', como se representa en la Figura 5.9(g).

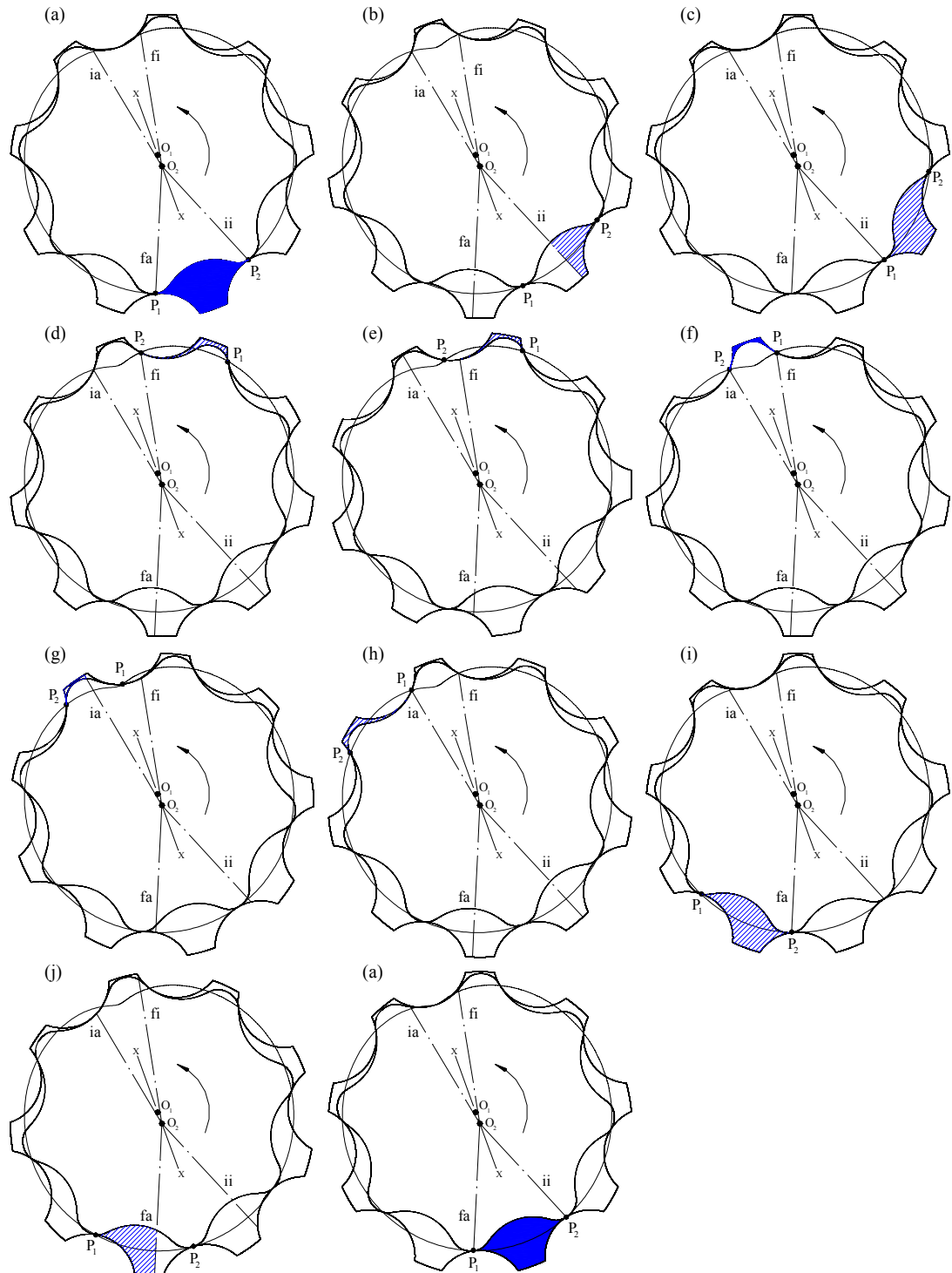


Figura 5.9. Secuencia de exposición del área de la cámara respecto las zonas específicas y fronteras de circulación del fluido

- 7 **Zona Aspiración.** Cuando el punto de contacto P_1 alcanza la frontera de inicio de aspiración 'ia' debido a la rotación del conjunto del engranaje, toda la cámara se encuentra completamente expuesta a la zona de aspiración para su llenado debido al aumento del volumen que va sufriendo la cámara en la rotación del conjunto del engranaje, representada

en la Figura 5.9(h). Esta situación se prolonga hasta que el punto de contacto P_2 alcanza la frontera de fin de aspiración 'fa' representada en la Figura 5.9(i).

- 8 *Frontera Fin Aspiración 'fa'*. Cuando el punto de contacto P_2 cruza esta frontera debido a la rotación del conjunto del engranaje, la cámara deja de estar completamente expuesta a la zona de aspiración. En este momento, la cámara empieza a estar expuesta entre la zona de aspiración y la zona de área máxima. Se crea una sección de flujo restringido para el llenado de la cámara debido a la frontera de fin de aspiración 'fa', como se representa en la Figura 5.9(j).
- 9 *Zona Área Máxima*. Cuando el punto de contacto P_1 se sitúa sobre la frontera de fin de aspiración 'fa' y el punto de contacto P_2 se sitúa sobre la frontera de inicio de impulsión 'ii', en este momento la cámara está aislada y presenta el área máxima, representada en la Figura 5.9(a). En este punto, se ha completado una rotación completa del engranaje y empieza el ciclo de nuevo volviendo al punto 2.

5.6.8.2 Puntos de Contacto y Ángulos de Zona

Después de comprender la exposición del área de las cámaras a las zonas específicas y fronteras de circulación del fluido, es necesario definir las geométricamente mediante sus ángulos de referencia, denominados *ángulos de zona* χ_z y representados en la Figura 5.10.

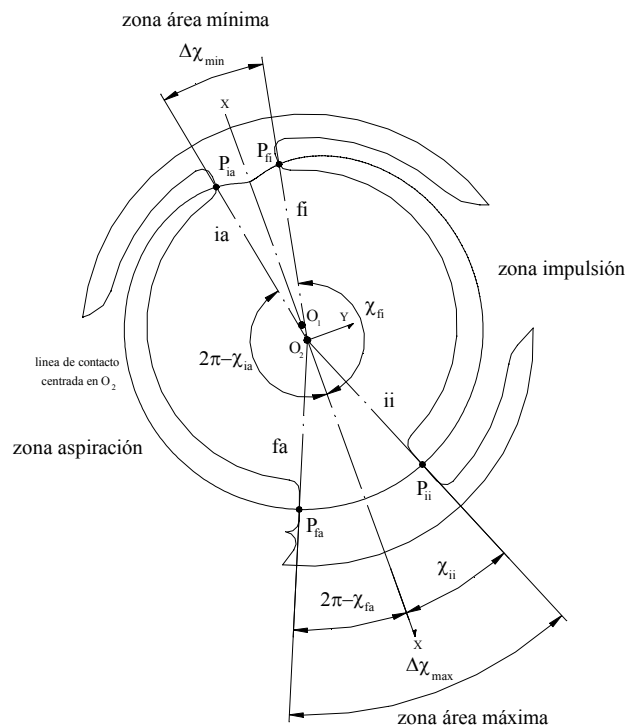


Figura 5.10. Geometría de los ángulos de zona

Los ángulos de zona se definen como los ángulos correspondientes entre los *puntos de contacto de zona* P_z , formados por la intersección entre las fronteras de circulación del fluido y la línea de contacto centrada en O_2 , y el eje X del sistema de referencia absoluta X - Y centrado en O_2 . Así pues, existen cuatro ángulos y puntos de contacto de zona.

- P_z para $z = ii$. Punto de contacto de zona formado por la intersección entre la frontera de inicio de impulsión y la línea de contacto centrada en O_2 .
- χ_z para $z = ii$. Ángulo de zona formado entre el punto de contacto de zona P_{ii} y el eje X

del sistema de referencia absoluta X - Y centrado en O_2 .

- P_z para $z = fi$. Punto de contacto de zona formado por la intersección entre la frontera de fin de impulsión y la línea de contacto centrada en O_2 .
- χ_z para $z = fi$. Ángulo de zona formado entre el punto de contacto de zona P_{fi} y el eje X del sistema de referencia absoluta X - Y centrado en O_2 .
- P_z para $z = ia$. Punto de contacto de zona formado por la intersección entre la frontera de inicio de aspiración y la línea de contacto centrada en O_2 .
- $2\pi - \chi_z$ para $z = ia$. Ángulo de zona formado entre el punto de contacto de zona P_{ia} y el eje X del sistema de referencia absoluta X - Y centrado en O_2 tomado en referencia positiva.
- P_z para $z = fa$. Punto de contacto de zona formado por la intersección entre la frontera de fin de aspiración y la línea de contacto centrada en O_2 .
- $2\pi - \chi_z$ para $z = fa$. Ángulo de zona formado entre el punto de contacto de zona P_{fa} y el eje X del sistema de referencia absoluta X - Y centrado en O_2 tomado en referencia positiva.

Además, se define el ángulo de intervalo de zona de área máxima, denominado $\Delta\chi_{max}$, y el ángulo de intervalo de zona de área mínima, denominado $\Delta\chi_{min}$.

5.6.8.3 Distancias y Ángulos de Ranura

Los ángulos de zona se calculan a partir de los puntos de contacto de zona y quedan definidos desde el centro de la rueda dentada exterior O_2 . Sin embargo, desde el punto de vista de diseño y construcción de la bomba, las *distancias de ranura* y_r y *ángulos de ranura* δ_r definen las zonas específicas y fronteras de circulación de fluido y quedan definidos desde el centro de la rueda dentada interior O_1 . El motivo es la conexión del eje motor que transmite el par motor a la rueda dentada interior, girando todo el diseño de la bomba en su centro. Los ángulos de ranura se muestran en la Figura 5.11. El centro de la rueda dentada interior es coincidente con el centro de la carcasa de la bomba.

Existen dos distancias de ranura y dos ángulos de ranura,

- δ_r para $r = ii$. Ángulo de ranura definido entre la frontera de circulación del fluido ii centrada en O_1 y el eje X del sistema de referencia absoluta X - Y centrado en O_2
- y_r para $r = fi$. Distancia de ranura formada por la distancia perpendicular entre las líneas paralelas de frontera de circulación del fluido fi centrada en O_1 y el eje X del sistema de referencia absoluta X - Y centrado en O_2 .
- y_r para $r = ia$. Distancia de ranura formada por la distancia perpendicular entre las líneas paralelas de frontera de circulación del fluido ia centrada en O_1 y el eje X del sistema de referencia absoluta X - Y centrado en O_2 .
- δ_r para $r = fa$. Ángulo de ranura definido entre la frontera de circulación del fluido fa centrada en O_1 y el eje X del sistema de referencia absoluta X - Y centrado en O_2

Las distancias y ángulos de ranura quedan definidos por el diseño de las zonas específicas y fronteras de circulación del fluido. De esta forma son datos geométricos conocidos.

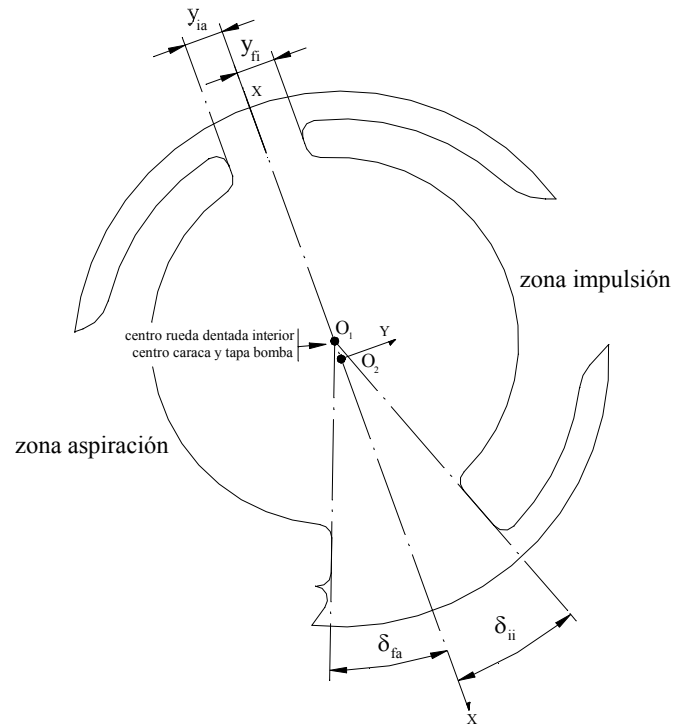


Figura 5.11. Geometría de los ángulos de ranura

5.6.8.4 Cálculo de los Ángulos de Zona

Conocidas las distancias y ángulos de ranura, y habida cuenta que el ángulo de cálculo de punto de contacto α_{pc} , el ángulo de zona χ_{ii} y el ángulo de ranura δ_{ii} se encuentran relacionados implícitamente, hay que recurrir a un proceso iterativo que se desarrolla a continuación.

Cálculo del ángulo de zona χ_{ii} [centrado en O_2] mediante el ángulo de ranura δ_{ii} [centrado en O_1]

- 1 Se asigna un primer valor al ángulo de cálculo de punto de contacto de zona P_{ii} ,
 $\alpha_{pc=P_{ii}} = \delta_{ii}$

- 2 Se aplica la ecuación de línea de contacto,

$$\begin{aligned} x_{pc}(\alpha_{pc}) &= R_2 \cos \alpha_{pc} - \frac{S}{m} (R_2 \cos \alpha_{pc} \pm r_2) \\ y_{pc}(\alpha_{pc}) &= R_2 \sin \alpha_{pc} - \frac{S}{m} (R_2 \sin \alpha_{pc}) \\ m &= \sqrt{r_2^2 + R_2^2 \pm 2r_2 R_2 \cos \alpha_{pc}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

con r_2 signo positivo y centrada en el sistema de referencia absoluta $X-Y$ centrado en O_2 , para evaluar las coordenadas del punto de contacto de zona P_{ii} , $(x_{pc=P_{ii}}(\alpha_{pc=P_{ii}}), y_{pc=P_{ii}}(\alpha_{pc=P_{ii}}))$

- 3 Se buscan las coordenadas del punto de contacto de zona respecto el centro de la rueda dentada interior O_1 sobre el sistema de referencia absoluta $X-Y$ centrado en O_2 , $(x_{XY=P_{ii}}, y_{XY=P_{ii}})$ representado en la Figura 5.12,

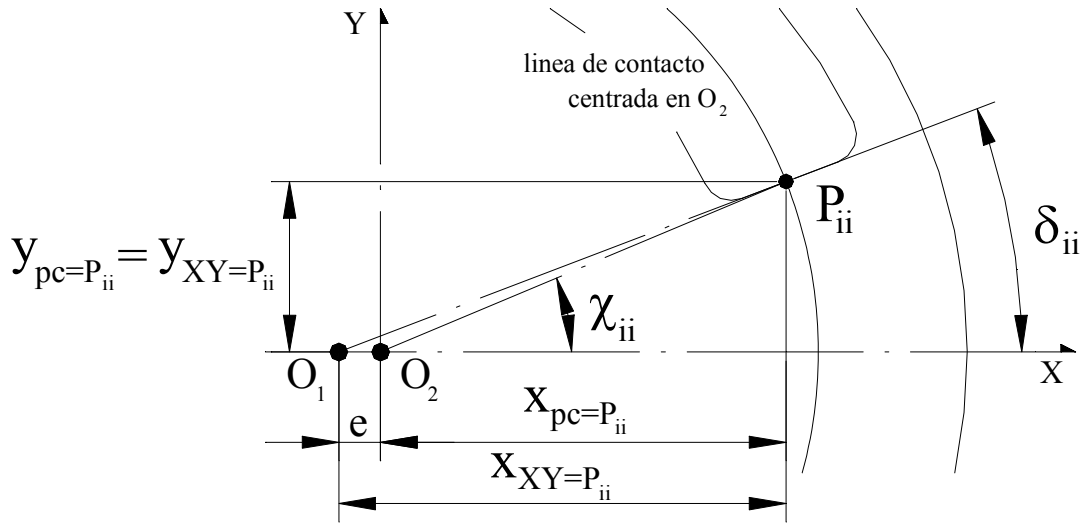


Figura 5.12. Coordenadas del punto de contacto de zona P_{ii}

obteniéndose,

$$\begin{aligned} x_{XY=P_{ii}}(\delta_{ii}) &= x_{pc=P_{ii}}(\alpha_{pc=P_{ii}}) + e \\ y_{XY=P_{ii}}(\delta_{ii}) &= \tan(\delta_{ii})x_{XY=P_{ii}}(\delta_{ii}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

4 Sea ε un error aceptable. Si,

- a. $|y_{XY=P_{ii}}(\delta_{ii}) - y_{pc=P_{ii}}(\alpha_{pc=P_{ii}})| > \varepsilon$ se asigna un nuevo ángulo de cálculo de punto de contacto $\alpha'_{pc=P_{ii}}$ de forma que $\alpha_{pc=P_{ii}} = \alpha'_{pc=P_{ii}}$, y se repite de nuevo el cálculo regresando al punto 2
- b. $|y_{XY=P_{ii}}(\delta_{ii}) - y_{pc=P_{ii}}(\alpha_{pc=P_{ii}})| < \varepsilon$ se finaliza el cálculo siendo los valores de los últimos ángulos de cálculo de punto de contacto α_{pc} , y de zona χ_{ii} los valores definitivos. Pasar al punto 5.

5 Los ángulos son,

$$\alpha_{pc=P_{ii}} = \alpha'_{pc=P_{ii}}$$

$$\chi_{ii}(\alpha_{pc=P_{ii}}) = \arctan\left(\frac{y_{pc=P_{ii}}(\alpha_{pc=P_{ii}})}{x_{pc=P_{ii}}(\alpha_{pc=P_{ii}})}\right) + a\pi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a=0 & \text{si } (x_{pc=P_{ii}} \geq 0) \text{ y } (y_{pc=P_{ii}} \geq 0) \\ a=1 & \text{si } (x_{pc=P_{ii}} < 0) \\ a=2 & \text{si } (x_{pc=P_{ii}} > 0) \text{ y } (y_{pc=P_{ii}} < 0) \end{cases} \quad (5.7)$$

Cálculo del ángulo de zona χ_{fa} [centrado en O_2] mediante el ángulo de ranura δ_{fa} [centrado en O_1]

- 1 Se asigna un primer valor al ángulo de cálculo de punto de contacto de zona P_{fa} , $\alpha_{pc=P_{fa}} = \delta_{fa}$
- 2 Se aplica la ecuación (5.5) de línea de contacto, calculando las coordenadas del punto de

contacto de zona P_{fa} , $(x_{pc=P_{fa}}(\alpha_{pc=P_{fa}}), y_{pc=P_{fa}}(\alpha_{pc=P_{fa}}))$

- 3 Se buscan las coordenadas del punto de contacto de zona respecto al centro de la rueda dentada interior O_1 sobre el sistema de referencia absoluta $X-Y$ centrado en O_2 , $(x_{XY=P_{fa}}, y_{XY=P_{fa}})$ representado en la Figura 5.13,

obteniéndose,

$$\begin{aligned} x_{XY=P_{fa}}(2\pi - \delta_{fa}) &= x_{pc=P_{fa}}(\alpha_{pc=P_{fa}}) + e \\ y_{XY=P_{fa}}(2\pi - \delta_{fa}) &= \tan(2\pi - \delta_{ii})(x_{XY=P_{fa}}(2\pi - \delta_{fa})) \end{aligned} \quad (5.8)$$

- 4 Sea ε un error aceptable. Si,

- a. $|y_{XY=P_{fa}}(2\pi - \delta_{fa}) - y_{pc=P_{fa}}(\alpha_{pc=P_{fa}})| > \varepsilon$ se asigna un nuevo ángulo de cálculo de punto de contacto $\alpha'_{pc=P_{fa}}$ de forma que $\alpha_{pc=P_{fa}} = \alpha'_{pc=P_{fa}}$, y se repite de nuevo el cálculo regresando al punto 2
- b. $|y_{XY=P_{fa}}(2\pi - \delta_{fa}) - y_{pc=P_{fa}}(\alpha_{pc=P_{fa}})| < \varepsilon$ se finaliza el cálculo siendo los valores de los últimos ángulos de cálculo de punto de contacto α_{pc} , y de zona χ_{fa} los valores definitivos. Pasar al punto 5.

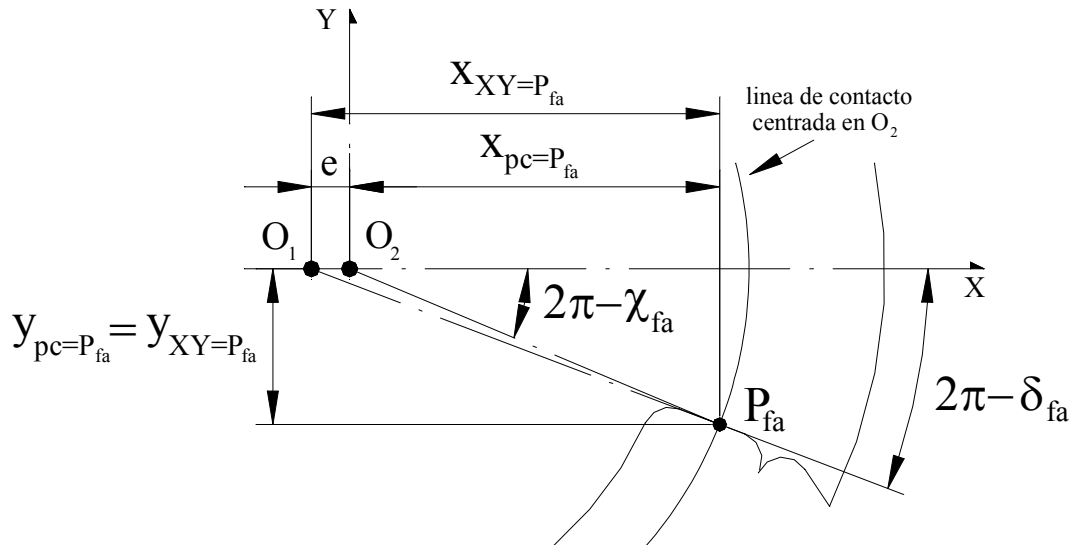


Figura 5.13. Coordenadas del punto de contacto de zona P_{fa}

- 5 Los ángulos son,

$$\alpha_{pc=P_{fa}} = \alpha'_{pc=P_{fa}}$$

$$\chi_{fa}(\alpha_{pc=P_{fa}}) = \arctan\left(\frac{y_{pc=P_{fa}}(\alpha_{pc=P_{fa}})}{x_{pc=P_{fa}}(\alpha_{pc=P_{fa}})}\right) + a\pi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a = 0 & \text{si } (x_{pc=P_{fa}} \geq 0) y (y_{pc=P_{fa}} \geq 0) \\ a = 1 & \text{si } (x_{pc=P_{fa}} < 0) \\ a = 2 & \text{si } (x_{pc=P_{fa}} > 0) y (y_{pc=P_{fa}} < 0) \end{cases} \quad (5.9)$$

Cálculo de los ángulos de zona χ_{fi} y χ_{ia} [centrados en O_2] mediante las distancias de ranura y_{fi} y y_{ia} [paralelos a X]

- 1 Se asigna un primer valor al ángulo de cálculo de punto de contacto de zona P_{fi} , $\alpha_{pc=P_{fi}}$ y otro para P_{ia} , $\alpha_{pc=P_{ia}}$
- 2 Se aplica la ecuación (5.5) de línea de contacto, calculando las coordenadas del punto de contacto de zona P_{fi} , $(x_{pc=P_{fi}}(\alpha_{pc=P_{fi}}), y_{pc=P_{fi}}(\alpha_{pc=P_{fi}}))$, y las coordenadas del punto de contacto de zona P_{ia} , $(x_{pc=P_{ia}}(\alpha_{pc=P_{ia}}), y_{pc=P_{ia}}(\alpha_{pc=P_{ia}}))$, representados en la Figura 5.14
- 3 Sea ε un error aceptable. Si,
 - a. $|y_{fi} - y_{pc=P_{fi}}(\alpha_{pc=P_{fi}})| > \varepsilon$ se asigna un nuevo ángulo de cálculo de punto de contacto $\alpha'_{pc=P_{fi}}$ de forma que $\alpha_{pc=P_{fi}} = \alpha'_{pc=P_{fi}}$, y se repite de nuevo el cálculo regresando al punto 2
 - b. $|y_{ia} - y_{pc=P_{ia}}(\alpha_{pc=P_{ia}})| > \varepsilon$ se asigna un nuevo ángulo de cálculo de punto de contacto $\alpha'_{pc=P_{ia}}$ de forma que $\alpha_{pc=P_{ia}} = \alpha'_{pc=P_{ia}}$, y se repite de nuevo el cálculo regresando al punto 2
 - c. $|y_{fi} - y_{pc=P_{fi}}(\alpha_{pc=P_{fi}})| < \varepsilon$ se finaliza el cálculo siendo el valor del último ángulo de cálculo de punto de contacto α_{pc} , el valor definitivo. Pasar al punto 4.
 - d. $|y_{ia} - y_{pc=P_{ia}}(\alpha_{pc=P_{ia}})| < \varepsilon$ se finaliza el cálculo siendo el valor del último ángulo de cálculo de punto de contacto α_{pc} , el valor definitivo. Pasar al punto 4.

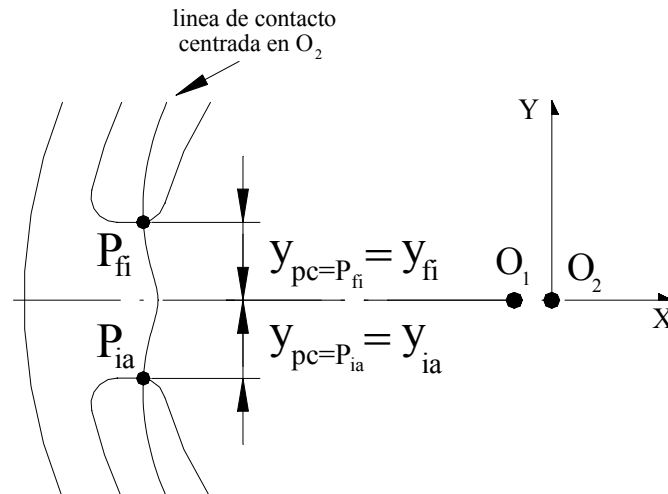


Figura 5.14. Coordenadas de los puntos de contacto de zona P_{fi} y P_{ia}

4 Los ángulos son,

$$\alpha_{pc=P_{fi}} = \alpha'_{pc=P_{fi}}$$

$$\alpha_{pc=P_{ia}} = \alpha'_{pc=P_{ia}}$$

$$\chi_{fi}(\alpha_{pc=P_{fi}}) = \arctan\left(\frac{y_{pc=P_{fi}}(\alpha_{pc=P_{fi}})}{x_{pc=P_{fi}}(\alpha_{pc=P_{fi}})}\right) + a\pi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a=0 & \text{si } (x_{pc=P_{fi}} \geq 0) \text{ y } (y_{pc=P_{fi}} \geq 0) \\ a=1 & \text{si } (x_{pc=P_{fi}} < 0) \\ a=2 & \text{si } (x_{pc=P_{fi}} > 0) \text{ y } (y_{pc=P_{fi}} < 0) \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\chi_{ia}(\alpha_{pc=P_{ia}}) = \arctan\left(\frac{y_{pc=P_{ia}}(\alpha_{pc=P_{ia}})}{x_{pc=P_{ia}}(\alpha_{pc=P_{ia}})}\right) + a\pi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a=0 & \text{si } (x_{pc=P_{ia}} \geq 0) \text{ y } (y_{pc=P_{ia}} \geq 0) \\ a=1 & \text{si } (x_{pc=P_{ia}} < 0) \\ a=2 & \text{si } (x_{pc=P_{ia}} > 0) \text{ y } (y_{pc=P_{ia}} < 0) \end{cases}$$

5.6.8.5 Cálculo de la Variación del Área. Análisis Integral-Derivativo

El análisis integral-derivativo para el cálculo de la variación del área sigue los mismos principios al análisis integral-derivativo de la variación del volumen desarrollado en el Capítulo 3. Sin embargo, la diferencia radicarán en los límites de integración debido a que el área se encuentra restringida en determinados intervalos de una rotación completa del conjunto del engranaje, como ya ha sido expuesto anteriormente. De este modo, y teniendo en cuenta la Figura 5.10, existen dos intervalos determinados por el ángulo de intervalo de zona de área máxima, denominado $\Delta\chi_{max}$, y el ángulo de intervalo de zona de área mínima, denominado $\Delta\chi_{min}$, donde el área de la cámara se encontrará total o parcialmente restringida.

Concentrándose el estudio en la cámara con área A_I y volumen V_I , el procedimiento de cálculo es idéntico al desarrollado en el Apartado 3.5.1., exceptuando la restricción que sufre la variación del área cuyo cálculo se lleva a cabo con la modificación de los límites de integración.

Partiendo del punto 10 del procedimiento de cálculo del volumen V_I , la ecuación de integración del área es la ecuación (3.109),

$$A_{i,1} = \frac{1}{2} \int_{\chi_1}^{\chi_2} [\rho_i(\chi_i)]^2 d\chi \cong \frac{1}{2} \sum_{\chi_1}^{\chi_2} [\rho_{i,j}(\chi_{i,j})]^2 \Delta\chi_{i,j} \quad \text{donde } \Delta\chi_{i,j} = \chi_{i,j+1} - \chi_{i,j} \quad (3.109)$$

$$A_{e,1} = \frac{1}{2} \int_{\chi_1}^{\chi_2} [\rho_e(\chi_e)]^2 d\chi \cong \frac{1}{2} \sum_{\chi_1}^{\chi_2} [\rho_{e,j}(\chi_{e,j})]^2 \Delta\chi_{e,j} \quad \text{donde } \Delta\chi_{e,j} = \chi_{e,j+1} - \chi_{e,j}$$

y de la ecuación (3.106) se obtiene la variación del área de la primera cámara simplemente eliminando el H espesor del engranaje de la ecuación,

$$V_1(\alpha_{pc1}) = H(A_{e,1} - A_{i,1}) = \frac{1}{2} H \int_{\chi_1}^{\chi_2} [\rho_e(\chi_e)]^2 d\chi - \frac{1}{2} H \int_{\chi_1}^{\chi_2} [\rho_i(\chi_i)]^2 d\chi \quad (3.106)$$

El cálculo de la variación del área se basa en las áreas restringidas creadas por las zonas específicas y fronteras de circulación de fluido. Para incluir su influencia en el procedimiento de cálculo, se han de definir los límites de integración de las ecuaciones anteriores, destacando (sobre la Figura 5.15),

- P_1 y P_2 . Puntos de contacto que hacen estanca la cámara en su posición de máxima área, donde P_1 aísla la cámara de la zona de aspiración y P_2 aísla la cámara de la zona de impulsión.
- α_{pc1} y α_{pc2} . Ángulos de los puntos singulares que son centros de los arcos circulares para

evaluar los puntos de contacto P_1 y P_2 respecto al eje de abscisas del sistema de referencia absoluta X - Y centrado en O_2 , donde $\alpha_{pc2} = \alpha_{pc1} + \Delta\alpha_{pc} = \alpha_{pc1} + \frac{2\pi}{Z}$

- χ_1 y χ_2 . Ángulos de los puntos de contacto P_1 y P_2 respecto al eje de abscisas del sistema de referencia absoluta X - Y centrado en O_2 .
- $\rho_e(\chi)$. Radiovector que barre el área entre los puntos de contacto P_1 y P_2 en función del ángulo χ bajo el perfil de la rueda dentada exterior
- $\rho_i(\chi)$. Radiovector que barre el área entre los puntos de contacto P_1 y P_2 en función del ángulo χ bajo el perfil de la rueda dentada interior
- $\chi_{i,j}(\omega_i)$. Ángulo para todos los puntos j ($x_{ri,j}(\omega_i), y_{ri,j}(\omega_i)$) del perfil de la rueda dentada interior para el ángulo de giro ω_i de la rueda dentada interior.
- $\chi_{e,j}(\omega_e)$. Ángulo para todos los puntos j ($x_{re,j}(\omega_e), y_{re,j}(\omega_e)$) del perfil de la rueda dentada exterior para el ángulo de giro ω_e de la rueda dentada exterior.

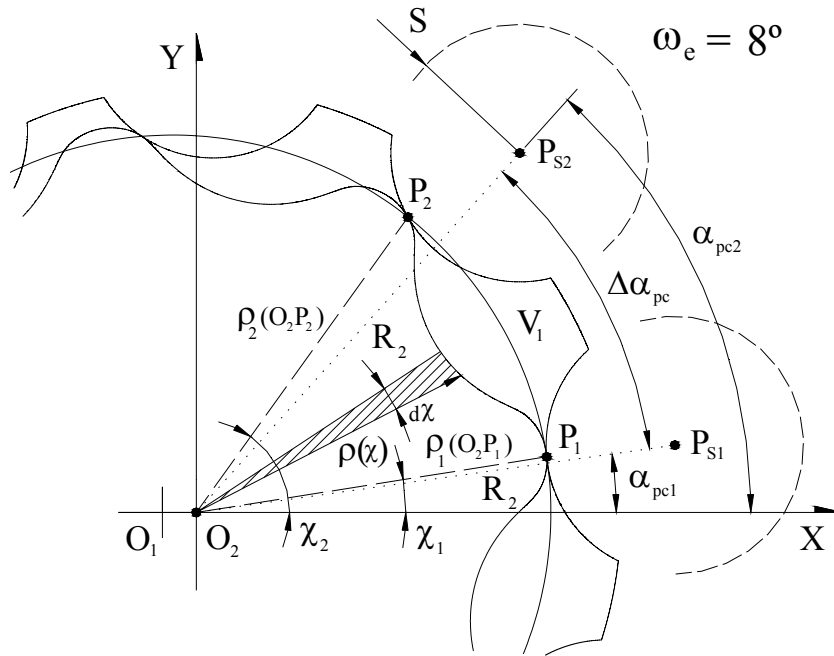


Figura 5.15. Definición de nomenclatura desde la Figura 3.20 del Capítulo 3

Y a continuación se definen nueva terminología y observando la Figura 5.9,

- $\alpha_{pc1=P_{ii}}$ y $\alpha_{pc2=P_{ii}}$. Ángulos de cálculo de punto de contacto de zona P_{ii} para los puntos de contacto P_1 y P_2 respectivamente, donde $\alpha_{pc2=P_{ii}} = \alpha_{pc1=P_{ii}} - \Delta\alpha_{pc} = \alpha_{pc1=P_{ii}} - \frac{2\pi}{Z}$
- $\alpha_{pc1=P_{fi}}$ y $\alpha_{pc2=P_{fi}}$. Ángulos de cálculo de punto de contacto de zona P_{fi} para los puntos de contacto P_1 y P_2 respectivamente, donde $\alpha_{pc2=P_{fi}} = \alpha_{pc1=P_{fi}} - \Delta\alpha_{pc} = \alpha_{pc1=P_{fi}} - \frac{2\pi}{Z}$
- $\alpha_{pc1=P_{ia}}$ y $\alpha_{pc2=P_{ia}}$. Ángulos de cálculo de punto de contacto de zona P_{ia} para los puntos de contacto P_1 y P_2 respectivamente, donde $\alpha_{pc2=P_{ia}} = \alpha_{pc1=P_{ia}} - \Delta\alpha_{pc} = \alpha_{pc1=P_{ia}} - \frac{2\pi}{Z}$

- $\alpha_{pc1=P_{fa}}$ y $\alpha_{pc2=P_{fa}}$. Ángulos de cálculo de punto de contacto de zona P_{fa} para los puntos de contacto P_1 y P_2 respectivamente, donde $\alpha_{pc2=P_{fa}} = \alpha_{pc1=P_{fa}} - \Delta\alpha_{pc} = \alpha_{pc1=P_{fa}} - \frac{2\pi}{Z}$

De esta forma, la ecuación (3.106) resulta, para la variación de la sección efectiva de la lumbrera que comunica la cámara con la zona de aspiración A_{za} ,

$$A_{za}(\alpha_{pc1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\chi_{ia}(\alpha_{pc=P_{ia}})}^{\chi_2(\alpha_{pc1})} [\rho_e(\chi_e)]^2 d\chi - \frac{1}{2} \int_{\chi_{ia}(\alpha_{pc=P_{ia}})}^{\chi_2(\alpha_{pc1})} [\rho_i(\chi_i)]^2 d\chi \\ \frac{1}{2} \int_{\chi_1(\alpha_{pc1})}^{\chi_2(\alpha_{pc1})} [\rho_e(\chi_e)]^2 d\chi - \frac{1}{2} \int_{\chi_1(\alpha_{pc1})}^{\chi_2(\alpha_{pc1})} [\rho_i(\chi_i)]^2 d\chi \\ \frac{1}{2} \int_{\chi_1(\alpha_{pc1})}^{\chi_{fa}(\alpha_{pc=P_{fa}})} [\rho_e(\chi_e)]^2 d\chi - \frac{1}{2} \int_{\chi_1(\alpha_{pc1})}^{\chi_{fa}(\alpha_{pc=P_{fa}})} [\rho_i(\chi_i)]^2 d\chi \\ 0 \end{cases} \quad si \begin{cases} \alpha_{pc1} \leq \alpha_{pc1=P_{ia}} \\ \alpha_{pc1=P_{ia}} < \alpha_{pc1} < \alpha_{pc2=P_{fa}} \\ \alpha_{pc1} \geq \alpha_{pc2=P_{fa}} \\ \alpha_{pc1=P_{fa}} < \alpha_{pc1} < \alpha_{pc2=P_{ia}} \end{cases} \quad (5.11)$$

y para la variación de la sección efectiva de la lumbrera que comunica la cámara con la zona de impulsión A_{zi} ,

$$A_{zi}(\alpha_{pc1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\chi_{ii}(\alpha_{pc=P_{ii}})}^{\chi_2(\alpha_{pc1})} [\rho_e(\chi_e)]^2 d\chi - \frac{1}{2} \int_{\chi_{ii}(\alpha_{pc=P_{ii}})}^{\chi_2(\alpha_{pc1})} [\rho_i(\chi_i)]^2 d\chi \\ \frac{1}{2} \int_{\chi_1(\alpha_{pc1})}^{\chi_2(\alpha_{pc1})} [\rho_e(\chi_e)]^2 d\chi - \frac{1}{2} \int_{\chi_1(\alpha_{pc1})}^{\chi_2(\alpha_{pc1})} [\rho_i(\chi_i)]^2 d\chi \\ \frac{1}{2} \int_{\chi_1(\alpha_{pc1})}^{\chi_{fi}(\alpha_{pc=P_{fi}})} [\rho_e(\chi_e)]^2 d\chi - \frac{1}{2} \int_{\chi_1(\alpha_{pc1})}^{\chi_{fi}(\alpha_{pc=P_{fi}})} [\rho_i(\chi_i)]^2 d\chi \\ 0 \end{cases} \quad si \begin{cases} \alpha_{pc1} \leq \alpha_{pc1=P_{ii}} \\ \alpha_{pc1=P_{ii}} < \alpha_{pc1} < \alpha_{pc2=P_{fi}} \\ \alpha_{pc1} \geq \alpha_{pc2=P_{fi}} \\ \alpha_{pc1=P_{fi}} < \alpha_{pc1} < \alpha_{pc2=P_{ii}} \end{cases} \quad (5.12)$$

En la Figura 5.16 se muestra las variaciones de las secciones efectivas de las lumbreras que comunican la cámara con la zona de aspiración e impulsión.

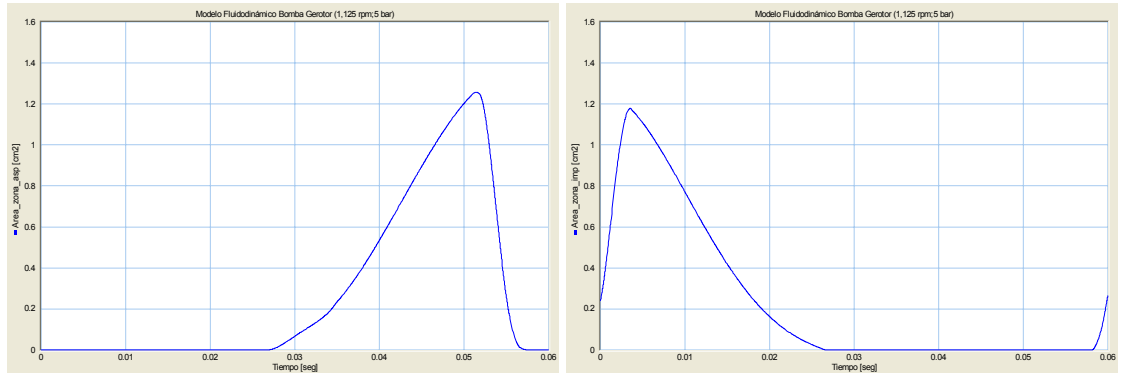
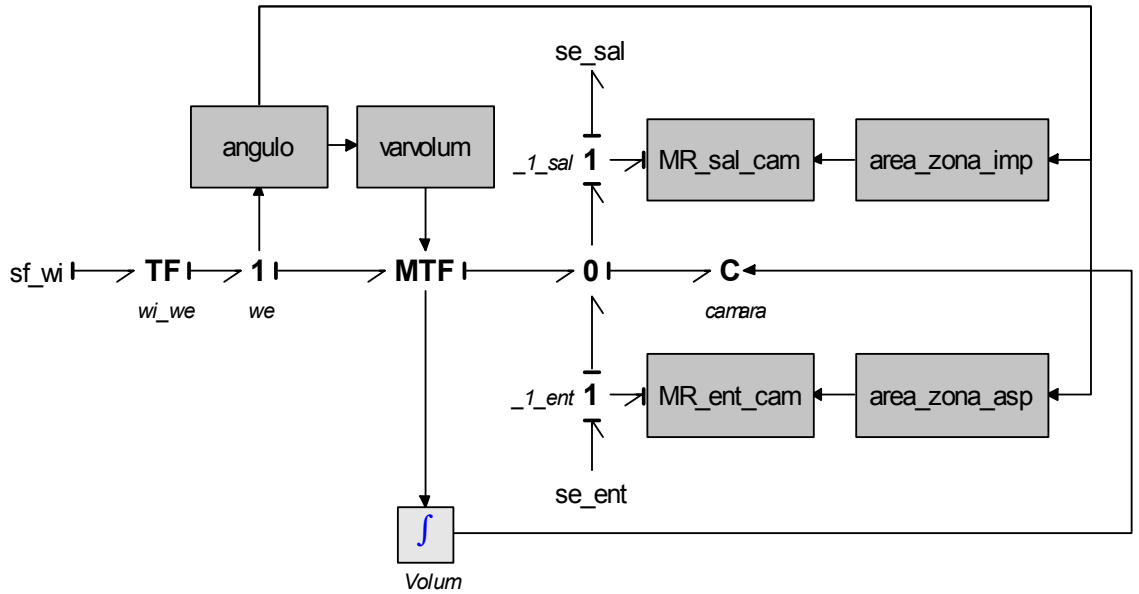


Figura 5.16. Elemento "area_zona_asp" (izquierda) y elemento "area_zona_imp" (derecha)

5.7 MODELO FLUIDODINÁMICO DE LA BOMBA GEROTOR. NIVEL SUPERIOR DE ENSAMBLAJE Y CONEXIONADO ENTRE CÁMARAS Y CARCASA

El último nivel a desarrollar del submodelo de una cámara es el nivel superior de ensamblaje y conexionado entre cámaras. El presente nivel superior es el último nivel del submodelo de una cámara. Este nivel aporta nuevos elementos de BondGraph que permiten ser conexionados con otros elementos fuera del submodelo de la cámara, de forma que se ensamblen todas las cámaras a través de los niveles superiores de cada submodelo de cámara. Estos nuevos elementos sustituyen a anteriores elementos y ocupan su posición en el submodelo.

El nivel superior de BondGraph se muestra en BondGraph 5.3. Si se concentra el estudio de BondGraph a la cámara denominada V_1 , los elementos de BondGraph que modelizan este nivel tienen su correspondencia en la Tabla 3:

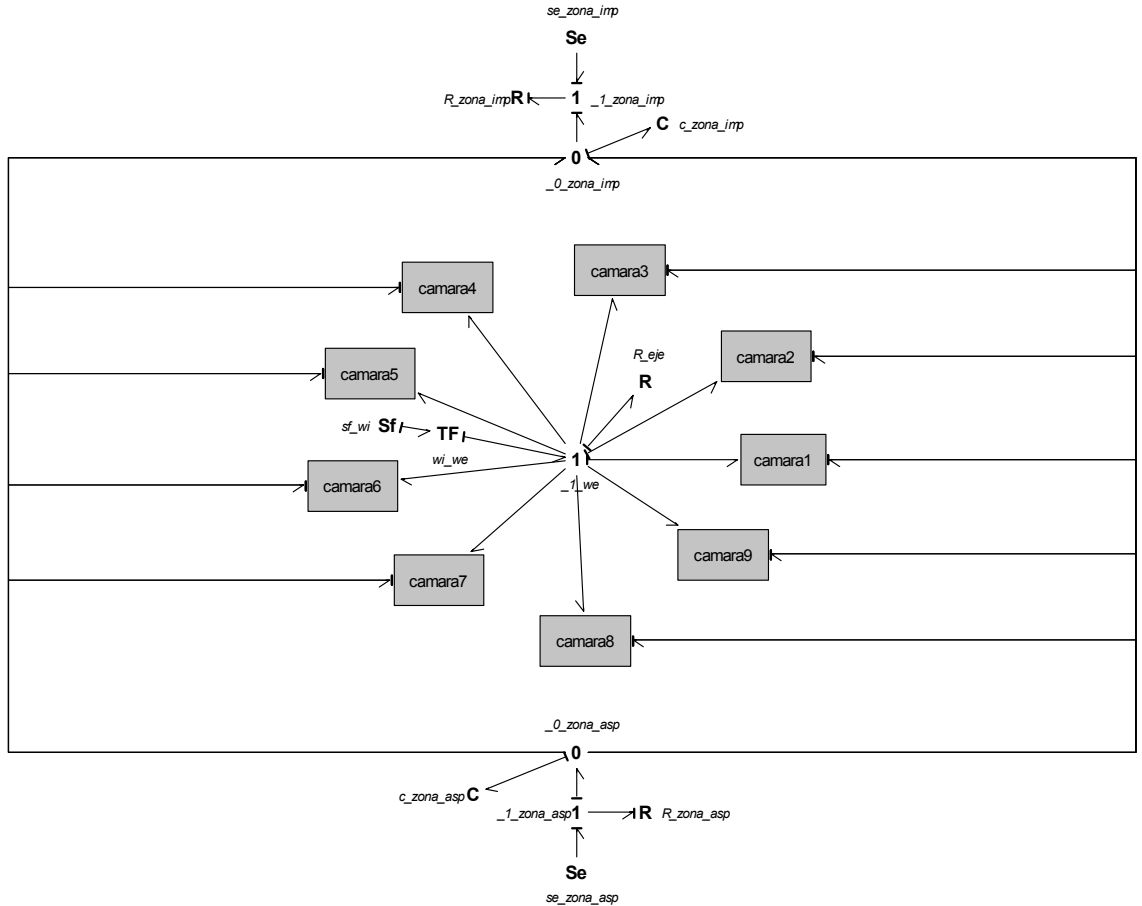


BondGraph 5.3. BondGraph de nivel superior de modelización del submodelo de cámara

Nivel Intermedio	Nivel Superior	Denom.	Variable Entrada	Variable Salida	Condición de Contorno que representa
Sf_{wi} Sf	sf_{wi}	Fuente de flujo exterior de entrada al submodelo	Velocidad rotación $\dot{\omega}_i$	Par motor M_i	Velocidad de rotación rueda dentada interior $\dot{\omega}_i$ común a todas las cámaras
Se Se_{ent}	se_{ent}	Fuente de esfuerzo exterior de entrada al submodelo	Presión P_{ent}	Caudal $Q_{MR_{ent-1_{ent}}}$	Presión en la zona de aspiración común a todas las cámaras
Se_{sal} Se	se_{sal}	Fuente de esfuerzo exterior de salida del submodelo	Presión P_{sal}	Caudal $Q_{MR_{sal-1_{sal}}}$	Presión en la zona de impulsión común a todas las cámaras

Tabla 3. Correspondencia física del nivel superior de modelización del submodelo de la cámara de elementos BondGraph

Llegados a este punto, todos los niveles del submodelo de una cámara genérica han sido definidos. Los niveles superiores de los submodelos de las cámaras han de ser conexionados entre sí, tantos como cámaras de que está compuesto el engranaje de perfiles trocoidales para completar el modelo de simulación fluidodinámica de la bomba gerotor. Teniendo presente la geometría del engranaje de perfiles trocoidales (Figura 5.1) y la geometría de la carcasa (Figura 5.8), los elementos de BondGraph que modelizan la fluidodinámica de la bomba gerotor se presenta en BondGraph 5.4.



BondGraph 5.4. Modelo fluidodinámico de la bomba gerotor

El modelo de BondGraph presenta 9 submodelos de cámara conexonados entre sí por su nivel superior en los elementos descritos en la Tabla 3. El número de cámaras corresponde con el número de lóbulos/dientes (Z) de la rueda dentada exterior. El resto de elementos del modelo tienen una correspondencia física descrita en la Tabla 4.

Concepto	Símbolo	Denom.	Variable Entrada	Variable Salida	Representa
Generador de velocidad de rotación	sf_{wi} Sf	Fuente de flujo	Velocidad rotación $\dot{\omega}_i$	Par motor M_i	Velocidad de rotación rueda dentada interior $\dot{\omega}_i$
Velocidad de rotación	1 $_{-1}_{we}$	Nodo "1"	Velocidad rotación $\dot{\omega}_i$	Velocidad rotación $\dot{\omega}_i$	Sumatorio de momentos igual a cero y velocidad igual
			Par motor M	Diferencia de momentos ΔM	
Resistencia mecánica	R_{eje} R	Resistencia	Velocidad rotación $\dot{\omega}_i$	Pérdida de momento M_f	Perdida de momento por fricción mecánica
Presión en la zona de aspiración	Se se_{zona_asp}	Fuente de esfuerzo	Presión P_{zona_asp}	Caudal $Q_{MR_{zona_asp-1_{zona_asp}}$	Condición de contorno de presión en la zona de aspiración

<i>Balace de presiones en la zona de aspiración</i>	1 $_{-1_zona_asp}$	Nodo "1"	Caudal $Q_{MR_zona_asp-1_zona_asp}$	Caudal $Q_{MR_zona_asp-1_zona_asp}$	Sumatorio de presiones igual a cero y caudal igual
			Presiones $P_{Se_zona_asp-1_zona_asp}$ $P_{0_zona_asp-1_zona_asp}$	Presión $P_{1_zona_asp-MR_zona_asp}$	
<i>Caudal a través de un orificio en la zona de aspiración</i>	R R_{zona_asp}	Resistencia	Diferencia Presión ΔP	Caudal $Q_{MR_zona_asp-1_zona_asp}$	Resistencia de entrada a la zona de aspiración
<i>Principio Conservación Masa en la zona de aspiración</i>	0 $_{-0_zona_asp}$	Nodo "0"	Caudales $Q_{1_zona_asp-0_zona_asp}$ $\sum_{j=1}^Z Q_{j_camara}$	Caudal $Q_{0_zona_asp-C_zona_asp}$	Sumatorio de caudales igual a cero y presión igual
			Presión $P_{C_zona_asp-0_zona_asp}$	Presiones $P_{0_zona_asp-1_zona_asp}$ $\sum_{j=1}^Z P_{j_camara}$	
<i>Compresibilidad del fluido en la zona de aspiración</i>	C c_{zona_asp}	Elemento Capacitivo	Caudal $Q_{0_zona_asp-C_zona_asp}$	Presión $P_{C_zona_asp-0_zona_asp}$	Capacidad hidráulica de la zona de aspiración
<i>Presión en la zona de impulsión</i>	Se se_{zona_imp}	Fuente de esfuerzo	Presión P_{zona_imp}	Caudal $Q_{MR_zona_imp-1_zona_imp}$	Condición de contorno de presión en la zona de impulsión
<i>Balace de presiones en la zona de impulsión</i>	1 $_{-1_zona_ir}$	Nodo "1"	Caudal $Q_{MR_zona_imp-1_zona_imp}$	Caudal $Q_{MR_zona_imp-1_zona_imp}$	Sumatorio de presiones igual a cero y caudal igual
			Presiones $P_{Se_zona_imp-1_zona_imp}$ $P_{0_zona_imp-1_zona_imp}$	Presión $P_{1_zona_imp-MR_zona_imp}$	
<i>Caudal a través de un orificio en la zona de impulsión</i>	R R_{zona_imp}	Resistencia	Diferencia Presión ΔP	Caudal $Q_{MR_zona_imp-1_zona_imp}$	Resistencia de entrada a la zona de impulsión
<i>Principio Conservación Masa en la zona de impulsión</i>	0 $_{-0_zona_imp}$	Nodo "0"	Caudales $Q_{1_zona_imp-0_zona_imp}$ $\sum_{j=1}^Z Q_{j_camara}$	Caudal $Q_{0_zona_imp-C_zona_imp}$	Sumatorio de caudales igual a cero y presión igual
			Presión $P_{C_zona_imp-0_zona_imp}$	Presiones $P_{0_zona_imp-1_zona_imp}$ $\sum_{j=1}^Z P_{j_camara}$	
<i>Compresibilidad del fluido en la zona de impulsión</i>	C c_{zona_in}	Elemento Capacitivo	Caudal $Q_{0_zona_imp-C_zona_imp}$	Presión $P_{C_zona_imp-0_zona_imp}$	Capacidad hidráulica de la zona de impulsión

Tabla 4. Correspondencia física del modelo fluidodinámico de la bomba gerotor por elementos BondGraph

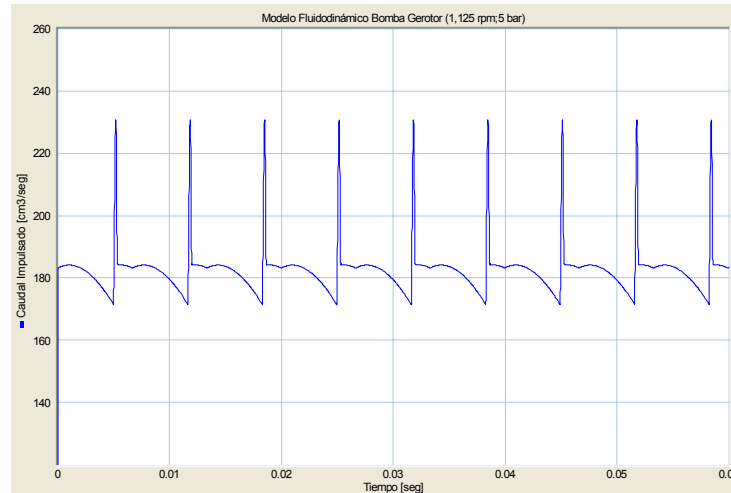


Figura 5.17. Simulación del caudal impulsado por la bomba gerotor del modelo fluidodinámico para velocidad del giro de la rueda dentada interior de 1,125 rpm y presión de impulsión 5 bar

PARTE B

5.8 MODELO DE CAUDALES DE FUGAS

Para completar el modelo fluidodinámico de la bomba gerotor se ha de introducir los fenómenos fluidomecánicos correspondientes a las fugas de fluido. A continuación, se expone la inclusión de los caudales de fugas de fluido en el modelo de simulación fluidodinámica de la bomba gerotor.

Los *caudales de fugas* se presentan debido a las tolerancias y movimientos relativos entre piezas y a los gradientes de presión. Con relación a las tolerancias cabe decir que, por una parte, son necesarias ya que si no existieran las ruedas no podrían girar, y por otra parte, son inevitables habida cuenta de los procesos de fabricación.

El fenómeno de las fugas tiene efecto principalmente en la capacidad volumétrica de la bomba e indirectamente en las pulsaciones de caudal traducidas posteriormente en pulsaciones de presión. Por tanto, deben ser tenidas en cuenta y predecidas con tanta precisión como sea posible. Los caudales de fugas se manifiestan en diversas zonas de la bomba como:

- *Caudal de fugas entre los perfiles trocoidales durante el engrane ($Q_{f,pi}$)*. El caudal de fugas se produce a través del huelgo entre los dientes de los perfiles trocoidales de las ruedas dentadas debido al gradiente de presión entre las cámaras y a su movimiento relativo (Figura 5.19).
- *Caudal de fugas entre las caras laterales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba ($Q_{f,ec}$)*. El caudal de fugas se produce a través del huelgo entre las caras de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba debido al gradiente de presión entre las cámaras y su movimiento relativo produciendo arrastre de fluido (Figura 5.19 y Figura 5.31).
- *Caudal de fugas entre las caras laterales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba directo a tanque ($Q_{f,dv}$)*. El caudal de fugas se producen a través del huelgo entre las caras laterales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba directo a tanque (Figura 5.44).
- *Caudal de fugas entre el espesor del engranaje y el cuerpo de la bomba ($Q_{f,ee}$)*. El caudal de fugas se produce a través del huelgo entre el espesor del engranaje y el cuerpo de la bomba (Figura 5.45).

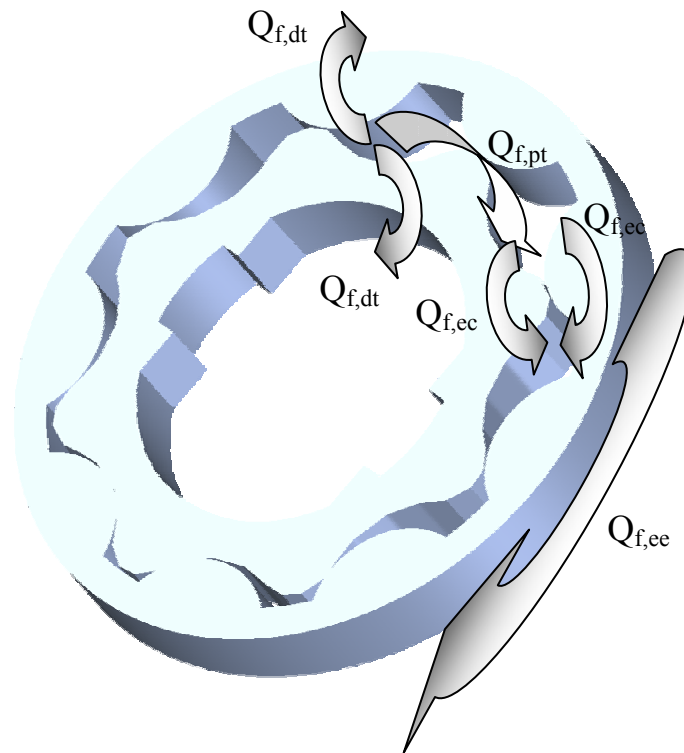


Figura 5.18. Caudales de fugas

5.8.1 Modelo de Caudal de Fugas entre los Perfiles Trocoidales durante el Engrane

Para la simulación de las fugas de fluido entre los dientes durante el engrane es necesario desarrollar una serie de modelos parciales que permiten:

- El cálculo del ángulo de retardo del contacto debido a la tolerancia de funcionamiento
- El cálculo del mínimo huelgo entre perfiles
- Análisis de las evoluciones del ángulo de retardo del contacto y del huelgo entre perfiles
- Y por último el cálculo del flujo de fluido por una ranura de sección variable debido a un gradiente de presión y a la presencia de un movimiento relativo entre perfiles trocoidales

A continuación se presentan una serie de subpartados donde se exponen estos cálculos.

Como se apuntó anteriormente, los perfiles trocoidales de las ruedas dentadas pierden su contacto continuo definido por la línea de puntos de contacto y pasan a presentar un huelgo no nulo entre ellos. A efectos de cálculo se ha simulado este *huelgo* incrementando el diámetro interior de la rueda dentada exterior (D_{ie}), como puede observarse en la Figura 5.20. Así, en la posición de referencia para el estudio del volumen y su variación ($\omega_e = 0$), y comparando con la Figura 5.1, los dos perfiles trocoidales no comparten ningún punto de contacto.

Ahora, suponiendo que los centros de ambas ruedas dentadas permanecen fijos en la rotación, la rueda dentada interior puede y deberá girar un pequeño ángulo $\pm d\phi$ antes de establecer contacto con la rueda dentada exterior en los puntos P^+ o P^- . Este ángulo se denomina *ángulo de retardo del contacto* (Figura 5.20).

De esta forma los perfiles trocoidales de la ruedas dentadas presentarán un *juego de contacto* debido un huelgo no nulo entre ellos. El ángulo de retardo del contacto deberá ser evaluado.

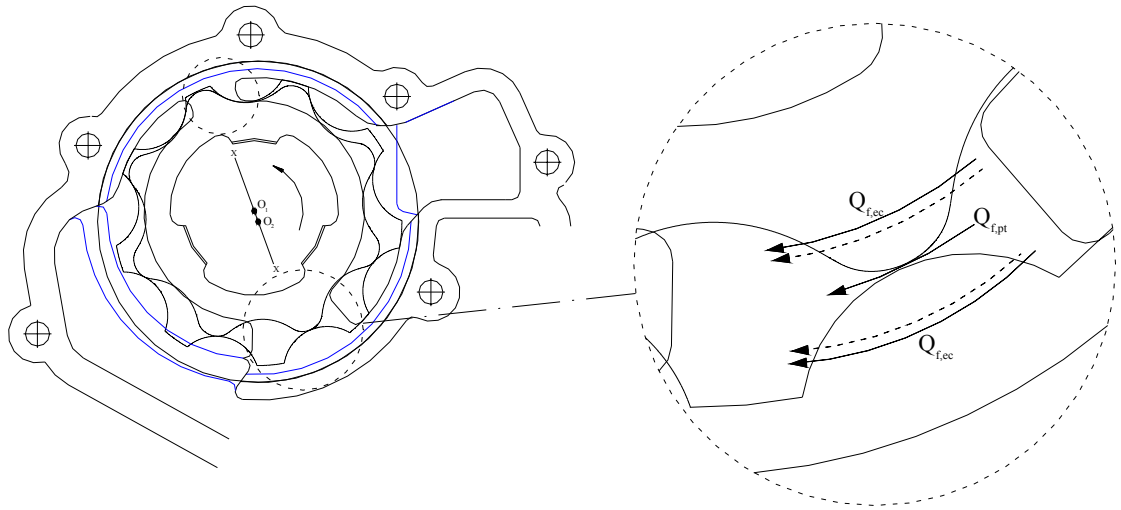


Figura 5.19. Caudal de fugas entre los perfiles trocoidales durante el engrane

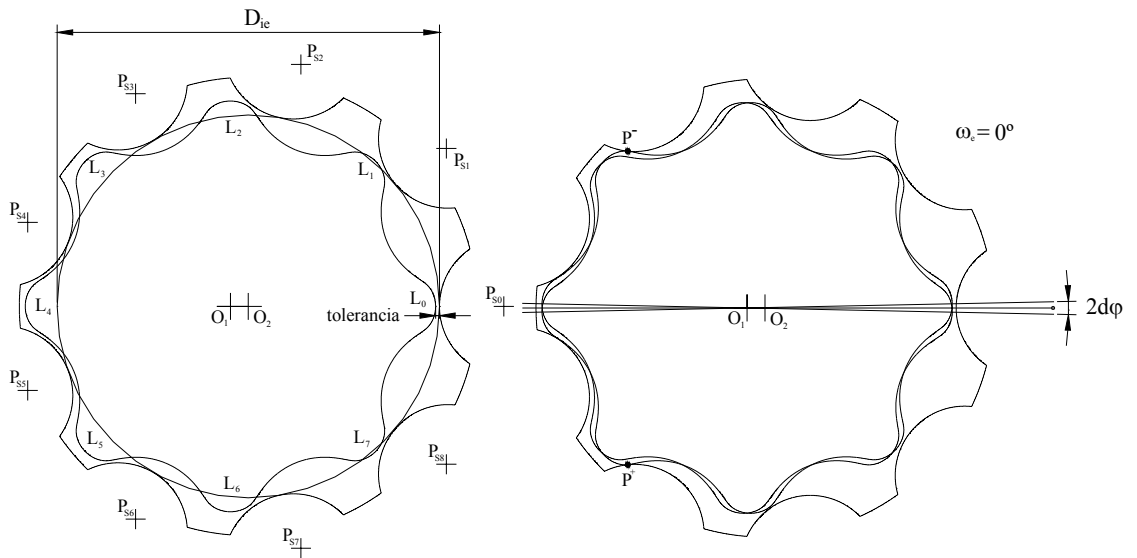


Figura 5.20. Huelgo entre las ruedas dentadas del engranaje de perfil trocoidal

5.8.1.1 Metodología de Cálculo del Ángulo de Retardo del Contacto

Se considera un punto genérico del perfil trocoidal de la rueda dentada interior denominado P_i de coordenadas $(x_i(\alpha_{gi}), y_i(\alpha_{gi}))$ centradas en O_i y que puede ser evaluado mediante la ecuación (3.94). Cuando la rueda dentada rota sobre su centro O_i , el punto P_i se desplazará siguiendo la circunferencia de radio $R_i(\alpha_{gi}) = \overline{O_i P_i}$ que se expresa como,

$$R_i(\alpha_{gi}) = \sqrt{[x_i(\alpha_{gi})]^2 + [y_i(\alpha_{gi})]^2} \quad (5.13)$$

En esta rotación, el punto de intersección $P_e(x_e, y_e)$, centrado en O_2 , entre la circunferencia de radio $R_i(\alpha_{gi}) = \overline{O_1P_i}$ y el arco circular de radio S centrado en P_{sj} que forma el perfil del diente de la rueda dentada exterior puede ser localizado resolviendo el sistema de ecuaciones de las dos circunferencias (Figura 5.21):

$$\begin{cases} [x_e - R'_2 \cos(\omega_e + j\Delta\alpha_{pc})]^2 + [y_e - R'_2 \sin(\omega_e + j\Delta\alpha_{pc})]^2 = S^2 \\ (x_e + e)^2 + y_e^2 = R_i^2(\alpha_{gi}) \end{cases} \quad j = 0, \dots, Z-1 \quad (5.14)$$

donde e es la excentricidad, $\Delta\alpha_{pc} = \frac{2\pi}{Z}$, j es centro P_{sj} del arco circular de radio S donde se va a buscar la intersección y R'_2 es el radio generador igual a la distancia O_2P_s modificado debido a la tolerancia o huelgo en la posición de referencia (Figura 5.20) y se determina mediante la expresión:

$$\begin{aligned} R'_2 &= \frac{D_{ie} + 2 \cdot \text{tolerancia}(\omega_e = 0)}{2} + S \\ D_{ie} &= 2(R_2 - S) \end{aligned} \quad (5.15)$$

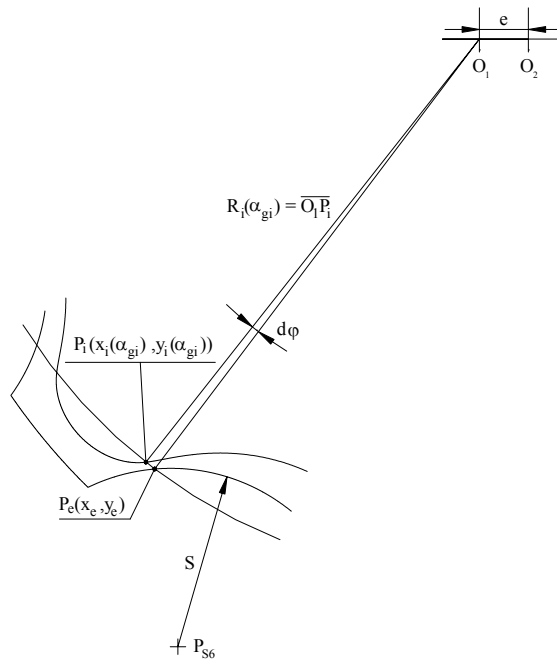


Figura 5.21. Análisis del ángulo de retardo del contacto

Ahora es posible calcular la distancia existente entre los dos puntos P_i y P_e desde el centro de la rueda dentada interior O_1 de forma,

$$\overline{P_eP_i} = \sqrt{[x_e - (x_i - e)]^2 + [y_e - y_i]^2} \quad (5.16)$$

Sin embargo, no es conocido a priori el punto P_i que proporciona el punto de contacto P_e . Por tanto, se deberán tomar los puntos $(x_i(\alpha_{gi}), y_i(\alpha_{gi}))$ que forman el perfil de la rueda dentada interior hasta localizar el punto P_i^* que cumpla $\overline{P_eP_i^*} = \min(\overline{P_eP_i})$. El punto P_i^* será el punto de

contacto el cual se desplazará sobre la circunferencia de radio $R_i(\alpha_{gi}) = \overline{O_1P_i}$ y tocará en el punto P_e del arco de circunferencia de radio S de la rueda dentada exterior. Finalmente, el ángulo de retardo del contacto podrá ser evaluado como,

$$d\varphi(\omega_e) = \arcsin\left(\frac{\overline{P_eP_i^*}}{R_i(\alpha_{gi})}\right) \quad (5.17)$$

Llegados a este punto y observando la ecuación (5.17), se puede verificar que cuando la rueda dentada exterior ocupa una posición diferente a la posición de referencia definida en la Figura 5.1 debido a un ángulo de giro ω_e , se producirá un nuevo y distinto ángulo de retardo del contacto. En efecto, las coordenadas del punto $P_e(x_e, y_e)$ son función de de:

- *El ángulo de giro de la rueda dentada exterior (ω_e).* En presencia de huelgo entre las ruedas dentadas y en una posición genérica de rotación de la rueda dentada exterior ω_e , la rueda dentada interior rotará el ángulo de giro de la relación de transmisión más el ángulo de retardo del contacto $\omega'_i = \omega_i + d\varphi(\omega_e)$, donde se encontrarán en el punto de contacto.
- *El arco de circunferencia que define el diente de la rueda dentada exterior en estudio (j).* En presencia de huelgo entre las ruedas dentadas y en una posición genérica de rotación de la rueda dentada exterior ω_e , deberá localizarse en que arco de circunferencia de centro P_{sj} que define el diente de la rueda dentada exterior j se producirá el contacto (Figura 5.20).

5.8.1.2 Metodología de Cálculo del Mínimo Huelgo entre Perfiles

Habida cuenta que existe un huelgo no nulo entre ambas ruedas dentadas, y por tanto un juego de contacto, es necesario realizar el estudio de como varía el huelgo entre los dientes de los perfiles trocoidales. Así, se definen dos puntos genéricos $P_{hmin,e}$ (perteneciente al perfil de la rueda dentada exterior) y $P_{hmin,i}$ (perteneciente al perfil de la rueda dentada interior) en una posición genérica de rotación de la rueda dentada exterior ω_e y el correspondiente el ángulo de giro de la rueda dentada interior $\omega'_i = \omega_i + d\varphi(\omega_e)$ (Figura 5.22). Si se traza la tangente correspondiente al perfil de cada rueda en los dos puntos definidos, la distancia entre perfiles será mínima cuando ambas tangentes sean paralelas entres sí. La distancia mínima corresponderá a la distancia $\overline{P_{hmin,e}P_{hmin,i}}$.

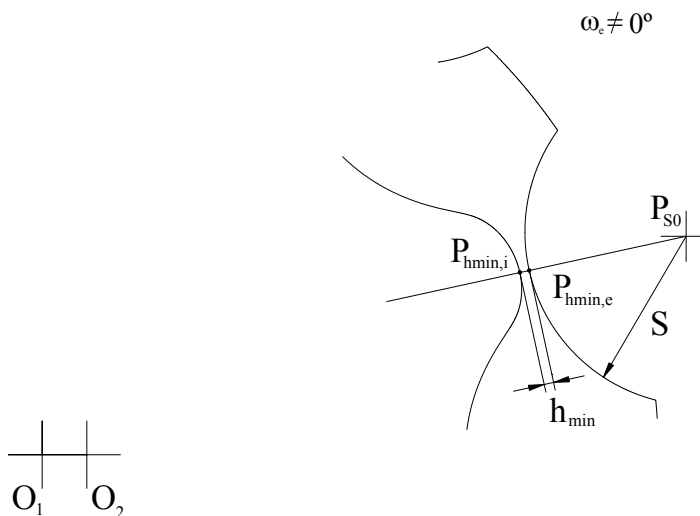


Figura 5.22. Análisis del huelgo mínimo entre perfiles

Ahora bien, y al igual que sucedía para el cálculo del ángulo de retardo del contacto, estos puntos no son conocidos a priori. Se debería evaluar las tangentes a través de todos los puntos de los perfiles que forman ambas ruedas dentadas a través de la variación de las coordenadas de $P_{hmin,e}$ y $P_{hmin,i}$. Sin embargo, se puede constatar que cuando ambas tangentes son paralelas y presenta el huelgo mínimo, la línea ortogonal a ambas tangentes paralelas pasa a través de los $P_{hmin,e}$ y $P_{hmin,i}$ y también intercepta los centros de las curvaturas de ambos perfiles. En particular, para la rueda dentada exterior esto implica la coincidencia con el centro P_s del arco de circunferencia de radio S . De esta forma, se puede obtener el huelgo mínimo evaluando las distancias $\overline{P_{hmin,i}P_s}$, donde sólo el punto $P_{hmin,i}$ va variando sobre el perfil, como,

$$\overline{P_{hmin,i}P_s} = \sqrt{\left[x_i - R'_2 \cos\left(\omega'_i + j \frac{2\pi}{Z-1}\right) \right]^2 + \left[y_i - R'_2 \sin\left(\omega'_i + j \frac{2\pi}{Z-1}\right) \right]^2} \quad j = 0, \dots, Z-1 \quad (5.18)$$

Y calcular el huelgo mínimo como,

$$h_{min}(\omega_e) = \min(\overline{P_{hmin,i}P_s}) - S \quad (5.19)$$

Tomando una par de dientes de ambas ruedas dentadas a partir de la posición de referencia y repitiendo el proceso para una rotación completa de la rueda dentada exterior, es posible obtener la evolución del huelgo mínimo entre los dos perfiles trocoidales.

5.8.1.3 Cálculo de la Evolución del Ángulo de Retardo del Contacto

Para llegar a obtener la evolución del huelgo mínimo entre los dos perfiles trocoidales de ambas ruedas para una rotación completa del engranaje exterior, primeramente se deben determina la evolución del ángulo de retardo para una rotación completa del engranaje exterior.

Partiendo de la metodología de cálculo del ángulo de retardo del contacto descrita anteriormente, el proceso de cálculo es:

1. Conocida la tolerancia o huelgo para la posición de referencia, se parte de la posición de referencia ya conocida de la Figura 5.1 donde $\omega_e = 0$.
2. Se toma un ángulo de giro de la rueda dentada exterior ω_e y el correspondiente ángulo de giro de la rueda dentada interior de la relación de transmisión ω_i
3. Se determinan todas la coordenadas de los puntos $x_{r,i}(\omega_i), y_{r,i}(\omega_i)$ mediante la ecuación (3.99) que forman el perfil de la rueda dentada interior para el ángulo de giro ω_i
4. Se toma el arco de circunferencia de centro P_{sj} que define el diente de la rueda dentada exterior $j = 0$ y entonces,
 - 4.1. Se calcula la circunferencia de radio $R_i(\alpha_{gi}) = \overline{O_1P_i}$ mediante la ecuación (5.13) para cada coordenada $P_i(x_i(\alpha_{gi}), y_i(\alpha_{gi}))$ que definen el perfil de la rueda dentada interior
 - 4.2. Se calculan las coordenadas $P_e(x_e, y_e)$ mediante la ecuación (5.14) que definen el perfil del diente de la rueda dentada exterior
 - 4.3. Se calculan la distancias $\overline{P_eP_i}$ mediante la ecuación (5.16)
 - 4.4. Se busca la distancia mínima $\overline{P_eP_i^*} = \min(P_eP_i)$ y su correspondiente $R_i(\alpha_{gi})$

- 4.5. Se calcula el ángulo de retardo del contacto $d\phi(\omega_e)$ mediante la ecuación (5.17)
- 4.6. Se regresa al punto 4.1 con $j = j + 1$ y se repite el cálculo para el nuevo arco de círculo que define el diente de la rueda dentada exterior hasta que $j = Z - 1$ donde se habrá completado todos los dientes del perfil de la rueda dentada exterior y se pasa al punto 5
5. Se toma un nuevo ángulo de giro de la rueda dentada exterior ω_e (y el correspondiente ángulo de giro de la rueda dentada interior de la relación de transmisión ω_i) y se regresa al punto 3 hasta haber completado una rotación completa de la rueda dentada exterior

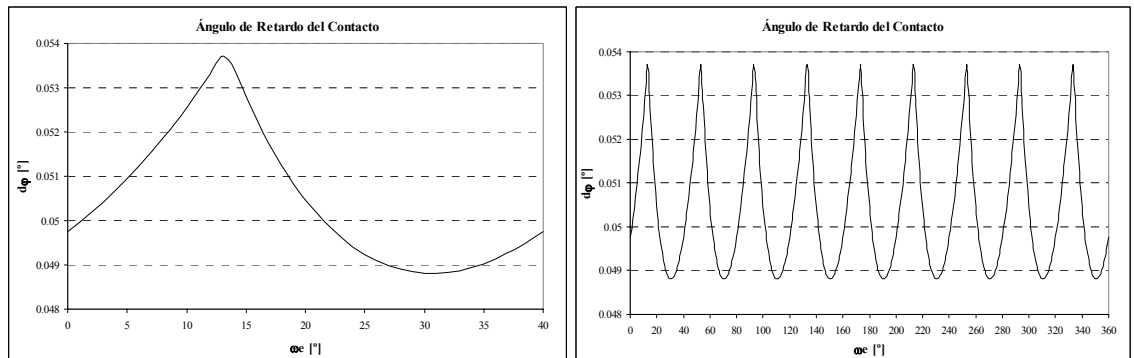


Figura 5.23. Evolución del ángulo de retardo para $\Delta\alpha_{pc}$ (izquierda) y para una rotación completa de la rueda dentada exterior (derecha)

Este procedimiento de cálculo es general y sistemático. Sin embargo, puede ser simplificado habida cuenta que:

- *Delimitar el estudio a determinados arcos de circunferencia que definen el diente de la rueda dentada exterior.* En efecto, teniendo presente el proceso de engrane de los perfiles trocoidales puede delimitarse el estudio a un par de dientes de la rueda dentada exterior.
- *El ángulo de retardo del contacto se repite con periodicidad $\Delta\alpha_{pc}$.* En efecto, el ángulo de retardo se repite con la misma periodicidad que existe entre el ángulo de giro para obtener dos posiciones de referencia consecutivas. Así, se repetirá cada $\frac{2\pi}{Z}$.

Finalmente, en la Figura 5.23 izquierda se presenta la evolución del ángulo de retardo para $\Delta\alpha_{pc}$ y en la Figura 5.23 derecha para una rotación completa del engranaje exterior.

5.8.1.4 Cálculo de la Evolución del Huelgo Mínimo entre Perfiles

Conocida la evolución del ángulo de retardo del contacto, se puede determinar la evolución del huelgo mínimo entre los dos perfiles trocoidales de ambas ruedas para una rotación completa del engranaje exterior. La evolución del huelgo mínimo se realiza sobre el arco de círculo que define el diente del engranaje exterior P_{s0} y el lóbulo o diente de la rueda dentada interior L_0 desde la posición de referencia (Figura 5.20).

Partiendo de la metodología de cálculo del huelgo mínimo descrita anteriormente, el proceso de cálculo es:

1. Conocida la tolerancia o huelgo para la posición de referencia, se parte de la posición de referencia ya conocida de la Figura 5.1 donde $\omega_e = 0$.
2. Se toma un ángulo de giro de la rueda dentada exterior ω_e y el correspondiente ángulo de giro de la rueda dentada interior de la relación de transmisión más el correspondiente ángulo

de retardo del contacto $\omega'_i = \omega_i + d\varphi(\omega_e)$

3. Se determinan todas la coordenadas de los puntos $x_{r,i}(\omega'_i), y_{r,i}(\omega'_i)$ mediante la ecuación (3.99) que forman el perfil de la rueda dentada interior para el ángulo de giro ω'_i
4. Se toma el arco de circunferencia de centro P_{sj} que define el diente de la rueda dentada exterior $j = 0$ y se calculan las distancias $\overline{P_{h\min,i}P_s}$ mediante la ecuación (5.18)
5. Se busca la distancia mínima $\min(\overline{P_{h\min,i}P_s})$
6. Se calcula el huelgo mínimo h_{\min} mediante la ecuación (5.19)
7. Se toma un nuevo ángulo de giro de la rueda dentada exterior ω_e (y el correspondiente ángulo de giro de la rueda dentada interior de la relación de transmisión más el correspondiente ángulo de retardo del contacto $\omega'_i = \omega_i + d\varphi(\omega_e)$) y se regresa al punto 3 hasta haber completado una rotación completa de la rueda dentada exterior

Finalmente, en la Figura 5.24 izquierda se muestra la evolución del huelgo mínimo manteniendo el del ángulo de retardo del contacto constante para la rotación completa de la rueda dentada exterior. El valor del ángulo de retardo es el de la posición de referencia $d\varphi(\omega_e) = d\varphi(\omega_e = 0)$.

En la Figura 5.24 derecha se muestra la evolución del huelgo mínimo tomando el ángulo de retardo del contacto variable sobre la rotación completa de la rueda dentada exterior. El valor del ángulo de retardo es $d\varphi(\omega_e)$.

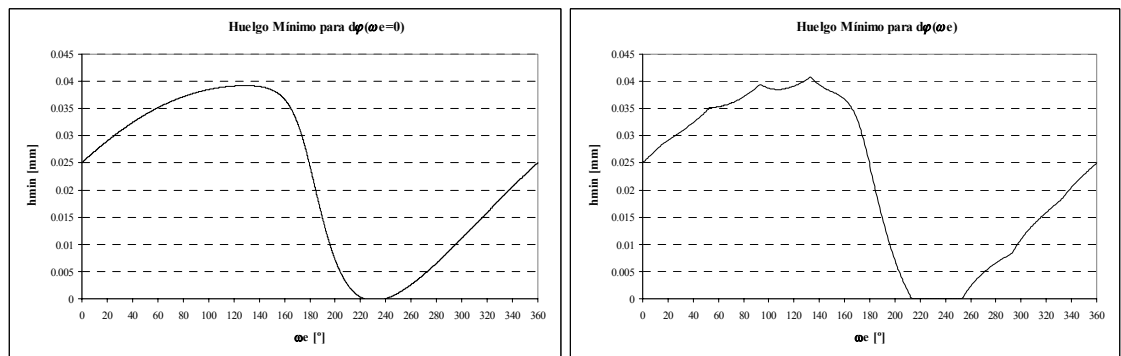


Figura 5.24. Evolución del huelgo mínimo con ángulo de retardo del contacto de la posición de referencia constante (izquierda) y con ángulo de retardo variable (derecha)

5.8.1.5 Análisis de la Evolución del Ángulo de Retardo del Contacto y del Huelgo Mínimo entre Perfiles

El análisis se centra en valorar la importancia de considerar el ángulo de retardo del contacto, constante o variable, en la rotación completa de la rueda dentada exterior. Su interés ha quedado transmitido en el hecho de que para obtener el ángulo de retardo variable en función de la rotación completa de la rueda dentada exterior se deben tomar un gran número de coordenadas que definen el perfil de la rueda dentada interior y en consecuencia, un tiempo de cálculo considerable.

En el análisis se debe tener en cuenta dos consideraciones muy importantes:

1. En el estudio realizado se asume que los centros de ambas ruedas dentadas permanecen

fijos

2. El estudio de la evolución del huelgo mínimo se centra en el arco de circunferencia P_{s0} que define el diente de la rueda dentada exterior para una rotación completa (Figura 5.20)

Se va a analizar primero el ángulo de retardo del contacto en dos casos:

- El caso del ángulo de retardo del contacto cuando se toma su valor variable $d\varphi(\omega_e)$ y se calcula para cada posición genérica durante la rotación de la rueda dentada exterior.
- El caso del ángulo de retardo del contacto cuando se toma su valor de la posición de referencia $d\varphi(\omega_e) = d\varphi(\omega_e = 0)$ y se mantiene constante durante la rotación de la rueda dentada exterior

En la Figura 5.25 se muestran las evoluciones del ángulo de retardo del contacto como:

- i. Ángulo de retardo del contacto variable sobre la rotación completa de la rueda dentada exterior: $d\varphi(\omega_e)$
- ii. Ángulo de retardo del contacto mantenido constante durante la rotación de la rueda dentada exterior y de valor igual a la posición de referencia: $d\varphi(\omega_e) = d\varphi(\omega_e = 0)$
- iii. Ángulo de retardo del contacto respecto el arco de circunferencia P_{s6}
- iv. Ángulo de retardo del contacto respecto el arco de circunferencia P_{s5}

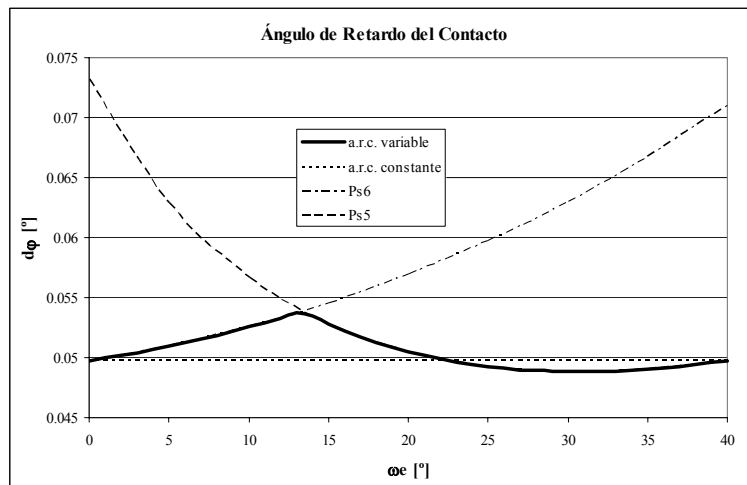


Figura 5.25. Evolución del ángulo de retardo del contacto. Leyenda: “a.r.c. variable” es $d\varphi(\omega_e)$, “a.r.c. constante” es $d\varphi(\omega_e) = d\varphi(\omega_e = 0)$, “Ps6” es el arco de circunferencia P_{s6} y “Ps5” es el arco de circunferencia P_{s5}

Analizando el primer caso del ángulo de retardo del contacto cuando se toma su valor variable, partiendo de la posición de referencia (par de dientes $P_{s0} - L_0$) y teniendo en todo momento presente la Figura 5.20, el ángulo de retardo del contacto $d\varphi(\omega_e) = d\varphi(\omega_e = 0)$ viene definido por el contacto entre lo de dientes $P_{s6} - L_5$. La evolución del ángulo de retardo del contacto es la combinación entre los arcos de círculo P_{s6} y P_{s5} , y su valor es el mínimo ángulo que se produce de su combinación. Así, mientras que el ángulo de retardo del contacto mínimo se produce con el arco de círculo P_{s6} entre los ángulos de giro de la rueda dentada exterior $\omega_e = 0 - 13^\circ$, el ángulo de retardo del contacto mínimo se produce con el arco de círculo P_{s5} entre los ángulos de giro de la rueda dentada exterior $\omega_e = 13 - 40^\circ$. Por tanto, se produce contacto en 40° de la evolución del ángulo $\frac{2\pi}{Z}$.

Por el contrario, analizando ahora el segundo caso del ángulo de retardo del contacto y suponiéndolo constante en su evolución, sólo se detecta contacto con el arco de círculo P_{s6} entre los ángulos de giro de la rueda dentada exterior $\omega_e = 0 - 2^\circ$, y con el arco de círculo P_{s5} entre los ángulos de giro de la rueda dentada exterior $\omega_e = 22 - 40^\circ$. En este caso, sólo se detecta contacto en 20° de toda la evolución del ángulo $\frac{2\pi}{Z}$.

Este fenómeno también puede observarse en el análisis de la evolución del huelgo mínimo de la Figura 5.26.

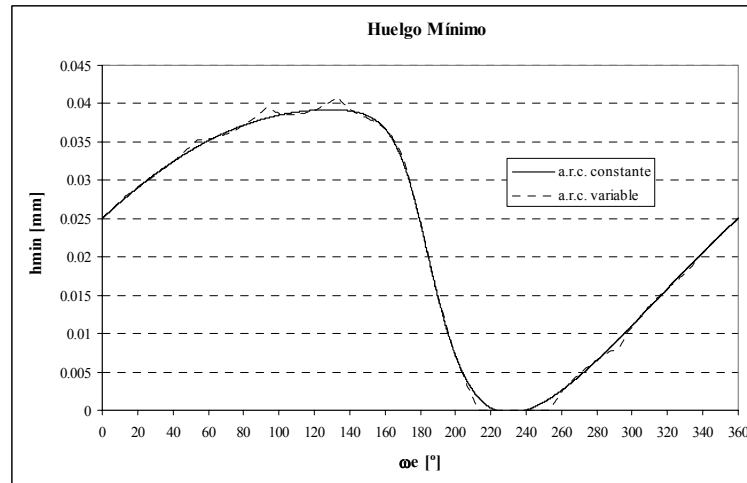


Figura 5.26. Análisis de la evolución del huelgo mínimo. Leyenda: "a.r.c. variable" es $d\varphi(\omega_e)$, "a.r.c. constante" es $d\varphi(\omega_e) = d\varphi(\omega_e = 0)$

Analizando el caso con el ángulo de retardo del contacto variable, el huelgo mínimo se produce entre los ángulos de giro de la rueda dentada exterior $\omega_e = 213 - 253^\circ$, mientras que analizando el ángulo de retardo del contacto constante el huelgo mínimo se produce entre los ángulos de giro de la rueda dentada exterior $\omega_e = 222 - 242^\circ$.

En conclusión, el ángulo de retardo del contacto resulta ser muy importante y es determinante en la evolución del huelgo mínimo entre perfiles. De hecho, tomando el ángulo de retardo del contacto variable se duplica el rango de ángulo donde se produce huelgo nulo, por tanto, contacto. Con el caso primero del ángulo de retardo del contacto variable se obtiene contacto para el ángulo de $\frac{2\pi}{Z}$; es decir, existe contacto en toda la rotación completa de la rueda dentada exterior. Sin embargo, en el caso segundo del ángulo de retardo del contacto constante se obtiene contacto para el ángulo $\frac{\pi}{Z}$; es decir, no existe contacto en toda la rotación completa de la rueda dentada.

La explicación radica en que el estudio de la evolución del huelgo mínimo se centra en el arco de circunferencia P_{s0} que define el diente de la rueda dentada exterior para una rotación completa. Si sólo se observa su huelgo mínimo con respecto al diente de la rueda dentada interior, cuando el arco de circunferencia P_{s0} ocupa la posición el arco de circunferencia P_{s5} , se tiene que el ángulo de retardo del contacto constante $d\varphi(\omega_e) = d\varphi(\omega_e = 0)$ está por encima del ángulo de retardo variable $d\varphi(\omega_e)$, y en consecuencia, se obtiene huelgo mínimo nulo; es decir, hay contacto. Sin embargo, cuando el arco de circunferencia P_{s0} ocupa la posición el arco de circunferencia P_{s6} , se tiene que el ángulo de retardo del contacto constante está por debajo del ángulo de retardo del contacto variable. Esto significa que el ángulo de retardo del contacto es

insuficiente para producir el contacto y por tanto no se observa huelgo mínimo nulo; es decir, no hay contacto.

5.8.1.6 Caudales de Fugas entre los Perfiles Trocoidales durante el Engrane

El caudal de fugas entre los perfiles trocoidales durante el engrane puede calcularse aplicando la ecuación de Reynolds a la teoría hidrodinámica de la lubricación.

Partiendo de esta teoría para el caso de una superficie que se mueve a velocidad relativa v_r respecto a otra superficie, considerando que el huelgo entre superficies es muy pequeño comparada con la longitud y tomando como hipótesis fluido incompresible, bidimensional y régimen permanente, las ecuaciones gobernantes son,

Ecuaciones de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &\cong 0\end{aligned}\quad (5.20)$$

donde p es la presión, u es la velocidad del fluido en la dirección x de la sección y μ es la viscosidad dinámica del fluido. Además, se constata que,

$$\frac{\partial v}{\partial y} \neq 0 \quad ; \quad u = u(x, y) \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x} \neq 0 \quad (5.21)$$

Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.22)$$

donde v es la velocidad del fluido en la dirección y de la sección. Por otra parte, el caudal Q por unidad de ancho b debe ser constante,

$$\frac{Q}{b} \equiv q = \int_0^{h(x)} u dy = cte \quad (5.23)$$

y donde $h(x)$ es la variación de la altura del huelgo entre los perfiles trocoidales de la rueda dentada interior y exterior con movimiento relativo. Se ha de tener en cuenta que la evolución de la altura del huelgo es función de la coordenada x y del ángulo de giro ω_e de las ruedas dentadas respecto la posición de referencia $h(x, \omega_e)$.

Integrando la ecuación (5.20),

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) y + C_1 \quad (5.24)$$

y volviendo a integrar,

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) y^2 + C_1 y + C_2 \quad (5.25)$$

Tomando las condiciones de contorno,

$$\begin{aligned} y = 0: & \quad u = v_r \\ y = h(x): & \quad u = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

se deduce que el perfil de velocidades viene indicado por la siguiente expresión:

$$u = -\frac{h^2(x)}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left(\frac{y}{h(x)} \right) \left[1 - \frac{y}{h(x)} \right] + v_r \left(1 - \frac{y}{h(x)} \right) \quad (5.27)$$

Nótese que el perfil de velocidades u será diferente en cada sección entre la superficies que se considere ya que $h(x)$ es función de la longitud y que es la superposición de un perfil de velocidad parabólico y otro lineal. Es similar a un flujo de Couette entre dos placas planas con un gradiente de presión.

Conocido el perfil de velocidades, puede evaluarse el caudal por unidad de espesor q que permanecerá constante para cualquier sección, integrando la ecuación (5.23),

$$q = \frac{v_r h(x)}{2} - \frac{h^3(x)}{12\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \quad (5.28)$$

o alternativamente el gradiente de presión para cada sección se puede expresar como,

$$\frac{dp}{dx} = 12\mu \left(\frac{v_r}{2h^2(x)} - \frac{q}{h^3(x)} \right) \quad (5.29)$$

Integrando el gradiente de presión para las condiciones de contorno,

$$x = 0: \quad p = P_0 \quad (5.30)$$

se obtiene el perfil de la presión en la película de fluido que hay entre los dos perfiles,

$$p(x) = P_0 + 6\mu v_r \int_0^x \frac{dx}{h^2(x)} - 12\mu q \int_0^x \frac{dx}{h^3(x)} \quad (5.31)$$

A la vista de la expresión resultante, el perfil de la presión es función de la velocidad relativa, el caudal por unidad de espesor y la geometría de la sección en estudio. La geometría queda definida por las dos integrales que pueden ser denominadas,

$$\lambda_1(x) = \int_0^x \frac{dx}{h^2(x)} \quad ; \quad \lambda_2(x) = \int_0^x \frac{dx}{h^3(x)} \quad (5.32)$$

Con lo cual, el caudal por unidad de espesor puede ser reescrito como,

$$q = \frac{P_0 - p(x) + 6\mu v_r \lambda_1(x)}{12\mu \lambda_2(x)} \quad (5.33)$$

5.8.1.7 Cálculo de la Evolución de la Altura del Huelgo entre Perfiles

Para evaluar la altura del huelgo entre perfiles se dispone de un sistema de coordenadas locales x - y de origen en el punto O como se muestra en la Figura 5.27, donde está representada una posición de los perfiles de la rueda dentada interior y exterior en un ángulo de rotación ω_e .

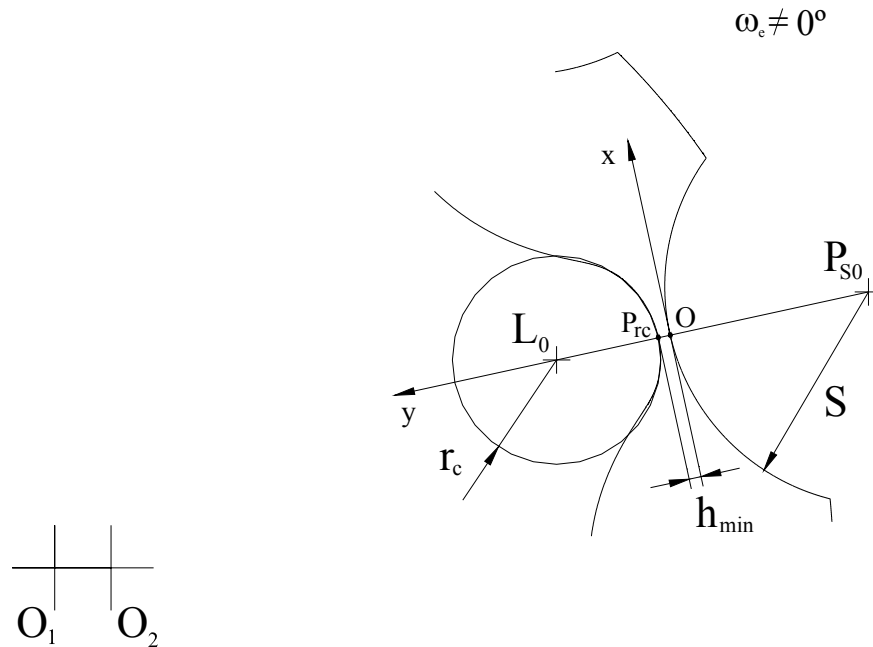


Figura 5.27. Análisis de la altura del huelgo entre perfiles

El eje y pasa a través de los centros L_0 y P_{s0} de la circunferencia de radio r_c y del arco de circunferencia S , respectivamente. De esta forma, el punto de origen O se sitúa sobre el arco de circunferencia S para el huelgo mínimo h_{min} .

La circunferencia de radio r_c corresponde al radio de curvatura del perfil de la rueda dentada interior en el punto P_{rc} . El radio de curvatura está basado en el perfil de las ecuaciones paramétricas de la rueda dentada interior $(x_i(\alpha_{gi}), y_i(\alpha_{gi}))$ centradas en O_1 evaluando la ecuación (3.94) mediante la ecuación:

$$r_c(\alpha_{gi}) = \frac{(x_i'(\alpha_{gi})^2 + y_i'(\alpha_{gi})^2)^{\frac{3}{2}}}{x_i'(\alpha_{gi})y_i''(\alpha_{gi}) - y_i'(\alpha_{gi})x_i''(\alpha_{gi})} \quad (5.34)$$

Observando la ecuación anterior, se desprenden dos consideraciones:

- Evolución del radio de curvatura.* El radio de curvatura debe ser calculado en función del ángulo de generación del perfil de la rueda dentada interior α_{gi} . Sin embargo, este ángulo es diferente al ángulo de rotación de la rueda dentada interior ω_i .
- El punto P_{rc} sobre el perfil de la rueda dentada interior donde se calcula el radio de curvatura.* Debido al huelgo entre los perfiles de la rueda dentada interior y exterior, el punto de contacto debe ser evaluado como ya fue desarrollado anteriormente en el Capítulo 3.

La metodología de cálculo propuesta es la siguiente:

a. *Evolución del radio de curvatura.*

1. Se parte de la posición de referencia ya conocida de la Figura 5.1 donde $\omega_e = 0$.
2. Se calcula el correspondiente ángulo de giro de la rueda dentada interior ω_i mediante la relación de transmisión.
3. Se calculan las coordenadas del punto de contacto correspondiente $x_{pc}(\alpha_{pc}), y_{pc}(\alpha_{pc})$ tomando $\alpha_{pc} = \omega_e$ en la ecuación (3.89) y se evalúa el ángulo de punto de contacto para el cálculo del radio de curvatura α_{rc} que forma respecto el centro O_I de la rueda dentada interior,

$$\alpha_{rc} = \arctan\left(\frac{x_{pc}(\alpha_{pc}) + e}{y_{pc}(\alpha_{pc})}\right) \quad (5.35)$$

4. Se calcula el punto P_{rc} sobre el perfil de la rueda dentada interior tomando el ángulo de generación de la rueda dentada interior α_{gi} como la diferencia entre el ángulo de punto de contacto para el cálculo del radio de curvatura α_{rc} y el ángulo de giro de la rueda dentada interior respecto la posición de referencia,

$$\alpha_{gi} = 2\pi - \text{abs}(\omega_i - \alpha_{rc}) \quad (5.36)$$

5. Se calcula el radio de curvatura mediante la ecuación (5.34).
 6. Se toma un nuevo ángulo de giro de la rueda dentada exterior ω_e y se pasa al punto 2 hasta completar una rotación completa de la rueda dentada exterior.
- b. *El punto P_{rc} sobre el perfil de la rueda dentada interior donde se calcula el radio de curvatura.*
1. Se aproxima el cálculo del punto P_{rc} al punto de contacto P_k correspondiente calculado mediante la ecuación (3.89) y obteniéndose un error aceptable.

En la Figura 5.28 se muestran la evolución del radio de curvatura para una rotación completa de la rueda dentada exterior.

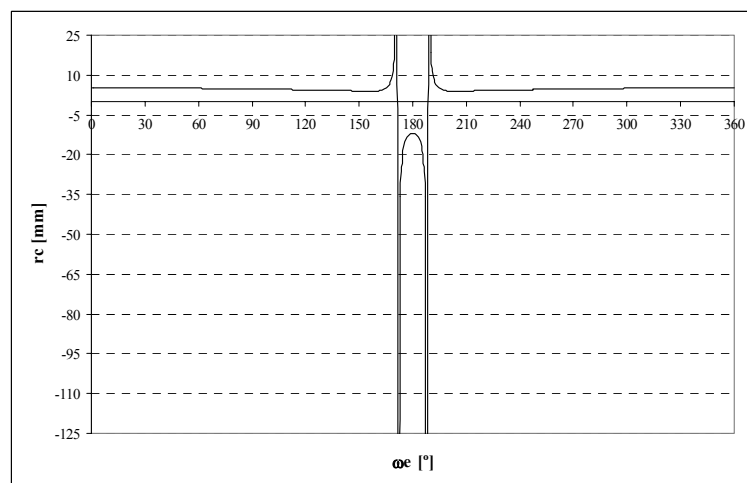


Figura 5.28. Evolución del radio de curvatura para una rotación completa de la rueda dentada exterior.

En los cálculos posteriores donde se emplea la evolución del radio de curvatura, ésta ha de ser

truncada para evitar problemas numéricos cuando el radio de curvatura tiende a más o menos infinito.

Conocida la evolución del radio de curvatura y el huelgo mínimo para una rotación completa de la rueda dentada exterior y teniendo en cuenta la Figura 5.27, se puede calcular la evolución de la altura del huelgo $h(x, \omega_e)$,

$$h(x, \omega_e) = \left[r_c(\alpha_{gi}) - \text{signo}(r_c(\alpha_{gi})) \sqrt{r_c^2(\alpha_{gi}) - x^2} \right] + h_{\min}(\omega_e) + \left[S - \sqrt{S^2 - x^2} \right] \quad (5.37)$$

donde el radio de curvatura debe ser tomado con su propio signo: positivo si el centro de L_0 cae internamente al perfil de la rueda dentada interior, y negativo si cae exteriormente al perfil.

En estos momentos, conocida la variación de la altura del huelgo en la dirección x , para un ángulo de giro de la rueda dentada exterior y teniendo en cuenta la Figura 5.27, se pueden evaluar las integrales de la geometría $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$ mediante la ecuación (5.32) para una rotación completa de la rueda dentada exterior.

Sin embargo, primeramente deben definirse los límites de integración. Los límites de integración deben ser tomados suficientemente lejos del punto de origen en el punto O de manera que las dimensiones de la altura del huelgo $h(x, \omega_e)$ sean suficientemente grandes en comparación con las dimensiones del huelgo mínimo $h_{\min}(\omega_e)$. Después de hacer un estudio de la influencia del valor de los límites de integración en los valores de $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$, se ha tomado que los límites de integración sean,

$$\lambda_1(x) = \int_{\frac{r_c}{2}}^{\frac{r_c}{2}} \frac{dx}{h^2(x)} \quad ; \quad \lambda_2(x) = \int_{\frac{r_c}{2}}^{\frac{r_c}{2}} \frac{dx}{h^3(x)} \quad (5.38)$$

Finalmente, el caudal de fugas entre los perfiles trocoidales se definirá, partiendo de la (5.33), como,

$$Q_{f,pt}(\omega_e) = H \frac{p\left(-\frac{r_c}{2}\right) - p\left(\frac{r_c}{2}\right) + 6\mu v_r \lambda_1(x, \omega_e)}{12\mu \lambda_2(x, \omega_e)} \quad (5.39)$$

donde H es el espesor del engranaje trocoidal y v_r es la velocidad relativa entre perfiles. Esta expresión permitirá evaluar el caudal de fugas entre los perfiles trocoidales para una rotación completa de la rueda dentada exterior en función de la geometría y de la velocidad relativa entre perfiles.

5.8.1.8 Cálculo de la Velocidad Relativa entre Perfiles Trocoidales

Para el cálculo de la velocidad relativa entre perfiles hay que considerar que la normal al círculo S pasa a través del centro instantáneo de rotación I (vease la Figura 5.29).

La velocidad relativa del punto de contacto P_k para el ángulo de giro de los perfiles presentado en la Figura 5.29 se define como:

$$v_r = v_i \cos \delta_i - v_e \cos \delta_e \quad (5.40)$$

donde las velocidades tangenciales v_i y v_e de la rueda dentada interior y exterior, respectivamente, se definen como,

$$\begin{aligned} v_i &= \rho_i \dot{\omega}_i \\ v_e &= \rho_e \dot{\omega}_e \end{aligned} \tag{5.41}$$

donde:

$\dot{\omega}_i$ y $\dot{\omega}_e$ es la velocidad de giro en sentido contrario a las agujas del reloj relativo de la rueda dentada interior y exterior, respectivamente, respecto del sistema de coordenadas de referencia absoluto X - Y

ρ_i y ρ_e son los radiovectores desde el centro de la rueda dentada interior y exterior, respectivamente, al punto de contacto P_k y se definen como,

$$\begin{aligned} \rho_i &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad \text{donde } x_i = x_{pc}(\alpha_{pc}) + e ; y_i = y_{pc}(\alpha_{pc}) \\ \rho_e &= \sqrt{x_e^2 + y_e^2} \quad \text{donde } x_e = x_{pc}(\alpha_{pc}) ; y_e = y_{pc}(\alpha_{pc}) \end{aligned} \tag{5.42}$$

donde $x_{pc}(\alpha_{pc}), y_{pc}(\alpha_{pc})$ son la coordenadas del punto de contacto y se calculan tomando $\alpha_{pc} = \omega_e$ en la ecuación (3.89).

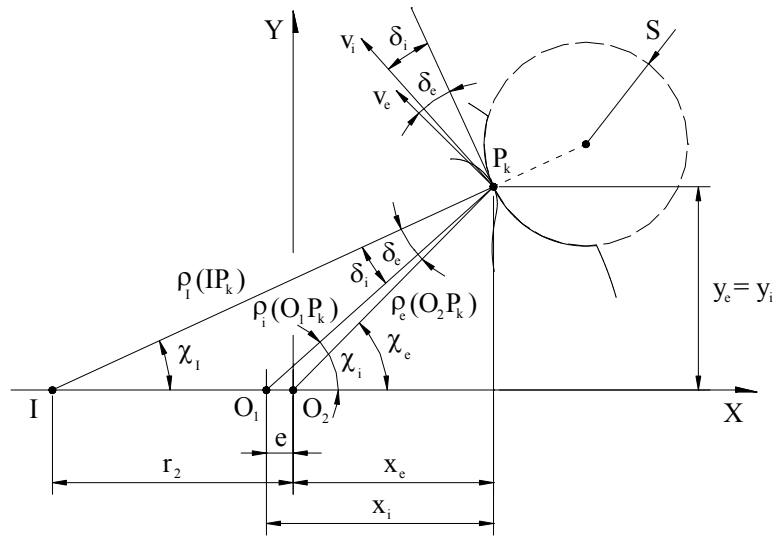


Figura 5.29. Análisis de la velocidad relativa entre perfiles

A continuación, conocido que la ordenada del punto de contacto P_k es igual para los dos perfiles $y_i = y_e$, se tiene que,

$$\sin \chi_i = \frac{\rho_e}{\rho_i} \sin \chi_e \tag{5.43}$$

El radiovector ρ_i se evalúa como,

$$\rho_i = \sqrt{(r_2 + x_e)^2 + y_e^2} \quad (5.44)$$

Aplicando el teorema del seno a los triángulos formados IO_1P_k y IO_2P_k se obtiene,

$$\begin{aligned} \sin \delta_i &= \frac{r_2 - e}{\rho_i} \sin \chi_i \\ \sin \delta_e &= \frac{r_2}{\rho_i} \sin \chi_e \end{aligned} \quad (5.45)$$

y conocida la relación trigonométrica $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, se puede obtener el valor de los cosenos de la ecuación (5.40) como,

$$\begin{aligned} \cos \delta_i &= \sqrt{1 - \sin^2 \delta_i} \\ \cos \delta_e &= \sqrt{1 - \sin^2 \delta_e} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Los ángulos χ_i y χ_e también pueden ser evaluados mediante las coordenadas del punto de contacto como,

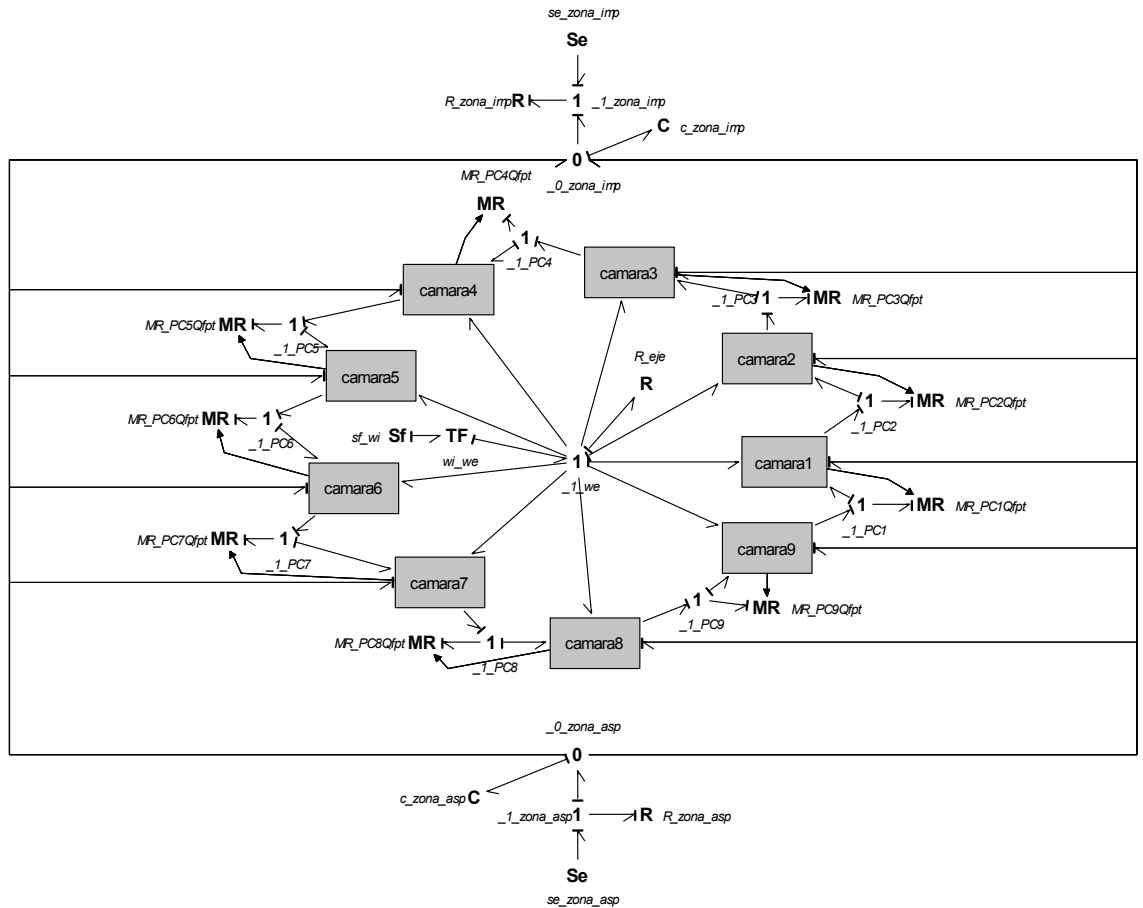
$$\begin{aligned} \chi_i &= \arctan \left(\frac{x_{pc}(\alpha_{pc}) + e}{y_{pc}(\alpha_{pc})} \right) \\ \chi_e &= \arctan \left(\frac{x_{pc}(\alpha_{pc})}{y_{pc}(\alpha_{pc})} \right) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Es importante tener en cuenta que las ecuaciones (5.42), (5.43), (5.44), (5.45), (5.46) y (5.47) son función de la geometría de los perfiles y del ángulo de giro ω_e de las ruedas dentadas respecto la posición de referencia para un rotación completa de la rueda dentada exterior e independientes de la velocidad de giro de la ruedas dentadas $\dot{\omega}_i$ y $\dot{\omega}_e$. Sin embargo, la evolución de la velocidad relativa v_r es función de la velocidad de giro en sentido contrario a las agujas del reloj relativo de la rueda dentada interior y exterior respecto del sistema de coordenadas de referencia absoluto X - Y : $v_r(\omega_i, \omega_e)$.

También es importante resaltar que, al igual que en el cálculo de la altura de huelgo para el punto P_{rc} sobre el perfil de la rueda dentada interior para el cálculo del radio de curvatura, el cálculo del punto de contacto P_k se aproxima tomando las ecuaciones de la línea de puntos de contacto sin tolerancias y huelgo, la ecuación (3.89).

5.8.1.9 Simulación Caudales de Fugas entre los Perfiles Trocoidales durante el Engrane

Finalmente, el caudal de fugas entre los perfiles trocoidales para una rotación completa de la rueda dentada exterior puede ser evaluado mediante la ecuación (5.39) deducida anteriormente. Llegados a este punto, se puede dar un paso más para completar el modelo fluidodinámico real de la bomba gerotor. Teniendo presente la geometría del engranaje de perfiles trocoidales (Figura 5.1), la geometría de la carcasa o cuerpo de la bomba (Figura 5.8) y el principio del caudal de fugas entre los perfiles trocoidales (Figura 5.19), los elementos de BondGraph que modelizan la fluidodinámica real de la bomba gerotor que incorpora el caudal de fugas entre los perfiles trocoidales se presenta en BondGraph 5.5.



BondGraph 5.5. Modelo fluidodinámico real de la bomba gerotor que incorpora el caudal de fugas entre los perfiles trocoidales

Concepto	Símbolo	Denom.	Variable Entrada	Variable Salida	Representa
Balance de presiones entre la cámara (k+1) y la cámara (k) en el punto de contacto P_k ($k=1..Z-1$)	1 $_1_PCk$	Nodo "1"	Caudal $Q_{MR_PCkQfpt-1_PCk} = Q_{f,pt(k)}$	Caudales $Q_{1_PCk-cámara(k-1)}$ $Q_{1_PCk-cámara(k)}$	Sumatorio de presiones igual a cero y caudal igual
			Presiones $P_{cámara(k-1)-1_PCk}$ $P_{cámara(k)-1_PCk}$	Diferencia Presión $\Delta P = P_{cámara(k-1)} - P_{cámara(k)}$	
Caudal a través del huelgo entre perfiles trocoidales en el punto de contacto P_k ($k=1..Z-1$)	MR $MR_PCkQfpt$	Resistencia Modulada	Diferencia Presión $\Delta P = P_{cámara(k-1)} - P_{cámara(k)}$	Caudal $Q_{MR_PCkQfpt-1_PCk} = Q_{f,pt(k)}$	Resistencia al flujo del fluido a través del huelgo entre perfiles trocoidales

Tabla 5. Correspondencia física del modelo fluidodinámico real de la bomba gerotor que incorpora el caudal de fugas entre perfiles por elementos BondGraph

Partiendo del modelo de simulación fluidodinámica de la bomba gerotor (BondGraph 5.4), se deberá agregar y conectar a los submodelos de las cámaras los nuevos submodelos de los caudales de fugas entre los perfiles trocoidales durante el engrane ($Q_{f,pt}$). El nuevo modelo de BondGraph presenta los 9 submodelos de cámara conectados entre sí por su nivel superior en

los elementos descritos en la Tabla 3 y Tabla 4. Los nuevos submodelos y elementos de BondGraph que modelizan el caudal de fugas entre perfiles trocoidales se presentan en la Tabla 5.

En la Figura 5.30 se muestra la simulación.

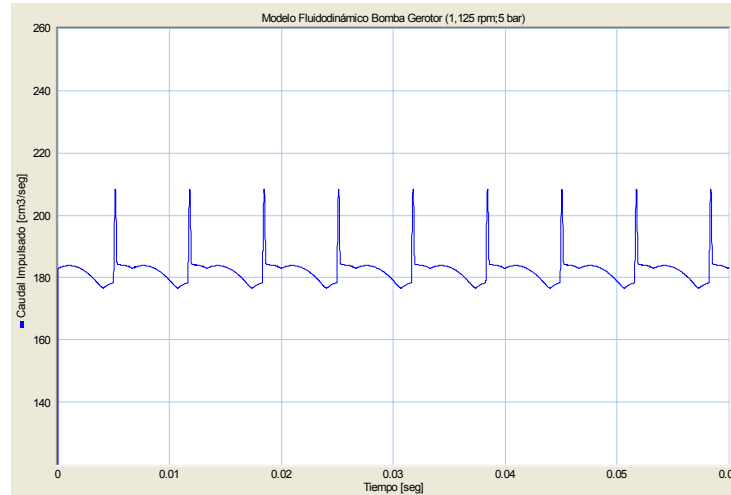


Figura 5.30. Simulación del caudal impulsado por la bomba gerotor incluyendo el caudal de fugas entre perfiles trocoidales del modelo fluidodinámico real para velocidad del giro de la rueda dentada interior de 1,125 rpm y presión de impulsión 5 bar

5.8.2 Modelo de Caudal de Fugas entre las Caras Laterales de las Ruedas Dentadas y Cuerpo de la Bomba

El engranaje trocoidal (piñón y corona) presenta una tolerancia de fabricación entre caras laterales predeterminada con relación a las dimensiones interiores de la carcasa donde va ubicado. Esta tolerancia determina unos pasajes de sección rectangular. El flujo de fluido en estos pasajes es consecuencia del gradiente de presión entre cámaras denominado $Q_{f,ec,gp}$ y del movimiento relativo entre las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba, y que corresponde a arrastre de fluido denominado $Q_{f,ec,af}$, que permite una cierta comunicación entre las cámaras de trabajo.

El cálculo de estas fugas se ve complicado por la geometría de las fronteras de circulación de fluido; es decir, por su interacción con los colectores de la zona de aspiración e impulsión. En los subapartados 5.8.2.1 y 5.8.2.2 se exponen las rutinas de cálculo del caudal debido al gradiente de presión y al movimiento relativo entre engranaje y carcasa, atendiendo a su compleja geometría.

5.8.2.1 Caudal de Fugas entre las Caras Laterales de las Ruedas Dentadas y Cuerpo de la Bomba debido al Gradiente de Presión entre Cámaras

El caudal de fugas entre caras laterales debido al gradiente de presión entre cámaras ($Q_{f,ec,gp}$) viene determinado para un pasaje de flujo rectangular en forma general como,

$$Q_{f,ec,gp} = \frac{h_{ec}^3}{12\mu} \frac{b}{l} \Delta P \quad (5.48)$$

donde h_{ec} es la altura del pasaje entre las caras de las ruedas dentadas con el cuerpo de la bomba, b es la anchura y l es la longitud del pasaje o distancia entre los puntos que definen el gradiente de presión ΔP entre cámaras, y μ es la viscosidad dinámica del fluido.

En este estudio, el pasaje rectangular creado entre las caras de las ruedas dentadas con el cuerpo de la bomba corresponde a una geometría complicada, como es la de los perfiles trocoidales de las ruedas dentadas y las fronteras de circulación de fluido de las lumbreras o ranuras practicadas sobre el cuerpo de la bomba (Figura 5.31). El caudal de fugas entre caras laterales debido al gradiente de presión entre cámaras es función de:

- La posición del engranaje respecto la posición de referencia.* El caudal de fugas entre caras laterales debido al gradiente de presión entre cámaras es función del ángulo de rotación de la rueda dentada exterior ω_e ; es decir, de la posición de las cámaras y los puntos de contacto.
- La geometría de perfiles de las ruedas dentadas.* Debido a la complejidad del perfil trocoidal que define cada rueda dentada, las magnitudes de ancho y longitud del pasaje rectangular vienen definidas por la geometría del perfil.
- La geometría de las fronteras de circulación del fluido en el cuerpo de la bomba.* Debido a las lumbreras practicadas sobre el cuerpo de la bomba, se crean las fronteras de circulación del fluido que modifican las magnitudes de ancho y longitud del pasaje rectangular en determinados ángulos sobre una rotación completa del engranaje.

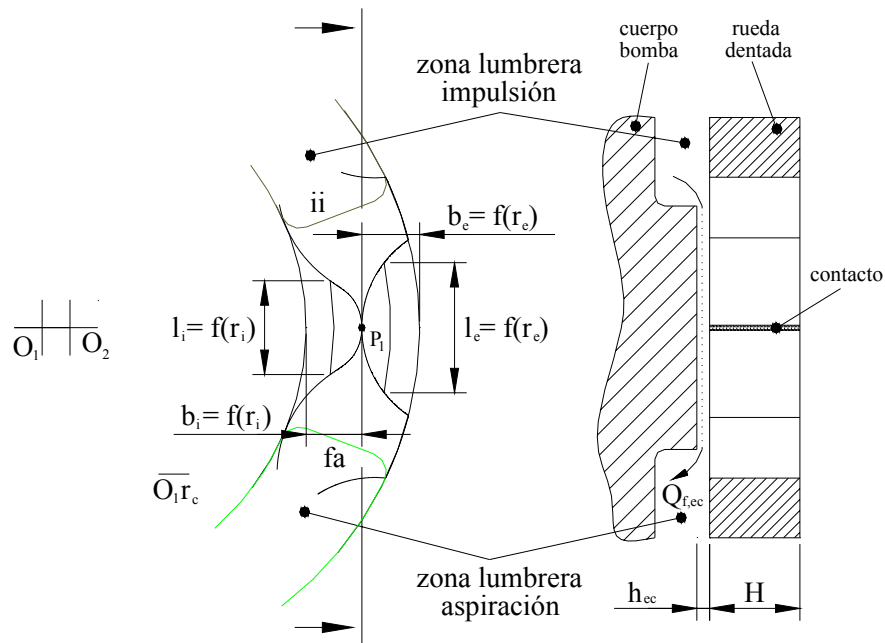


Figura 5.31. Anchura y longitud de la geometría de los pasajes de fugas

Así, el caudal de fugas entre caras laterales debido al gradiente de presión entre cámaras para el perfil de la rueda dentada interior $Q_{f,ec,sp,i}$ y el perfil de la rueda dentada exterior $Q_{f,ec,sp,e}$, se expresará como,

$$\begin{aligned}
 Q_{f,ec,sp,i}(\omega_e) &= \frac{h_{ec}^3}{12\mu} \frac{b_i(r_i)}{l_i(r_i)} \Delta P = \frac{h_{ec}^3}{12\mu} \xi_i(\omega_e) \Delta P \\
 Q_{f,ec,sp,e}(\omega_e) &= \frac{h_{ec}^3}{12\mu} \frac{b_e(r_e)}{l_e(r_e)} \Delta P = \frac{h_{ec}^3}{12\mu} \xi_e(\omega_e) \Delta P
 \end{aligned}
 \tag{5.49}$$

donde ξ_i y ξ_e son las denominadas *funciones de geometría de pasaje* para la rueda dentada interior y exterior, respectivamente.

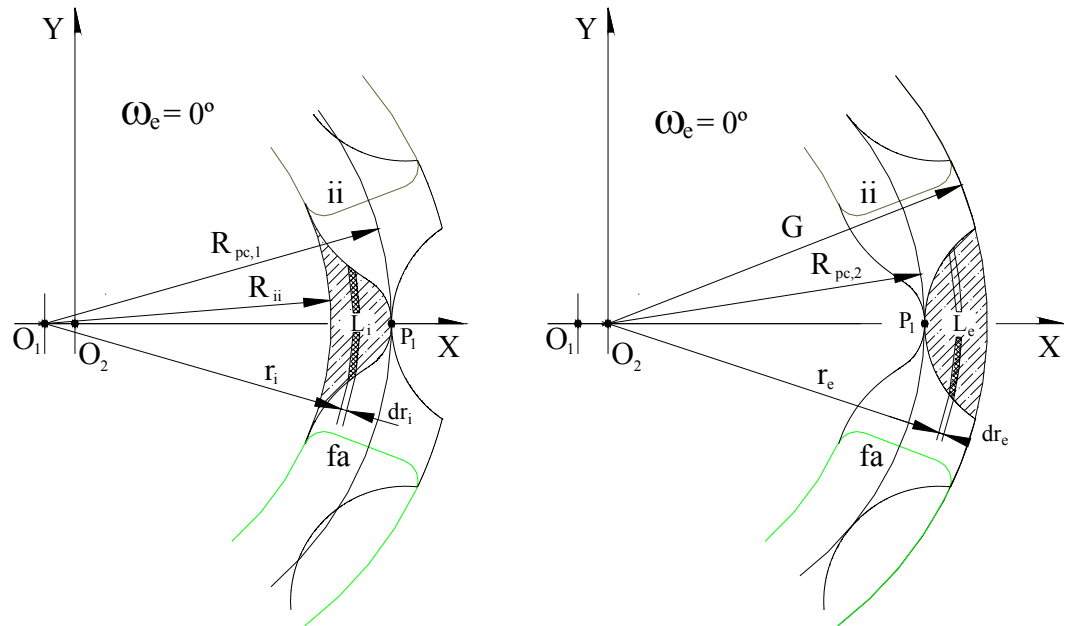


Figura 5.32. Geometría de las funciones de pasaje para la rueda dentada interior (izquierda) y rueda dentada exterior (derecha)

Las funciones de geometría de pasaje, a pesar de su complejidad, deben ser determinadas para calcular el flujo de fuga entre caras laterales y son función de:

- El ángulo de rotación del engranaje
- Las fronteras de circulación del fluido

5.8.2.1.1 Funciones de Geometría de Pasaje de los Perfiles de las Ruedas Dentadas sin Fronteras de Circulación de Fluido

El objetivo es determinar las funciones de geometría de pasaje de los perfiles de las ruedas dentadas interior y exterior para una rotación completa del conjunto del engranaje. Para este cálculo, y con el fin de reducir la complejidad de la geometría de los perfiles trocoidales, estos han sido sustituidos por arcos de circunferencia (Figura 5.33).

- *Rueda dentada exterior.* Se toma el diente como el arco de circunferencia de radio S . Como el estudio del pasaje de fugas se centra entre las zonas delimitadas por las lumbreras de aspiración e impulsión, la porción de diente donde se producirá el pasaje de fugas se sitúa entre el punto de contacto P_1 y el punto de intersección entre las circunferencias de radio S y el radio externo de cierre de la rueda dentada exterior uniendo los arcos de circunferencia de radio S .
- *Rueda dentada interior.* Se toma el diente como el círculo circunscrito de radio el radio de curvatura r_c en el punto de contacto P_1 para la posición de referencia. Como el estudio del pasaje de fugas se centra entre las zonas delimitadas por las lumbreras de aspiración e impulsión, la porción de diente donde se producirá el pasaje de fugas se sitúa entre el radio interno entre dos valles de diente de la rueda dentada interior R_{ii} y el punto de contacto P_1 .

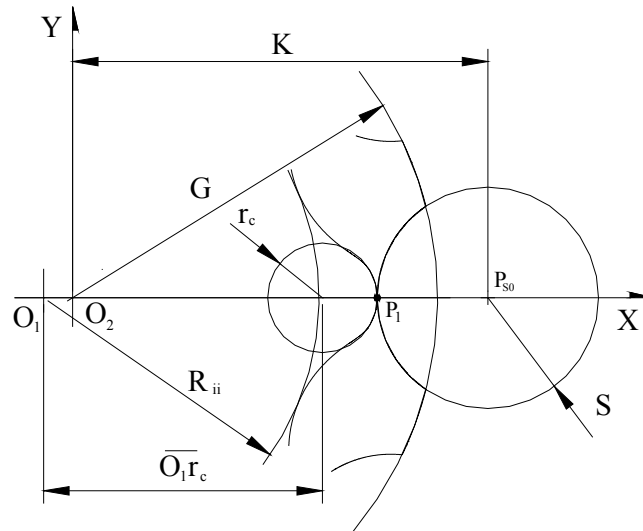


Figura 5.33. Geometría de los dientes de las ruedas dentadas sustituidos por arcos de circunferencia para el estudio del pasaje de fugas (Posición de referencia)

Primeramente, en un primer estudio, se determinan las funciones de geometría de pasaje de ambas ruedas dentadas en función del ángulo de rotación del engranaje sin tener en cuenta las fronteras de circulación del fluido. Observando la Figura 5.34, se determina que las funciones de geometría de pasaje corresponde a la integral de las superficies de los dientes marcadas con arcos de circunferencia como,

$$\xi_i(\omega_e) = \int_{\text{limitinf},i}^{\text{limitsup},i} \frac{dr_i}{L_i} \tag{5.50}$$

$$\xi_e(\omega_e) = \int_{\text{limitinf},e}^{\text{limitsup},e} \frac{dr_e}{L_e}$$

donde el subíndice *i* hace referencia a la rueda dentada interior y el subíndice *e* a la rueda dentada exterior.

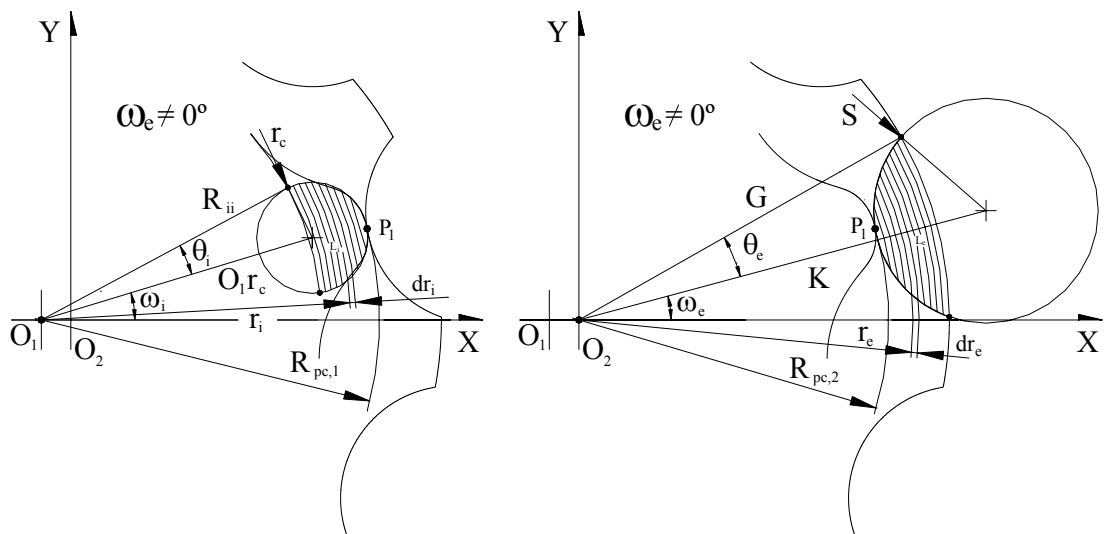


Figura 5.34. Geometría de las funciones de pasaje para la rueda dentada interior (izquierda) y rueda dentada exterior (derecha) sin las fronteras de circulación de fluido

De la Figura 5.34, se observan los triángulos de lados R_{ii} , r_c y O_1r_c para la rueda dentada interior y G , S y K para la rueda dentada exterior. El radio de curvatura r_c y la distancia desde el centro de la rueda dentada interior al centro de la circunferencia del radio de curvatura O_1r_c se calculan en la posición de referencia. De esta forma, quedan definidos los ángulos θ_i y θ_e mediante el teorema del coseno como,

$$\begin{aligned}\theta_i &= \arccos\left(\frac{R_{ii}^2 + O_1r_c^2 - r_c^2}{2R_{ii}O_1r_c}\right) \\ \theta_e &= \arccos\left(\frac{G^2 + K^2 - S^2}{2GK}\right)\end{aligned}\quad (5.51)$$

De esta forma, se puede obtener el arco de circunferencia inicial como,

$$\begin{aligned}L_i &= 2R_{ii}\theta_i \\ L_e &= 2G\theta_e\end{aligned}\quad (5.52)$$

Teniendo en cuenta que el arco de circunferencia es función del ángulo y del radio,

$$\begin{aligned}\theta_i &= \arccos\left(\frac{r_i^2 + O_1r_c^2 - r_c^2}{2r_iO_1r_c}\right) \\ \theta_e &= \arccos\left(\frac{r_e^2 + K^2 - S^2}{2r_eK}\right)\end{aligned}\quad (5.53)$$

y las longitudes de los arcos de circunferencia,

$$\begin{aligned}L_i &= 2r_i\theta_i \\ L_e &= 2r_e\theta_e\end{aligned}\quad (5.54)$$

Se puede sustituir en la correspondiente integral como,

$$\begin{aligned}\xi_i(\omega_e) &= \int_{\text{limitinf},i}^{\text{limitsup},i} \frac{dr_i}{2r_i \arccos\left(\frac{r_i^2 + O_1r_c^2 - r_c^2}{2r_iO_1r_c}\right)} \\ \xi_e(\omega_e) &= \int_{\text{limitinf},e}^{\text{limitsup},e} \frac{dr_e}{2r_e \arccos\left(\frac{r_e^2 + K^2 - S^2}{2r_eK}\right)}\end{aligned}\quad (5.55)$$

Los límites de integración teniendo presente la Figura 5.34 son,

$$\begin{aligned}\text{limitinf},i &= R_{ii} & \text{limitsup},i &= R_{pc,1} \\ \text{limitinf},e &= R_{pc,2} & \text{limitsup},e &= G\end{aligned}\quad (5.56)$$

La metodología de cálculo para **la rueda dentada interior sin fronteras de circulación del fluido** es la siguiente:

- 1.[i,gp] Se parte de la posición de referencia ya conocida de la Figura 5.1 (Figura 5.33) donde $\omega_e = 0$ y se referencia todo respecto el centro de la rueda dentada interior O_1 .

- 2.[i,gp] Se calculan las coordenadas del punto de contacto correspondiente pero desde el centro de la rueda dentada interior O_I tomando $\alpha_{pc} = \omega_e$. Por tanto, la ecuación (3.89) queda modificada como,

$$\begin{aligned}x_{pc,1}(\alpha_{pc}) &= R_2 \cos \alpha_{pc} - \frac{S}{m} (R_2 \cos \alpha_{pc} \pm r_2) + e \\y_{pc,1}(\alpha_{pc}) &= R_2 \sin \alpha_{pc} - \frac{S}{m} (R_2 \sin \alpha_{pc}) \\m &= \sqrt{r_2^2 + R_2^2 \pm 2r_2 R_2 \cos \alpha_{pc}}\end{aligned}\quad (5.57)$$

- 3.[i,gp] Se calcula el radio de curvatura r_c en la posición de referencia mediante la ecuación (5.34) con $\alpha_{gi} = 0$ y la distancia desde el centro de la rueda dentada interior al centro de la circunferencia del radio de curvatura $O_1 r_c = \sqrt{[x_{pc,1}(\alpha_{pc} = 0) - r_c]^2 + [y_{pc,1}(\alpha_{pc} = 0)]^2}$.

- 4.[i,gp] Se calcula el correspondiente ángulo de giro de la rueda dentada interior ω_i mediante la relación de transmisión.
- 5.[i,gp] Se calcula el valor del ángulo que forma la distancia desde el centro de la rueda dentada interior al centro de la circunferencia del radio de curvatura $O_1 r_c$ respecto el eje de coordenadas X , que en este caso es igual a ω_i .
- 6.[i,gp] Se calculan las coordenadas del punto de contacto mediante la ecuación (5.57) y se calcula el ángulo del punto de contacto correspondiente desde el centro de la rueda dentada interior O_I respecto el eje de coordenadas X como,

$$\chi_{pc,1}(\alpha_{pc}) = \arctan\left(\frac{y_{pc,1}(\alpha_{pc})}{x_{pc,1}(\alpha_{pc})}\right) + a\pi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a = 0 & \text{si } (x_{pc,1} \geq 0) \text{ y } (y_{pc,1} \geq 0) \\ a = 1 & \text{si } (x_{pc,1} < 0) \\ a = 2 & \text{si } (x_{pc,1} > 0) \text{ y } (y_{pc,1} < 0) \end{cases} \quad (5.58)$$

- 7.[i,gp] Se calculan los límites de integración como,

$$\begin{aligned}\text{limitinf}, i &= R_{ii} \\ \text{limitsup}, i &= R_{pc,1} = \sqrt{[x_{pc,1}(\alpha_{pc})]^2 + [y_{pc,1}(\alpha_{pc})]^2}\end{aligned}\quad (5.59)$$

- 8.[i,gp] Se calcula la función de geometría de pasaje de la rueda dentada interior $\xi_i(\omega_e)$ mediante la ecuación (5.55).
- 9.[i,gp] Se toma un nuevo ángulo de giro de la rueda dentada exterior ω_e y se pasa al punto 6.[i,gp] hasta completar una rotación completa de la rueda dentada exterior.

La metodología de cálculo para **la rueda dentada exterior sin fronteras de circulación del fluido** es la siguiente:

- 1.[e,gp] Se parte de la posición de referencia ya conocida de la Figura 5.1 (Figura 5.33) donde $\omega_e = 0$ y se referencia todo respecto el centro de la rueda dentada exterior O_2 .
- 2.[e,gp] Se calculan las coordenadas del punto de contacto correspondiente pero desde el centro de la rueda dentada exterior O_2 tomando $\alpha_{pc} = \omega_e$. Por tanto, como la ecuación (3.89),

$$\begin{aligned}
x_{pc,2}(\alpha_{pc}) &= R_2 \cos \alpha_{pc} - \frac{S}{m} (R_2 \cos \alpha_{pc} \pm r_2) \\
y_{pc,2}(\alpha_{pc}) &= R_2 \sin \alpha_{pc} - \frac{S}{m} (R_2 \sin \alpha_{pc}) \\
m &= \sqrt{r_2^2 + R_2^2 \pm 2r_2 R_2 \cos \alpha_{pc}}
\end{aligned} \tag{5.60}$$

3.[e,gp] Se calcula el valor del ángulo que forma la distancia desde el centro de la rueda dentada exterior al centro del arco de circunferencia de radio S respecto el eje de coordenadas X , que en este caso es igual a ω_e .

4.[e,gp] Se calculan las coordenadas del punto de contacto mediante la ecuación (5.60) y se calcula el ángulo del punto de contacto correspondiente desde el centro de la rueda dentada exterior O_2 respecto el eje de coordenadas X como,

$$\chi_{pc,2}(\alpha_{pc}) = \arctan\left(\frac{y_{pc,2}(\alpha_{pc})}{x_{pc,2}(\alpha_{pc})}\right) + a\pi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a = 0 & \text{si } (x_{pc,2} \geq 0) \text{ y } (y_{pc,2} \geq 0) \\ a = 1 & \text{si } (x_{pc,2} < 0) \\ a = 2 & \text{si } (x_{pc,2} > 0) \text{ y } (y_{pc,2} < 0) \end{cases} \tag{5.61}$$

5.[e,gp] Se calculan los límites de integración como,

$$\begin{aligned}
\text{limitinf, e} &= R_{pc,2} = \sqrt{[x_{pc,2}(\alpha_{pc})]^2 + [y_{pc,2}(\alpha_{pc})]^2} \\
\text{limitsup, i} &= G
\end{aligned} \tag{5.62}$$

6.[e,gp] Se calcula la función de geometría de pasaje de la rueda dentada exterior $\xi_e(\omega_e)$ mediante la ecuación (5.55).

7.[e,gp] Se toma un nuevo ángulo de giro de la rueda dentada exterior ω_e y se pasa al punto 2.[e,gp] hasta completar una rotación completa de la rueda dentada exterior.

Hasta este punto, se ha expuesto la metodología para el cálculo de la parte de las funciones de geometría de pasaje de las ruedas dentadas interior y exterior sin tener en cuenta la interacción con la frontera de circulación del fluido de inicio de la impulsión (*ii*). Para el cálculo del resto de las funciones de geometría de pasaje de las ruedas dentadas interior y exterior sin tener en cuenta la interacción con las fronteras de circulación de fluido de fin de la impulsión (*fi*), inicio de la aspiración (*ia*) y fin de la aspiración (*fa*) se procede con la misma metodología expuesta, sólo que actualizando los valores de las variables correspondientes.

Las funciones de geometría de pasaje sin tener en cuenta las fronteras de circulación de fluido se muestran en la Figura 5.35.

5.8.2.1.2 Funciones de Geometría de Pasaje de los Perfiles de las Ruedas Dentadas con Fronteras de Circulación de Fluido

Los límites de las lumbreras, denominadas fronteras de circulación de fluido (Figura 5.8), modifican el comportamiento de las características fluidodinámicas del engranaje de perfil trocoidal.

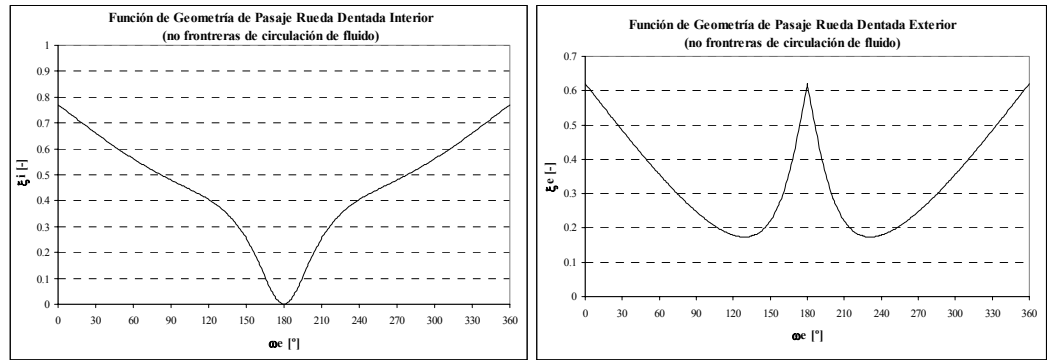


Figura 5.35. Función de geometría de pasaje de la rueda dentada interior (izquierda) y exterior (derecha) sin fronteras de circulación de fluido

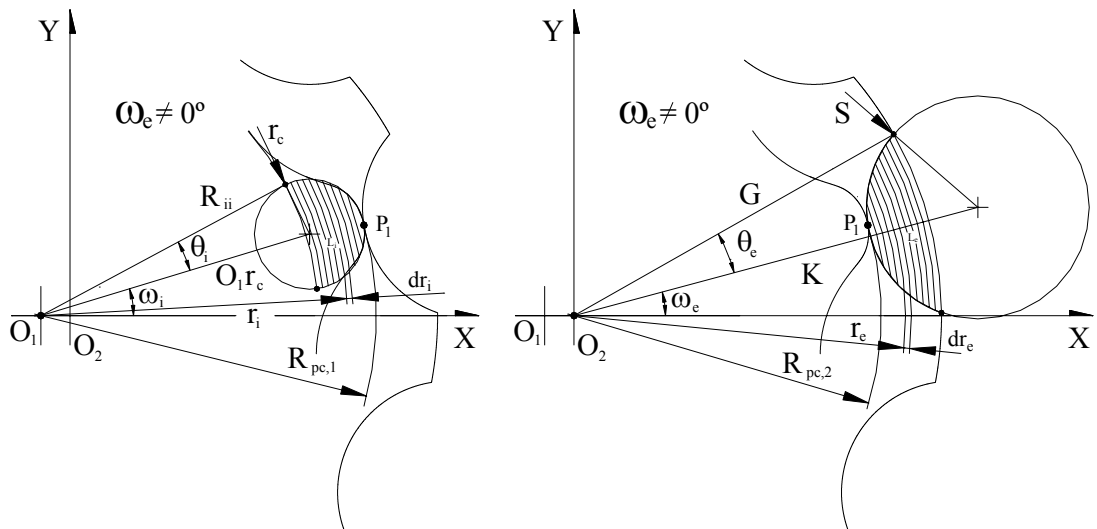


Figura 5.36. Geometría de las funciones de geometría de pasaje para la rueda dentada interior (izquierda) y rueda dentada exterior (derecha) con las fronteras de circulación de fluido

Como se observa en la Figura 5.36 a modo de ejemplo para una posición del engranaje distinta a la posición de referencia, la frontera de circulación de fluido de inicio de la impulsión (ii) modifica la superficie entre caras del engranaje y el cuerpo de la bomba en la que existe un pasaje de fugas de altura h_{ec} . Por tanto, los arcos de circunferencia se ven recortados en su longitud. El cálculo se verá modificado por las fronteras de circulación de fluido de inicio de la impulsión (ii), fin de la impulsión (fi), inicio de la aspiración (ia) y fin de la aspiración (fa).

La metodología de cálculo de la función de geometría de pasaje para **la rueda dentada interior con la frontera de circulación del fluido de inicio de la impulsión (ii)** es la siguiente:

- 1.[i*,gp] Se siguen los puntos del 1.[i,gp] al 6.[i,gp] de la metodología de cálculo de la función de geometría de pasaje para la rueda dentada interior sin las fronteras de circulación del fluido
- 2.[i*,gp] Se calculan los ángulos de intersección superior η_A e inferior η_B (puntos A y B de la Figura 5.36 izquierda) entre las circunferencia de radio R_{ii} y r_c como,

$$\begin{aligned}\eta_A &= \arccos\left(\frac{R_i^2 + O_1 r_c^2 - r_c^2}{2R_i O_1 r_c}\right) + \omega_i \\ \eta_B &= -\arccos\left(\frac{R_i^2 + O_1 r_c^2 - r_c^2}{2R_i O_1 r_c}\right) + \omega_i\end{aligned}\quad (5.63)$$

Relaciones condicionales que se deben cumplir,

- SI se cumple que $[(\eta_A > \eta_{i,1}) \text{ y } (\eta_B < \eta_{i,1})]$ entonces pasar al punto 3.[i*,gp] ya que el diente de la rueda dentada interior se encuentra sobre la frontera de circulación de inicio de la impulsión.
- NO se cumple que $[(\eta_A > \eta_{i,1}) \text{ y } (\eta_B < \eta_{i,1})]$ entonces pasar al punto 7.[i,gp] de la metodología de cálculo de la función de geometría de pasaje para la rueda dentada interior sin las fronteras de circulación del fluido ya que el diente de la rueda dentada interior no se encuentra sobre la frontera de circulación de inicio de la impulsión. Seguir la metodología hasta al punto 9.[i,gp] y pasar de nuevo al punto 2.[i*,gp].

3.[i*,gp] Se calcula el radio de la circunferencia $O_1 f_{i,1}$ (Figura 5.37 izquierda) del punto de intersección $f_{i,1}$ de la circunferencia $O_1 f_{i,1}$ y la frontera de circulación de fluido de inicio de la impulsión de forma,

- Cálculo geométrico de los ángulos auxiliares por el teorema del seno y el coseno en el triángulo formado $O_1 f_{i,1}$, r_c y $O_1 r_c$,

$$\begin{aligned}\mu &= \text{abs}(\eta_{i,1} - \omega_i) \\ \mu^* &= \arcsin\left(O_1 r_c \frac{\sin \mu}{r_c}\right) \\ \varepsilon &= \pi - \mu - \mu^*\end{aligned}\quad (5.64)$$

- Cálculo del radio de la circunferencia $O_1 f_{i,1}$,

$$O_1 f_{i,1} = \sqrt{(r_c^2 + O_1 r_c^2 - 2r_c O_1 r_c \cos \varepsilon)}\quad (5.65)$$

4.[i*,gp] Se calculan los ángulos de los arcos de circunferencia,

$$\begin{aligned}\theta_i &= \arccos\left(\frac{r_i^2 + O_1 r_c^2 - r_c^2}{2r_i O_1 r_c}\right) \\ \theta_i^* &= \theta_i + \omega_i - \eta_{i,1}\end{aligned}\quad (5.66)$$

5.[i*,gp] Se calculan los límites de integración como,

$$\begin{aligned}\text{limitinf}, i &= R_i \\ \text{limitsup}, i &= R_{pc,1} = \sqrt{[x_{pc,1}(\alpha_{pc})]^2 + [y_{pc,1}(\alpha_{pc})]^2} \\ \text{limitinf}, i^* &= \text{limitsup}, i^* = O_1 f_{i,1}\end{aligned}\quad (5.67)$$

6.[i*,gp] Se calcula la función de geometría de pasaje de la rueda dentada interior $\xi_i(\omega_e)$ mediante la ecuación (5.55) modificada,

$$\xi_i(\omega_e) = \int_{\text{limitinf}, i}^{\text{limitsup}, i^*} \frac{dr_i}{(2r_i \theta_i - r_i \theta_i^*)} + \int_{\text{limitinf}, i^*}^{\text{limitsup}, i} \frac{dr_i}{2r_i \theta_i}\quad (5.68)$$

- 7.[i*,gp] Se toma un nuevo ángulo de giro de la rueda dentada exterior ω_e y se pasa al punto 2.[i*,gp] hasta cumplir con las relaciones condicionales.

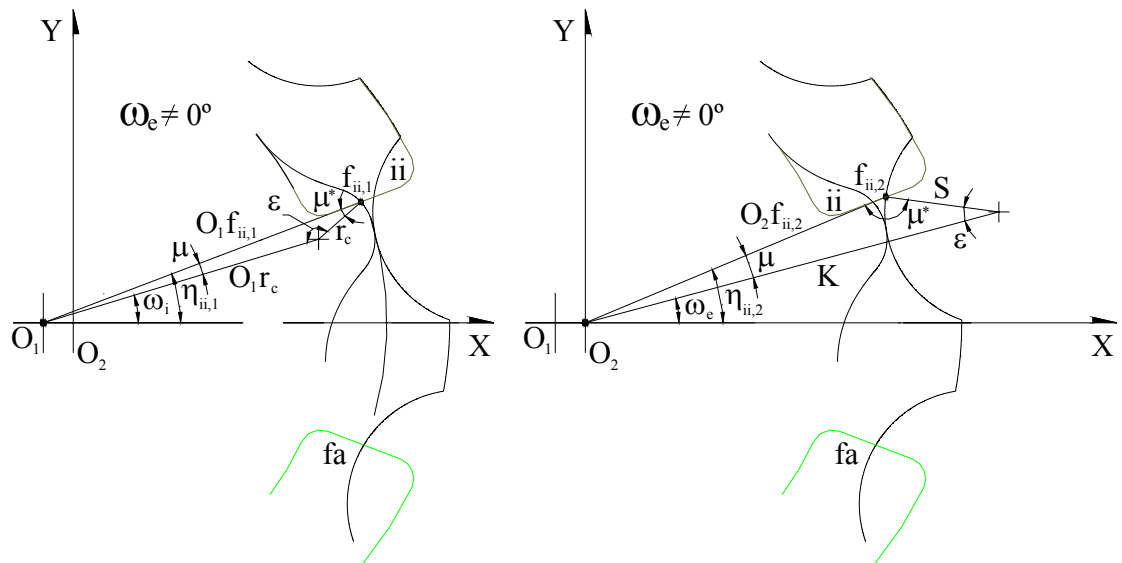


Figura 5.37. Cálculo de $O_1f_{ii,1}$ y $O_2f_{ii,2}$

La metodología de cálculo de la función de geometría de pasaje para **la rueda dentada exterior con la frontera de circulación del fluido de inicio de la impulsión (ii)** es la siguiente:

- 1.[e*,gp] Se siguen los puntos del 1.[e,gp] al 4.[e,gp] de la metodología de cálculo de la función de geometría de pasaje para la rueda dentada exterior sin las fronteras de circulación del fluido
- 2.[e*,gp] Se calculan los ángulos de intersección superior η_c e inferior η_D (puntos C y D de la Figura 5.36 derecha) puntos entre las circunferencia de radio G y S como,

$$\eta_c = \arccos\left(\frac{G^2 + K^2 - S^2}{2GK}\right) + \omega_e$$

$$\eta_D = -\arccos\left(\frac{G^2 + K^2 - S^2}{2GK}\right) + \omega_e \quad (5.69)$$

Relaciones condicionales que se deben cumplir,

- a. SI se cumple que $[(\eta_c > \eta_{ii,2}) \text{ y } (\eta_D < \eta_{ii,2})]$ entonces pasar al punto 3.[e*,gp] ya que el diente de la rueda dentada exterior se encuentra sobre la frontera de circulación de inicio de la impulsión.
- b. NO se cumple que $[(\eta_c > \eta_{ii,2}) \text{ y } (\eta_D < \eta_{ii,2})]$ entonces pasar al punto 5.[e,gp] de la metodología de cálculo de la función de geometría de pasaje para la rueda dentada exterior sin las fronteras de circulación del fluido ya que el diente de la rueda dentada exterior no se encuentra sobre la frontera de circulación de inicio de la impulsión. Seguir la metodología hasta al punto 7.[e,gp] y pasar de nuevo al punto 2.[e*,gp].
- 3.[e*,gp] Se calcula el radio de la circunferencia $O_2f_{ii,2}$ (Figura 5.37 derecha) del punto de intersección $f_{ii,2}$ de la circunferencia $O_2f_{ii,2}$ y la frontera de circulación de fluido de inicio de la impulsión de forma,

- a. Cálculo geométrico de los ángulos auxiliares por el teorema del seno y el coseno en el triángulo formado $O_2f_{ii,2}$, S y K ,

$$\begin{aligned}\mu &= \text{abs}(\eta_{ii,2} - \omega_e) \\ \mu^* &= \pi - \arcsin\left(K \frac{\sin \mu}{S}\right) \\ \varepsilon &= \pi - \mu - \mu^*\end{aligned}\quad (5.70)$$

- b. Cálculo del radio de la circunferencia $O_2f_{ii,2}$,

$$O_2f_{ii,2} = \sqrt{(S^2 + K^2 - 2SK \cos \varepsilon)} \quad (5.71)$$

- 4.[e*,gp] Se calculan los ángulos de los arcos de circunferencia,

$$\begin{aligned}\theta_e &= \arccos\left(\frac{r_e^2 + K^2 - S^2}{2r_e K}\right) \\ \theta_e^* &= \text{abs}(-\theta_e + \omega_e - \eta_{ii,2})\end{aligned}\quad (5.72)$$

- 5.[e*,gp] Se calculan los límites de integración como,

$$\begin{aligned}\text{limitinf},e &= R_{pc,2} = \sqrt{[x_{pc,2}(\alpha_{pc})]^2 + [y_{pc,2}(\alpha_{pc})]^2} \\ \text{limitsup},e &= G \\ \text{limitinf},e^* &= \text{limitsup},e^* = O_2f_{ii,2}\end{aligned}\quad (5.73)$$

- 6.[e*,gp] Se calcula la función de geometría de pasaje de la rueda dentada exterior $\xi_e(\omega_e)$ mediante la ecuación (5.55) modificada,

$$\xi_e(\omega_e) = \int_{\text{limitinf},e}^{\text{limitsup},e^*} \frac{dr_e}{2r_e \theta_e} + \int_{\text{limitinf},e^*}^{\text{limitsup},e} \frac{dr_e}{r_e \theta_e^*} \quad (5.74)$$

- 7.[e*,gp] Se toma un nuevo ángulo de giro de la rueda dentada exterior ω_e y se pasa al punto 2.[e*,gp] hasta cumplir con las relaciones condicionales.

Hasta este punto, se ha expuesto la metodología para el cálculo de la parte de las funciones de geometría de pasaje de las ruedas dentadas interior y exterior que corresponden a la interacción con la frontera de circulación del fluido de inicio de la impulsión (*ii*). Para el cálculo del resto de las funciones de geometría de pasaje de las ruedas dentadas interior y exterior que corresponden a la interacción con las fronteras de circulación de fluido de fin de la impulsión (*fi*), inicio de la aspiración (*ia*) y fin de la aspiración (*fa*) se procede con la misma metodología expuesta, sólo que actualizando los valores de las variables correspondientes.

Las funciones de geometría de pasaje para una rotación completa del engranaje teniendo en cuenta las fronteras de circulación de fluido se muestran en la Figura 5.38.

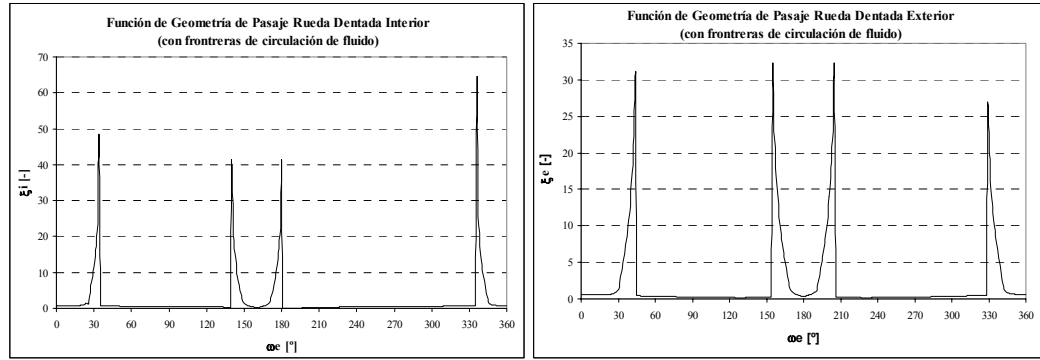


Figura 5.38. Función de geometría de pasaje de la rueda dentada interior (izquierda) y exterior (derecha) con fronteras de circulación de fluido

5.8.2.2 Caudal de Fugas entre las Caras Laterales de las Ruedas Dentadas y Cuerpo de la Bomba debido al Arrastre de Fluido

En general, el caudal de fugas entre caras laterales debido al arrastre de fluido ($Q_{f,ec,af}$) viene determinado para un pasaje de flujo rectangular mediante la expresión,

$$Q_{f,ec,af} = h_{ec} \int_{\text{limitinf}}^{\text{limitsup}} \frac{v_s}{2} dr = h_{ec} \frac{\bar{v}_s}{2} \int_{\text{limitinf}}^{\text{limitsup}} dr = h_{ec} \frac{\bar{v}_s}{2} b \quad (5.75)$$

donde h_{ec} es la altura del pasaje entre las caras de las ruedas dentadas con el cuerpo de la bomba, \bar{v}_s es la velocidad relativa media entre la rueda dentada y el cuerpo de la bomba, b es la anchura del pasaje, $\dot{\omega}$ es la velocidad de rotación de la rueda dentada y r es la distancia desde el centro de la rueda dentada al punto medio de la anchura del pasaje.

Como en el estudio del caudal de fugas entre caras laterales debido al gradiente de presión, el pasaje rectangular creado entre las caras de las ruedas dentadas con el cuerpo de la bomba corresponde a una geometría complicada, como es la de los perfiles trocoidales de las ruedas dentadas y las fronteras de circulación de fluido de las lumbreras practicadas sobre el cuerpo de la bomba. El caudal de fugas entre caras laterales debido al arrastre de fluido es función de:

- La posición del engranaje respecto la posición de referencia.* El caudal de fugas entre caras laterales debido al arrastre de fluido es función del ángulo de rotación de la rueda dentada exterior ω_e ; es decir, de la posición de las cámaras y los puntos de contacto.
- La geometría de perfiles de las ruedas dentadas.* Debido a la complejidad del perfil trocoidal que define cada rueda dentada, la magnitud de ancho del pasaje rectangular viene definida por la geometría del perfil.
- La geometría de las fronteras de circulación del fluido en el cuerpo de la bomba.* Debido a las lumbreras practicadas sobre el cuerpo de la bomba, se crean las fronteras de circulación del fluido que definirán la magnitud del ancho del pasaje rectangular en determinados ángulos sobre una rotación completa del engranaje.

Así, el caudal de fugas entre caras laterales debido al arrastre de fluido para el perfil de la rueda dentada interior $Q_{f,ec,af,i}$ y el perfil de la rueda dentada exterior $Q_{f,ec,af,e}$, se expresará como,

$$\begin{aligned} Q_{f,ec,af,i}(\omega_e) &= \frac{\dot{\omega}_i r_i(\omega_e)}{2} b_i(\omega_e) h_{ec} \\ Q_{f,ec,af,e}(\omega_e) &= \frac{\dot{\omega}_e r_e(\omega_e)}{2} b_e(\omega_e) h_{ec} \end{aligned} \quad (5.76)$$

donde $\dot{\omega}_i$ y $\dot{\omega}_e$ son la velocidad de rotación de la rueda dentada interior y exterior, respectivamente, b_i y b_e son la anchura de pasaje para la rueda dentada interior y exterior, respectivamente, también denominadas *funciones de geometría de arrastre de fluido*, y r_i y r_e son la distancia o radio desde el centro de la rueda dentada al punto medio de la anchura del pasaje para la rueda dentada interior y exterior, respectivamente (Figura 5.39).

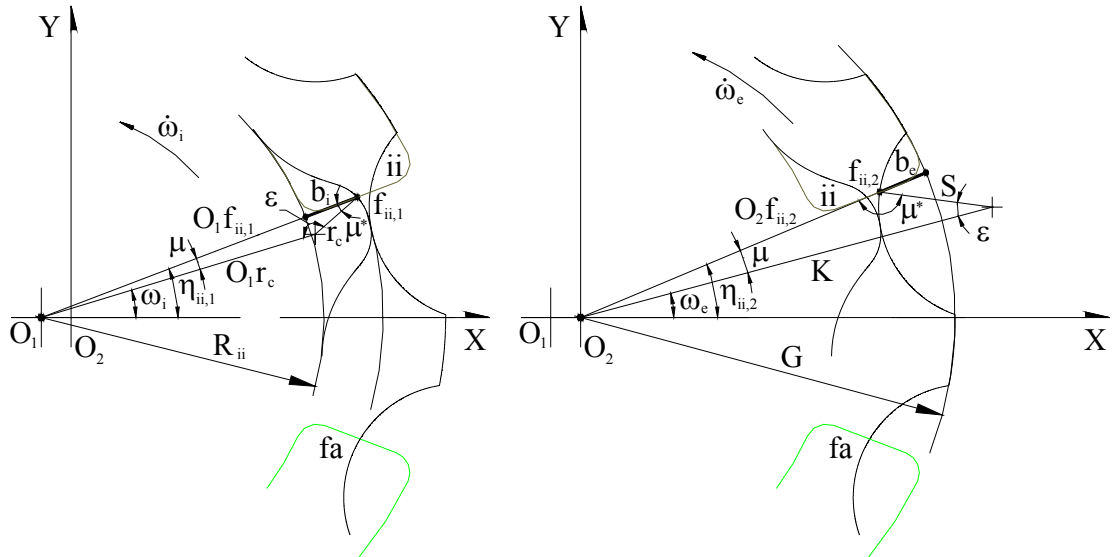


Figura 5.39. Geometría de las funciones geometría de arrastre de fluido para la rueda dentada interior (izquierda) y rueda dentada exterior (derecha) con la frontera de circulación de fluido de inicio de la impulsión (ii)

5.8.2.2.1 Funciones de Geometría de Arrastre de Fluido

El objetivo es determinar las funciones de geometría de arrastre de fluido de los perfiles de las ruedas dentadas interior y exterior para una rotación completa del conjunto del engranaje.

La metodología de cálculo de la función de geometría de arrastre del fluido para **la rueda dentada interior con la frontera de circulación del fluido de inicio de la impulsión (ii)** es la siguiente:

- 1.[i,af] Se parte de la posición de referencia ya conocida de la Figura 5.1 donde $\omega_e = 0$ y se referencia todo respecto el centro de la rueda dentada interior O_I .
- 2.[i,af] Se calculan los ángulos de intersección superior η_A e inferior η_B (puntos A y B de la Figura 5.36 izquierda) puntos entre las circunferencia de radio R_{ii} y r_c mediante la ecuación (5.63).
- 3.[i,af] Se calculan las coordenadas del punto de contacto correspondiente pero desde el centro de la rueda dentada interior O_I tomando $\alpha_{pc} = \omega_e$ en la ecuación (5.57).

Relaciones condicionales que se deben cumplir,

- a. SI se cumple que $[(\eta_A > \eta_{ii,1}) \text{ y } (\eta_B < \eta_{ii,1})]$ entonces pasar al punto 3.[i,af] ya que el diente de la rueda dentada exterior se encuentra sobre la frontera de circulación de inicio de la impulsión.

- b. NO se cumple que $[(\eta_A > \eta_{ii,1}) \text{ y } (\eta_B < \eta_{ii,1})]$ entonces el diente de la rueda dentada exterior no se encuentra sobre la frontera de circulación de inicio de la impulsión y la función de geometría de arrastre de fluido de la rueda dentada interior b_i vale,

$$b_i = 0 \quad (5.77)$$

y pasar al punto 11.[i,af].

- 4.[i,af] Se calcula el radio de curvatura r_c en la posición de referencia mediante la ecuación (5.34) con $\alpha_{gi} = 0$ y la distancia desde el centro de la rueda dentada interior al centro de la circunferencia del radio de curvatura $O_1 r_c = \sqrt{[x_{pc,1}(\alpha_{pc} = 0) - r_c]^2 + [y_{pc,1}(\alpha_{pc} = 0)]^2}$.
- 5.[i,af] Se calcula el correspondiente ángulo de giro de la rueda dentada interior ω_i mediante la relación de transmisión.
- 6.[i,af] Se calcula el valor del ángulo que forma la distancia desde el centro de la rueda dentada interior al centro de la circunferencia del radio de curvatura $O_1 r_c$ respecto el eje de coordenadas X , que en este caso es igual a ω_i .
- 7.[i,af] Se calculan las coordenadas del punto de contacto mediante la ecuación (5.57) y se calcula el ángulo del punto de contacto correspondiente desde el centro de la rueda dentada interior O_1 respecto el eje de coordenadas X mediante la ecuación (5.58).
- 8.[i,af] Se calcula el radio de la circunferencia $O_1 f_{ii,1}$ (Figura 5.39 izquierda) del punto de intersección $f_{ii,1}$ de la circunferencia $O_1 f_{ii,1}$ y la frontera de circulación de fluido de inicio de la impulsión mediante las ecuaciones (5.64) y (5.65)
- 9.[i,af] Se calcula la función de geometría de arrastre de fluido de la rueda dentada interior b_i ,

$$b_i = O_1 f_{ii,1} - R_{ii} \quad (5.78)$$

- 10.[i,af] Se calcula el radio r_i como distancia desde el centro de la rueda dentada interior al punto medio de la anchura del pasaje como,

$$r_i = R_{ii} + \frac{b_i}{2} \quad (5.79)$$

- 11.[i,af] Se toma un nuevo ángulo de giro de la rueda dentada exterior ω_e y se pasa al punto 2.[i,af] hasta cumplir una rotación completa del engranaje.

La metodología de cálculo de la función de geometría de arrastre del fluido para **la rueda dentada exterior con la frontera de circulación del fluido de inicio de la impulsión (ii)** es la siguiente:

- 1.[e,af] Se parte de la posición de referencia ya conocida de la Figura 5.1 donde $\omega_e = 0$ y se referencia todo respecto el centro de la rueda dentada exterior O_2 .
- 2.[e,af] Se calculan los ángulos de intersección superior η_c e inferior η_d (puntos C y D de la Figura 5.36 derecha) puntos entre las circunferencia de radio G y S mediante la ecuación (5.69).
- 3.[e,af] Se calculan las coordenadas del punto de contacto correspondiente pero desde el centro de la rueda dentada exterior O_2 tomando $\alpha_{pc} = \omega_e$ mediante la ecuación (5.60). Por tanto, como la ecuación (3.89),

Relaciones condicionales que se deben cumplir,

- c. SI se cumple que $[(\eta_c > \eta_{ii,2}) \text{ y } (\eta_D < \eta_{ii,2})]$ entonces pasar al punto 3.[e,af] ya que el diente de la rueda dentada exterior se encuentra sobre la frontera de circulación de inicio de la impulsión.
- d. NO se cumple que $[(\eta_c > \eta_{ii,2}) \text{ y } (\eta_D < \eta_{ii,2})]$ entonces el diente de la rueda dentada exterior no se encuentra sobre la frontera de circulación de inicio de la impulsión y la función de geometría de arrastre de fluido de la rueda dentada interior b_e vale,

$$b_e = 0 \quad (5.80)$$

y pasar al punto 9.[e,af].

- 4.[e,af] Se calcula el valor del ángulo que forma la distancia desde el centro de la rueda dentada exterior al centro del arco de circunferencia de radio S respecto el eje de coordenadas X , que en este caso es igual a ω_e .
- 5.[e,af] Se calculan las coordenadas del punto de contacto mediante la ecuación (5.60) y se calcula el ángulo del punto de contacto correspondiente desde el centro de la rueda dentada exterior O_2 respecto el eje de coordenadas X mediante la ecuación (5.61).
- 6.[e,af] Se calcula el radio de la circunferencia $O_2f_{ii,2}$ (Figura 5.39 derecha) del punto de intersección $f_{ii,2}$ de la circunferencia $O_2f_{ii,2}$ y la frontera de circulación de fluido de inicio de la impulsión de forma mediante las ecuaciones (5.70) y (5.71).
- 7.[e,af] Se calcula la función de geometría de arrastre de fluido de la rueda dentada exterior b_e ,

$$b_e = G - O_2f_{ii,2} \quad (5.81)$$

- 8.[e,af] Se calcula el radio r_e como distancia desde el centro de la rueda dentada exterior al punto medio de la anchura del pasaje como,

$$r_e = G - \frac{b_e}{2} \quad (5.82)$$

- 9.[e,af] Se toma un nuevo ángulo de giro de la rueda dentada exterior ω_e y se pasa al punto 2.[e,af] hasta completar una rotación completa de la rueda dentada exterior.

Hasta este punto, se ha expuesto la metodología para el cálculo de la parte de las funciones de geometría de arrastre de fluido de las ruedas dentadas interior y exterior con la interacción con la frontera de circulación del fluido de inicio de la impulsión (ii). Para el cálculo del resto de las funciones de geometría de arrastre de fluido de las ruedas dentadas interior y exterior con la interacción con las fronteras de circulación de fluido de fin de la impulsión (fi), inicio de la aspiración (ia) y fin de la aspiración (fa) se procede con la misma metodología expuesta, sólo que actualizando los valores de las variables correspondientes. Las funciones de geometría de arrastre de fluido se presentan en la Figura 5.40.

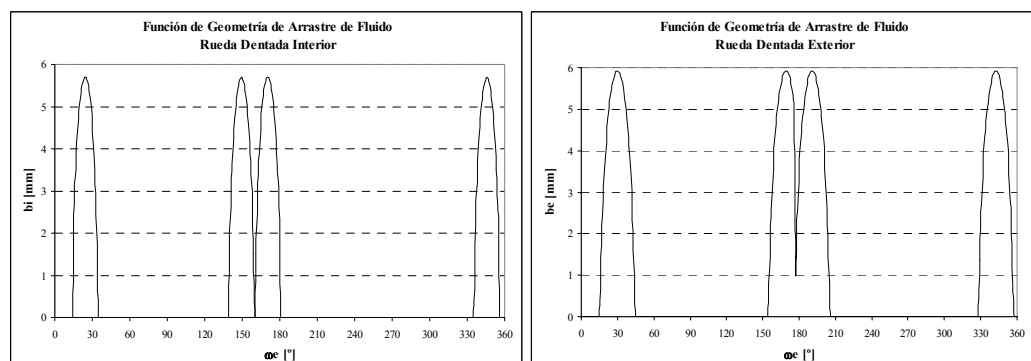


Figura 5.40. Función de geometría de arrastre de fluido de la rueda dentada interior (izquierda) y exterior (derecha)

Sin embargo, las funciones de geometría de arrastre de fluido se han de ver modificadas en la interpretación física del caudal de fugas entre caras laterales debido al arrastre de fluido.

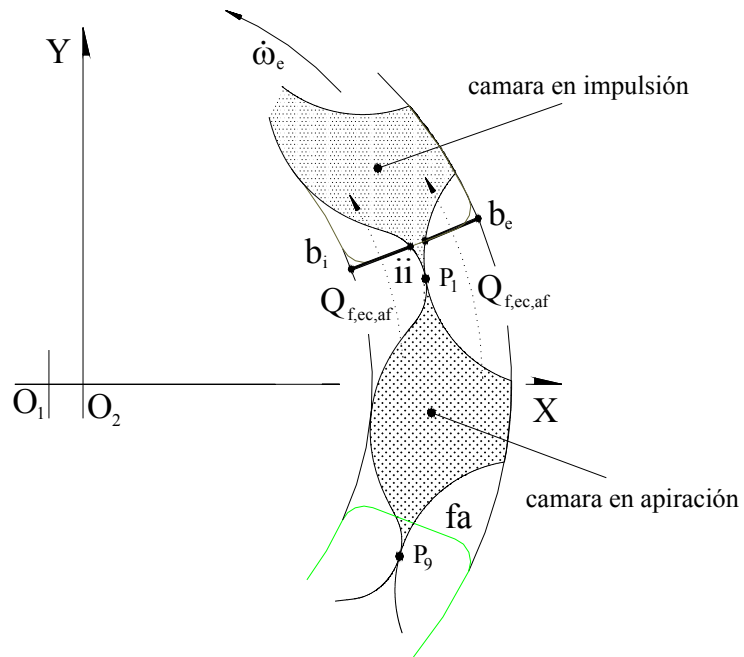


Figura 5.41. Modificación de la función de geometría de arrastre de fluido

Para entenderlo mejor, se presenta la Figura 5.41. Para una posición determinada del engranaje respecto la de referencia, el punto de contacto P_1 se encuentra en las fronteras de circulación de fluido de final de aspiración (fa) e inicio de la impulsión (ii). De esta forma, el punto de contacto P_1 establece la separación de la zona de la lumbrera de impulsión de la zona de la lumbrera de aspiración. El caudal de fugas entre caras laterales debido al arrastre de fluido circula desde la zona de la lumbrera de aspiración a la zona de la lumbrera de impulsión. Sin embargo, si se analiza el punto de contacto P_9 , éste no establece ninguna separación entre la zona de la lumbrera de impulsión de la zona de la lumbrera de aspiración. Es así, ya que la cámara se encuentra en aspiración. Por tanto, en la frontera de circulación de fluido de final de la aspiración no se establece caudal de fugas entre caras laterales debido al arrastre de fluido. De igual forma sucede con el punto de contacto P_2 , el cual no establece ninguna separación entre la zona de la lumbrera de impulsión de la zona de la lumbrera de aspiración ya que la cámara se encuentra en impulsión. Igual razonamiento puede ser realizado para las fronteras de circulación de fluido de final de la impulsión (fi) e inicio de la aspiración (ia).

De la explicación expuesta, se concluye que las funciones de geometría de arrastre de fluido para ambas ruedas dentadas sólo tienen sentido físico para el caudal de fugas entre caras laterales debido al arrastre de fluido cuando el punto de contacto se encuentra:

- Entre las fronteras de circulación de fluido de final de la aspiración (fa) e inicio de la impulsión (ii)
- Entre las fronteras de circulación de fluido de final de la impulsión (fi) e inicio de la aspiración (ia)

Estas **modificaciones para la rueda dentada interior** quedan definidas mediante la siguiente relación condicional:

9.[i*,af] Relaciones condicionales que se deben cumplir,

- a. SI se cumple que $(\eta_{ii,1} > \chi_{pc,1})$ entonces se calcula la función de geometría de arrastre de fluido de la rueda dentada interior b_i ,

$$b_i = O_1 f_{ii,1} - R_{ii} \quad (5.78)$$

- b. SI se cumple que $(\eta_{ii,1} \leq \chi_{pc,1})$ entonces la función de geometría de arrastre de fluido de la rueda dentada interior b_i vale,

$$b_i = 0 \quad (5.83)$$

Estas **modificaciones para la rueda dentada exterior** quedan definidas mediante la siguiente relación condicional:

7.[e*,af] Relaciones condicionales que se deben cumplir,

- a. SI se cumple que $(\eta_{ii,2} > \chi_{pc,2})$ entonces la función de geometría de arrastre de fluido de la rueda dentada exterior b_e vale,

$$b_e = G - O_2 f_{ii,2} \quad (5.81)$$

- b. SI se cumple que $(\eta_{ii,2} \leq \chi_{pc,2})$ entonces se calcula la función de geometría de arrastre de fluido de la rueda dentada exterior b_e vale,

$$b_e = 0 \quad (5.84)$$

Hasta este punto, se ha expuesto la metodología para el cálculo de la parte de las funciones modificadas de geometría de arrastre de fluido de las ruedas dentadas interior y exterior con la interacción con la frontera de circulación del fluido de inicio de la impulsión (ii). Para el cálculo del resto de las funciones modificadas de geometría de arrastre de fluido de las ruedas dentadas interior y exterior con la interacción con las fronteras de circulación de fluido de fin de la impulsión (fi), inicio de la aspiración (ia) y fin de la aspiración (fa) se procede con la misma metodología expuesta, sólo que actualizando los valores de las variables correspondientes.

Las funciones de geometría de arrastre de fluido se presentan en la Figura 5.42.

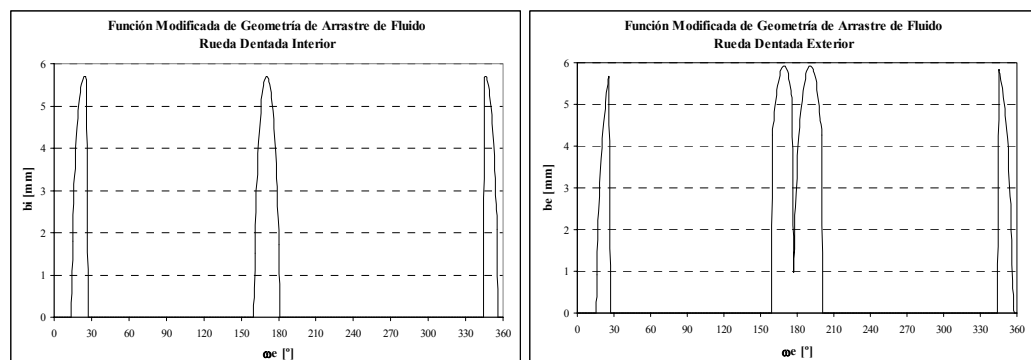


Figura 5.42. Función modificada de geometría de arrastre de fluido de la rueda dentada interior (izquierda) y exterior (derecha)

5.8.2.3 Simulación Caudal de Fugas entre las Caras Laterales de las Ruedas Dentadas y Cuerpo de la Bomba

Finalmente, el caudal de fugas entre las caras laterales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba para una rotación completa de la rueda dentada exterior puede ser evaluado mediante la ecuaciones (5.49) para el caudal de fugas entre caras laterales debido al gradiente de presión entre cámaras y la ecuación (5.76) para el caudal de fugas entre caras laterales debido al arrastre de fluido entre cámaras, deducidas anteriormente. Así,

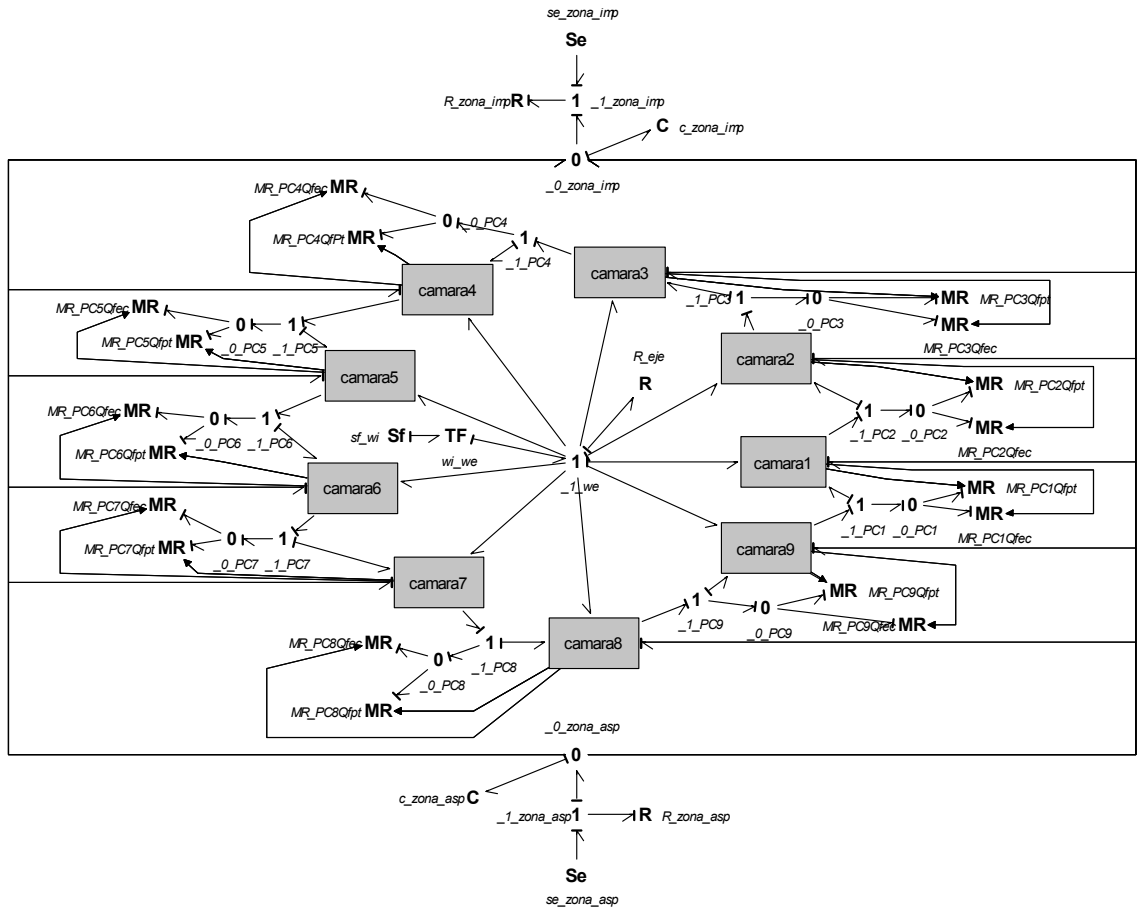
$$Q_{f,ec} = 2Q_{f,ec,gp,i} + 2Q_{f,ec,gp,e} + 2Q_{f,ec,af,i} + 2Q_{f,ec,af,e} \quad (5.85)$$

donde,

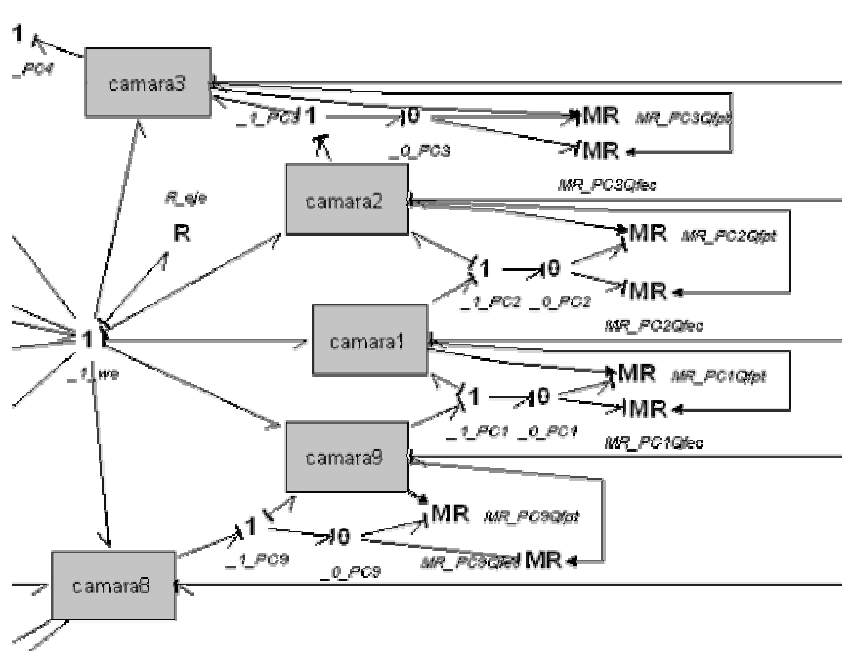
- $Q_{f,ec}$ es el caudal total de fugas entre las caras laterales de las ruedas dentadas interior y exterior y el cuerpo de la bomba
- $Q_{f,ec,gp,i}$ es el caudal de fugas entre una cara lateral de la rueda dentada interior y el cuerpo de la bomba debido al gradiente de presión entre cámaras
- $Q_{f,ec,gp,e}$ es el caudal de fugas entre una cara lateral de la rueda dentada exterior y el cuerpo de la bomba debido al gradiente de presión entre cámaras
- $Q_{f,ec,af,i}$ es el caudal de fugas entre una cara lateral de la rueda dentada interior y el cuerpo de la bomba debido al arrastre de fluido
- $Q_{f,ec,af,e}$ es el caudal de fugas entre una cara lateral de la rueda dentada exterior y el cuerpo de la bomba debido al arrastre de fluido
- y cada fuga es multiplicada por dos ya que cada rueda dentada tiene dos caras

Llegados a este punto, se puede dar un paso más para completar el modelo fluidodinámico real de la bomba gerotor. Teniendo presente la geometría del engranaje de perfiles trocoidales (Figura 5.1), la geometría de la carcasa o cuerpo de la bomba (Figura 5.8), el principio del caudal de fugas entre los perfiles trocoidales (Figura 5.19) y el principio de caudal de fugas entre las caras laterales de los perfiles trocoidales y el cuerpo de la bomba, los elementos de BondGraph que modelizan la fluidodinámica real de la bomba gerotor, que incorpora el caudal de fugas entre las caras laterales de los perfiles trocoidales y el cuerpo de la bomba, se presenta en BondGraph 5.6 y un detalle en BondGraph 5.7.

Partiendo del modelo de simulación fluidodinámica real de la bomba gerotor anterior (BondGraph 5.5), se deberá agregar y conexionar a los submodelos de la cámaras los nuevos submodelos de los caudales de fugas entre las caras de los perfiles trocoidales de las ruedas y el cuerpo de la bomba ($Q_{f,ec}$). El nuevo modelo de BondGraph presenta los 9 submodelos de cámara conexicionados entre sí por su nivel superior en los elementos descritos en la Tabla 3, Tabla 4 y Tabla 5. Los nuevos submodelos y elementos de BondGraph que modelizan el caudal de fugas entre perfiles trocoidales se presentan en la Tabla 6.



BondGraph 5.6. Modelo fluidodinámico real de la bomba gerotor que incorpora el caudal de fugas entre las caras laterales de los perfiles trocoidales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba



BondGraph 5.7. Detalle del modelo fluidodinámico real de la bomba gerotor que incorpora el caudal de fugas entre las caras laterales de los perfiles trocoidales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba

Concepto	Símbolo	Denom.	Variable Entrada	Variable Salida	Representa
<i>Balace de caudales en el punto de contacto P_k ($k=1..Z-1$)</i>	0 $_0_PCk$	Nodo "0" $Q_{MR_PCk-1_PCk} = Q_{f,pt(k)}$	Caudal $Q_{MR_PCkQfpt-0_PCk}$ $Q_{MR_PCkQfec-0_PCk}$	Presiones P_{0_PCk-} $MR_PCkQfpt$ P_{0_PCk-} $MR_PCkQfec$	Sumatorio de caudales igual a cero y presión igual
			Presión $P_{1_PCk-0_PCk}$	Diferencia Caudales $\Delta Q = Q_{MR_PCkQfpt} - Q_{MR_PCkQfec}$	
<i>Caudal a través del huelgo entre perfiles trocoidales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba en el punto de contacto P_k ($k=1..Z-1$)</i>	MR $MR_PCkQfec$	Resistencia Modulada	Presión P_{0_PCk-} $MR_PCkQfec$	Caudal $Q_{MR_PCkQfec-0_PCk} = Q_{f,ec(k)}$	Resistencia al flujo del fluido a través del huelgo entre las caras de los perfiles trocoidales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba y al movimiento relativo entre piezas con arrastre de fluido

Tabla 6. Correspondencia física del modelo fluidodinámico real de la bomba gerotor que incorpora el caudal de fugas entre las caras de los perfiles trocoidales de las ruedas dentadas y cuerpo de bomba por elementos BondGraph

En la Figura 5.43 se muestra la simulación.

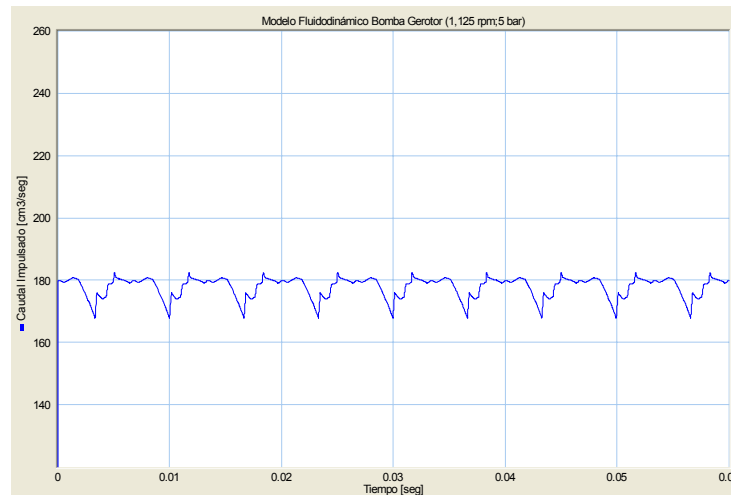


Figura 5.43. Simulación del caudal impulsado por la bomba gerotor incluyendo el caudal de fugas entre las caras de los perfiles trocoidales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba del modelo fluidodinámico real para velocidad del giro de la rueda dentada interior de 1,125 rpm y presión de impulsión 5 bar

5.8.3 Modelo de Caudal de Fugas Directas e Indirectas a la Zona de Aspiración

Las mismas tolerancias de fabricación entre engranaje trocoidal y cuerpo de la bomba, dispone de unas vías de flujo que evacuan directamente en dirección radial al colector de drenaje e indirectamente a través del perímetro exterior de la corona desde la lumbrera de la zona de impulsión a la de aspiración.

El primer caudal de fugas en estudio en este apartado se produce de forma directa desde la zona específica de la lumbrera de impulsión en dirección radial al drenaje a través del huelgo entre piñón y cuerpo de la bomba, donde R_c es el radio del orificio de la tapa del cuerpo de la bomba, tal y como se muestra en la Figura 5.44.

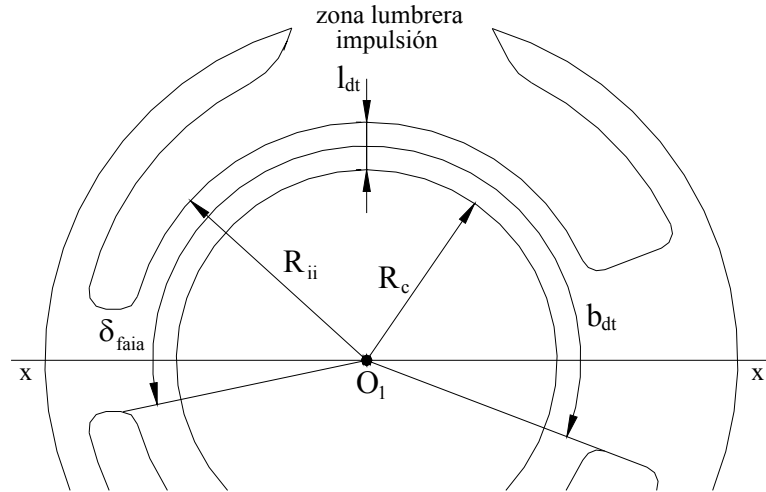


Figura 5.44. Pasaje de fugas directas a tanque

El caudal de fugas directo a tanque ($Q_{f,dt}$) puede expresarse como,

$$Q_{f,dt} = \frac{h_{ec}^3}{12\mu} \frac{b_{dt}}{l_{dt}} (P_{z,imp} - P_{z,asp}) \quad (5.86)$$

donde h_{ec} es la altura del pasaje entre las caras de las ruedas dentadas con el cuerpo de la bomba, b_{dt} es la anchura y l_{dt} es la longitud del pasaje entre las zonas con presión $P_{z,imp}$, que es la presión en la zona de la lumbrera de impulsión, y con presión $P_{z,asp}$, que es la presión en la zona de la lumbrera de aspiración, y μ es la viscosidad dinámica del fluido. La geometría de la anchura y la longitud del pasaje se pueden calcular como,

$$\begin{aligned} l_{dt} &= R_{ii} - R_c \\ b_{dt} &= \left(\frac{R_{ii} - R_c}{2} + R_c \right) \delta_{faia} \end{aligned} \quad (5.87)$$

El segundo caudal de fugas en estudio en este apartado se produce de forma indirecta desde la zona específica de la lumbrera de impulsión a la zona específica de la lumbrera de aspiración a través del huelgo entre el espesor del engranaje (corona) y el cuerpo de la bomba que lo aloja, tal y como se muestra en la Figura 5.45.

El caudal de fugas del espesor del engranaje ($Q_{f,ee}$) puede expresarse como,

$$Q_{f,ee} = \frac{h_{ee}^3}{12\mu} \frac{H}{(l_{ee} + l'_{ee})} (P_{z,imp} - P_{z,asp}) \quad (5.88)$$

donde h_{ee} es huelgo entre el espesor del engranaje y el cuerpo de la bomba que lo aloja, H es el

espesor del engranaje, l_{ee} y l'_{ee} son la longitud del pasaje entre las zonas con presión $P_{z,imp}$, que es la presión en la zona de la lumbrera de impulsión, y con presión $P_{z,asp}$, que es la presión en la zona, y μ es la viscosidad dinámica del fluido.

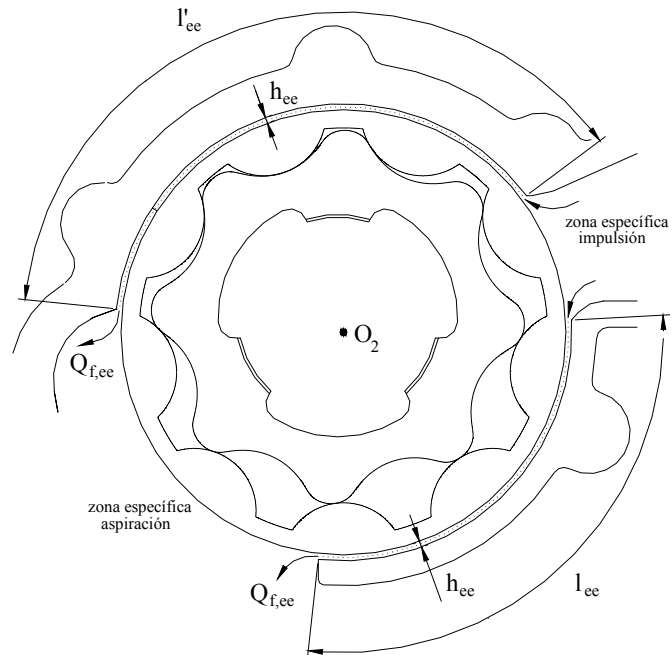
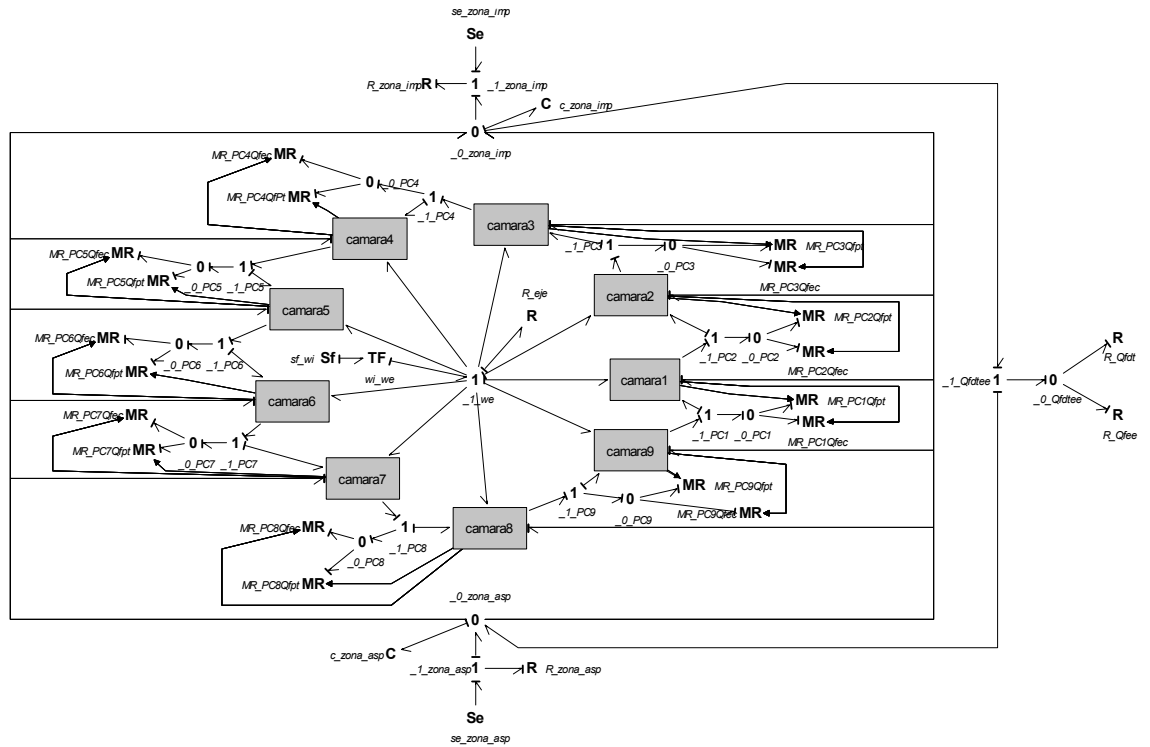


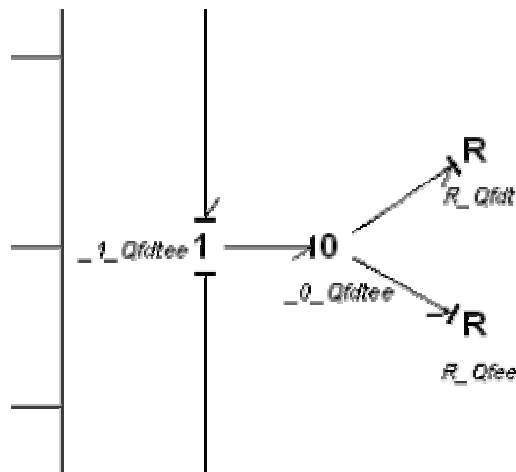
Figura 5.45. Pasaje de fugas del espesor del engranaje

5.8.3.1 Simulación Caudal de Fugas Directas e Indirectas a la Zona de Aspiración

De nuevo, llegados a este punto, se puede dar un paso más para completar el modelo fluidodinámico real de la bomba gerotor. Teniendo presente la geometría del engranaje de perfiles trocooidales (Figura 5.1), la geometría de la carcasa o cuerpo de la bomba (Figura 5.8), el principio del caudal de fugas entre los perfiles trocooidales (Figura 5.19), el principio de caudal de fugas entre las caras laterales de los perfiles trocooidales y el cuerpo de la bomba, el caudal de fugas directas a tanque (Figura 5.44) y el caudal de fugas de espesor de engranaje (Figura 5.45), los elementos de BondGraph que modelizan la fluidodinámica real de la bomba gerotor, que incorpora el caudal de fugas entre las caras laterales de los perfiles trocooidales y el cuerpo de la bomba, se presenta en BondGraph 5.6 y un detalle en BondGraph 5.7.



BondGraph 5.8. Modelo fluidodinámico real de la bomba gerotor que incorpora el caudal de fugas directo a tanque y de espesor de engranaje



BondGraph 5.9. Detalle modelo fluidodinámico real de la bomba gerotor que incorpora el caudal de fugas directo a tanque y de espesor de engranaje

Partiendo del modelo de simulación fluidodinámica real de la bomba gerotor anterior (BondGraph 5.6), se deberá agregar y conexionar a los submodelos de la cámaras los nuevos submodelos de caudal de fugas directo a tanque ($Q_{f,dt}$) y caudal de fugas de espesor de engranaje ($Q_{f,ee}$). El nuevo modelo de BondGraph presenta los 9 submodelos de cámara conexionados entre sí por su nivel superior en los elementos descritos en la Tabla 3, Tabla 4, Tabla 5 y Tabla 6. Los nuevos submodelos y elementos de BondGraph que modelizan el caudal de fugas entre perfiles trocoidales se presentan en la Tabla 7.

Concepto	Símbolo	Denom.	Variable Entrada	Variable Salida	Representa
<i>Balance de presiones entre la zona de impulsión y la zona de aspiración</i>	1 $_{1_Qfdtee}$	Nodo "1"	Caudal $Q_{0_Qfdtee-1_Qfdtee}$	Caudales $Q_{0_Qfdtee-0_zona_imp}$ $Q_{0_Qfdtee-0_zona_asp}$	Sumatorio de presiones igual a cero y caudal igual
			Presiones $P_{0_zona_imp-1_Qfdtee}$ $P_{0_zona_asp-1_Qfdtee}$	Diferencia Presión $\Delta P = P_{0_zona_imp} - P_{0_zona_asp}$	
<i>Balance de caudales en el punto de contacto P_k ($k=1..Z-1$)</i>	0 $_{0_Qfdtee}$	Nodo "0" $Q_{MR_Pck-1_Pck} = Q_{f,pt(k)}$	Caudal $Q_{R_Qfdt-0_Qfdtee}$ $Q_{R_Qfee-0_Qfdtee}$	Presiones $P_{0_Qfdtee-R_Qfdt}$ $P_{0_Qfdtee-R_Qfee}$	Sumatorio de caudales igual a cero y presión igual
			Diferencia Presión $\Delta P = P_{0_zona_imp} - P_{0_zona_asp}$	Diferencia Caudales $\Delta Q = Q_{R_Qfdt-0_Qfdtee} - Q_{R_Qfee-0_Qfdtee}$	
<i>Caudal a través del huelgo entre perfiles trocoidales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba directo a tanque</i>	R R_Qfdt	Resistencia	Presión $P_{0_Qfdtee-R_Qfdt}$	Caudal $Q_{R_Qfdt-0_Qfdtee}$	Resistencia al flujo del fluido a través del huelgo entre las caras de los perfiles trocoidales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba
<i>Caudal a través del huelgo entre el espesor del engranaje y la zonas de impulsión y aspiración</i>	R R_Qfee	Resistencia	Presión $P_{0_Qfdtee-R_Qfee}$	Caudal $Q_{R_Qfee-0_Qfdtee}$	Resistencia al flujo del fluido a través del huelgo entre el espesor del engranaje y el cuerpo de la bomba

Tabla 7. Correspondencia física del modelo fluidodinámico real de la bomba gerotor que incorpora el caudal de fugas entre las caras de los perfiles trocoidales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba directo a tanque y el caudal de fugas de espesor de engranaje por elementos BondGraph

En la Figura 5.46 se muestra la simulación.

PARTE C

5.9 MODELO FLUIDODINÁMICO REAL COMPLETO DE LA BOMBA GEROTOR. SIMULACIÓN DE CAUDALES DE FUGAS TOTAL

Finalmente, el caudal de fugas total de la bomba gerotor engloba los caudales de fugas anteriormente desarrollados,

$$Q_{f,total} = Q_{f,pt} + Q_{f,ec,gd} + Q_{f,ec,af} + Q_{f,dt} + Q_{f,ee} \quad (5.89)$$

donde,

- $Q_{f,total}$ es el caudal total de fugas del modelo fluidodinámico real de la bomba gerotor
- $Q_{f,pt}$ es el caudal de fugas entre los perfiles trocoidales durante el engrane
- $Q_{f,ec,gd}$ es el caudal de fugas entre las caras laterales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba debido al gradiente de presión entre cámaras
- $Q_{f,ec,af}$ es el caudal de fugas entre las caras laterales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba debido al arrastre de fluido
- $Q_{f,dt}$ es el caudal de fugas entre las caras laterales de las ruedas dentadas y el cuerpo de la bomba directo a tanque
- $Q_{f,ee}$ es el caudal de fugas entre el espesor del engranaje y el cuerpo de la bomba

Los resultados del modelo de simulación fluidodinámico real de la bomba gerotor se muestra en la Figura 5.46 y Figura 5.47.

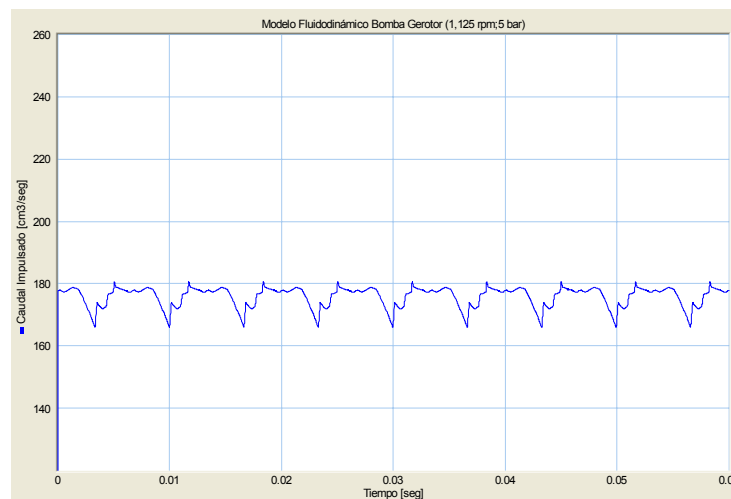


Figura 5.46. Simulación del caudal impulsado por la bomba gerotor incluyendo todas las fugas

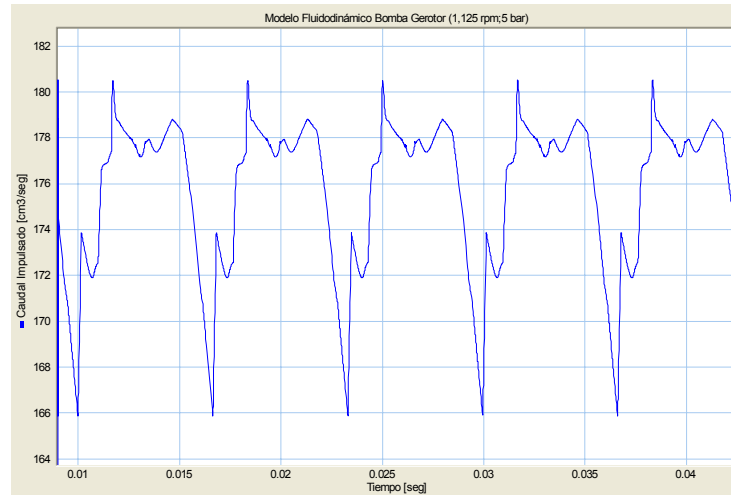


Figura 5.47. Zoom de las pulsaciones de caudal correspondientes a la bomba gerotor “real”

Con este capítulo se da por finalizada la descripción del modelo de simulación dinámica y la metodología correspondiente para evaluar las prestaciones fluidomecánicas (caudal instantáneo, pulsaciones de caudal, etc.) de una bomba gerotor “real”.