

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

**UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
PARA ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE
ESTRUCTURAS NAVALES**

Autor: Julio García Espinosa
Director: Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra
Codirector: Honorio Sierra Cano

Índice General

Notación	xv
Agradecimientos	xix
Introducción	xxi
0.1 El Proyecto del Buque	xxi
0.2 La Resistencia al Avance del Buque	xxii
0.3 Sobre el Desarrollo de los Métodos CFD	xxiv
0.4 Los Códigos CFD en el Proyecto del Buque	xxv
0.4.1 Los Ensayos en Canal de Experiencias	xxvi
0.4.2 Los CFD como Herramienta de Diseño	xxxii
0.5 Objetivos del Presente Trabajo	xxxvi
0.5.1 Una Herramienta CFD para el Diseño en Ingeniería Naval	xl
0.5.2 Organización del Presente Trabajo	xlii
1 Las Ecuaciones de Navier Stokes	1
1.1 Introducción	1
1.2 Las Ecuaciones de Navier Stokes para Flujo Incompresible	2
1.2.1 Las Ecuaciones de Euler	3
1.2.2 Aproximación por el método de Galerkin	4
1.2.3 La Restricción de Incompresibilidad	6
1.2.4 La Problemática de la Convección	7
1.2.5 Existencia y unicidad de solución	8
1.3 Conclusiones	10
2 El Problema de la Superficie Libre	11
2.1 Introducción	11
2.2 La Condición de Contorno de Superficie Libre	14
2.2.1 Formulación <i>ALE</i> de la Superficie Libre	16
2.2.2 Forma Simplificada de las Ecuaciones de Superficie Libre	17

2.2.3	Condición de Superficie Libre para Buques Lentos . . .	19
2.2.4	Ecuación de Superficie Libre Lineal	20
2.2.5	Métodos Iterativos para la Resolución del Problema de Superficie Libre no Lineal	22
2.2.6	Comentarios sobre la Integración de la Ecuación de Superficie Libre	28
2.3	El Problema de Convección Difusión	29
2.3.1	El Problema Unidimensional de Convección Difusión .	31
2.3.2	El Método de Cálculo Finitesimal	38
2.3.3	El Problema Multidimensional de Convección Difusión	42
2.3.4	Aplicación del Método de los Elementos Finitos al Problema Estabilizado	48
2.3.5	Determinación de las Longitudes Características	50
2.3.6	Esquemas Estabilizados de Mayor Orden	58
2.3.7	Esquemas Estabilizados en el Tiempo	59
2.4	El Problema de Convección Pura	61
2.5	El Método de Estabilización de Dawson	65
2.6	Extensión del Método <i>CF</i> a otros Problemas de Mecánica de Fluidos	69
2.7	Ejemplos	70
2.7.1	Ejemplo 1	71
2.7.2	Ejemplo 2	72
2.7.3	Ejemplo 3	74
2.8	Conclusiones	76
3	Ecuaciones de Navier Stokes Estabilizadas.	
	El Método de Pasos Fraccionados	79
3.1	Introducción	79
3.2	Formulación Estabilizada de las Ecuaciones de Navier Stokes .	81
3.3	Formulación <i>ALE</i> de las Ecuaciones de Navier Stokes	85
3.4	El Algoritmo de Pasos Fraccionados Semi Implícito	88
3.4.1	Aplicación a las Ecuaciones de Navier Stokes Estabilizadas mediante Cálculo Finitesimal	92
3.4.2	Discretización del Problema usando el Método de los Elementos Finitos	94
3.4.3	Determinación de las Longitudes Características	101
3.4.4	El Fenómeno de la Turbulencia	105
3.5	Ejemplos	119
3.5.1	Ejemplo 1	119
3.5.2	Ejemplo 2	123
3.5.3	Ejemplo 3	125

3.6	Conclusiones	132
4	Un Algoritmo para la Deformación de Mallas de Elementos Finitos	133
4.1	Introducción	133
4.2	Un Algoritmo para la Deformación Uniforme de Mallas	134
4.3	Asignación de las Propiedades Mecánicas	135
4.4	Un Algoritmo para la Deformación Uniforme de Mallas	136
4.5	Aplicación a Cuerpos Semisumergidos	138
4.6	Un Algoritmo Iterativo para la Deformación de Mallas de Elementos Finitos	143
4.7	Ejemplos	145
4.7.1	Ejemplo 1	145
4.7.2	Ejemplo 2	148
4.7.3	Ejemplo 3	149
4.8	Conclusiones	152
5	Un Método para Análisis Hidrodinámico de Buques	155
5.1	Introducción	155
5.2	Un Método Estabilizado para Análisis Hidrodinámico de Buques	156
5.2.1	Cálculo del Incremento de Tiempo	167
5.2.2	Solución con Incremento de Tiempo Local	169
5.2.3	La Condición de Superficie Libre sobre Referencias no Planas	170
5.2.4	Condición Absorbente para la Superficie Libre	171
5.2.5	La Problemática de las Popas de Espejo	174
5.3	Un Generador de Olas Numérico	177
5.4	Ejemplos	179
5.4.1	Ejemplo 1	180
5.4.2	Ejemplo 2	194
5.4.3	Ejemplo 3	197
5.4.4	Ejemplo 4	201
5.4.5	Ejemplo 5	212
5.4.6	Ejemplo 6	214
5.4.7	Ejemplo 7	217
6	Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación	221
A	Los Métodos de Elementos de Contorno	237
A.0.8	MÉTODO DE HESS Y SMITH	240
A.0.9	LA CONDICIÓN DE SUPERFICIE LIBRE	242

B El Método de Galerkin Aplicado a la Ecuación de Convección Difusión	245
C Ecuación de Convección Difusión que Resuelve el Método de Galerkin	251
D Estudio de la Ecuación Unidimensional Modificada de Convección Difusión	255
E Ecuación de Convección Difusión Modificada Óptima	263
F La Condición de Superficie Libre de Dawson	267
G La Ecuación de Balance de Masa Estabilizada	275
H Condición de Contorno Estabilizada para la Ecuación de Convección Difusión	279
I Balance Estabilizado de Cantidad de Movimiento en el Contorno	283
J Derivación de las Ecuaciones de Navier Stokes estabilizadas	289
K Balance de Masa Cerca de un Contorno tipo Dirichlet	297
L Un Procedimiento para el Cálculo de los Parámetros de Estabilización	301

Índice de Figuras

0.1	Esquema de un sistema de medición de la resistencia al avance en el ensayo de remolque en aguas tranquilas.	xxvii
0.2	Esquema de un sistema óptico de medición de perfiles de olas en un canal de ensayos.	xxix
0.3	Esquema de un sistema óptico de medición de estelas en un canal de ensayos	xxx
0.4	Ensayo de un modelo en tanque de olas.	xxxix
0.5	Ensayo de maniobrabilidad con modelo en un lago.	xxxix
0.6	Ensayo de una hélice en tanque de cavitación.	xxxix
0.7	Ciclo de diseño de un buque asistido por herramientas <i>CFD</i>	xxxiii
2.1	Esquema de la disposición de las superficies η y η_{ref}	26
2.2	Problema de convección difusión unidimensional.	32
2.3	Balance en un dominio finito AB.	33
2.4	Gráfico de $\varphi(x)$ para $l = 10$, $d = 1$	35
2.5	Dominio de balance para el problema bidimensional de convección difusión.	43
2.6	Descomposición vectorial de \mathbf{h}	55
2.7	Ejemplo 1. Problema bidimensional de convección difusión con condiciones de contorno tipo Dirichlet no uniformes. La malla utilizada para el cálculo es no estructurada y tiene 812 triángulos lineales.	71
2.8	Resultado de contornos de φ obtenidos aplicando el método clásico de Galerkin al ejemplo 2 (izquierda). A la derecha puede verse la solución del mismo problema aplicando el método <i>CF</i>	72
2.9	Comparación de los resultados obtenidos para el ejemplo 1 utilizando la metodología <i>CF</i> y <i>SUPG</i>	73
2.10	Ejemplo 2. Problema bidimensional de convección difusión con condiciones de contorno tipo Dirichlet y Neumann. La malla utilizada para el cálculo es estructurada y tiene 800 triángulos lineales.	73

2.11	Resultado de contornos de φ obtenidos aplicando al ejemplo 2, el método clásico de Galerkin (izquierda) y el método <i>CF</i> (derecha).	74
2.12	Comparación de los resultados obtenidos para el ejemplo 2 utilizando la metodología <i>CF</i> y <i>SUPG</i>	75
2.13	Ejemplo 3. Problema bidimensional de convección difusión no homogéneo con condiciones de contorno tipo Dirichlet. La malla utilizada para el cálculo es estructurada y tiene 800 triángulos lineales.	75
2.14	Resultado de contornos de φ obtenidos aplicando al ejemplo 3, el método clásico de Galerkin (izquierda) y el método <i>CF</i> (derecha).	76
2.15	Gráfica de la solución del ejemplo 3 en un corte diagonal del dominio.	77
3.1	Dominio de balance finito (tetraedro elemental).	82
3.2	Descomposición vectorial del vector \mathbf{h}_{m_i}	103
3.3	Distribución de velocidad típica para una capa límite turbulenta.	115
3.4	Simplificación del problema para la condición de contorno para la ley de pared.	118
3.5	Flujo en una cavidad. Definición del problema.	120
3.6	Malla de contorno utilizada para el flujo en cavidad.	120
3.7	Vectores de velocidad y líneas de corriente del flujo en una cavidad.	121
3.8	Contornos de velocidad, sobre un corte diametral, del flujo en una cavidad (componente horizontal a la izquierda y vertical a la derecha).	121
3.9	Distribución de velocidad (componentes 0_x y 0_y) sobre la línea media horizontal del plano diametral en el flujo en una cavidad.	122
3.10	Distribución de la presión la línea media horizontal del plano diametral en el flujo en una cavidad.	122
3.11	Definición geométrica del problema del análisis de un perfil NACA 0012.	123
3.12	Malla tipo utilizada en el análisis del perfil NACA 0012.	124
3.13	Comparación de los valores experimentales y numéricos de la distribución de v^2/v_∞^2 en el perfil NACA 0012 con un ángulo de ataque de 0°	126
3.14	Distribución de presión en torno al perfil NACA 0012 (ángulo de ataque 5° , $R_n \rightarrow \infty$).	126
3.15	Vectores de velocidad sobre el perfil NACA 0012 (ángulo de ataque 5° , $\mu = 0$).	127



3.16	Distribución de presión en torno al perfil NACA 0012 (ángulo de ataque 5° , $R_n = 10^6$).	127
3.17	Comparación de los resultados numéricos y experimentales de empuje dinámico obtenidos en el análisis del perfil NACA 0012 ($R_n \rightarrow \infty$).	128
3.18	Geometría utilizada en el análisis del flujo ante un escalón.	128
3.19	Malla de contorno utilizada en el análisis del flujo sobre un escalón.	129
3.20	Distribución de la componente Ox de la velocidad en el análisis del flujo ante un escalón.	130
3.21	Trazado de líneas de corriente del flujo ante un escalón. Se incluye detalle de la recirculación en la zona cercana al escalón.	130
3.22	Detalle del resultado sobre el plano diametral del análisis del flujo ante un escalón.	131
4.1	Deformación del volumen de análisis debido al movimiento de los contornos.	135
4.2	Problema de un cuerpo semisumergido.	139
4.3	Esquema del algoritmo de proyección de mallas superficiales.	140
4.4	Método para evaluar la deformación de la línea de flotación.	142
4.5	Definición CAD del problema de una esfera móvil sumergida enfrentada a una corriente uniforme.	146
4.6	Posición de la esfera y la malla en diferentes instantes de tiempo (de izquierda a derecha y de arriba a abajo $t = 0.47$, $t = 0.94$, $t = 1.83$, $t = 3.16$).	146
4.7	Evolución del módulo de la velocidad con el movimiento de la esfera en diferentes instantes de tiempo (de izquierda a derecha y de arriba a abajo $t = .47$, $t = .92$, $t = 1.10$, $t = 1.32$, $t = 1.67$, $t = 2.01$, $t = 2.43$, $t = 4.83$, $t = 6.16$, $t = 8.18$, $t = 12$, 35 , $t = 15$, 65).	147
4.8	Deformación de la superficie libre amplificada 10 veces en los instantes de tiempo $t_1 = 0.47s$ y $t_2 = 3.16s$	148
4.9	Evolución del movimiento de la esfera con el tiempo.	148
4.10	Definición CAD del problema de una esfera que cae libremente en un cilindro vertical lleno de líquido.	149
4.11	Evolución de la caída de la esfera en la probleta. Se muestran los contornos del módulo de la deformación de la malla.	150
4.12	Contornos del módulo de la velocidad en diferentes instantes de la caída de la esfera.	151
4.13	Evolución de la velocidad de caída de la esfera comparada con la velocidad experimental (1.95 m/s).	151



4.14	Definición CAD utilizada para el problema de un cilindro vertical enfrentado a una corriente uniforme.	152
4.15	Contornos del módulo de la velocidad sobre la superficie libre del problema del cilindro vertical para $t = 10.5s$	153
4.16	Contornos del módulo de la deformación de la malla sobre el contorno, en el problema del cilindro vertical, para $t = 10.5s$	153
5.1	Definición del problema de análisis de flujo fluido alrededor de un buque.	156
5.2	Esquema general del algoritmo de resolución del problema.	158
5.3	Disposición esquemática de las zonas donde se impone el amortiguamiento en la superficie libre.	173
5.4	Esquemas de los posibles regímenes de flujo que pueden aparecer en una popa de espejo.	175
5.5	Diferentes zonas que se presentan en la superficie libre con popas de espejo.	176
5.6	Situación de la zona donde es necesario prescribir η en los flujos con popa de espejo.	176
5.7	Efecto de una perturbación fija sobre la superficie libre.	177
5.8	Efecto de una perturbación móvil sobre la superficie libre.	178
5.9	Esquema de un generador de olas numérico, consistente en la imposición de una presión oscilatoria sobre la superficie libre.	179
5.10	Geometría utilizada en el análisis del modelo de la serie 60 con $C_b = 0.6$	181
5.11	Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del buque de la serie 60 ($F_n = 0.316$).	182
5.12	Comparación de los resultados del perfil de olas sobre el casco del buque de la serie 60 ($F_n = 0.316$).	183
5.13	Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia $y/L_{pp} = 0.0755$ del plano de crujía, en el análisis del buque de la serie 60 ($F_n = 0.316$).	183
5.14	Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia $y/L_{pp} = 0.2067$ del plano de crujía, en el análisis del buque de la serie 60 ($F_n = 0.316$).	184
5.15	Instantáneas del proceso de convergencia de la solución de las olas creadas por el modelo de la serie 60 ($F_n = 0.316$).	184
5.16	Gráfica del coeficiente de resistencia por formación de olas del modelo de la serie 60. Los resultados numéricos, obtenidos con una malla de 27000 nodos, se comparan con los extraídos de los experimentos según las recomendaciones de la ITTC.	185

5.17	Gráfica del coeficiente de resistencia por formación de olas del modelo de la serie 60. Los resultados numéricos, obtenidos con una malla de 95000 nodos, se comparan con los extraídos de los experimentos según las recomendaciones de la ITTC.	186
5.18	Mapa de olas del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$	187
5.19	Líneas de corriente en torno a la popa del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$	187
5.20	Perspectiva de las líneas de corriente en torno a la popa del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$	188
5.21	Líneas de corriente en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$	188
5.22	Contornos del módulo de la velocidad sobre la superficie libre del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$	189
5.23	Contornos de la componente según Ox de la velocidad del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$	189
5.24	Mapa de olas del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 10^9$ y $F_n = 0.238$	190
5.25	Líneas de corriente en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 10^9$ y $F_n = 0.238$	191
5.26	Contornos del módulo de la velocidad en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 10^9$ y $F_n = 0.238$	191
5.27	Contornos de presión en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 10^9$ y $F_n = 0.238$. La superficie libre transparente permite ver las líneas de corriente trazadas en torno al buque.	192
5.28	Contornos del módulo de la velocidad en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 6.5 \cdot 10^8$ y $F_n = 0.16$	193
5.29	Geometría utilizada en el análisis de la carena HSDF04.	195
5.30	Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia $y/L_{pp} = 0.505$ del plano de crujía, en el análisis de la carena HSDF04 ($F_n = 0.45$).	195
5.31	Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia $y/L_{pp} = 0.60$ del plano de crujía, en el análisis de la carena HSDF04 ($F_n = 0.45$).	196
5.32	Mapa de olas resultado del análisis de la carena HSDF04 ($F_n = 0.45$)	196

5.33	Isocontornos de altura de olas, resultado del análisis de la carena HSDF04 ($F_n = 0.45$)	197
5.34	Curva de resistencia por formación de olas de la fragata. Se indica en rayado la zona donde experimentalmente se observó que el espejo comenzaba a estar mojado.	198
5.35	Contornos de velocidad sobre la carena HSDF04 para $F_n = 0.45$. 198	
5.36	Trazado de líneas de corriente en torno al casco de la fragata ($F_n = 0.4$).	199
5.37	Trazado de líneas de corriente en torno al bulbo de la fragata ($F_n = 0.4$).	199
5.38	Definición geométrica (CAD) de un submarino y malla de superficie utilizada en el análisis.	200
5.39	Análisis de la firma de presión del submarino. Líneas isobaras en diferentes instantes de tiempo.	201
5.40	Diferentes imágenes del análisis de la firma rádar de un submarino en situación de ataque.	202
5.41	Definición geométrica del modelo Wigley.	203
5.42	Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del modelo Wigley ($F_n = 0.266$). 203	
5.43	Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del modelo Wigley ($F_n = 0.316$). 204	
5.44	Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del modelo Wigley ($F_n = 0.452$). 205	
5.45	Mapa de olas resultado del análisis del modelo Wigley (trincado). 207	
5.46	Contornos del módulo de velocidad sobre la obra viva y la superficie libre del modelo Wigley (trincado).	207
5.47	Deformación de la malla del modelo wigley (libre) en las cercanías del casco.	208
5.48	Malla de la superficie mojada resultante del análisis del modelo Wigley (libre).	208
5.49	Contornos del módulo de velocidad sobre la superficie libre del modelo Wigley (libre).	209
5.50	Mapa de olas resultado del análisis del modelo Wigley (libre). La altura se ha amplificado por un factor de 4.	209
5.51	Contornos del módulo de velocidad sobre la obra viva y la superficie libre del modelo Wigley (libre). También puede verse el trazado de algunas líneas de corriente.	210
5.52	Contornos de presión resultado del análisis del modelo Wigley (libre). En la imagen, la superficie libre se transparenta, dejando a la vista la obra viva y algunas líneas de corriente trazadas.	211

5.53	Comparación de los perfiles de ola obtenidos en el análisis numérico (con modelo trincado y libre) con los experimentales disponibles.	212
5.54	Definición geométrica del modelo Snowdrift.	213
5.55	Imágenes de la evolución de la ola regular generada (a).	213
5.56	Imágenes de la evolución de la ola regular generada (b).	214
5.57	Definición <i>CAD</i> de un timón perteneciente a un velero de competición.	215
5.58	Malla utilizada en el análisis de un timón.	215
5.59	Contornos de velocidad (componente horizontal) sobre el timón, en las caras de presión (izquierda) y de succión (derecha).	216
5.60	Contornos de presión sobre la pala de un timón, correspondientes a la cara de presión (izquierda) y de succión (derecha).	216
5.61	Contornos de velocidad (componente vertical) sobre la pala de un timón. Adicionalmente se presentan los mismos contornos sobre un plano de corte oblicuo.	217
5.62	Definición geométrica del problema de análisis fluidodinámico del sistema compuesto por unas velas génova y mayor.	218
5.63	Detalle de la malla utilizada en el análisis de las velas génova y mayor.	218
5.64	Distribución de presión sobre las velas. Vista lateral.	219
5.65	Trazado de líneas de corriente en el análisis de las velas génova y mayor. Vista lateral.	220
5.66	Distribución de la velocidad (componente según Ox) sobre las velas. Vista frontal.	220
A.1	Esquema general de funcionamiento de un código de elementos de contorno con superficie libre.	238
A.2	Sistema de ejes locales en cada cuadrilátero.	241
B.1	Solución de la ecuación unidimensional de convección difusión mediante el método de Galerkin. En las gráficas a) y d) se ha representado φ_i en función del parámetro γ . En las gráficas b) y c) se presentan las zonas estables e inestables, respectivamente, de la solución.	248
B.2	Error cometido en la solución de la ecuación unidimensional de convección difusión mediante el método de Galerkin.	249
C.1	Gráfica de la variación de la función K con γ	254

D.1	Solución de la ecuación de convección difusión modificada con $\alpha = 1.01 - \frac{1}{\gamma}$ (gráficos a) y b)). En los gráficos c) y d) se representa el error cometido en la aproximación utilizando la solución analítica de la ecuación original.	259
D.2	Solución de la ecuación de convección difusión modificada con $\alpha = -1.01 - \frac{1}{\gamma}$ (gráficos a) y b)). En los gráficos c) y d) se representa el error cometido en la aproximación utilizando la solución analítica de la ecuación original.	260
D.3	Solución de la ecuación de convección difusión modificada con $\alpha = \operatorname{cotgh}(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$	261
D.4	Comparación de las curvas de α críticos y óptimo.	262
E.1	Gráfica de $\alpha = \operatorname{coth}(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$	266
F.1	Esquema de evaluación de la fórmula de <i>upwind</i> de Dawson con cuatro puntos.	272
H.1	Balance de flujos en un dominio triangular <i>DEF</i>	280
I.1	Balance de flujos en un dominio triangular <i>DEF</i> , contiguo a un contorno tipo Neumann.	284
J.1	Dominio rectangular donde se considera el balance de fuerzas.	290
J.2	Dominio de balance de cantidad de movimiento. En la derecha se representa el balance en la dirección vertical y a la izquierda el correspondiente a la dirección horizontal.	291
J.3	Dominio sobre el que se calcula el balance de masa.	294
K.1	Dominio de balance cerca de un contorno tipo Dirichlet.	298

Notación

La notación que se utilizará en el presente texto es bastante estándar en la literatura sobre métodos numéricos en ingeniería. Sin embargo dado el carácter multidisciplinar de este trabajo, ha sido necesario introducir ciertas variantes a los símbolos utilizados clásicamente, por su coincidencia con los empleados en otros ámbitos.

Para la definición de la nomenclatura técnica naval, incluida en el presente trabajo, se ha utilizado el texto "International Towing Tank Conference. ITTC Symbols and Terminology List." [ITT97].

Como norma general se escribirán los valores escalares en letra cursiva, mientras que los vectores se notarán en dos formas; en negrita (\mathbf{v}) para la representación vectorial clásica, y en notación de índices (v_i). Respecto a los tensores de segundo orden, se notarán, de igual modo, en forma vectorial, en negrita con doble subrayado ($\underline{\underline{\mathbf{a}}}$) y en notación de índices a_{ij} . La elección de una u otra forma en una fórmula concreta se hará en función de la mayor simplicidad y claridad de su expresión. En general, se indicará en el texto cuando se introduzca un cambio de notación vectorial a notación de índices y viceversa.

También indicar que, cuando sea procedente, se aplicará la convención de Einstein de suma para los índices repetidos en productos y derivadas. Así, por ejemplo,

$$h_{d_j} \frac{\partial r_{d_i}}{\partial x_j} = \sum_j h_{d_j} \frac{\partial r_{d_i}}{\partial x_j}$$

La convención anteriormente mencionada sólo se aplicará a los índices i, j y k , al no ser que se indique expresamente lo contrario en el texto.

Cuando pueda dar lugar a confusión, se señalarán con un acento "˜" los vectores y operadores bidimensionales, frente a los tridimensionales que no lo llevarán. Así distinguiremos, por ejemplo, $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ de $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$.

El espacio de las funciones de cuadrado integrable sobre un dominio Ω se denominará $L^2(\Omega)$, y la norma asociada a su producto interno será indicada como,

$$\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} := \sqrt{\int_{\Omega} f(x)^2 d\Omega}$$

Se ha denominado $H^1(\Omega)$, al espacio de Sobolev de las funciones cuyas derivadas (en sentido distribucional) pertenecen a $L^2(\Omega)$ definido por,

$$H^1(\Omega) := \{\chi : \Omega \rightarrow R \mid \left[\|\chi\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{d\chi}{dx} \right\|_{L^2(\Omega)} \right] < \infty\}$$

Mientras que $H_0^1(\Omega)$ es el espacio de funciones de $H^1(\Omega)$ con traza nula en el contorno, esto es,

$$H_0^1(\Omega) := \{\chi \in H^1(\Omega) \mid \chi = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

Por otra parte, se notará con $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, la norma asociada a estos espacios,

$$\|f(x)\|_{H^1(\Omega)} := \|f(x)\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{df(x)}{dx} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

Además se ha notado como $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ a la norma puntual dada por,

$$\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

El resto de la notación, no incluida aquí, se explicará en el texto.

A continuación, se incluye un pequeño glosario de símbolos utilizados en el presente trabajo.

Ω	Dominio de análisis
Γ	Contorno del dominio
Γ_D	Contorno del dominio donde se prescribe el campo de velocidades
Γ_M	Contorno del dominio donde se prescribe la velocidad normal
Γ_N	Contorno del dominio donde se prescriben las tensiones
Γ_P	Contorno del dominio donde se prescribe el campo de presiones
$\underline{\underline{\epsilon}}(\cdot)$	Operador gradiente simétrico, de componentes $\epsilon_{ij}(\cdot)$
∇	Operador gradiente tridimensional $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
$\frac{D}{Dt}$	Operador derivada sustancial o material
\otimes	Operador producto externo de tensores, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} = a_i a_j$
:	Operador contracción de tensores, $\underline{\underline{\mathbf{a}}} : \underline{\underline{\mathbf{a}}} = \sum_{i,j} a_{ij} a_{ij}$
F_n	Número de Froude definido como $F_n := \frac{ v }{\sqrt{gL}}$
R_n	Número de Reynolds definido como $R_n := \frac{ v L\rho}{\mu}$
γ	Número de Péclet $\gamma := \frac{ v L}{2k}$
ξ	Módulo de Poisson
E	Módulo de Young
ρ	Densidad del fluido
μ	Viscosidad dinámica del fluido
ν	Viscosidad cinemática del fluido $\nu = \mu/\rho$
k	Coefficiente de conductividad térmica.
v	Coefficiente de convección, $v = \rho c$, donde c es el calor específico
L	Eslora o longitud característica del problema
p	Presión dinámica del fluido
p	Presión del fluido
\mathbf{v}	Vector velocidad del fluido (componentes (u, v, w) o bien (v_1, v_2, v_3))
t	Tiempo
η	Elevación de la superficie libre en un punto dado
$\underline{\underline{\tau}}'$	Parte desviadora del tensor de tensiones para fluidos newtonianos
$\underline{\underline{\tau}}^R$	Tensor de tensiones de Reynolds
$\underline{\underline{\tau}}$	Tensor de tensiones para fluidos newtonianos
σ	Tensión tangencial del fluido
\mathbf{t}	Vector de tracciones del fluido $\mathbf{t} = -p\mathbf{n} + \mathbf{n}\underline{\underline{\tau}}' = \mathbf{n}\underline{\underline{\tau}}$
τ'_{ij}	Componente i, j del tensor $\underline{\underline{\tau}}'$
τ^R_{ij}	Componente i, j del tensor $\underline{\underline{\tau}}^R$
τ_{ij}	Componente i, j del tensor $\underline{\underline{\tau}}$
$\underline{\underline{\mathbf{I}}}$	Tensor identidad

Agradecimientos

Es difícil transmitir en unas páginas, necesariamente limitadas en número, el ingente trabajo llevado a cabo en los últimos años y uno de cuyos primeros resultados es la presente tesis. Mi participación en él, significativa, no es suficiente para poder ser considerado su único autor. Por ello, quiero que llegue mi agradecimiento, a todas las personas que han colaborado en este proyecto.

Quiero agradecer, muy especialmente, al director de esta tesis, Eugenio Oñate, su ilusión, guía y apoyo personal. Del mismo modo a Honorio Sierra, codirector de la misma, debo agradecer su guía y soporte al proyecto, al cual ha arrastrado tras de sí a la E.N. Bazán C.N.M. S.A. Dentro de ella, el equipo de Aula Bazán (Javier García, Víctor González, Fernando Guarido y Francisco Mata) ha colaborado intensamente en la validación y discusión de muchos aspectos de los desarrollos llevados a cabo. Su entusiasmo me ha ayudado en muchos momentos complicados.

Más cerca, en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, que me ha acogido estos años, he encontrado muchas personas, sin cuyas capacidades intelectuales, no hubiera sido posible concluir el trabajo. De entre ellas me gustaría destacar mi agradecimiento a Carlos Sacco, Sergio Idelsohn y Orlando Soto, por muchas horas de discusiones fructíferas. Por otra parte, muchas otras personas han colaborado, en este centro, en la validación del sistema, sobrellevando conmigo los múltiples problemas encontrados, entre ellos se encuentran Christopher Morton, Javier Royo y Lara Pellegrini. Varios de los ejemplos incluidos en la presente tesis han sido analizados por ellos. Igualmente, Manuel López, de Nautatec S.L., también ha colaborado en el análisis numérico de los ejemplos aquí presentados.

También desearía destacar mi agradecimiento a Luis Pérez Rojas, y hacerlo extensivo al equipo de análisis numérico de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales de Madrid, por iniciarme en el mundo de los métodos numéricos en hidrodinámica naval.

Finalmente, mi agradecimiento más sincero a mi familia, y especialmente a mi esposa, Pilar, por su ánimo y comprensión, sin el cual, hubiera sido

imposible llevar a cabo este trabajo.