UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE ESTRUCTURAS NAVALES

Autor: Julio García Espinosa
Director: Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra
Codirector: Honorio Sierra Cano

Capítulo 1

Las Ecuaciones de Navier Stokes

En este capítulo se presentan las ecuaciones que describen el comportamiento de un fluido incompresible en régimen laminar (ecuaciones de Navier-Stokes) para posteriormente plantear su resolución mediante el método de los elementos finitos utilizando el procedimiento clásico de Galerkin. Esto nos permitirá hacer una breve discusión de las inestabilidades que aparecen al realizar dicho procedimiento. Del mismo modo, se introducirán sucintamente los procedimientos básicos de estabilización de las ecuaciones.

1.1 Introducción

La resolución mediante el método de los elementos finitos, utilizando el procedimiento clásico de Galerkin, de las ecuaciones de Navier-Stokes presenta ciertos problemas numéricos, cuyo análisis y discusión será el principal objetivo de este capítulo. Las dificultades numéricas mencionadas se producen principalmente por dos factores: la restricción de incompresibilidad que obliga a que los espacios de elementos finitos sean compatibles, es decir que cumplan con la condición de Babuška-Brezzi (*BB* en lo siguiente) [BD88] [Bab71] [Cod92] y el predominio de las fuerzas inerciales (convección) sobre las asociadas a la viscosidad (difusión) [Cod93a] [HB79].

1.2 Las Ecuaciones de Navier Stokes para Flujo Incompresible

Trataremos de representar el comportamiento de un fluido contenido en un volumen Ω. Su velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ puede ser descrita por medio de una función vectorial de la posición $\mathbf{x}$, dentro del volumen Ω y en el instante t entre $[0, \infty)$. La descripción dinámica del problema incompresible (densidad ρ constante) se completa con el campo de presiones $p = p(\mathbf{x}, t)$. De esta manera las ecuaciones de Navier Stokes, que rigen el flujo de un fluido *newtoniano* incompresible, se escriben como,

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}' + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\times(0,t) \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\times(0,t) \tag{1.2}$$

Donde $\underline{\underline{\tau}}' = 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{v})$ es la parte desviadora (excluyendo el término isotrópico de presión) del tensor de tensiones para fluidos newtonianos incompresibles y $\underline{\underline{\varepsilon}}(\cdot)$ el operador gradiente simétrico definido por $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\left[(\nabla\mathbf{a}) + (\nabla\mathbf{a})^t\right]$. En la ecuación (1.1) anterior se ha denominado $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ al campo de fuerzas volumétricas[1].

Las anteriores ecuaciones deben completarse con el siguiente conjunto de condiciones de contorno e iniciales compatibles,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} = \mathbf{v}_c(\mathbf{x},t) \quad &\text{en} \quad \Gamma_D\times(0,t)\\
\mathbf{n}\underline{\underline{\tau}} = \mathbf{t}_c \quad &\text{en} \quad \Gamma_N\times(0,t)\\
\mathbf{v}\,\mathbf{n} = v_n(\mathbf{x},t), \mathbf{n}\underline{\underline{\tau}}\mathbf{s} = \sigma(\mathbf{x},t) \quad &\text{en} \quad \Gamma_M\times(0,t)\\
p = p_c(\mathbf{x},t) \quad &\text{en} \quad \Gamma_P\times(0,t)\\
\mathbf{v}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad &\text{en} \quad \Omega\times\{0\}\\
p(\mathbf{x},0) = p_0(\mathbf{x}) \quad &\text{en} \quad \Omega\times\{0\}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

[1] En muchas ocasiones, cuando el campo de fuerzas volumétricas se debe a la acción de la gravedad, es habitual agrupar este término con el de la presión. A la variable resultante se la denomina presión dinámica p, que se define por [LYO98],

$$\mathrm{p} = p + g(z - z_0)$$

Donde g es la constante de aceleración de la gravedad, supuesta en la dirección Oz negativa, y $(z - z_0)$ es la distancia vertical a una referencia genérica z_0.

Donde $\Gamma := \partial\Omega$ es el contorno del dominio de análisis, que ha sido dividido en las siguientes partes, según el tipo de condición de contorno que sobre él se impongan, en:

Γ_D : parte de Γ donde se prescribe el campo de velocidades a $\mathbf{v}_c$ (contorno tipo Dirichlet).

Γ_N : parte de Γ donde se prescriben las tracciones a $\mathbf{t}_c$ (contorno tipo Neumann).

Γ_M : parte de Γ donde se prescribe la velocidad normal a v_n y la componente tangencial de la fuerza σ (contorno tipo Neumann).

Γ_P : parte de Γ donde se prescribe el campo de presiones a p_c (contorno tipo Dirichlet)

Se cumple que $\Gamma = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_M \cup \Gamma_P}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = 0$, $\Gamma_D \cap \Gamma_M = 0$, $\Gamma_D \cap \Gamma_P = 0$, $\Gamma_M \cap \Gamma_N = 0$, $\Gamma_N \cap \Gamma_P = 0$ y $\Gamma_M \cap \Gamma_P = 0$. Se ha denominado $\mathbf{n}$ al vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$,mientras que s es un vector unitario genérico tangente a Γ_M y $\underline{\underline{\tau}}$ es el campo de tensiones típico para fluidos newtonianos incompresibles[2] definido por la siguiente ecuación constitutiva:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{\mathrm{I}}} + \underline{\underline{\tau}}' = -p\underline{\underline{\mathrm{I}}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathrm{v}) \tag{1.4}$$

Donde $\underline{\underline{\mathrm{I}}}$ es el tensor identidad.

1.2.1 Las Ecuaciones de Euler

Los problemas con viscosidad nula ($R_n \to \infty$) presentan soluciones con aplicación en muchos casos prácticos. En concreto en el campo de la hidrodinámica naval, la solución no viscosa da como resultado un mapa de olas muy parecido al real, apoyando la teoría clásica que suponía la independencia de los fenómenos de formación de olas de la viscosidad. Además esta solución es la única vía directa que permite calcular la resistencia por formación de olas, medida fundamental para el diseño en hidrodinámica naval. Por otra parte, numerosos investigadores han observado que la solución numérica del mapa de olas obtenido con viscosidad aparece con un exceso de difusión,

[2]Su forma general es, en notación de índices,

$$\tau_{ij}' = 2\mu\left(\varepsilon_{ij}(\mathrm{v}) - \frac{1}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) + \zeta\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

donde $\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} 1\ si\ i = j \\ 0\ si\ i \neq j \end{array} \right\}$ y ζ es un parámetro conocido como segunda viscosidad.

a diferencia de las buenas correlaciones experimentos-resultados numéricos obtenidos con códigos no viscosos[3] [VCZ99] [LYOI96] [LRB+98].

Se suelen denominar ecuaciones de Euler a las ecuaciones de Navier Stokes sobre las que se han anulado los términos viscosos. Siguiendo la notación del apartado anterior, el planteamiento de este problema sería como sigue:

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{b} \quad \text{en} \quad \Omega\times(0,t) &(1.5)\\ \nabla\cdot\mathbf{v} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega\times(0,t) &(1.6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \mathbf{v}_c(\mathbf{x},t) \quad &\text{en} \quad \Gamma_D\times(0,t)\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{v}_n(\mathbf{x},t) \quad &\text{en} \quad \Gamma_N\times(0,t)\\ p = p_c(\mathbf{x},t) \quad &\text{en} \quad \Gamma_P\times(0,t)\\ \mathbf{v}\left(\mathbf{x},0\right) = \mathbf{v}_0\left(\mathbf{x}\right) \quad &\text{en} \quad \Omega\times\{0\}\\ p\left(\mathbf{x},0\right) = p_0(\mathbf{x}) \quad &\text{en} \quad \Omega\times\{0\}\end{aligned} \tag{1.7}$$

Como se ha comentado con anterioridad, la solución no viscosa de problemas donde los términos viscosos son relativamente pequeños (como ocurre en la mayoría de los casos prácticos en hidrodinámica naval) guarda mucha similitud con la realidad. Pero el efecto de la viscosidad, incluso para muy altos números de Reynolds (definido como $R_n := \frac{vL\rho}{\mu}$, donde v, L son la velocidad y una longitud característica del problema, respectivamente) introduce cambios muy importantes en las ecuaciones, y en la realidad puede dar lugar a flujos que nada tienen que ver con los que se encuentran en el límite $R_n \to \infty$. La condición de contorno de no deslizamiento es en este caso física y puede ser impuesta sobre las paredes, dado que las derivadas de segundo orden, presentes ahora en las ecuaciones permiten la existencia de una capa límite. Este efecto es de una importancia capital, siendo el germen del fenómeno de la turbulencia.

1.2.2 Aproximación por el método de Galerkin

La forma débil o variacional del sistema de ecuaciones (1.1)-(1.2) aplicando el método de Galerkin (ver [Cod92], [Sot97]) se puede escribir como sigue:

Encontrar $\mathbf{v} \in \Psi_s$ y $p \in \Phi_s$ tal que,

[3] Además hay que tener en cuenta que muchos problemas en hidrodinámica naval tienen valores característicos de $R_n \sim 10^9$, con lo cual, la suposición $R_n \to \infty$ no parece tan descabellada.

$$
\begin{aligned}
\rho \int_{\Omega} \psi \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega + \rho \int_{\Omega} \left[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \cdot \psi \; d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} (\mathbf{v}) : \underline{\underline{\varepsilon}} (\psi) \; d\Omega - \\
- \int_{\Omega} p \left(\nabla \cdot \psi \right) \; d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \psi \; d\Omega + \\
\int_{\Gamma_N} \mathbf{t}_c \cdot \psi \; d\Omega + \int_{\Gamma_M} (\sigma \cdot \mathbf{s}) \cdot \psi \; d\Omega \quad \forall \psi \in \Psi_t \\
\int_{\Omega} \phi \left(\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \; d\Omega = 0 \quad \forall \phi \in \Phi_t \\
\left(\mathbf{v} \left(\mathbf{x}, 0 \right), \psi \right) = \left(\mathbf{v}_0 \left(\mathbf{x} \right), \psi \right) \quad \forall \psi \in \Psi_t
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

donde los espacios funcionales [Cod92], de acuerdo con las condiciones de contorno (1.3) son:

$$
\begin{aligned}
\Psi_t \; &: = \left\{ \begin{array}{c} \chi \in \left[L^2 \left(0, T \right), H^1 \left(\Omega \right)^N \right] \mid \\ \chi|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}, \; \chi|_{\Gamma_M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \; t \in \left(0, T \right) \end{array} \right\} \\
\Psi_s \; &: = \left\{ \begin{array}{c} \chi \in \left[L^2 \left(0, T \right), H^1 \left(\Omega \right)^N \right] \mid \\ \chi|_{\Gamma_D} = \mathbf{v}_c, \; \chi|_{\Gamma_M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n}, \; t \in \left(0, T \right) \end{array} \right\} \\
\Phi_t \; &: = \left\{ \chi \in \left[L^2 \left(0, T \right), L^2 \left(\Omega \right) \right] \mid \chi|_{\Gamma_P} = 0 \right\} \\
\Phi_s \; &: = \left\{ \chi \in \left[L^2 \left(0, T \right), L^2 \left(\Omega \right) \right] \mid \chi|_{\Gamma_P} = p_c \right\}
\end{aligned}
$$

Donde N es la dimensión espacial del problema. Por otra parte, es evidente que, para la determinación de la presión, se debe cumplir que $\Gamma_P \cup \Gamma_N \neq 0$.

Para la discretización en el espacio las ecuaciones (1.8) anteriores, se han de definir los subespacios funcionales $\Psi_{h_t} \subset \Psi_t$, $\Psi_{h_s} \subset \Psi_s$, $\Phi_{h_t} \subset \Phi_t$ y $\Phi_{h_s} \subset \Phi_s$, asociados a una partición[4] de elementos finitos $\{\Omega^e\}$ del dominio espacial Ω. En este caso el problema discreto se plantea como sigue:

Encontrar $\mathbf{v}_h \in \Psi_{h_s}$ y $p_h \in \Phi_{h_s}$ tal que,

[4]Es decir cumple que $\Omega = \cup \Omega^e$ y $\Omega^e \cap \Omega^{e'} = 0$ si $e \neq e'$.

$$
\begin{gathered}
\rho_h \int_\Omega \psi_h \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial t} d\Omega + \rho \int_\Omega \left[\left(\mathbf{v}_h \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_h \right] \cdot \psi_h \, d\Omega + \int_\Omega 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \left(\mathbf{v}_h \right) : \underline{\underline{\varepsilon}} \left(\psi_h \right) \, d\Omega - \\
- \int_\Omega p_h \left(\nabla \cdot \psi_h \right) \, d\Omega = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \psi_h \, d\Omega + \\
\int_{\Gamma_N} \mathbf{t}_c \cdot \psi_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_M} \left(\sigma \cdot \mathbf{s} \right) \cdot \psi_h \, d\Omega \quad \forall \psi_h \in \Psi_{h_t} \\
\int_\Omega \phi_h \left(\nabla \cdot \mathbf{v}_h \right) \, d\Omega = 0 \quad \forall \phi_h \in \Phi_{h_t} \\
\left(\mathbf{v}_h \left(\mathbf{x}, 0 \right), \psi_h \right) = \left(\mathbf{v}_0 \left(\mathbf{x} \right), \psi_h \right) \quad \forall \psi_h \in \Psi_{h_t}
\end{gathered} \tag{1.9}
$$

Como ya se ha comentado anteriormente, existen principalmente dos dificultades numéricas para la resolución del sistema (1.9). La primera de ellas se refiere a la introducción de la restricción $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ en las ecuaciones, que en general obliga a la elección de espacios de interpolación (Ψ_{h_t}, Ψ_{h_s}, Φ_{h_t} y Φ_{h_s}) que permitan cumplir la denominada condición de Babuška-Brezzi [BD88] [Cod92], en adelante *BB*.

La segunda dificultad se presenta cuando el término de convección de la ecuación de balance de cantidad de movimiento (1.1) es importante respecto al término que introduce la viscosidad (lo cual ocurre para R_n altos). Cuando esto ocurre, el sistema de ecuaciones (1.9), resultante de aplicar el método de Galerkin añade viscosidades negativas, proporcionales al valor de R_n[Sot97].

A continuación, se estudiarán con un mayor detenimiento las problemáticas enunciadas.

1.2.3 La Restricción de Incompresibilidad

Como se ha mencionado ya, la introducción de la restricción de compresibilidad del flujo en las ecuaciones de Navier Stokes tiene como resultado efectos muy importantes. Estos efectos se derivan principalmente del hecho de que el campo de velocidades puede tomarse como única incógnita del problema de Navier Stokes, para ser posteriormente corregido con un campo de presiones derivado de él. En efecto, la presión en la formulación incompresible de las ecuaciones de Navier Stokes (1.1)-(1.2), no es ya una variable termodinámica, sino que es una cantidad que establece el equilibrio de fuerzas en cada volumen elemental. De hecho, si tomamos el rotacional de (1.1), podemos eliminar la presión de la ecuación de balance de cantidad de movimiento. En ese caso podríamos calcular un campo de velocidades que cumpliera la condición de balance de cantidad de movimiento, y posteriormente corregirlo con un campo de presiones que nos permitiera cumplir la condición de incompresibilidad, que se podría calcular tomando la divergencia de (1.1) e imponiendo (1.2).

Como se verá posteriormente, es posible demostrar la existencia y unicidad del problema estacionario asociado al sistema (1.9), en determinadas circunstancias, supuesto el cumplimiento de la denominada condición *BB* [BD88]. Esta condición puede plantearse como,[Cod92],

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \Psi_h - \{0\}} \frac{\int_\Omega \phi_h \left(\nabla \cdot \mathbf{v}_h\right) d\Omega}{\left\|\mathbf{v}_h\right\|_{H^1}} \geq K_b \left\|\phi_h\right\|_{L^2} \quad \forall \phi_h \in \Phi_h \qquad (1.10)$$

Donde Ψ_h, Φ_h, son los espacios de elementos finitos conformes asociados a la partición $\{\Omega^e\}$ del dominio espacial Ω.

La condición (1.10) supone una restricción a la elección de los espacios de interpolación de elementos finitos Ψ_h, Φ_h. En general, esta condición no permite que la interpolación de los espacios de velocidad y presión sea del mismo orden [Sot97]. Las parejas de espacios de interpolación que cumplen la condición (1.10) se denominan *div-estables.*

En la práctica, existen metodologías que permiten utilizar igual interpolación para los espacios de velocidad y presión, mediante la modificación de la forma variacional (1.9). Entre estas metodologías, quizá la más conocida es la denominada *GLS* (*Galerkin Least/Squares*) [HFH89]. Otra posibilidad, quizá menos conocida, es la de modificar la forma del sistema (1.9), mediante el desacoplamiento en la ecuación de balance de cantidad de movimiento del efecto de la presión. De esta forma, la presión jugaría, precisamente ese papel de corrección que le otorgábamos anteriormente. Esta metodología, denominada *Método de Pasos Fraccionados* (*Fractional Step Method*) [Cho67] [VCZ97] será estudiada detenidamente a lo largo del capítulo 3 del presente trabajo, donde se expondrán las importantes ventajas que su forma semi implícita reporta para los objetivos de este proyecto.

1.2.4 La Problemática de la Convección

La problemática que presenta la aparición de términos convectivos dominantes es conocida, desde el principio del desarrollo de los métodos numéricos en diversos campos [RG96]. Si los términos convectivos predominan sobre los términos viscosos o difusivos, hecho que se produce para altos números de Reynolds, la solución numérica clásica del método de los elementos finitos (el denominado procedimiento de Galerkin) falla y aparecen oscilaciones en todo el dominio. Las mencionadas oscilaciones desaparecen con el uso de mallas muy finas, impensables desde el punto de vista práctico.

Desde un punto de vista físico, el sistema de ecuaciones resultante de aplicar el método de Galerkin añade viscosidades negativas proporcionales a R_n, provocando un mala estabilidad del problema y la aparición de oscilaciones.

Este problema es característico pues, de las ecuaciones que incorporan términos importantes proporcionales a las derivadas primeras de las variables, por lo que esta dificultad se extiende a muchas ramas de la mecánica de medios contínuos. En particular, nos encontraremos estos problemas en el estudio de la condición de superficie libre (capítulo 2), que será tomada como base para el estudio de métodos generales de estabilización de la convección.

Diversos autores han presentado procedimientos para resolver este inconveniente, entre ellas destacan los métodos clásicos de evaluación contracorriente de las derivadas (*upwind*) y la familia de métodos tipo *Petrov Galerkin* [KNZH80] [Hir90] [Rav96] [Cod93a] [HU96], y los más recientes *Characteristic Galerkin* [ZC95] [ZMS+95] [VCZ97], *SUPG* (*Streamline Upwind / Petrov Galerkin*) [BH82] [HHJ94] [Cod93a] [HU96] y *GLS* (*Galerkin Least Squares*) [HFH89] [Sot97] [Cod93a]. Todos los métodos anteriores se basan en la adición de cierta cantidad de difusión numérica a las ecuaciones básicas, diferenciándose entre ellos en las bases conceptuales sobre las cuales se diseña esa adición.

A pesar de todo, ninguno de los métodos anteriores, permite tener control sobre las oscilaciones que se producen en presencia de altos gradientes de las variables (capas límite o choques). Estas oscilaciones suelen ser localizadas y no tienden a propagarse en problemas lineales, pero en problemas muy no lineales (como se comportan las ecuaciones de Navier Stokes en muchos casos) pueden provocar inestabilidades globales.

En el capítulo 2 se estudiará en profundidad esta problemática, tomando como base la ecuación de convección difusión y se diseñará una metodología de general aplicación que permite eliminar toda la problemática asociada a los términos convectivos.

1.2.5 Existencia y unicidad de solución

Hemos planteado anteriormente el problema discreto (1.9), correspondiente a la forma variacional (1.8) de las ecuaciones de Navier Stokes (1.1)-(1.2). Ahora nos ocuparemos de discutir la existencia y unicidad de la solución del problema así planteado.

Para ello, ha de suponerse que se cumple la condición (1.10), por la adecuada elección de los espacios de elementos finitos. Si consideramos el sistema de ecuaciones estacionario, correspondiente a (1.9), dado por,

$$\begin{gathered}
\rho \int_{\Omega} [(\mathbf{v}_h \cdot \nabla) \mathbf{v}_h] \cdot \psi_h \, d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} (\mathbf{v}_h) : \underline{\underline{\varepsilon}} (\psi_h) \, d\Omega - \int_{\Omega} p_h (\nabla \cdot \psi_h) \, d\Omega = \\
= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \psi_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t}_c \cdot \psi_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_M} (\sigma \cdot \mathbf{s}) \cdot \psi_h \, d\Omega \quad \forall \psi_h \in \Psi_{h_t} \qquad (1.11) \\
\int_{\Omega} \phi_h (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) \, d\Omega = 0 \quad \forall \phi_h \in \Phi_{h_t} \\
(\mathbf{v}_h (\mathbf{x}, 0), \psi_h) = (\mathbf{v}_0 (\mathbf{x}), \psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_{h_t}
\end{gathered}$$

En este caso, puede demostrarse la existencia y unicidad de la solución del problema estacionario (1.11), siempre que se cumpla [Cod92],

$$\chi = \frac{N_c N_l}{K_a^2} < 1 \qquad (1.12)$$

siendo N_c, N_l las constantes de continuidad de las formas correspondientes al término convectivo e independiente, respectivamente, de la ecuación de cantidad de movimiento del sistema (1.11) que pueden definirse como [Cod92],

$$\begin{aligned}
N_c &= sup \frac{\rho \int_{\Omega} [(\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{v}_h] \cdot \mathbf{w}_h \, d\Omega}{\|\mathbf{u}_h\|_{H^1} \|\mathbf{v}_h\|_{H^1} \|\mathbf{w}_h\|_{H^1}} \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in H_0^1 (\Omega) \qquad (1.13) \\
N_l &= sup \frac{\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_h \, d\Omega}{\|\mathbf{u}_h\|_{H^1}} \quad \forall \mathbf{u}_h \in H_0^1 (\Omega)
\end{aligned}$$

y K_a es la constante de estabilidad de la forma correspondiente al término difusivo de la ecuación de cantidad de movimiento del sistema (1.11), que cumple,

$$\int_{\Omega} 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} (\mathbf{u}_h) : \underline{\underline{\varepsilon}} (\mathbf{u}_h) \, d\Omega \geq K_a \|\mathbf{u}_h\|_{H^1} \quad \forall \mathbf{u}_h \in H_0^1 (\Omega) \qquad (1.14)$$

De esta última definición puede comprobarse que la condición (1.12) es restrictiva y no se cumple para valores elevados de R_n. Como se discutirá posteriormente en el capítulo 3, para valores moderados de R_n, en la realidad experimental pueden encontrarse soluciones no estacionarias e incluso varias soluciones, cuya aparición depende de las condiciones iniciales que se planteen. Este aspecto se considerará posteriormente en el capítulo 3, al tratar de la turbulencia.

1.3 Conclusiones

En el presente capítulo se han discutido las principales inestabilidades numéricas asociadas a la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes por el procedimiento clásico de Galerkin.

La primera de ellas se refiere a la introducción de la imposición de incompresibilidad en las ecuaciones de Navier Stokes. Esta condición obliga, en general, a la elección de espacios de interpolación que permitan cumplir la condición BB, aunque existen metodologías que, mediante la modificación de la forma variacional, permiten usar igual interpolación para los espacios de velocidad y presión.

La segunda dificultad se presenta cuando el término de convección de la ecuación de balance de cantidad de movimiento es importante respecto al término que introduce la viscosidad (lo cual ocurre para R_n altos).

Por otra parte, es posible demostrar la existencia y unicidad de la solución estacionaria de la forma variacional de las ecuaciones de Navier Stokes. Sin embargo, la solución única sólo existirá para valores pequeños de R_n. Para valores moderados, la experiencia demuestra que pueden existir soluciones no estacionarias, e incluso varias soluciones, dependiendo de las condiciones iniciales.