

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA**

**UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS  
PARA ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE  
ESTRUCTURAS NAVALES**

Autor: Julio García Espinosa  
Director: Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra  
Codirector: Honorio Sierra Cano



## Capítulo 2

# El Problema de la Superficie Libre

*El presente capítulo se dedicará al estudio de la ecuación de superficie libre. En primer lugar se hará un recorrido sobre las distintas formas que hasta la fecha se han utilizado para su resolución y se discutirán los principales problemas que se plantean. La problemática que se trata de resolver nos llevará a un profundo estudio de la ecuación de convección-difusión. A través del análisis de este problema, se hará una presentación de la técnica de cálculo finitesimal (CF) desarrollada para la estabilización de los problemas de transporte por convección y que en capítulos posteriores será utilizada para la estabilización del algoritmo numérico para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes. En último lugar se presentan varios ejemplos básicos de aplicación de las técnicas presentadas.*

### 2.1 Introducción

Como ya se ha comentado con anterioridad, la determinación de la resistencia debida a la formación de olas es de gran importancia. Su importancia relativa en la resistencia total (que puede llegar a valores en torno al 70%), así como su gran dependencia con las formas del buque, han hecho que numerosos trabajos se llevaran a cabo al objeto de desarrollar un método efectivo para su determinación. El método de los elementos de contorno, para la resolución de las ecuaciones del flujo potencial, es la base de la mayoría de los algoritmos numéricos desarrollados en los últimos años, aunque muy recientemente han comenzado a aparecer códigos que resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes mediante esquemas de proyección o de pseudocompresibilidad [Cod92] [CVZ97] [LYOI96] [GO99] [HMJ93] [LRB+98].

Independientemente de las ecuaciones de la dinámica de fluidos resueltas por diferentes métodos numéricos, la condición de superficie libre, debido a su especial complejidad, que podrá apreciarse en detalle en el desarrollo del presente capítulo, ha sido tratada de muy diversas formas. Tanto la solución de la ecuación completa como de varias linealizaciones han sido consideradas por diversos autores [Daw77] [LRB<sup>+</sup>98] [FMJ93] [Rav96] [Yeu82] [D'E97]. La mayoría de los esquemas propuestos resuelven el problema en un dominio fijo, considerando una superficie de referencia,. Sólo en los últimos años han comenzado a aparecer esquemas que resuelven el problema en dominios móviles [Rav92] [MC98] [LYO98].

Pero además, la solución de la ecuación de superficie libre por los métodos clásicos de integración de ecuaciones diferenciales, presenta una problemática, no por estudiada, resuelta. Nos referimos a lo que en la literatura al respecto se conoce por imposición de la condición de radiación [Daw77] [Let93] [D'E97] [Rav96]. La condición de radiación establece el carácter de la solución en el infinito, y en concreto especifica que la superficie libre debe permanecer imperturbada aguas arriba del barco y lejos de él. La necesidad de imponer esta condición se justifica en la teoría lineal clásica, por el hecho comprobable de que el planteamiento del problema de mecánica de fluidos dado por la ecuación de conservación de la masa<sup>1</sup> más las condiciones de contorno de superficie libre dinámica y cinemática, conducen a un *problema hidrodinámico incompletamente formulado* [Rav96]. Efectivamente, puede demostrarse como, en ese caso, el sistema de ecuaciones no determina unívocamente el flujo alrededor del buque. De hecho puede comprobarse como el sistema así planteado admite soluciones simétricas respecto a un plano perpendicular al sentido de avance del buque [D'E97, pp. 35-38].

Evidentemente, este tipo de justificaciones no sirven para el problema *no lineal* que pretendemos abordar. Sin embargo, el correcto planteamiento del problema de Navier-Stokes, tal y como se ha presentado en el capítulo anterior, puede ser demostrado bajo ciertas condiciones [GR86].

Sin embargo, a lo largo de este capítulo estudiaremos el fenómeno de inestabilidades asociadas a la resolución de la ecuación cinemática de superficie libre, cuya naturaleza es ciertamente la misma que la que se presenta en los problemas lineales antes comentados. De hecho, demostraremos como, tanto en el caso lineal como en el no lineal el operador discreto de transporte por convección (ecuación cinemática de superficie libre) es inestable. De esta forma al intentar resolver la ecuación de superficie libre nos encontramos con

---

<sup>1</sup>En el planteamiento del problema del flujo no viscoso e irrotacional, sólo es necesario resolver la ecuación de incompresibilidad. dado que las incógnitas del problema se reducen al campo de potencial.

oscilaciones no físicas en todo el dominio de análisis. Cabe señalar que, la inestabilidad por si sola no provoca la aparición de estas *olas espúreas*, sino que se requiere la presencia de algún foco de perturbación. En muchos casos, esta perturbación se produce por la imposición de condiciones de contorno inadecuadas. El hecho es que el operador de convección discreto permite que las oscilaciones producidas en el contorno se propaguen de manera no física aguas arriba en forma de olas espúreas. Sin embargo, esta no es la única causa de la aparición de estas olas, fenómenos naturales de capas límite o altos gradientes de las variables pueden producir el mismo efecto.

Este nuevo enfoque del problema permitirá entrar en detalle en su naturaleza y diseñar un esquema de solución general para este tipo de problemas. Cabe señalar que el enfoque que se planteará es perfectamente general, aplicable tanto a los problemas lineales como no lineales, y de hecho, la metodología para su resolución, puede ser extendida a problemas de distinta naturaleza. En resumen, no hablaremos de la necesidad de imposición de la condición de radiación del problema, sino de la *inestabilidad* intrínseca del operador discreto de convección.

Por otra parte conviene insistir en el hecho de que la inestabilidad de este operador necesita una perturbación para manifestarse, como la presencia de altos gradientes de las variables o condiciones de contorno inadecuadas. A este respecto en [D'E97] se muestra una metodología para el problema que permite imponer condiciones de contorno absorbentes, esto es, que son capaces de no perturbar la solución, y permiten resolver el problema sin necesidad de modificar el operador de superficie libre.

Respecto a la inestabilidad del operador discreto de transporte convectivo, el modo más clásico de evitar este problema fue propuesto por Dawson [Daw77], quien usó un esquema de cuatro puntos aguas arriba para evaluar la derivada que aparece en la ecuación de superficie libre. La utilización de este tipo de esquemas es, probablemente, la principal razón por la cual la mayoría de los códigos que predicen la resistencia por formación de olas en buques utilizan mallas estructuradas [Rav96]. Otro esquema muy utilizado por diversos autores se reduce a introducir una difusión de cuarto orden en la ecuación de superficie libre [LYO98] [MC98]. En todo caso, es muy escaso el número de publicaciones en las que se dan explicaciones claras de la acción de estos esquemas en la resolución (ver por ejemplo [Let93]), y en todo caso no existe una justificación teórica con base física que sustente la aplicación de estas metodologías. En el presente trabajo, se plantea como objetivo comprender toda la problemática inherente a la resolución de la ecuación de superficie libre. Por ello, y dado que, matemáticamente, se describe la condición cinemática de superficie libre como una ecuación de convección pura, se hará un estudio profundo de este tipo de ecuaciones. A raíz de este estu-

dio se podrá de derivar un procedimiento consistente<sup>2</sup> de estabilización, a la vez que obtener un mejor entendimiento de las razones físicas y matemáticas en las cuales se basan los métodos de estabilización existentes. Por otra parte, la metodología que se desarrollará, permitirá tener más control sobre la cantidad de difusión añadida en la ecuación de superficie libre, eliminado la amortiguación excesiva de muchos de los esquemas utilizados. En nuestro caso este aspecto es vital, pues el problema que pretendemos resolver es de naturaleza oscilatoria (olas), por lo que la solución a la inestabilidad de las ecuaciones, no puede ser una simple adición de difusión, pues esto amortiguaría tanto las oscilaciones espurias como las físicas.

## 2.2 La Condición de Contorno de Superficie Libre

La condición de contorno de superficie libre no puede expresarse matemáticamente con una ecuación sino con un conjunto de ellas que se presentan a continuación.

En general, la condición de contorno (denominada dinámica) de una superficie libre obliga a la continuidad de la velocidad y las tensiones a través de la superficie [RG96]. Para nuestro análisis esta condición puede expresarse como la relación entre el cambio en las tensiones de los fluidos y la tensión superficial del contorno, es decir,

$$\underline{\underline{\tau_G}}\mathbf{n} - \underline{\underline{\tau_A}}\mathbf{n} = \beta \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \mathbf{n} \quad \text{en} \quad \Gamma_\eta \quad (2.1)$$

Donde  $\underline{\underline{\tau_G}}$  es el tensor de tensiones del agua y  $\underline{\underline{\tau_A}}$  el del aire,  $\mathbf{n}$  es la normal a la superficie libre,  $\beta$  es la tensión superficial y  $R_1, R_2$  son los radios de curvatura principales de la superficie y  $\Gamma_\eta$  es el contorno sobre el que se aplica la condición.

Si consideramos que el aire está en reposo, manteniendo una presión constante  $p_o$  sobre la superficie libre, y despreciamos además, los efectos de la viscosidad en este medio, podemos obtener una primera versión simplificada de la ecuación (2.1),

$$\underline{\underline{\tau_1}}\mathbf{n} + p_o\mathbf{n} = \beta \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \mathbf{n} \quad \text{en} \quad \Gamma_\eta \quad (2.2)$$

<sup>2</sup>Esto es, la solución de la ecuación diferencial original, es solución del problema estabilizado.

Por último, si despreciamos todos los efectos viscosos sobre la superficie libre, lo cual es equivalente a suponer<sup>3</sup> que  $R_n \rightarrow \infty$ , la ecuación (2.2), degenera a la simple imposición de que la presión sobre la superficie libre debe ser la atmosférica.

$$p = p_o \quad \text{en} \quad \Gamma_\eta \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) es la condición que consideraremos en el presente trabajo, suponiendo despreciables, en primera aproximación, los efectos de la viscosidad en el fenómeno de superficie libre, en los problemas prácticos de hidrodinámica naval [Daw77] [HMJ93] [LYOI96].

En todo lo anterior, se puede tomar sin pérdida de generalidad,  $p_o = 0$ .

Por otra parte, la descripción del movimiento de la superficie libre se hace a través de la llamada condición cinemática de la superficie libre. Esta expresa la condición de superficie material (o de corriente) de este contorno. Si describimos la posición de la superficie libre en un instante dado, en la forma clásica, a partir de la relación siguiente,

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \quad (2.4)$$

donde  $\eta(x, y, t)$  es la función que define la elevación de un punto de coordenadas  $x, y$  de la superficie libre en un instante dado y  $F(x, y, z, t)$  es la función implícita que define la superficie. De esta manera, podremos expresar la condición cinemática de superficie libre como,

$$\frac{DF(\mathbf{x}, t)}{Dt} = 0 \quad (2.5)$$

Donde  $\frac{DF}{Dt}$  es la derivada material o sustancial de la función  $F$ . Esta derivada se interpreta sencillamente si se introduce el concepto de dominio material  $\Omega_\lambda$ , cuyas coordenadas  $\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  son las etiquetas o identificadores de las partículas (descritas, por ejemplo, por su posición en el instante  $t = 0$ ). La versión euleriana de esa misma ecuación (2.5) puede obtenerse a partir del campo de posiciones instantáneas de las partículas del fluido  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda, t)$ .

$$\frac{DF(\mathbf{x}(\lambda, t), t)}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial x_i}{\partial t} \right]_\lambda = 0 \implies \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0 \quad (2.6)$$

<sup>3</sup>Valores normales de  $R_n$  en hidrodinámica naval son del orden de  $10^7 - 10^9$ .

Teniendo en cuenta la definición de la superficie  $F$ , la ecuación (2.6) puede simplificarse y resulta como sigue,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \eta = w \implies \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w = 0 \quad \text{en } z = \eta \quad (2.7)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{v}} = (u, v)$ ,  $\tilde{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  representan el vector velocidad y el operador gradiente bidimensionales.

Del mismo modo se puede escribir la ecuación (2.7) anterior en su forma estacionaria como,

$$w = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \eta \quad \text{en } z = \eta \quad (2.8)$$

Hay que hacer notar, como ya se ha mencionado en la introducción, que tradicionalmente se defendía que la condición de superficie libre requiere la aplicación de una imposición adicional conocida como ecuación de radiación [Rav96] [Daw77] [D'E97]. No obstante, el enfoque que se hará en este trabajo, justificará que tal condición de radiación no es una condición necesaria<sup>4</sup>, en el caso general. El problema que se trata de resolver imponiendo esta condición se refiere en realidad a la inestabilidad del problema discreto y es inherente al tipo de ecuación que se intenta resolver, como se verá posteriormente en este mismo capítulo.

Por otra parte, conviene hacer notar que la descripción de la superficie libre hecha en (2.5) sólo permite que esté unívocamente definida en  $\eta$ , dados un par  $x, y$ , y por lo tanto fenómenos como olas rompientes no pueden ser reproducidos.

### 2.2.1 Formulación *ALE* de la Superficie Libre

Es bien conocido, que existen dos formas clásicas de representar las ecuaciones de los medios contínuos: la representación Lagrangiana y la Euleriana. La primera basa la descripción del movimiento en un seguimiento de las partículas del medio, mientras que la segunda basa la descripción en la posición respecto a un sistema de referencia.

Tradicionalmente, las ecuaciones de dinámica de fluidos se han descrito con formulación euleriana, mientras que la descripción lagrangiana del movimiento quedaba restringida a su uso en mecánica de estructuras. Esto se

<sup>4</sup>Hay que señalar que en el problema de flujo no viscoso e irrotacional, la formulación incompleta del problema exige de una condición adicional, de ahí la aparición de esta ecuación de radiación. Tal necesidad proviene de las simplificaciones hechas en el problema, no de la naturaleza física del mismo.

debe a las ventajas relativas que ofrecen una y otra formulación. Con el objetivo de cubrir ese hueco creado entre los dominios fluido y estructural, se desarrolló una descripción mixta, o mejor arbitraria, denominada *ALE* (Arbitrary Lagrangian Eulerian).

Estas formulaciones se desarrollaron primero en el contexto de los métodos de diferencias finitas [HAC74] y más tarde fueron incorporados al mundo del método de los elementos finitos [HLZ81] [FKT99] [Don82] [OG99] [GO99].

La idea básica de esta formulación es incorporar un dominio de referencia adicional que denominaremos  $\Omega_\xi$  y cuyas coordenadas de referencia están dadas por el vector  $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Este dominio de referencia podría ser, por ejemplo, el que describe el movimiento de la malla de elementos finitos. De la misma manera denominaremos  $\Omega_\lambda$  al dominio material, cuyas coordenadas  $\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  son las etiquetas de las partículas (descritas, por ejemplo, por su posición en  $t = 0$ ). Por último tendremos el dominio espacial común  $\Omega_x$  de coordenadas  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ . Es evidente que existen las funciones de transformación de coordenadas  $\xi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x}(\xi, t)$ ,  $\xi(\lambda, t)$ ,  $\lambda(\xi, t)$ ,  $\lambda(\mathbf{x}, t)$  y  $\mathbf{x}(\lambda, t)$ .

Podemos entonces expresar la derivada material de una cantidad  $\chi$ , como,

$$\frac{D\chi(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \left[ \frac{\partial\chi(\mathbf{x}(\xi, t), t)}{\partial t} \right]_\lambda = \left[ \frac{\partial\chi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right]_x + \frac{\partial\chi(\xi, t)}{\partial\xi_i} \left[ \frac{\partial\xi_i}{\partial t} \right]_\lambda \quad (2.9)$$

La relación (2.9) anterior se suele denominar *ecuación fundamental ALE* [WR98]. Expresa la derivada material de una cantidad  $\chi$  donde la derivada temporal se ha calculado respecto a un sistema de referencia  $\mathbf{x}$  y las derivadas espaciales en un sistema de referencia  $\xi$ . Las cantidades  $\left[ \frac{\partial\xi_i}{\partial t} \right]_\lambda$  se denominan *velocidades convectivas ALE*. En el caso en que el dominio de referencia  $\Omega_\xi$  describa el movimiento de la malla de elementos finitos, se cumple que  $\left[ \frac{\partial\xi_i}{\partial t} \right]_\lambda = v_i - v_i^m$ , donde  $\mathbf{v}^m$  ( $v_i^m$ ) es la velocidad de deformación de la malla.

Si aplicamos la relación (2.9) a la ecuación (2.5), se obtiene la versión *ALE* de la condición cinemática de superficie libre siguiente,

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}^m) \cdot \tilde{\nabla}\eta = w - w^m \quad \text{en } z = \eta \quad (2.10)$$

Donde, evidentemente,  $\mathbf{v}^m = [u^m, v^m, w^m]$  y  $\tilde{\mathbf{v}}^m = [u^m, v^m]$ .

### 2.2.2 Forma Simplificada de las Ecuaciones de Superficie Libre

Las ecuaciones anteriores (2.3), (2.7) y (2.8) representan un contorno no lineal en las incógnitas  $\eta$  y  $\mathbf{v}$ . Además las condiciones deben imponerse sobre un

contorno desconocido a priori. Esto hace evidente la complejidad del presente problema. Por esta razón, en la gran mayoría de los algoritmos numéricos desarrollados hasta la fecha se consideran simplificaciones de esta condición de contorno. A continuación presentaremos algunas de las más conocidas simplificaciones aplicables a la ecuación (2.8) estacionaria de superficie libre. Es común a todas estas simplificaciones suponer que el efecto de la viscosidad en la cercanía de la superficie libre es despreciable. Si además consideramos que el movimiento, en esa zona del fluido, es irrotacional, la ecuación de Bernoulli puede ser usada cerca de la superficie libre, esto es,

$$\frac{p_o}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + g\eta = C \quad (2.11)$$

Donde  $C$  es un valor constante a lo largo de una línea de corriente (que se puede obtener, en general, por comparación con las condiciones aguas arriba) y se ha denominado  $p_o$  a la presión sobre la superficie libre. Si se supone que la presión sobre la superficie libre es constante, el término  $\frac{p_o}{\rho}$  se puede incorporar a la constante  $C$ , quedando la ecuación (2.11) anterior, tras despegar  $\eta$ , como,

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ C - \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) anterior, relaciona a través de  $\eta$ , las condiciones dinámica y cinemática de la superficie libre. De esta manera, considerando por simplicidad el problema estacionario, puede sustituirse la ecuación (2.12) en la ecuación (2.8) dando,

$$2gw + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} |\mathbf{v}|^2 = 0 \quad \text{en } z = \eta \quad (2.13)$$

En la ecuación (2.13) anterior se pueden apreciar claramente los dos tipos de no linealidades que están incluidas en el problema. La primera se refiere al término  $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} |\mathbf{v}|^2$  que es una no linealidad clásica que incluye términos de tercer orden en las velocidades. Por otra parte el desconocimiento a priori de la posición de la superficie libre  $\eta$  es una no linealidad típica de los problemas de contorno móvil.

La resolución del problema planteado ha llevado al desarrollo de numerosos esquemas. A continuación haremos un recorrido por los más significativos.

Por otra parte, cabe señalar que, las simplificaciones que se presentan a continuación han sido desarrolladas para problemas de flujo potencial, y por tanto lineal. Es por ello que suponen se cumple la aditividad de las componentes de la solución.

### 2.2.3 Condición de Superficie Libre para Buques Lentos

La resolución del problema de superficie libre choca, en primer lugar, con la gran dificultad que plantea el problema de contorno móvil, que es la necesidad de deformar el dominio de análisis. Esto requiere la aplicación de técnicas de movimiento de malla o remallado, que añaden un coste adicional al cálculo. De ahí que la primera simplificación que se puede llevar a cabo, a partir del planteamiento de la ecuación (2.13), es la de su aplicación sobre una superficie de referencia  $\eta_{ref}$  (en general plana y muy a menudo la inicial en calma). De esta manera podemos escribir una nueva versión de la ecuación (2.13), como:

$$2gw + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} |\mathbf{v}|^2 = 0 \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.14)$$

Una forma muy conocida de simplificación de la ecuación de superficie libre se basa en suponer que el flujo con olas sólo supone una pequeña variación del flujo sin ellas (el conocido tradicionalmente como flujo de modelo doble sumergido). Esta suposición se cumple para pequeños números de Froude, y esta es la razón por la que esta forma de abordar el problema es conocida como teoría de los buques lentos. Teniendo en cuenta esta suposición, el potencial de velocidades, y por lo tanto la velocidad, se descompone en dos partes aditivas. La componente debida al doble modelo sumergido y la componente de perturbación debida a las olas generadas.

$$\mathbf{v}(x, y, z) \simeq \mathbf{v}^x(x, y, z) + \mathbf{v}'(x, y, z) \quad (2.15)$$

Donde  $\mathbf{v}^x$  es la velocidad correspondiente al doble modelo sumergido y  $\mathbf{v}'$  es la velocidad de perturbación, por lo cual podemos escribir que  $|\mathbf{v}^x| \gg |\mathbf{v}'|$ . En este caso podemos escribir la ecuación (2.14) como,

$$2gw + [(\tilde{\mathbf{v}}^x + \tilde{\mathbf{v}}') \cdot \tilde{\nabla}] |\mathbf{v}^x + \mathbf{v}'|^2 = 0 \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.16)$$

Si operamos los términos de la anterior ecuación, podemos escribir que,

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{v}}^x \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{v}^{x^2} + \tilde{\mathbf{v}}' \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{v}^{x^2} + 2\tilde{\mathbf{v}}^x \cdot \tilde{\nabla} (\tilde{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{v}^x) + \\ & + \tilde{\mathbf{v}}^x \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{v}'^2 + \tilde{\mathbf{v}}' \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{v}'^2 + 2\tilde{\mathbf{v}}' \cdot \tilde{\nabla} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}^x) = -2gw \quad \text{en } z = \eta_{ref} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si se resuelve el problema del doble modelo sumergido en primer lugar, el término  $\mathbf{v}^x$  es conocido, por lo tanto los tres términos subrayados del primer miembro de la anterior ecuación son lineales, mientras que los tres restantes son no lineales, y para su simplificación se pueden seguir diversos criterios

[Rav96], [BT75]. En efecto, muchos autores han derivado formas lineales y no lineales simplificadas, a partir de la ecuación (2.17). Una discusión sobre ellas puede encontrarse en [Rav96].

Por último hay que mencionar que, en muchas ocasiones, la condición de superficie libre para buques lentos se encuentra en la forma,

$$2gw + 2|\mathbf{v}| \left( u \frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{v}^x + \mathbf{v}'| + v \frac{\partial}{\partial y} |\mathbf{v}^x + \mathbf{v}'| \right) = 0 \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.18)$$

que se puede derivar inmediatamente de (2.17).

## 2.2.4 Ecuación de Superficie Libre Lineal

Bajo este epígrafe, presentaremos dos de las más conocidas formas lineales de la condición de superficie libre estacionaria. Ambas parten de la aplicación de la simplificación (2.14), es decir, las condiciones se deben aplicar sobre una superficie libre de referencia.

- Condición de Superficie Libre de Kelvin

La forma más simple de linealización de la ecuación de superficie libre se basa en suponer que toda la perturbación que causa la presencia del buque sobre la corriente uniforme es pequeña. De esta manera y suponiendo que la solución (dado que esta solución se aplica al flujo potencial, y por lo tanto lineal) es aditiva de sus componentes, se tiene que,

$$\mathbf{v}(x, y, z) \simeq \mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}'(x, y, z) \quad (2.19)$$

Donde  $\mathbf{v}_\infty = (u_\infty, 0, 0)$  es la velocidad no perturbada (que se supone lleva la dirección del eje  $Ox$ ) y  $\mathbf{v}'$  es la velocidad de perturbación. Evidentemente, la aplicación de esta linealización supone que se cumple que  $|\mathbf{v}'| \ll |\mathbf{v}_\infty|$ . En este caso podemos escribir que:

$$v^2 = |u_\infty + u', v', w'|^2 = [u_\infty + u']^2 + v'^2 + w'^2 \simeq u_\infty^2 + 2u_\infty u' \quad (2.20)$$

Además, hay que tener en cuenta que, dada la suposición hecha en este caso, se cumple que,

$$w = w' \quad (2.21)$$



De este modo, sustituyendo las relaciones (2.20) y (2.21) en la ecuación (2.14), queda como sigue,

$$2gw' + (u_\infty + u') \frac{\partial}{\partial x} (u_\infty^2 + 2u_\infty u') + (v_\infty + v') \frac{\partial}{\partial y} (u_\infty^2 + 2u_\infty u') = 0 \quad (2.22)$$

De donde, operando y despreciando los términos de segundo orden en  $\mathbf{v}'$ , se obtiene la forma de la ecuación de superficie libre de Kelvin:

$$2gw' + 2u_\infty^2 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2.23)$$

- Condición de Superficie Libre de Dawson

Dawson [Daw77] presentó en 1977 uno de los primeros, y probablemente el más conocido de los algoritmos numéricos basado en el método de elementos de contorno para resolver el problema de flujo potencial con superficie libre. Su propuesta de resolución del problema de flujo tridimensional de superficie libre se basaba en el acoplamiento de un algoritmo de resolución para el problema del modelo doble sumergido basado en el algoritmo de Hess y Smith [HS64b] [HS64a] [GSP98] con un método de resolución del problema con superficie libre basado en la teoría de los buques lentos presentada anteriormente en las ecuaciones (2.15) a (2.18).

Como se muestra en el apéndice F, la forma linealizada de la ecuación de superficie libre dada por Dawson tiene la forma,

$$gw + \frac{\partial}{\partial l} \left( \mathbf{v}^{\times 2} |\mathbf{v}| \right) = 2\mathbf{v}^{\times} \cdot \left( |\mathbf{v}^{\times}| \frac{\partial \mathbf{v}^{\times}}{\partial l} \right) \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.24)$$

Donde se ha denominado  $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{v}^{\times}}{|\mathbf{v}^{\times}|}$  (vector unitario en la dirección de la velocidad de doble modelo sumergido).

Como puede apreciarse la ecuación (2.24) tiene grandes ventajas en su implementación, las cuales son, en gran medida, causa de su éxito. La posibilidad de cálculo de las derivadas según líneas de corriente, correspondientes a la solución de doble modelo sumergido (cuya dirección, evidentemente, está dada por  $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{v}^{\times}}{|\mathbf{v}^{\times}|}$ ), facilita su determinación utilizando el método de diferencias finitas. De esta manera, el algoritmo de solución se plantea de la siguiente forma:



- ⇒
1. Resolver el problema de doble modelo sumergido, obteniendo así el campo de velocidades  $\mathbf{v}^x = (u^x, v^x, w^x)$ .
  2. A partir de la solución anterior se pueden evaluar las derivadas respecto de la dirección dada por  $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{v}^x}{|\mathbf{v}^x|}$ . Así se puede resolver de nuevo el problema, pero imponiendo en este caso la condición (2.24), y obteniendo así el campo de velocidades solución del problema  $\mathbf{v} = (u, v, w)$ .

Para facilitar la implementación del algoritmo, en el método original los paneles de la superficie libre se disponían en *tiras* aproximadamente alineadas con el flujo del modelo doble sumergido. De esta manera, las derivadas que aparecen podían ser calculadas directamente usando diferencias finitas sobre los puntos de colocación de sucesivos paneles de la misma *tira*.

Pero, probablemente, el aspecto que ha hecho más famoso al método de Dawson fue la forma de estabilización de la ecuación de convección, aspecto que será tratado posteriormente en este capítulo, y es discutido en el apéndice F.

### 2.2.5 Métodos Iterativos para la Resolución del Problema de Superficie Libre no Lineal

Junto a los ampliamente utilizados, en multitud de códigos desarrollados en los últimos años [Daw77] [Rav96] [PSS96], algoritmos basados en las diferentes variantes de la condición linealizada y cuasi linealizada de superficie libre, discutidas en la sección anterior, han aparecido en la última década formulaciones que incluyen algoritmos de resolución de la condición no lineal. A continuación, haremos una revisión de los principales esquemas que se han desarrollado en este ámbito.

Para la discusión que se presenta en este apartado se tomará la condición de superficie libre estacionaria. La versión transitoria puede ser derivada de manera sencilla a partir de los esquemas presentados.

- Método de Bernouilli

Quizá el más simple de los algoritmos para la resolución iterativa de las ecuaciones no lineales de superficie libre es el basado en imponer como condición de contorno en el fluido la condición cinemática (2.8) basada en la superficie libre  $\eta_{i-1}$  calculada en la iteración anterior.

$$w_i - \tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \tilde{\nabla} \eta_{i-1} = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta_{i-1} \quad (2.25)$$

Si partimos de una posición de la superficie libre  $\eta = \eta_0$ , en general la solución sin olas, la relación anterior permite calcular la nueva posición de la superficie libre a partir de la ecuación de Bernoulli (2.12). En resumen, el proceso iterativo resultante está dado por:

- ⇒
1. Se parte de una solución  $\eta = \eta_0$ .
  2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio  $\Omega$ , imponiendo como condición de contorno de superficie libre,

$$2w_i g + \tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \tilde{\nabla} |\mathbf{v}_{i-1}|^2 = 0 \quad \text{en } z = \eta_{i-1} \quad (2.26)$$

3. Por último se calcula la nueva posición de la superficie libre  $z = \eta_i$  utilizando la ecuación (2.12).
4. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

La versión transitoria de este método es difícilmente utilizable en la práctica, dado que la ecuación (2.12) se complica en este caso, apareciendo el término  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ , donde  $\phi$  es el campo del potencial de velocidades<sup>5</sup>, definido por  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ .

Hay que señalar que este método tiene un rango de convergencia muy limitado. Esto es debido al efecto que el valor de la aceleración de la gravedad  $g$ , tiene en la ecuación (2.26). Valores muy pequeños de  $g$ , provocan cambios muy grandes en el segundo término de la ecuación (2.26), mientras que valores muy grandes de  $g$  crean importantes variaciones en la superficie libre, entre iteraciones sucesivas.

Respecto a la imposición de la condición dinámica de superficie libre, ésta se lleva a cabo a través de sustitución de la ecuación de Bernoulli (2.12) en (2.26). Esto es equivalente a imponerla a través de la (2.33), que se presentará posteriormente en esta sección.

- Método de Pseudoconcentración

Un método muy conocido para la resolución del presente problema es el llamado método de pseudoconcentración [Sot97], también conocido como método del volumen de fluido. Esta técnica ha sido utilizada extensamente para el seguimiento de superficies de interfase entre fluidos. La característica de poder resolver problemas con superficies libres en volúmenes fijos, lo hace especialmente adecuado para este tipo de situaciones. Este método consiste en transportar en un volumen fijo  $\Omega$  una función de pseudoconcentración

<sup>5</sup> Hay que recordar que la justificación de la ecuación de Bernoulli requiere que el fluido sea ni viscoso e irrotacional, por lo que existe una función potencial de velocidades.

$\eta(x, y, z)$  que cumple  $\frac{\partial \eta}{\partial z} = -1$ . De esta manera la ecuación de transporte equivalente a (2.8) queda como,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \eta = 0 \quad \text{en } z = \Omega \quad (2.27)$$

La ecuación (2.27) se resuelve cada iteración usando el valor de  $\mathbf{v}$  que se obtiene de resolver el problema del fluido. De esta manera el algoritmo queda como,

$$-w_{i-1} + u_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.28)$$

Este método de solución tiene como ventaja su simplicidad, ya que permite resolver un problema con contornos móviles utilizando una malla fija. Desafortunadamente, la precisión del método en la captura del frente no es óptima, y en general obliga a utilizar mallas muy finas. Por otra parte el esquema presentado sólo impone la condición cinemática de superficie libre, por lo que requiere que de alguna manera se imponga la condición dinámica sobre el fluido. Este es un problema de difícil solución, y que por lo general es obviado, o burdamente simplificado, en los algoritmos que utilizan esta técnica.

El algoritmo de resolución del problema, en este caso, podría ser el siguiente:

- ⇒ 1. Se parte de una solución  $\eta = \eta_0$ .
- 2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio  $\Omega$ , tomando como interfase entre fluidos, la superficie  $z = \eta_{i-1}$ .
- 3. Se calcula la nueva posición de la superficie libre  $z = \eta_i$  utilizando para ello la ecuación (2.28).
- 4. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

En el caso transitorio la ecuación (2.28) puede escribirse como,

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + u_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = w_{i-1} \quad \text{en } \Omega \quad (2.29)$$

Por lo que el algoritmo de resolución del problema transitorio, podría ser el siguiente:

- ⇒ 1. Se parte de una solución  $\eta = \eta_0$ .

2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio  $\Omega$ , tomando como interfase entre fluidos, la superficie  $z = \eta_{i-1}$ .
3. Se calcula la nueva posición de la superficie libre  $z = \eta_i$  utilizando para ello la ecuación (2.29).
4. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

- Método de Transpiración

Se puede entender este método como una versión mejorada del algoritmo de pseudoconcentración anterior, dado que se resuelve la misma ecuación (2.28) pero sólo sobre  $z = \eta_{i-1}$ , e imponiendo además, sobre esta misma superficie, la condición dinámica (2.3). Esto obliga a que la superficie  $z = \eta_{i-1}$  se actualice a la posición  $z = \eta_i$  en cada paso de tiempo. De esta manera el algoritmo de resolución del problema podría ser el siguiente:

- ⇒
1. Se parte de una solución  $\eta = \eta_0$ .
  2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio  $\Omega$ , imponiendo en la superficie libre  $z = \eta_{i-1}$  la condición dinámica dada por (2.3).
  3. Se calcula la nueva posición de la superficie libre  $z = \eta_i$  resolviendo para ello la siguiente ecuación,

$$-w_{i-1} + u_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = 0 \quad \text{en } z = \eta_{i-1} \quad (2.30)$$

4. Se actualiza el dominio fluido  $\Omega$ , teniendo en cuenta la nueva posición de la superficie libre.
5. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

El nombre del método proviene del hecho de que se permita en cada paso de tiempo que exista un flujo a través de la superficie libre, dado que sólo en la solución final del problema se cumplirá la condición  $u_i \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = w_i$  en  $z = \eta_i$  que indica que la superficie  $z = \eta_i$  es superficie fluida.

Se hace evidente que el algoritmo presentado tiene una gran complejidad para su implementación, debido a la necesidad de actualizar la malla en cada paso de tiempo. Por ello se han desarrollado versiones simplificadas del método de transpiración, que eliminan este inconveniente.

Supongamos ahora que la superficie  $z = \eta$  representa una pequeña perturbación respecto a una superficie de referencia dada por  $z = \eta_{ref}$ . En ese caso podemos suponer que la velocidad  $\mathbf{v} = (u_i, v_i, w_i)$  sobre  $z = \eta_{ref}$  es:

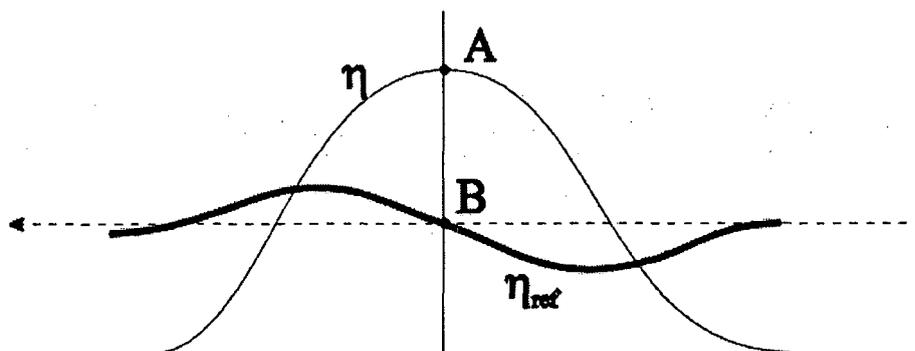


Figura 2.1: Esquema de la disposición de las superficies  $\eta$  y  $\eta_{ref}$ .

aproximadamente igual que sobre  $z = \eta$ . Así la ecuación (2.30) se puede escribir de manera simplificada como,

$$-w_{i-1} + u_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = 0 \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.31)$$

Por otra parte, la nueva condición dinámica de superficie libre puede obtenerse de la aplicación de la ecuación de Bernoulli (2.11). De su aplicación sobre un punto A en la superficie  $z = \eta$  y uno B sobre  $z = \eta_{ref}$ , siendo B la proyección según  $Oz$  de A (ver figura 2.1), se obtiene,

$$\begin{aligned} g\eta + \frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2} (u_A^2 + v_A^2 + w_A^2) &= C_A \\ g\eta_{ref} + \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2} (u_B^2 + v_B^2 + w_B^2) &= C_B \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dado que  $p_A = p_0$ , y tomando en consideración las suposiciones anteriores, hechas sobre la velocidad, se deduce que  $\mathbf{v}_A = (u_A, v_A, w_A) = \mathbf{v}_B = (u_B, v_B, w_B)$ , y teniendo en cuenta además, que las constantes  $C_A, C_B$  coinciden, dado que en el infinito aguas arriba  $C_A = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\infty^2 = C_B$ , se tiene que,

$$p_B = p_0 + \rho g (\eta - \eta_{ref}) \quad (2.33)$$

Que se puede considerar una versión de la ecuación (2.3) aplicable sobre la superficie de referencia.

De esta forma el algoritmo de resolución del problema, basado en una superficie de referencia  $\eta_{ref}$ , podría ser el siguiente:

- ⇒
1. Se parte de una solución  $\eta = \eta_0$ .
  2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio  $\Omega$ , imponiendo en la superficie libre  $z = \eta_{i-1}$  la condición dinámica dada por (2.33).
  3. Se calcula la nueva posición de la superficie libre  $z = \eta_i$  utilizando para ello la ecuación (2.31).
  4. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

Por último, se presenta la versión para problemas transitorios del método de transpiración presentado. El algoritmo en este caso, estará dado por,

- ⇒
1. Se parte de una solución  $\eta = \eta_0$ .
  2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio  $\Omega$ , imponiendo en la superficie libre  $z = \eta_{i-1}$  la condición dinámica dada por (2.3).
  3. Se calcula la nueva posición de la superficie libre  $z = \eta_i$  utilizando para ello la ecuación siguiente, obtenida a partir de la (2.7),

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + u_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = w_{i-1} \quad \text{en } z = \eta_{i-1} \quad (2.34)$$

4. Se actualiza el dominio fluido  $\Omega$ , teniendo en cuenta la nueva posición de la superficie libre.
5. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

Y considerando su implementación simplificada, quedaría como sigue,

- ⇒
1. Se parte de una solución  $\eta = \eta_0$ .
  2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio  $\Omega$ , imponiendo en la superficie libre  $z = \eta_{i-1}$  la condición dinámica dada por (2.33).
  3. Se calcula la nueva posición de la superficie libre  $z = \eta_i$  utilizando para ello la ecuación siguiente,

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + u_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = w_{i-1} \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.35)$$

4. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

Conviene señalar que la ecuación (2.33) ha sido obtenida a partir de la ecuación de Bernoulli estacionaria, por lo que su aplicación a un problema no estacionario pasa por suponer que  $\frac{\partial \phi_A}{\partial t} = \frac{\partial \phi_B}{\partial t}$  (ver figura 2.1). Siendo  $\phi$  la función potencial de velocidades, que se define por  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ , una vez supuesto el movimiento irrotacional del fluido no viscoso.

### 2.2.6 Comentarios sobre la Integración de la Ecuación de Superficie Libre

Conviene recordar llegado a este punto que la ecuación de Bernouilli, no es una ecuación diferente de las utilizadas para describir el problema de mecánica de fluidos, sino que proviene de simplificar la ecuación de balance de cantidad de movimiento en el caso en el que el movimiento del fluido es irrotacional y no viscoso. Por lo tanto, su aplicación supone una simplificación adicional a la necesaria para derivar la ecuación (2.3); la irrotacionalidad del movimiento. Este hecho puede derivar en problemas de estabilidad del método, sobre todo en zonas donde el movimiento del fluido esta lejos de ser irrotacional, como en zonas de la popa del buque donde la turbulencia está plenamente desarrollada.

Por otra parte, es conveniente añadir, que ninguno de los métodos presentados, a excepción del método de transpiración, impone (o lo hacen de forma simplificada a través de la condición de Bernouilli) la ecuación dinámica de superficie libre. Esto puede representar serios problemas de estabilidad, si no se fijan otro tipo de restricciones al problema. Por esta razón, escaparse de las formulaciones clásicas de pequeñas perturbaciones o de la teoría de buques lentos puede presentar grandes problemas en la práctica.

Por otra parte, hay que añadir que existe una versión mejorada de la ecuación (2.8), apta para ser aplicada sobre  $z = \eta_{ref}$ . Esta forma se obtiene a partir del desarrollo en serie de Taylor, a partir de  $z = \eta_{ref}$  y según la dirección  $Oz$ , de la velocidad (ver [IOS99]). Esta forma es la siguiente,

$$\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \eta = w + \frac{\partial w}{\partial z} (\eta - \eta_{ref}) \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.36)$$

Si se tiene en cuenta la incompresibilidad del flujo, la ecuación anterior puede escribirse como,

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{v}} \eta) - \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{v}} \eta_{ref}) = w \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.37)$$

Aunque la ecuación (2.37), sigue siendo una forma simplificada de la (2.8), el hecho de ser una aproximación de mayor orden, le confiere mayor exactitud.

El pequeño recorrido efectuado, a través de los métodos existentes para la resolución de las ecuaciones de superficie libre, nos permite sacar conclusiones que afectan a la elección de la metodología adecuada para resolver el problema planteado para el presente trabajo. En este sentido, se puede ser concluyente. La única formulación que permite resolver el problema con

una condición de superficie libre apta para una amplia gama de números de Froude es el método de transpiración. Este método permite resolver el problema imponiendo las condiciones de contorno (2.3) y (2.8) de una manera natural y exacta. Sin embargo, es evidente su complejidad frente a otros métodos, lo cual por sí sólo es una gran limitación que se ha tenido que superar a lo largo del desarrollo del presente trabajo.

## 2.3 El Problema de Convección Difusión

A lo largo de la sección anterior se han presentado diferentes formas de la condición de contorno de superficie libre. En el presente apartado estudiaremos una característica común a todas ellas: su *carácter convectivo*. Con ese término nos queremos referir tanto a su descripción matemática, como a su comportamiento numérico (ver [OGI97d] [Cod93b] [Oña98a]).

Consideremos la ecuación de convección difusión clásica siguiente [LMTS96] [RG96],

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - v(\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi + \nabla \cdot [\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \nabla \varphi] + Q = 0 \quad (2.38)$$

Donde  $v$  es coeficiente de convección,  $\mathbf{v}$  la velocidad,  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  es la matriz de difusión,  $Q$  representa un término de fuente y  $\varphi$  es el campo incógnita del problema. Se muestra evidente que la ecuación anterior coincide con la (2.8), tomando  $\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$  y  $v = 1$ , e identificando  $Q$  con  $w$  y  $\varphi$  con  $\eta$ . Dicho de otro modo, la condición cinemática de superficie libre se expresa matemáticamente como una ecuación de convección pura. En este apartado nos dedicaremos al estudio de la dificultad de la solución numérica de este tipo de ecuaciones y presentaremos una metodología general aplicable para su determinación.

La problemática que presenta la resolución de este tipo de ecuaciones es ampliamente conocida. Ya se ha mencionado anteriormente el hecho de que la aproximación típica basada en el Método de los Elementos Finitos de Galerkin aplicada a la ecuación de convección difusión (2.38) presenta inestabilidades para valores moderados y altos del término de convección [Cod93a] [Cod93b] [FFH92] [HB79] [Oña98a] [OGI97a] [GO99]. Este fenómeno se aprecia igualmente en la resolución de esta ecuación por otros métodos de integración como Diferencias Finitas [Hir90] [Daw77] [Rav96], Volúmenes Finitos [Hir90] [IO94] [MC98] o Puntos Finitos [OIZ+97] [GOS+98].

Los métodos tradicionales para eliminar las oscilaciones espúreas resultantes están basados en la adición de algún tipo de difusión estabilizadora al problema adicional (normalmente denominada *difusión artificial*). Esta

difusión, aparentemente no física, juega dos papeles principales en la resolución de este tipo de ecuaciones. En primer lugar contrarresta el carácter infradifusivo de la mayoría de los esquemas de integración y en segundo estabiliza la solución numérica en la cercanía de altos gradientes de la variable transportada mediante el suavizado de la solución.

Se cree conveniente remarcar, llegado a este punto, la diferente naturaleza de los dos problemas que encontraremos en la resolución de la ecuación de convección difusión<sup>6</sup>. En primer lugar la inestabilidad inherente a la forma discreta clásica del operador de convección y en segundo lugar la existencia de focos de perturbación en el problema. La inestabilidad, por si sola, no tiene por qué producir problemas. De hecho muchos problemas de la forma (2.38) podrían resolverse utilizando, por ejemplo, las formulaciones clásicas del Método de Elementos Finitos. Sin embargo, la existencia de focos de perturbación (en general gradientes altos de las variables) actúa como un *generador de olas* en la resolución, mientras que el carácter inestable de la solución permite que estas oscilaciones se propaguen por todo el dominio. Si, al contrario, hemos eliminado la inestabilidad de la ecuación de convección, estas oscilaciones no se transmiten y quedan localizadas en la zona de la perturbación. Cabe señalar que, en problemas lineales esta localización de las oscilaciones es cierta, pero en problemas no lineales puede no ser así.

Podríamos simplificar el problema exponiendo que la inestabilidad de la forma discreta de la ecuación (2.38), hace que el operador correspondiente sea *ciego* a las oscilaciones espurias, permitiendo su propagación. Esta ceguera se suele entender en el ámbito de los métodos numéricos en hidrodinámica naval como una simetría del operador que le permite que se transmitan las olas que se propagan tanto corriente arriba como corriente abajo. La solución del problema estaría entonces en perturbar el operador de manera que fuera asimétrico, en el sentido de que no permitiera la propagación de olas aguas arriba. En efecto, el método más clásico de estabilización de la ecuación de convección difusión, conocido como método de *upwind* (o contra corriente) se basa en calcular las derivadas primeras descentradas y en avance [Daw77] [Rav96] [IOS99] [PSS96]. Del mismo modo, puede entenderse que el resto de métodos de estabilización desarrollados, provocan una perturbación en el operador de convección discreto.

Aunque en los últimos años se ha dedicado un gran esfuerzo al desarrollo y justificación de procedimientos de estabilización, la mayoría de los métodos existentes están basados en justificaciones heurísticas. En efecto, aunque la derivación de estos métodos de estabilización y sus correspondientes parámetros está clara en algunos problemas simples unidimensionales, su

---

<sup>6</sup>Que, naturalmente, se trasladan al problema de superficie libre.

determinación en la mayoría de los casos prácticos se muestra imposible (ver [Cod96][Cod93a] para una revisión de los métodos existentes).

En este apartado haremos una exposición clara de las causas de la inestabilidad del problema numérico, y presentaremos algunos de los métodos clásicos de estabilización, para acabar con la presentación de un nuevo método de estabilización basado en el concepto de balance (o equilibrio) de flujos sobre un dominio finito. Esta nueva visión del problema, que denominaremos *Cálculo Finitesimal* (en inglés *Finite Increment Calculus*), en adelante *CF*, posibilita la reinterpretación de los términos de estabilización como una contribución intrínseca y natural a las ecuaciones diferenciales originales, en lugar del concepto de corrección a nivel discreto como es entendido por la mayoría de los métodos utilizados. Además, se puede comprobar que la mayoría de los métodos de estabilización desarrollados hasta la fecha, desde los más rudimentarios, como son la adición directa de difusión, la evaluación contracorriente (*upwind*) y *Petrov-Galerkin* [KNZH80] [Hir90] [Rav96] [Cod93a] [HU96], hasta los más elaborados, como *Streamline Upwind / Petrov Galerkin (SUPG)* [BH82] [HHJ94] [Cod93a] [HU96], *Characteristic Galerkin* [ZC95] [ZMS+95] [VCZ97], *Galerkin Least Squares (GLS)* [HFH89] [Sot97] [Cod93a], etc. pueden ser derivados como casos particulares de la formulación general *CF* [Oña98a] [OGI97b] [OGI97d] [OGI97a] y así reinterpretados en una manera más física (ver [Cod96] para una comparación entre los más conocidos métodos de estabilización existentes).

### 2.3.1 El Problema Unidimensional de Convección Difusión

El análisis de la ecuación (2.38) es complejo y es conveniente comenzar nuestro estudio con problemas más simples que nos permitan comprender los fenómenos que hemos comentado.

Consideremos el problema de convección difusión en un dominio unidimensional  $\Omega$  de longitud  $l$ . El esquema del problema se muestra en la figura 2.2. Si dividimos el dominio de análisis en diferentes segmentos y tomamos uno de ellos  $AB$  de longitud  $d$  (ver figura 2.3) sobre el que el balance de flujos debe satisfacerse, podemos escribir, desarrollando las funciones en  $A$  en términos de sus valores en  $B$ , utilizando una serie de Taylor de 2º orden, que,

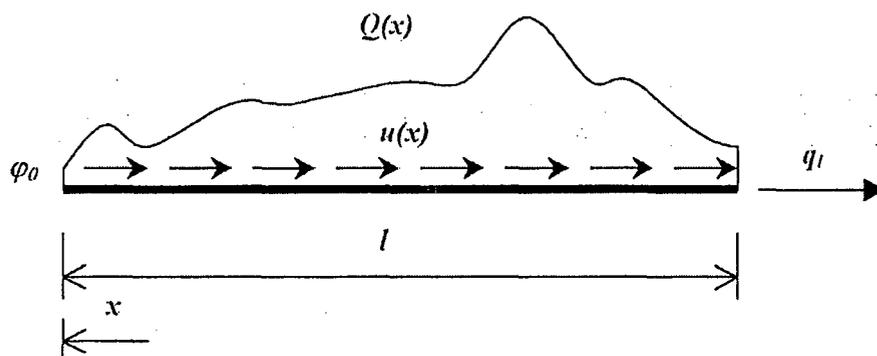


Figura 2.2: Problema de convección-difusión unidimensional.

$$q_A = q(x_B - d) = q(x_B) - d \left[ \frac{dq}{dx} \right]_B + O(d^2) \quad (2.39)$$

$$[u\varphi]_A = [u\varphi](x_B - d) = [u\varphi]_B - d \left[ \frac{d(u\varphi)}{dx} \right]_B + O(d^2)$$

Donde  $u = u(x)$  es una función genérica conocida con el significado físico de velocidad,  $q$  puede ser entendido como la tasa de energía transmitida por difusión y  $[u\varphi]$  sería su equivalente por convección [HU96], mientras que  $\varphi$  es la variable transportada.

El balance de flujos entre los puntos  $A$  y  $B$  puede escribirse como:

$$\sum \text{Flujos} = [\text{Flujo en } A] - [\text{Flujo en } B] + \int_{AB} Q(x) dx = 0 \quad (2.40)$$

o bien, suponiendo que  $Q(x)$  es aproximadamente constante en el segmento,

$$[q(x_B - d) + v[u\varphi](x_B - d)] - [q(x_B) + v[u\varphi](x_B)] + Qd = 0 \quad (2.41)$$

En (2.40) y (2.41) se ha denominado  $Q(x)$  a una fuente distribuida sobre dominio de análisis y  $v$  es el coeficiente de transmisión por convección que se supone constante.

Sustituyendo la ecuación (2.39) en (2.41) y teniendo en cuenta que el punto  $B$  es arbitrario y por ejemplo  $x_B = x$ , obtenemos, tras simplificar,

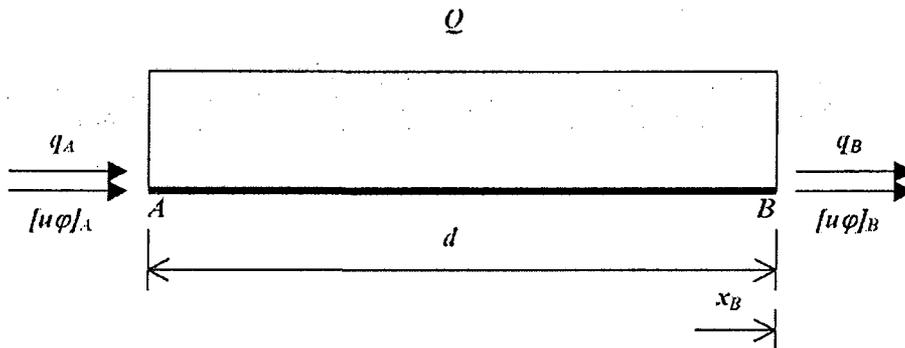


Figura 2.3: Balance en un dominio finito AB.

$$-v \frac{d[u\varphi]}{dx} - \frac{dq}{dx} + Q = 0 \quad (2.42)$$

La ley de Fourier [HU96] relaciona la tasa de energía transmitida por difusión con la variación de  $\varphi$  mediante,

$$q = -k \frac{d\varphi}{dx} \quad (2.43)$$

Y finalmente, sustituyendo la ecuación (2.43) anterior, en (2.42) se obtiene la forma convencional de la ecuación de convección difusión.

$$-v \frac{d[u\varphi]}{dx} + \frac{d}{dx} \left[ k \frac{d\varphi}{dx} \right] + Q = 0 \quad (2.44)$$

En el caso transitorio, la forma de la ecuación puede obtenerse planteando de nuevo la ley de conservación:

$$\sum \text{Flujos} = [\text{Flujo en A}] - [\text{Flujo en B}] + \int_{AB} Q(x) dx = v \frac{d}{dt} \int_{AB} \varphi(x) dx \quad (2.45)$$

Si, al igual que en el caso anterior, hacemos  $x_B = x$ , podemos obtener, tras simplificar,

$$v \frac{d\varphi}{dt} + v \frac{d[u\varphi]}{dx} - \frac{d}{dx} \left[ k \frac{d\varphi}{dx} \right] - Q = 0 \quad (2.46)$$

Donde se ha supuesto, como es habitual, que  $\varphi$  y  $Q$  son constantes en el dominio de balance  $AB$ , y por lo tanto se cumple que  $\int_{AB} \varphi(x) dx = d\varphi$  y  $\int_{AB} Q(x) dx = dQ$ .

Haciendo una analogía con el problema de transmisión de calor [HU96], en las ecuaciones (2.39)-(2.46) pueden interpretarse  $\varphi(x)$  y  $u(x)$  como el campo de temperaturas y velocidades, respectivamente.  $Q$  y  $k$  representarían una fuente de calor y la conductividad térmica del material, y  $\nu = \rho c$ , donde  $\rho$  es la densidad del material y  $c$  su calor específico.

### Resolución por el Método Clásico de los Elementos Finitos

La problemática que plantea la resolución de la ecuación de transporte por convección, mediante la formulación clásica de elementos finitos, se puede entender, de manera clara, a través del estudio del problema unidimensional, estacionario y homogéneo de convección-difusión con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, definido como:

Encontrar una función  $\varphi = \varphi(x)$  tal que,

$$\begin{aligned} u \frac{d\varphi}{dx} - k \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= 0 \quad \text{en } 0 < x < l \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \varphi(l) = \varphi_l \end{aligned} \quad (2.47)$$

Donde  $k > 0$  y  $u$  son constantes y  $\varphi_0, \varphi_l$  son los valores prescritos de  $\varphi$  en el contorno ( $\varphi_0 \neq \varphi_l$ ). Como puede apreciarse, la ecuación (2.47) puede derivarse fácilmente a partir de la (2.46) tomando  $Q = 0$ ,  $\nu = 1$  y  $u, k$  constantes.

Consideremos una partición uniforme del intervalo  $[0, l]$  dada por  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = l$  donde, evidentemente,  $x_{m+1} - x_m = d$  ( $m = 0, N-1$ ).

Por conveniencia para la discusión posterior, escribamos la ecuación (2.47) en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= 0 \quad \text{en } 0 < x < l \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \varphi(l) = \varphi_l \end{aligned} \quad (2.48)$$

Donde  $\gamma$  es el denominado *número de Péclet elemental* definido como  $\gamma := \frac{ud}{2k}$ . Este número adimensional da una idea de la importancia relativa de la convección frente a la difusión. Podemos decir que la convección será dominante cuando  $|\gamma|$  sea grande y que dominan los efectos de la difusión para valores pequeños de  $|\gamma|$ .

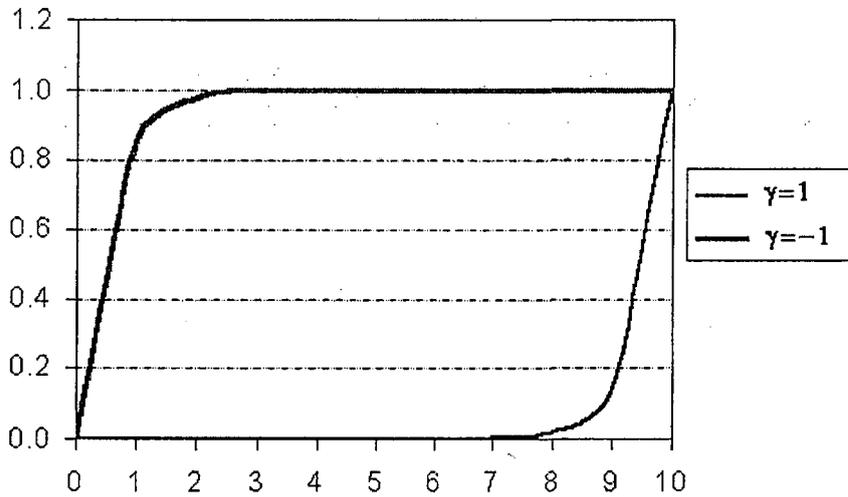


Figura 2.4: Gráfico de  $\varphi(x)$  para  $l = 10$ ,  $d = 1$ .

La solución analítica de (2.48) es,

$$\varphi(x) = \varphi_0 - (\varphi_0 - \varphi l) \left( \frac{1 - e^{\frac{2\gamma x}{d}}}{1 - e^{\frac{2\gamma l}{d}}} \right) \quad (2.49)$$

Como se aprecia en la figura 2.4, la función (2.49) tiene importantes gradientes de  $\varphi$  cerca de  $x = l$  para valores de  $\gamma > 1$  (velocidad positiva) y cerca de  $x = 0$  para valores de  $\gamma < 1$  (velocidad negativa). De este simple análisis pueden anticiparse problemas numéricos si se pretende aproximar la solución tomando unos pocos puntos de interpolación.

Si la ecuación (2.48) se resuelve mediante el método clásico de Galerkin, usando elementos lineales, se obtiene la siguiente ecuación en diferencias (ver apéndice B),

$$(1 - \gamma)\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + (\gamma + 1)\varphi(x_{i-1}) = 0 \quad \text{con } i = 1, N - 1 \quad (2.50)$$

Como puede comprobarse, la misma ecuación (2.50) se obtiene si, para la discretización de la ecuación (2.48), se utilizan diferencias finitas con un esquema centrado (ver apéndice B).

Como se demuestra en el apéndice C, la solución nodalmente exacta en el entorno de un punto  $x_i$ , del esquema (2.50) corresponde a una ecuación modificada de la (2.48) original, dada por,

$$\gamma \frac{d\varphi(x_i)}{dx} - \frac{d}{2}(1-K) \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} = 0 \quad (2.51)$$

Con  $K = -\frac{1}{2\gamma^2} [\cosh(2\gamma) - \gamma \sinh(2\gamma) - 1]$ , que resulta en una difusión negativa en la ecuación (2.51) para valores de  $\gamma > 1.3657$ . De lo anterior, se deduce que el error de truncamiento del esquema (2.50) es  $E_T = \frac{h}{2} K(\gamma) \left[ \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right]_i$ .

Por otra parte, la ecuación en diferencias (2.50) puede resolverse analíticamente (ver apéndice B), obteniéndose como solución,

$$\varphi(x_i) = C_1 + C_2 \left[ \frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)} \right]^i \quad (2.52)$$

que como puede comprobarse, debido a la forma del cociente, es oscilatoria para cualquier  $|\gamma| > 1$ .

Concluyendo, la solución numérica clásica de la ecuación de convección-difusión unidimensional (2.47) tiene una forma dada por (2.52) que muestra un carácter oscilatorio irreal para valores de  $|\gamma| > 1$ . Este carácter es inherente al proceso de discretización llevado a cabo, y podemos pensar en dos tipos de soluciones,

1. Diseñar métodos de discretización más apropiados para la resolución del problema, como es el caso del método de *upwind*, *SUPG* o *GLS*.
2. Modificar la forma de la ecuación diferencial, para que el proceso de discretización clásico ofrezca como solución la correspondiente al problema original, como es el caso de la adición directa de difusión o el método *CF*.

Cabe insistir en que las problemáticas aquí expuestas no son exclusivas de la resolución por elementos finitos o por diferencias finitas, sino que aparecen en otros métodos de resolución de ecuaciones diferenciales como el método de los volúmenes finitos [FMJ93] [MC98] [HMJ93] y el de los puntos finitos [GOS+98] [OIZ+97].

En este sentido, las dificultades aquí planteadas son directamente trasladables a todas las metodologías desarrolladas hasta la fecha para la resolución del problema de formación de olas del buque.

### Estabilización de la Ecuación de Convección Difusión

Como ya se ha mencionado en el apartado anterior, la mayoría de los métodos numéricos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales aplicados a la ecuación de convección difusión, resuelven en realidad una ecuación modificada infradifusiva y no la original. Esto da lugar a inestabilidades numéricas que se aprecian en forma de oscilaciones.

De la discusión anterior, parece obvio, que la solución a la problemática encontrada pasa por la adición de una determinada cantidad de difusión adicional. En efecto, la característica común de la mayoría de los métodos de estabilización desarrollados, es la adición de difusión artificial, con el fin de contrarrestar los efectos indeseables de la discretización.

Una revisión de estos métodos puede encontrarse en [Cod96] [Cod93a] [HU96], pero aquí veremos las ideas básicas que los sustentan.

La idea de añadir difusión a las ecuaciones que se resuelven no es nueva, sino que ya en los años 50 aparecen referencias en el ámbito del método de diferencias finitas [New76]. Originalmente esta difusión era añadida mediante la evaluación de las derivadas primeras descentradas contracorriente (en la dirección opuesta al flujo), los conocidos métodos de *upwind*<sup>7</sup>.

Pero investiguemos un poco en las posibilidades de la adición de difusión a la ecuación original.

Planteemos, en lugar de la ecuación (2.48), una versión modificada de la misma,

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d}{2} (1 + \alpha\gamma) \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= 0 \quad \text{en } 0 < x < l & (2.53) \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \varphi(l) = \varphi_l \end{aligned}$$

Si al igual que en el caso anterior, aplicamos el método de Galerkin a la ecuación (2.53) (ver apéndice B), se obtiene la siguiente expresión,

$$(1 + \gamma(\alpha - 1))\varphi(x_{i+1}) - 2(1 + \alpha\gamma)\varphi(x_i) + (1 + \gamma(1 + \alpha))\varphi(x_{i-1}) = 0 \quad (2.54)$$

$$\text{con } i = 1, N - 1$$

Como puede comprobarse, la misma ecuación (2.54) se obtiene si para la discretización de la ecuación (2.53) se utilizan diferencias finitas con un esquema centrado (ver apéndice D).

<sup>7</sup>Evidentemente, la evaluación de una derivada primera en avance puede considerarse una adicción de difusión, ya que  $\frac{d\varphi(x-h)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + O(h^2)$ .

En el apéndice E se demuestra que el error de truncamiento de la ecuación (2.54) es,

$$E_T = \frac{d}{4\gamma^2} [(1 + \alpha\gamma) [\cosh(2\gamma) - 1] - \gamma \sinh(2\gamma)] \quad (2.55)$$

Donde, imponiendo como condición para la determinación de  $\alpha$  que el error de truncamiento sea nulo, se obtiene de (2.55),

$$\alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma} \quad (2.56)$$

Es decir, es posible conseguir que la solución numérica de la ecuación (2.53) coincida nodalmente con la solución analítica de la ecuación (2.48) original, tomando  $\alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$  en (2.53). Esta modificación consiste en la adición de cierta cantidad de difusión, en concreto se añade un término de la forma  $\frac{\alpha\gamma d}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}$ . Conviene sin embargo señalar que, la ecuación (2.54) puede ser derivada de diversas formas. Entre ellas destaca la modificación de las funciones de forma utilizadas para obtener la forma débil del término convectivo origen de los métodos tipo *Petrov-Galerkin* [BH82] [FFH92] [Cod93a] [Cod96].

Por otra parte, puede comprobarse que la solución analítica de (2.54), es de la forma (ver apéndice D),

$$\varphi_i = C_1 + C_2 \left[ \frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma} \right]^i \quad (2.57)$$

de donde puede deducirse, que la solución es no oscilatoria para valores  $\alpha > 1 - \frac{1}{\gamma}$  y  $\alpha < -1 - \frac{1}{\gamma}$ .

### 2.3.2 El Método de Cálculo Finitesimal

Acabamos de ver como en el caso del problema de convección difusión homogéneo y unidimensional (2.47), las inestabilidades que aparecen en la solución numérica clásica pueden justificarse por el error de truncamiento producido por el proceso mismo de discretización. Además hemos encontrado que este error de truncamiento tiene forma de difusión negativa para cualquier valor del número de Péclet. Esta demostración práctica provocó en el pasado la aparición de diversos métodos apoyados en la adición de difusión para corregir los efectos indeseables del proceso normal de discretización. Sin

embargo, estos métodos sólo tienen su apoyo en el estudio de problemas unidimensionales, de los cuales se conoce solución analítica y difícilmente pueden extenderse a problemas más complejos. Por lo tanto, de lo visto en anteriores secciones no debe sacarse la conclusión de que la adición apropiada de difusión solucionará los problemas de estabilidad del método, sino que, de un modo más general, la modificación adecuada de la ecuación diferencial de convección difusión (2.48), puede resultar en una solución nodalmente exacta, con la aplicación de las técnicas clásicas de resolución de ecuaciones diferenciales, y en concreto, mediante el método de los elementos finitos utilizando el procedimiento clásico de Galerkin. A continuación presentaremos un método que se basa precisamente en mejorar la ecuación diferencial del problema, para poder ser utilizada en un contexto discreto; este es el denominado *Método de Cálculo Finitesimal (CF)*.

Volvamos a retomar el esquema del problema de convección difusión en un dominio unidimensional de longitud  $l$ , mostrado en la (2.2). Si dividimos, como anteriormente, el dominio de análisis en diferentes segmentos<sup>8</sup> y tomamos uno de ellos  $AB$  de longitud  $h$  (ver figura 2.3) sobre el que el balance de flujos debe satisfacerse, podemos desarrollar las funciones en el punto  $A$  en términos de sus valores en  $B$ . Si suponemos que el término de transporte convectivo tiene una importante variación sobre el segmento  $AB$ , será conveniente utilizar para este desarrollo una serie de Taylor de mayor orden (3<sup>er</sup> orden en este caso),

$$[u\varphi]_A = [u\varphi](x_B - h) = [u\varphi]_B - h \left[ \frac{d(u\varphi)}{dx} \right]_B + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{d^2(u\varphi)}{dx^2} \right]_B - O(h^3) \quad (2.58)$$

El balance de flujos entre los puntos  $A$  y  $B$  puede escribirse como en (2.41), y sustituyendo en ella las relaciones (2.59), (2.39) y (2.43), puede obtenerse,

$$-v \frac{d[u\varphi]}{dx} + v \frac{h}{2} \frac{d^2[u\varphi]}{dx^2} - \frac{dq}{dx} + Q = 0 \quad (2.59)$$

Donde al igual que en (2.42) teniendo en cuenta que el punto  $B$  es arbitrario, se ha tomado  $x_B = x$ . Si en (2.59) aplicamos la ley de Fourier (2.43) y suponemos por simplicidad que  $u$  es constante y  $v = 1$ , se obtiene,

<sup>8</sup> Este proceso no tiene porqué coincidir con la discretización posterior para la aplicación del método de integración. De hecho esta discretización sólo se hace a nivel conceptual y es equivalente a la utilizada en la derivación clásica de las ecuaciones diferenciales. Ahí toma sentido el nombre de *Cálculo Finitesimal* por oposición al tradicional *Cálculo Infinitesimal*.

$$-u \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx} \left[ \left( k + \frac{uh}{2} \right) \frac{d\varphi}{dx} \right] + Q = 0 \quad (2.60)$$

Como se puede apreciar el efecto de incluir términos de mayor orden en la aproximación del término convectivo (2.58), introduce naturalmente una difusión adicional  $\frac{uh}{2}$  en la ecuación (2.60) que gobierna el problema. El valor<sup>9</sup>  $h$  en (2.58)-(2.60) debe entenderse como una medida de la longitud del segmento  $AB$  sobre el que se aplica el balance de flujos, que **no** tiene porqué coincidir con la longitud de los elementos en los que se discretiza el dominio unidimensional. De hecho, la longitud de este segmento es una variable libre, por lo que para su determinación se pueden imponer diversas condiciones, como la estabilidad o la exactitud de la solución del problema (2.60).

Otro enfoque del problema nos podría llevar a imponer como condición para la determinación de  $h$ , que se cumpliera,

$$[u\varphi]_A = [u\varphi]_B - h \left[ \frac{d(u\varphi)}{dx} \right]_B + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{d^2(u\varphi)}{dx^2} \right]_B \quad (2.61)$$

Que es el planteamiento de un problema de minimización de residuos. Efectivamente, basado en esta idea se ha desarrollado un método para la determinación del valor de<sup>10</sup>  $h$  que permite obtener mediante un esquema iterativo un valor óptimo de este parámetro, asegurando la estabilidad de la solución y una cuasi-exactitud nodal [Oña96] [OGI97a] [OGI97c] [OJI98].

La versión estabilizada de la ecuación transitoria (2.46) se puede derivar sencillamente con los criterios dados, obteniéndose,

$$\frac{d\varphi}{dt} + u \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d}{dx} \left[ \left( k + \frac{uh}{2} \right) \frac{d\varphi}{dx} \right] = Q \quad (2.62)$$

Para  $u$  constante y  $v = 1$ .

<sup>9</sup>El parámetro  $h$  se suele denominar *longitud característica* y puede escribirse en la forma  $h = 2\hat{t}u$ , donde  $\hat{t}$  se denomina, en la literatura al respecto, *tiempo intrínseco*. Se hace notar que  $\hat{t}$  es el tiempo en el que una partícula recorre una distancia  $\frac{h}{2}$  a una velocidad  $u$ .

<sup>10</sup>El parámetro  $h$  es común encontrarlo en la literatura al respecto en la forma  $h = \alpha l^{(e)}$  donde  $l^{(e)}$  es la dimensión característica de los elementos de la malla (su longitud en problema unidimensionales). La determinación del valor óptimo de  $h$  o  $\hat{t}$ , será equivalente a encontrar un valor óptimo de  $\alpha$ .

### Generalización del Proceso de Estabilización

Supongamos ahora que los cambios, sobre el dominio de balance  $AB$ , tanto en los términos convectivo como en el difusivo son tan importantes que es necesaria una expansión de orden superior en ambos,

$$q_A = q(x_B - h) = q(x_B) - h \left[ \frac{dq}{dx} \right]_B + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{d^2q}{dx^2} \right]_B - O(h^3) \quad (2.63)$$

$$[u\varphi]_A = [u\varphi](x_B - h) = [u\varphi]_B - h \left[ \frac{d(u\varphi)}{dx} \right]_B + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{d^2(u\varphi)}{dx^2} \right]_B - O(h^3)$$

De la misma manera se considera que la fuente  $Q(x)$  varía linealmente sobre el dominio  $AB$  y pues, despreciando los términos de orden  $O(h^3)$ , se tiene,

$$\int_{AB} Q(x) dx = \frac{h}{2} [Q(x) + Q(x - h)] = hQ(x) - \frac{h^2}{2} \frac{dQ}{dx} \quad (2.64)$$

Sustituyendo entonces las relaciones (2.63) y (2.64) en la ecuación de balance (2.41) y aplicando la ley de Fourier (2.43), se tiene,

$$-u \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx} \left[ k \frac{d\varphi}{dx} \right] + Q - \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left[ -u \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx} \left[ k \frac{d\varphi}{dx} \right] + Q \right] = 0 \quad (2.65)$$

Donde, si denominamos,

$$r = -u \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx} \left[ k \frac{d\varphi}{dx} \right] + Q \quad (2.66)$$

Podemos escribir (2.65) en una forma más compacta, como,

$$r - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.67)$$

Del mismo modo, podemos hallar una versión estabilizada de la ecuación transitoria, si consideramos que,

$$\int_{AB} \varphi(x) dx = \frac{h}{2} [\varphi(x) + \varphi(x - h)] = h\varphi(x) - \frac{h^2}{2} \frac{d\varphi}{dx} + O(h^3) \quad (2.68)$$

y despreciamos los términos de orden  $O(h^3)$ , obtenemos a partir de (2.45),

$$\begin{aligned} \bar{r} - \frac{h}{2} \frac{d\bar{r}}{dx} &= 0 \quad \text{en } \Omega_x[0, T] \\ \bar{r} &= -\frac{d\varphi}{dt} - u \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx} \left[ k \frac{d\varphi}{dx} \right] + Q \end{aligned} \quad (2.69)$$

Es importante hacer notar que las ecuaciones (2.67) y (2.69) son *consistentes* con la forma original (2.42) y (2.46), respectivamente, dado que la solución  $r(x) = 0$  ( $\bar{r}(x) = 0$ ) cumple ambas.

Las condiciones de contorno aplicables a las ecuaciones (2.67) y (2.69) serán discutidas en los siguientes apartados.

### 2.3.3 El Problema Multidimensional de Convección Difusión

Ahora extenderemos los conceptos vistos en la sección anterior a la solución del problema estacionario bidimensional de convección difusión definido como sigue,

Encontrar una función  $\varphi = \varphi(x)$  tal que,

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \varphi - \tilde{\nabla} \cdot [\underline{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\nabla} \varphi] &= Q \quad \text{en } \Omega \\ \varphi &= g \quad \text{en } \Gamma_D \\ \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\nabla} \varphi &= q_D \quad \text{en } \Gamma_{N_D} \\ \mathbf{n} \cdot [\tilde{\mathbf{v}} \varphi - \underline{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\nabla} \varphi] &= q_T \quad \text{en } \Gamma_{N_T} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Donde, al igual que en (2.38),  $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = (u, v)$  la velocidad,  $\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})$  es la matriz de difusión,  $Q = Q(\mathbf{x})$  representa un término de fuente,  $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$  es el campo incógnita del problema y  $g = g(\mathbf{x})$  son los valores prescritos de  $\varphi$  en la parte del contorno ( $\Gamma_D$ ) donde se prescriben las condiciones tipo Dirichlet. Del mismo modo  $q_D = q_D(\mathbf{x})$  son los valores prescritos del flujo difusivo en  $\Gamma_{N_D}$  y  $q_T = q_T(\mathbf{x})$  las imposiciones sobre el flujo total en  $\Gamma_{N_T}$ . Se cumple que  $\Gamma = \partial\Omega = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_{N_D} \cup \Gamma_{N_T}}$ .

Se hace notar el paralelismo de la anterior ecuación (2.70) con la forma de la condición cinemática de superficie libre (2.8).

Si consideramos un dominio de balance  $ABCD$  (ver figura 2.5) rectangular, podemos escribir las ecuaciones de balance para los flujos horizontales y verticales,

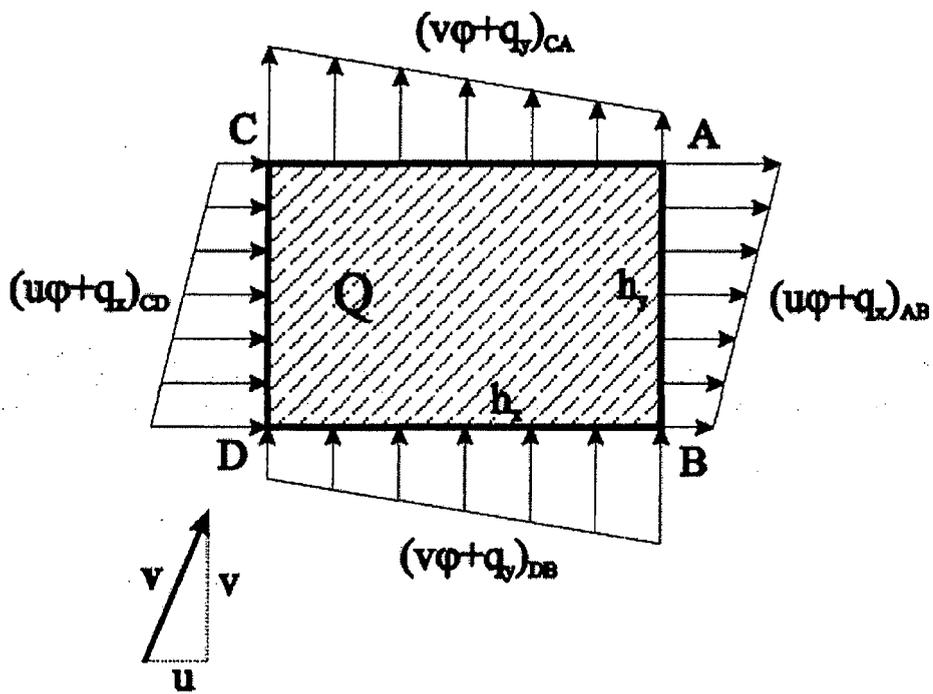


Figura 2.5: Dominio de balance para el problema bidimensional de convección difusión.



$$\sum \text{Flujos horizontales} = \frac{1}{2} [FH(x_C, y_C) + FH(x_D, y_D)] h_y - \frac{1}{2} [FH(x_A, y_A) + FH(x_B, y_B)] h_y \quad (2.71)$$

$$\sum \text{Flujos verticales} = \frac{1}{2} [FV(x_B, y_B) + FV(x_D, y_D)] h_x - \frac{1}{2} [FV(x_A, y_A) + FV(x_C, y_C)] h_x \quad (2.72)$$

Donde se ha denominado  $FH(x_I, y_I)$  y  $FV(x_I, y_I)$  a los flujos horizontales y verticales, respectivamente, en el punto  $(x_I, y_I)$ .

Podemos escribir las ecuaciones (2.71) y (2.72) en la siguiente forma más conveniente, si referimos todos los valores al punto  $A$ ,

$$\sum \text{Flujos horizontales} = \frac{1}{2} [FH(x - h_x, y) + FH(x - h_x, y - h_y)] h_y - \frac{1}{2} [FH(x, y) + FH(x, y - h_y)] h_y \quad (2.73)$$

$$\sum \text{Flujos verticales} = \frac{1}{2} [FV(x, y - h_y) + FV(x - h_x, y - h_y)] h_x - \frac{1}{2} [FV(x, y) + FV(x - h_x, y)] h_x \quad (2.74)$$

Por otra parte, es evidente que se pueden obtener las siguientes expansiones en serie de Taylor,

$$\begin{aligned}
FH(x - h_x, y) &= FH(x, y) - h_x \frac{dFH}{dx} + \frac{h_x^2}{2} \frac{d^2 FH}{dx^2} - O(h_x^3) \\
FH(x, y - h_y) &= FH(x, y) - h_y \frac{dFH}{dy} + \frac{h_y^2}{2} \frac{d^2 FH}{dy^2} - O(h_y^3) \\
FH(x - h_x, y - h_y) &= FH(x, y) - h_x \frac{dFH}{dx} + \frac{h_x^2}{2} \frac{d^2 FH}{dx^2} - \\
&\quad - h_y \frac{dFH}{dy} + \frac{h_y^2}{2} \frac{d^2 FH}{dy^2} + h_x h_y \frac{d^2 FH}{dxdy} - O(h_x^3, h_y^3) \\
FV(x - h_x, y) &= FV(x, y) - h_x \frac{dFV}{dx} + \frac{h_x^2}{2} \frac{d^2 FV}{dx^2} - O(h_x^3) \\
FV(x, y - h_y) &= FV(x, y) - h_y \frac{dFV}{dy} + \frac{h_y^2}{2} \frac{d^2 FV}{dy^2} - O(h_y^3) \\
FV(x - h_x, y - h_y) &= FV(x, y) - h_x \frac{dFV}{dx} + \frac{h_x^2}{2} \frac{d^2 FV}{dx^2} - \\
&\quad - h_y \frac{dFV}{dy} + \frac{h_y^2}{2} \frac{d^2 FV}{dy^2} + h_x h_y \frac{d^2 FV}{dxdy} - O(h_x^3, h_y^3)
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Sustituyendo los desarrollos (2.75) anteriores, en las ecuaciones (2.73) y (2.74), se obtiene, si se desprecian los términos de orden  $O(h^3)$ ,

$$\begin{aligned}
\sum \text{Flujos horizontales} &= -h_x h_y \frac{dFH}{dx} + \\
&\quad + \frac{h_y h_x^2}{2} \frac{d^2 FH}{dx^2} + h_x h_y^2 \frac{d^2 FH}{dxdy}
\end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned}
\sum \text{Flujos verticales} &= -h_x h_y \frac{dFV}{dy} + \\
&\quad + \frac{h_x h_y^2}{2} \frac{d^2 FV}{dy^2} + h_y h_x^2 \frac{d^2 FV}{dxdy}
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Evidentemente el balance de las fuentes, suponiendo que su distribución es lineal en el dominio  $ABCD$ , está dado por,

$$\begin{aligned}
\sum \text{Fuentes} &= Q \left( \frac{1}{4} (x_A + x_B + x_C + x_D), \frac{1}{4} (y_A + y_B + y_C + y_D) \right) h_x h_y = \\
&= Q \left( x - \frac{h}{2}, y - \frac{h}{2} \right) h_x h_y = \\
&= \left[ Q(x, y) - \frac{h_x}{2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{h_y}{2} \frac{\partial Q}{\partial y} \right] h_x h_y
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Donde, de la misma manera, se han despreciado los términos de orden  $O(h^3)$ .

De este modo, podemos escribir la ecuación de balance global en el dominio  $ABCD$  como,

$$\sum \text{Flujos horizontales} + \sum \text{Flujos verticales} + \sum \text{Fuentes} = 0 \quad (2.79)$$

Si además, tenemos en cuenta que  $FV(x, y) = u\varphi + q_x$  y  $FH(x, y) = v\varphi + q_y$  y sustituyendo en (2.79) las relaciones (2.76)-(2.78), se obtiene, tras algunas simplificaciones,

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{v}\varphi) + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{q} - Q - \frac{1}{2} (\tilde{h} \cdot \tilde{\nabla}) [\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{v}\varphi) + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{q} - Q] = 0 \quad (2.80)$$

Donde si despreciamos los términos de las derivadas de la velocidad, tenemos que,

$$(\tilde{v} \cdot \tilde{\nabla}) \varphi + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{q} - Q - \frac{1}{2} (\tilde{h} \cdot \tilde{\nabla}) [(\tilde{v} \cdot \tilde{\nabla}) \varphi + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{q} - Q] = 0 \quad (2.81)$$

Donde se ha denominado,  $\tilde{q} = (q_x, q_y)$  y  $\tilde{h} = (h_x, h_y)$ .

La ley de Fourier [HU96] en problemas bidimensionales, toma la forma,

$$\tilde{q} = -\underline{\underline{\tilde{K}}} \cdot \tilde{\nabla} \varphi \quad (2.82)$$

siendo  $\underline{\underline{\tilde{K}}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$  la matriz de difusión bidimensional. Sustituyendo (2.82) en (2.81) obtenemos la forma de la ecuación bidimensional de convección difusión estabilizada,

$$r - \frac{1}{2} (\tilde{h} \cdot \tilde{\nabla}) r = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.83)$$

$$r = (\tilde{v} \cdot \tilde{\nabla}) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\underline{\tilde{K}}} \cdot \tilde{\nabla} \varphi) - Q$$

De igual manera podemos obtener la versión transitoria de la ecuación (2.83) anterior. En este caso, la ecuación de balance global en el dominio  $ABCD$  puede escribirse como,

$$\begin{aligned} \sum \text{Flujos horizontales} + \sum \text{Flujos verticales} + \\ + \sum \text{Fuentes} = \frac{d}{dt} \iint_{ABCD} \varphi(x) dx \end{aligned} \quad (2.84)$$

Por otra parte, si suponemos lineal la variación de  $\varphi(x)$  en el dominio  $ABCD$ , podemos escribir que,

$$\begin{aligned} \iint_{ABCD} \varphi(x) dx &= \varphi \left( \frac{\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B + \mathbf{x}_C + \mathbf{x}_D}{4} \right) h_x h_y = \\ &= \varphi \left( x - \frac{h}{2}, y - \frac{h}{2} \right) h_x h_y = \\ &= \left[ \varphi(x, y) - \frac{h_x}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{h_y}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] h_x h_y \end{aligned} \quad (2.85)$$

Y sustituyendo las ecuaciones (2.76), (2.77), (2.78) y (2.85) en (2.84), tenemos, tras simplificar,

$$\begin{aligned} \bar{r} - \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{h}} \cdot \tilde{\nabla}) \bar{r} &= 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \\ \bar{r} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \tilde{\nabla} \varphi) - Q \end{aligned} \quad (2.86)$$

Se hace evidente que la extensión de las formas estabilizadas de la ecuación de convección difusión a problemas tridimensionales es inmediata, se puede comprobar de manera sencilla que en este caso las ecuaciones quedan como sigue,

$$\begin{aligned} r - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) r &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ r &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \nabla \varphi) - Q \end{aligned} \quad (2.87)$$

en el caso estacionario, y,

$$\begin{aligned} \bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} &= 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \\ \bar{r} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \nabla \varphi) - Q \end{aligned} \quad (2.88)$$

en el caso del problema transitorio.

Donde, en ambos casos se ha tomado<sup>11</sup>  $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$ .

Al objeto de ser consistentes en el planteamiento, es necesario señalar que también las condiciones de contorno del problema deben ser modificadas. En el apéndice H se demuestra que la ecuación de balance de flujo en el contorno resulta en unas condiciones tipo Neumann modificadas en la forma,

$$-\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \nabla \varphi - q_D - \frac{1}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) r = 0 \quad \text{en } \Gamma_{ND} \quad (2.89)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{v} \varphi - \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \nabla \varphi] - q_T - \frac{1}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) r = 0 \quad \text{en } \Gamma_{NT} \quad (2.90)$$

### 2.3.4 Aplicación del Método de los Elementos Finitos al Problema Estabilizado

La ecuación de convección difusión estabilizada dada en (2.87) (y en (2.88) en su forma transitoria) ha sido obtenida a partir del concepto físico de balance en un dominio finito. Por lo que esta forma debe entenderse como una ecuación diferencial de mayor orden, que puede ser utilizada para resolver el problema planteado mediante cualquiera de las técnicas de integración de ecuaciones diferenciales.

El problema estabilizado que hemos planteado, se define como sigue<sup>12</sup>,  
Encontrar una función  $\varphi = \varphi(x)$  tal que,

$$r - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) r = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.91)$$

$$\varphi = g \quad \text{en } \Gamma_D$$

$$-\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \nabla \varphi - q_D - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} r = 0 \quad \text{en } \Gamma_{ND}$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{v} \varphi - \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \nabla \varphi] - q_T - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} r = 0 \quad \text{en } \Gamma_{NT}$$

con  $r = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \nabla \varphi) - Q$ .

La forma débil de la ecuación (2.91) es,

<sup>11</sup>Se suele denominar a  $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$  vector de longitudes características.

<sup>12</sup>Comparar con la formulación típica dada en (2.70).

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [\psi (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \psi \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi)] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{h}\psi) [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi)] d\Omega = \quad (2.92) \\
& = \int_{\Omega} \psi Q d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{h}\psi) Q d\Omega - \int_{\Gamma_{ND}} \psi q_D d\Gamma - \int_{\Gamma_{NT}} \psi q_T d\Gamma
\end{aligned}$$

donde  $\psi \in \Psi$ , siendo  $\Psi$  el espacio de las funciones de forma, definido por

$$\Psi := \{ \psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = 0 \text{ en } \Gamma_D \}$$

Del mismo modo la solución  $\varphi$  pertenecerá al espacio  $\Phi$  de funciones de prueba, definido por

$$\Phi := \{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi = g \text{ en } \Gamma_D \}$$

La ecuación (2.92) se ha obtenido integrando<sup>13</sup> por partes el término difusivo y el de estabilización, para posteriormente imponer las condiciones de contorno de Neumann.

Si en la ecuación (2.92) tomamos<sup>14</sup>  $\mathbf{h} = 2\hat{t}\mathbf{v}$ , y despreciamos los términos que incluyen las derivadas de  $\mathbf{h}$ , tenemos,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [\psi (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \psi \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi)] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \hat{t} (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi)] d\Omega = \quad (2.93) \\
& = \int_{\Omega} \psi Q d\Omega + \int_{\Omega} \hat{t} (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) Q d\Omega - \int_{\Gamma_{ND}} \psi q_D d\Gamma - \int_{\Gamma_{NT}} \psi q_T d\Gamma
\end{aligned}$$

donde podemos reconocer la forma clásica del método *Streamline Upwind / Petrov Galerkin (SUPG)*. Como se aprecia, se ha obtenido esta expresión, haciendo que el vector  $\mathbf{h}$  tome la dirección de la velocidad, lo cual evidentemente es un caso particular del método *CF* más general. Lo mismo puede

<sup>13</sup>Hay que señalar que, para llegar a esta forma, en este caso no es necesario hacer la suposición  $r = 0$  en  $\Gamma$  como ocurre en el caso de los métodos *SUPG* o *GLS*, pues estos efectos son corregidos por la forma estabilizada de las condiciones de contorno tipo Neumann.

<sup>14</sup>Donde  $\hat{t}$  es el denominado *tiempo intrínseco*.

deducirse para varios de los métodos de estabilización más conocidos, cuya expresión se puede derivar de restricciones a la forma general dada en (2.92). En [Oña96] [Oña98b] se discute detalladamente este aspecto.

Por último, sólo llamar la atención sobre el segundo término de la ecuación (2.93) anterior. Este puede escribirse en la forma,

$$\int_{\Omega} \hat{t} |\mathbf{v}|^2 \nabla \psi \cdot \left( \frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \cdot \nabla \varphi d\Omega + \int_{\Omega} \hat{t} (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) [\nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi)] d\Omega \quad (2.94)$$

Donde, mirando el primer término, puede observarse el aspecto más relevante del método *SUPG*; la adición de una difusión de valor  $\hat{t} |\mathbf{v}|^2$  según las líneas de corriente. Por lo que, volviendo a la ecuación original (2.92), la elección en ella de  $\mathbf{h} = 2\hat{t}\mathbf{v}$  (en la dirección de  $\mathbf{v}$ ), produce la adición de una difusión  $\hat{t} |\mathbf{v}|^2$  según la velocidad.

### 2.3.5 Determinación de las Longitudes Características

En los anteriores apartados hemos presentado el *método de cálculo finitesimal (CF)* como base para la derivación de esquemas estabilizados, en particular, de la ecuación de convección difusión. Este método da una explicación para la mayoría de los esquemas propuestos para este mismo fin, muchos de los cuales fueron presentados de manera heurística, sin ninguna base física.

Es importante ahondar en el hecho de que el método planteado es consistente, es decir  $\varphi$ , solución del problema continuo estabilizado (2.91), también es solución del problema original (2.70). Puesto que, dada la solución única  $\varphi_1$  del problema (2.91) debe cumplir<sup>15</sup>  $r = 0$  y a la inversa, si  $\varphi_2$  es solución de (2.70) entonces  $r = 0$  y se cumple (2.91).

Sin embargo, para completar el esquema estable aún nos queda por abordar una cuestión básica. La determinación de las longitudes características. Aparentemente, la justificación del método puede indicar una relación de estos parámetros con el tamaño de los elementos en la discretización, pero como se ha comprobado, la relación entre ambos depende sustancialmente del problema particular. En concreto, el número de Péclet parece tener mucha influencia en el valor óptimo de estos parámetros.

Aunque se ha llevado a cabo un importante trabajo para la obtención de un algoritmo iterativo que permita obtener la distribución óptima de las longitudes características en un problema concreto [Oña96] [OGI97d] [OGI97b] [OGI98] [OJI98] [OGI97a] el alto coste computacional que esto requiere, lo

<sup>15</sup>Pues, evidentemente, esta es solución del problema estabilizado.

hace inviable para ser aplicado en el ámbito de este proyecto. Una introducción a esta metodología se presenta en el apéndice I.

Se hace patente pues, la necesidad de completar el esquema con una elección adecuada del vector  $\mathbf{h}$ . La simple elección hecha en (2.93) de<sup>16</sup>  $\mathbf{h} = 2t\mathbf{v}$  no es suficiente. Efectivamente, la solución que ofrece el método *SUPG*, es óptima o casi-óptima, para soluciones suficientemente *suaves* [HMM86] [HFH89], sin embargo, no se puede afirmar lo mismo en cercanía de capas límites o, en general, en presencia de altos gradientes. Por este hecho, en ciertos problemas, pueden aparecer oscilaciones localizadas, que en algunos casos impiden la convergencia, sobre todo en problemas muy no lineales. Sin embargo, del estudio de los resultados sobre la convergencia del método *SUPG*, pueden sacarse conclusiones de interés para nuestra discusión. Planteemos en primer lugar la resolución del problema siguiente,

Encontrar una función  $\varphi = \varphi(x)$  tal que,

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - k \Delta \varphi &= Q \quad \text{en } \Omega & (2.95) \\ \varphi &= g \quad \text{en } \Gamma_D \\ \mathbf{n} \cdot k \cdot \nabla \varphi &= q_D \quad \text{en } \Gamma_{ND} \\ \mathbf{n} \cdot [\underline{\mathbf{v}} \varphi + k \cdot \nabla \varphi] &= q_T \quad \text{en } \Gamma_{NT} \end{aligned}$$

donde por simplicidad se ha tomado  $\underline{\mathbf{K}} = k\underline{\mathbf{I}}$ . Si aplicamos para la resolución del sistema (2.95) el método *SUPG* definido por (2.93), el planteamiento del problema queda como sigue,

Encontrar  $\varphi_h \in \Phi_h \subset \Phi := \{\chi \in H^1(\Omega) \mid \chi = g \text{ en } \Gamma_D\}$  tal que  $\forall \psi \in \Psi_h$ , se cumple que,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\psi (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi_h + k (\nabla \psi \cdot \nabla \varphi_h)] d\Omega + \\ & + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \hat{t} (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi_h - k \Delta \varphi_h] d\Omega = \int_{\Omega} \psi Q d\Omega + \\ & + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \hat{t} (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) Q d\Omega - \int_{\Gamma_{ND}} \psi q_D d\Gamma - \int_{\Gamma_{NT}} \psi q_T d\Gamma \end{aligned} \quad (2.96)$$

donde  $\psi \in \Psi_h \subset \Psi := \{\chi \in H^1(\Omega) \mid \chi = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$  y  $\Psi_h, \Phi_h$  son espacios de elementos finitos formados por polinomios de grado  $m$ . En (2.96) se ha denominado  $\Omega^e$  al dominio correspondiente al elemento  $e$ .

<sup>16</sup> donde  $\hat{t}$  puede ser obtenido basandose en criterios de estabilidad (ver [HMM86]).

En (2.96), las segundas integrales de ambos miembros (términos de estabilización) son calculadas sólo en el interior de los elementos<sup>17</sup>. Esto se debe a que a las funciones de forma  $\psi$  no se les exige continuidad en las derivadas primeras<sup>18</sup>, y por ello el término  $k\Delta\varphi_h$  no está definido en el contorno de los elementos. Hay que hacer notar, que estos términos desaparecen si se utilizan elementos de primer orden, pero no en el caso general. Por otra parte, tal y como se ha hecho en (2.96), es normal escribir todo el término de estabilización en esa forma, no sólo aquella parte que involucra derivadas segundas. Aunque esto no es estrictamente necesario, esta forma de calcular las integrales de los términos de estabilización es ampliamente usada en la práctica [HFH89] [Cod93a] [Sot97] [Oña96] [FFH92] [ZT94a] [VCZ97]. Por otra parte, dado que el vector de longitudes características  $\mathbf{h} = \hat{t}\mathbf{v}$ , se suele evaluar en el centroide de los elementos, suponiendo que es constante en su interior, en (2.96) se han eliminado los términos que involucran derivadas de  $\mathbf{h}$ .

Con el planteamiento del problema hecho en (2.96), se puede demostrar [Cod93a, pp. 1.10-14] [HFH89] que, si tomamos  $\hat{t} = \frac{\alpha^e(\gamma)h^e}{2|\mathbf{v}|}$ , siendo,

$$\alpha^e(\gamma) = \begin{cases} \kappa_1 & \text{si } \gamma \rightarrow \infty \\ \kappa_2\gamma & \text{si } \gamma \rightarrow 0 \end{cases}$$

donde  $\kappa_1, \kappa_2$  son constantes genéricas dependientes del problema concreto, se cumple que,

$$\|\varphi - \varphi_h\|_{SUPG}^2 \leq Ch^{2l}$$

$$2l = \begin{cases} 2m & \text{si } \gamma \rightarrow \infty \\ 2m + 1 & \text{si } \gamma \rightarrow 0 \end{cases}$$

Siendo  $\varphi$ , *suficientemente suave*, la solución del problema continuo, mientras que  $\varphi_h$  lo es del problema definido en (2.96). La norma  $\|\cdot\|_{SUPG}$  es la utilizada para demostrar la estabilidad de la forma asociada al primer miembro de (2.96) (ver [Cod93a, pp. 1.10-14] [HFH89, pp. 178-183]). Como se aprecia, el método es casi óptimo (el error de interpolación es de orden  $m+1$ ).

<sup>17</sup>Si  $N_i$  es una función continua en un dominio  $\Omega$  y  $M$  es discontinua entre elementos y pues  $\frac{dM}{dx_i}$  no esta definida en los lados de los elementos, se puede demostrar que, en un sentido distribucional [Oña98b, pp. 18-19],

$$\int_{\Omega} N_i \frac{dM}{dx_i} d\Omega = - \sum_{e=1}^{N_i} \int_{\Omega^e} \frac{dN_i}{dx_i} M d\Omega + \int_{\partial\Omega} N_i M n_i d(\partial\Omega)$$

Siendo  $n_i$  la normal en el contorno  $\partial\Omega$ .

<sup>18</sup>Continuidad  $C^0$ .

Desafortunadamente, la restricción de suavidad, de la solución del problema continuo, es una exigencia demasiado dura en la práctica. La aparición de gradientes importantes de las variables, por la presencia de capas límites o efecto de los contornos, por ejemplo, no permite que el resultado anterior sea aplicable<sup>19</sup>. De hecho, el problema se debe a que el estimador  $\|\cdot\|_{SUPG}$  no es puntual<sup>20</sup>, lo cual se traduce en la práctica en que, aún habiendo convergencia global, localmente podemos encontrar oscilaciones.

En nuestra búsqueda de un método estable, podemos hallar otra justificación de la naturaleza de esas oscilaciones, en la falta de monotonía del método *SUPG*. En problemas no estacionarios, un esquema numérico que evite oscilaciones localizadas debe ser monótono o preservar monotonía [Cod93a, pp. 1.10-14]. Un método numérico se dice que es monótono si la solución numérica en cada paso de tiempo mantiene el signo del instante anterior para cada nodo de la malla espacial. De la misma manera se dice que un esquema preserva monotonía si mantiene la de los datos iniciales. Existe una importante limitación práctica al diseño de un método numérico de alto orden de exactitud, con propiedades de monotonía. El teorema de Godunov [LeV90] establece que un método lineal, que preserve monotonía, como máximo es de primer orden de exactitud. Por lo tanto, la única manera de diseñar un método que pueda tener mayor precisión en la zona donde la solución es suave y evite las oscilaciones, allí donde la solución tiene importantes gradientes, es pensar en un algoritmo no lineal. Es decir, un esquema numérico que dependa de la solución numérica.

La convergencia puntual y uniforme de la ecuación de convección difusión está ligada al cumplimiento del principio del máximo discreto (*PMD*, ver [Cod93a] [Sot97]). Este principio establece que la solución de la ecuación de convección difusión tiene su máximo en el contorno cuando el término de fuente es mayor o igual que cero. Es evidente, que la solución continua cumple con este principio. Su estudio en el caso discreto concluye con el hecho de que el cumplimiento de este principio asegura monotonía y estabilidad uniforme del algoritmo numérico.

El análisis de este principio permite llegar a la conclusión de que, en general, es imposible cumplir el *PMD* con la formulación *SUPG* [Cod93a, pp. 3.14-15]. Por otra parte el análisis de diferentes casos prácticos [Cod93a, pp. 3.11-15] permite comprobar que mientras la adición de difusión según las líneas de corriente no asegura la estabilidad de la solución, ésta se puede hallar con el añadido de difusión homogénea de la forma  $\frac{1}{2}\alpha^\epsilon h |\mathbf{v}_\parallel|$  siendo

<sup>19</sup>En realidad, el resultado anterior es aplicable, aún en esos casos, lejos de las zonas con gradientes importantes.

<sup>20</sup>Un estimador puntual estaría basado en la norma  $\|f(x)\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ .

$\alpha^e(\gamma_{||}) = \kappa_3 - \frac{1}{\gamma_{||}}$ , con  $\kappa_3$  una constante genérica dependiente del problema,

$$\mathbf{v}_{||} = \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_h}{|\nabla \varphi_h|^2} \nabla \varphi_h \text{ y } \gamma_{||} = \frac{|\mathbf{v}_{||}|h}{2k}.$$

De todo lo anterior, podemos sacar las siguientes conclusiones,

1. Del análisis del método *SUPG*: Este método es cuasi óptimo si  $\alpha^e(\gamma) = \begin{cases} \kappa_1 & \text{si } \gamma \rightarrow \infty \\ \kappa_2 \gamma & \text{si } \gamma \rightarrow 0 \end{cases}$ , pero requiere que la solución del problema continuo,  $\varphi$ , sea suave. Por otra parte si en la solución no hay importantes gradientes, el método *SUPG* es el más apto.
2. Del teorema de Godunov: Un método numérico que preserve monotonía y sea de orden mayor que uno debe ser no lineal, esto es depender de su solución. Debemos desarrollar un método no lineal.
3. Del análisis del *PMD*: La simple adición de difusión según las líneas de corriente (*SUPG*) no es suficiente para que se cumpla. Sin embargo, la adición de difusión homogénea del tipo  $\frac{1}{2}\alpha^e h |\mathbf{v}_{||}|$  siendo  $\alpha^e(\gamma_{||}) = \kappa_3 - \frac{1}{\gamma_{||}}$ , es suficiente para el cumplimiento del *PMD* en varios casos estudiados. Parece que en determinadas circunstancias es necesario añadir difusión homogénea al problema para asegurar su estabilidad.

A partir de las anteriores conclusiones es posible establecer una forma básica para el vector de longitudes características. En primer lugar vamos a escribir el vector  $\mathbf{h}$  en una forma más apropiada (ver figura 3.2), basada en la siguiente descomposición<sup>2122</sup>,

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{h}^* + \mathbf{h}_{\nabla \varphi} + \mathbf{h}_s \\ \mathbf{h}^* &= \kappa_1 \mathbf{v}, \quad \mathbf{h}_{\nabla \varphi} = \kappa_2 \nabla \varphi_h, \quad \mathbf{h}_s = \kappa_3 \mathbf{s} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Basándonos en la anterior descomposición (2.97), y despreciando el término residual  $\kappa_3 \mathbf{s}$ , podemos escribir que,

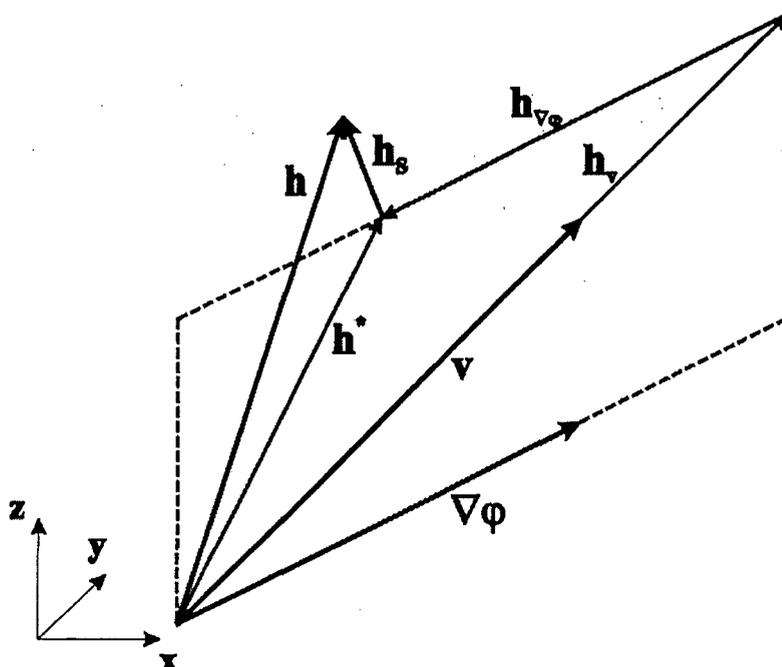
$$\mathbf{h} = \alpha' h^e \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \beta' h^e \frac{\mathbf{v}_r}{|\mathbf{v}_r|} \quad (2.98)$$

Siendo  $h^e$  es una medida del tamaño del elemento<sup>23</sup> y  $\mathbf{v}_r$  se define por,

<sup>21</sup> Si  $\nabla \varphi // \mathbf{v}$  entonces  $\mathbf{h} = \kappa_1 \mathbf{v} + \kappa_3 \mathbf{s}$ .

<sup>22</sup> En el caso bidimensional la descomposición queda como  $\tilde{\mathbf{h}} = \kappa_1 \tilde{\mathbf{v}} + \kappa_2 \tilde{\nabla} \varphi$ .

<sup>23</sup> El índice  $e$  indica que su valor será elemental, aunque evidentemente, esto es una simplificación. Para su cálculo pueden utilizarse, por ejemplo las recomendaciones presentadas en [Sot97].

Figura 2.6: Descomposición vectorial de  $h$ .

$$\mathbf{v}_r = \frac{\mathbf{r}(\varphi_h)}{|\nabla\varphi_h|^2} \nabla\varphi_h \quad (2.99)$$

La forma (3.64) de descomposición del vector  $h$  cumple varias de los requisitos que nos habíamos fijado para la determinación del parámetro de estabilización. Para verlo en detalle, sustituyamos la anterior descomposición (3.64) en la ecuación estabilizada original (2.91). Esto resulta en,

$$r - \frac{h^e}{2|\mathbf{v}|} \alpha'(\mathbf{v} \cdot \nabla) r + \frac{h^e}{2|\mathbf{v}_r|} \beta'(\mathbf{v}_r \cdot \nabla) r = 0 \quad (2.100)$$

Como se aprecia, la ecuación escrita en esa forma incorpora un término  $\frac{h^e}{2|\mathbf{v}|} \alpha'(\mathbf{v} \cdot \nabla) r$  equivalente al de la formulación *SUPG*. La incorporación de este término permitirá al esquema recoger todas las propiedades de convergencia que se han demostrado para el método *SUPG*. Gracias a la descomposición hecha en (3.64), se ha incorporado un término de la forma  $\frac{h^e}{2|\mathbf{v}_r|} \beta'(\mathbf{v}_r \cdot \nabla) r$  cuyas propiedades se estudian en [Cod93a] y cuya derivación se apoya en el método de estabilización propuesto en [GDdC88]. Como se

verá, esta expresión incorpora en la forma débil del problema un término equivalente a una difusión homogénea, lo cual, como vimos, era deseable para cumplir con el *PMD*. Hay que señalar además que, este sumando toma la forma de los métodos denominados de captura de discontinuidades [HM86] [Cod93a] [Sot97], y debe añadir al esquema las propiedades de estabilidad ante gradientes elevados de la variable  $\varphi$  que requeríamos. Cabe señalar, haciendo referencia al mencionado teorema de Godunov, que el esquema desarrollado es no lineal, pues en el tercer término  $\mathbf{v}_\tau$  depende de la solución del problema.

El último aspecto que debemos considerar es la definición de las funciones  $\alpha', \beta'$ . Para ello, emplearemos las deducciones presentadas anteriormente, según esto, se deben cumplir las siguientes relaciones:

$$\alpha'(\gamma) = \begin{cases} \kappa_1 & \text{si } |\gamma| \rightarrow \infty \\ \kappa_2 \gamma & \text{si } \gamma \rightarrow 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

$$\beta'(\gamma_{||}) = \kappa_3 - \frac{1}{\gamma_{||}}$$

Pero además es interesante, que seamos capaces de recuperar la forma óptima del método *SUPG*, en aquellas zonas del dominio donde la solución sea suave<sup>24</sup>. Para deducir una forma de conseguirlo, revisemos los términos que este método de estabilización añade a la forma clásica de Galerkin. Estos son,

$$T.E. = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \alpha' \frac{h}{2|\mathbf{v}|} (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) r(\varphi_h) d\Omega + \quad (2.102)$$

$$+ \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \beta' \frac{h}{2|\mathbf{v}_\tau|} \frac{r^2(\varphi_h)}{|\nabla \varphi_h|^2} \nabla \varphi_h \cdot \nabla \psi d\Omega$$

Como ya se ha comentado, hay que observar que, mientras el primer término continúa siendo igual al que teníamos antes, con la formulación basada en el método *SUPG*, tenemos un término adicional, equivalente al que tendríamos con una difusión homogénea. De nuevo, para la obtención de (2.102) se han despreciado los términos que involucran derivadas de  $h$ . Esto puede hacerse aceptando que  $h$  es constante en el interior de los elementos.

<sup>24</sup>Pues ya conocemos el hecho de su estabilidad y cuasi óptima convergencia en este caso.

Los términos de estabilización de (2.102) pueden reescribirse, haciendo uso de (2.99), como,

$$\begin{aligned} T.E. = & \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \alpha' \frac{h}{2} \nabla \psi \cdot \frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \nabla \varphi_h \, d\Omega + \\ & + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \beta' \frac{h}{2} \frac{r^2(\varphi_h)}{|\mathbf{v}_r| |\nabla \varphi_h|^2} \nabla \varphi_h \cdot \nabla \psi \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.103)$$

Donde, para simplificar la exposición, se han eliminado aquellos términos que no tienen forma de difusión. Como ya se ha mencionado, el primero de los términos de (2.103) es una difusión según las líneas de corriente, descrita por el tensor  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{LC} = \alpha''(\gamma) \frac{h}{2} \frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ , mientras que el segundo es una difusión homogénea dada por<sup>25</sup>  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_H = \beta'(\gamma_{||}) \frac{h}{2} \frac{|\mathbf{r}(\varphi_h)|}{|\nabla \varphi_h|} \underline{\underline{\mathbf{I}}}$ . Al objeto de simplificar la notación, escribiremos los tensores anteriores en la forma,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{LC} &= k_1 \frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}, \quad k_1 = \alpha'(\gamma) \frac{h}{2} |\mathbf{v}| \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_H &= k_2 \underline{\underline{\mathbf{I}}}, \quad k_2 = \beta'(\gamma_{||}) \frac{h}{2} \frac{|\mathbf{r}(\varphi_h)|}{|\nabla \varphi_h|} \end{aligned} \quad (2.104)$$

De esta forma [VCZ97] [VCZ99], podemos escribir una versión alternativa de (2.103), que cumple el requisito de recuperar la forma de *SUPG* ante soluciones suaves, como,

$$\begin{aligned} T.E. = & \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \langle k_1 - k_2 \rangle \nabla \psi \cdot \left( \frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \cdot \nabla \varphi_h \, d\Omega + \\ & + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} k_2 (\nabla \varphi_h \cdot \nabla \psi) \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.105)$$

Donde  $\langle a_1, a_2 \rangle = \max(0, a_1 - a_2)$ . Como puede comprobarse, los términos de (2.105) recuperan la forma de *SUPG* en el caso en que  $k_2 = 0$ .

Resumiendo, si aplicamos para la resolución del sistema (2.95) el método *CF*, con la definición del vector  $\mathbf{h}$  dada en (3.64), el planteamiento del problema queda como sigue,

<sup>25</sup>Hay que hacer notar que, como se observa por la forma de  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_H$ , la difusión que añade este tensor es siempre positiva, evitando así los problemas de métodos alternativos.



alternativa sería la aplicación de desarrollos en serie de Taylor multidimensionales a las ecuaciones diferenciales ordinarias. Pero, de otra forma, se pueden obtener, de manera simple, esquemas estabilizados de alto orden, mediante la metodología que presentaremos a continuación.

Recuperemos la forma estabilizada dada en (2.92).

$$\begin{aligned} r - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) r &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ r &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi) - Q \end{aligned} \quad (2.108)$$

Si al esquema (2.108) anterior, que puede considerarse, una ecuación de balance mejorada, le aplicamos directamente las técnicas presentadas en este capítulo, podemos llegar a,

$$\begin{aligned} r_2 - \frac{1}{2} (\mathbf{h}_2 \cdot \nabla) r_2 &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ r_2 &= r - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) r \end{aligned} \quad (2.109)$$

Donde se hace notar que, evidentemente,  $\mathbf{h}$  no tiene por qué coincidir con  $\mathbf{h}_2$ , dado que son parámetros de estabilización de ecuaciones diferentes.

Si sustituimos (2.108) en (2.109), tenemos<sup>26</sup>,

$$r - \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{h}' \cdot \nabla) - \frac{1}{4} (\mathbf{h}_2 \cdot \nabla) (\mathbf{h} \cdot \nabla) \right] r = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.110)$$

Es importante señalar que la forma débil de la ecuación anterior recuerda mucho a la obtenida con la aplicación de métodos como *Galerkin Least Squares (GLS)* [HFH89] [Cod96] [Sot97] o *Subgrid Scale* [Hug95]. De hecho la apropiada selección de los valores de  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{h}_2$  permitiría que fueran reproducidos exactamente [Oña98a].

El proceso definido por las ecuaciones (2.109) se puede utilizar recursivamente para derivar esquemas de ordenes superiores.

### 2.3.7 Esquemas Estabilizados en el Tiempo

El método *CF* presentado, permite adicionalmente, la construcción de esquemas estabilizados de mayor orden en el tiempo. Para ello, si escribimos el balance de flujos, no sólo para un dominio espacial  $\Omega^A$  sino para el dominio

<sup>26</sup>Llamando  $\mathbf{h}' = \mathbf{h} + \mathbf{h}_2$ .

espacio temporal  $\Omega^A \times [t, t + \delta]$ , siendo  $\delta$  un incremento de tiempo finito arbitrario, la ecuación de balance global puede escribirse como,

$$\int_t^{t+\delta} \int_{\Omega^A} \left[ \sum \text{Flujos} + \sum \text{Fuentes} \right] dx dt = \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega^A} d\varphi(x) dx dt \quad (2.111)$$

El primer término de la izquierda de la ecuación (2.111) anterior puede escribirse como,

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega^A} \left[ \sum \text{Flujos} + \sum \text{Fuentes} \right] dx dt \simeq \\ & \simeq \int_{\Omega^A} \frac{\delta}{2} \left[ \left[ \bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} \right]^t + \left[ \bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} \right]^{t+\delta} \right] dx \simeq \\ & \simeq \int_{\Omega^A} \delta \left[ \left[ \bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} \right]^t + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} \right]^t \right] dx \end{aligned} \quad (2.112)$$

donde  $\bar{r}$  tiene el significado usual dado en (2.86).

Por otra parte, el término de la derecha de la ecuación (2.111) puede escribirse como,

$$\int_t^{t+\delta} \int_{\Omega^A} d\varphi(x) dx dt = \int_{\Omega^A} (\varphi^{t+\delta} - \varphi^t) dx = \int_{\Omega^A} \delta \left( \frac{\partial \varphi^t}{\partial t} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 \varphi^t}{\partial t^2} \right) dx \quad (2.113)$$

De igualar (2.112) y (2.113) y teniendo en cuenta que  $\Omega^A$  es un dominio genérico<sup>27</sup>, se tiene,

$$\bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} \right] = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad (2.114)$$

de donde si eliminamos los términos de mayor orden se simplifica en la forma,

$$\bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad (2.115)$$

<sup>27</sup>y del mismo modo  $t$  es un instante genérico.

La ecuación (2.115) se puede utilizar para derivar diferentes esquemas de integración, en los cuales el parámetro  $\delta$  juega un papel crucial<sup>28</sup>. A modo de ejemplo, si se discretiza la ecuación (2.115) en el tiempo usando un esquema centrado explícito y se toma  $\delta = \Delta t$ , se tiene,

$$\frac{\varphi^{t+\Delta t} - \varphi^t}{\Delta t} + r^t - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) r^t + \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\varphi^{t+\Delta t} - 2\varphi^t + \varphi^{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \right] = 0 \quad (2.116)$$

en  $\Omega \times [0, T]$

donde para obtener (2.116) se han despreciado los términos de las derivadas espaciales de  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Simplificando la ecuación anterior, nos resulta la forma,

$$\frac{\frac{3}{2}\varphi^{t+\Delta t} - 2\varphi^t + \frac{1}{2}\varphi^{t-\Delta t}}{\Delta t} + r^t - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) r^t = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad (2.117)$$

que es un esquema de integración temporal de  $\varphi$  de segundo orden.

## 2.4 El Problema de Convección Pura

En las secciones anteriores hemos estudiado el problema de convección-difusión hallando que, en el caso homogéneo unidimensional, las inestabilidades que aparecen en la solución numérica clásica pueden justificarse por el error de truncamiento producido por el proceso mismo de discretización. Además hemos encontrado que este error de truncamiento tiene forma de difusión negativa para cualquier valor del número de Péclet.

Por otra parte, un análisis de la ecuación de balance del mismo problema nos ha permitido diseñar un método de estabilización de aplicación general (CF). Una de las características básicas de este método es la adición de difusión según una dirección genérica. Pero su propiedad más interesante es la consistencia, esto es, la solución del problema diferencial estabilizado es solución del problema original.

Ahora, hemos de volver al punto de partida de este análisis; la ecuación cinemática de superficie libre. Esta condición, como ya hemos mencionado, toma la forma del problema de convección pura siguiente,

Encontrar  $\varphi = \varphi(x)$  tal que,

$$\begin{aligned} w &= \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \eta \quad \text{en } z = \eta \\ \eta &= g \quad \text{en } \Gamma_{D_\eta} \end{aligned} \quad (2.118)$$

<sup>28</sup>Por su carácter general, denominaremos a esta ecuación, ecuación *fundamental* del cálculo finitesimal.

Como puede apreciarse tras comparar el problema (2.118) anterior con el (2.70), el límite de convección pura  $\gamma \rightarrow \infty$  tiene unas propiedades particulares, sobre todo en lo referente a las condiciones de contorno, que conviene conocer. En primer lugar, la ecuación (2.118) anterior es de primer orden, por lo que si nos fijamos en el problema unidimensional, sólo admite una condición de contorno. Por otra parte la imposición de condiciones de contorno de flujo prescrito hecha en (2.70) queda limitada en este caso a la prescripción del flujo convectivo,

$$\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{v}}\eta = q \quad \text{en} \quad \Gamma_{N\eta}$$

pero su aplicación carece de sentido físico en el caso de su aplicación a los problemas de superficie libre.

Antes de continuar, hagamos un pequeño estudio sobre el problema unidimensional siguiente,

Encontrar  $\varphi = \varphi(x)$  tal que,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= 0 \quad \text{en} \quad 0 < x < l \\ \varphi(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.119)$$

Dividimos a continuación el intervalo  $[0, l]$  en  $N$  elementos iguales, siendo  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = l$  donde,  $x_{m+1} - x_m = d$  ( $m = 0, N - 1$ ). Si discretizamos el problema anterior, utilizando el método de los elementos finitos o diferencias finitas centradas, obtenemos,

$$\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_{i-1}) = 0 \quad \text{con} \quad i = 1, N - 1 \quad (2.120)$$

La ecuación característica de la anterior es  $\lambda^2 - 1 = 0$  cuyas raíces son,  $\lambda = \pm 1$ . Por lo que la solución genérica de (2.120) puede escribirse como,

$$\varphi_i = C_1 + C_2(-1)^i \quad (2.121)$$

Cuyo carácter oscilatorio es claro<sup>29</sup>. Por otra parte es evidente que es necesaria una condición adicional a la del problema planteado, ya que el problema discreto es de segundo orden, lo cual es, por sí sólo, una inconsistencia.

<sup>29</sup>Se hace notar que la ecuación anterior puede obtenerse del mismo análisis del caso con difusión haciendo  $\gamma \rightarrow \infty$ .

Por otra parte, estos problemas se trasladan al caso general de la ecuación no homogénea,

$$\frac{d\varphi}{dx} = e(x) \quad \text{en } 0 < x < l \quad (2.122)$$

Su forma discreta utilizando el mismo procedimiento anterior será,

$$\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_{i-1}) = e(\dots, x_{i+1}, x_i, x_{i-1}, \dots) \quad \text{con } i = 1, N - 1 \quad (2.123)$$

cuya solución será, evidentemente, de la forma,

$$\varphi_i = C_1 + C_2 (-1)^i + E(i) \quad (2.124)$$

donde  $E(i)$  es una solución particular de la ecuación (2.123).

La aplicación de unas condiciones de contorno deseables (como las sugeridas en [D'E97] [Daw77],  $\varphi_0 = 0$  y  $\varphi_1 = 0$ , que impone a nivel discreto  $\frac{d\varphi_0}{dx} = 0$ ) da como resultado,

$$\varphi_i = -\frac{E(1) + E(0)}{2} + (-1)^i \frac{E(1) - E(0)}{2} + E(i) \quad (2.125)$$

Que mantiene su carácter oscilatorio siempre que  $E(1) \neq E(0)$ .

Este comportamiento de la ecuación puede deducirse del análisis hecho en (2.39)-(2.69). La aplicación directa del método de estabilización  $CF$  sobre la ecuación (2.119) resulta en,

$$r - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx} = 0 \quad \text{en } 0 < x < l \quad (2.126)$$

$$r = \frac{d\varphi}{dx}$$

Si aplicamos la ecuación (2.56) para deducir la longitud característica  $h$  óptima, la ecuación (2.126) anterior queda como,

$$\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i) = 0 \quad \text{con } i = 1, N - 1 \quad (2.127)$$

La ecuación característica de la anterior es  $\lambda = 1$ . Por lo que la solución genérica de (2.120) puede escribirse como,

$$\varphi_i = C_1 \quad (2.128)$$

Que evidentemente es la solución nodalmente exacta de la ecuación (2.119) original y es además consistente con sus condiciones de contorno<sup>30</sup>. Podemos concluir de este sencillo análisis que, en el límite  $\gamma \rightarrow \infty$ , los resultados obtenidos en los apartados anteriores para la ecuación de convección difusión, son perfectamente válidos, haciendo la adecuada modificación de las condiciones de contorno.

Por otra parte, y aún cuando la mayoría de ellas pueden derivarse directamente de las conclusiones hechas sobre la ecuación de convección difusión, en [HFH89] se demuestran las propiedades de convergencia y estabilidad de los métodos de estabilización tipo *SUPG* para el caso concreto de convección.

La estabilización utilizando el método *CF* requiere como punto de partida una ecuación de conservación. En el caso de la condición de superficie libre, este balance está dado por (2.5), que expresa que la superficie libre es un contorno material, esto es que las partículas fluidas ni entran ni salen de él.

Recuperemos la forma estabilizada dada en (2.92), y apliquémosla a la ecuación de superficie libre (2.8), para dar,

$$\begin{aligned} r - \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{h}} \cdot \tilde{\nabla}) r &= 0 \quad \text{en } z = \eta \\ r &= \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \eta - w \end{aligned} \quad (2.129)$$

O en su forma transitoria, basada en (2.7) y (2.115),

$$\begin{aligned} \bar{r} - \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{h}} \cdot \tilde{\nabla}) \bar{r} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} &= 0 \quad \text{en } z = \eta \\ \bar{r} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \eta - w \end{aligned} \quad (2.130)$$

Si aplicamos para la resolución del sistema (2.129) la metodología expuesta en (2.106) y (3.68), el problema se plantea como

Encontrar  $\eta \in \Phi_h$ , tal que  $\forall \psi \in \Psi_h$ , se cumple que<sup>31</sup>,

<sup>30</sup>Aunque, como es lógico, no admite las condiciones de contorno fijadas en el problema de convección difusión.

<sup>31</sup>En este caso, el método estabilizado, tiene como condición de contorno natural,

$$\frac{h}{2|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} r = 0 \quad \text{en } \Gamma_N$$

Lo cual, evidentemente, cumple la solución del problema  $r = 0$ .

$$\int_{\Omega} \psi (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \eta d\Omega + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \langle k_1 - k_2 \rangle \tilde{\nabla} \psi \cdot \left( \frac{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} \right) \cdot \tilde{\nabla} \eta d\Omega + \quad (2.131)$$


---


$$+ \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} k_2 (\tilde{\nabla} \eta \cdot \tilde{\nabla} \psi) d\Omega = \int_{\Omega} \psi w d\Omega + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1 - k_2 \rangle}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \psi) w d\Omega$$


---

Donde los términos subrayados añaden la necesaria estabilización al método y  $k_1$ ,  $k_2$  son los dados en (3.67) y (3.68).

La forma transitoria del sistema anterior, que se obtiene a partir de (2.130), es,

$$\int_{\Omega} \psi \varphi^{t+\Delta t} d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{4}{3} \psi \varphi^t - \frac{1}{3} \psi \varphi^{t-\Delta t} \right] d\Omega + \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \psi w d\Omega -$$

$$- \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \psi (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \eta d\Omega + \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1 - k_2 \rangle}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \psi) w d\Omega -$$

$$\sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} k_2 (\tilde{\nabla} \eta \cdot \tilde{\nabla} \psi) d\Omega -$$

$$- \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \langle k_1 - k_2 \rangle \tilde{\nabla} \psi \cdot \left( \frac{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} \right) \cdot \tilde{\nabla} \eta d\Omega \quad (2.132)$$

donde se ha utilizado la forma simplificada dada en (2.117).

Por último añadir que el método *CF* transforma la ecuación de convección pura en una de convección difusión. Esta última debe considerarse como una versión mejorada (de mayor orden de aproximación) que la original, pero continúa siendo una ecuación diferencial que representa el mismo problema. Por lo tanto, todo el estudio hecho a lo largo del presente capítulo, sobre la ecuación de convección difusión, es plenamente aplicable en este caso.

## 2.5 El Método de Estabilización de Dawson

Ya hemos presentado, anteriormente en este capítulo, la forma linealizada de la ecuación de superficie libre que fue propuesta en [Daw77] por Dawson.

Pero sin duda, el aspecto más destacado de este método, es la forma de estabilizar la ecuación de superficie libre.

Se ha comentado anteriormente que el cálculo de las derivadas primeras descentradas en contracorriente (*upwind*) introduce en las ecuaciones una difusión numérica que puede corregir las inestabilidades asociadas a la ecuación de convección difusión. El problema de los métodos de este tipo es que la adición de difusión no puede ser controlada fácilmente, por lo que la solución depende significativamente de parámetros como el tamaño de la malla.

El procedimiento de Dawson, si bien tiene características de los métodos de evaluación en avance, es ligeramente diferente. La derivada primera que aparece en la ecuación (2.24) es evaluada mediante una fórmula de deducción casi mágica y de resultados sorprendentes. Cabe señalar, que en el artículo original, esta fórmula no tiene ninguna justificación teórica y la recomendación de Dawson proviene de una selección usando la técnica de prueba y error.

La propuesta consiste en usar un operador de cuatro puntos en avance, el cual debe eliminar los errores de segundo y cuarto orden, pero no de tercero. De esta manera, la derivada según una dirección  $l$  de la función  $f(x)$  puede escribirse como (ver apéndice F),

$$\left(\frac{df}{dl}\right)_{Dawson} = \frac{10f_i - 15f_{i-1} + 6f_{i-2} - f_{i-3}}{6h} \quad (2.133)$$

Que es la mencionada fórmula de cuatro puntos, cuya evaluación, estabiliza de manera notable la ecuación (2.24). En efecto, la evaluación del término  $\frac{\partial}{\partial l} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}^2 |\mathbf{v}|)$ , de la ecuación (2.24), mediante (2.133), permite obtener resultados muy aceptables, no apareciendo efectos de amortiguación significativos, en los casos analizados en [Daw77]. Sin embargo, un estudio profundo del operador (2.24) muestra que su rango de funcionamiento óptimo está limitado a un intervalo de  $F_n$ <sup>32</sup> y que su efectividad se ve afectada de manera importante por el tamaño de la malla (ver [Let93]). Se hace notar, por otra parte, que la necesidad de evaluar la ecuación (2.24), con tres puntos corriente arriba, limita casi exclusivamente su utilización a mallas estructuradas.

En la referencia [IOS99] se analiza en profundidad la fórmula (2.133), y se presenta una forma de escribirla, basada en esquemas centrados. Por otra parte en la referencias [Rav96, pp 89-91] [Let93] se discuten varias alternativas a la formulación de Dawson, para la resolución de la ecuación de superficie libre, sin embargo ninguna de ellas parece tener propiedades suficientemente atractivas.

<sup>32</sup>En concreto parece fallar notablemente [Let93] para altos  $F_n$ .

Efectivamente, la fórmula propuesta por Dawson no es única y sus propiedades para la estabilización de la ecuación de superficie libre son notables, pero limitados. Además, estas limitaciones son comunes a todos los esquemas similares estudiados en [Let93], por lo que difícilmente podrá derivarse una forma general aplicable a diferentes problemas basada en la fórmula (2.133).

Un aspecto destacable es la posibilidad de demostrar la equivalencia de la metodología de Dawson con el algoritmo *CF* aquí presentado. En efecto, a partir de la propuesta original de Dawson [Daw77], en [Let93] se derivaron esquemas generales para la estabilización de la superficie libre. Además en la misma referencia se estudian las propiedades de amortiguamiento y estabilidad de diversos operadores. Pero veamos cual es el modo de proceder, para obtener estos esquemas.

El desarrollo en serie de Taylor de una función  $f$  sobre  $x + mh$ , puede escribirse como,

$$f(x + mh) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(mh)^n}{n!} f^{(n)}(x) \quad (2.134)$$

Por otra parte, podemos escribir un operador de diferencias genérico, para la derivada primera, como,

$$f'(x) = \frac{1}{h} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_n f(x + mh) \quad (2.135)$$

donde  $w_n$  son los coeficientes apropiados, definitorios del operador. Si sustituimos (2.134) en (2.135), e invertimos el orden de los sumatorios resulta,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n h^{n-1} \frac{d^n f}{dx^n}(x) \quad (2.136)$$

donde se ha denominado,

$$e_n = \frac{1}{n!} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^n w_n \quad (2.137)$$

Evidentemente, para obtener el operador  $f'(x)$  óptimo, nos gustaría tener  $e_1 = 1$  y  $e_i = 0$ , para  $i \neq 1$ , de manera que coincidieran el operador y su

derivada (operador exacto). Desafortunadamente eso requiere un infinito número de  $w_n \neq 0$ . La metodología propuesta se limita a tomar un número  $N$  de  $w_n$  diferentes de cero, e imponer las condiciones requeridas sobre los valores de  $e_n$ . Esto conduce a un sistema lineal de tamaño  $N \times N$  (para más detalles ver [Let93]). El método de Dawson original se puede obtener haciendo  $e_0 = 0$ ,  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 0$  y  $e_4 = 0$ .

En buena lógica, todos los operadores que construyamos tendrán  $e_0 = 0$  y  $e_1 = 1$ , por lo que el operador (2.136), puede escribirse como,

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} e_n h^{n-1} \frac{d^n f}{dx^n}(x) \quad (2.138)$$

Si partimos de la ecuación cinemática de superficie libre unidimensional <sup>33</sup> siguiente,

$$u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w \quad (2.139)$$

Entonces, siguiendo la metodología expuesta, la forma general de la ecuación discreta estabilizada, sería, sustituyendo (2.138) en (2.139),

$$u \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \sum_{n=2}^{\infty} e_n h^{n-1} \frac{\partial^n \eta}{\partial x^n} = w \quad (2.140)$$

Por otra parte, en este caso es sencillo obtener la forma genérica del método *CF* de alto orden. Esta puede derivarse del desarrollo en serie de los términos de la ecuación de balance unidimensional. El resultado es equivalente a la aplicación del desarrollo en serie de Taylor al residuo de la ecuación (2.139), y está dado por,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha h)^n}{n!} r^{(n)}(x) = 0 \quad (2.141)$$

$$r = u \frac{\partial \eta}{\partial x} - w$$

De donde, si despreciamos las variaciones en  $u$  y  $w$ , se tiene,

<sup>33</sup>o de convección pura, según se quiera denominar.

$$u \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\alpha h)^n}{n!} \eta^n(x) = w \quad (2.142)$$

Que, como se puede apreciar, toma la misma forma que (2.140). De este hecho pueden sacarse varias conclusiones,

1. El método de estabilización de Dawson puede derivarse de la aplicación de las técnicas *CF*. Lo cual permite dar una base teórica al primero.
2. El método *CF* debe considerarse como una forma más general del método de Dawson, que le añade propiedades de las que este carece, entre ellas la de consistencia.
3. De las conclusiones que se obtienen en el estudio de diversos operadores tipo Dawson [Let93], se concluyen sus deficientes propiedades estabilizantes para un amplio rango de problemas. Al contrario, el método *CF* se presenta como una alternativa interesante para ser aplicada a una amplia variedad de problemas. Por otra parte, las propiedades del operador del método *CF* lo hacen muy adecuado para su uso con mallas no estructuradas.

## 2.6 Extensión del Método *CF* a otros Problemas de Mecánica de Fluidos

El enfoque físico en el que se basa el método de *cálculo finitesimal* presentado en este capítulo, permite que sea fácilmente extendido a otros problemas. Hasta ahora nos hemos fijado en el problema de convección difusión, pero como ya se ha comentado anteriormente, su única limitación es la existencia de una ecuación de balance.

Por ello una primera aplicación de interés es su extensión a las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles. Efectivamente, es inmediato plantear el problema estabilizado, basado en el método *CF*, de las ecuaciones de flujo incompresible. De hecho su carácter de ecuaciones de balance de masa y balance de cantidad de movimiento, las hace idóneas para la aplicación del método.

Si suponemos, al igual que anteriormente, que el dominio de balance, para cada una de estas ecuaciones, es finito y representamos la variación de masa y cantidad de movimiento, utilizando expansiones en serie de Taylor de mayor

orden, que las usadas en la teoría infinitesimal clásica, podemos encontrar las ecuaciones estabilizadas, sólo retomando la ecuación fundamental del *cálculo finitesimal* (2.115) y aplicándola a los residuos de las ecuaciones de balance. Esto resulta en,

*Balance de Cantidad de Movimiento*

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} \mathbf{h}_{m_i} \cdot \nabla r_{m_i} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( r_{m_i} - \frac{1}{2} \mathbf{h}_{m_i} \cdot \nabla r_{m_i} \right) = 0 \quad i = 1, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (2.143)$$

*Balance de Masa*

$$r_d - \frac{1}{2} \mathbf{h}_d \cdot \nabla r_d + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( r_d - \frac{1}{2} \mathbf{h}_d \cdot \nabla r_d \right) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.144)$$

donde

$$\mathbf{r}_m = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \nabla p - \mathbf{f} \quad (2.145)$$

$$r_d = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.146)$$

y  $\mathbf{h}_{m_i}$ ,  $\mathbf{h}_d$ , son los vectores de longitudes características asociados al problema.

Una obtención detallada de las ecuaciones (3.1)-(3.4) puede encontrarse en el apéndice J, para el caso bidimensional.

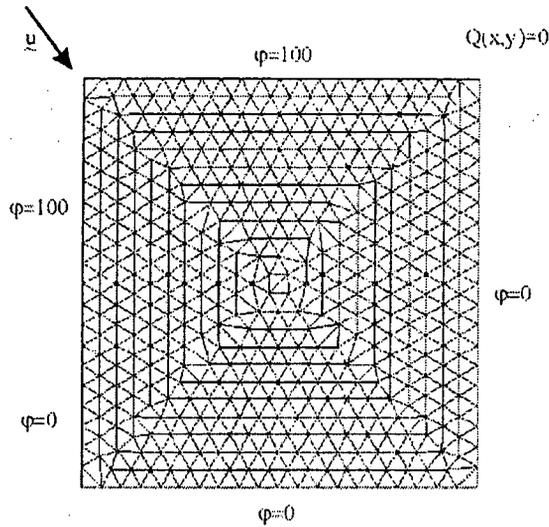
Estas ecuaciones serán usadas como base para el desarrollo del método de resolución del problema de mecánica de fluidos. Este aspecto será considerado en el siguiente capítulo.

## 2.7 Ejemplos

A continuación se presentan varios ejemplos de aplicación del método de estabilización *CF*. Los problemas elegidos en este caso son tests clásicos de la resolución del problema de convección difusión, para números de Péclet ( $\gamma$ ) elevados, por lo que pueden considerarse similares a la resolución de la ecuación de convección pura.

Los problemas de aplicación práctica del método a las ecuaciones del flujo fluido y la superficie libre se presentarán en los siguientes capítulos.

Aquí se presentan ejemplos de resolución del sistema (2.70) basados en el método (2.106).



**Figura 2.7:** Ejemplo 1. Problema bidimensional de convección-difusión con condiciones de contorno tipo Dirichlet no uniformes. La malla utilizada para el cálculo es no estructurada y tiene 812 triángulos lineales.

### 2.7.1 Ejemplo 1

El primer ejemplo que se presenta corresponde a la resolución del problema de convección-difusión (2.70) en un dominio cuadrado de lado unidad definido por  $\Omega := \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[ \times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$ , y con,

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos[\text{atan}(2)] \\ -\sin[\text{atan}(2)] \end{bmatrix}, Q(x, y) = 0$$

Las condiciones de contorno del problema están dadas por,

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 100 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin \Gamma_1 \end{cases}$$

$$\Gamma_1 := \left\{ \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \times \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \cup \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[ \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

El problema se resuelve por medio de una malla de elementos finitos formada por 812 triángulos lineales. Un esquema del problema puede verse en la figura 2.7.

En la parte izquierda de la figura 2.8 se muestra la solución obtenida utilizando el método típico de Galerkin. Como se aprecia, la solución es completamente inestable, apareciendo oscilaciones en todo el dominio de análisis.

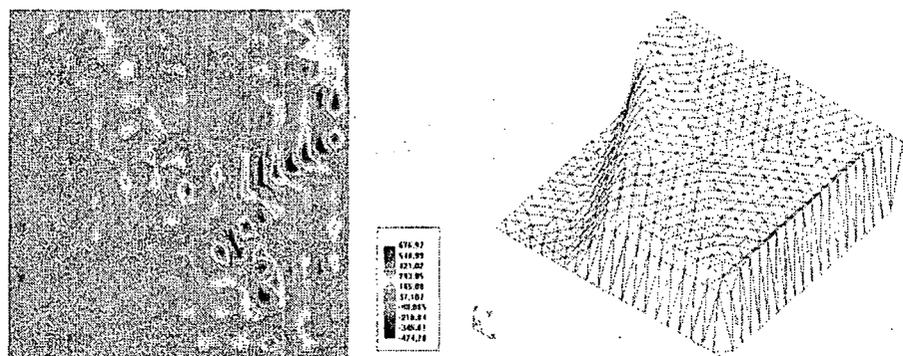


Figura 2.8: Resultado de contornos de  $\varphi$  obtenidos aplicando el método clásico de Galerkin al ejemplo 2 (izquierda). A la derecha puede verse la solución del mismo problema aplicando el método *CF*.

Esta solución se puede comparar con la obtenida utilizando la metodología *CF* (ver parte derecha de la figura 2.8). Puede verse que la solución es casi óptima en este caso, apareciendo sólo pequeños restos de inestabilidad en zonas muy localizadas. También puede compararse esta solución con la obtenida aplicando técnicas tipo *SUPG* (ver figura 2.9). Como puede apreciarse, la utilización de método *SUPG* en este caso, resulta en una solución con importantes restos de inestabilidad cerca de las zonas con gradientes altos de  $\varphi$ .

### 2.7.2 Ejemplo 2

A continuación presentamos un ejemplo extensión del problema unidimensional (2.47) al caso bidimensional. El problema se resuelve en este caso en un dominio cuadrado de lado unidad definido por  $\Omega := ]0, 1[ \times ]0, 1[$  y se utiliza para ello una malla estructurada de 800 elementos triangulares lineales. El resto de características está dado por,

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = 10^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, Q(x, y) = 0$$

Las condiciones de contorno del problema son:

$$\begin{array}{lll} \varphi(x, y) = 0 & \text{en} & x = 0, y = 0 \\ \varphi(x, y) = 100 & \text{en} & x = 1 \\ q_n = 0 & \text{en} & y = 1 \end{array}$$

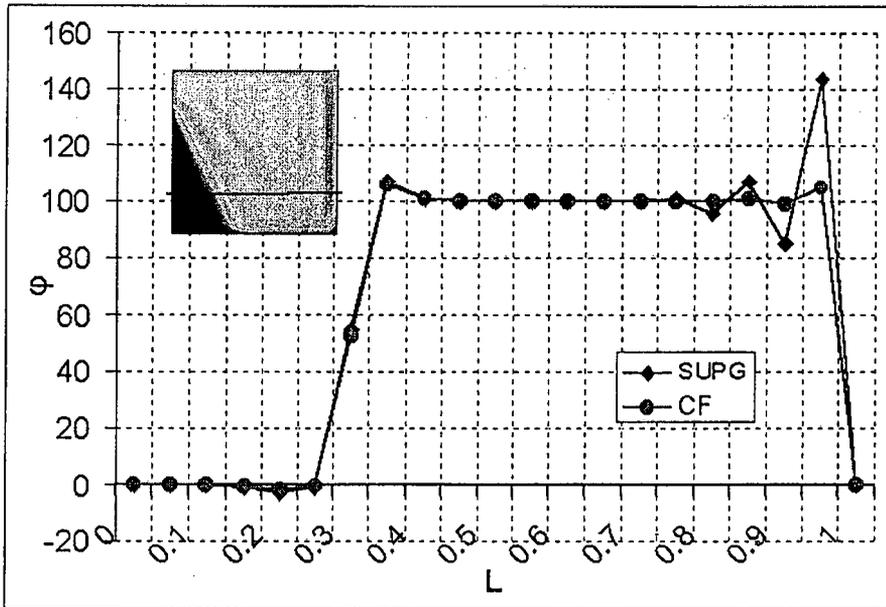


Figura 2.9: Comparación de los resultados obtenidos para el ejemplo 1 utilizando la metodología *CF* y *SUPG*.

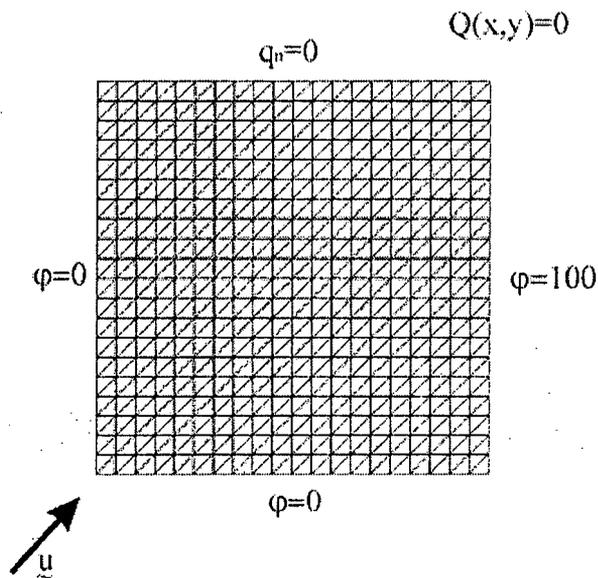


Figura 2.10: Ejemplo 2. Problema bidimensional de convección difusión con condiciones de contorno tipo Dirichlet y Neumann. La malla utilizada para el cálculo es estructurada y tiene 800 triángulos lineales.

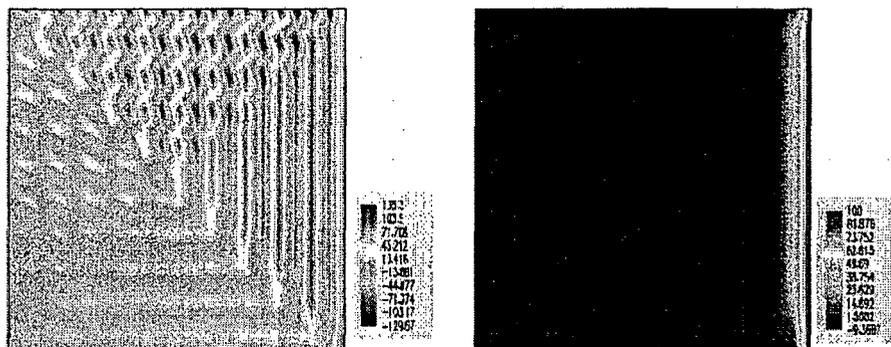


Figura 2.11: Resultado de contornos de  $\varphi$  obtenidos aplicando al ejemplo 2, el método clásico de Galerkin (izquierda) y el método *CF* (derecha).

Un esquema del problema planteado puede verse en la figura 2.10.

En la parte izquierda de la figura 2.11 se muestra la solución obtenida utilizando el método típico de Galerkin. Como se aprecia, la solución es completamente inestable, apareciendo oscilaciones en todo el dominio de análisis. Esta solución se puede comparar con la obtenida utilizando la metodología *CF* (ver parte derecha de la figura 2.11). Puede observarse que la solución es casi óptima en este caso, apareciendo sólo pequeños restos de inestabilidad en zonas muy localizadas, que coinciden con cambios bruscos de las condiciones de contorno. También puede compararse esta solución con la obtenida aplicando técnicas tipo *SUPG* (ver figura 2.12). Como puede apreciarse, la utilización de método *SUPG* en este caso, al igual que antes, resulta en una solución con importantes restos de inestabilidad cerca del contorno.

### 2.7.3 Ejemplo 3

El último ejemplo que se presenta corresponde a la resolución del problema de convección difusión (2.70) en un dominio cuadrado de lado unidad con,

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = 10^{-2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, Q(x, y) = 5$$

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 100 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin \Gamma_1 \end{cases}$$

$$\Gamma_1 := \left\{ \left\{ -\frac{1}{2} \right\} x \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \cup \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] x \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

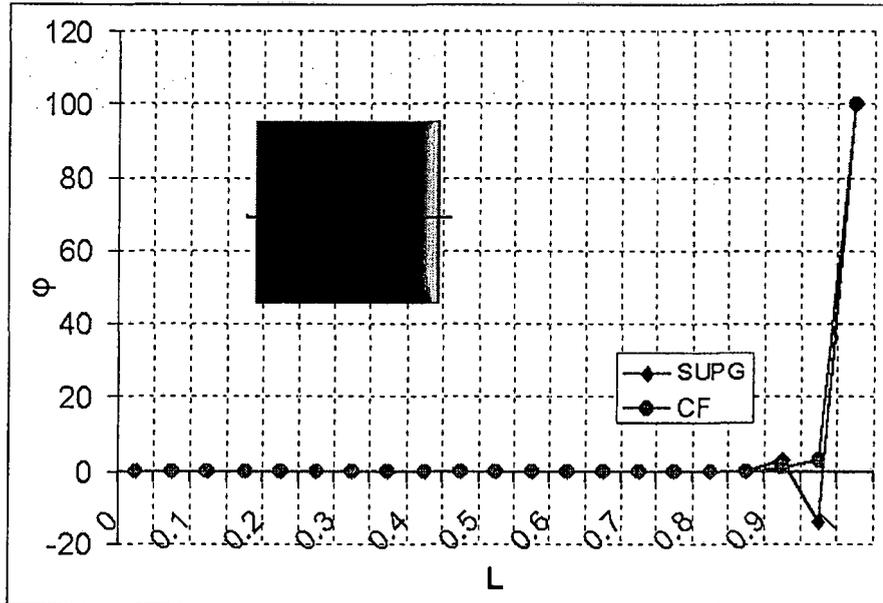


Figura 2.12: Comparación de los resultados obtenidos para el ejemplo 2 utilizando la metodología *CF* y *SUPG*.

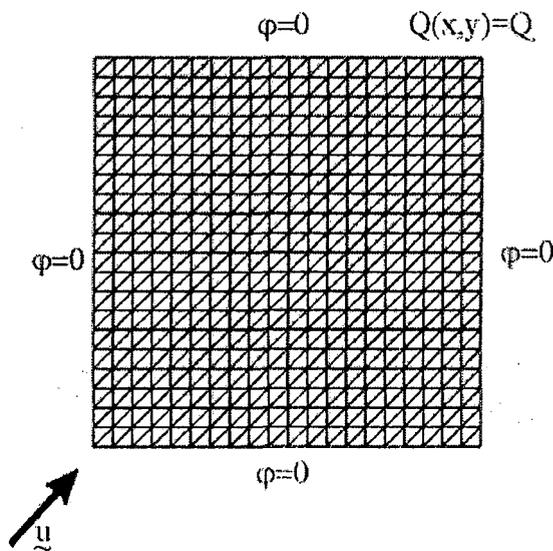


Figura 2.13: Ejemplo 3. Problema bidimensional de convección difusión no homogéneo con condiciones de contorno tipo Dirichlet. La malla utilizada para el cálculo es estructurada y tiene 800 triángulos lineales.

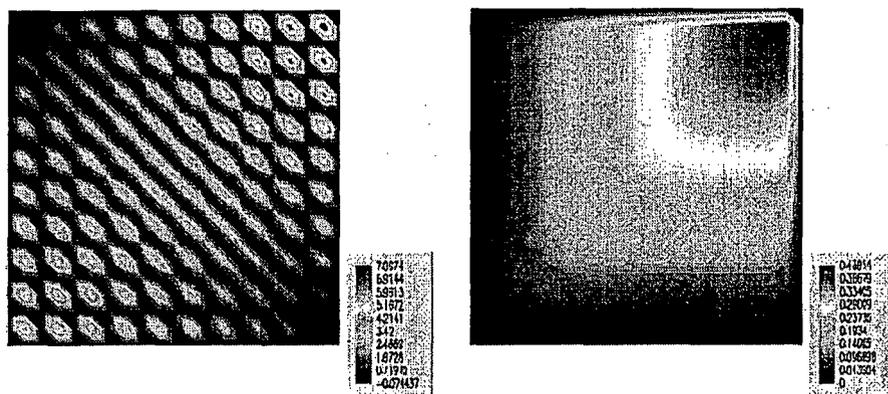


Figura 2.14: Resultado de contornos de  $\varphi$  obtenidos aplicando al ejemplo 3, el método clásico de Galerkin (izquierda) y el método  $CF$  (derecha).

En los contornos se impone la condición tipo Dirichlet  $\varphi = 0$  (sobre todo el contorno). El dominio se discretiza con una malla estructurada de elementos formada por 800 triángulos lineales. El problema está representado en la figura 2.13.

En la parte izquierda de la figura 2.14 se muestra la solución obtenida utilizando el método típico de Galerkin. Como se aprecia, la solución es completamente inestable, apareciendo oscilaciones en todo el dominio de análisis. Esta solución se puede comparar con la obtenida utilizando la metodología  $CF$  (a la derecha de la figura 2.14). La solución es óptima en este caso, no observándose restos de inestabilidad. Esta característica puede también observarse en la gráfica 2.15 donde se muestra la variación de la solución en un corte diagonal del dominio.

## 2.8 Conclusiones

En este capítulo hemos abordado el problema de estabilidad que presenta la ecuación cinemática de superficie libre para su resolución mediante los métodos clásicos de integración de ecuaciones diferenciales. Esto ha llevado a la necesidad de hacer un análisis profundo de los problemas numéricos que subyacen a la inestabilidad.

Posteriormente se ha presentado una metodología basada en un análisis finito del problema de balance (de ahí su nombre, *cálculo finitesimal*), que permite conseguir una nueva forma consistente de las ecuaciones diferenciales originales. Esta algorítmica tiene unas propiedades de consistencia, estabilidad y exactitud que la hacen especialmente adecuada para la resolución de

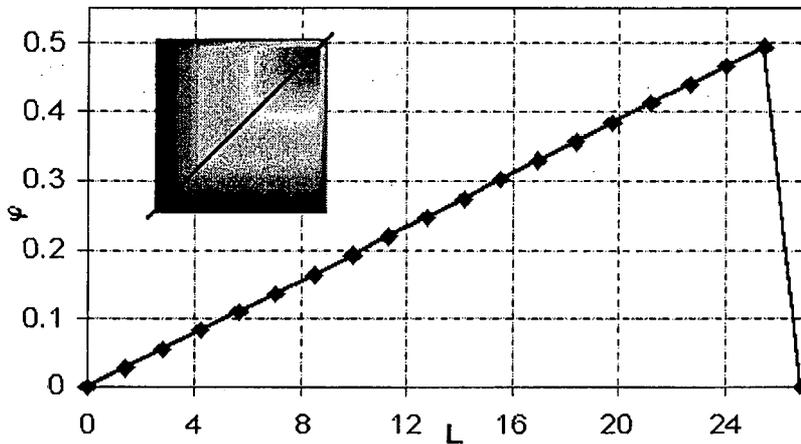


Figura 2.15: Gráfica de la solución del ejemplo 3 en un corte diagonal del dominio.

este tipo de problemas y puede ser usada para la derivación de esquemas discretos estabilizados de aplicación, no sólo en el método de los elementos finitos, sino también en otros como diferencias finitas o puntos finitos.

El método es de aplicación general y es especialmente adecuado para su uso en mallas no estructuradas.

También se ha discutido la manera de calcular los parámetros de estabilización. La necesidad de evitar el alto coste computacional de los métodos iterativos desarrollados para la determinación de sus valores óptimos ha hecho necesario definir unos criterios básicos para su elección. Estos criterios están basados en un estudio de estabilidad del método. Por último se ha dado forma a estos parámetros, basándonos en estudios teóricos y experimentos numéricos.

Una vez discutido el método de estabilización se ha aplicado a la resolución de la ecuación cinemática de superficie libre y se ha comparado con otras metodologías existentes en el campo de la hidrodinámica naval.

Por último se ha presentado una extensión del método para su aplicación en problemas de balance genéricos, y en concreto para las ecuaciones de Navier Stokes.